LA INVERSA DE UNA MATRIZ COMO PRODUCTO DE MATRICES ELEMENTALES

MATEMÁTICAS 1

Obtención de inversa de A (nxn)

- **Si la forma escalonada reducida de A es I_n >> A invertible**
- Cada OE/fila para obtener reducida se guardará en **matriz elemental** >> E_k

$$E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 A = I \qquad\qquad A E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 = I$$

$$E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 A = I$$

$$E_k^{-1}\, E_k \dots E_2\, E_1\, A = E_k^{-1}$$

$$E_{k-1}^{-1}\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1\, A = E_{k-1}^{-1}\, E_k^{-1}$$

$$A = E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1}\, E_k^{-1}$$

¿ME invertible?

$$A^{-1} = E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Inversa de una ME

	OE/fila	MATRIZ ELEMENTAL	
MATRIZ IDENTIDAD $\mathbf{I}$ (nxn)	$F_i \leftrightarrow F_j$	Tipo 1	P_{ij}
	$F_i \leftarrow \alpha\, F_i\ (\alpha \neq 0)$	Tipo 2	$E_i\,(\alpha)$
	$F_i \leftarrow F_i + \beta\, F_j$	Tipo 3	$E_{ij}\,(\beta)$

- $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$
- $E_i^{-1}(\alpha) = E_i(1/\alpha)$
- $E_{ij}^{-1}(\beta) = E_{ij}(-\beta)$

Inversa de una ME

Ejercicio 1- HI. Indica el tipo de cada ME.
Escribe $\mathbf{E_i^{-1}}$ y comprueba que $\mathbf{E_i^{-1} E_i = I}$

	TIPO		**INVERSA**
$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{12}(-3)$		⇒	$E^{-1}{}_{12}(-3) = E_{12}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = P_{12}$		⇒	$P^{-1}{}_{12} = P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = E_2(-4)$		⇒	$E^{-1}{}_2(-4) = E_2(-1/4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{bmatrix}$

Inversa de una ME

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

?

Inversa de una matriz como producto de ME

EJEMPLO

Escribe $\mathbf{A^{-1}}$ como producto de ME

Demuestra que $\mathbf{A\,A^{-1} = I}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

1º Se obtiene matriz identidad en reducida de A y se guardan OE/fila en ME

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A''} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A'''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{F2 \leftarrow F2 + (-3)F1}$ $\quad\mathbf{F2 \leftarrow (-1/2)F2}$ $\quad\mathbf{F1 \leftarrow F1 + (-2)F2}$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_{21}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad E_{2}(-1/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad E_{12}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{E_{12}(-2)\, E_{2}(-1/2)\, E_{21}(-3)\, A = I}}$$

$$\mathbf{A^{-1} = E_{12}(-2)\, E_{2}(-1/2)\, E_{21}(-3)}$$

Inversa de una matriz como producto de ME

Ejercicio 3 (H4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$