集合论小结

集合代数的基本概念

- 集合的表示法：列元素与谓词表示
  集合与元素的关系：属于、不属于
  集合与集合的关系：包含、相等、不等、真包含
  空集与全集
  文氏图
- 要求:
  属于与不属于的判断.
  包含、相等、真包含的判断.
  掌握空集及全集的概念和运算特征.
  会使用文氏图

基本计算

1. 绝对补~、幂集 $P(A)$

2. 并∪、交∩、相对补–、对称差⊕

运算顺序：

1 类运算优先于2类运算

2 类运算之间先后顺序由括号确定

1 类运算之间由右向左进行

注意：

先化简集合，去掉重复元素

尽量运用已知结果：包含的等价条件等

集合恒等式

- 与并与交运算有关的算律：

  交换、结合、幂等、吸收、分配、同一、零律

- 与补有关的算律

  DM律、矛盾律、排中律、双重否定律

- 与对称差有关的算律

  交换、结合、同一、有逆、消去律

- 与对称差与交有关的算律

  分配律

其他重要等式或包含关系

$A \subseteq A \cup B$

$A \cap B \subseteq A$

$\varnothing \subseteq A - B \subseteq A$， $(A - B) \cup B = A \cup B$

$A - B = A \cap {\sim} B$

$A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

$\Leftrightarrow {\sim} B \subseteq {\sim} A \Leftrightarrow {\sim} A \cup B = E$

基本证明

包含 $X \subseteq Y$ 的证明

命题演算法、包含传递法、反证法

恒等式 $X=Y$ 的证明

命题演算法、恒等代换法、反证法

注意：

先分析证明的前提和结论

注意当且仅当“$\Leftrightarrow$”必须证明两个方向

注意“$\Leftrightarrow$”和“$\Rightarrow$”的区别

关系与函数

- 关系与函数的基本概念
- 关系与函数的基本计算
- 关系的基本证明

关系与函数的基本概念

- 有序对与笛卡儿积
- 集合、关系与函数
- 关系的表示
- 关系的性质
- 等价关系与划分
- 偏序关系与偏序集
- 函数的定义与实例
- 函数的性质

有序对与笛卡儿积

有序对及其性质：

有序性

相等的充要条件

笛卡儿积及其性质

不交换、不结合

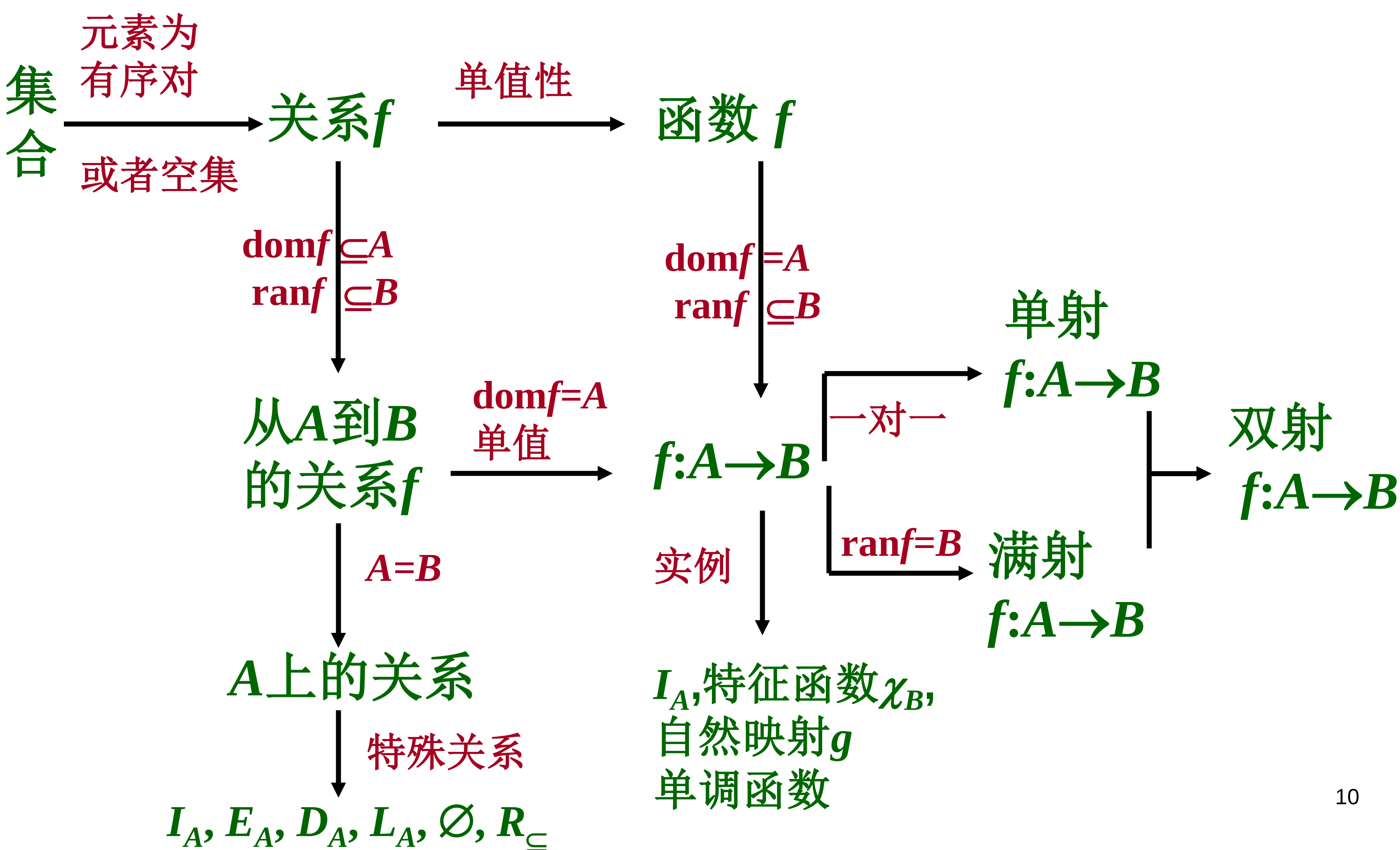
对于交和并的分配律

$<x,y>\in A\times B \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

$<x,y>\notin A\times B \Leftrightarrow x\notin A\vee y\notin B$

计数性质：$|A\times B|=|A|\cdot|B|$

集合、关系与函数



集合
元素为有序对
或者空集
关系f
单值性
函数 f
dom$f \subseteq A$
ran$f \subseteq B$
dom$f=A$
ran$f \subseteq B$
从A到B的关系f
dom$f=A$ 单值
$f:A\to B$
一对一
单射 $f:A\to B$
ran$f=B$
满射 $f:A\to B$
双射 $f:A\to B$
$A=B$
A上的关系
特殊关系
$I_A, E_A, D_A, L_A, \varnothing, R_\subseteq$
实例
I_A,特征函数χ_B,
自然映射g
单调函数

关系的表示

- 集合表达式

  可表示任意关系 R

- 关系矩阵

  表示有穷集A到B的关系或A上的关系

  布尔矩阵加法——逻辑加

- 关系图

  表示有穷集A上的关系

要求：熟悉关系的表示，并进行表示的转换

关系的性质

- 五种性质的定义

  自反性、反自反、对称、反对称、传递
- 五种性质的判别

  充分必要条件

  $I_A \subseteq R$, $R \cap I_A = \varnothing$, $R = R^{-1}$, $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$, $R \circ R \subseteq R$

  关系矩阵与关系图的特征（**P117**表**7.1**）
- 性质与运算的关系（**P118**表**7.2**）

等价关系与划分

- 等价关系的定义和判别
- 重要等价关系的实例
  I_A, E_A, 整数集上的模n相等关系
- 等价类与商集
- 划分的定义
- 集合上的等价关系与划分的一一对应

偏序关系与偏序集

- 偏序关系的定义及其判别
- 重要偏序关系的实例

  整除关系、包含关系
- 偏序集与哈斯图的对应
- 偏序集的特殊元素

  极大元、极小元、最大元、最小元

  上界、下界、最大下界、最小上界

函数的定义与实例

- 函数的定义
- 从A到B的函数 f: $A\to B$, 所有函数构成B^A
- 重要函数的实例

  常函数

  集合A上的恒等函数 I_A: $A\to A$

  集合B 的特征函数 χ_B: $A\to\{0,1\}$，$B\subseteq A$

  自然映射 g: $A\to A/R$, $g(a)=[a]$

函数的性质

$f: A \to B$为单射当且仅当

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ 或 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

实数函数 f:R→R为单射的，一般是严格单调的

$f: A \to B$为满射的当且仅当 $\mathrm{ran}f = B$

$f: A \to B$为双射的当且仅当 f 既是单射也是满射的

合成运算可以保持函数的单射、满射、双射性质

只有双射函数才有反函数

关系与函数的基本计算

关系计算

$A \times B$

$\mathrm{dom}R = \{x \mid \exists y\,(xRy)\}$, $\mathrm{ran}R = \{y \mid \exists y\,(xRy)\}$,

$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$

$R^{-1} = \{<x,y> \mid yRx\}$

$R \circ S = \{<x, y> \mid \exists t\,(xRt \wedge tSy)\}$

$R^0 = I_A$, $R^n = R^{n-1} \circ R$

$r(R) = R \cup I_A$, $s(R) = R \cup R^{-1}$, $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

商集A/R

关系与函数的基本计算（续）

函数计算

$B^A = \{ f \mid f: A \to B \}$

值 $f(x)$

像 $f(A)$

$f \circ g(x) = g(f(x))$

双射函数 $f: A \to B$的反函数 $f^{-1}: B \to A$

给定A,B，构造双射函数 $f: A \to B$

一些重要的计数

设 $|A| = n, |B| = m$

$|P(A)| = 2^n$， $|A\times B| = nm$

从 A 到 B 的关系个数：2^{nm}

A上的关系个数： 2^{n^2}

A上的自反（或者反自反）关系个数： 2^{n^2-n}

A上的对称关系个数： $2^{\frac{n^2+n}{2}}$

A上的反对称关系个数： $2^n 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

A上对称且反对称关系个数：2^n

$|B^A| = m^n$

A到B的单射函数个数：$m\geq n, P(m,n)$，m中取n的排列数

A到B的双射函数个数：$n!$ (当$m=n$）

基本证明

- 证明含关系运算的等式

  方法：集合相等的证明方法

  使用：相关运算的定义

  注意：“$\Rightarrow$”和“$\Leftrightarrow$”号的区别

- 证明关系的四种性质(自反,对称,反对称,传递)

  方法：命题演算的方法

  使用：关系性质定义的蕴涵式

  注意：前提和结论

基本证明（续）

- 证明函数 $f: A \to B$ 的性质
- 方法

  单射性　存在x_1和x_2，$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  满射性　对任意 $y \in B$ 证明存在 $x \in A$使得$f(x)=y$

  双射性　单射+满射

组合数学小结

知识点小结

- 组合解题技巧
- 组合存在性定理
- 组合计数模型
- 组合计数方法
- 组合计数定理
- 组合计数符号
- 组合恒等式证明、组合数求和

组合解题技巧

- 组合计数
  - 与组合模型的一一对应
  - 组合计数方法
  - 组合计数定理
- 组合证明
  - 数学归纳法
  - 一一对应

组合存在性定理

- 鸽巢原理的简单形式

  $n+1$个物体放到 n个盒子里，则存在一个盒子至少含有2个或者2个以上的物体.

- 应用关键
  - 选择鸽子——所有的配置
  - 构造鸽巢——配置的所有可能的模式
  - 模式数比配置数至少小1

组合计数模型

- 基础：加法法则,乘法法则（分类,分步处理）
- 计数模型
  - 选取问题：集合排列，集合组合，多重集排列,多重集组合
  - 非降路径问题：基本公式,带限制条件的公式
  - 不定方程的整数解：基本公式,各种类型的生成函数
  - 正整数的拆分：无序拆分,有序拆分
  - 放球问题：各种子模型的计数公式,求解方法
- 计数模型之间的联系

选取问题的公式

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$

排列 $\begin{cases} \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} & r=n=n_1+n_2+\ldots+n_k \\ k^r & r\le n_i, i=1,2,\ldots,k \end{cases}$

组合 $C(k+r-1,r) \qquad r\le n_i, i=1,2,\ldots,k$

非降路径问题

- 从(0, 0)到(m, n)点的非降路径数 $\binom{m+n}{n}$
- 从(a, b)到(m, n)点的非降路径数 $\binom{m-a+n-b}{n-b}$
- 从(0, 0)经过(a, b)点到(m, n)点的非降路径数

$$\binom{a+b}{b}\binom{m-a+n-b}{n-b}$$

- 从(0, 0)到(m, n)点的有约束条件的非降路径数

  ——一一对应方法

不定方程的解

方程	对应的生成函数
$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ $x_i\in\mathrm{N}$	$(1+y+y^2+\ldots)^k=\dfrac{1}{(1-y)^k}$ $\boxed{N=\binom{r+k-1}{r}}$
$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ $x_i\in\mathrm{N}$ $l_i\le x_i\le n_i$	$(y^{l_1}+y^{l_1+1}+\ldots+y^{n_1})$ $(y^{l_2}+y^{l_2+1}+\ldots+y^{n_2})\ldots$ $(y^{l_k}+y^{l_k+1}+\ldots+y^{n_k})$
$p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_kx_k=r$ $p_i\in\mathrm{Z}^+$ $x_i\in\mathrm{N},\ l_i\le x_i\le n_i$	$(y^{l_1p_1}+y^{(l_1+1)p_1}+\ldots+y^{n_1p_1})$ $(y^{l_2p_2}+y^{(l_2+1)p_2}+\ldots+y^{n_2p_2})\ldots$ $(y^{l_kp_k}+y^{(l_k+1)p_k}+\ldots+y^{n_kp_k})$

正整数的拆分问题

- 无序拆分基本模型
  - 将*N*无序拆分成正整数$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,不允重复

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = N$$
$$0 \le x_i \le 1$$

  - 将*N*无序拆分成正整数$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,允许重复

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = N$$
$$0 \le x_i$$

- 有序拆分
  - 把*N*有序拆分成*r*个部分且允许重复的方案数，不定方程$x_1+x_2+\ldots x_r=N$的正整数解：$C(N-1,r-1)$

放球问题：n个球, m个盒子

球号	盒号	空否	方法数	组合问题
N	N	N		n 恰好拆分成 m 个部分
N	N	Y		n 拆分成 t 个部分($t \le m$)
N	Y	N	$\binom{n-1}{m-1}$	$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ 正整数解
N	Y	Y	$\binom{n+m-1}{n-1}$	$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ 非负整数解
Y	N	N	$\left\{ {n \atop m} \right\}$	n 个不同的球恰好放到 m 个相同盒子
Y	N	Y	$\sum_{k=1}^{m} \left\{ {n \atop k} \right\}$	n 个不同的球放到 m 个相同盒子
Y	Y	N	$m!\left\{ {n \atop m} \right\}$	n 个不同的球恰好放到 m 个不同盒子
Y	Y	Y	m^n	n 个不同的球放到 m 个不同盒子

组合计数方法

- 递推方程
  - 通过依赖关系导出递推方程,确定初值
  - 求解方法：公式法,换元法,迭代归纳法,递归树法,尝试法,生成函数法
- 生成函数与指数生成函数
  - 分别对应于无序与有序计数问题
  - 如何根据问题得到生成函数和指数生成函数
  - 如何展开生成函数与指数生成函数得到a_n

组合计数定理

- 包含排斥原理

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_m}|=|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m|$$

- 应用
  - 欧拉函数 $\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\ldots(1-\frac{1}{p_k})$
  - 错位排列 $D_n=n![1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}]$

对称筛公式

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_m}|=|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m|$$

$$N_k=|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}|,\ 1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le m,\ k=1,2,$$

$|S|=N,$

$$N_0=N-\binom{m}{1}N_1+\binom{m}{2}N_2-\ldots+(-1)^m\binom{m}{m}N_m$$

$$=N+\sum_{t=1}^{m}(-1)^t\binom{m}{t}N_m$$

使用条件：不同性质对计数的影响对称.

各性质计数是独立的.

Burnside引理

引理　设 $N=\{1,2,\ldots,n\}$, G 是 N 上置换群.

令 $G=\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_g\}$,

$c_1(\sigma_k)$ 是 σ_k 的轮换表示中 1-轮换的个数，

M 为不同的轨道个数，则

$$M=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g}c_1(\sigma_k)$$

Polya定理

设$N = \{1, 2, \ldots, n\}$，$G=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_g\}$是$N$上置换群, 用$m$中颜色涂色$N$中元素，$C(\sigma_k)$是$\sigma_k$中的轮换（含1-轮换在内）个数，则在$G$的作用下不同的涂色方案数是

$$M = \frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g} m^{C(\sigma_k)}$$

实例：

各种对称图形的旋转、翻转，每个动作看做一个置换

注意置换的复合运算必须封闭

组合计数符号

- 排列数 $P(n,m)= m!\ C(n,m)$
- 组合数（二项式系数）$C(n, m)$, $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$
- 多项式系数 $\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ldots n_t!}$
- 错位排列数 $D_n = n![1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}]$
- Fibonacci数 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, …
- Catalan数（多边形三角划分） $h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$
- 第一类Stirling数 （多项式系数） $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$
- 第二类Stirling数（放球） $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$

Catalan数与第二类Stirling数

- Catalan数

  凸n边形划分成三角形的方式数

$$h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, n \ge 2, \quad h_1 = 1 \qquad h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

- 第二类Stirling数

  n个不同的球放到 r 个相同的盒子里方法数

$$\left\{ {n \atop r} \right\} = r\left\{ {n-1 \atop r} \right\} + \left\{ {n-1 \atop r-1} \right\}, \quad n > r \ge 1,$$

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = 1, \quad \left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1, \quad \left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$$

组合计数符号的研究内容

- 定义
- 基本递推公式及初值
- 恒等式
- 生成函数或指数生成函数
- 对应的组合问题

恒等式证明与序列求和

- 基本组合恒等式
- 组合恒等式的证明方法
  - 恒等变换、数学归纳法、二项式定理、级数的求导与积分、组合分析、容斥原理
- 序列的求和方法
  - 恒等式化简、级数求和、观察结果加归纳验证、积分近似

基本组合恒等式

1. $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

2. $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$

3. $\binom{n+r+1}{r}=\binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\ldots+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{0}$

4. $\binom{n}{r}\binom{l}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{l-r}$

5. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$

6. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots\pm\binom{n}{n}=0$

7. $\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$