ÁLGEBRA LINEAL

T1Alg: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1 Resolución de sistemas con métodos directos: Gauss y Gauss-Jordan.
2 Matrices escalonadas.
3 Sistemas homogéneos.
4 Resolución de sistemas con métodos iterativos: Jacobi y Gauss Seidel.

T2Alg: MATRICES Y OPERACIONES

1 Definición de matriz. Tipos de matrices.
2 Suma y producto de matrices.
3 Concepto de matriz inversa. Propiedades.
4 Matrices en bloques.
5 Aplicaciones de las matrices: representación de grafos.

T3Alg: MATRICES Y SISTEMAS LINEALES

1 Matrices elementales.
2 Rango e inversa de una matriz.
3 Cálculo de la factorización LU de una matriz.
4 Resolución de sistemas mediante la factorización LU

T4Alg: SUBESPACIOS VECTORIALES. BASES Y DIMENSIÓN

1 Concepto de espacio vectorial y subespacios vectoriales de R^n.
2 Combinación lineal de vectores.
3 Independencia lineal.
4 Subespacios de una matriz: Fila, Col, Nul.

T5Alg: VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ CUADRADA

1 Concepto y cálculo de los valores propios (autovalores) de una matriz cuadrada.
2 Propiedades de los autovalores.
3 Concepto y cálculo de los autovectores de una matriz cuadrada.
4 Subespacio propio asociado a un autovalor.

T6Alg: DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

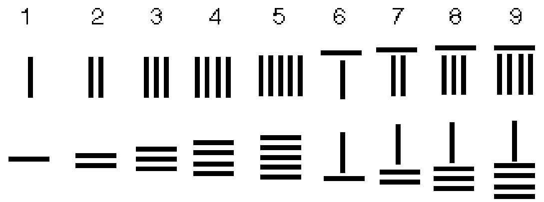
1 Diagonalización de matrices.
2 Concepto de matrices semejantes. Propiedades.
3 Requisitos necesarios y proceso para diagonalizar una matriz.
4 Método de las potencias para calcular aproximaciones a los autovalores.

Actualmente el Álgebra Lineal es indispensable para la resolución de problemas con grandes cantidades de datos, como las aplicaciones de transmisión de información, el desarrollo de motores de búsqueda de Internet o los efectos especiales en películas, grabación de sonido y análisis económico.

Gracias al desarrollo de computadoras de alta velocidad y a las aplicaciones matemáticas. toma relevancia el análisis y **resolución de sistemas de ecuaciones lineales junto con el estudio de su matriz** asociada formada por los coeficientes de las ecuaciones de dichos sistemas

Su interés viene de lejos. En el año 200 a.C aparece en el Libro chino: *Jiu zhang Suan-shu* (*Nueve Capítulos sobre las artes matemáticas*) el siguiente problema :

Tres gavillas de buen cereal, dos gavillas de cereal mediocre y una gavilla de cereal malo se venden por 39 dou. Dos gavillas de bueno, tres mediocres y una mala se venden por 34 dou. Y una buena, dos mediocres y tres malas se venden por 26 dou. ¿Cuál es el precio recibido por cada gavilla de buen cereal, cada gavilla de cereal mediocre, y cada gavilla de cereal malo?.



Resolución :Numerales chinos con cañas de bambú

Actualmente

Resolución :sistema de ecuaciones

$3x + 2y + z = 39$,

$2x + 3y + z = 34$,

$x + 2y + 3z = 26$,

donde x, y, z representan el precio de una gavilla de buen, mediocre y mal cereal, respectivamente

C.F. Gauss (1777-1855)

Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Tenemos un sistema de ecuaciones lineales (SL) que se debe resolver. Resolver un sistema significa averiguar si es consistente o compatible, es decir, si tiene al menos una solución, y si es así, determinar si es única y encontrarla.

Conceptos previos.

1. Sea $n \geq 1$ un número natural. Una ecuación lineal es una expresión de la forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = b$ (1), donde a_i que son los coeficientes y b el término independiente son valores conocidos; x_n son las incógnitas de la ecuación Sólo se admiten operaciones de suma y resta por lo que el exponente de las variables es como máximo 1.
2. Una solución de la ecuación lineal (1) es una serie de números $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ que satisfacen la ecuación (1), $a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_n \alpha_n = b$
3. Un sistema de ecuaciones lineales (SL) es un conjunto de m-ecuaciones y n-incógnitas, m, $n \geq 1$.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \qquad (2)$$

4 Una **solució**n de un SL es una lista u = (s_1, s2,..., s_n} de números que hacen de cada ecuación un enunciado verdadero cuando los valores de *u* se sustituyen en su correspondiente xi. Se dice que *u* verifica las *m* ecuaciones del sistema. El conjunto de todas las soluciones posibles se llama conjunto solución del SL.

5 Dos sistemas lineales con n-incógnitas se dice que son equivalentes si coinciden en el conjunto de soluciones.

Según el número de elementos de dicho conjunto el SL se clasifica como:

> **Incompatibl**e: si no tiene solución. El conjunto es vacío.

> **Compatible**: si tiene al menos una solución.

o Determinado: si tiene una única solución.

o Indeterminado: si tiene más de una o infinitas soluciones

Discutir un SL consiste en clasificarlo y resolverlo en buscar las soluciones, en el caso de que sea compatible.

Se resolverán los SL sobre el cuerpo R (coeficientes reales).

Procedimientos para resolver un SL.

1º.- Métodos sistemáticos Directos: Gauss y Gauss-Jordan

Se transforma un SL en otro equivalente más sencillo de resolver con el que se estudia la existencia de la solución exacta del sistema.

Para ello se aplican operaciones elementales a sus ecuaciones

- El SL se representa con estructura matricial Ax=b, donde A: matriz de coeficientes; b: matriz términos independientes.
- Se obtiene matriz ampliada [A|b] y su forma escalonada (Gauss) o reducida (Gauss-Jordan) [C|d] : matrices triangulares
- Se discute el SL a partir de la matriz [C|d].
- Si es el caso, se resuelve el SL aplicando Gauss (si A está escalonada) o Gauss-J (si A está reducida)..

2º.- Métodos sistemáticos **Iterativos**: Jacobi y Gauss-Seidel

Se obtiene una aproximación a la solución del SL a partir de la construcción de una sucesión de vectores con los que se consigue una solución con mayor precisión que con los métodos directos.

- El SL se representa con estructura matricial Ax=b.
- Se estudia si la matriz A es diagonal dominante.
- Se ordenan ecuaciones y variables.
- Se obtiene ecuación de recurrencia en el SL del método iterativo elegido.
- Se elige criterio de parada.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada [A|b]

Conceptos previos: En una matriz M:

- Una fila o columna distinta de cero (no nula) es la que tiene ,al menos, una entrada (elemento) diferente de cero.
- Una entrada principal de una fila es la entrada diferente de cero que se encuentra más a la izquierda (en una fila distinta de cero).
- Si en la entrada principal hay un 1, lo llamaremos uno principal .

MATRIZ ESCALONADA / REDUCIDA: Una matriz rectangular A (mxn) está en **forma escalonada** por filas si :

(a) La primera entrada distinta de cero de la fila, al leer de izquierda a derecha, es un 1 principal.

(b) Cada 1 principal de una fila está en una columna situada a la derecha del 1 principal de la fila precedente.

(c) Si hay filas sólo de ceros , éstas estarán en la parte inferior de la matriz.

Si además:

(d) Una columna tiene un 1 principal y el resto de entradas de la columna son ceros, la matriz A está en forma **escalonada reducida**.

OPERACIONES ELEMENTALES POR FILAS PARA ESCALONAR UNA MATRIZ

Tipo-1: Intercambiar las filas i y j, se indica: $F_{i \leftrightarrow j}$

Tipo-2: Multiplicar la fila i por $\alpha \neq 0$, se indica: $F_i \leftarrow \alpha F_i$

Tipo-3: Sumar a la fila i, la fila j multiplicada por $\alpha \neq 0$, se indica: $F_i \leftarrow F_i + \alpha F_j = F_{ij}(\alpha)$.

ALGORITMO

1º.- Obtener el primer 1 principal:

Si el primer elemento de la 1ª fila (a11):

. No es cero -> Dividir la fila por dicho número (operación T-2).

Hacer ceros por debajo de él (operación T-3).

. Es cero -> Si hay una fila por debajo con algún elemento no nulo, intercambiar 1ª fila con ésta.

Si todos los elementos por debajo son cero pasar a siguiente columna.

2º.- Buscar el siguiente 1 principal en las siguientes filas y columna hasta agotar las filas.

Cada una de las transformaciones anteriores obtienen SL equivalentes

DISCUSIÓN de un SL en la matriz escalonada/reducida [C|d]. Un SL es:

Incompatible (SI) (no tiene solución): Si en [C|d] aparece un 1 principal en la última columna o si alguna fila queda [0,0,...0 | b], $b \neq 0$.

Compatible indeterminado (SCI)- infinitas soluciones: Si en [C|d] no hay ecuaciones del tipo 0 = b y el nº de 1 principales es < nº de incógnitas.

Compatible determinado (SCD)- una solución: Si en [C|d] no hay ecuaciones del tipo 0 = b y el nº de 1 principales es igual que nº de incógnitas.

RESOLUCIÓN de un SL

GAUSS: [C|d] escalonada. Resolver Cx=d aplicando sustitución regresiva.

GAUSS-JORDAN: [C|d] escalonada reducida. En cada fila no nula de [C|d] se despeja la incógnita correspondiente a la entrada principal.

Proceso:.

1º.- Representar el SL mediante Ax = b y obtener su matriz ampliada [A|b] y la matriz [C|d] escalonada /reducida por filas.

2º.- Discutir y resolver Cx = d mediante el estudio de [C|d],

3º.- Resolver Cx = d por alguno de los métodos método directos.

4º.- Las soluciones del SL representado por Cx = d serán las de Ax = b.

EJEMPLO 1

$$x_2 - 4x_3 = 8$$
$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$
$$5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1$$

$$[A|b]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \qquad [C|d]=\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Discusión: Sistema incompatible

Solución: no tiene

EJEMPLO 2

$$[A|b]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad [C|d]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Discusión: Sistema compatible indeterminado.

Infinitas soluciones.

Resolución: Incógnitas libres: x_3, x_4 ya que no tienen 1 principal. Se les asigna un parámetro.

Incógnitas básicas: x_1, x_2 tienen 1 principal. Se escriben en función de las libres y se calculan por sustitución regresiva.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Es un tipo de SL que se caracteriza porque tiene sus términos independientes nulos.

En forma matricial se escribe: $Ax = 0$.

Un SH es siempre compatible (rango(A) = rango(A*)) ya que tiene al menos la solución (0, 0,..., 0) que se denomina solución trivial. Puesto que, en la práctica, esta solución carece de interés, suele decirse que un sistema homogéneo posee solución sólo si ésta es distinta de la trivial.

Como $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ es siempre una solución trivial sólo se tienen dos posibilidades:

- la solución trivial es la única solución o
- existe un número infinito de soluciones además de ésta.

Si un sistema homogéneo presenta una solución $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ distinta de la trivial entonces se cumple que también son soluciones todas las proporcionales a ella: $(k\cdot s_1, k\cdot s_2, \ldots, k\cdot s_n)$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

>> La ecuación homogénea $Ax = 0$ tiene una solución no trivial si, y sólo si, la ecuación tiene por lo menos una variable libre.

Teorema : Un SH de *m* ecuaciones con *n* incógnitas siempre tiene **una solución no trivial** si **m < n**, es decir, si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones.

EJEMPLO 3

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$[A|b]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad [C|d]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: $x = y = z = 0$

MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLVER UN SL

Un método iterativo obtiene una solución aproximada de la solución de Ax = b construyendo una sucesión de vectores:: $x_1, x_2, \ldots, x_m,$ a partir de un vector inicial arbitrario x_0 (vector nulo). Para ello se repite un mismo proceso usando una ecuación de recurrencia (cada método tiene su ecuación).

A cada repetición del proceso se le llama ITERACIÓN.

Se establecen condiciones de parada, como: $\left\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\right\| < 10^{-k}$. o bien parar en un nº determinado de iteraciones

MÉTODO ITERATIVO DE JACOBI

Se aplica sólo a sistemas cuadrados (Nº incógnitas = Nº ecuaciones).

Para obtener la ecuación de recurrencia: Se ordenan las ecuaciones y las incógnitas. De la ecuación i se despeja la incógnita i (aii<>0).

ALGORITMO

Dado el sistema, una solución inicial $x^{(0)}$ y prefijados $k, N \in \mathbb{N}$

- Para $i = 1, 2, \ldots$ calcular $x^{(i)}$ en función de $x^{(i-1)}$

$$\begin{aligned}
x_1^{(i)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(i-1)} - a_{13}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(i-1)}}{a_{11}} \\
x_2^{(i)} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(i-1)} - a_{23}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(i-1)}}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_n^{(i)} &= \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(i-1)} - a_{n2}x_2^{(i-1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(i-1)}}{a_{nn}}
\end{aligned}$$

- Detener el proceso cuando $\left\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\right\| < 10^{-k}$ ó $i > N$.

EJEMPLO

$$\begin{array}{rcrcr} 7x_1 & - & x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & = & -7 \end{array}$$

Ecuación recurrencia

$$x_1 = \frac{5 + x_2}{7} \qquad x_2 = \frac{7 + 3x_1}{5}$$

1º iteración:

$$x_1^{(1)} = \frac{5 + x_2^{(0)}}{7}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{7 + 3x_1^{(0)}}{5}$$

6 primeras iteraciones

i	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(i)}$	0	0'714	0'914	0'976	0'9934	0'998	0'999
$x_2^{(i)}$	0	1'400	1'829	1'949	1'985	1'996	1'999

La solución converge a (1,2)

MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL

Para calcular la componente $x_j^{(i)}$ se usan (j -1) valores de la iteración actual (i) y (n –j) de la iteración anterior

ALGORITMO

$$\begin{aligned} x_1^{(i)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(i-1)} - a_{13}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(i-1)}}{a_{11}} \\ x_2^{(i)} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(i)} - a_{23}x_3^{(i-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(i-1)}}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n^{(i)} &= \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(i)} - a_{n2}x_2^{(i)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(i)}}{a_{nn}} \end{aligned}$$

$$\boxed{x_j^{(i)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(i)} - \cdots - a_{j,j-1}x_{j-1}^{(i)} - a_{j,j+1}x_{j+1}^{(i-1)} - \cdots - a_{jn}x_n^{(i-1)}}{a_{jj}}}$$

EJEMPLO

$$\begin{aligned} 7x_1 &- x_2 = 5 \\ 3x_1 &- 5x_2 = -7 \end{aligned}$$

1º iteración:

$$x_1^{(1)} = \frac{5 + x_2^{(0)}}{7} = \frac{5+0}{7} \approx 0'714$$

$$x_2^{(1)} = \frac{7 + 3x_1^{(1)}}{5} = \frac{7 + 3 \cdot 0'714}{5} \approx 1'829$$

2º iteración:

$$x_1^{(2)} = \frac{5 + x_2^{(1)}}{7} = \frac{5 + 1'829}{7} \approx 0'976$$

$$x_2^{(2)} = \frac{7 + 3x_1^{(2)}}{5} = \frac{7 + 3 \cdot 0'976}{5} \approx 1'985$$

5 primeras iteraciones

i	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(i)}$	0	0'714	0'976	0'998	1'000	1'000
$x_2^{(i)}$	0	1'829	1'985	1'999	2'000	2'000

La solución converge a (1,2) más rápido que Jacobi

CONVERGENCIA DE LOS MÉTODOS ITERATIVOS

Un método iterativo converge a la solución del SL si la matriz de coeficientes original del SL es diagonalmente dominante (DD)

Definición 1.10: Una matriz de tamaño $n \times n$ se llama diagonalmente dominante cuando para $j = 1, 2, \ldots, n$

$$|a_{jj}| > |a_{j1}| + |a_{j2}| + \cdots + |a_{jj-1}| + |a_{jj+1}| + \cdots + |a_{jn}|.$$

EJEMPLO

Matrices DD $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

Si la matriz no es DD se reordenan las incógnitas/ecuaciones del SL inicial de manera que la nueva matriz de coeficientes sea DD

EJEMPLO

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 12y & - & z & = & -2 \\ 11x & - & 4y & + & 3z & = & -3 \\ -3x & - & 2y & - & 12z & = & -2 \end{array} \to \begin{bmatrix} 3 & 12 & -1 \\ 11 & -4 & 3 \\ -3 & -2 & -12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} 12y & + & 3x & - & z & = & -2 \\ -\ 4y & + & 11x & + & 3z & = & -3 \\ -\ 2y & - & 3x & - & 12z & = & -2 \end{array} \to \begin{bmatrix} 12 & 3 & -1 \\ -4 & 11 & 3 \\ -2 & -3 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \end{array}$$