

# **Notas de Variable Compleja 1**

Facultad de Ciencias, UNAM

Frank Patrick Murphy Hernandez

Jaime García Villeda



## Índice general

Introducción	5
Capítulo 1. Álgebra y Geometría Compleja	7
Álgebra de los Complejos	7
Geometría subyacente de la estructura algebraica de $\mathbb{C}$	15
Funciones elementales: polinomiales, racionales, exponencial, trigonométricas	31
Geometría subyacente de las funciones elementales	38
Definición y propiedades algebraicas del logaritmo complejo	56
Geometría subyacente del logaritmo complejo	61
Ejercicios del capítulo	65
Capítulo 2. Diferenciabilidad compleja: Funciones holomorfas	75
Topología Compleja	75
Continuidad	77
Diferenciabilidad	83
Conformalidad	93
Ejercicios del capítulo	99
Capítulo 3. Integración compleja	107
Definición y propiedades básicas	107
El lema de Goursat	117
Teorema de Cauchy	124
Teorema de deformación homotópico de Cauchy	128
Teorema de Morera	133
Índice y fórmulas integrales de Cauchy	135
Ejercicios del capítulo	143
Capítulo 4. Teoremas Clásicos	145
Teorema de Liouville	145
El teorema del módulo máximo para funciones holomorfas y armónicas	148
Funciones armónicas conjugadas, problema de Dirichlet y fórmula de Poisson	155
Principio del argumento y el teorema de Rouché	159
Capítulo 5. Series	165
Teoremas básicos sobre series: Criterio M de Weierstrass, Lema de Abel y teorema de la convergencia analítica.	165
Funciones analíticas y el teorema de Taylor.	170
Teorema de Laurent	176
Singularidades y cálculos de residuos	181
Ejercicios del capítulo	187

Capítulo 6. Teorema del Residuo	189
Teorema del residuo e integrales impropias	189
Cálculo de integrales de funciones trigonométricas.	194
Ejercicios del capítulo	201
Bibliografía	203

## Introducción

“El análisis no le debe alguno de sus exitos relamente significantes del último siglo a un uso misterioso de  $\sqrt{-1}$ , si no a la circunsntancia relativamente natural que uno tiene más libertad de movimiento matemático si uno deja las cantidades variar en un plano en vez de una única línea.”

**Leopold Kronecker.**

“Cuando un matemático dice que algo es *fácil de ver* o *trivial*, significa que espera que saques un lápiz y una hoja de papel, y dediques un poco de tiempo (probablemente considerable) revisandolo por ti mismo.”

**Jonathan Golan.**

Por variable compleja se entiende al estudio de las funciones que tienen por dominio algún subconjunto de los números complejos. Para tales funciones hay un cálculo diferencial e integral asociado dentro del cual existen increíbles y potentes resultados que no tienen análogos en el contexto real, y que en algunos casos nos permiten obtener resultados del análisis real. Aunado a esto la estructura compleja encierra una geometría subyacente que tampoco tiene un análogo directo en el caso real, y que enriquece la teoría compleja. Quizás estas líneas no sean motivación suficiente para el área, pero vale la pena mencionar una frase debida a Hadamar que resume lo que intentamos dar a entender en estas:

“El camino más corto entre dos verdades del análisis real pasa con frecuencia por el análisis complejo”

Así el objetivo del curso es dar un primer estudio de los teoremas básicos de análisis complejo y algunas ideas geométricas que estos encierran.

Respecto a la bibliografía el libro de Needham [5] cubre de maravilla la parte geométrica y sin duda la parte analítica está expuesta de forma maravillosa en el texto de Remmert [6]. No nos podemos olvidar del clásico libro de Ahlfors [1] que además de ser históricamente importante, a nuestro parecer es un balance entre los dos libros anteriores. Un texto que también vale la pena consultar por el buen nivel de este es el de Conway [3]. Para concluir, dos libros básicos que pueden ayudar a entender bien los temas son el libro de Marsden [4] y Churchill [2]. Como siempre la elección de un libro de preferencia entra dentro de los gustos personales de cada lector y con los textos mencionados hay una gran variedad de donde elegir. Estas notas estás basadas en material de estos textos.



## Álgebra y Geometría Compleja

“El Álgebra no es más que Geometría y la Geometría no es más que Álgebra abstracta”

**Sophie Germain.**

Es este capítulo recapitularemos algunas propiedades básicas del campo de los números complejos tanto de carácter algebraico como geométrico, incluyendo la exposición de un modelo de este campo debida de forma independiente a Gauss y Hamilton a inicios del siglo XIX, la cual usa a  $\mathbb{R}^2$  como conjunto subyacente. Asimismo aprovecharemos para definir algunas funciones de variable compleja que extienden a algunas funciones reales, tal y como lo son la función exponencial, las funciones trigonométricas y el logaritmo complejo, de las cuales estudiaremos algunas propiedades geométricas en torno a la transformación de ciertas familias de conjuntos que nos permitan conjeturar algunas propiedades de estas, las cuales trataremos en todo rigor en los capítulos posteriores.

### 1. Álgebra de los Complejos

Los complejos nacen históricamente de la pregunta de si existe un “número”  $x$  tal que  $x^2 + 1 = 0$ . Dicho de otro modo,  $x^2 = -1 < 0$ . Ahora bien, es bien sabido que si  $x \in \mathbb{R}$ , entonces  $x^2 \geq 0$  por lo que este número que buscamos no puede ser un número real. Ahora bien, este número en caso de existir se le suele denotar por “ $i$ ”. Así continuando con el relato, viendo que no puede ser parte de los reales nos gustaría que  $i$  perteneciese a un conjunto con cierta estructura algebraica y más aún que dicha estructura algebraica contenga los reales y preseverne muchas de sus propiedades. Entonces a este conjunto que buscamos lo denotaremos por  $\mathbb{C}$  y lo llamaremos el conjunto de los números complejos. De manera todavía un poco ambigua solicitaremos que:

- $i \in \mathbb{C}$
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- $\mathbb{C}$  sea un campo.

Como recordatorio damos la definición de campo.

**DEFINICIÓN 1 (Campo).** Sea  $K$  un conjunto no vacío con dos funciones  $+: K \times K \longrightarrow K$  y  $*: K \times K \longrightarrow K$ . Notacionalmente escribimos  $\lambda + \mu := +(\lambda, \mu)$  y  $\lambda \mu := *(\lambda, \mu)$  para  $\lambda, \mu \in K$ . Si estas dos funciones cumplen:

1. Para  $\lambda, \mu, \nu \in K$ ,  $\lambda + (\mu + \nu) = (\lambda + \mu) + \nu$ .
2. Existe  $0 \in K$  tal que para cualquier  $\lambda \in K$ ,  $\lambda + 0 = \lambda = 0 + \lambda$ .
3. Para todo  $\lambda \in K$ , existe  $-\lambda \in K$  tal que  $\lambda + (-\lambda) = 0 = (-\lambda) + \lambda$ .

4. Para  $\lambda, \mu \in K$ ,  $\lambda + \mu = \mu + \lambda$ .
5. Para  $\lambda, \mu, \nu \in K$ ,  $\lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu$ .
6. Existe  $1 \in K$  tal que para cualquier  $\lambda \in K$ ,  $\lambda 1 = \lambda = 1\lambda$ .
7. Para todo  $\lambda \in K$  con  $\lambda \neq 0$ , existe  $\lambda^{-1} \in K$  tal que  $\lambda\lambda^{-1} = 1 = \lambda^{-1}\lambda$ .
8. Para  $\lambda, \mu \in K$ ,  $\lambda\mu = \mu\lambda$ .
9. Para  $\lambda, \mu, \nu \in K$ ,  $\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu$ .

Entonces llamamos a  $K$  un campo.

Realmente lo que haremos es dar un modelo de  $\mathbb{C}$  por que hay varias formas de construirlos, y realmente se obtienen las mismas propiedades.

El modelo clásico de  $\mathbb{C}$  es definirlo a nivel de conjunto con  $\mathbb{R}^2$ . Ahora la suma será la misma que  $\mathbb{R}^2$ , es decir, entrada a entrada. El producto lo definiremos de la siguiente manera:

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

para  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ .

Lo primero que vamos a ver es que realmente  $\mathbb{C}$  es un campo. De álgebra lineal sabemos que cumple los primeros 4 axiomas, entonces nos enfocaremos en los siguientes.

PROPOSICIÓN 1.  $\mathbb{C}$  es un campo

DEMOSTRACIÓN. ■ Sean  $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
 [(a, b) * (c, d)] * (e, f) &= (ac - bd, ad + bc) * (e, f) \\
 &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\
 &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\
 &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\
 &= (a, b) * (ce - df, cf + de) \\
 &= (a, b) * [(c, d) * (e, f)]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el producto es asociativo.

■ Sea  $(a, b) \in \mathbb{C}$ . Entonces

$$(a, b) * (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$$

y

$$(1, 0) * (a, b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a, b)$$

Por lo tanto el producto tiene identidad.

■ Sea  $(a, b) \in \mathbb{C}$  con  $(a, b) \neq 0$ . Entonces  $a \neq 0$  o  $b \neq 0$ . Así buscamos  $(c, d) \in \mathbb{C}$  tal que  $(a, b) * (c, d) = (1, 0)$ . Realmente, esto es,  $(ac - bd, ad + bc) = (1, 0)$ . Como



dos vectores son iguales si y sólo si son iguales entrada a entrada, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 &= ac - bd \\ 0 &= ad + bc \end{cases}$$

donde las incógnitas son  $c$  y  $d$ . Por la regla de Cramer vemos que la solución es  $c = \frac{a}{a^2+b^2}$  y  $d = \frac{-b}{a^2+b^2}$ . Notamos que aquí usamos que  $a^2 + b^2 \neq 0$ , para que la fracción este bien definida. Veamos que efectivamente es la inversa:

$$\begin{aligned} (a, b) * \left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) &= \left( a \frac{a}{a^2+b^2} - b \frac{-b}{a^2+b^2}, a \frac{-b}{a^2+b^2} + b \frac{a}{a^2+b^2} \right) \\ &= \left( \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2} \right) \\ &= \left( \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2} \right) \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$

$$\text{Analogamente } \left( \frac{-a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) * (a, b) = (1, 0).$$

- Sean  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ . Entonces:

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (c, d) * (a, b)$$

Por lo tanto la multiplicación es commutativa.

- Sean  $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} (a, b) * [(c, d) + (e, f)] &= (a, b) * (c + e, d + f) \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ &= (ac - bd, ad + bd) + (ae - bf, af + be) \\ &= (a, b) * (c, d) + (a, b) * (e, f) \end{aligned}$$

Por lo tanto las operaciones distribuyen.

De aquí que  $\mathbb{C}$  es un campo. □

Con nuestro modelo de los complejos  $\mathbb{C}$  que es el plano real  $\mathbb{R}^2$  no podemos decir que  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Así que tenemos que buscar una forma de darle sentido a esta propiedad. La solución es relativamente sencilla, hacerlo por medio de una función inyectiva. Así es que tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2. Sea  $i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  dado por  $i(x) = (x, 0)$ . Entonces  $i$  preserva las operaciones algebraicas y es una función inyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces para la suma tenemos:

$$\begin{aligned} i(a+b) &= (a+b, 0) \\ &= (a, 0) + (b, 0) \\ &= i(a) + i(b) \end{aligned}$$

y para el producto tenemos:

$$\begin{aligned} i(ab) &= (ab, 0) \\ &= (ab - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 0) \\ &= (a, 0) * (b, 0) \\ &= i(a)i(b) \end{aligned}$$

Ahora notemos que  $i(1) = (1, 0)$ , es decir, manda unidades en unidades.

Por último si  $i(x) = i(y)$ , entonces  $(x, 0) = (y, 0)$ . Por definición de par ordenado, tenemos que  $x = y$ . Así la función es inyectiva.  $\square$

Interpretando el resultado, podemos identificar a los reales como el subconjunto de los complejos de la forma  $(x, 0)$  con  $\mathbb{R}$ , es decir, con la imagen de  $i$ .

Con esto en mente procedemos al último punto. Buscamos un complejo  $(x, y) \in \mathbb{C}$  tal que  $(x, y)^2 = (-1, 0)$ . Simplemente proponemos  $(x, y) = (0, 1)$ , verifiquemos:

$$(0, 1)^2 = (0, 1) * (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1, 0)$$

Ahora bien, nuestro modelo de los complejos cumple con las propiedades deseadas. Vamos a proceder a mejorar la notación. En vez de escribir  $(x, y) \in \mathbb{C}$ , escribiremos  $x + iy$ . Notamos que con esta notación 1 corresponde a  $(1, 0)$  e  $i$  corresponde a  $(0, 1)$ . Con esta notación la suma resulta:

$$(a + ib) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$$

y el producto resulta:

$$(a + ib)(c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Ahora algunas cuestiones notacionales, en vez de  $a + i0$ , simplemente escribiremos  $a$ . A su vez, en el caso de  $0 + ib$ , escribiremos  $ib$ . Así, en el caso  $0 + i0$ , siguiendo la notación, simplemente escribiremos 0. Para terminar, en el caso de  $a + i1$ , escribiremos  $a + i$ .

EJEMPLO 1. A continuación unos ejemplos numéricos de las operaciones complejas:

■

$$(1 + 7i) + (-3 + 4i) = -2 + 11i$$

■

$$(1+i)(1-i) = (1 \cdot 1 - 1(-1)) + i(1 \cdot 1 + 1(-1)) = (1+1) + i0 = 2$$

■

$$i^2 = ii = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = -1$$

■

$$(2-i)^{-1} = \frac{2}{2^2 + (-1)^2} + i \frac{-(-1)}{2^2 + (-1)^2} = \frac{2}{5} + i \frac{1}{5}$$

■

$$\begin{aligned} \frac{-1+2i}{1+i} &= (-1+2i)(1+i)^{-1} \\ &= (-1+2i)\left(\frac{1}{1^2+1^2} + \frac{-i}{1^2+1^2}\right) \\ &= (-1+2i)\left(\frac{1}{2} + \frac{-i}{2}\right) \\ &= \left(-1\frac{1}{2} - 2\frac{-1}{2}\right) + i\left(-1\frac{-1}{2} + 2\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + i\frac{3}{2} \end{aligned}$$

A continuación vamos a una construcción alternativa de los complejos. Ahora pongamos:

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Lo primero que observamos es que  $\mathbb{C}$  es un subconjunto de las matrices de dos por dos con coeficientes reales  $M_2(\mathbb{R})$ . Procedemos con la misma ruta que la anterior para ver que esto también es un modelo de los complejos.

PROPOSICIÓN 3.  $\mathbb{C}$  es un campo.

DEMOSTRACIÓN. La suma y multiplicación son la de las matrices.

Tenemos que ver que estas operaciones están bien definidas, por lo que tomamos dos elementos  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ . Primero la suma:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

Ahora para la multiplicación:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

De nuevo, nos valdremos de ciertos resultados de álgebra lineal. Observamos que  $\begin{pmatrix} 0 & -0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ . Por último, si  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

Por lo cual  $\mathbb{C}$  es un subespacio de  $M_2(\mathbb{R})$ . De esto se sigue que cumple los primeros cuatro axiomas de campo.

Ahora la asociatividad se sigue de la asociatividad de la multiplicación de matrices, y de igual manera también tenemos la distributividad.

Para la existencia de unidad, es fácil ver la unidad de  $M_2(\mathbb{R})$  es un complejo, esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

De nuevo, lo más complicado sería ver que existen los inversos. Sea  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$  con  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \neq 0$ . Así  $a \neq 0$  o  $b \neq 0$ . Calculamos

$$\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$

Así de álgebra lineal sabemos que esta matriz es invertible. Más aún, sabemos que la inversa es la matriz coadjugada por el inverso del determinante, es decir:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

Por lo tanto  $\mathbb{C}$  es un campo. □

De igual manera veamos que los reales están contenidos en este modelo de los complejos.

**PROPOSICIÓN 4.** Sea  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $\eta(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -0 & x \end{pmatrix}$ . Entonces  $\eta$  preserva las operaciones algebraicas y es una función inyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces para la suma tenemos:

$$\begin{aligned}\eta(a+b) &= \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ -0 & a+b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ -0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ -0 & b \end{pmatrix} \\ &= \eta(a) + \eta(b)\end{aligned}$$

y para el producto tenemos:

$$\begin{aligned}\eta(ab) &= \begin{pmatrix} ab & 0 \\ -0 & ab \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ -0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -0 & b \end{pmatrix} \\ &= \eta(a)\eta(b)\end{aligned}$$

Ahora notemos que  $\eta(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix}$ , es decir, manda unidades en unidades.

Por último si  $\eta(x) = \eta(y)$ , entonces  $\begin{pmatrix} x & 0 \\ -0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ -0 & y \end{pmatrix}$ . Sabemos que dos matrices son iguales si y sólo si son iguales en todas sus entradas., tenemos que  $x = y$ . Así la función es inyectiva.  $\square$

De igual manera tenemos que para este modelo  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ .

Finalmente, verifiquemos que existe  $i$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vamos a comparar los dos modelos, en el segundo modelo podemos plantear un segundo  $i$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lo que esta sucediendo es que si  $i^2 = -1$  también tenemos que  $(-i)^2 = -1$ . En el caso de las matrices no tenemos una forma (muy intuitiva) de elegir cual de las dos posibilidades poner como  $i$ . Pero en el caso del plano cartesiano es bastante intuitivo elegir a  $(0, 1)$ .

Vale la pena hacer una aclaración sobre la notación, comunmente se suelen usar  $z$  y  $w$  para denotar complejos, en cuyo caso nos estaremos refiriendo a que son de la forma  $z = z_1 + iz_2$  o  $w = w_1 + iw_2$ .

Para finalizar esta sección analizaremos el problema de encontrar la raíz cuadrada de un número complejo  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ . Buscamos un complejo  $w = x + iy \in \mathbb{C}$  tal que  $w^2 = z$ , esto es:

$$a + bi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Ahora tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a = x^2 - y^2 \\ b = 2xy \end{cases}$$

Procedemos a elevar al cuadrado ambas ecuaciones;

$$\begin{cases} a^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \\ b^2 = 4x^2y^2 \end{cases}$$

Para luego sumarlás

$$a^2 + b^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$$

De aquí

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sumándole a esta última ecuación, la primera ecuación del sistema de ecuaciones,  $a = x^2 - y^2$ , tenemos:

$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

Despejando llegamos a que:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Por otro lado, si en vez de sumar restamos, tenemos que:

$$2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a$$

De nuevo, despejando:

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

Finalmente para las raíces podemos elegir la positiva o la negativa. Ahora bien, como tenemos a  $x$  y a  $y$  esto nos da 4 posibles combinaciones. De las cuales sólo 2 son correctas. Para saber cuáles son recordamos la segunda ecuación  $b = 2xy$ . Esto nos dice que si  $b > 0$  entonces elegimos  $x$  y  $y$  con el mismo signo, y en caso de que  $b < 0$  entonces elegimos a  $x$  y  $y$  con signo contrario.

EJEMPLO 2. Obtener  $\sqrt{i}$ .

SOLUCIÓN. Usaremos las fórmulas obtenidas anteriormente para  $a = 0$  y  $b = 1$ :

$$x = \pm \sqrt{\frac{0 + \sqrt{0^2 + 1^2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{0^2 + 1^2} - 0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dado que  $b > 0$ , las raíces cuadradas son:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. *Obtener  $\sqrt{-i}$ .*

SOLUCIÓN. *Lo único que difiere este ejemplo con el anterior es en los signos de  $x$  y  $y$ , ya que  $b < 0$  tenemos que los signos de  $x$  y  $y$  deben ser opuestos, por lo tanto las raíces son:*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Formalmente lo que sería un modelo de los complejos es  $\mathbb{C}$  es:

- $\mathbb{C}$  es un campo.
- Existe un morfismo de campos  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ( que sea morfismo de campos quiere decir que abre sumas, multiplicaciones y manda al uno en el uno).
- La ecuación  $x^2 + 1 = 0$  tiene solución.
- Si existe otro campo  $K$  donde la ecuación tiene solución y cuenta con un morfismo de campos  $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow K$ , entonces existe un único  $\theta: \mathbb{C} \rightarrow K$  tal que  $\theta\eta = \varepsilon$ .

PROPOSICIÓN 5. *Ambos modelos de los complejos propuestos cumplen lo anterior.*

## 2. Geometría subyacente de la estructura algebraica de $\mathbb{C}$

**2.1. El plano complejo** Recordaremos que el modelo básico que tomamos de  $\mathbb{C}$  tiene como conjunto subyacente a  $\mathbb{R}^2$ , por lo que a todo  $z \in \mathbb{C}$  se le puede identificar con la pareja ordenada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  si  $z = x + iy$ . De aquí en adelante llamaremos a  $\mathbb{R}^2$  el **plano complejo**, en el cual llamaremos al eje  $x$  como el **eje real** y al eje  $y$  como el **eje imaginario**. Esto se muestra en la figura 1.

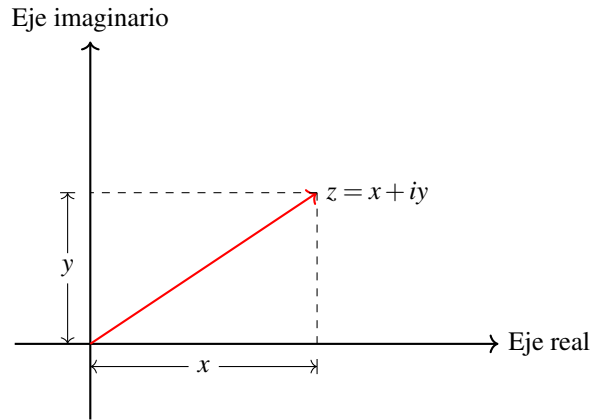


FIGURA 1. El plano complejo.

Note que esto da lugar a un par de funciones, a saber las proyecciones en la primera y segunda coordenada, las cuales llamaremos la **parte real** y la **parte imaginaria** respectivamente, y que denotaremos por

$$Re, Im : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Escribiendo esto de forma ecuacional, por definición se tiene que:

$$Re(x + iy) = x$$

$$Im(x + iy) = y$$

Algunas propiedades básicas de estas funciones se encuentran en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 6.

1. Las funciones parte real e imaginaria son  $\mathbb{R}$ -lineales. Es decir, para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{C}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se cumple que:

$$Re(\lambda z + w) = \lambda Re(z) + Re(w)$$

$$Im(\lambda z + w) = \lambda Im(z) + Im(w)$$

Además, las matrices asociadas respectivas son  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Más aún, estas funciones son suprayectivas pero no inyectivas.

2. Para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ :

$$(Re \circ Re)(z) = Re(z)$$

$$(Re \circ Im)(z) = Im(z)$$

$$(Im \circ Re)(z) = 0$$

$$(Im \circ Im)(z) = 0$$

$$z = Re(z) + i \cdot Im(z)$$

3. Para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{C}$  se cumple que:

$$Re(zw) = Re(z)Re(w) - Im(z)Im(w)$$

$$Im(zw) = Re(z)Im(w) + Im(z)Re(w)$$

DEMOSTRACIÓN. Para la primera afirmación supongamos que  $z = z_1 + iz_2$  y  $w = w_1 + iw_2$ . Entonces, dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$\lambda z + w = (\lambda z_1 + w_1) + i(\lambda z_2 + w_2)$$

De esto se deduce que

$$Re(\lambda z + w) = \lambda z_1 + w_1 = \lambda Re(z) + Re(w)$$



$$Im(\lambda z + w) = \lambda z_2 + w_2 = \lambda Im(z) + Im(w)$$

Para la matriz asociada, si  $\beta = \{1 = e_1, i = e_2\} \subseteq \mathbb{C}$  es la base canónica de  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio, entonces  $Re(1) = 1$  y  $Re(i) = 0$ . Así, para la parte real la matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} Re(1) & Re(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De forma análoga notemos que  $Im(1) = 0$  y  $Im(i) = 1$ , por lo que la matriz asociada a la parte imaginaria es:

$$\begin{pmatrix} Im(1) & Im(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además note que dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $Re(\lambda) = \lambda$  y  $Im(\lambda i) = \lambda$ , por lo que ambas funciones son suprayectivas. Además note que  $Re(0) = Re(i) = 0$  y  $Im(0) = Im(1) = 0$ , por lo que ambas funciones no son inyectivas.

La afirmación 2 es clara de las definiciones pues para  $x + iy \in \mathbb{C}$ ,

$$(Re \circ Re)(x + iy) = Re(x) = x = Re(x + iy)$$

$$(Re \circ Im)(x + iy) = Re(y) = y = Im(x + iy)$$

$$(Im \circ Re)(x + iy) = Im(x) = 0$$

$$(Im \circ Im)(x + iy) = Im(y) = 0$$

$$Re(x + iy) + i Im(x + iy) = x + iy$$

Para la última afirmación note que si escribimos  $z = Re(z) + i Im(z)$  y  $w = Re(w) + i Im(w)$ , entonces al realizar el producto de  $z$  y  $w$ , por definición se tiene que

$$zw = (Re(z)Re(w) - Im(z)Im(w)) + i(Re(z)Im(w) + Im(z)Re(w)),$$

de lo que se sigue el resultado buscado.  $\square$

Con la terminología definida vamos a definir una nueva función de variable compleja con valores en  $\mathbb{C}$ ,

$$\overline{\phantom{x}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\overline{Re(z) + iIm(z)} = Re(z) - iIm(z)$$

Esta función se conoce como la **conjugación compleja** y note que esta es geométricamente la reflexión respecto al eje real como lo muestra la figura 2.

Algunas propiedades algebraicas básicas de la conjugación compleja se encuentran en el siguiente resultado.

**PROPOSICIÓN 7.** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ .

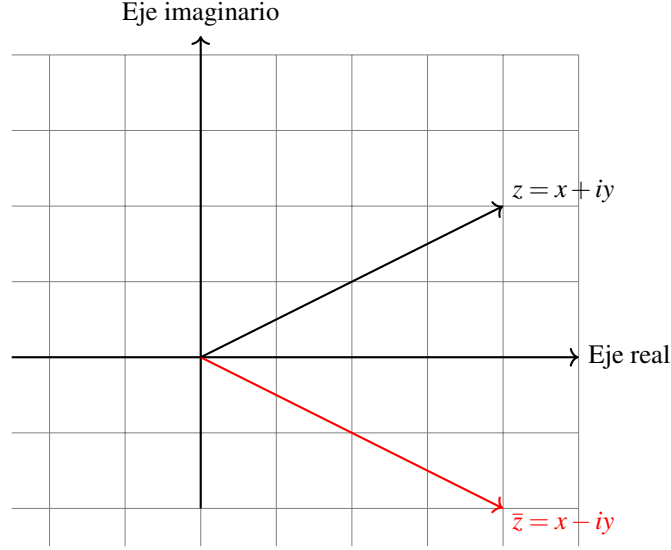


FIGURA 2. La conjugación vista como reflexión.

1.  $z = \bar{z}$  si y sólo si  $z \in \mathbb{R}$ .
2. La conjugación es  $\mathbb{R}$ -lineal con matriz asociada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.  $\overline{\bar{z}w} = z\bar{w}$
4. Si  $w \neq 0$ , entonces  $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
5.  $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$  y  $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
6.  $Re(\bar{z}) = Re(z)$  y  $Im(\bar{z}) = -Im(z)$
7. La conjugación es una involución, es decir,  $\bar{\bar{z}} = z$ . En particular la conjugación es biyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Para 1 el regreso es claro. Para la ida, si  $z = \bar{z}$ , entonces  $Re(z) + i Im(z) = Re(z) - i Im(z)$ . Esto implica que  $2i Im(z) = 0$ , por lo que  $Im(z) = 0$ , luego,  $z \in \mathbb{R}$ .

Respecto a 2, si  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $z, w \in \mathbb{C}$ , entonces note que como  $\lambda z + w = (\lambda Re(z) + Re(w)) + i(\lambda Im(z) + Im(w))$ , entonces

$$\overline{\lambda z + w} = (\lambda Re(z) + Re(w)) - i(\lambda Im(z) + Im(w)) = \lambda(Re(z) - i Im(z)) + (Re(w) - i Im(w)) = \lambda \bar{z} + \bar{w},$$

que es lo que se quería probar respecto a la linealidad. Respecto a la matriz asociada se deduce que dado que en la base canónica estándar (como  $\mathbb{R}$ -espacio)  $\{1, i\} \subseteq \mathbb{C}$  se tiene que

$\bar{1} = 1$  y  $\bar{i} = -i$ , entonces la matriz buscada es

$$\left( \begin{array}{c|c} \bar{1} & \bar{i} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para 3, como  $zw = (Re(z)Re(w) - Im(z)Im(w)) + i(Re(z)Im(w) + Im(z)Re(w))$ , entonces

$$\overline{zw} = (Re(z)Re(w) - Im(z)Im(w)) - i(Re(z)Im(w) + Im(z)Re(w)) = \bar{z} \bar{w}$$

Respecto a 4 note que como  $z = \frac{z}{w}w$ , al usar 3 se tiene que  $\bar{z} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)\bar{w}}$ , de lo que se deduce el resultado buscado.

Para 5 observemos que si escribimos  $z = Re(z) + i Im(z)$ , entonces  $\bar{z} = Re(z) - i Im(z)$ , de donde  $z + \bar{z} = 2Re(z)$ , mientras que  $z - \bar{z} = 2i Im(z)$ , de donde se deduce el resultado claramente. Además, de esto mismo se ve que 6 también es válido.

La afirmación 7 es clara. □

Para continuar, dado un vector cualquiera en el plano complejo, a este se le puede asociar su longitud, que no es más que la distancia de este al origen. Esto nos permite definir una función

$$|\square| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R},$$

que no es más que la norma usual de  $\mathbb{R}^2$ . En este contexto, a esta función la llamaremos la **norma compleja** y esta cumple las siguientes propiedades.

**PROPOSICIÓN 8.** *La norma compleja satisface:*

1. *Es una norma real, es decir,*

- *Para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \geq 0$*
- *$|z| = 0$  si y sólo si  $z = 0$*
- *Para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda z| = \text{abs}(\lambda)|z|$ , con  $\text{abs}(\lambda)$  el valor absoluto de  $\lambda$ .*
- *(Desigualdad del triángulo) Para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{C}$  se tiene que*

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

2. *Es un valor absoluto sobre  $\mathbb{C}$ , es decir, para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $|zw| = |z||w|$*

3. *Extiende al valor absoluto real, es decir, para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $|\lambda| = \text{abs}(\lambda)$ . Por tal razón, de ahora en adelante no usaremos la notación  $\text{abs}$ .*

4. *Para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|Re(z)| \leq |z|$ ,  $|Im(z)| \leq |z|$  y  $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$*

5. Para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z\bar{z} = |z|^2$ . Por lo tanto, si  $z \neq 0$ , entonces  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
6. Para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = |\bar{z}|$
7. Para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $||z| - |w|| \leq |z - w|$
8. Se cumple la desigualdad de Cuchy-Schwartz, es decir,

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k w_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |w_k|^2}$$

DEMOSTRACIÓN. Todas las propiedades salvo 2, 5 y 6 se ven en Cálculo o Álgebra Lineal. 1 Note que 5 es un cálculo directo pues

$$z\bar{z} = (Re(z) + i Im(z))(Re(z) - i Im(z)) = Re(z)^2 - i^2 Im(z)^2 = |z|^2$$

Además, si  $z \neq 0$ , entonces  $|z| \neq 0$ . Así,  $z(\frac{\bar{z}}{|z|^2}) = 1$ . Por unicidad del inverso multiplicativo se sigue el resultado.

La propiedad 6 es obvia de 5 (o la definición directa de la norma) y 2 también es obvia de la primera afirmación de 5.  $\square$

NOTA 1. Es importante mencionar que con esta norma podemos darle una topología a  $\mathbb{C}$ , que es la misma que la de  $\mathbb{R}^2$  (la inducida por la métrica dada por la norma compleja), por lo tanto podemos hablar de funciones continuas de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$ . Esto será tratado con un poco de más detalle en el capítulo 2.

Con los resultados tratados podemos hacer un par de interesantes ejercicios.

EJEMPLO 4. Escribir la ecuación de una línea recta en el plano complejo.

SOLUCIÓN. Sea  $\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_0 + tw, t \in \mathbb{R}\}$  donde  $z_0, w \in \mathbb{C}$  y  $w \neq 0$ . Este conjunto describe la ecuación de una recta que pasa por el punto  $z_0$  y tiene dirección  $w$ . Para usar únicamente elementos de los que hemos trabajado note que  $z \in \mathcal{L}$  si y sólo si existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $z = z_0 + t_0 w$ , lo que es equivalente a decir que  $\frac{z - z_0}{w} \in \mathbb{R}$ . Esto último es equivalente a decir que  $Im(\frac{z - z_0}{w}) = 0$ . De esto se deduce que

$$\mathcal{L} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid Im\left(\frac{z - z_0}{w}\right) = 0 \right\}.$$

Note que de esta forma de expresar una recta en el plano complejo podemos demostrar el siguiente hecho:

*La conjugación manda rectas en rectas.*

En efecto, considere  $\mathcal{L}_{z_0, w} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z - z_0}{w}\right) = 0\}$ . Note que  $z \in \mathcal{L}_{z_0, w}$  si y sólo si  $\operatorname{Im}\left(\frac{z - z_0}{w}\right) = 0$ . Dado que

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{\bar{w}}\right) = \operatorname{Im}\left(\overline{\left(\frac{z - z_0}{w}\right)}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{z - z_0}{w}\right),$$

de esto se deduce que:

$$\overline{\mathcal{L}_{z_0, w}} = \mathcal{L}_{\bar{z}_0, \bar{w}}.$$

Podemos visualizar este hecho de forma geométrica usando la figura 3.

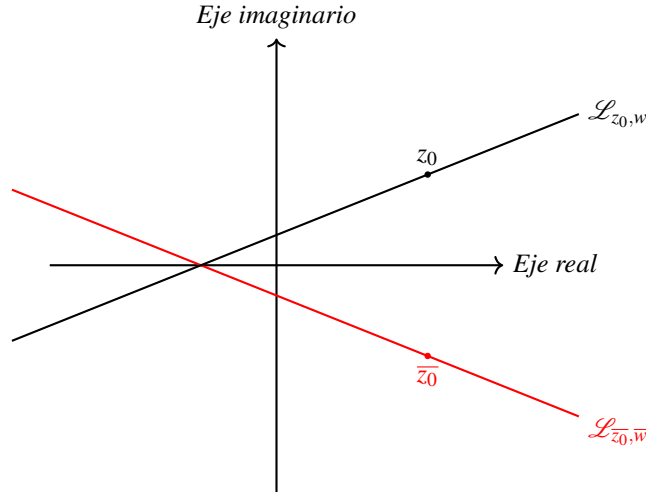


FIGURA 3. Conjugación manda rectas en rectas.

EJEMPLO 5. Escribir la ecuación de una circunferencia en el plano complejo.

SOLUCIÓN. La ecuación de una circunferencia de radio  $r > 0$  y centro en  $z_0 := (x_0, y_0)$  es el lugar geométrico descrito por el conjunto

$$\mathcal{C}_{z_0, r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

Como antes podemos reescribir el conjunto anterior pues  $z \in \mathcal{C}_{z_0, r}$  si y sólo si  $|z - z_0| = r$ , lo que es equivalente a decir que  $|z - z_0|^2 = r^2$ . Note que

$$\begin{aligned}
|z - z_0|^2 &= (z - z_0)\overline{(z - z_0)} \\
&= (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) \\
&= z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 \\
&= |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{C}_{z_0, r} = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = r^2\}$$

De cualquiera de las dos formas de escribir el conjunto  $\mathcal{C}_{z_0, r}$  se puede demostrar que la conjugación manda circunferencias en circunferencias. Para probar esto note que  $z \in \mathcal{C}_{z_0, r}$  si y sólo si  $|z - z_0| = r$ . Dado que  $|\bar{z} - \bar{z}_0| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$ , de deduce que

$$\overline{\mathcal{C}_{z_0, r}} = \mathcal{C}_{\bar{z}_0, r}$$

Esto último se puede ver gráficamente en la figura 4.

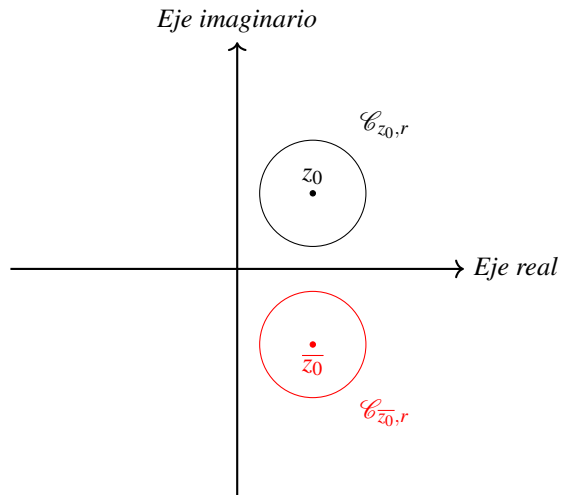


FIGURA 4. Conjugación manda circunferencias en circunferencias

En particular una circunferencia queda fija bajo la conjugación si y sólo si  $z_0 \in \mathbb{R}$ .

**2.2. Estructura aditiva de  $\mathbb{C}$ .** Ahora trataremos la interpretación geométrica de las operaciones en los complejos. Respecto a la suma y diferencia esta proviene de la identificación  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , de donde se heredaron estas operaciones. Para esto considere  $z, w \in \mathbb{C}$  con  $z = z_1 + iz_2$  y  $w = w_1 + iw_2$ . Consideremos la representación vectorial de  $z$  y  $w$  mediante flechas que unen el origen de  $\mathbb{R}^2$  con los puntos  $(z_1, z_2)$  y  $(w_1, w_2)$  respectivamente. Para esto nos apoyaremos en la figura 5.

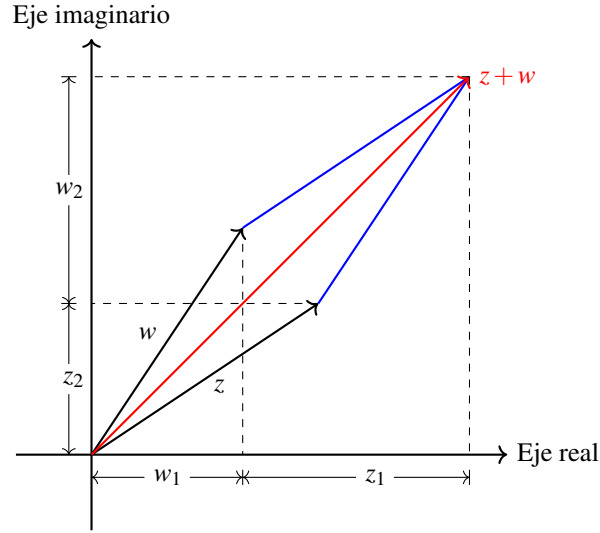


FIGURA 5. Geometría de la suma de complejos

Esto muestra que la suma de  $z$  y  $w$  se obtiene por medio de la **ley del paralelogramo** y corresponde a la diagonal del paralelogramo formado por los vectores  $z$  y  $w$ . Además note que de esta figura se puede ver que se cumple la desigualdad del triángulo,  $|z + w| \leq |z| + |w|$ , pues en geometría euclidiana la mínima distancia entre dos puntos se da a partir de una línea recta entre estos.

Por otro lado, dado que la diferencia de complejos es realmente una suma pues  $z - w = z + (-w)$ , esta también se obtiene por la ley del paralelogramo como se observa en la figura 6. Note que dado que la longitud de  $z - w$  es medida con la norma compleja, esta es la misma que la de la segunda diagonal del paralelogramo en la figura 5 pues podemos trasladar  $z - w$  a dicha diagonal o por el criterio LAL de congruencia.<sup>1</sup> Es importante observar que el tomar inversos aditivos en los complejos corresponde trivialmente a una reflexión respecto al origen del plano complejo.

Ya que hemos interpretado las operaciones que provienen de la estructura aditiva de  $\mathbb{C}$ , vamos a hacer lo propio con el producto de complejos. Para esto requerimos recordar

<sup>1</sup>Este criterio es el “lado ángulo lado” en los triángulos  $\Delta Owz$  y  $\Delta Oz(z - w)$  pues estos comparten un lado (vector  $z$ ), los lados  $w$  y el formado por el segmento  $z - w$  y  $z$  tienen la misma magnitud, y los ángulos entre los lados correspondientes son los mismos.

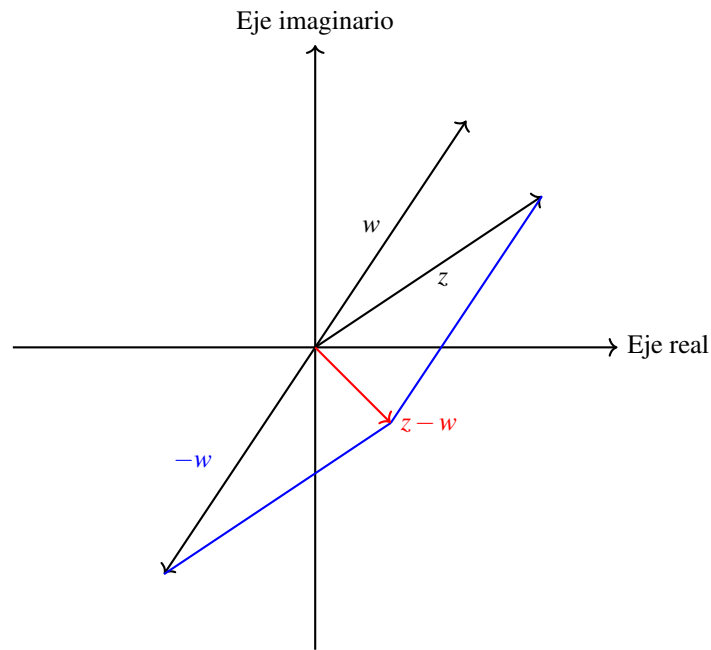


FIGURA 6. Geometría de la resta de complejos

algunas ideas de geometría analítica, a saber, la de coordenadas polares. Esto se presentará en la siguiente subsección.

**2.3. Representación polar** Comencemos con considerar un plano, un punto distinguido al cual llamaremos el origen y denotaremos por  $O$ , y tracemos una recta a partir de dicho punto la cual tomaremos como horizontal por comodidad y que llamaremos el eje polar. Esta situación se muestra en la figura 7.

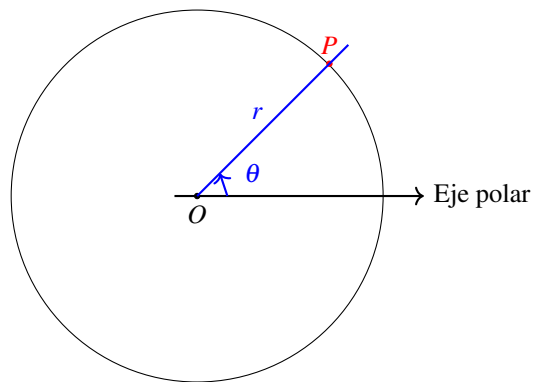


FIGURA 7. Sistema polar



Note que por cualquier punto en el plano que no es el origen, digamos  $P$ , podemos trazar una única circunferencia con centro en  $O$  y que pasa por el punto  $P$ . Con el radio de dicha circunferencia y el ángulo entre la recta que une a  $O$  y  $P$  y el eje polar, podemos determinar la ubicación del punto  $P$ , además note que este proceso puede hacerse para cualquier punto que no es el origen. A dicho radio  $r$  lo llamaremos la **norma** del punto  $P$  y a dicho ángulo como **un argumento** del punto  $P$ . Además, por completez al punto  $O$  le asignamos norma cero, pero no le asignamos ningún argumento.<sup>2</sup> Así, a la pareja  $(r, \theta)$  descrita anteriormente la llamaremos las **coordenadas polares** del punto  $P \neq O$ . Es importante notar que nos referimos a  $\theta$  como **un argumento** y no como “el argumento” pues este no está unívocamente determinado pues dado un ángulo, al sumar a este un múltiplo entero de  $2\pi$  obtenemos la misma representación del ángulo original.

Podemos ahora realizar esta construcción sintética en el plano complejo, donde  $O$  será el cero complejo y el eje polar el eje real positivo. Esto nos permite por trigonometría básica ver que si  $P = x + iy \neq 0$ , entonces existen  $r > 0$  y  $\theta \in \mathbb{R}$  tales que  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ , por lo que

$$P = r(\cos \theta + i \sin \theta) =: r \operatorname{cis} \theta$$

A esta última expresión de le conoce como la **representación polar del complejo**  $x + iy$ . Además note que trivialmente  $r = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

EJEMPLO 6. Encontrar la representación polar del complejo  $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

SOLUCIÓN. Note que  $r = |\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$ . Por otro lado como este complejo no es puramente imaginario, el argumento se obtiene de la ecuación  $\tan \theta = \frac{y}{x} = \sqrt{3}$ , por lo que  $\theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Geométricamente tenemos la situación de la figura 8.

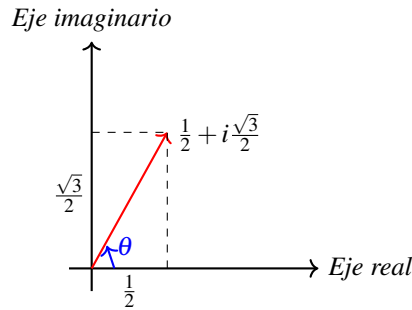


FIGURA 8. Representación polar del complejo  $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Por lo tanto,

<sup>2</sup>Esto último pues si pensamos a un punto como una circunferencia degenerada, tendríamos problemas con la construcción mencionada en la asignación de un argumento para este caso.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} &= 1(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}) \\
&= \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \\
&=: \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

En esta última representación estamos tomando un argumento “estándar” pues estamos restringiendo los valores de este al intervalo  $[0, 2\pi)$ , pero la elección en cualquier otro intervalo es perfectamente válida.

Podemos recapitular la cuestión del ángulo estudiada diciendo que tenemos una relación

$$\arg : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R},$$

donde  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , que a cada complejo le asigna un argumento de este. Usamos el término relación pues como comentamos el argumento está bien definido salvo múltiplos enteros de  $2\pi$ . Algunos textos llaman a esto **funciones multivaluadas**, sin embargo, nosotros no usaremos esta última terminología pues conjuntistamente  $\arg$  es una relación pues esta permite asociar a  $x + iy$  el conjunto  $\{\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}, \tan \theta = \frac{y}{x}\}$ .

El especificar un rango particular en el codominio donde  $\arg$  sea una función<sup>3</sup> como por ejemplo los intervalos  $[0, 2\pi)$ ,  $[-\pi, \pi)$  y  $(-\pi, \pi]$  se conoce como tomar una **rama del argumento**. Este último concepto se entenderá en las secciones posteriores.

Aprovecharemos la teoría desarrollada para demostrar un resultado clásico. Para esto note que si  $z, w \in \mathbb{C}$  son diferentes de cero, entonces representamos ambos complejos usando coordenadas polares

$$z = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$$

$$w = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$$

Entonces realicemos el producto de estos mediante estas representaciones coordenadas, con lo que tenemos que:

$$\begin{aligned}
zw &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\
&= r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)) \\
&= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))
\end{aligned}$$

Esto da pie a lo siguiente.

**PROPOSICIÓN 9.** Para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) + 2\pi k,$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ . Por lo que tomando una rama del argumento específica,

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

---

<sup>3</sup>De hecho note que esta restricción no solo hace que  $\arg$  sea función, sino que hasta es biyectiva.

Además tenemos el siguiente interesante resultado.

PROPOSICIÓN 10. (*De Moivre*) Si  $z \in \mathbb{C}$  se escribe de la forma polar como  $z = r \operatorname{cis} \theta$ , entonces para cualquier  $n \in \mathbb{Z}$  se cumple que:

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

DEMOSTRACIÓN. Por inducción entera: La base de la inducción es cuando  $n = 0$ , en cuyo caso no hay nada que probar. Para el paso inductivo, si suponemos que el resultado vale para  $n$ , notemos que dado que  $z^{n+1} = z^n z$ , el cálculo realizado anteriormente aunado al hecho de que  $z = r \operatorname{cis} \theta$  y  $z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$  implica que

$$z^{n+1} = r^n r \operatorname{cis}(n\theta + \theta) = r^{n+1} \operatorname{cis}((n+1)\theta)$$

Para concluir, si  $n < 0$ , entonces existe  $m > 0$  tal que  $n = -m$ . Note que entonces  $z^n = (z^m)^{-1} = (r^m \operatorname{cis}(m\theta))^{-1} = r^{-m} \operatorname{cis}(m\theta)^{-1} = r^n \operatorname{cis}(m\theta)^{-1}$ . Ahora observe que

$$\operatorname{cis}(m\theta)^{-1} = \frac{\overline{\operatorname{cis}(m\theta)}}{|\operatorname{cis}(m\theta)|^2} = \cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta) = \cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta) = \operatorname{cis}(-m\theta),$$

lo que concluye la prueba.  $\square$

Una de las aplicaciones básicas de este resultado que tiene que ver con la obtención de raíces  $n$ -ésimas en  $\mathbb{C}$ . Para esto supongamos que  $n \in \mathbb{N}^+$  y queremos hallar las raíces  $n$ -ésimas de un complejo  $w \in \mathbb{C}$  dado, el cual es no cero para no trivializar la pregunta. Esto es equivalente a resolver la ecuación

$$z^n = w,$$

donde la incógnita es  $z$ . Note que por el Teorema Fundamental del Álgebra esa ecuación siempre se puede resolver y además podemos encontrar  $n$  raíces contando multiplicidades. Así que para resolverla expresamos en forma polar a  $w = r \operatorname{cis} \theta$  y supongamos que  $z \in \mathbb{C}$  es una solución, por lo que esta la expresamos usando coordenadas polares como  $z = \rho \operatorname{cis} \phi$ . El hecho de que  $z^n = w$  implica usando el teorema de De Moivre que:

$$(1) \quad \rho^n \operatorname{cis}(n\phi) = r \operatorname{cis}(\theta)$$

Al tomar la norma en esta ecuación se deduce que  $\rho^n = r$ ; como  $r, \rho \in \mathbb{R}$  y son positivos, entonces deducimos que  $\rho = \sqrt[n]{r}$ . Además, al usar esto en la ecuación (1) se deduce que  $\operatorname{cis}(n\phi) = \operatorname{cis}(\theta)$ , lo que sucede si y sólo si existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $n\phi = \theta + 2\pi k$ . Con esto hemos encontrado las raíces buscadas y así prácticamente hemos demostrado el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 11. Dado  $w \in \mathbb{C}$  no cero expresado de forma polar como  $w = r \operatorname{cis}(\theta)$ , las raíces  $n$ -ésimas de este complejo están dadas por

$$z_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right),$$

donde  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Lo único que falta argumentar son los valores que toma  $k$ , pero esto es consecuencia de la periodicidad de las funciones coseno y seno.  $\square$

EJEMPLO 7. Como caso particular el resultado anterior nos permite calcular las raíces  $n$ -ésimas de la unidad para  $n > 1$ , las cuales están dadas por

$$z_k = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi k}{n}\right),$$

con  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Note que todas estas raíces tienen norma uno, por lo que todas se encuentran sobre el círculo unitario. Si  $n = 2$  estas claramente son  $z_1 = 1$  y  $z_2 = -1$ . Cuando  $n > 2$  las notemos que las raíces sucesivas forman un ángulo de  $\frac{2\pi}{n}$ , por lo que con estas podemos construir un polígono regular de  $n$  lados inscrito en la circunferencia unitaria donde los vértices son las raíces. Este hecho no es particular de nuestro ejemplo y recomendamos el ejercicio 20 para ver un caso más general. Por otro lado, este ejemplo muestra un modelo como grupo multiplicativo del grupo  $(\mathbb{Z}/n, +)$ .

**2.4. Interpretación del producto en  $\mathbb{C}$ .** Regresando a nuestro problema de dar una interpretación del producto complejo, note que si  $z, w \in \mathbb{C}$  son diferentes de cero, entonces representamos ambos complejos usando coordenadas polares

$$z = r_1 \operatorname{cis}\theta_1$$

$$w = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$$

En la subsección anterior demostramos que esto implica que:

$$zw = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

Este cálculo nos está diciendo que si tomamos el complejo  $w$  y hacemos el producto con  $z$ , el complejo resultante se obtiene al multiplicar el módulo de  $w$  por el de  $z$  y hacer una rotación por  $\theta_1$  grados al vector que representa a  $w$ . Esto se muestra en la figura 9.

Veamos esto mediante un ejemplo concreto.

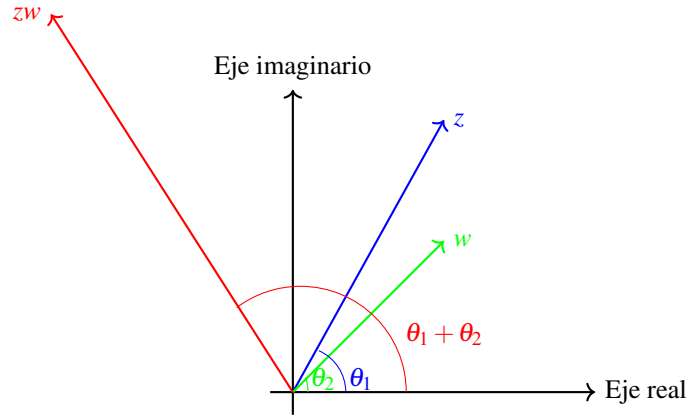


FIGURA 9. Interpretación del producto de complejos

EJEMPLO 8. Consideremos  $z = w = i$ . En representación polar  $z = w = \text{cis}(\frac{\pi}{2})$ . Entonces  $zw$  tiene norma 1 y el ángulo que le corresponde respecto al eje real es  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ . Es decir,

$$zw = \text{cis}(\pi) = -1$$

¡Lo que justamente nos muestra que  $i^2 = -1$ !

Ya que hemos interpretado lo que hace el producto, vamos a poner esto en forma de transformación pues para  $z \in \mathbb{C}$  podemos considerar la función

$$M_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$M_z(w) = zw$$

Observe que si  $z = 0$ , entonces  $M_z$  es la función cero. Por otro lado, esta función es claramente  $\mathbb{C}$ -lineal y de hecho es  $\mathbb{R}$ -lineal. Además, como función  $\mathbb{R}$ -lineal su matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} \text{Re}(z) & -\text{Im}(z) \\ \text{Im}(z) & \text{Re}(z) \end{pmatrix}$$

Más aún, esta representa la composición de una rotación con una homotecia. Para ver esto de forma ecuacional expresamos a  $z$  en coordenadas polares como  $z = r \text{cis}\theta$  con  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \text{Re}(z) & -\text{Im}(z) \\ \text{Im}(z) & \text{Re}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Lo que muestra que  $M_z$  es la composición de la homotecia por el factor  $r = |z|$  y la rotación por el ángulo  $\theta$ . Por ejemplo, para el caso de  $z = i$ , se deduce que  $M_i$  es una rotación por  $\frac{\pi}{2}$ .

Lo que hemos argumentado demuestra las partes no triviales del siguiente resultado de álgebra lineal.

PROPOSICIÓN 12. Sea  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una transformación  $\mathbb{R}$ -lineal no cero. Entonces son equivalentes:

1.  $T$  es  $\mathbb{C}$ -lineal
2. Existe  $z \in \mathbb{C}$  no cero tal que  $T = M_z$
3. La matriz asociada a  $T$  como transformación  $\mathbb{R}$ -lineal tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

4.  $T$  es composición de una rotación y una homotecia
5.  $T$  preserva ángulos orientados

DEMOSTRACIÓN. De álgebra Lineal se deduce que 1, 2 y 3 son equivalentes.  $3 \Rightarrow 4$ ) se deduce de la discusión previa. Además claramente  $4 \Rightarrow 5$ ) pues las rotaciones y homotecias preservan ángulo orientados. Para concluir supongamos que sucede 5 y escribamos  $T(1) = z_1 + iz_2$  y  $T(i) = w_1 + iw_2$ . Dado que son ortogonales  $1$  e  $i$ , entonces son ortogonales  $T(1)$  y  $T(i)$ , lo que implica que se cumple que  $w_1 z_1 + w_2 z_2 = 0$ . Por otro lado, el ángulo de  $T(1)$  y  $T(1+i)$  es el mismo que el de  $T(i)$  con  $T(1+i)$ , lo que implica que

$$\frac{T(1) \cdot T(1+i)}{|T(1)||T(1+i)|} = \frac{T(i) \cdot T(1+i)}{|T(i)||T(1+i)|}$$

Al calcular el numerador de la izquierda se tiene que  $T(1) \cdot T(1+i) = z_1(z_1 + w_1) + z_2(z_2 + w_2) = |T(1)|^2$  y análogamente  $T(i) \cdot T(1+i) = |T(i)|^2$ , lo que implica que  $|T(1)| = |T(i)|$ . Esto implica que  $w_1 = -z_2$  y  $w_2 = z_1$ , por lo que entonces  $T = M_{T(1)}$ .  $\square$

En este momento el lector quizá se pregunte por la interpretación geométrica del cociente de complejos, pero como el cociente es un producto pues

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{w} z,$$

entonces no hay mucho que se pueda agregar a la interpretación pues tomando  $w \in \mathbb{C}^*$  fijo, y notando que  $w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{1}{|w|} \text{cis}(-\theta)$ , si  $\theta = \arg(w) \in [-\pi, \pi)$ , entonces la función “hacer cociente por  $w$ ” corresponde a hacer una rotación por un ángulo  $-\theta$  y una homotecia por el factor  $\frac{1}{|w|}$ . Por otro lado, si se quiere tomar como variable el cociente, la función  $\frac{1}{w} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  es un ejemplo de lo que se conoce como una función racional, las cuales trataremos en secciones posteriores, así que con esto se tiene una interpretación de todas las operaciones de  $\mathbb{C}$  salvo tomar inversos.

### 3. Funciones elementales: polinomiales, racionales, exponencial, trigonométricas

En esta sección vamos a presentar algunas familias de funciones complejas, y con funciones complejas entenderemos funciones  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Aunque puede ser el caso que estas funciones tengan como dominio un subconjunto de los complejos, es decir,  $D \subseteq \mathbb{C}$  y  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ . Si no se aclara, siempre entenderemos que el dominio son los complejos.

Igual que en el caso real podemos, podemos definir operaciones entre las funciones complejas. Si  $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{C}$  y  $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{C}$  son funciones complejas, entonces definimos la suma  $f_1 + f_2: D_1 \cap D_2 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $(f_1 + f_2)(z) = f_1(z) + f_2(z)$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ . De manera análoga definimos el producto,  $f_1 f_2: D_1 \cap D_2 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $(f_1 f_2)(z) = f_1(z) f_2(z)$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ .

Nuestra primera familia y la más sencilla es la de funciones constantes, esto es, para  $a \in \mathbb{C}$ , tenemos la función  $k_a: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $k_a(z) = a$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ .

**3.1. Funciones Polinomiales** Primero daremos una familia más pequeña, la familia de las potencias, para  $n$  un natural (incluimos al cero), definimos la  $n$ -ésima potencia  $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f_n(z) = z^n$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ . Por las propiedades de campo esta función está bien definida. Observamos que esta función también la podemos ver como  $n$ -veces el producto de la función identidad. No está demás observar que  $f_0 = k_1$ .

Un punto interesante a destacar es que  $f_2(z) = z^2$  en el caso real es una función que no es inyectiva ni suprayectiva. Pero ya se vio anteriormente que todo número complejo tiene raíz cuadrada, entonces esta función es suprayectiva en el caso complejo.

**DEFINICIÓN 2.** Para una función compleja  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , diremos que  $f$  es una función polinomial si existen  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  tales que

$$f = \sum_{i=0}^n a_i f_i$$

Dicho de manera usual

$$f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

para toda  $z \in \mathbb{C}$ .

Es bueno hacer el recordatorio o la observación de que las funciones polinomiales y los polinomios formalmente como objetos matemáticos son cosas distintas, pero no hay peligro con identificarlos en el caso de que el campo sea infinito, como en el caso complejo. Por lo que para efectos de este curso, para nosotros serán lo mismo.

**DEFINICIÓN 3.** Sea  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  una función compleja. Decimos que  $z_0 \in D$  es un cero de  $f$ , si  $f(z_0) = 0$ .

Una vez con la definición de cero podemos enunciar el teorema fundamental del álgebra más no lo podemos demostrar todavía.

**PROPOSICIÓN 13 (Teorema Fundamental del Álgebra).** Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función polinomial no constante. Entonces  $f$  tiene al menos un cero.

DEMOSTRACIÓN. Pendiente

□

### 3.2. Funciones Racionales

DEFINICIÓN 4. Sea  $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  una función polinomial. Definimos  $V(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$  y  $D_f = \mathbb{C} \setminus V(f)$

Notamos que  $V(f)$  es el conjunto de ceros de una función polinomial y  $D_f$  es donde no se anula la función.

DEFINICIÓN 5. Sea  $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$  una función compleja. Decimos que  $f$  es una función racional si  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  para toda  $z \in \mathbb{C}$  con  $g$  y  $h$  funciones polinomiales con  $(g, h) = 1$  (máximo común divisor), y  $D_g \subseteq D$ . En general cuando hablemos de una función racional al menos de que se diga lo contrario pensaremos que su dominio es  $D_h$ .

Inmediatamente podemos observar que toda función polinomial es una función racional,  $f = \frac{f}{1}$ .

Analicemos por que pedimos que  $(g, h) = 1$ , veamos la función:

$$f(z) = z^2 + 1$$

Esta función la podemos que expresar como

$$f(z) = \frac{z^4 - 1}{z^2 - 1} = (z^2 + 1) \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1}$$

En el primer caso el dominio es  $\mathbb{C}$  y en el segundo caso el dominio es  $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ .

DEFINICIÓN 6. Vamos a denotar por  $\mathbb{C}(z)$  al conjunto de funciones racionales.

PROPOSICIÓN 14.  $\mathbb{C}(z)$  es un campo

DEMOSTRACIÓN. Antes que nada, vamos a considerar la funciones racionales con la forma  $f = \frac{g}{h}: D_h \longrightarrow \mathbb{C}$  con  $(g, h) = 1$ . Definimos la suma

$$f_1 + f_2 = \frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2} := \frac{g_1 r_1 + g_2 r_1}{[h_1, h_2]}$$

donde  $[h_1, h_2]$  es el mínimo común múltiplo de  $h_1$  y  $h_2$ . Aquí  $r_1 = \frac{[h_1, h_2]}{h_1}$  y  $r_2 = \frac{[h_1, h_2]}{h_2}$ .

Esto con  $f_1 = \frac{g_1}{h_1}$  y  $f_2 = \frac{g_2}{h_2}$ . Cabe resaltar que esta expresión no tiene por que ser mínima, por ejemplo:

$$\frac{1}{z} + \frac{-1}{z} = \frac{0}{1}$$

En este caso,  $\text{dom}(\frac{1}{z}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $\text{dom}(0) = \mathbb{C}$ . También nos damos cuenta que  $D_{[h_1, h_2]} = D_{h_1} \cap D_{h_2}$ . Sin embargo, esto no nos ayuda en varios casos.

De manera más sencilla definimos el producto:

$$f_1 f_2 = \frac{g_1}{h_1} \frac{g_2}{h_2} := \frac{g_1 g_2}{h_1 h_2}$$



en este caso nuevamente tenemos que la expresión no es única. Por ejemplo:

$$\frac{1}{z}z = \frac{z}{z} = 1$$

Los detalles sobre los axiomas de campo son relativamente sencillos.  $\square$

Lo que buscamos es mostrar que  $\mathbb{C}(z)$  es un campo que tiene una copia de los complejos por medio de la función  $\eta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}(z)$  dada por  $\eta(a) = k_a$  para todo  $a \in \mathbb{C}$ . Esta función es claramente inyectiva puesto que si  $\eta(a) = \eta(b)$ , entonces  $k_a = k_b$ . En particular,

$$a = k_a(1) = k_b(1) = b$$

Como  $\mathbb{C}(z)$  tiene una copia de los complejos, se sigue que tiene una copia de los reales y que la ecuación  $x^2 + 1 = 0$  tiene solución. Sin embargo, no es un modelo de los complejos, puesto que hay una condición extra que hay que pedir pero no nos adentraremos en este tecnicismo que es la minimalidad.

Nos vamos a centrar ahora en unas funciones racionales muy importantes:

**DEFINICIÓN 7.** Una transformación de Möbius es una función racional  $T$  de la forma:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

que los coeficientes satisfacen  $ad - bc \neq 0$ .

Notamos que el dominio de  $T$  es  $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ . Ahora la imagen de  $T$ , consideremos  $w \in \mathbb{C}$  y veamos bajo que condiciones existe  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $T(z) = w$ . Así

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} &= w \\ az + b &= w(cz + d) \\ az - wc z &= wd - b \\ z(a - wc) &= wd - b \\ z &= \frac{wd - b}{a - wc} \end{aligned}$$

Así tenemos que la imagen de  $T$  es  $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ .

**PROPOSICIÓN 15.** Si  $T_1$  y  $T_2$  son dos transformaciones de Möbius, entonces  $T_1 T_2$  es una transformación de Möbius.

DEMOSTRACIÓN. Si  $T_1 = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$  y  $T_2 = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} T_1(T_2(z)) &= \frac{a_1 \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + d_1} \\ &= \frac{\frac{a_1a_2z+a_1b_2+b_1c_2z+b_1d_2}{c_2z+d_2}}{\frac{c_1a_2z+c_1b_2+d_1c_2z+d_1d_2}{c_2z+d_2}} \\ &= \frac{a_1a_2z+a_1b_2+b_1c_2z+b_1d_2}{c_1a_2z+c_1b_2+d_1c_2z+d_1d_2} \\ &= \frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+(a_1b_2+b_1d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)z+(c_1b_2+d_1d_2)} \end{aligned}$$

Al menos ya tenemos la forma de función racional. Sólo nos falta la segunda condición.

Vamos a notar que:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}$$

Si observamos que la condición  $ad - bc \neq 0$ , realmente es:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned} (a_1a_2+b_1c_2)(c_1b_2+d_1d_2) - (a_1b_2+b_1d_2)(c_1a_2+d_1c_2) &= \det \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

□

Una cuestión muy curiosa de notar es que nos podemos aprovechar de esta relación que tienen las transformaciones de Möbius con las matrices para hacer ciertas cuentas. Por ejemplo:

PROPOSICIÓN 16. *El conjunto de transformaciones de Möbius son un grupo.*

DEMOSTRACIÓN. Lo primero es que por la proposición anterior la operación composición nos da una operación binaria entre las transformaciones de Möbius. Inmediatamente esto nos da que la operación es asociativa, puesto que la composición de funciones es asociativa. Solo nos falta la unidad y los inversos.

Para la unidad, notamos que  $T(z) = z$  es una transformación de Möbius, que realmente  $T = 1_{\mathbb{C}}$ . Así que  $T$  es la unidad.

Por otro lado, si  $T = \frac{az+b}{cz+d}$  quisieramos encontrar su inverso. Recordamos que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-dc & -bc+ad \end{pmatrix}$$

De primera instancia nos da la impresión que quisieramos la inversa de la matriz, pero notemos que con esto basta si ponemos  $S(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$  tendremos:

$$TS(z) = \frac{(ad-bc)z}{ad-bc} = z$$

Para terminar de ver que  $S$  es una transformación de Möbius  $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$ . Esto funciona por el otro la también puesto que:

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab-bc & -ab+ab \\ cd-dc & -bc+ad \end{pmatrix}$$

Y así llegamos a que :

$$ST(z) = \frac{(ad-bc)z}{ad-bc} = z$$

Por lo que las transformaciones de Möbius tienen inversos, y más aún estas mismas son transformaciones de Möbius.  $\square$

Vamos a analizar un poco más a fondo la relación entre las matrices y las transformaciones de Möbius. Como ambos son grupos, podemos ver su relación. Para hacer esto llamaremos al grupo de las transformaciones de Möbius  $\mathcal{M}$ . Por otro lado recordemos que  $GL_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$ .

Para esto vamos usar el primer teorema de isomorfismo de grupos:

**PROPOSICIÓN 17.** Sean  $G$  y  $H$  grupos y  $f: G \longrightarrow H$  un morfismo de grupos ( $f(xy) = f(x)f(y)$  para  $x, y \in G$ ). Entonces  $G/\text{nuc } f \cong \text{im } f$ .

Por lo que vimos anteriormente tenemos un morfismo de grupos suprayectivo  $\phi: GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}$  dado por  $\phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Aplicando el primer teorema de isomorfismo llegamos a que

$$GL_2(\mathbb{C})/\text{nuc } \phi \cong \mathcal{M}$$

Solo nos falta ver quien es el nucleo. Tenemos la intuición de que el nucleo son las matrices de la forma  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  con  $a \in \mathbb{C}$ .

Hagamos la doble contención. Para la primera

$$\phi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} (z) = \frac{az}{a} = z$$

Ahora, sea  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tal que  $\phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = z$ . Así tendríamos que

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

Si evaluamos en  $z = 0$ , obtenemos que  $\frac{b}{d} = 0$ . Por lo que llegamos a que  $b = 0$ . Ahora despejando, tenemos que:

$$az = z(cz+d) = cz^2 + dz$$

Sabemos que dos polinomios son iguales si y sólo si sus coeficientes son iguales. De esto tenemos que  $b = c = 0$  y  $a = d$ . Por lo cual concluimos la doble contención.

Todo esto nos quiere decir que dos matrices representarán la misma transformación de Möbius si una es un múltiplo de la otra por un escalar. Para concluir esta parte,  $GL_2(\mathbb{C})/nuc\phi$  comunmente se le denota por  $PSL_2(\mathbb{C})$  y es llamado el grupo lineal proyectivo.

**3.3. Funciones exponenciales y trigonométricas** Recordamos que un complejo se  $z \in \mathbb{C}$  se puede expresar de forma polar como  $z = r\cos\theta + risen\theta$ , esto debido a que si identificamos los complejos con el plano cartesiano,  $z = (x, y)$  lo podemos expresar como  $z = r(\cos\theta, sen\theta)$  donde  $\theta$  es el ángulo que forma el vector con eje  $x$ . Ahora bien, lo natural es aprovechar nuestra notación y por eso llegamos a escribir  $z = r\cos\theta + risen\theta$ .

Por otro lado, vamos a proceder a hacer unas cuantas manipulaciones algebraicas a las cuales después les daremos toda la formalidad. Tenemos que la serie de Taylor de coseno de  $x$  alrededor de cero es:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

y la serie de Taylor de seno de  $x$  alrededor de cero es:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Y sólo de manera un poco sospecho pondremos cual es la serie de Taylor de la exponencial alrededor del cero.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Hagamos el cálculo de que pasa cuando sustituimos esto en las coordenadas polares.

$$\begin{aligned} z &= r\cos\theta + risen\theta \\ &= r(\cos\theta + isen\theta) \\ &= r\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1}\right) \\ &= r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$

Notemos que coseno tiene la parte par y seno la parte impar. Esto aunado a que las potencias de  $i$  son  $i, -1, -i, 1$ . Por lo cual las potencias de  $i$  que aparecen en coseno es  $1$  y  $-1$ , mientras que las que aparecen en seno son  $i$  y  $-i$ .

De aquí podemos para un paso más y proponer una definición de exponencial compleja,  $e^z$ , con  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Así tenemos:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

Notemos que  $e^{iy}$  tiene el sentido de  $\cos y + i \sin y$ . La variable  $y$  tiene una periodicidad de  $2\pi$ . Así también es importante notar que  $|e^z| = e^x$ , y esto se sigue simplemente de considerar la expresión exponencial como una forma más de la expresión polar.

Analicemos que  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$  y que

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos(y) - i \sin(-y)$$

Por que coseno es par y seno es impar. Así, sumando  $e^{iy}$  y  $e^{-iy}$ , tenemos que:

$$2\cos y = e^{iy} + e^{-iy}$$

Por lo que deducimos que:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

De manera analoga restando en vez de sumando:

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

De nuevo, esta última observación nos permite extender la definición de seno y coseno a todo el plano complejo, por lo que para  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

y

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

PROPOSICIÓN 18. Sea  $z \in \mathbb{C}$ . Entonces  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{e^{i2z} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-i2z}}{4} + \frac{e^{i2z} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-i2z}}{-4} \\ &= \frac{e^{i2z} + 2 + e^{-i2z}}{4} + \frac{e^{i2z} - 2 + e^{-i2z}}{-4} \\ &= \frac{e^{i2z} + 2 + e^{-i2z} - e^{i2z} + 2 - e^{-i2z}}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

**PROPOSICIÓN 19.** Sea  $z, w \in \mathbb{C}$ . Entonces  $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(w)\operatorname{sen}(z)$  y  $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \operatorname{sen}(w)\cos(z)$

**DEMOSTRACIÓN.** Todo sale del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \cos(z+w) + i\operatorname{sen}(z+w) &= e^{i(z+w)} \\ &= e^{iz}e^{iw} \\ &= (\cos z + i\operatorname{sen} z)(\cos w + i\operatorname{sen} w) \\ &= \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w) + i[\operatorname{sen}(z)\cos(w) + \operatorname{sen}(w)\cos(z)] \end{aligned}$$

Dos complejos son iguales si y sólo si su parte real y su parte imaginaria son iguales.  $\square$

Naturalmente extendemos estas definiciones en los complejos a todas las demás funciones trigonométricas.

Así como lo hicimos para el seno y coseno, podemos extender la definición al seno hiperbólico y al coseno hiperbólico. De la siguiente forma:

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

y

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Inmediatamente podemos relacionar la parte hiperbólica con sus contrapartes clásicas:

$$\cosh(z) = \cos(iz)$$

y

$$\sinh(z) = -i\operatorname{sen}(iz)$$

#### 4. Geometría subyacente de las funciones elementales

En esta sección analizaremos algunos aspectos geométricos de la función exponencial y trigonométricas complejas, así como de algunas familias de funciones racionales. Asimismo introduciremos la idea del plano complejo extendido vía la proyección estereográfica, con la cual daremos la definición extendida de transformación de Möbius.

**4.1. Un poco de potencias** Con la idea de coordenadas polares y el teorema de De Moivre pueden interpretarse algunas ideas respecto a funciones polinomiales que son potencias de la variable. Vamos a estudiar algunas cuestiones geométricas de estas funciones.

Conservando la notación de antes, considere la función  $f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que tiene por regla de correspondencia  $f_2(z) = z^2$ . De la descripción de coordenadas polares se deduce que esta función duplica el argumento de un complejo y hace una homotecia por el factor del cuadrado de la norma del complejo en cuestión. De esto se deduce inmediatamente que  $f_2$  manda a la circunferencia unitaria en sí misma, pero recorrida dos veces. De hecho note que  $f_2$  manda el hemisferio norte de la circunferencia  $S^1$ , en  $S^1$ , y lo mismo sucede respecto al

hemisferio sur. Además, dada una circunferencia de radio  $r > 0$ , la función  $f_2$  manda a la circunferencia de radio  $r$  en una circunferencia de radio  $r^2$ , la cual es recorrida dos veces.

En un análisis un poco más puntual vamos a ver qué sucede respecto a rectas paralelas al eje imaginario, las cuales están descritas por los elementos del conjunto

$$\mathcal{L}_{x=x_0} = \{x_0 + iy : y \in \mathbb{R}\}.$$

Note que para  $x_0 + iy \in \mathcal{L}_{x=x_0}$ , se tiene que

$$(x_0 + iy)^2 = (x_0^2 - y^2) + 2ix_0y$$

Al definir  $w_1 := x_0^2 - y^2$  y  $w_2 := 2x_0y$ , hay dos casos respecto a los valores que puede tomar  $x_0 \in \mathbb{R}$ :

*Caso 1:* Si  $x_0 = 0$ , entonces note que  $w_1 = -y^2$  y  $w_2 = 0$ . Esto son las ecuaciones de una semirecta formada por el eje real negativo y el cero.

*Caso 2:* Si  $x_0 \neq 0$ , entonces las ecuaciones anteriores implican que  $(\frac{w_2}{2x_0})^2 = x_0^2 - w_1$ , lo que es la ecuación de una parábola con eje focal sobre el eje real y vértice en el punto  $(x_0^2, 0)$ .

Estos dos casos se muestran en la figura 10 para algunos valores particulares.

Por otro lado, realizaremos lo análogo para una recta paralela al eje real, la cual está descrita por el conjunto

$$\mathcal{L}_{y=y_0} = \{x + iy_0 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces, dado  $x + iy_0 \in \mathcal{L}_{y=y_0}$ , se tiene que

$$(x + iy_0)^2 = (x^2 - y_0^2) + 2ixy_0$$

Al considerar  $w_1 := x^2 - y_0^2$  y  $w_2 := 2xy_0$ , nuevamente analizamos dos casos respecto a los valores que puede tomar  $y_0 \in \mathbb{R}$ :

*Caso 1:* Cuando  $y_0 = 0$ , se tiene que  $w_1 = x^2$  y  $w_2 = 0$ , lo que es la semirecta formada por el eje real positivo y el cero.

*Caso 2:* Para  $y_0 \neq 0$  se tiene que  $w_1 := (\frac{w_2}{2y_0})^2 - y_0^2$ , lo que es una parábola con eje focal sobre el eje real y vértice  $(-y_0^2, 0)$ .

Ambas situaciones se muestran en la figura 11.

Para potencias superiores hacer un análisis como el anterior es mucho más complicado pues en los desarrollos binomiales aparecen en la parte real e imaginaria variables comunes con distintas potencias, las cuales hacen que las cosas sean complicadas. Recomendamos el ejercicio 47 para comprobar esto.

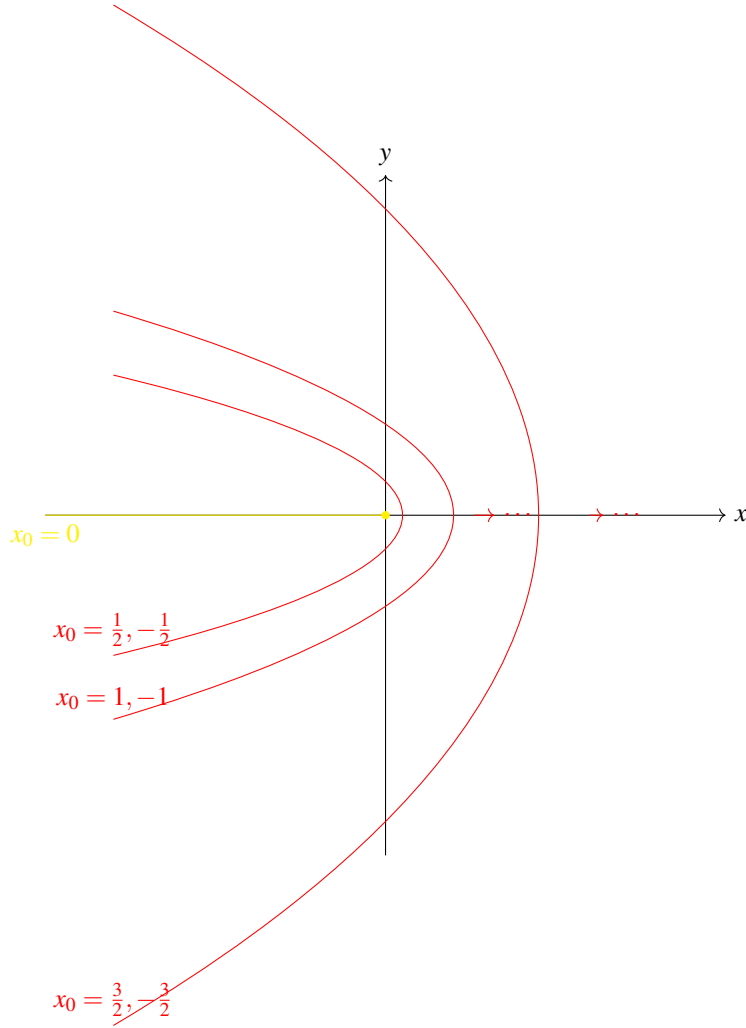


FIGURA 10. Transformación de rectas paralelas al eje imaginario mediante la función  $f_2(z) = z^2$ .

**4.2. El plano complejo extendido** Consideremos  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \|(x_1, x_2, x_3)\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ , así como la situación que muestra la figura 12.

Desde el polo norte de  $S^2$ ,  $N = e_3 = (0, 0, 1)$ , podemos trazar una recta en cualquier dirección y esta intersecta a un único punto de  $S^2 \setminus \{N\}$  y a un único punto del plano  $xy$  descrito por el conjunto  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ , el cual se puede identificar con  $\mathbb{C}$  pues este es claramente  $\mathbb{R}^2$ . Esta idea nos permite definir una función:

$$\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}.$$



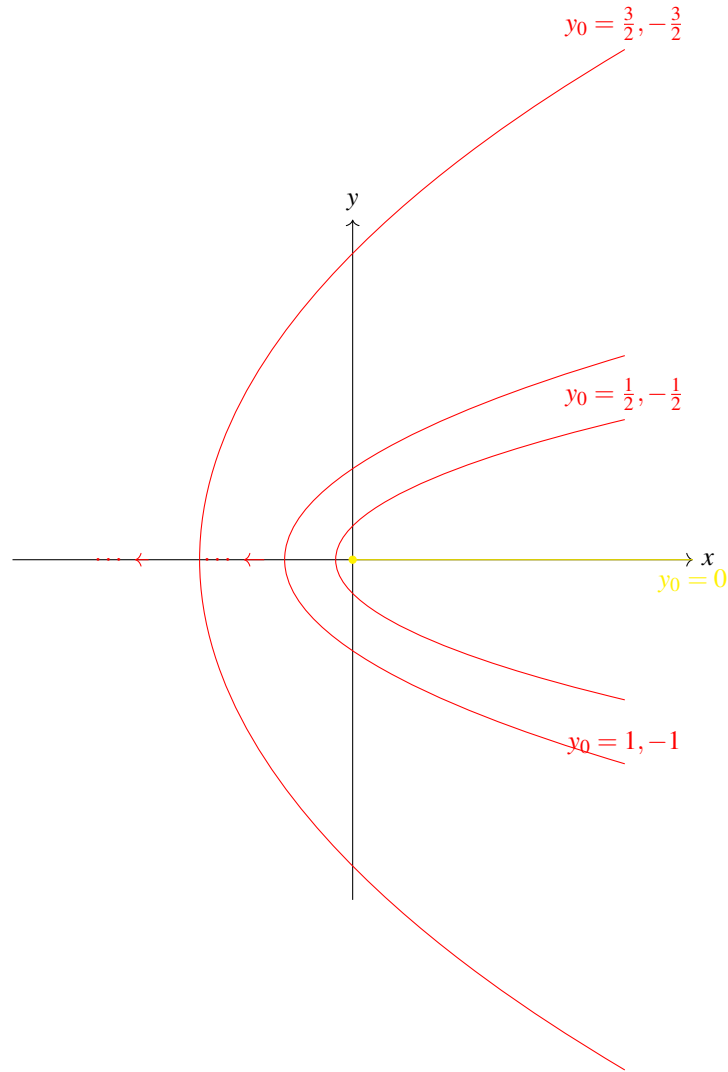


FIGURA 11. Transformación de rectas paralelas al eje real mediante la función  $f_2(z) = z^2$ .

Para poder encontrar la regla de correspondencia de esta, dado  $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$ , notemos que  $\pi(x_1, x_2, x_3)$  es un punto en la recta  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que tiene por ecuación  $\alpha(t) = e_3 + t((x_1, x_2, x_3) - e_3)$ , por lo que existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha(t_0) = \pi(x_1, x_2, x_3)$ . Podemos escribir esta ecuación usando las coordenadas de los elementos en cuestión para obtener el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\pi(x_1, x_2, x_3)) = t_0 x_1 \\ \operatorname{Im}(\pi(x_1, x_2, x_3)) = t_0 x_2 \\ 0 = 1 + t_0(x_3 - 1) \end{cases}$$

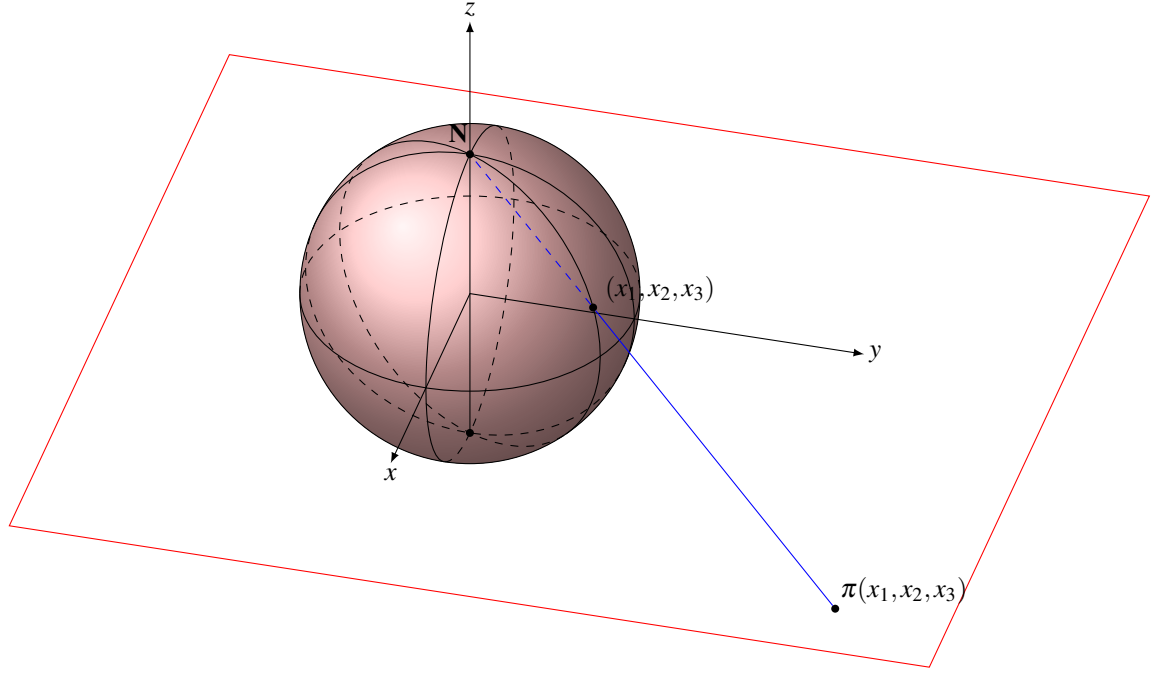


FIGURA 12. Proyección estereográfica desde el polo norte

De la última ecuación se deduce que  $t_0 = \frac{1}{1-x_3}$  y note que  $x_3 \neq 1$  pues  $(x_1, x_2, x_3) \neq e_3$ . Al sustituir esto en las primeras dos ecuaciones se deduce que la regla de correspondencia es:

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3}.$$

Note que esta función es continua pues entrada a entrada lo es. Además esta es una biyección y podemos dar la inversa de forma explícita la cual está dada por

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{C} &\rightarrow S^2 \setminus \{N\} \\ \psi(z) &= \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right). \end{aligned}$$

Para ver que esta es la inversa, note primero que  $\psi$  está bien definida pues

$$\begin{aligned} \|\psi(z)\|^2 &= \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1} \right)^2 + \left( \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1} \right)^2 + \left( \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)^2 \\ &= \frac{4|z|^2 + (|z|^2-1)^2}{(|z|^2+1)^2} \\ &= \frac{1+2|z|^2+|z|^4}{(|z|^2+1)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Además note que claramente  $e_3 \notin \psi(\mathbb{C})$ .

Para ver que ambas funciones son mutuamente inversas notemos primero que  $\pi \circ \psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\psi \circ \pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ . Ahora veamos que estas funciones son las identidades correspondientes. Para esto, sea  $z \in \mathbb{C}$ , entonces:

$$\begin{aligned} (\pi \circ \psi)(z) &= \pi\left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \\ &= \frac{\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}}{1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}} + i\left(\frac{\frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}}{1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}}\right) \\ &= z \\ &= 1_{\mathbb{C}}(z) \end{aligned}$$

Por otro lado, dado  $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \pi)(x_1, x_2, x_3) &= \psi\left(\frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{2x_1}{1-x_3}}{\left|\frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}\right|^2 + 1}, \frac{\frac{2x_2}{1-x_3}}{\left|\frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}\right|^2 + 1}, \frac{\left|\frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}\right|^2 - 1}{\left|\frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}\right|^2 + 1}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{2x_1}{1-x_3}}{\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1-x_3}\right)^2 + 1}, \frac{\frac{2x_2}{1-x_3}}{\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1-x_3}\right)^2 + 1}, \frac{\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1-x_3}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1-x_3}\right)^2 + 1}\right) \\ &= \left(\frac{2x_1(1-x_3)}{(1-x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2(1-x_3)}{(1-x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - (1-x_3)^2}{(1-x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2}\right) \\ &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= 1_{S^2 \setminus \{N\}}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

De la biyección anterior podemos extender  $\pi$  a todo  $S^2$  agregando a  $\mathbb{C}$  un punto especial al cual llamaremos el **punto al infinito** y el cual lo denotaremos por  $\infty$ . Por lo tanto, si escribimos  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ , definimos  $\pi(N) = \infty$  y  $\psi(\infty) = N$ , entonces tenemos funciones

$$\pi : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$\psi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2,$$

que son mutuamente inversas entre sí.<sup>4</sup> A  $\hat{\mathbb{C}}$  se le conoce como **plano complejo extendido**, a  $S^2$  como la **esfera de Riemann** y a  $\pi$  como la **proyección estereográfica**.

Note que en el plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}}$ , podemos extender algunas operaciones para el punto al infinito usando la intuición que nos dan los límites. Dado que para cualquier  $z \in \mathbb{R}^2$  se tiene que  $\lim_{w \rightarrow \infty} (z + w) = \infty$ , extendemos la suma como  $z + \infty = \infty$ . Usando

<sup>4</sup>Se puede dar una topología en  $\hat{\mathbb{C}}$  que hace que  $\pi$  y  $\psi$  son continuas. Dicho sea de paso, esto es un caso particular de una construcción topológica que se conoce como la compactación en un punto o compactación de Alexandroff.

argumentos parecidos podemos convencernos que es plausible extender las operaciones como sigue: Para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ , definimos

1.  $z + \infty = \infty + z = \infty$
2.  $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$
3.  $\frac{z}{\infty} = 0$
4.  $\frac{\infty}{0} = \infty$
5.  $\infty + \infty = \infty$
6.  $\infty \cdot \infty = \infty$
7.  $\frac{\infty}{0} = \infty$
8.  $\frac{0}{\infty} = 0$ .

Por otro lado se quedan sin definir los siguientes símbolos:

1.  $\infty - \infty$
2.  $0 \cdot \infty$
3.  $\frac{0}{0}$
4.  $\frac{\infty}{\infty}$

Un argumento de por qué sucede esto, es porque en el comportamiento de los límites no hay una tendencia clara en cada una de las expresiones anteriores. Por ejemplo, para  $\infty - \infty$  piense en la sucesión  $\{a_n = n\}_{n=1}^{\infty}$ , la cual claramente tiende a infinito así como la sucesión  $2a_n$ . Por otro lado observe que:

1.  $(a_n - a_n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$
2.  $(2a_n - a_n) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$
3.  $(a_n - 2a_n) \rightarrow -\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$

Por estas razones  $\hat{\mathbb{C}}$  no tiene una estructura algebraica como  $\mathbb{C}$ , de hecho hemos perdido casi toda la estructura. Sin embargo, note que el introducir el plano complejo extendido nos permite extender algunas funciones. Por ejemplo, considere la función tomar inverso

$$(\square)^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

Dado que  $\frac{1}{0} = \infty$  y  $\frac{1}{\infty} = 0$ , podemos extender esta función de forma obvia, la cual llamaremos y denotaremos de la misma forma en un abuso de notación,  $(\square)^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , como:

$$z^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{Si } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{Si } z = \infty \\ \infty & \text{Si } z = 0 \end{cases}$$

Note que en esta extensión  $(\square)^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es una involución, por lo que en particular esta es biyectiva.

Ahora, ya que vimos que en  $\hat{\mathbb{C}}$  se pierde la estructura algebraica de  $\mathbb{C}$ , pero esto permite extender algunas funciones. La siguiente pregunta es respecto a la estructura métrica de  $\mathbb{C}$  dada por la norma compleja y si esta también se pierde. La respuesta es que hay una métrica en  $\hat{\mathbb{C}}$  que se le conoce como la métrica cordal y esta se denotará por

$$d_{\mathbb{C}} : \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}.$$

A continuación platicaremos como se deduce esta, y la idea básica es usar la métrica estándar de  $\mathbb{R}^3$ , que es el espacio donde se encuentra  $S^2$ . Con esto en mente, consideremos  $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$  y

mapeamos estos puntos a la esfera de Riemann mediante  $\psi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ . Luego, consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \|\psi(z) - \psi(w)\|_2^2 &= \left\| \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) - \left( \frac{2\operatorname{Re}(w)}{|w|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(w)}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1} \right) \right\|_2^2 \\
 &= \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1} - \frac{2\operatorname{Re}(w)}{|w|^2+1} \right)^2 + \left( \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1} - \frac{2\operatorname{Im}(w)}{|w|^2+1} \right)^2 + \left( \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} - \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1} \right)^2 \\
 &= 2 - 2 \left( \frac{(z+\bar{z})(w+\bar{w})}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)} - \frac{(z-\bar{z})(w-\bar{w})}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)} + \frac{(|z|^2-1)(|w|^2-1)}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)} \right) \\
 &= 2 - 2 \left( \frac{2z\bar{w} + 2\bar{z}w + |zw|^2 - |z|^2 - |w|^2 + 1}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)} \right) \\
 &= 2 - 2 \left( \frac{-2(z-w)(\bar{z}-\bar{w}) + (1+|z|^2)(1+|w|^2)}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)} \right) \\
 &= \frac{4|z-w|^2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}
 \end{aligned}$$

Además, si uno de los puntos es el infinito, digamos  $w = \infty$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 \|\psi(z) - \psi(\infty)\|_2^2 &= \left\| \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) - (0, 0, 1) \right\|_2^2 \\
 &= \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1} \right)^2 + \left( \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1} \right)^2 + \left( \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} - 1 \right)^2 \\
 &= 2 - 2 \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \\
 &= \frac{4}{|z|^2+1}
 \end{aligned}$$

De esto se deduce que la fórmula para la **métrica cordal** es:

$$d_C(z, w) = \begin{cases} \frac{2|z-w|}{\sqrt{|z|^2+1}\sqrt{|w|^2+1}} & \text{Si } z, w \in \mathbb{C} \\ \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}} & \text{Si } z \in \mathbb{C}, w = \infty \\ 0 & \text{Si } z = w = \infty \end{cases}$$

NOTA 2. Observe que lo que se hizo es definir  $d_C(z, w) := \|\psi(z) - \psi(w)\|_2$ , por lo tanto realmente no hay que probar que  $d_C$  es una métrica pues todo se deduce de la métrica euclidiana en  $\mathbb{R}^3$  y del hecho de que  $\psi$  es una biyección. Además el término cordal proviene del hecho de que se están midiendo cuerdas en la esfera como se ha visto en esta última fórmula. Más aún, observe que por definición de la métrica cordal la proyección estereográfica y su inversa son isometrías, de ahí que  $\hat{\mathbb{C}}$  es isométrico con la esfera de Riemann, en particular estos espacios son homeomorfos.

#### 4.3. Funciones racionales: Transformaciones de Möbius en el plano extendido

El tipo más sencillo de función racional con denominador no trivial es la función inverso  $(\square)^{-1}$ , la cual vimos que se podía extender a  $\hat{\mathbb{C}}$ . Esta función pertenece a una familia muy importante de transformaciones en  $\hat{\mathbb{C}}$ , las cuales redefiniremos a continuación, es importante comparar con la definición dada antes.

DEFINICIÓN 8. Decimos que  $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es una transformación de Möbius si existen  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tales que  $ad - bc \neq 0$ ,<sup>5</sup> y

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{Si } z \neq -\frac{d}{c}, \infty \\ \infty & \text{Si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{Si } z = \infty \end{cases}$$

En un abuso de notación se suele escribir  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ .

El conjunto de transformaciones de Möbius lo denotaremos por  $PGL_2(\mathbb{C})$ .

EJEMPLO 9.

1. La función inverso,  $(\square)^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es una transformación de Möbius.
2. Toda transformación afín  $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  dada por  $T(z) = az + b$ , es una transformación de Möbius. En particular las rotaciones, homotecias y traslaciones lo son.

EJEMPLO 10. ¿Existe  $T \in PGL_2(\mathbb{C})$  tal que  $T(0) = -1$ ,  $T(1) = -i$  y  $T(\infty) = 1$ ?

SOLUCIÓN: Supongamos que tal transformación existe y tiene la forma  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ .

Las condiciones que se quieren imponer implican que se deben cumplir las ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{b}{d} = -1 \\ \frac{a+b}{c+d} = -i \\ \frac{a}{c} = 1 \end{cases}$$

<sup>5</sup>Ver el ejercicio 24 para entender por qué se pide esta última condición.

La primera condición y la tercera implican que  $b = -d$  y  $a = c$ . Al sustituir esto en la ecuación 2 se tiene que  $\frac{a+b}{a-b} = -i$ , lo que implica que  $a = ib$ , por lo que de todas estas condiciones se deduce que

$$T(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

Esta transformación se conoce como la **transformada de Cayley** y la denotaremos por  $T_C$ .<sup>6</sup>

Si denotamos por  $\mathcal{M}$  al conjunto de funciones  $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  que son reflexiones, rotaciones, homotecias y la función tomar inverso, entonces del ejemplo 9 se deduce que:

$$\mathcal{M} \subseteq PGL_2(\mathbb{C}).$$

Más aún, todo elemento de  $PGL_2(\mathbb{C})$  se puede ver como composición de elementos en  $\mathcal{M}$ . Para ver esto note que si  $T \in PGL_2(\mathbb{C})$  es tal que

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

existen dos casos:

*Caso 1:* Si  $c = 0$ . En este caso note que  $a, d \neq 0$  pues  $ad - bc \neq 0$ . Así  $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$  es una transformación afín, por lo que es composición de una traslación  $f(z) = z + \frac{b}{d}$  y una rotación con una homotecia dada por  $g(z) = \frac{a}{d}z$ , ya que

$$T = f \circ g.$$

*Caso 2:* Si  $c \neq 0$ . En este caso considere las transformaciones  $f(z) = z + \frac{d}{c}$ , que es una traslación,  $g(z) = z^{-1}$ ,  $h(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$ , que es una rotación y homotecia, así como  $k(z) = z + \frac{a}{c}$  que es una traslación. Luego,

$$T = k \circ h \circ g \circ f$$

NOTA 3. Para la gente que tiene conocimiento de teoría de grupos, el hecho de que toda transformación de Möbius es composición de los elementos de  $\mathcal{M}$  significa que el subgrupo generado por  $\mathcal{M}$  es  $PGL_2(\mathbb{C})$

Como corolario de esta discusión podemos concluir que toda transformación de Möbius es invertible. De hecho hasta podemos dar su inversa, la cual es una transformación de Möbius (ver ejercicio 25). Además de esto, el resultado anterior nos permite entender qué hacen geoméricamente las transformaciones de Möbius pues estas son composiciones de transformaciones que ya hemos estudiado de forma geométrica en las secciones anteriores. Un ejemplo de esto es que las transformaciones de Möbius mandan círculos en círculos,

<sup>6</sup>Para una generalización de la idea tratada en este ejemplo, ver el ejercicio 27.

entendiendo círculos por círculos clásicos y rectas.<sup>7</sup> Para concluir esto se recomienda el ejercicio 23, así lo único que faltaría argumentar es que:

PROPOSICIÓN 20. *La función  $f(z) = \frac{1}{z}$  manda círculos y rectas en círculos y rectas.*

DEMOSTRACIÓN. Por el ejercicio 48 la ecuación de un círculo o una recta tienen la forma

$$\lambda |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{w}z) + \mu = 0,$$

donde  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y  $w \in \mathbb{C}$ . Notemos que dado que  $z = \frac{1}{f(z)}$ , entonces al sustituir en la ecuación anterior tenemos que:

$$\lambda \left| \frac{1}{f(z)} \right|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{w}}{f(z)}\right) + \mu = 0$$

y al multiplicar por  $|f(z)|^2$  la expresión anterior, se tiene que:

$$\lambda + 2\operatorname{Re}(wf(z)) + \mu |f(z)|^2 = 0,$$

que es la ecuación de una línea o un círculo. □

Si lo discutido anteriormente no es suficiente para algún lector respecto a que las transformaciones de Möbius encierran muchas de las cuestiones geométricas básicas, vamos a realizar un interesante ejemplo que muestra que incluso para casos particulares, estas pueden contener ideas muy profundas.

EJEMPLO 11. *Para esto consideremos los conjuntos*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

y

$$B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

*La afirmación es que  $T_C(\mathbb{H}) = B_1(0)$ , con  $T_C$  la transformada de Cayley. Para ver esto notamos que demostrarlo es equivalente a ver que*

$$T_C(\mathbb{H}) \subseteq B_1(0)$$

$$T_C^{-1}(B_1(0)) \subseteq \mathbb{H}$$

---

<sup>7</sup>Note que esta terminología que es útil en geometría tiene una justificación clara con la proyección estereográfica, para lo cual se recomienda el ejercicio 50.



Así, calculemos la inversa de  $T_C^{-1}$ . Para esto, calculamos la inversa de la matriz  $C =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \text{ esta es}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$T_C^{-1}(z) = \frac{iz+i}{-z+1}$$

Notemos que para cualquier  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ , se cumple que:

$$\begin{aligned} 1 - |T_C(z)|^2 &= 1 - \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} \\ &= \frac{|z+i|^2 - |z-i|^2}{|z+i|^2} \\ &= \frac{|z|^2 - iz + i\bar{z} + 1 - (|z|^2 + iz - i\bar{z} + 1)}{|z+i|^2} \\ &= \frac{4\operatorname{Im}(z)}{|z+i|^2} \end{aligned}$$

De esto se deduce que  $T_C(\mathbb{H}) \subseteq B_1(0)$ . Más aún, observe que de esta misma igualdad se deduce que

$$T_C(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0\}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = S^1$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned} T_C^{-1}(z) &= \frac{iz+i}{-z+1} \\ &= \frac{i(z+1)\overline{(1-z)}}{(1-z)\overline{(1-z)}} \\ &= \frac{i(z+1)(1-\bar{z})}{|1-z|^2} \\ &= \frac{i(z+1)(1-\bar{z})}{|1-z|^2} \\ &= \frac{-2\operatorname{Im}(z) + i(1-|z|^2)}{|1-z|^2} \end{aligned}$$

De esto se deduce que

$$\operatorname{Im}(T_C^{-1}(z)) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}.$$

De esto se deduce que  $T_C^{-1}(B_1(0)) \subseteq \mathbb{H}$ .

NOTA 4. *El ejemplo anterior es interesante pues nos proporciona una biyección entre dos de los modelos clásicos de geometría hiperbólica bidimensional, a saber, el modelo del semiplano superior de Poincaré,  $\mathbb{H}$ , y el modelo del disco de Poincaré,  $B_1(0)$ .*

Una última propiedad que vamos a introducir de forma intuitiva y que se formalizará con detalle en el capítulo 2, con la cual es importante adquirir familiaridad, es la de **función que preserva ángulos**. Consideremos  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  curvas que se intersectan en el punto  $p \in \mathbb{C}$  tal que son diferenciables en dicho punto. El ángulo entre  $\alpha$  y  $\beta$  en el punto  $p$  se define como el ángulo entre sus vectores tangentes. Note que este se puede calcular como

$$\angle(\alpha, \beta)_p = \arg \left( \frac{\alpha'(t_0)}{\beta'(t_0)} \right),$$

con  $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = p$ . La situación se muestra en la figura 13.

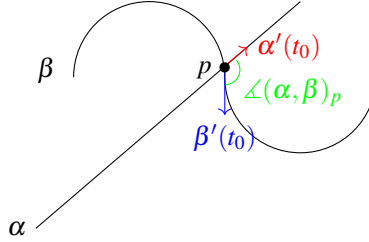


FIGURA 13. Ángulo entre curvas

Por lo tanto, una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  preserva ángulos si para cualesquiera dos curvas  $\alpha$  y  $\beta$  que forman un ángulo  $\theta$ , las curvas  $f \circ \alpha$  y  $f \circ \beta$  forman en mismo ángulo  $\theta$  el punto  $f(p)$ . Hay ejemplos intuitivamente triviales de funciones que preservan ángulos, como los son las traslaciones, reflexiones, homotecias y la función tomar inversa. Al ser toda transformación de Möbius composición de estas, entonces toda transformación de Möbius debe preservar ángulos. Esta idea es la que en el capítulo 2 nos permitirá definir lo que es una **transformación conforme**. Además vale la pena comentar que para más información respecto a transformaciones de Möbius así como un estudio más profundo de estas (esto solamente fue una pequeña introducción) recomendamos el capítulo 3 del libro de Needham ([5]), en especial las secciones V-VII, o el libro de Alfohrs ([1]), en el capítulo 3 sección 3.

#### 4.4. La exponencial compleja

Recordemos que tenemos definida la exponencial

$$e^{\square} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \operatorname{cis}(\operatorname{Im}(z))$$

La cual es claramente una extensión de la exponencial real. En esta subsección vamos a analizar algunas cuestiones geométricas respecto a esta, para lo que primero nos preguntaremos cómo transforma esta función a una recta paralela al eje imaginario. Supongamos que tal recta tiene por ecuación  $x = x_0$ , por lo que esta está descrita por el conjunto (ver figura 14):

$$\mathcal{L}_{x=x_0} = \{x_0 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

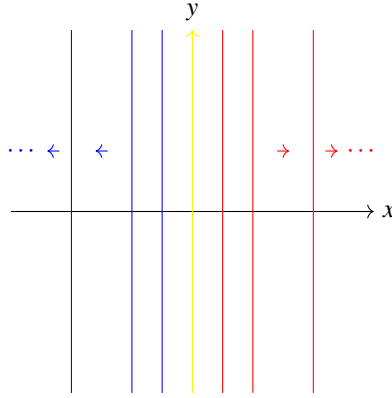


FIGURA 14. Rectas paralelas al eje imaginario

Para  $x_0 + iy \in \mathcal{L}_{x=x_0}$ , tenemos que

$$e^{x_0+iy} = e^{x_0} \cos(y) + ie^{x_0} \sin(y)$$

Notemos que si definimos  $w_1 := e^{x_0} \cos(y)$  y  $w_2 := e^{x_0} \sin(y)$ , entonces se cumple que

$$w_1^2 + w_2^2 = e^{2x_0},$$

que es la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio  $e^{x_0}$ . De forma conjuntista hemos visto que

$$e^{\square}(\mathcal{L}_{x=x_0}) = \{w \in \mathbb{C} : |w| = e^{x_0}\}$$

Observe que siempre que  $y \in [a, b]$  con  $b - a = 2\pi$ ,  $e^{x_0+iy}$  recorre una vez la circunferencia en cuestión, por lo tanto la exponencial recorre una cantidad infinita (numerable) de veces la circunferencia en su imagen. Además note que cuando  $x_0 = 0$ , es decir, consideramos el eje imaginario, la circunferencia correspondiente es la circunferencia unitaria  $S^1$ . Si  $x_0 > 0$  las circunferencias correspondientes son concéntricas con  $S^1$  y se encuentran en la región no acotada delimitada por esta, además de que estas aumentan su radio cuando  $x_0 \rightarrow \infty$ . Para el caso de  $x_0 < 0$  las circunferencias correspondientes se encuentran en la región que acota  $S^1$  y estas van decreciendo en radio cuando  $x_0 \rightarrow -\infty$ . Esta situación se representa en la siguiente figura.

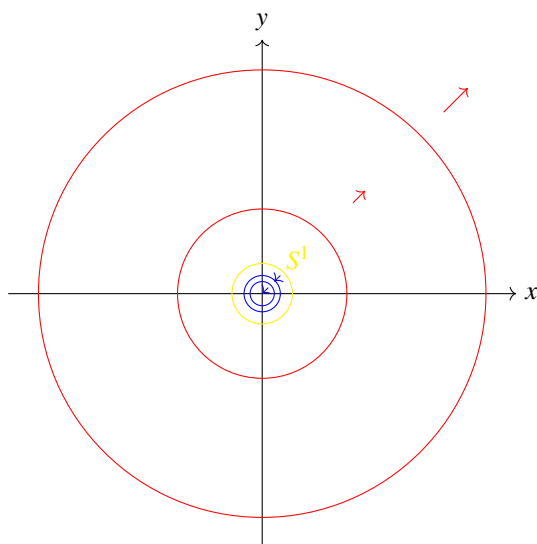


FIGURA 15. La exponencial mapeando las rectas paralelas al eje imaginario

Este análisis geométrico muestra en particular que la imagen directa del plano complejo mediante la exponencial es el plano complejo quitando el cero, es decir,

$$e^{\square}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$$

La siguiente pregunta obvia es cómo transforma la exponencial a rectas paralelas al eje real. Consideremos una de tales rectas, la que tiene por ecuación  $y = y_0$ , y que podemos escribir conjuntistamente como

$$\mathcal{L}_{y=y_0} = \{x + iy_0 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

La familia de estas rectas se muestra en la figura 16.

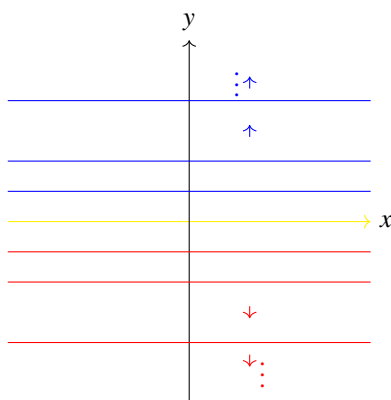


FIGURA 16. Rectas paralelas al eje real

En este caso, dado  $x + iy_0 \in \mathcal{L}_{y=y_0}$ , tenemos que

$$e^{x+iy_0} = e^x \cos(y_0) + ie^x \sin(y_0)$$

Por lo que al considerar  $w_1 := e^x \cos(y_0)$  y  $w_2 := e^x \sin(y_0)$ , se tiene que cuando  $y_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $w_2 = 0$ . En otro caso,  $w_2 = \tan(y_0)w_1$ , lo que es una recta con pendiente  $y_0$ . De hecho note que esta misma conclusión se obtiene en el otro caso. Por lo tanto hemos demostrado que

$$e^\square(\mathcal{L}_{y=y_0}) = \begin{cases} \{w_1 + iw_2 \in \mathbb{C} \mid w_2 = \tan(y_0)w_1\} & \text{Si } y_0 \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \{w_1 + iw_2 \in \mathbb{C} \mid w_2 = 0\} & \text{Si } y_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Estos hechos se representan de forma gráfica en la figura 17.

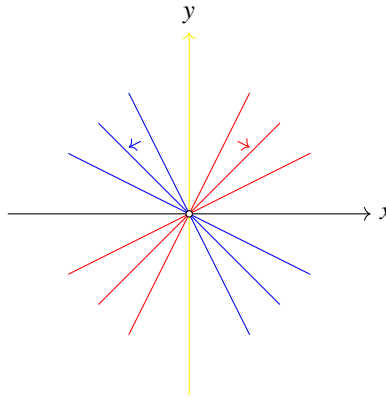


FIGURA 17. La exponencial mapeando rectas paralelas al eje real en rectas que pasan por el origen excluyendo el origen de todas estas.

Este último análisis nos dice más, ya que si tomamos cualquier región en el dominio formada por dos rectas paralelas al eje real que tiene un ancho de  $2\pi$ , la función exponencial manda a esta en  $\mathbb{C}^*$  de forma biyectiva. Esta observación será importante en la siguiente sección para definir una “inversa” de la exponencial (el logaritmo complejo).

Para concluir con este análisis geométrico vamos a realizar un par de observaciones más. La primera tiene que ver con notar que de esta última observación podemos concluir que  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$  no existe ya que  $e^z$  puede tomar cualquier valor cuando  $z$  crece, ya que recordemos que  $e^{z+2\pi ki} = e^z$  cuando  $k \in \mathbb{Z}$ . Esto nos dice que la exponencial NO puede extenderse para que su dominio sea  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Por otro lado, al considerar la exponencial como función  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , esta tiene por matriz Jacobiana a

$$Je^\square(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

Dado que  $\det(Je^\square) = e^{2x} \neq 0$ , entonces por el teorema de la función inversa podemos concluir que en el punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  hay una vecindad, así como en su imagen, donde esta función es invertible. De lo que estudiamos anteriormente se deduce que necesariamente la vecindad del dominio debe estar contenida en una franja semiabierto de tamaño  $2\pi$  respecto

a dos rectas paralelas al eje real. Además, de esto, como localmente  $e^z$  se comporta como la Jacobiana, la proposición 12 nos permite concluir que localmente  $e^z$  preserva ángulos, pero como este análisis se puede hacer en todo punto del dominio, esto nos permite concluir que la exponencial compleja debe preservar ángulos.

**4.5. Funciones trigonométricas** Resolveremos cuestiones análogas a la exponencial, pero para las funciones seno y coseno (complejos) para analizar algunas cuestiones geométricas de estas. Comenzamos con observar que dado que  $\sin(z) = \cos(z - \frac{\pi}{2})$ , basta con realizar interpretaciones con exactamente una de estas funciones, y la que estudiaremos es la función  $\cos(z)$ . Primero notemos lo que sucede con una recta paralela al eje real, esto es  $\mathcal{L}_{y=y_0}$ . Sea  $x + iy_0 \in \mathcal{L}_{y=y_0}$ , entonces

$$\begin{aligned}\cos(x + iy_0) &= \frac{1}{2}(e^{ix+y_0} + e^{-ix+y_0}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y_0}(\cos(x) + i\sin(x)) + e^{y_0}(\cos(x) - i\sin(x))) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y_0} + e^{y_0})\cos(x) + \frac{1}{2}(e^{-y_0} - e^{y_0})\sin(x)i \\ &= \cosh(y_0)\cos(x) - i\sinh(y_0)\sin(x)\end{aligned}$$

Al tomar  $w_1 = \cosh(y_0)\cos(x)$  y  $w_2 = -\sinh(y_0)\sin(x)$  observe que si  $y_0 = 0$ , entonces  $w_2 = 0$  y  $w_1 = \cos(x)$ . En caso contrario las ecuaciones anteriores implican que se cumple la ecuación

$$\frac{w_1^2}{\cosh(y_0)^2} + \frac{w_2^2}{\sinh(y_0)^2} = 1,$$

lo que es una elipse centrada en el origen con semieje mayor  $\cosh(y_0)$  y semieje menor  $\sinh(y_0)$ . Note que la longitud del foco de estas elipses es siempre  $\sqrt{\cosh(y_0)^2 - \sinh(y_0)^2} = 1$ , por lo tanto los focos de éstas están ubicados en los puntos  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$ , ¡sin importar el valor de  $y_0$ !. Además, el caso de  $y_0 = 0$  puede pensarse como una elipse degenerada. Esta situación se muestra en la figura 18. Es importante decir que solamente estamos poniendo las rectas azules pues las rojas con la misma distancia al eje real, van a la misma elipse. También es importante notar que por cada intervalo semiabierto de longitud  $2\pi$  sobre la recta en cuestión, el coseno complejo manda biyectivamente ese segmento a la elipse en cuestión, por tal razón la transformación de la recta completa da vueltas a la elipse una cantidad infinita numerable de veces.

Por otro lado, respecto a  $\mathcal{L}_{x=x_0}$ , se tiene que dado  $x_0 + iy \in \mathcal{L}_{x=x_0}$ , se cumple que:

$$\begin{aligned}\cos(x_0 + iy) &= \frac{1}{2}(e^{ix_0-y} + e^{-ix_0+y}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos(x_0) + i\sin(x_0)) + e^y(\cos(x_0) - i\sin(x_0))) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y)\cos(x_0) + \frac{1}{2}(e^{-y} - e^y)\sin(x_0)i \\ &= \cosh(y)\cos(x_0) - i\sinh(y)\sin(x_0)\end{aligned}$$

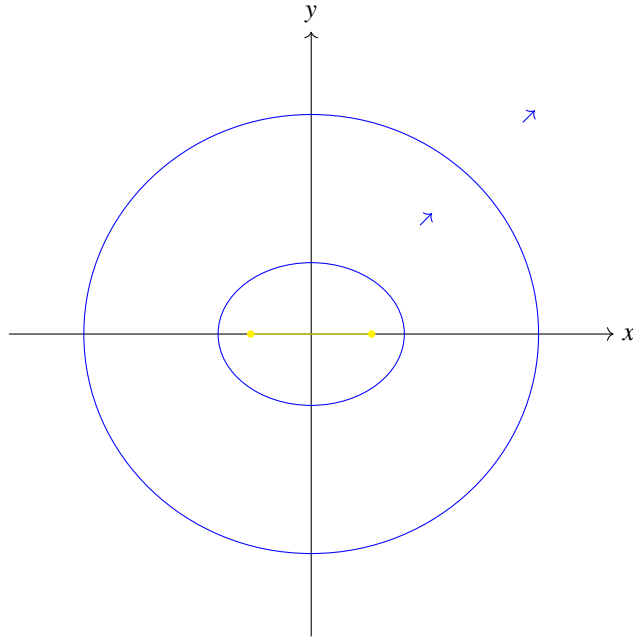


FIGURA 18. Transformación de rectas horizontales mediante el coseno complejo.

Entonces al tomar  $w_1 = \cosh(y) \cos(x_0)$  y  $w_2 = -\sinh(y) \sin(x_0)$ , tenemos los siguientes casos.

*Caso 1:* Si  $\cos(x_0) = 0$ , entonces  $w_1 = 0$  y  $w_2 = -\pm \sinh(y)$ .

*Caso 2:* Si  $\sin(x_0) = 0$ , entonces  $w_2 = 0$  y  $w_1 = \pm \cosh(y)$ .

*Caso 3:* Si no suceden los casos anteriores. En el caso restante se tiene que

$$\frac{w_1^2}{\cos(x_0)^2} - \frac{w_2^2}{\sin(x_0)^2} = 1$$

Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje real. Los vértices de la hipérbola están en los puntos  $(\pm \cos(x_0), 0)$  y dado que  $\sqrt{\cos(x_0)^2 + \sin(x_0)^2} = 1$ , entonces todas estas hipérbolas tienen focos en los puntos  $(\pm 1, 0)$ . Las asíntotas de estas hipérbolas son las rectas  $y = \pm \frac{\sin(y_0)}{\cos(y_0)}x = \pm \tan(y_0)x$ . Es importante decir que por conexidad cada recta debe ir a exactamente una rama de la hipérbola que describe la ecuación anterior. Además note que los casos 1 y 2 se pueden pensar como hipérbolas degeneradas. Además las familias resultantes están determinadas por franjas de tamaño  $2\pi$ . La forma en la que se obtiene cuál de las ramas corresponde a la recta inicial es mucho más complicada que en los casos anteriores y la forma de razonar es la siguiente: Note que  $w_1 = \cosh(y) \cos(x_0)$ . Dado que  $\cosh(y) > 0$ , entonces el signo de  $w_1$  depende de  $\cos(x_0)$ , así, si  $x_0 \in [0, 2\pi)$ , note que en la región  $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  la hipérbola correspondiente es la rama de la izquierda, en la región restante del intervalo considerado es la región derecha. La situación se esboza en la figura 19.

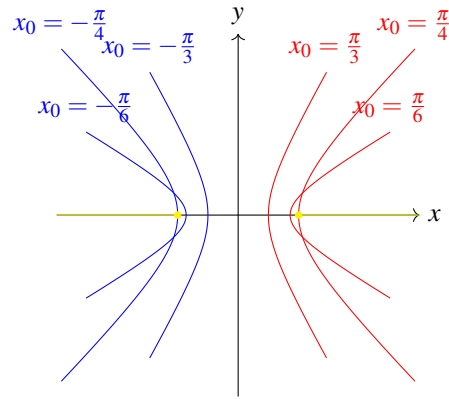


FIGURA 19. Transformación de rectas verticales mediante el coseno complejo.

Además note que a diferencia de su análogo real, coseno complejo (y por ende el seno) son NO acotados. Por otro lado, como  $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$  y la exponencial preserva ángulos, entonces no es difícil convencerse que el coseno (y el seno) también. Por otro lado, haciendo un argumento parecido al de la exponencial se puede ver que localmente estas funciones tienen una inversa. Sin embargo, estos detalles se tratarán con más rigor hasta el capítulo 2 donde tendremos herramientas más sofisticadas para tratar esto.

### 5. Definición y propiedades algebraicas del logaritmo complejo

Consideremos la siguiente situación para que  $t \in \mathbb{R}$

$$e^{it} = 1$$

Recordemos que esto es equivalente a  $\cos(t) + i\sin(t) = 1$ .

Así esto tiene solución cuando:

$$\begin{cases} \cos(t) = 1 \\ \sin(t) = 0 \end{cases}$$

Sabemos que esto pasa cuando  $t = 2\pi k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Esto nos sirve para ver que la función exponencial no es inyectiva.

Buscamos una función  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $e^{f(z)} = z$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ . Notamos que si entrar mucho en dominios y contradominios esta condición implica que  $e$  es suprayectiva y  $f$  es inyectiva ( $e$  tiene inversa derecha y  $f$  una inversa izquierda).

Antes analicemos un poco más la función exponencial. Para  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , tenemos que

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

Como  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x$  toma valores en  $(0, \infty)$ , y como  $y \in \mathbb{R}$ , entonces  $e^{iy}$  toma como valores todo el círculo unitario. Así  $\text{im}(e) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Regresando a lo observado anteriormente,  $e$  es suprayectiva y ésta  $t$  que buscamos tiene que ser inyectiva. Pero profundizando un poco más podemos observar que necesitamos que



e restringida a la *imf* sea inyectiva. De aquí es natural preguntarnos, ¿Qué condición debe cumplir  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  para que  $e^{z_1} = e^{z_2}$ ?, hagamos cuentas; si  $z_1 = x_1 + y_1 i$  y  $z_2 = x_2 + y_2 i$ .

$$e^{x_1} e^{y_1 i} = e^{x_1 + y_1 i} = e^{z_1} = e^{z_2} = e^{x_2 + y_2 i} = e^{x_2} e^{y_2 i}$$

De aquí tenemos que  $e^{x_1}$  y  $e^{x_2}$  corresponden a las normas de  $e^{z_1}$  y  $e^{z_2}$ , por lo que

$$e^{x_1} = |e^{z_1}| = |e^{z_2}| = e^{x_2}$$

Por lo tanto concluimos que  $x_1 = x_2$  (la exponencial real es una función inyectiva), y también que

$$e^{iy_1} = e^{iy_2}$$

Lo que implica que

$$\cos(y_1) + i\sin(y_1) = \cos(y_2) + i\sin(y_2)$$

Por lo que tenemos que

$$\begin{cases} \cos(y_1) = \cos(y_2) \\ \sin(y_1) = \sin(y_2) \end{cases}$$

Sabemos que esto pasa si y sólo si  $y_1 - y_2 = 2\pi k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

Definimos  $T_n = \{z \in \mathbb{C} | 2\pi n \leq \text{Im}(z) < 2\pi(n+1)\}$ .

Por ejemplo  $T_0 = \{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \text{Im}(z) < 2\pi\}$ .

**PROPOSICIÓN 21.** *La función  $e: T_k \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  es biyectiva.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , entonces  $z = re^{i\theta}$  con  $2\pi k \leq \theta < 2\pi(k+1)$ . Buscamos  $w \in T_k$  tal que  $e^w = z$ .

Si  $w = x + iy$ , tenemos que  $e^w = e^x e^{iy}$ . Sabemos que  $e^x = r$  tiene solución  $x = \ln(r)$  y que  $e^{iy} = e^{i\theta}$  también tiene solución con  $y = \theta$  pues la escogimos a modo para  $w \in T_k$ .

La demostración de que es inyectiva se sigue de como construimos  $T_k$ . □

Ahora bien, por ser biyectiva a esa función que es su inversa la llamamos **logaritmo** **ln**, notemos que hay un logaritmo para cada  $T_k$ .

**DEFINICIÓN 9.** *Fijamos  $T_k$  y definimos  $\ln: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow T_k$  como  $\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z)$  para toda  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*

**PROPOSICIÓN 22.** *Dada  $T_k$  fija. Entonces  $e^{\ln(z)} = z$*

**DEMOSTRACIÓN.**

$$\begin{aligned} e^{\ln(z)} &= e^{\ln|z| + i\arg(z)} \\ &= e^{\ln|z|} e^{i\arg(z)} \\ &= z \end{aligned}$$

□

Como convención tendremos que si no se menciona, supondremos que el contradominio de  $\ln$  es  $T_0$ .

PROPOSICIÓN 23. Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Entonces  $\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$ .

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \ln(z_1 z_2) &= \ln(|z_1 z_2|) + i \arg(z_1 z_2) \\ &= \ln(|z_1| |z_2|) + i(\arg(z_1) + \arg(z_2)) \\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i \arg(z_1) + i \arg(z_2) \\ &= \ln(z_1) + \ln(z_2) \end{aligned}$$

□

Vamos a examinar  $T_k$  un poco mas a fondo, realmente como lo que buscamos es un intervalo de longitud  $2\pi$ . Por lo que podríamos definir  $T[x] = \{z \in \mathbb{C} \mid x \leq \Im(z) < x + 2\pi\}$ .

Podemos definir  $\ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow T[x]$  de igual manera  $\ln(z) := \ln(z) + i \arg(z)$ . En este caso estamos considerando que  $x \leq \arg(z) < x + 2\pi$ .

Observemos que  $T_k = T[2\pi k]$ .

Por otro lado,  $\arg(z)$  solo toma una cantidad numerable de valores aunque existan tantos  $T[x]$  como reales.

EJEMPLO 12.  $z = 1 + i$ ,  $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$  para  $T[x]$  con  $-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{4}$ .

A los conjuntos  $T[x]$  los llamaremos **ramas del logaritmo**.

Una vez resuelto el problema del logaritmo complejo podemos plantear la siguiente pregunta, ¿Cómo definir  $z^w$  con  $z, w \in \mathbb{C}$ ?

Empezamos con  $z \in \mathbb{C}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , y calculando tenemos

$$z^n = \left(e^{\ln(z)}\right)^n = e^{n \ln(z)}$$

Por lo cual definimos de manera intuitiva

$$z^w := e^{w \ln(z)}$$

EJEMPLO 13. *Calculemos*

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i \ln(i)} \\ &= e^{i(\ln|i| + i \arg(i))} \\ &= e^{i(\ln(1) + i(\frac{\pi}{2}))} \\ &= e^{i(0 + \frac{i\pi}{2})} \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Recalcamos que aquí estamos considerando que  $\ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow T_0$ . Podemos calcular esto mismo con  $T_k$  en vez de  $T_0$ , de donde tendríamos  $i^k = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = e^{-\left(5\pi \frac{k}{2}\right)}$ .

Si fijamos  $w \in \mathbb{C}$ , tenemos la función

$$f(z) = z^w$$

Para que esta sea función debemos fijar una rama del logaritmo apriori.

Por otro lado, si fijamos  $z \in \mathbb{C}$ , tenemos la función

$$g(w) = z^w$$

**PROPOSICIÓN 24.** *La función  $g$  no depende de una rama del logaritmo si y solo si  $w \in \mathbb{Z}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.**  $\Leftarrow$ ) Pongamos  $w = n \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $z^w = z^n$  que coincide con su definición algebraica. Comprobemoslo

$$\begin{aligned} z^n &= e^{n \ln(z)} = e^{n(\ln|z| + i \arg(z))} \\ &= e^{n \ln|z|} e^{ni \arg(z)} \\ &= |z|^n e^{i \arg(z)} \\ &= z^n \end{aligned}$$

La primer parte por definición de exponencial compleja y la segunda por su expresión polar.

$\Rightarrow$  Si  $w = x + iy$ , entonces

$$\begin{aligned} z^w &= e^{w \ln(z)} \\ &= e^{(x+iy)(\ln|z| + i \arg(z))} \\ &= e^{x \ln|z| - y \arg(z) + i(y \ln|z| + x \arg(z))} \\ &= e^{x \ln|z| - y \arg(z)} e^{i(y \ln|z| + x \arg(z))} \end{aligned}$$

Notemos que si  $y \neq 0$ , entonces el valor de  $z^w$  depende del argumento de  $z$ , puesto que

$$|z^w| = e^{x \ln|z| - y \arg(z)}$$

Así  $y = 0$ , por lo que

$$z^w = e^{x \ln|z|} e^{i \arg(z)}$$

Notemos que esto depende ahora del  $\arg(z)$ . Queremos que para dos  $\arg(z)$ , suceda que  $e^{ix \arg(z)}$  tenga el mismo valor, digamos que los argumentos son  $\theta_1, \theta_2$  con  $\theta_1 - \theta_2 = 2\pi k$ .

Tenemos que  $e^{ix\theta_1} = e^{ix\theta_2}$ , de donde  $1 = e^{ix(\theta_1 - \theta_2)} e^{ix2\pi k}$ . De aquí necesitamos  $xk \in \mathbb{Z}$  con  $k$  cualquier entero. Por lo tanto  $x \in \mathbb{Z}$   $\square$

**PROPOSICIÓN 25.** Sea  $z \in \mathbb{C}$  y  $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$  con  $(n, m) = 1$ . Si  $z \neq 0$ , entonces hay  $m$  distintos valores para  $z^{\frac{n}{m}}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Se puede reducir a analizar cuantos valores toma  $e^{\frac{n}{m}(2\pi k)}$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . La cuestión es que si  $e^{\frac{n}{m}(2\pi ki)} = e^{\frac{n}{m}(2\pi k'i)}$  con  $k, k' \in \mathbb{Z}$ , entonces  $e^{\frac{n}{m}(2\pi i)(k-k')} = 1$ . Esto significa que  $\frac{n}{m}(k-k') \in \mathbb{Z}$ , pasa si y sólo si  $m|n(k-k')$ , que es equivalente a decir que  $m|(k-k')$  (porque  $(m, n) = 1$ ). Así tenemos que  $k \equiv k' \pmod{m}$ , lo que nos dice que tenemos tantas soluciones como  $\mathbb{Z}_m$ . Por último, usando el resultado anterior concluimos el resultado deseado.  $\square$

**PROPOSICIÓN 26.** Para  $z \in \mathbb{C}$  con  $z \neq 0$  y  $w \in \mathbb{C}$  con  $w \notin \mathbb{Q}$ , entonces  $z^w$  toma una infinidad de valores.

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Sean  $n, m \in \mathbb{Z}$  tales que  $e^{w2\pi in} = e^{w2\pi im}$ . De aquí  $e^{w2\pi i(n-m)} = 1$ . Por lo que  $w(n-m) \in \mathbb{Z}$ , pero esto solo pasa si  $n-m=0$ . Así tiene que suceder  $n=m$ . Por lo que se tiene un valor diferente para cada entero.

En el caso constante, si  $w = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , entonces

$$e^{w2\pi ni} = e^{(x+iy)2\pi ni} = e^{-2\pi ny} e^{2\pi ix}$$

Si consideramos  $n, m \in \mathbb{Z}$  tales que  $e^{w2\pi in} = e^{w2\pi im}$  y calculando las normas tenemos que  $e^{-2\pi ny} = e^{-2\pi my}$ .

Por lo que concluimos  $n=m$ . De nuevo tenemos una infinidad de valores.  $\square$

Por último es de esperarse la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 27.** Fijamos una rama de logaritmo. Para  $z, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$  con  $z \neq 0$ ,  $z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Haciendo las cuentas tenemos que:

$$\begin{aligned} z^{w_1+w_2} &= e^{(w_1+w_2)\ln(z)} \\ &= e^{w_1\ln(z)+w_2\ln(z)} \\ &= e^{w_1\ln(z)} e^{w_2\ln(z)} \\ &= z^{w_1} z^{w_2} \end{aligned}$$

$\square$

## 6. Geometría subyacente del logaritmo complejo

Dado que el logaritmo complejo es la inversa en el sentido que se explicó en la sección anterior de la exponencial (compleja), la geometría del logaritmo es la inversa a la de la exponencial, así que recomendamos al lector checar la subsección 4.4 si no se tiene tan presente lo que se estudió en esta. Por mera completez, y dado que en un principio puede parecer que esta afirmación es cierta teniendo mucho cuidado con la definición del logaritmo, vamos a argumentar un poco esto. Primero notemos que si tomamos una circunferencia centrada en el origen de radio  $r > 0$ , esta se puede parametrizar usando coordenadas polares mediante el siguiente conjunto

$$\mathcal{C}_{0;r} = \{re^{i\theta} \mid \theta \in [-\pi, \pi)\}$$

Notemos que dado  $re^{i\theta} \in \mathcal{C}_{0;r}$ , tenemos que  $\ln(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta$ . Note que para todos los puntos del círculo,  $\ln(r)$  es constante, lo que varía es  $\theta \in [-\pi, \pi)$ , lo que nos dice que

$$\ln(\mathcal{C}_{0;r}) = \{\ln(r) + i\theta \mid \theta \in [-\pi, \pi)\},$$

es decir, el logaritmo manda al círculo de radio  $r$  centrado en el origen, en un segmento de recta semiabierto paralelo al eje imaginario y de longitud  $2\pi$ . De hecho, en general tomando cualquier parametrización del círculo centrado en el origen y de radio  $r > 0$  usando cualquier rama del argumento, se tiene la conclusión análoga.

Por otro lado, respecto a rayos que pasan por el origen (excluyendo este punto), tenemos que estos están descritos usando coordenadas polares por el conjunto

$$\mathcal{R}_\theta = \{re^{i\theta} \mid r > 0\},$$

donde  $\theta \in [-\pi, \pi)$  es el ángulo que forma el rayo con el eje real positivo. Por lo que dado,  $re^{i\theta} \in \mathcal{R}_\theta$ , se tiene que  $\ln(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta$ , donde ahora  $\theta \in [-\pi, \pi)$  es fijo, y lo que es variable es  $\ln(r)$ . Además, como la función real  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es biyectiva, de esto se deduce

$$\ln(\mathcal{R}_\theta) = \mathcal{L}_{y=i\theta}$$

Con esto hemos recuperado las propiedades analizadas para la exponencial compleja respecto a la transformación de rectas paralelas al eje real y al eje imaginario.

Para concluir esta sección, vamos a platicar de una construcción asociada a funciones multivaluadas que nos permite visualizar a estas como funciones y que resuelven la ambigüedad de asociar a un punto en el dominio distintos puntos en la imagen. Este problema proviene de que para definir el logaritmo complejo, se usó el argumento, que es una relación (función multivaluada). Para ver esto de forma concreta, consideramos el complejo  $1 + i$ , para el cual vamos a considerar como ramas del argumento a  $[-\pi, \pi)$ ,  $[\pi, 3\pi)$  y  $[-3\pi, -\pi)$ . Lo que queremos determinar el logaritmo en cada una de esas ramas. Notemos que si consideramos el complejo  $1 + i$ , a este le podemos asociar en cada rama los argumentos, y respectivamente. Entonces el logaritmo de este complejo está dado de la siguiente forma:

En la rama  $[-\pi, \pi)$ . Notemos que en este caso el argumento del complejo en cuestión es  $\frac{\pi}{4}$ . Por lo tanto,

$$\ln(1 + i) = \ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi i}{4} = \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi i}{4}$$

En la rama  $[\pi, 3\pi)$ . En este caso el argumento es  $\frac{9\pi}{4}$ , luego,

$$\ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + \frac{9\pi i}{4} = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{9\pi i}{4}$$

En la rama  $[-3\pi, -\pi)$ . Comenzamos por observar que al argumento es  $-\frac{7\pi}{4}$ . Entonces,

$$\ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}) - \frac{7\pi i}{4} = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{7\pi i}{4}$$

De estos ejemplos se observa que la diferencia en los valores del logaritmo se da en la parte imaginaria, lo cual nos sugiere aumentar en uno más la dimensión para expresar este hecho a la hora de graficar el logaritmo y poder hacer la distinción por ramas. Es decir, vamos a realizar una gráfica en  $\mathbb{R}^3$  donde el eje  $x$  y el eje  $y$  serán los ejes reales e imaginarios del dominio del logaritmo, mientras que en el eje  $z$  graficamos la parte imaginaria del logaritmo del punto en el plano  $xy$  en cuestión. Ahora, para ver como se graficaría esta función, consideremos el plano complejo sin el origen, el cual recordemos que denotamos por  $\mathbb{C}^*$ . Dado que anteriormente discutimos que la exponencial manda a cualquier franja paralela al eje real que es semiabierto y de ancho  $2\pi$  en  $\mathbb{C}^*$ , entonces para cada una de estas franjas hay que considerar una copia de  $\mathbb{C}^*$ . Además, recuerde que el plano complejo se puede dividir en una cantidad infinita numerable de estas franjas, así que para fijar las cosas una de ellas está determinada por el conjunto

$$\mathcal{F}_{[-\pi, \pi)} = \{x + i\theta \mid x \in \mathbb{R}, \theta \in [-\pi, \pi)\}$$

y las restantes se obtienen por traslación en el eje imaginario por el factor  $2\pi k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Notemos que la región problemática en este tipo de regiones ocurre sobre el eje real negativo, pues ahí hay un “salto del argumento”<sup>8</sup>. Vamos a analizar esta situación de forma más precisa y consideremos dos ramas del logaritmo, para fijar ideas, la correspondiente a  $[-\pi, \pi)$  y  $[\pi, 3\pi)$ . En ambas consideramos una pequeña vecindad sobre el eje real negativo que es donde tenemos el problema del “salto”. Esto se muestra en las figuras 20 y 21.

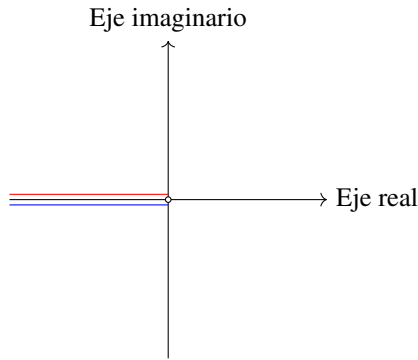


FIGURA 20. Vecindad sobre el eje real negativo para la rama de argumento  $[-\pi, \pi)$

<sup>8</sup>Formalmente este salto es una discontinuidad como el lector podrá imaginarse

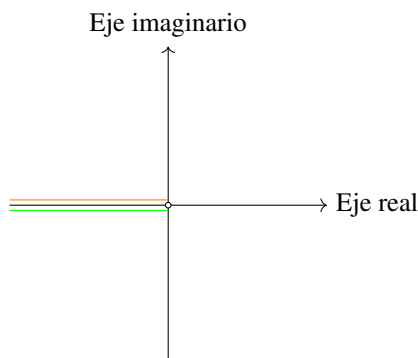


FIGURA 21. Vecindad sobre el eje real negativo para la rama de argumento  $[\pi, 3\pi)$

Consideremos la figura 20 y pensemos en que trazamos una circunferencia de radio 1 a partir del eje real positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Note que al llegar a la vecindad tomada en el eje real negativo que está dada por la línea roja, si continuamos trazando esta circunferencia, intuitivamente esta debe tomar un argumento mayor a  $\pi$ , por lo que esta debería saltar a la figura 21 a partir de la línea verde por el punto  $(-1, 0)$  y continuaría su recorrido hasta llegar a la línea naranja, luego, debería esta saltar a la siguiente rama  $[3\pi, 5\pi)$  y repetir el proceso, lo cual nos dice que si queremos trazar dicha circunferencia de forma continua, entonces debemos “pegar” los planos complejos a partir de las vecindades mencionadas, en nuestro ejemplo la línea roja con la verde. Si queremos completar el análisis, respecto a la rama del argumento  $[-3\pi, -\pi)$  un análisis similar nos diría que tenemos que “pegar” la línea azul del a figura 20 con la línea que se encuentra por arriba del eje real imaginario en el plano correspondiente al plano que representa al argumento  $[-3\pi, -\pi)$ . Además, para cualesquiera tres franjas consecutivas, se tiene este comportamiento, por lo tanto de este análisis no es difícil imaginarse que se tiene una figura como la que se muestra en 22.

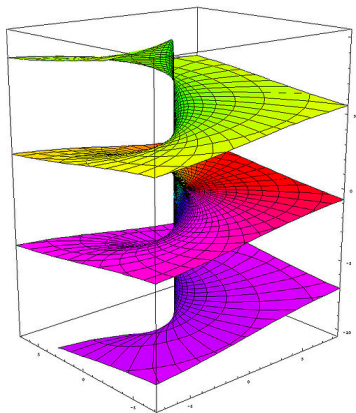


FIGURA 22. Superficie de Riemann asociada al logaritmo complejo

Esta construcción es un ejemplo de una **superficie de Riemann**, las cuales que fueron introducidas por Bertrand Riemann en su tesis doctoral bajo la dirección de Gauss, para resolver el problema de las discontinuidades de funciones multivaluadas. En esta imagen cada plano complejo es representado por un color. Además a cada uno de estos planos se conoce como una rama por obvias razones. Además note que la superficie se extiende tanto para la parte infinita del eje “ $z$ ” como para la parte negativa, lo que da lugar a que nuestra superficie tiene infinitas hojas, por lo que en particular no es compacta. También note que esta se proyecta al plano complejo representado por el plano  $xy$ , que corresponde a la versión que uno tiene en mente de como definir el logaritmo complejo desde el plano  $\mathbb{C}^*$ . Con esto en mente, note que cualquier recta paralela al eje “ $z$ ” intersecta a la superficie en infinitos puntos, lo que corresponden a los valores que puede tomar  $\ln(z)$  dependiendo de la rama del argumento en cuestión, donde recordemos que  $F$  es el punto que debe intersectar dicha recta al plano  $xy$ . Es importante notar que en esta figura la parte central se ve como un doblez pues recordemos que estos planos representan a  $\mathbb{C}^*$ .

Mediante esta figura es que uno puede visualizar al logaritmo como una función continua de acuerdo al argumento del círculo descrito anteriormente y la idea intuitiva que tenemos de continuidad. Más aún, note que la idea de poner colores sobre la figura no es solamente para que esta tenga un mejor aspecto, sino que esto nos permite saber sobre que copia del plano complejo se está trabajando un argumento en cuestión y además, mediante la cuadrícula que en esta se dibuja se tiene información de la parte real de  $\ln(z)$ , por lo que usando el color, ¡ hemos logrado visualizar una gráfica que en  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  que tiene dimensión 4, en tres dimensiones! Además, note que sobre esta figura se pueden visualizar otras ramas aunque estas no estén iluminadas como en la figura, pues lo único que hay que hacer es pensar en cómo dibujar una círculo sobre esta usando la parametrización del círculo en la rama en cuestión, lo cual es sencillo pues la rama debe iniciar y terminar en puntos que se proyecten en el plano complejo al mismo y que se encuentren uno sobre otro inmediatamente.

Por desgracia en estos momentos no podemos dar una definición explícita de lo que es una superficie de Riemann pues necesitamos introducir la idea de función holomorfa que estudiaremos en el siguiente capítulo, de hecho, siendo sinceros, esto no lo haremos en el texto. Sin embargo, no podíamos pasar por alto introducir mediante un ejemplo este tipo de ideas que forman parte de la naturaleza verdaderamente profunda en sentido geométrico de las funciones multivaluadas. Para concluir, si algún lector perspicaz se pregunta por qué es lo que sucede si en lugar de querer graficar en el eje “ $z$ ” la parte imaginaria, se quiere graficar la parte real, la respuesta es mucho más sencilla pues la parte real de  $\ln(z)$ , que se ve como  $\log(\sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2})$ , tiene simetría circular respecto al origen. Esto se muestra en la figura 23.

Los colores en este caso están asociados a los posibles argumentos asociados a cada punto, los cuales aparecen uno sobre otro conservando la proporción de los círculos obtenidos por cortes mediante planos paralelos al eje  $xy$ . Note que en este caso nuevamente tenemos una gráfica de un objeto en 4 dimensiones graficada en 3. Esto concluye nuestro breve estudio de las funciones de variable complejas elementales y sus propiedades geométricas, lo cual nos dejó muchas ideas que formalizaremos en los capítulos posteriores.



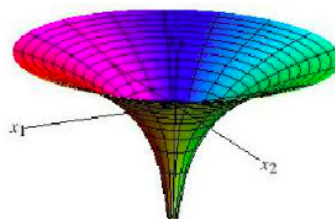


FIGURA 23. Superficie de Riemann asociada al logaritmo complejo graficando la parte real

## 7. Ejercicios del capítulo

Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ .

EJERCICIO 1. *Expresa en la forma  $x + iy$  a  $\overline{\left(\frac{(2+3i)^2}{4+i}\right)}$ .*

EJERCICIO 2. *Escribe en la forma polar los siguientes complejos:*

1.  $2i$
2.  $1 + i$
3.  $-3 + \sqrt{3}i$

EJERCICIO 3. *Calcula las raíces cuadradas de los complejos*

1.  $3 + 4i$
2.  $1 + 2i$

EJERCICIO 4. *Encuentra las soluciones de la ecuación  $z^2 + 2z + (1 - i) = 0$ .*

EJERCICIO 5. *Calcula las raíces sextas de  $-64$  y las raíces cúbicas de  $8i$ .*

EJERCICIO 6. *Encuentra todos los valores de la expresión  $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ , donde  $n \in \mathbb{Z}$ .*

EJERCICIO 7. *Interpretar geoméricamente las igualdades del inciso 2 en la proposición 6.*

Demuestra las siguientes afirmaciones:

EJERCICIO 8. *Si  $z \in \mathbb{C}$  es una raíz  $n$ -ésima de 1 con  $z \neq 1$ , entonces  $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$ .*

EJERCICIO 9.

1.  $z \in \mathbb{R}$  ó  $z$  es un imaginario puro si y sólo si  $z^2 = \overline{(z)}^2$ .
2.  $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$ .
3. Si  $w \neq 0$  entonces  $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ .

EJERCICIO 10.

1. Si  $p$  es un polinomio con coeficientes reales, entonces para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ .
2. Si  $\alpha \in \mathbb{C}$  es raíz de un polinomio real, entonces  $\bar{\alpha}$  es raíz del mismo polinomio.

EJERCICIO 11. *Si  $z = x + iy$  entonces  $|x| + |y| \leq \sqrt{2} |z|$ .*

EJERCICIO 12. *Si  $z \neq 0$ , entonces  $z^{-1} = \bar{z}$  si y sólo si  $|z| = 1$ .*

EJERCICIO 13.  $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$ .

EJERCICIO 14.  $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$ .

EJERCICIO 15.  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ .

EJERCICIO 16. *Si  $|z| = 1$ , entonces  $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{(z+1)^2}\right) = 0$ .*

EJERCICIO 17. Si  $|z| = 1$  o  $|w| = 1$  y  $\bar{z}w \neq 1$ , entonces

$$\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1$$

EJERCICIO 18. Si  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  son distintos entre sí y tales que  $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ , entonces estos tres puntos determinan un triángulo equilátero en el plano complejo.

EJERCICIO 19. Sean  $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C}$  puntos en un cuádrilátero que aparecen en orden cíclico y positivo. Entonces,  $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C}$  son concíclicos si y sólo si  $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2} \frac{z_3-z_4}{z_1-z_4} < 0$ .

EJERCICIO 20. Si  $n \geq 2$  y  $a \in \mathbb{R}^*$ , entonces las raíces de  $x^n - a$  son los vértices de un polígono regular.

EJERCICIO 21. ¿Para qué valores de  $a, b, c \in \mathbb{C}$  se cumple que  $az + b\bar{z} + c = 0$  es una línea recta?

EJERCICIO 22. Sean  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Encuentra las condiciones bajo las cuales la ecuación  $az + b\bar{z} + c = 0$  tiene una solución.

EJERCICIO 23. Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ . Demuestra que:

1. La función  $f(z) = \alpha z + \beta$  manda circunferencias complejas en circunferencias complejas<sup>9</sup>.
2. La función  $g(z) = \frac{1}{z}$  manda circunferencias complejas en circunferencias complejas.

EJERCICIO 24. Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , se define una función  $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  cuya regla de correspondencia es:

---

<sup>9</sup>Recuerda que el conjunto de circunferencias en  $\mathbb{C}$  incluye las circunferencias y líneas en  $\mathbb{R}^2$ .

$$T_{a,b,c,d}(z) = \begin{cases} \infty, & \text{Si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & \text{Si } z = \infty \\ \frac{az+b}{cz+d} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra lo siguiente:

1.  $T_{a,b,c,d}$  es constante si y sólo si  $ad - bc = 0$ .
2.  $T_{a,b,c,d}$  es biyectiva si y sólo si  $ad - bc \neq 0$ .

EJERCICIO 25. Demuestre que para la transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , se tiene que su inversa está dada por

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

EJERCICIO 26. Demuestre que la composición de transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius.

EJERCICIO 27. Para todo par de conjuntos de puntos  $\{z_1, z_2, z_3\} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$  y  $\{w_1, w_2, w_3\} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$  con todos sus elementos distintos, existe una única transformación de Möbius tal que para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $T(z_i) = w_i$ .

EJERCICIO 28. Usando la misma notación del ejercicio anterior y si  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , demuestra que si  $w = T(z)$ , entonces:

$$w - \bar{w} = (ad - bc) \frac{z - \bar{z}}{|cz + d|^2}$$

Demuestra también que  $\text{Im}(z)$  y  $\text{Im}(w)$  tienen el mismo signo si y sólo si  $ad - bc > 0$ .

EJERCICIO 29. Demuestre que la proyección estereográfica manda círculos en círculos ó rectas y viceversa.

EJERCICIO 30. Considere la función tomar inverso  $(\square)^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Demuestre que al considerar esta función como una función de  $S^2 \rightarrow S^2$  vía la proyección estereográfica, esta es una rotación por  $\frac{\pi}{2}$  en el eje  $x$ .

EJERCICIO 31. Se define una transformación de Möbius  $T_C : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  mediante la regla de correspondencia  $T_C(z) = \frac{z-i}{z+i}$ , para todo  $z \in \mathbb{C}^*$ .

1. ¿Es  $T_C$  una función biyectiva?
2. Demuestra que  $T_C(\mathbb{H}) = (\mathbb{B}^2)^\circ$ , donde  $(\mathbb{B}^2)^\circ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  y  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ .

DEFINICIÓN 10. Sean  $X, Y$  conjuntos tales que  $Y \subseteq X$ . Si  $f : Y \rightarrow X$  es una función decimos que  $y \in Y$  es un punto fijo de  $f$  si  $f(y) = y$ . El conjunto de puntos fijos de  $f$  se denota por  $\text{Fix}(f)$ .

EJERCICIO 32. Sea  $T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  una transformación de Möbius.

1. Demuestra que  $|\text{Fix}(T)| \leq 2$ .
2. Da un ejemplo de una función tal que  $|\text{Fix}(T)| = 2$ .
3. Da un ejemplo de una función tal que  $|\text{Fix}(T)| = 1$ .
4. ¿Existe un ejemplo de una función tal que  $|\text{Fix}(T)| = 0$ ?

Se definen los conjuntos

$$\mathbb{C}_1^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0\}$$

$$\mathbb{C}_2^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 0\}$$

$$\mathbb{C}_3^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > \text{Im}(z)\}$$

EJERCICIO 33. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas ó falsas dando una demostración o contraejemplo según sea el caso.

1. Si  $z, w \in \mathbb{C}_1^+$  entonces  $z + w \in \mathbb{C}_1^+$ .
2. Si  $z, w \in \mathbb{C}_1^+$  entonces  $zw \in \mathbb{C}_1^+$ .

3. Para todo  $z \in \mathbb{C}$  se satisface una y sólo una de las siguientes afirmaciones:  $z \in \mathbb{C}_1^+$ ,  $z = 0$  ó  $-z \in \mathbb{C}_1^+$ .

Repita estas preguntas para  $\mathbb{C}_2^+$  y  $\mathbb{C}_3^+$ .

DEFINICIÓN 11. Sea  $K$  un campo, decimos que un orden total  $\leq$  sobre  $K$  respeta las operaciones (de  $K$ ) si:

1. Para todo  $a, b, c \in K$  tal que  $a \leq b$ ,  $a + c \leq b + c$ .
2. Para todo  $a, b \in K$  tal que  $0 \leq a$  y  $0 \leq b$ ,  $0 \leq ab$ .

EJERCICIO 34. Demuestra que no existe orden total en  $\mathbb{C}$  que respete las operaciones de dicho campo.

EJERCICIO 35. Resuelve la ecuación  $\cos(z) = \frac{1}{2}$ .

EJERCICIO 36. Demuestra que para toda  $n \in \mathbb{N}^+$ :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

EJERCICIO 37. Demuestra usando el teorema de De'Moivre que:

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

EJERCICIO 38. Demuestra que todo polinomio real se puede factorizar como producto de polinomios reales con grado a lo más dos.

EJERCICIO 39. Sea  $f \in \mathbb{C}[x]$  tal que  $f = u(x - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - a_n)^{k_n}$  donde  $u \in \mathbb{C}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  con  $a_i \neq a_j$  si  $i \neq j$ , y  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^+$ . Demuestra lo siguiente:

1. Si  $m(a_i)$  denota la multiplicidad de  $a_i$  en  $f$  entonces para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $m(a_i) = k_i$ .
2.  $\partial(f) = \sum_{i=1}^n m(a_i)$ .

EJERCICIO 40. Si  $f \in \mathbb{C}[x]$  y este tiene la forma  $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ , se define una función  $_* : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$  mediante  $f^* = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} x^k$ . Demuestra lo siguiente:

1. Si  $g := ff^*$ , entonces  $g \in \mathbb{R}[x]$ .
2. Si  $a \in \mathbb{C}$  es raíz de  $g$ , entonces  $a$  es raíz de  $f$  o  $\bar{a}$  es raíz de  $f$ .

EJERCICIO 41. Sean  $\{a_0, \dots, a_n\}, \{b_0, \dots, b_n\} \subseteq \mathbb{C}$ . Demuestra que existe  $f \in \mathbb{C}[x]$  tal que  $f(a_k) = b_k$ , para todo  $k = 0, \dots, n$ .

DEFINICIÓN 12. Si  $f \in \mathbb{C}[x]$  se define  $V(f) = \{a \in \mathbb{C} \mid f(a) = 0\}$ .

EJERCICIO 42. Demuestra las siguientes propiedades:

1.  $V(0) = \mathbb{C}$ .
2.  $V(f) = \emptyset$  si y sólo si  $\partial(f) = 0$ .
3.  $V(fg) = V(f) \cup V(g)$ .
4. Si  $\partial(f) \in \mathbb{N}$  entonces  $|V(f)| \leq \partial(f)$ .

DEFINICIÓN 13. Para  $c \in \mathbb{R}^+$ , se define una función  $\| \cdot \|_c : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  mediante la regla de correspondencia:

$$\|f\|_c = \max_{k \in \mathbb{N}} \{|f(k)|c^k\}$$

EJERCICIO 43. Demuestra las siguientes propiedades:

1. La función  $\| \cdot \|_c$  está bien definida, es decir, para todo  $f \in \mathbb{R}[x]$  se tiene que  $\|f\|_c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .
2.  $\|f\|_c = 0$  si y sólo si  $f = 0$ .
3. Para todo  $f, g \in \mathbb{C}[x]$ ,  $\|f + g\|_c \leq \|f\|_c + \|g\|_c$ .
4. Para todo  $f, g \in \mathbb{C}[x]$ ,  $\|fg\|_c = \|f\|_c \|g\|_c$ .

EJERCICIO 44. Sea  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una transformación  $\mathbb{R}$ -lineal. Entonces  $T$  es  $\mathbb{C}$ -lineal si y sólo si

$$T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$$

para  $z \in \mathbb{C}$  donde  $\lambda = \frac{T(1)-iT(i)}{2}$  y  $\mu = \frac{T(1)+iT(i)}{2}$ .

EJERCICIO 45. Demuestre que la función  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que tiene por regla de correspondencia  $f(z) = -z^2$ , es una biyección entre  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$ .

EJERCICIO 46. Demuestre que la función  $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$  definida por  $f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$  está bien definida y es una biyección.

EJERCICIO 47. Considere la función  $f_3: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f_3(z) = z^3$ . Encuentre las ecuaciones en las que se transforman las rectas paralelas al eje real e imaginario.

EJERCICIO 48.

1. La ecuación de una recta  $ax + by + c = 0$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , se puede escribir de la forma

$$2\operatorname{Re}(wz) + \mu = 0,$$

donde  $w \in \mathbb{C}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $z = x + iy$ .

2. La ecuación

$$\lambda |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{w}z) + \mu = 0$$

con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y  $w \in \mathbb{C}$ , representa una circunferencia o una recta. ¿Cuál es el radio y el centro de la circunferencia en el primer caso? ¿Dónde intersecta la recta al eje real e imaginario en el segundo caso y cuál es la pendiente de esta?

DEFINICIÓN 14. Dada una circunferencia con radio  $r$  y centrada en el origen  $O$ , dos puntos  $P$  y  $P'$  guardan una relación de inversión respecto a dicha circunferencia si:

1.  $P$  y  $P'$  pasan por la misma semirecta que pasa por el origen
2.  $d(0, P)d(O, P') = 1$



EJERCICIO 49. Dado  $z \in \mathbb{C}^*$ , encuentre la inversión de este punto respecto a la circunferencia unitaria en el plano complejo. Este ejercicio es la razón por la cual la función  $\frac{1}{z}$  se conoce como la inversión unitaria.

EJERCICIO 50. Demuestre que bajo la proyección estereográfica, rectas y círculos en  $\mathbb{C}$  corresponden a círculos en  $S^2$ , y que en el primer caso dicho círculo pasa por el polo norte.

EJERCICIO 51. Demuestre que la función  $(\square)^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  manda círculos de radio  $r > 0$  centrados en el origen en círculos de radio  $\frac{1}{r}$  de forma que el interior del primer círculo va al exterior del segundo y el exterior del primero va al interior del segundo.

EJERCICIO 52. Demuestre que si se aplica la exponencial compleja a una recta que pasa por el origen, el resultado es una espiral logarítmica.<sup>10</sup>

EJERCICIO 53. Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Demuestre lo siguiente:

1.  $e^{z+w} = e^z e^w$
2.  $e^z \neq 0$
3.  $e^z = 1$  si y sólo si  $z = 2\pi i k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$

EJERCICIO 54. Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Demuestre las siguientes afirmaciones:

1.  $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$  y  $\cos(-z) = \cos(z)$
2.  $\operatorname{sen}(z) = \cos(z - \frac{\pi}{2})$
3.  $\cos(z) = 0$  si y sólo si existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $z = \pi(k + \frac{1}{2})$ . Encuentre los ceros de la función  $\operatorname{sen} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

---

<sup>10</sup>Recordemos que una espiral logarítmica tiene por ecuaciones paramétricas

$$x(t) = ae^{bt} \cos(t)$$

$$y(t) = ae^{bt} \operatorname{sen}(t)$$

EJERCICIO 55. Demuestre que  $\ln(z^w) = w \ln(z)$  si y sólo si  $\operatorname{Im}(w \ln(z)) \in [-\pi, \pi)$ .

EJERCICIO 56. Demuestre que si  $w \in \mathbb{R}$ , entonces  $|z^w| = |z|^w$ . ¿Qué sucede si  $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ?

EJERCICIO 57. Demuestre que si  $z \neq 0$ , entonces el complejo no cero  $e^{\frac{\ln z}{n}}$  toma  $n$  valores y estos están dados por los de la proposición 11.

EJERCICIO 58. Demuestre que para cualquier  $z \in \{w \in \mathbb{C} : w \neq yi, y \in \mathbb{R}, 1 \leq |y|\} \cap \{w \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < w < \frac{\pi}{2}\}$ ,

$$z = \tan \left( \frac{1}{i} \ln \left( \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}} \right) \right)$$

## Diferenciabilidad compleja: Funciones holomorfas

“La esencia de las matemáticas yace en su libertad”

**Georg Cantor.**

En este capítulo introduciremos el concepto de diferenciabilidad para funciones de variable compleja. Para esto, y con la idea de fijar notación, mencionaremos algunos preliminares donde recordaremos algunas propiedades topológicas que usaremos a lo largo del curso, así como un repaso de la noción de continuidad. El capítulo termina con un estudio de lo que significa que una función sea conforme.

### 1. Topología Compleja

DEFINICIÓN 15. Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$ . Definimos la bola compleja de radio  $r$  y centro  $z_0$ ,  $B_r(z_0)$ , como

$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z_0 - z| < r\}$$

DEFINICIÓN 16. Decimos que  $A \subseteq \mathbb{C}$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$ , si para todo  $z \in A$  existe  $r > 0$  tal que  $B_r(z) \subseteq A$ .

DEFINICIÓN 17. Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $A \subseteq \mathbb{C}$  con  $z_0 \in A$ . Decimos que  $A$  es una vecindad de  $z_0$  si existe  $r > 0$  tal que  $B_r(z_0) \subseteq A$ .

PROPOSICIÓN 28. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Entonces  $A$  es abierto si y sólo si  $A$  es vecindad de todos sus puntos.

PROPOSICIÓN 29. Sea  $A, B \subseteq \mathbb{C}$ . Si  $A$  y  $B$  son abiertos, entonces  $A \cap B$  es abierto.

PROPOSICIÓN 30. Sea  $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{C}$  una familia de abiertos. Entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i$  es abierto, donde  $I$  es una familia de índices. En particular  $\emptyset$  y  $\mathbb{C}$  son subconjuntos abiertos.

DEFINICIÓN 18. Sea  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$  una sucesión de números complejos. Decimos que la sucesión converge a  $z \in \mathbb{C}$ , si para toda  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n > N$

sucede que  $|z_n - z| < \varepsilon$ . En este caso escribiremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

A  $z$  lo llamaremos el límite de la sucesión.

PROPOSICIÓN 31. Sea  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$  una sucesión. Si la sucesión converge, entonces el límite es único.

DEFINICIÓN 19. Sea  $C \subseteq \mathbb{C}$ . Decimos que  $C$  es cerrado si dada cualquier sucesión  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq C$ , si la sucesión converge a  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $z \in C$ .

PROPOSICIÓN 32. Sean  $C, D \in \mathbb{C}$  cerrados. Entonces  $C \cup D$  también es un cerrado.

PROPOSICIÓN 33. Sea  $\{C_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{C}$  una familia de cerrados. Entonces  $\bigcap_{i \in I} C_i$  es cerrado. En particular  $\mathbb{C}$  y  $\emptyset$  son cerrados.

PROPOSICIÓN 34. Sea  $C \subseteq \mathbb{C}$ . Entonces  $C$  es cerrado si y sólo si  $\mathbb{C} \setminus C$  es abierto.

DEFINICIÓN 20. Sea  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Decimos que  $D$  es **inconexo** si existen  $A_1, A_2$  abiertos de  $\mathbb{C}$  tales que

1.  $A_1 \cap D \neq \emptyset$  y  $A_2 \cap D \neq \emptyset$
2.  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  (Equivalente a:  $A_1 \cap D \cap A_2 = \emptyset$ )
3.  $D \cap (A_1 \cup A_2) = D$  (Equivalente a:  $D \subseteq A_1 \cup A_2$ )

Así mismo si  $D$  **no** es inconexo, entonces diremos que es **conexo**.

EJEMPLO 14. A continuación algunos ejemplos de las definiciones anteriores.

1.  $B_r(z)$  es un conjunto abierto y conexo, no es cerrado.
2.  $\mathbb{Q}$  es inconexo, no es abierto y tampoco cerrado.
3.  $[0, 1]$  es conexo y cerrado pero no es abierto.

DEFINICIÓN 21. Sea  $K \subseteq \mathbb{C}$ . Decimos que es compacto si para cualquier familia de abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  tal que  $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ , existe  $J \subseteq I$  finito tal que  $K \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ . Donde  $I$  es una familia de índices.

DEFINICIÓN 22. Sea  $K \subseteq \mathbb{C}$ . Decimos que  $K$  es acotado si existe  $r > 0$  y  $z \in \mathbb{C}$  con  $K \subseteq B_r(z)$ .

PROPOSICIÓN 35. Sea  $K \subseteq \mathbb{C}$ . Entonces  $K$  es compacto si y sólo si  $K$  es cerrado y acotado.

## 2. Continuidad

La noción de continuidad es exactamente la que se conoce de  $\mathbb{R}^2$ , por lo que al igual que la sección anterior recordaremos las nociones elementales de esta.

**2.1. Ideas básicas** Recordemos la definición de continuidad entre espacios métricos.

**DEFINICIÓN 23.** Una función  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  es continua en el punto  $x_0 \in X$ , si para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$  tal que siempre que  $d_X(x, x_0) < \delta$  para  $x \in X$ , se cumple que  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ .

Una función es continua si lo es en todo punto de su dominio.

**NOTA 5.** Para el caso de los complejos,  $\mathbb{C}$ , al tener este una norma, la continuidad se da con la métrica inducida por dicha norma.<sup>1</sup> Dicha estructura de espacio métrico se usará para cualquier  $A \subseteq \mathbb{C}$ , por ejemplo, para  $\mathbb{R}$ .

Vamos a estudiar algunos ejemplos que involucren las funciones que se han estado estudiando.

**EJEMPLO 15.** La conjugación,  $\overline{(\cdot)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , es continua pues para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{C}$ , se cumple que

$$|\bar{z} - \bar{w}| = |z - w|$$

**EJEMPLO 16.** Las funciones parte real y parte imaginaria,  $Re, Im : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , son continuas pues para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$|Re(z)| \leq |z|$$

$$|Im(z)| \leq |z|$$

---

<sup>1</sup>Esto muestra que nuestra noción de continuidad para funciones en  $\mathbb{R}^2$  es la noción que se conoce pues la norma compleja no es más que la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ .

EJEMPLO 17. La norma compleja,  $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua pues para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{C}$ , se tiene que

$$||z| - |w|| \leq |z - w|$$

EJEMPLO 18. La proyección estereográfica  $\pi : (S^2, d) \rightarrow (\hat{\mathbb{C}}, d_C)$  así como su inversa son continuas pues de hecho ambas son isometrías.

EJEMPLO 19. La función argumento  $\arg : \mathbb{C}^* \rightarrow [-\pi, \pi)$  no es continua en ningún punto del eje real negativo.

Tal y como se ve en un curso de cálculo o análisis básico, por lo general checar la continuidad de una función puede ser una tarea complicada. En el caso de una función de  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  hay un criterio muy útil, el cual presentamos a continuación.

PROPOSICIÓN 36. Sea  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  con  $f = u + iv$ , donde  $u, v : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces  $f$  es continua en  $z_0 \in A$  si y sólo si  $u$  y  $v$  son continuas en  $z_0$ .

DEMOSTRACIÓN.  $\Rightarrow$ ) Veamos que  $u : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $z_0$  pues la prueba para  $v : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es análoga. En efecto, como  $f$  es continua en  $z_0 \in A$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$  tal que siempre que  $|z - z_0| < \delta$ , se cumple que  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ . Note que como  $\operatorname{Re}(f(z) - f(z_0)) = u(z) - u(z_0)$ , entonces  $|u(z) - u(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)|$ . Por lo tanto, al tomar  $\delta = \varepsilon$ , si  $|z - z_0| < \delta$ , entonces  $|u(z) - u(z_0)| < \varepsilon$ , lo que prueba la afirmación.

$\Leftarrow$ ) Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $u, v : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas en  $z_0$ , existen  $\delta_1 = \delta_1(z_0, \varepsilon)$ ,  $\delta_2 = \delta_2(z_0, \varepsilon) > 0$  tales que si  $|z - z_0| < \delta_1$ , entonces  $|u(z) - u(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  y si  $|z - z_0| < \delta_2$ , entonces  $|v(z) - v(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Por lo tanto, si  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , se tiene que si  $|z - z_0| < \delta$ , entonces

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |(u(z) - u(z_0)) + i(v(z) - v(z_0))| \\ &\leq |u(z) - u(z_0)| + |v(z) - v(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f$  es continua en  $z_0$ . □

Como el lector seguramente habrá notado, el resultado anterior no es más que el conocido hecho del cálculo de varias variables que dice que  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es continua en un punto si y sólo si las funciones coordenadas que componen  $f$  son continuas en dicho punto. Teniendo en mente este resultado que proviene de que nuestro modelo básico de  $\mathbb{C}$  tiene como conjunto subyacente a  $\mathbb{R}^2$ , tenemos el siguiente conocido resultado que dice cómo se comporta la continuidad con las operaciones entre funciones.

**PROPOSICIÓN 37.** Sean  $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (o con codominio  $\mathbb{R}$ ) continuas en  $z_0 \in A$ . Entonces,

1. La suma,  $f + g : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (o con codominio  $\mathbb{R}$ ), es continua en  $z_0$ .
2. El producto,  $fg : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (o con codominio  $\mathbb{R}$ ), es continua en  $z_0$ .
3. Si  $g(z_0) \neq 0$ , entonces el cociente  $\frac{f}{g} : \{z \in A \mid g(z) \neq 0\} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (o con codominio  $\mathbb{R}$ ), es continua en  $z_0$ .
4. Si  $h : B \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es tal que  $f(A) \subseteq B$  y es continua en  $f(z_0) \in B$ , entonces  $h \circ f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en  $z_0$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Es exactamente la misma que se vio en cálculo 1 para el caso de funciones reales. □

Usando los resultados anteriores podemos ampliar nuestro catálogo de funciones continuas. Esto se hace en los siguientes ejemplos.

**EJEMPLO 20.** Dado que la exponencial compleja  $e^\square : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tiene por regla de correspondencia  $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \operatorname{cis}(\operatorname{Im}(z))$ , entonces  $\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z))$  y  $\operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z))$ . Como la parte real e imaginaria de esta función son productos de funciones continuas y por lo tanto una función continua, entonces la exponencial lo es.

**EJEMPLO 21.** El seno y coseno complejos son continuos. Para ver esto note que como  $\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ , las funciones contantes son continuas y trivialmente también lo son las funciones  $e^{iz}, e^{-iz}$ , entonces se deduce que  $\operatorname{sen}(z)$  lo es. Lo análogo sucede con  $\operatorname{cos}(z)$ .

Para continuar con la discusión del concepto de continuidad recordemos que una idea frecuentemente asociada con la de continuidad es la de límite. Recordaremos esta a continuación.

DEFINICIÓN 24. Sean  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ ,  $x_0 \in X$  y  $y_0 \in Y$ . Decimos que el límite de  $f$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  es  $y_0$ , lo que se denota por  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$  o  $f(x) \rightarrow y_0$  cuando  $x \rightarrow x_0$ , si para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$  tal que siempre que  $d_X(x, x_0) < \delta$ , se cumple que  $d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$ .

Recordemos que si el límite de una función existe en un punto, entonces este es único. Por otro lado, algunas propiedades básicas de límites que conviene tener en mente, se mencionan a continuación.

PROPOSICIÓN 38. Sean  $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones tales que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = m$ . Entonces,

1.  $\lim_{z \rightarrow z_0} (f + g)(z) = l + m$
2.  $\lim_{z \rightarrow z_0} (fg)(z) = lm$
3. Si  $m \neq 0$ , entonces  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f}{g}(z) = \frac{l}{m}$

DEMOSTRACIÓN. Análogas a las de cálculo 1. □

Con esto último en mente y los conceptos de la sección anterior, podemos reformular el concepto de continuidad introduciendo las diversas equivalencias de este.

PROPOSICIÓN 39. Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  una función y  $x_0 \in X$ . Entonces, son equivalentes:

1.  $f$  es continua en  $x_0$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
3. Para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$  tal que  $B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$
4. Para cualquier  $A \subseteq Y$  abierto con  $x_0 \in A$ ,  $f^{-1}(A) \subseteq X$  es abierto
5. Para cualquier  $C \subseteq Y$  cerrado con  $x_0 \in C$ ,  $f^{-1}(C) \subseteq X$  es cerrado.
6. Para cualquier sucesión  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge a  $x_0$ , se tiene que la sucesión  $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge  $f(x_0)$ .

DEMOSTRACIÓN. En el curso de análisis 1. □

Para concluir, vamos a discutir algunas propiedades importantes respecto a funciones continuas y conexidad y compacidad que tienen que ver con el resultado anterior. Una de ellas se muestra a continuación.



**PROPOSICIÓN 40.** *Si  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  es una función continua y  $X$  es conexo, entonces  $f(X) \subseteq Y$  es conexo.*

**DEMOSTRACIÓN.** Procediendo por contrapositiva, si  $f(X)$  no es conexo, existen  $A, B \subseteq Y$  abiertos no vacíos y ajenos tales que  $f(X) = A \cup B$ . Note que de esto se deduce que  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ ,  $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \subseteq X$  son abiertos y  $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ , lo que muestra que  $X$  no es conexo.  $\square$

Note que el resultado anterior no aplica para la imagen inversa pues para  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin(x)$ ,  $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  es conexo y  $f^{-1}(0, 1) = \bigcup_{k \in 2\mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$ , que no es conexo.

Respecto a la compacidad, se tiene el siguiente resultado el cual queda como ejercicio al lector.

**PROPOSICIÓN 41.** *Si  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  es una función continua y  $A \subseteq X$  es compacto, entonces  $f(A) \subseteq Y$  es compacto.*

**DEMOSTRACIÓN.** Ejercicio  $\square$

Nuevamente el regreso de la afirmación anterior no es cierto pues al considerar la función identidad,  $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, d_{disc}) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ , donde  $d_{disc}$  es la métrica discreta, se tiene que esta función es claramente continua,  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  es compacto con la métrica estándar, pero  $1_{\mathbb{R}}^{-1}([0, 1]) = [0, 1]$  no es compacto pues los conjuntos compactos con la métrica discreta son finitos.

**2.2. Conjuntos conectables por trayectorias** Aprovechando que hemos recordado la definición de función continua, vamos a dar una definición que axiomatiza una noción de desconexión usando trayectorias continuas. Esta noción se presenta a continuación.

**DEFINICIÓN 25.** *Un subconjunto  $C \subseteq (X, d_X)$  es conectable por trayectorias si para cualesquiera puntos  $x_0, x_1 \in C$ , existe una función continua  $\sigma : [0, 1] \rightarrow C$  tal que*

$$\sigma(0) = x_0$$

$$\sigma(1) = x_1$$

*En tal caso, llamaremos a  $\sigma$  una trayectoria entre  $x_0$  y  $x_1$ .*

Veamos como se relaciona la noción anterior con la de conexidad.

PROPOSICIÓN 42. *Si un subconjunto  $C \subseteq (X, d)$  es conectable por trayectorias, entonces dicho espacio es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Procediendo por contradicción, si  $C$  no fuera conexo y es conectable por trayectorias, existen  $U, V \subseteq C$  abiertos ajenos no vacíos tales que  $C = U \cup V$ . Al tomar  $x \in U$  y  $y \in V$ , sabemos que existe una trayectoria  $\sigma : [0, 1] \rightarrow C$  que une  $x$  con  $y$ . Note que entonces  $\sigma^{-1}(U) \cap \sigma^{-1}(V) = \emptyset$ , ambos conjuntos son abiertos y además  $[0, 1] = \sigma^{-1}(U) \cup \sigma^{-1}(V)$ , lo que es una contradicción pues  $[0, 1]$  es conexo.  $\square$

El regreso de la afirmación anterior no es cierto en general. Un ejemplo se obtiene al considerar el conjunto  $C = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x > 0\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . En este conjunto no podemos conectar puntos de la primera componente con los de la segunda, sin embargo este conjunto es conexo.

A pesar de esto, en el caso de los complejos hay un recíproco del teorema anterior con una hipótesis extra.

PROPOSICIÓN 43. *Si  $C \subseteq \mathbb{C}$  es abierto y conexo, entonces  $C$  es conectable por trayectorias.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $z \in C$ . Considere los conjuntos

$$A = \{u \in C : \text{existe una trayectoria entre } u \text{ y } z\}$$

$$B = C \setminus A$$

Notemos que dado  $z_0 \in A$ , es claro que como  $C$  es abierto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(z_0) \subseteq C$ . Entonces podemos encontrar una trayectoria de cualquier punto en  $B_\varepsilon(z_0)$  con  $z$  al componer la trayectoria de  $z_0$  con  $z$  y unir dentro del  $B_\varepsilon(z_0)$  a  $z_0$  con el punto en cuestión. Esto demuestra que  $B_\varepsilon(z_0) \subseteq A$  y por lo tanto  $A$  es abierto. Además, de forma análoga se ve que  $B$  es abierto, por lo que al ser  $C$  conexo, alguno de estos dos conjuntos debe ser vacío, pero trivialmente  $A \neq \emptyset$ , por lo tanto  $A = C$  y esto prueba la afirmación.  $\square$

Para concluir, respecto a funciones continuas se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 44. *Si  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  es continua y  $C \subseteq X$  es un conjunto conectable por trayectorias, entonces  $f(C) \subseteq Y$  es conectable por trayectorias.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $y_0, y_1 \in f(C)$ . Por definición existen  $x_0, x_1 \in C$  tales que  $f(x_0) = y_0$  y  $f(x_1) = y_1$ . Dado que  $C$  es conectable por trayectorias, existe  $\sigma : [0, 1] \rightarrow C$  continua tal que  $\sigma(0) = x_0$  y  $\sigma(1) = x_1$ . Entonces note que podemos considerar la función  $f \circ \sigma : [0, 1] \rightarrow Y$ , la cual es continua, y es una trayectoria con extremos  $(f \circ \sigma)(0) = f(x_0) = y_0$  y  $(f \circ \sigma)(1) = f(x_1) = y_1$ . Además note que  $(f \circ \sigma)[0, 1] = f(C)$ , por lo que dicha trayectoria está en  $f(C)$ , con lo cual se ha demostrado la afirmación.  $\square$

Como en el caso de la proposición correspondiente en el caso de la conexidad, la propiedad análoga con la imagen inversa no es cierta, y de hecho el mismo contraejemplo sirve.

### 3. Diferenciabilidad

En esta sección desarrollaremos los conceptos de diferenciabilidad de forma análoga al caso real obteniendo nuevos resultados.

DEFINICIÓN 26. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto,  $z_0 \in A$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Decimos que  $f$  es diferenciable en  $z_0$  si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. En caso de existir, a este límite lo denotaremos por  $f'(z_0)$ .

Notamos que esta no es la definición usual de diferenciabilidad real pero es equivalente. De manera equivalente podemos plantear:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z}$$

Es bueno observar que la cuestión de que  $f$  sea diferenciable en  $z_0$ , no depende del dominio  $A$ . Esto es que si tenemos cualquier otro dominio  $U$  con  $z_0 \in U$  y  $f$  definido en  $U$ , entonces  $f'(z_0)$  existiría y tendría el mismo valor.

DEFINICIÓN 27. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Decimos que  $f$  es diferenciable si  $f$  es diferenciable en todos los puntos de  $A$ .

DEFINICIÓN 28. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Decimos que  $f$  es **holomorfa** en  $z_0 \in A$ , si existe una vecindad  $U$  de  $z_0$  tal que  $f|_U$  es diferenciable. Diremos que  $f$  es holomorfa si es holomorfa en todos los puntos de  $A$ . En caso de que  $f$  sea holomorfa y  $A = \mathbb{C}$ , diremos que  $f$  es **entera**.

PROPOSICIÓN 45. Sea  $c \in \mathbb{C}$ . Entonces  $K_c : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  dada por  $K_c(z) = c$  para toda  $z \in \mathbb{C}$  es una función entera.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $z, z_0 \in \mathbb{C}$ ,

$$\frac{K_c(z) - K_c(z_0)}{z - z_0} = \frac{c - c}{z - z_0} = \frac{0}{z - z_0} = 0$$

Por lo cual  $K'_c(z) = 0$

□

PROPOSICIÓN 46. La función identidad  $f(z) = z$  es entera.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} 1 = 1$$

□

PROPOSICIÓN 47. Sean  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto,  $z_0 \in A$  y  $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$  una función compleja. Si  $f$  es diferenciable en  $z_0$ , entonces  $f$  es continua en  $z_0$

DEMOSTRACIÓN. Que sea continua en  $z_0$  es equivalente a demostrar que:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = 0$$

Pero

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) 0 = 0 \end{aligned}$$

□

Ahora veamos una serie de propiedades análogas a las funciones reales.

PROPOSICIÓN 48. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  un abierto,  $f, g : A \longrightarrow \mathbb{C}$  funciones holomorfas y  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Entonces  $f + g$  es holomorfa. Más aún  $(\lambda f + \mu g)'(z) = \lambda f'(z) + \mu g'(z)$  para toda  $z \in A$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z_0 \in A$ .

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(\lambda f + \mu g)(z) - (\lambda f + \mu g)(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{\lambda f(z) + \mu g(z) - \lambda f(z_0) - \mu g(z_0)}{z - z_0} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{\lambda (f(z) - f(z_0))}{z - z_0} + \frac{\mu (g(z) - g(z_0))}{z - z_0} \right] \\ &= \lambda \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \mu \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0) \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 49. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$  funciones holomorfas. Entonces  $fg$  es holomorfa. Más aún  $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$  para toda  $z \in A$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z_0 \in A$ , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z)g(z_0) + f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z)g(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z_0) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0) \end{aligned}$$

□

COROLARIO 1. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  y  $f$  una función polinomial en  $A$ . Entonces  $f$  es holomorfa.

PROPOSICIÓN 50. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$  funciones holomorfas tales que  $A \subseteq D_g$ . Entonces  $\frac{f}{g}$  es holomorfa. Más aún:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g(z)^2}$$

para toda  $z \in A$

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio. □

PROPOSICIÓN 51. Sean  $A, B \subseteq \mathbb{C}$  abiertos y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  con  $f(A) \subseteq B$  funciones holomorfas. Entonces  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa. Más aún:

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

con  $z \in A$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z_0 \in A$  y  $w_0 = f(z_0) \in B$ . Para  $w \in B$  definimos:

$$h(w) = \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0)$$

para  $w \neq w_0$  y en el caso  $w = w_0$  ponemos  $h(w_0) = 0$ .

Notamos que como  $g$  es holomorfa, entonces  $h$  es continua. Dado que la composición de funciones continuas es continua tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h(f(z)) = h(f(z_0)) = h(w_0) = 0$$

Ponemos  $w = f(z)$ , y notamos que

$$g(f(z)) - g(w_0) = [h(f(z)) + g'(w_0)][f(z) - w_0]$$

Por lo que

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = [h(f(z)) + g'(w_0)] \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Haciendo  $z \rightarrow z_0$ , tenemos que

$$(g \circ f)'(z_0) = [0 + g'(w_0)]f'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

□

Vamos a demostrar un resultado análogo al caso real pero aquí usaremos los conceptos de topología compleja.

**PROPOSICIÓN 52.** Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto conexo y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Si  $f'(z) = 0$  para toda  $z \in A$ , entonces  $f$  es constante en  $A$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Para esto debemos desarrollar una versión de la regla de la cadena para trayectorias.

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  diferenciable (en  $(a, b)$ ). Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa, entonces  $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es diferenciable y tenemos que  $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ . Notamos que aquí estamos interpretando a  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}^2$ .

Recordemos que  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  y así  $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ , o escrito de forma compleja:  $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$ .

Sean  $z_1, z_2 \in A$  y  $\gamma$  una trayectoria que una a  $z_1$  con  $z_2$  (por ser  $A$  conexo).

Por regla de la cadena  $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0 \cdot \gamma'(t) = 0$ .

Así, si expresamos a  $f(z) = u(z) + iv(z)$  donde  $u, v : A \rightarrow \mathbb{R}$  tendremos que  $u(\gamma(t))' = 0$  y  $v(\gamma(t))' = 0$ . Ahora bien, ambas son funciones reales por lo cuales son constantes, es decir  $u \circ \gamma$  y  $v \circ \gamma$  son constantes.

Como  $u \circ \gamma$  y  $v \circ \gamma$  son constantes, entonces  $f \circ \gamma$  es constante. Como  $\gamma(a) = z_1$  y  $\gamma(b) = z_2$ , entonces  $f(z_1) = f(z_2)$ . Como los puntos  $z_1, z_2$  son arbitrarios, entonces  $f$  es constante.

Notemos que el hecho de que  $A$  sea conexo, nos permite que  $A$  sea conectable por trayectorias y la existencia de  $\gamma$

□

En parte de la demostración usamos que  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  se puede descomponer como funciones  $u, v : A \rightarrow \mathbb{R}$  y de esta forma  $f = u + iv$ . Esto nos permite pensar a  $f$  como una

función real  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Así podemos hablar de la matriz jacobiana de  $f$ , recordamos que esta dada por

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

para todo  $(x, y) \in A$

El hecho de que  $f$  sea diferenciable en el sentido real en  $(x_0, y_0)$  se puede expresar como

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\left| f(x, y) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right|}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} = 0$$

Notemos que no es exactamente el mismo concepto, pero relacionaremos ambos conceptos con la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 53.** *Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto abierto y  $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$  una función. Entonces  $f'(z_0)$  existe si y sólo si  $f$  es diferenciable en el sentido real en  $z_0 = (x_0, y_0)$  y se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, es decir:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

**DEMOSTRACIÓN.**  $\implies$

Como  $f'(z_0)$  existe, entonces

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Si ponemos  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Ahora bien  $z \rightarrow z_0$  quiere decir que estamos analizando este límite .<sup>a</sup>cercandonos.<sup>en</sup> cualquier dirección, como es para cualquiera podemos elegir una en particular, nos podemos aproximar por la trayectoria  $z = x + iy_0$ . Así tendríamos que:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x + iy - (x_0 + iy_0)} \\ &= \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + \frac{i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0} \end{aligned}$$

Haciendo tender  $x \rightarrow x_0$ , como explicamos anteriormente esto converge a  $f'(z_0)$ , por otro lado, analizando el desarrollo tenemos que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

De manera análoga hacemos el mismo desarrollo considerando  $z = x_0 + iy$ . Por lo que tenemos

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)} \\ &= \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0}\end{aligned}$$

De forma análoga, haciendo  $y \rightarrow y_0$  tenemos

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \frac{1}{i} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\end{aligned}$$

Uniendo por medio de  $f'(z_0)$  tenemos que:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = f'(z_0) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann se siguen de que dos complejos son iguales si y sólo si su parte real y su parte imaginaria son iguales.

$\Longleftarrow$

Queremos que  $f'(z_0)$  exista, pero esto es equivalente a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - Df(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0$$

Observamos que

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Que si bien recordamos esto es un complejo en notación matricial. Ahora lo que tenemos que ver es que efectivamente este cruce de modelo se comporta bien.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix}$$

De aquí notamos que esencialmente lo que hicimos fue multiplicar

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Por lo que la multiplicación de matrices corresponde a la multiplicación compleja.

Por lo cual la condición de diferenciabilidad real resulta en coincidir con la compleja.  $\square$



Algo importante de notar de la demostración es que de la existencia de  $f'(z_0)$  se sigue que:

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 54. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$  holomorfa con  $f = u + iv$  de tal modo que  $u$  y  $v$  son dos veces diferenciables. Entonces  $u$  y  $v$  son armónicas en  $A$ , es decir,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Primero tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Vamos a diferenciar la primera ecuación con respecto a  $x$  y la segunda respecto a  $y$ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Sumamos ambas y obtenemos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

El caso de  $v$  se obtiene de forma similar diferenciando con respecto a  $y$  y a  $x$  □

EJEMPLO 22. Veamos algunos ejemplos.

1. Consideremos la función  $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  dada por  $u(x, y) = x^3y^2$  y  $v(x, y) = x^2y^3$ .

Notacionalmente escribiremos  $u_x$  para  $\frac{\partial u}{\partial x}$  y  $u_y$  para  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , de esta forma  $u_{xx}$  quiere decir  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  y  $u_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

Calculamos:

$$u_x = 3x^2y^2$$

$$u_y = 2x^3y$$

$$v_x = 2xy^3$$

$$v_y = 3x^2y^2$$

Aquí las ecuaciones de Cauchy-Riemann plantean que:

$$\begin{cases} 3x^2y^2 &= 3x^2y^2 \\ 2x^3y &= -2xy^3 \end{cases}$$

Despejando de la segunda ecuación

$$2(x^3y + xy^3) = 0$$

lo que implica

$$2xy(x^2 + y^2) = 0$$

Los puntos que cumplan las ecuaciones deben cumplir que  $xy = 0$  o  $x^2 + y^2 = 0$ , lo segundo lo cumple únicamente el  $(0, 0)$  y lo primero el eje  $x$  unión el eje  $y$ . Ahora bien  $f = u + iv$  no es holomorfa, puesto que no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ningún abierto de  $\mathbb{C}$ .

2. Consideremos  $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = \bar{z}$  para  $z \in \mathbb{C}$ . Como  $f(x + iy) = x - iy$  tenemos que  $u(x, y) = x$  y  $v(x, y) = -y$ . Calculamos las derivadas:

$$u_x = 1$$

$$u_y = 0$$

$$v_x = 0$$

$$v_y = 1$$

*Veamos que de hecho*

$$u_x = 1 \neq -1 = v_y$$

*Por lo cual  $f$  no cumple las condiciones de Cauchy-Riemann y así no es holomorfa.*

PROPOSICIÓN 55. Sea  $f(z) = e^z$ . Entonces  $f$  es entera.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que

$$f(z) = e^x(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$$

De aquí  $u(x, y) = e^x \cos(y)$  y  $v(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$ . Para ver que  $f$  es entera veremos que cumple Cauchy-Riemann, así que calcularemos las derivadas

$$u_x = e^x \cos(y)$$

$$u_y = -e^x \operatorname{sen}(y)$$

$$v_x = e^x \operatorname{sen}(y)$$

$$v_y = e^x \cos(y)$$

Comprobamos que

$$u_x = e^x \cos(y) = v_y$$

$$u_y = -e^x \operatorname{sen}(y) = -v_x$$

Por lo que  $f$  es entera. Para finalizar

$$f'(z) = u_x + iv_y = e^x \cos(y) + ie^x \operatorname{sen}(y) = e^x(\operatorname{cis}(y)) = e^z$$

□

PROPOSICIÓN 56. Sean  $\text{sen}, \cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ . Entonces

$$\text{sen}'(z) = \cos(z)$$

$$\cos'(z) = -\text{sen}(z)$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que

$$\text{sen}(z) = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i}$$

Apartir de aquí calculamos la derivada, usando la regla de la cadena y que la derivada es lineal

$$\begin{aligned} \text{sen}'(z) &= \left( \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} \right)' \\ &= \left( \frac{e^{-iz}}{2i} \right)' - \left( \frac{e^{iz}}{2i} \right)' \\ &= \frac{1}{2i} (-i) e^{-iz} - \frac{1}{2i} (i) e^{iz} \\ &= \frac{1}{2} e^{-iz} + \frac{1}{2} e^{iz} \\ &= \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} \\ &= \cos(z) \end{aligned}$$

De manera análoga recordamos que

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Así derivando tenemos que

$$\begin{aligned} \cos'(z) &= \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)' \\ &= \left( \frac{e^{iz}}{2} \right)' + \left( \frac{e^{-iz}}{2} \right)' \\ &= \frac{1}{2} (i) e^{iz} + \frac{1}{2} (-i) e^{-iz} \\ &= \frac{i}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) \\ &= -\frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \\ &= -\left[ \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right] \\ &= -\text{sen}(z) \end{aligned}$$

Notamos que  $\frac{-1}{i} = i$ , esto debido a que el inverso multiplicativo es único,

$$(-i) \left( \frac{1}{i} \right) = 1$$

y

$$(-i)i = 1$$

De aqui

$$\frac{-1}{i} = i$$

□

#### 4. Conformalidad

En esta sección vamos a formalizar el concepto de función que preserva los ángulos, la cual fue introducida en el capítulo anterior y que presentamos a continuación.

**DEFINICIÓN 29.** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función con  $U$  un abierto conexo. Decimos que  $f$  es **conforme** en el punto  $z_0 \in U$  si existe  $\theta \in [0, 2\pi)$  y  $r > 0$  tal que para cualquier curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  que sea diferenciable en  $t = 0$ ,  $\gamma(0) = z_0$  y  $\gamma'(0) \neq 0$ , la curva  $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$  es diferenciable en  $t = 0$  y se cumplen las condiciones:

1.  $|(f \circ \gamma)'(0)| = r |\gamma'(0)|$
2.  $\arg((f \circ \gamma)'(0)) = \arg(\gamma'(0)) + \theta \pmod{2\pi}$

Una función se llama conforme si lo es en todo punto de su dominio.

**NOTA 6.** Observe que lo que dice intuitivamente la noción de conforme es que estas funciones rotan y aplican homotecias a vectores tangentes a curvas que pasan por el punto en cuestión. Además note que trivialmente una función conforme preserva ángulos entre curvas que se intersectan.

De la intuición que obtuvimos en el capítulo anterior, debe quedar claro que la noción de que una función preserve ángulos puede ser complicada de verificar para una función. El siguiente resultado da una condición suficiente para probar que una función es conforme.

**PROPOSICIÓN 57.** (*Teorema de la aplicación conforme*) Si  $f : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en el dominio (abierto y conexo)  $U$  y  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces  $f$  es conforme en  $z_0$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$  es una curva diferenciable en  $t = 0$  tal que  $\gamma(0) = z_0$  y  $\gamma'(0) \neq 0$ , entonces por la regla de la cadena  $(f \circ \gamma)'(0) = f'(\gamma(0))\gamma'(0) = f'(z_0)\gamma'(0)$ . Tomemos  $r = |f'(z_0)|$  y note que lo anterior dice que

$$|(f \circ \gamma)'(0)| = |f'(z_0)| |\gamma'(0)| = r |\gamma'(0)|,$$

lo que es la primera condición en la definición de función conforme.

Por otro lado, de la misma igualdad se tiene que

$$\arg((f \circ \gamma)'(0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg \gamma'(0) \pmod{2\pi},$$

por lo que al tomar  $\theta = \arg(f'(z_0))$ , se tiene la condición restante.  $\square$

Veamos algunos ejemplos.

**EJEMPLO 23.** A continuación analizaremos el comportamiento local de la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  con regla de correspondencia  $f(z) = z^6 + 3z + i$  en  $z = 0$ . Para esto notemos que  $f'(z) = 6z^5 + 3$ , entonces  $f'(0) = 3$ . Luego, el teorema de la aplicación conforme dice que una vecindad del cero,  $f$  se comporte como una rotación por  $\arg(f'(0)) = \arg(3) = 0$  y una homotecia por  $|f'(0)| = 3$ . Para ser más precisos esto quiere decir que si tomamos una curva que pase por el cero, entonces al aplicar  $f$  a esta curva, su vector tangente tiene el mismo ángulo que el vector original, pero su longitud está multiplicada por 3.

**EJEMPLO 24.** La función exponencial satisface que  $\frac{d}{dz}e^z = e^z$  y como  $0 \notin \text{im}(e^z)$ , entonces se cumplen las hipótesis del teorema de la aplicación conforme, así que  $e^\square : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  es una función conforme. En particular la exponencial preserva ángulos.

**EJEMPLO 25.** Considere la transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Notemos que  $T : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$  y que  $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$  es un abierto y conexo. Además notemos que  $T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$ , por lo que el teorema de la aplicación conforme implica que  $T$  es conforme en  $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ , en particular  $T$  preserva ángulos.

**EJEMPLO 26.** Dado que la función  $\text{sen} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  satisface que  $\frac{d}{dz} \text{sen}(z) = \cos(z)$  y  $\cos(z) = 0$  si y sólo si  $z = \pi(k + \frac{1}{2})$  para  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces el teorema de la aplicación conforme implica que la función  $\text{sen} : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z = \pi(k + \frac{1}{2}), k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$  es conforme y en particular preserva ángulos.

La variedad de ejemplos que obtuvimos muestra lo sencillo que es la aplicación del teorema de aplicación conforme respecto a los métodos estudiados en el capítulo anterior. Para entender este teorema nos podemos formular varias preguntas, la primera es: ¿qué sucede si no se tiene la condición de que  $f'(z_0) \neq 0$ ? Para esto vamos a analizar un ejemplo más.

**EJEMPLO 27.** Considere la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = z^2$ . Note que  $f'(z) = 2z$  y note que  $f'(z) = 0$  si y sólo si  $z = 0$ . Por lo tanto el teorema de la aplicación conforme implica que  $f|_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  es conforme y por lo tanto preserva ángulos. Pero, ¿qué sucede en  $z = 0$ ? La respuesta es que  $f$  no preserva ángulos pues al considerar el eje  $x$  y el eje  $y$ , los cuales forman un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ , se tiene que al tomar sus imágenes que son los segmentos  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0 \text{ y } \text{Re}(z) \leq 0\}$  y  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0 \text{ y } \text{Re}(z) \geq 0\}$  respectivamente, los cuales forman un ángulo de  $\pi$ .

Los puntos donde la derivada de una función holomorfa se anulan son muy interesantes de estudiar y se conocen como **puntos singulares**. Hay toda una teoría para su estudio que se conoce como Teoría de Singularidades, la que queda fuera de nuestros objetivos y alcances, así que no diremos más por este momento de dichos puntos.

Por otro lado, analizando el teorema de la aplicación conforme, este nos dice que las funciones holomorfas con derivada no nula son sumamente especiales, así que investigaremos un poco más esta condición que nos llevará a establecer otro importante resultado.

**PROPOSICIÓN 58.** (Teorema Complejo de la Función Inversa) Sea  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  con  $U$  un abierto conexo tal que  $f$  es holomorfa con  $f'$  continua. Si  $z_0 \in U$  es tal que  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces existen vecindades de  $z_0$  y  $f(z_0)$ ,  $V$  y  $W$  respectivamente, tales que

$f : V \longrightarrow W$  es una biyección y su inversa  $f^{-1} : W \longrightarrow V$  es holomorfa con derivada dada por

$$\frac{df^{-1}}{dw}(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$$

DEMOSTRACIÓN. Usaremos el Teorema real de la función inversa. Para esto notemos que si escribimos  $f = u + iv$  con  $u, v : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ , al considerar  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tenemos que su matriz jacobiana es

$$Jf(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}_z,$$

donde la última igualdad se da por las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$\text{Como } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z), \text{ entonces } \det(Jf(z)) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2.$$

Dado que  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces  $\det(Jf(z_0)) \neq 0$ , lo que muestra que se cumplen las hipótesis del teorema mencionado, luego existen  $V$  y  $W$  vecindades de  $z_0$  y  $f(z_0)$  respectivamente, tales que  $f|_V : V \longrightarrow W$  es una biyección diferenciable con inversa diferenciable como funciones reales y además,

$$Jf^{-1}(w_0) = (Jf(f^{-1}(w_0)))^{-1}$$

Así, para ver que  $f^{-1}$  es holomorfa, vamos a ver que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Para esto observemos que como

$$Jf^{-1}(w_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}_{f^{-1}(w_0)}^{-1} = \frac{1}{\det(Jf(f^{-1}(w_0)))} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}_{f^{-1}(w_0)},$$

dichas ecuaciones se satisfacen trivialmente. Para concluir, respecto al cálculo de la derivada de  $f^{-1}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{df^{-1}}{dw}(w_0) &= \frac{1}{\det(Jf(f^{-1}(w_0)))} \frac{\partial u}{\partial x}(f^{-1}(w_0)) - i \frac{1}{\det(Jf(f^{-1}(w_0)))} \frac{\partial v}{\partial x}(f^{-1}(w_0)) \\ &= \frac{1}{|f'(f^{-1}(w_0))|^2} \overline{f'(f^{-1}(w_0))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))} \end{aligned}$$

□

Lo anterior muestra lo extremadamente especiales que son las funciones con derivada no nula. Antes de obtener consecuencias teóricas del teorema de la función inversa complejo, vamos a dar una aplicación muy interesante.



PROPOSICIÓN 59. Sea  $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$  un abierto y considere la rama principal del logaritmo  $(-\pi, \pi)$ . Demuestre que  $\ln : A \rightarrow \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in (\pi, \pi), r > 0\}$  es holomorfa en  $A$  y que

$$\frac{d \ln}{dz}(z_0) = \frac{1}{z_0}$$

DEMOSTRACIÓN. Considere la función exponencial compleja  $e^\square : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Dado  $z_0 \in \mathbb{C}$ , notemos que  $\frac{de^z}{dz}(z_0) = e^{z_0} \neq 0$ , por lo que el teorema de la función inversa complejo dice que  $f$  tiene una inversa holomorfa entre vecindades de  $z_0$ ,  $U$  y de  $f(z_0)$ ,  $V$ . Dado que la inversa de una función es única, se tiene que  $f^{-1} = \ln : V \rightarrow U$ . Además, el teorema también dice que

$$\frac{d \ln}{dz}(z_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z_0))} = \frac{1}{z_0}$$

□

Una aplicación teórica del resultado anterior se muestra a continuación. Este resultado básicamente dice que las funciones conformes y biyectivas son un grupo.

PROPOSICIÓN 60. Sean  $U, V, W \subseteq \mathbb{C}$  abiertos y conexos. Entonces,

1. Si  $f : U \rightarrow V$  es conforme y biyectiva, entonces  $f^{-1}$  es conforme.
2. Si  $f : U \rightarrow V$  y  $g : V \rightarrow W$  son conformes y biyectivas, entonces  $g \circ f : V \rightarrow W$  es conforme

DEMOSTRACIÓN. Para 1, como  $f$  es biyectiva entonces  $f^{-1} : V \rightarrow U$  existe. Por el teorema de la función inversa  $f^{-1}$  es holomorfa y  $\frac{df^{-1}}{dw} = \frac{1}{\frac{df}{dz}(f^{-1}(w))}$ . Esto en particular dice que  $\frac{df^{-1}}{dw} \neq 0$ , por lo que el teorema de la aplicación conforme implica que  $f^{-1} : U \rightarrow V$  es conforme.

Respecto a 2 note que  $g \circ f : U \rightarrow W$  es claramente holomorfa y biyectiva. Además,  $\frac{d}{dz}(g \circ f) = g'(f(z))f'(z)$  que es no cero, por lo tanto  $g \circ f : U \rightarrow W$  es conforme. □

Para concluir esta sección vamos a analizar si la idea de función que preserva los ángulos coincide con la de aplicación conforme. Esto se muestra en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 61. Si  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow V$  es una función holomorfa que preserva ángulos y tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existen y son continuas, entonces  $f$  es conforme

DEMOSTRACIÓN. Dado que  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow V$  es  $\mathbb{R}$ -diferenciable, dada  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  una curva diferenciable con  $\gamma(0) = z_0$ , se tiene que  $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$  es diferenciable y además  $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ .

Note que esto último se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \gamma'(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \overline{\gamma'(t)}$$

Dado que  $f$  preserva ángulos, localmente  $f$  debe ser de la forma  $\alpha z$  con  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , lo que implica que se tienen dos casos:

Caso 1:  $\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$

Caso 2:  $\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Notemos que si denotamos por  $f_z := \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}$  y  $\overline{f_z} := \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}$ , entonces lo anterior dice que la función  $\frac{f_z - \overline{f_z}}{f_z + \overline{f_z}} : U \rightarrow \mathbb{C}$  está bien definida y es continua. Como esta función toma únicamente los valores 1 y  $-1$  y  $U$  es conexo, entonces esta debe ser constante con valor 1 ó  $-1$ . Notemos que si dicha función es  $-1$ , entonces  $f_z = 0$ , lo que dice que  $\frac{\partial f}{\partial x} = i \frac{\partial f}{\partial y}$ . Si  $f = u + iv$ , entonces las ecuaciones implican  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$  y  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ . Como  $f$  es holomorfa  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  y  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ , lo que implica que  $u$  y  $v$  son constantes, pero esto no puede suceder pues  $f$  sería constante y entonces no preservaría ángulos. Por lo tanto dicha función es 1, lo que implica que  $\overline{f_z} = 0$  y  $f_z \neq 0$ , así  $f'(z_0) \neq 0$ , por lo que el teorema de la aplicación conforme dice que  $f$  es conforme.  $\square$

**5. Ejercicios del capítulo**

EJERCICIO 59. *Demuestre la proposición 28.*

EJERCICIO 60. *Demuestre la proposición 29.*

EJERCICIO 61. *Demuestre la proposición 30.*

EJERCICIO 62. *Demuestre la proposición 31.*

EJERCICIO 63. *Demuestre la proposición 34.*

EJERCICIO 64. *Demuestre la proposición 35.*

EJERCICIO 65. *Demuestre la proposición 38.*

EJERCICIO 66. *Demuestre la proposición 39.*

EJERCICIO 67. *Demuestre la proposición 41.*

EJERCICIO 68. *Demuestre la proposición 50.*

EJERCICIO 69. *Sean  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$  una sucesión,  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $d_C$  es la métrica cordal.*

*Demuestre que:*

1.  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_C(z_k, z_0) = 0$  si y sólo si  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_C(z_k, \infty) = 0$  si y sólo si  $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| = \infty$

DEFINICIÓN 30.

1. Una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq (X, d_X)$  es de Cauchy si para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que siempre que  $n, m \geq n_0$ , se tiene que  $d_X(x_n, x_m) < \varepsilon$ .
2. Una sucesión es acotada si el conjunto  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$  es acotado.

EJERCICIO 70.

1. Demuestre que toda sucesión de Cauchy es acotada. Dar un ejemplo donde se vea que el regreso de esta afirmación no es cierta.
2. Demuestre que una sucesión convergente es de Cauchy. Dar un ejemplo donde se vea que hay sucesiones de Cauchy que no convergen.
3. Demuestre que sobre los complejos una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.

EJERCICIO 71. Demuestre que si  $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es una transformación de Möbius, entonces  $T$  es continua con la métrica cordal.

DEFINICIÓN 31. Si  $(X, d_X)$  y  $(Y, d_Y)$  son espacios métricos, definimos una función  $d_{X \times Y} : (X \times Y)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

EJERCICIO 72. Demuestre lo siguiente:

1.  $(X \times Y, d_{X \times Y})$  es un espacio métrico.
2. La función suma en  $\mathbb{C}$ ,  $+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , es continua.
3. El producto en  $\mathbb{C}$ ,  $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , es continuo.

EJERCICIO 73. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la función definida mediante:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & \text{Si } z \neq 0 \\ 0 & \text{Si } z = 0 \end{cases}$$

1. Demuestre que  $f$  no es holomorfa en  $z = 0$ .
2. Demuestre que  $f$  cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en  $z = 0$ .

DEFINICIÓN 32. Definimos los **operadores de Wirtinger** (o **derivadas de Wirtinger**) como las asignaciones

$$\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : C^1(\mathbb{C}) \rightarrow C^0(\mathbb{C})$$

dados por

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

donde  $C^1(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es continuamente diferenciable}\}$

EJERCICIO 74. Sea  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función diferenciable sobre  $\mathbb{R}$ .

1. Demuestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son equivalentes a la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Concluir que  $f$  es holomorfa en  $z_0 \in A$  si y sólo si  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ .

2. Usar el inciso anterior para demostrar que la función conjugado,  $\overline{(\square)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , no es diferenciable.

3. Demuestre que si  $f$  es holomorfa en  $z_0 \in A$ , entonces

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$$

4. Demuestre que los operadores de Wirtinger son lineales y cumplen la regla de Leibniz

EJERCICIO 75. Demuestre que las funciones  $\sin, \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  son enteras y calcule su derivada.

EJERCICIO 76. Encuentre en qué puntos de su dominio es holomorfa la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

1.  $f(z) = \sin \bar{z}$
2.  $f(z) = \cos \bar{z}$

EJERCICIO 77. Considere la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  con regla de correspondencia  $f(z) = |z|$ . Encuentre los puntos donde esta función es holomorfa y calcule su derivada en dichos puntos.

EJERCICIO 78. Sea  $T : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función dada por  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , es decir, la transformación a coordenadas polares. Considere  $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$  un abierto y conexo, así como  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Demuestre que para todo  $(r_0, \theta_0) \in T^{-1}(A)$  se tiene que

$$\frac{\partial(\operatorname{Im} f \circ T)}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) = \left( r \frac{\partial(\operatorname{Re} f \circ T)}{\partial r} \right)(r_0, \theta_0)$$

$$\frac{\partial(\operatorname{Re} f \circ T)}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) = - \left( r \frac{\partial(\operatorname{Im} f \circ T)}{\partial r} \right)(r_0, \theta_0)$$

A estas se le conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar.

EJERCICIO 79. Sea  $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$  un abierto y considere la rama principal del logaritmo  $(-\pi, \pi)$ . Demuestre que  $\ln : A \rightarrow \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in (\pi, \pi), r > 0\}$  es holomorfa en  $A$  y tiene derivada  $\frac{1}{z}$  usando:

1. El teorema de la función inversa
2. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar

EJERCICIO 80. Sea  $w \in \mathbb{C}$ .

1. Considere una rama del logaritmo y defina  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = w^z$ . Demuestre que esta función es entera y además

$$f'(z) = (\ln w)w^z$$

2. Considere una rama del logaritmo y definida  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $g(z) = z^w$ . Demuestre que esta función es holomorfa en el dominio de la rama del logaritmo tomada y que

$$g'(z) = wz^{w-1}$$

3. Considere la función  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $h(z) = z^z$ . Determine los puntos en los que esta función es holomorfa y de ser el caso, calcule la derivada en dichos puntos.

DEFINICIÓN 33. Dado  $A \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $u : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ . Decimos que  $u$  es **armónica** en  $A$  si para cualquier  $z \in A$ ,

$$\nabla^2 u(z) = 0$$

EJERCICIO 81. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $A$ . Demuestre que las funciones  $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones armónicas en  $A$ .

DEFINICIÓN 34. Para  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto, dadas funciones  $u, v : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  son **armónicas conjugadas** en  $A$  si existe  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que

$$\operatorname{Re}(f) = u$$

$$\operatorname{Im}(f) = v$$

EJERCICIO 82.

1. Demuestre que las funciones  $u, v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $u(x + iy) = x^2 - y^2$  y  $v(x + iy) = 2xy$  son armónicas conjugadas en  $\mathbb{C}$ .
2. Si  $u, v : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  son armónicas conjugadas que representan curvas suaves constantes, entonces estas se intersectan ortogonalmente.

DEFINICIÓN 35. Una función  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  es localmente constante si para cualquier  $x \in X$ , existe  $U \subseteq X$  abierto con  $x \in U$  tal que  $f|_U : U \rightarrow Y$  es constante.

EJERCICIO 83. Demuestre que si  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa con  $U$  abierto, entonces son equivalentes:

1. Para cualquier  $z \in U$ ,  $f'(z) = 0$
2.  $f$  es localmente constante
3.  $\operatorname{Re}(f) : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente constante
4.  $\operatorname{Im}(f) : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente constante
5.  $|f| : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente constante
6. La función  $\bar{f} : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$ , es holomorfa.

EJERCICIO 84. Sea  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa con  $A$  abierto y conexo tal que  $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$  es constante en  $A$ . Demuestre que  $f$  es constante.

EJERCICIO 85. Sea  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa con  $A$  abierto y conexo tal que su  $(n+1)$ -derivada existe y es cero.<sup>2</sup> Demuestre que  $f$  es una función polinomial de grado a lo más  $n$ .

EJERCICIO 86. Sean  $A \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa cuya derivada no se anula en  $A$ . Demuestre que  $f$  es una función abierta, es decir,  $f$  manda subconjuntos abiertos de  $A$  en subconjuntos abiertos.

Sugerencia: Usar el teorema de la función inversa

EJERCICIO 87. Considere la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = z - i$ . Use el teorema de la aplicación conforme para estudiar el comportamiento de esta función en  $z = 1 + i, -i, 0$ .

EJERCICIO 88. Considere la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = z^3 + i$ . Use el teorema de la aplicación conforme para estudiar el comportamiento de esta función en  $z = i$ .

EJERCICIO 89. Demuestre que una función holomorfa y biyectiva con inversa holomorfa, es conforme.

EJERCICIO 90. Sea  $f : \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa tal que  $f'(z) = \frac{1}{z}$  y  $f(0) = 1$ . Demuestre que

$$f(z) = \ln(z)$$

EJERCICIO 91. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Demuestre que:

---

<sup>2</sup>En capítulos posteriores vamos a ver que en  $\mathbb{C}$  una función holomorfa es  $\infty$ -diferenciable sobre  $\mathbb{C}$ , por lo que la hipótesis de diferenciabilidad es superflua.



1. Si  $f$  es continua y para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(2z) = f(z)$ , entonces  $f$  es constante.
2. Si  $f$  es entera y para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(2z) = 2f(z)$ , entonces existe  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = wz$  para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ .



## Integración compleja

“Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas.”

**Albert Einstein.**

### 1. Definición y propiedades básicas

La integración que veremos realmente es una extensión de las integrales de contorno aprovechando identificar  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$ .

DEFINICIÓN 36. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  con descomposición  $f = u + iv$ , es decir,  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones reales. Entonces definimos

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

Donde observamos que las integrales del lado derecho son las clásicas integrales que ya conocemos.

Vamos a dar una definición más fina de la integral basandonos en lo que acabamos de hacer. Para eso necesitaremos definir que es una función  $C^1$  a trozos.

DEFINICIÓN 37. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $f$  es  $C^1$  a trozos si existen  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  tales que  $f$  en  $(a_i, a_{i+1})$  es diferenciable y su derivada es continua en  $[a_i, a_{i+1}]$  para toda  $i = 0, \dots, n-1$

DEFINICIÓN 38. Sea  $a < b \in \mathbb{R}$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Decimos que  $\gamma$  es  $C^1$  a trozos si en su descomposición  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$  tenemos que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son  $C^1$  a trozos. También vamos a pedir que la particiones de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  sean las mismas.

Con esto en mente podemos definir una nueva integral.

DEFINICIÓN 39. Sean  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Consideremos  $a < b \in \mathbb{R}$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$   $C^1$  a trozos con  $\text{Im}(\gamma) \subseteq A$ . Entonces definimos:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

A esta integral la llamaremos como la integral de  $f$  a través de  $\gamma$

Ahora veamos como se calcula realmente esta curva, siguiendo con las hipótesis anteriores. Poniendo  $f = u + iv$  podemos observar que

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) \gamma'(t) &= [u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))] \gamma'(t) \\ &= [u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))] (\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)) \\ &= [u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)] + i[v(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma(t))\gamma_2'(t)] \end{aligned}$$

Integrando sobre los intervalos obtenemos que:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{\gamma} [u(x, y) dy + v(x, y) dx]$$

esto reescribiendo notacionalmente  $\gamma_1'(t) = x(t)$  y  $\gamma_2'(t) = y(t)$ .

Podemos observar que lo que esta dentro de la integral es:

$$\begin{aligned} f(z) dz &= (u + iv) d(x + iy) \\ &= (u + iv)(dx + i dy) \\ &= (u dx - v dy) + i(u dy + v dx) \end{aligned}$$

Como muchas cosas de este curso continuaremos con las analogías del caso real.

Por lo que si tenemos una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definimos  $-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  como:

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$$

Notamos que  $-\gamma$  recorre la misma trayectoria que  $\gamma$  en sentido inverso, solo como una observación:

$$\begin{aligned} (-\gamma)(a) &= \gamma(a + b - a) = \gamma(b) \\ (-\gamma)(b) &= \gamma(a + b - b) = \gamma(a) \end{aligned}$$

Por lo cual  $-\gamma$  empieza donde  $\gamma$  termina y  $-\gamma$  termina donde  $\gamma$  comienza.

PROPOSICIÓN 62. Sean  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$   $C^1$  a trozos y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua con  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto. Entonces

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

DEMOSTRACIÓN. Ponemos  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$  y supondremos que  $\gamma$  es simplemente  $C^1$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{-\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(-\gamma(t))(-\gamma)'(t) dt \\
 &= \int_a^b f(\gamma(a+b-t))(-\gamma'(a+b-t)) dt \\
 &= \int_b^a f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\
 &= - \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\
 &= - \int_a^b f(z) dz
 \end{aligned}$$

□

Podemos considerar dos curvas  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ , definir una suma de estas dos curvas como una función  $\gamma_1 + \gamma_2 : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$  que no es mas que continuar la curva  $\gamma_1$  con la curva  $\gamma_2$ , así para que la nueva función sea continua pedimos que  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ . La definición que damos es

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{si } a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t), & \text{si } b \leq t \leq c \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 63. Sean  $a < b < c \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$  funciones  $C^1$  a trozos y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  con  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto. Si  $\text{Im}(\gamma_1) \cup \text{Im}(\gamma_2) \subseteq A$ , entonces

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son  $C^1$ . Notemos que  $\gamma_1 + \gamma_2$  es  $C^1$  a trozos en la partición  $a < b < c$ .

El resultado es practicamente la definición.

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz &= \int_a^b f((\gamma_1 + \gamma_2)(t))(\gamma_1 + \gamma_2)'(t) dt + \int_b^c f((\gamma_1 + \gamma_2)(t))(\gamma_1 + \gamma_2)'(t) dt \\
 &= \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) dt + \int_b^c f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t) dt \\
 &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz
 \end{aligned}$$

□

Vale la pena mencionar que la integral sigue siendo lineal.

PROPOSICIÓN 64. Sea  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C^1$  a trozos y  $g, f : A \rightarrow \mathbb{C}$  con  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto e  $\text{Im}(\gamma) \subseteq A$ . Si  $\lambda \in \mathbb{C}$ , entonces  $\int_{\gamma}(f + \lambda g)(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \lambda \int_{\gamma} g(z) dz$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $a_0 < \dots < a_n$  la partición de  $[a, b]$  dada por  $\gamma$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} (f + \lambda g)(z) dz &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f + \lambda g)(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(\gamma(t)) \gamma'(t) + \lambda g(\gamma(t)) \gamma'(t)) dt \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \lambda \int_{a_i}^{a_{i+1}} g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\
 &= \int_{\gamma} f(z) dz + \lambda \int_{\gamma} g(z) dz
 \end{aligned}$$

□

Una pregunta natural a realizar es que pasa con la integral si consideramos una reparametrización de la curva  $\gamma$ .

DEFINICIÓN 40. Sean  $a < b, c < d \in \mathbb{R}$  y  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C^1$  a trozos. Una curva  $\lambda: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C^1$  a trozos es una reparametrización de  $\gamma$  si existe una función  $C^1$   $\alpha: [a, b] \rightarrow [c, d]$  con  $\alpha(a) = c$  y  $\alpha(b) = d$ ,  $\alpha' > 0$  y  $\gamma(t) = \lambda \circ \alpha(t)$  para toda  $t \in [a, b]$ . La condición  $\alpha' > 0$  nos dice que la función es estrictamente creciente.

PROPOSICIÓN 65. Sean  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  con  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto e  $\text{Im}(\gamma) \subseteq A$ . Si  $\lambda$  es una reparametrización de  $\gamma$ , entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\lambda} f(z) dz$$

DEMOSTRACIÓN. Se nuevo lo hacemos para el caso de que  $\gamma$  sea  $C^1$ .

Antes que nada, observemos que

$$\gamma'(t) = (\lambda(\alpha(t)))' = \lambda'(\alpha(t)) \alpha'(t)$$

Observemos que si ponemos  $s = \alpha(t)$  como una variable nueva y esta cumple que va de  $c$  a  $d$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\
 &= \int_a^b f(\lambda(\alpha(t))) \lambda'(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \\
 &= \int_c^d f(\lambda(s)) \lambda'(s) ds \\
 &= \int_{\lambda} f(z) dz
 \end{aligned}$$

□

Recordemos que la longitud de una curva  $\gamma$  esta dada por la fórmula

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

En el caso complejo;  $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$  sería:

$$L = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2} dt$$

**PROPOSICIÓN 66.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua con  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C^1$  a trozos con  $a < b \in \mathbb{R}$ . Si existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| < M$  para  $z \in A$ , entonces  $\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq ML$ .

Mas puntualmente tenemos que si ponemos

$$\int_\gamma |f(z)| dz = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt$$

entonces

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)| dz$$

**DEMOSTRACIÓN.** Primero expresamos  $g = u + iv$ , entonces

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

de donde es facil seguir

$$\operatorname{Re} \left( \int_a^b g(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(g(t)) dt$$

Pongamos que  $\int_a^b g(t) dt = re^{i\theta}$  con  $r > 0$  y  $\theta$  fijos.

Despejando

$$r = e^{-i\theta} \int_a^b g(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} g(t) dt$$

Así

$$r = \operatorname{Re}(r) = \operatorname{Re} \left( \int_a^b e^{-i\theta} g(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} g(t)) dt$$

Recordemos que para toda  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ , aplicando esto a la última igualdad y tomando en cuenta  $|e^{-i\theta}| = 1$ , llegamos a que

$$\operatorname{Re}(e^{-i\theta} g(t)) \leq |e^{-i\theta} g(t)| = |g(t)|$$

Aplicando que la integral es monótona

$$\int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} g(t)) dt \leq \int_a^b |g(t)| dt$$

así tenemos que

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| = r = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} g(t)) dt \leq \int_a^b |g(t)| dt$$

Ahora ponemos  $g(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$ , para llegar a que

$$\left| \int_a^b f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)| dt = \int_\gamma |f(z)| dz$$

En particular tenemos que

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)| dt \leq \int_a^b M|\gamma'(t)| dt = LM$$

□

EJEMPLO 28. *Veamos un ejemplo.*

*Evaluemos  $\int_\gamma z dz$ , donde  $\gamma$  es el círculo unitario recorrido en sentido levógiro (contrario a las manecillas del reloj).*

*Como depende de la parametrización podemos poner*

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{dado por} \quad \gamma(t) = e^{2\pi i t} \quad \text{para} \quad t \in [0, 1]$$

*Tenemos que calcular la derivada de  $\gamma$ , ponemos  $\gamma(t) = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$ , así*

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= -2\pi \sin(2\pi t) + 2\pi i \cos(2\pi t) \\ &= 2\pi(-\sin(2\pi t) + i \cos(2\pi t)) \end{aligned}$$

*por lo que*

$$\begin{aligned} f(\gamma(t))\gamma'(t) &= (\cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t))(-\sin(2\pi t) + i \cos(2\pi t))2\pi \\ &= [(-\cos(2\pi t)\sin(2\pi t) - \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)) + i(\cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t))]2\pi \end{aligned}$$



Para calcular la integral hacemos un cambio de variable  $s = 2\pi t$

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} -2 \cos(s) \operatorname{sen}(s) ds + i \int_0^{2\pi} \cos^2(s) - \operatorname{sen}^2(s) ds \\
 &= -2 \left( \frac{-1}{4} \cos(2s) \right) \Big|_0^{2\pi} + i \left[ \left( \frac{s}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2s)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} - \left( \frac{s}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2s)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Nos damos cuenta que las integrales pueden ser bastante complicadas de calcular.

DEFINICIÓN 41. Sean  $f, F : A \rightarrow \mathbb{C}$  continuas con  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto.

Si  $F$  es holomorfa y  $F' = f$ , entonces decimos que  $F$  es una antiderivada de  $f$

PROPOSICIÓN 67. Sean  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  con  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $a \leq b \in \mathbb{R}$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C^1$  a trozos con  $\operatorname{Im}(\gamma) \subseteq A$ . Si  $F : A \rightarrow \mathbb{C}$  es una antiderivada de  $f$ , entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos  $g(t) = F(\gamma(t))$  con descomposición  $g(t) = u(t) + iv(t)$ .

Ahora bien, por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
 f(\gamma(t)) \gamma'(t) &= F'(\gamma(t)) \gamma'(t) \\
 &= g'(t) \\
 &= u'(t) + iv'(t)
 \end{aligned}$$

Usando el teorema fundamental del cálculo versión real

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} u'(t) + iv'(t) dt \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \int_{a_i}^{a_{i+1}} u'(t) dt + i \int_{a_i}^{a_{i+1}} v'(t) dt \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} (u(a_{i+1}) - u(a_i)) + i(v(a_{i+1}) - v(a_i)) \\
 &= u(a_n) + iv(a_n) - (u(a_0) + iv(a_0)) \\
 &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))
 \end{aligned}$$

□

Recordemos que decimos que una curva es cerrada si  $\gamma(a) = \gamma(b)$

**COROLARIO 2.** Sean  $f : A \rightarrow B$  con  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva  $C^1$  a trozos cerrada. Si  $F$  es una antiderivada de  $f$ , entonces  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

Retomando el ejercicio anterior, gracias al corolario tendríamos que  $F(z) = \frac{1}{2}z^2$  cumple con  $F'(z) = z$ , así  $\int_{\gamma} z dz = 0$

**PROPOSICIÓN 68.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa con  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto conexo. Si  $f' = 0$  entonces  $f$  es constante.

**DEMOSTRACIÓN.** Esta es una demostración alternativa y que hace el uso de la integral. De nuevo tomaremos dos puntos arbitrarios  $z_1, z_2 \in A$  y demostraremos  $f(z_1) = f(z_2)$ .

Como  $A$  es conexo, existe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  suave tal que  $\gamma(0) = z_1$  y  $\gamma(1) = z_2$ .

Ahora observamos  $\int_{\gamma} 0 dz = 0$  puesto que la integral es lineal, en particular,  $\int_{\gamma} f'(z) dz = 0$

Así tenemos que

$$0 = \int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(z_2) - f(z_1)$$

Concluimos que  $z_1 = z_2$

□

**OBSERVACIÓN 1.** Vimos que la integral no depende de la parametrización, pero si del sentido. Ahora veremos que pasa con dos curvas que empiezan y terminan donde mismo.

Consideremos la función  $f(z) = z^n$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \neq -1$ , y  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma(t) = e^{it}$ . Notamos que  $f$  tiene antiderivada  $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ . Como la función tiene antiderivada y  $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$  podemos concluir que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Analicemos que pasa con  $f(z) = z^{-1}$  y la misma  $\gamma$ , así notamos que  $\gamma'(t) = ie^{it}$ . Calculando

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i dt \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

Hagamos diferente  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por

$$\gamma_1(t) = e^{it} \quad \gamma_2(t) = e^{-it}$$

Es fácil ver que  $\gamma_1(0) = 1 = \gamma_2(0)$  y  $\gamma_1(\pi) = -1 = \gamma_2(\pi)$ . Son dos curvas que unen a 1 con -1. Falta calcular la derivada de  $\gamma_2$ ,  $\gamma_2'(t) = -ie^{-it}$ .

Ahora

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_0^\pi e^{-it} ie^{it} dt \\ &= \int_0^\pi i dt \\ &= \pi i\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_0^\pi e^{it} (-i) e^{-it} dt \\ &= \int_0^\pi -i dt \\ &= -\pi i\end{aligned}$$

Así que tenemos dos curvas con mismos puntos iniciales y finales con diferente integral.

La cuestión por la que las dos integrales dan diferente valor es que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  están definidas en diferentes ramas del logaritmo. No existe una rama que contenga ambas curvas a la vez. La siguiente proposición nos explica la cuestión.

**PROPOSICIÓN 69.** *Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua con  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- i) Sean  $z_0, z_1 \in A$  y  $\gamma_1, \gamma_2$  dos curvas en  $A$  que empiezan en  $z_0$  y terminan en  $z_1$ , entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

- ii) Si  $\Gamma$  es una curva cerrada en  $A$ , entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

- iii)  $f$  tiene una antiderivada en  $A$

**DEMOSTRACIÓN.**

- ii)  $\Rightarrow$  i) Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  curvas de  $z_0$  a  $z_1$ , entonces  $\gamma_1 + \gamma_2$  es una curva cerrada. Por lo que

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\gamma_1 + (-\gamma_2)} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

i)  $\Rightarrow$  ii) Si  $\Gamma : [a, b] \rightarrow A$  es una curva cerrada entonces ponemos  $\gamma_1 : [a, \frac{a+b}{2}] \rightarrow A$  y a  $\gamma_2 : [\frac{a+b}{2}, b] \rightarrow A$  dados por  $\gamma_1(t) = \Gamma(t)$  para  $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$  y  $\gamma_2(t) = \Gamma(t)$  para  $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$ .

Notamos que por construcción  $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . Por otro lado  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  empiezan y terminan igual. Así por hipótesis

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-\gamma_2} f(z) dz$$

Despejando

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{-\gamma_2} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz \\ &= \int_{\Gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

iii)  $\Rightarrow$  i) Se sigue del teorema fundamental del cálculo versión compleja.

i)  $\Rightarrow$  iii) Sean  $z_0, z_1 \in A$ . Como  $A$  es conexo existe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  suave con  $\gamma(0) = z_0$  y  $\gamma(1) = z_1$ .

Definimos  $F : A \rightarrow \mathbb{C}$  como  $F(z_1) = \int_{\gamma} f(z) dz$ .

Para efectos de esta definición fijamos  $z_0$  y variamos  $z_1 \in A$ . La función  $f$  está bien definida por hipótesis y depende sólo de la elección de  $z_0$ , para otra  $z_0$  tendremos otra  $F$ . Veamos que  $F$  es holomorfa.

Como  $f$  es continua, para  $\varepsilon > 0$  y  $z \in A$ , existe  $\delta > 0$  tal que si para  $w \in A$   $|w - z| < \delta$  entonces  $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ . Como  $A$  es abierto podemos encontrar  $\delta$  de tal forma que  $B_\delta(z) \subseteq A$ .

Así para  $w \in B_\delta(z)$  consideramos  $\lambda : [1, 2] \rightarrow B_\delta(z) \subseteq A$  tal que une a  $z$  con  $w$ .

Así

$$F(w) - F(z) = \int_{\gamma + \lambda} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\lambda} f(\zeta) d\zeta$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| &= \frac{|F(w) - F(z) - (w - z)f(z)|}{|w - z|} \\
 &= \frac{|\int_{\lambda} f(\zeta) d\zeta - f(z) \int_{\lambda} 1 d\zeta|}{|w - z|} \\
 &\leq \frac{\varepsilon L}{|w - z|} \\
 &= \frac{\varepsilon |w - z|}{|w - z|} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

Donde  $L$  es la longitud de arco de  $\lambda$ . Así el límite cuando  $w \rightarrow z$  es la derivada de  $F$  que en este caso es  $f$

□

## 2. El lema de Goursat

En este capítulo introduciremos el teorema fundamental del análisis complejo básico: el teorema de Cauchy. Además de obtener distintas versiones de este, obtendremos una especie de recíproca de dicho teorema debido a Morera y concluimos el capítulo realizando algunos cálculos con gran importancia teórica, con los cuales obtendremos las famosas fórmulas integrales de Cauchy y la definición de índice.

No requerimos de ningún preliminar para enunciar y demostrar el resultado de esta sección.

**LEMA 1 (Goursat).** *Sea  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa con  $U$  un abierto y conexo. Si  $T \subseteq U$  es un triángulo, entonces*

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

**DEMOSTRACIÓN.** Al tomar el triángulo  $T$  orientado positivamente y dividir este en cuatro triángulos congruentes usando los puntos medios de sus lados obtenemos una imagen como la de la Figura 1

Esto implica que

$$(2) \quad \int_{\partial T} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial T_i} f(z) dz$$

Al denotar por

$$\left| \int_{\partial T^{(1)}} f(z) dz \right| = \max_{i=1, \dots, 4} \left| \int_{\partial T_i} f(z) dz \right|$$

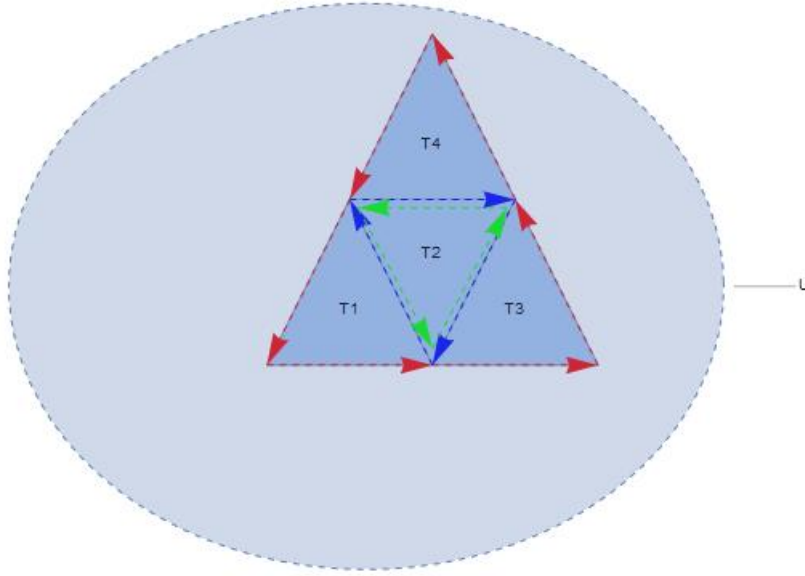


FIGURA 1.

entonces de 2 se tiene que

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T^{(1)}} f(z) dz \right|$$

Considerando el triángulo  $T^{(1)}$ , podemos repetir el proceso anterior para obtener un triángulo  $T^{(2)}$  tal que

$$\left| \int_{\partial T^{(1)}} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T^{(2)}} f(z) dz \right|$$

Por lo que podemos seguir aplicando este proceso para obtener una sucesión de triángulos anidados

$$T^{(1)} \supseteq T^{(2)} \supseteq T^{(3)} \supseteq \dots \supseteq T^{(k)} \supseteq T^{(k+1)} \supseteq \dots$$

tales que para cualquier  $n \in \mathbb{N}^+$ ,

$$\left| \int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T^{(1)}} f(z) dz \right|$$

Notemos que en la sucesión de triángulos  $\{T^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  todos estos son compactos, así que el teorema de Bolzano-Weierstrass nos implica que la intersección  $\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{(k)}$  debe tener al menos un punto. Por otro lado, debe tener exactamente un punto pues si  $z_0, z_1 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} T^{(k)}$  con  $z_0 \neq z_1$ , entonces  $|z_1 - z_0| > 0$  y así podríamos encontrar  $n \in \mathbb{N}^+$  tal que  $z_1 \in T^{(n)}$  y  $z_0 \notin T^{(n)}$ , lo cual sería una contradicción. Así,  $\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{(k)} = \{z_0\}$ . Luego, como  $f$  es holomorfa en  $z_0 \in U$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0$ , por lo que dada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$

tal que  $|z - z_0| < \delta$  entonces  $|f(z)f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0|$ .

Notemos que dado que  $f(z_0) \in \mathbb{C}$ , entonces  $\int_{\partial T^{(n)}} f(z_0) dz = 0$  y como  $f'(z_0)(z - z_0)$  es una función polinomial, entonces  $\int_{\partial T^{(n)}} f'(z_0)(z - z_0) dz = 0$ . De esto se deduce que

$$\int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz = \int_{\partial T^{(n)}} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz,$$

lo que implica que

$$(3) \quad \begin{aligned} \left| \int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial T^{(n)}} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| \\ &\leq \int_{\partial T^{(n)}} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| dz \end{aligned}$$

Por otro lado, note que para cualquier  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $\text{diam}(T^{(n)}) = \frac{1}{2^n} \text{diam}(T)$ , por lo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(T^{(n)}) = 0$ , entonces para la  $\delta > 0$  obtenida por ser  $f$  holomorfa en  $z_0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que siempre que  $n \leq n_0$ ,  $\text{diam}(T^{(n)}) < \delta$ , de lo que se deduce que si  $z \in T^{(n)}$ ,  $|z - z_0| < \delta$  y entonces de 3 se deduce que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right| &\leq \int_{\partial T^{(n)}} \varepsilon |z - z_0| dz \leq \int_{\partial T^{(n)}} \varepsilon \text{diam}(T^{(n)}) dz \\ &\leq \varepsilon P(T^{(n)})^2, \end{aligned}$$

donde  $P(T^{(n)})$  es el perímetro de  $T^{(n)}$ , y se usó que  $\max_{z, w \in T^{(n)}} |z - w| \leq P(T^{(n)})$  y que  $l(\partial T^{(n)}) = P(T^{(n)})$

De esto se deduce que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right| \\ &\leq 4^n \varepsilon P(T^{(n)})^2 \\ &= 4^n \varepsilon \left( \frac{P(T)}{2^n} \right)^2 \\ &= \varepsilon P(T)^2 \end{aligned}$$

Como esto es válido para cualquier  $\varepsilon > 0$ , entonces  $\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| = 0$ , lo que es equivalente a ver que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

□

Originalmente el lema de Goursat fue enunciado para  $R \subseteq U$  un rectángulo, sin embargo, lo anterior es la forma moderna de presentar dicho teorema pues con triángulos podemos formar un rectángulo según la Figura 2.

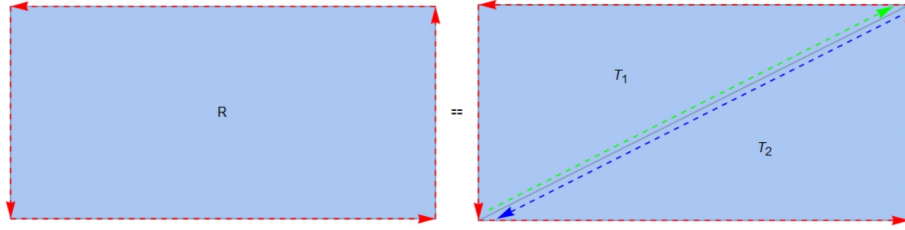


FIGURA 2.

Por lo que

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial T_1} f(z) dz + \int_{\partial T_2} f(z) dz$$

De esto se deduce:

**COROLARIO 3 (Lema de Goursat original).** *Sea  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa con  $U$  un abierto y conexo.*

*Si  $R \subseteq U$  es un triángulo, entonces*

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

**NOTA 7.** *Existe una versión mas simple de demostrar el lema de Goursat que proviene del teorema de Stokes y las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Para esto ver el ejercicio 92*

Para concluir esta sección vamos a dar una pequeña generalización del Lema de Goursat que permite tratar funciones que son holomorfas salvo en un número finito de puntos. Para esto demostraremos el caso de un punto y después de un argumento por inducción se seguirá el caso general.

**PROPOSICIÓN 70 (Lema de Goursat con singularidades).** *Sean  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Si  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en  $U \setminus \{z_0\}$ , continua en  $z_0$  y  $z_0 \in T$  con  $T \subseteq U$  un triángulo, entonces*

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

**DEMOSTRACIÓN.** Hay que demostrar tres casos dependiendo la ubicación del punto  $z_0$ :

**Caso 1:**  $z_0$  es vértice de  $T$ . En este caso nos apoyaremos en la figura 3. Donde dividimos  $T$  a partir de un punto adyacente a  $z_0$ ,  $z_1$  el cual da lugar a un punto  $z_2$  sobre el lado contrario a  $z_1$  que tiene por vértice a  $z_0$ .



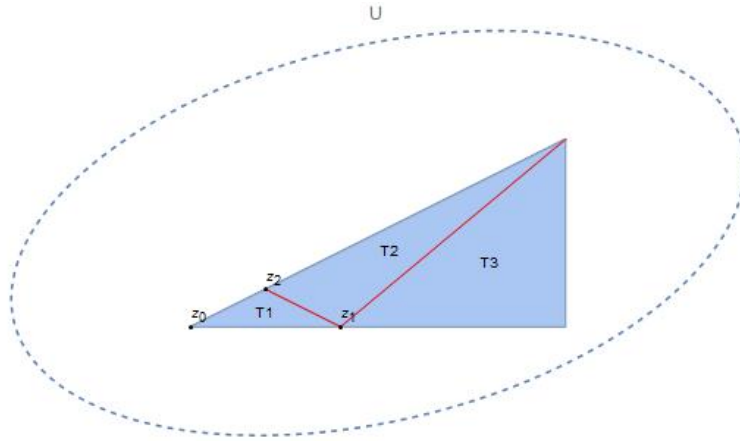


FIGURA 3.

Al tomar las orientaciones estándar se tiene que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \sum_{k=1}^3 \int_{\partial T^{(k)}} f(z) dz = \int_{\partial T^{(1)}} f(z) dz,$$

donde la última igualdad se obtiene de aplicar el Lema de Goursat en  $T^{(2)}$  y  $T^{(3)}$ . Notemos que como  $T \subseteq \mathbb{C}$  es compacto y  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua,  $f(T) \subseteq \mathbb{C}$  es acotado, por lo tanto

$$\left| \int_{\partial T^{(1)}} f(z) dz \right| \leq l(\partial T^{(1)}) \max_{z \in T} |f(z)|$$

De esto se deduce que

$$\lim_{z_1 \rightarrow z_2} \left| \int_{\partial T^{(1)}} f(z) dz \right| = 0$$

y por lo tanto que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

Caso 2:  $z_0$  está sobre un lado de  $T$ .

En este caso dividimos a  $T$  en dos triángulos que tienen vértice  $z_0$  como se ve en la figura 4

Al tomar la orientación estándar en  $T$  se tiene que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{\partial T^{(1)}} f(z) dz + \int_{\partial T^{(2)}} f(z) dz = 0,$$

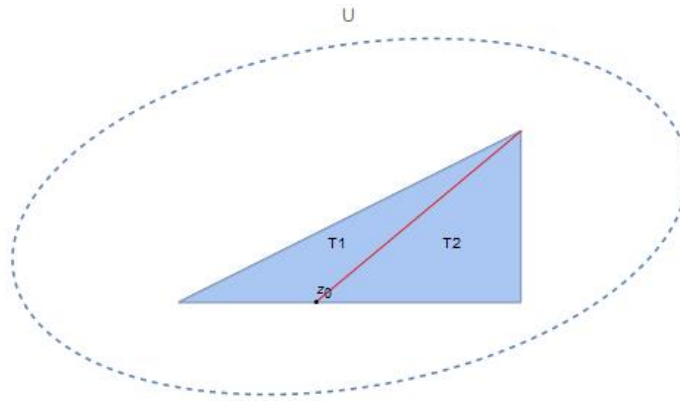


FIGURA 4.

donde ambas integrales son cero por el caso anterior.

Caso 3:  $z_0$  es un punto interior de  $T$ . En este último caso dividiendo  $T$  en 2 triángulos usando un vértice de este y el punto  $z_0$  como se ve en la figura 5

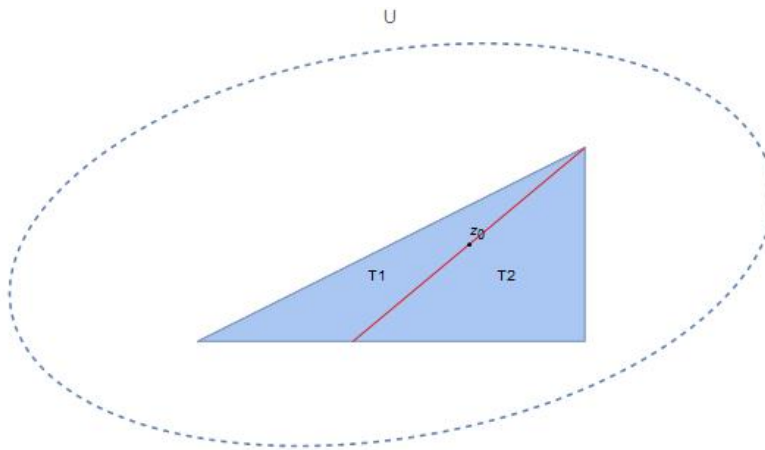


FIGURA 5.

Tomando las orientaciones estándar y usando el caso anterior se tiene que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{\partial T^{(1)}} f(z) dz + \int_{\partial T^{(2)}} f(z) dz = 0$$

□

Queda como ejercicio el caso de  $n$  singularidades. (Ver ejercicio 95)

Para concluir esta sección vamos a dar un resultado donde se usa el lema de Goursat y que tiene que ver con la existencia de primitivas.

**PROPOSICIÓN 71** (Teorema local de la primitiva). *Sea  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa con  $U \subseteq \mathbb{C}$  abierto y conexo. Si  $R \subseteq U$  es un rectángulo, entonces existe  $R \subseteq V \subseteq U$  una vecindad abierta y  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tales que  $g' = f$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Notemos que podemos construir otro rectángulo,  $\tilde{R}$ , tal que tiene lados paralelos a  $R$  y  $R \subseteq (\tilde{R})^0 \subseteq U$ .

Sea  $z_0 \in \tilde{R}$  su vértice inferior izquierdo y defina para cada  $z \in (\tilde{R})^0$  defina las rectas  $C^1$  a trozos;  $\sigma_z$  y  $\tau_z$  definidos según la figura 6.

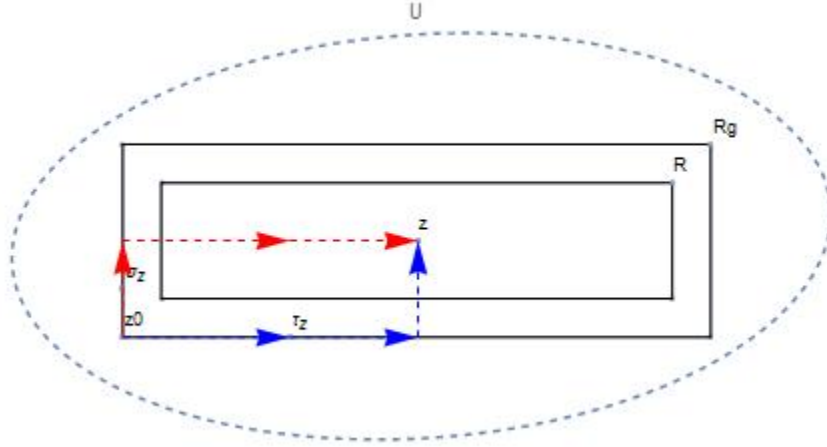


FIGURA 6.

Con esto en mente definimos  $g : (\tilde{R})^0 \rightarrow \mathbb{C}$  mediante la regla de correspondencia

$$g(z) = \int_{\sigma_z} f(w) dw$$

Afirmamos que esta función  $g$  es la función buscada. En efecto, notemos que por el lema de Goursat se deduce que  $\int_{\tau_z - \sigma_z} f(w) dw = 0$  y por lo tanto,

$$\int_{\tau_z} f(w) dw = \int_{\sigma_z} f(w) dw$$

Dado  $h > 0$  tal que si  $\gamma_h$  es el segmento que une  $z$  con  $z + h$ , se cumple que la traza de  $\gamma_h$  está contenida en  $U$ . Entonces notemos que

$$g(z+h) - g(z) = \int_{\gamma_h} f(w) dw = \int_{\operatorname{Re}(z)}^{\operatorname{Re}(z)+h} f(t, \operatorname{Im}(z)) dt,$$

donde la última desigualdad se da pues  $\tau_z$  parametriza una recta paralela al eje real.

Además note que si  $h < 0$ , entonces

$$g(z+h) - g(z) = - \int_{\operatorname{Re}(z)+h}^{\operatorname{Re}(z)} f(t, \operatorname{Im}(z)) dt = \int_{\operatorname{Re}(z)}^{\operatorname{Re}(z)+h} f(t, \operatorname{Im}(z)) dt$$

En cualquier caso, para  $h \neq 0$  con las propiedades mencionadas, se tiene que

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\operatorname{Re}(z)}^{\operatorname{Re}(z)+h} f(t, \operatorname{Im}(z)) dt$$

Por lo tanto, se afirma que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$  existe y es igual a  $f(z)$ . Para ver esto usaremos la última igualdad obtenida. Así, dada  $\varepsilon > 0$ , por continuidad de  $f$  existe  $\delta > 0$  tal que siempre que  $|s - t| < \delta$ , se cumple que  $|f(s + iy) - f(t + iy)| < \varepsilon$ . Por lo tanto, si  $|h| < \delta$ , entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_{\operatorname{Re}(z)}^{\operatorname{Re}(z)+h} f(t, \operatorname{Im}(z)) dt - f(z) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \int_{\operatorname{Re}(z)}^{\operatorname{Re}(z)+h} |f(t, \operatorname{Im}(z)) - f(z)| dt \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon \end{aligned}$$

De esto se deduce la afirmación. Además note que lo que se ha demostrado dice que

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re}(g) + i \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im}(g) = f$$

Más aún, si repetimos este argumento usando la trayectoria  $\tau_z$  para un segmento paralelo al eje imaginario de  $z$  a  $z + h$  se obtendrá que

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re}(g) + i \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im}(g) = -\bar{f}$$

De estas últimas ecuaciones se deduce que  $g$  cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann y por lo tanto es holomorfa y cumple que  $g' = f$   $\square$

### 3. Teorema de Cauchy

El teorema de Cauchy para integrales se define para un dominio un poco más complicado que un cuadrado pero que bajo cierta perspectiva es un cuadrado.

Esta perspectiva es la homotópica, que veremos un poco mas a detalle en la siguiente sección.

Antes que nada tenemos que dar unas ideas intuitivas. Consideremos una curva  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  cerrada. El teorema de Jordan dice que esta curva divide al plano complejo en dos regiones, una acotada y otra no acotada. La región acotada es lo que intuitivamente vamos a decir que está dentro de la curva.

PROPOSICIÓN 72 (Teorema de Cauchy). Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa con derivada continua en  $A$  y  $\gamma$  una curva cerrada simple con  $f'$  continua en  $\gamma$  y dentro de  $\gamma$ . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos el teorema de Green de cálculo vectorial. Sea  $P, Q : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  funciones con diferenciales continuas y  $\gamma$  una curva cerrada simple que parametriza a la frontera de  $A$ , entonces

$$\int_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_A [Q_x(x,y) - P_y(x,y)] dx dy$$

Ahora sí, nosotros tenemos que poniendo  $f = u + iv$  se sigue que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx) \\ &= \iint_A (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_A (u_x - v_y) dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann □

Notemos que necesitamos que  $f$  sea diferenciable dentro de  $\gamma$ , el caso clásico es el círculo unitario  $\mathbb{S}^1$ ,

$$\int_{\mathbb{S}^1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

Esto es porque  $\frac{1}{z}$  no está definido dentro de la curva.

Veamos que el teorema de Cauchy es realmente poderoso, consideremos  $f$  cualquier función entera y  $\gamma$  una curva cerrada simple, por ejemplo

$$f(t) = e^{\cos(z)} + z^3 \sin(z^2)$$

inmediatamente tenemos que  $f$  es entera y

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

DEFINICIÓN 42. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  acotado, decimos que  $A$  es simplemente conexo si  $A$  es conexo y  $\mathbb{C} \setminus A$  es conexo.

De manera intuitiva  $A$  no tiene agujeros.

Veamos que la hipótesis de acotado es necesaria, pues podemos poner  $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  que es conexo y  $\mathbb{C} \setminus A = \{0\}$  que es conexo pero  $A$  tiene un agujero  $0$ .

PROPOSICIÓN 73 (Teorema de Cauchy). Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  con  $A$  simplemente conexo y  $\gamma$  una curva cerrada en  $A$ . Entonces  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la anterior. □

PROPOSICIÓN 74. Sea  $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$  holomorfa con  $A$  abierto simplemente conexo y  $\gamma_1, \gamma_2$  dos curvas que empiezan en  $z_0 \in A$  y terminan en  $z_1 \in A$ . Entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

DEMOSTRACIÓN. Como ya habíamos hecho, consideramos  $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ . Por el teorema de Cauchy tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_1 + (-\gamma_2)} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

□

Como ya tenemos el teorema de independencia de trayectorias, es decir; en conjuntos abiertos simplemente conexos las integrales de funciones holomorfas solo dependen de donde inician y donde terminan. Como ya se había visto, esto es equivalente a la existencia de una antiderivada, ahora refinamos el teorema con la unicidad de esta salvo una constante.

PROPOSICIÓN 75. Sea  $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$  holomorfa con  $A$  abierto simplemente conexo. Entonces existe  $F$  antiderivada de  $f$ , además si  $G$  es antiderivada de  $f$ , entonces existe  $c \in \mathbb{C}$  tal que  $F = G + c$ .

DEMOSTRACIÓN. La existencia se sigue de de la equivalencia con el teorema de independencia de trayectorias. Veamos la segunda parte, para ello consideremos

$$\begin{aligned} (F - G)'(z) &= f(z) - f(z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De aquí sucede que  $F - G$  es constante y se sigue el resultado

□

Notemos que antes no habíamos pedido nada más al dominio de  $f$ , excepto que sea abierto, por eso no teníamos la unicidad salvo constante.

Regresemos al problema del logaritmo, el punto es que la función  $f(z) = \frac{1}{z}$  esté definida en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  pero este conjunto no es simplemente conexo. Veamos que el teorema anterior lo podríamos aplicar con  $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$  simplemente conexo, y de nuevo tendremos un resultado más fino.

PROPOSICIÓN 76. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto simplemente conexo y  $0 \notin A$ . Entonces existe  $F : A \longrightarrow \mathbb{C}$  holomorfa que es única salvo diferencias de múltiplos de  $2\pi$  y  $e^{F(z)} = z$  en  $A$ .

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de la antiderivada existe  $F : A \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F'(z) = f(z) = \frac{1}{z}$  en  $A$ .

Tomemos  $z_0 \in A$  y fijemos alguna rama del logaritmo  $T$ . Como  $F$  es única salvo una constante, elegimos esa constante de tal forma que  $F(z_0) = \ln(z_0)$ .

Por lo que tenemos que  $e^{F(z_0)} = z_0$ .

Ponemos  $g(z) = \frac{e^{F(z)}}{z}$ . Observamos inmediatamente que  $g$  es holomorfa debido a que  $0 \notin A$ .

Calculamos

$$g'(z) = \frac{z \frac{1}{z} e^{F(z)} - 1 e^{F(z)}}{z^2} = 0$$

Así llegamos a que  $g$  es constante en  $A$ . Notamos que  $g(z_0) = 1$ , por lo que  $g = 1$ . Despejando obtenemos que  $e^{F(z)} = z$ .

Para la primer parte, sea  $G$  otra antiderivada de  $\frac{1}{z}$  en  $A$  con  $e^{G(z)} = z$ . En particular tenemos que

$$e^{F(z)-G(z)} = 1$$

Fijamos  $z_0 \in A$  y de la última igualdad tendremos que  $F(z_0) - G(z_0) = 2\pi i k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

De nuevo,  $F - G$  es una función constante por lo que  $F - G = 2\pi i k$

□

En este caso podemos pensar a  $A$  como una rama del logaritmo y ponemos  $F(z) = \ln(z)$  de forma nominal para extender la definición de logaritmo.

Notemos que  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid ||z - 1|| < 1\}$  es una rama del logaritmo según nuestra nueva definición.  $A$  no es más que la bola unitaria con centro en 1; obviamente  $0 \notin A$ .

Las nuevas ramas del logaritmo que podemos definir pueden ser muy complicadas, como por ejemplo en la figura 7.

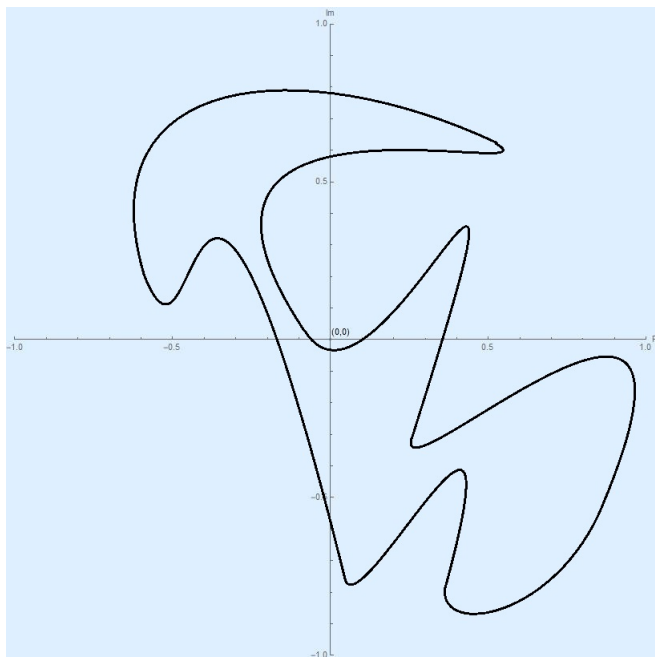


FIGURA 7. Caption

#### 4. Teorema de deformación homotópico de Cauchy

En esta sección vamos a obtener una versión del teorema de Cauchy relativa a una curva que se puede contraer". Para esto necesitamos introducir de forma precisa lo que significa la palabra contraer y más en general deformar funciones.

**DEFINICIÓN 43.** Sean  $\sigma, \tau : [0, 1] \longrightarrow X$  trayectorias entre  $x_0$  y  $x_1$ . Decimos que  $\sigma$  es homotópica a  $\tau$  (relativa a los extremos) si existe una función continua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$  tal que:

1. Para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $H(0, t) = \sigma(t)$
2. Para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $H(1, t) = \tau(t)$
3. Para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $H(s, 0) = x_0$



4. Para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $H(s, 1) = x_1$

Cuando  $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X$  son homotópicas, escribiremos  $\sigma \sim_h \tau$

NOTA 8. La idea que axiomatiza la noción de homotopía es la de curvas que se deforman continuamente, ya que si  $\sigma \sim_h \tau$ , existe  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  que cumple los axiomas de la definición. Notemos que si consideramos para cada  $s_0 \in [0, 1]$  fijo la función  $H(s_0, -) : [0, 1] \rightarrow X$  es continua y los valores en sus extremos son  $H(0, -) = \sigma$  y  $H(1, -) = \tau$ . Así estamos en la situación de la figura 8.

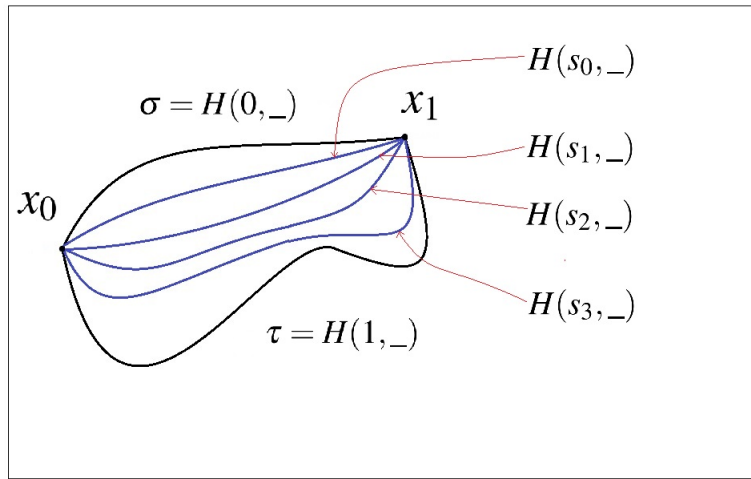


FIGURA 8. Homotopía entre  $\sigma$  y  $\tau$

OBSERVACIÓN 2. Puede suceder que se busquen homotopías entre curvas que no tengan algún extremo fijo como puede suceder con dos circunferencias concéntricas o una circunferencia dentro de la otra como en la figura 9.

En este caso también hay una noción de homotopía que no es relativa a los extremos. Esta definición es esencialmente la misma de la definición anterior sustituyendo 3 y 4 por la ecuación  $H(s, 0) = H(s, 1)$ .

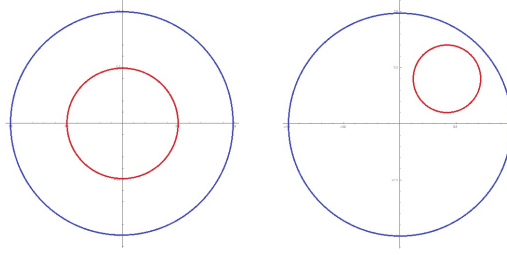


FIGURA 9.

**TEOREMA 1 (Deformación).** *Supongamos que  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en el abierto  $U$ , así como  $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow U$  curvas  $C^1$  lineales por tramos. Si  $\sigma$  y  $\tau$  son trayectorias entre  $z_0, z_1 \in U$  tales que  $\sigma \sim_h \tau$ , entonces*

$$\int_{\sigma} f(z) dz = \int_{\tau} f(z) dz$$

*Si la homotopía no es relativa a los extremos, el resultado también es cierto.*

**DEMOSTRACIÓN.** Dado que  $\sigma \sim_h \tau$ , existe  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  una homotopía entre  $\sigma$  y  $\tau$ . Tomemos particiones  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$  y  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  tales que cada rectángulo de la forma  $R_{j,k} = [s_j, s_{j+1}] \times [t_k, t_{k+1}] \subseteq [0, 1]^2$  se mapea mediante  $H$  a un disco contenido en  $U$ . Para ver que esto es posible notemos que  $H([0, 1]^2) \subseteq U$  es compacto por ser  $H$  continua y  $[0, 1]^2$  compacto y así, hay una distancia positiva,  $d$ , entre  $\mathbb{C} \setminus U$  y  $H([0, 1]^2)$ . Como  $H$  es uniformemente continua, para dicha  $d > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que siempre que  $d_{[0,1]^2}((s, t), (s', t')) = \sqrt{(s - s')^2 + (t - t')^2} < \delta$ , se tiene que

$$||H(s, t) - H(s', t')|| < \delta$$

Ahora tomemos una partición de cada intervalo en  $[0, 1]^2$  en cuadrados de lado  $\frac{1}{n}$ , con lo que estos cuadrados tienen diagonal  $\sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n}$ , así que esta diagonal es menor a  $\delta$  si  $n > \frac{\sqrt{2}}{\delta}$ . Si  $R_{j,k} = [s_j, s_{j+1}] \times [t_k, t_{k+1}]$ , al aplicar la continuidad uniforme de  $H$ , se tiene que

$$H(R_{j,k}) \subseteq B_d(H(s_j, t_k)) \subseteq U$$

Ahora denote por  $\gamma_{j,k} : [0, 1] \leftarrow U$  la curva que se obtiene de mapear el rectángulo  $R_{j,k}$  con su orientación estándar y note que se tiene la situación de la figura 10.

Note que al tomar entonces las integrales sobre  $\gamma_{j,k}$ , todas estas se cancelan en los ejes del interior de  $[0, 1]^2$  y por tanto,

$$(4) \quad \sum_{j,k=1}^n \int_{\gamma_{j,k}} f(z) dz = \int_{H(-,0)} f(z) dz + \int_{\tau} f(z) dz - \int_{H(-,1)} f(z) dz - \int_{\sigma} f(z) dz$$

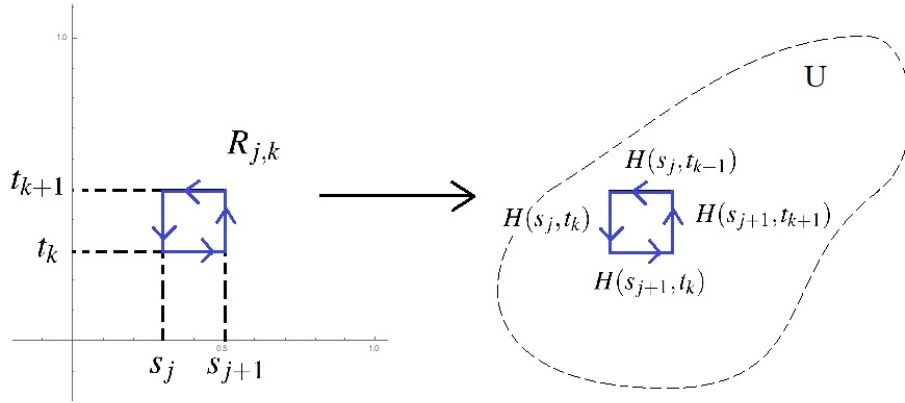


FIGURA 10.

Además, como  $\gamma_{j,k}$  es una curva contenida en un disco, cada sumando en la izquierda de la ecuación anterior es 0. Por otro lado notemos que  $H(s, 0) = z_0$  y  $H(s, 1) = z_1$ , por lo que al ser estas curvas constantes, se tiene que de la última igualdad se deduce que

$$0 = \int_{\tau} f(z) dz - \int_{\sigma} f(z) dz,$$

de donde se deduce la igualdad buscada.

Para concluir, en el caso no relativo a los extremos el resultado vale pues toda la demostración anterior funciona y solamente hay que analizar las integrales  $\int_{H(-,0)} f(z) dz$  y  $\int_{H(-,1)} f(z) dz$ , las cuales son iguales pues para cualquier  $s \in [0, 1]$ ,  $H(s, 0) = H(s, 1)$  y estas aparecen con signo contrario en la ecuación 4  $\square$

Como consecuencia del resultado anterior tenemos la versión buscada del teorema de Cauchy.

**PROPOSICIÓN 77** (Teorema de Cauchy homotópico). *Sean  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en un abierto y conexo  $U$ . Si  $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$  es homotópica a una curva constante en  $U$ , entonces*

$$\int_{\sigma} f(z) dz = 0$$

**DEMOSTRACIÓN.** Directa del teorema de Deformación, pues dado que  $\sigma \sim_h c_{z_0}$ , con  $c_{z_0} : [0, 1] \rightarrow U$  la curva constante con valor en  $z_0 \in U$ , se tiene que

$$\int_{\sigma} f(z) dz = \int_{c_{z_0}} f(z) dz =$$

$\square$

De los teoremas de deformación y homotópico de Cauchy, lo que quizás es más difícil de ver es la parte de la homotopía. En general esta es quizá la parte más complicada de verificar para su uso. Así que daremos un criterio muy útil para encontrar homotopías.

**PROPOSICIÓN 78.** Sean  $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow U$  trayectorias cerradas con  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Supongamos que para cada  $t \in [0, 1]$  el segmento de recta entre  $\sigma(t)$  y  $\tau(t)$  está contenido en  $U$ . Entonces  $\sigma \sim_h \tau$

**DEMOSTRACIÓN.** Definamos  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  mediante la regla de correspondencia  $H(s, t) = (1 - t)\sigma(s) + t\tau(s)$ .

Notemos que por la hipótesis  $H$  está bien definida y es continua pues se obtiene mediante productos y sumas de funciones continuas. Veamos que  $H$  es la homotopía buscada:

1.  $H(s, 0) = \sigma(s)$
2.  $H(s, 1) = \tau(s)$
- 3.

$$H(0, t) = (1 - t)\sigma(0) + t\tau(0)$$

$$H(1, t) = (1 - t)\sigma(1) + t\tau(1)$$

Al ser  $\sigma$  y  $\tau$  cerradas, se sigue que  $H(0, t) = H(1, t)$  □

Entre los conjuntos donde se puede aplicar el resultado anterior pues trivialmente se cumplen las hipótesis en  $U$  son:

1.  $U$  conexo (el segmento de recta entre cualesquiera dos puntos de  $U$  está contenido en  $U$ ).
2.  $U$  es estrellado (existe un punto tal que el segmento de cualquier punto de  $U$  con dicho punto está contenido en  $U$ ).

Vamos a concluir esta sección con algunos ejemplos.

**EJEMPLO 29.** Calcular  $\int_{\sigma} \frac{dz}{z}$  con  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\sigma(t) = 2\cos(2\pi t) + 5i\sin(2\pi t)$ .

**Solución:**

Notemos que  $\sigma$  parametriza una elipse pues al tomar  $x = 2\cos(t)$  y  $y = 5\sin(t)$ , se cumple que  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ , de donde notamos que se puede usar el teorema de deformación entre  $\sigma$  y  $\tau$  la circunferencia unitaria pues se cumplen las hipótesis del resultado anterior, así  $\sigma \sim_h \tau$ . Luego,

$$\int_{\sigma} \frac{dz}{z} = \int_{\tau} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

EJEMPLO 30. Calcular  $\int_{\sigma} \frac{e^z}{z} dz$ , donde  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  está dada por  $\sigma(t) = 2 + e^{2\pi it}$

**Solución:**

Notemos que  $\sigma$  parametriza el círculo de radio 1 con centro en  $2 + 0i$ . Además recordaremos que la función  $\frac{e^z}{z}$  es holomorfa fuera del origen y en  $\mathbb{C}^*$  dicha circunferencia es homotópica al punto  $2 + 0i$ . Entonces el teorema de Cauchy homotópico implica que

$$\int_{\sigma} \frac{e^z}{z} dz = 0$$

EJEMPLO 31. Calcular  $\int_{\sigma} \frac{dz}{z^2 - 1}$  donde  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  está dada por  $\sigma(t) = 1 + e^{2\pi it}$

**Solución:**

Notemos que  $\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{(z+1)(z-1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$ , entonces por la linealidad de la integral

$$\int_{\sigma} \frac{dz}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \int_{\sigma} \frac{dz}{z+1}$$

Dado que la función  $\frac{1}{z+1}$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$  y  $\sigma$  tiene su imagen en dicho conjunto y por ende es contraíble a la curva constante  $1 + 0i$ , se tiene que por el teorema homotópico de Cauchy  $\int_{\sigma} \frac{dz}{z+1} = 0$ . Por otro lado, la función  $\frac{1}{z-1}$  no es holomorfa en  $z = 1$  y  $\sigma$  rodea dicho punto. Así que un cálculo directo muestra que  $\int_{\sigma} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i$ , por lo tanto

$$\int_{\sigma} \frac{dz}{z^2 - 1} = \pi i$$

## 5. Teorema de Morera

El teorema de Morera es uno de varios casos curiosos que pasan en la variable compleja. Este teorema nos da un criterio para que una función continua sea holomorfa. Empecemos con una versión de triángulos.

PROPOSICIÓN 79 (Morera para triángulos). Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua tal que  $\int_T f(z) dz = 0$  para cualquier trayectoria triangular  $T$  en  $A$ . Entonces  $f$  es holomorfa.

DEMOSTRACIÓN. Fijamos  $w \in A$  y replicamos la construcción de la antiderivada. Nos gustaría definirla como  $F : A \rightarrow \mathbb{C}$  con  $F(z) = \int_{\gamma} f(z) dz$  donde  $\gamma$  es una curva que empieza en  $w$  y termina en  $z$ . Sabemos que existe pero notemos algo que nos diga que tenemos independencia en trayectorias. Pero ser holomorfo es una propiedad local. Así que consideremos  $F : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $F(z) = \int_{\gamma} f(z) dz$ , es decir aprovechamos que  $A$  es abierto y tomamos la bola que sabemos que cumple  $B_r(a) \subseteq A$ .

Aquí  $\gamma$  será el segmento de recta que conecta  $w$  con  $z$ . Tomemos  $z_0 \in B_r(a)$  y fijemoslo.

Tenemos que

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \end{aligned}$$

Con  $\gamma_1$  el segmento de recta que va de  $w$  a  $z_0$  y  $\gamma_2$  el segmento de recta que va de  $z_0$  a  $z$ . Esto es

$$F(z) = F(z_0) + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Entonces

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_2} f(a) da$$

Así, tenemos que

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_2} f(a) da$$

Restamos  $f(z_0)$  de la igualdad

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_2} f(a) - f(z_0) da$$

Observemos que

$$\int_{\gamma_2} f(z_0) da = f(z_0) \int_{\gamma_2} da$$

Hagamos las cuentas

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = z_0(1 - t) + zt$$

Así  $\gamma'_2(t) = z - z_0$ . Por lo que tenemos que

$$\int_{\gamma_2} da = \int_0^1 z - z_0 dat = (z - z_0) \int_0^1 dt = z - z_0$$

De donde tenemos que

$$f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_2} f(z_0) da$$

Regresando a la última igualdad,

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_2} f(a) - f(z_0) da$$

Como  $f$  es continua, entonces está acotada en  $im\gamma_2$ . Lo que implica que  $f - f(z_0)$  está acotada en  $im\gamma_2$ . A esta cota la llamamos  $M(z_0)$  y notamos que la longitud de curva de  $\gamma_2$

es  $|z - z_0|$ . Sacando la norma de la igualdad, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_2} f(a) - f(z_0) da \right| \\ &\leq \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} M(z) \\ &= M(z) \end{aligned}$$

De aquí basta ver que las cotas las podemos elegir de tal manera que  $M(z) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow z_0$  por la continuidad de  $f$ .

Por lo que cuando  $z \rightarrow z_0$  tenemos que

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| \rightarrow 0$$

Por lo tanto,  $F'(z_0) = f(z_0)$ . De aquí,  $F$  es antiderivada de  $f$ .

Como  $f$  es la derivada de una función holomorfa,  $f$  tiene que ser holomorfa.  $\square$

Notemos que la hipótesis se usa para ver que  $F$  está bien definida y para poder hacer la diferencia. Realmente este teorema de Morera tiene las hipótesis limitadas, como corolario enunciaremos el que realmente es conocido como teorema de Morera.

**COROLARIO 4 (Morera).** *Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua con  $A$  abierto que cumple que para cualquier curva  $\gamma$  cerrada  $C^1$  a trozos se tiene*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

*Entonces  $f$  es holomorfa.*

## 6. Índice y fórmulas integrales de Cauchy

**DEFINICIÓN 44.** *Sea  $\sigma$  una curva cerrada en  $\mathbb{C}$  y  $z_0 \in \mathbb{C}$  que no esté en la traza de  $\sigma$ . Definimos el índice o número de vueltas de la curva  $\sigma$  en el punto  $z_0$  como:*

$$n(\sigma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Vamos a dar algunos ejemplos que nos permitirá saber qué mide el número de vueltas y así justificar este nombre.

**EJEMPLO 32.** *Consideremos  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  la curva definida por  $\sigma(t) = z_0 + e^{2\pi n i t}$  con  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Note que si  $n > 0$ ,  $\sigma$  da  $n$ -vueltas a  $\mathbb{S}^1$  en sentido contrario a las manecillas del reloj y si  $n < 0$ ,  $\sigma$  da  $n$ -vueltas a  $\mathbb{S}^1$  en sentido de las manecillas del reloj. Vamos a*

calcular  $n(\sigma; z_0)$ . Entonces de la definición

$$\begin{aligned} n(\sigma; z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 e^{-2\pi n i t} e^{2\pi n i t} (2\pi n i) dt \\ &= n \end{aligned}$$

Entonces el número de vueltas mide de verdad cuantas vueltas da una curva al punto en cuestión y no sólo eso, dice en que dirección lo hace. Para completar este argumento, notemos que en un círculo que no encierra a  $z_0$ , se tiene que  $n(\sigma; z_0) = 0$  y que además el resultado en general tiene su justificación en el teorema de deformación. Vamos a pasar a estudiar las propiedades del número de vueltas.

**PROPOSICIÓN 80.** Si  $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow U$  son trayectorias de clase  $C^1$  con  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $z_0 \in U$  es un punto que no pertenece a la unión de las trazas de  $\sigma$  y  $\tau$ , entonces

$$n(\sigma * \tau; z_0) = n(\sigma; z_0) + n(\tau; z_0)$$

**DEMOSTRACIÓN.** Es un cálculo directo pues

$$\begin{aligned} n(\sigma * \tau; z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma * \tau} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 f((\sigma * \tau)(t)) (\sigma * \tau)'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_0^{\frac{1}{2}} f(\sigma(2t)) (\sigma(2t))' dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\tau(2t-1)) (\tau(2t-1))' dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_0^1 f(\sigma(t)) \sigma'(t) dt + \int_0^1 f(\tau(t)) \tau'(t) dt \right] \\ &= n(\sigma; z_0) + n(\tau; z_0) \end{aligned}$$

□

Una segunda propiedad que es quizá menos intuitiva pero muy interesante, se muestra en el siguiente resultado.

**PROPOSICIÓN 81.** Si  $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$  es una curva  $C^1$  con  $U \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $z_0 \in U$  tal que  $z_0$  no pertenece a la traza de  $\sigma$ , entonces

$$n(\sigma; z_0) \in \mathbb{Z}$$

**DEMOSTRACIÓN.** Vamos a probar que  $e^{2\pi i n(\sigma; z_0)} = 1$ . Para esto consideraremos  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  la función definida por  $f(t) := \int_0^t \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - z_0} ds$ . Note que en los puntos en los que el integrando es continuo, el teorema fundamental del cálculo implica que

$$f'(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t) - z_0}$$



Esto implica que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( e^{-f(t)} (\sigma(t) - z_0) \right) &= e^{-f(t)} (-f'(t)) (\sigma(t) - z_0) + e^{-f(t)} \sigma'(t) \\ &= e^{-f(t)} [-\sigma'(t) + \sigma'(t)] = 0,\end{aligned}$$

en los puntos donde  $f'$  existe. Esto dice que  $e^{-f(t)} (\sigma(t) - z_0)$  es constante pues esta función es continua. Al evaluar en los extremos:

$$e^{-f(0)} (\sigma(0) - z_0) = e^{-f(1)} (\sigma(1) - z_0)$$

Como  $z_0$  no pertenece a la traza de  $\sigma$ , entonces

$$e^{-f(0)} = e^{-f(1)}$$

Pero  $f(0) = 0$ , entonces lo anterior dice que

$$1 = e^{-f(1)} = e^{-\int_{\sigma} \frac{dz}{z-z_0}} = e^{-2\pi i n(\sigma; z_0)},$$

de lo que se deduce el resultado.  $\square$

Una propiedad más se encuentra en los ejercicios (ver ejercicio ??).

En este momento contamos con todos los ingredientes para enunciar y denotar uno de los teoremas fundamentales del Análisis Complejo.

**TEOREMA 2 (Fórmula Integral de Cauchy).** *Sea  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa con  $U$  un abierto y conexo. Si  $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$  es un lazo homotópico a un lazo constante y  $z_0 \in U$  que no pertenece a la traza de  $\sigma$ , entonces*

$$f(z_0) \cdot n(\sigma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

**DEMOSTRACIÓN.** Definamos la función  $g : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que tiene por regla de correspondencia:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0), & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Notemos que esta función es holomorfa en  $U \setminus \{z_0\}$  y es continua en todo  $U$ . Entonces el Teorema de Cauchy con una singularidad implica que

$$\int_{\sigma} g(z) dz = 0$$

Ahora analicemos esta última integral, pues

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} g(z) dz &= \int_{\sigma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\sigma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\sigma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= \int_{\sigma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{\sigma} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int_{\sigma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \cdot 2\pi i \cdot n(\sigma; z_0)\end{aligned}$$

De esto se deduce el resultado.  $\square$

NOTA 9. *Haciendo un análisis detallado de la fórmula anterior podemos llegar a una interesante conclusión pues esta dice que los valores de una función holomorfa están determinados por lo que sucede en la frontera de una curva, es decir, el teorema es una especie de propiedad "promedio" pero donde los valores se toman sobre una curva. En el siguiente capítulo formalizaremos esto.*

OBSERVACIÓN 3. *Es común encontrarse en los libros de texto la fórmula de Cauchy para una curva simple  $\sigma$ , en cuyo caso esta toma la forma:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

A continuación vamos a tratar algunos usos prácticos de la fórmula integral de Cauchy para ver el poder de esta en cuestión de cálculos.

EJEMPLO 33. *Calcular  $\int_{\sigma} \frac{\operatorname{sen}(e^z)}{z} dz$  con  $\sigma$  el círculo unitario.*

**Solución:**

Dado que la función  $f(z) := \operatorname{sen}(e^z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es entera, notemos que  $\sigma$  es homotópica al origen en  $\mathbb{C}$ . Entonces podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy, lo cual nos dice que

$$f(0) \cdot n(\sigma; 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{z} dz$$

Notemos que en este caso  $\sigma$  es una curva simple, entonces  $n(\sigma; 0) = 1$ . Además  $f(0) = \operatorname{sen}(e^z) = \operatorname{sen}(1) = \frac{e^i - e^{-i}}{2i}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} \frac{\operatorname{sen}(e^z)}{z} dz &= 2\pi i \left( \frac{e^i - e^{-i}}{2i} \right) \\ &= \pi(e^i - e^{-i})\end{aligned}$$

EJEMPLO 34. *Calcular  $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + z + 1}$*

**Solución:**

La idea es usar la fórmula integral de Cauchy. Para esto notemos que si  $z^2 + z + 1 = 0$ , entonces  $z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  y  $z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ . Observemos que  $|z_1| = |z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ , por lo que  $z_1$  y  $z_2$  están en la región que acota la curva  $|z| = 2$ .

Además,  $\frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{z_1-z_2} \left( \frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2} \right)$   
 Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+z+1} &= \frac{1}{z_1-z_2} \left( \int_{|z|=2} \frac{dz}{z-z_1} - \int_{|z|=2} \frac{dz}{z-z_2} \right) \\ &= \frac{1}{z_1-z_2} (1 \cdot 2\pi i - 1 \cdot 2\pi i) = 0 \end{aligned}$$

Para concluir esta sección vamos a ver que la fórmula integral de Cauchy tiene una generalización para el cálculo de derivadas. El detalle aquí es que si pensamos esto sin mucho cuidado, el que  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$  con  $\sigma$  una curva simple, nos gustaría decir que  $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{f(z)}{z-z_0} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$ , pero aunque esta fórmula parece plausible hay un detalle: ¿Cómo justificamos que la derivada y la integral conmutan?

Si uno recuerda sus cursos básicos de cálculo, la derivada es un límite y lo que estamos haciendo es conmutando un límite con una integral, cosa que sabemos es muy delicada. Así, aunque la esencia de como se obtienen las fórmulas para las derivadas de  $f$  es el argumento intuitivo que dimos, hay que justificarla. Para esto necesitaremos el siguiente resultado.

**LEMA 2.** Sea  $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$  una curva y  $f$  una función definida en  $\sigma([0, 1])$  que es acotada e integrable. Definimos la función  $F : \mathbb{C} \setminus \sigma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$  mediante

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Entonces  $F$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \sigma([0, 1])$  y la derivada de  $F$  está dada por:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

**DEMOSTRACIÓN.** Dado que  $\sigma([0, 1])$  es compacto y  $z_0 \notin \sigma([0, 1])$ , entonces existe una distancia  $\delta > 0$  entre  $\sigma([0, 1])$  y  $\{z_0\}$ . Tomemos  $\varepsilon := \frac{\delta}{2}$  y consideremos  $B_{\varepsilon}(z_0)$ . Entonces, si  $z \in B_{\varepsilon}(z_0)$  y  $\zeta$  está en  $\sigma$ , sucede que  $|z - \zeta| \geq |\zeta - z_0| - |z_0 - z| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$ . Por otro lado, queremos demostrar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right] = 0$$

Para esto analizaremos la función a la que queremos sacar el límite:

$$\begin{aligned}
 \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0} \int_{\sigma} \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right) d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)(z - z_0)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\sigma} \left( \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} \right) d\zeta \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)(z - z_0)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} d\zeta \\
 &= \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} d\zeta
 \end{aligned}$$

Ahora consideremos  $M$  la cota de  $f$  en  $\sigma$ . Notemos que  $|(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)| \geq \varepsilon^2 \cdot \varepsilon = \varepsilon^3$ , entonces tenemos que

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} \right| = \frac{|f(\zeta)|}{|(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)|} \leq \frac{M}{\varepsilon^3}$$

Entonces por el cálculo anterior

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} d\zeta \right| &\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \int_{\sigma} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} \right| d\zeta \\
 &\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \frac{M}{\varepsilon^3} \ell(\sigma)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| \leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \frac{M}{\varepsilon^3} \ell(\sigma)$$

De esto se deduce que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right] = 0$$

□

De este lema se sigue el resultado que buscamos.

**PROPOSICIÓN 82** (Fórmula Integral de Cauchy para derivadas). *Si  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa con  $U$  un abierto y conexo, entonces todas las derivadas de  $f$  existen en  $U$ . Más aún, para  $z_0 \in U$  y  $\sigma$  un lazo homotópico a un punto en  $U$  en el que  $z_0$  no pertenece a la traza de  $\sigma$ , se tiene que para  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$f^{(k)}(z_0) n(\sigma; z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba es por inducción generalizada sobre  $k$ .

Base:  $k = 0$ . Este resultado es la fórmula integral de Cauchy.

Supongamos que el resultado vale para todas las funciones que cumplen las hipótesis y

$$j < k. \text{ En particular } f^{(j)} \text{ existe y } f^{(j)}(z_0)n(\sigma; z_0) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{j+1}} dz$$

Al tomar la función

$$\frac{f^{(k-1)}(z) - f^{(k-1)}(z_0)}{z - z_0} n(\sigma; z_0) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0} \left[ \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k} d\zeta - \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta \right]$$

Notemos que  $\frac{1}{(\zeta - z)^k} = \frac{1}{(\zeta - z)^{k-1}(\zeta - z_0)} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z)^k(\zeta - z_0)}$ , entonces la expresión anterior es igual

a

$$\begin{aligned} & \frac{(k-1)!}{2\pi i} \left[ \frac{1}{z - z_0} \int_{\sigma} \left( \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k-1}(\zeta - z_0)} + \frac{f(\zeta)(z - z_0)}{(\zeta - z)^k(\zeta - z_0)} \right) d\zeta - \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta \right] = \dots \\ & \dots = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \left[ \frac{1}{z - z_0} \left( \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k-1}(\zeta - z_0)} d\zeta - \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta \right) + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k(\zeta - z_0)} d\zeta \right] \end{aligned}$$

Al aplicar la hipótesis de inducción a  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$  con  $F(z) = \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}$ , tenemos que

$$F^{(k-1)}(z_0) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F^{(k-1)}(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F^{(k-2)}(z) - F^{(k-2)}(z_0)}{z - z_0} = \dots \\ &= \frac{(k-2)!}{2\pi i} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{1}{z - z_0} \int_{\sigma} \left( \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k-1}(\zeta - z_0)} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} \right) d\zeta \right] \end{aligned}$$

De esto se deduce que

$$\begin{aligned} (\star) \dots \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{1}{z - z_0} \int_{\sigma} \left( \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k-1}(\zeta - z_0)} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} \right) d\zeta \right] &= \frac{2\pi i}{(k-2)!} F^{(k-1)}(z_0) \\ &= (k-1) \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \end{aligned}$$

Por otro lado, analizaremos  $\int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k} (\zeta - z_0) d\zeta$  cuando  $z \rightarrow z_0$ . Para esto notamos que

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k} d\zeta - \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta &= \int_{\sigma} \left( \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k-1}(\zeta - z_0)} + \frac{f(\zeta)(z - z_0)}{(\zeta - z)^k(\zeta - z_0)} \right) d\zeta - \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta \\ &= \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k-1}(\zeta - z_0)} d\zeta - \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta + (z - z_0) \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k(\zeta - z_0)} d\zeta \end{aligned}$$

Usando nuevamente la hipótesis inducción y como vimos antes  $\int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k-1}(\zeta - z_0)} d\zeta$  es

holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \sigma([0, 1])$  y por lo tanto es continua.

Entonces

$$\left| \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k (\zeta - z_0)} d\zeta \right| \leq \int_{\sigma} \frac{|f(\zeta)|}{|(\zeta - z)^k| |\zeta - z_0|} d\zeta \leq \frac{M}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k+1}} \ell(\sigma)$$

Entonces

$$\left| (z - z_0) \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k (\zeta - z_0)} d\zeta \right| \leq |z - z_0| \frac{M}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k+1}} \ell(\sigma) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

De esto se deduce que

$$(\star\star) \cdots \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k} d\zeta - \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta \right) = 0$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (??) y (??) se deduce que:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{f^{(k-1)}(z) - f^{(k-1)}(z_0)}{z - z_0} n(\sigma; z_0) \right) &= \frac{(k-1)(k-1)!}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta + \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \end{aligned}$$

Entonces  $f^{k-1}(z)n(\sigma; z_0)$  tiene derivada y está dada por:

$$\frac{dt}{dt} \left( f^{(k-1)}(z)n(\sigma; z_0) \right)_{t=t_0} = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

Note que como  $n(\sigma; z_0) \in \mathbb{Z}$  el lado derecho se puede reescribir para obtener la fórmula buscada.

Tal y como sucedió con la fórmula integral de Cauchy estas fórmulas se pueden usar para calcular integrales de forma explícita. En lo que respecta a las aplicaciones teóricas, estas serán discutidas en el siguiente capítulo. Por el momento note que este resultado da una propiedad que cumplen las funciones diferenciables complejas que no cumplen las funciones diferenciales reales, ya que para estas últimas no es cierto que una función diferenciable sea n-veces diferenciable con n cualquier natural.  $\square$

### 7. Ejercicios del capítulo

EJERCICIO 92. Sea  $f : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $U$  que es abierto y conexo. Si  $f'$  es continua en  $U$  y  $T \subseteq U$  es un triángulo, usar el teorema de Stokes para demostrar que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

EJERCICIO 93. 1. Demuestra que  $\int_0^{\infty} e^{-(1+ia)^2 t^2} dt = \frac{1}{2(1+ia)} \sqrt{\pi}$  usando  $\int_{\gamma} e^{-z^2} dz$  con  $\gamma$  la curva de la figura siguiente:  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$

FIGURA SIG.

2. Usar el inciso anterior para deducir las integrales de Fresnel:

$$\int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

EJERCICIO 94. Demuestre que la relación  $\sim_n \subseteq \left(X^{[0,1]}\right)^2$  es de equivalencia

EJERCICIO 95. Sean  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $z_1, \dots, z_n \in U$ . Si  $f : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en  $U \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ , continua en  $z_1, \dots, z_n \in T$  con  $T \subseteq U$  un triángulo, entonces

$$\int_{\partial T} f(z) dt = 0$$





## Teoremas Clásicos

“No se pueden aplicar las matemáticas mientras las palabras oscurezcan la realidad..”

**Hermann Weyl.**

En este capítulo discutiremos las implicaciones teóricas que tienen los teoremas de integración estudiados en el capítulo anterior, los cuales nos darán interesantes propiedades que cumplen las funciones holomorfas y que no tienen análogo en el análisis real. Ahora veremos que la herramienta técnica que se desarrollo nos dice mucha información.

### 1. Teorema de Liouville

Recordemos la estimación de Cauchy.

PROPOSICIÓN 83. Sea  $f : B_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa con  $a \in \mathbb{C}$  y  $R > 0$ . Si  $|f| \leq M$ , entonces

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}$$

PROPOSICIÓN 84. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera, entonces cualquier serie de potencias de  $f$  converge en todas partes.

DEMOSTRACIÓN. Usando el teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(n)}(w)}{n!} \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^{(n)}(w+z)}{n!z} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w+z)}{z^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{M}{R^n} \end{aligned}$$

donde  $\gamma(t) = Re^{it} + w$ , con  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $M = \max_{z \in B_R(w)} |f(z)|$ .

Así el radio de convergencia de  $f$  alrededor de  $w$  es  $R$ , pero  $R$  la podemos elegir tan grande como queramos.  $\square$

PROPOSICIÓN 85 (Liouville). Si  $f$  es una función entera acotada entonces  $f$  es constante

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| < M$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ . Consideremos la estimación de Cauchy para la primera derivada;

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$$

Pero  $R$  es arbitraria. Si la consideramos muy grande, tendremos que  $f'(z) = 0$ . Así como el dominio de  $f$  es conexo tendremos que  $f$  es constante.  $\square$

COROLARIO 5 (Teorema Fundamental del Álgebra). Sea  $p \in \mathbb{C}[x]$ . Si  $p$  no es constante entonces existe  $a \in \mathbb{C}$ ,  $p(a) = 0$

DEMOSTRACIÓN. Si  $p(z) \neq 0$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $f(z) = \frac{1}{p(z)}$  está bien definida en  $\mathbb{C}$  y es entera. Analizando un poco más  $p$ , como  $p$  es continua entonces  $|p|$  es continua. Ahora bien como  $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$ , entonces existe  $M > 0$  tal que  $M < |p|$ . De aquí que  $|f| < \frac{1}{M}$ . De donde  $f$  es constante y  $p$  es constante. Lo cual es una contradicción.  $\square$

COROLARIO 6. Sea  $p \in \mathbb{C}$  con  $\partial p = m$ . Entonces existen  $a_1, \dots, a_m, c \in \mathbb{C}$  y  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$  tales que

$$p(z) = c \prod_{i=1}^m (z - a_i)^{k_i}$$

COROLARIO 7. Sea  $p \in \mathbb{C}$  con  $\partial p \geq 1$ . Entonces  $p$  es suprayectiva.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $a \in \mathbb{C}$ , entonces  $\partial(p - a) \geq 1$ . Así por el Teorema Fundamental del Álgebra, existe  $b \in \mathbb{C}$  tal que  $(p - a)(b) = 0$ , lo que quiere decir que  $p(b) = a$   $\square$

Otra consecuencia del Teorema de Liouville, es que no existe dominación entre funciones enteras.

COROLARIO 8. Sean  $f, g$  enteras. Si  $|f| \neq |g|$ , entonces existe  $a \in \mathbb{C}$ ,  $f = ag$

DEMOSTRACIÓN. Si  $g = 0$ , entonces  $f = 0$ .

Supongamos que  $g \neq 0$  y definamos  $h = \frac{f}{g}$ , de primera instancia esta no tiene por que estar definida en todo  $\mathbb{C}$ . Pero notemos que si  $g(z) = 0$  entonces  $f(z) = 0$

Por lo que definimos  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{g(z)}, & \text{si } g(z) \neq 0 \\ \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w)}{g(w)} & \text{si } g(z) = 0 \end{cases}$$

El límite existe por la condición  $|f| \leq |g|$ . Más aún  $h$  es entera y  $|h| \leq 1$ . Por lo que  $h$  tiene que ser constante, es decir,  $h = a$  para alguna  $a \in \mathbb{C}$ , y así  $f = ag$   $\square$

Continuamos con las consecuencias del Teorema de Liouville.

**COROLARIO 9.** *Sea  $f$  entera tal que existe  $M > 0$  con  $|f(z)| \leq M|z|$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ . Entonces existen  $a, b \in \mathbb{C}$  tales que  $f(z) = az + b$*

**DEMOSTRACIÓN.** Usemos la derivada de Cauchy para la primera derivada

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

con  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma(t) = re^{it}$ . Calculando la norma tenemos

$$\begin{aligned} |f'(a)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(z)|}{|z-a|^2} dz \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{M|z|}{|z-a|^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} M \int_{\gamma} \frac{|z|}{|z-a|^2} dz \end{aligned}$$

El valor de  $\int_{\gamma} \frac{|z|}{|z-a|^2} dz$  no depende de  $a$ , así que pondremos un valor de  $I$ . Por lo cual

$$|f'(a)| \leq \frac{MI}{2\pi}$$

De aquí  $f'$  es una función entera acotada. Así  $f'$  es constante. Su antiderivada es lineal, y  $f$  es una antiderivada. Por lo que  $f$  debe diferir en una constante de una lineal, pero esto dice que  $f$  es lineal □

**COROLARIO 10.** *Sea  $f$  entera. Entonces  $Im(f)$  es densa en  $\mathbb{C}$  o  $f$  es una constante.*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $f$  es constante ya terminamos.

Supongamos que  $f$  no es constante. Si la  $Im(f)$  no es densa, entonces existe  $a \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$  tal que  $B_r(a) \cap Im(f) = \emptyset$ . Definamos la función  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

Notemos que como  $B_r(a) \cap Im(f) = \emptyset$ ,  $f(z) - a \neq 0$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ . Más aún  $|f(z) - a| > r$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ , por lo cual  $|g| < \frac{1}{r}$ . Ahora bien, como  $g$  es entera y acotada, entonces  $g$  es constante. Despejando,  $f$  es constante, lo cual es una contradicción. □

## 2. El teorema del módulo máximo para funciones holomorfas y armónicas

El primero resultado a tratar se conoce como el principio del módulo máximo. Básicamente este teorema dice que una función holomorfa en un abierto y conexo solamente puede alcanzar su valor máximo en norma en la frontera. Este teorema puede no sonar tan raro si pensamos en la fórmula integral de Cauchy para una curva simple pues el valor  $f(z_0)$  depende de los valores de la frontera de una curva que rodea dicho punto. En cualquier caso este resultado claramente no tiene un análogo en el caso real y para establecerlo requerimos de una versión local de este.

**PROPOSICIÓN 86** (Versión local del principio del módulo máximo). *Sea  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa con  $U$  un abierto y conexo y supongamos que existe  $z_0 \in U$  para el cual existe  $z_0 \in V \subseteq U$  una vecindad tal que para cualquier  $z \in V$ ,  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ . Entonces  $f$  es constante en una vecindad de  $z_0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** De acuerdo a la hipótesis debe existir  $\varepsilon > 0$  tal que  $f$  tiene un máximo en  $z_0$  para su norma en  $B_\varepsilon(z_0)$ . Afirmamos que para cualquier  $z \in B_\varepsilon(z_0)$ ,  $|f(z)| = |f(z_0)|$ . Para ver esto argumentamos por contradicción pues si existiera  $z_1 \in B_\varepsilon(z_0)$  tal que  $|f(z_1)| < |f(z_0)|$  podemos considerar  $r < 0$  tal que  $z_1 = z_0 + re^{i\theta_0}$  tal y como lo muestra la figura 1

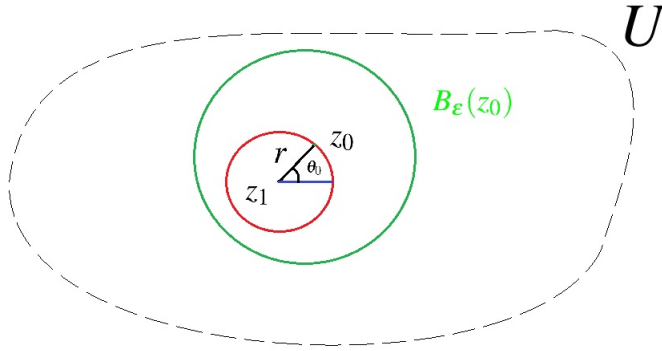


FIGURA 1.

Note que trivialmente  $r < \varepsilon$ . Como  $f$  es en particular continua en  $U$ , existen  $\varepsilon_0 > 0$  y  $\delta = \delta(\varepsilon_0) > 0$  tales que si  $|\theta - \theta_0| < \delta$ , entonces  $|f(z_0 + re^{i\theta})| < |f(z_0)| - \varepsilon_0$ .

Por otro lado, al considerar la fórmula integral de Cauchy tenemos que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Al tomar  $\sigma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\sigma(t) = z_0 + \varepsilon e^{i(\theta_0+t)}$  y usar esta parametrización en la fórmula integral de Cauchy se tiene que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i(\theta_0+t)}) dt$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i(\theta_0+t)}) dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{-\delta} f(z_0 + \varepsilon e^{i(\theta_0+t)}) dt + \int_{-\delta}^{\delta} f(z_0 + \varepsilon e^{i(\theta_0+t)}) dt + \int_{\delta}^{\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i(\theta_0+t)}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\delta} |f(z_0 + \varepsilon e^{i(\theta_0+t)})| dt + \int_{-\delta}^{\delta} |f(z_0 + \varepsilon e^{i(\theta_0+t)})| dt + \int_{\delta}^{\pi} |f(z_0 + \varepsilon e^{i(\theta_0+t)})| dt \right] \end{aligned}$$

Dado que  $|f(z_0)|$  es máximo local, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(z_0 + \varepsilon e^{i(\theta_0+t)})| dt &\leq |f(z_0)|(\pi - \delta) \\ \int_{\delta}^{\pi} |f(z_0 + \varepsilon e^{i(\theta_0+t)})| dt &\leq |f(z_0)|(\pi - \delta) \end{aligned}$$

Además como  $|(\theta_0 + t) - \theta_0| = |t|$ , si  $t \in [-\delta, \delta]$ , entonces  $|(\theta_0 + t) - \theta_0| < \delta$ . Por lo tanto

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(z_0 + \varepsilon e^{i(\theta_0+t)})| dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} (|f(z_0)| - \varepsilon_0) dt = 2\delta(|f(z_0)| - \varepsilon_0)$$

De todo esto se deduce que

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} [2|f(z_0)|(\pi - \delta) + 2\delta(|f(z_0)| - \varepsilon_0)] \\ &= |f(z_0)| - \frac{\delta \varepsilon_0}{\pi} \end{aligned}$$

lo cual es imposible; por lo que la demostración de la afirmación se ha concluido.

Para terminar, como  $|f|$  es constante en  $B_\varepsilon(z_0)$ , notemos que en dicha vecindad se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} |f|^2 = \frac{\partial}{\partial y} |f|^2 = 0$$

Esto nos lleva al par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f) \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} + \operatorname{Im}(f) \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} &= 0 \\ \operatorname{Re}(f) \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} + \operatorname{Im}(f) \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

que al usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann nos llevan al sistema de ecuaciones con incógnitas  $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y}$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(f) \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} - \operatorname{Im}(f) \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = 0 \\ \operatorname{Im}(f) \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} + \operatorname{Re}(f) \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Como el determinante del sistema es  $|f|^2$ , hay dos casos, si este es cero  $f = 0$ . Si no  $|f|^2 \neq 0$  entonces el sistema anterior tiene una única solución la cual es  $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} = 0$ . Esto implica que

$$f'(z) = \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}(z) + i \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y}(z) = 0$$

para  $z \in B_\varepsilon(z_0)$  y por lo tanto  $f$  es constante □

NOTA 10. En la demostración del resultado anterior se usaron dos resultados generales:

1. Para una función  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa, si  $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow U$  parametriza un círculo de radio  $r$  centrado en  $z_0$ , entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

A este resultado se le conoce como la propiedad del promedio y esta da sentido a por qué dijimos en el capítulo anterior que la fórmula integral de Cauchy tenía que ver con un promedio.

2. Al final de la demostración se vio que si  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y  $|f|$  es constante, entonces  $f$  es constante. Note que este resultado es general.

El siguiente resultado a tratar es la versión global del principio del módulo máximo.

PROPOSICIÓN 87 (Versión global del principio del módulo máximo). Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto abierto, conexo y acotado, así como  $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua que es holomorfa en  $U$ . Entonces  $|f| : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un valor máximo en  $U$ . Más aún, si dicho máximo se encuentra en  $U$ , entonces  $f$  debe ser constante.

DEMOSTRACIÓN. Al considerar la función  $|f| : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $\overline{U}$  cerrado y acotado, por lo tanto compacto, entonces  $|f| : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un máximo. Lo que vamos a probar es que si dicho máximo existe en  $U$ , entonces  $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$  es constante. Además note que si demostramos esto, se tiene la conclusión de este resultado. Para esto suponemos que  $z_0 \in U$  es tal que  $|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{U}} |f(z)|$ . Consideremos entonces los conjuntos  $V = \{z \in U \mid f(z) = f(z_0)\}$  y  $W = U \setminus \overline{V}$ . Afirmamos que  $U \subseteq V \cup W$ . Para

probar esto notemos que si  $z \in U \setminus W$ , entonces  $z \in \overline{V}$ , lo que dice que existe  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq V$  una sucesión tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z$ . Dado que  $f$  es continua en  $U$  entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = f(z)$  y como  $f(z_k) = f(z_0)$ , entonces  $f(z_0) = f(z)$ , lo que dice que  $z \in V$  y muestra la afirmación. Por otro lado notemos que  $V \cap W = V \cap U \setminus \overline{V} \subseteq V \cap (U \setminus V) = \emptyset$ , lo que implica que  $V \cap W = \emptyset$ .

Nuestra siguiente afirmación es que  $V, W \subseteq \mathbb{C}$  son abiertos. En efecto, en el caso de  $W$  es claro pues  $\overline{V}$  es cerrado y así  $\mathbb{C} \setminus \overline{V}$  es abierto. Como  $W = U \setminus \overline{V} = U \cap \mathbb{C} \setminus \overline{V}$ , tenemos la conclusión en este caso. Por otro lado, para el caso de  $V$  procederemos por definición, así que dado  $z_1 \in V$ , como  $f(z_1) = f(z_0) = \max_{z \in \overline{U}} |f(z)|$ , entonces la versión local del principio del módulo máximo implica que existen  $\delta > 0$  tal que  $z_1$  es máximo de  $|f|$  en  $B_\delta(z_1)$ . Entonces estamos en la situación de la figura 2

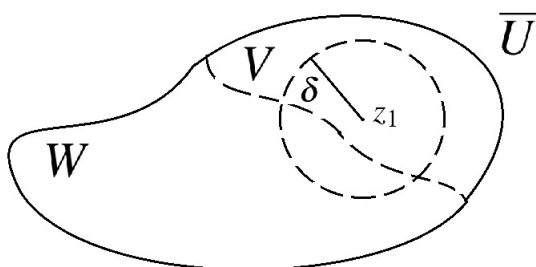


FIGURA 2.

Note que de ser necesario podemos tomar  $\delta' < \delta$  tal que  $B_{\delta'}(z_1) \subseteq V$  y como  $B_{\delta'}(z_1) \subseteq B_\delta(z_1)$ , entonces  $|f|$  tiene por máximo a  $z_1$  en  $B_{\delta'}(z_1)$ , lo que implica que  $V$  es abierto. De todo esto se deduce que  $U = V \cup W$  y  $V$  y  $W$  son abiertos y ajenos, por lo que al ser  $U$  conexo,  $V = \emptyset$  ó  $W = \emptyset$ , lo que implica que  $V = U$  y prueba el resultado pues  $f$  es constante con valor  $f(z_0)$  □

**OBSERVACIÓN 4.** *Como es de esperarse hay un principio del módulo mínimo local y global para funciones holomorfas. Estos se encuentran en los ejercicios del capítulo.*

La siguiente meta es obtener un resultado que impone interesantes restricciones a las funciones holomorfas en discos. Si bien este no será fundamental en el curso, tiene un

trasfondo geométrico interesante y es una de las aplicaciones básicas del principio del módulo máximo.

**LEMA 3 (de Schwarz).** *Si  $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  es una función holomorfa y  $f(0) = 0$ , entonces  $|f'(0)| \leq 1$  y para cualquier  $z \in B_1(0)$ ,  $|f(z)| \leq |z|$ . Más aún, si  $|f'(0)| = 1$  o existe  $z_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$ , tal que  $|f(z_0)| = |z_0|$ , entonces existe  $w_0 \in \mathbb{C}$  con  $|w_0| = 1$  tal que para cualquier  $z \in B_1(0)$ ,  $f(z) = w_0 z$*

**DEMOSTRACIÓN.** Definamos  $g : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  con regla de correspondencia

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0), & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Notemos que  $g$  es holomorfa en  $B_1(0)$  pues en  $B_1(0) \setminus \{0\}$  lo es y es continua en todo su dominio, luego el Teorema de Morera implica la afirmación.

Notemos que si  $r \in (0, 1)$ , entonces  $g|_{\overline{B_r(0)}} : \overline{B_r(0)} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y si  $z \in \partial B_r(0)$ , entonces  $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$ , por lo que el principio del módulo máximo implica que

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| \leq \frac{1}{r}$$

Al hacer tender  $r \rightarrow 1$ , la desigualdad anterior implica que  $|f(z)| \leq |z|$  para  $z \in B_1(0) \setminus \{0\}$ , aunque para  $z = 0$  esto también vale pues  $f(0) = 0$ . Además, como  $|g(z)| \leq 1$ , al tomar  $z \rightarrow 0$ , esto implica que  $|f'(0)| \leq 1$

Respecto a la segunda conclusión note que si  $|f'(0)| = 1$  o  $|f(z_0)| = |z_0|$  para  $z_0 \in B_1(0)$ , entonces  $|g(0)| = 1$  o  $|g(z_0)| = 1$  según sea el caso. Como  $|g(z)| \leq 1$ , el principio del módulo máximo implica que  $g$  es constante en  $B_1(0)$ , es decir, existe  $w_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $g(z) = w_0$ , es decir  $f(z) = w_0 z$  para  $z \in B_1(0)$ .

Como  $|f(z)| = |w_0||z|$ , entonces  $|w_0| = 1$ , lo que prueba la segunda afirmación.  $\square$

**OBSERVACIÓN 5.** *Como primera conclusión geométrica del Lema de Schwarz notemos que si  $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  es holomorfa, fija al origen y se cumple una de las siguientes condiciones:*

1.  $|f'(0)| = 1$

2. Existe  $z_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$  tal que  $|f(z_0)| = |z_0|$



Entonces  $f$  es una rotación.

Otras consecuencias geométricas se encuentran en los ejercicios.

Para concluir esta sección vamos a hacer una discusión del principio del módulo máximo para funciones armónicas. Recordemos que en el capítulo 2 se probó que para una función holomorfa su parte real e imaginaria son funciones armónicas. Vamos a mostrar que el resultado recíproco es cierto.

**PROPOSICIÓN 88.** *Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y conexo y  $u : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  con derivadas continuas y armónica. Entonces  $u$  es de clase  $C^\infty$  y dado  $z_0 \in U$ , existe una vecindad de dicho punto donde  $u = \operatorname{Re}(f)$  para  $f : V \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Más aún, si  $U$  es simplemente conexo, el resultado vale en todo  $U$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Probaremos primero el segundo resultado así supongamos que  $U$  es simplemente conexo. Consideremos entonces la función  $g : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $g(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z)$ . Para esto hay que ver que las parciales  $\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}$  tienen derivadas parciales continuas y que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Pero dado que  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  y  $\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  son continuas por hipótesis, se tiene el primer resultado. Además las ecuaciones de Cauchy-Riemann son en este caso:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Por lo que la primera igualdad se cumple por ser  $u$  armónica y la segunda por ser de clase  $C^2$ .

De esto se deduce entonces que  $g : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa. Ahora dad que  $U$  es simplemente conexo, por el teorema de la antiderivada existe  $F : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $g = f'$ . Note que como  $f' = \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} - i \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y}$ , entonces  $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$ , por lo que  $\operatorname{Re}(f) = u + \lambda$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Así al tomar  $f - \lambda : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , esta función holomorfa cumple que  $\operatorname{Re}(f - \lambda) = u$ , lo que concluye la prueba en este caso.

En lo que respecta a la primera afirmación, dado  $z_0 \in U$ , al ser  $U$  abierto existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(z_0) \subseteq U$ . Como  $B_\varepsilon(z_0)$  es simplemente conexo, podemos aplicar lo que demostramos para obtener el resultado. Respecto a la propiedad de ser  $C^\infty$ , esto se deduce de que  $f$  es  $C^\infty$ .  $\square$

**COROLARIO 11.** *Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y conexo y  $u : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  con derivadas continuas y armónica. Entonces  $u$  es de clase  $C^\infty$  y dado  $z_0 \in U$ ,*

existe una vecindad de dicho punto donde  $u = \operatorname{Re}(f)$  para  $f : V \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Más aún, si  $U$  es simplemente conexo, el resultado vale en todo  $U$ .

DEMOSTRACIÓN. Es claro del anterior pues si para  $u : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  satisface que  $\operatorname{Re}(f) = u$  ya sea para el caso local o global, entonces  $if : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  satisface que  $\operatorname{Im}(if) = \operatorname{Re}(f) = u$   $\square$

Como consecuencia del resultado anterior el principio del módulo máximo se va a cumplir para funciones armónicas. Vamos a ver cómo sucede esto con la versión local.

PROPOSICIÓN 89 (Principio del módulo máximo para funciones armónicas). Si  $u : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función armónica con  $U$  abierto y conexo y  $u$  tiene un máximo relativo en  $z_0$ , entonces existe una vecindad de  $z_0$  donde  $u$  es constante.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $V \subseteq U$  la vecindad donde  $z_0$  es máximo relativo de  $u$  y note que sin pérdida de generalidad podemos tomar  $V = B_\varepsilon(z_0)$  para  $\varepsilon > 0$ . Por el resultado anterior existe  $f : V \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $\operatorname{Re}(f) = u$ . Note que la función composición  $e^f : V \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y  $|e^f| = e^{\operatorname{Re}(f)} = e^u$ . Al ser la exponencial real monótona no decreciente, si  $z_0$  es máximo en  $V$  de  $u$ , entonces  $z_0$  es máximo en  $V$  de  $e^f$ . Así, el principio del módulo máximo para funciones holomorfas dice que  $e^f$  debe ser constante, lo que implica que  $e^u$  también debe serlo y por lo tanto  $u$  también.  $\square$

Más aún, adoptando la prueba del caso de funciones holomorfas se puede probar la versión global de la local. A saber, se tiene que.

PROPOSICIÓN 90 (Versión global del principio del módulo máximo para funciones armónicas). Si  $U \subseteq \mathbb{C}$  abierto, conexo y acotado y  $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función armónica y continua en  $U$ , entonces:

1. Para todo  $z \in U$ ,  $u(z) \leq \max_{w \in \bar{U}} u(w)$ .
2. Si existe  $z_0 \in U$  tal que  $u(z_0) = \max_{w \in \bar{U}} u(w)$ , entonces  $u$  es constante.

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio.  $\square$

Además como es de esperarse existen los correspondientes principios del módulo mínimo para funciones armónicas y una propiedad del promedio.

### 3. Funciones armónicas conjugadas, problema de Dirichlet y fórmula de Poisson

DEFINICIÓN 45. Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  y  $u, v : A \rightarrow \mathbb{R}$  funciones. Decimos que  $u$  y  $v$  son conjugados armónicos si existe  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $f = u + iv$

Observemos que si  $f$  es holomorfa, entonces  $if$  es holomorfa, por lo que si  $u$  y  $v$  son conjugados, entonces  $-v$  y  $u$  son conjugados.

Esto nos permite visualizar que la relación definida no tiene por qué ser simétrica.

Veamoslo con un ejemplo sencillo,  $u(x, y) = x$  y  $v(x, y) = y$  son onjugados porque  $z = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es holomorfa. Por otro lado  $g(z) = v(x, y) + iu(x, y) = y + ix$ . Procedemos a ver si para  $g$  se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Ponemos  $u^g = y$  y  $v^g = x$  para evitar confusión, las parciales son:

$$\begin{aligned} u_x^g &= 0 & u_y^g &= 1 \\ v_x^g &= 1 & v_y^g &= 0 \end{aligned}$$

Notamos que  $v_x^g \neq -u_y^g$  por lo cual  $g$  no cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann. De aquí  $u$  y  $v$  con sonjugados pero  $v$  y  $u$  no lo son.

Sigamos casi con el mismo ejemplo  $u$  y  $u$  no son tampoco conjugados.

Sea  $f = u + iu$ , por lo que tenemos que  $u^f = x$  y  $v^f = x$ . Así llegamos a que:

$$\begin{aligned} u_x^f &= 1 & u_y^f &= 0 \\ v_x^f &= 1 & v_y^f &= 0 \end{aligned}$$

De aquí  $u_x^f \neq v_y^f$ . De nuevo no se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

De nuevo usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos que dado  $u$ , los conjugados armónicos de  $u$ , difieren solo por una constante real.

Recordemos que  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto es armónico si  $\Delta u = 0$ , es decir que

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

PROPOSICIÓN 91. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto simplemente conexo y  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  dos veces diferenciable y armónico en  $A$ . Entonces  $u$  es suave (tiene diferenciales de todos los ordenes) y existe  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $\operatorname{Re}(f) = u$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función  $g = u_x - iu_y$ . Veamos que  $g$  es analítica viendo que cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann y sus componentes tiene parciales continuas. Ponemos  $u^g = u_x$  y  $v^g = -u_y$ . Así  $g = u^g + iv^g$ . Calculemos sus parciales:

$$\begin{aligned} u_x^g &= u_{xx} & u_y^g &= u_{xy} \\ v_x^g &= -u_{xy} & v_y^g &= -u_{yy} \end{aligned}$$

Tenemos que

$$u_{xx} = -u_{yy}$$

puesto que  $\Delta u = 0$  y en efecto se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

El hecho de que  $u^g$  y  $v^g$  tengan parciales continuas es por hipótesis. Por lo que  $g$  es holomorfa. Como  $A$  es simplemente conexo, entonces existe  $f$  antiderivada de  $g$ .

Si  $f = u^f + iv^f$ , entonces  $f' = u_x^f - iu_y^f$ . Por lo que  $u_x^f = u^g = u_x$ . De aquí  $u^f$  y  $u$  difieren en una constante. Ajustando, sumándole dicha constante, tenemos que  $Re(f) = u$   $\square$

Esta proposición nos da una condición para que una función  $u$  tenga un conjugado armónico.

La siguiente proposición es la propiedad de valor medio para funciones armónicas.

**PROPOSICIÓN 92.** Sea  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  tal que  $D_r(z_0) \subseteq A$  con

$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ . Entonces:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

**DEMOSTRACIÓN.** Por la proposición anterior existe  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $Re(f) = u$ , esto usando que existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$D_r(z_0) \subseteq B_{r+\varepsilon}(z_0) \subseteq A$$

Así tenemos a  $B_{r+\varepsilon}(z_0)$  como el dominio simplemente conexo de  $u$ . Tenemos la propiedad del valor medio para funciones holomorfas, así

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + rei\theta) d\theta$$

Tomando la parte real concluimos el resultado deseado.  $\square$

La siguiente proposición se llama el principio máximo local para funciones armónicas.

**PROPOSICIÓN 93.** Sea  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  una función armónica. Si  $z_0 \in A$  es un máximo local de  $u$  existe  $r > 0$  tal que para todo  $z \in B_r(z_0)$ ,  $u(z) \leq u(z_0)$ , entonces existe  $R > 0$  tal que  $u : B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{R}$  es constante.

**DEMOSTRACIÓN.** Análogo a la demostración anterior consideremos un  $D_r(z_0)$  para poder construir  $f : B_{r+\varepsilon}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa con  $Re(f) = u$ . Así tenemos que  $e^f$  es holomorfa y  $|e^{f(z)}| = e^{u(z)}$  para toda  $z \in B_{r+\varepsilon}(z_0)$ .

Como la exponencial es monótona, entonces los mínimos y máximos de  $u$  y de  $e^u$  son los mismos. Entonces un máximo de  $u$  es un máximo de  $e^u$  y en particular de  $e^f$ . Así aplicando este principio para funciones holomorfas tenemos que existe  $R > 0$  tal que  $e^f$  es constante en  $B_R(z_0)$ . Esto implica que  $f$  es constante en  $B_R(z_0)$  y en particular  $u$  es constante en  $B_R(z_0)$   $\square$

De aquí podemos pasar al principio máximo global para funciones armónicas.

**PROPOSICIÓN 94.** *Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto simplemente conexo y acotado. Si  $u : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función armónica en  $A$  y  $M$  un máximo de  $u$  en  $\partial A$ . Entonces:*

- i)  $u \leq M$  en  $A$
- ii) Si  $u(x, y) = M$  para algún  $(x, y) \in A$ , entonces  $u$  es constante en  $A$

**DEMOSTRACIÓN.** Esto de nuevo se sigue de conseguir  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa con  $\operatorname{Re}(f) = u$  y aplicar el principio del módulo máximo a  $f$ , de aquí se deduce el resultado para  $u$ .  $\square$

Con todo esto ya hemos desarrollado la herramienta necesaria para el problema de Dirichlet.

El problema de Dirichlet: Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto acotado, y  $u_0 : \partial A \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Encontrar  $u : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica tal que  $u|_{\partial A} = u_0$ . Hasta donde hemos desarrollado la teoría podemos demostrar la unicidad de la solución en caso de existir.

**PROPOSICIÓN 95.** *Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto y acotado y  $u_0 : \partial A \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $u, v : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$  armónicas tales que  $u|_{\partial A} = u_0 = v|_{\partial A}$ , entonces  $u = v$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\varphi = u - v$ . Entonces  $\varphi$  es armónica y  $\varphi|_{\partial A} = 0$ . Por el principio máximo  $\varphi \leq 0$  en  $A$ . Análogamente aplicando el principio máximo a  $-\varphi$ , llegamos a que  $-\varphi \leq 0$ . Por lo que  $\varphi = 0$   $\square$

Ahora veremos la fórmula de Poisson.

**PROPOSICIÓN 96.** *Sea  $u : D_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$  armónica. Entonces*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos el caso  $r = 1$  para simplificar las cuentas.

De nuevo como  $u$  está definida en un simplemente conexo, existe  $f$  holomorfa tal que  $\operatorname{Re}(f) = u$ . Sea  $0 < s < 1$ . Entonces por la fórmula integral de Cauchy tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

donde  $\gamma_s : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma_s(t) = se^{it}$  para  $t \in [0, 2\pi]$ . Definimos  $\tilde{z}$  como  $\frac{s^2}{\bar{z}}$ , que es la reflexión de  $z$  en el círculo de radio  $s$ . Como  $z$  reside dentro del círculo, entonces  $\tilde{z}$  queda fuera del círculo por lo que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(w)}{w - \tilde{z}} dw = 0$$

para toda  $z \in B_z(0)$ . Esto lo podemos restar a la ecuación anterior

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} f(w) \left[ \frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - \tilde{z}} \right] dz$$

Como  $w$  recorre  $\gamma_s$ , tenemos que  $|w| = s$ .

Así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - \tilde{z}} &= \frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - \left(\frac{s^2}{\bar{z}}\right)} \\ &= \frac{1}{w - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z}w - s^2} \\ &= \frac{1}{w - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z}w - w\bar{w}} \\ &= \frac{1}{w - z} + \frac{\bar{z}}{w(\bar{w} - \bar{z})} \\ &= \frac{w(\bar{w} - \bar{z}) + \bar{z}(w - z)}{w(w - z)(\bar{w} - \bar{z})} \\ &= \frac{|w|^2 - w\bar{z} + \bar{z}w - |z|^2}{w|w - z|^2} \\ &= \frac{|w|^2 - |z|^2}{w|w - z|^2} \end{aligned}$$

De aquí sustituyendo en la integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(w)(|w|^2 - |z|^2)}{w|w - z|^2} dw$$

Vamos a evaluar la integral usando expresiones polares, primero ponemos  $z = \rho e^{i\varphi}$  y así tenemos

$$\begin{aligned} f(\rho e^{i\varphi}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(se^{i\theta})(s^2 - \rho^2)ise^{i\theta}}{se^{i\theta}|se^{i\theta} - \rho e^{i\varphi}|^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(se^{i\theta})(s^2 - \rho^2)}{s^2 - \rho s(e^{i(\theta-\varphi)} + e^{i(\varphi-\theta)}) + \rho^2} d\theta \end{aligned}$$

Ahora podemos tomar la parte real de esta última integral

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(se^{i\theta})(s^2 - \rho^2)}{s^2 + \rho^2 - 2s\rho \cos(\theta - \varphi)} d\theta$$

Observemos que si  $\rho$  y  $\varphi$  son arbitrarios, así la fórmula se cumple para cualquier  $s$  que cumpla  $\rho < s < 1$ . Como  $u$  es continua en  $D_1(0)$  y el denominador no se anula puesto que

$s > \rho$ . Así podemos definir  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$g(\theta, s) = \frac{u(se^{i\theta})(s^2 - \rho^2)}{s^2 - \rho^2 - 2s\rho \cos(\theta - \phi)}$$

con  $D = \{(\theta, s) \mid \theta \in [0, 2\pi], \frac{1+\rho}{2} \leq s \leq 1\}$  La función  $g$  es continua en  $D$ .

Como  $D$  es compacto, en particular  $g$  es uniformemente continua. Por lo que podemos tomar una sucesión  $\{s_n\}_{n=0}^\infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} g(\theta, s_n) = g(\theta, 1)$$

De esto tenemos que si definimos como  $g_n(\theta) = g(\theta, s_n)$ , entonces  $g_n(\theta)$  converge uniformemente a  $g(\theta, 1)$ .

De aquí que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} g_n(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta, 1) d\theta$$

Finalmente tenemos que todas las integrales de la sucesión son iguales, todas valen  $u(\rho e^{i\phi})$

□

Para concluir observemos que la fórmula de Poisson resuelve el problema de Dirichlet en un disco de radio  $r$ . Si  $A = D_r(0)$  entonces  $\partial A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ .

Así para  $u_0 : \partial A \rightarrow \mathbb{R}$  la solución será:

$$u(\rho e^{i\phi}) = \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_0(re^{i\theta})}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi) + \rho^2} d\theta$$

#### 4. Principio del argumento y el teorema de Rouché

Comenzamos con un resultado previo.

LEMA 4. Sean  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y  $z_0 \in U$ . Entonces son equivalentes:

1.  $f(z_0) = 0$
2. Existe  $f_1 : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que para todo  $z \in U$ ,  $f(z) = (z - z_0)f_1(z)$

DEMOSTRACIÓN. 1)  $\implies$  2)

Consideremos  $f_1 : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Notemos que si  $f_1$  es holomorfa en  $U \setminus \{z_0\}$  y además es continua en  $z_0$  pues

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = f_1(z_0)$$

Por lo tanto, de un resultado previo se deduce que  $f_1$  es holomorfa.

2)  $\implies$  1) Es claro.  $\square$

Como consecuencia directa del resultado anterior y un argumento de inducción se deduce:

**COROLARIO 12.** *Sean  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto,  $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y  $z_0 \in U$ . Entonces son equivalentes:*

1.  $z_0$  es un cero de orden  $n \in \mathbb{N}^+$  de  $f$ .
2. Existe  $f_1 : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que para todo  $z \in U$ ,  $f(z) = (z - z_0)^n f_1(z)$

Note que este resultado es interesante pues en el caso real los resultados anteriores se cumplen en polinomios, pero para una función diferenciable cualquiera no son ciertos, por ejemplo,  $\sin(0) = 0$ ,  $\sin(x) = x \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)$  pero  $\frac{\sin(x)}{x}$  no es diferenciable en  $x = 0$ .

Por si fuera poco, de estos resultados se deducen algunas fórmulas de L'Hopital complejas (ver ejercicios ??)

Vamos a introducir el concepto en el que aplicaremos los resultados de esta sección.

**DEFINICIÓN 46.** *Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto abierto. Una función meromorfa en  $U$  es una función holomorfa  $f : U \setminus P_f \longrightarrow \mathbb{C}$  donde  $P_f$  es un subconjunto discreto de  $U$  y todos los puntos de  $P_f$  son los polos de  $f$ .*

Al tomar la definición de las operaciones puntuales, se deduce lo siguiente.

**PROPOSICIÓN 97.** *El conjunto de funciones meromorfas en un abierto y conexo  $U \subseteq \mathbb{C}$  es un campo con las operaciones definidas de forma puntual.*

**DEMOSTRACIÓN.** Ejercicio.  $\square$

A uno se le viene en mente como primeros ejemplos de funciones meromorfas a las funciones racionales. El siguiente ejemplo dice que localmente esto siempre es así.

**PROPOSICIÓN 98.** *Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto no vacío y  $f : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  una función meromorfa. Entonces para cada  $z_0 \in U$  existe  $z_0 \in V \subseteq U$  vecindad abierta tal que  $f = \frac{g}{h}$  para  $g, h : V \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  funciones holomorfas.*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $z_0 \in U$  no es un polo, entonces  $f = \frac{f}{1}$  donde  $V = U \setminus P_f$ . Si  $z_0 \in U$  es un polo de orden  $n$ , al aplicar el resultado anterior  $f = \frac{g}{(z - z_0)^n}$  con  $g$  holomorfa en  $g : U \setminus P_f \longrightarrow \mathbb{C}$   $\square$



Dejando estos preliminares vamos a enunciar el primero resultado básico de la sección.

PROPOSICIÓN 99. Sea  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función meromorfa con ceros en  $z_1, \dots, z_n$  y polos  $w_1, \dots, w_m$  contados con multiplicidad. Sea además  $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$  una curva cerrada  $C^1$  a trozos homotópica a un punto, que no pasa por los polos ni por los ceros de  $f$ . Entonces,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n n(\sigma; z_j) - \sum_{j=1}^m n(\sigma; w_j)$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos  $z_j$  un cero de  $f$  y observemos que aplicando sucesivamente el corolario anterior se tiene que  $f(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j) \tilde{f}(z)$  con  $\tilde{f} : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y  $\tilde{f}(z_j) \neq 0$  para  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Al aplicar la regla de Leibniz se deduce que

$$f'(z) = \sum_{j=1}^n \left( \prod_{\ell \neq j} (z - z_{\ell}) \right) \tilde{f}(z) + \left( \prod_{j=1}^n (z - z_j) \right) \tilde{f}'(z)$$

Por lo que

$$(5) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - z_j} + \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}$$

Además notemos que los polos de  $f$  son todos los polos de  $\tilde{f}$ , es decir, ceros de la función  $\frac{1}{\tilde{f}}$ . Luego, al usar nuevamente el resultado anterior se deduce que  $\tilde{f}(z) = \left( \prod_{j=1}^m \frac{1}{z - w_j} \right) g(z)$  con  $g : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Por lo tanto, al usar nuevamente la regla de Leibniz se deduce que

$$\tilde{f}'(z) = \sum_{j=1}^m -\frac{1}{(z - w_j)^2} \left( \prod_{\ell \neq j} \frac{1}{z - w_{\ell}} \right) g(z) + \left( \prod_{j=1}^m \frac{1}{z - w_j} \right) g'(z)$$

Por lo que

$$(6) \quad \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)} = -\sum_{j=1}^m \frac{1}{z - w_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

De las ecuaciones 5 y 6 se deduce que

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{j=1}^n \int_{\sigma} \frac{1}{z - z_j} dz - \sum_{j=1}^m \int_{\sigma} \frac{1}{z - w_j} dz + \int_{\sigma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^n n(\sigma; z_j) - 2\pi i \sum_{j=1}^m n(\sigma; w_j) \end{aligned}$$

donde  $\int_{\sigma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0$  por ser el integrando holomorfo y el teorema de Cauchy homotópico implica esta igualdad. Con esto se concluye la demostración.  $\square$

NOTA 11. En el teorema anterior aparece la función  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  que se conoce como la derivada logarítmica. Note que si tuvieramos una definición del logaritmo como una función

$\frac{d}{dz} \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$  y entonces  $\int_{\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  se puede pensar como  $\log f(z)$ . Así la fórmula diaria diría que conforme  $z$  varía por la curva  $\sigma$ , esto produce un cambio en un múltiplo entero de  $2\pi i$ , es decir, un cambio de rama. De ahí que este resultado se le conozca como el principio del argumento. Una generalización de este se encuentra en el ejercicio ??.

Del resultado anterior se deduce el siguiente:

**COROLARIO 13.** Sea  $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$  una curva cerrada simple  $C^1$  a trozos con  $U \subseteq \mathbb{C}$  abierto, así como  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa. Entonces,

1. Si  $z_{f,\sigma}$  es el número de ceros de  $f$  que se encuentran en la región acotada por  $\sigma$  y  $P_{f,\sigma}$  el número de polos con la misma característica, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = z_{f,\sigma} - P_{f,\sigma}$$

2. Si  $f(z) \neq z_0$  en la imagen de  $\sigma$  y  $N_{z_0} = |\{z \in U \mid f(z) = z_0 \text{ y } z \text{ está en la región acotada por } \sigma\}|$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f'(z)}{f(z) - z_0} dz = N_{z_0}$$

**DEMOSTRACIÓN.** Como la curva es simple,  $n(\sigma, z) = 1$  para  $z$  cero o polo de  $f$ . Por lo tanto la primera afirmación se sigue del resultado anterior. En lo que respecta a la segunda afirmación esta se deduce de la primera al considerar la función  $f - z_0 : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   $\square$

Vamos a ver un uso de los resultados anteriores.

**EJEMPLO 35.** Determinar el número de ceros de la función polinomial  $p(z) = 2z^3 - z^2 + 2z - 1$  en el conjunto  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{3}{2} < |z| < 3\}$

Solución:

Al ser  $p : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  polinomial, esta no tiene polos. Así que el número de ceros en la región  $U' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$  está dado por

$$\int_{|z| \leq 3} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \int_{|z| \leq 3} \frac{2z^3 - z^2 + 2z - 1}{6z^2 - 2z + 2} dz$$

Notemos que en el denominador  $6z^2 - 2z + 1 = 0$  si  $z \in \{\frac{1+\sqrt{11}i}{6}, \frac{1-\sqrt{11}i}{6}\}$ . Por lo tanto, si  $z_1 = \frac{1+\sqrt{11}i}{6}$  y  $z_2 = \frac{1-\sqrt{11}i}{6}$ , se tiene que  $\frac{1}{6z^2-2z+1} = \frac{1}{z_1-z_2} \left( \frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2} \right)$ , por lo que

$$\begin{aligned} \int_{|z| \leq 3} \frac{p'(z)}{p(z)} dz &= \frac{1}{z_1 - z_2} \left( \int_{|z| \leq 3} \frac{2z^3 - z^2 + 2z + 1}{z - z_1} dz - \int_{|z| \leq 3} \frac{2z^3 - z^2 + 2z + 1}{z - z_2} dz \right) \\ &= \frac{3}{\sqrt{11}i} (p(z_1) - p(z_2)) 2\pi i = 3 \end{aligned}$$

Al hacer el cálculo análogo para las raíces en  $U'' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{3}{2}\}$ , se tiene que

$$\int_{|z| \leq \frac{3}{2}} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 1$$

Por lo tanto, en  $U$  hay 2 raíces.

El segundo resultado a estudiar en esta sección es una aplicación del principio del argumento.

**TEOREMA 3 (de Rouché).** Sean  $f, g : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  funciones holomorfas en un abierto y conexo  $U$  salvo por un número finito de ceros y polos. Supongamos que  $\sigma$  es una curva cerrada en  $U$  que no pasa por ningún cero ni por polos de  $f$  y  $g$ , así como que para cada  $z \in \sigma([0, 1])$ ,  $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ .

Si  $z_f$  y  $z_g$  son el número de ceros de  $f$  y  $g$  en la región acotada por  $\sigma$  y  $P_f$  y  $P_g$  los correspondientes números de polos, ambos contados con multiplicidad, entonces:

$$z_f - P_f = z_g - P_g$$

**DEMOSTRACIÓN.** Notemos que por hipótesis, para  $z \in \sigma([0, 1])$  se tiene que  $\left| \frac{f(z)}{g(z)} + 1 \right| < \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| + 1$ . Si existiera  $z_0 \in \sigma([0, 1])$  tal que  $\frac{f(z_0)}{g(z_0)} \in \mathbb{R}^+$ , la desigualdad anterior no se podría cumplir pues esta diría que  $\frac{f(z_0)}{g(z_0)} + 1 < \frac{f(z_0)}{g(z_0)} + 1$ , esto implica que la función  $\frac{f}{g}(\sigma[0, 1]) \subseteq \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ . Consideremos una rama del logaritmo en dicha región  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  y notemos que  $\log \frac{f(z)}{g(z)}$  está definido y tiene derivada  $\frac{\left(\frac{f}{g}\right)'}{\left(\frac{f}{g}\right)}$  en una vecindad de  $\sigma([0, 1])$ . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)'(z)}{\left(\frac{f}{g}\right)(z)} dz = 0$$

Pero por otro lado tenemos que  $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$  por lo que  $\frac{\left(\frac{f}{g}\right)'(z)}{\left(\frac{f}{g}\right)(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$ , lo que implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz \\ &= (z_f - P_f) - (z_g - P_g) \end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado.  $\square$

**NOTA 12.** En muchos libros de texto la hipótesis de la desigualdad se suele reemplazar por  $|f(z) + g(z)| < |g(z)|$  para  $z \in \sigma([0, 1])$ . Note que nuestro resultado implica dicho

resultado.

*Para terminar vamos a dar una aplicación teórica de dicho resultado dando una nueva demostración del Teorema Fundamental del Álgebra (TFA).*

PROPOSICIÓN 100 (TFA). *Si  $p$  es una función polinomial no constante con grado  $n$  con coeficientes complejos, entonces  $p$  tiene un  $n$ -raíces contando la multiplicidad.*

TEOREMA DE ROUCHÉ. Supongamos que  $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  con  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  y  $a_n = 1$ . Entonces  $\frac{p(z)}{z^n} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{z^{n-k}}$ . Dado que  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{p(z)}{z^n} = 1$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $\left| \frac{p(z)}{z^n} - 1 \right| < 1$  para  $z \in \partial B_r(0)$ . Entonces  $\frac{1}{|z^n|} |p(z) - z^n| = \left| \frac{p(z)}{z^n} - 1 \right| < 1$ , lo que dice que  $|p(z) - z^n| < |z^n| \neq |p(z)| + |z^n| = |p(z)| + |-z^n|$ . Entonces el teorema de Rouché implica que  $p$  debe tener  $n$  ceros en la parte acotada de la curva  $|z| = R$ .  $\square$

## Series

“Las matemáticas no permiten hipocresía ni vaguedad.”

**Stendahl.**

En el presente capítulo estudiaremos algunas cuestiones respecto a series, empezando por ver algunos resultados básicos respecto a series de potencias en  $\mathbb{C}$ , para después estudiar el concepto de series de Taylor; con lo cual estableceremos la relación entre la definición de función holomorfa y analítica.

Además de esto se introducirá la noción de serie de Laurent y la noción de residuo. Con estas realizaremos un primer acercamiento a la teoría de singularidades complejas.

### 1. Teoremas básicos sobre series: Criterio M de Weierstrass, Lema de Abel y teorema de la convergencia analítica.

Para poner las definiciones reales en el contexto complejo volveremos a escribir las definiciones.

**DEFINICIÓN 47.** Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $\{f_n : A \rightarrow \mathbb{C}\}_{n=0}^{\infty}$  sucesión de funciones. Decimos que la sucesión  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge uniformemente a  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  si para toda  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  para toda  $n > N$  y para toda  $z \in A$ ,  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

**PROPOSICIÓN 101 (Criterio M de Weierstrass).** Sean  $A \subseteq \mathbb{C}$  y una sucesión de reales positivos  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  tal que

- (i)  $|f_n(z)| \leq M_n$  para toda  $z \in A$  y para toda  $n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  converge

Entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  converge uniformemente y absolutamente

**DEMOSTRACIÓN.** Primero veamos la convergencia uniforme, notemos que como no tenemos un candidato de límite lo haremos demostrando que las sucesiones son de Cauchy. Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  para toda  $m > n > N$

$$\left| \sum_{k=n}^m M_k \right| < \varepsilon \quad \text{por hipótesis}$$

Notemos que esta  $N$  sirve para  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  dado que

$$\left| \sum_{k=n}^m f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n}^m |f_k(z)| \leq \sum_{k=n}^m M_k < \varepsilon \quad \forall z \in A$$

Aquí usamos que la sucesión  $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$  es positiva y así

$$\sum_{k=n}^m |M_k| = \sum_{k=n}^m M_k$$

Por lo cual la sucesión  $\{\sum_{k=n}^{\infty} f_k\}_{n=0}^{\infty}$  es de Cauchy y por lo tanto converge uniformemente.

Pero no solo eso, vimos que esta  $N$  cumple:

$$\left| \sum_{k=n}^m |f_k(z)| \right| = \sum_{k=n}^m |f_k(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in A$$

lo cual implica la convergencia absoluta.  $\square$

Consideremos  $0 < r < 1$  y  $A_r = B_r(0)$ , las funciones  $f_n : A_r \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por  $f_n(z) = \frac{z^n}{n}$  para  $z \in A_r$ . Notemos que

$$|f_n(z)| = \left| \frac{z^n}{n} \right| \leq \frac{r^n}{n}$$

Si ponemos  $M_n = \frac{r^n}{n}$ , así enemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} r^k$$

La última converge y por criterio de comparación  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$  converge. Así por el criterio de Weierstrass tenemos que  $f : A_r \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$  converge uniformemente y absolutamente.

Veamos que es necesario que  $r < 1$ , puesto que si  $r = 1$ , tendríamos la serie armónica y no podríamos usar el criterio.

El siguiente teorema llamado de la convergencia analítica también es de Weierstrass alrededor de 1860.

**PROPOSICIÓN 102.** Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$  una sucesión de funciones holomorfas en  $A$ . Si  $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$  converge uniformemente a  $f$  para cualquier disco  $D_r(z_0) \subseteq A$  entonces  $f$  es holomorfa.

Más aún,  $\{f'_k\}_{k=0}^{\infty}$  converge a  $f'$  puntualmente y uniformemente en cada disco de  $A$

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $z_0 \in A$  y  $r > 0$  tal que  $D_r(z_0) \subseteq A$ . De nuevo  $D_r(z_0)$  es simplemente conexo. Como tenemos que  $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$  converge uniformemente en  $D_r(z_0)$  por hipótesis, entonces  $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$  converge uniformemente en  $\overline{D_r(z_0)}$ . Tenemos que  $f$  es continua en  $\overline{D_r(z_0)}$  puesto que es el límite uniforme de funciones continuas.

Por otro lado para cualquier curva cerrada  $\gamma$  en  $B_r(z_0)$  tenemos  $\int_{\gamma} f_k(z) dz = 0$  por el teorema de Cauchy, en particular esto se vale para todas las curvas cerradas simples.

Ahora suponiendo que la integral conmuta con el límite

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_k(z) dz = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Así podemos aplicar el teorema de Morera y concluir que  $f$  es holomorfa.

Tenemos pendiente demostrar que la integral conmuta con el límite.

Vamos a demostrar que  $\{f'_k\}$  converge uniformemente a  $f'$  en cualquier disco. Sea  $z_0 \in A$  y  $r > 0$  tal que  $D_r(z_0) \subseteq A$  y consideramos  $R > r > 0$  tal que  $D_r(z_0) \subseteq D_R(z_0) \subseteq A$ . Sea  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow D_R(z_0)$  dado por

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

Así por la fórmula integral de Cauchy tenemos que:

$$f'_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_k(w)}{(w-z)^2} dw$$

y

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

Usando que  $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$  converge uniformemente a  $f$  en  $D_R(z_0)$ , tenemos que para  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n \leq N$   $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  para toda  $z \in D_R(z_0)$ .

Así llevando esto a las derivadas tenemos

$$|f'_n(z) - f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_n(z) - f(z)}{(w-z)^2} dw \right|$$

Como  $w \in Im\gamma$  y  $z \in B_r(z_0)$ , tenemos que

$$|w - z| \geq R - r$$

Por lo que para  $n \geq N$ ,

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{(R-r)^2} L$$

Donde  $L$  es la longitud de curva de  $\gamma$ , es decir,  $L = 2\pi R$ . Así tenemos que

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{\varepsilon R}{(R-r)^2}$$

Como esta cota solo depende de  $\varepsilon$ , podemos elegir una  $\varepsilon^*$  para tener el resultado deseado.

□

PROPOSICIÓN 103. Sea  $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$  con  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto donde  $\text{Im}(\gamma) \subseteq A$  y una sucesión de funciones continuas  $\{f_k : A \rightarrow \mathbb{C}\}_{k=0}^{\infty}$  que convergen uniformemente. Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_k(z) \, dz = \int_{\gamma} f(z) \, dz$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\varepsilon > 0$  entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  para  $n > N$  y  $z \in A$ . Entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f_n(z) \, dz - \int_{\gamma} f(z) \, dz \right| &= \left| \int_{\gamma} (f_n - f)(z) \, dz \right| \\ &\leq \int_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| \, dz \\ &\leq \varepsilon L \end{aligned}$$

Con  $L$  la longitud de  $\gamma$ . Para demostrar la convergencia de la integral empezamos con  $\varepsilon > 0$  y damos  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{L} > 0$  para la convergencia uniforme.  $\square$

Ahora, regresando al teorema de convergencia tenemos:

COROLARIO 14. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  con  $A$  abierto y  $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$  una sucesión tal que  $F = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$  converge uniformemente en cada sico de  $A$ . Entonces  $f$  es holomorfa.

En particular,  $f' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k$  puntualmente y uniformemente en cada disco cerrado.

LEMA 5 (Abel-Weierstrass). Sea  $r_0 \geq 0$  y una sucesión compleja  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  tal que existe  $M > 0$  con  $|a_n| r_0^n \leq M$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces para  $r < r_0$  la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  converge uniformemente y absolutamente en  $D_r(z_0)$

DEMOSTRACIÓN. Para  $z \in D_r(z_0)$ , tenemos

$$\begin{aligned} |a_n (z - z_0)^n| &\leq |a_n| r^n \\ &= |a_n| r_0^n \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \\ &\leq M \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \end{aligned}$$

Si ponemos  $M_n = M \left( \frac{r}{r_0} \right)^n$  tenemos que  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  converge puesto que  $\frac{r}{r_0} < 1$ . Aquí aplicamos el criterio  $M$  de Weierstrass.  $\square$

PROPOSICIÓN 104. Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  una serie de potencias. Entonces existe un único  $R > 0$  ( $R$  puede ser  $\infty$ ) tal que la serie converge en  $B_R(z_0)$  y diverge en  $\mathbb{C} \setminus D_R(z_0)$ . Más aún, la serie converge uniformemente y absolutamente en cualquier disco de  $B_R(z_0)$ .



DEMOSTRACIÓN. Sea  $R = \sup\{r \geq 0 \mid \{|a_n|r^n\}_{n=0}^\infty \text{ es una sucesión acotada}\}$ .

Notemos que al menos el 0 está en el conjunto, pero puede pasar que  $R = \infty$ .

Supongamos que  $R > 0$ . Entonces para  $0 < s < R$  tenemos que existe  $M > 0$  tal que  $|a_n|s^n < M$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces por el lema de Abel la serie  $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$  converge en  $B_{s'}(z_0)$  para cualquier  $0 < s' < s < R$ .

Ahora bien, para  $0 < s' < R$  podemos encontrar  $0 < s' < s < R$  para seguir el resultado desde  $s'$ .

Por otro lado si  $|z| > R$  entonces la sucesión  $\{|a_n||z|^n\}_{n=0}^\infty$  no es acotada, y si una serie converge entonces la sucesión es acotada. Por otro lado la serie de potencias no converge.

A  $R$  se le conoce como el **radio de convergencia**.  $\square$

COROLARIO 15. Sea  $\sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$  una serie de potencias, entonces es holomorfa en  $B_R(z_0)$  con  $R$  el radio de convergencia.

PROPOSICIÓN 105. Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$  con radio de convergencia  $R$ . Entonces

$$f'(z) = \sum_{n=1}^\infty n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

tiene el mismo radio de convergencia que  $f$ , es decir  $R$ . Más aún,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

para toda  $n \in \mathbb{N}$

DEMOSTRACIÓN. La primera parte la tenemos de la convergencia puntual. Solo falta verificar los radios. Vamos a ver que  $f'$  diverge para  $|z - z_0| > R$ . Supongamos que converge para  $z_1$  con  $|z_1 - z_0| = r_0 > R$ . Entonces  $n a_n r_0^{n-1}$  estaría acotada y así  $a_n r_0^n = (n a_n r_0^{n-1}) \left(\frac{r_0}{n}\right)$  también estaría acotada. Si la cota de la primera es  $M$ , entonces la segunda tiene cota  $M r_0$ . Pero esto contradice la maximalidad de  $R$ , lo cual es una contradicción. Por lo cual la serie no converge para  $|z - z_0| > R$ . Así el radio de convergencia de  $f'$  es  $R$ .

Los coeficientes se dejan como tarea.  $\square$

COROLARIO 16. Si  $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$  y  $f(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n(z - z_0)^n$  en algún  $D_r(z_0)$ , entonces  $a_n = b_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

DEMOSTRACIÓN. Los coeficientes están dados por las derivadas.  $\square$

## 2. Funciones analíticas y el teorema de Taylor.

Empezamos introduciendo la noción de función analítica sobre  $\mathbb{C}$ .

**DEFINICIÓN 48.** Sean  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $z_0 \in U$ . Una función  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica en el punto  $z_0$  si se puede desarrollar en una serie de potencias alrededor de dicho punto, esto es, existen  $r > 0$  tal que  $B_r(z_0) \subseteq U$  y una serie de potencias en  $\mathbb{C}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , que converge en  $B_r(z_0)$  a  $f|_{B_r(z_0)}$ .

**EJEMPLO 36.** Toda serie de potencias en  $\mathbb{C}$  nos define trivialmente una función analítica en los puntos donde esta converge. Por ejemplo, consideremos la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  la cual podemos ver que es convergente cuando  $|z| < 1$ , y por lo tanto es analítica en  $B_1(0)$ . Notemos que esta serie converge en dicha región a la función  $\frac{1}{1-z}$ , por lo que una forma de parafrasear lo que acabamos de observar es que la función  $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = \frac{1}{1-z}$ , es analítica en  $B_1(0)$ .

Como mencionamos anteriormente uno de los resultados principales de esta sección será analizar cuál es la relación del concepto de función analítica y holomorfa. Esto es lo que vamos a realizar a continuación.

Recordemos que para una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , existe  $r \in [0, \infty]$  conocido como el radio de convergencia de la serie, el cual cumple que cuando  $|z - z_0| < r$  la serie converge, y si  $r < |z - z_0|$  la serie diverge. Además, en cualquier disco cerrado en  $B_r(z_0)$  la convergencia es absoluta y uniforme.

De esto se deduce que toda serie de potencias en  $\mathbb{C}$  es holomorfa y si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , entonces  $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$  en  $B_r(0)$ . Además  $f'$  tiene el mismo radio de convergencia. Más aún, al ser  $f$  holomorfa, esta es infinitamente diferenciable en  $B_r(0)$ . Además para cada  $n \in \mathbb{N}$  sucede que:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

De esta discusión deducimos lo siguiente.

**PROPOSICIÓN 106.** Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto,  $z_0 \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica en  $z_0$ . Entonces  $f$  es holomorfa en  $z_0$ .

Esto muestra que hay una implicación entre los conceptos de ser una función holomorfa y analítica, a saber; analítico implica holomorfo. Note que este resultado es bien conocido del análisis real pues es bien sabido que una función analítica real es diferenciable sobre  $\mathbb{R}$ . Sin embargo, es bien sabido que hay funciones diferenciables sobre  $\mathbb{R}$  (de hecho hasta

infinitamente diferenciables) que no son analíticas.

El ejemplo clásico es considerar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Esta función es interesante pues para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ , por lo que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x = 0$  y esto no converge en ninguna vecindad del 0 a  $f$ .

Vamos a ver que en el contexto complejo no tenemos ninguna de estas patologías.

**PROPOSICIÓN 107 (Cauchy-Taylor).** Sean  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Sean  $z_0 \in U$  y considere  $r \in [0, \infty]$  tal que  $B_r(0) \subseteq U$ . Entonces para cualquier  $z \in B_r(0)$  la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$  la trayectoria que parametriza  $\partial B_r(z_0)$ , es decir,  $\sigma(t) = z_0 + \rho e^{2\pi i t}$ . Al usar la fórmula integral de Cauchy se deduce que para cualquier  $z \in B_r(z_0)$ ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \zeta$$

Vamos a analizar el integrando de la expresión anterior. Para esto notamos que

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

Por lo tanto, si  $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$ , entonces

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

Observemos que por el criterio M de Weierstrass la convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$  cuando  $\zeta \in \partial B_r(z_0)$  es absoluta y uniforme. Además, la función  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} : \partial B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ , es continua y acotada.

Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \Rightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad \text{en } \partial B_r(0)$$

Luego entonces, para cualquier  $z \in B_r(0)$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

□

NOTA 13. Observe que el resultado anterior es válido en cualquier bola contenida en  $U$ . En particular es válido con  $r_{\max} = \sup\{r > 0 | B_r(0) \subseteq U\}$ .

También observe que de esto se deduce que  $r_{\max} \leq \rho$ , con  $\rho$  el radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ , lo cual dicho sea de paso se conoce como la serie de Taylor de  $f$  alrededor del punto  $z_0$ . También observe que este resultado implica la unicidad de la serie de Taylor de una función holomorfa en el punto  $z_0$ .

De todo esto se define el resultado que se ha estado buscando.

COROLARIO 17. Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Entonces son equivalentes:

1.  $f$  es holomorfa en  $U$ .
2.  $f$  es analítica en  $U$ .

DEMOSTRACIÓN.  $1 \Rightarrow 2$  Es consecuencia del teorema de Cauchy-Taylor.

$2 \Rightarrow 1$  Es consecuencia de la proposición 106

□

El resultado anterior en la razón por la que en muchos libros de texto se tratan las nociones de holomorfía y analiticidad en el contexto complejo de forma indistinta, a tal grado que muchos libros de texto llaman analíticas a las funciones  $\mathbb{C}$ -diferenciables. En nuestro caso tomamos una perspectiva global desde el punto de vista del análisis recordando que hay una noción de función analítica en espacios normados (En nuestro caso  $\mathbb{C}$ ) y la noción de función  $\mathbb{C}$ -diferenciable que históricamente se conoce como holomorfía. Con estas perspectivas el resultado anterior es sorprendente, sobre todo cuando lo comparamos con su análogo real; el cual no es válido.

Antes de analizar algunos ejemplos vamos a regresar a la cuestión del radio de convergencia, pues quizá en estos momentos queda la pregunta de cómo determinarlo, pues el teorema de Cauchy-Taylor dice como expresar una función holomorfa como una serie de potencias. Dicho resultado se presenta a continuación.

PROPOSICIÓN 108. Considere la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  y denote por  $\rho$  a su radio de convergencia. Entonces,

1. (Prueba del cociente). Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$  existe, entonces

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

2. (Prueba de la raíz). Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  existe, entonces

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos la primera afirmación pues la segunda es análoga y quedará como ejercicio. Para dicha primera afirmación notemos que

$$\rho = \sup\{r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\}$$

Por el criterio del cociente para series reales cabemos que para la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ , al definir  $R := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{|a_{n+1}| r^{n+1}}{|a_n| r^n} \right|$ , se cumple que:

a) Si  $R < 1$ , entonces la serie converge.

b) Si  $R > 1$ , entonces la serie diverge.

Observemos que  $R = r \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)$ , entonces la condición  $R < 1$ , dice que  $r < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  y en tal caso tenemos la convergencia, por lo tanto

$$\rho \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Por otro lado, si  $R > 1$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$  diverge y por lo tanto si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < r$ , entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$  es divergente, lo que muestra que  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  por unicidad del radio de convergencia.  $\square$

A continuación trataremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 37. Considere la función exponencial compleja,  $e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . La serie de Taylor de dicha función en  $z_0 = 0$ , es  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Analizamos el radio de convergencia de esta usando la prueba del cociente, con  $a_n = \frac{1}{n!}$ . Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es  $\rho = \infty$ , lo que dice que para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

EJEMPLO 38. Considere la función logaritmo definida en su rama principal,  $\ln : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . En este caso la serie de Taylor de  $\ln(z+1)$  es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z^n$$

Para ver el radio de convergencia, tenemos que para  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Por lo tanto concluimos que para  $z \in B_1(0)$ ,

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

Para terminar con esta sección vamos a analizar un teorema en el contexto de series de potencias que nos permitía construir otros ejemplos de series de Taylor.

**PROPOSICIÓN 109.** *Supongamos que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  tienen radio de convergencia mayor o igual a  $r_0$ . Consideremos la serie producto  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  definida mediante  $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ , tiene radio de convergencia mayor o igual a  $r_0$  y dentro de  $B_{r_0}(0)$  se tiene que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$$

**DEMOSTRACIÓN.** Usaremos el teorema de Taylor, para esto definimos  $f, g : B_{r_0}(0) \rightarrow \mathbb{C}$  dados por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

Estas funciones son holomorfas entonces su producto  $fg : B_{r_0}(0) \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa. Entonces al aplicar el teorema de Taylor se deduce que para cualquier  $z \in B_{r_0}(0)$ , se tiene que

$$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Ahora recordemos que

$$(fg)^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z)$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)}(0) &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \\ &= n! \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \end{aligned}$$

Esto muestra que  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  convergen en  $B_{r_0}(0)$  con radio de convergencia mayor o igual a  $r_0$ . Además de que para  $z \in B_{r_0}(0)$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = (fg)(z) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$$

□

NOTA 14. *Podemos hacer una prueba del resultado anterior analizando la sucesión tal y como sucede en análisis, esto es analizando la sucesión sin usar el teorema de Taylor.*

Vamos a terminar esta sección con una aplicación del resultado anterior.

EJEMPLO 39. *Calcular algunos términos de la serie de Taylor de  $\frac{e^z}{z-1}$  en  $z = 0$ . Usar esto para calcular  $\frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{e^z}{z-1} \right) \Big|_{z=0}$  para  $n = 1, 2, 3$*

Solución:

Recordemos que  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  con radio de convergencia  $\infty$  y  $\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} -z^n$  con radio de convergencia 1. Entonces  $\frac{e^z}{z-1}$  tiene radio de convergencia mayor o igual a 1 y además:

$$\frac{e^z}{z-1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} -z^n \right) = -1 - 2z - \frac{5z^2}{2} - \frac{8z^3}{3} - \dots$$

De esto se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^z}{z-1} \right) \Big|_{z=0} &= -2 \\ \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{e^z}{z-1} \right) \Big|_{z=0} &= -5 \\ \frac{d^3}{dz^3} \left( \frac{e^z}{z-1} \right) \Big|_{z=0} &= -16 \end{aligned}$$

### 3. Teorema de Laurent

DEFINICIÓN 49. Sean  $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$  y  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Definimos el anillo de radios  $r_1$  y  $r_2$  con centro en  $z_0$  por

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

DEFINICIÓN 50. Sean  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  dos sucesiones, una comenzando en 0 y la otra en 1, y sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ . La **serie de Laurent** alrededor de  $z_0$  la definimos como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Notamos que podemos tomar una sucesión  $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  dada por

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \geq 0 \\ b_n & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

y escribir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Buscamos darle un sentido para lograr definir una función. De hecho adelantandonos, el dominio que deseamos asignar es un anillo, para evitar el problema de la indeterminación. Por ejemplo para  $r_1 > 0, r = \infty$  podemos ver que

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

es una serie de Laurent en el anillo  $A(0, r_1, \infty)$ .

Compliquemos un poco más nuestro ejemplo, consideremos

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

en el dominio  $A(0, 1, \infty)$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\ &= \frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z(1 - \frac{1}{z})} \right] \\ &= \frac{1}{z^2} \left[ \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \right] \end{aligned}$$

Notemos que  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$  esto porque  $z > 1$  y así  $\frac{1}{z} < 1$ . De aquí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+2}$$



Ahora si podemos plantear y demostrar el teorema de Laurent.

PROPOSICIÓN 110. Sean  $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$  y  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $f: A(z_0, r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa.

Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Ambas series convergen uniformemente y absolutamente en cualquier anillo  $A(z_0, s_1, s_2)$  con  $r_1 < s_1 < s_2 < r_2$ . Si consideramos  $r_1 < r < r_2$  y  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ , entonces

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

para  $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) (w - z_0)^{n+1} dw$$

para  $n \in \mathbb{N}^+$ , o en general

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

para  $n \in \mathbb{Z}$ . Las series de Laurent son únicas.

DEMOSTRACIÓN. De primera instancia es intuitivo que vamos a usar el teorema integral de Cauchy. Notemos que por el teorema de independencia homotopica si consideramos una curva  $\lambda$  a través de un círculo de radio  $r_1 < s < r_2$ , los coeficientes tienen los mismos valores aunque usemos  $\lambda$  en vez de  $\gamma$ .

Una de las consecuencias de la fórmula integral de Cauchy es que si  $\gamma_1(t) = z_0 + s_1 e^{it}$  y  $\gamma_2(t) = z_0 + s_2 e^{it}$ , entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Notamos que para  $w \in Im(\gamma_2)$  y  $z \in Im(\gamma_2)$  fija, podemos escribir

$$\frac{1}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

y esta consecuencia es uniforme. Ahora podemos sutituir estas series en las partes de la igualdad anterior.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n a_n \end{aligned}$$

Como tenemos la convergencia para  $z$  dentro de  $\gamma_2$  esto implica la convergencia de discos en  $B(z_0, s_1, s_2)$ . Ahora procederemos al otro término de la serie, de igual manera consideremos que

$$\begin{aligned}\frac{-1}{w-z} &= \frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\end{aligned}$$

esta convergencia es uniforme para  $w \in Im(\gamma_1)$ . Sustituyendo en la integral tenemos

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\gamma_1} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw \right) \frac{1}{(z-z_0)^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}\end{aligned}$$

y esta convergencia es uniforme fuera de  $\gamma_1$

Ahora simplemente sutituyendo tendremos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

□

Procederemos a hacer un análisis de los detalles. Primero una serie de Laurent difiere bastante con respecto a las series de Taylor en el sentido que  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$  puede no estar definido como en el caso de  $f(z) = \frac{1}{z}$  y  $z = 0$ . De hecho, alrededor de  $z_0 = 0$  no tenemos serie de Taylor pero si de Laurent.

Otro punto es que la serie de Taylor es más sencilla de calcular puesto que está en función de derivadas y la de Laurent en función de integrales.

**DEFINICIÓN 51.** Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$ . Definamos el dual de un disco como  $d_r(z_0) = \mathbb{C} \setminus B_r(z_0)$ , es decir,

$$d_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z_0 - z| \geq r\}$$

Lo siguiente se le conoce como el dual del lema de Abel.

**PROPOSICIÓN 111.** Sea  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión de complejos. Si la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}(z-z_0)^n$  converge en  $z = z_1$  entonces converge absolutamente en  $d_r(z_0)$  con  $r = |z_0 - z_1|$ . Más aún converge uniformemente en  $d_{r'}(z_0)$  para  $r' > r$

**DEMOSTRACIÓN.** Notemos que si  $z \in d_r(z_0)$  entonces

$$|z_0 - z_1| = r \leq |z - z_0|$$

Si ponemos  $s = |z - z_0|$ , entonces  $r \leq s$  y así la sucesión

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{b_n}{(z_0 - z)^n} \right| &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|}{s^n} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|}{r^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|}{(z_1 - z)^n} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Esto demuestra que la serie converge en  $d_r(z_0)$

Ahora, sea  $r' > r$  y consideremos la sucesión

$$M_n = M \left( \frac{r}{r'} \right)^n$$

donde  $M$  es la cota de la sucesión  $\left\{ \frac{|b_n|}{r^n} \right\}_{n=0}^{\infty}$ , esta existe porque  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|}{r^n}$  converge.

Primero observemos que para  $z \in d_{r'}(z_0)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \right| &\leq \frac{|b_n|}{r^n} \\ &= \frac{|b_n|}{r^n} \frac{r^n}{r'^n} \\ &\leq M \left( \frac{r}{r'} \right)^n \end{aligned}$$

Por otro lado la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ , converge, el mismo argumento de ser una sucesión geométrica. Por el criterio  $M$  de Weierstrass el resultado se sigue.  $\square$

Esto nos da que el teorema de Laurent es una combinación del lema dual y del lema de Abel.

**PROPOSICIÓN 112.** Sea  $f : A(z_0, r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma_1(t) = z_0 + s_1 e^{it}$  y  $\gamma_2(t) = z_0 + s_2 e^{it}$  con  $r_1 < s_1 < s_2 < r_2$ . Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos la función  $g : A(z_0, r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } w \neq z \\ f'(z) & \text{si } w = z \end{cases}$$

Notemos que  $g$  es holomorfa en  $A(z_0, r_1, r_2) \setminus \{z\}$  y continua en  $A(z_0, r_1, r_2)$ . También tenemos que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son homotópicas en  $A(z_0, r_1, r_2)$  por lo que

$$\int_{\gamma_2} g(w) dw - \int_{\gamma_1} g(w) dw = 0$$

De la cual se sigue que:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_2} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \\ &= \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w - z} - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw + f(z) \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w - z} dw \end{aligned}$$

Por la ubicación de  $z \in A(z_0, r_1, r_2)$ , tenemos que

$$f(z) \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w - z} = f(z) 2\pi i$$

y

$$f(z) \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w - z} = 0$$

Así se sigue el resultado. □

#### 4. Singularidades y cálculos de residuos

En el contexto de la variable compleja entendemos a una singularidad como un punto donde cierta función no es holomorfa. Como veremos hay distintos tipos de singularidades, comenzaremos por introducir uno de dichos tipos.

**DEFINICIÓN 52.** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  una función y  $z_0 \in U$ . Decimos que  $z_0$  es una singularidad aislada de  $f$  si existe  $V \subseteq U$  una vecindad de  $z_0$  tal que  $f|_{V \setminus \{z_0\}} : V \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa.

La definición anterior es intuitivamente clara pues las singularidades aisladas son aquellas que poseen una vecindad tal que estas son el único punto donde  $f$  no es holomorfa. Estudiaremos algunos ejemplos para entender esto.

**EJEMPLO 40.** La función  $f : \mathbb{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$  definida por  $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$  tiene un par de singularidades aisladas, a saber  $i$  y  $-i$ .

**EJEMPLO 41.** La función  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ , tiene una única singularidad aislada en  $z_0 = 0$

**EJEMPLO 42.** La función  $f : \mathbb{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$  definida por  $f(z) = \cot(\pi z) := \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , pues  $\sin(\pi z) = 0$  si y sólo si  $z \in \mathbb{Z}$ . Note que todos los elementos de  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$  son singularidades aisladas al tomar para  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $V_n := B_{\frac{1}{4}}(n)$

**EJEMPLO 43.** Considere la función con regla de correspondencia  $f(z) = \cot(\frac{\pi}{z})$ . Note que esta función está definida en  $\mathbb{C} \setminus (\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{z} \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\})$  y que en dicho conjunto la función es holomorfa.

En este ejemplo hay dos tipos de singularidades:

**Caso 1:** Los elementos del conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{z} \in \mathbb{C}\}$ . Note que este conjunto coincide con el conjunto  $\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ . Todas estas singularidades son aisladas pues para  $k \in \mathbb{Z}$ , al tomar  $V_k = B_{\frac{1}{2|k(k+1)|}}(k)$  se encuentra la vecindad buscada. (Ver figura 1)

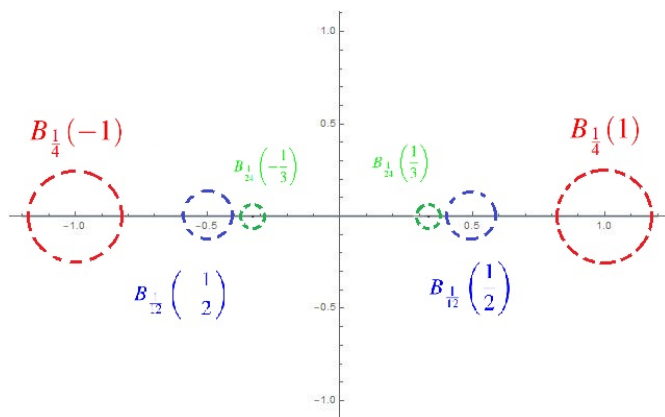


FIGURA 1.

**Caso 2:**  $z = 0$ . Este punto proporciona un ejemplo donde  $f$  no es holomorfa pero esta no es una singularidad aislada, pues para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $\frac{1}{k} \in B_\varepsilon(0)$ .

Vamos a introducir más definiciones y puntualizar algunas convenciones.

**DEFINICIÓN 53.** Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto,  $z_0 \in U$  y  $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa.

1. Si existe  $V \subseteq U$  una vecindad de  $z_0$  donde  $f$  es acotada en  $V \setminus \{z_0\}$ , diremos que  $z_0$  es una vecindad removible.
2. Si  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ , diremos que  $z_0$  es un polo de  $f$ .
3. Si  $z_0$  no es un polo ni una singularidad removible, diremos que  $z_0$  es una singularidad esencial de  $f$ .

La primera afirmación a tratar justificará en que sentido las singularidades del inciso 1 son removibles, ya que al menos por el nombre, suena a que estas se pueden evitar. Esto es lo que dice el siguiente resultado.

**TEOREMA 4** (de levantamiento de Riemann). Sean  $z_0 \in U$  con  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto, así como  $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Si existe  $r > 0$  tal que  $B_r(z_0) \subseteq U$  y  $f$  es acotada en  $B_r(z_0)$ , entonces existe  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $\tilde{f}|_{(U \setminus \{z_0\})} = f$

DEMOSTRACIÓN. Definimos  $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$  con la regla de correspondencia

$$F(z) \begin{cases} (z - z_0)f(z) & , \quad \text{si } z \in U \setminus \{z_0\} \\ 0 & , \quad \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Notemos que  $F$  es holomorfa en  $U \setminus \{z_0\}$  y al ser  $f$  acotada en  $B_r(z_0)$ , entonces  $F$  es continua en  $z_0$ , pues si la cota de  $f$  es  $M$ , entonces para  $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  se cumple que

$$|F(z)| \leq |z - z_0| M \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

Por lo tanto por un resultado previo  $F$  es holomorfa en  $U$ . Como además  $F(z_0) = 0$ , entonces existe  $\tilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que para cualquier  $z \in U$ ,  $F(z) = (z - z_0)\tilde{f}(z)$ . Note que si  $z \in U \setminus \{z_0\}$ , esto implica que  $\tilde{f}(z) = f(z)$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

El resultado anterior dice que para una singularidad aislada de una función  $f$  podemos encontrar una extensión holomorfa a todo  $U$ . Más aún,

**COROLARIO 18.** Sean  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $z_0 \in U$  una singularidad aislada de  $f$ . Entonces  $z_0$  es removible si y sólo si existe  $\tilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$  extensión holomorfa de  $f$ .

De los tipos de singularidades que tenemos: aisladas, removibles, polos y esenciales, los primeros tres tipos son los que quizá podemos entender más. En el caso de las singularidades esenciales, son aquellas en las que por decirlo de alguna forma, en verdad se presenta una patología. Por tal razón sería importante tener resultados que nos permitan clasificarlas. El siguiente es uno de tales resultados que se basa en las series de Laurent.

**PROPOSICIÓN 113.** Sea  $f$  una función holomorfa en  $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  con serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

La singularidad aislada  $z_0$  de  $f$  es:

1. Removible si y sólo si para todo  $k < 0$ ,  $a_k = 0$
2. Un polo de orden  $n$  si y sólo si  $a_n \neq 0$  y para todo  $k < -n$ ,  $a_k = 0$
3. Esencial si y sólo si  $\{k | k < 0 \text{ y } a_k \neq 0\} \subseteq \mathbb{Z}$  es infinito (numerable).

DEMOSTRACIÓN. **Para 1:**

$\Rightarrow$ ) Considere  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$  la extensión holomorfa de  $f$ . Dicha extensión holomorfa tiene una serie de Taylor al rededor de  $z_0$ , la cual debe ser igual por unicidad a la serie de Laurent de  $\tilde{f}$  y por lo tanto a la de  $f$ . De esto se deduce que  $a_k = 0$  para  $k < 0$ .

$\Leftarrow$ ) La hipótesis implica que la serie de Laurent es en realidad una serie de potencias, luego  $f$  es holomorfa y así, por el corolario  $f$  tiene una singularidad removible en  $z_0$ .

### Para 2:

$\Rightarrow$ ) Si  $z_0$  es un polo de orden  $n$ , entonces existe  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$  con  $g(z_0) \neq 0$ . Al considerar la serie de Taylor de  $g$  al rededor de  $z_0$ ,  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ , se tiene que  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^{k-n}$ . Por unicidad de la serie de Laurent se deduce que para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ ,  $b_k = a_{n+k}$  y que para  $k < -n$ ,  $a_k = 0$ . Note que como  $b_0 = a_n$ , entonces  $a_n \neq 0$  pues  $g(z_0) \neq 0$ .

$\Leftarrow$ ) De las hipótesis se deduce que al tomar  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n}(z-z_0)^k$ ,  $g$  es holomorfa y  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ , además  $g(z_0) = a_n \neq 0$ .

Esto dice que  $z_0$  es polo de orden  $n$ .

### Para 3:

$\Rightarrow$ ) Dado que una singularidad esencial no es un polo, el inciso 2 dice que hay una cantidad infinita de  $k < 0$  tales que  $a_k \neq 0$ .

$\Leftarrow$ ) Usando 1 y 2, la singularidad no puede ser removible ni un polo, por lo tanto es esencial.  $\square$

Vamos a aplicar el resultado anterior para algunos ejemplos concretos.

EJEMPLO 44. La serie de Laurent de  $e^{\frac{1}{z}} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  está dada por

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$$



Por lo tanto, al usar el inciso 3 de la proposición anterior,  $z_0 = 0$  es una singularidad esencial.

EJEMPLO 45. Considere la función  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = \frac{\text{sen}(z)}{z}$ . Note que  $f$  tiene una singularidad aislada en  $z_0 = 0$ . Para determinar el tipo de singularidad, recordemos que la serie de Taylor de  $\text{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$  y esta converge en todo  $\mathbb{C}$ . De aquí

$$\frac{\text{sen}(z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$$

Esta es la expresión alrededor de  $z_0 = 0$  de  $f$  y por lo tanto esta es su serie de Laurent. Esto dice que  $f$  tiene una extensión holomorfa  $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(z)}{z} & , \quad \text{si } z \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Para ver lo complicadas que son las singularidades esenciales, podemos analizar el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 114 (Casorti-Weierstrass). Sea  $z_0$  una singularidad esencial de  $f$  en el abierto  $U$ . Entonces para cualquier  $V \subseteq U$  vecindad de  $z_0$ ,  $f(V \setminus \{z_0\})$  es denso en  $\mathbb{C}$

DEMOSTRACIÓN. Procediendo por contrapositiva supongamos que  $z_0 \in U$  es singularidad aislada y que  $\overline{f(U \setminus \{z_0\})} \subsetneq \mathbb{C}$  para alguna  $V \subseteq U$  vecindad de  $z_0$ . Esto dice que existen  $\varepsilon > 0$  y  $z_1 \in \mathbb{C}$  tal que  $f(V \setminus \{z_0\}) \cap B_\varepsilon(z_1) = \emptyset$ .

Considere la función  $g: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$ , la cual es obviamente holomorfa y  $|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w_0|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ . El teorema de levantamiento de Riemann implica que existe  $\tilde{g}: U \rightarrow \mathbb{C}$  una extensión holomorfa de  $g$ . Note que  $f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)}$ , lo que dice que  $f$  tiene una singularidad removible si  $g(z_0) \neq 0$  o un polo si  $g(z_0) = 0$   $\square$

Existen dos teoremas mucho mas fuertes al anterior, que sale de los alcances de este curso, respecto a singularidades esenciales. Enunciemos estos simplemente para tenerlos presentes.

TEOREMA 5. 1. (*Pequeño de Picard*) Si  $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  es una función entera y no constante, entonces

$$f(\mathbb{C}) \begin{cases} \mathbb{C} \\ \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \end{cases} \text{ para } z_0 \in \mathbb{C}$$

2. (*Grande de Picard*) Si  $f$  es una función con una singularidad esencial en  $z_0$ , entonces para cada  $V \subseteq \mathbb{C}$  vecindad,  $f(V)$  toma todos los valores de  $\mathbb{C}$  salvo posiblemente una excepción. Además cualesquiera dos valores en dicha imagen se toman una cantidad infinita de veces.

**5. Ejercicios del capítulo**

EJERCICIO 96. *Demuestra la prueba de la raíz para el radio de convergencia.*

EJERCICIO 97. *Obtener las series de Taylor de  $\sin, \cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  y calcular su radio de convergencia.*

EJERCICIO 98. *Encuentra la serie de Laurent de una transformación de Möbius.*



## Teorema del Residuo

“Las matemáticas son la música de la razón.”

**James Joseph Sylvester.**

En este capítulo plantearemos el teorema del residuo y obtendremos algunas aplicaciones de este para el cálculo de integrales reales para las cuales no se conocen antiderivadas explícitas.

La idea de este proceso será extender los integrandos a funciones con singularidades aisladas y calcular estas sobre una curva adecuada.

### 1. Teorema del residuo e integrales impropias

El teorema del residuo es una de las aplicaciones principales del Teorema de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy.

**PROPOSICIÓN 115.** Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $z_1, \dots, z_n \in A$  distintos puntos en  $A$ . Si  $f : A \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y  $\gamma$  es homotópica a un punto en  $A$ , y  $z_1, \dots, z_n \notin \gamma$ . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, z_i) I(\gamma, z_i)$$

donde  $\text{Res}(f, z_i)$  es el residuo de  $f$  en  $z_i$  e  $I(\gamma, z_i)$  es el índice de  $\gamma$  con respecto a  $z_i$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Como cada  $z_i$  es una singularidad aislada de  $f$ , entonces escribimos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{in}}{(z - z_i)^n}$$

la serie de Laurent para  $f$  alrededor de  $z_i$ , que tiene como dominio  $A(z_i, 0, r_i)$  para algún  $r_i > 0$ .

Sabemos que la parte singular de cada serie

$$s_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{in}}{(z - z_i)^n}$$

que converge en  $\mathbb{C} \setminus \{z_i\}$  y en  $d_r(z_i)$  uniformemente para cualquier  $r > 0$ . Más aún, si es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{z_i\}$ .

Ahora tomemos la función

$$g(z) = f(z) - \sum_{i=1}^{\infty} s_i(z)$$

Por lo anterior  $g$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ .

Como los  $z_i$  son singularidades removibles de  $g$  en un anillo  $A(z_i, 0, r_i)$ , tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{in}(z - z_i)^n + s_i(z)$$

en  $A(z_i, 0, r_i)$ . Por lo que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{in}(z - z_i)^n - \sum_{j=1}^{i-1} s_j(z) - \sum_{j=i+1}^n s_j(z)$$

en  $\mathbb{C} \setminus \{z_i\}$ . Podemos ver que

$$\lim_{z \rightarrow z_i} g(z) = a_0 - \sum_{j=1}^{i-1} s_j(z_i) - \sum_{j=i+1}^n s_j(z_i)$$

puesto que  $s_j(z)$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$  en particular son holomorfas en  $\{z_i\}$ .

Por lo que concluimos que  $g$  se puede definir en  $A$ . Así que podemos aplicar el teorema de Cauchy, llegamos a que

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 0$$

De donde

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma} s_i(z) dz$$

Como  $s_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{in}}{(z - z_i)^n}$  converge uniformemente en algún  $A(z_i, 0, r_i)$ , entonces

$$\int_{\gamma} s_i(z) dz = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{b_{im}}{(z - z_i)^m} z$$

Sabemos que para  $m > 1$  y  $z \neq z_i$ ,

$$\frac{1}{(z - z_i)^m} = \frac{d}{dz} \left( \frac{(z - z_i)^{1-m}}{1-m} \right)$$

por el teorema de la antiderivada y considerando que  $\gamma$  es una curva cerrada, tenemos que

$$\int_{\gamma} \frac{b_{im}}{(z - z_i)^m} dz = 0$$

para  $m > 1$ . De donde llegamos a que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} s_i(z) dz &= b_{i1} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_i} dz \\ &= \text{Res}(f, z_i) I(\gamma, z_i) 2\pi i \end{aligned}$$

Así concluimos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n 2\pi i \text{Res}(f, z_i) I(\gamma, z_i)$$

□

Usaremos el teorema para evaluar

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos(\theta)}$$

Si ponemos  $z = e^{i\theta}$  con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma(t) = e^{it}$ . Entonces considerando que  $z = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos(\theta)} &= \int_{\gamma} \frac{dz}{iz(5-2(z+\frac{1}{z}))} \\ &= \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z+4z-2z^2-2} \\ &= \int_{\gamma} \frac{idz}{(z-2)(2z-1)} \\ &= \int_{\gamma} \frac{idz}{2(z-2)(z-\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

Por lo que tenemos dos polos simples en 2 y en  $\frac{1}{2}$ , los residuos en esos puntos son:

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(\frac{1}{2(z-2)(z-\frac{1}{2})}, 2\right) &= \frac{i}{2z-1}\Big|_{z=2} = \frac{i}{3} \\ \text{Res}\left(\frac{i}{2(z-2)(z-\frac{1}{2})}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{i}{2(z-2)}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{i}{3} \end{aligned}$$

De donde 2 está afuera de  $\gamma$  y  $\frac{1}{2}$  está adentro. Entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos(\theta)} = 2\pi i \left(\frac{i}{-3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Lo que hicimos fue plantear una integral real como una compleja y usar el teorema del residuo. Vamos a extender esto un poco y evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Primero recordamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Vamos a crear la curva que rodea al semicírculo de radio  $R$ ,  $\gamma_R: [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $\gamma_R(t) = t$  y  $\lambda_R: [-R, R+2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $\lambda_R(t) = Re^{i(t-R)}$ .

Así el semicírculo está dado por la curva  $\Lambda_R = \gamma_R + \lambda_R$ .

Tomemos la función  $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$  que es holomorfa excepto en las cuatro raíces cuartas de  $-1$ , que son  $e^{\pi \frac{i}{4}}, e^{3\pi \frac{i}{4}}, e^{5\pi \frac{i}{4}}$  y  $e^{7\pi \frac{i}{4}}$ . De las cuales  $e^{\pi \frac{i}{4}}$  y  $e^{3\pi \frac{i}{4}}$  están dentro de  $\Lambda_R$  con  $R > 1$ .

Los residuos en estos puntos tienen valor

$$\text{Res}\left(f, e^{\pi \frac{i}{4}}\right) = \frac{1}{4e^{\pi \frac{i}{4}}}$$

y

$$\operatorname{Res}\left(f, e^{3\pi\frac{i}{4}}\right) = \frac{1}{4e^{3\pi\frac{i}{4}}}$$

Así por el teorema del residuo tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_R} f(z) \, dz &= 2\pi i \left[ \operatorname{Res}\left(f, e^{\pi\frac{i}{4}}\right) + \operatorname{Res}\left(f, e^{3\pi\frac{i}{4}}\right) \right] \\ &= \frac{2\pi i}{4} \left( e^{-\pi\frac{i}{4}} + e^{-3\pi\frac{i}{4}} \right) \\ &= \frac{\pi i}{2} e^{-\pi\frac{i}{2}} \left( e^{\pi\frac{i}{4}} + e^{-\pi\frac{i}{4}} \right) \\ &= \frac{\pi i}{2} (-i) 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Recordemos que

$$\int_{\Lambda_R} f(z) \, dz = \int_{\gamma_R} f(z) \, dz + \int_{\lambda_R} f(z) \, dz$$

Notamos que

$$\int_{\gamma_R} f(z) \, dz = \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} \, dx$$

Analicemos el segundo sumando, para  $|z| = R > 1$  tenemos que

$$|f(z)| = \frac{R^2}{|1+z^4|} \leq \frac{R^2}{R^4+1}$$

Así

$$\left| \int_{\lambda_R} f(z) \, dz \right| \leq \frac{R^2}{R^4+1} L = \frac{\pi R^3}{R^4-1}$$

donde L es la longitud de arco de  $\lambda_R$ . Así  $\left| \int_{\lambda_R} f(z) \, dz \right| \rightarrow 0$  cuando  $R \rightarrow \infty$

Retomando lo anterior

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} \, dx &= 0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} \, dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\lambda_R} f(z) \, dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) \, dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_R} f(z) \, dz \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

**PROPOSICIÓN 116.** *Sea  $f$  holomorfa en  $\mathbb{C}$  excepto en un número finito de polos no reales, que*

$$|f(z)| \leq \frac{k}{|z|^2}, \quad \text{si } |z| \geq R, \quad \text{para } R, k \geq 0$$

y que

$$f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$$



Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \{\text{residuos de } f \text{ en el semiplano superior}\} \\ 2\pi i \sum \{\text{residuos de } f \text{ en el semiplano inferior}\}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\gamma_R : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma_R(t) = t$  y  $\lambda_R : [R, R + 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\lambda_R(t) = Re^{i(t-R)}$  para poner  $\Lambda_R = \gamma_R + \lambda_R$ .

Por el teorema del residuo

$$\int_{\Lambda_R} f(z) dz = 2\pi i \sum \{\text{residuos en el semiplano superior}\}$$

Ahora bien

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx$$

De manera análoga al ejemplo basta analizar  $\int_{\lambda_R} f(z) dz$

$$\int_{\lambda_R} f(z) dz \leq \frac{kL}{R^2} = \frac{k\pi R}{R^2}$$

Por lo que cuando  $R \rightarrow \infty$  tenemos que  $\int_{\lambda_R} f(z) dz \rightarrow 0$

Así

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx + 0 \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\lambda_R} f(z) dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_R} f(z) dz \end{aligned}$$

□

## 2. Cálculo de integrales de funciones trigonométricas.

El primero resultado tiene que ver con funciones racionales trigonométricas.

PROPOSICIÓN 117. Sea  $R(x, y)$  una función racional en dos variables sobre  $\mathbb{C}$  definida en  $\mathbb{S}^1$ . Al definir la función meromorfa  $f$  mediante

$$f(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

se cumple que

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt = \sum_{|z|<1} \text{res}_z(f)$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que para  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$  y  $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ , de donde se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) dt \\ &= \int_{\partial B_1(0)} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz} dz \\ &= \frac{1}{i} \int_{\partial B_1(0)} f(z) dz \\ &= 2\pi \sum_{|z|<1} \text{res}_z(f) \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 46. Calcular  $\int_0^\pi \frac{1}{a + \cos(t)} dt$  para  $a > 1$ .

**Solución:**

Consideremos la función  $R(x, y) := \frac{1}{a+x}$ . Como  $a > 1$ , esta función está definida en  $\mathbb{S}^1$  pues  $x \in [-1, 1]$ . Además consideremos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \\ &= \frac{1}{z} \frac{1}{a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{2az + z^2 + 1} \end{aligned}$$

Obtenemos las raíces del denominador las cuales son  $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$  y  $z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$ . Notamos que  $z_1 \in B_1(0)$  y  $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$ .

Dado que

$$\frac{1}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left( \frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} \right),$$

se deduce que

$$\text{res}_{z_1}(f) = \frac{2}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Luego, para concluir se tiene que:

$$\int_0^\pi \frac{1}{a + \cos(t)} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos(t)} dt = \pi \text{res}_{z_1}(f) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Nuestra siguiente meta es obtener una fórmula que permita calcular algunas integrales de la forma  $\int_{-\infty}^\infty f(x) \cos(x) dx$  y  $\int_{-\infty}^\infty f(x) \sin(x) dx$ . Para obtener estos resultados requerimos de un resultado previo.

LEMA 6. Sea  $a > 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{iae^{it}}| dt &< \frac{\pi}{2} \\ a \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |e^{iae^{it}}| dt &< \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que la función  $\text{sen} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  es concava, para cualquier  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\text{sen}(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ . Notamos que  $\text{Re}(e^{iae^{it}}) = e^{-a \text{sen}(t)}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{iae^{it}}| dt &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a \text{sen}(t)} dt \leq a \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2a}{\pi}t} dt \\ &= -\frac{\pi}{2} \left( e^{-\frac{2a}{\pi}t} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-a}) < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

De forma análoga

$$\begin{aligned} a \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |e^{iae^{it}}| dt &= a \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-a \text{sen}(t)} dt = a \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-a \text{sen}(\pi-t)} dt \\ &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a \text{sen}(t)} dt < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

□

El resultado que buscamos se presenta a continuación. Es importante decir que para la prueba de este se usan algunos resultados de la integral de Lebesgue, por lo que el lector puede omitir la demostración de este si no conoce dicha teoría.

PROPOSICIÓN 118. Sea  $f$  una función holomorfa con singularidades aisladas en una vecindad de la cerradura del semiplano superior  $\mathbb{H}$  tal que ninguna singularidad está en  $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$ . Además supongamos que  $\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \overline{\mathbb{H}}}} f(z) = 0$

Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta})$$

Por otro lado, si  $f$  es como la función anterior usando el semiplano inferior, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix} dx = -2\pi i \sum_{\text{Im}(z) < 0} \text{res}_z(f(\zeta)e^{-i\zeta})$$

Note que la existencia de las integrales es parte de la afirmación.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos la primera afirmación pues la segunda es análoga y queda como ejercicio. Sea  $U$  una vecindad de  $\overline{\mathbb{H}}$  donde  $f$  está definida. Como  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , existe  $r_0 > 0$  tal que todas las singularidades de  $f$  en el semiplano  $\mathbb{H}$  se encuentran en  $B_{r_0}(0)$ . Notemos que el número de singularidades es finito. Considere  $\sigma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  la trayectoria que une 0 con  $ir_0$  tal que ninguna de las singularidades de  $f$  pertenece a  $\sigma_0([0, 1])$  y tal que  $\sigma_0$  va de frontera en frontera en  $B = \{z \in B_{r_0}(0) | \text{Im}(z) > 0\}$ . Sea  $U_1$  la componente de  $B \setminus \sigma_0([0, 1])$  a la derecha de  $\sigma_0$  y  $U_2$  la componente de  $B \setminus \sigma_0([0, 1])$  a la izquierda de  $\sigma_0$ . (Ver figura 1)

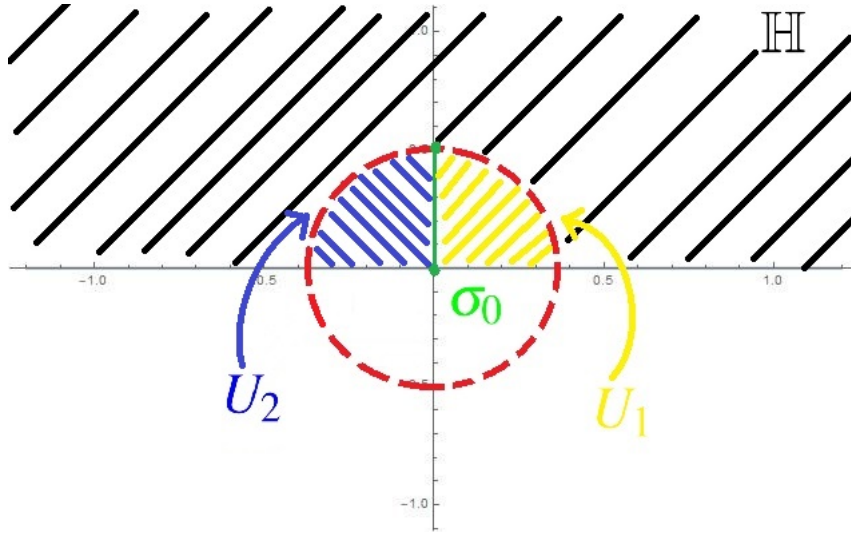


FIGURA 1.

Para  $r > r_0$  considere las trayectorias  $\tau : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\gamma : [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  con regla de correspondencia  $\tau(t) = re^{it}$  y  $\gamma(t) = re^{it}$ . Observamos que las siguientes trayectorias cerradas son contraíbles, donde  $[z, w]$  es el segmento que une  $z$  con  $w$ :

$$\tilde{\tau} := [0, r] + \tau - [ir_0, ir] - \sigma_0$$

$$\tilde{\gamma} := [-r, 0] + \sigma_0 + \sigma_0 + [ir_0, ir] + \gamma$$

El primero de estos se representa esquemáticamente en la figura 2

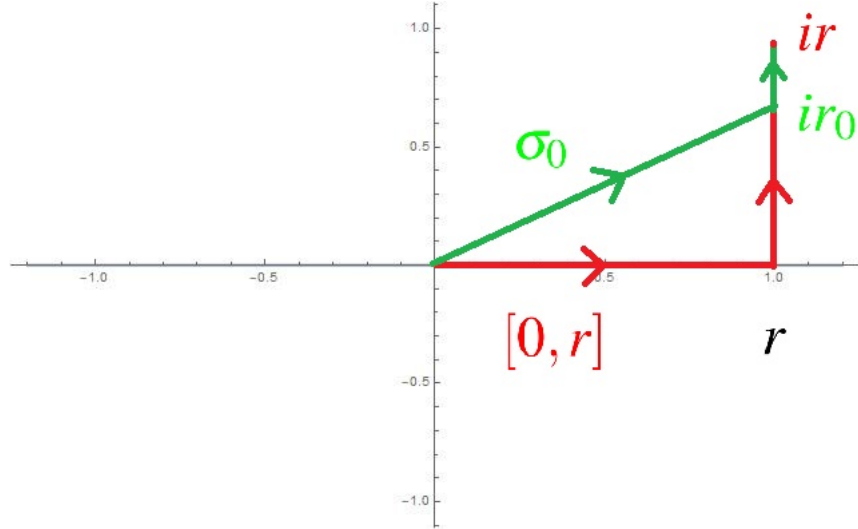


FIGURA 2.

Del teorema del residuo se deduce que

$$(7) \quad \int_{\tilde{\tau}} f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{z \in U_1} \text{res}_z(f(\zeta) e^{i\zeta})$$

$$(8) \quad \int_{\tilde{\gamma}} f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{z \in U_2} \text{res}_z(f(\zeta) e^{i\zeta})$$

Ahoramos observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau} f(z) e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(re^{it}) e^{ire^{iz}} ire^{it} dt \right| \\ &\leq \left( \max_{\substack{|z|=r \\ \operatorname{Im}(z) \geq 0}} |f(z)| \right) r \int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{ire^{it}}| dt \\ &\leq \left( \max_{\substack{|z|=r \\ \operatorname{Im}(z) \geq 0}} |f(z)| \right) \frac{\pi}{2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, la función  $t \mapsto f(it)$  es acotada en  $[r_0, \infty)$  por la definición de  $r_0$  y la definición de  $f$ . Esto implica que la función  $t \mapsto f(it)e^{-t}$  es integrable en  $[r_0, \infty)$  en el sentido de Lebesgue y existe

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{[ir_0, ir]} f(z) e^{iz} dz = i \int_0^{\infty} f(it) e^{-t} dt$$

Esto implica al hacer tender  $r \rightarrow \infty$  (7) se tiene que  $\int_0^{\infty} f(x) e^{ix} dx$  existe y además,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) e^{ix} dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{[0, r]} f(z) e^{iz} dz \\ (9) \quad &= 2\pi i \sum_{z \in U_1} \operatorname{res}_z(f(\zeta) e^{i\zeta}) + \int_{\sigma_0} f(z) e^{iz} dz \\ &\quad + i \int_0^{\infty} f(it) e^{-t} dt \end{aligned}$$

Por otro lado, de forma análoga a lo que se hizo anteriormente, del lema anterior se deduce que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) e^{iz} dz = 0$ . Además al hacer tender  $r \rightarrow \infty$  en (8), se llega a que  $\int_{-\infty}^0 f(z) dz$  existe y además

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{ix} dx &= 2\pi i \sum_{z \in U_2} \operatorname{res}_z(f(\zeta) e^{i\zeta}) - \int_{\sigma_0} f(z) e^{iz} dz \\ (10) \quad &\quad - i \int_0^{\infty} f(it) e^{-t} dt \end{aligned}$$

Ya que  $U_1 \cup U_2$  tiene todas las singularidades del semiplano de (9) y (10) se deduce que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$  existe y además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_z(f(\zeta) e^{i\zeta})$$

□

COROLARIO 19. Sea  $f$  una función con singularidades aisladas tal que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) =$

0. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(x) dx &= \pi i \left( \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_z \left( f(\zeta) e^{i\zeta} \right) - \sum_{\operatorname{Im}(z) < 0} \left( f(\zeta) e^{-i\zeta} \right) \right) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(x) dx &= \pi \left( \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_z \left( f(\zeta) e^{i\zeta} \right) + \sum_{\operatorname{Im}(z) < 0} \left( f(\zeta) e^{-i\zeta} \right) \right)\end{aligned}$$

Si además  $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(x) dx &= -2\pi \operatorname{Im} \left( \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_z \left( f(\zeta) e^{i\zeta} \right) \right) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(x) dx &= 2\pi \operatorname{Re} \left( \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_z \left( f(\zeta) e^{i\zeta} \right) \right)\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Para la primera afirmación notemos que como

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(x) dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(x) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(x) dx\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(x) dx &= \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix} dx \right) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(x) dx &= \frac{1}{2i} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix} dx \right)\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se deduce del anterior. Respecto a la segunda afirmación, notemos que al tomar  $f$  valores reales,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(x) dx &= \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx \right) = \operatorname{Re} \left( 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_z \left( f(\zeta) e^{i\zeta} \right) \right) \\ &= 2\pi \operatorname{Im} \left( \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_z \left( f(\zeta) e^{i\zeta} \right) \right)\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(x) dx &= \operatorname{Im} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx \right) \\ &= 2\pi i \operatorname{Re} \left( \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_z \left( f(\zeta) e^{i\zeta} \right) \right)\end{aligned}$$

□

Vamos a ver un ejemplo de uso.

EJEMPLO 47. Calcular para  $a > 0$ ,  $\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{a^2+x^2} dx$

**Solución:**

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{a^2+x^2} dx = -\pi \sum_{\text{Im}(z)>0} \text{res}_z \left( f(\zeta) e^{i\zeta} \right)$$

donde  $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ . Notemos que las raíces del denominador son  $\{ia, -ia\}$ . Como  $a > 0$ , el único residuo que nos importa es en  $z = ia$ . Para calcularlo notamos que

$$f(\zeta) e^{i\zeta} = \frac{e^{i\zeta}}{a^2+\zeta} = \frac{e^{i(\zeta-ia)} e^{-a}}{(\zeta+ia)(\zeta-ia)} = \frac{e^{-a}}{2ai} \left( \frac{1}{\zeta-ai} + \frac{1}{\zeta+ia} \right) e^{-(\zeta-ia)}$$

De esto se deduce que:

$$\text{res}_{z=ai} \left( f(\zeta) e^{i\zeta} \right) = \frac{e^{-a}}{2ai} = -\frac{e^{-a}}{2a} i$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{a^2+x^2} dx = -\pi \text{Im} \left( -\frac{e^{-a}}{2a} i \right) = \frac{\pi}{2a} e^{-a}$$

Por supuesto que el teorema anterior deja de estar completo pues por ejemplo no podemos calcular la famosa integral  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$ . Vale la pena decir que dicho resultado se puede extender para incluir estos casos, pero dejamos esto para un curso más avanzado pues como se pudo ver, cada vez se requieren más técnicas de análisis para obtener estos resultados.



**3. Ejercicios del capítulo**

EJERCICIO 99. *Calcular para  $a > 0$  con  $a \neq 1$ ,*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 + 1 + 2a \cos(t)} dt$$

EJERCICIO 100. *Demuestra la segunda afirmación en la proposición 118*



## Bibliografía

- [1] Lars Ahlfors. *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2021.
- [2] Ruel V. Churchill and James Ward Brown. *Complex variables and applications*. 4th ed. New York etc.: McGraw-Hill Book Company. X, 339 p. DM 124.10 (1984)., 1984.
- [3] John B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11. Springer, Cham, 1973.
- [4] Jerrold E. Marsden and Michael J. Hoffman. *Basic complex analysis*. 2nd ed. New York: W. H. Freeman and Company. XII, 604 p.; £19.95 (1987)., 1987.
- [5] Tristan Needham. *Visual complex analysis*. Oxford: Clarendon Press, 1997.
- [6] Reinhold Remmert. *Theory of complex functions. Transl. from the German by Robert B. Burckel*, volume 22. New York etc.: Springer-Verlag, 1991.