UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS

Tema:
Problema de 2 cuerpos, ecuaciones de Hamilton

Apellidos: Moreno Vera
Nombres: Felipe Adrian
Código: 20120354I
Curso: Física Computacional
Codigo Curso: CC063

2016-II

Ejercicio 1:

Usar $H(q,p)=U(q)+K(p)$, cono p=v, q=r. Para demostrar que la ecuaciones Hamiltonianas, discretizadas a $O(dt^3)$ son equivalentes a leap-frog.

Sol:

Como q es la posición de la partícula y p actúa como la velocidad o momento lineal trivial (m=1).
Se discretiza usando el método de euler de primer orden:

$$p_i(t+\varepsilon)=p_i(t)+\varepsilon\frac{dp_i(t)}{dt} \quad .$$

Se discretiza usando el método de Leap-Frog:

$$p_i(t+\varepsilon)=2p_i(t)-p_i(t-\varepsilon)+p''(t)dt^2+O(dt^4)$$

Definiciones: p = mv, como momento lineal:
Y además la defición de Lagrangiana para 2 partículas se tiene: $L=\frac{1}{2}\sum_1^2 m_j v_j^2-U$.
Se define el momento lineal con respecto a la coordenada qj de una partícula de lagrangina L por $p_j=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}=m_j\dot{q}_j$. a p se le llama vector de momento lineal.
Se define como hamiltoniana de un sistema de partículas de lagrangiana L a la función siguiente:

$$H(p_j,q_j,t)=\sum_1^2 p_j\dot{q}_j-L(p_j,q_j,t)$$

donde las p_j son las correspondientes componentes de momento lineal.
Como q es la posición, entonces: $v=\dot{q}$, entonces se tiene:

$$L(p_j,q_j,t)=L(\dot{q}_j,q_j,t)=\frac{1}{2}\sum_1^2 m_j v_j^2-U(q_j)=\frac{1}{2}\sum_1^2 m_j\dot{q}_j^2-U(q_j)=\frac{1}{2}\sum_1^2 p_j\dot{q}_j-U(q_j) \quad .$$

$$H=\sum_1^2 p_j\dot{q}_j-U=\sum_1^2\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j-\frac{1}{2}\sum_1^2 m_j\dot{q}_j+U=\sum_1^2 m_j\dot{q}_j^2-\frac{1}{2}\sum_1^2 m_j\dot{q}_j^2+U$$, entonces:

$$H=\frac{1}{2}\sum_1^2 m_j\dot{q}_j^2+U=K+U$$, se deduce que la Hamiltoniana de un sistema sometido a un campo exterior constante, no dependiente del tiempo ni de la velocidad, es la energía total del sistema, suma de la energía cinética más la energía potencial.

Derivando la hamiltoniana:

Se tiene por el teorema de la derivada total se sabe:

$$dH=\frac{\partial H}{\partial q}dq+\frac{\partial H}{\partial p}dp+\frac{\partial H}{\partial t}dt \quad ...(1)$$

$$dH=d\left(\sum_1^2 p_j\dot{q}_j-L\right)=\sum_1^2 dp_j\dot{q}_j+\sum_1^2 p_j d\dot{q}_j-dL=\sum_1^2 dp_j\dot{q}_j+\sum_1^2 p_j d\dot{q}_j-\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial t}dt\right)$$

Usando solo una partícula

$$dH=d\left(\sum_1^2 p_j\dot{q}_j-L\right)=\sum_1^2 dp_j\dot{q}_j+\sum_1^2 p_j d\dot{q}_j-dL=\sum_1^2 dp_j\dot{q}_j+\sum_1^2 p_j d\dot{q}_j-\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial t}dt\right)$$

, además:

$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=m_j\dot{q}_j$, entonces queda como:

$$dH=dp_j\dot{q}_j-\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j-\frac{\partial L}{\partial t}dt \quad ...(2)$$

de (1) y (2) se tiene que:

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\dot{q} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial q}=-\frac{\partial L}{\partial q}=-\frac{\partial L}{\partial q\frac{dt}{\partial t}}=-\frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)}{dt}=-\frac{d(p)}{dt}=-\dot{p} \quad .$$

Entonces de la ecuación anterior $p_i(t+\varepsilon)=p_i(t)+\varepsilon\frac{dp_i(t)}{dt}$, se tiene que las ecuaciones de Euler de p y q en función de Hamiltoniano son:

$$p_i(t+\varepsilon)=p_i(t)-\varepsilon\frac{\partial H}{\partial q}+O(\varepsilon) \quad , \quad q_i(t+\varepsilon)=q_i(t)+\varepsilon\frac{\partial H}{\partial p} \quad .$$

y las ecuaciones de Leap-Frog son:

$$p_i\left(t+\frac{\varepsilon}{2}\right)=p_i(t)+\frac{1}{2}\dot{p}_i(t)\varepsilon \quad ...(1)$$

$$q_i(t+\varepsilon)=q_i(t)+\dot{q}(t)\varepsilon+\frac{1}{2}q''(t)\varepsilon^2=q_i(t)+p_i(t)\varepsilon+\frac{1}{2}\dot{p}_i(t)\varepsilon^2 \quad ...(2)$$

entonces queda:

$$q_i(t+\varepsilon)=q_i(t)+\varepsilon p_i\left(t+\frac{\varepsilon}{2}\right)+O(\varepsilon^3) \quad ...(3) \text{ y } \quad p_i(t+\varepsilon)=p_i\left(t+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{1}{2}\dot{p}_i(t+\varepsilon)\varepsilon+O(\varepsilon^3) \quad ,$$

entonces: $p_i(t+\varepsilon)=p_i(t)+\frac{1}{2}\dot{p}_i(t)\varepsilon+\frac{1}{2}\dot{p}_i(t+\varepsilon)\varepsilon+O(\varepsilon^3)$ ...(4)

Como dato adicional, nosotros sabemos que el Hamiltoniano es invariante al tiempo, es decir $\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}=0$ por lo que $H(t)=H(t+\varepsilon)$ ...(a)

Por lo que se tiene en (3):

$$q_i(t+\varepsilon)=q_i(t)+\varepsilon p_i\left(t+\frac{\varepsilon}{2}\right)+O(\varepsilon^3)=q_i(t)+\varepsilon\dot{q}_i\left(t+\frac{\varepsilon}{2}\right)+O(\varepsilon^3) \quad =>$$

$$q_i(t+\varepsilon)=q_i(t)+\varepsilon\frac{\partial H\left(t+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\partial p}+O(\varepsilon^3) \quad ...(5).$$

Similar en (4):

$$p_i(t+\varepsilon)=p_i(t)+\frac{1}{2}\dot{p}_i(t)\varepsilon+\frac{1}{2}\dot{p}_i(t+\varepsilon)\varepsilon+O(\varepsilon^3)$$

$$p_i(t+\varepsilon)=p_i(t)+\varepsilon\left(\frac{1}{2}\dot{p}_i(t)+\frac{1}{2}\dot{p}_i(t+\varepsilon)\right)+O(\varepsilon^3) \quad , \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\frac{d\,U(q)}{dq} \quad \text{y} \quad \dot{q}=p$$

$$p_i(t+\varepsilon)=p_i(t)+\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial H(t)}{\partial q}-\frac{1}{2}\frac{\partial H(t+\varepsilon)}{\partial q}\right)+O(\varepsilon^3) \quad \ldots (6)$$

Entonces de (1) y (5) para q, de (2) y (6) para p se deduce que las ecuaciones de discretización de Euler de primer orden es menos precisa que las ecuaciones de Leap-Frog de tercer orden.

<u>Ejercicio 2:</u>

Aplicar la transformación $|U(q)|^{-1}d\tau=dt$ y el hamiltoniano transformado de Poincaré:

$$\Gamma=|U(q)|^{-1}(K(p)+U(q)-E)$$

Con energía total constante E = K + U = const.

Para demostrar por qué la transformación de la variable de tiempo es llamada una regulación del problema de dos cuerpos.

<u>Sol:</u>

Entonces derivamos para encontrar los $\dot{p}\, y\, \dot{q}$, pero del ejericio 1 se sabe que:

$\dot{p}=-\frac{dU(q)}{dq}\, y\, \dot{q}=p$, derivando $\Gamma=|U(q)|^{-1}(K(p)+U(q)-E)$ respecto a p y q, se tiene:

I) $\frac{\partial\Gamma}{\partial p}=\frac{d|U(q)|^{-1}(K(p)+U(q)-E)}{dp}$, se tiene: $\frac{\partial\Gamma}{\partial p}=\frac{\partial|U(q)|^{-1}(K(p))}{\partial p}$, se tiene que K(p) se interpreta como la energía Cinética, entonces tomando el momento lineal, con masa trivial (M=1), obtenemos que:

$$K(p)=\frac{1}{2}p^2 \quad => \quad \frac{dK(p)}{dp}=p=\dot{q} \quad , \quad \frac{d\left(K(p)\left|(U(p))\right|\right)^{-1}}{dp}=p\left|(U(q))\right|^{-1}=\dot{q}\left|(U(q))\right|^{-1}$$

II) $\frac{\partial\Gamma}{\partial q}=\frac{d|U(q)|^{-1}(K(p)+U(q)-E)}{dq}$, se tiene: $\frac{\partial\Gamma}{\partial q}=\frac{\partial|U(q)|^{-1}(U(q))}{\partial q}$

$$\frac{\partial|U(q)|^{-1}(U(q))}{\partial q}=\frac{U'(q)}{\left|(U(q))\right|}-\frac{U^2(q)}{\left|(U(q))\right|^3}U'(q)=\dot{p}\left(U^2(q)\left|(U(q))^{-3}\right|-\left|(U(q))\right|^{-1}\right)$$

Entonces las ecuaciones son:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial q}=\dot{p}\left(U^2(q)\left|(U(q))^{-3}\right|-\left|(U(q))\right|^{-1}\right) \quad \ldots (1)\text{y} \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial p}=\dot{q}\left|(U(q))\right|^{-1} \quad \ldots (2)$$

La dificultad al momento de derivar parcialmente Γ en p y q es la componente: $\left|(U(q))^{-1}\right|$

Se tiene la siguiente expresión de la ecuación de Hamilton:

$$\Lambda=\ln(1+\Gamma)=\ln(K(p)-E)-\ln\left(\left|(U(q))\right|\right)$$

Ahora calcular sus respectivas derivadas parciales:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial q}=-\frac{U(q)U'(q)}{\left|(U(q))\right|^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial p}=-\frac{K'(p)}{U(q)}$$

Se tiene:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial q}=\dot{p}\frac{U(q)}{\left|(U(q))\right|^2} \quad \ldots (3) \text{ y } \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial p}=-\frac{\dot{q}}{U(q)} \quad \ldots (4)$$

Las derivadas resultan más sencillas de calcular y pero sigue la dependencia del campo potencial.

Referencias:

http://www.fisicafundamental.net/simetrias/ecuaciones.html
http://casanchi.com/fis/hamilto01.htm
https://coloquiooleis.wordpress.com/2010/10/31/%c2%bfque-es-un-hamiltoniano/#more-1746
http://www.fisica.uniud.it/~ercolessi/md/md/node21.html