# TEMA 4- SUBESPACIOS.

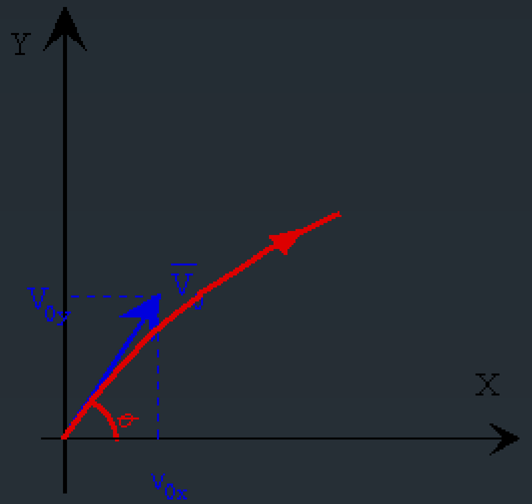
# BASES Y DIMENSIÓN

- **Espacio vectorial $R^n$ y Subespacios**
- **Combinación lineal de vectores.**
- **Independencia lineal.**
- **Subespacios de una matriz : Fila, Col, Nul.**

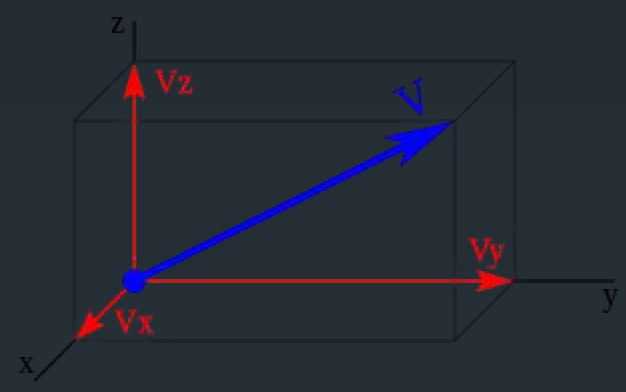
- **Estudiamos los conjuntos importantes de vectores en $R^n$ : subespacios.**
- **Subespacios de la matriz A que informan sobre $Ax = b$**

# Conocemos un vector v por su

## REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA




vector de $R^2$




vector de $R^3$

**vector** → sentido más general como elemento de un conjunto con operaciones determinadas

Conjunto → **espacio vectorial**
Sin representación geométrica

**Elementos del conjunto**→
- los vectores
- los polinomios,
- las matrices…

# ESPACIO VECTORIAL V

Conjunto de **elementos de V,**

que con las operaciones

de **suma y producto por escalar**

obtienen **otro** elemento del conjunto.

**Ej:** La suma de 2 vectores es un vector y no un punto

Si V = M(mxn) las operaciones EV aplicadas a M

obtienen otra M

Consideramos EV

sobre el cuerpo

**$R^n$**

**Los elementos de un EV se llaman vectores**

➔ **Suma** (op. Interna)

**u + v**

Conmutativa,

Asociativa,

Distributiva,

E. Neutro y opuesto

➔ **Producto escalar** (op. Externa)

**α v**

Asociativa,

Distributiva,

E. Unidad

# ESPACIO VECTORIAL V

Un hecho importante de los EV es que sus elementos se pueden sumar y multiplicar por escalares, i.e., se pueden formar **combinaciones lineales** de vectores obteniendo nuevos elementos del EV

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots \alpha_p\mathbf{u}_p$$

Con esto tenemos que dentro de un EV puede haber conjuntos que a su vez sean EV

**SUBESPACIOS VECTORIALES**

Subconjuntos cerrados bajo las operaciones del EV

# SubESPACIO VECTORIAL

Un **Sub-espacio Vectorial** de $R^n$ es todo subconjunto no vacío $S \subseteq R^n$ :

a) El vector nulo está en S, $\mathbf{0} \in \mathbf{S}$

b) Si un vector está en S, tb lo están sus múltiplos

$$\alpha \mathbf{u} \in \mathbf{S},\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{S},\ \alpha \in \mathbf{R}$$

c) Si dos vectores están en S, tb lo está su suma

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{S},\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}$$

**S es subespacio vectorial sii toda combinación lineal de elementos de S es a su vez un elemento de S.**

**Ejemplo**

**El plano XY formado por vectores (x,y,0) es subespacio de $R^3$ ya que**

a) Contiene al vector (0,0,0), x = 0, y = 0

b) Es cerrado para la suma y producto por escalar:

- Suma: (x,y,0) + (x',y',0) = (x+x', y+y', 0) que es un elemento del plano.
- Producto por un escalar: λ, λ(x,y,0)=(λx, λy, 0) que es un elemento del plano.

*>> Cómo generar subespacios vectoriales*

*del espacio vectorial **$R^n$***

**Conceptos necesarios:**

***>> Combinación Lineal de vectores***

***>> Independencia entre vectores***

# COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES N-DIMENSIONALES

Un vector $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ es **combinación lineal** (CL) de los vectores $\mathbf{u_1, u_2, \ldots u_p}$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ /

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + \ldots \alpha_p \mathbf{u_p}$$

**Ejemplo**

a) $(1,2) \in R^2$ CL de $(1,0)$ y $(0,1)$ ya que $(1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$

b) $(2,1,1) \in R^3$ **no** es CL de los vectores $(1,0,0)$ y $(1,1,0)$ ya que:

$$(2,1,1) \neq a(1,0,0) + b(1,1,0)$$

Falla ecuación: $\mathbf{1 = 0a + 0b}$

→ *Relacionamos CL entre vectores con buscar la solución de un SL.*

Para **demostrar** que un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es **CL** de **p** vectores

$\mathbf{u_1,\dots,u_p}$ / $u_i \in R^n$

se **construye** un **SL** a partir de la ecuación paramétrica que plantea a "**v**" como **CL** de los vectores $\mathbf{u_i}$ :

$$\mathbf{v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p}$$

$v = (v_1, \dots v_n)$

$u_1 = (u_{11}, u_{21} \dots u_{n1})$

$u_2 = (u_{12}, u_{22} \dots u_{n2})$,

…

$u_p = (u_{1p}, u_{2p} \dots u_{np})$,

$$v_1 = \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{12} + \dots + \alpha_p u_{1p}$$

$$v_2 = \alpha_1 u_{21} + \alpha_2 u_{22} + \dots + \alpha_p u_{2p}$$

…

$$v_n = \alpha_1 u_{n1} + \alpha_2 u_{n2} + \dots + \alpha_p u_{np}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{12} + \dots + \alpha_p u_{1p} \\
v_2 &= \alpha_1 u_{21} + \alpha_2 u_{22} + \dots + \alpha_p u_{2p} \\
&\dots\dots\dots\dots \\
v_n &= \alpha_1 u_{n1} + \alpha_2 u_{n2} + \dots + \alpha_p u_{np}
\end{aligned}$$

**Se resuelve**

**$Au = v$**

Si el sistema es **SCD** → v es **CL** de los vectores $u_i$ de forma **ÚNICA**

Si el sistema es **SCI** → v es **CL** de los vectores $u_i$ de **infinitas formas**

Si el sistema es **INCOMPATIBLE** → **v <u>NO</u> es CL** de los vectores $u_i$

**Ejercicio 1**

Para demostrar si el vector **u = (4,5,4)** es CL de **(1,1,1), (1,-2,0), (3,-2,1)**

Se construye un SL a partir de la siguiente ecuación paramétrica:

$$(4,5,4) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,-2,0) + \alpha_3(3,-2,1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 4 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 5 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 4 \end{cases} \Longrightarrow [A|u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{rref}\,[A|u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

**SCD → u es CL** de los vectores

(4,5,4) = **3**(1,1,1) -**2**(1,-2,0) +**1**(3,-2,1)

En la última columna tenemos los valores $\alpha_1=3$, $\alpha_2=-2$, $\alpha_3=1$

**Ejercicio 2**

Se demuestra si **u = (25, 22, 8)** es CL de **$v_1$ = (3,4,2) y de $v_2$ = (5,3,2)**

**Sol:**

$$(25,22,8) = \alpha_1(3,4,2) + \alpha_2(5,3,2)$$

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + 5\alpha_2 &= 25 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 22 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 8 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 25 \\ 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SL **Incompatible** → no hay forma de combinar $v_1$ y $v_2$ para obtener u

El vector **u** **NO** es CL de los vectores $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$

**Teorema 4.1:**

**Ax = b** es **compatible**

si, y sólo si,

**b** es **CL** de las **columnas de A**

$$[A|u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

**SCD** → la columna b es CL de las otras

(4,5,4) = **3**(1,1,1) -**2**(1,-2,0) +**1**(3,-2,1)

# Sub-espacio generado por un conjunto de vectores

Dado un conjunto de vectores $\mathbf{u_1,\ldots,u_p} \in R^n$, el conjunto de **todos** los vectores que pueden escribirse como **CL** de ellos se llama: **Envoltura lineal** de dichos vectores.

Se escribe : $\mathbf{Env\{ u_1,\ldots,u_p \}}$

Los vectores $\mathbf{u_1,\ldots,u_p}$ son:

**vectores generadores**

**o conjunto generador del espacio $R^n$**.

*La envoltura es un conjunto infinito de vectores.*

**Ejercicio 3** Se calcula la envoltura o el subespacio que generan los vectores **$u_1 = (1,0,0)$ , $u_2 = (0,1,0)$ en el espacio** $R^3$

**Sol:**

Se comprueba si un vector genérico: (a, b, c) es CL de $\mathbf{u_1, u_2}$ →

$$(a, b, c) = \alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (0,1,0)$$

1º Se plantea SL → vectores en columnas de una matriz

2º Se resuelve SL.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

**SL es SCD si** $c = 0$

$\alpha_2 = b$

$\alpha_1 = a$

$u_1$ y $u_2$ generan el subespacio:

$$Env \{ (1,0,0) , (0,1,0) \} = \{ (a, b, 0) : a, b \in R\}$$

➔ Todo espacio vectorial **V** posee un nº finito de vectores que describen por completo a dicho espacio.

PROCEDIMIENTO

para determinar si los vectores $\mathbf{u_1,\ldots u_k}$ **generan** el Espacio vectorial **V** :

Paso1: **Seleccionar** un vector arbitrario de $v \in V$, $v = (a, b, c\ldots)$

Paso2: Determinar si **v es CL** de los vectores $\mathbf{u_1,\ldots u_k}$ .

**Si es CL** → $\mathbf{u_1, \ldots, u_k}$ **generan a V;**

**Si no es CL** → $\mathbf{u_1, \ldots, u_k}$ **no generan** a V

*Ojo: paso 2: determinar si el SL generado es compatible.*

**Ejercicio 4**

Sea V el espacio vectorial $R^3$ y sean $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,2)$, $v_3 = (1,1,0)$

Se comprueba si $v_1$, $v_2$ , $v_3$ generan a V

**Sol:**

Paso 1. Sea $v = (a, b, c) \in R^3$, $a, b, c \in R$

Paso 2. Se comprueba si $v$ es CL de $v_1$, $v_2$ , $v_3$ $\Leftrightarrow$

$$(a, b, c) = \alpha_1 (1,2,1) + \alpha_2 (1,0,2) + \alpha_3 (1,1,0)$$

Se **estudia SL**:

$$\begin{cases} a = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ b = 2\alpha_1 + \alpha_3 \\ c = \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = (-2a + 2b + c)/3 \\ \alpha_2 = (a - b + c)/3 \\ \alpha_3 = (4a - b - 2c)/3 \end{cases}$$

Como para cada a, b, c existe una solución $\rightarrow$ $v_1$, $v_2$, $v_3$ generan a V

En algunos casos una **CL** de vectores

da como resultado el **vector nulo (0,…0)**

**Ej:** -(4,5,4) + 3(1,1,1) -2(1,-2,0) + (3,-2,1) = (0,0,0)

Veamos este concepto…..

## Independencia lineal

**Def:** Los vectores $\mathbf{u_1 \ldots u_p} \in R^n$ son **Linealmente Independientes** (LI) si existen escalares $a_1, \ldots a_p$ **todos nulos** / $a_1u_1 + \ldots a_pu_p = 0$

**Def:** Los vectores $\mathbf{u_1 \ldots u_p} \in R^n$ son **Linealmente Dependientes** (LD) si existen escalares $a_1, \ldots a_p$ **no todos nulos** / $a_1u_1 + \ldots a_pu_p = 0$

*>> Un conjunto de vectores es **LI***

*si ninguno de ellos*

*puede ser expresado*

*como una **CL de los restantes.***

## PROCEDIMIENTO

**para establecer si** los vectores **$u_1, \dots u_n$** son **LI /LD**

**Paso 1**.- Plantear la ecuación **$a_1u_1+\dots a_nu_n = 0$** que lleva a un **SH**

**Paso 2**.- Resolver el **SH**.

- Si SH tiene **sólo** solución trivial (**SCD**) → los vectores son **LI**
- Si SH tiene solución no trivial (**SCI**) → los vectores son **LD**

**Ejercicio 5** Se estudia si los vectores $v_1 = (1,1,1)$ , $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (0,1,1)$ son **LD o LI**

**Sol:** $a_1\,(1, 1, 1) + a_2\,(1, 0, 1) + a_3\,(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$a1 = a2 = a3 = 0.$

Los escalares son todos nulos → vectores $\mathbf{v_1, v_2, v_3}$ → **LI**

**Ejercicio 6**

Estudiar si $S = \{(4, 5, 4), (1,1,1), (1,-2, 0), (3,-2, 1)\}$ es LD o LI

**Sol:**

$$a_1 (4, 5, 4) + a_2 (1, 1, 1) + a_3 (1,-2, 0) + a_4 (3,-2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} 4a_1 + a_2 + a_3 + 3a_4 &= 0 \\ 5a_1 + a_2 - 2a_3 - 2a_4 &= 0 \\ 4a_1 + a_2 + \quad\quad a_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**$a_4$ parámetro → SCI infinitas soluciones**

**Luego S es LD**

**$(3,-2, 1) = (1)\,(4, 5, 4) + (-3)\,(1, 1, 1) + (2)\,(1,-2, 0)$**

**Un conjunto de vectores LI en $R^n$ contiene a lo más n vectores.**

**Los vectores (2,-3,4), (4,7,-6) , (18, -11, 4) y (2,-6,3) son LD**

**ya que forman un conjunto de 4 vectores de 3 componentes ($R^3$)**

***¿cuál de los 3 vectores es CL de los otros ?***

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 18 & 2 \\ -3 & 7 & -11 & -6 \\ 4 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} & \mathbf{v_4} \end{matrix} \end{array} \qquad \mathrm{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{(2,-6,3)} = (-0.4)\, v_1 + (-0.5)\, v_2 + (0.2)\, v_3$$

Se debe calcular el

conjunto <u>mínimo</u> de vectores de un

espacio **V** que describe completamente a **V**

**Esto nos lleva al concepto de base**

# BASES DE UN ESPACIO VECTORIAL

**Def:** Una **base B** es el **menor conjunto** de vectores **LI** que generan todo el espacio **S**.

Cualquier vector **u** se escribe como **CL** de los elementos de la **base B**:

$$\mathbf{u = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n},$$

$a_k$ : escalares;
$v_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ : elementos de la base B.

Los vectores $\mathbf{v_1,\ldots v_n}$ del espacio vectorial **S** forman una base para S si

**a)** $v_1,\ldots v_n$ generan S

**b)** $v_1,\ldots v_n$ son LI

Si S admite base finita $B = \{v_1,\ldots v_n\}$ de n-vectores ➔ **dim(S) = n**

$v_1 \neq v_2 \ldots \neq v_n$

No nulos $v_k$

# BASES Y DIMENSIÓN

**Propiedades.** Sea **B** base de **S**, **espacio vectorial /dim(S)=n**

- Todos los elementos de **B** pertenecen al espacio **S.**

→ Todas las bases de **S** tienen **n-vectores**.

→ Cada vector de **S** se escribe, de forma única, como **CL** de los vectores de **B**

→ Los elementos de **B** forman un sistema de vectores **LI**.

→ Las bases no son únicas. Todo conjunto de n-vectores **LI** en $R^n$ es una base en $R^n$

→ Una base tiene el **mínimo** nº de vectores **LI** que generan todos los vectores del espacio **S**.

→ Todas las bases de un espacio vectorial tienen **el mismo** nº de vectores.

**Ejercicio 7**

Demuestra que $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (0,2,-3)\}$ es base de $R^3$

**Sol:** a) **B es sistema generador de $R^3$,** $(a,b,c) \in R^3$ es CL de vectores de B

$$(a,b,c) = a_1 (1,0,0) + a_2 (1,1,0) + a_3 (0,2,-3)$$

Sistema:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 \quad\quad &= a \\ a_2 + 2a_3 &= b \\ -3a_3 &= c \end{aligned}$$

SCD solución $a_3 = -c/3$; $a_2 = b - 2c$; $a_1 = a - b + 2c$

b) Vectores LI → [A|0] → SCD- solución sólo trivial (columnas que tienen 1p).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{reff}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 8**

Estudiar si el conjunto de vectores C de $R^4$ es LI /buscar base

$C = \{(2,1,1,1), (1,1,1,1), (3,1,1,2), (0,1,2,1), (2,-1,1,-1)\}$

**Sol:**

→Nº de vectores = 5 > 4 es nº de componentes del vector → vectores LD

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rref}(A)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En rref(A) las columnas sin 1's son vectores dependientes

**columna 5 → vector (2,-1,1,-1) es CL del resto → lo quitamos**

**Base de $R^4$ = {(2,1,1,1), (1,1,1,1), (3,1,1,2), (0,1,2,1)}**

## SUBESPACIOS NOTABLES QUE PROPORCIONA la matriz $A=[a_{ij}]$ mxn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Subespacio Columna: Col A**

Las columnas de

$A = [\ a_{:1},\dots a_{:n}\ ]$

consideradas como

**n-vectores** de $R^m$

Generan un subespacio de $R^m$

$$\boxed{\text{Col } A = \text{Env}\{\ a_{:1},\dots a_{:n}\ \}}$$

$$a_{:1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Columna 1 de A

*La base ColA está formada por los vectores de A que en rref(A) tienen 1's principales*

*El nº de vectores columnas LI se llama rango.*

## BASE Y DIMENSIÓN del subespacio Col

**Ejercicio 9**

Hallar base y dimensión del subespacio Col A / $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Sol: 4 columnas de A → 2 vectores son **LD** (espacio $R^2$)

(1,1), (1,0), (2,3), (-1,1)

→ base formada, como mucho, por 2 vect. LI

Averiguamos cuáles son en la reducida de A:

$$\text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Las Columnas de la reducida de A que tienen 1 principal forman la **base** del subespacio Col(A)

**Base(Col A) : { (1,1), (1,0) }**

**Dim (Col A) = 2**

## SUBESPACIOS NOTABLES QUE PROPORCIONA la matriz $A=[a_{ij}]$ mxn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Subespacio Fila: Fil A**

Las filas de

$A = [a_{1:} \,;\, a_{2:} \,;\ldots a_{m:}\,]$

consideradas como

**m-vectores** de $R^n$

Generan un

subespacio de $R^n$

$$\boxed{\text{Fil } A = \text{Env}\{\, a_{1:},\, a_{2:},\ldots a_{m:} \,\}}$$

$a_{1:} = (a_{11}\; a_{12\ldots}\; a_{1n}\,)$

Fila 1 de A

*La base FilA está formada por los vectores de A que en rref(A) tienen 1's principales*

**Ejercicio 10**

Hallar base y dimensión del subespacio Fil A /

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

*Las dos filas de la reducida de A tienen 1's principales luego*

$\boxed{\text{Fil } A = \text{Env}\{(1,1,2,-1), (1,0,3,1)\}}$

$\boxed{\text{Dim Fil } A = 2}$

## SUBESPACIOS NOTABLES QUE PROPORCIONA la matriz A mxn

### Subespacio nulo: **Nul A**

El espacio nulo de una matriz A (mxn), Nul A

es el conjunto de todas las **soluciones del SH**

**Ax = 0**

En notación de conjuntos:

$$\text{Nul } A = \{ x \ / \ x \in R^n, \ Ax = 0 \}$$

*El subespacio nulo se llama **núcleo** de la matriz*

**Ejercicio 11**

Hallar base y dimensión del subespacio Nul A / $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

**Sol:** **Nul A = soluciones de Ax=0**

$$\text{rref}[A|0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/7 & 9/7 & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & -4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Nº 1 principales = 2**

**<**

**Nº vectores → vectores LD**

**Solución general del SH:**

$$x_1 \quad - 9/7x_3 + 9/7x_4 = 0;$$
$$x_2 - 3/7x_3 - 4/7x_4 = 0;$$
$$0 = 0$$

**Ecuaciones paramétricas**

$x_1 = 9/7x_3 - 9/7x_4$
$x_2 = 3/7x_3 + 4/7x_4$
$x_3$
$x_4$

$$(9/7x_3 - 9/7x_4,\ 3/7x_3 + 4/7x_4,\ x_3,\ x_4) = x_3\,(9/7,3/7,1,0) + x_4\,(-9/7, 4/7,0,1)$$

**BASE Nul A : {(9/7, 3/7, 1, 0), (-9/7, 4/7, 0, 1)}**

**Ejercicio 12**

Hallar base y dimensión del subespacio Nul A /

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

**Sol:** **Nul A = soluciones de Ax=0**

**Solución general del SH:**

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 3x_3 + x_4 &= 0; \\ x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

**Ecuaciones paramétricas**

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_3 - x_4 \\ x_2 &= x_3 + 2x_4 \\ x_3 & \\ x_4 & \end{aligned}$$

$$(-3x_3 - x_4,\ x_3 + 2x_4,\ x_3,\ x_4) = x_3\,(-3, 1,1,0) + x_4\,(-1, 2,0,1)$$

**BASE Nul A : { (-3, 1, 1, 0), (-1, 2, 0, 1) }**

**Ejercicio 12**

**Determinar si u pertenece al espacio nulo de A**

**$A = [1,-3,-2; -5,9,1]$** **$u = [5,3,-2]^T$**

**Sol:**

Para probar que u satisface **Au = 0**, sólo hay que calcular

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**u está en Nul A.**

# InDependencia lineal

**Teorema**

Sea **$Ax = 0$**, las **columnas de A** forman un conjunto **LD**

si, y sólo si,

el **SH es indeterminado**

Sea A matriz cuyas columnas son los vectores $u_1 \ldots u_n$

- Las **columnas de A son LI** sii, todas ellas son columnas con 1º principales.
- Las **columnas de A son LD** sii, alguna columna no tiene 1º principales

Las columnas con 1's principales son LI

## Resultados:

el <u>espacio nulo</u> de una matriz A mxn es un

subespacio de $R^n$.

También, el conjunto de todas las <u>soluciones</u>

de un sistema **Ax = 0** de m ecuaciones lineales

homogéneas con n incógnitas

es un subespacio de Rn.