Escola de Economia de São Paulo - FGV
Métodos de Previsão

Monitor: Oscar Simões (orsimoes@yahoo.com)

28 de abril de 2022

LISTA TEÓRICA

Esta lista tem a intenção de exigir do estudante o conhecimento básico de séries de tempo e compreende basicamente os capítulos 2, 4 e 5 do livro-texto *Applied Econometric Series* do Walter Enders (3ª edição), que consta da bibliografia da disciplina.

Como acontece em todo conhecimento novo, ele pode deixar o estudante um pouco inseguro. Isso é normal. Siga em frente que, com o auxílio dos laboratórios práticos, os conceitos vão ficando gradualmente claros.

Após a entrega, eu disponibilizarei o gabarito da lista para que possam avaliar o que fizeram em suas listas.

1. **Estatística: Esperança** Sejam X e Y variáveis aleatórios e a e b constantes, ache/desenvolva as esperanças abaixo:

   a. $\mathbf{E}[aX + b]$

   b. $\mathbf{E}[X + Y]$

   c. $VAR(X)$ em termos de esperanças de X

   d. $COV(X, Y)$ em termos de esperanças das variáveis X e Y

2. **Tipos de séries:** Dê a definição de um ruído branco.

3. **Tipos de séries:** Se e_t é um ruído branco, com média igual a zero e variância igual a σ^2, considere o seguinte processo gerador de dados (PGD) e responda:

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t \tag{1}$$

   (a) Dê a solução[1] para (1).

[1] Resolva por iteração: Enders: Cap.1 - Item 3.

(b) Neste PGD, os choques têm efeitos transitórios ou permanentes? Qual o nome que se dá a esta série?

(c) Ache o valor esperado de (1), lembrando que Y_{t-1} é conhecido em t, ou seja, não é uma variável aleatória, mas um valor fixo.

(d) Ache a média condicional em t (ou seja, com o conjunto de informação até t) para Y_{t+s} para qualquer $s > 0$. Interprete.

(e) Se a afirmarmos que a taxa de câmbio é caracterizada por um padrão de passeio aleatório, qual a melhor estimativa da taxa de câmbio no futuro próximo?

(f) Ache a variância não-condicional de Y_t, definido na equação (1).

(g) Ache a covariância entre Y_t e Y_{t-s}, conforme a definição de Y_t da equação (1).

(h) Ache a correlação (ρ_s) entre Y_t e Y_{t-s}. Use o resultado do exercício anterior de covariância.

(i) O que acontece se subtrairmos Y_{t-1} de ambos os lados de (1)? Interprete.

4. **Estacionariedade:** Defina o que é estacionariedade em covariância e suas propriedades. Utilizando a definição acima de ruído branco e suas características, mostre que x_t, conforme definido abaixo, é uma série estacionária em covariância, sendo ε_t um ruído branco de variância σ^2. Se precisar assumir alguma hipótese para fazer a prova, faça-a, mas deixe-a clara na resposta.

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \varepsilon_{t-i}$$

5. **Processo Integrado:** O processo gerador dos dados de um processo integrado de primeira ordem pode ser dado pela seguinte equação:

$$\Delta X_t = \alpha + u_t$$

com $u_t \sim IID(0, \sigma_u^2)$ para $t = 1, ..., t$. Faça a iteração reversa e obtenha X_t como função de X_0, α, t e do acumulado dos erros do processo.

6. **Autocorrelação e Estacionariedade** Verifique se as afirmações são falsas ou verdadeiras. Justifique em ambos os casos.

a. A função de autocorrelação de um processo $AR(p)$ é truncada de ordem $p - 1$.

b. A função de autocorrelação de um processo $MA(q)$ decai lentamente.

c. Se a estatística do teste de $Ljung-Box$ não exceder o valor crítico da distribuição χ^2 podemos afirmar que não existe correlação nos dados analisados.

d. No processo $MA(2)$, $y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$, em que ε_t é um ruído branco com média zero e variância σ^2, a correlação entre y_t e y_{t-2} é dada por θ_2.

e. O processo $ARMA(1,1)$, $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, considerando que ε_t é um ruído branco com média 0 e variância σ^2, é estacionário se, necessariamente,$|\rho| < 1$ e $|\theta| < 1$.

f. Uma série é estacionária se tem variância e média constantes, mas pode ter autocorrelação não constante, dependente do tempo.

g. A hipótese nula do teste FAC é a de que a autocorrelação é zero. Para testar essa hipótese, usa-se a distribuição t-student.

h. A função de autocorrelação sugere a ordem auto-regressiva na equação da média, enquanto que a função de autocorrelação parcial sugere a ordem do processo de médias móveis.

i. Em um processo estacionário em covariância, embora a autocovariância entre y_t e y_{t-1} possa diferir da autocovariância entre y_t e y_{t-2}, a autocovariância entre y_t e y_{t-1} não pode diferir da autocovariância entre y_{t-1} e y_{t-2}.

j. Em um processo estacionário em covariância, $\rho_0 = 1$.

k. Em um processo estacionário em covariância, embora a autocovariância entre y_t e y_{t-1} possa diferir da autocovariância entre y_t e y_{t-2}, a autocovariância entre y_t e y_{t-1} não pode diferir da autocovariância entre y_{t-1} e y_{t-2}.

7. **Estacionariedade/Inversibilidade:** O operador defasagem é um operador linear que, a partir de qualquer valor de y_t, tem-se:

$$L^i y_t := y_{t-i}$$

Com isso, verifique se os modelos abaixo são estacionários e/ou inversíveis olhando para as raízes dos polinômios.

a. $(1 - L)Y_t = (1 - 0.5L)\varepsilon_t$

b. $(1 + 0.8L)Y_t = (1 - 1.2L)\varepsilon_t$

c. $(1 - 0.7L + 0.4L^2)Y_t = (1 - 0.5L)\varepsilon_t$

d. $(1 - 0.7L + 0.4L^2)Y_t = (1 - 1.6L + 0.7L^2)\varepsilon_t$

8. **Sazonalidade:** Considere o modelo abaixo:

$$y_t = \alpha_4 y_{t-4} + \varepsilon_t$$

com $|\alpha_4| < 1$.

Prove que o correlograma é $\rho_i = (\alpha_4)^{\frac{i}{4}}$ sempre que $\frac{i}{4}$ é um inteiro e que $\rho_i = 0$, caso contrário. Qual é o comportamento da função de autocorrelação deste modelo e qual a intuição por trás desse resultado se pensamos em sazonalidade. Utilize a metodologia indicada pelo Enders (Equações de Yule-Walker).

9. **Critérios de Seleção de Modelos:** Explique brevemente também a ideia de parcimônia neste contexto de seleção de modelos. Exponha os dois critérios mais utilizados e a diferença entre eles.

10. **Seleção de modelos via método de Box-Jenkins:** Nomeie e explique o método em 3 estágios popularizado Box-Jenkins (1976). O uso desta método pressupõe que as séries sejam estacionárias e/ou inversíveis?

11. **Seleção de modelos via método de Box-Jenkins:** Quais os fatores importantes para a avaliarmos um modelo estimado (fase 3 do Box-Jenkins: diagnostic checking)?

12. **Álgebra Linear:** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.25 \end{bmatrix}$

    a. Ache o determinante de A.

    b. Ache a inversa de A.

    c. Ache os autovalores da matriz A;

    d. Ache o traço de A;

    e. Ache o posto de A.

13. **Álgebra Linear:** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e avalie as afirmações abaixo, justificando-as:

    a. O número de autovalores distintos da matriz A é igual à ordem da matriz.

    b. A matriz é inversível;

    c. O posto da matriz é cheio.

    d. O traço da matriz é igual a -2.

14. **Álgebra Linear:** Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix}$, calcule o determinante e o traço da matriz B. A matriz é inversível?

15. **VAR:** É bastante comum em economia termos modelos onde algumas variáveis não são apenas variáveis explicativas de uma determinada variável dependente, mas também serem explicadas pela variável que ela costuma explicar. Nestes casos, temos os modelos de equações simultâneas, onde se faz necessária a identificação clara de quais variáveis são endógenas e exógenas (ou pré-determinadas) no modelo. A decisão em relação à essa diferenciação entre variáveis foi bastante criticada por Sims (1980) que advogou que, se existe simultaneidade entre um número de variáveis, então todas estas variáveis deveriam ser tratadas da mesma forma, ou seja, não deveria haver distinção entre variáveis exógenas e endógenas. Como essa história se relaciona com os modelos VAR?

16. **VAR:** Considere o modelo bi-variado abaixo:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \beta_{10} - \beta_{12} x_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} x_{t-1} + u_{yt} \\
x_t &= \beta_{20} - \beta_{21} y_t + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} x_{t-1} + u_{xt}
\end{aligned}
$$

onde tanto x_t quanto y_t são sequências estacionárias e u_{yt} e u_{xt} são ruídos brancos não-correlacionados.

Responda às seguintes questões:

a. O modelo acima está na forma reduzida? Explique.

b. Reescreva o sistema na forma matricial

c. Qual é a condição que nos permite estimar o VAR por mínimos quadrados ordinários?

d. Vamos assumir que a matriz dos coeficientes das primeiras defasagens do modelo seja $A_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.25 \end{bmatrix}$. Temos informações suficientes para verificar estacionariedade do modelo? Se sim, verifique se o modelo é estacionário. Se não, explicite quais informações estão faltando.

e. Explique o conceito de causalidade de Granger e diga como você implementaria um teste para o modelo acima.

17. **Modelo de Nível Local:** Mostre a qual modelo ARIMA corresponde o modelo de Estado de Espaço a seguir:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\
\mu_t &= \mu_{t-1} + \eta_t
\end{aligned}
$$

com ε_t e η_t sendo ruídos brancos.

18. **Espaços de Estado x Box-Jenkins:** Explicite a principal diferença entre os modelos ARIMA e os modelos de estado de espaço.

19. **Modelos Espaço de Estado:** Mostre a qual modelo ARMA(p,q) corresponde o modelo de Estado de Espaço a seguir:

$$x_t = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & \varphi & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{t-1} \\ y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$