Métodos Numéricos

Aula Virtual: http://www.famaf.proed.unc.edu.ar/course/view.php?id=451

Guía 2

Solución de ecuaciones de una variable

Abril de 2022

Problema 1: Desarrolle un programa para encontrar la raíz de una función f utilizando el método de la bisección, dando como datos de entrada el intervalo inicial $[a, b]$ y la tolerancia en x ε. f debe definirse como una función dentro del programa (usando CONTAINS), o en un módulo separado. La salida debe ser

- archivo con cinco columnas: N, p_N, $f(p_N)$, $|b-a|/2$ (error absoluto), y $|b-a|/|a+b|$ (error relativo), con 12 cifras significativas para los reales.
- la aproximación final p_N (en pantalla)
- el valor final de $f(p_N)$. (en pantalla)
- el número de iteraciones realizadas (en pantalla)

Utilice el programa para

a) encontrar la menor solución positiva de la ecuación $2x = \tan(x)$ con un error (relativo en x y absoluto en y) menor a 10^{-5}. Cuántos pasos son necesarios si se comienza con el intervalo $[0.8, 1.4]$?

b) encontrar una aproximación a $\sqrt{3}$ con un error (relativo en x y absoluto en y) menor a 10^{-5}. Note que $\sqrt{3}$ es la raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^2 - 3$.

Problema 2: Desarrolle un programa para encontrar la raíz de una función f utilizando el método de Newton (también conocido como Newton–Raphson) dando como datos de entrada una estimación inicial p_0, ε_x (la tolerancia en x), la tolerancia en y ε_y y el número máximo de iteraciones `MAX_ITE` que se permite antes de detener el algoritmo. El programa debe finalizar cuando se satisfaga una de las siguientes condiciones:

$$\left(\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon_x \qquad AND \qquad |f(p_n)| < \varepsilon_y \right) \qquad \text{O} \qquad \text{Número de iteraciones} = \texttt{MAX\_ITE}$$

El programa debe retornar (en pantalla) el número de iteraciones realizadas, el valor final de la aproximación p_n, el error relativo estimado en x y el error absoluto estimado en y ($|f(p_n)|$). f y f' deben ser funciones del programa. Además, en un archivo, debe escribir para cada iteración: n, p_n, el error relativo estimado en x y el error absoluto estimado en y, cada uno con 13 cifras significativas para las variables reales.

Utilice este programa para resolver los incisos a) y b) del problema 1. Compare la cantidad de evaluaciones de la función y su derivada en los dos métodos.

Problema 3: Grafique el error relativo y el error relativo estimado ($|p_k - p_{k-1}|/|p_k|$) de la aproximación k-ésima de $\sqrt{3}$ (pensada como raíz de la función $f(x) = x^2 - 3$) en función de k, empleando el método de bisección (use el intervalo inicial $[0., 2.5]$ y el de Newton–Raphson (use $p_0 = 2.5$). Escriba los programas en doble precisión, y fije una tolerancia de 10^{-10} como criterio de detención. Compare los resultados en un único gráfico en escala *log – log*. Cree un archivo *postscript color* con el gráfico. Recuerde de poner título, nombre a los ejes y leyendas para las distintas curvas.

Problema 4: Un objeto en caída vertical en el aire está sujeto a la fuerza de gravedad y a la resistencia del aire. Si un objeto de masa m es dejado caer desde una altura h_0, su altura luego de t segundos está dada por:

$$h(t) = h_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$

donde $g = 9.8\, m/s^2$ y k representa el coeficiente de resistencia del aire en kg/s. Suponga que $h_0 = 10m$, $m = 0.1\, kg$, y $k = 0.149\, kg/s$. Grafique $h(t)$ usando *gnuplot* para analizar su comportamiento. Encuentre, con una precisión de $0.01\, s$, el tiempo que le toma a este objeto llegar al suelo. Utilice el método de bisección y el de Newton–Raphson.

Problema 5: Resuelva numéricamente, utilizando el método de Newton-Raphson, el problema de encontrar la raíz que satisfaga $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Utilizando calculadora y siete cifras decimales calcule los primeros elementos de la secuencia, comenzando con $p_0 = 2.000000$. Pare cuando el error absoluto en el eje de las abcsisas, definido como $\epsilon_x = |p_n - p_{n-1}|$ sea menor a 10^{-5}. Escriba en un papel a mano una tabla que en cada fila tenga n, p_n, $f(p_n)$ y ϵ_x.

Problema 6: Escriba un programa para hallar la solución a la ecuación

$$x - \cos x = 0$$

en el intervalo $[0, \pi/2]$.

a) utilizando el método de la secante.

b) utilizando el método de *Regula Falsi*.

c) utilizando el método de bisección.

d) utilizando el método de Newton.

Graficar el error relativo en función del número de iteración para los cuatro casos, en escala doble logarítmica.

Ejercicios Complementarios

Problema 7: Adapte el programa de Newton–Raphson para calcular una aproximación a la raíz cúbica de un número R positivo. La entrada debe ser el número R, la aproximación inicial x_0 y el error máximo permitido ε.