Algoritmo de Casteljau

May 21, 2010

Las curvas de Bezier fueron desarrolladas casi paralelamente por Paul De Casteljau en 1959 y Pierre Bezier en 1962, veamos en que consistió el algoritmo de Casteljau.

Dada la curva de Bezier $c(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k B_k^n(t)$ usando las siguientes relaciones de recurrencia para los polinomios de Bernstein

$$\begin{aligned} p_k^0 &= p_k \\ p_k^{i+1} &= (1-t)p_k^i + tp_{k+1}^i; t \in [0,1]; k = 0, \cdots, n-i-1; i = 0, \cdots, n-1 \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} p_k^1 &= (1-t)p_k^0 + tp_{k+1}^0; \quad k = 0, \cdots, n-1 \\ p_k^2 &= (1-t)p_k^1 + tp_{k+1}^1; \quad k = 0, \cdots, n-2 \\ & \cdots \\ p_k^n &= (1-t)p_k^{n-1} + tp_{k+1}^{n-1}; \quad k = 0 \end{aligned}$$

y agrupando repetidamente se obtiene
p_0^0
$p_1^0 \;\; p_0^1$
$p_2^0 \;\; p_1^1 \;\; p_0^2$
$\cdots$
$p_n^0 \;\; p_{n-1}^1 \;\; p_{n-2}^2 \;\; \cdots p_0^n$
con lo cual

$$c(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k^0 B_k^n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k^1 B_k^{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{0} p_k^n B_k^0(t) = p_0^n$$

Por ejemplo, si tenemos los puntos p_0, p_1, p_2 y elegimos un $t \in]0,1[$ entonces

$$\begin{aligned} p_0^1 &= (1-t)p_0 + tp_1 \\ p_1^1 &= (1-t)p_1 + tp_2 \end{aligned}$$

Luego

$$p_0^2 = (1-t)p_0^1 + tp_1^1$$

Reemplazando tendremos

$$p_0^2 = (1-t)^2 p_0 + 2t(1-t)p_1 + t^2 p_2 = c(t)$$

si repetimos este proceso para todo $t \in]0,1[$ se genera la Curva de Bezier.