Projet 2 - deuxième partie
Résolution de l'équation **stationnaire** *de la chaleur en 2D : problème du four*

Le four : problème physique et modélisation

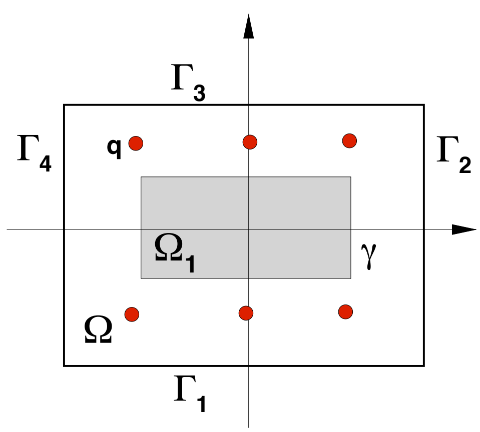
Il s'agit de déterminer la température dans un four destiné à la cuisson d'une pièce de résine thermo–formée (un pare–chocs de voiture par exemple). Les éléments chauffants sont des résistances électriques. À partir de la valeur connue de chacune des résistances, on cherche à calculer le champ de température à l'intérieur du four, et en particulier la température de l'objet à cuire. Sachant que la température idéale de cuisson conditionne la solidité du produit fini et que des essais expérimentaux sont longs et onéreux, cette simulation numérique permet de vérifier à moindre coût la validité des réglages du four.

Considérons les domaines

$$\Omega = [-L/2, L/2] \times [-H/2, H/2] \qquad \Omega_1 = [-l/2, l/2] \times [-h/2, h/2],$$

représentant, respectivement, le four et la pièce (nécessairement $\Omega_1 \subset \Omega$). Les frontières correspondantes seront notées par $\Gamma = \partial\Omega$ et $\gamma = \partial\Omega_1$. La température d'équilibre dans le four est la solution de l'équation :

$$-\nabla(k\nabla u) = f, \quad \Longleftrightarrow \quad -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = f(x,y), \quad \text{dans} \quad \Omega \qquad (1)$$



avec les conditions aux limites sur $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

$$\begin{cases} \text{sur } \Gamma_1 & u = u_s & \text{température sud imposée} \\ \text{sur } \Gamma_2 & \partial u/\partial x = 0 & \text{paroi isolée} \\ \text{sur } \Gamma_3 & u = u_n & \text{température nord imposée} \\ \text{sur } \Gamma_4 & \partial u/\partial x = 0 & \text{paroi isolée} \end{cases} \qquad (2)$$

la diffusivité thermique

$$k(x,y) = \begin{cases} k_1 & \text{sur } \Omega\backslash\Omega_1 \\ k_2 & \text{sur } \Omega_1 \end{cases} \qquad (3)$$

et le terme source $f(x,y)$ qui sera défini par la suite.

Problème direct

Q4 : Ecrire la formulation variationnelle du problème (1) en tenant compte de la discontinuité de la fonction $k(x,y)$. En sachant que le flux de chaleur à travers une frontière s'écrit sous la forme $k(x,y)\partial u/\partial n$, expliquer ce qui se passe sur la frontière γ (donner également une interprétation physique).

Formulation variationnelle :

Etant donnée que la fonction k(x,y), modélisant la diffusivité thermique dans le four, est constante par partie, on calculer la formulation variationnelle du probleme d'abord sur Ω_1, puis sur Ω-Ω_1

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] v(x,y) = f(x,y)v(x,y), \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

On intègre cette equation sur l'ensemble Ω_1 :

$-\int_{\Omega_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]v(x,y)dxdy=\int_{\Omega_1}f(x,y)v(x,y)dxdy$

$-\int_{\Omega_1}\left[\frac{\partial k(x,y)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+k(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial k(x,y)}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]v(x,y)dxdy=\int_{\Omega_1}f(x,y)v(x,y)dxdy$

Pour plus de commodité, dans la lecture des équations qui vont suivre, la dépendance des fonctions u et k en les variables x et y ne seront plus écrit explicitement.

On réécrit l'équation ci-dessus, en remarquant que $\frac{\partial k}{\partial x}=0$ et $\frac{\partial k}{\partial y}=0$ sur Ω.

$-\int_{\Omega_1}(\Delta(u)(kv)=\int_{\Omega_1}fv$

il s'ensuit : $-\int_{\Omega_1}(\nabla(u)\nabla(kv)-\int_{\partial\Omega 1}\frac{\partial u}{\partial n}kvd\gamma=\int_{\Omega_1}fv$

Finalement sur $\Omega 1$, on a :

$$k_2(\int_{\Omega_1}\nabla(u)\nabla(v)-\int_{\partial\Omega_1}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma)=\int_{\Omega_1}fv \tag{4}$$

On effectue le même calcul sur l'ensemble Ω-Ω_1 :

$-\int_{\Omega-\Omega 1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]v(x,y)dxdy=\int_{\Omega-\Omega_1}f(x,y)v(x,y)dxdy$

$-\int_{\Omega-\Omega_1}\left[\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]v=\int_{\Omega-\Omega_1}fv$

$-\int_{\Omega-\Omega_1}\Delta(u)(kv)=\int_{\Omega-\Omega_1}fv$

$-\int_{\Omega-\Omega_1}\nabla(u)\nabla(kv)-\int_{\partial(\Omega-\Omega_1)}\frac{\partial u}{\partial n}kvd\Gamma=\int_{\Omega-\Omega_1}fv$

$$k_1\int_{\Omega-\Omega 1}\nabla(u)\nabla(v)-k_2\int_{\partial\Omega 1}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma=\int_{\Omega-\Omega 1}fv \tag{5}$$

Par suite en sommant (4) et (5), on obtient :

$k_1\int_{\Omega-\Omega_1}\nabla(u)\nabla(v)-k_2\int_{\partial(\Omega-\Omega_1)}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma+k_2(\int_{\Omega_1}\nabla(u)\nabla(v)-\int_{\partial\Omega_1}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma)=\int_{\Omega}fv$

Montrons désormais que si $v=0$ sur $\Gamma_1\cup\Gamma_3$, alors :

$\int_{\partial(\Omega-\Omega_1)}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma+\int_{\partial\Omega_1}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma=0$

$\int_{\partial(\Omega-\Omega_1)}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma=\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma+\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma+\int_{\Gamma_3}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma+\int_{\Gamma_4}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma+\int_{\gamma}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma$

$\int_{\partial(\Omega-\Omega_1)}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma=\int_{\Gamma_1}(\frac{\partial u}{\partial x}*0+\frac{\partial u}{\partial y}*(-1))vd\Gamma+\int_{\Gamma_2}(\frac{\partial u}{\partial x}*1+\frac{\partial u}{\partial y}*0)vd\Gamma+\int_{\Gamma_3}(\frac{\partial u}{\partial x}*0+\frac{\partial u}{\partial y}*1)vd\Gamma+$
$\int_{\Gamma_4}(\frac{\partial u}{\partial x}*(-1)+\frac{\partial u}{\partial y}*0)vd\Gamma-\int_{\gamma}(\frac{\partial u}{\partial n})vd\gamma$

or v=0 sur $\Gamma 1\cup\Gamma 3$ et $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ sur $\Gamma 2\cup\Gamma 4$

donc :$\int_{\partial(\Omega-\Omega 1)}\frac{\partial u}{\partial n}vd\Gamma=-\int_{\partial\Omega_1}(\frac{\partial u}{\partial n})vd\gamma$

Finalement la formulation variationnelle du problème (1) est donnée par :

$$k_1\int_{\Omega-\Omega_1}\nabla u\nabla v+k_2\int_{\Omega_1}\nabla u\nabla v=\int_{\Omega}fv \tag{6}$$

avec les conditions aux limites sur $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ $\left\{ \begin{array}{lll} \text{sur } \Gamma_1 & u = u_s & \text{température sud imposée} \\ \text{sur } \Gamma_2 & \partial u / \partial x = 0 & \text{paroi isolée} \\ \text{sur } \Gamma_3 & u = u_n & \text{température nord imposée} \\ \text{sur } \Gamma_4 & \partial u / \partial x = 0 & \text{paroi isolée} \end{array} \right.$

Q4 bis : On considère le **problème sans sources**, décrit par l'équation (1) avec $f(x, y) = f_0 = 0$ et les conditions aux limites (2) avec $u_n \neq 0, u_s \neq 0$. On écrit de manière formelle ce problème

$$Pb_0 := \{\text{éq. (1)} \oplus \text{cond. limites (2)}, \text{ avec } f(x, y) = f_0 = 0, u_n, u_s\} \tag{7}$$

a) Ecrire un script `FreeFem++` pour calculer la solution U_0 de ce problème.

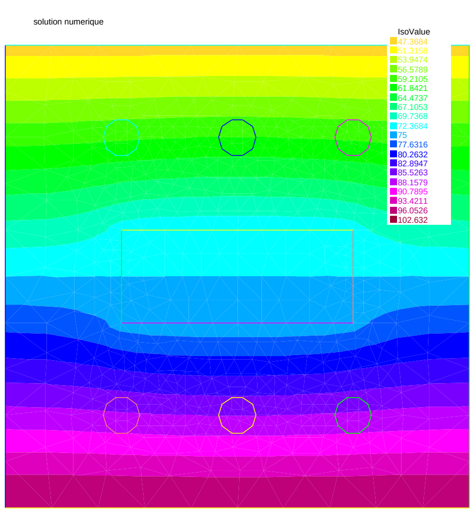


FIG. 1 – résolution du problème sans source par un script FreeFem++ et affichage des isolignes de température

b) En utilisant les classes `sfem`, écrire un programme `C++` pour résoudre le même problème. Comparer avec la solution trouvée au point a) (tracer les isolignes).
Données numériques : $L = H = 2, l = 1, h = 0.4, k_1 = 1, k_2 = 10, u_s = 100, u_n = 50$.

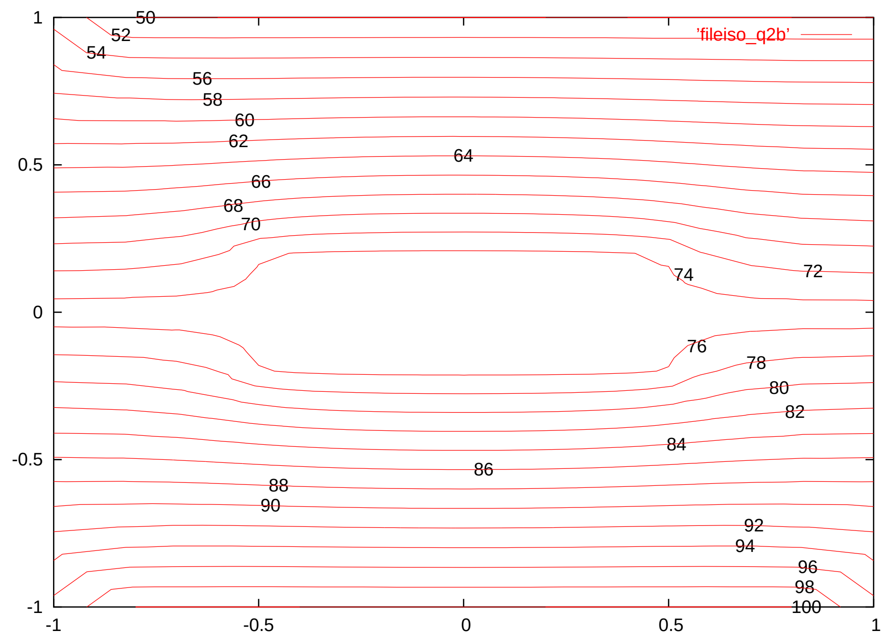


FIG. 2 – résolution du probl'eme sans source par un programme c++ et affichage des isolignes de température

Q5 : On va placer maintenant une résistance chauffante q : elle va agir dans le sous-domaine Ω_r, défini comme le cercle de rayon R_r, centré en (x_r, y_r). La présence de la résistance sera modélisée en considérant dans l'équation (1) le terme source :

$$f(x,y) = f_r(x,y) = \begin{cases} q & \text{sur } \Omega_r \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{8}$$

On définit les problèmes suivants :

$$Pb := \{\text{éq. (1)} \oplus \text{cond. limites (2), avec } f(x,y) = f_r, u_n, u_s\} \tag{9}$$

$$Pb_r := \{\text{éq. (1)} \oplus \text{cond. limites (2), avec } f(x,y) = f_r, u_n = 0, u_s = 0\} \tag{10}$$

et on note par U, respectivement, U_r les solutions correspondantes.

a) Montrer que $U = U_0 + U_r$, où U_0 est la solution du problème sans sources (7).

La fonction U_0 est solution du sytème S_0 :

$$\begin{cases} \text{sur } \Omega - \Omega 1 & -k_1 \Delta U_0 = 0 \\ \text{sur } \Omega_1 & -k_2 \Delta U_0 = 0 \\ \text{sur } \Gamma_1 & U_0 = u_s \\ \text{sur } \Gamma_2 & \frac{\partial U_0}{\partial x} = 0 \\ \text{sur } \Gamma_3 & U_0 = u_n \\ \text{sur } \Gamma_4 & \frac{\partial U_0}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

La fonction U_r est solution du sytème S_r :

$$\begin{cases} \text{sur } \Omega - \Omega 1 & -k_1 \Delta U_r = f_r \\ \text{sur } \Omega_1 & -k_2 \Delta U_r = f_r \\ \text{sur } \Gamma_1 & U_r = 0 \\ \text{sur } \Gamma_2 & \frac{\partial U_r}{\partial x} = 0 \\ \text{sur } \Gamma_3 & U_r = 0 \\ \text{sur } \Gamma_4 & \frac{\partial U_r}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

La fonction U est solution du sytème S :

$$\begin{cases} \text{sur } \Omega - \Omega 1 & -k_1 \Delta U = f_r \\ \text{sur } \Omega_1 & -k_2 \Delta U = f_r \\ \text{sur } \Gamma_1 & U_r = u_s \\ \text{sur } \Gamma_2 & \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \text{sur } \Gamma_3 & U = u_n \\ \text{sur } \Gamma_4 & \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

On vérifie facilement que $U_0 + U_r$ est solution de S, par unicité de la solution de S, on en déduit $U = U_0 + U_r$.

b) Ecrire un programme `C++` utilisant les classes `sfem` pour résoudre les problèmes (9) et (10) et vérifier la relation prouvée au point **a)**.
Données numériques : $q = 25000, x_r = -l/2, y_r = (H + h)/4, R_r = (H - h)/20$.

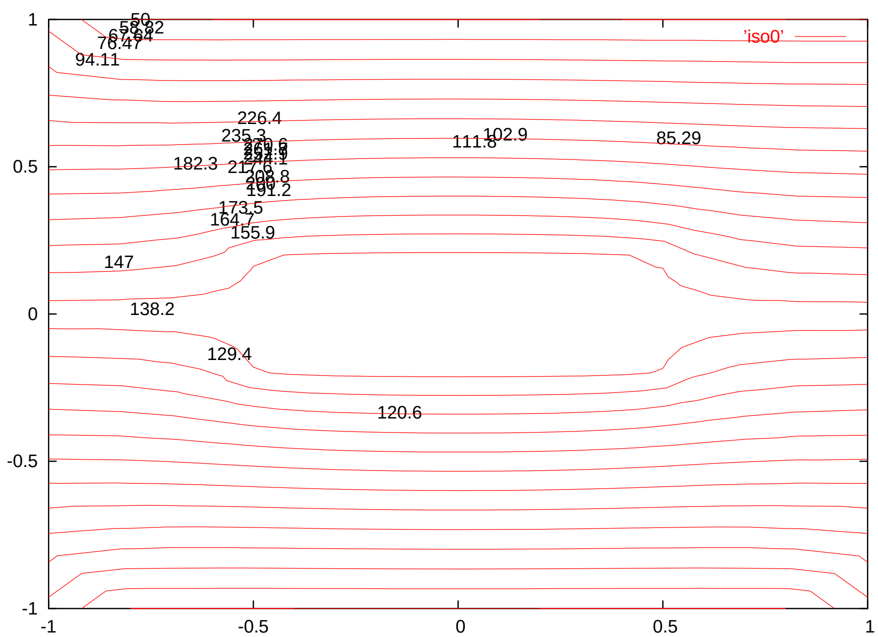


FIG. 3 – représentation sous gnuplot de la solution du probleme Pb_0

On constate qu'effectivement la relation $U = U_0 + U_r$ est bien vérifiée numériquement.

<u>Question facultative :</u> Résoudre le même problème avec `FreeFem++` et comparer avec la solution obtenue précédemment.

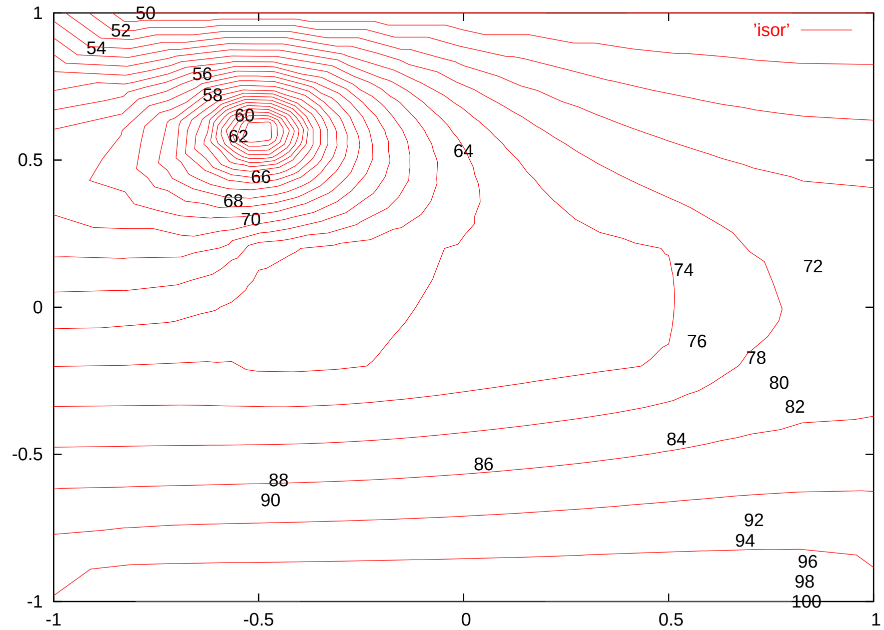


FIG. 4 – représentation sous gnuplot de la solution du probleme Pb_r

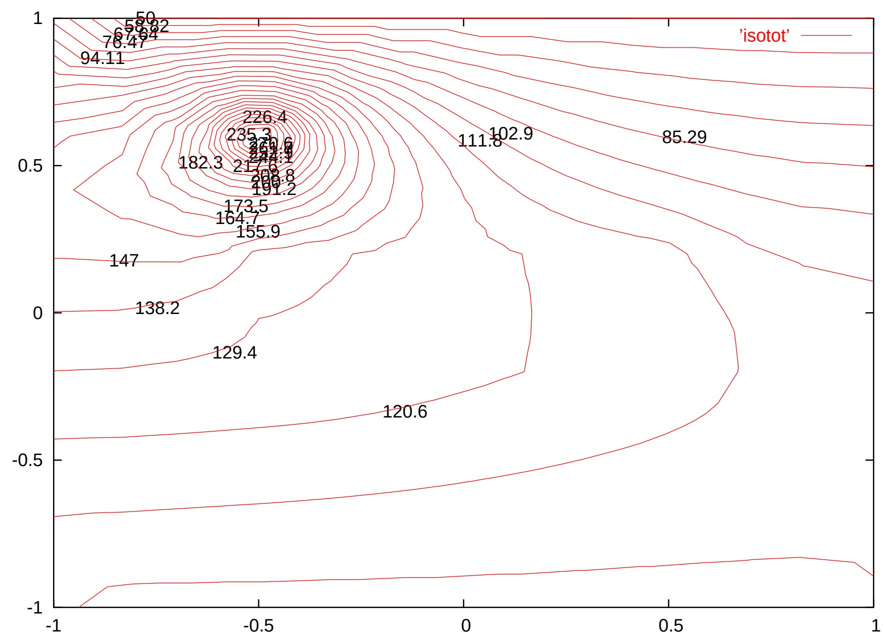


FIG. 5 – représentation sous gnuplot de la solution du probleme $Pb_0 + Pb_r$

c) Résoudre le problème (9) avec 6 résistances définies par $q = 25000$, $R_r = (H-h)/20$ et

$$(x_r, y_r) \in \left\{(-l/2, \frac{H+h}{4}), (0, \frac{H+h}{4}), (l/2, \frac{H+h}{4}), (-l/2, -\frac{H+h}{4}), (0, -\frac{H+h}{4}), (l/2, -\frac{H+h}{4})\right\}.$$

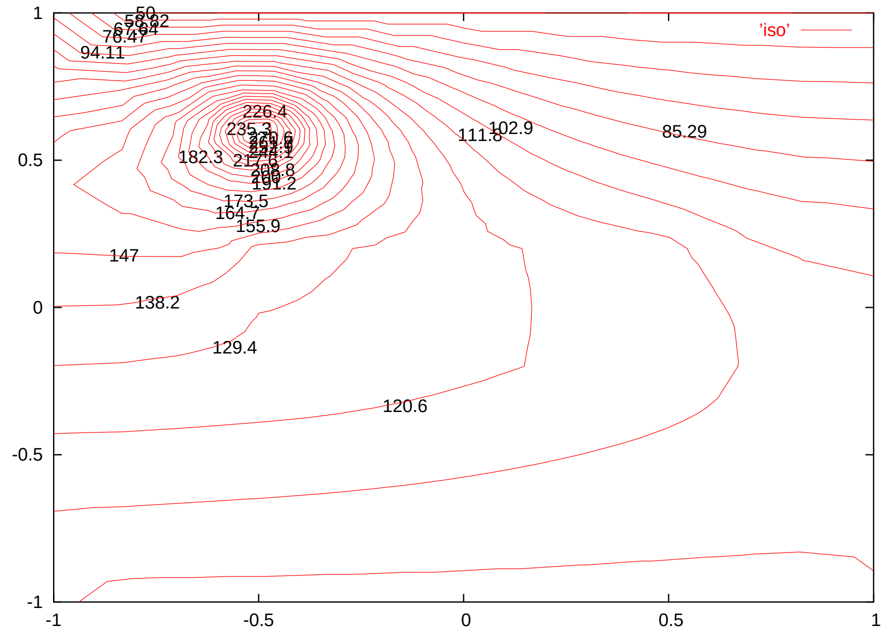


FIG. 6 – représentation sous gnuplot de la solution du probleme Pb

Q6 : Problème inverse

Le problème inverse consiste à déterminer les valeurs des résistances (**la position des résistances est fixe**) qui permettent de chauffer l'objet à la température idéale de cuisson. On utilise la propriété démontrée au point **a)** de la question **Q4** (la linéarité de la solution) pour écrire la solution du problème (9) avec nr résistances sous la forme :

$$U(x,y) = U_0(x,y) + \sum_{k=1}^{nr} q_k U_{rk}(x,y), \tag{11}$$

où U_0 est la solution du problème sans sources (7), q_k la valeur (intensité) de la résistance k et U_{kr} la solution obtenue quand seule la résistance k chauffe le four (i.e. solution du problème (10) pour $q = 1$ et f_r dépendant de la position de la résistance).

Pour obtenir la température idéale U_{opt} dans l'objet à cuire Ω_1 il faut donc déterminer les valeurs q_k des résistances. On les obtient par minimisation de la fonctionnelle

$$J(q) = \int_{\Omega_1} \left[U_{opt}(x,y) - U_0(x,y) - \sum_{k=1}^{nr} q_k \, U_{rk}(x,y)\right]^2 dxdy.$$

La fonctionnelle J est strictement convexe en q. Elle atteint son unique minimum pour la valeur de q qui annule son gradient. Pour $k = 1, 2, \ldots, nr$ la composante k du vecteur gradient est

$$\frac{\partial J}{\partial q_k} = 2\int_{\Omega_1} \left[U_{opt}(x,y) - U_0(x,y) - \sum_{k'=1}^{nr} q_{k'} \, U_{k'}(x,y)\right] U_{rk}(x,y) dxdy.$$

Définissons alors la matrice $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{nr\times nr}$ et le vecteur $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{nr}$ par

$$\tilde{A}_{k,k'} = \int_{\Omega_1} U_{rk}(x,y) \, U_{rk'}(x,y) dxdy \quad \text{ et } \quad \tilde{b}_k = \int_{\Omega_1} U_{rk}(x,y)\big(U_{opt}(x,y) - U_0(x,y)\big) dxdy.$$

La valeur optimale des résistances est obtenue comme solution du système linéaire : $\tilde{A}q = \tilde{b}$.

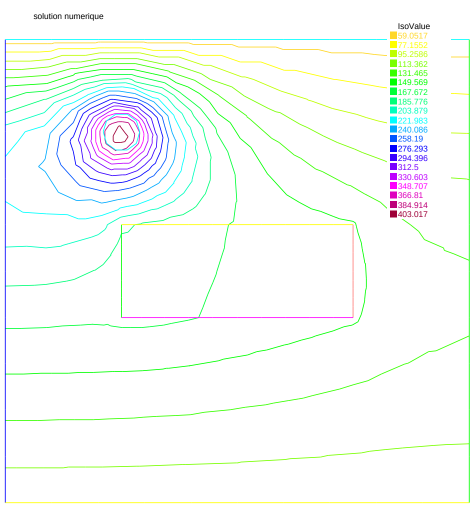


FIG. 7 – représentation sous gnuplot de la solution du probleme Pb

Question 6 : Trouver les valeurs optimales des 6 résistances utilisées à la question **Q4** point **c)** afin d'avoir $U_{opt}(x, y) = 250$.

Les valeurs des 6 résistances numérotées comme suit, la première est en haut à gauche, la troisième en haut à droite, la quatrième en bas à gauche et la sixième en bas à droite sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{résistance 1 : } 20646 \\ \text{résistance 2 : } 9060 \\ \text{résistance 3 : } 21210 \\ \text{résistance 4 : } 16048 \\ \text{résistance 5 : } 6394 \\ \text{résistance 6 : } 16124 \end{array} \right.$$

Partie 3 : Interperteur et Java

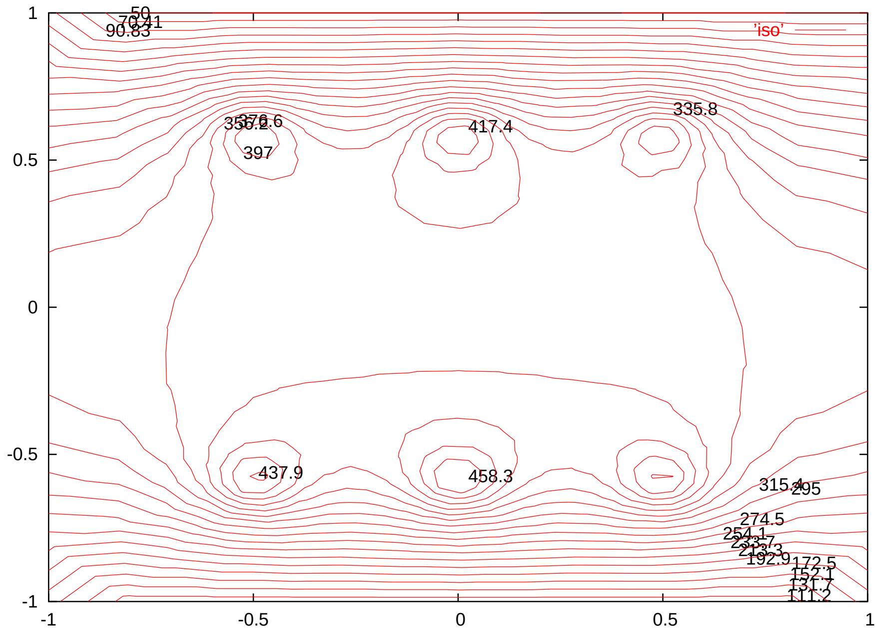


FIG. 8 – représentation sous gnuplot de la solution du probleme lorsque 6 résistances chauffent avec température imposée sur Γ_1 et $\Gamma 3$

Le problème est de faire une interface aux problèmes directe et inverse de la question **Q6**. La position des résistances et la forme doivent être considérées comme des paramètres. Pour cela les résistances seront modélisées par une fonction analytique $\psi(x,y)$, c'est a dire que :

$$f(x) = \sum_{k=1,nr} q_k \psi(x - c_k) \tag{12}$$

où les c_k sont les centre de résistances. où la formule définissant $\psi(x,y)$ soit modifiable. Pour les tests la fonction ψ est tel que

$$\psi(x,y) = R_r^2 exp(-0.5 * (x^2 + y^2)/R_r^2). \tag{13}$$

Q7) Modifier l'interpréteur de formule pour qu'il puisse évaluer la fonction ψ qui sera défini dans le fichier de nom `"projects.txt"`, voir annexe.

Pour cela , il faut définir un nouveau terminal `GVAR` pour les 3 paramètres x, y et R_r dans l'analyseur dans la calculette, (voir `http://www.ann.jussieu.fr/~hecht/ftp/InfoSci/fonction/exp.cpp`).

Cet interpréteur doit être évalué très souvent, donc il doit construire une pseudo fonction. Cette pseudo fonction est définie via une classe `Fonction0` (cf. `http://www.ann.jussieu.fr/~hecht/ftp/InfoSci/fonction/fonction0.hpp` qui est une réécriture des classes de l'algèbre des fonctions pour des fonctions sans paramètre car ici les 3 paramètres x, y, R_r sont des variables globales et sont donc des paramètres cachés.

La fonction suivante doit fonctionner :

```
      extern double *xxxx,*yyyy;
double  Fr(const Fonction0 & f,  R2 P,R2 C)
{
  R2 X=P-C;
  *xxxx = X.x;                               //    def de x dans l'interpreteur
  *yyyy = X.y;                               //    def de y dans l'interpreteur
  return f();
}
```

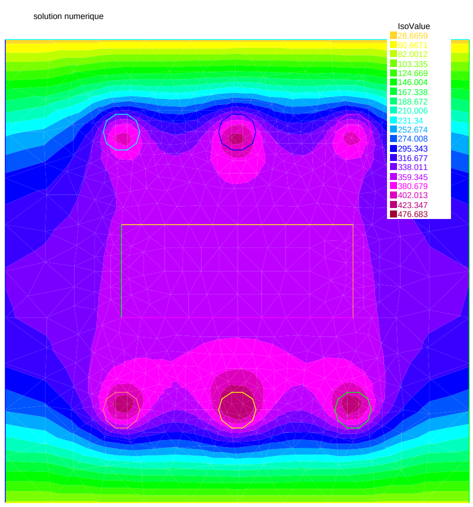


FIG. 9 – représentation sous freefem++ de la même solution du probleme lorsque 6 résistances chauffent avec température imposée sur Γ_1 et $\Gamma 3$

où C est le centre de la résistance, f la fonction correspondant à ψ, P le point courant (x, y), et où $xxxx, yyyy$ sont les deux pointeurs (variables globales) sur les deux variables qui stockent x, y dans l'interpréteur de la calculette.

Remarque : la classe `istringstream` (cf. exemple `http://www.ann.jussieu.fr/~hecht/ftp/InfoSci/stl/stringstream.cpp`) permet de faire de la lecture (même type de classe que `istream`) dans une chaine.

Dans l'interpréteur, on ajoute des conditions lorsque ce dernier évalue les différents caractères alphanumérique de la fonction ψ, pour qu'il puisse interpréter la fonction exponentielle et les variables y et R_r.

Q8) Modifier le programme de la question 6, pour qu'il utilise comme second membre f défini par l'équation (12) ou un problème direct raisonnable du type de la question 5.

Le second membre est redéfini via la fonction fr, qui prend comme argument la fonction0 v qui contient la fonction ψ telle qu'elle est écrite dans le fichier project.txt et les coordonnées du centre de la résistance qui chauffe.

Q9) Ecrire une interface en java pour définir le maillage, la fonction ψ et les centres des résistances, et qui lance le programme `C++`, en modifiant à volonter `pj3.java`.

Remarque 1 tous les fichiers sont stocker dans l'archive `http://www.ann.jussieu.fr/~hecht/ftp/InfoSci/file-pj3.tgz`, pour voir la liste des fichiers de l'archive faire

```
tar ztvf files-pj3.tgz
```

et pour extraire tous les fichiers faire (attention au possibilité d'écrasement de fichiers)

```
tar zxvf files-pj3.tgz
```

Annexe Voici le exemple de fichier `"projects.txt"` qui contient les données générer par l'interface java contient 5 lignes :

```
"exp( -(x*x+ y*y)*100.)/100."
0.3
0.4
200
0
```

ligne 1 définition de la fonction ψ entre `""`

ligne 2 et 3 donnent respectivement `cx` et `cy` telle que les 6 centres des resistances soit égales à :

$$(-cx, cy), \quad (0, cy), \quad (cx, cy), \quad (-cx, -cy), \quad (0, -cy), \quad (cx, -cy)$$

ligne 4 Valeur de la température cible.

ligne 5 Type de problème à résoudre directe ou optimisation

Le fichier pj3.java propose des champs éditables pour définir les centres des résistances, la fonction ψ, le rayon des résistances et ecrit dans le fichier project.txt qui va être lu par le programme Q8.cpp, qui va interpréter la syntaxe de ces objets et renvoyer une erreur si cette dernière est incorecte, sinon le programme C++ va résoudre le problème inverse avec ces valeurs et cette fonction ψ et créer le fichier ”solution2” qui contiendra la solution du problème direct en traçant les isocourbes de température visualisable sous gnuplot.

exemple de valeurs pour les coordonnées des centres des résistances, la fonction ψ sera prise égale à 0.5exp(-0.5($x^2 + y^2)/R_r$).

C_x=0.7 , C_y=0.8 , température=300 , R_r=0.1

Les valeurs des 6 résistances pour l'exemple1 sont :

$$\begin{cases} \text{résistance 1 : } 24099 \\ \text{résistance 2 : } 28679 \\ \text{résistance 3 : } 25719 \\ \text{résistance 4 : } 19076 \\ \text{résistance 5 : } 23373 \\ \text{résistance 6 : } 19062 \end{cases}$$

Autre exemple de valeurs pour les coordonnées des centres des résistances, la fonction ψ sera prise égale à 0.5exp(-0.5($x^2 + y^2)/R_r$).

C_x=0.4 , C_y=0.4 , température=250 , R_r=0.08

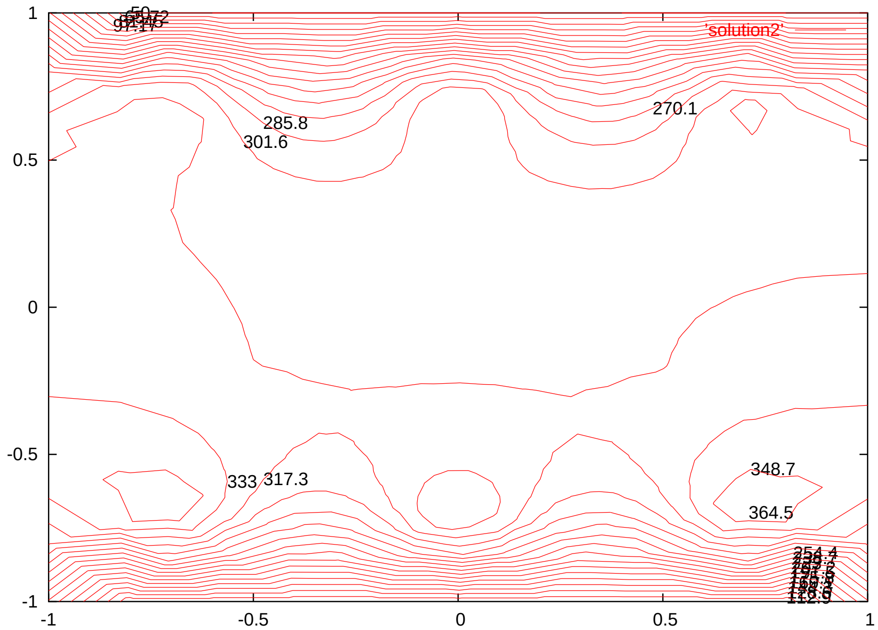


FIG. 10 – représentation sous gnuplot de la solution du probleme lorsque 6 résistances chauffent avec température imposée sur Γ_1 et $\Gamma 3$ en tenant compte des paramètres C_x,C_y,température,psi et R_r (exemple1)

Les valeurs des 6 résistances sont pour l'exemple2 :

$$\begin{cases} \text{résistance 1 : } 13536 \\ \text{résistance 2 : } 2853 \\ \text{résistance 3 : } 13813 \\ \text{résistance 4 : } 10995 \\ \text{résistance 5 : } 1538 \\ \text{résistance 6 : } 11016 \end{cases}$$

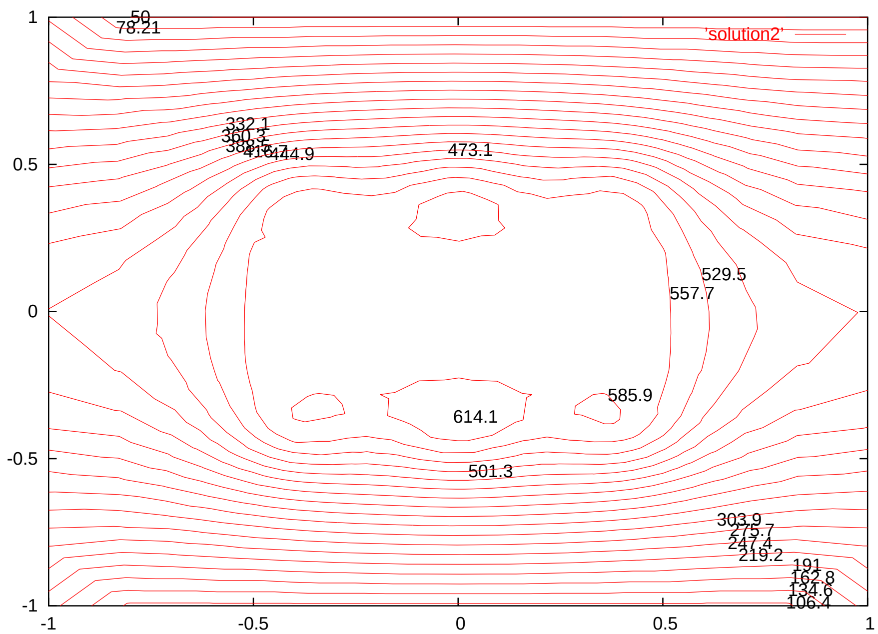


FIG. 11 – représentation sous gnuplot de la solution du probleme lorsque 6 résistances chauffent avec température imposée sur Γ_1 et $\Gamma 3$ en tenant compte des paramètres C_x,C_y,température,psi et R_r (exemple2)