INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA
DE
BIOTECNOLOGÍA

METODOS NUMERICOS

Reporte y Tarea 1
1er Parcial

GRUPO: 4FM4
INTEGRANTES:

ALVARES ZEPEDA NALLELY ALITZEL
FLORES MOSQUEDA EDUARDO
GARCIA CRUZ JOSUE
MARTINEZ MONTEJO H. DAVID
MENDOZA OROZCO MARICRUZ

ENTREGA: 26/08/2021

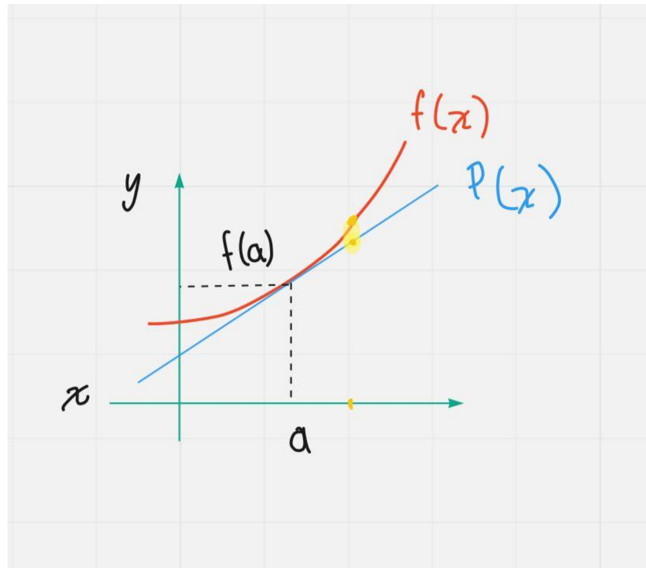
PROFESORES:

GRANADOS HERNANDEZ JESUS
FLORES NUÑEZ JOSE IGNACIO

Reporte

Introducción

Teorema de Taylor. Sea una función f continua en un punto (a,b) y con derivadas de orden n continuas en este intervalo cerrado; supóngase que $f^{n+1}(x)$ existe en (a,b), entonces para x y x_0 € (a,b), la aproximación de la función usando el polinomio de Taylor de grado n es:



Para un polinomio de grado 1:

$P(x)= C_0 + C_1(x-a)$

Ordenada al origen **Pendiente**

De acuerdo al grafico podemos observar que

C0=f(a);
C1=f'(a); ya que si derivamos una función obtenemos su pendiente

Entonces si sustituimos lo anterior en P(x) obtenemos:
P(x)=f(a)+ f'(a)(x-a); por lo tanto, esta sería la expresión para un polinomio de grado 1 centrado en u punto a.

Para un polinomio grado 2:
Para escribir un polinomio de grado 2 se agregaría un siguiente termino, el cual sería C_2 que a su vez estaría multiplicado por (x-a) elevado a la potencia del grado del polinomio que deseamos obtener.
$P(x)= C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2$
Una vez obtenida la expresión del polinomio de segundo grado, lo centramos en el punto a:
$P(a)= C_0 + C_1(a-a) + C_2(a-a)^2$
Entonces:
$P(a)=C_0$, pero como habíamos mencionado antes $C_0=f(a)$

Para obtener el termino C1 y C2 tenemos que derivar tantas veces sean necesarias dependiendo el grado del polinomio, ejemplo: si es de grado 1 derivamos una vez, si el polinomio es de grado dos derivamos dos veces y así respectivamente; una vez mencionado esto obtenemos:

$P'(x) = C_1 + 2C_2(x-a)$

Centrando el polinomio en a, obtenemos:

$P'(x) = C_1 + 2C_2(a-a)$

$P'(x) = C_1 = f'(a)$

Y para la segunda derivada

$P''(x) = 2C_2 = f''(a)$

Por lo tanto, la expresión final del polinomio nos quedaría:

$P2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (f''(a)/2)(x-a)^2$

Para un polinomio grado 3:

Como ya hemos visto entre vamos aumentando de grado siempre debemos de ir sumando un termino y elevarlo al grado del polinomio, para que así al derivar hasta el ultimo termino se nos forme una factorial, ejemplo para un polinomio de tercer grado:

$P'''(a) = f'''(a) = 3*2*1 = 3!C_3$

$C_3 = (f'''(a)/3!)*(x-a)^3$

De acuerdo a lo anterior podemos plantear la siguiente formula:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(a)}{k!}(x-a)^{k}$$

Objetivo:

Emplear el polinomio de Taylor para aproximar el valor de una función f(x), y medir las distintas formas de error, tales como error relativo y error absoluto.

Contenido:

Ejemplo 1

Obtener el polinomio de Taylor grado 3 para la función f(x)=senx; a=π/6.

Resolución:

La expresión del polinomio de grado 3 es:

$P2(x)=f(a) + f'(a)(x-a) + (f''(a)/2)(x-a)^2 + (f'''(a)/3!)*(x-a)^3$

Debemos de obtener los valores de la función centrada en a con las respectivas derivadas:

$f(a)=sen(a)=sen(\pi/6)=1/2$

$f'(a)=cos(a)=cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$

$f''(a)=-sen(a)=sen(\pi/6)=-1/2$

$f'''(a)=-cos(a)=cos(\pi/6)=-\sqrt{3}/2$

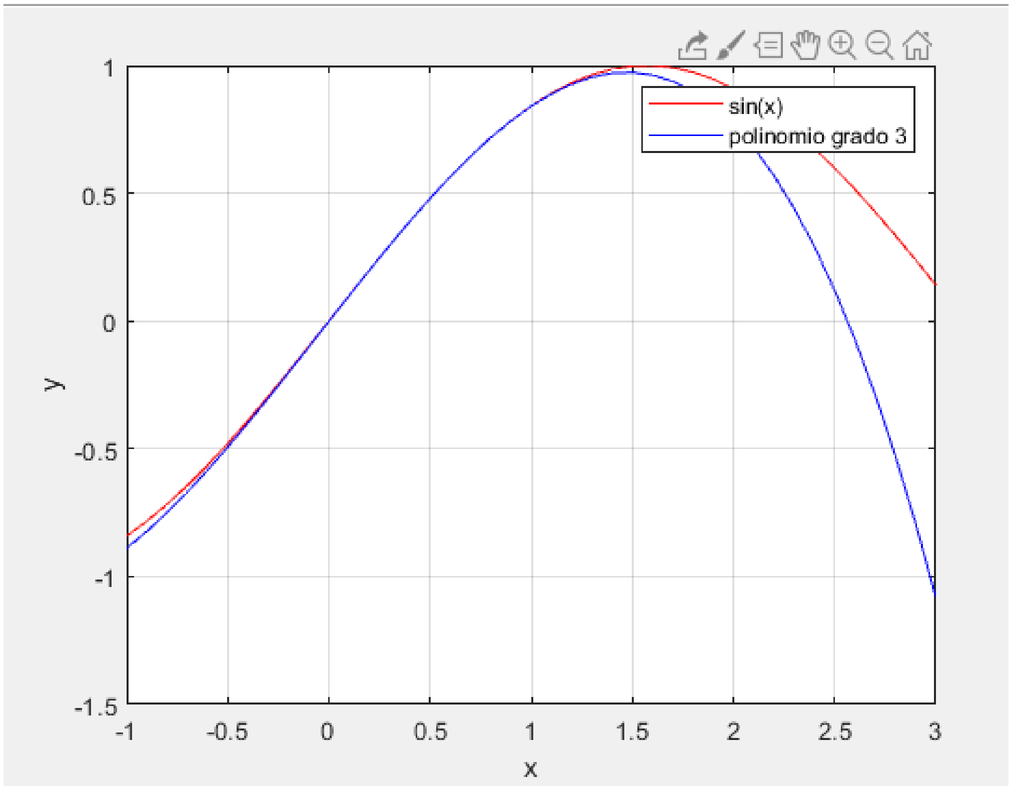
Una vez calculados los coeficientes los sustituimos en la función del polinomio:

$P3(x)=1/2 + \sqrt{3}/2\ (x-a) - 1/4(x-a)^2\ -\sqrt{3}/12*(x-a)^3$

Código:

```
clc, clear, close all
%Polinomio de Taylor
%Ejemplo 1
syms x
f=sin(x);
a=pi/6;
p0=subs(f,a);
p1=p0+subs(diff(f,1),a)*(x-a);
p2=p1+subs(diff(f,2),a)/factorial(2)*(x-a)^2;
p3=p2+subs(diff(f,3),a)/factorial(3)*(x-a)^3;
disp(p3)
%Graficas
x=-1:0.1:3;
%Grafica de la funcion
plot(x,subs(f,x),'r')
grid on
hold on
%Grafica de polinomio de 3er grado
plot(x,subs(p3,x),'b')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('sin(x)','polinomio grado 3')
```

Grafica:



Ejecución:

```
(3^(1/2)*(x - pi/6))/2 - (3^(1/2)*(x - pi/6)^3)/12 - (x - pi/6)^2/4 + 1/2

fx >>
```

Ejemplo 2:

Obtener los polinomios de grado 1,2 y 3 y sustituir x=1.23 en cada uno de los tres polinomios, así como el error absoluto y relativo de los tres polinomios.

Grafica sobre la función los tres polinomios.

$f(x)=\ln(x)+1/2$, $a=1$

Resolución:

Encontramos los coeficientes:

$f(a)=\ln(a)+1/2=\ln(1)+1/2=1/2$

$f'(a)=1/a=1/1=1$

$f''(a)=-1/(a)^2=-1/(1)^2=-1$

$f'''(a)=2/(a)^3=2/(1)^3=2$

Por lo tanto, los polinomios quedarían:

$P1,1(x) \approx x - 1/2$

$P2\ ,1(x) \approx x -1/2 - (x-a)^2/2$

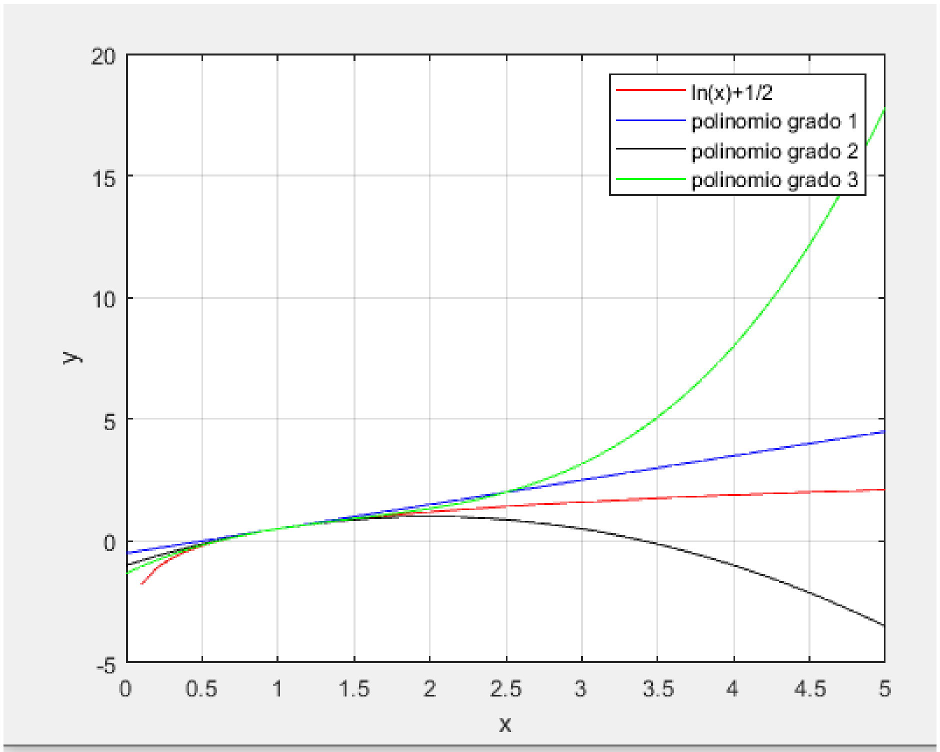
$P3\ ,1(x) \approx x -1/2 - (x-a)^2/2 + (x-a)^3/3$

Código:

```
clc, clear, close all
%Polinomio de Taylor
%Ejemplo 2
syms x
f=log(x)+ 1/2;
a=1;
p0=subs(f,a);
p1=p0+subs(diff(f,1),a)*(x-a);
p2=p1+subs(diff(f,2),a)/factorial(2)*(x-a)^2;
p3=p2+subs(diff(f,3),a)/factorial(3)*(x-a)^3;
disp(p1,'Polinomio 1')
disp(p2,'Polinomio 2')
disp(p3,'Polinomio 3')
%Graficas
x=0:0.1:5;
%Grafica de la funcion
plot(x,subs(f,x),'r')
```

```matlab
grid on
hold on
%Grafica de polinomio de 1er grado
plot(x,subs(p1,x),'b')
%Grafica de polinomio de 2do grado
plot(x,subs(p2,x),'k')
%Grafica de polinomio de 3er grado
plot(x,subs(p3,x),'g')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('ln(x)+1/2','polinomio grado 1','polinomio grado 2','polinomio
grado 3')
%Errores
x=1.23;
vv=vpa(subs(f,x),6);
%Error absoluto del polinomio 1
vap1=vpa(subs(p1,x),6);
eap1=vpa(abs(vv-vap1),6);
%Error relativo del polinomio 1
erp1=eap1/vv;
%Error absoluto del polinomio 2
vap2=vpa(subs(p2,x),6);
eap2=vpa(abs(vv-vap1),6);
%Error relativo del polinomio 2
erp2=eap2/vv;
%Error absoluto del polinomio 3
vap3=vpa(subs(p3,x),6);
eap3=vpa(abs(vv-vap1),6);
%Error relativo del polinomio 3
erp3=eap3/vv;
disp(vv)
disp(eap1)
disp(erp1)
disp(eap2)
disp(erp2)
disp(eap3)
disp(erp3)
```

Grafica:



Errores

vv=0.707014

vap1=0.73

eap1=0.0229858

erp1=0.032511131475197659132980592220709

vap2=0.70355

eap2=0.0229858

erp2=0.032511131475197659132980592220709

vap3=0.707606

eap3=0.0229858

erp3=0.032511131475197659132980592220709

Ejemplo 3:

Obtener el polinomio de Taylor con los primeros tres términos no nulos de la función:

f(x)=cos(x)

a=0

Cuando el valor de a es igual a cero se le llama al polinomio "Polinomio de Maclaurin"

Debemos de sacar las derivadas para los coeficientes y donde observemos las 3 primeras que tienen un numero diferente de 0 serán las que tomaremos para crear nuestro polinomio.

f(a)=cos(a)=cos(0)=1

f'(a)=-sen(a)=-sen(0)=0 → Nulo

f''(a)=-cos(a)=-cos(0)=-1

f'''(a)=sen(a)=sen(0)=0 → Nulo

f''''(a)=cos(a)=cos(0)=1

Como podemos observar nuestros primeros 3 términos no nulos o diferentes de cero se encuentran en la función lineal y en la segunda y cuarta derivada, por lo que nuestro polinomio será de grado 4.

$P4,0(x) \approx 1 - \frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{24}(x-a)^4$

Pero recordemos que a=0

Por lo tanto, solo nos quedan las x

$P4,0(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$

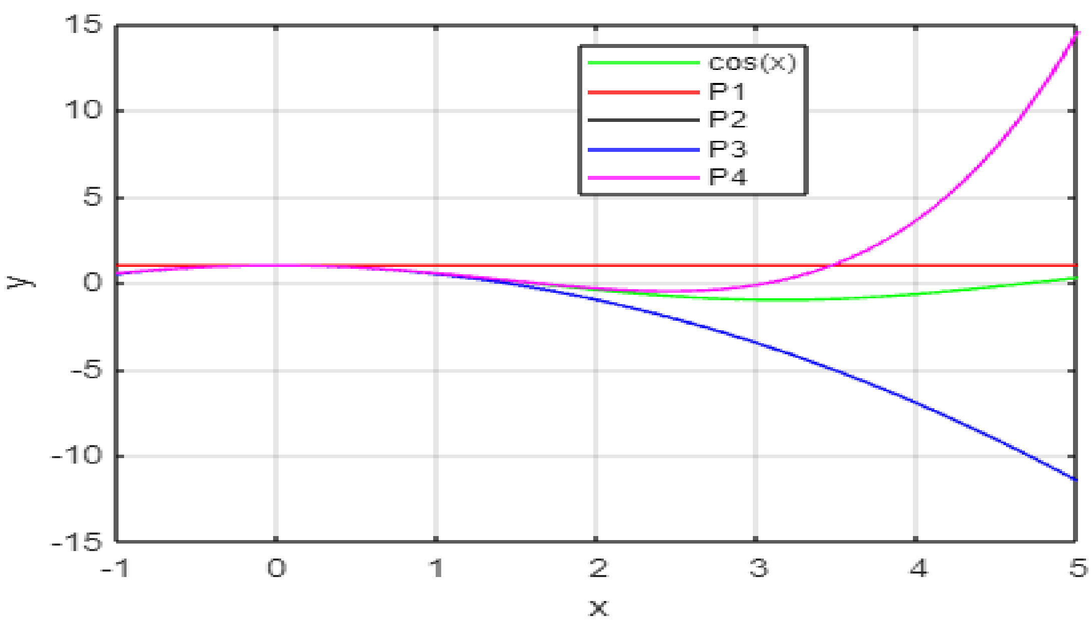
Código:

```
clc, clear, close all
% Polinomio de Taylor
% Ejemplo 3
syms x
f= cos(x);
a=0;
p0=subs(f,a);
p1=p0+subs(diff(f,1),a)*(x); %Polinomio grado 1
p2=p1+subs(diff(f,2),a)/factorial(2)*(x)^2;  %Polinomio grado 2
p3=p2+subs(diff(f,3),a)/factorial(3)*(x)^3;  %Polinomio grado 3
p4=p3+subs(diff(f,4),a)/factorial(4)*(x)^4;  %Polinomio grado 4
p4=simplify(p4);
%gráficas
x=-1:0.1:5;
%gráfica de la función
plot(x,subs(f,x),'g')
grid on
hold on
plot(x,subs(p1,x),'r') % Polinomio 1
plot(x,subs(p2,x),'k') % Polinomio 2
plot(x,subs(p3,x),'b') % Polinomio 3
plot(x,subs(p4,x),'m') % Polinomio 4
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('cos(x)','P1','P2','P3','P4')
```

Obtenemos el polinomio de Taylor grado 4 con los primeros 3 términos no nulos de la función

```
Command Window

x^4/24 - x^2/2 + 1
```



Tarea

Problema 1

a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $: f(x) = \log\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ alrededor de a=0
b) Obtener, mediante el polinomio anterior, un valor aproximado de f (0.5)
c) Obtener el error absoluto y relativo cometidos en dicha aproximación
d) Graficar la función y el polinomio

Problema 2

a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 4 de las funciones que se muestran a continuación alrededor del punto dado.

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ alrededor de $a = 0$. (2) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ alrededor de $a = 1$.
(3) $f(x) = \log x$ alrededor de $a = 1$. (4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ alrededor de $a = 2$.

b) Para los cuatro polinomios, obtén el valor aproximado de la función $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$
c) Obtener el error absoluto y relativo cometidos en dicha aproximación
d) Graficar la función y el polinomio

Soluciones

1. Para (1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ alrededor de $a = 0$.
   a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 4

P4,0(x)≈ $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

   b) Valor aproximado de la función $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$

vv= valor verdadero= 1.64663

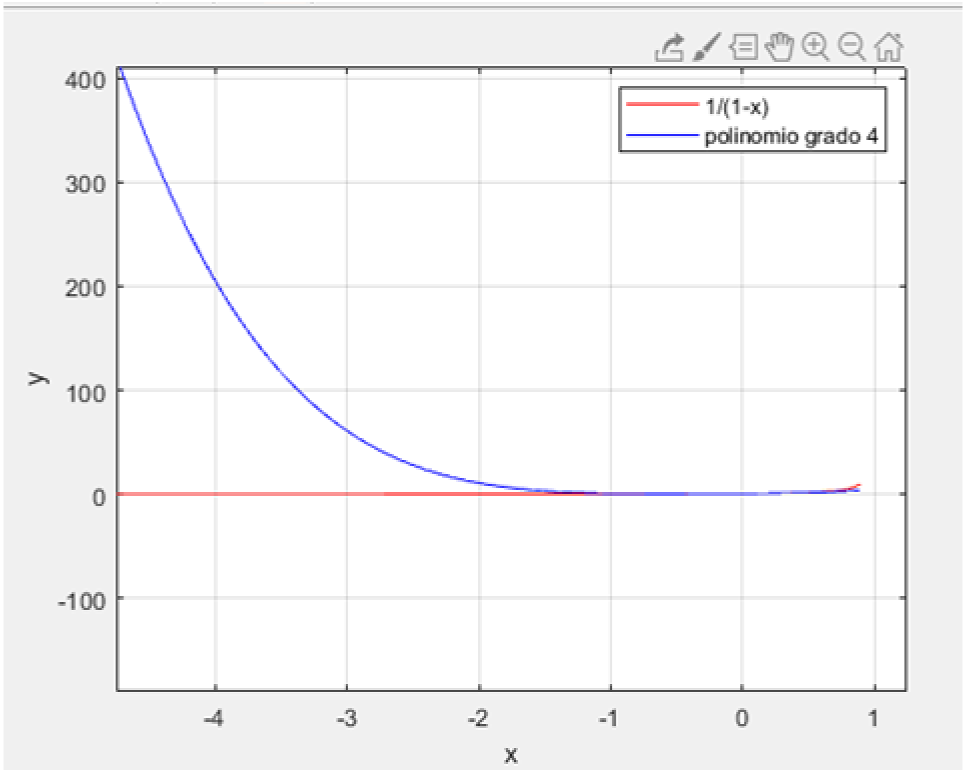
vap4=valor aproximado para el polinomio de grado 4= 1.63125

   c) Obtener el error absoluto y relativo cometidos en dicha aproximación

eap4=error absoluto del polinomio grado 4= 0.0153778

erp4=error relativo del polinomio grado 4= 0.0093389796382289478438237378397123

   d) Graficar la función y el polinomio



Código

```
clc, clear, close all
%Polinomio de Taylor
%Problema 2
syms x
f=1/(1-x);
a=0;
p0=subs(f,a);
p1=p0+subs(diff(f,1),a)*(x-a);
p2=p1+subs(diff(f,2),a)/factorial(2)*(x-a)^2;
p3=p2+subs(diff(f,3),a)/factorial(3)*(x-a)^3;
p4=p3+subs(diff(f,4),a)/factorial(4)*(x-a)^4
%Grafica
x=-5:0.1:.9;
%Grafica de la funcion
plot(x,subs(f,x),'r')
grid on
hold on
```

```
%Grafica de polinomio de 4to grado
plot(x,subs(p4,x),'b')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('1/(1-x)','polinomio grado 4')
%Valor aproximado para el polinomio de grado 4
x=pi/8;
vv= vpa(subs(f,x),6)
vap4= vpa(subs(p4,x),6)
%Erro absoluto
eap4= vpa(abs(vv-vap4),6)
%Erro relativo
erp4= eap4/vv
```

2. Para (2) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ alrededor de $a=1$.
   a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 4

   b) Valor aproximado de la función $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

vv= valor verdadero= 0.28197

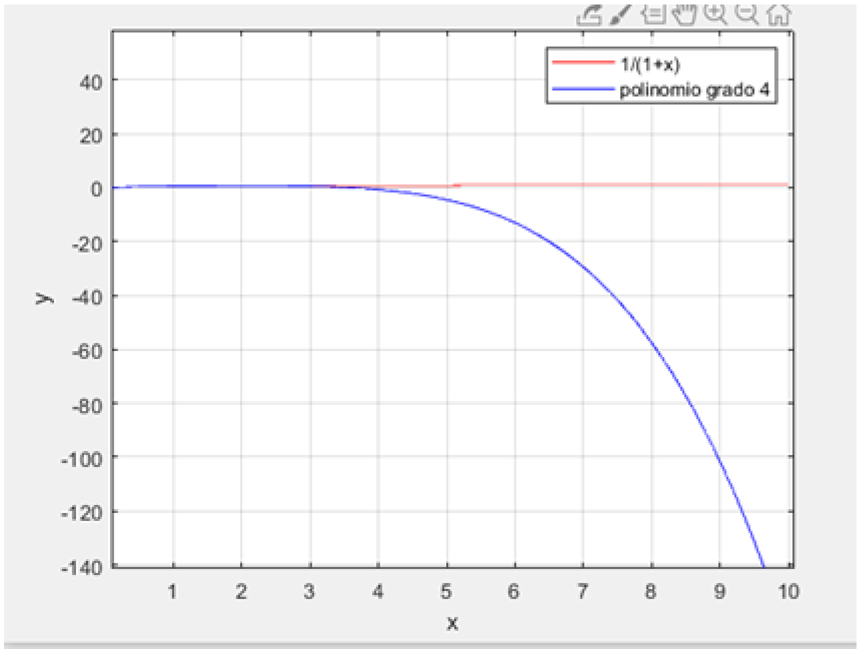
vap4=valor aproximado para el polinomio de grado 4= 0.283823

   c) Obtener el error absoluto y relativo cometidos en dicha aproximación

eap4=error absoluto del polinomio grado 4= 0.00185358

erp4=error relativo del polinomio grado 4= 0.0065736991602095837435539767963832

   d) Graficar la función y el polinomio



Código

```
clc, clear, close all
%Polinomio de Taylor
%Problema 2
syms x
f=x/(1+x);
a=1;
p0=subs(f,a);
p1=p0+subs(diff(f,1),a)*(x-a);
p2=p1+subs(diff(f,2),a)/factorial(2)*(x-a)^2;
p3=p2+subs(diff(f,3),a)/factorial(3)*(x-a)^3;
p4=p3+subs(diff(f,4),a)/factorial(4)*(x-a)^4
%Grafica
x=0:0.1:10;
%Grafica de la funcion
plot(x,subs(f,x),'r')
grid on
hold on
%Grafica de polinomio de 4to grado
plot(x,subs(p4,x),'b')
```

```
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('1/(1+x)','polinomio grado 4')
%Valor aproximado para el polinomio de grado 4
x=pi/8;
vv= vpa(subs(f,x),6)
vap4= vpa(subs(p4,x),6)
%Erro absoluto
eap4= vpa(abs(vv-vap4),6)
%Erro relativo
erp4= eap4/vv
```

3. Para (3) $f(x) = \log x$ alrededor de $a = 1$.

   a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 4

   b) Valor aproximado de la función $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$

vv= valor verdadero= -0.40594

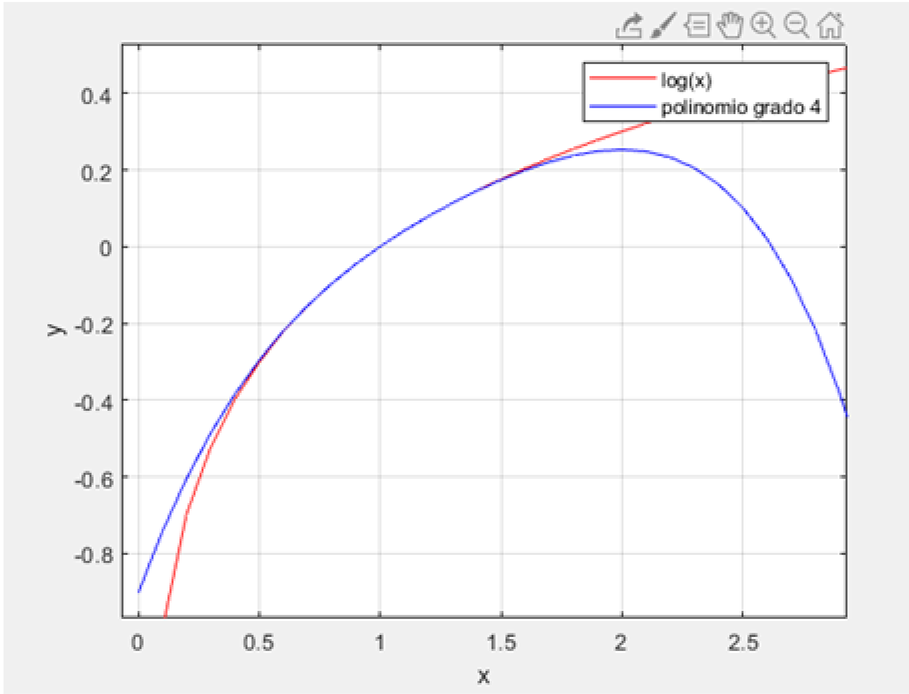
vap4=valor aproximado para el polinomio de grado 4= -0.391028

   c) Obtener el error absoluto y relativo cometidos en dicha aproximación

eap4=error absoluto del polinomio grado 4= 0.0149124

erp4=error relativo del polinomio grado 4= -0.036735474382515654576754101338153

   d) Graficar la función y el polinomio



Código

```
clc, clear, close all
%Polinomio de Taylor
%Problema 2
syms x
f=log10(x);
a=1;
p0=subs(f,a);
p1=p0+subs(diff(f,1),a)*(x-a);
p2=p1+subs(diff(f,2),a)/factorial(2)*(x-a)^2;
p3=p2+subs(diff(f,3),a)/factorial(3)*(x-a)^3;
p4=p3+subs(diff(f,4),a)/factorial(4)*(x-a)^4
%Grafica
x=0:0.1:3;
%Grafica de la funcion
plot(x,subs(f,x),'r')
grid on
hold on
%Grafica de polinomio de 4to grado
```

```
plot(x,subs(p4,x),'b')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('log(x)','polinomio grado 4')
%Valor aproximado para el polinomio de grado 4
x=pi/8;
vv= vpa(subs(f,x),6)
vap4= vpa(subs(p4,x),6)
%Erro absoluto
eap4= vpa(abs(vv-vap4),6)
%Erro relativo
erp4= eap4/vv
```

(4) $f(x)=x^3-2x^2+3x-5$ alrededor de $a=2$.

4. Para
   a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 4

   b) Valor aproximado de la función $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$

vv= valor verdadero= -4.06977

vap4=valor aproximado para el polinomio de grado 4= -4.06977

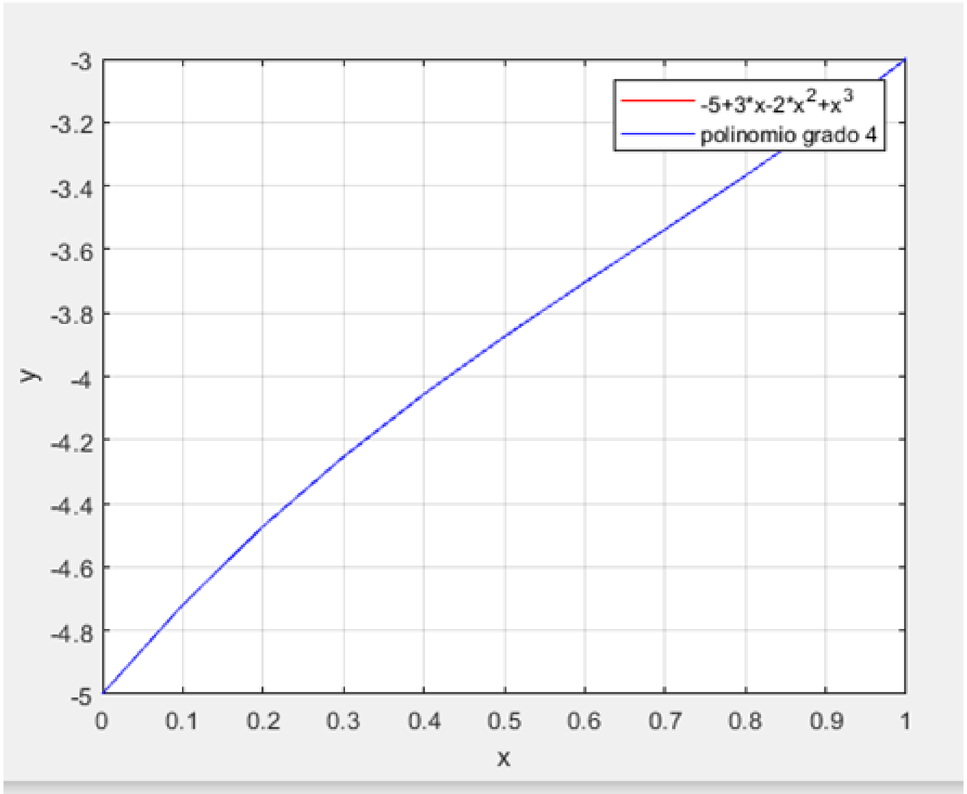
   c) Obtener el error absoluto y relativo cometidos en dicha aproximación

eap4=error absoluto del polinomio grado 4= 4.54747e-13

erp4=error relativo del polinomio grado 4= -0.00000000000011173788435999093290

   d) Graficar la función y el polinomio

Por los resultados obtenidos en esta función, la función y el polinomio coinciden similar en todos los puntos por tal motivo el error absoluto y relativo son mínimos, además de que, en la gráfica, solo se ve una función debido a que están sobrepuestas.



Código

```
clc, clear, close all
%Polinomio de Taylor
%Problema 2
syms x
f=-5+3*x-2*x^2+x^3;
a=2;
p0=subs(f,a);
p1=p0+subs(diff(f,1),a)*(x-a);
p2=p1+subs(diff(f,2),a)/factorial(2)*(x-a)^2;
p3=p2+subs(diff(f,3),a)/factorial(3)*(x-a)^3;
p4=p3+subs(diff(f,4),a)/factorial(4)*(x-a)^4
%Grafica
x=0:0.1:1;
%Grafica de la funcion
plot(x,subs(f,x),'r')
grid on
```

```
hold on
%Grafica de polinomio de 4to grado
plot(x,subs(p4,x),'b')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('-5+3*x-2*x^2+x^3','polinomio grado 4')
%Valor aproximado para el polinomio de grado 4
x=pi/8;
vv= vpa(subs(f,x),6)
vap4= vpa(subs(p4,x),6)
%Erro absoluto
eap4= vpa(abs(vv-vap4),6)
%Erro relativo
erp4= eap4/vv
```

Problema 3

a) Hallar los 4 primeros términos (no nulos) de los polinomios de Taylor de:

1. $\sqrt{2+x^2} \quad \text{en } \alpha = 0$
2. $\frac{1}{x(1+x)} \quad \text{en } \alpha = 1$
3. $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{en } \alpha = 0$

b) Para los tres polinomios, obtén el valor aproximado de la función $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

c) Obtener el error absoluto y relativo cometidos en dicha aproximación

d) Graficar la función y el polinomio