Projet 2 - deuxième partie
Résolution de l'équation **stationnaire** *de la chaleur en 2D : problème du four*

Le four : problème physique et modélisation

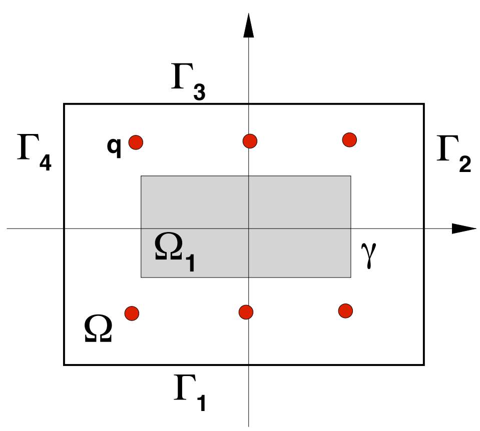
Il s'agit de déterminer la température dans un four destiné à la cuisson d'une pièce de résine thermo–formée (un pare–chocs de voiture par exemple). Les éléments chauffants sont des résistances électriques. À partir de la valeur connue de chacune des résistances, on cherche à calculer le champ de température à l'intérieur du four, et en particulier la température de l'objet à cuire. Sachant que la température idéale de cuisson conditionne la solidité du produit fini et que des essais expérimentaux sont longs et onéreux, cette simulation numérique permet de vérifier à moindre coût la validité des réglages du four.

Considérons les domaines

$$\Omega = [-L/2, L/2] \times [-H/2, H/2] \qquad \Omega_1 = [-l/2, l/2] \times [-h/2, h/2],$$

représentant, respectivement, le four et la pièce (nécessairement $\Omega_1 \subset \Omega$). Les frontières correspondantes seront notées par $\Gamma = \partial\Omega$ et $\gamma = \partial\Omega_1$. La température d'équilibre dans le four est la solution de l'équation :

$$-\nabla(k\nabla u) = f, \quad \Longleftrightarrow \quad -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = f(x,y), \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{1}$$



avec les conditions aux limites sur $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

$$\begin{cases} \text{sur } \Gamma_1 & u = u_s & \text{température sud imposée} \\ \text{sur } \Gamma_2 & \partial u/\partial x = 0 & \text{paroi isolée} \\ \text{sur } \Gamma_3 & u = u_n & \text{température nord imposée} \\ \text{sur } \Gamma_4 & \partial u/\partial x = 0 & \text{paroi isolée} \end{cases} \tag{2}$$

la diffusivité thermique

$$k(x,y) = \begin{cases} k_1 & \text{sur } \Omega\backslash\Omega_1 \\ k_2 & \text{sur } \Omega_1 \end{cases} \tag{3}$$

et le terme source $f(x,y)$ qui sera défini par la suite.

Problème direct

Q4 : Ecrire la formulation variationnelle du problème (1) en tenant compte de la discontinuité de la fonction $k(x,y)$. En sachant que le flux de chaleur à travers une frontière s'écrit sous la forme $k(x,y)\partial u/\partial n$, expliquer ce qui se passe sur la frontière γ (donner également une interprétation physique).

Q2 : On considère le **problème sans sources**, décrit par l'équation (1) avec $f(x,y) = f_0 = 0$ et les conditions aux limites (2) avec $u_n \neq 0, u_s \neq 0$. On écrit de manière formelle ce problème

$$Pb_0 := \{\text{éq. (1)} \oplus \text{cond. limites (2)},\ \text{avec } f(x,y) = f_0 = 0, u_n, u_s\} \tag{4}$$

a) Ecrire un script `FreeFem++` pour calculer la solution U_0 de ce problème.
b) En utilisant les classes `sfem`, écrire un programme `C++` pour résoudre le même problème. Comparer avec la solution trouvée au point a) (tracer les isolignes).
Données numériques : $L = H = 2, l = 1, h = 0.4, k_1 = 1, k_2 = 10, u_s = 100, u_n = 50.$

Q5 : On va placer maintenant une résistance chauffante q : elle va agir dans le sous-domaine Ω_r, défini comme le cercle de rayon R_r, centré en (x_r, y_r). La présence de la résistance sera modélisée en considérant dans l'équation (1) le terme source :

$$f(x,y) = f_r(x,y) = \begin{cases} q & \text{sur } \Omega_r \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{5}$$

On définit les problèmes suivants :

$$Pb := \{\text{éq. (1)} \oplus \text{cond. limites (2), avec } f(x,y) = f_r, u_n, u_s\} \tag{6}$$

$$Pb_r := \{\text{éq. (1)} \oplus \text{cond. limites (2), avec } f(x,y) = f_r, u_n = 0, u_s = 0\} \tag{7}$$

et on note par U, respectivement, U_r les solutions correspondantes.

a) Montrer que $U = U_0 + U_r$, où U_0 est la solution du problème sans sources (4).

b) Ecrire un programme `C++` utilisant les classes `sfem` pour résoudre les problèmes (6) et (7) et vérifier la relation prouvée au point **a)**.
Données numériques : $q = 25000, x_r = -l/2, y_r = (H+h)/4, R_r = (H-h)/20$.
Question facultative : Résoudre le même problème avec `FreeFem++` et comparer avec la solution obtenue précédemment.

c) Résoudre le problème (6) avec 6 résistances définies par $q = 25000, R_r = (H-h)/20$ et

$$(x_r, y_r) \in \left\{(-l/2, \frac{H+h}{4}), (0, \frac{H+h}{4}), (l/2, \frac{H+h}{4}), (-l/2, -\frac{H+h}{4}), (0, -\frac{H+h}{4}), (l/2, -\frac{H+h}{4})\right\}.$$

Q6 : Problème inverse

Le problème inverse consiste à déterminer les valeurs des résistances (**la position des résistances est fixe**) qui permettent de chauffer l'objet à la température idéale de cuisson. On utilise la propriété démontrée au point **a)** de la question **Q4** (la linéarité de la solution) pour écrire la solution du problème (6) avec nr résistances sous la forme :

$$U(x,y) = U_0(x,y) + \sum_{k=1}^{nr} q_k U_{rk}(x,y), \tag{8}$$

où U_0 est la solution du problème sans sources (4), q_k la valeur (intensité) de la résistance k et U_{kr} la solution obtenue quand seule la résistance k chauffe le four (i.e. solution du problème (7) pour $q = 1$ et f_r dépendant de la position de la résistance).

Pour obtenir la température idéale U_{opt} dans l'objet à cuire Ω_1 il faut donc déterminer les valeurs q_k des résistances. On les obtient par minimisation de la fonctionnelle

$$J(q) = \int_{\Omega_1} \left[U_{opt}(x,y) - U_0(x,y) - \sum_{k=1}^{nr} q_k\, U_{rk}(x,y)\right]^2 dxdy.$$

La fonctionnelle J est strictement convexe en q. Elle atteint son unique minimum pour la valeur de q qui annule son gradient. Pour $k = 1, 2, \ldots, nr$ la composante k du vecteur gradient est

$$\frac{\partial J}{\partial q_k} = 2\int_{\Omega_1} \left[U_{opt}(x,y) - U_0(x,y) - \sum_{k'=1}^{nr} q_{k'}\, U_{k'}(x,y)\right] U_{rk}(x,y) dxdy.$$

Définissons alors la matrice $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{nr \times nr}$ et le vecteur $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{nr}$ par

$$\tilde{A}_{k,k'} = \int_{\Omega_1} U_{rk}(x,y)\, U_{rk'}(x,y) dxdy \quad \text{et} \quad \tilde{b}_k = \int_{\Omega_1} U_{rk}(x,y)\big(U_{opt}(x,y) - U_0(x,y)\big) dxdy.$$

La valeur optimale des résistances est obtenue comme solution du système linéaire : $\tilde{A}q = \tilde{b}$.

Question : Trouver les valuers optimales des 6 résistances utilisées à la question **Q4** point **c)** afin d'avoir $U_{opt}(x,y) = 250$.