Problema 4:

Construya analíticamente el polinomio interpolante de Newton para las siguientes funciones. Dé una cota del error absoluto en el intervalo $[x_0, x_n]$.

a) $f(x) = exp(2x)\,cos(3x),\;\; x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.6, n = 2\,.$

b) $g(x) = ln(x),\;\; x_0 = 1, x_1 = 1.1, x_2 = 1.3, x_3 = 1.4, n = 3\,.$

Solución:

Queremos construir el polinomio interpolante de Newton para las funciones.Este viene dado en la forma

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} F_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \tag{1}$$

Donde $F_{i,i}$ son las diferencias divididas. Para el caso a) tenemos $n = 2$ y en b) $n = 3$, por lo que tenemos que calcular las primeras,segundas y terceras diferencias divididas.Estas tienen la siguiente forma

x $f(x)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias dividias	Terceras diferencias divididas
x_0 $f(x_0)$			
	$f[x_0,x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$		
x_1 $f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
	$f[x_1,x_2]=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2 $f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_0}$	
	$f[x_2,x_3]=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3 $f(x_3)$		$f[x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
	$f[x_3,x_4]=\dfrac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$		

Veamos entonces el caso de (a).Necesitamos calcular unicamente la primer y segunda diferencia dividida.Decimos

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{exp(2x_1)cos(3x_1)-exp(2x_0)cos(3x_0)}{0,3-0}=\frac{exp(2.0,3)cos(3.0,3)-exp(2.0)cos(3.0)}{0,3-0} \tag{2}$$

$$f[x_0,x_1]=\frac{exp(0,6)cos(0,9)-exp(0)cos(0)}{0,3}=\frac{1,1326.0,621-1}{0,3}=\frac{0,1336}{0,3}=0,442 \tag{3}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{exp(2x_2)\, cos(3x_2) - exp(2x_1)\, cos(3x_1)}{0,6 - 0,3} = \frac{exp(2.0,6)\, cos(3.0,6) - exp(2.0,3)\, cos(3.0,3)}{0,3} \tag{4}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{exp(0,12)\, cos(1,8) - exp(0,6)\, cos(0,9)}{0,3} = \frac{-0,754 - 1,1326}{0,3} = \frac{-1,886}{0,3} = -6,288 \tag{5}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-6,288 - 0,442}{0,6} = \frac{-6,730}{0,6} = -11,217 \tag{6}$$

Con estos coeficientes encontrados, usando la fórmula (1) estamos en condiciones de escribir el polinomio interpolante de Newton para el inciso (a).Este será

$$P(x) = F_{0,0} + F_{1,1}(x - x_0) + F_{2,2}(x - x_0)(x - x_1) \tag{7}$$

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \tag{8}$$

$$P(x) = 1 + 0.377(x - x_0) - 17.936(x - x_0)(x - x_1) \tag{9}$$

$$\boxed{P_a(x) = 1 + 0,442.x - 11,217.x.\,(x - 0.3)} \tag{10}$$

Ahora para el caso (b) tenemos $n = 3$. Veamos las diferencias divididas que necesitaremos

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} && (11) \\ &= \frac{ln(x_1) - ln(x_0)}{x_1 - x_0} && (12) \\ &= \frac{ln(1,1) - ln(1)}{0,1} && (13) \\ &= \frac{0.095}{0,1} && (14) \\ &= 0.953 && (15) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f[x_1, x_2] &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} && (16)\\
&= \frac{ln(x_2) - ln(x_1)}{x_2 - x_1} && (17)\\
&= \frac{ln(1,3) - ln(1,1)}{0,1} && (18)\\
&= \frac{0,262 - 0,095}{0,1} && (19)\\
&= \frac{0,262 - 0.095}{0,1} && (20)\\
&= \frac{0,167}{0,1} && (21)\\
&= 1.673 && (22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f[x_2, x_3] &= \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} && (23)\\
&= \frac{ln(x_3) - ln(x_2)}{x_3 - x_2} && (24)\\
&= \frac{ln(1,4) - ln(1,3)}{1,4 - 1,3} && (25)\\
&= \frac{0.336 - 0,262}{1,4 - 1,3} && (26)\\
&= \frac{0,074}{1,4 - 1,3} && (27)\\
&= \frac{0,074}{0,1} && (28)
\end{aligned}
$$

$$= 0.744 \tag{29}$$

Ahora buscamos las segundas diferencias divididas necesarias

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \tag{30}$$
$$= \frac{1.673 - 0.953}{0,3} \tag{31}$$
$$= 2,4 \tag{32}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \tag{33}$$
$$= \frac{0.744 - 1.673}{0,4} \tag{34}$$
$$= -2,322 \tag{35}$$

Y armamos la tercer diferencia dividida para completar

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \tag{36}$$
$$= \frac{-2,322 - 2,4}{0,4} \tag{37}$$
$$= -11,806 \tag{38}$$

Armamos así el polinomio

$$P(x) = F_{0,0} + F_{1,1}(x - x_0) + F_{2,2}(x - x_0)(x - x_1) + F_{3,3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \tag{39}$$

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \tag{40}$$

$$\boxed{P(x) = 0 \ + \ 0.953(x - x_0) \ + \ 2,4(x - x_0)(x - x_1) - 11,806(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} \tag{41}$$