Capítulo 5

Métodos lineales multipaso

5.1. Métodos lineales multipaso

Un método es *lineal* de k-pasos si se puede escribir en la forma

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}), \qquad n = 0, \dots, N-k, \tag{5.1}$$

con $\alpha_k = 1$, $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$.

Notación. Para abreviar se suele escribir $f_n = f(x_n, y_n)$.

La función de incremento del método (5.1) viene dada por

$$\begin{aligned} \phi_f(x_n, y_n, \dots, y_{n+k-1}; h) = &\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_n + jh, y_{n+j}) \\ &+ \beta_k f(x_n + kh, -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h\phi_f(x_n, y_n, \dots, y_{n+k-1}; h)). \end{aligned}$$

No es difícil comprobar que ϕ_f satisface la condición de Lipschitz (1.21) si f satisface una condición de Lipschitz con respecto a su segunda variable.

Si $\beta_k = 0$, el método es explícito. En este caso se puede despejar explícitamente cada y_{n+k} en términos de los k valores anteriores $y_n, \ldots, y_{n+k-1}$. Si se han almacenado los valores $f_n, \ldots, f_{n+k-2}$, una única evaluación de función, f_{n+k-1}, producirá y_{n+k}.

Si $\beta_k \neq 0$, el método es implícito. Para obtener y_{n+k} en cada paso tendremos que resolver la ecuación no lineal

$$y_{n+k} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + g, \tag{5.2}$$

donde g es una función conocida de los valores ya calculados,

$$g = \sum_{j=0}^{k-1} (h\beta_j f_{n+j} - \alpha_j y_{n+j}).$$

Si el lado derecho de la igualdad (5.2) tiene una constante de Lipschitz M con respecto a y_{n+k} tal que $M < 1$, entonces este sistema de ecuaciones tiene una única solución y_{n+k}, que se puede aproximar tanto como se desee por medio de la iteración

$$y_{n+k}^{[\nu+1]} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[\nu]}) + g, \qquad y_{n+k}^{[0]} \text{ arbitrario.} \tag{5.3}$$

Por el Teorema de la Aplicación Contractiva, se cumple que

$$\lim_{\nu \to \infty} y_{n+k}^{[\nu]} = y_{n+k}.$$

Si f tiene una constante de Lipschitz L con respecto a su segunda variable, podemos forzar que se cumpla la condición $M < 1$ tomando $h < 1/(\beta_k L)$. Si este valor de h fuera demasiado pequeño, se debería optar por otro método iterativo, como el de Newton.

Ya vimos que los coeficientes α_j de un método general (1.19) se pueden especificar por medio de ρ, el primer polinomio característico del método. En el caso de los métodos lineales multipaso se define un *segundo polinomio característico*,

$$\sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \zeta^j,$$

con el fin de caracterizar los coeficientes β_j.

¿Qué condiciones deben satisfacer los coeficientes de un método lineal multipaso para que sea consistente?

Si el método cumple la condición (2.6), entonces

$$\begin{aligned}\phi_f(x, y(x), \ldots, y(x); 0) &= \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x, y(x)) + \beta_k f\left(x, -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y(x)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(x, y(x)).\end{aligned}$$

Así pues, el método será consistente si y sólo si

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^{k} \beta_j = \sum_{j=0}^{k} j\alpha_j.$$

En términos del primer y segundo polinomio característico estas condiciones se escriben como

$$\rho(1) = 0, \qquad \rho'(1) = \sigma(1).$$

¿Qué condiciones se deben cumplir para que el método sea consistente de orden p? En este caso el residuo viene dado por

$$\begin{aligned}R_n &= \sum_{j=0}^{k} (\alpha_j y(x_{n+j}) - h\beta_j f(x_{n+j}, y(x_{n+j})) \\ &= \sum_{j=0}^{k} (\alpha_j y(x_{n+j}) - h\beta_j y'(x_{n+j})), \qquad n = 0, \ldots, N-k.\end{aligned}$$

Si $f \in C^p$, tomando desarrollos de Taylor para $y(x_{n+j}) = y(x_n + jh)$ e $y'(x_{n+j}) = y'(x_n + jh)$ alrededor del punto $x = x_n$ se tiene que

$$\begin{aligned}y(x_{n+j}) &= y(x_n) + y'(x_n)jh + \cdots + \frac{y^{(p)}(x_n)(jh)^p}{p!} + \frac{y^{(p+1)}(\overline{\xi}_{n,j})(jh)^{p+1}}{(p+1)!}, \\ y'(x_{n+j}) &= y'(x_n) + y''(x_n)jh + \cdots + \frac{y^{(p)}(x_n)(jh)^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{y^{(p+1)}(\overline{\eta}_{n,j})(jh)^p}{p!},\end{aligned}$$

para algunos puntos intermedios $\overline{\xi}_{n,j}, \overline{\eta}_{n,j} \in (x_n, x_n + jh)$, de donde

$$R_n = C_0 y(x_n) + C_1 y'(x_n)h + \cdots + C_p y^{(p)}(x_n)h^p + O(h^{p+1}),$$

donde

$$\begin{aligned}
C_0 &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_j, \\
C_1 &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_j j - \sum_{j=0}^{k} \beta_j, \\
&\vdots \\
C_q &= \frac{1}{q!}\left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^q - q\sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{q-1}\right), \qquad q > 1.
\end{aligned}$$

Así pues, si $C_q = 0$, $q = 0, \ldots, p$, el método será consistente de orden al menos p. Por otra parte, si $C_{p+1} \neq 0$, el método no puede tener orden de consistencia $p+1$. En efecto, la solución del problema

$$y'(x) = \frac{x^p}{p!}, \quad 0 \leq x \leq b, \qquad y(0) = 0,$$

verifica $y^{(p+1)}(x) = 1$, y por consiguiente $R_n = C_{p+1}h^{p+1} \neq O(h^{p+2})$.

Si un método lineal multipaso tiene orden de consistencia p, entonces el valor $C_{p+1} \neq 0$ recibe el nombre de *constante de error*.

Ejemplo. El método

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = \frac{h}{4}(f_{n+2} + 8f_{n+1} + 3f_n)$$

es un método lineal de dos pasos con

$$\alpha_0 = -2, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \qquad \beta_0 = 3/4, \quad \beta_1 = 8/4, \quad \beta_2 = 1/4.$$

Un sencillo cálculo muestra que $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$ y que $C_4 \neq 0$. Así, el método es consistente de orden 3, y la constante de error es $C_4 = 1/4!$. ♣

Observación. Las condiciones de consistencia del método lineal multipaso (5.1) coinciden con las condiciones de consistencia de orden 1. ♠

No es necesario efectuar el desarrollo de Taylor en $x = x_n$. Se puede (y se debe) efectuar en otro punto si hay posibilidad de aprovechar simetrías.

Ejemplo. Si integramos la EDO en (x_n, x_{n+2}) y aproximamos la integral mediante la regla de Simpson, llegamos al método lineal de dos pasos

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}),$$

conocido como regla de Simpson. Si desarrollamos el residuo alrededor del punto medio, $x = x_{n+1}$, queda un desarrollo en potencias impares de h,

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_{n+2}) - y(x_n) - \tfrac{h}{3}(y'(x_n) + 4y'(x_{n+1}) + y'(x_{n+2})) = \\ &= (2y'(x_{n+1})h + \tfrac{1}{3}y'''(x_{n+1})h^3 + \tfrac{2}{5!}y^{(v)}(x_{n+1})h^5 + \cdots) \\ &\quad -\tfrac{h}{3}(6y'(x_{n+1}) + y'''(x_{n+1})h^2 + \tfrac{2}{4!}y^{(v)}(x_{n+1})h^4 + \cdots). \end{aligned}$$

Concluimos que $R_n = O(h^5)$; por consiguiente, el método es consistente de orden 4. ♣

Ejemplo. Consideramos la regla del trapecio

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n).$$

Si desarrollamos alrededor del punto medio $x = x_{n+\frac{1}{2}} := x_n + \frac{h}{2}$, de nuevo queda un desarrollo en potencias impares de h,

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - \tfrac{h}{2}(y'(x_n) + y'(x_{n+1})) = \\ &= (y'(x_{n+\frac{1}{2}})h + \tfrac{1}{24}y'''(x_{n+\frac{1}{2}})h^3 + \cdots) \\ &\quad -\tfrac{h}{2}(2y'(x_{n+\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{4}y'''(x_{n+\frac{1}{2}})h^2 + \cdots). \end{aligned}$$

Concluimos que $R_n = O(h^3)$; por consiguiente, el método es consistente de orden 2. ♣

Lo que tienen en común los dos ejemplos anteriores es que ambos métodos son simétricos, en el sentido de que

$$\alpha_j = -\alpha_{k-j}, \qquad \beta_j = \beta_{k-j}.$$

Es fácil comprobar, desarrollando alrededor del punto medio, que los métodos simétricos tienen orden par. Así pues, si un método es simétrico sólo será necesario considerar las condiciones de orden impar, pues las de orden par se cumplen necesariamente.

¿Cuál es el mejor orden que podemos conseguir para un método, para un número de pasos k dado? Puesto que un método lineal de k pasos viene determinado por $2k+1$ coeficientes, y las condiciones de orden de consistencia son relaciones lineales de estos coeficientes, existen métodos lineales de k pasos con orden de consistencia $p = 2k$; reciben el nombre de *maximales*. Sin embargo no sirven para nada, puesto que no son convergentes.

Teorema 5.1 (Primera barrera de Dahlquist (1956)). *El orden de convergencia p de un método lineal de k pasos 0-estable satisface:*

- $p \leq k+2$ *si k es par;*
- $p \leq k+1$ *si k es impar;*
- $p \leq k$ *si $\beta_k \leq 0$ (en particular si es explícito).*

Los métodos con $p = k+2$, llamados *optimales*, tampoco funcionan bien en la práctica. Así pues, el mejor orden que se puede alcanzar con un método de k pasos que sirva para algo es $p = k+1$.

Problemas

1. Comprobar que la función de incremento del método lineal multipaso (5.1) satisface la condición de Lipschitz (1.21) si f satisface una condición de Lipschitz con respecto a su segunda variable.
2. Encontrar el orden de consistencia y la constante de error de los métodos

   (a) $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = \frac{h}{4}(f_{n+2} + 8f_{n+1} + 3f_n)$,

   (b) $y_{n+2} - y_n = \frac{2}{3}h(f_{n+2} + f_{n+1} + f_n)$,

   (c) $y_{n+4} - \frac{8}{19}(y_{n+3} - y_{n+1}) - y_n = \frac{6h}{19}(f_{n+4} + 4f_{n+3} + 4f_{n+1} + f_n)$.

   ¿Son convergentes? (El método (c) se conoce como método de Quade.)
3. Repetir el problema anterior para el método lineal multipaso cuyos polinomios característicos son

$$\rho(\zeta) = \zeta^4 - 1 \qquad \text{y} \qquad \sigma(\zeta) = \frac{14}{45}(\zeta^4 + 1) + \frac{64}{45}(\zeta^3 + \zeta) + \frac{24}{45}\zeta^2.$$

4. Un método lineal de k pasos con orden de consistencia k se dice que es una BDF si $\sigma(\zeta) = \gamma\zeta^k$ para algún $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Determinar ρ y el valor de γ. Comprobar que las BDF con $k = 2$ y $k = 3$ son convergentes.
5. Encontrar el método convergente de mayor orden de la forma

$$y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} - \alpha_0 y_n = h(\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n).$$

6. De entre los métodos lineales multipaso de la forma

$$y_{n+3} + \alpha_2 y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n),$$

   determinar los simétricos convergentes de mayor orden.
7. Demostrar que existen métodos lineales de k pasos con orden de consistencia $p = 2k$.
8. Demostrar que si un método lineal de 3 pasos explícito es de orden 4, entonces $\alpha_0 + \alpha_2 = 8$ y $\alpha_1 = -9$. Deducir de esto que el método no puede ser convergente.
9. Sea ρ un polinomio mónico de grado k verificando $\rho(1) = 0$. Demostrar que:

   (a) Existe un único polinomio σ de grado menor o igual que k tal que el MLM dado por ρ y σ tiene orden de consistencia mayor o igual que $k + 1$.

   (b) Existe un único polinomio σ de grado menor estricto que k tal que el MLM dado por ρ y σ tiene orden de consistencia mayor o igual que k.

10. Probar que un MLM con polinomios característicos ρ y σ es de orden $p \geq 1$ si y sólo si existe una constante $c \neq 0$ tal que cuando $\zeta \to 1$

$$\rho(\zeta) - \sigma(\zeta) \log \zeta = c(\zeta - 1)^{p+1} + O(|\zeta - 1|^{p+2}).$$

11. Sea un MLM tal que $\rho(\zeta) = (\zeta - 1)(\zeta^2 + 1)$. Determinar $\sigma(\zeta)$ para que alcance el orden máximo posible. Calcular su constante de error.

12. Cuando un MLM es implícito, para ahorrar trabajo computacional podemos sustituir el valor y_{n+k} en el lado derecho de (5.1) por una aproximación de ese valor dada por un método explícito,

$$y^*_{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\beta}_j f(x_{n+j}, y_{n+j}),$$

de manera que

$$y_{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h \left(\beta_k f(x_{n+k}, y^*_{n+k}) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}) \right).$$

Así pues, primero *predecimos* un valor de y_{n+k} y luego lo *corregimos*. El par predictor-corrector resultante es explícito, pero no es un MLM.

Demostrar que un par predictor-corrector obtenido a partir de dos MLM no puede tener mayor orden de consistencia que el método corrector del par.

13. Consideramos el par predictor-corrector

$$\begin{cases} y^*_{n+2} - 3\, y_{n+1} + 2\, y_n = \dfrac{h}{2} \big(f(x_{n+1}, y_{n+1}) - 3\, f(x_n, y_n) \big), \\ y_{n+2} - y_n = h \big(f(x_{n+2}, y^*_{n+2}) + f(x_n, y_n) \big). \end{cases}$$

(i) Determinar el orden de consistencia.

(ii) Estudiar si es convergente.

14. Consideramos el método numérico

$$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2}{3} h f_{n+2},$$

conocido como *fórmula BDF de 2 pasos*.

(i) Determinar el orden de consistencia.

(ii) Estudiar si es convergente.

Combinamos este método con el método de Euler para obtener el par predictor-corrector

$$\begin{cases} y^*_{n+2} = y_{n+1} + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \\ y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf(x_{n+2}, y^*_{n+2}). \end{cases}$$

Los apartados que siguen se refieren a este par.

(iii) Estudiar si es convergente.

(iv) Demostrar que no es consistente de orden 3. *Sugerencia:* Aplicar el método al problema $y'(x) = x^2/2$ en $[0,1]$, $y(0) = 0$.

(v) Demostrar que es consistente de orden 2.

5.2. Estabilidad lineal de métodos lineales multipaso

Queremos aplicar el método lineal multipaso

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} \tag{5.4}$$

al problema escalar

$$y' = \lambda y, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad y(0) = 1. \tag{5.5}$$

Observación. Los valores de arranque $y_1, \ldots, y_{k-1}$ no vienen dados por la condición inicial. Al estudiar la estabilidad lineal pediremos que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ para cualquier elección posible de los valores de arranque. ♠

El resultado de aplicar (5.4) a (5.5) es

$$\sum_{j=0}^{k} (\alpha_j - h\lambda\beta_j) y_{n+j} = 0. \tag{5.6}$$

Ésta es una ecuación en diferencias lineal, homogénea y con coeficientes constantes. Para resolverla consideramos el polinomio característico de la ecuación en diferencias. Haciendo $z = h\lambda$, viene dado por

$$\Pi(r, z) = \sum_{j=0}^{k} (\alpha_j - z\beta_j) r^j, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

En términos del primer y segundo polinomios característicos del método se escribe

$$\Pi(r, z) = \rho(r) - z\sigma(r),$$

y recibe el nombre de *polinomio de estabilidad* del método lineal multipaso.

Lema 5.2. *Supongamos que los ceros (como función de r) de $\Pi(r, z)$ son $r_1(z)$, $r_2(z)$, $\ldots, r_{q(z)}(z)$, con multiplicidades $m_1(z), m_2(z), \ldots, m_{q(z)}(z)$ respectivamente ($\sum\limits_{i=1}^{q(z)} m_i(z) = k$). Entonces*

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |r_i(z)| < 1, \ i = 1, \ldots, q(z)\}.$$

Prueba. La solución general de (5.6) es

$$y_n = \sum_{i=1}^{q(z)} \left(\sum_{j=0}^{m_i(z)-1} c_{ij} n^j \right) (r_i(z))^n, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Las k constantes c_{ij} quedan determinadas de manera única por los k valores de arranque $y_0, \ldots, y_{k-1}$, y no dependen de n. Así, el comportamiento de y_n está determinado por la magnitud de los números $r_i(z)$, $i = 1, \ldots, q(z)$. Si todos están en el interior del disco unidad del plano complejo, entonces sus potencias decaen más aprisa que cualquier polinomio en n, y $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Por otro lado, sea $|r_i(z)| \geq 1$; existen valores de arranque tales que $c_{i0} \neq 0$, y para dichos valores es imposible que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. □

Ejemplo. El método de Euler implícito es un método lineal multipaso con $\rho(r) = r - 1$ y $\sigma(r) = r$. El polinomio de estabilidad lineal $\Pi(r, z) = r - 1 - zr$

tiene un único cero, $r = 1/(1-z)$, que tiene módulo menor que 1 si y sólo si $|1-z| > 1$. Así pues, $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \, |z-1| > 1\}$, y el método es A-estable. ♣

La determinación del dominio de estabilidad lineal de un método lineal multipaso mediante la aplicación directa del lema 5.2 presenta dos dificultades: (i) hay que hallar las raíces del polinomio característico; (ii) hay que determinar los valores de z para los que dichas raíces tienen módulo menor que 1. Así que intentaremos aplicar otra técnica.

Las raíces de un polinomio son funciones continuas de sus coeficientes. Por consiguiente, $\mathrm{Fr}\,(\mathcal{D}) \subset \mathcal{F}$, donde

$$\mathcal{F} := \{z \in \mathbb{C} : \, \exists \text{ una raíz de } \Pi(r,z) \text{ de módulo } 1\}.$$

En general se tiene la inclusión y no la igualdad; puede haber valores $z \in \mathbb{C}$ tales que el polinomio $\Pi(r,z)$ tenga una raíz de módulo 1, alguna raíz de módulo menor que 1 y alguna raíz de módulo mayor que 1. Dicho z no pertenece a $\mathrm{Fr}\,(\mathcal{D})$. Nótese por otra parte que $\mathcal{D} \cap \mathcal{F} = \emptyset$.

Si $z \in \mathcal{F}$, existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\Pi(e^{i\theta}, z) = \rho(e^{i\theta}) - z\sigma(e^{i\theta}) = 0;$$

es decir,

$$z = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Tenemos por tanto que $\mathrm{Fr}\,(\mathcal{D})$ está contenida en un conjunto, $\mathcal{F}$, que es la imagen de una curva cerrada que divide al plano complejo en regiones. Cada una de estas regiones tiene que estar, bien contenida en $\mathcal{D}$, bien contenida en $\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$; para ver cuál de los dos casos se da, bastará por tanto con estudiar un único punto.

Ejemplo. La regla de Simpson es un método lineal de dos pasos con $\rho(r) = r^2 - 1$, $\sigma(r) = \frac{1}{3}(r^2 + 4r + 1)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{C} : \, z = \frac{3 \operatorname{sen} \theta}{\cos\theta + 2}\, i, \; \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Puesto que la función $3\operatorname{sen}\theta/(\cos\theta+2)$ varía entre $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$, tenemos que $\mathcal{F}$ es el segmento $[-\sqrt{3}i, \sqrt{3}i]$. Hay, por tanto, dos posibilidades: $\mathcal{D}=\emptyset$ o $\mathcal{D}=\mathbb{C}\setminus\mathcal{F}$. Las raíces de $\Pi(r,-3)=2r^2+4r$ son $r_1(-3)=0$ y $r_2(-3)=-2$. Por consiguiente $z=-3\notin\mathcal{D}$, de donde concluimos que $\mathcal{D}=\emptyset$. ♣

Observación. La regla de Simpson tiene orden $p=k+2$, el mayor obtenible para un método 0-estable (primera barrera de Dahlquist). Sin embargo no es útil, pues $\mathcal{D}=\emptyset$. Los métodos 0-estables con orden de convergencia $p=k+2$, como la regla de Simpson, se llaman *optimales*, En general todos ellos tienen regiones de estabilidad que son o bien vacías, o bien esencialmente inútiles por no contener el eje real negativo en un entorno del origen. ♠

¿Hay métodos lineales multipaso A-estables? Explícitos, no, pues se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.3. *Todo método lineal multipaso explícito convergente tiene región de estabilidad absoluta acotada.*

Prueba. Como el método es explícito, $\beta_k=0$, y se tiene que

$$\Pi(r,z)=r^k+\sum_{j=0}^{k-1}(\alpha_j-z\beta_j)r^j.$$

Por otra parte,

$$\Pi(r,z)=(r-r_1(z))\dots(r-r_k(z))=r^k+\sum_{j=0}^{k-1}s_j(z)r^j,$$

donde

$$s_j(z)=(-1)^{k-j}\sum_{i_1<i_2<\dots<i_{k-j}}r_{i_1}(z)\cdots r_{i_{k-j}}(z).$$

Comparando ambas expresiones tenemos que $s_j(z)=\alpha_j-z\beta_j$. Como el método converge (con orden al menos 1), $0\neq\rho'(1)=\sum_{j=0}^{k}j\alpha_j=\sum_{j=0}^{k}\beta_j$ y por tanto existe algún $j\in\{0,\dots,k-1\}$ tal que $\beta_j\neq 0$. Así, $s_j(z)\to\infty$ cuando $z\to\infty$, de modo que existe una raíz $r_i(z)$ tal que $\lim_{z\to\infty}r_i(z)=\infty$. □

¿Tenemos mejor suerte con los implícitos? Sí: hay ejemplos de métodos lineales multipaso implícitos A-estables de órdenes 1 (el método de Euler implícito) y 2 (la regla del trapecio). Sin embargo, no se puede conseguir nada mejor.

Teorema 5.4 (Segunda barrera de Dahlquist, 1957). *El mayor orden de consistencia de un método lineal multipaso A-estable es $p = 2$.*

Los métodos de Runge-Kutta implícitos A-estables no tienen esta restricción sobre el orden. Recordemos por ejemplo que el método de Gauss-Legendre de dos etapas tiene orden de consistencia 4 y sin embargo es A-estable. Así que se podría pensar que los métodos lineales multipaso son inferiores a los de Runge-Kutta en lo concerniente a la estabilidad lineal. Esto no es completamente cierto. Hay método lineales multipaso que, a pesar de no ser A-estables, son $A(\alpha)$-*estables*: existe un $\alpha \in (0, \pi]$ tal que la cuña infinita

$$\Gamma_\alpha := \{\rho e^{i\theta} : \rho > 0, |\theta - \pi| < \alpha\}$$

está contenida en $\mathcal{D}$. En otras palabras, si todos los autovalores están en Γ_α, aunque estén muy lejos del origen el método no obliga a disminuir el paso por motivos de estabilidad.

Problemas

1. Consideramos el método lineal multipaso $y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}$. Demostrar que su dominio de estabilidad lineal es vacío.
2. El objetivo de este problema es demostrar que la región de estabilidad absoluta de un método lineal multipaso convergente no puede contener el eje real positivo en un entorno del origen.

   (i) Demostrar que hay una única raíz, $r_1(z)$, de $\Pi(r, z)$ con la propiedad de que $r_1(z) \to 1$ cuando $z \to 0$.

   (ii) Consideramos el problema (5.5) con $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Demostrar que el residuo satisface $R_n = O(h^2)$ cuando $h \to 0^+$ y deducir de ello que $\Pi(\exp(z), z) = O(z^2)$ cuando $z \to 0$, $z \in \mathbb{R}^+$.

(iii) Usar que $\Pi(r,z) = (1 - z\beta_k)(r - r_1)(r - r_2)\cdots(r - r_k)$ para concluir que $r_1(z) = e^z + O(z^2) = 1 + z + O(z^2)$ cuando $z \to 0$, $z \in \mathbb{R}^+$.

3. Consideramos la *fórmula BDF de dos pasos*, $y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf_{n+2}$.

   (i) Determinar el orden de consistencia.

   (ii) Estudiar si es convergente.

   (iii) Determinar si es A-estable. *Indicación.* Probar que Re $\left(\frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}\right) \geq 0$.

4. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (i) El método lineal multipaso cuyo primer polinomio característico es $\rho(\zeta) = (\zeta^2 + 1)(\zeta - 1)$ y cuyo segundo polinomio característico es $\sigma(\zeta) = (5\zeta^3 + 7\zeta^2 + 7\zeta + 5)/12$ tiene orden de consistencia 5.

   (ii) El método lineal multipaso $y_{n+3} - \frac{18}{11}y_{n+2} + \frac{9}{11}y_{n+1} - \frac{2}{11}y_n = \frac{6}{11}hf_{n+3}$ tiene orden de convergencia 3 y es A-estable.

   (iii) El método lineal multipaso $y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2})$ es convergente de orden 3, pero no de orden 4.

5. Probar que la región de estabilidad absoluta $\mathcal{D}$ del método

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + 3f_n)$$

   es el interior del círculo de centro $(-2/3, 0)$ y de radio $2/3$.

6. Probar que si un MLM de polinomios característicos ρ y σ satisface

$$\mathrm{Re}\,\left(\rho(e^{i\theta})\sigma(e^{-i\theta})\right) = 0, \qquad \forall\theta \in [0, 2\pi], \tag{5.7}$$

   entonces o bien $\mathcal{D}$ es vacía o bien $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) < 0\}$. Probar que el método lineal de dos pasos estable y de orden al menos 2 más general que satisface (5.7) es de la forma

$$y_{n+2} - y_n = h(\beta f_{n+2} + 2(1 - \beta)f_{n+1} + \beta f_n),$$

   y que es A-estable si y sólo si $\beta > 1/2$.

7. Sea el método

$$y_{n+2} - (1+\alpha)y_{n+1} + \alpha y_n = \frac{h}{2}(1-\alpha)(f_{n+1} + f_n), \qquad -1 < \alpha < 1.$$

(i) Probar que el orden es independiente de α.

(ii) Expresar la curva $z = \rho(e^{i\theta}/\sigma(e^{i\theta})$ de la forma $y^2 = F(x)$ si $z = x+iy$.

(iii) Determinar la región de estabilidad absoluta.

(iv) Deducir que el intervalo de estabilidad absoluta es independiente de α.