UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Algunos aspectos de los prerradicales sobre retículas y su relación con las teorías de torsión

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A :

Juan Guillermo Sánchez Luna

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Frank Patrick Murphy Hernández
Cd. Mx. 2022

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Sánchez
Apellido materno	Luna
Nombre(s)	Juan Guillermo
Teléfono	7715258847
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	415077248
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Dr.
Nombre(s)	Frank Patrick
Apellido paterno	Murphy
Apellido materno	Hernández
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombre(s)	Valente
Apellido paterno	Santiago
Apellido materno	Vargas
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Luis Jesús
Apellido paterno	Turcio
Apellido materno	Cuevas
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Jaime Alejandro
Apellido paterno	García
Apellido materno	Villeda
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	M. en C.
Nombre(s)	José Juan
Apellido paterno	López
Apellido materno	Alvarado
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	Algunos aspectos de los prerradicales sobre retículas y su relación con las teorías de torsión
Número de páginas	112 p
Año	2022

Agradecimientos

A mis tíos, Américo y Antonieta, quienes
sin su apoyo y amor incondicional no
hubiese podido estudiar la universidad.

A mis colegas y maestros de la facultad, quienes
me ayudaron a crecer como matemático,
en especial al Mat. Fernando Cornejo, al
Dr. Raybel García y al Dr. Frank Murphy
quienes me ayudaron a encontrar mi
camino en la matemática.

A mis padres, a mi familia, a mis amigos y amigas de
toda la vida, quienes siempre han estado conmigo
y me han ayudado a salir adelante.

A todos los que me ayudaron, a los
que me ofrecieron su casa y comida
cuando no tenia nada.

Gracias

Índice general

Prefacio

Toma Albu introduce por primera vez, en el 2013, el concepto de la categoría de retículas modulares lineales, cuyos morfismos, llamados morfismos lineales, intentan evocar ciertas propiedades de los morfismos de módulos como lo es el primer teorema de isomorfismo de Noether que se da de manera natural en esta categoría.

A través de varios artículos Toma Albu estudia las propiedades de esta nueva categoría y define sobre esta la contra parte en retículas de un concepto de la teoría de módulos, el concepto de prerradical. Posteriormente investiga las aplicaciones que estos tienen en categorías de Grothendieck y en teorías de torsión hereditarias sobre un módulo, finaliza con las conexiones que hay entre los prerradicales de módulos y los prerradicales de retículas.

En México existe una extensa investigación sobre el tema de prerradicales, trabajos realizados por destacados investigadores entre los que se encuentran los doctores Francisco Raggi Cárdenas, José Ríos Montes, Hugo Alberto Rincón Mejía y Alejandro Alvarado García.

En esta tesis se presentan los aspectos esenciales de los prerradicales sobre retículas con la finalidad de estudiar sus aplicaciones en las categorías de Grothendieck y las teorías de torsión. Para concluir con un breve estudio de la relación entre los prerradicales sobre retículas y los prerradicales sobre módulos ([**6**] y [**1**]).

La tesis se encuentra dividida en 4 capítulos. El primer capítulo contiene todos los preliminares necesarios para esta tesis sobre la teoría de categorías y la teoría de retículas. El segundo capítulo expone la categoría de retículas modulares lineales; así mismo se presenta para toda categoría abeliana un funtor que va a la categoría de retículas modulares lineales, dicho funtor motiva la importancia del estudio de las retículas modulares en categorías abelianas. En el tercer capítulo se estudian los prerradicales en retículas modulares junto con algunos ejemplos bien conocidos de la teoría de módulos que tienen su contra parte en esta categoría. Finalmente, en el cuarto capítulo se estudia la conexión que hay con los prerradicales de módulos, construyendo dos nuevas categorías, una sobre categorías abelianas y otra sobre teorías de torsión hereditarias en módulos.

Lista de símbolos

$CMon$: La categoría de monoides conmutativos

Grp : La categoría de grupos

Ab : La categoría de grupos abelianos

Rng : La categoría de anillos

$1Rng$: La categoría de anillos unitarios

$R\text{-}Mod$: La categoría de módulos sobre un anillo R

$Copo$: La categoría de órdenes parciales

$BMLat$: La categoría de retículas modulares y acotadas

$Sub(A)$: La colección de subobjetos de A

LM : La categoría de retículas modulares lineales

LM_C : La subcategoría de retículas modulares lineales y completas

LM_U : La subcategoría de retículas modulares lineales y supremo continuas

LM_{cg} : La subcategoría de retículas modulares lineales y compactamente generadas

$\#A$: Cardinal del conjunto A

$\rightarrowtail$: Morfismo inyectivo/ Monomorfismo

$\twoheadrightarrow$: Morfismo suprayectivo/ Epimorfismo

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo y a lo largo de esta tesis se considerará que el lector ya tiene ciertas nociones de la teoría de categorías y la teoría de retículas, y está familiarizado con las notaciones de éstas.
De cualquier forma se enlistarán en este capítulo las notaciones y definiciones que se usarán regularmente, con el objetivo de que el lector consulte en cualquier momento esta información si así lo requiere.
El lector interesado en profundizar en la teoría de categorías puede consultar los libros **[15]**, **[16]** y **[10]**.

1.1. Teoría de Categorías

En esta sección se darán diferentes definiciones que caracterizan a diversos tipos de morfismos y se definen igual diversas propiedades universales que tienen ciertos objetos para poder construir una categoría abeliana.

Definición 1.

a. *Una* ***categoría*** $\mathcal{C} = (Ob, Arw, \circ)$ *consta de una colección de objetos, denotada como Ob, una colección de flechas (también llamados morfismos), denotada como Arw y una regla de composición entre la flechas que cumple ser asociativa y tener una flecha identidad para cada objeto.*

b. *Toda flecha f tiene asociados dos objetos $dom(f)$ y $cod(f)$. A la* ***colección de flechas o morfismos*** *entre dos objetos A, B de una categoría $\mathcal{C}$ la definimos como*
$$\mathcal{C}(A,B) = \{f : A \longrightarrow B \mid dom f = A\,;\, cod f = B\}.$$

c. *Sea $f \in \mathcal{C}(A,B)$. Entonces f es un* ***monomorfismo*** *si para todo par de flechas $g,h \in \mathcal{C}(C,A)$ tal que $fg = fh$, sucede que $g = h$.*

d. *Sea $f \in \mathcal{C}(A,B)$. Entonces f es un* ***epimorfismo*** *si para todo par de flechas $g,h \in \mathcal{C}(B,C)$ tal que $gf = hf$, sucede que $g = h$.*

e. *Sea $f \in \mathcal{C}(A,B)$. Entonces f es una* ***sección*** *si existe $g \in \mathcal{C}(B,A)$ tal que $gf = Id_A$.*

f. *Sea $f \in \mathcal{C}(A,B)$. Entonces f es una* ***retracción*** *si existe $g \in \mathcal{C}(B,A)$ tal que $fg = Id_B$.*

g. *Sea $f \in \mathcal{C}(A,B)$. Entonces f es un* ***bimorfismo*** *si es un monomorfismo y es un epimorfismo.*

h. *Sea $f \in \mathcal{C}(A,B)$. Entonces f es un* ***isomorfismo*** *si es una sección y una retracción.*

i. *$\mathcal{C}$ es una* ***categoría balanceada*** *si todo bimorfismo es un isomorfismo.*

Las implicaciones entre estos tipos de morfismos quedan expresadas en el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
Monomorfismo & & & & Epimorfismo \\
& & Bimorfismo \arrow[ull, Rightarrow] \arrow[urr, Rightarrow] & & \\
Seccion \arrow[uu, Rightarrow] & & & & Retraccion \arrow[uu, Rightarrow] \\
& & Isomorfismo \arrow[ull, Rightarrow] \arrow[urr, Rightarrow] \arrow[uu, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}
$$

Definición 2. *Una categoría $\mathcal{C}$ es* ***localmente pequeña*** *si para todo par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ pasa que $\mathcal{C}(A,B)$ es un conjunto.*

Ejemplo 3. *Sea $\mathcal{G} = \{G \mid G$ es un grupo abeliano$\}$, y dados $(G,*), (H,\star) \in Ob$ definace su colección de morfismos como:*

$$Hom(G,H) = \{f : A \longrightarrow B \mid \forall a,b \in G(f(a*b) = f(a) \star f(b))\}.$$

Sea $\mathcal{A} = \{Hom(G,H) \mid G,H \in \mathcal{G}\}$, entonces con estos objetos y la composición usual de funciones podemos definir la categoría de grupos abelianos como $Ab = (\mathcal{G}, \mathcal{A}, \circ)$. Además al ser sus objetos conjuntos, su colección de morfismos igualmente es un conjunto, es decir, Ab es una categoría localmente pequeña y también balanceada.

Ejemplo 4. *Sean $\mathcal{V} = \{OR, CAR\}$ la colección que contiene a las clases de los ordinales y cardinales, y $\mathcal{F}$ la colección de todas las funcionales entre estas clases, junto con la composición de funcionales se tiene una categoría que no es localmente pequeña ya que $\mathcal{F}$ no es un conjunto.*

1.1.1. Categorías Abelianas

Ahora se dará una serie de definiciones que al final se vincularán con el teorema de equivalencia de Freyd - Mitchell y se darán algunas consecuencias básicas en categorías abelianas.
El material correspondiente a esta sección puede ser consultado en **[13], [14] y [11]**.

Definición 5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría.*

a. *$0 \in \mathcal{C}$ es un* ***objeto inicial*** *si para todo $A \in \mathcal{C}$ pasa que*

$$\#\mathcal{C}(0, A) = 1.$$[1]

a^*. *$0 \in \mathcal{C}$ es un* ***objeto terminal*** *si para todo $A \in \mathcal{C}$ pasa que*

$$1 = \#\mathcal{C}(A, 0).$$

Un ***objeto cero*** *es un objeto inicial y terminal.*

b. *Sea $\mathcal{C}$ es una categoría con objeto cero y $A, B \in \mathcal{C}$. El* ***morfismo cero*** *de A en B, 0_{AB}, se define como el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "0_{AB}"] \arrow[dr, dashed] & & B \\
& 0 \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

c. *Sean $X \in \mathcal{C}$, $\{X_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{C}$ y $\{\pi_i : X \to X_i \mid i \in I\}$ una familia de morfismos en $\mathcal{C}$. (X, π_i) es el* ***producto*** *de la familia $\{X_i\}$, si para todo $Y \in \mathcal{C}$ y para toda familia $\{f_i : Y \to X_i \mid i \in I\}$ en $\mathcal{C}$, existe una única $f \in \mathcal{C}(Y, X)$ tal que $f_i = \pi_i f$, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_i"] & X_i \\
Y \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

[1]Si bien en principio $C(0, A)$ no es necesariamente un conjunto, en un abuso de notación, se usara el símbolo # para denotar a la cantidad de objetos en esta clase.

c*. *Sean $X \in \mathcal{C}$, $\{X_j \mid j \in I\} \subseteq \mathcal{C}$ y $\{i_j : X_j \to X \mid j \in I\}$ una familia de morfismos en $\mathcal{C}$. (X, i_j) es el* ***coproducto*** *de la familia $\{X_j\}$, si para todo $Y \in \mathcal{C}$ y para toda familia $\{f_j : X_j \to Y \mid j \in I\}$ en $\mathcal{C}$, existe una única $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ tal que $f_j = fi_j$, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "f"'] & X_j \arrow[l, "i_j"'] \arrow[dl, "f_j"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

d. *Sean $eq \in \mathcal{C}(E, A)$ y $f, g \in \mathcal{C}(A, B)$. $(E, eq : E \to A)$ es el* ***igualador*** *de f y g si $f \circ eq = g \circ eq$ y para todo otro par $(D, \alpha : D \to A)$, tal que $f \circ \alpha = g \circ \alpha$, implica que existe una única $\beta \in \mathcal{C}(D, E)$ tal que $\alpha = eq \circ \beta$. Esto es que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "eq"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ & D \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[ul, dashed, "\beta"] & \end{tikzcd}$$

El igualador de f y g se denotara como $Eq(f, g)$.

d*. *Sean $coeq \in \mathcal{C}(B, CE)$ y $f, g \in \mathcal{C}(A, B)$. $(CE, coeq : B \to CE)$ es un* ***coigualador*** *de f y g si $coeq \circ f = coeq \circ g$ y para todo otro par $(D, \alpha : B \to D)$, tal que $\alpha \circ f = \alpha \circ g$, implica que existe una única $\beta \in \mathcal{C}(CE, D)$ tal que $\alpha = \beta \circ coeq$. Esto es que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "coeq"] \arrow[d, "\alpha"'] & CE \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

El coigualador de f y g se denotara como $CoEq(f, g)$.

e. *Sean $\mathcal{C}$ con objeto cero y $f \in \mathcal{C}(A, B)$. El* ***núcleo*** *de f se define como:*

$$Nuc(f) = Eq(f, 0_{AB}).$$

e*. *Sean $\mathcal{C}$ con objeto cero y $f \in \mathcal{C}(A, B)$. El* ***conúcleo*** *de f se define como:*

$$CoNuc(f) = CoEq(f, 0_{AB}).$$

f. *Sean $f \in \mathcal{C}(A,B)$ y $u \in \mathcal{C}(I,B)$ un monomorfismo. (I,u) es la* ***imagen*** *de f si existe $\overline{f} \in \mathcal{C}(A,I)$ tal que $f = u\overline{f}$ y para todo par (J,v), tal que $v \in \mathcal{C}(J,B)$ sea un monomorfismo, exista $g \in \mathcal{C}(A,J)$ y $f = vg$, entonces existe una única $\alpha \in \mathcal{C}(I,J)$ tal que $u = v\alpha$. Es decir el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\overline{f}"'] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & B \\
& I \arrow[ur, "u"'] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & \\
& J \arrow[uur, bend right, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

A la imagen de f se le denotara como $Im(f)$.

f^*. *Sean $f \in \mathcal{C}(A,B)$ y $u \in \mathcal{C}(A,CI)$ un epimorfismo. (CI,u) es la* ***coimagen*** *de f si existe $\overline{f} \in \mathcal{C}(CI,B)$ tal que $f = \overline{f}u$ y para todo par (CJ,v), tal que $v \in \mathcal{C}(A,CJ)$ sea un epimorfismo, exista $g \in \mathcal{C}(CJ,B)$ y $f = gv$, entonces existe una única $\alpha \in \mathcal{C}(CJ,CI)$ tal que $u = \alpha v$. Es decir el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & B \\
& CI \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \\
& CJ \arrow[u, dashed, "\alpha"] \arrow[uur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

A la coimagen de f se le denotara como $CoIm(f)$.

g. *Una categoría con objeto cero es* ***normal*** *si todo monomorfismo es núcleo de algún morfismo.*

g^*. *Una categoría con objeto cero es* ***conormal*** *si todo epimorfismo es conúcleo de algún morfismo.*

Ahora que ya se tienen todas estas definiciones se puede dar la definición de categoría abeliana.

Definición 6. *Una categoría $\mathcal{C}$ es* ***pre aditiva*** *si*

a. *$\mathcal{C}$ tiene objeto cero.*

b. *Para todo $A, B \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}(A,B)$ es un grupo abeliano.*

c. *La composición es $\mathbb{Z}$-bilineal, esto es, que para toda f, $g \in \mathcal{C}(A,B)$ y para toda $h \in \mathcal{C}(B,C)$, $h' \in \mathcal{C}(D,A)$ se tiene que $h(f+g) = hf + hg$ y $(f+g)h' = fh' + gh'$.*

Definición 7. *Una categoría $\mathcal{C}$ es **aditiva** si es pre aditiva y tiene todos los productos y coproductos finitos.*

Definición 8. *Una categoría $\mathcal{C}$ es **pre abeliana** si es aditiva y todo morfismo tiene núcleo y conúcleo.*

Definición 9. *Una categoría $\mathcal{C}$ es **abeliana** si es pre abeliana, es normal y conormal.*

Definición 10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría normal y conormal, con núcleos y conúcleos. $\mathcal{C}$ es una categoría **exacta** si todo morfismo $f \in \mathcal{C}(A,B)$ se factoriza de la forma $f = uq$ con u monomorfismo y q epimorfismo.*

Ejemplo 11. *Considere la categoría de grupos abelianos Ab, esta es una categoría abeliana con $\mathbb{Z}$ como objeto cero y la suma directa como biproducto.*

Ejemplo 12. *Sea R un anillo conmutativo y considere la categoría de módulos sobre ese anillo, R-Mod, entonces esta es una categoría abeliana con R como objeto cero y la suma directa como biproducto.*

Teorema 13. ***Equivalencia de Freyd***
Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Son equivalentes:

a. *$\mathcal{C}$ es abeliana.*

b. *$\mathcal{C}$ es exacta, aditiva y tiene productos finitos.*

c. *$\mathcal{C}$ es normal, conormal, tiene núcleos, conúcleos y tiene biproductos finitos.*

d. *$\mathcal{C}$ es normal, conormal, tiene pullbacks y pushouts.* [2]

Para una demostración ver Teorema 20.1 en pág.33 de [**16**].

[2]el pullback y pushout serán definidos más adelante cuando se ocupen en la sección 2.4.

Proposición 14. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero, núcleos y conúcleos. Son equivalentes:*

a. *$\mathcal{C}$ es normal y conormal.*

b. *Para todo morfismo f en $\mathcal{C}$ se tiene que $CoNuc(Nuc(f)) \cong Nuc(CoNuc(f))$.*

Demostración. Se deduce de la Proposición 2.4 en la pág.84 y de la Definición de la pág. 87 en [19]. □

Proposición 15. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero, núcleos y conúcleos. Sea $f \in \mathcal{C}(A, B)$*

a. *Si $\mathcal{C}$ es normal, entonces para todo morfismo f en $\mathcal{C}$ se tiene que $Im(f) \cong Nuc(CoNuc(f))$.*

b. *Si $\mathcal{C}$ es conormal, entonces para todo morfismo f en $\mathcal{C}$ se tiene que $CoIm(f) \cong CoNuc(Nuc(f))$.*

Demostración. Se deduce nuevamente de la Definición de la pág. 87 en [19], al igual que de la Proposición 1 en la pág.199 de [15]. □

1.2. Teoría de Retículas

En esta sección se dan todas las definiciones pertinentes sobre diversas estructuras que se pueden construir a partir de un orden parcial, se dan ciertas relaciones entre las categorías que construyen estas estructuras y se habla brevemente de las retículas compactamente generadas.

Definición 16.

a. *Una **semi retícula superior**, o $\vee$-semi retícula, $(L, \leq, \vee)$ es un conjunto parcialmente ordenado donde existe una operación binaria definida, llamada supremo, para cualquier subconjunto finito de L, que cumple ser asociativa, conmutativa e idempotente. La colección de morfismos que preservan estructura es:*

$$\vee - SLat(A, B) = \{f \in Copo(A, B) \mid \forall a, b \in A(f(a \vee b) = f(a) \vee f(b))\}.$$

Se denotará a la categoría de todas las semi retículas superiores como $\vee$-$SLat$.

b. *Una* ***retícula*** $(L, \leq, \vee, \wedge)$ *es un conjunto parcialmente ordenado donde existen dos operaciones binarias definidas, llamadas supremo e ínfimo, para cualquier subconjunto finito de* L*, que cumplen ambas con las condiciones mencionadas en el punto anterior. La colección de morfismos que preservan estructura es:*

$$Lat(A, B) = \{f \in Copo(A, B) \mid \forall a, b \in A \\ (f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)\ ;\ f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b))\}.$$

Se denotará a la categoría de todas las retículas como Lat*.*

Definición 17.

a. *Una retícula* L *es* ***acotada*** *si existen* $\bigvee L$ *y* $\bigwedge L$*, a los cuales se denotará como* $\bigvee L = 1_L$, $\bigwedge L = 0_L$*. La colección de morfismos que preservan estructura es:*

$$BLat(A, B) = \{f \in Lat(A, B) \mid f(0_A) = 0_B\ ;\ f(1_A) = 1_B\}.$$

Se denotará a la categoría de todas las retículas acotadas como $BLat$*.*

b. *Una retícula* L *es* ***completa*** *si para todo* $S \subseteq L$ *existen* $\bigvee S$ *y* $\bigwedge S$*. La colección de morfismos que preservan estructura es:*

$$CLat(A, B) = \{f \in Lat(A, B) \mid \forall S \subseteq L((\bigvee S) = \bigvee f(S))\}.$$

Se denotará a la categoría de todas las retículas completas como $CLat$*.*

Definición 18.

a. *Una retícula* L *es* ***modular*** *si para todo* $a, b, c \in L$ *tal que* $a \leq c$*, se cumple que* $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$*. Esto se conoce como ley modular. La colección de morfismos que preservan estructura es la misma que en la categoría* Lat*.*
Se denotará a la categoría de todas las retículas modulares como $MLat$*.*

b. *Una retícula* L *es* ***distributiva*** *si para todo* $a, b, c \in L$ *se tiene que* $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$*. La colección de morfismos que preservan estructura es la misma que en* $MLat$ *y por lo tanto la misma que* Lat*.*
Se denotará a la categoría de todas las retículas distributivas como $DLat$*.*

Definición 19.

a. Sea $L \in BLat$. Un elemento $c \in L$ es un pseudo complemento de $a \in L$ si $a \wedge c = 0$ y c es maximal respecto a esta propiedad.
*Una retícula L es **pseudo complementada** si para todo $a \in L$ existe un pseudo complemento $b \in L$ de b . La colección de morfismos que preservan estructura es la misma que en $BLat$.*
Se denotará a la categoría de todas las retículas pseudo complementadas como ${}^{ps}Lat$.

*b. Una retícula L es **complementad**a si para todo $a \in L$ existe $a^c \in L$ tal que $a \vee a^c = 1_L$ y $a \wedge a^c = 0_L$. La colección de morfismos que preservan estructura es:*

$$ {}^{c}Lat(A, B) = \{f \in Lat \mid \forall a \in L(f(a^c) = (f(a)^c))\}. $$

Se denotará a la categoría de todas las retículas complementadas como ${}^{c}Lat$.

Definición 20.

*a. Una retícula L es un **marco** si $L \in CLat$ y para todo $x \in L$, para todo $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq L$ pasa que:*

$$ x \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I}(x \wedge x_i). $$

La colección de morfismos que preservan estructura es la misma que en $CLat$. Se denotará a la categoría de todos los marcos como Frm. Note que todo marco es en automático una retícula distributiva.

*b. Una retícula L es una **álgebra booleana** si $L \in DLat$ y $L \in^c Lat$. La colección de morfismos que preservan estructura es la misma que en ${}^{c}Lat$.*
Se denotará a la categoría de todas las álgebras booleanas como Boo.

Observación 21. *Note que casi todas estas categorías son subcategorías de otras, en particular se puede ver que $DLat$ es subcategoría plena de $MLat$, que a su vez es subcategoría plena de Lat.*

Toda esta información, junto con las distintas relaciones que hay entre estas categorías queda sintetizada en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & \vee - SLat & & \\
 & & Lat \arrow[u] & & \\
BLat \arrow[urr] & & MLat \arrow[u] & & {}^{ps}Lat \arrow[ull] \\
 & LM \arrow[ul] \arrow[ur] & & & \\
CLat \arrow[uu] & & DLat \arrow[uu] & & {}^{c}Lat \arrow[uu] \\
 & Frm \arrow[ul] \arrow[ur] & & Boo \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & & CBoo \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Aquí aparece una categoría nueva que es la categoría de retículas modulares lineales, LM, la cual se construirá mas adelante y será de gran importancia.

Ejemplo 22.

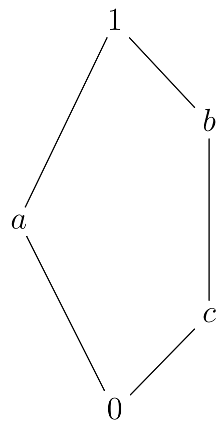
a. *La potencia de cualquier conjunto con la contención como relación, la unión e intersección de conjuntos como supremo e ínfimo,* $(\mathcal{P}(A), \subseteq, \cap, \cup)$*, forma una retícula acotada y distributiva. Más aún si el conjunto es finito, entonces se tiene una álgebra booleana completa.*

b. *Los números naturales con su orden usual y las operaciones máximo y mínimo,* $(\mathbb{N}, \leq, max, min)$*, forman una retícula acotada inferiormente pero no superiormente.*

c. *Los números enteros con la divisibilidad, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo como ínfimo y supremo respectivamente,* $(\mathbb{Z}, |, mcd, mcm)$*, forman una retícula.*

d. *Toda topología con la contención forma una retícula acotada y distributiva.*

e. El pentágono N_5:



Es una retícula no modular.

El lector interesado en profundizar en la teoría de retículas podrá consultar [**18**].

Por último se mencionará algunas observaciones que serán útiles en el siguiente capítulo.

Observación 23. *Si f es un isomorfismo de órdenes parciales y sobre estos se pueden construir retículas, entonces f es automáticamente un isomorfismo de retículas, esto es, que los isomorfismos en la categoría Lat coinciden con los isomorfismos en la categoría Copo.*

Definición 24. *Sean $L \in Lat$ y $a, b \in L$ tal que $a \leq b$. El* ***cociente de*** *b* ***con*** *a se define como:*

$$b/a := \{x \in L | a \leq x \leq b\}.$$

Note que si L es acotada se puede ver como $L = 1_L/0_L$.

Proposición 25. *Sean $L, L' \in BLat$ y $f \in Lat(L, L')$, si f es suprayectiva, entonces $f \in BLat(L, L')$, esto es, $f(1) = 1'$ y $f(0) = 0'$.*

Demostración.
Sea f suprayectiva, entonces para todo $a' \in L'$ existe $a \in L$ tal que $f(a) = a'$ y $1' \in L'$. Entonces existe $a \in L$ tal que $f(a) = 1'$ y $a \leq 1$ por lo que $f(a) \leq f(1)$ y $1' = f(a) \leq f(1) \in L'$. Por lo tanto $f(a) = f(1)$ y $1' = f(1)$.

Por otro lado, $0' \in L'$, por lo que existe $b \in L$ tal que $f(b) = 0'$ y $0 \leq b$, entonces $f(0) \leq f(b) = 0'$. Por lo tanto $f(0) = f(b)$ y $0' = f(0)$.
Con esto se concluye que $f \in BLat(L, L')$. $\square$

Por último cabe mencionar que si f no es suprayectiva entonces f no necesariamente cumple que $f(1) = 1'$ y $f(0) = 0'$. Por ejemplo considere el morfismo entre las retículas $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 3]$ tal que $f(x) = x + 1$.

1.2.1. Retículas compactamente generadas

A continuación se enunciarán algunos resultados importantes sobre este tipo de retículas los cuales serán de gran importancia más adelante cuando se definan los prerradicales en retículas.

El lector interesado podrá consultar las demostraciones de los siguientes resultados en el libro de Bo Stenström, *Rings of Quotients* [19].

Definición 26.

a. *Sea $L \in MLat$, L es* ***supremo continuo*** *si $L \in CLat$ y para todo $S \subseteq L$ subconjunto dirigido, para todo $a \in L$, se cumple que:*

$$a \wedge (\bigvee S) = \bigvee \{a \wedge s | s \in S\}.$$

b. *Sean $L \in BLat$ y $c \in L$. Se dice que c es un* ***elemento compacto*** *si siempre que $c \leq \bigvee\limits_{x \in A} x$, para un subconjunto A de L, existe un subconjunto finito F de A tal que $c \leq \bigvee\limits_{x \in F} x$.*

c. *L es* ***compactamente generada*** *si $L \in CLat$ y para todo $x \in L$ existe A una familia de compactos de L tal que $x = \bigvee A$.*

d. *Sean $L \in BLat$ y $a \in L$. Se dice que a es un* ***átomo*** *si $a \neq 0$ y $a/0 = \{0, a\}$, es decir, a es minimal en $L \backslash \{0\}$.*

e. *L es* ***localmente atómica*** *si todo elemento de L es un supremo de átomos.*

f. *Sean $L \in BLat$ y $e \in L$. Se dice que e es un* ***elemento esencial*** *si para todo $x \neq 0$ pasa que $e \wedge x \neq 0$.*

Ejemplo 27. *Sea R un anillo y $M \in R$-Mod. La retícula de submódulos de M, $Sub(M)$, es supremo continua. Sus elementos compactos son los submódulos finitamente generados de M, por lo $Sub(M)$ es compactamente generada.*
$Sub(M)$ es localmente atómica si M es semi simple.

Ejemplo 28. *Sea A un conjunto, la potencia de A, $\mathcal{P}(A)$, es supremo continua y localmente atómica.*

Lema 29. *Si $a, b \in L$ son elementos compactos, entonces $a \vee b$ es un elemento compacto.*

Demostración. Ver Lemma 5.2 en pág.73 de [19]. □

Proposición 30. *Si L es compactamente generada, entonces L es supremo continuo.*

Demostración. Ver Proposición 5.3 en pág.73 de [19]. □

Proposición 31. *Si L es localmente atómica, supremo continuo y modular, entonces L es complementada.*

Demostración. Ver Proposición 5.4 en pág.73 de [19]. □

Teorema 32. *Sea $L \in BMLat$.[3] Son equivalentes:*

a. L es compactamente generada y localmente atómica.

b. L es compactamente generada y complementada.

c. L es supremo continuo y localmente atómica.

Demostración. Ver Proposición 5.5 en pág.74 de [19]. □

Proposición 33. *Si L es supremo continuo, entonces todo átomo es compacto.*

Demostración. Ver Proposición 5.6 en pág.74 de [19]. □

Proposición 34. *Si L es supremo continuo y modular, entonces L es pseudo complementada.*

Demostración. Ver Proposición 6.3 en pág.74 de [19]. □

Proposición 35. *Si c es un pseudo complemento de a en L, entonces $a \vee c$ es un elemento esencial en L.*

Demostración. Ver Proposición 6.4 en pág.75 de [19]. □

[3] Con $BMLat$ se refiere a la categoría de retículas acotadas y modulares.

Capítulo 2

La Categoría de Retículas Modulares Lineales

En este capítulo se define el principal objeto de estudio de esta tesis, los morfismos lineales y la categoría que definen: LM. Además de mostrar algunas de las propiedades de estos morfismos y de la nueva categoría, como lo son los teoremas de isomorfismo, y se finalizará construyendo el funtor de subobjetos que muestra una conexión entre cierto tipo de categorías abelianas y LM.
Este capítulo toma varios resultados del articulo de Toma Albu y Mihai Iosif: *The category of linear modular lattices* [6].

2.1. Morfismos Lineales

Ahora se definirá el concepto de morfismo lineal, que evoca una propiedad importante de los morfismos de módulos, la propiedad de poseer un **núcleo** y satisfacer el **Primer Teorema de Isomorfismo**.
Con esto se verá una importante relación entre la categoría que se construirá más adelante, LM, y las categorías abelianas, en particular las categorías de módulos sobre un anillo.

Definición 36. *Sean $L, L' \in BLat$ y $f : L \longrightarrow L'$ una función, no necesariamente un morfismo de retículas. Se dice que f es un **morfismo lineal** si existe $k \in L$ tal que:*

a. Para todo $x \in L$, $f(x) = f(x \vee k)$.

b. f induce un isomorfismo entre retículas, $\widetilde{f} : 1/k \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow a'/0'$ con $f(1) = a'$, donde $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in 1/k$.

A k se le llamará el núcleo de la función f.

Una observación importante es que $1/k$ y $a'/0'$ siempre son retículas acotadas. Más aún , si L, L' son modulares entonces $1/k$, $a'/0'$ también lo son.

Proposición 37. *Para M un R-módulo, $Sub(M)$ denotará su retícula de submódulos. Sea $\varphi \in R\text{-}Mod(M, M')$, considere $f_\varphi : Sub(M) \longrightarrow Sub(M')$ definida como $f_\varphi(N) = \varphi(N)$. Entonces f_φ es morfismo lineal con núcleo $k = Nuc\varphi$.*

Demostración.
Sean $N, N' \in Sub(M)$. Primero se recuerda que el supremo en la retícula de submódulos es la suma de submódulos, es decir, $N \vee N' = N + N'$. Entonces:

$$f_\varphi(N \vee k) = \varphi(N+k) = \varphi(N)+\varphi(k) = \varphi(N)+\varphi(Nuc\varphi) = \varphi(N)+\{0\} = \varphi(N) = f_\varphi(N).$$

Por último se quiere que exista un isomorfismo $\widetilde{f_\varphi}$ entre M/k y $f_\varphi(M)/\{0\}$, pero note que esto se da de inmediato ya que:

$$M/k = M/nuc\varphi \quad \text{y} \quad f_\varphi(M)/\{0\} = Imf_\varphi/\{0\} = Imf_\varphi.$$

y por el primer teorema de isomorfismo se tiene que $M/nuc\varphi \cong Imf_\varphi$. $\square$

Proposición 38. *Sean $L \in BLat$ y $a, b \in L$ tal que $a \leq b$. Se define la proyección canónica $p : b/0 \longrightarrow b/a$ como $p(x) = x \vee a$, para todo $x \in b/0$. Entonces p es morfismo lineal con núcleo $k = a$. Note que b/a es una subretícula de $b/0$.*

Demostración.
Sea $x \in b/0$, entonces:

$$p(x \vee k) = (x \vee k) \vee a = (x \vee a) \vee a = x \vee a = p(x).$$

Luego, se quiere un isomorfismo $\widetilde{p}$ entre $b/k = b/a$ y $p(b)/a = (b \vee a)/a = b/a$. Sean $x, y \in b/a$ tal que que $\widetilde{p}(x) = \widetilde{p}(y)$, entonces $x \vee a = y \vee a$. Como $x, y \in b/a$ se tiene que $a \leq x, y$ y $x \vee a = x$, $y \vee a = y$. Por lo tanto $x = y$ y $\widetilde{p}$ es inyectiva.

Por último:

$$Im(\widetilde{p}) = \{p(x)|x \in b/a\} = \{x \vee a|x \in b/a\} = \{x|x \in b/a\} = b/a.$$

Por tanto $\widetilde{p}$ es suprayectiva y por lo tanto un isomorfismo. $\square$

Este morfismo es el equivalente en retículas de la proyección canónica de un módulo M en su módulo cociente M/N, donde N es cualquier submódulo de M.

Proposición 39. *Sean* $L \in BMLat$ *y* $a, b \in L$ *tal que* $a \wedge b = 0$. *Se define* $q : (a \vee b)/0 \to a/0$ *como* $q(x) = (x \vee b) \wedge a$. *Entonces* q *es un morfismo lineal con núcleo* $k = b$.

Demostración.
Considere $p : (a \vee b)/0 \to (a \vee b)/b$ la proyección canónica construida en la Proposición anterior y considere el morfismo de $f : (a \vee b)/b \to a/0$ definido como $f(x) = x \wedge a$. El morfismo f resulta ser un isomorfismo con inversa $g : a/0 \to (a \vee b)/b$ definida como $g(x) = x \vee b$, lo cual se muestra a continuación. Sea $x \in (a \vee b)/b$, entonces:

$$gf(x) = g(x \wedge a) = (x \wedge a) \vee b = x \wedge (a \vee b) = x.$$

Esto dado que $b \leq x \leq a \vee b$ y utilizando la ley modular. Por otro lado, sea $x \in a/0$, entonces se tiene:

$$fg(x) = f(x \vee b) = (x \vee b) \wedge a = x \vee (b \wedge a) = x \vee 0 = x.$$

Esto nuevamente dado que por hipótesis $a \wedge b = 0$ y por la ley modular.

Así f es un isomorfismo y por tanto un morfismo lineal.
Con lo cual definimos a q como la composición de los morfismos anteriores, es decir, $q = f \circ p$, y por lo tanto es morfismo lineal. [1] □

Este morfismo es el equivalente en retículas de la proyección canónica del coproducto de dos módulos en uno de ellos, $M \oplus M' \to M$.

Proposición 40. *Sean* $L \in BLat$ *y* $a, b \in L$ *tal que* $a \leq b$. *Se define la inclusión canónica* $i : b/a \longrightarrow b/0$ *como* $i(x) = x$, *para todo* $x \in b/a$. *Entonces* i *es morfismo lineal con núcleo* $k = 0$.

Demostración.
Esto es bastante inmediato dado el comportamiento de la inclusión. Primero se tiene que:

$$i(x \vee k) = i(x \vee 0) = i(x).$$

Luego, se quiere un isomorfismo $\widetilde{i}$ entre $b/k = b/0$ e $i(b)/0 = b/0$, el cual es automáticamente inyectivo y suprayectivo. □

Nuevamente este morfismo es el equivalente en retículas de la inclusión canónica en módulos.

[1] El hecho de que la composición de morfismos lineales sea a su vez un morfismo lineal se demostrará en breve al inicio de la sección 2.2.

Como se menciona antes, en un principio un morfismo lineal f no tiene porqué ser un morfismo de retículas, pero se verá a continuación que esta definición forzará a que f preserve cierta estructura.

Proposición 41. *Sean $L, L' \in BLat$ y $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal con núcleo k. Entonces para todo $x, y \in L$ se tiene que $f(x) = f(y)$ si y sólo si $x \vee k = y \vee k$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sean $x, y \in L$; supóngase que $f(x) = f(y)$. Entonces $f(x \vee k) = f(y \vee k)$. Se tiene que, $x \vee k$, $y \vee k \in 1/k$, por lo cual $\widetilde{f}(x \vee k) = \widetilde{f}(y \vee k)$. Como $\widetilde{f}$ es un isomorfismo, y en particular es inyectivo, pasa que $x \vee k = y \vee k$.

$\Leftarrow$) Si $x \vee k = y \vee k$, entonces:

$$f(x) = f(x \vee k) = f(y \vee k) = f(y).$$

$\square$

Proposición 42. *Sean $L, L' \in BLat$ y $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal con núcleo k, entonces $f(k) = 0'$ y k es el mayor elemento con esta propiedad, esto es:*

$$k = Max(\{a \in L | f(a) = 0'\}).$$

Demostración.
Recuerde de la sección anterior que si $f \in Lat$ es suprayectiva entonces preserva las cotas, y $\widetilde{f}$ es un isomorfismo, entonces $\widetilde{f}(k) = f(k) = 0'$.
Sea $a \in L$ tal que $f(a) = 0'$, entonces $f(a) = f(k)$. Por la Proposición anterior se tiene que $a \vee k = k \vee k = k$, lo que implica que $a \leq k$.
Por lo tanto $k = \bigvee\{a \in L | f(a) = 0'\}$. $\square$

Proposición 43. *Sean $L, L' \in BLat$ y $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal con núcleo k. Si $f(a) = 0'$, entonces f induce un morfismo lineal $h : 1/a \longrightarrow L'$ tal que $h = f|_{1/a}$.*

Demostración. :
Si $f(a) = 0'$, entonces $a \leq k$. Sean $p : 1/a \longrightarrow 1/k$ e $i : a'/0' \longrightarrow L'$ los morfismos de proyección e inclusión canónica, y $h := i \circ \widetilde{f} \circ p$. Entonces:

$$h(x) = (i \circ \widetilde{f} \circ p)(x) = i(\widetilde{f}(p(x))) = i(\widetilde{f}(x \vee k)) = \widetilde{f}(x \vee k) = f(x \vee k) = f(x).$$

Por lo tanto h es morfismo lineal con núcleo k. $\square$

Proposición 44. *Sean $L, L' \in BLat$ y $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal con núcleo k, entonces para todo $x, y \in L$ se tiene que $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.*

Demostración.
Sean $x, y \in L$ y note que $x \vee k$, $y \vee k \in 1/k$. Entonces se tiene que:

$$f(x \vee y) = f(x \vee y \vee k \vee k) = f((x \vee k) \vee (y \vee k)) = \widetilde{f}((x \vee k) \vee (y \vee k)).$$

y $\widetilde{f} \in Lat$, entonces:

$$\widetilde{f}((x \vee k) \vee (y \vee k)) = \widetilde{f}(x \vee k) \vee \widetilde{f}(y \vee k) = f(x \vee k) \vee f(y \vee k) = f(x) \vee f(y).$$

Por lo tanto $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$. $\square$

Proposición 45. *Sean $L, L' \in BLat$ y $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal con núcleo k, entonces para todo $x, y \in L$, si $x \leq y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$.*

Demostración.
Sean $x, y \in L$ tal que $x \leq y$, entonces $f(y) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \geq f(x)$.
Por lo tanto $f(x) \leq f(y)$. $\square$

Proposición 46. *Sean $L, L' \in BLat$ y $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal con núcleo k. Entonces $f(0) = 0'$.*

Demostración.
Como $0 \leq k$, entonces $0' \leq f(0) \leq f(k) = 0'$. Por lo tanto$f(0) = 0'$. $\square$

Con esto se puede deducir dos cosas importantes, la primera es que si f es un morfismo lineal entonces automáticamente f será un morfismo de semi retículas superiores, es decir, $f \in \vee\text{-}SLat$. Lo segundo que se puede decir es que, por la Proposición 42, el conjunto de elementos que colapsan a $0'$ queda determinado por la siguiente retícula:

$$\{a \in L | f(a) = 0'\} = k/0 = \{a \in L | 0 \leq a \leq k\}.$$

Lema 47. *Sean $L, L' \in BMLat$ y $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal con núcleo k. Entonces:*

a. f conmuta con supremos arbitrarios, es decir, si $\{x_i | i \in I\} \subseteq L$ y existen $\bigvee_{i \in I} x_i$ en L y $\bigvee_{i \in I} f(x_i)$ en L', entonces $f(\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} f(x_i)$.

b. f preserva cocientes, es decir, para todo $x, y \in L$ tal que $x \leq y$, se tiene que $f(y/x) = f(y)/f(x)$.

Demostración.

a. De manera análoga a la Proposición 44 se tiene que:

$$\begin{aligned} f(\bigvee_{i\in I} x_i) &= f((\bigvee_{i\in I} x_i) \vee k) \\ &= f(\bigvee_{i\in I} (x_i \vee k)) \\ &= \widetilde{f}(\bigvee_{i\in I} (x_i \vee k)) \\ &= \bigvee_{i\in I} \widetilde{f}(x_i \vee k) \\ &= \bigvee_{i\in I} f(x_i \vee k) \\ &= \bigvee_{i\in I} f(x_i). \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} f(x_i)$.

b. Considere los morfismos canónicos y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & L' \\ 1/k \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & f(1)/0' \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Primero se verá que p preserva intervalos. Como p es monótona se tiene que $p(y/x) \subseteq p(y)/p(x)$. Sea $a \in p(y)/p(x)$, entonces:

$$x \vee k \leq a \leq y \vee k \quad \text{y} \quad x \leq (x \vee k) \wedge y \leq a \wedge y \leq (y \vee k) \wedge y = y.$$

por lo cual $a \wedge y \in y/x$ y $k \leq a$. De lo que se sigue que:

$$a = a \wedge (y \vee k) = (a \wedge y) \vee k = p(a \wedge y) \in p(y/x).$$

Esto último por la propiedad modular.
Por lo tanto $p(y)/p(x) \subseteq p(y/x)$ y $p(y)/p(x) = p(y/x)$. Luego, se tiene que :

$$f(y)/f(x) = \widetilde{f}(p(y))/\widetilde{f}(p(x)) = \widetilde{f}(p(y)/p(x)) = \widetilde{f}(p(y/x)) = f(y/x).$$

$\square$

2.2. La Categoría LM

Con la información de la sección anterior se tiene todo lo necesario para construir la categoría que se busca, cuyos objetos son retículas modulares lineales y las flechas son los morfismos lineales. En esta sección además se probarán algunas propiedades importantes que posee esta nueva categoría.

Lema 48. *Sean $L, L', L'' \in BLat$, $x \in L$ y $f : L \longrightarrow L'$, $g : L' \longrightarrow L''$ morfismos lineales con núcleos k y k'. Si $L' \in MLat$. Entonces $g \circ f$ es un morfismo lineal.*

Demostración.
Se definen los siguientes elementos como:

$$\begin{aligned} a' :=& f(1) \\ b' :=& k' \wedge a' \in L' \\ x' :=& f(x) \in L' \\ y' :=& \widetilde{f}^{-1}(b') \in L \\ a'' :=& g(1') \end{aligned}$$

Con lo cual se propone a y' como el núcleo de gf.

$$\begin{aligned} (gf)(x \vee y') &= g(f(x) \vee f(y')) = g(x' \vee b') = g(x' \vee (k' \wedge a')) = g((x' \vee k') \wedge a') \\ &\leq g(x' \vee k') \wedge g(a') \leq g(x' \vee k') = g(x') = g(f(x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(gf)(x \vee y') \leq (gf)(x)$. Y por otro lado:

$$g(f(x)) \leq g(f(x)) \vee g(f(y')) = g(f(x) \vee f(y')) = g(f(x \vee y')) = (gf)(x \vee y').$$

Por lo tanto $(gf)(x) \leq (gf)(x \vee y')$, y así para todo $x \in L$ se tiene que $(gf)(x) = (gf)(x \vee y')$.

Luego, se quiere construir un isomorfismo entre $1/y'$ y $g(a')/0''$, para lo cual considere a $\widetilde{f}$, que es un isomorfismo, y a los siguientes morfismos:

a) Sea $\alpha = (a' \vee k')/k'$ y considere el morfismo $\widetilde{g}|_\alpha$. α es una subretícula de $1'/k'$ que es isomorfa bajo $\widetilde{g}$ a $a''/0''$, por lo que su restricción a α es un isomorfismo entre $(a' \vee k')/k'$ y $g(a')/0''$.

b) Sea $h : a'/(a' \wedge k') \longrightarrow (a' \vee k')/k'$ tal que $h(z') = z' \vee k'$. Entonces $h \in Lat$ y tiene inversa por ambos lados dado por $h^{-1} : (a' \vee k')/k' \longrightarrow a'/(a' \wedge k')$ tal que $h^{-1}(z') = z' \wedge a'$. Por lo que h es un isomorfismo.

$$1/y' \xrightarrow{\widetilde{f}} a'/(a' \wedge k') \xrightarrow{h} (a' \vee k')/k' \xrightarrow{\widetilde{g}|_\alpha} g(a')/0' .$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}|_\alpha(\ h(\ \widetilde{f}(1/y')\ )\ ) =&\widetilde{g}|_\alpha(\ h(\ \widetilde{f}(1)/\widetilde{f}(\widetilde{f}^{-1}(b'))\ )\ )\\
=&\widetilde{g}|_\alpha(\ h(\ a'/b'\ )\ ) = \widetilde{g}|_\alpha(\ h(\ a'/(a' \wedge k')\ )\ )\\
=&\widetilde{g}|_\alpha(\ h(a')/h(a' \wedge k')\ )\\
=&\widetilde{g}|_\alpha(\ (a' \vee k')/((a' \wedge k') \vee k')\ ) = \widetilde{g}|_\alpha(\ (a' \vee k')/k'\ )\\
=&\widetilde{g}|_\alpha(a' \vee k')/\widetilde{g}|_\alpha(k') = g(a' \vee k')/g(k')\\
=&g(a')/0''.
\end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que $\widetilde{g}|_\alpha \circ h \circ \widetilde{f}$ es un isomorfismo entre $1/y'$ y $g(a')/0''$. Por lo tanto $g \circ f$ es un morfismo lineal. $\square$

Con este resultado se puede ver el porqué es importante pedir las retículas modulares. Entre ésta clase de retículas no hay riesgo de que la composición de morfismos lineales no sea un morfismo lineal. Por lo que ahora se definirá la categoría LM.

Definición 49. *La* ***categoría de retículas modulares lineales****, denotada por LM, está dada por la siguiente información:*

a. Los objetos de la categoría son todas las retículas acotadas y modulares, esto es, $Ob(LM) := Ob(BMLat)$.

b. Las flechas de la categoría son todos los morfismos lineales, esto es, $LM(A, B) := \{f \in \vee\text{-}SLat(A, B) | f \text{ es lineal}\}$.

c. La composición de la categoría es la composición usual de funciones.

Con la información de la sección anterior se demostrarán propiedades categóricas de LM.

Observación 50. *Algo importante que se debe notar es que si $f : L \to L'$ es un isomorfismo en Lat y $L, L' \in BLat$, entonces f es automáticamente un morfismo lineal con núcleo $k = 0$ y por lo tanto $f \in LM$, es decir, que los isomorfismos en LM coinciden con los isomorfismos en Lat.*

Definición 51. *Sean $(L, \vee, \wedge, 0, 1) \in LM$ y $S \subseteq L$. Entonces S es una* ***subretícula*** *de L, si S es acotada, $0 \in S$ y para todo $x, y \in S$ se tiene que $x \vee y \in S$ y $x \wedge y \in S$. Además se tiene que el morfismo inclusión $i : S \to L$ es un morfismo lineal.*

Proposición 52. *Sean $L \in LM$ y $S \leq L$ una subretícula. Entonces existe $a \in L$ tal que $S = a/0$.*

Demostración.
Sean $L \in LM$ y (S, α) una subretícula de L, entonces $S \overset{\alpha}{\rightarrowtail} L$ es un monomorfismo en LM. Por lo cual existe $a = f(1_S) \in L$ tal que $S \cong a/0$ ya que α induce este isomorfismo por ser lineal y monomorfismo.
Por lo tanto $(S, \alpha) \cong (a/0, i)$ con i la inclusión canónica. □

Proposición 53. *LM tiene objeto cero.*

Demostración.
Considere a la retícula $\mathbf{1} = \{0\}$. Entonces $\mathbf{1}$ es claramente un objeto terminal en LM. Más aún, es objeto terminal en $\vee$-$SLat$, y por la Proposición 46 se sabe que para todo $f \in LM$ se tiene que $f(0) = 0'$, por lo que para todo objeto A de LM hay un único morfismo de $\mathbf{1}$ en A.
Por lo tanto $\mathbf{1} = \{0\}$ es objeto cero en LM. □

Definición 54. *Sean $L, L' \in LM$. El **morfismo cero** de L en L', denotado $0_{LL'}$, se define como la composición de los morfismos únicos de L en el objeto cero y del objeto cero en L':*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "0_{LL'}"] \arrow[dr, dashed] & & L' \\ & \mathbf{1} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Proposición 55. *Sean $L, L' \in LM$ y $f \in LM(L, L')$ con núcleo k. Son equivalentes:*

a. *f es monomorfismo.*

b. *f es inyectivo.*

Demostración.
Sean f monomorfismo y $A = k/0$. Considere los siguientes morfismos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "0_{AL}"'] & L \arrow[r, "f"] & L' \end{tikzcd} .$$

Entonces se tiene que:

$$f(i(x)) = f(x) = 0 = f(0) = f(0_{AL}(x)).$$

Es decir, $fi = f0_{AL}$ y, al ser f monomorfismo, entonces $i = 0_{AL}$. Esto si y sólo si $k = 0$. Con lo cual se tiene que $L \cong f(1)/0'$ bajo $\widetilde{f}$. Más aún se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\widetilde{f}"'] & L' \\ & f(1)/0' \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

i y $\widetilde{f}$ son inyectivos y $f = i\widetilde{f}$, por lo tanto f es inyectivo.
La implicación contraria se da de forma inmediata. $\square$

Corolario 56. *Sean $L, L' \in LM$ y $f \in LM(L, L')$ con núcleo k. Son equivalentes:*

a. *f es monomorfismo.*

b. *$k = 0$.*

Demostración.
Por la Proposición anterior se tiene que si f es monomorfismo entonces $k = 0$, por lo que basta ver la conversa.
Pero esto es inmediato nuevamente por la Proposición anterior, ya que si $k = 0$, entonces $L \cong f(1)/0'$ y $f = i\widetilde{f}$. Por lo que f es composición de morfismos inyectivos. Por lo tanto f es inyectivo, que es equivalente a ser monomorfismo. $\square$

Proposición 57. *Sean $L, L' \in LM$ y $f \in LM(L, L')$ con núcleo k. Son equivalentes:*

a. *f es epimorfismo.*

b. *f es suprayectivo.*

Demostración.
Sean f un epimorfismo y $a' = f(1)$, entonces $f(L) = a'/0'$. Sea $A = 1'/a'$ y supóngase que $a' \lneq 1'$. Luego, considere los siguientes morfismos:

$$L \xrightarrow{f} L' \underset{\alpha}{\overset{p}{\rightrightarrows}} A\ .$$

Definidos como $p(x) = x \vee a'$ y $\alpha(x) = a'$ para todo $x \in L'$. En sencillo ver que estos morfismos son lineales con núcleos $k_p = a'$ y $k_\alpha = 1'$ respectivamente. Entonces $p(f(x)) = f(x) \vee a' = a' = \alpha(f(x))$.
Por lo cual $pf = \alpha f$ y f es epimorfismo lo que implica que $p = \alpha$! lo que es una contradicción. Por esto $a' = 1'$, y entonces $f(L) = 1'/0' = L'$.
Por lo tanto f es suprayectivo.
La implicación contraria se da de forma inmediata. $\square$

Corolario 58. *Sean $L, L' \in LM$ y $f \in LM(L, L')$ con núcleo k. Son equivalentes:*

a. *f es epimorfismo.*

b. *$f(1) = 1'$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea f un epimorfismo, entonces f es suprayectiva y así $f(1) = 1'$ por la Proposición 25.

$\Leftarrow$) Sea $f(1) = 1'$. Recuerde que siempre se tiene el siguiente diagrama conmutativo para un morfismo lineal:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & L' \\ 1/k \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & f(1)/0' \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

En este caso $i = Id_{L'}$, con lo cual f es una composición de morfismos suprayectivos, por lo tanto f es suprayectiva y así un epimorfismo.

□

Proposición 59. *Sean $L, L' \in LM$ y $f \in LM(L, L')$ con núcleo k. Son equivalentes:*

a. *f es epimorfismo.*

b. *f es retracción.*

Demostración.
Por lo expuesto al inicio de la sección 1.1 se tiene que retracción implica epimorfismo, por lo que basta probar la implicación reciproca.
Sea f un epimorfismo, entonces $1/k \cong L'$ bajo $\widetilde{f}$. Entonces existe $\widetilde{f}^{-1} \in LM(L', 1/k)$ y considere la inclusión $i : 1/k \to L$, así pues:

$$f(i(\widetilde{f}^{-1}(x))) = f(\widetilde{f}^{-1}(x)) = \widetilde{f}(\widetilde{f}^{-1}(x)) = x.$$

Ya que $\widetilde{f}^{-1}(x) \in 1/k$, esto es, que $f \circ i\widetilde{f}^{-1} = Id_{L'}$.
Por lo tanto f tiene una inversa derecha y f es una retracción. □

Corolario 60. *LM es una categoría balanceada.*

A lo largo de estas proposiciones se ha usado repetidamente ciertos cocientes que vuelven más sencillas las demostraciones y parecen recordar a ciertas propiedades de R-Mod. Con el siguiente teorema se definirá por fin estos cocientes como objetos importantes en LM.

Teorema 61. *Sea $f \in LM(L, L')$ con núcleo k, entonces el núcleo y conúcleo del morfismo existen y además:*

a. $Nuc(f) = k/0$.

b. $CoNuc(f) = 1'/f(1)$.

Demostración.

a. Por definición $Nuc(f) = Eq(f, 0_{LL'})$, por lo que se probará que $Eq(f, 0_{LL'}) = (k/0, i)$.
Sea $i \in LM(k/0, L)$ el morfismo inclusión, entonces
$0i(x) = 0(x) = 0' = f(x) = fi(x)$ ya que $x \in k/0$. Por lo tanto $fi = 0i$.

Sea $\alpha \in LM(D, L)$ tal que $f\alpha = 0\alpha$. Observe que $\alpha^{-1}(k/0) \subseteq D$.
Sean $\gamma = \alpha^{-1}(k/0)$, $j \in LM(\gamma, D)$ el morfismo inclusión y $\beta : D \to k/0$ definida como $\beta(x) = \alpha j(x)$.
Luego, β es morfismo lineal ya que es composición de morfismos lineales, y $i\beta(x) = i\alpha j(x) = i\alpha(x) = \alpha(x)$.
Por lo tanto $i\beta = \alpha$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} k/0 \arrow[r, "i"] & L \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0_{LL'}"'] & L' \\ & D \arrow[ul, dashed, "\beta"] \arrow[u, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Sólo resta ver la unicidad de β. Sea $\beta' \in LM(D, k/0)$ tal que $i\beta' = \alpha$.
Entonces $i\beta' = i\beta$ y i es monomorfismo, así $\beta' = \beta$.
Por lo tanto $Nuc(f) = Eq(f, 0_{LL'}) = k/0$.

b. Por definición $CoNuc(f) = CoEq(f, 0_{LL'})$, por lo que se probará que $CoEq(f, 0_{LL'}) = (1'/f(1), p)$, donde $p \in LM(L', 1'/f(1))$, definido tal que $p(x') = x' \vee f(1)$, es el morfismo proyección.
Entonces $p(0_{LL'}(x)) = p(0') = 0' \vee f(1) = f(1) = f(x) \vee f(1) = p(f(x))$.
Así $pf = p0_{LL'}$.

Luego, sean $\alpha \in LM(L', A)$ tal que $\alpha f = \alpha 0_{LL'}$ y $q : 1'/f(1) \to A$ definida por $q(x') = \alpha(x' \vee f(1))$.
Al estar q definida en términos de α se tiene que $q \in LM$, ahora se verá que $qp = \alpha$, esto es, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0_{LL'}"'] & L' \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\alpha"'] & 1'/f(1) \arrow[dl, dashed, "q"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$q(p(x')) = q(x' \vee f(1)) = \alpha(x' \vee f(1) \vee f(1)) = \alpha(x') \vee \alpha(f(1))$ y $\alpha f = 0_A$.
Entonces $\alpha(x') \vee \alpha(f(1)) = \alpha(x') \vee 0_A = \alpha(x')$ y por tanto $\alpha = qp$.
Luego, sea $q' \in LM(1'/f(1), A)$ tal que $\alpha = q'p$, entonces $q'p = qp$ y p es epimorfismo. Así $q' = q$ y por lo tanto $CoNuc(f) = CoEq(f, 0_{LL'}) = 1'/f(1)$.

□

Ahora, se tienen bien identificados el núcleo y conúcleo de cualquier morfismo en LM, con el siguiente par de resultados se identificarán la imagen y coimagen.

Teorema 62. *Sea $f \in LM(L, L')$ con núcleo k, entonces:*

$$CoNuc(Nuc(f)) \cong Nuc(CoNuc(f)).$$

Con esto se tendrá que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "p"'] & & L' \\ CoNuc(Nuc(f)) \arrow[rr, "\widetilde{f}"'] & & Nuc(CoNuc(f)) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Demostración.
Considere los morfismos $i_1 : k/0 \to L$ y $p_1 : L' \to 1'/f(1)$ inclusión y proyección respectivamente. Utilizando el hecho de que $Nuc(f) = (1/k, i_1)$ se tiene que $CoNuc(Nucf) = CoNuc(i_1)$ y por el Teorema anterior $CoNuc(i_1) = 1/i_1(k) = 1/k$. Por lo tanto $CoNuc(Nucf) = 1/k$.

Luego, utilizando el hecho de que $CoNuc(f) = (1'/f(1), p_1)$ se tiene que $Nuc(CoNucf) = Nuc(p_1)$ y por el Teorema anterior $Nuc(p_1) = k_{p_1}/0' = f(1)/0'$.[2]

[2]El núcleo $k_{p_1} = f(1)$ debido a la construcción hecha en la Proposición 38.

Por lo tanto $Nuc(CoNucf) = f(1)/0'$.

Y al ser f un morfismo lineal, éste induce un isomorfismo, es decir, $1/k \cong f(1)/0'$. Por lo tanto $CoNuc(Nucf) \cong Nuc(CoNucf)$. $\square$

Corolario 63. *Sea $f \in LM(L, L')$ con núcleo k, entonces:*

a. $Im(f) = f(1)/0'$.

b. $CoIm(f) = 1/k$.

Demostración.
Utilizando las Proposiciones 14, 15 y el Teorema anterior se tiene que $Im(f) \cong Nuc(CoNucf) = f(1)/0'$ y $CoIm(f) \cong CoNuc(Nucf) = 1/k$. $\square$

2.3. Teoremas de isomorfismo para LM

Como se menciono anteriormente, la definición de morfismo lineal forzará a que este tipo de morfismos satisfagan de forma inmediata el primer teorema de isomorfismo, y como cabe esperar también se cumplirán en esta categoría los demás teoremas de isomorfismo, siendo de utilidad en los capítulos posteriores.

Definición 64. *Sean $L \in LM$ y $a, b \in L$ tal que $b \leq a$. Se define el **cociente de intervalos** como:*

$$(a/0)/(b/0) = \{x \vee b \mid x \in a/0\}.$$

Lema 65. *Sean $L \in LM$ y $a, b \in L$ tal que $b \leq a$. Entonces $(a/0)/(b/0) \cong a/b$.*

Demostración.
Sean $f : a/b \to (a/0)/(b/0)$ y $g : (a/0)/(b/0) \to a/b$ definidas como:

$$\begin{aligned} f(x) =& x \vee b \\ g(x \vee b) =& x. \end{aligned}$$

Estos morfismos claramente son monótonos.
Luego, $f(g(x \vee b)) = f(x) = x \vee b$ y $g(f(x)) = g(x \vee b) = x$, es decir, f es un isomorfismo.

$\square$

Lema 66. *Sean $L, L' \in LM$, $f \in LM(L, L')$ con núcleo k y $c \in L$ tal que $c \leq k$. Entonces existe $g \in LM(1/c, 1'/0')$ tal que $Nuc(g) = Nuc(f)/(c/0)$ y $Im(g) = Im(f)$.*

Demostración.
Considere la siguiente composición de morfismos en LM:

$$1/c \overset{p}{\twoheadrightarrow} 1/k \overset{\widetilde{f}}{\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow} f(1)/0' \overset{i}{\rightarrowtail} L'$$

$$x \longmapsto x \vee k \longmapsto f(x \vee k) \longmapsto f(x \vee k) = f(x)$$

Sea $g = i\widetilde{f}p$ definida, para toda $x \in 1/c$, como $g(x) = f(x)$. Así se tiene que $g \in LM$ y su núcleo es $k_g = k$.

Por lo tanto $Nuc(g) = Nuc(p) = k/c \cong (k/0)/(c/0) = Nuc(f)/(c/0)$
y $Im(g) = g(1)/0' = f(1)/0' = Im(f)$.

□

Teorema 67. ***Primer teorema de isomorfismo***
Sean $L, L' \in LM$ y $f \in LM(L, L')$ con núcleo k, entonces $L/Nuc(f) \cong Im(f)$.

Demostración.
Se tiene que $Nuc(f) = k/0$ y $Im(f) = f(1)/0'$ por el Teorema 61 y Corolario 63 respectivamente, entonces:

$$L/Nuc(f) = (1/0)/(k/0) \cong 1/k \quad \text{y} \quad 1/k \cong f(1)/0'.$$

Esto último por ser f un morfismo lineal. Por lo tanto $L/Nuc(f) \cong Im(f)$. □

Teorema 68. ***Segundo teorema de isomorfismo***
Sean $L \in LM$ y $a, b \in L$, entonces $(a \vee b)/b \cong a/(a \wedge b)$.

Demostración.
Sean $\widetilde{A} = a/(a \wedge b)$, $\widetilde{B} = (a \vee b)/b$ y $f : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$, $g : \widetilde{B} \to \widetilde{A}$ definidas como:

$$\begin{aligned} f(x) =& x \vee b \\ g(x) =& x \wedge a. \end{aligned}$$

Note que f y g son morfismos lineales con núcleos $k_f = a \wedge b$ y $k_g = b$ respectivamente.
Sea $x \in \widetilde{B}$, entonces:

$$fg(x) = f(x \wedge a) = (x \wedge a) \vee b = x \wedge (a \vee b) = x.$$

Esto dado que $b \leq x \leq a \vee b$ y utilizando la ley modular.
Por otro lado, sea $x \in \widetilde{A}$, entonces se tiene:

$$gf(x) = g(x \vee b) = (x \vee b) \wedge a = x \vee (b \wedge a) = x.$$

Esto nuevamente dado que $a \wedge b \leq x \leq a$ y por la ley modular.

Por lo tanto $\widetilde{B} = (a \vee b)/b \cong a/(a \wedge b) = \widetilde{A}$. □

Observación 69. *Esta demostración en realidad no dependió de que se considerara la categoría LM. Este resultado se da de manera natural en toda retícula modular, es decir, en la categoría $MLat$.*
Más aún, la conversa también es cierta, esto es, que si para todo $a, b \in L$ se tiene que $(a \vee b)/b \cong a/(a \wedge b)$, entonces $L \in MLat$. Por lo que la propiedad de que una retícula sea modular es equivalente a que se satisfaga el segundo teorema de isomorfismo.

*También sucede que en retículas modulares se tienen resultados interesantes como el teorema de Zassenhaus (aveces llamado cuarto teorema de isomorfismo), el teorema de Schreier y el teorema de Jordan-Hölder. Dichos resultados pueden ser consultados en **[18]**.*

Por último se menciona que dado que estos resultados son validos en $MLat$ y que sólo dependen de los isomorfismos, que coinciden con los isomorfismos en LM, estos resultados también son validos en LM.

Teorema 70. ***Tercer teorema de isomorfismo***
Sean $L \in LM$ y $a/0, b/0 \leq L$ tal que $b \leq a$, entonces $(1/b)/(a/b) \cong 1/a$.

Demostración.
Esto es inmediato considerando la retícula $1/b$ y aplicando el Lema 65, se tiene que $(1/b)/(a/b) \cong 1/a$. □

Teorema 71. ***Teorema de la correspondencia biyectiva***
Sean $L \in LM$, $b \in L$ y $\widetilde{A} := \{a \in L | b \leq a\}$, entonces $\widetilde{A} \cong Sub(1/b)$.

Demostración.
Sean $a, a' \in \widetilde{A}$ y $f : \widetilde{A} \to Sub(1/b)$ definida como $f(a) = a/b$.

a. Supóngase que $a \leq a'$, entonces se tiene que $b \leq a \leq a'$ y así $f(a) = a/b \leq a'/b = f(a')$.
   Esto es que $f \in Copo(\widetilde{A}, Sub(1/b))$.

b. Supóngase que $f(a) = f(a')$. Entonces $a/b \subseteq a'/b$ y $a'/b \subseteq a/b$, lo que implica que $a \in a'/b$ y $a' \in a/b$ y así $a \leq a'$ y $a' \leq a$.
   Por lo tanto $a = a'$ y así f es morfismo inyectivo.

c. Observe que:

$$\begin{aligned} f(\widetilde{A}) &= \{f(a) | a \in \widetilde{A}\} \\ &= \{a/b | b \leq a\} \\ &= \{a/b | a/b \leq 1/b\} \\ &= Sub(1/b). \end{aligned}$$

   Por lo tanto f es morfismo suprayectivo.

Por lo tanto f es un isomorfismo de retículas y así $\widetilde{A} \cong Sub(1/b)$. □

2.4. LM y su relación con las categorías abelianas

En esta sección se estudiará la estructura que posee la colección de subobjetos de un objeto dado dentro de una categoría abeliana bien potenciada, para lo cual se utilizarán las definiciones y resultados de la sección 1.1 sobre teoría de categorías.

Se hablará ahora de la noción de subobjeto utilizada por Grothendieck en **[14]**.

Definición 72. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría, $B, B', A \in \mathcal{C}$ y $u \in \mathcal{C}(B, A)$, $u' \in \mathcal{C}(B', A)$ dos monomorfismos. Se dice que u' **domina** a u, escrito como $u \leq u'$, si existe $v \in \mathcal{C}(B, B')$ tal que $u = u'v$.*[3]

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, tail, "u"'] & & B' \arrow[dl, tail, "u'"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Definición 73. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría, $B, B', A \in \mathcal{C}$, $u \in \mathcal{C}(B, A)$ y $u' \in \mathcal{C}(B', A)$ dos monomorfismos. Se dice que u es **equivalente** a u', escrito como $u \sim u'$, si $u \leq u'$ y $u' \leq u$.*

[3]Note que v es forzosamente un monomorfismo.

Proposición 74. *Sean u, u' dos monomorfismos equivalentes de B y B' en A respectivamente, entonces sus dominios son isomorfos.*

Demostración.
Si $u \leq u'$, entonces $u = u'v$ y si $u' \leq u$, entonces $u' = uv'$, donde v y v son morfismos de B en B' y de B' en B respectivamente tal como se construyen en las definiciones anteriores, por lo que:

$$uId_B = u = u'v = uv'v = uv'vId_B.$$

y al ser u un monomorfismo se concluye que $Id_B = v'v$. Análogamente $Id_{B'} = vv'$.
Por lo tanto u y u' son isomorfismos mutuamente inversos y $B \cong B'$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "Id_B"] \arrow[rrr, swap, "Id_B"] & B \arrow[r, "v"] & B' \arrow[r, "v'"] & B \arrow[r, "u"] & A \end{tikzcd}$$

$\square$

Definición 75. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $A \in \mathcal{C}$. Se denota a la* ***clase de todos los monomorfismos con codominio*** *A como:*

$$Mono(A) := \{u : X \to A \in Arw(\mathcal{C}) \mid X \in \mathcal{C} \ ; \ u \ es \ monomorfismo\}.$$

Se dice que u es un subobjeto de A si es una clase de equivalencia en $Mono(A)/\sim$, siendo esta relación la establecida en la definición de monomorfismo equivalente.
Con ello se define la ***clase de todos los subobjetos de*** *A como:*

$$Sub(A) := Mono(A)/\sim .$$

En un abuso de notación, se denotara a un subobjeto de A como $(B, u) \leq A$ o simplemente $B \leq A$, donde B es un representante del dominio de u.
A u se le llamara la inyección canónica del representante B en A.

Definición 76. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría, $A, B, C \in \mathcal{C}$ y $f : B \to A, g : C \to A$, morfismos en $\mathcal{C}$. Se dice que (P, f', g') es un* ***pullback*** *de f y g, donde $P \in \mathcal{C}$ y $f' : P \to C$, $g' : P \to B$ son morfismos en $\mathcal{C}$, si $g \circ f' = f \circ g'$ y para cualquier otra terna de un objeto y dos morfismos (Q, f'', g'') tal que $g \circ f'' = f \circ g''$, existe un único morfismo $\alpha : Q \to P$ en la categoría tal que $g'' = g' \circ \alpha$ y $f'' = f' \circ \alpha$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo con propiedad universal.*

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dr, "g"] & \\
Q \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[urr, bend left, "f''"] \arrow[drr, bend right, "g''"'] & P \arrow[ur, "f'"] \arrow[dr, "g'"'] & & A \\
 & & B \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Se debe recordar que si una categoría es abeliana entonces posee pullbacks.

Lo siguiente es un resultado clásico en la teoría de categorías por lo que su demostración no se realizará, pero el lector interesado puede consultarla en **[15], [16] y [10]**.

Proposición 77. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría con pullbacks, $A, B, C \in \mathcal{C}$ y $f : B \to A$, $g : C \to A$ morfismos en $\mathcal{C}$. Si (P, f', g') es un pullback de f y g, y g es monomorfismo, entonces g' es también un monomorfismo, es decir, los pullbacks son estables bajo monomorfismos.*

Demostración. Ver Proposición 2.5.3 en pág.51 y 52 de [10]. □

Proposición 78. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría con pullbacks y (B, u) , $(C, v) \leq A$, entonces el ínfimo[4] de B y C siempre existe y está dado por su pullback.*

Demostración.
Considere el siguiente pullback para u y v:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, tail, "v'"] \arrow[d, tail, "u'"'] & B \arrow[d, tail, "u"] \\
C \arrow[r, tail, "v"'] & A
\end{tikzcd}$$

Entonces u' y v' son monomorfismos dado que el pullback es estable bajo estos. Por lo que se tiene que $(P, u') \leq C$ y $(P, v') \leq B$.
Por lo tanto $(P, vu') \leq A$ y por la propiedad universal del pullback, P es el mayor objeto con esta propiedad, es decir, es el infimo de B y C. □

Se denotara a este pullback como la intersección, $P = B \cap C$.

[4]Donde el orden está inducido por la relación de monomorfismos equivalentes.

Corolario 79. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $A \in \mathcal{A}$. Entonces el ínfimo de cualesquiera dos subobjetos de A siempre existe.*

Proposición 80. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría completa y $A \in \mathcal{C}$, entonces el ínfimo de toda familia de subobjetos de A existe.*

Demostración. Ver Proposición 4.2.4 en pág.134 de [10]. □

Definición 81. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría, $A, B, C \in \mathcal{C}$ y $f : A \to B, g : A \to C$, morfismos en $\mathcal{C}$. Se dice que (Q, f', g') es un **pushout** de f y g, donde $Q \in \mathcal{C}$ y $f' : C \to Q$, $g' : B \to Q$ son morfismos en $\mathcal{C}$, si $f' \circ g = g' \circ f$ y para cualquier otra terna de un objeto y dos morfismos (R, f'', g'') tal que $f'' \circ g = g'' \circ f$, existe un único morfismo $\beta : Q \to R$ en la categoría tal que $g'' = \beta \circ g'$ y $f'' = \beta \circ f'$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo con propiedad universal.*

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g'"] \arrow[drr, bend left, "g''"] & & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Q \arrow[r, dashed, "\beta"] & R \\
 & C \arrow[ur, "f'"'] \arrow[urr, bend right, "f''"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposición 82. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría con pushouts, $A, B, C \in \mathcal{C}$ y $f : A \to B$, $g : A \to C$ morfismos en $\mathcal{C}$. Si (Q, f', g') es un pushout de f y g, y g es epimorfismo, entonces g' es también un epimorfismo, es decir, los pushouts son estables bajo epimorfismos.*

Demostración. Ver Proposición 2.5.3 en pág.51 y 52 de [10], considere la categoría opuesta. □

Proposición 83. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y (B, u) , $(C, v) \leq A$, entonces el supremo[5] de una B y C siempre existe.*

[5]Donde el orden está inducido por la relación de monomorfismos equivalentes.

Demostración.
Sean (N, f) y (M, g) los conúcleos de u y v respectivamente.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, two heads, "f"] & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "v"] & A \arrow[r, two heads, "g"] & M \end{tikzcd}$$

Luego, considere el pushout de f y g.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, two heads, "f"'] & M \arrow[d, two heads, "f'"] \\ N \arrow[r, two heads, "g'"'] & Q \end{tikzcd}$$

Por último considere a $(Nuc(g'f), i)$ el núcleo de $g'f$, entonces $(Nuc(g'f), i) \in Sub(A)$. Luego, se tiene que $fu = 0$, por lo que también $g'fu = 0$. Análogamente $f'gv = 0$. Entonces, por la propiedad universal del núcleo, se tiene que existen
$\beta : B \to Nuc(g'f)$ y $\gamma : C \to Nuc(g'f)$ morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $i\beta = u$ e $i\gamma = v$. Más aún β y γ son monomorfismos ya que u y v son monomorfismos.

$$\begin{tikzcd} Nuc(g'f) \arrow[drr, tail, dashed, "i"] & & B \arrow[ll, dashed, "\beta"'] \arrow[d, tail, "u"] & \\ C \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[rr, tail, "v"'] & & A \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, two heads, "f"'] & M \arrow[d, two heads, "f'"] \\ & & N \arrow[r, two heads, "g'"'] & Q \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $(B, \beta), (C, \gamma) \in Sub(Nuc(g'f))$. Sólo resta probar que $Nuc(g'f)$ es el menor objeto con esta propiedad.
Considere entonces un subobjeto $(D, \alpha) \in Sub(A)$ tal que posea la misma propiedad, esto es que existan monomorfismos u', v' tal que $u = \alpha u'$ y $v = \alpha v'$, como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, tail, dashed, "\alpha"] & B \arrow[l, "u'"'] \arrow[d, tail, "u"] \\ C \arrow[u, "v'"] \arrow[r, tail, "v"'] & A \end{tikzcd}$$

Se quiere construir entonces un monomorfismo del $Nuc(g'f)$ a D.
Sea $CoNuc(\alpha) = (K, \alpha')$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "\alpha"] & A \arrow[r, two heads, "\alpha'"] & K \end{tikzcd}$$

Entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \alpha' u =& \alpha' \alpha u' = 0u' = 0 \\ \alpha' v =& \alpha' \alpha v' = 0v' = 0. \end{aligned}$$

Es decir, α' anula a u y v, y por la propiedad universal del conúcleo de u y v se tiene que existen morfismos únicos, que resultan ser epimorfismos, $r : N \twoheadrightarrow K$ y $s : M \twoheadrightarrow K$ tal que $\alpha' = rf$ y $\alpha' = sg$.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[dr, dashed, two heads, "r"'] & A \arrow[l, two heads, "f"'] \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, two heads, "\alpha'"] & M \arrow[dl, dashed, two heads, "s"] \\
 & K &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dr, two heads, "f'"] \arrow[drr, bend left, two heads, "s"] & & \\
A \arrow[ur, two heads, "g"] \arrow[dr, two heads, "f"'] & & Q \arrow[r, dashed, two heads, "h"] & K \\
 & N \arrow[ur, two heads, "g'"'] \arrow[urr, bend right, two heads, "r"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del pushout, existe un morfismo único, que además es epimorfismo, $h : Q \twoheadrightarrow K$ tal que $s = hf'$ y $r = hg'$. Esto implica que $\alpha' = hf'g$ y $\alpha' = hg'f$.

Por último, como α es un monomorfismo y la categoría es abeliana, se tiene que existe algún morfismo $x : A \to X$ tal que α es su núcleo, es decir, $(D, \alpha) = Nuc(x)$. Luego, se tiene que:

$$Nuc(CoNuc(Nuc(x))) = Nuc(x) = Nuc(CoNuc(\alpha)) = \alpha.$$

$$Nuc(\alpha') = Nuc(CoNuc(\alpha)) = \alpha.$$

Por lo tanto, sucede que $\alpha' i = hg'fi = 0$, así, por la propiedad universal del núcleo de α', se tiene que existe un único morfismo $h' : Nuc(g'f) \to Nuc(\alpha') = D$ tal que $i = \alpha h'$, lo cual al mismo tiempo implica que h' es monomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dll, tail, bend right, "\beta"'] \arrow[dl, tail, "u'"'] \arrow[dr, tail, "u"] & & M \arrow[dr, two heads, "f'"] \arrow[drr, bend left, two heads, "s"] & & \\
Nuc(g'f) \arrow[r, dashed, tail, "h'"'] \arrow[rrr, dashed, tail, bend left=60, "i"] & D \arrow[rr, dashed, tail, "\alpha"'] & & A \arrow[ur, two heads, "g"] \arrow[dr, two heads, "f"'] & & Q \arrow[r, dashed, two heads, "h"'] & K \\
 & & C \arrow[ull, tail, bend left, "\gamma"] \arrow[ul, tail, "v'"] \arrow[ur, tail, "v"'] & & N \arrow[ur, two heads, "g'"'] \arrow[urr, bend right, two heads, "r"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, para todo subobjeto D que sea una cota superior, existe un único monomorfismo del $Nuc(g'f)$ en D, es decir, $(Nuc(g'f), i)$ es el supremo B y C. $\square$

Definición 84. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, se dice que $\mathcal{C}$ es* ***bien potenciada*** *si para todo objeto $A \in \mathcal{C}$ pasa que $Sub(A)$ es un conjunto.*

Corolario 85. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bien potenciada y $A \in \mathcal{A}$. Entonces $Sub(A)$ es una retícula acotada.*

Demostración.
Por la definición de $Sub(A)$ se tiene un orden parcial en esta, luego, por las proposiciones 78 y 83 se tiene que $Sub(A)$ es una retícula.
Más aún, Se tiene que $(A, 0) = \bigwedge Sub(A)$ y $(A, Id_A) = \bigvee Sub(A)$ son el ínfimo y supremo, respectivamente, de la retícula. □

Proposición 86. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bien potenciada y $A \in \mathcal{A}$. Entonces $Sub(A)$ es una retícula modular.*

Demostración.
Para la prueba de esta proposición se utilizarán resultados que pueden ser consultados en el apéndice A, Proposición 231 y cuya demostración viene en **[19]**.

Sean $(B, b), (C, c), (D, d) \in Sub(A)$ tales que $(B, b') \leq C$ y B, C son complementos para D en $Sub(A)$, es decir, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
B \vee D =& A = C \vee D \\
B \wedge D =& 0 = C \wedge D.
\end{aligned}
$$

Más aún, en este caso se tiene que el supremo coincide con el coproducto de la categoría. Luego, B es un subobjeto de C con b' como monomorfismo, por lo que este induce otro monomorfismo f entre $B \vee D$ y $C \vee D$, además de inducir el siguiente diagrama conmutativo, con h, g isomorfismos y u, v las inclusiones canónicas:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "u"] \arrow[d, tail, "b'"'] & B \vee D \arrow[d, tail, "f"] \arrow[dr, tail, two heads, "h"] & \\
& & A \\
C \arrow[r, tail, "v"'] & C \vee D \arrow[ur, tail, two heads, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Entonces $h = gf$ y, al ser h y g isomorfismos, se tienen morfismos inversos, por lo que $f = g^{-1}h$. Con esto f es composición de isomorfismos, por lo tanto f también es un isomorfismo.
Luego, como B es un subobjeto de C, se tiene que $b = cb'$, esto es que c domina a b. Por otro lado, al ser el supremo igual al coproducto que es además un biproducto por

ser la categoría abeliana, se tiene que existe un epimorfismo $p : B + D \to B$, con lo cual se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[drr, tail, "b"'] & B+D \arrow[l, two heads, "p"'] & & C+D \arrow[ll, tail, two heads, "f^{-1}"'] & C \arrow[l, tail, "v"'] \arrow[dll, tail, "c"] \\
& & A & &
\end{tikzcd}$$

Con esto se tiene que b domina a c, por lo tanto $b \sim c$ y $B = C$.
Por lo tanto $Sub(A)$ es una retícula modular.
(Ver Proposición 231 en apéndice B y Proposición 5.3 en [19], pág.92.) □

Corolario 87. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bien potenciada y $A \in \mathcal{A}$. Entonces $Sub(A) \in LM$.*

Corolario 88. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck*[6] *y $A \in \mathcal{G}$, entonces $Sub(A)$ es una retícula completa y modular, es decir, $Sub(A) \in LM_C$.*

Recuerde que al inicio del capítulo se dio un ejemplo de morfismo lineal dado un morfismo de R-módulos, ahora se generalizará esta idea a un morfismo en una categoría abeliana.

Lema 89. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bien potenciada, $A, B \in \mathcal{A}$ y $\varphi \in \mathcal{A}(A, B)$. Considere el morfismo $f : Sub(A) \to Sub(B)$ definido como $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$, para toda $\alpha \leq A$. Entonces $f \in LM$ con núcleo $k_f = Nuc(\varphi)$.*

Demostración.

a. Sea $\alpha \in Sub(A)$, entonces:

$$f(\alpha \vee k_f) = \varphi(\alpha \vee k_f) = \varphi(\alpha) \vee \varphi(k_f) = \varphi(\alpha) \vee \{0\} = \varphi(\alpha) = f(\alpha).$$

Por lo tanto $f(\alpha \vee k_f) = f(\alpha)$.

[6] La definición de dicha categoría puede ser consultada en el apendice C.

b. Recuerde que $1_{Sub(A)} = A$. Hay que ver que existe $\widetilde{f}: A/k_f \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow f(A)/\{0\}$.
Por un lado se tiene que $A/k_f = A/Nuc\varphi \cong Im\varphi$ ya que al ser $\mathcal{A}$ una categoría abeliana cumple el primer teorema de isomorfismo.
Y por otro lado $f(A)/\{0\} = \varphi(A)/\{0\} = Im\varphi/\{0'\} = Im\varphi$.
Por lo tanto $A/k_f \cong f(A)/\{0\}$ y así existe $\widetilde{f}: A/k_f \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow f(A)/\{0'\}$.

Por lo tanto $f \in LM$. (Ver Lema 5.1, pág.16 de [2].) $\square$

Teorema 90. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bien potenciada. Se construye el funtor $\mathcal{S} : \mathcal{A} \longrightarrow LM$ definido en objetos y flechas como:*

$$\mathcal{S}(A) = Sub(A)$$

$$\mathcal{S}(\ A \xrightarrow{f} B\ ) = (\ Sub(A) \xrightarrow{\mathcal{S}(f)} Sub(B)\ )$$

*Donde $\mathcal{S}(f)$ se define, para toda $\alpha \in Sub(A)$, como $\mathcal{S}(f)(\alpha) = f(\alpha)$. Entonces $\mathcal{S}$ es un funtor de $\mathcal{A}$ en LM. Se llamará a este funtor el **funtor de subobjetos**.*

Demostración.

a. Por el Corolario 87 y Lema 89 se tiene que para todo $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{S}A \in LM$ y para todo $f \in \mathcal{A}(A, B)$ se tiene que $\mathcal{S}f \in LM$.

b. Sean $A, B \in \mathcal{C}$ tal que $A = B$, entonces para todo $C \in \mathcal{C}$ pasa que $C \subseteq A$ si y sólo si $C \subseteq B$.
Así, para todo $C \in \mathcal{C}$ pasa que $C \in Sub(A)$ si y sólo si $C \in Sub(B)$, y por ende $Sub(A) = Sub(B)$.
Por lo tanto $\mathcal{S}A = \mathcal{S}B$, es decir, $\mathcal{S}$ está bien definido en objetos.

c. Sean $f, g \in \mathcal{C}(A, B)$ tal que $f = g$, entonces para todo $a \in A$ se tiene que $f(a) = g(a)$.
Entonces para todo $\alpha \subseteq A$ se tiene que $\mathcal{S}f(\alpha) = f(\alpha) = g(\alpha) = \mathcal{S}g(\alpha)$.
Por lo tanto $\mathcal{S}f = \mathcal{S}g$, es decir, $\mathcal{S}$ está bien definido en flechas.

d. Sean $A \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in Sub(A)$, entonces $\mathcal{S}Id_A(\alpha) = Id_A(\alpha) = \alpha = Id_{\mathcal{S}A}(\alpha)$.
Por lo tanto para toda $\alpha \in Sub(A)$ pasa que $\mathcal{S}Id_A(\alpha) = Id_{\mathcal{S}A}(\alpha)$ y así $\mathcal{S}Id_A = Id_{\mathcal{S}A}$.

e. Sean $g \in \mathcal{A}(A, B)$, $f \in \mathcal{A}(B, C)$ y $\alpha \in Sub(A)$, entonces:
$\mathcal{S}(f \circ g)\alpha = (f \circ g)(\alpha) = f(g(\alpha)) = \mathcal{S}f(g(\alpha)) = \mathcal{S}f(\mathcal{S}g(\alpha)) = (\mathcal{S}f \circ \mathcal{S}g)(\alpha)$
Por lo tanto $\mathcal{S}(f \circ g) = \mathcal{S}f \circ \mathcal{S}g$.

Con lo que se concluye que $\mathcal{S}$ es un funtor entre $\mathcal{A}$ y LM. $\square$

Capítulo 3

Prerradicales

En este capítulo se definen los prerradicales en LM y se muestran algunas de sus propiedades. Se construyen algunas subcategorías importantes de LM que preservan ciertas propiedades y en las cuales igual se puede trabajar con prerradicales. Por último se construye la versión en retículas de ejemplos importantes que tienen su origen en la teoría de módulos, y se ve como estos inducen prerradicales con ciertas propiedades en LM.
Este capítulo toma varios resultados de los artículos de Toma Albu y Mihai Iosif: *lattices preradicals with applications to Grothendieck categories and torsion theories* [2] y *On socle and radical of modular lattices* [5].

3.1. Prerradicales de Retículas

Los prerradicales surgen originalmente en la teoría de módulos como una forma de generalizar conceptos como el submódulo de torsión, el submódulo divisible, el radical de Jacobson y el soclo de un módulo. Este concepto puede ampliarse más allá de las categorías de módulos sobre un anillo, en particular, y como se verá a continuación, a la categoría LM.

Definición 91. *Sea $r : LM \to LM$ un funtor. Se dice que r es un* ***prerradical de retículas*** *si:*

a. Para todo $L \in LM$ pasa que $r(L) \leq L$.

b. Para todo $f \in LM(L, L')$ pasa que $r(f)$ es la restricción y correstricción de f a $r(L)$ y $r(L')$ respectivamente, es decir, $f(r(L)) \subseteq r(L')$.

En otras palabras un prerradical es un subfuntor del funtor identidad de la categoría LM.

Observación 92. *Esta última propiedad de los prerradicales se puede pensar, dadas las definiciones anteriores, como una equivalencia:*

$$f(r(L)) \subseteq r(L') \ \textit{ si y sólo si } \ r(f) = f|_{r(L)}^{r(L')}.$$

Definición 93. *Sean $r : LM \to LM$ un prerradical de retículas, $L \in LM$ y $a \in L$. Nótese que como $a/0 \leq L$, entonces $r(a/0) \leq L$ y es acotada, por lo que existe un único elemento $a^r \in L$ de tal manera que $r(a/0) := a^r/0$, es decir, $a^r = \bigvee r(a/0)$.*

Observación 94. *Si se tiene que $a \leq b$ y consideramos al morfismo inclusión $i : a/0 \to b/0$, al aplicar un prerradical r se obtiene que $a^r \leq b^r$.*

Definición 95. *Sea $L \in LM$.*

*a. Sea $S = \{x_i | i \in I\} \subset L$. S es una **familia independiente** si $0 \notin S$ y para todo $i \in I$ pasa que*

$$\left(\bigvee_{j \in I \setminus \{i\}} x_j \right) \wedge x_i = 0.$$

*b. Sean $a, b, c \in L$. Se dice que a es el **supremo directo** de b y c, lo cuál se denotara como $a = b \oplus c$, si:*

i. $a = b \vee c$.

ii. $b \wedge c = 0$.

*c. Sea $a \in L$ y $S = \{x_i | i \in I\} \subset L$. Se dice que a es el **supremo directo** de S, lo cuál se denotara como $a = \bigoplus S$, si:*

i. $a = \bigvee S$.

ii. S es una familia independiente.

Proposición 96. *Sean $L \in LM$, $\{a_i | 1 \leq i \leq n\}$ una familia independiente finita de L y $r : LM \to LM$ un prerradical de retículas, entonces:*

$$(\bigvee_{1 \leq i \leq n} a_i)^r = \bigvee_{1 \leq i \leq n} a_i^r.$$

Demostración.

Dado que el conjunto es finito basta probar para el caso $n = 2$ y el resultado general se deduce al aplicar inducción.

Sea $a = a_1, b = a_2$ y $c = a_1 \vee a_2$. Como $a, b \leq c$, entonces $a^r, b^r \leq c^r$ y por tanto $a^r \vee b^r \leq c^r$. Luego, considere los morfismos lineales $q_1 : c/0 \to a/0$ definido como $q_1(x) = (x \vee b) \wedge a$ y $q_2 : c/0 \to b/0$ definido como $q_2(x) = (x \vee a) \wedge b$.
Aplicando ahora un prerradical r se obtienen nuevos morfismos:

$$r(q_1) : c^r/0 \to a^r/0 \qquad y \qquad r(q_2) : c^r/0 \to b^r/0.$$

Entonces $r(q_1)(c^r) = (c^r \vee b) \wedge a \leq a^r$ y $r(q_2)(c^r) = (c^r \vee a) \wedge b \leq b^r$.
Y así $((c^r \vee b) \wedge a) \vee ((c^r \vee a) \wedge b) \leq a^r \vee b^r$.
Recuerde que la ley modular dice lo siguiente: $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.
Utilizando que $(c^r \vee a) \wedge b \leq b \leq c^r \vee b$ y que $c^r \leq c = a \vee b$, junto con la ley modular, se tiene que:

$$\begin{aligned}((c^r \vee b) \wedge a) \vee ((c^r \vee a) \wedge b) =& ((c^r \vee a) \wedge b) \vee (a \wedge (c^r \vee b))\\ =& (((c^r \vee a) \wedge b) \vee a) \wedge (c^r \vee b)\\ =& (a \vee (b \wedge (c^r \vee a))) \wedge (c^r \vee b)\\ =& ((a \vee b) \wedge (c^r \vee a)) \wedge (c^r \vee b)\\ =& (c^r \vee a) \wedge (c^r \vee b).\end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que este objeto anterior es menor que $a^r \vee b^r$. Por otro lado se tiene que $c^r \leq c^r \vee a$ y $c^r \leq c^r \vee b$. Entonces $c^r \leq (c^r \vee a) \wedge (c^r \vee b) \leq a^r \vee b^r$.
Por lo tanto $c^r \leq a^r \vee b^r$ y por ende $c^r = a^r \vee b^r$. □

Definición 97. *Sean $(L, \leq)$ un orden parcial y S un subconjunto de L. Entonces, se dice que S es un **conjunto dirigido** si para todo $x, y \in S$ existe $z \in S$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$, es decir, cualquier par de elementos tiene una cota superior en S.*
Al conjunto de todos los conjuntos dirigidos de L se le denota como $D(L)$.

Definición 98. *Sea $L \in LM$ una retícula completa. Entonces, se dice que L es **supremo continuo** si para todo $S \in D(L)$ y $a \in L$, pasa que:*

$$a \wedge (\bigvee S) = \bigvee \{a \wedge s | s \in S\}.$$

Proposición 99. *Sean $L \in LM$ tal que L es supremo continuo, $r : LM \to LM$ un prerradical de retículas y $\{a_i | i \in I\}$ una familia independiente de L, entonces:*

$$(\bigvee_{i\in I} a_i)^r = \bigvee_{i\in I} a_i^r.$$

Demostración.
Sea $c = \bigvee_{i\in I} a_i$, entonces para todo $i \in I$ pasa que $a_i^r \leq c^r$ y así $\bigvee_{i\in I} a_i^r \leq c^r$.
Luego, sea $F \subseteq I$ con F un conjunto finito, y recuerde que:

$$(\bigvee_{i\in F} a_i) \wedge (\bigvee_{i\in I\setminus F} a_i) = 0.$$

ya que $\{a_i | i \in I\}$ es una familia independiente de L.
Entonces se tiene el morfismo lineal $q : c/0 \to (\bigvee_{i\in F} a_i)/0$ definido como:

$$q(x) = (x \vee (\bigvee_{i\in I\setminus F} a_i)) \wedge (\bigvee_{i\in F} a_i).$$

Al igual que en la demostración anterior se aplicará un prerradical r al morfismo q y, dado que F es finito, por la Proposición anterior se tiene que $(\bigvee_{i\in F} a_i)^r = \bigvee_{i\in F} a_i^r$.
Luego, $r(q)(c^r) = (c^r \vee (\bigvee_{i\in I\setminus F} a_i)) \wedge (\bigvee_{i\in F} a_i) \leq \bigvee_{i\in F} a_i^r$ y $c^r \wedge (\bigvee_{i\in F} a_i) \leq \bigvee_{i\in F} a_i^r$.

Sea $F(I) = \{F \subseteq I | F \text{ es finito}\}$, entonces $F(I) \in D(I)$ y por lo tanto:

$$c^r = c^r \wedge c = c^r \wedge (\bigvee_{F\in F(I)} (\bigvee_{i\in F} a_i)) = \bigvee_{F\in F(I)} (c^r \wedge (\bigvee_{i\in F} a_i)) \leq \bigvee_{F\in F(I)} (\bigvee_{i\in F} a_i^r) = \bigvee_{i\in I} a_i^r.$$

Por lo tanto $c^r = \bigvee_{i\in I} a_i^r$. □

3.2. Subcategorías de LM

En esta sección se estudiara brevemente dos tipos de subcategorías de LM que serán muy útiles más adelante para el estudio de los prerradicales.

3.2.1. Subcategorías plenas y subcategorías inducidas por clases hereditarias

Recuerde que dada una categoría $\mathcal{C}$ y una subcategoría $\mathcal{D}$, esta es plena si para cualquier par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$, tal que $A, B \in \mathcal{D}$, pasa que $\mathcal{C}(A, B) = \mathcal{D}(A, B)$. Por el Lema 47 se sabe que si f es morfismo lineal, entonces conmuta con supremos arbitrarios, con lo cual se pueden definir las siguientes subcategorías plenas.

Definición 100. *Sea $\mathcal{X}$ una subclase, distinta del vacío, de los objetos de $BLat$. Se dice que:*

*a. $\mathcal{X}$ es una clase **débilmente hereditaria** si para todo $L \in \mathcal{X}$ y para todo $a \in L$ se tiene que $a/0 \in \mathcal{X}$.*

*b. $\mathcal{X}$ es una clase **débilmente cohereditaria** si para todo $L \in \mathcal{X}$ y para todo $a \in L$ se tiene que $1/a \in \mathcal{X}$.*

*c. $\mathcal{X}$ es una clase **abstracta** si dados $L, K \in BLat$ tal que $L \cong K$ y $L \in \mathcal{X}$, entonces $K \in \mathcal{X}$.*

*d. $\mathcal{X}$ es una clase **hereditaria** si es abstracta y para todo $L \in BLat$, se cumple que para todo $a, b, c \in L$ tal que $a \leq b \leq c$ y $c/a \in \mathcal{X}$, pasa que $b/a \in \mathcal{X}$.*

Esto es equivalente a que $\mathcal{X}$ es hereditaria si y sólo si es abstracta y débilmente hereditaria.

*e. $\mathcal{X}$ es una clase **cohereditaria** si es abstracta y para todo $L \in BLat$, se cumple que para todo $a, b, c \in L$ tal que $a \leq b \leq c$ y $c/a \in \mathcal{X}$, pasa que $c/b \in \mathcal{X}$.*

Esto es equivalente a que $\mathcal{X}$ es cohereditaria si y sólo si es abstracta y débilmente cohereditaria.

Dada una subclase de retículas modulares $\mathcal{X}$, se denotara por $\mathcal{L}\mathcal{X}$ a la subcategoría plena de LM cuya clase de objetos es $\mathcal{X}$.

Lema 101. *Sea $\mathcal{C}$ una subclase abstracta tal que sus monomorfismos son inyectivos en $\mathcal{L}\mathcal{C}$. Entonces, los subobjetos de toda retícula $L \in \mathcal{L}\mathcal{C}$ pueden ser representados como los intervalos $a/0$ para alguna $a \in L$.*

Demostración.
Sea (S, α) un subobjeto de $L \in \mathcal{L}\mathcal{C}$. Entonces $S \xrightarrow{\alpha} L$ es un monomorfismo en $\mathcal{L}\mathcal{C}$ e inyectiva por hipótesis, entonces $k_\alpha = 0$. Luego, $S \cong \alpha(1_S)/0 = a/0$ por ser α un morfismo lineal, y $a/0 \in \mathcal{C}$ ya que $\mathcal{C}$ es una clase abstracta. Además este isomorfismo

está dentro de $\mathcal{LC}$ ya que es una subcategoría plena.
Por último $i \in \mathcal{LC}(a/0, L)$ es un monomorfismo en $\mathcal{LC}$ y por tanto $(a/0, i)$ un subobjeto de L en $\mathcal{LC}$. Por lo tanto (S, α) puede ser representado como $(a/0, i)$. □

Lema 102. *Sea $\mathcal{C}$ una subclase hereditaria, entonces sus monomorfismos son inyectivos en $\mathcal{LC}$.*

Demostración.
Sea $f \in \mathcal{LC}(L, L')$ un monomorfismo con núcleo k. Como $\mathcal{C}$ es hereditaria se tiene que $k/0 \in \mathcal{C}$. Considere los morfismos lineales inclusión y cero; $i, 0 \in \mathcal{LC}(k/0, L)$. Entonces $fi = f0$, lo que implica que $i = 0$. Así pues $k = 0$. Por lo tanto f es inyectiva. □

Proposición 103. *Sea $\mathcal{C}$ una subclase abstracta, entonces son equivalentes:*

a. $\mathcal{C}$ es hereditaria.

b. Los subobjetos de toda retícula $L \in \mathcal{LC}$ pueden ser representados como los intervalos $a/0$ para alguna $a \in L$.

Demostración.
La primera implicación es inmediata dados los Lemas 101 y 102. Para la implicación de regreso note que la condición de que toda subretícula pueda ser representada como un intervalo implica que $\mathcal{C}$ es débilmente hereditaria. Por otro lado, por hipótesis, $\mathcal{C}$ es abstracta. Por lo tanto $\mathcal{C}$ es hereditaria. □

Lema 104. *Sea $\mathcal{C}$ una subclase abstracta tal que sus epimorfismos son suprayectivos en $\mathcal{LC}$. Entonces, los objetos cociente*[1] *de toda retícula $L \in \mathcal{LC}$ pueden ser representados como los intervalos $1/a$ para alguna $a \in L$.*

Demostración.
Sea (B, β) un objeto cociente de L. Entonces $L \xrightarrow{\beta} B$ es un epimorfismo en $\mathcal{LC}$ y suprayectiva por hipótesis, entonces se tiene que $\beta(1_L) = 1_B$. Luego, $1_L/b = 1_L/k_\beta \cong \beta(1_L)/0 = 1_B/0 = B$ por ser β un morfismo lineal, y $1_L/b \in C$ ya que C es una clase abstracta. Además este isomorfismo está dentro de $\mathcal{LC}$ ya que es una subcategoría plena.
Por último, $p \in \mathcal{LC}(L, 1_L/b)$ es un epimorfismo en $\mathcal{LC}$ y por tanto $(1_L/b, p)$ un objeto cociente de L en $\mathcal{LC}$. Por lo tanto (B, β) puede ser representado como $(1_L/b, p)$. □

[1] Con objeto cociente se refiere al dual de los subobjetos, es decir, el conjunto dual a $Mono(L)/\sim$ con epimorfismos.

Lema 105. *Sea $\mathcal{C}$ una subclase cohereditaria, entonces sus epimorfismos son suprayectivos en $\mathcal{LC}$.*

Demostración.
Sea $f \in \mathcal{LC}(L, L')$ un epimorfismo con núcleo k. Como $\mathcal{C}$ es cohereditaria se tiene que $1'/f(1) \in \mathcal{C}$. Considere los morfismos lineales proyección y α definido como $\alpha(x') = f(1)$; $p, \alpha \in \mathcal{LC}(L', 1/f(1))$. Entonces $pf = \alpha f$, lo que implica que $p = \alpha$. Así pues $1' = f(1)$. Por lo tanto f es suprayectiva. $\square$

Proposición 106. *Sea $\mathcal{C}$ una subclase abstracta, entonces son equivalentes:*

a. $\mathcal{C}$ es cohereditaria.

b. Los objetos cociente de toda retícula $L \in \mathcal{LC}$ pueden ser representados como los intervalos $1/a$ para alguna $a \in L$.

Demostración.
La primera implicación es inmediata dados los Lemas 104 y 105. Para la implicación de regreso note que la condición de que toda objeto cociente pueda ser representada como un intervalo implica que $\mathcal{C}$ es débilmente cohereditaria, luego por hipótesis, $\mathcal{C}$ abstracta. Por lo tanto $\mathcal{C}$ es cohereditaria. $\square$

3.2.2. Subcategorías linealmente cerradas

Definición 107. *Sea C una subclase de los objetos de LM y $\mathcal{SC}$ una subcategoría de LM, no necesariamente plena, cuyos objetos son los elementos de C. Se dice que $\mathcal{SC}$ es **linealmente cerrada** si su colección de morfismos cumple lo siguiente:*

a. Si $L \in C$, $a \in L$ y $a/0 \in C$, entonces el morfismo inclusión existe dentro de $\mathcal{SC}$, es decir:
$$i : a/0 \to L \quad \in \mathcal{SC}.$$

b. Si $L \in C$, $a \in L$ y $1/a \in C$, entonces el morfismo proyección existe dentro de $\mathcal{SC}$, es decir:
$$p : L \to 1/a \quad \in \mathcal{SC}.$$

c. Si $f \in \mathcal{SC}(L, L')$ con núcleo k, entonces $1/k, f(1)/0' \in C$ y $\widetilde{f} \in \mathcal{SC}$.

d. Si $f \in \mathcal{SC}(L, L')$ es un isomorfismo en LM, entonces $f^{-1} \in \mathcal{SC}(L', L)$, es decir, es un isomorfismo en $\mathcal{SC}$.

Proposición 108. *Sean $\mathcal{SC}$ una subcategoría linealmente cerrada de LM, $f : L \to L'$ un morfismo en $\mathcal{SC}$ con núcleo k y $a, b \in L$ tal que $a/0$, $1'/f(b) \in \mathcal{SC}$. Entonces $a/((b \vee k) \wedge a)$, $f(a \vee b)/f(b) \in \mathcal{SC}$ y el morfismo canónico:*

$$\widetilde{g} : a/((b \vee k) \wedge a) \to f(a \vee b)/f(b).$$

definido como $\widetilde{g}(x) = f(x) \vee f(b)$ es un isomorfismo en $\mathcal{SC}$.

Demostración.
Por la definición de subcategoría linealmente cerrada se tiene que los morfismos inclusión $i : a/0 \to L$ y proyección $p : L' \to 1'/f(1)$ están en $\mathcal{SC}$ y por tanto su composición $g := p \circ f \circ i : a/0 \to 1'/f(b)$ también está en $\mathcal{SC}$. Por lo que se tienen las siguientes igualdades:

$$g(x) = p(f(i(x))) = p(f(x)) = f(x) \vee f(b) \quad \text{y} \quad f(b) = 0_{1'/f(b)}.$$

Sea $k_g = (b \vee k) \wedge a$ y $x \in a/0$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} g(x) = f(b) = 0_{1'/f(b)} \text{ si y sólo si } & f(x) \vee f(b) = f(b) \\ \text{si y sólo si } & f(x \vee b) = f(b) \\ \text{si y sólo si } & x \vee b \vee k = b \vee k \text{ (ver Proposición 41)} \\ \text{si y sólo si } & x \leq b \vee k \\ \text{si y sólo si } & x \leq (b \vee k) \wedge a. \end{aligned}$$

Esto es que $g(x) = 0_{1'/f(b)}$ si y sólo si $x \in k_g/0$, por lo tanto k_g es el núcleo de g. Con lo cual se deduce que hay un isomorfismo entre a/k_g y $g(a)/0_{1'/f(b)}$ o lo que es lo mismo, $\widetilde{g} : a/((b \vee k) \wedge a) \to f(a \vee b)/f(b)$ es un isomorfismo que está en $\mathcal{SC}$. □

Corolario 109. *Sean $\mathcal{SC}$ una subcategoría linealmente cerrada de LM, $L \in \mathcal{SC}$ y $a, b \in L$. Si $a/0$, $1/b \in \mathcal{SC}$, entonces $a/(a \wedge b)$, $(a \vee b)/b \in \mathcal{SC}$ y los morfismos canónicos:*

$$\varphi : a/(a \wedge b) \to (a \vee b)/b$$

$$\psi : (a \vee b)/b \to a/(a \wedge b).$$

Definidas, para toda $x \in a/(a \wedge b)$ y para toda $y \in (a \vee b)/b$, como $\varphi(x) = x \vee b$ y $\psi(y) = y \wedge a$ están en $\mathcal{SC}$.

Demostración.
Aplicando la Proposición 108 con $L = L'$ y $f = Id_L$, se tiene que $\widetilde{g} = \varphi \in \mathcal{SC}$ y dado que $\psi = \varphi^{-1}$ y $\mathcal{SC}$ es linealmente cerrada también se tiene que $\psi \in \mathcal{SC}$. □

Corolario 110. *Sean $\mathcal{SC}$ una subcategoría linealmente cerrada de LM, $L \in \mathcal{SC}$ y $a, b \in L$. Si a es complemento de b en L y $a/0$, $1/b \in \mathcal{SC}$, entonces el morfismo lineal:*

$$q : L \longrightarrow a/0.$$

Definido, para toda $x \in L$, como $q(x) = (x \vee b) \wedge a$ está en $\mathcal{SC}$ y es suprayectivo con núcleo b.

Demostración.
Aplicando la Proposición 108 con $L = L'$ y $f = Id_L$, se tiene que $q = \psi \circ p \in \mathcal{SC}$, con p la proyección canónica de L en $1/b$. Y este morfismo es suprayectivo con núcleo b por la Proposición 39 de la sección 2.1.

□

Corolario 111. *Sean $\mathcal{SC}$ una subcategoría linealmente cerrada de LM, $L \in \mathcal{SC}$ y $a, b \in L$. Si $0/0 \in \mathcal{SC}$, entonces el morfismo:*

$$o : L \longrightarrow 0/0.$$

Definido, para toda $x \in L$, como $o(x) = 0$, está en $\mathcal{SC}$.

Demostración.
Utilizando el morfismo q con $a = 0$ y $b = 1$ se tiene que $o = q \in \mathcal{SC}$. □

Corolario 112. *Sean $\mathcal{SC}$ una subcategoría linealmente cerrada de LM, $L \in \mathcal{SC}$ y $a, b \in L$. Si A , $0/0 \in \mathcal{SC}$ y $\mathcal{SC}(A, L) \neq \emptyset$, entonces el morfismo:*

$$f : A \longrightarrow L.$$

Definido, para toda $x \in A$, como $f(x) = 0$ está en $\mathcal{SC}$.

Demostración.
Sea $g \in \mathcal{SC}(A, L)$, entonces $f = i \circ o \circ g \in \mathcal{SC}$, donde i es la inclusión de $0/0$ en L. □

Proposición 113. *Sea $\mathcal{SC}$ subcategoría linealmente cerrada de LM, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a. *$\mathcal{C}$ es débilmente hereditaria.*

b. Los monomorfismos en $\mathcal{SC}$ son inyectivos.

c. Los subobjetos de toda retícula $L \in \mathcal{SC}$ pueden ser representados como los intervalos $a/0$ para alguna $a \in L$.

Demostración.

$a \Rightarrow b$) Sea $f \in \mathcal{SC}(L, L')$ un monomorfismo con núcleo k, entonces $k/0 \in \mathcal{C}$ ya que $\mathcal{C}$ es débilmente hereditaria y el morfismo inclusión está en la categoría, es decir, $i \in \mathcal{SC}(k/0, L)$, ya que $\mathcal{SC}$ es linealmente cerrada.
También $0/0 \in \mathcal{C}$ y el morfismo cero $0 : k/0 \to L$ está en la categoría.
Así pues $fi = f0$, lo que implica que $i = 0$ y $k = 0$.
Por lo tanto f es inyectiva.

$b \Rightarrow c$) Sea (S, α) un subobjeto de $L \in \mathcal{SC}$. Entonces $S \overset{\alpha}{\rightarrowtail} L$ es un monomorfismo en $\mathcal{SC}$, entonces α es inyectiva y $k_\alpha = 0$.
Luego, por ser α un morfismo lineal, se cumple que $\alpha(1_S)/0 \in \mathcal{C}$ y $S \cong \alpha(1_S)/0$.
Por último $i \in \mathcal{SC}(\alpha(1_S)/0, L)$ es un monomorfismo y por tanto $(\alpha(1_S)/0, i)$ un subobjeto de L.
Por lo tanto (S, α) puede ser representado como $(f(1_S)/0, i)$.

$c \Rightarrow a$) Sea $a \in L$, entonces $(a/0, i)$ es un subobjeto de L y por tanto $a/0 \in \mathcal{C}$.

□

3.3. Algunos ejemplos importantes

A continuación se definirá en retículas objetos de estudio surgidos de la teoría de módulos y se verá como cada uno de estos objetos induce un tipo de prerradical en LM o en alguna de sus subcategorías.

3.3.1. La traza, $Tr(\mathcal{X}, L)$

Definición 114. *Sean $L \in CLat$ y $\mathcal{X} \subseteq BLat$ una clase abstracta. La **traza** de $\mathcal{X}$ en L se define como:*

$$Tr(\mathcal{X}, L) = \bigvee \{x \in L \mid x/0 \in \mathcal{X}\}.$$

Observación 115. *Si $\mathcal{X}$ es abstracta y contiene la retícula cero, entonces contiene a todas las retículas cero. En particular si $\mathcal{X}$ es hereditaria y no vacía, entonces, para toda retícula L la familia $\{x \in L \mid x/0 \in \mathcal{X}\} \neq \emptyset$. Por lo que la traza de L está bien definida.*

Definición 116. *Sea $\mathcal{X}$ una subclase, distinta del vacío, de los objetos de $BLat$. Se dice que $\mathcal{X}$ es* ***cerrada bajo supremos*** *si es abstracta y para todo $L \in CLat$, $a \in L$, $\{a_i|i \in I\} \subseteq L$ e $i \in I$; si $a \leq a_i$ y $a_i/a \in \mathcal{X}$, entonces $\bigvee a_i/a \in \mathcal{X}$.*

Observación 117. *Si $\mathcal{X}$ es una subclase de objetos de $BLat$ cerrada bajo supremos, entonces $Tr(\mathcal{X}, L)/0 \in \mathcal{X}$, y así se tiene que $L \in \mathcal{X}$ si y sólo si $Tr(\mathcal{X}, L) = 1$.*

Lema 118. *Sean $L, L' \in CLat$, $\mathcal{X} \subseteq BLat$ una clase abstracta y $f : L \to L'$ un isomorfismo de retículas. Entonces:*

$$f(Tr(\mathcal{X}, L)) = Tr(\mathcal{X}, L').$$

Demostración.
Dado que f es un isomorfismo, este induce una biyección entre $\{x \in L|x/0 \in \mathcal{X}\}$ y $\{x' \in L'|x'/0' \in \mathcal{X}\}$. Además, al ser un isomorfismo, conmuta con supremos arbitrarios, por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(Tr(\mathcal{X}, L)) =& f(\bigvee\{x \in L|x/0 \in \mathcal{X}\}) \\ =& \bigvee\{f(x) \in L|x/0 \in \mathcal{X}\} \\ =& \bigvee\{x' \in L'|x'/0' \in \mathcal{X}\} \\ =& Tr(\mathcal{X}, L'). \end{aligned}$$

□

Definición 119. *Se define LM_C como la* ***subcategoría plena de*** *LM* ***cuyos objetos son retículas completas y modulares****.*

Proposición 120. *Sean $L, L' \in LM_C$, $\mathcal{X} \subseteq BLat$ una clase cohereditaria y $f \in LM(L, L')$. Entonces:*

$$f(Tr(\mathcal{X}, L)) \leq Tr(\mathcal{X}, L').$$

Demostración.
Sea $k \in L$ el núcleo de f, entonces $1/k \cong f(1)/0'$ bajo $\widetilde{f}$.
Sea $x \in L$ tal que $x/0 \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es cohereditaria y $0 \leq x \wedge k \leq x$, se sigue que $x/(x \wedge k) \in \mathcal{X}$. Más aún se tiene que $x/(x \wedge k) \cong (x \vee k)/k$, por el teorema 68. Al ser

$\mathcal{X}$ abstracta, se deduce que que $(x \vee k)/k \in \mathcal{X}$.

Luego, se tiene que :

$$\begin{aligned} Tr(\mathcal{X}, L) \vee k =& (\bigvee \{x \in L | x/0 \in \mathcal{X}\}) \vee k \\ =& \bigvee \{x \vee k | x \in L; x/0 \in \mathcal{X}\} \\ \leq& \bigvee \{y \in 1/k \mid y/k \in \mathcal{X}\} \\ =& Tr(\mathcal{X}, 1/k). \end{aligned}$$

Utilizando esta desigualdad, el hecho de que $\widetilde{f}$ es un isomorfismo y el Lema 118, se concluye que :

$$\begin{aligned} f(Tr(\mathcal{X}, L)) =& f(Tr(\mathcal{X}, L) \vee k) \\ \leq& f(Tr(\mathcal{X}, 1/k)) \\ =& \widetilde{f}(Tr(\mathcal{X}, 1/k)) \\ =& Tr(\mathcal{X}, f(1)/0') \\ \leq& Tr(\mathcal{X}, L'). \end{aligned}$$

□

Definición 121. *Sean $r : LM \to LM$ un prerradical de retículas y $L \in LM$. Se dice que r es **idempotente** si para todo $L \in LM$ pasa que $r(r(L)) = r(L)$.*

Corolario 122. *Sean $\mathcal{X} \subseteq BLat$ una clase cohereditaria y $\tau : LM_C \to LM_C$ definido, a nivel de objetos, como $\tau(L) = Tr(\mathcal{X}, L)/0_L$. Entonces τ es un prerradical idempotente.*

Demostración.

a. Sea $L \in LM_C$. Se quiere ver que $\tau(L) \leq L$. Esto es inmediato ya que:

$$\tau(L) = Tr(\mathcal{X}, L)/0 = (\bigvee \{x \in L \mid x/0 \in \mathcal{X}\})/0 \leq 1/0 = L.$$

b. Sea $f \in LM_C(L, L')$. Se quiere ver que $f(\tau(L)) \subseteq \tau(L')$, esto es, que $f(Tr(\mathcal{X}, L)) \leq Tr(\mathcal{X}, L')$, pero esto ya se tiene debido a la Proposición 120.

Por lo tanto τ es un prerradical.

Luego, para ver que es idempotente se tiene que:

$$\begin{aligned}\{x \in L \mid x/0 \in \mathcal{X}\} =& \{x \in L \mid x/0 \in \mathcal{X} \ ; \ x \leq Tr(\mathcal{X}, L)\}\\ =& \{x \in Tr(\mathcal{X}, L)/0 \mid x/0 \in \mathcal{X}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Tr(\mathcal{X}, L) =& \bigvee\{x \in L \mid x/0 \in \mathcal{X}\}\\ =& \bigvee\{x \in Tr(\mathcal{X}, L)/0 \mid x/0 \in \mathcal{X}\}\\ =& Tr(\mathcal{X}, Tr(\mathcal{X}, L)/0).\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\tau(L) = Tr(\mathcal{X}, L)/0 = Tr(\mathcal{X}, Tr(\mathcal{X}, L)/0)/0 = \tau(\tau(L)).$$

Y así τ es un prerradical idempotente. □

3.3.2. El rechazo, $Rej(\mathcal{X}, L)$

Definición 123. *Sean $L \in CLat$ y $\mathcal{X} \subseteq BLat$ una clase abstracta. El* ***rechazo*** *de $\mathcal{X}$ en L se define como:*

$$Rej(\mathcal{X}, L) = \bigwedge\{x \in L \mid 1/x \in \mathcal{X}\}.$$

Observación 124. *Si $\mathcal{X}$ es cohereditaria y no vacía, entonces para toda retícula L la familia $\{x \in L \mid 1/x \in \mathcal{X}\} \neq \emptyset$. Por lo que el rechazo de L está bien definido.*

Definición 125. *Sea $\mathcal{X}$ una subclase, distinta del vacío, de los objetos de $BLat$. Se dice que $\mathcal{X}$ es* ***cerrada bajo ínfimos*** *si es abstracta y para todo $L \in CLat$, $a \in L$, $\{a_i | i \in I\} \subseteq L$ e $i \in I$; si $a_i \leq a$ y $a/a_i \in \mathcal{X}$, entonces $a/\bigwedge a_i \in \mathcal{X}$.*

Observación 126. *Si $\mathcal{X}$ es una clase cerrada bajo ínfimos, entonces $1/Rej(\mathcal{X}, L) \in \mathcal{X}$, y así se tiene que $L \in \mathcal{X}$ si y sólo si $Rej(\mathcal{X}, L) = 0$.*

Lema 127. *Sean $L, L' \in CLat$, $\mathcal{X} \subseteq BLat$ una clase abstracta y $f : L \to L'$ un isomorfismo de retículas. Entonces:*

$$f(Rej(\mathcal{X}, L)) = Rej(\mathcal{X}, L').$$

Demostración.
Dado que f es un isomorfismo, este induce una biyección entre $\{x \in L | 1/x \in \mathcal{X}\}$ y $\{x' \in L' | 1'/x' \in \mathcal{X}\}$. Además, al ser un isomorfismo, conmuta con ínfimos arbitrarios, por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(Rej(\mathcal{X}, L)) =& f(\bigwedge\{x \in L | 1/x \in \mathcal{X}\}) \\ =& \bigwedge\{f(x) \in L | 1/x \in \mathcal{X}\} \\ =& \bigwedge\{x' \in L' | 1'/x' \in \mathcal{X}\} \\ =& Rej(\mathcal{X}, L'). \end{aligned}$$

□

Lema 128. *Sean $L \in LM_C$, $a \in L$ y $\mathcal{X} \subseteq BLat$ una clase hereditaria. Entonces:*

$$Rej(\mathcal{X}, a/0) \leq Rej(\mathcal{X}, L) \leq Rej(\mathcal{X}, 1/a).$$

Demostración.
Sea $x \in L$ tal que $1/x \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es hereditaria y $x \leq x \vee a \leq 1$, se sigue que $(x \vee a)/x \in \mathcal{X}$. Más aún se tiene que $a/(x \wedge a) \cong (x \vee a)/x$, por el Teorema 68. Al ser $\mathcal{X}$ abstracta, se deduce que $a/(x \wedge a) \in \mathcal{X}$.
Así $Rej(\mathcal{X}, a/0) = \bigwedge\{y \in a/0 \mid 1/y \in \mathcal{X}\} \leq a \wedge x \leq x$. Por lo que:

$$Rej(\mathcal{X}, a/0) \leq \bigwedge\{x \in L | 1/x \in \mathcal{X}\} = Rej(\mathcal{X}, L).$$

Luego, $\{x \in 1/a \mid 1/x \in \mathcal{X}\} \subseteq \{x \in L \mid 1/x \in \mathcal{X}\}$. Por lo tanto:

$$Rej(\mathcal{X}, L) = \bigwedge\{x \in L \mid 1/x \in \mathcal{X}\} \leq \bigwedge\{x \in 1/a \mid 1/x \in \mathcal{X}\} = Rej(\mathcal{X}, 1/a).$$

□

Proposición 129. *Sean $L, L' \in LM_C$, $\mathcal{X} \subseteq BLat$ una clase hereditaria y $f \in LM(L, L')$. Entonces:*

$$f(Rej(\mathcal{X}, L)) \leq Rej(\mathcal{X}, L').$$

Demostración.
Sea $k \in L$ el núcleo de f, entonces $1/k \cong f(1)/0'$ bajo $\widetilde{f}$.
Por el Lema 128 se tiene que $Rej(\mathcal{X}, L) \leq Rej(\mathcal{X}, 1/k)$, y además $k \leq Rej(\mathcal{X}, 1/k)$.
Así que $Rej(\mathcal{X}, L) \vee k \leq Rej(\mathcal{X}, 1/k)$. Por lo tanto:

$$f(Rej(\mathcal{X}, L)) = f(Rej(\mathcal{X}, L) \vee k) \leq f(Rej(\mathcal{X}, 1/k)) = \widetilde{f}(Rej(\mathcal{X}, 1/k)).$$

Y por los Lemas 127 y 128 se tiene que:

$$\widetilde{f}(Rej(\mathcal{X}, 1/k)) = Rej(\mathcal{X}, f(1)/0') \leq Rej(\mathcal{X}, L').$$

Por lo tanto $f(Rej(\mathcal{X}, L)) \leq Rej(\mathcal{X}, L')$.

□

Definición 130. *Sea $r : LM \to LM$ un prerradical de retículas. Se dice que r es un* ***radical*** *si para todo $L \in LM$ pasa que $r(1/1^r) = 1^r/1^r$.*

Corolario 131. *Sean $\mathcal{X} \subseteq BLat$ una clase hereditaria y $\rho : LM_C \to LM_C$ definido, a nivel de objetos, como $\rho(L) = Rej(\mathcal{X}, L)/0_L$. Entonces ρ es un radical.*

Demostración.

a. Sea $L \in LM_C$. Se quiere ver que $\rho(L) \leq L$. Esto es inmediato ya que:

$$\rho(L) = Rej(\mathcal{X}, L)/0_L = (\bigwedge\{x \in L \mid 1/x \in \mathcal{X}\})/0 \leq 1/0 = L.$$

b. Sea $f \in LM_C(L, L')$. Se quiere ver que $f(\rho(L)) \subseteq \rho(L')$, esto es, que $f(Rej(\mathcal{X}, L)) \leq Rej(\mathcal{X}, L')$, pero esto ya se tiene debido a la Proposición 129.

Por lo tanto ρ es un prerradical. Luego, para ver que es radical se tiene que:

$$\begin{aligned}\{x \in L \mid 1/x \in \mathcal{X}\} =& \{x \in L \mid 1/x \in \mathcal{X}\ ;\ x \geq Rej(\mathcal{X}, L)\}\\ =& \{x \in 1/Rej(\mathcal{X}, L) \mid 1/x \in \mathcal{X}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Rej(\mathcal{X}, L) =& \bigwedge\{x \in L \mid 1/x \in \mathcal{X}\}\\ =& \bigwedge\{x \in 1/Rej(\mathcal{X}, L) \mid 1/x \in \mathcal{X}\}\\ =& Rej(\mathcal{X}, 1/Rej(\mathcal{X}, L)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, para ver que es radical:

$$\begin{aligned}\rho(1/1^\rho) =& Rej(\mathcal{X}, 1/1^\rho)/0_{(1/1^\rho)}\\ =& Rej(\mathcal{X}, 1/Rej(\mathcal{X}, L))/1^\rho\\ =& Rej(\mathcal{X}, L)/1^\rho = 1^\rho/1^\rho\\ =& 1^\rho.\end{aligned}$$

Y así ρ es un radical. □

3.3.3. El zócalo, $Soc(L)$

Definición 132. *Sean $L \in BLat$ y $a \in L$. Se dice que a es un* ***átomo*** *si $a \neq 0$ y $a/0 = \{0, a\}$, es decir, a es mínimo en $L \backslash \{0\}$.*

Definición 133. *Sea $L \in BLat$, se define la* ***colección de todos los átomos*** *de L como:*

$$A(L) := \{a \in L \mid a \text{ es un átomo}\}.$$

Definición 134. *Sea $L \in BLat$, L es una* ***retícula atómica*** *si para todo $0 \neq x \in L$ existe $a \in A(L)$ tal que $a \leq x$.*

Definición 135. *Sea $L \in BLat$, L es una* ***retícula localmente atómica*** *si para toda $a \in L$ existe $B \subseteq A(L)$ tal que $a = \bigvee B$.*

Definición 136. *Sea $L \in CLat$. El* ***zócalo*** *de L se define como:*

$$Soc(L) = \bigvee A(L).$$

Observación 137. *Sea $L \in CLat$, entonces, $Soc(L) = 0$ si y sólo si $A(L) = \emptyset$.*

Lema 138. *Sean $L, L' \in LM_C$ y $f \in LM(L, L')$. Si $x \in A(L)$, entonces $f(x) \in A(L') \cup \{0'\}$.*

Demostración.
Sea $k \in L$ el núcleo de f, entonces $1/k \cong f(1)/0'$ bajo $\widetilde{f}$.
Considere $x \in A(L)$. Si $x \leq k$, entonces $f(x) = 0'$. Luego, si $x \nleq k$, entonces $x \wedge k \lneq x$, pero x es un átomo, por lo que $x \wedge k = 0$. Además sucede que:

$$x/0 = x/x \wedge k \cong (x \vee k)/k.$$

Por lo que $x \vee k \in A(1/k)$. Como $\widetilde{f}$ es un isomorfismo se deduce que:

$$f(x) = f(x \vee k) = \widetilde{f}(x \vee k) \in A(f(1)/0') \subseteq A(L').$$

Por lo tanto $f(x) \in A(L') \cup \{0'\}$. $\square$

Proposición 139. *Sean $L, L' \in LM_C$ y $f \in LM(L, L')$. Entonces:*

$$f(Soc(L)) \leq Soc(L').$$

Demostración.
Por el Lema 138 se tiene que :

$$\begin{aligned}
Soc(L) \vee k = & (\bigvee_{x \in A(L)} x) \vee k \\
= & \bigvee_{x \in A(L)} (x \vee k) \\
= & (\bigvee_{x \in A(L)\ ;\ x \leq k} (x \vee k)) \vee (\bigvee_{x \in A(L)\ ;\ x \nleq k} (x \vee k)) \\
= & k \vee (\bigvee_{x \in A(L)\ ;\ x \nleq k} (x \vee k)) \\
= & \bigvee_{x \in A(L)\ ;\ x \nleq k} (x \vee k) \\
\leq & Soc(1/k).
\end{aligned}$$

Como $\widetilde{f}$ es un isomorfismos se tiene que conmuta con supremos arbitrarios y así:

$$\begin{aligned}
f(Soc(L)) = & f(Soc(L) \vee k) \\
\leq & f(Soc(1/k)) = \widetilde{f}(Soc(1/k)) \\
= & \widetilde{f}(\bigvee_{x \in A(1/k)} x) \\
= & \bigvee_{x \in A(1/k)} \widetilde{f}(x) \\
= & Soc(f(1)/0') \\
\leq & Soc(L').
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 140. *Sea $\sigma : LM_C \to LM_C$ definido, a nivel de objetos, como $\sigma(L) = Soc(L)/0_L$. Entonces σ es un prerradical.*

Demostración.

a. Sea $L \in LM_C$. Se quiere ver que $\sigma(L) \leq L$. Esto es inmediato ya que:

$$\sigma(L) = Soc(L)/0 = (\bigvee A(L))/0 \leq 1/0 = L.$$

b. Sea $f \in LM_C(L, L')$. Se quiere ver que $f(\sigma(L)) \subseteq \sigma(L')$, esto es, que $f(Soc(L)) \leq Soc(L')$, pero esto ya se tiene debido a la Proposición 139.

Por lo tanto σ es un prerradical. $\square$

Definición 141. *Sean $L \in BLat$ y $c \in L$. Se dice que c es un* ***elemento compacto*** *si siempre que $c \leq \bigvee_{x \in A} x$, para un subconjunto A de L, existe un subconjunto finito F de A tal que $c \leq \bigvee_{x \in F} x$.*

Definición 142. *Sea $L \in BLat$, se define la* ***colección de todos los elementos compactos*** *de L como:*

$$K(L) := \{c \in L \mid c \text{ es un elemento compacto}\}.$$

Lema 143. *Sean $R \in 1Rng$ y $M \in R - Mod$. Son equivalentes:*

a. M es finitamente generado.

b. Si $M = \sum_{i \in I} M_i$ para alguna una familia de submódulos $\{M_i | i \in I\}$, entonces existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $M = \sum_{j \in J} M_i$.

Demostración. Ver Proposición 10.1 en pág.123 de [8]. $\square$

Ejemplo 144. *Sean $R \in 1Ring$ y $M \in R\text{-}Mod$. Se sabe que $Sub(M) \in LM_C$, más aún $Sub(M)$ es una retícula supremo continua. En esta retícula, $N \in Sub(M)$ es un compacto si y sólo si N es finitamente generado.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $N \in K(Sub(M))$ y supongamos que existe una familia de submódulos $\{A_i | i \in I\}$ de M tal que:

$$N = \sum_{i \in I | i \in I} A_i.$$

Entonces, $\{A_i | i \in I\} \subseteq N$, con lo cual se tiene que $\{A_i | i \in I\} \subseteq Sub(M)$, luego, $N \leq \sum_{i \in I} A_i$ y N es un compacto, por lo que existe $I_n \subseteq I$ tal que I_n es un conjunto finito y

$$N \leq \sum_{i \in I_n} A_i.$$

Por último observe que:

$$N \leq \sum_{i \in I_n} A_i \leq \sum_{i \in I} A_i = N.$$

Por lo tanto $N = \sum\limits_{i \in I_n} A_i$, y así, N es finitamente generado.

($\Leftarrow$) Por el Lema 143 el regreso es inmediato.

$\square$

Definición 145. *Sea $L \in BLat$, L es **compactamente generada** si $L \in CLat$ y para todo $x \in L$ existe $A \subseteq K(L)$ tal que $x = \bigvee A$.*

Definición 146. *Se define LM_{cg} como la **subcategoría plena de** LM **cuyos objetos son retículas compactamente generadas**.*

Ejemplo 147. *Sean $R \in 1Ring$ y $M \in R\text{-}Mod$. Entonces $Sub(M) \in LM_{cg}$.*

Demostración.
Sean $N \in Sub(M)$ y $A = \{\langle n \rangle = Rn \mid n \in N\}$. Entonces para todo $Rn \in A$ pasa que $Rn \in K(Sub(M))$, es decir, $A \subseteq K(Sub(M))$. Con esto se concluye que:

$$\bigvee A = \sum_{n \in N} Rn = \langle \bigcup_{n \in N} Rn \rangle = \langle N \rangle = N.$$

$\square$

Definición 148. *Sean $L \in BLat$ y $e \in L$. Se dice que e es un **elemento esencial** si para todo $x \neq 0$ pasa que $e \wedge x \neq 0$.*

Definición 149. *Sea $L \in BLat$, se define la* ***colección de todos los elementos esenciales*** *de L como:*

$$E(L) := \{e \in L \mid e \text{ es un elemento esencial}\}.$$

Observación 150. *Sean $R \in 1Ring$ y $M \in R\text{-}Mod$. Entonces un submódulo N de M es esencial si y sólo si es N es esencial en $Sub(M)$.*

Proposición 151. *Sea $L \in BLat$. Si $a \in A(L)$ y $e \in E(L)$, entonces $a \leq e$.*

Demostración.
Si $a \in A(L)$ y $e \in E(L)$, entonces $a \wedge e \neq 0$ y $a \wedge e \leq a$. Como a es un átomo se sigue que $a \wedge e = a$ y por lo tanto $a \leq e$. □

Proposición 152. *Sea $L \in CLat$, entonces $Soc(L) \leq \bigwedge E(L)$.*

Demostración.
Por la Proposición anterior, para todo $a \in A(L)$ y para todo $e \in E(L)$ pasa que $a \leq e$, en particular $Soc(L) = \bigvee A(L) \leq \bigwedge E(L)$. □

Proposición 153. *Sea $L \in CLat$ y atómica, entonces $Soc(L) \in E(L)$. Es decir:*

$$Soc(L) = \bigwedge E(L).$$

Demostración.
Sea $0 \neq x \in L$, como L es atómica entonces existe $a \in A(L)$ tal que $a \leq x$ y $0 \leq a \leq x \wedge Soc(L)$, por lo que $x \wedge Soc(L) \neq 0$ y así $Soc(L) \in E(L)$, y por tanto $Soc(L) = \bigwedge E(L)$. □

Proposición 154. *Sea $L \in LM_{cg}$, entonces $Soc(L) = \bigwedge E(L)$.*

Demostración. :
Sean $a \in A(L)$ y $e = \bigwedge E(L)$, entonces $a \leq e$, es decir, $a \in e/0$. Como L es compactamente generada se tiene que L es supremo continua por la Proposición 30, y por la Proposición 34 se tiene que L es pseudo complementada.

Sea $c \in L$ pseudo complemento de a, entonces por la Proposición 35 se tiene que $a \vee c$ es esencial, es decir, $a \vee c \in E(L)$, por lo que $e \leq a \vee c$.
Luego, por modularidad se sigue que:

$$a \vee (c \wedge e) = (a \vee c) \wedge e = e = \bigwedge E(L).$$

Y esto implica que $c \wedge e$ es un complemento de a en $\bigwedge E(L)/0$.
Por lo tanto $\bigwedge E(L)/0$ es una retícula complementada y compactamente generada.

Por último, por el Teorema 32 , se tiene que $\bigwedge E(L)/0$ es localmente atómica.
Por lo que existe $A \subseteq A(L)$ tal que $\bigvee A = e = \bigwedge E(L)$, y $\bigvee A \leq \bigvee A(L) = Soc(L)$.
Por lo tanto $\bigwedge E(L) \leq Soc(L)$, así se concluye que $\bigwedge E(L) = Soc(L)$. $\square$

Definición 155. *Sea $r : LM \to LM$ un prerradical de retículas. Se dice que r es **hereditario** si para todo $L \in LM$ y para todo $a \in L$ pasa que $a^r = a \wedge 1^r$.*

Definición 156. *Se define LM_U como la **subcategoría plena de** LM **cuyos objetos son retículas supremo continuas y modulares**.*

Proposición 157. *Sea $L \in LM_C$. Se tiene que :*

a. $Soc(Soc(L)/0) = Soc(L)$, es decir, σ es un prerradical idempotente en LM_C.[2]

b. Sea $L \in LM_U$. Para todo $a \in L$ pasa que $Soc(a/0) = a \wedge Soc(L)$, es decir, σ es un prerradical hereditario en LM_U.

Demostración.

a. Observe que $A(L) = A(Soc(L)/0)$, por lo que:

$$Soc(L) = \bigvee A(L) = \bigvee A(Soc(L)/0) = Soc(Soc(L)/0).$$

Por lo tanto:

$$\sigma(L) = Soc(L)/0 = Soc(Soc(L)/0)/0 = \sigma(Soc(L)/0) = \sigma(\sigma(L)).$$

[2]Donde σ es el prerradical construido en el Corolario 140.

b. Sean $a \in L$, $s = Soc(L)$ y $r = Soc(a/0)$. Nótese que $A(r/0) \subseteq A(s/0) = A(L)$, entonces $r \leq s$ y $r \leq a$ por lo que $r \leq a \wedge s$.
Luego, $s/0$ es supremo continua, lo que implica que $s/0$ es una retícula localmente atómica, por lo que existe $A \subseteq A(s/0)$ tal que $a \wedge s = \bigvee A$. Como $a \wedge s \leq a$, entonces se tiene que $\bigvee A \leq a$, lo que implica que $\bigvee A \in A(a/0)$. Por lo tanto:

$$a \wedge s = \bigvee A \leq \bigvee A(a/0) = Soc(a/0) = r.$$

Así se concluye que:

$$a^\sigma = Soc(a/0) = a \wedge Soc(L) = a \wedge 1^\sigma.$$

□

3.3.4. El radical, $Rad(L)$

Definición 158. *Sean $L \in BLat$ y $s \in L$. Se dice que s es un* ***elemento superfluo*** *si para todo $x \neq 1$ pasa que $s \vee x \neq 1$.*

Definición 159. *Sea $L \in BLat$, se define la* ***colección de todos los elementos superfluos*** *de L como*

$$S(L) := \{s \in L \mid s \text{ es un elemento superfluo}\}.$$

Definición 160. *Sea $L \in CLat$. El* ***radical*** *de L se define como:*

$$Rad(L) = \bigvee S(L).$$

Lema 161. *Sean $L, L' \in LM_C$ y $f \in LM(L, L')$. Si $x \in S(L)$, entonces $f(x) \in S(L')$.*

Demostración.
Sea $k \in L$ el núcleo de f, entonces $1/k \cong f(1)/0'$ bajo $\widetilde{f}$.
Considere $x \in S(L)$, entonces $x \vee k \in 1/k$. Supongamos que existe $y \in 1/k$ tal que $(x \vee k) \vee y = 1$.
Entonces $x \vee y = 1$, pero x es elemento superfluo, por lo que $y = 1$ y por tanto $(x \vee k) \in S(1/k)$. Como $\widetilde{f}$ es un isomorfismo se deduce que:

$$f(x) = f(x \vee k) = \widetilde{f}(x \vee k) \in S(f(1)/0').$$

Sólo resta ver que $S(f(1)/0') \subseteq S(L')$. Sean $x' \in S(f(1)/0')$ y $y' \in L'$ tal que $x' \vee y' = 1'$. Luego, por modularidad se tiene que $f(1) = (x' \vee y') \wedge f(1) = x' \vee (y' \wedge f(1))$. Como $y' \wedge f(1) \in f(1)/0'$ y $x' \in S(f(1)/0')$ se concluye que $y' \wedge f(1) = f(1)$. Así $x' \leq f(1) \leq y'$. Por lo tanto $1' = x' \vee y' = y'$. Por lo tanto $x' \in S(L')$, es decir, $S(f(1)/0') \subseteq S(L')$. Por lo que $f(x) \in S(L')$. $\square$

Proposición 162. *Sean $L, L' \in LM_C$ y $f \in LM(L, L')$. Entonces:*

$$f(Rad(L)) \leq Rad(L').$$

Demostración.
Por el Lema 161 se tiene que :

$$Rad(L) \vee k = (\bigvee_{x \in S(L)} x) \vee k = \bigvee_{x \in S(L)} (x \vee k) \leq \bigvee_{x \in S(1/k)} x = Rad(1/k).$$

Como $\widetilde{f}$ es un isomorfismos se tiene que conmuta con supremos arbitrarios y así:

$$\begin{aligned} f(Rad(L)) &= f(Rad(L) \vee k) \\ &\leq f(Rad(1/k)) \\ &= \widetilde{f}(Rad(1/k)) \\ &= \widetilde{f}(\bigvee_{x \in S(1/k)} x) \\ &= \bigvee_{x \in S(1/k)} \widetilde{f}(x) \\ &= Rad(f(1)/0') \\ &\leq Rad(L'). \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 163. *Sea $\varrho : LM_C \to LM_C$ definido, a nivel de objetos, para todo $L \in LM_C$, como $\varrho(L) = Rad(L)/0_L$. Entonces ϱ es un prerradical.*

Demostración.

a. Sea $L \in LM_C$. Se quiere ver que $\varrho(L) \leq L$. Esto es inmediato ya que:

$$\varrho(L) = Rad(L)/0 = (\bigvee S(L))/0 \leq 1/0 = L.$$

b. Sea $f \in LM_C(L, L')$. Se quiere ver que $f(\varrho(L)) \subseteq \varrho(L')$, esto es, que $f(Rad(L)) \leq Rad(L')$, pero esto ya se tiene debido a la Proposición 162.

Por lo tanto ϱ es un prerradical. $\square$

Definición 164. *Sean $L \in BLat$ y $m \in L$. Se dice que m es un* ***coátomo*** *si $1/m = \{m, 1\}$, es decir, m es máximo en $L \backslash \{1\}$.*

Definición 165. *Sea $L \in BLat$, se define la* ***colección de todos los coátomos*** *de L como:*

$$M(L) := \{m \in L \mid m \textit{ es un coátomo}\}.$$

Definición 166. *Sea $L \in BLat$, L es una* ***retícula coatómica*** *si para todo $1 \neq x \in L$ existe $m \in M(L)$ tal que $x \leq m$.*

Definición 167. ***Retículas de Krull***
Sea $L \in BLat$, se dice que L es una ***retícula de Krull*** *si para todo $x \in L \backslash \{1\}$ existe $m \in M(L)$ tal que $x \leq m$, es decir, $M(1/x) \neq \emptyset$.*

Observación 168. *Una retícula L es de Krull si y sólo si L es coatómica.*

Definición 169. *Sea $L \in BLat$, L es una* ***retícula compacta*** *si $1 \in K(L)$.*

Observación 170. *Si L es compacta, entonces L es de Krull.*

Definición 171. *Sea $L \in CLat$. El* ***radical de Jacobson*** *de L se define como:*

$$Jac(L) = \bigwedge M(L).$$

Proposición 172. *Sea $L \in BLat$. Si $s \in S(L)$ y $m \in M(L)$, entonces $s \leq m$.*

Demostración.
Si $m \in M(L)$ y $s \in S(L)$, entonces $m \vee s \neq 1$ y $m \leq m \vee s$. Como m es un coátomo se sigue que $m \vee s = m$ y por lo tanto $s \leq m$. $\square$

Proposición 173. *Sea $L \in CLat$, entonces $Rad(L) \leq Jac(L)$.*

Demostración.
Por la Proposición anterior, para todo $m \in M(L)$ y para todo $s \in S(L)$ pasa que $s \leq m$, en consecuencia $Rad(L) = \bigvee S(L) \leq \bigwedge M(L) = Jac(L)$. $\square$

Proposición 174. *Sea $L \in CLat$ y coatómica (o equivalentemente una retícula de Krull), entonces $Jac(L) \in S(L)$. Es decir:*

$$Rad(L) = Jac(L).$$

Demostración.
Se procederá por contradicción:
Sea $x \in L$ tal que $Jac(L) \vee x = 1$ y supóngase que $1 \neq x$, entonces, por ser L de Krull, existe $m \in M(L)$ tal que $x \leq m$, y así se tiene que $1 = Jac(L) \vee x \leq x \vee m = m$, esto es una contradicción.
Por lo tanto $1 = x$, es decir, $Jac(L) \in S(L)$ y así $Jac(L) = Rad(L)$. $\square$

Proposición 175. *Sea $L \in LM_{cg}$, entonces $Rad(L) = Jac(L)$.*

Demostración.
Como L es compactamente generada se tiene que $Jac(L)$ es un supremo de elementos compactos de L, más aún se tiene que:

$$Jac(L) = \bigvee \{c \in K(L) \mid c \leq Jac(L)\}.$$

Sean $c \in K(L)$ tal que $c \leq Jac(L)$ y $y \in L$ tal que $c \vee y = 1$. Supóngase que $y \neq 1$, es decir, $y \in L \backslash \{1\}$, por lo que $c \nleq y$.

Luego, sea $A_y := \{x \in L \mid y \leq x \ ; \ c \nleq x\}$. Entonces se tiene que $A_y \neq \emptyset$ ya que $y \in A_y$. Sean $T \subseteq A_y$ una cadena distinta del vacío y $t = \bigvee T$.
Si $c \leq t$, entonces existiría $F \subseteq T$ tal que F es finito y $c \leq \bigvee F$ ya que c es compacto, pero esto implicaría que existe $a \in T$, y por tanto $a \in A_y$, tal que $c \leq a$ dado que T es una cadena , lo cual sería una contradicción.
Por lo que se tiene que $c \nleq t$ y así $t \in A_y$, es decir, toda cadena tiene su supremo en

A_y y por lema de Zorn se tiene que A_y tiene un elemento maximal $m \in A_y$.

Ahora se probará que $m \in M(L)$. Sea $u \in L$ tal que $m \leq u$.
Si $c \leq u$, entonces se tiene que $1 = c \vee y \leq u \vee m$, ya que m es maximal de A_y, por lo que $u = 1$. Si $c \nleq u$, entonces $u \in A_y$ y $u \leq m$ por lo que $u = m$.
Por lo tanto $m \in M(L)$ y así se tendría que $c \leq Jac(L) \leq m$, pero al mismo tiempo $c \nleq m$, lo que es una contradicción.

Esta contradicción surge de asumir que $y \neq 1$, por lo tanto $y = 1$ y así $c \in S(L)$. Con lo que se concluye que:

$$Jac(L) = \bigvee \{c \in K(L) \mid c \leq Jac(L)\} \leq \bigvee S(L) = Rad(L).$$

Y por lo tanto $Jac(L) = Rad(L)$. $\square$

Proposición 176. *Sea $L \in LM_{cg}$, entonces $Rad(1/Rad(L)) = Rad(L)$, es decir, ϱ es un radical en LM_{cg}.*

Demostración.
Observe que para todo $a \in L$ sucede que $1/a$ es compactamente generado.
Por la Proposición 175 se tiene que $Rad(L) = Jac(L) = \bigwedge M(L)$ y además sucede que $M(1/Rad(L)) = M(L)$, entonces se concluye que:

$$Rad(1/Rad(L)) = \bigwedge M(1/Rad(L)) = \bigwedge M(L) = Rad(L) = 1^{\varrho}.$$

Por lo tanto:

$$\varrho(1/1^{\varrho}) = Rad(1/1^{\varrho})/0_{(1/1^{\varrho})} = Rad(1/Rad(L))/1^{\varrho} = Rad(L)/1^{\varrho} = 1^{\varrho}/1^{\varrho} = 1^{\varrho}.$$

Y así ϱ es un radical. $\square$

Capítulo 4

Prerradicales inducidos en LM

En este capítulo final se presentarán los principales resultados de ésta tesis, con los cuales se estudiarán las conexiones que existen entre los prerradicales de categorías de Grothendieck, en particular R-Mod, y los prerradicales en LM.
Este capítulo se basa principalmente en el artículo de Toma Albu y Mihai Iosif: *Lattice preradicals vs module preradicals* [1].

4.1. Prerradicales en categorías abelianas

Como se menciono al inicio del capítulo anterior, el concepto de prerradical puede ser ampliado a otras categorías diferentes de las de módulos, como lo son las categorías de Grothendieck. En esta sección se verá la conexión que hay entre los prerradicales de LM y los prerradicales en una categoría de Grothendieck.

Definición 177. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck y $r : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ un endofuntor. Se dice que r es un **prerradical** en $\mathcal{G}$ si para cualquier objeto $A \in \mathcal{G}$, $r(A)$ es un subobjeto de A, y para cualquier morfismo $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathcal{G}$ se induce un morfismo por restricción $r(A) \xrightarrow{r(f)} r(B)$.*

Con esto en mente se puede ver que, dado un prerradical en la categoría LM, este induce un prerradical de categorías de Grothendieck. Para esto se utilizará el **funtor de subobjetos** que se construyo en el capítulo 2. Recuerde que la aplicación del prerradical a un objeto se denota como $r(A) = A^r$. Además, dado que r es un prerradical y $\mathcal{S}(A) \in LM$[1] se tiene que $A^r \leq A$.

[1]Se debe recordar que $\mathcal{S}$ es el funtor de subojetos construido en la sección 2.4.

Teorema 178. *Sean $r : LM \to LM$ un prerradical de retículas, $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck y $\widetilde{r} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ definido en objetos y flechas como:*

$$\widetilde{r}(A) = A^r = \bigvee r(\mathcal{S}(A)) \text{ [2]}$$

$$\widetilde{r}(\ A \xrightarrow{f} B\ ) = (\ A^r \xrightarrow{r(\mathcal{S}(f))} B^r\ )$$

Donde $r(\mathcal{S}(f))$, el funtor de subobjetos, se define para toda $\alpha \in A^r$, como $r(\mathcal{S}(f))(\alpha) = f(\alpha)$. Entonces $\widetilde{r}$ es un prerradical en $\mathcal{G}$, inducido por r.

Demostración.

a. Sea $A \in \mathcal{G}$, entonces, es inmediato ver que:

$$\widetilde{r}(A) = A^r \leq A.$$

Por lo tanto para toda $A \in \mathcal{G}$ pasa que $\widetilde{r}(A) \leq A$.

b. Sea $f \in \mathcal{G}(A, B)$. Dado que r es un prerradical y $\mathcal{S}(f) \in LM$ se tiene que:

$$\mathcal{S}f(A^r/0) = \mathcal{S}f(r(\mathcal{S}(A))) \subseteq r(\mathcal{S}(B)) = B^r/0.$$

Por lo que se tiene que $\mathcal{S}f(A^r) \subseteq B^r$ y así:

$$\mathcal{S}f(\widetilde{r}(A)) = f(\widetilde{r}(A)) \subseteq B^r = \widetilde{r}(B).$$

Por lo tanto para todo $f \in \mathcal{G}(A, B)$ se tiene que $f(\widetilde{r}(A)) \subseteq \widetilde{r}(B)$.

Con esto se concluye que $\widetilde{r}$ es un prerradical en $\mathcal{G}$. $\square$

La conversa de este teorema es falsa, es decir, dado un prerradical en una categoría de Grothendieck, este no necesariamente induce un prerradical en LM como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 179. *Sean $M \in \mathbb{Z}$-Mod y $\widetilde{r}(M) := \{x \in M \mid 2x = 0\}$, entonces $\widetilde{r}$ es un prerradical en $\mathbb{Z}$-Mod. Se verá que no existe r prerradical de LM tal que, por la construcción del Teorema 178, induzca el prerradical $\widetilde{r}$.*

[2] $\bigvee r(\mathcal{S}(A) = \bigvee r(Sub(A)) = \bigvee r(A/0) = \bigvee A^r/0 = A^r$.

Suponga que existe r un prerradical en LM que induzca a $\widetilde{r}$. Luego, sean $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_3 \in \mathbb{Z}-Mod$; note que $Sub(\mathbb{Z}_2) \cong Sub(\mathbb{Z}_3)$, bajo el isomorfismo canónico f. Entonces se tendría que $f(r(Sub(\mathbb{Z}_2))) \subseteq r(Sub(\mathbb{Z}_3))$ y

$$\begin{aligned} \widetilde{r}(\mathbb{Z}_2) =& \mathbb{Z}_2 \\ \widetilde{r}(\mathbb{Z}_3) =& \{0\}. \end{aligned}$$

Por lo que, utilizando la construcción del Teorema 178, se tiene:

$$\begin{aligned} r(Sub(\mathbb{Z}_2)) &= \widetilde{r}(Sub(\mathbb{Z}_2)) = Sub(\mathbb{Z}_2) \\ r(Sub(\mathbb{Z}_3)) &= \widetilde{r}(Sub(\mathbb{Z}_3)) = \{0\}. \end{aligned}$$

Con esto se concluiría que:

$$\begin{aligned} f(r(Sub(\mathbb{Z}_2))) = f(\widetilde{r}(Sub(\mathbb{Z}_2))) =& f(\{\mathbb{Z}_2, 0\}) = \{\mathbb{Z}_3, 0\} \\ r(Sub(\mathbb{Z}_3)) = \widetilde{r}(Sub(\mathbb{Z}_3)) =& \{0\} \\ \{\mathbb{Z}_3, 0\} \subseteq& \{0\}. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción.

Si bien esta conversa es falsa en general, se verá que existen ciertos casos en los que sí se puede inducir un prerradical de retículas.

4.2. La categoría de intervalos en una clase hereditaria, $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$

En estas dos secciones a continuación se utilizará el concepto de subcategoría linealmente cerrada que se definió en la sección 3.2.2. Se estudiarán las clases hereditarias en una categoría de Grothendieck y cómo estas generan una nueva categoría.

Definición 180. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck y $\mathcal{X}$ una subclase no vacía de objetos de $\mathcal{G}$. Se dice que $\mathcal{X}$ es una* ***clase hereditaria*** *si:*

a. Para toda $A \in \mathcal{X}$, si $A \cong B$, entonces $B \in \mathcal{X}$, es decir, es una clase abstracta.

b. Para toda $A \in \mathcal{X}$, si $B \leq A$, entonces $B \in \mathcal{X}$, es decir, es cerrado bajo subobjetos.

Observación 181. *A lo largo de la tesis se ha usado la notación "b/a"para denotar un intervalo, esto ya que no había lugar a confusiones, sin embargo en esta sección y la siguiente se puede llegar a confundir con la notación usada para denotar al objeto cociente. Por lo cual en lo subsecuente se usará la notación "*$[A, B]$*"para denotar al intervalo de objetos, mientras que "*A/B*"denotará al objeto cociente.*

Definición 182. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck, $A \in \mathcal{G}$ y $B \leq A$. Se define el* ***intervalo de los subobjetos*** *entre B y A como:*

$$[B, A] := \{C \in Sub(A) \mid B \leq C\}.$$

Observación 183. *Siempre existe un isomorfismo canónico de retículas:*

$$\varphi_{A/B} : [B, A] \to Sub(A/B).$$

definido como $\varphi_{A/B}(C) = C/B$, por el cuarto teorema de isomorfismo.

Definición 184. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck y $\mathcal{X}$ una clase hereditaria de $\mathcal{G}$. La* ***colección de intervalos*** *en $\mathcal{X}$ se define como:*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{X}} := \{[B, A] \mid A \in \mathcal{X} \ ; \ B \leq A\}.$$

Definición 185. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck y $[A', A]$, $[B', B] \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ intervalos de una clase hereditaria $\mathcal{X}$ en $\mathcal{G}$. Se dice que $g : [A', A] \to [B', B]$ es un* ***morfismo de intervalos*** *si existe $f \in \mathcal{G}$ morfismo entre los objetos cociente A/A' y B/B' tal que g se factoriza en el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
{[A', A]} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_{A/A'}"'] & {[B', B]} \\
Sub(A/A') \arrow[r, "\mathcal{S}f"'] & Sub(B/B') \arrow[u, "\varphi^{-1}_{B/B'}"']
\end{tikzcd}$$

Es decir $g = \varphi^{-1}_{B/B'} \circ \mathcal{S}f \circ \varphi_{A/A'}$, donde $\mathcal{S}f$ es el funtor de subobjetos en $\mathcal{G}$ aplicado al morfismo f.

Observe que g es composición de morfismos lineales y por tanto g es morfismo lineal.

Proposición 186. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck y $[A', A] \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ intervalo de una clase hereditaria $\mathcal{X}$ en $\mathcal{G}$. Entonces, el morfismo identidad $Id_{[A',A]}$, definido, a nivel de objetos, para todo $C \in [A', A]$ como $Id_{[A',A]}(C) = C$, es un morfismo de intervalos.*

Demostración.
Basta observar que $Id_{[A',A]}$ se puede factorizar en el siguiente cuadro conmutativo, es decir, que $Id_{[A',A]} = \varphi^{-1}_{A/A'} \circ \mathcal{S}Id_{A/A'} \circ \varphi_{A/A'}$.

$$\begin{tikzcd}
{[A', A]} \arrow[r, "Id_{[A',A]}"] \arrow[d, "\varphi_{A/A'}"'] & {[A', A]} \\
Sub(A/A') \arrow[r, "\mathcal{S}Id_{A/A'}"'] & Sub(A/A') \arrow[u, "\varphi^{-1}_{A/A'}"']
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 187. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck y*

$$\begin{aligned}
f &: [A', A] \longrightarrow [B', B] \\
g &: [B', B] \longrightarrow [C', C] \\
h &: [C', C] \longrightarrow [D', D].
\end{aligned}$$

Morfismos de intervalos de una clase hereditaria $\mathcal{X}$ en $\mathcal{G}$. Entonces la composición es asociativa, es decir, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Demostración.
Basta observar el siguiente cuadro conmutativo y que los morfismos, a través de los cuales se factorizan, se pueden asociar al ser todos morfismos lineales, es decir, que:

$$\begin{aligned}
f \circ (g \circ h) =& (\varphi^{-1}_{B/B'} \circ \mathcal{S}f' \circ \varphi_{A/A'}) \circ ((\varphi^{-1}_{C/C'} \circ \mathcal{S}g' \circ \varphi_{B/B'}) \circ (\varphi^{-1}_{D/D'} \circ \mathcal{S}h' \circ \varphi_{C/C'})) \\
=& ((\varphi^{-1}_{B/B'} \circ \mathcal{S}f' \circ \varphi_{A/A'}) \circ (\varphi^{-1}_{C/C'} \circ \mathcal{S}g' \circ \varphi_{B/B'})) \circ (\varphi^{-1}_{D/D'} \circ \mathcal{S}h' \circ \varphi_{C/C'}) \\
=& (f \circ g) \circ h.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
{[A', A]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{A/A'}"'] & {[B', B]} \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift left, "\varphi_{B/B'}"] & {[C', C]} \arrow[r, "h"] \arrow[d, shift left, "\varphi_{C/C'}"] & {[D', D]} \\
Sub(A/A') \arrow[r, "\mathcal{S}f'"'] & Sub(B/B') \arrow[r, "\mathcal{S}g'"'] \arrow[u, shift left, "\varphi^{-1}_{B/B'}"] & Sub(C/C') \arrow[r, "\mathcal{S}h'"'] \arrow[u, shift left, "\varphi^{-1}_{C/C'}"] & Sub(D/D') \arrow[u, "\varphi^{-1}_{D/D'}"']
\end{tikzcd}$$

□

Definición 188. *Sea $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck.*
La ***categoría de intervalos en una clase hereditaria*** *$\mathcal{X}$ de $\mathcal{G}$, denotada $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$, está dada por la siguiente información:*

a. Los objetos de la categoría es la colección de intervalos en $\mathcal{X}$, esto es, $Ob(\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}) = \mathcal{C}_{\mathcal{X}}$.

b. Las flechas de la categoría son todos los morfismos de intervalos, esto es,
$$\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}([A', A], [B', B]) = \{g \mid \text{Existe } f \in \mathcal{G}(A/A', B/B') \ (g = \varphi^{-1}_{B/B'} \circ \mathcal{S}f \circ \varphi_{A/A'})\}.$$

c. La composición de la categoría es la composición usual de funciones.

Proposición 189. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck y $\mathcal{X}$ una clase hereditaria de $\mathcal{G}$. Entonces la categoría $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$ es una subcategoría linealmente cerrada de LM.*

Demostración.

a. Sean $[A', A] \in \mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$ y $B \in [A', A]$, entonces $B \in \mathcal{X}$ y $B/A' \in \mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$ ya que $\mathcal{X}$ es clase hereditaria. Se quiere ver que el morfismo inclusión $i : [A', B] \to [A', A]$, definido, a nivel del objetos, como $i(C) = C$, es un morfismo en $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$.
Esto es claro considerando el morfismo inclusión $j : B/A' \to A/A'$ y el siguiente diagrama conmutativo:
$$\begin{tikzcd} {[A'.B]} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi_{B/A'}"'] & {[A', A]} \\ Sub(B/A') \arrow[r, "\mathcal{S}j"'] & Sub(A/A') \arrow[u, "\varphi^{-1}_{A/A'}"'] \end{tikzcd}$$
Es decir, $i = \varphi^{-1}_{A/A'} \circ \mathcal{S}j \circ \varphi_{B/A'}$.

b. Sean $[A', A] \in \mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$ y $B \in [A', A]$, entonces $B \in \mathcal{X}$ y $[B, A] \in \mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$. Se quiere ver que el morfismo proyección $\pi : [A', A] \to [B, A]$, definido como $\pi(C) = C + B$,[3] es un morfismo en $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$.
Considere el epimorfismo canónico en $\mathcal{G}$, $q : A/A' \to A/B$ definido como $q(C/A') = (C + B)/B$, entonces:
$$\begin{aligned} (\varphi^{-1}_{A/B} \circ \mathcal{S}q \circ \varphi_{A/A'})(C) &= (\varphi^{-1}_{B/B'} \circ \mathcal{S}q)(C/A') \\ &= \varphi^{-1}_{B/B'}(q(C/A')) \\ &= \varphi^{-1}_{B/B'}((C + B)/B) \\ &= C + B \\ &= \pi(C). \end{aligned}$$

[3]Con la suma se está refiriendo al supremo.

Por lo tanto π se factoriza en el siguiente diagrama y por tanto es un morfismo en $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$.

$$\begin{tikzcd}
{[A',A]} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_{A/A'}"'] & {[B,A]} \\
Sub(A/A') \arrow[r, "\mathcal{S}q"'] & Sub(A/B) \arrow[u, "\varphi^{-1}_{A/B}"']
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\pi = \varphi^{-1}_{A/B} \circ \mathcal{S}q \circ \varphi_{A/A'}$.

c. Sea $\alpha \in \mathcal{SC}_{\mathcal{X}}([A',A],[B',B])$, entonces existe $f \in \mathcal{G}(A/A', B/B')$ tal que:

$$\alpha = \varphi^{-1}_{B/B'} \circ \mathcal{S}f \circ \varphi_{A/A'}.$$

Luego, sean $K = Nuc(f)$ e $I = Im(f)$. Como $\varphi_{A/A'}, \varphi_{B/B'}$ son isomorfismos y $K \in Sub(A/A')$, $I \in Sub(B/B')$, se tiene entonces que existen $U \in [A',A]$ y $V \in [B',B]$ tal que:

$$\varphi_{A/A'}(U) = U/A' = K \quad \text{y} \quad \varphi_{B/B'}(V) = V/B' = I.$$

Además se tiene que $[U,A]$, $[B',V] \in \mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$ ya que $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ es una clase hereditaria. Sea $C \in [A',A]$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\alpha(C+U) =& (\varphi^{-1}_{B/B'} \circ \mathcal{S}f \circ \varphi_{A/A'})(C+U)\\
=& (\varphi^{-1}_{B/B'} \circ \mathcal{S}f)((C+U)/A')\\
=& \varphi^{-1}_{B/B'}(f((C+U)/A'))\\
=& \varphi^{-1}_{B/B'}(f(C/A') + f(U/A'))\\
=& \varphi^{-1}_{B/B'}(f(C/A'))\\
=& \alpha(C).
\end{aligned}$$

Por lo tanto U es un núcleo de α.

Por otro lado al ser $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck, ésta cumple los teoremas de isomorfismo. Por el primer teorema de isomorfismo se tiene el siguiente isomorfismo canónico en $\mathcal{G}$.

$$\widetilde{f} : (A/A')/K \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow I \ .$$

Por el tercer teorema de isomorfismo se tiene el siguiente isomorfismo canónico en $\mathcal{G}$.

$$h : A/U \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (A/A')/K \ ,$$

Sea $g := \widetilde{f} \circ h$, entonces $\mathcal{S}g = \mathcal{S}\widetilde{f} \circ \mathcal{S}h$ y $\mathcal{S}g$ es un isomorfismo en LM. Considere ahora el morfismo $\widetilde{\alpha}$ definido como $\widetilde{\alpha} := \varphi_{V/B'}^{-1} \circ \mathcal{S}g \circ \varphi_{A/U}$ que satisface el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[U,A]} \arrow[rr, tail, two heads, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_{A/U}"'] & & {[B',V]} \\
\mathcal{S}(A/U) \arrow[rr, tail, two heads, "\mathcal{S}g"] \arrow[dr, tail, two heads, "\mathcal{S}h"'] & & \mathcal{S}(V/B') \arrow[u, tail, two heads, "\varphi_{V/B'}^{-1}"'] \\
& \mathcal{S}((A/A')/K) \arrow[ur, tail, two heads, "\mathcal{S}\widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Al estar $\widetilde{\alpha}$ definido de esta forma se tiene que $\widetilde{\alpha}$ es un isomorfismo en LM y satisface que para todo $C \in [U, A]$, $\widetilde{\alpha}(C) = \alpha(C)$. Es decir, $\widetilde{\alpha}$ es el isomorfismo inducido por α al ser un morfismo lineal.
Por lo tanto, al estar $\widetilde{\alpha}$ factorizado de esta forma, se concluye que $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$.

d. Sea $\alpha \in \mathcal{SC}_{\mathcal{X}}([A', A], [B', B])$ un isomorfismo, entonces existe $f \in \mathcal{G}(A/A', B/B')$ tal que:

$$\alpha = \varphi_{B/B'}^{-1} \circ \mathcal{S}f \circ \varphi_{A/A'}.$$

Para algún f isomorfismo, ya que α se factoriza atraves de f. Entonces existe $f^{-1} : B/B' \to A/A'$. Sea α^{-1} el morfismo inducido por f^{-1}, definido como:

$$\alpha^{-1} := \varphi_{A/A'}^{-1} \circ \mathcal{S}f^{-1} \circ \varphi_{B/B'}.$$

Por lo tanto $\alpha^{-1} \in \mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$, es decir, los isomorfismos de LM coinciden con los isomorfismos en $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$.

Con esto se concluye que $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$ es una subcategoría linealmente cerrada de LM.

□

Teorema 190. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck, $\mathcal{X}$ una clase hereditaria de $\mathcal{G}$ y r un prerradical en $\mathcal{G}$. Entonces r induce un prerradical ρ en la categoría $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$.*

Demostración.
Sea $[A', A] \in \mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$, entonces existe $C \in [A', A]$ tal que $r(A/A') = C/A'$, con $A^r := C$. Como $\mathcal{X}$ es clase hereditaria y $A^r \leq A$ se tiene que $A^r \in \mathcal{X}$. Sea:

$$\rho : \mathcal{SC}_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{SC}_{\mathcal{X}} .$$

Definida a nivel de objetos, para todo $[A', A] \in \mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$, como $\rho([A', A]) = [A', A^r]$. Por definición $\rho([A', A])$ es un subobjeto de $[A', A]$.

Luego, sea $\alpha : [A', A] \to [B', B]$ un morfismo en $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$, entonces existe $f \in \mathcal{G}(A/A', B/B')$ tal que $\alpha = \varphi^{-1}_{B/B'} \circ \mathcal{S}f \circ \varphi_{A/A'}$, y $r(f) : A^r/A' \to B^r/B'$ cumple que:

$$\mathcal{S}f(A^r/A') = f(A^r/A') \subseteq B^r/B'.$$

ya que r es un prerradical en $\mathcal{G}$. Por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha(\rho([A', A])) &= \alpha([A', A^r]) \\ &= (\varphi^{-1}_{B/B'} \circ \mathcal{S}f)(A^r/A') \\ &\subseteq \varphi^{-1}_{B/B'}(B^r/B') \\ &\subseteq [B', B^r] \\ &= \rho([B', B]). \end{aligned}$$

Con esto se concluye que ρ es un prerradical en $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$. $\square$

4.3. La categoría de intervalos de saturación en una teoría de torsión hereditaria, $\mathcal{SC}_{\mathcal{H}}$

En esta sección se estudiará el concepto de teoría de torsión en una categoría de Grothendieck, más en particular se estudiarán en las categorías de módulos sobre un anillo, se verá el concepto de saturación y cómo a través de este, y de manera análoga a la anterior, se construye una nueva categoría.

Definición 191. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck y $\mathcal{T}, \mathcal{F}$ subclases de objetos de $\mathcal{G}$. Se dice que $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una **teoría de torsión** si:*

a. Para todo $T \in \mathcal{T}$ y para todo $F \in \mathcal{F}$, pasa que $\mathcal{G}(T, F) = 0$.

b. Si $B \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}(T, B) = 0$, para todo $T \in \mathcal{T}$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

c. Si $A \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}(A, F) = 0$, para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{T}$.

A $\mathcal{T}$ se le llamara la clase de $\eta-$torsión y a sus elementos se les llamara objetos de $\eta-$torsión. De igual manera a $\mathcal{F}$ se le llamara la clase libre de $\eta-$torsión y a sus elementos se les llamara objetos libres de $\eta-$torsión.

Proposición 192. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck y $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en $\mathcal{G}$. Entonces:*

a. $\mathcal{T}$ es una clase cohereditaria, cerrada bajo coproductos y cerrada bajo extensiones.

b. $\mathcal{F}$ es una clase hereditaria, cerrada bajo productos y cerrada bajo extensiones.

Demostración. Ver Proposiciones 2.1 y 2.2 en pág.139 y 140 de [19]. □

Definición 193. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck y $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en $\mathcal{G}$. Se dice que η es una teoría de torsión* ***hereditaria*** *si $\mathcal{T}$ es una clase hereditaria.*

Definición 194. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en R-Mod y $M \in R$-Mod. El* ***submódulo de η-torsión*** *de M se define como:*

$$\tau_\eta(M) := \sum_{N \leq M; N \in \mathcal{T}} N.$$

Observación 195. *Mediante el submódulo de η-torsión se pueden clasificar a los elementos de η-torsión y los elementos libres de η-torsión ya que se tiene la siguiente equivalencia.*

$$M \in \mathcal{T} \text{ si y sólo si } \tau_\eta(M) = M \qquad y \qquad M \in \mathcal{F} \text{ si y sólo si } \tau_\eta(M) = 0.$$

Definición 196. *Sean R un anillo unitario y $r : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ un prerradical.*

a. Se dice que r es ***idempotente*** *si para todo $M \in R$-Mod pasa que $r(r(M)) = r(M)$.*

b. Se dice que r es ***radical*** *si para todo $M \in R$-Mod pasa que $r(M/r(M)) = 0$.*

c. Se dice que r es ***hereditario*** *si para todo $M \in R$-Mod y para todo $N \leq M$ pasa que $r(N) = N \cap r(M)$.*

Proposición 197. *Sean R un anillo unitario y $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod. Entonces, τ_η es un radical idempotente y hereditario.*

Demostración.

a. Sea $M \in R - Mod$. Es inmediato que $\tau_\eta(M) \leq M$. Luego, sea $f \in R - Mod(M, N)$, como f evaluado en un módulo de torsión también es de torsión se tiene que:

$$f(\tau_\eta(M)) = f(\sum_{K \leq M; K \in \mathcal{T}} K) = \sum_{K \leq M; K \in \mathcal{T}} f(K) \subseteq \sum_{S \leq N; S \in \mathcal{T}} S = \tau_\eta(N).$$

Es decir, $f(\tau_\eta(M)) \subseteq \tau_\eta(N)$, por lo tanto τ_η es un prerradical en $R - Mod$.

b. Sea $M \in R - Mod$. Para que τ_η sea idempotente se tiene que ver que:

$$\tau_\eta(\tau_\eta(M)) = \tau_\eta(M).$$

Es decir, que $\tau_\eta(M) \in \mathcal{T}$. Se define T_M como $T_M := \{N \leq M \mid N \in \mathcal{T}\}$. Como $\mathcal{T}$ es cerrado bajo coproductos, se tiene que $\bigoplus T_M \in \mathcal{T}$. Considere el morfismo suprayectivo inducido por la propiedad universal del coproducto.

$$\bigoplus T_M \longrightarrow \sum T_M = \tau_\eta(M).$$

Entonces, por el primer teorema de isomorfismo, se tiene que $\tau_\eta(M)$ es isomorfo a $\bigoplus T_M$ cociente algún submódulo, y el cociente de un módulo de η-torsión es también de η-torsión. Por lo tanto $\tau_\eta(M) \in \mathcal{T}$.

c. Sean $M \in R - Mod$ y $N \leq M$. Para que τ_η sea hereditario se tiene que ver que:

$$\tau_\eta(N) = N \cap \tau_\eta(M).$$

Con la notación del punto anterior, sea $K \in T_N$, entonces $K \in T_M$, por lo que se tiene la siguiente contención:

$$T_N \subseteq T_M.$$

De donde se sigue que:

$$\tau_\eta(N) \subseteq \tau_\eta(M).$$

Por lo que al intersecar ambos lados con N se llega a que:

$$\tau_\eta(N) \subseteq N \cap \tau_\eta(M).$$

Luego, se tiene que:

$$N \cap \tau_\eta(M) \leq N \quad \text{y} \quad N \cap \tau_\eta(M) \leq \tau_\eta(M).$$

Al ser $N \cap \tau_\eta(M)$ un submódulo de la suma de todos los módulos de η-torsión, se tiene que $N \cap \tau_\eta(M)$ también es de η-torsión. Con lo que se deduce que $N \cap \tau_\eta(M) \subseteq T_N$, y así $N \cap \tau_\eta(M) \subseteq \tau_\eta(N)$.
Por lo tanto $\tau_\eta(N) = N \cap \tau_\eta(M)$.

d. Sea $M \in R - Mod$. Para que τ_η sea radical se tiene que ver que:

$$\tau_\eta(M/\tau_\eta(M)) = 0.$$

Es decir, que $M/\tau_\eta(M) \in \mathcal{F}$. Dado que se tiene que $\tau_\eta(M/\tau_\eta(M)) \leq M/\tau_\eta(M)$ entonces, por el cuarto teorema de isomorfismo, existe un submódulo K tal que:

$$\tau_\eta(M/\tau_\eta(M)) = K/\tau_\eta(M).$$

Con esto se tiene la siguiente sucesión exacta corta.

$$0 \longrightarrow \tau_\eta(M) \longrightarrow K \longrightarrow K/\tau_\eta(M) \longrightarrow 0.$$

Como $\mathcal{T}$ es una clase cohereditaria se tiene que $K/\tau_\eta(M) \in \mathcal{T}$ y al ser $\mathcal{T}$ cerrada bajo extensiones se deduce que $K \in \mathcal{T}$. Pero $\tau_\eta(M)$ es el máximo submódulo de torsión, por lo tanto $\tau_\eta(M) = K$, con lo cual $K/\tau_\eta(M) = 0$.
Por lo tanto $\tau_\eta(M/\tau_\eta(M)) = 0$.

$\square$

Definición 198. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en R-Mod, $M \in R$-Mod y $N \leq M$. La **η-saturación** de N en M, denotada como N_M^η, se define como el único submódulo en el intervalo $[N, M]$ tal que $\tau_\eta(M/N) = N_M^\eta/N$.*

Definición 199. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en R-Mod, $M \in R$-Mod y $N \leq M$. La **saturación** de M se define como:*

$$Sat_\eta(M) := \{N \leq M \mid M/N \in \mathcal{F}\}.$$

Observación 200. *La definición de la saturación de M es equivalente a la siguiente definición:*

$$Sat_{\eta}(M) = \{N \leq M \mid N^{\eta}_{M} = N\}.$$

Esto es claro ya que $M/N \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \tau_{\eta}(M/N) = 0 = N^{\eta}_{M}/N \Leftrightarrow N^{\eta}_{M} = N$. En consecuencia la η-saturación de N en M puede verse como:

$$N^{\eta}_{M} = \bigcap\{C \mid C \in [N, M] \ ; \ M/C \in \mathcal{F}\}.$$

Lema 201. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en R-Mod, $M \in R$-Mod y $P, N \leq M$. Si $P \leq N$, entonces $P^{\eta}_{M} \leq N^{\eta}_{M}$.*

Demostración.
Por definición:

$$P^{\eta}_{M}/P = \tau_{\eta}(M/P) \leq M/P \qquad N^{\eta}_{M}/N = \tau_{\eta}(M/N) \leq M/N.$$

Como $M/P \leq M/N$ y τ_{η} es un prerradical, considere el morfismo inclusión $i : M/P \to M/N$, entonces:

$$i(\tau_{\eta}(M/P)) = \tau_{\eta}(M/P) \subseteq \tau_{\eta}(M/N).$$

Por lo tanto $P^{\eta}_{M} \leq N^{\eta}_{M}$. $\square$

Lema 202. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en R-Mod, $M \in R$-Mod y $N \leq M$, entonces $(N^{\eta}_{M})^{\eta}_{M} = N^{\eta}_{M}$.*

Demostración.
Ver Lema 3.4 en pág.95 de [3]. $\square$

De los Lemas 202, 201 y la definición de la η-saturación de N en M se deduce que $(\ )^{\eta}_{M}$ es un operador cerradura en R-Mod.

Lema 203. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en R-Mod, $M \in R$-Mod y $P, N \leq M$, entonces $(N \cap P)^{\eta}_{M} = N^{\eta}_{M} \cap P^{\eta}_{M}$.*

Demostración.
Ver Lema 3.4 en pág.95 de [3]. $\square$

Lema 204. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en R-Mod, $M \in R$-Mod y $P, N \leq M$. Si $P \leq N$, entonces $(N/P)^{\eta}_{M} = N^{\eta}_{M}/P$.*

Demostración.
Sean:

$$\begin{aligned} N^{\eta}_{M}/P =& (\bigcap\{C \mid C \in [N, M] \ ; \ M/C \in \mathcal{F}\})/P \\ =& (\bigcap \mathcal{A})/P \\ (N/P)^{\eta}_{M} =& \bigcap\{C/P \mid C/P \in [N/P, M/P] \ ; \ (M/P)/(C/P) \in \mathcal{F}\} \\ =& \bigcap \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Sea $C/P \in \mathcal{B}$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} C/P \in \mathcal{B} \quad & \text{si y sólo si} \quad N/P \leq C/P \leq M/P \ \text{ y } \ (M/P)/(C/P) \in \mathcal{F} \\ & \text{si y sólo si} \quad P \leq N \leq C \leq M \ \text{ y } \ M/C \in \mathcal{F} \\ & \text{si y sólo si} \quad C/P \in \mathcal{A}/P. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{B} = \mathcal{A}/P$ y así $(N/P)^{\eta}_{M} = N^{\eta}_{M}/P$. □

Observación 205. *Sean R un anillo unitario, $M \in R$-Mod y $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en R-Mod. Con el orden inducido por la contención se tiene que $Sat_{\eta}(M)$ es una retícula, donde el ínfimo y el supremo resultan ser:*

$$\bigvee_{i \in I} N_i := (\sum_{i \in I} N_i)^{\eta}_{M} \qquad y \qquad \bigwedge_{i \in I} N_i := \bigcap_{i \in I} N_i.$$

Note además que $Sat_{\eta}(M) \subseteq Sub(M)$.

Proposición 206. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en R-Mod y $M \in R$-Mod, entonces $(Sat_{\eta}(M), \leq, \vee, \wedge, \tau_{\eta}(M), M)$ es una retícula modular completa, es decir, es un elemento de LM_C.*

Demostración.

a. Sean $N, K \in Sat_{\eta}(M)$. Por el Lema 202 se tiene que para cualquier submódulo de M, $(N^{\eta}_{M})^{\eta}_{M} = N^{\eta}_{M}$, por lo que:

$$((N + K)^{\eta}_{M})^{\eta}_{M} = (N + K)^{\eta}_{M}.$$

es decir, $(N+K)^{\eta}_{M} \in Sat_{\eta}(M)$ y en efecto es el supremo ya que:

$$N, K \leq N+K \leq (N+K)^{\eta}_{M}.$$

Además se tiene que $M^{\eta}_{M}/M = \tau_{\eta}(M/M) = 0$, por lo que $M^{\eta}_{M} = M$ y $M \in Sat_{\eta}(M)$, de lo cual se deduce que $M = \bigvee Sat_{\eta}(M)$.

b. Sean $N, K \in Sat_{\eta}(M)$ y considere el siguiente diagrama de la propiedad universal del producto.

$$\begin{tikzcd}
M/N & M/N \times M/K \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & M/K \\
& M \arrow[ul, "p"] \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $M/N,\ M/K \in \mathcal{F}$, se tiene que $M/N \times M/K \in \mathcal{F}$ y además $Nuc(f) = N \cap K$. Como $M/Nucf \cong Imf$, bajo algún morfismo h_1, y además se tiene el morfismo inclusión $i_1 : Imf \to M/N \times M/K$, entonces existe un monomorfismo:

$$\widetilde{f} = i_1 \circ h_1 : M/(N \cap K) \longrightarrow M/N \times M/K.$$

Con lo cual se tiene que $M/(N \cap K) \leq M/N \times M/K$, y $\mathcal{F}$ es una clase hereditaria, por lo tanto $M/(N \cap K) \in \mathcal{F}$ y $N \cap K \in Sat_{\eta}(M)$.

De manera más general, si $\{N_i \mid i \in I\}$ es una familia distinta del vacío en $Sat_{\eta}(M)$, entonces $\prod\limits_{i \in I} N_i \in Sat_{\eta}(M)$, ya que $\mathcal{F}$ es una clase cerrada bajo productos. De manera análoga considere el siguiente diagrama inducido por la propiedad universal del producto.

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i \in I} M/N_i \arrow[rr, "\pi_i"] & & M/N_i \\
& M \arrow[ul, dashed, "g"] \arrow[ur, "p_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces $Nuc(g) = \bigcap\limits_{i \in I} N_i$ y $M/Nuc(g) \cong Im(g)$ bajo algún morfismo h_2. Considere al morfismo inclusión $i_2 : Img \to \prod\limits_{i \in I} M/N_i$, por lo tanto existe un monomorfismo:

$$\widetilde{g} = i_2 \circ h_2 : M/(\bigcap_{i \in I} N_i) \longrightarrow \prod_{i \in I} M/N_i.$$

Por lo que $M/(\bigcap_{i\in I} N_i) \leq \prod_{i\in I} M/N_i$, de donde se deduce que $M/(\bigcap_{i\in I} N_i) \in \mathcal{F}$ y $\bigcap_{i\in I} N_i \in Sat_\eta(M)$. Por último observe que $\tau_\eta(M) = \tau_\eta(M/0) = 0^\eta_M/0$, por lo que $\tau_\eta(M) = 0^\eta_M$ y así $\tau_\eta(M) = \bigwedge Sat_\eta(M)$. Con esto ya se tiene que $Sat_\eta(M) \in CLat$, sólo resta probar la modularidad.

c. Sean $A, B, C \in Sat_\eta(M)$ tal que $B \leq C$. Entonces, como se satisface la ley modular en $Sub(M)$, se tiene que $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A \cap (B \vee C) &= A \cap (\ (B + C)^\eta_M\ ) \\ &= A^\eta_M \cap (\ (B + C)^\eta_M\ ) \\ &= (\ A \cap (B + C)\ )^\eta_M \\ &= (\ (A \cap B) + C\ )^\eta_M \\ &= (A \cap B) \vee C. \end{aligned}$$

Con lo cual se concluye que $Sat_\eta(M) \in LM_C$.

□

Lema 207. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en R-Mod, $M \in R$-Mod y $N \in Sat_\eta(M)$. Entonces para todo $A \leq M$ tal que $A \subseteq N$ pasa que la η-saturación de A en M es igual a la η-saturación de A en N, es decir, $A^\eta_M = A^\eta_N$.*

Demostración.
Por la definición de η-saturación se tiene que:

$$A^\eta_M/A = \tau_\eta(M/A) \quad \text{y} \quad A^\eta_N/A = \tau_\eta(N/A).$$

Como $N/A \leq M/A$, se tiene que $\tau_\eta(N/A) \leq \tau_\eta(M/A)$, con lo que se deduce que $A^\eta_N \subseteq A^\eta_M$. Por otro lado, sea $a \in A^\eta_M$, entonces existe un ideal izquierdo I de R tal que $R/I \in \mathcal{T}$ e $Ia \subseteq A \subseteq N$. Como $a \in M$ y $M/N \in \mathcal{F}$ se tiene que $a \in N$. Además como $Ia \subseteq A$, se deduce que $a + A \in \tau_\eta(N/A) = A^\eta_N/A$. Por lo tanto $a \in A^\eta_N$ y $A^\eta_M \subseteq A^\eta_N$, es decir, $A^\eta_M = A^\eta_N$. □

Definición 208. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en R-Mod, $M \in R$-Mod y $P, N \leq M$. Se define su* ***intervalo de η-saturación*** *como:*

$$[P, N]_\eta := \{X \in Sat_\eta(M) \mid P \leq X \leq N\}.$$

Cuando no haya lugar a confusiones se omitirá del nombre η y solo hablaremos de intervalos de saturación.

Lema 209. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod, $M \in$ R-Mod y $N \leq M$. Si $N \in \mathcal{T}$, entonces existe un isomorfismo de retículas:*

$$\varphi_N : Sat_\eta(M) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow Sat_\eta(M/N) \, .$$

Definido, para toda $A \in Sat_\eta(M)$, como $\varphi_N(A) = A/N$.

Demostración.
Sea $A \in Sat_\eta(M)$. Como $N \in \mathcal{T}$, se tiene que $N \leq \tau_\eta(M) \leq A$ y $(M/N)/(A/N) \cong M/A \in \mathcal{F}$, con lo cual $A/N \in Sat_\eta(M/N)$, con esto se deduce que el morfismo φ_N está bien definido. Luego, sean $A, B \in Sat_\eta(M)$ tal que $A \leq B$, entonces se tiene que $A/N \leq B/N$, es decir, φ_N es monótono. Por último, sea $\varphi_N^{-1} : Sat_\eta(M/N) \to Sat_\eta(M)$ definido, para toda $A/N \in Sat_\eta(M/N)$, como $\varphi_N^{-1}(A/N) = A$. De manera análoga a lo anterior se tiene que φ_N^{-1} está bien definido y

$$\begin{aligned} \varphi_N^{-1}(\varphi_N(A)) &= \varphi_N^{-1}(A/N) = A \\ \varphi_N(\varphi_N^{-1}(A/N)) &= \varphi_N(A) = A/N. \end{aligned}$$

Por lo tanto φ_N es biyectiva y $Sat_\eta(M) \cong Sat_\eta(M/N)$. [4] □

Lema 210. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod, $M \in$ R-Mod y $P, N \leq M$ tal que $P \leq N \leq M$. Entonces existe un isomorfismo de retículas:*

$$\alpha : Sat_\eta(N/P) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow Sat_\eta(N^\eta_M/P^\eta_M) \, .$$

Definido, para toda $A/P \in Sat_\eta(N/P)$, como $\alpha(A/P) = A^\eta_M/P^\eta_M$.

Demostración.
Sea $A/P \in Sat_\eta(N/P)$, entonces se tiene que $N/A \in \mathcal{F}$, $A \leq A^\eta_M$ y $P \leq P^\eta_M$, por lo que $N^\eta_M/A^\eta_M \in \mathcal{F}$, es decir, $A^\eta_M/P^\eta_M \in Sat_\eta(N^\eta_M/P^\eta_M)$ con lo cual α está bien definida. Y si $A/P \leq B/P$, entonces $A^\eta_M/P^\eta_M \leq B^\eta_M/P^\eta_M$, es decir, es α es monótono.

Sea $\beta : Sat_\eta(N^\eta_M/P^\eta_M) \to Sat_\eta(N/P)$ definido como $\beta(C/P^\eta_M) = (C \cap N)/P$. Para ver que β está bien definido observe lo siguiente:
Si $C/P^\eta_M \in Sat_\eta(N^\eta_M/P^\eta_M)$, entonces pasa que $C/P^\eta_M \leq N^\eta_M/P^\eta_M$ y $P \leq P^\eta_M \leq C \leq N^\eta_M$, así se tiene que $P \leq C \cap N \leq N$ y $(C \cap N)/P \leq N/P$. Además note que:

$$((C \cap N)/P)^\eta_M = (C \cap N)^\eta_M/P = (C^\eta_M \cap N^\eta_M)/P = (C \cap N)/P.$$

[4] Se debe recordar que por la Observación 23 del capítulo 1, basta probar que es un isomorfismo de ordenes parciales. Esto igualmente para los lemas siguientes.

Es decir, $(C \cap N)/P \in Sat_\eta(N/P)$, por lo tanto β es está bien definido. De manera análoga a α, β es morfismo monótono.

Luego, se tiene que:

$$\beta(\alpha(A/P)) = \beta(A^\eta_M/P^\eta_M) = (A^\eta_M \cap N)/P = A^\eta_M/P \cap N/P = A/P \cap N/P = A/P.$$

Es decir, $\beta\alpha = Id_{Sat_\eta(N/P)}$. Por otro lado se tiene que:

$$\alpha(\beta(C/P^\eta_M)) = \alpha((C \cap N)/P) = (C \cap N)^\eta_M/P^\eta_M = C^\eta_M/P^\eta_M \cap N^\eta_M/P^\eta_M = C/P^\eta_M.$$

Es decir, $\alpha\beta = Id_{Sat_\eta(N^\eta_M/P^\eta_M)}$.

Por lo tanto $Sat_\eta(N/P) \cong Sat_\eta(N^\eta_M/P^\eta_M)$. □

Lema 211. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod, $M \in R$-Mod y $N \leq M$. Entonces $Sat_\eta(N) \cong Sat_\eta(N^\eta_M)$.*

Demostración.
Para ver que $Sat_\eta(N) \cong Sat_\eta(N^\eta_M)$ basta observar el siguiente diagrama conmutativo que se obtiene a partir de los Lemas 209 y 210.

$$\begin{tikzcd} Sat_\eta(N) \arrow[r, dashed, tail, two heads, "f"] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_0"'] & Sat_\eta(N^\eta_M) \\ Sat_\eta(N/0) \arrow[r, tail, two heads, "\alpha"'] & Sat_\eta(N^\eta_M/0^\eta_M) \arrow[u, tail, two heads, "\varphi^{-1}_{0^\eta_M}"'] \end{tikzcd}$$

Es decir, existe f un isomorfismo tal que $f = \varphi^{-1}_{0^\eta_M} \circ \alpha \circ \varphi_0$. □

Lema 212. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod, $M \in R$-Mod y $P, N \leq M$ tal que $P \leq N \leq M$. Si $P, N \in Sat_\eta(M)$, entonces existe un isomorfismo de retículas:*

$$\psi_{N/P} : [P, N]_\eta \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow Sat_\eta(N/P)\ .$$

Definido, para toda $A \in [P, N]_\eta$, como $\psi_{N/P}(A) = A/P$.

Demostración.
Sea $A \in [P, N]_\eta$, entonces pasa que $M/A \in \mathcal{F}$ y $N/A \in \mathcal{F}$, esto último por el Lema 207. Además se tiene que $N/A \cong (N/P)/(A/P) \in \mathcal{F}$.
Por lo tanto $A/P \in Sat_\eta(N/P)$, así $\psi_{N/P}$ está bien definido. Luego, si $A \leq B$, entonces $A/P \leq B/P$, es decir, $\psi_{N/P}$ es monótono.

Sea $\psi^{-1}_{N/P} : Sat_\eta(N/P) \to [P, N]_\eta$ definido como $\psi^{-1}_{N/P}(A/P) = A$.
Si $A/P \in Sat_\eta(N/P)$, entonces se tiene la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \to N/A \to M/A \to M/N \to 0.$$

Como $M/N \in \mathcal{F}$, $N/A \in \mathcal{F}$ y la sucesión es exacta, pasa que $M/A \in \mathcal{F}$.
Por lo tanto $A \in [P, N]_\eta$, así $\psi^{-1}_{N/P}$ está bien definido y de manera análoga a $\psi_{N/P}$, $\psi^{-1}_{N/P}$ es monótono. Por último, observe que:

$$\begin{aligned} \psi^{-1}_{N/P}(\psi_{N/P}(A)) &= \psi^{-1}_{N/P}(A/P) = A \\ \psi_{N/P}(\psi^{-1}_{N/P}(A/P)) &= \psi_{N/P}(A) = A/P. \end{aligned}$$

Por lo tanto $[P, N]_\eta \cong Sat_\eta(N/P)$. $\square$

Proposición 213. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod y $f \in R$-$Mod(M, N)$, entonces existe un morfismo lineal de retículas:*

$$f_\eta : Sat_\eta(M) \to Sat_\eta(N).$$

Definida, para toda $A \in Sat_\eta(M)$, como $f_\eta(A) = (f(A))^\eta_N$.

Demostración.
Sean $I = Im(f)$, $K = Nuc(f)$ y $A \in Sat_\eta(M)$. Entonces $M/A \in \mathcal{F}$ y $\tau_\eta(M/A) = 0$, de donde se deduce que $M/(A + K) \in \mathcal{F}$ y $\tau_\eta(M/(A + K)) = 0 = \tau_\eta(M/A)$. Por lo que se tiene que $(A + K)^\eta_M = A + K$ y por lo tanto:

$$f_\eta(A \vee K) = (f(A \vee K))^\eta_N = (f((A + K)^\eta_M))^\eta_N = (f(A + K))^\eta_N = (f(A))^\eta_N = f_\eta(A).$$

Luego, por el primer teorema de isomorfismo se tiene que $M/K \cong I$, esto induce un nuevo isomorfismo de retículas con lo que se tiene que $Sat_\eta(M/K) \cong Sat_\eta(I)$.
Observe que por los Lemas 209, 210 y 212 se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
Sat_\eta(M/K) \arrow[rr, tail, two heads] \arrow[dd, tail, two heads] & & Sat_\eta(I) \arrow[dd, tail, two heads] & \\
& \color{red}{A/K} \arrow[rr, mapsto, red] \arrow[dd, mapsto, red] & & \color{red}{f(A)} \arrow[dd, mapsto, red] \\
Sat_\eta(M^\eta_M/K^\eta_M) \arrow[rr, tail, two heads] & & Sat_\eta(I^\eta_N) & \\
& \color{red}{A/K^\eta_M} \arrow[rr, mapsto, red] & & \color{red}{(f(A))^\eta_N}
\end{tikzcd}$$

Por último, se puede componer este diagrama con un morfismo proyección y un morfismo inclusión, que resultan ser morfismos lineales, obteniendo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
Sat_\eta(M) \arrow[r, two heads] & Sat_\eta(M/K) \arrow[r, tail, two heads] \arrow[d, tail, two heads] & Sat_\eta(I) \arrow[d, tail, two heads] & \\
& Sat_\eta(M_M^\eta/K_M^\eta) \arrow[r, tail, two heads] & Sat_\eta(I_N^\eta) \arrow[r, tail] & Sat_\eta(N)
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto f_η es un morfismo lineal.

□

Definición 214. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod y $\mathcal{H}$ una clase de objetos de R-Mod.*
*Se dice que $\mathcal{H}$ es **η-hereditaria** si para todo $M \in \mathcal{H}$, si $N \in Sat_\eta(M)$, entonces $N \in \mathcal{H}$.*
De manera equivalente $\mathcal{H}$ es η-hereditaria si para todo $M \in \mathcal{H}$ y para todo $N \leq M$, se tiene que $N_M^\eta \in \mathcal{H}$.

Definición 215. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod y $\mathcal{H}$ una clase η-hereditaria de R-Mod. La **colección de intervalos de η-saturación** en $\mathcal{H}$ se define como:*

$$\mathcal{C}_\mathcal{H} := \{[N, M]_\eta \mid M \in \mathcal{H}\ ;\ N \in Sat_\eta(M)\}.$$

Definición 216. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod, $\mathcal{H}$ una clase η-hereditaria, $[M', M]_\eta$ y $[N', N]_\eta \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$. Se dice que $g : [M', M]_\eta \to [N', N]_\eta$ es un **morfismo de intervalos de saturación** si existe $f \in R$-$Mod(M/M', N/N')$ tal que g se factoriza en el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
{[M', M]_\eta} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi_{M/M'}"'] & {[N', N]_\eta} \\
Sat_\eta(M/M') \arrow[r, "f_\eta"'] & Sat_\eta(N/N') \arrow[u, "\psi^{-1}_{N/N'}"']
\end{tikzcd}$$

Es decir $g = \psi^{-1}_{N/N'} \circ f_\eta \circ \psi_{M/M'}$, donde f_η es morfismo inducido de la Proposición 213 y $\psi^{-1}_{N/N'}$, $\psi_{M/M'}$ los isomorfismos canónicos construidos en el Lema 212.
Observe que g es composición de morfismos lineales y por tanto g es morfismo lineal.

Proposición 217. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod, $\mathcal{H}$ una clase η-hereditaria y $[M', M]_\eta \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$. Entonces, el morfismo identidad $Id_{[M',M]_\eta}$, definido para todo $A \in [M', M]_\eta$ como $Id_{[M',M]_\eta}(A) = A$, es un morfismo de intervalos de saturación.*

Demostración.
Basta observar que $Id_{[M',M]_\eta}$ se puede factorizar en el siguiente cuadro conmutativo , es decir, que $Id_{[M',M]_\eta} = \psi^{-1}_{M/M'} \circ (Id_{M/M'})_\eta \circ \psi_{M/M'}$.

$$\begin{tikzcd}
{[M', M]_\eta} \arrow[r, "Id_{[M',M]_\eta}"] \arrow[d, "\psi_{M/M'}"'] & {[M', M]_\eta} \\
Sat_\eta(M/M') \arrow[r, "(Id_{M/M'})_\eta"'] & Sat_\eta(M/M') \arrow[u, "\psi^{-1}_{M/M'}"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

Proposición 218. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod y*

$$\begin{aligned}
f &: [M', M]_\eta \longrightarrow [N', N]_\eta \\
g &: [N', N]_\eta \longrightarrow [P', P]_\eta \\
h &: [P', P]_\eta \longrightarrow [Q', Q]_\eta.
\end{aligned}$$

Morfismos de intervalos de saturación en una clase η-hereditaria $\mathcal{H}$ de R-Mod. Entonces la composición es asociativa, es decir, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Demostración.
Basta observar el siguiente cuadro conmutativo y que los morfismos a través de los cuales se factorizan se pueden asociar al ser todos morfismos lineales, es decir, que:

$$\begin{aligned}
f \circ (g \circ h) =& (\psi^{-1}_{N/N'} \circ f'_\eta \circ \psi_{M/M'}) \circ ((\psi^{-1}_{P/P'} \circ g'_\eta \circ \psi_{N/N'}) \circ (\psi^{-1}_{Q/Q'} \circ h'_\eta \circ \psi_{P/P'})) \\
=& ((\psi^{-1}_{N/N'} \circ f'_\eta \circ \psi_{M/M'}) \circ (\psi^{-1}_{P/P'} \circ g'_\eta \circ \psi_{N/N'})) \circ (\psi^{-1}_{Q/Q'} \circ h'_\eta \circ \psi_{P/P'}) \\
=& (f \circ g) \circ h.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
{[M', M]'_\eta} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_{M/M'}"'] & {[N', N]_\eta} \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift left, "\psi_{N/N'}"] & {[P', P]_\eta} \arrow[r, "h"] \arrow[d, shift left, "\psi_{P/P'}"] & {[Q', Q]_\eta} \\
Sat_\eta(M/M') \arrow[r, "f'_\eta"'] & Sat_\eta(N/N') \arrow[r, "g'_\eta"'] \arrow[u, shift left, "\psi^{-1}_{N/N'}"] & Sat_\eta(C/C') \arrow[r, "h'_\eta"'] \arrow[u, shift left, "\psi^{-1}_{P/P'}"] & Sat_\eta(D/D') \arrow[u, "\psi^{-1}_{Q/Q'}"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

Definición 219. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod y $\mathcal{H}$ una clase η-hereditaria.*
La ***categoría de intervalos de saturación*** *en $\mathcal{H}$, denotada $\mathcal{SC}_{\mathcal{H}}$, está dada por la siguiente información:*

a. Los objetos de la categoría es la colección de intervalos de saturación en $\mathcal{H}$, esto es, $Ob(\mathcal{SC}_{\mathcal{H}}) = \mathcal{C}_{\mathcal{H}}$.

b. Las flechas de la categoría son todos los morfismos de intervalos de saturación, esto es,
$\mathcal{SC}_{\mathcal{H}}([M', M]_\eta, [N', N]_\eta) = \{g \mid Existe\ f \in R\text{-}Mod(M/M', N/N')\ (g = \psi^{-1}_{N/N'} \circ f_\eta \circ \psi_{M/M'})\}$.

c. La composición de la categoría es la composición usual de funciones.

Proposición 220. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod y $\mathcal{H}$ una clase η-hereditaria. Entonces la categoría $\mathcal{SC}_{\mathcal{H}}$ es una subcategoría linealmente cerrada de LM.*

Demostración.

a. Sean $[M', M]_\eta \in \mathcal{SC}_{\mathcal{H}}$ y $A \in [M', M]_\eta$, entonces $A \in \mathcal{H}$ y $[M', A]_\eta \in \mathcal{SC}_{\mathcal{H}}$ ya que $\mathcal{H}$ es η-hereditaria. Se quiere ver que el morfismo inclusión
$i : [M', A]_\eta \to [M', M]_\eta$, definido como $i(C) = C$, es un morfismo en $\mathcal{SC}_{\mathcal{H}}$.
Esto es claro considerando el morfismo inclusión $j : A/M' \to M/M'$ y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[M', A]_\eta} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\psi_{A/M'}"'] & {[M', M]_\eta} \\
Sat_\eta(A/M') \arrow[r, "j_\eta"'] & Sat_\eta(M/M') \arrow[u, "\psi^{-1}_{M/M'}"']
\end{tikzcd}$$

Es decir, $i = \psi^{-1}_{M/M'} \circ j_\eta \circ \psi_{A/M'}$.

b. Sean $[M', M]_\eta \in \mathcal{SC}_{\mathcal{H}}$ y $A \in [M', M]_\eta$, entonces $A \in \mathcal{H}$ y $[A, M]_\eta \in \mathcal{SC}_{\mathcal{H}}$. Se quiere ver que el morfismo proyección $\pi : [M', M]_\eta \to [A, M]_\eta$, definido como $\pi(C) = C \vee A$, es un morfismo en $\mathcal{SC}_{\mathcal{H}}$.
Considere el epimorfismo canónico, $q : M/M' \to M/A$ definido como $q(C/M') =$

$(C+A)/A$, entonces:

$$\begin{aligned}(\psi^{-1}_{M/A}\circ q_\eta\circ\psi_{M/M'})(C) &= (\psi^{-1}_{A/A'}\circ q_\eta)(C/M')\\ &= \psi^{-1}_{A/A'}(\ (q(C/M'))^\eta_{M/A}\ )\\ &= \psi^{-1}_{A/A'}(\ ((C+A)/A)^\eta_{M/A}\ )\\ &= (C+A)^\eta_M\\ &= C\vee A\\ &= \pi(C).\end{aligned}$$

Por lo tanto π se factoriza en el siguiente diagrama y por tanto es un morfismo en $\mathcal{SC}_\mathcal{H}$.

$$\begin{tikzcd} {[M',M]_\eta} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\psi_{M/M'}"'] & {[A,M]_\eta} \\ Sat_\eta(M/M') \arrow[r, "q_\eta"'] & Sat_\eta(M/A) \arrow[u, "\psi^{-1}_{M/A}"'] \end{tikzcd}$$

Es decir, $\pi=\psi^{-1}_{M/A}\circ q_\eta\circ\psi_{M/M'}$.

c. Sea $\alpha\in\mathcal{SC}_\mathcal{H}([M',M]_\eta,[N',N]_\eta)$, entonces existe $f\in R\text{-}Mod(M/M',N/N')$ tal que:

$$\alpha=\psi^{-1}_{N/N'}\circ f_\eta\circ\psi_{M/M'}.$$

Luego, sean $K=Nuc(f)$ y $I=Im(f)$. Al igual que en la Proposición 189(3) se tiene que existen $U\in[M',M]$ y $V\in[N',N]$ tales que:

$$\varphi_{M/M'}(U)=U/M'=K \quad \text{y} \quad \varphi_{N/N'}(V)=V/N'=I.$$

Donde $\varphi_{M/M'},\varphi_{N/N'}$ son los isomorfismos canónicos inducidos en la sección anterior. Además se tiene que $[U^\eta_M,M]_\eta$, $[N',V^\eta_M]_\eta\in\mathcal{SC}_\mathcal{H}$ ya que $\mathcal{C}_\mathcal{H}$ es una clase η-hereditaria.

Sea $A \in [M', M]$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\alpha(A \vee U_M^\eta) =& (\psi_{N/N'}^{-1} \circ f_\eta \circ \psi_{M/M'})(A \vee U_M^\eta) \\
=& (\psi_{N/N'}^{-1} \circ f_\eta)((A \vee U_M^\eta)/M') \\
=& \psi_{N/N'}^{-1}(f(\ (A + U_M^\eta)_{N/N'}^\eta / M'\ )) \\
=& \psi_{N/N'}^{-1}(f(\ (A + U)_{N/N'}^\eta / M'\ )) \\
=& \psi_{N/N'}^{-1}(f(\ ((A + U)/M')_{N/N'}^\eta\ )) \\
=& \psi_{N/N'}^{-1}(f(\ (A/M' + U/M')_{N/N'}^\eta\ )) \\
=& \psi_{N/N'}^{-1}(f(\ (A/M')_{N/N'}^\eta \vee (U/M')_{N/N'}^\eta\ )) \\
=& \psi_{N/N'}^{-1}(f(A/M') \vee f_\eta(K)) \\
=& \psi_{N/N'}^{-1}(f(A/M') \vee 0) \\
=& \psi_{N/N'}^{-1}(f_\eta(A/M')) \\
=& \alpha(A).
\end{aligned}$$

Por lo tanto U_M^η es un núcleo de α.

Por el primer teorema de isomorfismo se tiene el siguiente isomorfismo canónico.

$$\widetilde{f} : (M/M')/K \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow I\ .$$

Por el tercer teorema de isomorfismo se tiene el siguiente isomorfismo canónico.

$$h : M/U \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow (M/M')/K\ .$$

Sea $g := \widetilde{f} \circ h$, entonces $g_\eta = \widetilde{f}_\eta \circ h_\eta$ y g_η es un isomorfismo en LM. Considere a:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{-1} &: Sat_\eta(M/U_M^\eta) \to Sat_\eta(M/U) \\
\alpha_2 &: Sat_\eta(V/N') \to Sat_\eta(V_M^\eta/N').
\end{aligned}$$

los isomorfismos inducidos por el Lema 210.
Definase el morfismo $\widetilde{\alpha}$ como $\widetilde{\alpha} := \psi_{V_M^\eta/N'} \circ \alpha_2 \circ g_\eta \circ \alpha_1^{-1} \circ \psi_{M/U_M^\eta}$ que satisface

el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & {[U^\eta_M, M]_\eta} \arrow[rrr, tail, two heads, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[dl, tail, two heads, "\psi_{M/U^\eta_M}"'] \arrow[d, tail, two heads] & & & {[N', V^\eta_M]_\eta} & \\
Sat_\eta(M/U^\eta_M) \arrow[r, tail, two heads, "\alpha_1^{-1}"] & Sat_\eta(M/U) \arrow[rrr, tail, two heads, "g_\eta"] \arrow[dr, tail, two heads, "h_\eta"'] & & & Sat_\eta(V/N') \arrow[u, tail, two heads] \arrow[r, tail, two heads, "\alpha_2"] & Sat_\eta(V^\eta_M/N') \arrow[ul, tail, two heads, "\psi^{-1}_{V^\eta_M/N'}"'] \\
 & & Sat_\eta((M/M')/K) \arrow[urr, tail, two heads, "\widetilde{f}_\eta"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Al estar $\widetilde{\alpha}$ definido de esta forma se tiene que $\widetilde{\alpha}$ es un isomorfismo en LM y satisface que para todo $A \in [U^\eta_M, M]_\eta$, $\widetilde{\alpha}(A) = \alpha(A)$. Es decir, $\widetilde{\alpha}$ es el isomorfismo inducido al ser α un morfismo lineal.
Por lo tanto, al estar $\widetilde{\alpha}$ factorizado de esta forma, se concluye que $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{SC}_\mathcal{H}$.

d. Sea $\alpha \in \mathcal{SC}_\mathcal{H}([M', M]_\eta, [N', N]_\eta)$ un isomorfismo, entonces existe $f \in R\text{-}Mod(M/M', N/N')$ tal que:

$$\alpha = \psi^{-1}_{N/N'} \circ f_\eta \circ \psi_{M/M'}.$$

Con f un isomorfismo ya que α se factoriza a través de f_η. Entonces existe $f^{-1} : N/N' \to M/M'$. Sea α^{-1} el morfismo inducido por f^{-1}, definido como:

$$\alpha^{-1} := \psi^{-1}_{M/M'} \circ f^{-1}_\eta \circ \psi_{N/N'}.$$

Por lo tanto $\alpha^{-1} \in \mathcal{SC}_\mathcal{H}$, es decir, los isomorfismos de LM coinciden con los isomorfismos en $\mathcal{SC}_\mathcal{H}$.

Con esto se concluye que $\mathcal{SC}_\mathcal{X}$ es una subcategoría linealmente cerrada de LM.

$\square$

Lema 221. *Sean $f \in R\text{-}Mod(M, M')$, $N \leq M$ y $N' \leq M'$. Si $f(N) \subseteq N'$, entonces $f(N^\eta_M) \subseteq N'^\eta_{M'}$.*

Demostración.
Sea $g : M/N \to M'/N'$ definido como $g(x + N) = f(x) + N'$ el morfismo de módulos

inducido por f. Luego, considere el prerradical r en R-Mod definido como $r(A) = \tau_\eta(A)$, el submódulo de η-torsión, entonces se tiene que:

$$g(N_M^\eta/N) = g(\eta(M/N)) \subseteq \tau_\eta(M'/N) = N_{M'}^{\prime\eta}/N'.$$

Con lo que se deduce que para todo $x \in N_M^\eta$, se tiene que $f(x) + N' = g(x + N) \in N_M^{\prime\eta}/N'$, con lo cual se concluye que $f(x) \in N_{M'}^{\prime\eta}$ y por lo tanto $f(N_M^\eta) \subseteq N_{M'}^{\prime\eta}$. $\square$

Teorema 222. *Sean R un anillo unitario, $\eta = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en R-Mod, $\mathcal{H}$ una clase η-hereditaria, y r un prerradical en R-Mod. Entonces r induce un prerradical σ_η en la categoría $\mathcal{SC}_\mathcal{H}$.*

Demostración.
Sea $[M', M]_\eta \in \mathcal{SC}_\mathcal{H}$, entonces existe $A \in [M', M]$ tal que $r(M/M') = A/M'$. Sea $M^r := A_M^\eta$, como $\mathcal{H}$ es clase η-hereditaria y $M^r \leq M$ se tiene que $M^r \in \mathcal{H}$. Sea:

$$\sigma_\eta : \mathcal{SC}_\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{SC}_\mathcal{H} .$$

Definida a nivel del objetos, para todo $M[M', M]_\eta \in \mathcal{SC}_\mathcal{H}$, como $\sigma_\eta([M', M]_\eta) = [M', M^r]_\eta$. Por definición $\sigma_\eta([M', M]_\eta)$ es un subobjeto de $[M', M]_\eta$.

Luego, sea $\alpha : [M', M]_\eta \to [N', N]_\eta$ un morfismo en $\mathcal{SC}_\mathcal{H}$, entonces existe $f \in R$-$Mod(M/M', N/N')$ tal que $\alpha = \psi_{N/N'}^{-1} \circ f_\eta \circ \psi_{M/M'}$, y $r(f) : A/M' = r(M/M') \to r(N/N') = B/N'$ cumple que:

$$r(f)(A/M') = f(A/M') \subseteq B/N'.$$

Ya que r es un prerradical en R-Mod. Además por el Lema 221 se tiene que $f((A/M')_M^\eta) \subseteq (B/N')_M^\eta$. Por último se tiene que:

$$\begin{aligned} f_\eta(M^r/M') &= (f(A_M^\eta/M'))_{N/N'}^\eta \\ &= (f((A/M')_M^\eta))_{N/N'}^\eta \\ &\subseteq ((B/N')_M^\eta)_M^\eta \\ &= (B/N')_{N/N'}^\eta \\ &= B_N^\eta/N' \\ &= N^r/N'. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\alpha(\sigma_\eta([M',M]_\eta)) &= \alpha([M',M^r]_\eta)\\
&= (\psi^{-1}_{N/N'} \circ f_\eta \circ \psi_{M/M'})([M',M^r]_\eta)\\
&= (\psi^{-1}_{N/N'}(f_\eta(M^r/M'))\\
&\subseteq \psi^{-1}_{N/N'}(N^r/N')\\
&\subseteq [N',N^r]_\eta\\
&\subseteq \sigma_\eta([N',N]_\eta).
\end{aligned}$$

Con esto se concluye que σ_η es un prerradical en $\mathcal{SC}_\mathcal{H}$.

□

Con este último resultado se concluye lo expuesto en este capítulo y en la tesis. Si bien, dado un prerradical en LM, este induce un prerradical en una categoría de Grothendieck, la conversa es falsa, pero en estas últimas dos secciones se construyeron casos particulares en la que dicha conversa del teorema es verdadera, ejemplos que ambos resultan ser subcategorías linealmente cerradas de LM. Ejemplos que muestran la relación de la categoría LM y los prerradicales sobre esta, con las teorías de torsión hereditarias y con las categorías de Grothendieck.

Apéndice A : Retículas Modulares

Las retículas modulares fueron estudiadas y desarrolladas en un principio por Richard Dedekind, las cuales son llamadas en ocasiones retículas de Dedekind.

Para más información consultar **[18] y [19]**.

Definición 223. *Una retícula L es* ***modular*** *si para todo $a, b, c \in L$ tal que $a \leq c$ se cumple que $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$. Esto se conoce como ley modular.*

Teorema 224. ***Isomorfismo del diamante***
Sean L una retícula, $a, b \in L$, y f, g morfismos de retículas definidos como:

$$\begin{aligned} f &: (a \vee b)/b \to a/(a \wedge b) \quad ; \quad f(x) = x \wedge a \\ g &: a/(a \wedge b) \to (a \vee b)/b \quad ; \quad g(y) = y \vee b. \end{aligned}$$

Entonces, L es modular si y sólo si f y g son morfismos inversos entre si, es decir, si $(a \vee b)/b \cong a/(a \wedge b)$.

Demostración. Ver Proposición 2.1 en pág.65 de [19]. □

Proposición 225. *Sean L una retícula y $a, b, c \in L$ tal que se tienen las igualdades:*

$$\begin{aligned} a \wedge b =& a \wedge c \\ a \vee b =& a \vee c. \end{aligned}$$

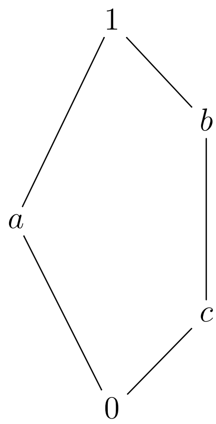
Entonces, $b = c$ si y sólo si L es modular.

Demostración. Ver Teoremas 6.2 y 6.3 en pág.13 de [18]. □

Proposición 226. *Sea L una retícula modular. Si L es complementada, entonces todo cociente también es complementado.*

Demostración. Ver Proposición 2.2 en pág.65 de [19]. □

Definición 227. *Se define la **retícula** N_5 como el siguiente pentágono.*[5]



Observación 228. *N_5 es una retícula no modular que posee dos complementos diferentes b, c para un mismo objeto a.*

Proposición 229. *N_5 es la retícula no modular más pequeña posible.*

Teorema 230. ***(Dedekind)***
Sea L una retícula. L es modular si y sólo si no contiene ninguna subretícula isomorfa a N_5.

Demostración. Ver Teorema 6.1 en pág.13 de [18]. □

Proposición 231. *Sea L una retícula. L es modular si y sólo si para todo cociente $I \subseteq L$ y para todo objeto $c \in I$, si c posee dos complementos a, b en I tal que $a \leq b$, entonces $a = b$.*

Demostración. Ver Proposición 2.3 en pág.66 de [19]. □

---

[5]Diagrama de Hasse.

Apéndice B : Generadores en la teoría de categorías

Para más información se recomienda consultar [**10**].

En lo siguiente, cuando se hable de una familia indexada por I, se asumirá que I es un conjunto.

Definición 232. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $S \in \mathcal{C}$. Se dice que S es un* ***generador*** *si para todo par de morfismos paralelos en $\mathcal{C}$, $f, g : A \rightrightarrows B$, y para todo morfismo $e : S \to A$ tal que $fe = ge$, se cumple que $f = g$.*

Definición 233. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $\{S_i \mid i \in I\}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$. Se dice que $\{S_i \mid i \in I\}$ es una* ***familia de generadores*** *si para todo par de morfismos paralelos en $\mathcal{C}$, $f, g : A \rightrightarrows B$, y para todo $i \in I$, $e_i : S_i \to A$ tal que $fe_i = ge_i$, se cumple que $f = g$.*

Proposición 234. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con coproductos y $\{S_i \mid i \in I\}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$. Son equivalentes:*

a. $\{S_i \mid i \in I\}$ es una familia de generadores.

b. para todo objeto $A \in \mathcal{C}$, el morfismo único:

$$\gamma_A : \coprod_{f \in \mathcal{C}(S_i, A)} dom(f) \longrightarrow A.$$

es un epimorfismo.

Demostración. Ver Proposición 4.5.2 en pág.151 de [10]. □

Definición 235. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $f \in \mathcal{C}(A, B)$ un epimorfismo. Se dice que f es **fuerte** si para todo diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dashed, "w"] \\ X \arrow[r, tail, "z"'] & Y \end{tikzcd}$$

Con $z : X \to Y$ un monomorfismo, pasa que existe una única $w : B \to X$ tal que $u = w \circ f$ y $v = z \circ w$.

Definición 236. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con coproductos y una familia de generadores $\{S_i\}$. La familia de generadores es **fuerte** si para todo objeto $A \in \mathcal{C}$, sucede que γ_A es un epimorfismo fuerte.*[6]

Proposición 237. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con límites finitos y con una familia de generadores fuerte, entonces $\mathcal{C}$ es bien potenciada.*

Demostración. Ver Proposición 4.5.15 en pág.158 de [10]. □

Proposición 238. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con coproductos y objeto cero, entonces son equivalentes:*

a. $\mathcal{C}$ tiene una familia de generadores.

b. $\mathcal{C}$ tiene un generador.

Demostración. Ver Proposición 4.5.16 en pág.159 de [10]. □

Ejemplo 239. *En la categoría Ab, el grupo $(\mathbb{Z}, +)$ es un generador fuerte.*

Ejemplo 240. *Si $R \in R1ng$, entonces R es un generador fuerte en la categoría R-Mod.*

Ejemplo 241. *En la categoría de categorías pequeñas Cat, la categoría $\mathbf{2} := \{\ 0 \xrightarrow{z} 1\ \}$ es generador fuerte.*

---

[6]Donde γ_A es el morfismo de la Proposición 234

Apéndice C : Categorías de Grothendieck

Para más información se recomienda consultar **[14], [11] y [19]**.

Definición 242. *Sea $\mathcal{G}$ una categoría aditiva con un generador. Se dice que $\mathcal{G}$ es una **categoría de Grothendieck** si satisface las siguientes condiciones:*

(AB1): *Todo morfismo admite núcleos y conúcleos.*

(AB2): *Para todo morfismo f, el morfismo canónico $f' : Coim(f) \to Im(f)$ es un isomorfismo.*

(AB3): *Posee todos los coproductos (y por ende todos los colímites).*

(AB4): *Los coproductos de monomorfismos son mónicos.*

(AB5): *Los límites filtrados son exactos, esto es que, para todo conjunto dirigido I, si para toda $i \in I$ pasa que:*

$$0 \to A_i \to B_i \to C_i \to 0.$$

es una sucesión exacta, entonces:

$$0 \to colimA_i \to colimB_i \to colimC_i \to 0.$$

es una sucesión exacta también.

Proposición 243. *Sea $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck, entonces todo generador es fuerte.*

Demostración. Se deduce del echo que en una categoría balanceada todo epimorfismo es extremo, y en una categoría con pullbacks todo epimorfismo extremo es un epimorfismo fuerte. $\square$

Proposición 244. *Sea $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck, entonces $\mathcal{G}$ es bien potenciada.*

Demostración. Ver Proposición 5.23 en la pág. 254 y Proposición 14.1 en la pág.487 de [12]. Una observación importante es que este autor utiliza el concepto de categoría localmente pequeña y categoría bien potenciada como sinónimos lo cual especifica en la pág.254. □

Proposición 245. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck, $A \in \mathcal{G}$, $(C, v) \in Sub(A)$, I un conjunto dirigido y $\{(B_i, u_i)\} \subseteq Sub(A)$. Entonces $(\bigvee B_i) \wedge C = \bigvee (B_i \wedge C)$.*

Demostración. Ver Proposición 1.1 en pág.114 de [19] □

Proposición 246. *Sea $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck, entonces $\mathcal{G}$ es una categoría completa y cocompleta.*

Demostración. Ver Proposición 1.2 en pág.213 y Corolario 4.4 en pág. 223 de [19] □

Teorema 247. ***Gabriel-Popescu***
Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck, $S \in \mathcal{G}$ su generador y $R := End(S)$. Entonces el funtor $Hom(S, \_) : \mathcal{G} \to Mod\text{-}R$ es fiel, pleno y tiene un adjunto izquierdo exacto.

Demostración. La prueba de este teorema puede ser encontrada en [20]. □

Corolario 248. *Sean $\mathcal{G}$ una categoría de Grothendieck y $A \in \mathcal{G}$, entonces $Sub(A)$ es una retícula compactamente generada, es decir, $Sub(A) \in LM_{cg}$.*

Demostración. Se deduce del Ejemplo 3.2 en pág.69 de esta tesis y del Teorema anterior. □

Bibliografía

[1] Albu T.; Iosif M., *Lattice preradicals versus module preradicals*, Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. 6 (LXIV), 19-34, 2015.

[2] Albu T.; Iosif M., *Lattice preradicals with applications to Grothendieck categories and torsion theories*, J. Algebra 444, 339-366, 2015.

[3] Albu T.; Smith P. F., *Localization of modular lattices, Krull dimension, and the Hopkins-Levitzki Theorem (I)*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 120 (1996), 87-101.

[4] Albu T.; Iosif M., *Modular C_{11} lattices and lattice preradicals*, J. Algebra Appl. 16 (2017), 1750116 [19 pages].

[5] Albu T.; Iosif M., *On socle and radical of modular lattices*, Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. 5 (LXIII) (2014), 187-194.

[6] Albu T.; Iosif M., *The category of linear modular lattices*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie 56 (104), 33-46, 2013.

[7] Albu T., *Topics in Lattice Theory with Applications to Rings, Modules, and Categories*, Lecture Notes, XXIII Brazilian Algebra Meeting, Maringá, Paraná, Brasil, 2014, 80 pages.

[8] Anderson, F.W.; Fuller, K. R., *Rings and Categories of Modules*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1992.

[9] Bican, L.; Kepka, T.; Nemec, P., *Rings, Modules and Preradicals*, Marcel Dekker: New York, 1982.

[10] Borceux F., *Handbook of categorical algebra I*, Cambridge University Press, 1994.

[11] Borceux F., *Handbook of categorical algebra II*, Cambridge University Press, 1994.

[12] Faith C., *Algebra: Rings, Modules and Categories*, Springer-Verlag, 1973.

[13] Freyd P., *Abelian Categories*, Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 3, 2003.

[14] Grothendieck, A., *Sur quelques points d'Algèbre homologique*. Tôhoku Math. J. 9 (1957). 119-221.

[15] Mac Lane S., *Categories for the working mathematician*, vol.5, Springer Science & Business Media, 2013.

[16] Mitchell B., *Theory of categories*, Academic Press, New York and London, 1965.

[17] Năstăsescu, C.; Van Oystaeyen, F., *Dimensions of Ring Theory*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht Boston Lancaster Tokyo, 1987.

[18] Rutherford D.E., *Introduction to lattice theory*, Oliver & Boyd, 1966

[19] Stenström, B., *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975.

[20] Takeuchi, M. *A simple proof of Gabriel and Popesco's theorem*, J. Alg. 18, 112-113 (1971): https://core.ac.uk/download/pdf/82301148.pdf, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022404981900657.