UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS

Tema:
Final

Apellidos: Moreno Vera
Nombres: Felipe Adrian
Código: 20120354I
Curso: Física Computacional
Codigo Curso: CC063

2016-II

1. Métodos de Runge-Kutta

***** Describa el método Runge-Kutta de 2do y 4to orden. Cómo deriva este de la expansión de Taylor, y que ventajas tiene sobre Euler?
Sol:
Euler:
Se sabe que el método de euler proviene de la expansión de Taylor de orden 1, de la siguiente forma:

$$y(x)=y(x_0)+h\,y'(x_0)$$

Donde: $h=x-x_0$
De donde se deduce que:

$$y'(x_0)=f(x_{0,}\,y_0)$$

Que es la función que soluciona la ecuacion diferencial de orden 1.
Entonces el método de euler quedaría como:

$$y(x)=y(x_0)+hf(x_0,y_0) \quad ...(1)$$

Generalizando tenemos:

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+hf(x_i,y_i)$$

2do Orden:

Se basa de la expansión de Taylor de orden 2 de la siguiente forma:

$$y(x)=y(x_0)+h\,y'(x_0)+\frac{h^2}{2}y''(x_0)$$

Donde: $h=x-x_0$
De lo anterior con el método de euler, podemos hacer que:

$$y(x)=y(x_0)+h\left(y(x_0)+\frac{h}{2}y'(x_0)\right)'$$

Lo cual se podría interpretar como:

$$y(x)=y(x_0)+h\left(y(x_0)+\frac{h}{2}f(x_0,y_0)\right)'$$

Llamemosle a $h\,y'(x_0)=k_1$, tendríamos:

$$y(x)=y(x_0)+h\left(y(x_0)+\frac{k_1}{2}\right)' \quad ...(a)$$

De (1) sabemos que $y(x)=y(x_0)+hf(x_0,y_0)$,
entonces si tenemos: $y(x)=y(x_0)+\frac{h}{2}f(x_0,y_0)$, seria como buscar un $x=x_0+\frac{h}{2}$, que serían los puntos medios de las derivadas.
Por lo que a ecuación anterior sería:

$$y\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=y(x_0)+\frac{h}{2}f(x_0,y_0) \quad ...(2)$$

Entonces, tomando la ecuación generada en (2) en (a), se obtiene que:

$$y(x)=y(x_0)+h\left(y\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right)'$$

Y esto sería igual a:

$$y(x)=y(x_0)+hf\left(x_0+\frac{h}{2},y(x_0)+\frac{h}{2}f(x_{0,}y_0)\right)$$

$$y(x)=y(x_0)+hf\left(x_0+\frac{h}{2},y(x_0)+\frac{h}{2}k_1\right)$$

Generalizando se obtiene:

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+hf\left(x_i+\frac{h}{2},y(x_i)+\frac{h}{2}k_1\right)$$

Donde $k_1=y'(x_i)=f(x_i,y(x_i))$ y $x_{i+1}=x_i+h$.

Pero también se puede hacer el siguiente método:

$$y(x)=y(x_0)+hy'(x_0)+\frac{h^2}{2}y''(x_0)$$

$$y(x)=y(x_0)+hf(x_0,y_0)+\frac{h^2}{2}y''(x_0) \quad \ldots \text{(b)}$$

Donde por el método de euler se puede obtener que:

$$y'(x_0)=\frac{(y(x)-y(x_0))}{h}$$

Entonces para la segunda derivada:

$$y''(x_0)=\frac{(y'(x)-y'(x_0))}{h} \quad \text{...(3)}$$

Reemplazando en (b) obtenemos:

$$y(x)=y(x_0)+hf(x_0,y_0)+\frac{h^2}{2}\left(\frac{(y'(x)-y'(x_0))}{h}\right)$$

Lo que resultaría:

$$y(x)=y(x_0)+hf(x_0,y_0)+\frac{h^2}{2}\left(\frac{(f(x,y(x))-f(x_0,y_0))}{h}\right)$$

$$y(x)=y(x_0)+\frac{h}{2}f(x_0,y_0)+\frac{h}{2}f(x,y(x))$$

Donde: $x=x_0+h$ y $y(x)=y(x_0)+hf(x_0,y_0)$.
Además hacemos: $k_1=hf(x_0,y_0)$ y $k_2=hf(x,y(x))$
Generalizando se tiene:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}f(x_i,y_i)+\frac{h}{2}f(x_i+h,y_i+k_1)$$

Donde $y(x_i)=y_i$
Entonces se obtiene:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

4to Orden:
Se basa de la expansión de Taylor de orden 4 de la siguiente forma:

$$y(x)=y(x_0)+h\,y'(x_0)+\frac{h^2}{2}y''(x_0)+\frac{h^3}{6}y'''(x_0)+\frac{h^4}{24}y''''(x_0) \quad ...(1)$$

Donde: $h=x-x_0$
Prodeciendo de manera similar al anterior, usando la derivada aproximada de euler, obtenemos:
Para la derivada 2 usando el primer método agrupando:

$$y''(x_0)=\frac{(y'(x)-y'(x_0))}{h}$$

Reemplazando en (1) obtenemos:

$$y(x)=y(x_0)+h\left(y'(x_0)+\frac{h}{2}y''(x)\right)+h\left(\frac{h^2}{6}y'''(x_0)+\frac{h^3}{24}y''''(x_0)\right)$$

Para la derivada 4 usando el primer método agrupando:

$$y''''(x_0)=\frac{(y'''(x)-y'''(x_0))}{h}$$

Al proceder de manera similar que el método de orden 2, simplificando cálculos
Obtenemos lo siguiente:

$$y(x)=y_0+\frac{1}{6}\left(hf(x_0,y_0)+2hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{hf(x_0,y_0)}{2}\right)+...\right)$$

$$\frac{1}{6}\left(...+2hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{hf(x_0,y_0)}{2}\right)}{2}\right)+hf\left(x_0+h,y_0+hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{hf(x_0,y_0)}{2}\right)}{2}\right)\right)\right)$$

Entonces generalizando, hacemos:

$$k_1=hf(x_i,y_i)$$

$$k_2=hf\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3=hf\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4=hf(x_i+h,y_i+k_3)$$

Entonces Reemplazando en la ecuación original obtenemos:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

NOTA:
Se puede observar que los métodos de runge-kutta tienen un error local de orden similar al orden de expansión de Taylor.
Por lo cual, mejora el método de Euler, pero el coste computacional es mayor, debido a que evalúa la función un número de veces mayor o igual al orden de expansión.
Entonces, si la función a evaluar es más compleja, el costo computacional será mayor, pero siempre se tendrá por seguro que los resultados tendrán un error mínimo.

***** Muestre 3 aplicaciones en la ciencia o ingenieria de utilicen las ventajas de este método (consulte fuentes externas).
Sol:
Aplicaciones en Sistemas de Control:

Para modelar sistemas de control, siempre se necesita verificar y estimar los valores descritos según el modelo matemático que modela ese sitema, por lo cual métodos de runge-kutta para obtener y aproximar valores futuros basados en estados iniciales son muy buenos, debido a que se deben tener un error mínimo en dichos sistemas.

Aplicaciones en Ingeniería Civil:

Para modelar casos de estructuras, movimiento de fluidos a través de tuberías, el comportamiento de edificaciones al estar sometidos a terremotos, para obtener índices y demás factores que determinar que una estructuración puede resistir movimeintos, flujo o cualquier tipo de fenómeno físico, se necesita obtener valores de control, los cuales puede ser estimados utilizando metodo de runge-kutta para la solución de dichos sistemas, los cuales tendrán errores mínimos.

Aplicaciones en Economía:

Para modelar sistemas y problemas de oferta-demanda-recesión, se genera una ecuación o un sistema de ecuaciones diferenciales, los cuales al ser cruciales mostrando el comportamiento del mercado en base a factores externos, se necesita aproximar valores con errores mínimos, por los cuales el método de runge-kutta es muy util.

2. Dinámica pobacional – Crecimiento exponencial

r es la tasa de crecimiento y K es la capacidad poblacional

Método de Malthus:

Se tiene la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = r\,x$$

Resolviendo por variable separables:

$$\int \frac{dx}{x} = \int r\,dt$$

$$\ln(|(x)|) = rt + C$$

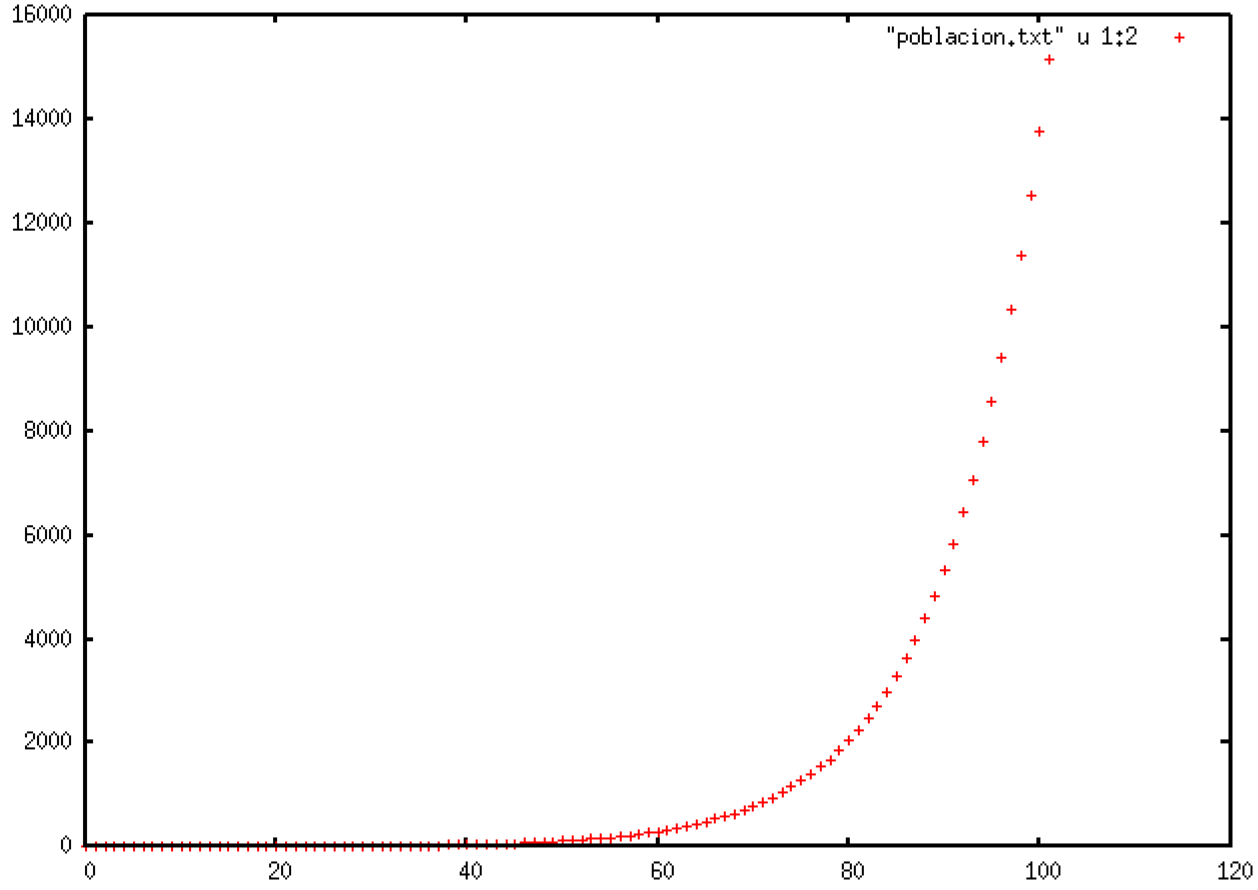
Usando exponencial:

$$x(t) = C_0 e^{rt}$$

Con r = 1, calculamos $C_0 = 1$:

$$x(t) = e^{t/10}$$

Usando el programa problema02.c, se obtiene:



Se ve que la población incrementa de manera exponencial sin limite definido

En el problema se puede deducir que el factor de tasa de crecimiento r es 1 y además se tiene como valor inicial a 1.

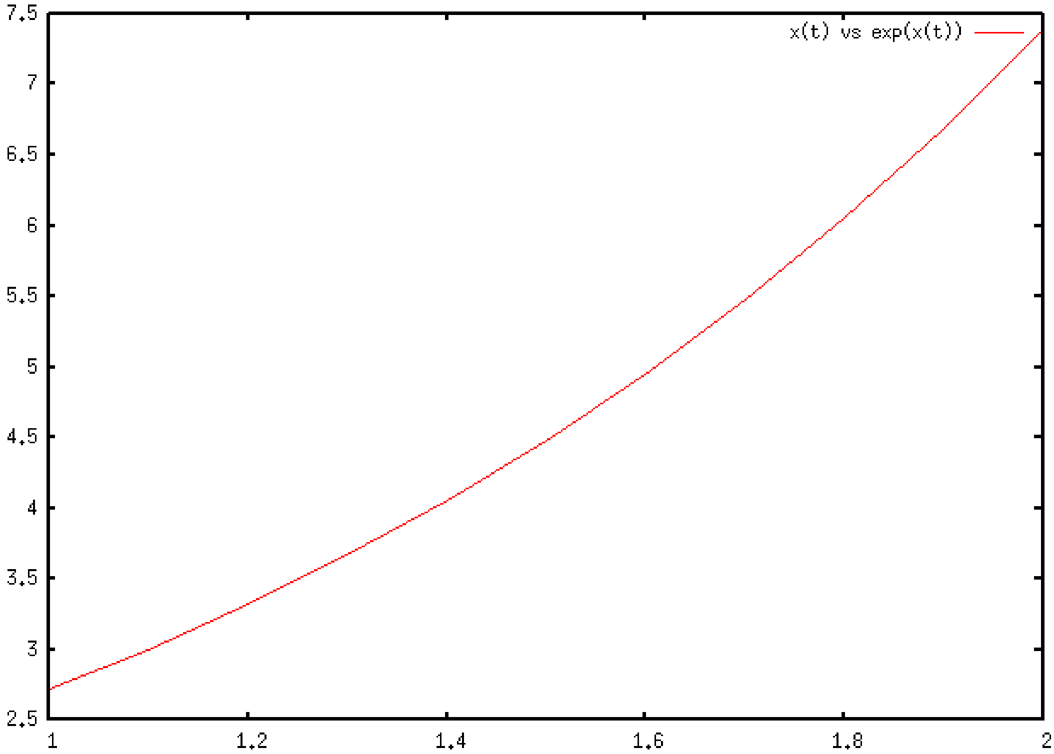
El programa problema02.c puede recibir 3 parámetros.
El primero es NSTEP: número de pasos en el intervalo.
El segundo es x1: cota mínima del intervalo de integración.
El tercero es x2: cota superior del intervalo de integración.

Ejemplos de ejecución:

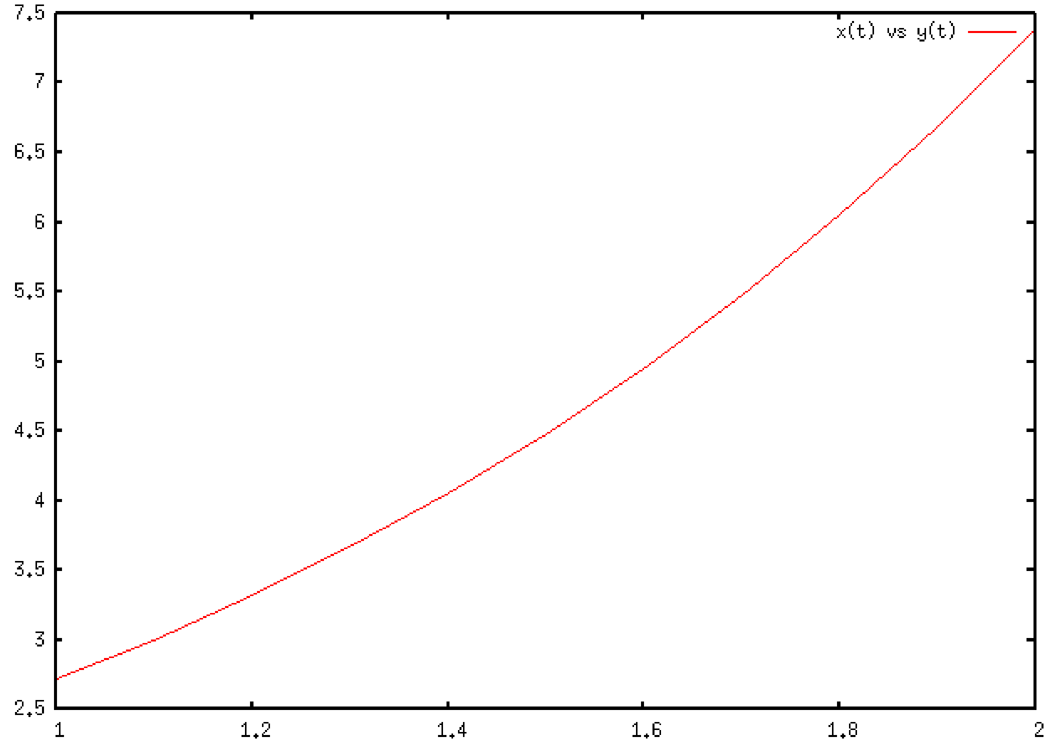
bash problema02.sh -- ejecuta con NSTEP = 10, x1=0.0 y x2=1.0 por defecto.
bash problema02.sh 100 -- ejecuta con NSTEP = 100, x1=0.0, x2=1.0 por defecto.
bash problema02.sh 100 2.2 4.5 --- ejecuta con NSTEP = 100 y x1=2.2, x2=4.5 por defecto.

Entonces resolviendo la pregunta 2:
* Utilice el código adjunto para integrar el problema con el método Runge-Kutta de orden 4. Obtenga y grafique la solución aproximada, asi como la solución exacta. Aplique 4 intervalos de integración h, variando NSTEP=10, 100, 500 , 1000

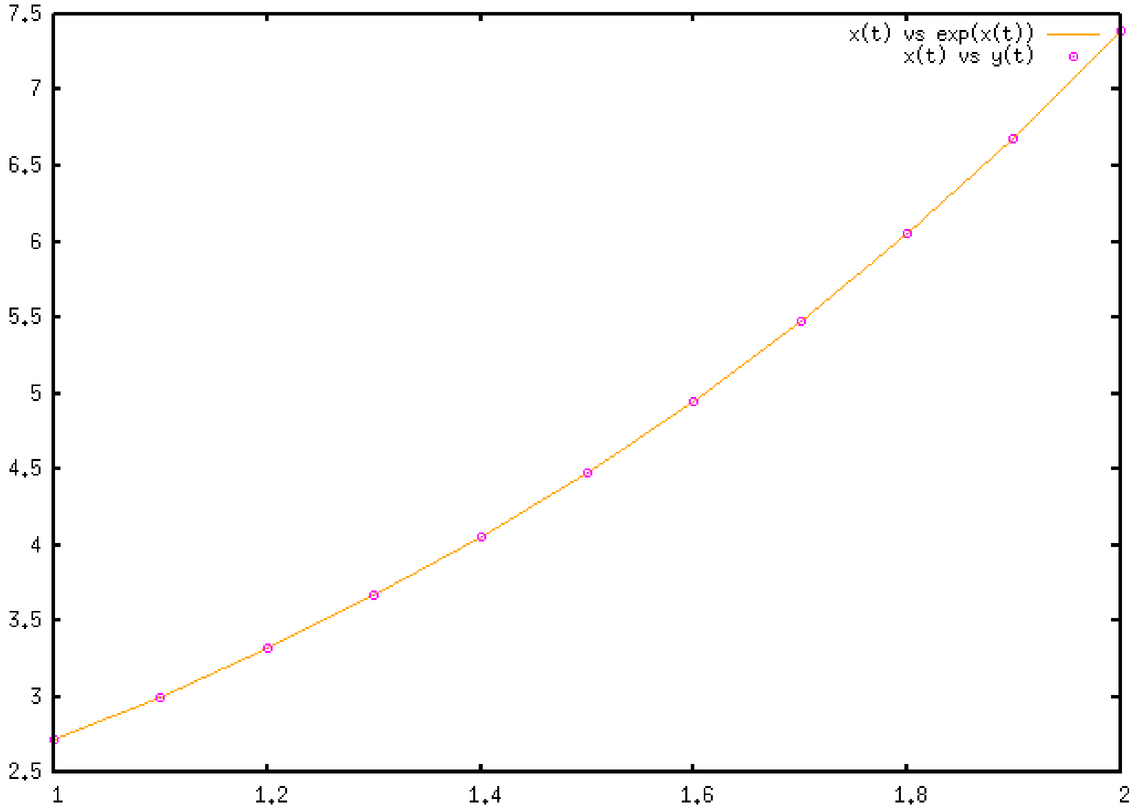
<u>Sol:</u>
1) Ejecutando para NSTEP=10, x1=1.0 y x2=2.0
bash problema02.sh 10 1.0 2.0
Gráfica x(t) vs exp(x(t)): plot "output.txt" u 1:2 w l title 'x(t) vs exp(x(t))'



Gráfica x(t) vs y(t): plot "output.txt" u 1:3 w l title 'x(t) vs y(t)'



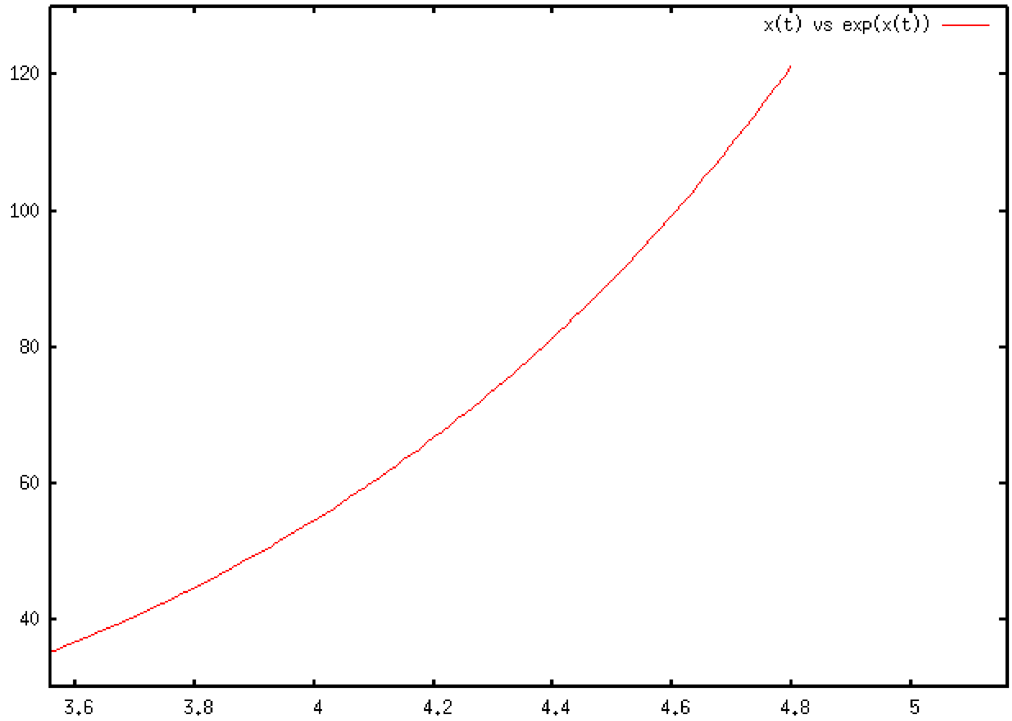
Gráfica exp(x(t)) vs y(t): plot "output.txt" u 1:2 w l title 'x(t) vs exp(x(t))' lc 7,"output.txt" u 1:3 title 'x(t) vs y(t)' pt 6 lc 4



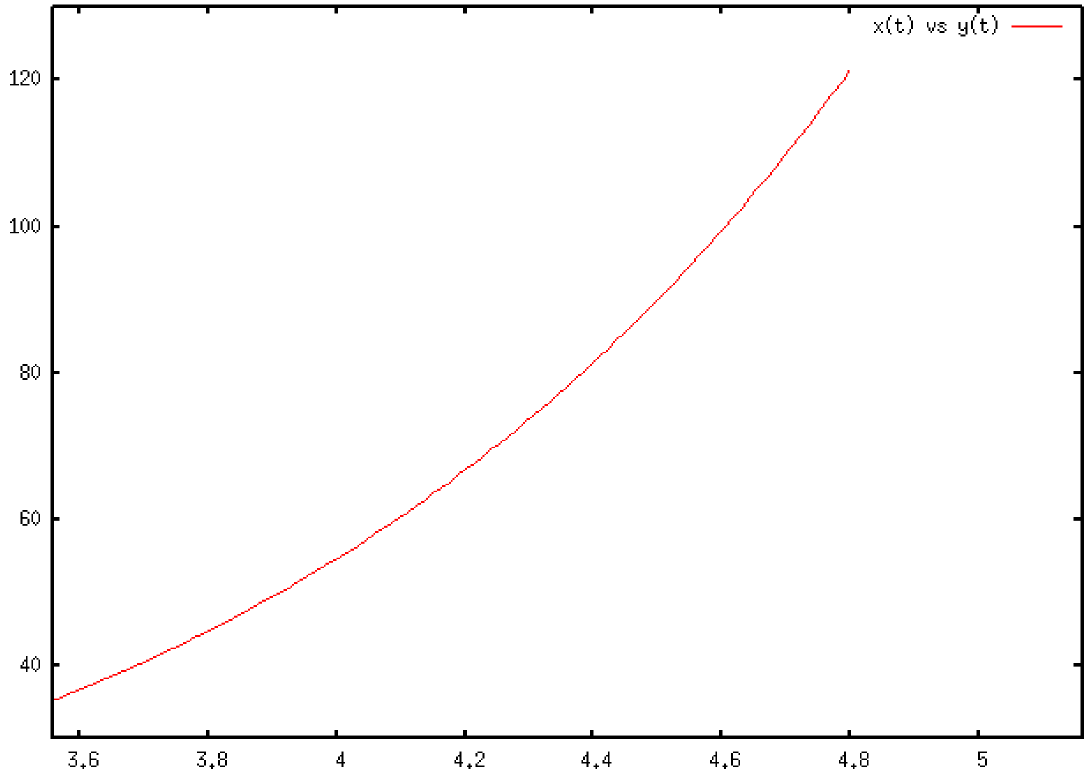
Debido a que los errores relativos eran muy pequeños (por no decir 0 o 10-9) por lo que no se puede observar bien (ya que aparece una linea) se decidió graficar los 2 al mismo tiempo.

2) Ejecutando para NSTEP=100, x1=3.5 y x2=4.8
bash problema02.sh 100 3.5 4.8

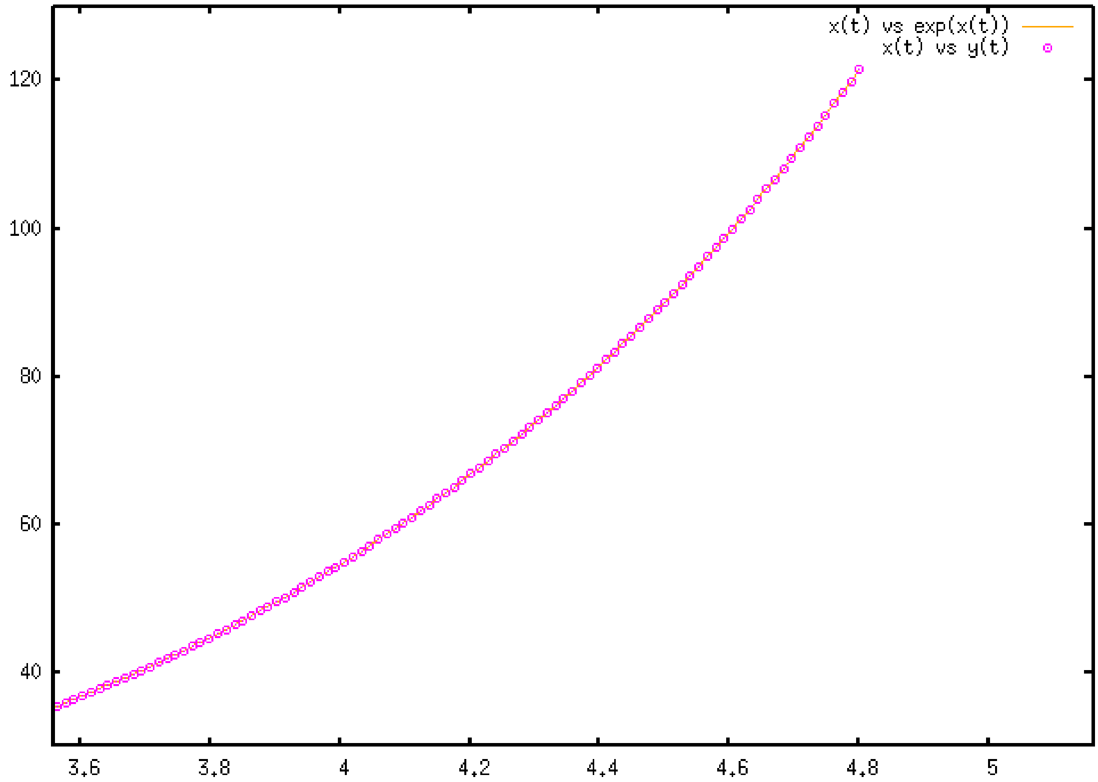
Gráfica x(t) vs exp(x(t)): plot "output.txt" u 1:2 w l title 'x(t) vs exp(x(t))'



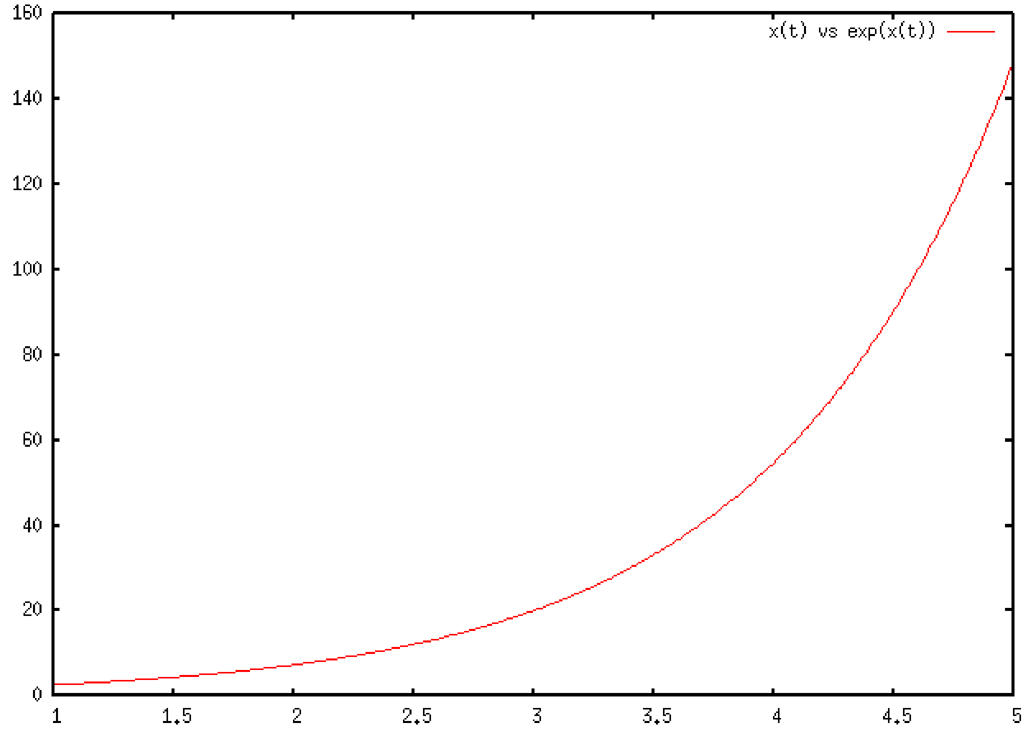
Gráfica x(t) vs y(t): plot "output.txt" u 1:3 w l title 'x(t) vs y(t)'



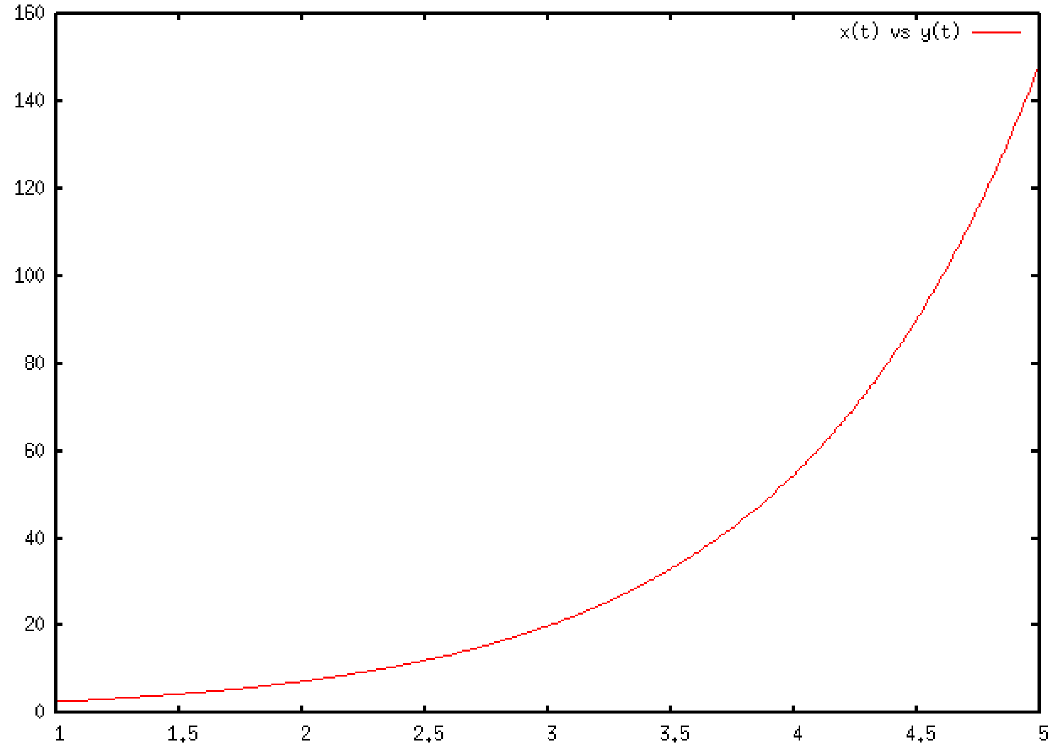
Gráfica exp(x(t)) vs y(t): plot "output.txt" u 1:2 w l title 'x(t) vs exp(x(t))' lc 7,"output.txt" u 1:3 title 'x(t) vs y(t)' pt 6 lc 4



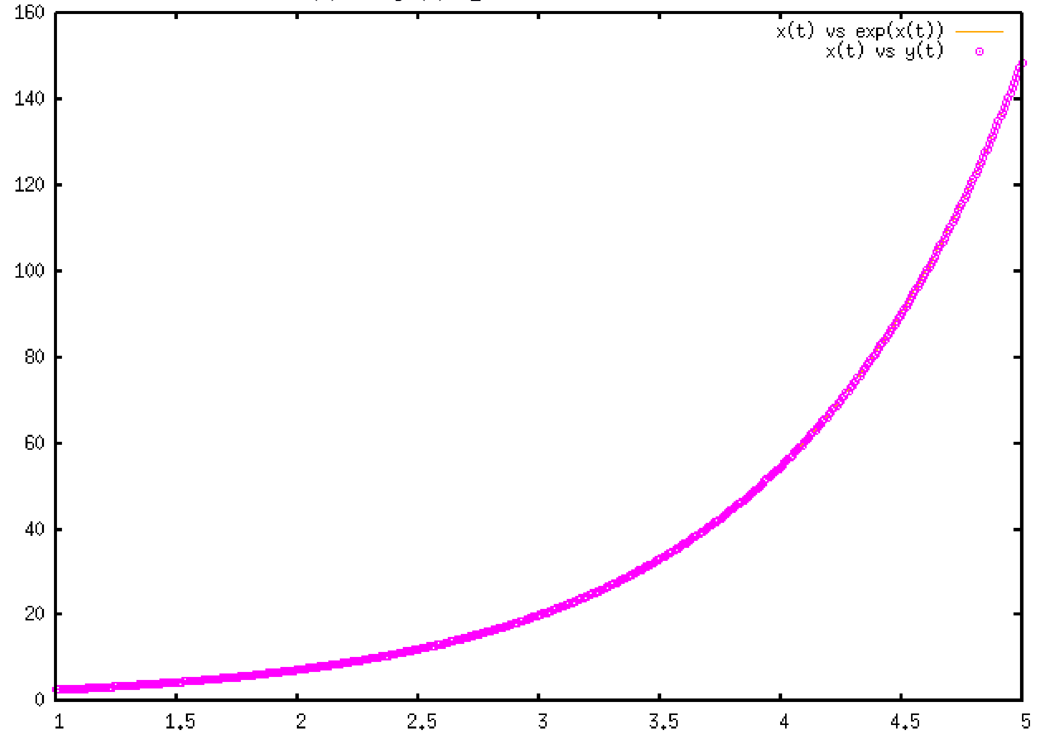
3) Ejecutando para NSTEP=500, x1=1.0 y x2=5.0
bash problema02.sh 500 1 5
Gráfica x(t) vs exp(x(t)): plot "output.txt" u 1:2 w l title 'x(t) vs exp(x(t))'



Gráfica x(t) vs y(t): plot "output.txt" u 1:3 w l title 'x(t) vs y(t)'

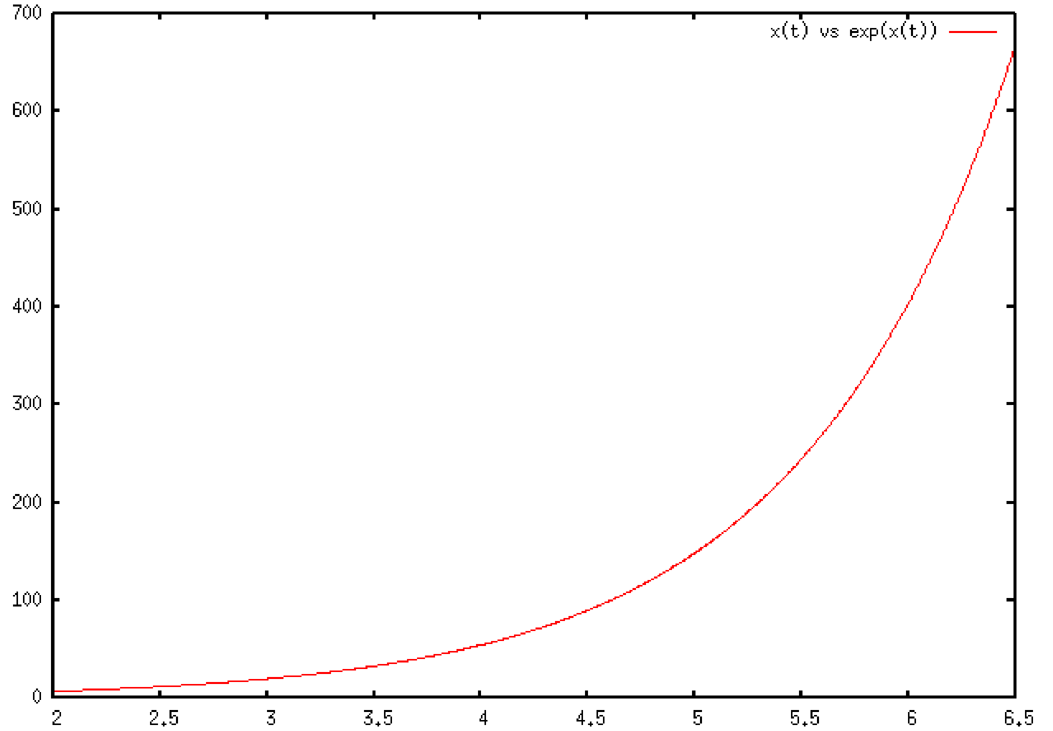


Gráfica exp(x(t)) vs y(t): plot "output.txt" u 1:2 w l title 'x(t) vs exp(x(t))' lc 7,"output.txt" u 1:3 title 'x(t) vs y(t)' pt 6 lc 4

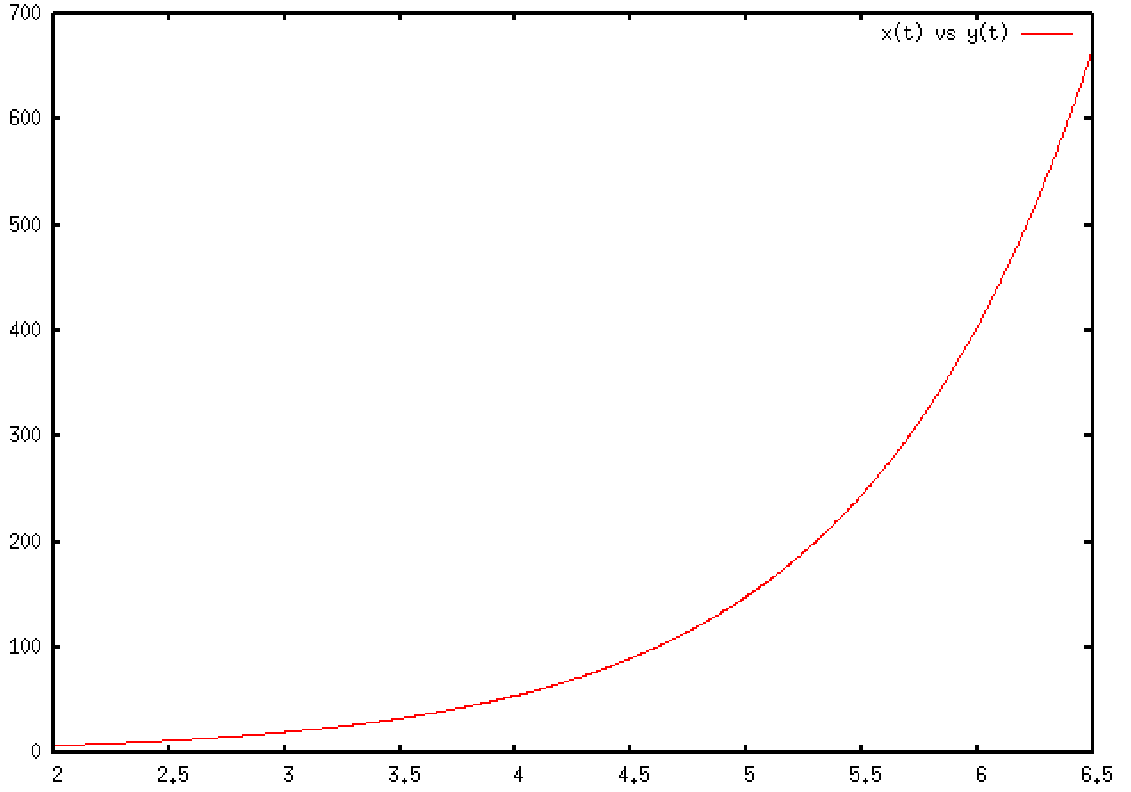


4) Ejecutando para NSTEP=1000, x1=2.0 y x2=6.5
bash problema02.sh 1000 2 6.5

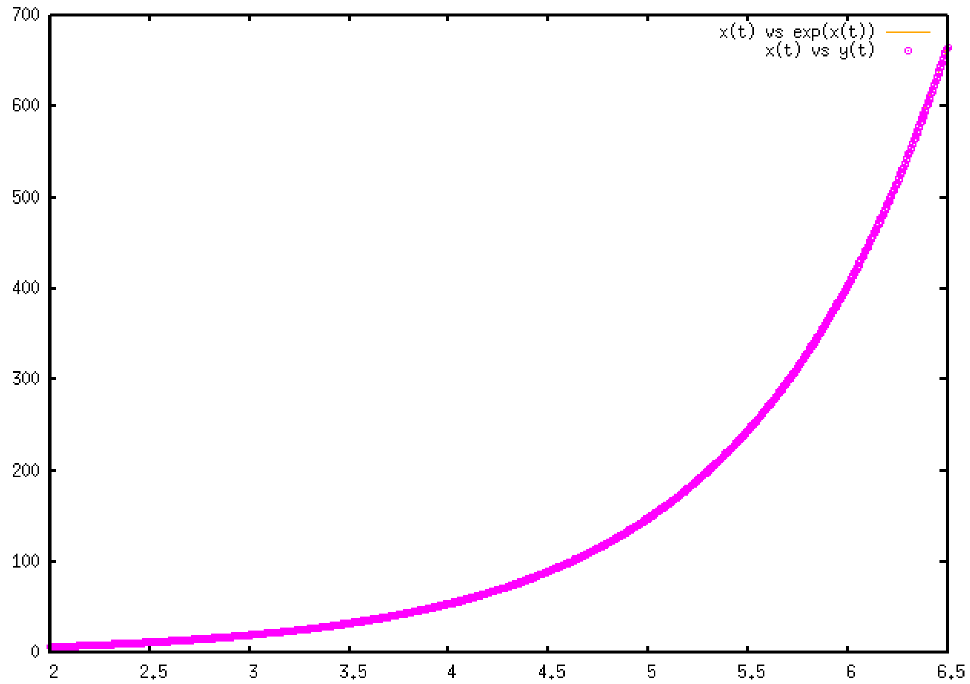
Gráfica x(t) vs exp(x(t)): plot "output.txt" u 1:2 w l title 'x(t) vs exp(x(t))'



Gráfica x(t) vs y(t): plot "output.txt" u 1:3 w l title 'x(t) vs y(t)'



plot "output.txt" u 1:2 w l title 'x(t) vs exp(x(t))' lc 7,"output.txt" u 1:3 title 'x(t) vs y(t)' pt 6 lc 4



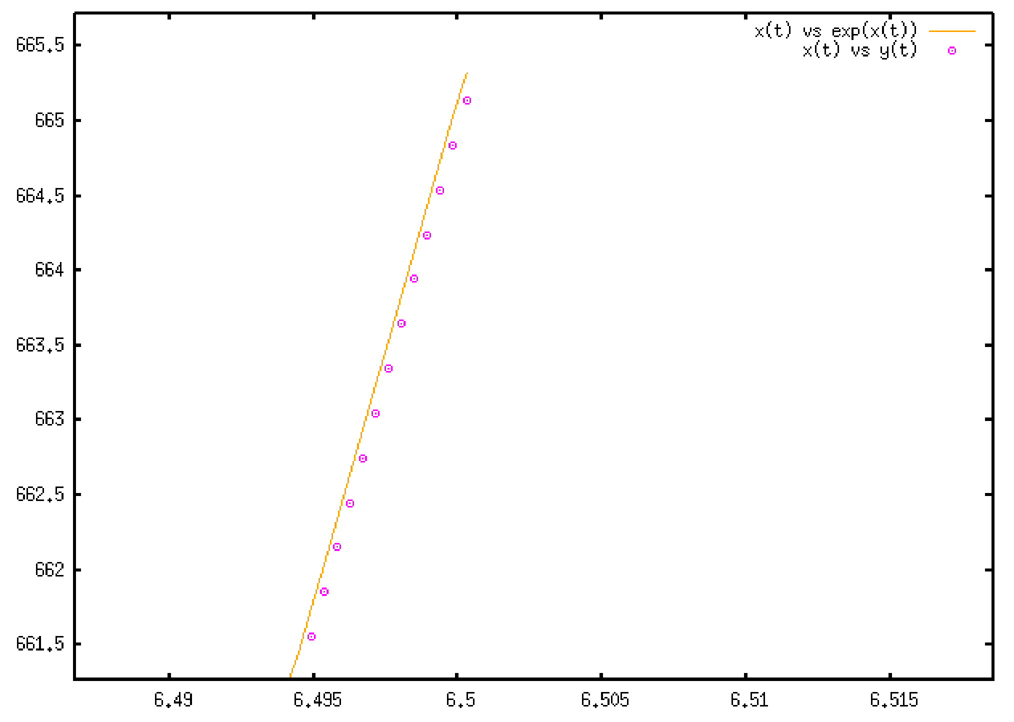
***** Calcule y grafique en cada caso el error relativo [N (t)−N (a)]/N (t), donde N (t) es la solución exacta, y N (a) es la aproximada. Cómo interpreta los resultados ?

<u>Sol:</u>

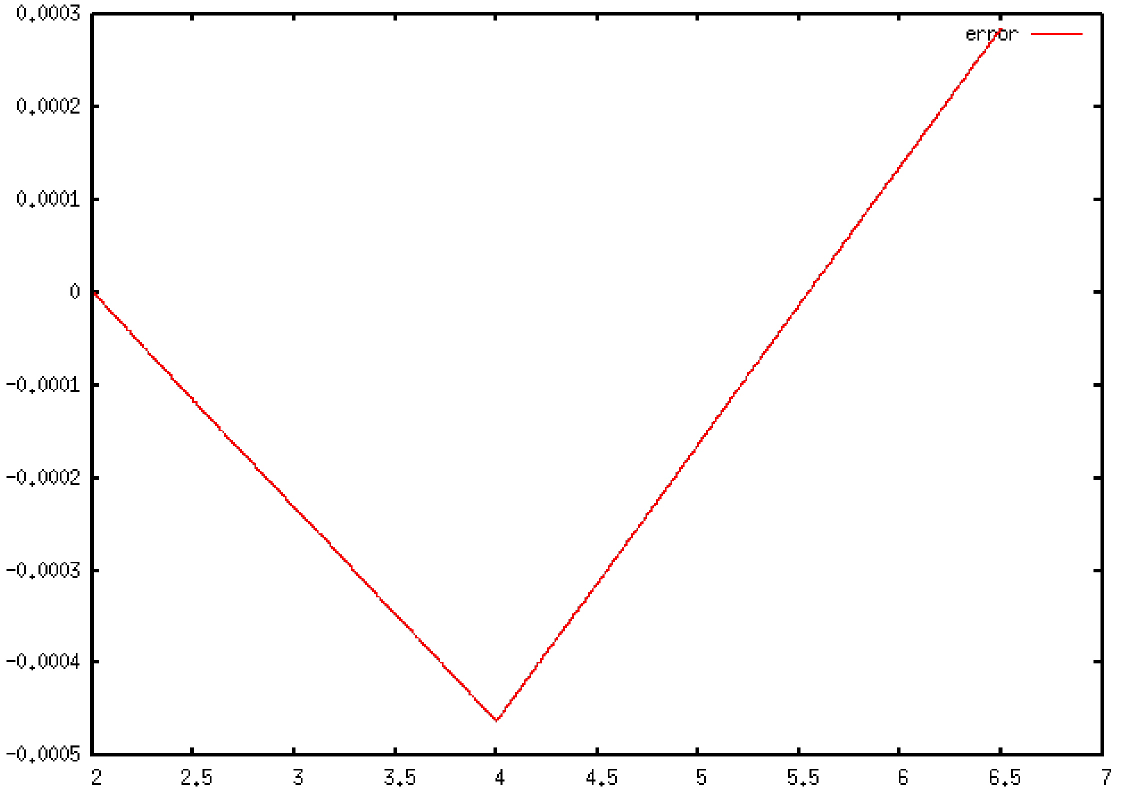
Se observa del programa que los errores relativos son muy próximos a 0.
Por lo que el metodo de Runge-Kutta es demasiado preciso (mucho más que el método de euler, debido a que runge-kutta tiene convergencia de orden 4).

Viendo los resultados anteriores, se observa un error mínimo.
Pero conforme aumentamos NSTEP y cambiando x1 y x2, como por ejemplo:

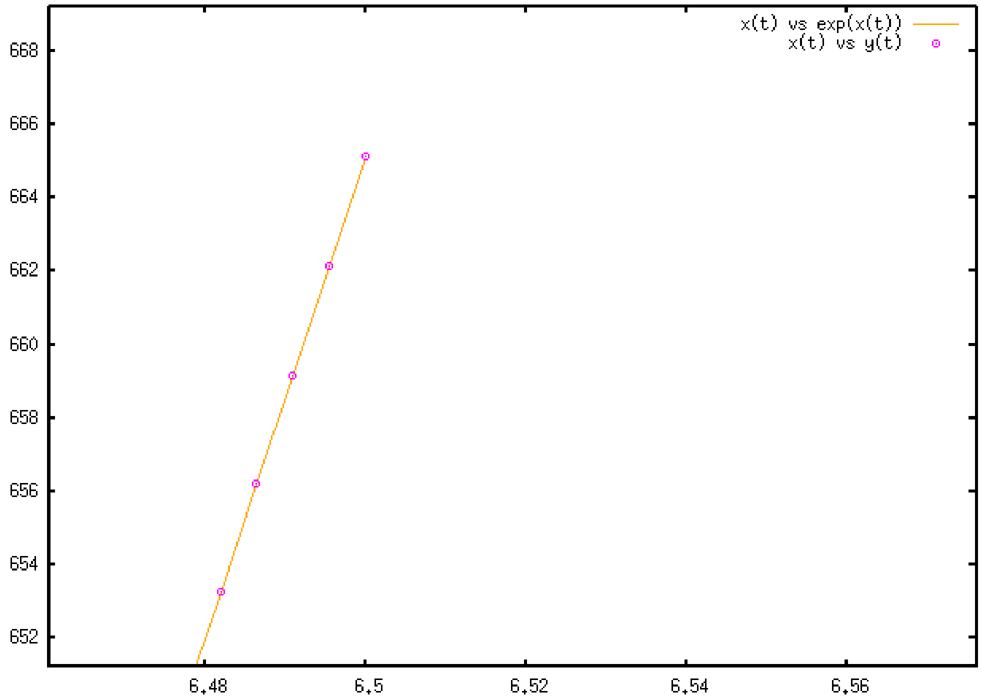
bash problema02.sh 1000 2 6.5 , se obtiene un error de:



Se observa claramente que es un error mínimo.
Ahora ejecutando el mismo intervalo pero diferente número de steps:
bash problema02.sh 10000 2 6.5
Se obtiene tomando como el error en funcion de los x (h).



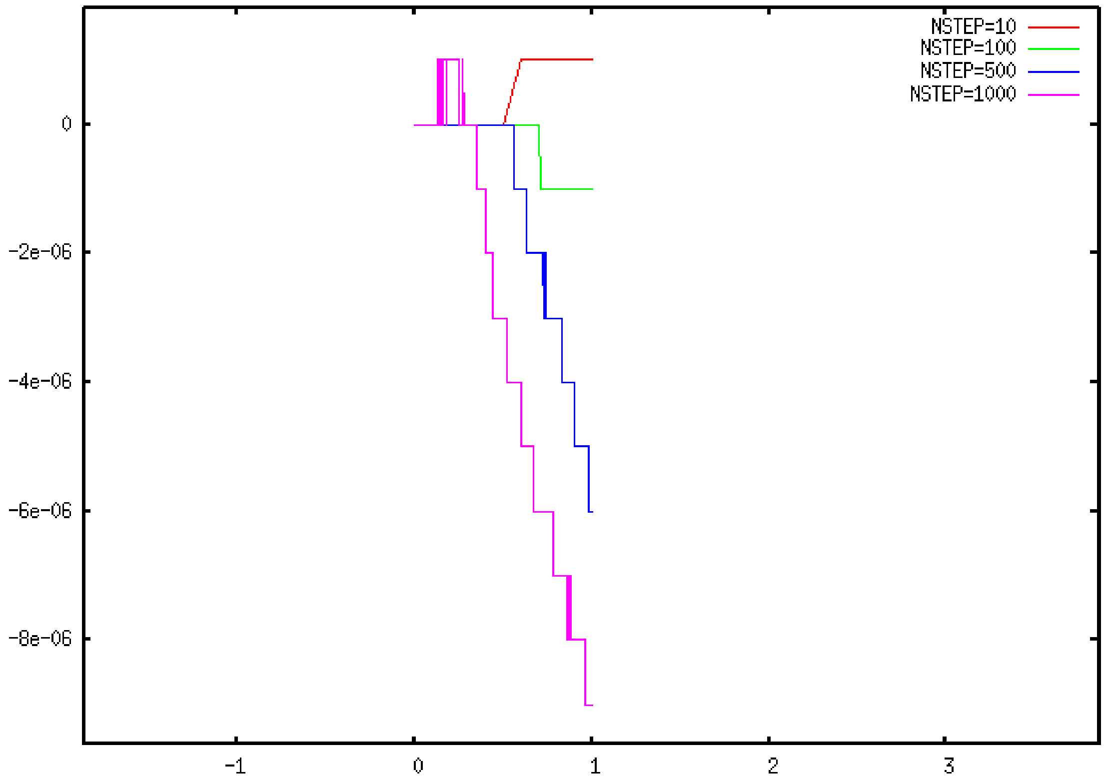
El cual puede expresarse como:



* Grafique el error como función de h para t = 1 para los valores de NSTEP y analice los resultados.

Sol:

Grafica de errores: plot "output_10.txt" u 1:4 title "NSTEP=10" w l, "output_100.txt" u 1:4 title "NSTEP=100" w l, "output_500.txt" u 1:4 title "NSTEP=500" w l, "output_1000.txt" u 1:4 title "NSTEP=1000" w l



NOTA:
Se puede observar claramente que conforme se precisa un mayor número de NSTEPS, el error va disminuyendo. Por lo que a mayor NSTEPS, requerirá un mayor coste computacional, pero se tendrá un error relativo que será el menor posible.

3. Problema de los 3 Cuerpos

***** Formule el problema analı́ticamente para y 0 = f (y, t). Aqui f (y, t) no depende explı́citamente del tiempo (t), y e y 0 son vectores de seis dimensiones, que contienen la velocidad y posiciones de los 3 cuerpos. Asuma el movimiento en un plano.
Sol:
Planteamos la problemática del sistema de 3 cuerpos.
Suponemosque M1 esta en el origen de coordenadas, M2 esta a una distancia (d,0) de M1, M3 esta a una distancia (0,b) de M1 y tenemos una tercera particula (m) que se encuentra en (x,y)

Si analizamos particula a partícula de manera individual, se tiene que interactua de 1 a 2 como se muestra:

Se tendrían ecuaciones como las siguientes si tomamos M3 como referencia:

$$F_1 = G\frac{M_1 M_3}{r_1^2} \quad , \quad F_2 = G\frac{M_2 M_3}{r_2^2} \quad .$$

Donde : $r_1 = \sqrt{(x^2+y^2)}$, $r_2 = \sqrt{((x-d)^2+y^2)}$.

Descomponiendo las fuerzas, se obtienen ecuaciones de movimiento de la particula de masa M3:

$$M_3\frac{d^2x}{dt^2} = -F_1\frac{x}{r_1} - F_2\frac{x-d}{r_2} \quad \text{y} \quad M_3\frac{d^2y}{dt^2} = -F_1\frac{y}{r_1} - F_2\frac{y}{r_2} \quad ,$$

Nos determinan ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{GM_1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)x - \left(\frac{GM_2}{((x-d)^2+y^2)^{3/2}}\right)(x-d) \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{GM_1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)y - \left(\frac{GM_2}{((x-d)^2+y^2)^{3/2}}\right)y$$

Donde (y),(x-d) son las distancias que separan las patículas (por ser un triángulo rectángulo).
Entonces se deduce que estas ecuaciones se resuelven por procedimientos numéricos con las condiciones iniciales siguientes: En el instante t=0, la partícula se encuentra en la posición (x_0, y_0) y las componentes de su velocidad inicial son, (v_{0x}, v_{0y}).

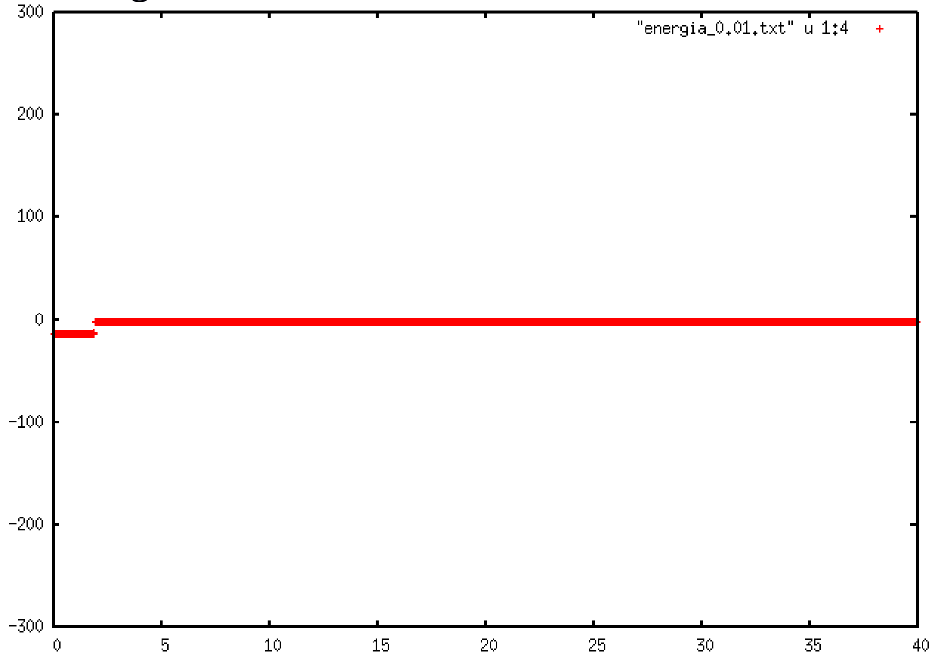
***** Utilice el código para resolver el problema con el método RungeKutta 4 (este utiliza librerías de Numerical Recipes), para t=0 hasta que el sistema se separe (los sistemas de 3 cuerpos son inestables). Genere una salida cuando dos de los cuerpos estén a una distancia mínima. Utilice 3 distintos intervalos de integración h = 0.1, h = 0.01, y h = 0.001 y grafique las órbitas y las distancias mínimas (escala logarítmica) en función del tiempo (escala linear), asi como la energía total del sistema en función del tiempo. Comente la calidad de la solución obtenida.

Sol:

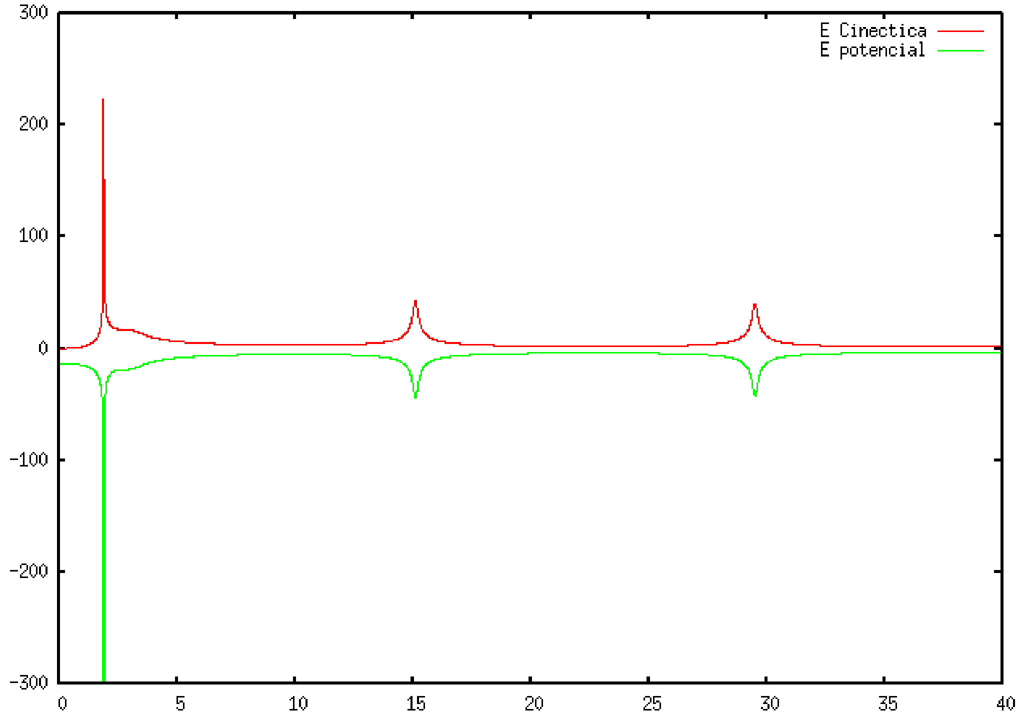
Ejecutando los 3 intervalos …

```
jenazad@jbot:~/Downloads/FC-Final/problema03$ ./problema03

E Total: -1.51885

Dmin: 0.0258535

jenazad@jbot:~/Downloads/FC-Final/problema03$ ./problema03 0.1
E Total: 149.586

Dmin: 0.150493

jenazad@jbot:~/Downloads/FC-Final/problema03$ ./problema03 0.001

E Total: 5355.95

Dmin: 0.00562436
```

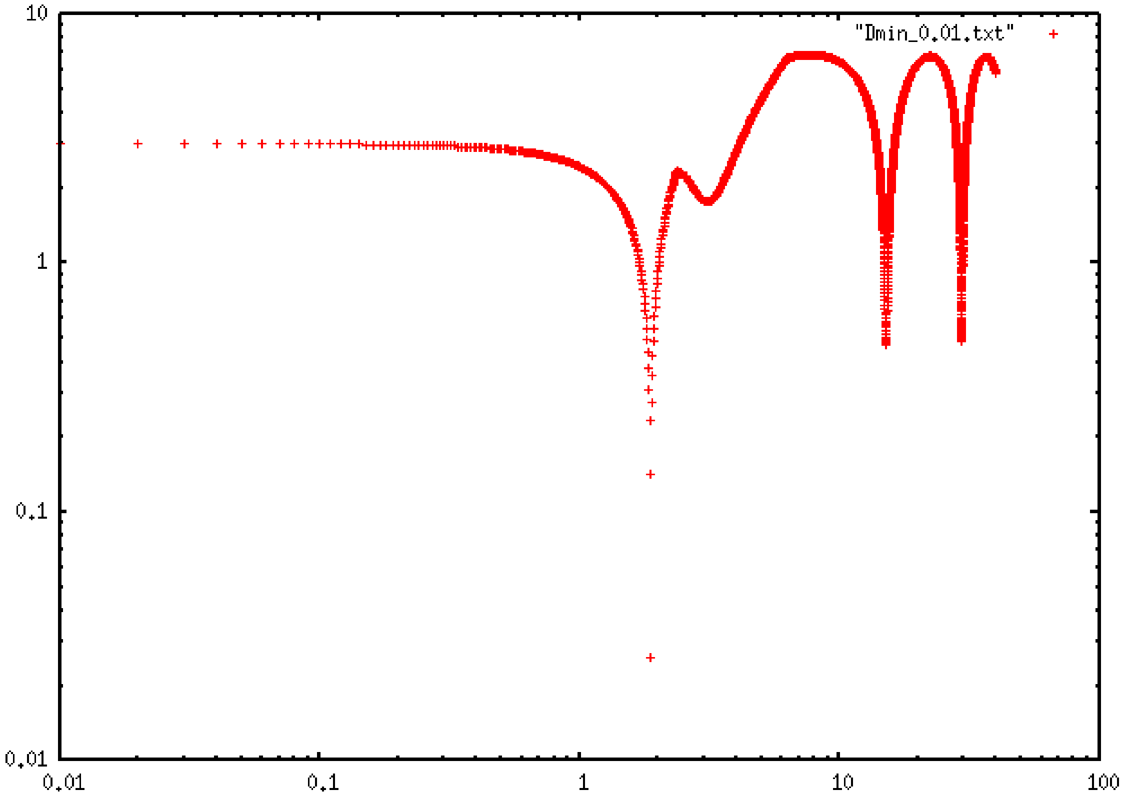
Gráficas para h = 0.01 (po defecto, si ejecutas h será 0.01)
Energia: plot 'energia_0.01.txt' u 1:4



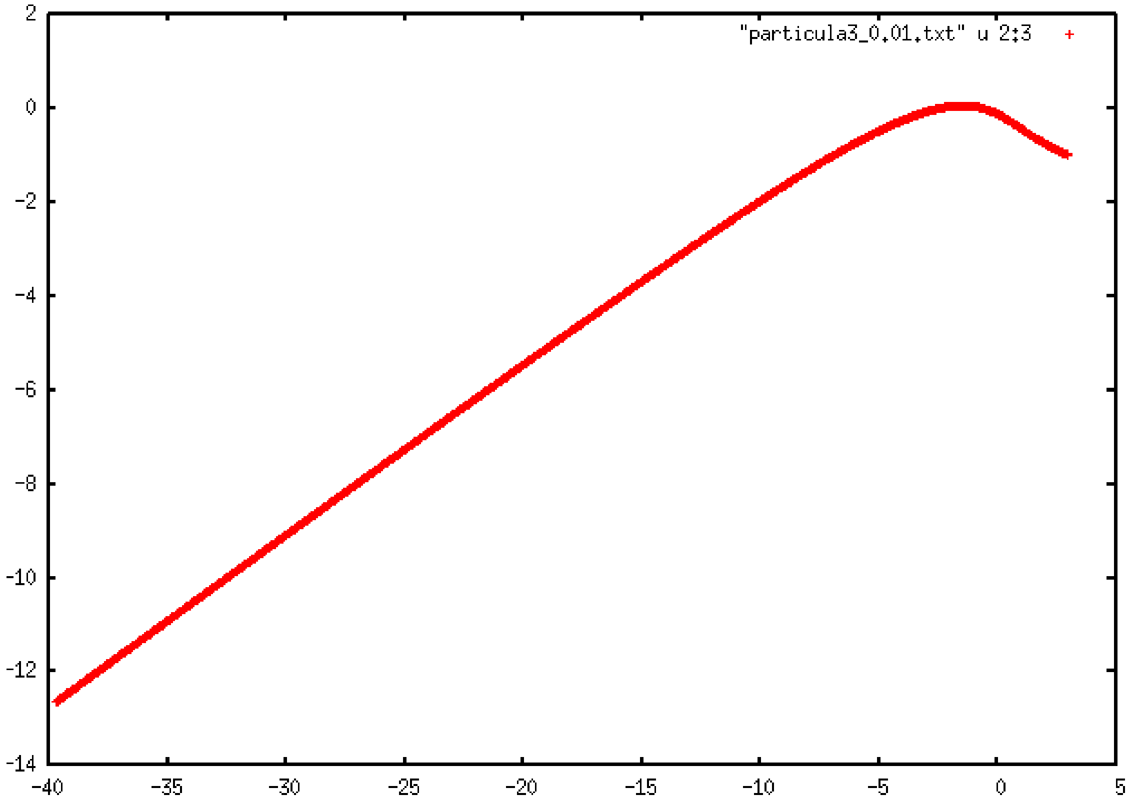
Energia Potencial vs Cinetica: plot "energia_0.01.txt" u 1:2 title 'E Cinectica' w l, "energia_0.01.txt" u 1:3 title 'E potencial' w l



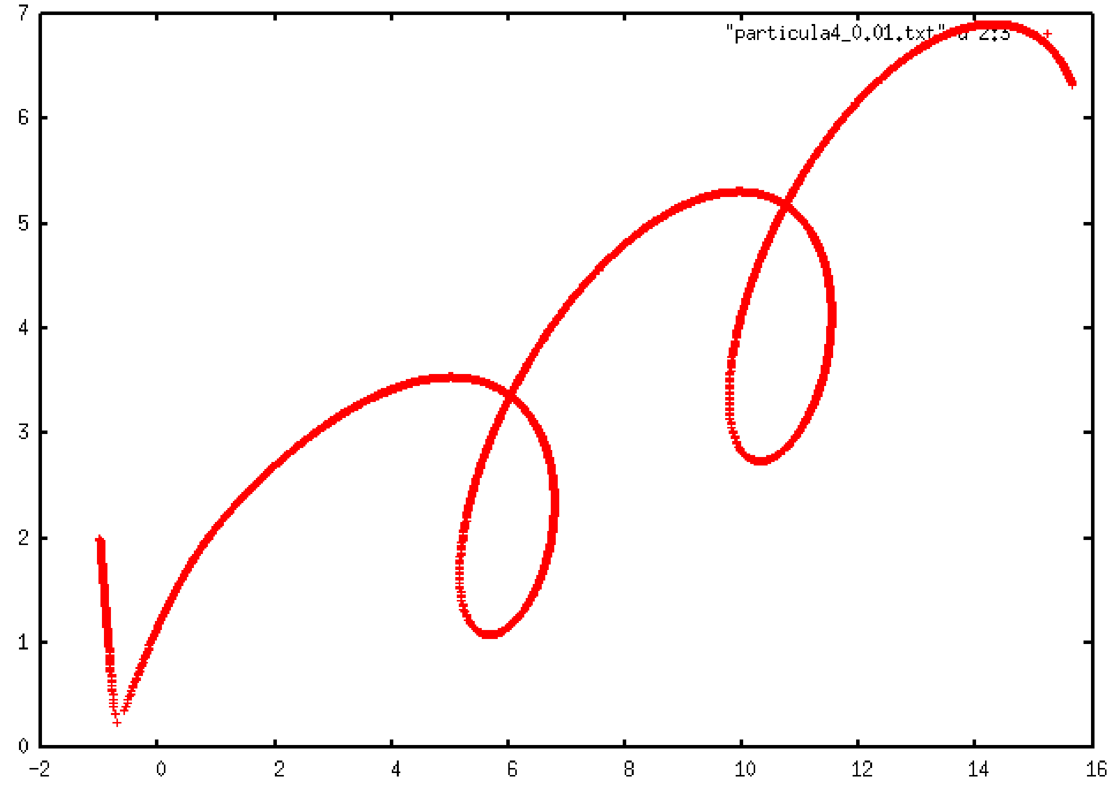
Distancia mínima:



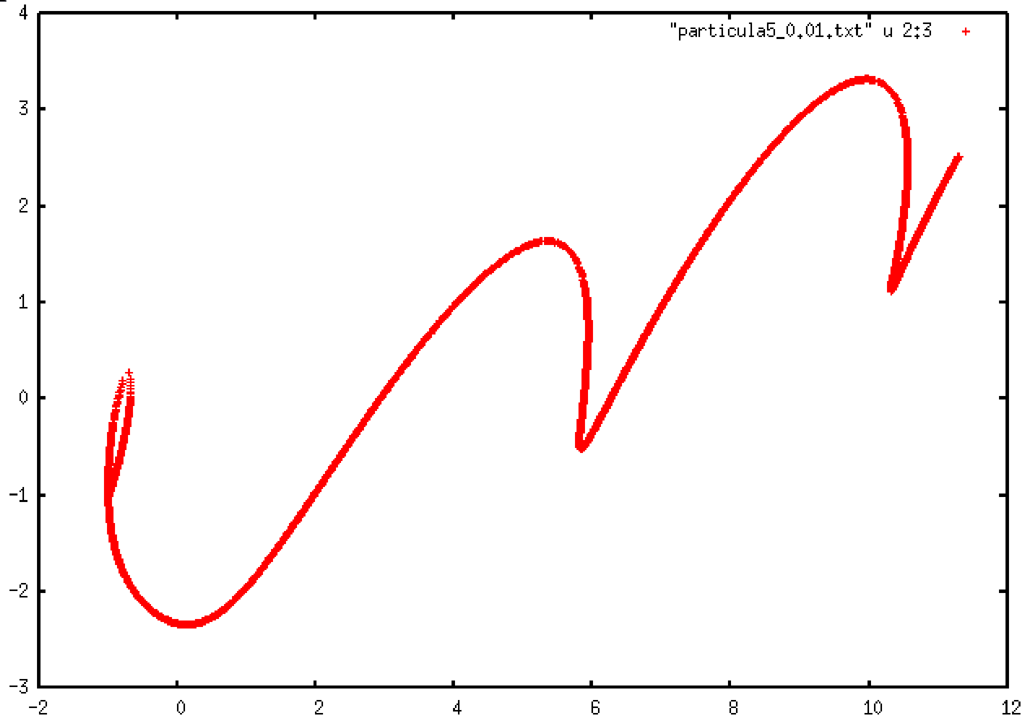
Orbita particula 3



Orbita particula 4

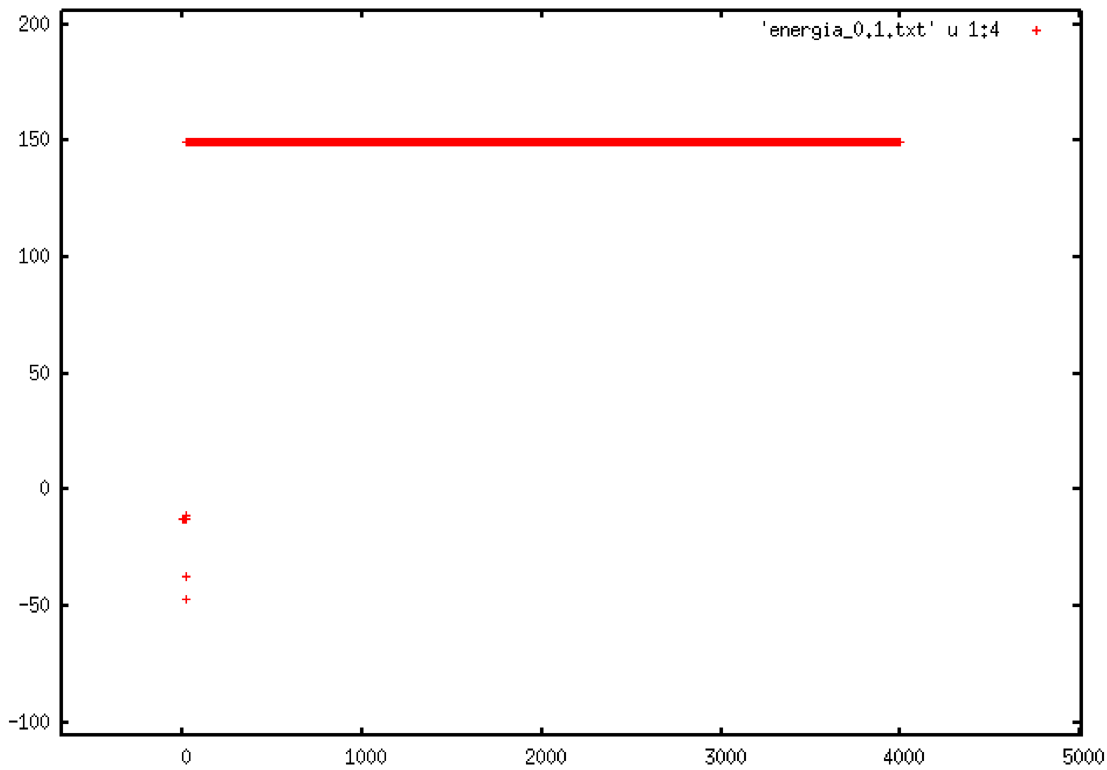


Orbita particula 5

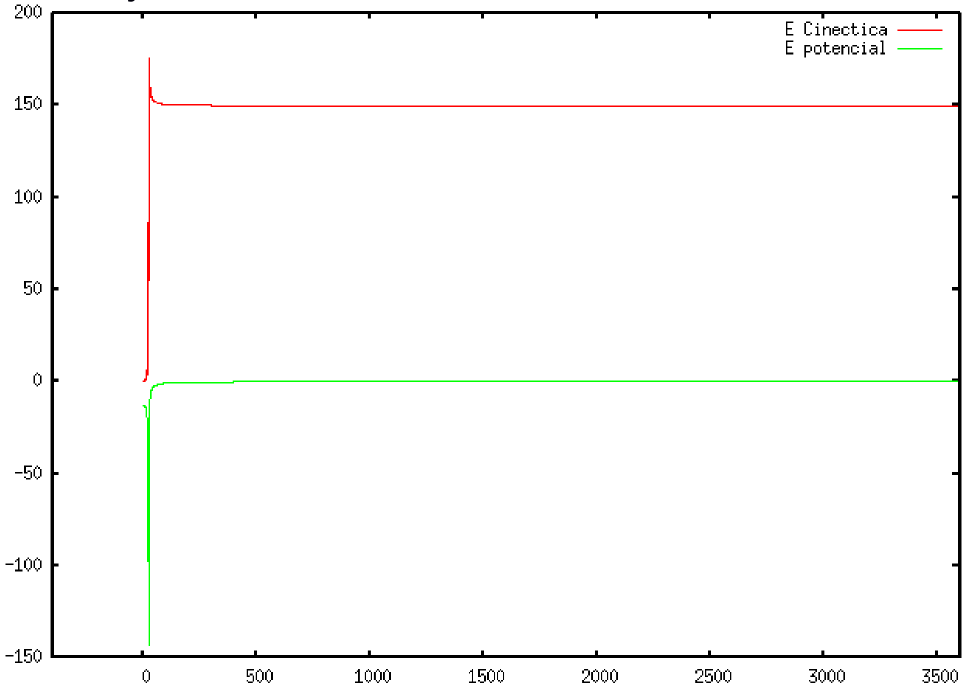


Gráficas para h = 0.1

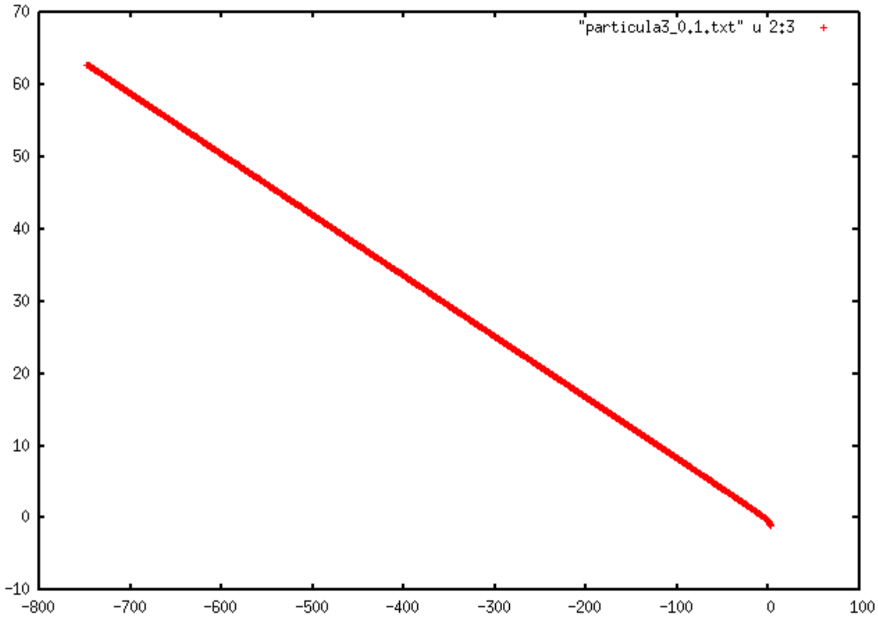
Energia Total:



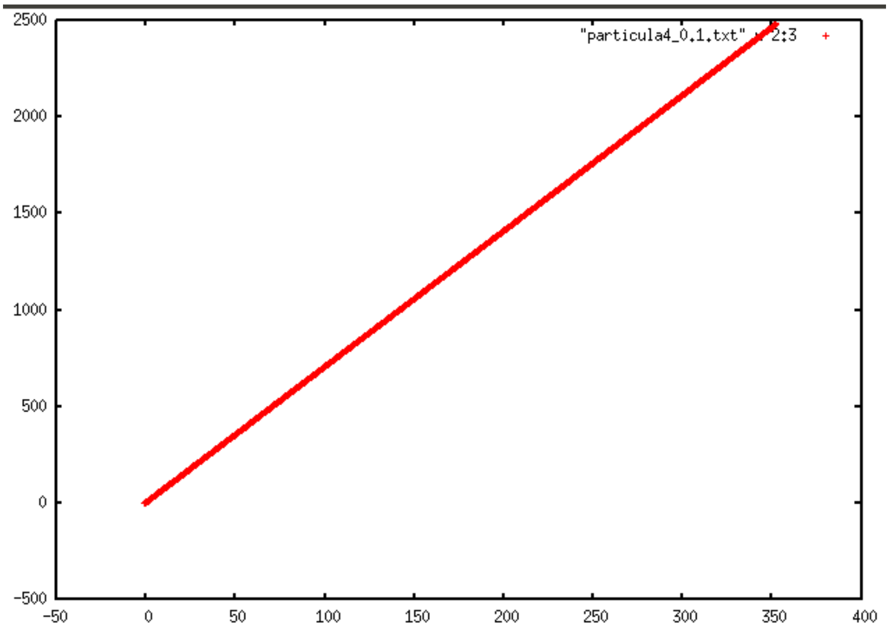
Energia Cinetica y Potencial



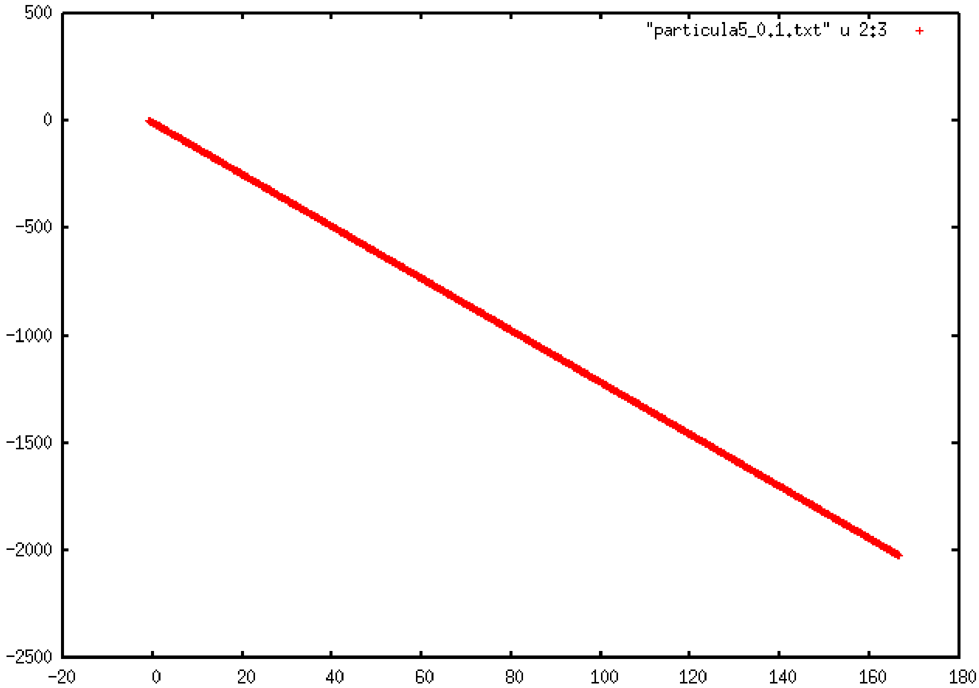
Orbita particula 3



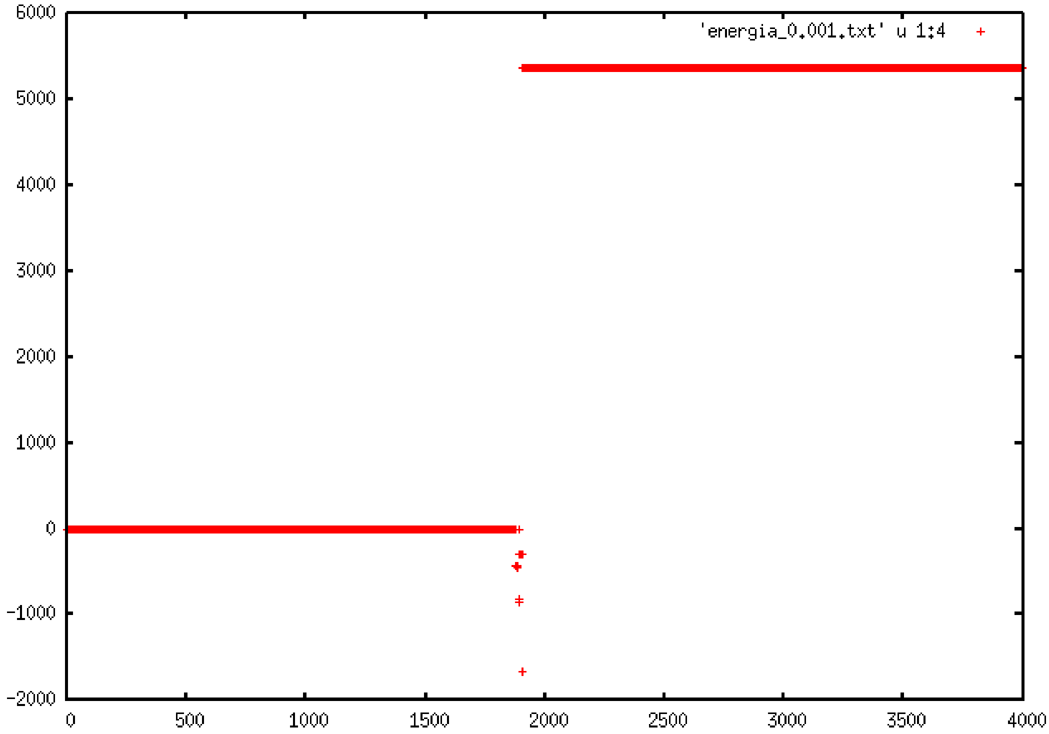
Orbita particula 4



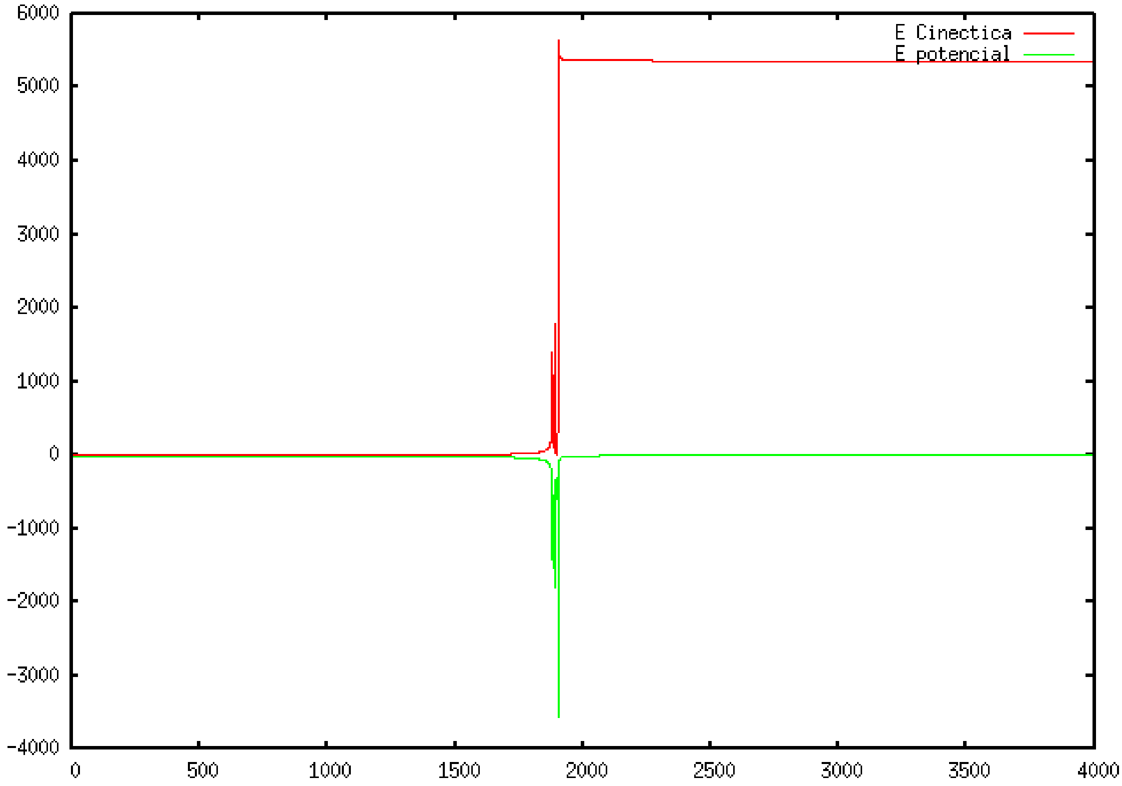
Orbita particula 5



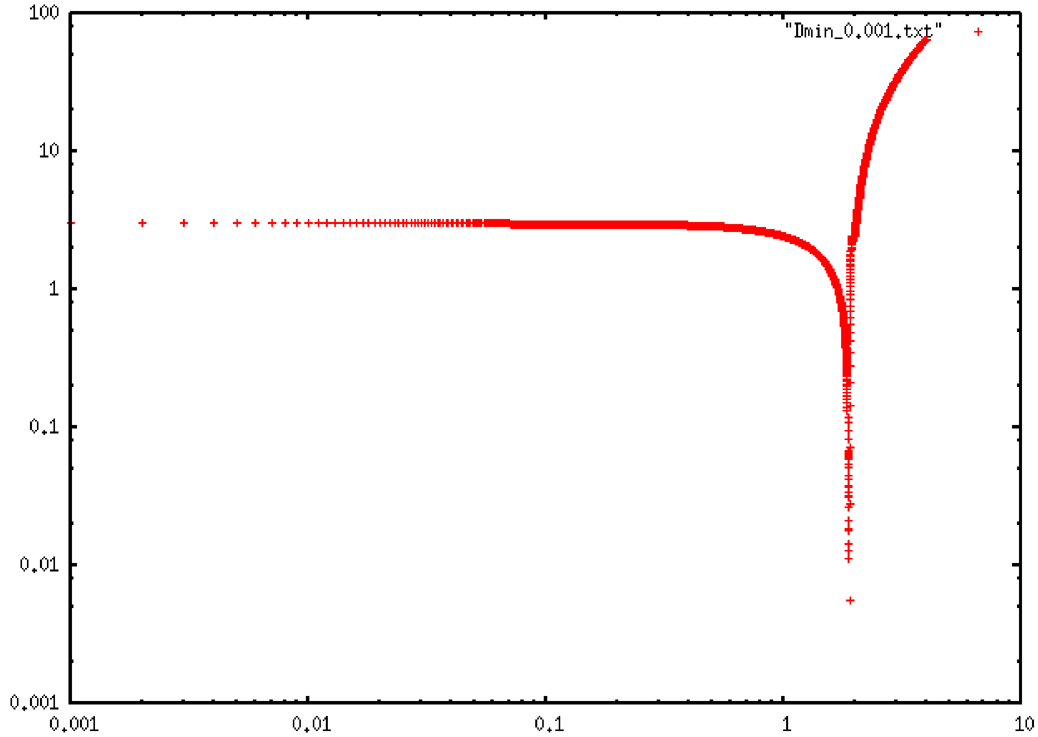
Gráficas para h=0.001
Energia Total



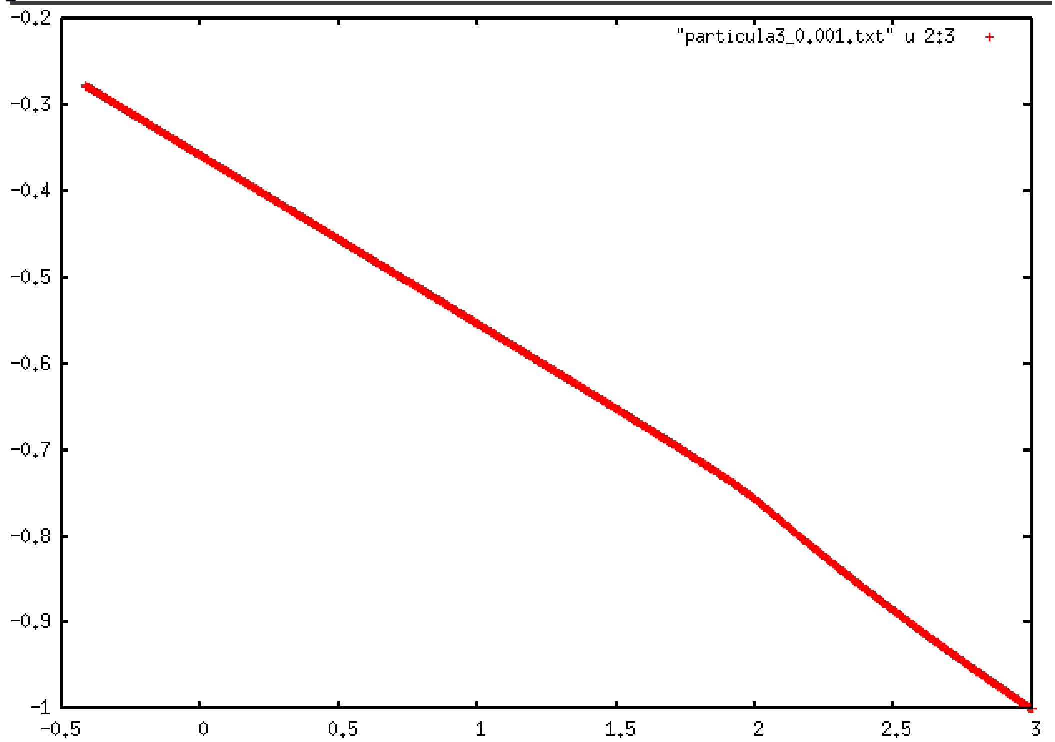
Energia Potencial y Cinetica



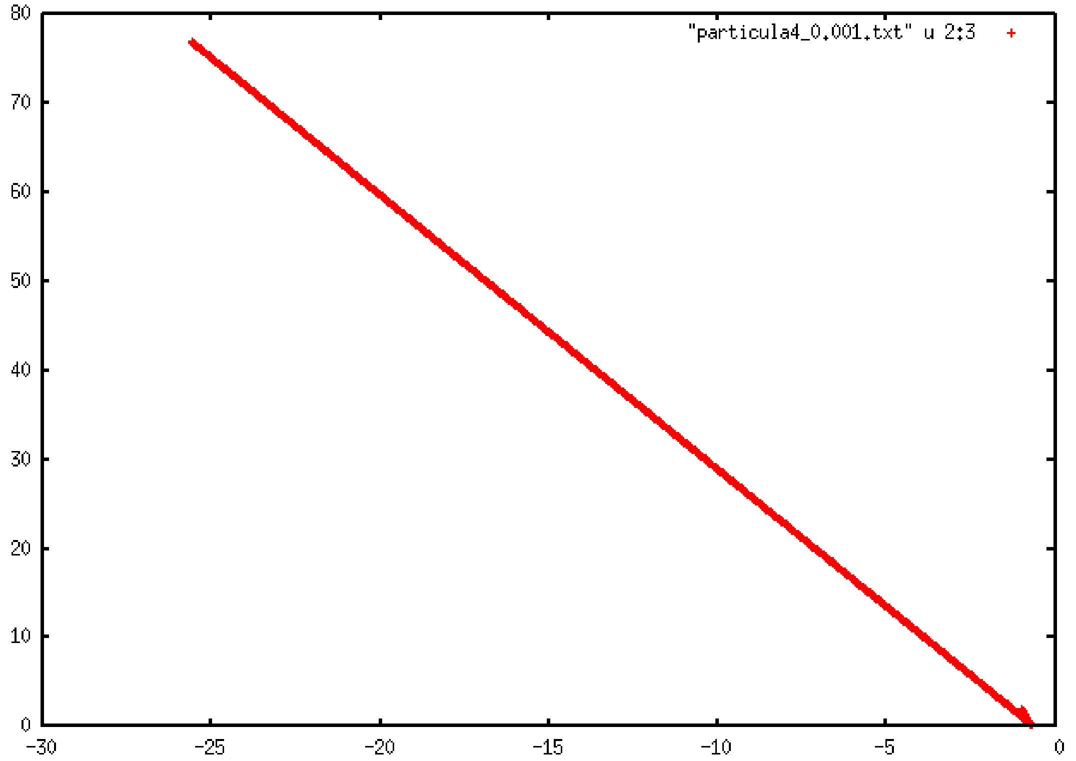
Distancia minima



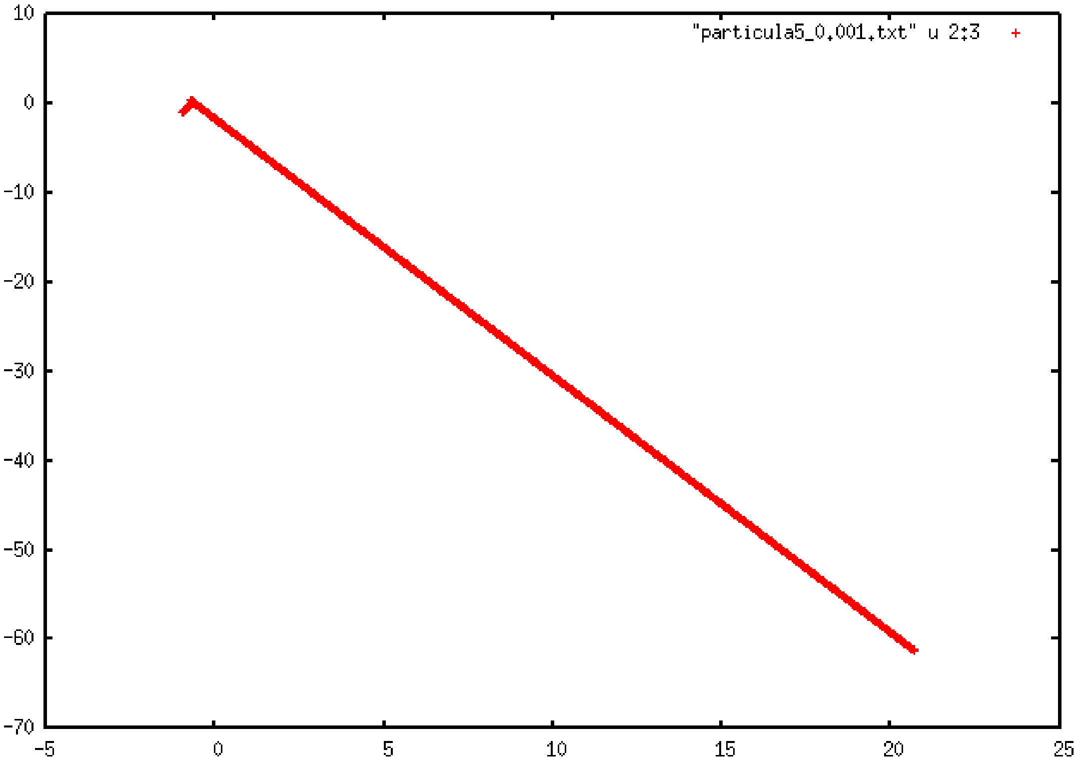
Orbita particula 3



Orbita particula 4



Orbita particula 5

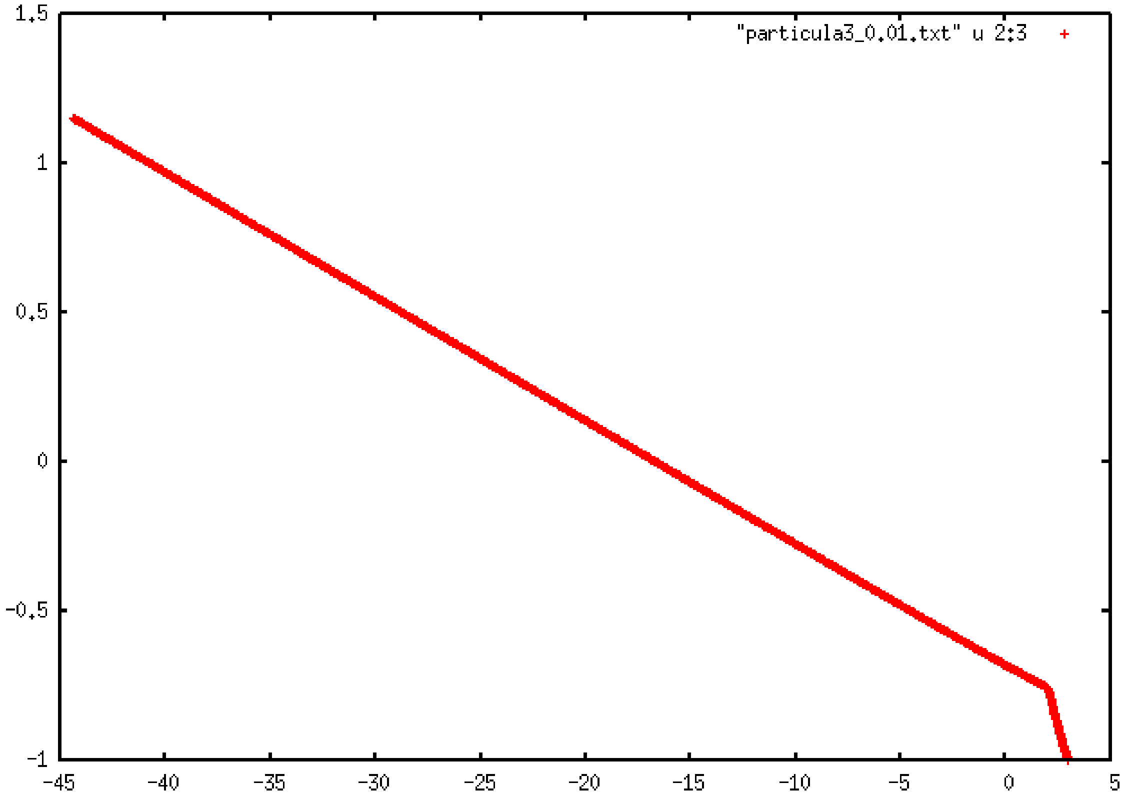


Las gráficas de las orbitas de las partículas parten desde su posición inicial:
para la particula 3 son x0 = 3, y0 = -1.
para la particula 4 son x0 = -1, y0 = 2.
para la particula 5 son x0 = -1, y0 = -1.

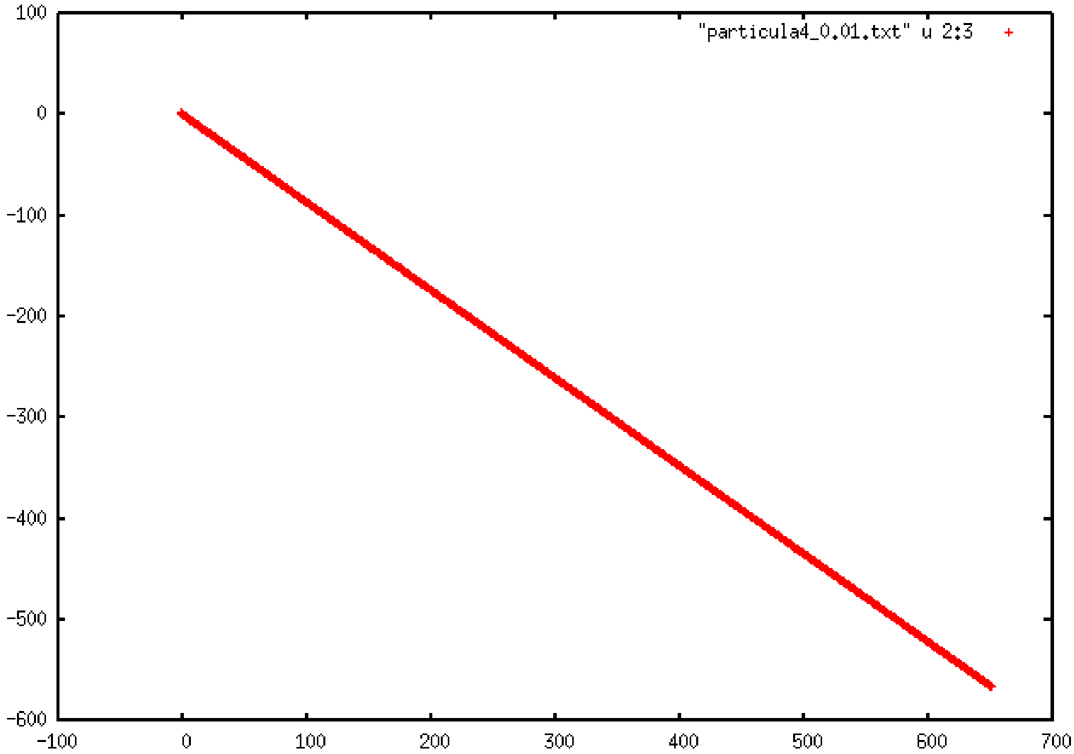
Se observa que según se va variando el paso de tiempo, las solución tienden a desestabilizarse más rápido, se observa que en todos los casos la energía se mantiene y conserva después de cierto tiempo (el cual ya denota que se han dispersado y posiblemente su interacción sea minima, por lo cual la energia se mantiene).
La distancia mínima, tiene a dispersarse luego de cierto tiempo.
La solución nos muestra que el sistema es inestable luego de cierto tiempo, aún con las condiciones dadas.

***** Considere el caso de que el cuerpo m = 5 tenga una velocidad inicial de |v 3 | = 0.1, en dirección a la masa m = 4. Grafique las orbitas para h = 0.01 y h = 0.001
Sol:
Como se sabe, la masa 4 esta en (-1,2) y la masa 5 esta en (-1,-1), como la velocidad inicial de m5 es |v3| = 0.1 en dirección de m4, entonces v = 0 i + 0.1 j

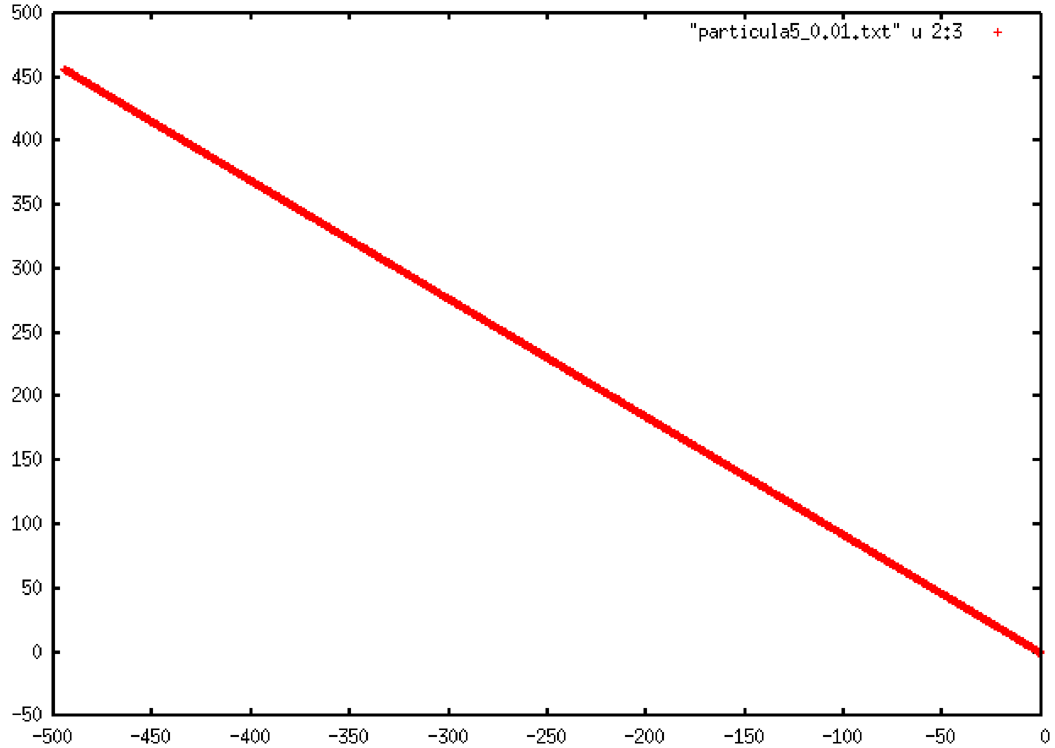
Gráfica para h = 0.01
Orbita de la particula 3



Orbita de la particula 4

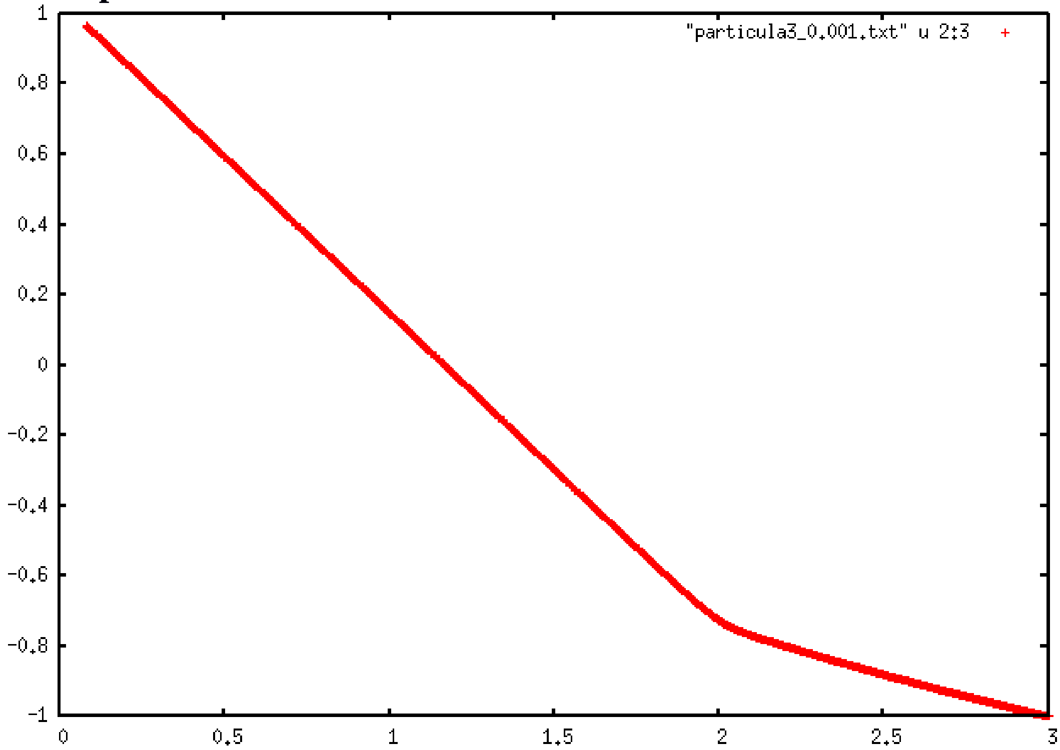


Orbita de la particula 5

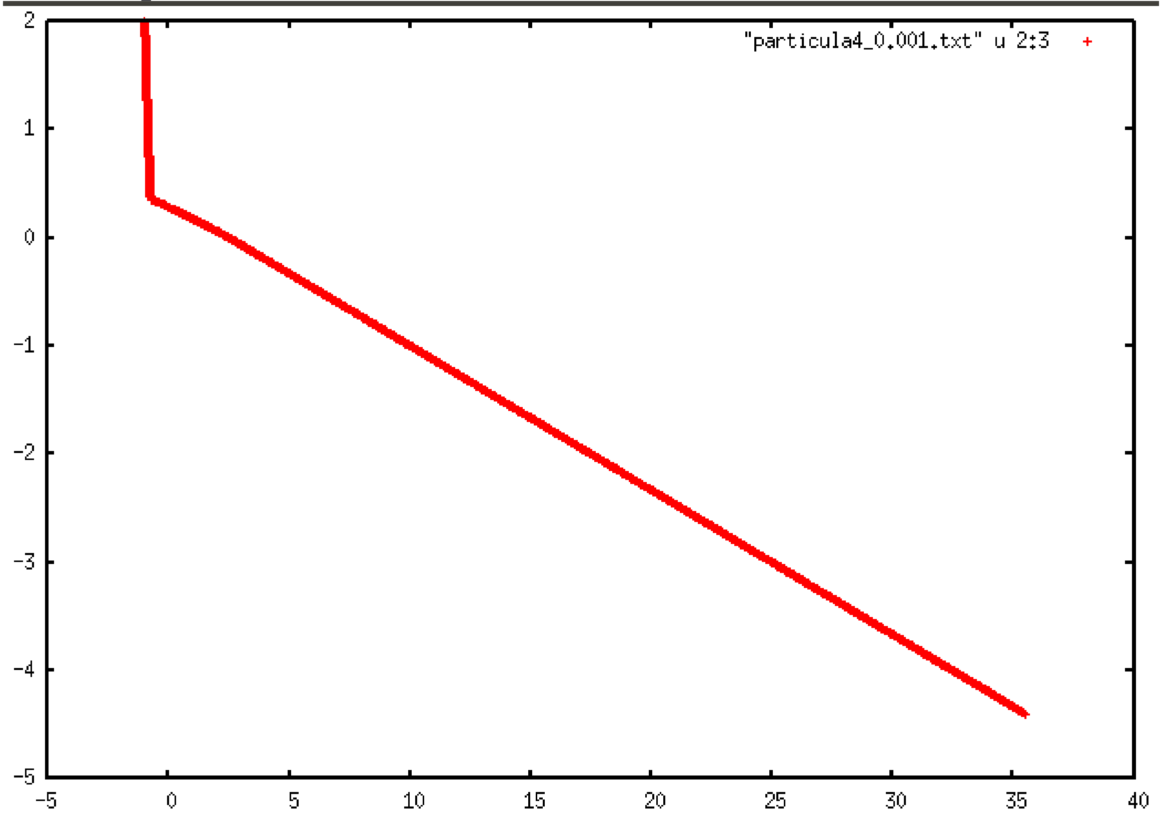


Gráfica para h =0.001

Orbita de la particula 3



Orbita de la particula 4



Orbita de la particula 5