1. Problema. Se quiere repoblar un río con un tipo de pez autóctono para evitar su extinción. Para ello se ha realizado un estudio previo de la concentración de oxígeno en el río. Este estudio proporciona los siguientes resultados: la concentración de oxígeno en el agua sigue una distribución normal de media 9 y desviación típica 0.8; así mismo, el oxígeno consumido por la fauna del río sigue, también, una distribución normal de media 4 y desviación típica 0.2 y, por último, el oxígeno producido por las bacterias y algas del río sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica 1.2. Se considera que las tres distribuciones son independientes y que la concentración de oxígeno en el agua para la existencia de vida ha de ser mayor o igual a 5. ¿Cuál es la probabilidad de que al repoblar el río, multiplicándose por 2 la fauna del mismo, el agua del río siga siendo apto para la vida?

Solución:

Sean las variables

$$\begin{aligned}
X_1 &= \text{concentración de oxígeno en el río}, \quad X_1 \sim N(9, 0'8) \\
X_2 &= \text{cantidad de oxígeno consumido por la fauna}, \quad X_2 \sim N(4, 0'2) \\
X_3 &= \text{cantidad de oxígeno producido por bacterias}, \quad X_3 \sim N(5, 1'2)
\end{aligned}$$

La concentración de oxígeno total es $X_1 - X_2 + X_3$, pero si se dobla la fauna, el oxígeno consumido es doble y la concentración total es $X_1 - 2X_2 + X_3$. Hay que hallar $\mathrm{P}\left(X_1 - 2X_2 + X_3 \geq 5\right)$. Sea $Y = X_1 - 2X_2 + X_3$, que tiene una distribución normal de parámetros

$$\mathrm{E}(Y) = 9 - 2 \cdot 4 + 5 = 6, \quad \mathrm{Var}(Y) = 0'8^2 + 4 \cdot 0'2^2 + 1'2^2 = 2'24.$$

Tipificando

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y \geq 5) &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{5-6}{\sqrt{2'24}}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(Z \geq -0'67\right) = \Phi(0'67) = 0'7486.
\end{aligned}$$

2. Problema. Una empresa de informática produce y saca a la venta tiradas de 20000 ordenadores de los que sólo un 3% salen defectuosos. Para darse a conocer lanza una campaña de publicidad en la que asegura que si el número de ordenadores defectuosos de una tirada supera en más de un 5% el valor esperado, promete devolver el dinero a cada uno de los compradores afectados y, además, regalarles un ordenador nuevo a cada uno.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa tenga que llevar a cabo la promesa de la campaña publicitaria?

(b) Si del total de ordenadores que se llevan vendidos, se sabe que ya hay más de 620 defectuosos ¿cuál es la probabilidad de que la empresa no tenga que llevar a cabo su promesa?

Solución:

Sea X = número de ordenadores defectuosos de los 20000. Se trata de una distribución binomial, B (20000, 0’03). Por tanto, el valor esperado para una distribución binomial es:

E (X) = n p = 20000 x 0’03 = 600

Para que la empresa lleve a cabo la promesa de la campaña publicitaria, el número de ordenadores defectuosos debe superar en un 5% el valor esperado, o sea, a 630. Aproximamos por la Normal:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{X - 20000 \cdot 0'03}{\sqrt{20000 \cdot 0'03 \cdot 0'97}} = \frac{X - 600}{\sqrt{582}} \sim N(0,1)$$

(a) $\mathrm{P}(X > 630) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{30}{\sqrt{582}}\right) = 1 - \Phi(1'24) = 1 - 0'8925 = 0'1075.$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \leq 630 \mid X > 620) &= \frac{\mathrm{P}(620 < X \leq 630)}{\mathrm{P}(X > 620)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(\frac{20}{\sqrt{582}} < Z \leq \frac{30}{\sqrt{582}}\right)}{\mathrm{P}\left(Z > \frac{20}{\sqrt{582}}\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(0'83 < Z \leq 1'24)}{\mathrm{P}(Z > 0'83)} \\
&= \frac{\Phi(1'24) - \Phi(0'83)}{1 - \Phi(0'83)}
\end{aligned}$$

3. Problema. El 2% de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. Si se empaquetan en lotes de 2000 tornillos,

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado lote no haya más de 50 defectuosos?

(b) ¿Cuál es el mínimo número k para que se pueda asegurar que la probabilidad de que no haya más de k tornillos defectuosos sea superior a 0.9?

Solución:

La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es 0.02. El número *X* de tornillos defectuosos en una muestra de 2000 sigue la distribución binomial B(2000, 0.02) que podemos considerar como normal de parámetros $\mu = 40$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{39.20} = 6.26$.

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leq 50) &= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{50-40}{6'26}\right) \\ &= \Phi(1'60) = 0'9452. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leq k) > 0'9 &\rightarrow \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9 \\ &\rightarrow \Phi\left(\frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9 \end{aligned}$$

Llamando $a = \dfrac{k-40}{6'26}$ se tiene

$$\Phi(a) > 0'9$$

$$\rightarrow \quad a > 1'29$$

$$\rightarrow \quad \frac{k-40}{6'26} > 1'29 \rightarrow$$

$$k > 40 + 1'29 \times 6'26 = 48'0754$$

Luego la solución es 49 tornillos

4. Problema. Los beneficios anuales de cierta empresa de informática se calculan restándole a los ingresos la suma de los gastos fijos y los salarios. Si representamos los ingresos mediante la variable I, los gastos fijos mediante G y los salarios mediante S, y sabemos que las tres variables se distribuyen de forma independiente y tienen, respectivamente, las siguientes distribuciones: N(330, 20);N(120, 10) y N(80, 5)

(a)¿Cuál es la probabilidad de que un determinado año los beneficios sean superiores a 135?

(b) ¿Cuál es el beneficio mínimo que podríamos asegurar en un determinado año con una probabilidad no inferior al 90%?

Solución:

Llamando B a la variable beneficio se tiene que $B = I - G - S$. B es normal con parámetros

$$\mu = 330 - 120 - 80 = 130$$
$$\sigma = \sqrt{20^2 + 10^2 + 5^2} = \sqrt{525}.$$

(a) $\mathrm{P}(B > 135) = \mathrm{P}\left(Z > \dfrac{135-130}{\sqrt{525}}\right) = \mathrm{P}(Z > 0'22) = 1 - \Phi(0'22) = 1 - 0'5871 = 0'4129.$

(b) Se pide un valor$k$ tal que $\mathrm{P}(X > k) \geq 0'9$ o lo que es lo mismo $\mathrm{P}(X \leq k) \leq 0'1$. Tipificando:

$$\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k-130}{\sqrt{525}}\right) \leq 0'1 \rightarrow \Phi\left(\frac{k-130}{\sqrt{525}}\right) \leq 0'1$$

El valor buscado de $z = \dfrac{k-130}{\sqrt{525}}$ es negativo (le corresponde una probabilidad $0'1 < 05$). Por tanto buscamos $\Phi(-z) = 0'9$ que le corresponde a $1'29$

$$-\frac{k-130}{\sqrt{525}} = 1'29 \rightarrow k = 130 - 1'29 \cdot \sqrt{525} = 100'47.$$