INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA DE BIOTECNOLOGÍA

Departamento de Ciencias Básicas

Academia de Matemáticas Aplicadas

Métodos Numéricos (Taller)

Grupo: 4FV3

Tarea: "Método de Bisección"

Equipo:

- Bautista Díaz Sebastian Alí
- Castillejos Varillas Luis Ángel
- Flores Salgado Getsemaní
- Iturbide Ríos Génesis
- Muñoz del Río Fernanda Natzieli
- Reyes Méndez Gustavo Daniel

Fecha: 25/02/2022

Profesores:

- Jesús Granados Hernández
- Juan Claudio Ortiz Juárez

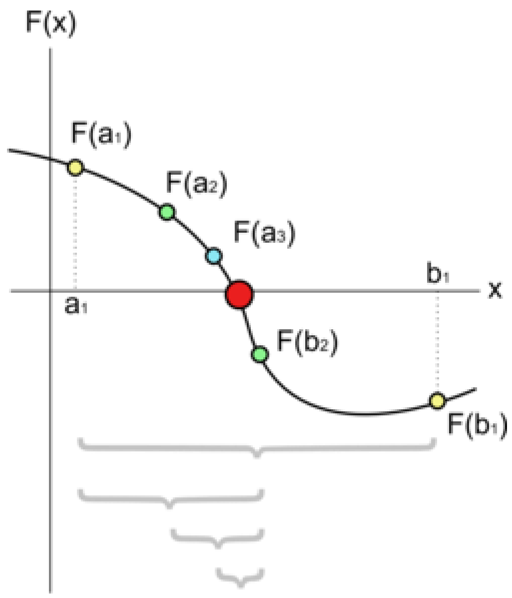
INTRODUCCIÓN

Este método , que se utiliza para resolver ecuaciones de una variable, está basado en el “Teorema de los Valores Intermedios” (TVM), en el cual se establece que toda función continua f, en un intervalo cerrado [a,b], toma todos los valores que se hallan entre f(a) y f(b), de tal forma que la ecuación f(x)=0 tiene una sola raíz que verifica f(a).f(b)<0.

Es el método más elemental y antiguo para determinar las raíces de una ecuación. Está basado directamente en el teorema de Bolzano. Consiste en partir de un intervalo $[x_0,x_1]$tal que $f(x_0)f(x_1) < 0$, por lo que sabemos que existe, al menos, una raíz real. A partir de este punto se va reduciendo el intervalo sucesivamente hasta hacerlo tan pequeño como exige la precisión que hayamos decidido emplear.

El método de bisección es un algoritmo de búsqueda de raíces que trabaja dividiendo el intervalo a la mitad y seleccionando el subintervalo que tiene la raíz. Esto se logra llevar a cabo a través de varias interacciones que son aplicadas en un intervalo para por medio de ello encontrar la raíz de la función.

Este es uno de los métodos más sencillos de fácil intuición para resolver ecuaciones en una variable, también conocido como método del intervalo medio, este se basa en el teorema del valor intermedio, el cual establece que toda función continua *f* en un intervalo cerrado [a,c] toma todos los valores que se hallan entre *f(a)* y *f(b).* Esto es que todo valor entre *f(a)* y *f(b)* es la imagen de al menos un valor del intervalo [a,b].En caso de que *f(a)* y *f(b)* tengan signos opuestos, el valor cero seria un valor intermedio entre *f(j)*y *f(e),* por lo que con certeza existe un *p* en [a,b] que cumple *f*(*p*)=0. De esta forma, se asegura la existencia de al menos una solución de la ecuación *f*(*a*)=0.



OBJETIVO

Encontrar las raíces mediante el acercamiento a ellas a través de dividir la sección trabajada de la función en varias otras.

DESARROLLO

Para esta práctica se realizaron algunos ejercicios por método de bisección

Teorema de Bolzano.

Vamos a ver varios teoremas que encierran propiedades fundamentales de las funciones continuas en intervalos. El primero de ellos es una sencilla consecuencia del teorema de conservación del signo:

Teorema de Bolzano. Si f es continua en [a, b] (con a < b) y f(a)f(b) < 0, entonces existe r (raíz) ∈ (a, b) tal que f(r) = 0.

Ejercicio 1 :

La ecuación de estado de Van der Walls para un gas real es: $(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$

Donde P es la presión en bares, T es la temperatura en grados Kelvin, R es la constante de los gases ideales $R = 0.08314\frac{bar*m^3}{kg-mol^2}$, V es el volumen molar del gas en $\frac{m^3}{kg-mol}$. Para el gas CO_2 calcular el volumen molar cuando T = 222 K, P = 68 bar, a = 1.572 $\frac{bar*m^6}{kg-mol^2}$, . Utilice el método de Bisección para aproximar el volumen molar con una tolerancia de $1x10^{-4}$, considerar una longitud del intervalo de 0.2

Solución

Paso 1:

Igualar a cero la ecuación de Van der Walls f(V)

$$(P + \frac{a}{V^2})(V - b) - RT = 0$$

Paso 2:

Graficar f(V) en matlab

Código

```
f=@(v)(68+(1.572./v.^2)).*(v-0.0411)-0.08314*222

f =@(v) (68 + (1.572 ./ v .^ 2)) .* (v - 0.0411) - 0.08314 * 222
```

```
v=0:0.05:1;

plot(v,f(v))

grid on

xlabel('volumen')

ylabel('f(v)')
```

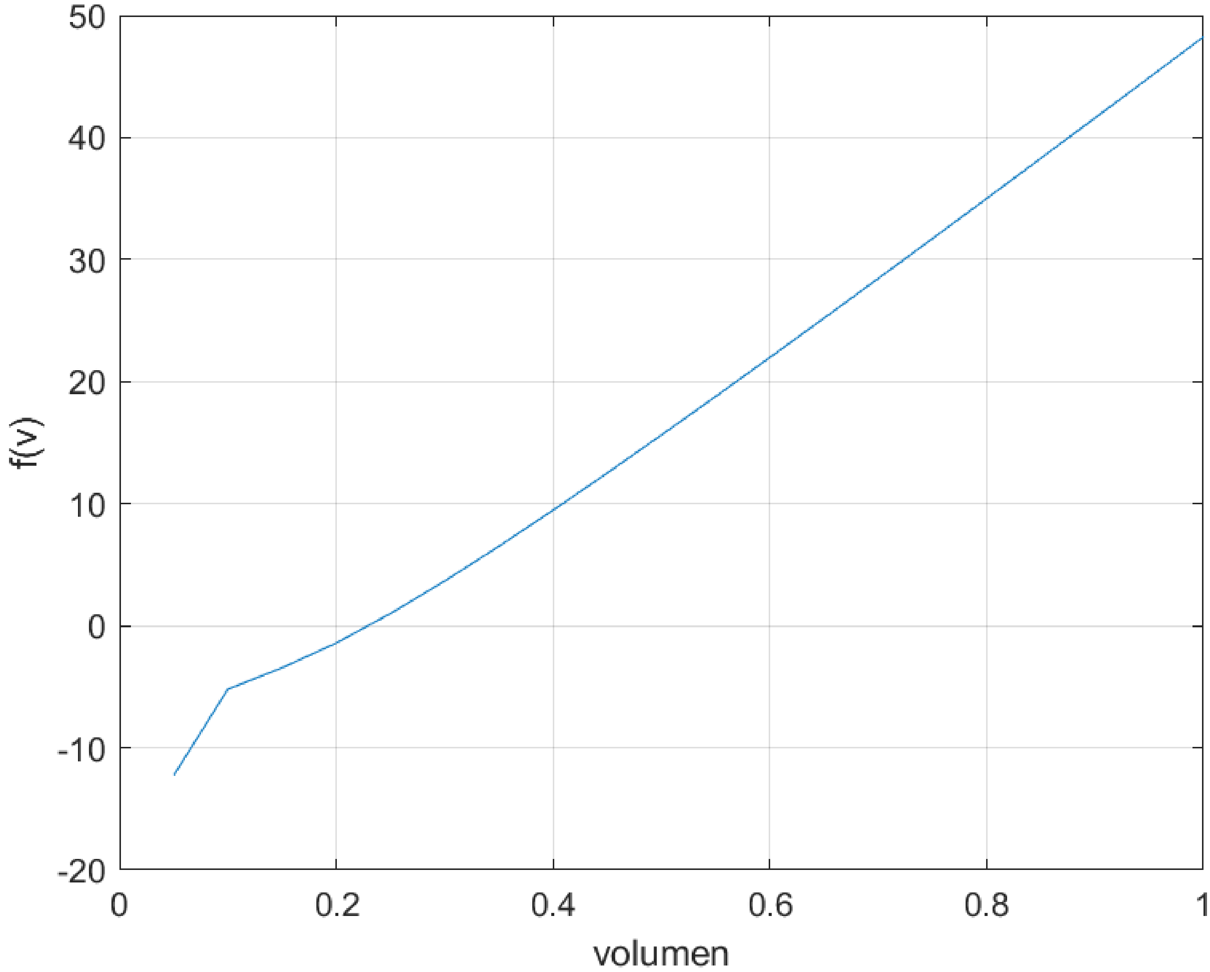


fig 1

Paso 3:

La primera aproximación se realiza con la figure 1 (Método gráfico).

Código

```
sign(f(a))
ans = -1
sign(f(r1))
ans = 1
```

```
sign(f(b))
ans = 1
b=r1;
r2=(a+b)/2
r2 = 0.2500
e2=(b-a)/2
e2 = 0.050000
sign(f(a))
ans = -1
sign(f(r2))
ans = 1
sign(f(b))
ans = 1
b=r2;
r3=(a+b)/2
r3 = 0.2250
e3=(b-a)/2
e3 = 0.025000
sign(f(a))
ans = -1
sign(f(r3))
ans = -1
sign(f(b))
ans = 1
a=r3;
r4=(a+b)/2
r4 = 0.2375
e4=(b-a)/2
e4 = 0.012500
sign(f(a))
ans = -1
sign(f(r4))
ans = 1
sign(f(b))
ans = 1
b=r4;
r5=(a+b)/2
r5 = 0.2313
e5=(b-a)/2
e5 = 6.2500e-03
sign(f(a))
ans = -1
sign(f(r5))
ans = 1
sign(f(b))
ans = 1
b=r5;
r6=(a+b)/2
r6 = 0.2281
e6=(b-a)/2
```

```
e6 = 3.1250e-03
sign(f(a))
ans = -1

sign(f(r6))
ans = -1
sign(f(b))
ans = 1
a=r6;
r7=(a+b)/2
r7 = 0.2297
e7=(b-a)/2
e7 = 1.5625e-03
sign(f(a))
ans = -1
sign(f(r7))
ans = -1
sign(f(b))
ans = 1
a=r7;
r8=(a+b)/2
r8 = 0.2305
e8=(b-a)/2
e8 = 7.8125e-04
sign(f(a))
ans = -1
sign(f(r8))
ans = 1
sign(f(b))
ans = 1
b=r8;
r9=(a+b)/2
r9 = 0.2301
e9=(b-a)/2
e9 = 3.9062e-04
sign(f(a))
ans = -1
sign(f(r9))
ans = 1
sign(f(b))
ans = 1
b=r9
b = 0.2301
r10=(a+b)/2
r10 = 0.2299
e10=(b-a)/2
e10 = 1.9531e-04
sign(f(a))
ans = -1
sign(f(r10))
```

```
ans = -1
sign(f(b))
ans = 1
a=r10;
r11=(a+b)/2
r11 = 0.2300
e11=(b-a)/2
e11 = 9.7656e-05
```

Tabla de aproximaciones

Tolerancia de $1x10^{-4}$

i	a	raíz	b	error
1	0.2(-)	0.3000(+)	0.4(+)	0.1
2	0.2(-)	0.2500(+)	0.3000(+)	0.050
3	0.2(-)	0.2250(+)	0.2500(+)	0.02500
4	0.2250(-)	0.2375(+)	0.2500(+)	0.0125
5	0.2250(-)	0.2313(+)	0.2375(+)	$6.25x10^{-03}$
6	0.2250(-)	0.2281(+)	0.2313(+)	$3,1250x10^{-03}$
7	0.2281(-)	0.2297(+)	0.2313(+)	$1.5625x10^{-03}$
8	0.2297(-)	0.2305(+)	0.2313(+)	$7.8125x10^{-04}$
9	0.2297(-)	0.2301(+)	0.2305(+)	$3.9062x10^{-04}$
10	0.2297(-)	0.2301(+)	0.2301(+)	$1.9531x10^{-04}$
11	0.02301(-)	0.2300	0.2301(+)	$9.7655x10^{-05}$

<u>Fórmula para calcular el número de iteraciones</u>

$$n \geq \frac{ln\left|\frac{b-a}{Tolerancia}\right|}{ln2}$$

Donde:

b: Límite superior del intervalo, en el que se encuentra la raíz

a:Límite inferior del intervalo, en el que se encuentra la raíz

$$n \geq \frac{ln\left|\frac{b-a}{Tolerancia}\right|}{ln2} = \frac{ln\left|\frac{0.4-0.2}{1x10^{-4}}\right|}{ln2} = \frac{7.6009}{0.6931} = 11.966 = 11\ iteraciones$$

Respuesta

El volumen molar por el método de Bisección es aproximadamente 0.2300 $\frac{m^3}{kg-mol}$ con error de $9.7656x10^{-05}$

Ejercicio 2 :

La concentración C de una bactería contaminante en un lago decrece segun la expresión:$C(t)80e^{-2t} + 20e^{-0.5t}$siendo t el tiempo en horas.

b)Determine el número de iteraciones que son necesarias para obtener una raíz de C(t)=7 con un error menos de $1x10^{-3}$.Utilice método de bisección, considerar una longuitud de intervalo de uno.

El tiempo aproximado para llegar a una concentración de 7 es aproximadamente 2.32910156250 horas con un error de 0.000976562500 horas.

Fórmula para calcular el número de iteraciones

$$n \geq \frac{ln\left|\frac{b-a}{Tolerancia}\right|}{ln2}$$

b: Límite superior del intervalo, en el que se encuentra la raíz

a:Límite inferior del intervalo, en el que se encuentra la raíz

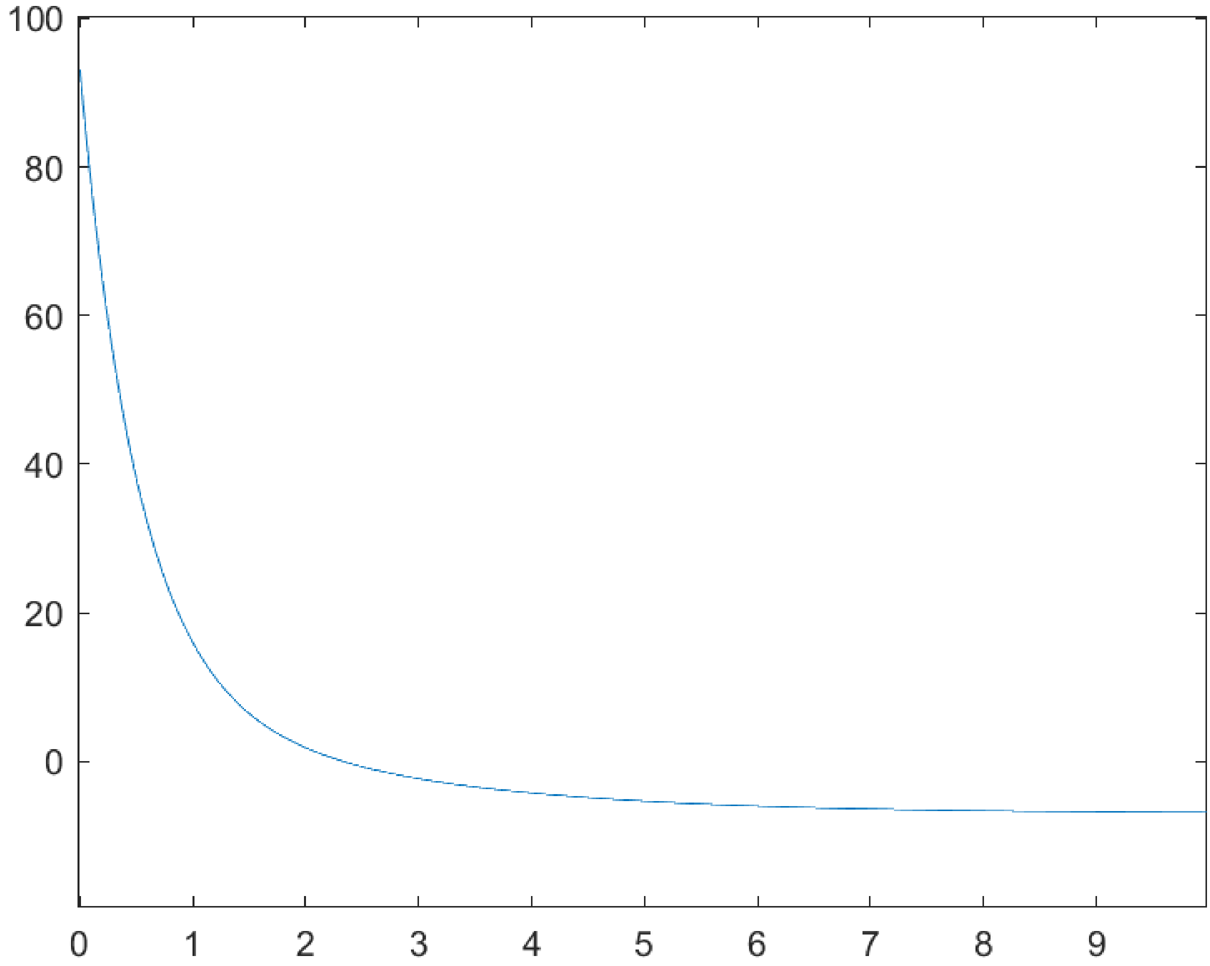
Paso 1

La ecuación de concentración de bacterias la igualamos a cero y designamos la función f(t)

$$7 = 80e^{-2t} + 20e^{-0.5t} \ -> \ f(t) = 80e^{-2t} + 20e^{-0.5t} - 7 = 0$$

Paso 2

Graficar la función en Matlab



Paso 3:

Aplicamos el método de Newton-Raphson.
En este método se requiere la gráfica para tener la primera aproximación a la raíz
Con la gráfica doy mi primera aproximación
x1 = 2
paso 3
doy inicio al método de Newton - Raphson.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$x_2 = x_{2-1} - \frac{f(x_{2-1})}{f'(x_{2-1})}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

Respuesta al ejercicio: La raíz aproximada es 2.329087616845823 horas con un error de

4.208070525061518e-05 horas.

```
>> f

f =@(t) 80 * exp (-2 * t) + 20 * exp (-0.5 * t) - 7

>> pkg load symbolic

>> syms t

Symbolic pkg v2.9.0: Python communication link active, SymPy v1.4.

>> f=f(t)

f=(sym)

                 -t
          -2*t   2
     -7+80*e    +20*e

>> x1=2;

>> x2=x1-subs(f,x1)/subs(diff(f),x1)

x2 = (sym)

             -4   -1
     -7+80*e    +20*e
  -  -------------    +2
             -1   -4
       -10*e    -160*e
>> x2=double(x1-subs(f,x1)/subs(diff(f),x1))
x2 = 2.275799383125687
>> errorrelativoporcentual=abs((x2-x1)/x2)*100
errorrelativoporcentual = 12.11879154070654
```

```
>> errorrelativoporcentual1=abs((x2-x1)/x2)*100
errorrelativoporcentual1 = 12.11879154070654
>> x3=double(x2-subs(f,x2)/subs(diff(f),x2))
x3 = 2.327680960043951
>> errorrelativoporcentual2=abs((x2-x1)/x2)*100
errorrelativoporcentual2 = 12.11879154070654
>> errorrelativoporcentual2=abs((x3-x2)/x3)*100
errorrelativoporcentual2 = 2.228895532027019
>> x4=double(x3-subs(f,x3)/subs(diff(f),x3))
x4 = 2.329086636749328
>> errorrelativoporcentual3=abs((x4-x3)/x4)*100
errorrelativoporcentual3 = 6.035313084527635e-02
>> x5=double(x4-subs(f,x4)/subs(diff(f),x4))
x5 = 2.329087616845823
>> errorrelativoporcentual4=abs((x5-x4)/x5)*100
errorrelativoporcentual4 = 4.208070525061518e-05
```

ANÁLISIS

Este método se apoya de intervalos o de Bolzano, es un tipo de búsqueda incremental en el que el intervalo se divide siempre a la mitad. Si la función cambia de signo sobre un intervalo, se evalúa el valor de la función en el punto medio. La posición de la raíz se determina situándose en el punto medio del subintervalo, dentro del cual ocurre un cambio de signo. El proceso se repite hasta obtener una mejor aproximación.

Podemos decir que este método nos permite resolver ecuaciones de una sola variable de forma más fácil.

CONCLUSIONES

A través del método de bisección pudimos encontrar nuestra raíz de la función haciendo un acercamiento seccionando a la función.

BIBLIOGRAFÍA

- *Aproximación numérica y errores*. (2018). Obtenido de Cuantificaci´on de errores: https://www.ingenieria.unam.mx/pinilla/PE105117/pdfs/tema1/1_aproximacion_numerica_y_errores.pdf
- Lamadrid, P. (10 de Febrero de 2015). *Error Absoluto, Relativo*. Obtenido de Series de Taylor: https://es.scribd.com/document/255361351/Error-Absoluto-Relativo-Series-de-Taylor
- *Polinomios de Taylor y Maclaurin*. (10 de Noviembre de 2015). Obtenido de Error de Truncación de Series: https://www.ck12.org/book/ck-12-conceptos-de-c%c3%a1lculo-en-espa%c3%b1ol/section/9.16/
- Rodó, P. (2019). *Polinomio de Taylor*. Obtenido de Taylor: https://economipedia.com/definiciones/polinomio-de-taylor.html
- Significados.com. (22 de Febrero de 2021). *Qué es Polinomio*. Obtenido de Polinomio: https://www.significados.com/polinomio/
- Temas Desarrollados. (s.f.). *Análisis Numérico* . Obtenido de Serie de Taylor y Mc Laurin: https://sites.google.com/site/analisisnumericoipn/home/tema-1/serie-de-taylor-y-mc-lauri

TAREA NO.4

EJERCICIO 1

La concentración C de una bacteria contaminante en un lago decrece segun la expresión:$C(t)80e^{-2t} + 20e^{-0.5t}$siendo t el tiempo en horas.

a) Determine el número de iteraciones que son necesarias.

   R: 10 iteraciones

```
%longitud de intervalo de 1
a=2;
b=3;
Tol=1e-3;
%numero de iteraciones
n=log((b-a)/Tol)/log(2)
```

```
n =

   9.965784284662087
```

Fórmula para calcular el número de iteraciones

$$n \geq \frac{ln\left|\frac{b-a}{Tolerancia}\right|}{ln2}$$

b: Límite superior del intervalo, en el que se encuentra la raíz

a:Límite inferior del intervalo, en el que se encuentra la raíz

b) Calcular el tiempo aproximado para llegar a una concentración de 7 con un error menor o igual que $1x10^{3}$. Utilizar el metodo de biseccion y considerar la longitud del intervalo de 1.

R: 2.32910156250 horas con un error de 0.000976562500 horas.

Paso 1

La ecuación de concentración de bacterias la igualamos a cero y designamos la función f(t)

$$7 = 80e^{-2t} + 20e^{-0.5t} \;\; -> \;\; f(t) = 80e^{-2t} + 20e^{-0.5t} - 7 = 0$$

Paso 2:

Grafica la función f(t) en matlab

Código

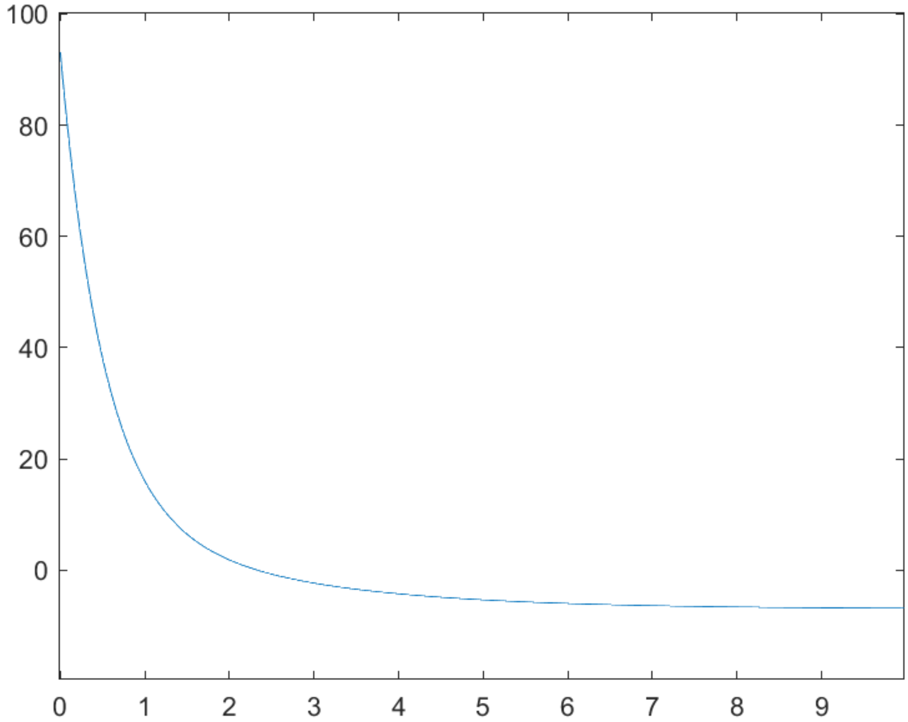
```
f = @(t)80*exp(-2*t) + 20*exp(-0.5*t) - 7
t = 0 : 0.01 : 10;
plot(t, f(t))
a = 2;
b = 3;
Tol = 1*10^(-3);
n = log((b - a) / Tol) / log(2);
n =9.9658

xlim([-0.02 9.98])

ylim([-20 100])
```

Paso 3:

Aplicar método de bisección




```
f = @(t)80*exp(-2*t) + 20*exp(-0.5*t) - 7
t = 0 : 0.01 : 10;
plot(t, f(t))
a = 2;
b = 3;
Tol = 1*10^(-3);
n = log((b - a) / Tol) / log(2);
>> r1=(b+a)/2
r1 = 2.5000
>> format long
>> r1=(b+a)/2
r1 = 2.500000000000000
>> e1=abs((b-a)/2)
e1 = 0.500000000000000
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r1))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> b=r1;
```

```
>> r2=(b+a)/2
r2 = 2.250000000000000
>> e2=abs((b-a)/2)
e2 = 0.250000000000000
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r2))
ans = 1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> a=r2;
>> r3=(b+a)/2
r3 = 2.375000000000000
>> e3=abs((b-a)/2)
e3 = 0.125000000000000
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r3))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> b=r3;
>> r4=(b+a)/2
r4 = 2.312500000000000
>> e4=abs((b-a)/2)
e4 = 6.250000000000000e-02
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r4))
ans = 1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> a=r4;
>> r5=(b+a)/2
r5 = 2.343750000000000
>> e5=abs((b-a)/2)
e5 = 3.125000000000000e-02
>> sign(f(a))
ans = 1
```

```
>> sign(f(r5))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> b=r5;
>> r6=(b+a)/2
r6 = 2.328125000000000
>> e6=abs((b-a)/2)
e6 = 1.562500000000000e-02
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r6))
ans = 1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> a=r6;
>> r7=(b+a)/2
r7 = 2.335937500000000
>> e7=abs((b-a)/2)
e7 = 7.812500000000000e-03
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r7))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> b=r7;
>> r8=(b+a)/2
r8 = 2.332031250000000
>> e8=abs((b-a)/2)
e8 = 3.906250000000000e-03
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r8))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> b=r8;
>> r9=(b+a)/2
```

```
r9 = 2.330078125000000
>> e9=abs((b-a)/2)
e9 = 1.953125000000000e-03
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r9))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> b=r9;
>> r10=(b+a)/2
r10 = 2.329101562500000
>> e10=abs((b-a)/2)
e10 = 9.765625000000000e-04
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r10))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
```

Paso 4:Llenar tabla

Iteración	Límite inferior	Raíz	Límite superior	Error
i	a	r	b	e
1	2(+)	2.50000000(-)	3(-)	0.500000000
2	2(+)	2.5000(+)	2.5000000(-)	0.25000000
3	2.5000(+)	2.37500000(-)	2.5000000(-)	0.1250000
4	2.5000(+)	2.3125000(+)	2.37500000000(-)	0.0625
5	2.3125000(+)	2.3437500(-)	2.375000000(-)	0.031250000
6	2.3125000(+)	2.328125000(+)	2.3437500(-)	0.015625000
7	2.328125000(+)	2.335937500(-)	2.3437500(-)	0.0078125000
8	2.328125000(+)	2.3320312(-)	2.335937500(-)	0.00390625000
9	2.328125000(+)	2.33007812500(-)	2.3320312(-)	0.00195312500
10	2.328125000(+)	2.32910156250(-)	2.33007812500(-)	0.00097656250000

EJERCICIO 2

a) Determinar aproximadamente todas la raíces reales de la ecuación

$$16x^2 + 25x^3 + x^2 + 5x = 3$$

con una tolerancia menor o igual que $1x10^3$.

Paso 1

Igualamos la ecuación a cero

$$16x^2 + 25x^3 + x^2 + 5x - 3 = 0$$

Paso 2:

Grafica la función f(x) en matlab

```
clc

clear all

%Ejercicio 2

%Graficamos

f=@(x)16*x.^5+25*x.^3+x.^2+5*x-3

x=-10:0.0001:10;

plot(x,f(x))

grid on
```