INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA DE BIOTECNOLOGÍA

Departamento de Ciencias Básicas

Academia de Matemáticas Aplicadas

Métodos Numéricos (Taller)

Grupo: 4FV3

Práctica No.2: "MEDICIONES DEL ERROR EN APROXIMACIONES DE FUNCIONES CON LA SERIE DE TAYLOR"

Equipo No. :

- Castillejos Varillas Luis Ángel
- Flores Salgado Getsemaní
- Iturbide Ríos Génesis
- Muñoz del Río Fernanda Natzieli
- Reyes Méndez Gustavo Daniel
- Bautista Díaz Sebastian Alí

Fecha: 17/02/2022

Profesores:

- Jesús Granados Hernández

○ Juan Claudio Ortiz Juárez

INTRODUCCIÓN

POLINOMIO

Un polinomio es una expresión algebraica de sumas, restas y multiplicaciones ordenadas hecha de variables, constantes y exponentes.

En álgebra, un polinomio puede tener más de una variable (x, y, z), constantes (números enteros o fracciones) y exponentes (que solo pueden ser números positivos enteros).

Los polinomios están formados por términos finitos. Cada término es una expresión que contiene uno o más de los tres elementos de los que están hechos: variables, constantes o exponentes. Por ejemplo: 9, 9x, 9xy son todos términos. Otra forma de identificar los términos es que se separan por sumas y restas.

Para resolver, simplificar, sumar o restar polinomios se deben agrupar los términos con las mismas variables como, por ejemplo, los términos con x, los términos con y y los términos que no tienen variables. Además, es importante fijarse en el signo que está antes del término que determinará si suma, resta o multiplica. Por ejemplo:

$4x + 5y + 2xy + 2y + 2$

Se agrupan, suman o restan los términos con las mismas variables, o sea:

$+4x = 4x$

$+5y + 2y = 7y$

$+2xy = 2xy$

$+2 = 2$

Resultado final es: $4x + 7y + 2xy + 2$

Polinomio de Taylor

La definición “oficial” del polinomio de Taylor es que se trata de una aproximación polinómica de una función n veces derivable en un punto exacto. Esto quiere decir que el Polinomio de Taylor no es más que la suma finita derivadas locales que son evaluadas en un punto concreto.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Definimos:

f(x): función de *x*.

f(x0): función de *x* en un punto concreto x0. Formalmente se escribe:

$$f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x)|_{x=x_0}$$

f(n)(x): *n*-ésima derivada de la función f(x).

El polinomio de Taylor P(x) permite calcular la aproximación al valor de una función F(x), desde un valor cercano a X, que llamamos a, mientras más cercano sea al valor de a a X, el error será menor porque la aproximación de P(A) a f(x) será mejor. El polinomio de Taylor de grado N se expresa como:

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x - a)^1 + \alpha_2 (x - a)^2 + \alpha_3 (x - a)^3 + \cdots + \alpha_N (x - a)^N$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i (x - a)^i$$

POLINOMIO DE TAYLOR PARA N=1

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

POLINOMIO DE TAYLOR PARA N=2

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

POLINOMIO DE TAYLOR PARA N=3

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

El Polinomio de Taylor viene a facilitar el trabajo con funciones. Es mucho más sencillo trabajar con un polinomio de Taylor que con la propia función porque es mucho más fácil y rápido operar, integrar o derivar con el polinomio (usando la función las operaciones serían más complejas y requerirán mayor tiempo y esfuerzo).

El polinomio de Taylor tiene distintas aplicaciones en el ámbito de las matemáticas, entre las que podemos destacar:

- La aproximación de valores.
- La resolución de algunas indeterminaciones en el cálculo de límites.
- Las desigualdades.
- Encontrar extremos relativos de funciones.
- Cálculo de la exponencial de una matriz.
- Método de Newton para encontrar ceros de funciones.

Medición del error en la aproximación

El error que se comete se puede valorar bien en su valor absoluto, es decir cuál es la magnitud real del mismo, o también en términos relativos, es decir cuál es su magnitud proporcional. Una aproximación es un valor cercano a uno considerado como real o verdadero. Está cercano a la diferencia, se conoce como error. Normalmente, la consideración de la validez de una aproximación depende de la cota de error que el experimentador considere pertinente en función del contexto del fenómeno bajo estudio. Esto implica que también debe considerarse que magnitud debe ser un valor real, que en el ámbito de la Ingeniería pocas veces se conoce, lo que obliga a adoptar convenciones.

Cuantificación de errores

Los errores se cuantifican de dos formas diferentes:

Error Absoluto. El error absoluto es la diferencia absoluta entre un valor real y un aproximado. Está dado por la siguiente fórmula:

$$E = \mid V_{Real} - V_{Aprox} \mid$$

El error absoluto recibe este nombre ya que posee las mismas dimensiones que la variable bajo estudio.

Error relativo. Corresponde a la expresión en porcentaje de un error absoluto; en consecuencia, este error es adimensional.

$$e = \frac{| V_{Real} - V_{Aprox} |}{V_{Real}} x100\,\%$$

La diferencia entre la preferencia en el uso de los dos tipos de error consiste precisamente en la presencia de las dimensiones físicas. Debido a las unidades de medición utilizadas, el manejo y la percepción del error absoluto suele ser engañoso o difícil de comprender rápidamente. Sin embargo, el manejo de porcentajes (o valores relativos) resulta más natural y sencillo de comprender. Sin embargo, el uso de estos dos tipos de errores está sujeto siempre al objetivo de las actividades desarrolladas.

OBJETIVO

El alumno emplea el polinomio de Taylor para aproximar el valor de una función y medir las diferentes formas de error.

DESARROLLO

Durante la clase se nos presento el siguiente ejemplo:

a. Determinar el polinomio de Brool Taylor (1715) para la función F(x), centrado (alrededor de xo) en xo, de orden n=4, para la función F(x)=lnx, xo=1.
b. Estime el valor de ln(1.5) con el polinomio de aproximación. Respuesta: ln(1.5) es aproximadamente = 0.4010. Error relativo porcentual=1.0910%.

Fórmula de Taylor:

$$P(x) = f(xo) + \frac{f'(xo)}{1!}(x-xo) + \frac{f''(xo)}{2!}(x-xo)^2 + \frac{f'''(xo)}{3!}(x-xo)^3 + \frac{f^{(IV)}(xo)}{4!}(x-xo)^4$$

Identificamos nuestra función: $f(x) = lnx$

La derivamos hasta la cuarta derivada:

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ ⇒ sustituimos xo = 1: $f'(xo = 1) = 1$

$f''(x) = - x^{-2} \Rightarrow f''(xo = 1) =- 1$

$f'''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f'''(xo = 1) = 2$

$f^4(x) = -6x^{-4} \Rightarrow f^4(xo = 1) =- 6$

$$f(xo = 1) = ln(1) = 0$$

Sustituimos los valores obtenidos en la serie de Taylor:

$0 + 1(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{2}{3!}(x - 1)^3 - \frac{6}{4!}(x - 1)^4$

Simplificamos:

$(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4$

Ahora identificamos los polinomios de acuerdo a su orden:

- Orden cero: Po(x)= 0
- Primer orden: $P_1(x) = x - 1$
- Segundo orden: $P_2(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 = sym$
- Tercer orden: $P_3 = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$
- Cuarto orden: $P_4 = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4$

Código de matlab:

```
clc
clear
close all
syms x %Declara la variable anonima de la función
f=log(x) %Función inical del ejemplo
x0=1; %Valor que se le otorgará a la variable
p=subs(f,x0) %Sustituye el valor de la variable por la declarada en xo
p0=subs(f,x0) %Polinomio de orden cero
p1=p0+subs(diff(f,1),x0)*(x-x0)/factorial(1) %Polinomio de primer orden
%Diff nos ayuda sacar la derivada de la función y el orden requerido
%factorial saca el factorial del valor seleccionado
p2=p1+subs(diff(f,2),x0)*(x-x0)^2/factorial(2)%Polinomio de segundo orden
p2=expand(p2)%expan nos ayuda a desarrollar más la función
p3=p2+subs(diff(f,3),x0)*(x-x0)^3/factorial(3)%Polinomio de tercer orden
p3=expand(p3)
p4=p2+subs(diff(f,4),x0)*(x-x0)^4/factorial(4)%polinomio de cuarto orden
p4=expand(p4)
t=0.1:0.01:2;%Nos indica los rangos para graficar la función
%Por ser Ln, en este caso tienen que ser posivos
y0=0*t;%Función de polinomio de orden cero
f=@(x)log(x); %Función inicial
plot (t,f(t)) %Grafica la función seleccionada con el rango indicado
grid on %Cuadricula la grafica
hold on %Nos permite ingresar más funciones en la misma grafica
plot(t,y0,'-r')
```

```
f1=@(x)x-1;%Función de polinomio de Primer orden
plot(t,f1(t),'-g')
f2=@(x)-x.^2/2+2*x-3/2;%Función de polinomio de segundo orden
plot(t,f2(t),'-k')
f3=@(x)x.^3/3 - (3*x.^2)/2 + 3*x - 11/6;%Función de polinomio de tercer orden
plot(t,f3(t),'-m')
f4=@(x)- x.^4/4 + x.^3 - 2*x.^2 + 3*x - 7/4;%Función de polinomio de cuarto orden
plot(t,f4(t),'-y')
```

Command window:

f =

log(x)

p =

0

p0 =

0

p1 =

x - 1

p2 =

x - (x - 1)^2/2 - 1

p2 = expand

- x^2/2 + 2*x - 3/2

p3 =

2*x + (x - 1)^3/3 - x^2/2 - 3/2

p3 = expand

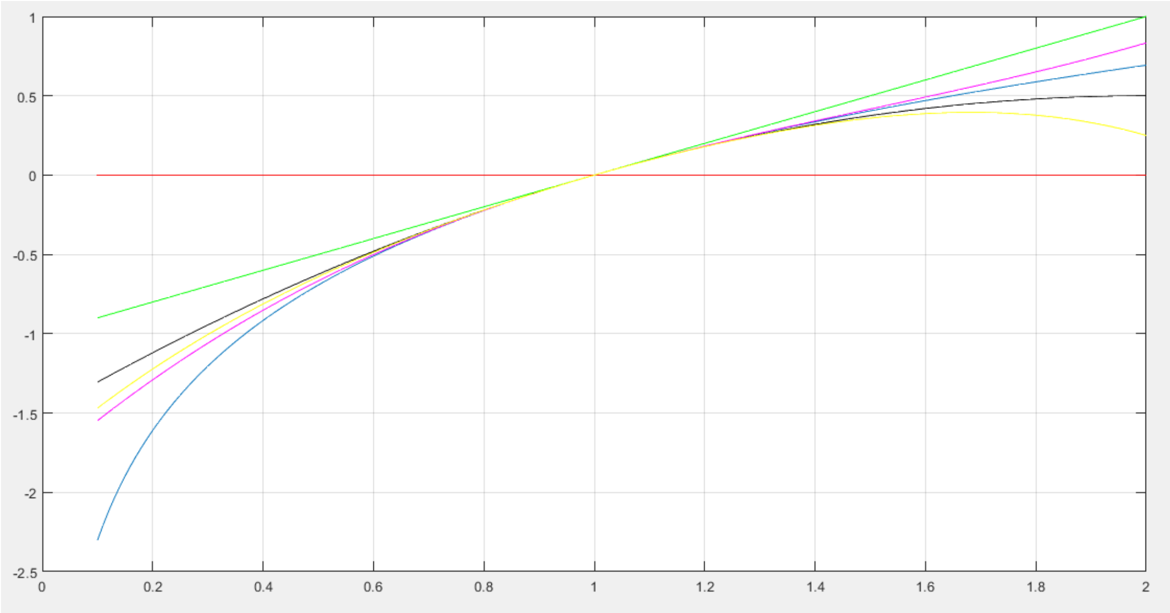
x^3/3 - (3*x^2)/2 + 3*x - 11/6

p4 =

2*x - (x - 1)^4/4 - x^2/2 - 3/2

p4 = expand

- x^4/4 + x^3 - 2*x^2 + 3*x - 7/4



Segundo ejemplo presentado en clase

Considere la función f=tanh(x/2) en [-5,5]. Determine los polinomios de Taylor de grado 2 y 3 alrededor de pi/2. Gráfica los polinomios. Usar los polinomios para estimar tanh(2). Calcular el error relativo porcentual.

```
clc
clear all
syms x
f=tanh(x/2); %Funcion inicial del problema
a=pi/2;%valor donde se centraran los polinomios 2 y 3
p=0; %acumulador
format long %Muestra el resultado en mayor precisión
for i=0:2 %Sirve como sumatoria para polinomio de grado dos
    p=p+subs(diff(f,i),a)/factorial(i)*(x-a)^i;%Serie de Taylor
end
disp(p)%muestra el valor obtenido
disp('el polinomio de Taylor de grado dos en pi/2 es: ')
pretty(p)%Da el resultado de manera más grande
l=expand(p)%desarrolla más el resultado
s=simplify(p)
pretty(s)%Da el resultado de manera más simplicada
g=ezplot(f,[-5,5]);%grafica la función seleccionada en el rango indicado
set(g,'color','m')%personaliza la grafica
hold on
grid on
g2=ezplot(p,[-5,5]);%grafica polinimos
set(g,'color','g')
x0=4;%aproximar el valor de f en x=4
va=double(subs(p,x0))%valor aproximado
ve=double(subs(f,x0))%valor exacto
```

```
%double se utiliza para dar un valor real, se usa para sym
p3=0;
for i=0:3 %polinomio de grado tres
    p3=p3+subs(diff(f,i),a)/factorial(i)*(x-a)^i;
end
disp(p3)
disp('el polinomio de Taylor de grado tres en pi/2 es: ')
pretty(p3)
g3=ezplot(p3,[-5,5]);
va3=double(subs(p3,x0))%valor aproximado
er2=(abs(ve-va))/ve %error relativo del segundo polinimo
er3=(abs(ve-va3))/ve%error relativo del tercer polinimo
legend('f(x)=tanh(x/2)','pol.2','pol.3')%nombra la grafica
```

Command window:

tanh(pi/4) - (tanh(pi/4)^2/2 - 1/2)*(x - pi/2) + (tanh(pi/4)*(tanh(pi/4)^2/2 - 1/2)*(x - pi/2)^2)/2

el polinomio de Taylor de grado dos en pi/2 es:

```
             /     / pi \2     \
             | tanh| -- |      |
    / pi \   |     \  4 /    1 | /     pi \
tanh| -- | - | ----------- - - | | x - -- |
    \  4 /   \      2        2 / \      2 /

                /     / pi \2     \
                | tanh| -- |      |
         / pi \ |     \  4 /    1 | /     pi \2
     tanh| -- | | ----------- - - | | x - -- |
         \  4 / \      2        2 / \      2 /
   + -------------------------------------------
                        2
```

I =

x/2 - pi/4 + tanh(pi/4) + (pi*tanh(pi/4)^2)/4 - (pi^2*tanh(pi/4))/16 - (x*tanh(pi/4)^2)/2 - (x^2*tanh(pi/4))/4 + (pi^2*tanh(pi/4)^3)/16 + (x^2*tanh(pi/4)^3)/4 + (x*pi*tanh(pi/4))/4 - (x*pi*tanh(pi/4)^3)/4

s =

tanh(pi/4) - (tanh(pi/4)^2/2 - 1/2)*(x - pi/2) + (tanh(pi/4)*(tanh(pi/4)^2/2 - 1/2)*(2*x - pi)^2)/8

```
              /     / pi \2     \
              | tanh| -- |      |
    / pi \    |     \  4 /    1 | /     pi \
tanh| -- | -  | ----------- - - | | x - -- |
    \  4 /    \      2        2 / \      2 /

                 /     / pi \2     \
                 | tanh| -- |      |
         / pi \  |     \  4 /    1 |           2
    tanh| -- |   | ----------- - - | (2 x - pi)
        \  4 /   \      2        2 /
  + ------------------------------------------
                        8
```

va =

0.796645654076618

ve =

0.964027580075817

tanh(pi/4) - (tanh(pi/4)^2/2 - 1/2)*(x - pi/2) - ((tanh(pi/4)^2*(tanh(pi/4)^2/2 - 1/2))/6 + (tanh(pi/4)^2/2 - 1/2)^2/6)*(x - pi/2)^3 + (tanh(pi/4)*(tanh(pi/4)^2/2 - 1/2)*(x - pi/2)^2)/2

el polinomio de Taylor de grado tres en pi/2 es:

```
                             /     / pi \2          \
                             | tanh| -- |  #1     2 |
    / pi \      /     pi \   |     \  4 /       #1  |
tanh| -- | - #1 | x - -- | - | -------------- + --- |
    \  4 /      \      2 /   \        6          6  /

                    / pi \    /     pi \2
                tanh| -- | #1 | x - -- |
   /     pi \3      \  4 /    \      2 /
   | x - -- |   + -------------------------
   \      2 /                2
```

where

```
             / pi \2
        tanh| -- |
             \  4 /     1
#1 == ----------- - -
              2         2
```

va3 =

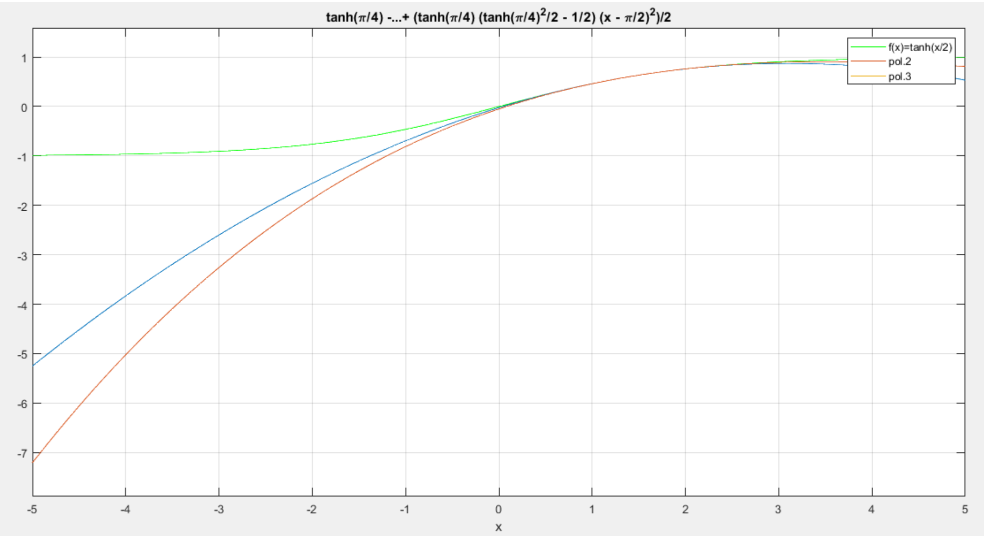
0.895432623354061

er2 =

0.173627735822698

er3 =

0.071154558375146



ANÁLISIS

Se resolvieron algunos ejercicios con función f(x) y con n=4, pidieron calcular el error%. Esta operación matemática, es como al tomar una longitud, una distancia, un área, un volumen, se presentó dos situaciones:

- Conocer el valor verdadero o valor exacto

- Conocer solo un valor aproximado.

El valor aproximado puede obtenerse por una medición, un ensayo experimental o un cálculo numérico. Vamos a ir acumulando y así se agrega el siguiente término. Vamos a ir acumulando y así se agrega el siguiente término.

Nos basamos en ir haciendo operaciones según la ecuación general y mientras más operaciones haciamos de la serie más exacto era el resultado que se está buscando. También calculamos la aproximación de medición del error, del cual hablamos. Esta aproximación tiene tres ventajas importantes:

- La derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones triviales
- Se puede utilizar para calcular valores aproximados de funciones
- Es posible calcular la optimalidad de la aproximación

Como se puede observar en la ecuación, hay una parte en la cual hay que desarrollar un binomio (x-a) n por lo que para simplificar el asunto se igualara a "a" siempre a 0. Para fines prácticos no afecta mucho en el resultado si se hacen muchas operaciones en la serie.

Poner Log 0 no existe, en este caso se debe ser otro número, esto con base al algoritmo que utilizamos.

En esencia, la serie de Taylor proporciona un medio para predecir el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto.

CONCLUSIONES

Así mismo podemos concluir que entre más grande es el polinomio (n = #), más se aproxima a la función original f(x) y todas las líneas que se graficaron convergen en 1. El que tiene menos error es el polinomio 4 y el polinomio con más error es el 0.

BIBLIOGRAFÍA

- *Aproximación numérica y errores*. (2018). Obtenido de Cuantificaci´on de errores: https://www.ingenieria.unam.mx/pinilla/PE105117/pdfs/tema1/1_aproximacion_numerica_y_errores.pdf
- Lamadrid, P. (10 de Febrero de 2015). *Error Absoluto, Relativo*. Obtenido de Series de Taylor: https://es.scribd.com/document/255361351/Error-Absoluto-Relativo-Series-de-Taylor
- *Polinomios de Taylor y Maclaurin*. (10 de Noviembre de 2015). Obtenido de Error de Truncación de Series:

https://www.ck12.org/book/ck-12-conceptos-de-c%c3%a1lculo-en-espa%c3%b1ol/section/9.16/

- Rodó, P. (2019). *Polinomio de Taylor*. Obtenido de Taylor: https://economipedia.com/definiciones/polinomio-de-taylor.html
- Significados.com. (22 de Febrero de 2021). *Qué es Polinomio*. Obtenido de Polinomio: https://www.significados.com/polinomio/
- Temas Desarrollados. (s.f.). *Análisis Numérico* . Obtenido de Serie de Taylor y Mc Laurin: https://sites.google.com/site/analisisnumericoipn/home/tema-1/serie-de-taylor-y-mc-laurin

TAREA NO.2

Ejercicio 1

Código:

A) % Polinomio de Taylor del exponencial elevado a un número cualquiera (x)

```
    % para f (x) = E^x
    clear all
    clc
    format long
    syms x
    f == E^x;
    % A) Aproximaciones (2)
  b = input (' Ingrese el valor de x0 : ');
  a = 0;
  k = 2;
  p = 0;
  for i = 0 : k
  p = p + subs (diff (f, i)), b/factorial (i)*(x - b)^i;
  disp (' El polinomio de Taylor es')
  pretty (p)
  end
  % a) Aproximaciones (3)
 b = input (' Ingrese el valor de x0 : ');
 a = 0;
 k = 3;
```

```
  p = 0;
  for i = 0 : k
  p = p + subs (diff (f, i)), b/factorial (i)*(x - b)^i;
  disp (' El polinomio de Taylor es')
  pretty (p)
  end
  % A) Aproximaciones (4)
b = input (' Ingrese el valor de x0 : ');
a = 0;
k = 4;
p = 0;
for i = 0 : k
p = p + subs (diff (f, i)), b/factorial (i)*(x - b)^i;
disp (' El polinomio de Taylor es')
pretty (p)
end
% Gráfica de la función
gl = ezplot (f, [0, 2]);
set (gl, ' color', ' b');
grid on
hold on
legend (' f (x) = (x - 1)*log (x)', ' Pol.tercer orden')
title (' Función diferenciable f (x) = (x - 1)*log (x) y pol.Taylor')
m = input (' Ingrese un punto a evaluar : ');
pev = subs (p, m);
```

disp (' El resultado del punto elevado es : ')

Comentarios sobre el acercamiento:

a través de Mathematica podemos calcular con un error despreciable el polinomio de taylor en diferentes iteraciones

B) aproximación a un polinomio de 5to grado partiendo de x=0 y x=1

```
  % B) Aproximación (0)

b = input (' Ingrese el valor de x0 : ');

a = 0;

k = 5;

p = 1;

for i = 0 : k

p = p + subs (diff (f, i)), b/factorial (i)*(x - b)^i;

disp (' El polinomio de Taylor es')

pretty ()

end
```

C) Error relativo verdadero partiendo de B)

```
%Error relativo verdadero

er=(valor_exacto-valor_aprox)/valor_exacto

c= input (ingrese el valor exacto)

er= (c-b)/b

disp ('El error verdadero es ')

pretty (d)
```

end

D) Error relativo aproximado partiendo de B)

%Error relativo verdadero

w= input (ingrese el valor aproximado)

era= (w-b)/b

disp ('El error verdadero es ')

pretty (era)

D) ¿Por qué los valores obtenidos en C y D son diferentes y como puede disminuir esa diferencia?

Por qué, Mathematica no contempla todos los decimales de la exponencial, lo que nos da un error de acercamiento al trabajar con esta clase de números.

Podríamos reducir esa diferencia al trabajar con programas que consideren más números, sin embargo, quizá la disminución sería despreciable.

Ejercicio 7

- **Código**

% Polinomio de Taylor de tercer orden

% para f(x)=(x-1)*log(x)

clear all

clc

format long

syms x

f= (x-1)*log(x);

b=input('Ingrese el valor de x0: ');

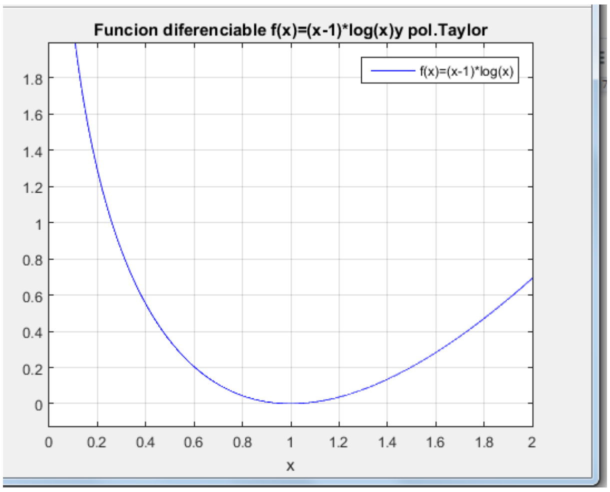
```
a=0;

k=3;

p=0;

for i=0:k

   p=p+subs(diff(f,i)),b/factorial(i)*(x-b)^i;

   disp('El polinomio de Taylor es ')

   pretty(p)

end

% Gráfica de la función

gl=ezplot(f,[0,2]);

set(gl,'color','b');

grid on

hold on

legend('f(x)=(x-1)*log(x)','Pol.tercer orden')

title('Funcion diferenciable f(x)=(x-1)*log(x)y pol.Taylor')

m=input('Ingrese un punto a evaluar: ');

pev=subs(p,m);

disp('El resultado del punto elevado es: ')

valor_exacto=double(subs(f,b))

valor_aprox=double(subs(p,b))

%Error relativo verdadero

er=(valor_exacto-valor_aprox)/valor_exacto

%Error relativo exacto

erl=(valor_aprox-valor_exacto)/calor_aprox
```

- Polinomio de tercer grado obtenido

  El polinomio de Taylor es

```
         x - 1   x - 1   2 (x - 1)                  2    3
log(x) + ----- - ----- + --------- + log(x) (x - 1) + - - --
           x       2         3                      x    2
                  x         x                           x
```

- Gráfica obtenida



- Resultado del punto de aproximación

  Ingrese un punto a evaluar:

  5/16

  El resultado evaluado es:

  0.312

- Resultado del error relativo y error relativo aproximado

Los resultados al error relativo verdadero y error relativo aproximado pueden ser el resultado de un araiz negativa o de alguna indeterminación, esto debido a qué el resultado como se puede ver es un número difícil de calcular