Hermann Grassmann and the creation of linear algebra

Desmond Fearnley-Sander

October 20, 2022

Traductores: Frank P. Murphy Hernandez
Fernando Cornejo Montaño.

"Hay una manera de hacer avanzar al álgebra más alla de lo que Vieta y Descartes nos dejaron, como Vieta y Descartes la llevaron más alla de lo que los antiguos. ... Necesitamos un análisis que sea distintivamente geométrico o lineal, y que exprese directamente la situación como el álgebra espresa la magnitud directamente. "

Leibniz [16].

1 Introducción

Desde Pitagoras hasta la mitad del siglo diecinueve, el principal problema de la geometría era relacionar los números a la geometría. Esto juego un papel fundamental en la creación de la teoría de campos (por medio de los problemas clásicos de construcción), y, un poco distinto, la creación del álgebra lineal. Para resolver el problema, fue necesario tener el concepto moderno de número real; esto fue conseguido esencialmente por Simon Stevin, alrededor de 1600, y fue completamente asimilado en los siguientes dos siglos. La integración de los números reales empezó con Descartes y Fermat en los 1630, y logro un exito provisional al final del siglo dieciocho con la introducción en el tradicional curso de geometría análatica del curriculum matemático. Desde el punto de vista del análisis, con su enfoque a las funciones, esto fue enteramente satifactorio; pero desde el punto de vista de la geometría, no lo fue: el método de asignar números a entidades geométricas es muy torpe, la elección del origen y los ejes irrelevante y (en vista de Euclides) inecesario. Leibniz, en 1679, meditó sobre la posibilidad de una álgebra universal, un álgebra en la que uno pudiera tratar directamente y simplemente con entidades geométricas. La posibilidad ya fue sugerida bajo una lectura a consciencia de Euclides. Por ejemplo, si D es un punto en el lado BC de un triángulo ABC, entonces:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{ABD}{ABC}$$

Este teorema antiguo ruega por ser demostrado por una simple multiplicación por la izquierda de A tanto en el denominador como en el numerador. El álgebra geométrica con la que soñó Leibniz, y en la cual el concepto de número real es completamente asimilado, fue creada por Hermann Grassmann en la mitad del siglo diecinueve.

Grassmann miró a la geometría como debió ser considerada hoy en día pero no lo es, como matemáticas aplicadas: En su punto de vista, hay una parte de las matemáticas, álgebra lineal, que es aplicable a parte del mundo físico, a figuras de gis en el pizarrón u objetos en el espacio; y la geometría, como el negocio de relacionar ambas, no pertenece a la matemáticas puras y simples. Uno puede decir sin exagerar demasiado que Grassmann inventó el álgebra lineal, y sin ayuda, él demostró como aplicarla correctamente a la geometría. El álgebra lineal ha llegado a ser parte de las matemáticas principales, aunque Grassmann se lleve poco crédito por esto; pero sus aplicaciones a la geometría, afín y euclideanda, es recordada sólo como una versión medio cocinada en la que la versión de vector es principal y la de punto es innecesaria. La razón es que hay otras aplicaciones del álgebra lineal que son de mayor importancia práctica (aunque no sean necesariamente más interesantes) que la geometría–a decir, dentro de las matemáticas, al espacio de funciones, y dentro de la física, a las fuerzas y a otras entidades vectoriales. [Todavía, aunque raro, la geometría de Grassmann esta mejor diseñada para la física, puesto que, por ejemplo, esta distingue las nociones de vector(polar) y vector axial; textos modernos de física(como Feynman[9]), intentando explicar las diferencias físicas entre las dos entidades, estan discapacitadas por el hecho de que en el modelo matemático aceptado ambas tienen la misma respresentación matemática.]

2 Vida de Grassmann

Una biografía de Grassmann, por Friedrich Engel, puede ser encontrada en la Colección de trabajos [13] y también, en el trabajo acádemico de Michael Crowe [6], la principal fuente en inglés de la que estoy consciente.

Hermann Gunther Grassmann nació in Stettin en 1809, vivió ahí casi toda su vida, y murió en 1877. El fue uno de doce hijos y, después de casarse a la edad de 40, se cortó con respecto a su padre engendrando solamente siete hijos. Pasó tres años en Berlín estudiando teología y filología. El no tenía educación matemática universitaria, tampoco tuvo un puesto universitario aunque buscó uno repetidamente. Toda su vida fue un maestro de escuela.

Su mayor trabajo matemático es la “Teoría de Mareas”, que es una especie de tesis escrita en 1840 con la esperanza de mejorar su estatus como maestro y que estuvo sin publicarse hasta la aparición de su Colección de Trabajos entre 1894 y 1911; un libro conocido con la abreviatura de “Ausdehnungslehre” (literalmente “Teoría de la Extensión”), que se ha publicado en 1844 y casi totalmente ignorado, aunque llamó la atención de Mobius, Gauss, Kummer, Caunchy, y otros; y el Ausdehnungslehre de 1862, que fue un nuevo libro sobre el mismo tema, en vez de una nueva edición, y que de igual manera tuvo una recpción fría. (Ambos esta incluidos en [**?**]). Sus artículos incluyen importantes contribuciones a la física como también a las matemáticas. Él también escribió libros de texto de matemáticas y de idiomas, editor de una revista política de la época, y produjo una traducción de “Rig Veda” con un gran comentario en ella, que de acuerdo a la Enciclopedia Britanica, se sigue usando hoy en día. Por su trabajo en filología el recibió, en el último año de su vida, un doctorado honorario. Sus logros matemáticos fueron practicamente ignorados, y tomó practicamente un siglo para que su importancia fuese claramente visible.

Mientras que mi intención es dedicar este trabajo a su álgebra lineal y a su geometría, hay otras dos contribuciones de Grassmann a las matemáticas que valen la pena mencionar. En un texto de aritmética [12] publicado en 1861, el definió las operaciones aritméticas de los enteros de forma inductiva y demostró sus propiedades comutatividad, asociatividad, distributividad. Así se anticipó a los aspectos más importantes del tratado de Peano [19] de los números naturales, publicado 28 años después. Peano generosamente reconoce esta contribución, pero en juego de los nombres por la cual la Historia distribuye fama a los creadores de matemáticas le da a Peano la fama de ganador, a Grassmann la de perdedor. Dedekind, quien publicó un desarrollo similar [7] de los números naturales no hace mención de Grassmann.

Una característica del trabajo de Grassmann, muy avanzado en su tiempo, hacia el uso de la definición implícita – en el que una entidad matemática es caracterizada por medio de sus propiedades formales en vez de la contrucción explícita. Por ejemplo, en el Ausdehnungslehre de 1844 el llegó a estar muy cercano a la noción abstracta (no necesariamente asociativo) de anillo; lo que falta es el lenguaje de la teoría de conjuntos. Esta es la segunda contribución que quería mencionar. Incidentalmente, la primera definición formal de anillo fue dada por Fraenkel [11] en 1915.

3 La invención del Álgebra Lineal

Desde el principio, Grassmann distinguió al álgebra lineal como una teoría formal independiente de interpretaciones, y de sus aplicaciones a la geometría. Como sea, en el primer Ausdehnungslehre, el álgebra es mezclada con interpretaciones geometricas– indicativamente, es muy interesante como él llegó a estas ideas. Aquellos que sí leyeron su trabajo en el tardió siglo diecinueve encontraron más sencillo seguie el Ausdehnungslehre del 1862, en el cual, en un estilo moderno, el desarrollo completo de la teoría matemática precede sus aplicaciones, y en un estilo moderno, y para esbozar su álgebra lineal debo seguir su último trabajo; se debe tener en cuenta, que, muchas de las ideas tuvieron su origen hasta en las dos decadas previas.

La definición de espacio lineal (espacio vectorial) llegó a las matemáticas, en el sentido que ahora conocemos, alrededor de 1929, cuando Hermann Weyl [22] y otros publicaron su definiciones formales. De hecho, tal definición fue dada treinta años antes por Peano [18], quien conoció a fondo el trabajo matemático de Grassmann. Grassmann no escribio literalmente una definición fomal– de nuevo, este lenguaje noestaba disponible– pero no hay duda de que tenía el concepto. Empezando con una colección de “unidades” $e_1, e_2, \ldots$, define efectivamente el espacio lineal libre que ellas generan; es decir, el considera las combinaciones lineales formales $\sum \alpha_i e_i$, donde α_i son números reales, define la suma y la multiplicación por números reales poniendo:

$$\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i e_i := \sum (\alpha_i + \beta_i) e_i$$

y

$$\alpha(\sum \alpha_i e_i) := \sum (\alpha\alpha_i) e_i$$

y demuestra formalmente las propiedades de espacio lineal con estas operaciones. (Por otro lado, no es claor si el conjunto de unidades que esta considerando pueda ser infinito, pero la finitud se ve supuesta en algunas de sus demostraciones). Grassmann después desarrolla la teoría de independencia lineal en una forma que es sorprendentemente similar a como los textos modernos de álgebra lineal la presentan.

Grassmann define las nociones de subespacio , de independencia lineal, subespacio generado, dimension, supremo e ínfimo de subespacios, y proyecciones de elementos en subespacios. El es consciente de la necesidad de demostrar que la dimensión es un invariante bajo el cambio de base. El demostró el teorema de intercambio de Steinitz, nombrado por el hombre que lo publicó [20] en 1913 (quien, incidentalmente, definió un espacio lineal en términos de "unidades" en la misma forma que Grassmann). Entre otros resultados, el demostró que un conjunto finito tiene un subconjunto independiente con el mismo generado que el original, que cualquier conjunto linealmente independiente puede extenderse a una base, y demostró la importante identidad:

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

Grassmann obtiene una fórmula para cmabiar las coordenadas bajo el cambio de base, definió las transformaciones elementales de bases, y mostró que cada cambió de base (equivalentemente, en término modernos, cada transformación lineal invertible) es un producto de transformaciones lineales.

4 Productos

En el artículo [12] publicado en 1855 , Grassmann define el producto de elementos de un espacio lineal poniendo

$$(\sum \alpha_i e_i)(\sum \beta_j e_j := \sum \alpha_i \beta_j e_i e_j$$

y demuestra la distributividad. (En este artículo los escalares pueden ser complejos de forma explícita) Si el $e_i e_j$ es una combinación lineal de los e_i, tenemos el concepto de álgebra. En vez de seguir este camino (aunque el observó después que el álgebra de los cuaterniones es un caso especial), Grassmann destaca un producto en particular dado por las "condiciones de ecuación"

$$\sum \xi_{ij} e_i e_j = 0$$

y, sin embargo esta noción tiene la desventaja de que carece de la propiedad de ser invariante bajo el cambio de base. Grassmann procede a coracterizar los productos cuales estas ecuaciones condicionantes son invariantes bajo varias substituciones.

El motivo declarado por Grassmann para publicar este artícualo fue el proponer cierta prioridad de algunos resultados que habian sido publicados por Cauchy. La interesante historia es contada por Engel. En 1847 Grassmann queria enviar una copia de su Ausdehnungslehre a Saint-Venant (para mostrar que el se había anticipado a algunas ideas de Siant-Venant sobre la suma y multiplicaicón de vectores), pero, sin saber la dirección, Grassmann envío su libro a Cauchy, con la petición de que se le remitiese (a Saint-Venant). Caunchy nunca lo hizó. Seis a´ nos derpués en el artículo de Caunchy [3] apareció en Comptes Renus. El comentario de Grassmann fue que, de haber leído el artículo de Cauchy, "Observo un vistazo de los principios que estan establecidos y los resultados que estan demostrados son exactamente los mismos que los que publiqué en 1844 , y en el cual yo dí a la vez varias aplicaciones al análisis algebraico, geometría, mecanica y otras areas de la física". Un cómite investigador de tres miembros de la acádemia francesa, que incluia al mismo Cauchy mismo, nunca llegaron a una decisión del asunto planteado.

En los dos Ausdehnungslehre, Grassmann apunta que que hay especial atención en los productos, que el llama prouctos lineales, para los cuales la ecuaciones condicionantes son invariantes bajo el cambio de base. Grassmann demuestra que, aparte de los dos casos triviales, hay sólo dos tipos posibles de producto lineal: debe ser el caso que

$$(1) e_i e_j = e_j e_i$$

o

$$(2) e_i e_j = -e_j e_i, \quad e_i^2 = 0$$

para toda i y j. Como sea en el artículo de 1855 Grassmann no considera productos de orden superior, en el Ausdehnungslehre examina en detalle el producto del segundo tipo, extendiendo, bajo imponer la asociatividad, para permitir a la multiplicación de productos de las unidades simples originales (tal producto llamado una unidad compuesta) y , bajo imponer distributividad, para permitir la multiplicación de combinaciones lineales de unidades compuestas (tales combinaciones llamadas formas). La segunda condición ($e_i e_j = -e_j e_i$) compila ciertas relaciones entre unidades compuestas de orden superior (por ejemplo $e_1 e_3 e_2 = -e_1 e_2 e_3$), pero es supuesto que no exista ningun otra relación a priori. La dimensión juega un papel aquí, desde, que por ejemplo, en el caso de tres dimensiones tenemos un única unidad independiente de tercer orden, a decir $e_1 e_2 e_3$, y esto forza la independencia de las tres unidades $e_1 e_2$, $e_2 e_3$ y $e_3 e_1$ de orden dos, por que;

$$\xi_1 e_1 e_2 + \xi_2 e_2 e_3 + \xi_3 e_3 e_1 = 0$$

implica, cuando multiplicamos por e_3, que $\xi_1 e_1 e_2 e_3 = 0$ y así $\xi_1 = 0$(y, similarmente, $\xi_2 = 0 = \xi_3$).

Esta multiplicación es hoy en día llamada multiplicación exterior. Medio siglo después, tratando las ideas de Grassman de longitud en su Algebra Universal [23], A. N. Whitehead excluyo de forma explícita formas de grado mixto como$e_1 + e_1 e_2$ en un plano bastante metafísico por que estas no tienen significado; así admite productos arbitrarios de combinaciones lineales de unidades simples, pero no combinaciones lineales de productos. La objeción de Whitehead por si misma no debería tener valor para Grassmann y, aunque Grassmann nunca inlcluyo esas formas de manera explícita, tampoco, hasta donde alcanzo a ver, las excluyó. Si estoy en lo correcto, entonces Grassmann tiene la defición completa de algebra exterior, mientras que la presentación de Whitehead (como en los tratados modernos de producto exterior) se restringe a considerar unicamente espacios lineales graduados(un estructura un poco más compacta que un álgebra).

El desarrollo completo del álgebra exterior como Grassmann hizó (en particular con el punto esencial de que sea invariante bajo cambio de base) es complicado y se debe omitir. Tal vez el hecho más importante es que los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ del espacio lineal original son linealmente indepentientes si y sólo si $a_1 a_2 \ldots a_k \neq 0$; Grassmann demuestra esto en la forma moderna y da la siguiente aplicación (con la notación precisa como se escribe aquí) a un sistema de n ecuaciones lineales en n incognitas,

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{(1)} x_1 + \alpha_2^{(1)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(1)} x_n &= \beta^{(1)} \\
\alpha_1^{(2)} x_1 + \alpha_2^{(2)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(2)} x_n &= \beta^{(2)} \\
&\vdots \\
\alpha_1^{(n)} x_1 + \alpha_2^{(n)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(n)} x_n &= \beta^{(n)}
\end{aligned}$$

Introduciendo unidades (independientes) $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}$ y cantidades

$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_1^{(1)} e^{(1)} + \alpha_1^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \alpha_1^{(n)} e^{(n)} \\
a_2 &= \alpha_2^{(1)} e^{(1)} + \alpha_2^{(1)} e^{(2)} + \cdots + \alpha_2^{(n)} e^{(n)} \\
&\vdots \\
a_n &= \alpha_n^{(1)} e^{(1)} + \alpha_n^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \alpha_n^{(n)} e^{(n)}
\end{aligned}$$

y

$$b = \beta^{(1)} e^{(1)} + \beta^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \beta^{(n)} e^{(n)}$$

tenemos

$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

y de aquí $b a_3 a_2 \ldots an = x_1 a_1 a_2 \ldots a_n = \ldots$. Así si $a_1 a_2 \ldots a_n \neq 0$ tenemos una única solución:

$$x_1 = \frac{b a_2 a_3 \ldots a_n}{a_1 a_2 \ldots a_n}, x_2 = \ldots, \ldots$$

(Equivalentemente, x_1 es el número obtenido de dividir el (no cero) determinante de la matriz $(\alpha_j^{(i)})$ en el deteminante de la matriz obtenida de $(\alpha_j^{(i)})$ al reemplazar cada α_1^i por $\beta^{(i)}$. Esta es la regla de Cramer [5]. La misma derivación elegante (pero sin la doble notación sobrescript-subscript) en el primer Ausdehhnungslehre-. Esto es una de las técnicas que ocurre en el artículo de Cauchy mencionado anteriormente.

5 Productos Internos

Grassmann deriva el concepto del producto interior de la de producto exterior en una forma muy interesante. Trabajando en el álgebra generada por las unidades simples $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (sujeto, como siempre, a la condición (2)), Grassmann define el suplemento $\mid E$ de una unidad compuesta E como $+1$ o -1 veces el producto de esas unidades que no aparecen en el producto de E, el signo $+$ o $-$ se elige de una maera que:

$$E \mid E = +e_1 e_2 \ldots e_n$$

Por ejemplo, en el caso de tres dimensiones,

$$\mid e_1 = e_2 e_3$$

y

$$\mid e_1 e_3 = -e_2$$

El suplemento se extiende a las combinaciones lines de las unidades compuestas en mismo orden por linealidad:

$$\mid \sum \alpha_j E_j = \sum \alpha_j \mid E_j$$

(La función $A \mapsto \mid A$ es llamada hoy en día el Operador estrella de Hodge). Si E y F son formas del mismo orden entonces necesariamente $E \mid F$ es una multiplo de $e_1 e_2 \ldots e_n$; de hecho, como las forma de orden n hacen a los más un espacio de lineal de orden uno, uno puede identificarlas con los escalares, y es lo que Grassmann hace, poniendo $e_1 e_2 \ldots e_n = 1$. Aunque $E \mid F$ hace sentido para formas E y F de diferentes ordenes. Notando que $E \mid F$ es linear en ambos, E yF, Grassmann llama $E \mid F$ el producto interior de E y F. Su restricción al espacio lineal original (el espacio de las formas de orden 1) es de hecho un un producto interno en el sentido moderno, desde, que como Grassmann muestra,

$$e_i \mid e_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & si \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

y también

$$\sum \alpha_j e_j \mid \sum \beta_j e_j = \sum \alpha_j \beta_j$$

Grassmann llama $\sqrt{a \mid a}$ el valor numerico de a. La nocion de un conjunto completo ortonormal es introducido, y demuestra que uno de estos conjuntos debe ser linealmente independientemente y los teoremas que envuelven el producto interior del sistema original de unidades puede reemplazarse por alguno de estos conjuntos. Las nociones de complemento ortogonal y proyección ortogonal son investigadas; el proceso de Gram-Schmidt es al menos envuleto en esto de forma implicita.

6 Transformaciones Lineales

Para las transformaciones lineales que llevan elementos de una base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ respectivamente, Grasssman escribe:

$$Q = \frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{e_1 e_2 \ldots e_n}$$

y considerar a Q como un cociente generalizado. Mientras que hay problemas obivos con esta notación, tiene también cierta elegancia; por ejemplo, si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son independientes, entonces el inveros de Q es:

$$\frac{e_1 e_2 \ldots e_n}{b_1 b_2 \ldots b_n}$$

Grassmann obtuvo efectivamente la representación matricial de Q al demostrar que se puede escribir como:

$$Q = \sum \alpha_{r,s} E_{r,s}$$

donde

$$E_{r,s} = \frac{0, \ldots, 0, e_s, 0, \ldots, 0}{e_1, \ldots, e_r, \ldots, e_n}$$

El determinante de Q es definido como el número

$$\frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{e_1 e_2 \ldots e_n}$$

Valores propios y vectores propios son introducidos (aunque se usa un término diferente), y el hecho de que los valores propios son raíces del polinomio característico es demostrado como se hace a continuación. Supongamos que:

$$Qx = \rho x$$

donde $x = \sum \xi_i e_i \neq 0$. Escribiendo $c_i = (\rho - Q)e_i$, vemos que $\sum \xi_i c_i = 0$; así $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son dependientes y se tiene:

$$[(\rho - Q)e_1][(\rho - Q)e_2] \ldots [(\rho - Q)e_n] = 0$$

Como $e_1 e_2 \ldots e_n \neq 0$, esto es equivalente a que se anule el determinante de la transformación lineal $\rho - Q$. Se demuestra que los vectores propios correspondientes a distintos valores propios son linealmente independientes, y el teorema espectral para cuando Q es simétrica es demostrado. Enfocandonos en transformaciones lineales en general Q, Grassmann demuestra que, en efecto (al construir una base apropiada), que el espacio completo puede descomponerse como la suma directa de subespacios invariantes W_ρ donde ρ corre sobre las raíces características de Q, y cada W_ρ es el núcleo de $(Q - \rho)^k$, k siendo la multiplicidad algebraica de ρ. Mientras que el teorema espectral se demostró por Weierstrass [21] en 1858 (y, para el caso de n valores propios distintos por Cauchy

[4] en 1829). Al parecer Grassmann fue el primero en demostrar el último resultado, el cual es a veces llamado el teorema de la descomposición primaria; es parte del camino para parara obtener la forma canónica de Jordan, publicada en 1870 [15] (el paso que queda es reducir las funciones nilpotentes $Q - \rho \colon W_\rho \longrightarrow W_\rho$).

7 Geometría

En el Ausdehnnunggslehre de 1844, Grassmann describe las consideraciones geometricas que lo llevaron a la teoría que hoy llamamos álgebra lineal. Meditando la fórmual

$$AB + BC = AC$$

que uno puede encontrar en los libros de texto antiguos, para describir la relacion entre las longitudes que se mantiene para cualesquiera tres puntos colineales A, B y C, con B entre A y C, Grassmann se da cuenta que la fórmula es verdader independientemente del orden de los puntos, suponiendo que uno establezca que:

$$BA = -AB(4)$$

por ejemplo, si C está entre A y B, entonce la fórmula se sigue del hecho:

$$AB = AC + CB = AC - BC$$

Durante muchos años Grassman estudio cuidadosamente las consecuencias de (4), que es la propiedad especial que define el álgebra exterior. Su desarrollo de la geometría es complicada, y y daremos aquí una presentación de esta sobresimplificada que lleva rapidamente al corazón del asunto; aquellos quienes ven criminal este intento de parafrasear antiguas matemáticas en lenguaje moderno no deben leer más. Para evitar (puramente notacionales) complicaciones debemos, como Grassmann, restringirnos a tres dimensiones.

Comenzando con el material básico de geometría, números y puntos, permitimos que ellos se combinen porr operaciones formales de suma y producto, suponiendo las reglas algebraicas elementales básicas para tales operaciones, pero sujeto a que (4) se cumpla para todos los puntos A yB y también que:

$$\alpha A = A\alpha$$

para todos los números reales α y puntos A. Desde (4) deducimos que para cada punto tenemos que $A^2 = 0$; así el cuadrado de cada punto es un número, y suponer explicítamente que no es un punto.

0 no es un punto

Necesitamos una regla para la cual interpretar geometricamente las entidades que ocurren en su álgebra formal. Para un par de puntos A y B, y números reales positivos α y β con $\alpha + \beta = 1$, escribimos:

$$P = \alpha A + \beta B$$

Entonces inmediatamente tenemos

$$\begin{aligned} AP &= \beta AB \\ PB &= \alpha AB \\ AP + PB &= AB \end{aligned}$$

estas fórmulas sugieren que P se debe interpretar como el único punto que divide el segmento de recta de A en B en el β a α. También interpretamos P; via la biyección $\alpha \mapsto \alpha A + (1-\alpha)B$ entre $[0,1]$ y el segmento de recta AB, estos numero entran en la geometría, y todas las demás interpretaciones geometricas se siguen de esto. Para dar un ejemplo inmediato, la interpretación $P = \alpha A + \beta B$ con $\alpha \leq 0$ y $\beta > 0$, y $\alpha + \beta = 1$ es forzado por el hecho de que, equivalentemente

$$B = (-\frac{\alpha}{\beta})A + (\frac{1}{\beta})P,$$

donde $-\frac{\alpha}{\beta} \geq 0$, $\frac{1}{\beta} > 0$ y $(-\frac{\alpha}{\beta}) + (\frac{1}{\beta}) = 1$. La linea que pasa por A y B es el conjunto de todos los $\alpha A + \beta B$ con $\alpha + \beta = 1$, y conforme nosotros sumponemos que:

Si A y B son puntos y $\alpha + \beta = 1$, entonces $\alpha A + \beta B$ es un punto.

Consideramos un anillo Ω, en el cual el 1 es una unidad y el cual sea generado por $R \cup P$, donde R es el conjunto de los números reales P es el conjunto de los llamados puntos, sujeto a las condiciones (4),(5),(6) y (7); equivalentemente Ω se puede pensar como el álgebra generada por P. La parte dimensional viene con la hipotesis de que:

Ω es generado, como álgebra, por cuatro elementos de P pero no por tres,

y, finalmente, asegurando que la multiplicación no sea trivial, que

existen puntos A, B, C y D con $ABCD \neq 0$

La existencia y unicidad de tales estructuras se demuestra en [8]. Entonces tenemos el modelo para la geometría tres dimensional; la multiplicación es un producto exterior y la teoría abstracta de Grassmann puede ser traida para lidiar en la cual una interpretación geometrica es posible.

La diferencia de dos puntos es un vector; aquí la interpretación es forzada por la identidad

$$B - A = C - D \iff \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D)$$

La suma de un vector X y un punto A es un punto, porque

$$A + X = B \iff X = B - A$$

El producto de un número y el vector es un vector, porque para $X = B - A$ tenemos que $\alpha X = P - A$ donde $P = (1-\alpha)A + \alpha B$; esto conlleva a que αX sea interpretado como un vecto con la misma dirección de X con α veces la longitud de X.

Ahora un teorema clásico en el cual estas ideas son triviales: si en un triángulo con vértices A, B y C, los puntos D y E, respectivamente, dividimos el lado de A a B y el lado A a C en radios iguales, entonces el segmento de recta dd D a E es paralelo al segmento de B a C y el radio de sus longitudes es el número apropiado. La demostración es una línea:

$$D = \alpha A + \beta B, E = \alpha A + \beta C \Rightarrow D - E = \beta(B - C)$$

Las hipotesis (8) y (9) implica que el espacio de orden cuatro es dimension uno: si A, B, C y D son puntos independientes entonces cualquier producto $A'B'C'D'$ es multiplo de $ABCD$ y uno puede demostrar que el radio se debe interpretar como el radio de los volumenes orientados del tetrahedro asociado. En particular, $ABCD = A'B'C'D'$ significa que los dos tetrahedros tienen la misma orientación y volmen. Esto forza a que uno interprete $ABC = A'B'C'$ como que significa que los triangulos asociados son coplanares y tienen la misma orientación y area; y $AB = A'B'$ tiene el significado que dos segmentos de recta pertenecen a la misma linea y son iguales en longitud y dirección.

Ahora podemos probar el regreso del resultado anterior sobre triangulos en la misma manera que fue demostrado por Euclides. Si el segmento de recta de D aE y de B a C son paralelos, entonces:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DBC}{ABC} = \frac{EBC}{ABC} = \frac{EC}{AC}$$

donde hemos usado el hecho de que para un real adecuado α

$$DBC = [E + \alpha(B - C)]BC = EBC$$

De nuevo, esta es la demostración de que la diagonal de un paralelogramo la bisecta:

$$D = C + A - B \Rightarrow ABD = -ABC$$

Estos ejemplos indican, si no más, que el poder de la interpretación geométrica del álgebra de lineal de Grassmann. Son resultados de la geometría afín, pero al introducir un producto interior uno obtiene demostraciones algebraicas igualmente transparentes de los teoremas de la geometría y trigonometría de Euclides. (Incidentalmente, Grassmann, con su inclinación hacia la abstracción y generalidad, muestra poco interés en demostrar resultados conocidos de la geometría, y estas demostraciones son mías; algunas otras son dadas por Forder [10]).

8 Contemporaneo y últimos avances

Pensar que en 1844 Grassmann no esta consciente de su trabajo, Grassmann luego apreciaría que en lo que respecta a su teoría esta se anticipo , en particular, al concepto de suma de vectores de Bellavitis [1] y otros, y al de cálculo baricentrico de Mobius [17]. Pero nadie se había planteada la elegancia de la simplicidad de la fórmula:

$$(C - B) + (B - A) = C - A$$

la cual, por Grassmann, se forza la interpretación de la suma de dos vectores; y Mobius no explotó todas las posiblidades de la notación:

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

la cual, aun hoy en día , en su brillante [2], es menospreciado por Boyer como inferior al sistema de representación homogeneo de coordenadas $P = (\alpha, \beta, \gamma)$. La clave es la diferencia entre Mobius y Grassmann es que, cuando Mobius plantea que $\alpha + \beta B = \alpha' A + \beta' B$ conlleva meramente que $\alpha : \beta = \alpha' : \beta'$, para Grassmann implica que $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$; un conncepto es apropiado para la geometría proyectiva y la segunda para la euclideana.

La historia de la invención de los cuaternios por Hamilton [14] en 1843 y de la subsecuente influencia de Hamilton y de Grassmann en el surgimiento del análisis vectorial es bien contada por Crowe. Pero el análisis vectorial en el sentido de Crowe del termino es una materia que ha dejado de existir, o debería; tuvo que ser absorbida por el álgebra lineal. No sería una tarea sencilla estimar la influencia de estos dos hombres en el desarrollo del álgebra lineal como la conocemos, pero no hay duda de Grassmann en su propio trabajo estuvo más cerca de lo que estuvo Hamilton o cualquiera de sus contemporaneos. Aun en el caso de los precursores pueden ser reconocidos, los resultados, y en especial los metodos de Grassmann, fueron demasiado originales. Todas las matemáticas se basan, como Newton dijo, en hombros de gigantes, pero pocos han llegado tan cerca como Hermann Grassmann a crear, individualmente, un área nueva.

9 Conclusiones

La genialidad de Descates revelada por si misma en dejar la antigua convención que el producto de segmentos de recta es un rectangulo. En la geometría de Grassmann el producto de segmentos de recta es un objeto de dimensión alta. Es un regreso a Euclides, pero a Euclides con una diferencia, la diferencia que fue soñada por Leibniz. Pero la geometría de Grassman (como distinta de su álgebra lineal) ha sido olvidada hace mucho. Talvez es por esto que es el momento cuando se deba recordar, que Hilbert, con su inmenso prestigio, cerró el libro de Euclides al demostrar que el programa de Euclides, llevado rigurosamente, era demasiado tedioso para que alguien se molestará. La forma de Grassman no es tediosa, hecha propiamente, es imple directa, y poderosa, y quizá el libro tuvo que haberse abierto de nuevo.

Concluire citando (como en la traducción [6]) del prefacio del Ausdehnungslehre de 1862

Estoy realmente seguro de que el trabajo que he hecho de la ciencia presentada aquí y en el cual he gastado un parte significante de mu vida es el más agotadora aplicación de mis poderes, no sea pérdida. Es verdad que estoy consicente de que la forma en la que he dado ciencia es imperfecta y debe ser imperfecta. Pero sé y me siento obligado a decir (pensando el riesgo de parecer muy arrogante) que aunque este trabajao quede sin uso por otros diecisiete años o aún más, sin entrar en el desarrollo actual de la ciencia, aun ese tiempo vendrá que lleve más alla del polvo del olvido y cuando las ideas ahora dormidas devengan en frutos. Sé que si falló en recolectarlas alrededor mio (como hasta ahora he deseado en vano) un círculo de escolares, los cuales puedo beneficiar con estas ideas, y a quienes puedo estimular a desarrollarlas y enriquerserlas más, todavía vendrá un tiempo en el que estas ideas, tal vez en una nueva forma, se levanten novedosas y entrarán en viviventes comunicación con los desarrollos contemporaneos. Porque la verdad es eterna y divina.

References

[1] Giusto Bellavitis. Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di geometria analitica (calcolo delle equipollenze). *Ann. Sci. Regno Lombardo-Veneto, Padova*, pages 246–247, 1835.

[2] Carl B Boyer. *History of analytic geometry.* Courier Corporation, 2012.

[3] AL Cauchy. Sur les clefs algébriques. *Comptes Rendus de lAcadémie des Sciences*, 36:70–75, 1853.

[4] Augustin-Louis Cauchy. Sur l'équationa l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planetes. *Oeuvres Completes (IIeme Série)*, 9, 1829.

[5] Cramer, Gabriel, Cramer frères & Philibert, and Claude. *Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques par Gabriel Cramer...* chez les freres Cramer & Cl. Philibert, 1750.

[6] Michael J Crowe. A history of vector analysis, 1963.

[7] Richard Dedekind. Was sind und was sollen die zahlen? In *Was sind und was sollen die Zahlen?. Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, pages 1–47. Springer, 1965.

[8] Desmond Fearnley-Sander. Affine geometry and exterior algebra. In *Houston J. Math.* Citeseer, 1980.

[9] Richard P Feynman, Robert B Leighton, and Matthew Sands. The feynman lectures on physics; vol. i. *American Journal of Physics*, 33(9):750–752, 1965.

[10] Henry George Forder and Robert William Genese. *The calculus of extension.* CUP Archive, 1960.

[11] Adolf Fraenkel. Über die teiler der null und die zerlegung von ringen. 1915.

[12] Hermann Grassmann. *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten.* Th. Chr. Fr. Enslin, 1861.

[13] Hermann Grassmann and Jakob Lüroth. *Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke*, volume 1. BG Teubner, 1896.

[14] William Rowan Hamilton. Ii. on quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 25(163):10–13, 1844.

[15] Camille Jordan. *Traite des substitutions et des equations algebriques par m. Camille Jordan*, volume 1. Gauthier-Villars, 1870.

[16] Leroy E Loemker. Gottfried wilhelm leibniz. philosophical papers and letters. *Philosophical Quarterly*, 8(32), 1958.

[17] August Ferdinand Möbius. *Der barycentrische Calcul, ein Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie (etc.).* Barth, 1827.

[18] Giuseppe Peano. *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann.* Bocca, 1888.

[19] Giuseppe Peano. *Arithmetices principia: Nova methodo exposita.* Fratres Bocca, 1889.

[20] Ernst Steinitz. Bedingt konvergente reihen und konvexe systeme. 1913.

[21] Karl Weierstrass. *Ueber ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem.* Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1879.

[22] Hermann Weyl. *Raum, zeit, materie*, volume 7. Springer, 1970.

[23] Alfred North Whitehead. *A treatise on universal algebra: with applications*, volume 1. The University Press, 1898.