Índice general

Capítulo 1

Diagonalización

En general serán de dimensión finita a menos que se diga lo contrario

1. Vectores y valores propios

Definición. Para $T : V \to V$ una transformación lineal (con V no necesariamenre de dimensión finita) un elemento x de V distinto de cero y un escalar λ en K se llaman un vector propio de T, si $T(x) = \lambda x$. Es decir, λ es un valor propio si existe $x \neq 0$, tal que $T(x) = \lambda x$, x es un vector propio si existe $\lambda \in K$ tal que $T(x) = \lambda x$.

Definición. Para $T : V \to V$ una transformación lineal (con V no necesariamente de dimensión finita) y $\lambda \in K$ un valor propio, definimos $E_\lambda = \{x \in V | T(x) = \lambda x\}$ como el espacio propio de T.

Proposición 1. *Sean $T : V \to V$ un operador y λ un valor propio. Entonces E_λ es un subespacio.*

Demostración Primero $T(0) = 0 = \lambda \cdot 0$, entonces $0 \in E_\lambda$. Sean $x, y \in E_\lambda$ y $a \in K$,

$$\begin{aligned} T(x + ay) &= T(x) + aT(y) \\ &= \lambda x + a\lambda y \\ &= \lambda(x + ay) \end{aligned}$$

Por lo que $x + ay \in E_\lambda$ y E_λ es un subespacio de V.$\square$

Definición. Para un operador T en V y un valor propio λ, definimos a la multiplicidad geométrica de λ como la dimensión de E_λ.

Ejemplos

1. $T : V \to V$ dada por $T(x) = 0$ tiene como valor propio a 0 y $E_0 = V$.
2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una rotación por un ángulo que no sea múltiplo de π, T no tiene valores propios.
3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x, -5y)$ tiene como valores propios 2 y -5 con E_2 el eje x y E_{-5} el eje y.
4. $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, con $D(p) = p'$ 0 es un valor propio con $E_0 = P_0(\mathbb{R})$ los polinomios de grado menor o igual a 0.
5. $D : \zeta^\infty(\mathbb{R}) \to \zeta^\infty(\mathbb{R})$, con $D(f) = f'$ 1 es un valor propio con $E_1, \supseteq < e^x >$ generalizando para $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda \supseteq < e^{\lambda x} >$.

El siguiente es un criterio muy útil para saber si un escalar $\lambda \in K$ es un valor propio.

Proposición 2. *Sea T un operador en V (no necesariamente de dimensión finita) y $\lambda \in K$. λ es un valor propio de T si y sólo si $nuc(T - \lambda 1_V) \neq 0$*

Demostración

$\Rightarrow$) Si λ es un valor propio de T entonces existe $v \in V$ con $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$, por lo que $(T - \lambda 1_V)(v) = 0$ y $nuc(T - \lambda 1_V) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Si $nuc(T - \lambda 1_V) \neq 0$ entonces existe $v \in nuc(T - \lambda 1_V)$ con $v \neq 0$, por lo que $(T - \lambda 1_V)(v) = 0$ y $T(v) = \lambda v$.$\square$

Proposición 3. *Sea T un operador en V. Son equivalentes:*

1. *λ es un valor propio de T*
2. *$nuc(T - \lambda 1_V) \neq 0$*
3. *$T - \lambda 1_V$ es no invertible*

Demostración

Ejercicio.

Sin la hipótesis de la dimensión finita, la equivalencia anterior no es necesariamente cierta, por ejemplo

Si $V = K[x]$ y $T(p) = p'$, tenemos que 0 es valor propio, pero T no es invertible.

Pero en general se tiene que 1. o 2. implican 3.

Recordando que si T es un operador en V (no necesariamente de dimensión finita) y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$T^0 = 1_V$$
$$T^{n+1} = T \circ T^n$$

por lo que para $p \in K[x]$ un polinomio con coeficientes n K, si

$$p(x) = a_0 + a_1 x^1 + ... + a_n x^n$$

definimos

$$p(T) = a_0 1_V + a_1 T + ... + a_n T^n$$

Proposición 4. *Sean T un operador en V (no necesariamente de dimensión finita) y λ un valor propio. Entonces:*

1. *λ^K es un valor propio de T^n, para $n \in \mathbb{N}$*
2. *Para $a \in K$, λ es un valor propio de aT*
3. *Para $p \in K[x], p(\lambda)$ es un valor propio de $p(T)$*

Demostración

Ejercicio.

Definición. Un operador T en V (no necesariamente de dimensión finita) es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n = 0$.

Proposición 5. *Si T es un operador en V (no necesariamente de dimensión finita), T es nilpotente y λ un valor propio entonces λ es 0.*

Demostración Por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$ $T^n = 0$, por lo que λ^n es un valor propio del operador 0, por lo que $\lambda^n = 0$ y de aquí $\lambda = 0.\square$

Identificamos a K^n con $M_{n\times 1}(K)$ y recordamos que toda matriz $A \in M_n(K)$ define un operador en K^n, $T_A : K^n \to K^n$ dado por $T_A(x) = Ax$. Cuando hablemos de los valores propios o vectores propios de una matriz A nos referiremos a los valores propios y vectores propios de T_A.

2. Polinomio Característico

El polinomio característico de un operador T en V, lo definimos como

$$p_T(\lambda) = det([T - \lambda 1_V]_\beta^\beta)$$

donde β es una base ordenada, notemos que $p_T(\lambda) = det([T]_\beta^\beta - \lambda I)$ donde I es la matriz identidad. Hay que ver que el polinomio característico no depende de la elección de la base β, así que consideremos otra base ordenada γ

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) - & det([T]_\beta^\beta - \lambda I) \\ & = det([1_V]_\beta^\gamma) det([T]_\beta^\beta - \lambda I) det([1_V]_\gamma^\beta) \\ & = det([1_V]_\beta^\gamma ([T]_\beta^\beta - \lambda I)[1_V]_\gamma^\beta) \\ & = det([T]_\gamma^\gamma - \lambda I) \end{aligned}$$

Usamos el hecho de que el determinante abre la multiplicación y $([1_V]_\beta^\gamma)^{-1} = [1_V]_\gamma^\beta$.

Proposición 6. *Si T es un operador en V, el coeficiente principal de su polinomio característico es $(-1)^n$ donde n es la dimensión de V.*

Demostración Por inducción sobre n

Sea β una base ordenada de V y $A = [T]_\beta^\beta$.
Si $n = 1$, $p_T(\lambda) = det(A - \lambda I) = A_{11} - \lambda$.
Ahora el paso inductivo

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) = & det(A - \lambda I) \\ & = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} (A - \lambda I)_{n+1i} det((\widehat{A - \lambda I})_{n+1i} \\ & = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1+i} A_{n+1i} det((\widehat{A - \lambda I})_{n+1i}) \\ & + (A_{n+1n+1} - \lambda) det((\widehat{A - \lambda I})_{n+1n+1}) \end{aligned}$$

Observemos que

$$det((\widehat{A-\lambda I})_{n+1i}) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\tau)\prod_{j=1}^{n}((\widehat{A-\lambda I})_{n+1i})_{j\tau(j)}$$

por lo que $\prod_{j=1}^{n}((\widehat{A-\lambda I})_{n+1i})_{j\tau(j)}$ es un polinomio de grado a lo más n. Por otro lado $det((\widehat{A-\lambda I})_{n+1n+1}) = det(\hat{A}_{n+1n+1} - \lambda I) = p_{T_{\hat{A}_{n+1n+1}}}(\lambda)$ por hipótesis de inducción tiene coeficiente principal $(-1)^n$, por lo que $(A_{n+1n+1} - \lambda)det(\hat{A}_{n+1n+1} - \lambda I)$ tiene coeficiente principal $(-1)^{n+1}$, por lo observado anteriormente los demás polinomios tienen grado menor o igual a n, por lo que el coeficiente principal debe ser $(-1)^{n+1}$.$\square$

Corolario 1. *Sea T un operador en V y $dimV = n$, entonces $\partial p_T = n$.*

La utilidad del polinomio característico se sigue de la siguiente observación.

Observación Para T un operador en V y β una base de V, tenemos que $x \in V$ es un vector propio de T si y sólo si $[x]_\beta$ es un vector propio de $[T]_\beta^\beta$. También $\lambda \in K$ es un valor propio de T si y sólo si λ es un valor propio de $[T]_\beta$.

Demostración

Ejercicio.

Recordando que λ es un valor propio de T si y sólo si $T - \lambda I_V$ es no invertible, tenemos que λ es un valor propio de T si y sólo si $[T]_\beta^\beta - \lambda I$ es no invertible y esto último es equivalente a que $det([T]_\beta^\beta - \lambda I) = 0$. Por lo que llegamos a que λ es un valor propio de T si y sólo si $p_T(\lambda) = 0$. El problema de encontrar valores propios se lleva a encontrar raíces de un polinomio.

Ejemplo 1. Sea $T : K^2 \to K^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, x - y)$ y consideramos $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$, no hay que complicarnos la vida puesto que cualquier base funciona, en general elegiremos la canónica

$$
\begin{aligned}
[T]_\beta^\beta =& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
p_T(\lambda) =& det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
=& (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 \\
=& -1-\lambda+\lambda+\lambda^2-1 \\
=& \lambda^2 - 2 = (\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

Las raíces del polinomio característico son $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ y por lo tanto son valores propios. Queremos encontrar un vector propio para cada valor propio, es decir, un elemento no cero de $nuc(T-\lambda I_V)$, es decir, buscamos una solución no trivial

$$
\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Primero en el caso de $\lambda = \sqrt{2}$

$$
\begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x + (-1-\sqrt{2})y = 0 \end{cases}
$$

Haciendo $x = 1$, encontramos que $y = \sqrt{2} - 1$. Verificando $T(1, \sqrt{2}-1 = (\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}) = \sqrt{2}(1, \sqrt{2}-1)$ En el caso de $\lambda = -\sqrt{2}$

$$
\begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = 0 \\ x + (-1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases}
$$

De nuevo elegimos $x = 1$ y llegamos a que $y = -1-\sqrt{2}$, calculando $T(1, -1-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}) = -\sqrt{2}(1, -1-\sqrt{2})$.

Loúnico que necesitamos en este ejemplo es que $\sqrt{2} \in K$, en el caso de $\mathbb{Z}_3$ esto no se da $0^2 = 0, 1^2 = 1$ y $2^2 = 1$.

3. Diagonalización

Definición. Una matriz $D \in M_n(K)$ la llamamos diagonal si $D_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$, es decir, una matriz cuadrada es diagonal si fuera de su diagonal solo toma el valor 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Definición. Un operador T en V es diagonalizable si existe una base β de V tal que $[T]_\beta$ es una matriz diagonal.

Proposición 7. *Para T un operador en V son equivalentes*

1. *T es diagonalizable*
2. *Existe β base de V de vectores propios*

Demostración

1. $\Rightarrow$ 2.) Si T es diagonalizable existe β tal que $[T]_\beta$ es diagonal.

Si ponemos $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$, tenemos que $[T(v_i)]_\beta = [T]_\beta [v_i]_\beta$, si calculamos su $j-$ésima coordenada tenemos

$$\begin{aligned}
[T(v_i)]_{\beta_{j1}} =& ([T]_\beta [v_i]_\beta)_{j1} \\
=& \sum_{k=1}^{n} [T]_{\beta_{jk}} [v_i]_{\beta_{k1}} \\
=& \sum_{k=1}^{n} [T]_{\beta_{jj}} \delta_{jk} \delta_{ki} \\
=& [T]_{\beta_{jj}} \delta_{ji}
\end{aligned}$$

Lo que quiere decir que $T(v_i) = [T]_{\beta_{ii}} v_i$.

2. $\Rightarrow$ 1.) Si existe una base $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ de vectores propios con $T(v_i) = \lambda_i v_i$, lo que quiere decir que $[T]_{ij} = [T(v_j)]_{ii} = 0$, si $i \neq j$.$\square$

Para llevar esto aún más al lenguaje de matrices, recordamos que dos matrices A, B representan al mismo operador si existe $Q \in GL_n(K)$ tal que $A = QBQ^{-1}$, cuando esto pasa decimos que son semejantes, damos naturalmente la siguiente definición.

Definición. Una matriz cuadrada es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

Proposición 8. *Para T un operador en V, son equivalentes*

1. *T es diagonalizable*
2. *Para toda β base de V, tal que $[T]_\beta$ es diagonalizable*

3. *Existe β base de V, tal que $[T]_\beta$ es diagonalizable*

Demostración

1. $\Rightarrow$ 2.) Si T es diagonalizable, existe γ base de V tal que $[T]_\gamma$ es diagonal, sea β una base de V, $[1_V]_\beta^\gamma[T]_\beta[1_V]_\gamma^\beta = [T]_\gamma$, y como $[1_V]_\beta^\gamma$ es invertible con inversa $[1_V]_\gamma^\beta$, tenemos que $[T]_\beta$ es semejante a una matriz diagonal.

2. $\Rightarrow$ 3.) Obvio.

3. $\Rightarrow$ 1.) Si $[T]_\beta$ es diagonalizable, entonces existe $Q \in GL_n(K)$ con $Q[T]_\beta Q^{-1} = D$ con D una matriz diagonal. Consideramos que Q representa un operador que podemos poner $Q = [S]_\beta$ para algún operador S en V, notemos que $Q^{-1} = [s^{-1}]_\beta$, de aquí $[STS^{-1}]_\beta = D$ por lo que tenemos que si $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ entonces $STS^{-1}(v_i) = D_{ii}v_i$, por lo que $T(S^{-1}(v_i)) = D_{ii}(S^{-1}(v_i))$, es decir $S^{-1}(v_1), ..., S^{-1}(v_n)$ son vectores propios y como S^{-1} es un isomorfismo, son una base de vectores propios.
$\square$

4. Recordatorio de Suma Directa

Sean $V_i \leq V$ $i = 1, ..., n$ subespacios, la suma $\sum_{i=1}^n V_i$ es el subespacio formado por los elementos de la forma $v_1 + ... + v_n$ con $v_i \in V_i$ para toda $i = 1, ..., n$. Diremos que el subespacio $\sum_{i=1}^n V_i$ es una suma directa, si para cada $i = 1, ..., n$ $V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j = 0$ y lo denotaremos por $\bigoplus_{i=1}^n V_i$.

Proposición 9. *Sean $V_i \leq V$ y $dim(V_i) = m_i$ para $i = 1, ..., n$. La suma de los V_i es directa si y sólo si $dim(\sum_{i=1}^n V_i) = \sum_{i=1}^n$.*

Demostración

Ejercicio.

Proposición 10. *Sean $V_i \leq V$. $\sum_{i=1}^k V_i$ es suma directa si y sólo si para cualesquiera $\beta_i \subseteq V_i$ linealmente independiente, $\bigcup_{i=1}^k \beta_i$ es linealmente independiente. En este caso la unión siempre resutará ajena.*

Proposición 11. *Sea T un operador en V, $v_1, ..., v_n$ vectores propios de $\lambda_1, ..., \lambda_n$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, entonces $v_1, ..., v_n$ son linealmente independientes.*

Demostración

Por inducción sobre n.

Si $n = 0$, el conjunto de vectores es vacío y por lo tanto linealmente independiente.

Si $n = 1$, v_1 es linealmente independiente por ser distinto de cero.

Suponemos válido para n, y suponemos que $v_1, ..., v_{n+1}$ son linealmente dependientes, como $v_1, ..., v_n$ son linealmente independientes entonces

$$v_{n+1} = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n$$

Aplicando T y multiplicando por λ_{n+1} obtenemos las siguientes dos igualdades.

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} vn + 1 =& \mu\lambda_1 v_1 + ... + \mu_n \lambda_n v_n \\ \lambda_{n+1} vn + 1 =& \mu\lambda_{n+1} v_1 + ... + \mu_n \lambda_{n+1} v_n \end{aligned}$$

despejando obtenemos

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})v_1 + ... + \mu_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})v_n = 0$$

Por hipótesis de inducción

$$\mu_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$$

pero $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$ por hipótesis, por lo que $\mu_i = 0$ para $i = 1, ..., n$ lo que implica que $v_{n+1} = 0$! contradiciendo el hecho de que v_{n+1} era un vector propio. $\square$

Corolario 2. *Sea T un operador en V con $dimV = n$ y n valores propios diferentes. Entonces T es diagonalizable.*

Demostración. Para cada λ_i existe un vector propio v_i, el conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ es linealmente independiente y junto con la hipótesis de que $dimV = n$ tenemos que $v_1, ..., v_n$ es una base de vectores propios de V.$\square$

Corolario 3. *Sean T un operador en V y $\lambda_1, ..., \lambda_n$ valores propios de T diferentes entre sí. Entonces la suma de los E_{λ_i} es directa.*

Demostración

Sea $v_i \in E_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} E_{\lambda_j}$ entonces $v_i = v_1 + ... + v_{i-1} + v_{i+1} + ... + v_k$ con $v_j \in E_{\lambda_j}$ para $j = 1, ..., k$ entonces despejando a 0 tenemos que $v_1, ..., v_k$ son linealmente dependientes por lo que la única manera que esto pase y no se contradiga la proposición anterior es que $v_1 = 0$, por lo que $E_{\lambda_i} | \sum_{j \neq i} E_{\lambda_j} = 0$.$\square$

Definición. Un polinomio $p \in K[x]$ se escinde en K, si existen $\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_k \in K$ (no necesariamente diferentes) tales que $p(x) = \lambda(x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$.

Proposición 12. *Sea T un operador en V diagonalizable entonces p_T se escinde.*

Demostración Sea β una base de V de vectores propios, entonces $[T]_\beta = D$ es una matriz diagonal, por lo que $p_T(\lambda) = det(D - \lambda I) = (D_{11} - \lambda)...(D_{nn} - \lambda) = (-1)^n(\lambda - D_{11})...(\lambda - D_{nn})\square$

Definición. Para T un operador en V y λ un valor propio de T definimos la multiplicidad algebraica de λ como la multiplicidad de λ en el polinomio característico p_T, es decir, el mayor k tal que $(x - \lambda)^k | p_T(x)$.

Proposición 13. *Sea T un operador en V tal que p_T se escinde en K y m_i la multiplicidad algebraica de λ_i entonces $dimV = \sum m_i$.*

Proposición 14. *Sea T un operador en V y λ un valor propio de T, entonces la multiplicidad geométrica de λ es menor o igual a la multiplicidad algebraica de λ.*

Demostración. Sea $\{v_1, ..., v_k\}$ una base de E_λ, y la extendemos a una de V, $\beta = \{v_1, ..., v_k, ..., v_n\}$ entonces $[T]_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ donde $A_1 = \lambda I \in M_k(k)$, $A_2 \in M_{k \times n-k}(k)$, $A_3 \in M_{n-k}(k)$ y $0 \in M_{n-k \times k}(k)$

$$\begin{aligned} p_T(x) =& det([T]_\beta - xI) \\ =& det(A_1 - xI)det(A_3 - xI) \\ =& (-1)^k(x - \lambda)^k det(A_3 - xI) \end{aligned}$$

por lo que $(x - \lambda)^k | p_T(x)$.$\square$

Proposición 15. *Sea T un operador en V con $dimV = n$, tal que p_T se escinde en K y $\lambda_1, ..., \lambda_k$ los valores propios de T (diferentes) entonces son equivalentes:*

1. *T es diagonalizable*
2. *La multiplicidad algebraica coincide con la geométrica para todo valor propio.*

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2.) Si T es diagonalizable existe una base β de vectores propios llamamos $\beta_i = \beta \cap E_{\lambda_i}$, notamos que $\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$, β es la unión ajena de los β_i. Calculando

$$\begin{aligned} n =& |\beta| \\ =& \sum_{i=1}^{k} |\beta_i| \\ \leq& \sum_{i=1}^{k} dim(E_{\lambda_i}) \\ \leq& n \end{aligned}$$

De aquí $\sum_{i=1}^{k} dim(E_{\lambda_i}) = n$.

Si llamamos m_i a la multiplicidad algebraica de λ_i, sabemos que $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. Por lo que $dim(E_{\lambda_i}) = m_i$ para toda $i = 1, ..., k$.

2. $\Rightarrow$ 1.) Sea β_i una base de E_{λ_i}, entonces $\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$, por hipótesis β es linealmente independiente entonces

$$\begin{aligned} |\beta| =& \sum_{i=1}^{k} |\beta_i| \\ =& \sum_{i=1}^{k} dim(E_{\lambda_i}) \\ =& \sum_{i=1}^{k} m_i \\ =& n \end{aligned}$$

Por lo que β es base y de vectores propios. $\square$

5. Polinomio Mínimo

Recordemos que para T un operador en V le habíamos dado un sentido a $p(T)$ donde p es un polinomio en $K[x]$. Sin profundizar mucho, recordemos de cursos pasados que en un anillo conmutativo R, si definimos a divide a b, para $a, b \in R$, como que existe $c \in R$ tal que $ac = b$, esta relación nos da un preorden, es decir, la relación es reflexiva y transitiva.

Todo esto para dar la siguiente definición.

Definición. Sea T un operador de V, el polinomio mínimo de T, p^T, lo definimos como el mínimo polinomio mónico de $K[x]$ distinto de cero, que con el preorden mencionado anteriormente hace que $p^T(T) = 0$.

Proposición 16. *Sea T un operador en V, entonces p^T existe y es único.*

Demostración. Sea $n = dimV$, entonces $dim(End(V)) = n^2$ por lo que $1_V, T, ..., T^{n^2}$ son n^2+1 vectores que deben ser linealmente dependientes por lo que existen $a_0, ..., a_{n^2} \in K$ tales que $a_0 1_V + a_1 T + ... + a_{n^2} T^{n^2} = 0$ con algún $a_i \neq 0$ por lo que $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n^2} x^{n^2}$ es un polinomio que anula a T.

Ahora consideramos

$$I = \{\partial q \in \mathbb{N} | q \in K[x] \text{ con } q \neq 0 \text{ y } q(T) = 0\}$$

Claramente $I \subseteq \mathbb{N}$ y $\partial p \in I$, por lo que $I \neq \emptyset$, ahora por el principio del buen orden existe un mínimo en $m \in \mathbb{I}$, ese m es el grado de un polinomio f distinto de cero que anula a T, ahora veamos que es mínimo con respecto al preorden de la divisibilidad.

Sea $g \in K[x]$ tal que $g(T) = 0$, $g \neq 0$ y $m \leq \partial g$ entonces por el algoritmo de la división en polinomios existen $h, r \in K[x]$ tales que

$$g = fh + r \text{ con } \partial r < \partial f = m$$

Valuando en T

$$\begin{aligned} 0 = g(T) =& f(T)h(T) + r(T) \\ =& 0 \circ h(T) + r(T) \\ =& r(T) \end{aligned}$$

por lo que $r(T) = 0$ si ∂r es un natural tendríamos que $\partial r \in I$! contradiciendo que ∂f es mínimo, por lo que $\partial r = -\infty$ y $r = 0$. Así que $g = fh$ y $f|h$. La siguiente observación nos dará el truco de la unicidad, ya que tenemos el grado m, todos los polinomios de grado m que anulan a T son mínimos, pero si f y f' son dos polinomios que cumplen esto, entonces existe $a \in K$ tal que $af = f'$. Como $f|f'$ existe $h \in K[x]$ $fh = f'$, pero $m = \partial(f') = \partial(fh) = \partial(f) + \partial(h) = m + \partial(h)$ de donde $\partial(h) = 0$, por lo que $h = a$ con $a \in K$. El regreso también se vale, es decir, si f tiene grado m, $f(T) = 0$ y $a \in K$ entonces af tiene grado m y $af(T) = 0$. Por que el conjunto de polinomios de grado m que anulan a T, todos son múltiplos por un escalar.

Sabemos que existe al menos un polinomio f tal que $f(T) = 0$ y $\partial f = m$. Si f no es mónico entonces su coeficiente principal a es distinto de cero, por lo que $a^{-1}f$ es mónico y cumple lo deseado, por lo que llamemos $p^T = a^{-1}f$. Si f es otro polinomio mónico que cumple lo deseado, entonces $p^T = bf'$ con $b \in K$, pero p^T, bf' tienen el mismo coeficiente principal, en este caso el de p^T es 1 y el de bf' es b, por lo que $b = 1$ y $p^T = f'$, es decir, pedirle que sea mónico le da unicidad. □

Corolario 4. *Si T es un operador en V con $dimV = n$ entonces $\partial(p^T) \leq n^2$.*

Observación. Si T es el operador cero, entonces $p_T(x) = x$.

Ejemplos

1. Sea $T : K^2 \to K^2$ dado por $T(x, y) = (y, x)$, notemos que $T^2 = 1_{K^2}$ por lo que $T^2 - 1_{K^2} = 0$, en este caso $p^T(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, es fácil observar que ni $x - 1$ ni $x + 1$ anula a T. Ahora un pequeño cálculo para plantear cierta conexión
$$p_T(\lambda) = det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = p^T(\lambda)$$
2. Sea $T : K[x] \to K[x]$, dado por $T(f) = f'$, y veamos que T no tiene polinomio mínimo, puede ser confuso pero no imposible, sea $p \in K[x]$ un polinomio para que anule a T, se necesita que $p(T) = 0$, es decir, que $p(T)(f) = 0$, siendo más explícitos, si $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$,
$$p(T)(f) = a_0f + a_1f' + ... + a_nf^{(n)}$$
donde $f^{(i)}$ denota la $i-$ésima derivada, por lo que pedir que $p(T)(f) = 0$ es pedir que $a_0f+a_1f'+...+a_nf^{(n)} = 0$ si tomamos el caso particular de $f = x^n$ entonces $p(T)(x^n) = b_0+b_1x+...+b_nx^n$ donde $b_i = a_{n-i}(n-i)!$ con $i = 0, ..., n$ que si pedimos que $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, vemos que $p(T)(x^n) \neq 0$ al menos que p originalmente fuese cero, por lo cual T no tiene polinomio mínimo. . . . .

6. Subespacios $T-$invariantes

Definición. Sea T un operador en V y $W \leq V$, decimos que W es un espacio $T-$invariante, $W \leq_T V$, si $T(V) \subseteq V$. Pedir esta propiedad hace sentido en que para $W \leq_T V$ tenemos que $T|_W$ es un operador en W.

Ejemplos.

1. $0 \leq_T V$
2. $nucT \leq_T V$
3. $V \leq_T V$
4. $imT \leq_T V$

Proposición 17. *Sea T un operador en V y $W \leq_T V$, entonces $p_{T|_W} | p_T$.*

Demostración.
Sea β una base de W y la completamos a γ una base de V, entonces

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} [T]_\beta & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) =& det([T]_\gamma - \lambda I) \\ =& det([T]_\beta - \lambda I) det(B - \lambda I) \\ =& p_{T|W}(\lambda) det(B - \lambda I) \end{aligned}$$

de aquí $p_{T|_W}(\lambda) | p_T(\lambda)$.$\square$

Proposición 18. *Sea T un operador en V con $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ donde $V_i \leq_T V$, entonces $p_T = \prod_{i=1}^m p_{T|_{v_i}}$.*

Demostración.
Ejercicio

Observación. Para T un operador en V, $W \leq_T V$ y $f \in K[x]$, $f(T|_W) = f(T)|_W$
Ejercicio

Proposición 19. *Sea T un operador en V con $W \leq_T V$ entonces $p^{T|_W} | p^T$.*

Demostración.
$p^T(T|_W) = p^T(T)|_W = 0|_W = 0$ por la minimalidad de $p^{T|_W}$, concluimos que $p^{T|_W} | p^T$.$\square$

Definición. Para T un operador en V y $x \in V$ definimos $< x >^T$ como el subespacio generado por $\{T^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$, lo llamaremos el subespacio $T-$cíclico generado por x.

Proposición 20. *Sea T un operador en V entonces $p^T = mcm\{p^{T|_{<x>^T}} | x \in V\}$.*

Demostración.
Primero ponemos

$$p^T = mcn\{p^{T|_{<x>^T}} | x \in V\}$$

de la proposición anterior tenemos

$$p^{T|_{<x>^T}} | p^T \forall x \in V$$

es decir, p^T es un múltiplo común, de lo que se sigue que $m|p^T$.

Por la parte de ser un común múltiplo tenemos que $p^{T_{<x>^T}}|m$, para toda $x \in V$. Así que existe h_x tal que $p^{T_{<x>^T}} h_x = m$, valuando $T(x)$ en la igualdad anterior

$$\begin{aligned} m(T)(x) =& (h_x(T) \circ p^{T_{<x>^T}}(x))(x) \\ =& h_x(T)(p^{T_{<x>^T}}(T(x))) \\ =& h_x(T)(0) \\ =& 0 \end{aligned}$$

Es decir, m anula a T, por lo que $p^{T_{<x>^T}}|m$. Como los dos son mónicos y se dividen entre sí, no queda más que sean iguales. □

Lema 1. *Sea T un operador en V con $dim V = n$ y $< x >^T = V$ para algún V, entonces $x, T(x), ..., T^{n-1}(x)$ es una base de V.*

Demostración.
Si para algún $r \in \mathbb{N}^+$,

$$T^r(x) \in < x, T(x), ..., T^{r-1}(x) >$$

entonces $\{T^k(x)|k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x, T(x), ..., T^{r-1}\}$ por lo que $V \subseteq < x, T(x), ..., T^{r-1}(x) >$ y de aquí que $x, T(x), ..., T^{r-1}(x)$ genere, del curso pasado sabemos que $r \geq n$.

Dentro del mismo contexto sabemos que existe al menos un r con la propiedad antes mencionada, en caso contrario tendríamos que para todo $k \in \mathbb{N}^+$ $T^k(x) \notin < x, T(x), ..., T^{k-1}(x) >$ por lo que $\{x, T(x), ..., T^{k-1}(x)\}$ sería linealmente independiente para toda $k \in \mathbb{N}$ resultando en que V sería de dimensión infinita.

Lo anterior es para poder definir

$$s = \text{mín}\{r \in \mathbb{N}^+ | T^r(x) \in < x, T(x), ..., T^{r-1}(x) >\}$$

y que este exista dado que el conjunto es no vacío. Tengamos en cuenta que para s también se tiene $s \geq n$.

Por como se eligió $s, x, T(x), ..., T^{s-1}(x)$ es linealmente independiente por lo que $s \leq n$, de aquí $s = n$. Como ya se había notado, de aquí se deduce el hecho de que $x, T(x), ..., T^{n-1}(x)$ es base. $\square$

En la demostración anterior usamos mucho el hecho de que si tenemos un conjunto linealmente independiente S, entonces $S \cup \{x\}$ es linealmente independiente si y solo si $x \notin < S >$.

Teorema 1. *Sea T un operador en V con $dimV = n$ y $V =< x >^T$ para algún $x \in V$, entonces $p^T = \pm p_T$.*

Demostración

Por la proposición anterior $\beta = \{x, T(x), ..., T^{n-1}(x)\}$ es base de V.

Calculando $[T]_\beta$ tenemos

$$[T(x)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T^2(x)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T^{n-2}(x)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

y si $T^n(x) = a_0x + a_1T(x) + ... + a_{n-1}T^{n-1}(x)$ entonces

$$[T^n(x)]_\beta = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ahora

$$P_T(\lambda) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}\lambda \end{pmatrix}$$

Calculando tenemos

$$p_T(\lambda) = -\lambda det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}\lambda \end{pmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1}a_0 det \begin{pmatrix} -1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Como ejercicio queda demostrar que el último determinante vale 1. Notemos que el penúltimo determinante tiene la misma forma que el original, por lo que repitiendo el proceso llegamos a que

$$p_T(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - ... - a_1\lambda - a_0)$$

Evaluando x en $p_T(T)$ tenemos

$$p_T(T)(x) = (-1)^n(T^n(x) - a_{n-1}T^{n-1}(x)... - a_1T(x) - a_0x) = 0$$

De este hecho se sigue que $p_T(T)(T^i(x)) = 0$ para $i = 0, ..., n-1$ por lo que $P_T(T)$ anula a β y por lo tanto anula a V, de aquí $p_T(T) = 0$ y $p^T|p_T$.

Ahora si ponemos a $p^T(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + ... + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \lambda$ con $m \leq n$ y evaluamos a T y evaluamos a T tenemos que

$$0 = p^T(T) = b_0 1_V + bT + ... + b_{m-1}T^{m-1} + \lambda$$

en particular valdría para x. Si $m < n$, entonces $b_0x + b_1T(x) + ... + b_{m-1}T^{m-1}(x) + T^m(x) = 0$, lo cual contradice la independencia lineal de $x, T(x), ..., T^m(x)$, por lo que $m = n$ y como $p^T|p_T$ tenemos que $p^T = ap_T$ con $a \in K$, como p^T es mónico y el coeficiente principal de p_T es ± 1, se sigue el resultado. $\square$

Teorema 2 (Cayley-Hamilton)**.** *Sea T un operador en V, entonces $p_T(T) = 0$, es decir, $p^T|p_T$.*

Demostración

Sabemos que para $x \in V$

$$p_{T|_{<x>^T}} = \pm p^{T|_{<x>^T}}$$

y que

$$p_{T|_{<x>^T}}|p_T$$

por lo que $p^{T|_{<x>^T}}|p_T$, es decir, p_T es un común múltiplo de $p^{T|_{<x>^T}}$ corriendo por $x \in V$, y como p_T es el mínimo común múltiplo $p^T|p_T$.$\square$

Proposición 21. *Sea T un operador en V. T es diagonalizable si y solo si $p^T(x) = (x-\lambda_1)...(x-\lambda_k)$ con $\lambda_1, ..., \lambda_k$ diferentes entre sí.*

Demostración

$\Rightarrow$) Como T es base, existe β base de vectores propios, consideremos

$$q(x) = (x-\lambda_1)...(x-\lambda_k)$$

donde $\lambda_1, ..., \lambda_k$ son los distintos valores propios de T, tomemos $v \in \beta$, entonces $T(v) = \lambda_j$ para algún j de 1 a k, entonces

$$\begin{aligned}
q(T)(v) =&((x-\lambda_1)...(x-\lambda_{j-1})(x-\lambda_{j+1})...(x-\lambda_k))(T) \circ ((x-\lambda_j)(T))(v) \\
=&((x-\lambda_1)...(x-\lambda_{j-1})(x-\lambda_{j+1})...(x-\lambda_k))(T)(T(v)-\lambda_j v) \\
=&((x-\lambda_1)...(x-\lambda_{j-1})(x-\lambda_{j+1})...(x-\lambda_k))(T)(0) \\
=&0
\end{aligned}$$

Por lo que $q(T)$ anula a toda la base β y así que $q(T) = 0$ y de aquí $p^T|q$. Por otro lado

$$p^T(\lambda_j)v = p^T(T)(v) = 0$$

y como v es un vector propio es distinto de cero por lo que $p^T(\lambda_j) = 0$ y de aquí que los λ_j sean raíces de p^T, por lo que $q|p^T$, ahora como los dos son mónicos y se dividen entre sí $q = p^T$.

$\Leftarrow$) Si $p^T(x) = (x-\lambda_1)...(x-\lambda_k)$ con $\lambda_1, ..., \lambda_k$ diferentes. La demostración se hará por inducción sobre k y hacemos la observación que por el teorema anterior los λ_i son valores propios de T.

Base: Si $k = 1$, entonces $0 = p^T(T) = (x - \lambda_1)(T) = T - \lambda 1_V$ por lo que $T = \lambda 1_V$ y obviamente T es diagonalizable.

Si $k = 2$ entonces $0 = p^T(T) = (T-\lambda_1 1_V)(T-\lambda_2 1_V)$. Por el algoritmo de la división tenemos

$$x - \lambda_1 = (x - \lambda_2)1 + (\lambda_2 - \lambda_1)$$

de aquí

$$((x - \lambda_1) - (x - \lambda_2))(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} = 1$$

Por lo que aplicando T, tenemos

$$((T - \lambda_1 1_V) - (T - \lambda_2 1_V))(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} = 1_V$$

Para todo $v \in V$

$$\begin{aligned}(T - \lambda_2 1_V)((\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(T - \lambda_1 1_V)(v)) &= (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(T - \lambda_2 1_V)(T - \lambda_1 1_V)(v) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} 0(v) \\ &= 0\end{aligned}$$

entonces $(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(T - \lambda_1 1_V)(v) \in E_{\lambda_2}$.

Análogamente $(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(T - \lambda_2 1_V)(v) \in E_{\lambda_1}$.

Con lo anterior, para toda $v \in V$

$$v = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(T - \lambda_1 1_V)(v) - (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(T - \lambda_2 1_V)(v)$$

por lo que $v \in E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2}$ de aquí $V = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2}$.

Para cuando $k > 2$ y se vale para k, primero notemos que por hipótesis de inducción $S = T|_{\sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}}$ es diagonalizable por lo que $p^S(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$ por hipótesis de inducción, por otro lado $p^S(x)$ y $(x - \lambda_{k+1}$ son coprimos por lo que existen $f, g \in K[x]$

$$1 = p^S f + (x - \lambda_{k+1})g$$

Sea $v \in V$,

$$\begin{aligned} p^S(T) \circ (x - \lambda_{k+1} g(T)(v) =& g p^S(T)(x - \lambda_{k+1})(T)(v) \\ =& g p^T(T)(v) \\ =& 0 \end{aligned}$$

Por lo que $((x - \lambda_{k+1})g)(T)(v) \in nucp^S(T)$.

Af. $nucp^S(T) \subseteq \sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$. Ejercicio

Por otro lado

$$\begin{aligned} (x - \lambda_{k+1}) \circ (p^S f)(T)(v) =& p^T \circ f(T)(v) \\ =& f(T)(p^T(T)(v)) \\ =& f(T)(0) \\ =& 0 \end{aligned}$$

Por lo que $p^S f(T)(v) \in E_{\lambda_{k+1}}$.

Así para toda $v \in V$, $v \in \left(\sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}\right) + E_{\lambda_{k+1}}$.

Por lo que $V = \sum_{i=1}^{k+1} E_{\lambda_i}$.$\square$

Capítulo 2

Formas Bilineales

Definición. Una forma bilineal en un $K-$espacio V es na función $B : V \times V \to K$ tal que:

Para $x, x', y, y' \in V$ y $\lambda \in K$,

1. $B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y)$
2. $B(x, y + y') = B(x, y) + B(x, y')$
3. $(B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y) = B(x, \lambda y)$

esto es que sea lineal en cada variable.

Ejemplos

1. $V = K^n$ con n natural

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

2. $V = I([a, b])$ las funciones integrables en el intervalo $([a, b])$ con

$$B(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

3. $V = K^n$ y $A \in M_n(K)$

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}A\bar{y}^t$$

Definición. Para V un $K-$espacio, $Bil(V)$ es el conjunto de todas las formas bilineales sobre K.

Proposición 22. *Para V un $K-$espacio, $Bil(V)$ es un $K-$espacio.*

Demostración

Notemos que $Bil(V) \subseteq K^{V \times V}$ y como $K^{v \times V}$ es un $K-$espacio basta ver que $Bil(V)$ es un subespacio.

Primero $0(v, w) = 0$ es una forma bilineal, por lo tanto $0 \in Bil(V)$.

Después sean $B, B' \in Bil(V)$ y $\lambda \in K$. Para $x, x', y, y' \in V$ y $\alpha \in K$

$$\begin{aligned}(B + \lambda B')(x + x', y) =& B(x + x', y) + \lambda B'(x + x', y)\\ =& B(x, y) + B'(x', y) + \lambda(B'(x, y) + B(x', y))\\ =& B(x, y) + B(x', y) + \lambda B'(x, y) + \lambda B'(x', y)\\ =& (B + \lambda B')(x, y) + (B + \lambda B')(x', y)\end{aligned}$$

Análogamente

$$(B + \lambda B')(x, y') = (B + \lambda B')(x, y) + (B + \lambda B')(x, y')$$

También

$$\begin{aligned}(B + \lambda B')(\alpha x, y) =& B(\alpha x, y) + \lambda B'(\alpha x, y)\\ =& \alpha B(x, y) + \alpha\lambda B'(x, y)\\ =& \alpha(B + \lambda B')(x, y)\end{aligned}$$

Análogamente

$$\alpha(B + \lambda B')(x, y) = (B + \lambda B')(x, \alpha y)$$

Por lo tanto $B + \lambda B' \in Bil(V)$

Por lo tanto $Bil(V)$ es un $K-$subespacio y espacio en su propio derecho.

Del ejemplo 3 se tiene que las matrices representan algunas formas bilineales por lo que es natural preguntar si representa a todas, sobreentendiendo que hablamos del caso de dimensión finita.

Definición. Sea $B : V \times V \to K$ una forma bilineal sobre V con V de dimensión finita y $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V, definimos la matriz asociada a la forma B para la base β como

$$\hat{B}_{\beta ij} = B(v_i, v_j)$$

si no hay riesgo a confusión omitiremos la base, es decir nos quedaremos con $\hat{B}$

Proposición 23. *Sea $B \in Bil(V)$ y $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V, entonces $B(v, w) = [v]_\beta^t \hat{B}[w]_\beta$.*

Demostración

Para ver esto fijamos $v \in V$ y basta ver que

$$[B(v, \_)]_\beta = [v]_\beta^t \hat{B}$$

Calculando

$$\begin{aligned}
([v]_\beta^t \hat{B})_{ij} =& \sum_{k=1}^{n} [v]_{\beta_{1k}}^t \hat{B}_{kl} \\
=& \sum_{k=1}^{n} [v]_{\beta_{ik}}^t B(v_k, v_j) \\
=& \sum_{k=1}^{n} B([v]_{\beta_{ik}}^t v_k, v_j) \\
=& B(\sum_{k=1}^{n} [v]_{\beta_{ik}}^t v_k, v_j) \\
=& B(v, v_j) \\
=& [B(v, _)]_{\beta_j}
\end{aligned}$$

Proposición 24. *Sea $\wedge : Bil(V) \to M_n(K)$ para alguna base β finita de V, entonces $\wedge$ es un isomorfismo.*

Demostración

Ponemos a $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$.

Primero veamos que es lineal.

Sean $B, B' \in Bil(V)$ y $\lambda \in K$

$$\begin{aligned}(\widehat{B`\lambda B'})_{ij} =&(B + \lambda B')(v_i, v_j)\\ =&B(v_i, v_j) + \lambda B'(v_i, v_j)\\ =&\hat{B}_{ij} + \lambda \hat{B'}_{ij}\end{aligned}$$

Ahora demostraremos que es lineal dando la inversa $\phi : M_n(K) \to Bil(V)$ ponemos $\phi_A := \phi(A)$ y definimos

$$\phi_A(v, w) = [v]^t_\beta A[w]_\beta$$

Notemos que ϕ es lineal, para $A, A' \in M_n(K)$ y $\lambda \in K$

$$\begin{aligned}\varphi_{A+\lambda A'}(v, w) =&[x]^t_\beta(A + \lambda A')[w]_\beta\\ =&[x]^t_\beta A[w]_\beta + \lambda[x]^t_\beta A'[w]_\beta\\ =&\varphi_A(v, w) + \lambda\varphi_{A'}(v, w)\end{aligned}$$

Comprobemos que son inversas

Sea $B \in Bil(V)$

$$\begin{aligned}\varphi_{\hat{B}}(v, w) =&[v]^t_\beta \hat{B}[w]_\beta\\ =&B(v, w)\end{aligned}$$

por la proposición anterior.

$$\therefore \phi_{\hat{B}} = B$$

Sea $A \in M_n(K)$,

$$
\begin{aligned}
(\widehat{\phi_A})_{ij} =& \phi_A(v_i, v_j) \\
=& [v_i]^t_\beta A[v_j] \\
=& (\delta_i^t A \delta_j)_{ij} \\
=& \sum_{k=1}^{n} (\delta_i^t A)_{ik} \delta_{kj} \\
=& (\delta_i^t A)_{ij} \\
=& \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}^t A_{kj} \\
=& A_{ij}
\end{aligned}
$$

$$\therefore (\widehat{\phi_A}) = A\square$$

El resultado anterior contesta la pregunta de si las formas bilineales son representadas por las matrices y más aún lo hacen de manera única y lineal.

Definición. Una forma bilineal B es simétrica si $B(v, w) = B(w, v)$.

Proposición 25. *B es simétrica si y solo si $\hat{B}$ es simétrica.*

Demostración

Sea $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ la base en la que esta $\hat{B}$.

$$
\begin{aligned}
\hat{B}_{ij} =& B(v_i, v_j) \\
=& B(v_j, v_i) \\
=& \hat{B}_{ji}
\end{aligned}
$$

Si $\hat{B}$ es simétrica, entonces

$$\begin{aligned} B(v,w) =& [v]_\beta^t \hat{B}[w]_\beta \\ =& [v]_\beta^t \hat{B}^t [w]_\beta^{t^t} \\ =& ([w]_\beta^t \hat{B}[v]_\beta)^t \\ =& [w]_\beta^t \hat{B}[v]_\beta \square \end{aligned}$$

Definición. Una forma bilineal es antisimétrica si $B(v,w) = -B(w,v)$.

Proposición 26. *B es antisimétrica si y solo si $\hat{B}$ es antisimétrica.*

Demostración

Tarea.

Definición. $B \in Bil(V)$ es alternante si $B(v,v) = 0$.

Proposición 27. *Si $1+1 \neq 0$, entonces son equivalentes*

1. *B es alternante.*
2. *B es antisimétrica.*

Demostración

$\Rightarrow$) $0 = B(v+w, v+w) = B(v,v) + B(v,w) + B(w,v) + B(w,w) = B(v,w) + B(w,v)$

Por lo que $B(v,w) = -B(w,v)$

$\Leftarrow$) Si $B(v,v) = -B(v,v)$ entonces $2B(v,v) = 0$

Por lo que $B(v,v) = 0.\square$

Observación. De la demostración se sigue que aunque $1+1 = 0$, alternante implica antisimétrica.

Observación. En el caso de que $1+1 = 0$, se tiene que $-1 = 1$, por lo que

$$B(v,w) = -B(w,v) = B(w,v)$$

ser antisimétrico es lo mismo que ser simétrico.

Proposición 28. *$B \in Bil(V)$ es alternante si y solo si $\hat{B}$ es antisimétrica y $\hat{B}_{ii} = 0$.*

Demostración

Sea $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$

$\Rightarrow$) $\hat{B}_{ij} = B(v_i, v_j) = -B(v_j, v_i) = -\hat{B}^t_{ij}$

$\hat{B}_{ii} = B(v_i, v_i) = 0$

$\Leftarrow$)

$$\begin{aligned}
B(v,v) =& [v]^t_\beta \hat{B}[v]_\beta \\
=& \sum_{k=1}^{n} ([v]^t_\beta \hat{B})_{1k} [v]_{\beta_{k1}} \\
=& \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} [v]^t_{\beta_{ij}} \hat{B}_{jk}) [v]_{\beta_{k1}} \\
=& \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} [v]^t_{\beta_{ij}} \hat{B}_{jk} [v]_{\beta_{k1}} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} [v]^t_{\beta_{ij}} \hat{B}_{jk} [v]_{\beta_{k1}} \\
=& \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} [v]^t_{\beta_{ij}} \hat{B}_{jk} [v]_{\beta_{k1}} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} [v]_{\beta_{ij}} (-\hat{B}^t_{jk}) [v]^{tt}_{\beta_{k1}} \\
=& 0. \square
\end{aligned}$$

Ejercicio. Sean $SB(V) = \{B \in BIl(V) | B$ es simétrica$\}$ y $AB(V) = \{B \in Bil(V) | B$ es antisimétrica$\}$. Si $1 + 1 \neq 0$ entonces $Bil(V) = SB(V) \oplus AB(V)$.

Ahora veamos qué relación existe si cambiamos la base, si tenemos $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ y $\gamma = \{w_1, ..., w_n\}$, cómo están relacionados $\hat{B}_\beta$ y $\hat{B}_\gamma$.

Si ponemos $w_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} v_i$, entonces

$$\begin{aligned} B(w_i, w_j) &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ki} B(v_i, w_j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \lambda_{ki} B(v_i, v_j) \lambda_{mj} \end{aligned}$$

Por lo que $\hat{B}_\gamma = S^t \hat{B}_\beta S$ donde $S = [I_V]_\gamma^\beta$.

Veamos que si calculamos el determinante

$$\begin{aligned} det(\hat{B}_\gamma) =& det(S^t \hat{B}_\beta S) \\ =& det(S)^2 det(\hat{B}_\beta) \end{aligned}$$

Como cualquier matriz invertible se puede usar como un cambio de base, el conjunto de todos los determinantes que se le pueden asociar a una forma bilineal B son todos los múltiplos de los otros por un cuadrado del campo K.

Definición. El discriminante de B una forma bilineal lo definimos por

$$dis(B) = \{a^2 det(\hat{B}) | a \in K\}$$

notemos que por lo observado anteriormente no depende de la elección de una base particular para $\hat{B}$

Si $dis(B) \neq \{0\}$ diremos que B es una forma no degenerada.

Definición. Definimos el radical izquierdo de $B \in Bil(V)$

$$rad_L(B) = \{v \in V | \forall w \in V B(v, w) = 0\}$$

y el radical derecho por

$$rad_R(B) = \{v \in B | \forall w \in V B(w, v) = 0\}$$

Proposición 29. *Sea V de dimensión finita, son equivalentes para $B \in Bil(V)$:*

1. *B es no degenerada.*
2. $rad_L(B) = \{0\}$
3. $rad_R(B) = \{0\}$

Demostración

1. $\Rightarrow$ 2. Si $rad_L(B) \neq \{0\}$, entonces existe $v \in rad_L(B)$ con $v \neq 0$, por lo que existe una base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ con $v_1 = v$. Notemos que la matriz $\hat{B}_\beta$ tiene en su primer columna todas las entradas cero por hipótesis. Por lo que $det(\hat{B}_\beta) = 0$, por lo que $dis(B) = \{0\}$! contradiciendo el hecho de que B fuese no degenerada.

3. $\Rightarrow$ 1. Supongamos que no se cumple que B no es no degenerada, por lo que $det(\hat{B}) = 0$, elegimos β una base de V, por lo que de lo último se sigue existe $\in V$ con $v \neq 0$, tal que $\hat{B}_\beta[v]_\beta = 0$ de aquí que para todo $w \in V$ $B(w, v) = [w]^t_\beta \hat{B}_\beta [v]_\beta = 0$ de donde $v \in rad_R(B)$ por lo que $rad_R(B) \neq \{0\}$! por lo tanto $det(\hat{B}) \neq \{0\}$.$\square$

Definición. Una forma bilineal se llama reflexiva si $B(v, w) = 0$ implica $B(w, v) = 0$.

Definición. Si B es una forma bilineal reflexiva diremos que v es ortogonal a w si $B(v, w) = 0$ y lo denotaremos por $v \perp w$,notemos que pedir que B sea reflexiva es para que la relación $\perp$ sea reflexiva.

Definición. Para $S \subseteq V$ y B una forma bilineal reflexiva, definimos el complemento ortogonal de S para B como $S^\perp = \{v \in V | B(v, w) = 0$ para todo $w \in S\}$.

Proposición 30. *Sea B una forma bilineal reflexiva, $S, T \subseteq V$. Entonces:*

1. $S^\perp \leq V$

2. $S \subseteq S^{\perp\perp}$
3. *Si* $S \subseteq T$ *entonces* $T^{\perp} \subseteq S^{\perp}$
4. $S^{\perp} =< S >^{\perp}$

Definición. Sea B una forma bilineal reflexiva y $W \leq V$, el radical de W en B lo definimos como $rad_B(W) = W \cap W^{\perp}$. Diremos que W es un subespacio no degenerado si $rad_B(W) = 0$.

Proposición 31. *Sea B una forma bilineal reflexiva en V un espacio de dimensión finita y W un subespacio no degenerado de V, entonces $V = W \oplus W^{\perp}$.*

Demostración

Por hipótesis $W \cap W^{\perp} = 0$. Para ver que $V = W + W^{\perp}$ demostraremos que $dimV = dimW + dimW^{\perp}$. Pongamos que $dimV = n$ y $dimW = k$ y consideremos una base de W, $\{v_1, ..., v_k\}$ y extendámosla a una base de V con los elementos $\{v_{k+1}, ..., v_n\}$. Tomamos $v \in W^{\perp}$ y lo expresamos como combinación lineal $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, tenemos por un lado que $B(v_i, v) = 0$ para $i = 1, ..., k$ entonces $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j B(v_i, v_j) = 0$ para $i = 1, ..., k$ de aquí $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{B}_{\beta_{ij}} = 0$ para $i = 1, ..., k$ por lo que $[v]_\beta$ es anulado por la matriz de $k \times n$ formada por los primeros k renglones de $\hat{B}_\beta$, entonces $dimW^{\perp} \geq n - k$ por el teorema de la dimensión, de aquí $dimW + dimW^{\perp} \geq n - k + k = n$.

$\therefore W + W^{\perp} = W.\square$

Capítulo 3

Formas Cuadráticas

Definición. El grado de un monomio en n variables $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ lo definimos como $k_1 + k_2 + ... + k_n$.

Definición. Una forma cuadrática $n-$aria sobre un campo K es un polinomio p en n variables tal que es una combinación lineal de monomio de grado 2.

Ejemplos

1. $p(x, y, z) = xy + yz + z^2$
2. $p(x, y) = x^2 + xy + y^2$
3. $p(x) = 2x^2$
4. $p(x, y, z, w) = zw + w^2 + x^2 + yx$

Observación. Si consideramos una matriz A en $M_n(K)$, $p(x) = xAx^t$ es un polinomio en n variables, más aún

$$\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{i=1}^{n} x_{1i}(Ax^t)_{i1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_{1i}(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_{j1}^t) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{1i}A_{ij}x_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_ix_j
\end{aligned}$$

que es una combinación lineal de polinomios mónicos de grado dos, por lo que p es una forma cuadrática.

Dos matrices pueden inducir la misma forma cuadrática, por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p(x,y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= x^2 + xy + xy \\
&= x^2 + 2xy
\end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} q(x,y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x^2 + 2xy \end{aligned}$$

Supondremos que $1 + 1 \neq 0$.

Para una forma cuadrática q, en n variables

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_i x_j$$

podemos poner a $a_{ij} = a_{ji}$, de este modo la matriza A_q dada por

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{2} & \text{si } i \neq j \\ a_{ii} & \text{si } i = j \end{cases}$$

induce a la forma cuadrática q' es decir $xA_q x^t = q(x)$. Definimos $QF_n(K)$ el conjunto de formas cuadráticas en n variables sobre K.

Proposición 32. $QF_n(K) \leq K[x_1, ..., x_n]$.

Proposición 33. *Hay un isomorfismo entre $SM_n(K)$, las matrices simétricas de $n \times n$ y $QF_n(K)$.*

Demostración

Definimos $\varphi : SM_n(K) \to QF_n(K)$ por $\varphi(A) = q_A$ donde $q_A(x) = xAx^t$ y $\psi : QF_n(K) \to SM_n(K)$ $\psi(q) = A_q$ como se describió anteriormente.

Primero $q_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j$ por lo que $(A_{q_A})_{ij} = \begin{cases} \frac{2A_{ij}}{2} & \text{si } i \neq j \\ A_{ii} & \text{si } i = j \end{cases}$ lo que lleva a que $(A_{q_A})_{ij} = A_{ij}$.

Por lo que $A = A_{q_A}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
q_{A_q}(x) =& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{q_{ij}} x_i x_j \\
=& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{2} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \\
=& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_i x_j \\
=& q(x). \square
\end{aligned}$$

También, toda forma cuadrática $q \in QF_n(K)$ induce una forma bilineal simétrica en $Bil(K^n)$

$$B_q(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

y toda forma bilineal B induce una forma cuadrática

$$q_B(x) = B(x,x)$$

Ejercicio

0.1. Operadores Normales. Supondremos que $K = \mathbb{C}$ y que V es un $K-$espacio de dimensión finita con producto interior $< \_, \_ >$.

Definición. T un operador en V se llama normal si $T \circ T^* = T^* \circ T$.

Proposición 34. *Sea T un operador normal en V. Entonces $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de T si y solo si $\bar{\lambda}$ es valor propio de T^*.*

Demostración

Sea $v \in V$ con $v \neq 0$ y $T(v) = \lambda v$ entonces $T(v) - \lambda v = 0$,
entonces $< T - \lambda 1_V(v), Y - \lambda 1_V(v) >= 0$
entonces $< v, (T - \lambda 1_V)(v) >= 0$
entonces $< v, (T - \lambda 1_V)(T - \lambda 1_V)^*(v) >= 0$
entonces $< (T - \lambda 1_V)^*(v), (T - \lambda 1_V)^*(v) >= 0$
entonces $< (T^* - \bar{\lambda} 1_V)(v), (T^* - \bar{\lambda} 1_V)(v) >= 0$
entonces $T^*(v) = \bar{\lambda}(v)$.

Para el regreso solo basta recordar que $(T^*)^* = T$ y $\bar{\bar{\lambda}} = \lambda$.$\square$

Proposición 35. *Sea T un operador normal en $V \neq 0$ entonces T es diagonalizable.*

Demostración

Sean $\lambda_1, ..., \lambda_k$ los distintos valores propios de T, entonces

$$\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} \leq V$$

si la contención es propia entonces

$$W = \left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} \right)^{\perp} \neq 0$$

Consideremos $w \in W$y $v \in E_{\lambda_i}$, entonces

$$\begin{aligned} < T(w), v >= & < w, T^*(v) > \\ = & < w, \bar{\lambda}_i v > \\ = & \lambda < w, v > \\ = & \lambda \cdot 0 \\ = & 0 \end{aligned}$$

Por lo que $T(w) \in W$.

Ahora $p_{T|_W}|p_T$, como $p_{T|_W} \in \mathbb{C}[x]$, $p_{T|W}$ tiene una raíz λ, por lo que existe $x \in W \subseteq V$, con $x \neq 0$ $T(x) = T|_W(x) = \lambda x$, lo que implica que $x \in \left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} \right)$!.

Por lo que la contención no puede ser propia, por lo tanto $V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$.□

Observación. Si $T^* = f(T)$ con $f \in \mathbb{C}[x]$, entonces T es normal.

Proposición 36. *Sea T un operador en V entonces T es normal si y solo si T tiene una base ortogonal de vectores propios.*

Demostración

$\Rightarrow$ Si T es normal entonces T es diagonalizable por lo que $V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$ donde los λ_i son los distintos valores propios de T, consideramos una base ortogonal β_i en E_{λ_i}, sean $v_i \in \beta_i$ y $v_j \in \beta_j$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_i < v_i, v_j >= &< \lambda_i v_i, v_j > \\
= &< T(v_i), v_j > \\
= &< v_i, T^*(v_j) > \\
= &< v_i, \bar{\lambda}_j v_j > \\
= &\lambda_j < v_i, v_j >
\end{aligned}$$

Si $< v_i, v_j > \neq 0$ entonces $\lambda_i \neq \lambda_j$! por lo que $< v_i, v_j >$ y de aquí se tiene que $\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$ es una base ortogonal de vectores propios.

$\Leftarrow$) Si V tiene una base ortogonal de vectores propios entonces tiene una base ortonormal de vectores propios, por lo que $[T]_\beta$ es diagonal y $[T^*]_\beta = [\bar{T}]_\beta^t$ pero por ser diagonal $[T^*]_\beta = [\bar{T}]_\beta$. Claramente $[T]_\beta [T^*]_\beta = [T^*]_\beta [T]_\beta$. Por lo que $T^*T = TT^*$.□

1. Operadores Autoadjuntos

Ahora cambiemos a $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$ y recordemos que un operador T en V se llama autoadjunto si $T = T^*$.

Proposición 37. *Sea T un operador autoadjunto en V entonces T es diagonalizable.*

Demostración

Consideremos β base de V y $n = dimV$, entonces podemos pensar V como $\mathbb{R}^n$ y a $\mathbb{R}^n$ metido en $\mathbb{C}^n$ más aún esto extiende $[T]_\beta$ como transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ a una de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$.

Como $[T]_\beta$ es un operador sobre $\mathbb{C}$, tiene al menos un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$, más aún $\bar{\lambda}$ es un valor propio de $[T^*]_\beta$, pero por hipótesis $T^* = T$, por lo que λ y $\bar{\lambda}$ son valores propios de $[T]_\beta$ entonces existe $v \in \mathbb{C}^n$ con $v \neq 0$ y

$$\begin{aligned}\lambda v =& [T]_\beta v \\ =& [T^*]_\beta v \\ =& \bar{\lambda} v\end{aligned}$$

como $v \neq 0$ entonces $\lambda = \bar{\lambda}$, por lo que $\lambda \in \mathbb{R}$. Por lo que T tiene todos sus valores propios reales. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_k$ los diferentes valores propios de T, si $\bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i} \leq V$ es una contención propia definimos

$$W = \left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} \right)^{\perp} \neq 0$$

Sea $w \in W$ y $v \in E_{\lambda_i}$, entonces

$$\begin{aligned} < t(w), v >= & < w, T^*(v) > \\ = & < w, \lambda v > \\ = & \lambda < w, v > \\ = & 0 \end{aligned}$$

Por lo que W es $T-$invariante y por la unicidad del adjunto tenemos que $T^*|_W = (T|_W)^*$. Por lo que su $w \neq 0$ $T|_W$ sería autoadjunto pudiendo encontrar un valor propio de $T|_W$!.$\square$

Corolario 5. *Toda matriz simétrica en $\mathbb{R}$ es diagonalizable.*

2. Operadores Unitarios

Un operador se llama unitario si preserva el producto interior.

Proposición 38. *Sea T un operador normal en ${}_{\mathbb{C}}V$ entonces T es unitario si y solo si V tiene una base ortonormal de vectores propios con valores propios de norma 1.*

Demostración

$\Rightarrow$) Primero existe una base ortonormal β de vectores propios, más aún para $v \in \beta$

$$\begin{aligned} 1 = & ||v|| \\ = & ||T(v)|| \\ = & ||\lambda v|| \\ = & |\lambda|||v|| \\ = & |\lambda| \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Sea $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ la base de la hipótesis, como $T(\beta) = \{T(v_1), ..., T(v_n)\} = \{\lambda_1 v_1, ..., \lambda_n v_n\}$ que es un conjunto ortonormal, entonces T es unitario.
$\square$

3. Teorema Espectral

Aquí nos olvidaremos de la hipótesis de dimensión finita.

Definición. Si T es un operador en V, y $V = W \oplus U$ a modo de que si $v \in V$ se ve como $v = w + u$ con $w \in W$ y $u \in U$, entonces

$$T(v) = w$$

en este caso se le llamará a T la proyección de W através de U y se denotará por $\prod_U^W$.

Ejemplos

1. $\mathbb{R}^2 = O\bar{X} \oplus O\bar{X}$, por lo que

$$\prod_{O\bar{X}}^{O\bar{Y}}(x, y) = (x, 0)$$

$$\prod_{O\bar{X}}^{O\bar{Y}}(x, y) = (0, y)$$

2. Consideremos para $a \in \mathbb{R}^*$, $l_a = \{(x, ax) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$,

$$\begin{aligned}\prod_{0\bar{x}}^{l_a}(x, y) =& \prod_{0\bar{x}}^{l_a}((x - y/a, 0) + (y/a, y)) \\ =&(x - y/a, 0)\end{aligned}$$

3. Si $HI \neq 0$, $P(K) = \{f \in K^K | f \text{ es par }\}$ y $I(K) = \{f \in K^K | f \text{ es impar}\}$ entonces $K^K = I(K) \oplus P(K)$ $\prod_{P(K)}^{I(K)}(f)(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

Proposición 39. *Sea T un operador en V entonces T es una proyección si y solo si T es idempotente.*

Demostración

$\Rightarrow$)

$\Leftarrow$) Si T es idempotente entonces

$$V = imT \oplus nucT$$
$$T = \prod_{nucT}^{imT}$$

Definición. Llamaremos a una proyección ortogonal $\prod_U^W$ si $U = W^\perp$ y $W^{\perp\perp} = W$, en este caso denotaremos a la proyección por $\prod_W$.

Recordemos que si V tiene dimensión finita para todo subespacio W se da que $W^{\perp\perp} = W$

Proposición 40. *Sea T un operador en V entonces T es una proyección ortogonal si y solo si T es idempotente y normal.*

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $T = \prod_W$ para $W \leq V$. Sean $v, w \in V$ tales que $v = v_1 + v_2$ y $w = w_1 + w_2$ con $v_1, w_1 \in W$ y $v_2, w_2 \in W^\perp$

$$\begin{aligned}
<\prod_W(v), w> &= <v_1, w_1 + w_2> \\
&= <v_1, w_1> + <v_1, w_2> \\
&= <v_1, w_1> \\
<v, \prod_W(w)> &= <v_1 + v_2, w_1> \\
&= <v_1, w_1> + <v_1, w_2> \\
&= <v_1, w_1>
\end{aligned}$$

Por lo que $<\prod_W(v), w> = <v, \prod_W(w)>$ de aquí $\prod_W = \prod_W^*$ por lo que T es autoadjunto y por lo tanto normal.

$\Leftarrow$) Se tienen que demostrar dos cosas, $nucT = (imT)^{\perp}$ y que $imT = (imT)^{\perp\perp}$.

Primero $nucT = (imT)^{\perp}$

$\subseteq$) Sea $v \in nucT$, entonces $v = 0$ o v es un vector propio de cero, en el segundo caso tenemos que es un vector propio de T^* con valor propio cero conjugado, que es cero, por lo que $nucT^* = nucT$. (Esto porque T es normal).

Sea $w \in V$, entonces

$$< v, T(w) >=< T^*(v), w >=< 0, w >= 0$$

Por lo que $v \in (imT)^{\perp}$.

$\supseteq$) Sea $w \in (imT)^{\perp}$ entonces $t(w) \in imT$ calculando

$$\begin{aligned} < T(w), T(w) > &= < w, T^*T(w) > \\ &= < w, T(T^*(w)) > \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que $T(w) = 0$, por lo tanto $(imT)^{\perp} = nucT$.

Para la segunda parte siempre tenemos que $imT \subseteq (imT)^{\perp\perp}$. Por lo que sea $v \in (imT)^{\perp\perp}$, sabemos que como T es idmpotente $v = T(v) + (v - T(v))$, ahora $v - T(v) \in nucT = (imT)^{\perp}$ entonces $< v, v - T(v) >= 0 (v \in (imT)^{\perp\perp})$. Por otro lado $T(v) \in imT \subseteq (imT)^{\perp\perp}$. Por lo que $< T(v), v - T(v) >= 0$, de esto que

$$\begin{aligned} < v - T(v), v - T(v) > &= < v, v - T(v) > - < T(v), v - T(v) > \\ &= 0 \end{aligned}$$

De aquí $v - T(v) = 0$ por lo que $T(v) = v$, esto es que $v \in imT$, por lo tanto $imT = (imT)^{\perp\perp}$.$\square$

Proposición 41. *Sea $W \leq V$ con $W^{\perp\perp} = W$, entonces $\prod_W(v)$ es el elemento de W más cercano a v.*

Demostración

Primero $v = \prod_W(v) + (v - \prod_W(v))$ y $v - \prod_W(v) \in nucT = (imT)^{\perp} = W^{\perp}$.

Ahora

$$\begin{aligned}
||v-w||^2 &= < v-w, v-w > \\
&= < \prod_W(v) + (v - \prod_W(v)) - w, \prod_W(v) + (v - \prod_W(v)) - w > \\
&= < \prod_W(v) - w, \prod_W(v) - w > + < v - \prod_W(v), v - \prod_W(v) > \\
&= || \prod_W(v) - w||^2 + ||v - \prod_W(v)||^2 \\
&\geq ||v - \prod_W(v)||^2
\end{aligned}$$

lo que implica que $||v-w|| \geq ||v - \prod_W(v)||\square$

Teorema 3 (Teorema Espectral)**.** *Sea T un operador en V de dimensión finita. Si T es normal, si $K = \mathbb{C}$ y autoajunto, si $K = \mathbb{R}$ con $\lambda_1, ..., \lambda_k$ los diferentes valores de T y $T_i = \prod_{E_{\lambda_i}}$ entonces*

1. *Si $E^*_{\lambda_i} = \bigoplus_{j \neq 1} E_{\lambda_j}$ entonces $(E^*_{\lambda_i})^{\perp} = E_{\lambda_i}$*
2. $T_i T_j = \delta_{ij} T_i$
3. $1_V = \sum_{i=1}^k T_i$
4. $T = \sum_{i=1}^k \lambda_i T_i$

Demostración

Primero notemos que como T es diagonalizable $V = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$

1. T es autoadjunto entonces T es normal. Ahora sean $v \in E_{\lambda_i}$ y $w \in E_{\lambda_j}$ con $i \neq j$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_i < v, w > &= < \lambda_i v, w > \\
&= < T(v), w > \\
&= < v, T^*(w) > \\
&= < v, \bar{\lambda}_j w > \\
&= \lambda_j < v, w >
\end{aligned}$$

entonces $(\lambda_i - \lambda_j) < v, w >= 0$ como $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ entonces $< v, w >= 0$. Con esto tenemos que $E_{\lambda_i} \subseteq (E_{\lambda_j})^{\perp}$, si $i \neq j$ esto implica que $E^*_{\lambda_j} \subseteq (E_{\lambda_j})^{\perp}$. Como tenemos que $V = E_{\lambda_j} \oplus E^*_{\lambda_j}$ y $V = E_{\lambda_j} \oplus (E_{\lambda_j})^{\perp}$ llegamos a que $dim E^*_{\lambda_j} = dim((E_{\lambda_j})^{\perp})$ que unido con la contención anterior llegamos a que $E^*_{\lambda_j} = (E_{\lambda_j})^{\perp}$, por lo que $E_{\lambda_j} = (E_{\lambda_j})^{\perp\perp} = (E^*_{\lambda_j})^{\perp}$.

2. Como T_i es una proyección $T_i T_i = T_i$. Ahora si $i \neq j$, $T_j(T_i(v)) = T_j(E_{\lambda_i}) = T_j((E^*_{\lambda_i})^{\perp}) = 0$.

3. Como $V = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$ entonces todo $v \in V$ es de la forma $v = \sum_{i=1}^k v_i$ con $v_i \in E_{\lambda_i}$ por lo que $T_i(v) = \prod_{E_{\lambda_i}}(v) = v_i$, así

$$\sum_{i=1}^k T_i(v) = \sum_{i=1}^k v_i = v$$

4. Siguiendo con lo establecido

$$\begin{aligned}
T(v) &= T(\sum_{i=1}^k v_i) \\
&= \sum_{i=1}^k T(v_i) \\
&= \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \\
&= \sum_{i=1}^k \lambda_i T_i(v). \square
\end{aligned}$$

Corolario 6. *Sea T un operador normal en ${}_{\mathbb{C}}V$ entonces T es autoadjunto si y solo si todo valor propio de T es real.*

Demostración

$\Rightarrow$) Sea λ un valor propio de T y v un vector propio de λ entonces

$$\begin{aligned}\lambda v =& T(v)\\ =& T^*(v)\\ =& \bar{\lambda} v\end{aligned}$$

entonces $\lambda = \bar{\lambda}$.

$\Leftarrow$) Como

$$\begin{aligned}T^* =& (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i)^*\\ =& \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i T_i^*\end{aligned}$$

Como las proyecciones son autoadjuntas

$$\begin{aligned}=& \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i\\ =& T\square\end{aligned}$$

4. Triangulación Compleja

Aquí regresemos a la hipótesis de dimensión finita.

Teorema 4 (Descomposición de Schur)**.** *Sea T un operador en ${}_{\mathbb{C}}V$, entonces existe una base β tal que $[T]_\beta$ es triangular superior.*

Demostración

Como $p_T \in \mathbb{C}[x]$ entonces tiene al menos un valor propio λ_1, descomponemos a $V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_1}^{\perp}$.

Ahora consideramos bases ortonormales β_1' y β_1'' de E_{λ_i} y $E_{\lambda_i}^{\perp}$, por lo que $\beta_1 = \beta_1' \cup \beta_1''$ es una base ortonormal de V, más aún

$$[T]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & A_1' \\ 0 & A_2' \end{pmatrix}$$

Si A_2' es triangular el proceso termina, si no considero $T_2 : E_{\lambda_1}^{\perp} \to E_{\lambda_1}^{\perp}$ el operador inducido por A_2', así T_2 tiene un valor propio $\lambda_2 \neq \lambda_1$, consideramos β_2' y β_2'' bases de E_{λ_2} y $E_{\lambda_2}^{\perp}$ (en $E_{\lambda_1}^{\perp}$) para obtener $\beta_2 = \beta_2' \cup \beta_2''$.

Tenemos que

$$[A_2']_{\beta_2} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & a_1^2 \\ 0 & A_2^2 \end{pmatrix}$$

Por lo que si llamamos $\bar{\beta}_2 = \beta_1 \cup \beta_2$ tenemos que

$$[T]_{\bar{\beta}_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & A_1^{*_2} & A_2^{*_2} \\ 0 & \lambda_2 I & A_3^{*_2} \\ 0 & 0 & A_4^{*_2} \end{pmatrix}$$

Si A_4^* es triangular ya terminamos, si no repretimos el proceso. $\square$

Observación. Como se construye β se tiene que es una base ortonormal.