Teorema de Bolzano.

Vamos a ver varios teoremas que encierran propiedades fundamentales de las funciones continuas en intervalos. El primero de ellos es una sencilla consecuencia del teorema de conservación del signo:

Teorema de Bolzano. Si f es continua en [a, b] (con a < b) y f(a)f(b) < 0,
entonces existe r (raíz) ∈ (a, b) tal que f(r) = 0.

Excercise.

La ecuación de estado de Van der Walls para un gas real es:

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

Donde P es la presión en bares, T es la temperatura en grados Kelvin, R es la constante de los gases ideales $R=0.08314\frac{bar\cdot m^3}{kg-mol\cdot K}$, V es el volumen molar del gas en $\frac{m^3}{kg-mol}$. Para el gas CO_2 calcular el volumen molar cuando $T=222\ K$, $P=68\ bar$, $a=1.572\frac{bar\cdot m^6}{kg-mol^2}$, $b=0.0411\frac{m^3}{kg-mol}$. Utilice el método de Bisección para aproximar el volumen molar con una tolerancia de 1×10^{-4}, considerar una longitud del intervalo de 0.2

Developing.

Step 1.

La ecuación de Van der Walls la igualamos a cero y designamos la función $f(V)$.

$$f(V)=\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)-RT=0$$

Step 2.

Después se grafica la función $f(V)$, en Matlab.

```
>> f=@(v)(68+(1.572./v.^2)).*(v-0.0411)-0.08314*222
f =

@(v) (68 + (1.572 ./ v .^ 2)) .* (v - 0.0411) - 0.08314 * 222

>> v=0:0.05:1;
>> plot(v,f(v))
>> grid on
>> xlabel('volumen')
>> ylabel('f(v)')
```

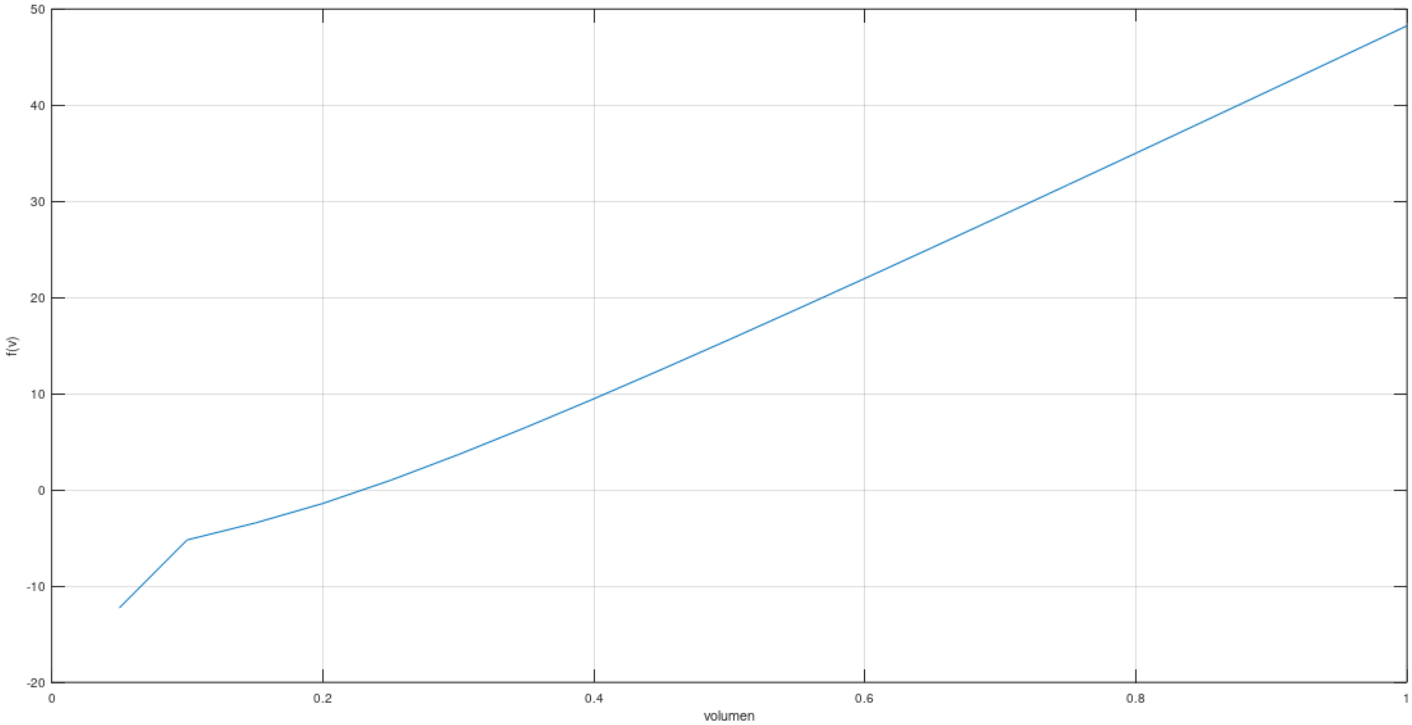


Figure 1:

Step 3.

La primera aproximación se realiza con la figure 1 (Método gráfico).

```
>> a=0.2;
>> b=0.4;
>> r1=(a+b)/2
r1 = 0.3000
>> e1=(b-a)/2
e1 = 0.1000
```

se abandona la gráfica y da inicio el método analítico llamado Biseccion para la búsqueda de raíces

```
>> sign(f(a))
ans = -1
>> sign(f(r1))
ans = 1
>> sign(f(b))
ans = 1
>> b=r1;
>> r2=(a+b)/2
r2 = 0.2500
>> e2=(b-a)/2
e2 = 0.050000
```

```
>> sign(f(a))
ans = -1
>> sign(f(r2))
ans = 1
>> sign(f(b))
ans = 1
>> b=r2;
>> r3=(a+b)/2
r3 = 0.2250
>> e3=(b-a)/2
e3 = 0.025000
>> sign(f(a))
ans = -1
>> sign(f(r3))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = 1
>> a=r3;
>> r4=(a+b)/2
r4 = 0.2375
>> e4=(b-a)/2
e4 = 0.012500
>> sign(f(a))
ans = -1
>> sign(f(r4))
ans = 1
>> sign(f(b))
ans = 1
>> b=r4;
>> r5=(a+b)/2
r5 = 0.2313
>> e5=(b-a)/2
e5 = 6.2500e-03
>> sign(f(a))
ans = -1
>> sign(f(r5))
ans = 1
>> sign(f(b))
ans = 1
>> b=r5;
>> r6=(a+b)/2
r6 = 0.2281
>> e6=(b-a)/2
e6 = 3.1250e-03
>> sign(f(a))
ans = -1
```

```
>> sign(f(r6))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = 1
>> a=r6;
>> r7=(a+b)/2
r7 = 0.2297
>> e7=(b-a)/2
e7 = 1.5625e-03
>> sign(f(a))
ans = -1
>> sign(f(r7))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = 1
>> a=r7;
>> r8=(a+b)/2
r8 = 0.2305
>> e8=(b-a)/2
e8 = 7.8125e-04
>> sign(f(a))
ans = -1
>> sign(f(r8))
ans = 1
>> sign(f(b))
ans = 1
>> b=r8;
>> r9=(a+b)/2
r9 = 0.2301
>> e9=(b-a)/2
e9 = 3.9062e-04
>> sign(f(a))
ans = -1
>> sign(f(r9))
ans = 1
>> sign(f(b))
ans = 1
>> b=r9
b = 0.2301
>> r10=(a+b)/2
r10 = 0.2299
>> e10=(b-a)/2
e10 = 1.9531e-04
>> sign(f(a))
ans = -1
>> sign(f(r10))
```

ans = -1
>> sign(f(b))
ans = 1
>> a=r10;
>> r11=(a+b)/2
r11 = 0.2300
>> e11=(b-a)/2
e11 = 9.7656e-05
>>

En la tabla siguiente se muestra un concentrado de las aproximaciones.

Tolerancia de 1×10^{-4}

i	a	raíz	b	error
1	0.2(-)	0.3000(+)	0.4(+)	0.1000
2	0.2(-)	0.2500(+)	0.3000(+)	0.050000
3	0.2(-)	0.2250(-)	0.2500(+)	0.025000
4	0.2250(-)	0.2375(+)	0.2500(+)	0.012500
5	0.2250(-)	0.2313(+)	0.2375(+)	6.2500e-03
6	0.2250(-)	0.2281(-)	0.2313(+)	3.1250e-03
7	0.2281(-)	0.2297(-)	0.2313(+)	1.5625e-03
8	0.2297(-)	0.2305(+)	0.2313(+)	7.8125e-04
9	0.2297(-)	0.2301(+)	0.2305(+)	3.9062e-04
10	0.2297(-)	0.2301(-)	0.2301(+)	1.9531e-04
11	0.2301(-)	**0.2300**	0.2301(+)	**9.7656e-05**

Fórmula para calcular el número de iteraciones.

$$n \geq \frac{ln\left|\frac{b-a}{Tolerancia}\right|}{ln2}$$

b=límite superior del intevalo, en el cual se encuentra la raíz.
a= límite inferior del intervalo, en el cual se encuentra la raíz.

$$n \geq \frac{ln\left|\frac{b-a}{Tolerancia}\right|}{ln2} = \frac{ln\left|\frac{0.4-0.2}{1\times10^{-4}}\right|}{ln2} = \frac{7.6009}{0.6931} = 10.966 = 11 \quad \text{iteraciones}$$

Answer

El volumen molar es aproximadamente 0.2300 $\frac{m^3}{kg-mol}$, con error de 9.7656e-05

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b}\left[\left(P+\frac{a}{x^2}\right)(x-b)-RT\right] = \lim_{x\to b}\left[\left(P+\frac{a}{x^2}\right)(x-b)\right] - \lim_{x\to b}(RT) =$$
$$\lim_{x\to b}\left(P+\frac{a}{x^2}\right)\lim_{x\to b}(x-b) - \lim_{x\to b}(RT) = \left(P+\frac{a}{b^2}\right)(b-b)-RT =$$
$$(P+c)(0)-RT = (c_1)(0)-RT = 0-RT = -RT$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(P+\frac{a}{x^2}\right)(x-b)-RT\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(P+\frac{a}{x^2}\right)(x-b)\right] - \lim_{x\to 0^+}(RT) =$$
$$\left(P+\frac{a}{\left(0^+\right)^2}\right)\left(0^+-b\right)-RT = \left(P+\frac{a}{0^+}\right)\left(-b^+\right)-RT =$$
$$(P+\infty)\left(-b^+\right)-RT = (\infty)\left(-b^+\right)-RT = -\infty-RT = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left[\left(P+\frac{a}{x^2}\right)(x-b)-RT\right] = \lim_{x\to 0^-}\left[\left(P+\frac{a}{x^2}\right)(x-b)\right] - \lim_{x\to 0^-}(RT) =$$
$$\left(P+\frac{a}{\left(0^-\right)^2}\right)\left(0^--b\right)-RT = \left(P+\frac{a}{0^+}\right)\left(-b^-\right)-RT =$$
$$(P+\infty)\left(-b^-\right)-RT = (\infty)\left(-b^-\right)-RT = -\infty-RT = -\infty$$

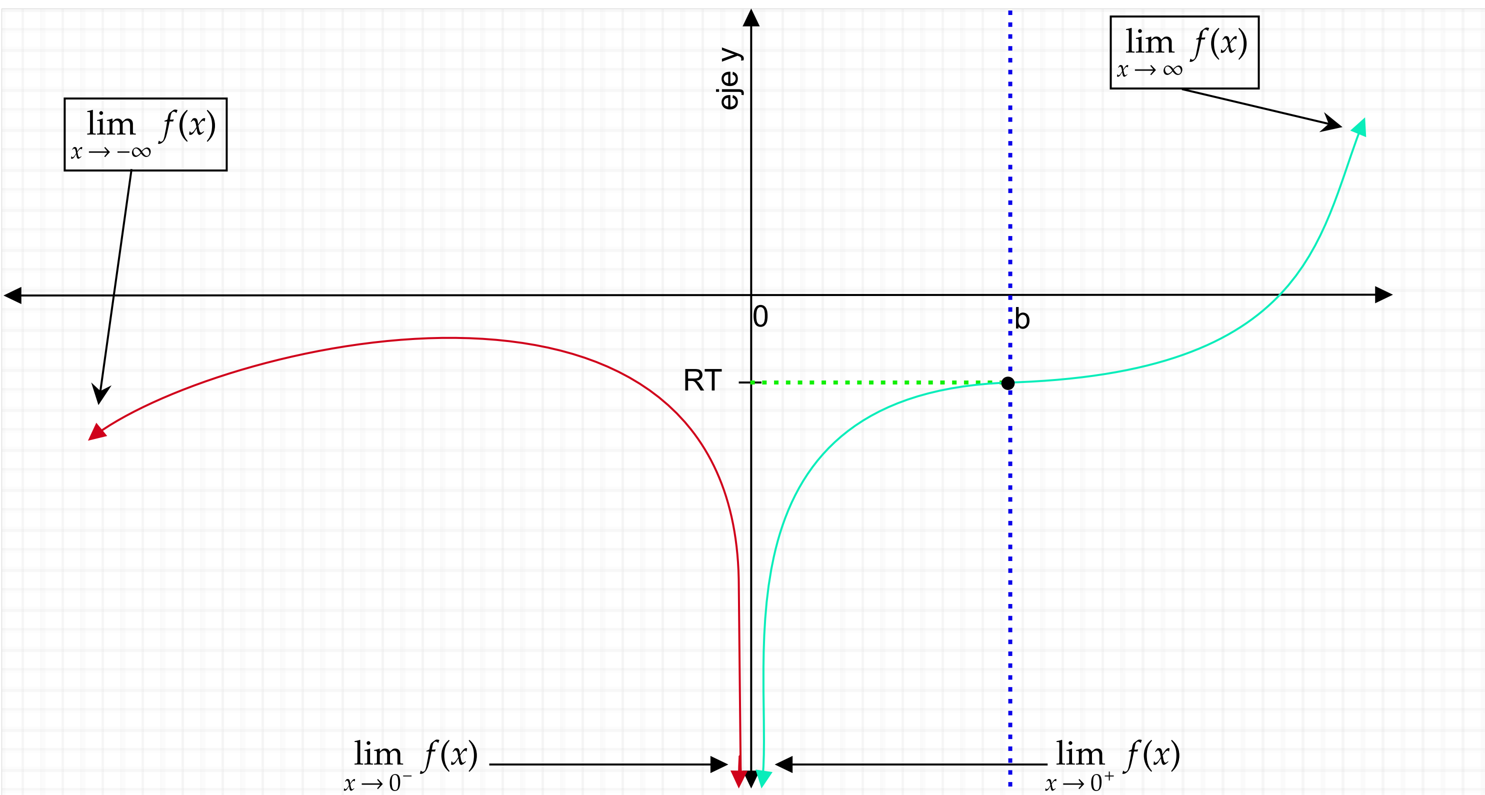
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\left(P+\frac{a}{x^2}\right)(x-b)-RT\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\left(P+\frac{a}{x^2}\right)(x-b)\right] - \lim_{x\to\infty}(RT) =$$

$$\left(P+\frac{a}{(\infty)^2}\right)(\infty-b)-RT = \left(P+\frac{a}{\infty}\right)(\infty)-RT = (P+0)(\infty)-RT = (P)(\infty)-RT = \infty - RT = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(P+\frac{a}{x^2}\right)(x-b)-RT\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(P+\frac{a}{x^2}\right)(x-b)\right] - \lim_{x\to-\infty}(RT) =$$

$$\left(P+\frac{a}{(-\infty)^2}\right)(-\infty-b)-RT = \left(P+\frac{a}{\infty}\right)(-\infty)-RT = (P+0)(-\infty)-RT = (P)(-\infty)-RT =$$

$$-\infty - RT = -\infty$$



Ejercicio 2.

La concentración C de una bacteria contaminante en un lago decrece segun la expresión:

$$C(t) = 80e^{-2t} + 20e^{-0.5t}$$

siendo t el tiempo en horas.

a. Detrmine el número de iteraciones que son necesarias para obtener una raíz de C(t)=7 con un error menor de 1×10^{-3} . Utice el método de bisección, considerar una longitud de intervalo de uno.

Respuestas:

a. n=10 iteraciones.

b. El tiempo aproximado para llegar a una concentración de 7 es aproximadamente 2.32910156250 horas con un error de 0.000976562500 horas.

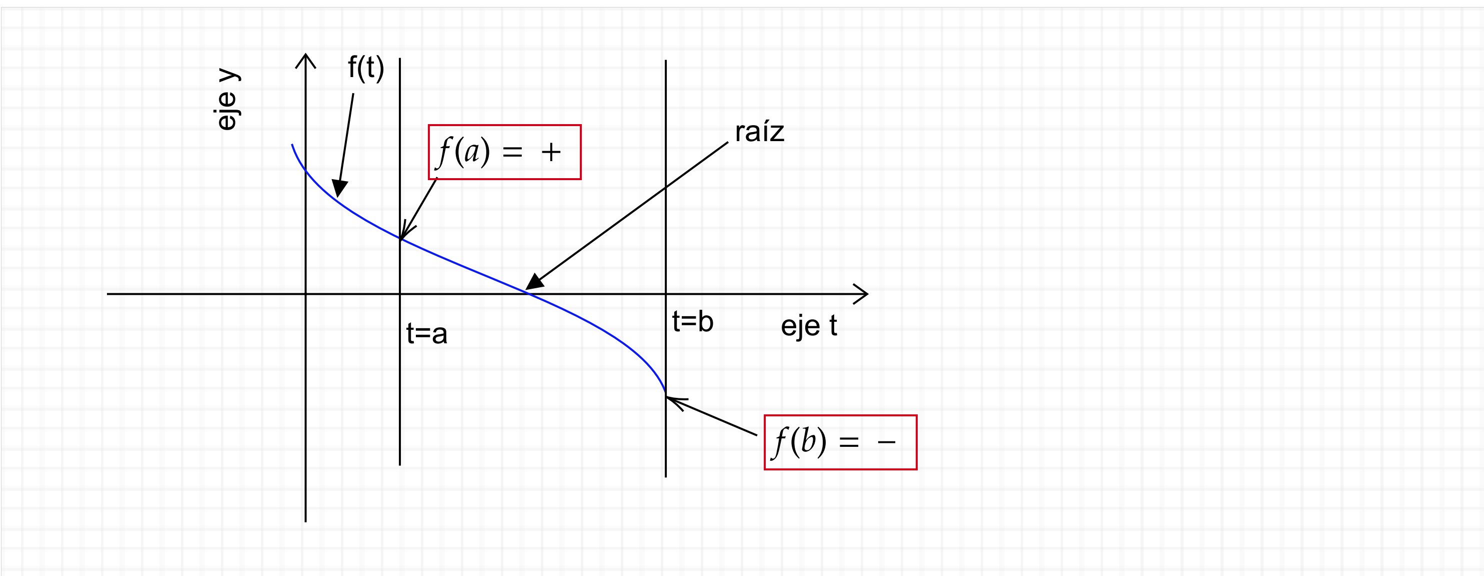
Fórmula para calcular el número de iteraciones.

$$n \geq \frac{ln\left|\frac{b-a}{Tolerancia}\right|}{ln2}$$

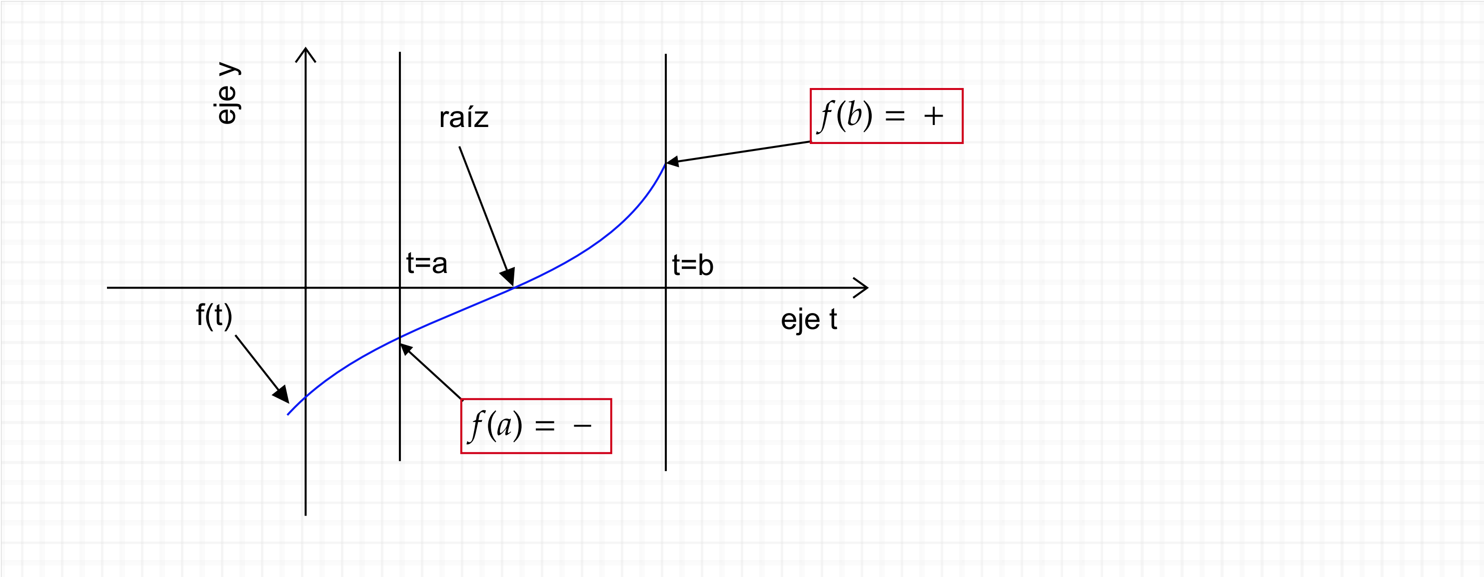
b=límite superior del intevalo, en el cual se encuentra la raíz.

a= límite inferior del intervalo, en el cual se encuentra la raíz.

Función decreciente.



Función creciente.



Paso 1.

La ecuación de concentración de bacterias la igualamos a cero y designamos la función $f(t)$.

$$7 = 80e^{-2t} + 20e^{-0.5t}$$

$$f(t) = 80e^{-2t} + 20e^{-0.5t} - 7 = 0$$

$$Paso\ 2.$$

$$Después\ se\ grafica\ la\ función\ f(t),\ en\ Matlab.$$

$$\gg f = @(t)80*exp(-2*t) + 20*exp(-0.5*t) - 7$$

$$\gg t = 0 : 0.01 : 10;$$

$$\gg plot(t, f(t)$$

$$a = 2;$$

$$b = 3;$$

$$n \geq \frac{ln\left|\frac{3-2}{1\times10^{-3}}\right|}{ln2}$$

$$\gg a = 2;$$

$$\gg b = 3;$$

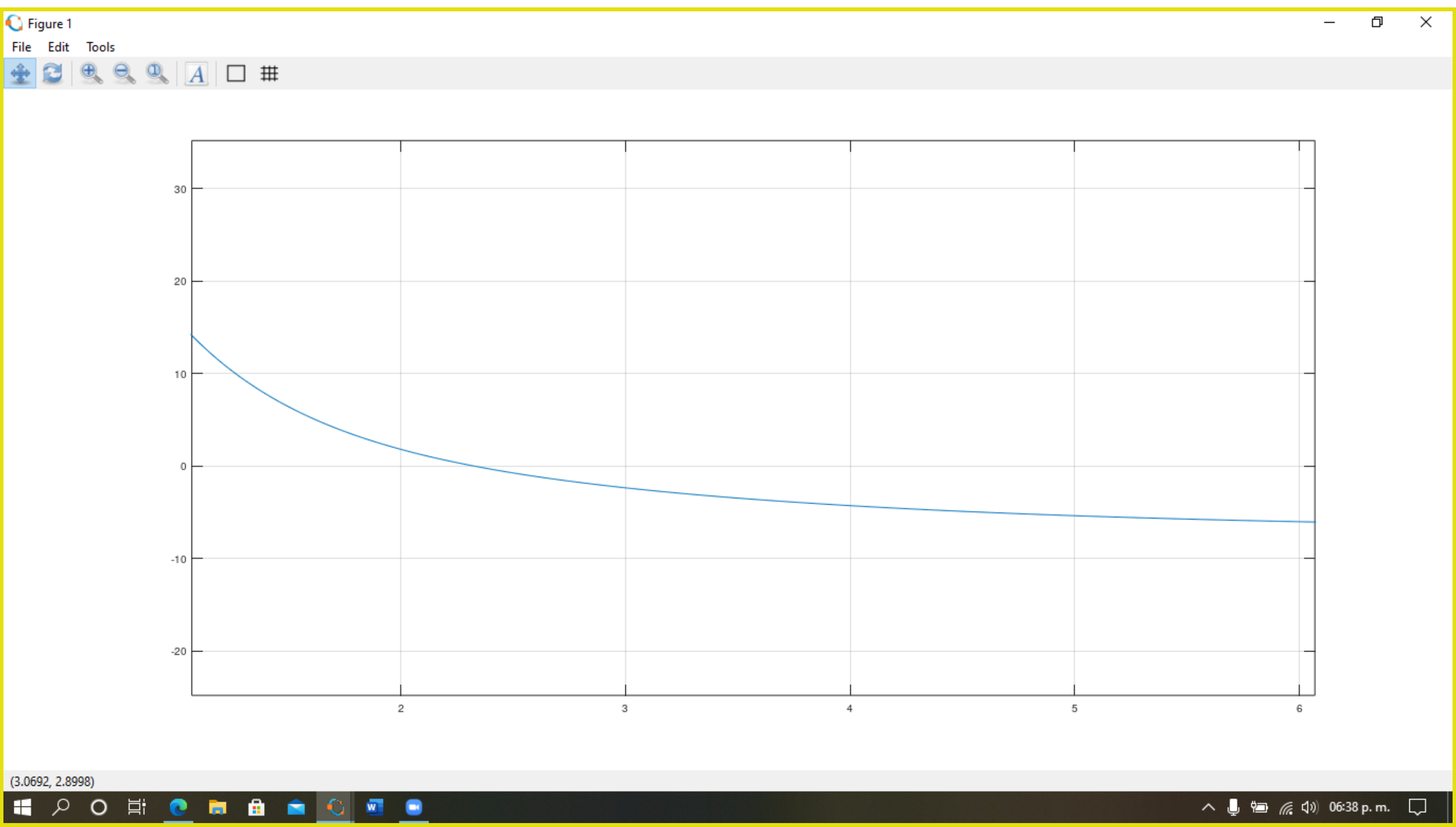
$$\gg Tol = 1e - 3;$$

$$\gg n = log((b - a) / Tol) / log(2)$$

se necisitan 10 *iteraciones para el método de Bisección*

$$raíz = \frac{b + a}{2}$$

$$error\ absoluto = \left| \frac{b - a}{2} \right|$$



Paso 3.

Aplicamos el método de Bisección.

```
>> f=@(t)80*exp(-2*t)+20*exp(-0.5*t)-7
```

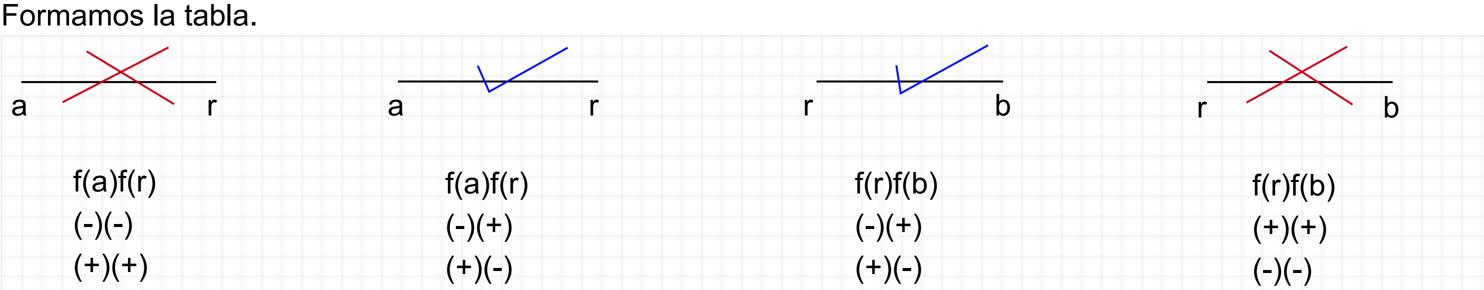
```
f =

@(t) 80 * exp (-2 * t) + 20 * exp (-0.5 * t) - 7

>> t=0:0.01:10;
>> plot(t,f(t))
>> grid on
>> a=2;
>> b=3;
>> Tol=1e-3
Tol = 1.0000e-03
>> n=log((b-a)/Tol)/log(2)
n = 9.9658
>> r1=(b+a)/2
r1 = 2.5000
>> format long
>> r1=(b+a)/2
r1 = 2.500000000000000
>> e1=abs((b-a)/2)
e1 = 0.500000000000000
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r1))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> b=r1;
>> r2=(b+a)/2
r2 = 2.250000000000000
>> e2=abs((b-a)/2)
e2 = 0.250000000000000
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r2))
ans = 1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> a=r2;
>> r3=(b+a)/2
r3 = 2.375000000000000
>> e3=abs((b-a)/2)
e3 = 0.125000000000000
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r3))
ans = -1
```

```
>> sign(f(b))
ans = -1
>> b=r3;
>> r4=(b+a)/2
r4 = 2.312500000000000
>> e4=abs((b-a)/2)
e4 = 6.250000000000000e-02
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r4))
ans = 1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> a=r4;
>> r5=(b+a)/2
r5 = 2.343750000000000
>> e5=abs((b-a)/2)
e5 = 3.125000000000000e-02
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r5))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> b=r5;
>> r6=(b+a)/2
r6 = 2.328125000000000
>> e6=abs((b-a)/2)
e6 = 1.562500000000000e-02
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r6))
ans = 1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> a=r6;
>> r7=(b+a)/2
r7 = 2.335937500000000
>> e7=abs((b-a)/2)
e7 = 7.812500000000000e-03
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r7))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
```

```
>> b=r7;
>> r8=(b+a)/2
r8 = 2.332031250000000
>> e8=abs((b-a)/2)
e8 = 3.906250000000000e-03
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r8))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> b=r8;
>> r9=(b+a)/2
r9 = 2.330078125000000
>> e9=abs((b-a)/2)
e9 = 1.953125000000000e-03
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r9))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
>> b=r9;
>> r10=(b+a)/2
r10 = 2.329101562500000
>> e10=abs((b-a)/2)
e10 = 9.765625000000000e-04
>> sign(f(a))
ans = 1
>> sign(f(r10))
ans = -1
>> sign(f(b))
ans = -1
```

Paso 4.

Formamos la tabla.



Tolerancia=0.001

iteración	limite inferior del inter	raíz	limite superior del inter	error
i	a	r	b	e
1	2(+)	2.50000000(−)	3(−)	0.500000000
2	2(+)	2.25000(+)	2.5000000(−)	0.25000000
3	2.25000(+)	2.37500000(−)	2.5000000(−)	0.1250000
4	2.25000(+)	2.3125000(+)	2.37500000000(−)	0.0625
5	2.3125000(+)	2.3437500(−)	2.375000000(−)	0.031250000
6	2.3125000(+)	2.328125000(+)	2.3437500(−)	0.015625000
7	2.328125000(+)	2.335937500(−)	2.3437500(−)	0.0078125000
8	2.328125000(+)	2.3320312(−)	2.335937500(−)	0.00390625000
9	2.328125000(+)	2.33007812500(−)	2.3320312(−)	0.00195312500
10	2.328125000(+)	2.32910156250(−)	2.33007812500(−)	0.00097656250000

iteración	limite inferior del inter	raíz	limite superior del inter	error
i	a	r	b	e
1	2(+)	2.50000000(−)	3(−)	0.500000000
2	2(+)	2.25000(+)	2.5000000(−)	0.25000000
3	2.25000(+)	2.37500000(−)	2.5000000(−)	0.1250000
4	2.25000(+)	2.3125000(+)	2.37500000000(−)	0.0625
5	2.3125000(+)	2.3437500(−)	2.375000000(−)	0.031250000
6	2.3125000(+)	2.328125000(+)	2.3437500(−)	0.015625000
7	2.328125000(+)	2.335937500(−)	2.3437500(−)	0.0078125000
8	2.328125000(+)	2.3320312(−)	2.335937500(−)	0.00390625000
9	2.328125000(+)	2.33007812500(−)	2.3320312(−)	0.00195312500
10	2.328125000(+)	2.32910156250(−)	2.33007812500(−)	0.00097656250000

Ejercicio 3.
La concentración C de una bactería contaminante en un lago decrece segun la expresión:

$$C(t) = 80e^{-2t} + 20e^{-0.5t}$$

siendo t el tiempo en horas.

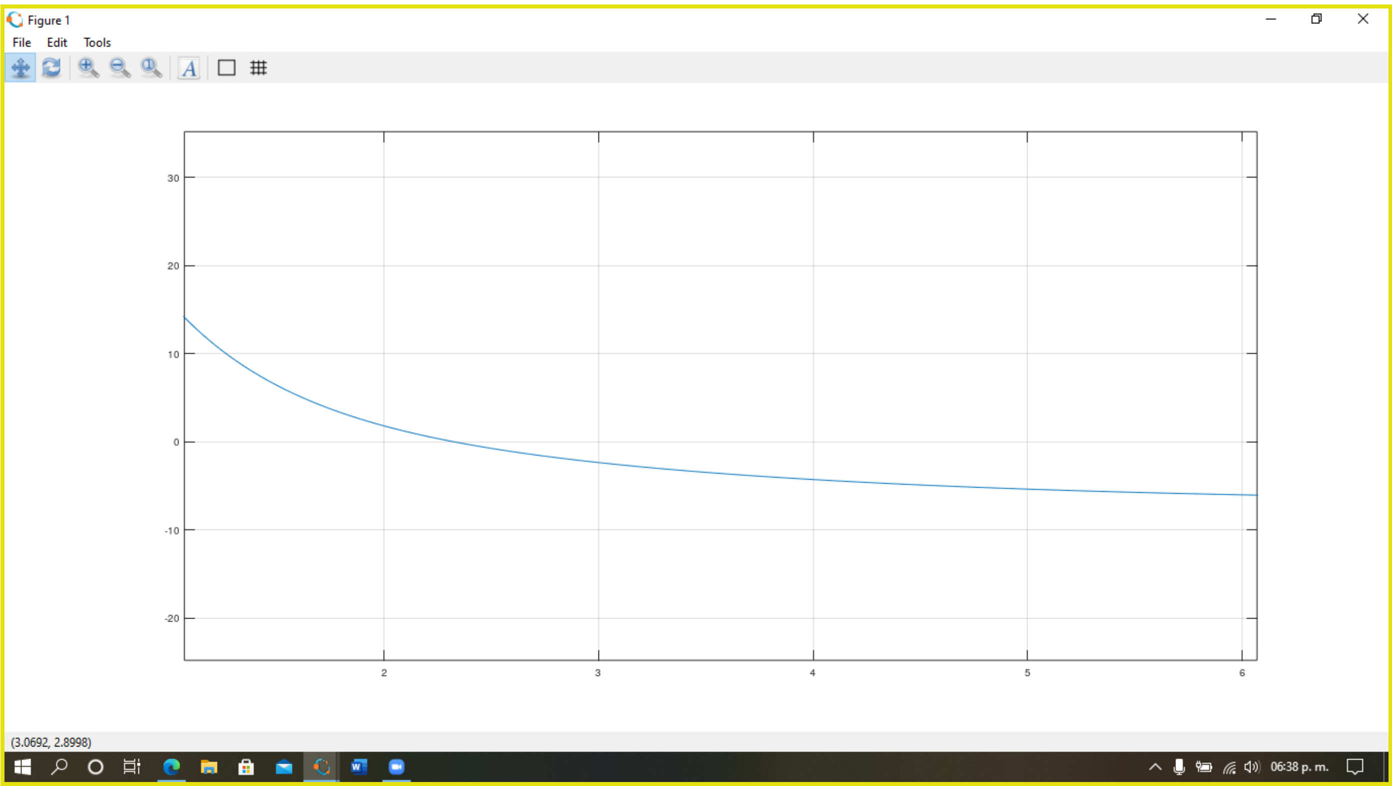
a. Obtener una raíz cuando la C(t)=7 con un error menor de 1×10^{-3} . Utice el método de Newton-Raphson.

Paso 1.

La ecuación de concentración de bacterias la igualamos a cero y designamos la función $f(t)$.

$$7 = 80e^{-2t} + 20e^{-0.5t}$$
$$f(t) = 80e^{-2t} + 20e^{-0.5t} - 7 = 0$$

$$Paso\ 2.$$
$$Después\ se\ grafica\ la\ función\ f(t),\ en\ Matlab.$$
$$\gg f = @(t)80*exp(-2*t) + 20*exp(-0.5*t) - 7$$
$$\gg t = 0:0.01:10;$$
$$\gg plot(t, f(t))$$



Paso 3.

Aplicamos el método de Newton-Raphson.
En este método se requiere la gráfica para tener la primera aproximación a la raíz
Con la gráfica doy mi primera aproximación

$$x1 = 2$$
$$paso\ 3$$
$$doy\ inicio\ al\ método\ de\ Newton - Raphson.$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$x_2 = x_{2-1} - \frac{f(x_{2-1})}{f'(x_{2-1})}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

Respuesta al ejercicio: La raíz aproximada es 2.329087616845823 horas con un error de 4.208070525061518e-05 horas.

```
>> f
f =

@(t) 80 * exp (-2 * t) + 20 * exp (-0.5 * t) - 7
>> pkg load symbolic
>> syms t
Symbolic pkg v2.9.0: Python communication link active, SymPy v1.4.
>> f=f(t)

f = (sym)

                  -t
                  ---
         -2*t      2
  -7 + 80*e     + 20*e

>> x1=2;
>> x2=x1-subs(f,x1)/subs(diff(f),x1)
x2 = (sym)

          -4       -1
    -7 + 80*e   + 20*e
  - -------------------- + 2
```

```
        -1       -4
   - 10*e   - 160*e

>> x2=double(x1-subs(f,x1)/subs(diff(f),x1))
x2 = 2.275799383125687
>> errorrelativoporcentual=abs((x2-x1)/x2)*100
errorrelativoporcentual = 12.11879154070654
>> errorrelativoporcentual1=abs((x2-x1)/x2)*100
errorrelativoporcentual1 = 12.11879154070654
>> x3=double(x2-subs(f,x2)/subs(diff(f),x2))

x3 = 2.327680960043951
>> errorrelativoporcentual2=abs((x2-x1)/x2)*100
errorrelativoporcentual2 = 12.11879154070654
>> errorrelativoporcentual2=abs((x3-x2)/x3)*100
errorrelativoporcentual2 = 2.228895532027019
>> x4=double(x3-subs(f,x3)/subs(diff(f),x3))

x4 = 2.329086636749328
>> errorrelativoporcentual3=abs((x4-x3)/x4)*100
errorrelativoporcentual3 = 6.035313084527635e-02
>> x5=double(x4-subs(f,x4)/subs(diff(f),x4))

x5 = 2.329087616845823
>> errorrelativoporcentual4=abs((x5-x4)/x5)*100
errorrelativoporcentual4 = 4.208070525061518e-05
>>
```