Université Pierre et Marie Curie

Licence de Mathématiques B

# Topologie, Espaces Normés, Calcul Différentiel et Variable Complexe

par Jean Saint Raymond

*Version mise à jour le 1 Décembre 2003*

# 1

# LA DROITE RÉELLE

Tout au long de ce cours, nous utiliserons de façon essentielle le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, dont nous supposerons connues les principales propriétés :

- $\mathbb{R}$ est un corps commutatif pour les opérations $+$ et $\times$, qui contient le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.
- $\mathbb{R}$ est muni d'un ordre total $\leq$ qui étend celui de $\mathbb{Q}$ et qui est compatible avec les opérations de corps : la somme et le produit de deux éléments positifs sont positifs.
- $\mathbb{R}$ possède la *propriété de la borne supérieure* : toute partie $A$ de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.

En fait, on peut montrer l'existence d'un tel corps et son unicité à isomorphisme près. Nous démontrerons ici uniquement, à partir de ces propriétés de $\mathbb{R}$, que les rationnels forment une partie assez "dense" pour rencontrer tout intervalle. Les autres propriétés de $\mathbb{R}$ dont nous aurons besoin seront démontrées ultérieurement.

## 1.1 Densité des rationnels

**Lemme 1.1.1.** *Si $(K, \leq)$ est un corps totalement ordonné qui possède la propriété de la borne supérieure, alors $K$ est* archimédien, *c'est-à-dire que pour tout $a$ et tout $b$ positifs et non nuls, il existe un entier naturel $n$ tel que $a \leq n.b$*

Démonstration : Si on note $P$ l'ensemble des éléments positifs "infiniment petits" de $K$, c'est-à-dire des éléments $x$ tels que $n.x \leq 1$ pour tout entier $n$, il est clair que $P \neq \emptyset$ puisque $0 \in P$, et que 1 est un majorant de $P$. Si $K$ possède la propriété de la borne supérieure, il doit exister une borne supérieure $\varepsilon$ de $P$.
Si $\varepsilon > 0$, alors $\dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, et il existe un élément $\eta \in P$ tel que $\dfrac{\varepsilon}{2} < \eta < \varepsilon$, donc que $\varepsilon < 2\eta$. Mais alors, puisque $n.(2\eta) = (2n).\eta < 1$ pour tout $n$, $2\eta \in P$, et ceci contredit la définition de $\varepsilon$ comme borne supérieure de $P$.

Donc $\varepsilon = 0$. Alors, pour $a > 0$ et $b > 0$, $\dfrac{b}{a} \notin P$, et il existe $n$ tel que $n.\dfrac{b}{a} > 1$, donc $a < n.b$. ■

**Théorème 1.1.2.** *(Densité des rationnels) Soient $x$ et $y$ deux nombres réels, avec $x < y$. Alors il existe un nombre rationnel $q$ tel que $x < q < y$.*

Démonstration : Puisque $y - x > 0$, il résulte du lemme précédent qu'existe un entier $m \geq 1$ tel que $m.(y-x) \geq 2$, doù l'on déduit que $\dfrac{2}{m} \leq y - x$. On voit de même qu'il existe un entier $p_0 \geq 1$ tel que $p_0.\dfrac{1}{m} \geq x$ et $p_0.\dfrac{1}{m} \geq -x$. Alors l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels que $p\dfrac{1}{m} > x$ contient $p_0$ et est minoré par $-p_0$. Il contient donc un plus petit élément $p_1$, pour lequel on a :

$$(p_1 - 1)\frac{1}{m} \leq x < p_1.\frac{1}{m}$$

donc

$$p_1\frac{1}{m} \leq x + \frac{1}{m} < x + (y - x) = y$$

On en conclut que

$$x < q = \frac{p_1}{m} < y$$

ce qui montre que l'intervalle $]x, y[$ rencontre l'ensemble des rationnels. ■

**Corollaire 1.1.3.** *L'application $x \mapsto \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$ est une bijection croissante de l'ensemble des réels sur l'ensemble $\mathscr{C}$ des parties $C$ de $\mathbb{Q}$ qui vérifient :*

*i)* $C \neq \emptyset$ et $C \neq \mathbb{Q}$

*ii)* $q \in C$ et $q' < q \Rightarrow q' \in C$

*iii)* $q \in C \Rightarrow \exists q' > q \quad q' \in C$

*De fait, on peut donner une construction de $\mathbb{R}$ en munissant l'ensemble $\mathscr{C}$ ci-dessus de l'ordre $\subseteq$ et des opérations $+$ et $\times$ définies par*

$$C + C' = \{q + q' : q \in C \ , \ q' \in C'\}$$

*et*

$$C \times C' = \{q.q' : q > 0 \ , \ q \in C \ , \ q' \in C'\} \qquad \text{(pour } C \text{ tel que } 0 \in C \text{ )}$$

# 2

# TOPOLOGIE DES ESPACES MÉTRISABLES

## 2.1 Distances

Soit $E$ un ensemble. On veut définir sur $E$ une notion de "proximité" qui permette de donner un sens à la convergence des suites de points de $E$.

**Définition 2.1.1.** *On appelle* distance *sur un ensemble $E$ une fonction $d$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant pour tout $x$, tout $y$ et tout $z$ de $E$*

$$d(x,y) = 0 \iff x = y \tag{$i$}$$

$$d(x,y) = d(y,x) \tag{$ii$}$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \tag{$iii$}$$

**Définition 2.1.2.** *On appelle* espace métrique *un couple $(E,d)$ où $E$ est un ensemble et $d$ une distance sur $E$.*

**Définition 2.1.3.** *Dans un espace métrique $(E,d)$, on appelle* boule ouverte (resp. fermée) de centre $x$ et de rayon $r$ *l'ensemble des points $y$ de $E$ dont la distance à $x$ est strictement inférieure (resp. inférieure ou égale) à $r$.*

**Exemple 2.1.4.**

Sur la droite réelle $\mathbb{R}$, la fonction $d : (x,y) \mapsto |x-y|$ est une distance, pour laquelle les boules ouvertes sont des intervalles ouverts et les boules fermées des intervalles fermés.
Sur le plan complexe $\mathbb{C}$ la fonction $d : (z,w) \mapsto |z-w|$ est une distance, pour laquelle les boules ouvertes sont des disques ouverts et les boules fermées des disques fermés.

**Définition 2.1.5.** *Deux distances $d_1$ et $d_2$ sur l'ensemble $E$ sont dites* équivalentes *si pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que la boule $B_1(x,r_1)$ de centre $x$ et de rayon $r_1$ pour $d_1$ soit contenue dans la boule $B_2(x,r)$ de centre $x$ et de rayon $r$ pour $d_2$ et que la boule $B_2(x,r_2)$ soit contenue dans la boule $B_1(x,r)$.*

**Définition 2.1.6.** *Si $X$ est une partie d'un espace métrique $E$, on appelle diamètre de $X$ la borne supérieure (dans $[0,+\infty]$) des distances de deux points de $X$ :*

$$diam(X) = \sup_{x,y \in X} d(x,y)$$

## 2.2 Ouverts

**Définition 2.2.1.** *Une partie $U$ d'un espace métrique est dite* ouverte *si, pour tout point $x$ de $U$, il existe une boule ouverte de centre $x$ (et de rayon $> 0$) contenue dans $U$.*

*Une partie $F$ de $E$ est dite* fermée *si son complémentaire est ouvert*

En d'autres termes, $U$ est ouvert s'il est réunion de boules ouvertes. Il est clair que $\emptyset$ et $E$ sont des parties ouvertes (et fermées) de $E$.

**Théorème 2.2.2.** *Toute boule ouverte de l'espace métrique $E$ est ouverte. Toute boule fermée de l'espace métrique $E$ est fermée.*

Démonstration : Soit $y$ un point de la boule ouverte $B(x,r)$ de centre $x$ et de rayon $r$. On a $d(x,y) < r$. Si on note $\rho = r - d(x,y) > 0$, on a $B(y,\rho) \subset B(x,r)$ : en effet, si $z \in B(y,\rho)$,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \rho = r$$

ce qui montre que $z \in B(x,r)$.
De même, si $y$ n'appartient pas à la boule fermée $\tilde{B}$ de centre $x$ et de rayon $r$, on a $\rho = d(x,y) - r > 0$. Et la boule ouverte $B(y,\rho)$ est disjointe de $\tilde{B}$ : en effet, si $z \in B(y,\rho) \cap \tilde{B}$, on doit avoir

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r + \rho = d(x,y)$$

ce qui est absurde. Ceci prouve que $E \setminus \tilde{B}$ est ouvert, donc que $\tilde{B}$ est fermé. ■

**Théorème 2.2.3.** *L'intersection de deux ouverts est un ouvert. La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est ouverte.*

*La réunion de deux fermés est fermée. L'intersection d'une famille quelconque de fermés est fermée.*

Démonstration : Soient $U$ et $V$ deux ouverts. Si $x$ est un point de $U \cap V$, il existe $r > 0$ et $r' > 0$ tels que $B(x,r) \subset U$ et $B(x,r') \subset V$. Alors $r'' = \min(r,r') > 0$ et $B(x,r'') \subset U \cap V$.
Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille de parties ouvertes de $E$, si $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ et si $x \in U$, il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$, donc $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U_i$. Alors $B(x,r) \subset U$, ce qui prouve que $U$ est ouvert.
Les propositions analogues concernant les ensembles fermés s'en déduisent par passage au complémentaire. ■

**Théorème 2.2.4.** *Si $d_1$ et $d_2$ sont des distances équivalentes sur $E$, elles définissent les mêmes ouverts. Inversement, si $d_1$ et $d_2$ définissent les mêmes ouverts, elles sont équivalentes.*

Démonstration : Supposons les deux distances équivalentes. Si $B$ est une boule ouverte pour $d_1$, pour tout $x \in B$, il existe $r > 0$ tel que la boule $B_1(x,r)$ soit contenue dans $B$. Mais alors , il existe $r_2 > 0$ tel que $B_2(x,r_2) \subset B_1(x,r) \subset B$. Donc $B$ est réunion de boules ouvertes pour $d_2$, c'est-à-dire ouverte pour $d_2$. Et tout ouvert pour $d_1$, qui est réunion de boules ouvertes pour $d_1$ est donc réunion d'ouverts pour $d_2$, donc ouvert pour $d_2$. De même tout ouvert pour $d_2$ est ouvert pour $d_1$.
Inversement, si $d_1$ et $d_2$ définissent les mêmes ouverts, la boule de centre $x$ et de rayon $r$ pour $d_2$ est ouverte pour $d_1$ et contient $x$. Il existe donc un $r_1$ tel que $B_1(x,r_1)$ soit incluse dans $B_2(x,r)$. En inversant les rôles de $d_1$ et $d_2$, on obtient l'équivalence des distances. ■

**Définition 2.2.5.** *Si $F$ est une partie fermée non vide de l'espace métrique $E$, on appelle* distance d'un point $x$ de $E$ au fermé $F$ *le nombre positif ou nul*

$$d(x,F) = \inf_{z \in F} d(x,z)$$

**Théorème 2.2.6.** *La distance d'un point $x$ au fermé $F$ est nulle si et seulement si $x$ appartient à $F$. De plus, si $x$ et $y$ sont des points de $E$, on a*

$$|d(x,F) - d(y,F)| \leq d(x,y)$$

Démonstration : Si $x \in F$, on a clairement $0 \leq d(x,F) \leq d(x,x) = 0$. Inversement, si $x \notin F$, il existe une boule ouverte $B(x,r)$ disjointe de $F$, ce qui montre que, pour tout $y$ de $F$, $d(x,y) \geq r$, donc que $d(x,F) \geq r > 0$.
Si $z$ est un point quelconque de $F$, on a $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, donc, en passant à la borne inférieure $d(x,F) \leq d(x,y) + d(y,z)$ pour tout $z$ de $F$. Et passant à nouveau à la borne inférieure $d(x,F) \leq d(x,y) + d(y,F)$, c'est-à-dire $d(x,F) - d(y,F) \leq d(x,y)$. En intervertissant $x$ et $y$, on obtient $d(y,F) - d(x,F) \leq d(x,y)$, d'où l'inégalité cherchée. ■

## 2.3 Espaces topologiques

Plus généralement, on peut considérer la notion d'espace topologique. On appelle *espace topologique* un couple $(E,\mathscr{O})$ formé d'un ensemble $E$ et d'une topologie $\mathscr{O}$ sur $E$, c'est-à-dire un ensemble de parties de $E$ qu'on appelle les *ouverts* de $E$, satisfaisant les propriétés suivantes, dont nous avons vu qu'elles sont satisfaites pour les espaces métriques.

*i)* $E$ et $\emptyset$ appartiennent à $\mathscr{O}$

*ii)* $\mathscr{O}$ est stable par intersection finie.

*iii)* $\mathscr{O}$ est stable par union quelconque.

Les espaces topologiques les plus intéressants vérifient en outre la condition suivante :

**Définition 2.3.1.** *Un espace topologique $(E,\mathscr{O})$ est dit* séparé *si, pour tout couple $(x,y)$ de points distincts, il existe deux ouverts disjoints $U$ et $V$ contenant respectivement $x$ et $y$.*

**Théorème 2.3.2.** *Tout espace métrique est séparé.*

Démonstration : Soient en effet $x$ et $y$ deux points distincts de l'espace métrique $E$. Si on note $\delta = d(x,y) > 0$, $U = B(x,\delta/2)$ et $V = B(y,\delta/2)$, $U$ et $V$ sont des ouverts disjoints : en effet si $z$ appartenait à $U \cap V$, on aurait

$$\delta = d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

ce qui est absurde. ■

**Définition 2.3.3.** *Un point $a$ d'un espace topologique $E$ est dit* isolé *si le singleton $\{a\}$ est ouvert dans $E$.*

**Définition 2.3.4.** *Sur un ensemble $E$ on appelle* topologie discrète *la topologie pour laquelle toutes les parties de $E$ sont ouvertes.*

Un espace topologique est discret si et seulement si tous ses points sont isolés. Il est clair qu'un espace discret (c'est-à-dire muni de la topologie discrète) est séparé.

**Définition 2.3.5.** *Dans un espace topologique, une partie $V$ est appelée* voisinage *d'un point $x$ s'il existe un ouvert $U$ contenant $x$ et contenu dans $V$.*

Dans un espace métrique, $V$ est un voisinage de $x$ s'il existe une boule de rayon non nul centrée en $x$ et contenue dans $V$.

**Théorème 2.3.6.** *L'intersection de deux voisinages du point $x$ est un voisinage de $x$.*

DÉMONSTRATION : Soient $V_1$ et $V_2$ deux voisinages de $x$. Il existe donc deux ouverts $U_1$ et $U_2$ contenant $x$ et contenus respectivement dans $V_1$ et $V_2$. Alors $U_1 \cap U_2$ est un ouvert contenant $x$ et contenu dans $V_1 \cap V_2$., ce qui montre que $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de $x$. ■

**Théorème 2.3.7.** *Dans un espace topologique, une partie $X$ de $E$ est ouverte si et seulement si elle est un voisinage de chacun de ses points.*

DÉMONSTRATION : Par définition, un ouvert est voisinage de chacun de ses points. Inversement, si $X$ est voisinage de chacun de ses points, il existe pour tout $x \in X$ un ouvert $U_x$ contenant $x$ et inclus dans $X$. Alors $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ est ouvert, comme réunion d'une famille d'ouverts. ■

**Définition 2.3.8.** *Une famille $\mathscr{V}$ de parties d'un espace topologique $E$ est appelée* base de voisinages *d'un point $a$ si elle est formée de voisinages de $a$ et si tout voisinage de $a$ contient un élément $V$ de $\mathscr{V}$.*

Les boules centrées en $a$ dans un espace métrique forment une base de voisinages de $a$.
On peut définir une topologie $\mathscr{O}$ sur un ensemble $E$ en associant à chaque point $a$ de $E$ une famille $\mathscr{V}_a$ de parties de $E$ en sorte que $\mathscr{V}_a$ soit une base de voisinages de $a$. Les ouverts pour $\mathscr{O}$ seront alors les ensembles $U$ tels que, pour tout $x$ de $U$, il existe un $V \in \mathscr{V}_x$ tel que $V \subset U$, c'est-à-dire les ensembles qui sont voisinages de chacun de leurs points. Pour cela, on doit avoir les deux conditions suivantes :

*i)* $\forall a \in E,\ \forall V \in \mathscr{V}_a \quad a \in V$

*ii)* $\forall a \in E,\ \forall V \in \mathscr{V}_a,\ \exists W \in \mathscr{V}_a,\ \forall x \in W,\ \exists V_1 \in \mathscr{V}_x \quad V_1 \subset V$

La première condition signifie qu'un voisinage de $a$ contient $a$, et la seconde qu'un voisinage de $a$ est voisinage aussi de tous les points $x$ d'un voisinage de $a$.

## 2.4 Intérieur et adhérence

**Définition 2.4.1.** *Un point $x$ est dit* adhérent *à une partie $X$ de l'espace topologique $E$ si tout voisinage de $x$ rencontre $X$. La partie $X$ est dite* partout dense *dans $E$ (ou simplement* dense *dans $E$) si tout point de $E$ est adhérent à $X$.*

**Théorème 2.4.2.** *Si $X$ est une partie de l'espace topologique $E$, il existe un plus grand ouvert contenu dans $X$, qu'on appelle* l'intérieur *de $X$, et un plus petit fermé contenant $X$, qu'on appelle* l'adhérence *de $X$.*

DÉMONSTRATION : Si on note $\overset{\circ}{X}$ l'ensemble des points de $E$ dont $X$ est un voisinage, il est clair que $\overset{\circ}{X}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans $X$, donc que $\overset{\circ}{X}$ est ouvert,

contenu dans $X$, et qu'il contient tout ouvert contenu dans $X$. C'est donc le plus grand ouvert contenu dans $X$.
De même, on voit que l'ensemble $\bar{X}$ des points adhérents à $X$ est un fermé contenant $X$, et que tout fermé contenant $X$ contient $\bar{X}$. ■

## 2.5 Sous-espaces et produits

**Définition 2.5.1.** *Si $X$ est une partie d'un espace topologique $E$, l'ensemble $\mathscr{O}_X$ des parties de $X$ de la forme $X \cap U$ avec $U \in \mathscr{O}$, est une topologie sur $X$. L'ensemble $X$ muni de cette topologie est appelé* sous-espace topologique *de $E$.*

*Dans le cas où $(E, d)$ est un espace métrique, le sous-espace $X$ est l'espace topologique associé à l'espace métrique obtenu en munissant $X$ de la distance $d$ restreinte à $X \times X$.*

Il est clair que l'ensemble $\mathscr{O}_X$ est une topologie sur $X$ puisque $(X \cap U) \cap (X \cap V) = X \cap (U \cap V)$ et que $\bigcup_{i \in I}(X \cap U_i) = X \cap \bigcup_{i \in I} U_i$.
Si $d_X$ est la restriction de la distance $d$ à la partie $X$ de l'espace métrique $E$, il est clair que $d_X$ est une distance sur $X$, et que la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$ pour $d_X$ est la trace sur $X$ de la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$ pour $d$, donc que les ouverts de $X$, qui sont les réunions de boules ouvertes pour $d_X$ sont les traces sur $X$ des réunions de boules ouvertes pour $d$, c'est-à-dire d'ouverts de $E$.

**Définition 2.5.2.** *Soient $(E_1, d_1)$ et $(E_2, d_2)$ deux espaces métriques. Le* produit *de ces deux espaces est l'ensemble $E_1 \times E_2$ muni de la distance $\delta$ définie par*

$$\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d(x_1, y_1), d(x_2, y_2))$$

On peut remarquer que $\delta$ est équivalente à la distance $\delta_1$ définie par

$$\delta_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$$

puisque $\delta \leq \delta_1 \leq 2\,\delta$.
La boule de centre $(x_1, x_2)$ et de rayon $r$ est le produit $B_1 \times B_2$, où $B_i$ est la boule de centre $x_i$ et de rayon $r$ pour $d_i$ dans $E_i$ $(i = 1, 2)$. Si $U_1$ et $U_2$ sont deux ouverts de $E_1$ et $E_2$ respectivement, $U_1 \times U_2$ est ouvert dans $E_1 \times E_2$ : en effet, si $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B_1(x_1, r_1) \subset U_1$ et $B_2(x_2, r_2) \subset U_2$. Alors, si $r = \min(r_1, r_2) > 0$, la boule de centre $(x_1, x_2)$ et de rayon $r$ pour $\delta$ est incluse dans $U_1 \times U_2$.
On en déduit qu'une partie $X$ de $E_1 \times E_2$ est ouverte si elle est réunion d'ouverts "élémentaires" de la forme $U_1 \times U_2$. On peut généraliser ce qui précède à un nombre fini quelconque d'espaces métriques $(E_1, d_1)$, $(E_2, d_2)$, $\ldots$, $(E_n, d_n)$. On définit la distance $\delta$ par

$$\delta((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$$

et on obtient à nouveau qu'un ensemble est ouvert s'il est réunion d'ouverts "élémentaires" de la forme $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$, où les $U_i$ sont ouverts dans $E_i$.
Plus généralement encore, on définit le produit d'une suite d'espaces métriques $(E_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

**Définition 2.5.3.** *Soit $(E_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques. L'ensemble $E = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $x_n$ appartient à $E_n$ pour tout $n$. On munit $E$ de la distance $\delta$ définie par*

$$\delta((x_n),(y_n)) = \max_{n\in\mathbb{N}}(\min(2^{-n}, d_n(x_n, y_n)))$$

En fait, on utilise très rarement une distance explicite sur l'espace produit, et toute distance équivalente à $\delta$ convient aussi bien.

**Théorème 2.5.4.** *Un ensemble $X$ est ouvert dans le produit des $E_n$ s'il est réunion d'ouverts élémentaires de la forme $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$, où les $U_n$ sont ouverts dans $E_n$ et égaux à $E_n$ pour tout $n$ assez grand.*

Démonstration : Si $X$ est ouvert dans $E = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$, et si $x = (x_n)$ appartient à $X$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $y = (y_n)$, $\delta(x, y) < r \Rightarrow y \in X$. Si $2^{-m} < r$ et si on définit

$$U_n = \begin{cases} \{y_n \in E_n : d_n(y_n, x_n) < r\} & \text{si } n \le m \\ E_n & \text{si } n > m \end{cases}$$

alors, pour tout $y = (y_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$, $\delta(x, y) < \max(r, 2^{-m}) = r$, donc $y \in X$, c'est-à-dire que $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset X$.
Inversement, si $X$ est réunion d'ouverts élémentaires, pour tout $x = (x_n)$ de $X$, il existe des ouverts $U_n$ contenant les $x_n$ tels que $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset X$ et que $U_n = E_n$ si $n > m$. On choisit alors, pour $n \le m$ un $r_n > 0$ tel que la boule de centre $x_n$ et de rayon $r_n$ dans $E_n$ soit contenue dans $U_n$. Si on pose alors

$$r = \min(2^{-m}, \min_{n\le m} r_n)$$

on a $r > 0$ et si $\delta(x, y) < r$, on a $y_n \in U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $y \in X$, c'est-à-dire que $X$ contient la boule de centre $x$ et de rayon $r$, donc que $X$ est ouvert. ■
Plus généralement encore, si $(E_i)$ est une famille d'espaces topologiques, on définit sur l'ensemble produit $\prod_{i\in I} E_i$ une topologie pour laquelle les ouverts sont les réunions d'ouverts élémentaires, c'est-à-dire de produits $\prod_{i\in I} U_i$, où les $U_i$ sont ouverts dans $E_i$ et tous égaux à $E_i$ sauf un nombre fini d'entre eux.

**Théorème 2.5.5.** *Un espace topologique $E$ est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, y) \in E \times E : x = y\}$ de $E$ est fermée dans $E \times E$.*

Démonstration : Supposons $E$ séparé, et $(x, y) \in E \times E \setminus \Delta$. Alors $x \ne y$ et il existe deux ouverts disjoints $U$ et $V$ dans $E$ contenant respectivement $x$ et $y$. Alors $U \times V$ est un voisinage ouvert de $(x, y)$ dans $E \times E$, qui est disjoint de $\Delta$.
Inversement, si $\Delta$ est fermé et si $x \ne y$, le point $(x, y)$ n'appartient pas à $\Delta$, et il existe un voisinage ouvert $W$ de $(x, y)$ qui est disjoint de $\Delta$. Par définition de la topologie de $E \times E$, $W$ contient un ouvert élémentaire $U \times V$, qui lui-même contient $(x, y)$. Alors $U$ et $V$ sont des ouverts disjoints de $E$, contenant respectivement $x$ et $y$. Donc $E$ est séparé. ■

## 2.6 Suites convergentes

Rappelons qu'une suite dans un ensemble $E$ est une application : $n \mapsto x_n$ de $\mathbb{N}$ dans $E$.

**Définitions 2.6.1.** *On dit que la suite $(x_n)$* converge *vers $x$ dans l'espace topologique $E$ si pour tout voisinage $V$ de $x$ il existe un entier $m$ tel que $x_n \in V$ pour $n > m$ (c'est-à-dire que les $x_n$ appartiennent tous à $V$ sauf un nombre fini). On dit alors que $x$ est* limite *de la suite $(x_n)$.*

*On dit que $x$ est* point d'accumulation *ou* valeur d'adhérence *de la suite $(x_n)$ si tout voisinage $V$ de $x$ contient une infinité de termes de la suite.*

**Théorème 2.6.2.** *Si $X$ est une partie de $E$ et si $(x_n)$ est une suite de points de $X$, toute valeur d'adhérence, et en particulier toute limite, de la suite $(x_n)$ appartient à l'adhérence de $X$.*

Démonstration : En effet, si $x$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)$, tout voisinage de $x$ contient des points de la suite, donc des points de $X$. ■

**Théorème 2.6.3.** *Dans un espace topologique séparé (en particulier dans un espace métrique), une suite a au plus une limite.*

Démonstration : Si $x$ et $x'$ sont deux limites distinctes de la suite $(x_n)$, il doit exister deux voisinages disjoints $V$ et $V'$ de $x$ et $x'$ respectivement, donc deux entiers $m$ et $m'$ tels que $x_n$ appartienne à $V$ pour $n > m$ et à $V'$ pour $n > m'$. Alors pour $n > \max(m, m')$, $x_n$ doit appartenir à $V \cap V' = \emptyset$, ce qui est absurde. ■

**Théorème 2.6.4.** *Dans un espace métrique, tout point adhérent à une partie $X$ est limite d'une suite d'éléments de $X$.*

Démonstration : Soit en effet $x \in \bar{X}$. Pour tout entier $n$, il existe un point $x_n$ de $X$ dans la boule $B(x, 2^{-n})$, qui est un voisinage ouvert de $x$. Alors la suite $(x_n)$ converge vers $x$. En effet, tout voisinage $V$ de $x$ contient une boule ouverte $B(x, r)$, donc tous les points $x_n$ pour $n > m$, si $m$ vérifie $2^{-m} \leq r$. ■

**Définition 2.6.5.** *Soient $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites dans $E$. On dit que la suite $(y_n)$ est* extraite *de la suite $(x_n)$ (ou que $(y_n)$ est une* sous-suite *de la suite $(x_n)$) s'il existe une injection croissante $j : k \mapsto n_k$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $y_k = x_{n_k}$ pour tout entier $k$.*

Si $H$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, il existe une seule injection croissante $j$ de $\mathbb{N}$ dans lui-même telle que $H = j(\mathbb{N})$. Une sous-suite de la suite $(x_n)$ est donc entièrement définie par l'ensemble $H$ des indices $n$ tels que $x_n$ soit un terme de cette sous-suite. Si la suite extraite correspondante est convergente, on notera alors $\lim_{n\to\infty, n\in H} x_n$ sa limite.

**Théorème 2.6.6.** *Si $x$ est une valeur d'accumulation d'une suite $(x_n)$ dans un espace métrique, il existe une sous-suite de la suite $(x_n)$ qui converge vers $x$.*

Démonstration : Si on définit par récurrence sur $k$, $n_0 = 0$ et $n_{k+1} = \min\{n > n_k : d(x_n, x) < 2^{-k}\}$ pour $k \geq 0$, l'entier $n_k$ est défini pour tout $k$ si $x$ est valeur d'accumulation de $(x_n)$, et on a clairement $n_{k+1} > n_k$. Enfin la suite $(y_k) = (x_{n_k})$ converge vers $x$. ■

**Proposition 2.6.7.** *Une partie $X$ d'un espace métrique est fermée si et seulement si elle contient la limite de chacune de ses suites convergentes.*

Démonstration : Si $X$ est fermé et si $(x_n)$ est une suite de points de $X$ qui converge vers $x$, $x \in \bar{X} = X$. Inversement, si $X$ contient les limites de ses suites convergentes et si

$x$ est un point adhérent à $X$, il existe une suite de points de $X$ qui converge vers $x$ ; il en résulte que $x \in X$. Donc $X$ contient tous ses points adhérents, et $X = \bar{X}$ est fermé. ■

**Théorème 2.6.8.** *Une suite $(x^n)$ dans un produit d'espaces topologiques $(E_i)_{i \in I}$ converge vers $x = (x_i)$ si et seulement si, pour tout $i \in I$, la suite $(x_i^n)$ converge vers $x_i$.*

Ceci se déduit aisément de la définition des voisinages ouverts élémentaires de $x$.
L'énoncé suivant sera utilisé ultérieurement à plusieurs reprises dans l'étude de la compacité.

**Lemme 2.6.9.** *(Lemme diagonal de Cantor) Soit $(H_n)$ une suite décroissante de parties infinies de $\mathbb{N}$. Alors il existe une partie infinie $H$ de $\mathbb{N}$ qui est presque incluse dans chacune des $H_n$, c'est-à-dire que tous les éléments de $H$ sauf un nombre fini appartiennent à $H_n$ (ou que les ensembles $(H \setminus H_n)$ sont des ensembles finis).*

Démonstration : Si on définit $n_k$ comme le $k^{\text{ème}}$ élément de $H_k$ (pour l'ordre usuel des entiers), et $H$ comme l'ensemble des $n_k$ pour $k \in \mathbb{N}$, il suffit de vérifier — que la suite $(n_k)$ est strictement croissante : le $k+1^{\text{ème}}$ élément de $H_{k+1}$ est supérieur au $k+1^{\text{ème}}$ élément de $H_k$ puisque $H_{k+1} \subset H_k$, donc strictement supérieur au $k^{\text{ème}}$ élément de $H_k$ — et que $n_k$ appartient à $H_n$ si $k \geq n$ puisque alors $H_k \subset H_n$. ■

## 2.7 Applications continues

**Définition 2.7.1.** *Soit $f$ une application d'un espace topologique $E$ dans un espace topologique $F$. On dit que $f$ est* continue en $a$ *si pour tout voisinage $W$ de $f(a)$, il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f(V) \subset W$.*

Intuitivement, si $f$ est continue en $a$ les images des points "assez proches" de $a$ sont proches de $f(a)$. Si $f$ est continue en $a$ et si $W$ est un voisinage de $f(a)$, $f^{-1}(W)$, qui contient le voisinage $V$ de $a$ est lui-même un voisinage de $a$. Inversement, si $f^{-1}(W)$ est un voisinage de $a$, on a $f(V) \subset W$, pour le voisinage $V = f^{-1}(W)$ de $a$.

**Théorème 2.7.2.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces topologiques, et $f$ une application de $E$ dans $F$. Si $U$ est un voisinage de $a \in E$ et si la restriction $f|_U : U \to F$ de $f$ à $U$ est continue en $a$, $f$ est continue en $a$.*

Démonstration : Si $W$ est un voisinage de $f(a)$, $U \cap f^{-1}(W) = (f|_U)^{-1}(W)$ est un voisinage de $a$ dans $U$, donc la trace sur $U$ d'un voisinage $V$ de $a$ dans $E$. Et puisque $U \cap V$, intersection de deux voisinages de $a$ dans $E$, est un voisinage de $a$ dans $E$, on a

$$U \cap V = U \cap f^{-1}(W) \subset f^{-1}(W)$$

ce qui montre que $f^{-1}(W)$ est un voisinage de $a$ dans $E$, donc que $f$ est continue en $a$. ■

**Définition 2.7.3.** *Soit $f$ une application d'un espace topologique $E$ dans un espace topologique $F$. On dit que $f$ est continue sur $E$ si elle est continue en chaque point de $E$.*

L'énoncé suivant est fondamental pour caractériser les fonctions continues.

**Théorème 2.7.4.** *Pour une fonction $f$ de $E$ dans $F$ les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

*i)* *$f$ est continue.*

*ii)* *Pour tout ouvert $U$ de $F$, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans $E$.*

*iii)* *Pour tout fermé $A$ de $F$, $f^{-1}(A)$ est fermé dans $E$.*

DÉMONSTRATION : Si $f$ est continue et si $U$ est ouvert dans $F$, $f^{-1}(U)$ est voisinage de chacun de ses points : si $a \in f^{-1}(U)$, $f(a) \in U$ et $U$ est voisinage de $f(a)$, donc $f^{-1}(U)$ est voisinage de $a$.
Si l'image réciproque de tout ouvert est ouverte, et si $A$ est fermé dans $F$, $E \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(F \setminus A)$ est ouvert puisque $F \setminus A$ l'est ; donc $f^{-1}(A)$ est fermé.
Enfin, si l'image réciproque de tout fermé est fermée, si $a \in E$ et si $W$ est un voisinage de $f(a)$, le point $f(a)$ n'appartient pas à l'adhérence $A$ de $F \setminus W$. Donc $a$ n'appartient pas au fermé $f^{-1}(A)$, et il existe un voisinage $V$ de $a$ qui est disjoint de $f^{-1}(A)$. Alors $f(V)$ est disjoint de $A$, donc contenu dans $W$. ∎

**Corollaire 2.7.5.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces topologiques, $f$ une fonction de $E$ dans $F$, $A$ et $B$ deux fermés de $E$ tels que $E = A \cup B$. Si les restrictions de $f$ à $A$ et à $B$ sont continues, alors $f$ est continue.*

DÉMONSTRATION : Il suffit de montrer que $f^{-1}(H)$ est fermé dans $E$ pour tout fermé $H$ de $F$. Or

$$f^{-1}(H) = f^{-1}(H) \cap (A \cup B) = \Big(A \cap f^{-1}(H)\Big) \cup \Big(B \cap f^{-1}(H)\Big)$$

et puisque $A_1 = A \cap f^{-1}(H)$ est l'image réciproque de $H$ par $f_{|A}$, $A_1$ est fermé dans $A$, donc dans $E$ puisque $A$ est un fermé de $E$. Pour la même raison $B_1 = A \cap f^{-1}(H)$ est fermé dans $E$, et $f^{-1}(H) = A_1 \cup B_1$ est fermé dans $E$. ∎

**Théorème 2.7.6.** *Si $E$ et $F$ sont des espaces métriques, si $f$ est une application de $E$ dans $F$ et $a$ un point de $E$, $f$ est continue en $a$ si et seulement si toute suite $(x_n)$ qui converge vers $a$ a une image par $f$ qui converge vers $f(a)$.*

DÉMONSTRATION : Si $(x_n)$ converge vers $a$ et si $f$ est continue en $a$, il existe pour tout voisinage $W$ de $f(a)$ un voisinage $V$ de $a$ tel que $f(V) \subset W$, donc un entier $m$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n > m$. Alors, pour tout $n > m$, $f(x_n) \in W$, c'est-à-dire que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.
Inversement, si $f$ est discontinue en $a$, il existe un voisinage $W$ de $f(a)$ tel que $X = f^{-1}(W)$ ne soit pas un voisinage de $a$. Pour tout entier $n$, la boule de centre $a$ et de rayon $2^{-n}$ n'est pas incluse dans $X$. On peut donc trouver un point $x_n$ dans cette boule qui n'appartienne pas à $X$. Puisque $d(a, x_n) < 2^{-n}$, la suite $(x_n)$ converge vers $a$, mais la suite $(f(x_n))$ dont aucun terme n'appartient à $W$ ne converge pas vers $f(a)$. ∎

**Théorème 2.7.7.** *Si $E$, $F$ et $G$ sont trois espaces topologiques, $f$ et $g$ des applications continues de $E$ dans $F$ et de $F$ dans $G$ respectivement, alors $g \circ f$ est continue de $E$ dans $G$.*

DÉMONSTRATION : En effet, si $U$ est un ouvert de $G$, $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. L'ensemble $V = g^{-1}(U)$ est ouvert dans $F$ puisque $g$ est continue, et $f^{-1}(V)$ est ouvert dans $E$ puisque $f$ est continue. ∎

**Théorème 2.7.8.** *Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Si $X$ est une partie de $F$ qui contient $f(E)$, $f$ est continue de $E$ dans $F$ si et seulement si elle est continue de $E$ dans le sous-espace $X$ de $F$.*

DÉMONSTRATION : Si $f$ est continue de $E$ dans $F$, et si $U$ est un ouvert de $X$, il existe un ouvert $V$ de $F$ tel que $U = X \cap V$. Alors $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ est ouvert dans $E$.
Inversement si $f$ est continue de $E$ dans $X$ et si $V$ est un ouvert de $F$, $f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap X)$ qui est ouvert dans $E$ puisque $V \cap X$ est un ouvert de $X$. ■

Si $f$ est une application de $E$ dans un espace produit $\prod_{i \in I} F_i$, $f$ est déterminée par ses applications coordonnées $(f_i)$ de $E$ dans $F_i$ :

$$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$

**Théorème 2.7.9.** *Une application $f$ de $E$ dans un espace produit est continue si et seulement si ses applications coordonnées sont continues.*

DÉMONSTRATION : Remarquons d'abord que les applications projections $\pi_j : \prod_{i \in I} F_i \to F_j$ sont continues. En effet, si $U_j$ est ouvert dans $F_j$, l'ensemble $\pi_j^{-1}(U_j)$ est un ouvert élémentaire $U_j \times \prod_{i \neq j} F_i$. Il en résulte que si $f$ est continue, $f_j = \pi_j \circ f$ est continue.
Inversement, si les $f_i$ sont toutes continues et si $U = \prod U_i$ est un ouvert élémentaire, on a $f^{-1}(U) = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(U_i)$. Cet ensemble est une intersection d'ouverts tous égaux à $E$ sauf pour les $i$ appartenant à une partie finie $J$ de $I$. Alors $f^{-1}(U) = \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i)$ qui est ouvert. Et puisque un ouvert de $\prod F_i$ est réunion d'ouverts élémentaires, son image réciproque par $f$ est un ouvert de $E$. ■

**Théorème 2.7.10.** *La somme et le produit sont des applications continues de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION : Si $(a, b)$ et $(x, y)$ sont deux points de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} d((x + y), (a + b)) &= |(x + y) - (a + b)| = |(x - a) + (y - b)| \leq |x - a| + |y - b| \\ &\leq d(x, a) + d(y, b) \leq 2 \max(d(x, a), d(y, b)) = 2\, d((x, y), (a, b)) \end{aligned}$$

Il suffit donc que la distance de $(x, y)$ à $(a, b)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ soit inférieure à $r/2$ pour que la distance de $(x + y)$ à $(a + b)$ dans $\mathbb{R}$ soit inférieure à $r$, ce qui prouve la continuité de la somme en $(a, b)$.
De même, si $(a, b)$ et $(x, y)$ sont deux points de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} d(xy, ab) = |xy - ab| &= |(x - a)(y - b) + a(y - b) + (x - a)b| \\ &\leq |x - a|\,|y - b| + |a|\,|y - b| + |b|\,|x - a| \end{aligned}$$

Si $r > 0$ et si $\delta = \min(1, \dfrac{r}{1 + |a| + |b|})$, on a pour $(x, y)$ dans la boule de centre $(a, b)$ et de rayon $\delta$ : $|x - a| < 1$, $|x - a| < \delta$ et $|y - b| < \delta$. Donc

$$d(xy, ab) \leq \delta(1 + |a| + |b|) \leq r$$

ce qui achève de prouver la continuité du produit en $(a, b)$. ■

**Théorème 2.7.11.** *L'inversion $x \mapsto 1/x$ est continue de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration : Si $x$ et $a$ sont non nuls, on a

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{x-a}{ax}\right| \leq \frac{|x-a|}{|a|\,(|a| - |x-a|)}$$

Donc si $r > 0$, et si $\delta = \min(\frac{|a|}{2}, \frac{ra^2}{2})$, on a, pour $x$ dans la boule de centre $a$ et de rayon $\delta$, $|a| - |x-a| \geq \frac{|a|}{2}$, donc $d(1/x, 1/a) < r$, ce qui prouve la continuité de l'inversion en $a$. ∎

**Théorème 2.7.12.** *La somme et le produit sont continus de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et l'inversion est continue de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$.*

La démonstration utilise exactement les mêmes inégalités que pour le cas réel.

**Corollaire 2.7.13.** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues de l'espace topologique $E$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, $f+g$ et $fg$ sont continues. De plus, si $f$ ne s'annule pas, $1/f$ est continue.*

Démonstration : La fonction $h : E \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (resp. $E \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$) dont les fonctions coordonnées sont $f$ et $g$ est continue d'après le théorème 2.7.9. Il suffit donc de voir que $f+g$ et $fg$ sont les composées de $h$ avec la somme et le produit, et que $1/f$ est la composée de $f$ et de l'inversion de $\mathbb{R}^*$ (resp $\mathbb{C}^*$). ∎

**Définition 2.7.14.** *Une application $f$ d'un espace métrique $E$ dans un espace métrique $F$ est dite $k$-*lipschitzienne *(avec $k \in \mathbb{R}^+$) si pour tout $x$ et tout $y$ de $E$ on a*

$$d(f(x), f(y)) \leq k.\, d(x,y)$$

**Théorème 2.7.15.** *Si $f$ est lipschitzienne (c'est-à-dire $k$-lipschitzienne pour un certain $k$), $f$ est continue.*

Démonstration : En effet, la boule de centre $x$ et de rayon $r/k$ est contenue dans l'image réciproque par $f$ de la boule de centre $f(x)$ et de rayon $r$. ∎

**Corollaire 2.7.16.** *La fonction valeur absolue est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$. La fonction module est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^+$.*

Démonstration : L'inégalité

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x-y|$$

montre que cette fonction est 1-lipschitzienne, donc continue. On en déduit comme plus haut que la valeur absolue d'une fonction réelle continue (ou le module d'une fonction complexe continue) est continue. ∎

**Théorème 2.7.17.** *Si $E$ est un espace métrique, la distance est une fonction continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration : Soient $(x,y)$ et $(x',y')$ deux points de $E$×E. On a

$$d(x',y') \leq d(x,x') + d(x,y) + d(y,y')$$

donc

$$d(x',y') - d(x,y) \leq d(x,x') + d(y,y') \leq 2\,\max(d((x,x'), d(y,y')) = 2\,d((x,y),(x',y'))$$

et par symétrie

$$|d(x',y') - d(x,y)| \leq 2\,d((x,y),(x',y'))$$

ce qui montre que la fonction $d$ est 2-lipschitzienne donc continue. ∎

**Théorème 2.7.18.** *Si $E$ est un espace métrique, et $F$ un fermé non vide de $E$, la fonction distance à $F$ est continue.*

DÉMONSTRATION : On a prouvé au théorème 2.2.6 l'inégalité $|d(x, F) - d(y, F)| \leq d(x, y)$. Il en résulte que la fonction distance à $F$ est 1-lipschitzienne, donc continue. ■

**Théorème 2.7.19.** *Soient $E$ un espace topologique, $a$ un point de $E$, $F$ un espace métrique et $f$ une application de $E$ dans $F$. On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f_\varepsilon$ de $E$ dans $F$ continue en $a$, vérifiant pour tout $x$ de $E$ : $d(f(x), f_\varepsilon(x)) \leq \varepsilon$. Alors $f$ est continue en $a$.*

DÉMONSTRATION : Soit $r > 0$. On cherche un voisinage $W$ de $a$ tel que $f(W) \subset B(f(a), r)$. Prenons $\varepsilon = r/3$, et choisissons une fonction $f_\varepsilon$ vérifiant la condition ci-dessus. Puisque $f_\varepsilon$ est continue en $a$, il existe un voisinage $W$ de $a$ tel que $f_\varepsilon(W) \subset B(f_\varepsilon(a), \varepsilon)$. Alors, pour tout $x$ de $W$ on a

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_\varepsilon(x)) + d(f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(a)) + d(f_\varepsilon(a), f(a)) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = r$$

puisque $d(f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(a)) < \varepsilon$, ce qui entraîne que $f(x)$ appartient à la boule ouverte de centre $f(a)$ et de rayon $r$. ■

**Définition 2.7.20.** *On dit qu'une suite $(f_n)$ de fonctions de l'ensemble $X$ dans l'espace métrique $E$* converge uniformément *vers une fonction $f$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m$ tel que, pour tout $x \in X$ et tout $n > m$, on ait $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.*

**Théorème 2.7.21.** *Si la suite $(f_n)$ de fonctions continues de l'espace topologique $X$ dans l'espace métrique $E$ converge uniformément vers $f$, la fonction $f$ est continue.*

DÉMONSTRATION : Ceci résulte immédiatement du théorème 2.7.19, appliqué à tout point $a$ de $X$. ■

## 2.8 Homéomorphismes

Si $f$ est une bijection continue de l'espace $E$ sur l'espace $F$, il n'est pas toujours vrai que $f^{-1}$ soit continue de $F$ sur $E$. Par exemple, si $\mathbb{N}$ est le sous-espace de $\mathbb{R}$ formé des entiers naturels, et si $f$ est définie par

$$f(n) = \frac{n}{1 + n^2}$$

l'espace $F$ étant le sous-espace $f(\mathbb{N})$ de $\mathbb{R}$, l'application $f$ est continue : puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, la boule ouverte de $\mathbb{N}$ de centre $n$ et de rayon 1 est égale à $\{n\}$, toute partie de $\mathbb{N}$ est ouverte dans $\mathbb{N}$ ; l'image réciproque par $f$ de tout ouvert de $F$ est donc ouverte dans $\mathbb{N}$. Cependant la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(0) = 0$, alors que la suite $(n)$ ne converge pas vers 0, ce qui montre que $f^{-1}$ n'est pas continue.

**Définition 2.8.1.** *On dit que $f$ est un* homéomorphisme *de $E$ sur $F$ si $f$ est bijective et continue de $E$ sur $F$ et si $f^{-1}$ est continue de $F$ sur $E$.*

*On dit que $E$ et $F$ sont* homéomorphes *s'il existe un homéomorphisme de $E$ sur $F$.*

**Exemples 2.8.2.** *La droite réelle $\mathbb{R}$ est homéomorphe à tout intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. La droite réelle est homéomorphe à un cercle privé d'un point.*

Démonstration : La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ est continue et bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Et comme la fonction $\varphi^{-1}$ est définie par $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$, on voit que $\varphi^{-1}$ est continue de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$. Ceci prouve que $\mathbb{R}$ est homéomorphe à l'intervalle $]-1,1[$. Et comme il est clair que deux intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes par une transformation affine, le premier résultat est prouvé.
Si $\varphi$ est maintenant la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}, \frac{1}{1+x^2}\right)$$

on voit aisément que $\varphi$ est continue et bijective de $\mathbb{R}$ sur le cercle d'équation $X^2+Y^2-Y=0$, privé de $(0,0)$. Et puisque $\varphi^{-1}(X,Y) = X/Y$, on voit que $\varphi^{-1}$ est continue. ∎

**Remarque 2.8.3.** *(Droite achevée)*

On appelle *droite achevée* l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Puisque $\mathbb{R}$ est homéomorphe à l'intervalle $]-1,1[$ par la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ on peut prolonger $\varphi$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $\varphi(-\infty) = -1$ et $\varphi(+\infty) = 1$. Et on munit $\overline{\mathbb{R}}$ de la topologie pour laquelle $\varphi$ est un homéomorphisme avec l'intervalle fermé $[-1,1]$.

**Définition 2.8.4.** *Un espace topologique $E$ est dit* métrisable *s'il est homéomorphe à un espace métrique.*

Ceci revient à dire qu'il existe sur $E$ une distance qui définit la topologie. Naturellement, une topologie métrisable peut être définie par plusieurs distances. On a déjà vu que deux distances définissent la même topologie si et seulement si elles sont équivalentes. On peut en donner un autre énoncé.

**Théorème 2.8.5.** *Deux distances $d_1$ et $d_2$ sur un ensemble $E$ définissent la même topologie si et seulement si elles ont les mêmes suites convergentes.*

Démonstration : Si $d_1$ et $d_2$ définissent la même topologie $\mathscr{O}$, une suite $(x_n)$ converge vers $x$ pour $d_1$ si elle converge pour la topologie $\mathscr{O}$, et de même pour $d_2$.
Inversement, si toute suite qui converge pour $d_1$ converge pour $d_2$, la limite est la même : si la suite $(x_n)$ converge vers $x$ pour $d_1$, la suite $(y_n)$ définie par $y_{2n} = x_n$ et $y_{2n+1} = x$ converge vers $x$ pour $d_1$ donc aussi pour $d_2$ ; La limite pour $d_2$ de la suite $(y_{2n})$ est donc la même que la limite pour $d_2$ de la suite constante $(y_{2n+1})$, c'est-à-dire $x$. Et puisque un ensemble $X$ est fermé pour $d_1$ si toute suite convergente de points de $X$ a sa limite dans $X$, on voit que les ensembles fermés pour $d_1$ et pour $d_2$ coïncident. Donc $d_1$ et $d_2$ définissent la même topologie. ∎

**Définition 2.8.6.** *Une application $f$ d'un espace métrique $E$ dans un espace métrique $F$ est appelée une* isométrie *si, pour tout $x$ et tout $y$ de $E$ on a*

$$d(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

Il est clair qu'une isométrie de $E$ dans $F$ est un homéomorphisme de $E$ sur le sous-espace $f(E)$ de $F$ : $f$ et $f^{-1}$ sont alors 1-lipschitziennes.

## 2.9 Continuité uniforme

Si $f$ est une fonction continue de l'espace métrique $E$ dans l'espace métrique $F$, il existe pour tout $r > 0$ et tout $x$ de $E$ un $\delta$ tel que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), r)$. En général, pour un $r$ donné le $\delta$ va dépendre de $x$, et il se peut qu'aucun $\delta$ ne puisse être valable simultanément pour tous les $x$. La propriété qu'on va introduire maintenant est donc plus forte que la continuité. On verra néanmoins ultérieurement que dans certains cas, elle est équivalente à la continuité.

**Définition 2.9.1.** *On dit que la fonction $f$ de l'espace métrique $E$ dans l'espace métrique $F$ est* uniformément continue *si, pour tout $r > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x$ et tout $y$ de $E$*

$$d(x, y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d(f(x), f(y)) < r$$

Il est clair que si $f$ est $k$-lipschitzienne, elle est uniformément continue : il suffit de prendre $\delta = r/k$, avec les notations précédentes.

## 2.10 Espaces métriques séparables

**Définition 2.10.1.** *Un espace topologique est dit* séparable *s'il contient une partie dénombrable partout dense.*

Par exemple, $\mathbb{R}$, qui contient le sous-ensemble dénombrable dense $\mathbb{Q}$ des rationnels est séparable.

**Théorème 2.10.2.** *Si l'espace métrique $E$ est séparable, il existe dans $E$ une famille dénombrable $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts telle que tout ouvert de $E$ soit la réunion d'une sous-famille de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Une telle famille est appelée* base de la topologie.

Démonstration : Soit $D$ une partie dénombrable dense dans $E$. La famille $\mathscr{B}$ de toutes les boules ouvertes $B(x, r)$ où $x$ appartient à $D$ et $r$ est rationnel est dénombrable, donc peut être énumérée en une suite $(U_n)$. Si $O$ est un ouvert de $E$ et si $H = \{n \in \mathbb{N} : U_n \subset O\}$, on a clairement

$$\bigcup_{n \in H} U_n \subset O$$

De plus, si $x \in O$, il existe $\rho >$ tel que $B(x, \rho) \subset O$, donc $r > 0$ rationnel tel que $2r < \rho$ et $a \in D$ tel que $d(x, a) < r$. Alors $B(a, r) \in \mathscr{B}$, $x \in B(a, r)$ et

$$B(a, r) \subset B(x, 2r) \subset B(x, \rho) \subset O$$

Donc il existe un entier $n$ tel que $U_n = B(a, r)$ et $n \in H$, d'où l'on déduit que $x \in \bigcup_{n \in H} U_n$ et que $O = \bigcup_{n \in H} U_n$. ■

**Théorème 2.10.3.** *Si la topologie de l'espace métrique $E$ possède une base dénombrable, $E$ est séparable.*

DÉMONSTRATION : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle base. Pour chaque entier $n$ tel que $U_n \neq \emptyset$, on choisit un point $x_n$ dans $U_n$. Alors l'ensemble $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $E$ : soient en effet $a \in E$ et $\varepsilon > 0$. Alors l'ouvert $B(a, \varepsilon)$, réunion d'une sous-famille des $(U_n)$, contient un $U_{n_0}$ tel que $a \in U_{n_0}$. Et le point $x_{n_0}$ appartient à $D$ et vérifie $d(x_{n_0}, a) < \varepsilon$ puisque $x_{n_0} \in U_{n_0} \subset B(a, \varepsilon)$. ■

**Corollaire 2.10.4.** *Si $E$ est un espace métrique séparable et $F$ un sous-espace de $E$, alors $F$ est séparable.*

DÉMONSTRATION : Puisque $E$ est séparable, il possède une base dénombrable $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est alors clair que la famille $(U_n \cap F)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base dénombrable de $F$, donc que $F$ est séparable. ■

**Théorème 2.10.5.** *Soit $E$ un espace métrique séparable. Si $\mathscr{A}$ est une famille d'ouverts de $E$ non vides et deux-à-deux disjoints, cette famille est dénombrable.*

DÉMONSTRATION : Soit $(x_n)$ une suite de points de $E$ partout dense dans $E$. A chaque $A \in \mathscr{A}$ on peut associer un entier $n(A)$ tel que $x_{n(A)} \in A$. Et puisque les éléments de $\mathscr{A}$ sont deux-à-deux disjoints, l'application $A \mapsto n(A)$ est injective de $\mathscr{A}$ dans $\mathbb{N}$. Donc $\mathscr{A}$ est dénombrable. ■

# 3

# ESPACES COMPACTS

## 3.1 La propriété de Borel-Lebesgue

**Définitions 3.1.1.** *Une famille de parties $(O_i)_{i\in I}$ d'un ensemble $E$ est appelée* recouvrement *de $E$ si $E$ est la réunion de cette famille, c'est-à-dire si tout point de $E$ appartient à l'un au moins des $O_i$.*

*Si $\mathscr{R} = (O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de $E$, on appelle* sous-recouvrement *de $\mathscr{R}$ une sous-famille $(O_i)_{i\in J}$, avec $J \subset I$, qui est un recouvrement de $E$.*

*On appelle* recouvrement ouvert *d'un espace topologique $E$ toute famille d'ouverts de $E$ qui est un recouvrement de $E$.*

**Remarque.** On notera qu'un recouvrement de $E$ n'est pas une partie de $E$, mais une famille de parties de $E$.

**Définition 3.1.2.** *Un espace topologique $E$ est dit* compact *s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de $E$ contient un sous-recouvrement fini.*

**Remarque .** Quel que soit l'espace topologique $E$, $\{E\}$ est toujours un recouvrement ouvert fini ( à un élément !) de $E$. La compacité de $E$ n'est donc pas l'existence de recouvrements ouverts finis de $E$.

**Proposition 3.1.3.** *Un espace topologique discret est compact si et seulement s'il est fini.*

Démonstration : Si $E$ est fini et si $(U_i)$ est un recouvrement ouvert, il suffit de choisir pour chaque point de $E$ un $U_i$ qui le contienne pour obtenir un sous-recouvrement fini. Inversement, il suffit de remarquer que la famille de tous les singletons constitue alors un recouvrement ouvert. ■

**Théorème 3.1.4.** *Un espace topologique séparé est compact si et seulement si toute famille de fermés non vides, qui est stable par intersection finie, possède une intersection non vide.*

Démonstration : Si $E$ est compact, et si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés non vides stable par intersection finie et d'intersection vide, la famille des complémentaires $O_i = E\setminus F_i$ est un recouvrement ouvert de $E$. Il doit donc exister une partie finie $J$ de $I$ telle que $E = \bigcup_{i\in J} O_i$, c'est-à-dire $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$. Mais si la famille $(F_i)$ est stable par intersection finie, il existe un $j \in I$ tel que $F_j = \bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse.

Inversement, si $E$ n'est pas compact, il existe un recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$ sans sous-recouvrement fini. Si on définit, pour toute partie finie $J$ de $I$, $F_J = E \setminus \bigcup_{i\in J} O_i$, la famille des $(F_J)$ est formée de fermés non vides, est stable par intersection finie, et possède une intersection vide. ■

**Théorème 3.1.5.** *Si $E$ est compact et si $F$ est un fermé de $E$, $F$ est compact.*

Démonstration : Notons d'abord que $F$ est séparé : si $x$ et $y$ sont deux points distincts de $F$, il existe deux voisinages ouverts disjoints $U$ et $V$ de $x$ et $y$ respectivement dans $E$. Alors, $U\cap F$ et $V\cap F$ sont des voisinages ouverts disjoints de $x$ et de $y$ dans $F$.
Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés non vides de $F$, stable par intersection finie, chaque $A_i$, intersection de $F$ avec un fermé de $E$ est lui-même fermé dans $E$. Et par compacité de $E$ la famille $(A_i)$ doit avoir une intersection non vide. Ceci prouve la compacité de $F$. ■

**Définition 3.1.6.** *Une partie $X$ d'un espace topologique séparé $E$ est dite* relativement compacte *si elle est contenue dans une partie compacte de $E$.*

Il est équivalent de dire que l'adhérence $\bar{X}$ de $X$ est une partie compacte de $E$.

**Théorème 3.1.7.** *Si $E$ est séparé, et si le sous-espace $X$ de $E$ est compact, $X$ est fermé dans $E$.*

Démonstration : Soit $a$ un point de $E\setminus X$. On veut prouver qu'il existe un voisinage de $a$ disjoint de $X$. Pour tout $x$ de $X$, $x\neq a$. Il existe donc des ouverts disjoints $U_x$ et $V_x$ contenant respectivement $a$ et $x$. Ceci entraîne que $X\subset \bigcup_{x\in X} V_x$, donc que les $(X\cap V_x)_{x\in X}$ forment un recouvrement ouvert de $X$. Il doit donc exister une partie finie $Y$ de $X$ telle que $\bigcup_{x\in Y(}(X\cap V_x) = X$. Mais alors $U = \bigcap_{x\in Y} U_x$, intersection finie d'ouverts contenant $a$, est un voisinage ouvert de $a$. Et puisque

$$U\cap X \subset \bigcup_{x\in Y}(U\cap V_x) \subset \bigcup_{x\in Y}(U_x\cap V_x) = \emptyset$$

$U$ est le voisinage cherché de $a$. ■

**Théorème 3.1.8.** *Si $E$ est un espace séparé, $K_1$ et $K_2$ deux parties compactes de $E$, $K_1\cup K_2$ est compact.*

Démonstration : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $K_1\cup K_2$. Puisque les ouverts $U_i\cap K_1$ de $K_1$ recouvrent le compact $K_1$, il existe une partie finie $J_1$ de $I$ telle que $K_1\subset \bigcup_{i\in J_1} U_i$. Il existe de même une partie finie $J_2$ de $I$ telle que $K_2\subset\bigcup_{i\in J_2} U_i$. Alors $J = J_1\cup J_2$ est finie et $K_1\cup K_2\subset \bigcup_{i\in J} U_i$. ■

**Théorème 3.1.9.** *Soient $E$ un espace compact et $f$ une surjection continue de $E$ sur un espace séparé $F$. Alors $F$ est lui-même compact.*

Démonstration : Si $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de $F$, et si on pose $U_i = f^{-1}(O_i)$, les $(U_i)$ sont ouverts dans $E$ et

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i) = f^{-1}(F) = E$$

ce qui montre que $(U_i)$ est un recouvrement ouvert de $E$. Et si $J$ est une partie finie de $I$ telle que $E = \bigcup_{i\in J} U_i$, on a

$$F = f(E) = f(\bigcup_{i\in J} U_i) = \bigcup_{i\in J} f(U_i) = \bigcup_{i\in J} O_i$$

ce qui montre que $(O_i)_{i\in J}$ est un sous-recouvrement fini de $F$. ■

**Corollaire 3.1.10.** *Un espace homéomorphe à un espace compact est lui-même compact.*

Démonstration : Si $h$ est un homéomorphisme de l'espace compact $E$ sur $F$, on remarque d'abord que $F$ est séparé. En effet, si $x$ et $y$ sont deux points distincts de $F$, $x' = h^{-1}(x)$ et $y' = h^{-1}(y)$ qui sont distincts ont des voisinages ouverts $U'$ et $V'$ disjoints dans $E$. Et puisque $h^{-1}$ est continue, $h(U)$ et $h(V)$ sont ouverts et disjoints dans $F$, contenant respectivement $x$ et $y$.
Et puisque $h$ est continue, $F = h(E)$ est compact. ■

**Corollaire 3.1.11.** *Si $f$ est bijective et continue de l'espace compact $E$ sur l'espace séparé $F$, $f$ est un homéomorphisme.*

Démonstration : Il suffit de montrer que $f^{-1}$ est continue. Soit donc $X$ un fermé de $E$ : l'image réciproque de $X$ par $f^{-1}$ est $f(X)$. Or $X$, fermé dans le compact $E$, est compact, et son image continue $f(X)$ dans l'espace séparé $F$ est compacte, donc fermée dans $F$. Tout fermé de $E$ a donc une image réciproque par $f^{-1}$ qui est fermée, et $f^{-1}$ est continue. ■

## 3.2 Compacts métrisables

On s'intéresse maintenant au cas des espaces métrisables. On va voir que la compacité peut s'exprimer en termes de suites. Si $E$ est un espace métrisable, on choisira, sans toujours la préciser, une distance $d$ sur $E$ qui définit la topologie.

**Théorème 3.2.1.** *Soit $E$ un espace métrique. Parmi les propriétés suivantes,*

*i)* *$E$ est compact.*

*ii)* *Pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$ de $E$, il existe un nombre $\rho > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon $\rho$ centrée en un point de $E$ soit contenue dans l'un au moins des $O_i$.*

*iii)* *Toute suite de points de $E$ possède dans $E$ une valeur d'adhérence.*

*iv)* *Toute suite de points de $E$ possède une sous-suite qui converge dans $E$.*

*les propriétés i), iii) et iv) sont équivalentes, et elles entraînent la propriété ii).*

Démonstration : Si la suite $(x_n)$ a une sous-suite qui converge vers $x$, le point $x$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)$. Donc la propriété *iv)* entraîne la propriété *iii)*.
Supposons que toute suite de $E$ ait une valeur d'adhérence, et que la propriété *ii*) ne soit pas vérifiée. Soit donc $(O_i)$ un recouvrement ouvert tel que pour tout entier $n$, il existe un point $x_n$ tel que la boule $B(x_n, 2^{-n})$ ne soit contenue dans aucun des $O_i$. Il existerait alors une valeur d'adhérence $x$ de la suite $(x_n)$, et $x$ appartiendrait à un certain $O_j$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $O_j \supset B(x, \varepsilon)$. Il existe $m$ tel que $2^{-m} < \varepsilon$, et $n > m$ tel que $d(x, x_n) < \varepsilon/2$. Alors, pour tout $y$ appartenant à $B(x_n, 2^{-n})$, on a

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \varepsilon/2 + 2^{-n} \leq \varepsilon/2 + \frac{1}{2}2^{-m} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

d'où $B(x_n, 2^{-n}) \subset B(x, \varepsilon) \subset O_j$, contrairement au choix de $x_n$.

Si la propriété *iii)* est vérifiée, la propriété *ii)* l'est aussi. Nous montrons par l'absurde que $E$ est compact. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $E$ ne possédant aucun sous-recouvrement fini. Il existe alors un $\rho > 0$ tel que toute boule de rayon $\rho$ soit contenue dans l'un au moins des $O_i$. On construit alors par récurrence une suite $(i_n)$ d'éléments de $I$ et une suite $(y_n)$ de points de $E$ telles que $y_n \notin \bigcup_{k<n} O_{i_k}$ et $B(y_n, \rho) \subset O_{i_n}$. En effet, la réunion $\bigcup_{k<n} O_{i_k}$ n'est pas égale à $E$, donc ne contient pas un certain $y_n$, et la boule de centre $y_n$ et de rayon $\rho$ est incluse dans l'un des $O_i$, soit $O_{i_n}$. La suite $(y_n)$ doit donc avoir une valeur d'adhérence $y$, et il existe au moins deux entiers distincts $m$ et $n$ tels que $d(y_m, y) < \rho/2$ et $d(y_n, y) < \rho/2$. On peut supposer $m < n$. Alors, puisque $d(y_m, y_n) < \rho$, $y_n \in B(y_m, \rho) \subset O_{i_m}$, contrairement au choix de $y_n$.
Enfin, si $E$ est compact, et si $(x_n)$ était une suite de points de $E$ sans sous-suite convergente, tout point $x$ de $E$ possèderait un voisinage $U_x$ qui ne rencontre qu'un nombre fini de points de la suite. Sinon, $x$ serait une valeur d'accumulation de la suite $(x_n)$, et serait limite d'une sous-suite de $(x_n)$ : on pourrait en effet construire une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)$ telle que $d(x, x_{n_k}) < 2^{-k}$. Alors $(U_x)_{x\in E}$ serait un recouvrement ouvert du compact $E$, et si $Y$ était une partie finie de $E$ telle que $\bigcup_{x\in Y} U_x = E$, $E$ ne pourrait contenir qu'un nombre fini de points de la suite infinie $(x_n)$, ce qui est absurde. ■

**Théorème 3.2.2.** *Si $E$ est un espace métrique compact et $(x_n)$ une suite de points de $E$ qui possède une seule valeur d'adhérence $a$, la suite $(x_n)$ converge vers $a$.*

Démonstration : Soit $V$ un voisinage ouvert de $a$. On veut démontrer que tous les termes de la suite $(x_n)$ sont dans $V$ sauf un nombre fini. Dans le cas contraire, l'ensemble $H = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\}$ serait infini, et la suite $(x_n)_{n\in H}$ serait une suite dans le compact $E$ sans valeur d'adhérence : en effet, $a$ ne peut être une valeur d'adhérence puisqu'aucun terme de cette sous-suite n'appartient à $V$, et une valeur d'adhérence de la sous-suite serait une valeur d'adhérence de $(x_n)$. ■

**Définition 3.2.3.** *Si $E$ est un espace métrique, on dit que $E$ est* précompact *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de $E$ par un nombre fini de parties de diamètre inférieur à $\varepsilon$.*

**Théorème 3.2.4.** *Tout espace métrique compact est précompact.*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. La famille de toutes les boules ouvertes de rayon $\varepsilon/2$ est un recouvrement ouvert de $E$ par des parties de diamètre inférieur à $\varepsilon$ : en effet, si $y$ et $z$ appartiennent à $B(x, \varepsilon/2)$, $d(y,z) \leq d(x,y) + d(x,z) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Et puisque $E$ est compact, ce recouvrement admet un sous-recouvrement fini. ■

**Théorème 3.2.5.** *Si $E$ est un espace métrique compact, il est séparable.*

Démonstration : D'après le théorème précédent, il existe pour tout entier $n$ une partie finie $J_n$ de $E$ telle que $E = \bigcup_{x\in J_n} B(x, 2^{-n})$. Alors $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ est dénombrable, et il existe une énumération $(x_n)$ de $D$. De plus, pour tout $y$ de $E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $n$ tel que $2^{-n} < \varepsilon$, et $x \in J_n$ tel que $y \in B(x, 2^{-n})$, donc que $d(x,y) < \varepsilon$. Tout point $y$ de $E$ est donc adhérent à $D$, ce qui montre que $E$ est séparable. ■

## 3.3 Produit de compacts métrisables

**Théorème 3.3.1.** *Si $E$ et $F$ sont deux compacts métrisables, le produit $E \times F$ est compact.*

Démonstration : Il suffit de démontrer que de toute suite de $E \times F$ on peut extraire une sous-suite convergente. Soit donc $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $E \times F$. Alors $z_n = (x_n, y_n)$, avec $x_n \in E$ et $y_n \in F$. Puisque $E$ est compact, la suite $(x_n)$ possède une sous-suite convergente, de limite $x$. Il existe donc une partie infinie $H$ de $\mathbb{N}$ telle que $x = \lim_{n\to\infty, n\in H} x_n$. Puisque $F$ est compact, la suite $(y_n)_{n\in H}$ possède aussi une sous-suite convergente, et il existe un $y \in F$ et une partie infinie $H'$ de $H$ telle que $y = \lim_{n\to\infty, n\in H'} y_n$. Alors la suite $(x_n)_{n\in H'}$ extraite de la suite $(x_n)_{n\in H}$ converge vers $x$. Donc la suite $(z_n)_{n\in H'}$ converge vers $(x, y) \in E \times F$, ce qui achève la démonstration. ∎

La même méthode permet de démontrer plus généralement :

**Théorème 3.3.2.** *Le produit d'une famille finie ou dénombrable d'espaces compacts métrisables est compact.*

Démonstration : Pour une famille finie, il suffit de faire une démonstration par récurrence sur le nombre de facteurs, en utilisant le théorème précédent.
Si maintenant $E_n$ est un espace métrique compact pour tout entier $n$, et si $(x^k)$ est une suite de points du produit $E = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$, on va montrer que la suite $(x^k)$ possède une sous-suite convergente. Si on note $x_n^k$ la $n^{\text{ème}}$ coordonnée du point $x^k$, la suite $(x_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite du compact métrique $E_0$. Il existe donc une partie infinie $H_0$ de $\mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(x_0^k)_{k\in H_0}$ converge dans $E_0$ vers un point $a_0$.
La suite $(x_1^k)_{k\in H_0}$ est une suite dans le compact $E_1$. Il existe donc une partie infinie $H_1$ de $H_0$ telle que la suite $(x_1^k)_{k\in H_1}$ converge vers un point $a_1$ de $E_1$.
Répétant cette opération, on construit une suite décroissante $(H_j)$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ telles que la suite $(x_j^k)_{k\in H_j}$ converge dans $E_j$ vers un point $a_j$. On voit alors, puisque $H_j \subset H_i$ si $j \geq i$, que la suite $(x_i^k)_{k\in H_j}$ converge vers $a_i$ si $j \geq i$. Appliquant le lemme 2.6.9, on trouve une partie infinie $H$ de $\mathbb{N}$ qui est presque incluse dans chacune des parties $H_i$. On en déduit que la suite $(x_i^k)_{k\in H}$ converge vers $a_i$ pour tout entier $i$, c'est-à-dire que la suite $(x^k)_{k\in H}$ converge dans $E$ vers le point $a$ de coordonnées $(a_i)$, ce qui prouve que la suite $(x^k)$ a une sous-suite convergente. Donc $E$ est compact. ∎

## 3.4 Parties compactes de la droite réelle

**Théorème 3.4.1.** *(Borel-Lebesgue) L'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ est compact.*

Démonstration : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $[0, 1]$. On va démontrer que ce recouvrement possède un sous-recouvrement fini. On note $A$ l'ensemble des $x \in [0, 1]$ tels que l'intervalle $[0, x]$ possède un recouvrement par un nombre fini des $U_i$, et on veut prouver que $1 \in A$. Puisqu'il existe un $k \in I$ tel que $0 \in U_k$ il existe $r > 0$ tel que $[0, r] \subset U_k$, $A$ n'est pas vide et contient $[0, r]$. Puisque $A$ est borné par 1, il possède une borne supérieure $\alpha \leq 1$.

Il existe un $j \in I$ tel que $\alpha \in U_j$, donc un $\delta > 0$ tel que $U_j$ contienne l'intersection de $[0,1]$ et de l'intervalle $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$. Par définition de $\alpha$, il existe un $x$ dans $A \cap ]\alpha - \delta, \alpha]$. Puisqu'il existe une partie finie $J$ de $I$ tel que $[0, x]$ soit recouvert par $\bigcup_{i \in J} U_i$, $[0, \alpha]$ est recouvert par $\bigcup_{i \in J'} U_i$, où $J' = J \cup \{j\}$. Et puisque $J'$ est fini, $\alpha \in A$. Et si $\alpha$ était strictement inférieur à 1, il existerait un $y$ dans $[0,1] \cap ]\alpha, \alpha + \delta]$. Alors l'intervalle $[0, y]$ serait aussi contenu dans $\bigcup_{i \in J'} U_i$, ce qui prouverait que $y \in A$, contrairement à la définition de $\alpha$. ■

**Théorème 3.4.2.** *Les parties compactes de* $\mathbb{R}$ *sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration : Soit $K$ une partie compacte de $\mathbb{R}$. Puique l'espace métrique $\mathbb{R}$ est séparé, $K$ est fermé. Et puisque la famille décroissante de fermés $F_n = K \setminus ]-n, n[$, de $K$ est d'intersection vide, l'un d'entre eux doit être vide, ce qui signifie que $K$ est contenu dans un intervalle $]-n, n[$, donc est borné.
Inversement, pour tout entier $n$, l'application $x \mapsto n(2x-1)$ est continue de $[0,1]$ sur $[-n, n]$. Il en résulte que $[-n, n]$ est compact. Enfin, si $K$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$, il existe un entier $n$ tel que $K \subset [-n, n]$. Alors $K = K \cap [-n, n]$ est fermé dans le compact $[-n, n]$, donc lui-même compact. ■

**Corollaire 3.4.3.** *Si* $K$ *est un compact non vide de* $\mathbb{R}$, $K$ *contient un plus grand point et un plus petit point.*

Démonstration : Puisque $K$ est borné et non vide, il possède une borne supérieure $\alpha$ et une borne inférieure $\beta$. Puisque, pour tout $\varepsilon > 0$, $K$ rencontre $]\alpha - \varepsilon, \alpha]$, $\alpha$ est adhérent à l'ensemble fermé $K$, donc appartient à $K$, dont il est le plus grand point. On voit de même que $\beta$ est le plus petit point de $K$. ■

**Théorème 3.4.4.** *Les parties compactes de* $\mathbb{R}^n$ *sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration : Si $K$ est une partie compacte de l'espace métrisable $\mathbb{R}^n$, elle est fermée dans $\mathbb{R}^n$. Et si on note $P_k$ le pavé ouvert $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \max |x_i| < k\}$ (qui est la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon $k$), la famille décroissante de fermés $(K \setminus P_k)$ du compact $K$ a une intersection vide : l'un d'entre eux est donc vide, c'est-à-dire que $K$ est contenu dans l'un des $P_k$, donc est borné.
Inversement, si $K$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$, il existe un entier $k$ tel que, pour tout $x$ de $K$, chacune des $n$ coordonnées de $x$ soit majorée en valeur absolue par $k$. Puisque $[-k, k]$ est compact dans $\mathbb{R}$, $P = [-k, k]^n$ est compact dans $\mathbb{R}^n$, et $K = K \cap P$ est fermé dans le compact $P$, donc compact. ■

## 3.5 Fonctions continues sur un compact

**Théorème 3.5.1.** *Si* $f$ *est une fonction continue du compact* $K$ *non vide dans* $\mathbb{R}$, $f$ *est bornée et atteint sur* $K$ *sa borne supérieure et sa borne inférieure.*

Démonstration : Puisque $f$ est continue, $f(K)$ est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$ ; elle est donc bornée et contient un plus grand point $\alpha$ et un plus petit point $\beta$. Si $x$ et $y$ sont des points de $K$ tels que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$, $f$ atteint sa borne supérieure $\alpha$ en $x$ et sa borne inférieure $\beta$ en $y$. ■

**Théorème 3.5.2.** *Soient $K$ un espace compact et $F$ un espace métrique. Sur l'ensemble $\mathscr{C}(K, F)$ des fonctions continues de $K$ dans $F$, on peut définir une distance, appelée* distance de la convergence uniforme*, par*

$$d(f, g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

*Cette borne supérieure est atteinte en au moins un point de $K$.*

DÉMONSTRATION : Si $f$ et $g$ sont continues de $K$ dans $F$, la fonction $\varphi = f \times g : K \to F \times F$ dont les fonctions coordonnées sont $f$ et $g$ est continue de $K$ dans $F \times F$. Il en résulte, puisque la distance est continue de $F \times F$ dans $\mathbb{R}$, que la fonction $x \mapsto d(f(x), g(x))$ est continue de $K$ dans $\mathbb{R}$, donc est bornée et atteint sa borne supérieure.
On a clairement $d(f, f) = 0$, et $d(f, g) = d(g, f)$. Enfin, si $f$, $g$ et $h$ sont trois fonctions continues de $K$ dans $F$, on a pour tout $x$ de $K$

$$d(f(x), h(x)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x))$$

donc, en passant à la borne supérieure, on a pour tout $x$

$$d(f(x), h(x)) \leq d(f, g) + d(g, h)$$

ce qui fournit l'inégalité cherchée $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$. ∎

**Théorème 3.5.3.** *(Heine) Si $f$ est une application continue de l'espace métrique compact $E$ dans l'espace métrique $F$, $f$ est uniformément continue.*

DÉMONSTRATION : Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x$ de $E$, il existe un voisinage ouvert $U_x$ du point $x$ tel que $f(U_x) \subset B(f(x), \varepsilon/2)$. La famille $(U_x)_{x \in E}$ est un recouvrement ouvert de $E$. D'après le théorème 3.2.1, il existe un nombre $\rho > 0$ tel que toute boule ouverte de $E$ de rayon $\rho$ soit contenue dans l'un des $U_x$.
Si $y$ et $z$ sont deux points de $E$ tels que $d(y, z) < \rho$, $z \in B(y, \rho)$. Il existe donc un $x \in E$ tel que $B(y, \rho) \subset U_x$. On en déduit que $y$ et $z$ appartiennent à $U_x$, donc que $d(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$ et $d(f(z), f(x)) < \varepsilon/2$, et enfin que

$$d(f(y), f(z)) \leq d(f(y), f(x)) + d(f(z), f(x)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ce qui achève de montrer que $f$ est uniformément continue. ∎
On peut de la même manière démontrer une généralisation de ce théorème, qui aura plus loin des applications.

**Théorème 3.5.4.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces métriques, $f$ une fonction continue de $E$ dans $F$ et $K$ une partie compacte de $E$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que, si $x \in K$, $y \in E$ et $d(x, y) < \eta$ on ait $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

DÉMONSTRATION : Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $z$ de $K$, il existe un $\rho_z > 0$ tel que

$$f(B(z, 2\rho_z)) \subset B(f(z), \varepsilon/2)$$

Alors la famille $(B(z, \rho_z) \cap K)$ est un recouvrement ouvert du compact $K$, et il existe un sous-recouvrement fini $(B(z, \rho_z) \cap K)_{z \in J}$ de $K$ extrait de ce recouvrement. Si on désigne par $\eta$ le nombre strictement positif

$$\eta = \inf_{z \in J} \rho_x$$

on a, pour $x \in K$, $y \in E$ et $d(x,y) < \eta$, l'existence d'un $z \in J$ tel que $x \in B(z, \rho_z) \cap K$. Alors, puisque $\eta \leq \rho_z$, on a

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < \eta + \rho_z \leq 2\rho_z$$

On en déduit que $x$ et $y$ appartiennent à $B(z, 2\rho_z)$ donc que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(y), f(z)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration. ■

**Théorème 3.5.5.** *(Dini) Si $(f_n)$ est une suite croissante de fonctions continues de l'espace compact $K$ dans $\mathbb{R}$, qui converge en tout point de $K$ vers une fonction continue $f$, la convergence est uniforme.*

DÉMONSTRATION : Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble

$$U_n = \{x \in K : f_n(x) > f(x) - \varepsilon\} = \{x \in K : (f - f_n)(x) < \varepsilon\}$$

est ouvert puisque $f - f_n$ est continue. De plus $U_n \subset U_{n+1}$ puisque la suite $(f_n)$ est croissante. Et $K$ est réunion des ouverts $(U_n)$ puisque $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout $x$. Par compacité de $K$, on voit qu'il existe un $m$ tel que $(U_m)$ soit égal à $K$ ce qui signifie que, pour tout $x \in K$ et tout $n \geq m$

$$f(x) - \varepsilon < f_m(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$$

donc que la suite $(f_n)$ converge uniformément. ■

## 3.6 Espaces localement compacts

**Définition 3.6.1.** *Un espace topologique séparé $E$ est dit* localement compact *si tout point de $E$ possède un voisinage compact.*

**Proposition 3.6.2.** *Si $K$ est une partie compacte de l'espace localement compact $E$, il existe un voisinage compact de $K$, c'est-à-dire un compact qui soit voisinage de chaque point de $K$.*

DÉMONSTRATION : Pour tout $x$ de $K$ il existe un voisinage compact $K_x$ de $x$. La famille des intérieurs $(\overset{\circ}{K_x})$ forme donc un recouvrement ouvert du compact $K$. Alors, il existe une partie finie $J$ de $K$ telle que

$$K \subset U = \bigcup_{x \in J} \overset{\circ}{K_x}$$

et on a $\bar{U} \subset \bigcup_{x \in J} K_x$, ce qui prouve que $\bar{U}$, qui est fermé dans une réunion finie de compacts, est lui-même compact, et voisinage de tout point de $K$ puisqu'il contient $U$. ■

**Définition 3.6.3.** *Un espace topologique localement compact $E$ est dit* dénombrable à l'infini *s'il existe une suite de parties compactes de $E$ qui recouvre $E$.*

**Théorème 3.6.4.** *Si $E$ est un espace localement compact dénombrable à l'infini, il existe une suite exhaustive de compacts de $E$, c'est-à-dire une suite croissante $(K_n)$ de compacts de $E$ telle que tout compact de $E$ soit contenu dans l'un des $K_n$.*

Démonstration : Puisque $E$ est dénombrable à l'infini, il existe une suite $(L_n)$ de compacts qui recouvre $E$. On construit alors par récurrence une suite $(K_n)$ de compacts en posant $K_0 = L_0$ et en choisissant, pour $n \geq 1$, un voisinage compact $K_n$ de $K_{n-1} \cup L_n$. Alors les $K_n$ recouvrent $E$ puisqu'ils contiennent les $L_n$, et si $K$ est un compact de $E$, $K$ est recouvert par les ouverts $U_n = \overset{\circ}{K_n}$ puisque $K_n \subset U_{n+1}$. Il est donc recouvert par un nombre fini d'entre eux. Et puisque ceux-ci sont croissants, il existe un $m$ tel que $K \subset U_m \subset K_m$. ■

**Théorème 3.6.5.** *Si $U$ est un ouvert de l'espace métrique compact $E$, $U$ est localement compact dénombrable à l'infini.*

Démonstration : Si on note $F$ le fermé $E \setminus U$, et $\varphi$ la fonction continue : $x \mapsto d(x, F)$, $U$ est l'ensemble des points de $E$ où $\varphi$ est strictement positive. Alors si $x \in U$ et $\alpha = \varphi(x) > 0$, l'ensemble $V = \{y \in E : \varphi(y) \geq \alpha/2\}$ est un voisinage fermé de $x$ dans $E$, donc est compact et il est contenu dans $U$. De plus, chaque ensemble

$$K_n = \{y \in E : \varphi(y) \geq 2^{-n}\}$$

est compact, contenu dans $U$, et $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. ■

# 4

# ESPACES COMPLETS

## 4.1 Suites de Cauchy

On va maintenant étudier une condition un peu plus large que la compacité, qui permette d'assurer qu'une suite est convergente, sans connaître a priori sa limite.

**Définition 4.1.1.** *Une suite $(x_n)$ dans un espace métrique est appelée* suite de Cauchy *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m$ tel que la distance de deux termes quelconques de la suite, d'indices supérieurs à $m$, soit inférieure à $\varepsilon$.*

Ceci revient à dire que, en notant $Q_m$ l'ensemble $\{x_n : n > m\}$, on a $\lim_{m\to\infty} diam(Q_m) = 0$.

**Proposition 4.1.2.** *Si $(x_n)$ est une suite de Cauchy, et $(y_n)$ une suite extraite de $(x_n)$, la suite $(y_n)$ est une suite de Cauchy.*

Démonstration : Il existe une suite strictement croissante $(n_k)$ d'entiers telle que $y_k = x_{n_k}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $m$ tel que, pour $n$ et $p$ supérieurs à $m$, on ait $d(x_n, x_p) < \varepsilon$. Alors, si $k$ et $\ell$ sont supérieurs à $m$, on a $n_k \geq k > m$ et $n_\ell \geq \ell > m$, donc $d(y_k, y_\ell) = d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) < \varepsilon$, ce qui achève la démonstration. ■

**Théorème 4.1.3.** *Toute suite convergente dans un espace métrique est une suite de Cauchy.*

Démonstration : Supposons que la suite $(x_n)$ converge vers $a$ dans $E$. Alors, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe un entier $m$ tel que $d(x_n, a) < \varepsilon/2$ pour tout $n > m$. Si $n$ et $p$ sont alors deux entiers supérieurs à $m$, on a

$$d(x_n, x_p) \leq d(x_n, a) + d(x_p, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ce qui prouve que la suite $(x_n)$ est de Cauchy. ■

On obtient ainsi une propriété valable pour toute suite convergente, mais qui ne fait pas référence à la limite. Malheureusement, cette propriété ne caractérise pas, en général, les suites convergentes. Si $E$ est le sous-espace $]0, 1[$ de $\mathbb{R}$, la suite définie par $x_n = 2^{-n}$ est une suite de Cauchy, puisqu'elle converge dans $\mathbb{R}$ vers 0, mais elle ne converge pas dans $E$.

**Théorème 4.1.4.** *Une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle a une valeur d'adhérence.*

Démonstration : Il est clair qu'une suite convergente a une valeur d'adhérence, sa limite. Inversement, si la suite de Cauchy $(x_n)$ a une valeur d'adhérence $a$, nous montrons qu'elle converge vers $a$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $m$ tel que, pour $n$ et $p$ supérieurs à $m$, on ait $d(x_n, x_p) < \varepsilon/2$. Puisque $a$ est une valeur d'adhérence de la suite, il existe un $p > m$ tel que $d(x_p, a) < \varepsilon/2$. Alors, pour $n > m$ on a

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_p) + d(x_p, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ce qui montre que la suite $(x_n)$ converge vers $a$. ■

**Proposition 4.1.5.** *Si $f$ est uniformément continue de l'espace métrique $E$ dans l'espace métrique $F$, toute suite de Cauchy de $E$ est transformée par $f$ en une suite de Cauchy de $F$.*

Démonstration : Soient $(x_n)$ une suite de Cauchy de $E$, $(y_n) = (f(x_n))$ la suite image par $f$, et $\varepsilon > 0$. Puisque $f$ est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, x' \in E \quad d(x, x') < \delta \quad \Longrightarrow \quad d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

et puisque $(x_n)$ est une suite de Cauchy, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que si $n$ et $p$ sont supérieurs à $m$, on ait $d(x_n, x_p) < \delta$. On a alors $d(y_n, y_p) < \varepsilon$, ce qui montre que $(y_n)$ est une suite de Cauchy. ■

## 4.2 Complétude

**Définition 4.2.1.** *Un espace métrique $E$ est dit* complet *si toute suite de Cauchy de $E$ est convergente.*

On a alors un critère de convergence pour une suite, qui ne demande pas la connaissance a priori de la limite. On peut remarquer néanmoins que ce critère n'est pas topologique, c'est-à-dire invariant par homéomorphie. On verra un peu plus loin que $\mathbb{R}$ est complet, alors que l'intervalle $]0, 1[$, qui lui est homéomorphe, n'est pas complet, comme le montre l'exemple précédent de suite de Cauchy non convergente.

**Théorème 4.2.2.** *Un sous-espace complet $F$ d'un espace métrique $E$ est fermé dans $E$.*

Démonstration : Soit $a$ un point de $E$ adhérent à $F$. Il existe alors une suite $(x_n)$ de points de $F$ qui converge vers $a$. Cette suite convergente de $E$ est donc une suite de Cauchy dans $F$. Et si $F$ est complet, elle converge vers un point $b$ de $F$. Par unicité de la limite, on a $a = b$. Donc $a \in F$, ce qui prouve que $F$ contient chacun de ses points adhérents, donc est fermé. ■

**Théorème 4.2.3.** *Tout sous-espace fermé d'un espace métrique complet est complet.*

DÉMONSTRATION : Soit $F$ un sous-espace fermé de $E$. Si $(x_n)$ est une suite de Cauchy de $F$, c'est en particulier une suite de Cauchy de $E$, donc une suite convergente dans $E$ si celui-ci est complet. La limite $a$ de cette suite est alors un point adhérent à $F$, donc un point de $F$ puisque celui-ci est fermé. On en conclut que la suite $(x_n)$ est convergente dans $F$, donc que $F$ est complet. ■

**Théorème 4.2.4.** *Si $(F_n)$ est une suite décroissante de fermés non vides de l'espace métrique complet $E$ dont les diamètres tendent vers 0, l'intersection des $(F_n)$ contient un point et un seul.*

DÉMONSTRATION : Si $a$ et $b$ étaient deux points distincts dans l'intersection des $(F_n)$, on aurait pour tout $n$ : $diam(F_n) \geq d(a,b) > 0$ et le diamètre des $(F_n)$ serait minoré par $d(a,b)$. Si on choisit pour tout $n$ un point $x_n$ dans $F_n$, on a, pour $n < p$, $x_n \in F_n$ et $x_p \in F_p \subset F_n$. Donc $d(x_n, x_p) \leq diam(F_n)$, ce qui prouve que la suite $(x_n)$ est une suite de Cauchy, donc qu'elle converge vers un point $a$ de $E$. Comme les $x_p$ sont tous dans le fermé $F_n$ pour $p \geq n$, la limite $a$ est dans $F_n$. Ceci montre que $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. ■

**Théorème 4.2.5.** *Un produit fini ou dénombrable d'espaces complets est complet.*

DÉMONSTRATION : Soit $(E_n)$ une suite finie d'espaces métriques complets. Si $(x^k)$ est une suite de Cauchy dans le produit $E$ des $(E_n)$, on voit que pour tout $n$ on a $d(x_n^k, x_n^\ell) \leq d(x^k, x^\ell)$, (en désignant par $x_n^k$ la $n^{\text{ème}}$ coordonnée du terme d'indice $k$ de la suite). On en déduit que l'application "$n^{\text{ème}}$ projection" $\pi_n : E \to E_n$ est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue, puis que la suite $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $E_n$, donc une suite qui converge vers un $a_n$ de $E_n$ puisque $E_n$ est complet. Ceci prouve que la suite $(x^k)$ converge vers $a = (a_n)$. Donc $E$ est complet.

Si $(E_n)$ est une suite infinie d'espaces métriques complets, et si $(x^k)$ est une suite de Cauchy dans le produit $E$ des $(E_n)$, on voit de même que pour tout $n$ on a $d(x_n^k, x_n^\ell) \leq d(x^k, x^\ell)$ dès que $d(x^k, x^\ell) < 2^{-n}$, (en désignant à nouveau par $x_n^k$ la $n^{\text{ème}}$ coordonnée du terme d'indice$k$ de la suite). On en déduit comme ci-dessus que $\pi_n$ est uniformément continue, et on conclut de la même manière. ■

**Théorème 4.2.6.** *La droite réelle $\mathbb{R}$ est un espace complet.*

DÉMONSTRATION : Soit $(x_n)$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. La suite $(x_n)$ est bornée : en effet, il existe un $m$ tel que, pour $n$ et $p$ supérieurs à $m$ on ait $|x_n - x_p| < 1$. On en déduit que, pour tout $n$ on a

$$|x_n| \leq M = 1 + \max_{j \leq m+1} |x_j| < +\infty$$

et puisque $[-M, +M]$ est compact, la suite de Cauchy $(x_n)$ a au moins une valeur d'adhérence, donc est convergente. ■

**Corollaire 4.2.7.** *Pour tout entier $n$, l'espace $\mathbb{R}^n$ est complet.*

**Théorème 4.2.8.** *Si $K$ est un espace compact et $F$ un espace métrique complet, l'espace $\mathscr{C}(K,F)$ muni de la distance de la convergence uniforme est complet.*

DÉMONSTRATION : Soit $(f_n)$ une suite de Cauchy dans l'espace $\mathscr{C}(K,F)$. Pour chaque $x \in K$, on a $d(f_n(x), f_p(x)) \leq d(f_n, f_p)$. Il en résulte que l'application de $\mathscr{C}(K,F)$ dans $F$ : $f \mapsto f(x)$ est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue, et que la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $F$. On en déduit que cette suite converge vers un certain point $f(x)$ de $F$. De plus, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que pour $n$ et $p$ supérieurs à $m$ on ait $d(f_n, f_p) \leq \varepsilon$. On a donc, si $m < n \leq p$

$$d(f_n(x), f_p(x)) \leq d(f_n, f_p) \leq \varepsilon$$

et puisque $f(x) = \lim_{p\to\infty} f_p(x)$, on obtient, pour $n > m$ et $x \in K$ :

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

ce qui montre que la suite $f_n$ converge uniformément vers $f$. Donc $f$ est continue, et $d(f_n, f) = \sup_{x\in K} d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ si $n > m$. Ceci montre que la suite $(f_n)$ converge vers $f$ dans $\mathscr{C}(K, F)$. ■

## 4.3 Compacité et complétude

**Théorème 4.3.1.** *Tout espace métrique compact est complet.*

Démonstration : Soit $E$ un espace métrique compact. Si $(x_n)$ est une suite de Cauchy de $E$, elle a au moins une valeur d'adhérence dans $E$, donc elle est convergente. ■

**Théorème 4.3.2.** *Un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.*

Démonstration : On a déjà vu qu'un espace métrique compact est précompact et qu'il est complet.
Inversement, si $(x_n)$ est une suite dans $E$ précompact, on va montrer qu'on peut en extraire une suite de Cauchy. Si $E$ est complet, cette sous-suite de Cauchy sera convergente, ce qui prouvera la compacité de $E$.
Puisque $E$ est précompact, il existe un recouvrement fini de $E$ par des parties $(A_i^1)_{1\leq i\leq m_1}$ de diamètre inférieur à $2^{-1}$. Et puisque

$$\mathbb{N} = \bigcup_{1\leq i\leq m_1} \{n \in \mathbb{N} : x_n \in A_i^1\}$$

il existe un $j \leq m_1$ tel que $H_1 = \{n : x_n \in A_j^1\}$ soit infini. Alors, pour tout $n$ et tout $p$ dans $H_1$, on a $d(x_n, x_p) \leq 2^{-1}$.
De même, puisque $E$ est précompact, il existe un recouvrement fini de $E$ par des parties $(A_i^2)_{1\leq i\leq m_2}$ de diamètre inférieur à $2^{-2}$. Et puisque

$$H_1 = \bigcup_{1\leq i\leq m_2} \{n \in H_1 : x_n \in A_i^2\}$$

il existe un $j \leq m_2$ tel que $H_2 = \{n \in H_1 : x_n \in A_j^2\}$ soit infini. Et pour $n$ et $p$ dans $H_2$ on a $d(x_n, x_p) \leq 2^{-2}$.

Répétant cette opération, on construit une suite décroissante de parties infinies $(H_k)$ de $\mathbb{N}$ telle que, si $n$ et $p$ sont dans $H_k$, on ait $d(x_n, x_p) \leq 2^{-k}$. Alors, utilisant le lemme 2.6.9, on obtient une partie infinie $H$ de $\mathbb{N}$ qui est presque incluse dans chacune des parties $H_k$. Il en résulte que, à l'exception d'un nombre fini de termes, les $(x_n)_{n\in H}$ sont deux-à-deux à distance inférieure à $2^{-k}$, c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n\in H}$ est une suite de Cauchy extraite de la suite $(x_n)$. ■

## 4.4 Prolongement d'une application uniformément continue

**Théorème 4.4.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces métriques, $F$ étant complet. On suppose que $X$ est une partie partout dense de $E$ et $f$ une application uniformément continue de $X$ dans $F$. Il existe alors une unique application continue $\tilde{f}$ de $E$ dans $F$ qui prolonge $f$.*

Démonstration : Si $g_1$ et $g_2$ sont deux prolongements continus de $f$ à $E$, l'application $g = g_1 \times g_2 : E \to F \times F$ définie par $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ est continue. L'ensemble $A$ des points de $E$ où $g_1$ et $g_2$ coïncident est l'image réciproque par $g$ de la diagonale de $F$, donc est fermé, et contient $X$ puisque les restrictions de $g_1$ et $g_2$ à $X$ sont égales à $f$. On en déduit que $A = E$ puisque $X$ est dense, c'est-à-dire que $g_1 = g_2$, ce qui prouve l'unicité du prolongement.
Soient $a$ un point de $E$ et $(x_n)$ une suite de points de $X$ qui converge vers $a$ (une telle suite existe puisque $X$ est dense dans $E$). Si $\tilde{f}$ est une fonction continue sur $E$ qui prolonge $f$, on doit avoir

$$\tilde{f}(a) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Pour prouver l'existence de $\tilde{f}$ on doit donc prouver que toute suite $(x_n)$ de $X$ qui converge vers un point $a$ de $E$ a une image par $f$ qui converge dans $F$, et que cette limite ne dépend que de $a$. En effet, si la suite $(x_n)$ converge vers $a$, c'est une suite de Cauchy, qui est transformée par l'application uniformément continue $f$ en une suite de Cauchy de l'espace complet $F$, donc en une suite convergente. Et si $(x_n)$ et $(y_n)$ sont deux suites de $X$ qui convergent vers le même point $a$ de $E$, la suite $(z_n)$ définie par

$$z_{2n} = x_n \qquad \text{et} \qquad z_{2n+1} = y_n$$

converge elle aussi vers $a$. Alors, si $b$ est la limite de la suite $(f(z_n))$, on a $f(x_n) = f(z_{2n}) \to b$ et $f(y_n) = f(z_{2n+1}) \to b$, ce qui montre que les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ont même limite, qu'on notera $\tilde{f}(a)$.
Pour prouver la continuité de la fonction $\tilde{f}$ ainsi définie, on va montrer que $\tilde{f}$ est uniformément continue. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe un $\delta > 0$ tel que si $x$ et $y$ appartiennent à $X$ et sont à distance strictement inférieure à $\delta$, $f(x)$ et $f(y)$ sont à distance inférieure à $\varepsilon$. Soient alors $a$ et $b$ dans $E$ avec $d(a, b) < \delta$, et $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites de $X$ convergeant respectivement vers $a$ et $b$. Puisque

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, a) + d(a, b) + d(b, y_n) \to d(a, b) < \delta$$

on a $d(x_n, y_n) < \delta$ pour tout $n$ assez grand, donc $d(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$ pour $n$ assez grand. Et puisque $d(f(x_n), f(y_n)) \to d(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b))$, on obtient que $d(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)) \leq \varepsilon$. Ceci montre que $\tilde{f}$ est uniformément continue. ∎

## 4.5 Points fixes des contractions

**Définition 4.5.1.** *On dit que l'application $f$ de l'espace métrique $E$ dans l'espace métrique $F$ est une* contraction *si elle est $q$-lipschitzienne pour un $q$ strictement inférieur à* 1.

**Théorème 4.5.2.** *Si $f$ est une contraction de l'espace métrique complet $E$ dans lui-même, il existe un unique point fixe de $f$, c'est-à-dire un point $a$ tel que $a = f(a)$. De plus, pour tout $x_0 \in E$, la suite $(x_n)$ définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers le point fixe.*

Démonstration : Soit $x_0$ un point quelconque de $E$. On définit par récurrence la suite $(x_n)$ en posant $x_{n+1} = f(x_n)$. Puisque $f$ est $q$-lipschitzienne, on a

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq q\, d(x_n, x_{n+1})$$

donc $d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n d(x_0, x_1)$. Et, pour $n < p$

$$d(x_n, x_p) \leq \sum_{j=n}^{p-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=n}^{p-1} q^j\, d(x_0, x_1) = \frac{q^n - q^p}{1-q}\, d(x_0, x_1) < q^n\, \frac{d(x_0, x_1)}{1-q}$$

ce qui montre que la suite $(x_n)$ est une suite de Cauchy puisque $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.
La suite $(x_n)$ est donc convergente, et si $a$ est sa limite, on doit avoir $x_{n+1} \to a$ et $x_{n+1} = f(x_n) \to f(a)$, donc $a = f(a)$. Donc $a$ est un point fixe de $f$.
Enfin, si $a$ et $b$ sont deux points fixes distincts de $f$, on doit avoir :

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq q\, d(a, b) < d(a, b)$$

ce qui est absurde. On en déduit l'unicité du point fixe. ∎

# 5
# ESPACES CONNEXES

## 5.1 Connexité

On va définir une notion topologique qui signifie intuitivement qu'un espace est "en un seul morceau" ou encore qu'on ne peut pas le partager en deux parties "éloignées l'une de l'autre".

**Définition 5.1.1.** *Un espace topologique $E$ est dit* connexe *si ses seules parties simultanément ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et $E$.*

Il revient au même de dire que $E$ n'est pas réunion de deux ouverts disjoints et non vides, ou que $E$ n'est pas réunion de deux fermés disjoints et non vides. Il est clair qu'un espace discret connexe a au plus un point.

**Théorème 5.1.2.** *Si $f$ est une surjection continue de l'espace connexe $E$ sur $F$, l'espace $F$ est connexe.*

Démonstration : Si $F$ n'est pas connexe, il existe une partie ouverte et fermée $U$ de $F$ non vide et distincte de $F$. Alors $V = f^{-1}(U)$ est ouvert et fermé dans $E$. De plus, puisque $f$ est surjective, ni $V$ ni $E \setminus V = f^{-1}(F \setminus U)$ ne sont vides. Et ceci nie la connexité de $E$. ∎

**Corollaire 5.1.3.** *Un espace topologique homéomorphe à un espace connexe est lui-même connexe.*

**Théorème 5.1.4.** *Si l'espace $E$ contient une partie connexe partout dense, $E$ est connexe.*

Démonstration : Supposons que $X$ soit une partie connexe partout dense de $E$ et que $E$ ne soit pas connexe. Il existerait alors un ouvert non vide $U$ de $E$ tel que $E \setminus U$ soit ouvert et non vide. Ceci entraînerait que $U$ et $E \setminus U$ rencontrent $X$, donc que $U' = X \cap U$ et $X \setminus U' = X \cap (E \setminus U)$ sont deux ouverts disjoints non vides de $X$ qui recouvrent $X$, c'est-à-dire que $U'$ est un ouvert fermé de $X$ qui n'est ni $\emptyset$ ni $X$. Et ceci contredit la connexité de $X$. ∎

**Théorème 5.1.5.** *Soient $E$ un espace topologique et $(E_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $E$ par des parties connexes. Si les $(E_i)$ ont une intersection non vide, $E$ est connexe.*

Démonstration : Supposons $E$ non connexe. Il existerait un ouvert fermé $U$ de $E$, non vide et distinct de $E$. Soit $a$ un point commun à tous les $(E_i)$. Quitte à remplacer $U$ par

$E \setminus U$, on peut supposer que $a \in U$. Alors, pour tout $i \in I$, $E_i \cap U$ est un ouvert fermé de l'espace connexe $E_i$, non vide puisqu'il contient $a$. Donc on doit avoir $U \cap E_i = E_i$, c'est-à-dire $E_i \subset U$. Donc $E = \bigcup_{i \in I} E_i \subset U$, c'est-à-dire $U = E$, contrairement à l'hypothèse. Et $E$ est connexe. ■

**Théorème 5.1.6.** *Si $E$ et $F$ sont connexes, le produit $E \times F$ est connexe.*

Démonstration : Le produit est vide, donc connexe si l'un des deux facteurs est vide. Supposons donc que $a \in E$ et $b \in F$. L'application $x \mapsto (x, b)$ est clairement un homéomorphisme de $E$ sur le sous-espace $E \times \{b\}$ de $E \times F$, ce qui prouve la connexité de $E \times \{b\}$. De même, $\{x\} \times F$ est connexe pour tout $x$ de $E$. Alors, le sous-espace $H_x = (E \times \{b\}) \cup (\{x\} \times F)$ de $E \times F$, réunion de deux parties connexes ayant le point $(x, b)$ en commun, est connexe, et contient le point $(a, b)$ quel que soit $x \in E$. On en déduit que

$$E \times F = \bigcup_{x \in E} H_x$$

est connexe. ■

**Définition 5.1.7.** *Une fonction $f$ de $E$ dans $F$ est dite* localement constante *si chaque point de $E$ posède un voisinage sur lequel $f$ est constante.*

Une fonction localement constante est clairement continue.

**Théorème 5.1.8.** *Si $f$ est localement constante de $E$ connexe dans $F$, elle est constante sur $E$.*

Démonstration : Pour tout $y$ de $F$, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est ouvert dans $E$ puisqu'il est voisinage de chacun de ses points. Soient $a \in E$ et $b = f(a)$. L'ensemble $U = f^{-1}(b)$ est ouvert et non vide, et son complémentaire $V = \bigcup_{y \neq b} f^{-1}(y)$ est ouvert aussi. Puisque $E$ est connexe, $U$ est égal à $E$, ce qui signifie que $f$ est égale à $b$ en tout point de $E$. ■

**Théorème 5.1.9.** *Si $x$ est un point de l'espace topologique $E$, il existe une plus grande partie connexe de $E$ contenant $x$, appelée* composante connexe *de $x$. Les composantes connexes de $E$ forment une partition de $E$ en parties fermées.*

Démonstration : D'après le théorème 5.1.5, la réunion de toutes les parties connexes de $E$ contenant $x$ est connexe : c'est donc la plus grande partie connexe de $E$ contenant $x$. Si $C$ est la composante connexe de $x$, $\bar{C}$ est connexe et contient $x$, donc est contenu dans la composante connexe de $x$. Il en résulte que $\bar{C} \subset C$, donc $C = \bar{C}$, et $C$ est fermé.
Enfin, si $C$ et $C'$ sont deux composantes connexes de $E$ qui ont un point $x$ en commun, $C \cup C'$ est connexe ; on en déduit que $C \cup C' \subset C$ et $C \cup C' \subset C'$, donc que $C = C'$. Les composantes connexes de deux points sont donc égales ou disjointes. Et puisque chaque point appartient à sa propre composante connexe, $E$ est réunion des composantes connexes. ■

**Théorème 5.1.10.** *Si $U$ est un ouvert fermé de $E$ qui contient un point $x$, $U$ contient la composante connexe de $x$.*

Démonstration : Soit $C$ la composante connexe de $x$ dans $E$. Alors $U \cap C$ est un ouvert fermé de l'espace connexe $C$, non vide puisqu'il contient $x$. Il en résulte que $U \cap C = C$, c'est-à-dire $C \subset U$. ■

## 5.2 Compacts connexes

**Définition 5.2.1.** *Un espace métrique $E$ est dit* bien enchaîné *si, pour tout couple $(a,b)$ de points de $E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une $\varepsilon$-chaîne joignant $a$ à $b$, c'est-à-dire une suite finie $(x_n)_{0\leq n\leq p}$ de points de $E$ telle que $x_0 = a$, $x_p = b$ et $d(x_{n-1}, x_n) < \varepsilon$ pour $n = 1, 2, \ldots, p$.*

**Théorème 5.2.2.** *Tout espace métrique connexe est bien enchaîné.*

Démonstration : Soient $E$ un espace métrique connexe et $a$ un point de $E$. On considère l'ensemble $A_\varepsilon$ des points $x$ de $E$ pour lesquels existe une $\varepsilon$-chaîne joignant $a$ à $x$. On va montrer que $A_\varepsilon$ est ouvert et fermé, et puisqu'il contient $a$ on aura prouvé que $A_\varepsilon = E$, ce qui finira la démonstration puisque $a$ et $\varepsilon$ sont arbitraires.
Montrons que $A_\varepsilon$ est ouvert. Soit $b \in A_\varepsilon$. Il existe une $\varepsilon$-chaîne $(x_n)_{0\leq n\leq p}$ joignant $a$ à $b$. Alors, pour tout $x \in B(b,\varepsilon)$, il suffit d'adjoindre $x_{p+1} = x$ à la chaîne précédente pour obtenir une $\varepsilon$-chaîne joignant $a$ à $x$. Donc $B(b,\varepsilon) \subset A_\varepsilon$, et $A_\varepsilon$ est ouvert.
Soit maintenant $x$ un point adhérent à $A_\varepsilon$. Il existe donc un $y$ dans $B(x,\varepsilon) \cap A_\varepsilon$, et si $(y_n)_{0\leq n\leq p}$ est une $\varepsilon$-chaîne joignant $a$ à $y$, il suffit d'adjoindre $y_{p+1} = x$ à celle-ci pour obtenir une $\varepsilon$-chaîne joignant $a$ à $x$. Donc $x \in A_\varepsilon$, et $A_\varepsilon$ est fermé. Ceci achève la démonstration. ■

**Théorème 5.2.3.** *Tout espace métrique compact bien enchaîné est connexe.*

Démonstration : Supposons $E$ bien enchaîné, compact et non connexe. Il existerait alors deux fermés non vides $U$ et $V$ disjoints et de réunion $E$. Chacun d'entre eux serait donc compact, et le produit $U \times V$ serait compact. La fonction distance est continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, donc est continue sur $U \times V$. Elle atteint sur $U \times V$ son minimum, qui est strictement positif puisque $U$ et $V$ sont disjoints. Il existe donc un $\delta > 0$ tel que $d(x,y) \geq \delta$ si $x \in U$ et $y \in V$. Soient maintenant $a \in U$, $b \in V$ et $\varepsilon = \delta/2$. Il existe une $\varepsilon$-chaîne $(x_n)_{0\leq n\leq p}$ joignant $a$ à $b$. Puisque $d(x_{n-1}, x_n) < \varepsilon < \delta$, le point $x_n$ ne peut appartenir à $V$ si $x_{n-1}$ appartient à $U$. Comme $x_0 = a$ appartient à $U$, on voit par récurrence que tous les $(x_n)$ appartiennent à $U$. Ceci contredit le fait que $x_p = b$ appartient à $V$, et achève la démonstration. ■

**Théorème 5.2.4.** *Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe.*

Démonstration : Supposons d'abord que $K$ soit un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si $u$ et $v$ sont deux points de $K$, on définit une chaîne en posant $x_k = u + \dfrac{k}{p}(v-u)$ pour $0 \leq k \leq p$. Alors,

$$|x_k - x_{k-1}| = \frac{1}{p}\,|v-u| \leq \frac{|b-a|}{p}$$

et cette quantité peut être rendue inférieure à $\varepsilon$ en prenant l'entier $p$ assez grand. Donc $[a,b]$ est bien enchaîné, et connexe puisqu'il est compact.
Si $J = ]\alpha;\beta[$ est un intervalle ouvert, borné ou non, il existe une suite $(a_n)$ qui décroît vers $\alpha$ et une suite $(b_n)$ qui croît vers $\beta$. Et puisque $J$ est réunion de la suite croissante des intervalles connexes $[a_n, b_n]$, il est connexe. Enfin, si $I$ est un intervalle quelconque, son intérieur $J$ est un intervalle ouvert, donc connexe, et $J$ est dense dans $I$. Donc $I$ est connexe. ■

**Théorème 5.2.5.** *Toute partie connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle.*

Démonstration : Il suffit de voir que si $C$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$, on a $v \in C$ chaque fois que $u < v < w$, $u \in C$ et $w \in C$. Si on avait $v \notin C$, $U = C \cap ]-\infty, v[$ et $W = C \cap ]v, +\infty[$ formeraient un recouvrement de $C$ par deux ouverts disjoints de $C$. Et si $u < v < w$, avec $u \in C$ et $w \in C$, ni $U$ ni $W$ ne serait vide, ce qui contredirait la connexité de $C$. ■

**Théorème 5.2.6.** *Si $E$ est un espace métrique compact, la composante connexe d'un point $x$ de $E$ est l'intersection des ouverts fermés qui contiennent $x$.*

DÉMONSTRATION : La composante connexe $C$ de $x$ est fermée dans $E$ donc compacte. De plus, tout ouvert fermé de $E$ qui contient $x$ contient $C$. Si on note $C''$ l'intersection de tous les ouverts fermés contenant $x$, et $C_n$ l'ensemble des points de $E$ qui peuvent être joints à $x$ par une $2^{-n}$-chaîne, on voit comme au théorème 5.2.2 que $C_n$ est ouvert fermé. On va montrer que l'intersection $C'$ des $(C_n)$ est connexe, et on en déduira que

$$C \subset C'' \subset C' \subset C$$

donc que $C = C''$, ce qu'on veut démontrer.
Supposons donc que $C'$ ne soit pas connexe. Il existerait donc une partition de $C'$ en deux ouverts fermés $U$ et $V$ non vides. Puisque $U$ et $V$ seraient alors des compacts disjoints, il existerait comme plus haut un $\delta > 0$ tel que la distance de tout point de $U$ à tout point de $V$ soit supérieure à $\delta$. Puisque, pour tout $y$, $d(y, C') = \min(d(y, U), d(y, V))$, l'ensemble

$$H = \{y \in E : d(y, U) \geq \delta/3 \text{ et } d(y, V) \geq \delta/3\} = \{y \in E : d(y, C') \geq \delta/3\}$$

est fermé dans $E$ donc compact. Soit $n$ tel que $2^{-n} < \delta/3$. On va montrer que $C_n$ rencontre $H$. Et comme les $(C_n)$ forment une suite décroissante, on en déduira que les compacts $(C_n \cap H)$ sont non vides pour tout $n$, donc que leur intersection est non vide, ce qui est absurde puisque

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (C_n \cap H) = C' \cap H = \emptyset$$

Pour montrer que $C_n \cap H$ n'est pas vide, prenons $u \in U$ et $v \in V$. Il existe une $2^{-n}$-chaîne $(y_j)_{0 \leq j \leq p}$ joignant $u$ à $v$. Il est clair que tous les points de cette chaîne appartiennent à $C_n$ Puisque $y_p = v \in V$, la distance de $y_p$ à $U$ est supérieure à $\delta$. De plus $d(y_0, U) = d(u, U) = 0$. Il existe donc un plus grand indice $j \leq p$ tel que $d(y_j, U) \leq \delta/3$. Par compacité de $U$, il existe un point $z \in U$ tel que $d(y_j, z) \leq \delta/3$. On en déduit que

$$d(y_j, V) \geq d(z, V) - d(z, y_j) \geq \delta - \delta/3 = 2\delta/3$$

et donc que

$$d(y_{j+1}, V) \geq d(y_j, V) - d(y_j, y_{j+1}) \geq 2\delta/3 - 2^{-n} > 2\delta/3 - \delta/3 = \delta/3$$

Ceci montre que le point $y_{j+1}$ appartient à $H$, donc que $C_n \cap H$ n'est pas vide. ∎

**Définition 5.2.7.** *On appelle* arc *dans un espace topologique $E$ une application continue d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ dans $E$.*

*Si $\gamma : [a, b] \to E$ est un arc, les points $u = \gamma(a)$ et $v = \gamma(b)$ sont appelés* extrémités *de l'arc, et on dit que l'arc $\gamma$* joint *$u$ à $v$.*

**Définition 5.2.8.** *L'espace topologique $E$ est dit* connexe par arcs *si, pour tout couple $(u, v)$ de points de $E$ il existe un arc joignant $u$ à $v$.*

**Théorème 5.2.9.** *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

DÉMONSTRATION : Fixons un point $a$ de $E$, et notons $\Gamma$ l'ensemble des arcs $\gamma : [0, 1] \to E$ joignant $a$ à un point de $E$. Pour chaque $\gamma \in \Gamma$, l'ensemble $I_\gamma = \gamma([0, 1])$ est connexe, comme image continue de $[0, 1]$. Donc $E = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$ est connexe, car $a \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$. ∎

## 5.3 Espaces localement connexes

**Définition 5.3.1.** *Un espace topologique $E$ est dit localement connexe si tout point de $E$ possède une base de voisinages connexes.*

**Proposition 5.3.2.** *Si $E$ est localement connexe, tout sous-espace ouvert de $E$ est localement connexe.*

DÉMONSTRATION : Soit $U$ un ouvert de $E$. Si $x \in U$ et si $V$ est un voisinage de $x$ dans $U$, il existe un ouvert $V_1$ de $U$ contenant $x$ et contenu dans $U$. Puisque $V_1$ est ouvert dans $U$, il est la trace sur $U$ d'un ouvert $U_1$ de $E$. Donc $V_1 = U \cap U_1$ est ouvert dans $E$ et contient $x$. Puisque $E$ est localement connexe, il existe un voisinage connexe $W$ de $x$ dans $E$, contenu dans $V_1$. Alors $W = W \cap U$ est un voisinage de $x$ dans $U$, connexe et contenu dans $V$. ■

**Corollaire 5.3.3.** *Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est localement connexe.*

DÉMONSTRATION : Il suffit de démontrer que $\mathbb{R}^n$ est localement connexe, et pour cela de prouver que les boules de $\mathbb{R}^n$ sont connexes. Or, si $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et si $r > 0$, on a :

$$B(a,r) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - a_i| < r\} = \prod_{1 \leq i \leq n} ]a_i - r_i, a_i + r_i[$$

qui est connexe comme produit d'espaces connexes. ■

**Théorème 5.3.4.** *Si $E$ est localement connexe et si $U$ est ouvert dans $E$, les composantes connexes de $U$ sont ouvertes.*

DÉMONSTRATION : Puisque l'ouvert $U$ de $E$ est localement connexe, et qu'un ouvert de $U$ est ouvert dans $E$, il suffit de démontrer le théorème pour $U = E$. Soient $C$ une composante connexe de $E$, et $x \in C$. Puisque $E$ est localement connexe, il existe un voisinage connexe $W$ de $x$. Alors, puisque $C$ contient toute partie connexe de $E$ qui contient $x$, on a $W \subset C$, c'est-à-dire que $C$ est un voisinage de $x$. Et puisque $x$ est arbitraire dans $C$, $C$ est ouvert. ■

**Corollaire 5.3.5.** *Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, $U$ est réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts deux-à-deux disjoints.*

DÉMONSTRATION : Les composantes connexes de $U$ sont des parties ouvertes et connexes de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des intervalles ouverts. Et l'ensemble de ces composantes connexes est dénombrable d'après le théorème 2.10.5. ■

# 6

# ESPACES NORMÉS

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre seront toujours des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$. On notera $\mathbb{K}$ le corps de base pour désigner indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 6.1 Normes

**Définition 6.1.1.** *On appelle* norme *sur un espace vectoriel une application* $\|.\|$ *de* $E$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *vérifiant les conditions :*

$$\|x\| = 0 \iff x = 0 \qquad (i)$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \qquad \textit{pour tout } x \in E \textit{ et tout } \lambda \in \mathbb{K} \qquad (ii)$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \textit{pour tout } x \textit{ et tout } y \textit{ de } E \qquad iii)$$

**Proposition 6.1.2.** *Si* $\|.\|$ *est une norme sur l'espace vectoriel* $E$*, la fonction* $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ *est une distance sur* $E$*.*

Démonstration : On a $d(x, y) = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$,
$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1).(x - y\|) = |-1| \, . \, \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$ et

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$$

ce qui achève la preuve. ■

Un espace vectoriel normé sera muni de la distance et de la topologie associées à la norme.

**Définition 6.1.3.** *On appelle* boule unité *d'un espace normé la boule de centre* 0 *et de rayon 1.*

**Définition 6.1.4.** *On appelle* espace de Banach *tout espace normé complet pour la distance associée à la norme.*

**Définition 6.1.5.** *Deux normes* $\|.\|$ *et* $|||.|||$ *sont dites* équivalentes *s'il existe deux constantes* $\alpha$ *et* $\beta$ *strictement positives telles que, pour tout* $x$ *de* $E$*,*

$$\alpha \, \|x\| \leq |||x||| \leq \beta \, \|x\|$$

**Théorème 6.1.6.** *Deux normes $\|.\|$ et $|||.|||$ définissent sur $E$ la même topologie si et seulement si elles sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION : Si les deux normes sont équivalentes, il est clair que les distances associées sur $E$ sont équivalentes, donc que les topologies associées coïncident.

Inversement, si les deux normes ne sont pas équivalentes, on a $\sup_{x\in E, x\neq 0} \dfrac{|||x|||}{\|x\|} = +\infty$ ou $\sup_{x\in E, x\neq 0} \dfrac{\|x\|}{|||x|||} = +\infty$. Quitte à intervertir les deux normes, supposons que $\sup_{x\in E, x\neq 0} \dfrac{|||x|||}{\|x\|} = +\infty$. Il existe alors une suite $(x_n)$ dans $E$ telle que $\dfrac{|||x_n|||}{\|x_n\|} > 2^n$. Si on pose alors $y_n = \dfrac{1}{|||x_n|||} x_n$, on a $|||y_n||| = 1$ et $\|y_n\| = \dfrac{\|x_n\|}{|||x_n|||} < 2^{-n}$. Donc la suite $(y_n)$ converge vers 0 pour la distance associée à la norme $\|.\|$, et pas pour l'autre. Ceci montre que les topologies associées à ces deux normes sont différentes. ■

**Théorème 6.1.7.** *Si $E$ est un espace vectoriel normé, les applications $(x, y) \mapsto x + y$ de $E \times E$ dans $E$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda.x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans $E$ sont continues.*

DÉMONSTRATION : On a

$$d((x + y), (a + b)) = \|(x + y) - (a + b)\| = \|(x - a) + (y - b)\| \leq \|x - a\| + \|y - b\|$$

d'où la continuité de la somme, et

$$\begin{aligned} d(\lambda.x, \mu.a) &= \|\lambda.x - \mu a\| \leq \|\lambda(x - a\|) + \|(\lambda - \mu)a\| \\ &\leq |\lambda| \|x - a\| + |\lambda - \mu| \|a\| \leq |\lambda - \mu| \|x - a\| + |\mu| \|x - a\| + |\lambda - \mu| \|a\| \end{aligned}$$

quantité qui peut être rendue inférieure à $\varepsilon > 0$ en prenant $\|x - a\|$ inférieure à $\min(1, \dfrac{\varepsilon}{3|\mu|})$ et $|\lambda - \mu|$ inférieur à $\min(\dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\varepsilon}{3\|a\|})$. ■

**Proposition 6.1.8.** *Les boules d'un espace normé sont convexes, donc connexes par arc.*

DÉMONSTRATION : Soit $B$ la boule fermée de centre $a$ et de rayon $r$. Si $u$ et $v$ appartiennent à $B$, $0 \leq t \leq 1$ et $w = tu + (1 - t)v$, on a

$$\begin{aligned} \|w - a\| &= \|t(u - a) + (1 - t)(v - a)\| \leq \|t(u - a)\| + \|(1 - t)(v - a)\| \\ &\leq t \|u - a\| + (1 - t) \|v - a\| \leq tr + (1 - t)r = r \end{aligned}$$

d'où on déduit que $w \in B$. Ceci prouve la convexité de $B$. Il résulte du théorème précédent que l'application $\gamma : t \mapsto tv + (1 - t)u$ est continue de $[0, 1]$ dans $B$, donc est un arc qui joint $u$ à $v$ dans $B$. ■

**Corollaire 6.1.9.** *Tout espace normé est localement connexe.*

**Définition 6.1.10.** *Si $E$ est un espace normé, une série $(x_n)$ de points de $E$ est dite* normalement convergente *si la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ est convergente.*

**Théorème 6.1.11.** *Dans un espace de Banach $E$, toute série normalement convergente est convergente.*

DÉMONSTRATION : Soit $S_n = \sum_{j=0}^{n} x_j$. On a, pour $n < p$

$$\|S_p - S_n\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{p} x_j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{p} \|x_j\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|x_j\|$$

et puisque le reste de la série numérique convergente $\sum \|x_n\|$ tend vers 0, la suite $(S_n)$ est une suite de Cauchy dans $E$, donc converge vers un élément $x$ de $E$. ■

## 6.2 Espaces normés de dimension finie

**Théorème 6.2.1.** *Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, toutes les normes sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION : Soit $\|.\|$ la norme sur $\mathbb{K}^n$ définie par

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Si on note $S$ la sphère unité de cette norme, c'est-à-dire l'ensemble des points de $\mathbb{K}^n$ de norme 1, $S$ est fermé puisque la distance est continue, et borné puisque chaque coordonnée est majorée par 1 en valeur absolue sur $S$. Donc $S$ est compacte.
Si $|||.|||$ est une autre norme sur $\mathbb{K}^n$, et si on désigne par $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a pour tout $x$

$$|||x||| = \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right|\right|\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |||e_i||| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \, . \sum_{i=1}^{n} |||e_i|||$$

donc, en notant $M = \sum_{i=1}^{n} |||e_i|||$,

$$\big| |||x||| - |||y||| \big| \leq |||x - y||| \leq M \, \|x - y\| = M \, d(x, y)$$

ce qui montre que la fonction $|||.|||$ est $M$-lipschitzienne, donc continue sur $S$. Elle atteint donc sur $S$ sa borne inférieure $\alpha$, qui est strictement positive puisque $|||.|||$ ne s'annule pas sur $S$ et sa borne supérieure $\beta$, qui est finie.
On en déduit que, pour $x \neq 0$ dans $\mathbb{K}^n$, on a $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$ donc, puisque $\dfrac{|||x|||}{\|x\|} = \left|\left|\left| \dfrac{x}{\|x\|} \right|\right|\right|$,

$$0 < \alpha \leq \frac{|||x|||}{\|x\|} \leq \beta < +\infty$$

ce qui est l'inégalité cherchée. ■

**Théorème 6.2.2.** *Si $E$ est un espace normé de dimension finie $n$ et si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est une base de $E$, l'application linéaire $T$ de $\mathbb{K}^n$ sur $E$ définie par $T(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur $E$.*

DÉMONSTRATION : Notons $|||.|||$ la norme sur $\mathbb{K}^n$ définie par $|||\lambda||| = \|T(\lambda)\|$. D'après le théorème précédent, la norme $|||.|||$ est équivalente à la norme $\|.\|$. Puisque $T$ est une isométrie de $(\mathbb{K}^n, |||.|||)$ sur $E$, c'est un homéomorphisme, et puisque les normes $\|.\|$ et $|||.|||$ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes, elles définissent sur $\mathbb{K}^n$ la même topologie. Donc $T$ est un homéomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur $E$. ■

**Corollaire 6.2.3.** *Toutes les normes sont équivalentes sur un espace de dimension finie.*

**Théorème 6.2.4.** *Dans un espace normé, tout sous-espace de dimension finie est fermé.*

Démonstration : Soit $F$ un sous-espace de dimension finie $n$ d'un espace normé $E$. Si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est une base de $F$, l'application linéaire $T$ de $\mathbb{K}^n$ sur $F$ définie par $T(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ est un homéomorphisme. De plus, si $(x_k)$ est une suite de Cauchy dans $F$, on a

$$\left\|T^{-1}x_k - T^{-1}x_\ell\right\| = \left\|T^{-1}(x_k - x_\ell)\right\| \leq M \left\|x_k - x_\ell\right\|$$

pour une certaine constante $M$ en vertu de l'équivalence des normes. Il en résulte que la suite $(\lambda^k) = (T^{-1}(x_k))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}^n$, donc qu'elle converge vers un $\lambda \in \mathbb{K}^n$. Alors la suite $(x_k)$ converge vers $T(\lambda) \in F$. Il en résulte que $F$ est complet dans $E$, donc fermé. ∎

**Théorème 6.2.5.** *Tout espace normé de dimension finie est localement compact.*

Démonstration : Puisque toute boule fermée de $\mathbb{K}^n$ est compacte, comme partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou de $\mathbb{R}^{2n}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), il est clair que $\mathbb{K}^n$ est localement compact. Et puisque tout espace normé de dimension finie est homéomorphe à $\mathbb{K}^n$, il est également localement compact.

**Théorème 6.2.6.** *(Riesz) Tout espace normé localement compact est de dimension finie.*

Démonstration : Supposons que $E$ soit de dimension infinie et que la boule $B$ centrée à l'origine soit compacte. Puisque les homothéties $x \mapsto \lambda x$ sont des homéomorphismes de $E$ pour $\lambda \neq 0$, on peut supposer $B$ de rayon 1. On va construire par récurrence une suite $(x_n)$ de points de $B$ dont les distances mutuelles sont minorées, ce qui contredira la compacité de $B$ car cette suite ne pourra avoir aucune sous-suite convergente. Si les points $(x_i)$ sont construits pour $i < m$, on considère le sous-espace vectoriel $F_m$ engendré par ces points. Cet espace de dimension finie est fermé, et distinct de $E$, car ce dernier est de dimension infinie. On peut donc trouver un point $y_m$ de $E \setminus F_m$. Puisque $y_m$ n'est pas adhérent à $F_m$, la distance $\delta_m$ de $y_m$ à $F_m$ est strictement positive. Il existe un point $z_m$ de $F_m$ tel que $d(y_m, z_m) < 2\delta_m$. Alors, si on pose $x_m = \dfrac{y_m - z_m}{\|y_m - z_m\|}$ on a $x_m \in B$ et $d(x_m, F_m) > 1/2$ : en effet, pour tout $z \in F_m$ on a

$$x_m - z = \frac{1}{\|y_m - z_m\|}\big(y_m - (z_m + \|y_m - z_m\|\, z)\big) = \frac{y_m - z'}{\|y_m - z_m\|}$$

si on note $z' = (z_m + \|y_m - z_m\|\, z)$.

Puisque $z' \in F_m$, on a $\|x - z'\| \geq \delta$ donc $\|x_m - z\| \geq \dfrac{\delta}{2\delta} = 1/2$. En particulier, si $i < m$, $x_i \in F_m$ ; donc $\|x_m - x_i\| \geq d(x_m, F_m) \geq 1/2$, ce qui montre que les distances mutuelles des points $(x_m)$ sont minorées par $1/2$. ∎

**Proposition 6.2.7.** *Si $E$ est un espace vectoriel normé, $V$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie et $x$ un point de $E$, alors il existe un point $v$ de $V$ tel que $\|x - v\| = d(x, V)$.*

Démonstration : L'ensemble $K := \{w \in V : \|w\| \leq 2\,\|x\|\,\}$ est une partie fermée bornée de l'espace de dimension finie $V$, donc une partie compacte. Alors la fonction continue $w \mapsto \|w - x\|$ atteint sur $K$ sa borne inférieure $\delta$ en un point $v$. Et, puisque $0 \in K$, on a

$\delta = \inf_{w\in K} \|w - x\| \leq \|x\|$. Pour $w \in V\setminus K$, on a $\|w - x\| \geq \|w\| - \|x\| > 2\|x\| - \|x\| = \|x\|$. Il en résulte que $\|x - v\| = \delta = \inf_{v\in V} \|w - x\| = d(x, V)$. ■

## 6.3 Exemples d'espaces normés

Si $K$ est un espace compact, on peut définir, pour tout élément $f$ de l'espace vectoriel $\mathscr{C}(K, \mathbb{K})$

$$\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|$$

On vérifie sans peine que cette fonction est une norme, et que la distance associée est la distance de la convergence uniforme. On appelle cette norme la *norme de la convergence uniforme*. Il résulte du théorème 4.2.8 que $\mathscr{C}(K, \mathbb{K})$ est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$.

On note $c_0$ l'ensemble de toutes les suites de nombres complexes qui tendent vers 0. Il est clair que, pour l'addition terme-à-terme et la multiplication par un nombre complexe, $c_0$ est un espace vectoriel. On pose, pour $x = (x_n)$ dans $c_0$

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

et on vérifie sans peine que ceci définit une norme sur $c_0$.

**Théorème 6.3.1.** *L'espace $c_0$ est un espace de Banach.*

Démonstration : Soit $(x^k)$ une suite de Cauchy dans $c_0$. On a, pour tout $k$ et tout $\ell$, $\left|x_n^k - x_n^\ell\right| \leq \left\|x^k - x^\ell\right\|$. Il en résulte que la suite numérique $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est, pour tout $n$, une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc converge vers un nombre complexe $x_n$. Il faut démontrer que $x = (x_n)$ est dans $c_0$ et est la limite dans $c_0$ de la suite $(x^k)$.
Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe un $m$ tel que si $k$ et $\ell$ sont supérieurs à $m$ on ait $\|x_k - x_\ell\| \leq \varepsilon/2$. Puisque $x_m$ appartient à $c_0$, il existe un $p$ tel que $|x_n^m| \leq \varepsilon/2$ pour $n > p$. Alors, pour $n > p$ et $k \geq m$ on a

$$\left|x_n^k\right| \leq |x_n^m| + \left\|x^k - x^m\right\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

et en passant à la limite, $|x_n| \leq \varepsilon$ pour $n > p$. Ceci signifie que $x \in c_0$.
De plus, puisque $\left|x_n^k - x_n^\ell\right| \leq \varepsilon/2$ pour $k$ et $\ell$ supérieurs à $m$, on a, en passant à la limite $\left|x_n - x_n^\ell\right| \leq \varepsilon/2$ pour $\ell > m$, c'est-à-dire $\left\|x - x^\ell\right\| \leq \varepsilon/2$ pour $\ell > m$. Donc $x$ est limite dans $c_0$ de la suite $(x^k)$. ■

On note $\ell^1$ l'ensemble de toutes les suites de nombres complexes $x = (x_n)$ telles que la série $(x_n)$ converge absolument. Il est clair que $\ell^1$ est un espace vectoriel sur lequel la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ est une norme.

**Théorème 6.3.2.** *L'espace $\ell^1$ est un espace de Banach.*

Démonstration : Soit $(x^k)$ une suite de Cauchy dans $\ell^1$. Pour tout $n$, tout $k$ et tout $\ell$, on a $\left|x_n^k - x_n^\ell\right| \leq \left\|x^k - x^\ell\right\|$. Il en résulte que la suite numérique $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc converge vers un nombre $x_n$. Il reste à démontrer que $x = (x_n)$

appartient à $\ell^1$ et que $x$ est limite dans $\ell^1$ de la suite $(x^k)$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $m$ tel que si $k$ et $\ell$ sont supérieurs à $m$, $\|x^k - x^\ell\| \leq \varepsilon$. On a alors, pour $n$ fixé

$$\sum_{j=0}^{n} |x_j^k| \leq \sum_{j=0}^{n} |x_j^m| + \sum_{j=0}^{n} |x_j^k - x_j^m| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |x_j^m| + \varepsilon$$

Et en passant à la limite quand $k$ tend vers l'infini, on obtient

$$\sum_{j=0}^{n} |x_j| \leq \|x_m\| + \varepsilon$$

et comme cette dernière quantité ne dépend pas de $n$, on obtient $x \in \ell^1$.
De plus, pour $n$ fixé, $k \geq m$ et $\ell \geq m$, on a

$$\sum_{j=0}^{n} |x_j^k - x_j^\ell| \leq \|x^k - x^\ell\| \leq \varepsilon$$

donc en passant à la limite quand $k \to \infty$,

$$\sum_{j=0}^{n} |x_j - x_j^\ell| \leq \varepsilon$$

et puisque cette inégalité est valable pour tout $n$, on obtient $\|x - x^\ell\| \leq \varepsilon$ pour $\ell \geq m$. Donc la suite $(x^k)$ converge vers $x$ dans $\ell^1$. ■

## 6.4 Applications linéaires continues

**Théorème 6.4.1.** *Soit $f$ une application linéaire de l'espace normé $E$ dans l'espace normé $F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *i)* *$f$ est continue.*
- *ii)* *$f$ est continue en 0.*
- *iii)* *$f$ est uniformément continue.*
- *iv)* *$f$ est lipschitzienne.*
- *v)* *Il existe une constante $M$ telle que pour tout $x$ de $E$, on ait $\|f(x)\| \leq M \|x\|$.*

Démonstration : Il est clair que *iv)* $\Rightarrow$ *iii)* $\Rightarrow$ *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Si la condition *v)* est satisfaite, on a pour tout $x$ et tout $y$ de $E$

$$d(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq M \|x - y\| = M\, d(x, y)$$

ce qui prouve que $f$ est $M$-lipschitzienne, donc que *v)* $\Rightarrow$ *iv)*.
Enfin, si $f$ est continue en 0, il existe un $\delta > 0$ tel que $\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x)\| \leq 1$, puisque la boule unité de $F$ est un voisinage de 0. Soit $x \in E$. Si $x = 0$ on a $f(x) = 0$ donc $\|f(x)\| \leq \delta^{-1} \|x\|$. Et si $x \neq 0$, on pose $\lambda = \dfrac{\delta}{\|x\|}$. Alors $y = \lambda x$ vérifie $\|y\| = \lambda \|x\| = \delta$, d'où

$$\|f(y)\| = \|f(\lambda x)\| = \|\lambda f(x)\| = \lambda \|f(x)\| \leq 1$$

et on en conclut que $\|f(x)\| \leq \dfrac{1}{\lambda} = \delta^{-1} \|x\|$. Et ceci achève de prouver *ii)* $\Rightarrow$ *v)* avec $M = \delta^{-1}$. ■

**Définition 6.4.2.** *Si $f$ est une application linéaire continue de l'espace normé $E$ dans l'espace normé $F$, on appelle norme de $f$ la plus petite constante $M$ telle que, pour tout $x \in E$ on ait $\|f(x)\| \leq M \|x\|$. On la note $\|f\|$.*

On a donc $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$ pour tout $x$ de $E$ et toute application linéaire continue $f$ de $E$ dans $F$.

**Proposition 6.4.3.** *La norme d'une application linéaire continue $f$ est égale à*

$$\|f\| = \sup_{x \in B} \|f(x)\|$$

*où $B$ désigne la boule unité de $E$.*

DÉMONSTRATION : Puisqu'on a pour tout $x$, $\|f(x)\| \leq \|f\| . \|x\|$, on a nécessairement $\sup_{x \in B} \|f(x)\| \leq \|f\|$. Et si $0 < \rho < \|f\|$ il existe un $x \neq 0$ dans $E$ tel que $\|f(x)\| \geq \rho \|x\|$. Alors le point $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ appartient à $B$, et on a $\|f(y)\| > \rho$. ∎

On notera $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de l'espace normé $E$ dans l'espace normé $F$.

**Théorème 6.4.4.** *Si $f$ est une application linéaire de l'espace normé $E$ de dimension finie dans l'espace normé $F$, $f$ est continue.*

DÉMONSTRATION : Posons, pour $x \in E$

$$|||x||| = \|x\| + \|f(x)\|$$

Il est clair que $|||.|||$ est une norme sur $E$. Cette norme est équivalente à la norme initiale $\|.\|$. Il existe donc un $\alpha$ tel que $|||x||| \leq \alpha \|x\|$ pour tout $x$ de $E$. On en déduit que $\|f(x)\| \leq \alpha \|x\|$, ce qui prouve la continuité de $f$. ∎

**Théorème 6.4.5.** *Muni de l'application $f \mapsto \|f\|$, l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace normé. De plus, si $F$ est complet, $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace de Banach.*

DÉMONSTRATION : Notons $B$ la boule unité de $E$. Il est clair que l'application nulle a 0 comme norme. Et si $\|f\| = 0$, on a $\|f(x)\| \leq \|f\| . \|x\| = 0$, donc $f$ est l'application nulle. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a, pour tout $x \in B$

$$\|(\lambda f)(x)\| = |\lambda| \|f(x)\|$$

d'où, en passant à la borne supérieure, $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$.
Enfin, si $f$ et $g$ sont deux applications linéaires continues de $E$ dans $F$, on a pour tout $x \in B$

$$\|(f+g)(x)\| = \|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\| + \|g\|$$

donc $\|f + g\| = \sup_{x \in B} \|(f+g)(x)\| \leq \|f\| + \|g\|$.
Si $F$ est complet et si $(f_n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(E, F)$, on a pour tout $x \in E$, tout $n$ et tout $p$

$$\|f_n(x) - f_p(x)\| = \|(f_n - f_p)(x)\| \leq \|f_n - f_p\| . \|x\|$$

d'où l'on déduit que la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $F$. Par conséquent, il existe une application $f$ de $E$ dans $F$ telle que, pour tout $x$ de $E$ $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

On a clairement

$$f(x+\lambda y) = \lim_{n\to\infty}(f_n(x)+\lambda f_n(y)) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lambda \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(x)+\lambda f(y)$$

ce qui montre que $f$ est linéaire.
Puisque la suite $(f_n)$ est une suite de Cauchy, il existe un $m$ tel que, pour $n \geq m$ on ait $\|f_n - f_m\| \leq 1$. On en déduit que, pour $n \geq m$, $\|f_n\| \leq 1 + \|f_m\|$, donc que pour $x \in E$ et $n \geq m$, $\|f_n(x)\| \leq (1+\|f_m\|)\,\|x\|$ et on en déduit que $f(x)$ appartient à la boule fermée de centre 0 et de rayon $(1+\|f_m\|)\,\|x\|$. Ceci montre que pour tout $x$

$$\|f(x)\| \leq (1+\|f_m\|)\,\|x\|$$

c'est-à-dire que l'application linéaire $f$ est continue. Enfin, si $\varepsilon > 0$, il existe un $m$ tel que, pour $n$ et $p$ supérieurs à $m$, on ait $\|f_n - f_p\| \leq \varepsilon$. On en déduit que si $x \in E$ et si $n$ et $p$ sont supérieurs à $m$, on a

$$\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon\,\|x\|$$

donc que $f_p(x)$ appartient à la boule fermée de centre $f_n(x)$ et de rayon $\varepsilon\,\|x\|$. La limite $f(x)$ de la suite $(f_p(x))$ appartient donc à cette même boule et on en déduit que

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon\,\|x\|$$

donc que $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$ pour $n > m$, c'est-à-dire que $f$ est limite de la suite $(f_n)$. La suite de Cauchy $(f_n)$ est donc convergente dans $\mathscr{L}(E,F)$. ∎

**Définition 6.4.6.** *Si $E$ est un espace normé, on appelle* espace dual *de $E$ l'espace $E' = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur $E$.*

Puisque $\mathbb{K}$ est complet, il résulte du théorème précédent que $E'$ est un espace de Banach.

**Théorème 6.4.7.** *Si $E$, $F$ et $G$ sont trois espaces normés, $f$ une application linéaire continue de $E$ dans $F$ et $g$ une application linéaire continue de $F$ dans $G$, l'application linéaire continue $g\circ f$ a une norme au plus égale à $\|f\|\,.\,\|g\|$.*

Démonstration : Pour $x \in E$ et $y \in F$ on a $\|f(x)\| \leq \|f\|\,.\,\|x\|$ et $\|g(y)\| \leq \|g\|\,.\,\|y\|$. Donc

$$\|g\circ f(x)\| \leq \|g\|\,.\,\|f(x)\| \leq \|g\|\,.\,\|f\|\,.\,\|x\|$$

ce qui montre que $\|g\circ f\| \leq \|g\|\,.\,\|f\|$. ∎

**Théorème 6.4.8.** *Si $E$ est un espace de Banach, l'espace $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$ est une algèbre de Banach, c'est-à-dire un espace de Banach muni d'une multiplication associative et distributive par rapport à la somme et vérifiant $\|fg\| \leq \|f\|\,.\,\|g\|$ pour tout $f$ et tout $g$.*

Ceci résulte immédiatement de ce qui précède. On notera $I$ l'application identique de $E$, qui est l'unité de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$.

**Théorème 6.4.9.** *Si $E$ est un espace de Banach, et si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $\|f\| < 1$, l'application $I - f$ est inversible, c'est-à-dire qu'il existe un élément $g$ de $\mathscr{L}(E)$ tel que $(I-f)\circ g = g\circ(I-f) = I$. De plus $\left\|(I-f)^{-1} - I\right\| \leq \dfrac{\|f\|}{1-\|f\|}$.*

Démonstration : Notons $S_n$ l'élément de $\mathscr{L}(E)$ défini comme la somme $\sum_{j=0}^{n} f^j$, où $f^0 = I$ et $f^j$ désigne, pour $j \geq 1$, le produit de composition de $j$ applications égales à $f$ (on a donc pour $j$ et $k$ entiers $f^j \circ f^k = f^{j+k}$). On a, pour $n < p$

$$\begin{aligned}\|S_p - S_n\| &= \left\| \sum_{j=n+1}^{p} f^j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{p} \|f^j\| \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{p} \|f\|^j \leq \frac{\|f\|^{n+1}}{1 - \|f\|}\end{aligned}$$

car $\|f\| < 1$. On en déduit que si $n$ et $p$ sont supérieurs à $m$, $\|S_n - S_p\| \leq \dfrac{\|f\|^{m+1}}{1 - \|f\|}$, donc que la suite $(S_n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(E)$, puisque $\lim_{m\to\infty} \|f\|^m = 0$, et que $(S_n)$ converge vers un élément $g$. De plus on a

$$(I - f)\circ S_n = S_n \circ (I - f) = \sum_{j=0}^{n} (f^j - f^{j+1}) = I - f^{n+1}$$

et puisque $\left\|f^{n+1}\right\| \leq \|f\|^{n+1}$, on voit que $(I - f^{n+1})$ converge vers $I$. On conclut que

$$I = \lim_{n\to\infty} (I - f)\circ S_n = (I - f)\circ g = \lim_{n\to\infty} S_n \circ (I - f) = g \circ (I - f)$$

et que

$$\left\|(I - f)^{-1} - I\right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f^n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f\|^n = \frac{\|f\|}{1 - \|f\|}$$

Ceci achève la démonstration. ■

**Théorème 6.4.10.** *Si $E$ est un espace de Banach, l'ensemble $\mathscr{G}$ des éléments inversibles de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$ est ouvert, et l'application $g \mapsto g^{-1}$ est continue sur $\mathscr{G}$.*

Démonstration : Soit $g \in \mathscr{G}$. Pour $h \in \mathscr{L}(E)$, on a $g + h = g\circ(I + g^{-1}\circ h)$. Donc si $\|h\| < \rho = \dfrac{1}{\|g\|^{-1}}$, on peut poser $f = -g^{-1}\circ h$. On a alors $\|f\| \leq \left\|g^{-1}\right\| . \|h\| < 1$. On en déduit par le théorème précédent que $I - f$ est inversible, d'inverse $u$. Alors, puisque $g + h = g\circ(I - f)$, on vérifie que $u\circ g^{-1}$ est l'inverse de $g + h$.
Il en résulte que la boule ouverte de centre $g$ et de rayon $\rho$ est contenue dans $\mathscr{G}$, donc que $\mathscr{G}$ est ouvert dans $\mathscr{L}(E)$. De plus

$$\left\|(g + h)^{-1} - g^{-1}\right\| = \left\|(u - I)\circ g^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|g^{-1}\right\| \|h\|}{1 - \left\|g^{-1}\right\| \|h\|} \left\|g^{-1}\right\|$$

qui tend vers 0 avec $\|h\|$.

■

Il est clair qu'une application linéaire bijective $f$ entre deux espaces vectoriels normés $E$ et $F$ possède une application réciproque linéaire. Par contre, même si de plus $f$ est supposée continue, l'application $f^{-1}$ 'est pas nécessairement continue. On dira que l'application linéaire $f$ est un *isomorphisme* de $E$ sur $F$ si elle est bijective, continue et si $f^{-1}$ est continue. Nous ne démontrerons pas ici le profond théorème suivant, dû à S. Banach.

**Théorème 6.4.11.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, et $f$ une application linéaire continue et bijective de $E$ sur $F$. Alors $f^{-1}$ est continue, c'est-à-dire que $f$ un isomorphisme.*

## 6.5 Applications bilinéaires continues.

**Définition 6.5.1.** *Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels. Une application $f$ de $E \times F$ dans $G$ est dite* bilinéaire *si :*

*i) pour tout $y$ de $F$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est linéaire de $E$ dans $G$.*

*ii) pour tout $x$ de $E$, l'application $y \mapsto f(x, y)$ est linéaire de $F$ dans $G$.*

Si $E$, $F$ et $G$ sont des espaces normés, l'espace $E \times F$, muni de la norme $\|x, y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|)$, a pour topologie la topologie produit de celle de $E$ et de celle de $F$. On a alors le théorème suivant, analogue à celui qui a été démontré pour les applications linéaires.

**Théorème 6.5.2.** *Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces normés, et $f$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans $G$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

*i) $f$ est continue.*

*ii) $f$ est continue en $(0, 0)$.*

*iii) Il existe une constante $M$ telle que pour tout $x$ de $E$ et tout $y$ de $F$, on ait $\|f(x, y)\| \leq M \|x\| . \|y\|$.*

Démonstration : Il est clair que si $f$ est continue, elle est continue en $(0, 0)$.

Si $f$ est continue en $(0, 0)$, il existe un $r > 0$ tel que, pour tout $(x, y)$ de $E \times F$ satisfaisant $\|(x, y)\| \leq r$, on ait

$$\|f(x, y)\| = \|f(x, y) - f(0, 0)\| \leq 1$$

On a alors pour $x$ et $y$ non nuls, $\left\| \left( \frac{rx}{\|x\|}, \frac{ry}{\|y\|} \right) \right\| = r$, donc

$$\left\| f\left( \frac{rx}{\|x\|}, \frac{ry}{\|y\|} \right) \right\| = \frac{r^2}{\|x\| \|y\|} \|f(x, y)\| \leq 1$$

c'est-à-dire, en posant $M = r^{-2}$ :

$$\|f(x, y)\| \leq M \|x\| \|y\|$$

inégalité qui est encore vérifiée si $x$ ou $y$ est nul puisque l'on a alors $f(x, y) = 0$.

Enfin, si on a $\|f(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$, et si $(a,b) \in E \times F$, on a

$$f(x,y)-f(a,b) = f(a+(x-a), b+(y-b))-f(a,b) = f(x-a,b)+f(a,y-b)+f(x-a,y-b)$$

donc

$$\|f(x,y)-f(a,b)\| \leq M\big(\|b\|\|x-a\| + \|a\|\|y-b\| + \|x-a\|\|y-b\|\big)$$

Alors, si on prend $\|x-a\| < \inf(1, \dfrac{\varepsilon}{3M\|b\|})$ et $\|y-b\| < \inf(\dfrac{\varepsilon}{3M\|a\|}, \dfrac{\varepsilon}{3M})$, on obtient $\|f(x,y)-f(a,b)\| < \varepsilon$. Et ceci montre que $f(x,y)$ appartient à la boule de centre $f(a,b)$ et de rayon $\varepsilon$ si la distance de $(x,y)$ à $(a,b)$ est inférieure à $\delta = \inf(1, \dfrac{\varepsilon}{3M\|b\|}, \dfrac{\varepsilon}{3M\|a\|}, \dfrac{\varepsilon}{3M})$. ■

**Définition 6.5.3.** *On appelle* norme *de l'application bilinéaire continue $f$ de $E \times F$ dans $G$ la quantité*

$$\|f\| = \sup\{\|f(x,y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$$

*qui est la plus petite constante $M$ satisfaisant l'inégalité $\|f(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ pour tout $x$ de $E$ et tout $y$ de $F$.*

On vérifie sans peine comme dans le cas des applications linéaires que ceci est bien une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}_2(E,F;G)$ des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans $G$, et que l'espace normé $\mathscr{L}_2(E,F;G)$ est complet quand $G$ est complet.

**Exemple 6.5.4.** *Si $E$ et $F$ sont deux espaces normés, l'application définie sur $\mathscr{L}(E,F) \times E$ par $\varphi : (T,x) \mapsto Tx$ est bilinéaire continue et de norme au plus 1.*

Démonstration : On a, en effet $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ d'après 6.4.2. La linéarité de $\varphi$ par rapport à $T$ résulte de la définition de la somme de deux applications linéaires et du produit par un scalaire d'une application linéaire. Et la linéarité par rapport à $x$ provient du fait que $T \in \mathscr{L}(E,F)$. ■

**Exemple 6.5.5.** *Si $E$, $F$ et $G$ sont trois espaces normés, l'application définie sur $\mathscr{L}(E,F) \times \mathscr{L}(F,G)$ à valeurs dans $\mathscr{L}(E,G)$ par $\varphi(S,T) = T \circ S$ est bilinéaire continue de norme au plus 1.*

L'application $\varphi$ est clairement bilinéaire. Et on a $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$. ■

## 6.6 Perturbations lipschitziennes de l'identité.

**Théorème 6.6.1.** *Soient $E$ un espace de Banach, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une application $q$-lipschitzienne de $U$ dans $E$. Si $q < 1$ l'application $g : x \mapsto x + f(x)$ est un homéomorphisme de $U$ sur un ouvert $V$ de $E$, et l'application $h : y \mapsto y - g^{-1}(y)$ est $\dfrac{q}{1-q}$-lipschitzienne de $V$ dans $E$.*

Démonstration : On voit tout d'abord que $g$ est injective et que $g^{-1}$ est $\dfrac{1}{1-q}$-lipschitzienne. En effet si $x$ et $x'$ sont deux points de $U$ on a :

$$\begin{aligned}\|g(x)-g(x')\| &= \|(x-x') + (f(x)-f(x'))\| \geq \|x-x'\| - \|f(x)-f(x')\| \\ &\geq \|x-x'\| - q\|x-x'\| = (1-q)\|x-x'\|\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que si $g(x) = g(x')$, on a $\|x - x'\| = 0$, c'est-à-dire $x = x'$. De plus, si $y$ et $y'$ sont deux points de $V = g(U)$ et si $x = g^{-1}(y)$ et $x' = g^{-1}(y')$, on a

$$(1-q)\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y')\right\| = (1-q)\|x - x'\| \leq \|g(x) - g(x')\| = \|y - y'\|$$

d'où

$$\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y')\right\| = \|x - x'\| \leq \frac{1}{1-q}\|y - y'\|$$

On montre ensuite que $V$ est ouvert. Si $b \in V$ et si $a \in U$ vérifie $b = g(a)$, si la boule fermée $\tilde{B}(a, r)$ est contenue dans $U$, et si $\|y - b\| < (1-q)r$, on a, pour tout $x \in \tilde{B}(a, r)$ :

$$\begin{aligned}\|(y - f(x)) - a\| &\leq \|y - b\| + \|b - a - f(x)\| = \|y - b\| + \|a + f(a) - a - f(x)\| \\ &\leq \|y - b\| + q\|a - x\| \leq (1-q)r + qr = r\end{aligned}$$

ce qui montre que $y - f(x) \in \tilde{B}(a, r)$. L'application $\varphi : x \mapsto y - f(x)$ envoie donc la boule fermée $\tilde{B}(a, r)$ dans elle-même, et puisque

$$\|\varphi(x) - \varphi(x')\| = \|f(x') - f(x)\| \leq q\|x - x'\|$$

l'application $\varphi$ est une contraction de rapport $q$ de l'espace complet $\tilde{B}(a, r)$ dans lui-même. Il résulte alors du théorème 4.5.2 que $\varphi$ possède un point fixe $x_0$, qui vérifie $x_0 = y - f(x_0)$, c'est-à-dire $y = g(x_0)$, ce qui montre que $y \in g(\tilde{B}(a, r)) \subset g(U)$. On en conclut que $V \supset B(b, (1-q)r)$, donc que $V$ est un voisinage de $b$ ; et comme $b$ est un point arbitraire de $V$, ceci prouve que $V$ est ouvert.
Enfin, si $y$ et $y'$ appartiennent à $V$, avec $x = g^{-1}(y)$ et $x' = g^{-1}(y')$, on a, comme plus haut, $x = y - f(x)$ et $x' = y' - f(x')$, donc $h(y) = y - g^{-1}(y) = y - x = f(x)$ et $h(y') = y' - g^{-1}(y') = f(x')$. Il en résulte que

$$\|h(y) - h(y')\| = \|f(x) - f(x')\| \leq q\|x - x'\| = q\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y')\right\| \leq \frac{q}{1-q}\|y - y'\|$$

ce qui prouve que $h$ est $\dfrac{q}{1-q}$-lipschitzienne. ■

## 6.7 Le théorème de Hahn-Banach

**Définition 6.7.1.** *On appelle* hyperplan *d'un espace vectoriel un sous-espace vectoriel de codimension 1, c'est-à-dire le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

**Théorème 6.7.2.** *Soient $E$ un espace normé et $f$ une forme linéaire non nulle sur $E$. Alors $f$ est continue si et seulement si le noyau de $f$ est fermé dans $E$.*

Démonstration : Si $f$ est continue, son noyau est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{K}$ par $f$, donc est fermé.

Inversement, si le noyau $H$ de $f$ est fermé, soit $a$ un point de $E$ n'appartenant pas à $H$. Il existe alors une boule ouverte de rayon $\rho > 0$ centrée en $a$ et disjointe de $H$. Alors, pour tout $x$ de la boule unité $B$ de $E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a

$$|\lambda| < \rho \quad \Longrightarrow \quad a + \lambda x \notin H \quad \Longrightarrow \quad f(a) + \lambda f(x) \neq 0$$

d'où $f(x) = 0$ ou $\lambda \neq -\dfrac{f(a)}{f(x)}$ dès que $|\lambda| < \rho$, donc $\left|\dfrac{f(a)}{f(x)}\right| \geq \rho$, c'est-à-dire qu'on doit avoir $|f(x)| \leq \rho^{-1} |f(a)|$. On en conclut que $f$ est continue, et de norme au plus $\rho^{-1} |f(a)|$. ■

On va montrer maintenant une forme faible du théorème de Hahn-Banach.

**Lemme 6.7.3.** *Soient $E$ un espace normé sur $\mathbb{R}$, $H$ un hyperplan de $E$ et $f$ une forme linéaire sur $H$ de norme au plus 1. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur $E$ de norme au plus 1, qui prolonge $f$.*

Démonstration : Soit $a$ un point de $E \setminus H$. Alors tout point $x$ de $E$ s'écrit de façon unique $x = y + \lambda a$, avec $y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\tilde{f}$ est une forme linéaire sur $E$ qui prolonge $f$ et si $\alpha = \tilde{f}(a)$, on a $\tilde{f}(x + \lambda a) = f(x) + \lambda\alpha$. Inversement, si $\alpha$ est choisi dans $\mathbb{R}$, cette formule définit une forme linéaire sur $E$ qui prolonge $f$.
Pour que $\tilde{f}$ soit de norme au plus 1, on doit avoir, pour tout $x$ de $E$, $\left|\tilde{f}(x)\right| \leq \|x\|$, c'est-à-dire, pour tout $y$ de $H$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$|f(y) + \lambda\alpha| \leq \|y + \lambda a\|$$

Puisqu'on peut remplacer $y$ par $-y$ et $\lambda$ par $-\lambda$, il suffit de vérifier que pour $y$ dans $H$ et $\lambda$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$f(y) + \lambda\alpha \leq \|y + \lambda a\|$$

c'est-à-dire en séparant le cas $\lambda > 0$ et le cas $\lambda < 0$ et en posant $z = -\dfrac{y}{\lambda}$, de vérifier que, pour tout $z \in H$ on doit avoir

$$f(z) - \|a - z\| \leq \alpha \leq f(z) + \|a - z\|$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 = \sup_{z \in H}\big(f(z) - \|a - z\|\big) \leq \alpha \leq \alpha_2 = \inf_{z \in H}\big(f(z) + \|a - z\|\big)$$

Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que $\alpha_1 \leq \alpha_2$ et de choisir $\alpha$ entre ces deux nombres. Pour cela, il suffit de montrer que tout nombre de la forme $f(z) - \|a - z\|$ est inférieur à tout nombre de la forme $f(w) + \|a - w\|$, pour $z$ et $w$ dans $H$. Or

$$\big(f(z) + \|a - z\|\big) - \big(f(w) - \|a - w\|\big) = f(z) - f(w) + \|a - z\| + \|w - a\| \geq \|w - z\| - f(w - z)$$

et cette dernière quantité est positive : en effet $f(w - z) \leq \|w - z\|$ puisque $w - z \in H$ et que $\|f\| \leq 1$. ■

**Théorème 6.7.4.** *(Hahn-Banach) Soit $E$ un espace normé séparable sur $\mathbb{R}$ et $a \in E$. Il existe une forme linéaire continue $\tilde{f}$ sur $E$ de norme 1 telle que $\tilde{f}(a) = \|a\|$.*

On peut remarquer que, si $a \neq 0$, toute forme linéaire sur $E$ valant $\|a\|$ en $a$ est de norme au moins 1 puisque $\|a\| = f(a) \leq \|f\| . \|a\|$.
DÉMONSTRATION : Soit $(x_n)$ une suite dense dans $E$. On peut supposer que $x_0 = a$. Notons $F_n$ le sous-espace de dimension finie engendré par les $(x_i)_{i \leq n}$. Alors la forme linéaire $f_0$ définie sur $F_0 = \mathbb{R}.a$ par $f_0(\lambda a) = \lambda \|a\|$ vérifie $|f_0(x)| \leq \|x\|$. Donc $\|f_0\| \leq 1$. Le lemme précédent permet de construire par récurrence une forme linéaire $f_n$ sur $F_n$ de norme au plus 1 dont la restriction à $F_{n-1}$ est égale à $f_{n-1}$. En effet, ou bien $F_n = F_{n-1}$ et on prend $f_n = f_{n-1}$, ou bien $F_{n-1}$ est un hyperplan de $F_n$ puisque $F_n$ est engendré par $F_{n-1}$ et $\{x_n\}$. Alors, si $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, il existe sur le sous-espace vectoriel $F$ de $E$ une forme linéaire $f$ dont la restriction à chaque $F_n$ est $f_n$.
Pour tout $x \in F$, il existe $n$ tel que $x \in F_n$, donc

$$|f(x)| = |f_n(x)| \leq \|x\|$$

ce qui prouve que $f$ est de norme au plus 1. Puisque $F$ contient tous les $(x_n)$, $F$ est dense dans $E$. Puisque $f$ est continue sur $F$, elle est uniformément continue, donc se prolonge par continuité (en vertu du théorème 4.4.1) en une fonction continue $\tilde{f}$ sur $E$. On vérifie sans peine que, pour $x$ et $y$ dans $E$ et $\lambda$ dans $\mathbb{R}$ on a $\tilde{f}(x + \lambda y) = \tilde{f}(x) + \lambda \tilde{f}(y)$, donc que $\tilde{f}$ est linéaire, et aussi que $\left|\tilde{f}(x)\right| \leq \|x\|$ pour tout $x$ de $E$. Enfin, $\tilde{f}(a) = f(a) = f_0(a) = \|a\|$. ■

**Théorème 6.7.5.** *Soit $E$ un espace normé séparable sur $\mathbb{C}$ et $a \in E$. Il existe une forme linéaire continue $f$ sur $E$ de norme 1 telle que $f(a) = \|a\|$.*

DÉMONSTRATION : Puisque $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on peut considérer $E$ comme un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit $(x_n)$ une suite dense dans $E$. On peut supposer $x_0 = a$ et $x_1 = i\,a$. On applique la méthode de démonstration du théorème précédent avec la forme $\mathbb{R}$-linéaire $g_1$ sur $F_1 = \mathbb{C}.a$ définie par $g_1(\lambda a) = \Re e(\lambda). \|a\|$, qui vérifie $|g_1(\lambda a)| \leq |\lambda| . \|a\| = \|\lambda a\|$. On construit ainsi par récurrence des formes $\mathbb{R}$-linéaires $g_n$ de norme au plus 1 sur les espaces $F_n$, puis, par recollement et prolongement par continuité, une forme $\mathbb{R}$-linéaire $g$ sur $E$ telle que, pour tout $x$ de $E$, on ait $|g(x)| \leq \|x\|$. On pose alors

$$f(x) = g(x) - i\,g(i\,x)$$

Il est clair que $f$ est $\mathbb{R}$-linéaire de $E$ dans $\mathbb{C}$, que $\Re e(f(x)) = g(x)$ pour tout $x \in E$ et que

$$f(i\,x) = g(i\,x) - i\,g(-x) = i\big(g(x) - i\,g(i\,x)\big) = i\,f(x)\ ,$$

donc que $f$ est $\mathbb{C}$-linéaire. De plus $f(a) = \|a\|$ puisque $g(a) = \|a\|$ et $g(i\,a) = 0$. Enfin, si $f(x) = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x)| = \rho = \left|\Re e\left(\mathrm{e}^{-i\theta} f(x)\right)\right| = \left|\Re e\left(f(\mathrm{e}^{-i\theta} x)\right)\right| = \left|g(\mathrm{e}^{-i\theta} x)\right| \leq \left\|\mathrm{e}^{-i\theta} x\right\| = \|x\|$$

ce qui montre que $f$ est de norme au plus 1. ■

**Corollaire 6.7.6.** *Si $E$ est un espace normé, $E'$ son dual et $B'$ la boule unité de $E'$, on a pour tout $x$ de $E$*

$$\|x\| = \sup_{f \in B'} |f(x)|$$

DÉMONSTRATION : Pour $f \in B'$ et $x \in E$ on a $|f(x)| \leq \|f\| . \|x\| \leq \|x\|$, d'où $\sup_{f \in B'} |f(x)| \leq \|x\|$.
Inversement, le théorème précédent montre que, pour $x$ fixé, il existe un $f \in B'$ avec $f(x) = \|x\|$. Donc $\sup_{f \in B'} |f(x)| \geq \|x\|$. ■

# 7
# ESPACES DE HILBERT

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels considérés seront des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. On désignera toujours par $\bar{\lambda}$ le conjugué d'un nombre $\lambda$, et par $\Re e\,\lambda$ et $\Im m\,\lambda$ ses parties réelle et imaginaire.

## 7.1 Produit scalaire

**Définition 7.1.1.** *Si $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ on appelle* produit scalaire hermitien *ou simplement* produit scalaire *sur $E$ une application $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
\forall y \in E &\quad \text{l'application } x \mapsto \langle x,y\rangle \text{ est linéaire} && (i)\\
\forall x,y \in E &\quad \langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} && (ii)\\
\forall x \in E &\quad \langle x,x\rangle \in \mathbb{R}^+ && (iii)\\
\forall x \in E &\quad \langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0 && (iv)
\end{aligned}$$

On peut noter que les propriétés $(i)$ et $(ii)$ entraînent que pour $x$ fixé, l'application $y \mapsto \langle x,y\rangle$ est anti-linéaire, c'est-à- dire vérifie

$$\langle x, y+y'\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,y'\rangle$$
$$\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\,\langle x,y\rangle$$

**Théorème 7.1.2.** *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Si $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur $E$, on a pour tout $x$ et tout $y$ de $E$ l'inégalité*

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle$$

*De plus, si on a l'égalité $|\langle x,y\rangle|^2 = \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle$, les vecteurs $x$ et $y$ sont proportionnels.*

Démonstration : Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $x$ et $y$ dans $E$ on a

$$\begin{aligned}\langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle &= \langle x, x-\lambda y\rangle - \lambda\,\langle y, x-\lambda y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - \bar{\lambda}\,\langle x,y\rangle - \lambda\,\overline{\langle x,y\rangle} + \lambda\bar{\lambda}\,\langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - 2\,\Re e\big(\bar{\lambda}\,\langle x,y\rangle\big) + |\lambda|^2\,\langle y,y\rangle\end{aligned}$$

Il existe $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\langle x,y\rangle = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Et si, pour $t \in \mathbb{R}$, on choisit $\lambda = t\,\mathrm{e}^{i\theta}$, on obtient que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P(t) = \langle x,x\rangle - 2t\rho + t^2\langle y,y\rangle \geq 0$$

Le polynôme du second degré $P$ ci-dessus a donc un discriminant négatif ou nul. On en déduit

$$\Delta' = \rho^2 - \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle \leq 0$$

c'est-à-dire

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle$$

Si on a égalité dans la formule précédente, le discriminant $\Delta'$ est nul. Ou bien $y = 0$, auquel cas $y = 0.x$, ou bien $P$ a une racine double $t_0 = \dfrac{\langle x,y\rangle\,\mathrm{e}^{-i\theta}}{\langle y,y\rangle}$, ce qui signifie que $P(t_0) = \left\|x - t_0\,\mathrm{e}^{i\theta}\,y\right\|^2 = 0$, donc que $x = t_0\,\mathrm{e}^{i\theta}\,y$. ■

**Théorème 7.1.3.** *Si $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur $E$, l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ est une norme sur $E$.*

Démonstration : Il résulte immédiatement de la définition d'un produit scalaire que le vecteur $x$ est nul si et seulement si $\langle x,x\rangle = 0$, et que $\langle \lambda x, \lambda x\rangle = |\lambda|^2\,\langle x,x\rangle$, c'est-à-dire que $\|x\| = 0 \iff x = 0$ et $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.
Si maintenant $x$ et $y$ sont deux vecteurs de $E$, on a

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\Re e(\langle x,y\rangle)\end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Scwarz

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sqrt{\langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle} \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,.\,\|y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2\end{aligned}$$

donc $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ■

**Définition 7.1.4.** *On appelle* espace préhilbertien *un espace vectoriel normé muni d'un produit scalaire $\langle .,.\rangle$ tel que $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$.*

**Définition 7.1.5.** *Un vecteur $x$ de l'espace préhilbertien $E$ est dit* orthogonal *à un vecteur $y$ si leur produit scalaire est nul. On notera alors $x \perp y$*

Cette relation est clairement symétrique. Le seul vecteur de $E$ qui soit orthogonal à lui-même est 0.

**Proposition 7.1.6.** *Si deux vecteurs $x$ et $y$ sont orthogonaux, on a* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

En effet, on a en général $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\Re e(\langle x,y\rangle)$.

**Théorème 7.1.7.** *Si $E$ est un espace préhilbertien, le produit scalaire est continu de $E\times E$ dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration : On a, pour $a$, $b$, $x$, $y$ dans $E$

$$\langle x,y\rangle - \langle a,b\rangle = \langle x, y-b\rangle + \langle x-a, b\rangle = \langle a, y-b\rangle + \langle x-a, b\rangle + \langle x-a, y-b\rangle$$

donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle x,y\rangle - \langle a,b\rangle| \le \|a\| \,.\, \|y-b\| + \|b\| \,.\, \|x-a\| + \|x-a\| \,.\, \|y-b\|$$

et si $\varepsilon > 0$ est donné, il suffit de prendre $\|x-a\| < \min(1, \dfrac{\varepsilon}{3\,\|b\|})$ et $\|y-b\| < \min(\dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\varepsilon}{3\,\|a\|})$ pour que chacun des trois termes ci-dessus soit inférieur à $\varepsilon/3$, donc que $|\langle x,y\rangle - \langle a,b\rangle| \le \varepsilon$, ce qui montre la continuité du produit scalaire. ■

**Théorème 7.1.8.** *Si $E$ est un espace préhilbertien, le produit scalaire de deux vecteurs $x$ et $y$ est donné par*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\big)$$

Démonstration : On a, pour $k = 0,1,2,3$,

$$\begin{aligned}
\left\|x + i^k y\right\|^2 &= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + i^{-k}\langle x,y\rangle + i^k\langle y,x\rangle \\
i^k \left\|x + i^k y\right\|^2 &= i^k\,\|x\|^2 + i^k\,\|y\|^2 + \langle x,y\rangle + (-1)^k\langle y,x\rangle \\
\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|x + i^k y\right\|^2 &= \|x\|^2\,(1+i+i^2+i^3) + \|y\|^2\,(1+i+i^2+i^3) \\
&\quad + \langle x,y\rangle(1+1+1+1) + \langle y,x\rangle(1-1+1-1) = 4\langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité cherchée. ■

**Théorème 7.1.9.** *Si $x$, $y$ et $z$ sont trois points d'un espace préhilbertien, et $u = \dfrac{x+y}{2}$ le milieu du segment $[x,y]$, on a*

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = 2\,\|z-u\|^2 + \frac{1}{2}\,\|x-y\|^2$$

Démonstration : Si on pose $v = \dfrac{y-x}{2}$, on a $z - x = (z-u) - v$ et $z - y = (z-u) + v$, donc

$$\begin{aligned}
\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 &= \|z-u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\Re e(\langle z-u, v\rangle) \\
&\quad + \|z-u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\Re e(\langle z-u, v\rangle) \\
&= 2\,\|z-u\|^2 + 2\,\|v\|^2 = 2\,\|z-u\|^2 + \frac{1}{2}\,\|x-y\|^2
\end{aligned}$$

■

**Définition 7.1.10.** *On appelle* espace hilbertien *ou* espace de Hilbert *un espace préhilbertien complet.*

**Exemple 7.1.11.** *L'espace vectoriel $\ell^2$ des suites $(x_n)$ de nombres complexes telles que la série $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2$ converge, muni du produit scalaire défini par*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \bar{y_n} \tag{$*$}$$

*si $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$, est un espace de Hilbert.*

Démonstration : Il est clair que si $x$ appartient à $\ell^2$, il en est de même de $\lambda x$. Et puisque pour $a$ et $b$ dans $\mathbb{C}$ on a $|a+b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$, on voit que si $x$ et $y$ sont dans $\ell^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^2 \leq 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2\right) < +\infty$$

ce qui montre que $x + y$ appartient à $\ell^2$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que, pour tout $m$,

$$\sum_{n=0}^{m} |x_n \bar{y_n}| \leq \left(\sum_{n=0}^{m} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{m} |y_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2\right)^{1/2} < +\infty$$

ce qui entraîne la convergence absolue de la série de terme général $(x_n \bar{y_n})$, et permet de définir $\langle x, y\rangle$. On vérifie sans peine que la formule $(*)$ définit bien un produit scalaire sur $\ell^2$, et que la norme associée est définie par

$$\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $\ell^2$ est complet. Il suffit pour cela de reprendre la méthode utilisée dans le théorème 6.3.2 pour démontrer que $\ell^1$ est complet.

## 7.2 Projection orthogonale

**Théorème 7.2.1.** *Soient $E$ un espace préhilbertien et $A$ une partie convexe complète non vide de $E$. Alors, pour tout $x$ de $E$, il existe un unique point $y$ de $A$, appelé* projection orthogonale de $x$ sur $A$ *tel que $d(x, A) = \|x - y\|$.*

*Ce point est caractérisé dans $A$ par la propriété*

$$\forall z \in A \quad \Re e(\langle x - y, z - y\rangle) \leq 0$$

Démonstration : Si $x \in A$, il est clair que $y = x$ est le seul point de $A$ qui minimise la distance à $x$. De plus, on a $\langle x - x, z - x\rangle = 0$ pour tout $z \in A$. Et si pour un certain $y \in A$ on a $\Re e(\langle x - y, z - y\rangle) \leq 0$ pour tout $z \in A$, on a $\|x - y\|^2 = \Re e(\langle x - y, x - y\rangle) \leq 0$, d'où $x = y$.

Si, au contraire, $x \notin A$, on note $\delta$ la distance de $x$ à $A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$C_n = \{z \in A : \|z - x\|^2 \leq \delta^2 + 2^{-2n}\}$$

Alors la suite $(C_n)$ est une suite décroissante de fermés non vides de l'espace complet $A$. En vertu du théorème 4.2.4, il suffit de montrer que le diamètre de $C_n$ tend vers 0 pour montrer que l'intersection des $(C_n)$ est un singleton $\{y\}$.
Soient donc $z$ et $w$ deux points de $C_n$. Puisque $A$ est convexe, $u = \dfrac{z+w}{2}$ appartient aussi à $A$, d'où on déduit que $\|x - u\| \geq \delta$. Et le théorème 7.1.9 donne alors

$$\begin{aligned} 2\delta^2 + \frac{1}{2}\|z - w\|^2 &\leq 2\|x - u\|^2 + \frac{1}{2}\|z - w\|^2 = \|x - z\|^2 + \|x - w\|^2 \\ &\leq \delta^2 + 2^{-2n} + \delta^2 + 2^{-2n} \end{aligned}$$

d'où on déduit que $\|z - w\|^2 \leq 4.2^{-2n}$, c'est-à-dire $\|z - w\| \leq 2^{1-n}$, et enfin que $diam(C_n) \leq 2^{1-n}$. Ceci achève de prouver l'existence d'un point $y \in A$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \{y\}$, Le point $y$ est donc le seul point de $A$ tel que $\|x - y\| = d(x, A)$.

Soit $z$ un point de $A$. Par convexité de $A$, on a $z_t := y + t(z - y) \in A$ pour tout $t \in ]0, 1]$. Donc

$$\begin{aligned} \delta^2 \leq \|x - z_t\|^2 &= \langle x - y - t(z - y), x - y - t(z - y)\rangle \\ &= \|x - y\|^2 + t^2\|z - y\|^2 - 2t\,\Re e(\langle x - y, z - y\rangle) \\ &= \delta^2 + t^2\|z - y\|^2 - 2t\,\Re e(\langle x - y, z - y\rangle) \end{aligned}$$

On en déduit que $2\,\Re e(\langle x-y, z-y\rangle) \leq t\|z - y\|^2$, et puisque $t$ peut être pris arbitrairement petit, on obtient que $\Re e(\langle x - y, z - y\rangle) \leq 0$.
Si maintenant un point $y'$ de $A$ vérifie cette relation pour tout $z \in A$, on a pour $z = y$,

$$\begin{aligned} 0 \geq \Re e(\langle x - y', y - y'\rangle) &= \Re e(\langle x - y, y - y'\rangle) + \Re e(\langle y - y', y - y'\rangle) \\ &= \|y - y'\|^2 - \Re e(\langle x - y, y' - y\rangle) \geq \|y - y'\|^2 \end{aligned}$$

puisque $y$ est la projection de $x$ sur $A$. Ceci entraîne $\|y - y'\| = 0$ donc $y = y'$. ∎

**Définition 7.2.2.** *Si $A$ est une partie d'un espace préhilbertien $E$, on appelle* orthogonal *de $A$ et on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs $y$ de $E$ orthogonaux à tout élément de $A$.*

Pour tout $x \in A$, $x^\perp = \{y : \langle y, x\rangle = 0\}$ est le noyau de la forme linéaire continue (voir le théorème 7.1.7) : $y \mapsto \langle y, x\rangle$, donc est un sous-espace vectoriel fermé de $E$. Il en résulte que

$$A^\perp = \bigcap_{x\in A} x^\perp$$

est un sous-espace vectoriel fermé de $A$.

**Théorème 7.2.3.** *Si $F$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace hilbertien $E$, il existe pour tout $x$ de $E$ un unique couple $(y, z)$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. On a alors $\|y\| \leq \|x\|$ et $\|z\| \leq \|x\|$.*

Démonstration : Un sous-espace vectoriel fermé d'un espace complet est convexe et complet. Il résulte donc du théorème 7.2.1 que pour tout $x$ de $E$ existe un unique $y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F)$. On a alors, pour tout $w \in F$, $y + w \in F$, $y - w \in F$, $y + iw \in F$ et $y - iw \in F$ donc

$$\begin{aligned}
\Re e(\langle x-y, w\rangle) &= \Re e(\langle x-y, (y+w)-y\rangle) \leq 0 \\
-\Re e(\langle x-y, w\rangle) &= \Re e(\langle x-y, (y-w)-y\rangle) \leq 0 \\
\Im m(\langle x-y, w\rangle) &= \Re e(\langle x-y, (y+iw)-y\rangle) \leq 0 \\
-\Im m(\langle x-y, w\rangle) &= \Re e(\langle x-y, (y-iw)-y\rangle) \leq 0
\end{aligned}$$

d'où $\langle x - y, w\rangle = 0$, c'est-à-dire que $z = x - y \in F^{\perp}$. Puisque $y$ et $z$ sont orthogonaux, on a $\|x\|^2 = \|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, donc $\|y\| \leq \|x\|$ et $\|z\| \leq \|x\|$.
Enfin, si on a une autre décomposition de $x$ en somme d'un vecteur $y'$ de $F$ et d'un vecteur $z'$ de $F^{\perp}$, on a $y + z = y' + z'$, donc $y - y' = z' - z$. Le vecteur $y - y'$ appartient à $F$ et $z' - z \in F^{\perp}$. Donc $y - y'$ est orthogonal à lui-même, c'est-à-dire est nul. On conclut que $y = y'$ et $z = z'$. ■

**Théorème 7.2.4.** *Si $F$ est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace hilbertien, $F^{\perp\perp} = F$.*

Démonstration : Puisque tout vecteur de $F$ est orthogonal à tout vecteur de $F^{\perp}$, on a $F \subset F^{\perp\perp}$.
Inversement, si $x$ est un vecteur de $F^{\perp\perp}$, $x$ se décompose en $y + z$, avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Puisque $x$ et $y$ sont orthogonaux à $F^{\perp}$, $z = x - y$ appartient à $F^{\perp}$ et est orthogonal à $F^{\perp}$ ; il est donc orthogonal à lui-même, c'est-à-dire nul. Donc $x = y \in F$. ■

**Théorème 7.2.5.** *Soit $X$ un sous-espace vectoriel de l'espace hilbertien $E$. Alors $X$ est dense si et seulement si $X^{\perp} = \{0\}$.*

Démonstration : Si $X$ est dense et si $y \in X^{\perp}$, on a $X \subset y^{\perp}$. Et puisque $y^{\perp}$ est fermé, il contient l'adhérence de $X$, c'est-à-dire $E$ ; en particulier $y \in y^{\perp}$, d'où $y = 0$. Ceci montre que $X^{\perp} = \{0\}$.
Inversement, si $X$ n'est pas dense, son adhérence est un sous-espace vectoriel fermé $F$ distinct de $E$, et tout vecteur $z$ de $F^{\perp}$ appartient à $X^{\perp}$. Si on avait $F^{\perp} = \{0\}$, on aurait $F = F^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = E$, contrairement à l'hypothèse. Donc $X^{\perp} \neq \{0\}$. ■

**Théorème 7.2.6.** *Si $F$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace hilbertien $E$, il existe une unique application linéaire continue $P$ de $E$ dans $E$ de norme 1, telle que, pour tout $x$ de $E$, $P(x)$ appartienne à $F$ et, pour tout $x$ de $F$, $P(x) = x$. Cette application est appelée* projecteur orthogonal *sur $F$.*

Démonstration : Pour tout $x$ de $E$, il existe un unique couple $(y, z)$ dans $F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. Posons $P(x) = y$. On a $P(x) \in F$, et si $x \in F$ on a $y = x$ et $z = 0$, donc $P(x) = x$.
Si $x$ et $x'$ sont deux vecteurs de $E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, si $x = y + z$ et $x' = y' + z'$, avec $y$ et $y'$ dans $F$, $z$ et $z'$ dans $F^{\perp}$, on a

$$x + \lambda x' = (y + \lambda y') + (z + \lambda z')$$

et puisque $y + \lambda y' \in F$ et $z + \lambda z' \in F^\perp$, on conclut que

$$P(x + \lambda x') = y + \lambda y' = P(x) + \lambda P(x')$$

donc que $P$ est linéaire.
Enfin, si $P_1$ vérifie les mêmes conditions, soient $z \in F^\perp$ et $y = P_1(z) \in F$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $P_1(z + ty) = P_1(z) + tP_1(y) = (1 + t)y$. On doit avoir pour tout $t$, $\|z + ty\|^2 - \|P_1(z + ty)\|^2 \geq 0$. Et

$$\begin{aligned} \|z + ty\|^2 - \|P_1(z + ty)\|^2 &= \|z\|^2 + t^2 \|y\|^2 - (1 + t)^2 \|y\|^2 \\ &= \|z\|^2 - (1 + 2t) \|y\|^2 \end{aligned}$$

qui ne peut être positif pour tout $t$ que si $\|y\| = 0$. Il en résulte que $P_1$ est nul sur $F^\perp$. Et si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, on a

$$P_1(x) = P_1(y) + P_1(z) = P_1(y) = y = P(x)$$

ce qui montre que $P_1$ coïncide avec $P$. ■

**Théorème 7.2.7.** *(Riesz) Si $f$ est une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert $E$, il existe un unique $y \in E$ tel que, pour tout $x$ de $E$, on ait $f(x) = \langle x, y\rangle$. De plus, on a $\|y\| = \|f\|$.*

*L'application de $E$ dans $E'$ qui à $y$ associe la forme linéaire $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est un isomorphisme antilinéaire de $E$ sur $E'$.*

Démonstration : Notons, pour $y \in E$, $f_y$ la forme linéaire $x \mapsto \langle x, y\rangle$. D'après la définition d'un produit scalaire, l'application $y \mapsto f_y$ est antilinéaire de $E$ dans $E'$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|f_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| . \|y\|$$

d'où $\|f_y\| \leq \|y\|$. De plus, puisque $f_y(y) = \langle y, y\rangle = \|y\|^2$, on a $\|f_y\| \geq \|y\|$. D'où $\|f_y\| = \|y\|$.
Si $f_y = f_z$, on a $f_{y-z} = f_y - f_z = 0$, donc $\|y - z\| = \|f_{y-z}\| = 0$, c'est-à-dire $y = z$.
Il reste uniquement à démontrer que toute forme linéaire continue $f$ sur $E$ est de la forme $f_y$ pour un certain $y$. Si $f = 0$, il est clair que $y = 0$ convient. Si $f \neq 0$, le noyau $H$ de $f$ est un hyperplan fermé de $E$. Soit $a \notin H$. On pose $\alpha = f(a)$ et si on note $b$ la projection orthogonale de $a$ sur $H$, le vecteur $y = \dfrac{\bar{\alpha}}{\|a - b\|^2}(a - b)$ est orthogonal à $H$ puisque $a - b$ l'est. En particulier, $\langle b, a - b\rangle = 0$, donc : $\langle a, a - b\rangle = \langle a - b, a - b\rangle = \|a - b\|^2$. De plus,

$$\langle a, y\rangle = \frac{\alpha}{\|a - b\|^2} \langle a, a - b\rangle = \alpha$$

Il en résulte que $f_y(a) = f(a)$. Donc $f$ et $f_y$ coïncident sur $a$, et sur $H$ puisqu'elles y sont nulles toutes deux. Et puisque tout vecteur de $E$ est somme d'un vecteur de $H$ et d'un multiple de $a$, $f$ et $f_y$ coïncident sur $E$, c'est-à-dire $f = f_y$. ■

**Remarque 7.2.8.** *(espaces de Hilbert réels)*

Si le corps $\mathbb{K}$ est le corps des réels, on peut définir les produits scalaires de manière analogue avec les propriétés :

*i)* $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

*ii)* $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors les principaux résultats sur les espaces de Hilbert (inégalité de Cauchy-Schwarz, projection sur un convexe fermé, décomposition en sous-espaces orthogonaux,...) sont conservés. En particulier, l'application qui à un vecteur $x$ associe la forme linéaire : $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est une isométrie surjective de l'espace de Hilbert sur son dual.

# 8

# FONCTIONS DÉRIVABLES

## 8.1 Fonctions réelles dérivables

**Définition 8.1.1.** *Une fonction $f$ définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite* dérivable *en un point $x_0$ de $U$ si le quotient $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ possède une limite quand $x$ tend vers $x_0$ (par valeurs distinctes de $x_0$). La limite est alors appelée* dérivée de $f$ en $x_0$.

*La fonction $f$ est dite* dérivable sur $U$ *si elle est dérivable en tout point de $U$. Dans ce cas, on appelle* fonction dérivée de $f$ *la fonction définie sur $U$ qui à tout point $x$ de $U$ associe la dérivée de $f$ en $x$.*

**Notation 8.1.2.** *On note usuellement $f'(x_0)$ ou $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ la dérivée de $f$ en $x_0$.*

Plus généralement on peut définir, quand elles existent, la dérivée à droite $f'_d(x_0)$ et la dérivée à gauche $f'_g(x_0)$ d'une fonction $f$ en $x_0$ par

$$f'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0, x>x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{et} \qquad f'_g(x_0) = \lim_{x\to x_0, x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

**Proposition 8.1.3.** *Toute fonction localement constante est dérivable, et sa dérivée est nulle.*

Ceci découle immédiatement de la définition, puisque, si $f$ est localement constante, le quotient $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est nul pour $x$ voisin mais distinct de $x_0$. ■

**Proposition 8.1.4.** *Toute fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Si $f(x) = mx + p$, on a

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m$$

pour $x \neq x_0$, et il en résulte immédiatement que $f$ est dérivable en tout point, et que sa fonction dérivée est constante, de valeur $m$. ■

**Proposition 8.1.5.** *Si la fonction $f$ est dérivable en $x_0$, elle est continue en $x_0$.*

En effet, on a

$$\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \times \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} (x-x_0) = 0$$

ce qui montre que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, et prouve la continuité de $f$ en $x_0$. ■

**Définition 8.1.6.** *Une fonction réelle $f$ définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}$ est dite* de classe $\mathscr{C}^1$ *ou* continuement dérivable *si elle est dérivable sur $U$ et si sa fonction dérivée $f'$ est continue de $U$ dans $\mathbb{R}$.*

## 8.2 Opérations sur les fonctions dérivables

**Théorème 8.2.1.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0$ un point de $U$, $f$ et $g$ deux fonctions de $U$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en $x_0$. Alors la somme et le produit de $f$ et $g$ sont dérivables en $x_0$ et on a :*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

*Si, en outre, $\lambda$ est un nombre réel, la fonction $\lambda f$ est dérivable en $x_0$ et*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

Démonstration : Puisque l'on a

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

et

$$\frac{fg(x)-fg(x_0)}{x-x_0} = g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

ainsi que

$$\frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(x_0)}{x-x_0} = \lambda\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

le passage à la limite dans les égalités ci-dessus pour $x \to x_0$ avec $x \neq x_0$ donne immédiatement les résultats annoncés. ■

**Théorème 8.2.2.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}$, $f$ et $g$ deux fonctions réelles sur $U$. Si la fonction $g$ ne s'annule pas sur $U$, et si, pour un point $x_0$ de $U$, les fonctions $f$ et $g$ sont dérivables, le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable en $x_0$, et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Démonstration : On a

$$\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}$$
$$= \frac{g(x_0)}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

et le résultat annoncé s'obtient immédiatement en passant à la limite. ■

**Théorème 8.2.3.** *Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbb{R}$, $f$ et $g$ deux fonctions réelles définies respectivement sur $U$ et $V$. Si $f(U) \subset V$, si $f$ est dérivable en un point $x_0$ de $U$ et si $g$ est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$, la fonction $g \circ f$ est dérivable en $x_0$ et on a*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0).f'(x_0) = g' \circ f(x_0).f'(x_0)$$

Démonstration : Si $f'(x_0) \neq 0$, il existe un voisinage $U'$ de $x_0$ dans $U$ tel que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$ pour $x \in U'$ et $x \neq x_0$. On a alors, pour $x \in U'$ et $x \neq x_0$ :

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} . \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et puisque $f$ est continue en $x_0$, la limite quand $x \to x_0$ du quotient $\dfrac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{f(x) - f(x_0)}$ est égale à $g'(y_0)$. Supposons, au contraire, que $f'(x_0) = 0$. Il existe un voisinage $V'$ de $y_0$ tel que $\left| \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0) \right| \leq 1$ pour tout $y$ de $V'$ distinct de $y_0$. On a donc alors

$$|g(y) - g(y_0)| \leq (1 + |g'(y_0)|) \, |y - y_0|$$

pour $y \in V'$. Il en résulte que si $x$ appartient au voisinage $f^{-1}(V')$ et est distinct de $x_0$, on a

$$\left| \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq (1 + |g'(y_0)|) \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right|$$

et cette quantité tend vers 0 quand $x$ tend vers $x_0$ puisque $f'(x_0) = 0$. On en déduit que $g \circ f$ est alors dérivable en $x_0$ et que sa dérivée y est nulle, ce qui achève la démonstration. ■

## 8.3 Extremums

**Théorème 8.3.1.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction réelle dérivable sur $U$. Si, en un point $x_0$, la fonction $f$ admet un minimum ou un maximum local, la dérivée de $f$ s'annule en $x_0$.*

Démonstration : Quitte à remplacer $f$ par $-f$, on peut supposer que $f$ admet en $x_0$ un minimum local, et quitte à remplacer $U$ par un voisinage ouvert de $x_0$, on peut supposer que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x$ de $U$. On a alors, pour $x \in U$ avec $x > x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, d'où $f'(x_0) \geq 0$ en passant à la limite ; et de même, pour $x \in U$ et $x < x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, d'où $f'(x_0) \leq 0$. On en conclut que $f'(x_0) = 0$. ■

**Théorème 8.3.2.** *(Rolle) Soit $f$ une fonction réelle continue sur un intervalle réel $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Si $f$ s'annule en $a$ et en $b$, il existe un point $c \in ]a, b[$ où la dérivée de $f$ s'annule.*

Démonstration : Si $f$ est constamment nulle sur $[a, b]$, on peut prendre pour $c$ n'importe quel point de $]a, b[$. Si, au contraire, il existe un point $\xi$ de $]a, b[$ tel que $f(\xi) \neq 0$, la fonction continue et dérivable $g : x \mapsto f(\xi).f(x)$ prend en $\xi$ une valeur strictement positive. Puisque l'intervalle $[a, b]$ est compact, $g$ atteint en un point $c$ son maximum, qui est strictement positif. On en déduit que $c$ est distinct de $a$ et de $b$. Le théorème 8.3.1 appliqué à $]a, b[$ et à $g$ donne que $g'(c) = f(\xi)f'(c) = 0$, donc que $f'(c) = 0$. ■

## 8.4 Le théorème des accroissements finis

Les énoncés qui précèdent sont de nature locale. Pour pouvoir obtenir des résultats globaux sur les fonctions dérivables, il faut avoir un énoncé qui permette d'évaluer l'accroissement d'une fonction dérivable entre deux points fixés (accroissement "fini" , par opposition aux accroissements "infinitésimaux" qui servent à définir la dérivée). C'est pourquoi le théorème qui suit peut être considéré comme le résultat fondamental concernant les fonctions dérivables.

**Théorème 8.4.1.** *(Théorème des accroissements finis) Soit $f$ une fonction réelle continue sur l'intervalle réel $[a, b]$, dérivable en tout point de $]a, b[$. Alors il existe un point $c$ de l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Démonstration : Posons

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Puisque $g$ est la somme de $f$ et d'une fonction affine, elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus, on a clairement $g(a) = g(b) = 0$. On déduit alors du théorème 8.3.2 l'existence d'un $c$ dans $]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Et puisque $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, ceci achève la démonstration. ■

**Corollaire 8.4.2.** *Soient $U$ un intervalle ouvert et $f$ une fonction dérivable de $U$ dans $\mathbb{R}$. Si la dérivée de $f$ est bornée par $M$ en valeur absolue sur $U$, la fonction $f$ est $M$-lipschitzienne. En particulier, si la dérivée de $f$ est identiquement nulle, $f$ est constante.*

Démonstration : Soient $a$ et $b$ deux points de $U$. Si $a = b$, on a clairement $|f(b) - f(a)| = 0 \leq M\,|b - a|$. Et si $a \neq b$, quitte à permuter $a$ et $b$, on peut supposer $a < b$. Il résulte alors du théorème des accroissements finis que

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(c)| \leq M$$

c'est-à-dire

$$|f(b) - f(a)| \leq M\,|b - a|$$

Si $f'$ est nulle sur $U$, on a $M = 0$, et on en déduit que $f$ est constante. ■

**Théorème 8.4.3.** *Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si la dérivée de $f$ est positive (resp. strictement positive, négative, strictement négative) sur $]a, b[$, la fonction $f$ est croissante (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) sur $[a, b]$.*

DÉMONSTRATION : Supposons $f' \geq 0$ et soient $x$ et $y$ dans $[a, b]$, avec $x < y$. Il existe, d'après le théorème des accroissements finis, un $z \in ]x, y[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \geq 0$$

d'où l'on déduit

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) \geq 0$$

ce qui montre que $f$ est croissante. On voit de même que si $f' > 0$, on a

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) > 0$$

ce qui montre que $f$ est strictement croissante.
On raisonne de même si $f' \leq 0$ ou si $f' < 0$. ■

**Théorème 8.4.4.** *Soient $U$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction dérivable de $U$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la dérivée $f'$ est partout strictement positive sur $U$. Alors $f$ est un homéomorphisme de $U$ sur un intervalle ouvert $V$, et la fonction réciproque $g = f^{-1}$ est dérivable sur $V$. On a de plus $g'(y) = \dfrac{1}{f' \circ g(y)}$.*

DÉMONSTRATION : Puisque $f$ est continue, $V = f(U)$ est connexe, donc est un intervalle. Il résulte du théorème précédent que $f$ est strictement croissante, donc que $V$ ne peut contenir ni sa borne inférieure ni sa borne supérieure, ce qui montre que $V$ est un intervalle ouvert. Soit $x_0 \in U$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $x_1$ et $x_2$ dans $U$ tels que $x_0 - \varepsilon < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \varepsilon$. Alors, puisque $f$ est strictement croissante, on a $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$, et pour tout $y \in ]f(x_1), f(x_2)[$, on a $f^{-1}(y) \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, ce qui montre la continuité de $f^{-1}$ en $f(x_0)$. donc $f$ est un homéomorphisme de $U$ sur $V$. Enfin, si $y_0 \in V$ et $x_0 = g(y_0)$, on a, pour $y \in V$ et $y \neq y_0$,

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} = \frac{1}{\dfrac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}}$$

qui tend vers $\dfrac{1}{f' \circ g(y_0)}$ quand $y$ tend vers $y_0$ puisque, alors, $g(y)$ tend vers $g(y_0)$. ■

## 8.5 Fonctions dérivables à valeurs dans un espace de Banach

On va maintenant étendre les définitions et résultats précédents au cas des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach.

**Définition 8.5.1.** *Une fonction $f$ définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace de Banach $E$ est dite* dérivable *en un point $x_0$ de $U$ si le quotient $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ possède une limite dans $E$ quand $x$ tend vers $x_0$ (par valeurs distinctes de $x_0$). La limite est alors appelée* dérivée *de $f$ en $x_0$.*

*La fonction $f$ est dite* dérivable sur *$U$ si elle est dérivable en tout point de $U$. Dans ce cas, on appelle* fonction dérivée de *$f$ la fonction à valeurs dans $E$ définie sur $U$ qui à tout point $x$ de $U$ associe la dérivée de $f$ en $x$.*

**Notation 8.5.2.** *On note usuellement $f'(x_0)$ ou $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ la dérivée de $f$ en $x_0$.*

Comme dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on peut définir, quand elles existent, la dérivée à droite $f'_d(x_0)$ et la dérivée à gauche $f'_g(x_0)$ d'une fonction $f$ en $x_0$ par

$$f'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0, x>x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{et} \qquad f'_g(x_0) = \lim_{x\to x_0, x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Les résultats suivants sont analogues à ceux qui ont été démontrés plus haut pour les fonctions dérivables et se démontrent de la même manière.

**Proposition 8.5.3.** *Toute fonction dérivable en un point y est continue.*

**Proposition 8.5.4.** *Toute fonction localement constante est dérivable, de dérivée nulle. Toute fonction affine est dérivable et sa dérivée est constante.*

**Théorème 8.5.5.** *Si $f$ et $g$ sont définies sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach $E$ et dérivables en un point $x_0$ de $U$, leur somme $f+g$ est dérivable en $x_0$ et on a*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

*Si, en outre, $\lambda$ est un nombre réel, la fonction $\lambda f$ est dérivable en $x_0$ et*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

**Théorème 8.5.6.** *Si $f$ est une fonction définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach $E$, et $\lambda$ une fonction réelle définie sur $U$, si $f$ et $\lambda$ sont dérivables en $x_0$, $\lambda f$ est dérivable en $x_0$ et*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda(x_0)f'(x_0) + \lambda'(x_0)f(x_0)$$

**Théorème 8.5.7.** *Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbb{R}$, $f$ et $g$ deux fonctions définies respectivement sur $U$ et $V$, à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$ et dans un espace de Banach $E$. On suppose que $f(U) \subset V$, que $f$ est dérivable en $x_0$ et que $g$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$. Alors la fonction $g\circ f : U \to E$ est dérivable en $x_0$ et*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(y_0).f'(x_0) = g'\circ f(x_0).f'(x_0)$$

**Cas de la dimension finie.**

Quand $E$ est un espace vectoriel de dimension finie, on peut aisément se ramener au cas des fonctions réelles. Si $E$ est de dimension $n$, et si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $E$, toute fonction $f$ définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $E$ possède des fonctions coordonnées $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ à valeurs réelles et on a, pour tout $x$ de $U$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x).e_j$$

**Théorème 8.5.8.** *Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace $E$ de dimension finie. Alors, $f$ est dérivable en un point $x_0$ de $U$ si et seulement si chacune des fonctions coordonnées de $f$ est dérivable en $x_0$. Dans ce cas, les coordonnées de la dérivée $f'(x_0)$ sont les dérivées en $x_0$ des fonctions coordonnées.*

Démonstration : Puisque $f$ s'exprime comme la somme $\sum_{j=1}^{n} f_j(x).e_j$, les formules de dérivation de sommes et de produits montrent que, si les fonctions $f_j$ sont toutes dérivables en $x_0$, il en est de même de $f$ et que $f'(x_0) = \sum_{j=1}^{n} f'(x_0).e_j$, d'où l'on déduit que les coordonnées de $f'(x_0)$ sur la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sont les $(f_j'(x_0))$.
Inversement, chacune des formes linéaires coordonnées $\pi_j : E \to \mathbb{R}$ définies par

$$x = \sum_{j=1}^{n} \pi_j(x).e_j$$

est continue sur $E$, puisque celui-ci est de dimension finie. Et on a $f_j(x) = \pi_j(f(x))$ pour tout $x$ de $U$. Donc, si $f$ est dérivable en $x_0$, on a :

$$\frac{f_j(x) - f_j(x_0)}{x - x_0} = \pi_j\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

et ceci tend vers $\pi_j(f'(x_0))$. On en déduit donc que $f_j$ est dérivable en $x_0$, de dérivée $\pi_j(f'(x_0))$. ■

## 8.6 Inégalité des accroissements finis

En dépit des similitudes entre le cas des fonctions réelles et celui des fonctions à valeurs dans un espace de Banach, le théorème 8.4.1 ne s'étend pas à ce dernier cas.

**Exemple 8.6.1.** *La fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$f(x) = (\cos x, \sin x)$$

*a, en chaque point une dérivée de norme 1, et il n'existe aucun point $c$ de $\mathbb{R}$ tel que $f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(c)$.*

La dérivée de $f$ en $x$ a pour coordonnées $(-\sin x, \cos x)$. Donc $\|f'(x)\|^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Et puisque $f(2\pi) = f(0)$, on ne peut avoir $\|f(2\pi) - f(0)\| = 0 = 2\pi \|f'(c)\| = 2\pi$. ■

Le théorème fondamental sera donné par l'énoncé suivant

**Théorème 8.6.2.** *Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace de Banach $E$. Si $f$ est dérivable à droite en tout point de $]a,b[$ et vérifie $\|f'_d(x)\| \leq M$ pour tout $x$ de $]a,b[$, on a*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a)$$

DÉMONSTRATION : Soient $\varepsilon > 0$ et $a' > a$. On considère l'ensemble

$$T_\varepsilon = \{x \in [a',b] : \|f(x) - f(a')\| \leq (M+\varepsilon)(x-a')\}$$

et on va montrer que $b \in T_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci montrera que $\|f(b) - f(a')\| \leq (M+\varepsilon)(b-a')$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc que $\|f(b) - f(a')\| \leq M(b-a')$ pour tout $a' > a$ et la démonstration sera achevée en passant à la limite quand $a'$ tend vers $a$.
Il est clair que $a' \in T_\varepsilon$. Puisque $f$ est continue, la fonction $\delta$ définie par

$$\delta(x) = \|f(x) - f(a')\| - (M+\varepsilon)(x-a')$$

est continue sur $[a,b]$, et $T_\varepsilon = \{x : \delta(x) \leq 0\}$ est fermé. Le compact non vide $T_\varepsilon$ possède donc un plus grand élément $c \geq a'$, et on a donc $\|f(c) - f(a')\| \leq (M+\varepsilon)(c-a')$. Et si $c < b$, on a $\|f'_d(c)\| < M+\varepsilon$. La boule ouverte de $E$ centrée en 0 et de rayon $M+\varepsilon$ est donc un voisinage de $f'_d(c)$ : il en résulte qu'existe un voisinage $W$ de $c$ dans $]a,b[$ tel que, pour tout $x \in W \setminus \{c\}$, on ait

$$\left\| \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \right\| < M + \varepsilon$$

En particulier, $W \cap ]c,b[ \neq \emptyset$, et pour $x \in W \cap ]c,b[$, on a $\|f(x) - f(c)\| < (M+\varepsilon)(x-c)$. Donc :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a')\| &\leq \|f(c) - f(a')\| + \|f(x) - f(c)\| \leq (M+\varepsilon)(c-a') + (M+\varepsilon)(x-c) \\ &= (M+\varepsilon)(x-a') \end{aligned}$$

ce qui montre que $x \in T_\varepsilon$, contrairement à la définition de $c$. Donc $b = c \in T_\varepsilon$. ■

On peut obtenir une version légèrement plus générale du théorème précédent. Par souci de simplicité, nous ne la donnerons que dans le cas où $f$ est dérivable.

**Théorème 8.6.3.** *Soient $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace de Banach $E$ et $g$ une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si $f$ et $g$ sont dérivables en tout point de $]a,b[$ et vérifient $\|f'(x)\| \leq g'(x)$ pour tout $x$ de $]a,b[$, on a*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

DÉMONSTRATION : Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $\gamma : x \mapsto g(x) + \varepsilon x$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\gamma'(x) \geq \varepsilon > 0$ pour tout $x$. C'est donc un homéomorphisme de $[a,b]$ sur $[\gamma(a), \gamma(b)]$, et $\gamma^{-1}$ est dérivable en tout point de $]\gamma(a), \gamma(b)[$. On a alors, pour $\varphi = f \circ \gamma^{-1}$,

$$\|\varphi'(y)\| = \left\| f' \circ \gamma^{-1}(y) \times \frac{1}{\gamma' \circ \gamma^{-1}(y)} \right\| = \frac{\|f'(\gamma^{-1}(y))\|}{\varepsilon + g'(\gamma^{-1}(y))} < 1$$

Si on applique à $\varphi$ l'inégalité précédente, on obtient

$$\|f(b) - f(a)\| = \|\varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))\| \leq \gamma(b) - \gamma(a) = g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a)$$

et on obtient le résultat cherché en passant à la limite quand $\varepsilon$ tend vers 0. ■

**Corollaire 8.6.4.** *Soient $U$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction dérivable de $U$ dans l'espace de Banach $E$. Si $\|f'(x)\| \leq M$ pour tout $x$ de $U$, la fonction $f$ est $M$-lipschitzienne. En particulier, si $f'$ est nulle sur $U$, $f$ est constante.*

DÉMONSTRATION : Soient $a$ et $b$ deux points distincts de $U$. Quitte à permuter $a$ et $b$, on peut supposer $a < b$. L'application du théorème précédent montre alors que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a) = M\,|b - a|$$

d'où le résultat cherché.
Dans le cas où $f'(x) = 0$ pour tout $x$ de $U$, on peut prendre $M = 0$, et on en déduit que $f$ est constante. ■

## 8.7 Primitives

**Définition 8.7.1.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction continue de $U$ dans un espace de Banach $E$. On dit que la fonction $\varphi$ est une* primitive *de $f$ sur $E$ si elle est dérivable et si sa dérivée est égale à $f$.*

Toute primitive de la fonction continue $f$ est nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$. Si $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont deux primitives de $f$, leur différence a une dérivée nulle, donc est localement constante. Il en résulte, en particulier, que si $U$ est un intervalle, on a unicité de la primitive de $f$ à l'addition près d'une constante.

**Théorème 8.7.2.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction continue de $U$ dans un espace de Banach $E$. Alors $f$ possède une primitive.*

DÉMONSTRATION : Il suffit, pour déterminer une primitive de $f$, de le faire sur chacune des composantes connexes de $U$, qui sont des intervalles ouverts. On se ramène ainsi au cas où $U$ est un intervalle ouvert. Plus précisément, si $a$ est un point de $U$, il suffit de démontrer, pour $\alpha$ et $\beta$ dans $U$, avec $\alpha < a < \beta$, l'existence d'une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$, nulle en $a$, et qui soit sur $]\alpha, \beta[$ une primitive de $f$ : par unicité de la primitive de $f$ nulle en $a$, ces fonctions se recollent en une primitive sur $U$.
Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, il est bien connu que le problème est résolu par l'intégrale de Riemann. Si $a \in U$, la fonction définie pour $x \in U$ par

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable par rapport à $x$ et on a $\varphi'(x) = f(x)$.
Si $E$ est un espace de dimension finie $n$, si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $E$, et si $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ sont les fonctions coordonnées de $f$, il suffit de définir les fonctions $\varphi_j$ par

$$\varphi_j(x) = \int_a^x f_j(t)dt$$

pour que la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x).e_j$ soit dérivable, de dérivée $f$.
Dans le cas général, si $f$ est continue sur $[\alpha, \beta]$, on peut considérer, pour $n$ entier non nul, la fonction $f_n$ qui coïncide avec $f$ sur chacun des points $\alpha_k = \alpha + \frac{k}{n}(\beta - \alpha)$, ( $k = 0, 1, 2, \ldots, n$), et qui est affine sur chaque intervalle $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, ( $k = 1, 2, \ldots, n$). En vertu de la continuité uniforme de $f$, on vérifie sans peine que, pour $x \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, on a

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n(x) - f_n(\alpha_k)\| + \|f(x) - f(\alpha_k)\| \leq 2 \sup_{|y-x| \leq \frac{\beta-\alpha}{n}} \|f(y) - f(x)\|$$

donc que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$. Et il est clair que $f_n$ prend ses valeurs dans le sous espace vectoriel de dimension $\leq n+1$ engendré par les points $f(\alpha_k)$.
Alors, si $\varphi_n$ est la primitive de $f_n$ nulle en $a$, il résulte du théorème des accroissements finis que, pour $n \leq p$ et $x \in [\alpha, \beta]$,

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(x) - \varphi_p(x)\| = \|(\varphi_n(x) - \varphi_p(x)) - (\varphi_n(a) - \varphi_p(a))\| &\leq |x - a| \sup_t \|f_n(t) - f_p(t)\| \\ &\leq (\beta - \alpha)(\|f - f_n\| + \|f - f_p\|) \to 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $\varphi_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}([\alpha, \beta], E)$, qui converge vers une fonction $\varphi$. Il reste uniquement à voir que $\varphi$ est une primitive de $f$ sur $]\alpha, \beta[$. Considérons les fonctions définies sur $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ par :

$$\Phi_n(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_n(x) - \varphi_n(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f_n(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Puisque $\varphi_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée $f_n$, on vérifie que $\Phi_n$ est continue, et un calcul semblable à celui qui précède montre que :

$$\|\Phi_n(x, y) - \Phi_p(x, y)\| \leq (\|f - f_n\| + \|f - f_p\|) \to 0$$

La suite de Cauchy $(\Phi_n)$ converge donc vers une fonction continue $\Phi$, qui doit vérifier nécessairement $\Phi(x, y) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}$ si $x \neq y$, et $\Phi(x, x) = f(x)$. Et la continuité de $\Phi$ entraîne alors que $\lim_{x\to x_0} \Phi(x, x_0) = \Phi(x_0, x_0)$, c'est-à-dire que $\varphi$ est une primitive de $f$. ■

## 8.8 Formule de Taylor

Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans un espace de Banach $E$, la dérivée $f'$ de $f$ est une fonction continue de $U$ dans $F$. Si cette dérivée est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$, on dit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et on appelle dérivée seconde de $f$ la dérivée de $f'$.
Plus généralement, on définit par récurrence les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, pour $n$ entier supérieur à 1, comme les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont la dérivée est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$. On note alors $f^{(n)}(x)$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $f$ en $x$, c'est-à-dire la dérivée $(n-1)^{\text{ème}}$ de $f'$ en $x$.

On a alors une généralisation du théorème des accroissements finis, qui permet une estimation de l'accroissement d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ entre deux points fixés quand on connaît les dérivées successives de cette fonction.

**Théorème 8.8.1.** *(Taylor) Soient $U$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $U$. Si $a$ et $b$ sont deux points de $U$, on a l'inégalité :*

$$\left\| f(b) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(b-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^n}{n!} \sup_{x\in[a,b]} \left\| f^{(n)}(x) \right\|$$

Démonstration : Quitte à remplacer la fonction $f$ par la fonction $x \mapsto f(-x)$, on peut supposer $a < b$.
On va démontrer cette formule par récurrence. Si $n = 1$, c'est exactement le théorème 8.6.2. Supposons-la démontrée pour $n-1$, et posons $M = \sup_{x\in[a,b]} \left\| f^{(n)}(x) \right\|$. On a, alors, pour $x \in ]a, b[$, en appliquant la formule à la fonction $f'$ qui est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$,

$$\left\| f'(x) - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(x-a)^j}{j!} (f')^{(j)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^{n-1}}{(n-1)!} \sup_{y\in]a,x[} \left\| (f')^{(n-1)}(y) \right\|$$

Il en résulte que la fonction $g$ définie sur $U$ par

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$$

s'annule en $a$ et possède une dérivée $g'$ satisfaisant

$$\|g'(x)\| = \left\| f'(x) - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j+1)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^{n-1}}{(n-1)!} \sup_{y\in]a,x[} \left\| f^{(n)}(y) \right\| \leq M \frac{|x-a|^{n-1}}{(n-1)!}$$

Et si on pose, pour $a \leq x \leq b$, $h(x) = M\dfrac{(x-a)^n}{n!}$, on obtient $h'(x) = M\dfrac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$, donc $\|g'(x)\| \leq h'(x)$. Il résulte alors du théorème 8.6.3 que $\|g(b) - g(a)\| \leq h(b) - h(a)$, c'est-à-dire

$$\left\| f(b) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(b-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^n}{n!} \sup_{x\in[a,b]} \left\| f^{(n)}(x) \right\|$$

qui est la formule cherchée. Ceci achève la démonstration par récurrence. ■

**Théorème 8.8.2.** *(Formule de Taylor-Young) Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ de $U$ dans un espace de Banach $E$, on a pour tout $a \in U$,*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + (x-a)^n \varepsilon_n(x)$$

*où $\varepsilon_n$ est une fonction qui tend vers 0 quand $x$ tend vers $a$.*

Démonstration : Si on pose

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$$

il est clair que $g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $U$, et que les dérivées $g^{(j)}(a)$ sont nulles pour $0 \leq j \leq n$. Par continuité de $g^{(n)}$ en $a$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset U$ et que $\left\|g^{(n)}(x)\right\| < \varepsilon$ pour $|x-a| < r$. On obtient alors, pour $x \in ]a-r, a+r[$, d'après l'inégalité précédente,

$$\|g(x)\| = \left\|g(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-a)^j}{j!} g^{(j)}(a)\right\| \leq \frac{|x-a|^n}{n!} \sup_{y\in[a,x]} \left\|g^{(n)}(x)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{n!} |x-a|^n$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_n(x) := (x-a)^{-n} g(x) = (x-a)^{-n} \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\right) \to 0$$

lorsque $x$ tend vers $a$, ce qui est le résultat cherché. ■

# 9

# FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

On cherche maintenant à étendre la notion de fonction dérivable au cas de fonctions définies sur un domaine de dimension supérieure à 1. Puisque le quotient de l'accroissement de la fonction par l'accroissement de la variable (dont la limite définit la dérivée) n'a plus de sens dans ce cadre, on doit trouver une définition mieux adaptée. On va, en fait, définir les fonctions différentiables en un point comme des fonctions qu'on peut "bien" approcher par des fonctions affines, et on verra que cette définition, dans le cas des fonctions de variable réelle, redonne la notion de fonction dérivable.

## 9.1 Notations de Landau

**Définition 9.1.1.** *Soient $X$ un espace topologique, $a$ un point de $X$, $f$ et $g$ deux fonctions de $X$ dans $\mathbb{R}$. On dira que $g$ est $o(f)$ quand $x$ tend vers $a$ – et on écrira $g = o(f)$ – si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists V \text{ voisinage de } a \text{ dans } X \text{ tel que } \quad \forall x \in V \ \ |g(x)| \leq \varepsilon \, |f(x)|$$

*On dira de même que $g$ est $O(f)$ quand $x$ tend vers $a$ – et on écrira $g = O(f)$ – si*

$$\exists M \ \exists V \text{ voisinage de } a \text{ dans } X \text{ tel que } \quad \forall x \in V \ \ |g(x)| \leq M \, |f(x)|$$

Dire que $g = o(f)$ signifie que le quotient $\dfrac{|g(x)|}{|f(x)|}$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $a$. Et dire que $g = O(f)$ signifie que ce quotient est borné au voisinage de $a$.

On doit faire attention à la notation $g = o(f)$ : il est clair qu'on peut avoir $g_1 = o(f)$ et $g_2 = o(f)$ sans avoir $g_1 = g_2$. On devrait plutôt écrire $g \in o(f)$, mais la notation est maintenant traditionnelle.

**Propositon 9.1.2.** *Si $g = o(f)$, alors $g = O(f)$.*

Ceci se déduit immédiatement des définitions.

**Théorème 9.1.3.** *Si $f$, $g_1$ et $g_2$ sont des fonctions de $X$ dans $\mathbb{R}$ et si $g_1$ et $g_2$ sont $o(f)$ quand $x$ tend vers $a$, $g_1 + g_2$ est $o(f)$ quand $x$ tend vers $a$.*

*Si $f$, $g_1$ et $g_2$ sont des fonctions de $X$ dans $E$ et si $g_1$ et $g_2$ sont $O(f)$ quand $x$ tend vers $a$, $g_1 + g_2$ est $O(f)$ quand $x$ tend vers $a$.*

Ceci se déduit sans peine du fait que si $|g_1(x)| \leq q_1 |f(x)|$ pour tout $x$ d'un voisinage $V_1$ de $a$ et si $|g_2(x)| \leq q_2 |f(x)|$ pour tout $x$ d'un voisinage $V_2$ de $a$, on a

$$|(g_1 + g_2)(x)| \leq (q_1 + q_2) |f(x)|$$

pour tout $x$ de $V_1 \cap V_2$. ■

**Théorème 9.1.4.** *Si $f_1$, $f_2$, $g_1$ et $g_2$ sont des fonctions de $X$ dans $\mathbb{R}$, si $g_1$ est $o(f_1)$ et $g_2$ est $O(f_2)$ quand $x$ tend vers $a$, alors $g_1g_2$ est $o(f_1f_2)$ quand $x$ tend vers $a$.*

*En particulier, si $g_1$ est $o(f_1)$ et $g_2$ est $o(f_2)$, alors $g_1g_2$ est $o(f_1f_2)$.*

*Si $f_1$, $f_2$, $g_1$ et $g_2$ sont des fonctions de $X$ dans $\mathbb{R}$, si $g_1$ est $O(f_1)$ et $g_2$ est $O(f_2)$ quand $x$ tend vers $a$, alors $g_1g_2$ est $O(f_1f_2)$ quand $x$ tend vers $a$.*

Supposons $g_1 = o(f_1)$ et $g_2 = O(f_2)$. Soit $\varepsilon > 0$. Si $V_2$ est un voisinage de $a$ tel que $|g_2(x)| \leq M |f_2(x)|$ pour tout $x$ de $V_2$, il existe un voisinage $V_1$ de $a$ tel que $|g_1(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{M} |f_1(x)|$ pour tout $x$ de $V_1$. On a alors

$$|g_1g_2(x)| \leq M.\frac{\varepsilon}{M} |f_1f_2(x)| = \varepsilon |f_1f_2(x)|$$

pour tout $x$ de $V_1 \cap V_2$. Ceci signifie que $g_1g_2 = o(f_1f_2)$.

Supposons $g_1 = O(f_1)$ et $g_2 = O(f_2)$. Alors, il existe des voisinages $V_1$ et $V_2$ de $a$ et des nombres $M_1$ et $M_2$ tels que $|g_j(x)| \leq M_j |f_j(x)|$ pour tout $x$ de $V_j$ $(j = 1, 2)$. On en déduit que

$$|g_1g_2(x)| \leq M_1M_2 |f_1f_2(x)|$$

pour tout $x$ de $V_1 \cap V_2$. ■

### Extension des définitions

Plus généralement, si $f$ et $g$ sont des fonctions de $X$ dans des espaces de Banach $E$ et $F$, on dira que $g$ est $o(f)$ si la fonction $\|g(.)\| : x \mapsto \|g(x)\|$ est $o(\|f(.)\|)$ et on dira que $g$ est $O(f)$ si la fonction $\|g(.)\| : x \mapsto \|g(x)\|$ est $O(\|f(.)\|)$.

## 9.2 Différentiabilité

**Définition 9.2.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une fonction de $U$ dans $F$. On dit que $f$ est* différentiable *en un point $a$ de $U$ s'il existe une application linéaire continue $T \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que*

$$f(x) - f(a) - T.(x - a) = o(x - a)$$

*quand $x$ tend vers $a$.*

Autrement dit, la différentiabilité de $f$ en $a$ signifie qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tel que, pour $x \in U$ avec $\|x - a\| < \delta$, on ait

$$\|f(x) - f(a) - T.(x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|$$

Ceci signifie encore que la fonction affine continue : $x \mapsto f(a)+T.(x-a)$ diffère de la fonction $f$ au voisinage de $a$ d'une fonction infiniment plus petite que la distance à $a$.

**Remarque 9.2.2.** *La différentiabilité de $f$ en $a$ ne dépend que de la topologie des espaces $E$ et $F$.*

En fait, si on remplace les normes de $E$ et de $F$ par des normes équivalentes, les applications linéaires continues de $E$ dans $F$ sont inchangées, ainsi que les applications de $U$ dans $F$ qui sont $o(x - a)$ quand $x$ tend vers $a$. ■

**Proposition 9.2.3.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $f$ une fonction de $U$ dans $F$ et $a$ un point de $U$. Si $V$ est un voisinage ouvert de $a$ dans $U$ et si la restriction $f|_V$ de $f$ à $V$ est différentiable en $a$, $f$ est différentiable en $a$.*

**Proposition 9.2.4.** *Si $f$ est différentiable en $a$, elle y est continue.*

Puisque $T$ est continue et que l'on a, au voisinage de $a$, $\|f(x) - f(a) - T.(x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|$, on a nécessairement

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ce qui traduit la continuité de $f$ en $a$.

**Théorème 9.2.5.** *Si $f : U \to F$ est différentiable en $a$, il existe une seule application linéaire $T \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f(x) - f(a) - T.(x - a) = o(x - a)$.*

Démonstration : Supposons que $T_1$ et $T_2$ possèdent cette propriété. On a alors, en notant $g_j(x) = f(x) - f(a) - T_j.(x - a)$ :

$$\begin{aligned}(T_2 - T_1).(x - a) &= \big(f(x) - f(a) - T_1.(x - a)\big) - \big(f(x) - f(a) - T_2.(x - a)\big) \\ &= g_1(x) - g_2(x) = o(x - a)\end{aligned}$$

Il en résulte que, pour tout $h \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda(T_2 - T_1).h = (T_2 - T_1).(\lambda h) = o(\lambda)$$

quand $\lambda$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$, puisque, pour $|\lambda|$ assez petit, le point $x = a + \lambda h$ appartient à $U$. On a donc

$$\|\lambda(T_2 - T_1).h\| = |\lambda| \, \|(T_2 - T_1).h\| = o(\lambda)$$

ce qui entraîne $\|(T_2 - T_1).h\| = 0$, c'est-à-dire $(T_2 - T_1).h = 0$. Et comme $h$ est arbitraire dans $E$, l'application $T_2 - T_1$ est nulle, c'est-à-dire $T_1 = T_2$. ■

**Définition 9.2.6.** *Si la fonction $f$ est différentiable en $a$, on appelle* différentielle *de $f$ au point $a$ l'unique application linéaire $T \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $f(x)-f(a)-T.(x-a) = o(x-a)$.*

**Notation.**

*On notera le plus souvent $f'(a)$ la différentielle de $f$ au point $a$. Une autre notation fréquente pour la différentielle de $f$ est $\nabla f(a)$.*

**Définition 9.2.7.** *La fonction $f : U \to F$ sera dite différentiable sur $U$ si elle est différentiable en chaque point de $U$.*

*La fonction $f : U \to F$ sera dite* continuement différentiable *sur $U$, ou* de classe $\mathscr{C}^1$ *sur $U$, si elle est différentiable en chaque point de $U$ et si l'application différentielle $f' : U \to \mathscr{L}(E,F)$ est continue de $U$ dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(E,F)$.*

On va examiner maintenant le lien entre dérivabilité et différentiabilité pour les fonctions d'une variable réelle.

**Théorème 9.2.8.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction de $U$ dans un espace de Banach $F$. Alors $f$ est différentiable en un point $x_0$ de $U$ si et seulement si elle y est dérivable. De plus, si $m \in F$ est la dérivée de $f$ en $x_0$, la différentielle de $f$ en $x_0$ est l'application linéaire $T_m : \mathbb{R} \to F$ définie par*

$$T_m(\lambda) = \lambda.m$$

Démonstration : Supposons $f$ dérivable en $x_0$, de dérivée

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Alors la fonction $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m$ tend vers 0 en $x_0$. Et puisque l'on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)(m + \varepsilon(x)) \\ &= f(x_0) + T_m(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) = f(x_0) + T_m(x - x_0) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

on voit que $f$ est différentiable en $x_0$ et que sa différentielle est $T_m \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, F)$.

Inversement, si $f$ est différentiable en $x_0$, de différentielle $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, F)$, et si on pose $m = T(1)$, on a, par linéarité, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $T(\lambda) = \lambda T(1) = \lambda.m = T_m(\lambda)$. Donc, on a

$$f(x) = f(x_0) + m.(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, et

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m + \varepsilon(x) \to m$$

quand $x \to x_0$. Ceci démontre que $f$ est dérivable en $x_0$, de dérivée $m$. ∎

**Théorème 9.2.9.** *Si $T$ est une application linéaire continue de $E$ dans $F$ et $a$ un élément de $F$, la fonction affine $f : x \mapsto T.x + a$ est différentiable sur $E$ et sa différentielle est égale à $T$ en tout point de $E$.*

Démonstration : On a pour tout $x_0$ et tout $x$ de $E$ :

$$f(x) - f(x_0) - T.(x - x_0) = (T.x + a) - (T.x_0 + a) - T.(x - x_0) = 0 = o(x - x_0)$$

et ceci justifie le résultat annoncé. ■

## 9.3 Opérations sur les fonctions différentiables

**Théorème 9.3.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $f$ et $g$ deux fonctions de $U$ dans $F$. Si $f$ et $g$ sont différentiables en un point $x_0$ de $U$, il en est de même de $f + g$. Et on a*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Démonstration : Par définition, les fonctions

$$\varepsilon(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x - x_0)$$

et

$$\eta(x) = g(x) - g(x_0) - g'(x_0).(x - x_0)$$

sont $o(x - x_0)$ quand $x$ tend vers $x_0$. On en déduit que

$$\varepsilon(x) + \eta(x) = (f + g)(x) - (f + g)(x_0) - (f'(x_0) + g'(x_0)).(x - x_0)$$

est aussi $o(x - x_0)$, ce qui signifie que $f + g$ est différentiable en $x_0$, de différentielle $f'(x_0) + g'(x_0)$. ■

**Théorème 9.3.2.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $f$ une fonction de $U$ dans $\mathbb{R}$ et $g$ une fonction de $U$ dans $F$. Si $f$ et $g$ sont différentiables en un point $x_0$ de $U$, il en est de même de $f.g$. Et on a, pour $h \in E$*

$$(f.g)'(x_0).h = \big(f'(x_0).h\big)g(x_0) + f(x_0)\big(g'(x_0).h\big)$$

Démonstration : Par définition, les fonctions

$$\varepsilon(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x - x_0)$$

et

$$\eta(x) = g(x) - g(x_0) - g'(x_0).(x - x_0)$$

sont $o(x-x_0)$ quand $x$ tend vers $x_0$. On en déduit que

$$\begin{aligned}f(x).g(x) &= \big(f(x_0)+f'(x_0).(x-x_0)+\varepsilon(x)\big).\big(g(x_0)+g'(x_0).(x-x_0)+\eta(x)\big)\\ &= f(x_0).g(x_0)+(f'(x_0).(x-x_0))g(x_0)+f(x_0).(g'(x_0).(x-x_0))\\ &\quad + (f(x_0).\eta(x)+\varepsilon(x).g_(x_0)+f'(x_0).(x-x_0).\eta(x)+\varepsilon(x).g'(x_0).(x-x_0)\\ &\quad + (f'(x_0).(x-x_0)).(g'(x_0).(x-x_0))+\varepsilon(x).\eta(x)\end{aligned}$$

et il suffit de remarquer que chacun des six derniers termes de cette somme est $o(x-x_0)$. Ceci est clair pour les termes $(f(x_0).\eta(x)$, $\varepsilon(x).g(x_0)$, $f'(x_0).(x-x_0).\eta(x)$, $\varepsilon(x).g'(x_0).(x-x_0)$ et $\varepsilon(x).\eta(x)$.
Puisque $f'(x_0)\in\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, on a $|f'(x_0).(x-x_0)|\leq\|f'(x_0)\|\,.\,\|x-x_0\|$ et, de même, puisque $g'(x_0)\in\mathscr{L}(E,F)$, on a $\|g'(x_0).(x-x_0)\|\leq\|g'(x_0)\|\,.\,\|x-x_0\|$, d'où

$$\|(f'(x_0).(x-x_0)).(g'(x_0).(x-x_0))\|\leq\|f'(x_0)\|\,.\,\|g'(x_0)\|\,.\,\|x-x_0\|^2=o(x-x_0)$$

Ceci achève la démonstration. ■

**Théorème 9.3.3.** *Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$ et $V$ un ouvert de $F$, $f$ une fonction de $U$ dans $F$ et $g$ une fonction de $V$ à valeurs dans $G$. Si $f(U)\subset V$, si $f$ est différentiable en un point $x_0$ de $U$ et $g$ différentiable en $y_0=f(x_0)$, alors $g\circ f$ est différentiable en $x_0$ et on a*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)\circ f'(x_0)$$

Démonstration : Par définition, les fonctions

$$\varepsilon(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0).(x-x_0)=f(x)-y_0-f'(x_0).(x-x_0)$$

et

$$\eta(y)=g(y)-g(y_0)-g'(y_0).(y-y_0)$$

sont respectivement $o(x-x_0)$ quand $x$ tend vers $x_0$ et $o(y-y_0)$ quand $y$ tend vers $y_0$. On en déduit que

$$\begin{aligned}g\circ f(x) &= g(y_0)+g'(y_0).(f(x)-y_0)+\eta(f(x)-y_0)\\ &= g(y_0)+g'(y_0).(f'(x_0).(x-x_0)+\varepsilon(x))+\eta(f'(x_0).(x-x_0)+\varepsilon(x))\\ &= g(y_0)+g'(y_0).(f'(x_0).(x-x_0))+g'(y_0).\varepsilon(x)+\eta(f'(x_0).(x-x_0)+\varepsilon(x))\end{aligned}$$

Puisque $\|g'(y_0).\varepsilon(x)\|\leq\|g'(y_0)\|\,\|\varepsilon(x)\|=o(x-x_0)$, que

$$\|f'(x_0).(x-x_0)\|\leq\|f'(x_0)\|\,\|x-x_0\|=O(x-x_0)$$

donc que $f'(x_0).(x-x_0)+\varepsilon(x)=O(x-x_0)$ et que $\eta(y)=o(y-y_0)$ donc que

$$\frac{\|\eta(f'(x_0).(x-x_0)+\varepsilon(x))\|}{\|x-x_0\|}\leq\frac{\|\eta(f'(x_0).(x-x_0)+\varepsilon(x))\|}{\|f'(x_0).(x-x_0)+\varepsilon(x)\|}.\frac{\|f'(x_0).(x-x_0)+\varepsilon(x)\|}{\|x-x_0\|}\to 0$$

quand $x$ tend vers $x_0$, on obtient que $\eta(f'(x_0).(x-x_0)+\varepsilon(x))=o(x-x_0)$, d'où le résultat cherché. ■

## 9.4 Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

**Théorème 9.4.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $f$ et $g$ deux fonctions de $U$ dans $F$. Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$, il en est de même de $f+g$.*

Démonstration : Le théorème 9.3.1 montre que $f+g$ est différentiable en tout point de $U$. Il reste à montrer que la différentielle de $f+g$ est continue de $U$ dans $\mathscr{L}(E,F)$. Et ceci résulte immédiatement de ce que $(f+g)' = f'+g'$ et que la somme de deux applications continues à valeurs dans $\mathscr{L}(E,F)$ est elle-même continue. ■

**Théorème 9.4.2.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $f$ une fonction de $U$ dans $\mathbb{R}$ et $g$ une fonction de $U$ dans $F$. Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$, il en est de même de $f.g$.*

Démonstration : La fonction $f.g$ est différentiable en tout point de $U$ et la différentielle de $f.g$ est la fonction de $U$ à valeurs dans $\mathscr{L}(E,F)$ définie par

$$(f.g)'(x_0).h = \big(f'(x_0).h\big)g(x_0) + f(x_0)\big(g'(x_0).h\big)$$

On a donc, pour $x$ et $x_0$ dans $U$ et $h$ dans $E$ :

$$(f.g)'(x).h-(f.g)'(x_0).h = \big(f'(x).h\big)g(x)-\big(f'(x_0).h\big)g(x_0)+f(x)\big(g'(x).h\big)-f(x_0)\big(g'(x_0).h\big)$$

donc

$$\begin{aligned}\big\|\big((f.g)'(x)-(f.g)'(x_0)\big).h\big\| \le{}& \big\|\big(f'(x).h\big)g(x)-\big(f'(x_0).h\big)g(x)\big\|\\ &+\big\|\big(f'(x_0).h\big)g(x)-\big(f'(x_0).h\big)g(x_0)\big\|\\ &+\big\|f(x)\big(g'(x).h\big)-f(x)\big(g'(x_0).h\big)\big\|\\ &+\big\|f(x)\big(g'(x_0).h\big)-f(x_0)\big(g'(x_0).h\big)\big\|\end{aligned}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned}\big\|\big((f.g)'(x)-(f.g)'(x_0)\big)\big\| \le{}& |f'(x)-f'(x_0)|\,.\,\|g(x)\| + |f'(x_0)|\,\|g(x)-g(x_0)\|\\ &+|f(x)|\,\|g'(x)-g'(x_0)\| + |f(x)-f(x_0)|\,\|g'(x_0\|\end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand $x$ tend vers $x_0$ puisque $f$, $f'$, $g$ et $g'$ sont continues en $x_0$. Ceci montre la continuité de $(f.g)'$ en $x_0$. ■

**Théorème 9.4.3.** *Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$ et $V$ un ouvert de $F$, $f$ une fonction de $U$ dans $F$ et $g$ une fonction de $V$ à valeurs dans $G$. Si $f(U)\subset V$, si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$ et $g$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $V$, alors $g\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$.*

Démonstration : La fonction $g\circ f$ est différentiable en tout point de $U$. Pour montrer la continuité de $(g\circ f)'$, on remarque que, puisque

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(y_0)\circ f'(x_0)$$

on a

$$(g\circ f)'(x) = \gamma(f'(x), g'\circ f(x))$$

où $\gamma$ désigne l'application bilinéaire continue $(u,v)\mapsto v\circ u$ de $\mathscr{L}(E,F)\times\mathscr{L}(F,G)$ dans $\mathscr{L}(E,G)$. Puisque $f$, $f'$ et $g'$ sont continues, il en est de même de $g'\circ f$ et donc de $(g\circ f)'$. ■

## 9.5 Le théorème des accroissements finis

Comme pour les fonctions dérivables d'une variable réelle, le résultat fondamental du calcul différentiel est celui qui, à partir de la connaissance des différentielles d'une fonction en chaque point de son domaine, permet d'estimer l'accroissement de cette fonction entre deux points fixés à l'avance. On se ramène pour cela au cas des fonctions d'une variable, en considérant la restriction de la fonction au segment qui joint les deux points.

**Théorème 9.5.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert* convexe *de $E$ et $f$ une fonction différentiable sur $U$. Si on a $\|f'(x)\| \leq M$ pour tout $x$ de $U$, on a pour tout $a$ et tout $b$ de $U$ :*

$$\|f(b) - b(a)\| \leq M \|b - a\|$$

Démonstration : Puisque $U$ est supposé convexe, on a, pour $a$ et $b$ dans $U$ et pour $t \in [0,1]$, $a + t(b-a) \in U$. Il en résulte que la fonction $\psi : [0,1] \to F$ définie par

$$\psi(t) = f(a + t(b-a))$$

composée de $f$ et de la fonction affine $t \mapsto a + t(b-a)$ est continue sur $[0,1]$ et différentiable en tout point de $]0,1[$. Sa différentielle en $t$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $F$ :

$$\lambda \mapsto f'(a + t(b-a)).(\lambda(b-a))$$

ce qui signifie que la dérivée de $\psi$ en $t$ est $\psi'(t) = f'(a + t(b-a)).(b-a)$. On a donc

$$\|\psi'(t)\| \leq \|f'(a + t(b-a))\| \|b - a\| \leq M \|b - a\|$$

et il résulte alors du théorème 8.6.2 que

$$\|f(b) - f(a)\| = \|\psi(1) - \psi(0)\| \leq (1-0)M \|b - a\| = M \|b - a\|$$

qui est le résultat cherché. ■

**Remarque 9.5.2.**

Il résulte de la démonstration qui précède que l'inégalité $\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$ est valable dès que le segment $[a,b]$ est tout entier contenu dans le domaine de $f$ et que la différentielle est majorée en norme par $M$ sur ce segment.

**Corollaire 9.5.3.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert* convexe *de $E$ et $f$ une fonction différentiable sur $U$. Si on a $\|f'(x)\| \leq M$ pour tout $x$ de $U$, la fonction $f$ est $M$-lipschitzienne.*

Ceci résulte immédiatement du théorème précédent. ■

**Corollaire 9.5.4.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert connexe de $E$ et $f$ une fonction différentiable sur $U$. Si $f'$ est nulle en tout point de $U$, alors $f$ est constante.*

Démonstration : Il résulte du corollaire précédent, avec $M = 0$, que $f$ est constante sur chaque boule ouverte contenue dans $U$, donc localement constante. Et si $U$ est connexe, on en déduit que $f$ est constante. ■

L'hypothèse de convexité de $U$, qui a été utilisée pour pouvoir étudier la restriction de $f$ au segment d'extrémités $a$ et $b$, ne peut être remplacée par la connexité de $U$. On a en effet l'exemple suivant :

**Exemple 9.5.5.** *Soient $U$ l'ouvert de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ défini par*

$$U = \{(x, y) : x > 0 \quad et \quad x^2 + y^2 > 1\}$$

*et $\psi : U \to \mathbb{R}$ telle que $\psi(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$. Alors $U$ est connexe, la différentielle de $\psi$ vérifie $\|\psi'(x, y)\| < 1$ pour tout $(x, y)$ de $U$ et $\psi$ n'est pas $k$-lipschitzienne pour $k < \dfrac{\pi}{2}$.*

Démonstration : Il est aisé de voir que $U$ est réunion de demi-droites parallèles à l'axe des $x$, qui coupent toutes la droite d'équation $x = 2$, et d'en déduire la connexité de $U$.
Par ailleurs, $\psi$ est la composée de la fonction $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et du produit des fonctions $(x, y) \mapsto y$ et $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. L'utilisation des théorèmes 9.3.3 et 9.3.2 montre alors que $\psi$ est différentiable et que, pour $h = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\psi'(x, y).h = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \times \left(\frac{1}{x} v + y \frac{-u}{x^2}\right) = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}$$

d'où l'on déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$|\psi'(x, y).h|^2 \leq \left(\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)(u^2 + v^2) = \frac{\|h\|^2}{x^2 + y^2}$$

donc que $\|\psi'(x, y)\| \leq (x^2 + y^2)^{-1/2} < 1$.
Enfin, si $a_n$ et $b_n$ désignent respectivement les points $(\frac{1}{n}, -\frac{n+1}{n})$ et $(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n})$ de $U$, on vérifie sans peine que $\|b_n - a_n\| \to 2$ et que

$$f(b_n) - f(a_n) = 2 \operatorname{arctg}(n + 1) \to \pi$$

donc que $\psi$ ne peut être $k$-lipschitzienne sur $U$ pour aucun $k < \dfrac{\pi}{2}$. ■

En dépit du contre-exemple précédent, on peut, dans certains cas, utiliser le théorème des accroissements finis dans des domaines non convexes, comme dans l'exemple suivant.

**Théorème 9.5.6.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $a$ un point de $U$ et $f$ une application différentiable de $U \setminus \{a\}$ dans $F$. On suppose que $E$ est de dimension au moins 2, et que $f'$ possède une limite $\varphi$ en $a$. Alors $f$ se prolonge en une fonction différentiable sur $U$, et $f'(a) = \varphi$.*

Démonstration : Soit $g$ la fonction définie sur $U \setminus \{a\}$ par $g(x) = f(x) - \varphi.x$. Alors $g$ est différentiable sur $U \setminus \{a\}$ et on a $g'(x) = f'(x) - \varphi$. Il existe un $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et que $\|f'(x) - \varphi\| \leq 1$ pour tout $x$ de $B(a, r) \setminus \{a\}$. Si $x$ et $y$ sont deux points de $B(a, r)$ tels que le segment $[x, y]$ ne contienne pas $a$, il résulte du théorème des accroissements finis (remarque 9.5.2), qu'on a

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \|x - y\|$$

Pour $x$ fixé dans $B(a,r) \setminus \{a\}$, l'ensemble $L_x = \{y : \|g(y) - g(x)\| \leq \|x - y\|\}$, qui est fermé dans $B(a,r) \setminus \{a\}$ puisque $g$ est continue, contient donc toute la boule $B(a,r)$ à l'exception éventuelle de la droite passant par $x$ et $a$. Mais puisque $E$ est de dimension au moins 2, cette droite est d'intérieur vide, ce qui montre que $L_x = B(a,r) \setminus \{a\}$. On en déduit que $g$ est 1-lipschitzienne sur $B(a,r) \setminus \{a\}$. Il résulte alors du théorème 4.4.1 que $g$ se prolonge par continuité au point $a$, et que la fonction prolongée est 1-lipschitzienne sur $B(a,r)$. On posera $\alpha = g(a) = \lim_{x \to a} g(x)$. Donc $\lim_{x \to a} f(x) = \varphi.a + \alpha$, et on prolongera $f$ à $B(a,r)$ en posant $f(a) = \alpha + \varphi.a$.
Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe un $\rho < r$ tel que $\|f'(x) - \varphi\| \leq \varepsilon$ en tout point $x$ de $B(a,\rho) \setminus \{a\}$. On voit alors comme plus haut que si $x$ et $y$ sont deux points de $B(a,\rho)$ distincts de $a$, on a $\|g(x) - g(y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$. Et en faisant tendre $y$ vers $a$, on obtient

$$\|f(x) - f(a) - \varphi.(x - a)\| = \|g(x) - \alpha\| \leq \varepsilon \|x - a\|$$

pour tout $x$ de $B(a,r)$, ce qui montre que $f$ est différentiable en $a$, de différentielle $\varphi$. ■

## 9.6 Limites de fonctions différentiables

**Théorème 9.6.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $f$ une fonction de $U$ dans $F$ et $a$ un point de $U$. On suppose que $(f_n)$ est une suite de fonctions différentiables de $U$ dans $F$, qui converge vers $f$ en tout point de $U$ et que la suite $(f'_n)$ des différentielles converge uniformément sur $U$ vers une fonction $\varphi : U \to \mathscr{L}(E,F)$. Alors $f$ est différentiable sur $U$ et $f' = \varphi$.*

Démonstration : Soient $a \in U$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors un entier $N$ tel que, pour $n \geq N$, on ait $\|f'_n(y) - \varphi(y)\| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ pour tout $y$ de $U$. Puisque $f_N$ est différentiable en $a$, il existe un $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$ et que, pour tout $x$ de $B(a,r)$, on ait :

$$\|f_N(x) - f_N(a) - f'_N(a).(x - a)\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \|x - a\|$$

Alors, pour $n \geq N$, $y \in B(a,r)$ et $g = f_n - f_N$, on a :

$$\|g'(y)\| = \|f'_n(y) - f'_N(y)\| \leq \|f'_n(y) - \varphi(y)\| + \|f'_N(y) - \varphi(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc, en vertu du théorème 9.5.1,

$$\|g(x) - g(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - a\|$$

pour tout $x$ de $B(a,r)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f_n(a) - \varphi(a).(x - a)\| \leq \|g(x) - g(a)\| &+ \|f_N(x) - f_N(a) - f'_N(a).(x - a)\| \\ &+ \|f'_N(a) - \varphi(a)\| \, \|x - a\|\end{aligned}$$

donc que

$$\|f_n(x) - f_n(a) - \varphi(a).(x - a)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - a\| + \frac{\varepsilon}{4} \|x - a\| + \frac{\varepsilon}{4} \|x - a\| = \varepsilon \|x - a\|$$

Et si on fait tendre $n$ vers l'infini, on obtient à la limite, pour tout $x$ de $B(a,r)$,

$$\|f(x) - f(a) - \varphi(a).(x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|$$

ce qui montre que $f$ est différentiable en $a$, de différentielle $\varphi$, puisque $\varepsilon$ est arbitraire. ■

**Corollaire 9.6.2.** *Si la suite $(f_n)$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$ converge vers une fonction $f$ et si la suite des différentielles $(f'_n)$ converge uniformément sur $U$ vers une fonction $g : U \to \mathscr{L}(E,F)$, alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$ et $f' = g$.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que $g$, limite uniforme des fonctions continues $f'_n$, est continue, et d'appliquer le théorème précédent. ■

**Théorème 9.6.3.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $[a,b]$ un intervalle réel et $\Phi$ une fonction continue de $U \times [a,b]$ dans $F$. On suppose que pour tout $t \in [a,b]$ la fonction $x \mapsto \Phi(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$ et que la fonction $(x,t) \mapsto \Phi'(x,t)$ est continue de $U \times [a,b]$ dans $\mathscr{L}(E,F)$. Alors la fonction $f$ définie sur $U$ par $f(x) = \int_a^b \Phi(x,t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie :*

$$f'(x) = \int_a^b \Phi'(x,t)\,dt$$

Démonstration : On remarque d'abord que $f$ est continue : en effet, si $x_0$ est un point de $U$ et si $K$ désigne le compact $\{x_0\} \times [a,b]$, il résulte du théorème 3.5.4 que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\eta > 0$ tel que

$$d((x,t),(x_0,s)) < \eta \quad \Longrightarrow \quad \|\Phi(x,t) - \Phi(x_0,s)\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

En particulier, on a $\|\Phi(x,t) - \Phi(x_0,t)\| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ pour tout $x \in B(x_0,\eta)$. On en déduit que, pour $x \in B(x_0,\eta)$,

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \left\| \int_a^b (\Phi(x,t) - \Phi(x_0,t))\,\,dt \right\| \leq \int_a^b \|\Phi(x,t) - \Phi(x_0,t)\|\,\,dt \leq \varepsilon$$

ce qui montre la continuité de $f$.
Le même argument, appliqué à $\Phi'$, montre que la fonction $\varphi$ définie par

$$\varphi(x) = \int_a^b \Phi'(x,t)\,dt$$

est continue de $U$ dans $\mathscr{L}(E,F)$. et que, pour $x_0 \in U$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que $B(x_0,\eta) \subset U$ et que, pour $y \in B(x_0,\eta)$, on ait $\|\Phi'(y,t) - \Phi'(x_0,t)\| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. L'application, pour $t$ fixé dans $[a,b]$, du théorème des accroissements finis à la fonction

$$g(x) = \Phi(x,t) - \Phi'(x_0,t).x$$

dont la différentielle, $g'(x) = \Phi'(x,t) - \Phi'(x_0,t)$, vérifie $\|g'(x)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ pour tout $x$ de $B(x_0,\eta)$, montre que, pour tout $t \in [a,b]$ et tout $x \in B(x_0,\eta)$, on a

$$\|g(x) - g(x_0)\| = \|\Phi(x,t) - \Phi(x_0,t) - \Phi'(x_0,t).(x-x_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\,\|x-x_0\|$$

On en déduit, par intégration, que

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(x_0) - \varphi(x_0).(x-x_0)\| &= \left\| \int_a^b (\Phi(x,t) - \Phi(x_0,t) - \Phi'(x_0,t).(x-x_0))\,\,dt \right\| \\
&\leq \int_a^b \|\Phi(x,t) - \Phi(x_0,t) - \Phi'(x_0,t).(x-x_0)\|\,\,dt \\
&\leq \varepsilon\,\|x-x_0\|
\end{aligned}$$

ce qui montre que $f$ est différentiable en $x_0$, de différentielle $\varphi(x_0)$. Et puisque $\varphi$ est continue, $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$. ■

## 9.7 Fonctions à valeurs dans un espace de dimension finie

Tout au long de cette section, l'espace $F$ sera de dimension finie $n$, et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $F$. Pour toute fonction $f$ définie sur $U$ à valeurs dans $F$, il existe des fonctions $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, appelées fonctions coordonnées de $f$, telles que, pour tout $x$ de $U$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x).e_j$$

**Théorème 9.7.1.** *Soient $U$ un ouvert de l'espace de Banach $E$ et $f$ une fonction de $U$ dans $F$. Alors $f$ est différentiable en un point $x_0$ de $U$ si et seulement si chacune des fonctions coordonnées de $f$ est différentiable en $x_0$. De plus, pour tout $h$ de $E$, le vecteur $f'(x_0).h$ de $F$ a pour coordonnées les $f'_j(x_0).h$.*

Démonstration : Supposons que chacune des $f_j$ soit différentiable en $x_0$. Alors, chacune des fonctions $\varepsilon_j(x) = f_j(x) - f_j(x_0) - f'_j(x_0).(x - x_0)$ est $o(x - x_0)$. Il en résulte que

$$f(x) - f(x_0) - \sum_{j=1}^{n} f'_j(x_0).(x - x_0) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(x).e_j = o(x - x_0)$$

Donc $f$ est différentiable en $x_0$ et

$$f'(x_0).h = \sum_{j=1}^{n} f'_j(x_0).h$$

Inversement, si $f$ est différentiable en $x_0$, les formes linéaires coordonnées $\pi_j : F \to \mathbb{R}$, définies par $y = \sum \pi_j(y).e_j$ pour tout $y$ de $F$, sont continues puisque $F$ est de dimension finie, donc différentiables d'après le théorème 9.2.9, et on a $f_j = \pi_j \circ f$ d'où la différentiabilité des $f_j$ en $x_0$ et l'égalité

$$f'_j(x_0) = \pi_j \circ f'(x_0)$$

■

On a ainsi ramené l'étude de la différentiabilité des fonctions à valeurs dans un espace de dimension finie à celle des fonctions à valeurs réelles.

## 9.8 Fonctions différentiables sur un produit

On s'intéresse maintenant à des fonctions définies sur un ouvert $U$ du produit de deux espaces $E_1$ et $E_2$ et à valeurs dans un espace de Banach $F$. Pour chaque $y \in E_2$, on peut alors considérer la fonction $f_y$, définie sur l'ouvert $U_y = \{x \in E_1 : (x,y) \in U\}$ par $f_y(x) = f(x,y)$ et à valeurs dans $F$.
On peut, de même, pour $x \in E_1$, considérer la fonction $f^x : y \mapsto f(x,y)$ définie sur l'ouvert $U^x = \{y \in E_2 : (x,y) \in U\}$ de $E_2$ et à valeurs dans $F$.

**Théorème 9.8.1.** *Si la fonction $f$ définie sur l'ouvert $U$ de $E_1 \times E_2$ et à valeurs dans $F$ est différentiable au point $(x,y)$ de $U$, la fonction $f_y$ est différentiable en $x$ et la fonction $f^x$ est différentiable en $y$. De plus, pour $(u,v) \in E_1 \times E_2$, on a*

$$f'(x,y).(u,v) = (f_y)'(x).u + (f^x)'(y).v$$

Démonstration : Si $y$ est un point de $E_2$, la fonction $\varphi_y : x \mapsto (x,y)$ est affine de $E_1$ dans $E_1 \times E_2$, vérifie $\varphi_y(U_y) \subset U$ et $f_y = f \circ \varphi_y$. Il en résulte que $f_y$ est différentiable en $y$ et que

$$(f_y)'(x) = f'(x,y) \circ (\varphi_y)'(x)$$

où $(\varphi_y)'(x).u = (u,0)$. Donc $(f_y)'(x).u = f'(x,y).(u,0)$.
De même, $f^x$ est différentiable en $y$ et on a $(f^x)'(y).v = f'(x,y).(0,v)$. Et on conclut que

$$f'(x,y).(u,v) = f'(x,y).(u,0) + f'(x,y).(0,v) = (f_y)'(x).u + (f^x)'(y).v$$

■

**Définition 9.8.2.** *On dit qu'une fonction $f$ définie sur un ouvert $U$ de $E_1 \times E_2$ à valeurs dans $F$ possède en $(x,y)$ une* différentielle partielle *par rapport à la première variable (resp. par rapport à la deuxième variable) si la fonction $f_y : x \mapsto f(x,y)$ (resp. la fonction $f^x : y \mapsto f(x,y)$) est différentiable en $x$ (resp. $y$).*

**Notation 9.8.3.** *On désignera en général par $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ les différentielles partielles de $f$ en $(x,y)$, c'est-à-dire les différentielles en $(x,y)$ des fonctions $f_y$ et $f^x$*

On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in \mathscr{L}(E_2, F)$.

Il est naturel de chercher à savoir si l'existence des différentielles partielles pour une fonction $f$ suffit à assurer la différentiabilité de $f$. Il n'en est rien, comme le montre l'exemple suivant, où la fonction $f$ admet des différentielles partielles en tout point, sans même être continue.

**Exemple 9.8.4.** *La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

*possède en tout point de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ des différentielles partielles, mais n'est pas différentiable en* $(0,0)$.

Démonstration : Pour $y=0$, on a $f_y \equiv 0$, donc $f_y$ est différentiable en tout $x$ de $\mathbb{R}$ avec une différentielle nulle. Pour $y \neq 0$, il suffit de voir que la fonction d'une variable réelle $f_y$ est dérivable, et les règles de calcul sur les fonctions dérivables montrent que

$$\frac{d}{dx} f_y(x) = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Et de même, pour $x=0$, la fonction $f^x$ est nulle, donc différentiable, et pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{d}{dy} f^x(y) = \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Néanmoins, on a $f(0,0)=0$ et $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = 1$ : donc

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \neq f(0,0)$$

et $f$ est discontinue en $(0,0)$, donc a fortiori non différentiable. ■

Néanmoins, si on ajoute une hypothèse de continuité, on peut obtenir un résultat de différentiabilité pour la fonction $f$.

**Théorème 9.8.5.** *Soient $U$ un ouvert de $E_1\times E_2$ et $f$ une fonction de $U$ dans un espace de Banach $F$. Si, pour tout point $(x,y)$ de $U$, la fonction $f$ admet des différentielles partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, et si ces différentielles partielles sont continues de $U$ dans $\mathscr{L}(E_1,F)$ et $\mathscr{L}(E_2,F)$ respectivement, la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$.*

Démonstration : D'après la remarque 9.2.2, on peut supposer que l'espace $E_1\times E_2$ est muni de la norme $(u,v)\mapsto \|u\|+\|v\|$. Soient $(x_0,y_0)\in U$ et $\varepsilon>0$. Notons $S=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\in\mathscr{L}(E_1,F)$ et $T=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\in\mathscr{L}(E_2,F)$. Par l'hypothèse de continuité sur les différentielles partielles, il existe $r>0$ tel que $W=B(x_0,r)\times B(y_0,r)\subset U$ et que, pour $(x,y)\in W$, on ait

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-S\right\|<\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \left\|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-T\right\|<\varepsilon$$

Alors, pour $y\in B(y_0,r)$, on a $\left\|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)-T\right\|<\varepsilon$, et en appliquant le théorème 9.5.1 à la fonction $y\mapsto f(x_0,y)-T.y$, on obtient l'inégalité

$$\|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)-T.(y-y_0)\|\leq\varepsilon\,\|y-y_0\|$$

Et, de même, pour $x\in B(x_0,r)$, on a $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-S\right\|<\varepsilon$, donc, en appliquant le théorème 9.5.1 à la fonction $x\mapsto f(x,y)-S.x$,

$$\|f(x,y)-f(x_0,y)-S.(x-x_0)\|\leq\varepsilon\,\|x-x_0\|$$

Il en résulte que si $(x, y) \in W$, on a

$$\begin{aligned}
&\|f(x,y) - f(x_0,y_0) - S.(x-x_0) - T.(y-y_0)\| \\
&\qquad \le \|f(x,y) - f(x_0,y) - S.(x-x_0)\| + \|f(x_0,y) - f(x_0,y_0) - T.(y-y_0)\| \\
&\qquad \le \varepsilon \|x - x_0\| + \varepsilon \|y - y_0\| = \varepsilon \|(x,y) - (x_0,y_0)\|
\end{aligned}$$

ce qui montre que $f$ est différentiable en $(x_0, y_0)$ et que la différentielle de $f$ en $(x_0, y_0)$ est l'application linéaire de $E_1 \times E_2$ dans $F$ définie par

$$f'(x_0,y_0) : (u,v) \mapsto S.u + T.v = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).v$$

Comme $(x_0, y_0)$ est arbitraire dans $U$, on conclut que $f$ est différentiable sur $U$ et puisque

$$\begin{aligned}
&\|(f'(x,y) - f'(x_0,y_0)).(u,v)\| \\
&\qquad \le \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right\| \|u\| + \left\|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right\| \|v\| \\
&\qquad \le \max\left(\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right\|, \left\|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right\|\right) \|(u,v)\|
\end{aligned}$$

on voit que

$$\|f'(x,y) - f'(x_0,y_0)\| \le \max\left(\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right\|, \left\|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right\|\right)$$

d'où l'on déduit la continuité de $f'$. Et ceci achève de prouver que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$. ■

## 9.9 Applications bilinéaires continues.

**Théorème 9.9.1.** *Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces de Banach, et $\varphi$ une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans $G$. Alors, $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et la différentielle de $\varphi$ en $(x, y)$ est l'application linéaire :*

$$\varphi'(x,y) : (u,v) \mapsto \varphi(x,v) + \varphi(u,y)$$

Démonstration : Pour $y$ fixé dans $F$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire et continue, donc de classe $\mathscr{C}^1$ et de différentielle constante : $u \mapsto \varphi(u, y)$ en vertu du théorème 9.2.9. La fonction $\varphi$ possède donc en tout point $(x, y)$ de $E \times F$ une différentielle partielle $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \in \mathscr{L}(E, G)$. De plus, cette différentielle partielle est continue de $E \times F$ dans $\mathscr{L}(E, G)$ : en effet, si $u \in E$, on a

$$\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x',y').u - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y).u\right\| = \|\varphi(u,y') - \varphi(u,y)\| = \|\varphi(u,y'-y)\| \le \|\varphi\| \|u\| \|y'-y\|$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x',y')-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\right\| &= \sup_{\|u\|\leq 1}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x',y').u-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y).u\right\| \\ &\leq \|\varphi\|\,\|y'-y\| \leq \|\varphi\|\,\|(x',y')-(x,y)\|\end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ est lipschitzienne de $E\times F$ dans $\mathscr{L}(E,G)$.
On voit de même que $\varphi$ possède en tout point une différentielle partielle par rapport à $y$, que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$ est l'application $v\mapsto\varphi(x,v)$, et que cette différentielle partielle est continue de $E\times F$ dans $\mathscr{L}(F,G)$. Il résulte alors du théorème 9.8.5 que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $E\times F$ et que

$$\varphi'(x,y).(u,v)=\varphi(u,y)+\varphi(x,v)$$

■

## 9.10 Fonctions définies sur un espace de dimension finie.

On suppose dans cette section que l'espace $E$ est de dimension finie, donc canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}^n$, quand on a choisi une base. En vertu de la remarque 9.2.2, on peut même, si on le souhaite, supposer que $E$ est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

**Définition 9.10.1.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une fonction de $U$ dans un espace de Banach $E$. On dit que $f$ possède au point $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ une dérivée partielle par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable si la fonction*

$$x\mapsto f(a_1,a_2,\dots,a_{j-1},x,a_{j+1},\dots,a_n)$$

*définie sur un voisinage de $a_j$ dans $\mathbb{R}$ y possède une dérivée. On appelle alors* dérivée partielle *de $f$ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable cette dérivée, et on la note $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ .*

**Théorème 9.10.2.** *Si $f$ est différentiable en un point $a$ de l'ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$, elle y admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable.*
*Et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)=f'(a).e_j$.*

Démonstration : Soit $j\in\{1,2,\dots,n\}$. On identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ par

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)\mapsto\big((x_1,x_2,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n),x_j\big)$$

Il résulte alors du théorème 9.8.1 que la fonction d'une variable réelle définie au voisinage de $a_j$ : $\psi_j : t\mapsto f(a_1,a_2,\dots,a_{j-1},t,a_{j+1},\dots,a_n)$ est différentiable en $a_j$, c'est-à-dire dérivable, et ceci montre l'existence de la dérivée partielle de $f$ en $a$ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable.
Enfin, la différentielle de $\psi_j$ est la composée de $f'(a)$ et de la différentielle de l'application affine $t\mapsto(a_1,a_2,\dots,a_{j-1},t,a_{j+1},\dots,a_n)$, c'est-à-dire l'application linéaire $\lambda\mapsto\lambda.f'(a).e_j$, d'où le résultat annoncé. ■

**Corollaire 9.10.3.** *Si $f$ est différentiable en un point $a$ de l'ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$, on a, pour tout vecteur $u$ de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ :*

$$f'(a).u = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

DÉMONSTRATION : Puisque $u = \sum_{j=1}^{n} u_j e_j$, on a

$$f'(a).u = \sum_{j=1}^{n} u_j f'(a).e_j = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Dans la plupart des cas, on démontre la différentiabilité d'une fonction au moyen du théorème suivant, qui assure même que la fonction est continuement différentiable.

**Théorème 9.10.4.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $U$ dans un espace de Banach $F$. Si, en chaque point de $U$, la fonction $f$ admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable et si ces dérivées partielles sont des fonctions continues de $U$ dans $F$, alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$.*
*De plus, la différentielle de $f$ en $a$ est l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $F$ définie par*

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} u_j . \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

DÉMONSTRATION : On va démontrer ce résultat par récurrence sur $n$. Si $n = 1$, ceci résulte du théorème 9.2.8 : $f$ est différentiable en tout point de $U$, et la différentielle de $f$ en $x$ est l'application $f'(x) : \lambda \mapsto \lambda.\dfrac{df}{dx}(x)$, d'où on déduit que

$$\|f'(x) - f'(x_0)\| = \left\| \frac{df}{dx}(x) - \frac{df}{dx}(x_0) \right\| \to 0$$

quand $x$ tend vers $x_0$, ce qui traduit la continuité de l'application $f' : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}, F)$.
Si l'énoncé est vrai pour $p \leq n$, et si $U \subset R^{n+1}$, on identifie $\mathbb{R}^{n+1}$ à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.
L'hypothèse de récurrence montre alors que, pour $x^* \in \mathbb{R}^n$ et $t^* \in \mathbb{R}$, les fonctions $f^{x^*} : U^{x^*} = \{t : (x^*, t) \in U\} \to F$ et $f_{t^*} : U_{t^*} = \{x : (x, t^*) \in U\} \to F$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. Et puisque les dérivées partielles de $f$ sont continues sur $U$, on voit aisément que les différentielles partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, F)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t} : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}, F)$ sont continues. Il résulte alors du théorème 9.8.5 que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$. ∎

## 9.11 Matrice jacobienne

On suppose maintenant que $E$ et $F$ sont de dimensions finies $n$ et $p$ respectivement, et qu'on a choisi des bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ pour $E$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ pour $F$. On identifiera donc $E$ à $\mathbb{R}^n$ et $f$ à $\mathbb{R}^p$.
Si $U$ est un ouvert de $E$, et $f$ une fonction de $U$ dans $F$ différentiable en un point $x_0$, l'application linéaire $f'(x_0)$ appartient à $\mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Il existe donc une matrice à $p$ lignes et $n$ colonnes qui représente cette application linéaire.

**Définition 9.11.1.** *Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $U$ dans $\mathbb{R}^p$, différentiable en $x_0 \in U$ on appelle* matrice jacobienne *de $f$ en $x_0$ la matrice de l'application linéaire $f'(x_0)$.*

On notera le plus souvent $J_f(x_0)$ cette matrice jacobienne.

**Théorème 9.11.2.** *Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $U$ dans $\mathbb{R}^p$, différentiable en $x_0 \in U$, et si $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ sont les fonctions coordonnées de $f$, la matrice jacobienne de $f$ en $x_0$ s'écrit :*

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

DÉMONSTRATION : Il résulte de ce qui précède que la dérivée partielle de $f$ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable en $x_0$ vaut $f'(x_0).e_j$, dont les coordonnées sont les $(f_i'(x_0).e_j)_{1 \leq i \leq p}$. Et puisque la matrice jacobienne de $f$ en $x_0$ a pour termes les $(f_i'(x_0).e_j)_{i \leq p, j \leq n}$, on voit que le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de $J_f(x_0)$ vaut $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$. ■

**Théorème 9.11.3.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f$ une application de $U$ dans $\mathbb{R}^p$ et $g$ une application de $V$ dans $\mathbb{R}^q$. Si $f(U) \subset V$, si $f$ est différentiable en $x_0$ et $g$ en $y_0 = f(x_0)$, on a*

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(y_0).J_f(x_0)$$

DÉMONSTRATION : Ceci résulte immédiatement du théorème 9.3.3 puisque la matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit des matrices de ces deux applications linéaires. ■

**Définition 9.11.4.** *Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $U$ dans $\mathbb{R}^n$, différentiable en $x_0 \in U$, on appelle* déterminant jacobien *de $f$ en $x_0$ le déterminant de l'application linéaire $f'(x_0)$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice jacobienne de $f$ en $x_0$.*

**Notation 9.11.5.** *Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $U$ dans $\mathbb{R}^n$, différentiable en $x_0 \in U$, de fonctions coordonnées $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, le déterminant jacobien de $f$ sera noté le plus souvent $|J_f|(x_0)$ ou $D_f(x_0)$ ou*

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

**Théorème 9.11.6.** *Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $f$ une application de $U$ dans $\mathbb{R}^n$ et $g$ une application de $V$ dans $\mathbb{R}^n$. Si $f(U) \subset V$, si $f$ est différentiable en $x_0$ et $g$ en $y_0 = f(x_0)$, le déterminant jacobien de $g \circ f$ en $x_0$ est le produit du déterminant jacobien de $f$ en $x_0$ et de celui de $g$ en $y_0$.*

DÉMONSTRATION : Ceci résulte du théorème 9.11.3 et du fait que le déterminant du produit de deux matrices est le produit des déterminants de ces matrices. ■

# 10

# DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

## 10.1 Différentielle seconde

Si $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert $U$ de l'espace de Banach $E$ à valeurs dans l'espace de Banach $F$, la différentielle de $f$ est une application continue de $U$ dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(E, F)$. On peut alors étudier la différentiabilité de l'application $f' : U \to \mathscr{L}(E, F)$.
En particulier, si $E$ et $F$ sont de dimensions finies respectives $n$ et $p$, $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie $np$.

**Définition 10.1.1.** *On dit que la fonction $f : U \to F$ est* de classe *$\mathscr{C}^2$ si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et si la différentielle est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathscr{L}(E, F)$.*

Comme il n'est pas très commode de considérer des applications à valeurs dans un espace d'applications, on utilise habituellement, à la place de $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}(E, F))$, un espace qui lui est isométrique. On notera $\mathscr{L}_2(E; F)$ l'espace des applications bilinéaires de $E$ dans $F$, que nous avons noté $\mathscr{L}(E, E; F)$ dans la section 6.5, muni de la norme

$$\|T\| = \sup\{\|T(x, y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$$

pour laquelle il est complet.
Si $S$ est une application linéaire de $E$ dans $\mathscr{L}(E, F)$, on vérifie que l'application

$$T : (x, y) \mapsto (S.x)(y)$$

est bilinéaire continue de $E$ dans $F$, que

$$\|T\| = \sup\{\|(S.x)(y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} = \sup_{\|x\|\leq 1}\left(\sup_{\|y\|\leq 1} \|(S.x)(y)\|\right) = \sup_{\|x\|\leq 1} \|S.x\| = \|S\|$$

et que, inversement, si $T \in \mathscr{L}_2(E; F)$, l'application $S : x \mapsto T(x, .)$ prend ses valeurs dans $\mathscr{L}(E, F)$ et est linéaire.
Il en résulte que les espaces $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}(E, F))$ et $\mathscr{L}_2(E; F)$ sont isométriques, et on identifiera toute application linéaire continue de $E$ dans $\mathscr{L}(E, F)$ à une application bilinéaire continue de $E$ dans $F$.

**Définition 10.1.2.** *Si $f$ est une application de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert $U$ de $E$ et à valeurs dans $F$, on appellera* différentielle seconde *de $f$ en un point $x_0$ l'élément $f''(x_0)$ de $\mathscr{L}_2(E;F)$ qui est la différentielle en $x_0$ de $f' : U \to \mathscr{L}(E,F)$.*

**Remarque 10.1.3.** On a donc, pour $x$ voisin de $x_0$ et $h$ fixé dans $E$,

$$f'(x) = f'(x_0) + (f')'(x_0).(x - x_0) + o(x - x_0)$$

d'où

$$f'(x).h = f'(x_0).h + f''(x_0).(x - x_0, h) + o(x - x_0)$$

Il en résulte que la fonction $g : x \mapsto f'(x).h$ vérifie

$$g'(x).k = f''(x)(k,h)$$

En répétant ce qui a été fait ci-dessus, on peut définir par récurrence, pour tout entier $n \geq 2$, les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ d'un ouvert $U$ de $E$ à valeurs dans $F$ comme les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $F$ dont la différentielle est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ de $U$ dans $\mathscr{L}(E,F)$. Et on définit alors la différentielle d'ordre $n$ de $f$ en un point $a$ comme une application $n$-linéaire de $E$ dans $F$. Néanmoins, nous ne ferons pas, dans la suite de ce cours, d'étude plus approfondie des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$.

## 10.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

**Théorème 10.2.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $f$ et $g$ deux fonctions de $U$ dans $F$. Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U$, il en est de même de $f+g$. Et on a, pour tout $x$ de $U$,*

$$(f+g)''(x) = f''(x) + g''(x)$$

Démonstration : Par définition, les fonctions $f'$ et $g'$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathscr{L}(E,F)$. Leur somme est donc de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathscr{L}(E,F)$, de différentielle $f'' + g''$. Et puisque $f' + g'$ est la différentielle de $f+g$, on obtient le résultat cherché. ∎

**Théorème 10.2.2.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $f$ une fonction de $U$ dans $\mathbb{R}$ et $g$ une fonction de $U$ dans $F$. Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U$, il en est de même de $f.g$.*

Démonstration : Puisque $f'$ et $g'$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ et $\mathscr{L}(E,F)$ respectivement, la fonction $\varphi$ de $U$ dans $\mathscr{L}(E,F)$ définie par

$$\varphi(x).h = (f'(x).h).g(x) + f(x).(g'(x).h)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$. Et puisque $\varphi$ est la différentielle de $f.g$, on en conclut que $f.g$ est de classe $\mathscr{C}^2$. ∎

**Théorème 10.2.3.** *Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$ et $V$ un ouvert de $F$, $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans $F$ et $g$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $V$ à valeurs dans $G$. Si $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^2$.*

DÉMONSTRATION : On a

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$$

L'application $\gamma : (S,T) \mapsto T \circ S$ de $\mathscr{L}(E,F) \times \mathscr{L}(F,G)$ dans $\mathscr{L}(E;G)$ est bilinéaire et continue. Il résulte alors du théorème 9.9.1 que $\gamma$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Puisque $f$, $f'$ et $g'$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$, on en déduit que $g' \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ puis que l'application $(g \circ f)' : x \mapsto \gamma(f'(x), g' \circ f(x))$ est de classe $\mathscr{C}^1$, ce qui signifie que $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^2$. ■

## 10.3 Dérivées partielles secondes

On suppose dans cette section que $E$ est de dimension finie $n$, et qu'on a choisi une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $E$, donc que $E$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans un espace de Banach $F$, la différentielle $f'$ est de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathscr{L}(E,F)$, et les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f'(x).e_j$ sont des applications de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $F$. Elles possèdent donc elles-mêmes des dérivées partielles par rapport à chaque variable, qui sont des fonctions continues de $U$ dans $F$.

**Notation 10.3.1.** *On désignera par $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}$ la dérivée partielle par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable de $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$. Et dans le cas où $j = k$, cette dérivée partielle sera notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$.*

On a démontré qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si elle possède des dérivées partielles en tout point et si ces dérivées partielles sont continues. Dans le cas du second ordre, on a une condition analogue.

**Théorème 10.3.2.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une fonction de $U$ dans un espace de Banach $F$. Si, en chaque point de $U$, $f$ possède des dérivées partielles premières et secondes continues, alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$.*

DÉMONSTRATION : Pour chaque $j$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ possède, par hypothèse, des dérivées partielles continues $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\, \partial x_j}$ pour tout $k$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ pour tout $j$. Alors, pour $x \in U$, la différentielle de $f$ en $x$ est l'application linéaire

$$(h_1, h_2, \ldots, h_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j . \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

si $\pi_j$ est la $j^{\text{ème}}$ forme linéaire coordonnée. On voit donc que $f'$ est de classe $\mathscr{C}^1$, c'est-à-dire que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$. ∎

**Proposition 10.3.3.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans un espace de Banach $F$. Si $x$ est un point de $U$, $u$ et $v$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées respectives $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, on a*

$$f''(x)(u,v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_j v_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(x)$$

DÉMONSTRATION : On a vu, par la remarque 10.1.3, que si l'on pose $g(x) = f'(x).v$, on a $f''(x).(u,v) = g'(x).u$. Alors, par le corollaire 9.10.3,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

d'où l'on déduit que

$$f''(x).(u,v) = g'(x).u = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_j v_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(x)$$

ce qui est le résultat cherché. ∎

## 10.4 Le théorème de symétrie de Schwarz

**Lemme 10.4.1.** *Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un voisinage ouvert $U$ de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans un espace de Banach $F$. On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ possède en tout point de $U$ une dérivée partielle par rapport à $y$, et que cette dernière est continue en $(0,0)$. Alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ possède en $(0,0)$ une dérivée partielle par rapport à $x$ et on a*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$$

DÉMONSTRATION : Par définition, la différentielle $f'$ de $f$ est continue. Si $(e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'(x,y).e_1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'(x,y).e_2$. Donc les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues de $U$ dans $F$. Notons $\alpha$ le vecteur de $F$ défini par $\alpha = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$, et $f^*$ la fonction de $U$ dans $F$ définie par $f^*(x,y) = f(x,y) - xy\alpha$. Alors $f^*$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a $\dfrac{\partial f^*}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \alpha y$, donc $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f^*}{\partial x}\right)(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) - \alpha$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe, puisque $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f^*}{\partial x}\right)$ est continue et nulle en $(0,0)$, un $r > 0$ tel que

$$|x| < r \text{ et } |y| < r \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (x,y) \in U \\ \left\| \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f^*}{\partial x}\right)(x,y) - \alpha \right\| < \varepsilon \end{cases}$$

Choisissons alors $x_0$ et $y_0$ dans $]-r,r[$. On considère la quantité

$$\Delta = f^*(x_0,y_0) + f^*(0,0) - f^*(x_0,0) - f^*(0,y_0)$$

Si $g$ désigne la fonction de $]-r,r[$ dans $F$ définie par

$$g(x) = f^*(x,y_0) - f^*(x,0),$$

il est clair que $\Delta = g(x_0) - g(0)$, et on déduit du théorème des accroissements finis (théorème 8.6.2), appliqué à la fonction $g$ que

$$\|\Delta\| \leq |x_0| \,.\, \sup_{|x|<|x_0|} \|g'(x)\|$$

Par ailleurs, on a

$$g'(x) = \frac{\partial f^*}{\partial x}(x,y_0) - \frac{\partial f^*}{\partial x}(x,0)$$

et une nouvelle application du théorème des accroissements finis (théorème 8.6.2) à la fonction $h : y \mapsto \dfrac{\partial f^*}{\partial x}(x,y)$ donne

$$\|g'(x)\| = \|h(y_0) - h(0)\| \leq |y_0| \,.\, \sup_{|y|<|y_0|} \|h'(y)\|$$

et puisque $h'(y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) - \alpha$, on obtient $\|h'(y)\| < \varepsilon$, donc $\|g'(x)\| \leq \varepsilon\,|y_0|$ et finalement

$$\|\Delta\| \leq \varepsilon\,|x_0 y_0|$$

Si on considère maintenant la fonction $\ell$ définie sur $]-r,r[$ par $\ell(y) = f^*(x_0,y) - f^*(0,y)$, on a encore $\Delta = \ell(y_0) - \ell(0)$, donc

$$\|\ell(y_0) - \ell(0)\| = \|\Delta\| \leq \varepsilon\,|x_0 y_0|$$

pour $-r < x_0 < r$ et $-r < y_0 < r$. Pour tout $x_0$ fixé, la fonction $\ell$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-r,r[$, et

$$\ell'(y) = \frac{\partial f^*}{\partial y}(x_0,y) - \frac{\partial f^*}{\partial y}(0,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \alpha x_0$$

donc

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) - \alpha x_0 \right\| = \|\ell'(0)\| = \lim_{y_0 \to 0} \left\| \frac{\ell(y_0) - \ell(0)}{y_0} \right\| \leq \varepsilon\,|x_0|$$

Et comme $\varepsilon$ est arbitraire, on en conclut que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) - \alpha x = o(x)$, c'est-à-dire que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ possède en $(0,0)$ une dérivée partielle par rapport à $x$ égale à $\alpha$. ∎

**Corollaire 10.4.2.** *Soient $U$ un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et $f$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans un espace de Banach $F$. Alors les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $F$ et on a*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$$

**Corollaire 10.4.3.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans un espace de Banach $F$. Alors, pour tout $a \in U$ on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_j}(a)$$

Démonstration : Désignons par $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $g$ la fonction définie au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$g(s,t) = f(a + se_j + te_k)$$

Il est clair que

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + se_j + te_k) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a + se_j + te_k)$$

donc que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_j}(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k j}(a)$$

et le résultat cherché découle immédiatement du corollaire précédent. ■

**Définition 10.4.4.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $a \in U$, on appelle* matrice hessienne *de $f$ en $a$ la matrice des dérivées partielles secondes de $f$ en $a$ :*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^n}(a) \end{pmatrix}$$

Il résulte de ce qui précède que la matrice hessienne de $f$ en $a$ est symétrique. L'énoncé suivant donne le lien entre la différentielle seconde et la matrice hessienne.

**Théorème 10.4.5.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. Si $H$ est la matrice hessienne de $f$ en $a$, on a pour tout $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et tout $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$,*

$$f''(a).(u,v) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Démonstration : C'est l'expression matricielle de la Proposition 10.3.3. ■

**Théorème 10.4.6.** (Schwarz) *Soient $U$ un ouvert de l'espace de Banach $E$ et $f$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans un espace de Banach $F$. Alors, pour tout $a$ de $U$, l'application bilinéaire $f''(a)$ est symétrique, c'est-à-dire que, pour $h$ et $k$ dans $E$ on a*

$$f''(a).(h,k) = f''(a).(k,h)$$

Démonstration : L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $E$ définie par

$$\varphi : (x,y) \mapsto a + x.h + y.k$$

est affine et continue. et $V = \varphi^{-1}(U)$ est un ouvert qui contient $(0,0)$. Il en résulte que $g = f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un voisinage ouvert $V$ de $(0,0)$. Alors, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f'(a + x.h + y.k).h \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f'(a + x.h + y.k).k$$

donc, d'après la remarque 10.1.3,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(x,y) = f''(a + x.h + y.k).(h,k)$$

et de même, en intervertissant $x$ et $y$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x,y) = f''(a + x.h + y.k).(k,h)$$

Il résulte alors du corollaire 10.4.2, appliqué à $g$, que $f''(a).(h,k) = f''(a).(k,h)$. ■

## 10.5 Formule de Taylor

On va maintenant donner l'équivalent, pour les fonctions définies sur un ouvert d'un espace de Banach, des formules de Taylor qu'on a données aux théorèmes 8.8.1 et 8.8.2. Par souci de simplicité, nous nous restreindrons à l'ordre 2, puisque nous n'aurons pas besoin, par la suite, de l'utiliser à un ordre supérieur.

**Théorème 10.5.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert convexe de $E$, $a$ et $b$ deux points de $U$. On a alors*

$$\left\| f(b) - \big(f(a) + f'(a).(b-a)\big) \right\| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in U} \| f''(x).(b-a, b-a) \|$$

Démonstration : Posons $h = b - a$. Alors, on peut définir une fonction $g$ d'une variable réelle par $g(t) = f(a + t.h)$ sur l'intervalle ouvert $J = \{t : a + t.h \in U\}$ qui contient $[0,1]$. Puisque l'application $t \mapsto a + t.h$ est affine, donc de classe $\mathscr{C}^2$ de $J$ dans $E$, la fonction $g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ de $J$ dans $F$, et on peut appliquer le théorème 8.8.1, ce qui donne

$$\|g(1) - g(0) - g'(0)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|g''(t)\|$$

Et le calcul des dérivées de $g$ donne (voir la remarque 10.1.3)

$$g'(t) = f'(a + t.h).h$$
$$g''(t) = f''(a + t.h).(h,h)$$

d'où découle le résultat annoncé, puisque $a + th \in U$ pour $0 < t < 1$. ■

**Théorème 10.5.2.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $a$ un point de $U$. On a alors*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \frac{1}{2}f''(a).(h,h) + o(\|h\|^2)$$

*quand $h$ tend vers* 0.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de $f''$, il existe un $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$ et que $\|f''(x) - f''(a)\| < \varepsilon$ pour $x \in B(a,r)$. Si $\varphi$ désigne la fonction de $U$ dans $F$ définie par

$$\varphi(x) = f(x) - f'(a).(x-a) - \frac{1}{2}f''(a).(x-a, x-a)$$

on voit aisément que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^2$, que

$$\begin{aligned}\varphi'(x).h &= f'(x).h - f'(a).h - \frac{1}{2}f''(a).(h,(x-a)) - \frac{1}{2}f''(a).(x-a,h)\\ &= f'(x).h - f'(a).h - f''(a).(h, x-a)\end{aligned}$$

d'après le théorème de symétrie de Schwarz, et enfin que

$$\varphi''(x).(h,k) = f''(x).(h,k) - f''(a).(h,k)$$

d'où $\|\varphi''(x)\| = \|f''(x) - f''(a)\| \leq \varepsilon$ pour $x \in B(a,r)$.
On déduit alors du théorème 10.5.1 que, pour $\|h\| < r$,

$$\|\varphi(a+h) - \varphi(a) - \varphi'(a).h\| \leq \frac{1}{2}\sup_{x\in B(a,r)} \|\varphi''(x).(h,h)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|h\|^2$$

et puisque $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi'(a) = 0$, on a

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) - \varphi'(a).h = f(a+h) - f'(a).h - \frac{1}{2}f''(a)(h,h) - f(a)$$

donc

$$\left\| f(a+h) - f(a) - f'(a).h - \frac{1}{2}f''(a)(h,h)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|h\|^2$$

c'est à dire $f(a+h) - f(a) - f'(a).h - \dfrac{1}{2}f''(a)(h,h) = o(\|h\|^2)$. ■

## 10.6 Fonctions convexes

Rappelons qu'une fonction $f$ à valeurs réelles définie sur une partie convexe $C$ d'un espace vectoriel est dite convexe si, pour tout point $a$ et tout point $b$ de $C$, et tout $t \in [0,1]$, on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Il est aisé de vérifier que ceci est équivalent à la convexité du surgraphe de $f$ c'est-à-dire de l'ensemble

$$E_f = \{(x,t) \in C \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\}$$

**Lemme 10.6.1.** *Une fonction $f$ définie sur un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si, pour toute fonction affine $\ell : J \to \mathbb{R}$, qui coïncide avec $f$ en deux points $x$ et $y$, on a $f \leq \ell$ sur l'intervalle d'extrémités $x$ et $y$.*

Démonstration : Si $f$ est convexe, il en est de même de $f - \ell$ ; et il résulte immédiatement de la définition d'une fonction convexe que $\{t : g(t) \leq 0\}$ est un intervalle si $g$ est convexe. Donc $[x,y] \subset \{t : f(t) - \ell(t) \leq 0\}$.
Inversement, si $x$ et $y$ appartiennent à $J$ et si $\ell$ est la fonction affine qui coïncide avec $f$ en $x$ et en $y$, l'ensemble $\{z : f(z) \leq \ell(z)\}$ contient $[x,y]$. Et si $z = tx + (1-t)y$ pour $0 \leq t \leq 1$, il appartient à l'intervalle d'extrémités $x$ et $y$ : on a donc alors $f(z) \leq \ell(z)$. Et puisque $\ell(z) = t\ell(x) + (1-t)\ell(y) = tf(x) + (1-t)f(y)$, on obtient l'inégalité qui prouve la convexité de $f$. ■

**Théorème 10.6.2.** *Soient $U$ un ouvert convexe d'un espace de Banach, $f$ et $g$ deux fonctions convexes de $U$ dans $\mathbb{R}$, $\lambda$ un réel positif. Alors $f+g$, $\sup(f,g)$ et $\lambda f$ sont convexes. De plus, si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et convexe, $\varphi \circ f$ est convexe.*

Démonstration : On a, pour $x$ et $y$ dans $U$ et $t \in [0,1]$ ,

$$\begin{aligned}(f+g)(tx+(1-t)y) &\leq \Big(tf(x) + (1-t)f(y)\Big) + \Big(tg(x) + (1-t)g(y)\Big) \\ &\leq t(f+g)(x) + (1-t)(f+g)(y)\end{aligned}$$

$$(\lambda f)(tx + (1-t)y) \leq t.\lambda f(x) + (1-t)\lambda f(y)$$

Et si on désigne par $h$ la fonction $\sup(f,g)$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq th(x) + (1-t)h(y)$$

et

$$g(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq th(x) + (1-t)h(y)$$

donc

$$h(tx + (1-t)y) = \sup(f(tx + (1-t)y), g(tx + (1-t)y) \leq th(x) + (1-t)h(y)$$

Enfin,

$$\varphi\big(f(tx + (1-t)y)\big) \leq \varphi\big(tf(x) + (1-t)f(y)\big) \leq t\varphi \circ f(x) + (1-t)\varphi \circ f(y)$$

ce qui achève la démonstration. ■

**Lemme 10.6.3.** *Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]a,b[$, nulle en $a$ et $b$. Alors, pour tout $x \in ]a,b[$, il existe $c \in ]a,b[$ tel que*

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-a)(b-x)f''(c)$$

Démonstration : On considère la fonction $g$ définie sur $[a,b]$ par

$$g(t) = f(t) - \frac{f(x)}{(x-a)(b-x)}(t-a)(b-t)$$

La fonction $g$ est continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]a,b[$. De plus, elle s'annule en $a$, en $x$ et en $b$. On déduit alors du théorème de Rolle (théorème 8.3.2) qu'existent $x'$ et $y'$ tels que $a < x' < x < y' < b$ et que $g'(x') = g'(y') = 0$. Une nouvelle application du théorème de Rolle donne l'existence d'un $c$ tel que $x' < c < y'$ et $g''(c) = 0$. et puisque

$$0 = g''(c) = f''(c) + 2\frac{f(x)}{(x-a)(b-x)}$$

on obtient le résultat cherché. ■

**Théorème 10.6.4.** *Soient $J$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $J$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f'$ soit dérivable sur $J$. Alors $f$ est convexe si et seulement si $f''$ est positive sur $J$.*

Démonstration : Supposons d'abord que $f''$ soit positive sur $J$. Si $\ell$ est une fonction affine, qui coïncide avec $f$ en $x$ et $y$, il existe, pour $x < z < y$, d'après le lemme 10.6.3 un $c$ tel que

$$f(z) - \ell(z) = -\frac{1}{2}(z-x)(y-z)(f-\ell)''(c) = -\frac{1}{2}(z-x)(y-z)f''(c) \leq 0$$

Donc $f(z) \leq \ell(z)$ pour $x < z < y$.
Inversement, si $f$ est convexe, il existe pour tout $x$ de $J$ un $\delta > 0$ tel que $]x-\delta, x+\delta[ \subset J$. Et si on définit la fonction $g$ sur $]-\delta,\delta[$ par $g(h) = f(x+h) + f(x-h)$, la fonction $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie, si $0 < h < \delta$ :

$$g(h) - g(0) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0$$

puisque $f$ est convexe. Par la formule des accroissements finis (théorème 8.4.1), on trouve un $c_h \in ]0,h[$ tel que $g(h) - g(0) = hg'(c_h)$, d'où

$$g(h) - g(0) = h\big(f'(x+c_h) - f'(x-c_h)\big) = hc_h\left(\frac{f'(x+c_h)-f'(x)}{c_h} + \frac{f'(x-c_h)-f'(x)}{-c_h}\right)$$

donc

$$f''(x) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+c_h)-f'(x)}{c_h} + \frac{f'(x-c_h)-f'(x)}{-c_h}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{2hc_h} \geq 0$$

■

**Théorème 10.6.5.** *Si $U$ est un ouvert convexe d'un espace de Banach $E$, et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $f$ est convexe si et seulement si $f''(x).(h,h) \geq 0$ pour tout $x$ de $U$ et tout $h$ de $E$.*

Démonstration : Si $f$ est convexe de $U$ dans $\mathbb{R}$, $a \in U$ et $h \in E$, la fonction $g = t \mapsto f(a+th)$ est convexe sur l'intervalle ouvert $J = \{t : a+th \in U\}$, qui contient 0. Et puisque $g''(0) = f''(a).(h,h)$, on obtient $f''(a).(h,h) \geq 0$.
Inversement, si $f''(x).(h,h) \geq 0$ pour $x \in U$ et $h \in E$, on pose, pour $x$ et $y$ dans $U$ et $t \in [0;1]$, $\varphi(t) = f(tx + (1-t)y)$. On a alors $\varphi''(t) = f''(tx + (1-t)y).((y-x),(y-x)) \geq 0$, ce qui montre que $\varphi$ est convexe, et puisque l'on a, pour $0 \leq t \leq 1$, $\varphi(t) \leq t\varphi(0) + (1-t)\varphi(1) = tf(x) + (1-t)f(y)$, on voit que $f$ est convexe. ■

**Corollaire 10.6.6.** *Si $U$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $f$ est convexe si et seulement si la matrice hessienne $H_f(x)$ de $f$ est positive en chaque point $x$ de $U$ .*

Démonstration : Ceci résulte immédiatement du théorème précédent, compte tenu du théorème 10.4.5. ■

# 11

# FONCTIONS IMPLICITES ET INVERSION LOCALE

## 11.1 Difféomorphismes

**Définition 11.1.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$ et $F$ un ouvert de $F$. Une fonction $f : U \to V$ est appelée* difféomorphisme *de $U$ sur $V$ si elle est bijective de $U$ sur $V$, de classe $\mathscr{C}^1$ et si $f^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ de $V$ sur $U$.*

Puisque toute application de classe $\mathscr{C}^1$ est continue, il est clair qu'un difféomorphisme est toujours un homéomorphisme. De plus, si on note $g = f^{-1}$, si $a \in U$ et $b = f(a)$, on a, d'après le théorème 9.3.3,

$$g'(b) \circ f'(a) = Id_E \qquad \text{et} \qquad f'(a) \circ g'(b) = Id_F$$

Il en résulte que, en chaque point de $U$, la différentielle de $f$ est un isomorphisme linéaire de $E$ sur $F$.
En particulier, les espaces $E$ et $F$ sont isomorphes. Et de façon encore plus précise, si $E$ est de dimension finie $n$, il en est de même de $F$.

Contrairement à ce qui se produit en dimension 1, où une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle est nécessairement strictement monotone, donc injective dès que la dérivée est partout non nulle, il ne suffit pas, en général, que la différentielle d'une fonction $f : U \to F$ de classe $\mathscr{C}^1$ soit en chaque point un isomorphisme de $E$ sur $F$ pour que $f$ soit injective.

**Exemple 11.1.2.** *La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$f(x, y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y)$$

*est de classe $\mathscr{C}^1$ et possède en chaque point une différentielle inversible, mais n'est pas injective.*

Démonstration : La matrice jacobienne de $f$ est

$$J_f = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y & -\mathrm{e}^x \sin y \\ \mathrm{e}^x \sin y & \mathrm{e}^x \cos y \end{pmatrix}$$

dont les termes sont tous continus. Donc $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, le déterminant de $J_f$ vaut

$$D_f = \mathrm{e}^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = \mathrm{e}^{2x} > 0$$

ce qui montre que $f'(x,y)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ pour tout $(x,y)$. Et puisque $f(0,2\pi) = f(0,0)$, $f$ n'est pas injective. ■

Néanmoins, on peut prouver un résultat un peu plus faible.

**Théorème 11.1.3.** *(Théorème d'inversion locale) Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $f$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $F$ et $a$ un point de $U$. Si $f'(a)$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$, il existe un voisinage ouvert $U'$ de $a$ tel que $V' = f(U')$ soit ouvert dans $F$ et que la restriction de $f$ à $U'$ soit un difféomorphisme de $U'$ sur $V'$.*

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathscr{L}(F,E)$ l'inverse de $f'(a)$. Alors l'application $g$ définie sur $U$ et à valeurs dans $E$ par $g(x) = \varphi\circ f(x) - x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie

$$g'(x) = \varphi\circ f'(x) - Id_E$$

donc, en particulier, $g'a) = 0$. Et puisque $g'$ est continue, il existe un $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$ et que $\|g'(x)\| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in B(a,r)$. Il résulte alors du théorème des accroissements finis que

$$\|g(x) - g(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

pour tous $x$ et $x'$ de $B(a,r)$. Alors, sur $B(a,r)$, $\varphi\circ f$ est la somme de l'identité et de la fonction $\frac{1}{2}$-lipschitzienne $g$. On conclut, par le théorème 6.6.1, que $\varphi\circ f$ est un homéomorphisme de $B(a,r)$ sur un ouvert $W$ de $E$, donc que $f = \varphi^{-1}\circ(\varphi\circ f)$ est un homéomorphisme de $U' = B(a,r)$ sur l'ouvert $V' = \varphi^{-1}(W) = f'(a)(W)$ de $F$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe, par continuité de $g'$, un $\rho < r$ tel que $\|g'(x)\| < \varepsilon$ pour tout $x$ de $B(a,\rho)$. Alors, comme précédemment, il résulte du théorème des accroissements finis que $g$ est $\varepsilon$-lipschitzienne sur $B(a,\rho)$ et le théorème 6.6.1 entraîne que $(\varphi\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ\varphi^{-1}$ est, sur le voisinage ouvert $W_\rho = \varphi\circ f(B(a,\rho))$ du point $b = \varphi\circ f(a)$, la somme de l'identité et d'une fonction $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$-lipschitzienne, c'est-à-dire, en particulier, que, pour $y \in W_\rho$,

$$\left\|(\varphi\circ f)^{-1}(y) - (y+a)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|y - b\|$$

d'où l'on déduit que $(\varphi\circ f)^{-1}$ est différentiable en $b$, de différentielle $Id_E$. Alors $f^{-1} = (\varphi\circ f)^{-1}\circ\varphi$ est différentiable en $f(a)$, de différentielle $\varphi = f'(a)^{-1}$.
L'application $x \mapsto \varphi\circ f'(x)$ est continue de $U$ dans $\mathscr{L}(E)$, et $\varphi\circ f'(x)$ est inversible en chaque point de $U'$. Par le théorème 6.4.10, on voit que l'application $x \mapsto (\varphi\circ f'(x))^{-1}$ est continue de $U'$ dans $\mathscr{L}(E)$, donc que $x \mapsto f'(x)^{-1} = (\varphi\circ f'(x))^{-1}\circ\varphi$ est continue de $U'$ dans $\mathscr{L}(F,E)$. Le raisonnement précédent montre alors que pour tout point $x$ de $U'$, $f^{-1}$ est différentiable en $f(x)$ de différentielle $f'(x)^{-1}$. Donc $f^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ de $W$ sur $U'$. ■

**Remarque 11.1.4.** *En vertu du théorème de Banach (théorème 6.4.11), il suffit de vérifier que la différentielle $f'(a)$ est bijective de $E$ sur $F$ pour assurer que $f'(a)$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$.*

**Corollaire 11.1.5.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, et $f$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ d'un ouvert $U$ de $E$ dans $F$. Si, en chaque point $x$ de $U$, $f'(x)$ est inversible, l'application $f$ est ouverte.*

Démonstration : Il faut prouver que pour tout ouvert $U'$ de $U$, $f(U')$ est une partie ouverte de $F$, c'est-à-dire un voisinage de chacun de ses points. Si $y \in f(U')$, il existe $x \in U'$ tel que $y = f(x)$. Alors le théorème 11.1.3 montre que $f$ est un homéomorphisme d'un voisinage de $x$ contenu dans $U'$ sur un ouvert contenant $f(x) = y$ ; et ceci montre que $f(U')$ est un voisinage de $y$. ■

**Corollaire 11.1.6.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une application injective de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $F$. Si $f'(x)$ est inversible pour tout point $x$ de $U$, $V = f(U)$ est ouvert dans $F$ et $f$ est un difféomorphisme de $U$ sur $V$.*

Le fait que $V$ soit ouvert découle du corollaire précédent. De plus, pour tout $y$ de $V$, il existe un unique $x$ de $U$ tel que $y = f(x)$, et il résulte du théorème 11.1.3 que $f$ est un difféomorphisme d'un voisinage de $x$ sur un voisinage de $y$, donc que $f^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage de $y$ ; et puisque $y$ est arbitraire, $f^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ de $V$ sur $U$. ■

### Cas de la dimension finie.

Si $E$ est de dimension finie $n$, $F$ doit être aussi de dimension finie $n$ pour qu'une application linéaire inversible de $E$ sur $F$ puisse exister. Dans ce cas, au moyen du choix de bases, on identifiera $E$ et $F$ à $\mathbb{R}^n$. Et la condition que $f'(x)$ soit inversible s'exprime par l'inversibilité de la matrice jacobienne $J_f(x)$, c'est-à-dire la non-nullité du déterminant jacobien $D_f(a)$. On obtient donc dans ce cas les théorèmes suivants :

**Théorème 11.1.7.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}^n$. Si, pour un point $a$ de $U$, le déterminant jacobien $D_f(a)$ est différent de 0, $f$ est un difféomorphisme d'un voisinage de $a$ dans $U$ sur un voisinage de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^n$.*

**Théorème 11.1.8.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}^n$. Si le déterminant jacobien $D_f$ ne s'annule pas sur $U$, l'application $f$ est ouverte.*

**Théorème 11.1.9.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application injective de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}^n$. Si le déterminant jacobien $D_f$ ne s'annule pas sur $U$, l'application $f$ est un difféomorphisme de $U$ sur un ouvert $V$ de $\mathbb{R}^n$.*

**Corollaire 11.1.10.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\psi$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}^{n+p}$, $u^*$ un point de $U$ et $v^* = \psi(u^*)$. On suppose que la matrice jacobienne $J_\psi$ de $\psi$ est de rang $n$ au point $u^*$. Alors, quitte à modifier l'ordre des coordonnées dans $\mathbb{R}^{n+p}$, on peut trouver un voisinage $U'$ de $u^*$ dans $U$, un voisinage $V$ de $(v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*)$ et une fonction $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $V$ dans $\mathbb{R}^p$ tels que $\psi(U')$ coïncide avec le graphe de $\varphi$, c'est-à-dire que*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}) \in \psi(U') \iff$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V \quad \text{et} \quad (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+p}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Démonstration : Puisque la matrice jacobienne $J_\psi(u^*)$ est de rang $n$, on peut supposer, quitte à modifier l'ordre des coordonnées de $\mathbb{R}^{n+p}$, que la matrice $(n \times n)$ formée des $n$ premières lignes de $J_\psi(u^*)$ est inversible. Si $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n+p})$ désignent les fonctions coordonnées de $\psi$, le déterminant jacobien $\dfrac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ ne s'annule pas en $u^*$. L'application du théorème 11.1.7 à la fonction $f : u \mapsto (\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u))$ montre alors que $f$ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme d'un voisinage $U'$ de $u^*$ dans $U$ sur un voisinage $V$ de $f(u^*)$. Et pour tout point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $V$, le point $\psi \circ f^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ possède $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ comme $n$ premières coordonnées. Il suffit alors de définir $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par

$$\Big(\psi_{n+1} \circ f^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \psi_{n+2} \circ f^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n+p} \circ f^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big)$$

pour obtenir le résultat cherché. ■

## 11.2 Second ordre

On s'intéresse maintenant au cas où la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$, et on veut montrer que la fonction réciproque $f^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^2$.

**Lemme 11.2.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach isomorphes. Alors l'ensemble $\mathscr{G}(E, F) = \{v \in \mathscr{L}(E, F) : v$ est inversible $\}$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E, F)$ et l'application $Inv : v \mapsto v^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathscr{G}(E, F)$ dans $\mathscr{L}(F, E)$.*

Démonstration : Soit $\varphi$ un isomorphisme de $E$ sur $F$. Alors $v \in \mathscr{L}(E, F)$ est inversible si et seulement si $v \circ \varphi^{-1}$ appartient à l'ensemble ouvert $\mathscr{G}(E)$ des éléments inversibles de $\mathscr{L}(E)$. Et puisque $\left\|v \circ \varphi^{-1}\right\| \leq \|v\| \left\|\varphi^{-1}\right\|$, l'application linéaire $\Phi : v \mapsto v \circ \varphi^{-1}$ est continue de $\mathscr{L}(E, F)$ dans $\mathscr{L}(E)$. Il en résulte que $\mathscr{G}(E, F) = \Phi^{-1}(\mathscr{G}(E))$ est ouvert dans $\mathscr{L}(E, F)$. On voit de même que l'application $\Phi_* : u \mapsto \varphi^{-1} \circ u$ est linéaire continue de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(F, E)$.
De plus, puisque $v = (v \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$, on a alors

$$v^{-1} = \varphi^{-1} \circ (v \circ \varphi^{-1})^{-1}$$

ce qui montre que $Inv = \Phi_* \circ J \circ \Phi$, où $J$ est l'application $u \mapsto u^{-1}$ de $\mathscr{G}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$. Puisque les applications linéaires continues sont de classe $\mathscr{C}^1$, il suffit donc de montrer que $J$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
Soit donc $u \in \mathscr{G}(E)$. Pour $w \in \mathscr{L}(E)$ assez petit, on a $u + w \in \mathscr{G}(E)$ et

$$(u + w)^{-1} = \Big(u(Id + u^{-1} \circ w)\Big)^{-1} = (Id + u^{-1} \circ w)^{-1} \circ u^{-1}$$

et puisque

$$(Id + u^{-1} \circ w)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \Big(u^{-1} \circ w\Big)^j$$

on a

$$\begin{aligned}\left\|(Id+u^{-1}\circ w)^{-1}-Id+u^{-1}\circ w\right\| &= \left\|\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\left(u^{-1}\circ w\right)^j\right\| \leq \sum_{j=2}^{\infty}\left\|u^{-1}\circ w\right\|^j \\ &\leq \sum_{j=2}^{\infty}\left(\left\|u^{-1}\right\|\|w\|\right)^j \leq \frac{\left\|u^{-1}\right\|^2\|w\|^2}{1-\left\|u^{-1}\right\|\|w\|} = O(\|w\|^2)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(u+w)^{-1}-u^{-1}+u^{-1}\circ w\circ u^{-1} = O(\|w\|^2)$$

ce qui montre que l'application $J$ est différentiable sur $\mathscr{G}(E)$ et que la différentielle $J'$ vaut :

$$J'(u).w = -u^{-1}\circ w\circ u^{-1}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\left\|\big(J'(v)-J'(u)\big).w\right\| &= \left\|u^{-1}\circ w\circ u^{-1}-v^{-1}\circ w\circ v^{-1}\right\| \\ &= \left\|(u^{-1}\circ w\circ u^{-1}-u^{-1}\circ w\circ v^{-1})+(u^{-1}\circ w\circ v^{-1}-v^{-1}\circ w\circ v^{-1})\right\| \\ &\leq \left\|u^{-1}\circ w\circ(u^{-1}-v^{-1})\right\|+\left\|(u^{-1}-v^{-1})\circ w\circ v^{-1}\right\| \\ &\leq \left\|u^{-1}\right\|\|w\|\left\|u^{-1}-v^{-1}\right\|+\left\|u^{-1}-v^{-1}\right\|\|w\|\left\|v^{-1}\right\|\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|J'(v)-J'(u)\| \leq \left(\left\|u^{-1}\right\|+\left\|v^{-1}\right\|\right)\left\|u^{-1}-v^{-1}\right\|$$

qui tend vers 0 quand $v$ tend vers $u$ puisque $J$ est continue sur $\mathscr{G}(E)$. On en déduit la continuité de $u \mapsto Inv'(u)$, c'est-à-dire que $J$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et aussi $Inv$. ∎

**Théorème 11.2.2.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans $F$. Si, pour un point $a$ de $U$, la différentielle $f'(a)$ est un élément inversible de $\mathscr{L}(E,F)$, il existe un voisinage ouvert $U'$ de $a$ et un voisinage ouvert $V'$ de $b=f(a)$ tels que $f$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $U'$ sur $V'$ et que $f^{-1}$ soit de classe $\mathscr{C}^2$ de $V'$ sur $U'$.*

Démonstration : L'existence de $U'$ et $V'$ a été prouvée par le théorème 11.1.3, ainsi que le fait que $g=f^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et que, en $y=f(x)\in V'$, la différentielle de $g$ vaut $f'(x)^{-1}$. Ce qui reste à prouver est que $g'$ est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$ de $V'$ dans $\mathscr{L}(F,E)$. Puisque $g'(y)=(f'\circ f^{-1}(y))^{-1}$, il suffit donc de montrer que les applications $g : y\mapsto f^{-1}(y)$ de $V'$ dans $U'$, $f' : x\mapsto f'(x)$ de $U'$ dans $\mathscr{L}(E,F)$ et $Inv : v\mapsto v^{-1}$ de $\mathscr{G}(E,F)$ dans $\mathscr{L}(F,E)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.
Le théorème 11.1.3 donne que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f'$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par hypothèse puisque $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$. Enfin l'application $Inv$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par le lemme 11.2.1. Ceci achève la démonstration. ∎

## 11.3 Fonctions implicites

Etant donné une relation de la forme $f(x,y)=0$ entre deux variables $x$ et $y$, on cherche souvent à "tirer" l'une des variables en fonction de l'autre. En particulier, si $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, on peut chercher à exprimer une variable en fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de l'autre. Il n'y a néanmoins aucun espoir d'avoir en général une solution globale au problème, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 11.3.1.** *Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=x^2+y^2-1$.*

*Pour $|x|>1$, il n'y a aucune valeur de $y$ qui satisfasse l'équation $f(x,y)=0$, et pour $|x|<1$, il y en a deux. Une fonction $\varphi$ vérifiant $f(x,\varphi(x))=0$ ne peut donc être définie que sur $[-1,1]$, et n'est pas unique. De fait, il est aisé de voir qu'il existe deux solutions continues, la fonction $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ et la fonction $x\mapsto-\sqrt{1-x^2}$. De plus, aucune de ces deux solutions n'est dérivable ni en $-1$ ni en $1$.*

On va néanmoins donner un théorème qui permet de "tirer" localement $y$ en fonction différentiable de $x$.

**Théorème 11.3.2.** *(Théorème des fonctions implicites) Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E\times F$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $F$. Si, pour un point $(x_0,y_0)$ de $U$, on a $f(x_0,y_0)=0$ et si la différentielle partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ est un élément inversible de $\mathscr{L}(F)$, il existe un voisinage $V$ de $x_0$, un voisinage $W$ de $y_0$, et une fonction $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $V$ dans $W$ tels que $V\times W\subset U$, que $y_0=\varphi(x_0)$ et que, pour $(x,y)\in V\times W$,*

$$f(x,y)=0 \iff y=\varphi(x)$$

*Si, de plus, la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$, il en est de même de $\varphi$.*

Démonstration : Soit $\Psi$ l'application à valeurs dans $E\times F$ définie sur $U$ par

$$\Psi(x,y)=(x,f(x,y))$$

On a alors $\Psi(x_0,y_0)=(x_0,0)$ et la différentielle de $\Psi$ en $(x_0,y_0)$ vaut

$$\Psi'(x_0,y_0).(u,v)=\left(u,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).u+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).v\right)$$

c'est-à-dire, en notant $A=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\in\mathscr{L}(E,F)$ et $B=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\in\mathscr{L}(F)$,

$$\Psi'(x_0,y_0).(u,v)=(u,A.u+B.v)$$

où $B$ est inversible dans $\mathscr{L}(F)$, et puisque l'équation

$$(u',v')=(u,A.u+B.v)$$

se résout en

$$(u,v)=(u',B^{-1}(v'-A.u'))$$

on voit que $\Psi'(x_0, y_0)$ est inversible dans $\mathscr{L}(E \times F)$. On déduit alors du théorème 11.1.3 qu'il existe un voisinage $U'$ de $(x_0, y_0)$ dans $U$ et un voisinage $U''$ de $(x_0, 0)$ dans $E \times F$ tels que $\Psi$ soit un difféomorphisme de $U'$ sur $U''$. On peut donc trouver un voisinage $V_0$ de $x_0$ et un voisinage $W$ de $y_0$ tels que $V_0 \times W \subset U'$. Alors $\Psi(V_0 \times W)$ est ouvert et, pour $(x, y) \in V_0 \times W$, on a

$$f(x, y) = 0 \iff \Psi(x, y) = (x, 0) \iff (x, y) = \Psi^{-1}(x, 0)$$

Désignons par $\varphi$ la fonction définie par

$$\Psi^{-1}(x, 0) = (x, \varphi(x))$$

qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert

$$V = \{x : (x, 0) \in \Psi(V_0 \times W)\}.$$

Puisque, pour $x \in V$, on a $(x, \varphi(x)) \in V_0 \times W$, on obtient que $V \subset V_0$ et que $\varphi(x) \in W$. On en conclut que pour $(x, y) \in V \times W$, on a

$$f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

Si la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$, il en est de même de $\Psi$, et donc aussi de $\Psi^{-1}$ sur $U''$ d'après le théorème 11.2.2. On en déduit alors que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $V$.
Ceci achève la démonstration du théorème.

■

**Théorème 11.3.3.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E \times F$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $F$. Si, pour un point $(x_0, y_0)$ de $U$, on a $f(x_0, y_0) = 0$ et si la différentielle partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est un élément inversible de $\mathscr{L}(F)$, la fonction implicite $\varphi$ définie au voisinage de $(x_0, y_0)$ par le théorème précédent a pour différentielle en $x_0$ :*

$$\varphi'(x_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Démonstration : On a, pour $x$ voisin de $x_0$, $f(x, \varphi(x)) = 0$. Il en résulte, puisque l'application $g : x \mapsto f(x, \varphi(x))$ est constante au voisinage de $x_0$ qu'on a $g'(x_0) = 0$, donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \circ \varphi'(x) = 0$$

et en particulier, pour $x = x_0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \circ \varphi'(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

d'où résulte immédiatement la formule annoncée. ■

**Cas de la dimension finie.**

Dans le cas où $E$ et $F$ sont de dimension finie, donc respectivement isomorphes à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, on obtient en particulier les énoncés suivants :

**Théorème 11.3.4.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}^p$. Si $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+p}^*) = 0$ et si le déterminant jacobien*

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_p)}{D(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+p})}$$

*ne s'annule pas en $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+p}^*)$, il existe un voisinage $V$ de $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage $W$ de $(x_{n+1}^*, x_{n+2}^*, \dots, x_{n+p}^*)$ dans $\mathbb{R}^p$ et une fonction $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $V$ dans $W$ telle que, sur $V \times W$, l'ensemble $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+p}) \in V \times W : f(x) = 0\}$ coïncide avec le graphe de $\varphi$.*

**Théorème 11.3.5.** *Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$, si $\dfrac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+1}^*) \neq 0$, il existe un voisinage $V$ de $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ et une fonction $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $V$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant $\varphi(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = x_{n+1}^*$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$ et, pour $j = 1, 2, \dots, n$,*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$$

**Corollaire 11.3.6.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}^p$. Si, en un point $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+p}^*)$ de $U$, la matrice jacobienne $J_f$ de $f$ est de rang $p$, il existe un voisinage $U'$ de $x^*$ dans $U$, un ouvert $V$ de $\mathbb{R}^n$ et une application $\psi$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $V$ dans $U'$ telle que le rang de $\psi'$ soit égal à $n$ en tout point de $V$ et que $\psi(V) = U' \cap \{x : f(x) = 0\}$.*

DÉMONSTRATION : Puisque la matrice jacobienne $J_f(x^*)$ est de rang $p$, il existe une matrice carrée inversible d'ordre $p$ extraite de $J_f(x^*)$. Quitte à changer l'ordre des coordonnées, on supposera que la matrice carrée formée des $p$ dernières colonnes de $J_f(x^*)$ est inversible. Alors, le déterminant de cette matrice $(p \times p)$ est non nul, c'est-à-dire que, au point $x^*$,

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_p)}{D(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+p})} \neq 0$$

Il résulte donc du théorème précédent qu'existent des voisinages respectifs $V$ et $W$ de $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ et $(x_{n+1}^*, x_{n+2}^*, \dots, x_{n+p}^*)$ et une fonction $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $V$ dans $\mathbb{R}^p$ dont le graphe coïncide avec l'ensemble $(V \times W) \cap f^{-1}(0)$.
On pose alors $U' = V \times W$ et, pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$,

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Il est clair, avec ces définitions, que $\psi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $\psi(V)$ est le graphe de $\varphi$, c'est-à-dire $(V \times W) \cap f^{-1}(0)$.
De plus, la matrice carrée $(n \times n)$ formée des $n$ premières lignes de la matrice jacobienne $J_\psi$ de $\psi$ est la matrice identité. Ceci entraîne que $J_\psi$ est de rang au moins $n$. Et comme $\psi$ est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ce rang est au plus égal à $n$.

Ceci signifie qu'au voisinage de $x^*$ l'ensemble $f^{-1}(0)$ possède une paramétrisation de classe $\mathscr{C}^1$ par un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

# 12
# OPTIMISATION

Le but de ce chapitre est de résoudre des problèmes du genre suivant : étant donné un ouvert $U$ d'un espace de Banach, une fonction différentiable $f$ de $U$ dans $\mathbb{R}$ et une partie $X$ de $U$, trouver le maximum (resp. le minimum) de $f$ sur $X$, c'est-à-dire trouver un point $a$ de $X$ tel que $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(a) \leq f(x)$) pour tout point $x$ de $X$ et la valeur de $f$ en $a$. Bien entendu, la recherche des minimums de $f$ sur $X$ est équivalente à la recherche des maximums de $-f$ sur $X$.
On dira que $a$ est un maximum strict de $f$ sur $X$ si on a $f(x) < f(a)$ pour tout point $x \neq a$ de $X$, un minimum strict de $f$ sur $X$ si on a $f(x) > f(a)$ pour tout point $x \neq a$ de $X$.
On dira enfin que $f$ atteint en $a \in X$ un maximum local (resp. un minimum local) sur $X$, s'il existe un voisinage ouvert $V$ de $a$ tel que la restriction à $V$ de $f$ atteigne en $a$ son maximum (resp. son minimum) sur $X \cap V$.
On parlera d'extremum pour désigner indifféremment un maximum ou un minimum.

## 12.1 Extremums sur un ouvert

**Théorème 12.1.1.** *Soient $E$ un espace de Banach, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une fonction différentiable de $U$ dans $R$. Si $f$ atteint en $a$ un maximum ou un minimum local, la différentielle de $f$ s'annule en $a$.*

Démonstration : Quitte à remplacer l'ouvert $U$ par un voisinage ouvert de $a$, on peut supposer que $f$ possède en $a$ un extremum. Et quitte à remplacer $f$ par $-f$, on supposera que $f$ ateint en $a$ son maximum sur $U$.
Alors, pour tout vecteur $h$ de $E$, la fonction dérivable $g_h$ définie sur le voisinage ouvert $W_h := \{t : a + th \in U\}$ de 0 dans $\mathbb{R}$ par

$$g_h(t) = f(a + th)$$

vérifie $g_h(t) \leq g_h(0)$ pour tout $t$ de $W_h$, donc, d'après le théorème 8.3.1, on a $\dfrac{d}{dt} g_h(0) = 0$, et puisque $\frac{d}{dt}g_h(0) = f'(a).h$, on obtient $f'(a).h = 0$. Comme ceci est valable pour tout $h \in E$, on conclut que $f'(a) = 0$. ■

**Définition 12.1.2.** *Soient $U$ un ouvert de l'espace de Banach $E$ et $f$ une fonction différentiable de $U$ dans $\mathbb{R}$. On appelle* point critique *de $f$, tout point où la différentielle de $f$ s'annule.*

Tout point où $f$ atteint un extremum local est donc un point critique. En général, la réciproque n'est pas vraie. La condition que $a$ est un point critique est seulement une condition nécessaire pour que $f$ atteigne en $a$ un extremum local. On a néanmoins l'énoncé suivant :

**Théorème 12.1.3.** *Si $U$ est un ouvert convexe d'un espace de Banach $E$ et $f$ une fonction convexe différentiable de $U$ dans $\mathbb{R}$, et si $a$ est un point critique de $f$, la fonction $f$ atteint en $a$ son minimum.*

Démonstration : Supposons le contraire. Il existe alors un point $b \in U$ tel que $f(b) < f(a)$. Alors, pour $0 \leq t \leq 1$, le point $tb + (1-t)a$ appartient à $U$ et on a

$$f(tb + (1-t)a) \leq tf(b) + (1-t)f(a) = f(a) + t(f(b) - f(a))$$

Il en résulte que la fonction $g$ définie sur un intervalle ouvert $J$ contenant $[0,1]$ par $g(t) = f(tb + (1-t)a)$ vérifie

$$g(t) \leq g(0) + t(f(b) - f(a))$$

donc, pour $t \geq 0$,

$$g'(0) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \leq f(b) - f(a) < 0$$

et $f'(a).(b-a) = g'(0) < 0$, contrairement à l'hypothèse que $a$ est un point critique. ■

**Application 12.1.4.** *Etant donné trois points $a$, $b$, $c$ non alignés du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, déterminer le minimum de la somme des distances d'un point aux trois points $a$, $b$ et $c$.*

La fonction à minimiser est la fonction

$$f : x \mapsto \|x - a\| + \|x - b\| + \|x - c\|$$

La fonction $f$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini. L'ensemble des points $x$ de $\mathbb{R}^2$ où $f(x) \leq f(a)$ est donc compact, et $f$ atteint son minimum en un point de $\mathbb{R}^2$.
On vérifie aisément la convexité de la fonction $x \mapsto \|x - a\|$. En effet,

$$\begin{aligned}\|tx + (1-t)x' - a\| &= \|t(x-a) + (1-t)(x'-a)\| \\ &\leq \|t(x-a)\| + \|(1-t)(x'-a)\| = t\,\|x-a\| + (1-t)\,\|x'-a\|\end{aligned}$$

Il en est de même des fonctions $x \mapsto \|x - b\|$ et $x \mapsto \|x - c\|$. Donc $f$ est convexe.
De plus, la fonction $g_a : x \mapsto \|x - a\|^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\|x + u - a\|^2 &= \langle x + u - a, x + u - a\rangle = \langle x - a, x - a\rangle + 2\langle x - a, u\rangle + \langle u, u\rangle \\ &= \|x - a\|^2 + \langle 2(x-a), u\rangle + \|u\|^2 = \|x - a\|^2 + \langle 2(x-a), u\rangle + o(\|u\|)\end{aligned}$$

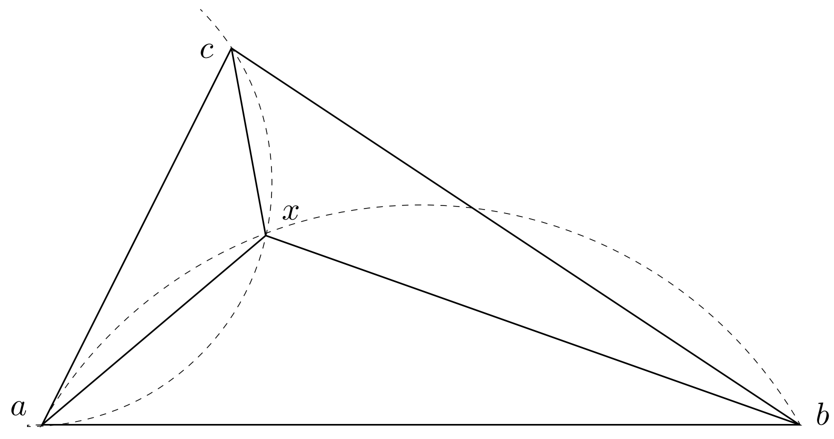
ce qui montre que $g_a$ est différentiable et que sa différentielle en $x$ est la forme linéaire : $u \mapsto \langle 2(x-a), u\rangle$. Et puisque le dual de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est isométrique à son dual (voir le théorème 7.2.7), on a $\|g_a'(x) - g_a'(y)\| = \|2(x-a) - 2(x'-a)\| = 2\,\|x - x'\|$, d'où résulte la continuité de $g_a'$. Donc la fonction $f_a : x \mapsto \|x-a\| = \sqrt{g_a(x)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\{x : g_a(x) > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$, et on a, pour $x \neq a$,

$$f'(a).u = \langle \frac{x-a}{\|x-a\|}, u\rangle$$

Il en résulte que la fonction convexe $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}$ et que, pour $x \notin \{a, b, c\}$,

$$f'(x).u = \langle \frac{x-a}{\|x-a\|} + \frac{x-b}{\|x-b\|} + \frac{x-c}{\|x-c\|}, u\rangle$$

S'il y a un point $x$ de $\mathbb{R}^2$ où $f'(x) = 0$, la fonction $f$ y atteint son minimum. Et dans le cas contraire, la fonction $f$ atteint son minimum en l'un des points $a$, $b$ ou $c$. Dans le premier cas, les trois vecteurs $\frac{x-a}{\|x-a\|}$, $\frac{x-b}{\|x-b\|}$ et $\frac{x-c}{\|x-c\|}$ sont chacun de norme 1 et de somme nulle. Il en résulte aisément qu'il forment deux-à-deux des angles de $\frac{2\pi}{3}$. Le point $x$ où $f$ atteint son minimum doit donc être situé sur un arc de cercle passant par $a$ et $b$ et centré en $c'$ tel que l'angle $\widehat{ac'b}$ ait pour mesure $\frac{2\pi}{3}$, ainsi que sur un arc de cercle passant par $a$ et $c$ et centré en $b'$ tel que l'angle $\widehat{ab'c}$ ait pour mesure $\frac{2\pi}{3}$. Il n'est pas difficile de vérifier qu'un tel point existe dès que chacun des angles du triangle $abc$ est inférieur à $\frac{2\pi}{3}$ ; dans le cas contraire, le minimum est obtenu pour celui des sommets du triangle où l'angle dépasse $\frac{2\pi}{3}$.



## 12.2 Extremums liés

On s'intéresse maintenant au cas où l'ensemble $X$ sur lequel on cherche l'extremum est défini comme l'ensemble des solutions d'une équation $\varphi(x) = 0$, avec $\varphi$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur $U$ à valeurs dans un espace de Banach $F$. On se limitera, par simplicité, au cas où $F$ est de dimension finie.

**Théorème 12.2.1.** *Soient $U$ un ouvert de l'espace de Banach $E$, $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$ et $\varphi$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}^p$, de fonctions coordonnées $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$. Si la fonction $f$ admet en un point $a$ un extremum local sur l'ensemble $X = \{x \in U : \varphi(x) = 0\}$ et si la différentielle $\varphi'(a)$ est surjective, il existe des scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ tels que*

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \varphi_j'(a)$$

Démonstration : Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Il existe, puisque $\varphi'(a)(E) = \mathbb{R}^p$, des vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de $E$ tels que $\varphi'(a).u_j = e_j$. On désignera par $V$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les $(u_j)$.
On désignera alors par $\Omega$ l'ensemble des $(x, (t_1, t_2, \ldots, t_p)) \in E \times \mathbb{R}^p$ tels que $x + \sum_{j=1}^{p} t_j u_j \in U$ et par $\Phi$ la fonction : $\Omega \to \mathbb{R}^p$ définie par

$$\Phi(x, (t_1, t_2, \ldots, t_p)) = \varphi(x + \sum_{j=1}^{p} t_j u_j)$$

Alors $(a, 0) \in \Omega$ et $\Phi(a, 0) = \varphi(a) = 0$ puisque $a \in X$. On a alors

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_j}(a, 0) = \varphi'(a).u_j = e_j$$

L'application $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(a, 0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ est donc l'identité. Et le théorème des fonctions implicites permet alors d'affirmer l'existence, sur un voisinage ouvert $W$ de $a$, d'une fonction $\psi$ de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, nulle en $a$, telle que $\Phi(x, \psi(x)) = 0$, c'est-à-dire $x + \sum_j \psi_j(x) u_j \in X = \Phi^{-1}(0)$, si $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p)$ désignent les fonctions coordonnées de $\psi$. Et en dénotant par $\Psi$ la fonction de $W$ dans $V$ définie par $\Psi(x) = \sum_j \psi_j(x).u_j$, ceci signifie que, pour $x \in W$, $x + \Psi(x) \in X$.

Et si $a$ est un maximum local de $f$ sur $X$, on aura, pour tout $x$ assez voisin de $a$ dans $W$ :

$$f(x + \Psi(x)) \leq f(a) = f(a + \Psi(a))$$

puisque $x + \Psi(x) \in X$, ce qui signifie que $a$ est un maximum local de la fonction $g : x \mapsto f(x + \Psi(x))$ ; et de même si $a$ est un minimum local de $f$ sur $X$, $a$ est un minimum local de $g$ sur $W$. Il en résulte que si $a$ est un extremum local de $f$ sur $X$, $a$ est un point critique de $g$. Et on a, pour $h \in E$,

$$0 = g'(a).h = f'(a).\big(h + \sum_{j=1}^{p} (\psi_j'(a).h) u_j\big)$$

c'est-à-dire

$$f'(a).h = \sum_{j=1}^{p}(-\psi_j'(a).h)f'(a).u_j$$

Alors, le théorème 11.3.3 donne

$$\psi'(a).h = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}(a,0)\right)^{-1} \circ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(a,0).h$$

et comme on a vu que $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(a,0) = Id_{\mathbb{R}^p}$, on obtient

$$\psi_j'(a).h = -\varphi_j'(a).h$$

d'où

$$f'(a).h = \sum_{j=1}^{p}(\varphi_j'(a).h)(f'(a).u_j)$$

Alors, si on pose $\lambda_j = f'(a).u_j$, on obtient

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \varphi_j'(a)$$

ce qui est la formule cherchée. ■

L'hypothèse de surjectivité de $\varphi'(a)$ dans le théorème ci-dessus ne peut être omise, comme le montre l'exemple qui suit.

**Exemple 12.2.2.** *Soient $f$ et $\varphi$ les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par*

$$f(x,y) = x$$
$$\varphi(x,y) = y^2 - x^3$$

*Alors la fonction $f$ atteint sur $X = \varphi^{-1}(0)$ son minimum en $(0,0)$, mais il n'existe aucun scalaire tel que $f'(0,0) = \lambda\varphi'(0,0)$.*

Démonstration : Puisque l'on a, sur $X$ : $x^3 = y^2 \geq 0$, on a nécessairement $f(x,y) = x \geq 0$. Donc $f$ atteint en $(0,0)$ son minimum sur $X$.
Néanmoins, on a $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) = 0$, donc $\varphi'(0,0) = 0$, et $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, d'où $f'(0,0) \neq 0$.

**Définition 12.2.3.** *Les coefficients $\lambda_j$ qui apparaissent dans l'énoncé 12.2.1 sont appelés* multiplicateurs de Lagrange

**Application 12.2.4.** *Soient $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois nombres réels. Déterminer le maximum sur la sphère euclidienne $S$ de $\mathbb{R}^3$ de la fonction*

$$f : (x,y,z) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma z$$

Posons $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. La fonction $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ , et $S = \varphi^{-1}(0)$. Et on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y,z) = 2x$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z) = 2y$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = 2z$$

En particulier, la différentielle de $\varphi$ ne s'annule qu'en $(0,0,0)$, qui n'appartient pas à $S$. Donc $\varphi'(x,y,z)(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$ pour tout point $(x,y,z)$ de $S$.
Puisque $f$ est linéaire, elle est de classe $\mathscr{C}^1$. En particulier, elle est continue, et atteint sur le compact $S$ son maximum et son minimum. Et si $f$ atteint au point $(x,y,z)$ de $S$ un extremum, il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda$ tel que $f'(x,y,z) = \lambda\varphi'(x,y,z)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \alpha = \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2\lambda x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \beta = \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 2\lambda y \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \gamma = \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2\lambda z \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

et puisque $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $2\lambda = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Enfin on tire aussi

$$x = \frac{\alpha}{2\lambda}$$
$$y = \frac{\beta}{2\lambda}$$
$$z = \frac{\gamma}{2\lambda}$$

donc

$$2\lambda = \alpha x + \beta y + \gamma z = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\lambda}$$

c'est-à-dire $|2\lambda| = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}$. On conclut à l'existence de deux points de $S$ où $f$ peut atteindre un extremum :

- le point $(\frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}}, \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}}, \frac{\gamma}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}})$ où $f$ prend la valeur $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}$

- le point $(-\frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}}, -\frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}}, -\frac{\gamma}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}})$ où $f$ prend la valeur $-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}$

le premier est donc le point où $f$ atteint son maximum, et le second, le point où $f$ atteint son minimum.

## 12.3 Conditions du second ordre

**Théorème 12.3.1.** *Soient $U$ un ouvert de l'espace de Banach $E$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. Si $f$ atteint en un point $a$ un minimum local (resp. un maximum local), on a, pour tout $h$ de $E$ : $f''(a).(h,h) \geq 0$ (resp. $f''(a).(h,h) \leq 0$).*

Démonstration : Supposons que $f$ atteigne en $a$ un minimum local. On sait déjà que $a$ est un point critique de $f$. Soit $h \in E$. On a, pour $t$ réel assez voisin de 0, $f(a+t.h) \geq f(a)$. D'après la formule de Taylor (théorème 8.8.2), appliquée à la fonction $g : t \mapsto f(a+t.h))$, on a

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2}g''(0) + o(t^2)$$

donc, puisque $g'(0) = f'(a).h$ et $g''(0) = f''(a).(h,h)$,

$$0 \leq \frac{2}{t^2}\Big(f(a+t.h) - f(a)\Big) = \frac{2}{t^2}\Big(\frac{t^2}{2}f''(a).(h,h) + o(t^2)\Big) = f''(a).(h,h) + o(1)$$

ce qui donne, en passant à la limite quand $t$ tend vers 0 : $f''(a).(h,h) \geq 0$.
Dans le cas d'un maximum local, on se ramène au cas précédent en remplaçant $f$ par $-f$. ∎

**Définition 12.3.2.** *Soient $U$ un ouvert de l'espace de Banach $E$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. On appelle* col *ou* point-selle *un point critique $a$ de $f$ tel que $f$ prend, dans tout voisinage de $a$, des valeurs strictement supérieures à $f(a)$ et des valeurs strictement inférieures à $f(a)$.*

Il résulte du théorème précédent qu'en un point où la forme quadratique $h \mapsto f''(a).(h,h)$ prend sur $E$ des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, $f$ ne possède ni maximum local ni minimum local. Un tel point est donc un col.
Néanmoins, l'exemple de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^4$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui possède en $(0,0)$ un point critique où la matrice hessienne $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est positive, mais qui vérifie $f(0,y) < 0$ pour tout $y \neq 0$, montre qu'on peut avoir un col sans que la condition précédente soit vérifiée.

**Conditions suffisantes.**

A l'exception du cas des fonctions convexes, qui atteignent leur minimum en tout point critique, les conditions que nous avons obtenues jusqu'à présent sont des conditions nécessaires mais pas suffisantes. Nous allons chercher maintenant des conditions suffisantes pour qu'un point critique de $f$ soit un maximum ou un minimum de $f$. Ces conditions porteront sur la différentielle seconde de $f$, que nous sommes donc conduits à supposer de classe $\mathscr{C}^2$.

**Théorème 12.3.3.** *Soient $U$ un ouvert de l'espace de Banach $E$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. Si $a$ est un point critique de $f$ et s'il existe un $\delta > 0$ tel que*

$$f''(a).(h,h) \geq \delta \left\|h\right\|^2$$

*pour tout $h$ de $E$, la fonction $f$ atteint en $a$ un minimum local strict.*

Démonstration : Puisque $f''$ est continue, il existe un $r > 0$ tel que la boule $B(a,r)$ soit contenue dans $U$ et que $\|f''(x) - f''(a)\| < \dfrac{\delta}{2}$

La fonction $g : x \mapsto f(x) - \dfrac{1}{2} f''(a).(x-a, x-a))$ vérifie alors

$$g'(x).h = f'(x).h - f''(a)((x-a), h),$$

d'où $g'(a) = f'(a) = 0$ et $g''(x).(h,k) = f''(x).(h,k) - f''(a).(h,k)$. On en déduit que $\|g''x)\| \leq \dfrac{\delta}{2}$, donc, en vertu de la formule de Taylor (théorème 10.5.1),

$$\begin{aligned}|g(x_0) - g(a) - g'(a).(x_0 - a)| &\leq \frac{1}{2} \sup_{x\in B(a,r)} |g''(x).((x_0-a),(x_0-a))| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_0 - a\|^2 \sup_{x\in B(a,r)} \|g''(x)\|\end{aligned}$$

pour $x_0 \in B(a,r)$, c'est-à-dire

$$\left| f(x_0) - f(a) - \frac{1}{2} f''(a).((x_0-a),(x_0-a)) \right| \leq \frac{\delta}{4} \|x_0 - a\|^2$$

ou encore

$$f(x_0) \geq f(a) + \frac{1}{2} f''(a).((x_0-a),(x_0-a)) - \frac{\delta}{4} \|x_0 - a\|^2 \geq f(a) + \frac{\delta}{4} \|x_0 - a\|^2$$

ce qui montre que $f(x_0) > f(a)$ pour tout point $x_0$ de $B(a,r)$ distinct de $a$ : $f$ atteint donc en $a$ un minimum local strict. ■

On pouvait aussi remarquer que la fonction $f$ est strictement convexe sur $B(a,r)$, donc est minimum au seul point $a$ où elle est critique.

**Remarque 12.3.4.** *La condition ci-dessus entraîne que l'espace $E$ est isomorphe à un espace hilbertien réel.*

Démonstration : On a, en effet,

$$\delta \|h\|^2 \leq f''(a).(h,h) \leq \|f''(a)\| \|h\|^2$$

Alors l'application $(h,k) \mapsto \langle h,k \rangle = f''(a).(h,k)$ est bilinéaire symétrique et vérifie $\langle h,h \rangle \geq \delta \|h\|^2 > 0$ pour $h \neq 0$. C'est donc un produit scalaire et la norme préhilbertienne $|||.|||$ associée vérifie

$$\delta \|h\|^2 \leq |||h|||^2 \leq \|f''(a)\| . \|h\|^2$$

ce qui montre que les normes $\|.\|$ et $|||.|||$ sont équivalentes, et $E$ est complet pour la norme préhilbertienne $|||.|||$, puisqu'il l'est pour la norme initiale $\|.\|$. ■

Dans le cas où $E$ est de dimension finie, on a l'énoncé suivant :

**Théorème 12.3.5.** *Soient $U$ un ouvert de l'espace de dimension finie $E$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. Si $a$ est un point critique de $f$ et si $f''(a).(h,h) > 0$ pour tout $h$ non nul de $E$, la fonction $f$ atteint en $a$ un minimum local strict.*

Démonstration : Soit $S$ la sphère unité de $E$, qui est compacte. Puisque l'application $q : h \mapsto f''(a).(h,h)$ est continue de $E$ dans $\mathbb{R}$, elle atteint sur $S$ sa borne inférieure $\delta$, qui est strictement positive puisque $q$ est strictement positive sur $S$. Alors, pour $h \neq 0$ on a $\frac{1}{\|h\|}.h \in S$ donc

$$\frac{1}{\|h\|^2} f''(a).(h,h) = f''(a).(\frac{1}{\|h\|}.h, \frac{1}{\|h\|}.h) \geq \delta$$

c'est-à-dire $f''(a).(h,h) \geq \delta \|h\|^2$, inégalité qui est encore valable pour $h = 0$. Le résultat découle alors du théorème précédent. ■

**Corollaire 12.3.6.** *Soient $U$ un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^n$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. Si $a$ est un point critique de $f$ et si la matrice hessienne $H_f(a)$ est définie positive, la fonction $f$ atteint en $a$ un minimum local strict.*

Démonstration : Il résulte du théorème 10.4.5 que, si $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ sont les coordonnées du vecteur $h$ de $\mathbb{R}^n$,

$$f''(a).(h,h) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \ldots & h_n \end{pmatrix} H_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \ldots \\ h_n \end{pmatrix}$$

quantité qui est strictement positive pour $h \neq 0$, par l'hypothèse que $H_f(a)$ est définie positive. Et ceci achève la démonstration, compte tenu du théorème précédent. ■

**Lemme 12.3.7.** *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrique réelle $(n \times n)$. Alors $A$ est définie positive si et seulement si, pour tout $p = 1, 2, \ldots, n$ le déterminant*

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} \end{vmatrix}$$

*est strictement positif*

Démonstration : Désignons par $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $A$ est définie positive, il en est de même de sa restriction $A_p$ à l'espace engendré par $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$. On est donc ramené à montrer que le déterminant de $A$ est strictement positif. Et puisqu'il existe, si $A$ est définie positive, une base orthonormée formée de vecteurs propres, le déterminant de $A$ est égal au produit des valeurs propres, qui sont toutes réelles et strictement positives. Donc $det(A) > 0$. Et ceci montre la positivité des $\Delta_p$.

Inversement, si les $\Delta_p$ sont tous strictement positifs, on construit par récurrence une suite $(a_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et une suite $(\rho_j)$ de réels telles que :

*i)* $a_p - e_p$ est combinaison linéaire des $a_j$ pour $j < p$ : $a_p = e_p - \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_{p,j} a_j$

*ii)* les $a_j$ sont deux-à-deux orthogonaux pour le produit scalaire défini par $A$. : ${}^t a_j A a_k = 0$ pour $j \neq k$.

*iii)* $\rho_j = {}^t a_j A a_j > 0$.

On pose $a_1 = e_1$. Et si les $a_j$ sont déterminés pour $j < p$, on pose

$$a_p = e_p - \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_{p,j} a_j$$

On doit alors avoir

$$0 = {}^t a_j A a_p = {}^t a_j A e_p - \sum_{i<p} \alpha_{p,i} {}^t a_j A a_i = {}^t a_j A e_p - \alpha_{p,j} \rho_j$$

c'est-à-dire $\alpha_{p,j} = \dfrac{{}^t a_j A e_p}{\rho_j}$. On doit alors montrer que $\rho_p > 0$ pour poursuivre la construction.
Mais la matrice $T_p$ de $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est triangulaire : elle comporte des 1 sur la diagonale et des 0 au-dessous de la diagonale. Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^p$ associé à $A$ s'exprime donc dans la nouvelle base par $A'_p = {}^t T_p A_p T_p$. Et puisque les vecteurs $a_j$ sont deux-à-deux orthogonaux, cette matrice $A'_p$ s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_p \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit

$$\prod_{j=1}^{p} \rho_j = det(A'_p) = det({}^t T_p).det(A_p).det(T_p) = det(A_p).det(T_p)^2$$

Et comme $det(T_p) = 1$ et que $det(A_p) = \Delta_p$, on obtient :

$$\rho_p = \frac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}} > 0$$

Ceci achève la construction par récurrence.
Et puisque la matrice $A'_n$ est une matrice diagonale à termes strictement positifs, elle est définie positive, et la matrice $A = A_n = {}^t(T_n)^{-1} A'_n (T_p)^{-1}$ est elle aussi définie positive. ■

**Corollaire 12.3.8.** *Soient $U$ un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^n$ et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. Si $a$ est un point critique de $f$ et si les déterminants*

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_p} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_p} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_p} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p^2} \end{vmatrix}$$

*sont strictement positifs pour $1 \leq p \leq n$, la fonction $f$ atteint en $a$ un minimum local strict.*

Démonstration : Ceci résulte immédiatement du lemme 12.3.7 et du corollaire 12.3.6. ■

En particulier, si $n = 2$, les conditions précédentes deviennent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a).\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(a)\right)^2 > 0$$

**Application 12.3.9.** *Déterminer les extremums locaux de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - y^3 + x^2 - 2y^2 - 6x + 3y$$

Les dérivées partielles premières de $f$ valent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 2x - 6 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 3y^2 - 4y + 3 \end{cases}$$

Les points critiques de $f$ vérifient donc $4x^3 + 2x = 6$ et $4y^3 - 3y^2 - 4y + 3 = 0$. Comme la dérivée de la fonction $p : x \mapsto 4x^3 + 2x$ vaut $12x^2 + 2 > 0$, la fonction $p$ est strictement croissante, donc prend la valeur 6 au plus une fois ; et comme on a clairement $p(1) = 6$, tout point critique de $f$ possède une abscisse égale à 1. De plus $4y^3-3y^2-4y+3 = (y^2-1)(4y-3)$. On en déduit l'existence de trois points critiques : $(1, -1)$, $(1, \frac{3}{4})$ et $(1, 1)$.
Les dérivées partielles secondes de $f$ valent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 + 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 6y - 4 \end{cases}$$

on en déduit que

$$H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

que

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et que

$$H_f(1, \frac{3}{4}) = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

donc que $f$ atteint un minimum local en $(1, -1)$, où elle vaut $-7$, et en $(1, 1)$, où elle vaut $-3$, puisque $H_f$ est définie positive en ces points, et que $(1, \frac{3}{4})$ est un col pour $f$.
Il est aisé de vérifier que

$$-y^3 + x^3 - 2y^2 - 6x + 3y = o(x^4 + y^4)$$

quand $\|(x, y)\| \to \infty$, donc de voir que $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x, y) = +\infty$. Il en résulte que l'ensemble $\{(x, y) : f(x, y) \leq 0\}$ est un compact, sur lequel $f$ atteint son minimum. Donc $f$ atteint son minimum en un point de $\mathbb{R}^2$. Ce point est alors l'un des points critiques trouvés plus haut. C'est donc le point $(1, -1)$, où $f$ vaut $-7$, qui est le point de minimum global de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

# 13
# FONCTIONS HOLOMORPHES

Avant de définir la notion de fonction holomorphe, nous allons faire quelques rappels sur la notion d'intégrale curviligne et la notion de série entière. Pour la plupart, les résultats énoncés sont supposés connus et ne seront pas redémontrés.
Dans toute la suite, on notera $D(z,r)$ (resp. $\tilde{D}(z,r)$) le disque ouvert (resp. fermé) de centre $z$ et de rayon $r$ du plan complexe $\mathbb{C}$. On notera également $D(r)$ (resp. $\tilde{D}(r)$) le disque ouvert (resp. fermé) de centre 0 et de rayon $r$.

## 13.1 Formes différentielles

**Définition 13.1.1.** *Une* forme différentielle *sur l'ouvert $U$ de $\mathbb{C}$ est une application continue $\omega$ de $U$ dans l'espace $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.*
*Si $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, on note $df$ l'application qui à $z \in U$ associe $f'(z) \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Une forme différentielle $\omega$ est dite* exacte *s'il existe une fonction $f$ de classe $\mathscr{C}^1$, appelée alors* primitive *de $\omega$, telle que $\omega = df$.*

Si on note $x$, $y$, $z$, $\bar{z}$, les fonctions qui à $z = x + iy$ associent respectivement sa partie réelle, sa partie imaginaire, lui-même et son conjugué, et si $\omega$ est une forme différentielle, on a, en notant $P$ et $Q$ les fonctions continues $P : z \mapsto \omega(z).1$ et $Q : z \mapsto \omega(z).i$,

$$\omega = P\,dx + Q\,dy = \frac{P-iQ}{2}\,dz + \frac{P+iQ}{2}\,d\bar{z}$$

En particulier, si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})\,dz + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})\,d\bar{z}$$

On convient donc de noter

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$$

et on a $df = \dfrac{\partial f}{\partial z}\,dz + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}$.

**Théorème 13.1.2.** *Deux primitives d'une même forme exacte sur un ouvert connexe $U$ diffèrent d'une constante.*

Si $df_1 = df_2 = \omega$, on a $d(f_1 - f_2) = 0$. On en déduit que $f$ est localement constante, donc constante si $U$ est connexe.

**Définition 13.1.3.** *Une forme différentielle sur $U$ est dite* fermée *si, au voisinage de chaque point de $U$, elle possède une primitive.*

## 13.2 Intégrales curvilignes

**Définition 13.2.1.** *On appelle lacet un arc $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$, c'est-à-dire dont l'origine coïncide avec l'extrémité.*

**Définition 13.2.2.** *Si $\omega = P\,dx + Q\,dy$ est une forme différentielle sur l'ouvert $U$, et $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \to U$ un arc de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, l'intégrale curviligne de $\omega$ le long de $\gamma$ est définie comme*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left[P{\circ}\gamma(t)\gamma_1'(t) + Q{\circ}\gamma(t)\gamma_2'(t)\right]\,dt$$

*en notant $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ la dérivée à droite de $\gamma$, qui existe pour tout $t$ de $[a, b[$.*

**Théorème 13.2.3.** *(Invariance par changement de paramètre) Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $\omega$ une forme différentielle sur $U$, $\gamma : [a, b] \to U$ un arc de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et $\gamma_1 = \gamma{\circ}\varphi$.*
*Si $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ on a*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_\gamma \omega$$

*Si $\varphi(\alpha) = b$ et $\varphi(\beta) = a$ on a*

$$\int_{\gamma_1} \omega = -\int_\gamma \omega$$

**Théorème 13.2.4.** *Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$, et $\gamma : [a, b] \to U$ un arc de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, on a*

$$\int_\gamma df = f{\circ}\gamma(b) - f{\circ}\gamma(a)$$

*En particulier, si $\gamma$ est un lacet, on a $\int_\gamma df = 0$.*

**Théorème 13.2.5.** *La forme différentielle $\omega$ sur $U$ est exacte si et seulement si son intégrale le long de tout lacet de $U$ est nulle.*

Démonstration : Il suffit de trouver une primitive de $\omega$ sur chacune des composantes connexes de $U$, puisque celles-ci sont connexes, et même connexes par arcs.

Si $U'$ est une composante connexe de $U$, et si $a \in U'$, il existe pour tout $z$ de $U'$ un arc de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux joignant $a$ à $z$. Si $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont deux tels arcs : $[0,1] \to U$, on définit un lacet $\gamma : [-1,1] \to U$ en posant :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_2(t) & \text{si } t \geq 0 \\ \gamma_1(-t) & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

On a alors

$$\int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma} \omega = 0$$

ce qui montre que l'intégrale de $\omega$ le long d'un arc joignant $a$ à $z$ ne dépend que de $z$. On notera $F(z)$ la valeur de cette intégrale.
Si $z$ est fixé, et si le disque $D(z,r)$ de centre $z$ et de rayon $r$ est inclus dans $U'$, on obtient, pour tout $w$ tel que $|w| < r$ un arc joignant $a$ à $z+w$ en "mettant bout à bout" un arc joignant $a$ à $z$ et l'arc affine : $t \mapsto z + tw$ de $[0,1]$ dans $U'$. Il en résulte que

$$\Delta(w) = F(z+w) - F(z) - \omega(z).w = \int_0^1 [\omega(z+tw) - \omega(z)].w\,dt$$

donc, par continuité de $\omega$, que $\Delta(w) = o(w)$, ce qui montre que $F$ est différentiable en $z$, de différentielle $\omega(z)$. On conclut que $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $dF = \omega$. ■

**Théorème 13.2.6.** *Soient $D$ un disque ouvert de $\mathbb{C}$ et $\omega = p\,dx + q\,dy$ une forme différentielle sur $D$. On suppose que, pour tout rectangle $R$ de sommets $z$, $z+\rho$, $z+\rho+i\sigma$, $z+i\sigma$ contenu dans $D$, l'intégrale de $\omega$ le long du bord $\partial R$ de $R$ est nulle. Alors $\omega$ est exacte.*

Démonstration : Soit $a = \alpha + i\beta$ le centre du disque. Si $z = x+iy$ est un point de $D$, on considère le rectangle $R_z$ à côtés parallèles aux axes dont $[a,z]$ est une diagonale. Le rectangle $R$ est alors inclus dans $D$. Si on désigne par $\gamma_1$ et $\gamma_2$ les arcs affines par morceaux joignant $a$ à $z$ et d'images respectives $[a, \alpha+iy] \cup [\alpha+iy, z]$ et $[a, x+i\beta] \cup [x+i\beta, z]$, on voit que

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \pm \int_{\partial R} \omega = 0$$

donc que

$$F_1(z) := \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega =: F_2(z)$$

Alors, pour $h$ réel assez petit, on voit que

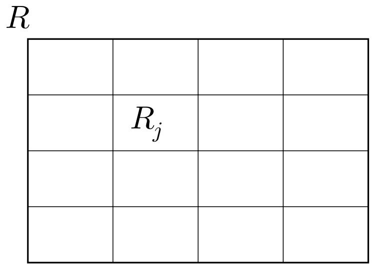
$$F_1(z+h) - F_1(z) = \int_0^1 \omega(z+th).h\,dt = h\int_0^1 p(z+th)\,dt$$

d'où l'on déduit que $\dfrac{\partial F_1}{\partial x} = p$. On voit de même que $\dfrac{\partial F_2}{\partial y} = q$. Et puisque $F_1 = F_2$, et que $p$ et $q$ sont continues, $F_1$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a $\omega = p\,dx + q\,dy = dF_1$. ■

## 13.3 Formes différentielles fermées

**Théorème 13.3.1.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\omega$ une forme différentielle fermée sur $U$. Si $R$ est un rectangle compact contenu dans $U$, l'intégrale $\int_{\partial R} \omega$ est nulle*

DÉMONSTRATION : Chaque point $z$ de $R$ possède un voisinage ouvert $V_z$ contenu dans $U$ sur lequel $\omega$ est exacte. D'après le théorème 3.2.1, il existe un nombre $\rho > 0$ tel que pour tout $w$ de $R$ le disque $D(w, \rho)$ soit inclus dans l'un des ouverts $(V_z)_{z \in R}$ ; il existe alors un entier $n$ tel que $\dfrac{diam(R)}{n} < \rho$. Et si l'on subdivise le rectangle $R$ en les $n^2$ rectangles $R_j$ homothétiques à $R$, d'intérieurs deux-à-deux disjoints, obtenus en divisant en $n$ parties égales les côtés de $R$, on voit que chacun d'entre eux est de diamètre $\dfrac{diam(R)}{n}$, donc contenu dans un disque de rayon $\rho$ sur lequel $\omega$ est exacte.




On a donc $\int_{\partial R_j} \omega = 0$. De plus, chacun des côtés des $R_j$ qui n'appartient pas au bord de $R$ apparaît comme élément du bord de deux rectangles adjacents $R_{j_1}$ et $R_{j_2}$ avec des orientations opposées. Il en résulte que

$$\int_{\partial R} \omega = \sum_{1 \leq j \leq n^2} \int_{\partial R_j} \omega = 0$$

■

**Corollaire 13.3.2.** *Si $D$ est un disque ouvert de $\mathbb{C}$ et $\omega$ une forme différentielle fermée sur $D$, alors $\omega$ est exacte.*

Ceci résulte immédiatement des deux théorèmes précédents.

**Corollaire 13.3.3.** *Si $\omega$ est une forme différentielle sur l'ouvert $U$ de $\mathbb{C}$, alors $\omega$ est fermée si et seulement si l'intégrale de $\omega$ le long du bord de tout rectangle compact $R$ contenu dans $U$ est nulle.*

DÉMONSTRATION : Si $\omega$ est fermée, son intégrale le long de $\partial R$ est nulle par le théorème 13.3.1. Inversement, si l'intégrale de $\omega$ le long du bord de tout rectangle compact contenu dans $U$ est nulle, il résulte du théorème 13.2.6 que $\omega$ est exacte sur tout disque ouvert $D$ contenu dans $U$, donc fermée sur $U$. ■

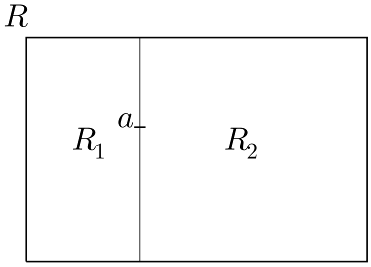
**Proposition 13.3.4.** *Soient $R$ un rectangle compact de $\mathbb{C}$ et $\omega$ une forme différentielle continue suur $R$ et fermée sur l'intérieur de $R$. Alors l'intégrale de $\omega$ le long du bord de $R$ est nulle.*

DÉMONSTRATION : Notons $a$ le centre de $R$. Pour $t \in ]0, 1[$, l'image $R_t$ du rectangle $R$ par l'homothétie de centre $a$ et de rapport $t$ est contenue dans l'intérieur de $R$ ; on a donc

$\int_{\partial R_t} \omega = 0$ d'après le théorème 13.3.1. Et on déduit aisément de la continuité uniforme de $\omega$ sur le compact $R$ que $\int_{\partial R} \omega = \lim_{t \to 1} \int_{\partial R_t} \omega = 0$. ■

**Corollaire 13.3.5.** *Si $\omega$ est une forme différentielle sur l'ouvert $U$ de $\mathbb{C}$, $a$ un point de $U$ et si $\omega$ est fermée sur $U \setminus \{a\}$, alors $\omega$ est fermée sur $U$.*

DÉMONSTRATION : Il suffit de montrer que l'intégrale de $\omega$ le long du bord de tout rectangle compact $R$ contenu dans $U$ est nulle. Si $a$ n'appartient pas à $R$, ceci résulte du théorème 13.3.1, puisque alors $R$ est inclus dans $U \setminus \{a\}$. Si $a$ appartient au bord de $R$, ceci résulte du théorème précédent.
Enfin, si $a$ est intérieur à $R$, on peut partager $R$ en deux rectangles adjacents $R_1$ et $R_2$ par une parallèle à un côté menée par le point $a$.




Il résulte de ce qui précède que $\int_{\partial R_1} \omega = \int_{\partial R_2} \omega = 0$, et on a alors

$$\int_{\partial R} \omega = \int_{\partial R_1} \omega + \int_{\partial R_2} \omega = 0$$

■

**Lemme 13.3.6.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma_0$ et $\gamma_1$ deux arcs de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux définis sur $[a, b]$ et à valeurs $U$, ayant mêmes extrémités, et $\omega$ une forme différentielle fermée sur $U$. On suppose que*

$$\|\gamma_1 - \gamma_0\| < \inf_{t \in [a,b]} d(\gamma_0(t), U^c)$$

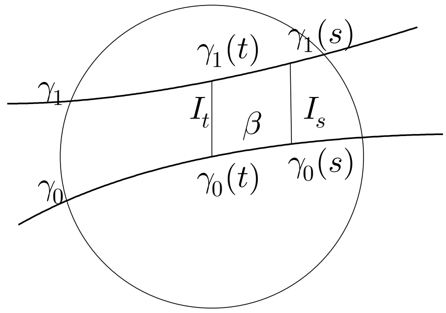
*Alors $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_0} \omega$.*

DÉMONSTRATION : Soit $\delta := \inf_{t \in [a,b]} d(\gamma_0(t), U^c)$. Pour tout $t$ dans $[a, b]$, le disque ouvert $D_t := D(\gamma_0(t), \delta)$ est inclus dans $U$ (par définition de $\delta$), et contient le point $\gamma_1(t)$. Notons $J_t$ l'arc affine défini sur $[0, 1]$, joignant $\gamma_0(t)$ à $\gamma_1(t)$ : $s \mapsto s\gamma_1(t) + (1 - s)\gamma_0(t)$, et posons, pour $t \in [a, b]$,

$$\Phi(t) = \int_{\gamma_{0|[a,t]}} \omega + \int_{J_t} \omega - \int_{\gamma_{1|[a,t]}} \omega$$

Comme $\gamma_0$ et $\gamma_1$ ont mêmes extrémités, on a clairement $\Phi(a) = 0$ et $\Phi(b) = \int_{\gamma_0} \omega - \int_{\gamma_1} \omega$. Puisque $\gamma_0(t)$ et $\gamma_1(t)$ appartiennent à l'ouvert $D_t$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s$ de $[a, b]$ tel que $|s - t| < \varepsilon$ on ait $\gamma_0(s) \in D_t$ et $\gamma_1(s) \in D_t$. Pour un tel $s$, le lacet $\beta$ obtenu en mettant "bout-à-bout" les arcs $\gamma_{0|[t,s]}$, $J_s$, $\gamma_{1|[t,s]}$ "retourné" et $J_t$ "retourné" est contenu entièrement dans $D_t$. D'après le corollaire 13.3.2, $\omega$ est exacte sur $D_t$. Il en résulte que $\int_\beta \omega = 0$. Et puisque

$$\Phi(s) - \Phi(t) = \int_{\gamma_{0|[t,s]}} \omega + \int_{J_s} \omega - \int_{\gamma_{1|[t,s]}} \omega - \int_{J_t} \omega = \int_\beta \omega = 0$$




on voit que $\Phi(s) = \Phi(t)$ si $|s-t| < \varepsilon$, c'est-à-dire que $\Phi$ est localement constante sur $[a,b]$. Et comme $[a,b]$ est connexe, $\Phi$ est constante sur $[a,b]$. Donc $\int_{\gamma_0} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \Phi(b) = \Phi(a) = 0$. ■

**Lemme 13.3.7.** *Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un arc continu et $\rho > 0$. Il existe alors un arc $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux ayant mêmes extrémités que $\gamma$ et tel que $\|\gamma_1 - \gamma\| < \rho$.*

Démonstration : La fonction $\gamma$ est uniformément continue sur $[a,b]$. Il existe donc un entier $m$ tel que

$$|s-t| < \frac{b-a}{m} \quad \Longrightarrow \quad |\gamma(s) - \gamma(t)| < \rho/2$$

On posera alors $t_j = a + \dfrac{j}{m}(b-a)$ pour $0 \leq j \leq m$. Si $\gamma_1$ est la fonction : $[a,b] \to \mathbb{C}$ telle que $\gamma_1(t_j) = \gamma(t_j)$ pour $0 \leq j \leq m$ et qui est affine sur chaque $[t_j, t_{j+1}]$, $\gamma_1$ a mêmes extrémités que $\gamma$. De plus, si $t_j \leq t \leq t_{j+1}$,

$$\begin{aligned} |\gamma_1(t) - \gamma(t)| \leq |\gamma_1(t) - \gamma(t_j)| + |\gamma(t_j) - \gamma(t)| &\leq \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}\,|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| + |\gamma(t_j) - \gamma(t)| \\ &< \rho/2 + \rho/2 = \rho \end{aligned}$$

Donc $\|\gamma_1 - \gamma\| < \rho$. ■

**Théorème 13.3.8.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $\omega$ une forme fermée sur $U$ et $\gamma : [a,b] \to U$ un arc continu. Il existe un nombre $A \in \mathbb{C}$, qu'on notera $\int_\gamma \omega$, tel que, pour tout arc $\gamma_2$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux vérifiant $\gamma_2(a) = \gamma(a)$, $\gamma_2(b) = \gamma(b)$ et $\|\gamma_2 - \gamma\| < \inf_{t\in[a,b]} d(\gamma(t), U^c)$ on ait $\int_{\gamma_2} \omega = A$.*

Démonstration : On a $\delta := \inf_{t\in[a,b]} d(\gamma(t), U^c) > 0$. Il existe, d'après le lemme précédent, un arc $\gamma_1$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, ayant mêmes extrémités que $\gamma$ et satisfaisant $\|\gamma_1 - \gamma\| < \dfrac{\delta}{3}$, et on pose $A := \int_{\gamma_1} \omega$. Si $\gamma_1^*$ est un autre arc de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux ayant mêmes extrémités que $\gamma$ et satisfaisant $\|\gamma_1^* - \gamma\| < \dfrac{\delta}{3}$, on aura pour tout $t \in [a,b]$,

$$d(\gamma_1(t), U^c) \geq d(\gamma(t), U^c) - |\gamma_1(t) - \gamma(t)| \geq \delta - \|\gamma_1 - \gamma\| > \delta - \frac{\delta}{3} = 2\frac{\delta}{3}$$

et $\|\gamma_1^* - \gamma_1\| \leq \|\gamma_1^* - \gamma\| + \|\gamma_1 - \gamma\| < 2\dfrac{\delta}{3}$, donc $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_1^*} \omega$, d'après le lemme 13.3.6. Si maintenant $\gamma_2$ est un arc de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux ayant mêmes extrémités que $\gamma$ et satisfaisant $\|\gamma_2 - \gamma\| < \delta$, on peut trouver d'après le lemme précédent un arc $\gamma_1^*$, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et satisfaisant $\|\gamma_1^* - \gamma\| < \rho := \min\left(\dfrac{\delta}{3}, \dfrac{1}{2}(\delta - \|\gamma_2 - \gamma\|)\right)$. On aura alors $\int_{\gamma_1^*} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = A$, $\inf_{t\in[a,b]} d(\gamma_1^*(t), U^c) \geq \delta - \rho$ et $\|\gamma_2 - \gamma_1^*\| \leq \|\gamma_2 - \gamma\| + \|\gamma - \gamma_1^*\| < \delta - \rho$. On en déduit, par le lemme 13.3.6, que $\int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1^*} \omega = A$. ∎

**Théorème 13.3.9.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $\omega$ une forme différentielle fermée sur $U$, $\gamma$ et $\gamma_0$ deux arcs continus : $[a,b] \to U$ ayant mêmes extrémités et satisfaisant $\|\gamma_0 - \gamma\| < \inf_{t\in[a,b]} d(\gamma(t), U^c)$. Alors*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

Démonstration : Soit $\delta := \inf_{t\in[a,b]} d(\gamma(t), U^c)$. Il existe un arc $\gamma^* : [a,b] \to U$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, ayant mêmes extrémités que $\gamma$ et $\gamma_0$, et satisfaisant $\|\gamma^* - \gamma_0\| < \rho := \min(\dfrac{\delta}{2}, \delta - \|\gamma_0 - \gamma\|)$.
On montre, comme dans le théorème précédent, que $\inf_{t\in[a,b]} d(\gamma_0(t), U^c) \geq \delta - \|\gamma_0 - \gamma\| \geq \rho$ et que $\|\gamma^* - \gamma_0\| < \rho$, donc que $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma^*} \omega$, et aussi que

$$\|\gamma^* - \gamma\| \leq \|\gamma^* - \gamma_0\| + \|\gamma_0 - \gamma\| < \rho + (\delta - \|\gamma_0 - \gamma\|) \leq \delta = \inf_{t\in[a,b]} d(\gamma(t), U^c)$$

donc que $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma^*} \omega$. ∎

## 13.4 Ouverts simplement connexes

**Définition 13.4.1.** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Deux arcs $\gamma_0$ et $\gamma_1 : [a,b] \to U$ sont dits* homotopes *s'ils ont même origine et même extrémité et s'il existe une application continue $h$, appelée* homotopie, *de $[a,b] \times [0,1]$ dans $U$ telle que*

$$\forall t \in [a,b] \quad h(t,0) = \gamma_0(t) \quad \text{et} \quad h(t,1) = \gamma_1(t)$$
$$\forall s \in [0,1] \quad h(a,s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a) \quad \text{et} \quad h(b,s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$$

*On vérifie que ceci définit une relation d'équivalence sur les arcs : $[a,b] \to U$.*

**Définition 13.4.2.** *Un ouvert $U$ de $\mathbb{C}$ est dit* simplement connexe *s'il est connexe et si deux arcs à valeurs dans $U$ de mêmes extrémités sont toujours homotopes dans $U$.*

**Proposition 13.4.3.** *Un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ est simplement connexe.*

Démonstration : On sait déjà qu'une partie convexe est connexe. Si $\gamma_0$ et $\gamma_1$ sont deux arcs de mêmes extrémités, et si on pose, pour $0 \leq t \leq 1$ et $a \leq s \leq b$,

$$h(t,s) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t)$$

on vérifie sans peine que $h$ est une homotopie entre $\gamma_0$ et $\gamma_1$. ∎

**Théorème 13.4.4.** *Un ouvert $V$ homéomorphe à un ouvert simplement connexe $U$ est lui-même simplement connexe.*

Démonstration : Si $\varphi$ est un homéomorphisme de $U$ sur $V$, $V$ est connexe. De plus, si $\gamma_0$ et $\gamma_1$ sont deux arcs de $V$ de mêmes extrémités, $\varphi^{-1}\circ\gamma_0$ et $\varphi^{-1}\circ\gamma_1$ sont deux arcs de $U$ de mêmes extrémités : il existe alors une homotopie $h$ entre $\varphi^{-1}\circ\gamma_0$ et $\varphi^{-1}\circ\gamma_1$. Il suffit alors de remarquer que $\varphi\circ h$ est l'homotopie cherchée. ■

**Théorème 13.4.5.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $\omega$ une forme fermée sur $U$, $\gamma_0$ et $\gamma_1$ deux arcs de $U$ homotopes. Alors*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Démonstration : Soit $h : [a,b] \times [0,1] \to U$ une homotopie entre $\gamma_0$ et $\gamma_1$. On notera $\alpha = \gamma_0(a)$, $\beta = \gamma_0(b)$ et $\gamma_s$ l'arc $t \mapsto h(t,s)$. Puisque le compact $K = h([a,b]\times[0,1])$ est inclus dans $U$, le nombre $\delta := \inf_{z\in K} d(z, U^c)$ est strictement positif. Puisque $h$ est uniformément continue, il existe alors un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\max(|t-t'|, |s-s'|) < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |h(t,s) - h(t',s')| < \delta$$

donc en particulier pour $t = t'$,

$$|s-s'| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|\gamma_s - \gamma_{s'}\| < \delta \leq \inf_{t\in[a,b]} d(\gamma_s(t), U^c)$$

Il résulte alors du théorème 13.3.9 que $\int_{\gamma_s} \omega = \int_{\gamma_{s'}} \omega$, ce qui montre que la fonction $\varphi : s \mapsto \int_{\gamma_s} \omega$ est localement constante sur $[0,1]$, donc constante. Ceci prouve l'égalité $\varphi(0) = \varphi(1)$. ■

**Théorème 13.4.6.** *Si $U$ est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, toute forme fermée $\omega$ sur $U$ est exacte.*

Démonstration : Il suffit de montrer que, pour tout lacet $\gamma : [a,b] \to U$, $\int_\gamma \omega = 0$. Or, si $\gamma_0$ est le lacet constant : $t \mapsto \gamma(a)$, $\gamma$ est homotope à $\gamma_0$. Donc

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_0} \omega = 0$$ ■

## 13.5 Séries entières

**Théorème 13.5.1.** *Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. Il existe un nombre $R \in [0, +\infty]$, appelé* rayon de convergence *de la série entière, tel que la série converge normalement sur tout disque $\tilde{D}(0,r)$ où $r < R$, et diverge pour tout $z$ tel que $|z| > R$.*

*La somme de la série est donc une fonction continue sur le disque (ouvert) de convergence.*

**Théorème 13.5.2.** *Si $R$ est le rayon de convergence de la série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,* la série dérivée *$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$ a un rayon de convergence égal à $R$. De plus, pour $|z| < R$, on a*

$$S'(z) = \lim_{w\to 0} \frac{S(z+w) - S(z)}{w}$$

Démonstration : Soit $r$ tel que $|z| < r < R$. Si $|w| \leq \rho = r - |z|$, on a $|z+w| \leq r$, et

$$\begin{aligned}|a_n(z+w)^n - a_n z^n| &= |a_n w| \sum_{j=0}^{n-1} (z+w)^j z^{n-j-1} \\ &\leq |a_n|\,|w| \sum_{j=0}^{n-1} r^j r^{n-j-1} = n\,|a_n|\,|w|\, r^{n-1}\end{aligned}$$

et puisque $r$ est inférieur au rayon de convergence de $S'$, cette série est convergente. Il en résulte que la série de terme général

$$u_n(w) = \frac{a_n(z+w)^n - a_n z^n}{w}$$

converge normalement sur $\tilde{D}(\rho)$. Sa somme y est donc continue, et on a

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0) = \lim_{w \to 0, w \neq 0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(w) = \lim_{w \to 0, w \neq 0} \frac{S(z+w) - S(z)}{w}$$

d'où le résultat cherché. ■

**Définition 13.5.3.** *Une fonction $f$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{C}$ est dite* analytique *si, pour tout $z$ de $U$, il existe un $r > 0$ et une série entière $S(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ de rayon de convergence au moins égal à $r$ tels que $D(z,r) \subset U$ et que, pour $|w| < r$ on ait $f(z+w) = S(w)$.*

Ceci entraîne qu'une fonction analytique est nécessairement continue.

**Théorème 13.5.4.** *(Théorème des zéros isolés) Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f$ une fonction analytique sur $U$, $z$ un point de $U$ tel que $f(z) = 0$. Alors, ou bien $f$ est nulle en tout point d'un voisinage de $z$, ou bien il existe un voisinage de $z$ sur lequel $f$ ne s'annule qu'en $z$.*

Démonstration : Il existe un $r > 0$ tel que $D(z,r) \subset U$ et une série $S(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ telle que, pour $|w| < r$ on ait $f(z+w) = S(w)$. Si les $(a_n)$ sont tous nuls, $f$ est nulle sur $D(z,r)$. Sinon, il existe un $p$ tel que $a_p \neq 0$ et que $a_n = 0$ pour $n < p$. La série $S_1(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} w^n$ converge pour tout $w$ non nul tel que $|w| < r$. Elle a donc un rayon de convergence au moins $r$. De plus $S_1(0) = a_p \neq 0$, et par continuité, il existe $\rho \in ]0, r[$ tel que $S_1(w) \neq 0$ si $|w| < \rho$. Il en résulte que si $0 < |w| < \rho$ on a

$$f(z+w) = w^p S_1(w) \neq 0$$

Donc $f$ ne s'annule pas sur $D(z,\rho) \setminus \{z\}$. ■

**Théorème 13.5.5.** *Si $U$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction analytique sur $U$, non identiquement nulle, l'ensemble $F = f^{-1}(0)$ est fermé discret.*

Démonstration : L'ensemble $F$ est fermé puisque $f$ est continue. De plus, l'ensemble $W$ des points au voisinage desquels $f$ est identiquement nulle est ouvert. Et si $a \in U$ est adhérent à $W$, $a$ appartient à $F$ et $f$ s'annule en des points arbitrairement voisins de $a$. D'après le théorème précédent, $a$ appartient alors à $W$. Donc $W$ est ouvert et fermé, et comme $W \neq U$ puisque $f$ n'est pas identiquement nulle, $W$ est vide. Il résulte alors du théorème précédent que tout point de $F$ est isolé, donc que $F$ est discret. ■

**Théorème 13.5.6.** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe $U$ de $\mathbb{C}$ et si le produit $fg$ est nul, l'une au moins des deux fonctions est nulle.*

Démonstration : Supposons que $f$ ne soit pas identiquement nulle. Il existe alors un $a \in U$ tel que $f(a) \neq 0$. Et puisque $f$ est continue, il existe un voisinage $V$ de $a$ sur lequel $f$ ne s'annule pas. Alors $g$ est identiquement nulle sur $V$, donc identiquement nulle sur $U$ d'après ce qui précède. ■

## 13.6 Fonctions holomorphes

**Définition 13.6.1.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction de $U$ dans $\mathbb{C}$. On dit que $f$ est* holomorphe *en un point $a$ de $U$ si la limite de $\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existe quand $z$ tend vers $a$ dans $U \setminus \{a\}$. Cette limite est alors appelée la dérivée de $f$ en $a$.*
*On dit que $f$ est* holomorphe *sur $U$ si elle est holomorphe en tout point de $U$.*
*On appelle* fonction entière *une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

Il est clair qu'une fonction holomorphe est continue.

**Théorème 13.6.2.** *Une fonction $f$ sur l'ouvert $U$ de $\mathbb{C}$ est holomorphe en $a$ si et seulement si elle est différentiable en $a$ et si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$. Alors $df = f'(a)\,dz$.*

Démonstration : Si $f$ est holomorphe en $a$, avec dérivée $f'(a)$, on a au voisinage de $a$

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(a) + o(1)$$

donc

$$f(z) - f(a) = f'(a).(z-a) + o(z-a)$$

ce qui montre que $f$ est différentiable, que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = f'(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = if'(a)$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y})(a) = f'(a)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y})(a) = 0$. Donc $df = f'(a)\,dz$.
Inversement, si $f$ est différentiable en $a$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$, c'est-à-dire $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$, on a, pour $w = u + iv$

$$df(a).w = \frac{\partial f}{\partial x}(a).u + \frac{\partial f}{\partial y}(a).v = \frac{\partial f}{\partial x}(a).(u+iv) = \frac{\partial f}{\partial x}(a).w$$

donc

$$\frac{f(a+w)-f(a)}{w} - \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{w}\Big(f(a+w) - f(a) - df(a).w\Big) \to 0$$

c'est-à-dire que $f$ est holomorphe en $a$, de dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$. ■

**Théorème 13.6.3.** *Si $f$ est analytique sur $U$, $f$ est holomorphe et sa dérivée $f'$ est analytique.*

DÉMONSTRATION : Soit $z \in U$. Il existe un $r > 0$ et une série entière $S(w)$ telle que $f(z+w) = S(w)$ si $|w| < r$. D'après le théorème 13.5.2, la série dérivée vérifie

$$S'(w) = \lim_{h \to 0} \frac{S(w+h) - S(w)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+w+h) - f(z+w)}{h}$$

ce qui montre que $f$ est holomorphe en $z+w$, de dérivée $S'(w)$. La dérivée $f'$ est donc, au voisinage de $z$, la somme d'une série entière, ce qui entraîne qu'elle est analytique. ■

On démontre comme les énoncés analogues pour les fonctions dérivables d'une variable réelle les énoncés suivants :

**Théorème 13.6.4.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions holomorphes sur $U$. Alors $f+g$ et $fg$ dont holomorphes, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si $g$ ne s'annule pas.*

**Théorème 13.6.5.** *Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f$ holomorphe sur $U$ à valeurs dans $V$ et $g$ holomorphe sur $V$. Alors $g \circ f$ est holomorphe. Si de plus $f$ est un homéomorphisme de $U$ sur $V$ et si $f'$ ne s'annule pas, $f^{-1}$ est holomorphe sur $V$.*

## 13.7 Exponentielle

**Définition 13.7.1.** *La fonction* exponentielle *est définie pour $z \in \mathbb{C}$ par*

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

**Théorème 13.7.2.** *La fonction exponentielle est entière, partout non nulle et vérifie*

$$\begin{cases} \forall z, w \in \mathbb{C} & \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \,.\, \mathrm{e}^w \\ \forall z \in \mathbb{C} & \mathrm{e}^{\bar{z}} = \overline{\mathrm{e}^z} \\ \forall z = x+iy \in \mathbb{C} & |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

DÉMONSTRATION : La série entière $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, donc converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Sa somme est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc entière. Soient $z$ et $w$ dans $\mathbb{C}$. Puisque les séries de terme général $(\dfrac{z^n}{n!})$ et $(\dfrac{w^p}{p!})$ convergent absolument, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z \,.\, \mathrm{e}^w &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n+p=m} \frac{z^n w^p}{n!p!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( \sum_{n+p=m} C_m^n z^n w^p \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (z+w)^m = \mathrm{e}^{z+w} \end{aligned}$$

d'où $\mathrm{e}^{-z} \,.\, \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{0} = 1$, ce qui montre que $\mathrm{e}^{z} \neq 0$. De plus

$$\overline{\mathrm{e}^{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \mathrm{e}^{\bar{z}}$$

Enfin

$$|\mathrm{e}^{z}|^2 = \mathrm{e}^{z} \,.\, \overline{\mathrm{e}^{z}} = \mathrm{e}^{z} \,.\, \mathrm{e}^{\bar{z}} = \mathrm{e}^{z+\bar{z}} = \mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^{x})^2$$

et puisque $\mathrm{e}^{x}$ est le carré du nombre réel $\mathrm{e}^{x/2}$, $\mathrm{e}^{x}$ est positif. On en déduit que $\mathrm{e}^{x}$ est le module de $\mathrm{e}^{z}$.

**Théorème 13.7.3.** *La fonction exponentielle est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$. Il existe un nombre réel $\pi$ tel que*

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{w} \iff \exists n \in \mathbb{Z} \quad z - w = 2ni\pi$$

*On appelle* logarithme *du nombre complexe $w$ tout nombre complexe $z$ tel que $\mathrm{e}^{z} = w$.*

Démonstration : La série dérivée de $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est $E(z)$. La dérivée de la fonction exponentielle est donc égale à la fonction exponentielle. Pour $x$ réel, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ est donc dérivable, à dérivée strictement positive. C'est donc un homéomorphisme sur son image. Puisque, pour $x \geq 0$, on a $\mathrm{e}^{x} \geq 1 + x$, on a $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$. Et $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = \lim_{x \to +\infty} 1/\mathrm{e}^{x} = 0$. Donc l'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.

Soit maintenant $\varphi$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi(y) = \mathrm{e}^{iy}$. On a $|\varphi(y)| = 1$ et $\varphi(y + y') = \varphi(y)\varphi(y')$. Puisque $\varphi$ est continue, $S_0 = \varphi(\mathbb{R})$ est une partie connexe du cercle unité $S$. On a

$$\Re e(\varphi(2)) = 1 - 2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(2n)!} = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(2n)!}$$

qui est la somme d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue. La somme a donc le signe du premier terme, c'est-à-dire est négative. Il en résulte, par un argument de connexité, qu'existe un nombre réel $\theta$ compris entre 0 et 2 tel que $\Re e(\varphi(\theta)) = 0$, c'est-à-dire $\varphi(\theta) = i$ ou $\varphi(\theta) = -i$. Donc $\varphi(2\theta) = -1$ et puisque l'ensemble $\{\Re e(\varphi(y)) : y \in \mathbb{R}\}$ est connexe, il est égal à $[-1, 1]$. De plus puisque $\varphi(-y) = \overline{\varphi(y)}$, on a $S_0 = S$.
Donc, si $w \in \mathbb{C}^*$, il existe $x$ tel que $\mathrm{e}^{x} = |w|$ et $y$ tel que $\varphi(y) = \frac{w}{|w|}$ ; alors $\mathrm{e}^{x+iy} = w$, ce qui montre la surjectivité de l'exponentielle.
Enfin, si on pose $\pi = \inf\{t > 0 : \varphi(t) = -1\}$, on a $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$ puisque $\varphi$ est continue. Pour $0 < t < \pi$ on a $\varphi(t) \neq -1$, et aussi $\varphi(t) \neq 1$ car on aurait sinon $\varphi(\pi - t) = -1$, contrairement au fait que $0 < \pi - t < \pi$. On en déduit que $\Im m(\varphi(t))$ ne s'annule pas, donc est de signe constant puisque $]0, \pi[$ est connexe. Et puisque $\dfrac{\Im m(\varphi(y))}{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n y^{2n}}{(2n+1)!} \to 1$ quand $y$ tend vers 0, $\Im m(\varphi(y)) > 0$ pour $0 < y < \pi$.
Ceci montre que $\varphi(\pi/2)^2 = \varphi(\pi) = -1$ et $\Im m(\varphi(\pi/2)) > 0$, donc que $\varphi(\pi/2) = i$. Et puisque $\varphi(2\pi) = \varphi(\pi)^2 = 1$ on a $\varphi(2n\pi) = 1^n = 1$. Et si $s \in \mathbb{R}$ vérifie $\varphi(s) = 1$, il existe un entier

$n \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi \leq s - 2n\pi < \pi$ ; alors $\varphi(s - 2n\pi) = \varphi(s) = 1$, et la seule valeur de $y$ sur $[-\pi, \pi]$ où $\varphi(y) = 1$ est 0. Donc $s - 2n\pi = 0$.
Finalement, si $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^w$, on a $\mathrm{e}^{z-w} = 1$, donc $\Re e(z - w) = 0$, et si $z - w = iy$, $\varphi(y) = 1$, d'où $y = 2n\pi$, pour un $n \in \mathbb{Z}$. ■

## 13.8 Indice par rapport à un lacet

On va donner une définition précise de ce qu'est intuitivement le nombre de tours que fait un lacet autour d'un point.

**Définition 13.8.1.** *Soient $\gamma$ un lacet de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$ et $w$ un point n'appartenant pas à l'image de $\gamma$. L'indice de $w$ par rapport à $\gamma$ est*

$$I_\gamma(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - w}$$

**Théorème 13.8.2.** *Si $\gamma$ est un lacet : $[a, b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, l'indice $I_\gamma$ est une fonction localement constante sur $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ à valeurs entières, et nulle en dehors du disque $D(z_0, R)$ si celui-ci contient l'image $\Gamma$ de $\gamma$.*

Démonstration : Puisque l'indice est égal à

$$\frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)\, dt}{\gamma(t) - w}$$

$I_\gamma$ est fonction continue de $w$ sur le complémentaire de $\Gamma$. Pour prouver qu'elle est localement constante, il suffit de prouver qu'elle est à valeurs entières. Pour cela, fixons $w$ et définissons, pour $s \in [a, b]$,

$$\varphi(s) = \mathrm{e}^{\int_a^s \frac{\gamma'(t)\, dt}{\gamma(t) - w}}$$

La fonction $\varphi$ est continue et vaut 1 en $a$. De plus, la fonction $s \mapsto \dfrac{\varphi(s)}{\gamma(s) - w}$ est dérivable à droite sur $[a, b[$ et sa dérivée à droite vaut

$$\frac{\varphi'(s)(\gamma(s) - w) - \varphi(s)\gamma'(s)}{(\gamma(s) - w)^2} = \frac{\varphi(s)}{(\gamma(s) - w)^2} \left[ \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - w}(\gamma(s) - w) - \gamma'(s) \right]$$

donc est nulle sur $[a, b[$. Ceci montre que $\dfrac{\varphi(s)}{\gamma(s) - w}$ est constante, donc que

$$\frac{\varphi(b)}{\gamma(b) - w} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - w} = \frac{1}{\gamma(a) - w}$$

ou encore $\varphi(b) = \mathrm{e}^{2i\pi I_\gamma(w)} = 1$. Ceci montre donc que $I_\gamma(w) \in \mathbb{Z}$.
Et si $\Gamma \subset \tilde{D}(z_0, R)$, on a pour $|w - z_0| > R$

$$|I_\gamma(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|w - z_0| - R}\, dt$$

ce qui montre que si $|w - z_0|$ est assez grand, on aura $|I_\gamma(w)| < 1$ donc $I_\gamma(w) = 0$. Et puisque $\mathbb{C} \setminus \tilde{D}(z_0, R)$ est connexe, la fonction localement constante $I_\gamma$ y est constante, donc nulle. ■

**Théorème 13.8.3.** *Si $\gamma$ est le cercle de centre $z$ et de rayon $r$ parcouru dans le sens direct, $I_\gamma$ vaut 1 dans le disque $D(z,r)$, et 0 hors du disque $\tilde{D}(z,r)$.*

DÉMONSTRATION : Il résulte du théorème précédent que $I_\gamma$ est nul hors de $\tilde{D}(z,r)$. Puisque $I_\gamma$ est constante sur l'ouvert connexe $D(z,r)$, il suffit de le calculer en $z$. On peut paramétrer le cercle par $\gamma(t) = z + r\,\mathrm{e}^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Alors

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ir\,\mathrm{e}^{it}}{(z + r\,\mathrm{e}^{it}) - z}\,dt = 1$$

ce qui achève la démonstration. ■

## 13.9 Holomorphie et analyticité

**Théorème 13.9.1.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction continue de $U$ dans $\mathbb{C}$. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

*i)* *$f$ est holomorphe.*

*ii)* *$f$ est analytique.*

*iii)* *La forme différentielle $\omega = f(z)\,dz$ est fermée.*

*iv)* *Pour tout disque compact $\tilde{D}(a,r)$ contenu dans $U$ et tout $w$ dans $D(a,r)$, on a la formule de Cauchy*

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)} \frac{f(z)\,dz}{z - w}$$

*où $C(a,r)$ désigne le lacet $t \mapsto a + r\,\mathrm{e}^{it}$ sur $[0, 2\pi]$.*

On va prouver *i)* $\Rightarrow$ *iv)* $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *i)* et *i)* $\Rightarrow$ *iii)* $\Rightarrow$ *i)*. Pour cela, on prouve d'abord deux lemmes.

**Lemme 13.9.2.** *Soit $\varphi$ une fonction continue de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$. Si on pose*

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,\mathrm{e}^{-ni\theta}\,d\theta$$

*la série $S(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $r$, et on a, pour $|w| < r$,*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\theta) ir\,\mathrm{e}^{i\theta}}{r\,\mathrm{e}^{i\theta} - w} = S(w)$$

DÉMONSTRATION : Puisque la série $\sum_0^{\infty} z^n$ a un rayon de convergence égal à 1, elle converge normalement sur tout disque compact de centre 0 et de rayon $< 1$. On a donc, si $|w| < r$, convergence normale sur $[0,2\pi]$ de la série $\sum_0^\infty \dfrac{w^n}{r^n}\,\mathrm{e}^{-in\theta}$ vers $\left(1-\dfrac{w}{r\,\mathrm{e}^{i\theta}}\right)^{-1} = \dfrac{r\,\mathrm{e}^{i\theta}}{r\,\mathrm{e}^{i\theta}-w}$. On en déduit puisque $\varphi$ est bornée :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\theta)r\,\mathrm{e}^{i\theta}}{r\,\mathrm{e}^{i\theta}-w}\,d\theta &= \lim_{p\to\infty}\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\frac{w^n}{r^n}\,\mathrm{e}^{-ni\theta}\,d\theta\\ &= \lim_{p\to\infty}\sum_{n=0}^{p}a_n w^n\end{aligned}$$

Ceci prouve la convergence de la série $S(w)$ pour tout $w$ de $D(r)$. Le rayon de convergence de $S$ est donc au moins $r$ et on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\theta)r\,\mathrm{e}^{i\theta}}{r\,\mathrm{e}^{i\theta}-w}\,d\theta = S(w)$$ ■

**Lemme 13.9.3.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction holomorphe sur $U$. Alors la forme $f(z)\,dz$ est fermée sur $U$.*

Démonstration : Soit $R_0$ un rectangle compact inclus dans $U$. Il faut démontrer que $\int_{\partial R_0} f(z)\,dz = 0$. On va sinon construire une suite $(R_k)$ de rectangles emboîtés, deux-à-deux homothétiques et de diamètre tendant vers 0, dont l'intersection comporte un point unique où $f$ n'est pas holomorphe.
Pour cela, on définit un $\delta > 0$ et on construit par récurrence une suite décroissante $(R_k)$ de rectangles telle que $diam(R_k) \leq \dfrac{1}{2}diam(R_{k-1})$ et que

$$\left|\int_{\partial R_k} f(z)\,dz\right| \geq \delta(diam(R_k))^2 \qquad (*)$$

Supposons construite la suite $(R_k)$. Alors l'intersection de $(R_k)$ est un singleton $\{b\}$ et $f$ devrait être holomorphe en $b$. Pour $\varepsilon > 0$ il devrait exister un $\eta > 0$ et un $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$|f(z) - f(b) - \lambda(z-b)| \leq \varepsilon\,|z-b|$$

dès que $|z-b| < \eta$. Il existe donc un entier $k$ tel que $diam(R_k) < \eta$, et puisque $b \in R_k$, le rectangle $R_k$ est contenu dans le disque $D(b,\eta)$. Il en résulte que, si l'on pose $g(z) = f(z) - f(b) - \lambda(z-b)$, on a $|g(z)| < \varepsilon.diam(R_k)$ en tout point de $\partial R_k$, et on remarque que

$$g(z)\,dz = f(z)\,dz - d\left(f(b)(z-b) + \frac{\lambda}{2}(z-b)^2\right)$$

d'où résulte que

$$\int_{\partial R_k} f(z)\,dz = \int_{\partial R_k} g(z)\,dz$$

et puisque la longueur du bord de $R_k$ est inférieure à $4.diam(R_k)$, cette dernière intégrale est inférieure en module à $4\varepsilon(diam(R_k))^2$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence si $\varepsilon$ a été choisi inférieur à $\delta/4$.

Il reste donc seulement à faire la construction des $(R_k)$. Puisqu'on suppose que

$$\int_{\partial R_0} f(z)\,dz \neq 0 \ ,$$

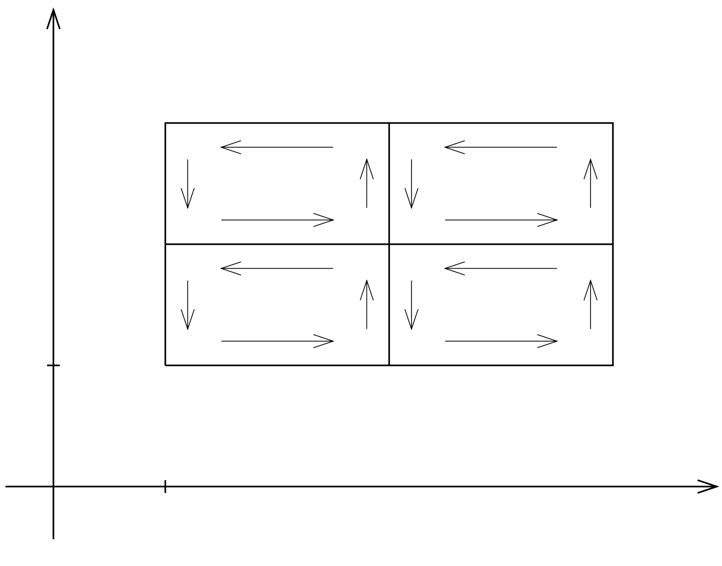
on pose

$$\delta = \frac{\left|\int_{\partial R_0} f(z)\,dz\right|}{(diam(R_0))^2} > 0$$

Supposons construit $R_{k-1}$ satisfaisant $(*)$. On considère les 4 rectangles $(R_{k,j})_{1\leq j\leq 4}$ homothétiques à $R_{k-1}$, d'intérieurs deux-à-deux disjoints et recouvrant $R_{k-1}$, obtenus en divisant en 2 parties égales les côtés de $R_{k-1}$ ; et on va montrer que l'un d'entre eux peut être pris comme $R_k$. On a $diam(R_{k,j}) = \dfrac{1}{2}diam(R_{k-1})$ et

$$\int_{\partial R_{k-1}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial R_{k,j}} f(z)\,dz$$

puisque les intégrales sur les côtés des $(R_{k,j})$ qui sont intérieurs à $R_{k-1}$ se détruisent deux-à-deux (elles apparaissent comme intégrales sur le bord de deux rectangles adjacents, avec des orientations opposées).



S aucun des 4 rectangles $R_{k,j}$ ne convenait pour être pris comme $R_k$, on aurait

$$\begin{aligned}\delta.diam(R_{k-1})^2 &\leq \left|\int_{\partial R_{k-1}} f(z)\,dz\right| \leq \sum_{j=1}^{4}\left|\int_{\partial R_{k,j}} f(z)\,dz\right| \\ &< 4\delta.diam(R_{k,1})^2 = \delta.diam(R_{k-1})^2\end{aligned}$$

et cette contradiction achève la construction par récurence. ■

Nous démontrons maintenant le théorème 13.9.1.

*i)* $\Rightarrow$ *iv)* Supposons donc $f$ holomorphe sur $U$, $\tilde{D}(a,r) \subset U$, et notons $\gamma$ le cercle de centre $a$ et de rayon $r$ orienté dans le sens direct. L'indice $I_\gamma(w)$ vaut donc 1 en tout point $w$ de $D(a,r)$. La fonction $g : z \mapsto \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w}$, quotient de deux fonctions holomorphes est holomorphe sur $U \setminus \{w\}$ et continue en $w$ puisque $f$ y est holomorphe. Donc la forme $\omega = g(z)\,dz$ est fermée sur $U \setminus \{w\}$, en vertu du lemme 13.9.3 et sur $U$ en vertu du lemme 13.3.5. Comme $U$ contient un disque ouvert de centre $a$ et de rayon $r' > r$, $\omega$ est exacte sur $D(a,r')$ et on a

$$0 = \int_\gamma \omega = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \int_\gamma \frac{f(w)}{z-w}\,dz$$

Donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{z-w} = f(w)I_\gamma(w) = f(w)$$

*iv)* $\Rightarrow$ *ii)* Supposons que $\tilde{D}(a,r) \subset U$, et posons $\varphi(\theta) = f(a + r\,\mathrm{e}^{i\theta})$ et

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,\mathrm{e}^{-ni\theta}\,d\theta$$

Il résulte du lemme 13.9.2 que la série entière $S_r(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $r$ et que, pour $w \in D(a,r)$

$$S_r(w-a) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\theta) r\,\mathrm{e}^{i\theta}}{a - w + r\,\mathrm{e}^{i\theta}}\,d\theta = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = f(w)$$

ce qui montre qu'au voisinage de $a$, $f$ se développe en série entière, c'est-à-dire que $f$ est analytique. De plus, si $D(a,r) \subset D(a,r')$ et $\tilde{D}(a,r') \subset U$, on a $S_r(z) = f(a+z) = S_{r'}(z)$ pour $|z| < r$, ce qui entraîne que $S_r$ et $S_{r'}$ coïncident. En particulier, le rayon de convergence de $S_r$ est supérieur à tout $r'$ tel que $\tilde{D}(a,r') \subset U$ ; il est donc au moins égal à la distance de $a$ au complémentaire de $U$.

*ii)* $\Rightarrow$ *i)* Ceci a été démontré au théorème 13.5.2.

*i)* $\Rightarrow$ *iii)* Ceci est exactement le lemme 13.9.3.

*iii)* $\Rightarrow$ *i)* Soient $a \in U$ et $r$ tel que $D(a,r) \subset U$. La forme fermée $f(z)\,dz$ est exacte sur le disque $D(a,r)$, donc y possède une primitive $F$, qui est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie $dF = f(z)\,dz$, c'est-à-dire $\dfrac{\partial F}{\partial y} = i\dfrac{\partial F}{\partial x}$. Donc $F$ est holomorphe sur $D(a,r)$, donc analytique puisque nous avons déjà prouvé l'équivalence de *i)* et *ii)*. Il en résulte que sa dérivée $F' = f$ est analytique, donc holomorphe sur $D(a,r)$. Ceci montre que $f$ est holomorphe en tout point de $U$. ■

## 13.10 Inégalités de Cauchy

**Théorème 13.10.1.** *Soient $f$ une fonction holomorphe sur l'ouvert $U$ de $\mathbb{C}$, $a$ un point de $U$ et $\rho$ la distance de $a$ au complémentaire de $U$. Alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\rho$ et a pour somme $f(a+z)$ si $|z| < \rho$.*

Démonstration : La fonction $f$ est analytique, et on a vu dans la démonstration du théorème 13.9.1 qu'il existe une série entière, nécessairement unique, $S(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $\geq \rho$, telle que $S(z) = f(z+a)$ si $|z| < \rho$. D'après le théorème 13.5.2, on a $S'(z) = f'(z+a)$ si $|z| < \rho$, donc par récurrence $S^{(n)}(z) = f^{(n)}(z+a)$ si $|z| < \rho$. Et puisque $S^{(n)}(0) = n!\, a_n$, on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. ■

**Théorème 13.10.2.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f$ holomorphe sur $U$ et $\tilde{D}(a,r)$ un disque compact contenu dans $U$. Si le développement de $f$ en série entière au voisinage de $a$ est $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$*

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a + r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-in\theta}\, d\theta$$

Démonstration : Ceci résulte immédiatement de la démonstration du théorème 13.9.1. ■

**Théorème 13.10.3.** *(Inégalités de Cauchy) Soit $f$ une fonction holomorphe au voisinage du disque compact $\tilde{D}(a,r)$ et bornée par $M$ sur ce disque. Alors les coefficients $(a_n)$ du développement en série entière de $f$ en $a$ vérifient*

$$|a_n| \leq M r^{-n}$$

Démonstration : Ceci résulte du théorème précédent, puisque

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left|f(a + r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right| . \left|\mathrm{e}^{-in\theta}\right|\, d\theta \leq \frac{2\pi M}{2\pi r^n}$$

**Théorème 13.10.4.** *(Liouville) Soit $f$ une fonction entière bornée. Alors $f$ est constante.*

Démonstration : Soient $(a_n)$ les coefficients du développement de $f$ en série entière en 0. Si $f$ est bornée par $M$, on a pour tout $r > 0$, en vertu des inégalités de Cauchy

$$|a_n| \leq M r^{-n}$$

ce qui entraîne $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. La série entière est donc constante, et coïncide avec $f$ sur $\mathbb{C}$. ■

**Théorème 13.10.5.** *(d'Alembert) Soit $p = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ un polynôme non constant à coefficients complexes. Alors $p$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration : Si $p$ ne s'annulait pas sur $\mathbb{C}$, la fonction $f = 1/p$ serait entière. De plus, puisque $|p(z)| \geq \dfrac{|a_d|\,|z|^d}{2}$ pour $|z|$ assez grand, on aurait $\lim_{|z|\to\infty} 1/p(z) = 0$, ce qui montre que $f$ serait bornée, donc constante par le théorème de Liouville, et contredit l'hypothèse que $p$ n'est pas constant. ■

## 13.11 Limites de fonctions holomorphes

**Théorème 13.11.1.** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $(f_n)$ est une suite de fonctions holomorphes sur $U$ qui converge uniformément sur $U$ vers une fonction $f$, la fonction $f$ est holomorphe.*

Démonstration : On voit d'abord que $f$ est continue, comme limite uniforme de fonctions continues. Pour montrer que $f$ est holomorphe, il suffit de montrer que la forme $f(z)\,dz$ est fermée, et, pour cela de montrer que, pour tout rectangle compact $R$ contenu dans $U$, on a $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$.
Puisque $R$ est convexe, il est simplement connexe, et puisque la forme $f_n(z)\,dz$ est fermée, on a $\int_{\partial R} f_n(z)\,dz = 0$. Et puisque

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial R} f(z)\,dz - \int_{\partial R} f_n(z)\,dz\right| \leq 4.diam(R)\,\|f - f_n\|$$

on conclut que $\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| = 0$. ∎

**Théorème 13.11.2.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $I$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $\varphi$ une fonction continue sur $U \times I$ telle que, pour tout $t \in I$, la fonction $z \mapsto \varphi(z,t)$ soit holomorphe. Alors la fonction*

$$z \mapsto f(z) = \int_I \varphi(z,t)\,dt$$

*est holomorphe sur $U$.*

Démonstration : Puisque $I$ est compact et $\varphi$ continue sur $U \times I$, $f$ est continue sur $U$. Pour montrer qu'elle est holomorphe, il suffit de montrer que, pour tout rectangle compact $R$ contenu dans $U$, on a $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$. Or

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_I \left(\int_{\partial R} \varphi(z,t)\ dz\right)\ dt$$

et puisque, pour tout $t$ la fonction $z \mapsto \varphi(z,t)$ est holomorphe, l'intégrale $\int_{\partial R} \varphi(z,t)\ dz = 0$. On en conclut que $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$. ∎

## 13.12 Logarithme d'une fonction

**Théorème 13.12.1.** *Soient $U$ un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction holomorphe sur $U$ qui ne s'annule pas sur $U$. Il existe alors une détermination du logarithme de $f$, c'est-à-dire une fonction holomorphe $g$ sur $U$ telle que*

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} \quad \textit{pour tout } z \textit{ de } \mathbb{C}$$

Démonstration : La fonction $f'$ est holomorphe sur $U$, donc aussi $h = \dfrac{f'}{f}$. Donc la forme différentielle $h(z)\,dz$ est fermée, et exacte puisque $U$ est simplement connexe. Si $a$ est un point de $U$, et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^{\alpha} = f(a)$, il existe une primitive $g$ de la forme $h(z)\,dz$ qui vaut $\alpha$ en $a$. Alors $g$ est holomorphe et la fonction holomorphe $\varphi$ définie par $\varphi(z) = f(z)\,\mathrm{e}^{-g(z)}$ vérifie $\varphi(a) = f(a)\,\mathrm{e}^{-\alpha} = 1$ et

$$\varphi'(z) = \mathrm{e}^{-g(z)}\big(f'(z) - f(z).\frac{f'(z)}{f(z)}\big) = 0$$

Donc $\varphi$ est constante, et partout égale à 1, ce qui signifie que $f(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$. ∎

# 14

# LE THÉORÈME DES RÉSIDUS

## 14.1 Singularités isolées

**Théorème 14.1.1.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $a$ un point de $U$ et $f$ une fonction holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. Trois cas mutuellement exclusifs peuvent se présenter :*

- *ou bien $f$ est bornée au voisinage de $a$, et $f$ se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur $U$. On dit alors que $a$ est un* point régulier *de $f$*
- *ou bien $|f(z)|$ tend vers l'infini quand $z$ tend vers $a$, et il existe un entier $k \geq 1$ et une fonction $g$ holomorphe sur $U$ tels que $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^k}$ sur $U \setminus \{a\}$. On dit alors que $a$ est un* pôle *de $f$.*
- *ou bien, pour tout voisinage $V$ de $a$ dans $U$, $f(V \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit alors que $a$ est un* point singulier essentiel *de $f$.*

Démonstration : Si $f$ est bornée au voisinage de $a$, la fonction $g$ définie sur $U$ par

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a \end{cases}$$

est continue sur $U$ et holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. Il résulte donc du lemme 13.9.3 et du théorème 13.9.1 que $g$ est analytique sur $U$. Il existe donc une série entière $S(w) = \sum a_n w^n$ telle que $g(z) = S(z-a)$ pour $|z-a|$ assez petit. On a $a_0 = g(0) = 0$. Donc, pour $z$ assez voisin de $a$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(z-a)^n$, ce qui montre qu'en prolongeant $f$ en $a$ par $\tilde{f}(a) = a_1$, la fonction $\tilde{f}$ est holomorphe sur $U$.

Si $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$, il existe un disque $D(a,r)$ contenu dans $U$ tel que $|f(z)| > 1$ en tout point de $D(a,r) \setminus \{a\}$. La fonction $h = 1/f$ est alors holomorphe et bornée sur $D(a,r) \setminus \{a\}$, donc se prolonge en une fonction $\tilde{h}$ holomorphe sur $D(a,r)$ et nulle en $a$. Il existe alors une série entière $S(w) = \sum a_n w^n$ de rayon de convergence au moins $r$ telle que, pour $z \in D(a,r)$

$$\tilde{h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Et puisque $h$ ne s'annule pas, la série $S$ n'est pas identiquement nulle. Il existe donc un plus petit entier $p$ tel que $a_p \neq 0$. et si on pose, pour $z \in D(a,r)$,

$$h_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p+n}(z-a)^n$$

on a $h_1(a) \neq 0$ et $\tilde{h}(z) = (z-a)^p h_1(z)$. Par continuité de $h_1$, il existe $r' \leq r$ tel que $h_1$ ne s'annule pas sur $D(a,r')$. Alors $g = 1/h_1$ est holomorphe sur $D(a,r')$ et on a, pour $0 < |z-a| < r'$,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$$

donc $g = (z-a)^p f(z)$ est holomorphe sur $(U \setminus \{a\}) \cup D(a,r') = U$.

Enfin, si $f$ n'est pas dans le troisième cas, il existe un disque $D(w,\rho)$ qui est disjoint de $f(V \setminus \{a\})$, pour un voisinage $V$ de $a$. Alors la fonction $g(z) = \dfrac{1}{f(z)-w}$ est bornée par $1/\rho$ sur $V \setminus \{a\}$, et se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{g}$ sur $V$. Si $\tilde{g}(a) = b \neq 0$, on voit que $\lim_{z\to a} f(z) = w + 1/b$, et $a$ est un point régulier. Si $\tilde{g}(a) = 0$, $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$, et $a$ est un pôle de $f$. ■

**Théorème 14.1.2.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $a$ un point de $U$, $f$ une fonction holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. Si $a$ est un pôle de $f$, il existe un unique polynôme $P$ nul en $0$, et une fonction $g$ holomorphe sur $U$ tels que, sur $U \setminus \{a\}$,*

$$f(z) = g(z) + P(\frac{1}{z-a})$$

*Le degré de $P$ est appelé l'*ordre *du pôle, et $P$ la* partie principale *de $f$ en $a$.*

Démonstration : D'après le théorème précédent, il existe une fonction holomorphe $g_1$ sur $U$ et un entier $k$ tels que $g_1(a) \neq 0$ et que $f(z) = \dfrac{g_1(z)}{(z-a)^k}$. Alors, si $D(a,r) \subset U$, si $S(w) = \sum a_n w^n$ est le développement de $g_1$ en série entière en $a$, et si on note

$$P(X) = \sum_{j=1}^{k} a_{k-j} X^j$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-a)^n$$

on a

$$g(z) + P(\frac{1}{z-a}) = \frac{g_1(z)}{(z-a)^k} = f(z)$$

pour $0 < |z-a| < r$.

Si $Q$ était un autre polynôme avec les mêmes propriétés, la fonction $z \mapsto (P-Q)(\dfrac{1}{z-a})$ serait bornée au voisinage de $a$, c'est-à-dire que le polynôme $P-Q$ serait borné au voisinage de l'infini, ce qui n'est possible que si $P-Q$ est une constante. Et comme $P(0) = Q(0) = 0$, cette constante serait nulle. ■

## 14.2 Fonctions méromorphes

**Définition 14.2.1.** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle fonction méromorphe sur $U$ un couple $(f, E)$ où $E$ est une partie fermée discrète de $U$, et $f$ une fonction holomorphe sur $U \setminus E$ pour laquelle tout point de $E$ est un point régulier ou un pôle.*

On convient d'identifier deux fonctions méromorphes $(f, E)$ et $(f_1, E_1)$ qui ont même restriction à $U \setminus (E \cup E_1)$.

**Théorème 14.2.2.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction méromorphe sur $U$. Alors les pôles de $f'$ sont ceux de $f$. De plus, si $a$ est un pôle de $f$ d'ordre $k$, $a$ est un pôle d'ordre $k+1$ de $f'$.*

Démonstration : Soit $E$ un ensemble fermé discret de $U$ tel que $f$ soit holomorphe sur $U \setminus E$. Alors $f'$ est holomorphe sur $U \setminus E$. Et si $a \in E$ est un pôle d'ordre $k$ de $f$, il existe $g$, holomorphe sur un voisinage $V$ de $a$, non nulle en $a$, telle que, sur $V \setminus \{a\}$,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$$

Alors, sur $V \setminus \{a\}$, on a

$$f'(z) = \frac{(z-a)^k g'(z) - k(z-a)^{k-1}g(z)}{(z-a)^{2k}} = \frac{(z-a)g'(z) - kg(z)}{(z-a)^{k+1}} = \frac{h(z)}{(z-a)^{k+1}}$$

ce qui montre que $a$ est un pôle d'ordre $k+1$ puisque $h(a) = -kg(a) \neq 0$. ■

**Théorème 14.2.3.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f_1$ et $f_2$ des fonctions méromorphes sur $U$. Alors, $f_1 + f_2$ et $f_1.f_2$ sont méromorphes sur $U$. De plus, si $U$ est connexe et $f_2$ non identiquement nulle, $\dfrac{f_1}{f_2}$ est méromorphe sur $U$.*

Démonstration : Si $E_1$ et $E_2$ sont discrets fermés dans $U$ et si $f_j$ est holomorphe sur $U \setminus E_j$ pour $j = 1, 2$, l'ensemble $E = E_1 \cup E_2$ est discret fermé, et sur $U \setminus E$, $f_1 + f_2$ et $f_1.f_2$ sont holomorphes. Pour tout $a$ de $E$ existent deux entiers $k_1$ et $k_2$ tels que $(z-a)^{k_1} f_1$ et $(z-a)^{k_2} f_2$ soient bornées au voisinage de $a$. Alors $(z-a)^{k_1+k_2}(f_1+f_2)$ et $(z-a)^{k_1+k_2}(f_1.f_2)$ sont bornées au voisinage de $a$, ce qui montre que $a$ est un point régulier ou un pôle pour $f_1 + f_2$ et $f_1.f_2$. Ces deux fonctions sont donc méromorphes.
Si $U$ est connexe et $f_2$ non identiquement nulle, l'ensemble $Z$ des zéros de $f_2$ est discret fermé dans $U \setminus E_2$. Et puisque chaque point $a$ de $E_2$ est pour $f_2$ un point régulier ou un pôle, $a$ ne peut être point d'accumulation de $Z$. Donc $E_2' = E_2 \cup Z$ est discret fermé et $f_2$ ne s'annule pas sur $U \setminus E_2'$. Il en résulte que $1/f_2$ est holomorphe sur $U \setminus E_2'$ et admet en chaque point de $E_2'$ une limite finie ou infinie. Donc $1/f_2$ est méromorphe sur $U$, de même que $\dfrac{f_1}{f_2} = f_1.\dfrac{1}{f_2}$. ■

**Corollaire 14.2.4.** *Sur un ouvert connexe, les fonctions méromorphes forment un corps.*

**Définition 14.2.5.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f$ une fonction méromorphe sur $U$ et $a$ un pôle de $f$. On appelle* résidu *de $f$ en $a$ et on note* $\mathrm{Res}(f, a)$ *le coefficient de $\dfrac{1}{z-a}$ dans la partie principale de $f$ en $a$.*

**Théorème 14.2.6.** *Soient $U$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$, $f$ et $g$ deux fonctions holomorphes sur $U$. On suppose que $g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$. Alors $a$ est un point régulier de* *la fonction méromorphe* $\frac{f}{g}$ *si* $f(a) = 0$ *et un pôle simple (c'est-à-dire d'ordre 1), de résidu* $\frac{f(a)}{g'(a)}$ *si* $f(a) \neq 0$.

Démonstration : Puisque $g'(a) \neq 0$, $g$ n'est pas identiquement nulle. Donc $\frac{f}{g}$ est méromorphe. De plus, la fonction $g_1(z) = \frac{g(z) - g(a)}{z - a}$, prolongée par $g_1(a) = g'(a)$ est holomorphe et non nulle au voisinage de $a$. La fonction $\frac{f}{g_1}$, qui est holomorphe au voisinage de $a$ s'écrit donc

$$\frac{f}{g_1} = \frac{f(a)}{g'(a)} + (z - a)h(z)$$

où $h$ est holomorphe au voisinage de $a$. On en déduit :

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{f(z)}{g_1(z)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{f(a)}{g'(a)} + h(z)$$

ce qui prouve le résultat cherché. ■

## 14.3 Le théorème des résidus

**Théorème 14.3.1.** *Soient* $U$ *un ouvert de* $\mathbb{C}$, $f$ *une fonction méromorphe sur* $U$, $\gamma$ *un lacet dans* $U$ *homotope dans* $U$ *à un lacet constant et ne passant par aucun pôle de* $f$. *Alors, si* $A$ *désigne l'ensemble des pôles de* $f$, *on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a \in A} \mathrm{Res}(f, a) I_\gamma(a)$$

*la somme ci-dessus ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls.*

Démonstration : Soit $h : [a, b] \times [0, 1] \to U$ une homotopie dans $U$ entre $\gamma$ et un lacet constant $\gamma_0$. Pour tout $w$ hors du compact $X = h([a, b] \times [0, 1])$, $\gamma$ est homotope par $h$ à $\gamma_0$ dans $\mathbb{C} \setminus \{w\}$. Il en résulte que

$$I_\gamma(w) = I_{\gamma_0}(w) = 0$$

Et comme $A$ est discret fermé, $A \cap X$ est discret compact, donc fini. Il en résulte que $\mathrm{Res}(f, a) I_\gamma(a)$ est nul sauf pour un nombre fini de $a \in A$.

Soit $P_a$ la partie principale de $f$ en $a$. On pose $R = \sum_{a \in A \cap X} P_a$. Alors $f - R$ est méromorphe et n'a pas de pôle sur $X$. Il existe donc une fonction holomorphe $g$ sur un voisinage ouvert $V$ de $X$ dont la restriction à $V \setminus A$ est $f - R$. Et comme $\gamma$ est homotope à $\gamma_0$ dans $V$, on a

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_{\gamma_0} g(z)\,dz = 0$$

De plus, pour $k \geq 2$, on a

$$\frac{dz}{(z-a)^k} = d\left(\frac{1}{(1-k)(z-a)^{k-1}}\right)$$

d'où résulte que

$$F_a(z)\,dz = \left(P_a(z) - \frac{\operatorname{Res}(f,a)}{z-a}\right)\,dz$$

est une forme exacte sur $U \setminus \{a\}$ et que $\int_\gamma F_a(z)\,dz = 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\,dz + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma R(z)\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma R(z)\,dz \\
&= \sum_{a\in A\cap X} \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma F_a(z)\,dz + \sum_{a\in A\cap X} \operatorname{Res}(f,a)\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \\
&= \sum_{a\in A\cap X} \operatorname{Res}(f,a) I_\gamma(a)
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ■

En particulier, si $U$ est simplement connexe, la condition d'homotopie est automatiquement vérifiée. Usuellement, on applique ce théorème en prenant pour $\gamma$ un lacet simple, c'est-à-dire sans point double. Nous admettrons sans démonstration le résultat suivant, qui est clair dans les cas usuels où $\gamma$ est constitué d'arcs de cercle et de segments de droite :

**Théorème 14.3.2.** *(Jordan) Si $\gamma$ est un lacet simple dans $\mathbb{C}$, d'image $L$, l'ouvert $\mathbb{C} \setminus L$ possède deux composantes connexes. L'une d'entre elles est bornée dans $\mathbb{C}$ et l'indice par rapport à $\gamma$ y vaut $1$ ou $-1$ (suivant l'orientation de $\gamma$). L'autre est non bornée et l'indice y est nul.*

On en déduit le résultat suivant.

**Théorème 14.3.3.** *Soient $U$ un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $f$ une fonction méromorphe sur $U$, $\gamma$ un lacet simple dans $U$ orienté dans le sens positif et ne passant par aucun pôle de $f$. Alors, si $B$ est l'ensemble des pôles de $f$ contenus dans la composante connexe bornée, on a*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in B} \operatorname{Res}(f,a)$$

## 14.4 Calculs d'intégrales

**Exemple 14.4.1.** *Calcul, pour $t \geq 0$, de*

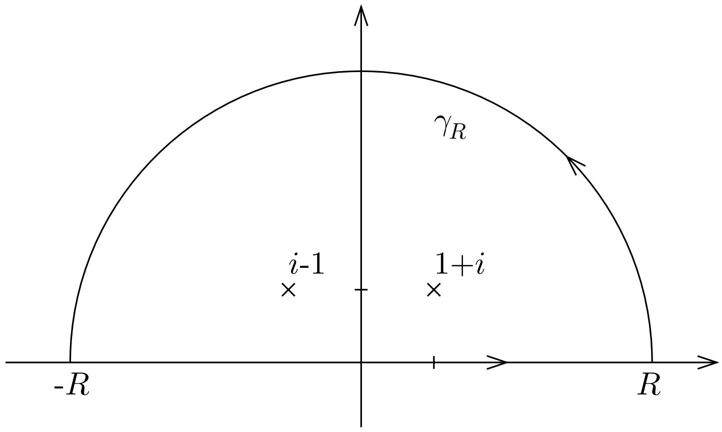
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}\, dx}{x^4+4}$$

On considère, pour $R > 2$, le lacet simple $\gamma_R$ formé par le demi-cercle supérieur de centre 0 et le diamètre horizontal. La composante connexe bornée est ici le demi-disque supérieur, qui contient deux des quatre pôles de la fonction $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{itz}}{z^4+4}$, les points $i+1$ et $i-1$. Les résidus se calculent par la méthode du théorème 14.2.6 et valent respectivement $\dfrac{\mathrm{e}^{t(i-1)}}{4(i+1)^3}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{t(-i-1)}}{4(i-1)^3}$. On a donc :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{4}\left[\frac{(i+1)\,\mathrm{e}^{it}}{(i+1)^4} + \frac{(i-1)\,\mathrm{e}^{-it}}{(i-1)^4}\right]$$

d'où

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \frac{\pi\,\mathrm{e}^{-t}}{4}(\sin t + \cos t)$$




Si on paramètre le demi-cercle par $\gamma(t) = R\,\mathrm{e}^{is}$, pour $0 \leq s \leq \pi$, l'intégrale le long du demi-cercle vaut :

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{itR\,\mathrm{e}^{is}}}{R^4\,\mathrm{e}^{4is}+4} iR\,\mathrm{e}^{is}\, ds$$

et, puisque $\left|\mathrm{e}^{iR\,\mathrm{e}^{is}}\right| \leq 1$, se majore en module par

$$\int_0^{\pi} \frac{R\,ds}{R^4-4} = \frac{\pi R}{R^4-4}$$

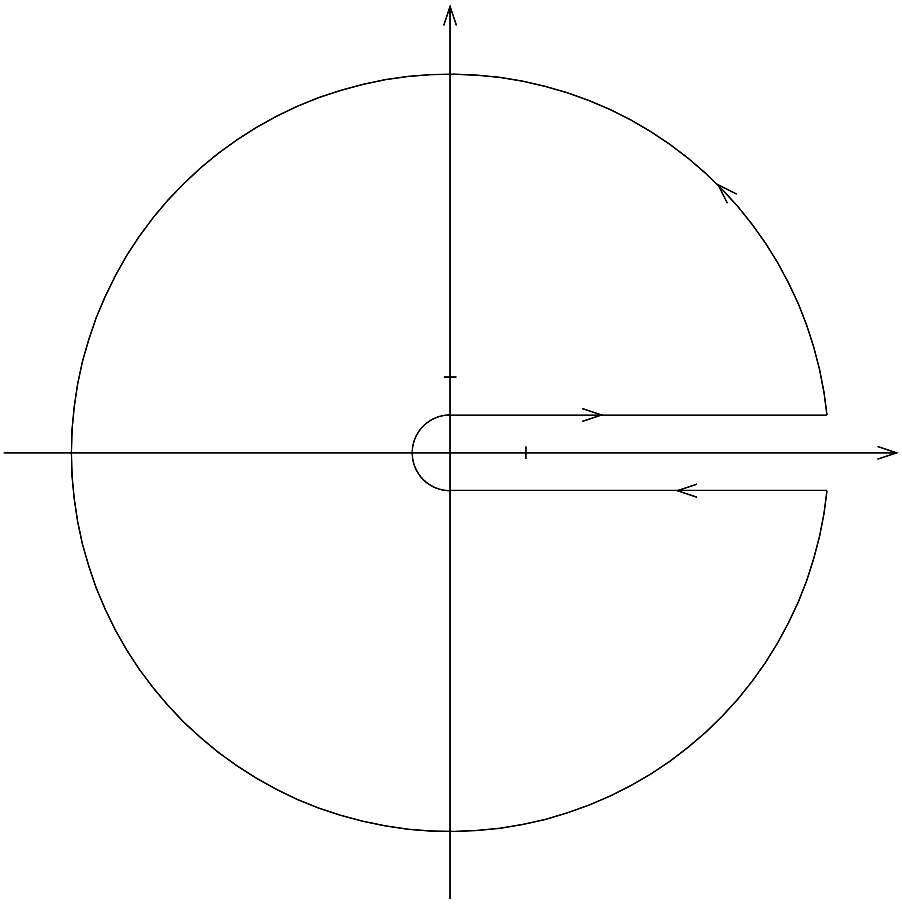
qui tend vers 0 quand $R \to \infty$. L'intégrale sur le diamètre vaut $\displaystyle\int_{-R}^{+R} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{x^4+4}$. Par passage à la limite quand $R \to \infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}\, dx}{x^4+4} = \frac{\pi\,\mathrm{e}^{-t}}{4}(\sin t + \cos t)$$

**Exemple 14.4.2.** *Calcul de*

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^3}\,dx$$

Sur la bande $V = \{z = x + iy : 0 < y < 2\pi\}$, l'application exponentielle est un homéomorphisme holomorphe sur son image $U = \{z : z \notin \mathbb{R}^+\}$. L'application réciproque est une détermination continue du logarithme, que nous noterons ici log. Puisque $V$ est convexe, il est simplement connexe, et $U$, qui lui est homéomorphe, l'est aussi. Alors, sur $U$, la fonction $f(z) = \dfrac{(\log z)^2}{(z+1)^3}$ est méromorphe. On considère le lacet $\gamma_n$ composé du demi-cercle de rayon $1/n$ centré à l'origine et situé dans le demi-plan $\{z : \Re e\, z \leq 0\}$, des segments de droite horizontaux d'ordonnée $1/n$ et $-1/n$ entre les abscisses 0 et $n$, et de l'arc de cecle centré en 0 et de rayon $r = \sqrt{n^2 + 1/n^2}$ joignant les points $n + i/n$ et $n - i/n$ dans $V$.



Le seul pôle de $f$ est $-1$. En utilisant le développement de Taylor du logarithme en $-1$, on trouve

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, -1) &= \frac{1}{2}\big(\log^2\big)''(-1)\\ &= \big(\frac{\log(z)}{z}\big)'(-1) = 1 - i\pi\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $\log z = \log|z| + i\theta$ avec $0 < \theta < 2\pi$, d'ou $|\log z|^2 \leq \log^2(|z|) + 4\pi^2$. Donc la fonction $f$ se majore en module sur le demi-cercle de rayon $1/n$ par

$$|f(z)| \leq \frac{(\log^2 n) + 4\pi^2}{(1 - \frac{1}{n})^3}$$

et sur le cercle de rayon $r$ par

$$|f(z)| \leq \frac{(\log^2 r) + 4\pi^2}{(r-1)^3}$$

Les contributions des arcs de cercle à l'intégrale sont donc majorées respectivement par

$$\frac{\pi}{n} \frac{(\log^2 n) + 4\pi^2}{(1 - \frac{1}{n})^3}$$

et

$$2\pi r \frac{(\log^2 r) + 4\pi^2}{(r-1)^3}$$

et tendent vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. Les intégrales sur les deux segments de droite tendent respectivement vers $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(x+1)^3}\,dx$ pour celui qui est d'ordonnée positive et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x + 2i\pi)^2}{(x+1)^3}\,dx$ pour celui qui est d'ordonnée négative.
En passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient donc

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(x+1)^3}\,dx - \int_0^\infty \frac{(\log x + 2i\pi)^2}{(x+1)^3}\,dx = 2i\pi(1 - i\pi)$$

donc, puisque $(\log x)^2 - (\log x + 2i\pi)^2 = -4i\pi \log x + 4\pi^2$,

$$\int_0^\infty \frac{-4i\pi \log x + 4\pi^2}{(x+1)^3}\,dx = 2\pi^2 + 2i\pi$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^3}\,dx = -\frac{1}{2}$$

**Théorème 14.4.3.** *(H. Delange) Soit $f$ une fonction réelle sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, bornée sur $\mathbb{R}$ par 1, ainsi que toutes ses dérivées, et telle que $f'(0) = 1$. Alors $f$ est la fonction sinus.*

Démonstration : Si on pose, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

cette série entière a un rayon de convergence infini, et sa somme est une fonction entière. La formule de Taylor-Lagrange (théorème 8.8.1) montre que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, puisque $F$ est analytique, on a

$$\begin{aligned}|F(x+iy)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} f^{(n)}(x)\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y|^n}{n!} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y|^n}{n!} \leq \mathrm{e}^{|y|}\end{aligned}$$

On pose $\cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz})$ et on prend $a \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors la fonction

$$g(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^2 \cos z}$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Si $K_n$ est le carré de sommets $\pm n\pi \pm in\pi$ et si on prend comme lacet le bord de $K_n$, les pôles de $g$ intérieurs à $K_n$ sont $a$ et les points $\pi/2 + k\pi$, avec $-n \leq k < n$. Un calcul simple montre que le résidu au pôle double $a$ vaut $\frac{d}{da}(\frac{F(a)}{\cos a})$ et la méthode de 14.2.6 montre que le résidu en $\pi/2 + k\pi$ vaut

$$\mathrm{Res}(f, \frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^{k+1} \frac{F(\pi/2 + k\pi)}{(\pi/2 + k\pi - a)^2}$$

Donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K_n} g(z)\, dz = \frac{d}{da}(\frac{f(a)}{\cos a}) + \sum_{k=-n}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{f(\pi/2 + k\pi)}{(\pi/2 + k\pi - a)^2}$$

Puisque

$$|cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x$$

on vérifie que $|cos(x+iy)| \geq \frac{\mathrm{e}^{|y|}}{3}$ sur $\partial K_n$, d'où

$$\left|\int_{\partial K_n} g(z)\, dz\right| \leq 3 \frac{8n\pi}{(n\pi - |a|)^2} \to 0$$

Et, en passant à la limite quand $n \to \infty$

$$\frac{d}{da}(\frac{f(a)}{\cos a}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{f(\pi/2 + k\pi)}{(\pi/2 + k\pi - a)^2}$$

En particulier, la fonction sinus vérifie les conditions imposées à $f$. On en déduit, en posant $a = 0$, que

$$1 = \frac{d}{dx} \operatorname{tg}(0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sin(\pi/2 + k\pi)}{(\pi/2 + k\pi)^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\pi/2 + k\pi)^2}$$

Alors
$$0 = 1 - f'(0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^k f(\pi/2 + k\pi)}{(\pi/2 + k\pi)^2}$$
et puisque $1 - (-1)^k f(\pi/2 + k\pi) \geq 0$ pour tout $k$, on doit avoir
$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad (-1)^k f(\pi/2 + k\pi) = 1$$
On en tire, pour $a \in ] - \pi/2, \pi/2[$,
$$\frac{d}{da}(\frac{f(a)}{\cos a}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\pi/2 + k\pi - a)^2} = \frac{d}{da}(\frac{\sin a}{\cos a})$$
ce qui entraîne $f(a) = \sin a + \lambda \cos a$, avec $\lambda$ constant. Donc, pour $a = \pi/2$, on doit avoir $f(a) = 1$ et $f'(a) = -\lambda$. Mais comme $f$ est bornée par 1, $f$ atteint son maximum en $a$, et $\lambda = 0$. On a donc $f(x) = \sin x$, sur $] - \pi/2, \pi/2[$, et en tout point de $\mathbb{R}$ puisque $f$ est analytique. ■

## 14.5 Dérivée logarithmique

**Théorème 14.5.1.** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Si la fonction holomorphe $f$ sur $U$ n'est nulle identiquement au voisinage d'aucun point, $\frac{f'}{f}$ est méromorphe et a pour pôles les zéros de $f$, avec comme résidus les ordres de ces zéros.*

Démonstration : Puisque $f$ et $f'$ sont holomorphes, et que $f$ n'est identiquement nulle au voisinage d'aucun point, $\frac{f'}{f}$ est méromorphe et n'a de pôles qu'aux zéros de $f$. Si $f$ s'annule en $a$, il existe un entier $k$, l'ordre de $a$, et une fonction holomorphe $g$ non nulle en $a$ telle que $f(z) = (z - a)^k g(z)$. On a alors
$$f'(z) = (z - a)^k g'(z) + k(z - a)^{k-1} g(z)$$
donc
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$
ce qui montre que $a$ est pôle simple de $\frac{f'}{f}$ et que le résidu en $a$ vaut $k$, puisque $\frac{g'}{g}$ est holomorphe au voisinage de $a$. ■

**Corollaire 14.5.2.** *Si $f$ est holomorphe sur l'ouvert $U$, $\tilde{D}(a, r)$ un disque compact contenu dans $U$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ qui n'appartient pas à l'image par $f$ du cercle $C(a, r)$ de centre $a$ et de rayon $r$, la valeur $\lambda$ est prise par $f$ sur $D(a, r)$ si et seulement si*
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f'(z)\, dz}{f(z) - \lambda} \neq 0$$

Démonstration : En effet l'intégrale ci-dessus est la somme des résidus des pôles de $\dfrac{f'(z)}{f(z)-\lambda}$ contenus dans $D(a,r)$, c'est-à-dire le nombre de zéros de $f-\lambda$ comptés chacun avec leur multiplicité. ■

Plus généralement, on a le résultat suivant :

**Théorème 14.5.3.** *Si la fonction méromorphe $f$ n'est identiquement nulle au voisinage d'aucun point de l'ouvert $U$, $h = \dfrac{f'}{f}$ est méromorphe sur $U$ et admet pour pôles les zéros et les pôles de $f$. En un zéro de $f$ d'ordre $k$, le résidu de $h$ vaut $k$, et en un pôle d'ordre $k$ de $f$ , le résidu de $h$ vaut $-k$.*

Démonstration : Puisque $f$ et $f'$ sont méromorphes, et que $f$ ne s'annule identiquement au voisinage d'aucun point, $h$ est méromorphe. Les pôles de $h$ sont nécessairement des zéros de $f$ ou des pôles de $f'$, c'est-à-dire des pôles de $f$. En un tel point $a$, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ et une fonction $g$, holomorphe et non nulle sur un voisinage de $a$, tels que $f(z) = (z-a)^k g(z)$. On a alors comme précédemment :

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

et puisque $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ est holomorphe au voisinage de $a$, on obtient que $a$ est un pôle simple de $h$ et que le résidu en $a$ vaut $k$. ■

**Théorème 14.5.4.** *Soient $U$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction holomorphe non constante sur $U$. Alors $f$ est ouverte, c'est-à-dire que l'image de tout ouvert de $U$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Démonstration : Il suffit de montrer que si $\tilde{D}(a,r) \subset U$, il existe un disque de centre $f(a)$ dans l'image de $D(a,r)$. Puisque $f$ n'est pas constante et que $U$ est connexe, la fonction $z \mapsto f(z)-f(a)$ ne s'annule qu'en $a$ sur un disque $D(a,\rho)$, pour un $\rho < r$. Si $C(a,\rho)$ est alors le cercle de centre $a$ et de rayon $\rho$, l'image par $f$ de $C(a,\rho)$ est un compact ne contenant pas $f(a)$. Il existe donc un $\delta > 0$ tel que $D(f(a),\delta) \cap f(C(a,\rho)) = \emptyset$.
Soit alors $w \in D(f(a),\delta)$. Notons $\gamma$ le lacet circulaire : $t \mapsto a+\rho\, \mathrm{e}^{it}$, pour $t \in [0,2\pi]$. Puisque $\gamma$ ne passe par aucun zéro de la fonction $z \mapsto f(z)-w$, l'intégrale

$$N(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}$$

est la somme des résidus de $\dfrac{f'(z)}{f(z)-w}$ situés dans le disque $D(a,\rho)$, c'est-à-dire la somme des multiplicités des zéros de $f(z)-w$ situés dans $D(a,\rho)$. C'est aussi l'indice de $w$ par rapport au lacet $f\circ\gamma$, qui est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus f\circ\gamma([0,2\pi]) = \mathbb{C} \setminus f(C(a,\rho))$, donc en particulier sur $D(f(a),\delta)$.
Il en résulte que si $w \in D(f(a),\delta)$ on a $N(w) = N(a) > 0$, donc que l'équation $f(z) = w$ a au moins une racine dans $D(a,\rho)$. ■

Plus précisément, si $a$ est un zéro d'ordre $n$, on a $N(a) = n$. Quitte à réduire $\rho$ (et donc $\delta$) on peut supposer que $f'$ ne s'annule pas dans $D(a,\rho)\setminus\{a\}$, et donc que les racines de l'équation $f(z) = w$ pour $w \in D(f(a),\delta) \setminus \{f(a)\}$ sont toutes simples. Alors, puisque $N(w) = n$, on voit que l'équation $f(z) = w$ a exactement $n$ racines simples distinctes dans $D(a,\rho)$.
On démontre de façon semblable le résultat suivant :

**Théorème 14.5.5.** *Si $f$ est une fonction méromorphe sur l'ouvert connexe $U$, si $\gamma$ est un lacet simple orienté positivement dans $U$, limitant une composante connexe bornée $\Delta$ contenue dans $U$ et si $\gamma$ ne passe par aucun zéro ni aucun pôle de $f$, l'intégrale*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

*est le nombre de zéros de $f$ dans $\Delta$ diminué du nombre de pôles dans $\Delta$.*

**Définition 14.5.6.** *Une fonction holomorphe sur un ouvert $U$ est dite* univalente *si elle est injective.*

**Théorème 14.5.7.** *Si $f$ est une fonction holomorphe univalente sur l'ouvert $U$, $f$ est un homéomorphisme de $U$ sur $f(U)$ et $f^{-1}$ est holomorphe.*

Démonstration : En effet, $f$ est bijective, continue et ouverte de $U$ sur $f(U)$, donc est un homéomorphisme. De plus $f'$ ne peut s'annuler sur $U$. En effet, si $f'(a) = 0$, on a vu que l'équation $f(z) = w$ a, pour $w$ voisin de $a$, un nombre de racines supérieur ou égal à 2, ce qui contredit l'univalence de $f$.
Donc $f^{-1}$ est holomorphe, d'après le théorème 13.6.5. ■

# 15

# ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

Le but de ce chapitre est de rappeler les principaux résultats concernant les ensembles dénombrables qui sont utilisés dans ce cours. Ils sont essentiellement donnés ici à titre de référence.

## 15.1 L'ensemble des entiers

On suppose connu l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers. C'est un ensemble totalement ordonné infini, possédant un plus petit élément, 0, et dans lequel tout élément $n$ vérifie que $\{p \in \mathbb{N} : p < n\}$ est fini. Une de ses propriétés fondamentales est la suivante :

**Proposition 15.1.1.** *Toute partie non vide de* $\mathbb{N}$ *possède un plus petit élément.*

En particulier, pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\{p : p > n\}$ est non vide et possède un plus petit élément noté $n + 1$, le successeur de $n$. On en déduit aisément le principe de récurrence.

**Principe 15.1.2.** *(Récurrence) Si $A$ est une partie de* $\mathbb{N}$ *contenant* $0$ *et telle que*

$$n \in A \quad \Longrightarrow \quad n+1 \in A$$

*alors $A = \mathbb{N}$.*

Démonstration : Si $A \neq \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{N} \setminus A$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, et possède donc un plus petit élément $m$. Puisque $0 \in A$, l'ensemble $\{p : p < m\}$ est fini et non vide, donc possède un plus grand élément $n$. On a alors nécessairement $n+1 = m$. Puisque $n < m$, on a $n \in A$, et puisque $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$, on a $m \in A$, contrairement à la définition de $m$. ■

**Exemple 15.1.3.** *Si $f$ est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*, on a $f(n) \geq n$ pour tout entier $n$.*

Démonstration : Soit $A = \{n : f(n) \geq n\}$. On a $f(0) \geq 0$, donc $0 \in A$. Et si $n \in A$, c'est-à-dire $f(n) \geq n$, on a

$$f(n+1) > f(n) \geq n$$

donc $f(n+1) > n$ et enfin $f(n+1) \geq n+1$, c'est-à-dire $n+1 \in A$. On en conclut que $A = \mathbb{N}$, donc que $f(n) \geq n$ pour tout $n$. ■

## 15.2 Dénombrabilité

**Définition 15.2.1.** *Un ensemble $E$ est dit* dénombrable *s'il est en bijection avec une partie de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers.*

Il est clairement équivalent de définir un ensemble $E$ comme dénombrable s'il existe une injection de $E$ dans $\mathbb{N}$. En effet, si $j$ est une injection de $E$ dans $\mathbb{N}$, $j$ est une bijection de $E$ sur $j(E) \subset \mathbb{N}$.

**Théorème 15.2.2.** *Si $E$ est dénombrable et infini, il est en bijection avec $\mathbb{N}$.*

Démonstration : Il suffit de montrer qu'une partie $A$ infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. On définit pour cela par récurrence pour tout entier $n$ un entier $a_n \in A$ par

$$\begin{aligned} a_0 &= \min(A) \\ a_{n+1} &= \min\{m \in A : m > a_n\} \end{aligned}$$

Puisque $A$ est infini, l'ensemble $\{m \in A : m > a_n\}$ est non vide pour tout $n$ et l'entier $a_{n+1}$ bien défini. Alors la fonction $f$ de $\mathbb{N}$ dans $A$ définie par $f(n) = a_n$ est strictement croissante, donc injective. De plus, si $f$ n'était pas surjective, l'ensemble $A \setminus f(\mathbb{N})$ possèderait un plus petit élément $b > a_0$, et puisque $f(b) \geq b$, l'ensemble non vide $\{n : f(n) \geq b\}$ possèderait un plus petit élément $p > 0$. Alors on aurait $p = q+1$, $a_q < b$ et

$$\min\{a \in A : a > a_q\} = a_{q+1} = a_p > b$$

bien que $b \in \{a \in A : a > a_q\}$. Cette contradiction achève la démonstration. ■

**Théorème 15.2.3.** *Un ensemble non vide $E$ est dénombrable si et seulement s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur $E$.*

Démonstration : Supposons d'abord qu'il existe une surjection $g$ de $\mathbb{N}$ sur $E$. Alors, pour tout $x \in E$, l'ensemble $g^{-1}(x)$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc possède un plus petit élément $f(x)$. Alors la fonction $f : E \to \mathbb{N}$ est clairement injective puisque si $f(x) = f(y)$, on a $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$. Et ceci montre que $E$ est dénombrable.
Inversement, si $E$ est non vide et dénombrable, on peut choisir une injection $j$ de $E$ dans $\mathbb{N}$ et un élément $x^*$ de $E$. Alors la fonction $g$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$g(n) = \begin{cases} j^{-1}(n) & \text{si } n \in j(E) \\ x^* & \text{si } n \notin j(E) \end{cases}$$

est une surjection de $\mathbb{N}$ sur $E$. ■

**Corollaire 15.2.4.** *Soient $E$ et $F$ deux ensembles, et $f$ une surjection de $E$ sur $F$. Si $E$ est un ensemble dénombrable, $F$ est dénombrable.*

Démonstration : Si $E$ est vide, $F$ aussi est vide, donc dénombrable. Sinon il existe une surjection $g$ de $\mathbb{N}$ sur $E$, et $f \circ g$ est alors une surjection de $\mathbb{N}$ sur $F$. ■

**Théorème 15.2.5.** *L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.*

Démonstration : L'application $\varphi$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\varphi(n, k) = (2n + 1).2^k - 1$$

est une bijection puisque tout nombre entier non nul se décompose de façon unique en produit d'un nombre impair et d'une puissance de 2. ■

**Corollaire 15.2.6.** *Le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable.*

Démonstration : Soient $E$ et $F$ deux ensembles dénombrables, $f$ et $g$ des surjections de $\mathbb{N}$ sur $E$ et $F$ respectivement. Alors l'application $f \times g$ définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par

$$(f \times g)(n, k) = (f(n), g(k))$$

est surjective sur $E \times F$, ce qui montre que $E \times F$ est dénombrable puisque $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'est. ■

**Corollaire 15.2.7.** *L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels sont dénombrables.*

Démonstration : La fonction $f$ définie sur $\mathbb{Z}$ par

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n - 1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

est bijective de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$. Donc $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
L'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers strictement positifs est une partie de $\mathbb{N}$ donc est dénombrable, ainsi que le produit $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et l'image de ce dernier par l'application $(n, p) \mapsto \dfrac{n}{p}$. Ceci montre que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. ■

**Théorème 15.2.8.** *Pour tout entier $k \geq 1$, l'ensemble $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.*

Démonstration : Ceci se vérifie par récurrence. C'est vrai, par définition, si $k = 1$. Et si $\mathbb{N}^k$ est dénombrable, $\mathbb{N}^{k+1}$ est le produit de $\mathbb{N}^k$ et de $\mathbb{N}$, donc est dénombrable. ■

**Théorème 15.2.9.** *Si $(E_j)_{j \in D}$ est une famille dénombrable d'ensembles dénombrables, leur réunion $E = \bigcup_{j \in D} E_j$ est dénombrable.*

Démonstration : Puisque $D$ est dénombrable, il existe une surjection $\varphi$ de $\mathbb{N}$ sur $D$. Et puisque $E_j$ est dénombrable pour tout $j \in D$, il existe pour tout $n$ une surjection $f_n$ de $\mathbb{N}$ sur $E_{\varphi(n)}$. On peut alors définir l'application $g$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par : $g(n, k) = f_n(k)$. Et on a clairement

$$g(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \bigcup_{j \in D} E_j = E$$

ce qui montre que $E$ est dénombrable. ■

# Index des définitions

# Table des Matières