2da Dirigida CC 562A

(Modelamiento y Simulación)

1. [**Método Transformada Inversa**] Generar un valor de la variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \{e^{2x} \quad -\infty < x < 0 \; e^{-2x} \quad 0 < x < \infty$$

Solución.-

La función de Distribución es dado por

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{2} I_{(-\infty,0)}(x) + (1 - \frac{e^{-2x}}{2}) I_{(0,\infty)}(x)$$

Que al aplicar el método de la transformada inversa se tiene

$$x = \frac{1}{2} log(2u) I_{(0,\,0.5)}(u) - \frac{1}{2} log(2(1-u)) I_{(0.5,\,1)}(u)$$

MATLAB:

```
function x=trans_inv();
%Trasformada inversa
for i=1:n
   u=rand;
   if u<=0.5
      x=0.5*log(2*u);
   else
      x=-0.5*log((2*(1-u)));
   end
end
```

2. [**Método Aceptación Rechazo**] Generar un valor de la variable aleatoria $X\tilde{}Ga(,1)$ Cuya función de densidad es

$$f(x) = \frac{(1)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{-1} e^{-1*x} \qquad x > 0$$

Solución.-

Como esta variable aleatoria tiene dominio positivo con media , se propone utilizar la distribución $Y\tilde{}exp()$ con la misma media. Es decir,

$$g(y) = \frac{2}{3} e^{-} \qquad y > 0$$

De donde

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{3}}$$

Al derivar e igualar a cero se obtiene el máximo de este cociente (para $x =$) Por lo tanto

$$c = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{(2\pi e)^{\frac{1}{2}}}$$

Luego

$$\frac{f(x)}{cg(x)} = (\frac{2e}{3})^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{3}}$$

[**Algoritmo**]

PASO 1.- Generar $u_1\tilde{}U(0,\ 1)$ luego $Y = -(\frac{3}{2}) log(u_1)$

PASO 2.- Generar $u_2\tilde{}U(0,\ 1)$

PASO 3.- Si $u_2 \leq (\frac{2ey}{3})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{3}}$ Calcular X=Y. Caso contrario, regresar al PASO 1.-

El promedio de iteraciones necesarias es

$$c = 3(\frac{3}{2\pi e})^{\frac{1}{2}} \approx 1.257$$

MATLAB:

```
y=-(3/2)*log(rand());
u=rand();c=1;
while (u>(((2*exp(1)*y/3)^(1/2))*(exp(1)^(-y/3))));
     y=-(3/2)*log(rand());
     u=rand();c=c+1;
end
x=y;
```

3. [**Generación de** $X\tilde{}N(0,\ 1)$ **mediante el Método Polar**] Sean $X\tilde{}N(0,\ 1)$ e $Y\tilde{}N(0,\ 1)$ independientes, y sean R y θ las coordenadas polares del vector $(X,\ Y)$. Es decir,

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

De donde $tag\,\theta = \frac{Y}{X}$

Como X e Y son independientes, la densidad conjunta es el producto de sus densidades individuales

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$$

Para obtener la densidad conjunta de R^2 y Θ, llamada de $f(r^2,\theta)$, se utiliza la siguiente relación

$$Y = (R^2)\ Sen(\theta)$$
$$X = (R^2)\ Cos(\theta)$$

La densidad conjunta deseada seria entonces,

$$f(r^2,\theta) = f(x(r^2,\theta),\ y(r^2,\theta))|J| \qquad J = [\frac{dx}{dr^2}\ \frac{dy}{dr^2}\ \frac{dx}{d\theta}\ \frac{dy}{d\theta}\ ] = -\frac{1}{2}$$

$$f(r^2,\theta) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\ e^{-\frac{(r^2)^2}{2}} \qquad 0 < r^2 < \infty \qquad 0 < \theta < 2\pi$$

Si se observa esta densidad conjunta, corresponde al producto de una densidad Uniforme $\theta\tilde{}U(0,\ 2\pi)$ y densidad exponencial $R^{2}\tilde{}exp()$

A partir de este resultado, lo que se hace despejar X e Y en función de R^2 y θ, dando lugar al método polar (Box-Muller)

[**Algoritmo**]

PASO 1.- Generar $u_1\tilde{}U(0,\ 1)$ y $u_2\tilde{}U(0,\ 1)$

PASO 2.- $R^2 = -2log(u_1)$ y $\theta = 2\pi u_2$

PASO 3.-

$$Y = (R^2)\ Sen(\theta) = \sqrt{-2log(u_1)}\ Sen(2\pi u_2)$$

$$X = (R^2)\ Cos(\theta) = \sqrt{-2log(u_1)}\ Cos(2\pi u_2)$$

MATLAB

```
function [x, y]=normal()
        u1=rand;
       u2=rand;
        x=sqrt(-2*log(u1))*cos(2*pi*u2);
        y=sqrt(-2*log(u1))*sin(2*pi*u2);
end
```

El Profesor
LANH