SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CONTROL DEL TEMA 5

Ejercicio. Las calificaciones de los 500 aspirantes presentados a un examen para contratación laboral, se distribuye normalmente con media 6.5 y varianza 4.

(a) Determine la proporción de aspirantes con calificaciones inferiores a 5 puntos.
(b) ¿Cuántos aspirantes obtuvieron calificaciones comprendidas entre 5 y 7.5 puntos?

Solución: Llamando X a la puntuación, se tiene que $X \sim N(6'5, 2)$

(a) Calculemos primero la probabilidad de obtener menos de 5 puntos

$$\mathrm{P}\,(X < 5) = \mathrm{P}\left(Z < \frac{5-6'5}{2}\right) = \mathrm{P}\,(Z < -0'75) = \Phi(-0'75) = 1-0'7734 = 0'2266$$

La solución es $22'66\,\%$.

(b)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\,(5 < X < 7'5) &= \mathrm{P}\left(\frac{5-6'5}{2} < Z < \frac{7'5-6'5}{2}\right)\\ &= \mathrm{P}\,(-0'75 < Z < 0'5)\\ &= \Phi(0'5) - \Phi(-0'75)\\ &= \Phi(0'5) - 1 + \Phi(0'75) = 0'4649.\end{aligned}$$

El número de aspirantes es $500 \cdot 0'4649 \approx 232$.

Ejercicio. Una empresa instala en una ciudad 20000 bombillas para su iluminación. Según la empresa instaladora, la duración (en días) de cada bombilla sigue una distribución normal con media 302 y desviación típica 40. Calcular:

(a)¿Cuántas bombillas se fundirán antes de 365 días?
(b)¿Cuántas durarán más de 400 días?

Solución: Sea X la variable que mide la duración en días de una bombilla. Así pues: $X \sim N(302, 40)$.

(a) Primero hay que calcular la probabilidad de que una bombilla se funda antes de 365 y, luego, aplicar ese porcentaje al total de bombillas. Por tanto:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\,(X < 365) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-302}{40} < \frac{365-302}{40}\right)\\ &= \mathrm{P}\left(Z < \frac{63}{40}\right) \approx \mathrm{P}\,(Z \leq 1'58)\\ &= \Phi(1'58) \approx 0'9430.\end{aligned}$$

Por tanto, para el total de bombillas que se fundirán antes de 365 días será: $20000 \cdot 0'9430 = 18860$ bombillas.

(b) Este apartado se hace igual, pero calculando $P(X > 400)$. Así pues:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 400) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 400) &= 1 - \mathrm{P}\left(\frac{X-302}{40} \leq \frac{400-302}{40}\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(Z < \frac{98}{40}\right) \\ &= 1 - proZ \leq 2'45 \\ &= 1 - \Phi(2'45) \\ &= 1 - 0'9930 = 0'0070. \end{aligned}$$

Por tanto, para el total de bombillas que se fundirán antes de 365 días será: $20000 \cdot 0'0070 = 140$ bombillas.

Ejercicio. Calcular
(a) Probabilidad de que al lanzar una moneda 1000 veces se obtengan más de 550 caras.
(b)¿Cuántas veces como mínimo hay que lanzar una moneda, para que la probabilidad de obtener al menos 2 caras sea mayor que 0.9?

Solución:

(a) Llamando X al número de caras en 1000 tiradas, es, $X \sim B(1000, 1/2)$ que podemos considerar como normal $X \approx N(500, \sqrt{250})$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 550) &= 1 - \mathrm{P}(X \leq 550) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{550-500}{\sqrt{250}}\right) \\ &= 1 - \Phi(3'16) \approx 0. \end{aligned}$$

(b) Llamando n al número de tiradas, el número de caras es $X \sim B(n, 1/2)$. Se debe cumplir $\mathrm{P}(X \geq 2) > 0'9$; entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \geq 2) > 0'9 &\rightarrow 1 - \mathrm{P}(X \leq 1) > 0'9 \\ &\rightarrow \mathrm{P}(X \leq 1) < 0'1 \\ &\rightarrow F(1) < 0'1. \end{aligned}$$

Consultando en las tablas, para $p = 1/2$ el mínimo n es 7.

Ejercicio. Una compañía de seguros estima que una de cada mil personas incurre en un cierto accidente a lo largo de un año. Si la compañía tiene aseguradas a diez mil personas ¿cuál es la probabilidad de que en un año no más de tres de sus asegurados incurran en ese accidente?

Solución:

Sea X = número de personas que tienen un accidente~ B(10000, 0,001)
$P(X \leq 3)$
Aproximamos por una variable Poisson con parámetro $\lambda = np = 10000 \times 0{,}001 = 10$
$P(X \leq 3) = 0.0103$

Ejercicio. La contaminación acústica de los locales de copas en una ciudad es medida en decibelios (dB) por una variable que se distribuye normalmente con media 46 y varianza 144. El límite permitido por la legislación es de 55 dB, a partir de los cuales la sanción va en función de la cantidad sobrepasada del límite, pudiendo llegar al cierre del local si el límite sobrepasa en 20 o más dB. Si se elige un local al azar y ha sido sancionado ¿cuál es la probabilidad de que sea cerrado?

Solución: Llamando X a la variable, se tiene que $X \sim N(46, 12)$. Se pide la probabilidad de un suceso condicionado:

$$\mathrm{P}\left(X > 75 \,|\, X > 55\right) = \frac{\mathrm{P}\left(X > 75\right)}{\mathrm{P}\left(X > 55\right)}$$

Tipificamos la variable $\dfrac{X-46}{12} \sim N(0,1)$ y, los cálculos son:

$$\frac{\mathrm{P}\left(X > 75\right)}{\mathrm{P}\left(X > 55\right)} = \frac{\mathrm{P}\left(Z > 2'42\right)}{\mathrm{P}\left(Z > 0'75\right)} = \frac{1-\Phi(2'42)}{1-\Phi(0'75)} = \frac{0'00776}{0'226627} = 0'0342.$$