

# PRÁCTICA DIRIGIDA 1

## Interpolación Polinómica

El objetivo de la Práctica es la obtención del polinomio de interpolación, que es el polinomio de grado menor o igual que  $n$  que pasa por  $n+1$  puntos  $(x_i, y_i)$ ,  $i=0,1,\dots,n$ , también llamados *nodos* de interpolación.

Planteando directamente las condiciones anteriores se obtiene un sistema de ecuaciones lineales con solución única, pero generalmente mal condicionado.

Los *polinomios de Lagrange* permiten obtener una expresión explícita del polinomio de interpolación cuyo interés es más bien teórico, pues es difícil de evaluar en puntos concretos.

Numéricamente es mucho más útil la *forma de Newton* del polinomio de interpolación. Aunque no tiene expresión explícita, su obtención es más estable que por los métodos anteriores, su evaluación no presenta los inconvenientes de los polinomios de Lagrange, y sobre todo, se puede actualizar fácilmente si se añaden nuevos nodos de interpolación.

### .1 Interpolación polinómica

El problema de la interpolación consiste en estimar el valor de una función en un punto a partir de valores conocidos en puntos cercanos. En el caso de la interpolación polinómica, la función incógnita se sustituye por un polinomio que coincide con aquella en los puntos conocidos. Se eligen los polinomios porque son fáciles de evaluar y por el hecho fundamental de que dados  $n+1$  puntos de abscisa distinta,  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ , ...,  $(x_n, y_n)$ , existe exactamente un polinomio  $P_n(x)$  de grado no superior a  $n$ , que pasa por dichos puntos, es decir, tal que

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i=0,1,2,\dots,n.$$

En la interpolación lineal, la función se sustituye por la recta que pasa por dos puntos. Tres datos se interpolan con un polinomio de segundo grado, gráficamente una parábola que pasa por esos tres puntos.

Podríamos pensar que al aumentar el grado se obtiene mejor aproximación, pero esto es falso en general. La coincidencia del polinomio con muchos puntos de interpolación se consigue a costa de grandes oscilaciones en los intervalos entre nodos o puntos de interpolación dados.

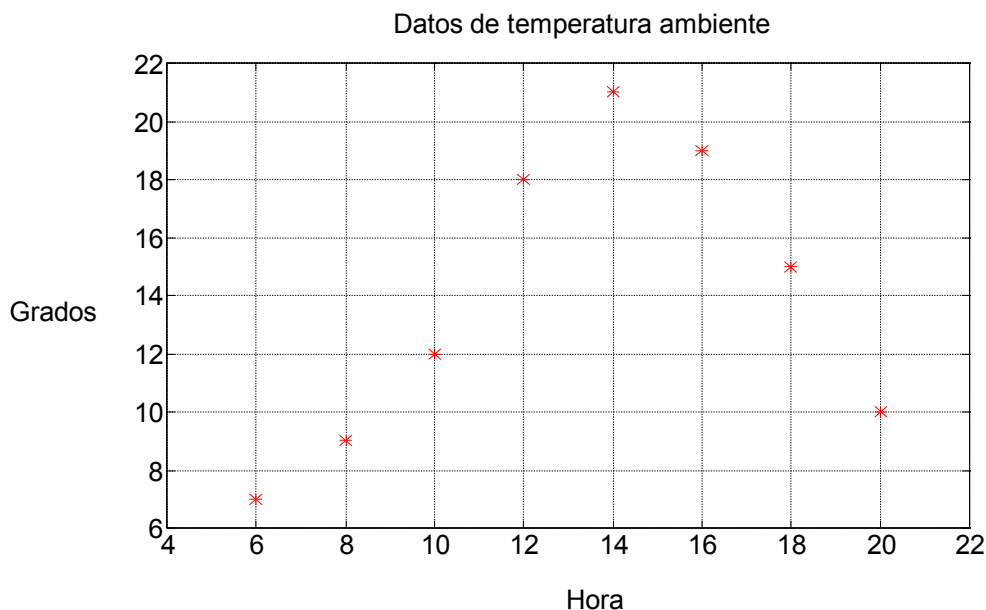
La aplicación clásica de la interpolación consiste en estimar los valores de una función tabulada en puntos que no figuran en la tabla. Como ejemplo típico de tabla citemos la campana de Gauss o distribución normal.

Actualmente la interpolación se utiliza en cálculo numérico para aproximar funciones mediante otras más sencillas, como los polinomios. Por ejemplo para deducir fórmulas de integración aproximada y métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.

### .2 Un problema de interpolación

Midiendo la temperatura ambiente a distintas horas del día hemos obtenido la siguiente tabla

Hora	6	8	10	12	14	16	18	20
Grados	7	9	12	18	21	19	15	10



Sea  $T=f(t)$  la función (desconocida) que da la temperatura ambiente en cada instante  $t$ . Para estimar la temperatura en un instante  $t$  que no aparece en la tabla, aproximaremos la función  $f$  mediante polinomios de interpolación. Estos polinomios se determinan exigiendo que coincidan con  $f$  en alguno de los valores tabulados. Si exigimos que pase por dos puntos, obtenemos una recta, o sea un polinomio de grado 1. Si hacemos que pase por tres puntos, queda un polinomio de grado 2, y así sucesivamente podemos ir añadiendo puntos e incrementando el grado.

### .2.1. Interpolación lineal

El modo más simple de estimar la temperatura a las 13 horas es tomar la media entre las temperaturas de las 12h y las 14h, que es de  $19.5^\circ$ . Para otros instantes en el mismo intervalo tomamos una media ponderada, o geoméricamente hablando, la ordenada de la recta que pasa por (12,18) y por (14,21). La ecuación general de la recta es  $P_1(x) = a_0 + a_1x$ . Exigiendo que pase por los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  obtenemos un sistema de ecuaciones lineales

$$a_0 + a_1x_0 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 = y_1$$

cuya solución da los coeficientes de la recta buscada.

En nuestro ejemplo tenemos el sistema

$$a_0 + 12a_1 = 18$$

$$a_0 + 14a_1 = 21$$

cuya solución es  $a_0 = 0$  y  $a_1 = 3/2$ .

### .2.2. Interpolación cuadrática

Tomando un polinomio de mayor grado, podemos imponer más condiciones para tener en cuenta la evolución de la temperatura alrededor del intervalo [12,14].

El polinomio de grado dos

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

que pasa por  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  se determina análogamente resolviendo el sistema.

$$\begin{aligned}a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 &= y_0 \\a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 &= y_1 \\a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 &= y_2\end{aligned}$$

En nuestro ejemplo, tomando los puntos (10,12), (12,18) y (14,21) queda un sistema cuya expresión matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 1 & 12 & 144 \\ 1 & 14 & 196 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix}$$

La matriz de este sistema se denomina *matriz de Van der Monde*. Esta matriz es regular si los  $x_i$  son todos distintos, pero es mal condicionada para tamaños relativamente pequeños. Esto hace desaconsejable la obtención del polinomio de interpolación por este método. Además, la solución de un sistema lineal de orden  $n$  tiene coste cúbico  $O(n^3)$ , mientras que, como veremos enseguida, el polinomio de interpolación puede obtenerse con  $O(n^2)$  operaciones.

`t=10:2:14;`

```
T=[12 18 21]';
```

```
A=vander(t)
```

```
100    10    1
144    12    1
196    14    1
```

```
cond(A)
```

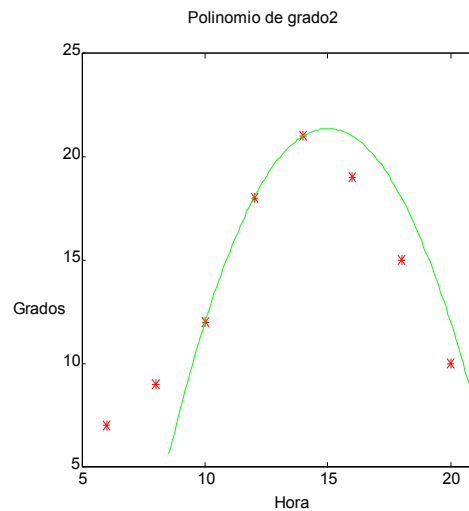
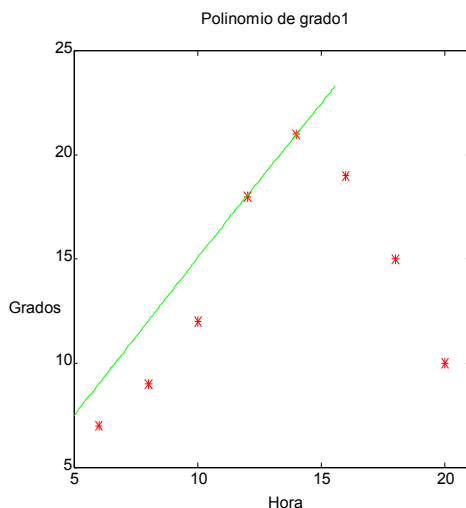
```
1.1634e+004
```

```
a=A\T
```

```
-0.3750
11.2500
-63.0000
```

```
polyval(a,t)
```

```
12.0000 18.0000 21.0000
```



### 2.3. Desplazamiento del origen

El mal condicionamiento de la anterior matriz se debe, en parte, a la inadecuada elección de los polinomios elegidos como base para expresar  $P_2(x)$ . Si, en lugar de 1,  $x$ ,

$x^2$ , desplazamos el origen, por ejemplo a  $x = x_1 = 12$ , el mismo polinomio es ahora una combinación lineal de potencias de  $x-x_1$ :

$$P_2(x) = b_0 + b_1(x-x_1) + b_2(x-x_1)^2$$

La condición  $P_2(x_1) = y_1$  proporciona directamente el valor de  $b_0$  y queda un sistema de menor tamaño y mejor condicionado que el anterior. Esta mejora no es definitiva, pues la matriz del nuevo sistema es parecida a la de Van der Monde y para mayor grado reaparecerá el mal condicionamiento. En el ejemplo, el sistema queda

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

con lo que

$$P_2(x) = 18 + 9/4(x-12) - 3/8(x-12)^2$$

```
A=[ 4 -2; 4 2];
cond(A)
2.0000
c=[-6, 3]';
b=(A\c)
-0.3750    2.2500
p=[b' 18];
polyval(p,t-12)
12    18    21
```

### .3 Forma normal del polinomio de interpolación

El proceso anterior, aplicado a un conjunto de  $n+1$  puntos de abscisas distintas,  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , demuestra la existencia y unicidad del polinomio de interpolación de grado  $\leq n$ ,  $P_n(x)$ , que cumple las condiciones  $P_n(x_i) = y_i$ ,  $i=0,1,2,\dots,n$ . Expresando el polinomio buscado en forma normal

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

e imponiendo las condiciones de interpolación se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Se demuestra que la matriz del sistema tiene determinante

$$V(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

que sólo se anula si coinciden las abscisas de alguno de los nodos. Por tanto, si todos los  $x_i$  son distintos, el sistema es compatible determinado, o sea, tiene solución única. En consecuencia, tenemos el resultado siguiente:

Dados  $n+1$  puntos de abscisas distintas  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , existe un único polinomio de grado menor o igual que  $n$ , cumpliendo las condiciones de interpolación

$$P_n(x_i) = y_i, i=0,1,2,\dots,n.$$

Este resultado tiene gran importancia teórica al resolver de forma única el problema de interpolación polinómica. Sin embargo, el método empleado en su deducción no resulta aplicable en la práctica, pues ya hemos visto que el sistema construido es mal condicionado.

#### **.4 Forma de Lagrange del polinomio de interpolación**

La obtención del polinomio de interpolación en forma normal requiere la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, cuyo coste aritmético es del orden de  $n^3$ , siendo  $n$  el número de nodos. Para reducir el coste podemos tomar una base del espacio de polinomios más adecuada, en la que sea más cómodo imponer las condiciones de interpolación. Esta base, formada por polinomios  $L_{in}(x)$ ,  $i=0,\dots,n$ , dependientes de las abscisas  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , de los nodos considerados, nos proporcionará el polinomio de interpolación sin hacer ni un solo cálculo.

##### **.4.1. Existencia del polinomio de interpolación.**

Sea  $L_{in}(x)$  un polinomio de grado  $n$ , que se anule en todos los puntos  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , salvo en el  $i$ -ésimo, donde vale 1; es decir, tal que

$$L_i(x_j) = 0 \text{ si } j \neq i \text{ y } L_i(x_i) = 1$$

La existencia de este polinomio se deriva del resultado anterior, pero puede obtenerse directamente, sin necesidad de resolver un sistema, gracias a la siguiente fórmula debida a Lagrange

$$L_{in}(x) = \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)}$$

Es inmediato comprobar entonces que el polinomio

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

cumple las condiciones

$$P_n(x_i) = y_i, i=0,1,2,\dots,n.$$

lo que prueba directamente la existencia del polinomio de interpolación. La unicidad se puede garantizar utilizando el hecho de que un polinomio de grado  $n$  puede tener a lo sumo  $n$  raíces. Si dos polinomios de grado  $\leq n$  interpolan  $n+1$  puntos, su diferencia se anula en dichos puntos, por lo que sólo puede ser el polinomio idénticamente nulo.

##### **.4.2. Forma de Lagrange del polinomio de interpolación.**

Combinando las dos últimas fórmulas, obtenemos una expresión explícita del polinomio de interpolación. El polinomio  $P_2(x)$  del ejemplo tiene, según Lagrange, la siguiente expresión:

$$P_2(x) = 12 \frac{(x-12)(x-14)}{(10-12)(10-14)} + 18 \frac{(x-10)(x-14)}{(12-10)(12-14)} + 21 \frac{(x-10)(x-12)}{(14-10)(14-12)}$$

Las operaciones que nos hemos ahorrado en su determinación, hemos de pagarlas al evaluar el polinomio en un punto concreto (del orden de  $n^2$  operaciones por cada evaluación). Además, los productos a efectuar pueden causar overflow y la fórmula no es estable numéricamente.

Cambiaremos los polinomios de Lagrange  $L_{in}(x)$  por otra base que nos proporcione mejores propiedades numéricas, a costa de perder la expresión explícita cómoda del polinomio de interpolación.

## **.5 Forma de Newton del polinomio de interpolación**

La forma natural del polinomio de interpolación era difícil de obtener y fácil de evaluar en un punto dado. Por el contrario, la obtención de la forma de Lagrange era directa, mientras su evaluación resultaba impráctica. ¿Existe una solución de compromiso? La respuesta afirmativa nos la proporciona el método de Newton que exponemos a continuación.

### **.5.1. Determinación algebraica**

Recordando la técnica de desplazamiento del origen vista en 2.3., consideramos como base los polinomios  $1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{n-1})$ . El polinomio de interpolación correspondiente tendrá ahora la expresión

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{n-1})$$

Imponiendo las condiciones de interpolación, podemos determinar los coeficientes de este polinomio.

$$P_n(x_0) = y_0 = c_0$$

$$P_n(x_1) = y_1 = c_0 + c_1(x_1-x_0)$$

$$P_n(x_2) = y_2 = c_0 + c_1(x_2-x_0) + c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$\dots$

$$P_n(x_n) = y_n = c_0 + c_1(x_n-x_0) + c_2(x_n-x_0)(x_n-x_1) + \cdots + c_n(x_n-x_0)(x_n-x_1) \cdots (x_n-x_{n-1})$$

El sistema lineal obtenido tiene una matriz análoga a la de Van der Monde, pero con la ventaja de ser triangular inferior. Los coeficientes pueden determinarse con menos operaciones (del orden de  $n^2$ , en lugar de  $n^3$ ). Otra similitud con la matriz de Van der Monde, es que el elemento  $(i,j)$  es el valor del  $j$ -ésimo polinomio de la base en el  $(i-1)$ -ésimo punto de interpolación.

En nuestro ejemplo, para estimar la temperatura a las 13 h. mediante un polinomio de grado 3, tomamos los 4 puntos más próximos, que son (12,18), (14,21), (10,12) y (16,19). Imponiendo al polinomio que pase por estos puntos, queda el sistema

$$P_3(12) = 18 = c_0$$

$$P_3(14) = 21 = c_0 + 2c_1$$

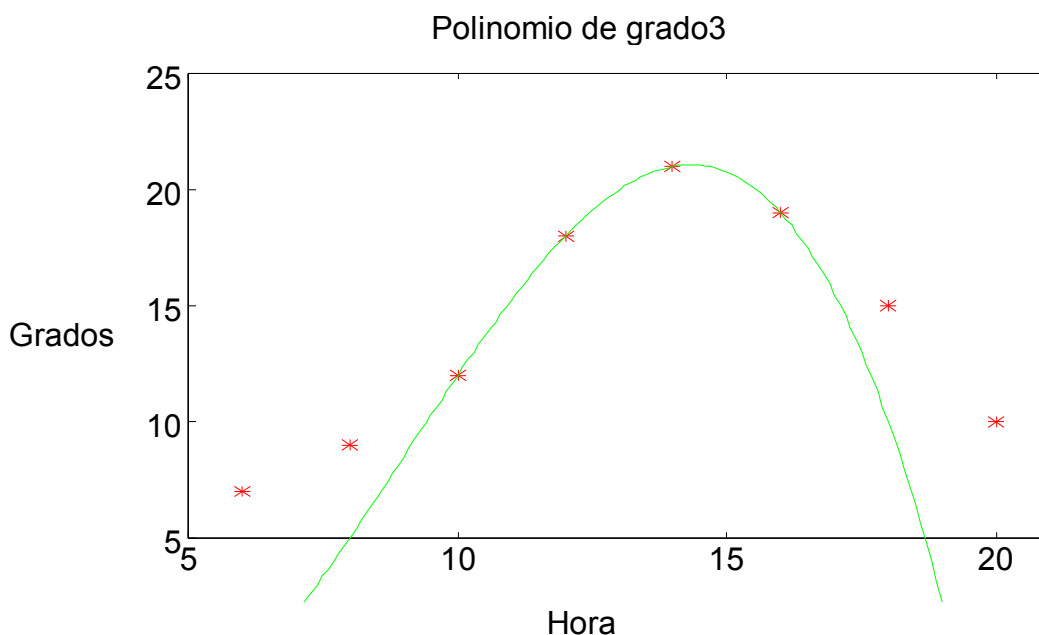
$$P_3(10) = 12 = c_0 - 2c_1 + 8c_2$$

$$P_3(16) = 19 = c_0 + 4c_1 + 8c_2 + 48c_3$$

Resolviendo este sencillo sistema triangular obtenemos los coeficientes del polinomio buscado.

La ecuación del polinomio de grado 3 de la tabla anterior es

$$P_3(x) = 18 + 1.5(x-12) - 0.375(x-12)(x-14) - 0.0417(x-12)(x-14)(x-10)$$



Una importante consecuencia de la forma de los polinomios de la base considerada es que la adición de nuevos puntos no afecta a los coeficientes previamente calculados. De este modo, podemos ir añadiendo puntos uno a uno y obtener polinomios de interpolación de grado creciente sin tener que recalcular los anteriores. En otras palabras,

$c_0$	es el polinomio de grado 0 que pasa por $(x_0, y_0)$ ,
$c_0 + c_1(x-x_0)$	es el polinomio de grado 1 que pasa por $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$ ,
$c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1)$	es el polinomio de grado 2 que pasa por $(x_0, y_0)$ , $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$

En general, cada polinomio se obtiene del anterior mediante

$$P_i(x) = P_{i-1}(x) + c_i(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{i-1})$$

## **.5.2. Tabla de diferencias divididas**

La resolución del sistema triangular anterior por eliminación de Gauss puede presentar problemas de desbordamiento numérico, como en la evaluación de los polinomios de Lagrange. Reinterpretaremos el sistema para evitar este problema, obteniendo un algoritmo numéricamente estable con un coste similar (del orden de  $n^2$ ).

Denotemos por  $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$  el coeficiente de  $x^k$  en el polinomio de interpolación de grado  $k$ . Por la forma de los polinomios de Newton, tenemos que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = c_k$$

De la primera ecuación del sistema se obtiene

$$c_0 = f[x_0] = y_0$$

y de la segunda

$$c_1 = f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - c_0}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

Esta expresión se denomina cociente de diferencias o diferencias divididas de primer orden y proporciona el valor de  $c_1$  en función de los puntos de interpolación.

Los restantes coeficientes del polinomio de interpolación se obtienen análogamente a partir de diferencias divididas de mayor orden.

Así, por ejemplo,  $c_2$  viene dado por el cociente en diferencias de orden 2

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

Diferencias divididas de orden superior nos proporcionarán de modo análogo los coeficientes de polinomios de mayor grado. En general, el coeficiente  $c_k$  viene dado por una diferencia dividida de orden  $k$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Esta expresión muestra que las diferencias divididas de orden  $k$  dependen de diferencias divididas de primer orden  $k-1$ . (En el caso  $k=1$  consideramos  $f[x_i] = y_i$  como una diferencia de orden 0). Estas dependencias determinarán el orden de las operaciones en el algoritmo de cálculo de los polinomios de interpolación.

A modo de justificación de las anteriores fórmulas, consideraremos la obtención de  $c_2$ .

El polinomio de interpolación de grado 1, es decir la recta que pasa por los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  puede expresarse como

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) = f[x_0] + \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}(x - x_0) = \\ &= f[x_0] + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(f[x_1] - f[x_0]) = q + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(r - q) \end{aligned}$$

donde  $q$  es el polinomio de grado cero (constante) que interpola  $(x_0, y_0)$  y  $r$  el polinomio del mismo grado que pasa por  $(x_1, y_1)$ . En este caso particular,  $q \equiv y_0$  y  $p \equiv y_1$ . Apliquemos esta idea a la obtención del polinomio  $P_2(x)$ .

Para ello, sea ahora  $q$  el polinomio (de grado 1) que interpola  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$ , y  $r$  el polinomio que interpola  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . Consideremos el polinomio

$$p(x) = q + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}(r - q)$$

Este polinomio, de grado no mayor que 2, pasa por los puntos  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , como se comprueba sin más que sustituir  $x$  por la abscisa correspondiente y tener en cuenta la definición de  $p$  y  $q$ .

Por tanto  $p(x)$  es el polinomio de interpolación de grado 2 buscado,  $P_2(x)$ . Su coeficiente director es el coeficiente de mayor grado de  $r-q$ , dividido por  $x_2-x_0$ . Como  $q$  y  $r$  son en este caso rectas, sus coeficientes directores son las pendientes, que son los correspondientes cocientes de diferencias primeras. En definitiva,

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$



Las fórmulas de las diferencias divididas de mayor orden se demuestran análogamente, por inducción.

En la práctica, los cálculos se disponen en una tabla de diferencias divididas, colocando en la primera columna los valores de la función o diferencias divididas de orden 0, en la segunda columna las diferencias divididas de primer orden, en la tercera columna las de orden 2, y así sucesivamente.

La tabla queda de la forma siguiente:

$$\begin{array}{cccc}
 y_0 = f[x_0] & & & \\
 y_1 = f[x_1] & f[x_0, x_1] & & \\
 y_2 = f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\
 y_3 = f[x_3] & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
 \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

En la diagonal de la tabla aparecen los coeficientes  $c_0, c_1, c_2, \dots$ , de los polinomios de interpolación.

Para hallar la tabla correspondiente al ejemplo de las temperaturas con MATLAB, procederíamos de modo parecido al siguiente:

```

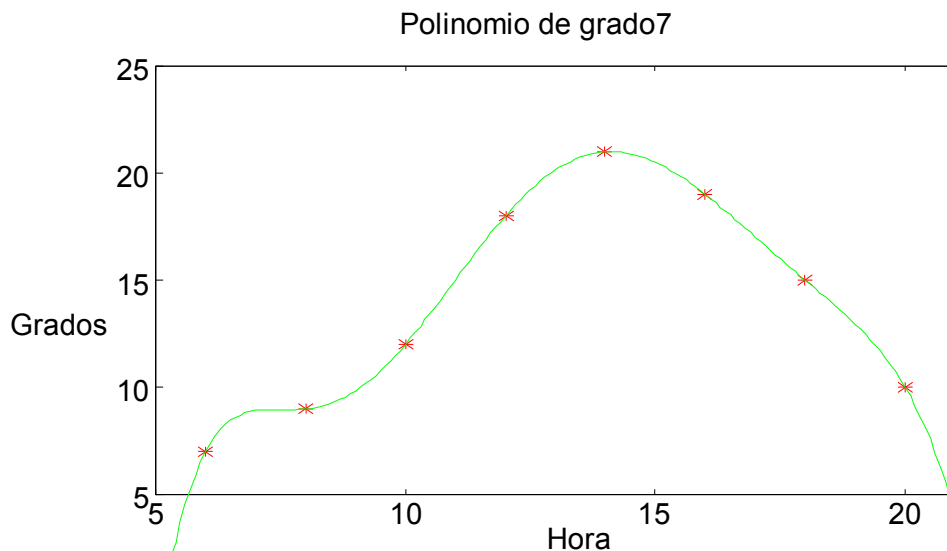
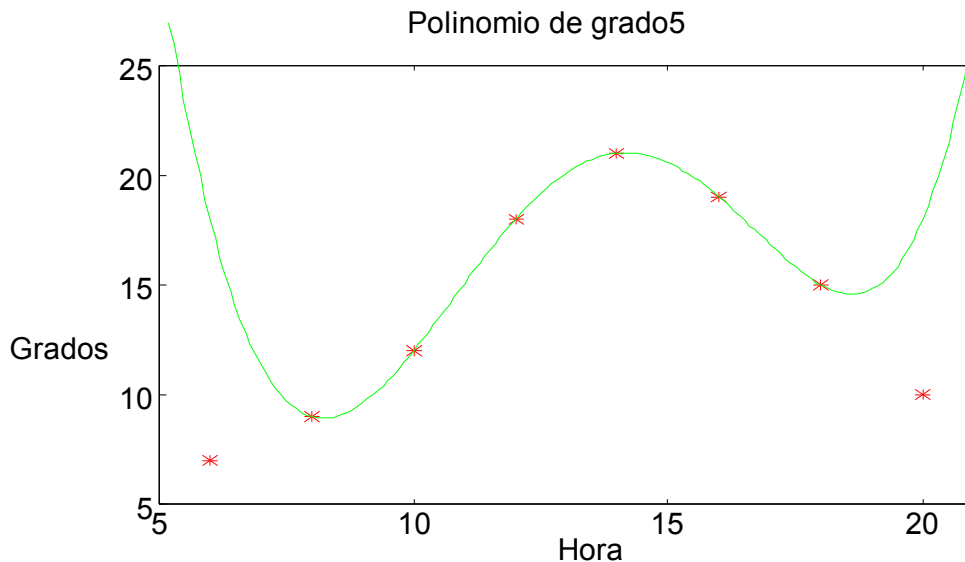
% Horas
t = [6 8 10 12 14 16 18 20]';
% Temperaturas
T = [7 9 12 18 21 19 15 10]';
% Orden de las componentes por proximidad a las 13h
I = [4 5 3 6 2 7 1 8];
% Valores ordenados
X = t(I), Y = T(I)
% Inicialización de la Tabla de Newton
n = 7; A = zeros(n+1,n+1);
% La primera columna son las ordenadas
A(:,1) = Y
% La segunda son los cocientes de diferencias primeras
A(2:n+1,2)=(A(2:n+1,1)-A(1:n,1))./(X(2:n+1)-X(1:n))
% Luego, las diferencias segundas
A(3:n+1,3)=(A(3:n+1,2)-A(2:n,2))./(X(3:n+1)-X(1:n-1))
% Y así sucesivamente
A(4:n+1,4)=(A(4:n+1,3)-A(3:n,3))./(X(4:n+1)-X(1:n-2))

A =

18      0          0          0          0          0          0          0
21     1.5000          0          0          0          0          0          0
12     2.2500     -0.3750          0          0          0          0          0
19     1.1667     -0.5417     -0.0417          0          0          0          0
 9     1.2500     -0.0417     -0.0833          0          0          0          0
15     0.6000     -0.3250     -0.0354          0          0          0          0
 7     0.6667     -0.0333     -0.0292          0          0          0          0
10     0.2143     -0.2262     -0.0161          0          0          0          0

```

Ejercicio: escribir un fichero.m que construya la tabla completa a partir de las abscisas y ordenadas a interpolar.



### .5.3. Evaluación del polinomio de interpolación

Una vez obtenidos estos coeficientes, nos preguntamos cómo evaluar los polinomios de interpolación en un punto dado  $x = a$ . La forma más eficiente desde el punto de vista numérico es mediante la expresión anidada del polinomio:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}) = \\ = (\dots((c_n(x-x_{n-1}) + c_{n-1})(x-x_{n-2}) + c_{n-2})(x-x_{n-3}) + \dots + c_1)(x-x_0) + c_0$$

Las operaciones se efectúan teniendo en cuenta la precedencia establecida mediante los paréntesis, o sea, comenzando con los más interiores.

Ejercicio: a partir de los coeficientes que aparecen en la diagonal de la tabla de Newton, evaluar el polinomio de interpolación en un punto dado,  $x$ , mediante un fichero.m. Prever la posibilidad de que  $x$  sea un vector.

### .5.4. Error de interpolación

Supongamos que interpolamos una función conocida  $f$  a partir de sus valores en unos puntos dados,  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . El error cometido al evaluar  $f(x)$  mediante el polinomio de interpolación de grado  $n$ ,  $P_n(x)$  viene dado por

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

donde  $\xi$  está en el menor intervalo que contiene  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Una consecuencia práctica de la forma del error es que hemos de tomar puntos próximos al punto  $x$  en que hemos de evaluar el polinomio. Normalmente, comenzamos con un polinomio de grado bajo, por ejemplo, la recta que pase por los dos puntos más próximos a  $x$ , y vamos añadiendo puntos por orden de proximidad y calculando polinomios de mayor grado, hasta alcanzar la precisión deseada.

La derivada que aparece en la expresión anterior puede aproximarse a su vez por un cociente en diferencias, pues se tiene que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}$$

para cierto  $\eta$  en el menor intervalo que contiene a  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ .

Esta expresión sugiere una regla práctica para decidir qué polinomio interpola mejor  $n+1$  puntos. Si en la tabla de diferencias divididas, los valores de la columna  $k$ , por ejemplo, son aproximadamente iguales y los de la columna  $k+1$  son aproximadamente cero, el polinomio interpolador más adecuado es de grado  $k$ . La razón es que el error viene dado por diferencias divididas de la columna siguiente,  $k+1$ , que suponemos casi nulas.

Los productos que aparecen en la fórmula del error nos indican que éste puede ser muy grande si hay muchos puntos o si  $x$  no está muy próximo a ellos. Cuando  $x$  no está en el menor intervalo determinado por  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , estamos extrapolando, en lugar de interpolando. Veremos en un ejemplo a continuación los problemas que presenta la interpolación. Éstos se agravan aún más en la extrapolación.

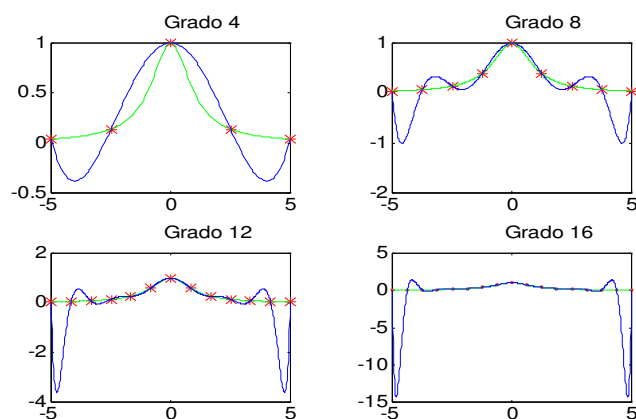
### **.5.5. Nodos de Chebyshev**

Consideremos la función de Runge en el intervalo  $[-1,1]$ :

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

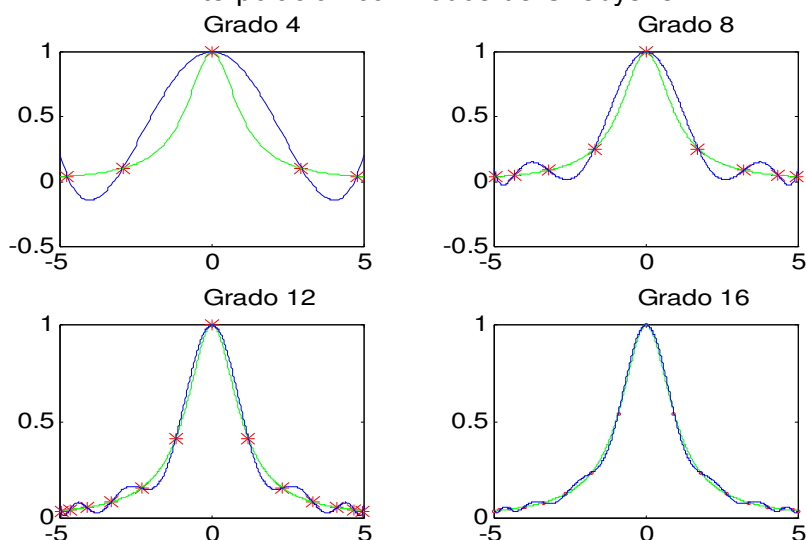
Los polinomios que interpolan sus valores en puntos equiespaciados de este intervalo se desvían bastante de la función, sobre todo cerca de los extremos.

Interpolación con nodos equiespaciados



Observamos que el error máximo en el intervalo aumenta con el grado del polinomio interpolante. Para minimizar el error es conveniente tomar nodos de interpolación especiales, en lugar de los nodos equiespaciados considerados hasta ahora.

#### Interpolación con nodos de Chebyshev



Los llamados nodos de Chebyshev hacen mínimo, en un intervalo dado, el valor máximo del polinomio  $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$  que aparece en la expresión del error. Para el caso particular del intervalo  $[-1, 1]$ , estos nodos son

$$x_i = \cos\left(\frac{2(n-i)+1}{2n+2}\pi\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

En las gráficas se aprecia la reducción del error al interpolar la función de Runge en los nodos de Chebyshev.

#### .5.6. Alternativas

La interpolación polinómica aquí estudiada no debe utilizarse para datos con error de medida. En efecto, si tomo  $n+1$  puntos alineados, el polinomio de interpolación es, en teoría, una recta, pero basta una pequeña desviación en uno de los puntos, para que el resultado sea un polinomio de grado  $n$ . Si los errores de medida son inevitables

debemos recurrir al *método de mínimos cuadrados*, que analizaremos en una práctica próxima.

Cuando una función tiene características muy diferentes a los polinomios, la interpolación polinómica puede resultar inadecuada. En este caso, como hemos visto con el ejemplo de Runge, el aumento del grado empeora el resultado en vez de mejorarlo.

Una alternativa puede ser interpolar mediante funciones de otro tipo. En lugar de polinomios, podemos considerar funciones racionales, por ejemplo.

La práctica siguiente explora otra alternativa que consiste en interpolar mediante funciones definidas por intervalos. En cada intervalo, la función interpolante es un polinomio de grado bajo, normalmente de 1 a 3. Estas funciones se denominan *splines* y el método, interpolación segmentaria.

## .6 Ejercicios propuestos

### 1. Escala de gravamen del I.R.

Base imponible	Cuota íntegra	Tipo
4.410.000	1.165.978	38,86%
4.830.000	1.329.190	41,02%
5.250.000	1.501.474	43,18%
5.670.000	1.682.830	

Supongamos que la cuota íntegra del Impuesto sobre la Renta se determina aplicando una fórmula basada en la interpolación lineal. Un contribuyente tiene una base imponible de 5 millones de Soles. Para calcular lo que tiene que pagar a SUNAT efectúa las siguientes operaciones, consultando la escala de gravamen anterior:

Base	5.000.000	Cuota	
Hasta	4.830.000		1.329.190
Resto....	170.000	al 41,02%	69.734
		SUMA	1.398.924

El tipo marginal del 41,02% que aparece en la escala de gravamen es precisamente el cociente de las diferencias entre las cuotas íntegras y las bases imponibles más próximas en la escala a los 5 millones.

$$\frac{1.501.474 - 1.329.190}{5.250.000 - 4.830.000} = 0,4102$$

La fórmula aplicada es, en definitiva,

$$\text{Cuota} = 1.329.190 + 0,4102(\text{Base} - 4.830.000)$$

para las bases comprendidas en el intervalo [4.830.000, 5.250.000].

En particular, para una base imponible de 5.250.000 es indiferente aplicar la fórmula anterior o tomar directamente el valor de la tabla. En términos matemáticos esto equivale a decir que la Cuota es una función continua de la Base imponible.

El Impuesto sobre la Renta es progresivo, es decir, que el tipo de la imposición aumenta con la base imponible, como se comprueba observando la escala de gravamen. Así, el tipo medio correspondiente a 4.830.000 es el 27,52% y el de 5.250.000 es el 28,60%.

Nuestro contribuyente se siente perjudicado por el hecho de que al Resto de su Base imponible (170.000) se le aplica el mismo tipo marginal (41,02%) que a otro contribuyente con una Base de 5.250.000, alegando que debe aplicársele el correspondiente a la base más próxima en la escala (4.830.000) que es del 38,86%.

SUNAT, por su parte, rechaza estos argumentos y efectúa la liquidación según sus normas. El tenaz sujeto pasivo del impuesto interpone recurso ante el Tribunal competente, que considera en parte sus alegaciones. El fallo establece que en todo caso se debería aplicar un tipo marginal intermedio.

Como experto en temas fiscales debes elaborar un informe para que SUNAT conozca las diferencias entre el actual sistema impositivo y los posibles métodos de determinar la imposición correspondiente a la base de 5 millones por interpolación de segundo y tercer grado en la escala de gravamen.

En cada grado debe añadirse la base más próxima a 5 millones.

**2.** Se desea aproximar la función  $\operatorname{tg} x$  en el intervalo  $[-3/2, 3/2]$ .

- Considerar como nodos de interpolación los puntos  $x_k = k \cdot \alpha$ , para  $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ , precisamente en este orden. Construir la tabla de diferencias divididas y justificar el comportamiento de los coeficientes de interpolación.
- Representar gráficamente la diferencia entre el polinomio de grado 5 y la función interpolada en  $[-3/2, 3/2]$ , tomando 150 intervalos. ¿Cuál es el error máximo apreciado en la tabla de valores?
- Hallar un valor de  $\alpha$  que minimice el error máximo. Explicar el procedimiento seguido en su determinación.
- Tomar como nodos de interpolación los puntos  $x_k = 3 \cdot \alpha \cdot \sin(k\pi/6)$ , hallar el  $\alpha$  óptimo y el error máximo. Comparar con el error obtenido con nodos equiespaciados.

**3.** Un cable de tendido eléctrico entre dos postes adopta la forma de la curva llamada catenaria, que es la gráfica de  $f(x) = \cosh(x)$ .

- Aproximar esta función en  $[-1, 1]$  por un polinomio de interpolación de grado 2,  $p(x)$ . Representar gráficamente ambas funciones.
- Tabular la diferencia entre la función y el polinomio para valores de  $x$  variando de  $-1$  a  $1$  a intervalos de  $0,02$ . Representarla gráficamente e indicar el error máximo y su situación. Comprobar que se satisface la cota teórica del error.
- El error puede medirse globalmente en lugar de puntualmente utilizando la desviación cuadrática media de los valores tabulados,

$$E^2 = \frac{1}{101} \sum_{k=0}^{101} (f(x_k) - p(x_k))^2$$

Evaluar esta fórmula para la función dada.

- Repetir los apartados anteriores aproximando mediante un polinomio de grado 4. ¿En qué proporción se han modificado los errores calculados? ¿Hay alguna razón para considerar polinomios de grado par?