

Problema 1: Encuentre, haciendo los cálculos a mano, las aproximaciones a las siguientes integrales definidas utilizando las fórmulas de trapecio, Simpson y punto medio (simples):

(a) $I_1 = \int_0^1 x^4 dx$

(b) $I_2 = \int_0^\pi \sin(x) dx$

Trabaje con siete cifras significativas. Calcule el error absoluto y el error relativo en cada caso y para cada método.

Se tiene las siguientes formulas para cada métodos:

i) Punto medio:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^N f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) \quad x_0 = a \quad x_N = b$$

ii) Trapecio:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \quad x_0 = a \quad x_1 = b \quad h = b - a$$

iii) Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(x_1) + f(b)] \quad x_1 = \frac{a+b}{2}$$

Luego, los errores vienen dados por

$$E_{\text{abs}} = |I_{\text{exac}} - I_i| \quad E_r = \frac{|I_i - I_{\text{exac}}|}{I_{\text{exac}}}$$

(a) - El valor de la integral exacta es $\int_0^1 x^4 dx = 0.2$

	Punto medio:	Trapecio:	Simpson:
$\int_0^1 x^4 dx$	$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 (1 - 0)$ $= 0.0625$	$= \frac{1}{2}(0 + 1)$ $= 0.5$	$= \frac{1}{6}\left(0 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1\right)$ $= 0.2083333$
Error absoluto	0.1375	0.3	0.008333
Error relativo	0.6875	1.5	0.041665

(b) - El valor de la integral exacta es $\int_0^\pi \sin(x) dx = 2$

Punto medio: Trapecio: Simpson:

$\int_0^\pi \sin(x) \, dx$	$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)(\pi - 0)$ $= 3.1415926$	$= \frac{\pi}{2}(0 + 0)$ $= 0$	$= \frac{\pi}{6}\left(0 + 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\right)$ $= 2.0943951$
Error absoluto	1.1415926	2	0.0943951
Error relativo	0.5707963	1	0.04719755