Álgebra

Matrices Elementales

Grado en Ingeniería en Informática
2018-2019

Ejercicio Factorización LU

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & 2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

0)

L 4x4

U 4x5

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1)

$$L = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{-4} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{-6} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1/2 & 5/2 & 1 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1/2 & 5/2 & 1 \\ 0 & \mathbf{3} & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & 7 \end{vmatrix}$$

Ejercicio Factorización LU

2)

$$L = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -9 & 1 & 0 \\ -6 & 12 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1/2 & 5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1/2 & 5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -13 \end{vmatrix}$$

3)

$$L = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -9 & 2 & 0 \\ -6 & 12 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1/2 & 5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21/2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1/2 & 5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

Ejercicio Factorización LU

4)

$$L = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -9 & 2 & 0 \\ -6 & 12 & 4 & -55 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1/2 & 5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Otra opción:

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

Importante: Comprobar A = LU

Definición

- Una matriz elemental es el resultado de aplicar **una** operación elemental por filas a la matriz identidad
- Hay 3 tipos de matrices elementales:

	OE/fila	**MATRIZ ELEMENTAL**	
MATRIZ IDENTIDAD **I** (nxn)	$F_i \leftrightarrow F_j$	Tipo 1	P_{ij}
	$F_i \leftarrow \alpha F_i \quad (\alpha \neq 0)$	Tipo 2	$E_i(\alpha)$
	$F_i \leftarrow F_i + \beta F_j \quad (\beta \neq 0)$	Tipo 3	$E_{ij}(\beta)$

Ejemplo 1

- Para OE/fila Tipo 2 → ME Tipo 2: $E_i\ (\alpha)$

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad F3 \leftarrow (2/5)\ F3 \qquad E_3\,(2/5) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2

- Para OE/fila Tipo 3 → ME Tipo 3: **E_{ij} (β)**

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{F1 \leftarrow F1 + (1/3)\,F2} \qquad \mathbf{E_{12}(1/3)} = \begin{vmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{F2 \leftarrow F2 + (-5)\,F3} \qquad \mathbf{E_{23}(-5)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matriz No Elemental

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{P_{12}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

F1 ↔ F2 **F2 ← F2 + (-5) F1**

A **NO** es ME → **ERROR** → **2** OE/filas a I

Inversa como producto de ME

- Teorema: Sea **A (nxn)**. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:
  - A es invertible
  - La forma escalonada reducida de A es $\mathbf{I_n}$
  - A se puede escribir como producto de **ME**

$$\text{Si } \mathbf{E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I}, \quad \mathbf{A E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 = I}$$

$$\mathbf{A^{-1} = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1}$$

$$\mathbf{A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}}$$

Inversa como producto de ME

- Para poder expresar que:

$$A^{-1} = E_k\, E_{k-1} \ldots E_2\, E_1$$

$$A = E_1^{-1}\, E_2^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1}\, E_k^{-1}$$

Es **necesario** demostrar que toda matriz elemental **E_i es invertible**

Matriz Elemental Invertible

OE/fila	INVERSA	MATRIZ ELEMENTAL		INVERSA
$F_i \leftrightarrow F_j$	$F_i \leftrightarrow F_j$	Tipo 1	P_{ij}	$\mathbf{P_{ij}}$
$F_i \leftarrow \alpha\ F_i$ ($\alpha \neq 0$)	$F_i \leftarrow (\mathbf{1/\alpha})\ F_i$ ($\alpha \neq 0$)	Tipo 2	$E_i(\alpha)$	$\mathbf{E_i(1/\alpha)}$
$F_i \leftarrow F_i + \beta\ F_j$ ($\beta \neq 0$)	$F_i \leftarrow F_i + (\mathbf{-\beta})\ F_j$ ($\beta \neq 0$)	Tipo 3	$E_{ij}(\beta)$	$\mathbf{E_{ij}(-\beta)}$

Toda Matriz Elemental es invertible

La inversa de E es otra matriz elemental F, del mismo tipo, de forma que **EF = FE = I**

- $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$
- $E_i^{-1}(\alpha) = E_i(1/\alpha)$
- $E_{ij}^{-1}(\beta) = E_{ij}(-\beta)$

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplos

- Indica el tipo de cada ME
- Calcula $\mathbf{E_i^{-1}}$ y comprueba que $\mathbf{E_i^{-1}E_i} = I$

$$\mathbf{E_1} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\mathbf{E_{12}(-3)}]{\mathbf{F1 \leftarrow F1 + (-3)\, F2}} \mathbf{E_1^{-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{E_2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\mathbf{P_{12}}]{\mathbf{F1 \leftrightarrow F2}} \mathbf{E_2^{-1}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{E_3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\mathbf{E_2(-4)}]{\mathbf{F2 \leftarrow (-4)\, F2}} \mathbf{E_3^{-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{vmatrix}$$

Inversa como producto de ME

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$$

$$E_k^{-1} E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = E_k^{-1}$$

$$E_{k-1}^{-1} E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$$

$$\ldots E_2^{-1} E_2 E_1 A = E_2^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$$

$$E_1^{-1} E_1 A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$$

Ejercicio 1

- Escribe $\mathbf{A}^{-1}$ como producto de ME
- Demuestra que $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = I$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

- Se obtiene escalonada de A y se guardan OE/fila en ME

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{F2 \leftarrow F2 + (-3)\ F1} \qquad \mathbf{A'} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{E_{21}\,(-3) = E_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F2 \leftarrow (-1/2)F2} A'' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F1 \leftarrow F1 + (-2)F2} A''' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$E_2(-1/2) = E_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{vmatrix} \qquad E_{12}(-2) = E_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{E_3 E_2 E_1 A = I}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = E_3 E_2 E_1}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

- *¿Cómo se escribiría **A** como producto de ME?*

Ejercicio 1

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$$

$$E_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \qquad E_1^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$E_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{vmatrix} \qquad E_2^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$E_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad E_3^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2

- Escribe $\mathbf{A}^{-1}$ como producto de ME
- Demuestra que $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{I}$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_7\,\mathbf{E}_6\,\mathbf{E}_5\,\mathbf{E}_4\,\mathbf{E}_3\,\mathbf{E}_2\,\mathbf{E}_1}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

¿Cómo se escribiría **A** como producto de ME?

Ejercicio 2

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} E_5^{-1} E_6^{-1} E_7^{-1}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$