

# Análisis Numérico - TP 1

## Ecuaciones no lineales en sistemas mecánicos

Rocío Gallo, padrón 97490 (rochimgg@gmail.com)

Facundo Monpelat, padrón 92716 (facundo.monpelat@gmail.com)

27 de abril de 2019

## 1. Introducción

El siguiente trabajo práctico consiste en la resolución de un sistema mecánico de dos resortes de longitud natural  $L_0$  unidos a una masa puntual de valor  $m$ . La distancia entre el extremo fijo de cada resorte y el eje vertical por el cual pasa la masa será de valor  $a$ .

El número de padrón utilizado para efectuar el calculo de  $L_0$  será el de Rocío Gallo (97490). Para efectuar los cálculos, se redondearán los datos a tres decimales.

## 2. Objetivos

- Experimentar con el uso de métodos numéricos la resolución de ecuaciones no lineales.
- Integrar conocimientos de mecánica.

## 3. Desarrollo

Los valores de los parámetros contemplando el padrón serán los siguientes:

Propiedades de los resortes	$L_0$ [m]	2,052
	$k$ [N/m]	10
Masa de referencia	$m_0$	1,026
Geometría	$a$ [m]	1

### I. Ejercicio 1

El objetivo es encontrar los puntos de equilibrio del sistema sin tener en cuenta el efecto de la gravedad. Como en un punto de equilibrio  $F_{Res} = 0$  y con  $m = 0$ , se puede despejar fácilmente la variable  $y$ , y dejarla en función de las demás incógnitas.

Caso inicial

$$F_{Res}(y) = -2Ky \left( 1 - \frac{L_0}{\sqrt{Y^2 + a^2}} \right) - mg$$

Como  $a < L_0$  nos encontramos en el caso en el cual el sistema tiene tres puntos de equilibrio: Dos estables y uno inestable en el eje horizontal, del cual están fijados los resortes.

Despejando  $y$  de la ecuación de fuerza

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1 = 0 & \text{Equilibrio inestable} \\ y_2 = \sqrt{L_0^2 - a^2} & \text{Equilibrio estable} \\ y_3 = -\sqrt{L_0^2 - a^2} & \text{Equilibrio estable} \end{array} \right.$$

Analizaremos el caso de la raíz positiva de la ecuación de  $F_{Res}$  con los métodos numéricos de Bisección, Punto fijo y Newton-Raphson.

Como para el caso particular  $m = 0$ , los puntos de equilibrio fueron encontrados de manera analítica, se puede calcular el error de truncamiento de  $y(L_0, a)$

Por teoría de dispersión de errores

$$\Delta(y) = \left| \frac{\partial y}{\partial L_0} \right| \Delta(L_0) + \left| \frac{\partial y}{\partial a} \right| \Delta(a)$$

Suponiendo que  $a$  no tiene error, por ser dato del enunciado

$$\Delta(y) = \left| \frac{\partial y}{\partial L_0} \right| \Delta(L_0) = \left| \frac{\partial}{\partial L_0} \left( \sqrt{L_0^2 - a^2} \right) \right| \Delta(L_0) = \left| \frac{\mathfrak{L}L_0}{\mathfrak{L}\sqrt{L_0^2 - a^2}} \right|$$

Remplazando con los datos

$$\Delta(y) = \left| \frac{2,052}{\sqrt{2,052^2 + 1^2}} \right| 0,001 = 0,001145... m \Rightarrow \text{Error debido al redondeo de } L_0$$

Por métodos numéricos, la raíz positiva hallada con una diferencia relativa menor a  $0,510^{-15}$  por cada método fue:

- Bisección:  $1,790698467079256 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$  con 52 iteraciones.
- Punto Fijo:  $1,790698467079257 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$  Con 27 iteraciones.
- Newton-Raphson:  $1,790698467079257 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$  con 7 iteraciones.

#### a. Tabla referente a Bisección

k	$a_k$	$b_k$	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$r_{k+1}$	$\Delta r_{k+1}$	$\frac{\Delta r}{r}$
1	1.6000	3.0000	2.7849	-21.0850	2.2999999999999998	0.7000	0.3043
2	1.6000	2.3000	2.7849	-8.3818	1.9499999999999997	0.3500	0.1795
3	1.6000	1.9500	2.7849	-2.4997	1.7749999999999999	0.1750	0.0986
4	1.7750	1.9500	0.2386	-2.4997	1.8624999999999998	0.0875	0.0470
5	1.7750	1.8625	0.2386	-1.1097	1.8187499999999999	0.0437	0.0241
6	1.7750	1.8187	0.2386	-0.4300	1.7968750000000000	0.0219	0.0122
7	1.7750	1.7969	0.2386	-0.0943	1.7859375000000000	0.0109	0.0061
8	1.7859	1.7969	0.0725	-0.0943	1.7914062500000001	0.0055	0.0031
9	1.7859	1.7914	0.0725	-0.0108	1.7886718749999999	0.0027	0.0015
10	1.7887	1.7914	0.0309	-0.0108	1.7900390625000000	0.0014	0.0008
43	1.7907	1.7907	0.0000	-0.0000	1.7906984670793233	0.0000	0.0000
44	1.7907	1.7907	0.0000	-0.0000	1.7906984670792436	0.0000	0.0000
45	1.7907	1.7907	0.0000	-0.0000	1.7906984670792836	0.0000	0.0000
46	1.7907	1.7907	0.0000	-0.0000	1.7906984670792636	0.0000	0.0000
47	1.7907	1.7907	0.0000	-0.0000	1.7906984670792536	0.0000	0.0000
48	1.7907	1.7907	0.0000	-0.0000	1.7906984670792587	0.0000	0.0000
49	1.7907	1.7907	0.0000	-0.0000	1.7906984670792561	0.0000	0.0000
50	1.7907	1.7907	0.0000	-0.0000	1.7906984670792574	0.0000	0.0000
51	1.7907	1.7907	0.0000	-0.0000	1.7906984670792567	0.0000	0.0000
52	1.7907	1.7907	0.0000	-0.0000	1.7906984670792565	0.0000	0.0000

Cuadro 1: Bisección Intervalo: [0,2;3].

Raíz:  $1.7906984670792565 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$

**b. Tabla referente a Punto Fijo**

k	$Y_k$	$\Delta Y$	$\frac{\Delta Y}{Y_k}$
1	1.198408992708251	0.4784	0.3992
2	1.574764682354527	0.3764	0.2390
3	1.731406147305723	0.1566	0.0905
4	1.776052759159591	0.0446	0.0251
5	1.787184055449170	0.0111	0.0062
6	1.789861137197377	0.0027	0.0015
7	1.790499309192340	0.0006	0.0004
8	1.790651116922637	0.0002	0.0001
9	1.790687210583034	0.0000	0.0000
10	1.790695791147518	0.0000	0.0000
18	1.790698467051965	0.0000	0.0000
19	1.790698467072769	0.0000	0.0000
20	1.790698467077715	0.0000	0.0000
21	1.790698467078891	0.0000	0.0000
22	1.790698467079170	0.0000	0.0000
23	1.790698467079236	0.0000	0.0000
24	1.790698467079252	0.0000	0.0000
25	1.790698467079256	0.0000	0.0000
26	1.790698467079257	0.0000	0.0000
27	1.790698467079257	0.0000	0.0000

Cuadro 2: Punto fijo Semilla: 0,72

Raíz:  $1.790698467079257 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$

**c. Tabla referente a Newton-Raphson**

k	$Y_k$	$\Delta Y$	$\frac{\Delta Y}{Y_k}$
1	2.638189400285716	1.6382	0.6210
2	1.845449360471512	0.7927	0.4296
3	1.791250851256665	0.0542	0.0303
4	1.790698527791094	0.0006	0.0003
5	1.790698467079258	0.0000	0.0000
6	1.790698467079257	0.0000	0.0000
7	1.790698467079257	0.0000	0.0000

Cuadro 3: Newton-Raphson Semilla: 1

Raíz:  $1,790698467079257 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$ .

Gráfica de la diferencia absoluta entre dos iteraciones para cada método, con escala logarítmica en el eje Y y cantidad de iteraciones en el eje X para apreciar correctamente los órdenes de magnitud de cada uno de los procedimientos.

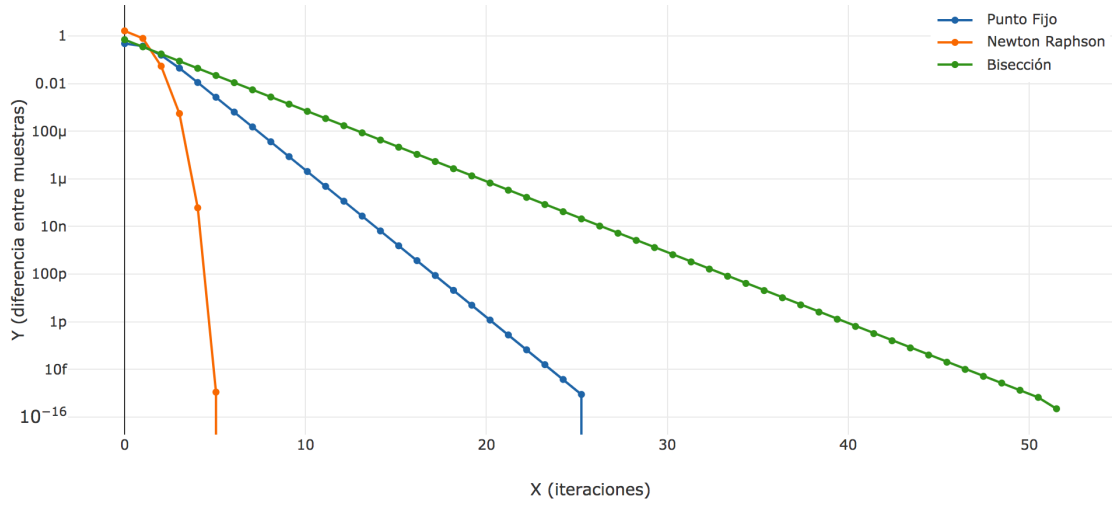


Figura 1: Convergencias de cada método.

## II. Ejercicio 2

Para el caso de  $m = 0,3 * m_0$  no es tan sencillo encontrar los puntos de equilibrio como para el caso de masa despreciable, por lo que las raíces serán halladas mediante métodos numéricos.

Como estamos en el mismo caso en que  $a < L_0$  encontraremos tres puntos de equilibrio.

Como todas las fuerzas que interactúan en el sistema son conservativas, podemos usar la relación:

$$-\frac{dE_{Pot}}{dy} = \sum F_{Cons}(y)$$

Para este caso, supondremos que la partícula solo tiene movimiento en el eje  $y$ . Calculamos las fuerzas (se toma positivo hacia abajo y el cero en el eje horizontal a los extremos fijos de cada resorte).

$$\sum F_y = mg - 2F_{Elas} \cos(\theta)$$

A partir de estas fuerzas hallaremos la energía potencial en el eje  $y$   $E_{Pot}$ .

$$E_{Pot} = mgy - \frac{2}{2}K(\Delta y)^2 = mgy - K(\Delta y)^2$$

Observar que  $\Delta y$  es el estiramiento en el eje  $y$  y no el error de dispersión, como había sido en el ejercicio 1. Para fines prácticos, en este sistema  $\Delta y = L_{Eq} - L_0$  ( $L_{Eq} = \sqrt{y^2 + a^2}$  es la nueva longitud natural del resorte, debido a la masa  $m$ ).

$$E_{Pot} = -mgy + k[(L_{Eq} - L_0) \cos(\theta)]^2$$

Para hallar  $\sum F_{Cons}$ , se deriva la expresión de la energía potencial.

$$\sum F_{Cons} = F_{Res} = mg - 2Ky = 0,3m_0g - 2k(L_{Eq} - L_0)$$

Esta expresión puede ser usada para corroborar resultados más adelante.

### a. Raíces por el método Bisección.

Tomando el intervalo  $[-3;-1]$ , se encuentra por este método la raíz negativa  $-1.9819518625863082 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$ .

k	$a_k$	$b_k$	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$r_{k+1}$	$\Delta r_{k+1}$	$\frac{\Delta r}{r}$
1	-2.0000	-1.0000	0.2940	-12.0221	-1.5000000000000000	0.5000	-0.3333
2	-2.0000	-1.5000	0.2940	-7.1473	-1.7500000000000000	0.2500	-0.1429
3	-2.0000	-1.7500	0.2940	-3.6319	-1.8750000000000000	0.1250	-0.0667
4	-2.0000	-1.8750	0.2940	-1.7107	-1.9375000000000000	0.0625	-0.0323
5	-2.0000	-1.9375	0.2940	-0.7178	-1.9687500000000000	0.0312	-0.0159
6	-2.0000	-1.9688	0.2940	-0.2141	-1.9843750000000000	0.0156	-0.0079
7	-1.9844	-1.9688	0.0394	-0.2141	-1.9765625000000000	0.0078	-0.0040
8	-1.9844	-1.9766	0.0394	-0.0875	-1.9804687500000000	0.0039	-0.0020
9	-1.9844	-1.9805	0.0394	-0.0241	-1.9824218750000000	0.0020	-0.0010
10	-1.9824	-1.9805	0.0076	-0.0241	-1.9814453125000000	0.0010	-0.0005
42	-1.9820	-1.9820	0.0000	-0.0000	-1.9819518625861292	0.0000	-0.0000
43	-1.9820	-1.9820	0.0000	-0.0000	-1.9819518625862429	0.0000	-0.0000
44	-1.9820	-1.9820	0.0000	-0.0000	-1.9819518625862997	0.0000	-0.0000
45	-1.9820	-1.9820	0.0000	-0.0000	-1.9819518625863282	0.0000	-0.0000
46	-1.9820	-1.9820	0.0000	-0.0000	-1.9819518625863140	0.0000	-0.0000
47	-1.9820	-1.9820	0.0000	-0.0000	-1.9819518625863068	0.0000	-0.0000
48	-1.9820	-1.9820	0.0000	-0.0000	-1.9819518625863104	0.0000	-0.0000
49	-1.9820	-1.9820	0.0000	-0.0000	-1.9819518625863086	0.0000	-0.0000
50	-1.9820	-1.9820	0.0000	-0.0000	-1.9819518625863077	0.0000	-0.0000
51	-1.9820	-1.9820	0.0000	-0.0000	-1.9819518625863082	0.0000	-0.0000

Cuadro 4: Bisección intervalo: [-3;-1]

Tomando el intervalo  $[-0, 5; 0, 6]$ , se encuentra la primer raíz positiva  $0,1465310699476753 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$ .

k	$a_k$	$b_k$	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$r_{k+1}$	$\Delta r_{k+1}$	$\frac{\Delta r}{r}$
1	0.0500	0.6000	-1.9681	6.0880	0.3250000000000000	0.2750	0.8462
2	0.0500	0.3250	-1.9681	3.1621	0.1875000000000000	0.1375	0.7333
3	0.0500	0.1875	-1.9681	0.7929	0.1187500000000000	0.0687	0.5789
4	0.1188	0.1875	-0.5544	0.7929	0.1531250000000000	0.0344	0.2245
5	0.1188	0.1531	-0.5544	0.1297	0.1359375000000000	0.0172	0.1264
6	0.1359	0.1531	-0.2100	0.1297	0.1445312500000001	0.0086	0.0595
7	0.1445	0.1531	-0.0395	0.1297	0.1488281250000000	0.0043	0.0289
8	0.1445	0.1488	-0.0395	0.0453	0.1466796875000000	0.0021	0.0146
9	0.1445	0.1467	-0.0395	0.0029	0.1456054687500000	0.0011	0.0074
10	0.1456	0.1467	-0.0183	0.0029	0.1461425781250000	0.0005	0.0037
41	0.1465	0.1465	-0.0000	0.0000	0.1465310699478096	0.0000	0.0000
42	0.1465	0.1465	-0.0000	0.0000	0.1465310699476846	0.0000	0.0000
43	0.1465	0.1465	-0.0000	0.0000	0.1465310699476220	0.0000	0.0000
44	0.1465	0.1465	-0.0000	0.0000	0.1465310699476533	0.0000	0.0000
45	0.1465	0.1465	-0.0000	0.0000	0.1465310699476689	0.0000	0.0000
46	0.1465	0.1465	-0.0000	0.0000	0.1465310699476767	0.0000	0.0000
47	0.1465	0.1465	-0.0000	0.0000	0.1465310699476728	0.0000	0.0000
48	0.1465	0.1465	-0.0000	0.0000	0.1465310699476748	0.0000	0.0000
49	0.1465	0.1465	-0.0000	0.0000	0.1465310699476758	0.0000	0.0000
50	0.1465	0.1465	-0.0000	0.0000	0.1465310699476753	0.0000	0.0000

Cuadro 5: Bisección Intervalo: [-0,5;0,6]

Tomando el intervalo  $[-0,8;5]$ , se encuentra la segunda raíz positiva  $1.5832397676915879 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$ .

k	$a_k$	$b_k$	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$r_{k+1}$	$\Delta r_{k+1}$	$\frac{\Delta r}{r}$
1	0.8000	2.9000	6.6084	-22.2374	1.8500000000000003	1.0500	0.5676
2	0.8000	1.8500	6.6084	-3.9310	1.3250000000000002	0.5250	0.3962
3	1.3250	1.8500	3.2251	-3.9310	1.5875000000000004	0.2625	0.1654
4	1.3250	1.5875	3.2251	-0.0587	1.4562500000000003	0.1313	0.0901
5	1.4563	1.5875	1.6733	-0.0587	1.5218750000000003	0.0656	0.0431
6	1.5219	1.5875	0.8275	-0.0587	1.5546875000000004	0.0328	0.0211
7	1.5547	1.5875	0.3892	-0.0587	1.5710937500000004	0.0164	0.0104
8	1.5711	1.5875	0.1664	-0.0587	1.5792968750000003	0.0082	0.0052
9	1.5793	1.5875	0.0542	-0.0587	1.5833984375000003	0.0041	0.0026
10	1.5793	1.5834	0.0542	-0.0022	1.5813476562500002	0.0021	0.0013
43	1.5832	1.5832	0.0000	-0.0000	1.5832397676914869	0.0000	0.0000
44	1.5832	1.5832	0.0000	-0.0000	1.5832397676916061	0.0000	0.0000
45	1.5832	1.5832	0.0000	-0.0000	1.5832397676915466	0.0000	0.0000
46	1.5832	1.5832	0.0000	-0.0000	1.5832397676915764	0.0000	0.0000
47	1.5832	1.5832	0.0000	-0.0000	1.5832397676915912	0.0000	0.0000
48	1.5832	1.5832	0.0000	-0.0000	1.5832397676915839	0.0000	0.0000
49	1.5832	1.5832	0.0000	-0.0000	1.5832397676915875	0.0000	0.0000
50	1.5832	1.5832	0.0000	-0.0000	1.5832397676915893	0.0000	0.0000
51	1.5832	1.5832	0.0000	-0.0000	1.5832397676915884	0.0000	0.0000
52	1.5832	1.5832	0.0000	-0.0000	1.5832397676915879	0.0000	0.0000

Cuadro 6: Bisección Intervalo: [-0,8;5]

## b. Raíces por el método Punto Fijo

Para calcular el método se utilizó la ecuación  $g_1(y)$ :

$$g_1(y) = \frac{yL_0}{\sqrt{y^2 + a^2}} - \frac{mg}{2k} = \frac{2,051y}{\sqrt{y^2 + 1}} - 0,151$$

que converge en el intervalo  $[-10; -1]$  a la raíz negativa  $-1,981951862586308 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$ . Utilizando de semilla el número  $-1$  se encuentra la primera raíz.

k	$Y_k$	$\Delta Y$	$\frac{\Delta Y}{Y_k}$
1	-1.601104758213609	0.601104758213609	-0.375431248411426
2	-1.890410352706491	0.289305594492882	-0.153038515726855
3	-1.963797098475421	0.073386745768930	-0.037369820856698
4	-1.978510690686958	0.014713592211537	-0.007436700888601
5	-1.981305389347435	0.002794698660476	-0.001410534022419
6	-1.981830618113463	0.000525228766028	-0.000265022026216
7	-1.981929130687132	0.000098512573669	-0.000049705396698
8	-1.981947600878380	0.000018470191248	-0.000009319212697
9	-1.981951063623056	0.000003462744676	-0.000001747139341
10	-1.981951712801068	0.000000649178012	-0.000000327544818
14	-1.981951862401280	0.00000000801922	-0.00000000404612
15	-1.981951862551621	0.00000000150340	-0.00000000075855
16	-1.981951862579805	0.00000000028185	-0.00000000014221
17	-1.981951862585089	0.00000000005284	-0.00000000002666
18	-1.981951862586080	0.00000000000991	-0.00000000000500
19	-1.981951862586266	0.00000000000186	-0.00000000000094
20	-1.981951862586300	0.00000000000035	-0.00000000000018
21	-1.981951862586306	0.00000000000006	-0.00000000000003
22	-1.981951862586308	0.00000000000001	-0.00000000000001
23	-1.981951862586308	0.00000000000000	-0.00000000000000

Cuadro 7: Punto fijo  $g_1(y)$  con semilla =  $-1$

Para encontrar la primera raíz positiva se optó por cambiar de  $g(y)$  ya que no se cumple que  $|g'(y)| < 1$  en el intervalo  $[0,1;0,8]$ . Fue utilizada  $g_2(y)$  que sí cumple las condiciones para punto fijo en el intervalo en que se encuentra la segunda

raíz.

$$g_2(y) = \frac{-mg\sqrt{y^2 + a^2}}{2k - 2kLo} = \frac{-1,025 \cdot 0,3 \cdot 9,81 \cdot \sqrt{y^2 + 1^2}}{2 \cdot 10 - 2 \cdot 10 \cdot 2,051} = 0,1435\sqrt{y^2 + 1}$$

Colocando el valor 0 de semilla, se obtiene la raíz  $0,146531069947676 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$

k	$Y_k$	$\Delta Y$	$\frac{\Delta Y}{Y_k}$
1	0.143509752616556	0.143509752616556	1.000000000000000
2	0.146407179064301	0.002897426447745	0.019790193802401
3	0.146525937985113	0.000118758920812	0.000810497598206
4	0.146530857277237	0.000004919292124	0.000033571714626
5	0.146531061134383	0.000000203857145	0.000001391221382
6	0.146531069582443	0.000000008448060	0.000000057653714
7	0.146531069932540	0.000000000350097	0.000000002389234
8	0.146531069947048	0.000000000014508	0.000000000099012
9	0.146531069947650	0.000000000000601	0.000000000004103
10	0.146531069947675	0.000000000000025	0.000000000000171
11	0.146531069947676	0.000000000000001	0.000000000000007
12	0.146531069947676	0.000000000000000	0.000000000000000

Cuadro 8: Punto fijo  $g_2(y)$  con semilla = 0

Para encontrar la ultima raíz, fue reutilizada la primera  $g_1(x)$  de este método. Esta  $g_1(y)$ , cumple las condiciones de punto fijo en un entorno de la raíz. La semilla utilizada, es el número 1.

k	$Y_k$	$\Delta Y$	$\frac{\Delta Y}{Y_k}$
1	1.299447258213609	0.299447258213609	0.230442025500341
2	1.474585992204715	0.175138733991106	0.118771461899790
3	1.546651288475977	0.072065296271262	0.046594404833343
4	1.571522842168699	0.024871553692721	0.015826402916549
5	1.579550879541212	0.008028037372514	0.005082481024508
6	1.582084696741778	0.002533817200566	0.001601568617524
7	1.582878710628332	0.000794013886554	0.000501626486744
8	1.583126967608635	0.000248256980303	0.000156814320887
9	1.583204533041140	0.000077565432505	0.000048992679648
10	1.583228762244220	0.000024229203080	0.000015303665306
23	1.583239767688625	0.000000000006524	0.000000000004121
24	1.583239767690662	0.000000000002038	0.000000000001287
25	1.583239767691299	0.000000000000637	0.000000000000402
26	1.583239767691498	0.000000000000199	0.000000000000125
27	1.583239767691560	0.000000000000062	0.000000000000039
28	1.583239767691579	0.000000000000019	0.000000000000012
29	1.583239767691585	0.000000000000006	0.000000000000004
30	1.583239767691587	0.000000000000002	0.000000000000001
31	1.583239767691588	0.000000000000001	0.000000000000000
32	1.583239767691588	0.000000000000000	0.000000000000000

Cuadro 9: Punto fijo  $g_1(y)$  con semilla = 1

Obteniendo así, la raíz  $1,583239767691588 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$ .

### c. Raíces por el método Newton-Raphson

Fueron utilizadas las ecuaciones:

$$f(y) = -2ky - mg + \frac{2kyL_0}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

$$f'(y) = -2k - \frac{2kL_0y^2}{(1 + y^2)^{3/2}} + \frac{2kL_0}{\sqrt{1 + y^2}}$$

Remplazando

$$f(y) = -20y - 3,020 + \frac{41,02y}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

$$f'(y) = -20 - \frac{41,02 \cdot y^2}{(1 + y^2)^{3/2}} + \frac{41,02}{\sqrt{1 + y^2}}$$

Efectuando el cálculo numérico, se obtiene

k	$Y_k$	$\Delta Y$	$\frac{\Delta Y}{Y_k}$
1	-3.186932959794060	2.186932959794060	-0.686218689688214
2	-2.044895275509035	1.142037684285025	-0.558482235233654
3	-1.982461325260429	0.062433950248606	-0.031493149174249
4	-1.981951898689691	0.000509426570738	-0.000257032762034
5	-1.981951862586308	0.000000036103383	-0.000000018216074
6	-1.981951862586309	0.000000000000000	-0.000000000000000

Cuadro 10: Newton-Rhapson, semilla= -1

Raíz  $X_0 = -1,981951862586309 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$

k	$Y_k$	$\Delta Y$	$\frac{\Delta Y}{Y_k}$
1	-3.186932959794060	2.186932959794060	-0.686218689688214
2	-2.044895275509035	1.142037684285025	-0.558482235233654
3	-1.982461325260429	0.062433950248606	-0.031493149174249
4	-1.981951898689691	0.000509426570738	-0.000257032762034
5	-1.981951862586308	0.000000036103383	-0.000000018216074
6	-1.981951862586309	0.000000000000000	-0.000000000000000
1	0.143509752616556	0.143509752616556	1.000000000000000
2	0.146527173883030	0.003017421266474	0.020592912471532
3	0.146531069941099	0.000003896058069	0.000026588614079
4	0.146531069947676	0.000000000006577	0.000000000044882
5	0.146531069947676	0.000000000000000	0.000000000000000

Cuadro 11: Newton-Rhapson, semilla = 0

Raíz  $X_1 = 0,146531069947676 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$

k	$Y_k$	$\Delta Y$	$\frac{\Delta Y}{Y_k}$
1	2.089445840777372	1.089445840777372	0.521404201782061
2	1.622087490239632	0.467358350537740	0.288121542980827
3	1.583674861643142	0.038412628596490	0.024255375599405
4	1.583239825881051	0.000435035762091	0.000274775656208
5	1.583239767691590	0.000000058189461	0.000000036753411
6	1.583239767691588	0.000000000000002	0.000000000000001
7	1.583239767691588	0.000000000000000	0.000000000000000

Cuadro 12: Newton-Rhapson, semilla = 1

Raíz  $X_2 = 1,583239767691588 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$



d. Gráficos comparativos de las diferencias entre muestras

Raíz  $X_0 = -1,981 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$

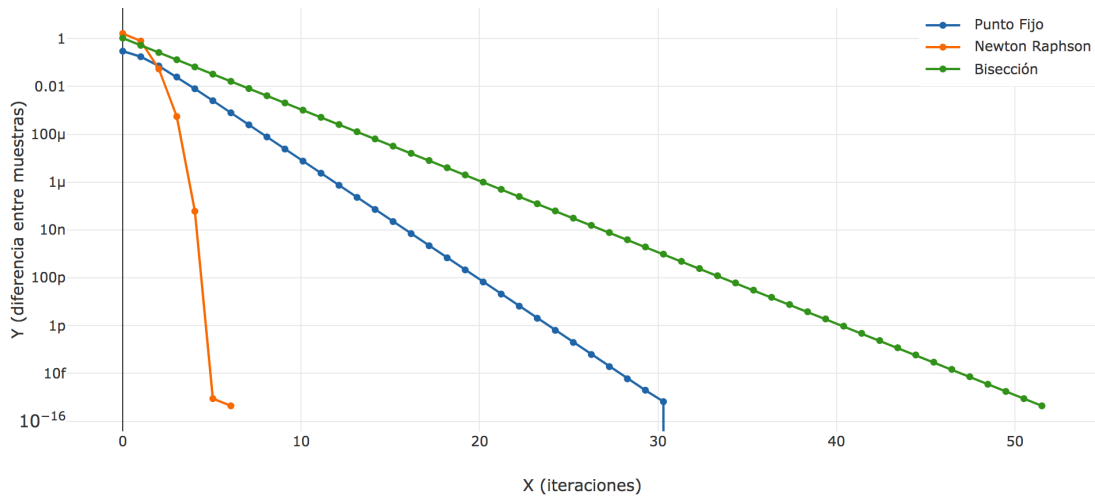


Figura 2: Diferencias entre muestras para Raíz  $X_0 = -1,981$  por método.

Raíz  $X_1 = 0,146 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$

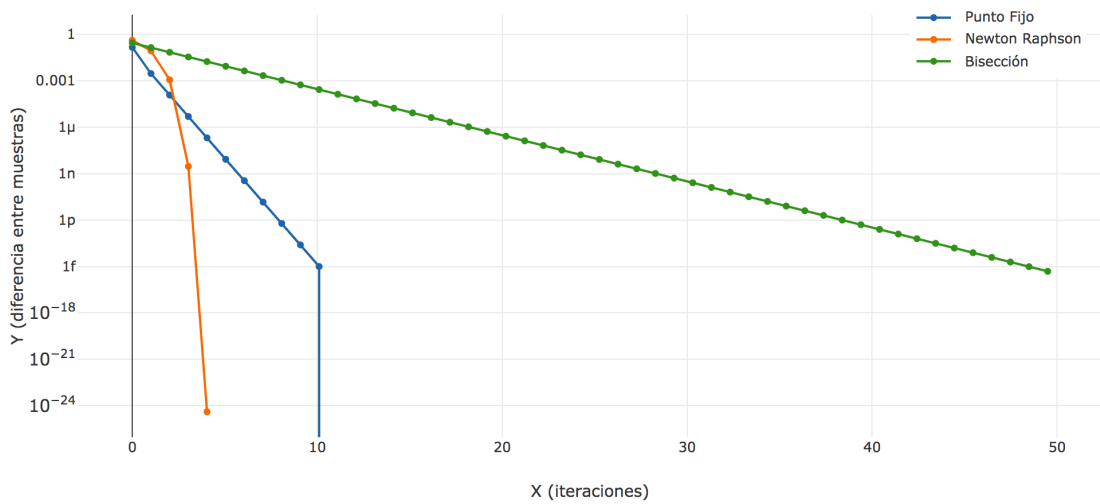


Figura 3: Diferencias entre muestras para Raíz  $X_1 = 0,146$  por método.

Raíz  $X_2 = 1,583 \pm 0,5 \cdot 10^{-15}$

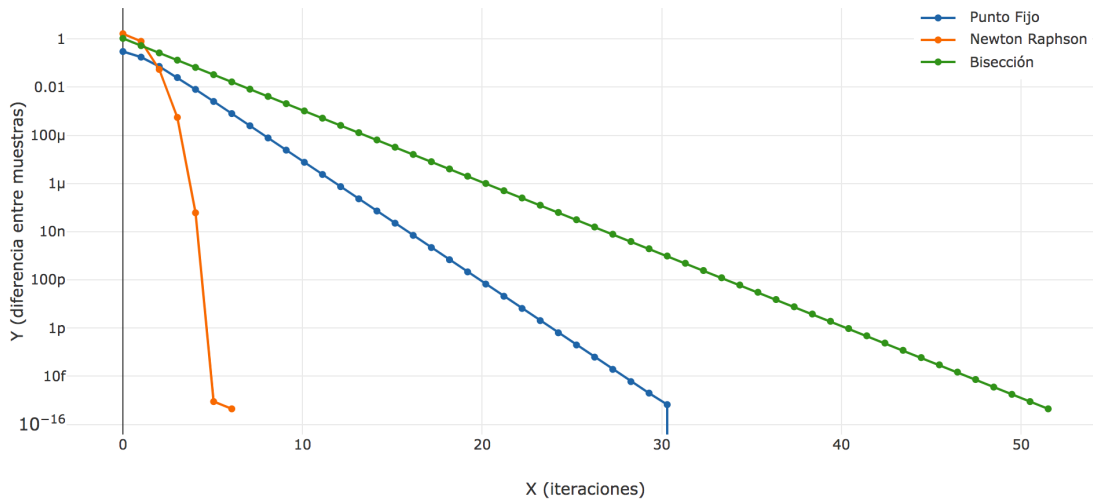


Figura 4: Diferencias entre muestras para Raíz  $X_2 = 1,583$  por método.

### III. Ejercicio 3

Para este punto, se busca encontrar el máximo intervalo de convergencia de cada raíz. Para esto, se desarrolló un algoritmo basado en el método de Newton-Raphson, de forma tal, que halle de manera secuencial los intervalos de convergencia de cada raíz. La función que implementa el algoritmo es `intConv()`.

A partir de los cálculos del inciso 2, se conocen con una precisión apreciable, las tres raíces del sistema. Las usaremos para hallar los intervalos de convergencia.

#### a. Algoritmo

El algoritmo recibe la raíz  $X_i$  y una precisión  $\Delta x$  y se comporta de la siguiente manera

- I La precisión pasada al algoritmo será 0,0001 y servirá de incremento a derecha y a izquierda de la raíz.
- II Dentro de un ciclo, se hace desplazar al iterador incrementando  $\Delta x$  a derecha de la raíz en cada turno.
- III Se pregunta si Newton-Raphson de la posición  $x_0 + \Delta x$  converge a la raíz  $X_i$ .
- IV Se repite hasta que Newton-Raphson de la posición  $x_0 + \Delta x$  sea distinto de la raíz  $X_i$  o la iteración supere los  $\frac{50}{0,0001} = 500000$  pasos (se mueva 50 unidades en el eje  $x$ ).
- V Si se superan las 50 unidades en el eje  $x$ , el algoritmo tomará el extremo superior del intervalo como  $+\infty$ .
- VI El procedimiento es análogo para analizar el extremo inferior del intervalo (incrementando a izquierda).

Para esta cantidad de iteraciones y de forma secuencial, el cálculo de los tres intervalos llevaba aproximadamente un minuto. Conociendo que la función tiene tres raíces, se puede evitar el cálculo del intervalo de convergencia para la raíz del medio.

Se acortó aproximadamente un tercio del tiempo de ejecución del cálculo de intervalos, mediante la inferencia del intervalo de convergencia de la raíz central.

$$I(x_0) = [x_0^{ini}; x_0^{fin}] \quad I(x_2) = [x_2^{ini}; x_2^{fin}] \quad \Rightarrow \quad I(x_1) = [x_0^{fin}; x_2^{ini}]$$

## b. Intervalos de Convergencia

Para el método de Newton-Raphson fueron hallados los siguientes intervalos de convergencia con el algoritmo explicado anteriormente

- Raíz  $X_0$  = intervalo  $[\infty ; -0,7838]$
- Raíz  $X_1$  = intervalo  $[-0,7837 ; 0,7836]$
- Raíz  $X_2$  = intervalo  $[0,7837 ; \infty]$

## IV. Ejercicio 4

Para este ejercicio se necesita analizar el sistema variando el coeficiente que acompaña a la masa  $m_0$ . No hace falta volver a calcular la derivada de la función  $F_{Res}$  ya que el término que depende de la masa  $m$ , no depende de la variable  $y$ .

Para conocer la estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio de  $F_{Res}$ , se deberá calcular la segunda derivada de la energía potencial  $U$  del sistema y luego, analizar su signo en cada raíz  $X_i$

Recordando que  $\frac{dU}{dy} = -\sum F_{Cons}(y)$  es posible hallar fácilmente la expresión  $\frac{d^2U}{dy^2}$  derivando  $-F_{Res}$

- Si  $-\frac{d F_{Res}(X_i)}{dy} < 0$  es un punto de equilibrio inestable.
- Si  $-\frac{d F_{Res}(X_i)}{dy} = 0$  es un punto de equilibrio indiferente o neutral.
- Si  $-\frac{d F_{Res}(X_i)}{dy} > 0$  es un punto de equilibrio estable.

Usando la expresión despejada anteriormente se puede saber que

$$-f'(y) = 2k + \frac{2kL_0y^2}{(1+y^2)^{3/2}} - \frac{2kL_0}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$-f'(y) = 20 + \frac{41,02 \cdot y^2}{(1+y^2)^{3/2}} - \frac{41,02}{\sqrt{1+y^2}}$$

Haciendo los cálculos para hallar el tipo de equilibrio para cada caso

	$-F'_{Res}(X_0)$	$-F'_{Res}(X_1)$	$-F'_{Res}(X_2)$
0	$-F'(-1,79) = 15,23$	$-F'(0) = -21,02$	$-F'(1,79) = 15,23$
$0,3m_0$	$-F'(-1,98) = 16,24$	$-F'(0,14) = -19,84$	$-F'(1,58) = 13,72$
$0,6m_0$	$-F'(-2,16) = 16,96$	$-F'(0,32) = -15,43$	$-F'(1,34) = 11,22$
$0,9m_0$	$-F'(-2,33) = 17,51$	$-F'(0,59) = -6,21$	$-F'(0,99) = 5,27$
$1,2m_0$	$-F'(-2,51) = 17,92$	$\nexists$	$\nexists$
$1,5m_0$	$-F'(-2,68) = 18,24$	$\nexists$	$\nexists$

**a. Tabla Comparativa de distintos métodos**

	$X_0$	Equilibrio	$X_1$	Equilibrio	$X_2$	Equilibrio
0	-1.790698467079257	Estable	0.000000000000000	Inestable	1.7906984670792565	Estable
$0, 3m_0$	-1.981951862586309	Estable	0.146531069947676	Inestable	1.583239767691588	Estable
$0, 6m_0$	-2.163386121522913	Estable	0.315566691472281	Inestable	1.343701800526605	Estable
$0, 9m_0$	-2.338269945230656	Estable	0.590881634987573	Inestable	0.991825978297377	Estable
$1, 2m_0$	-2.508510978388360	Estable	$\nexists$	-	$\nexists$	-
$1, 5m_0$	-2.675319915043171	Estable	$\nexists$	-	$\nexists$	-

## 4. Conclusiones

Se consiguió calcular de manera satisfactoria los puntos de equilibrio del sistema de dos resortes con una masa despejando de forma numérica a través de distintos métodos.

De parte del equipo, nos ha parecido muy interesante la posibilidad de efectuar cálculos sin la necesidad de tener los valores resultantes de la función de forma analítica.