Tenemos que el polinimio que aproxima la función $P(x)$ viene dado por la forma

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + ... + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x) \tag{1}$$

Donde para cada $k = 0, 1....., n$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_{k-1})(x-x_{k+1}).....(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1).......(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})......(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \tag{2}$$

Problema 1:

Para las siguientes funciones construya analíticamente los polinomios interpolantes de Lagrange de grado 1 y 2, que aproximan la función en x = 0.45, usando los valores en los puntos $x_0 = 0,\ x_1 = 0.6\ y\ x_2 = 0.9$, y encuentre el error absoluto y relativo correspondiente.

Solución:

Queremos el polinomio de grado 1 y 2, por lo que tenemos que calcular los $L_{1,0}(x)\ y\ L_{1,1}(x)$ para el de grado 1 y los $L_{2,0}(x),\ L_{2,1}(x)\ y\ L_{2,2}(x)$.

Tenemos los valores dados $x_0 = 0,\ x_1 = 0.6\ y\ x_2 = 0.9$.Empecemos con la ecuación del inciso
a) $log(x+1)$. Calculamos primero los $L_{n,k}(x)$ para el polinomio de grado 1

$$L_{1,0}(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} = \frac{(x-0.6)}{0.6} \tag{3}$$

$$L_{1,1}(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = \frac{x}{0.6} \tag{4}$$

Así armamos el polinomio $P(x)$

$$P(x) = f(x_0)L_{1,0}(x) + f(x_1)L_{1,1}(x) \tag{5}$$

$$\boxed{P_1(x) = log(1)\frac{(x-0.6)}{0.6} + log(1.6)\frac{x}{0.6}} \tag{6}$$

Por otro lado

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.6)(x-0.9)}{(-0.6)(-0.9)} \tag{7}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x)(x-0.9)}{(0.6)(-0.3)} \tag{8}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x)(x-0.6)}{(0.9)(0.3)} \tag{9}$$

$$P_2(x) = f(x_0)L_{2,0}(x) + f(x_1)L_{2,1}(x) + f(x_2)L_{2,2}(x) \tag{10}$$

$$P_2(x) = log(1)\frac{(x-0.6)(x-0.9)}{(-0.6)(-0.9)} + log(1.6)\frac{(x)(x-0.9)}{(0.6)(-0.3)} + log(1.9)\frac{(x)(x-0.6)}{(0.9)(0.3)} \tag{11}$$

$$\boxed{P_2(x) = log(1)\frac{(x-0.6)(x-0.9)}{0.6*0.9} + log(1.6)\frac{x.\,(x-0.9)}{-0.6*0.3} + log(1.9)\frac{x.\,(x-0.6)}{0.9*0.3}} \tag{12}$$

Ahora veamos el inciso

b)$\sqrt{x+1}$ Para el polinomio de grado 1

$$L_{1,0}(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} = \frac{(x-0.6)}{0.6} \tag{13}$$

$$L_{1,1}(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = \frac{x}{0.6} \tag{14}$$

Así armamos el polinomio $P_1(x)$

$$P_1(x) = f(x_0)L_{1,0}(x) + f(x_1)L_{1,1}(x) \tag{15}$$

$$\boxed{P_1(x) = \sqrt{1}\frac{(x-0.6)}{0.6} + \sqrt{1.6}\frac{x}{0.6}} \tag{16}$$

Por otro lado armando $P_2(x)$

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.6)(x-0.9)}{(-0.6)(-0.9)}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x)(x-0.9)}{(0.6)(-0.3)} \tag{17}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x)(x-0.6)}{(0.9)(0.3)} \tag{18}$$

$$\Longrightarrow P_2(x) = f(x_0)L_{2,0}(x) + f(x_1)L_{2,1}(x) + f(x_2)L_{2,2}(x) \tag{19}$$

$$P_2(x) = \sqrt{1}\frac{(x-0.6)(x-0.9)}{(-0.6)(-0.9)} + \sqrt{1.6}.\,\frac{(x)(x-0.9)}{(0.6)(-0.3)} + \sqrt{1.9}\frac{(x)(x-0.6)}{(0.9)(0.3)} \tag{20}$$

$$\boxed{P_2(x) = \frac{(x-0.6)(x-0.9)}{0.6*0.9} + \sqrt{1.6}.\,\frac{x(x-0.9)}{-0.6*0.3} + \sqrt{1.9}\frac{x(x-0.6)}{0.9*0.3}} \tag{21}$$