Aproximar por el método de Leonhard Euler $y(x = b)$ para la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad con \quad a \leq x \leq b, \quad sujeta\ a\ la\ condición\ (valor)\ inicial\ y(x = a) = \alpha\ .$$

Ejercicio 1.

Resolver la siguiente ecuación diferencial de primer grado homogénea con coeficientes constantes y con valor inicial de forma analítica.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{4};\ con\ valor\ inicial \quad y(0) = 1.$$

Resolvemos por el método de separación de variables.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{4}$$

$$\frac{4}{y}dy = dx$$

$$4\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$4lny + c_1 = x + c_2$$

$$4lny = x + c_2 - c_1$$

$$c_3 = c_2 - c_1$$

$$4lny = x + c_3$$

$$lny = \frac{x + c_3}{4}$$

$$lny = \frac{x}{4} + \frac{c_3}{4}$$

$$c = \frac{c_3}{4}$$

$$lny = \frac{x}{4} + c$$

$$e^{(lny)=} = e^{\left(\frac{x}{4}+c\right)}$$

$$y = e^{\frac{x}{4}+c} = e^{\frac{x}{4}}e^{c}$$

el valor (condición) inicial y(x=0)=1

$$y(x = 0) = e^{\frac{0}{4}+c} = 1$$

$$y(x = 0) = e^{\frac{x}{4}+c} = e^{0+c} = e^0e^c = 1e^c = e^c = 1$$

$$e^c = 1$$

$$y(x) = 1e^{\frac{x}{4}}$$

$$y(x) = e^{\frac{x}{4}};\ \ solución\ analítica\ a\ la\ ecuación\ diferencial,\ con\ valor\ inicial\ y(0) = 1$$

comprobación

$y(x) = e^{\frac{x}{4}}$

$u = \dfrac{x}{4}$

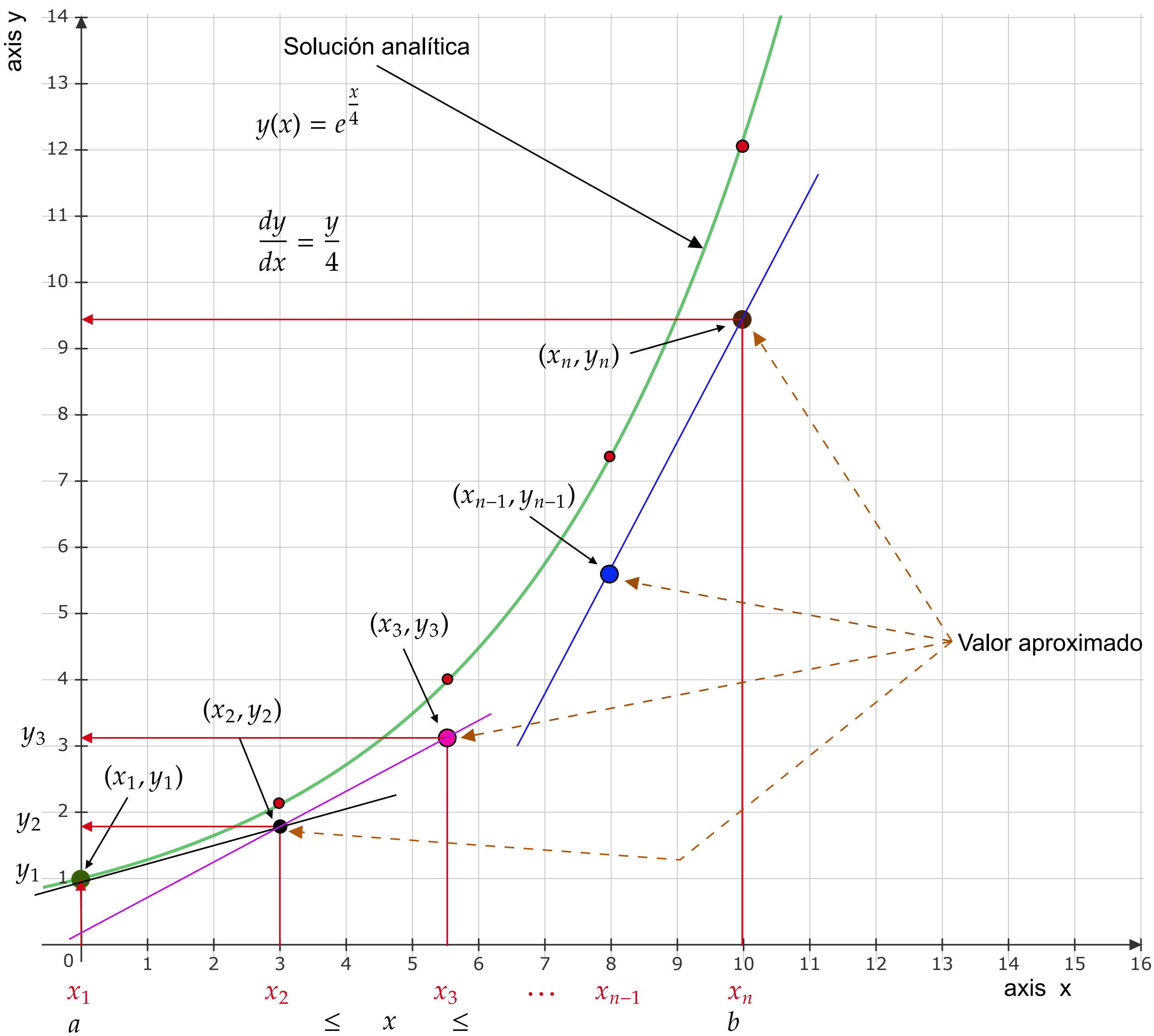
$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{dy}{dx} = e^{\frac{x}{4}}\left(\dfrac{du}{dx}\right) = e^{\frac{x}{4}}\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{e^{\frac{x}{4}}}{4} = \dfrac{y}{4}$

$y(x = 0) = e^{0} = 1$

Se grafica la solucion analítica del ejercicio 1, junto con la aproximación. ver figura 1.

**Figura 1.**



Damos inicio al método de Leonhard Euler (Una interpretación geométrica) para aproximar una ecuación diferencial con valor inicial.
Con base en la figura 1.

Con la ecuación de la recta punto-pendiente
$y - y_1 = m(x - x_1)$ (1)
Un significado geométrico de la pendiente de la recta tangente es
$m = \frac{dy}{dx}$ (2)
Substituyendo (2) en (1)
$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$ (3)
Se despeja la derivada de la ecuación diferencial, en forma general
$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (4)
Substituyendo (4) en (3)
$y - y_1 = f(x, y)(x - x_1)$ (5)
Despejar $y$ de la ecuación (5)
$y = f(x, y)(x - x_1) + y_1$ (6)
Evaluar la variable independiente $x$ en $x = x_2$ y substituir en (6)
$y(x = x_2) = f(x, y)(x_2 - x_1) + y_1$ (7)
Si observamos la figura 1, es aquí donde se aproxima la recta de color negro a la solución analítica. El primer punto que se aproxima a la solucón de la ecuación diferencia es
$y(x = x_2) = y_2$ (8)
Substituyendo (8) en (7)
$y_2 = f(x, y)(x_2 - x_1) + y_1$ (9)
Se necesita saber cuanto vale la pendiente de la recta tangente de color negro que pasa por el punto $(x_1, y_1)$.
Substituyendo el punto $(x_1, y_1)$ en (4)
$f(x_1, y_1)$ (10)
Finalmente, ubstituyendo (10) en (9)
$y_2 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + y_1$ (a1)
En este momento se ha dado un solo paso, pero se necesitan mas pasos para llegar desde $x = a$ hasta $x = b$.

Repetimos la misma metodología, solo que ahora el punto del que partimos será $(x_2, y_2)$
recta punto-pendiente
$y - y_2 = m_2(x - x_2)$ (1.1)
$y - y_2 = f(x_2, y_2)(x - x_2)$ (1.2)
Despejar $y$ de la ecuación (1.2)
$y = f(x_2, y_2)(x - x_2) + y_2$ (1.3)
Finalmente evaluar la ecuación (1.3) en $x = x_3$
$y_3 = f(x_2, y_2)(x_3 - x_2) + y_2$ (a2)
En este momento se han dado dos pasos, pero se necesitan mas pasos para llegar desde $x = a$ hasta $x = b$.

Repetimos la misma metodología, solo que ahora el punto de partida será $(x_3, y_3)$
recta punto-pendiente

$$y - y_3 = m_3(x - x_3) \qquad (1.4)$$

$$y - y_3 = f(x_3, y_3)(x - x_3) \qquad (1.5)$$

Despejar $y$ de la ecuación (1.5)

$$y = f(x_3, y_3)(x - x_3) + y_3 \qquad (1.6)$$

Finalmente evaluar la ecuación (1.6) en $x = x_4$

$$y_4 = f(x_3, y_3)(x_4 - x_3) + y_3 \qquad (a3)$$

En este momento se han dado tres pasos, pero se necesitan mas pasos para llegar desde $x = a$ hsata $x = b$.

Debemos continuar de la misma forma para llegar desde $x = a$ hasta $x = b$.
¿Pero hay algún patrón en los tres pasos que se han dado?
La respuesta es **SI**. Se reconoce un patrón y por lo tanto podemos escribir la siguiente aproximacón, pero esta vez sin escribir todos los pasos. Se marca con color rojo y verde.

$y_1 = y(x_1 = a) = \alpha$; es el valor inicial de la ecuación diferencial

$$y_2 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + y_1$$

$$y_3 = f(x_2, y_2)(x_3 - x_2) + y_2$$

$$y_4 = f(x_3, y_3)(x_4 - x_3) + y_3$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$y_n = f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + y_{n-1}$; haciendo uso de un contador

$$y_i = f(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + y_{i-1} \ ; \ para \ \ i = 2, 3, 4, \ \dots, \ n \qquad (b1)$$

En la figura 2 se muestran los pasos o incrementos necesarios para llegar desde $x = a$ hasta $x = b$.

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1$$

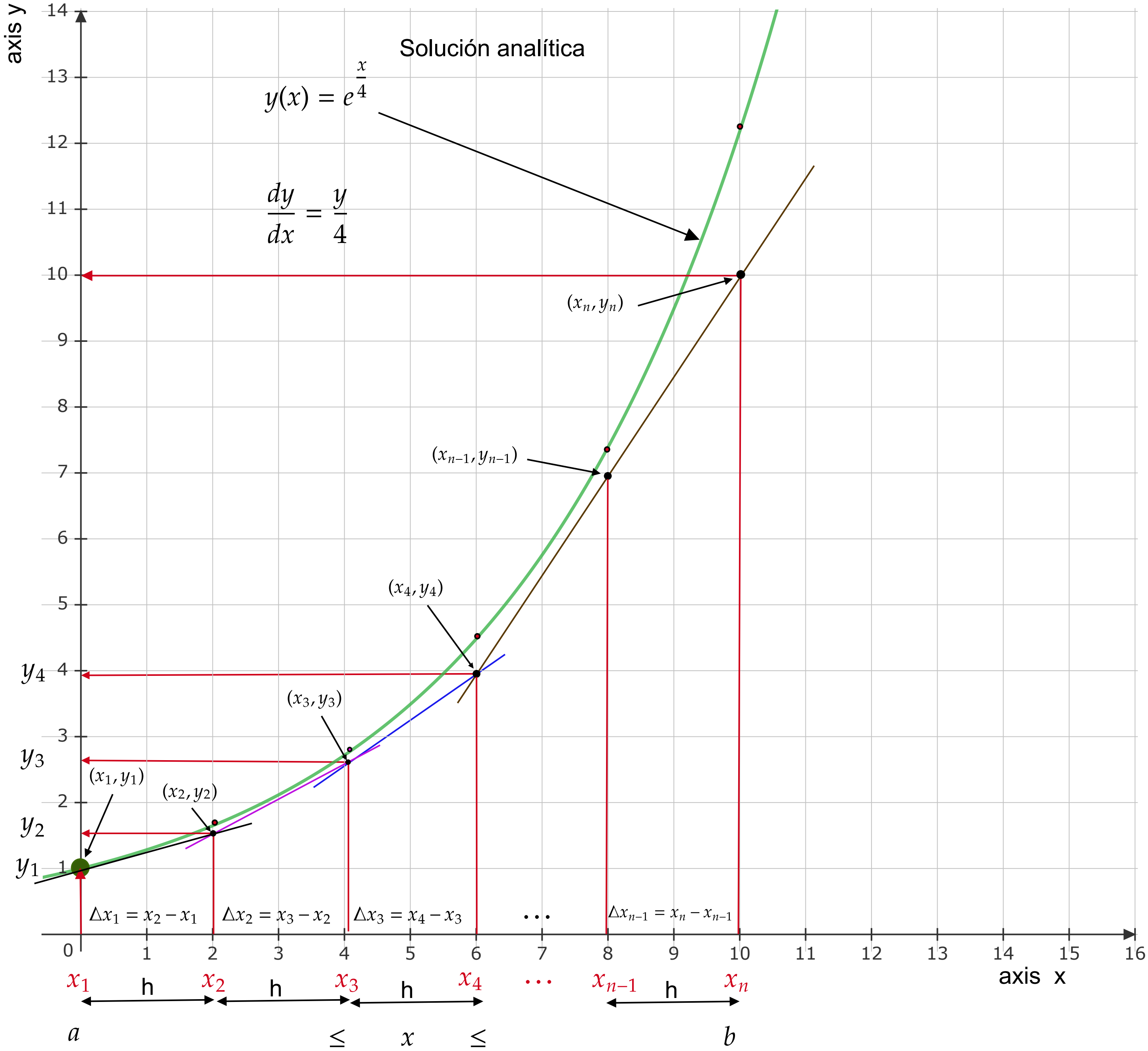
$$\Delta x_2 = x_3 - x_2$$

$$\Delta x_3 = x_4 - x_3$$

$$\vdots$$

$$\Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1}$$

**Figura 2.**




Substituyendo los incrementos en (b1)

$y_1 = y(x_1 = a) = \alpha$; es el valor inicial de la ecuación diferencial

$y_2 = f(x_1, y_1)\Delta x_1 + y_1$

$y_3 = f(x_2, y_2)\Delta x_2 + y_2$

$y_4 = f(x_3, y_3)\Delta x_3 + y_3$

$\vdots \qquad \vdots$

$y_n = f(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta x_{n-1} + y_{n-1}$; haciendo uso de un contador

$$y_i = f(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta x_{i-1} + y_{i-1} \;;\; para\;\; i = 2, 3, 4, \ldots, n \qquad \text{(b2)}$$

Si se hace que el paso o el incremento sea constante

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \ldots = \Delta x_{n-1} = h \qquad (1.7)$$

Sunstituyendo (1,7) en (b2)

$y_1 = y(x_1 = a) = \alpha$; es el valor inicial de la ecuación diferencial
$y_2 = f(x_1, y_1)h + y_1$
$y_3 = f(x_2, y_2)h + y_2$
$y_4 = f(x_3, y_3)h + y_3$
$\vdots \qquad \vdots$
$y_n = f(x_{n-1}, y_{n-1})h + y_{n-1}$

Finalmente se tiene El Método de Leonhard Euler de aproximación a la solución de una ecuación diferencial.

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})\ ;\ para\ \ i = 2, 3, 4, \ \ldots\ , \ n \qquad (A)$$

Organozando la información en la tabla 1.
Tabla 1. Método de Leonhard Euler

| contador $i$ | variable independiente $x_i$ | Método de Leonhard Euler (A) $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})\ ;\ para\ \ i = 2, 3, 4, \ \ldots\ , \ n$ |
|---|---|---|
| 1 | $x_1 = a = 0 \leftarrow valor\ inicial$ | $y_1 = y(x = a) = \alpha = 1 \leftarrow valor\ inicial$ |
| 2 | $x_2 = x_1 + h$ | $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ |
| 3 | $x_3 = x_1 + 2h$ | $y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$ |
| 4 | $x_4 = x_1 + 3h$ | $y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| n | $x_n = x_1 + (n-1)h$ | $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$ |

Se definen las siguientes variables.
n=número de puntos para ir desde $x = a \quad hasta \quad x = b$.
N=número de subintervalos para ir desde $x = a \quad hasta \quad x = b$.

Para calcular h

$$h = \frac{b-a}{n-1} \qquad (A1)$$

$$h = \frac{b-a}{N} \qquad (A2)$$

Ejercicio 1.

Utilizar el método de Leonhard Euler con la ecuación diferencia $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{4} \quad con\ valor\ de\ inicio\ \ y(0) = 1$, para aproximar $y(x = 10)$ empleando un incremento constante de h=1.

Solución al ejercicio 1.

Una forma de organizar los calculos es llenando la información contenida en la tabla 1.
Utilizando la ecuación A1 despejamos $n$ que son los la cantidad de puntos.

$$h = \frac{b-a}{n-1}$$

Se sabe por el ejercicio que

$a = 0$

$b = 10$

$h = 1$

$$1 = \frac{10-0}{n-1} = \frac{10}{n-1}$$

$n - 1 = 10$

$n = 10 - 1$

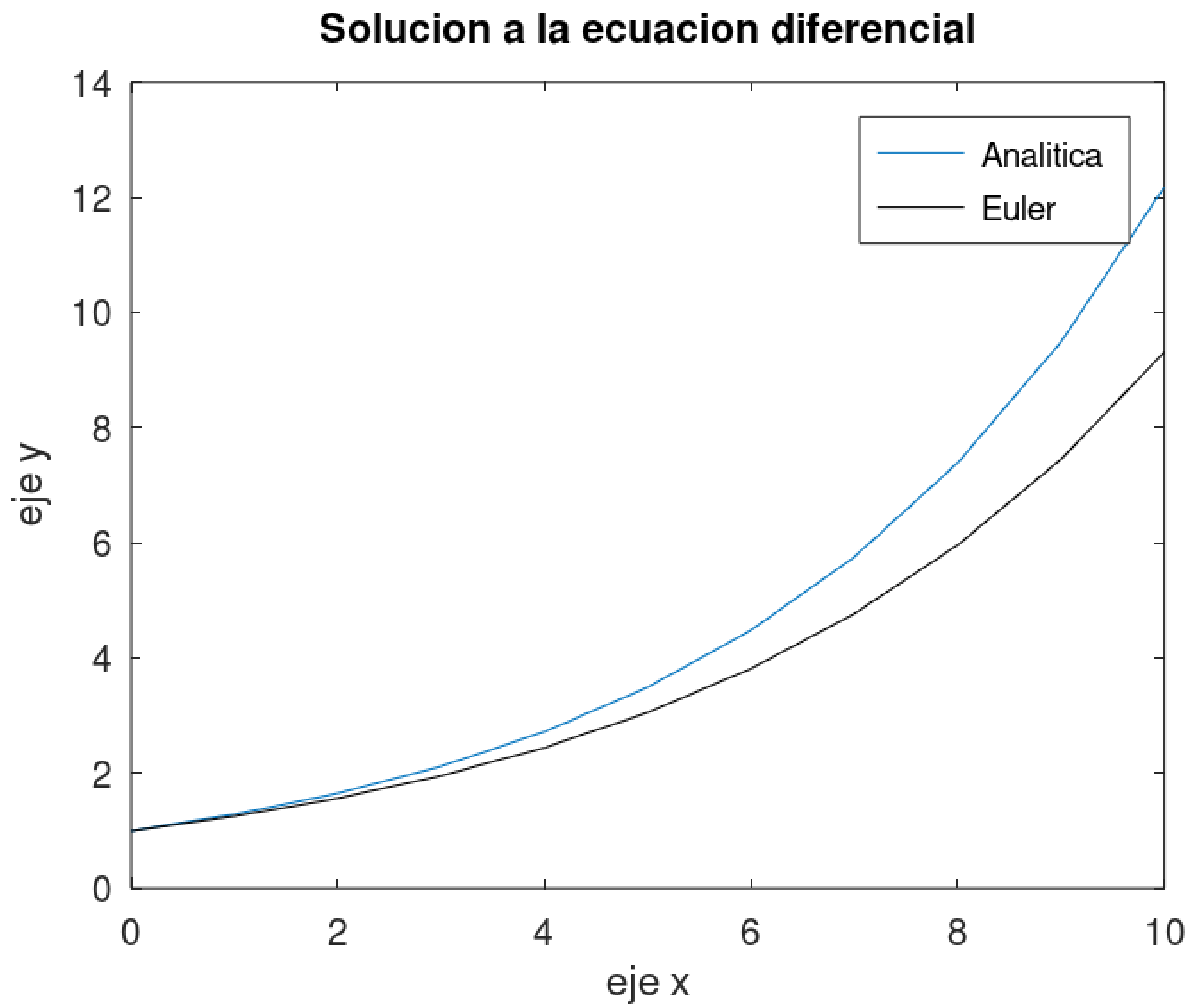
$n = 11 \ puntos$

Por lo tanto la tabla 2 tendrá 11 puntos para aproximar $y(x = 10)$

Tabla 2. $f(x, y) = \frac{y}{4}$

| contador $i$ | variable independiente $x_i$ | Solución aproximación por el métodod de Leonhard Euler. $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})\ ;\ para\ \ i = 2, 3, 4, \ldots, n$ | Solución analítica. $y(x) = e^{\frac{x}{4}}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $x_1 = a = 0 \leftarrow valor\ inicial$ | $y_1 = y(x = a) = \alpha = 1 \leftarrow valor\ inicial$ | $y_1 = 1$ |
| 2 | $x_2 = 1$ | $y_2 = 1 + (1)\frac{1}{4} = 1.25$ | $y_2 = 1.2840$ |
| 3 | $x_3 = 2$ | $y_3 = 1.25 + (1)\frac{1.25}{4} = 1.5625$ | $y_3 = 1.6487$ |
| 4 | $x_4 = 3$ | $y_4 = 1.5625 + (1)\frac{1.5625}{4} = 1.9531$ | $y_4 = 2.1170$ |
| 5 | $x_5 = 4$ | $y_5 = 1.9531 + (1)\frac{1.9531}{4} = 2.4414$ | $y_5 = 2.7183$ |
| 6 | $x_6 = 5$ | $y_6 = 2.4414 + (1)\frac{2.4414}{4} = 3.0518$ | $y_6 = 3.4903$ |
| 7 | $x_7 = 6$ | $y_7 = 3.0517 + (1)\frac{3.0517}{4} = 3.8147$ | $y_7 = 4.4817$ |
| 8 | $x_8 = 7$ | $y_8 = 3.8146 + (1)\frac{3.8146}{4} = 4.7684$ | $y_8 = 5.7546$ |
| 9 | $x_9 = 8$ | $y_9 = 4.7683 + (1)\frac{4.7683}{4} = 5.9605$ | $y_9 = 7.3891$ |
| 10 | $x_{10} = 9$ | $y_{10} = 5.9604 + (1)\frac{5.9604}{4} = 7.4506$ | $y_{10} = 9.4877$ |
| n=11 | $x_{11} = b = 10$ | $y_{11} = 7.4505 + (1)\frac{7.4505}{4} = 9.3132$ | $y_{11} = 12.182$ |

Graficar la solución analítica junto con la solución aproximación de Leonhard Euler. Ver figura 3.
**Figura 3.**




**Respuesta**

**El valor aproxinado de $y(x=10)$ utilizando un incremento constante de h=1 o para  n=11 puntos. por el método de Leonhard Eules es;**

$y(x=10) \approx 9.3132$

**con un error relativo porcentual de 23.552%**

## Command window.

>> a=0; % valor inicial en el eje x
>> b=10; % valor final
>> h=1; % tamaño de paso
>> n=11;  % total de puntos
>> x=a:h:b; % son todos los puntos sobre el eje x para llegar desde x=a  hasta x=b
>> yEuler(1)=1; % valor inicial en el eje y
>> f=@(x,y)y/4; % es la funcion $f(x_{i-1}, y_{i-1})$
>> yAnalitica=@(x)exp(x/4); % solución analítica de la ecuación diferencial

```
>> for i=2:1:n % total de puntos para llegar desde x=a  hasta  x=b
  yEuler(i)=yEuler(i-1)+h*f(x(i-1),yEuler(i-1)); % método de Leonhard Euler
end
>> yEuler
yEuler =

 Columns 1 through 11:

   1.0000   1.2500   1.5625   1.9531   2.4414   3.0518   3.8147   4.7684   5.9605   7.4506   9.3132

>> yAnalitica(x)
ans =

 Columns 1 through 11:

    1.0000    1.2840    1.6487    2.1170    2.7183    3.4903    4.4817    5.7546    7.3891   9.4877   12.1825
```

>> yAprox=yEuler(length(yEuler)) % valor aproximado $y(x=b)$

**yAprox = 9.3132**

```
>> errorrelativo=abs((yAnalitica(b)-yAprox)/yAnalitica(b))*100 % error relativo porcentual
errorrelativo = 23.552
>> plot(x,yAnalitica(x))
>> hold on
>> plot(x,yEuler,'-k')
>> xlabel('eje x')
>> ylabel('eje y')
>> title('Solucion a la ecuacion diferencial')
>> legend('Analitica','Euler')
>>
```