Examen Final

Nombre Curso: Análisis Numérico II

Codigo Curso: CM431

Nombre Profesor(a): Irla Mantilla

Nombre Alumno: Moreno Vera, Felipe Adrian

Codigo Alumno: 20120354I

Ciclo: 2015-II

Problema 1:

Considere la regla numérica del método multipaso lineal: $y_{n+2}-\frac{4}{3}y_{n+1}+\frac{1}{3}y_n=\frac{2}{3}hf_{n+2}$
Analice su convergencia del esquema numérico:

Solucion:

Debemos analizar:
(i) Determinar el orden de consistencia.
(ii) Estudiar si es Convergente y determinar su orden de convergencia.

(i) se debe construir un polinomio residual en función a h e la siguiente manera:
$R=C_0 y(x_n)+C_1 y'(x_n)h+...+C_p y^{(p)}(x_n)h^p+O(h^{p+1})$, donde:
$C_0=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j$, $C_1=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j j-\sum_{j=0}^{k}\beta_j$ y asi ... tal que: $C_q=\frac{1}{q!}\left(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j j^q-\sum_{j=0}^{k}\beta_j j^{q-1}\right)$, q>1
entonces si : $C_q=0, con\, q=0,1,2,...p$, el método será consistente de orden al menos p.
Pero si $C_{q+1}\neq 0$, el método no puede tener orden de consistencia p+1. Y esta última recibe el nombre de constante de error.
Entonces:
$C_0=C_1=C_2=0$ pero $C_3\neq 0$. entonces, el método es consistente de orden 2.

(ii) De la ecuación de BDF de 2 pasos, $y_{n+2}-\frac{4}{3}y_{n+1}+\frac{1}{3}y_n=\frac{2}{3}hf_{n+2}$, se tienen los polinomios característicos y los coeficientes: se construye la ecuación:
$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f(x_{n+j},y_{n+j})$, con n = 0 ,1 , ..., N – k. Método lineal de K pasos.
Donde: $f_n=f(x_n,y_n)$ y con $\alpha_k=1,|(\alpha_0)|+|(\beta_0)|\neq 0$
$\alpha_2=1,\alpha_1=\frac{-1}{4},\alpha_0=\frac{1}{3}$ y $\beta_2=\frac{2}{3}$
$\rho(x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x^j$ .... primer polinomio característico.
$\sigma(x)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j x^j$ ... segundo polinomio característico.
Se contruye: $\rho(x)=x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}$, donde las raíces son x=1 y $x=\frac{1}{3}$, vemos que las raíces tienen módulo es menor o igual a 1, y la raíz que tiene módulo 1 es simple.
Y como satisface la condición de la raíz se dice que es un método 0-estable. Y además es consistente de orden 2, se tiene que es convergente de orden 2.

Problema 2:

Dado el siguiente problema con valores de frontera:

$y''=t+\left(1-\frac{t}{5}\right)y$, con y(0) = 2, y(3) = -1.

Utilizando 3 pasos de tiempo halle la solucion numerica por 2 metodos distintos, compare los resultados y cual es su opinion.

Solucion:

Como piden 3 pasos de tiempo, h = 1.

$x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3$, y(0) = $y(x_2)-2\,y(x_1)+y(x_0)=x_1+\left(1-\frac{x_1}{5}\right)y(x_1)$ =2, y(3)= $y(x_3)$ = -1

1. Metodo diferencias Finitas:

$$y''(x)=\frac{y(x+h)-2\,y(x)+y(x-h)}{h^2}$$

entonces se tiene:

$$y(x_{i+1})-2\,y(x_i)+y(x_{i-1})=x_i+\left(1-\frac{x_i}{5}\right)y(x_i)$$

i=1:

$$y(x_2)-2\,y(x_1)+y(x_0)=x_1+\left(1-\frac{x_1}{5}\right)y(x_1) \quad \text{... 1}$$

i=2:

$$y(x_3)-2\,y(x_2)+y(x_1)=x_2+\left(1-\frac{x_2}{5}\right)y(x_2) \quad \text{... 2}$$

Haciendo el sistema lineal de 2x2:

$$y(x_2)-2\,y(x_1)+2=1+\left(1-\frac{1}{5}\right)y(x_1)$$

$$-1-2\,y(x_2)+y(x_1)=2+\left(1-\frac{2}{5}\right)y(x_2)$$

se transforma:

$$-\left(\frac{14}{5}\right)y(x_1)+y(x_2)=-1$$

$$y(x_1)-\left(\frac{13}{5}\right)y(x_2)=3$$

reduciendo a la forma Ab = C

$$\begin{bmatrix} \frac{-14}{5} & 1 \\ 1 & \frac{-13}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Donde la solucion: $b_1 = -0.063694 = \frac{-10}{157}$ $b_2 = -1.178344 = \frac{-185}{157}$

Como piden 3 pasos de tiempo, h = 1.

$x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3$, y(0) = $y(x_2) - 2y(x_1) + y(x_0) = x_1 + \left(1 - \frac{x_1}{5}\right) y(x_1)$ =2, y(3)= $y(x_3)$ = -1

2. Metodo del disparo:

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

$$y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}) - x_i - \left(1 - \frac{x_i}{5}\right) y(x_i) = 0$$

disparamos y obtenemos la primera pendiente: $m = \frac{y(x_3) - y(x_0)}{x_3 - x_0} = \frac{-1-2}{3-0} = -1$

$$y(x_2) - 2y(x_1) + 2 = 1 + \left(1 - \frac{1}{5}\right) y(x_1)$$

$$y(x_2) = -1 + \left(\frac{14}{5}\right) y(x_1)$$

$$-1 - 2y(x_2) + y(x_1) = 2 + \left(1 - \frac{2}{5}\right) y(x_2)$$

$$y(x_1) = \left(\frac{13}{5}\right) y(x_2) + 3$$

se transforma:

$$-\left(\frac{14}{5}\right) y(x_1) + y(x_2) = -1$$

$$y(x_1) - \left(\frac{13}{5}\right) y(x_2) = 3$$

reduciendo a la forma Ab = C

$$\begin{bmatrix} \frac{-14}{5} & 1 \\ 1 & \frac{-13}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Donde la solucion: $b_1 = -0.063694 = \frac{-10}{157}$ $b_2 = -1.178344 = \frac{-185}{157}$

Se ve que se obtiene similares resultados, debido al numero de pasos escogidos y la variedad de variables auxiliares creadas durante los metodos.

Problema 3:

Dado el problema de valor inicial:
$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, con condiciones iniciales: u(x,0)=0 y $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=3\,sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
$x\in[1,4]$ $t\in[0,1]$.
Halle la solucion numerica de modo que su aproximacion sea convergente con dt = 1.

Solucion:

Analizando la convergencia en dt = 1, se debe tener: $\alpha=\frac{c\,dt}{dx}\le 1$, donde: $c^2=2$
entonces: $\alpha=\frac{2\,dt}{dx}\le 1$ se tiene que: dx = 3 porque $dx\ge 2$ y $\alpha=\frac{2}{3}$.
entonces se tiene: $t_0=0$ $t_1=1$, $x_0=1$ $x_1=4$.

Como es una ecuacion de Onda, se obtiene las condiciones iniciales u(x,0)=f(x)=0 y
$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=3\,sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)=g(x)$.
se tiene:
I
$u_{i,0}=f(x_i)$

$u_{0,0}=f(x_0)$ = f(1)=0
$u_{1,0}=f(x_1)$ = f(4)=0
II
$u_{i,1}-u_{i,0}=kg(x_i)$

$u_{0,1}-u_{0,0}=kg(x_0)$ =g(1)= $3\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$
$u_{1,1}-u_{1,0}=kg(x_1)$ =g(4)= $3\,sen(2\pi)=3$
III
$u_{i,1}=u_{i,0}+kg(x_i)+c^2\frac{k^2}{2}f''(x_i)$
$u_{i,1}=(1-\alpha^2)f(x_i)+\frac{\alpha^2}{2}(f(x_{i+1})+f(x_{i-1}))+kg(x_i)$

de las condiciones iniciales:

$u_{0,0}=0$, $u_{1,0}=0$

tenemos las soluciones:
$u_{1,1}=3$ y $u_{0,1}=3$

que son las soluciones en las fronteras.

Problema 4:

a) Dado el siguiente esquema numerico halle dt, de modo que el ultimo termino del segundo miembro que multiplica a u_i^j se anule:

$u_i^{j+1}=u_{i,j+1}=\frac{k\,dt}{c\rho(dx)^2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+\left(1-\frac{2k\,dt}{c\rho(dx)^2}\right)u_{i,j}$, con k=1, cp=4, $x\in[0,1]$,

dx = 0.25.

b) Escribir la ecuacion diferencial a la que pertenece la siguiente regla de aproximacion numerica dad en a).

Solucion:

a) Despejamos las variables del ultimo miembro:

$0=\left(1-\frac{2k\,dt}{c\rho(dx)^2}\right)$, de modo que al ultimo se anule. Y tenemos de los datos:

$\frac{2k\,dt}{c\rho(dx)^2}=8\,dt$, entonces: $dt=\frac{1}{8}$.

b) Despejamos las ecuaciones:

$$u_{i,j+1}=\frac{k\,dt}{c\rho(dx)^2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+\left(1-\frac{2k\,dt}{c\rho(dx)^2}\right)u_{i,j}$$

$$u_{i,j+1}=\frac{k\,dt}{c\rho(dx)^2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+u_{i,j}-\frac{2k\,dt}{c\rho(dx)^2}u_{i,j}$$

$$u_{i,j+1}-u_{i,j}=\frac{k\,dt}{c\rho(dx)^2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})-\frac{2k\,dt}{c\rho(dx)^2}u_{i,j}$$

$$u_{i,j+1}-u_{i,j}=\frac{k\,dt}{c\rho(dx)^2}\left[(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})-2u_{i,j}\right]$$

$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{dt}=\frac{k}{c\rho}\left[\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{(dx)^2}\right]$ y esto es igual a obtener:

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ y como k=1 y cp = 4, se obtiene finalmente:

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ o tambien $4\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$