PRACTICA CALIFICADA N 3

Curso: Analisis Numerico II

Profesor(a): Irla Mantilla

Alumno: Moreno Vera, Felipe Adrian

Ciclo: 2015-II

PRACTICA CALIFICADA

problema 1

Calcula una constante de Lipschitz respecto de y para las funciones:
Sol:
se tiene que la condicion de Lipschitz es: $\left|\left(f(t,y_1)-f(t,y_2)\right)\right|\leq L\left|(y_1-y_2)\right|$
y la constante de lipschtz se calcula: $\left|\left(\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right)\right|=L$

a) $f(t,y)=2\frac{y}{t}, t\geq 1.$

a.1) Condicion de Lipschitz:

$$\left|\left(f(t,y_1)-f(t,y_2)\right)\right|=\left|\left(2\frac{y_1}{t}-2\frac{y_2}{t}\right)\right|=\left|\left(\frac{2}{t}(y_1-y_2)\right)\right|\leq\left|\left(\frac{2}{t}\right)\right|.\left|(y_1-y_2)\right|\leq L\left|(y_1-y_2)\right|$$

entonces $L\geq\frac{2}{t}, t\geq 1. \, por\, lo\, tanto\, L=2\, cumple\, con\, la\, condicion\, de\, Lipschitz$

a.2) Constante de Lipschitz:

$$\left|\left(\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right)\right|=\left|\left(\frac{2}{t}\right)\right|=L, t\geq 1\, entonces\left|\left(\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right)\right|\leq 2=L.$$

b) $f(t,y)=t-y^2, \left|(y)\right|\leq 10.$

b.1) Condicion de Lipschitz:

$$\left|\left(f(t,y_1)-f(t,y_2)\right)\right|=\left|\left((t-y_1^2)-(t-y_2^2)\right)\right|=\left|(y_2^2-y_1^2)\right|=\left|\left((y_2+y_1)(y_2-y_1)\right)\right|$$

$$\left|\left((y_2+y_1)(y_2-y_1)\right)\right|\leq\left|(y_1+y_2)\right|.\left|(y_2-y_1)\right|\leq\left(\left|(y_2)\right|+\left|(y_1)\right|\right).\left|(y_2-y_1)\right|\leq 20.\left|(y_2-y_1)\right|$$

$20.\left|(y_2-y_1)\right|=L.\left|(y_2-y_1)\right|$ por lo tanto L = 20.

b.2) Constante de Lipschitz:

$$\left|\left(\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right)\right|=\left|(-2y)\right|=L, \left|(y)\right|\leq 10\, entonces\left|\left(\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right)\right|\leq\left|(20)\right|=L=20.$$

c) $f(t,y)=2\frac{y}{t^2+1}$

c.1) Condicion de Lipschitz:

$$\left|\left(f(t,y_1)-f(t,y_2)\right)\right|=\left|\left(2.\frac{y_1}{t^2+1}-2.\frac{y_2}{t^2+1}\right)\right|=\left|\left(\frac{2}{t^2+1}(y_1-y_2)\right)\right|\leq\left|\left(\frac{2}{t^2+1}\right)\right|.\left|\left((y_1-y_2)\right)\right|$$

donde : $\left|\left(\frac{2}{t^2+1}\right)\right|\left|(y_1-y_2)\right|\leq L\left|(y_1-y_2)\right|, entonces\left|\left(\frac{2}{t^2+1}\right)\right|\leq L, donde\, L\, es\, maximo\, si\, t=0.$

por lo tanto 2<=L, L = 2.

c.2) Constante de Lipschitz:

$$\left|\left(\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right)\right|=\left|\left(\frac{2}{t^2+1}\right)\right|=L, entonces\, con\, t=0\, L\, alcanza\, su\, maximo\, valor: L\leq 2.$$

por lo tanto L = 2.

problema 2

Resuelve los siguientes problemas mediante el metodo de Euler con amplitudes de paso h y h/2. Calcula las estimaciones de error de ambas aproximaciones en el tiempo Tn = b y aplica extrapolacion de Richardson.

Sol:

se sabe que la solucion de una ecuacion diferencial de primer orden, con valores iniciales y grado 1 es: $a_1(x)y'+a_0(x)y=h(x)$, *tiene como solucion general a* $y(x)=y_p+y_h$

donde y_p *es la solucion particular (con condicion inicial)*

y y_h *es la solucion homogenea.*

$$y(x)=\left[y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{h(t)}{a_1(t)}.e^{\int_{x_0}^{t}\frac{a_0(s)}{a_1(s)}ds}dt\right].e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(t)}{a_1(t)}dt} \quad ....(1)$$

a) $y'=1-y, y(0)=0$ b=1, h=0.5, h/2 = 0.25

Metodo Analitico

usando la ecuacion (1) con $a_1(x)=1, a_0(x)=1\, y\, h(x)=1$

$$y(t)=\left[y_0+\int_0^t e^x dx\right].e^{-t}=(0+e^t-1).e^{-t}=1-e^{-t}$$

$$y(b)=y(1)=1-e^{-1}=0.632120558$$

Metodo Numerico (Euler)

Para h = 0.5

usando el programa eulerIVP(f,0,1,0,2), que recibe como entrada f(t,y), el intervalo [a,b], el valor inicial y el numero de pasos, se obtiene el resultado:

x = 0.0 0.5 1.0

w = 0.0 0.5 0.75

y(1) = 0.75

error = | 0.632120558 – 0.75 | = 0.11788

Para h = 0.25

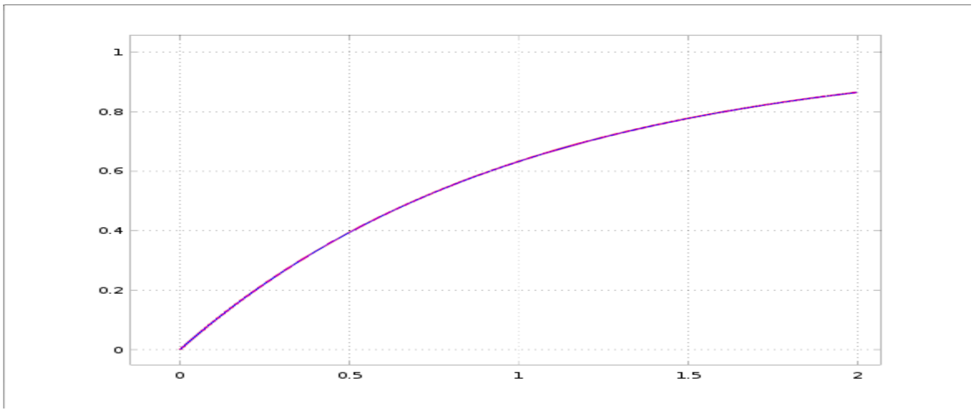
usando el programa eulerIVP(f,0,1,0,4), que recibe como entrada f(t,y), el intervalo [a,b], el valor inicial y el numero de pasos, se obtiene el resultado:

x = 0.00000 0.25000 0.50000 0.75000 1.00000

w = 0.00000 0.25000 0.43750 0.57812 0.68359

y(1) = 0.68359

error = | 0.632120558 – 0.68359 | = 0.051469



b) $y'=t^2-y, y(0)=2$ b=0.2, h=0.2, h/2 = 0.1

Metodo Analitico

usando la ecuacion (1) con $a_1(x)=1, a_0(x)=1 \, y \, h(x)=x^2$

$$y(t)=\left[y_0+\int_0^t x^2 e^x dx\right].e^{-t}=e^{-t}\left(2+e^t\left(t^2-2t+2\right)-2\right)=t^2-2t+2$$

$$y(b)=y(0.2)=1.64$$

Metodo Numerico (Euler)

Para h = 0.2

usando el programa eulerIVP(f,0,0.2,2,1), que recibe como entrada f(t,y), el intervalo [a,b], el valor inicial y el numero de pasos, se obtiene el resultado:

x = 0.0 0.2

w = 2.0 1.6

y(0.2) = 1.6

error = 1.64 – 1.6 = 0.04

Para h = 0.1

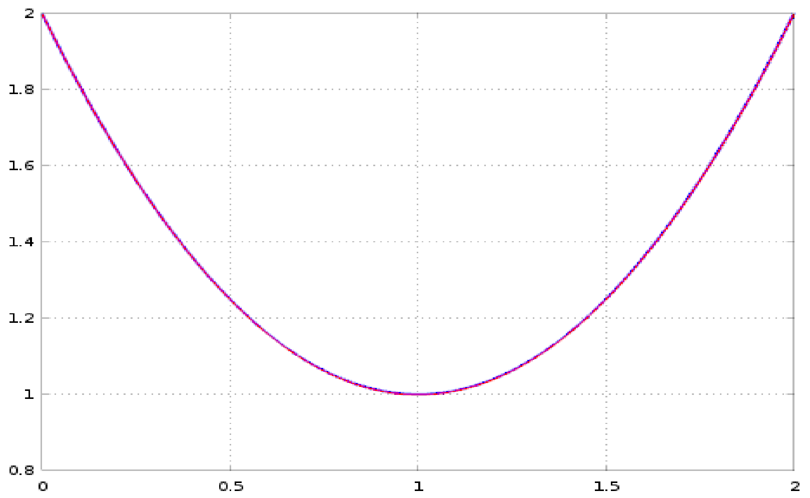
usando el programa eulerIVP(f,0,0.2,2,2), que recibe como entrada f(t,y), el intervalo [a,b], el valor inicial y el numero de pasos, se obtiene el resultado:

x = 0.00000 0.10000 0.20000

w = 2.0000 1.8000 1.6210

y(0.2) =1.6210

error = 1.64 – 1.6210 = 0.019



c) $y'=e^t+y(t+1), y(1)=2$ b=1.03, h=0.01, h/5 = 0.005

Metodo Analitico

usando la ecuacion (1) con $a_1(x)=1, a_0(x)=-(x+1)\ y h(x)=e^x$

$y(t)=e^{-\int f(x)dx}\left(\int g(x).e^{\int f(x)dx}\right)$ $y(t)=e^{\frac{x^2}{2}+x}\left(\int e^{\frac{-x^2}{2}}dx+2e^{-3/2}\right)$

$y(b)=y(1.03)=2.2100$

Metodo Numerico (Euler)

Para h = 0.01

usando el programa eulerIVP(f,1,1.03,2,3), que recibe como entrada f(t,y), el intervalo [a,b], el valor inicial y el numero de pasos, se obtiene el resultado:

x = 1.0000 1.0100 1.0200 1.0300

w = 2.0000 2.0672 2.1362 2.2071

y(0.2) = 2.2071

error = | 2.2100 – 2.2071 | = 0.0029

Para h = 0.005

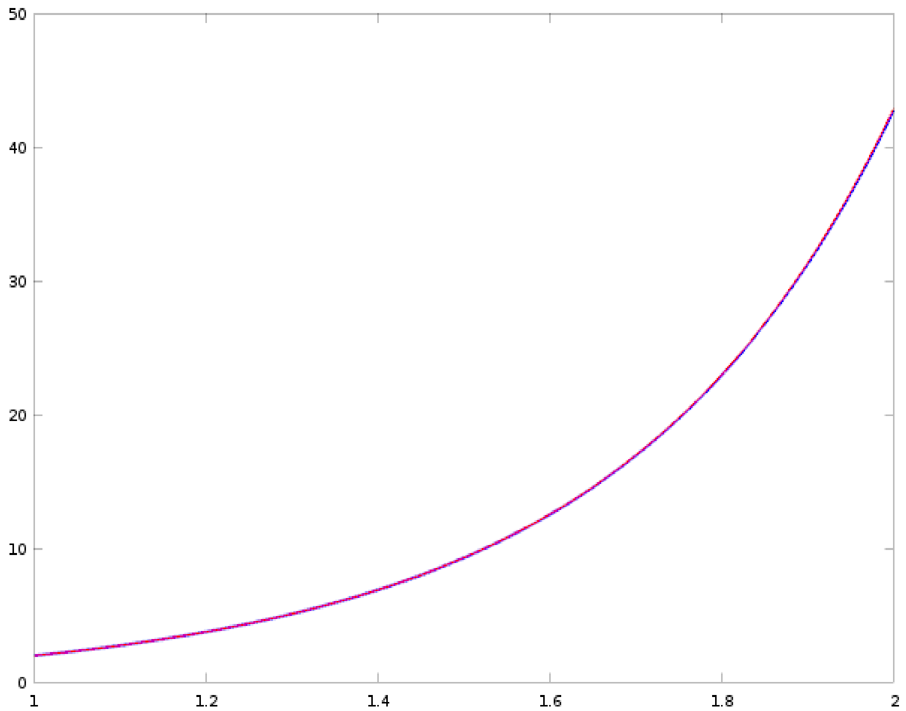
usando el programa eulerIVP(f,1,1.03,2,6), que recibe como entrada f(t,y), el intervalo [a,b], el valor inicial y el numero de pasos, se obtiene el resultado:

x = 1.0000 1.0100 1.0200 1.0300

w = 2.0000 2.0672 2.1362 2.2071

y(0.2) =1.6210

error = 2.2100 – 2.2071 = 0.0029



d) $y'=2\frac{y}{t^2+1}, y(0)=1$ b=1.2, h=0.2, h/2 = 0.1

Metodo Analitico

usando la ecuacion (1) con $a_1(x)=1, a_0(x)=\frac{2}{x^2+1}$ y $h(x)=0$

resolvemos por variables separables

$\frac{dy}{y}=2\frac{dt}{t^2+1}$,entonces $\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dt}{t^2+1}$ se tiene $\ln(y)=2.\arctan(t)+C$

elevando a exponencial:

$y(t)=e^C.e^{2.\arctan(t)}$ y y(0)=1 entonces c = 1 por lo tanto:

$y(t)=e^{2.\arctan(t)}$ $y(b)=y(1.2)=5.76679289$

Metodo Numerico (Euler)

Para h = 0.2

usando el programa eulerIVP(f,0,1.2,1,6), que recibe como entrada f(t,y), el intervalo [a,b], el valor inicial y el numero de pasos, se obtiene el resultado:

x = 0.00000 0.20000 0.40000 0.60000 0.80000 1.00000 1.20000

w = 1.0000 1.4000 1.9385 2.6069 3.3736 4.1965 5.0358

y(1.2) = 5.0358

error = 5.76679289 – 5.0358 = 0.73099

Para h = 0.1

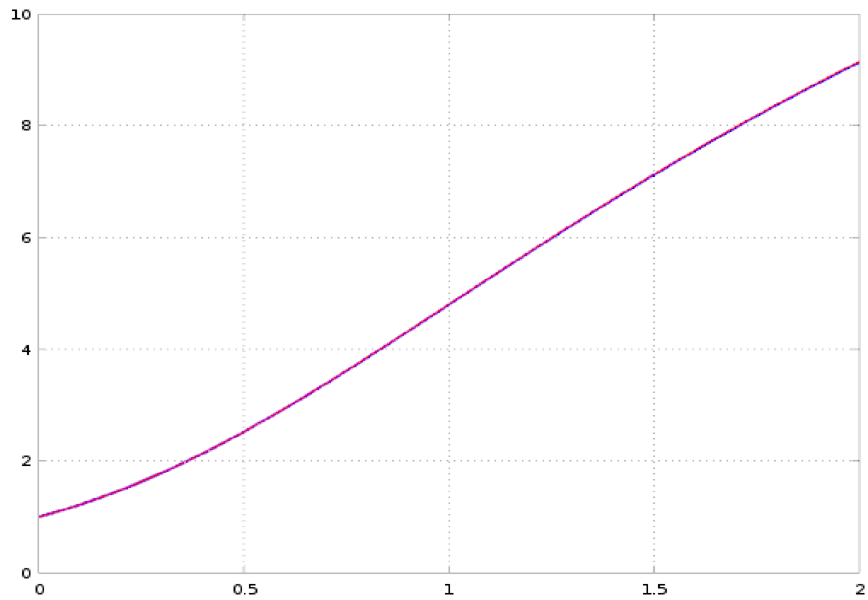
usando el programa eulerIVP(f,0,1.2,1,12), que recibe como entrada f(t,y), el intervalo [a,b], el valor inicial y el numero de pasos, se obtiene el resultado:

x = 0.00 0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20

w = 1.00 1.20 1.4376 1.7141 2.0286 2.3784 2.7589 3.1646 3.5894 4.0271 4.4721 4.9193 5.3645

y(1) = 5.3645

error = 5.76679289 – 5.3645 = 0.40229



e) $y' = y^2 + 2t - t^4, y(0) = 0$ b=0.2, h=0.2, h/2 = 0.1

Metodo Analitico

volviendo a derivar: $y'' = 2y\,y' + 2 - 4t^3, y(0) = 0$

usando la ecuacion (1) con $a_1(x) = 1, a_0(x) = \frac{2}{x^2+1}$ y $h(x) = 0$

Metodo Numerico (Euler)

Para h = 0.2
usando el programa eulerIVP(f,0,0.2,0,1), que recibe como entrada f(t,y), el intervalo [a,b], el valor inicial y el numero de pasos, se obtiene el resultado:
x = 0.00000 0.20000
w = 0.000000 0.039840
y(0.2) = 0.039840
error =

Para h = 0.1
usando el programa eulerIVP(f,0,0.2,0,2), que recibe como entrada f(t,y), el intervalo [a,b], el valor inicial y el numero de pasos, se obtiene el resultado:
x = 0.00000 0.10000 0.20000
w = 0.000000 0.009995 0.039960
y(0.2) = 0.039960
error =

f) $y'=t+y, y(0)=1$ b=0.2, h=0.2, h/2 = 0.1

<u>Metodo Analitico</u>

usando la ecuacion (1) con $a_1(x)=1, a_0(x)=-1 \; y \; h(x)=x$

$$y(t)=\left[y_0+\int_0^t x e^{-x} dx\right].e^t=e^t\left(1+\left(-e^t(t+1)+1\right)\right)$$

$$y(t)=2e^t-(t+1) \qquad y(b)=y(0.2)=1.2428$$

<u>Metodo Numerico (Euler)</u>

<u>Para h = 0.2</u>

usando el programa eulerIVP(f,0,0.2,1,1), que recibe como entrada f(t,y), el intervalo [a,b], el valor inicial y el numero de pasos, se obtiene el resultado:

x = 0.00000 0.20000

w = 0.00000 1.20000

y(0.2) = 1.2

error = 1.2428 – 1.2 = 0.0428

<u>Para h = 0.1</u>

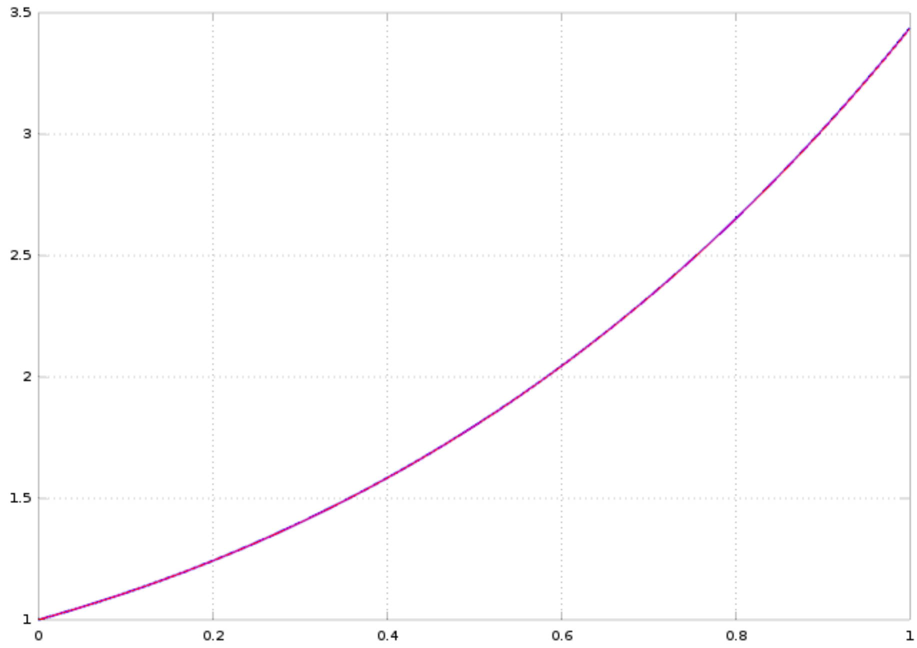
usando el programa eulerIVP(f,0,1.2,1,2), que recibe como entrada f(t,y), el intervalo [a,b], el valor inicial y el numero de pasos, se obtiene el resultado:

x = 0.00000 0.10000 0.20000

w = 1.0000 1.10000 1.22000

y(1) = 1.22

error = 1.2428 – 1.22 = 0.0228



problema 3

Aplica el metodo de Euler para resolver el problema y' = 1 – 2ty, y(0) =0. con 3 pasos de amplitud h=0.1 para aproximar y(0.3).

Sol:

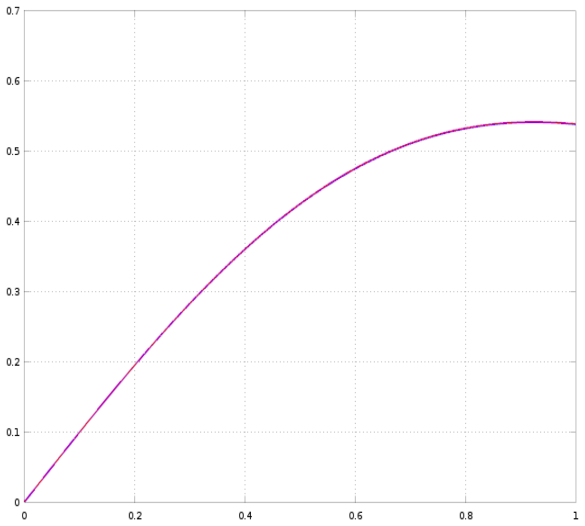
creamos la funcion y'=f(t,y) = 1-2ty, Ahora usando Euler a 3 pasos desde 0 a 0.3, es decir, h = 0.1.
entonces usando el programa eulerIVP(f,0,0.3,0,3)

x = 0.00000 0.10000 0.20000 0.30000
w = 0.00000 0.10000 0.19800 0.29008

entonces por el metodo de euler a 3 pasos de 0.1 se tiene que y(0.3) = 0.29008 aproximadamente.

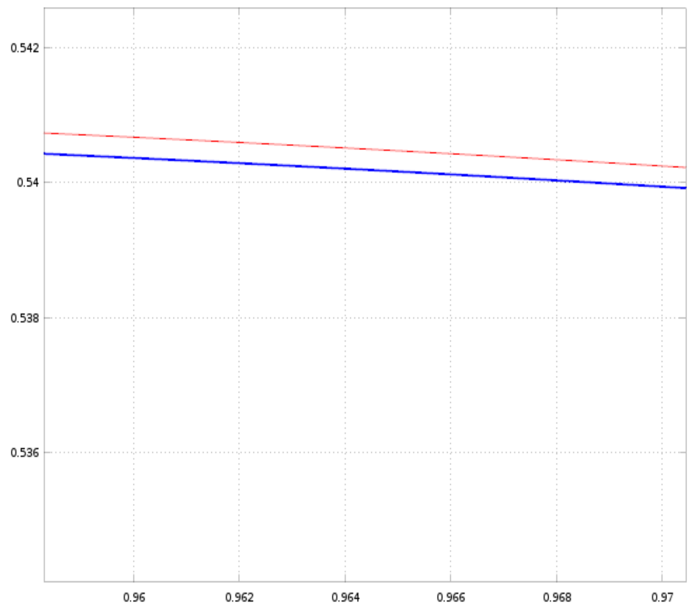
La solucion analitica es: $y(t)=\left[y_0+\int_0^t e^{x^2}dx\right].e^{-t^2}=e^{-t^2}.\int_0^t e^{x^2}dx$ y(0.3) = 0.28263

Error = | 0.28263 – 0.29008 | = 0.007450.



azul: funcion analitica

rojo: pasos de euler



se aprecia que conforme avanza el numero de pasos, el error incrementa

Problema 4

Aplicar el metodo de Euler para y" + 2y' – 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0
dando 2 pasos de ampltud h=0.2 para aproximar y(0.4)

Sol:

creamos la funcion y"=f(t,y,y') = 2 + 4y - 2y', Ahora usando Euler de orden 2 a 2 pasos desde 0 a 0.4, es decir, h = 0.2.
entonces usando el programa euler2IVP(f,0,0.4,2,0,2) se tiene:

x =	0.00000	0.20000	0.40000
y =	2.0000	2.0000	2.4000
u =	0.00000	2.00000	3.20000

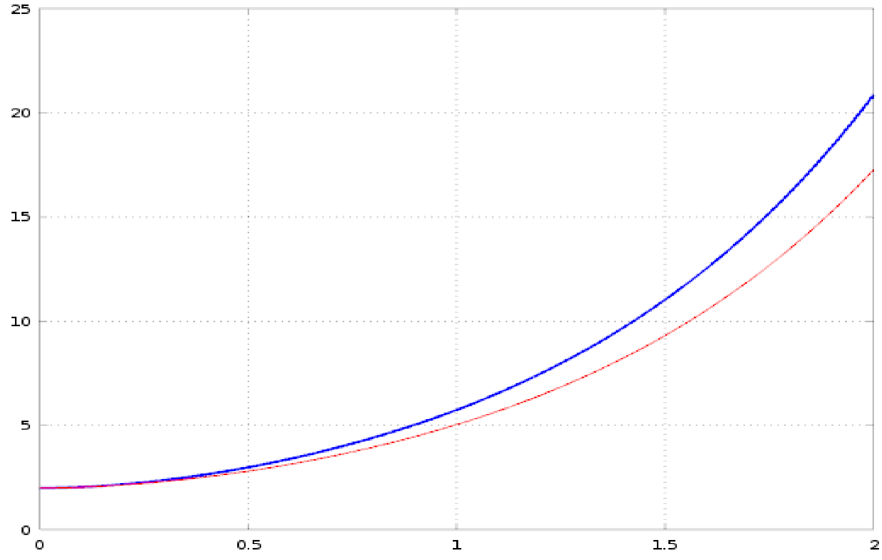
entonces por el metodo de euler de orden 2 a 2 pasos de 0.2 se tiene que y(0.4) = 2.4 aproximadamente.

Analiticamente sea $y(x)=e^{rx}$, entonces: $y'(x)=r.e^{rx}$, $y''(x)=+r.e^{rx}$
reemplazamos en y" + 2y' – 4y = 0, se tiene: $r^2 e^{rx}+2re^{rx}-4e^{rx}=0$ cancelando e^{rx}
obtenemos
$r^2+2r-4=0$ donde $r=\frac{-2\pm\sqrt{(20)}}{2}$, $r_1=\frac{-2-\sqrt{(20)}}{2}=-3.2361, r_2=\frac{-2+\sqrt{(20)}}{2}=1.2361$
como son reales distintas se tiene la siguiente ecuacion: $y(x)=c_1 e^{r_1 x}+c_2 e^{r_2 x}$, reemplazando:
$y(x)=c_1 e^{-3.3261x}+c_2 e^{1.2361x}$
usando la condicion inicial y(0) = 2, y'(0)=0, obtenemos: $2=c_1+c_2$ y $0=-3.3261c_1+1.2361c_2$
resolviendo eel sistema de 2 variables 2 incognitas se obtiene:
c1 = 0.54189 y c2 = 1.4581, por lo tanto la solucion es:

$y(x)=0.54189e^{-3.3261x}+1.4581e^{1.2361x}$ entonces y(0.4) = 2.5339

error = 2.5339 – 2.4 = 0.1339

veamos como incrementa el error.



Problema 5

Se considera la ecuacion integral de Volterra: $y(t)=e^t+\int_0^t \cos(s+y(s))\,ds$

transforma la ecuacion integral en una EDO. Obten la condicion inicial y(0) y aplica el metodo de Euler con h=0.5 para aproximar y(1).

Sol:

por el Teorema fundamental del Calculo:

$y(t)=e^t+\int_0^t \cos(s+y(s))\,ds$, entonces en la ecuacion derivamos:

$$y'(t)=e^t+\frac{d}{dt}\int_0^t \cos(s+y(s))\,ds=e^t+\cos(t+y(t)).\frac{dt}{dt}-\cos(y(0))\frac{d0}{dt}$$

$y'(t)=e^t+\cos(t+y(t))$ como la ecuacion diferencial y' = f(t,y).

obteniendo la condicion inicial:

$$y(0)=e^0+\int_0^0 \cos(s+y(s))\,ds=1$$

Aplicando el metodo de euler con h =0.5 para y(1)

se tiene $f(t,y)=e^t+\cos(t+y)$, por euler se obtiene:

x = 0.00000 0.50000 1.00000

y = 1.00000 2.00000 3.37500

entonces: y(1) = 3.375 aproximadamente.

problema 6

a) Aplicando Lispchizt a la funcion de paso:

$$\left|\left(\oint\left(t,y_{n+1},h\right)-\oint\left(t,y_n,h\right)\right)\right|\leq M\left|\left(y_{n+1}-y_n\right)\right| \quad ...(0)$$

se tiene que: $\left|\left(y_{n+1}-y_n\right)\right|\leq\left|\left(y_n-y_{n-1}\right)\right|+h\left|\left(\oint\left(t_n,y_n,h\right)-\oint\left(t_n,y_{n-1},h\right)\right)\right|+h\left|\left(e_n\right)\right|$, donde en es el error.

$$\left|\left(y_{n+1}-y_n\right)\right|\leq\left|\left(y_n-y_{n-1}\right)\right|+h\,M\left|\left(y_n-y_{n-1}\right)\right|+h\left|\left(e_n\right)\right|=\left(1+hM\right)\left|\left(y_n-y_{n-1}\right)\right|+h\left|\left(e_n\right)\right|$$

$$\left|\left(y_{n+1}-y_n\right)\right|\leq\left(1+hM\right)\left|\left(y_n-y_{n-1}\right)\right|+h\left|\left(e_n\right)\right|$$

o tambien: $\left|\left(y_{n+1}-y_n\right)\right|\leq\left(1+hM\right)\left|\left(y_n-y_{n-1}\right)\right|+h\left|\left(e_n\right)\right| \quad ...(1)$

entonces por induccion demostraremos:

$$\left|\left(t_{n+1}-y_{n+1}\right)\right|\leq\left(1+hM\right)^{n+1}\left|\left(t_0-y_0\right)\right|+\frac{\left(\left(1+hM\right)^{n+1}-1\right)}{M}max\left|\left(e_k\right)\right| \quad \text{para} \quad 0\leq k\leq n-1$$

n=1, se tiene para t,y:

$$\left|\left(t_1-y_1\right)\right|\leq\left(1+hM\right)\left|\left(t_0-y_0\right)\right|+h\left|\left(e_0\right)\right|$$

n=n-1:

$$\left|\left(t_n-y_n\right)\right|\leq\left(1+hM\right)^n\left|\left(t_0-y_0\right)\right|+\frac{\left(\left(1+hM\right)^n-1\right)}{M}max\left|\left(e_k\right)\right| \quad , \quad 0\leq k\leq n-1 \quad ...(2)$$

metiendo (2) en (1):

$$\left|\left(y_{n+1}-y_n\right)\right|\leq\left(1+hM\right)\left|\left(y_n-y_{n-1}\right)\right|+h\left|\left(e_n\right)\right|$$

$$\left|\left(t_{n+1}-y_{n+1}\right)\right|\leq\left(1+hM\right)\left[\left(1+hM\right)^n\left|\left(t_0-y_0\right)\right|+\frac{\left(\left(1+hM\right)^n-1\right)}{M}max\left|\left(e_k\right)\right|\right]+h\left|\left(e_n\right)\right| \quad 0\leq k\leq n-1$$

$$\left|\left(t_{n+1}-y_{n+1}\right)\right|\leq\left(1+hM\right)^{n+1}\left|\left(t_0-y_0\right)\right|+\frac{\left(\left(1+hM\right)^{n+1}-1\right)}{M}max\left|\left(e_k\right)\right| \quad 0\leq k\leq n$$

, lo que se queria demostrar.

Ahora, usando $1+s\leq e^s, reemplazamos\, en\, la\, ecuacion$

$$\left|\left(t_n-y_n\right)\right|\leq e^{nhM}\left|\left(t_0-y_0\right)\right|+\frac{\left(e^{nhM}-1\right)}{M}max\left|\left(e_k\right)\right| \quad 0\leq k\leq n-1$$

y como $t_n=a+nh, nh=\left(t_n-a\right)$

$$\left|\left(t_n-y_n\right)\right|\leq e^{\left(t_n-a\right)M}\left|\left(t_0-y_0\right)\right|+\frac{\left(e^{\left(t_n-a\right)M}-1\right)}{M}max\left|\left(e_k\right)\right| \quad 0\leq k\leq n-1 \quad \text{y}$$

$t_n-a\leq b-a$, se tiene $\left|\left(t_n-y_n\right)\right|\leq e^{\left(b-a\right)M}\left|\left(t_0-y_0\right)\right|+\frac{\left(e^{\left(b-a\right)M}-1\right)}{M}max\left|\left(e_k\right)\right| \quad ...(3)$

Ahora reemplazando en la ecuacion:

$$\left|\left(\oint\left(t,y_{n+1},h\right)-\oint\left(t,y_n,h\right)\right)\right|\leq M\left|\left(y_{n+1}-y_n\right)\right|\leq Me^{\left(b-a\right)M}\left|\left(y_1-y_0\right)\right|+\left(e^{\left(b-a\right)M}-1\right)max\left|\left(e_k\right)\right|$$

$$\left|\left(\oint\left(t_{n+1},y_{n+1},h\right)-\oint\left(t_n,y_n,h\right)\right)\right|=f\left(t_{n+1},y_{n+1}\right)-f\left(t_n,y_n\right)+g\left(t_k,y_k\right)$$

b)

c)

problema 7

Demuestra que el esquema de un paso $y_n = y_{n-1} + h.\oint(t_{n-1}, y_{n-1}, h)$ definido a partir de $\oint(t, y, h) = f(t, y) + \frac{h}{2.} f^{(1)}\left(t + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3} f(t, y)\right)$ es convergente de orden 3.

Sol:

$$\left|(y_{n+1} - y_n)\right| \leq \left|(y_n - y_{n-1})\right| + h\left|\left(\left(f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{h}{2.} f^{(1)}\left(t_{n-1} + \frac{h}{3}, y_{n-1} + \frac{h}{3} f(t_{n-1}, y_{n-1})\right)\right)\right)\right|$$

$$y_n = y_{n-1} + h.\left(f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{h}{2.} f^{(1)}\left(t_{n-1} + \frac{h}{3}, y_{n-1} + \frac{h}{3} f(t_{n-1}, y_{n-1})\right)\right)$$

Ahora tenemos que para que converga de orden 3, debe usar un metodo de orden 2 rescpecto de t. y se sabe que :

$y_n - y_{n-1} = h.\oint(t_{n-1}, y_{n-1}, h)$, derivando respecto a t:

$$\oint^1(t, y, h) = f^1(t, y).\, y^1 + \frac{h}{2} f^{(2)}\left(t + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3} f(t, y)\right).(y^1 + \frac{h}{3} f^1(t, y)) \quad \text{... (a)}$$

$$y^1{}_n - y^1{}_{n-1} = h.\oint^1(t_{n-1}, y_{n-1}, h).(y^1_{n-1}) \;=\; y^1{}_n = y^1{}_{n-1} + h.\oint^1(t_{n-1}, y_{n-1}, h).(y^1_{n-1}) \quad \text{...(b)}$$

ahora (b) en (a):

vemos que la recursividad

$$y^1_n = y^1_{n-1} + h(y^1_{n-1}).(f^1(t_{n-1}, y_{n-1}).\, y^1_{n-1} + \frac{h}{2}.f^2(t_{n-1}, y_{n-1} + \frac{h}{3} f(t_{n-1}, y_{n-1}))).(y^1_{n-1} + \frac{h}{3} f^1(t_{n-1}, y_{n-1}))$$

se obserba que para el metodo de un paso, ahora dando forma:

$$\frac{y^1_n - y^1_{n-1}}{(y^1_{n-1} + \frac{h}{3} f^1(t_{n-1}, y_{n-1}))} = h(y^1_{n-1}).(f^1(t_{n-1}, y_{n-1}).\, y^1_{n-1} + \frac{h}{2}.f^2(t_{n-1}, y_{n-1} + \frac{h}{3} f(t_{n-1}, y_{n-1})))$$

Tomamos Limite cuando tiene al infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y^1_n - y^1_{n-1}}{(y^1_{n-1} + \frac{h}{3} f^1(t_{n-1}, y_{n-1}))} = \lim_{n\to\infty} h(y^1_{n-1}).(f^1(t_{n-1}, y_{n-1}).\, y^1_{n-1} + \frac{h}{2}.f^2(t_{n-1}, y_{n-1} + \frac{h}{3} f(t_{n-1}, y_{n-1})))$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y^1_n - y^1_{n-1}}{(y^1_{n-1} + \frac{h}{3} f^1(t_{n-1}, y_{n-1}))} = \lim_{n\to\infty} (y^1_{n-1}).(hf^1(t_{n-1}, y_{n-1}).\, y^1_{n-1} + \frac{h^2}{2}.f^2(t_{n-1}, y_{n-1} + \frac{h}{3} f(t_{n-1}, y_{n-1})))$$

se obverva que el segundo miembro tiene la forma de taylor en derivada parcial respecto a t.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y^1_n - y^1_{n-1}}{(y^1_{n-1} + \frac{h}{3} f^1(t_{n-1}, y_{n-1}))} = \lim_{n\to\infty} (h\frac{\partial}{\partial t} f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{h^2}{2}.\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t_{n-1}, y_{n-1} + \frac{h}{3} f(t_{n-1}, y_{n-1}))) \quad \text{...(c)}$$

con esto se observa que

$$y^1_n - y^1_{n-1} = h(y^1_{n-1}).(f^1(t_{n-1}, y_{n-1}).\, y^1_{n-1} + \frac{h}{2}.f^2(t_{n-1}, y_{n-1} + \frac{h}{3} f(t_{n-1}, y_{n-1}))).(y^1_{n-1} + \frac{h}{3} f^1(t_{n-1}, y_{n-1}))$$

en (c) reemplazamos:

y se obtiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{y^1_n - y^1_{n-1}}{(y^1_{n-1} - y'_{n-2})^3} = M$, donde: $0 < M < \infty$, por lo tanto es orden 3.

problema 8

Encuentra los coeficientes a21, a31 y a32 para que una formula explicita similar a la regla de simpson sea orden 3. esta regla es de orden 4?

```
0      |  0
1/2    | a21    0
1      |  a31   a32   0
-------|------------------------
       |   1/6     4/6    1/6
```

Sol:

el tablero se puede interpretar como:

```
c |     A
--|---------
  |    b^T
```

, donde A es la matriz de a_{jk} , b y c son vectores., donde b = (b1,b2,...), c = (c1,c2,...)

I) Regla de Simpson orden 3:

se tendria que: $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$ ...(1) $\sum_{j=1}^{s} b_j c_j = \frac{1}{2}$ ...(2) $\sum_{j=1}^{s} b_j c_j = \frac{1}{2}$ ...(3)

$\sum_{j=1,k=1}^{s} b_j a_{jk} c_k = \frac{1}{6}$ ...(4), comparando con la regla de simpson explicita donde:

por lo tanto: $a_{21} = \frac{1}{2}$ $a_{31} = -1$ $a_{32} = 2$, cumplen para orden 3 de Simpson.

II) Para que sea orden 4:

se tendria que: $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$ ...(1) $\sum_{j=1}^{s} b_j c_j = \frac{1}{2}$ ...(2) $\sum_{j=1}^{s} b_j c_j = \frac{1}{2}$ ...(3)

$\sum_{j=1,k=1}^{s} b_j a_{jk} c_k = \frac{1}{6}$ ...(4), que se puede iterpretar como: $b^T . Ac = \frac{1}{6}$ entonces $a_{32} = 2$.

$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^3 = \frac{1}{4}$ ...(5) $\sum_{j=1,l=1}^{s} b_j c_j a_{jl} c_l = \frac{1}{8}$ ...(6) $\sum_{j=1,k=1}^{s} b_j a_{jk} c_k^2 = \frac{1}{12}$ ...(7)

$\sum_{j=1,l=1,k=1}^{s} b_j a_{jk} a_{kl} c_l = \frac{1}{24}$ ...(8), de la ecuacion (8) obtenemos $a_{32} \frac{a_{21}}{36} = \frac{1}{24}$, a32 = 2.

$a_{21} = \frac{3}{4}$, pero como $c_j = \sum_{i=1}^{s-1} a_{ij}$ obtenemos: $a_{31} = \frac{1}{4}$

por lo tanto: $a_{21} = \frac{3}{4}$ $a_{31} = \frac{1}{4}$ $a_{32} = 2$, cumplen para orden 4.

problema 9

Encuentra que relacion han de cumplir los coeficientes b1, b2 y b3 para que el metodo de tablero tenga orden 2. existe algun caso con orden 3?

```
0      |  0
1/2    | 1/2    0
1      |  1/2  1/2  0
-------|------------------------
       |  b1     b2    b3
```

Sol:

el tablero se puede interpretar como:

```
c |    A
--|---------
  |   b^T
```

, donde A es la matriz de a_{jk} , b y c son vectores., donde b = (b1,b2,...), c = (c1,c2,...)

I) Para que sea orden 2:

significa que segun los criterios de rungeKutta de los metodos de un paso:

$\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$ y $\sum_{j=1}^{s} b_j c_j = \frac{1}{2}$ o tambien $\sum_{j=1,k=1}^{s} b_j a_{jk} = \frac{1}{2}$, donde “s” es el orden

$b_1 + b_2 + b_3 = 1$ $\quad 0 b_1 + \frac{1}{2} b_2 + b_3 = \frac{1}{2}$

$\sum_{j=1,k=1}^{s} b_j a_{jk} = \frac{1}{2}$ se puede interpretar como: $b^T . A = \frac{1}{2}$ $=$ $0 b_1 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{2} b_3 = \frac{1}{2}$,

entonces se obtiene: $b_3 = 0$ $\quad b_2 = 1$ y $b_1 = 0$ cumplen para orden 2.

ii) Para que sea orden 3:

se tendria que: $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$ ...(1) $\sum_{j=1}^{s} b_j c_j = \frac{1}{2}$ ...(2) $\sum_{j=1}^{s} b_j c^2{}_j = \frac{1}{3}$ ...(3)

$\sum_{j=1,k=1}^{s} b_j a_{jk} c_k = \frac{1}{6}$ ...(4), que se puede iterpretar como:

$b^T . Ac = \frac{1}{6}$ $=$ $b^T . \left(0, 0, \frac{1}{4}\right)^T = \frac{1}{6}$ $=$ $\frac{1}{4} b_3 = \frac{1}{6}$ entonces: $b_3 = \frac{2}{3}$

de las ecuaciones 1 y 2:

$b_1 + b_2 + b_3 = 1$ y $0 b_1 + \frac{1}{2} b_2 + b_3 = \frac{1}{2}$ entonces, $b_2 = \frac{-1}{6}$ y $b_1 = \frac{1}{2}$

con $b_1 = \frac{1}{2}$ $\quad b_2 = \frac{-1}{6}$ y $b_3 = \frac{2}{3}$ cumplen para orden 3.

problema 10

Resuelva el sistema de 2 ecuaciones:

y1' = t.y1.y2

y2' = 3.y1 – 2.y2

con las condiciones iniciales y1(3) = 1.312258, y2(3) = -0.414524 dando un paso con h= 0.04 y 2 pasos con h=0.02 con la regla de trapecios (heun), el metodo de Taylor de orden 3 y el metodo de Runge Kutta.

Sol:

para resolver un sistema de ecuaciones de primer orden, se puede usar metodos para aproximar la solucion, como por ejemplo el metodo de runge-Kutta como se ve a continuacion:

$\frac{dx}{dt} = f(t,x,y)$	$\frac{dy}{dt} = g(t,x,y)$
$k_1 = h{\cdot}f(t,x,y)$ $k_2 = h{\cdot}f\left(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}k_1, y+\frac{1}{2}l_1,\right)$ $k_3 = h{\cdot}f\left(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}k_2, y+\frac{1}{2}l_2\right)$ $k_4 = h{\cdot}f\left(t+h, x+k_3, y+l_3\right)$	$l_1 = h{\cdot}g(t,x,y)$ $l_2 = h{\cdot}g\left(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}k_1, y+\frac{1}{2}l_1\right)$ $l_3 = h{\cdot}g\left(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}k_2, y+\frac{1}{2}l_2\right)$ $l_4 = h{\cdot}g\left(t+h, x+k_3, y+l_3\right)$
$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$	$y(t+h) = y(t) + \frac{1}{6}(l_1+2l_2+2l_3+l_4)$

a) por el Metodo de tungeKutta: usando el programa rungeKutta_SEDO1:

pasando por parametros:

f = @(t,y1,y2) t*y1*y2;

g = @(t,y1,y2) 3*y1 – 2*y2;

Para h=0.04:

[x,y1,y2]=rungeKutta_SEDO1(f,g,3,3.04,-1.312258,-0.414524,10)

se obtiene:

x = 3.0000   3.0040   3.0080   3.0120   3.0160   3.0200   3.0240   3.0280   3.0320   3.0360   3.0400

y1 = -1.3123 -1.3056 -1.2989 -1.2919 -1.2848 -1.2776 -1.2702 -1.2627 -1.2550 -1.2472 -1.2393

y2 = -0.41452 -0.42687 -0.43903 -0.45101 -0.46282 -0.47444 -0.48589 -0.49715 -0.50824 -0.51914 -0.52987

donde se observa:

y1(3.04) = -1.2393

y2(3.04) = -0.52987

Para h=0.02:
[x,y1,y2]=rungeKutta_SEDO1(f,g,3,3.04,-1.312258,-0.414524,20)

se obtiene:
x= 3.0000 3.0020 3.0040 3.0060 3.0080 3.0100 3.0120 3.0140 3.0160 3.0180
3.0200 3.0220 3.0240 3.0260 3.0280 3.0300 3.0320 3.0340 3.0360 3.0380 3.0400

y1=-1.3123 -1.3090 -1.3056 -1.3023 -1.2989 -1.2954 -1.2919 -1.2884 -1.2848 -1.2812
-1.2776 -1.2739 -1.2702 -1.2664 -1.2627 -1.2588 -1.2550 -1.2511 -1.2472 -1.2432 -1.2393

y2=-0.41452 -0.42072 -0.42687 -0.43297 -0.43903 -0.44504 -0.45101 -0.45694 -0.46282
-0.46865 -0.47444 -0.48019 -0.48589 -0.49154 -0.49715 -0.50272 -0.50824 -0.51371
-0.51914 -0.52453 -0.52987

donde se observa:
y1(3.04) = -1.2393
y2(3.04) = -0.52987

b) por el metodo de Trapecios o Heun: usando el programa heun_SEDO1:

Para h=0.04:
[x,y1,y2]=heun_SEDO1(f,g,3,3.04,-1.312258,-0.414524,10)
se obtiene:
x = 3.0000 3.0040 3.0080 3.0120 3.0160 3.0200 3.0240 3.0280 3.0320 3.0360
3.0400

y1 = -1.3123 -1.3056 -1.2989 -1.2919 -1.2848 -1.2776 -1.2702 -1.2626 -1.2550 -1.2472
-1.2393

y2 =-0.41452 -0.42687 -0.43903 -0.45101 -0.46282 -0.47445 -0.48589 -0.49716 -0.50824
-0.51914 -0.52987

donde se observa:
y1(3.04) = -1.2393
y2(3.04) = -0.52987

Para h=0.02:
[x,y1,y2]=heun_SEDO1(f,g,3,3.04,-1.312258,-0.414524,20)
se obtiene:
x= 3.0000 3.0020 3.0040 3.0060 3.0080 3.0100 3.0120 3.0140 3.0160 3.0180
3.0200 3.0220 3.0240 3.0260 3.0280 3.0300 3.0320 3.0340 3.0360 3.0380 3.0400

y1=-1.3123 -1.3090 -1.3056 -1.3023 -1.2989 -1.2954 -1.2919 -1.2884 -1.2848 -1.2812
-1.2776 -1.2739 -1.2702 -1.2664 -1.2626 -1.2588 -1.2550 -1.2511 -1.2472 -1.2432 -1.2393

y2=-0.41452 -0.42072 -0.42687 -0.43297 -0.43903 -0.44504 -0.45101 -0.45694 -0.46282
-0.46865 -0.47444 -0.48019 -0.48589 -0.49155 -0.49715 -0.50272 -0.50824 -0.51371
-0.51914 -0.52453 -0.52987

donde se observa:
y1(3.04) = -1.2393
y2(3.04) = -0.52987

c) por el metodo de Taylor de orden 3: usando el programa taylor_SEDO1

Para h=0.04:
[x,y1,y2]=taylor_SEDO1(f,g,3,3.04,-1.312258,-0.414524,10)
se obtiene:
x = 3.0000 3.0040 3.0080 3.0120 3.0160 3.0200 3.0240 3.0280 3.0320 3.0360 3.0400

y1 = -1.3123 -1.3056 -1.2989 -1.2921 -1.2851 -1.2781 -1.2709 -1.2636 -1.2563 -1.2488 -1.2413 -1.2373

y2 =-0.41452 -0.42371 -0.43275 -0.44164 -0.45038 -0.45898 -0.46744 -0.47575 -0.48392 -0.49195 -0.49983 -0.512589 -0.52986

donde se observa:
y1(3.04) = -1.2373
y2(3.04) = -0.52986

Para h=0.02:
[x,y1,y2]=taylor_SEDO1(f,g,3,3.04,-1.312258,-0.414524,20)
se obtiene:
x= 3.0000 3.0020 3.0040 3.0060 3.0080 3.0100 3.0120 3.0140 3.0160 3.0180 3.0200 3.0220 3.0240 3.0260 3.0280 3.0300 3.0320 3.0340 3.0360 3.0380 3.0400

y1= -1.3123 -1.3090 -1.3057 -1.3023 -1.2989 -1.2955 -1.2921 -1.2886 -1.2852 -1.2817 -1.2781 -1.2746 -1.2710 -1.2674 -1.2637 -1.2601 -1.2564 -1.2527 -1.2490 -1.2452 -1.2414 -1.2373

y2=-0.41452 -0.41914 -0.42371 -0.42825 -0.43276 -0.43723 -0.44166 -0.44605 -0.45041 -0.45473 -0.45901 -0.46326 -0.46748 -0.47165 -0.47579 -0.47990 -0.48397 -0.48800 -0.49200 -0.49596 -0.49989 -0.512589 -0.52986

donde se observa:
y1(3.04) = -1.2373
y2(3.04) = -0.52986