

Projet 1 : Résolution de l'équation instationnaire de la chaleur 1D

Problème physique et modélisation

Considérons le problème d'un mur d'épaisseur ℓ , qui se trouve initialement à une température uniforme θ_0 (température de la chambre). A l'instant $t = 0$, la température extérieure (en $x = 0$) monte brusquement à $\theta_s > \theta_0$, valeur maintenue constante par une source de chaleur. On suppose que la température à $x = \ell$ est gardée à sa valeur initiale θ_0 . La propagation de la chaleur dans le mur (de diffusivité thermique κ) sera décrite par l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

avec l'inconnue $u(x, t) = \theta(x, t) - \theta_0$, la condition initiale $u_0(x) = 0$ et les conditions aux limites de Dirichlet :

$$u(0, t) = \theta_s - \theta_0 = u_s, \quad u(\ell, t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (2)$$

Analyse mathématique

Q1 Cas du domaine infini : Pour un mur d'épaisseur infinie ($\ell \rightarrow \infty$) on va chercher la solution sous la forme :

$$u(x, t) = f(\eta), \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}. \quad (3)$$

Montrer que la fonction f vérifie l'EDO suivante :

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} = 0. \quad (4)$$

Pour vérifier que la fonction f est solution de l'EDO, on calcule :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t} \frac{df(\eta)}{d\eta} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{df(\eta)}{d\eta} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{df}{d\eta} \right) = \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} \quad (7)$$

Par hypothèse :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

On en déduit que :

$$\frac{-x}{4t\sqrt{\kappa t}} \frac{df}{d\eta} - \kappa \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (9)$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{-\eta}{2t} \frac{df}{d\eta} - \frac{1}{4t} \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (10)$$

Enfin, en multipliant l'équation par $(-4t)$, on obtient finalement :

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} = 0. \quad (11)$$

En introduisant la fonction suivante, appelée *fonction erreur*

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad (12)$$

qui vérifie $\operatorname{erf}(0) = 0$ et $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, trouver la solution de l'équation de la chaleur pour $\ell \rightarrow \infty$:

$$u(x, t) = [1 - \operatorname{erf}(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}})]u(0, t). \quad (13)$$

D'après ce qui précède :

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} = 0. \quad (14)$$

On en déduit :

$$\frac{df}{d\eta} = k_1 e^{\eta^2} \quad (15)$$

Puis :

$$f(\eta) = k_2 + k_1 \int_0^\eta e^{-x^2} dx \quad (16)$$

Où k_1 est la première constante d'intégration et k_2 la seconde.

On remarque que :

$$f(0) = u(0, t) = k_2 \quad (17)$$

De plus, $f(\eta) = 0$ quand $(\eta \rightarrow \infty)$, en effet, d'après (2) $u(\ell, t) = 0$, $\forall t > 0$ et $u(x, t) = u(\ell, t)$ si $(x \rightarrow \infty)$.

Comme $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, on déduit : $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Par suite, $f(\infty) = f(0) + k_1 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = f(0) + k_2 \frac{\pi}{2}$

Et donc : $k_2 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} f(0)$

$f(\eta) = f(0) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} f(0) \int_0^\eta e^{-x^2} dx = u(0, t)(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-x^2} dx) = [1 - \operatorname{erf}(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}})]u(0, t).$

Q2 Cas du domaine fini : Pour un mur d'épaisseur finie ℓ , on va utiliser la décomposition en ondes simples

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \hat{u}_k(t) \phi_k(x), \quad \phi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right). \quad (18)$$

Écrire et résoudre l'EDO vérifiée par chaque fonction \hat{u}_k . Vérifier que la solution de l'équation de la chaleur avec les conditions aux limites (2) s'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = (1 - \frac{x}{\ell})u_s + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} A_k \exp\left(-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t\right) \phi_k(x). \quad (19)$$

Montrer que $A_k = -\frac{2u_s}{k\pi}$.

L'équation (1) appliquée à la fonction

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \hat{u}_k(t) \phi_k(x), \quad \phi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right). \quad (20)$$

nous donne que pour tout entier k non nul :

$$\frac{\partial \hat{u}_k(t)}{\partial t} + \kappa \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \hat{u}_k(t) = 0 \quad (21)$$

La solution de ce système nous donne que pour tout entier k non nul :

$$\hat{u}_k(t) = A_k \exp(-at), \quad a = \kappa \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \quad (22)$$

En reprenant en considération les conditions aux limites (2), on obtient bien une solution de la forme :

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) u_s + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} A_k \exp\left(-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t\right) \phi_k(x). \quad (23)$$

La condition initiale $u_0(x) = 0$ nous donne :

$$\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) u_s + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} A_k \phi_k(x) = 0 \quad \forall x \quad \text{dans} \quad [0, \ell]. \quad (24)$$

On cherche à calculer les coefficients A_k à partir de cette équation. On multiplie alors cette équation par la fonction $\sin\left(\frac{k_1\pi}{\ell} x\right)$ avec $k_1 \in \mathbb{N}^*$

Pour déterminer les A_k on va résoudre :

$$\int_0^\ell \sum_{k \in \mathbb{N}^*} A_k \phi_k(x) \sin\left(\frac{k_1\pi x}{\ell}\right) dx = - \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) u_s \sin\left(\frac{k_1\pi x}{\ell}\right) dx \quad (25)$$

On distingue alors 2 cas :

1er cas : $k \neq k_1$

En utilisant les relations sur le cosinus d'une somme et d'une différence :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (26)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad (27)$$

On obtient :

$$\sin\left(\frac{k_1\pi x}{\ell}\right) \phi_k(x) \sin\left(\frac{k_1\pi x}{\ell}\right) = \frac{1}{2} [\cos\left((k - k_1)\frac{\pi x}{\ell}\right) - \cos\left((k + k_1)\frac{\pi x}{\ell}\right)] \quad (28)$$

Et on obtient :

$$\int_0^\ell \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{k_1\pi x}{\ell}\right) dx = 0 \quad (29)$$

2eme cas : $k = k_1$

$$\int_0^\ell \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{\ell}{2} \quad (30)$$

On obtient alors :

$$\int_0^\ell \sum_{k \in \mathbb{N}^*} A_k \phi_k(x) \sin\left(\frac{k_1 \pi x}{\ell}\right) dx = - \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) u_s \sin\left(\frac{k_1 \pi x}{\ell}\right) dx \quad (31)$$

Une intégration par partie du second membre de l'égalité nous donne :

$$- \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) u_s \sin\left(\frac{k_1 \pi x}{\ell}\right) dx = - \frac{\ell u_s}{k_1 \pi} \quad (32)$$

Il s'ensuit :

$$\int_0^\ell \sum_{k \in \mathbb{N}^*} A_k \phi_k(x) \sin\left(\frac{k_1 \pi x}{\ell}\right) dx = \int_0^\ell A_{k_1} \left(\sin\left(\frac{k_1 \pi x}{\ell}\right)\right)^2 dx = - \frac{\ell u_s}{k_1 \pi} \quad (33)$$

Et donc :

$$A_{k_1} \frac{\ell}{2} = - \frac{\ell u_s}{k_1 \pi} \quad (34)$$

Finalement, on trouve : $A_k = \frac{-2u_s}{k\pi}$.

Résolution numérique

Considérons la discrétisation du problème

en espace

$$[0, \ell] = \bigcup_{m=0}^{M-1} [x_m, x_m + h], \quad x_m = m\delta x, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad \delta x = \ell/M, \quad (35)$$

et en temps

$$[0, t_{max}] = \bigcup_{n=0}^{N-1} [t_n, t_n + \delta t], \quad t_n = n\delta t, \quad \delta t = t_{max}/N. \quad (36)$$

On note $u_m^n = u(x_m, t_n)$.

Q3 Considérons le schéma explicite centré suivant :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\delta t} - \kappa \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\delta x^2} = 0. \quad (37)$$

La condition de stabilité du schéma est :

$$\kappa \frac{\delta t}{\delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (38)$$

Écrire un programme pour la résolution du problème de la propagation de la chaleur dans un mur d'épaisseur finie. On prendra $\kappa = 1$, $\ell = 1$, $u_s = 1$, $M = 50$ points de discrétisation en espace et le pas de temps δt donné par (38).

Tracer la solution numérique pour différents instants de temps et comparer avec la solution exacte (23) (une bonne approximation de cette dernière est obtenue en prenant les 20 premiers nombres d'onde k). Comparer également avec la solution (6) obtenue pour un domaine infini. Commenter les résultats pour t petit et pour t grand.

Résolutions de l'équation de la chaleur 1D à l'aide d'un schéma explicite, puis comparaison avec la solution analytique obtenu pour un domaine fini et pour un domaine infini.

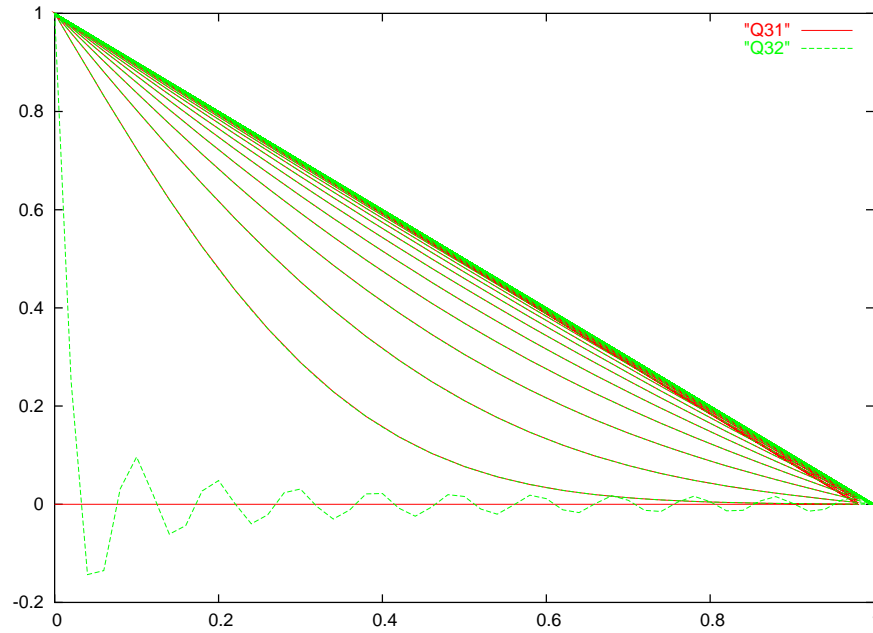


FIG. 1 – Résolution de l'équation de la chaleur dans un mur d'épaisseur finie, en vert la solution exacte et en rouge la solution calculée numériquement (la solution exacte est calculée en considérant les 20 premiers nombres d'onde)

On constate (figure 2) que lorsque t est petit, la solution numérique est proche de la solution analytique, ce qui devient faux pour t grand.

Q4 Reprendre le programme précédent pour $u_s = 0$ et la condition initiale

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) + \frac{1}{4}\sin\left(10\frac{\pi}{\ell}x\right). \quad (39)$$

Comparer la solution numérique avec la solution analytique donnée par (23). Commenter par rapport au résultat obtenu pour l'équation des ondes avec la même condition initiale. Décrire l'amortissement des ondes présentes dans la condition initiale.

Solution avec une condition initial :

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) + \frac{1}{4}\sin\left(10\frac{\pi}{\ell}x\right). \quad (40)$$

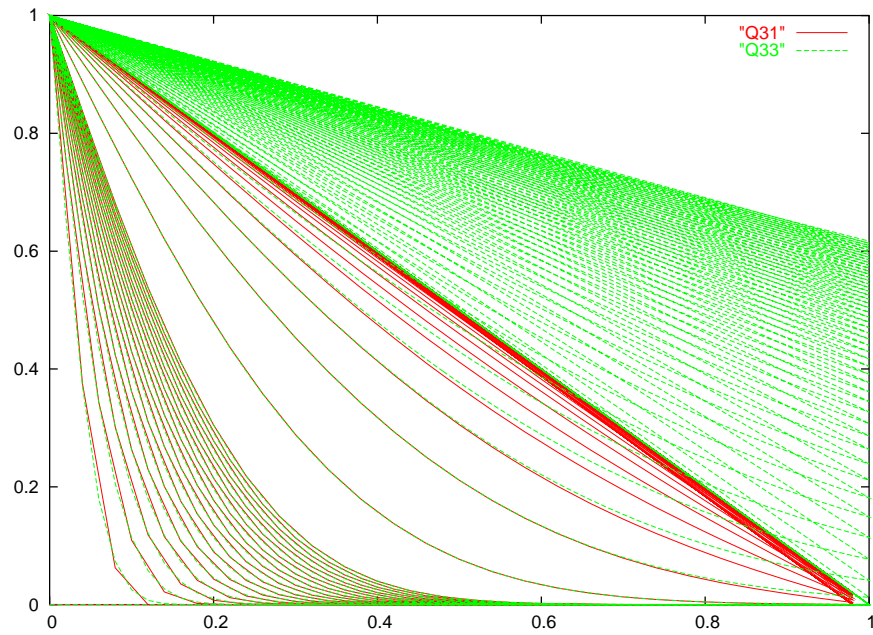


FIG. 2 – Résolution de l'équation de la chaleur dans un mur d'épaisseur infinie, en vert la solution exacte et en rouge la solution calculée numériquement

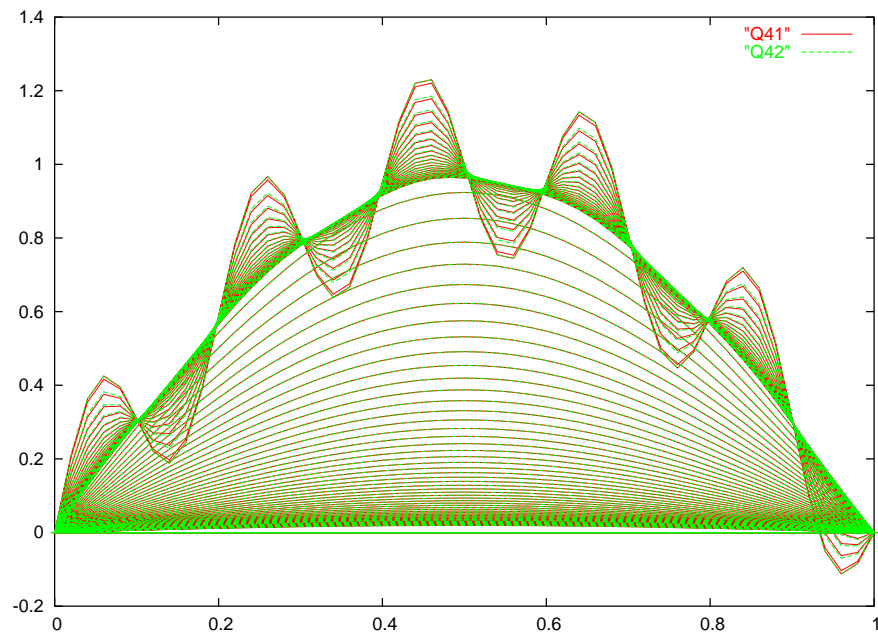


FIG. 3 – Résolution de l'équation de la chaleur dans un mur d'épaisseur finie En rouge la solution numérique et en vert la solution analytique la condition initiale est une courbe sinusoidale et $u_s=0$

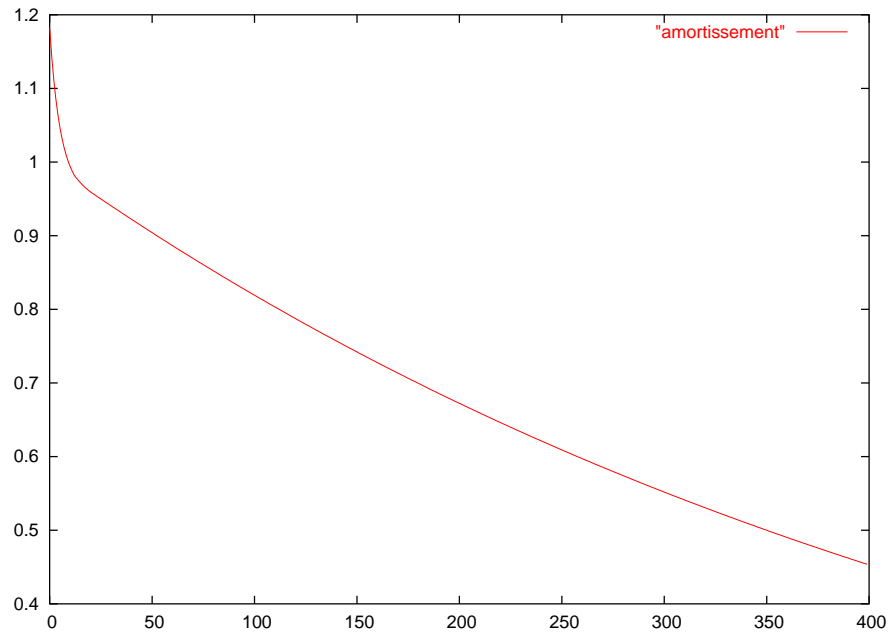


FIG. 4 – Description de l’amortissement de la solution initiale. Affichage de l’amplitude de l’onde en fonction du nombre d’itérations. On constate qu’au bout de 266 itérations en temps avec un pas de temps valant $\frac{h^2}{2\kappa}$, l’amplitude de l’onde s’est vue plus que divisée par deux.

Q5 Ecrire le schéma implicite correspondant à (41) et répondre aux questions **Q3** et **Q4** en utilisant ce schéma. Quel est l’avantage du schéma implicite ?

Considérons le schéma explicite centré suivant :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\delta t} - \kappa \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{\delta x^2} = 0. \quad (41)$$

Résolution par la méthode LU du système tridiagonal :

$$AX=b$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -\kappa \frac{\delta t}{\delta x^2} & 2\kappa \frac{\delta t}{\delta x^2} + 1 & -\kappa \frac{\delta t}{\delta x^2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\kappa \frac{\delta t}{\delta x^2} & 2\kappa \frac{\delta t}{\delta x^2} + 1 & -\kappa \frac{\delta t}{\delta x^2} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\kappa \frac{\delta t}{\delta x^2} & 2\kappa \frac{\delta t}{\delta x^2} + 1 & -\kappa \frac{\delta t}{\delta x^2} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} u_0^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_M^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} u_s \\ u_1^n \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{M-1}^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

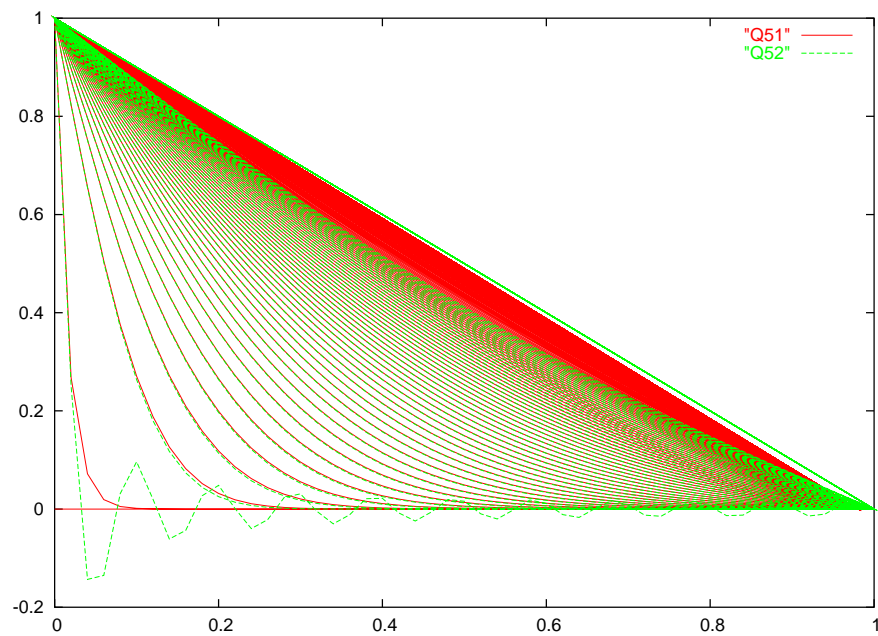


FIG. 5 – Solution numérique de l'équation 1D de la chaleur en utilisant un schéma implicite qui nécessite l'inversion d'un système tridiagonal. L'inversion est effectuée par la méthode LU. L'avantage de ce schéma est qu'il est inconditionnellement stable et ne nécessite donc pas la contrainte $\delta t \leq \frac{\delta x^2}{2\kappa}$. L'exécution du programme nous affiche une convergence du schéma explicite en 9659 itérations pour $\delta t = \frac{\delta x^2}{2\kappa}$. Comparaison avec la solution analytique calculée pour un mur d'épaisseur fini (en rouge la solution numérique et en vert la solution analytique)

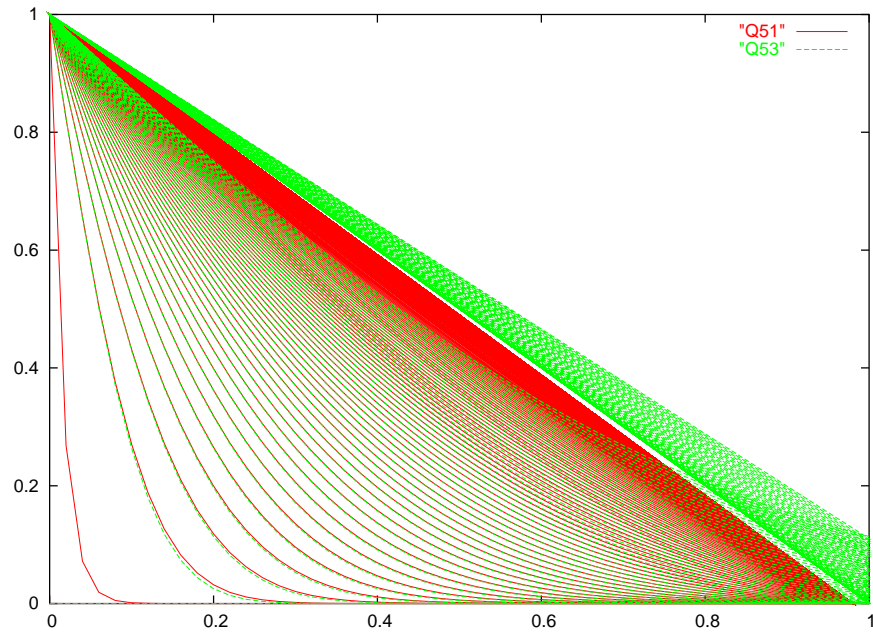


FIG. 6 – Même résolution que précédemment, mais cette fois, on compare la solution numérique avec la solution analytique calculée pour un mur d'épaisseur infini(en rouge la solution numérique et en vert la solution analytique)

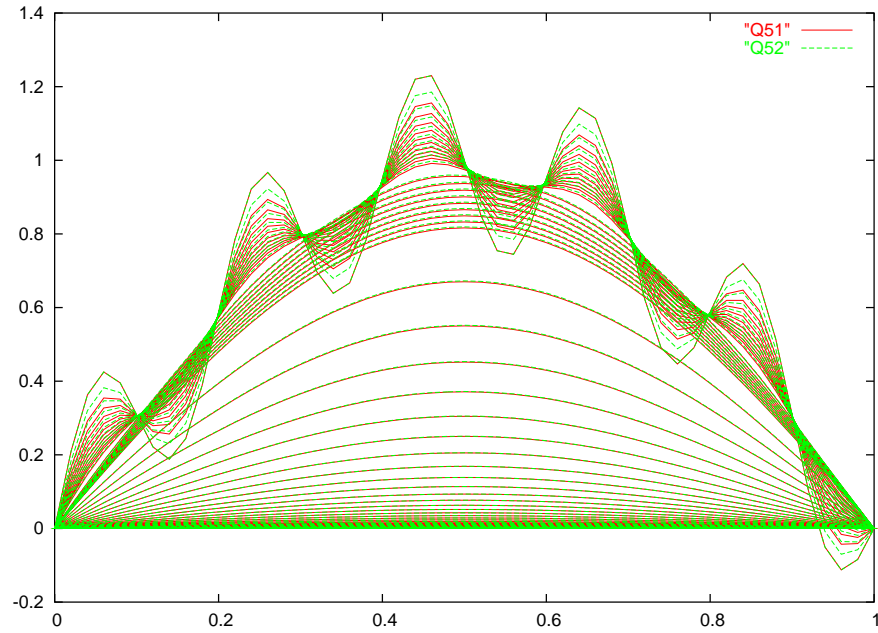


FIG. 7 – Solution numérique obtenu à l'aide d'un schéma implicite. Avec comme solution initiale : $u_0(x) = \sin(\frac{\pi}{\ell}x) + \frac{1}{4}\sin(10\frac{\pi}{\ell}x)$. Comparaison entre la solution numérique et la solution analytique calculée pour un mur d'épaisseur finie.