MATRIZ

$$A = (\,a_{ij}\,) = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$i = 1, \cdots m$

$j = 1, \cdots n$

Si $i = 1,\ j = 1,\ldots n$, $\quad$ **$A = (\,a_{11}\ \ a_{12}\ \ldots\ a_{1n}\,)$**

vector / matriz fila

Si $i = 1,\ldots m,\ j = 1$ $\quad$ **$A = (\,a_{11}\ \ a_{21}\ \ldots\ a_{m1}\,)^T = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$**

vector / matriz columna

$A^T \rightarrow$ traspuesta de A.

Si $A = (\,a_{ij}\,) \ \rightarrow\ A^T = (\,a_{ji}\,)$

Tipo de matriz	Definición	Ejemplo
FILA	Matriz que tiene una sola fila. Orden 1×n	$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$
COLUMNA	Matriz que tiene una sola columna. Orden m×1	$A_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
RECTANGULAR	Matriz que tiene distinto número de filas que de columna. Orden m×n, m≠n	$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
TRASPUESTA	A matriz. La traspuesta de A, $\mathbf{A}^T$, es la matriz que se obtiene cambiando, ordenadamente, las filas por las columnas.	Si es $A = (a_{ij})_{m\times n}$ su traspuesta es $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

OPUESTA	A matriz. La matriz opuesta de A, -A, es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto.	$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, \; -A=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 7 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$
NULA	Matriz con todos sus elementos cero.	$0_{3\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
CUADRADA	*Matriz con igual número de filas que de columnas, m = n. La matriz es de* <u>*orden n*</u>. <u>Diagonal principal</u> : $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ <u>Diagonal secundaria</u> : a_{ij} *con* $i+j=n+1$ <u>Traza</u> de una matriz cuadrada A (tr(A)): *suma de los elementos de la diagonal principal.*	$A_3=\begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ Diagonal principal : $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ Diagonal secundaria :

SIMÉTRICA	Matriz cuadrada que es igual a su traspuesta. $A = A^t$, $a_{ij} = a_{ji}$	$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{9} & \boxed{-6} \\ \boxed{9} & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{-6} & \boxed{1} & 5 \end{pmatrix}$
ANTISIMÉTRICA	Matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta. $A = -A^t$, $a_{ij} = -a_{ji}$ Necesariamente $a_{ii} = 0$	$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$
DIAGONAL	Matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
ESCALAR	Matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

IDENTIDAD	Matriz cuadrada con sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a *1*.	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
TRIANGULAR	Matriz cuadrada que tiene todos los elementos por encima (por debajo) de la diagonal principal nulos.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ T. superior $\quad$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ T. inferior
INVERSA	A tiene inversa, A^{-1}, si se verifica que : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 1 (hoja3)

Una máquina expendedora proporciona tres productos A, B y C que se fabrican en dos empresas E1 y E2.

El coste total de cada producto resulta del costo de elaboración y el de transporte que cobra cada empresa los cuales vienen expresados (en euros) en las matrices E1 y E2:

E1	Costes	
	Elaboración	Transporte
	10	5
	15	10
	23	20

E2	Costes	
	Elaboración	Transporte
	23	15
	34	20
	56	30

¿Cómo se calcularán los costos totales de elaboración y transporte de cada producto ?

$\ldots con\ la\ matriz\ E1 + E2$

Saber: suma de matrices y propiedades….

SUMA DE MATRICES

$\mathbf{A} = (a_{ij})\ m\times n,$

$\mathbf{B} = (b_{ij})\ m\times n$

$\mathbf{A+B} = \mathbf{a_{ij}+b_{ij}} = (cij)\ m\times n$

Para sumar las matrices A y B es necesario que :

a) Sean del mismo tamaño.

b) Sean cuadradas.

c) Sean ambas vectores fila o columna

¿Cuándo no se puede sumar una matriz con su traspuesta?.

¿La suma de una matriz con su opuesta es la matriz nula o la matriz identidad?

ASOCIATIVA: **(A + B) + C = A + (B + C)**

CONMUTATIVA: **A + B = B + A**

OPUESTO: **A + (-A) = O**

ELEM. NEUTRO: **A + O = O + A = A**

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Ejercicio 3 (hoja3)

Los precios de tres productos A, B y C, vienen dados en el vector

$$\mathbf{v = [15 \;\; 23 \;\; 5.5]}.$$

Una de las tiendas que los vende anuncia una **rebaja del 10%** en cada producto. Se debe determinar

a) el vector que proporcione el cambio en el precio de cada producto.

b) el vector con los nuevos precios.

Solución

a) Como el precio de cada producto se reduce un 10% el vector será:

$$\mathbf{(0.10)v = [\, (0.10)15 \quad (0.10)23 \quad (0.10)5.5] = [\, 1.5 \quad 2.3 \quad 0.55 \,].}$$

b) Los nuevos precios de los productos A, B y C son:

$$\mathbf{v - 0.10v = [\, 13.5 \quad 20.7 \quad 4.95 \,].}$$

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{bmatrix}$$

A, B matrices, α, β, escalares

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- Elemento neutro: $1A = A$

Con traspuesta

$\alpha(A)^T = (\alpha A)^T$

Si **A=(2 0 0)** y **B=(3 1)**,

¿Cuál es el resultado de **2A - 4B**

a) (-8 4)

b) (5 0 1)

c) (16 -4 0)

d) Esta operación no se puede realizar

OPERACIONES CON MATRICES TRASPUESTAS

$A = (a_{ij})\ m\times n$

$A^T = (a_{ji})\ n\times m$

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- Si $A = A^T$ la matriz A es simétrica.

Ejercicio 5(hoja3)

$(A + B)^T = A^T + B^T$

$$A_{(2x3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{(2x3)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6(hoja3)

Demuestra que si A es cuadrada entonces $A + A^T$ es simétrica.

Sea $S = A + A^T$.

S es simétrica si $S = S^T$

$S^T = (A + A^T)^T = A^T + A^{TT} = A^T + A = A + A^T = S$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Ejercicio 7 (hoja3)

Se debe modelar la manera en que se extiende una enfermedad contagiosa.

4 sujetos del grupo 1 que han contraído una enfermedad contagiosa entran en contacto con **6 personas del grupo 2**. Estos contactos directos se representan por la matriz **A (4 x 6)**

$a_{ij} = 1$: la i-ésima persona del gr1 entra en contacto con la j-ésima persona del gr2.

$\mathbf{a_{24}=1}$: la 2º persona del gr1 (infectada) entra en contacto con la 4ª persona del gr2.

$$
\begin{array}{cl}
\textbf{Persona 4-G2} & \\
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \textbf{Persona 2-G1} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Ejercicio 7 (cont) (hoja3)

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Los del grupo 2 tienen contactos directos con personas del grupo 3, que se representa por la matriz **B, (6x5)**:

$b_{64} = 0$: la 6ª persona del gr2 no tiene contacto con la 4ª persona del gr3.

Personas-G3

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cómo se calcularían los contactos indirectos entre personas del grupo 1 y del grupo 3?

La matriz de contacto indirecto entre gr1 y gr3 es la matriz producto: **C = AB (4x5)**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indica alguna persona del **gr3** que no tiene contactos con la enfermedad y por el contrario la que lo tiene

En C, la 2ª persona del gr3 (col 2) no tiene contactos indirectos con la enfermedad.

La 5ª persona del gr3 (col 5) tiene 2 + 1+1 = 4 contactos indirectos.

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

$A = [a_{ij}]$ (mxp)

$B = [b_{ij}]$ (pxn) $\rightarrow$

filas de B

= columnas de A.

$AB = C = (c_{ij})$ (mxn) / $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots a_{ip}b_{pj}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$.

- **$(A \,.\, B) \,.\, C = A \,.\, (B \,.\, C)$**
- **$A.(B + C) = AB + AC$**
- **$A \,.\, I = I \,.\, A = A$** (sólo si A cuadrada)

No se cumplen

Conmutativa: **$AB \neq BA$** pero si **$AB = BA$** $\Rightarrow$ A y B **conmutan**

Cancelativa: **$AB = AC \not\Rightarrow B = C$**

Divisores de cero: $AB = O \not\Rightarrow A = O$ o $B = O$ (O matriz nula)

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Ejercicio 8 (hoja 3)

Determina orden de C

a) C = AB, A(mxn) x B (nx1)

b) C = AB, A (1xm) x B (mxn)

c) C = BA, B (mxn) x A (1xm)

d) Prueba si se cumple **AB = O ⇒ A = O o B = O**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El producto **Ac** se escribe como una **combinación lineal** de las **columnas** de la matriz A

PRODUCTO MATRIZ – VECTOR ESCRITO COMO COLUMNAS

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{c}_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + \mathbf{c}_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + \mathbf{c}_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= c_1\, col_1 A + c_2 col_2 A + c_3 col_3 A$$

Ejercicio 9 (hoja 3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \quad ?$$

Útil para resolución de sistemas con *programación paralela*

Ejercicio 10 (hoja 3)

PRODUCTO PUNTO

Se quiere determinar la **calificación promedio** que un estudiante tiene en un curso.

Las ponderaciones de cada prueba son:

actividades: 10%,

control: 20%,

examen: 35%,

prácticas: 35%.

Las notas son, respectivamente: 4, 5, 7, 3.

El promedio del curso será:

ponderación $\mathbf{u = [0.10\ \ 0.20\ \ 0.35\ \ 0.35]}$,

notas $\mathbf{v = [4\ 5\ 7\ 3]^T}$

El promedio del estudiante será:

$$\mathbf{u.v} = 0.10.(4) + 0.20(5) + 0.35(7) + 0.35(3)$$

$$= 0.4 + 1 + 2.15 + 1.09 = \mathbf{4.64}$$

PRODUCTO PUNTO

El **producto punto**

de los vectores **a y b**

es la **suma** de los productos de sus entradas

correspondientes

$a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$

$$\mathbf{a.b = a_1b_1 + a_2b_2, \dots + a_nb_n}$$