UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS

Tema:
Modelamiento y control del péndulo inverso

Apellidos: Moreno Vera
Nombres: Felipe Adrian
Código: 20120354I

Curso: Introducción a la Robótica
Codigo Curso: CC055

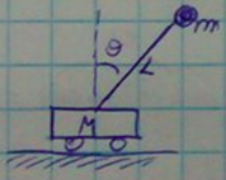
2016-II

1. Modelamiento y control del péndulo inverso.

19 / 09 / 2016

Modelamiento y control del Péndulo Inverso

Se tiene el sistema, donde la masa de la barra es despreciable:

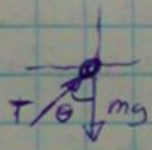


construiremos el sistema lineal $\dot{X} = AX + Bu$, donde $u = F$

I) Analizamos la aceleración y fuerza en el cuerpo de masa "m":

$\vec{a}$:

$\vec{F}$



entonces se tiene: $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

eje y: $mg - T\cos(\theta) = m(-L\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}(\theta) + L\dot{\theta}^2\cos(\theta))$ ..... (1)

eje x: $T\,\mathrm{sen}(\theta) = m(-L\ddot{\theta}\cos(\theta) - L\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}(\theta) + \ddot{x})$ ... (2)

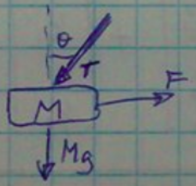
haciendo $(2) \times \cos(\theta) + (1)\,\mathrm{sen}(\theta)$:

$$\left.\begin{aligned} mg\,\mathrm{sen}(\theta) - T\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) &= m[-L\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}^2(\theta) + L\dot{\theta}^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)] \\ T\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) &= m(-L\ddot{\theta}\cos^2(\theta) - L\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) + \ddot{x}\cos(\theta)) \end{aligned}\right\} (+)$$

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m(-L\ddot{\theta}(\mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + \ddot{x}\cos(\theta))$$

$$\rightarrow \boxed{mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\ddot{x}\cos\theta - mL\ddot{\theta}} \quad \text{-- } (\alpha)$$

II) Analizamos las fuerzas en el cuerpo de masa "M":



Por $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

$$\boxed{F - T\,sen(\theta) = M\ddot{x}} \;\ldots (a)$$

Usando (a) en (α) se tiene:

$$\boxed{\left(\frac{F - T\,sen(\theta)}{M}\right)\cos(\theta) - g\,sen(\theta) = L\ddot{\theta}} \;\ldots (b)$$

Usando (2) en (a):

$$F + mL\ddot{\theta}\cos(\theta) + mL\dot{\theta}^2 sen(\theta) - m\ddot{x} = M\ddot{x}$$

$$F + mL\ddot{\theta}\cos(\theta) + mL\dot{\theta}^2 sen(\theta) = (m+M)\ddot{x} \;\ldots (3)$$

Usando (α) en (3):

$$\boxed{F + (m\ddot{x}\cos(\theta) - mg\,sen(\theta))\cos(\theta) + mL\dot{\theta}^2 sen(\theta) = (m+M)\ddot{x}} \;\ldots (\beta)$$

En (β):

Usamos el método de aproximación: $\theta \approx 0 \rightarrow \cos(\theta) \approx 1$

$\rightarrow sen(\theta) \approx \theta$

Entonces en (β) se tiene:

$$F + (m\ddot{x}\underbrace{\cos(\theta)}_{1} - mg\underbrace{sen(\theta)}_{\theta})\underbrace{\cos(\theta)}_{1} + \overbrace{mL\underbrace{\dot{\theta}^2}_{0}\underbrace{sen(\theta)}_{\theta}}^{0} = (m+M)\ddot{x}$$

$$F + m\ddot{x} - mg\theta = (m+M)\ddot{x}$$

$$\boxed{F - mg\theta = M\ddot{x}} \;\ldots (c)$$

Ahora: usamos (c) en (d)

$$mg\,\mathrm{sen}(\theta) = m\ddot{x}\cos(\theta) - mL\ddot{\theta}$$

$$\rightarrow mg\theta = m\ddot{x} - mL\ddot{\theta}$$

$$g\theta = \ddot{x} - L\ddot{\theta}$$

$$g\theta = \frac{(F - mg\theta)}{M} - L\ddot{\theta}$$

$$\boxed{L\ddot{\theta} = \frac{F}{M} - g\theta\frac{(m+M)}{M}} \quad \ldots (d)$$

I) Construyendo el sistema lineal para (c) y (d) (Método de Aproximación)

Variables de estado:

$$\begin{matrix} \ddot{x} \rightarrow \dot{x} & x \\ \ddot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} & \theta \end{matrix} \rightarrow Z = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \rightarrow \dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(m+M)g}{ML} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/ML \\ 0 \\ 1/M \end{bmatrix} F}$$

$\dot{Z} = A\,Z + BF$, Sistema Lineal para

El Método de Aproximación $\theta \approx 0$

II) Construyendo el Sistema Lineal con (a) y (b) (Método exacto)

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos\theta}{ML} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{ML} \\ 0 \\ -\frac{T\operatorname{sen}\theta}{M} \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\operatorname{sen}\theta}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g$$

Sistema No Lineal para

El Método Exacto

Resumen:

Método Exacto:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{F}{M} - \dfrac{T\operatorname{sen}(\theta)}{M} \\ \ddot{\theta} = \dfrac{F\cos(\theta)}{ML} - \dfrac{T\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{ML} - g\operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

Método de Aproximación

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{F}{M} - \dfrac{mg\theta}{M} \\ \ddot{\theta} = \dfrac{F}{ML} - \dfrac{g\theta(m+M)}{ML} \end{cases}$$

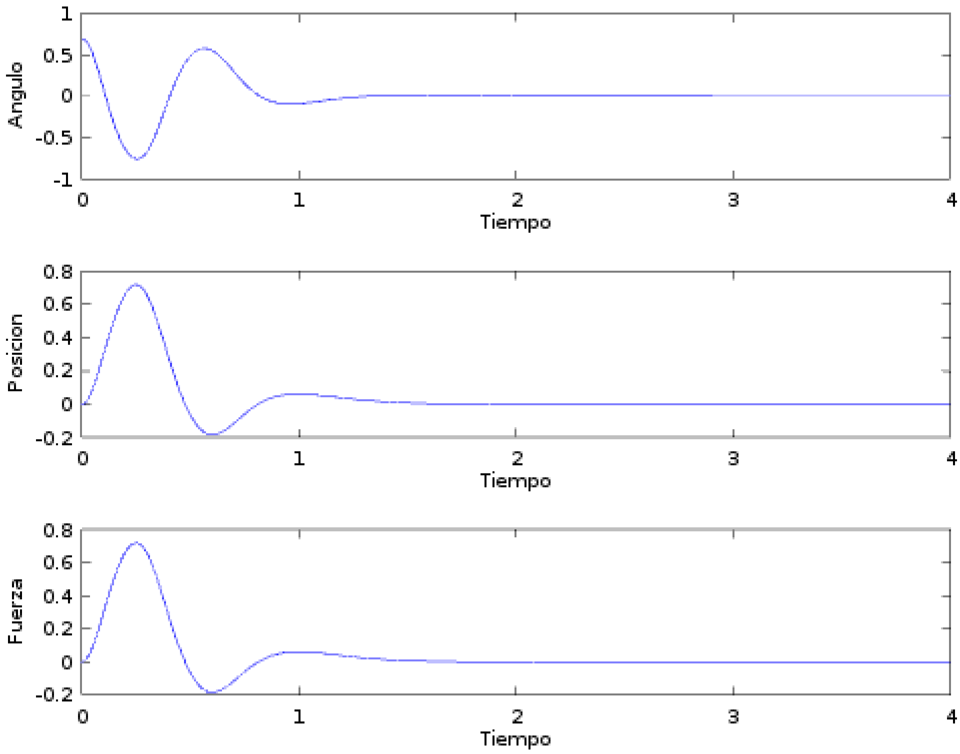
2. Probando el programa:

Se observa que el programa para los valores de:

q1 = 1e3;q2 = 1e1;q3 = 1e4;q4 = 1e1;

Obtenemos un K = -175.234 -32.602 -100.000 -57.180

Y vemos que a partir de 42 grados, el sistema diverge.



q1 = 1e3;q2 = 1e3;q3 = 1e3;q4 = 1e3;

Obtenemos un K = -234.721 -54.038 -31.623 -49.132

Y vemos que a partir de 70 grados, el sistema diverge.

q1 = 1e1;q2 = 1e1;q3 = 1e4;q4 = 1e3;

Obtenemos un K = -235.211 -44.425 -100.000 -74.036

Y vemos que a partir de 49 grados, el sistema diverge.

q1 = 1e1;q2 = 1e4;q3 = 1e1;q4 = 1e3;

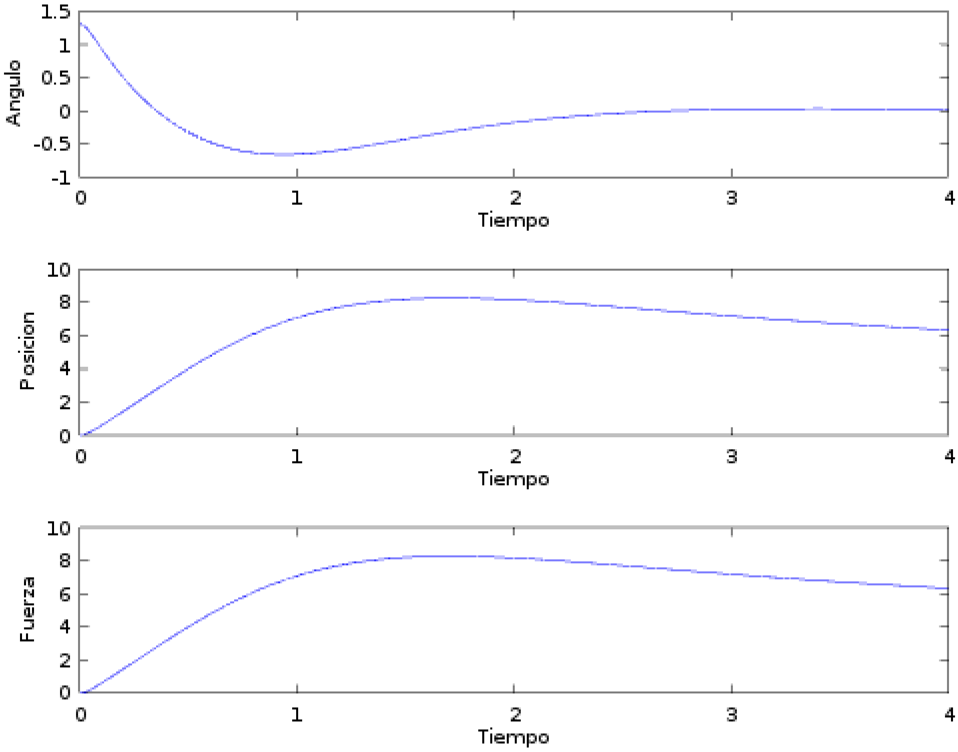
Obtenemos un K = -291.8447 -114.1302 -3.1623 -34.3248

Y vemos que a partir de 49 grados, el sistema diverge.

q1 = 1e1;q2 = 1e2;q3 = 1e1;q4 = 1e2;

Obtenemos un K = -80.9649 -18.1795 -3.1623 -11.9311

Y vemos que a partir de 72 grados, el sistema diverge.


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
Angulo
0
1
2
3
4
Tiempo
10
8
6
4
2
0
Posicion
0
1
2
3
4
Tiempo
10
8
6
4
2
0
Fuerza
0
1
2
3
4
Tiempo