PRACTICA CALIFICADA N 2

Curso: Analisis Numerico II

Profesor(a): Irla Mantilla

Alumno: Moreno Vera, Felipe Adrian

Ciclo: 2015-II

PRACTICA CALIFICADA

problema 1

Considere la formula de cuadratura de Gauss-Legendre de n puntos. Cual es su grado de presicion ? Demostrar su afirmacion.

Sol:
Se tiene los polinomios de legendre que interpolan a f(x),

El error de aproximacion en una cuadratura gaussiana veiene dado por:

$$\int_a^b w(x) f(x) dx - \sum_{i=1}^{n} w_i . f(x_i) = \frac{f^{(2n)}(\Im)}{(2n)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

entonces de la cuadratura gaussiana, integrando los factores se obtiene

$$\int_a^b \left(\frac{f^{(2n)}(\Im)}{(2n)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right) dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{2n}(\Im).$$

entonces el error de Gauss-Legendre para n puntos es:

$$Er = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{2n}(\Im).\, donde\, \Im\, es\, un\, punto\, dentro\, del\, intervalo.$$

problema 2

Consideremos dos reglas del trapecio sobre el intervalo [x0, x3]: la primera T(f,3h) = (3h/2)(f0 + f3) con incremento 3h y la segunda T(f,h) = (h/2)(f0 + 2f1 + 2f2 + f3), probar que la combinacion lineal (9T(f,h) – T(f,3h))/8 coincide con la regla de Simpson.

Sol:

se tiene que:
9*T(f,h) = (9h/2)(f0 + 2f1 + 2f2 + f3)
T(f,3h) = (3h/2)(f0 + f3)

entonces restamos:

9T(f,h) – T(f,3h) = 9h/2*f0 + 9h/2*2f1 + 9h/2*2f2 + 9h/2*f3 – 3h/2*f0 – 3h/2*f3.
9T(f,h) – T(f,3h) = 6h/2*f0 + 9h*f1 + 9h*f2 + 6h/2*f3.
9T(f,h) – T(f,3h) = 3h*f0 + + 9h*f1 + 9h*f2 + 3h*f3.
9T(f,h) – T(f,3h) = (3h)(f0 + 3h*f1 + 3h*f2 + f3).

Y finalmente dividiendolo entre 8:

(9T(f,h) – T(f,3h))/8 = (3h/8)(f0 + 3h*f1 + 3h*f2 + f3).

Y se ve que demostrando que la combinacion lineal (9T(f,h) – T(f,3h))/8 coincide con la regla simple de simpson 3/8.

problema 3

Los polinomios ortogonales de Hermite son definidos por:

Hn+1(x) = 2x*Hn(x) – 2n*Hn-1(x), n>=1, con H0(x) = 1 y H1(x) = 2x.

Definimos la formula de Cuadratura de Gauss-Hermite de n+1 puntos del modo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \sum wi.f(xi)$$

donde xi son las raices del polinomio de Hermite de grado n+1.

a) Calcule los pesos wi para la cuadratura de Gauss – Hermite de 2 puntos.
b) Con la formula obtenida en el inciso anterior, calcular la aproximacion de la siguiente integral:

$$I= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx \quad \text{, donde } f(x) = \frac{x^2}{2}$$

Sol:

a) Calcule los pesos de wi para Cuadratura de Gauss-Hermite de 2 puntos.

Entonces: el polinomio de Hermite tiene n+1 = 2, entonces es de grado n=1.
∑wi.f(xi) = w0.f(x0) + w1.f(x1),
entonces necesitamos los pesos w0 y w1, y tambien los puntos x0 y x1.

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx$ = ∑wi.f(xi), donde reemplazamos f(x) por los polinomios de Hermite.

Entonces tomamos el polinomio de hermite hasta grado 3.
H0(x) = 1, H1(x) = $2x$, H2(x) = $4x^2-2$, H3(x) = $8x^3-12x$

Una manera practica para encontrar los puntos y los pesos es reemplazando f(x) por Hi(x) obteniendo un sistema de 4 ecuaciones, 4 incognitas.

Usando las herramientas de software tenemos q = quad(fun,-Inf,Inf);
donde q es la integral(matlab) y fun = @(x) exp(-x^2)*(8*x^3-12*x);

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_i(x)\,dx$ = ∑wi.Hi(xi), procedemos a reemplazar de i = 0, 1, 2, 3,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_0(x)\,dx = w_0\times H_0(x_0) + w_1\times H_0(x_1) = w_0\times 1 + w_1\times 1 = \sqrt{\pi} = 1.7725$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1(x)\,dx = w_0\times H_1(x_0) + w_1\times H_1(x_1) = w_0\times 2x_0 + w_1\times 2x_1 = 0.0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_2(x)\,dx = w_0\times H_2(x_0) + w_1\times H_2(x_1) = w_0\times\left(4x_0^2-2\right) + w_1\times\left(4x_1^2-2\right) =$$

7.4613e-15 = 0.0

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_3(x)\,dx = w_0\times H_3(x_0) + w_1\times H_3(x_1) = w_0\times\left(8x_0^3-12x_0\right) + w_1\times\left(8x_1^3-12x_1\right) =$$

0.0

generando un sistema de Ecuaciones lineales de 4 ecuaciones y 4 incognitas.

(a) $w_0 \quad + \quad w_1 \;=\; \sqrt{\pi}$ ----------------| ===> $x_0 \times w_0 \;+\; x_0 \times w_1 \;=\; x_0 \times \sqrt{\pi}$
(b) $x_0 \times w_0 \;+\; x_1 \times w_1$ = 0.0 --sumamos---| $x_1 \times w_0 \;+\; x_1 \times w_1 \;=\; x_1 \times \sqrt{\pi}$
(c) $x_0^2 \times w_0 \;+\; x_1^2 \times w_1 \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ -----------| ==> 0.0 + 0.0 = $(x_0 + x_1) \times \sqrt{\pi}$ ...(1)
(d) $x_0^3 \times w_0 \;+\; x_1^3 \times w_1$ = 0.0

de (1) ---> $x_0 \;=\; -x_1$ y en $x_0 \times w_0 \;+\; x_1 \times w_1$ = 0.0, deducimos: $w_0 \;=\; w_1 \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

de $x_0^2 \times w_0 \;+\; x_1^2 \times w_1 \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, deducimos que $x_0 \;=\; -x_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{(2)}}$.

por lo tanto los pesos son: y los 2 puntos que toma:

$w_0 \;=\; w_1 \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\qquad x_0 \;=\; -x_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{(2)}}$.

b) Con la formula obtenida en el inciso anterior, calcular la aproximacion de la siguiente integral:

I= $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx$, donde f(x) = $\frac{x^2}{2}$

Entonces:

I= $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx$ = ∑wi.f(xi) = $w_0 \times f(x_0) \;+\; w_1 \times f(x_1) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \left(\frac{x_0^2}{2}\right) \;+\; \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \left(\frac{x_1^2}{2}\right)$

I= $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ = 0.44311.

problema 4

Considere la integral de la función f(x) = , $e^{(-x^2)}$ donde x es evaluado de 0 a 1.

a) Determine el valor aproximado considerando 4 subintervalos utilizando la regla trapezoidal compuesta y la regla de simpson compuesta.

b) Calcule una estimativa del numero mínimo de subintervalos que se deberian considerar si se pretendiese que la integral anterior con un error inferior a 0.001 utilizando la regla de Simpson.

Sol:

a) Usando el algoritmo de 1/3 simpson y trapezoidal compuesta se obtiene los siguientes resultados:

Simpson 1/3: (use el programa Metodos_Integrales.m)
el resultado es: 0.74685538

Trapezoidal: (use el programa Problema_4_a_T.m)
el resultado es: 0.74298410

Y haciendo el calculo manualmente:

x	0.0	0.25	0.50	0.75	1.0
f(x)	1.0	0.93941	0.77880	0.56978	0.36788

Regla de simpson:

h = 1/4 = 0.25

I = (h/3)*(f(x0) + 4*f(x1) + 2*f(x2) + 4*f(x3) + f(x4))
I = (0.25/3)*(1.0 + 4*0.93941 + 2* 0.77880 + 4*0.56978 + 0.36788)
I = 0.74685

Regla del Trapecio:

h = 1/4 = 0.25

I = (h/2)*(f(x0) + 2*f(x1) + 2*f(x2) + 2*f(x3) + f(x4))
I = (0.25/2)*(1.0 + 2*0.93941 + 2* 0.77880 + 2*0.56978 + 0.36788)
I = 0.74298

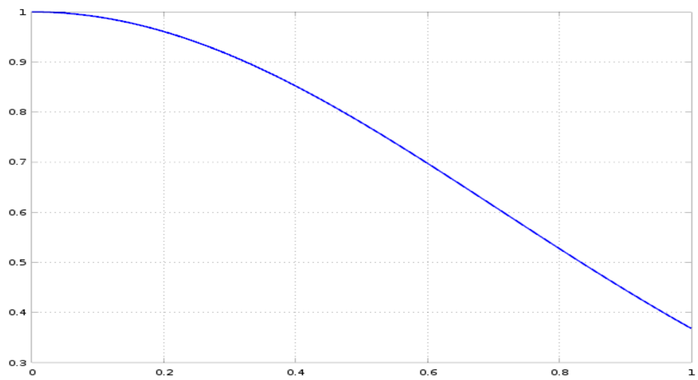
b) Calculando el numero de intervalos para que el error sea de 10^-4 en la Regla de simpson.

Se sabe que el error en el método de la regla de Simpson 1/3 es:

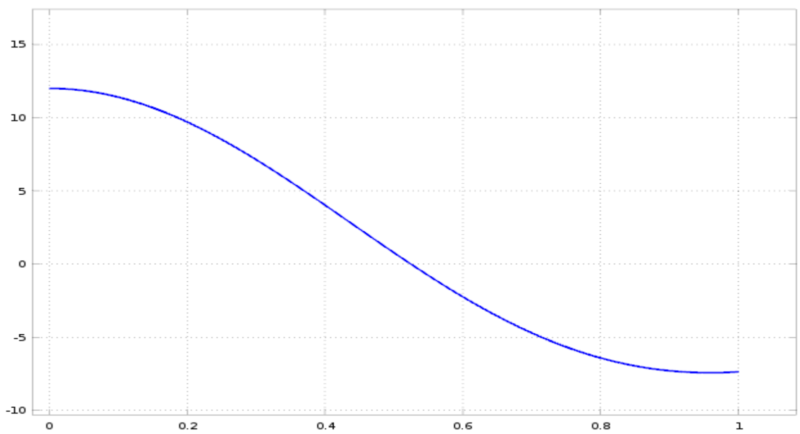
Er = (b-a)/180 * h^4 * f""(e), donde f""(x) es la cuarta derivada de f(x).

f(x) = $e^{(-x^2)}$
f'(x) = -2x $e^{(-x^2)}$
f"(x) = -2 $e^{(-x^2)}$ + 4 x^2 $e^{(-x^2)}$
f"'(x) = 12x $e^{(-x^2)}$ - 8 x^3 $e^{(-x^2)}$
f""(x) = 16 x^4 $e^{(-x^2)}$ – 48 x^2 $e^{(-x^2)}$ + 12 $e^{(-x^2)}$
f""'(x) = -32 x^5 $e^{(-x^2)}$ + 160 x^3 $e^{(-x^2)}$ - 120x $e^{(-x^2)}$

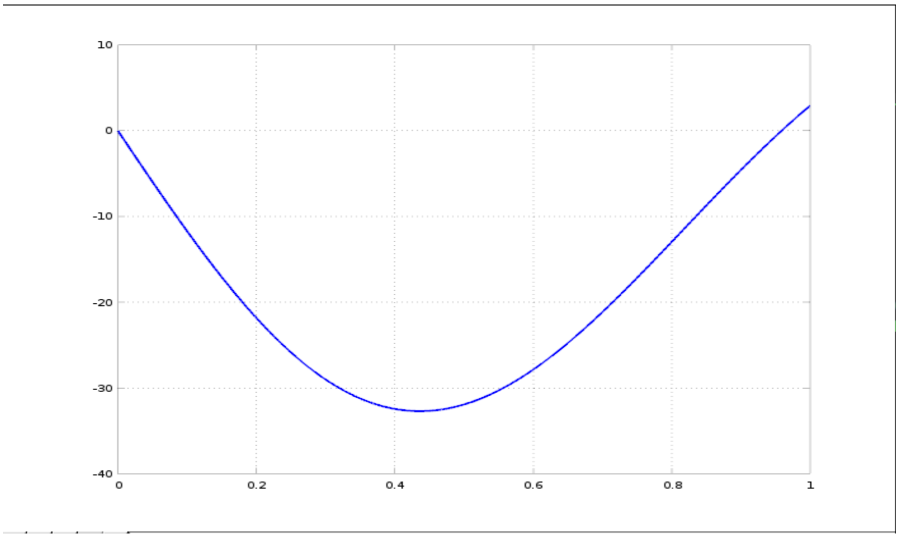
Graficando la función $e^{(-x^2)}$ en el intervalo de 0 a 1:



y graficando la 4ta derivada en el intervalo de 0 a 1
f""(x) = 16 x^4 $e^{(-x^2)}$ – 48 x^2 $e^{(-x^2)}$ + 12e $e^{(-x^2)}$:



le sacamos la 5ta derivada y se obtiene:
f'''''(x) = -32 x^5 $e^{(-x^2)}$ + 160 x^3 $e^{(-x^2)}$ - 120x $e^{(-x^2)}$
Vemos que la derivada tiene mayor valor en un numero cercano a 1 .... (*)



Entonces para calcular el error se tomara alguna raíz del polinomio h(x) = f'''''(x) = (-32 x^5 + 160 x^3 - 120x) $e^{(-x^2)}$ = (-32x^4 + 160x^2 – 120) x $e^{(-x^2)}$ = 0

Cuyas raices son, x = 0, y las raices del polinomio 4 x^4 - 20 x^2 + 15 = 0 por el método de Muller numéricamente se obtienen las siguientes raíces:

x1 = (0.206299474016 + 1.374729637j) ----- Complejo, no va
x2 = (0.206299474016 – 1.374729637j) ------ Complejo, no va
x3 = (0.95857246461381851+0j) ------------- Resulta -7.4195
x4 = (-0.95857246461381851+0j) ------------- Resulta -7.4195
x5 = 0.0 --- Resulta 12 ======== MAYOR VALOR

De estas 4 raices se ve que 2 son complejas, y una es negativa, entonces escogemos e = (0.95857246461381851+0j) (Real), que como predijimos en (*), es cercano a 1.

Entonces Regresando al problema del error y hallando el numero de intervalos:

Er = (b-a)* h^4 /180 * f''''(e) < 10^-4, donde h = (b-a)/n

Er = (b-a)^5 / 180 / n^4 * f''''(0.95857246461381851) < 10^{-4} , donde a = 0 y b = 1 --> b-a = 1

Er = 1/180 * f''''(0.95857246461381851)* 10^{-4} < n^4

Er = 55.556*f''''(0.95857246461381851) < n^4

Er = 12*55.556 < n^4

de donde n^4 > 666.67 entonces, n>5.0813
entonces el numero minimo de intervalos que se necesitan para calcular la integral por medio de la regla general de simpson con un error inferior a 10^{-4} es para intervalos n >=6.

<u>PRACTICA DIRIGIDA</u>

<u>Ejercicio 1</u>

a) Use las relgas de los Trapecios, Simpson(1/3) y Simpson(3/8) con 6 subintervalos para obtener valores aproximados de cada una de las siguientes integrales:

$$\int_1^2 \left(\frac{e^{-x}}{x}\right) dx \quad \int_2^3 \left(\frac{1}{\ln(x)}\right) dx \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx \quad \int_0^1 e^{x^2} dx$$

$$\int_1^2 \left(\frac{\ln(x)}{1+x}\right) dx \quad \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{sen(x)}\right) dx \quad \int_0^1 \left(sen(x^2)\right) dx \quad \int_0^1 \frac{sen(x)}{x} dx$$

b) Para cada uno de los valores obtenidos en a) encuentre las cotas para el error en la aproximacion calculada y estime a partir de esas cotas, con cuantas cifras decimales exactas aproxima dicho valor al valor exacto. Desprecie los errores de redondeo.

<u>Sol:</u>

a)

i) $\int_1^2 \left(\frac{e^{-x}}{x}\right) dx$ = 0.170483424 (Valor real)

h = (2-1)/6 = 0.16667

x	1.0000	1.1667	1.3333	1.5000	1.6667	1.8333	2.0000
f(x)	0.367879	0.266917	0.197698	0.148753	0.113325	0.087207	0.067668

Simpson 1/3:

I = (1/18)*(f(1) + 4*f(1.1667) + 2*f(1.3333) + 4*f(1.5) + 2*f(1.6667) + 4*f(1.8333) + f(2))
I = (1/18)*(0.367879+4* 0.266917+2*.197698 +4*.148753+2*.113325+4*.087207 + .067668)
I = 0.17051 (Valor analítico)
I = 0.170506 (Valor numérico)

Simpson 3/8:

I = (1/18)*(f(1) + 3*f(1.1667) + 3*f(1.3333) + 2*f(1.5) + 3*f(1.6667) + 3*f(1.8333) + f(2))
I = (3/48)*(0.367879+3*0.266917+3*0.197698 +2*0.148753+3*0.113325+3*0.087207+0.067668)
I = 0.17053 (Valor analítico)
I = 0.170531 (Valor numérico)

ii) $\int_2^3 \left(\frac{1}{\ln(x)}\right) dx$ = 1.1184248 (Valor real)

h=(3-2)/6 = 0.16667

x	2.0000	2.1667	2.3333	2.5000	2.6667	2.8333	3.0000
f(x)	1.44270	1.29334	1.18022	1.09136	1.01955	0.96020	0.91024

Simpson 1/3:

I = (1/18)*(f(2) + 4*f(2.1667) + 2*f(2.3333) + 4*f(2.5) + 2*f(2.6667) + 4*f(2.8333) + f(3))
I = (1/18)*(1.44270+4*1.29334+2*1.18022+4*1.09136+2*1.01955+4*.96020+0.91024)
I = 1.1184 (Valor analítico)
I = 1.118447 (Valor numérico)

Simpson 3/8:

I = (1/18)*(f(2) + 3*f(2.1667) + 3*f(2.3333) + 2*f(2.5) + 3*f(2.6667) + 3*f(2.8333) + f(3))
I = (3/48)*(1.44270+3*1.29334+3*1.18022+2*1.09136+3*1.01955+3*.96020+0.91024)
I = 1.1185 (Valor analítico)
I = 1.118473 (Valor numérico)

iii) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ = 0.746824133 (Valor real)

h = (1-0)/6 = 0.16667

x	0.00000	0.16667	0.33333	0.50000	0.66667	0.83333	1.00000
f(x)	1.00000	0.97260	0.89484	0.77880	0.64118	0.49935	0.36788

Simpson 1/3:

I = (1/18)*(f(0) + 4*f(0.1667) + 2*f(0.3333) + 4*f(0.5) + 2*f(0.6667) + 4*f(0.8333) + f(1))
I = (1/18)*(1+4*0.97260+2*0.89484+4*0.77880+2*0.64118+4*0.49935+0.36788)
I = 0.74683 (Valor analítico)
I = 0.74683039 (Valor numérico)

Simpson 3/8:

I = (3/48)*(f(0) + 3*f(0.1667) + 3*f(0.3333) + 2*f(0.5) + 3*f(0.6667) + 3*f(0.8333) + f(1))
I = (3/48)*(1+3*0.97260+3*0.89484+2*0.77880+3*0.64118+3*0.49935+0.36788)
I = 0.74684 (Valor analítico)
I = 0.746838 (Valor numérico)

iv) $\int_0^1 e^{x^2}dx$ = 1.4626517 (Valor real)

h = (1-0)/6 = 0.16667

x	0.00000	0.16667	0.33333	0.50000	0.66667	0.83333	1.00000
f(x)	1.0000	1.0282	1.1175	1.2840	1.5596	2.0026	2.7183

Simpson 1/3:

I = (1/18)*(f(0) + 4*f(0.1667) + 2*f(0.3333) + 4*f(0.5) + 2*f(0.6667) + 4*f(0.8333) + f(1))
I = (1/18)*(1+4*1.0282+2*1.1175+4*1.2840+2*1.5596+4*2.0026+2.7183)
I = 1.4629 (Valor analítico)
I = 1.462873 (Valor numérico)

Simpson 3/8:

I = (3/48)*(f(0) + 3*f(0.1667) + 3*f(0.3333) + 2*f(0.5) + 3*f(0.6667) + 3*f(0.8333) + f(1))
I = (3/48)*(1 + 3*1.0282 + 3*1.1175 + 2*1.2840 + 3*1.5596 + 3*2.0026 + 2.7183)
I = 1.4631 (Valor analítico)
I = 1.463128 (Valor numérico)

v) $\int_{1}^{2}\left(\frac{\ln(x)}{1+x}\right)dx$ = 0.14722068 (Valor real)

h = (2-1)/6 = 0.16667

x	1.0000	1.1667	1.3333	1.5000	1.6667	1.8333	2.0000
f(x)	0.00000	0.07115	0.12329	0.16219	0.19156	0.21393	0.23105

Simpson 1/3:

I = (1/18)*(f(1) + 4*f(1.1667) + 2*f(1.3333) + 4*f(1.5) + 2*f(1.6667) + 4*f(1.8333) + f(2))
I = (1/18)*(0 + 4*0.07115 + 2*0.12329 + 4*0.16219 + 2*0.19156 + 4*0.21393 + 0.23105)
I = 0.14721 (Valor analítico)
I = 0.1472113 (Valor numérico)

Simpson 3/8:

I = (3/48)*(f(1) + 3*f(1.1667) + 3*f(1.3333) + 2*f(1.5) + 3*f(1.6667) + 3*f(1.8333) + f(2))
I = (3/48)*(0 + 3*0.07115 + 3*0.12329 + 2*0.16219 + 3*0.19156 + 3*0.21393 + 0.23105)
I = 0.14720 (Valor analítico)
I = 0.1472004 (Valor numérico)

vi) $\int_{0}^{\pi/2}\left(\sqrt{sen(x)}\right)dx$ = 1.1981402 (Valor real)

$h=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{6}$ = 0.26180

x	0.00000	0.26180	0.52360	0.78540	1.04720	1.30900	1.57080
f(x)	0.00000	0.50874	0.70711	0.84090	0.93060	0.98282	1.00000

Simpson 1/3:

I = (pi/36)*(f(0)+4*f(0.26180)+2*f(0.52360)+4*f(0.78540)+2*f(1.04720)+4*f(1.309)+f(1.57080))
I = (pi/36)*(0+4*0.50874+2*0.70711+4*0.84090+2*0.93060+4*0.98282+1)
I = 1.1873 (Valor analítico)
I = 1.18728 (Valor numérico)

Simpson 3/8:

I=(3pi/96)*(f(0)+3*f(0.26180)+3*f(0.52360)+2*f(0.78540)+3*f(1.04720)+3*f(1.309)+f(1.57080))
I = (3*pi/96)*(0+3*0.50874+3*0.70711+2*0.84090+3*0.93060+3*0.98282+1)
I = 1.1849 (Valor analítico)
I = 1.18493 (Valor numérico)

vii) $\int_0^1 \left(sen\left(x^2\right)\right)dx$ = 0.310268 (Valor real)

h = (1-0)/6 = 0.16667

x	0.00000	0.16667	0.33333	0.50000	0.66667	0.83333	1.00000
f(x)	0.00000	0.02777	0.11088	0.24740	0.42996	0.63996	0.84147

Simpson 1/3:

I = (1/18)*(f(0) + 4*f(0.1667) + 2*f(0.3333) + 4*f(0.5) + 2*f(0.6667) + 4*f(0.8333) + f(1))
I = (1/18)*(0 + 4*0.02777+2*0.11088+4*0.2474+2*0.42996+4*0.63996+0.84174)
I = 0.31022 (Valor analítico)
I = 0.310205 (Valor numérico)

Simpson 3/8:

I = (3/48)*(f(0) + 3*f(0.1667) + 3*f(0.3333) + 2*f(0.5) + 3*f(0.6667) + 3*f(0.8333) + f(1))
I = (3/48)*(0 + 3*0.02777+3*0.11088+2*0.2474+3*0.42996+3*0.63996+0.84174)
I = 0.31014 (Valor analítico)
I = 0.310124 (Valor numérico)

viii) $\int_0^1 \frac{sen(x)}{x} dx$ = 0.94608307 (Valor real)
h = (1-0)/6 = 0.16667
Hacemos un artificio, como $\lim_{x-0} sen(x)/x$,
entonces f(x) = 1, para x = 0 y f(x) = sen(x)/x, para 0<x<1

x	0.00000	0.16667	0.33333	0.50000	0.66667	0.83333	1.00000
f(x)	1.00000	0.99538	0.98158	0.95885	0.92755	0.88821	0.84147

Simpson 1/3:

I = (1/18)*(f(0) + 4*f(0.1667) + 2*f(0.3333) + 4*f(0.5) + 2*f(0.6667) + 4*f(0.8333) + f(1))
I = (1/18)*(1 + 4*0.99538+2*0.98158+4*0.95885+2*0.92755+4*0.88821+0.84147)
I = 0.94608 (Valor analítico)
I = 0.946084 (Valor numérico)

Simpson 3/8:

I = (3/48)*(f(0) + 3*f(0.1667) + 3*f(0.3333) + 2*f(0.5) + 3*f(0.6667) + 3*f(0.8333) + f(1))
I = (3/48)*(1 + 3*0.99538+3*0.98158+2*0.95885+3*0.92755+3*0.88821+0.84147)
I = 0.94608 (Valor analítico)
I = 0.9460847 (Valor numérico)

b) Sacando la 4ta derivada a las funciones ...

i) $\int_1^2 \left(\frac{e^{-x}}{x}\right) dx$ = 0.170483424 (Valor real)

$f'(x)=\left(\frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}\right)$ $f''(x)=\left(\frac{e^{-x}(x^2+2x+2)}{x^3}\right)$ $f'''(x)=\left(\frac{-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)}{x^4}\right)$

$f''''(x)=\left(\frac{e^{-x}(x^4+4x^3+12x^2+24x+24)}{x^5}\right)$

entonces calculamos el error tomamos e = 1.5, b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180*f''''(e)/6^4 = 1/180*f''''(1.5)/1296 = 1.3296402157907628e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:

Er=6*(b-a)^5/80*f''''(e)/6^5 = 1/80*f''''(1.5)/1296 = 2.991690485529216e-05<1x10^-4

ii) $\int_2^3 \left(\frac{1}{\ln(x)}\right) dx$ = 1.1184248 (Valor real)

$f'(x)=\frac{-1}{xln^2(x)}$ $f''(x)=\frac{\ln(x)+2}{x^2\ln^3(x)}$ $f'''(x)=\frac{-2(\ln^2(x)+3\ln(x)+3)}{x^3\ln^4(x)}$

$f''''(x)=\frac{6\ln^3(x)+22\ln^2(x)+36\ln(x)+24}{x^4\ln^5(x)}$

entonces calculamos el error tomamos e = 2.5, b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180*f''''(e)/6^4 = 1/180*f''''(2.5)/1296 = 1.360452899615816e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:

Er=6*(b-a)^5/80*f''''(e)/6^5 = 1/80*f''''(2.5)/1296 = 3.061019024135585e-05 <1x10^-4

iii) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ = 0.746824133 (Valor real)

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$ $f''(x)=2e^{-x^2}(2x^2-1)$ $f'''(x)=-4xe^{-x^2}(2x^2-3)$

$f''''(x)=4e^{-x^2}(4x^4-12x^2+3)$

entonces calculamos el error tomamos e = 0.0, b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180*f''''(e)/6^4 = 1/180*f''''(0.0)/1296 = 5.1440329218106995e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:

Er=6*(b-a)^5/80*f''''(e)/6^5 = 1/80*f''''(0.0)/1296 = 1.1574074074074073e-04 <1x10^-3

iv) $\int_0^1 e^{x^2} dx$ = 1.4626517 (Valor real)

$f'(x)=2xe^{x^2}$ $f''(x)=2e^{x^2}(2x^2+1)$ $f''(x)=2e^{x^2}(2x^2+1)$ $f'''(x)=4xe^{x^2}(2x^2+3)$

$f''''(x)=4e^{x^2}(4x^4+12x^2+3)$

entonces calculamos el error tomamos e = 0.0, b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180*f''''(e)/6^4 = 1/180*f''''(0.0)/1296 = 5.1440329218106995e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:

Er=6*(b-a)^5/80*f''''(e)/6^5 = 1/80*f''''(0.0)/1296 = 1.1574074074074073e-04 <1x10^-3

v) $\int_1^2 \left(\frac{\ln(x)}{1+x}\right)dx$ = 0.14722068 (Valor real)

$f'(x)=\frac{x-xln(x)+1}{x(x+1)^2}$ $f''(x)=\frac{-3x^2+2x^2\ln(x)-4x-1}{x^2(x+1)^3}$

$f'''(x)=\frac{11x^3-6x^3\ln(x)+18x^2+9x+2}{x^3(x+1)^4}$ $f''''(x)=\frac{11x^3-6x^3\ln(x)+18x^2+9x+2}{x^3(x+1)^4}$

entonces calculamos el error tomamos e = 1 b-a = 1.
Simpson 1/3:
Er=(b-a)^5/180*f''''(e)/6^4 = 1/180*f''''(1)/1296 = 1.071673525377229e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:
Er=6*(b-a)^5/80*f''''(e)/6^5 = 1/80*f''''(1.0)/1296 = 2.4112654320987653e-05<1x10^-4

vi) $\int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{sen(x)}\right)dx$ = 1.1981402 (Valor real)

$f'(x)=\frac{\cos(x)}{2\sqrt{(sen(x))}}$ $f''(x)=\frac{\cos(2x)-3}{8\,sen^{\frac{3}{2}}(x)}$

$f'''(x)=\frac{14\,sen(x)-2\,sen(3x)+11\,xcos(x)+xcos(3x)}{32x^2\,sen^{\frac{5}{2}}(x)}$

$f''''(x)=\frac{-77x^2+(96-44x^2)\cos(2x)+(x^2-12)\cos(4x)-60\,xsen(2x)-6\,xsen(4x)-84}{128x^4\,sen^{\frac{7}{2}}(x)}$

entonces calculamos el error tomamos e = 1 b-a = 1.
Simpson 1/3:
Er=(b-a)^5/180*f''''(e)/6^4 = 1/180*f''''(1)/1296 = 1.071673525377229e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:
Er=6*(b-a)^5/80*f''''(e)/6^5 = 1/80*f''''(1.0)/1296 = 2.4112654320987653e-05<1x10^-4

vii) $\int_0^1 \left(sen(x^2)\right)dx$ = 0.310268 (Valor real)

$f'(x)=2\,xcos(x^2)$ $f''(x)=2\left(\cos(x^2)-2x^2\,sen(x^2)\right)$ $f'''(x)=-4x\left(3\,sen(x^2)+2x^2\cos(x^2)\right)$

$f''''(x)=4\left((4x^4-3)sen(x^2)-12x^2\cos(x^2)\right)$

entonces calculamos el error tomamos e = 1 b-a = 1.
Simpson 1/3:
Er=(b-a)^5/180*f''''(e)/6^4 = 1/180*|f''''(1)|/1296 = 9.674479913597016e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:
Er=6*(b-a)^5/80*f''''(e)/6^5 = 1/80*|f''''(1.0)|/1296 = 2.1767579805593288e-04<1x10^-3

viii) $\int_0^1 \frac{sen(x)}{x} dx$ = 0.94608307 (Valor real)

$$f'(x)=\frac{xcos(x)-sen(x)}{x^2} \qquad f''(x)=\frac{-\left(\left(x^2-2\right)sen(x)+2xcos(x)\right)}{x^3}$$

$$f'''(x)=\frac{3\left(x^2-2\right)sen(x)-x\left(x^2-6\right)\cos(x)}{x^4} \qquad f''''(x)=\frac{4x\left(x^2-6\right)\cos(x)+\left(x^4-12x+24\right)sen(x)}{x^5}$$

entonces calculamos el error tomamos e = 1 b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180*f''''(e)/6^4 = 1/180*|f''''(1)|/1296 = 1.4124847862074684e-04<1x10^-3

Simpson 3/8:

Er=6*(b-a)^5/80*f''''(e)/6^5 = 1/80*|f''''(1.0)|/1296 = 3.178090768966804e-04<1x10^-3

Ejercicio 2

si $\int_{0}^{0.8} f(x)\,dx=2$ y nos dan la siguiente tabla, por medio de la regla de simpson 1/3 calcule f(0.7):

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8
f(x)	5	8	6	3	0	-3	-3	5

Sol:

h=(0.8 - 0.0)/8 = 0.1

I = (h/3)*(f(0) + 4*f(0.1) + 2*f(0.2) + 4*f(0.3) + 2*f(0.4) + 4*f(0.5) + 2*f(0.6) + 4*f(0.7) + f(0.8))
I = 0.1/3*(5 + 32 + 12 + 12 + 0 - 12 – 6 + 4*f(0.7) + 5)
I = 1.6 + 0.4/3*f(0.7) = 2
entonces: f(0.7) = 3.

Ejercicio 3

La siguiente tabla muestra valores aproximados de una funcion f y los correspondientes errores de redondeo.

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
f'(x)	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675
error f(x)	2x10^-6	-2x10^-6	-9x10^-7	-9x10^-7	2x10^-6

Use TODOS los datos de la tabla anterior y la regla de Simpson 1/3 par aproximar el valor de $\int_{1.8}^{2.6} f(x)\,dx$ y calcule el error de redondeo total al aplicar dicha regla.

Sol:

se ve que son puntos distanciados en 0.2 de 2 a dos.
h = 0.2 = (2.6 – 1.8)/n, donde n es el numero de intervalos n = 4

I = (h/3)*(f(1.8) + 4*f(2.0) + 2*f(2.2) + 4*f(2.4) + f(2.6))
I = (0.2/3)*((3.12014+2*10^-6) + 4*(4.42569+-2*10^-6) + 2*(6.04241+-9*10^-7)
+ 4*(8.03014+-9*10^-7)+(10.46675+2*10^-6))
I = (0.2/3)*((3120140*10^-6+2*10^-6) + 4*(4425690*10^-6+-2*10^-6)
+ 2*(60424100*10^-7+-9*10^-7) + 4*(80301400*10^-7+-9*10^-7)
+ (10466750*10^-6+2*10^-6))
I = (0.2/3)*((3120142)+4*(4425688)+2*(6042409.1) +4*(8030139.1)+10466752)*10^-6
I = 0.2/3*75495020.6*10^-6
I = 50330013.73333333 * 10^-7
I = 5.03300 (Valor analítico con redondeo) ----\ error por redondeo es:
I = 5.033001373333333 (valor numérico) -----/ 2.728656780554134e-05 %

Ejercicio 4

a) Determine el numero de subintervalos N necesarios para obtener una aproximación de $\int_1^{25} \ln(x)\, dx$ con una precisión de por lo menos 5 cifras decimales exactas usando la regla de los trapecios y la regla de simpson 1/3. Calcular la aproximación en cada paso. Desprecie los errores de redondeo.

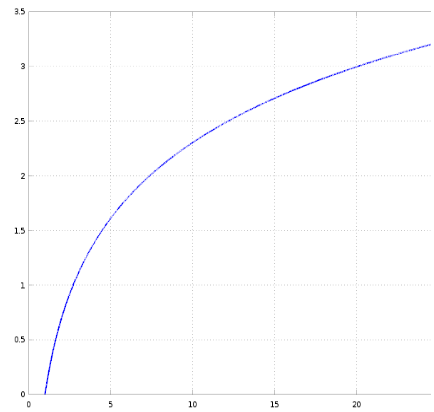
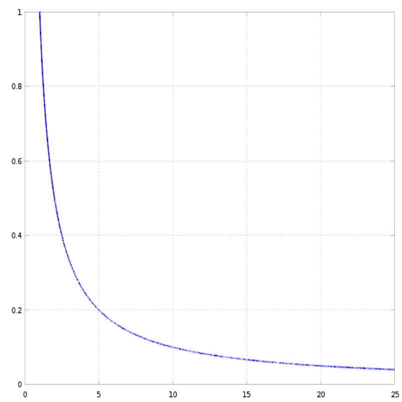
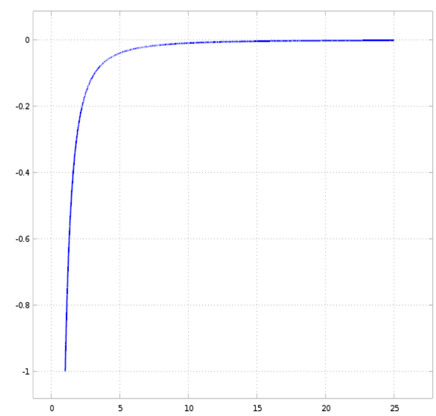
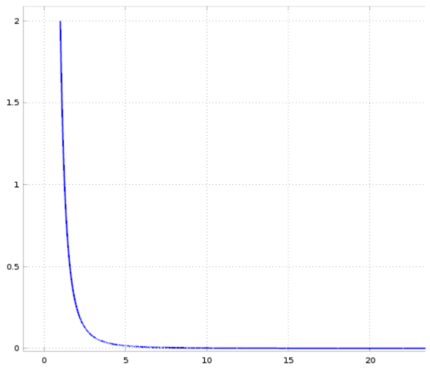
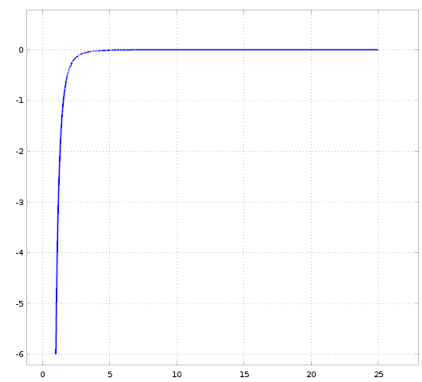
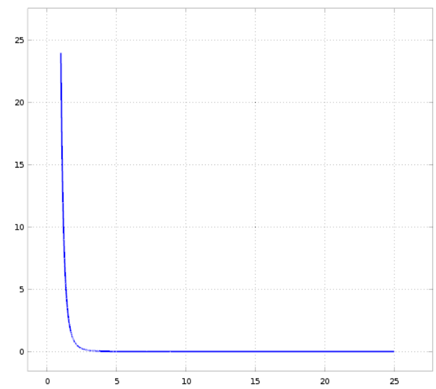
b) Responda la pregunta planteada en a) para cada una de las integrales del problema 1.a)

Sol:

a)
error con simpson es : Er = (b-a)/180 * h^4 * f''''(e), donde f''''(x) es la cuarta derivada de f(x).
error con trapecio es: Er = (b-a)/12* h^2 * f''(e), donde f''(x) es la segunda derivada de f(x).

f(x) = ln(x)
f'(x) = x^{-1}
f''(x) = $-x^{-2}$
f'''(x) = $2x^{-3}$
f''''(x) = $-6x^{-4}$
f'''''(x) = $24x^{-5}$

graficas:
ln(x), x^{-1} , $-x^{-2}$, $2x^{-3}$, $-6x^{-4}$, $24x^{-5}$

Como se puede apreciar en x=25, la segunda derivada es máxima (próxima a cero)
y en la 4ta derivada en x=25 la cuarta derivada es máxima.
Entonces analizando los errores:

Trapecio:

Er = (b-a)/12* h^2 * |f''(e)| < 10^{-5} , donde b=25 y a = 1
Er = 24/12* $\left(\frac{24}{n}\right)^2$ *|f''(25)| < 10^{-5}
Er = 2*576* |-1/625 |* 10^5 < n^2
Er = 429.32505167995964 < n

por lo tanto para n>429.32 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=430).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180* h^4 * |f''''(e)| < 10^{-5} , donde b=25 y a = 1
Er = 24/180* $\left(\frac{24}{n}\right)^4$ *|f''''(25)| < 10^{-5}
Er = 24/180*331776* |-6/390625| * 10^5 < n^4
Er = 31.773608828609983< n

por lo tanto para n>31.77 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 32).

Numéricamente

Evaluando en 430 subintervalos:
La integral por simpson 1/3 es: 56.471895514359850665
La integral por Trapecio es: 56.471646432843812136
La integral Real es: 56.4718956217049878\89

** se ve que trapecio tiene un error de 10^-5 y simpson 1/3 un error de 10^-8

Evaluando en 36>=32 subintervalos:
La integral por simpson 1/3 es: 56.470400070578250507
La integral por Trapecio es: 56.436834320709088786
La integral Real es: 56.471895621704987889

** se ve que simpson presenta un error de 10^-5 y trapecio un error de 10^-4

b) del inciso 1.a) se tiene las derivadas 2da y 4ta de cada integral:

i) $f''(x)=\left(\frac{e^{-x}(x^2+2x+2)}{x^3}\right)$ $f''''(x)=\left(\frac{e^{-x}(x^4+4x^3+12x^2+24x+24)}{x^5}\right)$

Trapecio:

Er = (b-a)/12* h^2 * |f''(e)| < 10^{-5} , donde b=2 y a = 1, e=1.5

Er = 1/12* $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ *|f''(1)| < 10^{-5}

Er = 1/12* 1.8393972* 10^5 < n^2

Er = 429.32505167995964 < n

por lo tanto para n>123.8075 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=124).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180* h^4 * |f''''(e)| < 10^{-5} , donde b=2 y a = 1

Er = 1/180* $\left(\frac{1}{n}\right)^4$ *|f''''(1)| < 10^{-5}

Er = 1/180* 23.912163676143752 * 10^5 < n^4

Er = 10.735853< n

por lo tanto para n>10.7358 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 11).

ii)

$f''(x)=\frac{\ln(x)+2}{x^2\ln^3(x)}$ $f''''(x)=\frac{6\ln^3(x)+22\ln^2(x)+36\ln(x)+24}{x^4\ln^5(x)}$

Trapecio:

Er = (b-a)/12* h^2 * |f''(e)| < 10^{-5} , donde b=3 y a = 2, e=2

Er = 1/12* $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ *|f''(2)| < 10^{-5}

Er = 1/12* 2.02173259* 10^5 < n^2

Er = 129.79896 < n

por lo tanto para n>129.79896 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=130).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180* h^4 * |f''''(e)| < 10^{-5} , donde b=3 y a = 2

Er = 1/180* $\left(\frac{1}{n}\right)^4$ *|f''''(1)| < 10^{-5}

Er = 1/180* 24.03139665* 10^5 < n^4

Er = 10.74921195< n

por lo tanto para n>10.749 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 11).

iii)

$f''(x)=2e^{-x^2}(2x^2-1)$ $\quad f''''(x)=4e^{-x^2}(4x^4-12x^2+3)$

Trapecio:

Er = (b-a)/12* h^2 * |f''(e)| < 10^{-5} , donde b=1 y a = 0, e=0

Er = 1/12* $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ *|f''(0)| < 10^{-5}

Er = 1/12* 2* 10^5 < n^2

Er = 129.09944 < n

por lo tanto para n>129.09944 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=130).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180* h^4 * |f''''(e)| < 10^{-5} , donde b=1 y a = 0

Er = 1/180* $\left(\frac{1}{n}\right)^4$ *|f''''(0)| < 10^{-5}

Er = 1/180* 12* 10^5 < n^4

Er = 9.036020< n

por lo tanto para n>9.036020 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 10).

iv)

$f''(x)=2e^{x^2}(2x^2+1)$ $\quad f''''(x)=4e^{x^2}(4x^4+12x^2+3)$

Trapecio:

Er = (b-a)/12* h^2 * |f''(e)| < 10^{-5} , donde b=1 y a = 0, e=0

Er = 1/12* $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ *|f''(0)| < 10^{-5}

Er = 1/12* 2* 10^5 < n^2

Er = 129.09944 < n

por lo tanto para n>129.09944 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=130).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180* h^4 * |f''''(e)| < 10^{-5} , donde b=1 y a = 0

Er = 1/180* $\left(\frac{1}{n}\right)^4$ *|f''''(0)| < 10^{-5}

Er = 1/180* 12* 10^5 < n^4

Er = 9.036020< n

por lo tanto para n>9.036020 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 10).

v)

$$f''(x)=\frac{-3x^2+2x^2\ln(x)-4x-1}{x^2(x+1)^3} \qquad f''''(x)=\frac{11x^3-6x^3\ln(x)+18x^2+9x+2}{x^3(x+1)^4}$$

Trapecio:

Er = (b-a)/12* h^2 * |f''(e)| < 10^{-5} , donde b=2 y a = 1, e=0

Er = 1/12* $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ *|f''(1)| < 10^{-5}

Er = 1/12* 1* 10^5 < n^2

Er = 288.675134 < n

por lo tanto para n>288.675 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=289).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180* h^4 * |f''''(e)| < 10^{-5} , donde b=2 y a = 1

Er = 1/180* $\left(\frac{1}{n}\right)^4$ *|f''''(1)| < 10^{-5}

Er = 1/180* 2.5* 10^5 < n^4

Er = 6.104735835807844< n

por lo tanto para n>6.10473 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 7).

vi)

$$f''(x)=\frac{\cos(2x)-3}{8\,sen^{\frac{3}{2}}(x)}$$

$$f''''(x)=\frac{-77x^2+(96-44x^2)\cos(2x)+(x^2-12)\cos(4x)-60\,xsen(2x)-6\,xsen(4x)-84}{128\,x^4\,sen^{\frac{7}{2}}(x)}$$

Trapecio:

Er = (b-a)/12* h^2 * |f''(e)| < 10^{-5} , donde b=pi/2 y a = 0, e=0

Er = pi/24* $\left(\frac{\pi}{12n}\right)^2$ *|f''(1)| < 10^{-5}

Er = pi*pi*pi/3456* 0.5074665226465045* 10^5 < n^2

Er = 21.3374069781212 < n

por lo tanto para n>21.337 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=22).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180* h^4 * |f''''(e)| < 10^{-5} , donde b=pi/2 y a = 0

Er = pi/1080* $\left(\frac{\pi}{12n}\right)^4$ *|f''''(1)| < 10^{-5}

Er = (pi**5)/155520* 2.9563427* 10^5 < n^4

Er = 4.911107866824295< n

por lo tanto para n>4.9111 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 5).

vii)

$f''(x)=2\left(\cos\left(x^2\right)-2x^2 sen\left(x^2\right)\right)$ $f''''(x)=4\left(\left(4x^4-3\right)sen\left(x^2\right)-12x^2\cos\left(x^2\right)\right)$

Trapecio:

Er = (b-a)/12* h^2 * |f''(e)| < 10^{-5} , donde b=1 y a = 0, e=0

Er = 1/12* $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ *|f''(1)| < 10^{-5}

Er = 1/12* 22.56862* 10^5 < n^2

Er = 433.672495< n

por lo tanto para n>433.67 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=434).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180* h^4 * |f''''(e)| < 10^{-5} , donde b=1 y a = 0

Er = 1/180* $\left(\frac{1}{n}\right)^4$ *|f''''(1)| < 10^{-5}

Er = 1/180* 2.9563427* 10^5 < n^4

Er = 4.911107866824295< n

por lo tanto para n>4.9111 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 5).

viii)

$f''(x)=\frac{-\left(\left(x^2-2\right)sen\left(x\right)+2xcos\left(x\right)\right)}{x^3}$ $f''''(x)=\frac{4x\left(x^2-6\right)\cos\left(x\right)+\left(x^4-12x+24\right)sen\left(x\right)}{x^5}$

Trapecio:

Er = (b-a)/12* h^2 * |f''(e)| < 10^{-5} , donde b=1 y a = 0, e=0

Er = 1/12* $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ *|f''(1)| < 10^{-5}

Er = 1/12* 0.2391336* 10^5 < n^2

Er = 44.64056< n

por lo tanto para n>44.645 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=45).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180* h^4 * |f''''(e)| < 10^{-5} , donde b=1 y a = 0

Er = 1/180* $\left(\frac{1}{n}\right)^4$ *|f''''(1)| < 10^{-5}

Er = 1/180* 0.13307* 10^5 < n^4

Er = 2.93225< n

por lo tanto para n>2.93225 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 3).

Ejercicio 5

Use la regla de Simpson 1/3 con N=6 y un cambio de variable para estimar $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1+x^5} dx$

Sol:

Haciendo cambio de variable $t = x^{-1}$, entonces cuando x=1, t = 1 y $x = \infty$ t = 0

$x = t^{-1}$ y $dx = -t^{-2} dt$ entonces $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1+x^5} dx = \int_1^{0} \frac{-t^{-2}}{1+t^{-5}} (t)^{-2} dt = \int_0^{1} \frac{t}{t^5+1} dt$

h = (1-0)/6 = 0.16667

x	0.00000	0.16667	0.33333	0.50000	0.66667	0.83333	1.00000
f(x)	0.00000	0.16665	0.33197	0.48485	0.58909	0.59444	0.50000

Simpson 1/3:

I = (1/18)*(f(0) + 4*f(0.1667) + 2*f(0.3333) + 4*f(0.5) + 2*f(0.6667) + 4*f(0.8333) + f(1))
I = (1/18)*(0 + 4*0.16665+2*0.33197+4*0.48485+2*0.58909+4*0.59444+0.5)
I = 0.40699 (Valor analítico)
I = 0.406991924 (Valor numérico)

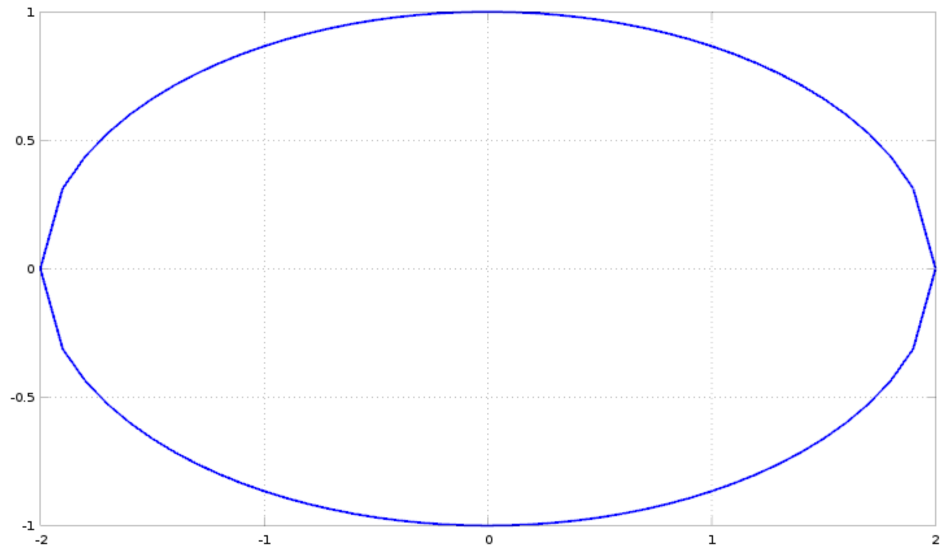
y el valor real es 0.406901634, entonces el error por simpson 1/3 es 9.0290e-05 en 6 subintervalos de 0 a 1.

Ejercicio 6

Use las reglas de los Trapecios y Simpson (1/3) con N=10 para aproximar la cuarta de la longuitud de la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, concluya a partir de las cotas teóricas para el error total cual es la calidad de la aproximación obtenida en cada caso.

Sol:

Graficando la elipse con 2 es el radio en el eje X, 1 es el radio en el eje Y



se tiene la elipse con centro en (0,0), entonces la cuarta parte de la elipse se define por la ecuacion:

$f(x)=y=\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}$ evaluado de 0 a 2 en X.

Entonces se tiene la integral: $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}dx$

N=10, entonces h = (2-0)/10 = 0.2

La integral Real es: 1.5707963267948966114

x	0.0	0.200	0.400	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
f(x)	1.0	0.99499	0.97980	0.95394	0.91652	0.86603	0.80	0.71414	0.60	0.43589	0.00

Simpson 1/3:

I = (h/3)*(f(0)+f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)+f(1)+f(1.2)+f(1.4)+f(1.6)+f(1.8)+f(2))
I = (0.2/3)*(1+4*0.99499+2*0.9798+4*0.95394+2*0.91652+4*0.86603+2*0.8
+4*0.71414+2*0.6+4*0.43589+0)
I = 1.5635 (Valor analítico)
I = 1.563504079 (Valor numérico)

Trapecio:

I = (h/2)*(f(0)+f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)+f(1)+f(1.2)+f(1.4)+f(1.6)+f(1.8)+f(2))
I = (0.2/2)*(1+2*0.99499+2*0.9798+2*0.95394+2*0.91652+2*0.86603+2*0.8
+2*0.71414+2*0.6+2*0.43589+0)
I = 1.5523 (Valor analítico)
I = 1.552259 (Valor numérico)

Analizando los errores de las cotas teórica:

$$f''(x)=\frac{-2}{\left(4-x^2\right)^{3/2}} \qquad f''''(x)=\frac{-24\left(x^2+1\right)}{\left(4-x^2\right)^{7/2}}$$

b=2, a = 0
Error en trapecio:

Escogemos e=0
Er = $f''(e)\frac{(b-a)}{12}h^2$ = 0.25*2/12* $\left(\frac{2}{10}\right)^2$ =0.0016666666666666666

Error en Simpson 1/3:

Escogemos e=0
Er = $f''''(e)\frac{(b-a)}{180}h^4$ = 3/16/180*32/10000 = 3.3333333333333333e-06

Ejercicio 7

Use el método de Romberg con N=2 para las integrales de 1.a)

Sol:

se tiene que:

$$R(0,0)=\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))$$

$$R(1,0)=\frac{1}{2}R(1,0)+h_1\sum_{k=1}^{1} f\left(a+(2k-1)h_1\right)$$

$$R(1,1)=R(1,0)+\frac{1}{4-1}\left(R(1,0)-R(0,0)\right)$$

$$R(2,0)=\frac{1}{2}R(2,0)+h_2\sum_{k=1}^{2^2-1} f\left(a+(2k-1)h_2\right)$$

$$R(2,1)=R(2,0)+\frac{1}{4-1}\left(R(2,0)-R(1,0)\right)$$

$$R(2,2)=R(2,1)+\frac{1}{4^2-1}\left(R(2,1)-R(1,1)\right)$$

entonces resolviendo:

i) $\int_1^2 \left(\frac{e^{-x}}{x}\right) dx \quad = 0.170483424$ (Valor real)

La matriz de romberg es:

0.21777	0.00000	0.00000
0.18326	0.17176	0.00000
0.17376	0.17059	0.17051

ii) $\int_2^3 \left(\frac{1}{\ln(x)}\right) dx \quad = 1.1184248$ (Valor real)

La matriz de romberg es:

1.17647	0.00000	0.00000
1.13391	1.11973	0.00000
1.12238	1.11853	1.11845

iii) $\int_0^1 e^{-x^2} dx \quad = 0.746824133$ (Valor real)

La matriz de romberg es:

0.68394	0.00000	0.00000
0.73137	0.74718	0.00000
0.74298	0.74686	0.74683

iv) $\int_0^1 e^{x^2} dx \quad = 1.4626517$ (Valor real)

La matriz de romberg es:

1.85914	0.00000	0.00000
1.57158	1.47573	0.00000
1.49068	1.46371	1.46291

v) $\int_1^2 \left(\frac{\ln(x)}{1+x}\right) dx \quad = 0.14722068$ (Valor real)

La matriz de romberg es:

0.11552	0.00000	0.00000
0.13886	0.14663	0.00000
0.14510	0.14718	0.14721

vi) $\int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{sen(x)}\right) dx \quad = 1.1981402$ (Valor real)

La matriz de romberg es:

0.78540	0.00000	0.00000
1.05314	1.14238	0.00000
1.14696	1.17823	1.18062

vii) $\int_0^1 \left(sen(x^2)\right) dx \quad = 0.310268$ (Valor real)

La matriz de romberg es:

0.42074	0.00000	0.00000
0.33407	0.30518	0.00000
0.31598	0.30994	0.31026

viii) $\int_0^1 \frac{sen(x)}{x} dx \quad = 0.94608307$ (Valor real)

La matriz de romberg es:

0.92074	0.00000	0.00000
0.93979	0.94615	0.00000
0.94451	0.94609	0.94608