1. Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos Directos: Calculan la solución **exacta** en un número finito de pasos

Gauss.

Gauss-Jordan

Método de la inversa

Factorización LU

Métodos Iterativos.

Construyen una sucesión de valores que **converge** a la solución del sistema.

Jacobi

Gauss-Seidel.

Convergencia de los métodos

Ejercicio 3-H2. Resuelve el SL usando la **factorización LU** de la matriz A

$2x_1$	+	$4x_2$	-	$6x_3$	=	-8
$-x_1$	+	x_2	-	$3x_3$	=	-8
x_1	+	x_2			=	3

Ax = b

A = LU

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & . & . & . & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & . & . & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & . & . & . & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & . & . & . & u_{3n} \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Si $u_{ii} = 1$

¿ tipo?

escalonada

Resolución de SL con Factorización LU

- Se descompone **A = LU**

L: cuadrada triangular inferior e invertible.
U: escalonada de A, puede **no** ser cuadrada

Resolver Ax = b >> LUx = b >>

1º Ly = b SCD>> sustitución progresiva
2º Ux = y Gauss

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & . & . & . & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & . & . & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & . & . & . & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & . & . & . & u_{3n} \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- Los SL con matrices triangulares son **más fáciles de resolver**.
- Si **U** tiene **n unos principales (A es invertible) → factorización única**.

La ventaja de este método es que es computacionalmente eficiente porque elegido el vector b no tenemos que volver a hacer la eliminación de Gauss cada vez.

Ejercicio 3-H2. Resuelve el SL usando la **factorización LU** de la matriz A

$2x_1$	+	$4x_2$	-	$6x_3$	=	-8
$- x_1$	+	x_2	-	$3x_3$	=	-8
x_1	+	x_2			=	3

Ax = b ⇒ **1º Ly = b**, **2º Ux = y**

$$Ax = b \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ly = b

Ux = y

$$L \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow U \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Obtención de L, U

A (mxn),	L (mxm),	U (mxn)
A (mxm),	L (mxm),	U (mxm)

a) Inicio **L = $\mathbf{I}_m$**

b) **Obtención de L :**

En cada fila **i** de A se busca candidato a 1 principal (sup. **a_{ik}**).

Antes de obtener el 1 principal **se copia** en la **k-ésima columna de L los valores de la columna de A** desde el candidato a 1 principal hasta final de la columna.

c) Se **escalona a_{ik}**

L >> cualquier valor en diagonal
U >> escalonada de A con 1 principales en la diagonal

Obtención de L, U

Para matrices cuadradas. Sea A (nxn)
Suponemos que A se puede escalonar sin hacer permutaciones por fila (OE/tipo 1). Entonces existe una matriz triangular inferior L (nxn) invertible / A = LU, siendo U (nxn) la escalonada de A con unos en la diagonal. Si además U tiene *n* unos principales, la factorización es única.

Para matrices no cuadradas Sea A (mxn)
Suponemos que A se puede escalonar sin hacer permutaciones por fila (OE/tipo 1). Entonces existe una matriz triangular inferior L (mxm) invertible / A = LU, siendo U (mxn) la escalonada de A con $u_{ij} = 0$ si $i > j$ (1)
Nota: La condición (1) significa que U es triangular superior en el sentido de que todos los elementos que se encuentran por debajo de la "diagonal" son cero.

$$\begin{bmatrix} d_1 & \mathbf{u_{12}} & \mathbf{u_{13}} & \mathbf{u_{14}} & \mathbf{u_{15}} \\ 0 & d_2 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & d_3 & u_{34} & u_{35} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} d_1 & \mathbf{u_{12}} & \mathbf{u_{13}} \\ 0 & d_2 & u_{23} \\ 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices que satisfacen la condición (1)

Ejercicio 3 (cont)

Obtención de L, U

Candidato a 1 principal en A >> a_{11} >> $l_{i1} = a_{i1}$, **i = 1, 2, 3**

Después >> **escalona** a_{11} **>> A'**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

F1 ↔ (1/2)F1

F2 ↔ F2 + F1

F3 ↔ F3 - F1

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3 (cont)

Obtención de L, U

Candidato a 1 principal en A' >> a'_{22} >> $l_{i2} = a'_{i2}$, $i = 2, 3$

Después >> **escalona** a'_{22} **>> A''**

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$F2 \leftrightarrow (1/3)F2$

$F3 \leftrightarrow F3 + F2$

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3 (cont)

Obtención de L, U

Candidato a 1 principal en A'' es **a''$_{33}$** → **1$_{i3}$ = a''$_{i3}$, i = 3**

Después >> **escalona a''$_{i3}$ >> A'''**

$$A''' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3 (cont)

Resolver SL

Ly = b

(3x3)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2y_1 \quad & & & = -8 \\ -y_1 + 3y_2 \quad & & & = -8 \\ y_1 - y_2 + y_3 & & & = 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

sustitución progresiva

Ejercicio 3 (cont)

Resolver SL

$Ux = y$

(3x3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \\ x_2 - 2x_3 &= -4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

sustitución regresiva

Ejercicio "extra" factorización **A = LU**,
Resolver **Ax = b / A = LU**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -5 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4x5)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4x4)

candidato a **1** principal en A >> a_{11} → $\mathbf{1_{i1} = a_{i1}}$, **i = 1,…, 4**

escalona a_{11}

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -5 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$F1 \leftrightarrow (-1)F1$

$F2 \leftrightarrow F2 - F1$

$F3 \leftrightarrow F3 - F1$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio "extra" (cont)

Candidato a 1 principal en A >> a_{22} → $\mathbf{l_{i2} = a_{i2}}$, **i = 2,3,4**

escalona a_{22}

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

F2 ↔ (1/2)F2
F3 ↔ F3 + (2)F2
F4 ↔ F4 + (2)F2

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio "extra" (cont)

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ly = b

$$\begin{aligned} -y_1 &&&= -1 \\ y_1 + 2y_2 &&&= 1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 &&&= 1 \\ -2y_2 + y_4 &&&= 0 \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ux = y

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 - 2x_3 - 6x_4 - x_5 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

SCI.
x_3, x_4, x_5
son parámetros

Ejercicio 4-H2. Resuelve **Ax = b**, / factorización **A = LU**

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(4x4) (4x3)

$$\mathbf{Ly = b} \;\; >> \;\; y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Ux = y} \;\; >> \;\; x = \begin{bmatrix} (-6 + 3x_3)/2 \\ (5 - 2x_3)/3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

SCI.
x_3 parámetro

MATRICES ELEMENTALES

❖ "Guardamos" las **OE / filas** en matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F1 \leftrightarrow (1/2)F1} A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow EA = A'$$

E >> MATRIZ ELEMENTAL

¿ Cómo se obtienen ?

MATRICES ELEMENTALES

ME >> matriz **nxn** que se obtiene al realizar una **<u>única</u> OE/fila** sobre la matriz identidad $\mathbf{I}_n$

	OE/fila	MATRIZ ELEMENTAL	
MATRIZ IDENTIDAD $\mathbf{I}$ (nxn)	$F_i \leftrightarrow F_j$	Tipo 1	P_{ij}
	$F_i \leftarrow \alpha F_i \ (\alpha \neq 0)$	Tipo 2	$E_i(\alpha)$
	$F_i \leftarrow F_i + \beta F_j$	Tipo 3	$E_{ij}(\beta)$

$P^{(n)}_{ij} = P_{ij}$ *se omitirá exponente (n) que representa el orden de la matriz* I

MATRICES ELEMENTALES

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F1 \leftrightarrow F2} \qquad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F3 \leftarrow (2/5)F3} \qquad E_3(2/5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F2 \leftarrow F2 + (-5)F3} \qquad E_{23}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICES ELEMENTALES

En el Ejercicio 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$F1 \leftrightarrow (1/2)F1$

$F2 \leftrightarrow F2 + F1$

$F3 \leftrightarrow F3 - F1$

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & 3 & -6 \\ \mathbf{0} & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$F1 \leftrightarrow (1/2)F1$

$$E_1(1/2) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$F2 \leftrightarrow F2 + F1$

$$E_{21}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$F3 \leftrightarrow F3 - F1$

$$E_{31}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{E_{31}(-1)\, E_{21}(1)\, E_1(1/2)\ A = A'}$$

Repasar multiplicación de matrices

Métodos Iterativos

Progresivamente calculan **aproximaciones** a la solución de un problema $Ax = b$

$$\boxed{\lim x^{(k)} = x,\ k \to \infty}$$

>> Se **repite** un mismo proceso de mejora sobre una solución aproximada (secuencia de iteraciones)

>> La solución obtenida es **mejor** que la inicial

>> Se puede **suspender** el proceso (criterio de parada).

>> Út**iles** para resolver problemas con nº muy **grande de variables**

>> Sólo se almacenan los coeficientes **no nulos** de la matriz del SL.

Ejemplo

Encontrar raíz a la ecuación cuadrática

$$f(x) = x^2 - x - 2 = 0$$

>> Método directo

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = -1, 2$$

>> Método **iterativo**: Newton

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{{x_i}^2 - x_i - 2}{2\,x_i - 1}$$

Ejemplo (cont)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{{x_i}^2 - x_i - 2}{2\,x_i - 1}$$

Se toma como 1ª aproximación $x_0 = 3$ >>

$$x_1 = x_0 - \frac{{x_0}^2 - x_0 - 2}{2\,x_0 - 1} = 3 - \frac{3^2 - 3 - 2}{2 \cdot 3 - 1} \approx 2.2$$

$x_1 = 2.2$ >>

Etc…

$$x_2 = x_1 - \frac{{x_1}^2 - x_1 - 2}{2\,x_1 - 1} = 2.2 - \frac{2.2^2 - 2.2 - 2}{2 \cdot 2.2 - 1} \approx 2.011$$

MÉTODOS ITERATIVOS

PASOS **$Ax = b$**

>> Comienzan vector inicial arbitrario $\mathbf{x_0 = (0^{(0)},\ 0^{(0)},\ 0^{(0)})}$

>> Construyen **sucesión de vectores:** $\mathbf{x_i = (x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ x_3^{(k)})}$ aplicando

<u>ecuación de recurrencia</u> que se repite k veces

>> **Condición de parada**: $\mathbf{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-n}}$

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty = \max(|x1|, |x2|,\ldots|xn|)$$

Jacobi

Sólo en **sistemas cuadrados** (nº incógnitas = nºecuaciones).

Ilustramos método con este SL

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1$$

$$a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2$$

$$a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3$$

Jacobi

1º Se **ordenan** las ecuaciones y las incógnitas.

2º De la ecuación **i** se despeja la incógnita **i** (a_{ii} <> 0).

Iteraciones : superíndice **k**

$$
\begin{aligned}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 &= b_1 \\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 &= b_2 \\
a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 - a_{12}\cdot x_2^{(k)} - a_{13}\cdot x_3^{(k)}}{a_{11}} \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 - a_{21}\cdot x_1^{(k)} - a_{23}\cdot x_3^{(k)}}{a_{22}} \qquad (2) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{b_3 - a_{31}\cdot x_1^{(k)} - a_{32}\cdot x_2^{(k)}}{a_{33}}
\end{aligned}
$$

Jacobi

Ejercicio 5-H2. Resuelve SL usando el método iterativo **Jacobi.**

$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 &= 5 \\ 3x_1 - 5x_2 &= -7 \end{aligned}$$

Se despeja la variable $\mathbf{x_1}$ en ecuación 1

variable $\mathbf{x_2}$ en ecuación 2

Ecuación de recurrencia

$$x_1 = \frac{5 + x_2}{7}$$

$$x_2 = \frac{7 + 3x_1}{5}$$

Se elige **aproximación inicial** a la solución $\mathbf{(x_1\ x_2) = (0,\ 0)}$

Criterio de parada

$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|_\infty < 0{,}01$$

Ejercicio 5 (cont)

MÉTODOS ITERATIVOS

Jacobi

ITERACIONES

$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0, 0)$

$$x_1^{(1)} = \frac{5+0}{7} \approx 0'714$$
$$x_2^{(1)} = \frac{7+3\cdot 0}{5} \approx 1'400$$

$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = (0{,}714,\ 1{,}400)$

$$x_1^{(2)} = \frac{5+1'4}{7} \approx 0'914$$
$$x_2^{(2)} = \frac{7+3\cdot 0'714}{5} \approx 1'829$$

$(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = (0{,}914,\ 1{,}829)$

i	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(i)}$	0	0'714	0'914	0'976	0'9934	0'998	0'999
$x_2^{(i)}$	0	1'400	1'829	1'949	1'985	1'996	1'999

Solución ($x_1\ x_2$) converge a → (1,2)

$|| x^{(6)} - x^{(5)} ||_\infty = \max(| x_i^{(6)} - x_i^{(5)}|) = \max(|0{,}999-0{,}998|,|1{,}999-1{,}996|) = \max(0{,}001,\ 0{,}003) < 0{,}01$

Convergencia de los métodos iterativos

Condición suficiente para que los métodos iterativos **converjan a la solución del** SL es que la matriz de coeficientes sea **estrictamente diagonal dominante**.

Si A = (a_{ij})

$$\sum_{j=1 (i\neq j)}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Si A no es DD >> cambiar el orden de las ecuaciones /incógnitas >> comprobar de nuevo si A es DD

Ejemplo

Se comprueba que la matriz de coeficientes A es DD

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} |2| > |1| + |0| \\ |5| > |2| + |-1| \\ |3| > |0| + |-1| \end{matrix}$$

Comprueba si las siguientes matrices son DD

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & -10 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -7 \\ 3 & -10 & 20 \end{bmatrix}$$

Gauss-Seidel

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1$$
$$a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2$$
$$a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3$$

>> La solución se obtiene sustituyendo los valores parciales calculados

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}\cdot x_2^{(k)} - a_{13}\cdot x_3^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}\cdot x_1^{(k+1)} - a_{23}\cdot x_3^{(k)}}{a_{22}} \qquad x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31}\cdot x_1^{(k+1)} - a_{32}\cdot x_2^{(k+1)}}{a_{33}}$$

El valor de x_1 se calcula con los valores asumidos de x_2 y x_3.

Después el valor de x_1 obtenido y x_3 asumido, se usan para calcular x_2.

Finalmente el nuevo valor de x_3 sale de los valores calculados x_1 y x_2.

>> Converge mas rápidamente que Jacobi

Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right)$$

Observa la diferencia con Jacobi

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right)$$

Jacobi usa el valor de las variables obtenido en la iteración anterior.

Gauss-S para la **variable i** considera el valor de la variable (i-1) que acaba de calcular en la misma iteración en la que se está haciendo el cálculo

Gauss-Seidel

Ejercicio 6-H2. Resuelve SL usando el método iterativo b) **Gauss-Seidel**

$$\begin{array}{rrrrcr} 10x_1 & - x_2 & + 2x_3 & & = & 6 \\ -x_1 & + 11x_2 & - x_3 & + 3x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - x_2 & + 10x_3 & - x_4 & = & 11 \\ & 3x_2 & - x_3 & + 8x_4 & = & 15 \end{array}$$

Despejamos incógnitas, igual que en Jacobi, en la ecuación i la incógnita i

$$\begin{aligned} x_1 &= (6 + x_2 - 2x_3)/10 \\ x_2 &= (6 + x_1 + x_3 - 3x_4)/11 \\ x_3 &= (11 - 2x_1 + x_2 + x_4)/10 \\ x_4 &= (15 - 3x_2 + x_3)/8 \end{aligned}$$

Ejercicio 6 b) (cont)

MÉTODOS ITERATIVOS

Gauss-Seidel

Definimos la sucesión, pero en cuanto calculamos una aproximación la usamos

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)})/10 \\
x_2^{(k+1)} &= (6 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)})/11 \\
x_3^{(k+1)} &= (11 - 2x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + x_4^{(k)})/10 \\
x_4^{(k+1)} &= (15 - 3x_2^{(k+1)} + x_3^{(k+1)})/8
\end{aligned}$$

Ejercicio 6 b)
(cont)

Gauss-Seidel

Primera iteración $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\right)^t = (0,0,0,0)^t.$

$$
\begin{array}{lcll}
x_1^{(1)} & = & = (6 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)})/10 & = 0.6(6+0-0)/10 = 0.6 \\
x_2^{(1)} & = & (6 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)} - 3x_4^{(0)})/11 & = (6+0.6+0-0)/11 = 0.6 \\
x_3^{(1)} & = & = (11 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_4^{(0)})/10 & = 1.1(11-2(0.6)+(0.6)+0)/10 = 1.04 \\
x_4^{(1)} & = & (15 - 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)})/8 & = (15-3(0.6)+(1.04))/8 = 1.78
\end{array}
$$

Criterio de parada: diferencia entre dos iteraciones menor que 0.01

$$\left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\|_\infty = \max_{1\le i\le 4}\left(\left|\mathbf{x}_i^{(1)} - \mathbf{x}_i^{(0)}\right|\right) = \max(0.6, 0.6, 1.04, 1.78) = 1.78$$

Ejercicio 6 b)
(cont)

MÉTODOS ITERATIVOS

Gauss-Seidel

segunda iteración

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= (6 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)})/10 && = (6 + 0.6 - 2(1.04))/10 = 0.452 \\
x_2^{(2)} &= (6 + x_1^{(2)} + x_3^{(1)} - 3x_4^{(1)})/11 && = (6 + 0.452 + 1.04 - 3(1.78))/11 = 0.196 \\
x_3^{(2)} &= (11 - 2x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + x_4^{(1)})/10 && = (11 - 2(0.452) + 0.196 + (1.78))/10 = 1.2 \\
x_4^{(2)} &= (15 - 3x_2^{(2)} + x_3^{(2)})/8 && = (15 - 3(0.196) + 1.207)/8 = 1.953
\end{aligned}
$$

Criterio de parada < 0.01, no se cumple

$$\left\| \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \right\|_\infty = 0.404 > 0.01$$

Ejercicio 6 b)
(cont)

Gauss-Seidel

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.6 \\ 1.04 \\ 1.78 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.452 \\ 0.196 \\ 1.207 \\ 1.953 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.378 \\ 0.157 \\ 1.235 \\ 1.971 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.369 \\ 0.154 \\ 1.239 \\ 1.972 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.368 \\ 0.154 \\ 1.239 \\ 1.972 \end{pmatrix}$$

Criterio de parada < 0.01, se cumple

$$\left\| \mathbf{x}^{(4)} - \mathbf{x}^{(3)} \right\|_{\infty} = 0.009 < 0.01$$

Ejercicio 6-a)-H2. Resuelve SL usando el método iterativo a) **Jacobi.**

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\
-x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 6 \\
2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & 11 \\
 & & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 15
\end{array}$$

Despejamos las incógnitas

Primero despejamos x_1 en la primera ecuación, x_2 en la segunda, ...

$$\begin{aligned}
x_1 &= (6 + x_2 - 2x_3)/10 \\
x_2 &= (6 + x_1 + x_3 - 3x_4)/11 \\
x_3 &= (11 - 2x_1 + x_2 + x_4)/10 \\
x_4 &= (15 - 3x_2 + x_3)/8
\end{aligned}$$

Definimos la suceción

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)})/10 \\
x_2^{(k+1)} &= (6 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)})/11 \\
x_3^{(k+1)} &= (11 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k)})/10 \\
x_4^{(k+1)} &= (15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)})/8
\end{aligned}$$

Ejercicio 6 a) (cont)

MÉTODOS ITERATIVOS

Jacobi

Primera iteración

Punto inicial $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\right)^t = (0,0,0,0)^t$.

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= (6 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)})/10 = 0.6 \\
x_2^{(1)} &= (6 + x_1^{(0)} + x_3^{(0)} - 3x_4^{(0)})/11 = 0.545 \\
x_3^{(1)} &= (11 - 2x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_4^{(0)})/10 = 1.1 \\
x_4^{(1)} &= (15 - 3x_2^{(0)} + x_3^{(0)})/8 = 1.875
\end{aligned}
$$

Criterio de parada

Impondremos que la distancia entre dos puntos consecutivos sea menor que una 0.01.

$$\left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\|_\infty = \max_{1\le i\le 4}\left(\left|\mathbf{x}_i^{(1)} - \mathbf{x}_i^{(0)}\right|\right) = \max(0.6, 0.545, 1.1, 1.875) = 1.875$$

Ejercicio 6 a) (cont)

MÉTODOS ITERATIVOS

Jacobi

Segunda iteración

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= (6 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)})/10 && = (6 + 0.545 - 2(1.1))/10 = 0.435 \\
x_2^{(2)} &= (6 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)} - 3x_4^{(1)})/11 && = (6 + 0.6 + 1.1 - 3(1.875))/11 = 1.886 \\
x_3^{(2)} &= (11 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_4^{(1)})/10 && = (11 - 2(0.6) + 0.545 + (1.875))/10 = 1.22 \\
x_4^{(2)} &= (15 - 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)})/8 && = (15 - 3(0.545) + 1.1)/8 = 1.808
\end{aligned}$$

Criterio de parada

¿Se cumple? No

$$\left\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\right\|_\infty = 0.357 > 0.01$$

Se siguen las iteraciones
hasta que se **cumple**
el criterio de parada

Ejercicio 6 a) (cont)

Jacobi

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.545 \\ 1.1 \\ 1.875 \end{pmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.435 \\ 0.189 \\ 1.222 \\ 1.808 \end{pmatrix} \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.374 \\ 0.203 \\ 1.213 \\ 1.957 \end{pmatrix}$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.378 \\ 0.156 \\ 1.241 \\ 1.950 \end{pmatrix} \dots \; x^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.369 \\ 0.153 \\ 1.240 \\ 1.979 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad x = \begin{pmatrix} 0.368 \\ 0.154 \\ 1.239 \\ 1.972 \end{pmatrix}$$

Cada vez que se calcula una iteración se comprueba el criterio de parada

En este caso se cumple en la iteración 6.

Se para y el vector **x** será la aproximación a la solución.

$$\left\| \mathbf{x}^{(6)} - \mathbf{x}^{(5)} \right\|_\infty = 0.007 < 0.01$$