Notas de Álgebra Superior 1

Facultad de Ciencias, UNAM

Frank Patrick Murphy Hernandez

Eduardo León Rodríguez

Índice general

Introducción

“El álgebra es la oferta hecha por el diablo al matemático. El diablo dijo: Te daré esta potente máquina, que responderá cualquier cuestión. Todo lo que necesitas es darme tu alma. Deja la geometría y te daré esta maravillosa máquina.”- Michael Atiyah.

Capítulo 1

Introducción a la Lógica Matemática

1. Proposiciones

DEFINICIÓN 1.1 (Proposición). *Una proposición es un enunciado al cual le podemos asignar un valor de verdad. Los valores de verdad son verdadero y falso. Aunque se pueden usar* 0 *y* 1*. Nosotros usaremos a veces V (de Verdadero) y F (de Falso).*

Notemos que el verbo que usamos es poder, no tiene que tener un valor de verdad.

EJEMPLO 1.1.

- *"El cielo es verde". En este caso, tenemos que su valor de verdad es falso. Por lo cual efectivamente es una proposición. Podemos y lo hicimos.*
- *"Vivimos en México". Igualmente es una proposición, con valor de verdad verdadero.*
- *"Los bikura son nativos de Hyperión". También es una proposición, la cual no sabemos su valor de verdad. Pero se le podría asignar, Hyperión es un planeta y los bikura una raza, ambos de una tetralogía de ciencia ficción. Según la novela, esta proposición es verdadera. Ahora bien, aun sin conocer la novela, el enunciado sigue siendo una proposición. Se le puede asignar un valor de verdad, independientemente de que se lo asignemos.*
- *"¿Cómo te llamas?" El enunciado anterior es una pregunta, a las preguntas no les podemos asignar un valor de verdad. La pregunta como tal no puede ser falsa o verdadera. No es una proposición.*
- *"¿Te gusta la pizza?" Esta pregunta tiene dos respuestas comunes, sí y no. Estas se pueden interpretar como verdadero y falso. Pero sigue sin ser una proposición. Lo que si es una proposición es "Me gusta la pizza".*
- *"¡Corre más rápido!" Tampoco es una proposición. Los enunciados exclamativos no son proposiciones.*
- *"Este enunciado es falso" No es una proposición. Supongamos que le asignamos el valor de verdadero, entonces el enunciado se cumple. Por lo que el enunciado es falso. Así el enunciado es verdadero y falso a la vez, un sin sentido. De igual manera, si el enunciado es falso, entonces sería falso que es falso. Que quiere decir que es verdadero. De nuevo es verdadero y falso. Lo cual no tine sentido. Por lo que este enunciado no es una proposición.*

En esta parte hablaremos de de proposiciones de forma abstracta. Las proposiciones que haremos referencia tendrán a ser de carácter matemático, aunque lo que veamos se usa en la vida cotidiana.

Un ejemplo de proposición matemática sería "Para todo real x, $x^2 \geq 0$".

Un punto a destacar y una confusión que se puede dar, es la de tener claro que es falso y que es mentira. Por el momento iremos con una definición intuitiva de verdad, una proposción es verdadera si se cumple en el mundo. Una proposción es falsa si no se cumple. Ahora bien, la diferencia entre mentira y falsedad, va en la cuestión ética. Una mentira es la afirmar el valor de verdad de una proposición cuando se sabe que este tiene el valor contrario, o se desconoce el valor de verdad de la proposición y se afirma saberlo.

La confusión viene que lo opuesto a una mentira es una verdad, pero aquí ambos son sustantivos. En el caso verdadero y falso son adjetivos de una proposición.

Notacionalmente usaremos las letras P, Q, R y S para para hablar de proposiciones, y en caso de tener una cantidad finita de estas escribiremos $P_1, \dots, P_n$.

2. Operaciones entre Proposiciones

Vamos a ligar esta idea con ideas de caracter algebraico. El hacer operaciones. Entendamos a groso modo al álgebra como la rama de las matemáticas que estudia las operaciones.

La primer operación de la que hablaremos será la negación, notacionalmente si P es una proposición, denotaremos su negación como $\neg P$ y se dirá “no “ P. Al decir que es una operación estamos dando a entender que si P es una proposición, entonces $\neg P$ también lo es.

- Si $P =$”El cielo es verde”, entonces $\neg P =$”No es verdad que el cielo es verde’=”Es falso que el cielo es verde”=”el cielo no es verde”.
- Si $P =$”Este enunciado es falso’, entonces $\neg P =$?

La siguiente operación es la disjunción si P y Q son proposiciones, la conjunción de P y Q la denotaremos por $P \wedge Q$, y se le como “P y Q”.

La siguiente operación es la conjunción si P y Q son proposciones, la disunción de P y Q la denotaremos por $P \vee Q$, y se le como “P o Q”.

La siguiente operación es la implicación si P y Q son proposciones, la implicación de P y Q la denotaremos por $P \Rightarrow Q$, y se le como “P implica Q”. A”P” lo llamaremos el antecedente y a Q el consecuente.

3. Valores de Verdad

Como mencionamos anteriormente una proposición puede tener un valor de verdad pero no es necesario brindar información sobre este valor de verdad. Solo hablamos de su potencialidad. Aún así podemor trabajar mucho. Empecemos paso por paso, si tuvieramo una proposición P esta puede ser verdadera o falsa. Esto lo podemos representar con la siguiente tabla.

P
V
F

Esto no dice mucho, a menos que compliquemos un poco el asunto y veamos que es la base para algo más interesante. Si tuvieramos dos proposiciones P y Q, tanto como P como Q pueden tomar los dos valores, pero vemos que podemos tener que P sea verdadera y Q verdadera, P verdadera y Q falsa, P falsa y Q verdadera, y P falsa y Q falsa. Es decir, cuanto tenemos dos proposiciones tenemos 4 formas en que estas pueden tomar su valor de verdad. Lo podemos representar con la siguiente tabla.

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

EJERCICIO 3.1. *Hacer las tablas para cuatro proposiciones P, Q, R y S*

Parte de realizar estas tablas y las operaciones que mencionamos anteriormente es que podremos evaluar el valor de verdad de una proposición en función de las proposiciones que la conforman. Empecemos por la negación, sea P una proposición. Si P es verdadero, entonces $\neg P$ es falso. Si P es falso, entonces $\neg P$ es verdadero.

P	¬ P
V	F
F	V

Así la tabla de verdad de la disjunción es:

P	Q	P∧ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Así la tabla de verdad de la conjunción es:

P	Q	P∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Así la tabla de verdad de la implicación es:

P	Q	P⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Definamos el "si y sólo si", una operación binaria entre proposiciones. Que denotaremos por $P \iff Q$, y lo definimos como $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Así la tabla de verdad de la implicación es:

P	Q	P⇒ Q	$Q \Rightarrow P$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Ahora definamos el operador NAND, lo denotaremos $P\&Q$ y lo definimos como $P\&Q :=\neq (P \wedge Q)$. El símbolo $:=$ nos dice que estamos dando una definición.

P	Q	P∧ Q	P&Q
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

4. Tautologías y Contradicción

Una tautología es una proposición que siempre es verdadera.

EJEMPLO 4.1.

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	V
F	V	V

Una contradicción es una proposición que siempre es falsa.

EJEMPLO 4.2.

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

5. Equivalencias Lógicas

DEFINICIÓN 5.1. *Sean P y Q proposiciones. Decimos que P es equivalente Q, si $P \iff Q$ es una tautología. Denotamos este hecho por $P \equiv Q$. Esta relación la llamamos equivalencia lógica. Esta equivalencia lógica es una extensión de la noción de igualdad.*

PROPOSICIÓN 5.1. *Sean P, Q y R proposiciones. Entonces:*

- $P \equiv P$
- *Si $P \equiv Q$ entonces $Q \equiv P$.*
- *Si $P \equiv Q$ y $Q \equiv R$, entonces $P \equiv R$.*

DEMOSTRACIÓN. □

PROPOSICIÓN 5.2 (Leyes de DeMorgan). *Sean P y Q proposiciones. Entonces $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ y $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$.*

DEMOSTRACIÓN. Hacemos la tabla de verdad

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

□

PROPOSICIÓN 5.3. *Sean P y Q proposiciones. Entonces $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$.*

DEMOSTRACIÓN. □

PROPOSICIÓN 5.4 (Distributividad). *Sean P, Q y R proposiciones. Entonces $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$ y $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$*

DEMOSTRACIÓN. □

6. Deducciones Lógicas

DEFINICIÓN 6.1. *Sean $P_1, \ldots P_n, Q$ proposiciones. Decimos que forman una reglade inferencia si:*

$$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow Q$$

es una tautología. Notacionalmente suele escribirse este hecho como:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline Q \end{array}$$

PROPOSICIÓN 6.1 (Modus Ponems). *Sean P y Q proposiciones:*

$$\begin{array}{ccc} P & \Rightarrow & Q \\ & & P \\ \hline & & Q \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que ver que $(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$ es una tautología. Una forma de ver esto es con una tabla de verdad, pero lo haremos de una forma distinta.

Primero analicemos la proposición, es una implicación. Queremos que sea verdadera, y una implicación es verdadera en 3 de 4 casos. Los primeros dos casos son cuando el antecedente es Falso. En cuyo caso ya habriamos terminado. La verdadera labor esta cuando el antecedente es verdadero, ahí tendremos que ver que el consecuente también es verdadero. Ahora el antecedente es una conjunción, la conjunción es verdadera sólo en un caso de los 4 posibles, cuando ambos son verdaderos. Por lo que en este caso, deducimos que $P \Rightarrow Q$ es verdadero y P es verdadero. De nuevo tenemos una implicación que es verdadera, pero la segunda proposición es el antecedente de la implicación que es verdadera. Por lo cual la implicación es verdadera no por que el antecedente sea falso, si no por que el antecedente y el consecuente es son verdaderos. En particular nos interesa que el consecuente Q sea verdadero, puesto que es el consecuente de la implicación original. Por lo que tenemos que la implicación es verdadera. Así, una tautología y por lo tanto tenemos una regla de inferencia. □

PROPOSICIÓN 6.2 (Modus Ponems). *Sean P y Q proposiciones:*

$$\begin{array}{ccc} P & \vee & Q \\ & & \neg P \\ \hline & & Q \end{array}$$

7. Cuantificadores

Consideremos el caso de que tuvieramos una infinidad de proposiciones $P_1, P_2, \ldots$ Nos gustaría poder decir algo sobre la disyunción y la conjunción de las proposiciones. Lo primero que hay que observar es que hacer $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots$ o $P_1 \vee P_2 \vee \ldots$ de primaria instancia no tiene algún sentido. Ambas operaciones son binarias, y las podemos extender a operaciones de n argumentos. Podemos hacer un análisis sencillo para poder darle algún sentido a esto. Empecemos con la conjunción, si $P_1 \wedge P_2$ es verdadera, sólo cuando P_1 y P_2 son verdaderas. Pero que pasa si tuvieramos tres proposiciones, si $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ es verdadera, entonces P_1, P_2 y P_3 son verdaderas. Igual pasará si tenemos 4, 5 o tantas proposiciones. La conjunción será verdadera cuado cada una de las proposiciones sea verdadera. De esta manera podemos pensar que P es una proposición, y P_1 es que 1 cumple la propiedad P, P_2 que 2 cumple la propiedad P. Así P_n como n cumple la propiedad P. Lo primero sería cambiar la notación por $P(n)$ en vez de P_n para poder decir que $ncumplelapropiedadP$. Ahora, bien como esta planteado estamos diciendo solamente que los números cumplen la propiedad P. A nosotoros nos gustaría hablar de cosas en general. Por ejemplo, podríamos poner $P =$'ser azul', y x el cielo. Así tendríamos que $P(x)$ sería "el cielo es azul". Podríamos poner "y" el mar, así $P(y)$ sería "el mar es azul". Por lo cual tendríamos una nueva forma de crear nuevas proposiciones, pensando muy vagamente que las proposiciones son enunciados que nos dicen propiedades sobre ciertos entes.

Regresando al punto, nos gustaría poder de recorrer la proposición por todos estos entes, para esto introducimos el "para todo", $\forall x P(x)$, que se lee "Para todo x, x cumple P". Esto va a ser una nueva proposición, que será verdadera cuando todas las $P(x)$ sean verdaderas, caso contrario será falso. Lo que quiere decir, si existe almenos una x_0 la cual $P(x_0)$ es falso. Al para todo se lee conoce como un cuantificador. También es conocido como el cuantificador universal.

La negación del cuantificador universal es:

$$\neg(\forall x P(x)) = \exists x \neg P(x)$$

Tarea

EJERCICIO 7.1. *Sea P un proposición. Entonces $P \wedge P \equiv P$ y $P \vee P \equiv P$.*

EJERCICIO 7.2. *Indica cuales de los siguientes enunciados son proposiciones. Argumenta tu respuesta.*

1. *¡Comenzamos!*
2. *Mañana será un día nublado.*
3. *Muero porque no muero.*
4. *¿Cuándo estudiarás para el examen?*
5. *Para tener éxito, la planificación sola es insuficiente. Uno debe improvisar también.*
6. *La afirmación siguiente es falsa.*
7. *La afirmación anterior es verdadera.*
8. *El hombre más irremediablemente estúpido es aquel que ignora su sabiduría.*
9. *La suerte favorece sólo a la mente preparada.*
10. *Una persona feliz no puede ser mejor.*

EJERCICIO 7.3. *Definase $P =$"Me gusta tomar café", $Q =$"El dia esta lluvioso" y $R =$"Hoy voy a ver mi novela". Escriba las siguientes proposiciones con palabras.*

1. $Q \wedge \neg R$.
2. $\neg(\neg Q \wedge P)$.
3. $(P \vee Q) \wedge R$.
4. $\neg(P \wedge R)$.

EJERCICIO 7.4. *Sean T una tautología y C una contradicción. Demuestra que para cualquier proposición P:*

1. *$T \vee P$ es una tautología.*
2. *$P \wedge C$ es una contradicción.*

EJERCICIO 7.5. *Sean P, Q, R y S proposiciones. Escribe las combinaciones de los posibles valores de verdad que pueden tomar estas 4 proposiciones.*

EJERCICIO 7.6. *Sean P, Q y R proposiciones. Demuestra que las siguientes proposiciones son tautologías.*

1. $P \Rightarrow (P \vee Q)$.
2. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$.
3. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$.

EJERCICIO 7.7. *Sean P, Q y R proposiciones. Demuestra que las siguientes proposiciones son equivalencias lógicas.*

1. $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ *(Distributividad de $\vee$ sobre $\wedge$).*
2. $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$ *(Asociatividad de $\wedge$).*
3. $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$ *(Asociatividad de $\vee$).*
4. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ *(Ley de DeMorgan).*
5. $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ *(Ley de DeMorgan).*
6. $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ *(Contrapuesta).*
7. $(P \Leftrightarrow Q) \equiv (\neg P \Leftrightarrow \neg Q)$.

EJERCICIO 7.8. *Sean P y Q proposiciones, definimos el conectivo lógico $\uparrow$ como en la siguiente tabla.*

P	Q	$P \uparrow Q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Escribe proposiciones lógicamente equivalentes a la negación y a la conjunción usando únicamente el conectivo $\uparrow$.

EJERCICIO 7.9. *Sean P y Q proposiciones, definimos el conectivo lógico $\downarrow$ como en la siguiente tabla.*

P	Q	$P \downarrow Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Escribe proposiciones lógicamente equivalentes a la negación y a la conjunción usando únicamente el conectivo $\downarrow$.

EJERCICIO 7.10. *Sean P, Q, R y S proposiciones. Demuestra las siguientes reglas de inferencia.*

1. *Tollendo ponens.*

$$\begin{array}{r} P \vee Q \\ \neg Q \\ \hline P \end{array}$$

2. *Tollendo tollens.*

$$\begin{array}{r} P \Rightarrow Q \\ \neg Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

3. *Silogismo hipotético.*

$$\begin{array}{r} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ \hline P \Rightarrow R \end{array}$$

4. *Dilema constructivo.*

$$\begin{array}{r} (P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S) \\ P \\ R \\ \hline Q \vee S \end{array}$$

5. *Dilema destructivo.*

$$\begin{array}{r} (P \Rightarrow Q) \lor (R \Rightarrow S) \\ \neg Q \\ \neg S \\ \hline \neg P \lor \neg R \end{array}$$

Capítulo 2

Conjuntos

Intuitivamente, un conjunto es una colección de objetos definidos por una propiedad. Usaremos letras mayúsculas para denotar conjuntos $A,B,C,\ldots,X,Y,Z$. Ahora los objetos un conjunto los llamaremos elementos del conjunto, y los de notaremos con letras minusculas $a,b,c,\ldots,x,y,z$. Así para denotar el hecho de que un elemento x forma parte de un conjunto X, usaremos la notación

$$x \in X$$

Que se lee, "x pertenece a X". De manera natural, la negación, "x no pertenece a X", lo denotamos por $x \notin X$.

Regresando a la cuestión de las propiedad. Dada una propiedad p, podríamos definir un conjunto. Notacionalmente se escribimos:

$$X = \{x \mid p(x)\}$$

Esto dice, el conjunto de todos los x que cumplen la propiedad p. Dicho de otra forma, $x \in X$ si y sólo si $p(x)$ (x cumple p).

Esta definición de conjunto no es una definición formal. De hecho, no es nuestra definición. Veamos que si definimos el conjunto:

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

Si R es un conjunto, entonces cumple o no la propiedad $p(x) := x \notin x$.

Si R la cumple, entonces $R \notin R$. Por lo que $R \in R$. Lo cual es una contradicción

Si R no la cumple, entonces $R \in R$. Por lo que $R \notin R$. Lo cual también es una contradicción.

El problema aquí es definir conjuntos con propiedades. No toda propiedad define un conjunto, pero si todo conjunto esta definido por una propiedad. Aunque este hecho es relativamente básico.

Si X es un conjunto, entonces

$$X = \{x \mid x \in X\}$$

Vamos a suponer que que exsiten los conjuntos.

Sobre la notación, la mayor parte de las veces se usará la notación

$$X = \{x \mid p(x)\}$$

Esta notación se llama implicita. Tenemos una notación alternativa, que se llama explicita pero esta no siempre se puede usar. En esta notación enunciamos los elementos.

$$X = \{x_1,\ldots,x_n\}$$

donde los $x_1,\ldots,x_n \in X$. Es decir, en esta notación exhibimos los elementos del conjunto X.

Por ejemplo, el conjunto de las vocales X, en notación explicita sería $X = \{a,e,i,o,u\}$.

El conjunto de los colores primarios Y sería $\{azul, amarillo, rojo\}$.

Sin embargo hay conjuntos que no podríamos describir con esta notación, por ejemplo los reales $\mathbb{R}$, los racionales $\mathbb{Q}$.

Igual que en el caso de las proposiciones en los conjuntos vamos a tener que extender el concepto de igualdad. Vamos a extender el concenpto de equivalencia lógica a igualdad de conjuntos.

Diremos que dos conjuntos X y Y son iguales, si tienen los mismos elementos. Es decir, para todo $x \in X$, $x \in X$ si y sólo si $x \in Y$.

De esta forma tendríamos que los conjuntos $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{3,2,1\}$, y $Z = \{1,1,1,1,2,3,3,3,2\}$, todos son iguales $X = Y = Z$. Este ejemplo, nos dice que el orden o las repeticiones en la notación explicita nos dan como resultado el mismo conjunto.

Un primer conjunto del que vamos a hablar es el conjunto vacío. Este conjunto se denota por $\emptyset$. Este conjunto no tiene elementos. Es decir, que nadie es su elemento. Para todo x, $x \notin X$. En lenguaje de proposiciones, el conjunto vacío corresponde a la contradicción.

1. Operaciones entre conjuntos

Dados dos conjuntos X y Y podemos crear nuevos conjuntos correspondientes a ciertas interpretaciones en proposiciones.

DEFINICIÓN 1.1. *Definimos la intersección de X con Y como los elementos que pertenecen a X y pertenecen a Y. Notacionalmente, este conjunto lo denotaremos por $X \cap Y$. Es decir, $x \in X \cap Y$ si y sólo si $x \in X$ y $x \in Y$.*

DEFINICIÓN 1.2. *Definimos la unión de X con Y como los elementos que pertenecen a X o pertenecen a Y. Notacionalmente, este conjunto lo denotaremos por $X \cup Y$. Es decir, $x \in X \cup Y$ si y sólo si $x \in X$ o $x \in Y$.*

DEFINICIÓN 1.3. *Definimos la diferencia, X menos Y como los elementos que pertenecen a X y no pertenecen a Y. Notacionalmente, este conjunto lo denotaremos por $X \setminus Y$. Es decir, $x \in X \setminus Y$ si y sólo si $x \in X$ y $x \notin Y$.*

PROPOSICIÓN 1.1. *Sean X, Y y Z conjuntos. Entonces:*

1. $X \cup X = X$.
2. $X \cap X = X$.
3. $X \cup Y = Y \cup X$.
4. $X \cap Y = Y \cap X$.
5. $(X \cup Y) \cap Z = (Y \cap Z) \cup (X \cap Z)$.
6. $(X \cap Y) \cup Z = (Y \cup Z) \cap (X \cup Z)$.
7. $X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$
8. $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$
9. $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$

2. Subconjuntos

DEFINICIÓN 2.1. *Sea X y Y conjuntos. Decimos que X es un subconjunto de Y, si todo elemento de X es un elemento de Y. Este hecho lo denotamos por $X \subseteq Y$.*

De la definición de igualdad de conjuntos podemos deducir que dos conjuntos X y Y son iguales si y sólo si $X \subseteq Y$ y $Y \subseteq X$.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sean X, Y y Z conjuntos. Entonces:*

- $X \subseteq X$
- *Si $X \subseteq Y$ y $Y \subseteq X$, entonces $X = Y$.*
- *Si $X \subseteq Y$ y $Y \subseteq Z$, entonces $X \subseteq Z$.*

DEFINICIÓN 2.2. *Sea X y Y conjuntos. Decimos que X es un subconjunto propio de Y, si $X \subseteq Y$ y $X \neq Y$.*

3. Familias de conjuntos

DEFINICIÓN 3.1. *Sea $\mathfrak{A}$ una familia (conjunto) de conjuntos. Definimos la intersección de $\mathfrak{A}$ como:*

$$\bigcap \mathfrak{A} = \{x \mid x \in A, \forall A \in \mathfrak{A}\}$$

y la unión de $\mathfrak{A}$ como:

$$\bigcup \mathfrak{A} = \{x \mid x \in A, \exists A \in \mathfrak{A}\}$$

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea X un conjunto y $\mathfrak{A}$ un conjunto de conjuntos. Si ponemos $X \cap \mathfrak{A} := \{A \cap X \mid A \in \mathfrak{A}\}$, entonces*

$$X \cap \bigcup \mathfrak{A} = \bigcup (X \cap \mathfrak{A})$$

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea X un conjunto y $\mathfrak{A}$ un conjunto de conjuntos. Si ponemos $X \setminus \mathfrak{A} := \{X \setminus \mid A \in \mathfrak{A}\}$, entonces*

$$X \setminus \bigcup \mathfrak{A} = \bigcap (X \setminus \mathfrak{A})$$

y

$$X \setminus \bigcap \mathfrak{A} = \bigcup (X \setminus \mathfrak{A})$$

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea X un conjunto. Si ponemos $\mathfrak{U}(X) := \{\{x\} \mid x \in X\}$, entonces $\bigcup \mathfrak{U}(X) = X$.*

4. Conjunto Potencia

DEFINICIÓN 4.1. *Sea X un conjunto. El conjunto potencia de X, es el conjunto de todos los subconjuntos de X, a este lo denotamos por $\mathbb{P}(X)$. Notamos que $A \subseteq X$ si y sólo si $A \in \mathbb{P}(X)$.*

Dado X un conjunto, el conjunto potencia siempre tiene dos elementos $\emptyset, X \in \mathbb{P}(X)$.

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea X un conjunto. Si $A, B \in \mathbb{P}(X)$, entonces:*

- $A \cap B \in \mathbb{P}(X)$
- $A \cup B \in \mathbb{P}(X)$
- $X \setminus A \in \mathbb{P}(X)$

PROPOSICIÓN 4.2. *Sean X y Y conjuntos. Entonces:*

- $\mathbb{P}(X) \cup \mathbb{P}(Y) \subseteq \mathbb{P}(X \cup Y)$
- $\mathbb{P}(X) \cap \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X \cap Y)$

5. Producto Cartesiano

El problema de la pareja ordenada es poder definir un objeto matemático para cualquier par de elementos que denotaremos por (x,y), y que se cumpla que $(x,y) = (a,b)$ si y sólo si $a = x$ y $b = y$.

DEFINICIÓN 5.1 (Kuratowski). *Sean x y y elementos. Definimos $(x,y) := \{\{x\}, \{x,y\}\}$.*

PROPOSICIÓN 5.1. *La definición de Kuratowski de pareja ordenada cumple la defínción de pareja ordenada.*

No es la única defínción de pareja ordenada que cumple la propiedad, pero estudiaremos las parejas ordenadas por propiedades no por su definición.

DEFINICIÓN 5.2. *Sean X y Y conjuntos, Definimos el producto cartesiano de X y Y como el conjunto de parejas ordenadas (x,y) tales que $x \in X$ y $y \in Y$. Lo denotamos por $X \times Y$.*

PROPOSICIÓN 5.2. *Sean X, Y y Z conjuntos. Entonces:*

- $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$
- $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$
- $X \times (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z)$

6. Resumen

DEFINICIÓN 6.1. *Sean A y B conjuntos*

- $A = B$, $x \in A \iff x \in B$.
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- $A \subseteq B$, $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$
- $A = B$, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

- $\cup\mathscr{A} = \{x \mid \exists A \in \mathscr{A}, x \in A\}$
- *$x \in \cup\mathscr{A}$ si y sólo si existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $x \in A$.*
- $\cap\mathscr{A} = \{x \mid \forall A \in \mathscr{A}, x \in A\}$
- *$x \in \cap\mathscr{A}$ si y sólo si para todo $A \in \mathscr{A}$ tal que $x \in A$.*

EJERCICIO 6.1. *Sean $A, By\, C$ conjuntos. Entonces*

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Ejercicios

EJERCICIO 6.2. *Decir cuales de los siguientes enunciados son verdaderos.*

1. $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$.
2. $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
3. *Si A es un conjunto no vacío entonces $A \in A$.*

EJERCICIO 6.3. *Sean P el conjunto de todas las personas del mundo, M el conjunto de todas las mujeres del mundo y* H *el conjunto de todos los hombres del mundo. Describa con palabras los siguientes conjuntos.*

1. $\{x \in P \mid x \text{ tiene un hijo y } x \in H\}$.
2. $\{x \in P \mid \text{existen } y, z \in P \text{ tales que } y \text{ es hijo de } x \text{ y } z \text{ es hijo de } y\}$.
3. $\{x \in P \mid \text{existe } m \in M \text{ tal que } m \text{ está casado con } x\}$.
4. $\{x \in P \mid \text{existe } q \in P \text{ tal que } x \text{ y } q \text{ tienen la misma madre }\}$.
5. $\{x \in P \mid \text{existe } h \in P \text{ tal que } h \text{ es mayor que } x\}$.

EJERCICIO 6.4. *Decir que conjuntos son subconjuntos de otros.*

- *H el conjunto de todos los hombres.*
- *M el conjunto de todas las mujeres.*
- *P el conjunto de todos los padres.*
- *O el conjunto de todas las mamás.*
- *F el conjunto de todos las papás.*
- *U el conjunto de todos los tíos.*
- *A el conjunto de todas las tías.*
- *C el conjunto de los hijos de alguien.*

EJERCICIO 6.5. *Encuentra dos conjuntos A y B tales que $A \in B$ y $A \subseteq B$.*

Sean A, B, C y D conjuntos.

EJERCICIO 6.6. *Demuestra que $x \in A$ si y sólo si $\{x\} \subseteq A$.*

EJERCICIO 6.7. *Demuestra que si $A \subseteq B, B \subseteq C$ y $C \subseteq A$ entonces $A = B = C$.*

EJERCICIO 6.8. *Demuestra que:*

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
2. $A \cup \emptyset = A$.

EJERCICIO 6.9. *Demuestra lo siguiente: 1. $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.*

2. *$A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$.*

EJERCICIO 6.10. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

1. *$A \cup B = \emptyset$ si y sólo si $A = B = \emptyset$.*
2. *$A \cap B = A \cup B$ si y sólo si $A = B$.*

EJERCICIO 6.11. *Supongamos que $A \subseteq B$. Demuestra que:*

1. $A \cap C \subseteq B \cap C$.
2. $A \cup C \subseteq B \cup C$.

EJERCICIO 6.12. *Sea X un conjunto. Demuestra las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$ entonces $X \subseteq A \cap B$.*
2. *Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$ entonces $A \cup B \subseteq X$.*

EJERCICIO 6.13. *Demuestra que si $C \subseteq A \cup B$ y $A \cap C = \emptyset$ entonces $C \subseteq B$.*

EJERCICIO 6.14. *Demuestra que $A \subseteq C$ si y sólo si $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.*

EJERCICIO 6.15. *Demuestra que:*

1. $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$.
2. $(A \backslash B) \cup B = A \cup B$.

EJERCICIO 6.16. *Demuestra que:*

1. *$A \backslash B = \emptyset$ si y sólo si $A \subseteq B$.*
2. *$A \backslash B = A$ si y sólo si $A \cap B = \emptyset$.*
3. *$A \backslash B = B \backslash A$ si y sólo si $A = B$.*
4. *$A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$ si y sólo si $A \cap C = \emptyset$.*

EJERCICIO 6.17. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

1. $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$.
2. *$B \backslash (B \backslash A) = A$ si y sólo si $A \subseteq B$.*

EJERCICIO 6.18. *Demuestra que $A \backslash B = A \cap B$ si y sólo si $A = \emptyset$.*

EJERCICIO 6.19. *Demuestra que si $A \subseteq B$ entonces $A \backslash C = A \cap (B \backslash C)$.*

EJERCICIO 6.20. *Supongamos que X es un conjunto tal que $A, B, C \subseteq X$ y que:*

1. $A \cap B = A \cap C$.
2. $(X \backslash A) \cap B = (X \backslash A) \cap C$

Demuestra que $B = C$.

EJERCICIO 6.21. *Supongamos que $A \cap C = B \cap C$ y $A \cup C = B \cup C$. Demuestra que $A = B$.*

EJERCICIO 6.22. *Supongamos que $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, demuestra que $A \times C \subseteq B \times D$.*

EJERCICIO 6.23. *Demuestra que $A \times B = \emptyset$ si y sólo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.*

EJERCICIO 6.24. *Demuestra que si $A \neq B$ y $A \times C = B \times C$ entonces $C = \emptyset$.*

EJERCICIO 6.25. *Demuestra que $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$.*

EJERCICIO 6.26. *Demuestra que:*

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

EJERCICIO 6.27. *Demuestra que $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.*

EJERCICIO 6.28. *Demuestra que $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.*

EJERCICIO 6.29. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

1. $A \triangle \emptyset = A$.
2. $A \triangle A = \emptyset$.
3. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

EJERCICIO 6.30. *Demuestra que $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.*

EJERCICIO 6.31. *Demuestra lo siguiente:*

1. $A \cap B = (A \cup B) \backslash (A \triangle B)$.
2. $A \backslash B = A \cap (A \triangle B)$.
3. $A \cup B = (A \cap B) \triangle (A \triangle B)$.

EJERCICIO 6.32. *Demuestra que* $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$

EJERCICIO 6.33. *¿Es el producto cartesiano asociativo? Argumenta tu respuesta.*

EJERCICIO 6.34. *Si* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *y* $B = \{a, e, i, o, u\}$ *encuentra:*

1. $A \cap B$
2. $A \cup B$
3. $A \backslash B$
4. $B \backslash A$
5. $A \triangle B$
6. $A \times B$

EJERCICIO 6.35. *Demuestra o da un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:*

1. $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$.
2. $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cup \wp(B)$.

EJERCICIO 6.36. *Escribe los elementos de:*

1. $\wp(\wp(\emptyset))$.
2. $\wp(\wp(\{\emptyset\}))$.

EJERCICIO 6.37. *Demuestra que* $A = B$ *si y sólo si* $\wp(A) = \wp(B)$.

EJERCICIO 6.38. *Sea* X *un conjunto tal que* $A, B \subseteq X$. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

1. *Si* $A \cup B = X$ *entonces* $X \backslash A \subseteq B$.
2. *Si* $A \cap B = \emptyset$ *entonces* $A \subseteq X \backslash B$.
3. $A = X \backslash B$ *si y sólo si* $A \cup B = X$ *y* $A \cap B = \emptyset$.

EJERCICIO 6.39. *Demuestra que para todo conjunto* X *se tiene que* $\bigcap \wp(X) = \emptyset$.

EJERCICIO 6.40. *Si* (a, b) *denota el par ordenado de a y b, demuestra las siguientes afirmaciones:*

1. $\bigcap(a, b) = \{a\}$.
2. $\bigcup(a, b) = \{a, b\}$. *Definamos el conjunto* $\mathfrak{A}(B) = \{C \subseteq B \mid C$ *tiene un sólo elemento* $\}$.

EJERCICIO 6.41. *Demuestra que* $\bigcup \mathfrak{A}(B) = B$.
Sean $\mathfrak{A} \subseteq \wp(A)$ *y* $\mathfrak{B} \subseteq \wp(B)$

EJERCICIO 6.42. *Demuestra que* $\bigcup \mathfrak{A} = \emptyset$ *si y sólo si* $\mathfrak{A} = \emptyset$ *ó para todo* $X \in \mathfrak{A}$ *se tiene que* $X = \emptyset$.

EJERCICIO 6.43. *Demuestra que si* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ *entonces:*

1. $\cap \mathfrak{B} \subseteq \bigcap \mathfrak{A}$.
2. $\bigcup \mathfrak{A} \subseteq \bigcup \mathfrak{B}$.

EJERCICIO 6.44. *Demuestra que si* $\mathfrak{A} \subseteq \wp(C)$ *entonces* $\bigcup \mathfrak{A} \subseteq C$.

EJERCICIO 6.45. *Demuestra que si para todo* $X \in \mathfrak{A}$ *se tiene que* $C \in \wp(X)$ *entonces* $C \subseteq \bigcap \mathfrak{A}$.

Definamos el conjunto $\mathfrak{A} \cap C := \{X \cap C \mid X \in \mathfrak{A}\}$.

EJERCICIO 6.46. *Demuestra que* $C \cap (\bigcup \mathfrak{A}) = \bigcup (C \cap \mathfrak{A})$.

Definamos el conjunto $\mathfrak{A} \cup C := \{X \cup C \mid X \in \mathfrak{A}\}$.

EJERCICIO 6.47. *Demuestra que* $C \cup (\bigcap \mathfrak{A}) = \bigcap (C \cup \mathfrak{A})$.

Definamos el conjunto $\mathfrak{A} \backslash C := \{X \backslash C \mid X \in \mathfrak{A}\}$.

EJERCICIO 6.48. *Demuestra que* $C \backslash (\bigcup \mathfrak{A}) = \bigcap (C \backslash \mathfrak{A})$.

EJERCICIO 6.49. *Demuestra que* $C \backslash (\bigcap \mathfrak{A}) = \bigcup (C \backslash \mathfrak{A})$.

Capítulo 3

Relaciones y Funciones

1. Relaciones

DEFINICIÓN 1.1. *Sean A y B conjuntos. Un relación R entre A y B es un subconjunto de $A \times B$, es decir, $R \subseteq A \times B$. Así, notacionalemente pondremos aRb en vez de $(a,b) \in R$. Cuando digamos una relación R en A estaremos suponiendo que $A = B$.*

EJEMPLO 1.1.
- *La relación vacía $\emptyset \subseteq A \times B$.*
- *La relación total $A \times B \subseteq A \times B$.*
- *La diagonal $\Delta_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$. Esta relación es la igualdad.*
- *Los ordenes. Para $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, tenemos las relaciones $<, \leq, >, \geq$.*

DEFINICIÓN 1.2. *Sea R una relación en A. Decimos que R es:*
- *Reflexiva, si para todo $a \in A$, aRa.*
- *Simétrica, si para todo $a,b \in A$, si aRb entonces bRa.*
- *Antisimetrica, si para todo $a,b \in A$, si aRb y bRa entonces $a = b$.*
- *Transitiva, si para todo $a,b,c \in A$, si aRb y bRc entonces aRc.*

DEFINICIÓN 1.3. *Un conjunto parcialmente ordenado es conjunto P con relación $\leq$ en el tal que la relación cumple que es reflexiva, antisimetrica y transitiva.*

2. Relaciones de Equivalencias

DEFINICIÓN 2.1. *Sea X un conjunto. Una relación de equivalencia en X, es una relación $\sim$ en X que es reflexiva, simetrica y transitiva.*

DEFINICIÓN 2.2. *Sea X un conjunto con una relación de equivalencia $\sim$ en X. Para $x \in X$, definimos la clase de equivalencia de x como:*

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

DEFINICIÓN 2.3. *Sea X un conjunto con una relación de equivalencia $\sim$ en X. Definimos el conjunto cociente, X módulo la relación de equivalencia $\sim$, como $\{[x] \mid x \in X\}$. A este conjunto lo denotamos por $X/\sim$.*

DEFINICIÓN 2.4. *Sea X un conjunto y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Decimos que $\mathscr{A}$ es una partición de X si:*
- *$\emptyset \notin \mathscr{A}$*
- *Si $A,B \in \mathscr{A}$ con $A \neq B$, entonces $A \cap B = \emptyset$.*
- *$X = \bigcup \mathscr{A}$*

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea X un conjunto con una relación de equivalencia $\sim$. Entonces $X/\sim$ es una partición de X*

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea X un conjunto y $\mathscr{A}$ una partición de X. Entonces la relación $\sim_{\mathscr{A}}$ dada por $x \sim_{\mathscr{A}} y$ con $x,y \in X$, si existe $A \in \mathscr{A}$ con $x,y \in A$.*

PROPOSICIÓN 2.3. *Sea X un conjunto con una relación de equivalencia $\sim$. Entonces $\sim_{X/\sim} = \sim$.*

PROPOSICIÓN 2.4. *Sea X un conjunto y $\mathscr{A}$ una partición de X. Entonces la relación $X/\sim_{\mathscr{A}} = \mathscr{A}$.*

3. Funciones

DEFINICIÓN 3.1. *Sean X y Y conjuntos y $f \subseteq X \times Y$. Decimos que f es una función si:*

- *Para toda $x \in X$, existe $y \in Y$ con xfy*
- *Para $x \in X$, $y, y' \in Y$, si xfy y xfy' entonces $y = y'$.*

A X lo llamamos dominio ($dom(f)$), a Y contradominio ($cod(f)$ y a f la regla de correspondecia. Notacionalmente por las propiedades de función podemos escribir $f(x) = y$. También a una función la denotaremos por $f\colon X \longrightarrow Y$

Dos funciones son iguales si y sólo si tienen el mismo dominio, contradominio y regla de correspondencia.

DEFINICIÓN 3.2. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$. Definimos la imagen de f como $\{f(x) \in Y \mid x \in X\}$. Notacionalmente ponemos im(f).*

EJEMPLO 3.1. *Sea X un conjunto, la función identidad 1_X es la relación diagonal Δ_X.*

PROPOSICIÓN 3.1. *Sean $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow X$. Decimos que g es una inversa izquierda de f si $gf = 1_X$. Decimos que g es una inversa derecha de g si $fg = 1_Y$.*

DEFINICIÓN 3.3. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$. Decimos que f es inyectiva si para todo $x, y \in X$, si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$.*

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$. Entonces f es inyectiva si y sólo si f tiene inversa izquierda.*

DEFINICIÓN 3.4. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$. Decimos que f essuprayectiva si im(f) $= Y$.*

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$. Entonces f es suprayectiva si y sólo si f tiene inversa derecha.*

4. Equipotencia

Ejercicios

Sean A, B, C y D conjuntos, así como P y Q proposiciones.

EJERCICIO 4.1. *Supongamos que $R \subseteq A \times A$.*

1. *Demuestra que $\Delta_A = \emptyset$ si y sólo si $A = \emptyset$.*
2. *Demuestra que R es irreflexiva si y sólo si $\Delta_A \cap R = \emptyset$.*

Dada $R \subseteq A \times B$, definimos la relación opuesta $R^{op} \subseteq B \times A$ como:

$$R^{op} = \{(x,y) \mid (y,x) \in R\}.$$

EJERCICIO 4.2. *Sean $R, S \subseteq A \times B$. Demuestra lo siguiente:*

1. $(R^{op})^{op} = R$.
2. $(R \cap S)^{op} = R^{op} \cap S^{op}$.
3. $(R \cup S)^{op} = R^{op} \cup S^{op}$.

EJERCICIO 4.3. *Si $R \subseteq A \times A$, prueba que:*

1. *R es simétrica si y sólo si R^{op} es simétrica.*
2. *R es simétrica si y sólo si $R \subseteq R^{op}$.*
3. *Si R es simétrica entonces $R \subseteq R^{op}$ si y sólo si $R = R^{op}$.*
4. *R es antisimétrica si y sólo si $R \cap R^{op} \subseteq \Delta_A$.*

EJERCICIO 4.4. *Sea $\mathfrak{P}$ el conjunto de todas las proposiciones, se define una relación en $\mathfrak{P}$ como sigue:*

$$P \sim Q, \text{ si } P \Leftrightarrow Q \text{ es una tautología}$$

Demuestra que dicha relación es de equivalencia.

EJERCICIO 4.5. *Sea $\mathfrak{P}/\sim$ el conjunto cociente inducido por la relación del ejercicio anterior. Definamos ahora una nueva relación en $\mathfrak{P}/\sim$, así:*

$$[P] \leq [Q], \text{ si } P \Rightarrow Q \text{ es una tautología}$$

Demuestra que dicha relación está bien definida, es decir, si $[P] = [P']$, $[Q] = [Q']$ y $P \Rightarrow Q$ es tautología entonces $P' \Rightarrow Q'$ es tautología.

EJERCICIO 4.6. *Demuestra que $(\mathfrak{P}/\sim, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

EJERCICIO 4.7. *Sean $[P], [Q] \in \mathfrak{P}/\sim$. Demuestra lo siguiente:*
1. $\text{ínf}\{[P],[Q]\} = [P \wedge Q]$.
2. $\sup\{[P],[Q]\} = [P \vee Q]$.

EJERCICIO 4.8. *Demuestra que para todo $[P] \in \mathfrak{P}/\sim$ existe $[Q] \in \mathfrak{P}/\sim$ tal que:*
1. $\text{ínf}\{[P],[Q]\} = \overline{0}$.
2. $\sup\{[P],[Q]\} = \overline{1}$.

EJERCICIO 4.9. *Definamos una relación $\sim$ sobre el conjunto de enteros $\mathbb{Z}$, dada por:*

$$x \sim y, \text{ si } x - y \text{ es par}$$

Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia y que $\mathbb{Z}/\sim = \{[0],[1]\}$.

EJERCICIO 4.10. *Sea $\mathbb{S}^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$ y defínase la siguiente relación $\sim$ en $\mathbb{S}^1$:*

$$(x,y) \sim \left(x',y'\right), \text{ si } (x,y) = \left(x',y'\right) \text{ o } (x,y) = -\left(x',y'\right)$$

Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia.

EJERCICIO 4.11. *Consideremos $\left(\mathbb{R}^3\right)^* =: \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ y definamos la siguiente relación en dicho conjunto:*

$$(x,y,z) \sim \left(x',y',z'\right), \text{ si existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \left(x',y',z'\right) = \lambda (x,y,z)$$

Describe $\left(\mathbb{R}^3\right)^*/\sim$.

EJERCICIO 4.12. *Encuentra todas las particiones del conjunto $I_3 = \{1,2,3\}$.*

EJERCICIO 4.13. *Si $f: A \to B$ y $g: C \to D$ son funciones, demuestra que $f \cup g$ como relación de $(A \cup C) \times (B \cup D)$ es función si y sólo si $f \cap g$ como relación de $(A \cap C) \times (B \cap D)$ es función.*

EJERCICIO 4.14. *Sean $f: A \to B$ una función, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$. Demuestra que:*
1. $ff^{-1}(D) \subseteq D$.
2. $C \subseteq f^{-1}f(C)$.

EJERCICIO 4.15. *Sean $f: A \to B$ una función, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$. Demuestra que:*
1. *f es inyectiva si y sólo si $f^{-1}f(C) = C$.*
2. *f es suprayectiva si y sólo si $ff^{-1}(D) = D$.*

EJERCICIO 4.16. *Sea $f: A \to B$ una función, I un conjunto indicador, $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \wp(A)$ y $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \wp(B)$. Demuestra que:*
- $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f\left(A_i\right)$.
- $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f\left(A_i\right)$.
- $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}\left(B_i\right)$.
- $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(B_i\right)$.

EJERCICIO 4.17. *Demuestra que si $f: A \to B$ es una función inyectiva entonces para todo conjunto indicador I y $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \wp(A)$, se tiene que $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f\left(A_i\right)$.*

EJERCICIO 4.18. *Sean $f,g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por $f(x) = 2x$ y $g(x) = \text{máx}\{x-3, 0\}$.*

1. *Demuestra que f es inyectiva dando una infinidad de inversas izquierdas.*
2. *Demuestra que g es suprayectiva dando más de una inversa derecha.*

EJERCICIO 4.19. *Sea $f : A \to B$ una función. Demuestra las siguientes afirmaciones.*

1. *Si f es inyectiva y tiene una única inversa izquierda entonces f es biyectiva.*
2. *Si f es suprayectiva y tiene una única inversa derecha entonces f es biyectiva.*

EJERCICIO 4.20. *Demuestra que para $f : A \to B$ son equivalentes:*

- *f es biyectiva.*
- *f tiene inversa derecha e izquierda.*
- *f es cancelable por la izquierda y derecha.*

EJERCICIO 4.21. *Demuestra que si $f : A \to B$ es biyectiva entonces la inversa es única.*

EJERCICIO 4.22. *Ejercicio 80. Demuestra que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = (-1)^n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ es biyectiva.*

EJERCICIO 4.23. *Si $f : A \to B$ es una función definimos una relación $\sim$ sobre A, dada por:*

$$x \sim y, \text{ si } f(x) = f(y)$$

Demuestra lo siguiente:

1. *$\sim$ es un relación de equivalencia.*
2. *f es inyectiva si y sólo si $[a] = \{a\}$, para todo $a \in A$.*

EJERCICIO 4.24. *Si $f : A \to B$ es una función. Demuestra lo siguiente:*

1. *Existen C un conjunto, $h : A \to C$ y $g : C \to B$ inyectiva tal que $f = g \circ h$.*
2. *Existen C un conjunto, $h : A \to C$ suprayectiva y $g : C \to B$ tal que $f = g \circ h$.*

EJERCICIO 4.25. *Supongamos que A, B, C y D son conjuntos tales que $|A| = |C|$ y $|B| = |D|$. Demuestra que $\left|A^B\right| = \left|C^D\right|$.*

EJERCICIO 4.26. *Sea A un conjunto. Demuestra que $|\wp(A)| = \left|2^A\right|$.*

EJERCICIO 4.27. *Si X es un conjunto no vacío y $A, B \in \wp(X)$. Demuestra lo siguiente:*

1. *$A = B$ si y sólo si $\chi_A = \chi_B$.*
2. *$\chi_{X \setminus A} = 1 - \chi_A$.*

EJERCICIO 4.28. *Si X es un conjunto no vacío y $A, B \in \wp(X)$. Demuestra lo siguiente:*

1. *$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.*
2. *$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$.*

Capítulo 4

Inducción y combinatoria

1. El Principio de Inducción

El principio de inducción es la forma de demostrar propiedades sobre los naturales, esto es debido a la construcción de los naturales. En general cuando se enuncie algún teorema sobre los naturales se demostrará usando inducción o en caso de que no, se demostrará usando resultados que ya fueron demostrados por inducción. La siguiente es la versión conjuntista del principio de inducción.

DEFINICIÓN 1.1. *(Principio de Inducción C). Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que:*

1. $0 \in A$.
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $n \in A$ entonces $n+1 \in A$*

Entonces $A = \mathbb{N}$

Al punto 1 se le llama la base de inducción y al punto 2 el paso inductivo. La versión más común del principio de inducción es:

DEFINICIÓN 1.2. *(Principio de Inducción P). Sea p una propiedad, si:*

1. $p(0)$ *(0 cumple la propiedad).*
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $p(n)$ entonces $p(n+1\ )$ (si n cumple la propiedad, entonces $n+1$ cumple la propiedad)*

Entonces para cada natural $n, p(n)$ (Todos los naturales cumplen la propiedad).

EJEMPLO 1.1. *Sea $A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=0}^{n} i = \left(n^2+n\right)/2\right\}$, primero $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \left(0^2+0\right)/2$ por lo que el paso base se cumple. Ahora supondrá que $\sum_{i=0}^{n} i = \left(n^2+n\right)/2$, a esto se le llama la hipótesis de inducción, y se suma $n+1$ de ambos lados $\sum_{i=0}^{n+1} i = (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1) = \left(n^2+n\right)/2 + (n+1) = \left((n+1)^2+(n+1)\right)/2$. Por lo que si $n \in A$ entonces $n+1 \in A$ y por el principio de inducción $A = \mathbb{N}$. Lo que dice que la formula $\sum_{i=0}^{n} i = \left(n^2+n\right)/2$ se cumple para todo los naturales.*

Nótese que éstos principios son equivalentes, si se empieza con el PIC para llegar al PIP solo se considera al conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n)\}$ y para el regreso se considera la propiedad $p(n) := n \in A$. Al PIC se le llamará PI a secas.

Ahora se enuncian otros principios de inducción y recuérdese que para cada $n \in \mathbb{N}, I_n := \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

DEFINICIÓN 1.3. *(Principio de Inducción Fuerte). Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que:*

1. $0 \in A$
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $I_n \subseteq A$ entonces $n \in A$.*

Entonces $A = \mathbb{N}$.

DEFINICIÓN 1.4. *(Principio de Inducción Generalizado). Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que:*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $I_n \subseteq A$ entonces $n \in A$.*

Entonces $A = \mathbb{N}$.

PROPOSICIÓN 1.1. *Los tres principios de inducción (PI, PIF, PIG) son equivalentes.*

Ahora se tienen varias versiones del principio de inducción y se usara indiscriminadamente cualquier versión sin previo aviso.

Es común tener teoremas sobre ciertos subconjuntos de los naturales como los pares, los primos, los naturales menores a k o lo mayores a k, en este caso también se puede usar inducción. La primera forma es para $X \subseteq N$ distinto del vacío y $B \subseteq X$, se aplica el principio de inducción sobre el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \in X \Rightarrow n \in B\}$. Esta forma es un poco complicada, lo que dice es que si en el conjunto X y se tiene un subconjunto B de X, entonces se puede aplicar el principio de inducción para demostrar que $B = X$, ésta forma de aplicar inducción tiene la ventaja de hacer facil de demostrar el caso base. Pero más facil de entender es el hecho de restringir la inducción vía restringir el buen orden.

EJEMPLO 1.2. *Sean $\mathbb{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los pares no negativos y $A = \{n \in \mathbb{P} \mid (-1)^n = 1\}$. Como $0 \in \mathbb{P}$ es el primer elemento par, y$(-1)^0 = 1$, por lo que $0 \in A$, por lo tanto se cumple el paso base. Ahora la hipótesis de inducción es que se cumple para $n \in A$, pero ese n es de la forma $2k$ con $k \in \mathbb{N}$ asi que el sucesor de n es $n+2$ que es el siguiente par, por lo que $(-1)^{n+2} = (-1)^n(-1)^2 = 1$. Por lo tanto $A = \mathbb{P}$.*

Por último un ejemplo de cómo no usar inducción, éste ejemplo se le debe a Pólya, consideremos la siguiente afirmación, todos los caballos tienen el mismo color, para facilitar el entendimiento se considerara que hay tantos caballos como naturales, es decir, que C_n es el n-esimo caballo y que c_n es el color del n-ésimo caballo. Se demostrará que por inducción que para cualquier n natural, si se tienen n caballos entonces estos n caballos tienen el mismo color. Para el paso base $n = 0$, es claro que si no se tienen caballos, pues estos tienen el mismo color, para aclarar un poco más las cosas, se considera el caso $n = 1$, si solo se tiene un caballo pues también todos los caballos tienen el mismo color. Ahora supone valido para n, es decir, para cualquier conjunto con n caballos todos los caballos de éste conjunto tiene el mismo color. Suponemos que se tiene un conjunto con $n+1$ caballos $\{C_1,\ldots,C_n,C_{n+1}\}$ entonces para el subconjunto $\{C_1,\ldots,C_n\}$ que consta de n caballos todos sus caballos tienen el mismo color por hipótesis de inducción, de manera análoga pasa igual para $\{C_2,\ldots,C_n,C_{n+1}\}$, pero C_2 esta en ambos conjuntos por los el color de los caballos del primer subconjunto es igual al color de los caballos del segundo subconjunto, de aquí se sigue que los $n+1$ caballos tienen el mismo color. Por el principio de inducción todos los caballos tienen el mismo color.

¿Qué error tiene la prueba anterior? Considere el paso inductivo cuando se aplica de 1 para 2 los subcojuntos son $\{C_1\}$ y $\{C_2\}$ que no tienen un caballos en común para aplicar la transitividad a los colores, como es natural hemos visto dos caballos de diferentes colores y es justo lo que hace fallar la prueba, que el argumento no funciona para 2.

2. El sistema de los números naturales

DEFINICIÓN 2.1. *Definimos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ como el conjuntos que satisface las siguientes condiciones*

1. *Existe un elemento distinguido $0 \in \mathbb{N}$*
2. *Existe una función inyectiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*
3. *No existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s(n) = 0$. (Por lo tanto s no es sobreyectiva)*
4. *Se satisface el principio de inducción **C**.*

OBSERVACIÓN 2.1. *Se puede demostrar que*

$$Im(s) = \mathbb{N} - \{0\}.$$

PROPOSICIÓN 2.1. *(Teorema de recursión) Sean X un conjunto, $t : X \to X$ una función y $x_0 \in X$. Entonces existe una única función $\varphi : \mathbb{N} \to X$ tal que $\varphi(0) = x_0$ y $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

El teorema de recursión nos permite introducir formalmente la definición de suma entre dos números naturales

PROPOSICIÓN 2.2. *(Suma) Existe una única función $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\varphi(n,0) = n$ y $\varphi(n,s(m)) = s(\varphi(n,m))$ para toda $m \in \mathbb{N}$.*

NOTACIÓN 2.1. *Para cualesquiera $m,n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $\varphi(m,n) = m+n$ y la llamaremos la suma de m y n.*

NOTACIÓN 2.2. *Denotaremos por $s(0) = 1$.*

OBSERVACIÓN 2.2. *Con la notación anterior podemos verificar que*

1. $m+0=m$ *para todo* $m\in\mathbb{N}$.
2. $m+s(n)=s(m+n)$ *para cualesquiera* $m,n\in\mathbb{N}$

COROLARIO 2.1. *Para todo* $n\in\mathbb{N}$ *se tiene que* $s(n)=n+1$.

DEMOSTRACIÓN. $n+1=n+s(0)=s(n+0)=s(n)$. □

Análogamente a como definimos la suma de números naturales podemos definir el producto apoyados también en la suma.

PROPOSICIÓN 2.3. *(Producto) Existe una única función* $\psi:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *tal que para cualesquiera* $m,n\in\mathbb{N}$, *se cumple que* $\psi(m,0)=0$ *y* $\psi(m,s(n))=\psi(m,n)+m$.

NOTACIÓN 2.3. *Para cualesquiera* $m,n\in\mathbb{N}$ *denotaremos por* $\psi(m,n)=m\cdot n$ *y lo llamaremos el producto de* m *y* n.

OBSERVACIÓN 2.3. *Con la notación anterior podemos verificar que: Dado* $m\in\mathbb{N}$ *fijo,*

1. $m\cdot 0=0$.
2. $m\cdot s(n)=m\cdot n+m$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$.

3. El principio de las pichoneras

DEFINICIÓN 3.1. *Un conjunto* A *es finito si y sólo si existe* $n\in\mathbb{N}$ *tal que* A *es equipotente con* I_n.

PROPOSICIÓN 3.1. *(Principio de inclusión-exclusión). Sean* A *y* B *conjuntos. Entonces*

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

El principio de las casillas afirma que si se tienen $n+1$ objetos que se deben repartir en n casillas, entonces debe haber al menos una casilla en donde se colocaron al menos dos objetos. Es decir

PROPOSICIÓN 3.2. *Si* A *y* B *son conjuntos finitos con* $|A|>|B|$ *entonces no existe ninguna función inyectiva de* A *en* B.

Luego, se tiene la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea* $f:A\to B$ *una función con* A, B *conjuntos finitos tales que* $|A|=|B|$. *Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. f *es inyectiva.*
2. f *es suprayectiva.*
3. f *es biyectiva.*

4. Calculo combinatorio

DEFINICIÓN 4.1. *Las ordenaciones con repetición de* n *elementos tomados de* m *en* m *es el conjunto de funciones*

$$\mathscr{OR}_n^m:=\{f:I_n\to I_m\mid f\text{ es una función}\}.$$

Al número total de ellas lo denotamos por $OR_n^m=|\mathscr{OR}_n^m|$.

PROPOSICIÓN 4.1. *Para cada* $n,m\in\mathbb{N}$ *se tiene que* $OR_n^m=n^m$.

DEFINICIÓN 4.2. *Las ordenaciones de* n *elementos tomados de* m *en* m *es el conjunto de funciones*

$$\mathscr{O}_n^m:=\{f:I_n\to I_m\mid f\text{ es una función inyectiva}\}.$$

Al número total de ellas lo denotamos por $O_n^m=|\mathscr{O}_n^m|$.

PROPOSICIÓN 4.2. *Para cada* $n,m\in\mathbb{N}$ *tales que* $1\le m\le n$ *se tiene que* $O_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$.

OBSERVACIÓN 4.1. *Cuando sucede en las ordenaciones que* $n=m$, *se suelen llamar permutaciones de* n *elementos.En virtud del Lema (3.3) se tiene que*

$$\mathscr{P}_n:=\{f:I_n\to I_n\mid f\text{ es una función biyectiva}\}.$$

Al número total de ellas lo denotamos por $P_n = |\mathscr{P}_n|$.

COROLARIO 4.1. *Para* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $P_n = n!$.

DEFINICIÓN 4.3. *Las combinaciones de n elementos tomados de m en m es el conjunto*

$$\mathscr{C}_n(I_m) := \{A \subseteq I_m \mid |A| = n\}.$$

Al número total de ellas lo denotamos por $C_n^m = |\mathscr{C}_n(I_m)|$.

PROPOSICIÓN 4.3. *Para cada* $n, m \in \mathbb{N}$ *tales que* $0 \leq m \leq n$ *se tiene que* $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Ejercicios

Inducción

EJERCICIO 4.1. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

1. $2 + 2 = 4$.
2. $2 \cdot 2 = 4$.
3. $2^2 = 4$.
4. $2 <_{\mathbb{N}} 4$.

Demuestra por inducción las siguientes afirmaciones.

EJERCICIO 4.2. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

EJERCICIO 4.3. $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EJERCICIO 4.4. $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

EJERCICIO 4.5. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3 = (n+1)^2\left(2(n+1)^2 - 1\right)$.

EJERCICIO 4.6. $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

EJERCICIO 4.7. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

EJERCICIO 4.8. *Para* $a, b \in \mathbb{R}, a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right)$.

EJERCICIO 4.9. *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una función. Si para todo* $n \in \mathbb{N}, f(n) < f(n+1)$ *entonces para todo* $n \in \mathbb{N}, n \leq f(n)$.

EJERCICIO 4.10. *Encuentra el mínimo* $k \in \mathbb{N}$*, tal que para todo* $n \geq k, n^2 - 9n + 19 > 0$.

EJERCICIO 4.11. *Para* $n \geq 3, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$.

EJERCICIO 4.12. *Para* $n \geq 6, 7n \leq 2^n$.

EJERCICIO 4.13. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

EJERCICIO 4.14. *Para* $n \geq 2, \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

EJERCICIO 4.15. *Para* $n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1$.

EJERCICIO 4.16. $n^2 + n$ *es par.*

EJERCICIO 4.17. *A un círculo se le trazan n cuerdas de manera que cada cuerda intersecta a todas las otras pero nunca hay tres concurrentes. Demuestra que se divide al circulo en* $\frac{n^2+n+2}{2}$ *partes.*

EJERCICIO 4.18. *Definimos una sucesión de números reales* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de manera recursiva, como sigue:*

1. $b_1 = b_2 = 1$.
2. *Para todo* $n \geq 3, b_n = \frac{1}{3}\left(b_{n-1} + \frac{3}{b_{n-2}}\right)$.

Demuestra que para todo $n \geq 1, 1 \leq b_n \leq \frac{3}{2}$.

EJERCICIO 4.19. *Definimos una sucesión de números reales $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ de manera recursiva, como sigue:*
1. $r_1 = 1$.
2. *Para todo* $n \in \mathbb{N}^*, r_{n+1} = 4r_n + 7$.

Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}, r_n = \frac{1}{3}\left(10 \cdot 4^{n-1} - 7\right)$.

La sucesión de Fibonacci $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ se define recursivamente como:
1. $F_1 = F_2 = 1$
2. Para todo $k \in \mathbb{N}^*, F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$

Demuestra las siguientes propiedades de la sucesión de Fibonacci.

EJERCICIO 4.20. $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.

EJERCICIO 4.21. $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_{n+1}F_n$.

EJERCICIO 4.22. *Para* $n \geq 2, F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

EJERCICIO 4.23. *Para* $n \geq 5, F_n = 5F_{n-4} + 3F_{n-5}$.

EJERCICIO 4.24. $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.

EJERCICIO 4.25. *Definimos* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *y* $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. *Demuestra que para* $n \geq 1$,

$$F_n = \frac{\varphi^n - \bar{\varphi}^n}{\varphi - \bar{\varphi}}$$

EJERCICIO 4.26. $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k F_k = F_{2n-1} - 1$.

EJERCICIO 4.27. $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$.

Definimos la función doble factorial de manera recursiva como sigue:
1. $0!! = 1!! = 1$
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2, n!! = n \cdot (n-2)!!$

EJERCICIO 4.28. *Demuestra que para toda* $n \in \mathbb{N}$ *se cumplen las siguientes formulas.*
1. $n! = n!! \cdot (n-1)!!$
2. $(2n)!! = 2^n \cdot n!$
3. $(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$

Definimos una función $M : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ de manera recursiva, como sigue:
1. $M(0) = 1$
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1, M(n) = n \cdot M(n-1) + (-1)^n$.

EJERCICIO 4.29. *Demuestra los siguiente:*
1. $M(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$.
2. *Para todo* $n \in \mathbb{N}, M(n) \leq n\,!$
3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}, M(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
4. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 1, M(n) = n! - \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} M(n-k)$.

Sea $Q \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$. Si $x \in \mathbb{R}$ se define el Q-número x, denotado por $[x]_Q$, de la siguiente forma:

$$[x]_Q = \frac{Q^x - 1}{Q - 1}$$

Así, se define también para $n \in \mathbb{N}$ el Q-factorial de manera recursiva como:
1. $[0]_Q! = 1$.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}, [n+1]_Q! = [n+1]_Q \cdot [n]_Q\,!$ Y por lo tanto para todo $n, k \in \mathbb{N}$, tales que $0 \leq k \leq n$, las Q-combinaciones de n en k, mediante la relación.

$$\binom{n}{k}_Q = \frac{[n]_Q!}{[k]_Q! \cdot [n-k]_Q!}$$

EJERCICIO 4.30. *Demuestra las siguientes propiedades:*

1. *Para todo* $n \in \mathbb{N}, [n]_Q! = Q^{\frac{n(n-1)}{2}} [n]_{\frac{1}{Q}}\, !$.
2. *Para todo* $n,k \in \mathbb{N}$*, tal que* $0 \le k \le n$, $\binom{n}{k}_Q = Q^{k(n-k)} \binom{n}{k}_{\frac{1}{Q}}$
3. *Para todo* $n,k \in \mathbb{N}$*, tal que* $1 \le k \le n$, $\binom{n+1}{k}_Q = Q^k \binom{n}{k}_Q + \binom{n}{k-1}_Q$

Combinatoria

EJERCICIO 4.31. *Prueba que para todo* $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. *Inténtelo sin usar el teorema del binomio.*

EJERCICIO 4.32. *Prueba que para todo* $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$. *Inténtelo sin usar el teorema del binomio.*

Demuestra las siguientes identidades:

EJERCICIO 4.33. $\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \binom{n+1}{3}$.

EJERCICIO 4.34. $\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

EJERCICIO 4.35. $\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$.

EJERCICIO 4.36. $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$.

EJERCICIO 4.37. $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

EJERCICIO 4.38. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \chi_{\{0\}}(n)$.

EJERCICIO 4.39. $\sum_{k \text{ pares}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impares}} \binom{n}{k}$.

EJERCICIO 4.40. *Demuestra la identidad de Vandermonde,*

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

Concluye después que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

EJERCICIO 4.41. *El alfabeto hawaiano consta de 12 letras. ¿Cuántas palabras de seis letras pueden hacerse?.*

EJERCICIO 4.42. *Layka esta haciendo el sistema de autoidentificación de un sitio en la red. El sabe que un password con letras, números y símbolos es más seguro. Sin embargo no entiende bien por que el sistema es vencido más facílmente si se específica la posición de cada tipo de caracter. Decide que en su sistema los passwords empezarán con 3 letras, seguidas por 2 dígitos, luego 1 simbolo de una lista de 10 simbolos, seguido por 2 letras mayúsculas, de nuevo 1 dígito para terminar con 1 simbolo. ¿Cuántos passwords hay con éstas condiciones?, ¿Cuántos passwords hay que sean cademas de letras mayúsculas o minúsculas, dígitos y simbolos?*

EJERCICIO 4.43. *En una carrera hay tres corridas de caballos. La primera con 10, la segunda y la tercera con 6 caballos. Se gana la apuesta cuando se predicen los primeros 3 lugares de cada corrida. ¿Cuántas predicciones diferentes hay?*

EJERCICIO 4.44. *¿Cuánto es el máximo de torres que se pueden poner en un tablero de ajedrez de tal forma que no se coman unas a otras?, ¿De cuántas formas se puede hacer esto?*

EJERCICIO 4.45. *¿Cuánto es el máximo de alfiles que se pueden poner en un tablero de ajedrez de tal forma que no se coman unos a otros?, ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?.*

EJERCICIO 4.46. *¿Cuánto es el máximo de reinas que se pueden poner en un tablero de ajedrez de tal forma que no se coman unas entre otras?, ¿De cuántas formas se puede hacer esto?.*

EJERCICIO 4.47. *¿Cuántas sucesiones de n dígitos hay en las que no hay dos veces consecutivas el mismo dígito?*

EJERCICIO 4.48. *Un equipo de dobles es elegido de un grupo de 6 jugadores de tennis. ¿Cuántos equipos diferentes se pueden elegir?*

EJERCICIO 4.49. *¿Cuántas manos de poker de 5 cartas diferentes se pueden tomar de una baraja de 5 cartas?*

EJERCICIO 4.50. *Un curso de matemáticas ofrece la opción de elegir entre 3 clases de 12 de matemáticas puras, 2 de 10 de matemáticas aplicadas, 2 de 6 de estadística y 1 de 4 de computación. ¿Cuántos cursos diferentes hay? Ejercicio 139. Si n puntos son puestos en una circunferencia y se trazan los segmentos que los unen. ¿Cuál es el mayor número de intersecciones que se puede tener entre estos segmentos?*

EJERCICIO 4.51. *¿Cuántas sucesiones de n dígitos cuya suma sea un multiplo de 5 hay?*

EJERCICIO 4.52. *¿Cuántos números hay entre 1 y 1,000,000 que no sean divisibles por 2, 5 o 11?.*

EJERCICIO 4.53. *¿Cuántos números hay entre 1 y 1,000,000 que sean un cuádrado perfecto o un cubo perfecto?*

EJERCICIO 4.54. *Una ciudad tiene forma rectangular y su red de calles consiste en 4 líneas paralelas de norte a sur y 15 líneas paralelas de este a oeste (No pensemos en el D.F. como ejemplo). ¿De cuántas maneras se puede ir a la esquina noreste si se empieza en la esquina suroeste y sólo se puede ir hacia el este y hacia el norte?.*

EJERCICIO 4.55. *Veinticinco de los caballeros del rey Arturo se sientan en su famosa mesa. Tres de ellos son elegidos para matar a un dragón. ¿De cuántas formas se pueden sentar de forma que estos tres estén sentados juntos?, ¿De cuántas formas se pueden sentar de forma que al menos dos de estos tres estén sentados juntos?.*

EJERCICIO 4.56. *Si se trazan n puntos en una circunferencia ¿Cúal es el número máximo de triángulos que forman los puntos?.*

EJERCICIO 4.57. *Hay 9 tarjetas de memoria que se quieren repartir entre 4 adolescentes para sus reproductores MP3. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?.*

EJERCICIO 4.58. *Demuestra que de 8 personas al menos hay 2 que cumplen el mismo día de la semana este año.*

EJERCICIO 4.59. *Demuestra que si hay 70 estudiantes de entre 11 materias diferentes y cada materia puede ser estudiada a lo más por 15 estudiantes entonces hay al menos 3 materias estudiadas al menos por 5 estudiantes.*

EJERCICIO 4.60. *¿Cuántos dados se deben lanzar para asegurar que al menos se repetirá un resultado?*

EJERCICIO 4.61. *¿De cuántas formas se pueden reordenar las letras de la palabra ABRACADABRA ?*

EJERCICIO 4.62. *¿De cuántas formas se pueden reordenar las letras de la palabra MISSISSIPPI?*

EJERCICIO 4.63. *Supóngase que n personas llegan a una fiesta entregan un sombrero y al salir de la fiesta les regresan algún sombrero. ¿De cuántas maneras se pueden regresar los sombreros de manera que a ninguna persona le toque el suyo?*

EJERCICIO 4.64. *Se tiran 2 dados. ¿Cuáles son los posibles resuntados? ¿De cuántas formas el resultado suma 7, 3, 9? ¿De cuántas formas el máximo es 3, 5? ¿De cuántas formas el minimo es 2,4?*

EJERCICIO 4.65. *Se reparten 17 computadoras en 5 escuelas, ¿De cuántas formas se puede hacer esto si se pide que a cada escuela le toque al menos una computadora?*

Capítulo 5

Sistemas de Ecuaciones

$\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial

DEFINICIÓN 0.1. *Podemos definir dos funciones en* $\mathbb{R}^n$*. La primera* $+\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dada por*

$$+((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

para $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$*. Notacionalmente, escribiremos*

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) := +((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))$$

La segunda $*\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dada por*

$$*(\lambda,(x_1,\dots,x_n)) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

para $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Notacionalmente, escribiremos*

$$\lambda(x_1,\dots,x_n) := *(\lambda,(x_1,\dots,x_n))$$

PROPOSICIÓN 0.1. $\mathbb{R}^n$ *es un espacio vectorial.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

Bibliografía

[1] Humberto Cárdenas, Lluis Emilio, Raggi Franciso, and Tomás Franciso. *Álgebra Superior*. Editorial trillas, 1995.