第7章 二元关系

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示
- 关系的基本运算
- 关系的性质

- 关系的闭包
- 等价关系
- 偏序关系

7.1 有序对与笛卡儿积

- 有序对
- 笛卡儿积及其性质

有序对

定义

由两个客体x和y，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作$\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$

实例：点的直角坐标(3,-4)

有序对性质

有序性 $\langle x,y\rangle\neq\langle y,x\rangle$ （当$x\neq y$时）

$\langle x,y\rangle$与$\langle u,v\rangle$相等的充分必要条件是

$$\boxed{\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle \Leftrightarrow x=u \wedge y=v}$$

例1 $\langle 2,x+5\rangle=\langle 3y-4,y\rangle$，求$x,y$.

解 $3y-4=2,\ x+5=y \Rightarrow y=2,\ x=-3$

有序n元组

定义 一个**有序n(n≥2)元组**是一个有序对，它的第一个元素为有序的(n−1)元组$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\rangle$，第二个元素为$a_n$，记为$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$。即

$$\langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

定理 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$当且仅当$a_i=b_i$，$i=1, 2, \ldots, n$.

注：n元组有严格的集合定义，但我们关注的是有序对及有序n元组的次序性，不过多讨论他们的集合表示。

笛卡儿积

定义　设A,B为集合，A与B的笛卡儿积记作$A\times B$，且

$$A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}.$$

例2　$A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c\}$

$A\times B=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>, <3,a>, <3,b>,<3,c>\}$

$B\times A=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>, <b,3>,<c,3>\}$

$A=\{\varnothing\}, B=\varnothing$

$P(A)\times A=\{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

$P(A)\times B=\varnothing$

笛卡儿积的性质

不适合交换律

$$A\times B\neq B\times A \qquad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

不适合结合律

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C) \qquad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$$A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$$

若 $|A|=m$, $|B|=n$, 则$|A\times B|=mn$

性质的证明

证明 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee <x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以有$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

例题

例3

(1) 证明$A=B, C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C=B\times D$是否推出$A=B, C=D$? 为什么？

解 (1) 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times C$$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C$$
$$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in D$$
$$\Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$$

(2) 不一定. 反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C=D=\varnothing$, 则$A\times C=B\times D$但是$A\neq B$.

7.2 二元关系

定义

如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空, 且它的元素都是有序对

（2）集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系，记作***R***.

如$<x,y>\in R$, 可记作 xRy；如果$<x,y>\notin R$, 则记作$x\not R y$

实例：$R=\{<1,2>,<a,b>\}$, $S=\{<1,2>,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写$1R2$, aRb, $a\not R c$等.

从A到B的关系与A上的关系

定义

设A,B为集合, $A \times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系, 当$A=B$时则叫做 A上的二元关系.

例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, 那么

$R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A \times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$

R_1, R_2, R_3, R_4是从A到B的二元关系,

R_3和R_4同时也是A上的二元关系.

计数

$|A|=n$, $|A \times A|=n^2$, $A \times A$的子集有2^{n^2}个. 所以A上有2^{n^2}个不同的二元关系.

例如 $|A|=3$, 则 A上有=512个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

设A为任意集合，

$\varnothing$是A上的关系，称为空关系

E_A, I_A分别称为全域关系与恒等关系，定义如下：

$E_A=\{<x,y>|x\in A\land y\in A\}=A\times A$

$I_A=\{<x,x>|x\in A\}$

例如, $A=\{1,2\}$, 则

$E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$

$I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$

A上重要关系的实例（续）

小于等于关系L_A, 整除关系D_A, 包含关系$R_\subseteq$定义如下：

$L_A=\{<x,y>| x,y\in A\wedge x\le y\}$, 这里$A\subseteq$R，R为实数集合

$D_B=\{<x,y>| x,y\in B\wedge x$整除$y\}$, $B\subseteq$Z*, Z*为非0整数集

$R_\subseteq=\{<x,y>| x,y\in A\wedge x\subseteq y\}$, 这里$A$是集合族.

例如 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 则

$L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

$A=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则$A$上的包含关系是

$R_\subseteq=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$
$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

类似的还可以定义大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等等.

关系的表示

1. 关系矩阵
2. 关系图
3. 集合表达式

关系矩阵(matrix)

- **定义** 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$, 则R的关系矩阵 $M(R)=(r_{ij})_{n\times n}$, 其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & a_i R a_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

- 例如, $A=\{a,b,c\}$,

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$, 则

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

关系图(graph)

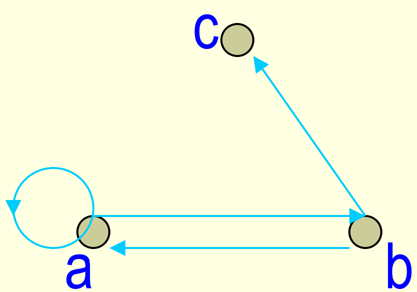
- **定义** 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$, 则A中元素以"○"表示(称为顶点), R中元素以"→"表示(称为有向边); 若$x_i R x_j$, 则从顶点x_i向顶点x_j引有向边$\langle x_i,x_j\rangle$, 这样得到的图称为R的关系图 $G(R)=\langle V,E\rangle$,其中V表示顶点集合，E表示边集合。

关系图举例

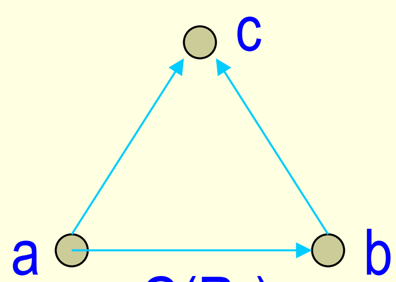
- 例如, $A=\{a,b,c\}$,

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$,

$R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$



$G(R_1)$



$G(R_2)$

关系的表示

注意：设*A*, *B*为有穷集

1) R的集合表达式,关系矩阵,关系图三者均可以唯一互相确定。集合表达式便于书写，关系矩阵便于存储，关系图直观清晰；

2）关系矩阵适合于表示从*A*到*B*的关系或者*A*上的关系

关系图适合于表示*A*上的关系

7.3 关系的运算

- 基本运算定义
  - 定义域、值域、域
  - 逆、右复合
- 基本运算的性质
- 幂运算
  - 定义
  - 求法
  - 性质

关系的基本运算定义

定义域、值域 和 域

$$\mathrm{dom}R = \{x \mid \exists y\,(<x,y>\in R)\}$$

$$\mathrm{ran}R = \{y \mid \exists x\,(<x,y>\in R)\}$$

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例1 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

关系的基本运算定义（续）

逆与右复合

$$R^{-1} = \{<y,x> \mid <x,y>\in R\}$$

$$R\circ S = |<x,z> \mid \exists\, y\ (<x,y>\in R\wedge<y,z>\in S)\ \}$$

例2 $R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$S=\{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^{-1}=\{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$

$R\circ S =\{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

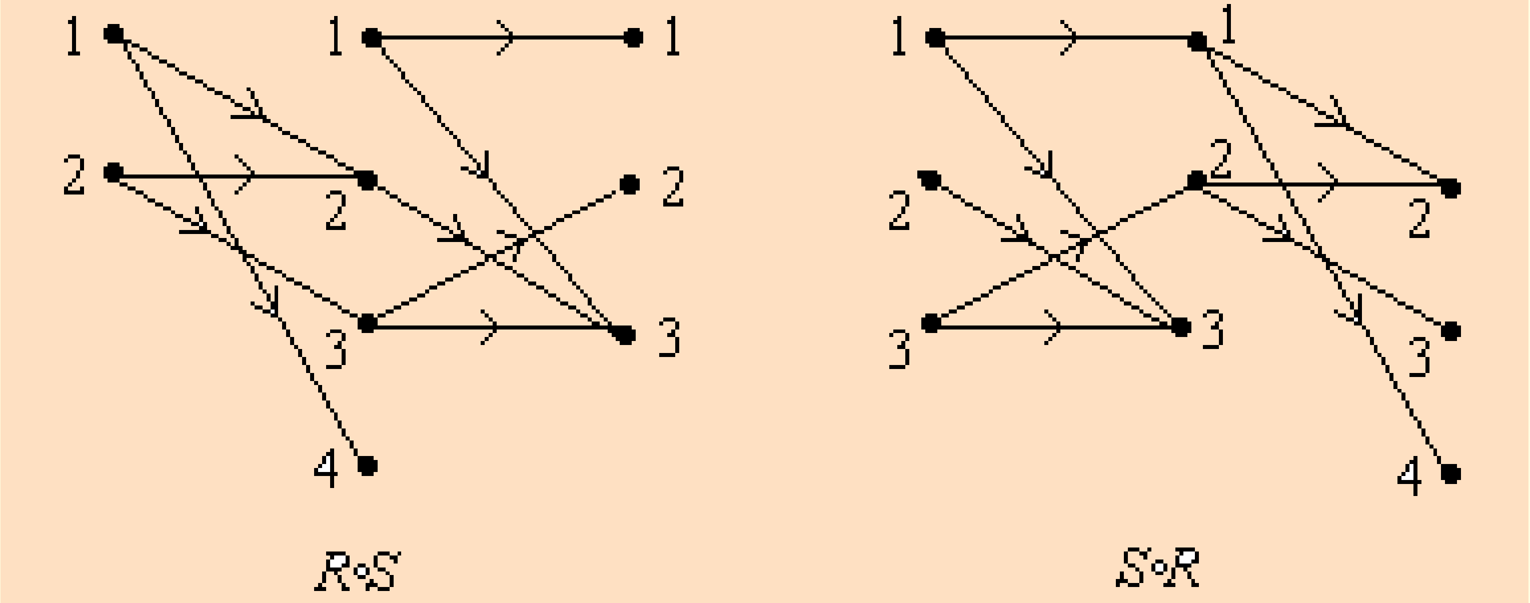
$S\circ R =\{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$

右复合运算的图示方法

利用图示（不是关系图）方法求合成

$R \circ S$ ={<1,3>, <2,2>, <2,3>}

$S \circ R$ ={<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>}



关系基本运算的性质

定理 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x,y>$, 由逆的定义有

$$<x,y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in F$$

所以有 $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) 任取x,

$$x\in \mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y(<y,x>\in F) \Leftrightarrow x\in \mathrm{ran}F$$

所以有$\mathrm{dom}F^{-1}= \mathrm{ran}F$. 同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$.

关系基本运算的性质（续）

定理 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1}= G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in(F\circ G)\circ H$$
$$\Leftrightarrow \exists t\ (<x,t>\in F\circ G \wedge <t,y>\in H)$$
$$\Leftrightarrow \exists t\ (\exists s(<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G) \wedge <t,y>\in H)$$
$$\Leftrightarrow \exists t \exists s\ (<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G \wedge <t,y>\in H)$$
$$\Leftrightarrow \exists s\ (<x,s>\in F \wedge \exists t\ (<s,t>\in G \wedge <t,y>\in H))$$
$$\Leftrightarrow \exists s\ (<x,s>\in F \wedge <s,y>\in G\circ H)$$
$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ(G\circ H)$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

关系基本运算的性质（续）

（2）任取$<x,y>$,

$$<x,y> \in (F \circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y,x> \in F \circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<y,t> \in F \wedge <t,x> \in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in G^{-1} \wedge <t,y> \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in G^{-1} \circ F^{-1}$$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

A上关系的幂运算

设R为A上的关系, n为自然数, 则 R 的 n次幂定义为:

(1) $R^0=\{<x,x> \mid x\in A\}=I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

对于A上的任何关系R_1和R_2都有

$$R_1^0 = R_2^0 = I_A$$

对于A上的任何关系 R 都有

$$R^1 = R$$

幂的求法

对于集合表示的关系R，计算R^n就是n个R右复合 .

矩阵表示的关系就是矩阵相乘, 其中相加采用逻辑加.

例3 设$A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$, 求$R$的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R与R^2的关系矩阵分别为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

幂的求法（续）

同理R^3和R^4的矩阵是:

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

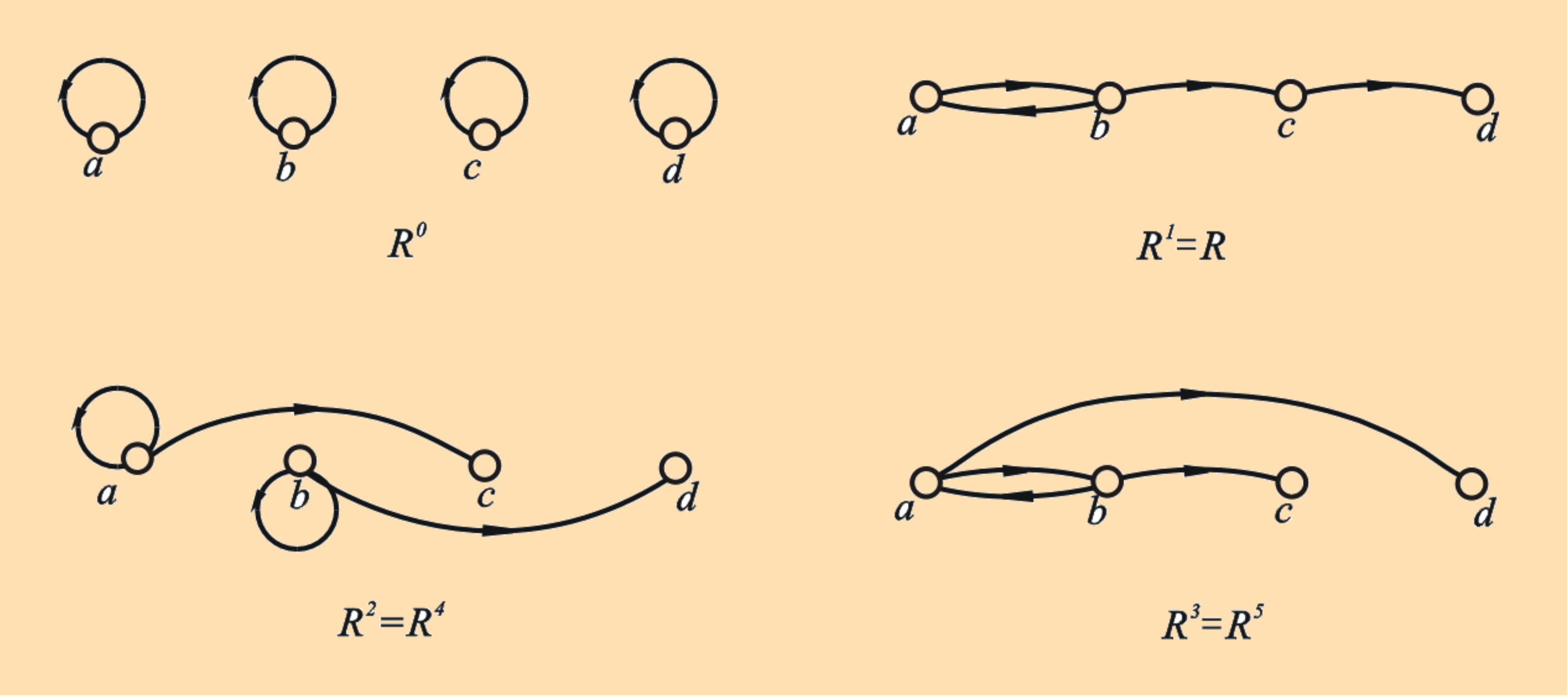
$$R^2=R^4=R^6=\ldots, \quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

而$R^0=I_A$的关系矩阵

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

幂的求法（续）

用关系图的方法得到R^0, R^1, R^2, R^3,…的关系图如下图所示



幂运算的性质

定理　设A为n元集, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得　$R^s = R^t$.

证　R为A上的关系，由于$|A|=n$，A上的不同关系只有 2^{n^2} 个. 当列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots\ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得　$R^s=R^t$.

定理

- 定理: 设 $R\subseteq A\times A$, 若 $\exists s,t\in N$ $(s<t)$,使得$R^s = R^t$, 则

(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$;

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$k,i\in N$, $p=t-s$;

(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则$\forall q\in N$, $R^q\in S$.

定理 (证明(2))

- (2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$k,i\in N$, $p=t-s$;
- 证明: $k=0$时,显然;

  $k=1$时,即(1);

  设 $k\geq 2$. 则

$$R^{s+kp+i} = R^{s+k(t-s)+i} = R^{s+t-s+(k-1)(t-s)+i}$$
$$= R^{t+(k-1)(t-s)+i} = R^{s+(k-1)(t-s)+i} = \ldots$$
$$= R^{s+(t-s)+i} = R^{t+i} = R^{s+i}. \quad \#$$

定理 (证明(3))

(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则$\forall q\in N$, $R^q\in S$.

- 证明: 若$q<t-1$，结论显然成立；

若 $q>t-1\geq s$, 则令 $q=s+kp+i$,

其中 $k,i\in N$, $p=t-s$, $s+i<t$;

于是 $R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}\in S$.

幂指数的化简

- 方法: 利用定理16, 定理18.
- 例: 设 $R\subseteq A\times A$, 化简R^{100}的指数. 已知

 (1) $R^7 = R^{15}$; (2) $R^3 = R^5$; (3) $R^1 = R^3$.

- 解:

(1) $R^{100}=R^{7+11\times 8+5}=R^{7+5}=R^{12}\in\{R^0,R^1,\ldots,R^{14}\}$;

(2) $R^{100}=R^{3+48\times 2+1}=R^{3+1}=R^4\in\{R^0,R^1,\ldots,R^4\}$;

(3) $R^{100}=R^{1+49\times 2+1}=R^{1+1}=R^2\in\{R^0,R^1,R^2\}$. #

幂运算的性质（续）

定理　设 R 是 A 上的关系, $m, n \in \mathrm{N}$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的$m \in \mathrm{N}$, 施归纳于n.

若$n=0$, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设$R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1} ,$$

所以对一切$m,n \in \mathrm{N}$有$R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

幂运算的性质（续）

接上页证明

(2) 对于任意给定的 m∈N, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$(R^m)^0=I_A=R^0=R^{m\times 0}$$

假设 $(R^m)^n=R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1}=(R^m)^n\circ R^m=(R^{mn})\circ R^m=R^{mn+m}=R^{m(n+1)}$$

所以对一切 m,n∈N 有 $(R^m)^n=R^{mn}$.

7.4 关系的性质

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性

自反性(reflexivity)

设A为一集合, $R \subseteq A \times A$, 对于任意的$x \in A$,均有xRx, 说R是A上自反的(reflexive)二元关系

$$\forall x(\ x \in A \rightarrow xRx\ ).$$

- R是非自反的 $\Leftrightarrow \exists x(\ x \in A \wedge \neg xRx)$

自反性

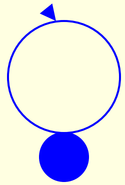
- 定理: R是自反的

  $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

  $\Leftrightarrow R^{-1}$是自反的

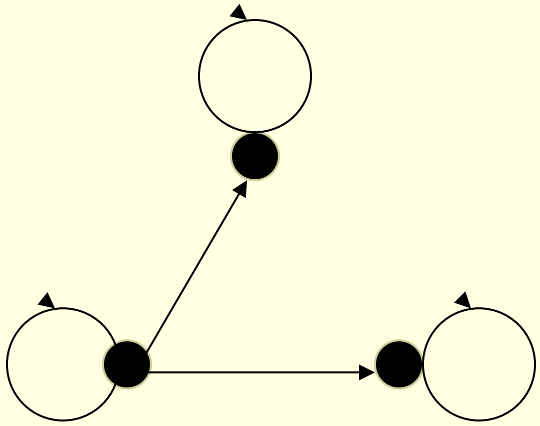
  $\Leftrightarrow$ M(R)主对角线上的元素全为1

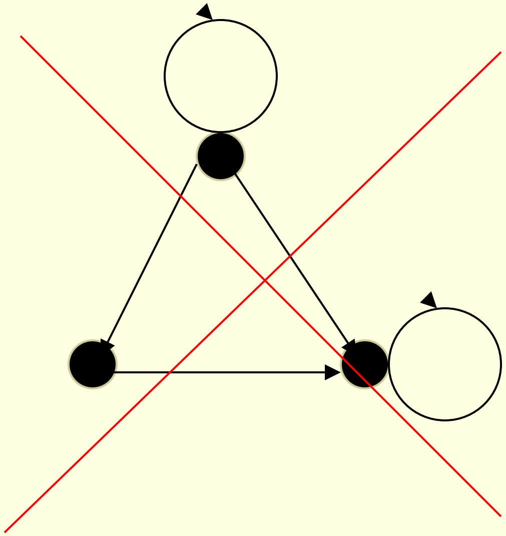
  $\Leftrightarrow$ G(R)的每个顶点处均有环.   #



自反性(举例)

例如，集合A上的全域关系E_A、恒等关系I_A、小于等于关系L_A、整除关系D_A都是A上的自反关系；包含关系(R⊆)、平面几何中的全等和相似关系也是自反关系。





反自反性(irreflexivity)

- 设A为一集合, $R \subseteq A \times A$, 对于任意的$x \in A$,均有$<x,x> \notin R$, 则R是A上反自反的(irreflexive)二元关系

$$\forall x(x \in A \rightarrow \neg xRx).$$

- R是非反自反的 $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge xRx)$

反自反性

- 定理: R是反自反的

  $\Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing$

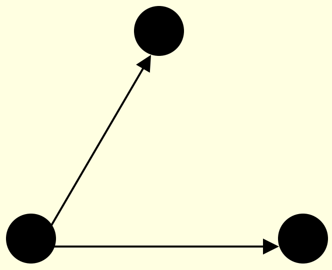
  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反自反的

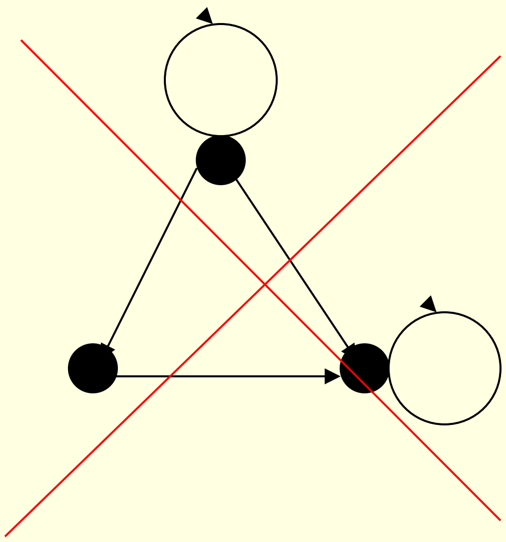
  $\Leftrightarrow$ M(R)主对角线上的元素全为0

  $\Leftrightarrow$ G(R)的每个顶点处均无环.   #

反自反性(举例)

小于关系和真包含关系是反自反关系。





例　设$A=\{1,2,3\}$，R_1，R_2，R_3是A上的关系，其中

$R_1=\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$

说明R_1，R_2，R_3是否为A上的自反关系和反自反关系.

解：**R_2**是自反的。

R_3是反自反的。

R_1既不是自反的，因为它不包含**<3,3>**；也不是反自反的，因为它包含了**<1,1>,<2,2>**。　　**#**

既是自反的又是反自反的？　　$\varnothing$上的空关系

对称性(symmetry)

- 对于任意的x,y$\in$A,若xRy,yRx,则称R为A上对称的(symmetric)二元关系

$$\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx).$$

- R非对称 $\Leftrightarrow \exists x \exists y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge \neg yRx)$

对称性

- 定理: R是对称的

  $\Leftrightarrow R^{-1}=R$

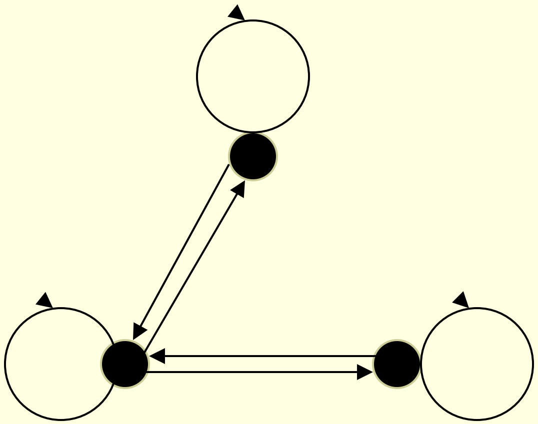
  $\Leftrightarrow R^{-1}$是对称的

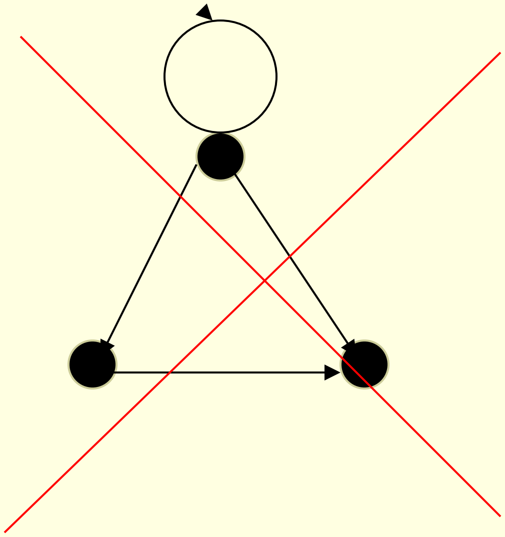
  $\Leftrightarrow M(R)$是对称的

  $\Leftrightarrow G(R)$的任何两个顶点之间若有边, 则必有两条方向相反的有向边. #

对称性(举例)

- 恒等关系I_A、全域关系E_A是A上的对称关系。
- 同学关系、几何中的相似关系是对称关系。





反对称性(antisymmetry)

- 设$R \subseteq A \times A$, 说R是反对称的(antisymmetric),若

  $\forall x \forall y (x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx \rightarrow x=y)$

- R非反对称$\Leftrightarrow \exists x \exists y (x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx \land x \neq y)$

反对称性

- 定理: R是反对称的

  $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R \subseteq I_A$

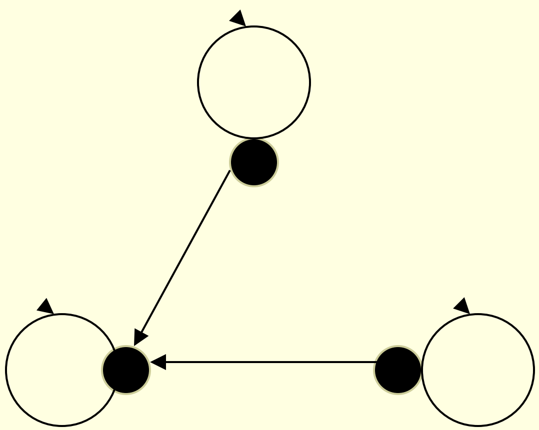
  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反对称的

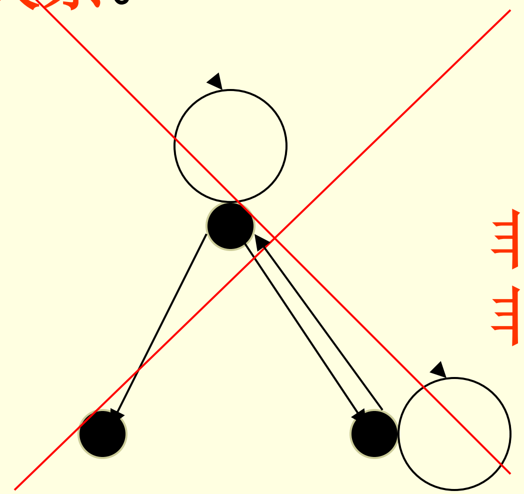
  $\Leftrightarrow$ 在M(R)中, $\forall i \forall j(i \neq j \wedge r_{ij}=1 \rightarrow r_{ji}=0)$

  $\Leftrightarrow$ 在G(R)中, $\forall x_i \forall x_j(i \neq j)$, 若有有向边$<x_i,x_j>$, 则必没有$<x_j,x_i>$. #

反对称性(举例)

小于等于(≤)关系是反对称关系。

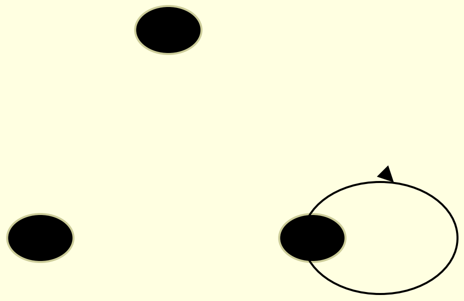




非反对称关系
非对称关系

对称且反对称关系 ？

对称且反对称？



传递性(transitivity)

- 设A为一集合, $R \subseteq A \times A$, 对于任意的$x,y,z \in A$,若xRy且yRz, 则xRz,则称R为A上传递的(transitive)二元关系

  $\forall x \forall y \forall z(x \in A \land y \in A \land z \in A \land xRy \land yRz \rightarrow xRz)$.
- R非传递⇔

  $\exists x \exists y \exists z(x \in A \land y \in A \land z \in A \land xRy \land yRz \land \neg xRz)$

- 定理： R是传递的

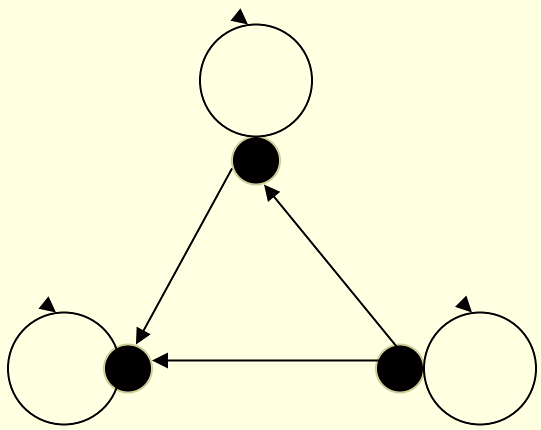
  $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$

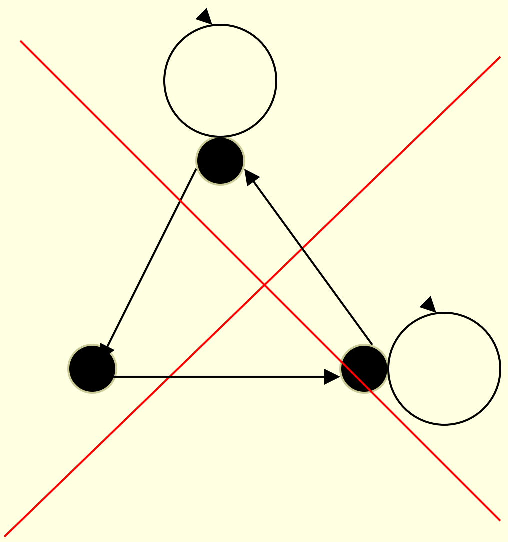
  $\Leftrightarrow$ 在 $M(R \circ R)$ 中， $\forall i \forall j$， 若 $r_{ij}' = 1$, 则 $M(R)$中相应的元素$r_{ij} = 1$.

  $\Leftrightarrow$ 在$G(R)$中， $\forall x_i \forall x_j \forall x_k$， 若有有向边$\langle x_i, x_j \rangle, \langle x_j, x_k \rangle$, 则必有有向边$\langle x_i, x_k \rangle$.   #

传递性(举例)

例如，A上的全域关系、恒等关系和空关系都是A上的传递关系。小于关系，小于等于关系、整除关系、包含关系和真包含关系也是相应集合上的传递关系。





举例

- 在 $N = \{0,1,2,\ldots\}$ 上:
- $\leq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\leq y\}$自反,反对称,传递
- $\geq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\geq y\}$自反,反对称,传递
- $<=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x<y\}$反自反,反对称,传递
- $>=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x>y\}$反自反,反对称,传递
- $|=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x|y\}$反对称,传递,? ($\neg 0|0$)
- $I_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x=y\}$自反,对称,反对称,传递
- $E_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\}=N\times N$自反,对称,传递. #

关系性质的充要条件

定理　设R为A上的关系, 则

（1） R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

（2） R在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

（3） R在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

（4） R在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

（5） R在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

自反性证明

证明模式 证明R在A上自反

任取x,

$x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x,x> \in R$

前提 推理过程 结论

例4 证明若 $I_A \subseteq R$ ，则 R 在 A 上自反.

证 任取x,

$$x \in A \Rightarrow <x,x> \in I_A \Rightarrow <x,x> \in R$$

因此 R 在 A 上是自反的.

对称性证明

证明模式 证明R在A上对称

任取$<x, y>$

$<x,y>\in R$ $\Rightarrow$…… …………..….. …….$\Rightarrow$ $<y,x>\in R$

前提 推理过程 结论

例5 证明若 $R=R^{-1}$, 则 R 在A上对称.

证 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in R \Rightarrow <y,x>\in R^{-1} \Rightarrow <y,x>\in R$$

因此 R 在 A 上是对称的.

反对称性证明

证明模式 证明R在A上反对称

任取$<x, y>$

$<x,y>\in R\wedge<y,x>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x=y$

前提　　　推理过程　　　结论

例6 证明若 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，则 R在A上反对称.

证 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in R \wedge<y, x>\in R \Rightarrow <x,y>\in R \wedge<x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in I_A \Rightarrow x=y$$

因此 R 在 A 上是反对称的.

传递性证明

证明模式 证明R在A上传递

任取$<x, y>$，$<y, z>$

$<x,y>\in R \wedge <y, z>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x,z>\in R$

前提 推理过程 结论

例7 证明若 $R\circ R\subseteq R$，则 R 在 A 上传递.

证 任取$<x,y>$，$<y, z>$

$<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R \Rightarrow <x,z>\in R\circ R \Rightarrow <x,z>\in R$

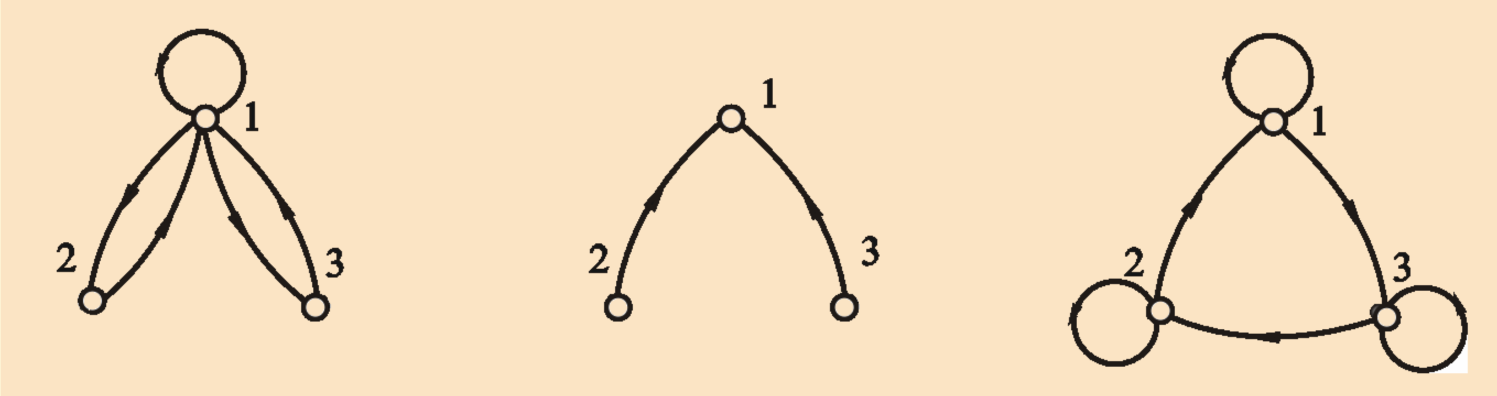
因此 R 在 A 上是传递的.

关系性质判别

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij} = 1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji} = 0$	对M^2中1所在位置,M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边,一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边,一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边,则从x_i到x_k也有边

实例

例8 判断下图中关系的性质, 并说明理由



（1）不是自反也不是反自反的；对称的, 不是反对称的；不是传递的.

（2）是反自反但不是自反的；是反对称的但不是对称的；是传递的.

（3）是自反但不是反自反的；是反对称的但不是对称的；不是传递的.

关系运算的性质

- 定理 设$R_1,R_2 \subseteq A\times A$

(1)若R_1,R_2是自反的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, $R_1\circ R_2$, $R_2\circ R_1$也是自反的;

(2)若R_1,R_2是反自反的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, R_1-R_2 , R_2-R_1也是反自反的;

(3)若R_1,R_2是对称的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, R_1-R_2 , R_2-R_1, $\sim R_1$, $\sim R_2$也是对称的;

(4)若R_1,R_2是反对称的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1\cap R_2$, R_1-R_2 , R_2-R_1也是反对称的;

(5)若R_1,R_2是传递的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1\cap R_2$也是传递的.

运算与性质的关系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

习题七
第二次作业：9, 12, 16, 22

7.5 关系的闭包

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
  - 集合表示
  - 矩阵表示
  - 图表示
- 闭包的性质

什么是闭包?

- 闭包(closure): 包含所有给定对象，并且具有指定性质的最小集合
- “最小”： 任何包含同样对象，具有同样性质的集合，都包含这个闭包集合

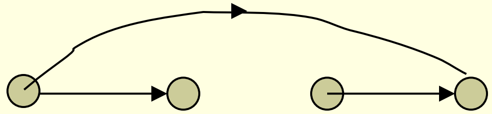
自反闭包(reflexive closure)

- 自反闭包: 包含给定关系R的最小自反关系, 称为R的自反闭包, 记作r(R).

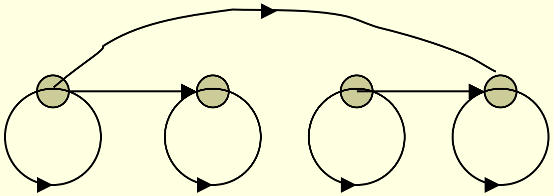
  (1) $R \subseteq r(R)$;

  (2) r(R)是自反的;

  (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S$自反$) \rightarrow r(R) \subseteq S)$.



G(R)



G(r(R))

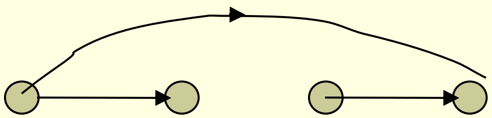
对称闭包(symmetric closure)

- 对称闭包: 包含给定关系R的最小对称关系, 称为R的对称闭包, 记作s(R).

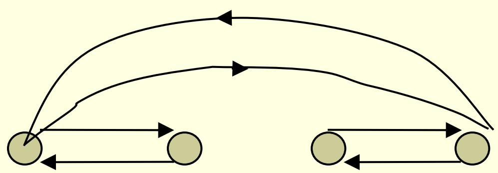
  (1) $R \subseteq s(R)$;

  (2) s(R)是对称的;

  (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S$对称$) \rightarrow s(R) \subseteq S)$.



G(R)



G(s(R))

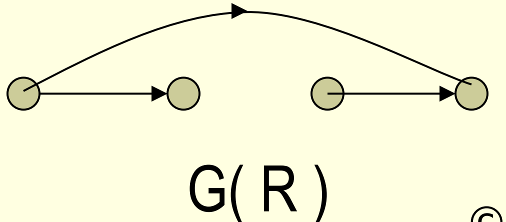
传递闭包(transitive closure)

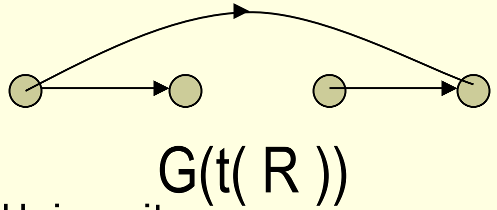
- 传递闭包: 包含给定关系R的最小传递关系, 称为R的传递闭包, 记作t(R).

  (1) $R \subseteq t(R)$;

  (2) t(R)是传递的;

  (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S$传递$) \rightarrow t(R) \subseteq S)$.





闭包的求法

- 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

定理7.10 (1) $r(R) = R \cup I_A$;

定理7.10 (2) $s(R) = R \cup R^{-1}$;

定理7.10 (3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

- R自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

  R对称 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

  R传递 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

定理7.10

- 定理7.10(1): 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

$$r(R) = R\cup I_A;$$

- 证明: $R\cup I_A$是自反的;

$I_A\subseteq R\cup I_A \Leftrightarrow R\cup I_A$自反 $\Rightarrow r(R)\subseteq R\cup I_A$;

$R\subseteq r(R)\wedge I_A\subseteq r(R) \Rightarrow R\cup I_A\subseteq r(R)$;

$\therefore\ r(R) = R\cup I_A$.

定理7.10

- 定理7.10(2): 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\emptyset$, 则

$$s(R) = R\cup R^{-1};$$

- 证明:

(1)$(R\cup R^{-1})^{-1}=R\cup R^{-1} \Leftrightarrow R\cup R^{-1}$对称,并且 $R\subseteq R\cup R^{-1} \Rightarrow s(R)\subseteq R\cup R^{-1}$;

(2) $R\subseteq s(R) \wedge s(R)$对称

$\Rightarrow R\subseteq s(R) \wedge R^{-1}\subseteq s(R) \Rightarrow R\cup R^{-1}\subseteq s(R)$

$\therefore\ s(R) = R\cup R^{-1}$.

定理7.10

- 定理7.10(3): 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots;$$

- 证明: (1)证明$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$是传递的

$\forall x,y,z \in A$, $<x,y> \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \wedge <y,z> \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

$\Rightarrow \exists s(<x,y> \in R^s) \wedge \exists t(<y,z> \in R^t)$

$\Rightarrow <x,z> \in R^t \circ R^s \Rightarrow <x,z> \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

所以 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots;$

(2) $R^n \subseteq t(R)$(用归纳法证明)

$\Rightarrow R \subseteq t(R) \wedge R^2 \subseteq t(R) \wedge R^3 \subseteq t(R) \wedge \ldots$

$\Rightarrow R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq t(R)$

$\therefore t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots.$

定理7.10(3)的推论

- 推论: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $0<|A|<\infty$, 则$\exists \ell \in N$, 使得 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^\ell$;
- 证明: 由定理16知 $\exists s,t \in N$, 使得 $R^s = R^t$.

由定理2.18知 $R, R^2, R^3, \ldots \in \{ R^0, R^1, \ldots, R^{t-1} \}$.

取$\ell = t-1$, 由定理24知

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$$

$$= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^\ell$$

$$\therefore\ t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^\ell. \qquad \#$$

闭包的构造方法（续）

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s和 M_t, 则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots$$

其中E 是和 M 同阶的单位矩阵, M'是 M 的转置矩阵.

注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

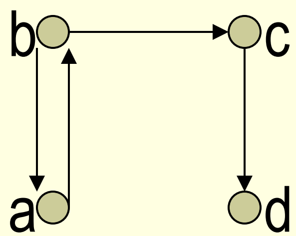
例

例: 设 A = { a,b,c,d },

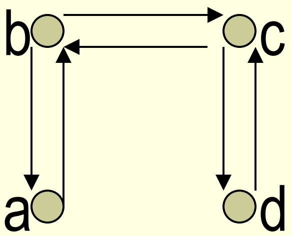
R ={ <a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d> }.

求 r(R), s(R), t(R).

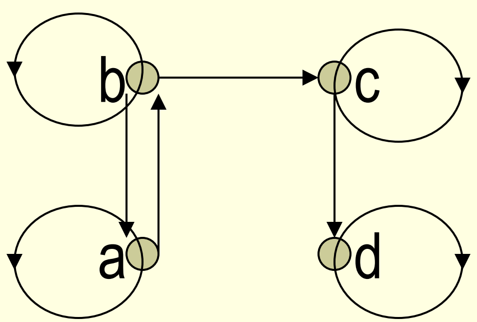
解:



$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$



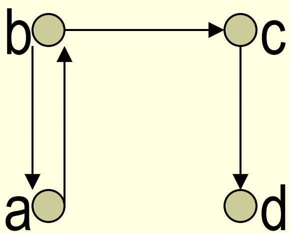
$$M(s(R))=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$



$$M(r(R))=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

例2.8(续)

解:



$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

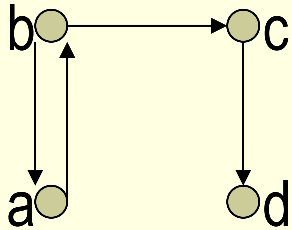
$$M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^4)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=M(R^2).$$

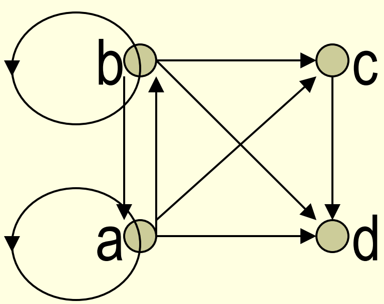
例8(续)

- 解:



$$M(t(R)) = M(R) \vee M(R^2) \vee M(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

#



闭包的构造方法（续）

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t , 则G_r, G_s, G_t 的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新的边.

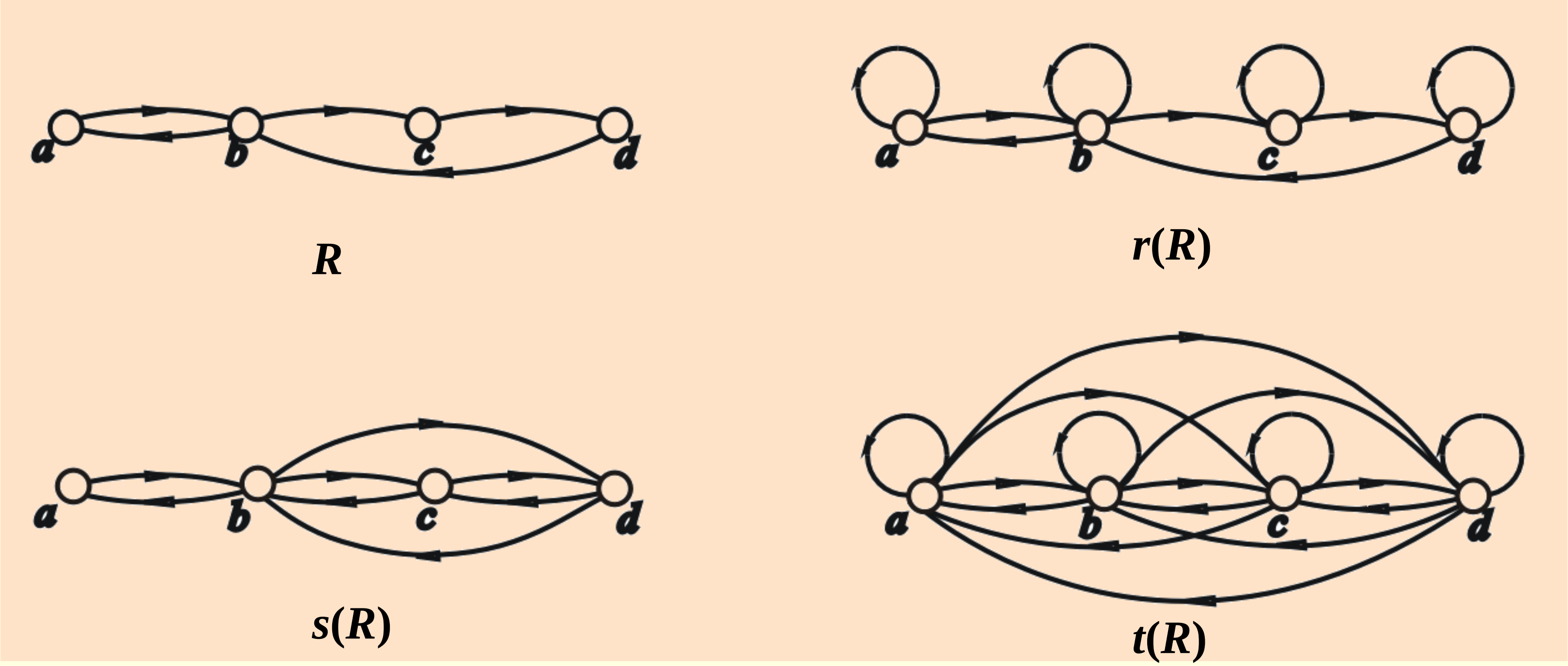
考察G的每个顶点, 如果没有环就加上一个环. 最终得到的是G_r.

考察G的每一条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i\neq j$, 则在G中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边. 最终得到G_s.

考察G的每个顶点 x_i, 找从 x_i 出发的每一条路径，如果从 x_i 到路径中的任何结点 x_j 没有边，就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图G_t .

实例

例1 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$,
R和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.



定理7.11

- 定理7.11: 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$,则

(1) R自反 $\Leftrightarrow r(R) = R$;

(2) R对称 $\Leftrightarrow s(R) = R$;

(3) R传递 $\Leftrightarrow t(R) = R$;

证明: (1) $R \subseteq R \wedge R$自反 $\Rightarrow r(R) \subseteq R$

又 $R \subseteq r(R)$, $\therefore r(R) = R$.

(2)(3) 完全类似. #

定理7.12 (单调性)

- 定理7.12: 设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$;

定理7.12(1)的证明

设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

证明:任意$<x,y> \in r(R_1)$

(1)$x=y$, $<x,y>=<x,x> \in r(R_2)$

(2)$x \neq y$, $<x,y> \in r(R_1)$

$\Rightarrow <x,y> \in R_1$

$\Rightarrow <x,y> \in R_2$

$\Rightarrow <x,y> \in r(R_2)$

$\therefore r(R_1) \subseteq r(R_2)$#

定理7.12(2)的证明

设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则 $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

证明:任意$<x,y> \in s(R_1)$

(1)$<x,y> \in R_1$,

$<x,y> \in R_1 \Rightarrow <x,y> \in R_2 \Rightarrow <x,y> \in s(R_2)$;

(2) $<x,y> \notin R_1$,

$<x,y> \notin R_1 \Rightarrow <y,x> \in R_1 \Rightarrow <y,x> \in R_2$

$\Rightarrow <x,y> \in s(R_2)$

$\therefore s(R_1) \subseteq s(R_2)$ #

定理7.12(3)的证明

设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明:任意$<x,y> \in t(R_1)$

(1) $<x,y> \in R_1$,

$<x,y> \in R_1 \Rightarrow <x,y> \in R_2 \Rightarrow <x,y> \in t(R_2)$;

(2) $<x,y> \notin R_1$,

$<x,y> \notin R_1$

$\Rightarrow <x,t_1> \in R_1 \wedge <t_1,t_2> \in R_1 \ldots \wedge <t_r,y> \in R_1$

$\Rightarrow <x,t_1> \in R_2 \wedge <x,t_2> \in R_2 \ldots \wedge <t_r,y> \in R_2$

$\Rightarrow <x,y> \in t(R_2)$

$\therefore t(R_1) \subseteq t(R_2)$ #

闭包运算是否保持关系性质?

(1) R自反 $\Rightarrow$ s(R), t(R)自反 ?

(2) R对称 $\Rightarrow$ r(R), t(R)对称 ?

(3) R传递 $\Rightarrow$ s(R), r(R)传递 ?

定理7.13

- 定理7.13: 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$,则

(1) R自反 $\Rightarrow$ s(R)和t(R)自反;

(2) R对称 $\Rightarrow$ r(R)和t(R)对称;

(3) R传递 $\Rightarrow$ r(R)传递;

证明: (1) $I_A \subseteq R \cup R^{-1} = s(R)$

$\therefore$ s(R)自反.

$I_A \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = t(R)$

$\therefore$ t(R)自反. #

定理2.25(证明(2))

- (2) R对称 $\Rightarrow$ r(R)和t(R)对称;
- 证明: (2) $r(R)^{-1} = (I_A \cup R)^{-1} = I_A^{-1} \cup R^{-1}$

$= I_A \cup R^{-1} = I_A \cup R = r(R)$ $\therefore$ r(R)对称.

$t(R)^{-1} = (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)^{-1}$

$= R^{-1} \cup (R^2)^{-1} \cup (R^3)^{-1} \cup \ldots$

$= R^{-1} \cup (R^{-1})^2 \cup (R^{-1})^3 \cup \ldots$ ($(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$)

$= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = t(R)$, $\therefore$ t(R)对称.

定理2.25(证明(3))

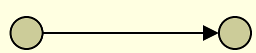
- (2) R传递 $\Rightarrow$ r(R)传递;
- 证明: (2) $r(R) \circ r(R) =$
  $(I_A \cup R) \circ (I_A \cup R)$

$= (I_A \circ I_A) \cup (I_A \circ R) \cup (R \circ I_A) \cup (R \circ R)$

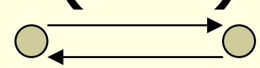
$\subseteq I_A \cup R \cup R \cup R = I_A \cup R = r(R)$

$\therefore$ r(R)传递. #

- 反例: R传递, 但是s(R)非传递.



G(R)



G(s(R))

	自反性	对称性	传递性
r(R)	√ (定义)	√(2)	√(3)
s(R)	√(1)	√(定义)	×
t(R)	√(1)	√(2)	√(定义)

7.6 等价关系

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应

等价关系的定义与实例

定义 设R为非空集合上的关系. 如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的等价关系. 设R是一个等价关系, 若$\langle x,y\rangle \in R$, 称x等价于y, 记做$x \sim y$.

实例 设$A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系R:

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)\}$$

其中 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$ 叫做x与y模3相等, 即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等.

不难验证R为A上的等价关系, 因为

$\forall x\in A$, 有$x\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

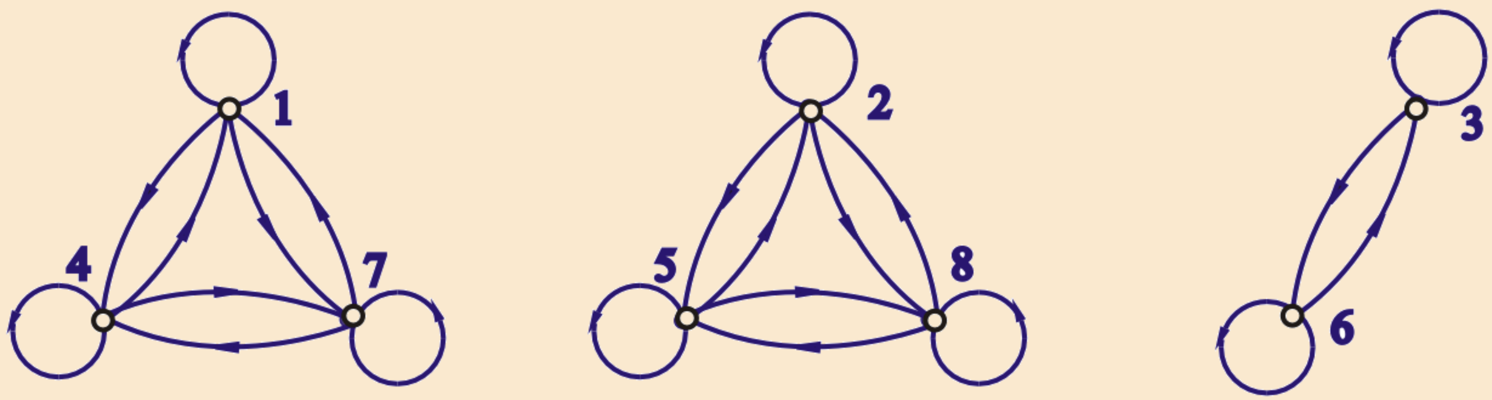
$\forall x,y\in A$, 若$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有$y\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

$\forall x,y,z\in A$, 若$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, $y\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有 $x\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$

A上模3等价关系的关系图

设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$,

$R=\{ \langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y \pmod 3) \}$



举例

- 例: 判断是否等价关系(A是某班学生):

$R_1=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x\text{与}y\text{同年生}\}$

$R_2=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x\text{与}y\text{同姓}\}$

$R_3=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x\text{的年龄不比}y\text{小}\}$

$R_4=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x\text{与}y\text{选修同门课程}\}$

$R_5=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x\text{的体重比}y\text{重}\}$

解：R1：自反性、对称性、传递性 （等价关系）

R2：自反性、对称性、传递性 （等价关系）

R3：自反性、无对称性、传递性

R4：自反性、对称性、无传递性

R5：无自反性、无对称性、传递性

等价类

定义 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$$

称 $[x]_R$ 为x关于R的等价类, 简称为x的等价类, 简记为$[x]$.

实例

A={ 1, 2, … , 8 }上模 3 等价关系的等价类:

[1]=[4]=[7]={1,4,7}

[2]=[5]=[8]={2,5,8}

[3]=[6]={3,6}

等价类性质

- 定理7.14: 设R是A≠∅上等价关系, $\forall x,y\in A$,

  (1) $[x]_R\neq\varnothing$

  (2) $xRy \Rightarrow [x]_R=[y]_R$;

  (3) $\neg xRy \Rightarrow [x]_R\cap[y]_R=\varnothing$;

  (4) $\cup\{ [x]_R \mid x\in A \} =A$.

- 证明: (1) R自反$\Rightarrow xRx\Rightarrow x\in[x]_R\Rightarrow[x]_R\neq\varnothing$.

定理7.14(证明(2))

(2) $xRy \Rightarrow [x]_R=[y]_R$;

证明:

只需证明$[x]_R\subseteq[y]_R$和$[x]_R\supseteq[y]_R$.

($\subseteq$) $\forall z$, $z\in[x]_R \wedge xRy \Rightarrow zRx \wedge xRy$

$\Rightarrow zRy \Rightarrow z\in[y]_R$. $\therefore [x]_R\subseteq[y]_R$.

($\supseteq$) 同理可证. #

定理7.14(证明(3))

(3) $\neg xRy \Rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \varnothing$;

证明: (3) (反证) 假设$\exists z$, $z \in [x]_R \cap [y]_R$, 则

$z \in [x]_R \cap [y]_R \Rightarrow zRx \wedge zRy \Rightarrow xRz \wedge zRy$

$\Rightarrow xRy$, 这与$\neg xRy$矛盾!

$\therefore [x]_R \cap [y]_R = \varnothing$. #

定理7.14(证明(4))

- (4) $\cup\{ [x]_R \mid x\in A \} = A$.
- 证明: $A=\cup\{ \{x\} \mid x\in A \}$

  $\subseteq \cup\{ [x]_R \mid x\in A \}$

  $\subseteq \cup\{ A \mid x\in A \}=A$.

  $\therefore \cup\{ [x]_R \mid x\in A \} = A$. #

商集

定义　设R为非空集合A上的等价关系, 以R的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的商集, 记做A/R,

$$A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$$

令A={1,2,…,8}，A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{ \{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\} \}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{ \{1\},\{2\}, \ldots ,\{8\}\}$$

$$A/E_A = \{ \{1, 2, \ldots ,8\} \}$$

集合的划分

定义　设A为非空集合, 若A的子集族$\pi(\pi\subseteq P(A))$ 满足下面条件:

（1）$\varnothing\notin\pi$

（2）$\forall x\forall y(x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$

（3）$\cup\pi=A$

则称π是A的一个划分, 称π中的元素为A的划分块.

例1　设$A=\{a, b, c, d\}$, 给定$\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$如下:

$\pi_1=\{\{a, b, c\},\{d\}\}$，　$\pi_2=\{\{a, b\},\{c\},\{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\},\{a, b, c, d\}\}$，$\pi_4=\{\{a, b\},\{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing,\{a, b\},\{c, d\}\}$，$\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b, c, d\}\}$

则π_1和π_2是A的划分, 其他都不是A的划分.

等价关系与划分的一一对应

商集A/R就是A的一个划分

不同的商集对应于不同的划分

任给A的一个划分π, 如下定义A上的关系R:

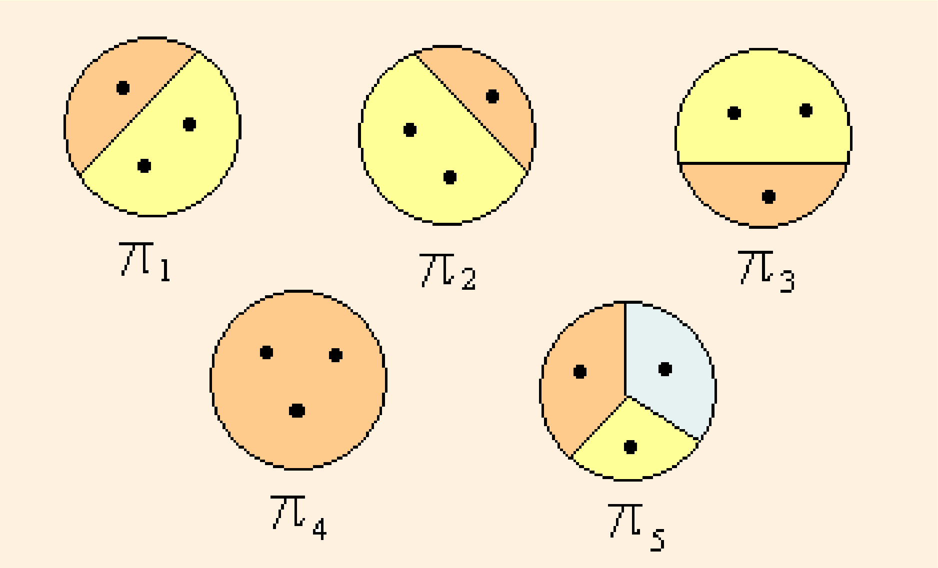
$$R=\{<x,y> \mid x,y\in A\wedge x \text{ 与 } y \text{ 在}\pi\text{的同一划分块中 }\}$$

则R为A上的等价关系, 且该等价关系确定的商集就是π.

例2 给出$A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

求解思路：先做出A的所有划分, 然后根据划分写出对应的等价关系.

例 2



A上的等价关系与划分之间的对应：

π_4对应于全域关系E_A

π_5对应于恒等关系I_A

π_1,π_2和π_3分别对应于等价关系 R_1, R_2和R_3. 其中

$$R_1=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$$

$$R_2=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$$

$$R_3=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$$

实例

例3 设$A=\{1,2,3,4\}$，在$A\times A$上定义二元关系 R:

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求R导出的划分.

解 $A\times A=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <2,4>,<3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4 ,4>\}$

根据有序对$<x,y>$的 $x+y=2,3,4,5,6,7,8$ 将A划分成等价类:

$(A\times A)/R=\{\{<1,1>\}, \{<1,2>,<2,1>\}, \{<1,3>, <2,2>, <3,1>\}, \{<1,4>, <2,3>, <3,2>, <4,1>\}, \{<2,4>, <3,3>, <4,2>\}, \{<3,4>, <4,3>\}, \{<4,4>\}\}$

等价关系与划分是一一对应的

- 定理：设$A\neq\varnothing$, 则

(1) R是A上等价关系 $\Rightarrow$ A/R是A的划分

(2) $\mathcal{A}$是A的划分 $\Rightarrow$ $R_{\mathcal{A}}$是A上等价关系,其中

$$xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \exists z(z\in\mathcal{A} \wedge x\in z \wedge y\in z)$$

$R_{\mathcal{A}}$称为由划分$\mathcal{A}$所定义的等价关系(同块关系). #

非空集合A上的等价关系与A的划分是一一对应的，所以A上有多少个不同的等价关系，就产生同样个数的不同的划分，反之亦然。

第二类Stirling数

第二类Stirling数(Stirling subset number):

把n个不同球放到k个相同盒子，要求无空盒，不同放法的总数 $\left\{ {n \atop k} \right\}$,称为第二类Stirling数

- 把**n**元集划分成**k**个非空子集的分法总数

第二类Stirling数性质

1\.

$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix}=0,\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix}=1,\begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix}=2^{n-1}-1,\begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix}=C_n^2,\begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix}=1.$$

2\. 递推公式：

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}=k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}.$$

先把n-1个元素分成k个子集, 再加入第n个元素到其中之一

先把n-1个元素分成k-1个子集, 再让第n个元素自成一子集

第二类Stirling数表

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6 +	1	*				
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1,170	1,050	266	28	1	
9	0	1	255	3,035	7,770	6,951	2,646	462	36	1
10	0	1	511	9,330	34,501	42,525	22,827	5,880	750	45

例2.13

- 问A={a,b,c,d}上有多少种等价关系?
- 解:

$$B_4=\begin{Bmatrix}4\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\4\end{Bmatrix}=1+(2^3-1)+C_4^2+1=1+7+6+1=15.$$

#

7.7偏序关系

定义

非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，称为A上的偏序关系，记作≼. 设≼为偏序关系, 如果$<x, y>\in≼$, 则记作 $x≼y$, 读作 x“小于或等于” y.

实例

集合A上的恒等关系 I_A是A上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

- 偏序集: <A, ≼ >, ≼ 是A上偏序关系

偏序集$<A,\leq>$, $<A,\geq>$, $<A,|>$

- $\emptyset \neq A \subseteq R$

  $\leq = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \leq y \}$,

  $\geq = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \geq y \}$,

- $\emptyset \neq A \subseteq Z_+ = \{ x \mid x \in Z \wedge x > 0 \}$

  $| = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x | y \}$

偏序集$<\mathcal{A},\subseteq>$

- $\mathcal{A}\subseteq P(A)$, $\subseteq = \{ <x,y> \mid x,y\in\mathcal{A} \wedge x\subseteq y \}$
- 设$A=\{a,b\}$, $\mathcal{A}_1=\{\emptyset,\{a\},\{b\}\}$, $\mathcal{A}_2=\{\{a\},\{a,b\}\}$,

$\mathcal{A}_3=P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,则

$\subseteq_1 = I_{\mathcal{A}1} \cup \{ <\emptyset,\{a\}>,<\emptyset,\{b\}> \}$

$\subseteq_2 = I_{\mathcal{A}2} \cup \{ <\{a\},\{a,b\}> \}$

$\subseteq_3 = I_{\mathcal{A}3} \cup \{ <\emptyset,\{a\}>,<\emptyset,\{b\}>, <\emptyset,\{a,b\}>, <\{a\},\{a,b\}>, <\{b\},\{a,b\}> \}$

哈斯图(Hasse diagram)

- 设<A, ≤>是偏序集, x,y∈A
- 可比(comparable):

  x与y可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$
- 覆盖(cover):

  y覆盖x $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge \neg\exists z(z \in A \wedge x \preccurlyeq z \preccurlyeq y)$

哈斯图：利用偏序自反、反对称、传递性简化的关系图

特点：每个结点没有环

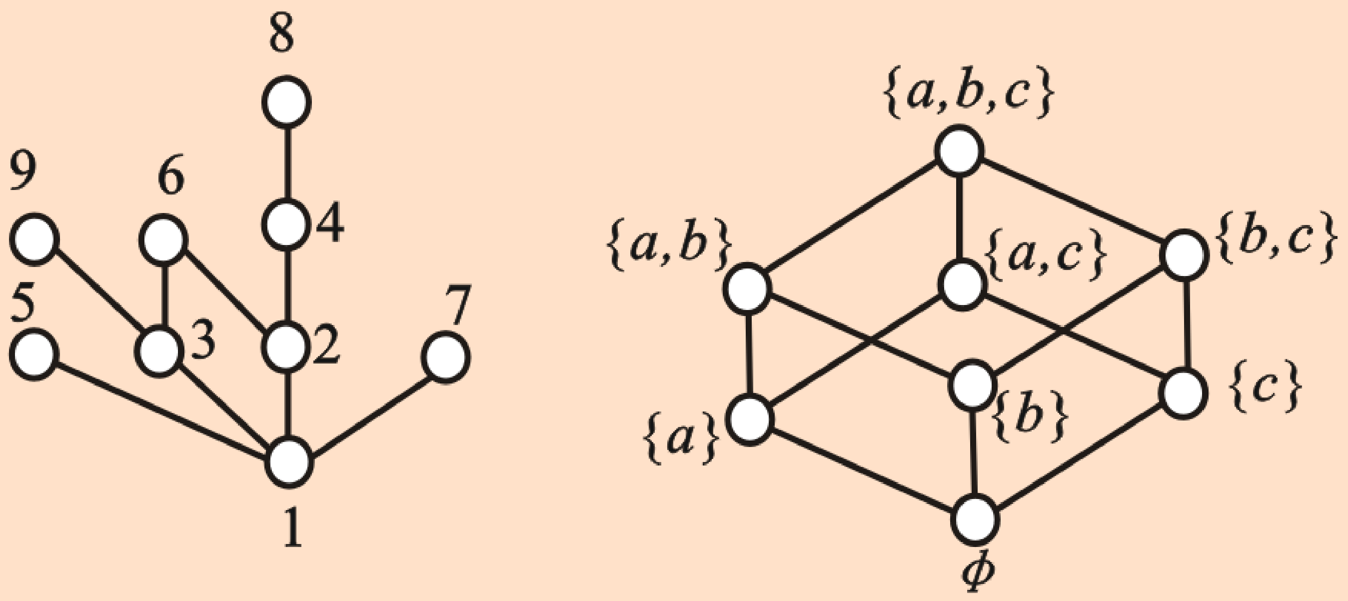
两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前

具有覆盖关系的两个结点之间连边

哈斯图实例

例4　<{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, $R_{整除}$>

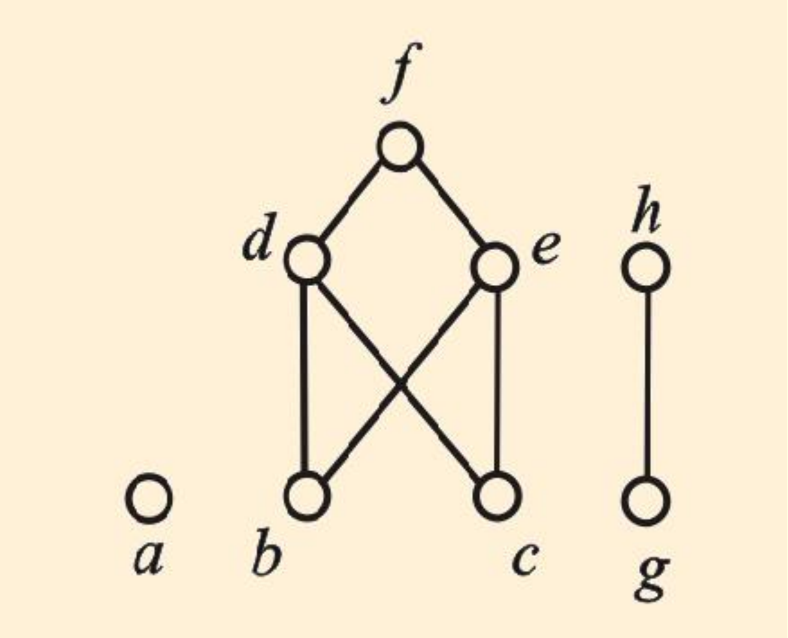
<P({ a, b, c }), $R_{\subseteq}$>



哈斯图实例（续）

例5

已知偏序集$<A,R>$的哈斯图如图所示，试求出集合A和关系R的表达式.



$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

全序(total order)关系

- 全序关系：若偏序集 $<A, \preccurlyeq>$ 满足
  $\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \rightarrow$ x与y可比$)$
  则称 $\preccurlyeq$ 为全序关系，称 $<A, \preccurlyeq>$ 为全序集
- 全序关系亦称线序(linear order)关系
- 例：$<A,\leq>$, $<A,\geq>$

- 最大元, 最小元
- 极大元, 极小元
- 上界, 下界
- 最小上界(上确界), 最大下界(下确界)

最大元, 最小元

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$
- 最大元(maximum/greatest element):

  y是B的最大元 $\Leftrightarrow$

  $$\forall x(\ x\in B \rightarrow x\preccurlyeq y\ )$$

- 最小元(minimum/least element):

  y是B的最小元 $\Leftrightarrow$

  $$\forall x(\ x\in B \rightarrow y\preccurlyeq x\ )$$

最大元, 最小元举例(例16(1))

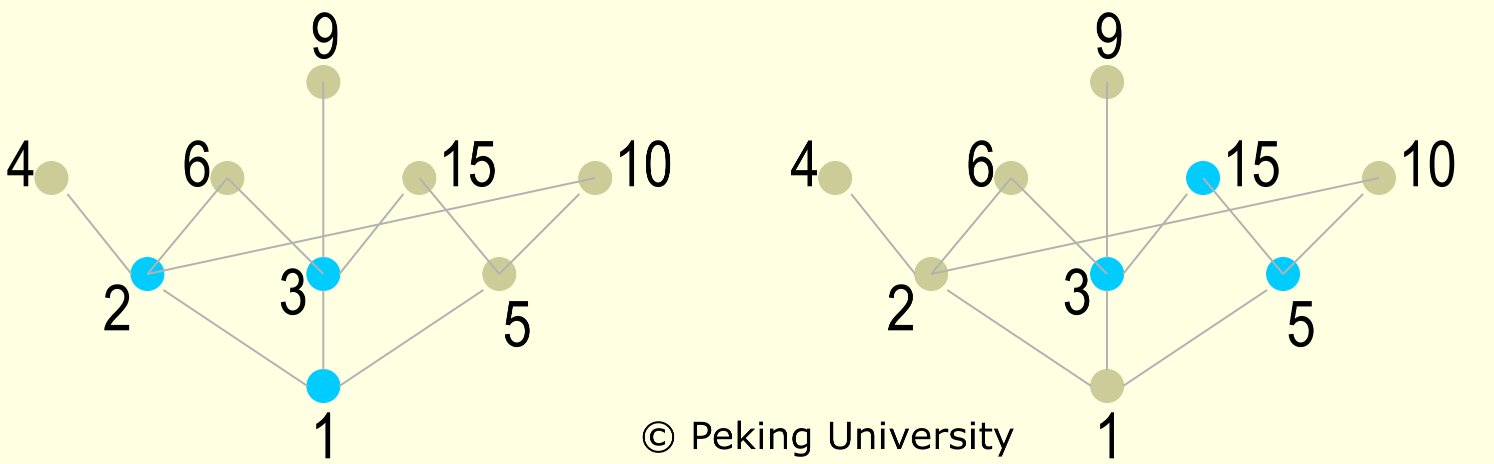
- 例: $<A,|>$, $A=\{1,2,3,4,5,6,9,10,15\}$

  $B_1=\{1,2,3\}$, $B_2=\{3,5,15\}$, $B_3=A$.

  B_1的最大元是{}, B_1的最小元是{1}

  B_2的最大元是{15}, B_2的最小元是{}

  B_3的最大元是{}, B_3的最小元是{1}



极大元,极小元

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$
- 极大元(maximal element):

  y是B的极大元 $\Leftrightarrow \forall x(\ x\in B \wedge y\preccurlyeq x \rightarrow x=y\ )$

  (没有比y大的元素)
- 极小元(minimal element):

  y是B的极小元 $\Leftrightarrow \forall x(\ x\in B \wedge x\preccurlyeq y \rightarrow x=y\ )$

  （没有比y小的元素）

极大元,极小元举例(例16(1))

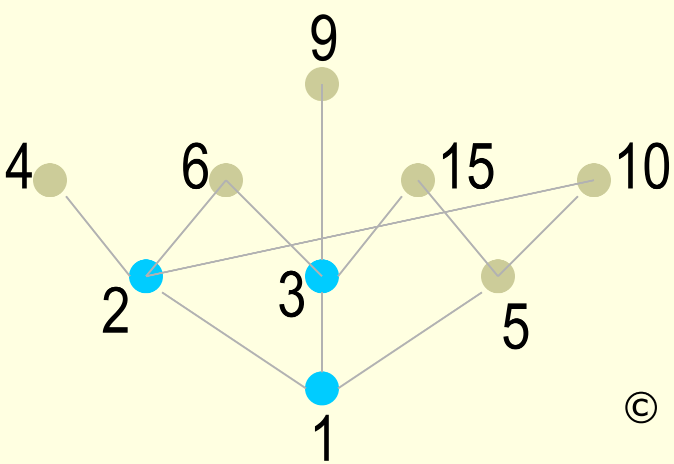
- 例: $\langle A, | \rangle$, $A=\{1,2,3,4,5,6,9,10,15\}$

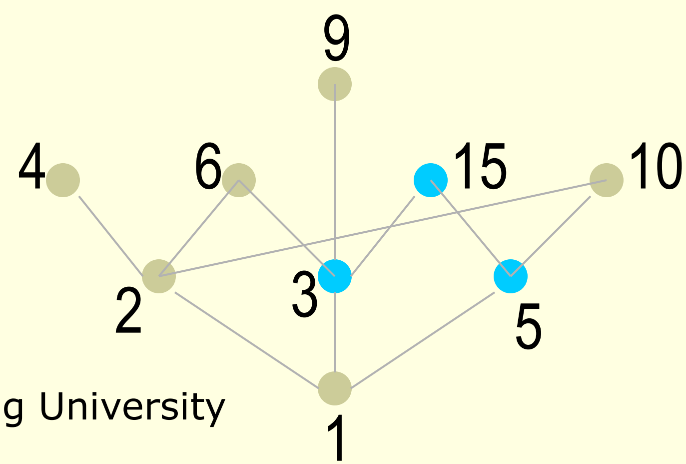
  $B_1=\{1,2,3\}$, $B_2=\{3,5,15\}$, $B_3=A$.

B_1的极大元是$\{2,3\}$, B_1的极小元是$\{1\}$

B_2的极大元是$\{15\}$, B_2的极小元是$\{3,5\}$

B_3的极大元是$\{4,6,9,15,10\}$, B_3的极小元是$\{1\}$





上界, 下界

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in A$
- 上界(upper bound):
  y是B的上界 $\Leftrightarrow$
  $$\forall x(\ x\in B \rightarrow x\preccurlyeq y\ )$$
- 下界(lower bound):
  y是B的下界 $\Leftrightarrow$
  $$\forall x(\ x\in B \rightarrow y\preccurlyeq x\ )$$

上界, 下界举例(例16(1))

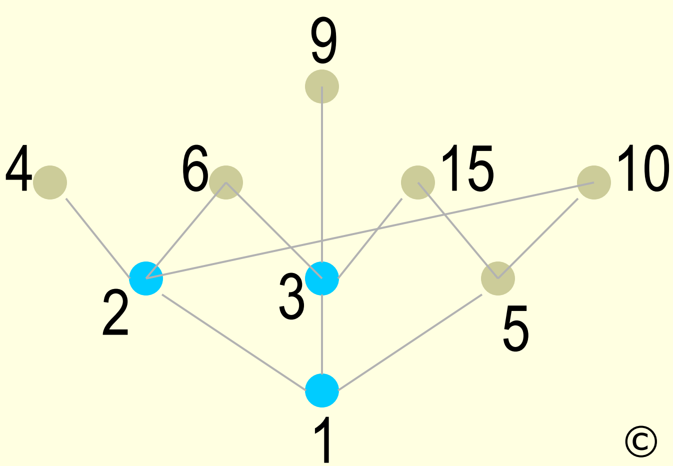
- 例): $<A,|>$, $A=\{1,2,3,4,5,6,9,10,15\}$

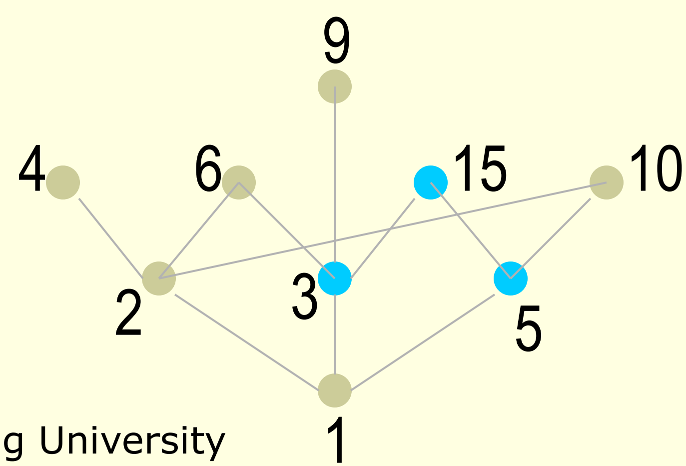
  $B_1=\{1,2,3\}$, $B_2=\{3,5,15\}$, $B_3=A$.

  B_1的上界是$\{6\}$, B_1的下界是$\{1\}$

  B_2的上界是$\{15\}$, B_2的下界是$\{1\}$

  B_3的上界是$\{\}$, B_3的下界是$\{1\}$





最小上界, 最大下界

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$
- 最小上界(least upper bound):

  设 $C = \{ y \mid y$是B的上界 $\}$, C的最小元称为B的最小上界, 或上确界.
- 最大下界(greatest lower bound):

  设 $C = \{ y \mid y$是B的下界 $\}$, C的最大元称为B的最大下界, 或下确界.

最小上界,最大下界举例(例16(1))

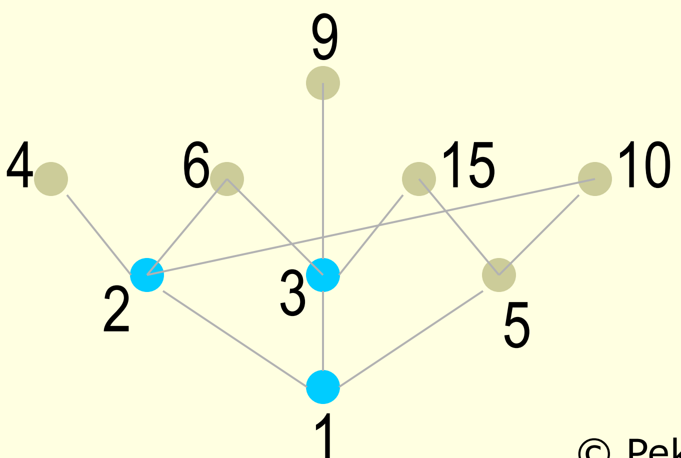
- 例: <A,|>, A={1,2,3,4,5,6,9,10,15}

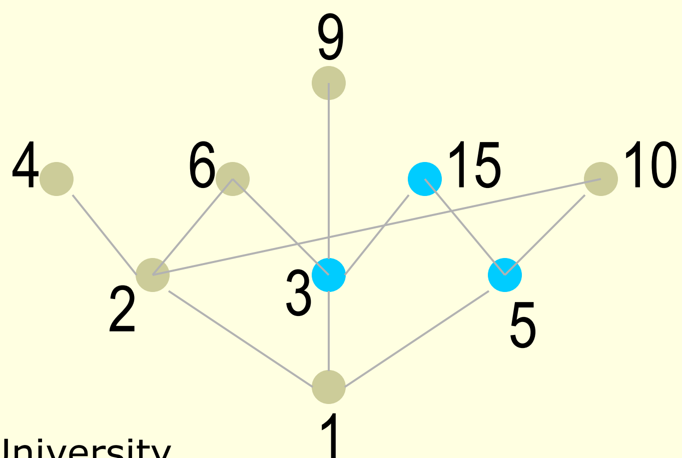
  B_1={1,2,3}, B_2={3,5,15}, B_3=A.

  B_1的最小上界是{6}, B_1的最大下界是{1}

  B_2的最小上界是{15}, B_2的最大下界是{1}

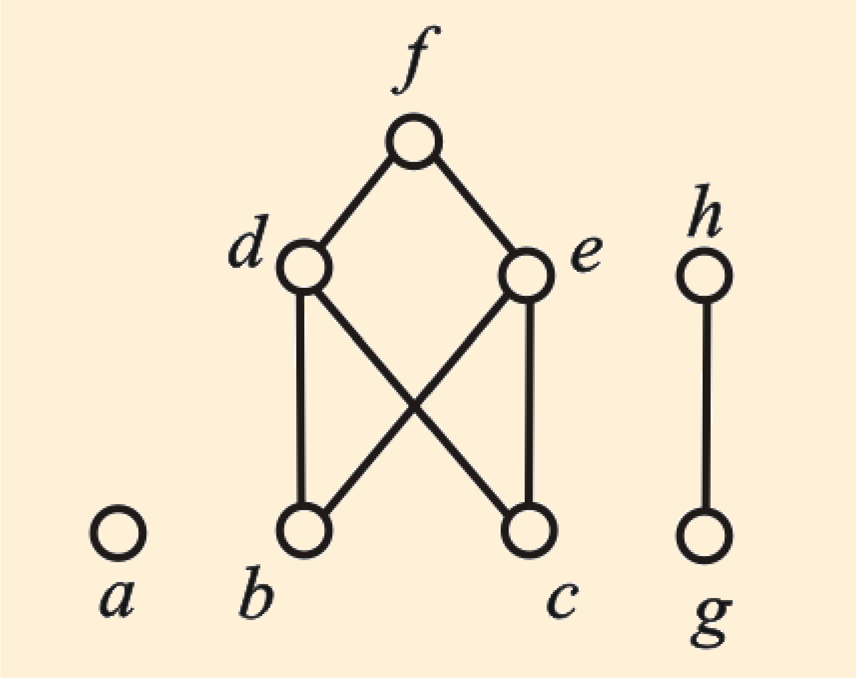
  B_3的最小上界是{}, B_3的最大下界是{1}





实例

例6 设偏序集<A,≼>如下图所示，求A的极小元、最小元、极大元、最大元. 设$B=\{b,c,d\}$, 求B的下界、上界、下确界、上确界.



解 极小元：a, b, c, g;

极大元：a, f, h;

没有最小元与最大元.

B的下界和最大下界都不存在, 上界有d 和 f, 最小上界为 d.

特殊元素比较

	存在(B非空有穷)	唯一	∈B
最大元	×(表示不一定)	√	√
最小元	×	√	√
极大元	√ (表示一定)	×	√
极小元	√	×	√
上界	×	×	×
下界	×	×	×
上确界	×	√	×
下确界	×	√	×

作业

- 习题七

第三次作业：**26, 36, 41, 46**