Ejercicios de Álgebra

Hoja 1

T1: Sistemas de Ecuaciones Lineales

- *Los ejercicios que se proponen están relacionados con la resolución y estudio de los sistemas de ecuaciones lineales (escribiremos SL) en el dominio de los números reales.*

Ejercicio 1. Dado el SL:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 6 \\ 3x & x & 3y & + & 3z & = & 9 \end{array}$$

a) Comprueba que el vector v = (1,1,1) es **solución** de dicho sistema
b) Escribe la primera ecuación multiplicada por 4.
c) Escribe la tercera ecuación dividida por 3.
d) Comprueba si el vector v sigue siendo solución del sistema
e) Representa el SL de forma matricial indicando cuál es la matriz de coeficientes y cuál la ampliada.

Ejercicio 2. Aplica las siguientes operaciones elementales por filas a la matriz e indica de qué tipo son. Escribe la matriz que resulta en cada caso

a) $F1 \leftrightarrow F3$ b) $F1 \leftrightarrow \frac{1}{2} F1$ c) $F3 \leftrightarrow F3 - F2$
b) Consigue la matriz escalonada.
c) Consigue la matriz escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. Indica cuál de las siguientes matrices está escalonada o escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4. Estudia si los SL asociados a las siguientes matrices escalonadas son incompatibles.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5. Escribe los SL de las matrices y estudia si son compatibles determinados o indeterminados.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 6. a) Clasifica y, si es el caso, resuelve el SL mediante reducción de Gauss.

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned}$$

b) Clasifica y, si es el caso, resuelve mediante Gauss el SL asociado a la siguiente matriz ampliada.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7. Clasifica y, si es el caso, resuelve los SL mediante Gauss-Jordan

a)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x - y + z &= 8 \\ 3x - z &= 3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Ejercicio 8. Calcula el valor que debe tomar *a* en cada SL para que éstos sean compatibles. Realiza el estudio en una de las matrices escalonadas asociadas a la matriz ampliada de cada SL.

a)

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 4x + ay &= 8 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 4x + 6y &= a \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x + ay &= 4 \\ -x + 3y + 3z &= -a \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$