2008－2014

专业综合统考试题分析

（数学基础—集合论、组合学）

命题

	逻辑		集合论		图论		代数		组合		总计	
	概念	演算	计算	证明	计算	证明	计算	证明	计算	证明	计算	证明
08	4	4	4	4	6				12	6	26	14
09	4		6	6	7				17		34	6
10	4	3		9	2	5			17		23	17
11	4	4	4	4	4				12	8	24	16
12	4		2	6	4				24		34	6
13	7		2	4	4		2		18	3	33	7
14	4		12		6				18		40	0

趋势：

1. 知识点比较全面，代数少，组合比例最大，其他大致均衡分配；
2. 面向基本概念、理论及其应用的考核，证明题减少。

2008年的试题结构

题号	分值	离散数学				组合数学
		逻辑	集合论	图论	代数	
一	4	4				
二	10		4	2		4
三	16	4		4		8
四	10		4			6
合计	40	8	8	6		18

考核的知识点

- 命题符号化 **4**
- 等值演算 **4**
- 集合、关系、函数的基本概念 **4**
- 集合证明题 **4**
- 图论 **6**
- 基本计数 **4**
- 递推关系、生成函数 **8**
- 鸽巢原理 **6**

二、填空题

1.（4分）设*A*、*B*均为有穷 集合，*A*和*B*的基 数分别为*m*和*n*（*m*>0，*n*>0）。

(1) 当m和n满足 $m=n$ 时，存在A到B的双射函数。此时共可生成 $n!$ 个不同的双射函数。

(2) 当m和n满足 $m\le n$ 时，存在A到B的单射函数。此时共可生成 $P(n,m)=n(n-1)\ldots(n-m+1)$ 个不同的单射函数。

2. （2分）已知5位老师和3位学生圆桌就座，如果要求学生两两不相邻，则有 $4!\times P(5,3)=1440$ 种就座方案。

3. （2分）整除2310的正奇数有 $2^4=16$ 个。

提示：$2310=2\times3\times5\times7\times11$，2310的奇因子是$3^a5^b7^c11^d$的形式，其中$a,b,c,d=0,1$。

三、解答题

3.（8分）求1、4、5、8、9这五个数字组成的n位数的个数，要求4、8出现的次数均为偶数，而1、5、9出现的次数不加限制。

解: 指数生成函数是

$$G_e(x) = e^{3x}\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{5x}+\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{4}e^{x}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}5^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{5^n+2\times 3^n+1}{4}$$

四、证明题

1.（4分）设R是非空集合A上的二元关系，A满足条件：

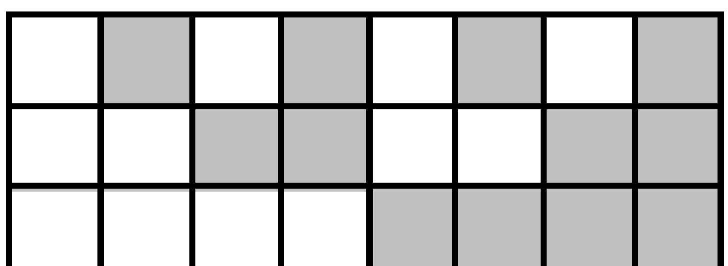
（1）R是自反的；

（2）若$<a,b>\in R \wedge <a,c>\in R$，则 $<b,c>\in R$。

试证明R是A上的等价关系。

证明 参考《离散数学》第七章，39题

2.（6分）随意地把9×3棋盘的每个方格涂成红色或蓝色，求证，必有两行方格的涂色是一样的。



2009年的试题结构

题号	分值	离散数学				组合数学
		逻辑	集合论	图论	代数	
一	**4**	**4**				
二	**7**			**2**		**5**
三	**23**		**6**	**5**		**12**
四	**6**		**6**			
合计	**40**	**4**	**12**	**7**		**17**

考核的知识点

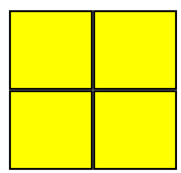
- **命题符号化　　4**
- **集合、关系、函数的基本概念　　6**
- **集合证明题　　6**
- **图论　　6**
- **基本计数　　7**
- **递推关系、生成函数　　7**
- **Polya定理　　3**

二、填空题

1．（2分）5位男生和5位女生排成男女相间的一列，有
<u>2×5!×5!</u>不同的排法。

3．（3分）一个大正方形是由四个相同的小正方形构成，如图1所示。用黑白两种颜色对4个小正方形着色，如果经过某种旋转，颜色能完全吻合的方案认为是相同的，则有<u>6</u>种不同的方案。

$$M=\frac{1}{4}(2^4+2^2+2^1+2^1)=6$$



三、解答题

1. （5分）求由2个0、3个2和3个5构成的八位数共有多少个？

$\{2\cdot 0, 3\cdot 2, 3\cdot 5\}$的全排列，个数为 $\boxed{\dfrac{8!}{2!3!3!}-\dfrac{7!}{1!3!3!}=560-140=420}$

3. （7分）有200本相同的书，欲摆放在四个不同的书柜里，使得每个书柜摆放的书的数目只可能是20、40、60、80、100本，问有多少种摆放的方法？

解：令书柜1，2，3，4的书数分别为 a, b, c, d，那么

$$a+b+c+d=200,\ a, b, c, d=20,40,60,80,100$$

令$A=a/20$，$B=b/20$, $C=c/20$，$D=d/20$，那么

$$A+B+C+D=10,\ A, B, C, D=1,2,3,4,5$$

生成函数为$G(y)=(y+y^2+y^3+y^4+y^5)^4$，$G(y)$的$y^{10}$的系数是68，因此摆放的方法数是68。

4.（6分）设集合$A=\{a,b\}$，试回答下列问题：
(1) 写出A上所有的偏序关系。
(2) 写出A上所有的函数，并指出哪些是双射函数。

解 **(1)** A上的偏序关系有3个：

$I_A=\{<a,a>,<b,b>\}$

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,b>\}$

$R_2=\{<a,a>,<b,a>,<b,b>\}$

(2) A上有4个函数，其中I_A和f_3是双射的.

$I_A=\{<a,a>,<b,b>\}$ 双射

$f_1=\{<a,a>,<b,a>\}$

$f_2=\{<a,b>,<b,b>\}$

$f_3=\{<a,b>,<b,a>\}$ 双射

四、证明题

（6分）对任意集合A、B，证明$A\cap B=A \Leftrightarrow A\subseteq B$。

证 “$\Rightarrow$”

任取x,

$$x\in A \Rightarrow x\in A\cap B \qquad (\text{因为} A\cap B=A)$$

$$\Rightarrow x\in A \wedge x\in B$$

$$\Rightarrow x\in B$$

从而得到$A\subseteq B$。

“$\Leftarrow$” 显然有$A\cap B\subseteq A$, 下面证明$A \subseteq A\cap B$.

任取x,

$$x\in A \Rightarrow x\in A \wedge x\in A \qquad \text{（幂等律）}$$

$$\Rightarrow x\in A \wedge x\in B \qquad \text{（因为} A\subseteq B\text{）}$$

$$\Rightarrow x\in A\cap B$$

综合上述有$A\cap B=A$。

2010年的试题结构

题号	分值	离散数学				组合数学
		逻辑	集合论	图论	代数	
一	**4**	**4**				
二	**6**			**2**		**4**
三	**16**	**3**				**13**
四	**14**		**9**	**5**		
合计	**40**	**7**	**9**	**7**		**17**

考核的知识点

- **命题符号化 4**
- **等值演算 3**
- **关系、函数证明题 9**
- **图论概念 2**
- **平面图证明题* 5**
- **基本计数 7**
- **Ramsey定理* 2**
- **容斥原理 8**

二、填空题（6分）

1. （2分）设k_n是n个顶点（n为正整数）的完全图，对k_n的每条边进行红蓝两种颜色任意着色，都至少存在一个红色边三角形或蓝色边三角形，则最小的 n 是___6___。

2. （2分）$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=$ ___0___

   其中$\binom{n}{k}$表示从 n 个不同元素中取 k 个的组合数。

三、计算题（16分）

2.（5分）求方程$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$的正整数解的个数。

解：相当于方程$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =6$的非负整数解的个数，即

$$C(6+4-1,6)=C(9,6)=C(9,3)=84$$

3.（**8**分）设n个人的包事前存放在会议寄存处，且寄存处只存有这n个包。会后这n个人随机进入这间黑暗的寄存室，每个人随意取回一个包。试问所有的人都拿错包的概率是多少？

解　设$\{1, 2, \ldots, n\}$的错位排列数为D_n，那么所求概率为

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{n!}{n!}[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}]$$

当 n 充分大时，上述概率近似为$1/e$

四、证明题

1.（5分）证明自然数集N上的整除关系R是N上的偏序关系

证 这里首先应该假设N中不含有0.

对任意 x属于N，显然 $x|x$，因此R是自反的。

对任意 x,y 属于N，若 $x|y$ 且 $y|x$，那么有$x=y$，因此R是反对称的。

对任意 x,y,z 属于N，若$x|y$且$y|z$，那么$x|z$，因此R是传递的。

因此R是N上的偏序关系。

2.（4分）设$f: A\to B$，$g: B\to C$，其中对任意的 $b\in B$, $g(b) = \{ x \mid x\in A \wedge f(x) = b\}$，

证明：当 f 为满射时，g为单射。

证 假设存在 b_1和$b_2\in B$ 使得$g(b_1)=g(b_2)=T\subseteq A$，那么有

$$\{ x \mid x\in A \wedge f(x)=b_1\}=T=\{ x \mid x\in A \wedge f(x) = b_2\}$$

如果存在 $x\in T \subseteq A$，那么由于 f 是函数，对于x只有唯一的值，因此 $b_1=f(x)=b_2$

如果T是空集，那么不存在$x\in A$使得 $f(x)=b_1=b_2$, 因此b_1和b_2不属于ran$f$，这与函数 f 的满射性矛盾。

2011年的试题结构

题号	分值	离散数学				组合数学
		逻辑	集合论	图论	代数	
一	**4**	**4**				
二	**12**		**4**	**4**		**4**
三	**8**					**8**
四	**16**	**4**	**4**			**8**
合计	**40**	**8**	**8**	**4**		**20**

考核的知识点

• 命题符号化	**4**
• 等值演算	**4**
• 关系与函数的概念	**4**
• 等势证明题	**4**
• 图论概念	**4**
• 基本计数	**12**
• 生成函数	**8**

二、填空题（12分，每题2分）

1. （2分）设A={1,2,3,4}，B={a,b,c}，从A到B的不同二元关系共有 2^{12} 个，从A到B的不同函数共有 3^4 个。

2. （2分） 设|A|=n（即集合A的基数为n），问在A上有 $\boxed{2^{(n^2+n)/2}}$ 不同的对称关系。

3. （2分）对$(2x_1-3x_2+x_3)^6$进行展开合并同类项后，$x_1^3x_2x_3^2$的系数是 -1440 。 $\boxed{\binom{6}{3\,1\,2}2^3(-3)1^2=\frac{6!}{3!1!2!}(-24)=-1440}$

4. （2分）从m个人选取n个人($n\le m$)围成一圆桌就座，则不同的就座方法数是 $P(m,n)/n=m!/(m-n)!n$ 。

三、计算题（8分，每问4分）

设$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$是7个互不相同的非零实数。这7个数的全排列中，数$a_i(i=1\ldots,7)$的原来位置是指第$i$个位置。求这7个数的全排列中：

(1) a_1,a_3,a_5,a_7都不在原来的位置上，而a_2,a_4,a_6都在原来位置上的排列数目。

(2) a_2,a_4,a_6都不在原来位置上的排列数目。

(1) a_1,a_3,a_5,a_7的错位排列数 $D_4 = 4![1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}] = 9$

(2) 设A,B,C分别表示a_2,a_4,a_6在原来位置的排列集合，则

$$N = |\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = 7! - (6!+6!+6!) + (5!+5!+5!) - 4!$$
$$= 134\times 4! = 3216$$

四、证明题

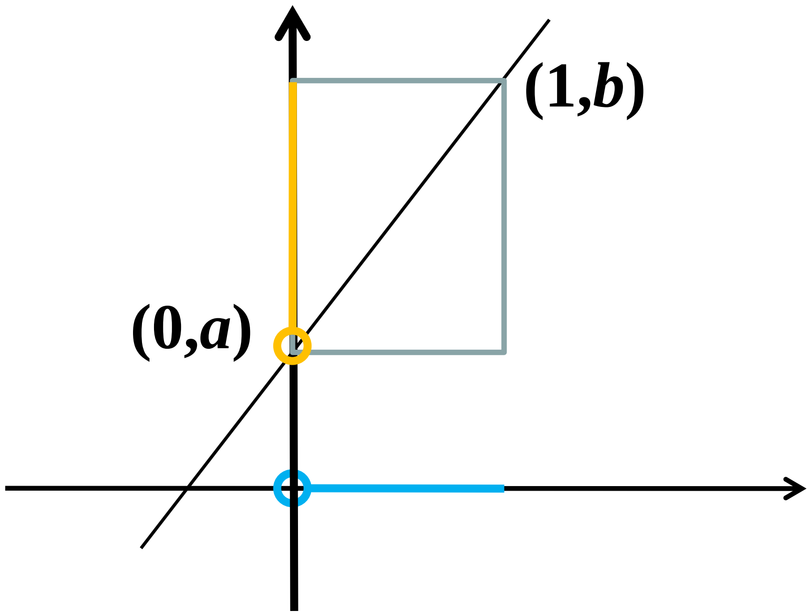
2.（4分）用“≈”表示等势，试证明(0,1] ≈(a,b] （$a,b\in$R，$a<b$，R为实数集）。

证　做过(0,a)和(1,b)点的直线

$$f(x)=(b-a)x+a$$

f 是从(0,1]到(a,b]的双射函数

从而有(0,1] ≈(a,b]



3. （8分）设$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$满足 $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$， 且$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$的母函数为 $A(x) = \sum_{n\ge1} a_n x^n$， a_1=1 (缺条件)。

(1) (4分) 证明$A^2(x)$-$A(x)$+x=0

(2) (4分) 证明 $a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$， n≥1， 其中 $\binom{2n-2}{n-1}$表示从2n-2个数中取出n-1个数的组合数。

证 (1) $A(x) = \sum_{n\ge1} a_n x^n$， 于是

$$A^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} a_l x^l$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_k a_l x^{k+l} = \sum_{n=2}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = A(x) - a_1 x = A(x) - x,$$

$$A^2(x) - A(x) + x = 0$$

(2) 求解一元二次方程，由于$A(0)=0$，于是

$$A(x)=\frac{1-(1-4x)^{1/2}}{2}，舍去A(x)=\frac{1+(1-4x)^{1/2}}{2}$$

$$A(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{1/2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}(-4x)^n]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^{2n}}\binom{2n-2}{n-1}(-1)^n 2^{2n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

$$a_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

2012年的试题结构

题号	分值	离散数学				组合数学
		逻辑	集合论	图论	代数	
一	4	4				
二	14			4		10
三	16		2(概念)			14
四	6		6			
合计	40	4	8	4		24

考核的知识点

• 命题符号化	**4**
• 关系与函数的概念	**2**
• 集合等式证明	**6**
• 图论概念	**4**
• 基本计数	**14**
• 生成函数	**10**

二、填空题（12分，每题2分）

1. 在$(1+2x)^n$的展开式中x^k的系数是$\boxed{\binom{n}{k}2^k=\frac{n!\,2^k}{k!(n-k)!}}$，其中（$1\le k\le n$）.

2. 设数列$\{a_n\}$满足递推关系：$a_n=a_{n-1}+2$且$a_1=1$，则满足此递推关系a_n的解是$\boxed{a_n=2n-1}$.

4. 如果五个文科生和五个理科生排成一排，共有$\boxed{10!}$不同的排法；如果要求文科生和理科生交替排成一排，则共有$\boxed{2\times5!\times5!}$不同的排法。

5. 由3个a，1个b，2个c这六个元素组成的不同排列的总数是$\boxed{\frac{6!}{3!\,1!\,2!}=60}$.

三、解答题（共16分）

1. (5分) 设用数字2，4，6，8（数字可重复使用）可组成a_n个含奇数个2，偶数个6且至少含有一个8的n位数（$n\geq 2$）。

(1) (2分) 写出数列$\{a_n\}$的指数型母函数$g(x)$；

(2) (3分) 求出a_n的表达式。

(1)

$$g(x)=e^x\frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{e^x-e^{-x}}{2}(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{4}e^x(e^{2x}-e^{-2x})(e^x-1)=\frac{1}{4}(e^{4x}-1-e^{3x}+e^{-x})$$

(2)

$$a_n=\frac{1}{4}[4^n-3^n+(-1)^n]$$

2. （5分）把4个相异的球放到3个相异的盒子里，使得不出现空盒，有多少种不同的放法？

解：方法一. 分步处理

将 4 个球划分成 3组，恰好有2个球分到一组，选2个球的方法数是C(4,2)=6.

把这3个组放入 3个相异的盒子，方法数恰好是3!，

根据乘法法则，方法数是6×6=36.

方法二. 放球问题的公式

$$m!\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = 3!\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix} = 3!\binom{4}{2} = 36$$

3.（6分）设A={1,2,3}

（1）计算A上二元关系的个数。

（2）求出A上所有的等价关系。

解：(1) 二元关系数是$2^{3\times 3}=2^9=512$

(2) 等价关系数等于3元集的划分个数，即

$$\left\{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right\}=1+3+1=5$$

四、证明题（6分）

证明：对任意集合 A, B, C 有

$$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C) \text{ 当且仅当 } C\subseteq A$$

证 充分性. 假设$C\subseteq A$,

$$(A\cap B)\cup C$$

$$=(A\cup C)\cap(B\cup C) \quad (\text{分配律})$$

$$= A\cap(B\cup C) \quad （\text{由}C\subseteq A \text{ 得 } A\cup C=A)$$

必要性. 假设C不是A的子集，则存在 $x\in C$ 但 $x\notin A$.

$$x\in C \Rightarrow x\in(A\cap B)\cup C$$

$$x\notin A \Rightarrow x\notin A\cap(B\cup C)$$

这与 $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$ 矛盾.

2013年的试题结构

题号	分值	离散数学				组合数学
		逻辑	集合论	图论	代数	
一	4	4				
二	16		2	4	2	8
三	13	3				10
四	7		7			
合计	40	7	6	4	2	21

考核的知识点

• 命题符号化	**4**
• 等值演算	**3**
• 集合概念	**2**
• 关系证明	**4**
• 图论概念	**4**
• 基本计数	**8**
• 容斥原理	**4**
• 生成函数	**6**
• 鸽巢原理	**3**
• 代数运算	**2**

二、填空题（16分）

1.（2分）设集合A有100个元素，则A有__2^{100}__个子集，其中有__2^{99}__子集元素个数为奇数.

3. 如果4对夫妻围圆桌就座，没有任何限制条件，共有__7!__不同的座法；如果这4对夫妻中的4个男士和4个女士排成一排，要求男女交替，则有__$2\times4!\times4!$__不同的排法；如果这4对夫妻围圆桌就座，要求夫妻相邻的座法有__$2^4\times3!$__种.

5. 设Q是一个有理数集，对任意$a,b\in$Q，定义二元运算$a\Delta b=(a\times b)/2$，则Q关于运算Δ的单位元是__2__,其中×是有理数通常的乘法运算.

6. 把6个相同的球分到3个同学手里，允许有的同学未分到球的情况出现，则有__C(8,6)=28__种不同的分法.

三、计算题（13分）

2. (4分) 设*a*、*b*、*c*、*d*这四个元素的全排列中不允许出现*ac*和*bd*的排列数.

(1) 全体排列 数：**4 !**

含***ab***的排列数：**3!**

含**cd**的排列数：**3!**

同时含***ab***和***cd***的排列数：**2!**

N=4!-3!-3!+2!=14

3. (6分) 用红、黄、蓝色对1×n的棋盘方格涂色，设涂红色方格的是偶数且至少有一个方格涂黄色的涂色方案数为h_n(n是正整数）

(1) 试确定h_n的指数型生成函数;

(2) 求h_n.

$$Ge(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}e^x(e^x-1)=\frac{e^{3x}}{2}-\frac{e^{2x}}{2}+\frac{e^x}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n+1}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}$$

$$h_n=\frac{3^n-2^n+1}{2}$$

四、证明题（7分）

1. （4分）给出命题:“对于任意集合 *A*上的任意关系*R*,如果*R*是对称和传递的，则*R*一定是自反的。”若命题正确，则给出完整证明；若命题错误，则指出错误所在，并在集合{1,2,3}上构造一个关系R_1(反例)使得R_1是对称的和传递的，但不是自反的。

命题不对.

反例：$R=\{<1,1>,<2,2>,<1,2>,<2,1>\}$

2. （3分）设A为包含n个元素的有限集，R是A上的关系，则必存在s和t，使得$R^s=R^t$，且$0≤s<t≤2^{n^2}$

列出所有的R的幂如下：

$$R^0, R^1, \ldots, R^{2^{n^2}}$$

因为A×A有n^2个有序对，有 2^{n^2} 个子集，总计 2^{n^2} 个不同的二元关系. 根据鸽巢原理，上述列出的关系中必存在关系R^s与R^t，使得 $R^s=R^t$，且$0≤s<t≤2^{n^2}$.

2014年的试题结构

题号	分值	离散数学				组合数学
		逻辑	集合论	图论	代数	
一	**4**	**4**				
二	**14**			**6**		**8**
三	**12**		**12**			
四	**10**					**10**
合计	**40**	**4**	**12**	**6**		**18**

考核的知识点

- **命题符号化** **4**
- **关系函数概念** **12**
- **图论概念** **6**
- **基本计数** **3**
- **递推方程** **3**
- **生成函数与指数生成函数** **12**

二、计算题（共12分）

1（3分）设集合$A=\{1,2\}$，$B=\{a,b,c\}$。

(1) 问从A到B有多少个单射函数。

(2) 试写出从A到B所有非单射的函数。

(1) $P(3,2)=6$

(2) 非单射的函数:

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$,

$f_2=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$,

$f_3=\{\langle 1,c\rangle,\langle 2,c\rangle\}$,

2.（3分）已知集合A={1,2,...,6}上的等价关系 R定义为：

$$R=I_A\cup\{<1,5>,<5,1>,<2,3>,<3,2>,$$
$$<2,6>,<6,2>,<3,6>,<6,3>\}$$

求出由R诱导的A的划分(即由R的商集诱导的划分).

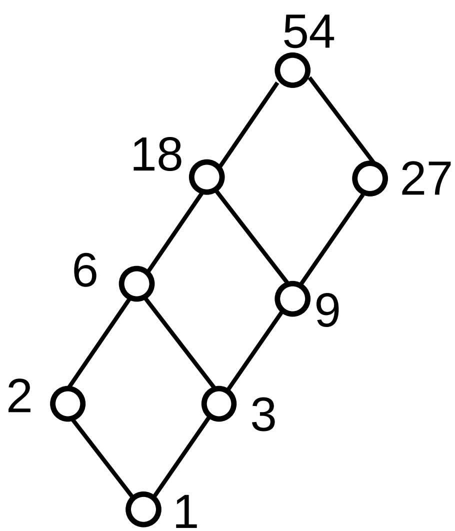
划分： { { 1, 5 }, { 2, 3, 6 }, { 4 } }

3.（6分）已知A是由54的所有因子组成的集合，设%为A上的整除关系，

(1) 画出偏序集<A,%>的哈斯图。

(2) 确定A中最长链的长度，并按字典序写出A中所有最长的链。

(3) A中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链，并完整写出这些反链。



最长链长：5

最长链：{1,2,6,18,54},{1,3,6,18,54}

{1,3,9,18,54},{1,3,9,27,54}

至少划分成5个互不相交的反链：

{54},{18,27},{6,9},{2,3},{1}

四、解答题（每小题5分，共10分）

1. 求方程$t_1+t_2+t_3+t_4=20$整数解的个数，其中$t_1\geq 3$, $t_2\geq 1$, $t_3\geq 0$, $t_4\geq 5$。

等价于方程 $t_1+t_2+t_3+t_4=11$的非负整数解个数

生成函数为：

$$G(x)=\frac{1}{(1-y)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{4+n-1}{n}y^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}y^n$$

y^{11}的系数为：$C(14,3)=364$

解的个数为 364.

2. 设$S=\{\infty\cdot 2,\infty\cdot 4,\infty\cdot 5,\infty\cdot 7,\infty\cdot 9\}$是给定的重集，其中2, 4, 5, 7, 9是$S$中的五个不同元素，且每个元素在集合中可以有无穷多。设h_n表示从S中取n个元素（可以重复取）且要求2和4出现偶数次的排列数，求h_n。

指数生成函数为：

$$G_e(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)^2(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^3$$

$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})^2\,e^{3x}=\frac{1}{2}(e^{2x}+2+e^{-2x})e^{3x}=\frac{1}{2}e^{5x}+e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}5^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$h_n=\frac{5^n+1}{2}+3^n$$

考核知识点

	命题符号化	等值演算	集合关系函数	集合证明	图论概念	图论证明	代数概念	基本计数容斥原理	递推关系生成函数	鸽巢原理	Polya定理
08	4	4	4	4	6			4	8	4	
09	4		6	6	7			7	7		3
10	4	3		9	2	5		7	8	2	
11	4	4	4	4	4			12	8		
12	4		2	6	4			14	10		
13	4	3	2	4	4		2	12	9		
14	4		12		6			6	12		

重点知识点：命题符号化、集合、关系、函数、图论基本概念、基本计数与容斥原理、递推关系与生成函数。