Descomposición de una matriz cuadrada en un producto de matrices elementales

Objetivos. Supongamos que una matriz cuadrada A se puede transformar en la matriz identidad aplicando operaciones elementales por renglones. Mostrar que en este caso A es invertible y las matrices A y A^{-1} se pueden expresar como productos de matrices elementales.

Requisitos. Eliminación de Gauss–Jordan, matrices elementales y sus inversas, correspondencia entre matrices elementales y operaciones elementales.

1. Ejemplo. Aplicando operaciones elementales por renglones transformar la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso escribir las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales. Hacer comprobaciones.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Explicación detallada. Primera parte. Aplicando operaciones elementales por renglones, transformemos la matriz A en una matriz escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 += 3R_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += -2R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 *= \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz A se pudo transformar en la matriz identidad. Traduciendo el lenguaje de operaciones elementales al lenguaje de matrices elementales obtenemos que

$$E_*(1, 1/4)E_\leftrightarrow(1, 3)E_+(3, 1, -2)E_+(1, 2, 3)A = I. \tag{1}$$

Segunda parte. La igualdad (1) significa que A es invertible, y la siguiente matriz B es una matriz inversa izquierda de A:

$$B = E_*(1, 1/4)E_\leftrightarrow(1, 3)E_+(3, 1, -2)E_+(1, 2, 3).$$

Cada uno de los factores aquí es una matriz elemental, y todas las matrices elementales son invertibles. Por eso B es invertible (por ambos lados). Por consecuencia, A también es invertible por ambos lados, y $B = A^{-1}$.

Tercera parte. Los cálculos y razonamientos anteriore nos permiten escribir la matriz A^{-1} como un producto de matrices elementales:

$$A^{-1} = E_*(1, 1/4)E_{\leftrightarrow}(1, 3)E_+(3, 1, -2)E_+(1, 2, 3).$$

Usando fórmulas para la matriz inversa del producto y las fórmulas de matrices inversas para matrices elementales obtenemos la siguiente descomposición de la matriz A en un producto de matrices elementales:

$$A = E_+(1, 2, -3)E_+(3, 1, 2)E_{\leftrightarrow}(1, 3)E_*(1, 4). \tag{2}$$

Cuarta parte. Hagamos la comprobación de la fórmula (2). Para no repetir los pasos anteriores, apliquemos la multiplicación a la derecha, es decir, operaciones elementales por columnas. Recordemos que la multiplicación a la derecha por $E_+(q, p, \lambda)$ equivale a la operación elemental $C_p += \lambda C_q$.

$$I \xrightarrow{C_2 += -3C_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 += 2C_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 *= 4} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A. \qquad \checkmark$$

Quinta parte. Calculemos la matriz A^{-1} usando la fórmula

$$A^{-1} = E_*(1, 1/4)E_{\leftrightarrow}(1, 3)E_+(3, 1, -2)E_+(1, 2, 3)$$

e interpretando la multiplicación por matrices elementales a la izquierda como operaciones elementales por filas:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 += 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += -2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 *= \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sexta parte. Hacemos la comprobación que $AA^{-1} = I_n$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+1 & 0-3+3 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ -2+0+2 & -6+0+6 & 1+0+0 \end{bmatrix} = I_3. \checkmark \quad \square$$

2. Observación. Factorizaciones de A y A^{-1} en productos de matrices elementales no son únicas.

3. Observación. Para calcular la matriz A^{-1} aplicamos a la matriz I las mismas operaciones elementales por renglones que habíamos hecho con la matriz A para transformarla en la matriz identidad. Es cómodo hacer estas operaciones a la vez para calcular A^{-1}. Vamos a practicar este algoritmo en una de las siguientes clases.

4. Ejemplo. Aplicando operaciones elementales por renglones transformar la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso escriba las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales. Para la comprobación calcular la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución breve, se recomienda para exámenes y tareas.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 += -4R_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 += -5R_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 *= -1/2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1/2 & 5/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Respuesta:

$$A^{-1} = E_{\leftrightarrow}(1,3)E_{*}(2,-1/2)E_{+}(2,3,-5)E_{+}(2,1,-4),$$

$$A = E_{+}(2,1,4)E_{+}(2,3,5)E_{*}(2,-2)E_{\leftrightarrow}(1,3).$$

Comprobación que $AA^{-1} = I_3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1/2 & 5/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0-4+4 & 0+1+0 & 5-5+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \end{bmatrix} = I_3. \quad \checkmark \quad \square$$

5. Ejercicio. Haga el ejercicio anterior para la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.