

Problema 2: Repita el P01 dividiendo el intervalo de integración en dos subintervalos de igual tamaño:

$$(a) I_1 = \int_0^{0.5} x^4 dx + \int_{0.5}^1 x^4 dx$$

$$(b) I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x) dx$$

Trabaje con siete cifras significativas. Calcule el error absoluto y el error relativo en cada caso y compare con los resultados del P01.

Se tiene las siguientes formulas para cada métodos:

i) Punto medio:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) (x_i - x_{i-1}) \quad x_0 = a \quad x_N = b$$

ii) Trapecio:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \quad x_0 = a \quad x_1 = b \quad h = b - a$$

iii) Simpson:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(x_1) + f(b)] \quad x_1 = \frac{a+b}{2}$$

Luego, los errores vienen dados por

$$E_{\text{abs}} = |I_{\text{exac}} - I_i| \quad E_r = \frac{|I_i - I_{\text{exac}}|}{I_{\text{exac}}}$$

(a) - El valor de la integral exacta es $\int_0^1 x^4 dx = 0.2$

| | Punto medio: | Trapecio: | Simpson: |
|----------------|---|--|---|
| I_1 | $= \left(\frac{1}{4}\right)^4 (0.5) + \left(\frac{3}{4}\right)^4 (0.5)$ $= 0.1601562$ | $= \frac{1}{4}(0.5)^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^4} + 1\right)$ $= 0.28125$ | $= \frac{1}{12}\left(4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 + (0.5)^4\right) +$ $+ \frac{1}{12}\left((0.5)^4 + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + 1\right)$ $= 0.2005208$ |
| Error absoluto | 0.0398438 | 0.08125 | 0.0005208 |
| Error relativo | 0.199219 | 0.40625 | 0.002604 |

(b) - El valor de la integral exacta es $\int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2$

| | | | |
|----------------|--|---|--|
| | Punto medio: | Trapezio: | Simpson: |
| I_2 | $= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) +$ $+ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)$ $= 2.2214414$ | $= \frac{\pi}{4}(0 + 1) + \frac{\pi}{4}(1 + 0)$ $= 1.5707963$ | $= \frac{\pi}{12}\left(0 + 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1\right) +$ $+ \frac{\pi}{12}\left(1 + 4 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 0\right)$ $= 2.0045597$ |
| Error absoluto | 0.2214414 | 0.4292037 | 0.0045597 |
| Error relativo | 0.1107207 | 0.21460185 | 0.00227985 |

Para comparar con el problema 1, en la siguiente tabla se observan los resultado

| | x^4 | | $\sin(x)$ | |
|--------------|-------------|------------|-------------|------------|
| | Problemas 1 | Problema 2 | Problemas 1 | Problema 2 |
| Valor exacto | 0.2 | | 2 | |
| Punto Medio | 0.0625 | 0.1601562 | 3.1415926 | 2.2214414 |
| Error Abs. | 0.1375 | 0.0398438 | 1.1415926 | 0.2214414 |
| Trapezio | 0.5 | 0.28125 | 0 | 1.5707963 |
| Error Abs. | 0.3 | 0.08125 | 2 | 0.4292037 |
| Simpson | 0.2083333 | 0.2005208 | 2.0943951 | 2.0045597 |
| Error Abs. | 0.008333 | 0.002604 | 0.0943951 | 0.0045597 |