75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

TRABAJO PRACTICO Nº 1

1er Cuatrimestre 2019

Ecuaciones no lineales en sistemas mecánicos

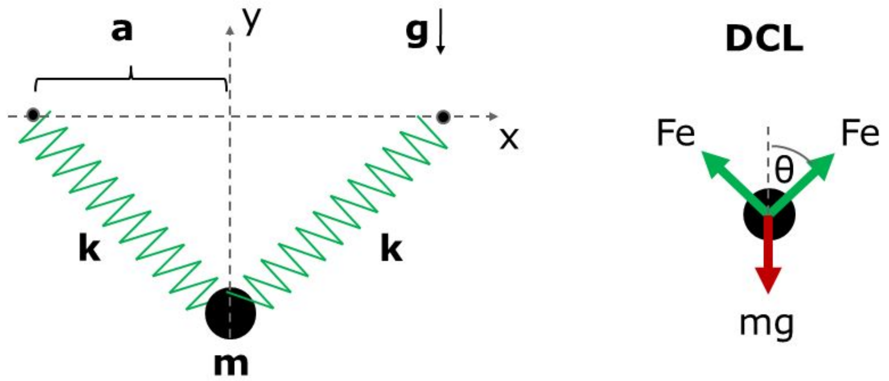
Preparado por Ing. Federico Balzarotti

OBJETIVOS

- **Experimentar con el uso de métodos numéricos la resolución de ecuaciones no lineales.**
- **Integrar conocimientos de mecánica**

PLANTEO DEL PROBLEMA

El sistema mecánico de la figura consiste en una partícula **m** unida a dos resortes de longitud natural **Lo**. Los extremos fijos de cada resorte se encuentran separados una distancia **2a**. El interés pasa por entender si existen puntos de equilibrio, su ubicación y si son estables o inestables.



Donde:

m	[kg]	masa de la partícula
k	[N/m]	constante elástica de los resortes
L_0	[m]	longitud natural de los resortes
a	[m]	mitad de la distancia entre extremos fijos de cada resorte
g	[m/ s^2]	9.81

Dada la simetría del sistema respecto al eje vertical, la masa solamente podrá moverse en la dirección de la coordenada **"y".** Los resortes responden a una ley constitutiva lineal respecto de su estiramiento, es decir:

$$F elastica = - k.estiramiento$$

En este caso el estiramiento está dado por la siguiente relación geométrica:

$$estiramiento = \sqrt{y^2 + a^2} - L_0$$

Teniendo en cuenta las proyecciones en cada eje, la fuerza resultante acorde al diagrama de cuerpo libre será en la dirección **"y"** según la forma:

$$F_{resultante} = 2\,(-\,k.estiramiento) \cos cos\,\theta - mg \;= -\, 2k\left(\sqrt{y^2 + a^2} - L_0\right) \frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} - mg$$

Su expresión reducida quedará como una función **no lineal** de la coordenada **"y"**:

$$F_{resultante}(y) = -\, 2ky\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{y^2+a^2}}\right) - mg$$

Los puntos de equilibrio del sistema serán aquellos donde la energía potencial alcanza un máximo o un mínimo. Esta condición es equivalente a pedir que la resultante de fuerzas conservativas sea nula:

$$F_{resultante}(y) = 0$$

Para el caso particular donde la gravedad no interviene (suponiendo resortes y masa sobre una mesa sin rozamiento), la ecuación se reduce a:

$$-\, 2ky\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{y^2+a^2}}\right) = 0$$

De la cual se desprenden 2 condiciones: $y = 0$ o $1 - \frac{L_0}{\sqrt{y^2+a^2}} = 0$

Y los puntos de equilibrio correspondientes serán: $y_1 = 0$ e $y_{2,3} = \pm\sqrt{L_0^2 - a^2}$

Notar que el comportamiento es fuertemente dependiente de los parámetros del sistema. Si $L_0 \leq a$ existe un solo punto de equilibrio en el centro de coordenadas, mientras que si $L_0 > a$ se agregan otros dos puntos. La estabilidad o inestabilidad dependerá del comportamiento de la fuerza al apartar levemente la masa del punto de equilibrio (restitutivo o no). Si se considera la gravedad, la ecuación no lineal a resolver es la siguiente:

$$-\, 2ky\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{y^2+a^2}}\right) - mg = 0$$

Aquí ya no es posible despejar la coordenada "**y**", teniendo que recurrir a métodos numéricos para obtener los puntos de equilibrio.

DESARROLLO DEL PRACTICO

Se deberá encontrar los puntos de equilibrio del sistema mecánico descripto en la introducción. Los valores de los parámetros serán los siguientes:

propiedades de los resortes	L_0 [m]	2 * 100000 / NP
	k [N/m]	10
masa de referencia	m_0 [kg]	100000 / NP
geometría	a [m]	1

Donde NP es el Número de Padrón de uno de los integrantes del grupo.

IMPORTANTE! Indicar el número usado en la introducción del informe. Para efectuar los cálculos redondear a 3 dígitos los valores de m_0 y L_0.

1) Encontrar los puntos de equilibrio del sistema **sin tener en cuenta el efecto de la gravedad**. Para esto alcanza con considerar m=0 en la ecuación no lineal. Hallar el punto de equilibrio positivo mediante los siguientes métodos con error absoluto menor a $0.5\ 10^{-15}$ (en módulo).

a) Bisección
b) Punto Fijo con: $g(y) = y - F(y)$
c) Newton-Raphson

Notar que para este caso particular (m=0), los puntos de equilibrio fueron hallados de forma analítica en la introducción, con lo cual es factible calcular el error de truncamiento de forma exacta por haber aplicado el método numérico.

Para cada uno de los 3 métodos expresar los resultados según las tablas a continuación, dependiendo de si el método es de tipo arranque (Bisección) o convergencia (Punto Fijo/Newton-Raphson). En caso que el método haya requerido una gran cantidad de iteraciones, indicar solo las primeras 10 y las últimas 10. Realizar un análisis de los resultados obtenidos.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	r_{k+1}	Δr_{k+1}	$\Delta r/r$	λ	p
0									
1									
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
99									
100									

k	y_k	$\Delta y=\|y_k-y_{k-1}\|$	$\Delta y/y_k$	λ	p
0					
1					
…					

d) Graficar la *diferencia absoluta entre dos iteraciones consecutivas* para cada método en función del número de iteraciones. Realizar un solo gráfico en el cual se pueda comparar claramente el comportamiento de los 3 métodos pedidos. ¿Qué tipo de escala grafica utilizaría en cada eje?
Comente para cada método si la *diferencia absoluta entre dos iteraciones consecutivas* puede adoptarse como cota del error absoluto de truncamiento.

2) Repetir el procedimiento realizado en el ítem **1)** para el caso **$m=0.3*m_0$**. Encontrar **todos** los puntos de equilibrio del sistema. Presentar tablas y gráficos análogos al ítem **1)** y comparar resultados. Tomar como criterio de corte del método la diferencia absoluta entre dos iteraciones consecutivas menor a $0.5x10^{-15}$.

3) Solamente para el método de Newton-Raphson y aplicado al caso del ítem **2)**, encontrar el máximo intervalo de convergencia de cada raíz, es decir, el intervalo de mayor longitud posible en el cual cualquier semilla perteneciente a él hace que el método converja. Expresar todos los resultados en una tabla de la forma:

raiz	Extremo izquierdo	Extremo derecho
raiz1		
raiz2		
...		

4) Encontrar **todos** los puntos de equilibrio del sistema para los casos aplicando el método de Newton-Raphson:

a) $m=0.6*m_0$
b) $m=0.9*m_0$
c) $m=1.2*m_0$
d) $m=1.5*m_0$

Plasmar los resultados en la siguiente tabla junto con los de los ítems **1)** y **2)** y analizar su comportamiento respecto de la estabilidad (equilibrio estable o inestable).

m	Raiz 1	Raiz 2	...	Raiz n
0				
$0.3*m_0$				
$0.6*m_0$				
$0.9*m_0$				
$1.2*m_0$				
$1.5*m_0$				

*para este ítem no presentar las tablas ni los gráficos de los ítems 1) y 2).

5) Presentar conclusiones generales sobre el trabajo realizado.