

# Sistema completo de sucesos

- Un cjto. de sucesos  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  forma un sistema completo de sucesos (SCS), o una partición del espacio muestral  $\Omega$ , si cumple:
  - $A_i \neq \emptyset, \forall i$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j$
  - $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

# Problema 2.18

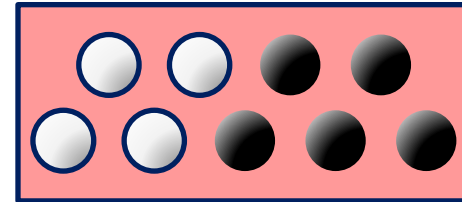
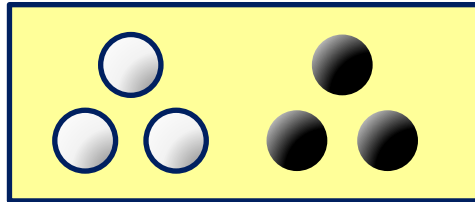
- De una baraja de 40 cartas se extrae una al azar. Los sucesos  $O = \{\text{obtener oro}\}$ ,  $C = \{\text{obtener copa}\}$ ,  $E = \{\text{obtener espada}\}$  y  $B = \{\text{obtener basto}\}$ , forman un Sistema Completo de Sucesos. ¿Por qué?

# Problema 2.19

- En el lanzamiento de dos dados, los sucesos  
 $A = \{\text{obtener la misma cara en ambos lanzamientos}\}$   
 $B = \{\text{obtener distinta cara y suma impar}\}$   
 $C = \{\text{obtener distinta cara y suma par}\}$   
forman un Sistema Completo de Sucesos. ¿Por qué?
  - Sin tener en cuenta el orden, podemos obtener:  
 $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$   
 $B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,3), (2,5), (3,4), (3,6), (4,5), (5,6)\}$   
 $C = \{(1,3), (1,5), (2,4), (2,6), (3,5), (4,6)\}$

# Problema 2.20 (enunciado)

- Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras; otra urna contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige una **urna al azar** y se extrae **una bola**. **Probabilidad** de que sea **blanca**.



- Para resolverlo debemos tener en cuenta la probabilidad de escoger primero uno de los grupos.
- Secuencia de sucesos:
  - 1º. Escoger urna (cjto. de sucesos que forman un SCS)
  - 2º. Elegir bola (otro cjto. de sucesos)

# T<sup>ma</sup> de Probabilidad Total

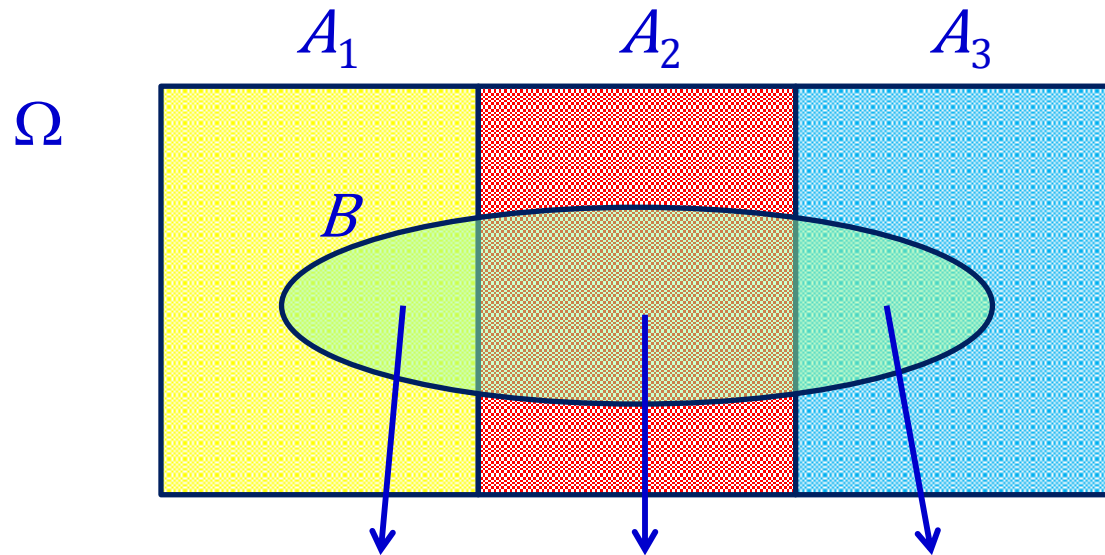
- Sea  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  un sistema completo de sucesos (SCS), y sea  $B$  un suceso cualquiera; entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

- Demostración:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) = P\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n \underbrace{(B \cap A_i)}_{\text{incompatibles}}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i) \end{aligned}$$

# T<sup>ma</sup> de Probabilidad Total



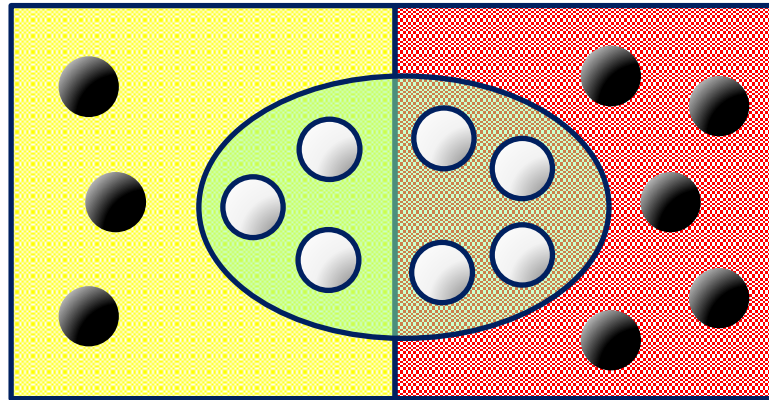
$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$$

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$$

# Problema 2.20 (solución)

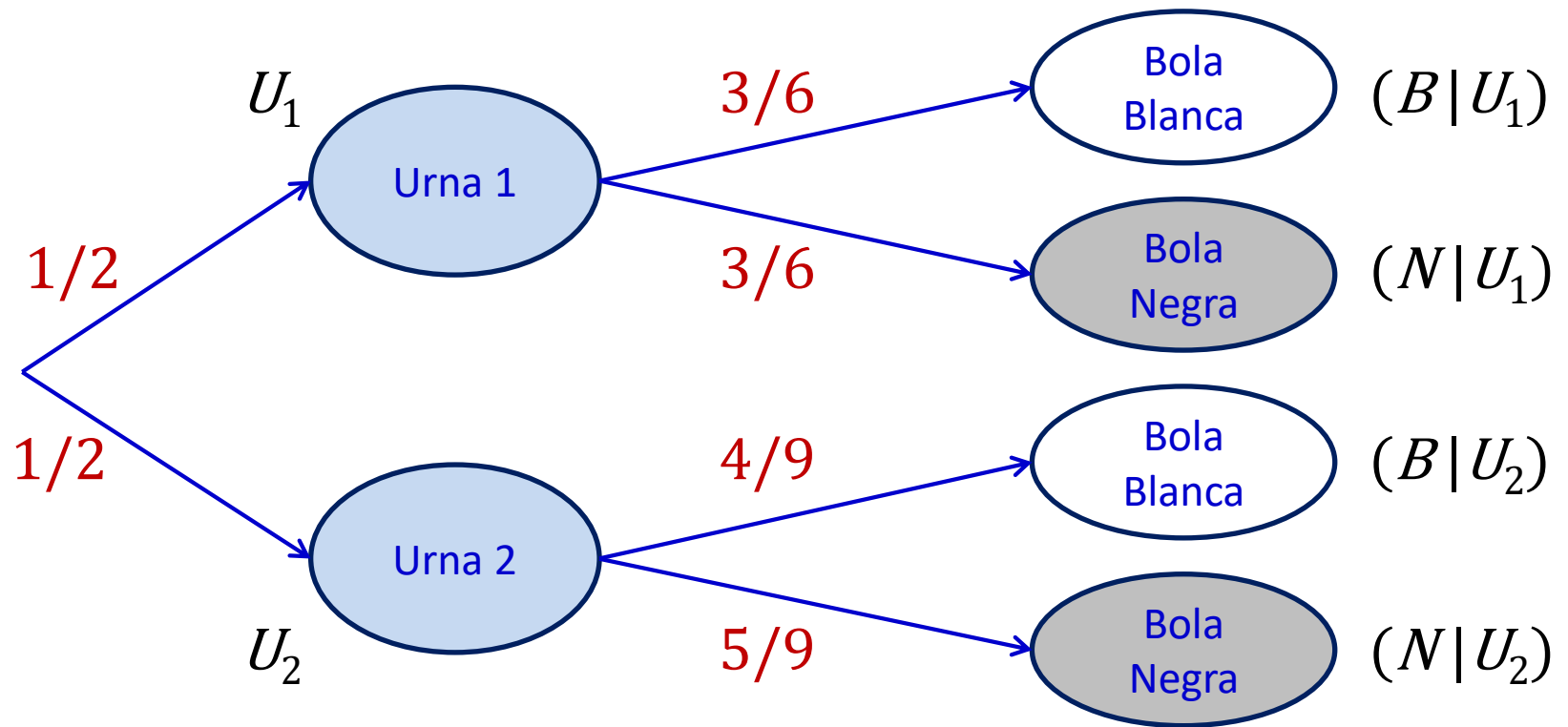
- Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras; otra urna contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige una **urna al azar** y se extrae **una bola**. **Probabilidad** de que sea **blanca**.



- $U_1 = \{\text{Urna 1}\}$ ,  $U_2 = \{\text{Urna 2}\}$ ,  $B = \{\text{Elegir bola blanca}\}$ 
  - $U_1$  y  $U_2$  forman un SCS.

# Problema 2.20 (cont.)

- Otra forma de verlo es mediante un árbol:





# Problema 2.21

- Se tienen tres conjuntos de números impares: del 1 al 7, del 9 al 21 y del 23 al 39. Elegimos aleatoriamente un conjunto de manera que el 1º tiene el doble de probabilidad de ser elegido que el 2º, y éste triple que el tercero.

Del conjunto elegido se obtiene un número al azar.

Calcular la **probabilidad** de que el número escogido sea **primo**.

- $C_1 = \{1, 3, 5, 7\}$ ;  $C_2 = \{9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$ ;  
 $C_3 = \{23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$ ;  $P = \{n^\circ \text{ primo}\}$

# T<sup>ma</sup> de Bayes

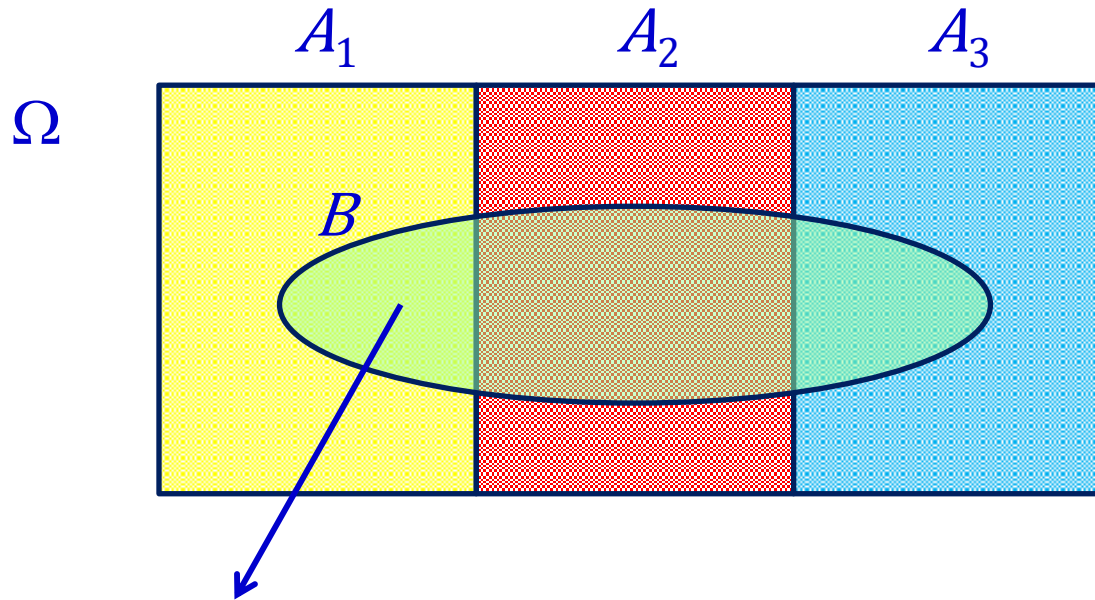
- Sea  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  un sistema completo de sucesos (SCS), y sea  $B$  un suceso tal que  $P(B) > 0$ ; entonces

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

- Demostración:
  - Usando el desarrollo de probabilidad condicional y el T<sup>ma</sup> de probabilidad total:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

# T<sup>ma</sup> de Bayes

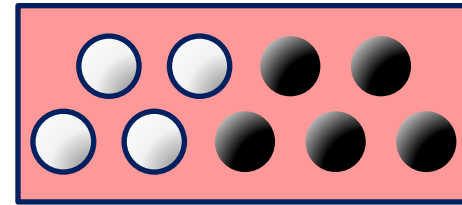
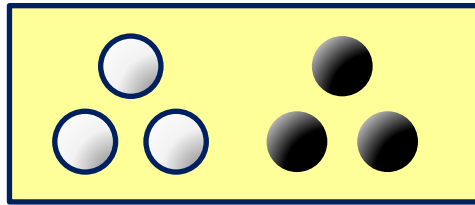


$$P(A_1|B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)}$$

- Bayes se aplica normalmente cuando la secuencia habitual de sucesos aparece invertida (se pregunta la prob. de uno de los sucesos del SCS).

# Problema 2.22 (del 2.20)

- Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras; otra urna contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige una **urna al azar** y se extrae **una bola**. Si la bola ha salido blanca, hallar la **probabilidad** de que se haya sacado de la segunda urna.



# Problema 2.23 (del 2.21)

- Se tienen tres conjuntos de números impares: del 1 al 7, del 9 al 21 y del 23 al 39. Elegimos aleatoriamente un conjunto de manera que el 1º tiene el doble de probabilidad de ser elegido que el 2º, y éste triple que el tercero.

Del conjunto elegido se obtiene un número al azar.

Si el **número** ha salido **primo**, calcular la **probabilidad** de que se haya obtenido del **segundo conjunto**.

- $C_1 = \{1, 3, 5, 7\}$ ;  $C_2 = \{9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$ ;  
 $C_3 = \{23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$ ;  $P = \{n^\circ \text{ primo}\}$