Notas de Análisis Matemático 1

Frank Murphy-Hernandez

20 de diciembre de 2017

Índice general

Introducción

Preliminares

El conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ incluye al 0.

Capítulo 1

Espacios Métricos

1.1. Espacios Métricos

Definición 1 *Sean X un conjunto no vacío y $d\colon X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ una función. Diremos que (X, d) es un espacio métrico y que d es una métrica si:*

- *Para toda $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si y sólo $x = 0$.*
- *Para toda $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.*
- *Para toda $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*

Ejemplo 1 *Sea X un conjunto no vacío. Definimos $d\colon X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ como:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \textit{if } x = y \\ 0 & \textit{if } x \neq y \end{cases}$$

Este espacio se conoce como discreto y a la métrica como discreta.

Ejemplo 2 *El conjunto de los reales $\mathbb{R}$ con $d(x, y) = |x - y|$ para $x, y \in \mathbb{R}$ es un espacio métrico.*

Ejemplo 3 *Para toda $n \in \mathbb{N}^+$, $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico con $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$.*

Ejemplo 4 *Para toda $n \in \mathbb{N}^+$ y $p > 1$, $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico con $d(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^p}$.*

Ejemplo 5 *El conjunto de los reales positivos $\mathbb{R}^+$ con $d(x, y) = |ln(\frac{x}{y})|$ para $x, y \in \mathbb{R}^+$ es un espacio métrico.*

Ejemplo 6 *Para un campo K y para naturales $m, n \in \mathbb{N}^+$, $M_{n\times m}(K)$ es un espacio métrico con $d(A, B) = rank(A - B)$ para $A, B \in M_{n\times m}(K)$. Donde $rank$ es la función rango.*

Hay una noción más débil que se llama espacio pesudométrico, en este caso se solicita que $d(x, x) = 0$. A la función se le llama una pseudométrica.

1.2. Subconjuntos Abiertos

Definición 2 *Sea (X, d) un espacio métrico. Para $r > 0$ y $x \in X$, la bola con radio r y centro x, se define como:*

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

Proposición 1 *Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $R, r < 0$. Si $r < R$ entonces $B_r(x) \subseteq B_R(x)$.*

Definición 3 *Sea (X, d) un espacio métrico. Para $r > 0$ y $x \in X$, la esfera con radio r y centro x, se define como:*

$$S_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) = r\}$$

Definición 4 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que A es un abierto de X, si para todo $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq A$.*

Proposición 2 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces:*

- *$\emptyset$ y X son abiertos.*
- *Si A y B son abiertos de X, entonces $A \cap B$ es abierto en X.*
- *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos de X, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un abierto de X.*

Definición 5 *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Definimos el interior de A, A°, como $\bigcup\{U \subseteq X \mid U$ es abierto $, U \subseteq A\}$.*

Proposición 3 *Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B, U \subseteq X$. Entonces:*

- *Si $U \subseteq A$ y U es abierto, entonces $U \subseteq A^\circ$.*
- *A° es abierto.*
- *$(A^\circ)^\circ = A^\circ$.*
- *$A^\circ \subseteq A$.*
- *Si $A \subseteq B$, entonces $A^\circ \subseteq B^\circ$.*
- *$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$*
- *$A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$*

1.3. Subconjuntos Cerrados

Definición 6 *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que $x \in X$ es un punto de adherencia de A, si para toda $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. El conjunto de puntos de adherencia de A se denota por $\overline{A}$ y se le llama la clausura de A.*

Definición 7 *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que A es cerrado en X, si $\overline{A} = A$.*

Proposición 4 *Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B, C \subseteq X$. Entonces:*

- *Si $A \subseteq C$ y C es cerrado, entonces $\overline{A} \subseteq C$.*
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
- $\overline{A}$ *es cerrado.*
- $A \subseteq \overline{A}$.
- *Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Proposición 5 *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces A es abierto si y sólo si $X \setminus A$ es cerrado.*

Proposición 6 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces:*

- *$\emptyset$ y X son cerrados.*
- *Si A y B son cerrados de X, entonces $A \cup B$ es cerrado en X.*
- *Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos de X, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un cerrado de X.*

Proposición 7 *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces:*

$$\overline{A} = \bigcap \{C \subseteq Z \mid C \text{ es cerrado }, A \subseteq C\}$$

Definición 8 *Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesin en X es una función $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$, donde notacionalmente se esribirá $x_n := x(n)$ para $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión se le denotará por $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} := x$ (observamos que se denota a la sucesión por su imagen). Diremos que la suceción converge, si existe $x \in X$ tal que para toda $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon)$ natural (que depende de ϵ) tal que para todo $n \geq N$, $d(x_n, x) < \epsilon$. En cuyo caso se escribirá $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, se dirá que el límite de la sucesión es x.*

Proposición 8 *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces x es un punto de adherencia de A si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq A$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Proposición 9 *Sean (X, d) un espacio métrico y $C \subseteq X$. Entonces C es cerrado si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq C$ convergente, $\lim_{n\to\infty} x_n \in C$.*

De la última proposición podemos darnos cuenta que el nombre cerrado hace referencia es que el conjunto es cerrado bajo tomar límites.

Definición 9 *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que $x \in X$ es un punto de acumulación de A, si para toda $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x) \cap A$ es infinito.*

Proposición 10 *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces x es un punto de acumulación si y sólo si $(B_\epsilon(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, para todo $\epsilon > 0$.*

Proposición 11 *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces x es un punto de acumulación de A si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq A$ de puntos distintos tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

1.4. Funciones Continuas

Definición 10 *Sean (X, d) y (X', d') espacios métricos y $f\colon X \longrightarrow X'$. Decimos que f es continua, si para toda $x \in X$ y $\epsilon = \epsilon(x) > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$, para todo $y \in X$, si $d(x, y) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

Proposición 12 *Sean (X, d) y (X', d') espacios métricos y $f\colon X \longrightarrow X'$. Son equivalentes:*

- *f es continua.*
- *$f^{-1}(A)$ es abierto, para todo $A \subseteq X'$ abierto.*
- *Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$*

Definición 11 *Sean (X, d) y (X', d') espacios métricos. Decimos X y X' son homeomorfos si existen funciones continuas $f\colon X \longrightarrow X'$ y $g\colon X' \longrightarrow X$ que son inversas.*

1.5. Subconjuntos Densos

Definición 12 *Sea (X, d) es un espacio métrico y $D \subseteq X$. Decimos que D es denso en X, si $\overline{D} = X$.*

Proposición 13 *Sea (X, d) es un espacio métrico y $D \subseteq X$. Entonces D es denso en X si y sólo si para toda $f : D \longrightarrow Y$ continua existe una única función continua $F : X \longrightarrow Y$ tal que $F|_D = f$*

1.6. Frontera de un Subconjunto

Definición 13 *Sea (X, d) es un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decimos que x es un punto frontera de A,si para toda $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ y $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ y $B_\epsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.*

1.7. Métricas Equivalentes

Definición 14 *Sean (X, d) y (X, d') espacios métricos. Decimos que d y d' son equivalentes, si para todo $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B^{d'}_\delta(x) \subseteq B^d_\epsilon(x)$ y para todo $x \in X$ y $\epsilon' > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que $B^d_{\delta'}(x) \subseteq B^d_{\epsilon'}(x)$*

Definición 15 *Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos $\overline{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ para toda $x, y \in X$*

Proposición 14 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico.*

Proposición 15 *Sean $(X, d_X), (X, d'_X), (Y, d_Y)$ y (Y, d'_Y) tales que d_X y d'_X son métricas equivalentes y d_Y y d'_Y son métricas equivalentes, y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ es continua si y sólo si $f : (X, d'_X) \longrightarrow (Y, d'_Y)$ es continua.*

1.8. Subconjuntos Acotados

Definición 16 *Sea (X, d) un espacio métrico. Si existe $M > 0$ y $x \in X$ tal que $X \subseteq B_M(x)$, entonces diremos que X es acotado.*

Definición 17 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces se define el diametro de X como:*

$$\delta(X) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$$

Proposición 16 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es acotado si y sólo si $\delta(X) < \infty$.*

1.9. Construcciones

1.9.1. Producto de Espacios Métricos

Proposición 17 *Sea* $\{(X_i, d_i)\}_{i=0}^{\infty}$ *una familia de espacios métricos. Entonces* $X = \prod_{i=0}^{\infty} X_i$ *con la función* $d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\overline{d_i}(x_i, y_i)}{2^i}$ *es un espacio métrico.*

A este espacio métrico se le conoce como el producto de espacios métricos.

1.9.2. Subespacio

1.9.3. Coproducto de Espacios Métricos

Proposición 18 *Sea* $\{(X_i, d_i)\}_{i\in I}$ *una familia de espacios métricos. Entonces* $X = \coprod_{i\in I} X_i$ *con la función*

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ \overline{d_i}(x_i, x_j) & \text{si } i = j \end{cases}$$

con $x_i \in X_i$ *y* $x_j \in X_j$*, es un espacio métrico.*

Proposición 19 *Sea* $\{(X_i, d_i)\}_{i\in I}$ *una familia de espacios métricos y* $\{f_i : X_i \longrightarrow Y\}_{i\in I}$ *una familia de funciones continuas. Entonces existe una única función continua* $f : \coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow Y$ *tal que* $f i_j = f_j$ *para toda* $j \in I$*.*

A esta única función la denotaremos por $\coprod_{i\in I} f_i$.

1.9.4. Espacio Cociente

1.9.5. Límite Inverso de Espacios Métricos

Definición 18 (Sistema Codirigido) *Sea* $\{(X_i, d_i)\}_{i=0}^{\infty}$ *una familia de espacios métricos y una familia de funciones continuas* $\{\alpha_i^j : X_j \longrightarrow X_i\}_{i\leq j\in\mathbb{N}}$ *que cumple:*

- $\alpha_i^i = 1_{X_i}$ *para toda* $i \in \mathbb{N}$
- *Si* $i \leq j \leq k \in \mathbb{N}$*, entonces* $\alpha_i^j \alpha_j^k = \alpha_i^k$

A esta pareja de familias la denotaremos por (X_i, α_i^j) *y la llamaremos un sistema codirigido.*

Observemos que sólo basta tener α_{i+1}^i para todo $i \in \mathbb{N}$, para poder definir recursivamente el sistema codirigido.

Definición 19 *Sea* (X_i, α_i^j) *un sistema codirigido, el límite inverso de sistema codirigido,* $\varprojlim(X_i, \alpha_i^j)$*, se define como:*

$$\{x \in \prod_{i=0}^{\infty} \mid \alpha_i^j(x_j) = x_i, i \leq j\}$$

Este es un espacio métrico considerandolo como un subespacio de un producto espacios.

Definición 20 *Sea* (X_i, α_i^j) *un sistema codirigido y una familia de funciones continuas* $\{f_i : Y \longrightarrow X_i\}_{i=1}^{\infty}$*, decimos que la familia es compatible (con el sistema codirigido), si* $\alpha_i^j f_j = f_i$ *para todo* $i \leq j \in \mathbb{N}$*.*

Proposición 20 *Sea* (X_i, α_i^j) *un sistema codirigido y* $\{f_i : Y \longrightarrow X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una familia compatible. Entonces existe una única función continua* $f : Y \longrightarrow \varprojlim(X_i, \alpha_i^j)$ *tal que* $\pi_i f = f_i$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$*.*

Ejemplo 7 *Sea* $\{(X_i, d_i)\}_{i=0}^{\infty}$ *una familia de espacios métricos tal que* $X_i \subseteq X_{i+1}$ *y* $\alpha_i^{i+1} : X_{i+1} \longrightarrow X_i$*. Entonces el límite inverso inducido por este sistema codirigido resulta ser homeomorfo a* $\bigcap_{i=0}^{\infty} X_i$*.*

1.10. Conjunto de Cantor

1.10.1. Construcción Usual

1.10.2. Expansión Terciaria

1.10.3. Métrica p-ádica

1.10.4. Construcción por Límite Inverso

Definición 21 *Denotaremos por* I *al intervalo cerrado* $[0, 1]$*.*

Primero definiremos espacios métricos de forma recursiva. Pondremos $K_0 = I$ y para todo natural $n \in \mathbb{N}$, $K_{n+1} = K_n \coprod K_n$. Notemos que los K_n son homeomorfos a los C_n.

Proposición 21 *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* C_n *es homeomorfo a* K_n*.*

Como el objetivo es construir el conjunto de Cantor como límite inverso sólo basta definir las funciones continuas para tener el sistema codirigido. Para $n \in \mathbb{N}$, necesitamos a $\alpha_n^{n+1} : K_{n+1} \longrightarrow K_n$ este será $\alpha_n^{n+1} = R \coprod L$, donde $R(x) = \frac{x}{3}$ y $L(x) = \frac{x+2}{3}$. Hay que ver que ambas funciones están bien definidas, es decir, $R : K_n \longrightarrow K_n$ y $L : K_n \longrightarrow K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El conjunto de Cantor C es homeomorfo al límite inverso de (K_i, α_i^j).

1.11. Ejercicios

A lo largo de esta tarea X siempre denotará un conjunto no vacío y $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Ejercicio 1

- *Sea* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *una función que satisface los axiomas:*
  1. *Para cualesquiera* $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.
  2. *Para cualesquiera* $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$
  3. *Para cualesquiera* $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

  Demuestre que d *es una métrica en el conjunto* X.

- *Sea* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *una función que satisface las propiedades:*
  1. *Para todo* $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.
  2. *Para cualesquiera* $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$.

  Demuestre que d *es una métrica en el conjunto* X

Definición 22 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Para* $x \in X$ *y* $A \subseteq X$ *se define la* ***distancia de*** x ***al conjunto*** A *como* $d(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$.

Ejercicio 2 *Sea* $d \colon X \times X \to [0, \infty)$ *una métrica.*

1. *Demuestre que para cualesquiera* $x, y, z, w \in X$, $|d(x, z) - d(z, w)| \leq d(x, y) + d(y, w)$.
2. *Demuestre que para cualesquiera* $x, y, z \in X$, $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.
3. *Demuestre que para todo conjunto* $A \subseteq X$ *no vacío se tiene que* $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Ejercicio 3 *Sea* $A = \{x \in \ell^\infty \mid \forall k \in \mathbb{N}(x_k \in \{0, 1\})\}$. *Caracterizar la métrica obtenida al restringir* d_∞ *al conjunto* A.

Ejercicio 4 *Sea* Y *un conjunto no vacío. Se define la función* $d : Y^{\mathbb{N}} \times Y^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ *mediante:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{Si } x = y. \\ \frac{1}{1 + \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}}, & \text{Si } x \neq y. \end{cases}$$

Demuestre que d *es una métrica.*

Ejercicio 5 *Sea $p \in \mathbb{N}$ un primo. Nótese que para todo $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ existen únicos $k, n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $x = p^k \frac{n}{m}$ con $(n, p) = (m, p) = (n, m) = 1$. En tal caso se dice que k es la valuación p-ádica de x y se denota por $v_p(x) = k$. Así las cosas se define la función $d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mediante:*

$$d_p(x, y) = \begin{cases} 0 & \textit{Si } x = y. \\ p^{-v_p(x-y)} & \textit{Si } x \neq y. \end{cases}$$

Demuestre que la función d_p es una métrica en lo racionales. Pruebe que de hecho esta satisface que para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$, $d_p(x, z) \leq \text{máx}\{d_p(x, y), d_p(y, z)\}$.

Ejercicio 6 *Sea $n \in \mathbb{N}^+$.*

1. *¿Es la función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ dada por $d(x, y) = (\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^{\frac{1}{2}})^2$ una métrica?*

2. *Sea $p \in (0, 1)$. Demuestre que la función $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definida mediante $d_p(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p$ es una métrica.*

Ejercicio 7 *Sea $d : X \times X \to [0, \infty)$ una métrica. ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ es cierto que d^p es una métrica en X?.*

Ejercicio 8

1. *Demuestre que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $0 < \lambda < 1$ se tiene que $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda)b$.*

2. *Usar el inciso anterior para dar una nueva prueba de la desigualdad de Hölder para series.*

Ejercicio 9 *(Desigualdad de Hölder para integrales) Sean $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$. Demuestre que si $p, q \in (1, \infty)$ son exponentes conjugados entonces se tiene que:*

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

También pruebe que

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|dt \right) \text{máx}\{|g(t)| \mid t \in [a, b]\}.$$

Ejercicio 10 *(Desigualdad de Minkowski para integrales) Sean $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$. Demuestre que si $p \in [1, \infty)$ entonces*

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + (\int_a^b |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

También pruebe que

$$\text{máx}\{|f(t) + g(t)| \mid t \in [a, b]\} \leq \text{máx}\{|f(t)| \mid t \in [a, b]\} + \text{máx}\{|g(t)| \mid t \in [a, b]\}.$$

Ejercicio 11 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Para $p \in [1, \infty)$ se define la función $\|\_\|_p : \mathcal{C}([a, b]) \to [0, \infty)$ mediante $\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$. También se define la función $\|\_\|_\infty : \mathcal{C}([a, b]) \to [0, \infty)$ mediante $\|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(t)| \mid t \in [a, b]\}$.*

Demuestre que para todo $p \in [1, \infty)$, $(\mathcal{C}([a, b]), \|\_\|_p)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado.

Ejercicio 12 *Sea $x \in \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}^+$. Demuestre lo siguiente:*

1. *Para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq r$ se cumple que $\|x\|_r \leq n^{\frac{1}{r}} \|x\|_\infty$.*
2. *Para todo $r, s \in \mathbb{R}$ se tiene que $\|x\|_r \leq n^{\frac{1}{r}} \|x\|_s$.*
3. *Para todo $r, s \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $1 \leq s \leq r \leq \infty$ se cumple que $\|x\|_r \leq \|x\|_s$.*
4. *Para todo $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq s \leq r$ se cumple que $\|x\|_s \leq n^{\frac{r-s}{sr}} \|x\|_r$.*

Ejercicio 13 *Sean $r, s \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $1 \leq s < r$.*

1. *Demuestre que $\ell^s \subsetneq \ell^r$ y para todo $x \in \ell^s$ se tiene que $\|x\|_s \leq \|x\|_r$.*
2. *Demuestre que si existe $p \in [1, \infty)$ tal que $x \in \ell^p$, entonces $\|x\|_\infty = \text{lím}_{r \to \infty} \|x\|_r$.*

Definición 23 *Se definen los siguientes conjuntos:*

1. $c = \{(x_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \text{lím}_{n \to \infty} x_n$ *existe*$\}$.
2. $c_0 = \{(x_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \text{lím}_{n \to \infty} x_n = 0\}$.

3. $c_{00} = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists m \in \mathbb{N}(\forall n \in \mathbb{N}(n \geq m \to x_n = 0))\}$.

Ejercicio 14 *Demuestre que* $c_{00} \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell^\infty$ *y que cada uno de los conjuntos dados es un espacio vectorial real.*

Definición 24 *Una* ***pseudométrica*** *en el conjunto* X *es una función* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *que satisface las propiedades:*

1. *Para todo* $x \in X$, $d(x, x) = 0$.
2. *Para todo* $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.
3. *Para cualesquiera* $x, y, z \in X$ *se tiene que* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un ***espacio pseudométrico*** *es una pareja* (X, d) *que consta de un conjunto* X *con* d *una pseudométrica en dicho conjunto.*

Ejercicio 15 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua y acotada. Se define la función* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *mediante* $d(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t - x) - f(t - y)|$.

1. *Demuestre que* d *es una pseudométrica.*
2. *Pruebe que* d *es una métrica si y sólo si* f *no es periódica.*

Ejercicio 16 *Sea* d *una pseudométrica en un conjunto no vacío* X.

1. *Se define la relación* $\sim \subseteq X \times X$ *mediante:* $x \sim y$, *si* $d(x, y) = 0$. *Demuestre que* $\sim$ *es una relación de equivalencia.*
2. *Sea* $X/\sim$ *el conjunto cociente de la relación anterior. Demuestre que existe una única métrica* $\hat{d}$ *en* $X/\sim$ *tal que para todo* $x, y \in X$, $\hat{d}([x], [y]) = d(x, y)$.
3. *¿Qué sucede con esta construcción si* d *es originalmente una métrica?*

Definición 25 *Sean* (X, d) *y* (Y, d') *espacios métricos y una función* $f : X \to Y$. *Se dice que* f *es una* ***isometría*** *si para cualesquiera* $x, y \in X$ *se tiene que* $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$. *Dos espacios métricos* (X, d) *y* (Y, d') *son* ***isométricos*** *si existe* $g : X \to Y$ *una isometría biyectiva. Una isometría* $f : X \to Y$ *es un* ***encaje isométrico*** *si existe* $A \subseteq Y$ *un conjunto tal que* X *y* A *son isométricos al considerar a* A *como subespacio métrico de* Y.

Ejercicio 17 *Sean (X,d) y (Y,d') espacios métricos y $f : X \to Y$ una función.*

1. *Demuestre que toda isometría es una función inyectiva. Dar un ejemplo de una función inyectiva que no sea una isometría.*
2. *Demuestre que la composición de dos isometrías es una isometría.*
3. *Sea (X,d) un espacio métrico. Demuestre que $1_X : (X,d) \to (X,d)$ es una isometría. ¿Es cierto este resultado si las métricas en X son distintas para el dominio y el codominio?*
4. *Demuestre que la inversa de una isometría biyectiva es una isometría.*

Ejercicio 18 *Sea $p \in [1,\infty]$. Para cada $n \in \mathbb{N}^+$ construir un encaje isométrico de $(\mathbb{R}^n, d_p)$ en ℓ^p.*

Ejercicio 19 *Sea $X = \{0,1,2,3\}$ y se define la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante $d(0,1) = d(1,2) = d(2,0) = 2$ y $d(0,3) = d(1,3) = d(2,3) = 1$.*

1. *Pruebe que existe una única métrica en X que satisface las relaciones anteriores.*
2. *Pruebe que no existe un encaje isométrico de (X,d) en ℓ^2.*

Ejercicio 20 *¿Es $(\mathbb{R}^2, d)$ isométrico a $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$?*

Definición 26 *Dos **métricas** $d, d' : X \times X \to [0,\infty)$ son **equivalentes** si existen $C, C' \in \mathbb{R}^+$ tales que para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que $Cd(x,y) \leq d'(x,y) \leq C'd(x,y)$.*

Ejercicio 21 *Sea X un conjunto no vacío.*

1. *Demuestre que el conjunto de métricas en X es no vacío y denótese a este conjunto por $\mathcal{M}(X)$.*
2. *Demuestre que la relación "métricas equivalentes" en $\mathcal{M}(X)$ es una relación de equivalencia en dicho conjunto.*

Ejercicio 22 *Sea (X,d) un espacio métrico. Demuestre lo siguiente:*

1. *La función* $d^* : X \times X \to \mathbb{R}$ *definida mediante* $d^*(x,y) = \text{mín}\{1, d(x,y)\}$ *es una métrica equivalente a* d *para la cual* $\delta(X) \leq 1$.

2. *La función* $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ *definida mediante* $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ *es una métrica equivalente a* d *tal que* $\delta(X) \leq 1$.

Ejercicio 23 *Sean* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0, x_1 \in X$ *y* $T_{x_0,x_1}(X) = \{\sigma : [0,1] \to X \mid \sigma(0) = x_0, \sigma(1) = x_1, \sigma \text{ es continua}\}$. *Para* $\sigma \in T_{x_0,x_1}(X)$ *sea* $\ell(\sigma)$ *la longitud de dicha trayectoria, y se define la función* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *mediante:*

$$d(x,y) = \text{ínf}\{\ell(\sigma) \mid \sigma \in T_{x,y}(X)\}.$$

1. *Bajo la hipótesis de que para cualesquiera* $x, y \in X$ *se tiene que* $T_{x,y}(X) \neq \emptyset$, *demuestre que* d *es una métrica.*

2. *¿Cómo se compara esta métrica con la métrica usual de* $\mathbb{S}^n$ *inducida por la de* $\mathbb{R}^{n+1}$*?*

Definición 27 *Sea* S *un conjunto y* (X,d) *un espacio métrico. Una función* $f : S \to X$ *es* ***acotada*** *si existen* $\epsilon > 0$ *y* $x_0 \in X$ *tales que para todo* $s \in S$, $d(f(s), x_0) \leq \epsilon$. *El conjunto de funciones acotadas de* S *en* X *se denota por* $\mathcal{B}(S,X)$. *Además nótese que si* X *es normado, una función es acotada si lo es con la métrica inducida por la norma.*

Ejercicio 24

1. *Supóngase que* (X,d) *es un espacio métrico. Se define la función* $d_\infty : \mathcal{B}(S,X) \times \mathcal{B}(S,X) \to [0,\infty)$ *mediante* $d_\infty(f,g) = \sup_{s\in S}\{d(f(s),g(s))\}$. *Demuestre que* d_∞ *es una métrica.*

2. *Supóngase que* $(X, \|\_\|)$ *es un espacio normado real. Se define la función* $\|\_\|_\infty : \mathcal{B}(S,X) \to [0,\infty)$ *mediante* $\|f\|_\infty = \sup_{s\in S}\{\|f(s)\|\}$. *Demuestre que* $\mathcal{B}(S,X)$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial y que* $\|\_\|_\infty$ *es una norma en dicho espacio.*

3. *¿Quién es* $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ *al tomar a* $\mathbb{R}$ *como espacio normado con el valor absoluto usual?*

Ejercicio 25 *Demuestre que cada conjunto abierto en $\mathbb{R}$, con la métrica usual, es unión de una colección contable de intervalos abiertos y rayos abiertos disjuntos entre sí.*

Ejercicio 26 *Sea $g \in \mathcal{C}([a,b])$.*

1. *Demuestre que el conjunto $A = \{f \in \mathcal{C}([a,b]) \mid \forall t \in [a,b], f(t) < g(t)\}$ es $\|\_\|_\infty$-abierto.*
2. *¿Qué sucede con la afirmación anterior si se sustituye $\mathcal{C}([a,b])$ por $\mathcal{B}([a,b])$.*
3. *Demuestre que el conjunto $A = \{f \in \mathcal{C}([a,b]) \mid \forall t \in [a,b], f(t) < g(t)\}$ es $\|\_\|_\infty$-cerrado.*

Ejercicio 27 *Supóngase que $a, b \in \mathbb{R}$ y son tales que $a < b$. Demuestre que $\mathcal{C}_0([a,b]) = \{f \in \mathcal{C}([a,b]) \mid f(a) = f(b) = 0\}$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{C}([a,b])$.*

Ejercicio 28 *Sea $(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^p$ con $p \in [1,\infty]$. Demuestre que el conjunto $\{(y_n)_{n=0}^{\infty} \mid \forall k \in \mathbb{N}, |y_k| \leq |x_k|\}$ es cerrado en ℓ^p.*

Ejercicio 29 *Sea $I^\omega = \{\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}(|x_n| < \frac{1}{n+1})\}$.*

1. *Demuestre que $I^\omega \subseteq \ell^2$ y es no vacío.*
2. *Demuestre que I^ω es cerrado en ℓ^2.*
3. *¿Es I^ω abierto en ℓ^2?.*

Ejercicio 30 *Se recuerda que para (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$, $\overline{A} := \{x \in X \mid x$ es un punto de adherencia de $A\}$.*

Sean $A, B \subseteq X$. Demuestre lo siguiente:

1. *$A \subseteq \overline{A}$.*
2. *Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*
3. *$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.*
4. *$\overline{A}$ es cerrado.*

5. *Si* $A \subseteq C$ *y* $C \subseteq X$ *es cerrado, entonces* $\overline{A} \subseteq C$.

6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

7. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. *Dar un ejemplo donde se muestre que esta contención puede ser propia.*

Ejercicio 31 *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $A \subseteq X$. *Demuestre que* $\overline{A} = \bigcap\{C \subseteq X \mid C$ *cerrado,* $A \subseteq C\}$.

Ejercicio 32 *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $A \subseteq X$. *Demuestre las siguientes igualdades:*

1. $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

2. $A^\circ = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$.

3. $X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}$.

4. $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$.

Definición 28 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Para* $A \subseteq X$ *se define* $A' = \{x \in X \mid x$ *es punto de acumulación de* $A\}$. *Se dice que* A *es un* ***conjunto perfecto*** *si* $A' = A$.

Ejercicio 33 *Sean* $A, B \subseteq X$ *con* (X, d) *un espacio métrico. Demuestre lo siguiente:*

1. *Si* $A \subseteq B$ *entonces* $A' \subseteq B'$.

2. $A'' \subseteq A'$.

3. *Si* $x \in A'$ *entonces* $A' = (A \setminus \{x\})'$.

4. $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$.

Ejercicio 34

1. *Demuestre que todo conjunto perfecto es cerrado.*

2. *Dar un ejemplo de un conjunto cerrado que no sea perfecto.*

3. *Demuestre que el conjunto ternario de Cantor es perfecto.*

Ejercicio 35 *Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Demuestre lo siguiente:*

1. $\partial(A) = \partial(X \setminus A)$.
2. $\partial(A)$ *es cerrado en* X.
3. A *es abierto en* X *si y sólo si* $\partial(A) \subseteq X \setminus A$.
4. A *es cerrado en* X *si y sólo si* $\partial(A) \subseteq A$.

Definición 29 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que $x \in X$ es un **punto aislado de** A si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ y $U \cap A = \{x\}$. El conjunto de puntos aislados de A se denota por $Ais(A)$.*

Ejercicio 36 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. El **exterior de** A se define como el conjunto $ext(A) = (X \setminus A)^\circ$.*

Demuestre lo siguiente:

1. $A^\circ = A \setminus \partial A$.
2. $\overline{A} = Ais(A) \cup A' = A \cup \partial A$.
3. $X = Ais(A) \cup A' \cup ext(A) = A^\circ \cup \partial A \cup ext(A)$.

Además en todos los casos los uniendos son disjuntos dos a dos.

Ejercicio 37 *Sea $A \subseteq X$. Demuestre que si A es d-acotado entonces $\overline{A}$ es d-acotado y $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$. ¿Hay un resultado análogo para el interior?*

Ejercicio 38 *Sea $(V, \|\_\|)$ un espacio vectorial normado y W un subespacio vectorial propio cerrado. Demuestre que para todo $\alpha \in (0, 1)$ existe $x_\alpha \in V$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $d(x_\alpha, W) \geq \alpha$.*

Definición 30 *Sea (X, d) un espacio métrico. Un **conjunto** $\mathcal{F}_\sigma$ es aquél que se puede expresar como una intersección numerable de abiertos distintos entre sí. Un **conjunto** $\mathcal{G}_\delta$ es aquél que se puede expresar como la unión de una familia numerable de cerrados distintos entre sí.*

Ejercicio 39 *Para (X, d) un espacio métrico sea $A \subseteq X$ no vacío.*

1. *Demuestre que para toda $\epsilon > 0$ el conjunto $\{x \in X \mid d(x, A) < \epsilon\}$ es abierto.*
2. *Pruebe que todo conjunto cerrado es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$.*
3. *Demuestre que todo conjunto abierto es un $\mathcal{F}_\sigma$.*
4. *Dar un ejemplo de un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ que no es abierto.*

Ejercicio 40 *Para (X, d) un espacio métrico sean $A, B \subseteq X$.*

1. *Demuestre que si A y B son no vacíos entonces el conjunto $\{x \in X \mid d(x, A) < d(x, B)\}$ es abierto.*
2. *Demuestre que si A y B son ajenos entonces existen $U, V \subseteq X$ abiertos ajenos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.*

Definición 31 *Dos métricas $d, d' : X \times X \to [0, \infty)$ son **topológiamente equivalentes** si todo abierto según (X, d) es un abierto según (X, d') y visceversa.*

Ejercicio 41

1. *Con la notación del ejercicio 21 demuestre que la relación "métricas topológicamente equivalentes" es de equivalencia en $\mathcal{M}(X)$.*
2. *Demuestre que dos métricas equivalentes son topológicamente equivalentes. ¿Es cierta la afirmación recíproca?*

Ejercicio 42 *Sea $\varphi : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definida mediante $\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Además se define la función $\overline{\varphi} : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ como la extensión de φ tal que $\overline{\varphi}(\pm\infty) = \pm 1$.*

1. *Demuestre que φ es una función biyectiva.*
2. *Demuestre que la función $D : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ definida mediante $D(x, y) = |\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)|$ es una métrica en $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $\delta(\overline{\mathbb{R}}) = 2$.*
3. *Demuestre que la métrica inducida por D en $\mathbb{R}$ es topológicamente equivalente a la métrica usual.*

Ejercicio 43 *Con la notación del ejercicio anterior.*

1. *Sea* $\epsilon \in (0,1)$*. Demuestre que* $B_\epsilon^D(\infty) = (\frac{1}{\epsilon} - 1, \infty]$ *y que* $B_\epsilon^D(-\infty) = [-\infty, 1 - \frac{1}{\epsilon})$.

2. *Sea* $r > 0$ *y* $s < 0$*. Demuestre que* $(r, \infty] = B^D_{\frac{1}{1+r}}(\infty)$ *y* $[-\infty, s) = B^D_{\frac{1}{1-s}}(-\infty)$.

Ejercicio 44 *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y denótese por* $\overline{A}'$ *a la cerradura de* A *en los reales extendidos. Demuestre lo siguiente:*

1. A *no es acotado superiormente en* $\mathbb{R}$ *si y sólo si* $\infty \in \overline{A}'$.

2. A *no es acotado inferiormente en* $\mathbb{R}$ *si y sólo si* $-\infty \in \overline{A}'$.

Ejercicio 45

1. *Sea* $\{(X_i, d_i)\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ *una colección de espacios métricos de diametro a lo más 1. Probar que la función* $d : X \times X \to \mathbb{R}$*, donde* $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$*, definida por* $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i}$ *es una métrica.*

2. *Supóngase que* $(X_i, d_i) = (Y, d_{disc})$ *con* Y *un conjunto y* d_{disc} *la métrica discreta. Pruebe que la métrica definida es topológicamente equivalente a la métrica del ejercicio 4.*

3. *Tómese* $X_i = [-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}]$ *y* d_i *la métrica usual en* $\mathbb{R}$ *inducida. Ver que* X *es* I^ω *(ejercicio 29). ¿Es la métrica* d *topológicamente equivalente a la métrica inducida por* ℓ^2 *en* I^ω*?.*

Ejercicio 46 *Sean* $d, d' : X \times X \to [0, \infty)$ *métricas. Demuestre que una condición suficiente para que las métricas sean topológicamente equivalentes es que cada conjunto* d*-cerrado sea* d'*-cerrado y visceversa. ¿Es esta condición necesaria?.*

Definición 32 *Sea* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *una métrica. Se dice que* d *es una* ***ultramétrica*** *su para cualesquiera* $x, y, z \in X$ *se cumple que* $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$.

Ejercicio 47 *Sea* d *una ultramétrica en el conjunto* X.

1. *Demuestre que si $x, y, z \in X$ son tales que $d(x, y) \neq d(y, z)$, entonces $d(x, z) = \text{máx}\{d(x, y), d(y, z)\}$.*
2. *Sean $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Demuestre que para todo $y \in B_\epsilon(x)$ se tiene que $B_\epsilon(x) = B_\epsilon(y)$.*
3. *Demuestre que toda bola abierta ó cerrada es un conjunto cerrado y abierto simultáneamente.*
4. *La esfera es un conjunto abierto y cerrado simultáneamente.*

Ejercicio 48 *Sea $\mathcal{F}$ el conjunto formado por los subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio métrico acotado. Para $A, B \in \mathcal{F}$ se define:*

$$d^*(A, B) = \text{máx}\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, B)\}.$$

1. *Demuestre que d^* es una métrica en $\mathcal{F}$.*
2. *¿Es d^* una métrica si se define sobre todos los subconjuntos de un espacio métrico acotado?.*
3. *Comparar $d^*(A, B)$ con $d(A, B)$ y $\delta(A \cup B)$.*

Definición 33 *Un espacio métrico X es **separable** si existe $A \subseteq X$ contable tal que $\overline{A} = X$.*

Ejercicio 49

1. *Pruebe que un conjunto con la métrica discreta es separable si y sólo si es contable.*
2. *¿Es $\mathcal{B}([0, 1])$ separable?*

Ejercicio 50 *Demuestre que:*

1. *ℓ^∞ no es separable.*
2. *Para todo $p \in [1, \infty)$ se tiene que ℓ^p es separable.*

Ejercicio 51 *Demuestre que un espacio métrico X es separable si y sólo si existe una familia contable de abiertos en X, digamos $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$, tal que para todo $U \subseteq X$ abierto y $x \in U$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_k$ y $B_k \subseteq U$.*

Definición 34 *Para (X, d) un espacio métrico y al considerar a $\mathbb{R}$ como espacio normado con el valor absoluto se denota por $\mathcal{C}_b(X) = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.*

Ejercicio 52 *Sea X un conjunto finito con la métrica discreta. Demuestre que $(C_b(X), d_\infty)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$.*

Ejercicio 53 *Sea $x_0 \in X$. Demuestre que la función $\Phi : (X, d) \to C_b(X, \mathbb{R})$ dada por $\Phi(x)(y) = d(x, y) - d(x_0, y)$ está bien definida y es un encaje isométrico.*

Ejercicio 54 *Demuestre que todo espacio métrico separable se puede encajar isométricamente en (ℓ^∞, d_∞).*

Ejercicio 55 *Sea $A \subseteq X$ con (X, d) un espacio métrico.*

1. *Demuestre que para $x \in X$, $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{A}$.*
2. *Demuestre que la función $d(\_, A) : X \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto d(x, A)$ es continua al tomar a $\mathbb{R}$ con la métrica usual.*
3. *Demuestre que para todo $x \in A$ existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en A tal que la sucesión $(d(x, x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a $d(x, A)$ en $\mathbb{R}$ con la métrica usual.*

Ejercicio 56 *Sea $(V, \|\_\|)$ un espacio vectorial normado real. Demuestre que las sigui-entes funciones son continuas:*

1. *La suma de V.*
2. *El producto por escalares de $\mathbb{R}$ con V.*
3. *La función norma $\|\_\| : V \to \mathbb{R}$.*
4. *Si V es un espacio con producto interior entonces el produto interior es una función continua.*

Ejercicio 57 *Sea (X, d) un espacio normado con X un espacio vectorial sobre los reales.*

1. *Demuestre que si d satisface que para todo $x, y, z \in X$, $d(x+z, y+z) = d(x, y)$, entonces la suma de vectores es continua.*
2. *Demuestre que si d satisface la hipótesis del inciso anterior y que para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda v, \lambda w) = |\lambda| d(v, w)$, entonces el producto por escalares es continuo.*
3. *Con las mismas hipótesis del inciso anterior pruebe que existe una norma que induce la métrica dada.*

Ejercicio 58 *Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d) y $x \in X$. Demuestre que $x_n \to x$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.*

Ejercicio 59 *Sea D' la métrica inducida por D en $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dado $x \in X$ y $y \in X^{\mathbb{N}}$ se define $f_x : \mathbb{N}' \to X$ mediante $f_x|_{\mathbb{N}} = y$ y $f_x(\infty) = x$. Demuestre que $x_n \to y$ si y sólo si f es continua en ∞.*

Ejercicio 60 *Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Decir si la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ en $\mathbb{Q}$ converge con d_p (ver ejercicio 5) y en caso de hacerlo, decir cuál es el límite para cada uno de los siguientes casos:*

1. $x_k = k!$.
2. $x_k = k$.
3. $x_k = \frac{1}{k+1}$.
4. $x_k = p^k$.
5. $x_k = (1+p)^{p^k}$.

Ejercicio 61 *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos así como $f : X \to Y$ una función. Demuestre que son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *Para todo $C \subseteq Y$ cerrado, $f^{-1}(C) \subseteq X$ es cerrado.*
3. *Para todo $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*
4. *Para todo $B \subseteq Y$, $f^{-1}(B^{\circ}) \subseteq f^{-1}(B)^{\circ}$.*

En las propiedades donde se da una contención en la conclusión ¿puede esta ser propia?.

Ejercicio 62 *Sea d una pseudométrica en el conjunto X y $\pi : X \to X/\sim$ la proyección canónica. Demuestre que $A \subseteq X/\sim$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(A) \subseteq X$ es abierto. ¿Es cierto que si $A \subseteq X$ es abierto entonces $\pi(A) \subseteq X/\sim$ es abierto?*

Ejercicio 63 *Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$ una función continua. Demuestre que:*

1. *f tiene la propiedad de cancelación por la izquierda respecto a funciones continuas entre espacios métricos si y sólo si f es inyectiva.*
2. *f tiene la propiedad de cancelación por la derecha respecto a funciones continuas entre espacios métricos si y sólo si la imagen de f es densa en Y.*

Ejercicio 64 *Sea $A \subseteq X$ un cerrado y $g : A \to [0, 1]$ una función continua. Demuestre que existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f|_A = g$.*

Ejercicio 65 *Probar que para todo espacio métrico separable X, existe $f : X \to I^\omega$ continua e inyectiva, tal que al correstringir a f en su imagen, su función inversa es continua.*

Ejercicio 66 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq X$ cerrados y disjuntos. Demuestre que existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $A \subseteq f^{-1}(0)$ y $B \subseteq f^{-1}(1)$.*

Ejercicio 67 *Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe las siguientes afirmaciones:*

1. *Para toda $\varphi : X \to [0, 1]$ continua, $\varphi([0, 1)) \subseteq X$ es un abierto.*
2. *Para todo $U \subseteq X$ abierto con $x \in U$, existe $\varphi : X \to [0, 1]$ continua tal que $x \in \varphi^{-1}([0, 1))$ y $\varphi^{-1}([0, 1)) \subseteq U$.*

Ejercicio 68 *Pruebe que las siguientes funciones son continuas.*

1. *Para* $p, q \in \overline{\mathbb{R}}$ *tales que* $1 \leq p \leq q$, *la función inclusión* $\iota : \ell^p \to \ell^q$.
2. *Para* $p \in \overline{\mathbb{R}}$ *tal que* $1 \leq p$, *la función* $\pi_k : \ell^p \to \mathbb{R}$ *dada por* $\pi_k(x) = x_k$.
3. *Para cualesquiera* $p, q \in \overline{\mathbb{R}}$ *con* $q \in \mathbb{R}$, *la función identidad* $1_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, d_p) \to (\mathbb{R}^n, d_q)$.
4. *La función identidad* $1_{\mathcal{C}([0,1])} : (\mathcal{C}([0,1]), d_\infty) \to (\mathcal{C}([0,1]), d_1)$
5. *¿Es la inversa de la función del inciso anterior continua?.*

Ejercicio 69 *Sean* (X, d) *y* (Y, d') *espacios métricos así como* $A, B \subseteq X$. *Demuestre lo siguiente:*

1. $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.
2. $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
3. $\partial(A \times B) = \partial A \times \overline{B} \cup \overline{A} \times \partial B$.

Si una cantidad no negativa fuera tan pequeña que resultara menor que cualquier otra dada, ciertamente no podría ser sino cero.
A quienes preguntan qué es una cantidad infinitamente pequeña en matemáticas, nosotros respondemos que es, de hecho, cero.
Así pues, no hay tantos misterios ocultos en este concepto como se suele creer.
Esos supuestos misterios han convertido el cálculo de lo infinitamente pequeño en algo sospechoso para mucha gente.
Las dudas que puedan quedar las resolveremos por completo en las páginas siguientes, donde explicaremos este cálculo.

Leonard Euler.

Capítulo 2

Espacios Completos

2.1. Sucesiones de Cauchy

Definición 35 *Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$. Decimos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, si para todo $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Proposición 22 *Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$. Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge, entonces es de Cauchy.*

Proposición 23 *Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$. Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces es acotada.*

Proposición 24 *Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$. Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge, entonces toda subsucesión converge.*

Proposición 25 *Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$. Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, entonces la sucesión converge.*

Definición 36 *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es completo, si toda sucesión de Cauchy converge.*

Proposición 26 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es completo si y sólo si toda sucesión decreciente de subespacios no vacíos con sucesión de diametros que converge a cero tiene intersección no vacía.*

Proposición 27 *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $Y \subseteq X$. Si Y es cerrado, entonces Y es completo.*

Proposición 28 *Sean (X, d) un espacio métrico y $Y \subseteq X$. Si Y es completo, entonces Y es cerrado.*

Definición 37 *Sean X un conjunto y $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es acotada, si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in X$.*

Definición 38 *Sean X un conjunto. Definimos $B(X)$ el conjunto de todas las funciones $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ acotadas. Para $f, g \in B(X)$ ponemos $d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.*

Proposición 29 *Sean (X, d) un espacio métrico. Entonces $B(X)$ es un espacio métrico completo.*

Definición 39 *Sea X conjunto, (Y, d_Y) espacio métrico y $f\colon X \longrightarrow Y$. Decimos que f es acotada, $\operatorname{im} f \subseteq Y$ es acotada.*

Definición 40 *Sea X conjunto y (Y, d_Y) espacio métrico. Definimos $B(X,Y)$ como el conjunto de funciones de X a Y acotadas. Para $f, g \in B(X,Y)$ ponemos $d(f,g) = \sup_{x\in X}\{d_Y(f(x), g(x))\}$.*

Proposición 30 *Sean X conjunto y (Y, d_Y) espacio métrico completo. Entonces $B(X,Y)$ es un espacio métrico completo.*

2.2. Completación de un Espacio

Definición 41 *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que f es una isometría, si $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y)$.*

Toda isometría es una función continua.

Definición 42 *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una función. Si f es una isometría, la imagen de f es densa en Y y Y es un espacio completo, entonces decimos que (Y, f) es una completación de X.*

Definición 43 *Sea (X, d) un espacio métrico. Ponemos $CS(X)$ como el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en X. Definimos $d_C(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$, para $x, y \in CS(X)$.*

Proposición 31 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $(CS(X), d_C)$ es un espacio pseudométrico.*

Demostración: Lo primero que hay que ver es que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ existe para $x, y \in CS(X)$. Para ver esto usaremos que los reales son completos, así que basta ver que la sucesión es de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$, como x y y son sucesiones de Cauchy existen $N_x = N_x(\frac{\epsilon}{2}), N_y = N_y(\frac{\epsilon}{2}) \in \mathbb{N}$ tal que: si $m, p \geq N_x$ entonces $d(x_m, x_p) \leq \frac{\epsilon}{2}$ y si $m, p \geq N_y$ entonces $d(y_m, y_p) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Por lo que ponemos $N = \max\{N_x, N_y\}$.

Sean $m, p \geq N$, entonces:

$$\begin{aligned} d(x_m, y_m) - d(x_p, y_p) &\leq d(x_m, x_p) + d(x_p, y_m) - d(x_p, y_p) \\ &\leq d(x_m, x_p) + d(x_p, y_p) + d(y_p, y_m) - d(x_p, y_p) \\ &= d(x_m, x_p) + d(y_m, y_p) \end{aligned}$$

De manera similar $d(x_p, y_p) - d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_p) + d(y_m, y_p)$. De donde

$$\begin{aligned} |d(x_m, y_m) - d(x_p, y_p)| &\leq d(x_m, x_p) + d(y_m, y_p) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

QED

Ahora hay que ver que cumple con los axiomas de métrica, ...

2.3. Teorema del Punto Fijo

Definición 44 *Sea (X, d) un espacio métrico y $f \colon X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que f es una contracción, si existe $0 \leq \alpha < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.*

Toda contracción es una función continua.

Teorema 1 (Punto Fijo de Banach) *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f \colon X \longrightarrow X$ una contracción. Entonces existe un único $x \in X$, tal que $f(x) = x$.*

Proposición 32 *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f \colon X \longrightarrow X$ una función continua. Si existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que f^n es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo.*

2.4. Ecuaciones Diferenciales

Teorema 2 (Picard) *Sean $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existe $M > 0$ que cumple que para $(x, y), (x, y') \in D$, $|f(x, y) - f(x, y')| \leq M|y - y'|$ y $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Entoces existe $\epsilon > 0$ tal que en $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ la ecuación diferencial:*

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

con condición inicial $y(x_0) = y_0$ tiene una única solución

Proposición 33 *Sean $K \colon [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\phi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si K está acotado por M y $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, entonces la ecuación integral de Fredholm de segundo orden:*

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \phi(x)$$

tiene una única solución en $[a, b]$.

Proposición 34 *Sean $K \colon [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\phi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces la ecuación integral de Volterra:*

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \phi(x)$$

tiene una única solución en $[a, b]$.

2.5. Ejercicios

Ejercicio 70 *Sean* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *dos sucesiones de Cauchy en un espacio métrico* (X, d)*. Demuestre que la sucesión* $\{d(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ *converge en* $\mathbb{R}$*.*

Ejercicio 71

1. *Demuestre que un espacio normado la suma se dos sucesiones de Cauchy es una sucesión de Cauchy.*
2. *Pruebe que si* k *es un campo con un valor absoluto* $|\_|$*, entonces el producto de dos sucesiones de Cauchy es una sucesión de Cauchy.*
3. *Sea* $p \in \mathbb{N}$ *un primo. Pruebe que si* $I = \{\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} d_p(x_n, 0) = 0\}$*, entonces para cualesquiera* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in I$ *y* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ *se tiene que* $\{x_n y_n\}_{n=0}^{\infty} \in I$*.*
4. *¿Qué sucede con la afirmación anterior al sustituir* d_p *por la métrica inducida por la métrica usual de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{Q}$*?*

Ejercicio 72 *Sea* (X, d) *un espacio pseudométrico. Demuestre que* (X, d) *es completo si y sólo si su espacio métrico asociado lo es.*

Ejercicio 73 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Supóngase que si para toda colección decrecreciente de subconjutos no vacíos, cerrados, acotados* $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} \delta(E_n) = 0$*, esta tiene intersección no vacía, entonces el espacio es completo.*

Ejercicio 74 *Sea* (X, d) *un espacio métrico y supóngase que existe un subespacio denso* Y *tal que cada sucesión de Cauchy en* X *consistente de elementos de* Y *converge en* X*. Demuestre que* (X, d) *es completo.*

Ejercicio 75 *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo. Demuestre que* $Y \subseteq X$ *es completo con la métrica inducida por* d *si y sólo si* Y *es cerrado en* X*.*

Ejercicio 76 *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo. Supóngase que una sucesión* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *en* X *satisface que* $\sum_{k=0}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) < \infty$*. Demuestre que* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge.*

Ejercicio 77 *Sean* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sucesiones en un espacio métrico* (X, d). *Demuestre que si* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es de Cauchy en* X *y* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, *entonces* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy en* X.

Ejercicio 78

1. *Sea* $\{x_1, ..., x_n\}$ *un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio normado real* V. *Demuestre que existe* $c \in \mathbb{R}^+$ *tal que para cualesquiera* $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ *se tiene que* $\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \| \geq c(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|)$.
2. *Sea* V *un espacio vectorial normado y* $W \subseteq V$ *un subespacio de dimensión finita. Demuestre que* W *es completo.*
3. *Deducir de lo anterior que todo espacio normado de dimensión finita es completo con la métrica inducida por la norma.*

Definición 45 *Sean* (X, d) *y* (Y, d') *dos espacios métricos y* $\alpha \in (0, 1)$.

1. *Una función* $f : X \to Y$ *es **Lipchitz continua** si existe* $C \in \mathbb{R}^+$ *tal que para cualesquiera* $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$.
2. *Una función* $f : X \to Y$ *es **Hölder continua** si existe* $C \in \mathbb{R}^+$ *tal que para cualesquiera* $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)^{\alpha}$.
3. *Una **equivalencia** en una función Lipchitz continua, biyectiva y con inversa Lipchitz continua.*

Ejercicio 79

1. *Demuestre que* $f : (X, d) \to (Y, d')$ *es Hölder continua entonces existe* d'' *una métrica en* Y *tal que* $f : (X, d) \to (Y, d'')$ *es Lipchitz continua.*
2. *Dar un ejemplo de una función Lipchitz continua y biyectiva que no sea una equivalencia.*
3. *Demuestre que* $1_X : (X, d) \to (X, d')$ *es una equivalencia si y sólo si* d *y* d' *son métricas equivalentes.*

Ejercicio 80

1. *Demuestre que la composición de funciones Lipchitz continuas es una función Lipchitz continua.*

2. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos y $g : Y \to Z$ una equivalencia. Demuestre que $g \circ f : X \to Z$ es una equivalencia si y sólo si f es Lipchitz continua.*

3. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos. Pruebe que si existe una equivalencia entre X y Y, entonces X es completo si y sólo si Y lo es.*

Ejercicio 81 *Sea (X, d) un espacio métrico. Nótese que dada $f : S \to T$ una función entre dos conjuntos, esta de define una función $\mathcal{B}(f) : \mathcal{B}(T, X) \to \mathcal{B}(S, X)$ mediante $\mathcal{B}(f)(\alpha) = \alpha \circ f$.*

1. *Demuestre que $\mathcal{B}(f)$ está bien definida.*
2. *Demuestre que $\mathcal{B}(f)$ es Lipchitz continua.*
3. *Pruebe que si f es suprayectiva entonces $\mathcal{B}(f)$ es una isometría.*

Ejercicio 82 *Pruebe que dos métricas son topológicamente equivalentes si y sólo si tienen las mismas sucesiones de Cauchy.*

Ejercicio 83 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.*

1. *Sea $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ una suceción de funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a, b]$ con valores reales que convergen puntualmente a una función f y tal que la sucesión de derivadas $\{f_k'\}_{k=0}^{\infty}$ converge a una función g con la métrica uniforme. Demuestre que f es de clase $\mathcal{C}^1$ y que $f' = g$.*

2. *Sea $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{C}([a, b])$ tal que converge a una función f con la métrica uniforme. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. ¿Qué sucede con la conclusión de esta afirmación si se pide como hipótesis convergencia puntual?*

Ejercicio 84 *Sea $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de Fibonacci.*

1. *Supóngase que la sucesión $\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\}$ converge. Demuestre que $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*
2. *Demuestre que la sucesión $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge.*

Definición 46 *Un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado completo con la métrica inducida por la norma.*

Ejercicio 85 *Sea d la métrica usual de $\mathbb{R}$. ¿Es $(\mathbb{Z}, d)$ un espacio métrico completo?.*

Ejercicio 86 *Defínase en $\mathbb{N}^+$ la función $d : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to [0, \infty)$ mediante $d(n, m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$.*

1. *Demuestre que d es una métrica.*
2. *¿Es $(\mathbb{N}^+, d)$ un espacio métrico completo?*

Ejercicio 87 *Demuestre que ℓ^p es completo para todo $p \in [1, \infty]$.*

Ejercicio 88 *Demuestre que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, el subespacio vectorial $\{f \in \mathcal{C}([a, b]) \mid f(a) = f(b)\}$ es de Banach con la norma uniforme.*

Ejercicio 89 *Demuestre que c_{00} no es completo respecto a la norma $\|\_\|_\infty$ pero c_0 sí lo es.*

Ejercicio 90 *Demuestre que (c, d_∞) es un espacio métrico completo.*

Ejercicio 91

1. *Sea d^* la métrica del ejercicio 22. Demuestre que si (X, d) es completo entonces (X, d^*) es completo.*
2. *Ahora sea d' la otra métrica del ejercicio 22. Demuestre que (X, d) es completo si y sólo si (X, d') es completo.*

Ejercicio 92 *Con la notación del ejercicio 42 sea d^* la métrica inducida en $\mathbb{R}$ por D. Demuestre que $(\mathbb{R}, d^*)$ no es completo.*

Ejercicio 93 *Se define la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=2}^\infty$ en $\mathcal{C}([0, 1])$ mediante:*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & Si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \\ n(x - \frac{1}{2}), & Si\ \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}. \\ 1, & Si\ \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

1. *Pruebe que la sucesión* $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ *es de Cauchy en* $(\mathcal{C}([0,1]), d_1)$.

2. *Demuestre que* $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ *no converge en* $(\mathcal{C}([0,1]), d_1)$.

Ejercicio 94 *Considérese* $\mathbb{R}([a,b])$ *el conjunto de funciones polinomiales reales con dominio* $[a,b]$ *con la norma* $\|\_\|_{\infty}$. *¿Es* $\mathbb{R}([a,b])$ *un espacio de Banach?*

Ejercicio 95 *Sea* $A \subseteq \ell^{\infty}$ *el conjunto de sucesiones con a lo más una cantidad finita de ceros. ¿Es* (A, d_{∞}) *un espacio métrico completo?.*

Ejercicio 96 *Demuestre que si* (X,d) *y* (Y,d') *son espacios isométricos y* (X,d) *es completo, entonces* (Y,d') *es completo.*

Definición 47 *Sean* $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Se define la* ***sucesión "join"*** *mediante* $x \vee y = \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, *donde para todo* $n \in \mathbb{N}$, $z_{2n+1} = x_n$ *y* $z_{2n} = y_n$.

Ejercicio 97 *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Demuestre que dos sucesiones de Cauchy* $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *son equivalentes* $(\text{lím}_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0)$ *si y sólo si* $x \vee y$ *es de Cauchy.*

Ejercicio 98 *Sean* $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sucesiones en* X *y* $z \in X$. *Pruebe que si* $x_k \to z$ *y* $y_k \to z$, *entonces* $x \vee y \to z$.

Ejercicio 99 *Demuestre que cualesquiera dos completaciones de un espacio métrico son isométricas.*

Ejercicio 100 *(Construcción alterna de la completación de un espacio métrico) Sea (X, d) un espacio métrico y $x_0 \in X$.*

1. *Dado $x \in X$ se define la función $f_x : X \to \mathbb{R}$ mediante $f_x(y) = d(x, y) - d(x_0, y)$. Demuestre que para todo $x \in X$ f_x es continua y acotada.*

2. *Pruebe que la función $F : X \to \mathcal{C}_b(X)$ dada por $F(x) = f_x$ es un encaje isométrico.*

3. *Sea $Y = \{g \in \mathcal{C}_b(X) \mid \exists \{g_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq F(X), g_n \to g\}$. Pruebe que Y es cerrado en $\mathcal{C}_b(X)$ y que $F(X)$ es denso en Y. Deducir de esto X se encaja en un espacio métrico completo.*

Ejercicio 101 *(Teorema de la categoría de Baire) Demuestre que en un espacio métrico completo (X, d), la intersección de una sucesión de conjuntos abiertos y densos en X es densa en X.*

Ejercicio 102

1. *Demuestre que $\mathbb{Q}$ se puede expresar como una unión numerable de cerrados de $\mathbb{R}$, es decir, es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$.*

2. *Demuestre que $\mathbb{Q}$ no se puede expresar como una intersección numerable de abiertos de $\mathbb{R}$, es decir, no es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$.*

Ejercicio 103 *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua con X un espacio métrico completo. Demuestre que el conjunto de puntos donde f es continua es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$.*

Ejercicio 104 *Usar el teorema de categoría de Baire para construir una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y no diferenciable en ningún punto.*

Definición 48 *Se dice que $A \subseteq X$ es denso en ninguna parte si $int(\overline{A}) = \emptyset$. Un subconjunto de X es de **primera categoría o magro** (en X) si es unión de una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte. Los conjuntos que no son de primera categoría se conocen como de **segunda categoría o comagros**.*

Ejercicio 105 *Sea $A \subseteq X$.*

1. *Demuestre que A es denso en ninguna parte si y sólo si $X \setminus \overline{A}$ es denso en X.*

2. *¿Existen ejemplos de conjuntos que sean densos y densos en ninguna parte simultáneamente?.*

3. *Demuestre que para un espacio métrico (X, d) son equivalentes:*

   - *La intersección de cada sucesión de conjuntos abiertos y densos en X es densa en X.*
   - *Cada conjunto de primera categoría tiene interior vacío.*
   - *Todo conjunto no vacío abierto es de segunda categoría en X.*

Ejercicio 106 *Sea $A \subseteq X$. Demuestre lo siguiente:*

1. *Si A es denso en ninguna parte entonces $X \setminus A$ es denso en X. ¿Es cierto el regreso de esta afirmación?.*

2. *Supóngase que A es cerrado en X. Demuestre que A es denso en ninguna parte si y sólo si $A = \partial(A)$.*

3. *El conjunto A es denso en ninguna parte precisamente cuando $\overline{A}$ es denso en ninguna parte.*

4. *Cuando A es abierto o cerrado entonces $\partial(A)$ es denso en ninguna parte.*

5. *La unión de una familia finita de conjuntos densos en ninguna parte es densa en ninguna parte.*

Ejercicio 107 *Probar lo siguiente:*

1. *Todo conjunto finito en $\mathbb{R}^n$ es denso en ninguna parte.*

2. *El conjunto $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ es denso en ninguna parte sobre $[0, 1]$.*

3. *Para cada $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq m < n$ el subespacio $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{m+1} = ... = x_n = 0\}$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}^n$.*

Ejercicio 108 *El complemento relativo de un conjunto de primera categoría en un espacio métrico se llama un* ***conjunto residual*** *en X. Demuestre que si (X, d) es un espacio métrico completo entonces todo conjunto residual en X es denso en X.*

Definición 49 *Un espacio métrico (X, d) es **polaco** si es completo y separable. Un espacio métrico es de **Baire** si todo conjunto de segunda categoría es denso.*

Ejercicio 109 *Demuestre lo siguiente:*

1. *La completación de un espacio métrico separable es un espacio polaco.*
2. *Un subespacio métrico cerrado de un espacio polaco es polaco.*
3. *El producto numerable de espacios polacos es un espacio polaco.*
4. *Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que si (X, d) es completo entonces X es de Baire.*

Ejercicio 110 *Sea $V = \{\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists C = C(\{x_n\}_{n=0}^{\infty})$ tal que $\forall N \in \mathbb{N}, |\sum_{n=0}^{N} x_n| \leq C\}$. En dicho conjunto se define además $\|\_\| : V \to [0, \infty)$ mediante $\|\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\| = \sup_{N\in\mathbb{N}}\{|\sum_{i=0}^{N} x_i|\}$.*

1. *Demuestre que V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.*
2. *Pruebe que $\|\_\|$ es una norma en dicho espacio.*
3. *Demuestre que $(V, \|\_\|)$ es un espacio de Banach.*

Ejercicio 111 *Sea V un espacio vectorial normado y $W \subseteq V$ un subespacio.*

1. *Demuestre que $\|x+W\|_{V/W} = \inf_{y\in W} \|x+y\|$ es una seminorma en V/W.*
2. *Demuestre que $\|\_\|_{V/W}$ es una norma si y sólo W es cerrado.*
3. *Demuestre que si V es de Banach y W es cerrado entonces V/W con la norma definida es un espacio de Banach.*

Ejercicio 112 *Sean V y W espacios vectoriales normados y $T : V \to W$ una función lineal. Demuestre que son eqivalentes:*

1. *T es continua en V.*
2. *T es continua en $x = 0$.*
3. *El conjunto $\{\|Tx\| \mid \|x\| \leq 1\}$ es acotado en $\mathbb{R}$.*
4. *Existe $M > 0$ tal que para todo $x \in X$, $\|Tx\| \leq M\|x\|$.*

Ejercicio 113 *Sean* $(V, \|\_\|_V)$ *y* $(W, \|\_\|_W)$ k*-espacios vectoriales normados con* $k = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$*. Si* $\mathcal{L}(V,W) = \{T : V \to W \mid T$ *es lineal y continua*$\}$*, entonces se define* $\|\_\| : \mathcal{L}(V,W) \to [0,\infty)$ *mediante* $\|T\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}$.

1. *Pruebe que* $\|\_\|$ *está bien definida.*
2. *Demuestre que* $\|\_\|$ *es una norma en* $\mathcal{L}(V,W)$.
3. *Demuestre que si* W *es completo con la métrica inducida por la norma, entonces* $\mathcal{L}(V,W)$ *lo es con la métrica inducida por la norma definida anteriormente.*

Ejercicio 114 *Sean* $(V, \|\_\|_V)$ *y* $(W, \|\_\|_W)$ *dos espacios de Banach y* $T : V \to W$ *una función lineal tal que la gráfica de* T *es cerrada en* $V \times W$*. Demuestre que* $T \in \mathcal{L}(V,W)$.

Ejercicio 115 *Sean* $(V, \|\_\|_V)$ *un espacio de Banach y* $(W, \|\_\|_W)$ *un espacio normado. Demuestre que si* $\{T_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(V,W)$ *es tal que para todo* $v \in V$, $\{\|T_n v\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ *es acotado, entonces* $\{\|T_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ *es acotado.*

Definición 50 *Sea* $(V, \|\_\|)$ *un* k*-espacio vectorial normado con* $k = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$*. Para* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión en* V *decimos que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge si la sucesión de sumas parciales* $\{\sum_{n=0}^{k} x_n\}_{k=0}^{\infty}$ *converge con la métrica inducida por la norma en* V *y en tal caso se escribe* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} x_n$.

Ejercicio 116 *Sea* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión en un espacio normado* $(V, \|\_\|)$*. Demuestre lo siguiente:*

1. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge entonces* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge y de hecho* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*. ¿Es cierto el regreso de esta afirmación?.*
2. ***El criterio de Cauchy:*** *Si* V *es un espacio de Banach, entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge si y sólo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que para cualesquiera* $n, k \in \mathbb{N}$ *y* $n \geq N$, $\|\sum_{l=0}^{k} x_{n+l}\| < \epsilon$.
3. ***El criterio M de Weierstrass:*** *Si* V *es un espacio de Banach y* $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$*, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge en* V *y además* $\|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$.

Ejercicio 117 *Sea* $\{x_{nm}\}_{n,m=0}^{\infty}$ *una sucesión doble de números reales tal que:*

1. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{m=0}^{\infty} |x_{nm}| < \infty$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |x_{nm}| < \infty$.

Demuestre que $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x_{nm} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_{nm}$. *También muestre que en la sucesión doble de números reales* $\{x_{nm}\}_{n,m=0}^{\infty}$ *dada por:*

$$x_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{Si } n - m = 1. \\ -1 & \text{Si } n - m = -1. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x_{nm}$ *y* $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_{nm}$ *existen, pero no son iguales.*

Definición 51 *Sea* $(V, \|\_\|)$ *un* k*-espacio vectorial normado con* $k = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$. *Para* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión en* V *decimos que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *es* ***absolutamente convergente*** *si* $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *es* ***condicionalmente convergente*** *si* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n < \infty$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ *diverge.*

Ejercicio 118 *Sean* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una serie absolutamente convergente y* $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. *Demuestre que la sucesión* $\{x_{\sigma(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ *es absolutamente convergente y que* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$.

Ejercicio 119

1. *Demuestre que un espacio vectorial normado es completo si y sólo si toda serie absolutamente convergente es convergente.*
2. *Demuestre que la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$ *en* ℓ^{∞} *es condicionalmente convergente.*

Ejercicio 120 *En este ejercicios todas las sucesiones son reales.*

1. *Sea* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *una serie cuyas sumas parciales son acotadas y* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *una sucesión decreciente que converge a* 0. *Demuestre que* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ *converge.*
2. *Demuestre que para toda* $x \in \mathbb{R}$ *y toda sucesión* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *decreciente que converge a cero, se tiene que* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(kx)$ *converge.*
3. *Sea* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *una serie convergente y* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *una sucesión acotada y monótona. Demuestre que* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ *converge.*

4. *Demuestre que una serie* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *converge absolutamente si y sólo si para toda sucesión de unos y menos unos* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *se tiene que* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ *converge.*

Ejercicio 121 *Sea* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}$. *Demuestre que la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *es absolutamente convergente si y sólo si toda subserie en convergente.*

Ejercicio 122 *Sea* $\{(V_i, \|\_\|_i)\}_{i\in I}$ *una familia de espacios de Banach (reales o complejos) y defínase* $P = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \mid \sup_{i\in I} \|x_i\|_i < \infty\}$ *así como la función* $\|\_\| : P \to [0, \infty)$ *mediante* $\|(x_i)_{i\in I}\| = \sup_{i\in I} \|x_i\|_i$.

1. *Demuestre que* $(P, \|\_\|)$ *es un espacio de Banach.*
2. *Pruebe para todo* $i \in I$, *si* $p_i : P \to V_i$ *es la restricción de la proyección del producto a* P, *entonces* p_i *es una operador lineal y continuo con norma* 1.
3. P *satisface la propiedad universal del producto respecto a espacios de Banach con las contracciones lineales.*

Ejercicio 123 *¿Existe un espacio de Banach que satisfaga la propiedad universal del producto respecto a espacios Banach y operadores lineales y continuos?*

Ejercicio 124 *Sea* $\{(V_i, \|\_\|_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una familia de espacios de Banach (reales o complejos) y defínase* $C = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} V_i \mid \sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|_i < \infty\}$ *así como la función* $\|\_\| : C \to [0, \infty)$ *mediante* $\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\| = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|_i$.

1. *Demuestre que* $(C, \|\_\|)$ *es un espacio de Banach.*
2. *Pruebe para todo* $i \in \mathbb{N}$, *si* $\iota_i : V_i \to C$ *es la inclusión de* V_i *en* C, *entonces* ι_i *es una operador lineal y continuo con norma* 1.
3. C *satisface la propiedad universal del coproducto respecto a espacios de Banach con las contracciones lineales.*

Ejercicio 125 *Sea* $T : (V, \|\_\|_V) \to (W, \|\_\|_W)$ *un operador lineal y continuo. Demuestre lo siguiente:*

1. $nuc(T) \leq V$ *es un espacio de Banach.*
2. *Si* $S : U \to V$ *es un operador lineal y continuo tal que* $T \circ S = 0$, *entonces existe un único operador lineal y continuo* $H : U \to nuc(T)$ *tal que* $\iota \circ H = S$, *con* $\iota : nuc(T) \to V$.

Ejercicio 126 *Sea* $T : (V, \|\text{-}\|_V) \to (W, \|\text{-}\|_W)$ *un operador lineal y continuo. Demuestre lo siguiente:*

1. $W/T(V)$ *es un espacio de Banach.*

2. *Si* $S : W \to U$ *un operador lineal y continuo tal que* $S \circ T = 0$*, entonces existe un único operador lineal y continuo* $H : W/T(V) \to U$ *tal que* $H \circ \pi = S$*, donde* $\pi : W \to W/T(V)$ *es la proyección.*

Ejercicio 127 *Demuestre que un operador lineal entre espacios de Banach es una isometría si y sólo si este induce una biyección entre las bolas unitarias en cada espacio.*

Ejercicio 128 *Sea* X *un conjunto no vacío.*

1. *Demuestre que* (X, d_{disc}) *es un espacio completo.*

2. *Sea* $f : (X, d_{disc}) \to (X, d_{disc})$ *una función. Demuestre que* f *es una contracción si y sólo si* f *es una función constante.*

Ejercicio 129 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable tal que existe* $C \in \mathbb{R}^+$ *con la propiedad de que para todo* $t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leq C$. *Demuestre que* f *es una contracción.*

Ejercicio 130 *Sea* $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ *definida por* $Tf(x) = \int_0^x f(t)df$.

1. *Demuestre que* T *no es una contracción y que tiene un único punto fijo.*

2. *Demuestre que* T^2 *es una contracción.*

Ejercicio 131 *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo y* $f : (X, d) \to (X, d)$.

1. *¿Es cierto que si* f *satisface que para cualesquiera* $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ *entonces* f *tiene un punto fijo?*

2. *¿Es cierto que si* f *satisface que para cualesquiera* $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ *entonces* f *tiene un punto fijo?*

Ejercicio 132 *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una función. Supónga que existe $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$ y que además*

$$\forall x, y \in X, \forall n \in \mathbb{N},\ d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha_n d(x,y).$$

Demuestre que f tiene un único punto fijo.

Ejercicio 133 *Sea (X,d) un espacio métrico.*

1. *Demuestre que si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X entonces $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$.*
2. *Dar un ejemplo de una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio métrico X que satisfaga la condición $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$ pero que no sea de Cauchy.*
3. *Supóngase que d es una ultramétrica. Demuestre que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X si y sólo si $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$.*

Ejercicio 134 *Sea $p \in \mathbb{N}$ un primo impar.*

1. *Pruebe que existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$, $p \nmid a$ y la congruencia $x^2 \equiv a \mod p$ tiene una solución.*
2. *Se define una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\mathbb{Q}$ de manera recursiva como sigue:*
   - *x_0 es una solución de la congruencia $x^2 \equiv a \mod p$.*
   - *Una vez construido x_n sea x_{n+1} un racional tal que $x_{n+1} \equiv x_n \mod p^{n+1}$ y $x_{n+1}^2 \equiv a \mod p^{n+2}$.*

   Justificar la construcción de esta sucesión.
3. *Demuestre que la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en $(\mathbb{Q}, d_p)$ pero no converge en dicho espacio.*

Ejercicio 135 *Sea $p \in \mathbb{N}$ un primo y denótese por $(\mathbb{Q}_p, \hat{d}_p)$ la completación de $(\mathbb{Q}, d_p)$. Demuestre que para toda sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\mathbb{Q}_p$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n < \infty$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Además que en tal caso $|\sum_{n=0}^{\infty} x_n|_p \leq \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|_p$, con $|x|_p = \hat{d}_p(x, 0)$.*

"Los números son la libre creación de la mente humana".

Richard Dedekind.

Capítulo 3

Espacios Compactos

3.1. Espacios Compactos

Definición 52 *Sea (X, d) un espacio métrico y $\{U_i\}_{i\in I}$ una colección de abiertos de X. Si $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, entonces decimos que $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta. Si para $J \subseteq I$ se tiene que $X = \bigcup_{i\in J} U_i$, entonces decimos que $\{U_i\}_{i\in J}$ es una subcubierta de $\{U_i\}_{i\in I}$.*

Definición 53 *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es compacto, si toda cubierta abierta tiene una subcubierta abierta finita.*

Definición 54 *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimo que X es precompacto (totalmente acotado), si para toda $\epsilon > 0$ existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$.*

Proposición 35 *Sea (X, d) un espacio métrico. Si X es precompacto, entonces X es separable.*

Proposición 36 *Sea (X, d) un espacio métrico. Son equivalentes:*

1. *X es compacto.*
2. *Toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*
3. *X es precompacto y completo.*

Corolario 1 (Heine-Borel) *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces C es compacto si y sólo si C es cerrado y acotado.*

Proposición 37 *Sea*

3.2. Propiedad de la Intersección Finita

Proposición 38 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es compacto si y sólo si para toda familia de cerrados $\{C_i\}_{i\in I}$ en X tal que para todo $J \subseteq I$ finito $\bigcap_{i\in J} C_i \neq \emptyset$, se tiene que $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.*

Proposición 39 *Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de un espacio métrico compacto (X, d). Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $d(x, y) < \delta$, existe $U \in \mathcal{U}$ con la propiedad de que $x, y \in U$.*

Definición 55 *A un tal δ que satisface la conclusión del resultado anterior se le conoce como un número de Lebesgue de la cubierta $\mathcal{U}$.*

Definición 56 *Una función $f : (X, d) \to (Y, d')$ es uniformemente continua si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ con la propiedad de que $d(x, y) < \delta$, se tiene que $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

Proposición 40 *Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$ una función continua con (X, d) compacto. Entonces f es uniformente continua.*

3.3. Teorema de Arzelá-Ascoli

Definición 57 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que A es compacto si A es compacto como subespacio métrico de X.*

Proposición 41 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces A es compacto si y sólo si para toda cubierta abierta de A con abiertos de X, existe una subcubierta finita de A.*

Proposición 42 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces:*

1. *Si A es compacto, entonces A es precompacto.*
2. *Si A es precompacto, entonces A es acotado.*
3. *Si $B \subseteq A$ y A es precompacto entonces B es precompacto.*
4. *Si A es precompacto entonces $\overline{A}$ es precompacto.*

Definición 58 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que A es relativamente compacto si $\overline{A}$ es compacto.*

Corolario 2 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces A es precompacto si y sólo si A es relativamente compacto.*

Definición 59 *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos. Dado $x \in X$ decimos que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}^0(X, Y)$ es equicontinuo en x si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $d(y, x) < \delta$ entonces $d'(f(y), f(x)) < \epsilon$ para todo $f \in \mathcal{H}$.*

Teorema 3 *(Arzelá-Ascoli) Sean (X, d) un espacio métrico compacto y (Y, d') un espacio métrico completo. Entonces $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}^0(X, Y)$ es relativamente compacto si y sólo si $\mathcal{H}$ es equicontinuo y para todo $x \in X$, $\mathcal{H}(x) := \{f(x) \mid f \in \mathcal{H}\}$ es relativamente compacto en Y.*

3.4. Localmente Compacto

Definición 60 *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es localmente compacto si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad compacta.*

Proposición 43 *Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto. Si $E \subseteq X$ es compacto, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(E)$ es relativamente compacto.*

Proposición 44 *Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto. Son equivalentes:*

1. *Existe una familia $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de relativamente compactos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$ y $\overline{U_n} \subseteq U_{n+1}$.*
2. *X es unión numerable de compactos.*
3. *X es separable*

3.5. Ejercicios

Ejercicio 136 *Sea X un conjunto con la métrica discreta. Demuestre que X es compacto si y sólo si X es un conjunto finito.*

Ejercicio 137 *Demuestre que todo espacio métrico compacto es separable.*

Ejercicio 138 *Sean $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d) y $x \in X$. Pruebe que si $x_k \to x$ entonces $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.*

Ejercicio 139 *Para cada $p \in [1, \infty]$ dar un ejemplo de un subconjunto de ℓ^p que sea cerrado y acotado pero no compacto.*

Ejercicio 140 *Demuestre lo siguiente:*

1. *$(\overline{\mathbb{R}}, D)$ es un espacio métrico compacto.*
2. *Para todo $n \in \mathbb{N}^+$ el n-toro $T^n = (\mathbb{S}^1)^n$ es compacto.*

Ejercicio 141 *Sea $C = \{\{x_k\}_{k=0}^{n} \in \ell^\infty \mid \exists \{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}, |x_k| < a_k$ y $\lim_{k\to\infty} a_k = 0\}$. Demueste que C es compacto.*

Ejercicio 142 *Sean* $A, B \subseteq X$ *compactos no vacíos con* (X, d) *un espacio métrico. Demuestre que existen* $x \in A$ *y* $y \in B$ *tales que* $d(x, y) = d(A, B)$.

Ejercicio 143 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Demuestre que si* $\{C_i\}_{i=0}^n$ *es una familia de subconjuntos compactos de* X *entonces* $\bigcup_{i=0}^n C_i$ *es compacto en* X.

Ejercicio 144 *Sea* (X, d) *un espacio métrico.*

1. *Pruebe que dado* $K \subseteq X$ *compacto y* $x \in X \setminus K$ *existen* $U, V \subseteq X$ *abiertos ajenos tales que* $x \in V$ *y* $K \subseteq U$.

2. *Sean* $K, K' \subseteq X$ *compactos ajenos. Demuestre que existen* $U, V \subseteq X$ *abiertos ajenos tales que* $K \subseteq U$ *y* $K' \subseteq V$.

Ejercicio 145 *Sea* (X, d) *un espacio métrico.*

1. *Demuestre que si* X *es compacto entonces* X *tiene una base numerable para su topología.*

2. *Pruebe que todo espacio métrico compacto es homeomorfo a un subconjunto ce-rrado del cubo de Hilbert.*

Ejercicio 146 *Sea* $\{K_n\}_{n=0}^\infty$ *una sucesión decreciente de conjuntos compactos no vacíos de un espacio métrico* (X, d). *Pruebe que si* $U \subseteq X$ *es un abierto tal que* $\bigcap_{n=0}^\infty K_n \subseteq U$ *entonces existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $K_l \subseteq U$.

Ejercicio 147 *Sea* (X, d) *un espacio métrico compacto. Demuestre que para toda cubierta abierta de* X *existe una subcubierta de* X *contable.*

Ejercicio 148 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Demuestre que* X *es compacto si y sólo si toda cubierta abierta contable de* X *tiene una subcubierta finita.*

Ejercicio 149 *Demuestre que un espacio métrico* (X, d) *es compacto si y sólo si todo subconjunto infinito de* X *tiene un punto de acumulación.*

Definición 61 *Sean X y Y dos conjuntos así como $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Se define el conjunto $(A, B) = \{f \in Y^X \mid f(A) \subseteq B\}$.*

Ejercicio 150

1. *Sean X y Y dos conjuntos no vacíos así como $\{A_1, ..., A_n, A\} \subseteq \wp(X)$ y $\{B_1, ..., B_n, B\} \subseteq Y$. Demuestre que $\bigcap_{k=1}^n (A_i, B) = (\bigcup_{k=1} A_k, B)$, $\bigcap_{k=1}^n (A, B_k) = (A, \bigcap_{k=1}^n B_k)$ y $\bigcap_{k=1}^n (A_k, B_k) \subseteq (\bigcup_{k=1}^n A_k, \bigcup_{k=1}^n B_k)$.*

2. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y (Y, d') un espacio métrico. Demuestre que para cualesquiera $f \in Y^X$ y $\epsilon > 0$ existen $\{K_1, ..., K_n\}$ una familia de conjuntos compactos en X y $\{V_1, ..., V_n\}$ una familia de conjuntos abiertos en Y tales que $\bigcap_{j=1}^n (K_j, V_j) \subseteq B_\epsilon(f)$, donde Y^X es un espacio métrico con la métrica uniforme.*

3. *Sean $K \subseteq X$ es un compacto, $V \subseteq Y$ es un abierto y $f \in (K, V)$. Pruebe que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f) \subseteq (K, V)$.*

Ejercicio 151 *Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$ una función entre espacios métricos con Y compacto. Demuestre que si la gráfica de f es cerrada en $X \times Y$ entonces f es continua.*

Ejercicio 152 *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua con (X, d) un espacio métrico compacto. Demuestre que f es acotada.*

Ejercicio 153 *Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de conjuntos cerrados en un espacio métrico compacto X. Demuestre que para toda función continua $f : X \to X$ se satisface que $f(\bigcap_{n=0}^\infty K_n) = \bigcap_{n=0}^\infty f(K_n)$.*

Ejercicio 154 *Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función que satisface que para todo $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Demuestre que si X es compacto entonces f tiene un único punto fijo.*

Ejercicio 155 *Demuestre que toda función $f : (X, d) \to (Y, d')$ continua y biyectiva con (X, d) compacto, es un homeomorfismo.*

Ejercicio 156

1. *Pruebe que todo conjunto precompacto es compacto.*
2. *Muestre que en general el regreso de la proposición anterior es falso.*
3. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}^+$. Demuestre que A es precompacto si y sólo si A es acotado.*

Ejercicio 157 *Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que $E \subseteq X$ es precompacto si y sólo si toda sucesión en E tiene una subsucesión de Cauchy.*

Ejercicio 158 *Sea $E \subseteq X$ con (X, d) un espacio métrico. Demuestre que E es precompacto si y sólo si $\overline{E}$ es precompacto.*

Ejercicio 159 *Sea (X, d) un espacio completo. Demuestre que $E \subseteq X$ es precompacto si y sólo si $\overline{E}$ es compacto.*

Ejercicio 160 *Sea $p \in [1, \infty)$. Demuestre que $E \subseteq \ell^p$ es relativamente compacto si y sólo si E es acotado y $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\infty} |x_j|^p = 0$ de manera uniforme para $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ sucesión en E.*

Ejercicio 161

1. *Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos. Demuestre que si X es isométrico a Y entonces X es precompacto si y sólo si Y lo es.*
2. *¿Qué sucede con el resultado anterior si en lugar de ser los espacios isométricos son homeomorfos?*

Ejercicio 162 *Demuestre que todo espacio métrico compacto es localmente compacto.*

Ejercicio 163 *¿Es ℓ^2 un espacio localmente compacto?*

Ejercicio 164 *Sea (X,d) un espacio localmente compacto. Demuestre que si $A \subseteq X$ es abierto o cerrado, entonces A es localmente compacto.*

Ejercicio 165 *Sea $f:(X,d) \to (Y,d')$ una función continua, suprayectiva y abierta (para todo $A \subseteq X$ abierto, $f(A) \subseteq Y$ es abierto). Pruebe que si (X,d) es localmente compacto entonces Y es localmente compacto.*

Ejercicio 166 *Sea $\{(X_k,d_k)\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos. Demuestre que $\prod_{k\in\mathbb{N}} X_k$ es localmente compacto si y sólo si cada uno de los X_k son localmente compactos y una cantidad finita de estos espacios X_k son compactos.*

Ejercicio 167 *Sea (E,d) un espacio métrico localmente compacto. Demuestre que son equivalentes:*

1. *E es separable.*
2. *Existe una sucesión no decreciente de conjuntos abiertos relativamente compactos $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{A_n} \subseteq A_{n+1}$ y $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.*
3. *Existe una sucesión de conjuntos compactos en E, $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$, tales que $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$.*

Ejercicio 168 *Sea $f:(X,d) \to (Y,d')$ una función continua. Demuestre que si $A \subseteq X$ es relativamente compacto entonces $f(A) \subseteq Y$ es relativamente compacto.*

Ejercicio 169 *Sea X un espacio métrico compacto así como $f \in \mathcal{C}(X)$ y $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{C}(X)$ que converge de manera puntual a f y es monótona creciente. Demuestre que f_k converge de manera uniforme a f.*

Ejercicio 170 *Sea $\{f_k : X \to \mathbb{R}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas tales que $f_k \to f$ de manera uniforme en X. Demuestre que si $x_k \to x$ en X, entonces $f_k(x_k) \to f(x)$.*

Ejercicio 171 *Considere a* $\mathbb{R}$ *con la métrica usual. Demuestre que una función de un espacio métrico* (X, d), $f : X \to \mathbb{R}$ *es uniformemente continua si y sólo si para cualesquiera sucesiones en* X, $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ *y* $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ *tales que* $\lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k) = 0$, *se tiene que* $\lim_{k\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$.

Ejercicio 172 *Sean* (X, d) *y* (Y, d') *espacios métricos. Supóngase que existe* $D \subseteq X$ *denso y sea* $f : D \to Y$ *una función. Demuestre que si* f *es uniformemente continua, donde* D *tiene la métrica inducida por* d, *entonces* f *tiene una única extensión* $F : X \to Y$ *uniformemente continua.*

Ejercicio 173 *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$. *Demuestre que el conjunto de funciones continuas lineales a tramos es denso en* $\mathcal{C}([a, b])$.

Ejercicio 174 *Demuestre que cualesquiera dos normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.*

Definición 62 *Sea* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *una sucesión en* $\overline{\mathbb{R}}$.

1. *Se define el* ***límite superior*** *de dicha sucesión, el que se denota por* $\limsup_{k\to\infty} a_k$, *como el número real extendido* $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$.
2. *Se define el* ***límite inferior*** *de dicha sucesión, el que se denota por* $\liminf_{k\to\infty} a_k$, *como el número real extendido* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k$.

Ejercicio 175 *Sea* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *una sucesión en* $\overline{\mathbb{R}}$.

1. *Demuestre que* $\limsup_{k\to\infty} a_k$ *y* $\liminf_{k\to\infty} a_k$ *siempre existen y que* $\liminf_{k\to\infty} a_k \leq \limsup_{k\to\infty} a_k$.
2. *La sucesión* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *converge si y sólo si* $\limsup_{k\to\infty} a_k = \liminf_{k\to\infty} a_k$ *y en tal caso ambos límites coinciden con* $\lim_{k\to\infty} a_k$.

Ejercicio 176 *Sean* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *y* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *sucesiones de números reales tales que para todo* $k \in \mathbb{N}^+$ *se tiene que* $a_k = b_k + c_k$ *y* $|a_k| + |b_k| + |c_k| \neq 0$. *Demuestre que:*

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} \frac{\min\{-\ln|a_k|, -\ln|b_k|, -\ln|c_k|\}}{k^2} &= \limsup_{k\to\infty} \frac{\min\{-\ln|a_k|, -\ln|b_k|\}}{k^2} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{\min\{-\ln|a_k|, -\ln|c_k|\}}{k^2} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{\min\{-\ln|b_k|, -\ln|c_k|\}}{k^2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 177 *Se define la sucesión de funciones continuas* $\{f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}\}_{k=1}^{\infty}$ *mediante:*

$$f_k(t) = \begin{cases} -1 & Si\ t \in [-1, -\frac{1}{k}]. \\ kt & Si\ t \in (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}). \\ 1 & Si\ t \in [\frac{1}{k}, 1]. \end{cases}$$

Demuestre que $\{f_k \mid k \in \mathbb{N}^+\} \subseteq \mathcal{C}([-1,1])$ *no es equicontinuo en* 0.

Ejercicio 178 *Sea* S *un conjunto no vacío. Demuestre que si* $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(S)$ *es equicontinuo, entonces* $\overline{\mathcal{H}}$ *es equicontinuo.*

Ejercicio 179 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función uniformemente continua. Para cada* $a \in \mathbb{R}$ *se define la función* $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mediante* $f_a(x) = f(x-a)$. *Demuestre que el conjunto* $\{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ *es equicontinuo.*

Ejercicio 180 *Sea* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión en* $\mathcal{C}([0,1])$ *uniformemente convergente. Demuestre que el conjunto* $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *es equicontinuo.*

Ejercicio 181 *Demuestre que si un espacio vectorial normado es tal que* $\overline{B}_1(0)$ *es compacta, entonces* V *es de dimensión finita.*

Ejercicio 182 *Sea* $(V, \|\_\|)$ *un espacio vectorial normado. Demuestre que* V *es localmente compacto si y sólo si existe una vecindad del cero que es compacta.*

Definición 63 *Sean* $(V, \|\_\|_V)$ *y* $(W, \|\_\|_W)$ *espacios vectoriales normados. Una transfomación lineal* $T : V \to W$ *es un operador compacto si para todo* $A \subseteq V$ *acotado,* $T(A) \subseteq W$ *es relativamente compacto.*

Ejercicio 183 *Sean* $(V, \|\_\|_V)$ *y* $(W, \|\_\|_W)$ *espacios vectoriales normados. Demuestre lo siguiente:*

1. *Si* $T : V \to W$ *es un operador compacto, entonces* T *es una función continua.*

2. *Si* $dim(V) \geq \aleph_0$, *entonces el operador identidad* $1_V : (V, \|\_\|_V) \to (V, \|\_\|_V)$ *es continuo pero no compacto.*

Ejercicio 184 *Sean* $(V, \|\_\|_V)$ *y* $(W, \|\_\|_W)$ *espacios vectoriales normados y* $T : V \to W$ *una función lineal. Demuestre que* T *es un operador compacto si y sólo si para toda sucesión acotada* $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ *en* V*, se tiene que* $\{T(x_k)\}_{k=0}^{\infty}$ *tiene una subsucesión convergente.*

Ejercicio 185 *Demuestre que el operador de Volterra es un operador compacto.*

Ejercicio 186 *Demuestre que el conjunto de operadores compactos entre dos espacios vectoriales normados* $(V, \|\_\|_V)$ *y* $(W, \|\_\|_W)$ *es un subespacio de* $\mathcal{L}(V, W)$.

Ejercicio 187 *Sean* $(V, \|\_\|_V)$ *y* $(W, \|\_\|_W)$ *espacios vectoriales normados con* W *de Banach. Pruebe que si* $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de operadores compactos de* V *en* W *que convergen de manera uniforme a un operador* T*, entonces* T *es un operador compacto.*

Ejercicio 188 *Se define la función* $T : \ell^2 \to \ell^2$ *mediante* $T(x)_n = \frac{x_n}{n}$*, donde* $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

1. *Demuestre que* T *está bien definida y es lineal.*
2. *Demuestre que* T *es un operado compacto.*

Ejercicio 189 *Sea* $(V, \langle \_, \_ \rangle)$ *un espacio con producto interior y* $w, u \in V$*. Demuestre que el operador* $T : V \to V$ *definido mediante* $T(v) = \langle v, w \rangle u$ *es compacto.*

"Todo aquello que se sobreentiende sin decirlo, queda mejor entendido diciéndolo".

Maurice Fréchet.

Capítulo 4

Conexidad

4.1. Conjuntos conexos y componentes conexas.

Definición 64 *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $D \subseteq X$ es disconexo, si existen abiertos disjuntos A y B de X no vacíos tales que $A \cap D \neq \emptyset$ y $B \cap D \neq \emptyset$, y $(A \cup B) \cap D = D$. Decimos que $C \subseteq X$ es conexo, si no es disconexo.*

Proposición 45 *Sea (X, d) un espacio. Si $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \subseteq X$ con A conexo, entonces B es conexo.*

Corolario 3 *Sea (X, d) un espacio. Si $A \subseteq X$ con A conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.*

Proposición 46 *Sea (X, d) un espacio. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos conexos de X y $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo.*

Proposición 47 *Sea (X, d) un espacio. Si $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de conjuntos conexos de X y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1 \ldots n-1$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es conexo.*

Definición 65 *Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos la siguiente relación, para $x, y \in X$, $x \sim_C y$ si existe un conexo $C \subseteq X$ tal que $x, y \in C$.*

Proposición 48 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces la relación $\sim_C$ es de equivalencia.*

Definición 66 *Sea (X, d) un espacio métrico. Si $x \in X$ entonces $\{x\}$ es un conjunto conexo. Por lo tanto el conjunto $\{C \subseteq X \mid C \text{ es conexo}, \ x \in C\}$ es no vacío. Así, por la proposición 46, $\bigcup\{C \subseteq X \mid C \text{ es conexo}, \ x \in C\}$ es un conexo al que se le conoce como la componete conexa de x y se denotará por C_x.*

Nota 1 *Sea (X, d) un espacio métrico. Para todo $x \in X$, C_x es el conexo más grande al que pertenece x y este conjunto es cerrado.*

Proposición 49 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces la familia de subconjuntos de X, $\{C_x \mid x \in X\}$, es una partición del X.*

Proposición 50 *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos así como $f : X \to Y$ una función continua. Si $A \subseteq X$ es conexo, entonces $f(A) \subseteq Y$ es conexo.*

Corolario 4 *(Teorema de Bolzano) Sea (X, d) un espacio métrico conexo y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $a, b \in f(X)$ son tales que $a < b$, entonces para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$, $c \in f(X)$.*

4.2. Espacios métricos totalmente disconexos.

Definición 67 *Decimos que un espacio métrico (X, d) es totalmente disconexo si para todo $x \in X$, $C_x = \{x\}$.*

Ejemplo 8 *Todo conjunto X con la métrica discreta es un espacio totalmente disconexo.*

Ejemplo 9 *Lo racionales $\mathbb{Q}$ son un espacio totalmente disconexo como subespacio de $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 10 *El conjunto de Cantor C es un espacio totalmente disconexo como subespacio de $\mathbb{R}$.*

Proposición 51 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es totalmente disconexo si y sólo si todo conjunto conexo en X es unitario.*

Proposición 52 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ no vacío. Si X es un espacio totalmente disconexo entonces A es un espacio totalmente disconexo como subespacio de X.*

Proposición 53 *Si $\{(X_n, d_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es una colección de espacios totalmente disconexos entonces $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ es totalmente disconexo.*

Corolario 5 *Si $\{(X_i, \alpha_i^j)\}$ es un sistema codirigido de espacios métricos totalmente disconexos entonces $\varprojlim(X_i, \alpha_i^j)$ es un espacio totalmente disconexo.*

4.3. Espacios métricos totalmente separados.

Proposición 54 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es conexo si y sólo si existe $A \subseteq X$ abierto-cerrado con $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$.*

Definición 68 *Un espacio métrico (X, d) es totalmente separado si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $A \subseteq X$ abierto-cerrado tal que $x \in A$ y $y \notin A$.*

Ejemplo 11 *$\mathbb{Q}$ es totalmente separado como subespacio de $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 12 *$\mathbb{R}$ no es un espacio métrico totalmente separado.*

Proposición 55 *Todo espacio métrico totalmente separado es totalmente disconexo.*

Proposición 56 *Todo espacio métrico totalmente separado y compacto tiene una base para su topología formada por conjuntos abiertos-cerrados.*

4.4. Una caracterización del conjunto de Cantor.

Definición 69 *Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ cubiertas abiertas de X. Decimos que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$, lo que se denota por $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, si para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subseteq V$.*

Lemma 1 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y totalmente disconexo. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una cubierta abierta de X, $\mathcal{U}_n$, formada por conjuntos abiertos ajenos dos a dos con diametro menor a $\frac{1}{2^n}$. Más aún, la sucesión de cubiertas puede tomarse de tal manera que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n \leq \mathcal{U}_{n+1}$.*

Definición 70 *Sean $\mathbb{X} = \{(X_i, \alpha_i^j)\}$ y $\mathbb{Y} = \{(Y_i, \beta_i^j)\}$ dos sistemas codirigidos de espacios métricos. Un morfismo de $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ es una familia de funciones $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, con $f = \{f_i : X_i \to Y_i\}$, tal que para todo $i \leq j$, $f_i \circ \alpha_i^j = \beta_i^j \circ f_j$. Decimos que f es suprayectivo si para todo i, f_i es una función suprayectiva.*

Proposición 57 *Todo morfismo suprayectivo $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ entre sistemas codirigidos de espacios métricos compactos induce una función continua y suprayectiva $\varprojlim f : \varprojlim \mathbb{X} \to \varprojlim \mathbb{Y}$.*

Sea X un espacio métrico compacto y totalmente disconexo así como $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones como en el lema 1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ consideremos $\mathcal{U}_n$ como espacio métrico con la métrica discreta. Si $Y_n := (\mathcal{U}_n, d_{disc})$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}^+$ existe $f_n : Y_n \to Y_{n-1}$ donde $f(U)$ es el único elemento de $\mathcal{U}_{n-1}$ tal que $U \subseteq f(U)$. Esto permite definir un sistema codirigido $\mathbb{Y} = (Y_i, f_i^j)$.

Proposición 58 *En el mismo contexto de la discusiíon previa X es homeomorfo a $\varprojlim \mathbb{Y}$.*

Lemma 2 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, totalmente disconexo y perfecto. Entonces para todo $U \subseteq X$ abierto no vacío y para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $U_1, ..., U_n$ abiertos ajenos de X tales que $U = U_1 \cup ... \cup U_n$.*

Proposición 59 *Cualesquiera dos espacios métricos compactos, totalmente disconexos y perfectos son homeomorfos.*

Corolario 6 *Todo espacio métrico compacto, totalmente disconexo y perfecto es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Teorema 4 *Todo espacio métrico compacto es imagen continua del conjunto de Cantor.*

4.5. Ejercicios.

Ejercicio 190 *Demuestre que un conjunto X con la métrica discreta es conexo si y sólo si $|X| \leq 1$.*

Ejercicio 191 *Demuestre que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo.*

Ejercicio 192 *Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n=0}^{\infty}$ una colección de espacios métricos. Demuestre que $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ es conexo si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$, X_n es conexo.*

Ejercicio 193

1. *Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos. Demuestre que si X es homeomorfo a Y entonces X es conexo si y sólo si Y es conexo.*
2. *¿Es el cubo de Hilbert conexo?*

Ejercicio 194

1. *Demuestre que si dos espacios métricos son homeomorfos. entonces estos tienen el mismo número de componentes conexas.*
2. *Demuestre que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ no pueden ser homeomorfos los intervalos (a, b) y $[a, b]$.*
3. *Pruebe que $\mathbb{S}^1$ no puede ser homeomorfo a un intervalo en $\mathbb{R}$.*

Ejercicio 195 *Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que X es conexo si y sólo si todo $A \subsetneq X$ con $A \neq \emptyset$ tiene frontera no vacía.*

Ejercicio 196 *Sea (X, d) un espacio métrico con $X = A \cup B$ para $A, B \subseteq X$. Demuestre que si A y B son conexos y $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ entonces X es conexo.*

Ejercicio 197 *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ y $c \leq d$. Demuestre que si $f : [a, b] \to [c, d]$ es un homeomorfismo entonces $f(a) = c$ y $f(b) = d$ ó $f(a) = d$ y $f(b) = c$.*

Ejercicio 198 *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$. Considérese una función suprayectiva $f : [a, b] \to [c, d]$.*

1. *Demuestre que si f es estrictamente creciente ó estrictamente decreciente entonces f es un homeomorfismo.*

2. *¿Es cierto el regreso de la afirmación anterior?.*

Ejercicio 199 *Sea (X, d) un espacio métrico. Supóngase que $A, B \subseteq X$ son cerrados tales que $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos. Demuestre que A y B son conexos.*

Ejercicio 200 *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos así como $A \subsetneq X$ y $B \subsetneq Y$. Demuestre que $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ es conexo.*

Ejercicio 201 *Sea $h : (X, d) \to (Y, d')$ una función entre espacios métricos.*

1. *Demuestre que si h es una función continua, entonces $graf(h)$ es conexa si y sólo si X es conexo.*

2. *¿Es cierto que si $graf(h)$ es conexa entonces h es continua?*

Ejercicio 202 *Suponga que $n \geq 2$ y sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto contable. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus C$ es conexo.*

Ejercicio 203

1. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos. Demuestre que las componentes del espacio métrico $X \times Y$ son de la forma $C \times D$ con C una componente de X y D una componente de Y.*

2. *¿Cómo son las componentes del producto de una sucesión de espacios métricos?*

Ejercicio 204 *Sea (X, d) un espacio métrico con $|X| > 1$. Demuestre que si X es conexo entonces $|X| > 2^{\aleph_0}$.*

Definición 71

1. *Sea (X,d) un espacio métrico. Una* ***trayectoria*** *en X es una función continua $\sigma:[0,1]\to X$. Decimos que X es* ***conectable por trayectorias*** *si para cualesquiera puntos $x,y\in X$ existe $\sigma:[0,1]\to X$ una trayectoria tal que $\sigma(0)=x$ y $\sigma(1)=y$.*

2. *Sea $E\subseteq\mathbb{R}^n$. Decimos que E es una región estrellada si existe $x\in E$ tal que para todo $y\in E$ el segmento de recta que une a x con y está contenido en E.*

Ejercicio 205

1. *Pruebe que todo conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ es una región estrellada. Da un ejemplo que muestre una región estrellada que no sea un convexo.*

2. *Demuestre que toda región estrellada en un espacio conectable por trayectorias.*

3. *Demuestre que todo espacio conectable por trayectorias es conexo. ¿Es cierto el regreso de esta afirmación?*

Ejercicio 206 *Demuestre que ℓ^2 es conexo.*

Ejercicio 207 *Sea $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}$ una función continua donde $\mathbb{S}^1$ tiene la métrica inducida por $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ la métrica usual. Demuestre que existe $x_0\in\mathbb{S}^1$ tal que $f(x_0)=f(-x_0)$.*

Ejercicio 208 *Sea (X,d) un espacio métrico. Demuestre que son equivalentes:*

1. *X es conexo.*

2. *No existe una función continua y suprayectiva $f:X\to\{0,1\}$ donde $\{0,1\}$ tiene la métrica discreta.*

3. *Toda función continua $f:X\to\{0,1\}$ es constante, donde $\{0,1\}$ tiene la métrica discreta.*

Ejercicio 209 *Sea (X,d) un espacio métrico. Supóngase que toda función continua con dominio X y codominio $\mathbb{R}$ cumple la propiedad del teorema de Bolzano. Demuestre que X tiene que ser conexo.*

Ejercicio 210 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función continua con* $n \geq 2$ *y supóngase que existen* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ *tales que* $f(x_0) > 0$ *y* $f(y_0) < 0$. *Demuestre que* $|\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}| > \aleph_0$.

Ejercicio 211 *Demuestre que no existe* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *función continua tal que* $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ *y* $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Definición 72 *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $A, B \subseteq X$. *Decimos que* A *es separado de* B *en* X *si* $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Ejercicio 212 *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $A, B \subseteq X$.

1. *¿Puede* $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ *cuando* A *y* B *son separados?*
2. *Pruebe que si* $d(A, B) > 0$ *entonces* A *está separado de* B.
3. *¿Es cierta la proposición recíproca de 2?*

Definición 73 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Dados* $x, y \in X$ *y* $\epsilon > 0$, *una* ***ϵ-cadena*** *de* x *a* y *es una familia finita de elementos en* X, $(x_1, ..., x_n)$, *tal que* $x_1 = x$, $x_n = y$ *y para todo* $k \in \{1, ..., n-1\}$, $d(x_k, x_{k+1}) < \epsilon$. *Un espacio métrico es* ***ϵ-encadenable*** *si para cualesquiera* $x, y \in X$ *existe una* ϵ*-cadena de* x *a* y.

Ejercicio 213 *Sea* (X, d) *un espacio métrico.*

1. *Demuestre que si* X *es conexo entonces para todo* $\epsilon > 0$, X *es* ϵ*-encadenable.*
2. *Supóngase que* X *es compacto. Demuestre que si para toda* $\epsilon > 0$ *se tiene que* X *es* ϵ*-encadenable, entonces* X *es conexo.*

Ejercicio 214 *Usar la compacidad del intervalo* $[0, 1]$ *para probar que este conjunto es conexo de la siguiente forma: Supóngase que* (A, B) *es una desconexión del intervalo* $[0, 1]$. *Entonces defina la función* $f : A \times B \to \mathbb{R}$ *mediante* $f(x, y) = |x - y|$. *Probar que esta función tiene un mínimo, digamos* $(a_0, b_0) \in A \times B$ *y analizar lo que sucede con el punto* $\frac{a_0 + b_0}{2} \in [0, 1]$.

Ejercicio 215 *Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Demuestre que si X es totalmente disconexo entonces es totalmente separado.*

Ejercicio 216 *Sea $\{(X_n,d_n)\}_{n=0}^{\infty}$ una colección de espacios métricos totalmente sepa-rados. Demuestre que $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ es totalmente separado. Deducir de esto que el límite inverso de un sistema codirigido de espacios totalmente separados es totalmente separado.*

Definición 74 *Sean $\boldsymbol{C}$ el conjunto ternario de Cantor y $p=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\in\mathbb{R}^2$. Considérese además $E\subseteq \boldsymbol{C}$ el conjunto de puntos extremos del conjunto de Cantor, $F=\boldsymbol{C}\setminus E$ y denótese por L_t al segmento de recta que une el punto $(t,0)\in \boldsymbol{C}\times\{0\}$ con p.*

Se definen dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera:

$$X_E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\in L_t,\ t\in E,\ y\in\mathbb{Q}\ \}.$$

$$X_F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\in L_t,\ t\in F,\ y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ \}.$$

Sea $\boldsymbol{K}=X_E\cup X_F$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}^2$. Dicho espacio se conoce como la tienda de Kuratowski y Knaster.

Ejercicio 217 *Demuestre que $\boldsymbol{K}$ es conexo.*

Ejercicio 218 *Demuestre que $\boldsymbol{K}\setminus\{p\}$ es totalmente disconexo.*

Ejercicio 219 *Demuestre que $\boldsymbol{K}\setminus\{p\}$ no es totalmente separado.*

"... dados dos instantes cualesquiera α y β, es posible considerar el estado del mundo en el instante anterior α como causa, y β al estado posterior como efecto por lo menos mediato, con tal de que tomemos en cuenta, como parte de la causa, las influencias inmediatas que Dios haya podido ejercer en el intervalo α".

Bernard Bolzano.

Capítulo 5

Introducción a la teoría de la aproximación.

5.1. El espacio de funciones continuas y acotadas.

Definición 75 *Sea X un conjunto. El conjunto de funciones con dominio X y codominio $\mathbb{R}$ acotadas se denota por $\mathcal{B}(X)$.*

Observación 1 *Para todo X conjunto, $\mathcal{B}(X)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.*

Definición 76 *Sea X un conjunto. Dada $f \in \mathcal{B}(X)$ se define $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.*

Proposición 60 *Para todo X un conjunto, $(\mathcal{B}(X), \|\_\|_\infty)$ es un espacio normado.*

Definición 77 *Para (X, d) un espacio métrico $\mathcal{C}(X)$ denota el conjunto de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$, mientras que $\mathcal{C}_b(X)$ denota el conjunto de funciones continuas y acotadas de X a $\mathbb{R}$.*

Observación 2 *Si (X, d) un espacio métrico entonces $\mathcal{C}_b(X) \subseteq \mathcal{C}(X)$. Cuando (X, d) es compacto, $\mathcal{C}_b(X) = \mathcal{C}(X)$.*

Observación 3 *Dado (X, d) un espacio métrico, $\mathcal{C}_b(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$.*

Proposición 61 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $\mathcal{C}_b(X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(X)$.*

Definición 78 *Sean X un conjunto, $\{f_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathcal{B}(X)$ y $f \in \mathcal{B}(X)$. Decimos que f_n converge a f de manera uniforme si $f_n \to f$ con $\|\_\|_\infty$.*

Observación 4 *Si una sucesión de funciones converge de manera uniforme a una función, entonces dicha convergencia es puntual.*

Observación 5 *Sea* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}([0,1])$*, donde para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* $f_n(x) = x^n$*. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & Si\ x = 0. \\ 1, & Si\ x = 1. \end{cases}$$

Esta sucesión de funciones proporciona un ejemplo de que en general la convergencia puntual en $\mathcal{B}(X)$ *no implica convergencia uniforme en dicho espacio.*

Proposición 62 *(Dini) Sean* (X,d) *un espacio métrico compacto y* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}(X)$ *monótona tal que* $f_n \to f$ *de manera puntual. Entonces* f_n *converge a* f *de manera uniforme.*

5.2. El teorema de Stone- Weierstrass.

Proposición 63 *Sean* $a,b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *así como* $f \in \mathcal{C}([a,b])$*. Entonces para toda* $\epsilon > 0$ *existe* $g_\epsilon \in \mathcal{C}([a,b])$ *lineal a tramos tal que* $\|g_\epsilon - f\|_\infty < \epsilon$*.*

Proposición 64 *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $f,g \in \mathcal{C}_b(X)$*. Entonces* $fg \in \mathcal{C}_b(X)$ *y se cumple que*

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Corolario 7 *Para todo* (X,d) *espacio métrico,* $\mathcal{C}_b(X)$ *es una* $\mathbb{R}$*-subálgebra de* $\mathcal{C}(X)$*.*

Definición 79 *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Decimos que* $E \subseteq \mathcal{C}(X)$ *separa puntos si para cualesquiera* $x,y \in X$*, con* $x \neq y$*, existe* $f \in E$ *tal que* $f(x) \neq f(y)$*.*

Se busca demostrar el siguiente resultado.

Teorema 5 *(Stone-Weierstrass) Sea* (X,d) *un espacio métrico compacto y* $A \leq \mathcal{C}(X)$ *una* $\mathbb{R}$*-subálgebra tal que:*

1. *A tiene todas las funciones constantes.*
2. *A separa puntos.*

Entonces A *es densa en* $\mathcal{C}(X)$*.*

La prueba se hace con los siguientes resultados previos.

Lemma 3 *Existe una suceción monótona creciente* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de funciones polinomiales en* $[0,1]$ *que converge de manera uniforme a* $\sqrt{t}$*.*

Proposición 65 *Sean* (X, d) *un espacio métrico compacto y* $A \leq \mathcal{C}(X)$ *una subálgebra que satisface las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass. Para toda* $f \in \overline{A}$, $|f| \in \overline{A}$.

Proposición 66 *Sean* (X, d) *un espacio métrico compacto y* $A \leq \mathcal{C}(X)$ *una subálgebra que satisface las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass. Si* $f, g \in \overline{A}$, *entonces* $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \overline{A}$.

Proposición 67 *Sean* (X, d) *un espacio métrico compacto y* $A \leq \mathcal{C}(X)$ *una subálgebra que satisface las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass. Dados* $x, y \in X$, *con* $x \neq y$, *y* $a, b \in \mathbb{R}$, *existe* $f \in A$ *tal que* $f(x) = a$ *y* $f(y) = b$.

Proposición 68 *Sean* (X, d) *un espacio métrico compacto y* $A \leq \mathcal{C}(X)$ *una subálgebra que satisface las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass. Sean* $f \in \mathcal{C}(X)$, $x_0 \in X$ *y* $\epsilon > 0$, *entonces existe* $g \in \overline{A}$ *tal que para toda* $x \in X$, $g(x) \leq f(x) + \epsilon$ *y* $g(x_0) = f(x_0)$.

Corolario 8 *(Teorema de aproximación de Weierstrass) Sea* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto compacto. Entonces para toda* $f \in \mathcal{C}(X)$ *existe una sucesión de funciones polinomiales* $\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}(X)$ *que converge de manera uniforme a* f.

Corolario 9 *Para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, $\mathcal{C}([a, b])$ *es un espacio normado separable.*

5.3. Ejercicios.

Ejercicio 220 *Demuestre que para toda* $\epsilon > 0$ *existe una función polinomial* $p_\epsilon \in \mathcal{C}([-1, 1])$ *tal que* $\||x| - p_\epsilon\|_\infty < \epsilon$.

Ejercicio 221 *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *y considérese* $\mathbb{R}([a, b])$ *el conjunto de funciones polinomiales con la norma* $\|\_\|_\infty$. *¿Es* $\mathbb{R}([a, b])$ *un espacio completo?*

Ejercicio 222 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Demuestre que si* $A \subseteq \mathcal{C}(X)$ *es una* $\mathbb{R}$*-álgebra entonces* $\overline{A}$ *es una* $\mathbb{R}$*-álgebra.*

Ejercicio 223 *Sea* (X, d) *un espacio métrico compacto y* $A \subseteq \mathcal{C}(X)$ *una* $\mathbb{R}$*-subálgebra que separa puntos. Demuestre que* A *es densa en* $\mathcal{C}(X)$ *ó existe* $x_0 \in X$ *tal que* A *es densa en la* $\mathbb{R}$*-subálgebra* $B = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x_0) = 0\}$.

Ejercicio 224 *Sean (X,d) un espacio métrico compacto y $A \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ una $\mathbb{C}$-subálgebra que separa puntos y es cerrada bajo conjugación compleja, es decir, si $f \in A$ entonces $\overline{f} \in A$. Demuestre que A es densa en $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ ó existe $x_0 \in X$ tal que A es densa en la $\mathbb{C}$-subálgebra $\{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C}) \mid f(x_0) = 0\}$.*

Ejercicio 225 *Sean (X,d) y (Y,d') dos espacios métricos compactos. Demuestre que la $\mathbb{R}$-subálgebra generada por el conjunto $\{g \otimes h \mid g \in \mathcal{C}(X),\ h \in \mathcal{C}(Y)\}$ es densa en $\mathcal{C}(X \times Y)$, donde para $g \in \mathcal{C}(X)$ y $h \in \mathcal{C}(Y)$ la función $g \otimes h : X \times Y \to \mathbb{R}$ tiene por regla de correspondencia $(g \otimes h)(x,y) := g(x)h(y)$.*

Ejercicio 226 *Sea $n \in \mathbb{N}^+$ y considérese $X = [0,1]^n$. Demuestre que la $\mathbb{R}$-subálgebra generada por $\{\pi_i : X \to [0,1] \mid i \in \{1,...,n\}\}$ es densa en $\mathcal{C}(X)$. ¿Se tiene el mismo resultado para $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$?*

Ejercicio 227 *Demuestre que el álgebra generada por las funciones $\{1, t^2\}$ es densa en $\mathcal{C}([0,1])$ pero no es densa en $\mathcal{C}([-1,1])$.*

Ejercicio 228 *Demuestre que para toda función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ existe una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, donde $\varphi_n(\cos(t), \mathrm{sen}(t)) = \sum_{j=0}^{k_n} a_{nj}\cos(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{nj}\sin(t)$, que converge uniformemente a f.*

Ejercicio 229 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Demuestre que para toda $\epsilon > 0$ existe $g_\epsilon \in \mathcal{C}([a,b])$, con $g_\epsilon(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{kt}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y $c_k \in \mathbb{R}$, tal que $\|f - g_\epsilon\|_\infty < \epsilon$.*

Ejercicio 230 *Sea V el espacio generado por el conjunto $\{\sin^k(t) \mid k \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{C}([0,1])$. Demuestre que $\overline{V} = \mathcal{C}([0,1])$.*

Ejercicio 231 *Demuestre que el conjunto de funciones de la forma $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt)$, con $n \in \mathbb{N}$, es denso en $\mathcal{C}([0,\pi])$. ¿Se tiene la misma conclusión en $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$?*

Ejercicio 232 *Sea $n \in \mathbb{N}^+$. Demuestre para toda $f \in \mathcal{C}([0,1])$ existe una sucesión de funciones polinomiales $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ con términos de t únicamente de la forma t^{ln}, con $l \in \mathbb{N}$, y que converge de manera uniforme a f.*

Ejercicio 233 *Muestre con un ejemplo que si en el teorema de aproximación de Weierstrass se quita la hipótesis de que X sea compacto, entonces dicho teorema no es necesariamente cierto.*

Ejercicio 234 *Sea $f \in \mathcal{C}([0,1])$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$. Demuestre que $f = 0$.*

Ejercicio 235 *Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Demuestre que $\mathcal{C}(X)$ es separable.*

Definición 80 *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función y $n \in \mathbb{N}^+$. Se define el n-ésimo polinomio de Berstein de f, el que se denota por $\beta_n(f)$, como $\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$.*

Ejercicio 236 *Sea $n \in \mathbb{N}^+$. Considérese la función $\beta_n : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ que a cada función continua le asigna su n-ésimo polinomio de Berstein. Demuestre que esta función está bien definida, es lineal y continua.*

Ejercicio 237 *Sea $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Demuestre que la sucesión de polinomios de Bernstein $\{\beta_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ converge de manera uniforme a f. Deducir de este hecho una prueba del teorema de aproximación de Weierstrass para funciones en $\mathcal{C}([a,b])$.*

Ejercicio 238 *Sea $a \in (0,1)$ y considérese la función $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es $f(x) = \frac{1}{1-x}$. ¿Es cierto que existe una función polinomial $\hat{p} : [0,a] \to \mathbb{R}$ tal que para toda función polinomial $q : [0,a] \to \mathbb{R}$, $\|f - \hat{p}\|_\infty \leq \|f - q\|_\infty$.*

Ejercicio 239 *Sea $f \in \mathcal{C}([a,b])$ y $W \leq \mathcal{C}([a,b])$ un subespacio vectorial con $dim_{\mathbb{R}}(W) < \aleph_0$. Demuestre que existe $g \in W$ tal que para todo $h \in W$, $\|f - g\|_\infty \leq \|f - h\|_\infty$.*

Ejercicio 240 (Examen) *Sea $X = \prod_{i=0}^{\infty}[0,1]$. Demuestre que $C(X)$ es separable.*

"Un matemático no es digno de ese nombre si no es un poco poeta"

Karl Weierstrass.

Capítulo 6

La integral de Riemann-Stieltjes.

En este capítulo $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$.

6.1. Funciones de variación acotada.

Definición 81 *Una partición del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tal que $x_0 = a$, $x_n = b$ y para todo $k \in \{1, ..., n\}$, $x_{k-1} < x_k$. El conjunto de particiones del intervalo $[a, b]$ se denota por $\mathcal{P}[a, b]$. Para $P = \{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\}$ una partición definimos su norma, la que se denota por $\|P\|$, como $\max_{k=1,...,n} |x_k - x_{k-1}|$.*

Definición 82 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función.*

1. *Dada $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, definimos la variación de f respecto a P, la que se denota por $V(f, P)$, como el real posiblemente extendido $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$.*

2. *Decimos que f es de variación acotada si $\sup\{V(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\} < \infty$. El tal decimos que dicho número real es la variación total de f y lo denotaremos por $V(f)$ ó $V_{[a,b]}(f)$ si se quiere especificar el dominio de f. El conjunto de funciones de variación acotada en el intervalo $[a, b]$ se denota por $BV([a, b])$.*

Ejemplo 13 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona entonces es de variación acotada. Además, $V(f) = |f(b) - f(a)|$.*

Observación 6 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función. Entonces $V(f) = 0$ si y sólo si f es constante.*

Proposición 69 *Sea $f \in BV([a, b])$. Se cumple lo siguiente.*

1. *f es acotada.*

2. *Si $[c,d] \subseteq [a,b]$, entonces $f \in BV([c,d])$. Además, $V_{[c,d]}(f) \leq V_{[a,b]}(f)$.*

3. *$BV([a,b])$ es una $\mathbb{R}$-subálgebra de $\mathbb{R}^{[a,b]}$. De hecho, para cualesquiera $f, g \in BV([a,b])$ se satisface que*

$$V(f+g) \leq V(f) + V(g).$$

$$V(fg) \leq \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\right) V(g) + \left(\sup_{x\in[a,b]} |g(x)|\right) V(f).$$

4. *Para todo $c \in (a,b)$, $V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f) = V_{[a,b]}(f)$.*

Teorema 6 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces, $f \in BV([a,b])$ si y sólo si f es diferencia de dos funciones monótonas crecientes.*

6.2. Definición y propiedades básicas de la integral de Riemann-Stieltjes.

Definición 83 *Dadas $P, P' \in \mathcal{P}[a,b]$ decimos que P' refina a P, o que P' es más fina que P, si $P \subseteq P'$.*

Definición 84 *Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones, $P = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$ y para todo $k \in \{1, ..., n\}$, $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Una suma de Riemann-Stieltjes de f respecto a α es una expresión de la forma $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k$, donde $\Delta\alpha_k := \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$. Una de tales sumas se denota por $S(P, f, \alpha)$.*

Definición 85 *Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones. Decimos que f es integrable respecto a α si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b]$ con la propiedad de que para toda $P' \in \mathcal{P}([a,b])$ más fina que P_ϵ, se tiene que $|S(P', f, \alpha) - A| < \epsilon$. Si dicho elemento $A \in \mathbb{R}$ existe lo denotaremos por $\int_a^b f d\alpha$ o $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$, y lo llamaremos la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto a α.*

Proposición 70 *Sean $f, g, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones y $c \in \mathbb{R}$ tales que f y g son integrables respecto a α. Entonces $cf + g$ es integrable respecto a α y se cumple que*

$$\int_a^b (cf+g)(x) d\alpha(x) = c \int_a^b f(x) d\alpha(x) + \int_a^b g(x) d\alpha(x).$$

Proposición 71 *Sean $f, \alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones y $c \in \mathbb{R}$ tales que f es integrable respecto a α y β. Entonces f es integrable respecto a $c\alpha + \beta$ y se cumple que*

$$\int_a^b f(x)d(c\alpha+\beta)(x) = c\int_a^b f(x)d\alpha(x) + \int_a^b f(x)d\beta(x).$$

Definición 86 *Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se define $\int_a^a f(x)d\alpha(x) = 0$ y si f es integrable respecto a α, $\int_b^a f(x)d\alpha(x) := -\int_a^b f(x)d\alpha(x)$.*

Proposición 72 *Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones y $c \in (a,b)$. Si dos de las integrales $\int_a^c f(x)d\alpha(x)$, $\int_c^b f(x)d\alpha(x)$ y $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ existen, entonces existe la tercera y se satisface que*

$$\int_a^c f(x)d\alpha(x) + \int_c^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x).$$

Proposición 73 *(Integración por partes) Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones tales que f es integrable respecto a α en $[a,b]$. Entonces α es integrable respecto a f en $[a,b]$ y además*

$$\int_a^b \alpha(x)df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b f(x)d\alpha(x).$$

Proposición 74 *(Teorema de cambio de variable) Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones y $g : [c,d] \to [a,b]$ una función continua monótona no decreciente tal que $g(c) = a$ y $g(d) = b$. Si f es integrable respecto a α en $[a,b]$ entonces $f \circ g$ es integrable respecto a $\alpha \circ g$ en $[c,d]$ y además*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_c^d (f\circ g)(x)d(\alpha\circ g)(x).$$

Teorema 7 *Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones tales que f es integrable respecto a α en $[a,b]$ y α es de clase C^1 en $[a,b]$. Entonces $f\alpha' : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable y se cumple que*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

Proposición 75 *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *y para* $c \in (a,b)$ *definimos la función* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *cuya regla de correspondencia es:*

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(a), & \textit{Si } a \leq x < c. \\ \alpha(c), & \textit{Si } x = c. \\ \alpha(b), & \textit{Si } c < x \leq b. \end{cases}$$

Si alguna de la funciones f *o* α *es continua por la derecha en* c *y también alguna de ellas es continua por la derecha de* c*, entonces* f *es integrable respecto a* α *y además*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = f(c)(\alpha(c^+) - \alpha(c^-)).$$

Definición 87 *Una función* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *se llama escalonada si existe* $P = \{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\} \in \mathcal{P}[a,b]$ *tal que para todo* $k \in \{1,...,n\}$, $\alpha|_{(x_{k-1},x_k)} : (x_{k-1}, x_k) \to \mathbb{R}$ *es constante.*

Proposición 76 *Sean* $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones con* α *escalonada. Si alguna de las funciones* f *o* α *es continua por la derecha y lo mismo sucede por la izquierda en los puntos de una partición testigo de que* α *es escalonada, entonces existen* $x_1, ..., x_n \in [a.b]$ *y* $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha_k.$$

Corolario 10 *Toda suma finita se puede escribir como una integral de Riemann-Stieltjes.*

Proposición 77 *(Fórmula de Euler) Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1$ *en* (a,b)*. Si* $((x)) := x - \lfloor x \rfloor$*, entonces*

$$\sum_{a<n\leq b,\ n\in\mathbb{Z}} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)((x))dx + f(a)((a)) - f(b)((b)).$$

6.3. Integral respecto a una función creciente.

En esta sección $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ siempre será una función creciente.

Definición 88 *Para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $P \in \mathcal{P}[a,b]$ con $P = \{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\}$. Se definen los números reales:*

$$m_k(f) = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$M_k(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

donde $k \in \{1, ..., n\}$.

Además, en tal caso definimos la suma superior de Stieltjes de f respecto a α en la partición P, la que denotamos por $U(f, \alpha, P)$, y la suma inferior de Stieltjes de f respecto a α en la partición P, la que denotamos por $L(f, \alpha, P)$, como:

$$L(f, \alpha, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f) \Delta\alpha_k$$

$$U(f, \alpha, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \Delta\alpha_k.$$

Observación 7 *Para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $P \in \mathcal{P}[a,b]$, $L(f, \alpha, P) \leq S(f, \alpha, P) \leq U(f, \alpha, P)$, donde $S(f, \alpha, P)$ es cualquier suma de Riemann-Stieltjes de f respecto a α en la partición P.*

Proposición 78 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función.*

1. *Si $P, P' \in \mathcal{P}[a,b]$ tales que $P \subseteq P'$, entonces*

$$L(f, \alpha, P) \leq L(f, \alpha, P')$$

$$U(f, \alpha, P') \leq U(f, \alpha, P)$$

2. *Para cualesquiera $P, P' \in \mathcal{P}[a,b]$, $L(f, \alpha, P) \leq U(f, \alpha, P')$.*

Definición 89 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se define la integral superior de Stieltjes de f respecto a α como:*

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \text{ínf}\{U(f, \alpha, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Mientras que la integral inferior de Stieltjes de f respecto a α por:

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup\{L(f, \alpha, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Proposición 79 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces,*

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha.$$

Observación 8 *La desigualdad en la proposición anterior puede ser estricta pues para $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ se tiene que $\underline{\int_a^b} f d\alpha = 0$ mientras que $\overline{\int_a^b} f d\alpha = b - a$.*

Proposición 80 *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funciones acotadas.*

1. *Para todo $c \in (a, b)$,*

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^c} f d\alpha + \overline{\int_c^b} f d\alpha.$$

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^c} f d\alpha + \underline{\int_c^b} f d\alpha.$$

2.

$$\overline{\int_a^b} (f + g) d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha + \overline{\int_a^b} g d\alpha.$$

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha + \underline{\int_a^b} g d\alpha \leq \underline{\int_a^b} (f + g) d\alpha.$$

Teorema 8 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:*

1. *f es integrable respecto a α.*

2. *f satisface la condición de Riemann respecto a α, es decir, para toda $\epsilon > 0$ existe $P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que para toda $P \in \mathcal{P}[a,b]$ con $P_\epsilon \subseteq P$, $U(f,\alpha,P) - L(f,\alpha,P) < \epsilon$.*

3. $\underline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha$.

Proposición 81 *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables respecto a α tales que $f \leq g$, entonces*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq \int_a^b g(x) d\alpha(x).$$

Proposición 82 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable respecto a α. Entonces $|f|$ es integrable respecto a α y además*

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| d\alpha(x).$$

Proposición 83 *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones.*

1. *Si f es integrable respecto a α entonces f^2 es integrable respecto a α.*

2. *Si f y g son integrables respecto a α entonces fg es integrable respecto a α.*

6.4. Integrabilidad.

Proposición 84 *Si $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones con f continua y α de variación acotada, entonces f es integrable respecto a α.*

Proposición 85 *Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones con f acotada y α de variación acotada. Si se define $V : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $V(x)$ denota la variación total de α en el intervalo $[a,x]$, poniendo $V(a) = 0$, y f es integrable respecto a α, entonces f es integrable respecto a V.*

6.5. Ejercicios.

Ejercicio 241 (Examen)

Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que para $a < b$ se tiene que $\int_a^b f(x) df(x) = 0$. Entonces f es constante.

Bibliografía

[1] DIEUDONNÉ, J., "Foundations of Modern Analysis", Academic Press Inc. 1960.

[2] KOLMOGOROV, A., FOMIN, S., "Introductory Real Analysis", Dover Publications Inc., 2000.