ESTADÍSTICA .... enero 2020

---

1. (2'5 puntos). La temperatura corporal de cierta especie animal es una variable aleatoria que tiene una distribución normal de media 36,7ºC y desviación típica 3,8ºC. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 ejemplares de esa especie. Hallar la probabilidad de que la temperatura corporal de la media muestral:

a) Sea menor o igual a 36,9ºC
b) Esté comprendida entre 36,5ºC y 37,3ºC

Solución:

La media muestral $\bar{X}$ tiene una distribución N(36.7 , 3.8/10)= N(36.7, 0.38)

a)

$$P(\overline{X} \leq 36{,}9) = P\left(Z \leq \frac{36{,}9 - 36{,}7}{0{,}38}\right) = P(Z \leq 0{,}52) = 0{,}6985$$

(NOTA: SI SE HA BUSCADO EN LAS TABLAS P(Z≤0,53)=0,7019)

b)

$$P(36{,}5 \leq \overline{X} \leq 37{,}3) = P\left(\frac{36{,}5 - 36{,}7}{0{,}38} Z \leq \frac{37{,}3 - 36{,}7}{0{,}38}\right) =$$

$$P(-0{,}52 \leq Z \leq 1{,}58) = P(Z \leq 1{,}58) - P(Z \leq (-0{,}52) =$$

$$P(Z \leq 1{,}58) + P(Z \leq (0{,}52) - 1 = 0{,}695 + 0{,}9429 - 1 = 0{,}6379$$

(NOTA: SI SE HA BUSCADO EN LAS TABLAS P(Z≤0,53), ENTONCES: 0,9429+0,7019-1= 0,6448)

2. (2'5 puntos). Dos amigos inventan un peculiar juego usando una baraja de 40 cartas (10 números o figuras y 4 palos). El juego consiste en extraer dos cartas al azar.
Si aparecen dos ases, el amigo A recibe 5 puntos y el amigo B recibe 1. Si aparece un solo as, el amigo B recibe 4 puntos y A ninguno. Si no aparece ningún as pero ambas cartas son del mismo palo, el amigo A recibe 3 puntos y B ninguno. En cualquier otro caso, ninguno recibe puntos.
Sean X e Y las puntuaciones de los amigos A y B respectivamente,

a) Construye la función de cuantía conjunta (función de probabilidad conjunta) para las puntuaciones de una partida
b) Calcula las funciones de cuantía marginales (funciones de probabilidad marginales)
c) Calcula la función de cuantía condicional (función de probabilidad condicional) $g_1(x|Y = 0)$

Solución:

a)

Y				
4	$\frac{\binom{4}{1}\binom{36}{1}}{\binom{40}{2}} = \frac{144}{780} = 0.1846$	0	0	
1	0	0	$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{6}{780} = 0.0077$	
0	$1 - \frac{144}{780} - \frac{144}{780} - \frac{6}{780} = \frac{486}{780} = 0.6231$	$\frac{\binom{9}{2}\binom{4}{1}}{\binom{40}{2}} = \frac{144}{780} = 0.1846$	0	
f(x,y)	**0**	**3**	**5**	***X***

b)

f₁(x)	$\frac{144}{780} + \frac{486}{780} = \frac{630}{780} = 0.8077$	$\frac{144}{780} = 0.1846$	$\frac{6}{780} = 0.0077$
X	**0**	**3**	**5**

4	$\frac{144}{780} = 0.1846$
1	$\frac{6}{780} = 0.0077$
0	$\frac{486}{780} + \frac{144}{780} = \frac{630}{780} = 0.8077$
Y	***f₂(y)***

c)

$$g_1(x|Y=0) = \frac{f(x,0)}{f_2(0)}$$

$g_1(x\|Y=0) = \frac{f(x,0)}{f_2(0)}$	$\frac{486}{780}\Big/\frac{630}{780} = 0.7714$	$\frac{144}{780}\Big/\frac{630}{780} = 0.2286$	$0\Big/\frac{630}{780} = 0$
X	**0**	**3**	**5**

3. (2'5 puntos). La concentración de dos componentes químicos en cierto compuesto viene dada por una variable bidimensional según la función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Determina si las variables X e Y son independientes
b) Calcula $Var(X-Y)$ de la forma: $Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$.
c) Calcula $E\left(2X^2 - 3Y^2 + \frac{1}{2}\right)$

Solución:

Todos los cálculos para Y son análogos.

a)

$$f_1(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2};\quad x \in [0,1]$$

$$f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(x)$$

Luego no son independientes.

b)

$$E(X) = \int_0^1 x f_1(x)\,dx = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = 7/12$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = 5/12$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = 0.0763\hat{8}$$

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 xyf(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1\left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Y de ahí:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12} = -0.0069\hat{4}$$

$$Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = 0.0763\hat{8} + 0.0763\hat{8} - 2\cdot(-0.0069\hat{4}) = 0.1\hat{6}$$

c)

$$E\left(2X^2 - 3Y^2 + \frac{1}{2}\right) = 2E(X^2) - 3E(Y^2) + \frac{1}{2} = 2\cdot\frac{5}{12} - 3\cdot\frac{5}{12} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = 0.08\hat{3}$$

4. (2'5 puntos). Los 30 alumnos de una Escuela de Idiomas estudian inglés y francés. En las pruebas finales de estas materias se han obtenido los siguientes resultados: 18 han aprobado inglés, 14 han aprobado francés y 6 han aprobado los 2 idiomas.

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya aprobado inglés ni francés?
b) Se elige un estudiante al azar entre los aprobados de francés, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado inglés?

Solución:

I={aprobar inglés}; F={aprobar francés}

P(I) = 18/30=3/5=0,6; P(F)= 14/30=7/15=0,46666; P(I ⋂ F)= 6/30=1/5=0,2

a) $P(\bar{I} \cap \bar{F}) = 1 - P(I \cup F) = 1 - \left(P(I) + P(F) - P(I \cap F)\right) = 1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{7}{15} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15} = 0{,}133333$

b)

$$P(I|F) = \frac{P(I\cap F)}{P(F)} = \frac{3}{7} = 0,428$$