Álgebra: Tema 1

Vectores y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Grado en Ingeniería en Informática
2018-2019

Contents

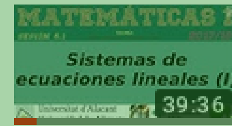
- Vectores
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Método de Gauss
- Método de Gauss-Jordan
- Métodos Iterativos

Clases de Teoría de Matemáticas 1 [2017/18]

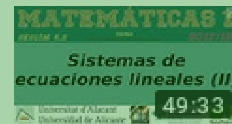
25 vídeos • 7.784 visualizaciones • Actualizado por última vez el 19 sept. 2018

Clases de Teoría de Matemáticas 1 de Carlos Villagrá, curso 2017/2018. Universidad de Alicante.

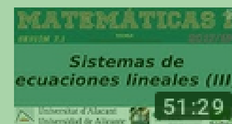
Profesor Retroman EDITAR

12 

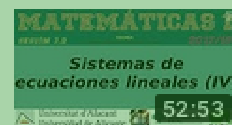
Sistemas de Ecuaciones Lineales I [M1_2017][Sesión 6.1]
Profesor Retroman

13 

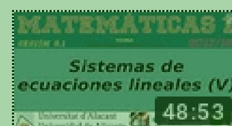
Sistemas de Ecuaciones Lineales II [M1_2017][Sesión 6.2]
Profesor Retroman

14 

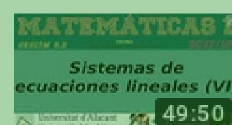
Sistemas de Ecuaciones Lineales III [M1_2017][Sesión 7.1]
Profesor Retroman

15 

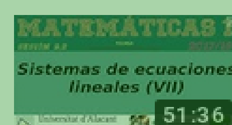
Sistemas de Ecuaciones Lineales IV [M1_2017][Sesión 7.2]
Profesor Retroman

16 

Sistemas de Ecuaciones Lineales V [M1_2017][Sesión 8.1]
Profesor Retroman

17 

Sistemas de Ecuaciones Lineales VI [M1_2017][Sesión 8.2]
Profesor Retroman

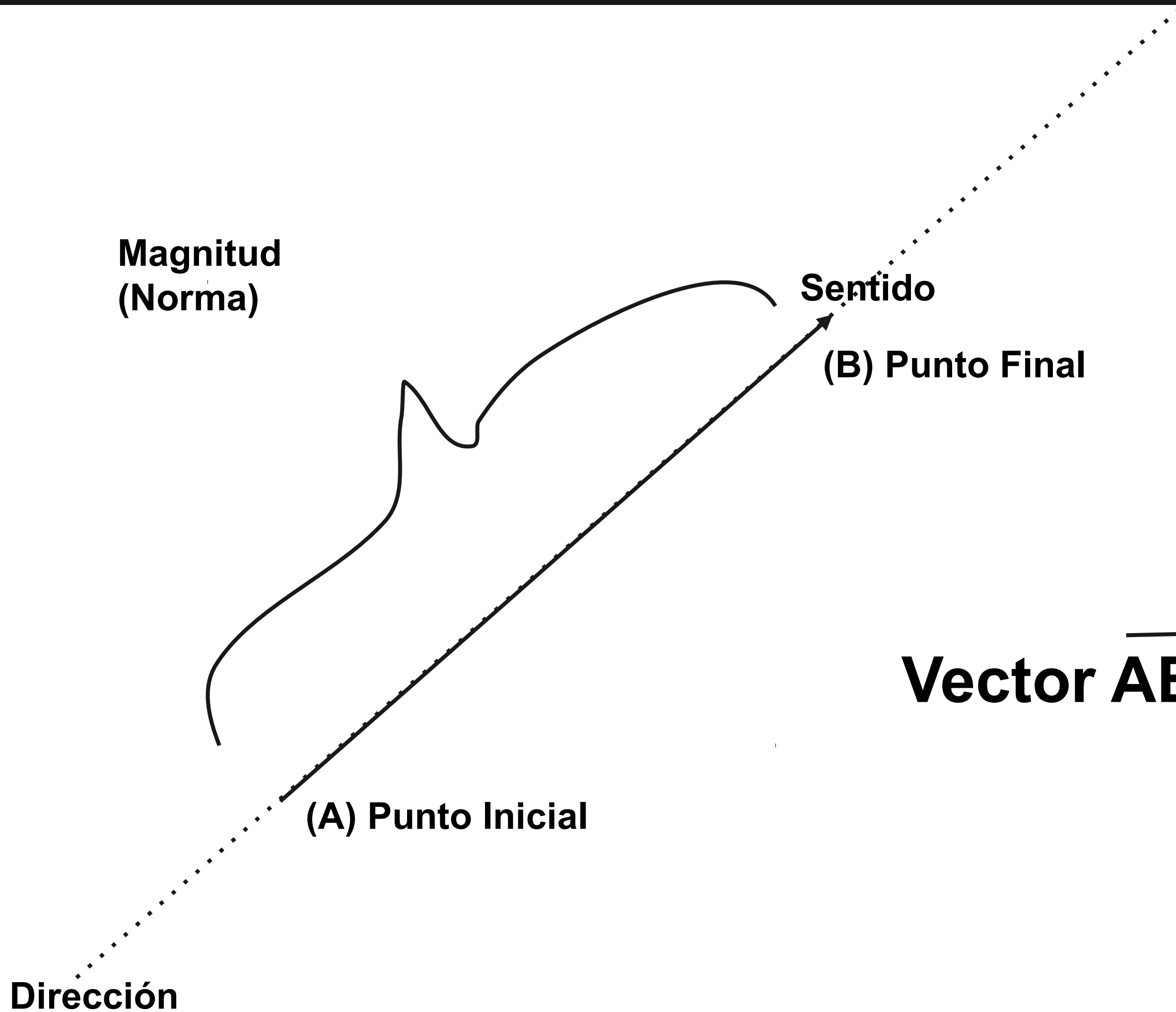
18 

Sistemas de Ecuaciones Lineales VII [M1_2017][Sesión 9.1]
Profesor Retroman

19 

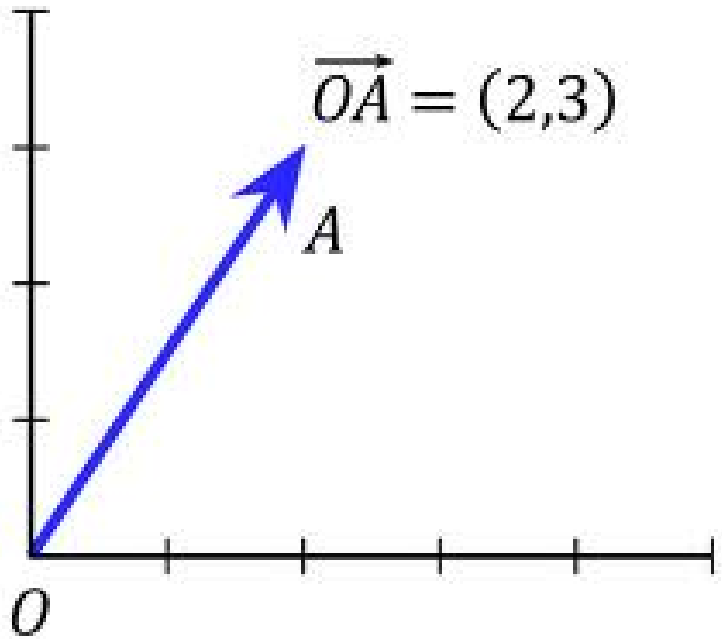
Operaciones con Matrices I [M1_2017][Sesión 9.2]
Profesor Retroman

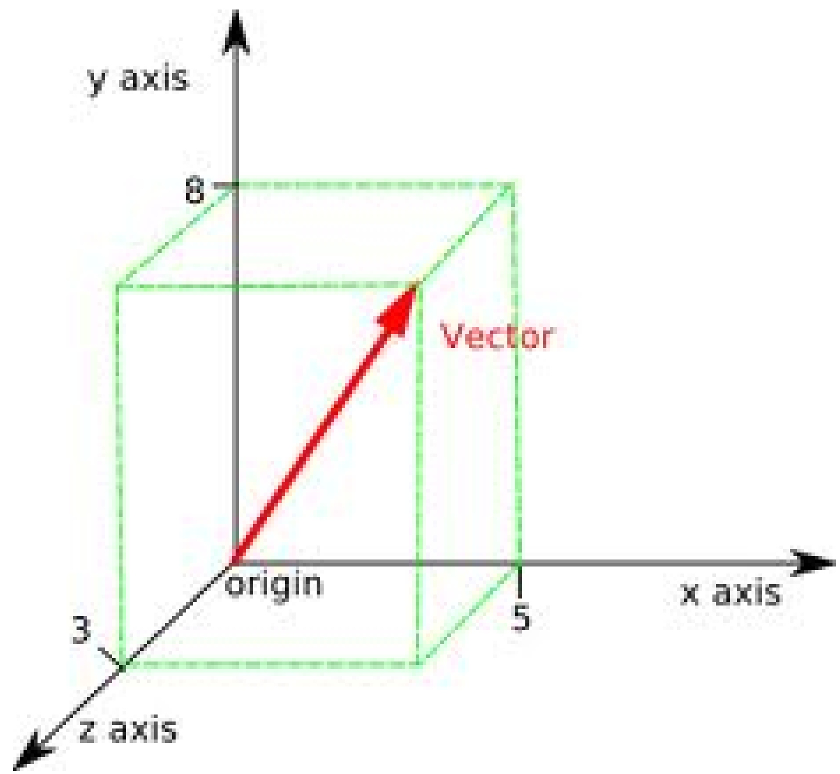
Vectores



Vector $\overrightarrow{AB}$

Vectores





a = (2, 3)

b = (5, 8, 3)

Definición 1.1

Vector or **n-tupla**

- Un conjunto ordenado de n números reales

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Definición 1.1

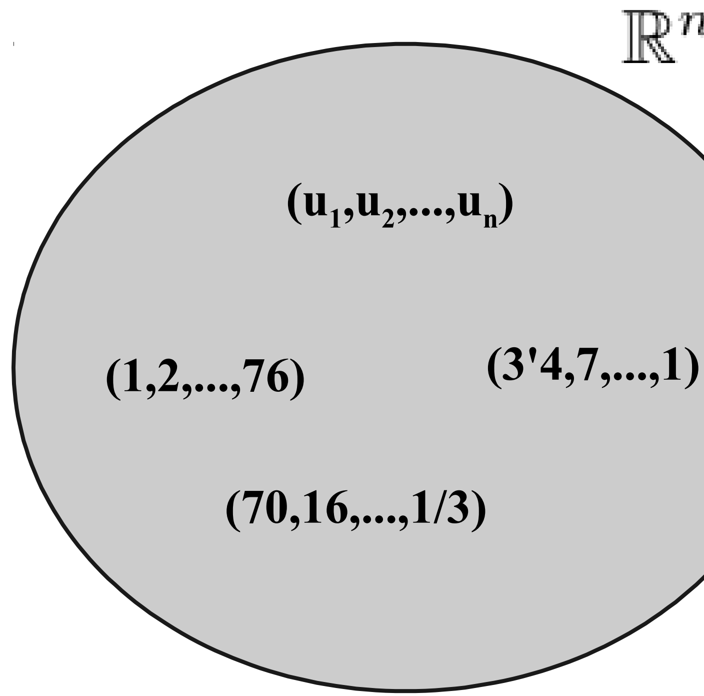
$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots u_n).$$

$$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$$

$$(u_1, u_2, \ldots u_n) = (v_1, v_2, \ldots v_n)$$

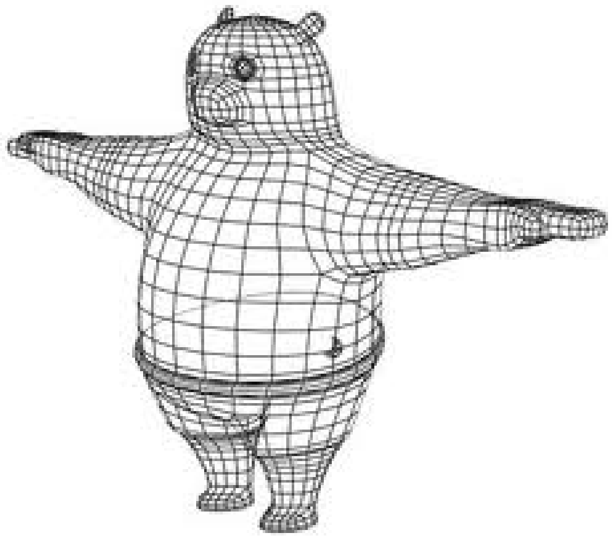
$$\Longleftrightarrow$$

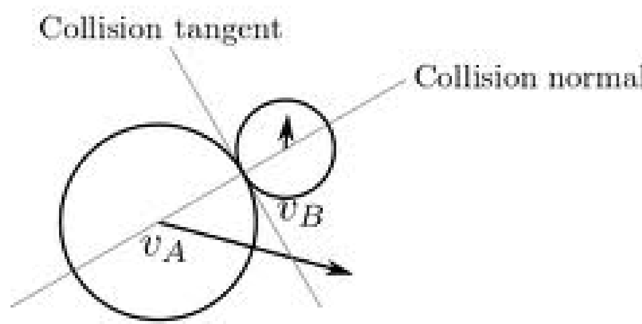
$$u_i = v_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots n.$$



Para qué se utilizan?

- Geometría (Gráficos)
- Física
- Inteligencia Artificial
- Todo





Definición 1.2

Operaciones básicas con vectores

$$(0, 0, \dots, 0)$$

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \qquad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \qquad -\boldsymbol{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$$

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots v_n) \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$$

α número real $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$\alpha \boldsymbol{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n)$$

Teorema 1.1

Propiedades de los vectores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \text{ y } \boldsymbol{w} &\in \mathbb{R}^n \\ \alpha, \beta &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ (propiedad asociativa)

(b) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ (propiedad conmutativa)

(c) $\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

(d) $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0}=(-\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}$

(e) $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$

(f) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u}$

(g) $\alpha(\beta\boldsymbol{u})=(\alpha\beta)\boldsymbol{u}$

(h) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

Definición 1.3

Sistema de Ecuaciones Lineales

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

coeficientes

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

$b_i \in \mathbb{R}$

Términos independientes

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ incógnitas

- No hay productos entre incógnitas, inversas, ni otras funciones de las **incógnitas**.

Lineal y no-lineal

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & & & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & \pi \\ & - & y & - & z & = & \sqrt{6} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & \dfrac{2}{x_3} & = & 2 \\ & - & x_2 & - & 5x_3 & = & \sqrt{6} \end{array}\right\}$$

Definición 1.4

Solución de un sistema

Una solución es un **vector** que sustituye a cada incógnita por un valor real, **satisfaciendo** todas las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & & - & x_3 & = & 2 \\ & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \boldsymbol{u} = (3, -1, 1)$$

Definición 1.5

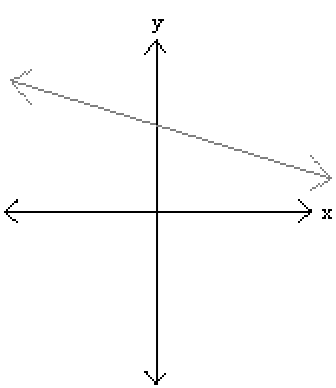
Clasificación de Sistemas

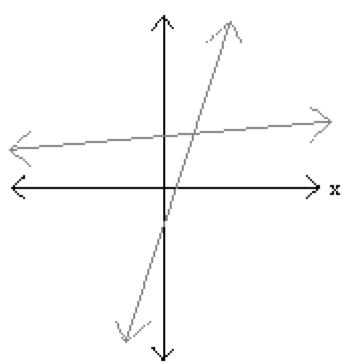
Consistente

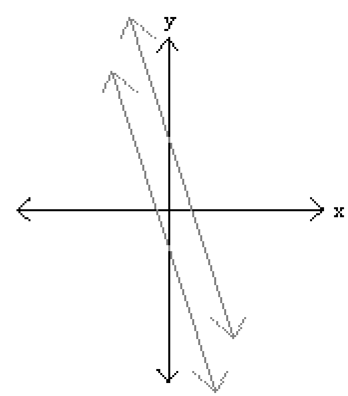
Inconsistente

Indeterminado

Determinado







Encontrando soluciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right\}$$

Sustitución regresiva

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & & & = & -3 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Sustitución Progresiva

Definición 1.6

Sistemas Equivalentes

Dos sistemas se consideran **equivalentes** si tienen las **mismas soluciones**.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$x = 2, \quad y = 3$$

Operaciones Elementales

Generan sistemas equivalentes:

1. Intercambiar 2 ecuaciones
2. Multiplicar 1 ecuación por un escalar no-cero
3. Sumar 1 ecuación a otra, multiplicada por escalar no-cero

Simplificando

Un sistema se puede representar por una matriz de coeficientes

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

1: $F_{i \leftrightarrow j}$

2: $F_i \leftarrow \alpha F_i$

3: $F_i \leftarrow F_{ij}(\beta)$

Definicion 1.7

Una matriz está en **forma escalonada** si:

1. El primer elemento no-cero de cada fila es 1 (y lo llamamos **uno principal**)
2. Cada nuevo uno principal está a la **derecha** del de la fila superior
3. Las filas con todo cero, si hay, están bajo las que no son todo cero.

Ejemplos escalonados

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Escalonando

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 2F_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

Método de Gauss

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow \frac{1}{9} F_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Resolviendo un sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2\alpha-3\beta \\ 4+3\alpha+5\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.8

Una matríz está en **forma escalonada reducida** si:

1. Está en forma escalonada
2. Cada uno principal es el único elemento no-cero en su columna

Escalonadas reducidas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 3F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Método de Gauss-Jordan

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 4F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + 3F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Definición 1.9

Un sistema es **homogéneo** si todos los términos independientes son cero

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

Homogéneo → Consistente

Los sistemas homogéneos son **consistentes**

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -7 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 2F_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -3\alpha \\ 5\alpha \\ \alpha \end{array}\right] = \alpha \left[\begin{array}{r} -3 \\ 5 \\ 1 \end{array}\right], \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Métodos Iterativos

Obtienen soluciones **aproximadas** realizando varias **iteraciones** consecutivas de cálculo.

1. **Jacobi**
2. **Gauss-Seidel**

Método de Jacobi

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{aligned}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(i+1)} - \boldsymbol{x}^{(i)} \right\| < 10^{-k}$$

$$\text{máx} \left| x_j^{(i+1)} - x_j^{(i)} \right| < 10^{-k}$$

Método de Jacobi

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 7x_1 & - & x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & = & -7 \end{array}\right\}$$

$$x_1 = \frac{5 + x_2}{7}$$
$$x_2 = \frac{7 + 3x_1}{5}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{5 + x_2^{(0)}}{7} = \frac{5+0}{7} \approx 0'714$$
$$x_2^{(1)} = \frac{7 + 3x_1^{(0)}}{5} = \frac{7 + 3 \cdot 0}{5} \approx 1'400$$

$$x_1^{(2)} = \frac{5 + 1'4}{7} \approx 0'914$$
$$x_2^{(2)} = \frac{7 + 3 \cdot 0'714}{5} \approx 1'829$$

i	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(i)}$	0	$0'714$	$0'914$	$0'976$	$0'9934$	$0'998$	$0'999$
$x_2^{(i)}$	0	$1'400$	$1'829$	$1'949$	$1'985$	$1'996$	$1'999$

Método de Gauss-Seidel

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(i)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(i-1)} - a_{13}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(i-1)}}{a_{11}} \\
x_2^{(i)} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(i)} - a_{23}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(i-1)}}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_n^{(i)} &= \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(i)} - a_{n2}x_2^{(i)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(i)}}{a_{nn}}
\end{aligned}$$

$$x_j^{(i)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(i)} - \cdots - a_{j,j-1}x_{j-1}^{(i)} - a_{j,j+1}x_{j+1}^{(i-1)} - \cdots - a_{jn}x_n^{(i-1)}}{a_{jj}}$$

Método de Gauss-Seidel

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 7x_1 & - & x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & = & -7 \end{array}\right\}$$

$$x_1 = \frac{5 + x_2}{7}$$
$$x_2 = \frac{7 + 3x_1}{5}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{5 + x_2^{(0)}}{7} = \frac{5+0}{7} \approx 0'714$$
$$x_2^{(1)} = \frac{7 + 3x_1^{(1)}}{5} = \frac{7 + 3 \cdot 0'714}{5} \approx 1'829$$

$$x_1^{(2)} = \frac{5 + x_2^{(1)}}{7} = \frac{5 + 1'829}{7} \approx 0'976$$
$$x_2^{(2)} = \frac{7 + 3x_1^{(2)}}{5} = \frac{7 + 3 \cdot 0'976}{5} \approx 1'985$$

i	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(i)}$	0	$0'714$	$0'976$	$0'998$	$1'000$	$1'000$
$x_2^{(i)}$	0	$1'829$	$1'985$	$1'999$	$2'000$	$2'000$

Definicion 1.10

Una matriz nxn es **diagonalmente dominante** si:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \,. \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.2

Si una matriz de sistema es **diagonalmente dominante**, entonces el sistema es **consistente** y **determinado**, y los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel **convergen** para precisiones arbitrarias

Ejercicios

http://bit.ly/sistemas2018-1

Nivel 1

E1 Comprobad que la 3-tupla es solución del sistema correspondiente, para cualquier α:

$$\begin{bmatrix} -1+2\alpha \\ 4-3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \qquad \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

E2 Dado el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right\}$$

(a) Comprobad que $\boldsymbol{u} = (-2, 1, 1)$ y $\boldsymbol{u} = (6, -3, -3)$ son soluciones.

(b) Probad que $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ es solución para cualesquiera números reales α y β.

Nivel 2

E3 Resolver los sistemas en función de k

(a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & -6 \end{array}\right\}$$

(c) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & k \\ 2x & - & y & + & 4z & = & k^2 \end{array}\right\}$$

(b) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & kx_2 & = & 1 \\ kx_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}\right\}$$

(d) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = & 1 \\ x_1 & + & kx_2 & + & x_3 & = & 1 \\ kx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right\}$$

Nivel 3

E4 Se tienen tres lingotes de 100 gramos cuya composición (en gramos) es la siguiente

	Oro	Plata	Cobre
Lingote 1	20	30	50
Lingote 2	30	40	30
Lingote 3	40	50	10

¿Qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes para formar uno nuevo que contenga 42 gr. de oro, 57 de plata y 51 de cobre?

Álgebra: Tema 1

Vectores y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Grado en Ingeniería en Informática
2018-2019

Francisco José Gallego Durán