PRACTICA CALIFICADA N 5

Curso: Análisis Numérico II

Profesor(a): Irla Mantilla

Alumno: Moreno Vera, Felipe Adrian

Ciclo: 2015-II

PRACTICA CALIFICADA

Problema 5:

Resolver el problema:

$-u''+100u=0$ en [0,1], u(0)=1 y u(3)= e^{-30}

mediante un método de disparo. Explicar por qué hay que extremar las precauciones al aplicar este esquema numérico.

Sol:

1.SOLUCION ANALITICA:

usando los datos:

$-u''+100u=0$ en [0,1], u(0)=1 y u(3)= e^{-30} , hacemos $u=e^{\lambda x}$, reemplazamos:

$-\frac{d^2(e^{\lambda x})}{dx^2}+100e^{\lambda x}=0$, es igual: $-\lambda^2(e^{\lambda x})+100e^{\lambda x}=0$, factorizando $e^{\lambda x}$, se tiene:

$-\lambda^2+100=0$, entonces: $\lambda=\pm 10$, se tiene los valores: $u_1=C_1e^{10x}$ y $u_2=C_2e^{-10x}$

la solución general seria: $u(x)=C_1e^{10x}+C_2e^{-10x}$. evaluando en:

x=0; $u(0)=C_1+C_2$, entonces $C_2=1-C_1$.

x=3; $u(3)=C_1e^{30}+C_2e^{-30}$, $e^{-30}=C_1e^{30}+(1-C_1)e^{-30}$, $1=C_1e^{60}-C_1+1$ entonces $C_1=0$ y $C_2=1$, entonces la solucion analitica de la ecuacion es:

$u(x)=e^{-10x}$, entonces el valor en $u(1)=4.5400\text{e-}05=0$.

2. SOLUCION NUMERICA POR EL METODO DEL DISPARO:

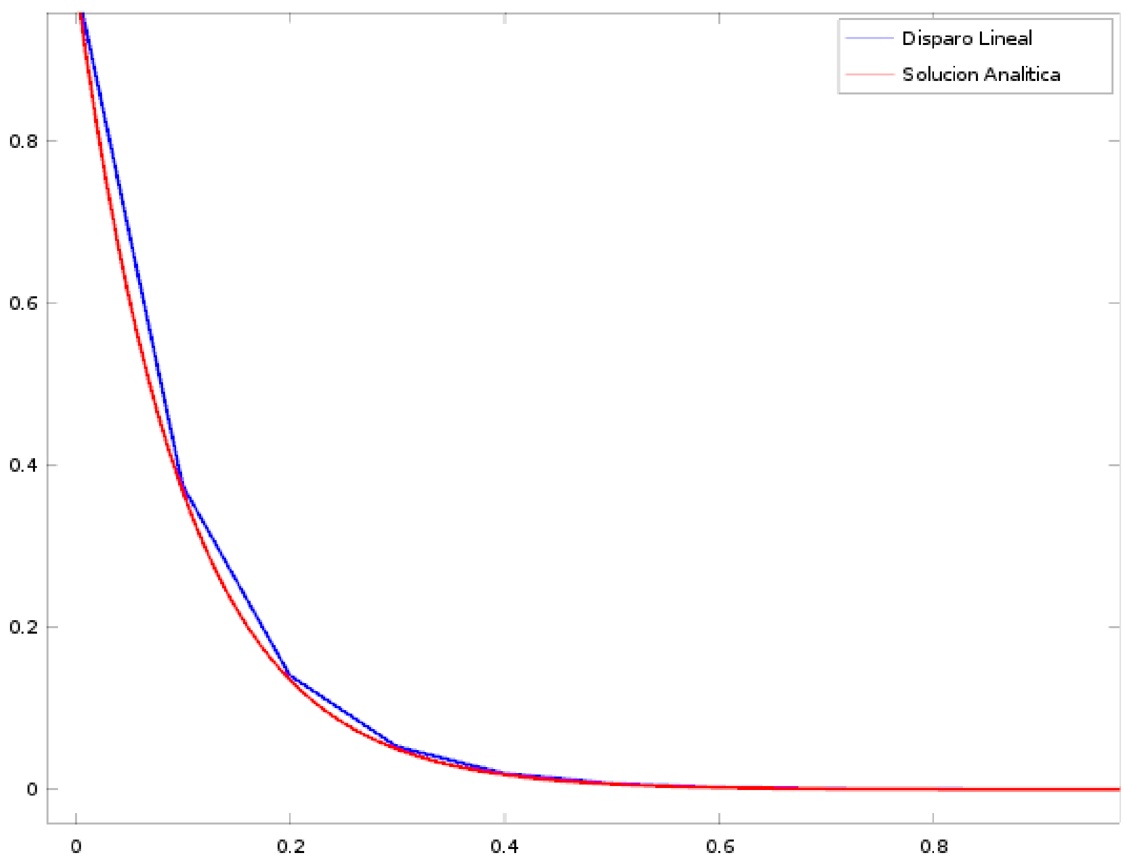
Del item anterior obtenemos los valores de frontera u(0)=1 y u(1)=4.540e-05,

Aplicando el programa disparoLineal.m, donde se definio u" = p(x).u' + q(x).u +r(x) como: u" = 100.u, se tiene p(x) = r(x) = 0, y q(x) = 100, en el intervalo de [0,1].
obtenemos:
donde:
X: es el intervalo de 0 a 1.
Y: es la solucion a la ecuacion diferencial (u" -100 u = 0)
U: es la solucion de la ecuacion: $u''=p(x)u'+q(x)u+r(x)=100u$
V: es la solucion de la ecuacion: $v''=p(x)v'+q(x)v=100v$

se obtiene los resultados:

```
octave:14> [x1,w1,w2]=disparoLineal(0,1,px,qx,rx,1,4.54e-05,10);
x:0.00000000 u:1.00000000 v:0.00000000 y(x):1.00000000 y'(x):-10.00000001
x:0.10000000 u:1.54166667 v:0.11666667 y(x):0.37500000 y'(x):-3.75000001
x:0.20000000 u:3.73784722 v:0.35972222 y(x):0.14062500 y'(x):-1.40625003
x:0.30000000 u:9.95927373 v:0.99065394 y(x):0.05273437 y'(x):-0.52734384
x:0.40000000 u:26.91150957 v:2.68917342 y(x):0.01977537 y'(x):-0.19775415
x:0.50000000 u:72.86226714 v:7.28548514 y(x):0.00741571 y'(x):-0.07415837
x:0.60000000 u:197.32665510 v:19.73238742 y(x):0.00278074 y'(x):-0.02781093
x:0.70000000 u:534.42311315 v:53.44220703 y(x):0.00104236 y'(x):-0.01043326
x:0.80000000 u:1447.39471480 v:144.73943237 y(x):0.00038976 y'(x):-0.00392374
x:0.90000000 u:3920.02689635 v:392.00267497 y(x):0.00014311 y'(x):-0.00150192
x:1.00000000 u:10616.73933985 v:1061.67392849 y(x):0.00004540 y'(x):-0.00064587
```

donde se observa que w(x) es aprox y(x) para todo el intervalo de [0,1].



Problema 4:

Dados v parámetros $c_{1,} c_{2,} c_{3,} \dots , c_v$ y sea u el polinomio de grado v tal que:

$u(x_n) = y_n$, $u'(x_n + c_j h) = f(x_n + c_j h, u(x_n + c_j h))$, j=1, ..., v.

Un ***método de colocación*** consiste en calcular u y tomar $y_{n+1} = u(x_{n+1})$. Los parámetros $c_{1,} c_{2,} c_{3,} \dots , c_v$ son los parámetros de colocación.

Obtener el método de colocación que corresponde a los parámetros de colocación $c_1 = \frac{1}{3}$ y $c_2 = \frac{2}{3}$ y demostrar que se trata de un método de Runge-Kutta implícito.

Sol:

Reemplazando: $c_1 = \frac{1}{3}$ y $c_2 = \frac{2}{3}$, como es orden 2, tenemos:

$u(x_n) = y_n$

$y_{n+1} = u(x_{n+1})$

donde por método de euler de orden 1:

$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h.u'(x_n)$

y de orden 2:

$u'(x_{n+1}) = u'(x_n) + h.f(x_n, u(x_n), u'(x_n))$

entonces haciendo la construcción:

$u(x_0) = y_0$,

$u(x_1) = u(x_0) + h.u'(x_0) = u(x_0) + hf(x_n, u(x_n), u'(x_n))$,

$u(x_1) = u(x_0) + h.u'(x_0) = u(x_0) + hf\left(x_n, u(x_n), f\left(x_n + \frac{1}{3}h, u\left(x_n + \frac{1}{3}h\right)\right)\right)$,

$u(x_1) = u(x_0) + hf\left(x_0, u(x_0), f\left(x_0 + \frac{1}{3}h, u\left(x_0 + \frac{1}{3}h\right)\right)\right)$.

$u(x_2) = u(x_1) + hf\left(x_1, u(x_1), f\left(x_1 + \frac{2}{3}h, u\left(x_1 + \frac{2}{3}h\right)\right)\right)$

se genera un sistema de ecuaciones de 2 x 2 que se puede expresar en un tablero de butcher de la forma:

Problema 7:

Consideremos el problema:

$-u''+u=0, en(0,1)$,

$-u'(0)+u(0)=1, u(1)=0$

Encontrar una aproximación de elementos finitos tomando como funciones base las funciones tejados:

funcion base 0: $$\phi_0(x)=\begin{cases} 1-3x, & 0\le x\le \frac{1}{3} \\ 0, & \frac{1}{3}\le x\le 1 \end{cases}$$

funcion base 1: $$\phi_0(x)=\begin{cases} 3x, & 0\le x\le \frac{1}{3} \\ 2-3x, & \frac{1}{3}\le x\le \frac{2}{3} \\ 0, & \frac{2}{3}\le x\le 1 \end{cases}$$

funcion base 2: $$\phi_0(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le \frac{1}{3} \\ 3x-1, & \frac{1}{3}\le x\le \frac{2}{3} \\ 3-3x, & \frac{2}{3}\le x\le 1 \end{cases}$$

Sol:

Multiplicando por una funcion v e integrando por partes se obtiene:

$u(0)v(0)+u'(1)v(1)-u'(0)v(0)+\int_0^1 (u'v'+uv)=v(0)$ y ahora por los valores de frontera: se obtiene:

$u(0)v(0)+u'(1)v(1)-u'(0)v(0)+\int_0^1 (u'v'+uv)=0$, donde: $-u'(0)+u(0)=1, u(1)=0$

entonces se transforma en:

$v(0)+u'(1)v(1)+\int_0^1 (u'v'+uv)=v(0)$, es igual a: $u'(1)v(1)+\int_0^1 (u'v'+uv)=0$, donde $u'(1)=0$, entonces finalmente queda:

$\int_0^1 (u'v'+uv)=0$, donde $u=\sum_{j=1}^{n} c_j\sigma_j(x)$.

y como las funciones bases son 3 separamos el intervalo [0,1] en 5 puntos o 4 sub intervalos.

$x_0=0, x_1=\frac{1}{4}, x_2=\frac{2}{4}, x_3=\frac{3}{4}, x_4=1.$.

entonces reemplazando v:

$\int_0^1 (u'v'+uv)=v(0)$.

Se construye el sistema:

$$\int_0^1 \left(u'\sigma_j'\right)+\int_0^1 \left(u\,\sigma_j\right)=\sigma_j(0) \quad \text{, donde} \quad u=\sum_{j=1}^{n} c_j \sigma_j(x) \quad .$$

$$\int_0^1 \left(\left(c_1\sigma_1'+c_2\sigma_2'+c_3\sigma_3'\right)\sigma_j'\right)+\int_0^1 \left(\left(c_1\sigma_1+c_2\sigma_2+c_3\sigma_3\right)\sigma_j\right)=\sigma_j(0) \quad \text{, para j = 1,2,3.}$$

entonces se tiene:

$$\int_0^1 \left(\left(c_1\sigma_1'+c_2\sigma_2'+c_3\sigma_3'\right)\sigma_1'\right)+\int_0^1 \left(\left(c_1\sigma_1+c_2\sigma_2+c_3\sigma_3\right)\sigma_1\right)=1 \quad \text{... (1)}$$

$$\int_0^1 \left(\left(c_1\sigma_1'+c_2\sigma_2'+c_3\sigma_3'\right)\sigma_2'\right)+\int_0^1 \left(\left(c_1\sigma_1+c_2\sigma_2+c_3\sigma_3\right)\sigma_2\right)=0 \quad \text{... (2)}$$

$$\int_0^1 \left(\left(c_1\sigma_1'+c_2\sigma_2'+c_3\sigma_3'\right)\sigma_3'\right)+\int_0^1 \left(\left(c_1\sigma_1+c_2\sigma_2+c_3\sigma_3\right)\sigma_3\right)=0 \quad \text{... (3)}$$

ordenando:

$$\int_0^1 \left(\sigma_1^2{}'+\sigma_1^2\right)c_1+\int_0^1 \left(\sigma'_1\sigma'_2+\sigma_1\sigma_2\right)c_2+\int_0^1 \left(\sigma'_1\sigma'_3+\sigma_1\sigma_3\right)c_3=1$$

$$\int_0^1 \left(\sigma'_2\sigma'_1+\sigma_2\sigma_1\right)c_1+\int_0^1 \left(\sigma_2^2{}'+\sigma_2^2\right)c_2+\int_0^1 \left(\sigma'_2\sigma'_3+\sigma_2\sigma_3\right)c_3=0$$

$$\int_0^1 \left(\sigma'_3\sigma'_1+\sigma_3\sigma_1\right)c_1+\int_0^1 \left(\sigma'_3\sigma'_2+\sigma_3\sigma_2\right)c_2+\int_0^1 \left(\sigma_3^2{}'+\sigma_3^2\right)c_3=0$$

se tiene que calcular las integrales de :

$$\int_0^1 \left(\sigma_1^2\right)=\frac{1}{9} \;,\; \int_0^1 \left(\sigma_2^2\right)=\frac{1}{9} \;,\; \int_0^1 \left(\sigma_3^2\right)=\frac{1}{9} \;,\; \int_0^1 \left(\sigma'^2_1\right)=3 \;,\; \int_0^1 \left(\sigma'^2_2\right)=6 \;,\; \int_0^1 \left(\sigma'^2_3\right)=6 \;,$$

$$\int_0^1 \left(\sigma_1\sigma_2\right)=\frac{1}{18} \;,\; \int_0^1 \left(\sigma_1\sigma_3\right)=0 \;,\; \int_0^1 \left(\sigma_2\sigma_3\right)=\frac{1}{18} \;,\; \int_0^1 \left(\sigma'_1\sigma'_2\right)=-3 \;,\; \int_0^1 \left(\sigma'_1\sigma'_3\right)=0 \;,$$

$$\int_0^1 \left(\sigma'_2\sigma'_3\right)=-3 \quad .$$

reemplazando se obtiene la matriz:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9}+3 & -3+\frac{1}{18} & 0 \\ -3+\frac{1}{18} & \frac{1}{9}+6 & -3+\frac{1}{18} \\ 0 & -3+\frac{1}{18} & 6+\frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{esto es igual:} \quad \begin{bmatrix} \frac{28}{9} & \frac{-53}{18} & 0 \\ \frac{-53}{18} & \frac{55}{9} & \frac{-53}{18} \\ 0 & \frac{-53}{18} & \frac{55}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resolviendo se obtiene:

$$c_1=0.79145, c_2=0.49663, c_3=0.23928 \quad .$$

entonces la solucion a la ecuacion diferencial es:

$$u=\sum_{j=1}^{n} c_j\sigma_j(x) \quad , \quad u(x)=c_1\sigma_1(x)+c_2\sigma_2(x)+c_3\sigma_3(x)$$

entonces la solucion es (reemplazando los coeficientes):

$$u(x)=0.79145\,\sigma_1(x)+0.49663\,\sigma_2(x)+0.23928\,\sigma_3(x) \quad .$$