Generación de variables aleatorias discretas
Método de aceptación y rechazo
Método de composición
Método de la urna
Método de tablas

Georgina Flesia

FaMAF

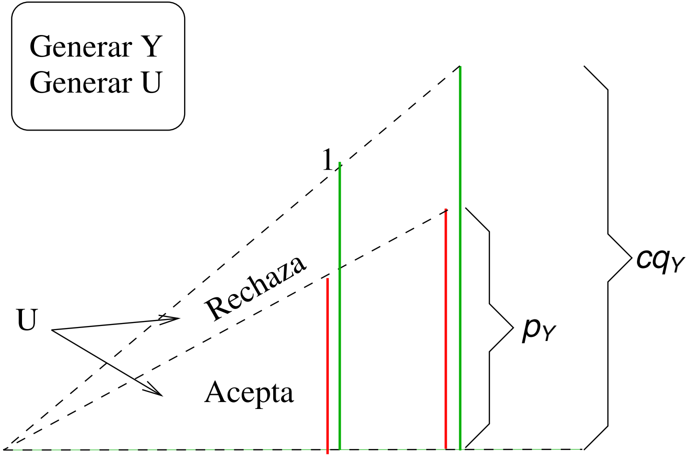
10 de abril, 2012

Método de Aceptación y Rechazo

- Se desea simular una v. a. X discreta, con probabilidad de masa $p_j = P(X = j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.
- Hipótesis: Se conoce un método eficiente para generar una v.a. Y, con probabilidad de masa $q_j = P(Y = j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, que verifica
  - Si $p_j \neq 0$ entonces $q_j \neq 0$.
  - Existe una constante c ($c > 1$) tal que

$$\frac{p_j}{q_j} \leq c \qquad \text{para todo } j \text{ tal que } p_j > 0$$

Método de Aceptación y Rechazo



Método de Aceptación y Rechazo

Algorithm 1: Método de aceptación y rechazo

repeat

  Simular Y, con probabilidad de masa q_Y;

  Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$

until $U < p_Y/cq_Y$;

$X \leftarrow Y$

Teorema

El algoritmo de aceptación y rechazo genera una variable aleatoria tal que

$$P(X_j) = p_j, \qquad j = 0, 1, \ldots.$$

Además, el número de iteraciones requeridas para obtener X es una v.a. geométrica con media c.

Demostración

- $X = j$ si y sólo si $Y = j$ y el algoritmo lo acepta en alguna iteración:

$$P(X = j) = \sum_{k \geq 1} P(j \text{ es aceptado en la iteración } k)$$

- j es aceptado en la iteración k significa que hay k iteraciones donde en las $k-1$ primeras el algoritmo rechaza j y en la ultima, la k esima, lo acepta:

$P(j \text{ aceptado en la iteración } k) =$

$$P(\ j \text{ es rechazado } k-1 \text{ veces }) \, P((Y = j) \wedge \ j \text{ es aceptado en la } k)$$

por la independencia de las iteraciones

$$= P(\ j \text{ es rechazado})^{k-1} \, P((Y = j) \wedge \ j \text{ es aceptado})$$

En una iteración fija

- Probabilidad de que el algoritmo acepte el valor j

$$
\begin{aligned}
P((Y=j) \wedge \ j \text{ es aceptado}) &= P(j \text{ es aceptado} \mid (Y=j))P(Y=j) \\
&= \frac{p_j}{cq_j}\ q_j \\
&= \frac{p_j}{c}
\end{aligned}
$$

- Probabilidad de que el algoritmo acepte en una iteración

$$
P(\text{ el algoritmo acepte}) = \sum_j P((Y=j) \wedge j \text{ es aceptado}) = \sum_j \frac{p_j}{c} = \frac{1}{c}
$$

$$
\boxed{P(\text{ el algoritmo rechace}) = 1 - \frac{1}{c}}
$$

- G es la variable que mira el número de iteraciones necesarias, entonces G es geométrica de parámetro $1/c$.

$P(X = j)$

$$
\begin{aligned}
P(X = j) &= P(j \text{ sea aceptado en alguna iteración}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(j \text{ sea aceptado en la iteración } k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(\, j \text{ es rechazado})^{k-1}\, P((Y = j) \wedge \; j \text{ es aceptado}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{k-1} \frac{p_j}{c} \\
&= p_j
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Método de rechazo

Ejemplo

Generar una v.a. X con valores en $\{1, 2, \ldots, 10\}$ y probabilidades $0.11,\ 0.12,\ 0.09,\ 0.08,\ 0.12,\ 0.10,\ 0.09,\ 0.09,\ 0.10,\ 0.10$

- Método de la transformada inversa: implica una media (mínima) de 5,04 iteraciones.
- Método de aceptación y rechazo: $c = 1.2$. La media de iteraciones es 1,2.

Método de Composición

Se tienen métodos eficientes para generar valores de v. a. X_1 y X_2, con funciones de probabilidad de masa

$$X_1 : \{p_j \quad j = 0, 1, \dots\} \qquad X_2 : \{q_j \quad j = 0, 1, \dots.\}$$

El método de composición permite generar una v.a. X con función de probabilidad de masa

$$P(X = j) = \alpha p_j + (1 - \alpha) q_j \qquad j = 0, 1, \dots, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{con probabilidad } \alpha \\ X_2 & \text{con probabilidad } 1 - \alpha \end{cases}$$

Método de Composición

Algorithm 2: Método de composición para dos v.a.

Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$;
if $U < \alpha$ **then**
  $X \leftarrow X_1$
else
  $X \leftarrow X_2$
end

$$
\begin{aligned}
P(X = j) &= P(U < \alpha,\ X_1 = j) + P(\alpha < U < 1,\ X_2 = j) \\
&= P(U < \alpha)\, P(X_1 = j) + P(\alpha < U < 1)\, P(X_2 = j) \\
&= \alpha\, p_j + (1 - \alpha)\, q_j
\end{aligned}
$$

Método de composición

Ejemplo

Generar X tal que

$$p_j = P(X = j) = \begin{cases} 0.05 & \text{para } j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0.15 & \text{para } j = 6, 7, 8, 9, 10 \end{cases}$$

(0.05)$\cdot$ 5=0.25
(0.15)$\cdot$ 5=0.75

Algorithm 3:

Generar $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$;
if $U < 0.75$ **then**
    Generar $V \sim \mathcal{U}(0, 1)$;
    $X \leftarrow \lfloor 5V \rfloor + 6$
else
    Generar $V \sim \mathcal{U}(0, 1)$;
    $X \leftarrow \lfloor 5V \rfloor + 1$
end

Método de composición

Ejemplo

Generar X tal que

$$p_j = P(X = j) = \begin{cases} 0.05 & \text{para } j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0.15 & \text{para } j = 6, 7, 8, 9, 10 \end{cases}$$

(0.05)·10=0.5
(0.10)·5=0.5

Algorithm 4: Otra solución

Generar $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$;
if $U < 0.5$ **then**
    Generar $V \sim \mathcal{U}(0, 1)$;
    $X \leftarrow \lfloor 10V \rfloor + 1$
else
    Generar $V \sim \mathcal{U}(0, 1)$;
    $X \leftarrow \lfloor 5V \rfloor + 6$
end

Método de la transformada inversa

$X : \{x_0, x_1, \dots\}$, con $P(X = x_i) = p_i$.

Algorithm 5: Transformada Inversa

$F \leftarrow p_0$, $i \leftarrow 0$;
Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$;
while $U > F$ **do**
    $i \leftarrow i + 1$;
    $F \leftarrow F + p_i$;
end
$X \leftarrow x_i$

- El algoritmo recorre desde un valor en adelante.
- Para una v.a. discreta en general, realiza muchas búsquedas.

Veamos algunas alternativas.

Método de la Urna

- X toma un número finito de valores: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- Cada $p_i = k_i \, 10^{-q}$, con k_i entero y q fijo. Esto es:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 10^q$$

  q: es el número máximo de dígitos decimales.
- v: un vector de tamaño 10^q que contiene k_i veces cada elemento x_i.

$$v = \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k_1} \underbrace{x_2 \dots x_2}_{k_2} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{k_n}$$

Algorithm 6: Variante A

Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$;
$J \leftarrow \lfloor 10^q U \rfloor + 1$;
$X \leftarrow v_J$

Método de la Urna

Ejemplo

X toma valores $x_1 = 8$, $x_2 = 9$, $x_3 = 10$ y $x_4 = 11$, con probabilidades $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.1$, $p_3 = 0.4$ y $p_4 = 0.3$.

$$q = 1$$

$$p_1 = 2 \cdot 10^{-1},\ p_2 = 1 \cdot 10^{-1},\ p_3 = 4 \cdot 10^{-1},\ p_4 = 3 \cdot 10^{-1}.$$

$$v = \boxed{8 \mid 8 \mid 9 \mid 10 \mid 10 \mid 10 \mid 10 \mid 11 \mid 11 \mid 11}$$

$$U = 0.378 \quad \Rightarrow \quad J = 4 \quad \Rightarrow \quad X \leftarrow 10$$

Método de la Urna

¿Por qué funciona?

$$\begin{aligned} P(X = j) &= P(k_1 + \ldots k_{j-1} < \lfloor 10^q U \rfloor \leq k_1 + \ldots k_{j-1} + k_j) \\ &= \frac{k_j}{10^q} = p_j \end{aligned}$$

- Desventaja: Necesita 10^q lugares de almacenamiento.
- Advertencia: Si se redondean los datos para utilizar un q más chico, recordar que $\sum k_i$ debe resultar 1.

Método de la Tabla

Marsaglia (1963) propone la siguiente mejora el método de la urna.

- Se utiliza un vector v_k, para cada posición decimal: $k = 1, 2, \ldots, q$.
- En v_k se almacena x_i tantas veces como indique su posición decimal k-ésima.
- Se calcula d_k la probabilidad de ocurrencia del dígito de orden k:

$$d_k = \frac{\text{suma de los dígitos de orden } k \text{ en las probabilidades}}{10^k}$$

Método de la Tabla

Ejemplo

Sea X con distribución $p(1) = 0.15$, $p(2) = 0.20$, $p(3) = 0.43$, $p(4) = 0.22$,

$$v = \boxed{1 \mid 2 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 3 \mid 3 \mid 4 \mid 4} \quad m = 9$$

$$w = \boxed{1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 3 \mid 3 \mid 3 \mid 4 \mid 4} \quad n = 10$$

$$d_1 = \frac{1+2+4+2}{10} = 0.9 \quad d_2 = \frac{5+0+3+2}{100} = 0.1$$

Método de la tabla

$m = 9$
$n = 10$
$d_1 = 0.9$
$d_2 = 0.1$

Algorithm 8: Método de la tabla (Ejemplo)

Input: v, w, m, n
Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$;
if $U < 0.9$ **then**
  Generar $V \sim \mathcal{U}(0,1)$;
  $J \leftarrow \lfloor mV \rfloor$;
  $X \leftarrow v_J$
else
  Generar $V \sim \mathcal{U}(0,1)$;
  $J \leftarrow \lfloor nV \rfloor$;
  $X \leftarrow w_J$
end

Método de la tabla

¿Por qué funciona el algoritmo?

$$
\begin{aligned}
P(X=3) &= P(X=3 \mid \text{elegir decenas})P(\text{elegir decenas}) \\
&+ P(X=3 \mid \text{elegir centenas})P(\text{elegir centenas}) \\
&= \frac{4}{9}\,0.9 + \frac{3}{10}\,0.1 \\
&= 0.43
\end{aligned}
$$

- Ventaja sobre el anterior: mucho menor costo de almacenamiento. (19 lugares en lugar de 100).
- Desventaja: "Mayor" tiempo de ejecución.