INFORMATICA MUSICALE

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI CATANIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
A.A. 2018/19
Prof. Filippo L.M. Milotta

ID PROGETTO: 27

TITOLO PROGETTO: Low Pass Filter & High Pass Filter

AUTORE 1: Ponzio Enrico

Indice

1. Obiettivi del progetto

L’obiettivo del progetto è creare i filtri Passa Basso e Passa alto partendo da un amplificatore di tipo general-purpose e da una rete di retroazione caratterizzata da resistori e capacitori. Sarà utilizzato il software MATLAB per elaborare e tracciare i risultati ottenuti.

Si parlerà pertanto di:

1) Amplificatore Operazionale
2) Trasformata di Laplace
3) Funzione di trasferimento
4) Retroazione negativa
5) Diagrammi di Bode
6) Filtro passa basso
7) Filtro passa alto

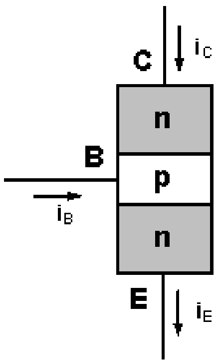
Premessa sull'amplificatore operazionale
A cosa serve? Cosa c'è dentro?

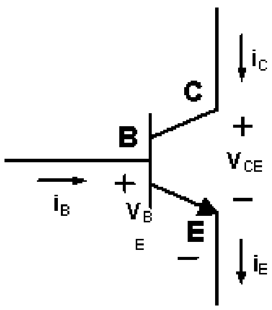
Da un punto di vista concettuale la più semplice elaborazione di un segnale consiste nella sua amplificazione. La necessità di amplificare un segnale deriva dal fatto che i trasduttori forniscono segnali "deboli" cioè dell'ordine dei microvolt e con poca energia. Tali segnali sono troppo piccoli per un'elaborazione affidabile pertanto si ricorre ad un blocco funzionale che prende il nome di Amplificatore Operazionale. Intorno alla metà degli anni '60 fu prodotto il primo amplificatore operazionale su circuito integrato (CI). Il blocco era costituito da numerosi transistori e resistori tutti nel medesimo chip di silicio.

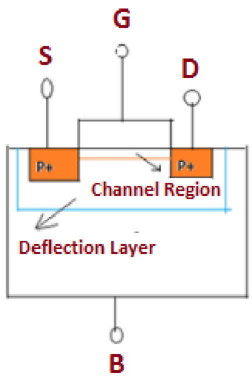
I transistor sono paragonabili, per antonomasia, alle cellule dei corpo umano: essi sono dispositivi attivi cioè che erogano potenza costruiti su semiconduttore attraverso i quali avviene il passaggio di segnali.

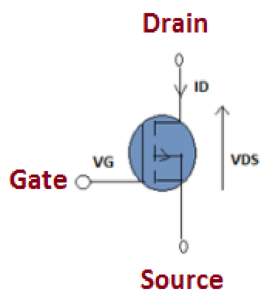
Il transistore bipolare a giunzione (BJT) è un dispositivo a tre terminali, cioè collettore, base e emettitore, ottenuto mediante due giunzioni di silicio diversamente drogate. Esso fu inventato nel 1948 presso i Bell Telephone Laboratories. Esso sfrutta sia cariche positive e negative per creare corrente.

Il Mosfet, acronimo di "Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor", si differenzia dal BJT perchè utilizza solo un tipo di carica (l'elettrone) per creare corrente: è un transistor ad effetto di campo cioè sfrutta l'intensità di un campo elettrico che si crea al suo interno per regolare il passaggio di elettroni liberi all'interno di una zona del dispositivo che prende il nome di regione di canale. Il dispositivo è a 4 terminali: la conduzione avviene tra Drain e Source, il terminale di Bulk è tipicamente connesso a massa oppure al potenziale minore, il terminale di Gate è utilizzato per la polarizzazione del dispositivo.









Concetti utili

Trasformata di Laplace

Si definisce Trasformata di Laplace *F(s)*

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}$$

dove *f*(*t*) è una funzione reale a variabile reale ed *s* è un numero complesso. Attraverso tabelle si ricavano facilmente le trasformate di Laplace di funzioni spesso utilizzate in elettronica. Per definire la funzione di trasferimento è importante sapere che la Trasformata di Laplace dell'impulso è 1. Con la Trasformata di Laplace si analizza un qualunque sistema lineare dinamico nel dominio della frequenza.

Funzioni	*Trasformate*
1	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{1}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{b-a}\left(be^{-bt}-ae^{-at}\right)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\sin at$	$\frac{a}{a^2+s^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{a^2+s^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$t\sin at$	$\frac{2as}{(a^2+s^2)^2}$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(a^2+s^2)^2}$
$\sin at - at\cos at$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$
$t\sinh at$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$
$t\cosh at$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$
$at\cosh at - \sinh at$	$\frac{2a^3}{(s^2-a^2)^2}$

Funzioni	*Trasformate*
$e^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
$e^{-bt}\cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$
$\sin at\cosh at - \cos at\sinh at$	$\frac{4a^3}{s^4+4a^4}$
$\sin at\sinh at$	$\frac{2a^2 s}{s^4+4a^4}$
$\sinh at - \sin at$	$\frac{2a^3}{s^4-a^4}$
$\cosh at - \cos at$	$\frac{2a^2 s}{s^4-a^4}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$\delta'(t)$	s
$\delta(t)$	se^{-as}
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n>0)$	$\frac{1}{s^n}$
$t^n \quad (n>-1)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!} \quad (n>0)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\frac{(n-1)-at}{(n-1)!}t^{n-2}e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^n}$

Funzione di Trasferimento

La funzione di trasferimento è il rapporto tra l'uscita e l'ingresso di un qualsiasi sistema lineare dinamico. In teoria dei sistemi, un sistema dinamico è un modello matematico che rappresenta un oggetto, chiamato sistema, che evolve nel tempo secondo una legge deterministica. Si dice lineare perché soddisfa il principio di sovrapposizione degli effetti secondo cui l'effetto di una somma di perturbazioni in ingresso è uguale alla somma degli effetti prodotti da ogni singola perturbazione.

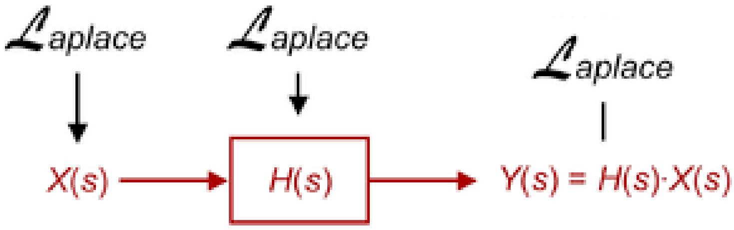
Sistema discreto: ha in ingresso un segnale che nel dominio del tempo non assume valori continui ma campionati. La fedeltà e la ricostruzione dei campioni è regolata dal teorema del campionamento, studiato a lezione.

Sistema continuo: l'uscita y(t) per un segnale in ingresso x(t) è data dall'integrale di convoluzione

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\cdot h(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

Nel nostro caso la “scatoletta chiusa” in figura sarà l’amplificatore operazionale in configurazione invertente. Da un punto di vista puramente pratico la funzione di trasferimento non è altro che la carta d’identità del mio amplificatore, ci dice come agisce a fronte di un segnale in ingresso.

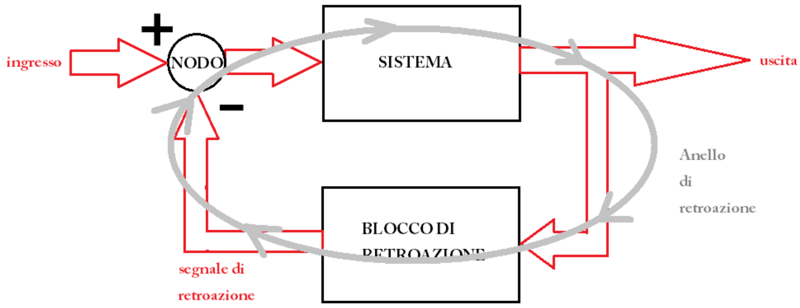
Essa si definisce come la Trasformata di Laplace della risposta, cioè dell’uscita Y(s), del sistema a seguito di un impulso δ(t) messo come ingresso.



Pertanto si avrà che X(s)=1 quindi Y(s)=H(s).

Retroazione negativa

In Teoria dei controlli la retroazione è un feedback che si utilizza per far si che l’uscita di un sistema assuma un comportamento desiderato. La retroazione può essere positiva o negativa. In generale si parla di retroazione negativa (*negative feedback*) quando in un sistema il segnale di uscita agisce all'indietro (retroagisce) sottraendosi parzialmente al segnale di ingresso e contrastando gli effetti di quest'ultimo. In un sistema con retroazione negativa la situazione può essere schematizzata così:



Essa è caratterizzata dalla presenza di un anello (*feedback closed loop*), cioè di un percorso circolare chiuso che dall'ingresso va all'uscita e quindi torna verso l'ingresso.

Esempi di retroazione

Sudorazione

Un esempio naturale di retroazione è la sudorazione: quando la temperatura ambientale aumenta, aumenta anche la temperatura del corpo e quindi si produce sudore; tuttavia il sudore, evaporando, fa abbassare la temperatura corporea. Dunque l’aumento della temperatura ambientale provoca perciò una contro-azione da parte del sistema che contrasta tale aumento.

La boa di Archimede (fonte Wikipedia)

Prendiamo in considerazione il caso del galleggiamento di un gavitello: se la boa tende ad affondare, la forza di Archimede aumenta e tende a farla risalire; invece se tende a risalire, la forza di Archimede diminuisce e quindi la boa ridiscende. L'intero sistema si porta alla stabilità, cioè la boa galleggia ad una ben determinata altezza. Se un disturbo influenza il sistema costituito dalla boa (per esempio le onde), il sistema reagisce oscillando ma mantiene comunque la stabilità.

Lo sciacquone del water (fonte “Appunti di Controlli automatici”)

L'aumento del livello del liquido nella vasca provoca il sollevamento del galleggiante, il quale a sua volta agisce su una valvola chiudendo l'afflusso di acqua.

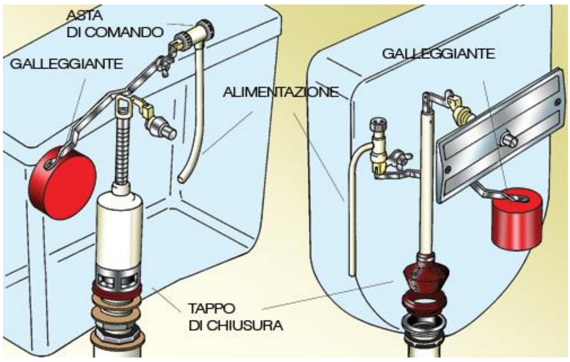
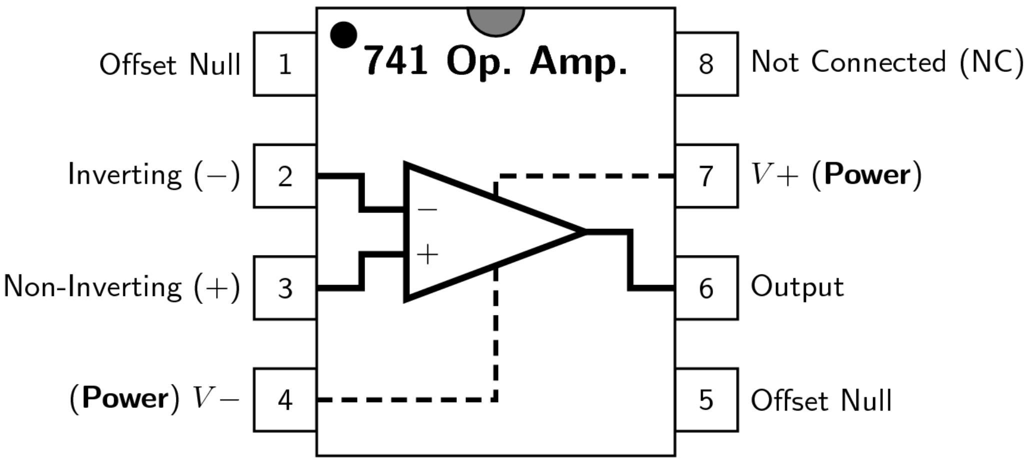


Diagramma di Bode

Il diagramma di Bode è una rappresentazione grafica della risposta in frequenza di un sistema lineare tempo-invariante cioè le cui proprietà (nel nostro caso i valori di resistori e capacitori) non variano nel tempo. Esso consiste di due grafici che rappresentano il modulo e la fase della funzione di trasferimento *H(s).* Essi hanno come variabile indipendente la frequenza *f* o la pulsazione ω e in ordinata, rispettivamente il modulo dell’ampiezza solitamente espresso in decibel e la fase espressa in gradi o radianti. Il nome di questo tipo di rappresentazione è dovuto allo scienziato statunitense Hendrik W. Bode pioniere nello studio della teoria dei controlli e delle telecomunicazioni elettroniche.

Amplificatore Operazionale



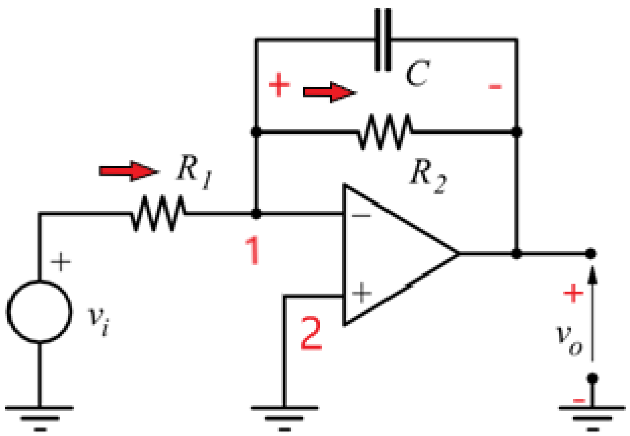
Perché Operazionale?

Il nome è dovuto al fatto che, con esso, è possibile realizzare circuiti elettronici in grado di effettuare numerose operazioni matematiche: la somma, la sottrazione, la derivata, l'integrale, il calcolo di logaritmi e di antilogaritmi.

Idealmente si tratta di un circuito caratterizzato da un guadagno di tensione infinito, un'impedenza d'ingresso di valore infinito e una impedenza d'uscita nulla. Per funzionare esso deve avere delle sorgenti di alimentazione V+ e V- rispettivamente ai terminali 7 e 4 che saranno utilizzate per la polarizzazione dei transistori. Tipicamente la tensione di alimentazione si assesta sui 3 V. Una problematica che affligge gli amplificatori reali è quella dell'offset. Si definisce offset la presenza di segnale in DC in uscita indesiderato a fronte di un segnale in ingresso nullo. I terminali 1 e 5 sono detti di azzeramento dell'offset e nella pratica sono connessi a dei generatori di tensione in DC che, a fronte dell'offset registrato in uscita, riescono a fornire una tensione in ingresso in modo tale da azzerarlo.

Filtro passa basso

La rappresentazione circuitale dell'amplificatore in configurazione invertente relativa al filtro passa basso è quella descritta in figura. La catena di retroazione negativa è caratterizzata dal capacitore C e dalla resistenza R_2.



Il terminale dell'amplificatore contrassegnato col simbolo "-" prende il nome di terminale di ingresso invertente. Il terminale invertente è il nodo 1, esso in ingresso ha un generatore di tensione v_i= Asen(ωt) seguito da un resistore di valore R1. Utilizziamo le trasformate di Laplace per indicare l'impedenza causata da C al variare della pulsazione ω quindi si avrà $Z_C = \frac{1}{sC}$ e $Z_{R1} = R_1$ e $Z_{R2} = R_2$. Il ruolo dell'amplificatore è quello di portare il potenziale al nodo 2 uguale al potenziale al nodo 1 in virtù del fatto che il guadagno intrinseco di un amplificatore reale è molto alto e per ipotesi la mia uscita deve avere un valore finito. Questa situazione si verifica in ogni amplificatore e prende il nome di "massa virtuale". Un'altra proprietà dell'amplificatore è quella relativa alle correnti di ingresso ai terminali positivo e negativo. Esse sono nulle a fronte del fatto che la resistenza di ingresso di un qualsiasi amplificatore reale è elevata. Si può pertanto scrivere al nodo 1 una legge di Kirchhoff per la corrente e, per la maglia relativa al capacitore e all'uscita, una legge di Kirchhoff per le tensioni.

1° legge di Kirchhoff

La somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti cioè: la somma algebrica delle correnti che interessano un nodo è uguale a zero.

2° legge di Kirchhoff

La somma algebrica delle forze elettromotrici e delle cadute di tensione che si incontrano in una maglia è uguale a zero.

Dalla seconda legge segue che $V_o(s) = -V_c(s)$

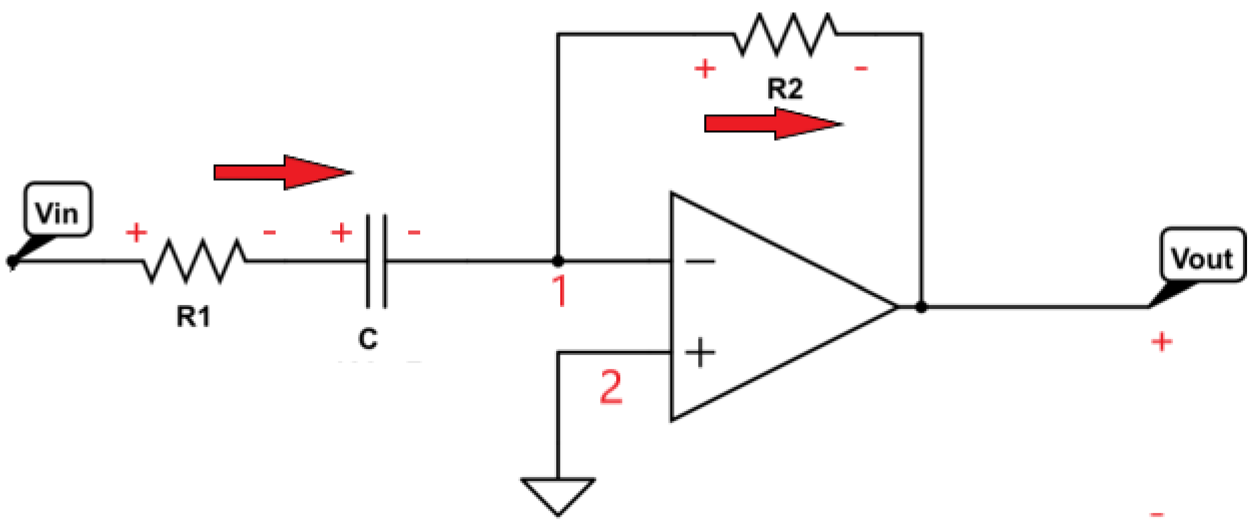
$$V_c(s) = -I_{R1}\ (R_2 // Z_C) = -\frac{V_i(s)}{R_1}(R_2 // Z_C)$$

Quindi in definitiva la mia funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{V_O(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+sCR_2}$$

Il "meno" davanti la funzione significa che la fase della sinusoide in uscita è sfasata di 180° rispetto alla fase della sinusoide in ingresso, per ingresso ho supposto una sinusoide con fase iniziale nulla.

Filtro passo alto



La differenza tra i due circuiti sta nel fatto che il capacitore è collegato in serie al generatore sinusoidale V_i e il sistema di retroazione è dato esclusivamente da R_2. La legge di Kirchhoff delle correnti al nodo 1 assicura che $I_{R1} = I_C = I_{R2} = I$.

La corrente che scorre su R_1 e su C andrà in R_2 cioè i componenti sono in serie. Pertanto si può scrivere:

$$V_o(s) = -V_{R2}(s) = -R_2\, I = -R_2 \frac{V_i(s)}{R_1 + \frac{1}{sC}}$$

Ottenendo

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = - \frac{sCR_2}{1 + sCR_1}$$

2. Riferimenti bibliografici

I riferimenti bibliografici sono stati:

- Sedra, Smith, «Circuiti per la microelettronica», Quarta edizione, EdiSES

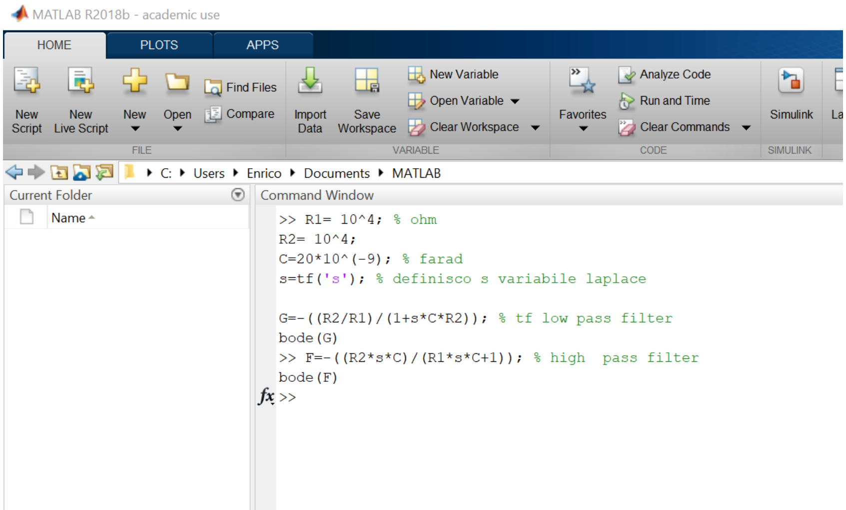
Ho utilizzato il libro di testo sopra indicato per quel che concerne la premessa e la rappresentazione circuitale dell'amplificatore prendendo in considerazione la metodologia e l'analisi delle immagini, le quali sono state recuperate debitamente da Google Immagini e ritoccate con frecce di corrente e riferimenti di tensione utilizzando il software Paint 3D per cercare di accompagnare le equazioni con le dovute considerazioni sul circuito.

- S. Rinaldi, C. Piccardi, "I sistemi lineari – teoria, modelli, applicazioni", CittàStudi Edizioni

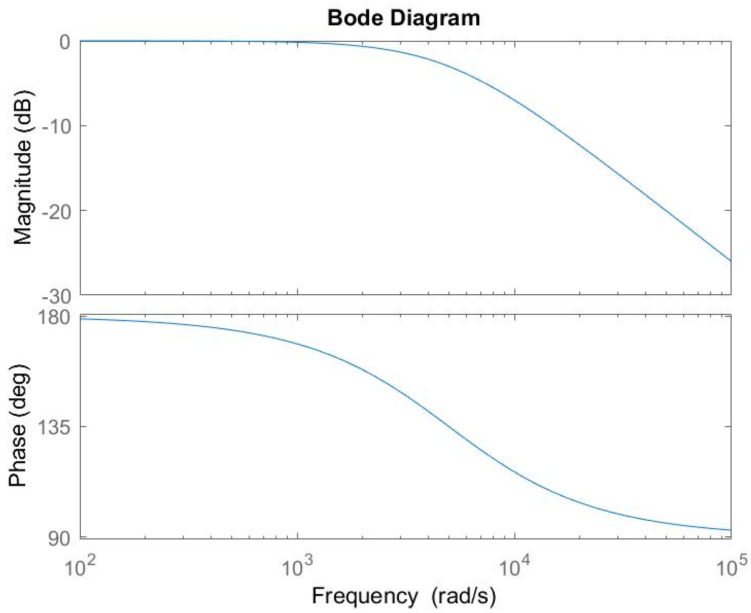
Il libro sopra indicato è un manuale di Teoria dei Sistemi, è stato utilizzato per dare la spiegazione di sistema dinamico e spiegare i concetti generali relativi alle trasformate di Laplace, funzione di trasferimento, retroazione negativa, diagrammi di Bode.

3. Risultati ottenuti

Utilizzando il software Matlab tracciamo i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento trovate.



Filtro passa basso



Significato

Alle basse frequenze (ω->0) il capacitore C si comporta come un circuito aperto poiché risulta avere impedenza $Z_C = \frac{1}{sC} = \infty$ essendo s=jω; quindi la corrente transita tutta su R_2 pertanto H(s) in modulo sarà $\frac{R_2}{R_1}$. Alle alte frequenze (ω→∞) il condensatore si comporta come un cortocircuito cioè $V_C(s)=V_0(s)=0$ quindi H(s)=0. In decibel utilizzando il logaritmo si avrà $20\log_{10}(H(s)) \rightarrow -\infty$

Banda e frequenza di taglio

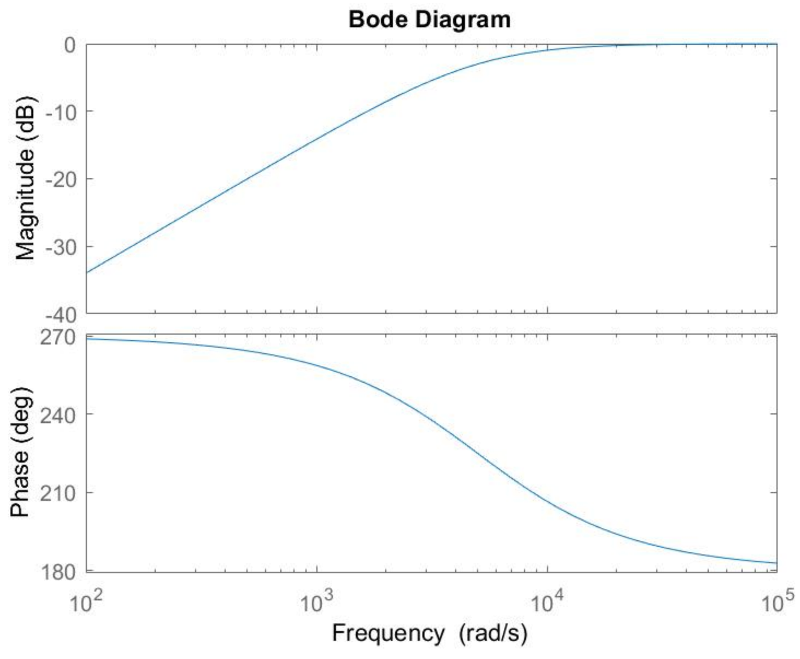
In generale, col termine banda si intende un intervallo di valori di frequenza (o di pulsazione). Con riferimento alla risposta in frequenza di un filtro, si definisce banda passante quell'intervallo di frequenze in cui il modulo della risposta in frequenza mantiene approssimativamente un valore costante e diverso da zero e la fase è approssimativamente uguale a zero o uguale a ±π radianti. Al di fuori di tale intervallo di frequenze si parla invece di banda oscura del sistema. Il limite tra banda passante e banda oscura è detto frequenza di taglio del filtro ed è un parametro intrinseco di definizione dei filtri. Si definisce come la frequenza alla quale il rapporto fra l'ampiezza del segnale di uscita e quello di ingresso vale circa 0.707. In questo caso si calcola con la formula

$$\omega = \frac{1}{R_2 C}$$

Svolgendo i calcoli con Matlab si ottiene ω = 5000 rad/s.

I valori numerici si trovano nello screen Matlab.

Filtro passa alto



Significato

Da un punto vista elettronico il circuito del filtro passa alto è il duale del precedente.
Alle alte frequenze (ω -> ∞) il condensatore si comporta come un cortocircuito cioè ad impedenza Z_c nulla.
Inoltre il $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{sCR_2}{1+sCR_1} = \frac{R_2}{R_1}$ e pertanto $H(s)_{db}$= $20\log_{10}(1)=0$ con $R_2 = R_1$.

Alle basse frequenze (ω ->0) il condensatore sarà un circuito aperto e il modulo di $H(s)_{db}$->-∞
La frequenza di taglio si determina utilizzando

$$\omega = \frac{1}{R_1 C}$$

e vale ugualmente 5000 rad/s.

Nota ai grafici

In entrambe le situazioni i filtri si dicono attivi perché creati con AO. Questi si differenziano dai filtri passivi perché generalmente nella banda passante oltre a far passare i segnali forniscono una leggera amplificazione. Poiché in questo caso come parametro di progetto ho deciso opportunamente di scegliere $R_2 = R_1$ riesco ad ottenere un comportamento da "vero filtro" cioè un guadagno di 0 dB nella zona di interesse.