第13章 递推方程与生成函数

- 递推方程的公式解法
- 递推方程的其他解法
- 生成函数的定义及其性质
- 生成函数的应用
- 指数生成函数及其应用
- Catalan数与Stirling数

递推方程的公式解法

- 递推方程的定义
- 递推方程的实例
- 常系数线性递推方程的求解
  - 常系数线性递推方程定义
  - 公式解法
- 递推方程在计数问题中的应用

递推方程的定义

设序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots,$ 简记为$\{a_n\}$,

一个把 a_n 与某些个 a_i（$i<n$）联系起来的等式

叫做关于序列 $\{a_n\}$ 的递推方程

当给定递推方程和适当的初值就唯一确定了序列.

例 1：Fibonacci 数列：1，1，2，3，5，8，… ，

Fibonacci 数列的递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

初值 $f_0 = 1$，$f_1 = 1$

例 2：阶乘计算数列： 1，2，6，24，5!，…,

递推方程 $F(n) = nF(n-1)$

初值 $F(1) = 1$

递推方程的实例

例 3 一个编码系统用 8 进制数字对信息编码，一个码是有效的当且仅当含有偶数个 7，求 n 位长的有效码字有多少个？

解 设所求有效码字为 a_n 个，则 $a_n = 7a_{n-1} + 8^{n-1} - a_{n-1}$

即 $a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}$， $a_1=7$ 解得 $a_n=(6^n+8^n)/2$

n-1位长的八进制串

x $\quad x=0,1,2,3,4,5,6$

含偶数个7 $\quad a_{n-1}$

y $\quad y=7$

含奇数个7 $\quad 8^{n-1}-a_{n-1}$

递推方程的实例—Hanoi塔

例4 从*A*柱将这些圆盘移到*C*柱上去. 如果把一个圆盘从一个柱子移到另一个柱子称作一次移动，在移动和放置时允许使用**B**柱，但不允许大圆盘放到小圆盘的上面. 问把所有的圆盘的从*A*移到*C*总计需要多少次移动?

移动n个盘子的总次数为$T(n)$. 因此得到递推方程

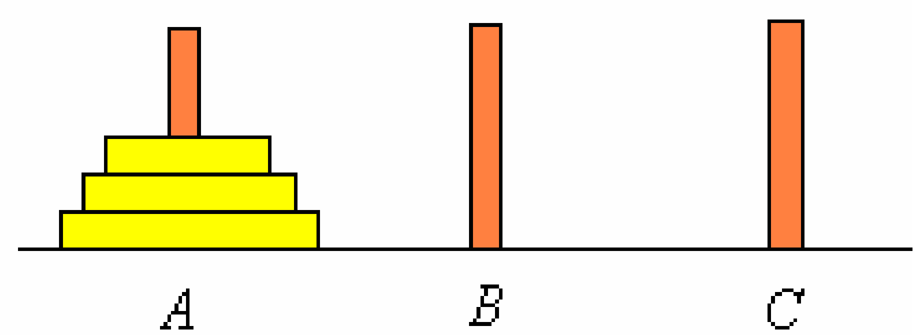
$$T(n) = 2T(n-1) + 1.$$

初值是

$$T(1)=1$$

可证明解是

$$T(n)=2^n-1$$



常系数线性齐次递推方程

定义

$$\begin{cases} H(n) - a_1 H(n-1) - a_2 H(n-2) - \ldots - a_k H(n-k) = 0 \\ H(0) = b_0, H(1) = b_1, H(2) = b_2, \ldots, H(k-1) = b_{k-1} \end{cases}$$

其中$a_1,a_2,\ldots,a_k$为常数，$a_k \neq 0$，称为k 阶常系数线性齐次递推方程，$b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$为$k$个初值

实例：Fibonacci数列的递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

$F(n) = nF(n\text{-}1)$　　　　$a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}$，$a_1=7$ ✗

$F(1) = 1$　　　✗　　　$T(n) = 2\,T(n-1) + 1$，$T(1) = 1$ ✗

公式解法

- 特征方程、特征根
- 递推方程的解与特征根的关系
- 解的线性性质
- 无重根下通解的结构及求解实例
- 有重根下通解结构及求解实例

特征方程与特征根

$$\begin{cases} H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\ldots-a_kH(n-k)=0 \\ H(0)=b_0, H(1)=b_1, H(2)=b_2, \ldots, H(k-1)=b_{k-1} \end{cases}$$

特征方程　$x^k-a_1x^{k-1}-\ldots-a_k=0$

特征方程的根称为递推方程的特征根

实例

递推方程　$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$

特征方程　$x^2-x-1=0$

特征根　$\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

递推方程解与特征根的关系

定理 1　q 是非零复数，则 q^n 是递推方程的解

$\Leftrightarrow q$ 是它的特征根

证：　q^n 是递推方程的解

$$\Leftrightarrow q^n - a_1 q^{n-1} - a_2 q^{n-2} - \ldots - a_k q^{n-k} = 0$$

$$\Leftrightarrow q^{n-k}(q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \ldots - a_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \ldots - a_k = 0$$

$\Leftrightarrow q$ 是它的特征根

解的线性性质

定理 2　$h_1(n)$和 $h_2(n)$是递推方程的解，

c_1,c_2 为任意常数，

则 $c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$是递推方程的解.

证明　将 $c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$代入递推方程左边，

化简后等于 0

推论：若 $q_1,q_2,\ldots,q_k$ 是递推方程的特征根，

则 $c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_kq_k^n$ 是递推方程的解，

其中 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 是任意常数.

无重根时的通解结构

通解定义：

若对递推方程的每个解 $h(n)$ 都存在一组常数 c_1', c_2', …, c_k' 使得 $h(n)=c_1'q_1^n+c_2'q_2^n+\ldots+c_k'q_k^n$ 成立，则称 $c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_kq_k^n$ 为通解.

定理 3 设 $q_1, q_2, \ldots, q_k$ 是递推方程不等的特征根，则 $H(n)= c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_kq_k^n$ 为通解.

证明：略。

求解实例

例5 **Fibonacci 数列：**

$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$，特征根为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

通解为 $$f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

代入初值 $f_0=1, f_1=1$, 得 $$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

解得 $$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

解是 $$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

有重根时求解中的问题

例 6 $H(n) - 4H(n-1) + 4H(n-2) = 0$

$H(0) = 0, H(1) = 1$

特征方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$

通解 $H(n) = c_1 2^n + c_2 2^n = c 2^n$

代入方程得:

$c2^n - 4c2^{n-1} + 4c2^{n-2} = 0$

$c - 2c + c = 0$, 任意 c 都是解，但还有其它形式的解，例如 $n2^n$ 是解，且与 2^n 线性无关.

问题：两个解 $c_1 2^n$ 与 $c_2 2^n$ 线性相关.

有重根时的通解结构

定理 4 若 q 是递推方程的 e 重特征根，则

$q^n, nq^n, \ldots, n^{e-1}q^n$ 是递推方程的线性无关的解

定理 5 设 $q_1, q_2, \ldots, q_t$ 是递推方程的不相等的特征根，且 q_i 的重数为 e_i，令

$$H_i(n) = (c_{i1} + c_{i2}n + \ldots + c_{ie_i}n^{e_i - 1})q_i^n$$

则通解 $H(n) = \sum_{i=1}^{t} H_i(n)$

证明：略。

求解实例

例 7　$H(n) + H(n-1) - 3H(n-2) - 5H(n-3) - 2H(n-4) = 0$

$H(0) = 1, H(1) = 0, H(2) = 1, H(3) = 2$

特征方程　$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$，特征根$-1, -1, -1, 2$,

通解为 $H(n) = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2)(-1)^n + c_4 2^n$

$$\begin{cases} c_1 + c_4 = 1 \\ -c_1 - c_2 - c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 1 \\ -c_1 - 3c_2 - 9c_3 + 8c_4 = 2 \end{cases}$$

解得　$c_1 = \frac{7}{9}, c_2 = -\frac{1}{3}, c_3 = 0, c_4 = \frac{2}{9}$

解为　$H(n) = \frac{7}{9}(-1)^n - \frac{1}{3}n(-1)^n + \frac{2}{9}2^n$

常系数线性非齐次递推方程求解

- 递推方程的标准型
- 通解结构
- 特解的求法
  - 多项式函数
  - 指数函数
  - 组合形式

递推方程的标准型及通解

$$H(n)-a_1H(n-1)-\ldots-a_kH(n-k)=f(n),\quad n\ge k, a_k\ne 0, f(n)\ne 0.$$

定理 6 设 $\overline{H(n)}$ 是对应齐次方程的通解，$H^*(n)$是一个特解，则

$$H(n)=\overline{H(n)}+H^*(n)$$

是递推方程的通解.

证（1）$H(n)$是解，代入验证.

（2）设 $h(n)$是解，证明 $h(n)$为一个齐次解与特解 $H^*(n)$之和.

$$\begin{array}{l} h(n)-a_1h(n-1)-\ldots-a_kh(n-k)=f(n) \\ \underline{-)\,H^*(n)-a_1H^*(n-1)-\ldots-a_kH^*(n-k)=f(n)} \\ [h(n)-H^*(n)]-a_1[h(n-1)-H^*(n-1)]-\ldots \\ -a_k[h(n-k)-H^*(n-k)]=0 \end{array}$$

$h(n)-H^*(n)$是齐次解，即 $h(n)$是一个齐次解与 $H^*(n)$之和.

特解的求法

$f(n)$为 n 的 t 次多项式，一般 $H^*(n)$也为 n 的 t 次多项式

例 8　$a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2$

设　$a_n^* = P_1n^2 + P_2n + P_3$，代入得

$$P_1n^2+P_2n+P_3+5[P_1(n-1)^2+P_2(n-1)+P_3]+6[P_1(n-2)^2+P_2(n-2)+P_3]=3n^2$$

$$\begin{cases} 12P_1 = 3 \\ -34P_1 + 12P_2 = 0 \\ 29P_1 - 17P_2 + 12P_3 = 0 \end{cases}$$

$$P_1 = \frac{1}{4},\quad P_2 = \frac{17}{24},\quad P_3 = \frac{115}{288},$$

$$a_n^* = \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$$

通解为 $a_n = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$

实例

例 9 **Hanoi 塔**

$$T(n) = 2\,T(n-1)+1$$

$$T^*(n) = P$$

$$P = 2\,P + 1\,,\ P = -1$$

$T(n) = c\,2^n - 1$, 代入初值 $T(1)=1$, 得 $c=1$,

解为 $T(n) = 2^n - 1$.

例 10 $H(n) - H(n-1) = 7n$

设特解 $P_1 n + P_2$ 不行，应设 n^2 次项，因为特征根是 1.

设 $H^*(n) = P_1 n^2 + P_2 n$，代入 解得 $P_1 = P_2 = 7/2$,

通解为 $H(n) = c\cdot 1^n + \dfrac{7}{2}\,n(n+1) = c + \dfrac{7}{2}\,n(n+1)$

特解的求法(续)

$f(n)$为指数函数 β^n，若β不是特征根，则特解为

$H^*(n) = P\beta^n$

例 11　通信编码问题

$a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}$， $a_1=7$

解：　$a^*_n = P\,8^{n-1}$，代入得 $P = 4$

通解 $a_n=c\cdot6^n + 4\cdot8^{n-1}$

代入初值得 $a_n=(6^n+8^n)/2$

特解的求法(续)

若 β 是 e 重特征根，则特解为 $Pn^e\beta^n$

例 12 求 $H(n) - 5H(n-1) + 6H(n-2) = 2^n$ 的一个特解。

解：设 $H^*(n) = Pn2^n$，

代入得

$$Pn2^n - 5P(n-1)2^{n-1} + 6P(n-2)2^{n-2} = 2^n$$

解得 $P = -2$

$$H^*(n) = -n2^{n+1}$$

特解的求法(续)

例 13　递推公式

$$a_n - 2a_{n-1} = n + 3^n$$

$$a_0 = 0$$

解：设特解为 $a_n^* = P_1 n + P_2 + P_3 3^n$，代入得

$$(P_1 n + P_2 + P_3 3^n) - 2[P_1(n-1) + P_2 + P_3 3^{n-1}] = n + 3^n$$

$$-P_1 n + (2P_1 - P_2) + P_3 3^{n-1} = n + 3^n$$

$$P_1 = -1,\ P_2 = -2,\ P_3 = 3$$

$$a_n = c2^n - n - 2 + 3^{n+1}$$

解得 $c = -1$，$a_n = -2^n - n - 2 + 3^{n+1}$

递推方程的其他解法

- 换元法
- 迭代归纳法
- 差消法
- 尝试法

换元法

思想：通过换元转化成常系数线性递推方程

例 1 $\begin{cases} a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$ $\quad a_n > 0$

解：令 $b_n = a_n^2$，代入得

$$b_n = 2\,b_{n-1} + 1,\quad b_0 = 4$$

解得 $\quad b_n = 5\cdot 2^n - 1,\quad a_n = \sqrt{5\cdot 2^n - 1}$

换元法—归并排序

例 2　归并排序

$T(n) = 2\,T(\,n/2\,) + n\text{-}1\,,\quad n = 2^k$

$T(2) = 1$

解　$H(k) = 2\,H(k\text{-}1) + 2^k - 1$

$H(1) = 1$

令 $H^*(k) = P_1 k 2^k + P_2$，解得 $P_1 = P_2 = 1$,

$H^*(k) = k2^k + 1$

通解 $H(k) = C\,2^k + k2^k + 1$,

代入初值，得 $C = -1$,

$H(k) = -\,2^k + k2^k + 1$,

$T(n) = n \log n - n + 1$

迭代归纳法

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b};(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b};$
$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c});\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b});$
$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b});(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$

例3 给定$\boldsymbol{n}$个实数$\boldsymbol{a_1,a_2,\cdots,a_n}$，可以用多少种不同的方式来构成它们的乘积？这里认为相乘的次序不同也是不同的方法，如$(\boldsymbol{a_1\times a_2})\times\boldsymbol{a_3}$与$\boldsymbol{a_1}\times(\boldsymbol{a_2\times a_3})$是不同的方法。

解：令$\boldsymbol{h(n)}$表示这$\boldsymbol{n}$个数构成乘积的方法数。显然有$\boldsymbol{h(1)=1}$. 假设$\boldsymbol{n-1}$个数$\boldsymbol{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}}$的乘积已经构成，有$\boldsymbol{h(n-1)}$个。任取其中的一个乘积，它是由$\boldsymbol{n-2}$次乘法得到的。对于其中任一次相乘的两个因式，加入$\boldsymbol{a_n}$的方法有4种，因此这种加入$\boldsymbol{a_n}$的方法数共有$\boldsymbol{4(n-2)}$种。另外，还可以把$\boldsymbol{a_n}$分别乘在整个乘积的左边或右边，因此加入$\boldsymbol{a_n}$的方法数是$\boldsymbol{4(n-2)+2=4n-6}$.

迭代归纳法

根据以上的分析可以得到递推方程：

$$h(n) = (4n\text{-}6)\, h(n\text{-}1)$$

$$h(1) = 1$$

$$\begin{aligned}
h(n) &= (4n-6)\, h(n-1) \\
&= (4n-6)(4n-10)\, h(n-2) \\
&= \ldots \\
&= (4n-6)(4n-10)\ldots 6\cdot 2\cdot h(1) \\
&= 2^{n-1}[(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1] \\
&= 2^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

用归纳法验证.

迭代归纳法—错位排列

例 4　错位排列问题

错位排列：$\{1,2,\ldots,n\}$的排列 $a_1a_2\ldots a_n$, $a_i \neq i$, $i=1,2,\ldots,n$，

n 个元素的错位排列数记作 D_n

将错位排列按首元素 $2,3,\ldots,n$ 分类：有 n-1 类，

第一位为 2 的类：

第二位为 1：　　方法数为 D_{n-2}

第二位不是 1：方法数为 D_{n-1}

递推方程：

$$D_n = (n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$$

$$D_1 = 0,\ D_2 = 1$$

迭代归纳法—错位排列(续)

解： $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = \ldots$$

$$= (-1)^{n-2}[D_2 - 2D_1] = (-1)^{n-2}$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad D_1 = 0$$

$$D_n = n(n-1)D_{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$= n(n-1)(n-2)D_{n-3} + n(n-1)(-1)^{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$= \ldots$$

$$= n(n-1)\ldots 2D_1 + n(n-1)\ldots 3(-1)^2$$

$$+ n(n-1)\ldots 4(-1)^3 + \ldots + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$= n![1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}]$$

用归纳法验证.

迭代归纳法—递归树

例 5 归并排序

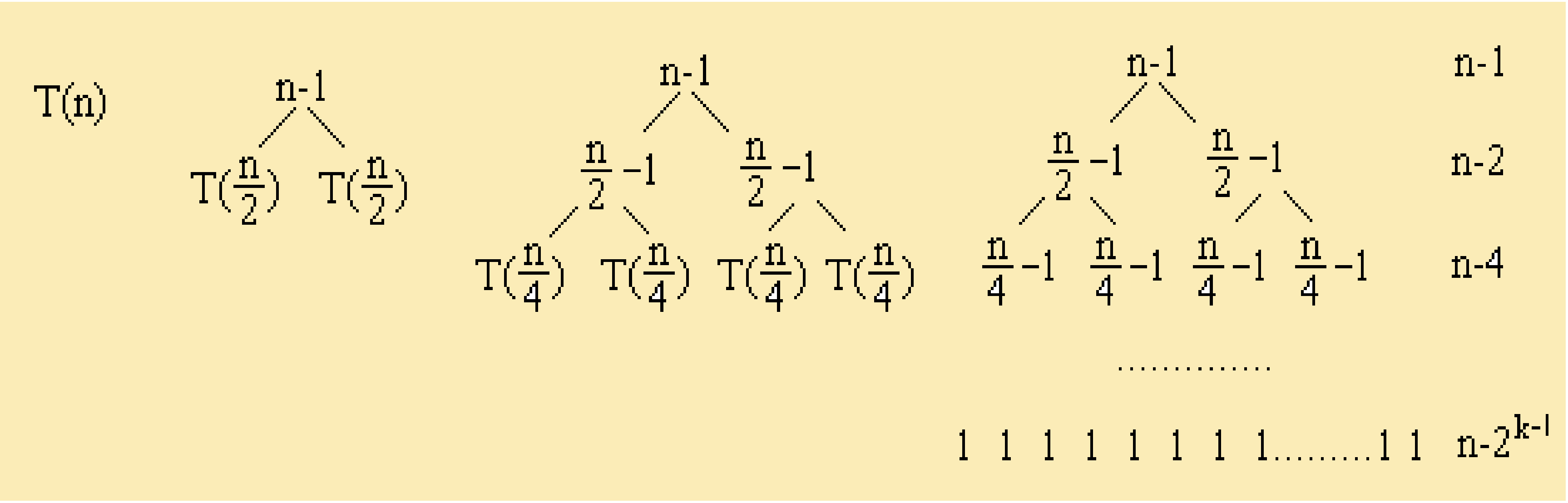
$T(n) = 2T(n/2) + n\text{-}1$，　　$n=2^k$

$T(2) = 1$

递归树有 k 层，总数为

$nk - (1 + 2 + \ldots + 2^{k-1})$

$= nk - (2^k - 1) = n\log n - n + 1$



迭代归纳法—归并排序

$$T(n) = 2\,T(n/2) + n\text{-}1$$
$$= 2\,[2\,T(n/4) + n/2 - 1] + n\text{-}1$$
$$= 2^2\,T(n/2^2) + n\text{-}2 + n\text{-}1$$
$$= \ldots$$
$$= 2^{k-1}T(n/2^{k-1}) + n\text{-}2^{k-2} + \ldots + n\text{-}2 + n\text{-}1$$
$$= 2^{k-1}T(2) + n(k\text{-}1) - (1 + 2 + \ldots + 2^{k-2})$$
$$= 2^{k-1} + n(k\text{-}1) - (2^{k-1} - 1)$$
$$= nk - n + 1$$
$$= n\log n - n + 1$$

差消法—快速排序

例6 求解递推方程：
$$\begin{cases} T(n)=\dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+n+1, & n\geq 2 \\ T(1)=0 \end{cases}$$

解：
$$nT(n)=2\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+n^2+n$$

$$(n-1)T(n-1)=2\sum_{i=1}^{n-2}T(i)+(n-1)^2+(n-1)$$

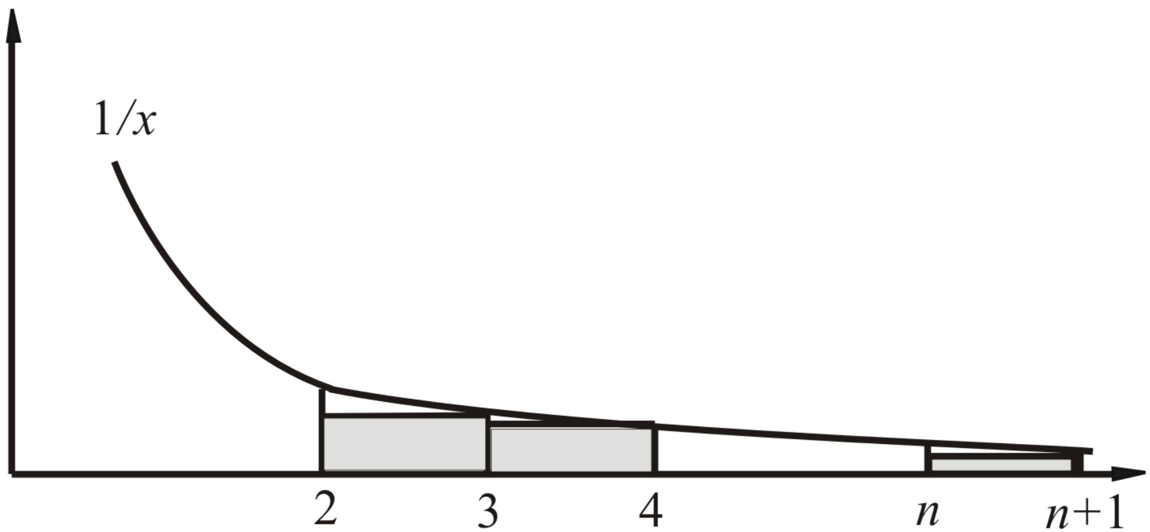
$$nT(n)-(n-1)T(n-1)=2T(n-1)+2n$$

$$nT(n)=(n+1)T(n-1)+2n$$

$$\frac{T(n)}{n+1}=\frac{T(n-1)}{n}+\frac{2}{n+1}=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n}+...+\frac{2}{3}+\frac{T(1)}{2}$$

$$=2\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{3}\right]\Rightarrow T(n)=2(n+1)\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{3}\right]$$

差消法(续)



$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{3}\le\int_2^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

$$=\ln x\Big|_2^{n+1}=\ln(n+1)-\ln 2=O(\log n)$$

$$\Rightarrow T(n)=O(n\log n)$$

尝试法—快速排序

例 7 $T(n)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+n+1$

(1) $T(n)=C$，左边$=O(1)$，

右边$=\frac{2}{n}C(n-1)+n+1=2C-\frac{2C}{n}+n+1=O(n)$

(2) $T(n)=cn$，左边$=cn$，

$$右边=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}ci+n+1$$

$$=\frac{2c}{n}\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}+n+1$$

$$=c(n-1)+n+1=(c+1)n-c+1$$

尝试法—快速排序

(3) $T(n)=cn^2$，左边$=cn^2$

$$右边=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}ci^2+n+1=\frac{2}{n}[\frac{cn^3}{3}+O(n^2)]+n+1=\frac{2c}{3}n^2+O(n)$$

(4)　$T(n)=cn\log n$，左边$=cn\log n$

$$右边=\frac{2c}{n}\sum_{i=1}^{n-1}i\log i+n+1$$

$$=\frac{2c}{n}[\frac{n^2}{2}\log n-\frac{n^2}{4\ln 2}+O(n\log n)]+n+1$$

$$=cn\log n+(1-\frac{c}{2\ln 2})n+O(\log n)$$

积分近似

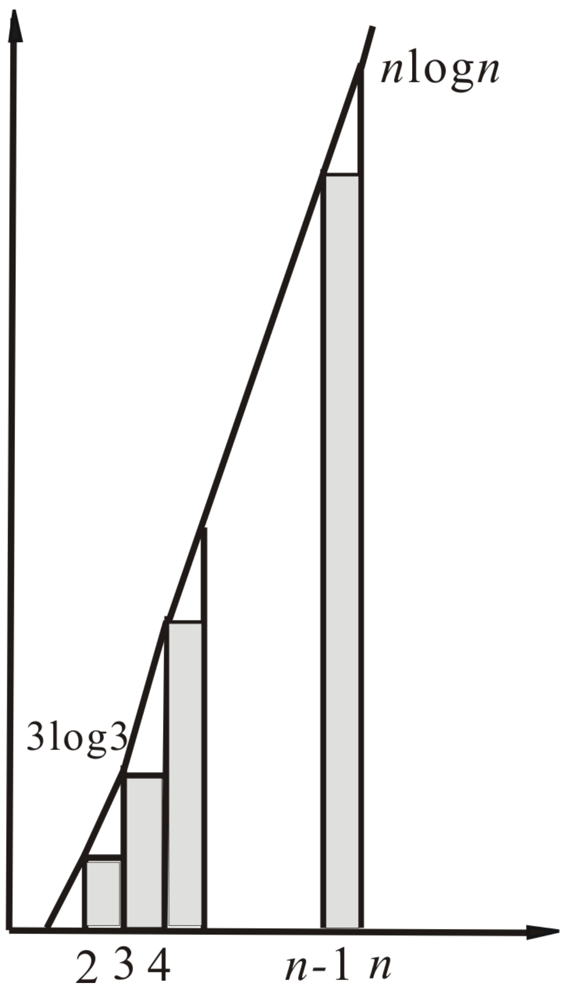
$$\int_2^n x\log x dx = \int_2^n \frac{x}{\ln 2}\ln x dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]\Big|_2^n$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{n^2}{2}\ln n - \frac{n^2}{4}\right)$$

$$- \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{4}{2}\ln 2 - \frac{4}{4}\right)$$

$$= \frac{n^2}{2}\log n - \frac{n^2}{4\ln 2} + O(n\log n)$$



分治算法

n 为输入规模，***n/b*** 为子问题输入规模，

a 为子问题个数，***d*(*n*)**为分解及综合的代价

$$T(n) = aT(n/b) + d(n), \quad n = b^k$$

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = a^2T(n/b^2) + ad(n/b) + d(n) = \ldots$$

$$= a^kT(n/b^k) + a^{k-1}d(n/b^{k-1}) + a^{k-2}(n/b^{k-2}) +$$

$$\ldots + ad(n/b) + d(n)$$

$$= a^k + \sum_{i=0}^{k-1} a^i d(n/b^i)$$

$$a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

分治与递归算法—二分检索

$$T(n)=a^k+\sum_{i=0}^{k-1}a^i d(n/b^i),\quad a^k=n^{\log_b a}$$

(1) $d(n)=c$

$$T(n)=\begin{cases} a^k+c\dfrac{a^k-1}{a-1}=O(a^k)=O(n^{\log_b a}) & a\neq 1 \\ a^k+kc=O(kc)=O(\log n) & a=1 \end{cases}$$

二分检索

$W(n) = W(n/2) + 1$

$a = 1, b = 2, d(n) = c$

$W(n) = O(\log n)$

分治与递归算法—二分归并

(2) $d(n)=cn$

$$T(n)=a^k+\sum_{i=1}^{k-1}a^i\frac{cn}{b^i}=a^k+cn\sum_{i=1}^{k-1}(\frac{a}{b})^i$$

$$=\begin{cases} n^{\log_b a}+cn\dfrac{(a/b)^k-1}{a/b-1}=O(n) & a<b \\ n+cnk=O(n\log n) & a=b \\ a^k+cn\dfrac{(a/b)^k-1}{a/b-1}=a^k+c\dfrac{a^k-b^k}{a/b-1}=O(n^{\log_b a}) & a>b \end{cases}$$

归并排序

$W(n) = 2W(n/2) + n–1$

$a = 2$, $b = 2$, $d(n) = O(n)$,

$W(n)= O(n\log n)$