Álgebra: Tema 3

Inversa y Factorización LU

Grado en Ingeniería en Informática
2018-2019

Ejercicios

N1 Comprobad que la 3-tupla es solución del sistema correspondiente, para cualquier α:

$$\begin{bmatrix} -1+2\alpha \\ 4-3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \qquad \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

1.12 Dado el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right\}$$

(a) Comprobad que $\boldsymbol{u} = (-2, 1, 1)$ y $\boldsymbol{u} = (6, -3, -3)$ son soluciones.

(b) Probad que $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ es solución para cualesquiera números reales α y β.

Ejercicios

N2

. Resolver los sistemas en función de k

(a) $\left.\begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & -6 \end{array}\right\}$

(b) $\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & kx_2 & = & 1 \\ kx_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & k \\ 2x & - & y & + & 4z & = & k^2 \end{array}\right\}$

(d) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = & 1 \\ x_1 & + & kx_2 & + & x_3 & = & 1 \\ kx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right\}$

Solución

N2 . Resolver los sistemas en función de k

(a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & -6 \end{array}\right\}$$

NO usar determinantes

Emplear sólo los métodos que vemos en clase

Solución

N2 Resolver los sistemas en función de k

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & -6 \end{array}\right\}$$

Aplicamos Gauss

$$\left|\begin{array}{ccc} k & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \end{array}\right|$$

F1 ↔ 1/K F1

1) Asumimos **k≠0**

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2/K & 3/K \\ 2 & -4 & -6 \end{array}\right|$$

F2 ↔ F2 - 2F1

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2/K & 3/K \\ 0 & -4-4/K & -6-6/k \end{array}\right|$$

Solución

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & -6 \end{array}\right\}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2/K & 3/K \\ 0 & \dfrac{-4(k+1)}{K} & \dfrac{-6(k+1)}{k} \end{array}\right|$$

F2 ↔ k/-4(k+1) F2

2) Asumimos **k≠-1**

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2/K & 3/K \\ 0 & 1 & \dfrac{-6(k+1)/k}{k/-4(k+1)} \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2/K & 3/K \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right|$$

Forma

Escalonada

* Resolvemos:

$x + (2/k)y = 3/k$

$y = 3/2$

$\Rightarrow$

$x = 0$

$y = 3/2$

Solución

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & -6 \end{array}\right\}$$

SCD con $k \neq 0$ y $k \neq -1$

$x = 0$

$y = 3/2$

¿Qué ocurre con k=0 y k=-1?

1) k=0

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \end{array}\right| \quad F1 \leftrightarrow F2 \quad \left|\begin{array}{ccc} 2 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right| \quad F1 \leftrightarrow 1/2F1$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right| \quad F2 \leftrightarrow 1/2F2 \quad \left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right|$$

Solución

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & -6 \end{array}\right\}$$

1) k=0

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{vmatrix}$$

Forma Escalonada

* Resolvemos:

x - 2y = -3

y = 3/2

$\Rightarrow$

Luego **SCD**

x = 0

y = 3/2

2) k=-1

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \end{vmatrix} \quad F1 \leftrightarrow -F1 \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \end{vmatrix} \quad F2 \leftrightarrow F2 - 2F1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Luego **SCI**

y = α

$\Rightarrow$

x - 2α = -3

x = -3 +2α

Solución

N2 . Resolver los sistemas en función de k

$$\text{(b)}\quad \left.\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & kx_2 & = & 1 \\ kx_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}\right\}$$

1) Si k≠1 y k≠-1

SCD

$x_1 = 1/1+k$

$x_2 = 1/1+k$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1/1+k \end{vmatrix}$$

2) Si k=1

SCI

$x_2 = \alpha$

$x_1 = 1 - \alpha$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3) Si k=-1

SI

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución

N2

$$\text{(c)}\quad \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & k \\ 2x & - & y & + & 4z & = & k^2 \end{array}\right\}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & (k-2)/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4(3k^2-k-10) \end{array}\right|$$

Forma Escalonada

Ejercicios

N2

$$\text{(d)}\quad \left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = & 1 \\ x_1 & + & kx_2 & + & x_3 & = & 1 \\ kx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right\}$$

1) Si k≠1 y k≠-2

SCD

x = 1/k+2

y = 1/k+2

z = 1/k+2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/k+2 \end{vmatrix}$$

2) Si k=1

SCI

y = α

z = β

x = 1-α-β

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3) Si k=-2

SI

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Ejercicios Propuestos 1

Clasificad los siguientes sistemas en función de a y b.

(a) $$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & - & ax_3 & = & b \end{array}\right\}$$

(b) $$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 6x_3 & = & b \end{array}\right\}$$

(c) $$\left.\begin{array}{rcrcrcc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & = & b+2 \end{array}\right\}$$

Ejercicios Propuestos 2

¿Qué condición deben cumplir a, b y c para que el siguiente sistema de ecuaciones tenga solución?

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 3z &= a \\
2x + 6y - 11z &= b \\
x - 2y + 7z &= c
\end{aligned}
$$

Ejercicios Propuestos 3

Considérese el sistema

$$ax + by = 1$$
$$cx + dy = 0$$

Demostrar que si $ad - bc \neq 0$, entonces el sistema tiene la solución única $x = d/(ad - bc)$, $y = -c/(ad - bc)$. Demostrar también que si $ad - bc = 0$, $c \neq 0$ o $d \neq 0$, entonces el sistema no tiene solución.

Matriz inversa

- Podemos resolver el sistema conociendo la matriz inversa de A (la matriz de coeficientes)

$$Ax = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\boldsymbol{x}) &= A^{-1}\,\boldsymbol{b} \\ (A^{-1}A)\boldsymbol{x} &= A^{-1}\,\boldsymbol{b} \\ (I)\boldsymbol{x} &= A^{-1}\,\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &= A^{-1}\,\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Cálculo de la inversa

- Método de Gauss-Jordan

$$[\ A \mid I\ ] \xrightarrow{\text{Op. Elem.}} [\ I \mid P\ ]$$

$$PA = I$$

$$[\ A \mid I\ ] \xrightarrow{\text{Op. Elem.}} [\ I \mid A^{-1}\ ]$$

$$\begin{array}{c} \quad A \qquad\qquad\qquad I \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \quad I \qquad\qquad\qquad A^{-1} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -3/2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Cálculo de la inversa

- Ejercicios
  - Halla la inversa de las siguientes matrices por el método de Gauss-Jordan y comprueba los resultados:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Factorización LU

- Un problema común en ingeniería:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_3, \ldots$$

- Se puede resolver calculando la inversa (si existe)

$$\boldsymbol{x}_1 = A^{-1}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}_x = A^{-1}\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{x}_1 = A^{-1}\boldsymbol{b}_3, \ldots$$

- Pero hay otra alternativa

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \rightarrow LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Factorización LU

- L (lower) es triangular inferior y cuadrada
- U (upper) es triangular superior (puede no cuadrada)

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \rightarrow LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

- Se puede resolver por sustitución doble

$$\boldsymbol{y} = U\boldsymbol{x} \qquad L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \qquad U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

Factorización LU

- Resolver el sistema Ax = b, siendo b=[-8 -8 3]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1) Ux=y

Ly=b

SUSTITUCIÓN PROGRESIVA

$$\left|\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & -8 \\ -1 & 3 & -1 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

$y_1 = -4$

$y_2 = -4$

$y_3 = 3$

2) **Ux=y**

SUSTITUCIÓN REGRESIVA

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = 3$

Algoritmo Factorización

1) U = A, L = I (L es la identidad, ojo, cuadrada)
2) Aplicar Gauss para que U=A sea triangular superior
3) Antes de hacer ceros en una columna, copiar la columna de U a L, desde el uno principal hacia abajo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema por factorización LU para b = [1 6 -3 4]

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2/3 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Álgebra: Tema 3

Inversa y Factorización LU

Grado en Ingeniería en Informática
2018-2019