INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA DE BIOTECNOLOGÍA

Departamento de Ciencias Básicas

Academia de Matemáticas Aplicadas

Métodos Numéricos (Taller)

Grupo: 4FV3

Práctica No.1: “ANÁLISIS Y CÁLCULO DEL ERROR EN MÉTODOS NUMÉRICOS”

Equipo No. :

- Castillejos Varillas Luis Ángel
- Flores Salgado Getsemaní
- Iturbide Ríos Génesis
- Muñoz del Río Fernanda Natzieli
- Reyes Méndez Gustavo Daniel

Fecha: 10/02/2022

Profesores:

- Jesús Granados Hernández
- Juan Claudio Ortiz Juárez

INTRODUCCIÓN

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible formular problemas matemáticos de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas, nos vuelven aptos para entender esquemas numéricos a fin de resolver problemas matemáticos, de ingeniería y científicos en una computadora, reducir esquemas numéricos básicos, escribir programas y resolverlos en una computadora y usar correctamente el software existente para dichos métodos y no solo aumenta nuestra habilidad para el uso de computadoras sino que también amplía la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos.

El análisis numérico trata de diseñar métodos para " aproximar" de una manera eficiente las soluciones de problemas expresados matemáticamente. El objetivo principal del análisis numérico es encontrar soluciones "aproximadas" a problemas complejos utilizando sólo las operaciones más simples de la aritmética. Se requiere de una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas que producen la aproximación al problema matemático. Los métodos numéricos pueden ser aplicados para resolver procedimientos matemáticos en:

- Cálculo de derivadas
- Integrales
- Ecuaciones diferenciales
- Operaciones con matrices
- Interpolaciones
- Ajuste de curvas
- Polinomios

El Cálculo Numérico, o Análisis Numérico, como también se le denomina, es la rama de las Matemáticas que estudia los métodos numéricos de resolución de problemas, es decir, los métodos que permiten obtener una solución aproximada (a veces exacta) del problema considerado tras realizar un número finito de operaciones lógicas y algebraicas elementales. Los métodos numéricos son imprescindibles para resolver aquellos problemas para los cuales no existen métodos directos de resolución, o bien para aquellos otros en los que existe un método directo pero no es viable, como ocurre con la regla de Cramer para la resolución de sistemas lineales, que teóricamente es válida para resolver cualquiera de ellos pero que en la práctica sólo es aplicable cuando la dimensión es muy pequeña. El coste operacional de un método es el número de operaciones que requiere su aplicación. Conocidos dicho número y la velocidad de cálculo del ordenador, podemos saber el tiempo que tardaría en ser resuelto.

El estudio de los métodos numéricos es muy útil y por ende importante para quien quiera que necesite herramientas para resolver operaciones, las cuales se saben que pueden resultar complicadas, y por más que se dominen los métodos tradicionales, estos muchas veces pueden no ser suficientes, sin embargo esto no quiere decir que la operación sea imposible de solucionar, y es ahí donde los métodos numéricos se aplican, y facilitan es trabajo de cierta manera. Los métodos numéricos pueden ser aplicados para resolver procedimientos matemáticos en: Cálculo de derivadas, Integrales, Ecuaciones diferenciales, Operaciones con matrices.

Los métodos numéricos han sido utilizados desde la antigüedad en la búsqueda de soluciones aproximadas para los problemas procedentes de todas las ciencias y de las ingenierías. De hecho, hasta hace unos dos siglos la mayor parte de la matemática que se hacía era de tipo numérico y muchas de las demostraciones eran de tipo constructivo. No obstante, el nombre de Análisis Numérico aparece por primera vez en 1948, en California, donde se fundó el Instituto de Análisis Numérico, y su desarrollo ha sido paralelo al del ordenador, habiéndo producido un gran crecimiento en la segunda mitad del siglo XX, que continúa en la actualidad. Así pues, el Análisis Numérico tal y como se concibe hoy es una materia reciente. El ordenador es una herramienta imprescindible para esta disciplina, ya que los métodos numéricos requieren un gran número de cálculos y manipulaciones de datos.

La incertidumbre o error numérico es una medida del ajuste o cálculo de una magnitud con respecto al valor real o teórico que dicha magnitud tiene. Un aspecto importante de los errores de aproximación es su estabilidad numérica. Dicha estabilidad se refiere a cómo dentro de un algoritmo de análisis numérico el error de aproximación es propagado dentro del propio algoritmo.

El concepto de error es consustancial con el cálculo numérico. En todos los problemas es fundamental hacer un seguimiento de los errores cometidos a fin de poder estimar el grado de aproximación de la solución que se obtiene.

- Estas soluciones numéricas se obtienen a través de una cantidad de números (no funciones) que representan la función buscada evaluada en puntos determinados.
- Las soluciones numéricas se obtienen mediante técnicas numéricas (o métodos numéricos) utilizando operaciones sencillas (suma, resta, multiplicación) en lugar de operaciones más complejas (diferenciación e integración).
- En algunos problemas la solución numérica puede coincidir con la solución anal´ıtica, pero en otros tipos de problemas no, y existe un error numérico.

OBJETIVO

El alumno calculará los diferentes tipos de error e identificará su efecto al realizar operaciones numéricas.

DESARROLLO

DEFINICIÓN DE ERROR: El error es la diferencia que surge entre una medición y la realidad. Una discrepancia entre el valor exacto y el calculado. Estos ocurren en distintas circunstancias, ya sean mediciones, en el manejo de datos experimentales y al realizar cálculos.

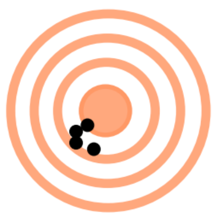
Los métodos numéricos nos ayudan a obtener P*, este representa un valor aproximado al valor final de la solución, siendo este último valor definido como P. Los métodos numéricos al ser en su mayoría iterativos, en cada iteración nos dan un valor de P*, que con cada iteración se espera que su valor se acerque cada vez más cerca al valor de P. Aunque esto no siempre es así; en algunos casos estos valores sucesivos nos pueden dar en su lugar, valores más alejados al valor real de la solución. Es aquí donde entran los conceptos de convergencia y estabilidad.

Cuando dichos valores de P*, cuentan con errores más chicos en cada iteración, se dice que son valores sucesivos convergentes. Al valor final de esta sucesión de datos se le define como: $|P_i^* - P_{i+1}^*|$

CIFRAS SIGNIFICATIVAS: En pocas palabras; las cifras significativas son todos los dígitos diferentes de cero, son aquellos que dan confiabilidad a un valor numérico. El número de estos nos indican el número de dígitos que se pueden usar con confianza.

EXACTITUD Y PRECISIÓN: La precisión se refiere a la dispersión del conjunto de valores obtenidos de mediciones repetidas de una magnitud, es el opuesto a la dispersión. Mientras tanto la exactitud, se refiere al grado de aproximación que se tiene de un número o de una medida al valor verdadero que se supone representa, es decir, que tan cerca estamos del valor buscado. A pesar de ser conceptos muy parecidos realmente no son equivalentes. La exactitud de los resultados nos indica la aproximación de la medición con respecto al valor verdadero, mientras tanto la precisión se relaciona con la repetibilidad de la media.

Alta exactitud y baja precisión



Alta precisión y baja exactitud

En el primer ejemplo vemos que los disparos se encuentran más cercanos al centro, así que esto los haría más exactos, mientras que en el segundo por tener los disparos más cercanos entre sí se dice que es más preciso el sistema.

TIPOS DE ERROR:

Error real/absoluto: es la imprecisión que acompaña a la medida. Indica el grado de aproximación y da un indicio de la calidad de la medida. $|E_r = P *- P|$.

Error relativo: se define como el cociente entre el error absoluto y el valor verdadero. $E_R = (P *- P)/P$

Error porcentual: Este tipo de error es el que más se utiliza, ya que nos permite dar una idea del porcentaje del error. $E_R = ((P *- P)/P) * 100\%$

MATLAB

Durante la clase se nos planteo un ejemplo de error utilizando la siguiente función:

$$\frac{2}{1-cos(x)}\left(\frac{1+cos(x)}{1+cos(x)}\right) \quad \text{en} \quad x = 0.0001$$

¿Cómo podría evitar la resta de dos números casi iguales en el denominador?, obtenga una expresión equivalente para contestar la pregunta y estime su valor. Obtenga el error absoluto y relativo.

$$= \frac{2(1+cos(x))}{1-cos^2(x)}$$

$$= 2\left(\frac{1}{sen^2 x} + \frac{cos(x)}{sen^2 x}\right)$$

$$= 2(csc(x)^2 + cot(x) * csc(x))$$

La expresión que se obtuvo fue:

$$2(csc(x)^2 + cot(x) * csc(x))$$

Siguiendo con lo ordenado, se desarrolló el siguiente código usando matlab:

```
clc
clear
close all
```

Estos son comandos que nos ayudan para limpiar, quitar variables previamente declaradas y/o poner listo al programa para correr un nuevo código

```
syms x
```

Syms nos ayuda a declarar cuál será nuestra variable simbólica

```
format long
```

Este comando hace que el resultado obtenido se exprese con la mayor cantidad de dígitos posibles

```
f=2/(1-cos(x))
a=0.0001;
```

Declaramos la primera función del problema en la variable “f”
En la variable “a” declaramos el valor que se le dará a x

```
vd=double(subs(f,a));
```

Double es un comando usado para interpretar el valor real. Subs sustituye valor de la variable en la función seleccionada por un valor previamente declarado, en este caso “a”

```
fprintf('el valor directo de f(a) es \n %f\n',vd)
```

fprintf nos mostrará el valor resultante de la variable seleccionada. En este caso vd, que funciona como valor directo

```
g=2*((csc(x))^2+cot(x)*csc(x))
va=double(subs(g,a));
```

Declaramos la función resultante del problema en la variable “g”.
En la variable “va” volvemos a sustituir el valor de x pero ahora en la función de “g”. Esto será nuestro valor aproximado

```
fprintf('el valor aprox. de g(a) es \n %f\n',va)
```

```
ea=abs(vd-va)
fprintf('el error absoluto |vd-va| es \n %f\n',ea)
er=ea/vd
fprintf('el error relativo |vd-va|/vd es \n %f\n',er)
```

Siguiendo la teoría, declaramos en la variable “ea”, el error absoluto. (valor directo-valor aproximado). En la variable “er”, declaramos al error relativo (error absoluto/valor directo).

Command Window

```
f =

-2/(cos(x) - 1)

el valor directo de f(a) es
 400000000.333333
```

Aquí podemos apreciar el valor resultante de la primera función

```
g =

2/sin(x)^2 + (2*cot(x))/sin(x)

el valor aprox. de g(a) es
 400000000.333333
```

Aquí podemos apreciar el valor resultante de la segunda función

```
ea =

     0

el error absoluto |vd-va| es
 0.000000

er =

     0

el error relativo |vd-va|/vd es
 0.000000
```

Aquí podemos apreciar el valor de los dos errores calculados

ANÁLISIS

Ocupamos un algoritmo que describe de forma precisa una sucesión de pasos que se ejecutaron en un orden especificado para resolver el problema y así obtener una aproximación a esta solución, cuanto menor sea el número de iteraciones necesarias para obtener la solución del problema con una tolerancia fijada de antemano, mayor será la velocidad de convergencia del método.

De esta manera también vimos el uso de una o más escalas de incertidumbre en determinadas aproximaciones, es decir, trabajamos con las cifras significativas y obtuvimos los márgenes de error y son los dígitos de un número que consideramos no nulos. Al momento de declarar el resultado no solo es importante declarar su incertidumbre sino hacerlo con la cantidad de cifras decimales correctas. Una declaración de cifras decimales incorrectas en la incertidumbre podría poner en duda el error del resultado.

Tenemos que hacer un redondeo de tales cifras, para descartar cifras en la expresión decimal, con el fin de facilitar los cálculos o evitar de dar la impresión de que se conoce un valor con mayor exactitud de la que realmente se tiene.Para lograr un resultado coherente, en la práctica debe sustituirse al valor real por un valor que se considere posee un error menor.

En el caso del análisis numérico, dado que los resultados se obtienen a partir de procesos iterativos que se mejoran los inicialmente obtenidos, debe partirse del supuesto que el último valor obtenido posee un nivel menor de error que el valor previo.

CONCLUSIONES

En la práctica se realizaron varios cálculos sobre el error, cuanto dígitos después del punto es una cifra significativa, asimismo en algunos ejercicios se puede llegar a redondear dependiendo del la cifras como el Error de redondeo inferior: se desprecian los dígitos que no se pueden conservar dentro de la memoria correspondiente, en el error truncado no se haya una solución exacta.

BIBLIOGRAFÍA

- Borras, H., Duran, R., y Iriarte, R. (1984). Apuntes de métodos numéricos (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).
- Cano, J. P. (s. f.). Cifras significativas. desde 2004, JPC. Recuperado 10 de febrero de 2022, de https://www.educaplus.org/formularios/cifrassignificativas.html
- Finkelshtein, A. M. (s.f.). El análisis numérico en los últimos 24 años. Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 26 , 919-928.
- Garc´ıa B., S. (2017). Métodos numéricos
- *ANÁLISIS DE ERRORES PARA LOS MÉTODOS NUMÉRICOS*. (25 de 05 de 2021). Obtenido de Análisis de Errores: https://gimc.wordpress.com/analisis-de-errores-para-los-metodos-numericos/
- Monografías Plus. (10 de abril de 2020). *Método numérico*. Obtenido de IMPORTANCIA DE MÉTODOS NUMÉRICOS: https://www.monografias.com/trabajos98/metodo-numerico/metodo-numerico
- Noción de algoritmo. (2018). *Cálculo Numérico. Errores*. Obtenido de Análisis Numérico: http://www.ugr.es/~prodelas/AnNumCaminos/ftp/Tema1.htm

TAREA NO.1

1.- Indica qué tipo de error es y porque pertenece a esa clasificación:

EXPRESIÓN	TIPO DE ERROR	DESCRIPCIÓN
$\pi = 3.1416$	Redondeo	Se retiene el número de cifras posibles que maneja nuestro instrumento. Redondeando la última cifra según corresponda.
$\pi = 3.1415$	Truncamiento	Ante la imposibilidad de tomar todos los términos de π se requiere truncar.
$\frac{2}{3} = 0.6666666$	Truncamiento	Ante la imposibilidad de tomar todos los términos de requiere truncar en el número de cifras significativas que maneje el dispositivo.
$\frac{2}{3} = 0.6666667$	Redondeo	Se retiene el número de cifras posibles que maneja nuestro instrumento.

2.- **Tomar los valores de a=1345.61, b=0.00052 y c=- 0.00049 y usando sólo cuatro cifras decimales para expresar el resultado final, calcula los distintos tipos de error al ejecutar las operaciones que se indican:**

OPERACIONES	VALOR CORRECTO	VALOR fix4	ERROR ABSOLUTO	ERROR RELATIVO	% DE ERROR
$a + b$	1345.61052	1345.6105	$2x10^{-5}$	$1.48631x10^{-8}$	$1.48631x10^{-6}$
$b * c$	$2.548x10^{-7}$	$2.54x10^{-7}$	$8x10^{-10}$	$3.139717425x10^{-3}$	0.31397174
b/c	10.6122449	10.6122	$4.49x10^{-5}$	$4.23096x10^{-6}$	0.000423096
$\frac{a-b}{(\frac{c}{a}b)}$	$1.784320866x10^{-10}$	$1.7843x10^{-10}$	$2.08x10^{-15}$	$1.165709621x10^{-9}$	$1.165709621x10^{-9}$

$$Error\ absoluto = Valor\ aprox - Valor\ correctp$$

$$Error\ absoluto = 1345.6105 - 1345.61052 = 2x10^{-5}$$

$$Error\ relativo = \frac{valor\ aprox - valor\ correcto}{valor\ correcto}$$

$$Error\ relativo = \frac{1345.6105 - 1345.61052}{1345.61052} = 1.48631x10^{-8}$$

$$\%Er = Error\ absoluto * 100$$

$$\%Er = 1.48631x10^{-8} * 100 = 1.48631x10^{-6}\ \%$$

Ahí dice "correcto"

3.- **Partiendo de la forma de aproximar el error en métodos de iteraciones sucesivas, establece una forma de calcular el error relativo aproximado.**

Sumando los errores y dividiéndolos para obtener un promedio.

4.- Si se mide la altura de una mesa y se reporta 0.95 metros cuando la medida real es de 0.91 metros, también se mide un puente peatonal y se reporta de 52.56 metros pero la medida real es de 54.56 metros. Calcula los errores absoluto y relativo para cada caso, compáralos y contesta cuál forma de medir el error es más adecuada y porque.

Caso 1

$$\varepsilon_a = |0.91 - 0.95| = 0.04$$

$$\varepsilon_r = \frac{0.04}{0.91} * 100 = 4.395\%$$

Caso 2

$$\varepsilon_a = |54.56 - 52.56| = 2$$

$$\varepsilon_r = \frac{2}{54.56} * 100 = 3.66\%$$

Tenemos una magnitud en los errores en el caso dos, sin embargo el error relativo nos permite generar de forma clara una visualización sobre lo alejados que podemos estar de la medición real, por lo que es la mejor forma de medir el error.

5.- Explica porque los números en la computadora no pueden ser tan pequeños como se desee.

Cada número en el computador se representa mediante un número finito de dígitos. Este conjunto, que solo contiene números racionales, es llamado conjunto de números de punto flotante. Al trabajar con un dispositivo de cálculo, como lo es una computadora, estamos trabajando con un número de números el cual no es de los números reales. El conjunto de números reales, tal como lo conocemos tiene las siguientes características:

- Es infinito en ambos extremos
- Es continuo
- Cada número puede tener una cantidad ilimitada de cifras
- Los números pueden ser tan pequeños como se deseen.

Una computadora almacena los números en sistema binario, usando un número determinado de bytes por lo que el conjunto de números que se manejan en una computadora:

- Es finito en ambos extremos
- No es continuo
- Cada número tiene una cantidad máxima de cifras
- Los números no pueden ser tan pequeños como se desee.

6.- Da un ejemplo del error de redondeo en una suma de números de diferente magnitud.

Los errores de redondeo se deben a que las computadoras sólo guardan un número finito de cifras significativas durante un cálculo. Las computadoras realizan esta función de maneras diferentes. Por ejemplo, si sólo guardan siete cifras significativas, la computadora puede almacenar y usar "pi" como "pi" = 3.141592, omitiendo los términos restantes y generando un error de redondeo.

Por ejemplo

$1/3 \ + \ \pi \neq 3.4749259$