Transformaciones de Legendre y Ecuaciones de Hamilton

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE HONDURAS
Nargin Avila 20131001569
David Rosales 20131008482
Kevin Rico 20131000823
Pabel Cardenas 20131006034

16 de febrero de 2016

1. Introduccion

El presente informe trata sobre como aplicar el metodo hamiltoniano para resolver algunos problemas de mayor dificultad en mecanica clasica y otras areas de la fisica como por ejemplo la termodinamica donde en este informe es mostrado como un ejemplo del uso de las ecuaciones de Hamilton.

Ademas analizaremos las diferencias que hay entre el uso del metodo lagrangiano y el metodo hamiltoniano usando la poderosa herramienta matematica de las transformaciones Legendre aplicando coordenadas y velocidades generalizadas.

2. Objetivos

Comparar el metodo de solucion de problemas en mecanica clasica entre las ecuacionde de Hamilton y Lagrange

Hacer un analisis y representacion del metodo hamiltoniano usando la herramienta matematica adecuada para resolover problemas de mecanica clasica

3. Mecanica Hamiltoniana

La mecanica hamiltoniana fue formulada en 1833 por William R. Hamilton.

3.1. Resena historica

William R. Hamilton (14 Agosto de 1805-2 Septiembre de 1865) matematico, fisico y astronomo irlandes, que contribuyo grandemente en el desarrollo de la fisica; optica, dinamica y el algebra. Uno de sus ultimos trabajos en la mecanica cuantica fue un concepto fundamental llamado Hamiltoniano.

3.2. Creaciones intelectuales de Hamilton

- *Teorema de Hamilton de la hodografa*
- *Teorema de Coyley-Hamilton*

- *Ecuacion de Hamilton-Jacobi*
- *Camino Hamiltoniano*

3.3. Que es la mecanica Hamiltoniana?

Al igual que la version lagrangiana, la mecanica hamiltoniana es equivalente a la newtoniana, aunque es mucho mas flexible en su eleccion de coordenadas. Al igual que el metodo lagrangiano, que se centro en la funcion Lagrangiano $\boldsymbol{L}$. Este metodo se centra en la funcion hamiltoniana $\boldsymbol{H}$. Este metodo es mejor en muchos aspectos que el metodo lagrangiano. Nos lleva de la mecanica clasica a la mecanica cuantica de una manera muy natural. Centrados en la idea de que la mecanica Hamiltoniana nos ayuda a describir sistemas fisicos, como en fisica moderna, astrofisica, la fisica del plasma y el diseno de aceleradores de particulas. Entonces partiremos de funcion de origen el Hamiltoniano $\boldsymbol{H}$ que en su mayoria de casos es la energia total. Primero partimos de la ecuacion ya conocida como ecuacion de Lagrange:
$\frac{d}{dt}(\frac{dL}{d\dot{q}_i}) - \frac{dL}{dq_i} = 0$

Como el tiempo avanza la funcion α cambia, y lo hace por dos razones, porque esta depende de t y t cambia porque q y $\dot{q}$ (coordenadas generalizadas) cambian a medida evoluciona el sistema. Entonces:

$$\frac{d}{dt}L(q_1...q_n, \dot{q}_i...\dot{q}_n, t) = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{1}$$

Sabemos que:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}p_i = \dot{p}_i \tag{2}$$

Sustituyendo en (1)

$$\frac{d}{dt}L = \sum(\dot{p}_i\dot{q}_i + p_i\ddot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\sum(p_i\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{3}$$

En varios sistemas el lagrangiano no depende del tiempo
$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$
Entonces la ecuacion (3) puede escribirse como:
$\frac{d}{dt}L = \frac{d}{dt}\sum(p_i\dot{q}_i)$

$0 = \sum(p_i\dot{q}_i) - L$

Finalmente entonces:

$H = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L$

Nos dice que la derivada temporal de la cantidad $\sum p_i\dot{q}_i - L$ es cero y representada por su propio simbolo H. Esto nos dice algo muy importante, que si el hamiltoniano no depende del tiempo $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ entonces el H se conserva.

3.4. Diferencia entre Hamiloniano y Lagrangiano

La principal diferencia esta en sus argumentos

$(q_1...q_n, \dot{q}_1..\dot{q}_n)$Lagrange

$(q_1...q_n,p_1...p_n)$ Hamilton

Mediante esta diferenciacion podemos llevar a cabo de otro modo la formulacion de Hamilton Para el cambio de base del sistema, ya que ahora vamos a deducir una formulacion en coordenadas y momentos generalizados (q_i y p_i), lo llevaremos a cabo mediante un proceso matematico llamado transformacion de Legendre.

Comenzaremos considerando una funcion f(x,y) tal que el diferencial df tenga la forma:
$df = udx + vdy$
$u = \frac{\partial f}{\partial x}$
$v = \frac{\partial f}{\partial y}$

Basicamente pasamos de la base x, y a la u, v. Ahora definimos una funcion g a una funcion de u e y definido por la ecuacion:
$g = f - ux$
La derivada de g es:
$dg = udx + vdy - udx - xdu$
$dg = vdy - xdu$

Las nuevas relaciones son:
$x = \frac{-\partial g}{\partial u}$
$v = \frac{\partial g}{\partial y}$

Esta transformacion es muy frecuente en la termodinamica. Por ejemplo:
La entalpia X es una funcion de la entropia S y de la presion P, con las siguientes propiedades:

$T = \frac{\partial X}{\partial S}$
$V = \frac{\partial X}{\partial P}$

De modo que:

$dX = TdS + VdP$

Donde T: Temperatura absoluta y, V: Volumen. Suele emplearse la entalpia en los fenomenos isentropicos e isobaricos, pero son mas frecuentes los fenomenos isotermicos e isobaricos. En estos casos se trata de encontrar una funcion termodinamica que solamente involucre a T y P. Haciendo uso de la transformacion de Legendre entonces encontramos la siguiente funcion que determina lo que queremos encontrar:

$G = X - TS$

con:

$dG = -SdT + VdP$

Siendo G la conocida funcion de Gibss o energia libre, cuyas propiedades son determindas en dicha ecuacion.

Entonces haciendo una analogia entre las relaciones y el Hamiltoniano tenemos que:

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \tag{4}$$

La derivada con respecto al tiempo:
$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$

La derivada del H en (4) es:
$dH = \sum \dot{q}_i dp_i + \sum p_i dq_i - \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$

como: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$

entonces:
$dH = \sum \dot{q}_i dp_i - \sum \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$

Por comparacion entonces obtenemos:

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ $\quad - p_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$ $\quad - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$
Estas son las ecuaciones canonicas de Hamilton.

3.5. Hamiltoniano en ecuaciones canonicas de movimientos

$H = L_2 - L_0$

Donde :
L_0:Parte de el Lagrangiano independiente de las velocidades generalizadas
L_2: Parte homogenea de segundo grado en $\dot{q}_i$

Si las ecuaciones que definen las coordenadas generalizadas no dependen del tiempo entonces:
$L_2 = T$ y si las fuerzas derivan de un potencial conservado V, entonces $L_0 = -V$

Si se cumplen estas dos condiciones, el hamiltoniano sera automaticamente la energia total $H = T + V = E$

Podemos ir mas alla. En gran cantidad de problemas, sucede que L_2 es una funcion cuadratica de las velocidades generalizadas y L_0 es una funcion lineal de las mismas variables con las siguientes dependencias funcionales especificas.
L(q_i,$\dot{q}_i$,t)=L_0(q,t)+$\dot{q}_i^2$ T_i(q,t)

Las transformadas algebraicas correspondientes a las pasos del 2 al 5 podran efectuarse al menos formalmente. Para ver eso colocamos las $\dot{q}_i$ formando una matriz columna $\dot{q}_i$. Y podemos escribir el lagrangiano en forma:

$L(q,\ \dot{q}, t) = L_0(q, t) + \tilde{\dot{q}}\ a + \frac{1}{2}\ \tilde{\dot{q}}\ T\ \dot{q}$

Donde la matriz $\tilde{\dot{q}}$ se ha escrito de forma explicita como la transpuesta de una unica matriz de la columna $\dot{q}$.

$$\frac{1}{2}\,\tilde{\dot{q}}\,T\,\dot{q}_i = \frac{1}{2}\,(\dot{x},\dot{y},\dot{z})\begin{pmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

Aqui a es una matriz de columnas y T es una matriz cuadrada. Los elementos de ambos estan en funciones generales de de q y t. Para ilustrar este formalismo, consideremos el caso especial donde $q_i = (x, y, z)$ y T es la diagonal.

$$\tilde{\dot{q}}a = (\dot{x},\dot{y},\dot{z})\begin{pmatrix} a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix} = a_x\dot{x} + a_y\dot{y} + a_z\dot{z} = a\dot{r}$$

La notacion hamiltoniana. $H = \tilde{\dot{q}}p - L$ se convierte en:

$$H = \tilde{\dot{q}}(p-a) - \frac{1}{2}\tilde{\dot{q}}T\dot{q} - L_0$$

Los momentos conjugados, considerado como una matriz de columna de p es entonces:

$$p = T\dot{q} + a$$

Puede ser invertida a la columna vector $\dot{q}$:

$$\dot{q} = T^{-1}(p-a)$$

Este paso presupone que existe T^{-1}, lo que lo hace normalmente en virtud de de la propiedad definida positiva de la energia cinetica. La ecuacion correspondiente para $\tilde{\dot{q}}$ es:

$$\tilde{\dot{q}} = (\tilde{p} - \tilde{a})T^{-1}$$

Para obtener la forma funcional correcta para el hamiltoniano, las dos ecuaciones anteriores deben ser utilizadas para reemplazar a $\dot{q}$ y una $\tilde{\dot{q}}$ dando la forma general para el hamiltoniano:

$$H(q,p,t) = \frac{1}{2}(\tilde{p}-\tilde{a})T^{-1}(p-a) - L_0(q,t)$$

$$T^{-1} = \frac{\tilde{T}_c}{|T|}$$

Aqui $\tilde{T}_c$ es la matriz adjunta cuyos elementos $(T_c)_{jk}$ son el producto de $(-1)^{j+k}$ por el menos complementarlo del elemento $jk - esimo$ de la matriz T, es decir el determinante de la matriz que se obtiene al suprimir en T la fila $jk - esima$ y la columna $jk - esima$. T y T^{-1} Son diagonales.

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m\end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{m} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \tilde{T}_c = \begin{pmatrix} m^2 & 0 & 0\\ 0 & m^2 & 0\\ 0 & 0 & m^2\end{pmatrix}$$

Consideremos primeramente el movimiento espacial de una particula en un campo de fuerzas centrales, utilizando para las coordenadas generalizadas las coordenadas polares (r,θ,ϕ). La energia potencial sera una cierta funcion $V(r)$ y la energia cinetica es:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Esta claro que el hamiltoniano sera igual a la energia total $T + V$ y como T es diagonal, por simple inspeccion deducimos que la forma H es:

$H(r, \theta, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2m}({p_r}^2 + \frac{{p_\theta}^2}{r^2} + \frac{{p_\phi}^2}{r^2 sin^2\theta}) + V(r)$

Si para las coordenadas generalizadas tomamos las coordenadas cartesianas x_i de la particula. La energia cinetica tendria la forma:

$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}\dot{x}}{2}$

Y el hamiltoniano seria:

$H(x_i, y_i) = \frac{p_i p_i}{2m} + V(r)$

3.6. Procedimiento general a seguir para establecer las ecuaciones de Hamilton para cualquier sistema dado

1. Elegir las coordenadas generalizadas, q_1,...,q_n.

2. Escribir las energias cinetica y potencial, T y U, en terminos de las q's y las $\dot{q}$'s

3. Encontrar los momentos generalizados p_1 ,..., p_n. (suponiendo que el sistema es conservativo, asi que U es independiente de $\dot{q}_i$ y podemos usar $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$. En general, uno debe usar $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$).

4. Resolver para las $\dot{q}$'s en terminos de las p's y las q's

5. Escribir el hamiltoniano H como una funcion de las p's y las q's. [siempre que las coordenadas sean «naturales» (relacion entre coordenadas generalizadas y cartesianas subyacentes independiente del tiempo), H es justo la energia total$H = T + U$, pero cuando haya dudas, se debe usar $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$.

6. Escribir las ecuaciones de Hamilton.

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ $\qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ $\qquad [i = 1, ..., n]$.

4. Conclusiones

En base al formalismo matematico usado en esta presentacion y a los resultados obtenidos se concluye que las ecuaciones de Hamilton en realidad obedecen a la transformacion de Legendre entre las coordenadas (q,$\dot{q}$)y (q, p)

El hamiltoniano trabajandolo en su forma matricial se puede llevar a las diferentes representaciones en sistemas mecanicos de diferentes coordenadas para asi tener una herramienta mas simplificada de este metodo