UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS

Tema:
Osciladores Acoplados

Apellidos: Moreno Vera
Nombres: Felipe Adrian
Código: 20120354I
Curso: Física Computacional
Codigo Curso: CC063

2016-II

Osciladores Acoplados

Ejercicio 1

Muestre que el movimiento de oscilaciones del sistema puede ser resuelto con la condicion:

$$\sqrt{(m_i)}x_i(t)=v_i e^{(i\omega_i t)}$$

Utilizando los valores y vectores propios de la matriz tridiagonal

$$M_{ij}=\frac{k}{\sqrt{(m_i m_j)}}(2x_{i,j}-x_{i,j+1}-x_{i,j-1})$$

Introduzca:

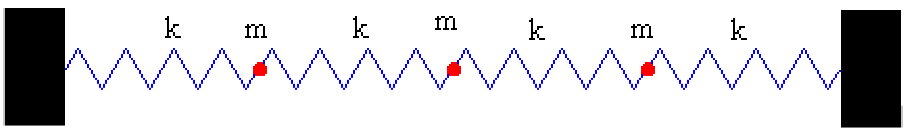
$$y_i(t)=\sqrt{(m_i)}\,x_i(t)$$

Sol:

Se tiene que:

$$y_i''(t)=\sqrt{(m_i)}\,x_i''(t)=-v_i\omega_i^2 e^{(i\omega_i t)}=-\omega_i^2\sqrt{(m_i)}x_i(t)=-\omega_i^2 y_i(t) \quad \ldots (1)$$

Se tiene un sistema de N partículas en un mismo resorte (sistema de átomos)
Se muestra un ejemplo de 3 átomos.



Donde cada puente elástico que une a cada átomo o partícula, tiene igual valor, el cual será k (constante de elasticidad).
Las ecuaciones por cada átomo será:

$$m_1 x_1''=-k_0(x_1)-k_1(x_1-x_2)$$
$$\ldots$$
$$m_i x_i''=-k_{i-1}(x_i-x_{i-1})-k_i(x_i-x_{i+1})$$
$$\ldots$$
$$m_N x_N''=-k_{N-1}(x_N-x_{N-1})-k_N(x_N)$$

Pero del problema se sabe que: $k_0=k_1=k_2=...=k_{N-1}=k_N=D=k$ constante.

Entonces se genera las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} m_1 x_1'' \\ \ldots \\ m_i x_i'' \\ \ldots \\ m_N x_N'' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_0+k_1 & -k_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -k_{N-2} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -k_{N-2} & k_{N-2}+k_{N-1} & -k_{N-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & -k_{N-1} & k_{N-1}+k_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_i \\ \ldots \\ x_N \end{pmatrix}$$

Estas ecuaciones se transforman en:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ \ldots \\ x_i'' \\ \ldots \\ x_N'' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{k_0+k_1}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_2} & \frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -\frac{k_{i-1}}{m_i} & \frac{k_{i-1}+k_i}{m_i} & -\frac{k_i}{m_i} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & -\frac{k_{N-2}}{m_{N-1}} & \frac{k_{N-2}+k_{N-1}}{m_{N-1}} & -\frac{k_{N-1}}{m_{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\frac{k_{N-1}}{m_N} & \frac{k_{N-1}+k_N}{m_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_i \\ \ldots \\ x_N \end{pmatrix}$$

De esta ecuación anterior y además que $k_0 = k_1 = \ldots = k_N = D = k$ se puede decir que se genera una matriz tridiagonal de la siguiente forma:

$$M_{ij} = -k\left(2x_{i,j} - x_{i,j+1} - x_{i,j-1}\right)$$

Reemplazando la ecuación de (1):

$$M_{ij} = -\frac{k}{\sqrt{(m_j)}}\left(2y_{i,j} - y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right)$$

Además tenemos que:

$$m_i x_i(t) = \sqrt{(m_i)}\sqrt{(m_i)}\, x_i(t)$$

Entonces, en vez de divir entre m_i , divimos entre $\sqrt{(m_i)}$ y obtenemos una nueva matriz tridiagonal para cada $\sqrt{(m_i)}\, x_i(t)$, la cual tendría la siguiente forma:

$$M_{ij} = -\frac{k}{\sqrt{(m_i)}\sqrt{(m_j)}}\left(2y_{i,j} - y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right) \quad \ldots (2)$$

Por lo que este sistema, puede ser resuelto usando la ecuación (2) y además:

$$y_i(t) = v_i e^{(\pm i \omega_i t)} \quad \ldots (3)$$

Entonces la ecuación general de solución es la combinación lineal de solución superpuestas de las acoplaciones, como se muestra:

$$Y_j(t)=\frac{1}{\sqrt{(m_j)}}\sum_{i=1}^{N}\left(v_i\left(A_i e^{(i\omega_i t)}+B_i e^{(-i\omega_i t)}\right)\right)$$

Ejercicio 2

Analice el mi= m = constante, para n diferente de cero , y mn= 100m, para n=n0 Asigne m=D=1 Escriba un codigo que calcule los vectores y valores propios para N=99, y sin defecto en la cadena Utilizando la libreria tqli.h:

Sol:

Pero como las condiciones son que k = D = m_i = 1 pero a excepción de un $m_j \neq 0$, donde j puede ser cualquiera.

Entonces se tiene las nuevas ecuaciones, $m_i = 100$

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ \dots \\ x_i'' \\ \dots \\ x_N'' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{100} & \frac{2}{100} & -\frac{1}{100} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}$$

Se encuentra en la carpeta ejercicio_2, ejecutelo y tendrá los valores esperados.
En nuetro caso hemos escogido n0 = 30.

Se observa que si asignamos un numero de fila diferente de 1 (puede ser 2 o 30 o 45, etc) hay resultados demasiado pequeños, por lo que sale mensajes como que son dividios entre 0, sin embargo, los autovalores tienden a disminuir.

Ejercicio 3

Analice el caos cuando tenga defecto la cadena el mi= m = constante, para n diferente de cero , y mn= 100m, para n=n0 Asigne m=D=1 Escriba un codigo que calcule los vectores y valores propios para N=99, y sin defecto en la cadena Utilizando la libreria tqli.h, probar para n0 = 30 y n0 = 60.

Sol:
En este caso, si se utilizará el producto de los x y la matriz para una solución.
De la ecuación (1) $x_i''(t)=-\omega_i^2 x_i(t)$, la podemos expresar como:
Luego de estos casos, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ \dots \\ x_i'' \\ \dots \\ x_N'' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{100} & \frac{2}{100} & -\frac{1}{100} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}$$

Usando la ecuación (1), tendríamos un nuevo sistema de ecuaciones:
Dividiendo ambos factores entre (-1) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{100} & \frac{2}{100} & -\frac{1}{100} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}$$

El valor de $\omega^2=\frac{k}{m}=1$, excepto para la fila donde se designa el n_0 , por lo cual $\omega_i^2=\frac{1}{100}$, factorizando términos, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}$$

Tomando las condiciones iniciales $x_i=1(n_0=i)$ y $x_i=0(n_0\neq i)$
Entonces para cada n_0, se tendrá un vector inicial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_i \\ \ldots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para cada mini solución se deberá calcular los autovectores generados.
Debido a que cada x_i se expresa:

$$x_i(t)=C_1 e^{(\lambda_1 t)} v_1+C_2 e^{(\lambda_2 t)} v_2+\ldots+C_i e^{(\lambda_i t)} v_i+\ldots+C_{N-1} e^{(\lambda_{N-1} t)} v_{N-1}+C_N e^{(\lambda_N t)} v_N$$

Entonces en t=0 se tendrá:

$$x_i(0)=C_1 v_{1,i}+C_2 v_2+\ldots+C_{i,i} v_i+\ldots+C_{N-1} v_{N-1,i}+C_N v_{N,i}=1$$

y para un $j\neq i$ será:

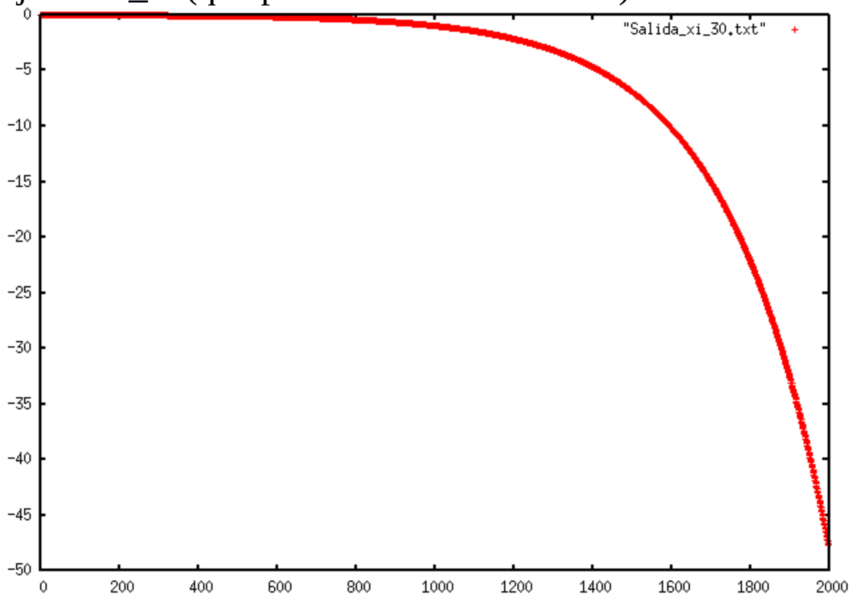
$$x_j(0)=C_1 v_{1,j}+C_2 v_{2,j}+\ldots+C_i v_{i,j}+\ldots+C_{N-1} v_{N-1,j}+C_N v_{N,j}=0$$

Donde $v_{i,j}$ es el componente del índice j del autovector que corresponde al lugar i.

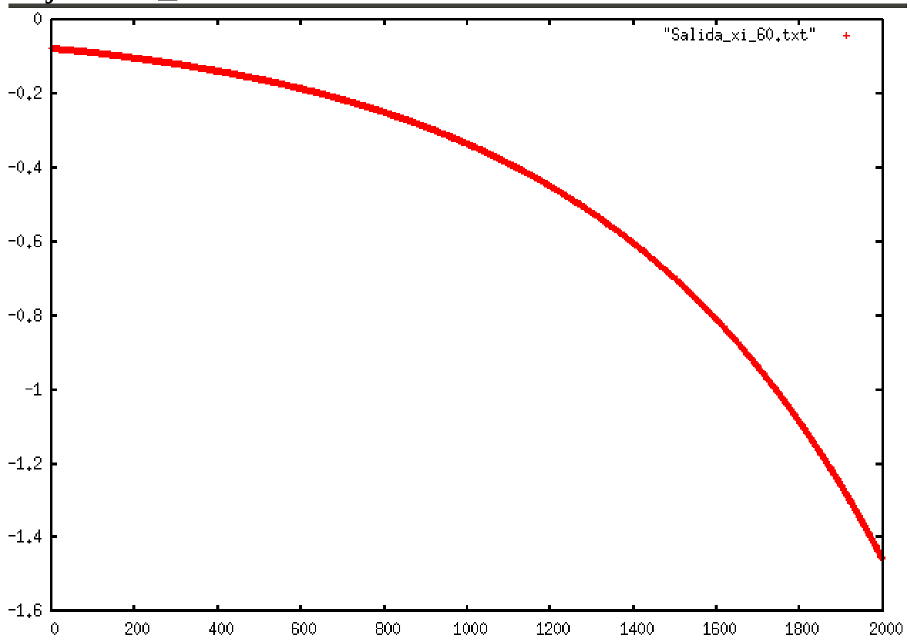
Entonces, ejecutando el código ejercicio_3 de las 2 maneras:

I) ./ejercicio_3
II) ./ejercicio_3 60

Gráfica para ./ejercicio_3 (que por defecto toma n0=30)



Gráfica para ./ejercicio_3 60



Nota:

Cada ejecución te genera 3 ficheros, uno que contiene sus autovalores, otro la matriz de autovectores y otro, los valores de xi(t) variandoel tiempo, donde (i = n0).