13.2 生成函数及其性质

- 生成函数的定义
- 牛顿二项式定理
- 生成函数的性质
- 生成函数与序列的对应关系

生成函数的定义

设序列$\{a_n\}$，构造形式幂级数

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

称 $G(x)$为$\{a_n\}$的生成函数.

实例：

$\{C(m,n)\}$的生成函数为

$$G(x)= 1 + C(m,1)x + C(m,2)x^2 + \ldots = (1+x)^m$$

给定正整数 k, $\{k^n\}$的生成函数为

$$G(x) = 1+ kx + k^2x^2 + k^3x^3 + \ldots = \frac{1}{1-kx}$$

牛顿（广义）二项式定理

牛顿二项式系数：

$$\binom{r}{n}=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n=0\\ \dfrac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!} & n>0\end{cases}$$

其中 r 为实数，n 为整数

牛顿二项式定理

设α为实数，则对一切 x,y，$|x/y|<1$ 有

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n}y^{\alpha-n}，\quad 其中\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

牛顿二项式定理(续)

$$(x+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n y^{\alpha-n},$$

其中 $$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

当 $\alpha = m$ 时，变成二项式定理

$$(x+y)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n y^{m-n},$$

$$(1+z)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n,$$

生成函数的性质—线性与乘积

线性性质：

1. $b_n=\alpha a_n$, 则 $B(x)=\alpha A(x)$
2. $c_n=a_n+b_n$, 则 $C(x)=A(x)+B(x)$

乘积性质：

3. $c_n=\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, 则$C(x)=A(x)\cdot B(x)$

生成函数的性质—移位

4． $b_n=\begin{cases}0 & n<l\\ a_{n-l} & n\ge l\end{cases}$， 则 $B(x)=x^l A(x)$

$$a_0,\ a_1,\dots,\ a_n,\dots$$

$$\underbrace{0,0,\dots,0,}_{l\text{个}0}\ b_l,\ b_{l+1},\dots,b_{l+n},\dots$$

5． $b_n=a_{n+l}$， 则 $B(x)=\dfrac{A(x)-\sum_{n=0}^{l-1}a_nx^n}{x^l}$

$$a_0,a_1,\dots,a_l,a_{l+1},\dots$$

$$b_0,b_1,\dots$$

生成函数的性质—求和

6．$b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$， 则 $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$

$$b_0 = a_0$$
$$b_1 x = a_0 x + a_1 x$$
$$\ldots$$
$$b_n x^n = a_0 x^n + a_1 x^n + \ldots + a_n x^n$$
$$\ldots$$
$$B(x) = a_0 \frac{1}{1-x} + a_1 x \frac{1}{1-x} + \ldots + a_n x^n \frac{1}{1-x} + \ldots$$

生成函数的性质——求和

7. $b_n=\sum_{i=n}^{\infty}a_i$， 且 $A(1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_i$收敛， 则 $B(x)=\dfrac{A(1)-xA(x)}{1-x}$

证：因为$A(1)$=$\sum_{n=0}^{\infty}a_i$收敛，故$b_n=\sum_{i=n}^{\infty}a_i$存在。

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0+a_1+a_2+\cdots &&= A(1),\\
b_1x &= a_1x+a_2x+\cdots &&= [A(1)-a_0]x,\\
b_2x^2 &= a_2x^2+\cdots &&= [A(1)-a_0-a_1]x^2,\\
&\cdots\cdots\\
b_nx^n &= a_nx^n+\cdots &&= [A(1)-a_0-\cdots-a_{n-1}]x^n,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

将以上各式两边分别相加得

$$\begin{aligned}
B(x) &= A(1)+[A(1)-a_0]x+[A(1)-a_0-a_1]x^2+\ldots+[A(1)-a_0-\cdots-a_{n-1}]x^n+\ldots\\
&= A(1)(1+x+x^2+\cdots)-a_0x(1+x+x^2+\cdots)-a_1x^2(1+x+x^2+\cdots)-\cdots\\
&= [A(1)-x(a_0+a_1x+\cdots)](1+x+x^2+\cdots)\\
&= \frac{A(1)-xA(x)}{1-x}
\end{aligned}$$

生成函数性质—换元与微积分

换元性质：

8．$b_n=\alpha^n a_n$，则 $B(x)=A(\alpha x)$

求导与积分性质：

9．$b_n=na_n$，则 $B(x)=xA'(x)$

10．$b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$，则 $B(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$

生成函数与序列的对应

1. 给定序列$\{a_n\}$或关于 a_n 的递推方程，求生成函数 $G(x)$

利用级数的性质和下述重要级数

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}x^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-3)}{2^k k!}x^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^k k!\cdot 2^{k-1}(k-1)!}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k}\binom{2k-2}{k-1}x^k$$

实例

8. $b_n=\alpha^n a_n$，则 $B(x)=A(\alpha x)$
1. $b_n=\alpha a_n$，则 $B(x)=\alpha A(x)$

例 1 求序列$\{a_n\}$的生成函数

（1）$a_n = 7\cdot 3^n$　　　　（2）$a_n = n(n+1)$

解：（1）设 $b_n=1$，则$\{b_n\}$的生成函数为 $\dfrac{1}{1-x}$，令

$c_n=3^n=3^n b_n$

由性质 8 知$\{c_n\}$的生成函数为 $\dfrac{1}{1-3x}$，进而由性质 1 知

$\{a_n\}$的生成函数为 $\dfrac{7}{1-3x}$.

也可如下直接求：$G(x)=7\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n=7\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n=\dfrac{7}{1-3x}$

实例

例 1　求序列$\{a_n\}$的生成函数

（1）$a_n = 7\cdot 3^n$　　　　（2）$a_n = n(n+1)$

解：（2）

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n$$

$$\int_0^x G(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}=x^2H(x),\quad H(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\int_0^x H(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x},\quad H(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\int_0^x G(x)dx=\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$G(x)=\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2x}{(1-x)^3}$$

生成函数与序列的对应(续)

2. 给定序列$\{a_n\}$的生成函数$G(x)$,求a_n

待定系数法

例 2

$$G(x)=\frac{2}{1-3x+2x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=0 \end{cases} \Rightarrow A=-2,\quad B=4$$

$$G(x)=\frac{-2}{1-x}+\frac{4}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}4(2x)^n$$

$$a_n=-2+4\cdot 2^n$$

生成函数的应用

- 求解递推方程
- 计数多重集的 r 组合数
- 不定方程的解
- 整数拆分

求解递推方程

例 1　$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$，$a_0=1, a_1=-2$

$$
\begin{aligned}
G(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \\
-5x\,G(x) &= -5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - \ldots \\
6x^2\,G(x) &= +6a_0x^2 + 6a_1x^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

$$(1-5x+6x^2)G(x) = a_0 + (a_1-5a_0)x$$

$$G(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}$$

$$= 5\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$a_n = 5\cdot 2^n - 4\cdot 3^n$$

求解递推方程(续)

例2
$$\begin{cases} h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, & n \geq 2 \\ h_1 = 1 \end{cases}$$

解：设$\{h_n\}$的生成函数为 $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$

$$H^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x^k \bullet \sum_{l=1}^{\infty} h_l x^l$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} = \sum_{n=2}^{\infty} h_n x^n$$

$$= H(x) - h_1 x = H(x) - x$$

求解递推方程(续)

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k}\binom{2k-2}{k-1}x^k$$

$$H^2(x)-H(x)+x=0,$$

$$H(x)=\frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}(-4x)^n\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^{2n}}\binom{2n-2}{n-1}(-1)^n2^{2n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

$$h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

多重集的 r 组合数

$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$的 r 组合数就是不定方程

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$$

$$x_i \le n_i$$

的非负整数解的个数

$N = C(k+r-1,r)$, 当$r \le n_i$

证明：一个r 组合为

$\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \ldots, x_k\cdot a_k\}$,

其中 $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$, x_i为非负整数

这个不定方程的非负整数解对应于下述排列

$$\underbrace{1\ldots1}_{x_1\text{个}}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_2\text{个}}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_3\text{个}}\ 0\ \ldots\ldots\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_k\text{个}}$$

r个1，$k-1$个0的全排列数为

$$N=\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!}=C(k+r-1,r)$$

生成函数

$$G(y)=(1+y+\ldots+y^{n_1})(1+y+\ldots+y^{n_2})\ldots(1+y+\ldots+y^{n_k})$$

的 y^r 的系数

多重集的 r 组合数(续)

例 3　$S = \{ 3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c \}$的 10 组合数

解：生成函数 $G(y)$

$$= (1+y+y^2+y^3)(1+y+y^2+y^3+y^4)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

$$= (1+2y+3y^2+4y^3+4y^4+3y^5+2y^6+y^7)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

$$= (1 + \ldots +3y^{10}+2y^{10}+y^{10} + \ldots)$$

$N = 6$

$\{a,a,a,b,b,b,b,c,c,c\}$, $\{a,a,a,b,b,b,c,c,c,c\}$,

$\{a,a,a,b,b,c,c,c,c,c\}$, $\{a,a,b,b,b,b,c,c,c,c\}$,

$\{a,a,b,b,b,c,c,c,c,c\}$, $\{a,b,b,b,b,c,c,c,c,c\}$

不定方程非负整数解的个数

基本模型

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$

x_i 为自然数

$$G(y) = (1 + y + \ldots)^k = \frac{1}{(1-y)^k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-r+1)}{r!}(-y)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r k(k+1)\ldots(k+r-1)}{r!}(-1)^r y^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} y^r$$

$$N = \binom{k+r-1}{r}$$

不定方程非负整数解的个数(续)

带限制条件

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$，$l_i \le x_i \le n_i$

生成函数

$$G(y) = (y^{l_1} + y^{l_1+1} + \ldots + y^{n_1})(y^{l_2} + y^{l_2+1} + \ldots + y^{n_2})$$
$$\ldots(y^{l_k} + y^{l_k+1} + \ldots + y^{n_k})$$

带系数

$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k = r$，$x_i \in N$

生成函数

$$G(y) = (1 + y^{p_1} + y^{2p_1} + \ldots)(1 + y^{p_2} + y^{2p_2} + \ldots)$$
$$\ldots(1 + y^{p_k} + y^{2p_k} + \ldots)$$

不定方程非负整数解的个数(续)

例 4 1 克砝码 2 个，2 克砝码 1 个，4 克砝码 2 个，问能称出哪些重量，方案有多少？

解： $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = r$

$0 \le x_1 \le 2, \quad 0 \le x_2 \le 1, \quad 0 \le x_3 \le 2$

$G(y) = (1+y+y^2)(1+y^2)(1+y^4+y^8)$

$= 1+y+2y^2+y^3+2y^4+y^5+2y^6+y^7+2y^8+y^9+2y^{10}+y^{11}+y^{12}$

重量	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
方案	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1

不定方程非负整数解的个数(续)

如果重物放右边，允许砝码放在天平两边（同种砝码放一侧），则

$$G(y)=(y^{-2}+y^{-1}+1+y+y^{2})(y^{-2}+1+y^{2})(y^{-8}+y^{-4}+1+y^{4}+y^{8})$$

$$=\ldots+5+3y+4y^{2}+3y^{3}+5y^{4}+3y^{5}+4y^{6}+3y^{7}+4y^{8}+2y^{9}+2y^{10}+y^{11}+y^{12}$$

称 0 克： | 1,1 | 2 1,1,2 | 4

4 | 1,1,2 2 | 1,1

称 1 克： 1 | 1 2 | 1,1 4 | 1,2,1

称 2 克： 1,1 | 2 2 | 2 4 | 1,1,2 4 | 2,2

正整数的拆分

- 拆分的定义与分类
- 无序拆分
- 有序拆分

拆分的定义与分类

	有序	无序
不重复	4 = 4 4 = 1+3 4 = 3+1	4 = 4 4 = 1+3
重复	4 = 4 4 = 1+3 4 = 3+1 4 = 2+2 4 = 2+1+1 4 = 1+2+1 4 = 1+1+2 4 = 1+1+1+1	4 = 4 4 = 1+3 4 = 2+2 4 = 2+1+1 4 = 1+1+1+1

无序拆分

基本模型：

将 N 无序拆分成正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = N$

不允许重复 $G(y) = (1 + y^{a_1})(1 + y^{a_2})\ldots(1 + y^{a_n})$

允许重复

$$G(y) = (1 + y^{a_1} + y^{2a_1} + \ldots)(1 + y^{a_2} + y^{2a_2} + \ldots)$$

$$\ldots(1 + y^{a_n} + y^{2a_n} + \ldots)$$

$$= \frac{1}{(1 - y^{a_1})(1 - y^{a_2})\ldots(1 - y^{a_n})}$$

实例

例 5 证明任何正整数都可以唯一表示成 2 进制数.

证：对应于将任何正整数 N 拆分成 2 的幂,

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots,$$

且不允许重复.

$$G(y) = (1+y)(1+y^2)(1+y^4)(1+y^8)\ldots$$

$$= \frac{1-y^2}{1-y}\frac{1-y^4}{1-y^2}\frac{1-y^8}{1-y^4}\ldots$$

$$= \frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

对于所有的 n, $a_n = 1$，这就证明了存在且仅有一种表法.

有限制条件的无序拆分

将N无序拆分成正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = N$$

限制条件：$l_i \le x_i \le t_i$,

转变为方程非负整数解的问题:

$$G(y) = \cdots\left(y^{l_i a_i} + y^{(l_i+1)a_i} + \cdots + y^{t_i a_i}\right)\ldots$$

有限制条件的无序拆分

例 6　给定 r,求 N 允许重复无序拆分成 k 个数（$k\le r$）的方法数

解 N 允许重复无序拆分成 k 个数（$k\le r$）的方案

$\Leftrightarrow$ N 允许重复无序拆分成不超过 k（$k\le r$）的正整数的方案

做下述 Ferrers 图

将图以 $y=x$ 对角线翻转 180 度，

得到共轭的 Ferrers 图，

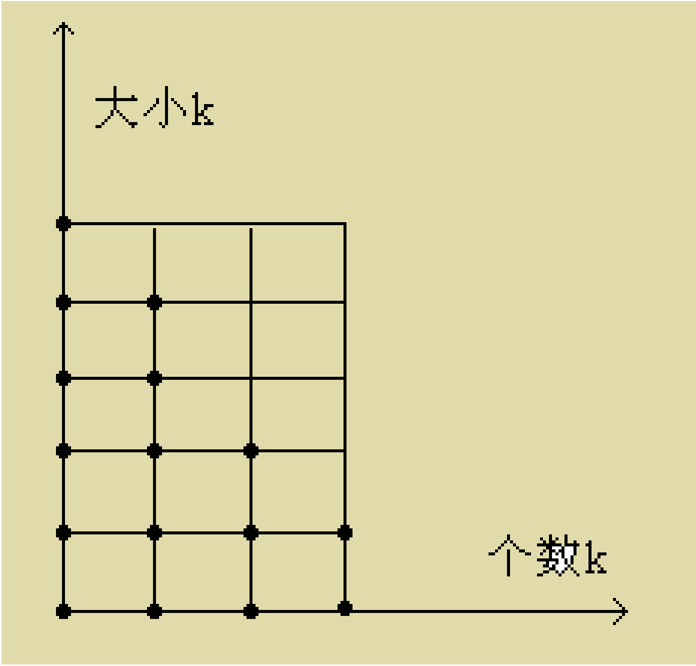
$16 = 6+5+3+2$　（$k \le 4$）

对应每个数不超过 4 的拆分.

$16 = 4+4+3+2+2+1$

这种拆分数的生成函数为

$$G(y)=\frac{1}{(1-y)(1-y^2)\ldots(1-y^r)}$$



有序拆分

(1) 将 N 允许重复地有序拆分成 r 个部分的方案数为 $C(N\text{-}1,r\text{-}1)$

方法一：一一对应.

设 $N= a_1+a_2+\ldots+a_r$ 是满足条件的拆分，则令

$$S_i = \sum_{k=1}^{i} a_i, \quad i = 1,2,\ldots r$$

$$0 < S_1 < S_2 < \ldots < S_r = N$$

r-1 个 S_i 取值为 1,2,…,N-1，方法数为 $C(N\text{-}1,r\text{-}1)$.

推论：对 N 做任意重复的有序拆分，方案数为

$$\sum_{r=1}^{N} \binom{N-1}{r-1} = 2^{N-1}$$

有序拆分(续)

$$\frac{1}{(1-y)^k}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-r+1)}{r!}(-y)^r$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r k(k+1)\ldots(k+r-1)}{r!}(-1)^r y^r=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}y^r$$

方法二：生成函数.

$G(y) = (y+y^2+y^3+\ldots)^r$ 中 y^N 项的系数.

$$G(y)=(y+y^2+\ldots)^r=\frac{y^r}{(1-y)^r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-r+r-1}{n-r}y^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-1}{n-r}y^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}y^n$$

所求的方法数为 $\binom{N-1}{r-1}$

(2) 不允许重复有序拆分：不允许重复无序拆分 + 全排列

(见前面的PPT)

13.3 指数生成函数

定义 设$\{a_n\}$为序列，称

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

为$\{a_n\}$的指数生成函数.

例 1 给定正整数 m, $a_n = P(m,n)$, $\{a_n\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P(m,n)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!}{n!(m-n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m$$

例 2 b_n=1, 则$\{ b_n\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

指数生成函数的性质

设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的指数生成函数分别为 $A_e(x)$和 $B_e(x)$，则

$$A_e(x)\cdot B_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}$$,其中 $$c_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}$$

证：

$$A_e(x)\cdot B_e(x)=(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!})\cdot(\sum_{l=0}^{\infty}b_l\frac{x^l}{l!})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\cdot\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\cdot\frac{n!\,b_{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}$$

应用-多重集排列计数

设 $S=\{ n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots , n_k\cdot a_k \}$为多重集，

则 S 的 r 排列数$\{ a_r \}$的指数生成函数为

$$G_e(x) = f_{n_1}(x) f_{n_2}(x) \ldots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_i}}{n_i!} \quad i = 1, 2, \ldots , k$$

Known:

(1) 全排列 $r = n,\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

$$N = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

(2) 若$r \le n_i$时，每个位置都有k 种选法，得 k^r.

证明

考察 $f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\ldots f_{n_k}(x)$ 展开式中 x^r 的项，

$$\frac{x^{m_1}}{m_1!}\frac{x^{m_2}}{m_2!}\cdots\frac{x^{m_k}}{m_k!},$$

其中 $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = r$

$0 \le m_i \le n_i,\quad i = 1, 2, \ldots, k$ （*）

即 $\dfrac{x^{m_1+m_2+\ldots+m_k}}{m_1!m_{2!}\ldots m_k!} = \dfrac{x^r}{r!}\dfrac{r!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$， $a_r = \sum\dfrac{r!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$

其中求和是对满足方程（*）的一切非负整数解来求.

一个非负整数解对应了$\{m_1\cdot a_1, m_2\cdot a_2, \ldots, m_k\cdot a_k\}$，即 S 的 r 组合

而该组合的全排列数是 $\dfrac{r!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$，因此 a_r 代表了 S 的 r 排列数.

实例

设 $S=\{ n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k \}$为多重集，
则 S 的 r 排列数$\{ a_r \}$的指数生成函数为

$$G_e(x) = f_{n_1}(x) f_{n_2}(x) \ldots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_i}}{n_i!} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

例 $S=\{1\cdot a_1, 1\cdot a_2, \ldots, 1\cdot a_n\}$，**求**$r$**-排列数。**

解：设排列数为$\{a_r\}$，有$f_{ni}(x)=1+x$，则

$$G_e(x) = (1+x)^k = \sum_{r=0}^{k} C(n,r)x^r$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \frac{n!}{r!(n-r)!} x^r$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \frac{n!}{(n-r)!} \frac{x^r}{r!}$$

所以$a_r=n!/(n-r)!=P(n, r)$

实例(续)

设 $S=\{\,n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\,\}$为多重集，

则 S 的 r 排列数$\{\,a_r\,\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\ldots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_i}}{n_i!} \quad i=1,2,\ldots,k$$

例 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_k\}$，求$S$的$r$-排列数

解：设排列数为$\{a_r\}$,

$f_{ni}(x)=(1+x+x^2/2!+\ldots+x^r/r!+\ldots)$，则

$$G_e(x)=(1+x+x^2/2!+\ldots+x^r/r!+\ldots)^k$$

$$=(e^x)^k$$

$$=e^{kx}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(kx)^r}{r!}=\sum_{r=0}^{\infty}k^r\frac{x^r}{r!}$$

所以$a_r=k^r$.

实例

设 $S=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$为多重集，则 S 的 r 排列数$\{a_r\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\ldots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_i}}{n_i!} \quad i=1,2,\ldots,k$$

带限制条件

$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$，$l_i \le x_i \le n_i$

生成函数

$$G(y)=(y^{l_1}+y^{l_1+1}+\ldots+y^{n_1})(y^{l_2}+y^{l_2+1}+\ldots+y^{n_2})\ldots(y^{l_k}+y^{l_k+1}+\ldots+y^{n_k})$$

带系数

$p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_kx_k=r$，$x_i \in N$

生成函数

$$G(y)=(1+y^{p_1}+y^{2p_1}+\ldots)(1+y^{p_2}+y^{2p_2}+\ldots)\ldots(1+y^{p_k}+y^{2p_k}+\ldots)$$

例 3 由 1,2,3,4 组成的五位数中，要求 1 出现不超过 2 次，但不能不出现，2 出现不超过 1 次，3 出现可达 3 次，4 出现偶数次.求这样的五位数个数.

解:

$$G_e(x)=(x+\frac{x^2}{2!})(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!})$$

$$=x+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

$N=215$

实例(续)

例 4 红、白、兰涂色 $1\times n$ 的方格，要求偶数个为白色，问有多少方案？

解 设方案数为a_n

$$G_e(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^2$$

$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,e^{2x}=\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n+1}{2}\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n=\frac{3^n+1}{2}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}$$

实例(续)

例4 (另解) 红、白、兰涂色 1×*n*的方格，要求偶数个为白色，问有多少方案?

解: 设有方案数h_n，则$h_1 = 2$。

如果最后一个方格涂成红色或兰色，则有h_{n-1}种方案。

如果最后一个方格涂成白色，则有$3^{n-1} - h_{n-1}$种方案。

$$h_n = 2h_{n-1} + (3^{n-1} - h_{n-1}) = h_{n-1} + 3^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$h_n = \frac{3^n + 1}{2}$$

一些指数型生成函数

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!}$$

$$xe^x = \sum_{n\geq 1} n \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{cx} = \sum_{n\geq 0} c^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{2} x^2 e^x = \sum_{n\geq 2} C_2^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{m!} x^m e^x = \sum_{n\geq m} C_m^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} n! \frac{x^n}{n!}$$

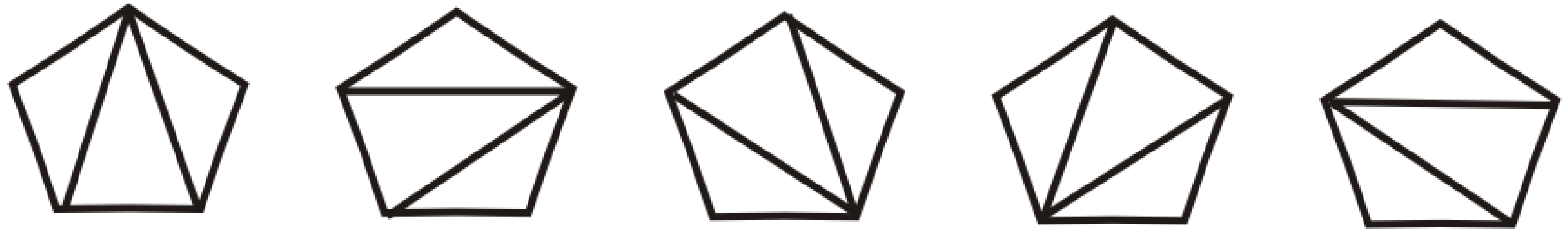
13.4 Catalan数与Stirling数

- 高级计数
  - Catalan数
  - 第一类Stirling数
  - 第二类Stirling数
- 讨论要点
  - 定义
  - 递推方程
  - 恒等式
  - 对应的组合问题
  - 生成函数

Catalan数定义

定义 一个凸 $n+1$ 边形，通过不相交于它内部的对角线将其划分成三角形的方法数，记作h_n，称为**第 n-1个Catalan数**.

前几个：$h_2=1$, $h_3=2$, $h_4=5$, $h_5=14$, $h_6=42$, $h_7=132$, $h_8=429$, $h_9=1430$, $h_{10}=4862$.



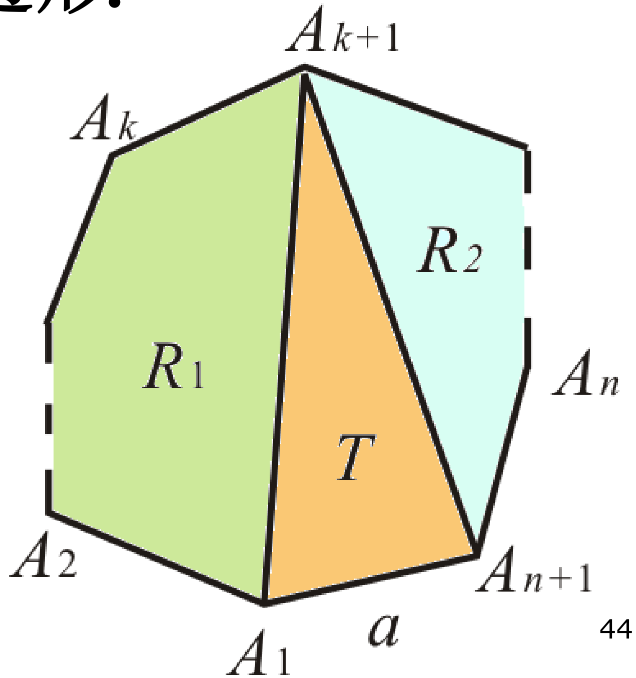
递推方程

考虑 n+1 条边的多边形，端点 A_1, A_{n+1} 的边记为 a，以 A_{k+1}（k=1, 2,…, n-1）A_1 为边，$A_{n+1}A_{k+1}$ 为另一边，构成三角形 T, T 将多边形划分成 R_1 和 R_2 两个部分，分别为 k+1 边形和 n-k+1 边形.

$$h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, \quad n \geq 2$$

$$h_1 = 1$$

$$h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

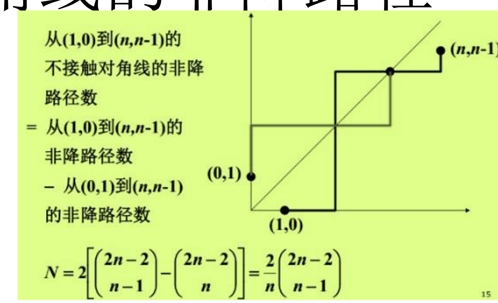


生成函数及对应的组合问题

生成函数： $\boldsymbol{H(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}}$

对应的组合问题：

1) 从(0,0)到(n,n)的除了端点以外不接触对角线的非降路径



数 $\dfrac{2}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}$

2) $a_1\times a_2\times\ldots\times a_n$，不改变因子顺序，加括号的方法数 h_n

3) 2n 个点均匀分布在圆周上，用 n 条不相交的弦配对的方法数是第 n+1 个 Catalan 数 $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

应用—栈的输出计数

1, 2, … , *n* 放入堆栈后的不同的输出个数

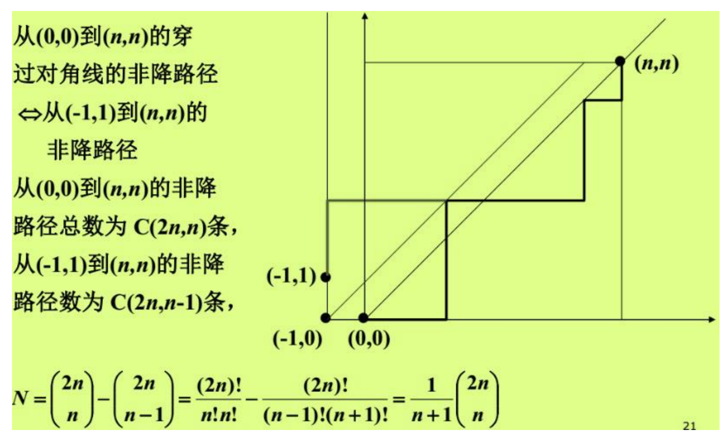
分析：

1. 1 进栈；
2. k 个数（k=0,1, … , n-1）进栈并且出栈；
3. 1 出栈；
4. 处理 k+2, … , n 的进栈问题；

步 2：子问题规模 k

步 4：子问题规模 n-k-1

$$\begin{cases} T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} T(k)T(n-1-k) \\ T(1) = 1 \end{cases}$$



栈的输出个数（续）

$$\begin{cases} T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} T(k)T(n-1-k) \\ T(0)=1, \quad T(1)=1 \end{cases} \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n,$$

$$G^2(x) = (\sum_{k=0}^{\infty} T(k)x^k)(\sum_{l=0}^{\infty} T(l)x^l) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(\sum_{k=0}^{n-1} T(k)T(n-1-k))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} T(n)x^{n-1} = \frac{G(x)-1}{x}$$

$$xG^2(x) - G(x) + 1 = 0 \Rightarrow 2xG(x) = 1 \pm \sqrt{1-4x},$$

由于$x \to 0, G(0) \to 0, \quad 2xG(x) = 1 - \sqrt{1-4x}$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n$$

应用(进栈出栈，括号对，围绕圆桌握手，买票)

例 n对括号有多少种匹配方式?

解： n对括号相当于有$2n$个符号，n个左括号、n个右括号，设问题的解为$f(n)$。第0个符号肯定为左括号，与之匹配的右括号必须为第$2i+1$个符号。如果是第$2i$个字符，那么第0个字符与第$2i$个字符间包含奇数个字符，而奇数个字符无法构成匹配。简单分析知，$f(n)$可以转化为如下的递推式

$f(n) = f(0)f(n-1) + f(1)f(n - 2) + ... + f(n - 2)f(1) + f(n-1)f(0)$，其中，$f(0)f(n-1)$表示第0个字符与第1个字符匹配，剩余字符分成两部分，一部分为0个字符，另一部分为$2(n-1)$个字符，然后对这两部分求解；$f(1)f(n - 2)$表示第0个字符与第3个字符匹配，剩余字符分成两部分，一部分为2个字符，另一部分为$2(n-2)$个字符；依次类推。

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 5$，结合递归式，易知$f(n) = h_{n+1}$.

应用

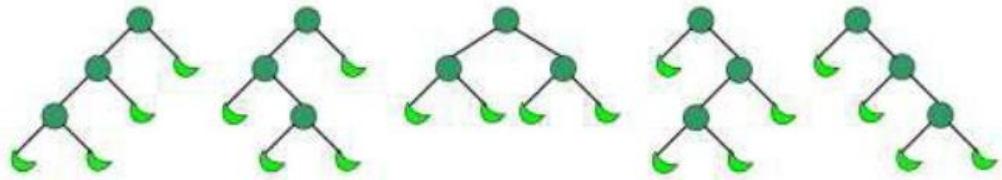
例 16个人按顺序去买烧饼，其中8个人每人身上只有一张5块钱，另外8个人每人身上只有一张10块钱。烧饼5块一个，开始时烧饼店老板身上没有钱。16个顾客互相不通气，每人只买一个。问这16个人共有多少种排列方法能避免找不开钱的情况出现。

解：h_{8+1}=1430，所以总数=1430*8！*8！

例 在图书馆一共6个人在排队，3个还《面试宝典》一书，3个在借《面试宝典》一书，图书馆此时没有了面试宝典了，求他们排队的总数？

解：h_{3+1}=5，所以总数为5*3！*3！=180.

应用



例 n个节点构成的二叉树，共有多少种情形？

解：n=1时，只有1个根节点，则只能组成1种二叉树，令n个节点可组成的二叉树数量为$h(n)$，则$h(1)=1$.

n=2时，1个根节点固定，还有2-1个节点。这一个节点可分成(1,0), (0,1)两组，即$h(2)=h(0)h(1)+h(1)h(0)=2$

n=3时，1个根节点固定，还有2个节点。这2个节点可分成(2,0), (1,1), (0,2) 3组，即$h(3)=h(0)h(2)+h(1)h(1)+h(2)h(0)=5$。

以此类推，当$n\geq 2$时，可组成的二叉树数量为$h(n)=h(0)*h(n-1)+h(1)*h(n-2)+...+h(n-1)*h(0)$种，即符合Catalan数的定义，可直接利用通项公式得出结果。

第一类Stirling数

定义 多项式 $x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$的展开式为

$$S_n x^n - S_{n-1}x^{n-1} + S_{n-2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}S_1 x$$

将 x^r 的系数的绝对值 S_r 记作 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$，
称为第一类 Stirling 数

n个元素的集合分成r个环排列的方法数

实例

$n=2$， $x(x-1)=x^2-x$

$n=3$， $x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}=0,\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=1,\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}=1$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}=0,\ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=2,\ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}=3,\ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}=1$$

递推方程

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \quad n > r \geq 1; \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

证：

$$x(x-1)\ldots(x-n+2) = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} - \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} x^{n-2} + \ldots$$

$$x(x-1)\ldots(x-n+2)(x-n+1)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} - \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} x^{n-2} + \ldots \right) (x-n+1)$$

其中 x^r 系数的绝对值 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}$.

递推方程

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \quad n > r \geq 1; \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

递推关系的说明：考虑第n个物品，n可以单独构成一个环排列，此时前n-1个物品构成r-1个环排列，方法数为$\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}$;

也可以前n-1种物品构成r个环排列，第n个物品放入任意一个中，这样有$(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}$种方法。

递推三角形

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}$$

	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$
$n=1$	1				
$n=2$	1	1			
$n=3$	2	3	1		
$n=4$	6	11	6	1	
$n=5$	24	50	35	10	1

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} = (\mathbf{5}-\mathbf{1})\begin{bmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

生成函数及恒等式

生成函数 $x(x+1)(x+2)\ldots(x+n\text{-}1)$

恒等式

$$(1)\quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1,$$

$$(2)\quad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$(3)\quad \sum_{r=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = n!$$

证：(1) x 的 n 次方系数为 1；

(2) x 的 n-1 次方系数为 1 + 2 + … + n-1 = $n(n\text{-}1)/2$

(3)式的证明

(3) $\sum_{r=1}^{n}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = n!$

n 元对称群 S_n，在表示式中具有 r 个不交轮换的置换个数是 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$

证明：设这样的置换为 $\left\langle \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\rangle$ 个，得到这种置换的方法有两种：

从 S_{n-1} 的含 r-1 个轮换的置换中加入(n)，方法有 $\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix} \right\rangle$ 种；

从 S_{n-1} 含有 r 个轮换的置换中加入 n，方法有$(n-1)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ r \end{matrix} \right\rangle$种.

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\rangle = (n-1)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ r \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = (n-1)!$$

证法(II)： 生成函数$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$中x取1，正好是系数之和。

第二类Stirling数

定义：n 个不同的球恰好放到 r 个相同的盒子里的方法数称为第二类 Stirling 数，记作 $\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}$

实例： $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$

a,b,c | d	a,c,d | b	
a,b,d | c	b,c,d | a	
a,b | c,d	a,c | b,d	a,d | b,c

递推方程

$$\left\{\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right\} = r\left\{\begin{matrix} n-1 \\ r \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right\} = 1$$

证明：取球 a_1，

a_1 单独放一个盒子，$\left\{\begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix}\right\}$

a_1 不单独放一个盒子，$r\left\{\begin{matrix} n-1 \\ r \end{matrix}\right\}$

先放 n-1 个球到 r 个盒子里，插入 a_1 有 r 种方法

r=1

n=1　1　r=2

n=2　1　1　r=3

n=3　1　3　1　r=4

n=4　1　7　6　1　r=5

n=5　1　15　25　10　1

$$\left\{\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix}\right\} = 3\left\{\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right\}$$

恒等式

(1) $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$

(2) $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$

(3) $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$

(4) $\sum \binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_m} = m! \left\{ {n \atop m} \right\}$，对满足$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$的正整数解求和

(5) $\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \left\{ {n \atop k} \right\} k! = m^n$

(6) $\left\{ {n+1 \atop r} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop r-1} \right\}$

恒等式证明

证明：

（1）$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$

a_1先放在一个盒子里，

剩下的 n-1 个球每个有 2 种选择，

但是全落入 a_1 的盒子的方法不符合要求，减去.

（2）$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$

n 个球放到 n-1 个盒子，必有一个盒子含 2 个球，

其余每个盒子 1 个球.选择两个球有 $C(n,2)$种方法.

恒等式证明（续）

（4） $\sum \binom{n}{n_1\ n_2 \ldots n_m} = m!\left\{ {n \atop m} \right\},$

对满足 $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ 的正整数解求和

对应 n 个不同的球恰好放到 m 个不同盒子的方法数（无空盒）

（5） $\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \left\{ {n \atop k} \right\} k! = m^n$

按照含球的盒子数分类，对应了允许存在空盒的方法

（6） $\left\{ {n+1 \atop r} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop r-1} \right\}$

至多 n 个不同的球放到 r-1 个相同的盒子不存在空盒的方法

按照球数分类

生成函数

(4) $\sum \binom{n}{n_1\ n_2 \ldots n_m} = m!\left\{ {n \atop m} \right\}$,

对满足 $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ 的正整数解求和

考虑第二类 **Stirling** 数的指数生成函数

$$(e^x - 1)^m = (x + \frac{x^2}{2!} + \ldots)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \qquad ①$$

其中 $a_n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$,

求和是对一切满足方程 $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$ 的正整数解进行。根据第二类 Stirling 数的性质有

$$a_n = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \sum \frac{n!}{n_1!\ n_2! \cdots n_m!} = \sum \binom{n}{n_1\ n_2 \cdots n_m} = m!\left\{ {n \atop m} \right\}, & n \geqslant m. \end{cases}$$

生成函数（续）

将这个结果代入①式得

$$(e^x - 1)^m = \sum_{n=m}^{\infty} m! \left\{ {n \atop m} \right\} \frac{x^n}{n!}.$$

相差m!倍

可以近似地将$(e^x - 1)^m$看成$\left\{ {n \atop m} \right\}$的指数生成函数

用二项式定理将$(e^x - 1)^m$展开得

生成函数（续）

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{e}^x - 1)^m \\
&= \binom{m}{m}\mathrm{e}^{mx} - \binom{m}{m-1}\mathrm{e}^{(m-1)x} \\
&\quad + \binom{m}{m-2}\mathrm{e}^{(m-2)x} - \cdots + (-1)^m\binom{m}{0}\cdot 1 \\
&= \binom{m}{m}\left(1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m^2}{2!}x^2 + \cdots\right) \\
&\quad - \binom{m}{m-1}\left(1 + \frac{(m-1)}{1!}x + \frac{(m-1)^2}{2!}x^2 + \cdots\right) \\
&\quad + \binom{m}{m-2}\left(1 + \frac{(m-2)}{1!}x + \frac{(m-2)^2}{2!}x^2 + \cdots\right) \\
&\quad - \cdots + (-1)^m\binom{m}{0}\cdot 1.
\end{aligned}
$$

生成函数（续）

比较上式两边$\frac{x^n}{n!}$的系数得

$$m!\left\{ {n \atop m} \right\} = \binom{m}{m} m^n - \binom{m}{m-1}(m-1)^n + \binom{m}{m-2}(m-2)^n - \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{1}\cdot 1^n,$$

从而得到关于$\left\{ {n \atop m} \right\}$的恒等式

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \frac{1}{m!}\left[\binom{m}{m} m^n - \binom{m}{m-1}(m-1)^n + \binom{m}{m-2}(m-2)^n - \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{1}\cdot 1^n\right].$$

生成函数（续）

通过这个恒等式也可以计算$\left\{ n \atop m \right\}$. 例如

$$\left\{ 5 \atop 2 \right\} = \frac{1}{2!}\left[\binom{2}{2}2^5 - \binom{2}{1}1^5\right] = \frac{1}{2}(32 - 2) = 15,$$

$$\left\{ 4 \atop 2 \right\} = \frac{1}{2!}\left[\binom{2}{2}2^4 - \binom{2}{1}1^4\right] = \frac{1}{2}(16 - 2) = 7.$$

两类Stirling数间的关系

$$(x)_n := x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

$$s(n,k) := (-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

定理 （1） $x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k$

（2） $(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$

定理 $x^n = \sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}(x)_k$

两类Stirling数间的关系（续）

$$s(n,k) := (-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

定理 $$\sum_{k=0} s(n,k)\begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} = \delta_{n,m} = \sum_{k=0}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} s(k,m)$$

定理 $$\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = B_n,$$ 这里B_n是第n个Bell数，即一个n元集合的分划数。

对应的组合问题—放球

n 个球放到 m 个盒子里的方法数.

球标号	盒标号	允空盒	放球方法数	对应的组合问题
否	否	否	$P_m(n)–P_{m-1}(n)$	将 n 恰好无序拆分成 m 部分
	否	是	$P_m(n)$	将 n 无序拆分成 t 个部分($t \le m$)
	是	否	$C(n–1,m–1)$	$x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ 的正整数解
	是	是	$C(n+m–1,n)$	$x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ 的非负整数解

对应的组合问题—放球

球标号	盒标号	允空盒	放球方法数	对应的组合问题
是	否	否	$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$	第二类Stirling数
	否	是	$\sum_{k=1}^{m} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$	第二类Sirling数性质
	是	否	$m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$	第二类Stirling数性质
	是	是	$m^n = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k!$	乘法法则

n个球放入m个盒子—解释

球（有无区别）	盒子（有无区别）	是否允许为空	原因解释
无	无	允许	整数拆分问题 $(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)\ldots(1+x^m+x^{2m}+x^{3m}+\ldots)$即 $G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$中$x^n$项的系数。
无	无	不允许	先每一个盒子放一个球然后剩余 n-m，相当于整数 n-m 用不超过 m 的数来拆分的拆分数，而这又等价为将 n-m 拆分成最大数不超过 m 的拆分数。 $G(x)=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$中$x^n$的系数，即$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$中$x^{n-m}$项的系数。

球（有无区别）	盒子（有无区别）	是否允许为空	原因解释
无	有	允许	①对每个盒子用 1 代表不放球，用 x 代表放一个球，用 x^2 代表放两个球，....。母函数可构造为：$1+x+x^2+\ldots$，所有盒子情况相同，结果为 $\frac{1}{(1-x)^m}$ 中 x^n 项的系数 C_{m+n-1}^n。 ②可以看做 n 个球选 m 个盒子，盒子可以重复选，也就是有重复的组合问题，C_{m+n-1}^n
无	有	不允许	①对每个盒子用用 1 代表不放球，用 x 代表放一个球，用 x2 代表放两个球，....。母函数可构造为：$x+x^2+\ldots$，所有盒子情况相同，结果为 $\frac{x^m}{(1-x)^m}$ 中 x^n 项的系数。即 $\frac{1}{(1-x)^m}$ 中 x^{n-m} 项的系数 $C_{m+(n-m)-1}^{n-m}=C_{n-1}^{m-1}$ ②先取 m 个球每盒一个，余下的 n-m 进行有重复的组合，C(m+(n-m)-1,n-m)=C(n-1,n-m)=C(n-1,m-1)

球（有无区别）	盒子（有无区别）	是否允许为空	原因解释
有区别	有区别	允许	n 个不同的球放进 m 个有区别的盒子，允许空盒的放法与 m 个不同的元素，取 n 个作有重复的排列的方法一一对应。（将 n 个球按顺序排好，然后下面对应 m 个盒子的编号，盒子编号允许重复，盒子编号相同意味着在同一个盒子中，相当于 m 个字符取 n 个做有重复的排列。）即是一个有重复的排列问题，应用指数型母函数： $$G_e(x)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots)^m=e^{mx}$$ 中 $\frac{x^n}{n!}$ 的系数 m^n。
有区别	有区别	不允许	n 个不同的球放进 m 个有区别的盒子，允许空盒的放法与 m 个不同的元素，取 n 个作有重复的排列的方法一一对应。即是一个有重复的排列问题，应用指数型母函数： $$G_e(x)=(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots)^m=(e^x-1)^m$$ 利用二项式定理张开可得： $$a_n=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

球（有无区别）	盒子（有无区别）	是否允许为空	原因解释
有区别	无区别	不允许	第二类司特林数的定义，$S(n,m)$ n 个有标志的球，放进有区别的 m 个盒子中，无一空盒，其方案数为$m!S(n,m)$，其中 1≤m≤n。这相当于将这种情况的 m 个盒子进行了一次全排列，由此有：$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$
有区别	无区别	允许	这可以分为：空 1 个盒子，空 2 个盒子，...，空 m-1 个盒子，对应有 $S(n,m-1),S(n,m-2),...,S(n,1)$。考虑到 m 和 n 大小关系则有：$S(n,1)+S(n,2)+...+S(n,m),n\geq m;$ $S(n,1)+S(n,2)+...+S(n,n),n\leq m.$

对应组合问题—函数与关系计数

（2）函数计数

$|A| = n, |B|=m$，计数结果：

A 到 B 的关系：2^{mn}

A 到 B 的函数：m^n

A 到 B 的单射函数：$P(m,n) = m(m-1) \ldots (m-n+1)$

A 到 B 的满射函数：$m!\left\{ {n \atop m} \right\}$

A 到 B 的双射函数：$m = n, P(n,n) = n!\left\{ {n \atop m} \right\} = n!$

（3）等价关系计数 $\sum_{m=1}^{n}\left\{ {n \atop m} \right\}$