Tema 6

AUTOVALORES / AUTOVECTORES de una matriz

AUTOVALORES / AUTOVECTORES

¿ qué son?

Vamos a resolver SL de la forma…

$$A\,x = \lambda\,x \qquad (1)$$

λ : escalares → **autovalores** / valores propios

$x \neq 0$: vectores → **autovectores** / vectores propios

? **Útil, en resolución de SL porque…**

Diagonalizar la matriz A (Ax = b) para **calcular potencias** de A :

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1}$$

D: matriz diagonal formada por autovalores de A

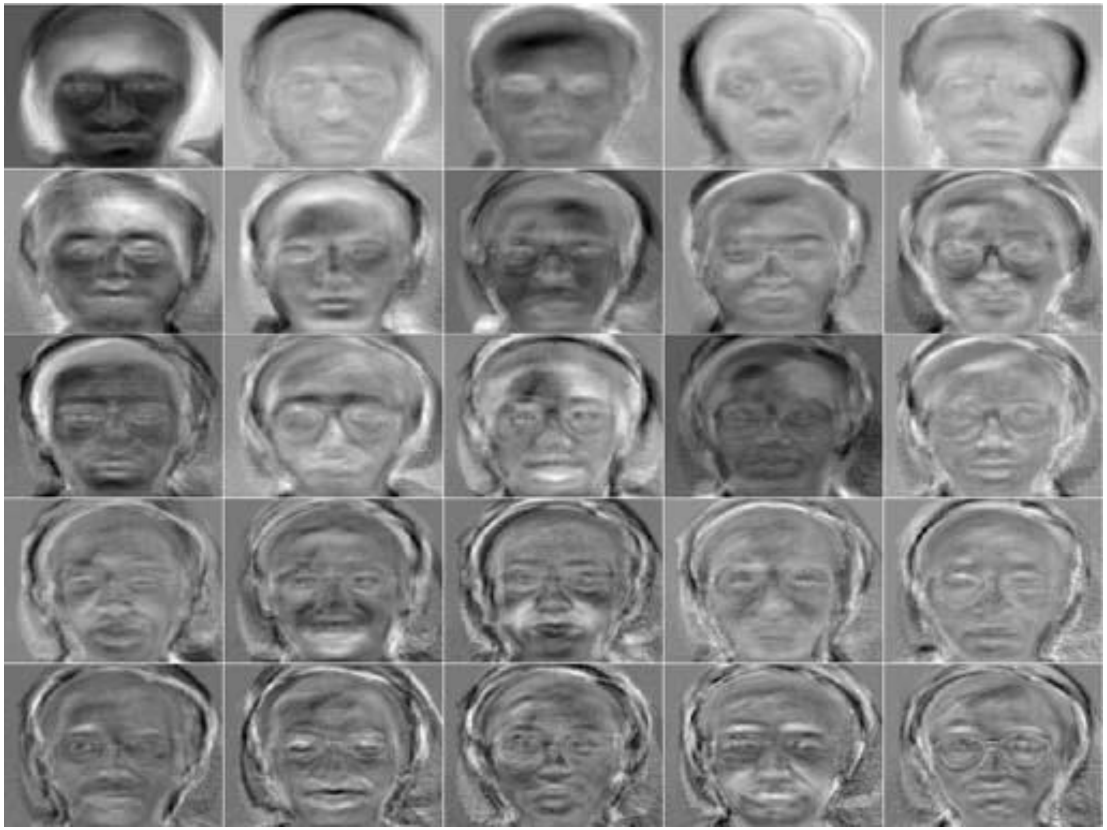
P: matriz formada por los autovectores asociados a los autovalores

¿para qué sirven….

OK Computación

Proceso imágenes

píxeles de fotos en una matriz A.
Cada λ y cada $\mathbf{x}$ asociado
Informan sobre las facciones más *distintivas de* imágenes



¿para qué sirven….

Google

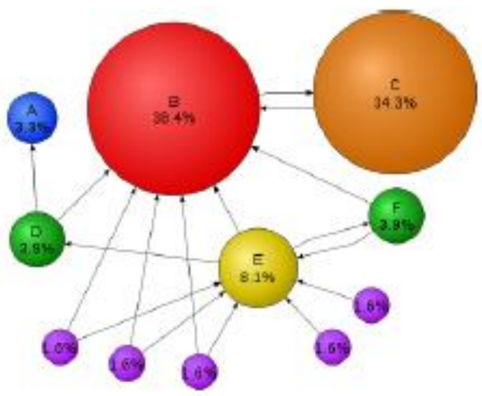


FIGURA 3. El grafo de "importancias"

Teorema 4.1. *Si M_I es la matriz de incidencia del grafo de internet, y $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ el vector de importancias, entonces se cumple*

$$M_I^t x^t = \lambda \cdot x^t$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ es la constante de proporcionalidad.

Corolario 4.3. *El vector de importancias de las páginas web es un vector propio (positivo) de la matriz M_I^t, y la constante de proporcionalidad λ es el valor propio asociado a este vector.*

AUTOVALORES / AUTOVECTORES / SUBESPACIOS PROPIOS

Sea A una matriz (nxn) de R, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}$ es un **autovalor** de A si y sólo si, existe un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{nx1}$ no nulo ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$)

$$\mathbf{A\,x = \lambda\,x} \qquad (1)$$

λ también se conoce como valor propio de la matriz A

x se llama **autovector** o vector propio asociado a **λ**

EJEMPLO

Puesto que se cumple la igualdad
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El número **2** es un valor propio de la matriz y el vector **(0,1,1)** es un vector propio asociado a él

AUTOVALORES / AUTOVECTORES / SUBESPACIOS PROPIOS

EJEMPLO

De igual forma $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El número **0** es un valor propio de la matriz y

el vector **(1,-1,0)** es un vector propio asociado a él

AUTOVALORES / AUTOVECTORES / SUBESPACIOS PROPIOS

El conjunto de todos
los **autovectores asociados**
a un **mismo autovalor** λ
se llama **subespacio propio, $E_A(\lambda)$**

- Cada **autovalor** tiene asignados **infinitos autovectores**
- Cada **autovector** está asociado a un **único autovalor**

CÁLCULO de AUTOVALORES

REFLEXIONES para calcular λ

De la ecuación

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$$

$$(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$ (2) → Sistema Homogéneo

Si $(A - \lambda I)$ invertible → sólo solución trivial
$\mathbf{x} = \mathbf{0}$
(2) es **SCD**

Si $(A - \lambda I)$ no invertible → existen otras soluciones
(2) es **SCI**

¿ qué **soluciones** "interesan" ?

Nuestro objetivo es obtener los **autovectores no nulos** por eso necesitamos que el **SH** sea **compatible indeterminado**

CÁLCULO de AUTOVALORES

REFLEXIONES para calcular λ

Buscamos $(A - \lambda I)x = 0$ **compatible indeterminado**

$\Rightarrow$ $(A - \lambda I)$ **no invertible**

$\Rightarrow$ $|A - \lambda I| = 0 \quad (3)$

- (3) es la **ecuación característica / polinomio característico**

$$q_A(\lambda) = |A - \lambda I|$$

- Las **raíces** de (3) son los valores de λ (reales o complejos)

CÁLCULO de AUTOVALORES

EJERCICIO 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix} \right|$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(-6 - \lambda) - 9 = \lambda^2 + 4\lambda - 21$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -7 \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned}}$$

CÁLCULO de AUTOVALORES

EJERCICIO 2

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

$$q_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \text{ (doble)} \end{array}}$$

MULTIPLICIDAD de los AUTOVALORES

- El **nº de autovalores** está directamente relacionado con el **grado del polinomio**
- Si $q_A(\lambda)$ es de **grado n** ➔ hay **n** autovalores λ_i (raíces de $q_A(\lambda)$)
- Cada λ_i tiene un "grado" ➔ **multiplicidad algebraica** $ma(\lambda_i)$

  Ej. Si $(\lambda - \lambda_i)^k$ ➔ $ma(\lambda_i) = k$

$q_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 21$
$\lambda_1 = -7$ **ma(-7) = 1**
$\lambda_2 = 3$ **ma(3) = 1**

ma(-7) + ma(3) = **2**

$q_B(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda$
$\lambda_1 = 0$ **ma(0) = 1**
$\lambda_2 = 2$ (doble) **ma(2) = 2**

ma(0) + ma(2) = **3**

- Las suma de las multiplicidades coincide con el grado del polinomio

PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n = \text{traza}(A)$ (traza: suma de los elementos de la diagonal)

2. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \lambda_n = \det(A)$

Autovalores de A (Ej1)

$\lambda_1 = -7$

$\lambda_2 = 3$

$\lambda_1 + \lambda_2 = -7 + 3 = -4$

traza(A) = 2 – 6 = -4

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -7 \cdot 3 = -21$

det(A) = -21

CÁLCULO de AUTOVECTORES

- Obtenidos los autovalores se obtienen los autovectores **asociados** a ellos. Para ello:
- Cada autovalor $\boldsymbol{\lambda_i}$ se reemplaza en **$(A - \lambda_i I)\, x = 0$** (SCI)
- La solución de un SH es siempre un **subespacio.**
- Los subespacios de autovectores se denominan *autoespacios*.

$$E_A(\lambda) = \mathrm{Nul}(A - \lambda I)$$

Una **base** del subespacio estará formada por los **autovectores** asociados a $\boldsymbol{\lambda_i}$

dimensión $E_A(\lambda)$ =

multiplicidad geométrica de $\boldsymbol{\lambda}$

$mg(\lambda)$

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

EJERCICIO 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Autovalores

$$\mathbf{q_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{q_A(\lambda) =} (4-\lambda)(-4-\lambda)-9 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = \mathbf{-5},\ m_a(-5) = 1 \\ \lambda_2 = \mathbf{5},\ m_a(5) = 1 \end{array}}$$

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

EJERCICIO 3 (continuación)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Autovectores

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\, \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Para $\lambda_1 = -5$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución del SH está dada por vectores de la forma $\mathbf{x} = (x_1, -3x_1)^T$

$$E_A(\lambda_1) = \mathrm{Env}\{(x_1, -3x_1)^T, x \in R\}$$

Un autovector asociado a $\lambda_1 = -5$ es, por ej, $\mathbf{v}_1 = (1, -3)^T$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg}(\lambda_1) = 1$

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

EJERCICIO 3
(continuación)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Autovectores

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Para $\lambda_2 = \mathbf{5}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución del SH está dada por vectores de la forma $\mathbf{x} = (3x_2, x_2)^T$

$$\mathbf{E_A(\lambda_2)} = \mathrm{Env}\{(3x_2, x_2)^T, x \in R\}$$

Un autovector asociado a $\lambda_2 = 5$ es, por ej, $\mathbf{v_2} = \mathbf{(3, 1)^T}$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_2) = 1}$

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

EJERCICIO 4

$$(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula los autovalores de A (3x3) e indica su multiplicidad algebraica.

Para calcular los autovectores encuentra el subespacio propio generado por cada autovalor e indica su multiplicidad geométrica

Autovalores

$$\mathbf{q_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0}$$

$$\boxed{q_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = \lambda\,(-\lambda^2 + 4\lambda - 4\,)}$$

$\lambda_1 = \mathbf{0}$,	$m_a(0) = 1$
$\lambda_2 = \mathbf{2}$ (doble),	$m_a(2) = 2$

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

EJERCICIO 4 (continuación)

Subespacio propio para $\lambda_1 = 0$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{reff}(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, x_3)^T \,/\; x_1 = \alpha \quad x_2 = -2\alpha; \quad x_3 = \alpha$

$x = \alpha\,(1, -2, 1)^T$

$\mathbf{E_A(\lambda_1)} = \text{Env}\{\alpha\,(1, -2, 1)^T \; \alpha \in R\, \}$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_1) = 1}$

Un autovector asociado a $\lambda_1 = 0$ es, por ej, $\mathbf{v_1 = (1, -2, 1)^T}$ $\quad \alpha = 1$

EJERCICIO 4 (continuación)

Subespacio propio para $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{reff}(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, x_3)^T \,/\; x_1 = 0 \quad x_2 = \alpha; \quad x_3 = \alpha$

$x = \alpha\,(0, 1, 1)^T$

$\mathbf{E_A(\lambda_2)} = \text{Env}\{\alpha\,(0, 1, 1)^T \;\alpha \in R\,\}$

Multiplicidad geométrica: **$mg(\lambda_2) = 1$**

Un autovector asociado a $\lambda_2 = 2$ es, por ej, $\mathbf{v_2} = (0, 2, 2)^T \quad \alpha = 2$

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

EJERCICIO 4
(continuación)

$$(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalores	Multiplicidad algebraica ma(λ)	Multiplicidad geométrica mg(λ)
0	1	1
2	2	1

CÁLCULO del SUBESPACIO PROPIO asociado a un AUTOVALOR

Ej-5
(hoja 6)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A son: $\lambda_1 = \mathbf{1}$, $\lambda_2 = \mathbf{2}$, $\lambda_3 = \mathbf{3}$ encontrar el **subespacio** propio asociado a cada autovalor y un autovector para cada uno de ellos

Para $\lambda_1 = \mathbf{1}$ $\qquad$ $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{rref}(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SCI $\rightarrow x = (x_1, x_2, x_3)^T \,/\, x_1 = -\alpha/2; \quad x_2 = \alpha/2; \quad x_3 = \alpha$

$$x = \alpha\,(-1/2,\, 1/2,\, 1)^T$$

$\mathbf{E_A(\lambda_1)} = \mathrm{Env}\{\alpha\,(-1/2, 1/2, 1)^T\ \alpha \in R\ \}$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_1) = 1}$

Un autovector asociado a $\lambda_1 = 1$ es, por ej, $\mathbf{v_1} = (-1, 1, 2)^T$

CÁLCULO del SUBESPACIO PROPIO asociado a un AUTOVALOR

Ej-5 (cont) (hoja 6)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = \mathbf{2}$ $\quad$ $\mathbf{(A - \lambda_2 I)x = 0}$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rref}(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SCI $\rightarrow$ $x = (x_1, x_2, x_3)^T \,/\; x_1 = \mathbf{-\alpha/2;} \quad x_2 = \mathbf{\alpha/4;} \quad x_3 = \alpha$

$$x = \alpha\,(-1/2, 1/4, 1)^T$$

$$\mathbf{E_A(\lambda_2)} = \mathrm{Env}\{\alpha\,(-1/2, 1/4, 1)^T \; \alpha \in R \,\mathbf{\}}$$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_2) = 1}$

Un autovector asociado a $\lambda_2 = 2$ es, por ej, $\mathbf{v_2} = (-2, 1, 4)^T$

CÁLCULO del SUBESPACIO PROPIO asociado a un AUTOVALOR

Ej-5 (cont) (hoja 6)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Para } \lambda_3 = 3}$ $\quad \mathbf{(A - \lambda_3 I)x = 0}$

$$(A - \lambda_3 I) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{rref}(A - \lambda_3 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

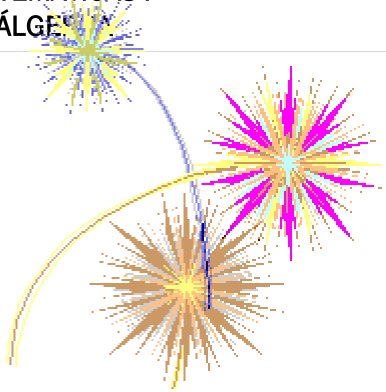
SCI $\rightarrow$ $x = (x_1, x_2, x_3)^T \;/\; x_1 = -\alpha/4; \quad x_2 = \alpha/4; \;\; x_3 = \alpha$

$$x = \alpha\,(-1/4,\ 1/4,\ 1)^T$$

$$\mathbf{E_A(\lambda_2)} = \text{Env}\{\alpha\,(-1/4,\ 1/4,\ 1)^T\ \alpha \in R\ \}$$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_3) = 1}$

Un autovector asociado a $\lambda_3 = 3$ es, por ej, $\mathbf{v_3} = (-1, 1, 4)^T$



LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS-1 OS DESEAMOS

FELIZ NAVIDAD

Y un Año 2019 lleno de …

APROBADOS