1 El 15 % de los equipos informáticos que llegan a un determinado distribuidor son defectuosos. Antes de adquirirlos, el distribuidor realiza un test de calidad que da resultados erróneos en el 10 % de los casos. Calcular la probabilidad de que sea defectuoso un determinado equipo al que el test ha calificado como defectuoso.

Solución: Se consideran los sucesos

$$
\begin{aligned}
D &= \{\text{el equipo es defectuoso}\} \\
T_+ &= \{\text{el test da positivo (equipo defectuoso)}\} \\
T_- &= \{\text{el test da negativo}\}
\end{aligned}
$$

Nos piden $\mathrm{P}(D \mid T_+)$ y, conocemos las probabilidades

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(D) = 0'15 \quad \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) = 0'85 \\
&\mathrm{P}(T_+ \mid D) = 0'90 \\
&\mathrm{P}(T_- \mid D) = 0'10 \\
&\mathrm{P}\left(T_+ \mid \overline{D}\right) = 0'10 \\
&\mathrm{P}\left(T_- \mid \overline{D}\right) = 0'90
\end{aligned}
$$

Aplicando el teorema de Bayes

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(D \mid T_+) &= \frac{\mathrm{P}(D \cap T_+)}{\mathrm{P}(T_+)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(D)\,\mathrm{P}(T_+ \mid D)}{\mathrm{P}(D)\,\mathrm{P}(T_+ \mid D) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right)\mathrm{P}\left(T_+ \mid \overline{D}\right)} \\
&= \frac{0'15 \cdot 0'90}{0'15 \cdot 0'90 + 0'85 \cdot 0'10} \\
&= \frac{27}{44} = 0'6136.
\end{aligned}
$$

2 En una urna hay 3 bolas blancas, 2 negras y 1 roja. Un experimento consiste en extraer al azar dos de ellas. Se consideran las variables:

$$B = \{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas blancas}\} \quad N = \{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas negras}\} \quad R = \{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas rojas}\}$$

Calcúlese

(a) La tabla de cuantía conjunta de la variable (N, R).

(b) La media de la variable B.

(c) El número esperado (media) de bolas negras, sabiendo que una bola (exactamente una) ha sido roja.

Solución:

(a)

R				
1	3/15	2/15	0	
0	3/15	6/15	1/15	
	0	1	2	N

(b) La tabla de cuantía de B es

B	0	1	2
f_B	3/15	9/15	3/15

Su media es, por tanto: $\mathrm{E}(B) = 1$.

(c) De la tabla

$N \mid R = 1$	0	1
g_1	3/5	2/5

Se desprende que $\mathrm{E}(N \mid R = 1) = 2/5$.

3 La cantidad producida de un cierto artículo es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{1000} x^2, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & x \notin [0, 10] \end{cases}$$

El precio Y del artículo está en función de la cantidad producida según la relación

$$Y = 40 - 2X.$$

Calcúlese

(a) Cantidad producida media.

(b) Precio medio.

Solución:

(a)

$$\mathrm{E}\left(X\right)=\int_{0}^{10} x\frac{3}{1000}x^{2}\,dx=\frac{3}{1000}\int_{0}^{10} x^{3}\,dx=\frac{3}{1000}\left[\frac{x^{4}}{4}\right]_{0}^{10}=7'5.$$

(b) $\mathrm{E}\left(Y\right)=40-2\mathrm{E}\left(X\right)=40-15=25.$

4 Se observó durante un largo período que la cantidad semanal gastada en el mantenimiento y reparaciones en cierta fábrica tiene aproximadamente una distribución *normal* con una media de 400 euros y una desviación de 20 euros.

(a) Si el presupuesto para la próxima semana es de 450 euros ¿cuál es la probabilidad de que los costos reales sean mayores que la cantidad presupuestada?

(b) ¿Cuál tendría que ser el presupuesto semanal para que esta cantidad solamente se rebasara con probabilidad de 0'1?

Solución: Si X es la cantidad gastada semanalmente es $X\sim N(400,20)$ por lo que $\dfrac{X-400}{20}=Z\sim N(0,1)$

(a)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X>450\right) &= \mathrm{P}\left(Z>\frac{450-400}{20}\right)\\ &= 1-\Phi(2'5)=1-0'9938=0'0062.\end{aligned}$$

(b) Sea a el presupuesto buscado. Se debe cumplir $\mathrm{P}\left(X>a\right)\approx 0'1$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X>a\right) &= \mathrm{P}\left(Z>\frac{a-400}{20}\right)\\ &= 1-\Phi\left(\frac{a-400}{20}\right)=0'1\\ &\rightarrow \Phi\left(\frac{a-400}{20}\right)=0'9\end{aligned}$$

Por las tablas $\dfrac{a-400}{20} = 1'28$ y por tanto, $a = 400 + 1'28 \cdot 20 = 425'6$.

1 Un jugador de dardos acierta en la diana 2 de cada cinco veces que lanza. Si en una partida dicho jugador lanza 10 veces:

(a) Calcula la probabilidad de que acierte en la diana tres veces.

(b) Calcula la probabilidad de que acierte en la diana por lo menos una vez.

(c) Calcula la media del número de aciertos

(d) Calcula la probabilidad de que el jugador haga más dianas que la media.

Solución: La probabilidad de acertar en un lanzamiento es $2/5 = 0'4$. El número de aciertos X tiene una distribución $B(10, 0'4)$

(a) $\binom{10}{3} \cdot 0'4^3 \cdot 0'6^7 = 0'2150$

(b) $\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 0'9949$.

(c) $n \cdot p = 4$

(d) $\mathrm{P}(X > 4) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 4) = \text{ por tablas } = 1 - 0'6331 = 0'3669$.

2 La cantidad de agua consumida al mes en una vivienda, medida en m^3, sigue una distribución uniforme continua (función de densidad constante) en el intervalo $[20, 40]$. Calcula el número medio de m^3 consumidos por mes, y la probabilidad de que se consuman:

(a) 28 m^3

(b) Menos de 35 m^3,

(c) Entre 25 y 35 m^3,

(d) Más de 28 m^3 habiéndose consumido menos de 35 m^3.

Solución: La función de densidad es

$$f(x)=\left\{\begin{array}{cl} 1/20, & x\in[20,40] \\ 0, & x\notin[20,40]\end{array}\right.$$

Las probabilidades son áreas que, en éste caso son de rectángulos y no hace falta integrar.

(a) 0 por ser continua.

(b) $\frac{1}{20}(35-20)=0'75$.

(c) $\frac{1}{20}(35-25)=0'5$.

(d) $\mathrm{P}\left(X>28 \mid X<35\right)=\frac{\mathrm{P}(28<X<35)}{\mathrm{P}(X<35)}=\frac{\frac{1}{20}(35-28)}{\frac{1}{20}(35-20)}=\frac{7}{15}$

3 Si se lanza un dado 10000 veces ¿cuál es la probabilidad de que salgan al menos 1500 veces un seis?

Solución: El número X de *seises* sigue una distribución binomial $B(10000,1/6)$ que podemos considerar normal, $N(np,\sqrt{npq})=N(5000/3,\sqrt{12500/9})$. Por tanto (y sin usar corrección por continuidad)

$$\mathrm{P}\left(X\geq 1500\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{1500-5000/3}{\sqrt{12500/9}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq -4'47\right)\approx 1.$$

4 Una compañía de suministro de electricidad ha determinado que el consumo, medido en Kw/h, de una vivienda familiar durante un mes, sigue una distribución normal de media 300 y desviación típica 50.

(a) Calcula la probabilidad de que se consuman entre 200 y 300 Kw/h.

(b) ¿Qué porcentaje de viviendas consumirán más de 300 kw/h?

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(200<X<300\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{200-300}{50}<Z<\frac{300-300}{50}\right)\\ &= \mathrm{P}\left(-2<Z<0\right)\\ &= \Phi(0)-\Phi(-2)=\Phi(0)-1+\Phi(2)\\ &= 0'5-1+0'9772=0'4772.\end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{P}\left(X>300\right)=\mathrm{P}\left(Z>\frac{300-300}{50}\right)=\mathrm{P}\left(Z>0\right)=0'5.$$

Por lo tanto el 50 % consumen más de 300 Kw/h.

1 El alumnado de un colegio universitario se distribuye de la siguiente manera

(a) El 30 % son de primero de los que el 10 % tiene coche.

(b) El 40 % son de segundo de los que el 20 % tiene coche.

(c) El 20 % son de tercero de los que el 40 % tiene coche.

(d) El 10 % son de cuarto de los que el 60 % tiene coche.

Se escoge al azar un alumno. Hállese la probabilidad de

(a) (1 punto) El alumno tiene coche.

(b) (1 punto) Sea de tercero sabiendo que tiene coche.

Solución: El experimento es elegir un alumno al azar. Sean $A_i = \{$ el alumno es del curso $-i-\}$ y $B = \{$ el alumno tiene coche $\}$. Con los datos del enunciado se tienen las siguientes probabilidades

$$\mathrm{P}\,(A_1) = 0'3, \quad \mathrm{P}\,(A_2) = 0'4, \quad \mathrm{P}\,(A_3) = 0'2, \quad \mathrm{P}\,(A_4) = 0'1$$

Obsérvese que $\{A_i\}_1^4$ forma una partición del espacio muestral. También se tienen las probabilidades condicionales

$$\mathrm{P}\,(B \mid A_1) = 0'1, \mathrm{P}\,(B \mid A_2) = 0'2, \mathrm{P}\,(B \mid A_3) = 0'4, \mathrm{P}\,(B \mid A_4) = 0'6.$$

(a) Aplicando el teorema de la probabilidad total

$$\mathrm{P}\,(B) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{P}\,(A_i) \cdot \mathrm{P}\,(B \mid A_i)\,.$$

Por lo que $\mathrm{P}\,(B) = 0'3 \cdot 0'1 + 0'4 \cdot 0'2 + 0'2 \cdot 0'4 + 0'1 \cdot 0'6 = 0'25$.

(b)

$$\mathrm{P}\,(A_3 \mid B) = \frac{\mathrm{P}\,(A_3) \cdot \mathrm{P}\,(B \mid A_3)}{\mathrm{P}\,(B)} = \frac{0'2 \cdot 0'4}{0'25} = 0'32.$$

2 (2 puntos) Un jugador tira 3 monedas. Gana 5€ si salen 3 caras, 2€ si salen 2 caras y 1€ si sale 1 cara. Pierde 10€ si salen las tres cruces ¿Cuánto debe de pagar por jugar para que el juego sea justo (la ganancia media ha de ser nula)?

Solución: Llamando G a la ganancia y x a la apuesta se tiene la tabla

G	$5-x$	$2-x$	$1-x$	$-10-x$
f	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

La media es $1/8(5-x+6-3x+3-3x-10-x) = 1/8(4-8x)$. Como ha de ser nula, se deduce que $x = 1/2$ por lo que el precio justo es de 50 céntimos.

3 (2 puntos) El número de errores tipográficos cometidos por una mecanógrafa tiene una distribución de Poisson con una media de 4 errores por página. Si una página tiene más de 4 errores, la mecanógrafa tendrá que repetir la página entera ¿Cuál es la probabilidad de que no se tenga que repetir cierta página?

Solución: Si X es el número de errores por página, $X \sim P(4)$. Para que no se repita la página ha de ser $X \leq 4$. Por tanto (y consultando las tablas)

$$\mathrm{P}\left(X \leq 4\right) = F(4) = 0'6288.$$

4 (2 puntos) En una red de ordenadores se produce una *colisión* si más de un ordenador intentan transmitir información al mismo tiempo. En una empresa hay 1000 ordenadores conectados en red. Para cada uno de ellos existe una probabilidad de colisión del 8 % cada vez que envía información a la red, considerándose ésta una situación óptima. ¿Cuál debe ser el número máximo de colisiones permitidas para los 1000 ordenadores en conjunto, de manera que la probabilidad de que se produzca un número de colisiones menor que ese valor máximo sea, como mucho, $0'1$?

Solución: El número de colisiones de los 1000 ordenadores sigue una distribución binomial $X \sim B\left(1000, 0'08\right)$. Se pide k tal que $\mathrm{P}\left(X \leq k\right) \leq 0'1$. Para calcular ese valor de k, utilizaremos la aproximación por la *Normal*:

$$X \sim B\left(n,p\right) \Rightarrow Z = \frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \sim N\left(0,1\right)$$

$$X \sim B\left(1000, 0'08\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{X - 1000 \cdot 0'08}{\sqrt{1000 \cdot 0'08 \cdot 0'92}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{X - 80}{\sqrt{73'6}} = \frac{X - 80}{8'6} \sim N(0,1)$$

Por tanto:

$P(X \leq k) \leq 0'1; \Rightarrow [Aproximando] \Rightarrow P\left(\frac{X-80}{8'6} \leq \frac{k-80}{8'6}\right) \leq 0'1; \Rightarrow$
$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{k-80}{8'6}\right) \leq 0'1; \Rightarrow \Phi\left(\frac{k-80}{8'6}\right) \leq 0'1; \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - \Phi\left(-\frac{k-80}{8'6}\right) \leq 0'1; \Rightarrow \Phi\left(-\frac{k-80}{8'6}\right) \geq 1 - 0'1; \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi\left(\frac{-k+80}{8'6}\right) \geq 0'9;$
Mirando en las tablas de la *Normal* $\Rightarrow \Phi(1'29) = 0'9015$; luego:

$\frac{-k+80}{8'6} = 1'29; \Rightarrow k = 80 - 1'29 \cdot 8'6 = 68'906 \Rightarrow \mathbf{k} = \mathbf{69}$

1 Dos compañías producen software informático. La primera proporciona el 70 % y la segunda el 30 % de la producción total. Por otra parte, se sabe que el 83 % del software suministrado por la primera compañía se ajusta a las normas establecidas , mientras que sólo el 63 % del suministrado por la segunda, se ajusta a dichas normas. Calcular la probabilidad de que un determinado software haya sido suministrado por la primera compañía, si se sabe que se ajusta a las normas.

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{El software es suministrado por la primera compañía}\}\\ A_2 &= \{\text{El software es suministrado por la segunda compañía}\}\\ B &= \{\text{El software se ajusta a las normas}\}\end{aligned}$$

Se pide calcular $\mathrm{P}(A_1 \mid B)$ y, puesto que $\{A_1, A_2\}$ forman un sistema completo de sucesos, por el teorema de Bayes

$$\mathrm{P}(A_1 \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A_1)\cdot \mathrm{P}(A_1)}{\mathrm{P}(B \mid A_1)\cdot \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(B \mid A_2)\cdot \mathrm{P}(A_2)}$$

Del enunciado se deducen las probabilidades

$$\mathrm{P}(A_1) = 0'7, \quad \mathrm{P}(A_2) = 0'3, \quad \mathrm{P}(B \mid A_1) = 0'83, \quad \mathrm{P}(B \mid A_2) = 0'63.$$

Por lo que

$$\mathrm{P}(A_1 \mid B) = \frac{0'83\cdot 0'7}{0'83\cdot 0'7 + 0'63\cdot 0'3} \cong 0'75.$$

2 En una urna hay 3 bolas blancas, 2 negras y 1 roja. Un experimento consiste en extraer al azar dos de ellas. Se consideran las variables:

$B = \{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas blancas}\}$ $\quad N = \{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas negras}\}$ $\quad R = \{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas rojas}\}$

Calcúlese

(a) La tabla de cuantía conjunta de la variable (N, R).

(b) La media de la variable B.

(c) El número esperado (media) de bolas negras, sabiendo que una bola (exactamente una) ha sido roja.

Solución:

(a)

R				
1	3/15	2/15	0	
0	3/15	6/15	1/15	
	0	1	2	N

(b) La tabla de cuantía de B es

B	0	1	2
f_B	3/15	9/15	3/15

Su media es, por tanto: $\mathrm{E}(B) = 1$.

(c) De la tabla

$N \mid R = 1$	0	1
g_1	3/5	2/5

Se desprende que $\mathrm{E}(N \mid R = 1) = 2/5$.

3 Cálculese de forma aproximada la probabilidad de obtener al menos 10 *seises* al lanzar 72 dados.

Solución: La variable $X = \{\text{n}^{\text{o}} \text{ de } \textit{seises} \text{ en 72 tiradas}\}$ es binomial $B(n,p) = B(72, 1/6)$. Se nos pide

$$\mathrm{P}(X \geq 10) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 9).$$

Aproximando por la normal $B(72, 1/6) \sim N(12, \sqrt{10})$ ya que $\mu = 72 \cdot 1/6 = 12$ y $\sigma = \sqrt{72 \cdot 1/6 \cdot 5/6} = \sqrt{10}$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \geq 10) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 9) &= 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{9-12}{\sqrt{10}}\right) \\
&= 1 - \Phi(-0'95) \\
&= \Phi(0'95) = 0'8289.
\end{aligned}$$

4 Una de las pruebas de acceso a la Universidad para mayores de 25 años consiste en un test con 100 preguntas, cada una de las cuales tiene 4 posibles respuestas y sólo una correcta. Para superar esta prueba deben obtenerse, al menos, 30 respuestas correctas. Si una persona contesta al azar:

(a) ¿cuál es la media de respuestas correctas?

(b) ¿qué probabilidad tendrá de superar la prueba?

Solución: La variable $X = \{\text{n}^{\text{o}}$ de respuestas correctas $\}$ es binomial $B(n,p) = B(100, 0'25)$.

(a) $\mathrm{E}\,(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0'25 = 25$.

(b) Hay que hallar $\mathrm{P}\,(X \geq 30)$. Aproximando por la normal

$$\mu = n \cdot p = 25, \quad \sigma = \sqrt{100 \cdot 0'25 \cdot 0'75} = \sqrt{18'75}.$$

Ahora hay que tipificar

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,(X \geq 30) = 1 - \mathrm{P}\,(X < 30) &= 1 - \mathrm{P}\left(Z < \frac{30-25}{\sqrt{18'75}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1'15) = 1 - 0'8749 = 0'1251. \end{aligned}$$

1 Un cierto tipo de negociación obrero-patronal concluye con la firma de un convenio al cabo de dos semanas de conversaciones el 50 % de las veces. También se sabe que el fondo de ayuda monetaria es suficiente para soportar la huelga el 60 % de las veces, y que ambas condiciones se verifican el 30 % de las veces.

(a) Calcular la probabilidad de que en una negociación determinada no se llegue a la firma del convenio después de dos semanas, supuesto que se tiene garantizado el fondo de ayuda monetaria.

(b) Calcular la probabilidad de que el fondo de ayuda monetaria haya sido suficiente, supuesto que se ha firmado el convenio al cabo de dos semanas.

Solución: Definimos los sucesos

$C = \{\text{se firma el convenio al cabo de dos semanas}\}$
$NC = \{\text{no se firma el convenio al cabo de dos semanas}\} = \overline{C}$
$S = \{\text{el fondo de ayuda monetaria es suficiente para soportar la huelga}\}$

Se conocen $\mathrm{P}(C) = 0'5$, $\mathrm{P}(S) = 0'6$, $\mathrm{P}(C \cap S) = 0'3$. Además, como $\mathrm{P}(C \cap S) = \mathrm{P}(C) \cdot \mathrm{P}(S)$, entonces C y S son independientes y por tanto también NC y S. Entonces:

(a) $\mathrm{P}(NC \mid S) = \mathrm{P}(NC) = 1 - \mathrm{P}(C) = 1 - 0'5 = 0'5$

(b) $\mathrm{P}(S \mid C) = \mathrm{P}(S) = 0'6$

2 Se selecciona una muestra con devolución de tamaño $n = 2$ aleatoriamente de los números 1 al 5. Esto produce el espacio muestral

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots (1,5), (2,1), \dots, (5,5)\}$$

Sea $X = 0$ si el primer número es par y $X = 1$ de lo contrario; sea $Y = 0$ si el segundo número es par e $Y = 1$ en caso contrario.

(a) Calcula la cuantía conjunta de X e Y.

(b) ¿Son independientes?

(c) Halla $\mathrm{P}(X = 0 \mid Y = 0)$

Solución: La variable $(X, Y) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Para calcular, por ejemplo, $f(0,0)$ han de ser los dos números pares que podemos representar por (P, P); de 1 a 5 hay 2 pares y 3 impares, luego hay $2 \times 2 = 4$ casos PAR-PAR de entre 25 posibles; por tanto $f(0,0) = 4/25$. De forma análoga se hacen los demás.

(a) Se obtiene según el razonamiento anterior la tabla

$$\begin{array}{c|ccc}
Y & & & \\
1 & 6/25 & 9/25 & \\
0 & 4/25 & 6/25 & \\
\hline
 & 0 & 1 & X
\end{array}$$

(b) Las marginales son

X	0	1
f_1	2/5	3/5

Y	0	1
f_2	2/5	3/5

Se observa que son independientes.

(c) Como son independientes, $\mathrm{P}(X = 0 \mid Y = 0) = \mathrm{P}(X = 0) = 2/5$

3 La publicidad de ciertos fondos de inversión de alto riesgo afirma que el 40 % de los clientes doblan la cantidad invertida; el 10 % la triplican, el 35 % pierden la mitad y el 15 % de los clientes pierden todo lo invertido ¿Cuál es la ganancia esperada si decido invertir 6000 euros ?

Solución: Llamando G = ganancia, se tiene que $G = 6000$ si se dobla, $G = 12000$ si se triplica, $G = -3000$ si se pierde la mitad, y $G = -6000$ si se pierde todo. La cuantía es

G	-6000	-3000	6000	12000
f	0’15	0’35	0’4	0’1

La ganancia media es $(-6000)\cdot 0'15+(-3000)\cdot 0'35+(6000)\cdot 0'4+(12000)\cdot 0'1 = 1650$ euros.

4 Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 74 y desviación típica 36. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 68?

(b) Calcular la proporción de estudiantes que tienen puntuaciones que exceden por lo menos en cinco puntos de la puntuación que marca la frontera entre el Apto y el No-Apto (son declarados No-Aptos el 25 % de los estudiantes que obtuvieron las puntuaciones más bajas).

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la calificación de un estudiante sea mayor de 80, si se sabe que es mayor que 68?

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(X > 68) &= 1 - \mathrm{P}\,(X \leq 68) \\
&= 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{68-74}{36}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(-\frac{1}{6}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{6}\right) \approx \Phi(0'17) = 0'5675
\end{aligned}$$

(b) La nota frontera es a de modo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(X < a) = 0'25 \quad &\to \quad \mathrm{P}\left(Z < \frac{a-74}{36}\right) = 0'25 \\
&\to \quad \Phi\left(\frac{a-74}{36}\right) = 0'25 \\
&\to \quad \Phi\left(\frac{74-a}{36}\right) = 0'75 \\
&\to \quad \frac{74-a}{36} = 0'67 \\
&\to \quad a = 49'88.
\end{aligned}$$

ahora hay que hallar

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X-5>49'88\right) &= \mathrm{P}\left(X>54'88\right)\\
&= 1-\mathrm{P}\left(X\leq 54'88\right)\\
&= 1-\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{54'88-74}{36}\right)\\
&= 1-\Phi\left(-0'53\right)\\
&= \Phi\left(0'53\right)=0'7019.
\end{aligned}$$

O sea, el $70'19\,\%$ cumplen la condición.

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X>80 \mid X>68\right) &= \frac{\mathrm{P}\left(X>80\right)}{\mathrm{P}\left(X>68\right)}\\
&= \frac{1-\mathrm{P}\left(X\leq 80\right)}{0'5675}\\
&= \frac{1-\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{80-74}{36}\right)}{0'5675}\\
&= \frac{0'4325}{0'5675}=0'7621.
\end{aligned}$$

ESTADÍSTICA .... enero 2016

---

1. (2'5 puntos). Un grupo de seis estudiantes está formado por 2 chicas y 4 chicos. Uno de ellos ha aprobado Estadística y acompaña a sus amigos a la revisión del examen con el objetivo de "arañar" lo que sea.

a) Calcular la probabilidad de que el primero de los amigos en entrar a revisión sea una de las chicas
b) Si se produce el hecho de que el que entra el primero a revisar su examen resulta ser chica, calcular la probabilidad de que la otra chica sea la aprobada

Solución:

Sean los sucesos
A = {la aprobada es una chica}
B = {el aprobado es un chico}

P(A) =2/ 6 y P(B) = 4 / 6

a) Definimos el suceso C = {entra primero a revisión una chica}

P(C) = P (C / A) x P(A) + P (C / B) x P(B)

Donde P(C / A) = probabilidad de que entre a revisión una chica si la aprobada es chica = 1/5. (Solo una chica suspendida de cinco amigos).

Donde P(C / B) = probabilidad de que entre a revisión una chica si el aprobado es chico = 2/5. (Dos chicas suspendidas de cinco amigos).

Por tanto: P(C) = P (C / A) x P(A) + P (C / B) x P(B) = 1 /5 x 2/6 + 2 /5 x 4/6 =1/3

b) Aplicando el teorema de Bayes

P(A/C)= P(C/A) P(A) / P(C) = 1 /5 x 2/6 / 1/3 = 6/30 = 1/5

2. (2'5 puntos). Una empresa se dedica a la fabricación de placas. Cada placa está compuesta por una subpieza metálica tipo A, cuya longitud se distribuye normal de media 25 cm y desviación típica 2 cm, que se suelda sin solapamiento a otra subpieza tipo B con longitud distribuida normal de media 20 cm y desviación típica 2 cm. Ambas subpiezas se fabrican independientemente. La soldadura supone la pérdida de material con longitud distribuida normal de media 1 cm y desviación típica 1 cm, independiente de las anteriores. La placa es correcta si su longitud es de 44 ± 2 cm. Se pide:

a) Probabilidad de fabricar placas correctas
b) Un envío está compuesto por 5 placas escogidas al azar de entre las fabricadas. Un envío es correcto si al menos cuatro placas tienen las medidas adecuadas. Calcular la probabilidad de realizar envíos de placas correctos

Solución:

a) Definimos las variables

LA= longitud subpieza tipo A es N(25,2)

LB= longitud subpieza tipo B es N(20,2)

LP= longitud perdida de material es N(1,1)

Las 3 variables son independientes.

La longitud total de la placa será:

LT= LA+LB-LP

E(LT) = E(LA+LB-LP)= 25+20-1= 44

Var (LT) = Var(LA+LB-LP) = 4 + 4 +1=9

Con lo que LT es N(44, 3)

La placa es correcta si su longitud es de 44 ± 2 cm.

P(42<LT<46)= P(42-44/3<Z<46-44/3)=P(-2/3<Z<2/3)= Φ (2/3)- Φ (-2/3)= 2 Φ (2/3)-1=

2 Φ (0.67) -1= (2x0.7486)-1=0.4972=0.5

b)

X = número de placas correctas de 5
B (5,0.5)

P(envío correcto) = P(X≥4) = 1 – P(X<4) = 1- P(X≤3) =1 – 0.8125 = 0.1875

3. (2'5 puntos). Una empresa tiene unos gastos de 1000 euros a la semana si la proporción de artículos defectuosos que fabrica supera el 10%, mientras que dichos gastos desaparecen si el porcentaje de defectos es menor. Sabiendo que los ingresos fijos por las ventas semanales son de 13000 euros, y conociendo, además, que el porcentaje de artículos defectuosos es una variable aleatoria X definida entre 0 y 20 con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{200}x \ \ si \ 0 \leq x \leq 20$$

Calcular el beneficio esperado semanal.

Solución:

Beneficio=Ingreso-Gasto

B = I-G

E[B] = E[I-G]= I –E[G] = 13000- E[G]

Los Ingresos son fijos =13000 euros

El Gasto es una variable aleatoria definida como:

$$G = \begin{cases} 1000 & si\ x > 10 \\ 0 & si\ x < 10 \end{cases}$$

Siendo X= porcentaje semanal de artículos defectuosos

E[G]=0 P(X<10) + 1000 P(X>10)

$$E(G) = 0\int_0^{10} \frac{1}{200} x dx + 1000\int_{10}^{20} \frac{1}{200} x dx = \frac{1000}{200}\int_{10}^{20} x dx = \frac{10}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{10}^{20} = 750$$

E[B] = E[I-G]= I –E[G] = 13000- E[G] =13000-750=12250 euros

4. (2'5 puntos). Se lanza una moneda 3 veces y se definen las siguientes variables:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{Si sale cara en la primera tirada} \\ 1 & \text{Si sale cruz en la primera tirada} \end{cases}$$

Y = número de caras en las tres tiradas

Calcular:

a) La función de cuantía (probabilidad) conjunta de (*X*, *Y*)

b) Cov (*X*, *Y*)

Solución: Se tienen las funciones de cuantía

X	0	1
f_1	1/2	1/2

Y	0	1	2	3
f_2	1/8	3/8	3/8	1/8

Y \ X	0	1
3	1/8	0
2	2/8	1/8
1	1/8	2/8
0	0	1/8

De las tablas se calcula la covarianza

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{E}(XY) - \operatorname{E}(X)\operatorname{E}(Y) = 1\cdot 1\cdot\frac{2}{8} + 1\cdot 2\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

ESTADÍSTICA .... enero 2018

1. (2'5 puntos). En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0.4, de molinos eólicos con probabilidad 0.26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0,12. Elegido un día al azar, calcúlese la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio:

a) por alguna de las dos instalaciones
b) solamente por una de las dos

Solución:

Sea S = energía suministrada por placas solares
Sea E = energía suministrada por molinos eólicos
P(S) = 0.4
P(E) = 0.26
P(SIE) = 0.12

a) P(SYE) = P(S) + P(E) - P(SIE) = 0.4 + 0.26 - 0.12 = 0.54

b)

$$P\big((\bar{S} \cap E) \cup (S \cap \bar{E})\big) = P(\bar{S} \cap E) + P(S \cap \bar{E}) - P\big((\bar{S} \cap E) \cap (S \cap \bar{E})\big)$$
$$= P(\bar{S} \cap E) + P(S \cap \bar{E})$$

$P(\bar{S} \cap E)$ = P(E) - P(SIE) = 0.26 - 0.12 = 0.14

$P(S \cap \bar{E})$ = P(S) - P(SIE) = 0.4 - 0.12 = 0.28

$P\big((\bar{S} \cap E) \cap (S \cap \bar{E})\big) = 0$

Luego
$P\big((\bar{S} \cap E) \cup (S \cap \bar{E})\big) = 0.14 + 0.28 = 0.42$

2. (2'5 puntos). En una fábrica de tornillos se realiza una selección de las piezas antes de proceder al empaquetado. Para seleccionar los tornillos, se hace una medición del radio de cada unidad, que en *mm* sigue una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 4 \leq x \leq 6 \\ 0, & resto \end{cases}$$

a) Halla la *k* para que sea una función de densidad
b) Para que un tornillo sea seleccionado para empaquetar, su radio debe medir al menos 4.25 *mm*. Calcula la probabilidad de que un tornillo sea empaquetado
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo empaquetado mida menos de 5 *mm*?
d) En una caja de 20 tornillos que todavía no han pasado la selección, ¿qué probabilidad hay de que haya más de 15 válidos para empaquetar?

Solución:

a)

$$\int_4^6 kxdx = 1 = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_4^6 = k \cdot 10 \to k = \frac{1}{10}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & 4 \leq x \leq 6 \\ 0, & resto \end{cases}$$

b)

$$P(X \geq 4.25) = \int_{4.25}^6 \frac{x}{10} dx = \left[\frac{x^2}{20}\right]_{4.25}^6 = 0.8969 \approx 0.9$$

c)

$$P(X \leq 5 | X \geq 4.25) = \frac{\int_{4.25}^5 \frac{x}{10} dx}{\int_{4.25}^6 \frac{x}{10} dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{20}\right]_{4.25}^5}{0.8969} = \frac{0.3469}{0.8969} = 0.3868$$

d) Consideramos los no válidos:

$$Y \sim B(20{,}0.1) \to P(Y \leq 4) = F(4) = 0.9568$$

3. (2'5 puntos). El número de resfriados que padecen los niños de edad preescolar en un colegio viene dado según la edad por la función de cuantía (función de probabilidad) conjunta:

Edad					
5	0.02	0.07	0.15	0.11	
4	0.03	0.07	0.14	0.09	
3	0.02	0.06	0.14	0.10	
	0	1	2	3	**Resfriados**

Calcula:

a) La covarianza
b) La desviación típica de la edad
c) La esperanza del número de resfriados para los niños de 3 años

Solución:

a)

Resfriados X	0	1	2	3
	0.07	0.20	0.43	0.30

Edad Y	
5	0.35
4	0.33

3	0.32

$$E(XY) = 7.90$$

$$E(X) = 1.96$$

$$E(Y) = 4.03$$

$$Cov(X,Y) = 7.90 - 1.96 \cdot 4.03 = 0.0012$$

b)

$$E(Y^2) = 16.91$$

$$Var(Y) = 16.91 - 4.03^2 = 0.6691$$

$$\sigma_Y = \sqrt{0.6691} = 0.8180$$

c)

$X \mid Y$=3	0	1	2	3
$g_1(x \mid 3)$	0.02/0.32	0.06/0.32	0.14/0.32	0.10/0.32

$$E(X|Y = 3) = 2$$

4. (2'5 puntos). Una fábrica aeronáutica produce en cada turno 100000 bolas para rodamientos, siendo la probabilidad de bola defectuosa 0.04. Las bolas se supervisan todas, depositando las defectuosas en un recipiente que se vacía al final de cada turno. ¿Cuántas bolas han de caber en el recipiente para que la probabilidad de que su capacidad no sea rebasada, sea 0.95?

Solución:

Sea X = "número de bolas defectuosas entre 100000"

donde X es B(100000, 0.04)

Como el número de bolas es muy grande se puede aproximar por una normal de media E(X) = 100000 x 0.04 = 4000 y Var(X)=100000 x 0.04 x 0.96

X es N (4000, 61,96)

La capacidad del recipiente C debe verificar que P (X < C) = 0.95

Tipificando la variable:

P (X < C) = P ((X – 4000)/61,96 < (C – 4000)/61,96) = P (Z < (C – 4000)/61,96) = 0.95

Buscando en las tablas:

(C – 4000)/61,96 = 1,65

Y despejando el valor de C

C = 4102,23 = 4103 bolas

1 Supóngase que el 30 % de las botellas fabricadas en una planta son defectuosas. Si una botella es defectuosa, la probabilidad de que un controlador la detecte y la saque de la cadena de producción es $0'9$. Si una botella no es defectuosa, la probabilidad de que el controlador piense que es defectuosa y la saque de la cadena de producción es $0'2$.

(a) Si una botella se saca de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

(b) Si un cliente compra una botella que no ha sido sacada de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

Solución: Sean los sucesos $D = \{$ la botella es defectuosa $\}$ y $S = \{$ el controlador la saca de la cadena de producción $\}$; se tienen las probabilidades $\mathrm{P}(D) = 0'3$, $\mathrm{P}(S \mid D) = 0'9$ y $\mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right) = 0'2$

(a) aplicando el teorema de Bayes

$$\mathrm{P}(D \mid S) = \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right)} = \frac{0'3 \cdot 0'9}{0'3 \cdot 0'9 + 0'7 \cdot 0'2} = \frac{27}{41}$$

(b) de la misma forma

$$\mathrm{P}\left(D \mid \overline{S}\right) = \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid \overline{D}\right)} = \frac{0'3 \cdot 0'1}{0'3 \cdot 0'1 + 0'7 \cdot 0'8} = \frac{3}{59}$$

2 Se lanza una moneda tres (3) veces y, se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} 0 & \text{Si sale cara en la primera tirada} \\ 1 & \text{Si sale cruz en la primera tirada} \end{cases} \\ Y &= \text{número de caras en las tres tiradas} \end{aligned}$$

Determínese:

(a) Las funciones de cuantía (probabilidad) de X e Y.

(b) La función de cuantía (probabilidad) conjunta de (X, Y).

(c) ¿Son independientes?

(d) $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$

Solución:

X	0	1
f_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1	2	3
f_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y			
3	$\frac{1}{8}$	0	
2	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	
0	0	$\frac{1}{8}$	
	0	1	X

No son independientes pues, por ejemplo $f(0,0) = 0$ mientras que $f_1(0) \cdot f_2(0) = \dfrac{1}{16}$. De las tablas se calcula la covarianza

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

3 Se observó durante un largo periodo que la cantidad semanal gastada en el mantenimiento y reparaciones en cierta fábrica tiene aproximadamente una distribución *normal* con una media de 400 euros y una desviación de 20 euros.

(a) Si el presupuesto para la próxima semana es de 450 euros, ¿cuál es la probabilidad de que los costos reales sean mayores que la cantidad presupuestada?

(b) ¿Cuál tendría que ser el presupuesto semanal para que esta cantidad solamente se rebasara con probabilidad de $0'1$?

Solución: Llamando X a la cantidad gastada y tipificando $Z = \dfrac{X - 400}{20}$

(a)

$$\mathrm{P}\left(X > 450\right) = \mathrm{P}\left(Z > 2'5\right) = 1 - 0'993790 = 0'006210$$

(b) Sea a la cantidad por lo que $\mathrm{P}\left(X > a\right) = 0'1 \rightarrow \mathrm{P}\left(Z > \dfrac{a-400}{20}\right) = 0'1$ de donde

$$\Phi\left(\frac{a-400}{20}\right) = 0'9 \rightarrow \frac{a-400}{20} = 1'28 \rightarrow a = 425'6$$

1 Un cofre A contiene 4 monedas de plata y 1 de oro. Otro cofre B contiene 5 monedas de plata. Se pasan, al azar, 4 monedas del cofre A al B y, a continuación, se pasan, tambien aleatoriamente, cuatro monedas de B a A. ¿En qué cofre es mas probable que se encuentre la única moneda de oro?

Solución: Sean los sucesos $A = \{$ la moneda se encuentra en A $\}$ y $B = \{$ la moneda se encuentra en B$\}$. Obviamente son sucesos contrarios; calculemos la probabilidad de B. Para que la moneda se encuentre en B, debe pasar de A a B en el primer traspaso, y no pasar a A en el segundo. Por tanto

$$\mathrm{P}\left(B\right) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{4}} \cdot \frac{\binom{8}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

La probabilidad de A es por tanto $\frac{5}{9}$ mayor que la de B. Así, que es mas probable que la moneda de oro se encuentre en la caja A que en la B.

2 Supongamos que la duración en horas de un determinado tipo de lámparas es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{100}{x^2}, & x \geq 100 \\ 0, & x < 100 \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 3 de estas lámparas, ninguna falle durante las 150 primeras horas de uso?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 lámparas fallen durante las 150 primeras horas de uso?

Solución: La probabilidad de una lámpara falle en las 150 primeras horas de uso es

$$\mathrm{P}\left(F\right) = \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2}\, dx = \left[\frac{-100}{x}\right]_{100}^{150} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de que una lámpara no falle en las 150 primeras horas de uso es $\frac{2}{3}$.

$$\mathrm{P}\left(\{\text{No falle ninguna de 3 lámparas}\}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\mathrm{P}\left(\{\text{Fallen las 3 lámparas}\}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

3 Una urna contiene 5 bolas numeradas de 1 a 5. Se extraen 3 al azar. Calcúlese la función de cuantía y esperanza de la variable

$$X = \{\text{número mas pequeño de las tres bolas extraidas}\}$$

Solución: La función de cuantía es

X	1	2	3
f	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

La media es $\mathrm{E}\left(X\right) = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{2}$.

4 Una empresa fabrica cierto tipo de chips con un promedio del 1 % de defectuosos. Si tomamos una muestra de 500 chips.

(a) Identifíquese la variable $X = \{$ número de chips defectuosos de la muestra $\}$.

(b) ¿Cuál es el valor esperado (media) de X?

(c) Probabilidad de que haya dos o más defectuosos.

Solución:

(a) Es una binomial: $X \sim B(500, 0'01)$

(b) $\mathrm{E}\left(X\right) = np = 500 \cdot 0'01 = 5$

(c) $\mathrm{P}\left(X \geq 2\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X \leq 1\right) = 1 - F(1)$. Como n es grande no podemos usar las tablas de la binomial. El valor exacto es

$$1 - f(0) - f(1) = 1 - 0'99^{500} - 500 \cdot 0'01 \cdot 0'99^{499} = 0'9537$$

Aproximando por la de Poisson se obtiene $0'9596$

1 Una tienda vende CDs de dos marcas: A y B. Un CD de la marca A sale defectuoso el 10 % de las veces, mientras que uno de la marca B sale defectuoso el 6 % de las veces. El 35 % de las veces la tienda tiene CDs de las dos marcas, por lo tanto compro de la marca B, y el resto de las veces sólo tiene de la marca A. Si compro una caja y el CD que grabo sale defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que comprara una caja de la marca B?

Solución: Sean los sucesos $A = \{$ el CD comprado es de la marca A $\}$, $B = \{$ el CD comprado es de la marca B $\}$ y $D = \{$ el CD es defectuoso $\}$. Del enunciado se deduce

$$\mathrm{P}(A) = 0'65 \quad \mathrm{P}(B) = 0'35 \quad \mathrm{P}(D \mid A) = 0'1 \quad \mathrm{P}(D \mid B) = 0'06$$

Nos preguntan sobre el suceso $(B \mid D)$; aplicamos el teorema de Bayes

$$\mathrm{P}(B \mid D) = \frac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D \mid B)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D \mid B) + \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(D \mid A)} = \frac{0'35 \cdot 0'06}{0'35 \cdot 0'06 + 0'65 \cdot 0'1} = 0'2442$$

2 La función de cuantía de una variable bidimensional (X, Y) aparece en la siguiente tabla, donde las probabilidades están multiplicadas por 100:

Y				
2	10	7	12	
1	9	15	10	
0	11	18	8	
	0	1	2	X

Calcúlense:

(a) $\mathrm{P}(X + Y \leq 2)$

(b) $\mathrm{P}(X = 2 \mid Y = 2)$

(c) $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$

(d) ¿Son independientes? (justifíquese la respuesta)

(e) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

Solución: Las funciones de cuantia de las distribuciones marginales son

X	0	1	2
f_1	0'3	0'4	0'3

Y	0	1	2
f_2	0'37	0'34	0'29

(a) $\mathrm{P}\,(X+Y \leq 2) = 0'11 + 0'09 + 0'18 + 0'10 + 0'15 + 0'08 = 0'71$

(b) $\mathrm{P}\,(X = 2 \,|\, Y = 2) = \dfrac{\mathrm{P}\,(X = 2; Y = 2)}{\mathrm{P}\,(Y = 2)} = \dfrac{0'12}{0'29} = 0'4138$

(c) $\mathrm{E}\,(X) = 0{\cdot}0'3 + 1{\cdot}0'4 + 2{\cdot}0'3 = 1$ $\quad \mathrm{E}\,(Y) = 0{\cdot}0'37 + 1{\cdot}0'34 + 2{\cdot}0'29 = 0'92$.

(d) No son independientes; por ejemplo $f(0,0) \neq f_1(0) \cdot f_2(0)$.

(e)

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\,(X, Y) &= \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0'15 + 1 \cdot 2 \cdot 0'07 + 2 \cdot 1 \cdot 0'10 + 2 \cdot 2 \cdot 0'12 - 1 \cdot 0'92 \\ &= 0'05. \end{aligned}$$

3 La cantidad producida de un cierto artículo es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{1000} x^2, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & x \notin [0, 10] \end{cases}$$

El precio Y del artículo está en función de la cantidad producida según la relación

$$Y = 40 - 2X.$$

Calcúlese

(a) Cantidad producida media.

(b) Precio medio.

Solución:

(a)

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_0^{10} x \frac{3}{1000} x^2 \, dx = \frac{3}{1000} \int_0^{10} x^3 \, dx = \frac{3}{1000} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{10} = 7'5.$$

(b) $\mathrm{E}(Y) = 40 - 2\mathrm{E}(X) = 40 - 15 = 25.$

4 La presencia de un cierto antibiótico en un fármaco viene determinado por una variable X. Este fármaco se consigue mediante la unión de otros tres compuestos que también contienen antibiótico y que se distribuyen independientemente de la siguiente manera: $X_1 \sim N(80, 12)$, $X_2 \sim N(120, 15)$ y $X_3 \sim N(96, 9)$. La fórmula del fármaco, unión de los tres compuestos es la siguiente:

$$X = \frac{3X_1 + X_2 + 2X_3}{6}$$

Calcular la probabilidad de que la concentración de antibiótico en el fármaco esté entre 70 y 90

Solución: La variable X es una combinación lineal de normales, luego es normal con parámetros:

(a) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{3 \cdot 80 + 120 + 2 \cdot 96}{6} = 92$

(b) $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{9 \cdot 144 + 225 + 4 \cdot 81}{36} = 51'25.$

Por tanto $X \sim N(92, 7'16)$. Luego

$$\mathrm{P}(70 \leq X \leq 90) = \mathrm{P}\left(-\frac{22}{7'16} \leq Z \leq -\frac{2}{7'16}\right) = \Phi(3'07) - \Phi(0'28) = 0'3886.$$

1 Una empresa de software que diseña juegos para ordenador somete los diseños preliminares de sus productos a la evaluación previa de un grupo seleccionado de clientes. Según muestra la experiencia, el 95 % de los productos que tuvieron un gran éxito en el mercado recibieron buenas evaluaciones, el 60 % de los de éxito moderado recibieron buenas evaluaciones y sólo el 10 % de los que tuvieron escaso éxito fueron valorados favorablemente. Además, globalmente el 40 % de los productos de la empresa han tenido mucho éxito, el 35 % un éxito moderado y el 25 % una baja aceptación.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto, elegido al azar entre la producción de la fábrica, obtenga una buena evaluación previa?

(b) Si un nuevo producto obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

(c) Si un producto no obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{array}{ll} G=\{\text{el producto tiene mucho éxito}\} & M=\{\text{el producto tiene éxito moderado}\} \\ E=\{\text{el producto tiene escaso éxito}\} & B=\{\text{el producto tiene buena evaluación}\} \end{array}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(G)=0'4 & \mathrm{P}(M)=0'35 & \mathrm{P}(E)=0'25 \\ \mathrm{P}(B\,|\,G)=0'95 & \mathrm{P}(B\,|\,M)=0'4 & \mathrm{P}(B\,|\,E)=0'1. \end{array}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(G)\cdot\mathrm{P}(B\,|\,G)+\mathrm{P}(M)\cdot\mathrm{P}(B\,|\,M)+\mathrm{P}(E)\cdot\mathrm{P}(B\,|\,E) \\ &= 0'95\cdot 0'4+0'6\cdot 0'35+0'1\cdot 0'25 \\ &= 0'615. \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{P}(G\,|\,B)=\frac{\mathrm{P}(G)\cdot\mathrm{P}(B\,|\,G)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0'4\cdot 0'95}{0'615}=0'6179.$$

(c) Puesto que $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0'615 = 0'385$ y $\mathrm{P}\left(\overline{B}\,|\,G\right) = 1 - 0'95 = 0'05$, se tiene

$$\mathrm{P}\left(G\,|\,\overline{B}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(G\right)\cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}\,|\,G\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{0'4\cdot 0'05}{0'385} = 0'0519.$$

2 De una urna que contiene 3 bolas blancas y 2 negras se extraen las bolas una a una sin reemplazamiento, hasta que hayan salido 2 bolas blancas. Si X es la variable que mide el número total de bolas extraidas e Y el número de bolas negras extraidas, hállese la función de cuantía conjunta de (X, Y). ¿Son independientes?

Solución: La siguiente tabla muestra los casos posibles con los valores de X e Y, y las probabilidades

	X	Y	p
bb	2	0	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$
bnb	3	1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{5}$
nbb	3	1	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{5}$
nnbb	4	2	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{10}$
nbnb	4	2	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{10}$
bnnb	4	2	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{10}$

Como, obviamente, es $Y = X - 2$, hay dependencia funcional entre ambas. Las funciones de cuantía son

X	2	3	4
f_1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

Y	0	1	2
f_2	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

La función de cuantía conjunta aparece en la siguiente tabla

$$\begin{array}{c|cccc}
Y & & & & \\
2 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \\
1 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \\
0 & \frac{3}{10} & 0 & 0 & \\
\hline
 & 2 & 3 & 4 & X
\end{array}$$

La tabla confirma la dependencia entre las variable; por ejemplo:

$$f(2,0) = \frac{3}{10} \neq f_1(2)\cdot f_2(0) = \frac{9}{100}.$$

3 La duración en minutos de una llamada telefónica de larga distancia, se asocia a una variableleatoria X cuya función de distribución es

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}, \quad \text{para } x \geq 0.$$

Calcúlese:

(a) La función de densidad

(b) La duración media de una llamada.

(c) La probabilidad de que la duración de una llamada esté comprendida entre 2 y 5 minutos.

Solución:

(a) Derivando la función de distribución

$$f(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} \quad \text{para } x \geq 0.$$

(b)

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_0^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3} x\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}\, dx = 3.$$

Luego las llamadas tienen una duración media de 3 minutos.

(c)

$$\mathrm{P}\,(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}} - 1 + \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} = 0'3245.$$

4 Un juego consiste en lanzar dos dados; el jugador gana 3 euros si la suma de los dos dados es 7 ó 9, y paga uno en otro caso. Tras 200 lanzamientos ¿cuál es la probabilidad de que el saldo de ganancias sea positivo?

Solución: La probabilidad de sacar 7 ó 9 al lanzar dos dados es $\frac{5}{18}$ (hágase!). El número X de éxitos en 200 lanzamientos tiene una distribución binomial $X \sim B\left(200, \frac{5}{18}\right)$; el número de fracasos es $200 - X$ y la ganancia es

$G = 3X - (200 - X) = 4X - 200$. Para que $G > 0$ ha de ser $X > 50$; por tanto hemos de calcular $\mathrm{P}(X > 50)$. Aproximamos por la normal

$$Z \approx \frac{X - 200 \cdot \frac{5}{18}}{\sqrt{200 \cdot \frac{5}{18}\frac{13}{18}}} = \frac{X - 55'56}{6'33}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X > 50) = 1 - \mathrm{P}(X < 50) &= 1 - \mathrm{P}\left(Z < \frac{50 - 55'56}{6'33}\right) \\
&= 1 - \Phi(-0'88) \\
&= \Phi(0'88) \\
&= 0'8106.
\end{aligned}$$

1 En una etapa de producción de un artículo se aplica soldadura y para eso se usan tres robots. La probabilidad de que la soldadura sea defectuosa, así como la proporción de artículos procesados varía para cada robot de acuerdo a la tabla siguiente

Robot	Prob. Defectos	% artículos proc.
A	$0'002$	18
B	$0'005$	42
C	$0'001$	40

Calcúlese

(a) La proporción global de defectos producidos por los tres robots.

(b) La probabilidad de que un artículo con defectos haya sido soldado por el robot C.

Solución: Sea el suceso $D = \{$ La soldadura de un artículo es defectuosa$\}$ y sean A, B, C los sucesos $\{$ la soldadura la efectúa $\}$ el robot A,B,C respectivamente.

(a) Hay que hallar $\mathrm{P}(D)$ para lo que contamos con los datos

$$\mathrm{P}(D \mid A) = 0'002 \quad \mathrm{P}(D \mid B) = 0'005 \quad \mathrm{P}(D \mid C) = 0'001$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(D \mid A) + \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D \mid B) + \mathrm{P}(C) \cdot \mathrm{P}(D \mid C) \\ &= 0'18 \cdot 0'002 + 0'42 \cdot 0'005 + 0'40 \cdot 0'001 = 0'00286. \end{aligned}$$

Así que globalmente, el 3 por mil (aproximadamente) de las piezas son defectuosas.

(b)
$$\mathrm{P}(C \mid D) = \frac{\mathrm{P}(C) \cdot \mathrm{P}(D \mid C)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{0'40 \cdot 0'001}{0'00286} = 0'1399.$$

2 Se elige al azar un comité de 2 alumnos de entre 3 delegados de 3^o, 2 de 2^o y 1 de 1^o. Sean $X = \{$ número de alumnos de 2^o en el comité $\}$ e $Y = \{$ número de alumnos de 1^o en el comité $\}$. Hállese $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Solución: La función de cuantía conjunta viene dada por la tabla

Y				
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	
	0	1	2	X

y las marginales

X	0	1	2
f_1	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Y	0	1
f_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

De las tablas se obtiene

$$\mathrm{E}\,(XY) = \frac{2}{15}, \quad \mathrm{E}\,(X) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{E}\,(Y) = \frac{1}{3}.$$

Por tanto

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y) = -\frac{4}{45}.$$

3 Los artículos que produce una máquina se empaquetan en lotes de 4. La máquina produce el 10 % de defectuosos y el comprador devuelve los defectuosos para su reparación, lo que le supone a la empresa un coste de $3X^2 + X + 2$, siendo X el número de artículos defectuosos por lote. Hállese el coste medio de reparación.

Solución: Dado que X sigue una distribución binomial $B(4, 0'1)$, su función de cuantía viene dada por la tabla

X	0	1	2	3	4
f	$0'6561$	$0'2916$	$0'0486$	$0'0036$	$0'0001$

De la tabla

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(3X^2 + X + 2\right) &= (3 \cdot 0^2 + 0 + 2) \cdot 0'6561 + (3 \cdot 1^2 + 1 + 2) \cdot 0'2916 \\
&+ (3 \cdot 2^2 + 2 + 2) \cdot 0'0486 + (3 \cdot 3^2 + 3 + 2) \cdot 0'0036 \\
&+ (3 \cdot 4^2 + 4 + 2) \cdot 0'0001 = 3'96.
\end{aligned}$$

Otra forma de resolverlo es la siguiente: dado que $X \sim B(4, 0'1)$ es sabido que $\mathrm{E}\,(X) = n \cdot p = 4 \cdot 0'1 = 0'4$ y $\mathrm{Var}\,(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot 0'1 \cdot 0'9 = 0'36$. Entonces $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{Var}\,(X) + (\mathrm{E}\,(X))^2 = 0'36 + 0'16 = 0'52$ por lo que

$$\mathrm{E}\left(3X^2 + X + 2\right) = 3\mathrm{E}\left(X^2\right) + \mathrm{E}\,(X) + 2 = 3 \cdot 0'52 + 0'4 + 2 = 3'96.$$

4 Se quiere repoblar un río con un tipo de pez autóctono para evitar su extinción. Para ello se ha realizado un estudio previo de la concentración de oxígeno en el río. Este estudio proporciona los siguientes resultados: la concentración de oxígeno en el agua sigue una distribución normal de media 9 y desviación típica $0'8$; así mismo, el oxígeno consumido por la fauna del río sigue, también, una distribución normal de media 4 y desviación típica $0'2$ y, por último, el oxígeno producido por las bacterias y algas del río sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica $1'2$. Se considera que las tres distribuciones son independientes y que la concentración de oxígeno en el agua para la existencia de vida ha de ser mayor o igual a 5. ¿Cuál es la probabilidad de que al repoblar el río, multiplicándose por 2 la fauna del mismo, el agua del río siga siendo apto para la vida?

Solución: Sean las variables

$$\begin{array}{l} X_1 = \text{concentración de oxígeno en el río}, \quad X_1 \sim N(9, 0'8) \\ X_2 = \text{cantidad de oxígeno consumido por la fauna}, \quad X_2 \sim N(4, 0'2) \\ X_3 = \text{cantidad de oxígeno producido por bacterias}, \quad X_3 \sim N(5, 1'2) \end{array}$$

La concentración de oxígeno total es $X_1 - X_2 + X_3$, pero si se dobla la fauna, el oxígeno consumido es doble y la concentración total es $X_1 - 2X_2 + X_3$. Hay que hallar $\mathrm{P}\left(X_1 - 2X_2 + X_3 \geq 5\right)$. Sea $Y = X_1 - 2X_2 + X_3$, que tiene una distribución normal de parámetros

$$\mathrm{E}\,(Y) = 9 - 2 \cdot 4 + 5 = 6, \quad \mathrm{Var}\,(Y) = 0'8^2 + 4 \cdot 0'2^2 + 1'2^2 = 2'24.$$

Tipificando

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,(Y \geq 5) &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{5-6}{\sqrt{2'24}}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Z \geq -0'67\right) = \Phi(0'67) = 0'7486. \end{aligned}$$

1 Pepe y Manolo son dos viejos amigos que han decidido darle un giro a su vida y están dudando entre dedicar sus ahorros a montar una empresa de desarrollo de software o invertir en renta variable. Su asesor fiscal les ofrece dos alternativas atrayentes, pero ante su falta de formación bursátil, confían al azar su decisión. Invertirán en el sector eléctrico si sacan una bola roja de una urna que contiene 20 bolas, de las cuales 8 son rojas, 3 verdes y 9 negras. Si la bola no es roja lanzarán dos dados y si obtienen una suma de 6 entre ambos dados invertirán en el sector inmobiliario; en caso contrario se decidirán por la empresa de desarrollo de software. ¿Cuál es la probabilidad de que finalmente monten una empresa de desarrollo de software?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{aligned}
&E = \{\text{Invertir en el sector eléctrico.}\}\\
&I = \{\text{Invertir en el sector inmobiliario.}\}\\
&S = \{\text{Invertir en la empresa de desarrollo de software.}\}\\
&R = \{\text{La bola es roja.}\}\\
&D = \{\text{La suma de los dados es 6.}\}
\end{aligned}$$

El suceso pedido es $S = \overline{R} \cap \overline{D}$ que son independientes, por lo que

$$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}\left(\overline{R}\right)\mathrm{P}\left(\overline{D}\right) = \frac{12}{20}\frac{31}{36} = \frac{31}{60}.$$

2 Sean las variables X e Y con f.d.d

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0,2] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Se obtienen 3 valores de X. Hállese la función de cuantía del número de valores mayores que 1.

(b) Se obtienen 3 valores de Y. Hállese el máximo valor $a \in [0,1]$ para que al menos uno de ellos exceda el valor a con probabilidad mínima de 0'999.

Solución:

(a) La probabilidad del suceso $A_i = \{$ el valor $-i$ es mayor que $1\}$

$$\mathrm{P}\left(A_i\right) = \mathrm{P}\left(X > 1\right) = \int_1^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{3}{4}.$$

La variable $N =$ número de valores mayores que 1 toma los valores $0, 1, 2, 3$ con función de cuantía

X	0	1	2	3
f	$1/64$	$9/64$	$27/64$	$27/64$

(b) $\mathrm{P}\left(Y > a\right) = 1 - a$ y $\mathrm{P}\left(Y < a\right) = a$. Para tres valores, la probabilidad de que ninguno exceda a es a^3 y la de que al menos uno exceda a es $1 - a^3$. Por tanto $1 - a^3 \geq 0'999 \to a^3 \leq 0'001 \to a \leq 0'1$. El valor máximo es 0'1.

3

(a) Si la variable X tiene media μ y varianza $\sigma^2 \neq 0$, hállense los valores de a y b para que la variable $Y = aX + b$ cumpla $\mathrm{E}\left(Y\right) = 0$, $\mathrm{Var}\left(Y\right) = 1$.

(b) Demuéstrese que no pueden existir dos variables X e Y tales que

$$\mathrm{E}\left(X\right) = 3, \quad \mathrm{E}\left(Y\right) = 2, \quad \mathrm{E}\left(X^2\right) = 10, \quad \mathrm{E}\left(Y^2\right) = 29, \quad \mathrm{E}\left(XY\right) = 0$$

(*Sugerencia: hállese la correlación*)

Solución:

(a) $\mathrm{Var}\left(Y\right) = a^2 \mathrm{Var}\left(X\right) = a^2\sigma^2 = 1$ por lo que $a = \dfrac{\pm 1}{\sigma}$. Como $\mathrm{E}\left(Y\right) = a\mu + b = 0$ debe ser $b = -a\mu = \dfrac{\mp\mu}{\sigma}$. La variable Y puede ser

$$Y = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}, \quad \text{o bién } Y = -\frac{1}{\sigma}X + \frac{\mu}{\sigma}$$

(b)

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{0 - 6}{1 \cdot 5} = -1'2$$

Los datos no son posibles pues se obtiene $\rho < -1$.

4 En una carrera de Fórmula 1, el consumo de combustible de un determinado coche sigue un distribución normal de media $3'5$ litros y desviación típica de $0'5$, por vuelta. Cuando quedan 12 vueltas para el final de la carrera entra en boxes a repostar ¿Cuál es la cantidad mínima de combustible que tiene que repostar, para que la probabilidad de que acabe la carrera (en ausencia de accidente) sea mayor que 0'95?

Solución: El consumo por vuelta tiene una distribución $N(3'5, 0'5)$. Luego el consumo para cada una de las 12 vueltas que quedan vendrá determinado por una distribución normal: $X_i \sim N(3'5, 0'5)$, con $i \in \{1, \ldots, 12\}$. Así pues, la cantidad total de combustible consumido en las 12 vueltas será una suma de distribuciones normales independientes: $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{12} \sim N(42, \sqrt{3})$. Nos piden la cantidad mínima k de combustible a repostar, para que la probabilidad de cubrir el consumo en las 12 vueltas sea mayor que 0'95, es decir, para que se cumpla $\mathrm{P}\left(X < k\right) > 0'95$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X < k\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{X - 42}{\sqrt{3}} < \frac{k - 42}{\sqrt{3}}\right) > 0'95 \\ &\rightarrow \mathrm{P}\left(Z < \frac{k - 42}{\sqrt{3}}\right) > 0'95 \\ &\rightarrow \Phi(\frac{k - 42}{\sqrt{3}}) > 0'95 \\ &\rightarrow \frac{k - 42}{\sqrt{3}} = 1'65 \\ &\rightarrow k = 42 + 1'65 \cdot \sqrt{3} = 44'8545 \end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad mínima sería de aproximadamente 45 litros.

1 Supóngase que el 5 % de los microprocesadores fabricados en una planta son defectuosas. Si uno de ellos es defectuoso, la probabilidad de que un controlador lo detecte y lo saque de la cadena de producción es $0'9$. Si un microprocesador no es defectuoso, la probabilidad de que el controlador piense que lo es y lo saque de la cadena de producción es $0'2$.

(a) (1 punto) Si un microprocesador se saca de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

(b) (1 punto) ¿Cuál es el porcentaje de defectuosos que se ponen a la venta?

Solución: Sean los sucesos $D = \{$ el microprocesador es defectuoso $\}$ y $S = \{$ el controlador lo saca de la cadena de producción $\}$; se tienen las probabilidades $\mathrm{P}(D) = 0'05$, $\mathrm{P}(S \mid D) = 0'9$ y $\mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right) = 0'2$

(a) aplicando el teorema de Bayes

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D \mid S) &= \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right)} \\ &= \frac{0'05 \cdot 0'9}{0'05 \cdot 0'9 + 0'95 \cdot 0'2} = \frac{9}{47}. \end{aligned}$$

(b) La probabilidad de que un microprocesador en venta sea defectuoso es

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(D \mid \overline{S}\right) &= \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid \overline{D}\right)} \\ &= \frac{0'05 \cdot 0'1}{0'05 \cdot 0'1 + 0'95 \cdot 0'8} = 0'0065. \end{aligned}$$

Por tanto el $0'65$ % son defectuosos.

2 Se lanza un dado y se consideran las variables:

$$X = \{\text{número de puntos}\}, \quad Y = \begin{cases} 0, & \text{si en el dado sale } 1, 2, 3 \\ 1, & \text{si en el dado sale } 4, 5, 6. \end{cases}$$

(a) (0'75 puntos) Calcular la función (tabla) de cuantía conjunta.

(b) (0'25 puntos) ¿son independientes?

(c) (1 punto) Calcular $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

Solución: La tabla es

$$
\begin{array}{c|cccccc c}
Y & & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & \\
0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & X
\end{array}
$$

Las marginales son

X	1	2	3	4	5	6
f_1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Y	0	1
f_2	1/2	1/2

De las tablas se deduce que NO son independientes y además

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \frac{7}{2} \\
\mathrm{E}(Y) &= \frac{1}{2} \\
\mathrm{E}(X \cdot Y) &= \frac{1}{6}(4+5+6) = \frac{5}{2} \\
\operatorname{Cov}(X, Y) &= \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

3 Se lanza un dado n veces y se considera la variable $X=$ "suma de puntos".

(a) (1 punto) Hállese n para que X tenga una media de 35 puntos.

(b) (1 punto) Hállese $\operatorname{Var}(X)$ en el apartado anterior.

Solución: Llamando X_i a la puntuación del dado en el lanzamiento $-i-$ésimo, la suma total es $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Las variables X_i tienen la función de cuantía de la variable X del problema **(2)**, cuya media es $\frac{7}{2}$ y la varianza es

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(X_i^2\right) &= \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6} \\ \mathrm{Var}\left(X_i\right) &= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

Por tanto $\mathrm{E}\left(X\right) = \frac{7}{2} \cdot n$ y $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{35}{12} \cdot n$

(a) Si $\mathrm{E}\left(X\right) = \frac{7}{2} \cdot n = 35 \to n = 10$.

(b) $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{35}{12} \cdot 10 = \frac{175}{6}$

4 (2 puntos) El número de visitas que realiza un comercial de cierta empresa por semana tiene una distribución normal de media 45 y desviación 3. Las visitas fallidas (no hay nadie en casa) sigue una distribución normal de media 10 y desviación 2. Considerando independientes las visitas realizadas de las fallidas ¿cuál es la probabilidad de que en una semana realice más de 40 visitas efectivas?

Solución: Si X_1 es el número de visitas y X_2 el de fallidas, el número de visitas efectivas es $X_1 - X_2$ que es normal de media $45-10=35$ y desviación $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$. Por tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X > 40\right) &= 1 - \mathrm{P}\left(X \leq 40\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{40-35}{\sqrt{13}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1{,}39) = 1 - 0'9177 = 0'0823. \end{aligned}$$

1 Supóngase que 5 terminales están conectados mediante una línea compartida a un computador central. El computador central va preguntando por turno a los diversos terminales si tienen algo que transmitir. Si la respuesta es afirmativa, el terminal accede a la línea. Entonces, si hay 3 terminales que quieren enviar un mensaje, calcular la probabilidad de que el computador haga 2 preguntas hasta encontrar un terminal que quiera transmitir.

Solución: Para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sean los sucesos $\{T_i =$ el terminal $-i-$ solicita transmitir $\}$. Si el computador central hace 2 preguntas es que el segundo terminal solicita transmitir; entonces, la probabilidad de que el primer terminal preguntado no quiera transmitir pero el segundo sí es

$$\mathrm{P}\left(\overline{T}_1 \cap T_2\right) = \mathrm{P}\left(\overline{T}_1\right) \mathrm{P}\left(T_2 \mid \overline{T}_1\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

2 De un grupo de 3 españoles, 2 franceses y 1 alemán se elige un grupo de 3. LLamando X al número de españoles e Y al de alemanes, hállese

(a) (1 punto) La función de cuantía conjunta.

(b) (0'3 puntos) Media de X y de Y.

(c) (0'4 puntos) Covarianza.

(d) (0'3 puntos) $\mathrm{E}(X \mid Y = 1)$.

Solución:

(a) Los casos posibles son $\binom{6}{3} = 20$. La tabla es la siguiente

Y					
1	1/20	6/20	3/20	0	
0	0	3/20	6/20	1/20	
	0	1	2	3	X

(b) Las funciones de cuantía marginales son

X	0	1	2	3
f_1	1/20	9/20	9/20	1/20

Y	0	1
f_2	1/2	1/2

$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \dfrac{9}{20} + 2 \cdot \dfrac{9}{20} + 3 \cdot \dfrac{1}{20} = \dfrac{3}{2}$.
$\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1}{2}$.

(c) Como $\mathrm{E}(XY) = 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{6}{20} + 2 \cdot 1 \cdot \dfrac{3}{20} = \dfrac{3}{5}$, la covarianza es

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{3}{5} - \frac{3}{2}\frac{1}{2} = -\frac{3}{20}.$$

(d) La distribución condicional es

$X \mid Y = 1$	0	1	2	3
g_1	1/10	6/10	3/10	0

La esperanza es

$$\mathrm{E}(X \mid Y = 1) = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = 1'2.$$

3 Un vendedor puede visitar cada día a un cliente con probabilidad 0’7 ó a ninguno. En cada visita puede vender y ganar 100€ con probabilidad 0’6 ó no vender (y no ganar). Calcular

(a) (1 punto) La función de cuantía del número de ventas diarios.

(b) (1 punto) La media y desviación de las ganancias diarias.

Solución: Llamemos X al número de visitas, Y al de ventas y G a las ganancias. La tabla de la cuantía de X es

X	0	1
f	0’3	0’7

(a) El número de ventas puede ser 1, con probabilidad $0'7 \cdot 0'6 = 0'42$ (ha de visitar y tener éxito en la visita) ó 0 con probabilidad $0'58$; por tanto

Y	0	1
f	0’58	0’42

Se deduce que

- $\mathrm{E}(Y) = 0'42$.
- $\mathrm{E}(Y^2) = 0'42$.
- $\mathrm{Var}(Y) = 0'42 - 0'42^2 = 0'2436$

(b) Como $G = 100Y$, se tiene

- $\mathrm{E}(G) = 100 \cdot 0'42 = 42$€
- $\mathrm{Var}(G) = 100^2 \cdot 0'2436 = 2436$
- $\sigma_G = \sqrt{2436} = 49'36$€

4 (2 puntos) Se sabe que la talla media de una población en edad escolar sigue una distribución normal con media 165 cm y desviación típica de 12 cm. Si un centro tiene 1400 alumnos matriculados, se pide:

(a) ¿Cuál es el número de alumnos que miden más de 155 cm?

(b) ¿Qué proporción (%) de alumnos miden entre 150 y 178 cm?

(c) ¿Qué talla permite asegurar que el 67 % de la población está por debajo de ella?

Solución:

(a) Hay que calcular la probabilidad de que un alumno mida más de 155 cm y aplicarlo a los 1400 alumnos. Como la variable no es una $N(0,1)$, hay que tipificar:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 155) &= 1 - \mathrm{P}(X \leq 155) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{155-165}{12}\right) \\ &= 1 - \Phi(-0'83) = \Phi(0'83) = 0'7967. \end{aligned}$$

Luego, la cantidad de alumnos es $1400 \cdot 0'7967 = 1115,38 \approx 1116$.

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(150 \leq X \leq 178) &= \mathrm{P}\left(\frac{150-165}{12} \leq Z \leq \frac{178-165}{12}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\frac{-15}{12} \leq Z \leq \frac{13}{12}\right) \\ &= \Phi(1'08) - \Phi(-1'25) = 0'8599 - 1 + 0'8944 = 0'7543. \end{aligned}$$

Luego el $75'43$ % miden entre 150 y 165 cm.

(c) Se pide una talla k tal que $\mathrm{P}\left(X<k\right)=0'67$. Así pues:

$$\mathrm{P}\left(X<k\right)=\mathrm{P}\left(Z<\frac{k-165}{12}\right)=\Phi\left(\frac{k-165}{12}\right)=0'67.$$

Buscando en las tablas, para $z=0'44 \Rightarrow \Phi=0'6700$, luego $\dfrac{k-165}{12}=0'44 \Rightarrow k=165+12\cdot 0'44=170'28$. Solución: $k=170'28$ cm.

1 Una empresa de software que diseña juegos para ordenador somete los diseños preliminares de sus productos a la evaluación previa de un grupo seleccionado de clientes. Según muestra la experiencia, el 95 % de los productos que tuvieron un gran éxito en el mercado recibieron buenas evaluaciones, el 60 % de los de éxito moderado recibieron buenas evaluaciones y sólo el 10 % de los que tuvieron escaso éxito fueron valorados favorablemente. Además, globalmente el 40 % de los productos de la empresa han tenido mucho éxito, el 35 % un éxito moderado y el 25 % una baja aceptación.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto, elegido al azar entre la producción de la fábrica, obtenga una buena evaluación previa?

(b) Si un nuevo producto obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

(c) Si un producto no obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{array}{ll} G = \{\text{el producto tiene mucho éxito}\} & M = \{\text{el producto tiene éxito moderado}\} \\ E = \{\text{el producto tiene escaso éxito}\} & B = \{\text{el producto tiene buena evaluación}\} \end{array}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(G) = 0'4 & \mathrm{P}(M) = 0'35 & \mathrm{P}(E) = 0'25 \\ \mathrm{P}(B \mid G) = 0'95 & \mathrm{P}(B \mid M) = 0'4 & \mathrm{P}(B \mid E) = 0'1. \end{array}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(G) \cdot \mathrm{P}(B \mid G) + \mathrm{P}(M) \cdot \mathrm{P}(B \mid M) + \mathrm{P}(E) \cdot \mathrm{P}(B \mid E) \\ &= 0'95 \cdot 0'4 + 0'6 \cdot 0'35 + 0'1 \cdot 0'25 \\ &= 0'615. \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{P}(G \mid B) = \frac{\mathrm{P}(G) \cdot \mathrm{P}(B \mid G)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0'4 \cdot 0'95}{0'615} = 0'6179.$$

(c) Puesto que $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0'615 = 0'385$ y $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid G\right) = 1 - 0'95 = 0'05$, se tiene

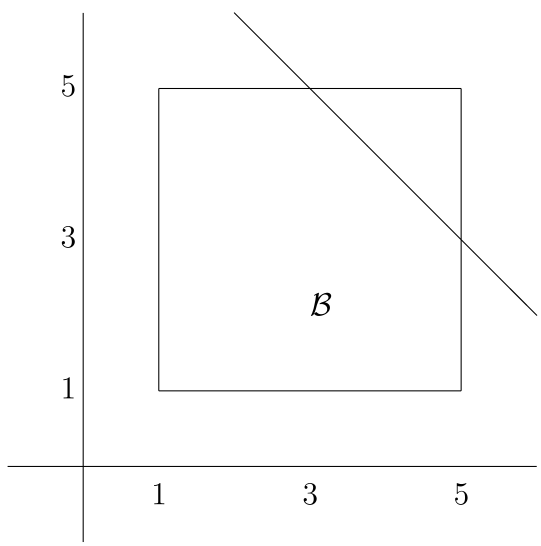
$$\mathrm{P}\left(G \mid \overline{B}\right) = \frac{\mathrm{P}(G) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B} \mid G\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{0'4 \cdot 0'05}{0'385} = 0'0519.$$

2 Se eligen dos números aleatorios en el intervalo [1, 5]. Calcular la probabilidad de que la suma sea menor que 8.

Solución: Llamando (X, Y) al par de números, tenemos una v.a. bidimensional uniforme en $[1,5] \times [1,5]$. La función de densidad (aunque no es necesaria) es

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/16, & (x,y) \in [1,5] \times [1,5] \\ 0, & (x,y) \notin [1,5] \times [1,5] \end{cases}$$

La figura siguiente representa la región posible y la favorable $\mathcal{B}$



La probabilidad es el cociente entre áreas

$$\mathrm{P}(X + Y < 8) = \frac{\text{área}(\mathcal{B})}{\text{área}(\mathcal{A})} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.$$

3 Un juego de azar consiste en lanzar tres dados, de manera que el jugador elige un número entre 1 y 6 y recibe una cantidad K, si su número aparece una vez, el doble si aparece dos veces y el triple si aparece tres veces. Si el número elegido no figura entre los resultados, el jugador paga K. Calcula el beneficio medio del jugador.

Solución: La probabilidad de que el número elegido aparezca una sóla vez es $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{75}{216}$. De que aparezca dos veces es $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$. De que aparezca tres veces es $\cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$. De que no aparezca es $\cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$. Luego la variable $B =$ beneficio tiene la cuantía

X	$-K$	K	$2K$	$3K$
f	125/216	75/216	15/216	1/216

La media es

$$\mathrm{E}(B) = (-K)\frac{125}{216} + K\frac{75}{216} + 2K\frac{15}{216} + 3K\frac{1}{216} = -\frac{17K}{216}$$

4 El 2 % de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. Si se empaquetan en lotes de 2000 tornillos,

(a) ¿cuál es la probabilidad de que en un determinado lote no haya más de 50 defectuosos?

(b) Si se inspecciona un lote en busca de tornillos defectuosos y se han encontrado ya más de 40 ¿cuál es la probabilidad de que este número no supere los 50?

(c) ¿Cuál es el mínimo número k parea que se pueda asegurar que la probabilidad de que no haya más de k tornillos defectuosos sea superior a $0'9$?

Solución: La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es $0'02$. El número X de tornillos defectuosos en una muestra de 2000 sigue la distribución binomial $B(2000, 0'02)$ que podemos considerar como normal de parámetros $\mu = 40$ y desviación $\sigma = \sqrt{39'20} = 6'26$.

(a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X \leq 50\right) &= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{50-40}{6'26}\right) \\
&= \Phi(1'60) = 0'9452.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X \leq 50 \mid X > 40\right) &= \frac{\mathrm{P}\left(40 < X \leq 50\right)}{\mathrm{P}\left(X > 40\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(0 < Z \leq 1'60\right)}{1-\Phi(0)} \\
&= \frac{0'9452-0'5}{0'5} \\
&= 0'8904.
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X \leq k\right) > 0'9 &\rightarrow \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9 \\
&\rightarrow \Phi\left(\frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9
\end{aligned}
$$

Llamando $a = \dfrac{k-40}{6'26}$ se tiene

$$
\begin{aligned}
&\Phi\left(a\right) > 0'9 \\
&\qquad \rightarrow a > 1'29 \\
&\qquad \rightarrow \frac{k-40}{6'26} > 1'29 \rightarrow k > 40 - 6'26 \cdot 1'29 = 31'93
\end{aligned}
$$

Luego la solución es 32 tornillos.

1 (2 puntos) Dos compañías producen software informático. La primera A, proporciona el 70 % y la segunda B el 30 % de la producción total. Por otra parte, se sabe que el 83 % del software suministrado por la primera compañía se ajusta a las normas establecidas, mientras que sólo el 63 % del suministrado por la segunda, se ajusta a dichas normas. Calcular la probabilidad de que un determinado software haya sido suministrado por la compañía A, si se sabe que se ajusta a las normas.

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{ el software lo produce la empresa A}\} \\ B &= \{ \text{ el software lo produce la empresa B}\} \\ N &= \{ \text{ el software se ajusta a las normas.}\} \end{aligned}$$

Se pide $\mathrm{P}(A \mid N)$ y conocemos las siguientes probabilidades

$$\mathrm{P}(A) = 0'7, \quad \mathrm{P}(B) = 0'3, \quad \mathrm{P}(N \mid A) = 0'83, \quad \mathrm{P}(N \mid B) = 0'63.$$

Aplicando Bayes

$$\mathrm{P}(A \mid N) = \frac{0'7 \cdot 0'83}{0'7 \cdot 0'83 + 0'3 \cdot 0'63} = 0'7545.$$

2 Sea X una variable aleatoria discreta que denota el número de averías que un operario resuelve en una jornada de trabajo, con función de cuantía dada por

$$f(x) = \frac{k}{x+1}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

(a) (1 punto) Calcular $\mathrm{P}(X > 1)$ y $\mathrm{P}(X > 0 \mid X < 3)$.

(b) (0'5 puntos) Calcula el número medio de averías que soluciona al día.

(c) (0'5 puntos) Si su sueldo es de 60 € por jornada laboral y si le pagan un plus de 20 € por cada avería solucionada que exceda de una al día ¿cuál es el sueldo diario medio?

Solución: Tenemos que hallar el valor de k; se obtiene sumando las probabilidades e igualando a 1

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 \quad &\to \quad \frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1 \\ \frac{25k}{12} = 1 \quad &\to \quad k = \frac{12}{25}. \end{aligned}$$

La función de cuantía es, por tanto

X	0	1	2	3
$f(x)$	12/25	6/25	4/25	3/25

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X>1) &= \frac{4}{25}+\frac{3}{25}=\frac{7}{25}\\
\mathrm{P}(X>0 \mid X<3) &= \frac{\mathrm{P}(0<X<3)}{\mathrm{P}(X<3)}=\frac{6/25+4/25}{22/25}=\frac{10}{22}=\frac{5}{11}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{12}{25}+1\cdot\frac{6}{25}+2\cdot\frac{4}{25}+3\cdot\frac{3}{25}=\frac{23}{25}.$$

(c) La variable sueldo es

$$S=\begin{cases} 60, & X=0\\ 60+20(X-1) & X=1,2,3\end{cases}$$

Para los valores de $X=0,1,2,3$ se obtiene

X	0	1	2	3
S	60	60	80	100

Teniendo en cuenta las probabilidades de X, la cuantía de S es

S	60	80	100
f_S	18/25	4/25	3/25

La media es

$$60\cdot\frac{18}{25}+80\cdot\frac{4}{25}+100\cdot\frac{3}{25}=\frac{1700}{25}=68.$$

3

(a) (1 punto) Supóngase que se selecciona al azar una palabra de la frase "ESPAÑA GANARÁ EL CAMPEONATO MUNDIAL DE FÚTBOL". Si X es el número de letras de la palabra seleccionada, calcular $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

(b) (1 punto) En una lotería se venden 30000 boletos a 20€ cada uno. El primer premio es de 200000 € , el segundo de 100000€ y el tercero de 20000€ ¿Cuál es la ganancia esperada de un individuo que ha comprado una papeleta?

Solución:

(a) La frase consta de 7 palabras con 6,6,2, 10,7,2 y 6 letras respectivamente. Por tanto X toma los valores 2,6,7 y 10 con probabilidades

X	2	6	7	10
$f(x)$	2/7	3/7	1/7	1/7

Se tiene $\mathrm{E}(X)=4/7+18/7+7/7+10/7=39/7$. Para hallar la varianza calculamos $\mathrm{E}\left(X^2\right)=8/7+108/7+49/7+100/7=265/7$ con lo que

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{265}{7}-\left(\frac{39}{7}\right)^2=\frac{334}{49}.$$

(b) Llamando G a la variable ganancia, se tiene

G	199980	99980	19980	-20
$f(x)$	$1/30000$	$1/30000$	$1/30000$	$29997/30000$

Por tanto la media es

$$\mathrm{E}\,(G) = \frac{199980 + 99980 + 19980 - 599940}{30000} = \frac{-280000}{30000} = -\frac{28}{3}.$$

4 Una empresa de informática produce y saca a la venta tiradas de 20000 ordenadores de los que sólo un 3 % salen defectuosos. Para darse a conocer lanza una campaña de publicidad en la que asegura que si el número de ordenadores defectuosos de una tirada supera en más de un 5 % el valor esperado, promete devolver el dinero a cada uno de los compradores afectados y, además, regalarles un ordenador nuevo a cada uno.

(a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa tenga que llevar a cabo la promesa de la campaña publicitaria?

(b) (1 punto) Si del total de ordenadores que se llevan vendidos, se sabe que ya hay más de 620 defectuosos ¿cuál es la probabilidad de que la empresa no tenga que llevar a cabo su promesa?

Solución: Sea X = numero de ordenadores defectuosos de los 20000. Se trata de una distribución binomial, donde $X \sim B\,(20000, 0'03)$. Por tanto, el valor esperado para una distribución binomial es:

$$E\,(X) = n \cdot p = 20000 \cdot 0'03 = 600.$$

Para que la empresa lleve a cabo la promesa de la campaña publicitaria, el número de ordenadores defectuosos debe superar en un 5 % el valor esperado, o sea, a 630. Aproximamos por la Normal:

$$Z = \frac{X - E\,(X)}{\sqrt{Var\,(X)}} = \frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{X - 20000 \cdot 0'03}{\sqrt{20000 \cdot 0'03 \cdot 0'97}} = \frac{X - 600}{\sqrt{582}} \sim N\,(0, 1)$$

(a) $\mathrm{P}\,(X > 630) = \mathrm{P}\left(Z > \dfrac{30}{\sqrt{582}}\right) = 1 - \Phi(1'24) = 1 - 0'8925 = 0'1075.$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(X \leq 630 \mid X > 620\,) &= \frac{\mathrm{P}\,(620 < X \leq 630)}{\mathrm{P}\,(X > 620)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(\dfrac{20}{\sqrt{582}} < Z \leq \dfrac{30}{\sqrt{582}}\right)}{\mathrm{P}\left(Z > \dfrac{20}{\sqrt{582}}\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\,(0'83 < Z \leq 1'24)}{\mathrm{P}\,(Z > 0'83)} \\
&= \frac{\Phi(1'24) - \Phi(0'83)}{1 - \Phi(0'83)} \\
&= \frac{0'8925 - 0'7967}{0'7967} \\
&= 0'1202.
\end{aligned}$$

1 En una casa hay tres llaveros; el primero A con cinco llaves, el segundo B con siete y el tercero C con ocho, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él una llave para abrir el trastero. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que se acierte con la llave que abre la puerta?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?

(c) Si la llave escogida es la correcta, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al primer llavero A?

Solución: Se consideran los sucesos

- $D = \{$ La llave abre $\}$
- $A = \{$ Se elige el llavero A $\}$
- $B = \{$ Se elige el llavero B $\}$
- $C = \{$ Se elige el llavero C $\}$

Tenemos que

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = 1/3, \mathrm{P}(D \mid A) = \frac{1}{5}, \mathrm{P}(D \mid B) = \frac{1}{7}, \mathrm{P}(D \mid C) = \frac{1}{8}$$

(a) Aplicando el teorema de la probabilidad total
$\mathrm{P}(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = 0'1559$

(b) $\mathrm{P}\left(C \cap \overline{D}\right) = \mathrm{P}(C)\,\mathrm{P}\left(\overline{D} \mid C\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = 0'2917$

(c) $\mathrm{P}(A \mid D) = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}} = 0'4275$

2 Las marcas obtenidas por un lanzador de peso sigue una variable aleatoria con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9}, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde las distancias, X, se miden en decámetros.

(a) *(1 punto)* Calcula la probabilidad condicionada de que la marca sea superior a 25 metros sabiendo que es superior a 20 metros.

(b) *(1 punto)* Calcula la distancia media en metros.

Solución:

(a) $\mathrm{P}\left(X > 2'5 \mid X > 2\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(X > 2'5\right)}{\mathrm{P}\left(X > 2\right)}$. Efectuando los cálculos

$$\int_{2'5}^{3} \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_{2'5}^{3} = 0'4213, \qquad \int_{2}^{3} \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_{2}^{3} = 0'7037.$$

La solución es, por tanto, $\dfrac{0'4213}{0'7037} = 0'5987$.

(b) $\mathrm{E}\left(X\right) = \displaystyle\int_{0}^{3} x \cdot \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^4}{36}\right]_{0}^{3} = 2'25$. La media es $22'5$ metros.

3 Se dispone de una caja con 3 piezas aptas y 2 defectuosas. Se extraen aleatoriamente 2 piezas sin reemplazamiento, y se definen las variables aleatorias:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si la } 1^a \text{ pieza es apta} \\ 0, & \text{si la } 1^a \text{ pieza no es apta} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{si la } 2^a \text{ pieza es apta} \\ 0, & \text{si la } 2^a \text{ pieza no es apta} \end{cases}$$

(a) *(1 punto)* Hallar la función de cuantía conjunta y las marginales

(b) *(1 punto)* Hallar la covarianza $\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)$

Solución:

(a) La función de cuantía es

Y			
1	6/20	6/20	
0	2/20	6/20	
	0	1	X

Las marginales:

X	0	1
f_1	2/5	3/5

Y	0	1
f_2	2/5	3/5

(b) Haciendo cálculos

- $\mathrm{E}\left(X\right) = \mathrm{E}\left(Y\right) = 3/5$
- $\mathrm{E}\left(XY\right) = 6/20 = 3/10$

Por tanto, $\text{Cov}(X,Y) = 3/10 - 3/5 \cdot 3/5 = -3/50$

4 Una compañía aérea observa que el 10 % de las plazas reservadas no se cubren, por ello decide aceptar reservas en un 5 % más de las disponibles. ¿Cuál es la probabilidad de que en un avión de 500 plazas algún pasajero que ha hecho la reserva se quede sin plaza? *(Supóngase que todas las plazas reservadas han sido vendidas)*

Solución: Se han reservado $500 + 25 = 525$ plazas. Llamando X al número de pasajeros que acuden al vuelo, tenemos que $X \sim B(525, 0'9)$ y se tiene que calcular $\text{P}(X > 500)$. Aproximando por la distribución normal, se tiene que

$$X \approx N(472'5, 6'87).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{P}(X > 500) &= \text{P}\left(Z > \frac{500 - 472'5}{6'87}\right) \\ &= \text{P}\left(Z > 4'002\right) \\ &= 1 - 0'999968 \\ &= 0'000032. \end{aligned}$$

1 Se celebra un casting televisivo en dos sedes, Madrid y Sevilla. En Madrid se seleccionan 20 chicos y 30 chicas, que reunimos en una sala. Allí se mezclan al azar y se colocan en fila india. Lo mismo hacemos en Sevilla, donde se han seleccionado 30 chicos y 50 chicas.

Lanzamos una moneda (equilibrada): si sale cara, llamamos a Sevilla y escogemos al candidato que ocupe la primera posición de la lista. Si sale cruz, hacemos lo mismo, pero en Madrid.

(a) *(0'5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato elegido sea un chico?

(b) *(0'5 puntos)* Juan González es uno de los seleccionados en Sevilla ¿Cuál es la probabilidad de que sea el candidato finalmente elegido?

(c) *(0'5 puntos)* Se ha efectuado el proceso de elección del candidato final, que resulta ser una chica. ¿Con qué probabilidad será madrileña?

(d) *(1 punto)* Ahora cambiamos el procedimiento: reunimos a todos los seleccionados en un hotel de Barcelona, los mezclamos y colocamos en fila india; y elegimos al candidato que ocupe la primera posición. La probabilidad de que Juan González haya sido el elegido ¿coincide con la del apartado (b)? Y la probabilidad de que el candidato sea chico ¿coincide con la del apartado (a)? Medita sobre el asunto

Solución: Llamamos

$$\begin{aligned} M &= \{\text{Se elige alguien de Madrid}\} \\ S &= \{\text{Se elige alguien de Sevilla}\} \\ C_o &= \{\text{Se elige un chico}\} \\ C_a &= \{\text{Se elige una chica}\} \\ J &= \{\text{Es elegido Juan González}\} \end{aligned}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(M) &= 1/2 \\ \mathrm{P}(S) &= 1/2 \\ \mathrm{P}(C_o \mid M) &= 2/5 \\ \mathrm{P}(C_o \mid S) &= 3/8 \\ \mathrm{P}(C_a \mid M) &= 3/5 \\ \mathrm{P}(C_a \mid S) &= 5/8 \end{aligned}$$

(a) $\mathrm{P}(C_o) = \mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(C_o \mid M) + \mathrm{P}(S)\,\mathrm{P}(C_o \mid S) = 1/2 \cdot 2/5 + 1/2 \cdot 3/8 = 31/80 = 0'3875$

(b) $\mathrm{P}(J) = \mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(J \mid M) + \mathrm{P}(S)\,\mathrm{P}(J \mid S) = 1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 1/80 = 1/160 = 0'00625$

(c)

$$\mathrm{P}(M \mid C_a) = \frac{\mathrm{P}(M \cap C_a)}{\mathrm{P}(C_a)} = \frac{\mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(C_a \mid M)}{\mathrm{P}(C_a)} = \frac{1/2 \cdot 3/5}{1 - 0'3875} = 0'4898$$

(d) Al estar todos los candidatos juntos, las probabilidades cambian; en efecto

(1) $\mathrm{P}(C_o) = 50/130 = 0'3846$

(2) $\mathrm{P}(J) = 1/130 = 0'007692$

El experimento es distinto, el espacio muestral otro y, en consecuencia, distintas las probabilidades.

2 Sea X una variable aleatoria discreta que denota el número de averías que un operario resuelve en una jornada de trabajo, con función de cuantía dada por

$$f(x) = \frac{k}{x+1}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

(a) *(0'75 puntos)* Calcular $\mathrm{P}(X > 1)$ y $\mathrm{P}(X > 0 \mid X < 3)$.

(b) *(0'75 puntos)* Calcula el número medio de averías que soluciona al día.

(c) *(1 punto)* Si su sueldo es de 60 euros por jornada laboral y si le pagan un plus de 20 euros por cada avería solucionada que exceda de una al día ¿cuál es el sueldo diario medio?

Solución: Tenemos que hallar el valor de k; se obtiene sumando las probabilidades e igualando a 1

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1$$
$$\frac{25k}{12} = 1 \quad \rightarrow \quad k = \frac{12}{25}.$$

La función de cuantía es, por tanto

X	0	1	2	3
$f(x)$	12/25	6/25	4/25	3/25

(a)

$$\mathrm{P}(X > 1) = \frac{4}{25} + \frac{3}{25} = \frac{7}{25}$$
$$\mathrm{P}(X > 0 \mid X < 3) = \frac{\mathrm{P}(0 < X < 3)}{\mathrm{P}(X < 3)} = \frac{6/25 + 4/25}{22/25} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}.$$

(b)

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{12}{25} + 1 \cdot \frac{6}{25} + 2 \cdot \frac{4}{25} + 3 \cdot \frac{3}{25} = \frac{23}{25}.$$

(c) La variable sueldo S tiene los valores

$$S = \begin{cases} 60 & \text{si } X \in \{0,1\} \\ 80 & \text{si } X = 2 \\ 100 & \text{si } X = 3 \end{cases}$$

En consecuencia su cuantía es

S	60	80	100
f_S	18/25	4/25	3/25

Luego $\mathrm{E}(S) = 60 \cdot \frac{18}{25} + 80 \cdot \frac{4}{25} + 100 \cdot \frac{3}{25} = 68.$

3 Se tiene la siguiente función de cuantía de una v.a. (X, Y)

Y					
3	0	3/8	3/8	0	
1	1/8	0	0	1/8	
	0	1	2	3	X

Hallad

(a) *(1 punto)* La covarianza $\mathrm{Cov}(X, Y)$

(b) *(1 punto)* $\mathrm{E}(X \mid Y = 1)$

(c) *(0'5 puntos)* ¿Son independientes? Razónese la respuesta

Solución:

(a) Se debe calcular $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{E}(XY)$. Las distribuciones marginales son

X	0	1	2	3
f_1	1/8	3/8	3/8	1/8

Y	1	3
f_2	2/8	6/8

Calculando..

- $\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$
- $\mathrm{E}(Y) = 1 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{6}{8} = \frac{5}{2}$
- $\mathrm{E}(XY) = 1 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{4}$

Por tanto $\operatorname{Cov}(X,Y) = \frac{15}{4} - \frac{3}{2}\frac{5}{2} = 0$

(b) La distribución condicional es

$(X \mid Y=1)$	0	3
$g_1(x\mid 1)$	$1/2$	$1/2$

de donde $\operatorname{E}(X \mid Y=1) = \frac{3}{2}$

(c) Como no coinciden las cuantías $f_1(x)$ y $g_1(x|1)$, NO son independientes. Otra prueba: $f(0,1) = \frac{1}{8}$ mientras que $f_1(0) \cdot f_2(1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{32}$

4 *(2'5 puntos)* Un plaguicida se consigue con la mezcla de dos sustancias con concentraciones de insecticida que siguen las siguientes concentraciones normales

$$X_1 \sim N(200, 25), \qquad X_2 \sim N(20, 5)$$

La mezcla se hace utilizando el doble de X_2 que de X_1. Teniendo en cuenta que al fumigar con el plaguicida se produce una pérdida de parte de insecticida producida por diversas causas, cuya distribución X_3 es normal de media 50 y desviación 10, la concentración final de insecticida X queda de la siguiente manera

$$X = X_1 + 2X_2 - \frac{3}{2}X_3$$

¿Cuál es la probabilidad de que la concentración final de insecticida esté entre 150 y 175?

Solución: La distribución normal resultante es la combinación de las tres distribuciones normales: $X = X_1 + 2X_2 - \frac{3}{2}X_3$, por lo que lo único que hay que hacer es calcular los parámetros de la distribución resultante y la probabilidad pedida $P(150 \leq X \leq 175)$.

Primero se calcula la esperanza: $\operatorname{E}(X) = \operatorname{E}(X_1) + 2 \cdot \operatorname{E}(X_2) - \frac{3}{2} \cdot \operatorname{E}(X_3)$. Del enunciado sabemos que $\operatorname{E}(X_1) = 200$, $\operatorname{E}(X_2) = 20$ y $\operatorname{E}(X_3) = 50$, por lo que:

$$\operatorname{E}(X) = 200 + 2 \cdot 20 - \frac{3}{2} \cdot 50 = 200 + 40 - 75 = 165.$$

La varianza de la distribución resultante se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X) &= \operatorname{Var}(X_1) + 2^2 \cdot \operatorname{Var}(X_2) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{Var}(X_3) \\
&= 25^2 + 2^2 \cdot 5^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 10^2 \\
&= 625 + 100 + 225 = 950.
\end{aligned}$$

Como necesitamos la desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{950} \simeq 30.82$. Así pues,

$$X \sim N(165, 30.82).$$

Normalizando:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(150 \leq X \leq 175\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{150-165}{30.82} \leq Z \leq \frac{175-165}{30.82}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(-0.49 \leq Z \leq 0.33\right) \\
&= \Phi(0.33) - \Phi(-0.49) \\
&= 0.6293 + 0.6879 - 1 = 0.3172.
\end{aligned}$$

1 En una casa hay tres llaveros; el primero A con cinco llaves, el segundo B con siete y el tercero C con ocho, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él una llave para abrir el trastero. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que se acierte con la llave que abre la puerta?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?

(c) Si la llave escogida es la correcta, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al primer llavero A?

Solución: Se consideran los sucesos

- $D = \{$ La llave abre $\}$
- $A = \{$ Se elige el llavero A $\}$
- $B = \{$ Se elige el llavero B $\}$
- $C = \{$ Se elige el llavero C $\}$

Tenemos que

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = 1/3, \mathrm{P}(D \mid A) = \frac{1}{5}, \mathrm{P}(D \mid B) = \frac{1}{7}, \mathrm{P}(D \mid C) = \frac{1}{8}$$

(a) Aplicando el teorema de la probabilidad total
$\mathrm{P}(D) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = 0'1559$

(b) $\mathrm{P}\left(C \cap \overline{D}\right) = \mathrm{P}(C)\,\mathrm{P}\left(\overline{D} \mid C\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8} = 0'2917$

(c) $\mathrm{P}(A \mid D) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}} = 0'4275$

2 Las marcas obtenidas por un lanzador de peso sigue una variable aleatoria con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9}, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde las distancias, X, se miden en decámetros.

(a) *(1 punto)* Calcula la probabilidad condicionada de que la marca sea superior a 25 metros sabiendo que es superior a 20 metros.

(b) *(1 punto)* Calcula la distancia media en metros.

Solución:

(a) $\mathrm{P}\left(X > 2'5 \mid X > 2\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(X > 2'5\right)}{\mathrm{P}\left(X > 2\right)}$. Efectuando los cálculos

$$\int_{2'5}^{3} \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_{2'5}^{3} = 0'4213, \qquad \int_{2}^{3} \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_{2}^{3} = 0'7037.$$

La solución es, por tanto, $\dfrac{0'4213}{0'7037} = 0'5987$.

(b) $\mathrm{E}\left(X\right) = \displaystyle\int_{0}^{3} x \cdot \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^4}{36}\right]_{0}^{3} = 2'25$. La media es $22'5$ metros.

3 Se dispone de una caja con 3 piezas aptas y 2 defectuosas. Se extraen aleatoriamente 2 piezas sin reemplazamiento, y se definen las variables aleatorias:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si la } 1^a \text{ pieza es apta} \\ 0, & \text{si la } 1^a \text{ pieza no es apta} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{si la } 2^a \text{ pieza es apta} \\ 0, & \text{si la } 2^a \text{ pieza no es apta} \end{cases}$$

(a) *(1 punto)* Hallar la función de cuantía conjunta y las marginales

(b) *(1 punto)* Hallar la covarianza $\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)$

Solución:

(a) La función de cuantía es

Y			
1	6/20	6/20	
0	2/20	6/20	
	0	1	X

Las marginales:

X	0	1
f_1	2/5	3/5

Y	0	1
f_2	2/5	3/5

(b) Haciendo cálculos

- $\mathrm{E}\left(X\right) = \mathrm{E}\left(Y\right) = 3/5$
- $\mathrm{E}\left(XY\right) = 6/20 = 3/10$

Por tanto, $\text{Cov}\,(X,Y) = 3/10 - 3/5 \cdot 3/5 = -3/50$

4 Una compañía aérea observa que el 10 % de las plazas reservadas no se cubren, por ello decide aceptar reservas en un 5 % más de las disponibles. ¿Cuál es la probabilidad de que en un avión de 500 plazas algún pasajero que ha hecho la reserva se quede sin plaza? *(Supóngase que todas las plazas reservadas han sido vendidas)*

Solución: Se han reservado $500 + 25 = 525$ plazas. Llamando X al número de pasajeros que acuden al vuelo, tenemos que $X \sim B(525, 0'9)$ y se tiene que calcular $\text{P}\,(X > 500)$. Aproximando por la distribución normal, se tiene que

$$X \approx N(472'5, 6'87).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\text{P}\,(X > 500) &= \text{P}\left(Z > \frac{500 - 472'5}{6'87}\right) \\
&= \text{P}\left(Z > 4'002\right) \\
&= 1 - 0'999968 \\
&= 0'000032.
\end{aligned}$$

1 Se celebra un casting televisivo en dos sedes, Madrid y Sevilla. En Madrid se seleccionan 20 chicos y 30 chicas, que reunimos en una sala. Allí se mezclan al azar y se colocan en fila india. Lo mismo hacemos en Sevilla, donde se han seleccionado 30 chicos y 50 chicas.

Lanzamos una moneda (equilibrada): si sale cara, llamamos a Sevilla y escogemos al candidato que ocupe la primera posición de la lista. Si sale cruz, hacemos lo mismo, pero en Madrid.

(a) *(0'5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato elegido sea un chico?

(b) *(0'5 puntos)* Juan González es uno de los seleccionados en Sevilla ¿Cuál es la probabilidad de que sea el candidato finalmente elegido?

(c) *(0'5 puntos)* Se ha efectuado el proceso de elección del candidato final, que resulta ser una chica. ¿Con qué probabilidad será madrileña?

(d) *(1 punto)* Ahora cambiamos el procedimiento: reunimos a todos los seleccionados en un hotel de Barcelona, los mezclamos y colocamos en fila india; y elegimos al candidato que ocupe la primera posición. La probabilidad de que Juan González haya sido el elegido ¿coincide con la del apartado (b)? Y la probabilidad de que el candidato sea chico ¿coincide con la del apartado (a)? Medita sobre el asunto

Solución: Llamamos

$$\begin{aligned} M &= \{\text{Se elige alguien de Madrid}\} \\ S &= \{\text{Se elige alguien de Sevilla}\} \\ C_o &= \{\text{Se elige un chico}\} \\ C_a &= \{\text{Se elige una chica}\} \\ J &= \{\text{Es elegido Juan González}\} \end{aligned}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(M) &= 1/2 \\ \mathrm{P}(S) &= 1/2 \\ \mathrm{P}(C_o \mid M) &= 2/5 \\ \mathrm{P}(C_o \mid S) &= 3/8 \\ \mathrm{P}(C_a \mid M) &= 3/5 \\ \mathrm{P}(C_a \mid S) &= 5/8 \end{aligned}$$

(a) $\mathrm{P}(C_o) = \mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(C_o \mid M) + \mathrm{P}(S)\,\mathrm{P}(C_o \mid S) = 1/2 \cdot 2/5 + 1/2 \cdot 3/8 = 31/80 = 0'3875$

(b) $\mathrm{P}(J) = \mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(J \mid M) + \mathrm{P}(S)\,\mathrm{P}(J \mid S) = 1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 1/80 = 1/160 = 0'00625$

(c)

$$\mathrm{P}(M \mid C_a) = \frac{\mathrm{P}(M \cap C_a)}{\mathrm{P}(C_a)} = \frac{\mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(C_a \mid M)}{\mathrm{P}(C_a)} = \frac{1/2 \cdot 3/5}{1 - 0'3875} = 0'4898$$

(d) Al estar todos los candidatos juntos, las probabilidades cambian; en efecto

(1) $\mathrm{P}(C_o) = 50/130 = 0'3846$

(2) $\mathrm{P}(J) = 1/130 = 0'007692$

El experimento es distinto, el espacio muestral otro y, en consecuencia, distintas las probabilidades.

2 Sea X una variable aleatoria discreta que denota el número de averías que un operario resuelve en una jornada de trabajo, con función de cuantía dada por

$$f(x) = \frac{k}{x+1}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

(a) *(0'75 puntos)* Calcular $\mathrm{P}(X > 1)$ y $\mathrm{P}(X > 0 \mid X < 3)$.

(b) *(0'75 puntos)* Calcula el número medio de averías que soluciona al día.

(c) *(1 punto)* Si su sueldo es de 60 euros por jornada laboral y si le pagan un plus de 20 euros por cada avería solucionada que exceda de una al día ¿cuál es el sueldo diario medio?

Solución: Tenemos que hallar el valor de k; se obtiene sumando las probabilidades e igualando a 1

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1$$
$$\frac{25k}{12} = 1 \quad \rightarrow \quad k = \frac{12}{25}.$$

La función de cuantía es, por tanto

X	0	1	2	3
$f(x)$	12/25	6/25	4/25	3/25

(a)

$$\mathrm{P}(X > 1) = \frac{4}{25} + \frac{3}{25} = \frac{7}{25}$$
$$\mathrm{P}(X > 0 \mid X < 3) = \frac{\mathrm{P}(0 < X < 3)}{\mathrm{P}(X < 3)} = \frac{6/25 + 4/25}{22/25} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}.$$

(b)

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{12}{25} + 1 \cdot \frac{6}{25} + 2 \cdot \frac{4}{25} + 3 \cdot \frac{3}{25} = \frac{23}{25}.$$

(c) La variable sueldo S tiene los valores

$$S = \begin{cases} 60 & \text{si } X \in \{0,1\} \\ 80 & \text{si } X = 2 \\ 100 & \text{si } X = 3 \end{cases}$$

En consecuencia su cuantía es

S	60	80	100
f_S	18/25	4/25	3/25

Luego $\mathrm{E}(S) = 60 \cdot \frac{18}{25} + 80 \cdot \frac{4}{25} + 100 \cdot \frac{3}{25} = 68.$

3 Se tiene la siguiente función de cuantía de una v.a. (X, Y)

Y					
3	0	3/8	3/8	0	
1	1/8	0	0	1/8	
	0	1	2	3	X

Hallad

(a) *(1 punto)* La covarianza $\mathrm{Cov}(X, Y)$

(b) *(1 punto)* $\mathrm{E}(X \mid Y = 1)$

(c) *(0'5 puntos)* ¿Son independientes? Razónese la respuesta

Solución:

(a) Se debe calcular $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{E}(XY)$. Las distribuciones marginales son

X	0	1	2	3
f_1	1/8	3/8	3/8	1/8

Y	1	3
f_2	2/8	6/8

Calculando..

- $\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$
- $\mathrm{E}(Y) = 1 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{6}{8} = \frac{5}{2}$
- $\mathrm{E}(XY) = 1 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{4}$

Por tanto $\operatorname{Cov}(X,Y) = \dfrac{15}{4} - \dfrac{3}{2}\dfrac{5}{2} = 0$

(b) La distribución condicional es

$(X \mid Y=1)$	0	3
$g_1(x\mid 1)$	1/2	1/2

de donde $\mathrm{E}(X \mid Y=1) = \dfrac{3}{2}$

(c) Como no coinciden las cuantías $f_1(x)$ y $g_1(x|1)$, NO son independientes. Otra prueba: $f(0,1) = \dfrac{1}{8}$ mientras que $f_1(0)\cdot f_2(1) = \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{32}$

4 *(2'5 puntos)* Un plaguicida se consigue con la mezcla de dos sustancias con concentraciones de insecticida que siguen las siguientes concentraciones normales

$$X_1 \sim N(200, 25), \qquad X_2 \sim N(20, 5)$$

La mezcla se hace utilizando el doble de X_2 que de X_1. Teniendo en cuenta que al fumigar con el plaguicida se produce una pérdida de parte de insecticida producida por diversas causas, cuya distribución X_3 es normal de media 50 y desviación 10, la concentración final de insecticida X queda de la siguiente manera

$$X = X_1 + 2X_2 - \frac{3}{2}X_3$$

¿Cuál es la probabilidad de que la concentración final de insecticida esté entre 150 y 175?

Solución: La distribución normal resultante es la combinación de las tres distribuciones normales: $X = X_1 + 2X_2 - \frac{3}{2}X_3$, por lo que lo único que hay que hacer es calcular los parámetros de la distribución resultante y la probabilidad pedida $P(150 \leq X \leq 175)$.

Primero se calcula la esperanza: $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1) + 2\cdot\mathrm{E}(X_2) - \dfrac{3}{2}\cdot\mathrm{E}(X_3)$. Del enunciado sabemos que $\mathrm{E}(X_1) = 200$, $\mathrm{E}(X_2) = 20$ y $\mathrm{E}(X_3) = 50$, por lo que:

$$\mathrm{E}(X) = 200 + 2\cdot 20 - \frac{3}{2}\cdot 50 = 200 + 40 - 75 = 165.$$

La varianza de la distribución resultante se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X) &= \operatorname{Var}(X_1) + 2^2\cdot\operatorname{Var}(X_2) + \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\operatorname{Var}(X_3) \\
&= 25^2 + 2^2\cdot 5^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 10^2 \\
&= 625 + 100 + 225 = 950.
\end{aligned}$$

Como necesitamos la desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{950} \simeq 30.82$. Así pues,

$$X \sim N(165, 30.82).$$

Normalizando:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(150 \leq X \leq 175\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{150-165}{30.82} \leq Z \leq \frac{175-165}{30.82}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(-0.49 \leq Z \leq 0.33\right) \\
&= \Phi(0.33) - \Phi(-0.49) \\
&= 0.6293 + 0.6879 - 1 = 0.3172.
\end{aligned}$$

1º Curso Grado en Ingeniería Informática en Tecnologías de la Información
Examen de Estadística
20 de noviembre de 2015

Nombre y apellidos:
DNI:

PREGUNTA 1 [3 puntos]. Las longitudes (en cm) de una muestra aleatoria de piezas fabricadas en una empresa se presentan en la tabla adjunta. Contesta las siguientes cuestiones haciendo uso de la información que nos proporciona dicha tabla:

Longitud	**Nº de piezas**
15- 20	10
20-25	5
25-30	5
30-35	2
35-40	2
40-45	1

Contesta, **de forma justificada**, a cada una de las cuestiones siguientes.

a) ¿Cuál es la variable de interés? ¿De qué tipo es la variable de interés? ¿Cuánto vale el tamaño muestral? **(0,5 puntos)**
b) Calcula la longitud que divide a la distribución en dos partes iguales **(0,5 puntos)**
c) Calcula el valor de la longitud que deja por encima el 55% de los datos **(0,5 puntos)**
d) Calcula el coeficiente de variación de Pearson **(0,5 puntos)**
e) Calcula el porcentaje de piezas cuya longitud está comprendida entre 23,75 y 31,7 cm **(0,5 puntos)**
f) Atendiendo a la forma de la distribución ¿Cómo podríamos considerar la distribución? **(0,5 puntos)**

PREGUNTA 2 [1,75 puntos]. En una ciudad se comercializan 3 tipos de productos informáticos, A, B y C. Mediante una encuesta se estima que el 40% de la población consume el producto A, el 22% el B, el 16% el C, el 8% consume A y B, el 7% consume A y C, el 6% consume B y C, y el 5% consume los tres productos.

a) Cuál es la probabilidad de que consuma el producto B y no consuma el producto C. **(0,5 puntos)**
b) Si sabemos que una persona de esta ciudad no consume el producto A, ¿qué probabilidad hay de que consuma el producto B o el producto C? **(0,75 puntos)**
c) ¿Qué probabilidad hay de que una persona elegida al azar de esta ciudad no consuma ningún producto? **(0,5 puntos)**

PREGUNTA 3 [1,25 puntos]. El número medio de muertos en accidentes laborales en la construcción en cierto país durante un año se cifra en 2,8.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan al menos 2 y como máximo 4 muertes a lo largo de un año en el sector de la construcción de dicho país? **(0,5 puntos)**

b) ¿Y de que se produzcan exactamente 3 muertes en medio año? **(0,75 puntos)**

PREGUNTA 4. [1 punto] Sea X una v.a. continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

a) Calcula su Función de Distribución (**0,5 ptos**)

b) Calcula *P(X<0,75 / X>0,25)* (**0,5 ptos**)

PREGUNTA 5. [2 puntos] Se sabe que la demanda diaria de un determinado producto de consumo en el mercado español sigue una distribución normal de media 95 y desviación estándar 7 kgs. Con esta información se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda diaria sea mayor que 94 kgs.? (**0,5 puntos**)

b) Sabemos que la demanda diaria es menor que 96 kg ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda sea mayor que 92? (**0,75 puntos**)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda en una semana (7 días) sea superior a 700 kgs? (**0,75 puntos**)

PREGUNTA 6. [1 punto] Un servicio de atención al cliente quiere investigar la duración de sus llamadas, para ello se toma una muestra de 10 llamadas. La media muestral de las 10 llamadas vale 14,2 min y la cuasi-desviación típica 2,5 min. Se desea investigar si el tiempo medio de las llamadas a nivel poblacional es igual o diferente de 15,7 minutos. Responde a las cuestiones siguientes **de forma razonada**.

a) Obtén un intervalo de confianza al 90% para la media poblacional. ¿Qué conclusiones podemos extraer? (**0,5 puntos**)

b) ¿Es significativamente diferente el tiempo medio de 15,7 minutos a un nivel de significación de 0,05? Utiliza el método del p-valor para responder a esta pregunta. (**0,5 puntos**)

1º Curso Grado en Ingeniería Informática en Tecnologías de la Información

Examen de Estadística
27 de enero de 2014

Nombre y apellidos:
DNI:

PREGUNTA 1. [3 puntos] La tabla siguiente muestra la distribución del peso (en gr.) de una muestra de piezas fabricadas en una empresa. Contesta las siguientes cuestiones haciendo uso de la información que nos proporciona dicha tabla:

Peso	Número de Piezas
20-22	4
22-24	8
24-26	12
26-28	11
28-30	8
30-32	7

Contesta, **de forma justificada**, a cada una de las cuestiones siguientes.

a) ¿Cuál es la variable de interés? ¿De qué tipo es la variable de interés? ¿Cuánto vale el tamaño muestral? (**0.5 puntos**)
b) Para los datos obtén la media, la mediana y la moda. (**0.75 puntos**)
c) Calcula el rango intercuartílico y el coeficiente de variación de Pearson e interprétalos. (**0.75 puntos**)
d) ¿Entre qué valores se encuentra el 80% central de los datos ordenados? (**0.5 puntos**)
e) ¿Qué porcentaje de datos queda por encima del valor 29.25? (**0.5 puntos**)

PREGUNTA 2. [2 puntos]

En una ciudad se consumen tres productos A, B y C. Mediante una encuesta se estima que el 25% de la población de la ciudad consume A, el 35% el B, el 40% el C, el 10% consume A y B, el 6% A y C, el 5% B y C, y el 3% consume los tres productos. Si seleccionamos a un individuo de esta ciudad al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que consuma alguno de los tres productos? (**0.5 puntos**)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que consuma B y no consuma A? (**0.5 puntos**)
c) Si sabemos que consume el producto C, ¿qué probabilidad hay de que consuma también el B? (**0.5 puntos**)
d) Si sabemos que consume *A* o *C*, ¿cuál es la probabilidad de que consuma *B*? (**0.5 puntos**)

PREGUNTA 3. [1.75 puntos] Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} 2(x-2) & 2\le x\le 3 \\ 0 & resto \end{cases}$$

a) Comprueba que f(x) es una función de densidad (**0.25 puntos**)
b) Calcula su Función de Distribución (**0.5 puntos**)
c) Si es sabido que la variable es menor que 2.8, calcula la probabilidad de que la variable tome valores mayores a 2.5 (**0.5 puntos**)
d) Calcula la esperanza de la variable aleatoria **(0.5 puntos)**

PREGUNTA 4. [1.75 puntos] Un 1% de los empleados de una empresa de telecomunicaciones se ausentan diariamente del trabajo. Si se eligen 300 empleados al azar de la empresa,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo un trabajador esté ausente? (**0.25 puntos**)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 y como mucho 5 estén ausentes? (**0.5 puntos**)
c) ¿Cuál es la probabilidad de que 4 o 5 trabajadores estén ausentes? (**0.5 puntos**)
d) Si sabemos que más de 2 trabajadores están ausentes, ¿cuál es la probabilidad de que se ausenten menos de 5 trabajadores? (**0.5 puntos**)

PREGUNTA 5. [1.5 puntos]
Un montacargas de una fábrica que mueve piezas pesadas soporta hasta un máximo de 1030 Kg. Se ha determinado que el peso de cada pieza no es siempre igual, pero sigue una distribución normal de media 150 Kg y desviación típica 15 Kg. Con esta información se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza pese más de 135 Kg? (**0.5 puntos**)
b) Si se sabe que una determinada pieza pesa menos de 170 Kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 140 Kg? (**0.5 puntos**)
c) Si introducimos siete piezas en el montacargas, ¿cuál es la probabilidad de que se supere el peso máximo del montacargas? (**0.5 puntos**)

1º Curso Grado en Ingeniería Informática en Tecnologías de la Información
Examen de Estadística
9 de septiembre de 2015

Nombre y apellidos:
DNI:

PREGUNTA 1. [2,5 puntos] A partir de los datos de la siguiente tabla que muestra los tiempos empleados por los informáticos de una gran empresa para resolver incidencias de los clientes.

Minutos	Número de informáticos
[50-60)	4
[60-70)	11
[70-80)	18
[80-90)	14
[90-100)	4
[100-110]	3

Contesta, **de forma justificada**, a cada una de las cuestiones siguientes.

a) ¿Cuál es la variable de interés? ¿De qué tipo es la variable de interés? ¿Cuánto vale el tamaño muestral? (**0,5 puntos)**
b) Para los datos obtén el valor de la variable que divide a la población en dos partes iguales y obtén el valor más frecuente. (**0,5 puntos**)
c) Calcula el coeficiente de variación de Pearson e interprétalo. (**0,75 puntos**)
d) ¿Qué porcentaje de informáticos emplearon un tiempo entre 74,2 y 87,4 minutos? (**0,75 puntos**)

PREGUNTA 2. [1,5 puntos] La consultora A proporciona servicios al 40% de las empresas de determinado sector, la consultora B al 30% y la consultora C al 40%. Además, el 15% de las empresas de este sector contratan servicios tanto de A como de B, el 5% tanto de A como de C y el 10% de B y C. Finalmente, solo el 3% de las empresas reciben servicios de las 3 consultoras A, B y C.
a) Si seleccionamos una empresa al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya contratado los servicios de solo dos de las tres consultoras? (**0,5 puntos**)
b) ¿Y la probabilidad de que haya contratado sólo una de las tres consultoras? (**0,5 puntos**)
c) Si sabemos que ha contratado A ¿cuál es la probabilidad de que hay contratado B o C? (**0,5 puntos**)

PREGUNTA 3. [1 punto] La probabilidad de que haya un incidente en una fábrica que dispone de alarma es 0,1. La probabilidad de que suene ésta si se ha producido algún incidente es 0,97 y la probabilidad de que suene si no se ha producido ningún incidente es 0,02.
a) En el supuesto de que haya sonado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente? (**0,5 puntos**)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sonado la alarma o que no se produzca ningún incidente? (**0,5 puntos**)

PREGUNTA 4. [2 puntos] Una empresa que fabrica bombillas tipo LED dispone de una línea de producción cuyos tiempos de fabricación pueden variar, por lo que existe cierta aleatoriedad en la cantidad de bombillas producidas. De la experiencia acumulada la empresa sabe que se producen en promedio 240 bombillas por minuto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan exactamente 5 bombillas por segundo? **(0,5 puntos)**

b) Si sabemos que se han producido más de 3 bombillas en un segundo, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan producido menos de 8 en un segundo? **(0,75 puntos)**

c) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan menos de 10 y al menos 7 bombillas en 3 segundos? **(0,75 puntos)**

PREGUNTA 5. [1,5 puntos] El diámetro de los tornillos de cierto tipo sigue una distribución normal con media 3,51 mm y desviación típica 0,004 mm.

a) Si sabemos que el diámetro de un tornillo seleccionado al azar supera los 3,505 mm, ¿cuál es la probabilidad de que no alcance los 3,52 mm? **(0,75 puntos)**

b) Si los tornillos del apartado anterior se venden en paquetes de 25 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que el diámetro medio de los tornillos de un paquete esté comprendido entre 3,5078 y 3,509 mm? **(0,75 puntos)**

PREGUNTA 6. [1,5 puntos] Se han tomado los pesos en gramos de 16 cajas seleccionadas aleatoriamente. Se quiere probar si el peso medio de las cajas a nivel poblacional es igual o diferente de 501gr. La media muestral de las 16 cajas seleccionadas es de 503,75 y la cuasivarianza muestral es de 36,037.

a) Obtén un intervalo de confianza al 99% para dicho parámetro poblacional. ¿Qué conclusiones podemos extraer? **(0,75 puntos)**

b) ¿Es significativamente diferente el peso medio de 501gr a un nivel de significación del 10%? Utiliza el método del p-valor para responder a esta pregunta. **(0,75 puntos)**

1 Supóngase que el 30 % de las botellas fabricadas en una planta son defectuosas. Si una botella es defectuosa, la probabilidad de que un controlador la detecte y la saque de la cadena de producción es $0'9$. Si una botella no es defectuosa, la probabilidad de que el controlador piense que es defectuosa y la saque de la cadena de producción es $0'2$.

(a) Si una botella se saca de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

(b) Si un cliente compra una botella que no ha sido sacada de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

Solución: Sean los sucesos $D = \{$ la botella es defectuosa $\}$ y $S = \{$ el controlador la saca de la cadena de producción $\}$; se tienen las probabilidades $\mathrm{P}(D) = 0'3$, $\mathrm{P}(S \mid D) = 0'9$ y $\mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right) = 0'2$

(a) aplicando el teorema de Bayes

$$\mathrm{P}(D \mid S) = \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right)} = \frac{0'3 \cdot 0'9}{0'3 \cdot 0'9 + 0'7 \cdot 0'2} = \frac{27}{41}$$

(b) de la misma forma

$$\mathrm{P}\left(D \mid \overline{S}\right) = \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid \overline{D}\right)} = \frac{0'3 \cdot 0'1}{0'3 \cdot 0'1 + 0'7 \cdot 0'8} = \frac{3}{59}$$

2 Se lanza una moneda tres (3) veces y, se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} 0 & \text{Si sale cara en la primera tirada} \\ 1 & \text{Si sale cruz en la primera tirada} \end{cases} \\ Y &= \text{número de caras en las tres tiradas} \end{aligned}$$

Determínese:

(a) Las funciones de cuantía (probabilidad) de X e Y.

(b) La función de cuantía (probabilidad) conjunta de (X, Y).

(c) ¿Son independientes?

(d) $\operatorname{Cov}(X,Y)$

Solución:

X	0	1
f_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1	2	3
f_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y		
3	$\frac{1}{8}$	0
2	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
0	0	$\frac{1}{8}$
	0	1	X

No son independientes pues, por ejemplo $f(0,0) = 0$ mientras que $f_1(0) \cdot f_2(0) = \frac{1}{16}$. De las tablas se calcula la covarianza

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{E}(XY) - \operatorname{E}(X)\operatorname{E}(Y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

3 Se observó durante un largo periodo que la cantidad semanal gastada en el mantenimiento y reparaciones en cierta fábrica tiene aproximadamente una distribución *normal* con una media de 400 euros y una desviación de 20 euros.

(a) Si el presupuesto para la próxima semana es de 450 euros, ¿cuál es la probabilidad de que los costos reales sean mayores que la cantidad presupuestada?

(b) ¿Cuál tendría que ser el presupuesto semanal para que esta cantidad solamente se rebasara con probabilidad de $0'1$?

Solución: Llamando X a la cantidad gastada y tipificando $Z = \dfrac{X - 400}{20}$

(a)

$$\mathrm{P}\,(X > 450) = \mathrm{P}\,\big(Z > 2'5\big) = 1 - 0'993790 = 0'006210$$

(b) Sea a la cantidad por lo que $\mathrm{P}\,(X > a) = 0'1 \to \mathrm{P}\left(Z > \dfrac{a-400}{20}\right) =$ $0'1$ de donde

$$\Phi\left(\frac{a-400}{20}\right) = 0'9 \to \frac{a-400}{20} = 1'28 \to a = 425'6$$

1 Un cofre A contiene 4 monedas de plata y 1 de oro. Otro cofre B contiene 5 monedas de plata. Se pasan, al azar, 4 monedas del cofre A al B y, a continuación, se pasan, tambien aleatoriamente, cuatro monedas de B a A. ¿En qué cofre es mas probable que se encuentre la única moneda de oro?

Solución: Sean los sucesos $A = \{$ la moneda se encuentra en A $\}$ y $B = \{$ la moneda se encuentra en B$\}$. Obviamente son sucesos contrarios; calculemos la probabilidad de B. Para que la moneda se encuentre en B, debe pasar de A a B en el primer traspaso, y no pasar a A en el segundo. Por tanto

$$\mathrm{P}\left(B\right) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{4}} \cdot \frac{\binom{8}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

La probabilidad de A es por tanto $\dfrac{5}{9}$ mayor que la de B. Así, que es mas probable que la moneda de oro se encuentre en la caja A que en la B.

2 Supongamos que la duración en horas de un determinado tipo de lámparas es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{100}{x^2}, & x \geq 100 \\ 0, & x < 100 \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 3 de estas lámparas, ninguna falle durante las 150 primeras horas de uso?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 lámparas fallen durante las 150 primeras horas de uso?

Solución: La probabilidad de una lámpara falle en las 150 primeras horas de uso es

$$\mathrm{P}\left(F\right) = \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2}\, dx = \left[\frac{-100}{x}\right]_{100}^{150} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de que una lámpara no falle en las 150 primeras horas de uso es $\dfrac{2}{3}$.

$$\mathrm{P}\left(\{\text{No falle ninguna de 3 lámparas}\}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\mathrm{P}\left(\{\text{Fallen las 3 lámparas}\}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

3 Una urna contiene 5 bolas numeradas de 1 a 5. Se extraen 3 al azar. Calcúlese la función de cuantía y esperanza de la variable

$$X = \{\text{número mas pequeño de las tres bolas extraidas}\}$$

Solución: La función de cuantía es

X	1	2	3
f	$\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{10}$

La media es $\mathrm{E}\left(X\right) = 1 \cdot \dfrac{6}{10} + 2 \cdot \dfrac{3}{10} + 3 \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{2}$.

4 Una empresa fabrica cierto tipo de chips con un promedio del 1 % de defectuosos. Si tomamos una muestra de 500 chips.

(a) Identifíquese la variable $X = \{$ número de chips defectuosos de la muestra $\}$.

(b) ¿Cuál es el valor esperado (media) de X?

(c) Probabilidad de que haya dos o más defectuosos.

Solución:

(a) Es una binomial: $X \sim B(500, 0'01)$

(b) $\mathrm{E}\left(X\right) = np = 500 \cdot 0'01 = 5$

(c) $\mathrm{P}\left(X \geq 2\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X \leq 1\right) = 1 - F(1)$. Como n es grande no podemos usar las tablas de la binomial. El valor exacto es

$$1 - f(0) - f(1) = 1 - 0'99^{500} - 500 \cdot 0'01 \cdot 0'99^{499} = 0'9537$$

Aproximando por la de Poisson se obtiene $0'9596$

1 Una tienda vende CDs de dos marcas: A y B. Un CD de la marca A sale defectuoso el 10 % de las veces, mientras que uno de la marca B sale defectuoso el 6 % de las veces. El 35 % de las veces la tienda tiene CDs de las dos marcas, por lo tanto compro de la marca B, y el resto de las veces sólo tiene de la marca A. Si compro una caja y el CD que grabo sale defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que comprara una caja de la marca B?

Solución: Sean los sucesos $A = \{$ el CD comprado es de la marca A $\}$, $B = \{$ el CD comprado es de la marca B $\}$ y $D = \{$ el CD es defectuoso $\}$. Del enunciado se deduce

$$\mathrm{P}(A) = 0'65 \quad \mathrm{P}(B) = 0'35 \quad \mathrm{P}(D \mid A) = 0'1 \quad \mathrm{P}(D \mid B) = 0'06$$

Nos preguntan sobre el suceso $(B \mid D)$; aplicamos el teorema de Bayes

$$\mathrm{P}(B \mid D) = \frac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D \mid B)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D \mid B) + \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(D \mid A)} = \frac{0'35 \cdot 0'06}{0'35 \cdot 0'06 + 0'65 \cdot 0'1} = 0'2442$$

2 La función de cuantía de una variable bidimensional (X, Y) aparece en la siguiente tabla, donde las probabilidades están multiplicadas por 100:

Y				
2	10	7	12	
1	9	15	10	
0	11	18	8	
	0	1	2	X

Calcúlense:

(a) $\mathrm{P}(X + Y \leq 2)$

(b) $\mathrm{P}(X = 2 \mid Y = 2)$

(c) $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$

(d) ¿Son independientes? (justifíquese la respuesta)

(e) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

Solución: Las funciones de cuantia de las distribuciones marginales son

X	0	1	2
f_1	0'3	0'4	0'3

Y	0	1	2
f_2	0'37	0'34	0'29

(a) $\mathrm{P}\,(X+Y \leq 2) = 0'11 + 0'09 + 0'18 + 0'10 + 0'15 + 0'08 = 0'71$

(b) $\mathrm{P}\,(X = 2 \,|\, Y = 2) = \dfrac{\mathrm{P}\,(X = 2; Y = 2)}{\mathrm{P}\,(Y = 2)} = \dfrac{0'12}{0'29} = 0'4138$

(c) $\mathrm{E}\,(X) = 0{\cdot}0'3 + 1{\cdot}0'4 + 2{\cdot}0'3 = 1 \qquad \mathrm{E}\,(Y) = 0{\cdot}0'37 + 1{\cdot}0'34 + 2{\cdot}0'29 = 0'92$.

(d) No son independientes; por ejemplo $f(0,0) \neq f_1(0) \cdot f_2(0)$.

(e)

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\,(X,Y) &= \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0'15 + 1 \cdot 2 \cdot 0'07 + 2 \cdot 1 \cdot 0'10 + 2 \cdot 2 \cdot 0'12 - 1 \cdot 0'92 \\ &= 0'05. \end{aligned}$$

3 La cantidad producida de un cierto artículo es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{1000}x^2, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & x \notin [0,10] \end{cases}$$

El precio Y del artículo está en función de la cantidad producida según la relación

$$Y = 40 - 2X.$$

Calcúlese

(a) Cantidad producida media.

(b) Precio medio.

Solución:

(a)

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_0^{10} x \frac{3}{1000} x^2 \, dx = \frac{3}{1000} \int_0^{10} x^3 \, dx = \frac{3}{1000} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{10} = 7'5.$$

(b) $\mathrm{E}(Y) = 40 - 2\mathrm{E}(X) = 40 - 15 = 25.$

4 La presencia de un cierto antibiótico en un fármaco viene determinado por una variable X. Este fármaco se consigue mediante la unión de otros tres compuestos que también contienen antibiótico y que se distribuyen independientemente de la siguiente manera: $X_1 \sim N(80, 12)$, $X_2 \sim N(120, 15)$ y $X_3 \sim N(96, 9)$. La fórmula del fármaco, unión de los tres compuestos es la siguiente:

$$X = \frac{3X_1 + X_2 + 2X_3}{6}$$

Calcular la probabilidad de que la concentración de antibiótico en el fármaco esté entre 70 y 90

Solución: La variable X es una combinación lineal de normales, luego es normal con parámetros:

(a) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{3 \cdot 80 + 120 + 2 \cdot 96}{6} = 92$

(b) $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{9 \cdot 144 + 225 + 4 \cdot 81}{36} = 51'25.$

Por tanto $X \sim N(92, 7'16)$. Luego

$$\mathrm{P}(70 \leq X \leq 90) = \mathrm{P}\left(-\frac{22}{7'16} \leq Z \leq -\frac{2}{7'16}\right) = \Phi(3'07) - \Phi(0'28) = 0'3886.$$

1 Una empresa de software que diseña juegos para ordenador somete los diseños preliminares de sus productos a la evaluación previa de un grupo seleccionado de clientes. Según muestra la experiencia, el 95 % de los productos que tuvieron un gran éxito en el mercado recibieron buenas evaluaciones, el 60 % de los de éxito moderado recibieron buenas evaluaciones y sólo el 10 % de los que tuvieron escaso éxito fueron valorados favorablemente. Además, globalmente el 40 % de los productos de la empresa han tenido mucho éxito, el 35 % un éxito moderado y el 25 % una baja aceptación.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto, elegido al azar entre la producción de la fábrica, obtenga una buena evaluación previa?

(b) Si un nuevo producto obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

(c) Si un producto no obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{array}{ll} G = \{\text{el producto tiene mucho éxito}\} & M = \{\text{el producto tiene éxito moderado}\} \\ E = \{\text{el producto tiene escaso éxito}\} & B = \{\text{el producto tiene buena evaluación}\} \end{array}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(G) = 0'4 & \mathrm{P}(M) = 0'35 & \mathrm{P}(E) = 0'25 \\ \mathrm{P}(B\,|\,G) = 0'95 & \mathrm{P}(B\,|\,M) = 0'4 & \mathrm{P}(B\,|\,E) = 0'1. \end{array}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(G)\cdot\mathrm{P}(B\,|\,G) + \mathrm{P}(M)\cdot\mathrm{P}(B\,|\,M) + \mathrm{P}(E)\cdot\mathrm{P}(B\,|\,E) \\ &= 0'95\cdot 0'4 + 0'6\cdot 0'35 + 0'1\cdot 0'25 \\ &= 0'615. \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{P}(G\,|\,B) = \frac{\mathrm{P}(G)\cdot\mathrm{P}(B\,|\,G)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0'4\cdot 0'95}{0'615} = 0'6179.$$

(c) Puesto que $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0'615 = 0'385$ y $\mathrm{P}\left(\overline{B}\,|\,G\right) = 1 - 0'95 = 0'05$, se tiene

$$\mathrm{P}\left(G\,|\,\overline{B}\right) = \frac{\mathrm{P}(G)\cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}\,|\,G\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{0'4\cdot 0'05}{0'385} = 0'0519.$$

2 De una urna que contiene 3 bolas blancas y 2 negras se extraen las bolas una a una sin reemplazamiento, hasta que hayan salido 2 bolas blancas. Si X es la variable que mide el número total de bolas extraidas e Y el número de bolas negras extraidas, hállese la función de cuantía conjunta de (X, Y). ¿Son independientes?

Solución: La siguiente tabla muestra los casos posibles con los valores de X e Y, y las probabilidades

	X	Y	p
bb	2	0	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$
bnb	3	1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$
nbb	3	1	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$
nnbb	4	2	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{10}$
nbnb	4	2	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{10}$
bnnb	4	2	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{10}$

Como, obviamente, es $Y = X - 2$, hay dependencia funcional entre ambas. Las funciones de cuantía son

X	2	3	4
f_1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

Y	0	1	2
f_2	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

La función de cuantía conjunta aparece en la siguiente tabla

$$\begin{array}{c|cccc}
Y & & & & \\
2 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \\
1 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \\
0 & \frac{3}{10} & 0 & 0 & \\
\hline
 & 2 & 3 & 4 & X
\end{array}$$

La tabla confirma la dependencia entre las variable; por ejemplo:

$$f(2,0) = \frac{3}{10} \neq f_1(2)\cdot f_2(0) = \frac{9}{100}.$$

3 La duración en minutos de una llamada telefónica de larga distancia, se asocia a una variableleatoria X cuya función de distribución es

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}, \quad \text{para } x \geq 0.$$

Calcúlese:

(a) La función de densidad

(b) La duración media de una llamada.

(c) La probabilidad de que la duración de una llamada esté comprendida entre 2 y 5 minutos.

Solución:

(a) Derivando la función de distribución

$$f(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} \quad \text{para } x \geq 0.$$

(b)

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_0^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3} x\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}\, dx = 3.$$

Luego las llamadas tienen una duración media de 3 minutos.

(c)

$$\mathrm{P}\,(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}} - 1 + \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} = 0'3245.$$

4 Un juego consiste en lanzar dos dados; el jugador gana 3 euros si la suma de los dos dados es 7 ó 9, y paga uno en otro caso. Tras 200 lanzamientos ¿cuál es la probabilidad de que el saldo de ganancias sea positivo?

Solución: La probabilidad de sacar 7 ó 9 al lanzar dos dados es $\dfrac{5}{18}$ (hágase!). El número X de éxitos en 200 lanzamientos tiene una distribución binomial $X \sim B\left(200, \dfrac{5}{18}\right)$; el número de fracasos es $200 - X$ y la ganancia es

$G = 3X - (200 - X) = 4X - 200$. Para que $G > 0$ ha de ser $X > 50$; por tanto hemos de calcular $\mathrm{P}\,(X > 50)$. Aproximamos por la normal

$$Z \approx \frac{X - 200 \cdot \dfrac{5}{18}}{\sqrt{200 \cdot \dfrac{5}{18}\dfrac{13}{18}}} = \frac{X - 55'56}{6'33}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,(X > 50) = 1 - \mathrm{P}\,(X < 50) &= 1 - \mathrm{P}\left(Z < \frac{50 - 55'56}{6'33}\right) \\ &= 1 - \Phi(-0'88) \\ &= \Phi(0'88) \\ &= 0'8106. \end{aligned}$$

1 En una etapa de producción de un artículo se aplica soldadura y para eso se usan tres robots. La probabilidad de que la soldadura sea defectuosa, así como la proporción de artículos procesados varía para cada robot de acuerdo a la tabla siguiente

Robot	Prob. Defectos	% artículos proc.
A	$0'002$	18
B	$0'005$	42
C	$0'001$	40

Calcúlese

(a) La proporción global de defectos producidos por los tres robots.

(b) La probabilidad de que un artículo con defectos haya sido soldado por el robot C.

Solución: Sea el suceso $D = \{$ La soldadura de un artículo es defectuosa$\}$ y sean A, B, C los sucesos $\{$ la soldadura la efectúa $\}$ el robot A,B,C respectivamente.

(a) Hay que hallar $\mathrm{P}(D)$ para lo que contamos con los datos

$$\mathrm{P}(D \mid A) = 0'002 \quad \mathrm{P}(D \mid B) = 0'005 \quad \mathrm{P}(D \mid C) = 0'001$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(D \mid A) + \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D \mid B) + \mathrm{P}(C) \cdot \mathrm{P}(D \mid C) \\ &= 0'18 \cdot 0'002 + 0'42 \cdot 0'005 + 0'40 \cdot 0'001 = 0'00286. \end{aligned}$$

Así que globalmente, el 3 por mil (aproximadamente) de las piezas son defectuosas.

(b)
$$\mathrm{P}(C \mid D) = \frac{\mathrm{P}(C) \cdot \mathrm{P}(D \mid C)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{0'40 \cdot 0'001}{0'00286} = 0'1399.$$

2 Se elige al azar un comité de 2 alumnos de entre 3 delegados de 3º, 2 de 2º y 1 de 1º. Sean $X = \{$ número de alumnos de 2º en el comité $\}$ e $Y = \{$ número de alumnos de 1º en el comité $\}$. Hállese $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Solución: La función de cuantía conjunta viene dada por la tabla

Y				
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	
	0	1	2	X

y las marginales

X	0	1	2
f_1	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Y	0	1
f_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

De las tablas se obtiene

$$\mathrm{E}\,(XY) = \frac{2}{15}, \quad \mathrm{E}\,(X) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{E}\,(Y) = \frac{1}{3}.$$

Por tanto

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y) = -\frac{4}{45}.$$

3 Los artículos que produce una máquina se empaquetan en lotes de 4. La máquina produce el 10 % de defectuosos y el comprador devuelve los defectuosos para su reparación, lo que le supone a la empresa un coste de $3X^2 + X + 2$, siendo X el número de artículos defectuosos por lote. Hállese el coste medio de reparación.

Solución: Dado que X sigue una distribución binomial $B(4, 0'1)$, su función de cuantía viene dada por la tabla

X	0	1	2	3	4
f	$0'6561$	$0'2916$	$0'0486$	$0'0036$	$0'0001$

De la tabla

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(3X^2 + X + 2\right) &= (3 \cdot 0^2 + 0 + 2) \cdot 0'6561 + (3 \cdot 1^2 + 1 + 2) \cdot 0'2916 \\ &+ (3 \cdot 2^2 + 2 + 2) \cdot 0'0486 + (3 \cdot 3^2 + 3 + 2) \cdot 0'0036 \\ &+ (3 \cdot 4^2 + 4 + 2) \cdot 0'0001 = 3'96. \end{aligned}$$

Otra forma de resolverlo es la siguiente: dado que $X \sim B(4, 0'1)$ es sabido que $\mathrm{E}\,(X) = n \cdot p = 4 \cdot 0'1 = 0'4$ y $\mathrm{Var}\,(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot 0'1 \cdot 0'9 = 0'36$. Entonces $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{Var}\,(X) + (\mathrm{E}\,(X))^2 = 0'36 + 0'16 = 0'52$ por lo que

$$\mathrm{E}\left(3X^2 + X + 2\right) = 3\mathrm{E}\left(X^2\right) + \mathrm{E}\,(X) + 2 = 3 \cdot 0'52 + 0'4 + 2 = 3'96.$$

4 Se quiere repoblar un río con un tipo de pez autóctono para evitar su extinción. Para ello se ha realizado un estudio previo de la concentración de oxígeno en el río. Este estudio proporciona los siguientes resultados: la concentración de oxígeno en el agua sigue una distribución normal de media 9 y desviación típica $0'8$; así mismo, el oxígeno consumido por la fauna del río sigue, también, una distribución normal de media 4 y desviación típica $0'2$ y, por último, el oxígeno producido por las bacterias y algas del río sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica $1'2$. Se considera que las tres distribuciones son independientes y que la concentración de oxígeno en el agua para la existencia de vida ha de ser mayor o igual a 5. ¿Cuál es la probabilidad de que al repoblar el río, multiplicándose por 2 la fauna del mismo, el agua del río siga siendo apto para la vida?

Solución: Sean las variables

$$\begin{array}{l} X_1 = \text{concentración de oxígeno en el río}, \quad X_1 \sim N(9, 0'8) \\ X_2 = \text{cantidad de oxígeno consumido por la fauna}, \quad X_2 \sim N(4, 0'2) \\ X_3 = \text{cantidad de oxígeno producido por bacterias}, \quad X_3 \sim N(5, 1'2) \end{array}$$

La concentración de oxígeno total es $X_1 - X_2 + X_3$, pero si se dobla la fauna, el oxígeno consumido es doble y la concentración total es $X_1 - 2X_2 + X_3$. Hay que hallar $\mathrm{P}\left(X_1 - 2X_2 + X_3 \geq 5\right)$. Sea $Y = X_1 - 2X_2 + X_3$, que tiene una distribución normal de parámetros

$$\mathrm{E}\,(Y) = 9 - 2 \cdot 4 + 5 = 6, \quad \mathrm{Var}\,(Y) = 0'8^2 + 4 \cdot 0'2^2 + 1'2^2 = 2'24.$$

Tipificando

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,(Y \geq 5) &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{5-6}{\sqrt{2'24}}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Z \geq -0'67\right) = \Phi(0'67) = 0'7486. \end{aligned}$$

1 Pepe y Manolo son dos viejos amigos que han decidido darle un giro a su vida y están dudando entre dedicar sus ahorros a montar una empresa de desarrollo de software o invertir en renta variable. Su asesor fiscal les ofrece dos alternativas atrayentes, pero ante su falta de formación bursátil, confían al azar su decisión. Invertirán en el sector eléctrico si sacan una bola roja de una urna que contiene 20 bolas, de las cuales 8 son rojas, 3 verdes y 9 negras. Si la bola no es roja lanzarán dos dados y si obtienen una suma de 6 entre ambos dados invertirán en el sector inmobiliario; en caso contrario se decidirán por la empresa de desarrollo de software. ¿Cuál es la probabilidad de que finalmente monten una empresa de desarrollo de software?

Solución: Sean los sucesos

$$
\begin{aligned}
E &= \{\text{Invertir en el sector eléctrico.}\}\\
I &= \{\text{Invertir en el sector inmobiliario.}\}\\
S &= \{\text{Invertir en la empresa de desarrollo de software.}\}\\
R &= \{\text{La bola es roja.}\}\\
D &= \{\text{La suma de los dados es 6.}\}
\end{aligned}
$$

El suceso pedido es $S = \overline{R} \cap \overline{D}$ que son independientes, por lo que

$$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}\left(\overline{R}\right)\mathrm{P}\left(\overline{D}\right) = \frac{12}{20}\frac{31}{36} = \frac{31}{60}.$$

2 Sean las variables X e Y con f.d.d

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0,2] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Se obtienen 3 valores de X. Hállese la función de cuantía del número de valores mayores que 1.

(b) Se obtienen 3 valores de Y. Hállese el máximo valor $a \in [0,1]$ para que al menos uno de ellos exceda el valor a con probabilidad mínima de 0'999.

Solución:

(a) La probabilidad del suceso $A_i = \{$ el valor $-i$ es mayor que 1$\}$

$$\mathrm{P}\left(A_i\right) = \mathrm{P}\left(X > 1\right) = \int_1^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{3}{4}.$$

La variable $N =$ número de valores mayores que 1 toma los valores $0, 1, 2, 3$ con función de cuantía

X	0	1	2	3
f	1/64	9/64	27/64	27/64

(b) $\mathrm{P}\left(Y > a\right) = 1 - a$ y $\mathrm{P}\left(Y < a\right) = a$. Para tres valores, la probabilidad de que ninguno exceda a es a^3 y la de que al menos uno exceda a es $1 - a^3$. Por tanto $1 - a^3 \geq 0'999 \rightarrow a^3 \leq 0'001 \rightarrow a \leq 0'1$. El valor máximo es 0’1.

3

(a) Si la variable X tiene media μ y varianza $\sigma^2 \neq 0$, hállense los valores de a y b para que la variable $Y = aX + b$ cumpla $\mathrm{E}\left(Y\right) = 0$, $\mathrm{Var}\left(Y\right) = 1$.

(b) Demuéstrese que no pueden existir dos variables X e Y tales que

$$\mathrm{E}\left(X\right) = 3, \quad \mathrm{E}\left(Y\right) = 2, \quad \mathrm{E}\left(X^2\right) = 10, \quad \mathrm{E}\left(Y^2\right) = 29, \quad \mathrm{E}\left(XY\right) = 0$$

(*Sugerencia: hállese la correlación*)

Solución:

(a) $\mathrm{Var}\left(Y\right) = a^2 \mathrm{Var}\left(X\right) = a^2\sigma^2 = 1$ por lo que $a = \dfrac{\pm 1}{\sigma}$. Como $\mathrm{E}\left(Y\right) = a\mu + b = 0$ debe ser $b = -a\mu = \dfrac{\mp\mu}{\sigma}$. La variable Y puede ser

$$Y = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}, \quad \text{o bién } Y = -\frac{1}{\sigma}X + \frac{\mu}{\sigma}$$

(b)

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{0 - 6}{1 \cdot 5} = -1'2$$

Los datos no son posibles pues se obtiene $\rho < -1$.

4 En una carrera de Fórmula 1, el consumo de combustible de un determinado coche sigue un distribución normal de media $3'5$ litros y desviación típica de $0'5$, por vuelta. Cuando quedan 12 vueltas para el final de la carrera entra en boxes a repostar ¿Cuál es la cantidad mínima de combustible que tiene que repostar, para que la probabilidad de que acabe la carrera (en ausencia de accidente) sea mayor que 0'95?

Solución: El consumo por vuelta tiene una distribución $N(3'5, 0'5)$. Luego el consumo para cada una de las 12 vueltas que quedan vendrá determinado por una distribución normal: $X_i \sim N(3'5, 0'5)$, con $i \in \{1, \ldots, 12\}$. Así pues, la cantidad total de combustible consumido en las 12 vueltas será una suma de distribuciones normales independientes: $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{12} \sim N(42, \sqrt{3})$. Nos piden la cantidad mínima k de combustible a repostar, para que la probabilidad de cubrir el consumo en las 12 vueltas sea mayor que 0'95, es decir, para que se cumpla $\mathrm{P}\,(X < k) > 0'95$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(X < k) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-42}{\sqrt{3}} < \frac{k-42}{\sqrt{3}}\right) > 0'95 \\
&\rightarrow \mathrm{P}\left(Z < \frac{k-42}{\sqrt{3}}\right) > 0'95 \\
&\rightarrow \Phi(\frac{k-42}{\sqrt{3}}) > 0'95 \\
&\rightarrow \frac{k-42}{\sqrt{3}} = 1'65 \\
&\rightarrow k = 42 + 1'65 \cdot \sqrt{3} = 44'8545
\end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad mínima sería de aproximadamente 45 litros.

1 Supóngase que el 5 % de los microprocesadores fabricados en una planta son defectuosas. Si uno de ellos es defectuoso, la probabilidad de que un controlador lo detecte y lo saque de la cadena de producción es $0'9$. Si un microprocesador no es defectuoso, la probabilidad de que el controlador piense que lo es y lo saque de la cadena de producción es $0'2$.

(a) (1 punto) Si un microprocesador se saca de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

(b) (1 punto) ¿Cuál es el porcentaje de defectuosos que se ponen a la venta?

Solución: Sean los sucesos $D = \{$ el microprocesador es defectuoso $\}$ y $S = \{$ el controlador lo saca de la cadena de producción $\}$; se tienen las probabilidades $\mathrm{P}(D) = 0'05$, $\mathrm{P}(S \mid D) = 0'9$ y $\mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right) = 0'2$

(a) aplicando el teorema de Bayes

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D \mid S) &= \frac{\mathrm{P}(D)\cdot\mathrm{P}(S \mid D)}{\mathrm{P}(D)\cdot\mathrm{P}(S \mid D) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right)\cdot\mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right)} \\ &= \frac{0'05\cdot 0'9}{0'05\cdot 0'9 + 0'95\cdot 0'2} = \frac{9}{47}.\end{aligned}$$

(b) La probabilidad de que un microprocesador en venta sea defectuoso es

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(D \mid \overline{S}\right) &= \frac{\mathrm{P}(D)\cdot\mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right)}{\mathrm{P}(D)\cdot\mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right)\cdot\mathrm{P}\left(\overline{S} \mid \overline{D}\right)} \\ &= \frac{0'05\cdot 0'1}{0'05\cdot 0'1 + 0'95\cdot 0'8} = 0'0065.\end{aligned}$$

Por tanto el $0'65$ % son defectuosos.

2 Se lanza un dado y se consideran las variables:

$$X = \{\text{número de puntos}\}, \quad Y = \begin{cases} 0, & \text{si en el dado sale } 1,2,3 \\ 1, & \text{si en el dado sale } 4,5,6. \end{cases}$$

(a) (0'75 puntos) Calcular la función (tabla) de cuantía conjunta.

(b) (0'25 puntos) ¿son independientes?

(c) (1 punto) Calcular $\operatorname{Cov}(X,Y)$.

Solución: La tabla es

Y							
1	0	0	0	1/6	1/6	1/6	
0	1/6	1/6	1/6	0	0	0	
	1	2	3	4	5	6	X

Las marginales son

X	1	2	3	4	5	6
f_1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Y	0	1
f_2	1/2	1/2

De las tablas se deduce que NO son independientes y además

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \frac{7}{2} \\
\mathrm{E}(Y) &= \frac{1}{2} \\
\mathrm{E}(X\cdot Y) &= \frac{1}{6}(4+5+6) = \frac{5}{2} \\
\operatorname{Cov}(X,Y) &= \frac{5}{2} - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

3 Se lanza un dado n veces y se considera la variable $X=$ "suma de puntos".

(a) (1 punto) Hállese n para que X tenga una media de 35 puntos.

(b) (1 punto) Hállese $\operatorname{Var}(X)$ en el apartado anterior.

Solución: Llamando X_i a la puntuación del dado en el lanzamiento $-i-$ésimo, la suma total es $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Las variables X_i tienen la función de cuantía de la variable X del problema **(2)**, cuya media es $\frac{7}{2}$ y la varianza es

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(X_i^2\right) &= \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6} \\ \mathrm{Var}\left(X_i\right) &= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

Por tanto $\mathrm{E}\left(X\right) = \frac{7}{2} \cdot n$ y $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{35}{12} \cdot n$

(a) Si $\mathrm{E}\left(X\right) = \frac{7}{2} \cdot n = 35 \to n = 10$.

(b) $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{35}{12} \cdot 10 = \frac{175}{6}$

4 (2 puntos) El número de visitas que realiza un comercial de cierta empresa por semana tiene una distribución normal de media 45 y desviación 3. Las visitas fallidas (no hay nadie en casa) sigue una distribución normal de media 10 y desviación 2. Considerando independientes las visitas realizadas de las fallidas ¿cuál es la probabilidad de que en una semana realice más de 40 visitas efectivas?

Solución: Si X_1 es el número de visitas y X_2 el de fallidas, el número de visitas efectivas es $X_1 - X_2$ que es normal de media $45 - 10 = 35$ y desviación $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$. Por tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X > 40\right) &= 1 - \mathrm{P}\left(X \leq 40\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{40-35}{\sqrt{13}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1{,}39) = 1 - 0'9177 = 0'0823. \end{aligned}$$

1 Supóngase que 5 terminales están conectados mediante una línea compartida a un computador central. El computador central va preguntando por turno a los diversos terminales si tienen algo que transmitir. Si la respuesta es afirmativa, el terminal accede a la línea. Entonces, si hay 3 terminales que quieren enviar un mensaje, calcular la probabilidad de que el computador haga 2 preguntas hasta encontrar un terminal que quiera transmitir.

Solución: Para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sean los sucesos $\{T_i =$ el terminal $-i-$ solicita transmitir $\}$. Si el computador central hace 2 preguntas es que el segundo terminal solicita transmitir; entonces, la probabilidad de que el primer terminal preguntado no quiera transmitir pero el segundo sí es

$$\mathrm{P}\left(\overline{T}_1 \cap T_2\right) = \mathrm{P}\left(\overline{T}_1\right) \mathrm{P}\left(T_2 \mid \overline{T}_1\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

2 De un grupo de 3 españoles, 2 franceses y 1 alemán se elige un grupo de 3. LLamando X al número de españoles e Y al de alemanes, hállese

(a) (1 punto) La función de cuantía conjunta.

(b) (0'3 puntos) Media de X y de Y.

(c) (0'4 puntos) Covarianza.

(d) (0'3 puntos) $\mathrm{E}(X \mid Y = 1)$.

Solución:

(a) Los casos posibles son $\binom{6}{3} = 20$. La tabla es la siguiente

Y					
1	1/20	6/20	3/20	0	
0	0	3/20	6/20	1/20	
	0	1	2	3	X

(b) Las funciones de cuantía marginales son

X	0	1	2	3
f_1	1/20	9/20	9/20	1/20

Y	0	1
f_2	1/2	1/2

$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{9}{20} + 2 \cdot \frac{9}{20} + 3 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{2}$.
$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{2}$.

(c) Como $\mathrm{E}(XY) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{6}{20} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{20} = \frac{3}{5}$, la covarianza es

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{3}{5} - \frac{3}{2}\frac{1}{2} = -\frac{3}{20}.$$

(d) La distribución condicional es

$X \mid Y = 1$	0	1	2	3
g_1	1/10	6/10	3/10	0

La esperanza es

$$\mathrm{E}(X \mid Y = 1) = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = 1'2.$$

3 Un vendedor puede visitar cada día a un cliente con probabilidad 0'7 ó a ninguno. En cada visita puede vender y ganar 100€ con probabilidad 0'6 ó no vender (y no ganar). Calcular

(a) (1 punto) La función de cuantía del número de ventas diarios.

(b) (1 punto) La media y desviación de las ganancias diarias.

Solución: Llamemos X al número de visitas, Y al de ventas y G a las ganancias. La tabla de la cuantía de X es

X	0	1
f	0'3	0'7

(a) El número de ventas puede ser 1, con probabilidad $0'7 \cdot 0'6 = 0'42$ (ha de visitar y tener éxito en la visita) ó 0 con probabilidad $0'58$; por tanto

Y	0	1
f	0'58	0'42

Se deduce que

- $\mathrm{E}(Y) = 0'42$.
- $\mathrm{E}\left(Y^2\right) = 0'42$.
- $\mathrm{Var}(Y) = 0'42 - 0'42^2 = 0'2436$

(b) Como $G = 100Y$, se tiene

- $\mathrm{E}(G) = 100 \cdot 0'42 = 42$€
- $\mathrm{Var}(G) = 100^2 \cdot 0'2436 = 2436$
- $\sigma_G = \sqrt{2436} = 49'36$€

4 (2 puntos) Se sabe que la talla media de una población en edad escolar sigue una distribución normal con media 165 cm y desviación típica de 12 cm. Si un centro tiene 1400 alumnos matriculados, se pide:

(a) ¿Cuál es el número de alumnos que miden más de 155 cm?

(b) ¿Qué proporción (%) de alumnos miden entre 150 y 178 cm?

(c) ¿Qué talla permite asegurar que el 67 % de la población está por debajo de ella?

Solución:

(a) Hay que calcular la probabilidad de que un alumno mida más de 155 cm y aplicarlo a los 1400 alumnos. Como la variable no es una $N(0,1)$, hay que tipificar:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 155) &= 1 - \mathrm{P}(X \leq 155) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{155-165}{12}\right) \\ &= 1 - \Phi(-0'83) = \Phi(0'83) = 0'7967. \end{aligned}$$

Luego, la cantidad de alumnos es $1400 \cdot 0'7967 = 1115{,}38 \approx 1116$.

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(150 \leq X \leq 178) &= \mathrm{P}\left(\frac{150-165}{12} \leq Z \leq \frac{178-165}{12}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\frac{-15}{12} \leq Z \leq \frac{13}{12}\right) \\ &= \Phi(1'08) - \Phi(-1'25) = 0'8599 - 1 + 0'8944 = 0'7543. \end{aligned}$$

Luego el $75'43$ % miden entre 150 y 165 cm.

(c) Se pide una talla k tal que $\mathrm{P}(X<k)=0'67$. Así pues:

$$\mathrm{P}(X<k)=\mathrm{P}\left(Z<\frac{k-165}{12}\right)=\Phi\left(\frac{k-165}{12}\right)=0'67.$$

Buscando en las tablas, para $z=0'44 \Rightarrow \Phi=0'6700$, luego $\dfrac{k-165}{12}=0'44 \Rightarrow k=165+12\cdot 0'44=170'28$. Solución: $k=170'28$ cm.

1 Una empresa de software que diseña juegos para ordenador somete los diseños preliminares de sus productos a la evaluación previa de un grupo seleccionado de clientes. Según muestra la experiencia, el 95 % de los productos que tuvieron un gran éxito en el mercado recibieron buenas evaluaciones, el 60 % de los de éxito moderado recibieron buenas evaluaciones y sólo el 10 % de los que tuvieron escaso éxito fueron valorados favorablemente. Además, globalmente el 40 % de los productos de la empresa han tenido mucho éxito, el 35 % un éxito moderado y el 25 % una baja aceptación.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto, elegido al azar entre la producción de la fábrica, obtenga una buena evaluación previa?

(b) Si un nuevo producto obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

(c) Si un producto no obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{array}{ll} G = \{\text{el producto tiene mucho éxito}\} & M = \{\text{el producto tiene éxito moderado}\} \\ E = \{\text{el producto tiene escaso éxito}\} & B = \{\text{el producto tiene buena evaluación}\} \end{array}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(G) = 0'4 & \mathrm{P}(M) = 0'35 & \mathrm{P}(E) = 0'25 \\ \mathrm{P}(B \mid G) = 0'95 & \mathrm{P}(B \mid M) = 0'4 & \mathrm{P}(B \mid E) = 0'1. \end{array}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(G)\cdot\mathrm{P}(B \mid G) + \mathrm{P}(M)\cdot\mathrm{P}(B \mid M) + \mathrm{P}(E)\cdot\mathrm{P}(B \mid E) \\ &= 0'95\cdot 0'4 + 0'6\cdot 0'35 + 0'1\cdot 0'25 \\ &= 0'615. \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{P}(G \mid B) = \frac{\mathrm{P}(G)\cdot\mathrm{P}(B \mid G)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0'4\cdot 0'95}{0'615} = 0'6179.$$

(c) Puesto que $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0'615 = 0'385$ y $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid G\right) = 1 - 0'95 = 0'05$, se tiene

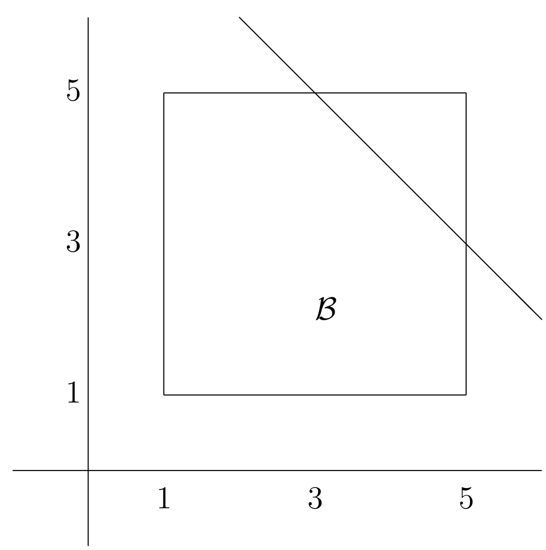
$$\mathrm{P}\left(G \mid \overline{B}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(G\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B} \mid G\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{0'4 \cdot 0'05}{0'385} = 0'0519.$$

2 Se eligen dos números aleatorios en el intervalo [1, 5]. Calcular la probabilidad de que la suma sea menor que 8.

Solución: Llamando (X, Y) al par de números, tenemos una v.a. bidimensional uniforme en $[1,5] \times [1,5]$. La función de densidad (aunque no es necesaria) es

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/16, & (x,y) \in [1,5] \times [1,5] \\ 0, & (x,y) \notin [1,5] \times [1,5] \end{cases}$$

La figura siguiente representa la región posible y la favorable $\mathcal{B}$



La probabilidad es el cociente entre áreas

$$\mathrm{P}\left(X + Y < 8\right) = \frac{\text{área}(\mathcal{B})}{\text{área}(\mathcal{A})} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.$$

3 Un juego de azar consiste en lanzar tres dados, de manera que el jugador elige un número entre 1 y 6 y recibe una cantidad K, si su número aparece una vez, el doble si aparece dos veces y el triple si aparece tres veces. Si el número elegido no figura entre los resultados, el jugador paga K. Calcula el beneficio medio del jugador.

Solución: La probabilidad de que el número elegido aparezca una sóla vez es $3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{75}{216}$. De que aparezca dos veces es $3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$. De que aparezca tres veces es $\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$. De que no aparezca es $\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$. Luego la variable $B=$ beneficio tiene la cuantía

X	$-K$	K	$2K$	$3K$
f	$125/216$	$75/216$	$15/216$	$1/216$

La media es

$$\mathrm{E}\,(B)=(-K)\frac{125}{216}+K\frac{75}{216}+2K\frac{15}{216}+3K\frac{1}{216}=-\frac{17K}{216}$$

4 El 2 % de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. Si se empaquetan en lotes de 2000 tornillos,

(a) ¿cuál es la probabilidad de que en un determinado lote no haya más de 50 defectuosos?

(b) Si se inspecciona un lote en busca de tornillos defectuosos y se han encontrado ya más de 40 ¿cuál es la probabilidad de que este número no supere los 50?

(c) ¿Cuál es el mínimo número k parea que se pueda asegurar que la probabilidad de que no haya más de k tornillos defectuosos sea superior a $0'9$?

Solución: La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es $0'02$. El número X de tornillos defectuosos en una muestra de 2000 sigue la distribución binomial $B(2000, 0'02)$ que podemos considerar como normal de parámetros $\mu=40$ y desviación $\sigma=\sqrt{39'20}=6'26$.

(a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X \leq 50\right) &= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{50-40}{6'26}\right) \\
&= \Phi(1'60) = 0'9452.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X \leq 50 \mid X > 40\right) &= \frac{\mathrm{P}\left(40 < X \leq 50\right)}{\mathrm{P}\left(X > 40\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(0 < Z \leq 1'60\right)}{1 - \Phi(0)} \\
&= \frac{0'9452 - 0'5}{0'5} \\
&= 0'8904.
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X \leq k\right) > 0'9 &\rightarrow \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9 \\
&\rightarrow \Phi\left(\frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9
\end{aligned}
$$

Llamando $a = \dfrac{k-40}{6'26}$ se tiene

$$
\begin{aligned}
&\Phi\left(a\right) > 0'9 \\
&\qquad \rightarrow \quad a > 1'29 \\
&\qquad \rightarrow \quad \frac{k-40}{6'26} > 1'29 \rightarrow k > 40 - 6'26 \cdot 1'29 = 31'93
\end{aligned}
$$

Luego la solución es 32 tornillos.

1 (2 puntos) Dos compañías producen software informático. La primera A, proporciona el 70 % y la segunda B el 30 % de la producción total. Por otra parte, se sabe que el 83 % del software suministrado por la primera compañía se ajusta a las normas establecidas, mientras que sólo el 63 % del suministrado por la segunda, se ajusta a dichas normas. Calcular la probabilidad de que un determinado software haya sido suministrado por la compañía A, si se sabe que se ajusta a las normas.

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{ el software lo produce la empresa A}\} \\ B &= \{ \text{ el software lo produce la empresa B}\} \\ N &= \{ \text{ el software se ajusta a las normas.}\} \end{aligned}$$

Se pide $\mathrm{P}\,(A \mid N\,)$ y conocemos las siguientes probabilidades

$$\mathrm{P}\,(A) = 0'7, \quad \mathrm{P}\,(B) = 0'3, \quad \mathrm{P}\,(N \mid A\,) = 0'83, \quad \mathrm{P}\,(N \mid B\,) = 0'63.$$

Aplicando Bayes

$$\mathrm{P}\,(A \mid N\,) = \frac{0'7 \cdot 0'83}{0'7 \cdot 0'83 + 0'3 \cdot 0'63} = 0'7545.$$

2 Sea X una variable aleatoria discreta que denota el número de averías que un operario resuelve en una jornada de trabajo, con función de cuantía dada por

$$f(x) = \frac{k}{x+1}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

(a) (1 punto) Calcular $\mathrm{P}\,(X > 1)$ y $\mathrm{P}\,(X > 0 \mid X < 3\,)$.

(b) (0'5 puntos) Calcula el número medio de averías que soluciona al día.

(c) (0'5 puntos) Si su sueldo es de 60 € por jornada laboral y si le pagan un plus de 20 € por cada avería solucionada que exceda de una al día ¿cuál es el sueldo diario medio?

Solución: Tenemos que hallar el valor de k; se obtiene sumando las probabilidades e igualando a 1

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1$$
$$\frac{25k}{12} = 1 \quad \rightarrow \quad k = \frac{12}{25}.$$

La función de cuantía es, por tanto

X	0	1	2	3
$f(x)$	12/25	6/25	4/25	3/25

(a)

$$\mathrm{P}(X>1)=\frac{4}{25}+\frac{3}{25}=\frac{7}{25}$$
$$\mathrm{P}(X>0\mid X<3)=\frac{\mathrm{P}(0<X<3)}{\mathrm{P}(X<3)}=\frac{6/25+4/25}{22/25}=\frac{10}{22}=\frac{5}{11}.$$

(b)

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{12}{25}+1\cdot\frac{6}{25}+2\cdot\frac{4}{25}+3\cdot\frac{3}{25}=\frac{23}{25}.$$

(c) La variable sueldo es

$$S=\begin{cases}60, & X=0\\ 60+20(X-1) & X=1,2,3\end{cases}$$

Para los valores de $X=0,1,2,3$ se obtiene

X	0	1	2	3
S	60	60	80	100

Teniendo en cuenta las probabilidades de X, la cuantía de S es

S	60	80	100
f_S	18/25	4/25	3/25

La media es

$$60\cdot\frac{18}{25}+80\cdot\frac{4}{25}+100\cdot\frac{3}{25}=\frac{1700}{25}=68.$$

3

(a) (1 punto) Supóngase que se selecciona al azar una palabra de la frase "ESPAÑA GANARÁ EL CAMPEONATO MUNDIAL DE FÚTBOL". Si X es el número de letras de la palabra seleccionada, calcular $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

(b) (1 punto) En una lotería se venden 30000 boletos a 20€ cada uno. El primer premio es de 200000 € , el segundo de 100000€ y el tercero de 20000€ ¿Cuál es la ganancia esperada de un individuo que ha comprado una papeleta?

Solución:

(a) La frase consta de 7 palabras con 6,6,2, 10,7,2 y 6 letras respectivamente. Por tanto X toma los valores 2,6,7 y 10 con probabilidades

X	2	6	7	10
$f(x)$	2/7	3/7	1/7	1/7

Se tiene $\mathrm{E}(X)=4/7+18/7+7/7+10/7=39/7$. Para hallar la varianza calculamos $\mathrm{E}\left(X^2\right)=8/7+108/7+49/7+100/7=265/7$ con lo que

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{265}{7}-\left(\frac{39}{7}\right)^2=\frac{334}{49}.$$

(b) Llamando G a la variable ganancia, se tiene

G	199980	99980	19980	-20
$f(x)$	1/30000	1/30000	1/30000	29997/30000

Por tanto la media es

$$\mathrm{E}\,(G) = \frac{199980 + 99980 + 19980 - 599940}{30000} = \frac{-280000}{30000} = -\frac{28}{3}.$$

4 Una empresa de informática produce y saca a la venta tiradas de 20000 ordenadores de los que sólo un 3 % salen defectuosos. Para darse a conocer lanza una campaña de publicidad en la que asegura que si el número de ordenadores defectuosos de una tirada supera en más de un 5 % el valor esperado, promete devolver el dinero a cada uno de los compradores afectados y, además, regalarles un ordenador nuevo a cada uno.

(a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa tenga que llevar a cabo la promesa de la campaña publicitaria?

(b) (1 punto) Si del total de ordenadores que se llevan vendidos, se sabe que ya hay más de 620 defectuosos ¿cuál es la probabilidad de que la empresa no tenga que llevar a cabo su promesa?

Solución: Sea X = numero de ordenadores defectuosos de los 20000. Se trata de una distribución binomial, donde $X \sim B\,(20000, 0'03)$. Por tanto, el valor esperado para una distribución binomial es:

$$E\,(X) = n \cdot p = 20000 \cdot 0'03 = 600.$$

Para que la empresa lleve a cabo la promesa de la campaña publicitaria, el número de ordenadores defectuosos debe superar en un 5 % el valor esperado, o sea, a 630. Aproximamos por la Normal:

$$Z = \frac{X - E\,(X)}{\sqrt{Var\,(X)}} = \frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{X - 20000 \cdot 0'03}{\sqrt{20000 \cdot 0'03 \cdot 0'97}} = \frac{X - 600}{\sqrt{582}} \sim N\,(0,1)$$

(a) $\mathrm{P}\,(X > 630) = \mathrm{P}\left(Z > \dfrac{30}{\sqrt{582}}\right) = 1 - \Phi(1'24) = 1 - 0'8925 = 0'1075.$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(X \leq 630 \mid X > 620\,) &= \frac{\mathrm{P}\,(620 < X \leq 630)}{\mathrm{P}\,(X > 620)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(\dfrac{20}{\sqrt{582}} < Z \leq \dfrac{30}{\sqrt{582}}\right)}{\mathrm{P}\left(Z > \dfrac{20}{\sqrt{582}}\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\,(0'83 < Z \leq 1'24)}{\mathrm{P}\,(Z > 0'83)} \\
&= \frac{\Phi(1'24) - \Phi(0'83)}{1 - \Phi(0'83)} \\
&= \frac{0'8925 - 0'7967}{0'7967} \\
&= 0'1202.
\end{aligned}$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CONTROL DEL TEMA 2

Ejercicio. Un armario tiene dos cajones. El cajón A contiene 4 monedas de oro y 2 de plata; el cajón B contiene 3 de oro y 3 de plata. Se abre un cajón al azar y se extrae una moneda.

Calcular:
(a) Probabilidad de que se haya abierto el cajón B y se haya extraído una moneda de oro.
(b) Probabilidad de que se haya abierto el cajón A, sabiendo que se ha extraído una moneda de oro.

Solución: Se tiene los sucesos y probabilidades siguientes:

A = {Se abre el cajón A}	P (A) = 1/2
B = {Se abre el cajón B}	P (B) = 1/2
O = {La moneda es de oro}	P (O | A) = 2/3
P = {La moneda es de plata}	P (O | B) = 1/2

(a) $P(B \cap O) = P(B)P(O \mid B) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$

(b) $P(A \mid O)$. Aplicaremos el teorema de Bayes

$$\begin{aligned} P(A \mid O) &= \frac{P(A) \cdot P(O \mid A)}{P(A) \cdot P(O \mid A) + P(B) \cdot P(O \mid B)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Ejercicio. Un juego consiste en lanzar dos dados; se gana si la suma de puntuaciones es 7. Si un jugador es tramposo (lleva sus dados trucados), gana con seguridad. Suponiendo que el 50% de los jugadores de dados son tramposos, hallar la probabilidad de que un determinado jugador que ha ganado sea tramposo.

Solución: La probabilidad de sacar 7 es $\frac{1}{6}$; consideremos los sucesos

$$T = \{\text{El jugador es tramposo}\}$$
$$G = \{\text{El jugador gana}\}$$

Sabemos que

$$P(T) = \frac{1}{2}, \qquad P(\overline{T}) = \frac{1}{2}$$
$$P(G \mid T) = 1, \quad P(G \mid \overline{T}) = \frac{1}{6}$$

Nos piden $P(T \mid G)$ para lo que utilizaremos Bayes

$$P(T \mid G) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{6}{7}.$$

Ejercicio. La probabilidad de que un cliente compre un producto de la marca A es 0,6 mientras que la probabilidad de que compre un producto de la marca E es 0,5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre un producto de la marca E no habiendo comprado el producto de la marca A es 0,4.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado sólo el producto de la marca E?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado productos de ninguna de las dos marcas?

Solución:

A= compra producto de la marca A $\bar{A}$ = no compra producto de la marca A

E = compra producto de la marca E $\bar{E}$ = no compra producto de la marca E

$P(A) = 0,6$

$P(\bar{A})=0,4$

$P(E) = 0,5$

$P(E/\bar{A})= 0,4$

a) $P(E \cap \bar{A}) = P(\bar{A})P(E/\bar{A}) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{E}) = P(\bar{A})P(\bar{E}/\bar{A}) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$

$P(\bar{E}/\bar{A}) = 1 – P(E/\bar{A})= 1 – 0,4 =0,6$

Ejercicio. Sabemos que el 8% de las personas que entran en una tienda de Informática son mujeres jóvenes y que en esa misma tienda, de las mujeres que entran el 40% son jóvenes. Calcular la probabilidad de que si en la tienda tropezamos aleatoriamente con una persona, ésta sea un hombre.

Solución:

J= {ser joven}
M= {ser mujer}
H= {ser hombre}

Si $P(M \cap J)=0,08$ y además $P(J/M)=0,4$

$P(J/M)= P(M \cap J)/P(M) = 0,08/P(M) \quad \rightarrow \quad P(M) = 0,08/ 0,4 = 0, 2$
$P(M) = 0, 2$

luego $P(H)= 1- P(M) =1- 0,2 =0,8$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CONTROL DEL TEMA 3

Ejercicio. Dada la variable bidimensional continua (X, Y) con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in [1,2] \times [2,5] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular las funciones de densidad marginales
¿Son independientes las variables X e Y?
Calcular la función de densidad condicional $g_1(x/y)$

Solución:

Primero se calcula el valor de k

$$1 = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx = k\int_1^2 \left[\int_2^5 dy\right] dx = k\int_1^2 [y]_2^5\, dx = 3k[x]_1^2 = 3k$$

Con lo que k=1/3

a) Funciones de densidad marginales

$f_1(x) = \int_2^5 \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}[y]_2^5 = 1$ Entonces $f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1,2] \\ 0 & resto \end{cases}$

$f_2(y) = \int_1^2 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}[x]_1^2 = \frac{1}{3}$ Entonces $f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & y \in [2,5] \\ 0 & resto \end{cases}$

b) Para ver si son independientes hay que comprobar si $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$

Para valores de (x,y) fuera de [1,2]x[2,5], las funciones valen todas 0, luego se cumple la igualdad. Para valores de (x,y) en [1,2]x[2,5]:

$f(x,y) = 1/3$

$f_1(x) = 1$ y $f_2(y) = 1/3$. Entonces $f_1(x)f_2(y) = 1 \text{ x } 1/3 = 1/3$

Luego también se cumple que $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ y por tanto X e Y son independientes.

c) Función de densidad condicional $g_1(x/y)$

Para valores de (x,y) en [1,2]x[2,5]

$$g_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

Ejercicio. La concentración de cierto componente químico de una marca de pintura es una variable aleatoria continua, con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{8} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Se determina independientemente, la concentración del componente químico en dos botes de pintura. Sean X e Y las variables que representan las concentraciones. Hallar

(a) La función de densidad conjunta

(b) P(X > Y)

Solución:

a) Como X e Y son independientes $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{8} & x \in [0,2] \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{3y^2}{8} & y \in [0,2] \\ 0 & resto \end{cases}$$

Entonces:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{9x^2y^2}{64} & (x,y) \in [0,2]x[0,2] \\ 0 & resto \end{cases}$$

(b) P(X > Y)

$$P(X > Y) = \frac{9}{64}\int_0^2 \left[\int_0^x x^2y^2dy\right]dx = \frac{9}{64}\int_1^2 x^2 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx = \frac{9}{64}\int_1^2 x^2\frac{x^3}{3}dx$$

$$= \frac{9}{64}\left[\frac{x^6}{18}\right]_0^2 = \frac{1}{2}$$

Ejercicio. Una urna contiene 3 bolas blancas, 2 negras y 1 rojas. Se extraen al azar dos bolas de la bolsa. Se consideran las variables:
B = {nº de bolas blancas}, N = {nº de bolas negras}, R = {nº de bolas rojas}
Calcular la función de probabilidad conjunta (función de cuantía conjunta) de la variable bidimensional (N, R) y la función de probabilidad condicional $g_1(n/R=1)$

Solución:

a) La función de probabilidad conjunta (función de cuantía conjunta) de la variable bidimensional (N, R) es:

R				
1	$3/15$	$2/15$	0	
0	$3/15$	$6/15$	$1/15$	
	0	1	2	N

(Todas las probabilidades se calculan como nº de casos favorables/nº de casos posibles. No importa el orden ni se pueden repetir los elementos, con lo que se cuenta todo a partir de combinaciones. Los casos posibles son siempre $C_{6,2}$=15. Los casos favorables por ejemplo para N=1 y R=1 serían $C_{2,1}$ x $C_{1,1}$ = 2 x 1 = 2)

b) Para calcular la función de probabilidad condicional g_1(n/R=1) calculamos primero la función de probabilidad marginal de R:

R	0	1
$f_2(R)$	10/15	5/15

Calculamos ahora la función de probabilidad condicional:

$$g_1(n/R = 1) = \frac{f(n, R = 1)}{f_2(R = 1)}$$

para cada valor de la variable N y ponemos las probabilidades en la tabla:

$N \mid R = 1$	0	1
g_1	$3/5$	$2/5$

<u>Ejercicio.</u> Una urna contiene 3 bolas blancas, 7 negras y 2 rojas. Se extraen al azar dos bolas de la bolsa. Sea X el número de bolas blancas que hay en la extracción, y sea Y el de negras. Calcular la función de probabilidad conjunta (función de cuantía conjunta) f(x, y) y la probabilidad P(X < Y)

<u>Solución:</u>

a) Calcular la función de probabilidad conjunta

X = {nº de bolas blancas} = {0,1,2}
Y = {nº de bolas negras} = {0,1,2}

(Todas las probabilidades se calculan como nº de casos favorables/nº de casos posibles. No importa el orden ni se pueden repetir los elementos, con lo que se cuenta todo a partir de combinaciones. Los casos posibles son siempre $C_{12,2}$ = 66. Los casos favorables por ejemplo para X=1 e Y=1 serían $C_{3,1}$ x $C_{7,1}$ = 3 x 7 = 21)

Y				
2	21/66	0	0	
1	14/66	21/66	0	
0	1/66	6/66	3/66	
	0	1	2	X

b) P(X < Y) = P(X=0, Y= 1) + P(X=0, Y= 2) = 14/66 + 21/66 = 35/66 = 0.5303

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CONTROL DEL TEMA 3

Ejercicio A. Las medidas de dos características de cierta población de coleópteros tiene la función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{5}\cdot(2x+3y), & (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Hállese:

a) $P(X>0'7)$
b) $P(X>0'7)$ sabiendo que $Y = 0'4$.

Solución:

Hay que calcular las marginales de x y de y, ya que son necesarias para resolver los tres aparatados.

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1\frac{2}{5}\cdot(2x+3y)dy=\frac{2}{5}\left[2xy+3\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{2}{5}\left(2x+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{5}\cdot(4x+3);\ x\in[0,1]$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1\frac{2}{5}\cdot(2x+3y)dx=\frac{2}{5}\left[x^2+3yx\right]_0^1=\frac{2}{5}(1+3y);\ y\in[0,1]$$

a) $P(X>0'7)=\int_{0'7}^{1}f_1(x)dx=\int_{0'7}^{1}\frac{1}{5}\cdot(4x+3)dx=\frac{1}{5}\cdot\int_{0'7}^{1}(4x+3)dx=\frac{1}{5}\cdot\left[2x^2+3x\right]_{0'7}^{1}=$

$$=\frac{1}{5}\left[(2+3)-(0'98+2'1)\right]=\frac{1}{5}\cdot(5-3'08)=\frac{1'92}{5}=0'384$$

b) Se pide:

$$P((X>0'7)/(Y=0'4))=\int_{0'7}^{1}g_1(x/Y=0'4)dx=\int_{0'7}^{1}\frac{f(x,0'4)}{f_2(0'4)}dx=\int_{0'7}^{1}\frac{\frac{2}{5}\cdot(2x+3\cdot0'4)}{\frac{2}{5}\cdot(1+3\cdot0'4)}dx=$$

$$=\int_{0'7}^{1}\frac{2x+1'2}{1+1'2}dx=\frac{1}{2'2}\cdot\int_{0'7}^{1}(2x+1'2)dx=\frac{1}{2'2}\cdot\left[x^2+1'2x\right]_{0'7}^{1}=\frac{1}{2'2}\cdot\left[(1+1'2)-(0'49+0'84)\right]=$$

$$=\frac{1}{2'2}\cdot(2'2-1'33)=\frac{1}{2'2}\cdot0'87=0'3955$$

Ejercicio B. Dada la variable bidimensional continua (X, Y) con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in [1,2] \times [2,5] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular las funciones de densidad marginales
¿Son independientes las variables X e Y?
Calcular la función de densidad condicional $g_1(x/y)$

Solución:

Primero se calcula el valor de k

$$1 = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx = k\int_1^2 \left[\int_2^5 dy\right] dx = k\int_1^2 [y]_2^5\, dx = 3k[x]_1^2 = 3k$$

Con lo que k=1/3

a) Funciones de densidad marginales

$f_1(x) = \int_2^5 \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}[y]_2^5 = 1$ Entonces $f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1,2] \\ 0 & resto \end{cases}$

$f_2(y) = \int_1^2 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}[x]_1^2 = \frac{1}{3}$ Entonces $f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & y \in [2,5] \\ 0 & resto \end{cases}$

b) Para ver si son independientes hay que comprobar si $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$

Para valores de (x,y) fuera de [1,2]x[2,5], las funciones valen todas 0, luego se cumple la igualdad. Para valores de (x,y) en [1,2]x[2,5]:

$f(x,y) = 1/3$

$f_1(x) = 1$ y $f_2(y) = 1/3$. Entonces $f_1(x)f_2(y) = 1 \times 1/3 = 1/3$

Luego también se cumple que $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ y por tanto X e Y son independientes.

c) Función de densidad condicional $g_1(x/y)$

Para valores de (x,y) en [1,2]x[2,5]

$$g_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

Ejercicio C. Dada la función de cuantía (función de probabilidad) conjunta de la variable (X, Y):

Y				
4	0'12	0'08	0'07	0'07
3	0'06	0'09	0'15	0'03
2	0'08	0'08	0'08	0'09
	0	1	2	3
				X

Hállese:

a) $g_1(x/y=3)$
b) $g_2(y/x=0)$
c) $P(x \le 2/y=3)$

Solución:

a) Por definición: $g_1(x/y=3) = \dfrac{f(x,3)}{f_2(3)}$; luego hay que calcular la marginal de *y*.

y	2	3	4
f2(y)	0'33	0'33	0'34

Por tanto:

x / Y = 3	0	1	2	3
$g_1(x/y=3) = \dfrac{f(x,3)}{f_2(3)}$	6/33	9/33	15/33	3/33

b) Por definición: $g_2(y/x=0) = \dfrac{f(0,y)}{f_1(0)}$; luego hay que calcular la marginal de x.

x	0	1	2	3
f1(x)	0'26	0'25	0'30	0'19

Por tanto:

y / X = 0	2	3	4
$g_2(y/x=0) = \dfrac{f(0,y)}{f_1(0)}$	8/26	6/26	12/26

c) $P(x \le 2/y=3) = \sum_{x\le 2} g_1(x/Y=3) = \dfrac{6}{33} + \dfrac{9}{33} + \dfrac{15}{33} = \dfrac{30}{33}$

Ejercicio D. Una urna contiene 3 bolas blancas, 2 negras y 1 rojas. Se extraen al azar dos bolas de la bolsa. Se consideran las variables:
B = {nº de bolas blancas}, N = {nº de bolas negras}, R = {nº de bolas rojas}
Calcular la función de probabilidad conjunta (función de cuantía conjunta) de la variable bidimensional (N, R) y la función de probabilidad condicional g_1(n/R=1)

Solución:

a) La función de probabilidad conjunta (función de cuantía conjunta) de la variable bidimensional (N, R) es:

R				
1	$3/15$	$2/15$	0	
0	$3/15$	$6/15$	$1/15$	
	0	1	2	N

(Todas las probabilidades se calculan como nº de casos favorables/nº de casos posibles. No importa el orden ni se pueden repetir los elementos, con lo que se cuenta todo a partir de combinaciones. Los casos posibles son siempre $C_{6,2}$=15. Los casos favorables por ejemplo para N=1 y R=1 serían $C_{2,1}$ x $C_{1,1}$ = 2 x 1 = 2)

b) Para calcular la función de probabilidad condicional g_1(n/R=1) calculamos primero la función de probabilidad marginal de R:

R	0	1
$f_2(R)$	10/15	5/15

Calculamos ahora la función de probabilidad condicional:

$$g_1(n/R = 1) = \frac{f(n, R = 1)}{f_2(R = 1)}$$

para cada valor de la variable N y ponemos las probabilidades en la tabla:

$N \mid R = 1$	0	1
g_1	$3/5$	$2/5$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CONTROL DEL TEMA 4

Ejercicio 1. Se elige al azar un comité de 2 alumnos de entre 3 delegados de 3º, 2 de 2º y 1 de 1º. Sean X = {número de alumnos de 2º en el comité} e Y = {número de alumnos de 1º en el comité}. Hallar la Cov (X,Y).

Solución: La función de cuantía conjunta viene dada por la tabla

Y \ X	0	1	2
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$

y las marginales

X	0	1	2
f_1	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Y	0	1
f_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

De las tablas se obtiene

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{2}{15}, \quad \mathrm{E}(X) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{E}(Y) = \frac{1}{3}.$$

Por tanto

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = -\frac{4}{45}.$$

Ejercicio 2. La publicidad de ciertos fondos de inversión de alto riesgo afirma que el 40% de los clientes doblan la cantidad invertida; el 10% la triplican, el 35% pierden la mitad y el 15% de los clientes pierden todo lo invertido ¿Cuál es la ganancia esperada si decido invertir 6000 euros?

Solución:

Llamando G = ganancia

se tiene que G = 6000 si se dobla, G = 12000 si se triplica, G = −3000 si se pierde la mitad, y G = −6000 si se pierde todo.

La función de probabilidad es

G	-6000	-3000	6000	12000
f	0'15	0'35	0'4	0'1

La ganancia esperada es

E(G) = (−6000 x·0.15) – (3000 x·0.35) + (6000 x·0.4) + (12000 x·0.1) = 1650 euros.

Ejercicio 3. Se tiene la siguiente función de cuantía de una v. a. (X, Y)

Y					
3	0	3/8	3/8	0	
1	1/8	0	0	1/8	
	0	1	2	3	X

Determínese:

a) Cov (X, Y)
b) E(X / Y = 1)

Solución:

(a) Se debe calcular $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{E}(XY)$. Las distribuciones marginales son

X	0	1	2	3
f_1	1/8	3/8	3/8	1/8

Y	1	3
f_2	2/8	6/8

Calculando..

- $\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$
- $\mathrm{E}(Y) = 1 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{6}{8} = \frac{5}{2}$
- $\mathrm{E}(XY) = 1 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{4}$

Por tanto $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{15}{4} - \frac{3}{2}\frac{5}{2} = 0$

(b) La distribución condicional es

$(X \mid Y = 1)$	0	3
$g_1(x \mid 1)$	1/2	1/2

de donde $\mathrm{E}(X \mid Y = 1) = \frac{3}{2}$

Ejercicio 4. El número de resfriados que padecen los niños de edad preescolar en un colegio viene dado según la edad por la función de cuantía (función de probabilidad) conjunta:

Edad					
5	0.02	0.07	0.15	0.11	
4	0.03	0.07	0.14	0.09	
3	0.02	0.06	0.14	0.10	
	0	1	2	3	Resfriados

Calcula:

a) La covarianza
b) La esperanza del número de resfriados para los niños de 3 años

Solución:

a)

Resfriados X	0	1	2	3
	0.07	0.20	0.43	0.30

Edad Y	
5	0.35
4	0.33
3	0.32

$$E(XY) = 7.90$$

$$E(X) = 1.96$$

$$E(Y) = 4.03$$

$$Cov(X,Y) = 7.90 - (1.96 \cdot 4.03) = 0.0012$$

b)

X|Y=3	0	1	2	3
g1(x|3)	0.02/0.32	0.06/0.32	0.14/0.32	0.10/0.32

$$E(X|Y = 3) = 2$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CONTROL DEL TEMA 4

Ejercicio 1. Se elige al azar un comité de 2 alumnos de entre 3 delegados de 3º, 2 de 2º y 1 de 1º. Sean X = {número de alumnos de 2º en el comité} e Y = {número de alumnos de 1º en el comité}. Hallar la Cov (X,Y).

Solución: La función de cuantía conjunta viene dada por la tabla

Y				
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	
	0	1	2	X

y las marginales

X	0	1	2
f_1	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Y	0	1
f_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

De las tablas se obtiene

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{2}{15}, \quad \mathrm{E}(X) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{E}(Y) = \frac{1}{3}.$$

Por tanto

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = -\frac{4}{45}.$$

Ejercicio 2. La publicidad de ciertos fondos de inversión de alto riesgo afirma que el 40% de los clientes doblan la cantidad invertida; el 10% la triplican, el 35% pierden la mitad y el 15% de los clientes pierden todo lo invertido ¿Cuál es la ganancia esperada si decido invertir 6000 euros?

Solución:

Llamando G = ganancia

se tiene que G = 6000 si se dobla, G = 12000 si se triplica, G = −3000 si se pierde la mitad, y G = −6000 si se pierde todo.

La función de probabilidad es

G	-6000	-3000	6000	12000
f	0'15	0'35	0'4	0'1

La ganancia esperada es

E(G) = (−6000 x·0.15) – (3000 x·0.35) + (6000 x·0.4) + (12000 x·0.1) = 1650 euros.

Ejercicio 3. Se tiene la siguiente función de cuantía de una v. a. (X, Y)

Y					
3	0	3/8	3/8	0	
1	1/8	0	0	1/8	
	0	1	2	3	X

Determínese:

a) Cov (X, Y)
b) E(X / Y = 1)

Solución:

(a) Se debe calcular $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{E}(XY)$. Las distribuciones marginales son

X	0	1	2	3
f_1	1/8	3/8	3/8	1/8

Y	1	3
f_2	2/8	6/8

Calculando..

- $\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$
- $\mathrm{E}(Y) = 1 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{6}{8} = \frac{5}{2}$
- $\mathrm{E}(XY) = 1 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{4}$

Por tanto $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{15}{4} - \frac{3}{2}\frac{5}{2} = 0$

(b) La distribución condicional es

$(X \mid Y = 1)$	0	3
$g_1(x \mid 1)$	1/2	1/2

de donde $\mathrm{E}(X \mid Y = 1) = \frac{3}{2}$

Ejercicio 4. El número de resfriados que padecen los niños de edad preescolar en un colegio viene dado según la edad por la función de cuantía (función de probabilidad) conjunta:

Edad					
5	0.02	0.07	0.15	0.11	
4	0.03	0.07	0.14	0.09	
3	0.02	0.06	0.14	0.10	
	0	1	2	3	Resfriados

Calcula:

a) La covarianza
b) La esperanza del número de resfriados para los niños de 3 años

Solución:

a)

Resfriados X	0	1	2	3
	0.07	0.20	0.43	0.30

Edad Y	
5	0.35
4	0.33
3	0.32

$$E(XY) = 7.90$$

$$E(X) = 1.96$$

$$E(Y) = 4.03$$

$$Cov(X,Y) = 7.90 - (1.96 \cdot 4.03) = 0.0012$$

b)

X|Y=3	0	1	2	3
g1(x|3)	0.02/0.32	0.06/0.32	0.14/0.32	0.10/0.32

$$E(X|Y = 3) = 2$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CONTROL DEL TEMA 5

Ejercicio. Las calificaciones de los 500 aspirantes presentados a un examen para contratación laboral, se distribuye normalmente con media 6.5 y varianza 4.

(a) Determine la proporción de aspirantes con calificaciones inferiores a 5 puntos.
(b) ¿Cuántos aspirantes obtuvieron calificaciones comprendidas entre 5 y 7.5 puntos?

Solución: Llamando X a la puntuación, se tiene que $X \sim N(6'5, 2)$

(a) Calculemos primero la probabilidad de obtener menos de 5 puntos

$$\mathrm{P}\left(X < 5\right) = \mathrm{P}\left(Z < \frac{5 - 6'5}{2}\right) = \mathrm{P}\left(Z < -0'75\right) = \Phi(-0'75) = 1 - 0'7734 = 0'2266$$

La solución es $22'66\,\%$.

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(5 < X < 7'5\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{5 - 6'5}{2} < Z < \frac{7'5 - 6'5}{2}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(-0'75 < Z < 0'5\right) \\ &= \Phi(0'5) - \Phi(-0'75) \\ &= \Phi(0'5) - 1 + \Phi(0'75) = 0'4649. \end{aligned}$$

El número de aspirantes es $500 \cdot 0'4649 \approx 232$.

Ejercicio. Una empresa instala en una ciudad 20000 bombillas para su iluminación. Según la empresa instaladora, la duración (en días) de cada bombilla sigue una distribución normal con media 302 y desviación típica 40. Calcular:

(a)¿Cuántas bombillas se fundirán antes de 365 días?
(b)¿Cuántas durarán más de 400 días?

Solución: Sea X la variable que mide la duración en días de una bombilla. Así pues: $X \sim N(302, 40)$.

(a) Primero hay que calcular la probabilidad de que una bombilla se funda antes de 365 y, luego, aplicar ese porcentaje al total de bombillas. Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X < 365\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{X - 302}{40} < \frac{365 - 302}{40}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Z < \frac{63}{40}\right) \approx \mathrm{P}\left(Z \leq 1'58\right) \\ &= \Phi(1'58) \approx 0'9430. \end{aligned}$$

Por tanto, para el total de bombillas que se fundirán antes de 365 días será: $20000 \cdot 0'9430 = 18860$ bombillas.

(b) Este apartado se hace igual, pero calculando $P(X > 400)$. Así pues:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 400) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 400) &= 1 - \mathrm{P}\left(\frac{X-302}{40} \leq \frac{400-302}{40}\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(Z < \frac{98}{40}\right) \\ &= 1 - proZ \leq 2'45 \\ &= 1 - \Phi(2'45) \\ &= 1 - 0'9930 = 0'0070. \end{aligned}$$

Por tanto, para el total de bombillas que se fundirán antes de 365 días será: $20000 \cdot 0'0070 = 140$ bombillas.

Ejercicio. Calcular
(a) Probabilidad de que al lanzar una moneda 1000 veces se obtengan más de 550 caras.
(b)¿Cuántas veces como mínimo hay que lanzar una moneda, para que la probabilidad de obtener al menos 2 caras sea mayor que 0.9?

Solución:

(a) Llamando X al número de caras en 1000 tiradas, es, $X \sim B(1000, 1/2)$ que podemos considerar como normal $X \approx N(500, \sqrt{250})$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 550) &= 1 - \mathrm{P}(X \leq 550) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{550-500}{\sqrt{250}}\right) \\ &= 1 - \Phi(3'16) \approx 0. \end{aligned}$$

(b) Llamando n al número de tiradas, el número de caras es $X \sim B(n, 1/2)$. Se debe cumplir $\mathrm{P}(X \geq 2) > 0'9$; entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \geq 2) > 0'9 &\rightarrow 1 - \mathrm{P}(X \leq 1) > 0'9 \\ &\rightarrow \mathrm{P}(X \leq 1) < 0'1 \\ &\rightarrow F(1) < 0'1. \end{aligned}$$

Consultando en las tablas, para $p = 1/2$ el mínimo n es 7.

Ejercicio. Una compañía de seguros estima que una de cada mil personas incurre en un cierto accidente a lo largo de un año. Si la compañía tiene aseguradas a diez mil personas ¿cuál es la probabilidad de que en un año no más de tres de sus asegurados incurran en ese accidente?

Solución:

Sea X = número de personas que tienen un accidente~ B(10000, 0,001)
$P(X \leq 3)$
Aproximamos por una variable Poisson con parámetro λ= np = 10000 x 0,001= 10
$P(X \leq 3) = 0.0103$

Ejercicio. La contaminación acústica de los locales de copas en una ciudad es medida en decibelios (dB) por una variable que se distribuye normalmente con media 46 y varianza 144. El límite permitido por la legislación es de 55 dB, a partir de los cuales la sanción va en función de la cantidad sobrepasada del límite, pudiendo llegar al cierre del local si el límite sobrepasa en 20 o más dB. Si se elige un local al azar y ha sido sancionado ¿cuál es la probabilidad de que sea cerrado?

Solución: Llamando X a la variable, se tiene que $X \sim N(46, 12)$. Se pide la probabilidad de un suceso condicionado:

$$\mathrm{P}\left(X > 75 \,|\, X > 55\right) = \frac{\mathrm{P}\left(X > 75\right)}{\mathrm{P}\left(X > 55\right)}$$

Tipificamos la variable $\dfrac{X - 46}{12} \sim N(0, 1)$ y, los cálculos son:

$$\frac{\mathrm{P}\left(X > 75\right)}{\mathrm{P}\left(X > 55\right)} = \frac{\mathrm{P}\left(Z > 2'42\right)}{\mathrm{P}\left(Z > 0'75\right)} = \frac{1 - \Phi(2'42)}{1 - \Phi(0'75)} = \frac{0'00776}{0'226627} = 0'0342.$$

1. Problema. Se quiere repoblar un río con un tipo de pez autóctono para evitar su extinción. Para ello se ha realizado un estudio previo de la concentración de oxígeno en el río. Este estudio proporciona los siguientes resultados: la concentración de oxígeno en el agua sigue una distribución normal de media 9 y desviación típica 0.8; así mismo, el oxígeno consumido por la fauna del río sigue, también, una distribución normal de media 4 y desviación típica 0.2 y, por último, el oxígeno producido por las bacterias y algas del río sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica 1.2. Se considera que las tres distribuciones son independientes y que la concentración de oxígeno en el agua para la existencia de vida ha de ser mayor o igual a 5. ¿Cuál es la probabilidad de que al repoblar el río, multiplicándose por 2 la fauna del mismo, el agua del río siga siendo apto para la vida?

Solución:

Sean las variables

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{concentración de oxígeno en el río}, \quad X_1 \sim N(9, 0'8) \\ X_2 &= \text{cantidad de oxígeno consumido por la fauna}, \quad X_2 \sim N(4, 0'2) \\ X_3 &= \text{cantidad de oxígeno producido por bacterias}, \quad X_3 \sim N(5, 1'2) \end{aligned}$$

La concentración de oxígeno total es $X_1 - X_2 + X_3$, pero si se dobla la fauna, el oxígeno consumido es doble y la concentración total es $X_1 - 2X_2 + X_3$. Hay que hallar $\mathrm{P}(X_1 - 2X_2 + X_3 \geq 5)$. Sea $Y = X_1 - 2X_2 + X_3$, que tiene una distribución normal de parámetros

$$\mathrm{E}(Y) = 9 - 2 \cdot 4 + 5 = 6, \quad \mathrm{Var}(Y) = 0'8^2 + 4 \cdot 0'2^2 + 1'2^2 = 2'24.$$

Tipificando

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y \geq 5) &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{5-6}{\sqrt{2'24}}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Z \geq -0'67\right) = \Phi(0'67) = 0'7486. \end{aligned}$$

2. Problema. Una empresa de informática produce y saca a la venta tiradas de 20000 ordenadores de los que sólo un 3% salen defectuosos. Para darse a conocer lanza una campaña de publicidad en la que asegura que si el número de ordenadores defectuosos de una tirada supera en más de un 5% el valor esperado, promete devolver el dinero a cada uno de los compradores afectados y, además, regalarles un ordenador nuevo a cada uno.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa tenga que llevar a cabo la promesa de la campaña publicitaria?

(b) Si del total de ordenadores que se llevan vendidos, se sabe que ya hay más de 620 defectuosos ¿cuál es la probabilidad de que la empresa no tenga que llevar a cabo su promesa?

Solución:

Sea X = número de ordenadores defectuosos de los 20000. Se trata de una distribución binomial, B (20000, 0’03). Por tanto, el valor esperado para una distribución binomial es:

E (X) = n p = 20000 x 0’03 = 600

Para que la empresa lleve a cabo la promesa de la campaña publicitaria, el número de ordenadores defectuosos debe superar en un 5% el valor esperado, o sea, a 630. Aproximamos por la Normal:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{X - 20000 \cdot 0'03}{\sqrt{20000 \cdot 0'03 \cdot 0'97}} = \frac{X - 600}{\sqrt{582}} \sim N(0,1)$$

(a) $\mathrm{P}(X > 630) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{30}{\sqrt{582}}\right) = 1 - \Phi(1'24) = 1 - 0'8925 = 0'1075.$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \leq 630 \mid X > 620) &= \frac{\mathrm{P}(620 < X \leq 630)}{\mathrm{P}(X > 620)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(\frac{20}{\sqrt{582}} < Z \leq \frac{30}{\sqrt{582}}\right)}{\mathrm{P}\left(Z > \frac{20}{\sqrt{582}}\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(0'83 < Z \leq 1'24)}{\mathrm{P}(Z > 0'83)} \\
&= \frac{\Phi(1'24) - \Phi(0'83)}{1 - \Phi(0'83)}
\end{aligned}$$

3. Problema. El 2% de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. Si se empaquetan en lotes de 2000 tornillos,

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado lote no haya más de 50 defectuosos?
(b) ¿Cuál es el mínimo número k para que se pueda asegurar que la probabilidad de que no haya más de k tornillos defectuosos sea superior a 0.9?

Solución:

La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es 0.02. El número X de tornillos defectuosos en una muestra de 2000 sigue la distribución binomial B(2000, 0.02) que podemos considerar como normal de parámetros $\mu = 40$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{39.20} = 6.26$.

(a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 50) &= P\left(Z \leq \frac{50-40}{6'26}\right) \\ &= \Phi(1'60) = 0'9452. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X \leq k) > 0'9 \ &\rightarrow \ P\left(Z \leq \frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9 \\ &\rightarrow \ \Phi\left(\frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9 \end{aligned}$$

Llamando $a = \dfrac{k-40}{6'26}$ se tiene

$$\begin{aligned} \Phi(a) &> 0'9 \\ &\rightarrow \ a > 1'29 \\ &\rightarrow \ \frac{k-40}{6'26} > 1'29 \rightarrow \end{aligned}$$

k > 40 + 1’29 x 6’26 = 48’0754

Luego la solución es 49 tornillos

4. Problema. Los beneficios anuales de cierta empresa de informática se calculan restándole a los ingresos la suma de los gastos fijos y los salarios. Si representamos los ingresos mediante la variable I, los gastos fijos mediante G y los salarios mediante S, y sabemos que las tres variables se distribuyen de forma independiente y tienen, respectivamente, las siguientes distribuciones: N(330, 20);N(120, 10) y N(80, 5)

(a)¿Cuál es la probabilidad de que un determinado año los beneficios sean superiores a 135?

(b) ¿Cuál es el beneficio mínimo que podríamos asegurar en un determinado año con una probabilidad no inferior al 90%?

Solución:

Llamando B a la variable beneficio se tiene que $B = I - G - S$. B es normal con parámetros

$$\mu = 330 - 120 - 80 = 130$$
$$\sigma = \sqrt{20^2 + 10^2 + 5^2} = \sqrt{525}.$$

(a) $\mathrm{P}\left(B > 135\right) = \mathrm{P}\left(Z > \dfrac{135 - 130}{\sqrt{525}}\right) = \mathrm{P}\left(Z > 0'22\right) = 1 - \Phi(0'22) = 1 - 0'5871 = 0'4129$.

(b) Se pide un valor$k$ tal que $\mathrm{P}\left(X > k\right) \geq 0'9$ o lo que es lo mismo $\mathrm{P}\left(X \leq k\right) \leq 0'1$. Tipificando:

$$\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k - 130}{\sqrt{525}}\right) \leq 0'1 \rightarrow \Phi\left(\frac{k - 130}{\sqrt{525}}\right) \leq 0'1$$

El valor buscado de $z = \dfrac{k - 130}{\sqrt{525}}$ es negativo (le corresponde una probabilidad $0'1 < 05$). Por tanto buscamos $\Phi(-z) = 0'9$ que le corresponde a $1'29$

$$-\frac{k - 130}{\sqrt{525}} = 1'29 \rightarrow k = 130 - 1'29 \cdot \sqrt{525} = 100'47.$$

1. Problema. Se quiere repoblar un río con un tipo de pez autóctono para evitar su extinción. Para ello se ha realizado un estudio previo de la concentración de oxígeno en el río. Este estudio proporciona los siguientes resultados: la concentración de oxígeno en el agua sigue una distribución normal de media 9 y desviación típica 0.8; así mismo, el oxígeno consumido por la fauna del río sigue, también, una distribución normal de media 4 y desviación típica 0.2 y, por último, el oxígeno producido por las bacterias y algas del río sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica 1.2. Se considera que las tres distribuciones son independientes y que la concentración de oxígeno en el agua para la existencia de vida ha de ser mayor o igual a 5. ¿Cuál es la probabilidad de que al repoblar el río, multiplicándose por 2 la fauna del mismo, el agua del río siga siendo apto para la vida?

Solución:

Sean las variables

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{concentración de oxígeno en el río}, \quad X_1 \sim N(9, 0'8) \\ X_2 &= \text{cantidad de oxígeno consumido por la fauna}, \quad X_2 \sim N(4, 0'2) \\ X_3 &= \text{cantidad de oxígeno producido por bacterias}, \quad X_3 \sim N(5, 1'2) \end{aligned}$$

La concentración de oxígeno total es $X_1 - X_2 + X_3$, pero si se dobla la fauna, el oxígeno consumido es doble y la concentración total es $X_1 - 2X_2 + X_3$. Hay que hallar $\mathrm{P}(X_1 - 2X_2 + X_3 \geq 5)$. Sea $Y = X_1 - 2X_2 + X_3$, que tiene una distribución normal de parámetros

$$\mathrm{E}(Y) = 9 - 2 \cdot 4 + 5 = 6, \quad \mathrm{Var}(Y) = 0'8^2 + 4 \cdot 0'2^2 + 1'2^2 = 2'24.$$

Tipificando

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y \geq 5) &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{5-6}{\sqrt{2'24}}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Z \geq -0'67\right) = \Phi(0'67) = 0'7486. \end{aligned}$$

2. Problema. Una empresa de informática produce y saca a la venta tiradas de 20000 ordenadores de los que sólo un 3% salen defectuosos. Para darse a conocer lanza una campaña de publicidad en la que asegura que si el número de ordenadores defectuosos de una tirada supera en más de un 5% el valor esperado, promete devolver el dinero a cada uno de los compradores afectados y, además, regalarles un ordenador nuevo a cada uno.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa tenga que llevar a cabo la promesa de la campaña publicitaria?

(b) Si del total de ordenadores que se llevan vendidos, se sabe que ya hay más de 620 defectuosos ¿cuál es la probabilidad de que la empresa no tenga que llevar a cabo su promesa?

Solución:

Sea X = número de ordenadores defectuosos de los 20000. Se trata de una distribución binomial, B (20000, 0’03). Por tanto, el valor esperado para una distribución binomial es:

E (X) = n p = 20000 x 0’03 = 600

Para que la empresa lleve a cabo la promesa de la campaña publicitaria, el número de ordenadores defectuosos debe superar en un 5% el valor esperado, o sea, a 630. Aproximamos por la Normal:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{X - 20000 \cdot 0'03}{\sqrt{20000 \cdot 0'03 \cdot 0'97}} = \frac{X - 600}{\sqrt{582}} \sim N(0,1)$$

(a) $\mathrm{P}(X > 630) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{30}{\sqrt{582}}\right) = 1 - \Phi(1'24) = 1 - 0'8925 = 0'1075.$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \leq 630 \mid X > 620) &= \frac{\mathrm{P}(620 < X \leq 630)}{\mathrm{P}(X > 620)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(\frac{20}{\sqrt{582}} < Z \leq \frac{30}{\sqrt{582}}\right)}{\mathrm{P}\left(Z > \frac{20}{\sqrt{582}}\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(0'83 < Z \leq 1'24)}{\mathrm{P}(Z > 0'83)} \\
&= \frac{\Phi(1'24) - \Phi(0'83)}{1 - \Phi(0'83)}
\end{aligned}$$

3. Problema. El 2% de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. Si se empaquetan en lotes de 2000 tornillos,

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado lote no haya más de 50 defectuosos?
(b) ¿Cuál es el mínimo número k para que se pueda asegurar que la probabilidad de que no haya más de k tornillos defectuosos sea superior a 0.9?

Solución:

La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es 0.02. El número X de tornillos defectuosos en una muestra de 2000 sigue la distribución binomial B(2000, 0.02) que podemos considerar como normal de parámetros $\mu = 40$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{39.20} = 6.26$.

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leq 50) &= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{50-40}{6'26}\right) \\ &= \Phi(1'60) = 0'9452. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leq k) > 0'9 &\rightarrow \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9 \\ &\rightarrow \Phi\left(\frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9 \end{aligned}$$

Llamando $a = \dfrac{k-40}{6'26}$ se tiene

$$\begin{aligned} &\Phi(a) > 0'9 \\ &\qquad \rightarrow a > 1'29 \\ &\qquad \rightarrow \frac{k-40}{6'26} > 1'29 \rightarrow \end{aligned}$$

$$k > 40 + 1'29 \times 6'26 = 48'0754$$

Luego la solución es 49 tornillos

4. Problema. Los beneficios anuales de cierta empresa de informática se calculan restándole a los ingresos la suma de los gastos fijos y los salarios. Si representamos los ingresos mediante la variable I, los gastos fijos mediante G y los salarios mediante S, y sabemos que las tres variables se distribuyen de forma independiente y tienen, respectivamente, las siguientes distribuciones: N(330, 20);N(120, 10) y N(80, 5)

(a)¿Cuál es la probabilidad de que un determinado año los beneficios sean superiores a 135?

(b) ¿Cuál es el beneficio mínimo que podríamos asegurar en un determinado año con una probabilidad no inferior al 90%?

Solución:

Llamando B a la variable beneficio se tiene que $B = I - G - S$. B es normal con parámetros

$$\mu = 330 - 120 - 80 = 130$$
$$\sigma = \sqrt{20^2 + 10^2 + 5^2} = \sqrt{525}.$$

(a) $\mathrm{P}\,(B > 135) = \mathrm{P}\left(Z > \dfrac{135 - 130}{\sqrt{525}}\right) = \mathrm{P}\,(Z > 0'22) = 1 - \Phi(0'22) = 1 - 0'5871 = 0'4129.$

(b) Se pide un valor$k$ tal que $\mathrm{P}\,(X > k) \geq 0'9$ o lo que es lo mismo $\mathrm{P}\,(X \leq k) \leq 0'1$. Tipificando:

$$\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k - 130}{\sqrt{525}}\right) \leq 0'1 \rightarrow \Phi\left(\frac{k - 130}{\sqrt{525}}\right) \leq 0'1$$

El valor buscado de $z = \dfrac{k - 130}{\sqrt{525}}$ es negativo (le corresponde una probabilidad $0'1 < 05$). Por tanto buscamos $\Phi(-z) = 0'9$ que le corresponde a $1'29$

$$-\frac{k - 130}{\sqrt{525}} = 1'29 \rightarrow k = 130 - 1'29 \cdot \sqrt{525} = 100'47.$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CONTROL DEL TEMA 4

Ejercicio. Un jugador lanza dos monedas. Gana 1€ ó 2 € si aparecen una o dos caras. Por otra parte pierde 5€ si no aparece cara. Determinar la ganancia esperada del juego.

Solución:

G = {GANANCIA DEL JUEGO} => Se pide E(G)

Ω = {(C,C);(C,X);(X,C);(X,X)} => CP = $VR_{2,2}=2^2=4$

Función de probabilidad de G:

- Para:
  - G=+1 => UNA CARA => {(C,X),(X,C)} => CF=2
  - G=+2 => DOS CARAS => {(C,C)} => CF=1
  - G=-5 => NINGUNA CARA => {(X,X)} => CF=1

G	+1	+2	-5
f(G)=CF/CP	2/4	1/4	1/4

$$E(G) = \sum_i g_i \cdot f(g_i) = 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + (-5) \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$

Ejercicio. Se dispone de 7 huchas, cada una con 10 billetes de 10 euros, 6 billetes de 20 euros, 4 billetes de 50 euros y 1 billete de 100 euros. Nos dan 7 billetes, extraídos aleatoriamente uno de cada hucha. Hallad el valor medio de la cantidad de euros que recibimos.

Solución:
Llamando X a la cantidad total recibida y, llamando Xi a la cantidad recibida de la hucha i para i = 1, 2,…,7 se tiene que

X = X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7

La media de X es la suma de las medias de cada Xi que son iguales. Por tanto se halla una de ellas y se multiplica por 7.

De cada hucha se recibe un billete de 10, 20, 50 o 100 euros, de un total de 21 billetes. La función de probabilidad es

X_i	10	20	50	100
f_i	$10/21$	$6/21$	$4/21$	$1/21$

E(Xi)= 520/21
E(X)= E(X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7)= 520/3

Ejercicio. Se elige al azar un comité de 2 alumnos de entre 3 delegados de 3º, 2 de 2º y 1 de 1º. Sean X = {número de alumnos de 2º en el comité} e Y = {número de alumnos de 1º en el comité}. Hallar la Cov (X,Y).

Solución: La función de cuantía conjunta viene dada por la tabla

Y				
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	
	0	1	2	X

y las marginales

X	0	1	2
f_1	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Y	0	1
f_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

De las tablas se obtiene

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{2}{15}, \quad \mathrm{E}(X) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{E}(Y) = \frac{1}{3}.$$

Por tanto

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = -\frac{4}{45}.$$

Ejercicio. La publicidad de ciertos fondos de inversión de alto riesgo afirma que el 40% de los clientes doblan la cantidad invertida; el 10% la triplican, el 35% pierden la mitad y el 15% de los clientes pierden todo lo invertido ¿Cuál es la ganancia esperada si decido invertir 6000 euros?

Solución:

Llamando G = ganancia

se tiene que G = 6000 si se dobla, G = 12000 si se triplica, G = −3000 si se pierde la mitad, y G = −6000 si se pierde todo.

La función de probabilidad es

G	-6000	-3000	6000	12000
f	0'15	0'35	0'4	0'1

La ganancia esperada es

E(G) = −6000 x·0.15 − 3000 x·0.35 + 6000 x·0.4 + 12000 x·0.1 = 1650 euros.

1. (2'5 puntos). La temperatura corporal de cierta especie animal es una variable aleatoria que tiene una distribución normal de media 36,7ºC y desviación típica 3,8ºC. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 ejemplares de esa especie. Hallar la probabilidad de que la temperatura corporal de la media muestral:

a) Sea menor o igual a 36,9ºC
b) Esté comprendida entre 36,5ºC y 37,3ºC

Solución:

La media muestral $\bar{X}$ tiene una distribución N(36.7 , 3.8/10)= N(36.7, 0.38)

a)

$$P(\overline{X} \leq 36{,}9) = P\left(Z \leq \frac{36{,}9 - 36{,}7}{0{,}38}\right) = P(Z \leq 0{,}52) = 0{,}6985$$

(NOTA: SI SE HA BUSCADO EN LAS TABLAS P(Z≤0,53)=0,7019)

b)

$$P(36{,}5 \leq \overline{X} \leq 37{,}3) = P\left(\frac{36{,}5 - 36{,}7}{0{,}38} Z \leq \frac{37{,}3 - 36{,}7}{0{,}38}\right) =$$

$$P(-0{,}52 \leq Z \leq 1{,}58) = P(Z \leq 1{,}58) - P(Z \leq (-0{,}52) =$$

$$P(Z \leq 1{,}58) + P(Z \leq (0{,}52) - 1 = 0{,}695 + 0{,}9429 - 1 = 0{,}6379$$

(NOTA: SI SE HA BUSCADO EN LAS TABLAS P(Z≤0,53), ENTONCES: 0,9429+0,7019-1= 0,6448)

2. (2'5 puntos). Dos amigos inventan un peculiar juego usando una baraja de 40 cartas (10 números o figuras y 4 palos). El juego consiste en extraer dos cartas al azar.
Si aparecen dos ases, el amigo A recibe 5 puntos y el amigo B recibe 1. Si aparece un solo as, el amigo B recibe 4 puntos y A ninguno. Si no aparece ningún as pero ambas cartas son del mismo palo, el amigo A recibe 3 puntos y B ninguno. En cualquier otro caso, ninguno recibe puntos.
Sean X e Y las puntuaciones de los amigos A y B respectivamente,

a) Construye la función de cuantía conjunta (función de probabilidad conjunta) para las puntuaciones de una partida
b) Calcula las funciones de cuantía marginales (funciones de probabilidad marginales)
c) Calcula la función de cuantía condicional (función de probabilidad condicional) $g_1(x|Y = 0)$

Solución:

a)

Y				
4	$\frac{\binom{4}{1}\binom{36}{1}}{\binom{40}{2}} = \frac{144}{780} = 0.1846$	0	0	
1	0	0	$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{6}{780} = 0.0077$	
0	$1 - \frac{144}{780} - \frac{144}{780} - \frac{6}{780} = \frac{486}{780} = 0.6231$	$\frac{\binom{9}{2}\binom{4}{1}}{\binom{40}{2}} = \frac{144}{780} = 0.1846$	0	
f(x,y)	**0**	**3**	**5**	***X***

b)

f₁(x)	$\frac{144}{780} + \frac{486}{780} = \frac{630}{780} = 0.8077$	$\frac{144}{780} = 0.1846$	$\frac{6}{780} = 0.0077$
X	**0**	**3**	**5**

4	$\frac{144}{780} = 0.1846$
1	$\frac{6}{780} = 0.0077$
0	$\frac{486}{780} + \frac{144}{780} = \frac{630}{780} = 0.8077$
Y	***$f_2(y)$***

c)

$$g_1(x|Y=0) = \frac{f(x,0)}{f_2(0)}$$

$g_1(x\|Y=0) = \frac{f(x,0)}{f_2(0)}$	$\frac{486}{780}\Big/\frac{630}{780} = 0.7714$	$\frac{144}{780}\Big/\frac{630}{780} = 0.2286$	$0\Big/\frac{630}{780} = 0$
X	**0**	**3**	**5**

3. (2'5 puntos). La concentración de dos componentes químicos en cierto compuesto viene dada por una variable bidimensional según la función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Determina si las variables X e Y son independientes
b) Calcula $Var(X-Y)$ de la forma: $Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$.
c) Calcula $E\left(2X^2 - 3Y^2 + \frac{1}{2}\right)$

Solución:

Todos los cálculos para Y son análogos.

a)

$$f_1(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}; \quad x \in [0,1]$$

$$f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(x)$$

Luego no son independientes.

b)

$$E(X) = \int_0^1 x f_1(x)\,dx = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = 7/12$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = 5/12$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = 0.0763\hat{8}$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xyf(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Y de ahí:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = -0.0069\hat{4}$$

$$Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = 0.0763\hat{8} + 0.0763\hat{8} - 2 \cdot (-0.0069\hat{4}) = 0.1\hat{6}$$

c)

$$E\left(2X^2 - 3Y^2 + \frac{1}{2}\right) = 2E(X^2) - 3E(Y^2) + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{5}{12} - 3 \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = 0.08\hat{3}$$

4. (2'5 puntos). Los 30 alumnos de una Escuela de Idiomas estudian inglés y francés. En las pruebas finales de estas materias se han obtenido los siguientes resultados: 18 han aprobado inglés, 14 han aprobado francés y 6 han aprobado los 2 idiomas.

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya aprobado inglés ni francés?
b) Se elige un estudiante al azar entre los aprobados de francés, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado inglés?

Solución:

I={aprobar inglés}; F={aprobar francés}

P(I) = 18/30=3/5=0,6; P(F)= 14/30=7/15=0,46666; P(I ⋂ F)= 6/30=1/5=0,2

a) $P(\bar{I} \cap \bar{F}) = 1 - P(I \cup F) = 1 - \left(P(I) + P(F) - P(I \cap F)\right) = 1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{7}{15} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}$= 0,133333

b)

$$P(I|F) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = \frac{3}{7} = 0,428$$

ESTADÍSTICA . . . . enero 2016

1. (2'5 puntos). Un grupo de seis estudiantes está formado por 2 chicas y 4 chicos. Uno de ellos ha aprobado Estadística y acompaña a sus amigos a la revisión del examen con el objetivo de "arañar" lo que sea.

a) Calcular la probabilidad de que el primero de los amigos en entrar a revisión sea una de las chicas
b) Si se produce el hecho de que el que entra el primero a revisar su examen resulta ser chica, calcular la probabilidad de que la otra chica sea la aprobada

Solución:

Sean los sucesos
A = {la aprobada es una chica}
B = {el aprobado es un chico}

P(A) =2/ 6 y P(B) = 4 / 6

a) Definimos el suceso C = {entra primero a revisión una chica}

P(C) = P (C / A) x P(A) + P (C / B) x P(B)

Donde P(C / A) = probabilidad de que entre a revisión una chica si la aprobada es chica = 1/5. (Solo una chica suspendida de cinco amigos).

Donde P(C / B) = probabilidad de que entre a revisión una chica si el aprobado es chico = 2/5. (Dos chicas suspendidas de cinco amigos).

Por tanto: P(C) = P (C / A) x P(A) + P (C / B) x P(B) = 1 /5 x 2/6 + 2 /5 x 4/6 =1/3

b) Aplicando el teorema de Bayes

P(A/C)= P(C/A) P(A) / P(C) = 1 /5 x 2/6 / 1/3 = 6/30 = 1/5

2. (2'5 puntos). Una empresa se dedica a la fabricación de placas. Cada placa está compuesta por una subpieza metálica tipo A, cuya longitud se distribuye normal de media 25 cm y desviación típica 2 cm, que se suelda sin solapamiento a otra subpieza tipo B con longitud distribuida normal de media 20 cm y desviación típica 2 cm. Ambas subpiezas se fabrican independientemente. La soldadura supone la pérdida de material con longitud distribuida normal de media 1 cm y desviación típica 1 cm, independiente de las anteriores. La placa es correcta si su longitud es de 44 ± 2 cm. Se pide:

a) Probabilidad de fabricar placas correctas
b) Un envío está compuesto por 5 placas escogidas al azar de entre las fabricadas. Un envío es correcto si al menos cuatro placas tienen las medidas adecuadas. Calcular la probabilidad de realizar envíos de placas correctos

Solución:

a) Definimos las variables

LA= longitud subpieza tipo A es N(25,2)

LB= longitud subpieza tipo B es N(20,2)

LP= longitud perdida de material es N(1,1)

Las 3 variables son independientes.

La longitud total de la placa será:

LT= LA+LB-LP

E(LT) = E(LA+LB-LP)= 25+20-1= 44

Var (LT) = Var(LA+LB-LP) = 4 + 4 +1=9

Con lo que LT es N(44, 3)

La placa es correcta si su longitud es de 44 ± 2 cm.

P(42<LT<46)= P(42-44/3<Z<46-44/3)=P(-2/3<Z<2/3)= Φ (2/3)- Φ (-2/3)= 2 Φ (2/3)-1=

2 Φ (0.67) -1= (2x0.7486)-1=0.4972=0.5

b)

X = número de placas correctas de 5
B (5,0.5)

P(envío correcto) = P(X≥4) = 1 – P(X<4) = 1- P(X≤3) =1 – 0.8125 = 0.1875

3. (2'5 puntos). Una empresa tiene unos gastos de 1000 euros a la semana si la proporción de artículos defectuosos que fabrica supera el 10%, mientras que dichos gastos desaparecen si el porcentaje de defectos es menor. Sabiendo que los ingresos fijos por las ventas semanales son de 13000 euros, y conociendo, además, que el porcentaje de artículos defectuosos es una variable aleatoria X definida entre 0 y 20 con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{200}x \;\; si\; 0 \leq x \leq 20$$

Calcular el beneficio esperado semanal.

Solución:

Beneficio=Ingreso-Gasto

B = I-G

E[B] = E[I-G]= I –E[G] = 13000- E[G]

Los Ingresos son fijos =13000 euros

El Gasto es una variable aleatoria definida como:

$$G = \begin{cases} 1000 & si\ x > 10 \\ 0 & si\ x < 10 \end{cases}$$

Siendo X= porcentaje semanal de artículos defectuosos

E[G]=0 P(X<10) + 1000 P(X>10)

$$E(G) = 0\int_0^{10} \frac{1}{200} x dx + 1000\int_{10}^{20} \frac{1}{200} x dx = \frac{1000}{200}\int_{10}^{20} x dx = \frac{10}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{10}^{20} = 750$$

E[B] = E[I-G]= I –E[G] = 13000- E[G] =13000-750=12250 euros

4. (2'5 puntos). Se lanza una moneda 3 veces y se definen las siguientes variables:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{Si sale cara en la primera tirada} \\ 1 & \text{Si sale cruz en la primera tirada} \end{cases}$$

Y = número de caras en las tres tiradas

Calcular:

a) La función de cuantía (probabilidad) conjunta de (*X*, *Y*)

b) Cov (*X*, *Y*)

Solución: Se tienen las funciones de cuantía

X	0	1
f_1	1/2	1/2

Y	0	1	2	3
f_2	1/8	3/8	3/8	1/8

Y		
3	1/8	0
2	2/8	1/8
1	1/8	2/8
0	0	1/8
	0	1	X

De las tablas se calcula la covarianza

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 1\cdot 1\cdot \frac{2}{8} + 1\cdot 2\cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

1. (2'5 puntos). La probabilidad de que un cliente compre un producto de la marca A es 0,6 mientras que la probabilidad de que compre un producto de la marca E es 0,5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre un producto de la marca E no habiendo comprado el producto de la marca A es 0,4.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado sólo el producto de la marca E?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado productos de ninguna de las dos marcas?

<u>Solución</u>:

A= compra producto de la marca A $\quad \bar{A}$ = no compra producto de la marca A

E = compra producto de la marca E $\quad \bar{E}$ = no compra producto de la marca E

P(A) = 0,6

$P(\bar{A})$=0,4

P(E) = 0,5

$P(E/\bar{A})$= 0,4

a) $P(E \cap \bar{A}) = P(\bar{A})P(E/\bar{A}) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{E}) = P(\bar{A})P(\bar{E}/\bar{A}) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$

$P(\bar{E}/\bar{A}) = 1 - P(E/\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$

2. (2'5 puntos). Sea *X* el número de iPhone 7 vendidos durante una semana en un Centro Comercial. La función de cuantía (función de probabilidad) de X es:

X	0	1	2	3	4
f(*x*)	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

El número *Y* de clientes que compra el IPhone con un seguro es:

$$Y = \begin{cases} 0 & si\ X = 0,1,2 \\ X - 2 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Calcular la función de cuantía (función de probabilidad) de la variable (*X*,*Y*)
b) ¿Son independientes *X* e *Y*?
c) Calcular la función de cuantía condicional (función de probabilidad condicional) $g_1(x/Y=1)$

Solución:

Solución: Y toma valores $\in \{0,1,2\}$. La cuantía conjunta es

Y \ X	0	1	2	3	4
2	0	0	0	0	0'15
1	0	0	0	0'25	0
0	0'1	0'2	0'3	0	0

La cuantía marginal de X es conocida y la de Y es

Y	0	1	2
f_2	0'6	0'25	0'15

Se observa que NO son independientes. La cuantía condicional es

$(X\|Y=1)$	0	1	2	3	4
g_1	0	0	0	1	0

El resultado era previsible pues si $Y=1$, necesariamente es $X=3$

3. (2'5 puntos). Un juego consiste en extraer una bola de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 rojas y 5 negras. Si la bola extraída es negra pierde lo apostado y finaliza el juego. Si es roja, recibe lo apostado y deja de jugar. Y, finalmente, si la bola extraída es blanca lanza una moneda, cobrando el doble de lo apostado si obtiene cruz, o cuatro veces lo apostado si sale cara. Si para jugar hay que pagar 1€ y el jugador juega 15 veces, ¿cuál será el posible beneficio o pérdida que tendrá?

Solución:

Sea X_i = {Beneficio de una jugada i}

x_i	$f(x_i)$
-1	$\frac{CF}{CP}=\frac{C_{5,1}}{C_{10,1}}=\frac{5}{10}$
0	$\frac{CF}{CP}=\frac{C_{3,1}}{C_{10,1}}=\frac{3}{10}$
-1+2 = 1	$\frac{C_{2,1}}{C_{10,1}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$
-1+4 = 3	$\frac{C_{2,1}}{C_{10,1}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$

El beneficio esperado tras las 15 veces que juega será: $E(X)=E(\sum_{i=1}^{15}X_i)=\sum_{i=1}^{15}E(X_i)=15\cdot E(X_i)$. Por tanto, hay que calcular $E(X_i)$:

$$E(X_i)=\sum_i x_i\cdot f(x_i)=(-1)\cdot\frac{5}{10}+0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{10}=-\frac{1}{10}$$

Por lo que el beneficio esperado tras las 15 jugadas será: $E(X)=15\cdot E(X_i)=15\cdot\frac{-1}{10}=-1'5$

4. (2'5 puntos). En un programa de televisión, se propone un juego al concursante que consiste en lo siguiente. Sabiendo que aproximadamente el 70% de la población no fuma, debe elegir 50 personas del público. Para ganar debe elegir una de las dos siguientes condiciones y que se cumpla:

a) El número de no fumadores que hay entre los elegidos es mayor de 30
b) Se va preguntando uno a uno a los elegidos y se tienen ya más de 10 fumadores. Teniendo en cuenta esto, no deben superarse los 18 fumadores

¿Cuál es la más probable que se cumpla?

Solución:

X = {NO FUMADORES} => X~B(50,0’7) ; Y = {FUMADORES} => Y~B(50,0’3)

a) ¿P(X > 30)?

$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30)$; como n=50, no se pueden utilizar las tablas de la Binomial. Aproximando por la Normal: $Z = \frac{X-E(X)}{+\sqrt{VAR(X)}} \sim N(0,1)$

$E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0'7 = 35$ y $VAR(X) = n \cdot p \cdot q = 50 \cdot 0'7 \cdot 0'3 = 10'5$

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = [Aprox.Normal] = 1 - P(Z \leq \frac{30-35}{+\sqrt{10'5}})$$
$$= 1 - \phi(\frac{-5}{3'24}) =$$
$$= 1 - \phi(-1'54) = 1 - [1 - \phi(1'54)] = \phi(1'54) = [Tablas] = 0'938220$$

b) ¿$P(Y \leq 18 \,/\, Y > 10)$?

$P(Y \leq 18 \,/\, Y > 10) = \frac{P(\,(Y \leq 18) \cap (Y > 10)\,)}{P(Y>10)} = \frac{P(10 < Y \leq 18))}{1-P(Y \leq 10)} = \frac{F(18) - F(10)}{1 - P(Y \leq 10)}$; como n=50, no se pueden utilizar las tablas de la Binomial.

Aproximando por la Normal: $Z = \frac{Y-E(Y)}{+\sqrt{VAR(Y)}} \sim N(0,1)$

$E(Y) = n \cdot p = 50 \cdot 0'3 = 15$ y $VAR(Y) = n \cdot p \cdot q = 50 \cdot 0'3 \cdot 0'7 = 10'5$

$$F(18) = P(Y \leq 18) = [Aprox.Normal] = P(Z \leq \frac{18-15}{+\sqrt{10'5}}) = \phi(\frac{3}{3'24}) =$$
$$= \phi(0'93) = [Tablas] = 0'823814$$

$$F(10) = P(Y \leq 10) = [Aprx.Normal] = P(Z \leq \frac{10-15}{+\sqrt{10'5}}) = \phi(\frac{-5}{3'24}) = 1 - \phi(\frac{5}{3'24}) =$$
$$= 1 - \phi(1'54) = [Tablas] = 1 - 0'938220 = 0'06178$$

Así pues, $P(Y \leq 18 \,/\, Y > 10) = \frac{F(18) - F(10)}{1 - P(Y \leq 10)} = \frac{0'823814 - 0'06178}{1 - 0'06178} = \frac{0'762034}{0'938220} = 0'81221$

Por tanto, la opción más probable es la ***a)***

1. (2'5 puntos). Sabemos que el 8% de las personas que entran en una tienda de Informática son mujeres jóvenes y que en esa misma tienda, de las mujeres que entran el 40% son jóvenes. Calcular la probabilidad de que si en la tienda tropezamos aleatoriamente con una persona, ésta sea un hombre.

Solución:

J= {ser joven}
M= {ser mujer}
H= {ser hombre}

Si P(M ∩ J)=0,08 y además P(J/M)=0,4

P(J/M)= P(M ∩ J)/P(M) = 0,08/P(M) → P(M) = 0,08/ 0,4 = 0, 2
P(M) = 0, 2

luego P(H)= 1- P(M) =1- 0,2 =0,8

2. (2'5 puntos). El número de coches que llegan a una gasolinera en una hora es por término medio de 3. Calcular la probabilidad de que, después de abrir, en cada una de las siguientes 3 horas lleguen más de dos coches por hora.

Solución:

X= número de coches que llega a la gasolinera en 1 hora
X se distribuye Poisson con parámetro λ= 3 X ~P(λ= 3)
P(lleguen más de dos coches en 1 hora) = P(X>2) = 1- P(X ≤ 2) = 1 – 0,4232 = 0,5768

Como tiene que ocurrir en cada una de las siguientes 3 horas (y son independientes):
P({lleguen más de dos coches en la primera hora} ⋂{lleguen más de dos coches en la segunda hora}⋂{lleguen más de dos coches en la tercera hora}) = $(0,5768)^3$ = 0,1919

3. (2'5 puntos). Sea una variable aleatoria bidimensional con la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = kxy, \text{ para } 2 \leq x \leq 4 \text{ y } 2 \leq y \leq 4$$

Se pide:

a) Calcular el valor de k.
b) Calcular las funciones de densidad marginales.
c) Calcular las funciones de densidad condicionales.
d) Calcular $P(2 < x \leq 3 \,/\, 1{,}5 < y \leq 3{,}75)$

Solución:

a)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_2^4\int_2^4 kxy\ dxdy = k\int_2^4 x\left[\int_2^4 y\ dy\right]dx =$$

$$= k\int_2^4 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_2^4 dx = k\int_2^4 x\cdot\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right)dx = k\int_2^4 \frac{12}{2}x\ dx =$$

$$= 6\cdot k\int_2^4 x\ dx = 6\cdot k\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = 6\cdot k\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right) = 6\cdot 6\cdot k = 36\cdot k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{36}$$

b)

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_2^4 \frac{1}{36}xy\ dy = \frac{1}{36}x\int_2^4 y\ dy = \frac{1}{36}x\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_2^4 =$$

$$= \frac{1}{36}x\cdot\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{36}\cdot\frac{12}{2}x = \frac{1}{6}x;\ 2\le x\le 4;\ 0\ en\ el\ resto.$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_2^4 \frac{1}{36}xy\ dx = \frac{1}{36}y\int_2^4 x\ dx = \frac{1}{36}y\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 =$$

$$= \frac{1}{36}y\cdot\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{36}\cdot\frac{12}{2}y = \frac{1}{6}y;\ 2\le y\le 4;\ 0\ en\ el\ resto.$$

c) Como son independientes porque $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y), para\ todo\ (x,y)$

$$g_1\left({}^{x}/_{y}\right) = f_1(x) = \frac{1}{6}x;\ 2\le x\le 4;\ 0\ en\ el\ resto.$$

y

$$g_2\left({}^{y}/_{x}\right) = f_2(y) = \frac{1}{6}y;\ 2\le y\le 4;\ 0\ en\ el\ resto.$$

d) Como son independientes porque $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y), para\ todo\ (x,y)$

$$P\left({}^{2<x\le 3}/_{y\le 3}\right) = P(2<x\le 3) = \int_2^3 f_1(x)\ dx = \int_2^3 \frac{1}{6}x\ dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_2^3 x\ dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5}{12}$$

4. (2'5 puntos). Un jugador lanza dos monedas. Gana 1€ ó 2 € si aparecen una o dos caras. Por otra parte pierde 5€ si no aparece cara. Determinar la ganancia esperada del juego.

Solución:

G = {GANANCIA DEL JUEGO} => Se pide E(G)

Ω = {(C,C);(C,X);(X,C);(X,X)} => CP = $VR_{2,2}=2^2=4$

Función de cuantía de G:

- Para:
  - G=+1 => UNA CARA => {(C,X),(X,C)} => CF=2
  - G=+2 => DOS CARAS => {(C,C)} => CF=1
  - G=-5 => NINGUNA CARA => {(X,X)} => CF=1

G	+1	+2	-5
f(G)=CF/CP	2/4	1/4	1/4

$$E(G) = \sum_i g_i \cdot f(g_i) = 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + (-5) \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$