

Combinadores

Base SK

Prof. Edson Alves

Campus UnB Gama: Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia

Base SK

Base SK



Estorninho (*starling*)

Base SK



Estorninho (*starling*)



Cernícalo americano (*kestrel*)

Combinador *I*

Combinador I

- ★ Das definições de I e K , segue que

$$Ix = x = Kxy$$

Combinador I

- ★ Das definições de I e K , segue que

$$Ix = x = Kxy$$

- ★ Como y é arbitrário, ele pode ser substituído por Kx :

$$Ix = Kx(Kx)$$

Combinador I

- ★ Das definições de I e K , segue que

$$Ix = x = Kxy$$

- ★ Como y é arbitrário, ele pode ser substituído por Kx :

$$Ix = Kx(Kx)$$

- ★ Da definição de S , temos que

$$I = SKK$$

Combinador I

- ★ Das definições de I e K , segue que

$$Ix = x = Kxy$$

- ★ Como y é arbitrário, ele pode ser substituído por Kx :

$$Ix = Kx(Kx)$$

- ★ Da definição de S , temos que

$$I = SKK$$

- ★ Note que o segundo K pode ser substituído por uma função arbitrária

Combinador I

- ★ Das definições de I e K , segue que

$$Ix = x = Kxy$$

- ★ Como y é arbitrário, ele pode ser substituído por Kx :

$$Ix = Kx(Kx)$$

- ★ Da definição de S , temos que

$$I = SKK$$

- ★ Note que o segundo K pode ser substituído por uma

função arbitrária



Albatroz de cauda curta (*'idiot bird'*)

Combinador *B*

Combinador *B*



Tordo-azul-oriental (*bluebird*)

Combinador *B*



★ Representado por Schönfinkel pela letra *Z*

Tordo-azul-oriental (*bluebird*)

Combinador B



Tordo-azul-oriental (*bluebird*)

- ★ Representado por Schönfinkel pela letra Z
- ★ Pela definição,

$$Bfgx = f(gx)$$

Combinador B



Tordo-azul-oriental (*bluebird*)

★ Representado por Schönfinkel pela letra Z

★ Pela definição,

$$Bfgx = f(gx)$$

★ Observe que

$$f(gx) = (Kfx)(gx) = S(Kf)gx = (KSf)(Kf)gx$$

Combinador B



Tordo-azul-oriental (*bluebird*)

★ Representado por Schönfinkel pela letra Z

★ Pela definição,

$$Bfgx = f(gx)$$

★ Observe que

$$f(gx) = (Kfx)(gx) = S(Kf)gx = (KSf)(Kf)gx$$

★ Uma nova fusão em f nos leva a

$$f(gx) = S(KS)Kfgx$$

Combinador B



Tordo-azul-oriental (*bluebird*)

★ Representado por Schönfinkel pela letra Z

★ Pela definição,

$$Bfgx = f(gx)$$

★ Observe que

$$f(gx) = (Kfx)(gx) = S(Kf)gx = (KSf)(Kf)gx$$

★ Uma nova fusão em f nos leva a

$$f(gx) = S(KS)Kfgx$$

★ Portanto, $B = S(KS)K$

Combinador C

Combinador C

- ★ Corresponde ao combinador T de Schönfinkel



Cardeal-do-norte (*cardinal*)

Combinador C

- ★ Corresponde ao combinador T de Schönfinkel
- ★ Vale a seguinte sequência de transformações:

$$\begin{aligned} fxy &= fx(Kyx) = (fx)(Kyx) = Sf(Ky)x \\ &= (Sf)(Ky)x = B(Sf)Kyx \\ &= BBSfKyx = (BBSf)Kyx \\ &= (BBSf)(KKf)yx = S(BBS)(KK)fyx \end{aligned}$$



Cardeal-do-norte (*cardinal*)

Combinador C

- ★ Corresponde ao combinador T de Schönfinkel
- ★ Vale a seguinte sequência de transformações:

$$\begin{aligned} fxy &= fx(Kyx) = (fx)(Kyx) = Sf(Ky)x \\ &= (Sf)(Ky)x = B(Sf)Kyx \\ &= BBSfKyx = (BBSf)Kyx \\ &= (BBSf)(KKf)yx = S(BBS)(KK)fyx \end{aligned}$$

- ★ Portanto, $C = S(BBS)(KK)$



Cardeal-do-norte (*cardinal*)

Função de incompatibilidade U

Funções de incompatibilidade

O conectivo fundamental de Schönfinkel

$$fx \mid^x gx,$$

depende de duas funções proposicionais de um argumento f e g , logo tem forma $U(f, g)$. Assim, usando a transformação de funções de múltiplos argumentos,

$$Ufg = fx \mid^x gx,$$

é a equação que define a função de incompatibilidade U .

Principais resultados do artigo

Principais resultados do artigo

- ★ Schönfinkel afirma que qualquer fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos das funções particulares I, C, T, Z, S e U .

Principais resultados do artigo

- ★ Schönfinkel afirma que qualquer fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos das funções particulares I, C, T, Z, S e U .
- ★ Dadas as reduções já apresentadas, de fato qualquer fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos C, S e U .

Principais resultados do artigo

- ★ Schönfinkel afirma que qualquer fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos das funções particulares I, C, T, Z, S e U .
- ★ Dadas as reduções já apresentadas, de fato qualquer fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos C, S e U .
- ★ Schönfinkel enuncia, mas não prova, este resultado. Ele dá apenas exemplos destas representações.

Principais resultados do artigo

- ★ Schönfinkel afirma que qualquer fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos das funções particulares I, C, T, Z, S e U .
- ★ Dadas as reduções já apresentadas, de fato qualquer fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos C, S e U .
- ★ Schönfinkel enuncia, mas não prova, este resultado. Ele dá apenas exemplos destas representações.
- ★ Ele esteve muito próximo de um resultado fundamental, mas não enunciou: “Qualquer combinador pode ser expresso em termos de S e K apenas (base SK)”.

Principais resultados do artigo

Principais resultados do artigo

- ★ Na última seção, Schönfinkel introduz a função J , definida pelas igualdades

$$JC = U, \quad JS = C, \quad \text{e} \quad Jx = S,$$

onde x é qualquer termo diferente de C e S .

Principais resultados do artigo

- * Na última seção, Schönfinkel introduz a função J , definida pelas igualdades

$$JC = U, \quad JS = C, \quad \text{e} \quad Jx = S,$$

onde x é qualquer termo diferente de C e S .

- * Ele argumenta que J é diferente de C e S , pois tem apenas 3 valores, enquanto que C e S têm infinitos.

Principais resultados do artigo

- ★ Na última seção, Schönfinkel introduz a função J , definida pelas igualdades

$$JC = U, \quad JS = C, \quad \text{e} \quad Jx = S,$$

onde x é qualquer termo diferente de C e S .

★ Ele argumenta que J é diferente de C e S , pois tem apenas 3 valores, enquanto que C e S têm infinitos.

- ★ Daí ele apresenta as seguintes reduções:

$$JJ = S, \quad J(JJ) = JS = C \quad \text{e} \quad J[J(JJ)] = JC = U$$

Principais resultados do artigo

- * Na última seção, Schönfinkel introduz a função J , definida pelas igualdades

$$JC = U, \quad JS = C, \quad \text{e} \quad Jx = S,$$

onde x é qualquer termo diferente de C e S .

- * Ele argumenta que J é diferente de C e S , pois tem apenas 3 valores, enquanto que C e S têm infinitos.

- * Daí ele apresenta as seguintes reduções:

$$JJ = S, \quad J(JJ) = JS = C \quad \text{e} \quad J[J(JJ)] = JC = U$$

- * Portanto, qualquer forma lógica pode ser expressão apenas por J e parêntesis.

Combinadores

Definição de combinador

Sejam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ termos sem quaisquer restrições. Um combinador \mathcal{C} é uma função destas variáveis tal que seu valor depende única e exclusivamente de aplicação destes termos e de combinadores previamente definidos.

Cálculo *SK*

Cálculo *SK*

- ★ É um sistema computacional minimalista

Cálculo *SK*

- ★ É um sistema computacional minimalista
- ★ Todos os objetos são funções unárias

Cálculo *SK*

- ★ É um sistema computacional minimalista
- ★ Todos os objetos são funções unárias
- ★ Há apenas duas primitivas: *S* e *K*

Cálculo *SK*

- ★ É um sistema computacional minimalista
- ★ Todos os objetos são funções unárias
- ★ Há apenas duas primitivas: *S* e *K*
- ★ Os parêntesis, que completam a sintaxe, são usados apenas para alterar a ordem de avaliação das expressões

Cálculo *SK*

- ★ É um sistema computacional minimalista
- ★ Todos os objetos são funções unárias
- ★ Há apenas duas primitivas: *S* e *K*
- ★ Os parêntesis, que completam a sintaxe, são usados apenas para alterar a ordem de avaliação das expressões
- ★ A avaliação é feita da esquerda para a direita (formalmente, redução beta)

Redução beta

Redução beta

- ★ Inicia aplicando a subexpressão mais à esquerda, se houverem argumentos suficiente

Redução beta

- ★ Inicia aplicando a subexpressão mais à esquerda, se houverem argumentos suficiente
- ★ Subexpressões à direita não são avaliadas (*lazy evaluation*)

Redução beta

- ★ Inicia aplicando a subexpressão mais à esquerda, se houverem argumentos suficiente
- ★ Subexpressões à direita não são avaliadas (*lazy evaluation*)
- ★ Isto ocorre para evitar que termos que seriam descartados não se expandam infinitamente ou que não terminem

Redução beta

- ★ Inicia aplicando a subexpressão mais à esquerda, se houverem argumentos suficiente
- ★ Subexpressões à direita não são avaliadas (*lazy evaluation*)
- ★ Isto ocorre para evitar que termos que seriam descartados não se expandam infinitamente ou que não terminem
- ★ Por exemplo, a redução beta de $SII(SII)$ não termina, mas

$$KS(SII(SII)) = S$$

Combinador M

Combinador *M*



Tordo-imitador (*mockingbird*)

Combinador M

- ★ Por definição, $Mx = xx$



Tordo-imitador (*mockingbird*)

Combinador M

★ Por definição, $Mx = xx$

★ Observe que:

$$Ma = aa = Ia(Ia) = SIIa$$



Tordo-imitador (*mockingbird*)

Combinador M

★ Por definição, $Mx = xx$

★ Observe que:

$$Ma = aa = Ia(Ia) = SIIa$$

★ Portanto, $M = SII$



Tordo-imitador (*mockingbird*)

Combinador M

★ Por definição, $Mx = xx$

★ Observe que:

$$Ma = aa = Ia(Ia) = SIIa$$

★ Portanto, $M = SII$

★ A redução beta de MM não termina



Tordo-imitador (*mockingbird*)

To Mock a Mockingbird

To Mock a Mockingbird

Definições:

To Mock a Mockingbird

Definições:

- ★ As letras maiúsculas (A, B, \dots) são pássaros

To Mock a Mockingbird

Definições:

- ★ As letras maiúsculas (A, B, \dots) são pássaros

- ★ Quando o pássaro A ouve o nome do pássaro B , ele responde o nome do pássaro AB

To Mock a Mockingbird

Definições:

- ★ As letras maiúsculas (A, B, \dots) são pássaros
- ★ Quando o pássaro A ouve o nome do pássaro B , ele responde o nome do pássaro AB
- ★ Em geral, $AB \neq BA$

To Mock a Mockingbird

Definições:

- ★ As letras maiúsculas (A, B, \dots) são pássaros
- ★ Quando o pássaro A ouve o nome do pássaro B , ele responde o nome do pássaro AB
- ★ Em geral, $AB \neq BA$
- ★ Para três pássaros quaisquer A, B, C , temos que $(AB)C$ e $A(BC)$ não são, necessariamente, iguais

The Significance of the Mockingbird

The Significance of the Mockinbird

- ★ Se, ao ouvir o nome do pássaro B , A responde B , dizemos que A gosta de B

The Significance of the Mockinbird

- ★ Se, ao ouvir o nome do pássaro B , A responde B , dizemos que A gosta de B
- ★ Em notação simbólica, A gosta de B se $AB = B$

The Significance of the Mockinbird

- ★ Se, ao ouvir o nome do pássaro B , A responde B , dizemos que A gosta de B
- ★ Em notação simbólica, A gosta de B se $AB = B$
- ★ Assuma que, na floresta, para quaisquer dois pássaros A e B existe um pássaro C tal que, para qualquer pássaro x , $Cx = A(Bx)$

The Significance of the Mockinbird

- ★ Se, ao ouvir o nome do pássaro B , A responde B , dizemos que A gosta de B
- ★ Em notação simbólica, A gosta de B se $AB = B$
- ★ Assuma que, na floresta, para quaisquer dois pássaros A e B existe um pássaro C tal que, para qualquer pássaro x , $Cx = A(Bx)$
- ★ Assuma também que o tordo-imitador M mora na floresta

The Significance of the Mockinbird

- ★ Se, ao ouvir o nome do pássaro B , A responde B , dizemos que A gosta de B
- ★ Em notação simbólica, A gosta de B se $AB = B$
- ★ Assuma que, na floresta, para quaisquer dois pássaros A e B existe um pássaro C tal que, para qualquer pássaro x , $Cx = A(Bx)$
- ★ Assuma também que o tordo-imitador M mora na floresta
- ★ Há dois rumores na floresta: (a) que todo pássaro da floresta gosta de alguém; e (b) que existe ao menos um pássaro que não gosta de ninguém

The Significance of the Mockinbird

- ★ Se, ao ouvir o nome do pássaro B , A responde B , dizemos que A gosta de B
- ★ Em notação simbólica, A gosta de B se $AB = B$
- ★ Assuma que, na floresta, para quaisquer dois pássaros A e B existe um pássaro C tal que, para qualquer pássaro x , $Cx = A(Bx)$
- ★ Assuma também que o tordo-imitador M mora na floresta
- ★ Há dois rumores na floresta: (a) que todo pássaro da floresta gosta de alguém; e (b) que existe ao menos um pássaro que não gosta de ninguém
- ★ Qual dos dois rumores é verdadeiro?

Solução

Solução

* Seja C o pássaro que compõem A e M , isto é, $Cx = A(Mx)$ para qualquer pássaro x

Solução

- ★ Seja C o pássaro que compõem A e M , isto é, $Cx = A(Mx)$ para qualquer pássaro x
- ★ Quando C escuta seu próprio nome, qual é o pássaro que ele responde?

Solução

- ★ Seja C o pássaro que compõem A e M , isto é, $Cx = A(Mx)$ para qualquer pássaro x
- ★ Quando C escuta seu próprio nome, qual é o pássaro que ele responde?
- ★ Temos que $CC = A(MC)$, o que equivale a $A(MC) = CC$

Solução

- ★ Seja C o pássaro que compõem A e M , isto é, $Cx = A(Mx)$ para qualquer pássaro x
- ★ Quando C escuta seu próprio nome, qual é o pássaro que ele responde?
- ★ Temos que $CC = A(MC)$, o que equivale a $A(MC) = CC$
- ★ Quando ouve C , o tordo-imitador responde $MC = CC$

Solução

- ★ Seja C o pássaro que compõem A e M , isto é, $Cx = A(Mx)$ para qualquer pássaro x
- ★ Quando C escuta seu próprio nome, qual é o pássaro que ele responde?
- ★ Temos que $CC = A(MC)$, o que equivale a $A(MC) = CC$
- ★ Quando ouve C , o tordo-imitador responde $MC = CC$
- ★ Assim, quando ouve o nome do pássaro MC , o pássaro A responde

$$A(MC) = CC = MC$$

Solução

- ★ Seja C o pássaro que compõem A e M , isto é, $Cx = A(Mx)$ para qualquer pássaro x
- ★ Quando C escuta seu próprio nome, qual é o pássaro que ele responde?
- ★ Temos que $CC = A(MC)$, o que equivale a $A(MC) = CC$
- ★ Quando ouve C , o tordo-imitador responde $MC = CC$
- ★ Assim, quando ouve o nome do pássaro MC , o pássaro A responde

$$A(MC) = CC = MC$$

- ★ Portanto, o primeiro rumor é o verdadeiro

Referências

- ★ **USDA.** *Operational Activities: Starlings and Blackbirds.* Acesso em 07/04/2025.
- ★ **CornellLab.** *American Kestrel: Identification.* Acesso em 07/04/2025.
- ★ **HAYASHI, Tobias.** *The rare ‘idiot bird’.* Acesso em 07/04/2025.
- ★ **Wikipédia.** *Bluebird.* Acesso em 07/04/2025.
- ★ **Tucson Bird Alliance.** *Northern Cardinal.* Acesso em 08/04/2025.

Referências

- ★ **Wikipédia.** *Combinatory Logic*. Acesso em 08/04/2025.
- ★ **AMIKO**, Komi. *Large Numbers in the SKI combinador calculus*. Acesso em 10/04/2025.
- ★ **CornellLab.** *Northern Mockingbird*. Acesso em 11/04/2025.
- ★ **SMULLYAN**, Raymond M. *To Mock a Mockingbird and Other Logic Puzzles*. Oxford Press, 2000.