1 (2 puntos) Dos compañías producen software informático. La primera A, proporciona el 70 % y la segunda B el 30 % de la producción total. Por otra parte, se sabe que el 83 % del software suministrado por la primera compañía se ajusta a las normas establecidas, mientras que sólo el 63 % del suministrado por la segunda, se ajusta a dichas normas. Calcular la probabilidad de que un determinado software haya sido suministrado por la compañía A, si se sabe que se ajusta a las normas.

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{ el software lo produce la empresa A}\} \\ B &= \{ \text{ el software lo produce la empresa B}\} \\ N &= \{ \text{ el software se ajusta a las normas.}\} \end{aligned}$$

Se pide $\mathrm{P}\,(A \mid N\,)$ y conocemos las siguientes probabilidades

$$\mathrm{P}\,(A) = 0'7, \quad \mathrm{P}\,(B) = 0'3, \quad \mathrm{P}\,(N \mid A\,) = 0'83, \quad \mathrm{P}\,(N \mid B\,) = 0'63.$$

Aplicando Bayes

$$\mathrm{P}\,(A \mid N\,) = \frac{0'7 \cdot 0'83}{0'7 \cdot 0'83 + 0'3 \cdot 0'63} = 0'7545.$$

2 Sea X una variable aleatoria discreta que denota el número de averías que un operario resuelve en una jornada de trabajo, con función de cuantía dada por

$$f(x) = \frac{k}{x+1}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

(a) (1 punto) Calcular $\mathrm{P}\,(X > 1)$ y $\mathrm{P}\,(X > 0 \mid X < 3\,)$.

(b) (0'5 puntos) Calcula el número medio de averías que soluciona al día.

(c) (0'5 puntos) Si su sueldo es de 60 € por jornada laboral y si le pagan un plus de 20 € por cada avería solucionada que exceda de una al día ¿cuál es el sueldo diario medio?

Solución: Tenemos que hallar el valor de k; se obtiene sumando las probabilidades e igualando a 1

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 \quad &\rightarrow \quad \frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1 \\ \frac{25k}{12} = 1 \quad &\rightarrow \quad k = \frac{12}{25}. \end{aligned}$$

La función de cuantía es, por tanto

X	0	1	2	3
$f(x)$	12/25	6/25	4/25	3/25

(a)

$$\mathrm{P}(X>1)=\frac{4}{25}+\frac{3}{25}=\frac{7}{25}$$
$$\mathrm{P}(X>0 \mid X<3)=\frac{\mathrm{P}(0<X<3)}{\mathrm{P}(X<3)}=\frac{6/25+4/25}{22/25}=\frac{10}{22}=\frac{5}{11}.$$

(b)

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{12}{25}+1\cdot\frac{6}{25}+2\cdot\frac{4}{25}+3\cdot\frac{3}{25}=\frac{23}{25}.$$

(c) La variable sueldo es

$$S=\begin{cases} 60, & X=0 \\ 60+20(X-1) & X=1,2,3 \end{cases}$$

Para los valores de $X=0,1,2,3$ se obtiene

X	0	1	2	3
S	60	60	80	100

Teniendo en cuenta las probabilidades de X, la cuantía de S es

S	60	80	100
f_S	18/25	4/25	3/25

La media es

$$60\cdot\frac{18}{25}+80\cdot\frac{4}{25}+100\cdot\frac{3}{25}=\frac{1700}{25}=68.$$

3

(a) (1 punto) Supóngase que se selecciona al azar una palabra de la frase "ESPAÑA GANARÁ EL CAMPEONATO MUNDIAL DE FÚTBOL". Si X es el número de letras de la palabra seleccionada, calcular $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

(b) (1 punto) En una lotería se venden 30000 boletos a 20€ cada uno. El primer premio es de 200000 € , el segundo de 100000€ y el tercero de 20000€ ¿Cuál es la ganancia esperada de un individuo que ha comprado una papeleta?

Solución:

(a) La frase consta de 7 palabras con 6,6,2, 10,7,2 y 6 letras respectivamente. Por tanto X toma los valores 2,6,7 y 10 con probabilidades

X	2	6	7	10
$f(x)$	2/7	3/7	1/7	1/7

Se tiene $\mathrm{E}(X)=4/7+18/7+7/7+10/7=39/7$. Para hallar la varianza calculamos $\mathrm{E}\left(X^2\right)=8/7+108/7+49/7+100/7=265/7$ con lo que

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{265}{7}-\left(\frac{39}{7}\right)^2=\frac{334}{49}.$$

(b) Llamando G a la variable ganancia, se tiene

G	199980	99980	19980	-20
$f(x)$	$1/30000$	$1/30000$	$1/30000$	$29997/30000$

Por tanto la media es

$$\mathrm{E}\,(G) = \frac{199980 + 99980 + 19980 - 599940}{30000} = \frac{-280000}{30000} = -\frac{28}{3}.$$

4 Una empresa de informática produce y saca a la venta tiradas de 20000 ordenadores de los que sólo un 3 % salen defectuosos. Para darse a conocer lanza una campaña de publicidad en la que asegura que si el número de ordenadores defectuosos de una tirada supera en más de un 5 % el valor esperado, promete devolver el dinero a cada uno de los compradores afectados y, además, regalarles un ordenador nuevo a cada uno.

(a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa tenga que llevar a cabo la promesa de la campaña publicitaria?

(b) (1 punto) Si del total de ordenadores que se llevan vendidos, se sabe que ya hay más de 620 defectuosos ¿cuál es la probabilidad de que la empresa no tenga que llevar a cabo su promesa?

Solución: Sea X = numero de ordenadores defectuosos de los 20000. Se trata de una distribución binomial, donde $X \sim B\,(20000, 0'03)$. Por tanto, el valor esperado para una distribución binomial es:

$$E\,(X) = n \cdot p = 20000 \cdot 0'03 = 600.$$

Para que la empresa lleve a cabo la promesa de la campaña publicitaria, el número de ordenadores defectuosos debe superar en un 5 % el valor esperado, o sea, a 630. Aproximamos por la Normal:

$$Z = \frac{X - E\,(X)}{\sqrt{Var\,(X)}} = \frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{X - 20000 \cdot 0'03}{\sqrt{20000 \cdot 0'03 \cdot 0'97}} = \frac{X - 600}{\sqrt{582}} \sim N\,(0,1)$$

(a) $\mathrm{P}\,(X > 630) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{30}{\sqrt{582}}\right) = 1 - \Phi(1'24) = 1 - 0'8925 = 0'1075.$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(X \leq 630 \mid X > 620) &= \frac{\mathrm{P}\,(620 < X \leq 630)}{\mathrm{P}\,(X > 620)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(\frac{20}{\sqrt{582}} < Z \leq \frac{30}{\sqrt{582}}\right)}{\mathrm{P}\left(Z > \frac{20}{\sqrt{582}}\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\,(0'83 < Z \leq 1'24)}{\mathrm{P}\,(Z > 0'83)} \\
&= \frac{\Phi(1'24) - \Phi(0'83)}{1 - \Phi(0'83)} \\
&= \frac{0'8925 - 0'7967}{0'7967} \\
&= 0'1202.
\end{aligned}$$