1

(a) *(1 punto)* Si A es una matriz cuadrada que verifica la ecuación $A^2-2A+3I=O$, probad que A es invertible y hallad su inversa en términos de A

(b) *(1 punto)* Sean A y B dos matrices cuadradas, tales que $AB=O$. Probad que $(BA)^2=O$

(c) *(1 punto)* Sea A una matriz cuadrada; decimos que A es ortogonal si $AA^T=I$, y que es involutiva si $A^2=I$. Probad que una matriz ortogonal y simétrica es involutiva

Solución:

(a) Partimos de la igualdad dada y hacemos:

$$\begin{aligned}
&A^2-2A+3I=O\\
&A^2-2A=-3I\\
&A(A-2I)=-3I\\
&A(-\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}I)=I
\end{aligned}$$

Se desprende que $A^{-1}=-\dfrac{1}{3}A+\dfrac{2}{3}I$

(b) $(BA)^2=(BA)(BA)=B(AB)A=BOA=O$

(c) Como A es ortogonal, su inversa es $A^{-1}=A^T$; y por ser simétrica, $A^{-1}=A^T=A$. O sea, su inversa es la misma A; por tanto, $A^2=A\cdot A=A\cdot A^{-1}=I$. Luego es involutiva

2 Se considera el sistema lineal $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 21\\ 19\\ 5 \end{bmatrix}$$

(a) *(1 punto)* Encontrad una factorización LU de la matriz A

(b) *(1 punto)* Usad la factorización anterior para resolver el sistema lineal

Solución: Una factorización LU de la matriz A es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5/2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 21 \\ 2 & 2 & 0 & 19 \\ 3 & 5/2 & -4 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 21/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Ahora resolvemos $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 3/2 & 21/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

La solución es $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

3 Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) *(1 punto)* Hallad el polinomio característico

(b) *(1 punto)* Hallad los valores propios

(c) *(1 punto)* Hallad una base de cada subespacio propio

Solución:

(a) El polinomio característico es $q_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2$

(b) Los valores propios son -2 (simple) y 0 (doble)

(c) Para cada valor propio construimos la matriz $A - \lambda I$

- Para $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Los vectores propios son $(\beta, \alpha, \beta) = \alpha(0, 1, 0) + \beta(1, 0, 1)$

- Para $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Los vectores propios son $(-\alpha, 3\alpha, \alpha) = \alpha(-1, 3, 1)$

La solución es

$$E(0) = \text{Env}\{(0,1,0),(1,0,1)\}\,, \quad E(-2) = \text{Env}\{(-1,3,1)\}$$

4 Dada la evolución de los últimos tiempos, la Universidad de Alicante quiere inaugurar un nuevo servicio de futurología para mantenerse a la vanguardia en todos los sectores. Tras unas duras pruebas de selección, se contrata a UAramís Furtar como directora del servicio por sus grandes dotes de adivinación. El día de su presentación, los periodistas la ponen a prueba con las siguientes preguntas:

E$_1$ UAramís ¿Podrías pronosticar si el Bitcoin subirá en el próximo mes?

UAR Los astros indican que todos los Leo que compren 5 Bitcoins, 16 Litecoins, y 3 PPCoins obtendrán un beneficio de 63 euros

E$_2$ Ya que lo mencionas ¿Qué tal crees que evolucionará el precio del Litecoin el próximo mes?

UAR El reflejo del sol en la uña de mi pulgar me dice que eres Escorpio; te haré una predicción particular para ti. Deberás comprar 10 Bitcoins y vender 5 Litecoins si quieres obtener 70 euros de beneficio este mes

E$_3$ No salgo de mi asombro al ver la precisión de tus pronósticos. Además, anoche decidí vender 12 Litecoins y 2 PPCoins, ¿Me saldrá rentable esta operación a 1 mes vista?

UAR Las marcas de las escamas de sal en la espuma de mi capuccino no dejan duda respecto a tu pregunta: al final de mes habrás perdido 18 euros.

Con semejantes predicciones, los periodistas salieron completamente alucinados de la sala de prensa, dispuestos a verificar si se cumplían a lo largo del mes. Por supuesto, UAramís acertó en todas sus predicciones al milímetro.

Si hubiéramos decidido hacer caso a las predicciones de UAramís y utilizarlas como instrumento de inversión para obtener el máximo beneficio posible, ¿Como decidirías invertir 1000 euros y que beneficio obtendrías después de 1 mes?

Nota: Los precios actuales son
1 Bitcoin = 68.00 euros, 1 Litecoin = 2.18 euros, 1 PPCoin = 0.11 euros

Solución: Veamos el beneficio o perjuicio que nos aporta en un mes, invertir en cada producto. De los datos se desprende el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 16 & 3 \\ 10 & -5 & 0 \\ 0 & -12 & -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 63 \\ 70 \\ -18 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ Lo que significa que ganamos 8 euros por cada Bitcoin, 2 por cada Litecoin y perdemos 3 por cada PPCoin. Dados los precios actuales ¿es mejor invertir en Bitcoin o en Litecoin? (desde luego NO en PPCoin pues hay pérdidas). Estudiemos la relación beneficio/coste

$$\text{Bitcoin } \frac{8}{68} = 0'11765, \quad \text{Litecoin } \frac{2}{2'18} = 0'91743$$

Conviene pues invertir todo en Litecoins y el beneficio será $1000 \cdot 0'91743 = 917'43$