Instituto Politécnico Nacional

Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnológica

Métodos Numéricos (Taller) Búsqueda de raíces2

Equipo 2 Rodríguez Ortiz Dafne.
Ambiental
Flores Salgado Getsemani.
Ambiental
Bermeo Núñez Mireya Alejandra.
Ambiental
Monreal Alfaro Ramón Eduardo.
Ambiental
Sánchez Romero Lucía Montserrat.
Ambiental
Profesores:
Vera Tizati Pamela Patricia/González Pascual Víctor

septiembre 13 del 2021

INTRODUCCIÓN

Las soluciones de las ecuaciones no lineales son conocidas como **raíces o ceros.** Algunos ejemplos de este tipo de ecuaciones son los polinomios o ecuaciones trascendentales. Por lo que resolver este tipo de problemas mediante los métodos numéricos es de gran relevancia pues carecen de soluciones exactas, a excepción de algunos problemas. Por lo tanto, las raíces de esas ecuaciones no lineales se obtienen mediante métodos computacionales basados en procedimientos iterativos. (Nakumara, 1992)

Los métodos numéricos para encontrar las raíces suelen presentar desventajas, por lo que será necesaria la práctica con los diferentes métodos para conocer sus limitaciones y defectos así como la viabilidad que puedan tener para resolver un problema en específico. Los métodos para encontrar las raíces se clasifican en:

- MÉTODOS GRÁFICOS
  - MÉTODOS CERRADO
    - Método gráfico
    - Método de la bisección
  - MÉTODOS ABIERTOS
    - Método del punto fijo
    - Método Newton-Raphson

Algunas de las ventajas que se pueden presentar en los métodos anteriores son la necesidad de especificar un intervalo que contenga a la raíz, la necesidad de la continuidad de f', convergencias, entre otros.

MÉTODO DE LA BISECCIÓN

Para emplear este método se establecen los siguientes pasos para calcular las raíces.

1.- Graficar la función en el intervalo apropiado
2.- Elegir el intervalo de inicio (a, b) verificando que ahí se encuentre una raíz $f(a)*f(b)<0$
3.- Calcular la siguiente aproximación a la raíz utilizando la siguiente ecuación

$$x_i = \frac{a+b}{2}$$

4.- Calcular el error de la aproximación

$$e = \frac{b-a}{2}$$

5.- Verificar en qué intervalo se encuentra la raíz $[a, x_i]$ o $[x_i, b]$, con base en esto se tiene que redefinir el intervalo para la siguiente aproximación.

- ✔ Si $f(a)*(fx_i)< 0$ entonces la raíz está entre $[a, x_i]$ y por lo tanto definimos $b=x_i$
- ✔ Si $f(x_i)*f(b)<0$ entonces la raíz está entre $[x_i, b]$ y por lo tanto definimos $a=x_i$

6.- Repetir los 3 pasos anteriores hasta que el error obtenido sea menor o igual a la tolerancia determinada en el problema.

Los métodos abiertos se basan en fórmulas que requieren únicamente de un valor de inicio sin que necesariamente debían encerrar a la raíz. Sin embargo, algunas veces se alejan de la raíz, cuando llegan a converger se hace de una manera más rápida que los métodos anteriormente estudiados.

MÉTODO DE PUNTO FIJO

También conocido como iteración simpe de punto fijo, se basa en reordenar la ecuación de tal manera que una función *f(x)=0* se convierta en *x=g(x)*.

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = x - g(x)$$

$$f(x) = x - g(x) = 0$$

$$x = g(x)$$

$$f(x) = 3\ cos\ cos\ (x)\ + 5x = 0$$

$$x_1 = \left(-\frac{5x}{3}\right) = g(x)$$

$$x_2 = -\frac{3}{5} cos\ (x) = g(x)$$

Los pasos para emplear este método es el siguiente:

1.-Graficar la función en el intervalo adecuado.

2.- Descomponer *f(x)* de la siguiente manera

$$f(x) = x - g(x) = 0$$

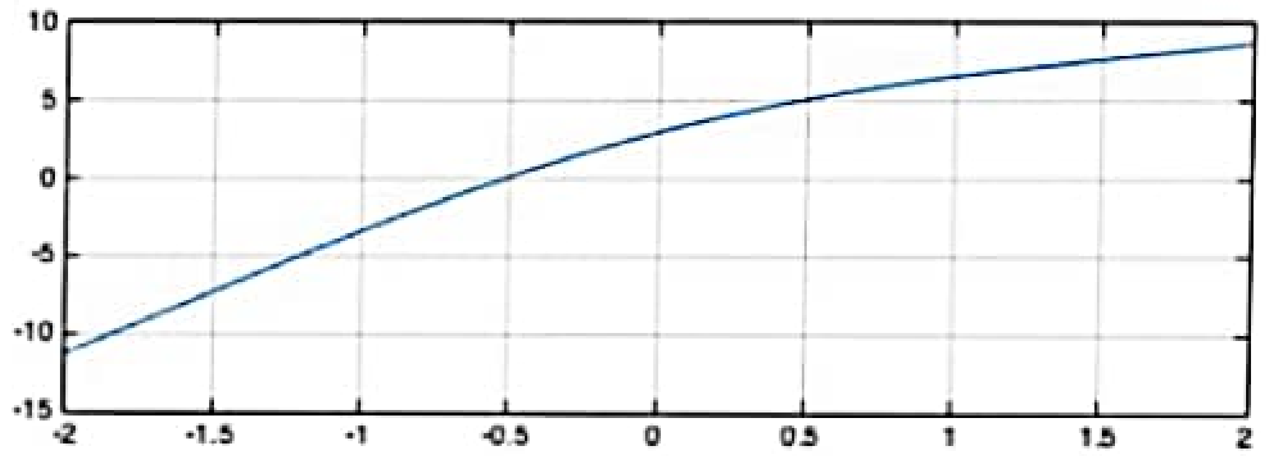
3.- Proponer un valor cercano a la raíz x_0, esta será la primera aproximación a la raíz.

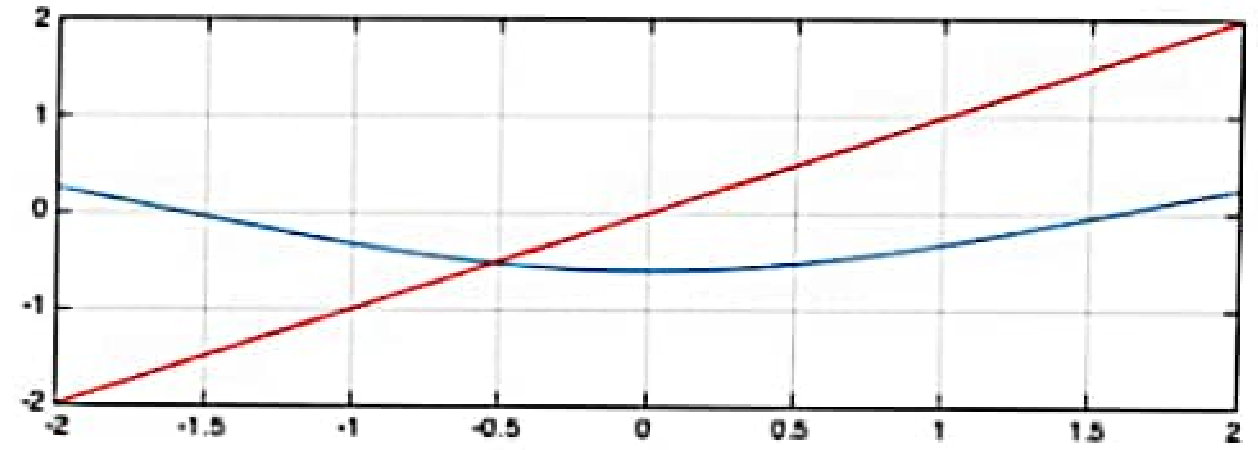
4.- Verificar que se cumpla el criterio de convergencia

5.- Calcular la siguiente aproximación a la raíz y el error, con las siguientes fórmulas

$$x_i = g(x_{i-1})$$

$$error = |x_i - x_{i-1}|$$





6.- Realizar el paso anterior hasta que el error sea menor o igual a la tolerancia determinada por el problema.

Al emplear este método para la resolución de las funciones no lineales tenemos que tener en cuenta diversas consideraciones, como son:

1.-Es muy difícil encontrar una función cuyo cálculo del error sí tenga convergencia con este método.

2.-Las funciones que sí tienen convergencia con este método llegan a la aproximación final rápidamente.

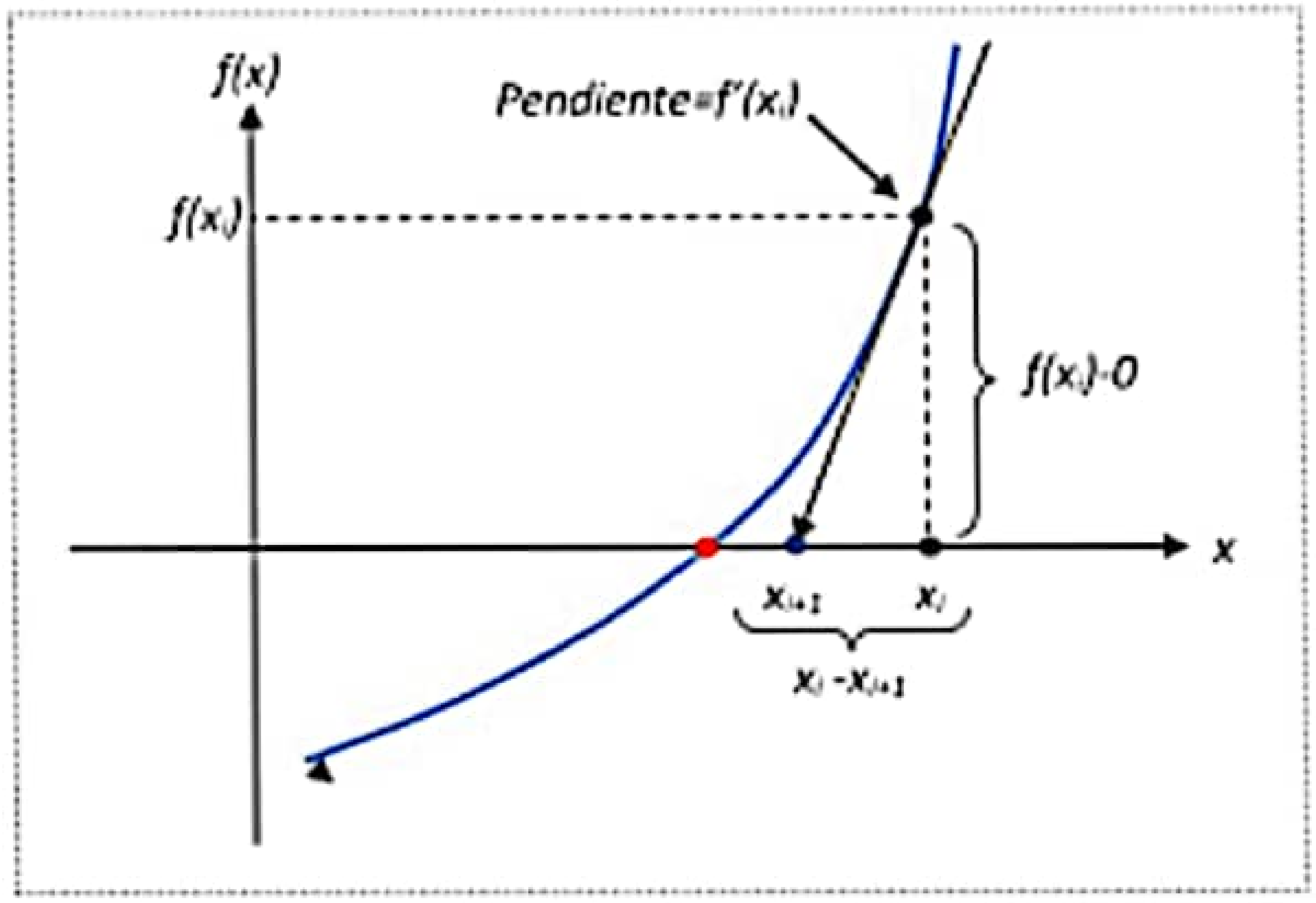
3.-Este es el método más fácil de implementar o programar.

4.-No hay alguna forma de calcular cuántas iteraciones son necesarias para llegar al error menor que la tolerancia.

5.-Sólo se puede utilizar para calcular raíces reales en funciones continuas.

MÉTODO DE NEWTON- RAPHSON

Se basa en conocer la primera derivada de una función para el cálculo de x_{i+1}. Es un método muy eficiente, sin embargo no es el más adecuado cuando se necesita obtener raíces múltiples.



$$m = f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$f'(x_0) = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) = -f(x_0)$$

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

De forma general tenemos

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Los pasos generales para este método son:

1.- Graficar la función en el intervalo apropiado.
2.- Proponer un valor cercano a la raíz x_0, este será la primera aproximación a la raíz.
3.- Verificar que se cumpla el criterio de convergencia.
4.- Calcular la siguiente aproximación a la raíz y el error, con las siguientes fórmulas.

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

$$error = |x_i - x_{i-1}|$$

5.- Realizar el paso anterior hasta que el error sea menor o igual a la tolerancia determinada por el problema.

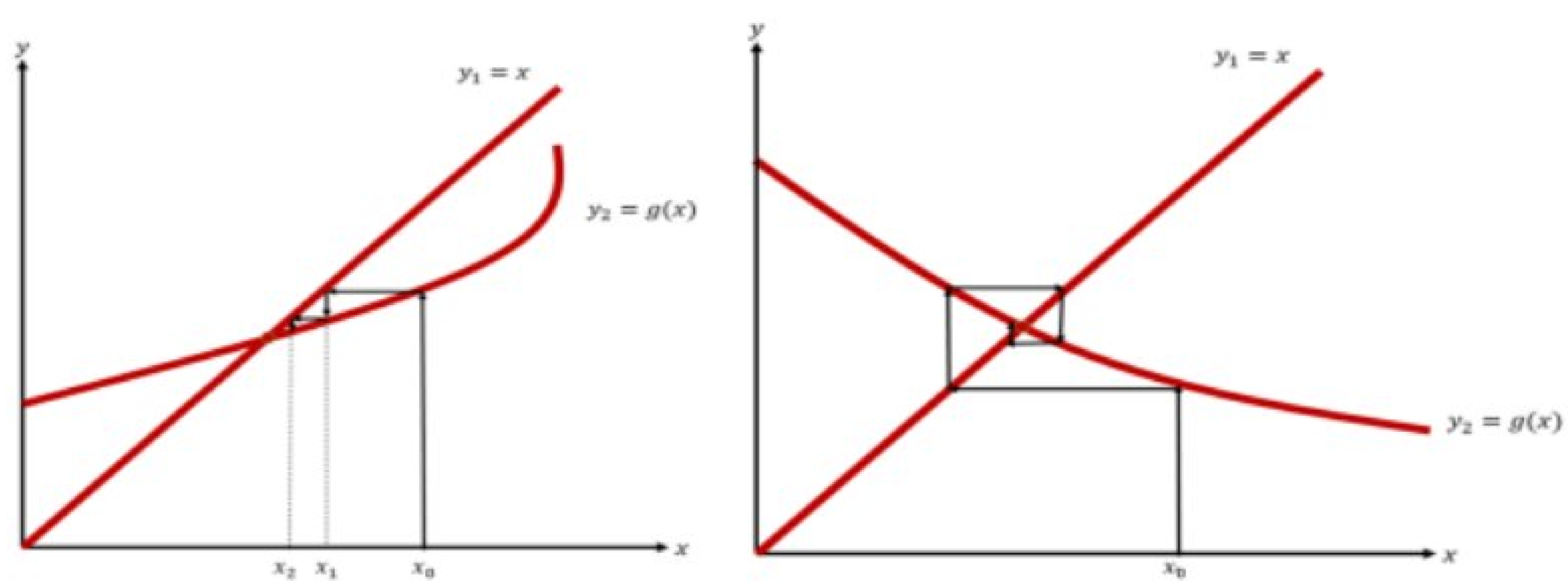
1-. Investigar y describir geométricamente cuando se da la convergencia y la divergencia en los - métodos de Newton – Raphson y Punto Fijo

Punto fijo

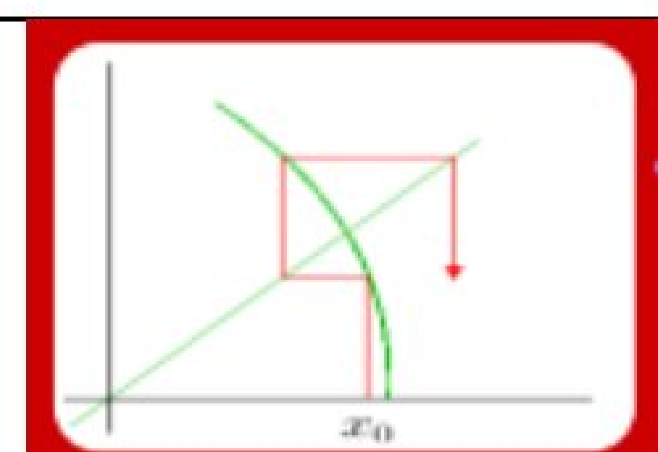
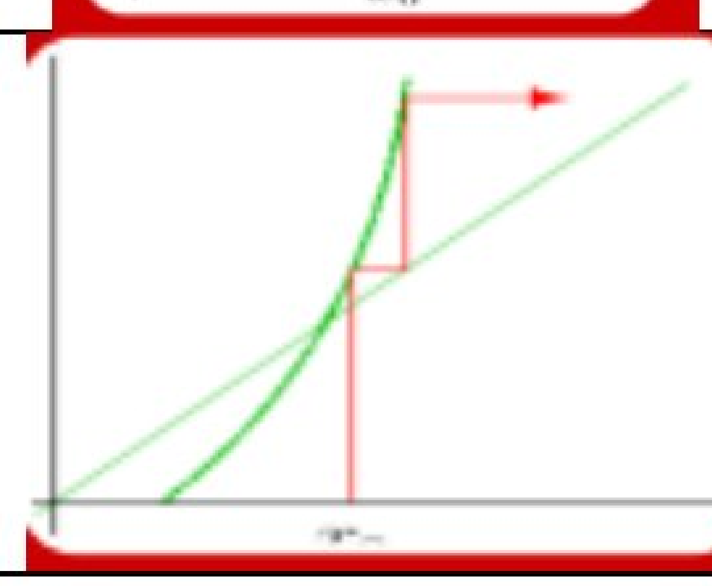
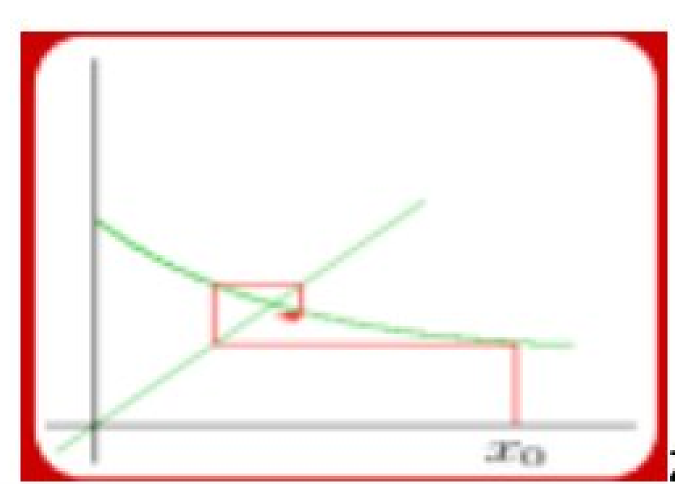
Para ilustrar geométricamente la convergencia y la divergencia del método del punto fijo, la ecuación de recurrencia es $x = g(x)$ y esta a su vez puede replantearse como $y_1 = x$

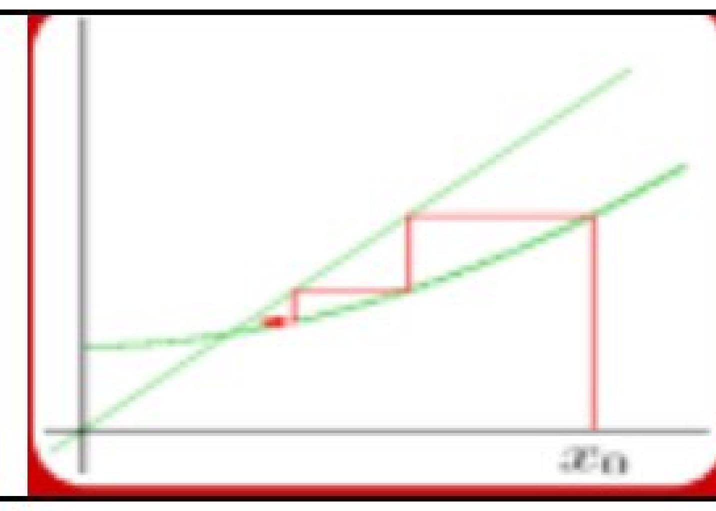
$$y_2 = g(x)$$

La raíz $f(x) = 0$ corresponde al valor de la abcisa de la intersección de las curvas definisdas por y_1 y y_2 como podemos observa en la siguiente imagen



Dependiendo de los valores que toma g´(x) en el intevalo $[x_a, x_b]$, pueden disntinguirse los cuatro casos siguientes

Diverge	Porque $\lvert g'(x) \rvert < -1$	
	Porque $\lvert g'(x) \rvert > 1$	
Converge	$\lvert g(x) \rvert \leq k < 1$De forma oscilatória	 z

	$\lvert g(x)\rvert \leq k <$ De forma Monótona	

Método Newton – Raphson

En su interpretación geométrica el valor inicial para la raíz es X_n, entonces se puede trazar una tangente desde el punto $[x_{n,}f(x_n)]$ de la curva. Comúnmente el punto donde está la tangente cruza al eje x y representa una aproximación mejorada de la raíz.

Este método puede deducirse geométricamente al considerar que la primera derivada en x puede aproximarse como la pendiente:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n)\text{-}0}{x_n\text{-}x_{n+1}}$$

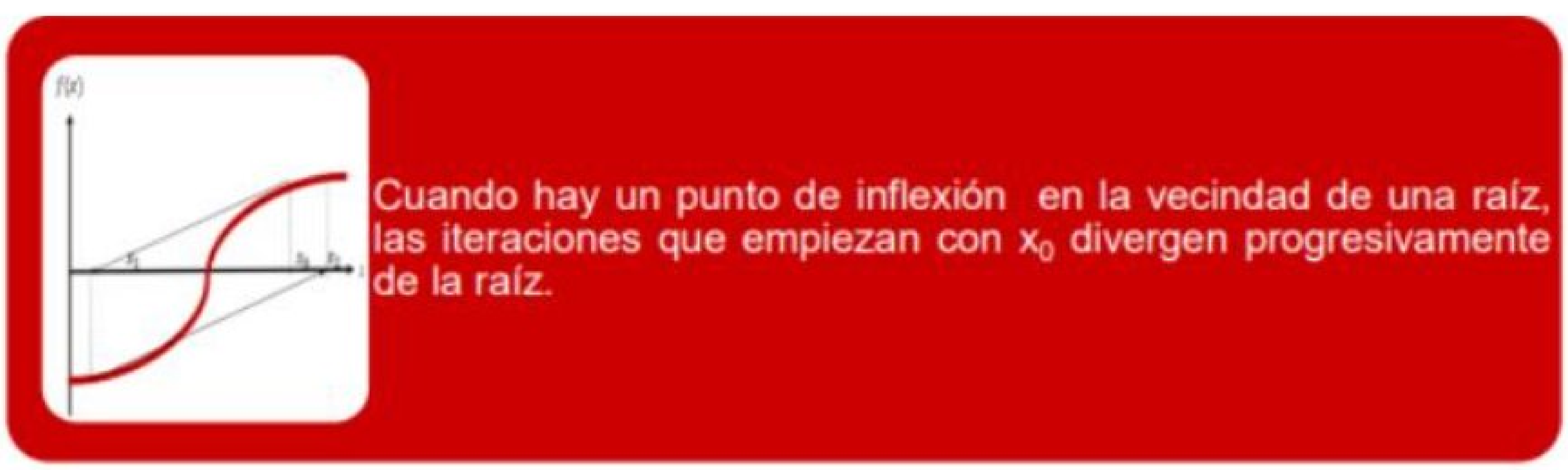
Despejando se tiene la fórmula de Newton-Raphson

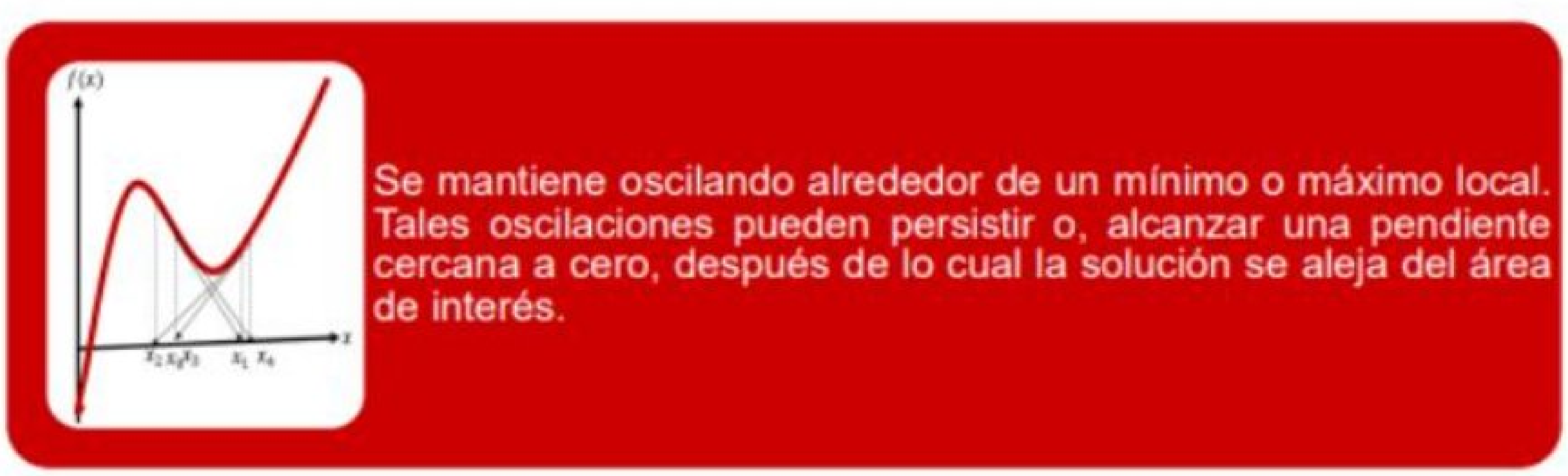
$$x_{n+1} = x_n \text{ - } \frac{f(x_n)\text{-}0}{x_n\text{- } x_{n+1}}$$

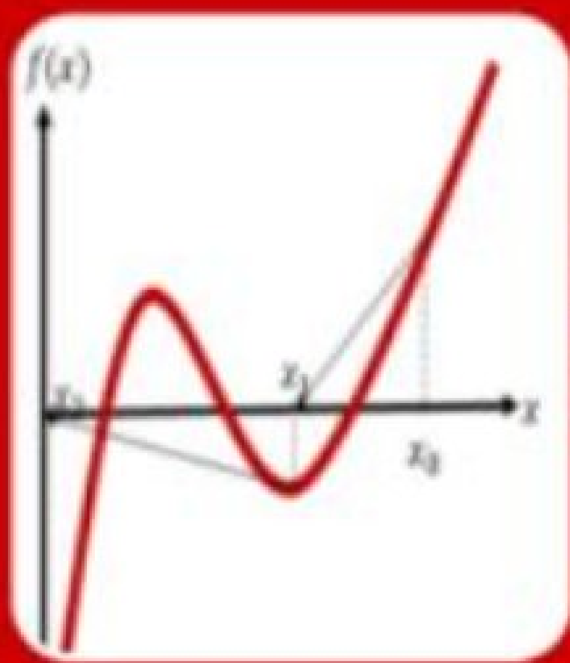
Su algoritmo es el siguiente

Sea la función $f(x)$ y (x_n) un Vlor inicial

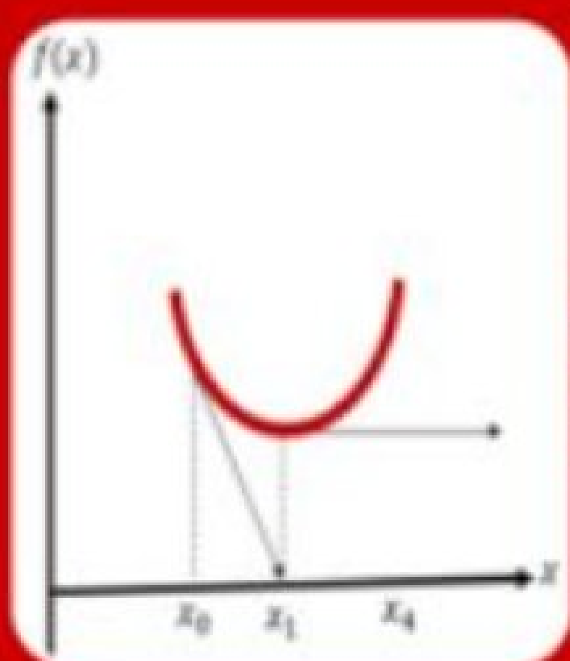
1. Calcular $X_{n+1} = x_n\text{- } \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
2. Si $f(x_{n+1}) <$ tol., entonces el rpocedimiento es exitoso
3. De no cumplirse el criterio de paro, tomar x_{n+1}cmo x_n y regresar al paso 1







Un valor inicial cercano a una raíz salta a una posición varias raíces más lejos. Esta tendencia a alejarse del área de interés se debe a que se encuentran pendientes cercanas a cero



Una pendiente cero $[f'(x)]$ causa una división entre cero en la fórmula de Newton-Raphson, esto significa que la solución se dispara horizontalmente y jamás toca al eje x.

Ejercicio 2- Determine la raíz positiva de la siguiente ecuación, mediante el Método de Punto Fijo y Newton-Raphson, con una tolerancia de 0.00001:

log(2+x)−x2=0

Punto Fijo Código:

```
clc;clear;close all
f=inline('log(2+x)-x.^2');
x=-4:0.0001:4;
y=f(x);
subplot 211;
plot(x,y)
grid on

g=inline('sqrt(log10(x+2))');
subplot 212
plot(x,g(x),x,x)
grid on
x0=0.070;
```

Command window

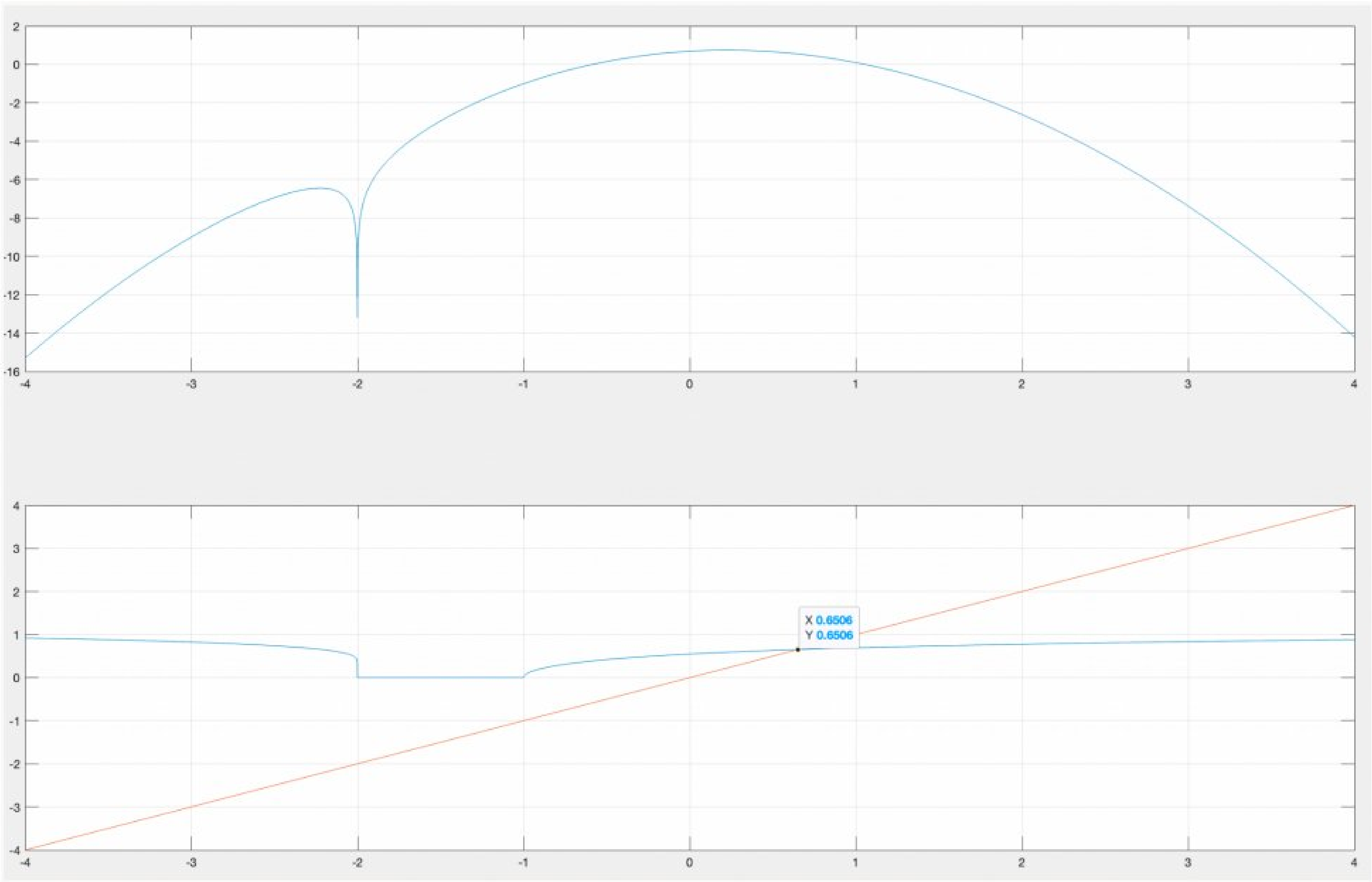
```
>> x1=g(x0)

x1 =

    0.5621

>> e=abs(x1-x0)

e =

    0.4921

>> x2=g(x1)

x2 =

    0.6392

>> e=abs(x2-x1)

e =

    0.0771

>> x3=g(x2)

x3 =

    0.6492

>> e=abs(x3-x2)

e =

    0.0100
```

```
x4 =

    0.6505

>> e=abs(x4-x3)

e =

    0.0013

>> x5=g(x4)

x5 =

    0.6506

>> e=abs(x5-x4)

e =

   1.5909e-04

>> x6=g(x5)

x6 =

    0.6507

>> e=abs(x6-x5)

e =

   2.0032e-05
```

Tabla

i	xi	error
0	0.7	-
1	0.5621	0.4921
2	0.6392	0.0771
3	0.6492	0.01
4	0.6505	0.0013
5	0.6506	0.00015909
6	0.6507	0032e-05

Gráfica



Raíz 0.65506

Newton-Raphson código:

clc;clear;close all

```
f=inline('log(2+x)-x.^2');
x=-4:0.0001:4;
plot(x,f(x))
grid on
x0=0.070;
syms x
f1=diff(f(x));
f1=inline(f1);
```

Command Window

```
>> x1=x0-f(x0)/f1(x0)

x1 =

   -2.0363

>> e=abs(x1-x0)

e =

    2.1063

>> x2=x1-f(x1)/f1(x1)

x2 =

  -2.3540 + 0.1338i

>> e=abs(x2-x1)

e =

    0.3447

>> x3=x2-f(x2)/f1(x2)

x3 =

   0.5358 + 0.1614i

>> e=abs(x3-x2)

e =

    2.8899
```

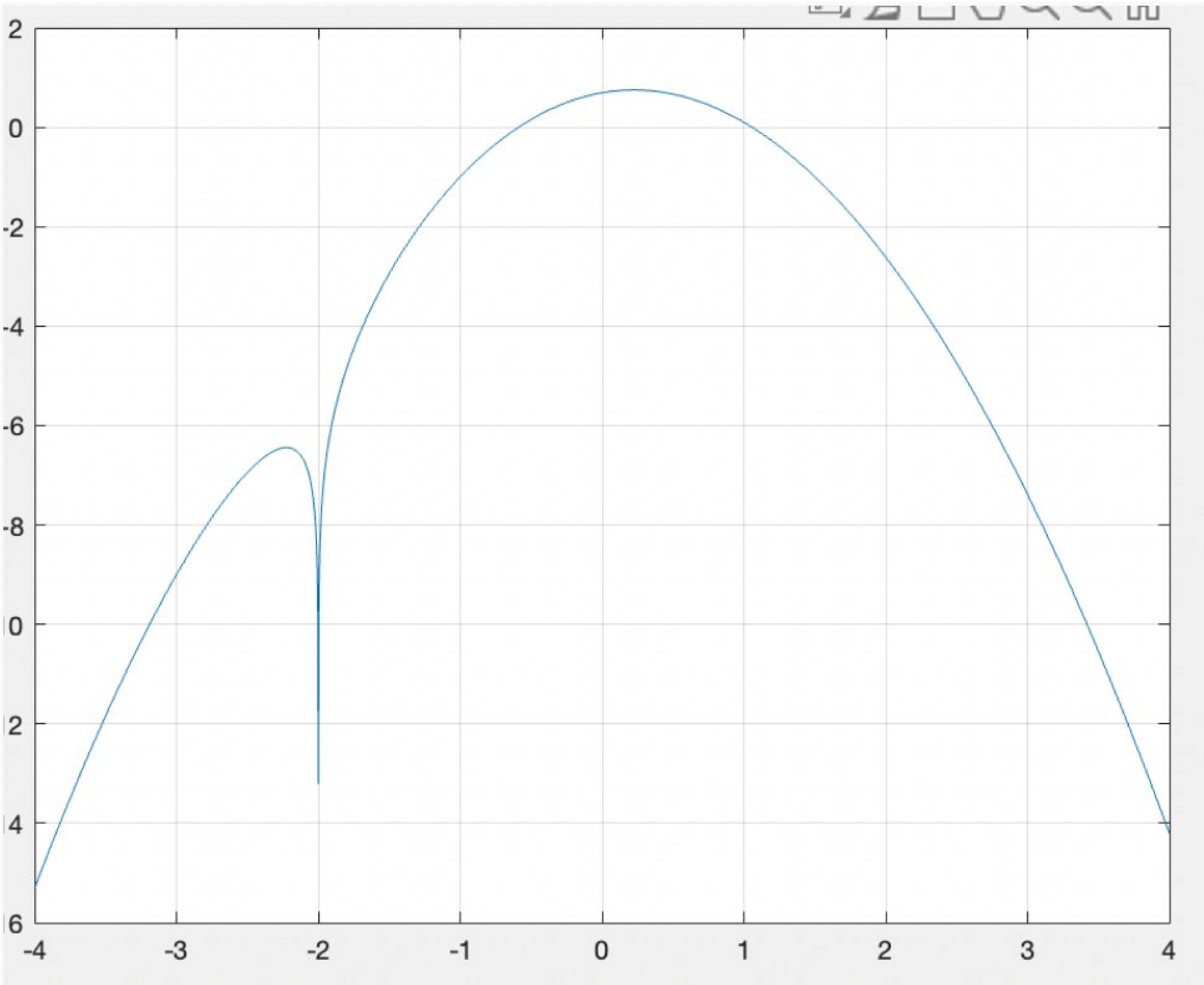
```
>> x4=x3-f(x3)/f1(x3)

x4 =

   1.2539 - 0.3677i

>> e=abs(x4-x3)

e =

    0.8920

>> x5=x4-f(x4)/f1(x4)

x5 =

   1.0382 - 0.0758i

>> e=abs(x5-x4)

e =

    0.3630

>> x6=x5-f(x5)/f1(x5)

x6 =

   1.0537 + 0.0014i

>> e=abs(x6-x5)

e =

    0.0787
```

```
>> x7=x6-f(x6)/f1(x6

x7 =

   1.0571 - 0.0000i

>> e=abs(x7-x6)

e =

    0.0037

>> x8=x7-f(x7)/f1(x7

x8 =

   1.0571 - 0.0000i

>> e=abs(x8-x7)

e =

   7.9416e-06

>> x9=x8-f(x8)/f1(x8

x9 =

   1.0571 + 0.0000i

>> e=abs(x9-x8)

e =

   3.7180e-11
```

Tabla

i	xi	error
0	0.7	-
1	-2.0363	2.1063
2	.3540 + 0.133	0.3447
3	0.5358 + 0.1614i	2.8899
4	1.2539 - 0.3677i	0.8920
5	1.0382 - 0.0758i	0.3630
6	1.0537 + 0.0014i	0.0787
7	1.0571 - 0.000	0.0037
8	1.0571 - 0.000	7.9416E-06
9	.0571 + 0.000	3.72E-11

Gráfica



3. Una mezcla equimolar de monóxido de carbono y oxigeno alcanza el equilibrio a 300 K y a una presión de 5 atm. La reacción teórica es:

$$CO + \frac{1}{2}O_2 \rightleftarrows CO_2$$

La reacción química real se escribe como:

$$CO + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow xCO + \frac{1}{2}(1+x)O_2 + (1-x)CO_2$$

La ecuación de equilibrio químico para determinar la fracción del CO restante, x, se escribe como:

$$K_p = \frac{(1-x)(3+x)^{1/2}}{x(x+1)^{1/2}P^{1/2}} \qquad 0 < x < 1$$

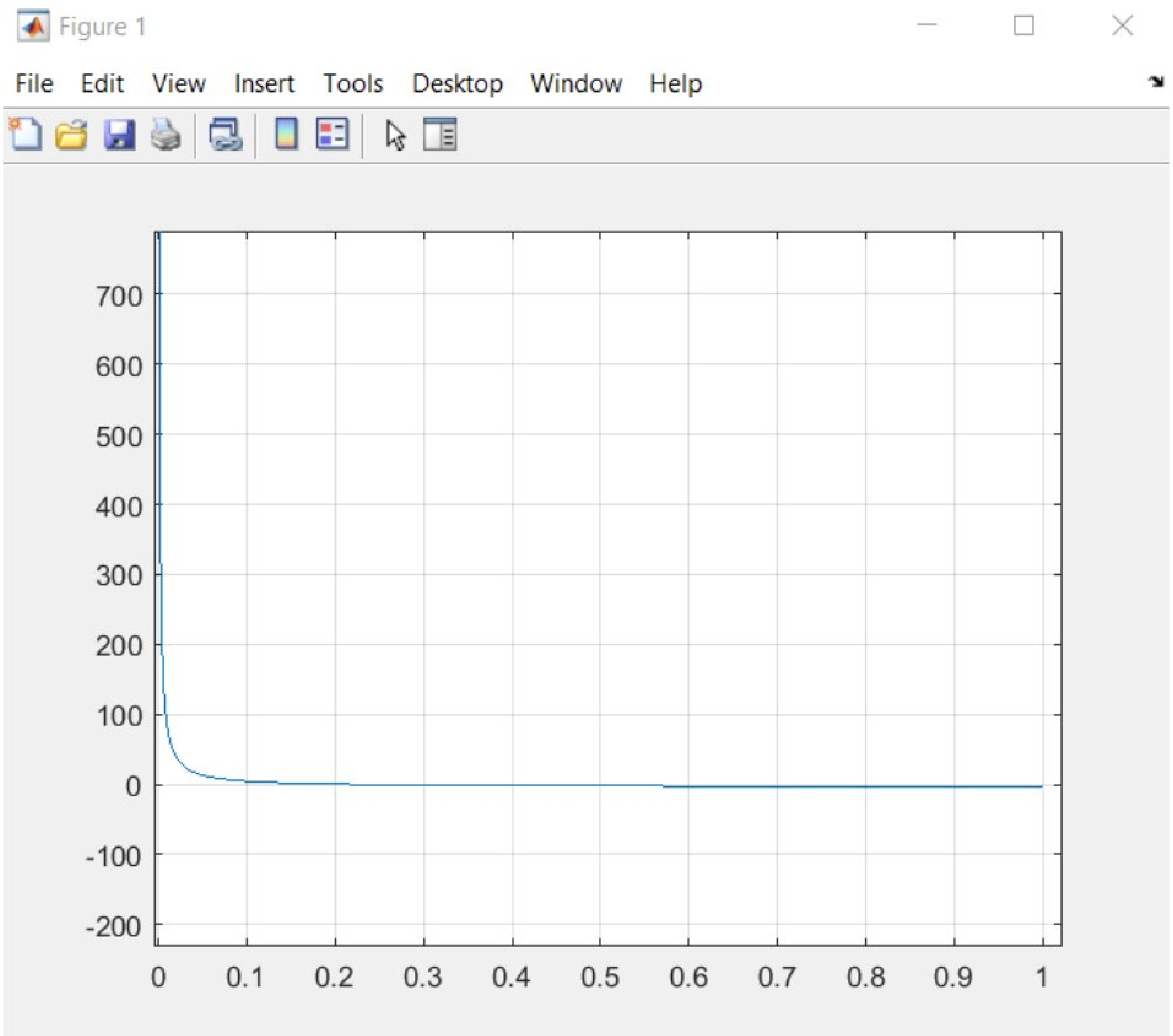
Donde $K_p = 2.86$ es la constante de equilibrio para $CO + \frac{1}{2}O_2 \rightleftarrows CO_2$ a 3200°K y P = 4 es la presión. Determinar el valor x por medio del Método de Newton-Raphson con una tolerancia de 0.0001.

Solución:

Raíz= 0.221147, error= 6.82769e-005

CODIGO

```
close all
clear all
f=inline('(((1-x).*sqrt(3+x))./(2*x.*sqrt(x+1)))-2.86');
x=0:0.0001:1;
plot(x,f(x))
grid on
x0=0.2;
```



COMMAND WINDOW

```
syms x

f1=diff(f(x));

f1=inline(f1);

x1=x0-f(x0)/f1(x0)


x1 =


   0.2191


>> e=abs(x1-x0)

e =


   0.0191


>>

>> x2=x1-f(x1)/f1(x1)


x2 =


   0.2211
```

```
>> e=abs(x2-x1)

e =

   0.0020

>> x3=x2-f(x2)/f1(x2)

x3 =

   0.2211

>> e=abs(x3-x2)

e =

  1.9406e-05

>> x4=x3-f(x3)/f1(x3)

x4 =

   0.2211

>> e=abs(x4-x3)

e =

  1.7344e-09

>> x5=x4-f(x4)/f1(x4)

x5 =

   0.2211

>> e=abs(x5-x4)

e =

    0

>> x6=x5-f(x5)/f1(x5)

x6 =

   0.2211

>> e=abs(x6-x5)

e =

    0

>>
```

i	X1	ERROR

0	0.2	
1	0.2191	0.2191
2	0.2211	0.0020
3	0.2211	1.9406e-05
4	0.2211	1.7344e-09
5	0.2211	0
6	0.2211	0

EJERCICIO 4. Las frecuencias naturales de vibración de una varilla uniforme sujetada por un extremo y libre por el otro son soluciones de:

$$\cos(\beta l)\cosh(\beta l) + 1 = 0$$

Donde:

$\beta = \rho\omega^2/El$
$l = Longitud\ de\ la\ varilla\ en\ metros$
$\omega = Frecuencia\ en\ s^{-1}$
$\rho = Densidad\ del\ material\ de\ la\ varilla$
$El = Rigidez\ de\ flexion.$

Para una varilla de longitud igual a 1m, determine el valor más pequeño de β que satisfaga la ecuación mediante el Método de Newton –Raphson con una tolerancia de 0.0001.

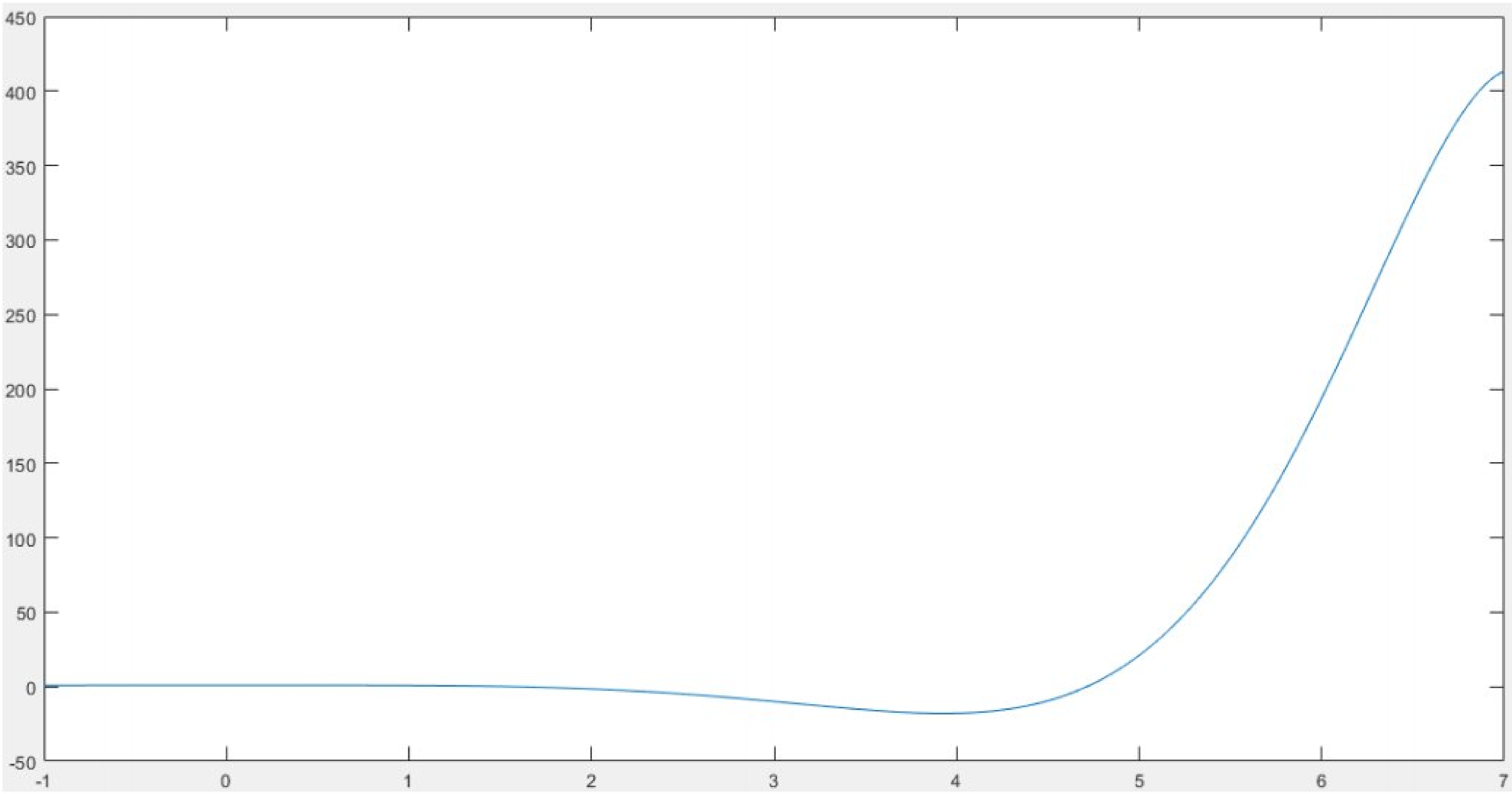
COMMAND WINDOW

```
>> x1=x0-subs(f,x0)/subs(f1,x0)
   e1=abs(x1-x0)
>> x2=x1-subs(f,x1)/subs(f1,x1)
   e2=abs(x2-x1)
>> x3=x2-subs(f,x2)/subs(f1,x2)
   e3=abs(x3-x2)
>> x4=x3-subs(f,x3)/subs(f1,x3)
   e4=abs(x3-x2)
>> x5=x4-subs(f,x4)/subs(f1,x4)
  e5=abs(x5-x4)
```

CÓDIGO

```
clc; clear; close all
f=@(x) cos(x*1)* cosh(x*1);
x=-1:0.01:7;
plot(x,subs(f,x))
x0=2.5;
syms x
f1=diff(subs(f,x));
f1=subs(f1);
```

GRÁFICO



RESULTADOS

i	X1	Error
0	2.5	-
1	1.9231	0.5768
2	1.6512	0.2719
3	1.5762	0.0750
4	1.5708	0.0054
5	1.8751	7.51814E-05

El valor de β que satisface la ecuación es 1.8751 con un error de 7.51814E-05