**1** En una casa hay tres llaveros; el primero A con cinco llaves, el segundo B con siete y el tercero C con ocho, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él una llave para abrir el trastero. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que se acierte con la llave que abre la puerta?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?

(c) Si la llave escogida es la correcta, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al primer llavero A?

**Solución:** Se consideran los sucesos

- $D = \{$ La llave abre $\}$
- $A = \{$ Se elige el llavero A $\}$
- $B = \{$ Se elige el llavero B $\}$
- $C = \{$ Se elige el llavero C $\}$

Tenemos que

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = 1/3, \mathrm{P}(D \mid A) = \frac{1}{5}, \mathrm{P}(D \mid B) = \frac{1}{7}, \mathrm{P}(D \mid C) = \frac{1}{8}$$

(a) Aplicando el teorema de la probabilidad total
$\mathrm{P}(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = 0'1559$

(b) $\mathrm{P}\left(C \cap \overline{D}\right) = \mathrm{P}(C)\,\mathrm{P}\left(\overline{D} \mid C\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = 0'2917$

(c) $\mathrm{P}(A \mid D) = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}} = 0'4275$

**2** Las marcas obtenidas por un lanzador de peso sigue una variable aleatoria con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9}, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde las distancias, $X$, se miden en decámetros.

(a) *(1 punto)* Calcula la probabilidad condicionada de que la marca sea superior a 25 metros sabiendo que es superior a 20 metros.

(b) *(1 punto)* Calcula la distancia media en metros.

**Solución:**

(a) $\mathrm{P}\left(X > 2'5 \mid X > 2\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(X > 2'5\right)}{\mathrm{P}\left(X > 2\right)}$. Efectuando los cálculos

$$\int_{2'5}^{3} \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_{2'5}^{3} = 0'4213, \qquad \int_{2}^{3} \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_{2}^{3} = 0'7037.$$

La solución es, por tanto, $\dfrac{0'4213}{0'7037} = 0'5987$.

(b) $\mathrm{E}\left(X\right) = \displaystyle\int_0^3 x \cdot \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^4}{36}\right]_0^3 = 2'25$. La media es $22'5$ metros.

**3** Se dispone de una caja con 3 piezas aptas y 2 defectuosas. Se extraen aleatoriamente 2 piezas sin reemplazamiento, y se definen las variables aleatorias:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si la } 1^a \text{ pieza es apta} \\ 0, & \text{si la } 1^a \text{ pieza no es apta} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{si la } 2^a \text{ pieza es apta} \\ 0, & \text{si la } 2^a \text{ pieza no es apta} \end{cases}$$

(a) *(1 punto)* Hallar la función de cuantía conjunta y las marginales

(b) *(1 punto)* Hallar la covarianza $\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)$

**Solución:**

(a) La función de cuantía es

| $Y$ | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 6/20 | 6/20 | |
| 0 | 2/20 | 6/20 | |
| | 0 | 1 | $X$ |

Las marginales:

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f_1$ | 2/5 | 3/5 |

| $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f_2$ | 2/5 | 3/5 |

(b) Haciendo cálculos

- $\mathrm{E}\left(X\right) = \mathrm{E}\left(Y\right) = 3/5$
- $\mathrm{E}\left(XY\right) = 6/20 = 3/10$

Por tanto, $\text{Cov}\,(X,Y) = 3/10 - 3/5 \cdot 3/5 = -3/50$

**4** Una compañía aérea observa que el $10\,\%$ de las plazas reservadas no se cubren, por ello decide aceptar reservas en un $5\,\%$ más de las disponibles. ¿Cuál es la probabilidad de que en un avión de 500 plazas algún pasajero que ha hecho la reserva se quede sin plaza? *(Supóngase que todas las plazas reservadas han sido vendidas)*

**Solución:** Se han reservado $500 + 25 = 525$ plazas. Llamando $X$ al número de pasajeros que acuden al vuelo, tenemos que $X \sim B(525, 0'9)$ y se tiene que calcular $\text{P}\,(X > 500)$. Aproximando por la distribución normal, se tiene que

$$X \approx N(472'5, 6'87).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\text{P}\,(X > 500) &= \text{P}\left(Z > \frac{500 - 472'5}{6'87}\right) \\
&= \text{P}\left(Z > 4'002\right) \\
&= 1 - 0'999968 \\
&= 0'000032.
\end{aligned}$$