TEMA 4- SUBESPACIOS VECTORIALES.

BASES Y DIMENSIÓN

- **Espacio vectorial R^n y Subespacios**
- **Combinación lineal de vectores.**
- **Independencia lineal.**
- **Subespacios de una matriz : Fila, Col, Nul.**

- **Estudiamos los importantes conjuntos de vectores en R^n : subespacios.**
- **Subespacios de la matriz A que informan sobre $Ax = b$**

Espacio y subespacio vectorial en ciencia y tecnología

Conocer que un conjunto de elementos es un **espacio vectorial** permite saber qué **reglas** cumplen los elementos del conjunto y cómo se **relacionan entre sí**.

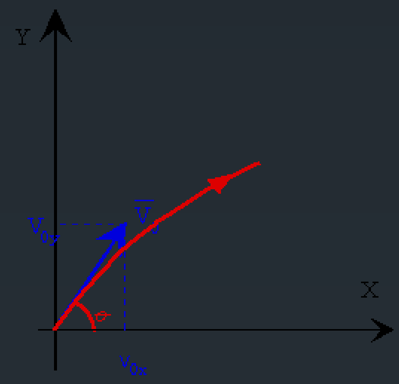
Se garantiza que si sumas vectores saldrá otro vector que también cumple las mismas reglas que los originales.

Considerar subconjuntos de un espacio vectorial, **subespacios**, permite centrarte en **conjuntos más simples de elementos**, en lugar de en todo el espacio.
Puedes encontrar qué **elementos básicos del EV son los que dan lugar por combinación lineal** a cualquier otro elemento.

Ejemplo las **vibraciones de un edificio** pueden descomponerse en "modos de vibración", que son las bases del espacio vectorial de todas la posibles vibraciones (las vibraciones se suman linealmente).
Los **movimientos** en el espacio n-dimensional pueden descomponerse en operaciones básicas (dilataciones, rotaciones,...), cada una correspondiente a un subespacio del espacio n-dimensional. Esto se usa ej., para **posicionar en el espacio las piezas por parte de un robot**.
Las **deformaciones de un sólido** también se describen mediante un espacio vectorial, como combinación de distintas "bases" de deformaciones.

>> ESPACIO VECTORIAL > R^n

Conjunto de vectores (n-tuplas) : $u = (u_1, u_2, \ldots u_n)$



vector de R^2

OPERACIONES

→ **Suma** (op. Interna)

u + v

Conmutativa,

Asociativa,

Distributiva,

E. Neutro

E. opuesto

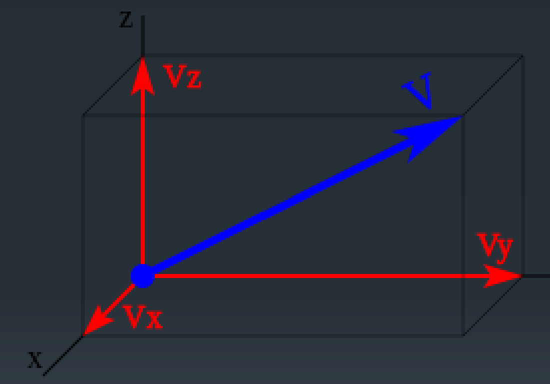
→ **Producto escalar** (op. Externa)

α v

Asociativa,

Distributiva,

E. Unidad



vector de R^3

Subconjuntos del EV >> SUB-ESPACIO VECTORIAL

S es subespacio vectorial de R^n si :

a) Vector nulo $\mathbf{0} \in \mathbf{S}$
b) $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{S}, \alpha \in \mathbf{R}, \alpha\mathbf{u} \in \mathbf{S}$
c) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}, \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{S}$

Con los elementos de un **EV** se pueden obtener

nuevos elementos

usando **combinaciones lineales**

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES N-DIMENSIONALES

Un vector $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ es **combinación lineal** (CL) de los vectores $\mathbf{u_1, u_2, \ldots u_p}$ $\mathbf{u_i} \in \mathbf{R}^n$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p \in \mathbf{R}$ /

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + \ldots \alpha_p \mathbf{u_p}$$

Ejemplo

a) $(1,2) \in R^2$ CL de $(1,0)$ y $(0,1)$ ya que $(1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$

b) $(2,1,1) \in R^3$ **no** es CL de los vectores $(1,0,0)$ y $(1,1,0)$ ya que:

$$(2,1,1) \neq a(1,0,0) + b(1,1,0)$$

Falla ecuación: $\mathbf{1 = 0.a + 0.b}$

Para **demostrar** que $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ es **CL** de **p** vectores $\mathbf{u_1,\ldots u_p}$ / $u_i \in R^n$

se **construye** un **SL** a partir de la ecuación paramétrica que plantea a "**v**"

como **CL** de los vectores $\mathbf{u_i}$ / $\mathbf{v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p}$

$v = (v_1, v_2, \ldots v_n)$

$u_1 = (u_{11}, u_{21} \ldots u_{n1})$

$u_2 = (u_{12}, u_{22} \ldots u_{n2})$,

…

$u_p = (u_{1p}, u_{2p} \ldots u_{np})$,

$$\begin{aligned}
v_1 &= \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{12} + \ldots + \alpha_p u_{1p} \\
v_2 &= \alpha_1 u_{21} + \alpha_2 u_{22} + \ldots + \alpha_p u_{2p} \\
&\ldots \\
v_n &= \alpha_1 u_{n1} + \alpha_2 u_{n2} + \ldots + \alpha_p u_{np}
\end{aligned}$$

Se resuelve

$Au = v$

Si el sistema es **SCD** → v es **CL** de los vectores u_i de forma **ÚNICA**

Si el sistema es **SCI** → v es **CL** de los vectores u_i de **infinitas formas**

Si el sistema es **INCOMPATIBLE** → **v NO es CL** de los vectores u_i

Ejercicios 1 y 2

Ej-1 (H5)

2018-19

Demostrar si el vector **u = (4,5,4)** es CL de S = { **(1,1,1), (1,-2,0), (3,-2,1)** }

Construir SL a partir de la siguiente ecuación paramétrica:

$$(4,5,4) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,-2,0) + \alpha_3(3,-2,1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 4 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 5 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 4 \end{cases}$$

$$[A|u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{rref } [A|u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

SCD

$\alpha_1 = 3$

$\alpha_2 = -2$

$\alpha_3 = 1$

vector **u** como **CL** de los vectores de S:

(4,5,4) = **3**(1,1,1) + **(-2)**(1,-2,0) + **1**(3,-2,1)

Ej-2 (H5)

Demuestra si **u = (25, 22, 8)** es **CL** de $v_1 = (3,4,2)$ y de $v_2 = (5,3,2)$

$$(25,22,8) = \alpha_1(3,4,2) + \alpha_2(5,3,2)$$

Sol:

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + 5\alpha_2 &= 25 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 22 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 8 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 25 \\ 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SL **Incompatible** → no hay forma de combinar v_1 y v_2 para obtener u

El vector **u** **NO** es **CL** de los vectores $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$

Vectores que generan todo el espacio R^n

Dado un conjunto de vectores

$S = \{ \mathbf{u_1} \dots \mathbf{u_p} \} \in R^n$

el conjunto de todas las **CL** de S se llama:

Envoltura lineal de S >> $\mathbf{Env(S) = Env\{u_1 \dots u_p\}}$

>> S es un sistema generador de R^n

>> Todo espacio vectorial posee un nº **finito** de vectores que lo generan

PROCEDIMIENTO

>> Para determinar si los vectores $u_1 \dots u_k$ **generan** el Espacio Vectorial **V** :

Paso1: **Seleccionar** un vector arbitrario $v \in V$, $v = (a, b, c\dots)$

Paso2: Determinar si **v es CL** de los vectores $u_1,\dots u_k$

Si es CL → $u_1, \dots u_k$ **generan a V**

Si no es CL → $u_1 \dots u_k$ **no generan** a V

>> Para comprobar si $u \in Env\{v_1, \dots, v_n\}$ se plantea un sistema de ecuaciones y se comprueba si es **compatible o incompatible**.

>> **Ax = b** es **compatible**

si, y sólo si,

b es **CL** de **columnas de A**

Ejercicios 3, 4, 5

Ej-3 (H5)

Conjunto generador

Demuestra si u = (1,2,3) pertenece al subespacio generado por v = (4,5,6), w = (7,8,9) ,

u $\in$ Env {v,w} = Env {(4,5,6), (7,8,9)}

Sol:

Se comprueba si u es CL de v, w: **u = α v + β w**.

(1,2,3) = α (4,5,6) + β (7,8,9)

$$\boxed{\begin{array}{l} 4\alpha + 7\beta = 1 \\ 5\alpha + 8\beta = 2 \\ 6\alpha + 9\beta = 3 \end{array}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SCD → u $\in$ Env {v,w} → u = 2 v + (-1) w.

Ej-4 (H5)

Calcula la envoltura / subespacio que generan los vectores

$\mathbf{u_1 = (1,0,1)}$, $\mathbf{u_2 = (0,1,1)}$ en R^3

Sol: Se comprueba si un vector genérico: (a, b, c) es CL de $\mathbf{u_1, u_2}$ →

$$(a, b, c) = x\,(1,0,1) + y\,(0,1,1)$$

1º Se plantea **SL →** vectores en columnas de una matriz

2º Se resuelve SL

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-a-b \end{bmatrix}$$

Si $c - a - b = 0$ → **SCD**

$$\boxed{\mathbf{Env\,\{\,(1,0,1),\,(0,1,1)\,\} = \{\,(a,b,c) \in R^3 \,/\; c-a-b=0\,\}}}$$

Ej-5 (H5)

Sea $V \subseteq R^3$, $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,2)$, $v_3 = (1,1,0)$

Se comprueba si v_1, v_2, v_3 generan V

Sol:

Paso 1. Sea $v = (a, b, c) \in R^3$, $a, b, c \in R$

Paso 2. Se comprueba si v es CL de $v_1, v_2, v_3 \Leftrightarrow$

$$(a, b, c) = c_1 (1,2,1) + c_2 (1,0,2) + c_3 (1,1,0)$$

Se **estudia SL**:

$$\begin{aligned} a &= c_1 + c_2 + c_3 \\ b &= 2c_1 + c_3 \\ c &= c_1 + 2c_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= (-2a + 2b + c)/3 \\ c_2 &= (a - b + c)/3 \\ c_3 &= (4a - b - 2c)/3 \end{aligned}$$

Como para cada a, b, c existe una solución $\rightarrow$ v_1, v_2, v_3 generan a V

En algunos casos una **CL** de vectores

da como resultado el **vector nulo (0,…0)**

Ej: $-(4,5,4) + 3(1,1,1) - 2(1,-2,0) + (3,-2,1) = (0,0,0)$

Veamos este concepto…..

Independencia lineal

Def: Los vectores $\mathbf{u_1 \ldots u_p} \in R^n$ son **Linealmente Independiente** (LI) si existen escalares $a_1 \ldots a_p$ **todos nulos** / $a_1u_1 + \ldots + a_pu_p = 0$

Def: Los vectores $\mathbf{u_1 \ldots u_p} \in R^n$ son **Linealmente Dependiente** (LD) si existen escalares $a_1 \ldots a_p$ **no todos nulos** / $a_1u_1 + \ldots + a_pu_p = 0$

>> Un conjunto de vectores es **LI**

si ninguno de ellos

puede ser expresado

como una **CL de los restantes.**

PROCEDIMIENTO

para establecer si los vectores $u_1 \ldots u_n$ son **LI /LD**

Paso 1.- Plantear la ecuación $a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = 0$ que lleva a un **SH**

Paso 2.- Resolver el **SH**.

- Si SH tiene **sólo** solución trivial (**SCD**) → los vectores son **LI**
- Si SH tiene solución no trivial (**SCI**) → los vectores son **LD**

Ejercicios 6, 7, 8

Estudia si los vectores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (0,1,1)$ son **LD o LI**

Sol: $a_1 (1, 1, 1) + a_2 (1, 0, 1) + a_3 (0, 1, 1) = (0, 0, 0)$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$

Los escalares son todos nulos >> vectores $\mathbf{v_1, v_2, v_3} \rightarrow$ **LI**

Ej-7 (H5)

Estudia si $S = \{ (4, 5, 4), (1,1,1), (1,-2, 0), (3,-2, 1) \}$ es LD o LI

Sol:

$$a_1 (4, 5, 4) + a_2 (1, 1, 1) + a_3 (1,-2, 0) + a_4 (3,-2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} 4a_1 + a_2 + a_3 + 3a_4 &= 0 \\ 5a_1 + a_2 - 2a_3 - 2a_4 &= 0 \\ 4a_1 + a_2 + \phantom{a_3 +{}} a_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

SCI
col-4 LD
a_4 parámetro

$$\boxed{\begin{aligned} a_3 + 2a_4 = 0 &\rightarrow a_3 = -2a_4 \\ a_2 - 3a_4 = 0 &\rightarrow a_2 = 3a_4 \\ a_1 + a_4 = 0 &\rightarrow a_1 = -a_4 \end{aligned}}$$

$$(3,-2, 1) + (-1) (4, 5, 4) + (3) (1, 1, 1) + (-2) (1,-2, 0) = (0, 0, 0)$$

$$(3,-2, 1) = (1) (4, 5, 4) + (-3) (1, 1, 1) + (2) (1,-2, 0)$$

Si $a_4 = 1$ $\boxed{\begin{aligned} a_3 &= -2 \\ a_2 &= 3 \\ a_1 &= -1 \end{aligned}}$

Ej-8 (H5)

Comprueba si los vectores **S = { (1,1,0,0), (0,0,1,1), (0,1,1,0) }** de $\mathbb{R}^4$ son **LI**

Sol:

$$a1\,(1,1,0,0) + a2\,(0,0,1,1) + a3\,(0,1,1,0) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SCD → a1 = a2 = a3 = 0

LI

(1,1,0,0) + a2 (0,0,1, 1) + a3
(0,1,1,0) = (0, 0, 0, 0)

Un conjunto de vectores LI en R^n contiene a lo más n vectores.

Los vectores (2,-3,4), (4,7,-6) , (18, -11, 4) y (2,-6,3) son LD

ya que forman un conjunto de 4 vectores de 3 componentes (R^3)

Se busca el vector que es LD

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 18 & 2 \\ -3 & 7 & -11 & -6 \\ 4 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \end{array} \qquad \mathrm{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$(2,-6,3) = (-0.4)\, v_1 + (-0.5)\, v_2 + (0.2)\, v_3$$

Se debe calcular el

número mínimo de

vectores de un espacio vectorial **V**

que genere completamente a **V**

Esto nos lleva al concepto de BASE

SISTEMA GENERADOR DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea **V** un espacio vectorial

Un ***sistema generador*** de **V** es un conjunto de vectores **S = {v_1 … v_n }** que tiene la propiedad de que cualquier vector de **V** se puede escribir como **CL** de los vectores de S

En R^2 los vectores

$v_1 = (1/2, 0)$, $v_2 = (0, 1/3)$

forman un sistema generador

ya que cualquier vector de R^2

se puede poner como **CL** de ellos.

Demuestra…

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & a \\ 0 & 1/3 & b \end{pmatrix}$$

$$\text{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 3b \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{(a, b) = 2av_1 + 3bv_2}$$

BASES DE UN ESPACIO VECTORIAL

>> Un Sistema Generador puede tener **vectores LI** y **LD**

si quitamos los **LD**

obtenemos

Una ***BASE***

de un espacio vectorial es un

sistema generador

cuyos vectores son **LI**

DIMENSIÓN : Si **S** admite una base de **n-vectores**

dim(S) = n

BASES DE UN ESPACIO VECTORIAL

>> Una **base B** es el menor conjunto de vectores **LI** que generan todo el espacio **S**.

⇓ Cualquier vector **u** se escribe como una **CL** de los elementos de la **base B**:

$$\mathbf{u = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n},$$

a_k : escalares;
v_k (k = 1, ..., n) : elementos de la base B.

Ej-9 (H5)

Demuestra que B = {(1,0,0), (1,1,0), (0,2,-3)} es base de R^3

Sol: a) ¿ B es sistema generador de R^3 ?

$(a,b,c) \in R^3$ es CL de vectores de B

$$(a,b,c) = c_1\,(1,0,0) + c_2\,(1,1,0) + c_3\,(0,2,-3)$$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= a \\ c_2 + 2c_3 &= b \\ -3c_3 &= c \end{aligned}$$

SCD solución

$c_3 = -c/3;$

$c_2 = b + 2c/3$

$c_1 = a - b - 2c/3$

b) ¿ Los vectores de B son LI ? → ¿ $Ax = 0$ es SCD ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{reff}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estudia si el conjunto de vectores C de R^4 es LI /buscar base

$$C = \{ (2,1,1,1),\ (1,1,1,1),\ (3,1,1,2),\ (0,1,2,1),\ (2,-1,1,-1) \}$$

Sol:

→Nº de vectores = 5 > 4 nº de componentes del vector → vectores **LD**

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rref}(A)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En rref(A) las columnas sin 1's son vectores dependientes

$$v_5 = 5v_1 - 8v_2 + 0v_3 + 2v_4$$

Base de R^4 = {(2,1,1,1), (1,1,1,1), (3,1,1,2), (0,1,2,1)}

COORDENADAS DE UN VECTOR EN UNA BASE

>> Cualquier vector del espacio se puede expresar, de **forma única,** como **CL** de los vectores de la base.

base $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$, vector **u** :

$$\mathbf{u} = \mathbf{a_1}\, v_1 + \mathbf{a_2}\, v_2 + \dots \mathbf{a_n}\, v_n$$

a_1 , a_2 , … a_n : **coordenadas** de u en la base B

Ejemplo

El vector u = (10, 2) es **CL** de base **B = { v_1 , v_2 } / v_1 = (1, 2), v_2 = (2, 1)**

$$\mathbf{(10, 2) = a_1\ (1,2) + a_2\ (2,1)}$$

→ Las **coordenadas de u** en la base **B** son **a_1 = -2, a_2 = 6**

SUBESPACIOS QUE PROPORCIONA una matriz

$$\underset{m \times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Columna 1 de A

$$a_{:1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Columna >> Col (A) >> subespacio de R^m

$\text{Env}\{ [a_{11}\ a_{21} \dots a_{m1}]^T, \dots [a_{1n}\ a_{2n} \dots a_{mn}]^T \} = \text{Env}\{ a_{:1},\dots a_{:n} \}$

Fila >> Fil (A) >> subespacio de R^n

$\text{Env}\{ [a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}]^T, \dots [a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn}]^T \}\ \text{Env}\{ a_{1:}, a_{2:}, \dots a_{m:} \}$

Nulo >> Nul (A) >> subespacio de R^m

$$\text{Nul}(A) = \{ x \ / \ x \in R^n,\ Ax = 0 \}$$

Col (A)

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Col(A) = Env\ \{ [2\ -1\ \ 0\ ]^T, [-4\ \ 2\ \ 0]^T, [0\ \ 0\ \ 1]^T, [0\ \ 0\ \ 2]^T \}$$

BASE de **ColA:** **columnas de A** que en **reducida** tienen **1's principales**

Las columnas que no tienen 1'principal → **LD**

El nº de columnas LI
es el RANGO de la matriz

SUBESPACIOS QUE PROPORCIONA una matriz

Ej-11 (H5)

Hallar base y dimensión del subespacio **Col A** / $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Sol: nº columnas de A = 4

(1,1), (1,0), (2,3), (-1,1) $\in R^2$

>> nº vectores de base de A >> máximo **2** >> **LI**

$$\mathrm{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Base(Col A) : { (1,1), (1,0) }

Dim (Col A) = 2

(2,3), (-1,1) >> LD de Col(A)

$(2,3) = c_1 (1,1) + c_2 (1,0)$

SCD → $c_1 = 3$, $c_2 = -1$

Sea matriz **A** m×n y vector **b** $\in R^m$

>> **b** $\in$ **Col(A)** si y sólo si **Ax=b es consistente**.

Comprobamos si **b = (4 −2 −3)** está incluido en **Col(A)**

$$[A|b] = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \textbf{rref [A | b]} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SCI >> v es **CL** de los vectores u_i **infinitas formas**

Sup. b = d= 0 >> a = 2, c = -3

(4,−2,−3) = 2(2,-1,0) + 0(-4,2,0) + (-3)(0,0,1) + 0 (0,0,2)

Fil (A) =

Env { [2 -4 0 0] , [-1 2 0 0] , [0 0 1 2] }

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Conjunto de todos los vectores de $\mathbf{R}^n$ que son **CL** de las **filas de A**.

La **base** d **Fil (A) >>**
filas de A que en la **reducida** tienen **1's principales**

Filas distintas de cero de una escalonada / filas son LI

Subespacio d $\mathbf{R}^n$ generado por las filas de A = subespacio d $\mathbf{R}^n$ generado por las matriz escalonada/reducida d A

Ej-12 (H5)

Halla base y dimensión del subespacio **Fil (A)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Las dos filas de la reducida de A tienen 1's principales

$$Fil\ (A) = Env\{(1,1,2,-1), (1,0,3,1)\}$$

$$\boxed{Dim\ Fil\ (A) = 2}$$

Ej-12 (H5)

Halla base y dimensión del subespacio Nul (A) /

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Sol: **Nul (A) : soluciones Ax = 0**

$$\text{rref}[A|0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/7 & 9/7 & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & -4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución : Ec-paramétricas

$$x_1 = 9/7x_3 - 9/7x_4$$
$$x_2 = 3/7x_3 + 4/7x_4$$
$$x_3$$
$$x_4$$

$$(9/7x_3 - 9/7x_4,\ \ 3/7x_3 + 4/7x_4,\ \ x_3,\ \ x_4) =$$
$$x_3\,(9/7,3/7,1,0) + x_4\,(-9/7, 4/7,0,1)$$

BASE Nul (A) = { (9/7, 3/7, 1, 0), (-9/7, 4/7, 0, 1) }

Ej-13 (H5)

Halla base y dimensión del subespacio Nul (A) /

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Sol:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_3 - x_4 \\ x_2 &= x_3 + 2x_4 \\ x_3 & \\ x_4 & \end{aligned}$$

$(-3x_3 - x_4,\ x_3 + 2x_4,\ x_3,\ x_4) =$

$x_3\,(-3, 1,1,0) + x_4\,(-1, 2,0,1)$

BASE Nul (A) = { (-3, 1, 1, 0), (-1, 2, 0, 1) }

Ej-14 (H5)

Determina si $u \in \text{Nul}(A)$

$A = [1,-3,-2; -5,9,1]$ $u = [5,3,-2]^T$

Sol: Para probar que **u** satisface **Au = 0**, sólo hay que calcular

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

u está en Nul (A).