组合数学

- 主讲人：曹永知 （北大信息学院软件所）

  caoyz@pku.edu.cn

- 课程内容
  - 组合计数
  - 递推方程
  - 生成函数
  - 鸽巢原理、组合计数定理、知识点小结
  - 试题分析2008-2014

- 课程安排：9月 2日，9日，16日；10月14日，21日

第12章　组合计数基础

- 12.1 基本计数规则
- 12.2 排列与组合
- 12.3 二项式定理与组合恒等式
- 12.4 多项式定理

12.1 基本计数规则

- 加法法则
- 乘法法则
- 应用实例

加法法则

加法法则：事件A有 m 种产生方式，事件 B 有 n 种产生方式，则 “事件A 或 B ” 有 $m+n$ 种产生方式.

使用条件：事件 A 与 B 产生方式不重叠

适用问题：分类选取

推广：事件 A_1 有n_1 种产生方式，事件A_2 有 n_2 种产生方式，…, 事件 A_k 有 n_k 种产生的方式，则 “事件 A_1 或 A_2 或 … A_k” 有 $n_1+n_2+\ldots+n_k$ 种产生的方式.

乘法法则

乘法法则：事件A有 m 种产生方式，事件B 有 n 种产生方式，则 “事件 A与B ” 有 mn 种产生方式.

使用条件：事件 A 与 B 的产生方式相互独立

适用问题：分步选取

推广：事件A_1 有 n_1 种产生方式，事件 A_2 有 n_2 种产生方式，…, 事件A_k 有 n_k 种产生的方式，则 “事件 A_1与A_2与… A_k” 有 $n_1n_2\ldots n_k$ 种产生的方式.

分类处理与分步处理

- **分类处理**：对产生方式的集合进行划分，分别计数，然后使用加法法则
- **分步处理**：一种产生方式分解为若干独立步骤，对每步分别进行计数，然后使用乘法法则
- **分类与分步结合使用**：
  - 先分类，每类内部分步
  - 先分步，每步又分类

应用实例

例1 设A,B,C是3个城市，从A到B有3条道路，从B到C有2条道路，从A直接到C有4条道路，问从A到C有多少种不同的方式?

$$N=3\times2+4 = 10$$

例2 求1400的不同的正因子个数

$$1400=2^3\ 5^2\ 7$$

正因子为：$2^i\ 5^j\ 7^k$，其中$0\le i\le 3,\ 0\le j\le 2,\ 0\le k\le 1$

$$N=(3+1)(2+1)(1+1)=24$$

12.2 排列与组合

- 选取问题
- 集合的排列与组合
- 基本计数公式的应用
- 多重集排列与组合

选取问题 --组合计数模型1

设 n 元集合 S，从 S 中选取 r 个元素.

根据是否有序，是否允许重复可以将该问题分为四个子类型

	不重复	重复
有序	集合排列 $P(n,r)$	多重集排列
无序	集合组合 $C(n,r)$	多重集组合

集合的排列

1．从 n元集 S 中有序、不重复选取的 r 个元素称为 S 的一个r 排列，S 的所有r 排列的数目记作 $P(n,r)$

$$P(n,r)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!} & r\le n\\ 0 & r>n\end{cases}$$

2．环排列

S 的 r 环排列数 $=\dfrac{P(n,r)}{r}$

集合的组合

3．从 n元集 S 中无序、不重复选取的 r 个元素称为S 的一个r 组合，S 的所有r 组合的数目记作$C(n,r)$

$$C(n,r)=\begin{cases}\dfrac{P(n,r)}{r!} & n\geq r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

4. 设n, r为正整数，则

(1) $C(n, r)=\dfrac{n}{r}C(n-1,r-1)$

(2) $C(n, r) = C(n, n-r)$

(3) $C(n, r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$

证明方法

方法1：公式代入并化简

方法2：组合证明

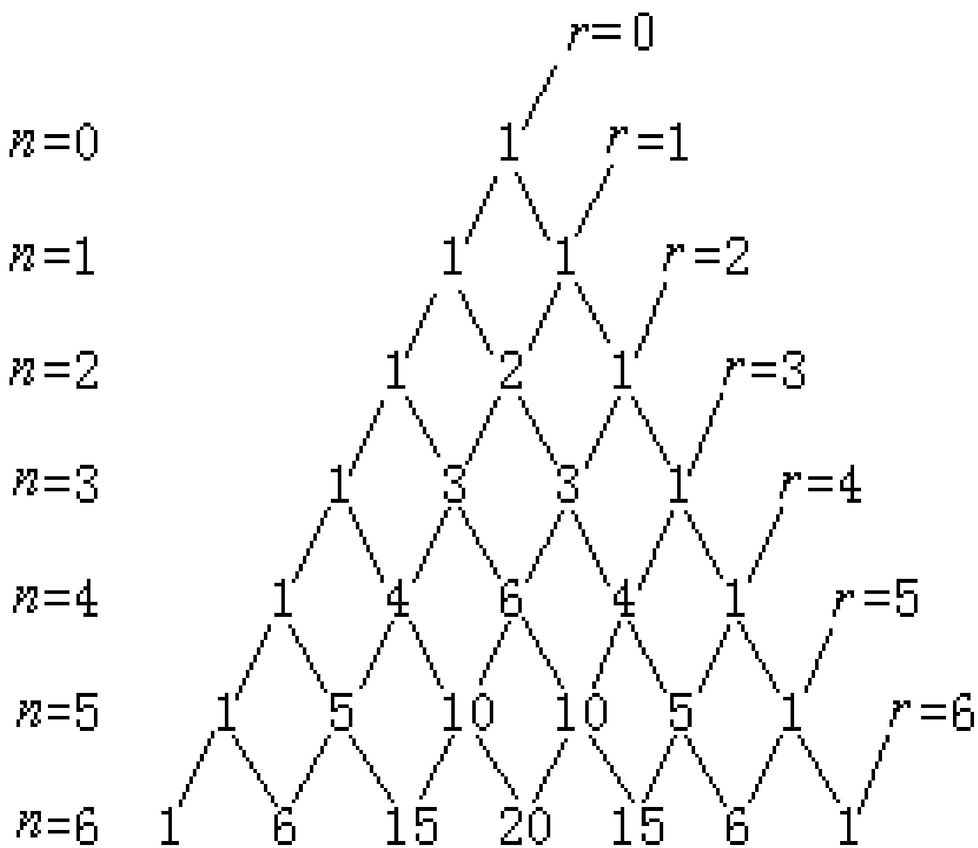
例3 证明 $C(n, r) = C(n, n-r)$

证 设 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$是n元集合，对于S 的任意 r-组合 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$，都存在一个$S$ 的 $n-r$ 组合$S-A$与之对应. 显然不同的 r 组合对应了不同的 $n-r$ 组合，反之也对，因此 S 的 r 组合数恰好与 S 的$(n-r)$组合数相等.

$C(n, r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$ 称为 **Pascal公式**，也对应了**杨辉三角**， 两种证明方法都适用.

杨辉三角

$C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$



基本计数公式的应用

例4 从1—300中任取3个数使得其和能被3整除有多少种方法?

解: $A=\{ 1, 4, \ldots , 298 \}$

$B=\{ 2, 5, \ldots , 299 \}$

$C=\{ 3, 6, \ldots , 300 \}$

分类:

分别取自 A, B, C: 各 $C(100,3)$

A, B, C 各取1个: $C(100,1)^3$

$N= 3C(100,3) + 100^3 = 1485100$

基本计数公式的应用（续）

例5 求1000！的末尾有多少个0？

解:　　$1000!=1000\times999\times998\times\ldots\times2\times1$

将上面的每个因子分解，若分解式中共有 i 个5, j 个2，那么 $\min\{i, j\}$ 就是0的个数.

1, … ,1000中有

500 个是 2 的倍数，$j\geq500$;

200 个是 5 的倍数，

40 个是 25 的倍数（多加40个5），

8 个是 125 的倍数（再多加8个5），

1 个是 625 的倍数（再多加1个5）

$i = 200+40+8+1 = 249$. $\min\{i, j\}=249$.

多重集的排列

多重集的表示 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \dots, n_k\cdot a_k\}$，$0 < n_i \le +\infty$

r 排列的计数结果

(1) 全排列 $r = n$, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

$$N = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

证明：分步选取.先放a_1, 有$C(n,n_1)$ 种方法；再放a_2, 有$C(n-n_1,n_2)$种方法, ... , 放a_k,有$C(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1},n_k)$ 种方法

$$N = C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)\dots C(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1},n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

(2) 若$r \le n_i$时，每个位置都有k 种选法，得 k^r.

多重集的组合

多重集 $S=\{ n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k \}$的组合数为

$$N = C(k+r-1,r),\ \text{当} r \le n_i$$

证明：一个r 组合为

$$\{ x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \ldots , x_k\cdot a_k \},$$

其中 $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$, x_i为非负整数

这个不定方程的非负整数解对应于下述排列

$$\underbrace{1\ldots1}_{x_1\text{个}}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_2\text{个}}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_3\text{个}}\ 0\ \ldots\ldots\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_k\text{个}}$$

r个1，$k-1$个0的全排列数为

$$N = \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} = C(k+r-1,r)$$

实例

例6 r 个相同的球放到 n个不同的盒子里，每个盒子球数不限，求放球方法数.

解: 设盒子的球数依次记为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则满足

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$, $x_1, x_2, \dots, x_n$为非负整数

$$N = C(n+r-1, r)$$

例7 排列 26个字母，使得 a 与 b 之间恰有7个字母，求方法数.

解: 固定a 和 b，中间选7个字母，有2 $P(24,7)$种方法，将它看作大字母与其余17个全排列有18！种，因此

$$N = 2\ P(24,7)\ 18!$$

实例（续）

例8 **(1) 10个男生，5个女生站成一排，若没有女生相邻，有多少种方法?**

(2) 如果站成一个圆圈，有多少种方法?

解: **(1) $P(10,10)\ P(11,5)$**

(2) $P(10,10)\ P(10,5)/10$

例9 **把 2*n* 个人分成 *n* 组，每组2人，有多少分法?**

解: **相当于 2*n* 个不同的球放到 *n* 个相同的盒子，每个盒子2个球，放法为**

$$N=\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\binom{2n-4}{2}\cdots\binom{2}{2}/n!=\frac{(2n)!}{(2!)^n n!}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

实例（续）

例 10　9 本不同的书，其中 4 本红皮，5 本白皮，

(1) 9 本书的排列方式数有多少？

(2) 若白皮书必须放在一起，那么有多少方法？

(3) 若白皮书必须放在一起，红皮书也必须放在一起，那么有多少方法？

(4) 若白皮和红皮书必须相间，有多少方法？

解：(1) 9!

(2) 5！5！

(3) 5！4！2！

(4) 5！4！

12.3 二项式定理与组合恒等式

- 二项式定理
- 组合恒等式
  - 递推式
  - 变下项求和
  - 变系数和
  - 变上项求和
  - 积
  - 积和
- 证明方法小结

二项式定理

二项式定理：设 n 是正整数，对一切 x 和 y

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

证明方法：数学归纳法、组合分析法.

证 当乘积被展开时其中的项都是下述形式：$x^i y^{n-i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. 而构成形如 $x^i y^{n-i}$ 的项，必须从n 个和 $(x+y)$ 中选 i 个提供 x，其它的 $n-i$ 个提供 y. 因此，$x^i y^{n-i}$ 的系数是 $\binom{n}{i}$，定理得证.

常用形式 $$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

二项式定理的应用

例11 求在$(2x-3y)^{25}$的展开式中$x^{12}y^{13}$的系数.

解　由二项式定理

$$(2x+(-3y))^{25}=\sum_{i=0}^{25}\binom{25}{i}(2x)^{25-i}(-3y)^{i}$$

令$i=13$ 得到展开式中$x^{12}y^{13}$的系数，即

$$\binom{25}{13}2^{12}(-3)^{13}=-\frac{25!}{13!\,12!}2^{12}3^{13}$$

组合恒等式（递推式）

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

3. $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

证明方法：公式代入、组合分析

应用：1 式用于化简，

2 式用于求和时消去变系数，

3 式用于求和时拆项（两项之和或者差），然后合并

组合恒等式（变下项求和）

简单和、交错和

4. $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

5. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

证明方法：二项式定理、组合分析

应用：序列求和

恒等式求和（变下项求和）

变系数和

6. $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

7. $$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

证明方法：

二项式定理 + 求导

已知恒等式代入，消去变系数

应用：序列求和

证明（二项式定理+求导）

6式的证明

6. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} \qquad \text{求导}$$

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \qquad \text{令} x=1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

证明（已知恒等式代入）

7式的证明

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$ 消去变系数

$$= \sum_{k=1}^{n} kn \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^{n} [(k-1)+1] \binom{n-1}{k-1}$$ 常量外提

$$= n \sum_{k=1}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

$$4.\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + n2^{n-1}$$ 变限

$$6.\quad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

恒等式（变上项求和）

8. $\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}=\binom{n+1}{k+1}$, $n,k\in N$

证明方法：组合分析

$S=\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ 的 $k+1$ 子集数

含 a_1: $\binom{n}{k}$

不含 a_1，含 a_2: $\binom{n-1}{k}$

…

不含 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 含 a_{n+1} $\binom{0}{k}$

应用：求和

恒等式（积）

9. $\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$

证明方法：组合分析.

n 元集中选取 r 个元素，然后在这 r 个元素中再选 k 个元素. 不同的 r 元子集可能选出相同的 k 子集，其重复度为 $\binom{n-k}{r-k}$.

$\{a, b, c, d, e\} \to \{a, b, c, d\} \to \{b, c, d\}$

$\{b, c, d, e\} \to \{b, c, d\}$

应用：将变下限 r 变成常数 k，求和时提到和号外面.

恒等式（积之和）

10. $$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$$

11. $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}$$

证明方法：

组合分析、二项式定理

11 式是 10 式的特例 (10中m和n互换，然后令$r=m$)

应用：求和

组合恒等式小结

证明方法

1. 已知恒等式代入
2. 二项式定理
3. 幂级数的求导、积分
4. 归纳法
5. 组合分析

求和方法：

1. Pascal 公式---式 3
2. 级数求和
3. 观察和的结果，然后使用归纳法证明
4. 利用已知的公式

非降路径问题

基本模型

- 限制条件下的非降路径数
- 非降路径模型的应用
  - 证明恒等式
  - 单调函数计数
  - 栈的输出

全排列：$r = n,\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

$$N = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

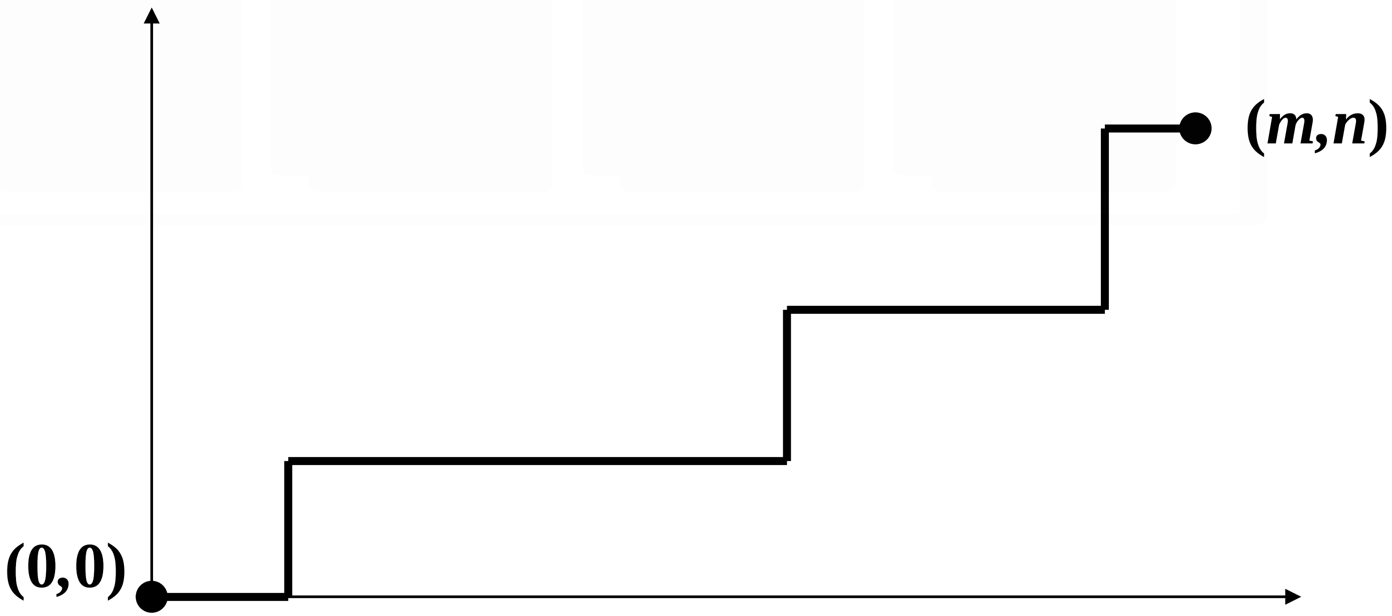
基本模型

(0,0)到(m,n)的非降路径数：$C(m+n,m)$

(a,b)到(m,n)的非降路径数：$\binom{(m+n)-(a+b)}{m-a}=\binom{(m+n)-(a+b)}{n-b}$

等于 (0,0)到$(m-a,n-b)$的非降路径数

(a,b)经过(c,d)到(m,n)的非降路径数：乘法法则

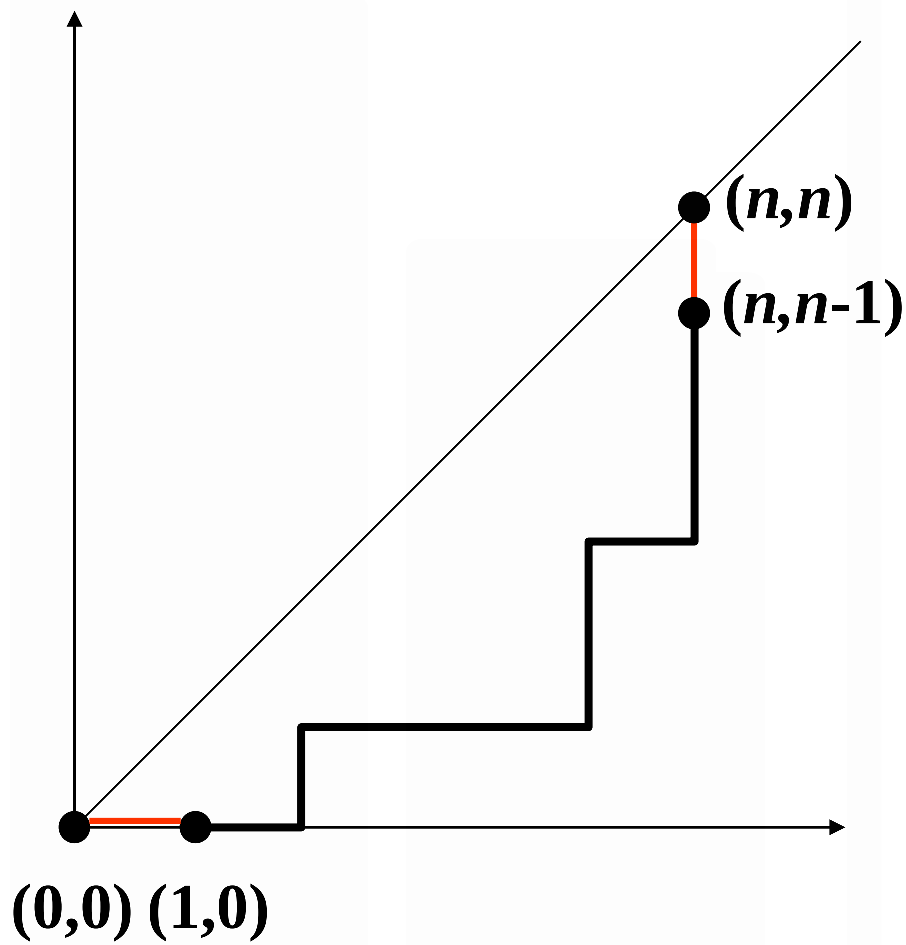


限制条件的非降路径数

从(0,0)到(n,n)除端点外不接触对角线的非降路径数

下方从(0,0)到(n,n)不接触对角线非降路径数的 2 倍

下方从(0,0)到(n,n)不接触对角线非降路径数等于从(1,0)到(n,n-1)不接触对角线非降路径数

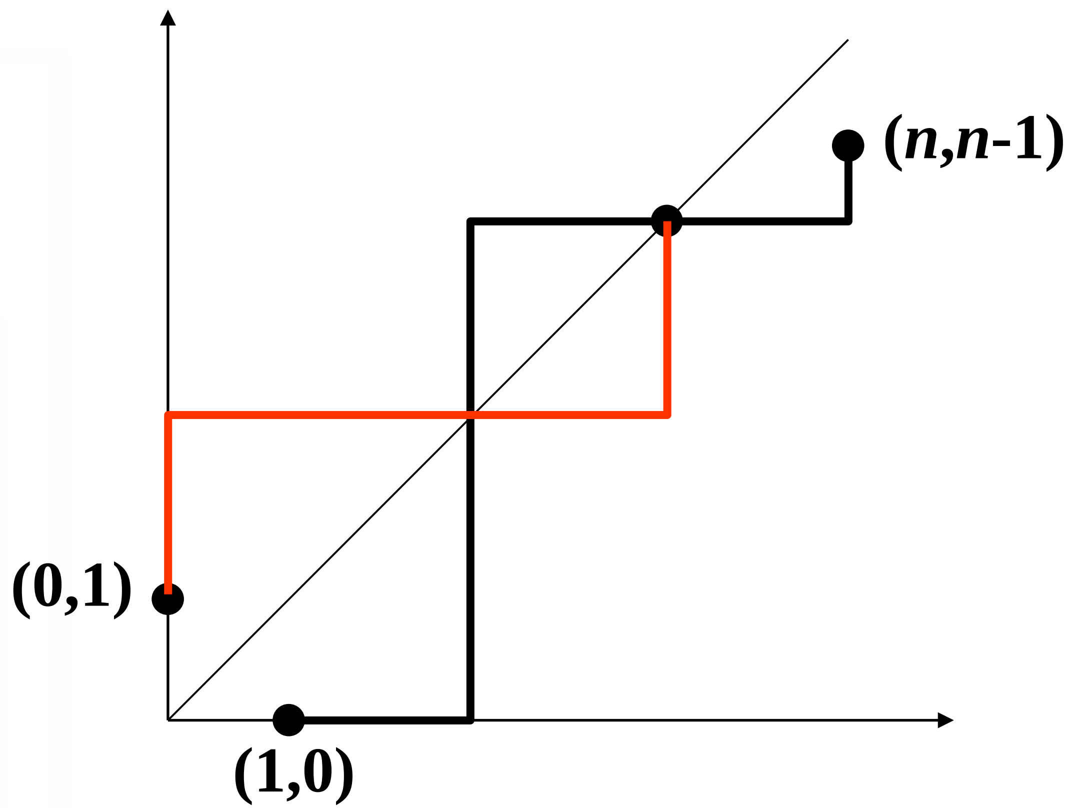


限制条件下非降路径数（续）

从(1,0)到(n,n-1)的不接触对角线的非降路径数

= 从(1,0)到(n,n-1)的非降路径数

– 从(0,1)到(n,n-1)的非降路径数



$$N = 2\left[\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\right] = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

应用（证明恒等式）

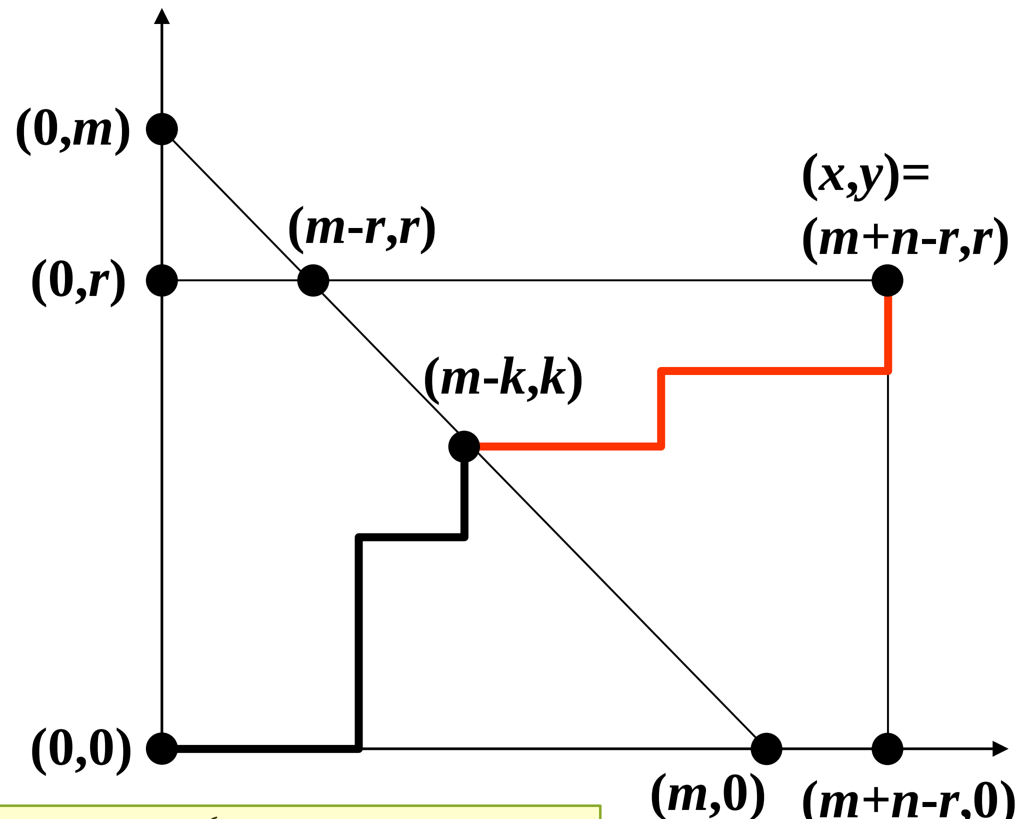
例（组合恒等式 10）

证明 $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$

证：

(0,0)到$(m-k,k)$路径数$\binom{m}{k}$，

$(m-k,k)$到(x,y)路径数$\binom{n}{r-k}$

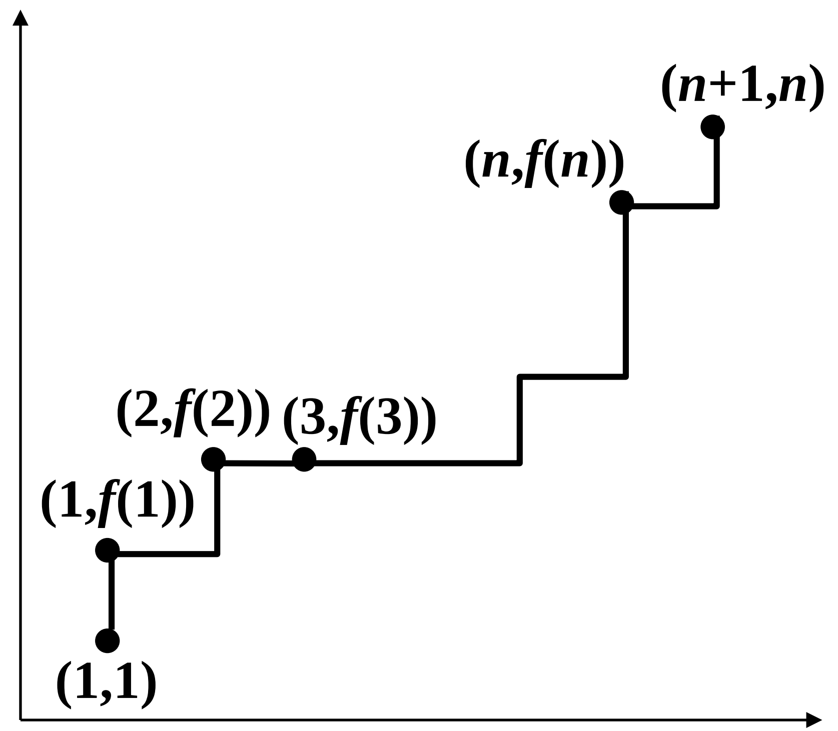


$$\begin{cases} x+y-(m-k)-k=n \\ y-k=r-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=m+n-r \\ y=r \end{cases}$$

应用（单调函数计数）

例 集合$\{1, 2, \ldots, n\}$上单调递增函数个数=(1,1) 到 $(n+1,n)$ 的非降路径数=$\binom{2n-1}{n}$

单调函数个数=$2\binom{2n-1}{n}-n$



一般地，$A=\{1, 2, \ldots, m\}$，$B=\{1, 2, \ldots, n\}$，A到B单调递增函数个数=(1,1) 到 (m+1,n) 的非降路径数=$\binom{m+n-1}{m}$

A到B单调函数个数=$2\binom{m+n-1}{m}-n$

严格单调递增函数个数$C(n,m)$，

严格单调递减函数个数$C(n,m)$

函数计数小结

$A = \{1, 2, \ldots, m\}, \quad B = \{1, 2, \ldots, n\}$

$f: A \to B$

函数	单射	满射	双射	单调	严格单调
计数	$P(n,m)$	$\left\{ m \atop n \right\} n!$	$\left\{ n \atop n \right\} n! = n! = P(n,n)$	$2\binom{m+n-1}{m}$ -n	$2C(n,m)$
模型	排列	放球	排列	非降路径	组合

括号内是第二类
Stirling数

应用（栈输出的计数）

例 将1, 2, … , n 按照顺序输入栈，有多少个不同的输出序列?

分析：将进栈、出栈分别记作 x, y,

进栈、出栈的操作序列是 n个x，n个y 的排列，其中，

排列的任何前缀中，x 个数不少于y 的个数，

等于从(0,0)到 (n,n) 的不穿过对角线的非降路径数

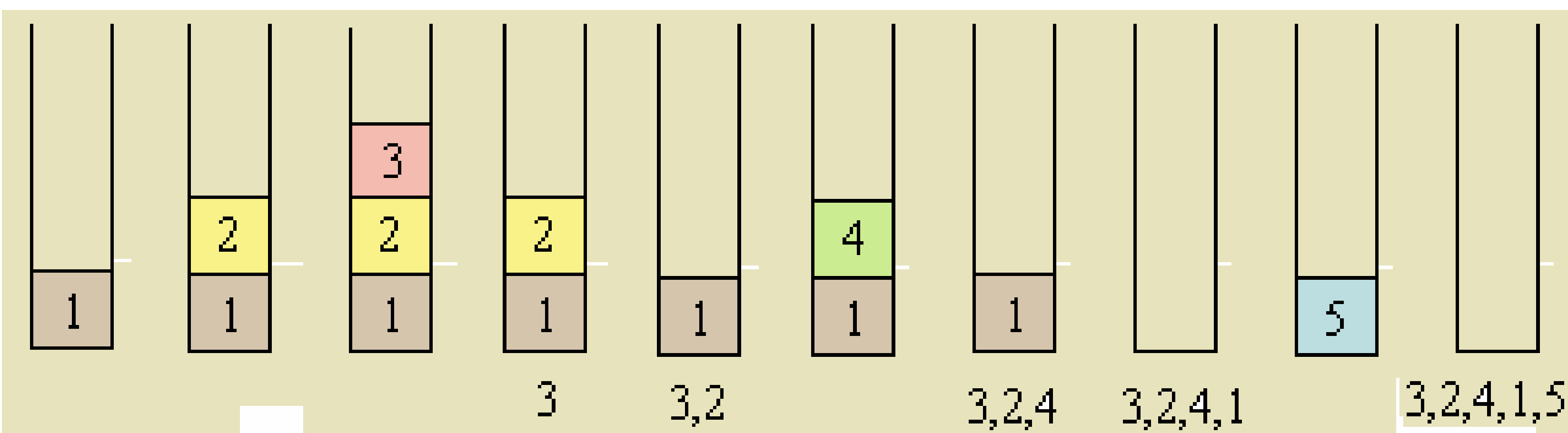
应用（栈输出的计数）

输入： 1, 2, 3, 4, 5

输出 ： 3, 2, 4, 1, 5

⇔ 进,进,进,出,出,进,出,出,进,出

⇔ ***x, x, x, y, y, x, y, y, x, y***



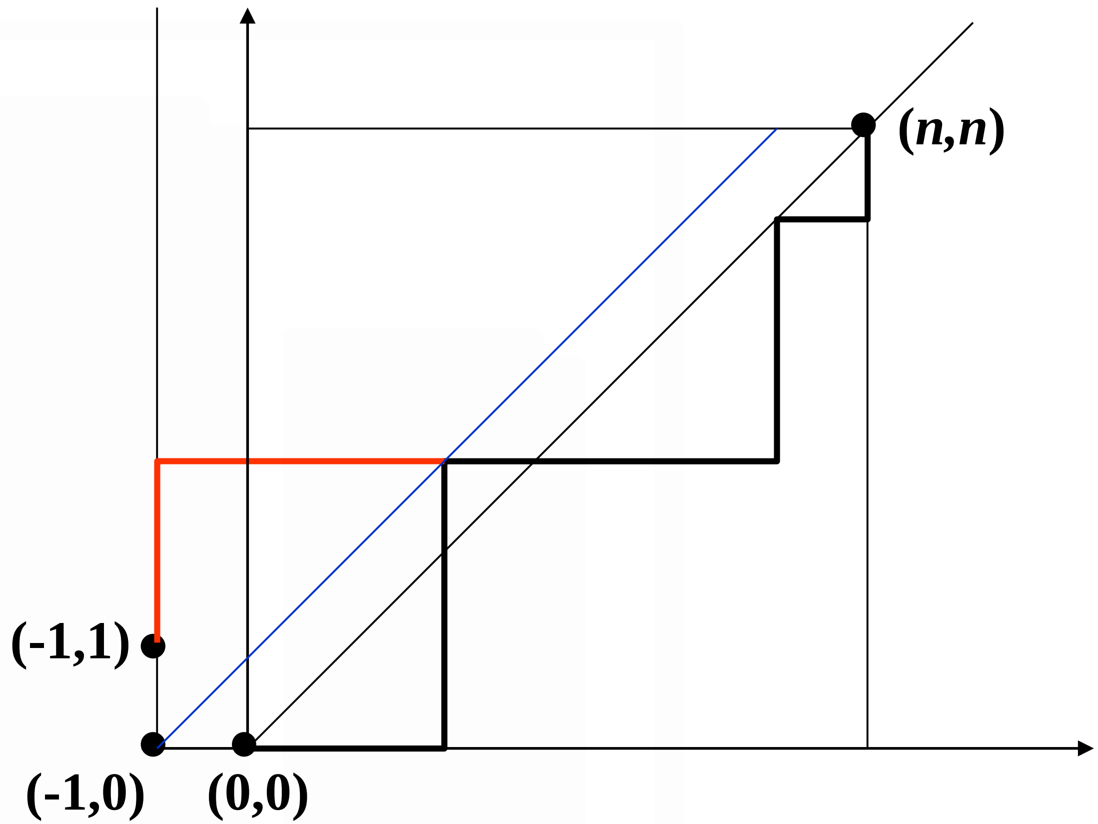
栈输出的计数（续）

从(0,0)到(n,n)的穿过对角线的非降路径

$\Leftrightarrow$从(-1,1)到(n,n)的非降路径

从(0,0)到(n,n)的非降路径总数为 C(2n,n)条，

从(-1,1)到(n,n)的非降路径数为 C(2n,n-1)条，



$$N=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

12.4 多项式定理

定理　设 n 为正整数，x_i 为实数，$i=1, 2, \ldots, t$.

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n$$

$$=\sum_{\substack{\text{满足}n_1+\ldots+n_t=n\\\text{的非负整数解}}}\binom{n}{n_1n_2\ldots n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$$

证：选 n_1 个因式贡献 x_1,

从 $n-n_1$ 个因式选 n_2 个因式贡献 x_2,

…

从 $n-n_1-n_2-\ldots-n_{t-1}$ 个因式中选 n_t 个因式贡献 x_t .

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\binom{n-n_1-\ldots-n_{t-1}}{n_t}$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}=\binom{n}{n_1n_2\ldots n_t}$$

推论

推论1 多项式展开式中不同的项数为方程

$$n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$$

的非负整数解的个数 $C(n+t-1,n)$

推论2

$$\sum \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t} = t^n$$

例13 求 $(2x_1-3x_2+5x_3)^6$ 中 $x_1^3x_2x_3^2$ 的系数.

解 由多项式定理得

$$\binom{6}{3\ 1\ 2} 2^3 \cdot (-3) \cdot 5^2 = \frac{6!}{3!\,1!\,2!} 8 \cdot (-3) \cdot 25 = -36000$$

多项式系数

组合意义

多项式系数 $\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t}$

多重集的全排列数

n 个不同的球放到 t 个不同的盒子使得第一个盒子含 n_1 个球，第二个盒子含 n_2 个球，…，第 t 个盒子含 n_t 个球的方案数

多项式系数（续）

恒等式

- $\sum \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = t^n$
- $\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_t!}$
- $\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = \binom{n-1}{n_1 - 1 \quad n_2 \ldots n_t} + \binom{n-1}{n_1 \; n_2 - 1 \ldots n_t} + \ldots + \binom{n-1}{n_1 n_2 \ldots n_t - 1}$

基本计数的应用

$$C(n,r)=\begin{cases}\dfrac{P(n,r)}{r!} & n\ge r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

$$11.\quad \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}$$

证明整除

命题 1：k 个连续正整数乘积可以被 $k!$ 整除（练习）

命题 2　设 p 为素数，$p\neq 2$，证明当 $C(2p,p)$ 被 p 除时余数是 2.

证

$$\binom{2p}{p}=\binom{p}{0}^2+\binom{p}{1}^2+\ldots+\binom{p}{p}^2$$

由命题 1：$k! \mid p(p-1)\ldots(p-k+1)$

因此 $k! \mid (p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)$，$p$ 为素数，$0<k<p$,

$$p\mid\binom{p}{k},\ 0<k<p,\quad C(2p,p)\text{被 } p \text{ 除余数为}\binom{p}{0}^2+\binom{p}{p}^2=2$$

基本计数的应用（续）

例　证明 Fermat 小定理：p 为素数，则 $p|(n^p-n)$

证　（1）证明 $\binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n} \neq 1$, 则 $p \mid \binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n}$.

$\binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n}$=1 当且仅当存在 $k_j=p$，其他 $k_i=0$, $i\neq j$.

$\binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n} \neq 1 \;\Rightarrow\; k_1!k_2!\ldots k_n!$ 中不含 p，

从而 $k_1!k_2!\ldots k_n!$ 整除 $(p\text{-}1)!$.

证明Fermat小定理（续）

（2）证明 Fermat 小定理

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^p$$

$$= \sum_{\sum k_i = p} \binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

令 x_i=1， $n^p = \sum_{\sum k_i = p} \binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n}$，

$\binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n} \neq 1$， 则 $p \mid \binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n}$

右边恰有 n 项的值等于 1，其余各项之和为 $n^p - n$

p 整除其余的每一项，因此 $p \mid (n^p - n)$

基本计数的应用（续）

Ipv4 协议网址计数

32 位地址　　网络标识+主机标识

A 类：最大网络；B 类：中等网络；C：最小网络；

D：多路广播；　　E：备用

限制条件：1111111 在 A 类中的 netid 部分无效

hostid 部分不允许全 0 或全 1

A	0	netid（7位）	hostid （24位）				
B	1	0	netid （14位）	hostid（16位）			
C	1	1	0	netid （21位）	hostid（8位）		
D	1	1	1	0	（28位）		
E	1	1	1	1	0	（27位）	

基本计数的应用（续）

netid hostid

A 类： 0+7 位， 24 位

B 类： 10+14 位， 16 位

C 类： 110+21 位， 8 位

限制条件：1111111 在 A 类中的 netid 部分无效

hostid 部分不允许全 0 或全 1

A 类：netid 2^7-1, hostid $2^{24}-2$，

地址数：$127 \cdot 16777214=2130706178$

B 类：netid 2^{14}, hostid $2^{16}-2$，

地址数：$16384 \cdot 65534=1073709056$

C 类：netid 2^{21}, hostid 2^8-2,

地址数：$2097152 \cdot 254=532676608$

$|A|+|B|+|C|=3737091842$. Ipv6 改为 128 位

本章小结

基本计数

计数法则：加法法则、乘法法则

计数模型：

选取问题：有序不重复、有序可重复（部分公式）

无序不重复、无序可重复（部分公式）

非降路径问题：基本公式

有限制条件的情况

方程的非负整数解问题子类型

放球问题子类型（球没区别）

处理方法：分类处理、分步处理、一一对应思想

本章小结（续）

组合恒等式 基本公式、证明方法、应用

求和 基本和式、求和方法、应用

计数符号

组合数或二项式系数 $C(m,n)$

排列数 $P(m,n)$

多项式系数 $\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}$

定义、基本公式、恒等式、对应的组合计数问题

回顾：组合恒等式

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

4. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

5. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$

6. $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

7. $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$

8. $\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad n,k \in N$

9. $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$

10. $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

11. $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k} = \binom{m+n}{m}$