<u>PRACTICA CALIFICADA N 4</u>

Curso: Análisis Numérico II

Profesor(a): Irla Mantilla

Alumno: Moreno Vera, Felipe Adrian

Ciclo: 2015-II

PRACTICA CALIFICADA

Problema 1:

Consideremos el método lineal multipaso $y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}$. Demostrar que su dominio de estabilidad lineal es vacío.

Sol:

Calculamos sus polinomios característicos.

$\alpha_2 = 1, \alpha_0 = 0, \alpha_0 = -1$ y $\beta_1 = 2\beta_0 = 0$

$\rho(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j$ .... primer polinomio característico.

$\sigma(x) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j x^j$ ... segundo polinomio característico.

$\rho(r) = r^2 - 1$ Y $\sigma(r) = 2r$

Polinomio característico es: $\prod(w, z) = \rho(w) - z\sigma(w) = w^2 - 2zw - 1 = 0$

$w = \frac{1}{2}\left(2z \pm \sqrt{(4z^2 + 4)}\right)$, entonces el dominio de estabilidad lineal es el conjunto:

$\left|\left(\frac{1}{2}\left(2z \pm \sqrt{(4z^2 + 4)}\right)\right)\right| < 1$, se tiene que $\pm\sqrt{(4z^2 + 4)} < 2 - 2z$ y $\pm\sqrt{(4z^2 + 4)} < 2 - 2z$

al cuadrado

$4z^2 + 4 < 4 + 4z^2 - 8z$ y $4 + 4z^2 - 8z < 4z^2 + 4$ entonces z viene dado tal que

8z<0 ...(1)

0<8z ....(2)

entonces: $z = \lambda h$ y se debe tener que $\Re(\lambda) < 0$ entonces:

$\Re(z) = \Re(\lambda h) = \Re(\lambda)h < \Re(0) = 0$ entonces de (1) y (2):

$\Re(z) = \Re(\lambda h) = \Re(\lambda)h > \Re(0) = 0$ y $\Re(\lambda) > 0$, y no existe número real que sea mayo y menor que cero a la vez.

Por lo tanto, el dominio de estabilidad lineal es el conjunto $\varnothing$.

Problema 2:

El objetivo de este problema es demostrar que la región de estabilidad absoluta de un método lineal multipaso convergente no puede contener al eje real positivo en un entorno del origen.

(i) Demostrar que hay una única raíz, $r_1(z)$, del polinomio característico con la propiedad de que $r_1(z)$ cuando $z \to 0$

(ii) Consideremos el problema $y' = \lambda y, \lambda \in \Re$ y(0)=1, Demostrar que el residuo satisface $R_n = O(h^2)$ cuando $h \to 0^{+.}$ y deducir de ello que $\prod(e^z, z) = O(z^2)$ cuando $z \to 0, z \in \Re^{+.}$

(ii) Usar que $\prod(r,z) = (1 - z\beta_k)(r - r_1)(r - r_2)\dots(r - r_k)$ para concluir que $\prod(e^z, z) = O(z^2)$, cuando $z \to 0, z \in \Re^{+.}$

Sol:

(i) se sabe que el polinomio $\prod(r,z)$, tiene raíces $r_{1,} r_{2,} \dots, con\, multiplicidad\, m_{1,} m_2, \dots$ por la estabilidad lineal se tiene que: $D := z \in C : |(r_i(z))| < 1$ esto significa que sus potencias del polinomio característico decaen más rápido que cualquier polinomio en n y además $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$, entonces usando el método del trapecio, se tiene:

$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$, hallando sus dominio.

$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2} h(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n))$, los polinomios característicos son: $\rho(r) = r - 1$ y

$\sigma(r) = \frac{1}{2} r + \frac{1}{2}$, entonces: $\prod(r,z) = \rho(r) - z\sigma(r)$, se tiene:

$\prod(r,z) = r - 1 - \frac{1}{2} z r - \frac{1}{2} z = r\left(1 - \frac{1}{2} z\right) - \left(1 + \frac{1}{2} z\right) = 0$, calculando sus raíces ...

$r = \frac{1 + \frac{1}{2} z}{1 - \frac{1}{2} z}$, donde r es una raíz, entonces evaluando en $z \to 0$, se tiene que la raíz

$r_1(z) = \frac{1 + \frac{1}{2} z}{1 - \frac{1}{2} z}$ es única y $r_1(z) \to 1$ .Por lo tanto queda demostrado.

(ii) Para el cálculo de error se puede obtener mediante la aproximación mediante los polinomios característicos del método multipaso.

$$y_{n+k}=\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j y_{n+j}+h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j}+h\in_{n+k}. \quad ...(1)$$

Con valores iniciales: $y_j=y(x_j)+.\in_j.$,con j=0,1,...,k-1. Y además suponemos que: $\left|(.\in_j.)\right|\leq\rho(h)^{h\to 0}\to 0,\forall j$, la solución exacta cumple:

$$y(x_{n+k})=\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j y(x_{n+j})+h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f(x_{n+j},y_{n+j})+R_{n+k} \quad ...(2)$$

restando (1) – (2):

$$y_{n+k}-y(x_{n+k})=\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j\left(y_{n+j}-y(x_{n+j})\right)+h\sum_{j=0}^{k}\beta_j\left(f_{n+j}-f(x_{n+j},y_{n+j})\right)+h\left(.\in_{n+k}.-\frac{R_{n+k}}{h}\right)$$

Donde R_{n+k} es el error truncal local y $e_{n+k}=y_{n+j}-y(x_{n+j})$ es el error total de la solución numérica en cada nodo.

$$e_{n+k}=\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j e_{n+k}+h\sum_{j=0}^{k}\beta_j\left(\lambda y_{n+j}-f(x_{n+j},y_{n+j})\right)+h\left(.\in_{n+k}.-\frac{R_{n+k}}{h}\right)$$

$$e_{n+k}-\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j e_{n+k}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j\left(\lambda y_{n+j}-f(x_{n+j},y_{n+j})\right)+h\left(.\in_{n+k}.-\frac{R_{n+k}}{h}\right)$$

$$e_{n+k}\left(1-\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j\right)=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j\left(\lambda y_{n+j}-f(x_{n+j},y_{n+j})\right)+h\in_{n+k}.-R_{n+k} \quad ...(a)$$

y además se tiene de (1):

$y(x_{n+k})=\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j y(x_{n+j})+\lambda h\sum_{j=0}^{k}\beta_j y(x_{n+j})+hR_{n+k}$, y del problema se tiene que:

$y'=\lambda y,\lambda\in\Re$, donde R_{n+k} es el polinomio residual y se calcula de la siguiente manera:

$R=C_0 y(x_n)+C_1 y'(x_n)h+...+C_p y^{(p)}(x_n)h^p+O(h^{p+1})$, donde p es el orden de convergencia.

Donde $C_0=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j$, $C_1=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j j-\sum_{j=0}^{k}\beta_j$ y $C_q=\frac{1}{q!}\left(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j j^q-\sum_{j=0}^{k}\beta_j j^{q-1}\right)$, q>1

entonces aplicamos taylor a la función: $y'=\lambda y,\lambda\in\Re$ y(0)=1, se tiene:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}(x-0)+\frac{y''(0)}{2!}(x-0)^2+...+\frac{y^n(0)}{n!}(x-0)^n+R_n(y)$$

$$y(x)=y(0)+\lambda y(0)x+\frac{\lambda^2}{2}y(0)x^2+...+\frac{\lambda^n}{n!}y(0)x^n+R_n(y) \quad ...(b)$$

donde $R_n(y)=\frac{y^{n+1}()}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}=\frac{y^{n+1}()}{(n+1)!}(x)^{n+1}=\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}$,

entonces en (b) $\lim_{x\to 0}y(x)=y(0)=1$, se sabe que $C_0=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j=0$, el método converge con orden al menos 1, entonces el Residuo viene expresado por $R_n=O(h^2)$, que es orden consistente cuadrático como mínimo.y se tiene:

$\prod(e^z,z)=\rho(e^z)-z\sigma(e^z)=e^{kz}+\sum_{j=0}^{k-1}(\alpha_j-z\beta j)e^{jz}$, entonces con y se tiene: $z\to 0$

se tendría $\prod(e^z,0)=1+0=1=R_n(z)=O(z^2)$.

(iii) Se sabe que: $\prod(r,z)=(r-r_1(z))(r-r_2(z))...(r-r_k(z))=\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-z\beta_j)r^j$

$\prod(r,z)=(1-z\beta_k)(r-r_1(z))(r-r_2(z))...(r-r_k(z))=\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-z\beta_j)r^j-z\beta_k\left(\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-z\beta_j)r^j\right)$

$\prod(e^z,z)=(1-z\beta_k)\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-z\beta_j)e^{jz}$ pero se tiene que: $e^z=1+e^z+\frac{e^{2z}}{2!}$

entonces de la ecuacion anterior

Problema 3:

Consideramos la fórmula BDF de 2 pasos, $y_{n+2}-\frac{4}{3}y_{n+1}+\frac{1}{3}y_n=\frac{2}{3}hf_{n+2}$

(i) Determinar el orden de consistencia.
(ii) Estudiar si es Convergente.
(iii) Determinar si es A-estable, Indicación. Probar que $\Re\left(\frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}\right)\geq 0$.

Sol:

(i) se debe construir un polinomio residual en función a h e la siguiente manera:

$R=C_0y(x_n)+C_1y'(x_n)h+\ldots+C_py^{(p)}(x_n)h^p+O(h^{p+1})$, donde:

$C_0=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j$, $C_1=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j j-\sum_{j=0}^{k}\beta_j$ y asi ... tal que: $C_q=\frac{1}{q!}\left(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j j^q-\sum_{j=0}^{k}\beta_j j^{q-1}\right)$, q>1

entonces si : $C_q=0, con\, q=0,1,2,\ldots p$, el método será consistente de orden al menos p. Pero si $C_{q+1}\neq 0$, el método no puede tener orden de consistencia p+1. Y esta última recibe el nombre de constante de error.

Entonces:

$C_0=C_1=C_2=0$ pero $C_3\neq 0$. entonces, el método es consistente de orden 2.

(ii) De la ecuación de BDF de 2 pasos, $y_{n+2}-\frac{4}{3}y_{n+1}+\frac{1}{3}y_n=\frac{2}{3}hf_{n+2}$, se tienen los polinomios característicos y los coeficientes: se construye la ecuación:

$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f(x_{n+j},y_{n+j})$, con n = 0 ,1 , ..., N – k. Método lineal de K pasos.

Donde: $f_n=f(x_n,y_n)$ y con $\alpha_k=1, |(\alpha_0)|+|(\beta_0)|\neq 0$

$\alpha_2=1,\alpha_1=\frac{-1}{4},\alpha_0=\frac{1}{3}$ y $\beta_2=\frac{2}{3}$

$\rho(x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x^j$ .... primer polinomio característico.

$\sigma(x)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j x^j$ ... segundo polinomio característico.

Se contruye: $\rho(x)=x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}$, donde las raíces son x=1 y $x=\frac{1}{3}$, vemos que las raíces tienen módulo es menor o igual a 1, y la raíz que tiene módulo 1 es simple. Y como satisface la condición de la raíz se dice que es un método 0-estable. Y además es consistente de orden 2, se tiene que es convergente de orden 2.

(iii) Sea $F = z = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}, con\, 0 \le \theta \le 2\pi$ si z pertenece a F, entonces:

$$z = \frac{e^{2i\theta} - \frac{4}{3}e^{i\theta} + \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}e^{i\theta}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4}{3}e^{-i\theta} + \frac{1}{3}e^{-2i\theta}\right)$$, esto es igual a:

$$z = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4}{3}\cos(\theta) + \frac{1}{3}\cos(2\theta)\right) + \frac{3}{2}i\left(\frac{4}{3}sen(\theta) - \frac{1}{3}sen(2\theta)\right) = \Re + \Im$$

entonces queríamos demostrar que: $\Re\left(\frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}\right) \ge 0$

se tiene que $\Re(z) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4}{3}\cos(\theta) + \frac{1}{3}\left(\cos^2(\theta) - sen^2(\theta)\right)\right)$

$$\Re(z) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4}{3}\cos(\theta) + \frac{1}{3}\cos^2(\theta) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^2(\theta)\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\cos(\theta) + \frac{2}{3}\cos^2(\theta)\right)$$

$$\Re(z) = 1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) = (\cos(\theta) - 1)^2 \ge 0$$

se tiene que: $C^{-1} := z\, pertenece\, a\, C, tal\, que: \Re(z) < 0$

y $D := z\, pertenece\, a\, C, tal\, que: \Re(z) < 0$, es decir C esta incluido en D y mientras mas región cubra C.

Donde D es el dominio de estabilidad lineal viene dado por:

$D = z\, pertenece\, C\, tal\, que: z = h\lambda, con\, h > 0\; y\, \lambda\, es\, complejo.$ tal que la solución numérica de $y' = \lambda y\, verifica\, que \lim_{n \to \infty} y_n = 0$.

La solución exacta es $y(x) = e^{\lambda x}$ por lo tanto $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$ si y sólo si $\Re(\lambda) < 0$.

Se tiene que: $F \cap C^{-1} = \varnothing$. Dado que $\partial D \subset F$, se concluye que $D \cap C^{-1} = \varnothing$ o $D \cap C^{-1} = C^{-1}$.

Para saber cual es, calculamos las raíces del polinomio de estabiliad:

$\prod(r, z) = \rho(r) - z\sigma(r) = r^2 - \frac{1}{4}r + \frac{1}{3} - (z)\left(\frac{2}{3}r^2\right)$, probemos que z = -1.

se tiene que: $\frac{5}{2}r^2 - \frac{1}{4}r + \frac{1}{3} = 0$, las raices son: $r = \frac{2}{5} \pm \frac{i}{5}$, y sus modulos son $|(r)| = \frac{1}{\sqrt{(5)}} < 1$, entonces -1 pertenece a D. Se tiene que: $D \cap C^{-1} = C^{-1}$, por lo tanto es A-estable.

Problema 4:

Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) El método multipaso curo primer polinomio característico es: $\rho(r)=r^3-r^2+r-1$
y cuyo segundo polinomio característico es: $\sigma(r)=\frac{5}{12}r^3+\frac{7}{12}r^2+\frac{7}{12}r+\frac{5}{12}$
tiene orden de consistencia 5.

(ii) El método lineal multipaso $y_{n+3}-\frac{18}{11}y_{n+2}+\frac{9}{11}y_{n+1}-\frac{2}{11}y_n=\frac{6}{11}hf_{n+3}$ tiene orden de convergencia 3 y es A-estable.

(iii) El método lineal multipaso $y_{n+2}-y_n=\frac{h}{3}(f_n+4f_{n+1}+f_n)$ es convergente de orden 3, pero no de orden 4.

Sol:

(i) el primer polinomio tiene de raíces son 1 y $\pm i$ con módulos 1 y son raíces simples. Por lo tanto cumple la condición de la raíz, entonces es un método 0-estable. Como es 0-estable podemos aplicar las barreras de Dahlquist. Como el primer polinomio es de orden 3, es un método multipaso a 3 pasos, entonces de Dahlquist se tiene: $p\leq k+1$, k=3 entonces $p\leq 4$, donde p es el orden de convergencia.
Si tuviera orden de consistencia 5, su orden de convergencia seria como minimo 5, pero tiene orden de convergencia 4. FALSO.

(ii) Por la segunda barrera de Dalhquist, nos dice que el mayor orden de consistencia de un método lineal multipaso A-estable es p=2, por ende orden de convergencia 2. Por lo tanto si el método $y_{n+3}-\frac{18}{11}y_{n+2}+\frac{9}{11}y_{n+1}-\frac{2}{11}y_n=\frac{6}{11}hf_{n+3}$ tiene orden de convergencia 3 no puede ser A-estable. FALSO

(iii) Por la primera barrera de Dahlquist como p es de orden 3. es un método de k=2 pasos y como k es par, el orden $p\leq k+2=4$, por lo tanto el método también puede ser de orden de convergencia 4.

Problema 5:

Probar que la región de estabilidad absoluta D del método $y_{n+2}-y_n=\frac{h}{2}(f_{n+1}+3f_n)$ es el interior del círculo de centro (-2/3,0) y de radio 2/3.

Sol:

D es el dominio de estabilidad lineal viene dado por: $D=z\, pertenece\, C\, tal\, que: z=h\lambda$, con h>0 y lambda es complejo. tal que la solución numérica de $y'=\lambda\, y\, verifica\, que \lim_{n\to\infty} y_n=0$ .entonces calculando el polinomio de estabilidad absoluta: $\prod(w,z)=\rho(w)-z\sigma(w)$ ... (1)

pero de la ecuación se obtiene: $\alpha_2=1, \alpha_0=-1$ y $\beta_1=\frac{1}{2,}\beta_0=\frac{3}{2}$

$\rho(w)=w^2-1$ y $\sigma(w)=\frac{1}{2}w+\frac{3}{2}$ entonces reemplazando en (1)

$\prod(w,z)=\rho(w)-z\sigma(w)=w^2-\frac{1}{2}zw-\frac{3}{2}z-1$

entonces encontrando la raíz del polinomio:

$w^2-\frac{1}{2}zw-\frac{3}{2}z-1=0$, entonces se tiene: $\prod(e^{i\theta},z)=0\, si\, y\, solo\, si, z(\theta)=\frac{\rho(e^{(i\theta)})}{\sigma(e^{(i\theta)})}$

se tiene que: $z(\theta)=\frac{2e^{2i\theta}-2}{e^{i\theta}+3}$ = $\frac{2\cos(2\theta)+2isen(2\theta)-2}{\cos(\theta)+isen(\theta)+3}$ $\frac{4isen(x)(\cos(x)+isen(x))}{\cos(x)+isen(x)+3}$

$= \frac{2\cos(2x)\cos(x)-2\cos(x)+2sen(x)sen(2x)+6\cos(2x)-6}{sen^2(x)+(\cos(x)+3)^2}$ +

$i\left(\frac{-2sen(x)\cos(2x)+2sen(x)+2sen(2x)\cos(x)+6sen(2x)}{sen^2(x)+(\cos(x)+3)^2}\right)$, entonces tomando su parte real: $\frac{2\cos(2x)\cos(x)-2\cos(x)+2sen(x)sen(2x)+6\cos(2x)-6}{sen^2(x)+(\cos(x)+3)^2}$ es tener aprox :

$\left|\left(z+\frac{2}{3}\right)\right|<2/3$, Entonces la región es: