SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CONTROL DEL TEMA 3

Ejercicio. Dada la variable bidimensional continua (X, Y) con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in [1,2] \times [2,5] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular las funciones de densidad marginales
¿Son independientes las variables X e Y?
Calcular la función de densidad condicional $g_1(x/y)$

Solución:

Primero se calcula el valor de k

$$1 = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx = k\int_1^2 \left[\int_2^5 dy\right] dx = k\int_1^2 [y]_2^5\, dx = 3k[x]_1^2 = 3k$$

Con lo que k=1/3

a) Funciones de densidad marginales

$f_1(x) = \int_2^5 \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}[y]_2^5 = 1$ Entonces $f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1,2] \\ 0 & resto \end{cases}$

$f_2(y) = \int_1^2 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}[x]_1^2 = \frac{1}{3}$ Entonces $f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & y \in [2,5] \\ 0 & resto \end{cases}$

b) Para ver si son independientes hay que comprobar si $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$

Para valores de (x,y) fuera de [1,2]x[2,5], las funciones valen todas 0, luego se cumple la igualdad. Para valores de (x,y) en [1,2]x[2,5]:

$f(x,y) = 1/3$

$f_1(x) = 1$ y $f_2(y) = 1/3$. Entonces $f_1(x)f_2(y) = 1 \times 1/3 = 1/3$

Luego también se cumple que $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ y por tanto X e Y son independientes.

c) Función de densidad condicional $g_1(x/y)$

Para valores de (x,y) en [1,2]x[2,5]

$$g_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

Ejercicio. La concentración de cierto componente químico de una marca de pintura es una variable aleatoria continua, con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{8} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Se determina independientemente, la concentración del componente químico en dos botes de pintura. Sean X e Y las variables que representan las concentraciones. Hallar

(a) La función de densidad conjunta

(b) P(X > Y)

Solución:

a) Como X e Y son independientes *f(x,y) = f₁(x)f₂(y)*

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{8} & x \in [0,2] \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{3y^2}{8} & y \in [0,2] \\ 0 & resto \end{cases}$$

Entonces:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{9x^2y^2}{64} & (x,y) \in [0,2]x[0,2] \\ 0 & resto \end{cases}$$

(b) P(X > Y)

$$P(X > Y) = \frac{9}{64}\int_0^2 \left[\int_0^x x^2y^2 dy\right] dx = \frac{9}{64}\int_1^2 x^2 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx = \frac{9}{64}\int_1^2 x^2 \frac{x^3}{3} dx$$

$$= \frac{9}{64}\left[\frac{x^6}{18}\right]_0^2 = \frac{1}{2}$$

Ejercicio. Una urna contiene 3 bolas blancas, 2 negras y 1 rojas. Se extraen al azar dos bolas de la bolsa. Se consideran las variables:
B = {nº de bolas blancas}, N = {nº de bolas negras}, R = {nº de bolas rojas}
Calcular la función de probabilidad conjunta (función de cuantía conjunta) de la variable bidimensional (N, R) y la función de probabilidad condicional g_1(n/R=1)

Solución:

a) La función de probabilidad conjunta (función de cuantía conjunta) de la variable bidimensional (N, R) es:

R				
1	3/15	2/15	0	
0	3/15	6/15	1/15	
	0	1	2	N

(Todas las probabilidades se calculan como nº de casos favorables/nº de casos posibles. No importa el orden ni se pueden repetir los elementos, con lo que se cuenta todo a partir de combinaciones. Los casos posibles son siempre $C_{6,2}$=15. Los casos favorables por ejemplo para N=1 y R=1 serían $C_{2,1}$ x $C_{1,1}$ = 2 x 1 = 2)

b) Para calcular la función de probabilidad condicional g_1(n/R=1) calculamos primero la función de probabilidad marginal de R:

R	0	1
$f_2(R)$	10/15	5/15

Calculamos ahora la función de probabilidad condicional:

$$g_1(n/R = 1) = \frac{f(n, R = 1)}{f_2(R = 1)}$$

para cada valor de la variable N y ponemos las probabilidades en la tabla:

$N \mid R = 1$	0	1
g_1	3/5	2/5

<u>Ejercicio.</u> Una urna contiene 3 bolas blancas, 7 negras y 2 rojas. Se extraen al azar dos bolas de la bolsa. Sea X el número de bolas blancas que hay en la extracción, y sea Y el de negras. Calcular la función de probabilidad conjunta (función de cuantía conjunta) f(x, y) y la probabilidad P(X < Y)

<u>Solución:</u>

a) Calcular la función de probabilidad conjunta

X = {nº de bolas blancas} = {0,1,2}
Y = {nº de bolas negras} = {0,1,2}

(Todas las probabilidades se calculan como nº de casos favorables/nº de casos posibles. No importa el orden ni se pueden repetir los elementos, con lo que se cuenta todo a partir de combinaciones. Los casos posibles son siempre $C_{12,2}$ = 66. Los casos favorables por ejemplo para X=1 e Y=1 serían $C_{3,1}$ x $C_{7,1}$ = 3 x 7 = 21)

Y				
2	21/66	0	0	
1	14/66	21/66	0	
0	1/66	6/66	3/66	
	0	1	2	X

b) P(X < Y) = P(X=0, Y= 1) + P(X=0, Y= 2) = 14/66 + 21/66 = 35/66 = 0.5303