Notas de Conjuntos Simpliciales

Facultad de Ciencias, UNAM

Frank Patrick Murphy Hernandez

Jaime García Villeda

Índice general

Introducción

El objetivo de estas notas es introducir una maquinaria de carácter algebraico y combinatoria para el estudio de la topología algebraica. Estas notas buscas empezar a presentar los conjuntos simpliciales desde un punto constructivo, para despues introducir las nociones categoricas.

Mis dos referencias favoritas sobre conjuntos simplicales son el clásico libro de Peter May [**4**] y el innovador libro de Goerss y Jardine [**2**].

[**1**] [**6**]

Capítulo 1

Topología Combinatoria

“No existe tal cosa como matemáticas aburridas.”

Edgster Dijsktra.

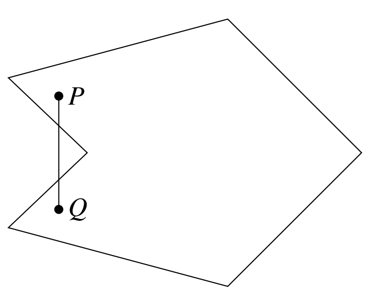
La topología combinatoria es el nombre antiguo que se le daba a la topología algebraica. Este proviene del hecho de que en sus inicios los invariantes asociados a espacios (principalmente poliedros) provenían de descomposiciones combinatorias, usando por ejemplo complejos simpliciales. En los inicios de esta, el tratamiento de las ideas que involucraba eran intuitivas y poco rigurosas, hasta que Browder demuestra el teorema de aproximación simplicial el cual será discutido en una de la secciones futuras. Para completar la historia el nombre de topología algebraica es adoptado por Lefschetz en 1942, el cual aparece en su famoso libro de topología combinatoria.

La referencia base para conjuntos convexos es [**3**] y la referencia para topología combinatoria es el libro de Pontryagin [**5**].

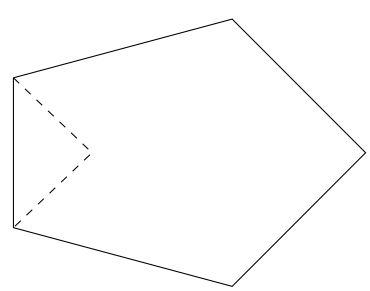
1. Conjuntos Convexos

Intuitivamente un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es convexo si para cualesquiera dos puntos, el segmento de recta que los une está contenido dentro del conjunto.

Un conjunto no convexo



Un conjunto convexo



Para poder dar una definición formal primero necesitamos definir el concepto de segmento de recta.

DEFINICIÓN 1. *Sean $x,y \in \mathbb{R}^n$. Definimos el segmento de recta $[x,y]$ como*

$$\{tx+(1-t)y \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\}$$

.

Notamos que como conjunto $[x,y]=[y,x]$, es decir, el segmento de recta no tiene dirección. Para los efectos que nosotros lo usaremos esto queda bien.

DEFINICIÓN 2. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que C es un conjunto convexo, si $[x,y] \subseteq C$ para cualesquiera $x,y \in C$.*

Como ejemplos claros de conjuntos convexos están $\mathbb{R}^n$ y cualquier singulete. A continuación se discuten otros ejemplos.

PROPOSICIÓN 1. *La bola unitaria $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ es un conjunto convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x,y \in \mathbb{B}^n$ y $t \in [0,1]$. Entonces:

$$\|tx+(1-t)y\| \leq t\|x\|+(1-t)\|y\| \leq t+(1-t)=1$$

De aquí $[x,y] \subseteq \mathbb{B}^n$. Por lo tanto $\mathbb{B}^n$ es un conjunto convexo. $\square$

PROPOSICIÓN 2. *Dados $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$, el conjunto $M=\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b\}$ es convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Observe que si $a:=(a_1,\ldots,a_n)$, entonces $M=\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \leq b\}$. Luego, dados $x,y \in M$ y $t \in [0,1]$ se tiene que

$$a \cdot (tx+(1-y)y) = ta \cdot x+(1-t)a \cdot y \leq tb+(1-t)b = b$$

Esto muestra que $[x,y] \subseteq M$. Por lo tanto M es convexo. $\square$

Al adaptar el argumento de la demostración anterior se puede ver que para $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$, los siguientes conjuntos también son convexos:

$$\left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n a_i x_i = b\right\}$$

$$\left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n a_i x_i < b\right\}$$

1.1. Cápsula convexa. De la discusión previa a la definición de conjunto convexo es claro que no todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es convexo. Sin embargo, a todo subconjunto se le puede asociar uno de tales conjuntos y, de hecho este proceso se puede hacer de forma mínima. Este será el siguiente punto a tratar.

PROPOSICIÓN 3. *Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ es un conjunto convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x,y \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Entonces $x,y \in C_i$ para toda $i \in I$. De aquí $[x,y] \subseteq C_i$ para toda $i \in I$. Así $[x,y] \subseteq \bigcap_{i\in I} C_i$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in I} C_i$ es convexo. $\square$

DEFINICIÓN 3. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos su cápsula convexa $\langle S\rangle$ como:*

c1) $S \subseteq \langle S\rangle$.

c2) $\langle S\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un conjunto convexo.*

c3) *Si $S \subseteq S'$ y S' es un conjunto convexo, entonces $\langle S\rangle \subseteq S'$.*

Antes de tratar el problema de existencia de la cápsula convexa, observe que las propiedades que la definen garantizan que si esta existe es única. Por otro lado, como sucede en muchas estructuras generadas que permean la matemática, pueden demostrarse distintas propiedades de dicha construcción directamente de la definición. A continuación incluimos una proposición con estas características.

PROPOSICIÓN 4. *Sean $S, S' \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:*

1. *S es convexo si y sólo si $\langle S\rangle = S$.*
2. *Si $S \subseteq S'$, entonces $\langle S\rangle \subseteq \langle S'\rangle$.*
3. $\langle S\rangle \cup \langle S'\rangle \subseteq \langle S\cup S'\rangle$
4. $\langle S\cap S'\rangle \subseteq \langle S\rangle \cap \langle S'\rangle$

DEMOSTRACIÓN. Las partes 1 y 2 se dejan como ejercicios.

Para la parte 3 notemos que $S, S' \subseteq S\cup S'$, por lo que de 2 se deduce que $\langle S\rangle, \langle S'\rangle \subseteq \langle S\cup S'\rangle$. Esto implica que $\langle S\rangle \cup \langle S\rangle \subseteq \langle S\cup S'\rangle$.

La parte 4 es análoga a la parte 3. $\square$

A continuación trataremos el problema de existencia de la cápsula convexa.

DEFINICIÓN 4. *Ponemos $\mathfrak{C}_n$ como el conjunto de todos los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$.*

PROPOSICIÓN 5. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle S \rangle$ existe. De hecho, $\langle S \rangle = \bigcap \{C \in \mathfrak{C}_n \mid S \subseteq C\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que la definición dada satisface las propiedades que definen a la cápsula convexa. En efecto, primero note que de la proposición 3 se deduce que dicha intersección es un convexo. Además claramente se cumple c1. Para concluir, si $S' \subseteq \mathbb{R}^n$ es un convexo tal que $S \subseteq S'$, entonces dicho subconjunto es un intersectando en la familia que define $\langle S \rangle$, por lo tanto se cumple c3. $\square$

NOTACIÓN 1. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Escribimos $\langle v_0, \ldots, v_m \rangle$ en vez de $\langle \{v_0, \ldots, v_m\} \rangle$. A los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son la cápsula convexa de un conjunto finito de puntos se le conoce como politopos.*

La definición de la cápsula convexa dada puede ser considerada abstracta pues por ejemplo no es obvio que la noción intuitiva que se tiene de politopo corresponda con la dada anteriormente. Así, la siguiente meta es dar una descripción de esta usando elementos que entre otras cosas permita empatar dichas nociones.

DEFINICIÓN 5. *Sean $v_0, \ldots, v_m, w \in \mathbb{R}^n$. Decimos que w es una combinación convexa de $v_0, \ldots, v_m$ si existen $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $w = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i$ con $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 0, \ldots, m$.*

EJEMPLO 1. *El segmento de recta entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ es igual al conjunto de combinaciones convexas de dichos puntos.*

Mas generalmente se tiene lo siguiente.

PROPOSICIÓN 6. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle S \rangle$ es el conjunto de combinaciones convexas de elementos de S.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathscr{C}(S)$ el conjunto de combinaciones convexas de elementos en S. Para demostrar la afirmación se va a probar una doble contención. Para ver que $\langle S \rangle \subseteq \mathscr{C}(S)$ basta con ver que $\mathscr{C}(S)$ es un conjunto convexo y que contiene a S. La segunda afirmación es obvia. Por otro lado, sean $x, y \in \mathscr{C}(S)$ y $t \in [0,1]$. Si $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ y $y = \sum_{i=1}^m \mu_i w_i$ con

$\lambda_i, \mu_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$ y $v_i, w_i \in S$, observe que $tx + (1-t)y$ es combinación lineal de elementos de S. Es claro que todos los coeficientes son no negativos y además

$$\sum_{i=1}^{n} t\lambda_i + \sum_{i=1}^{m} (1-t)\mu_i = t + (1-t) = 1$$

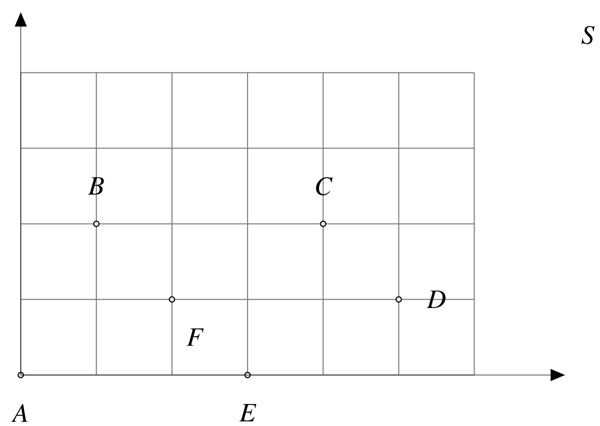
Esto demuestra la afirmación y concluye la prueba de la primera contención.

Para ver que $\mathscr{C}(S) \subseteq \langle S \rangle$, sea $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ combinación convexa con $v_1, \ldots, v_n \in S$. La prueba es por inducción sobre n. El caso de $n = 1$ es claro. Si suponemos que el resultado es válido para $n-1$ elementos, observe que puede suponerse que todos los $\lambda_i \neq 0$ pues en caso contrario $x \in \langle S \rangle$ por hipótesis de inducción. De esto se deduce que en particular $\lambda_n < 1$ y así:

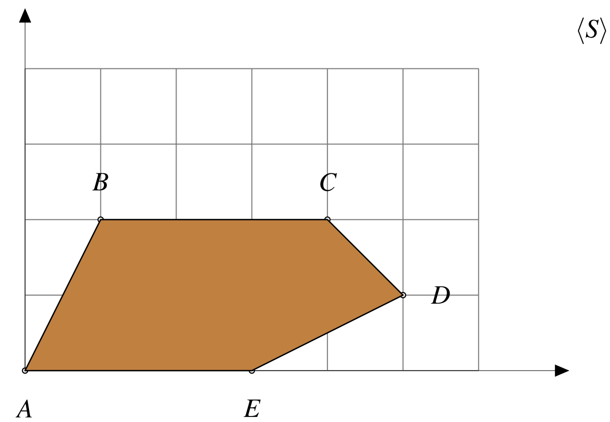
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i + \lambda_n v_n = (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} v_i + \lambda_n v_n$$

Observemos que $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} v_i \in \langle S \rangle$ por hipótesis de inducción. Entonces la igualdad anterior implica que $x \in \langle S \rangle$. □

EJEMPLO 2. *Considere* $S = \{A = (0,0), B = (2,1), C = (4,2), D = (5,1), E = (3,0), F = (2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.



De acuerdo al resultado anterior observemos que el segmento $[A, B] \in \langle S \rangle$. *Además el segmento formado al tomar cualquier punto de* $[A, B]$ *y* C *pertenece a* $\langle S \rangle$. *Más aún, esto sucede con todas las posibles combinaciones de puntos. Por lo tanto, la cápsula convexa de* S *queda como en la figura siguiente:*



Como se puede ver en el ejemplo anterior, la cápsula convexa puede obtenerse tomando cápsulas de subconjuntos. Este es un hecho general.

DEFINICIÓN 6. *Sea X un conjunto. Denotamos por $\mathscr{P}_f(X)$ a la familia de subconjuntos finitos de X.*

PROPOSICIÓN 7. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle S \rangle = \bigcup_{X \in \mathscr{P}_f(S)} \langle X \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado cualquier $X \in \mathscr{P}_f(S)$ se tiene que $\langle X \rangle \subseteq \langle S \rangle$. De esto se deduce que $\bigcup_{X \in \mathscr{P}_f(S)} \langle X \rangle \subseteq \langle S \rangle$.

Para la contención restante sea $x \in \langle S \rangle$. De la proposición 6 se deduce que x es combinación convexa de digamos $v_1, ..., v_m \in S$. Por lo tanto $x \in \langle v_1, ..., v_m \rangle \subseteq \bigcup_{X \in \mathscr{P}_f(S)} \langle X \rangle$. $\square$

1.2. Independencia afín. Observe que en el ejemplo 2 los puntos A, C, F son colineales pues pertenecen a la recta $y = \frac{1}{2}x$. Por tal razón su envolvente convexa es un segmento y esto hace que $F \in int(\langle S \rangle)$. Para asegurarnos que todos los puntos que definen un politopo se usen en la construcción de la envolvente convexa del conjunto al que pertenecen, es necesario introducir una noción de independencia. Esta se muestra a continuación.

DEFINICIÓN 7. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $v_0, \ldots, v_m$ son afínmente independientes si $v_1 - v_0, \ldots, v_m - v_0$ son linealmente independientes.*

PROPOSICIÓN 8. *Sean $v_0,\dots,v_m \in \mathbb{R}^n$. Entonces $v_0,\dots,v_m$ son afínmente independiente si y sólo si siempre que $\sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0$ con $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$, se tiene que $\lambda_j = 0$ para toda $j = 0,\dots,m$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Supóngase que $v_0,...,v_m$ son afínmente independientes y sean $\lambda_0,...,\lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$ y $\sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0$. Entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(v_i - v_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i\right)v_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \lambda_0 v_0 = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0$$

De la hipótesis se deduce que para todo $i = 1,...,m$, $\lambda_i = 0$. Más aún, como $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^m \lambda_i$, entonces $\lambda_0 = 0$.

$\Leftarrow$) Supóngase que existen $\lambda_1,...,\lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^m \lambda_i(v_i - v_0) = 0$. Defina $\lambda_0 := -\sum_{i=1}^m \lambda_i$, por lo que claramente $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$. Además se tiene lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(v_i - v_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i\right)v_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \lambda_0 v_0 = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i$$

De la hipótesis se deduce que para todo $i = 0,...,m$ se tiene que $\lambda_i = 0$. □

Del resultado anterior se deduce el siguiente corolario que muestra que en la definición de independencia afín no depende de v_0.

COROLARIO 1. *Sean $v_0,\dots,v_m \in \mathbb{R}^n$ e $i \in \{1,...,m\}$. Entonces $v_0,\dots,v_m$ son afínmente independientes si y sólo si $\{v_j - v_i \mid j \in \{1,...,i-1,i+1,...,m\}\}$ es linealmente independiente.*

Para concluir esta sección se presentan un par de resultados que muestran que la independencia afín se preserva al tomar subconjuntos y que además permite que las descomposiciones afines sean únicas.

PROPOSICIÓN 9. *Sean $v_0,\dots,v_m \in \mathbb{R}^n$ afinmente independientes. Si $v_{i_0},\dots,v_{i_k}$ son algunos de los vectores de $v_0,\dots,v_m \in \mathbb{R}^n$, entonces $v_{i_0},\dots,v_{i_k}$ son afinmente independientes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lambda_{i_0},\ldots,\lambda_{i_k}\in\mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=0}^{k}\lambda_{i_j}v_{i_j}=0$ con $\sum_{j=0}^{k}\lambda_{i_j}=0$. Si completamos los $\lambda_{i_0},\ldots,\lambda_{i_k}$ a $\lambda_0,\ldots,\lambda_m$ de modo que los nuevos lambdas sean cero. Por lo que tenemos que $\sum_{i=0}^{m}\lambda_i v_i=0$ y $\sum_{i=0}^{m}\lambda_i=0$. De donde se sigue que $\lambda_j=0$ para toda $j=0,\ldots,m$. En particular tenemos que $\lambda_{i_j}=0$ para toda $j=0,\ldots,k$. □

PROPOSICIÓN 10. *Sean $v_0,\ldots,v_m\in\mathbb{R}^n$ afinmente independientes. Entonces para $w\in\langle v_0,\ldots,v_m\rangle$ existen únicos $\lambda_0,\ldots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ tales que $w=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i v_i$ con $\sum_{i=0}^{m}\lambda_i=1$ y $\lambda_i\geq 0$ para todo $i=0,\ldots,m$.*

DEMOSTRACIÓN. La existencia de la descomposición se da por la proposición 6 y la unicidad por la proposición 8. □

A las lambda de la proposición anterior se les llaman las coordenadas baricéntricas de w con respecto $v_0,\ldots,v_m$

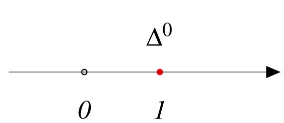
2. Complejos Simplicial Geométricos

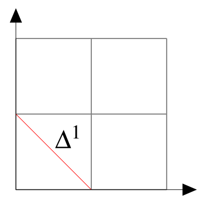
DEFINICIÓN 8. *Sea $C\subseteq\mathbb{R}^n$. Decimos que C es un k-simplejo si es la cápsula convexa de un conjunto S de $k+1$ elementos afinmente independientes. Comúnmente llamaremos a C un simplejo, su dimensión será k y denotaremos este hecho como $dim(C)=k$. Decimos que $\langle T\rangle$ es una m-cara de C, si $T\subseteq S$ es un conjunto no vacío y $|T|=m+1$. A una m-cara la llamamos propia si $m<k$. A las 0-caras de C, las llamamos vértices de C. A las 1-caras, las llamamos aristas de C. A las $(k-1)$-caras, las llamamos facetas de C.*

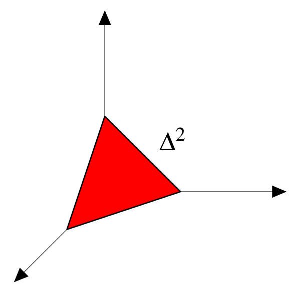
EJEMPLO 3. *Para n un natural, definimos el n-simplejo estandar Δ^n como la cápsula convexa de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Notamos que:*

$$\Delta^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid\sum_{i=0}^{n}x_i=1,x_i\geq 0\ \textit{para todo}\ i=0,\ldots,n\}$$

OBSERVACIÓN 1. *El n-simplejo estándar es en efecto un simplejo pues si $\{e_0,...,e_n\}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ es la base canónica, entonces $\Delta^n=\langle e_0,...,e_n\rangle$. Además,* $\dim(\Delta^n)=n$. *Algunas representaciones en dimensión baja son:*







DEFINICIÓN 9. *Sean C un n-simplejo y D un m-simplejo con conjunto de vértices* $C_0 = \{v_0, \ldots, v_n\}$ *y* $D_0 = \{w_0, \ldots, w_m\}$. *Diremos que* $T : C \longrightarrow D$ *es una transformación convexa, si* $T(C_0) \subseteq D_0$ *y T manda combinaciones convexas de elementos de C en combinaciones convexas de elementos de D.*

PROPOSICIÓN 11. *Sean C un n-simplejo y D un m-simplejo con conjunto de vértices* $C_0 = \{v_0, \ldots, v_n\}$ *y* $D_0 = \{w_0, \ldots, w_m\}$ *, y* $f : C_0 \longrightarrow D_0$ *una función. Entonces existe una única Transformación convexa* $F : C \longrightarrow D$ *que extiende a f. Más aún, F es inyectiva (supraryectiva, biyectiva) si sólo si f es inyectiva (supraryectiva, biyectiva).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $v \in C$ con coordenadas baricéntricas $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$, entonces $v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$. Definimos
$$F(v) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(v_i)$$
Sean $w_1, \ldots, w_r \in C$ y $\mu_1, \ldots, \mu_r \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{r} \mu_i = 1$. Ponemos $w = \sum_{i=1}^{r} \mu_i w_i$. Ahora bien, cada w_i tiene coordenadas baricentricas $\mu_{i0}, \ldots, \mu_{in}$ para $i = 1, \ldots, r$. Por lo que $w_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} v_j$. Así tenemos que:
$$w = \sum_{i=1}^{r} \mu_i w_i = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \mu_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \mu_i \mu_{ij} v_j$$
Observamos que $\sum_{i=1}^{r} \mu_i \mu_{ij} \geq 0$ y que:
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \mu_i \mu_{ij} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \mu_{ij} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i 1 = 1$$

Así por unicidad, tenemos que $\sum_{i=1}^{r}\mu_i\mu_{ij}$ es la j-ésima coordenada baricentrica de w. Así llegamos a que:

$$F(w)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\mu_i\mu_{ij}f(v_j)$$

Por lo que F es una transformación convexa.Notamos que como las coordenadas baricentricas son únicas tenemos que la función esta bien definida. Por otro lado las coordenadas baricentricas del vértice v_i son $0,\dots,0,1,0,\dots,0$ donde la posición del 1 es la i-ésima contado desde 0. Por lo que efectivamente $F(v_i)=f(v_i)$ para $i=0,\dots,n$. Ahora bien si existiese otra transformación convexa G que extiende a f, esta cumpliría que:

$$G(v)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(v_i)$$

para todo $v\in C$ con coordenadas baricéntricas $\lambda_0,\dots,\lambda_n$. Que por definición es F.

Si f es inyectiva, entonces $f(v_0),\dots,f(v_n)$ es afinmente independiente. Sean $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i,\sum_{i=1}^{n}\mu_i v_i\in C$ combinaciones convexas tales que $F(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i)=F(\sum_{i=1}^{n}\mu_i v_i)$. Por lo que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(v_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i f(v_i)$. Como el conjunto es afinmente independiente, tendremos que los coeficientes son únicos, por lo que $\lambda_i=\mu_i$ para $i=1,\dots,n$. Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i=\sum_{i=1}^{n}\mu_i v_i$.

Si F es inyectiva y $f(v_i)=f(v_j)$ pada algún $i,j=1,\dots,n$. Entonces $F(v_i)=f(v_i)=f(v_j)=F(v_j)$. Usando que F es inyectiva tenemos que $v_i=v_j$. Por lo tanto f es inyectiva.

Si f es suprayectiva y $w\in D$. Entonces $w=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j w_j$ combinación convexa. Como f es supra entonces existen $v_{i_1},\dots,v_{i_m}\in C_0$ tales que $f(v_{i_j})=w_j$ para $j=1,\dots,m$. Por lo que

$$w=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j w_j=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j f(v_{i_j})=F(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j v_{i_j})$$

Si F es suprayectiva y $w_j\in D_0$. Entonces existe $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\in C$ tal que $F(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i)=w_j$. Por lo que:

$$w_j=F(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(v_i)$$

Notemos que w_j es alguno de los $f(v_i)$ puesto que en caso contrario w_j no puede ser generado por una combinación convexa de $w_1,\dots,w_{j-1},w_{j+1},\dots,w_m$. Por otro lado la única combinación covexa de los vértices de D que me da w_j, es la trivial. Por lo tanto $f(v_i)=w_j$ $\square$

Notamos que la función F es continua. Ahora bien en caso de ser biyectiva, tendremos que f es una biyección y la función G que extiende f^{-1} resultará ser la inversa continua de F. Por lo que en caso de F sea biyectiva, tendremos que F es un homeomorfismo.

PROPOSICIÓN 12. *Sea C un n-simplejo. Entonces C es homeomorfo a Δ^n.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que C tiene por conjunto de vértices a $\{v_0,...,v_n\}$. Definamos $T:\Delta^n \to C$ mediante la regla de correspondencia $T(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$. Afirmamos que T es una función continua, para lo que hay que notar que existe $\mathbb{R}^m$ donde se encajan los simplejos en cuestión, luego, basta con probar que esta función es continua con la norma usual de $\mathbb{R}^m$. En efecto, considerando $x,y \in \Delta^n$ con coordenadas baricéntricas $(\lambda_0,...,\lambda_n)$ y $(\mu_0,...,\mu_n)$ respectivamente, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|T(x)-T(y)\| &= \left\| T\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i\right) - T\left(\sum_{i=0}^n \mu_i e_i\right)\right\| \\
&= \left\| \sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i) v_i \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^n |\lambda_i - \mu_i| \|v_i\| \\
&\leq \left(\max_{i=0,...,n} \|v_i\| \right) \sum_{i=0}^n |\lambda_i - \mu_i| \\
&\leq \left(\max_{i=0,...,n} \|v_i\| \right) \sum_{i=0}^n \|x-y\| \\
&\leq \left(\max_{i=0,...,n} \|v_i\| \right) (n+1) \|x-y\|
\end{aligned}$$

De esta desigualdad se sigue la propiedad deseada. Más aún, por el resultado anterior, esta función es inyectiva y suprayectiva pues a nivel de vértices lo es. Así, como T es una biyección continua entre un espacio compacto y uno de Hausdorff, esto implica que T es un homeomorfismo. □

COROLARIO 2. *Sean C y D dos n-simplejos. Entonces C es homeomorfo a D.*

PROPOSICIÓN 13. *Sean C un n-simplejo y D un m-simplejo con conjunto de vértices $C_0 = \{v_0,\dots,v_n\}$ y $D_0 = \{w_0,\dots,w_m\}$. Si $T: C \longrightarrow D$ es una transformación convexa, entonces T es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior, existe $\hat{T}: C \to \Delta^n$ un homeomorfismo tal que para cada $i=0,...,n$, $\hat{T}(v_i) = e_i$. Además, observe que existe una única transformación convexa $S:\Delta^n \to D$ tal que para cada $i=0,...,n$, $S(e_i) = T(v_i)$. Al repetir el argumento de la prueba para la proposición 12 se deduce que S es continua. Además, por construcción $T = S \circ \hat{T}$, de lo que se deduce el resultado pues T es composición de funciones continuas. $\square$

PROPOSICIÓN 14. *Sean $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ el n-simplejo estandar y $x \in C$. Si alguna de las coordenadas baricentricas de x es cero, entonces $x \in \partial(C)$*

DEMOSTRACIÓN. Usaremos el hecho de que Δ^n esta contenido en el plano H, donde

$$H = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \textstyle\sum_i x_i = 1\right\}.$$

Supongamos que alguna coordenada baricéntrica de x es cero, digamos que dicha coordenada es x_j. Como $x \in \Delta^n$, existe alguna coordenada baricéntrica tal que $x_k > 0$. Entonces, para toda $r > 0$,

$$y := x - \frac{r}{2}e_j + \frac{r}{2}e_k \in H,$$

pero $y \notin \Delta^n$ ya que $y_j < 0$. Además

$$\| y - x \| = \sqrt{2(\frac{r}{2})^2} = \frac{r}{\sqrt{2}} < r,$$

por lo tanto $y \in B_r(x) \cap H$. De donde se sigue que $B_r(x) \cap H \nsubseteq \Delta^n$. Lo cual es una contradicción ya que $x \in Int_H(\Delta^n)$. $\square$

PROPOSICIÓN 15. *Sean $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ el n-simplejo estandar y $x \in C$. Si las coordenadas baricentricas de x son positivas, entonces $x \in int(C)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como las coordenadas son estrictamente positivas, tendremos que $x \in H \cap (0,\infty)^{n+1}$ el cual es un abierto relativo a H. Por otro lado $H \cap (0,\infty)^{n+1} \subseteq \Delta^n$. De aquí que $H \cap (0,\infty)^{n+1} \subseteq int_H(\Delta^n)$. $\square$

COROLARIO 3. *Sea C un n-simplejo y $x \in C$. Entonces $x \in int(C)$ si y sólo si sus coordendas baricentricas son positivas, o su contrapuesta, $x \in \partial(C)$ si y sólo si alguna de sus coordendas baricentricas es cero.*

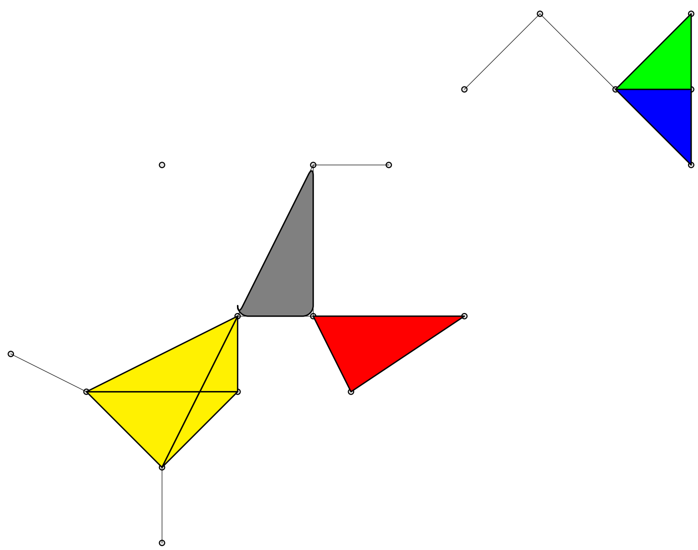
DEMOSTRACIÓN. Cualesquiera dos n-simplejos son homeomorfos y los homeomorfismos conmutan con el operador interior y frontera. Por otro lado tenemos que $X = int(X) \sqcup \partial(X)$ para cualquier espacio metrico. $\square$

DEFINICIÓN 10. *Un complejo simplicial geométrico $\mathscr{K}$ es una colección finita de simplejos en $\mathbb{R}^n$ que cumple:*

- *Si $C \in \mathscr{K}$ y D es una cara de C, entonces $D \in \mathscr{K}$*
- *Sean $C_1, C_2 \in \mathscr{K}$. Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, entonces $C_1 \cap C_2$ es una cara de C_1 y C_2.*

A los 0-simplejos de $\mathscr{K}$ los llamamos vértices de $\mathscr{K}$. Llamamos dimensión de $\mathscr{K}$ a $max\{dim(C) \mid C \in \mathscr{K}\}$. La denotamos por $dim(\mathscr{K})$.

EJEMPLO 4. *Complejo simplicial con 18 vértices (0-simplejos), 22 aristas (1-simplejos), 8 facetas (2-simplejos) y un 3-simplejo. Por lo tanto, la dimensión de este es 3.*



DEFINICIÓN 11. *Para $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico, definimos $F(\mathscr{K})$ como el conjunto de todas las caras propias de simplejos de $\mathscr{K}$.*

PROPOSICIÓN 16. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Entonces $F(\mathscr{K})$ es un complejo simplicial geométrico.*

DEMOSTRACIÓN. Primero hay que notar que cada cara de un simplejo es un simplejo por definición. Además, para cada $C \in \mathscr{K}$, $dim(C) < \infty$ y entonces C tiene un número finito de caras, de donde $\mathscr{K}$ es un conjunto finito de simplejos. Ahora, si $D \in F(\mathscr{K})$, existe un simplejo $C \in \mathscr{K}$ tal que D es una cara propia de C. Así, para toda cara D' de D

$$dim(D') \leqslant dim(D) < dim(C).$$

Por lo tanto las caras de los elmentos de $F(\mathscr{K})$, están en $F(\mathscr{K})$. Por otro lado, si $D_1, D_2 \in F(\mathscr{K})$ y $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, existen $C_1, C_2 \in \mathscr{K}$ tales que D_i es una cara propia de C_i $(i = 1, 2)$. Como $\mathscr{K}$ es un complejo simplicial geométrico, $D_1, D_2 \in \mathscr{K}$ y por lo tanto $D_1 \cap D_2$ es una cara de D_1 y D_2. □

PROPOSICIÓN 17. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Entonces $dim(F(\mathscr{K})) = dim(\mathscr{K}) - 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $C \in \mathscr{K}$ tal que $dim(C) = dim(\mathscr{K}) = k$. Si $C = \langle x_0, ..., x_k \rangle$, podemos definir un elemento $D \in F(\mathscr{K})$ como

$$D := \langle x_0, ..., x_{k-1} \rangle.$$

Por lo tanto $k - 1 \leqslant dim(F(\mathscr{K}))$. Además, para todo $D \in F(\mathscr{K})$, $dim(D) < k$ ya que los elementos en $F(\mathscr{K})$ son caras propia de simplejos en $\mathscr{K}$. En consecuencia

$$k - 1 \leqslant dim(F(\mathscr{K})) < k.$$

Y así $dim(F(\mathscr{K})) = k - 1$. □

DEFINICIÓN 12. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. La realización geométrica de $\mathscr{K}$ la definimos como $\bigcup \mathscr{K}$, y la denotamos por $|\mathscr{K}|$.*

DEFINICIÓN 13. *Sea C un n-simplejo. Definimos $T(C)$ como el conjunto de caras de C y $S(C)$ como el conjunto de caras propias de C.*

PROPOSICIÓN 18. *Sea C un n-simplejo. Entonces $T(C)$ y $S(C)$ son complejos simpliciales geometricos.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $D \in T(C)$ y E una cara de D. Como D es una cara de C, entonces E es una cara de C, y así $E \in T(C)$. Notamos que $S(C) = F(T(C))$. Por lo que $S(C)$ es un complejo simplicial geometrico. □

PROPOSICIÓN 19. *Sea C un n-simplejo. Entonces $|T(C)| = C$*

DEMOSTRACIÓN. Todas las simplejos de $T(C)$ estan contenidos en C, por lo que $|T(C)| = \bigcup_{D \in T(C)} D = C$. □

PROPOSICIÓN 20. *Sea C un complejo simplicial geométrico. Entonces $\partial(C) = |S(C)|$.*

DEMOSTRACIÓN. Notamos que $x \in |S(C)|$ siempre y cuando $x \in D$ para D una cara propia de C. Lo que implica que alguna de las cooordenadas baricentricas de x es cero. $\square$

DEFINICIÓN 14. *Sean $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ complejos simpliciales geométricos. Decimos que $\mathscr{L}$ es un subcomplejo de $\mathscr{K}$ si $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{K}$*

DEFINICIÓN 15. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n y $0 \leq r \leq n$. Definimos el r-esqueleto de $\mathscr{K}$, $sk_r(\mathscr{K})$, como el conjunto de todos los simplejos de $\mathscr{K}$ de dimensión menor o igual a r.*

PROPOSICIÓN 21. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n y $0 \leq r \leq n$. Entonces $sk_r(\mathscr{K})$ es un subcomplejo de $\mathscr{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que todo elemento de $sk_r(\mathscr{K})$ es un elemento de $\mathscr{K}$, entonces los elementos de $sk_r(\mathscr{K})$ cumplen claramente las condiciones que definen a un complejo simplicial geométrico. Más aún, esto claramente implica que $sk_r(\mathscr{K}) \subseteq \mathscr{K}$. $\square$

PROPOSICIÓN 22. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n, y $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ subcomplejos de $\mathscr{K}$. Entonces $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$ son subcomplejos de $\mathscr{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ es un complejo. En efecto, dados $C \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ y $D \subseteq C$ una cara, el hecho de que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son complejos implican que $D \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$. Más aún, si $C, D \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ y $C \cap D \neq \emptyset$, al ser $\mathscr{K}$ un complejo, esto implica que $C \cap D$ es cara de C y D.

En lo que respecta a $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$, dado $C \in \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$ y $D \subseteq C$ una cara, dado que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $C \in \mathscr{L}_1$, esto implica que $D \in \mathscr{L}_1$ y por lo tanto $D \in \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$. Además la prueba de la segunda condición es análoga a la demostrada en el caso anterior. $\square$

DEFINICIÓN 16. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Decimos que $\mathscr{K}$ es conexo si no existen dos subcomplejos $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ de $\mathscr{K}$ tales que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \emptyset$ y $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2 = \mathscr{K}$.*

PROPOSICIÓN 23. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Entonces $\mathscr{K}$ es conexo si y sólo si para cualesquiera dos vértices v y w existe una sucesión de vértices $v = v_0, \ldots, v_n = w$ tales que $\{v_i, v_{i+1}\}$ es un 1-simplejo de $\mathscr{K}$ para $i = 0, \ldots, n-1$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Argumentando por contrapositiva suponga que existen v y w vértices que no se pueden conectar por un 1-simplejo de $\mathscr{K}$. Considere $\mathscr{L}_1 = \{C \in \mathscr{K} \mid$ existe $c \in C$ vértice que se puede conectar con v mediante una colección finita de 1-simplejos en $\mathscr{K}\}$, así como $\mathscr{L}_2 = \mathscr{K} - \mathscr{L}_1$. Para concluir la prueba se tiene que probar que estos conjuntos son subcomplejos de $\mathscr{K}$. En efecto, si $C \in \mathscr{L}_1$ y $D \subseteq C$ es una cara, entonces sea $c \in C$ un testigo de que $C \in \mathscr{L}_1$. Como D es cara de C, existe una sucesión de 1-simplejos en $\mathscr{K}$ que empieza un vértice de D y termina en c. Al considerar las dos sucesiones se obtiene la sucesión buscada y por lo tanto, $D \in \mathscr{L}_1$.

Para la segunda condición, considere $C, D \in \mathscr{L}_1$ tales que $C \cap D \neq \emptyset$. Al ser $\mathscr{K}$ complejo, $C \cap D$ es cara de C y D en $\mathscr{K}$. Además, como $C \cap D \subseteq C, D$, entonces $C \cap D \in \mathscr{L}_1$. Esto prueba que $\mathscr{L}_1$ es complejo. Además, de forma análoga se demuestra que $\mathscr{L}_2$ es complejo, lo que concluye la prueba.

$\Leftarrow$) Argumentando nuevamente por contrapositiva, si existen dichos subcomplejos $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, considere $v \in \mathscr{L}_1$ y $w \in \mathscr{L}_2$ vértices. Entonces v y w no pueden definir una sucesión de 1-simplejos de $\mathscr{K}$ que comience y termine en w. $\square$

DEFINICIÓN 17. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $\mathscr{L}$ un subcomplejo de $\mathscr{K}$. Decimos que $\mathscr{L}$ es una componente de $\mathscr{K}$ si $\mathscr{L}$ es conexo y existe $\mathscr{M}$ un subcomplejo de $\mathscr{K}$ tal que $\mathscr{L} \cap \mathscr{M} = \emptyset$ y $\mathscr{L} \cup \mathscr{M} = \mathscr{K}$.*

Notemos que como un complejos simplicial geométrico tiene una cantidad finita de simplejos, las componentes conexas de este, estas deben ser un número finito. Además, de la prueba del resultado anterior se deduce que estas siempre existen pues dado un vértice en un complejo simplicial geométrico, el conjunto de todos los simplejos que tienen un vértice con el cual se puede conectar el vértice inicial es un subcomplejo y además, el complemento de dicho subcomplejo respecto al complejo en cuestión es un subcomplejo que satisface las propiedades requeridas en la definición. Por otro lado, el siguiente resultado dice que las componentes conexas son únicas.

PROPOSICIÓN 24. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico, y $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_m$ componentes de $\mathscr{K}$. Entonces para cualesquiera i, j con $i \neq j$, se cumple que $\mathscr{L}_i \cap \mathscr{L}_j = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos la contrapositiva; para eso supongamos que $\mathscr{L}_i, \mathscr{L}_j \subseteq \mathscr{K}$ son componentes tales que $\mathscr{L}_i \cap \mathscr{L}_j \neq \emptyset$. Al ser $\mathscr{L}_i$ una componente, existe un subcomplejo $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{K}$ tal que $\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M} = \emptyset$ y $\mathscr{K} = \mathscr{L}_i \cup \mathscr{M}$. La última igualdad implica que $\mathscr{L}_j = (\mathscr{L}_i \cap \mathscr{L}_j) \cup (\mathscr{M} \cap \mathscr{L}_j)$, lo que da una descomposición de $\mathscr{L}_j$ en dos subcomplejos. Por conexidad y el hecho de que $\mathscr{L}_i \cap \mathscr{L}_j \neq \emptyset$ se deduce que $\mathscr{M} \cap \mathscr{L}_j = \emptyset$, lo que implica que $\mathscr{L}_j \subseteq \mathscr{K} \setminus \mathscr{M} = \mathscr{L}_i$. Esto prueba que $\mathscr{L}_j \subseteq \mathscr{L}_i$. Además, al adapatar el algumento anterior cambiando los papeles de $\mathscr{L}_i$ con $\mathscr{L}_j$ se deduce que la contención en la otra dirección también sucede y así se concluye que $\mathscr{L}_i = \mathscr{L}_j$. $\square$

Respecto al problema de la existencia requerimos un resultado previo.

PROPOSICIÓN 25. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Si $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{K}$ es un subcomplejo conexo, entonces existe una componente, $\mathscr{L}'$ tal que $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}'$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero note que si $\mathscr{K}$ es conexo, no hay nada que demostrar. En caso contrario, existen dos subcomplejos $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2 \subseteq \mathscr{K}$ tales que $\mathscr{K} = \mathscr{K}_1 \cup \mathscr{K}_2$ y $\mathscr{K}_1 \cap \mathscr{K}_2 = \emptyset$. Note que $\mathscr{L}$ debe ser subcomplejo de exactamente uno de tales subcomplejos, así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{K}_1$. Si este subcomplejo es conexo, hemos terminado, en caso contrario podemos repetir el mismo proceso anterior hasta encontrar un subcomplejo conexo en el cual $\mathscr{L}$ sea un subcomplejo. $\square$

De esto se deduce lo siguiente:

COROLARIO 4. *Todo complejo simplicial geométrico es unión de sus componentes conexas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Para cualquier $\{v\} \in \mathscr{K}_0$ se tiene que existe $\mathscr{L}_v \subseteq \mathscr{K}$ una componente tal que $\{\{v\}\} \subseteq \mathscr{L}_v$. Por lo tanto, $\mathscr{K} = \bigcup_{\{v\} \in K_0} \mathscr{L}_v$. $\square$

3. Topología de la realización

PROPOSICIÓN 26. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $X \subseteq |\mathscr{K}|$. Entonces X es cerrado si y sólo si $X \cap C$ es cerrado en C para todo $C \in \mathscr{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Esto se sigue de la definición de la topología inducida en un subespacio.

$\Leftarrow$) Como cada simplejo $C \in \mathscr{K}$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$, entonces C es cerrado en $|\mathscr{K}|$. Ahora bien, como $X \cap C$ es cerrado en C, tendremos que $X \cap C$ es cerrado en $\mathscr{K}|$. Así notamos que:

$$X = \bigcup_{C \in \mathscr{K}} X \cap C$$

Por lo cual es una unión finita de cerrados y el resultado se sigue. $\square$

COROLARIO 5. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico, X un espacio topológico y $f\colon |\mathscr{K} \longrightarrow X$ una función. Entonces f es continua si y sólo si $f|_{|T(C)|}$ es continua para todo $C \in \mathscr{K}$.*

4. El Teorema de Aproximación

DEFINICIÓN 18. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Denotamos por $\mathscr{K}_0$ el conjunto de vértices de $\mathscr{K}$.*

DEFINICIÓN 19. *Sean $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ dos complejos simpliciales geométricos y $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ una función. Diremos que f es un morfismo simplicial, si:*

- *Para todo $\sigma \in \mathscr{K}$, $f(\sigma) \in \mathscr{L}$.*
- *Si $x \in |\mathscr{K}|$ con $x \in \sigma$ para algún $\sigma \in \mathscr{K}$ con $\{x_0, \ldots, x_r\}$ sus vértices y $x = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k x_k$ la descomposición de x en sus coordenadas baricéntricas, entonces*
$$f(\sum_{k=0}^{r} \lambda_k x_k) = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k f(x_k)$$

OBSERVACIÓN 2. *Note que la condición 1 en la definición implica que un morfismo simplicial manda vértices en vértices.*

PROPOSICIÓN 27. *Sean $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ complejos simpliciales geométricos, y $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ y $g\colon |\mathscr{L}| \longrightarrow |\mathscr{M}|$. Entonces $gf\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{M}|$ es un morfismo simplicial.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma \in \mathscr{K}$, entonces $f(\sigma) \in \mathscr{L}$; por lo tanto $g(f(\sigma)) \in \mathscr{M}$. En consecuencia $gf(\sigma) \in \mathscr{M}$. Sea $x \in |\mathscr{K}|$ con $x \in \sigma$ para algún $\sigma \in \mathscr{K}$ con $\sigma = \langle x_0, \ldots, x_r \rangle$ y $x = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k x_k$, entonces

$$f(\sum_{k=0}^{r} \lambda_k x_k) = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k f(x_k).$$

Por lo tanto $f(x_k) \in \langle f(x_0), \ldots, f(x_r) \rangle$ y así

$$g(f(x)) = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k g(f(x_k)).$$

En consecuencia gf es un morfismo simplicial. □

PROPOSICIÓN 28. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Entonces, $1_{|\mathscr{K}|} : |\mathscr{K}| \to |\mathscr{K}|$ es un morfismo simplicial.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma \in \mathscr{K}$, entonces $1_{\mathscr{K}}(x) = x$ para todo $x \in \sigma$. Por lo tanto $1_{\mathscr{K}}(\sigma) = \sigma \in \mathscr{K}$. Sea $x \in |\mathscr{K}|$ con $x \in \sigma$ para algún $\sigma \in \mathscr{K}$ con $\sigma = \langle x_0, \ldots, x_r \rangle$ y $x = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k x_k$. Entonces

$$1_{\mathscr{K}}(x) = x = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k x_k = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k 1_{\mathscr{K}}(x_k).$$

Por lo tanto $1_{\mathscr{K}}$ es morfismo simplicial. □

PROPOSICIÓN 29. *Sean $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ dos complejos simpliciales geométricos y $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ un morfismo simplicial. Entonces f es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Lo que se va a demostrar es que para cada $\sigma \in \mathscr{K}$, la restricción de f a σ, $f|_{\sigma} : \sigma \to |\mathscr{L}|$, es continua. En efecto, considere $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en σ que converge a un elemento $x \in \sigma$. Note que si $\sigma \in \mathscr{K}$ tiene por vértices $\{v_0, ..., v_n\}$, entonces $x_k = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^{(k)} v_i$ y $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$, donde estas descomposiciones son las descomposiciones de cada uno de los elementos en sus coordenadas baricéntricas. Dado que $x_k \to x$ cuando $k \to \infty$, entonces para cada $i = 0, ..., n$ se cumple que $\lambda_i^{(k)} \to \lambda_i$ cuando $k \to \infty$. Esto implica que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i^{(k)} f(v_i) \to \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(v_i)$ cuando $k \to \infty$, lo que dice que $f(x_k) \to f(x)$ cuando $k \to \infty$ por ser f un morfismo simplicial, lo que concluye la prueba. □

PROPOSICIÓN 30. *Sean $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ complejos simpliciales geométricos, y $f_0\colon \mathscr{K}_0 \longrightarrow \mathscr{L}_0$ una función tal que para cualquier $A \subseteq \mathscr{K}_0$ con $\langle A \rangle \in \mathscr{K}$, se cumple que $\langle f(A) \rangle \in \mathscr{L}$. Entonces existe un único morfismo simplicial $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ tal que extiende a f_0.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $x \in |\mathscr{K}|$, existe $\sigma \in \mathscr{K}$ tal que $x \in \sigma$. Si $\{v_0, ..., v_n\}$ son los vértices de σ, sea $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$ la descomposición de x es sus coordenadas baricéntricas. Bajo tal descomposición defina

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_0(v_i).$$

Note que como la descomposición de un elemento en término de sus coordenadas baricéntricas es única, así como por el hecho de que $\mathscr{K}$ es un complejo simplicial geométrico, entonces la regla de correspondencia de f no depende del simplejo σ en cuestión. Por otro lado, f claramente extiende a f_0 y por lo tanto es un morfismo simplicial, pues la segunda condición se cumple por definición, mientras que la primera por hipótesis. Respecto a la unicidad, sea $g : |\mathscr{K}| \to |\mathscr{L}|$ un morfismo simplicial que extiende a f_0. Dado $x \in |\mathscr{K}|$ tal que $\sigma \in \mathscr{K}$ es un simplejo con la propiedad de que $x \in \sigma$, note que si $\{v_0, ..., v_n\}$ son los vértices de σ, entonces descomponemos a x usando sus coordenadas baricéntricas como $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$. Usando esto se tienen las siguientes igualdades:

$$g(x) = g\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i g(v_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_0(v_i) =: f(x)$$

Esto demuestra que g y f tienen la misma regla de correspondencia y por lo tanto, son iguales. □

OBSERVACIÓN 3. *Es importante mencionar que en las hipótesis del resultado anterior, la hipótesis sobre el subconjunto de los vértices del complejo simplicial geométrico $\mathscr{K}$ se ponen para no tener morfismos “fantasma”. Por ejemplo, considere Δ^1 como conjunto simplicial geométrico $\mathscr{K}$, y $\mathscr{L}$ un complejo simplicial que consta de dos puntos. A nivel de vértices puede hacerse la asociación que a cada vértice de Δ^1 le asocia un único vértice $\mathscr{L}$. Sin embargo, esta asignación no da lugar a un morfismo simplicial pues $\langle f(\mathscr{L}_0)\rangle \notin \mathscr{K}$. Por tal razón, en este caso los únicos morfismos simpliciales que se pueden definir a partir de los vértices de $\mathscr{K}$ en $\mathscr{L}$ son los morfismo constantes con valor cualquiera de los vértices de $\mathscr{L}$.*

Conservando la notación de antes, si por el contrario se quiere definir un morfismo $f : |\mathscr{L}| \to |\mathscr{K}|$, en este caso hay dos de ellos, uno por cada elección de vértices en el dominio y codominio.

DEFINICIÓN 20. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $x \in |\mathscr{K}|$. Definimos la vecindad simplicial de x, $N_{\mathscr{K}}(x)$, como los simplejos σ de $\mathscr{K}$ tales que $x \in \sigma$ junto con sus caras. Definimos el vínculo de x, $L_{\mathscr{K}}(x)$, como los simplejos σ de $\mathscr{K}$ tales que $x \notin \sigma$.*

PROPOSICIÓN 31. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $x \in |\mathscr{K}|$. Entonces $N_{\mathscr{K}}(x)$ y $L_{\mathscr{K}}(x)$ son subcomplejos de $\mathscr{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. En ambos casos tenemos que $N_{\mathscr{K}}(x) \subseteq \mathscr{K}$ y $L_{\mathscr{K}}(x) \subseteq \mathscr{K}$. Por lo que sólo hay que ver que en efecto son complejos simpliciales geométricos.

Sea $C \in N_{\mathscr{K}}(x)$ y D un cara de C. Entonces existe $C' \in \mathscr{K}$ con $x \in C'$ de tal forma que C es una cara de C'. Como D es una cara de C, entonces D es una cara de C'. Por lo tanto $D \in N_{\mathscr{K}}(x)$.

Sea $C_1, C_2 \in N_{\mathscr{K}}(x)$. Como ambos son simplejos de $\mathscr{K}$, entonces $C_1 \cap C_2$ es una cara común. Por lo tanto $N_{\mathscr{K}}(x)$ es un complejo simplicial geométrico.

Sea $C \in L_{\mathscr{K}}(x)$ y D un cara de C. Por definición $x \notin C$, de donde tenemos que $x \notin D$. Por lo que $D \in L_{\mathscr{K}}(x)$.

Sea $C_1, C_2 \in L_{\mathscr{K}}(x)$. Como ambos son simplejos de $\mathscr{K}$, entonces $C_1 \cap C_2$ es una cara común. Por lo tanto $L_{\mathscr{K}}(x)$ es un complejo simplicial geométrico.

□

PROPOSICIÓN 32. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $x \in |\mathscr{K}|$. Entonces existe un único $\sigma \in \mathscr{K}$ tal que $x \in \sigma^\circ$.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición existe $\tau \in \mathscr{K}$ tal que $x \in \tau$. Si lo vértices de τ son $\{x_0, \ldots, x_n\}$, considere $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$ la descomposición de x en sus coordenadas baricéntricas. Luego, defina $\sigma := \langle \{x_i \mid \lambda_i \neq 0\}_{i=0,\ldots,n} \rangle$ y note que por ser $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico, entonces $\sigma \in \mathscr{K}$. Además como $x \in \sigma$ claramente y además x tiene todas sus coordenadas baricéntricas positivas, entonces $x \in \sigma^\circ$. Por lo tanto, lo que resta es demostrar la unicidad, para lo que supongamos que existe $\sigma' \in \mathscr{K}$ tal que $x \in (\sigma')^\circ$. Dado que $\sigma \cap \sigma'$ es cara común de σ y σ', además de que x es un elemento de dichos simplejos, esto implica que $\sigma \subseteq \sigma \cap \sigma'$ pues es caso contrario, por unicidad de las coordenadas baricéntricas, x se descompondría como una suma con menos elementos que el conjunto $\{x_i \mid \lambda_i \neq 0\}$, lo cual es imposible. Luego, esto implica que $\sigma \subseteq \sigma'$. Más aún, por simetría se puede probar la otra contención, lo que muestra que $\sigma = \sigma'$.

□

DEFINICIÓN 21. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $\sigma \in \mathscr{K}$. Definimos la estrella de x, como:*

$$st(\sigma) = \bigcup \{\tau^\circ \mid \tau \in \mathscr{K}, \quad \sigma \subseteq \tau\}$$

PROPOSICIÓN 33. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico $\sigma \in \mathscr{K}$. Entonces $st(\sigma)$ es un conjunto abierto de $|\mathscr{K}|$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro pues la estrella de x es unión de una familia de conjuntos abiertos y por lo tanto es un conjunto abierto. □

DEFINICIÓN 22. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y x un vértice de $\mathscr{K}$. Definimos $\mathscr{K}_x$ como los $\sigma \in \mathscr{K}$ tales que $x \notin \sigma$.*

PROPOSICIÓN 34. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y x un vértice de $\mathscr{K}$. Entonces $\mathscr{K}_x$ es un subcomplejo de $\mathscr{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. Considere $\sigma \in \mathscr{K}_x$ y $\tau \subseteq \sigma$ una cara. Dado que $x \notin \sigma$, la contención implica que $x \notin \tau$, de lo que se deduce que $\tau \in \mathscr{K}_x$.

Par concluir, considere $\sigma, \tau \in \mathscr{K}_x$ tales que $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$. Dado que en particular $\sigma.\tau \in \mathscr{K}$ y $\mathscr{K}$ es un conjunto simplicial geométrico, entonces $\sigma \cap \tau$ es cara tanto de σ como τ, que es lo que se quería probar. □

PROPOSICIÓN 35. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico, $\sigma \in \mathscr{K}$ y $x \in \sigma^\circ$. Entonces $st(\sigma) = |N_{\mathscr{K}}(x)| \setminus |L_{\mathscr{K}}(x)|$.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a ver que se cumple una doble contención. Para ver que $st(\sigma) \subseteq |N_{\mathscr{K}}(x)| \setminus |L_{\mathscr{K}}(x)|$ tomemos $\tau \in \mathscr{K}$ tal que $\sigma \subseteq \tau$. Observemos que $\tau \in N_{\mathscr{K}}(x)$. Por otro lado, si $\rho \in L_{\mathscr{K}}(x)$, entonces $\tau \cap \rho$ es un conjunto vacío, o es una cara de la frontera de τ. Más aun, toda cara de a frontera es un elemento de $L_{\mathscr{K}}(x)$, luego $\tau \setminus |L_{\mathscr{K}}(x)| = \tau^\circ$, lo que implica la contención buscada.

Para la contención restante □

Los conjuntos $N_{\mathscr{K}}(x)$ y $L_{\mathscr{K}}(x)$ tienen propiedades interesantes relativas a la convexidad.

PROPOSICIÓN 36. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico, y $x \in |\mathscr{K}|$ que no es un vértice aislado. Si $y \in |N_{\mathscr{K}}(x)|$, entonces $\overline{xy} \subseteq |N_{\mathscr{K}}(x)|$. Más aún, para cualquier semirecta que tiene por extremo a x, ℓ, tenemos que que $\ell \cap |L_{\mathscr{K}}(x)|$ consta de un único punto.*

DEMOSTRACIÓN. Para la primera afirmación, dado $y \in |N_{\mathscr{K}}(x)|$, existe $\sigma \in N_{\mathscr{K}}(x)$ tal que $y \in \sigma$. Dado que $x \in \sigma$ y σ es convexo, entonces $\overline{xy} \subseteq \sigma$ y como $\sigma \subseteq |N_{\mathscr{K}}(x)|$, entonces se deduce el primer resultado.

Para la segunda afirmación tomamos un punto $y \notin |\mathscr{K}|$. Notemos que podemos tomar $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z-x\| = \sup\{\|y'-x\| \ : \ y' \in |N_{\mathscr{K}}(x)| \cap \ell\}$, esto es el punto con distancia "más grande" respecto a los elementos de $|N_{\mathscr{K}}(x)|$ respecto al punto x. Si esto no sucede entonces claramente $z \neq x$ y además $z \in \ell$. Note que si $z \notin |L_{\mathscr{K}}(x)|$, entonces para cualquier $\sigma \in L_{\mathscr{K}}(x)$ con $x \notin \sigma$, se tiene que $z \notin \sigma$, pero esto nos diría que $z \in |N_{\mathscr{K}}(x)|$, lo que contradice la elección de z pues sobre la semirecta ℓ puede encontrase un punto con distancia mayor. Por lo tanto, $z \in |L_{\mathscr{K}}(x)|$, así, $z \in |L_{\mathscr{K}}(x)| \cap \ell$. Además la unicidad es clara. □

PROPOSICIÓN 37. *Sean $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ complejos simpliciales geométricos, $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ un homeomorfismo en un subespacio de $|\mathscr{L}|$. Entonces para todo $x \in |\mathscr{K}|$ tal que $f(x) \in U$ para algún U abierto de $|\mathscr{L}|$ con $U \subseteq im(f)$ tenemos que $|L_{\mathscr{K}}(x)| \sim |L_{\mathscr{L}}(f(x))|$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(x) \in \sigma^{\circ}$ para algún $\sigma \in \mathscr{L}$. Entonces $f(x) \in U \cap st(\sigma) \subseteq |N_{\mathscr{L}}(f(x))|$, debido a que $f(x) \in U$ por hipotesis, $\sigma^{\circ} \subseteq st(\sigma)$ y $st(\sigma) \subseteq |N_{\mathscr{L}}(f(x))|$. Ahora bien, como U y $st(\sigma)$ son abiertos, tenemos que $U \cap st(\sigma)$ es abierto y en particular $f^{-1}(U \cap st(\sigma))$ es abierto por la continuidad de f. Recalcamos que $x \in f^{-1}(U \cap st(\sigma))$.

Para $\lambda \in [0,1]$ definimos $N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x)$ como los puntos de $|N_{\mathscr{K}}(x)|$ de la forma $(1-\lambda)x + \lambda y$ con $y \in |N_{\mathscr{K}}(x)|$.

Procedemos a hacer alguna observaciones, como que $N^{1}_{\mathscr{K}}(x) = |N_{\mathscr{K}}(x)|$ y $N^{0}_{\mathscr{K}}(x) = \{x\}$. También, si $\lambda \leq \mu$ entonces $N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x) \subseteq N^{\mu}_{\mathscr{K}}(x)$.

Para última afirmación, sea $(1-\lambda)x + \lambda y \in N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x)$ con $y \in |N_{\mathscr{K}}(x)|$. Buscamos $y' \in |N_{\mathscr{K}}(x)|$ tal que

$$(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\mu)x + \mu y'$$

Entonces

$$y' = (1-\frac{\lambda}{\mu})x + \frac{\lambda}{\mu}y$$

Pero $y' \in |N_{\mathscr{K}}(x)|$ por la proposición 36.

Afirmación diametro de $N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x)$ tiende a cero cuando λ tiende a cero. Sean $(1-\lambda)x+\lambda y, (1-\lambda)x+\lambda y' \in N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x)$ con $y, y' \in |N_{\mathscr{K}}(x)|$, entonces

$$d((1-\lambda)x+\lambda y, (1-\lambda)x+\lambda y') = \|(1-\lambda)x+\lambda y-((1-\lambda)x+\lambda y')\| = \|\lambda y-\lambda y'\| = \lambda d(y,y')$$

De aquí tenemos que $\delta(N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x)) = \lambda\delta(N_{\mathscr{K}}(x))$, y por lo tanto se sigue la afirmación.

De esto último podemos deducir que existe $\lambda \in (0,1]$ tal que

$$N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x) \subseteq f^{-1}(U \cap st(\sigma))$$

De aquí

$$f(x) \in f(N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x)) \subseteq U \cap st(\sigma) \subseteq |N_{\mathscr{L}}(f(x))|$$

Como $N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x)$ tiene diametro positivo entonces x es un punto interior de $N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x)$. Por lo cual existe V abierto con $x \in V \subseteq N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x)$. Como f es un homeomorfismo en su imagen, en particular es una función abierta. Así $f(V)$ es abierto y $f(x) \in f(V) \subseteq f(N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x))$. Por un argumento análogo al anterior existe $\mu \in (0,1]$ tal que $N^{\mu}_{\mathscr{K}}(f(x))) \subseteq f(V)$. Así tenemos que

$$f(x) \in N^{\mu}_{\mathscr{K}}(f(x)) \subseteq f(N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x)) \subseteq |N_{\mathscr{L}}(f(x))|$$

Analogamente al proceso inicial existe $\nu \in (0,1]$ tal que:

$$f(x) \in f(N^{\nu}_{\mathscr{K}}(x)) \subseteq N^{\mu}_{\mathscr{K}}(f(x)) \subseteq f(N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x)) \subseteq |N_{\mathscr{L}}(f(x))|$$

Considerando la misma notación para $L_{\mathscr{L}}(f(x)$, pododemos definir de manera analoga a $L^{\mu}_{\mathscr{L}}(f(x))$. Esto para construir una función $\phi\colon L^{\mu}_{\mathscr{L}}(f(x)) \longrightarrow f(L^{\nu}_{\mathscr{L}}(x))$. Por lo que tomamos $y \in L_{\mathscr{L}}(f(x))$. Ahora consideramos $f^{-1}(y)$ puesto y esta en la imagen de f y f es un homeomorfismo. Por la proposición anterior podemos proyectar x por $f^{-1}(y)$ por una linea recta y esta intersecta en único punto a $|N_{\mathscr{K}}(x)|$. Este único punto corresponde a un único punto de $N^{\lambda}_{\mathscr{K}}(x)$. A dicho punto le aplicamos f y es lo que definimos como $\phi(y)$. De manera analoga podemos definir $\psi\colon f(L^{\nu}_{\mathscr{K}}(x)) \longrightarrow L^{\mu}_{\mathscr{L}}(f(x)$ inducida por la proyección radial de $f(x)$ en $N^{\mu}_{\mathscr{L}}(f(x))$.

.... Pendiente

□

DEFINICIÓN 23. *Dados dos complejos simpliciales geométricos $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$, y una función continua $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$. Entonces un morfismo simplicial $g\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$*

lo llamamos una aproximación simplicial de f, para cada vértice $x \in \mathscr{K}_0$ tenemos que $f(st_{\mathscr{K}}(x)) \subseteq st_{\mathscr{L}}(g(x))$.

Es inmediato observar que todo morfismo simplicial es una aproximación simplicial de si mismo.

PROPOSICIÓN 38. *Sean $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ complejos simpliciales geométricos y $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ un morfismo simplicial. Entonces f es una aproximación simplicial.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma \in \mathscr{K}$ y x un vértice de σ. Entonces $f(x)$ es un vértice del simplejo $f(\sigma)$. Así tenemos que $f(st_{\mathscr{K}}(x)) \subseteq st_{\mathscr{L}}(f(x))$ para todo vértices $x \in \mathscr{K}_0$. □

PROPOSICIÓN 39. *Sean $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ complejos simpliciales geométricos y $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ una función continua. Si para todo vétice $x \in \mathscr{K}_0$ existe único vértice $y \in \mathscr{L}_0$ tal que $f(st_{\mathscr{K}}(x)) \subseteq st_{\mathscr{L}}(y)$ entonces f tiene una aproximación simplicial g tal que $g(x) = y$ para cada $x \in \mathscr{K}_0$*

DEMOSTRACIÓN. La idea es definir $g_0\colon \mathscr{K}_0 \longrightarrow \mathscr{L}_0$ como $g_0(x) = y$ y ver que cumple que $\langle g_0(A)\rangle \in \mathscr{L}$ para cualquier $A \subseteq \mathscr{K}_0$ tal que $\langle A\rangle \in \mathscr{K}$.

Sea $A \subseteq \mathscr{K}_0$ con $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$, y $x \in \langle A\rangle^\circ$. Entonces

$$x \in \bigcap_{i=0}^{n} st(a_i)$$

De donde se sigue que:

$$\begin{aligned} f(x) &\in \bigcap_{i=0}^{n} f(st(a_i)) \\ &\subseteq \bigcap_{i=0}^{n} st(g(a_i)) \end{aligned}$$

De aquí el único simplejo de $\mathscr{L}$ para el cual $f(x)$ debe ser un punto interior debe ser $\langle g_0(A)\rangle \in \mathscr{L}$. Por lo tanto existe un morfismo simplicial $g\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ tal que $g|_{\mathscr{K}_0} = g_0$. Por lo que g es una aproximación simplicial de f.

□

PROPOSICIÓN 40. *Sean $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ complejos simpliciales geométricos y $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ una función continua. Si g es una aproximación simplicial de f entonces g es homotópica a f.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in |\mathscr{K}|$ entonces existe un único simplejo $\sigma \in \mathscr{K}$ tal que $x \in \sigma^\circ$. Si $\sigma)\langle A\rangle$ con $A \subseteq \mathscr{K}_0$, entonces por la proposición anterior $f(x) \in \langle f(A)\rangle^\circ$, pero

$g(A) \subseteq f(A)$ así que $g(x) \in \langle g(A) \rangle$. Como $\langle f(A) \rangle$ es convexo, entonces existe un segmento de recta que une a $f(x)$ con $g(x)$ en $|\mathscr{L}|$.Por lo tanto f y g son homotopicos. □

PROPOSICIÓN 41. *Sean $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ complejos simpliciales geométricos, y $f_1 \colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ y $f_2 \colon |\mathscr{L}| \longrightarrow |\mathscr{M}|$ una funciones continuas. Si g_1 y g_2 son aproximaciones simpleiciales de f_1 y f_2 respectivamente, entonces $g_2 g_1$ es una aporximación simplicial de $f_2 f_1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \mathscr{K}_0$, entonces:

$$f_2 f_1(st(x))) \subseteq f_2(st(g_1(x)) \subseteq st(g_2(g_1(x)))$$

□

EJEMPLO 5. *Sea $\mathscr{K}$ el complejo simplicial geométricos con vértices $\mathscr{K}_0 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y con 1-simplejos $\{\overline{a_1 a_2}, \overline{a_2 a_3}, \overline{a_3 a_4}\}$, y $\mathscr{L}$ el complejo simplicial abstracto con vértices $\mathscr{L}_0 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ cuyos 2-simplejos son $\sigma_1 = \overline{b_1 b_2 b_3}, \sigma_2 = \overline{b_2 b_3 b_4}, \sigma_3 = \overline{b_3 b_4 b_1}$ y $\sigma_4 = \overline{b_4 b_1 b_2}$ y sus correspondientes caras. Sea $f \colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ una función continua tal que $f(a_i) \in \sigma_i^\circ$ para $i = 1,2,3,4$. Notamos que $f(st(a_i)) \subseteq st(b_i)$ para $i = 1,2,3,4$. Así que el morfismo simplicial g inducido en los vértices que cumple $g(a_i) = b_i$ para $i = 1,2,3,4$ es una aproximación simplical de f.*

PROPOSICIÓN 42. *Sean $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ complejos simpliciales geométricos, y $f \colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ una función continua. Entonces existe n un natural tal que $f \colon |\mathscr{K}^{(n)}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ tiene una aproximación simplicial.*

DEMOSTRACIÓN. Notamos que $\{st(y)\}_{y \in \mathscr{L}_0}$ es una cubierta abierta de $|\mathscr{L}|$. Así por la continuidad de f, $\{f^{-1}(st(y))\}_{y \in \mathscr{L}_0}$ es una cubierta abierta de $|\mathscr{K}|$. Sabemos que esta cubierta tiene un número de Lebesgue δ. Elegimos n tal que $mesh(\mathscr{K}^{(n)}) < \delta$ por la proposicion anterior. Por lo que tenemos que para cada vértice $x \in \mathscr{K}_0^{(n)}$ existe un vértice $y \in \mathscr{L}_0$ tal que $st(x) \subseteq f^{-1}(st(b))$, lo que significa que $f(st(x)) \subseteq st(y)$. Por la proposición xxx tenemos que $f \colon |\mathscr{K}^{(n)}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ tiene una aproximación simplicial. □

5. Teorema del Punto Fijo

Ejercicios

EJERCICIO 1. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\{x\}$ es un conjunto convexo.*

EJERCICIO 2. *Demuestre 1 y 2 de la proposición 4.*

EJERCICIO 3. *Pruebe mediante ejemplos que las contenciones en 3 y 4 de la proposición 4 pueden ser propias.*

EJERCICIO 4. *Es común definir a $P \subseteq \mathbb{R}^n$ como un politopo si existe una colección finita $M_1, ..., M_k \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que cada M_i es un subconjunto como el de la proposición 2.*

Demuestre que esta definición de politopo coincide con la dada en la notación 1. Usar esto para demostrar que los politopos son conjuntos cerrados con la topología inducida.[1]

EJERCICIO 5. *Demuestre que cápsula convexa de una colección finita de puntos es un segmento si y sólo si son colineales.*

EJERCICIO 6. *Demuestre que todo n-simplejo es un conjunto compacto*

EJERCICIO 7. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Defina $e_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $\{e_1, ..., e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ la base canónica. Defina el conjunto*

$$D_n = \langle e_0, e_1, \cdots, e_n \rangle$$

1. *Dar una representación gráfica de D_n para $n = 0, 1, 2, 3$*
2. *Demuestre que existe un homeomorfismo entre D_n y Δ^n*

EJERCICIO 8. *Considere para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto*

$$U_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\}$$

1. *Dar una representación gráfica de U_n para $n = 0, 1, 2, 3$*
2. *Demuestre que existe un homeomorfismo $\Delta^n \cong U_n$*

[1] Esta descripción muestra que los politopos con conjuntos semialgebraicos.

EJERCICIO 9. *Para $i=0,...,n$ definir las funciones $d_i:\Delta^{n-1}\to\Delta^n$ y $s_i:\Delta^{n+1}\to\Delta^n$ mediante la regla de correspondencia:*

$$d_i(t_0,...,t_{n-1})=(t_0,...,t_{i-1},0,t_i,...,t_{n-1})$$

$$s_i(t_0,...,t_n)=(t_0,...,t_{i-1},t_i+t_{i+1},t_{i+2},...,t_n)$$

Por definición $s_n(t_0,...,t_n)=(t_1,...,t_{n-1},t_n+t_0)$

Demuestre lo siguiente:

1. *Ambas familias de funciones están bien definidas y que además son continuas.*
2. *La función d_i es inyectiva y que además $d_i(\Delta^{n-1})$ es la cara de Δ^n opuesta al vértice e_i.*
3. *La función s_i es suprayectiva y esta identifica los vértices e_i y e_{i+1}.*

En virtud a este ejercicio a la colección $\{d_i\}_{0\leq i\leq n}$ se le conoce como operadores de cara del n-simplejo estándar, mientras que a los elementos de $\{s_i\}_{0\leq u\leq n}$ se les conoce como operadores de degeneración del simplejo estándar.

Capítulo 2

Complejos Simpliciales Abstractos

1. Realización Geométrica

DEFINICIÓN 24. *Sea X un conjunto finito. Un complejo simplicial abstracto* $\mathbb{K}$ *sobre X es una familia de subconjuntos de X tal que:*

- $\emptyset \notin \mathbb{K}$
- $X = \bigcup \mathbb{K}$
- *Si* $\sigma \in \mathbb{K}$ *y* $\tau \subseteq \sigma$ *con* $\tau \neq \emptyset$*, entonces* $\tau \in \mathbb{K}$.

A X lo llamamos el conjunto de vértices de $\mathbb{K}$.

DEFINICIÓN 25. *Sea* $\mathbb{K}$ *un complejo simplicial abstracto y* $\sigma \in \mathbb{K}$*. Decimos que* σ *es n-simplejo abstracto, si* $|\sigma| = n+1$*. Con esta definición tenemos que los* 0*-simplejos abstractos son los vértices de* $\mathbb{K}$*. Definimos la dimensión de* $\mathbb{K}$ *como max*$\{|\sigma|-1 \mid \sigma \in \mathbb{K}\}$*, y la denotamos por dim*$(\mathbb{K})$

DEFINICIÓN 26. *Sea* $\mathbb{K}$ *con complejo simplicial abstracto con conjunto de vértices* $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$*. Para* $\sigma \in \mathbb{K}$*, definimos* $\sigma_G = \langle e_i \mid x_i \in \sigma \rangle$ *donde* $e_0, \ldots, e_n$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Es evidente que* σ_G *es un simplejo. Defimos* $G(\mathbb{K})$ *como la familia de simplejos geométricos* $\{\sigma_G \mid \sigma \in \mathbb{K}\}$.

PROPOSICIÓN 43. *Sea* $\mathbb{K}$ *un complejos simplicial abstracto. Entonces* $G(\mathbb{K})$ *es un complejo simplicial geométrico.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\sigma_G, \tau_G \in G(\mathbb{K})$ tales que $\sigma_G \cap \tau_G \neq \emptyset$. $\square$

DEFINICIÓN 27. *Sean* $\mathbb{K}$ *un complejo simplicial abstracto sobre X y* $\mathbb{L}$ *un complejo simplicial abstracto sobre Y. Una funcion* $f \colon X \longrightarrow Y$ *tal que* $f(\sigma) \in \mathbb{L}$ *para todo* $\sigma \in \mathbb{K}$ *la llamamos un morfismo de complejos simpliciales abstractos. Si consideramos que la dimensión de* $\mathbb{K}$ *es n y la de* $\mathbb{L}$ *es m.Con esta definición podemos notar que f induce una función de* $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ *la base canónica de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *en* $B = \{b_0, \ldots, b_m\}$ *la base* *canónica de* $\mathbb{R}^{m+1}$. *Así si ponemos* $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *y* $Y = \{y_0, \ldots, y_m\}$. *Para poder definir* $f_G \colon A \longrightarrow B$ *dado por* $f_G(a_i) = b_j$ *si* $f(x_i) = y_j$. *Notamos que* f_G *es una función de* $G(\mathbb{K})_0$ *en* $G(\mathbb{L})_0$. *Más aún, si* $\tau \in G(\mathbb{K})$, *entonces* $\tau = \sigma_G$ *para algún* $\sigma \in \mathbb{G}$. *Por lo que* f_G *induce una función que manda a* σ_G *en* $f(\sigma)_G$. *Por lo cual* f_G *se puede extender a un morfismo de complejos simplcialeas geométricos* $G(f)$.

PROPOSICIÓN 44. *Sea* $\mathbb{K}$ *un complejo simplicial abstracto sobre* X. *Entonces* 1_X *es un morfismo de complejos simpliciales y* $G(1_X) = 1_{G(\mathbb{K})}$.

DEMOSTRACIÓN. Para $\sigma \in \mathbb{K}$, $1_X(\sigma) = \sigma \in \mathbb{K}$. Así la función $(1_X)_G = 1_{\{e_0,\ldots,e_n\}}$ con $\{e_0, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$ por lo que la función inducida debe ser la identidad. $\square$

PROPOSICIÓN 45. *Sean* $\mathbb{K}$ *un complejo simplicial abstracto sobre* X, $\mathbb{L}$ *un complejo simplicial abstracto sobre* Y, *y* $\mathbb{M}$ *un complejo simplicial abstracto sobre* Z. *Si* $f \colon X \longrightarrow Y$ *y* $g \colon Y \longrightarrow Z$ *son morfismos de complejos simpliciales abstractos, entonces* gf *es un morfismo de complejos simpliciales abstractos. Más aún,* $G(gf) = G(g)G(f)$.

DEMOSTRACIÓN. Para $\sigma \in \mathbb{K}$. Entonces $f(\sigma) \in \mathbb{L}$ y así $gf(\sigma) \in \mathbb{M}$. Por lo tanto gf es un morfismo de complejos simpliciales abstractos. Por otro lado, esta última propiedad implica que $g_G f_G = (gf)_G$ y así la funci´on inducida cumple que $G(gf) = G(g)G(f)$. $\square$

2. Gráficas

DEFINICIÓN 28. *Una gráfica* G *es una pareja* (V,E) *donde* V *es un conjunto finito, a los elementos los llamamos vértices, y* E *es un conjunto de subconjuntos de dos elementos de* V, *a los elementos los llamamos aristas. En vez de de denotar el hecho de que un conjunto de dos elementos es una arista por* $\{x,y\} \in E$ *este hecho lo vamos a denotar por* xy. *Si* $G = (V,E)$ *y* $G' = (V',E')$ *son dos gráficas, entonces un morfismo de gráficas* f *de* G *a* G' *es una función* $f \colon V \longrightarrow V'$ *tal que* $f(xy) = f(x)f(y)$, *es decir, la función manda aristas en aristas.*

EJEMPLO 6.

DEFINICIÓN 29. *Sea* $G = (V,E)$ *una gráfica. Decimos que* G *es una gráfica completa si* xy *para todo* $x, y \in V$.

EJEMPLO 7.

PROPOSICIÓN 46. *Sean $G=(V,E)$,$G'=(V',E')$ y $G''=(V'',E'')$ gráficas. Si $f\colon G\longrightarrow G'$ y $g\colon G'\longrightarrow G''$ son morfsimos de gráficas, entonces gf es un morfismo de gráficas.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $g(f(xy))=g(f(x)(y))=gf(x)gf(y)$ □

PROPOSICIÓN 47. *Sean $G=(V,E)$ una gráficas. Entonces 1_V morfismo de gráficas.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $1_V(xy)=xy$ □

DEFINICIÓN 30. *Sea $G=(V,E)$ una gráfica y $W\subseteq V$. La gráfica inducida por W, G_W, es la gráfica cuyos vértices son W y cuyas aristas son las aristas xy tales que $x,y\in W$. Decimos que W es una camarilla si G_W es una gráfica completa.*

PROPOSICIÓN 48. *Sea $G=(V,E)$ una gráfica y $\mathbb{C}(G)$ la familia de subconjuntos W no vacíos de V tal que G_W es una camarilla. Entonces $\mathbb{C}(G)$ es un complejo simplicial abstracto sobre V.*

DEMOSTRACIÓN. Por construcción $\mathbb{C}(G)$ no tiene al vacío. Si $W\in\mathbb{C}(G)$ y $U\subseteq W$, entonces W es una camarilla. Esto quiere decir que G_W es una gráfica completa, así G_U también es una gráfica completa. Por lo tanto U es una camarilla y $U\in\mathbb{C}(G)$.

Por último, si $x\in V$, entonces $G_{\{x\}}$ es una gráfica completa. Así $\{x\}\in\mathbb{C}(G)$. □

PROPOSICIÓN 49. *Sean $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ gráficas y $f\colon G\longrightarrow G'$. Entonces $\mathbb{C}(f)$ dado por $f\colon V\longrightarrow V'$ es un morfismo de morfismo de complejos simpliciales abstractos de $\mathbb{C}(G)$ en $\mathbb{C}(G')$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $W\subseteq V$ tal que $W\in\mathbb{C}(G)$. Entonces G_W es una gráfica completa, por lo que tenemos que $G'_{f(W)}$ es una gráfica completa debido a que f es un morfismo de gráficas. De donde concluimos que $f(W)$ es una camarilla de G'. Por lo que $f(W)\in\mathbb{C}(G')$ □

COROLARIO 6. *Sea $G=(V,E)$. Entonces $\mathbb{C}(1_G)=1_{\mathbb{C}(G)}$*

COROLARIO 7. *Sean $G=(V,E)$,$G'=(V',E')$ y $G''=(V'',E'')$ gráficas. Si $f\colon G\longrightarrow G'$ y $g\colon G'\longrightarrow G''$ son morfsimos de gráficas, entonces $\mathbb{C}(gf)=\mathbb{C}(g)\mathbb{C}(f)$.*

Adicionalmente podemos ir en sentido, empezar con un complejo simplicial abstracto y llegar a una gráfica.

DEFINICIÓN 31. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto sobre X. Definimos $\mathbb{K}_n$ como el conjunto de simplejos de $\mathbb{K}$ de dimensión menor igual a n. A $\mathbb{K}_n$ lo llamamos el n-esqueleto de $\mathbb{K}$. Tenemos que$\mathbb{K}_n$ es un complejo simplicial abstracto. Notamos que en particular si ponemos $E_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}_1 \setminus \mathbb{K}_0$, entonces $E_{\mathbb{K}}$ es un conjunto de subconjuntos de X de dos elementos. Por lo que podemos poner $\mathbb{G}(\mathbb{K}) = (X, E_{\mathbb{K}})$ y de esta forma $\mathbb{G}(\mathbb{K})$ es una gráfica.*

PROPOSICIÓN 50. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto sobre X. Entonces $\varepsilon_{\mathbb{K}} : \mathbb{C}(\mathbb{G}(\mathbb{K})) \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $\varepsilon_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Simplemente observamos que $\mathbb{C}(\mathbb{G}(\mathbb{K})) = \mathbb{K}_1$. □

PROPOSICIÓN 51. *Sea G una gráfica. Entonces $\mathbb{G}(\mathbb{C}(G)) = G$.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de que xy es una caamarilla para toda arista, así xy es un 1-simplejo. □

3. Equivalencia con Complejos Simpliciales Geométricos

4. Grupo de Trayectorias y Grupo Fundamental

DEFINICIÓN 32. *Sean $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto sobre X y $\mathbb{L}$ un complejo simplicial abstracto sobre Y. Diremos que $\mathbb{L}$ es un subcomplejo de $\mathbb{K}$ si $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ y $Y \subseteq X$.*

PROPOSICIÓN 52. *Sean $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto sobre X y $\{\mathbb{L}_i\}_{i\in I}$ una familia de subcomplejos de $\mathbb{K}$ donde $\mathbb{L}_i$ es un complejo simplicial abstracto sobre X_i. Tenemos que $\bigcap_{i\in I} \mathbb{L}_i$ es complejo simplicial abstracto sobre $\bigcap_{i\in I} X_i$ y $\bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i$ es complejo simplicial abstracto sobre $\bigcup_{i\in I} X_i$. Así, $\bigcap_{i\in I} \mathbb{L}_i$ y $\bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i$ son subcomplejos de $\mathbb{K}$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \bigcap_{i\in I}$, entonces $x \in X_i$ para alguna $j \in I$. Así $\{x\} \in \mathbb{K}_i$ para alguna $j \in I$. Por lo tanto $\{x\} \in \bigcup_{i\in I} \mathbb{K}_i$. Ahora sean $\sigma \in \bigcup_{i\in I} \mathbb{K}_i$ y $\tau \subseteq \sigma$ con $\tau \neq \emptyset$. Entonces $\sigma \in \mathbb{K}_i$ para alguna $j \in I$. Así $\tau \in \mathbb{K}_i$ para alguna $j \in I$. Por lo tanto $\tau \in \bigcup_{i\in I} \mathbb{K}_i$. Así concluimos que $\bigcup_{i\in I} \mathbb{K}_i$ es un somplejo simplicial abstracto y particular un subcomplejo de $\mathbb{K}$.

Sea $x \in \bigcap_{i\in I}$, entonces $x \in X_i$ para toda $i \in I$. Así $\{x\} \in \mathbb{K}_i$ para toda $i \in I$. Por lo tanto $\{x\} \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{K}_i$. Ahora sean $\sigma \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{K}_i$ y $\tau \subseteq \sigma$ con $\tau \neq \emptyset$. Entonces $\sigma \in \mathbb{K}_i$ para toda $i \in I$. Así $\tau \in \mathbb{K}_i$ para toda $i \in I$. Por lo tanto $\tau \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{K}_i$. Así concluimos que $\bigcap_{i\in I} \mathbb{K}_i$ es un somplejo simplicial abstracto y particular un subcomplejo de $\mathbb{K}$. □

DEFINICIÓN 33. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto sobre X, y $x,y \in X$. Un camino α de x a y es una sucesión $x_0,\ldots,x_n \in X$ tal que $\{x_i,x_{i+1}\} \in \mathbb{K}$ para $i = 0,\ldots,n-1$, $x_0 = x$ y $x_n = y$. Decimos x es el punto inicial de α y que y es el punto final de α. Diremos que la longitud de α es n. Lllamaremos al camino cerrado si $x = y$.*

DEFINICIÓN 34. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto sobre X. Diremos que $\mathbb{K}$ es conexo si para todo x,y existe un camino de x a y.*

PROPOSICIÓN 53. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto sobre X. Entonces $\mathbb{K}$ es unión disjunta de subcomplejos conexos.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos una relación en X, $x \sim y$ si esxiste un camino que inicia en x y termina en y. Afimamos que esta relación es de equivalencia. Sea $x \in X$. Consideramos el camino $x_0 = x$, $x_1 = x$. Por lo que $x \sim x$ y así la relación es reflexiva. Sean $x,y \in X$ tales que $x \sim y$, entonces existe un camino $x_0,\ldots,x_n \in X$ tal que $\{x_i,x_{i+1}\} \in \mathbb{K}$ para $i = 0,\ldots,n-1$, $x_0 = x$ y $x_n = y$. Consideramos la sucesión $x_n,\ldots,x_0$ obsevamos que cumple $\{x_i,x_{i+1}\} \in \mathbb{K}$ por lo que es un camino, pero de y a x. Por lo que $y \sim x$ y la relación es simétrica. Sean $x,y,z \in X$ tales que $x \sim y$ y $y \sim z$ entonces existen $x_0,\ldots,x_n \in X$ tal que $\{x_i,x_{i+1}\} \in \mathbb{K}$ para $i = 0,\ldots,n-1$, $x_0 = x$ y $x_n = y$, y $y_0,\ldots,y_m \in X$ tal que $\{y_i,y_{i+1}\} \in \mathbb{K}$ para $i = 0,\ldots,m-1$, $y_0 = y$ y $y_m = z$. De aquí tenemos la sucesión $x_0,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$ que es un camino de x a z. Por lo tanto $x \sim z$ y la relación es transitiva.

Dado que la relación es transitiva podemos considerar las clase de equivalencia de los elementos de X. Para $x \in X$, ponemos $\mathbb{K}_x := \{\sigma \in \mathbb{K} \mid \text{existe } y \in [x], y \in \sigma\}$. Afirmamos que $\mathbb{K}_x$ es un complejos simplicial abstracto de $[x]$ y sobre todo un subcomplejo de $\mathbb{K}$. Sea $y \in [x]$, entonces $y \in \{y\} \in \mathbb{K}$. Por lo que $\{y\} \in \mathbb{K}_x$. Ahora, sea $\sigma \in \mathbb{K}_x$ y $\tau \subseteq \sigma$. Sea $y \in \tau$, entonces $y \in \sigma$. Así $y \in [x]$, por lo que $\tau \in \mathbb{K}_x$. Por lo tanto $\mathbb{K}_x$ es un complejo simplicial abstracto y así un subcomplejo de $\mathbb{K}_x$.

Ahora bien, por construción $\mathbb{K}_x$ es conexo. Notamos que por la propiedades bien conocidas de partición tenemos que $\mathbb{K}$ es unión disjunta de subcomplejos conexos. $\square$

A estos subcomplejos los llamaremos componentes conexas de $\mathbb{K}$.

DEFINICIÓN 35. *Un movimiento elemental consiste en identificar el camino $x_0,\ldots,x_n$ con $x_0,\ldots x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ si $\{x_{i-1},x_i,x_{i+1}\} \in \mathbb{K}$. Notamos que un movimiento elemental consiste en identificar un camino con un subcamino. Un camino el cual no se le pueden aplicar movimientos elementales lo llamaremos reducido. Para efectos de practicidad* *consideraremos que un movimiento elemental también es el identificar un camino consigo mismo. Decimos que dos caminos son equivalente si los dos se pueden llevar a un tercero por medio de movientos elementales. Observamos que todo camino es equivalente a un único camino reducido. Esto implica que dos caminos son equivalentes si y sólo si tienen el mismo único camino reducido. También por definición de movimientos elemental tenemos que dos caminos equivalentes tienen el mismo inicio y el mismo final.*

DEFINICIÓN 36. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto. Denotamos por $\Gamma(\mathbb{K})$ al conjunto de caminos de $\mathbb{K}$.*

PROPOSICIÓN 54. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto. La relación de ser equivalentes entre caminos es una relación de equivalencia sobre $\Gamma(\mathbb{K})$*

DEMOSTRACIÓN. La relación es reflexiva por el movimiento elemenatl extra que se definión. Por defininición la relación es simetrica. Sean $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma(\mathbb{K})$ con α y β equivalentes, y β y γ equivalentes. Por lo cual existen β_1 y β_2 de tal forma que β_1 se obtiene de α tras aplicar una serie de moviemientos elementales y de β tras aplicar una serie de moviemientos elementale, y β_2 se obtiene de β tras aplicar una serie de moviemientos elementales y de γ tras aplicar una serie de moviemientos elementales. Notamos que como β_1 y β_2 son subcaminos de β tienen el mismo úico subcamino reducido de que β. Por lo cual β_1 y β_2 son equivalentes, lo que implica que α y γ son equivalntes. Así la relación es transistivo y por lo tanto es una relaci´on de equivalencia. □

DEFINICIÓN 37. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto y $\alpha \in \Gamma(\mathbb{K})$. Si α es el camino $x_0,\dots,x_n$. Ponemos $b(\alpha) = x_0$ y $e(\alpha) = x_n$. Sean $\alpha,\beta \in \Gamma(\mathbb{K})$ tales que $e(\alpha) = b(\beta)$. Definimos $\alpha \circ \beta$ como el camino $x_1,\dots,x_n,\dots,y_m$ donde α es el camino $x_0,\dots,x_n$ y β es el camino $y_0,\dots,y_m$. Para $x \in X$ un vértice de $\mathbb{K}$ definimos $\Gamma(\mathbb{K},x) = \{\alpha \in \Gamma(\mathbb{K}) \mid b(\alpha) = e(\alpha) = x\}$. Notamos que la relación de equivalencia baja naturalmente a $\Gamma(\mathbb{K},x)$, por lo que definimos $\Pi_1(\mathbb{K},x)$ como el cociente de $\Gamma(\mathbb{K},x)$ módulo la relación de equivalencia.*

PROPOSICIÓN 55. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto y $x \in X$ un vértice de $\mathbb{K}$. La operación $[\alpha] * [\beta] := [\alpha \circ \beta]$ brinda a $\Pi_1(\mathbb{K},x)$ de una estructura de grupo.*

DEMOSTRACIÓN. Hay que ver que la operación esta bien definida. Sean $\alpha,\alpha',\beta,\beta' \in \Gamma(\mathbb{K},x)$ tales que α este relacionado con α', y β este relacionado con β'. Por lo que existen

$\alpha^*, \beta^* \in \Gamma(\mathbb{K},x)$ caminos reducidos tales que α y α estan relacionados con α^* y β y β' estan relacionados con β^*. De aquí

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha \circ \beta] = [\alpha^* \circ \beta^*] = [\alpha' \circ \beta'] = [\alpha'] * [\beta']$$

Notemos que como α es equivalente a α^* y β es equivalente a β^*, entonces $\alpha \circ \beta$ es equivalente a $\alpha^* \circ \beta^*$. De forma análoga, $\alpha' \circ \beta'$ es equivalente a $\alpha^* \circ \beta^*$.

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(\mathbb{K},x)$. Entonces:

$$[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = [\alpha \circ (\beta \circ \gamma)] = [(\alpha \circ \beta) \circ \gamma] = ([\alpha] * [\beta]) * \gamma)$$

Para el neutro consideramos η el camino x, notamos que el camino $\alpha \circ \eta$ es equivalente a α para $\alpha \in \Gamma(\mathbb{K},x)$, y de manera análoga $\eta \circ \alpha$ es equivalente a α. De donde tenemos que:

$$[\alpha] * [\eta] = [\alpha] = [\eta] * [\alpha]$$

Para $\alpha \in \Gamma(\mathbb{K})$, si α es el camino $x_0, \ldots, x_n$, ponemos $\overline{\alpha}$ como el camino $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$. Así para $\alpha \in \Gamma(\mathbb{K},x)$ tenemos que $\alpha\overline{\alpha}$ y $\overline{\alpha}\alpha$ son equivalentes a η. Por lo que:

$$[\alpha] * [\overline{\alpha}] = [\eta] = [\overline{\alpha}] * [\alpha]$$

□

PROPOSICIÓN 56. *Sean $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ un complejo simplicial abstractos,$x \in X$ un vértice de $\mathbb{K}$ y $f \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ un morfismo de complejos simpliciales abstractos. Entonces f induce un morfismo de grupos $\Pi_1(f) \colon \Pi_1(\mathbb{K},x) \longrightarrow \Pi_1(\mathbb{L}, f(x))$.*

DEMOSTRACIÓN. Notamos que si α es un camino, entonces $f(\alpha)$ es un camino. Más aún, envía caminos equivalentes en caminos equivalentes. Así podemos definit $\Pi_1(f)([\alpha]) = [f(\alpha)]$ por lo que:

$$\begin{aligned}
\Pi_1(f)([\alpha] * [\beta]) &= \Pi_1(f)([\alpha \circ \beta]) \\
&= [f(\alpha \circ \beta)] \\
&= [f(\alpha) \circ f(\beta)] \\
&= [f(\alpha)] * [f(\beta)] \\
&= \Pi_1(f)([\alpha]) * \Pi_1(f)([\beta])
\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 57. *Sean* $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ *y* $\mathbb{M}$ *complejos simpliciales abstractos,*$x \in X$ *un vértice de* $\mathbb{K}$ *y* $f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ *y* $g\colon \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{M}$ *morfismos de complejos simpliciales abstractos. Entonces* $\Pi_1(gf) = \Pi_1(g)\Pi_1(f)$

DEMOSTRACIÓN. Sea $[\alpha] \in \Pi_1(\mathbb{K}, x)$. Entonces:

$$\Pi_1(gf)[\alpha] = [gf\alpha] = \Pi_1(g)[f\alpha] = \Pi_1(g)\Pi_1(f)[\alpha]$$

$\square$

PROPOSICIÓN 58. *Sea* $\mathbb{K}$ *un complejo simplicial abstracto, y* $x \in X$ *un vértice de* $\mathbb{K}$*. Entonces* $\Pi_1(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\Pi_1(\mathbb{K},x)}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $[\alpha] \in \Pi_1(\mathbb{K}, x)$. Entonces:

$$\Pi_1(1_{\mathbb{K}})[\alpha] = [1_{\mathbb{K}}\alpha] = [\alpha]$$

$\square$

5. Triangulación

Capítulo 3

Una Introducción a la Topología Algebraica

1. Homología Simplicial

DEFINICIÓN 38. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $C \in \mathscr{K}$ con n vértices. Denotamos por C_0 a su conjunto de vértices. Un ordenamiento de C es un ordenamiento de C_0, es decir, un ordenamiento de los vértices de C.*

DEFINICIÓN 39. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $C \in \mathscr{K}$ con n-simplejo con ordenamiento $R\colon \{0,\dots,n\} \longrightarrow C_0$. A un n-simplejo con un ordenamiento lo llamaremos un n-simplejo ordenado. Notacionalmente ponemos $x_i := R(i)$ para $i = 0,\dots,n$, en caso de no ser necesario destacar el ordenamiento R. Así podemos escribir notacionalmente el ordenamiento como un arreglo de C_0^{n+1}, es decir, $C = [x_0,\dots,x_n]$. Entonces podemos definir $C_R[i]$ como el $n-1$-simplejo ordenado tal que $C_R[i]_0 = [x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n]$. Así obtenemos una de sus $n-1$-caras al eliminar uno de sus vértices. La cara obtenida al eliminar el vértice x_i resulta ser la cara opuesta al vértice x_i.*

Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $C \in \mathscr{K}$ con n-simplejo. Si $R\colon \{0,\dots,n\} \longrightarrow C$ es un ordenamiento y $D \subseteq C$ es una cara de C, entonces R induce un ordenamiento en D. Por lo que vale considerar un ordenamiento de R de los vértices de $\mathscr{K}$, lo cual inducirá un ordenamiento en todos los vértices.

DEFINICIÓN 40. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n y $r \leq n$ un natural. Denotamos por $\mathscr{K}_r$ al conjunto de r-simplejos y $\mathscr{K}_r^o$ al conjunto de r-simplejos ordenados.*

DEFINICIÓN 41. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n y $r \leq n$ un natural. Definimos:*

$$L^r(\mathscr{K}) = \mathbb{Z}^{\mathscr{K}_r^o}/E^r(\mathscr{K})$$

donde $E^r(\mathscr{K})$ es el subgrupo de $\mathbb{Z}^{\mathscr{K}_r^o}$ generado por $\sigma - sgn(f)\sigma_f$ para $\sigma \in \mathscr{K}_r^o$ y $f \in S_{r+1}$ donde $\sigma_f = [x_{f(0)},\dots,x_{f(n)}]$ con $\sigma = [x_0\dots,x_n]$. Observamos que aquí abusamos de la notación identificando $\sigma \in \mathscr{K}_r^o$ con $e_\sigma \in \mathbb{Z}^{\mathscr{K}_r^o}$ dado por $e_\sigma(\tau) = \delta_{\sigma\tau}$. Por último, *pasaremos un paso adelante con el abuso de notación y denotaremos por σ tambien al elemento en $L^r(\mathscr{K})$. Notemos que $\sigma_f = -\sigma$ en $L^r(\mathscr{K})$ si f es una permutación impar.*

PROPOSICIÓN 59. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n y $r \leq n$ un natural. Si $\sigma \in L^r(\mathscr{K})$ y $f \in S_{r+1}$, entonces $\sigma_f = -\sigma$ para f impar.*

DEMOSTRACIÓN. Haciendo un abuso de notación. Notamos que $\sigma - sgn(f)\sigma_f \in E^r(\mathscr{K})$. Si f es impar entonces tenemos que $sgn(f) = -1$. Por lo que $\sigma + \sigma_f \in E^r(\mathscr{K})$. De aquí se sigue que $\sigma_f = -\sigma$. □

DEFINICIÓN 42. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n, $0 < r \leq n$ un natural y R un ordenamiento de los vértices de $\mathscr{K}$. Definimos*

$$\Delta_R^r \colon L^r(\mathscr{K}) \longrightarrow L^{r-1}(\mathscr{K})$$

dado por:

$$\Delta_R^r(\sigma) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \sigma_R[i]$$

para $\sigma \in \mathscr{K}$.

Como $L^r(\mathscr{K})$ es grupo abeliano libre con base $\mathscr{K}$, entonces Δ^r se puede extender de forma $\mathbb{Z}$-lineal a un único morfismo de grupos. De nuevo abusando de notación, este morfismo lo denotaremos por Δ_R^r.

PROPOSICIÓN 60. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n, $0 < r < n$ un natural y R un ordenamiento de los vértices de $\mathscr{K}$. Entonces $\sigma_R[i]_R[j] = \sigma_R[j+1]_R[i]$ para $0 \leq i \leq j \leq n$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\sigma_R = \{x_0, \ldots, x_n\}$, entonces $\sigma_R[i] = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$. Así, $\sigma_R[i]_R[j] = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_j, x_{j+2}, \ldots, x_n\}$. Siendo puntuales hay tres casos, el primero $i = j$, entonces $\sigma_R[i]_R[j] = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+2}, \ldots, x_n\}$. El segundo caso, $j = i+1$, entonces $\sigma_R[i]_R[j] = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+3}, \ldots, x_n\}$. Y el último, si $i+1 < j$, entonces $\sigma_R[i]_R[j] = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\}$. Por otro lado, tenemos que $\sigma_R[j+1] = \{x_0, \ldots, x_j, x_{j+2}, \ldots, x_n\}$. Primero $i = j$,

$$\sigma_R[j+1]_R[i] = \{x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+2}, \ldots, x_n\} = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_j, x_{j+2}, \ldots, x_n\} = \sigma_R[i]_R[j]$$

En el caso, $j = 1+1$

$$\sigma_R[j+1]_R[i] = \{x_0, \ldots, x_{j-2}, x_j, x_{j+2}, \ldots, x_n\} = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+3}, \ldots, x_n\} = \sigma_R[i]_R[j]$$

Por último, $i+1<j$,

$$\sigma_R[j+1]_R[i] = \{x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n\} = \sigma_R[i]_R[j]$$

Por lo tanto, $\sigma_R[i]_R[j] = \sigma_R[j+1]_R[i]$ para $0 \leq i \leq j \leq n$. $\square$

PROPOSICIÓN 61. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n, $0<r<n$ un natural y R un ordenamiento de los vértices de $\mathscr{K}$. Entonces $\Delta_R^r \Delta_R^{r+1} = 0$*

DEMOSTRACIÓN. Para ver esto, basta verlos en los simplejos σ representados en el grupo libre:

$$\begin{aligned}
\Delta_R^r\Delta_R^{r+1}(\sigma) &= \Delta_R^r(\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i\sigma_R[i]) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i\Delta_R^r(\sigma_R[i]) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i(\sum_{j=0}^{r}(-1)^j(\sigma_R[i])_R[j]) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{i+j}(\sigma_R[i])_R[j]) \\
&= \sum_{i=1}^{r+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}(\sigma_R[i])_R[j]) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=i}^{r}(-1)^{i+j}(\sigma_R[i])_R[j]) \\
&= \sum_{i=1}^{r+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}(\sigma_R[i])_R[j]) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=i}^{r}(-1)^{i+j}(\sigma_R[j+1])_R[i]) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=k}^{r}(-1)^{k+j+1}(\sigma_R[k+1])_R[j]) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=i}^{r}(-1)^{i+j}(\sigma_R[j+1])_R[i]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

Notamos que para cualesquiera dos ordenamientos R y S de los vértices de $\mathscr{K}$. Tenemos que $nuc(\Delta_R^r) = nuc(\Delta_S^r)$ e $im(\Delta_R^r) = im(\Delta_S^r)$. Por lo que la siguiente definición no depende de ordenamiento alguno de los vértices.

DEFINICIÓN 43. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n, y $0<r<n$ un natural. Definimos*

$$H^r(\mathscr{K}) = nuc(\Delta^r)/im(\Delta^{r+1})$$

Para el caso de $r=n$, pondremos $H^r(\mathscr{K}) = L^r(\mathscr{K})$. Esto coincide con la idea de poner $L^{n+1}(\mathscr{K}) = 0$ y $\Delta^{n+1} = 0$. Por otro lado, para el caso de $r=0$, pondremos $L^{-1}(\mathscr{K}) = 0$ y

$\Delta^r = 0$. *Extendemos la definición de forma natural, es decir,*

$$H^0 = L^0(\mathscr{K})/im(\Delta^1)$$

DEFINICIÓN 44. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n, y $0 \leq r \leq n$ un natural. Los elementos de $L^r(\mathscr{K})$ los llamaremos r-cadenas. A una r-cadena x la llamaremos un r-ciclo, si $\Delta^r(x) = 0$. Un r-ciclo lo llamaremos un r-borde si está en la imagen de Δ^{r+1}.*

PROPOSICIÓN 62. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n, y $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_m$ componentes de $\mathscr{K}$. Entonces*

$$H^r(\mathscr{K}) = H^r(\mathscr{L}_1) \oplus \cdots \oplus H^r(\mathscr{L}_m)$$

DEMOSTRACIÓN. Haremos esto para el caso $m = 2$ y el caso general se sigue por inducción aplicando recursivamente la misma proposición. Primero observemos que:

$$L^r(\mathscr{K}) = L^r(\mathscr{L}_1) \oplus L^r(\mathscr{L}_2)$$

Esto debido a que $\mathscr{K}_r = (\mathscr{L}_1)_r \sqcup (\mathscr{L}_2)_r$. Así mismo esto implica que $\mathscr{K}_r^o = (\mathscr{L}_1)_r^o \sqcup (\mathscr{L}_2)_r^o$. Por lo que tenemos que $\mathbb{Z}^{\mathscr{K}_r^o} = \mathbb{Z}^{(\mathscr{L}_1)_r^o} \oplus \mathbb{Z}^{(\mathscr{L}_2)_r^o}$. De igual manera notamos que por contrucción tenemos que $E^r(\mathscr{L}_1) \leq \mathbb{Z}^{(\mathscr{L}_1)_r^o}$ y $E^r(\mathscr{L}_2) \leq \mathbb{Z}^{(\mathscr{L}_2)_r^o}$. Por lo que efectivamente concluimos que $L^r(\mathscr{K}) = L^r(\mathscr{L}_1) \oplus L^r(\mathscr{L}_2)$

Afirmamos que $\Delta^r_{\mathscr{K}} = \Delta^r_{\mathscr{L}_1} \oplus \Delta^r_{\mathscr{L}_2}$, esto es, que $\Delta^r_{\mathscr{K}}(x) = \Delta^r_{\mathscr{L}_1}(x_1) + \Delta^r_{\mathscr{L}_2}(x_2)$ donde $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in L^r(\mathscr{L}_1)$ y $x_2 \in L^r(\mathscr{L}_2)$ la descomposición canónica de x. Notamos que para σ un r-simplejo de $\mathscr{K}$, entonces σ pertenece a $\mathscr{L}_1$ ó a $\mathscr{L}_2$. Por lo que $\Delta^r_{\mathscr{K}} = \Delta^r_{\mathscr{L}_1} \oplus \Delta^r_{\mathscr{L}_2}$ para los generadores, lo que se extiende de forma lineal.

Así observamos que este hecho implica que $im(\Delta^{r+1}_{\mathscr{K}}) = im(\Delta^{r+1}_{\mathscr{L}_1}) \oplus im(\Delta^{r+1}_{\mathscr{L}_2})$ y $nuc(\Delta^r_{\mathscr{K}}) = nuc(\Delta^r_{\mathscr{L}_1}) \oplus nuc(\Delta^r_{\mathscr{L}_2})$, independientemente tenemos que $im(\Delta^{r+1}_{\mathscr{L}_1}) \leq nuc(\Delta^r_{\mathscr{L}_1})$ y $im(\Delta^{r+1}_{\mathscr{L}_2}) \leq nuc(\Delta^r_{\mathscr{L}_2})$. Por lo que podemos concluir que:

$$H^r(\mathscr{K}) = H^r(\mathscr{L}_1) \oplus H^r(\mathscr{L}_2)$$

□

2. Grupo de Trayectorias De Artistas

3. Realización Geométrica y Grupo de Trayectorias

4. Grupo Fundamental y Nervio

Capítulo 4

Conjuntos Simpliciales

1. Definición y ejemplos

DEFINICIÓN 45. *Un conjunto simplicial es una terna (K,δ,σ), donde K es una familia de conjuntos indicada en los naturales $K=\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$, δ es una familia de funciones $\delta_i^n\colon K_n \longrightarrow K_{n-1}$ con $n\in\mathbb{N}^+$ y $0\leq i\leq n$ y σ es una familia de funciones $\sigma_i^n\colon K_n\longrightarrow K_{n+1}$ con $n\in\mathbb{N}$ y $0\leq i\leq n$, y estas familias de funciones satisfacen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned}
&\delta_i^{n-1}\delta_j^n=\delta_{j-1}^{n-1}\delta_i^n && 0\leq i<j\leq n\\
&\sigma_i^{n+1}\sigma_j^n=\sigma_{j+1}^{n+1}\sigma_i^n && 0\leq i\leq j\leq n\\
&\delta_i^{n+1}\sigma_j^n=\sigma_{j-1}^{n-1}\delta_i^n && 0\leq i<j\leq n\\
&\delta_j^{n+1}\sigma_j^n=1_{K_n} && 0\leq j\leq n\\
&\delta_{j+1}^{n+1}\sigma_j^n=1_{K_n} && 0\leq j\leq n\\
&\delta_i^{n+1}\sigma_j^n=\sigma_j^{n+1}\delta_{i-1}^n && 1\leq j+1<i\leq n+1
\end{aligned}$$

Los elementos de K_n se llaman n simplejos, las funciones δ_i caras y las funciones σ_i degeneraciones.

El concepto de conjunto simplicial no es intuitivo a primera instancia, pero trabajandosele un poco puede irse entiendo como una idea natural. Se empieza definiendo $[n]:=\{0,...,n\}$ para todo natural n. Para todo natural positivo n e $i=0,...n$ se define $d_i^n:[n-1]\longrightarrow[n]$ como:

$$d_i^n(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<i\\ x+1 & \text{si } x\geq i\end{cases}$$

Para todo natural n e $i=0,...,n-1$ se define $s_i^n:[n+1]\longrightarrow[n]$

$$s_i^n(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\leq i\\ x-1 & \text{si } x>i\end{cases}$$

A las funciones s_i^n se les llama codegeneraciones y a las funciones d_i^n se les llama cocaras. Estas funciones cumplen unas identidades que se llaman identidades cosimpliciales.

$$d_j^{n+1}d_i^n = d_i^{n+1}d_{j-1}^n \qquad \text{si } i<j$$
$$s_j^n s_i^{n+1} = s_i^n s_{j+1}^{n+1} \qquad \text{si } i\leq j$$
$$d_j^{n-1}s_i^n = \begin{cases} s_i^{n-1}d_{j-1}^{n-2} & \text{si } i<j \\ 1 & \text{si } i=j \text{ o } i=j+1 \\ s_{i-1}^{n-1}d_j^{n-2} & \text{si } i>j+1 \end{cases} \qquad \text{si } n\geq 1$$

PROPOSICIÓN 63. *Se cumplen las identidades cosimpliciales.*

DEMOSTRACIÓN. 1) $d_j^{n+1}d_i^n = d_i^{n+1}d_{j-1}^n$ si $i<j$.

Si $x<i$, entonces $d_j^{n+1}(d_i^n(x)) = d_j^{n+1}(x) = x$ y $d_i^{n+1}(d_{j-1}^n(x)) = d_i^{n+1}(x) = x$, por lo que $d_j^{n+1}d_i^n(x) = d_i^{n+1}d_{j-1}^n(x)$.

Si $i\leq x<j-1$ entonces $d_j^{n+1}(d_i^n(x)) = d_j^{n+1}(x+1) = x$ y $d_i^{n+1}(d_{j-1}^n(x)) = d_i^{n+1}(x) = x+1$, por lo que $d_j^{n+1}d_i^n(x) = d_i^{n+1}d_{j-1}^n(x)$.

Si $j-1\leq x$ entonces $d_j^{n+1}(d_i^n(x)) = d_j^{n+1}(x+1) = x+2$ y $d_i^{n+1}(d_{j-1}^n(x)) = d_i^{n+1}(x+1) = x+2$, por lo que $d_j^{n+1}d_i^n(x) = d_i^{n+1}d_{j-1}^n(x)$.

Se observa que para todo n natural, $[n]$ tiene el buen orden inducido por los naturales, es decir, $0\leq 1\leq 2\leq ...\leq n$. Por lo cual se puede hablar de funciones monótonas. Una función monótona $f:[n]\longrightarrow[m]$ donde n y m son naturales, es una función que satisface: si $x\leq y$ entonces $f(x)\leq f(y)$. □

EJEMPLO 8. *Se considera los simplejos:*

$$\Delta_n = \{(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbb{R} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i\geq 0 \forall i=0,\ldots,n\}$$

donde n es un natural. Sea X un espacio topológico, se considera $S_n(X)$ el conjunto de las funciones continuas de Δ_n en X donde n es un natural. Así es que de esta forma se obtiene un conjunto indicado en los naturales, a este conjunto se le llama el conjunto de los n-simplejos singulares de X. Solo basta decir quienes serán las familias de funciones y ver que cumplen las igualdades.

Se observa que δ_i^n va de $S_n(X)$ en $S_{n-1}(X)$ por lo que un elemento $f\in S_n(X)$ es una función continua $f\colon \Delta_n\longrightarrow X$ y se le debe de asignar una función continua $\delta_i^n(f)\in S_{n-1}(X)$ que va de Δ_{n-1} en X.

Sea $(x_0,\ldots,x_{n-1})\in\Delta_{n-1}$. Se pone:

$$\delta_i^n(f)(x_0,\ldots,x_{n-1}) = f(x_0,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_{n-1})$$

De manera análoga, se tiene que para $(x_0,\dots,x_{n+1}) \in \Delta_{n+1}$*:*

$$\sigma_i^n(f)(x_0,\dots,x_{n+1}) = f(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n+1})$$

Se hace notar que

$$(x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-1}),(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n+1}) \in \Delta_n$$

por lo que ambas funciones estan bien definidas. Más aún se pueden crear dos familias de funciones auxiliares, las primeras $d_i^n : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n$ con $n \geq 1$ y $0 \leq i \leq n$ dadas por:

$$d_i^n(x_0,\dots,x_{n-1}) = (x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-1})$$

y las segundas $s_i^n : \Delta_{n+1} \longrightarrow \Delta_n$ con $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq i \leq n$ dadas por

$$s_i^n(x_0,\dots,x_{n+1}) = (x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n+1})$$

Es inmediato que $\delta_i^n(f) = f \circ d_i^n$ y $\sigma_i^n(f) = f \circ s_i^n$, por lo que para probar que $\delta_i^n(f)$ y $\sigma_i^n(f)$ son continuas bastaría ver que d_i^n y s_i^n son continuas, ya que composición de continuas es continua. Primero se ve que d_i^n es continua, ya que preserva distancias. Se tiene que s_i^n es continua, por que es el producto de identidades con la suma. Se procede a demostrar las identidades simpliciales:

Sean $0 \leq i < j \leq n$, entonces $\delta_i^{n-1}\delta_j^n(f) = f \circ d_j^n \circ d_i^{n-1}$ y $\delta_{j-1}^{n-1}\delta_i^n(f) = f \circ d_i^n \circ d_{j-1}^{n-1}$ para $f \in S_n(X)$. Por lo que basta demostrar que $d_j^n \circ d_i^{n-1} = d_i^n \circ d_{j-1}^{n-1}$. Sea $(x_0,\dots,x_{n-2}) \in \Delta_{n-2}$. Haciendo ambas cuentas:

$$\begin{aligned} d_j^n \circ d_i^{n-1}(x_0,\dots,x_{n-2}) &= d_j^n(x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-2}) \\ &= (x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{j-2},0,x_{j-1},\dots,x_{n-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_i^n \circ d_{j-1}^{n-1}(x_0,\dots,x_{n-2}) &= d_i^n(x_0,\dots,x_{j-2},0,x_{j-1},\dots,x_{n-2}) \\ &= (x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{j-2},0,x_{j-1},\dots,x_{n-2}) \end{aligned}$$

Sean $0 \leq i \leq j \leq n$, entonces $\sigma_i^{n+1}\sigma_j^n(f) = f \circ s_j^n \circ s_i^{n+1}$ y $\sigma_{j+1}^{n+1}\sigma_i^n(f) = f \circ s_i^n \circ s_{j+1}^{n+1}$ para $f \in S_n(X)$. Por lo que basta demostrar que $s_j^n \circ s_i^{n+1} = s_i^n \circ s_{j+1}^{n+1}$. Sea $(x_0,\dots,x_{n+2}) \in \Delta_{n+2}$. Haciendo ambas cuentas:

$$\begin{aligned} s_j^n \circ s_i^{n+1}(x_0,\dots,x_{n+2}) &= s_j^n(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n+2}) \\ &= \begin{cases} (x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1}+x_{i+2},\dots,x_{n+2}) & \text{si } i = j \\ (x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},\dots,x_{j+1}+x_{j+2},\dots,x_{n+2}) & \text{si } i < j \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_i^n \circ s_{j+1}^{n+1}(x_0,\dots,x_{n+2}) &= s_i^n(x_0,\dots,x_j,x_{j+1}+x_{j+2},x_{i+2},\dots,x_{n+2}) \\ &= \begin{cases} (x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1}+x_{i+2},\dots,x_{n+2}) & \text{si } i = j \\ (x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},\dots,x_{j+1}+x_{j+2},\dots,x_{n+2}) & \text{si } i < j \end{cases} \end{aligned}$$

Sean $0 \leq i < j \leq n$, entonces $\delta_i^{n+1}\sigma_j^n(f) = f \circ s_j^n \circ d_i^{n+1}$ y $\sigma_{j-1}^{n-1}\delta_i^n(f) = f \circ d_i^n \circ s_{j-1}^{n-1}$ para $f \in S_n(X)$. Por lo que basta demostrar que $s_j^n \circ d_i^{n+1} = d_i^n \circ s_{j-1}^{n-1}$. Sea $(x_0,\dots,x_n) \in \Delta_n$. Haciendo ambas cuentas:

$$\begin{aligned} s_j^n \circ d_i^{n+1}(x_0,\ldots,x_n) &= s_j^n(x_0,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_n) \\ &= (x_0,\ldots,x_{i-1},0,\ldots,x_{j-1}+x_j,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_i^n \circ s_{j-1}^{n-1}(x_0,\ldots,x_n) &= d_i^n(x_0,\ldots,x_{j-1}+x_j,\ldots,x_n) \\ &= (x_0,\ldots,x_{i-1},0,\ldots,x_{j-1}+x_j,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

A este conjunto simplicial se le conoce como el complejo singular total de X.

EJEMPLO 9. *Un complejo simplicial abstracto Δ sobre un conjunto X es una familia de de subconjuntos finitos de X no vacíos, tal que si $\sigma \in \Delta$ y $\tau \subseteq \sigma$ con $\tau \neq \emptyset$ entonces $\tau \in \Delta$.*

Para un complejo simplicial abstracto Δ y n es un natural, se pone:

$$K_n = \{(x_0,\ldots,x_n) \in X^{n+1} \mid \{x_0,\ldots,x_n\} \in \Delta\}$$

Las funciones cara están dada por:

$$\delta_i^n(x_0,\ldots,x_n) = (x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$$

Las funciones degeneración están dadas por:

$$\sigma_i^n(x_0,\ldots,x_n) = (x_0,\ldots,x_i,x_i,\ldots,x_n)$$

EJEMPLO 10. *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{G}$ una cubierta abierta de X, se define $N(\mathscr{G})$ como el conjunto de todos los subconjuntos finitos $\mathscr{K}$ de $\mathscr{G}$ no vacíos tales que $\bigcap \mathscr{K} \neq \emptyset$. Por lo que $N(\mathscr{G})$ induce un conjunto simplicial como en el exampleplo anterior.*

EJEMPLO 11. *Sea P un orden parcial. Para n un natural se pone:*

$$P_n = \{(x_0,\ldots,x_n) \in P^{n+1} \mid x_i \leq x_{i+1} \forall i = 0,\ldots,n-1\}$$

2. Lema de Yoneda Simplicial

3. Conjuntos Cosimpliciales y Complejo Singular

4. Realización Geométrica

5. Adjunción y Unidad

Capítulo 5

Complejos Simpliciales

1.

Se dice que un conjunto simplicial es un complejo fuertemente de Kan si $x_0,...,x_n \in X_n$ son tales que $\delta_i^n(x_j) = \delta_{j-1}^n(x_i)$ para $i < j$ entonces existe $x \in X_{n+1}$ tal que $\delta_k^{n+1}(x) = x_k$ para $k = 0,...,n$.

Ésta defición puede parece un poquito demasiado artificial, pero, se puede pensar de éste modo. Si se empieza con un elemento x de X_n, se puede poner $x_k = \delta_k^{n+1}(x)$ para $k = 0,...,n$, la primera identidad simplicial dice que $\delta_i^n(x_j) = \delta_{j-1}^n(x_i)$ para $i < j$, por lo que es como una especie de recíproco, o una especie suprayectividad, no todos vendrán de alguien, pero si se cumple cierta condición se puede asegurar que se viene de alguien.

Se procede a analizar el ejemplo semicanónico. Sean $x^0,...,x^n \in R_n$ que satifacen $\delta_i^n(x^j) = \delta_{j-1}^n(x^i)$ para $i < j$, si se pone a $x_k = (x_0^k,...,x_n^k)$,

$$(x_0^j,...,x_{i-1}^j,x_i^j + x_{i+1}^j,x_{i+2}^j,...,x_n^j) = (x_0^i,..,x_{j-2}^i,x_{j-1}^i + x_j^i,x_{j+1}^i,...,x_n^i)$$

para $i < j$. Es deseable analizar éste ejemplo a fondo, ya que es el canónico. Primero como $i < j \leq n$, se observa que hay $\binom{n+1}{2}$. Se empieza con el caso cuando $j = n$ e $i = n-1$. En éste caso la igualdad es:

$$(x_0^j,...,x_{i-1}^j,x_i^j + x_{i+1}^j) = (x_0^i,..,x_{j-2}^i,x_{j-1}^i + x_j^i)$$

De ésta igualdad se deduce que $x_k^i = x_k^j$ para $k = 0,...,n-2$ y $x_{n-1}^i + x_n^i = x_{n-1}^j + x_n^j$. . Esto da intuición a pensar sólo en los consecutivos, es decir, se toma $j = i+1 \leq n$, de aquí se tiene

$$\begin{aligned}(x_0^j,...,x_{i-1}^j,x_i^j + x_{i+1}^j,x_{i+2}^j,...,x_n^j) &= (x_0^i,..,x_{j-2}^i,x_{j-1}^i + x_j^i,x_{j+1}^i,...,x_n^i) \\ &= (x_0^i,..,x_{(i+1)-2}^i,x_{(i+1)-1}^i + x_{i+1}^i,x_{(i+1)+1}^i,...,x_n^i) \\ &= (x_0^i,..,x_{i-1}^i,x_i^i + x_{i+1}^i,x_{i+2}^i,...,x_n^i)\end{aligned}$$

Lo que significa que $x_k^i = x_k^j$ para $k = 0,...,i-1,i+2,...,n$ y $x_i^i + x_{i+1}^i = x_i^j + x_{i+1}^j$. En el caso de que $i < j-1$ se tiene que la igualdad implica que: $x_k^j = x_k^i$ para $k = 0,..,i-1,j+2,...,n$, $x_i^j + x_{i+1}^j = x_i^i$, $x_j^j = x_{j-1}^i + x_j^i$ y $x_k^j = x_{k-1}^i$ para $k = i+2,...,j-1$.

Se procede a analizar en casos especiales, por ejemplo para $n = 2$, se tienen tres 2-simplejos, $x^0 = (x_0^0,x_1^0,x_2^0)$, $x^1 = (x_0^1,x_1^1,x_2^1)$ y $x2 = (x_0^2,x_1^2,x_2^2)$. Cómo $n = 2$, se tienen $\binom{3}{2} = 3$ igualdades que checar, $0 < 1, 0 < 2$ y $1 < 2$, la primera es $\delta_0^2(x^1) = \delta_0^2(x^0)$ que implica:

$$(x_0^1 + x_1^1,x_2^1) = (x_0^0 + x_1^0,x_2^0)$$

que en un sistemas de ecuaciones dice:

$$\begin{cases} x_0^1 + x_1^1 & = x_0^0 + x_1^0 \\ x_2^1 & = x_2^0 \end{cases}$$

la segunda es $\delta_0^2(x^2) = \delta_1^2(x^0)$ que implica:

$$(x_0^2 + x_1^2, x_2^2) = (x_0^0, x_1^0 + x_2^0)$$

que en un sistemas de ecuaciones dice:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 & = x_0^0 \\ x_2^2 & = x_1^0 + x_2^0 \end{cases}$$

la tercera es $\delta_1^2(x^2) = \delta_1^2(x^1)$ que implica:

$$(x_0^2, x_1^2 + x_2^2) = (x_0^1, x_1^1 + x_2^1)$$

que en un sistemas de ecuaciones dice:

$$\begin{cases} x_0^2 & = x_0^1 \\ x_1^2 + x_2^2 & = x_1^1 + x_2^1 \end{cases}$$

Si se juntan los sistemas de ecuaciones se tiene

$$\begin{cases} x_0^1 + x_1^1 & = x_0^0 + x_1^0 \\ x_2^1 & = x_2^0 \\ x_0^2 + x_1^2 & = x_0^0 \\ x_2^2 & = x_1^0 + x_2^0 \\ x_0^2 & = x_0^1 \\ x_1^2 + x_2^2 & = x_1^1 + x_2^1 \end{cases}$$

Es un sistema de 3 ecuaciones en 9 incógnitas, que no se sabe si tiene solución pero en caso de tener solución lo que interesa es encontrar $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ un 3-simplejo tal que $\delta_k^n(x) = x_k$ para $k = 0, 1, 2$, esto es,

$$(x_0 + x_1, x_2, x_3) = (x_0^0, x_1^0, x_2^0)$$
$$(x_0, x_1 + x_2, x_3) = (x_0^1, x_1^1, x_2^1)$$
$$(x_0, x_1, x_2 + x_3) = (x_0^2, x_1^2, x_2^2)$$

Como x_0, x_1 y x_2 están dados se elige $x = (x_0^2, x_1^2, x_1^0, x_2^0)$. Se procede a verificar que éste x cumple los prometido:

$$\delta_0^2(x) = (x_0^2 + x_1^2, x_1^0, x_2^0) = (x_0^0, x_1^0, x_2^0)$$

Esto por la tercera ecuación del sistema de 6 ecuaciones.

$$\delta_1^2(x) = (x_0^2, x_1^2 + x_1^0, x_2^0) = (x_0^1, x_1^1, x_2^1)$$

Se ve que por la ecuación 5, $x_0^2 = x_0^1$, por la ecuación 2, $x_2^0 = x_2^1$, ahora se toma $x_1^2 + x_1^0 = x^2 + (x_2^2 - x_2^0)$ por que $x_1^0 = x_2^2 - x_2^0$ de la ecuación 4, se sigue con aplicar la ecuación 6 y luego la 2 para obtener $x_1^2 + x_1^0 = x_1^1$.

Ahora que se ha creado un poco de intuición de lo que hay que demostrar se puede plantear el caso general. Se quiere encontrar $x = (x_0, ..., x_{n+1})$ tal que $\delta_k^{n+1}(x) = x^k$, es decir, $(x_0, ..., x_{k-1}, x_k + x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{n+1}) = (x_0^k, ..., x_n^k)$, esto puesto en sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x_0 & = x_0^k \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{k-1} & = x_{k-1}^k \\ x_k + x_{k+1} & = x_k^k \\ x_{k+2} & = x_{k+1}^k \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{n+1} & = x_n^k \end{cases}$$

A éste sistema se le llamará Sk, es un sistema en con $n+1$ ecuaciones y la i-ésima ecuación se le llamará $Sk - i$. Se nota que estos sistemas dicen quien debería de ser un candidato a X, es decir, de $S2-0$ y $S2-1$ se tiene que $x_0 = x_0^2$ y $x_1 = x_1^2$, de $S0$ se tiene que $x_i = x_{i-1}^0$ para $i = 2, ..., n+1$. Ahora se debe de demostrar que con está elección se satisfacen los sistemas de ecuaciones Sk para $k = 0, ..., n$, para esto, se había visto que se tenían dos familias de sistemas la primera es para cuando $j = i+1$, se tiene:

$$\begin{cases} x_0^j & = x_0^i \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{k-1}^j & = x_{k-1}^i \\ x_i^j + x_{i+1}^j & = x_i^i + x_{i+1}^i \\ x_{i+2}^j & = x_{i+1}^i \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{n+1}^j & = x_n^i \end{cases}$$

La segunda es:

$$\begin{cases} x_0^j & = x_0^i \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{i-1}^j = & x_{i-1}^i \\ x_i^j + x_{i+1}^j & = x_i^i \\ x_{i+2}^j & = x_{i+1}^i \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{j-1}^j & = x_{j-2}^i \\ x_j^j & = x_{j-1}^i + x_j^i \\ x_{j+1}^j & = x_{j+1}^i \\ \vdots & = \quad \vdots \\ x_n^j & = x_n^i \end{cases}$$

para cuando $i < j-1$.

Capítulo 6

Grupos de Homotopía

1.

Para toda n natural, se puede definir una relación en X_n, se dice que $x, x' \in X_n$ son homotópico si existe $y \in X_{n+1}$ tal que $\delta^{n+1}_{n-1}(y) = x$, $\delta^{n+1}_{n}(y) = x'$, $\delta^{n}_{i}(x) = \delta^{n}_{i}(x')$ para $i = 0, \ldots, n-1$ y $\delta^{n+1}_{i}(y) = \sigma n - 1_{n-1}(\delta^{n}_{i}(x)) = \sigma^{n-1}_{n-1}(\delta^{n}_{i}(x'))$ para $i = 0, \ldots, n-2$, se observa que la última igualdad sobra, pero es bueno que se tenga presente, otra observación pertinente es que ésta relación en X_0 sólo se limita a solicitar las dos primeras igualdades. Al elemento y se llama una homotopía de x a x'. Si x y x' son homotópicos se denotará por $x \sim x'$, y si se quiere resaltar la homotopía se escribirá $x \overset{y}{\sim} x'$.

PROPOSICIÓN 64. *Si el conjunto simplicial es un complejo fuertemente de Kan, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia en X_n, para toda n natural.*

DEMOSTRACIÓN. Sea n un natural,

Reflexividad) Sea $x \in X_n$, se pone $y = \sigma^{n}_{n}(x)$. Primero $\delta^{n+1}_{n}(y) = \delta^{n+1}_{n}(\sigma^{n}_{n}(x)) = x$ y $\delta^{n+1}_{n-1}(y) = \delta^{n+1}_{n-1}(\sigma^{n}_{n}(x)) = x$, esto es por la identidades simpliciales. Obviamente $\delta^{n}_{i}(x) = \delta^{n}_{i}(x)$ para $i = 0, \ldots, n-1$. Finalmente $\delta^{n+1}_{i}(y) = \delta^{n+1}_{i}(\sigma^{n}_{i}(x)) = \sigma^{n-1}_{n-1}(\delta^{n}_{i}(x))$ para $i = 0, \ldots, n-2$. $\square$

Capítulo 7

Grupos Abelianos

1. Morfismos de Grupos

PROPOSICIÓN 65. *Sea G un grupo abeliano y $H_1, H_2, K_1, K_2, K \leq G$ son tales que $G = H_1 \oplus H_2$, $K = K_1 \oplus K_2$, $K \leq G$, $K_1 \leq H_1$ y $K_2 \leq H_2$. Entonces $G/K \cong (H_1/K_1) \oplus (H_2/K_2)$.*

2. Grupo Libre

Capítulo 8

Homotopía

1. Morfismos de Grupos

PROPOSICIÓN 66. *Sea G un grupo abeliano y $H_1, H_2, K_1, K_2, K \leq G$ son tales que $G = H_1 \oplus H_2$, $K = K_1 \oplus K_2$, $K \leq G$, $K_1 \leq H_1$ y $K_2 \leq H_2$. Entonces $G/K \cong (H_1/K_1) \oplus (H_2/K_2)$.*

2. Grupo Libre

Capítulo 9

Topología Coherente

1. Topología Coherente

DEFINICIÓN 46. *Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{C}$ una familia de subconjuntos de X tal que $\bigcup \mathfrak{C} = X$. Diremos que X es coherente con $\mathfrak{C}$ si K es cerrado en X cuando $K \cap A$ es cerrado en A para todo $A \in \mathfrak{C}$.*

PROPOSICIÓN 67. *Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{C}$ una familia de subconjuntos de X tal que $\bigcup \mathfrak{C} = X$. Entonces X es coherente con $\mathfrak{C}$ si U es abierto en X cuando $U \cap A$ es abierto en A para todo $A \in \mathfrak{C}$.*

EJEMPLO 12. *Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta. Entonces X es coherente con $\mathfrak{C}$.*

EJEMPLO 13. *Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{C}$ una cubierta cerrada localmente finita. Entonces X es coherente con $\mathfrak{C}$.*

PROPOSICIÓN 68. *Sea X coherente con $\mathfrak{C}$, y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si $f|_U$ es continua para toda $U \in \mathfrak{C}$.*

Bibliografía

[1] Greg Friedman. Survey article: an elementary illustrated introduction to simplicial sets. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pages 353–423, 2012.

[2] Paul G Goerss and John F Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Springer Science & Business Media, 2009.

[3] Niels Lauritzen. Lectures on convex sets. *Notas de aula, Aarhus University: http://home. imf. au. dk/niels/lecconset. pdf*, 2009.

[4] J Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*, volume 11. University of Chicago Press, 1992.

[5] Lev Semenovich Pontryagin. *Foundations of combinatorial topology*. Courier Corporation, 2015.

[6] Francis Sergeraert. Introduction to combinatorial homotopy theory. *Lecture Notes*, 2008.