Notas de Álgebra Lineal 1

Facultad de Ciencias, UNAM

Frank Patrick Murphy Hernandez

Jaime García Villeda

Índice general

Introducción

"El álgebra es la oferta hecha por el diablo al matemático. El diablo dijo: Te daré esta potente máquina, que responderá cualquier cuestión. Todo lo que necesitas es darme tu alma. Deja la geometría y te daré esta maravillosa máquina."

Michael Atiyah.

"Cuando un matemático dice que algo es *fácil de ver* o *trivial*, significa que espera que saques un lápiz y una hoja de papel, y dediques un poco de tiempo (probablemente considerable) revisandolo por ti mismo."

Jonathan Golan [**1**]

El objetivo de estas notas es darle un seguimiento puntual a mis cursos de álgebra lineal 1 de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Sin embargo, me permito recomendar ampliamente dos libros, el primero es el libro de Dr. Hugo Rincón [**3**] que esta disponible en la Prensa de Ciencias. A mi parecer es un libro que cualquier persona que lleve álgebra lineal en la facultad debería tener, es un libro muy bien escrito y captura perfectamente la esencia algebraica del álgebra lineal. El segundo es el libro de Golan [**1**], que trae muchos comentarios históricos y muchos ejercicios. Se que el libro de Friedberg [**4**] es muy popular en los cursos de lineal y lo incluyo en la bibliografía, pero es un libro muy escaso en la biblioteca, y aunque se puede conseguir en las librerías tiende a ser excesivamente caro. Por último, no hay que olvidar el libro de Lang [**2**] en el cual se basa el temario oficial.

En el álgebra lineal, trabajamos con vectores, que son elementos matemáticos que se pueden representar por una fila o una columna de números, conocidos como componentes. Los vectores se pueden sumar y multiplicar por escalares, lo que significa que se pueden multiplicar por números reales y sumar entre sí.

Un espacio vectorial es un conjunto de vectores que cumplen ciertas propiedades algebraicas. Por ejemplo, el espacio vectorial de todas las combinaciones lineales de dos vectores dados, A y B, es un espacio vectorial. Una base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores que pueden combinarse linealmente para formar cualquier otro vector del espacio vectorial. Por ejemplo, si A y B son vectores que forman una base del espacio vectorial, entonces cualquier vector del espacio vectorial puede expresarse como una combinación lineal de A y B.

Una transformación lineal es una función matemática que toma un vector como entrada y produce otro vector como salida, ambos en el mismo espacio vectorial. Las transformaciones lineales tienen propiedades muy útiles, como la conservación de la suma y la multiplicación por escalares.

El producto interior, también conocido como producto escalar, es una operación que se realiza entre dos vectores. El resultado del producto interior es un número real que mide la similitud entre los dos vectores. El producto interior es fundamental para el cálculo de distancias y ángulos entre vectores.

Por último, el determinante de una matriz es un número que se utiliza para medir el grado de cambio que experimenta un espacio vectorial bajo una transformación lineal. El determinante es especialmente útil en el cálculo de áreas y volúmenes en el álgebra lineal.

En resumen, el álgebra lineal es una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de vectores y espacios vectoriales, y de las transformaciones que ocurren en ellos. Algunos de los conceptos más importantes en el álgebra lineal son las bases, las transformaciones lineales, el producto interior y los determinantes. Estos conceptos son esenciales para comprender y resolver problemas matemáticos que involucren vectores y espacios vectoriales.

Con respecto al álgebra lineal, esta es un área del álgebra que se puede considerar central en casi todas las áreas de las matemáticas. Sólo por mencionar algunas en la geometría analítica, ecuaciones diferenciales y en el análisis funcional. Lo que causa que también sea central en otras área como la ingenieria y la física. Hay que resaltar que su rol otras áreas es de un carácter técnico.

Hay algo que no quiero dejar pasar pero es agradecer a Ana Paula por su gran ayuda con estas notas.

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

"Las matemáticas son la más bella y la más poderosa creación del espíritu humano "

Stefan Banach.

1. Campos

DEFINICIÓN 1.1 (Campo). *Sea K un conjunto no vacío con dos funciones $+\colon K \times K \longrightarrow K$ y $*\colon K \times K \longrightarrow K$. Notacionalmente escribimos $\lambda + \mu := +(\lambda, \mu)$ y $\lambda\mu := *(\lambda, \mu)$ para $\lambda, \mu \in K$. Si estas dos funciones cumplen:*

C1) Para $\lambda, \mu, \nu \in K$, $\lambda + (\mu + \nu) = (\lambda + \mu) + \nu$.

C2) Existe $\phi \in K$ tal que para cualquier $\lambda \in K$, $\lambda + \phi = \lambda = \phi + \lambda$.

C3) Para todo $\lambda \in K$, existe $\mu \in K$ tal que $\lambda + \mu = \phi = \mu + \lambda$.

C4) Para $\lambda, \mu \in K$, $\lambda + \mu = \mu + \lambda$.

C5) Para $\lambda, \mu, \nu \in K$, $\lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu$.

C6) Existe $\eta \in K$ tal que para cualquier $\lambda \in K$, $\lambda\eta = \lambda = \eta\lambda$.

C7) Para todo $\lambda \in K$ con $\lambda \neq \phi$, existe $\mu \in K$ tal que $\lambda\mu = \eta = \mu\lambda$.

C8) Para $\lambda, \mu \in K$, $\lambda\mu = \mu\lambda$.

C9) Para $\lambda, \mu, \nu \in K$, $\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu$.

Entonces llamamos a K un campo.

Los frenceses llaman a los campos cuerpos(corps), por lo que es comúen encontrar que los españoles también los llamen así.

EJEMPLO 1.1. *Los ejemplos más conocidos de campos son:*

- *Los reales $\mathbb{R}$*
- *Los racionales $\mathbb{Q}$*
- *Los complejos $\mathbb{C}$*
- *Los enteros módulo p, $\mathbb{Z}_p$, con p un primo.*

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea K un campo, entonces:*

1. *El neutro aditivo es único.*
2. *El neutro multiplicativo es único.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sean $\phi' \in K$ otro neutro aditivo. Entonces

$$\phi = \phi + \phi' = \phi'$$

Por lo que $\phi = \phi'$. Así el neutro aditivo es único.

2. Sean $\eta' \in K$ otro neutro multiplicativo. Entonces

$$\eta = \eta\eta' = \eta'$$

Por lo que $\eta = \eta'$. Así el neutro multiplicativo es único.

□

NOTACIÓN 1.1. *Por la proposición anterior, al neutro aditivo le podemos asignar el nombre de cero,* 0*, y al neutro multiplicativo el de uno,* 1.

PROPOSICIÓN 1.2. *Sea K un campo, entonces:*

1. *Los inversos aditivos son únicos.*
2. *Los inversos multiplicativos son únicos.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea $\lambda \in K$ y con inversos aditivos $\mu, \mu' \in K$. Si sumamos a μ' a la igualdad $\lambda + \mu = 0$, entonces:

$$\mu' = (\lambda + \mu) + \mu' = (\lambda + \mu') + \mu = 0 + \mu = \mu$$

Por lo que $\mu = \mu'$. Así el inverso aditivo es único.

2. Sea $\lambda \in K$ y con inversos multiplicativos $\mu, \mu' \in K$. Si multiplicamos a μ' a la igualdad $\lambda\mu = 1$, entonces:

$$\mu' = (\lambda\mu)\mu' = (\lambda\mu')\mu = 1\mu = \mu$$

Por lo que $\mu = \mu'$. Así el inverso multiplicativo es único.

□

NOTACIÓN 1.2. *Por la proposición anterior, si $\lambda \in K$, a su inverso aditivo lo denotaremos por $-\lambda$ y a su inverso multiplicativo por λ^{-1}.*

Por lo que podemos reenunciar los axiomas de campo en la forma conocida:

C1) Para $\lambda, \mu, \nu \in K$, $\lambda + (\mu + \nu) = (\lambda + \mu) + \nu$.
C2) Existe $0 \in K$ tal que para cualquier $\lambda \in K$, $\lambda + 0 = \lambda = 0 + \lambda$.
C3) Para todo $\lambda \in K$, existe $-\lambda \in K$ tal que $\lambda + (-\lambda) = 0 = (-\lambda) + \lambda$.

C4) Para $\lambda, \mu \in K$, $\lambda + \mu = \mu + \lambda$.
C5) Para $\lambda, \mu, \nu \in K$, $\lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu$.
C6) Existe $1 \in K$ tal que para cualquier $\lambda \in K$, $\lambda 1 = \lambda = 1\lambda$.
C7) Para todo $\lambda \in K$ con $\lambda \neq 0$, existe $\lambda^{-1} \in K$ tal que $\lambda\lambda^{-1} = 1 = \lambda^{-1}\lambda$.
C8) Para $\lambda, \mu \in K$, $\lambda\mu = \mu\lambda$.
C9) Para $\lambda, \mu, \nu \in K$, $\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu$.

PROPOSICIÓN 1.3. *Sean K un campo y $\lambda, \mu, \nu \in K$, entonces:*

1. $\lambda 0 = 0$
2. $(-1)\lambda = -\lambda$
3. $\lambda(-\mu) = -(\lambda\mu) = (-\lambda)\mu$
4. $-(-\lambda) = \lambda$
5. $(-\lambda)(-\mu) = \lambda\mu$
6. $-(\lambda + \mu) = (-\lambda) + (-\mu)$
7. $\lambda(\mu - \nu) = \lambda\mu - \lambda\nu$
8. *Si* $\lambda \neq 0$ *entonces* $(\lambda^{-1})^{-1} = \lambda$
9. *Si* $\lambda, \mu \neq 0$ *entonces* $(\lambda\mu)^{-1} = \lambda^{-1}\mu^{-1}$
10. *Si* $\lambda + \nu = \mu + \nu$ *entonces* $\lambda = \mu$
11. *Si* $\nu \neq 0$ *y* $\lambda\nu = \mu\nu$, *entonces* $\lambda = \mu$
12. *Si* $\lambda\mu = 0$ *entonces* $\lambda = 0$ *ó* $\mu = 0$

DEMOSTRACIÓN.

1. Primero consideramos que

$$\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$$

Sumando $-\lambda 0$ de ambos lados de la igualdad tenemos:

$$\lambda 0 = (-\lambda 0 + \lambda 0) + \lambda 0 = -\lambda 0 + (\lambda 0 + \lambda 0) = -\lambda 0 + \lambda 0 = 0$$

2. Empezamos observando:

$$\lambda + (-1)\lambda = 1\lambda + (-1)\lambda = (1 + (-1))\lambda = 0\lambda = 0$$

Como el inverso aditivo es único concluimos que $-\lambda = (-1)\lambda$.

3. Tarea
4. Como $\lambda + (-\lambda) = 0$, entonces λ es el inveros aditivo de $-\lambda$ y como este es único concluimos que $-(-\lambda) = \lambda$.
5. Tarea
6. Tarea
7. Tarea

8. Como $\lambda\lambda^{-1} = 1$, entonces λ es el inveros multplicativo de λ^{-1} y como este es único concluimos que $(\lambda^{-1})^{-1} = \lambda$.
9. Tarea
10. Sumando $-v$ de ambos lados de la igualdad tenemos que:
$$\lambda = \lambda + v + (-v) = \mu + v + (-v) = \mu$$
11. Tarea
12. Si $\lambda = 0$, entonces ya terminamos. Si $\lambda \neq 0$, entonces multiplicamos ambos lados de la igualdad por λ^{-1}, así:
$$\mu = 1\mu = \lambda^{-1}\lambda\mu = \lambda^{-1}0 = 0$$

□

DEFINICIÓN 1.2. *Sea K un campo y L un subconjunto de K. Decimos que L es un subcampo de K si cumple:*

SC1) $1 \in L$.

SC2) Para $\lambda, \mu \in L$, $\lambda - \mu \in L$.

SC3) Para $\lambda, \mu \in L$ *con* $\mu \neq 0$, $\lambda\mu^{-1} \in L$.

EJEMPLO 1.2. *Definimos* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. *Entonces* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *es un subcampo de* $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Notamos que $1 = 1 + 0b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
2. Sean $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Entonces
$$(a + b\sqrt{2}) - (c + d\sqrt{2}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$
3. Sean $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Primero notamos que
$$(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = c^2 - 2d^2$$
Por lo que deducimos que
$$(c + d\sqrt{2})^{-1} = \frac{c}{c^2 - 2d^2} - \frac{d}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}$$
Ahora, esto hará sentido siempre y cuando $c^2 - 2d^2 \neq 0$, pero para que esto NO pase se tendría que $c^2 - 2d^2 = 0$. Como $c + d\sqrt{2} \neq 0$ entonces $c \neq 0$ o $d \neq 0$. Pero observemos que si alguno de los dos es cero, esto implica que el otro es cero. Por lo que concluimos que:
$$\frac{c}{d} = \sqrt{2}$$

Lo cual es una contradicción puesto que c y d son racionales. Se sique que $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

□

PROPOSICIÓN 1.4. *Sea K un campo y L un subcampo de K. Entonces L es un campo.*

DEMOSTRACIÓN. La función binaria $+\colon L \times L \longrightarrow L$ es la misma que la de K restrigida a L, sólo falta ver que se corestringe a L, es decir, $\lambda + \mu \in L$ para toda $\mu, \lambda \in L$. Empecemos viendo $0 = 1 - 1 \in L$. Ahora tenemos que si $\lambda \in L$, entonces $-\lambda = 0 - \lambda \in L$. De aquí, deducimos que $\lambda + \mu = \lambda - (-\mu) \in L$. Ahora bien la operación esta bien definida. Notemos que ya vimos que tiene neutro e inverso. Es asociativa y conmutativa por que la operación original lo es. Asimismo, esto es analogo para la multiplicación y se hereda la distributividad. □

2. Espacios Vectoriales

En este tema se introducirá la definición más importante del curso y se estudiarán las propiedades más elementales de esta, así como algunos ejemplos.

DEFINICIÓN 2.1. *Para K un campo, sea V un conjunto con dos funciones $+\colon V \times V \longrightarrow V$ y $*\colon K \times V \to V$. Notacionalmente escribimos $v + w := +(v,w)$ y $\lambda v := *(\lambda, v)$ para $\lambda \in K$ y $v, w \in V$. Si estas dos funciones cumplen:*

V1) Para todo $u, v, w \in V$, $u + (v + w) = (u + v) + w$
V2) Existe $z \in V$ tal que para todo $v \in V$, $v + z = v = z + v$
V3) Para todo $v \in V$ existe $v' \in V$ tal que $v + v' = z = v' + v$
V4) Para todo $v, w \in V$, $v + w = w + v$
V5) Para todo $v \in V$ y $\lambda, \mu \in K$, $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
V6) Para todo $v \in V$, $1v = v$
V7) Para todo $\lambda \in K$, $v, w \in V$, $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
V8) Para todo $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$, $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

Entonces llamamos a V un K-espacio vectorial. A un K-espacio vectorial le llamaremos simplemente un K-espacio. A la segunda operación la llamamos el producto por escalares o la acción de K en V.

Tal y como sucedió en el contexto de campos, se tiene la siguiente proposición que nos habla de la unicidad del neutro (aditivo) y los inversos (aditivos). Como consecuencia esto nos permitirá darles notación.

PROPOSICIÓN 2.1. *Para un K-espacio V se cumple lo siguiente:*

1. *El elemento $z \in V$ del axioma V2 es único. A este se le conoce como el elemento cero del espacio y se le denota por* 0.
2. *Dado un elemento $v \in V$, el elemento $v' \in V$ del axioma V3 es único. A este le conoce como el inverso de v y se le denota por $-v$.*

DEMOSTRACIÓN. Para la primera afirmación, si $z' \in V$ es otro elemento que cumple el axioma V2, entonces observe que

$$z = z + z' = z'$$

Por lo tanto, se tiene el resultado deseado.

Para la segunda afirmación suponga que dado $v \in V$, los elementos $v', v'' \in V$ son tales que $v + v' = v + v'' = 0$. Entonces,

$$v' = (v + v'') + v' = (v + v') + v'' = v''$$

Esto concluye la prueba. $\square$

De esta observación, se pueden escribir los axiomas de K-espacio como se presenta usualmente en los libros:

V1) Para todo $u, v, w \in V$, $u + (v + w) = (u + v) + w$
V2) Existe $0 \in V$ tal que para todo $v \in V$, $v + 0 = v = 0 + v$
V3) Para todo $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0 = (-v) + v$
V4) Para todo $v, w \in V$, $v + w = w + v$
V5) Para todo $v \in V$ y $\lambda, \mu \in K$, $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
V6) Para todo $v \in V$, $1v = v$
V7) Para todo $\lambda \in K$, $v, w \in V$, $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
V8) Para todo $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$, $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

Antes de dar algunas propiedades aritméticas de la definición, vamos a mostrar algunos ejemplos de espacios vectoriales.

EJEMPLO 2.1. *Si K es un campo y L es un subcampo de K, entonces K es un L-espacio. En particular todo campo K es un K-espacio. Algunos ejemplos concretos son:*

$$\mathbb{R} \text{ es un } \mathbb{Q}\text{-espacio,}$$
$$\mathbb{C} \text{ es un } \mathbb{R}\text{-espacio}$$
$$\mathbb{C} \text{ es un } \mathbb{Q}\text{-espacio.}$$

El ejemplo anterior nos muestra que un conjunto puede tener diferentes estructuras de espacio aún y cuando se considerer la misma estructura aditiva. Por otro lado, exsten conjuntos que no tienen estructura de K-espacio (Ver ejercicio 4.6).

EJEMPLO 2.2. *Para $U \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo (abierto o cerrado), sea $C^0(U)$ conjunto de funciones continuas de U en $\mathbb{R}$. Definiendo las operaciones de forma puntual, es decir,*

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x),$$

para $f,g \in C^0(U)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $C^0(U)$ es un $\mathbb{R}$-espacio. En particular, para $U = \mathbb{R}$, $C^0(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$ espacio.

EJEMPLO 2.3. *Para K un campo y n y m dos naturales (positivos), tenemos los siguientes K-espacios:*

- *K^n es un K-espacio con suma*

  $$(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$

  y producto escalar

  $$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$$

  para $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in K^n$ y $\lambda \in K$.
- *Las matrices de n por m con coeficientes en K, $M_{n\times m}(K)$, son un K-espacio con suma*

  $$(A+B)_{ij} = A_{ij}+B_{ij}, \text{ para } i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m$$

  y producto escalar

  $$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}, \text{ para } i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m$$

  para $A,B \in M_{n\times m}(K)$ y $\lambda \in K$. En el caso de que $n = m$, pondremos $M_n(K)$.

- *Los polinomios en una indeterminada x, $K[x]$, son un K-espacio con suma*

$$p+q=\sum_{i=0}^{r}(a_i+b_i)x^i$$

y con producto escalar

$$\lambda p=\sum_{i=0}^{r}\lambda a_i x^i$$

para $p=\sum_{i=0}^{r}a_ix^i, q=\sum_{i=0}^{r}b_ix^i\in K[x]$ *y* $\lambda\in K$.

Los siguientes son los ejemplos más simples y hasta cierto punto básicos de espacios vectoriales. El siguiente ejemplo a tratar es de hecho una familia de ejemplos.

DEFINICIÓN 2.2. *Sea S un conjunto y K un campo. Definimos K^S como el conjunto de todas las funciones $f:S\to K$.*

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea S un conjunto, entonces K^S es un K-espacio.*

DEMOSTRACIÓN. Si $S=\emptyset$, entonces K^S tiene un solo elemento, a saber, la función vacía. Al definir $+:K^S\times K^S\to K^S$ y $\cdot:K\times K^S\to K^S$ como $\emptyset+\emptyset:=\emptyset$ y $\lambda\emptyset=\emptyset$, estas dan una estructura de espacio vectorial a K^S si $S=\emptyset$.

Si $S\neq\emptyset$, definamos las operaciones de forma puntual. De esto se deduce que la función constante con valor 0 es el neutro aditivo, la suma es claramente asociativa y conmutativa. Además, dada $f\in K^S$, al definir $-f\in K^S$ mediante $(-f)(x)=-f(x)$, esta función es la inversa (aditiva) de f. Esto muestra que se cumplen los axiomas V1-V4.

Respecto a los axiomas restantes, el neutro multiplicativo es la función constante 1. Además es claro que el producto es asociativo. Lo que resta es ver que se cumplen las propiedades asociativas, de las cuales demostraremos simplemente una de ellas pues la otra es análoga. En efecto, sean $f,g\in K^S$ y $\lambda\in K$. Observe que las funciones $\lambda(f+g),\lambda f+\lambda g$ tienen claramente el mismo dominio y codominio, por lo que basta con ver que estas tienen la misma regla de correspondencia. Para esto, sea $x\in S$ y observe que se tiene la cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}(\lambda(f+g))(x) &:= \lambda(f+g)(x)\\ &:= \lambda(f(x)+g(x))\\ &= \lambda f(x)+\lambda g(x)\\ &=: (\lambda f)(x)+(\lambda g)(x)\\ &=: (\lambda f+\lambda g)(x)\end{aligned}$$

Con esto se demuestra que las funciones mencionadas tienen la misma regla de correspondencia, por lo que $\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$.

$\square$

El espacio $K^{\emptyset}$ se le conoce como el espacio cero y se le suele denotar por 0. Por otro lado, los ejemplos tratados en 2.3 son ejemplos particulares del resultado anterior pues el caso de K^n se obtiene de observar que hay una biyección entre K^n y $K^{\{1,\dots,n\}}$. El segundo pues por definición $M_{n\times m}(K)=K^{\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}}$. El último ejemplo también se puede contemplar como un ejemplo particular de $K^{\mathbb{N}}$, pero para ver esto se necesita la noción de subespacio. Además, la misma afirmación se puede hacer respecto al ejemplo 2.2.

Concluimos esta sección con las propiedades aritméticas básicas que se cumplen en un espacio vectorial.

PROPOSICIÓN 2.3. *Sean V un K-espacio, $v,w\in V$ y $\lambda\in K$, entonces:*

1. $\lambda 0=0$
2. $0v=0$
3. $(-1)v=-v$
4. $(-\lambda)v=-(\lambda v)=\lambda(-v)$
5. $-(-v)=v$
6. $\lambda v=(-\lambda)(-v)$
7. $-(v+w)=-v-w$
8. $\lambda(v-w)=\lambda v-\lambda w$
9. *Si* $\lambda v=0$ *entonces* $\lambda=0$ *ó* $v=0$

DEMOSTRACIÓN. La demostración de las propiedades 1 a 8 es exactamente igual a las correspondientes del caso de campos. Para el caso de 9, esta no es la excepción, pero daremos la prueba de esta pues esta muestra como se tratan muchas propiedades donde interviene la acción. Suponga que $\lambda v = 0$ con $\lambda \in K$ y $v \in K$. Observe que si $\lambda \neq 0$, entonces existe $\lambda^{-1} \in K$. De esto se sigue que:

$$v = 1v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}0 = 0$$

$\square$

3. Subespacios Vectoriales

DEFINICIÓN 3.1. *Sea V un K-espacio, sí $W \subseteq V$ y cumple:*

1. $0 \in W$
2. *Para todo $v, w \in W$, $v + w \in W$*
3. *Para todo $v \in W$ y $\lambda \in K$, $\lambda v \in W$*

entonces a W lo llamaremos un subespacio de V

NOTACIÓN 3.1. *Si W es un subespacio de V, entonces denotaremos este hecho como $W \leq V$*

EJEMPLO 3.1. *Para K un campo, y n y m dos naturales, tenemos los siguientes K-espacios:*

- *Para todo K-espacio V, tiene dos subespacios canónicos V y 0.*
- *Si $m \leq n$, ponemos $K^n_m = \{x \in K^n \mid x_m = 0\}$. Entonces $K^n_m \leq K^n$.*
- *Para $A \in M_n(K)$, definimos la traza de A, $Tr(A) = \sum_i^n$. Definimos $W_n = \{A \in M_n(K) \mid Tr(A) = 0\}$, entonces $W_n \leq M_n(K)$.*
- *Ponemos $P_n(K)$ como $\{p(x) \in K[x] \mid \partial(p) \leq n\}$. Entonces $P_n(K) \leq K[x]$.*

DEFINICIÓN 3.2. *Sea S un conjunto, entonces $K(S)$ es el conjunto de todas las funciones $f : S \to K$ tales que $sop(f)$ es finito, donde $sop(f)$ = $\{s \in S | f(s) \neq 0\}$.*

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea S un conjunto, entonces $K(S) \leq K^S$.*

DEMOSTRACIÓN.
1. Sea $0 \colon S \longrightarrow K$ la función constante cero. Notemos que $sop(0) = \emptyset$ que es finito.
2. Sean $f, g \colon S \longrightarrow K$ funciones con soporte finito. Notemos que $sop(f+g) \subseteq sop(f) \cup sop(g)$. Si $x \in sop(f+g)$ y $x \in sop(f)$, ya terminamos. Si $x \in sop(f+g)$ y $x \notin sop(f)$, entonces $f(x) = 0$ y $(f+g)(x) \neq 0$. Por lo que $g(x) \neq 0$ y así $x \in sop(g)$. Por lo tanto $sop(f+g) \subseteq sop(f) \cup sop(g)$. Asímismo, como $sop(f)$

y $sop(g)$ son finitos, entonces $sop(f) \cup sop(g)$ es finito. Por lo que se sigue que $sop(f+g)$ es finito. Por lo que $f+g$ tiene soporte finito.

3. Sea $f,g\colon S \longrightarrow K$ y $\lambda \in K$. Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda f = 0$, lo que nos lleva al punto uno. Si $\lambda \neq 0$, entonces afirmamos $sop(\lambda f) = sop(f)$. Sea $x \in S$ tal que $\lambda f(x) \neq 0$, entonces $f(x) \neq 0$. Sea $x \in S$ tal que $f(x) \neq 0$, entonces $\lambda f(x) \neq 0$. Por lo que concluimos que el $sop(\lambda f)$ es finito.

□

NOTACIÓN 3.2. *Sea V un K-espacio, el conjunto de todos los subespacios de V, se denotará por $\mathscr{L}(V)$. Este es un conjunto parcialmente ordenado por la contención.*

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea V un K-espacio, entonces $\mathscr{L}(V)$ es una retícula completa.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathscr{L}(V)$ es un conjunto parcialmente ordenado por la contención. Vamos a demostar que $\mathscr{L}(V)$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias. Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de V.

1. Como $0 \in W_i$ para toda $i \in I$, entonces $0 \in \bigcap_{i\in I} W_i$.
2. Sean $v,w \in \bigcap_{i\in I} W_i$. Entonces $v,w \in W_i$ para toda $i \in I$. Por lo que $v+w \in W_i$ para toda $i \in I$. Así $v+w \in \bigcap_{i\in I} W_i$.
3. Sean $v \in \bigcap_{i\in I} W_i$ y $\lambda \in K$. Entonces $v \in W_i$ para toda $i \in I$. Por lo que $\lambda v \in W_i$ para toda $i \in I$. Así $\lambda v \in \bigcap_{i\in I} W_i$.

Por lo que $\bigcap_{i\in I} W_i \leq V$. Ahora la intersección es el ínfimo en la retícula del conjunto potencia. Por lo que la familia de subespacios al ser un subconjunto del potencia y tener el orden inducido por este, si es cerrado bajo intersecciones estas resultarán el ínfimo. □

Como el ínfimo coincide con el de la retícula de subconjuntos, falta describir el supremo. Dado que la demostración anterior, muestra una construcción un poco bestial.

DEFINICIÓN 3.3. *Sean U,W subespacios de V. Definimos $U+W := \{u+w \in V | u \in U, w \in W\}$*

PROPOSICIÓN 3.3. *Sean U,W subespacios de V. Entonces $U+W \leq V$*

DEMOSTRACIÓN.

1. Como $U \leq V$ y $W \leq V$, entonces $0 \in U$ y $0 \in W$. Por lo que $0 = 0+0 \in U+W$.

2. Sean $u+w, u'+w' \in U+W$ con $u, u' \in U$ y $w, w' \in W$. Entonces $u+u' \in U$ y $w+w' \in W$. Por otro lado,
$$(u+w)+(u'+w') = (u+u')+(w+w) \in U+W$$
3. Sea $u+w \in U+W$ con $u \in U$ y $w \in W$, y $\lambda \in K$. Entonces $\lambda(u+w) = \lambda u + \lambda w \in U+W$ con $\lambda u \in U$ y $\lambda w \in W$.

□

PROPOSICIÓN 3.4. *Sean U, W subespacios de V. Entonces $U \bigvee W = U+W$*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que para $u \in U$, $u = u+0 \in U+W$. Por lo que $U \subseteq U+W$. De manera analoga, $W \subseteq U+W$.

Sea $S \leq V$ tal que $U \subseteq S$ y $W \subseteq S$. Entonces para todo $u \in U$ y $w \in W$ tenemos que $u, w \in S$. Asímismo, $u+w \in S$. Por lo tanto $U+W \subseteq S$. Por lo que se sigue que $U \bigvee W = U+W$. □

PROPOSICIÓN 3.5. *Sea V un K-espacio, entonces $\mathscr{L}(V)$ es una retícula modular.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U_1, U_2, U_3 subespacios de V si $U_1 \subseteq U_3$, afirmamos que entonces $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$

$\subseteq$)Sea $x \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$. Entonces $x = y+z$ con $y \in U_1$ y $z \in U_2 \cap U_3$. En particular, $z \in U_2$. Por lo que tenemos que $x = y+z \in U_1+U_2$. Por otro lado también tenemos que $z \in U_3$ y que $y \in U_1 \subseteq U_3$, de donde concluimos que $x = y+z \in U_3$. Por lo tanto $x \in (U_1+U_2) \cap U_3$.

$\supseteq$) Sea $x \in (U_1+U_2) \cap U_3$. Entonces $x \in U_1+U_2$ y $x \in U_3$. Por lo que $x = y+z$ con $y \in U_1$ y $z \in U_2$. Despejando tenemos que $z = x-y \in U_3$ puesto que $y \in U_1 \subseteq U_3$. Así $x = y+z \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$.

□

Es importante ver que se pueden dar ejemplos donde se ve que la propiedad distributiva no es cierta en general y por ende, la ley modular es lo más que se puede decir respecto a la distributividad.

EJEMPLO 3.2. *Si $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \langle e_1 \rangle$, $U_2 = \langle e_2 \rangle$ y $U_3 = \langle (1,1) \rangle$, entonces:*

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) = U_1 + 0 = U_1$$
$$(U_1+U_2) \cap (U_1+U_3) = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto, $U_1+(U_2\cap U_3)\neq(U_1+U_2)\cap(U_1+U_3)$. *De hecho, este ejemplo hace ver que las hipótesis en la ley modular son necesarias pues esta no se cumple ya que*

$$(U_1+U_2)\cap U_3=\mathbb{R}^2\cap U_3=U_3$$

Por lo tanto, $U_1+(U_2\cap U_3)\neq(U_1+U_2)\cap U_3$. *Note que el detalle es que* $U_1\nsubseteq U_3$.

DEFINICIÓN 3.4. *Sea* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una familia de subespacios de* V. *Definimos*

$$\sum_{i\in I}W_i=\{w_1+\ldots+w_n\in V|w_i\in W_{k_i},k_i\in I,n\in N\}$$

PROPOSICIÓN 3.6. *Sean* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una familia de subespacios de* V. *Entonces* $\bigvee_{i\in I}W_i=\sum_{i\in I}W_i$

DEMOSTRACIÓN. Tarea □

DEFINICIÓN 3.5. *Sea* $S\subseteq V$ *con* V *un* K*-espacio. El subespacio generado por* S *en* V, $\langle S\rangle$, *es el mínimo subespacio que contiene de* V *que contiene a* S, *es decir:*

1. $\langle S\rangle\leq V$
2. $S\subseteq\langle S\rangle$
3. *Si* $W\leq V$ *y* $S\subseteq W$ *entonces* $\langle S\rangle\subseteq W$

Notamos que por la antisimetría de la contención el subespacio generado es único. Hasta este momento, tenemos que si existe es único, pero por el momento veremos que con esta caracterización podemos dar bastantes propiedades, y más adelante demostraremos su existencia.

PROPOSICIÓN 3.7. *Sean* S,T *subconjuntos de* V *un* K*-espacio, entonces:*

1. $\langle\langle S\rangle\rangle=\langle S\rangle$.
2. $\langle S\rangle=S$ *si y sólo si* $S\leq V$.
3. *Si* $S\subseteq T$ *entonces* $\langle S\rangle\subseteq\langle T\rangle$.
4. $\langle S\cap T\rangle\subseteq\langle S\rangle\cap\langle T\rangle$.
5. $\langle S\cup T\rangle=\langle S\rangle+\langle T\rangle$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Notamos que $\langle S\rangle\subseteq\langle S\rangle$. Por lo que por definición de $\langle\langle S\rangle\rangle$, llegamos a que $\langle\langle S\rangle\rangle\subseteq\langle S\rangle$. Por otro lado, también por de definición de $\langle\langle S\rangle\rangle$, tenemos que $\langle S\rangle\subseteq\langle\langle S\rangle\rangle$
2. La ida es inmediata puesto que $\langle S\rangle\leq V$. Para el regreso notemos que $S\subseteq S$ y por otro lado si $W\leq V$ tal que $S\subseteq W$, pues $S\subseteq W$. Así cumple la propiedad que le da unicidad a $\langle S\rangle$.

3. Como $S \subseteq T$ y $T \subseteq \langle T \rangle$, entonces $S \subseteq \langle T \rangle$. De aquí $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$.
4. Se sigue del anterior. Como $S \cap T \subseteq S$ y $S \cap T \subseteq T$, entonces $\langle S \rangle \cap \langle T \rangle \subseteq \langle S \rangle$ y $\langle S \rangle \cap \langle T \rangle \subseteq \langle T \rangle$. Por lo tanto $\langle S \cap T \rangle \subseteq \langle S \rangle \cap \langle T \rangle$.
5. De manera análoga al anterior, $\langle S \rangle \subseteq \langle S \cup T \rangle$ y $\langle S \rangle \subseteq \langle S \cup T \rangle$. Por lo que $\langle S \cup T \rangle \supseteq \langle S \rangle + \langle T \rangle$. Pero $S \cup T \subseteq \langle S \rangle + \langle T \rangle$, por lo que concluimos que $\langle S \cup T \rangle = \langle S \rangle + \langle T \rangle$.

$\square$

PROPOSICIÓN 3.8. *Sea S subconjunto de V un K-espacio. Entonces*

$$\langle S \rangle = \bigcap \{ W \in \mathscr{L}(V) \mid S \subseteq W \}$$

DEMOSTRACIÓN.

- Como $\langle S \rangle$ es la intersección de una familia de subespacios, este es un subespacio.
- Como S esta contenido en todos los intersectandos, entonces $S \subseteq \bigcap \{ W \in \mathscr{L}(V) \mid S \subseteq W \}$.
- Si $W \leq V$ y $S \subseteq W$, entonces W es uno de los intersectandos y $\bigcap \{ W \in \mathscr{L}(V) \mid S \subseteq W \} \subseteq W$.

Por lo tanto $\langle S \rangle = \bigcap \{ W \in \mathscr{L}(V) \mid S \subseteq W \}$

$\square$

DEFINICIÓN 3.6. *Sean $w, v_1, ..., v_n \in V$ con V un K-espacio. Se dice que w es combinación lineal de $v_1, ..., v_n$ si existen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ tales que $w = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$*

DEFINICIÓN 3.7. *Sea S subconjunto de V un K-espacio y $w \in V$. Se dice que w es combinación lineal de S, si existen $v_1, ..., v_n \in S$ tales que w es combinación lineal de $v_1, ..., v_n$.*

PROPOSICIÓN 3.9. *Sea S subconjunto de V un K-espacio, entonces $\langle S \rangle$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de S.*

DEMOSTRACIÓN. Denotamos por $CL(S)$ al conjunto de combinaciones lineales de S. Queda como tarea moral demostrar que $CL(S) \leq V$

- Sea $v \in S$, entonces $1v \in CL(S)$. Por lo que $S \subseteq CL(S)$.
- Si $W \leq V$, $S \subseteq W$ y consideramos $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \in CL(S)$ con $v_1, ..., v_n \in S$ y $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, entonces $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \in W$.

Por lo tanto $\langle S \rangle = CL(S)$

$\square$

4. Sumas Directas

En esta sección se va a estudiar una forma especial de descomponer un espacio vectorial usando subespacios de este. Esta descomposición se puede pensar como una generalización de la descomposición que existe en $\mathbb{R}^2$ a partir del eje x y el eje y.

DEFINICIÓN 4.1. *Sean U,W subespacios de V. Se dice que V es suma directa de U y W, si $U+W=V$ y $U\cap W=0$.*

NOTACIÓN 4.1. *Si V es suma directa de U y W, entonces escribiremos $V=U\oplus W$.*

OBSERVACIÓN 4.1. *Note que si $V=U\oplus W$, dado que en particular $V=U+W$, esto implica que todo elemento $v\in V$ se puede descomponer como suma de un elemento en U y W. De hecho, observe que esta implicación es de hecho un bicondicional.*

EJEMPLO 4.1. *Para K cualquier campo considere K^2. Denote por $e_1=(1,0)$ y $e_2=(0,1)$. Entonces,*

$$K^2=\langle e_1\rangle\oplus\langle e_2\rangle$$

Este ejemplo muestra en qué sentido la idea de suma directa generaliza la de la descomposición de $\mathbb{R}^2$ a partir del eje x y el eje y. Más aún, note que si se toma $v\in K^2$ tal que $v\notin\langle e_1\rangle$, entonces

$$K^2=\langle e_1\rangle\oplus\langle v\rangle.$$

EJEMPLO 4.2. *Sea K un campo y defina*

$$S_n(K)=\{A\in M_n(K)\mid A^t=A\}$$

$$A_n(K)=\{A\in M_n(K)\mid A^t=-A\}$$

Entonces $S_n(K),A_n(K)\leq M_n(K)$. A $S_n(K)$ se le conoce como el espacio de matrices simétricas, mientras que $A_n(K)$ es el espacio de matrices antisimétricas. Además, si $1+1\neq 0$, entonces

$$M_n(K)=S_n(K)\oplus A_n(K)$$

EJEMPLO 4.3. *(Tarea) Sean $P(\mathbb{R}), I(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto de funciones pares e impares respectivamente. Estos subconjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, más aún,*

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P(\mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R})$$

Otro ejemplo interesante se muestra en el ejercicio 4.33.

Existe un teorema de caracterización de cuándo un espacio se escribe como suma directa de subespacios, el cual tiene que ver con las combinaciones K-lineales que se mencionan en la observación 4.1. Este se presenta a continuación:

PROPOSICIÓN 4.1. *Sean U, W subespacios de V. Entonces V es suma directa de U y W si y sólo si para todo $v \in V$ existen únicos $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v = u + w$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Si $V = U \oplus W$, entonces por una observación previa todo elemento de V se escribe como suma de uno de U y uno de W. Vamos a ver que esta descomposición es única. Para esto suponemos que $x = u + w = u' + w'$ con $u, u' \in U$ y $w, w' \in W$. Esta igualdad implica que

$$u - u' = w' - w.$$

Dado que $W \leq V$, entonces $w' - w \in W$, mientras que por un argumento análogo se deduce que $u - u' \in U$, así que la igualdad anterior implica que $u - u' \in U \cap W = 0$, por lo tanto $u = u'$ y así $w = w'$.

$\Leftarrow$) La existencia de la descomposición implica que $V = U + W$. Lo que resta ver es que $U \cap W = 0$. Para esto, sea $x \in U \cap W$ y observe que se tienen dos descomposiciones para x como suma de un elemento de U y de W como sigue:

$$x = x + 0 = 0 + x$$

La unicidad de las descomposición de $x \in V$ implica que $x = 0$ y por lo tanto, esto demuestra la contención no trivial en la igualdad $U \cap W = 0$ y concluye la prueba. $\square$

En este momento podemos plantearnos una pregunta muy interesante ya que los ejemplos discutidos de suma directa tienen como particularidad que en cada uno de ellos hemos propuesto los subespacios que descomponen al espacio en cuestión. Es entonces cuando se puede plantear la siguiente pregunta:

¿Dado un subespacio $U \leq V$, existe $W \leq V$ tal que $V = U \oplus W$?

La respuesta es afirmativa, sin embargo, en este momento no tenemos la herramienta para dar una demostración sencilla (ver proposición **??**). Sin embargo, en torno a esta pregunta podemos decir lo siguiente:

OBSERVACIÓN 4.2. *La respuesta a la pregunta planteada no es única. El ejemplo inmediato es considerar $\mathbb{R}^2$ y $U = \langle e_1 \rangle$ con $e_1 = (1,0)$. Note que $W = \langle e_2 \rangle$, con $e_2 = (0,1)$, este cumple que $V = U \oplus W$, pero el espacio $W' = \langle (1,1) \rangle$ también cumple que $V = U \oplus W'$. De hecho, dado cualquier $v \notin \langle e_1 \rangle$ puede demostrarse que $U \oplus \langle v \rangle = \mathbb{R}^2$, como se vio en uno de los ejemplos anteriores.*

Para tomar cierta intuición de cómo es que se va a hacer la prueba de que la respuesta a la pregunta plateada es cierta, vale la pena mencionar el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.2. *Sean $W, U \leq V$. Son equivalentes:*

1. $V = U \oplus W$
2. $U \leq V$ *es máximo respecto a la propiedad* $W \cap U = 0$

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$) Por definición se cumple que $W \cap U = 0$. Respecto a la propiedad de maximalidad, sea $U' \leq V$ tal que $U \lneq U'$. Observe que se tiene la cadena de igualdades:

$$U' = U' \cap V = U' \cap (W + U) = U' \cap W + U,$$

donde la última igualdad se da por la ley modular. Además de la igualdad se deduce que $U' \cap W \neq 0$, ya que en caso contrario $U = U'$, lo cual termina la demostración.

$2 \Rightarrow 1$) Lo que resta demostrar es que $V = U + W$, para lo que pocedemos por contradicción, es decir, suponemos que $U + W \lneq V$. Entonces, existe $x \in V \setminus (U + W)$. Así, considere $U + \langle x \rangle \leq V$, que claramente satisface que $U \lneq U + \langle x \rangle$. Además, observe que si $y \in W \cap (U + \langle x \rangle)$, entonces $y = u + \lambda x$ para algunos $u \in U$ y $\lambda \in K$. Note que si $\lambda \neq 0$, entonces $x = \lambda^{-1} y - \lambda^{-1} u \in W + U$, lo que sería una contradicción, por lo tanto, $y = u \in U \cap W = 0$, lo que muestra la contención no trivial en la igualdad $W \cap (U + \langle x \rangle) = 0$. Pero esto es imposible pues U era máximo con la propiedad $W \cap U = 0$. □

En virtud a la observación anterior, dado un $U \leq V$, a un subespacio $W \leq V$ que satisface que $U \oplus W = V$ se le conoce como un **pseudocomplemento** de U. Este nombre proviene de la teoría de órdenes (definición **??**). Además, se recomienda realizar el ejercicio 4.35.

Respecto a cómo la proposición da intuición de como resolver el problema de la existencia de pseudocomplementos, lo que hay que buscar es un resultado del estilo del principio del buen orden o el axioma del supremo que garantice como encontrar elementos máximos en un orden parcial. Dicho teorema es el importante Lema de Zorn que como se mencionó, se estudiará en el siguiente capítulo.

Espacios Cocientes

DEFINICIÓN 4.2. *Sea V un K-espacio y $W \leq V$. Derfinimos la siguiente relación $\sim_W$ en V, $v \sim_W w$ con $v, w \in V$ si $v - w \in W$.*

PROPOSICIÓN 4.3. *Sea V un K-espacio y $W \leq V$. Entonces $\sim_W$ es una relación de equivalencia*

DEMOSTRACIÓN.

- Tenemos que $0 \in W$, pero $v - v = 0$ para todo $v \in V$. Por lo que $v \sim_W v$ para toda $v \in V$.
- Si $v \sim_W w$, entonces $v - w \in W$. Pero $w - v = -(v - w) \in W$. Por lo que $w \sim_W v$.
- Si $v \sim_W w$ y $w \sim_W u$, entonces $v - w, w - u \in W$. Así mismo, $v - u = (v - w) + (w - u) \in W$. Por lo tanto $v \sim_W u$.

□

DEFINICIÓN 4.3. *Sea V un K-espacio, $v \in W$, y $W \leq V$. Denotamos por $v + W = \{v + w \in V \mid w \in W\}$. Observamos que $v + W \subseteq V$.*

PROPOSICIÓN 4.4. *Sea V un K-espacio, $v \in W$, y $W \leq V$. Entonces $[v]_{\sim_W} = v + W$. Recordamos $[v]_{\sim_W} = \{u \in V \mid u \sim_W v\}$.*

DEMOSTRACIÓN. $\subseteq$) Sea $u \in [v]_{\sim_W}$. Entonces $u \sim_W v$ y de aquí tenemos que $u - v \in W$. Por lo cual se sigue que existe $w \in W$ tal que $u - v = w$. Despejando obtenemos $u = v + w \in v + W$.

$\supseteq$) Sea $u \in v + W$. Por lo que existe $w \in W$ tal que $u = v + w$. Despejando $u - v = w \in W$. Por lo que $u \sim_W v$. Por lo tanto $u \in [v]_{\sim_W}$.

□

EJEMPLO 4.4. *Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W \leq V$ una línea que pasa por el origen. Por ejemplo, si $W = \{(x, 0) \in V \mid x \in \mathbb{R}\}$ es el eje x entonces $(0,1) + W$ es la recta paralela a W que pasa por el $(0,1)$. Sigamos jugando con este ejemplo. Así $(2,1) + W$ también es recta paralela a W que pasa por el $(0,1)$. Esto debido a que $(2,1) - (0,1) = (2,0) \in W$. Esto ejemplifica* *que los conjuntos $v+W$ pueden tener más de una expresión. Recordando un poco clases de equivalencias v sería el representante de la clase de equivalencia, así mismo podemos que ver que los representantes de $(0,1)+W$ son los elementos de $(x,y) \sim_W (0,1)$. Pero esto pasa si y sólo si $(x,y-1) \in W$, es decir, si $y-1=0$. Por lo que $(0,1)+W = \{(x,1) \in V \mid x \in \mathbb{R}$. Realmente es dar un ligero paso el observar que si $v+W$ siempre será una recta paralela al eje x.*

Ahora consideremos la clase $(x_0,y_0)+W$, notemos que un elemento $(x,y) \in V$ pertenece sólamente si $(x_0-x,y_0-y) \in W$, es decir, es de la forma (x,y_0) con $x \in \mathbb{R}$. Así tenemos el resultado mencionado las clases de equivalencia de W son rectas paralelas a W que pasan por el punto $(0,y_0)$.

Una observación importante a notar es que $0+W=W$, esto nos dice, 0 sólo esta en está clase de equivalencia, por lo que las demás clases de equivalentecia no pueden ser subespacios. Recordemos que las clases de equivalencia de una relación de equivalencia forman una partición y así mismo las clases son disjuntas, esto es, que no tienen elementos en común por lo que el 0 sólo puede pertenecer a una clase.

Como el nombre de esta sección bien lo sugiere vamos a hablar de un espacio.

DEFINICIÓN 4.4. *Sea V un K-espacio y $W \leq V$. Notacionalmente escribiremos V/W en vez de $V/\sim_W$.*

PROPOSICIÓN 4.5. *Sea V un K-espacio y $W \leq V$. Entonces V/W es un K-espacio con las operaciones:*

$$(v+W)+(w+W) := (v+w)+W$$

para $v+W, w+W \in V/W$, y

$$\lambda(v+W) := \lambda v + W$$

para $v+W \in V/W$ y $\lambda \in K$

DEMOSTRACIÓN. Lo primero es ver que estas operaciones estan bien definidas y no dependen del representante. Por lo que consideremos $v+W = v'+W$, y $w+W = w'+W$. Por hipotesis tenemos que $v-v', w-w' \in W$ De aquí $(v+w)-(v'+w') = v-v'+w-w' \in W$. Por lo que $(v+w)+W = (v'+w')+W$. Por lo que la función esta bien definidad. Por otro lado también tenemos que $\lambda v - \lambda v' = \lambda(v-v') \in W$

Ahora bien, los axiomas de espacio vectorial se siguen de que sean válidos en V. $\square$

Ejercicios

EJERCICIO 4.1. *Defínase un nuevo producto en* $\mathbb{R}$ *mediante* $a \odot b = a^7 b$. *¿Qué axiomas de campo satisface* $(\mathbb{R}, +, \odot)$*?.*

EJERCICIO 4.2. *Considere* $L = (1, \infty)$ *y defínanse dos operaciones* $\oplus$ *y* $\odot$ *cuyas reglas de correspondencia son* $a \oplus b = a + b - ab$ *y* $a \odot b = 1 - e^{\ln(1-a)\ln(1-b)}$. *¿Es* $(L, \oplus, \odot)$ *un campo?*

EJERCICIO 4.3. *Sea* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *el conjunto de reales extendidos. Se definen dos funciones mediante* $a \boxplus b = \text{mín}\{a, b\}$ *y* $a \boxdot b = a + b$. *¿Qué axiomas de campo cumple* $(\overline{\mathbb{R}}, \boxplus, \boxdot)$*?*

EJERCICIO 4.4. *Sea* $d \in \mathbb{Z}$ *y se define el conjunto* $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) := \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$. *¿Es* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ *con las operaciones obvias un campo?*

EJERCICIO 4.5. *¿Es* $\mathbb{Z}_4$ *un* $\mathbb{Z}_2$*-espacio vectorial? Demuestre su afirmación.*

EJERCICIO 4.6. *Demuestre que* $\mathbb{Z}$ *no tiene estructura espacio vectorial para ningun campo con su estructura aditiva usual.*

EJERCICIO 4.7. *De un ejemplo de un espacio vectorial con cardinalidad* 512*.*

EJERCICIO 4.8. *Demuestre que* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

EJERCICIO 4.9. *Sea* $W \subseteq V$. *Demuestre que son equivalentes:*

1. W *es un subespacio de* V.
2. $a)$ $W \neq \emptyset$.

   $b)$ *Para todo* $v, w \in W$, $v + w \in W$.

   $c)$ *Para todo* $\lambda \in K$ *y* $v \in V$, $\lambda v \in W$.

3. $a')W \neq \emptyset$.

$b')$ *Para todo* $v, w \in W$ *y* $\lambda \in K$, $\lambda v + w \in W$.

EJERCICIO 4.10. *Demuestre que las parábolas en* $\mathbb{Z}_2$ *son espacios vectoriales.*

DEFINICIÓN 4.5. *Una función* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *es lineal a tramos si existen* $a_0, ..., a_{n+1}, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ *y* $x_1, ..., x_{n+1} \in \mathbb{R}$ *con* $x_i < x_{i+1}$, *tales que:*

$$f(x) = \begin{cases} a_0, & \text{Si } x < x_1 \\ a_i x + b_i, & \text{Si } x_i \leq x < x_{i+1} \text{ para } i = 1, ..., n \\ a_{n+1}, & \text{Si } x_{n+1} \leq x \end{cases}$$

EJERCICIO 4.11.

- *Demuestre que* W *el subconjunto de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *de todas las funciones lineales a tramos es un subespacio.*
- *Demuestre que* W *el subconjunto de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *de todas las funciones acotadas es un subespacio.*
- *Demuestre que* $W = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a|x|\}$ *es un subespacio.*
- *Demuestre que* W *el conjunto de todas las funciones pares es un subespacio.*
- *Demuestre que* W *el conjunto de todas las funciones impares es un subespacio.*

EJERCICIO 4.12. *Sea* $\mathscr{S}$ *el subconjunto de todas las funciones de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *que son infinitamente diferenciales y tales que para cualesquiera* $n, m \in \mathbb{N}$ *existe* $c_{n,m} \in \mathbb{R}^+$ *tal que para todo* $x \in \mathbb{R}$, $|x^n \frac{d^m f}{dx^m}| \leq c_{n,m}$. *Demuestre que* $\mathscr{S}$ *es un subespacio del conjunto de funciones de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *acotadas.*

EJERCICIO 4.13. *Para todo* $0 < t \leq 1$ *sea* V_t *el conjunto de todas las funciones* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *tales que si* $a < b$, *existe* $k_{a,b} \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $x, y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \leq k(a, b)|x - y|^t$. *¿Para qué valores de* t *es* V_t *un subespacio de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*?.*

EJERCICIO 4.14. *Sean* $v, w \in V$ *distintos y* $U := \{tv + (1 - t)w \mid t \in K\}$. *Demuestre que existe* $x \in V$ *tal que el conjunto* $W = \{u + x \mid u \in U\}$ *es un subespacio de* V.

EJERCICIO 4.15. *Sea* $W = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid$ *Si* $a_i \neq 0$*, entonces para todo* $j \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \neq 0\}$. *¿Es W un subespacio de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*?*

EJERCICIO 4.16. *Sea* $W = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid$ *Si* $a_i \neq 0$ *entonces para todo* $j \in \mathbb{N}^{+}$, $a_{ij} = 0\}$. *¿Es W un subespacio de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*?*

EJERCICIO 4.17. *Se define el conjunto* $\ell_2(\mathbb{R}) = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty\}$. *¿Es* $\ell_2(\mathbb{R})$ *un subespacio de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*?*

EJERCICIO 4.18. *Considere a* $\mathbb{R}$ *como* $\mathbb{Q}$ *espacio vectorial. Para todo* $W \subseteq \mathbb{R}$ *se defíne el conjunto* $\overline{W} := \{b \in \mathbb{R} \mid \exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq W^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty} a_n = b\ \}$. *Demuestre que si W es un subespacio de* $\mathbb{R}$ *entonces* $\overline{W}$ *es un subespacio de* $\mathbb{R}$. *¿Es cierto el regreso de esta proposición?*

EJERCICIO 4.19. *Sea* $f : V \to [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ *una función tal que para cualesquiera* $\lambda, \mu \in K$ *y* $v, u \in V$, $f(\lambda v + \mu u) \geq \min\{f(v), f(u)\}$. *Demuestre las siguientes afirmaciones:*

1. $\max_{v \in V} f(v) = f(0)$.
2. *Si* $h \in \mathbb{R}$ *es tal que* $0 \leq h \leq f(0)$*, entonces el conjunto* $V_h := \{v \in V \mid h \leq f(v)\}$ *es un subespacio de* V.

EJERCICIO 4.20. *Sean* $p \in \mathbb{N}$ *primo y V un* $\mathbb{Z}_p$*-espacio vectorial. Demuestre que V no es union de k subespacios para todo* $k \leq p$.

EJERCICIO 4.21. *Sea* $V \neq 0$ *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial. Se define* $\mu : \mathbb{C} \times V \to V$ *mediante* $\mu(z, v) = Re(z)v$. *¿Es* $(V, +, \mu)$ *un* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial?*

EJERCICIO 4.22. *Sea X un conjunto arbitrario. Se define* $+ : \wp(X) \times \wp(X) \to \wp(X)$ *mediante* $A + B = A \triangle B$ *y, un producto por escalares* $\cdot : \mathbb{Z}_2 \times \wp(X) \to \wp(X)$ *mediante* $0 \cdot A = \emptyset$ *y* $1 \cdot A = A$.

1. *Demuestre que* $(\wp(X), +, \cdot)$ *es un* $\mathbb{Z}_2$*-espacio vectorial.*

2. *Sean V es un K-espacio vectorial y $Sub(V) := \{W \subseteq V \mid W \text{ es subespacio de } V\}$. ¿Es $Sub(V)$ un subespacio vectorial de $\wp(V)$?*

EJERCICIO 4.23. *Sea $A \in M_{n\times m}(K)$. Demuestre que el conjunto*

$$\mathscr{S} = \left\{ (x_1,...,x_m) \in K^m \;\middle|\; \forall i = 1,...,n\left(\sum_{j=1}^{m} A_{ij}x_j = 0\right)\right\},$$

es un subespacio de K^m.

EJERCICIO 4.24. *Sean W_1 y W_2 subespacios de V_K.*

1. *Demuestre que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.*
2. *Demuestre que si $W_1 \subsetneq V$ entonces el K-espacio generado por $V \setminus W_1$ es V.*

EJERCICIO 4.25. *Sea $S \subseteq V_K$. Demuestre que:*

1. *$\langle S\rangle = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, v_i \in S\}$.*
2. *Si $S' \subseteq V_K$ tal que $S \subseteq S'$ entonces $\langle S\rangle \subseteq \langle S'\rangle$.*
3. *S es un K-subespacio vectorial si y sólo si $S = \langle S\rangle$.*

EJERCICIO 4.26. *Sean $S,T \subseteq V$ tales que $S \subseteq T \subseteq \langle S\rangle$. Demuestre que $\langle S\rangle = \langle T\rangle$.*

EJERCICIO 4.27. *Sean $v,w \in V$ y $S \subseteq V$ tales que $v \in \langle S \cup \{w\}\rangle \setminus \langle S\rangle$. Demuestre que $w \in \langle S \cup \{v\}\rangle$.*

EJERCICIO 4.28. *Sean $S_1,S_2 \subseteq V_K$.*

1. *Demuestre que $\langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle = \langle S_1 \cup S_2\rangle$.*
2. *Pruebe que si $V_1,V_2 \leq V$, entonces $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2\rangle$.*
3. *Demuestre que $\langle S_1 \cap S_2\rangle \subseteq \langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle$. De un ejemplo donde esta contención sea propia.*

EJERCICIO 4.29. *Sean $W_1,W_2,W_2 \in Sub(V)$. Demuestre las siguientes afirmaciones:*

1. *Si* $W_1 \subseteq W_2$ *entonces* $W_1 + W_3 \subseteq W_2 + W_3$.
2. *Son equivalentes:*

   a)$W_1 \subseteq W_2$

   b)$W_1 \cap W_2 = W_1$

   c)$W_1 + W_2 = W_2$.
3. $W_1 + (W_2 \cap W_3) \subseteq (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$. *De un ejemplo donde la contención anterior sea propia.*

EJERCICIO 4.30. *Sean* $W_1, W_2, W_2 \in Sub(V)$. *Demuestre que* $W_3 \cap (W_2 + (W_1 \cap W_3)) = (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$.

EJERCICIO 4.31. *Sea* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una colección de subespacios de* V. *Demuestre que* $\sum_{i\in I} W_i = \langle \bigcup_{i\in I} W_i \rangle$.

EJERCICIO 4.32. *Considere* $W \leq V_K$. *Se define una relación* $\sim \subseteq V \times V$ *como sigue:*

$$v \sim w, \text{ si } v - w \in W.$$

1. *Demuestre que* $\sim$ *es una relación de equivalencia.*
2. *Denótese por* V/W *al conjunto cociente* $V/\sim$ *y defina las asignaciones* $+ : V/W \times V/W \to V/W$ *y* $\cdot : K \times V/W \to V/W$ *como:*

$$[v] + [w] = [v + w]$$
$$\lambda \cdot [v] = [\lambda v]$$

   donde $[v], [w] \in V/W$ *y* $\lambda \in K$.

   Demuestre que dichas asignaciones son funciones, es decir, que no dependen del representante elegido.
3. *Demuestre que las funciones definidas anteriormente dotan a* V/W *con estructura de* K*-espaci vectorial.*

EJERCICIO 4.33. *Sean* $W_1 = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0\}$ *y* $W_2 = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0\}$. *Demuestre que* $K^{\mathbb{N}} = W_1 \oplus W_2$.

EJERCICIO 4.34. *Sean $P(\mathbb{R}), I(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto de funciones pares e impares respectivamente. Demuestre lo siguiente:*

1. $P(\mathbb{R}), I(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P(\mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R})$

EJERCICIO 4.35. *Sean $W, U \leq V$. Demuestre que son equivalentes:*

1. $V = U \oplus W$
2. *$U \leq V$ es mínimo respecto a la propiedad $V = U + W$*

EJERCICIO 4.36. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de V. Decimos que V es suma directa de la familia $\{W_i\}_{i\in I}$ si:*

1. $V = \sum_{i\in I} W_i$.
2. *Para todo $i \in I$, $W_i \cap (\sum_{j\in I, j\neq i} W_j) = 0$.*

En tal caso se escribirá $V = \bigoplus_{i\in I} W_i$.

EJERCICIO 4.37. *Sean $W_1, W_2, W_3 \leq V$. Demuestre que son equivalentes:*

1. $V = \bigoplus_{k=1}^{3} W_k$.
2. *Para todo $v \in V$ existen únicos $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ y $w_3 \in W_3$ tales que $v = w_1 + w_2 + w_3$*

Capítulo 2

Dimensión

"La esencia de las matemáticas yace en su libertad"

Georg Cantor.

En este capítulo se introducirá el concepto de base de un espacio vectorial, el cual permitirá a su vez definir el concepto de dimensión, que es un invariante que permite caracterizar los espacios que se pueden considerar como el mismo desde el punto del álgebra lineal.[1]

Para llegar al concepto de dimensión, la teoría se desarrollará de la forma mas general posible, para lo cual será necesario introducir el lema de Zorn, resultado del cual se incluye un resumen en el apéndice **??**.

1. Independencia lineal

En toda esta sección K es un campo y V es un $K-$espacio vectorial.

DEFINICIÓN 1.1. *Sea $S \subseteq V$. Decimos que S es linealmente independiente si para cualesquiera $v_1, \dots, v_n \in S$ tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \textit{con } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K,$$

se cumple que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

Si $S \subseteq V$ no es linealmente independiente, diremos que es linealmente dependiente.

Note que la definición presentada no hace ninguna referencia a alguna propiedad de finitud de S. En el contexto finito se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$. Entonces, S es linealmente independiente si y sólo si siempre que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ para $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ se cumple que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$*

[1] Esta de noción de "igualdad en espacios" será definida en el siguiente capítulo.

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Es claro.

$\Leftarrow$) Sean $v_{i_1}, \ldots, v_{i_l} \in S$ tales que

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_{i_j} v_{i_j} = 0 \quad \textit{para algunos } \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_l} \in K$$

Note que al definir $\lambda_i = 0$ para $i \notin \{i_1, \ldots, i_l\}$, la igualdad anterior implica que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$. Por lo tanto, la hipótesis implica que para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$, $\lambda_{i_j} = 0$, que es lo que se quería demostrar. □

Como consecuencia directa del resultado anterior se deduce lo siguiente:

COROLARIO 1.1. *Sea $S \subseteq V$. Entonces, S es linealmente independiente si y sólo si todo subconjunto finito de S es linealmente indepediente.*

Antes de continuar con la teoría general, estudiemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.1. *Por vacuidad, en cualquier espacio V, el conjunto $\emptyset$ es linealmente independiente*

EJEMPLO 1.2. *Para K cualquier campo, defina los elementos del conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq K^n$ como sigue:*

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ 0, & e.o.c \end{cases} = \delta_{i_j}$$

Es decir, e_i es el vector que tiene 1 en su $i-$ésima coordenada y cero en las coordenadas restantes. La afirmación es que $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq K^n$ es linealmente independiente. Para demostrar esto, del resultado anterior, supongamos que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$.

Dado que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Esto implica que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i = 0$, lo que concluye la prueba.

Un ejemplo en el contexto infinito se presenta a continuación:

EJEMPLO 1.3. *Sea $S = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq K[x]$. Afirmamos que S es linealmente independiente. En efecto, sean $x^{n_1}, \ldots, x^{n_l} \in S$ tales que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in K$ con la propiedad de que*

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i x^{n_i} = 0$$

Observe que esta es una igualdad del polinomio $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i x^{n_i}$ con el polinomio 0, lo que implica que todos los coeficientes de este tienen que ser cero, es decir, que todo $\lambda_i = 0$.

Esto implica que S es linealmente independiente, además note que $|S| = \aleph_0$. Más aún, por los resultados anteriores los siguientes subconjuntos son linealmente independientes.

$$\{x\}$$

$$\{1, x^3, x^5\}$$

$$\{1, x, x^6, x^{10}\}$$

Y en general cualquier subconjunto finito de S.

EJEMPLO 1.4. *El conjunto $\{\sin(x), \cos(x)\} \subseteq C^0(\mathbb{R})$ es linealmente independiente. Para esto, suponga que existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0$$

Al evaluar en $x = 0$, $\lambda \sin(0) + \mu \cos(0) = 0$, lo que implica que $\mu = 0$. Esto implica que $\lambda \sin(x) = 0$. Además, al evaluar en $x = \frac{\pi}{2}$, $\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, entonces $\lambda = 0$

EJEMPLO 1.5. *Si $1 + 1 \neq 0$ en K, en K^2 el conjunto $\{(1,0), (2,0)\}$ es linealmente dependiente, pues*

$$-2(1,0) + (2,0) = 0$$

EJEMPLO 1.6. *Si $S \subseteq V$ satisface que $0 \in S$, entonces S es linealmente dependiente. En particular los subespacios 0 y V son linealmente dependientes.*

EJEMPLO 1.7. *Sea $x \in V$. Entonces $\{x\} \subseteq V$ es linealmente independiente si y sólo si $x \neq 0$.*

A continuación daremos un resultado que proporciona una colección de conjuntos linealmente independientes. Para este, sea S un conjunto no vacío y defina para cada $s \in S$, $e_s \in K^S$ mediante

$$e_s(t) = \begin{cases} 1, & si\ s = t \\ 0, & si\ s \neq t \end{cases}$$

Con esto en mente, se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.2. *Si $S \neq \emptyset$, entonces $\{e_s \mid s \in S\} \subseteq K^S$ es linealmente independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $e_{s_1}, \ldots, e_{s_n} \in K^S$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{s_i} = 0$$

Para algunos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Si $l \in \{s_1, \ldots, s_n\}$, entonces al evaluar en l la expresión anterior:

$$\lambda_l = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{s_i}(l) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{s_i} \right)(l) = 0(l) = 0$$

Como l fue arbitrario, se deduce el resultado. □

NOTA 1.1. *Como se mencionó en el capítulo 1, note que a la proposición anterior tiene como ejemplos particulares los siguientes*

1. *Si $S = \{1, \ldots, n\}$, $K^n = K^S$. Entonces es linealmente independiente el conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq K^n$.*
2. *Si $S = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$, $M_{n\times m}(K) = K^S$. Entonces cada $s \in S$ es de la forma $s = (i, j)$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$. Note que $e_{(i,j)}$ es la matriz que tiene un 1 en la (i, j)-ésima entrada y cero en las restantes. Por lo tanto, el resultado implica que el conjunto $\{e_{(i,j)} \mid (i, j) \in S\} \subseteq M_{n\times m}(K)$ es linealmente independiente.*

También observe que en el caso de la proposición anterior, $\{e_s \mid s \in S\}$ es linealmente independiente en $K^{(S)}$.

Para concluir con esta sección, presentaremos un par de resultados de carácter general.

PROPOSICIÓN 1.3. *Sea $S \subseteq V$. Son equivalentes:*

1. *S es linealmente dependiente.*
2. *Existe $x \in S$ tal que $\langle S \rangle = \langle S \setminus \{x\} \rangle$.*
3. *Existe $T \subseteq S$ finito tal que T es linealmente dependiente.*
4. *Existe $T \subseteq S$ finito tal que $\sum_{x\in T} \lambda_x x = 0$ con algunos $\lambda_{x_0} \neq 0$*

DEMOSTRACIÓN. $1) \Rightarrow 2)$ Por hipótesis existen $x_1, \ldots, x_n \in S$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ no todos cero tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Además, observe que puede suponerse sin pérdida de generalidad que $\lambda_1 \neq 0$. Note que la igualdad implica que

$$x_1 = -\sum_{i=2}^{n} \lambda_1^{-1} \lambda_i x_i \tag{1}$$

Defina $x := x_1$, y note que trivialmente $\langle S \setminus \{x\} \rangle \subseteq \langle S \rangle$. Para la contención restante, sea $y \in \langle S \rangle$. Entonces existen $y_1, \ldots, y_l \in S$ tales que $y = \sum_{i=1}^{l} \mu_i y_i$. Note que si algún $y_i = x$, por 1 podemos reemplazar las ocurrencias de x y obtener una expresión de y como combinación lineal de elementos en $S \setminus \{x\}$, por lo tanto $y \in \langle S \setminus \{x\} \rangle$.

Por otro lado, si no existe uno de tales y_i's, trivialmente $y \in \langle S \setminus \{x\} \rangle$, lo que implica que $\langle S \rangle \subseteq \langle S \setminus \{x\} \rangle$.

$2) \Rightarrow 3)$ Dado que $\langle S \rangle = \langle S \setminus \{x\} \rangle$ para algún $x \in S$, note que $x \in \langle S \setminus \{x\} \rangle$, lo que implica que existen $y_1, ..., y_n \in S \setminus \{x\}$, tales que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$. Note que esto implica que $\{x, y_1, \ldots, y_n\} \subseteq S$ finito y linealmente dependiente.

$3) \Rightarrow 4)$ Es obvio.

$4) \Rightarrow 5)$ Es claro. $\square$

Existe un resultado dual anterior. Este se presenta a continuación.

COROLARIO 1.2. *Sea $S \subseteq V$. Son equivalentes:*

1. *S es linealmente independiente.*
2. *Para todo $x \in S$, $\langle S \setminus \{x\} \rangle \subsetneq \langle S \rangle$*
3. *Para todo $T \subseteq S$ finito, T es linealmente independiente.*
4. *Para todo $T \subseteq S$ finito, si $\sum_{x \in T} \lambda_x x = 0$, entonces todo $\lambda_x = 0$*

2. Subconjuntos Generadores

DEFINICIÓN 2.1. *Sea V un K-espacio y S un subconjunto de V. Decimos que S es un subconjunto generador de V, si $\langle S \rangle = V$.*

Notemos que V siempre es un subconjunto generador de V. Coloquialmente, llamaremos a un subconjunto generador simplemente con el generador.

EJEMPLO 2.1. *Consideremos* $V = \mathbb{R}$ *y* $S = \{1\}$.

Afirmamos que S es un generador.

Sea $a \in \mathbb{R}$ *notemos que* $a = a \cdot 1$. *Por lo que* $\langle S \rangle \supseteq \mathbb{R}$.

Por lo tanto, $\langle S \rangle = \mathbb{R}$

Es importante observar que aunque para demostrar que un subconjunto es generador, se afirma una igualdad de conjuntos. Por lo que se tendría que demostrar una doble contención. Aún así la contención $\langle S \rangle \subseteq V$ siempre se tiene por lo que habrá que demostrar solamente que $V \subseteq \langle S \rangle$.

EJEMPLO 2.2. *Sea* $V = \mathbb{R}^2$ *y* $S = \{(1,1),(-1,1)\}$.

Para ver que S es generador demostraremos que todo elemento de $\mathbb{R}^2$ *es combinación lineal de S. Sea* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *y queremos encontrar* $\lambda, \mu \in \mathrm{R}$ *tales que*

$$(x,y) = \lambda(1,1) + \mu(-1,1)$$

De aquí

$$(x,y) = (\lambda - \mu, \lambda + \mu)$$

Es decir tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda + \mu \end{cases}$$

Sumando ambas igualdades tenemos que

$$x + y = 2\lambda$$

De donde

$$\lambda = \frac{x+y}{2}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación

$$y = \frac{x+y}{2} + \mu$$

De donde

$$\mu = y - \frac{x+y}{2} = \frac{2y-x-y}{2} = \frac{y-x}{2}$$

Verifiquemos efectivamente que λ y μ son tales que necesitamos

$$\begin{aligned}\lambda(1,1)+\mu(-1,1) &= \left(\frac{x+y}{2}\right)(1,1)+\left(\frac{y-x}{2}\right)(-1,1)\\ &= \left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right)+\left(-\left(\frac{y-x}{2}\right),\frac{y-x}{2}\right)\\ &= \left(\frac{x+y-y+x}{2},\frac{x+y+y-x}{2}\right)\\ &= \left(\frac{2x}{2},\frac{2y}{2}\right)\\ &= (x,y)\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.3. *Sea $V=\mathbb{R}^3$ y $S=\{(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\}$. Para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in\mathbb{R}$ escalares, buscamos que*

$$(x,y,z)=\gamma_1(-1,1,1)+\gamma_2(1,-1,1)+\gamma_3(1,1,-1)$$

Por lo que buscamos $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ que resuelvan el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x=-\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\\ y=\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3\\ z=\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3\end{cases}$$

Sumando la primera y segunda ecuaciones

$$x+y=2\gamma_3$$

Por lo que $\gamma_3=\frac{x+y}{2}$. Análogamente sumando la primera y tercera

$$x+z=2\gamma_2$$

Por lo que $\gamma_2=\frac{x+z}{2}$. De igual manera sumando segunda y tercera

$$y+z=2\gamma_1$$

Concluyendo $\gamma_1=\frac{y+z}{2}$.

Verifiquemos que efectivamente los coeficientes

$$\begin{aligned}\gamma_1(-1,1,1)+\gamma_2(1,-1,1)+\gamma_3(1,1,-1) &= \frac{y+z}{2}(-1,1,1)+\frac{x+z}{2}(1,-1,1)+\frac{x+y}{2}(1,1,-1)\\ &= \left(\frac{-y-z}{2},\frac{y+z}{2},\frac{y+z}{2}\right)+\left(\frac{x+z}{2},\frac{-x-z}{2},\frac{x+z}{2}\right)+\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right)\\ &= \left(\frac{-y-z+x+z+x+y}{2},\frac{y+z-x-z+x+y}{2},\frac{y+z+x+z-x-y}{2}\right)\\ &= \left(\frac{2x}{2},\frac{2y}{2},\frac{2z}{2}\right)\\ &= (x,y,z)\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea V un K-espacio y S un generador de V. Si $T \subseteq V$ cumple que $S \subseteq T$, entonces T es un generador.*

DEMOSTRACIÓN. Como $S \subseteq V$ cumple que $S \subseteq T$ y el subespacio generado es monótono, entonces

$$V = \langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle \subseteq V$$

Por lo tanto $\langle T \rangle = V$ □

PROPOSICIÓN 2.2. *Los elementos $\{e_1, \dots, e_n\}$ es un subconjunto generador de K^n.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, para $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tenemos que:

$$(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

□

PROPOSICIÓN 2.3. *Sea S un conjunto. Entonces $\{e_s\}_{s \in S}$ es un subconjunto generador de $K(S)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\phi \in K(S)$, entonces ϕ tiene soporte finito, digamos $s_1, \dots, s_n$. Por lo que tenemos que $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi(s_i) e_{s_i}$ □

EJEMPLO 2.4. *Sean $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \{(1,0,1), (1,-1,0)\}$ veamos que S no es generador. Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y queremos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \lambda(1,0,1) + \mu(1,-1,0) \\ &= (\lambda, 0, \lambda) + (\mu, -\mu, 0) \\ &= (\lambda + \mu, -\mu, \lambda)\end{aligned}$$

Por lo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -\mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

Veamos que inmediatamente se deduce que $\mu = -y$ y $\lambda = z$, notemos que si sustituimos en la primera ecuación, llegamos a que

$$x = z - y$$

Por lo que, por ejemplo, el vector $(1,0,0)$ no se puede generar por S puesto que $1 \neq 0 = 0 - 0$

EJEMPLO 2.5. *Consideremos $V = P_3(\mathbb{R})$ los polinomios con grado al menos 3 y $S = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$.*
Sean $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3(\mathbb{R})$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 &= \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(1+x) + \lambda_3(1+x+x^2) + \lambda_4(1+x+x^2+x^3) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)x + (\lambda_3 + \lambda_4)x^2 + \lambda_4 x^3 \end{aligned}$$

Dos polinomios son iguales si tienen los mismos coeficientes, por lo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ a_1 = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ a_2 = \lambda_3 + \lambda_4 \\ a_3 = \lambda_4 \end{cases}$$

De la última ecuación tenemos

$$\lambda_4 = a_3$$

Sustituyendo en la tercera ecuación

$$a_2 = \lambda_3 + a_3$$

De donde $\lambda_3 = a_2 - a_3$ Sustituyendo de nuevo λ_3 y λ_4 en la segunda ecuación

$$a_1 = \lambda_2 + (a_2 - a_3) + a_3 = \lambda_2 + a_2$$

De donde $\lambda_2 = a_1 - a_2$.
Sustituyendo λ_2, λ_3 y λ_4
en la primer ecuación tenemos

$$a_0 = \lambda_1 + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + a_3 = \lambda_1 + a_1$$

Concluimos que $\lambda_1 = a_0 - a_1$. Verifiquemos que efectivamente genera.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(1+x) + \lambda_3(1+x+x^2) + \lambda_4(1+x+x^2+x^3) &= (a_0 - a_1)1 + (a_1 - a_2)(1+x) + (a_2 - a_3)(1+x+x^2) + \cdots \\ &\cdots + a_3(1+x+x^2+x^3) \\ &= [(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + a_3] \cdot 1 + \cdots \\ &\cdots + [(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + a_3]x + [(a_2 - a_3) + a_3]x^2 + a_3x^3 \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.6. *Consideremos $A_a(K)$ las matrices antisimétricas $(A_{ij} = -A_{ji})$ y proponemos las matrices B^{ij} con $1 \leq i < j < n$ dada por*

$$\left(B^{ij}_{ab}\right) = \begin{cases} \quad 1 & si\ i = a, j = b \\ -1 & si\ i = b, j = a \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Sea $A \in A_a(K)$, entonces decimos que

$$A = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} A_{ij} B^{ij}$$

Notemos que $0 \leq a < b \leq n$

$$A_{ab} = A_{ab} B^{ab}_{ab} = A_{ab}$$

Por otro lado

$$A_{ba} = A_{ab} B^{ab}_{ba} = -A_{ab}$$

Finalmente $a = b$ y $A_{ab} = 0$

3. Bases

DEFINICIÓN 3.1. *Ponemos $\mathscr{G}(V)$ como la familia de subconjuntos generadores de V y $\mathscr{I}(V)$ como la familia de subconjuntos linealmente independientes de V.*

NOTA 3.1.

1. *$\mathscr{G}(V) \neq \emptyset$ pues $V \in \mathscr{G}(V)$.*
2. *$\mathscr{I}(V) \neq \emptyset$ pues $\emptyset \in \mathscr{I}(V)$*
3. *$\mathscr{G}(V)$ y $\mathscr{I}(V)$ son conjuntos parcialmente ordenados con el orden definido por la contención en ambos casos.*

Usando la notación anterior, tenemos el siguiente importante resultado.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea $S \subseteq V$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *S es linealmente independiente y generador.*
2. *S es máximo en $\mathscr{I}(V)$.*
3. *S es mínimo en $\mathscr{G}(V)$.*
4. *Para todo $x \in V$, existen únicos $v_1, \ldots, v_n \in S$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

DEMOSTRACIÓN. $1) \Rightarrow 2)$ Basta demostrar la maximalidad de S. Para esto suponga que existe $T \subseteq V$ tal que $S \subsetneq T$. Esto implica que existe $x \in T \setminus S$. Observe que $x \in V = \langle S \rangle = \langle (S \cup \{x\}) \setminus \{x\} \rangle$, lo que implica que $S \cup \{x\}$ es linealmente dependiente, es decir, $T \notin \mathscr{I}(V)$.

$2) \Rightarrow 3)$ Primero veamos que $\langle S \rangle = V$. En efecto, considere $x \in V$. Tenemos dos casos:

C1) $x \in S$. Entonces $x \in \langle S \rangle$.

C2) $x \notin S$. Entonces $S \subsetneq S \cup \{x\}$, y por maximalidad de S, $S \cup \{x\}$ es linealmente dependiente. Así, existen $v_1, \ldots, v_n \in S$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in K$ no todos cero, tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \lambda_{n+1} x = 0$$

Observe que $\lambda_{n+1} \neq 0$ pues en caso contrario por independencia lineal de S, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, lo que es una contradicción. Esto implica que

$$x = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+1}^{-1} \lambda_i v_i \in \langle S \rangle.$$

En cualquiera de los dos casos se deduce que $V \subseteq \langle S \rangle$ y así $V = \langle S \rangle$.

Para concluir la prueba de esta implicación, resta ver que $S \in \mathscr{G}(V)$ es mínimo, para lo cual suponga que $T \subsetneq S$. Entonces existe $x \in S \setminus T$. Así, se tiene la cadena de contenciones

$$T \subsetneq T \cup \{x\} \subseteq S$$

Dado que $T \cup \{x\} \in \mathscr{I}(V)$, entonces $x \notin \langle T \rangle$, lo que muestra que $\langle T \rangle \subsetneq V$.

$3) \Rightarrow 4)$ La existencia de la descomposición es clara pues $\langle S \rangle = V$. Para la unicidad, supongamos que $x \in V$ satisface que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i, \quad con\ v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m \in S,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m \in K$$

Note que una de tales igualdades se puede escribir como una igualdad de la forma:[2]

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i = 0, \quad con\ x_i \in S\ y\ \alpha_i \in K$$

2

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i = \sum_{\{i \mid v_i \notin \{w_1, \ldots, w_m\}\}} \lambda_i v_i + \sum_{\{i \mid w_i \notin \{v_1, \ldots, v_m\}\}} -\mu_i w_i + \sum_{i \mid v_i = w_{j_{(i)}}} (\lambda_i - \mu_{j_{(i)}}) v_i$$

Así, basta con ver que en esta descomposición todos los escalares son cero, y en efecto, pues en caso contrario, si existe algún coeficiente no cero, podemos suponer sin pérdida de generalidad que este es α_1. Entonces tenemos que

$$x_1 = -\sum_{i=2}^{n} \alpha_1^{-1}\alpha_i x_i \in \langle S\rangle,$$

Esto implica que

$$\langle S\setminus\{x_1\}\rangle = \langle S\rangle = V$$

Pero esto es imposible pues $S\setminus\{x_1\} \subsetneq S$ y S es generador mínimo. Por lo tanto todos los coeficientes deben ser 0 y esto muestra la afirmación.

4) $\Rightarrow$ 1) De la existencia de la descomposición es claro que $\langle S\rangle = V$. Ahora, sean $v_1,\ldots,v_n \in S$ tales que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i = 0$ para algunos $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in K$. Note que $\sum_{i=1}^{n} 0\cdot v_i = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{n} 0\cdot v_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i$. Por unicidad de las descomposiciones $\lambda_i = 0$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$, lo que demuestra la igualdad. □

DEFINICIÓN 3.2. *Sea $\beta \subseteq V$. Si β cumple una de, y por tanto, todas las condiciones equivalentes de la proposición anterior, diremos que β es una base de V.*

EJEMPLO 3.1. *El espacio 0 tiene como base al conjunto vacío.*

EJEMPLO 3.2. *Para K cualquier campo, considere K^n y el conjunto $\beta = \{e_1,\ldots,e_n\} \subseteq K^n$. Anteriormente se demostró que β es linealmente independiente. Así, se afirma que este conjunto es un generador. En efecto, si $x = (x_1,\ldots,x_n) \in K^n$, observe que*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Por lo tanto $\langle\beta\rangle = K^n$. Luego, el resultado anterior permite concluir que β es base de K^n.

EJEMPLO 3.3. *Para K cualquier campo, el conjunto $\beta = \{e_{i,j} \mid i \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{1,\ldots,m\}\} \subseteq M_{n\times m}(K)$ es base, donde $e_{i,j}$ es la matriz que en su (i,j)-ésima entrada tiene 1 y en las otras entradas 0.*

Para demostrar esto vamos a ver que β es linealmente independiente y generador. Sin embargo, como anteriormente se demostró que β es l.i, basta ver que este es generador. En efecto, si $A \in M_{n\times m}(K)$, entonces

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_{ij}e_{i,j},$$

Lo que prueba la afirmación.

EJEMPLO 3.4. *Para K cualquier campo, el conjunto $\beta = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq K[x]$ es una base. Para probar esto, note que lo único que falta demostrar es que este conjunto genera a $K[x]$, lo que es claro pues si $p \in K[x]$, por definición, existen $a_0,\ldots,a_n \in K$ tales que*

$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \langle\beta\rangle$$

Los últimos ejemplos a tratar mostrarán conjuntos que son linealmente independientes pero no generadores y viceversa. Esto muestra que los conceptos de independencia lineal y conjunto generación son independientes desde el punto de vista lógico.

EJEMPLO 3.5. *Anteriormente se demostró que $S = \{\sin(x),\cos(x)\} \subseteq C^0(\mathbb{R})$ es linealmente independiente. Sin embargo, este conjunto no es generador pues procediendo por contradicción, si este lo fuera, para la función constante $1 \in C^0(\mathbb{R})$, existirían $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) = 1$$

Al evaluar en $x = 0$, se dice que $\mu = 1$. De forma análoga, al evaluar en $x = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = 1$. Entonces

$$\sin(x) + \cos(x) = 1$$

Pero esto es imposible pues si evaluamos en $x = \frac{\pi}{4}$, la igualdad implicaría que

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Por lo tanto, S es un conjunto linealmente independiente que no es generador y por lo tanto, no es base de $C^0(\mathbb{R})$

EJEMPLO 3.6. *Considere* $S = \{(1,0),(0,1),(1,1)\} \subseteq K^2$. *Note que como* $\beta = \{(1,0),(0,1)\} \subseteq K^2$ *es base y* $\beta \subseteq S$, *entonces* $\langle S \rangle = K^2$. *Sin embargo, S no es linealmente independiente pues*

$$(1,1)-(1,0)-(0,1)=0$$

Una prueba alterna de esto último se puede obtener del resultado anterior pues al ser β *base,* β *es linealmente independiente máximo.*

De los ejemplos anteriores quizá el lector puede pensar que en general las condiciones de caracterización del concepto de base pueden ser innecesarias. Pero esto no es cierto, y para convencernos de esto pensemos en la pregunta nada obvia de si todo espacio vectorial tiene una base. En los ejemplos tratados anteriormente no hubo problemas salvo en el caso de $C^0(\mathbb{R})$. Otro ejemplo no trivial se obtiene al considerar $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Mas aún, una colección infinita de ejemplos donde esta pregunta es no trivial se obtiene al considerar para X infinito, $\mathscr{P}(X)$ con su estructura de $\mathbb{Z}_2$-espacio.

Como uso de otra de las caracterizaciones del concepto de base se demostrará el siguiente teorema que dice que todo espacio vectorial tiene una base. Este será una aplicación del lema de Zorn.

PROPOSICIÓN 3.2. *Todo espacio vectorial tiene una base*

DEMOSTRACIÓN. Sea V un K-espacio vectorial. Considere el conjunto

$$\mathscr{I}(V) = \{S \subseteq V \mid S \text{ es linealmente independiente}\}$$

Note que $\mathscr{I}(V) \neq \emptyset$ pues $\emptyset \in \mathscr{I}(V)$. Por otro lado, como se mencionó anteriormente, $(\mathscr{I}(V), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Afirmación: Toda cadena en $\mathscr{I}(V)$ es acotada superiormente.

En efecto, sea $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cadena en $\mathscr{I}(V)$. Notemos que para cualquier $\beta \in \Lambda$, $S_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$. Luego, si se demuestra que $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha \in \mathscr{I}(V)$, $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ es cota superior de la cadena considerada. Por lo tanto hay que demostrar dicha afirmación. Sean $x_1,\ldots,x_n \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0, \quad \text{para algunos } \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in K$$

Note que existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \Lambda$ tales que para todo i, $x_i \in S_{\alpha_i}$. Como $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es cadena, entonces existe $\beta \in \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ tales que $x_1,\ldots,x_n \in S_\beta$. Pero como S_β es un conjunto linealmente independiente, el hecho de que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ implica que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, lo que concluye la prueba de la afirmación.

En resumen, se deduce que $(\mathscr{I}(V),\subseteq)$ cumple las hipótesis del lema de Zorn, por lo tanto existe un elemento en $\mathscr{I}(V)$ máximo, que por el teorema anterior es una base de V. $\square$

Hay varios comentarios muy importantes que realizar respesto a la proposición anterior:

1. Para la gente interesada en fundamentos, note que el resultado anterior es consecuencia del lema de Zorn como se pudo apreciar en la demostración de este. Por otro lado, el lema de Zorn es equivalente al axioma de elección, así que el teorema tratado se puede pensar como consecuencia del axioma de elección.
   Sin embargo, en 1984, Andreas Blass demostró que de hecho el axioma de elección es equivalente al enunciado "Todo espacio vectorial tiene base", en el artículo titulado “Existence of Bases Implies the Axiom of Choice".[3]
   Como el lector seguramente sabe, el axioma de elección es uno de los principios mas discutidos y controversiales de la matemática, y con la teoría que tenemos podemos dar un argumento de por que sucede esto. Si regresamos a los ejemplos discutidos previamente al teorema anterior, es decir
   $$\mathbb{R} \; como \; \mathbb{Q}-espacio$$
   $$\mathscr{P}(X) \; como \; \mathbb{Z}_2-espacio$$
   $$C^0(\mathbb{R}) \; como \; \mathbb{R}-espacio$$
   Todos estos espacios tienen que tener una base. La pregunta es si podemos darle de forma explícita y la respuesta es que hasta hoy en día esto no es posible. Esto hace ver que aquí aparece el tan mencionado carácter **no** constructivo del axioma de elección, ya que la demostración de nuestro teorema no nos proporciona una forma de encontrar bases explícitas en general.
   Existe una discusión muy completa y detallada de todo esto en el libro “Axiom of Choice"de Herrlich.
2. En la demostración del resultado anterior se usa un hecho que sucede en general, a saber, que la unión de una cadena de conjuntos linealmente independiente es un conjunto linealmente independiente. Note que este resultado no es cierto en general si se quita la hipótesis de ser cadena, ya que los conjuntos $S=\{(1,0),(0,1)\}$ y $T=\{(1,0),(1,1)\}$ de K^2 son linealmente independientes, pero
   $$S\cup T=\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$$
   No lo es.
3. Cuando uno demuestra la existencia de cierto objeto especial en la matemática, de inmediato aparece una pregunta de si este es único. Note que los espacios vectoriales no tienen bases únicas. Para $\mathbb{R}^2$ por ejemplo, $\beta_1=\{(1,0),(0,1)\}$ y $\beta_2=\{(1,1),(1,-1)\}$ son bases y estas son distintas entre si.
   Este ejemplo permite formular una conjetura pues aunque estos no son los mismos conjuntos, estos tienen la misma cardinalidad. Este es un hecho general y nuevamente es una consecuencia más del lema de Zorn. Sin embargo, la demostración de este es mucho mas técnica que el último teorema, por lo tanto, esta (y otro resultado), se discutirán en las dos subsecciones siguientes.

[3]Todo esto es en ZFC

La demostración de la equipotencia de bases no es necesarias para entender el resto del curso, por lo que el lector puede omitirla. Esto sin contar el hecho de que en la siguiente sección se demostrará el teorema correspondiente cuando se impone una cierta condición de finitud.

3.1. Problema de existencia de pseudo complementos en la retícula de subespacios. En el capítulo anterior se planteó la siguiente pregunta

$$¿\text{Dado } U \leq V, \text{ existe } W \leq V \text{ tal que } V = U \oplus W?$$

En esta sección veremos que esta tiene una respuesta afirmativa. Para esto requerimos un resultado que es consecuencia del lema de Zorn.

PROPOSICIÓN 3.3. *Si $S \subseteq V$ linealmente independiente, entonces existe $\beta \subseteq V$ base tal que $S \subseteq \beta$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathscr{S} = \{T \subseteq V \mid T \text{ es linealmente independiente y } S \subseteq T\}$. Note que $\mathscr{S} \neq \emptyset$ pues $S \in \mathscr{S}$ y además $(\mathscr{S}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Considere $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cadena en $\mathscr{S}$. Note que $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha \in \mathscr{S}$ y $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha$ acota a la cadena en cuestión.
Luego, el lema de Zorn implica que existe $\beta \in \mathscr{S}$ máximo. Dado que $S \subseteq \beta$ y β es linealmente independiente, lo único que falta ver es que β es máximo como elemento de $\mathscr{I}(V)$ para ver que es en efecto una base. Pero esto es sencillo de ver ya que si $\gamma \subseteq V$ satisface que $\beta \subsetneq \gamma$, dado que esto implica que $S \subseteq \gamma$, γ no puede ser linealmente independiente pues esto sería una contradicción con el hecho de que $\beta \in \mathscr{S}$ es máximo, por lo tanto, β es base. □

Sin más preámbulo podemos demostrar el teorema que se buscaba:

PROPOSICIÓN 3.4. *(Existencia de pseudocomplementos) Dado $U \leq V$, existe $W \leq V$ tal que $V = U \oplus W$.*

DEMOSTRACIÓN. Al considerar $U \leq V$, tenemos que existe $\beta \subseteq U$ base. Note que β es linealmente independiente como subconjunto de V. Por lo tanto, el resultado anterior implica que existe $\gamma \subseteq V$ base tal que $\beta \subseteq \gamma$. Definamos $W := \langle \gamma \setminus \beta \rangle$.

Afirmación: $V = U + W$. En efecto,

$$U + W = \langle \beta \rangle + \langle \gamma \setminus \beta \rangle = \langle \beta \cup \gamma \setminus \beta \rangle = \langle \gamma \rangle = V$$

Afirmación: $U \cap W = 0$. Para demostrar la contención no trivial, sea $x \in U \cap W$. Entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i, \quad con\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m \in K$$

$v_i \in \beta$ y $w_i \in \gamma \setminus \beta$. Esto implica que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{m} (-\mu_i) w_i = 0$$

Esto es una combinación lineal igualada a 0 de elementos de γ, que es base de V. Por independencia lineal $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$. Esto implica que $x = 0$ y termina la demostración. □

Como se mencionó en el capítulo 1, para el caso de K^2 es claro que el pseudocomplemento de un subespacio no es único, de hecho, si K es infinito, hay una cantidad infinita de ellos para $\langle e_1 \rangle$. Esto es nuevamente es un hecho general, pero queda como ejercicio al lector.

EJERCICIO 3.1. *Sea K un campo infinito y V un K-espacio con base β tal que $|\beta| \geq 2$. Entonces todo $W \leq V$ no trivial tiene una cantidad infinita de pseudocomplementos.*

3.2. Cualesquiera dos bases son equipotentes.

PROPOSICIÓN 3.5. *Sean β y γ bases de V. Entonces $|\beta| = |\gamma|$.*

DEMOSTRACIÓN. Definamos

$$\mathscr{S} = \{(I_\alpha, f_\alpha) \mid I_\alpha \subseteq \beta, f_\alpha : I_\alpha \to \gamma \text{ es inyectiva}, (\gamma \setminus f_\alpha(I_\alpha) \sqcup I_\alpha) \subseteq V \text{ es linealmente independiente}\}$$

Note que $\mathscr{S} \neq \emptyset$ pues $(\emptyset, \emptyset) \in \mathscr{S}$. Definimos un orden parcial en $\mathscr{S}$ mediante:

$$(I_\alpha, f_\alpha) \leq (I_\beta, f_\beta), \quad si\ I_\alpha \subseteq I_\beta\ y\ f_\beta\,|_{I_\alpha} = f_\alpha$$

Afirmación 1 : $(\mathscr{S}, \leq)$ es en efecto un conjunto parcialmente ordenado.

1. Reflexividad. Es claro.
2. Simetría. Si $(I_\alpha, f_\alpha) \leq (I_\beta, f_\beta)$ y $(I_\beta, f_\beta) \leq (I_\alpha, f_\alpha)$, entonces note que

$$\begin{cases} I_\alpha \subseteq I_\beta & y\ (f_\beta)_{I_\alpha} = f_\alpha \\ I_\beta \subseteq I_\alpha & y\ (f_\alpha)_{I_\beta} = f_\beta \end{cases}$$

   Esto claramente implica que $I_\alpha = I_\beta$ y por otro lado que $f_\alpha = f_\beta$.

3. Transitividad. Si $(I_\alpha, f_\alpha) \leq (I_\beta, f_\beta)$ e $(I_\beta, f_\beta) \leq (I_\gamma, f_\gamma)$, entonces
$$\begin{cases} I_\alpha \subseteq I_\beta & y \ (f_\beta)\mid_{I_\alpha} = f_\alpha \\ I_\beta \subseteq I_\gamma & y \ (f_\gamma)\mid_{I_\beta} = f_\beta \end{cases}$$
Claramente $I_\alpha \subseteq I_\gamma$ y además $(f_\gamma)\mid_{I_\alpha} = (f_\beta)_{I_\alpha} = f_\alpha$. Esto prueba que $(I_\alpha, f_\alpha) \leq (I_\gamma, f_\gamma)$.

Afirmación 2: Toda cadena en $\mathscr{S}$ es acotada superiormente.
Sea $\{(I_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cadena en $\mathscr{S}$. Definimos
$$f : \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \to \gamma \quad \textit{mediante}$$
$$f(v) = f_\alpha(v) \quad \textit{si } v \in I_\alpha$$
Veamos que esta asignación es una función, es decir, que si $v \in I_\alpha \cap I_\beta$, $f_\alpha(v) = f_\beta(v)$. Pero esto es claro, pues al ser $\{(I_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ cadena, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(I_\alpha, f_\alpha) \leq (I_\beta, f_\beta)$, por lo que $(f_\beta)_{I_\alpha} = f_\alpha$. Así que $f_\alpha(v) = f_\beta(v)$.

Afirmación 3: f es inyectiva.
Sean $v, w \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ tales que $f(v) = f(w)$. Al ser $\{(I_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ cadena, existe $\beta \in \Lambda$ tal que $v, w \in I_\beta$ y, además $f(v) = f_\beta(v)$ y $f(w) = f_\beta(w)$. Entonces $f_\beta(v) = f_\beta(w)$ y como f_β es inyectiva, entonces $v = w$.

Afirmación 4:
$$\left[\gamma \setminus f\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)\right] \sqcup \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right) \subseteq V$$
es linealmente independiente.

Note que por propiedades de conjuntos,
$$\left[\gamma \setminus f\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)\right] \cup \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right) = \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} B \setminus f(I_\alpha)\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right) \tag{2}$$
Si $x_1, \ldots, x_n \in \left[\gamma \setminus f\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)\right] \cup \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)$, note que renombrando de ser necesario podemos suponer que
$$x_1, \ldots, x_{i_0} \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \gamma \setminus f(I_\alpha) \quad y \quad x_{i_0+1}, \ldots, x_n \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$$

Por ser $\{(I_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ cadena, existe $\beta\in\Lambda$ tal que $x_{i_0+1},\ldots,x_n\in(\gamma\setminus f(T_\beta)\sqcup I_\beta)$. Como este conjunto es linealmente independiente, el conjunto $\{x_1,\ldots,x_n\}$ lo es, de lo que se deduce el resultado.

Además note que de 2 se deduce que

$$\left(\gamma\setminus f\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)\right)\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)=\emptyset$$

De todo esto se deduce que $\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha, f\right)\in\mathscr{S}$ y, es claro que este es cota superior de la cadena en cuestión.

Así, por el lema de Zorn existe un elemento en $\mathscr{S}$ máximo, digamos (M,g).

Afirmación 6: $\gamma\setminus g(M)=\emptyset$ o $\beta\setminus M=\emptyset$.

Note que si se demuestra esto, entonces se tienen los siguientes dos casos:

Caso 1: $\gamma\setminus g(M)=\emptyset$.
Como $g: M\to\gamma$ es inyectiva, esto dice que g es una biyección entre M y γ. Así $|M|=|\gamma|$. Como $M\subseteq\beta$, entonces $|\gamma|\leq|\beta|$.

Caso 2: $\beta\setminus M=\emptyset$.
En este caso, $M=\beta$. Dado que por definición de (M,g)

$$\gamma\setminus g(\beta)\sqcup\beta\subseteq V$$

Es linealmente independiente y β es máximo, entonces $\gamma\setminus g(\beta)=\emptyset$. Así g es biyección entre β y γ.

Note que en el primer caso, si se repite todo el argumento sustituyendo β por γ se llegará a que $|\beta|\leq|\gamma|$ y por el teorema de Cantor-Schröeder-Berstein se obtiene que $|\beta|=|\gamma|$. Por lo tanto, lo único que falta es demostrar la afirmación 6, cosa que se va a hacer por contradicción: Si $\gamma\setminus g(M)\neq\emptyset$ y $\beta\setminus M\neq\emptyset$, entonces sea $v\in\gamma\setminus g(M)$. Como $\gamma\setminus g(M)\sqcup M\subseteq V$ es linealmente independiente, entonces $(\gamma\setminus g(M)\cup\{v\})\sqcup M\subseteq V$ es linealmente independiente. Observe que como $v\notin\langle\gamma\setminus(g(M)\cup\{v\})\sqcup M\rangle$, entonces

$$\langle\gamma\setminus(g(M)\cup\{v\})\sqcup M\rangle\lneq V$$

Además note que $\beta \setminus M \nsubseteq \langle \gamma \setminus (g(M) \cup \{v\}) \sqcup M \rangle$ pues en caso contrario

$$\beta = \beta \setminus M \cup M \subseteq \langle \gamma \setminus (g(M) \cup \{v\}) \sqcup M \rangle$$

Pero todo esto es imposible pues $\langle \beta \rangle = V$.

Por lo tanto, existe $w \in \beta \setminus M$ tal que $w \notin \langle \gamma \setminus (g(M) \cup \{v\}) \sqcup M \rangle$. Así se define $\overline{M} = M \cup \{w\} \supsetneq M$ y definimos

$$\overline{g} : \overline{M} \to \gamma$$

Mediante $\overline{g} \mid_M = g$ y $\overline{g}(w) = v$. Observe que $\overline{g}$ es claramente inyectiva. Además

$$\gamma \setminus \overline{g}(\overline{M}) \cup \overline{M} = (\gamma \setminus g(M) \cup \{v\}) \cup (M \cup \{w\})$$

Y este conjunto es linealmente independiente. Para concluir es claro que ambos uniendos son ajenos, luego $(\overline{M}, \overline{g}) \in \mathscr{S}$. Pero esto es imposible pues $(M,g) \lneq (\overline{M}, \overline{g})$ y (M,g) es máximo. Por lo tanto debe suceder la afirmación. $\square$

El teorema anterior permite definir un invariante asociado a cualquier espacio conocido como la dimensión. La definición es: Dado V un K-espacio, definimos la dimensión de V como el cardinal de cualquier base. Note que el resultado anterior dice que este cardinal está bien definido.

Es importante mencionar que si bien es cierto que la teoría desarrollada permite tratar espacios con cualquier dimensión, nos centraremos en la teoría de *dimensión finita*, la cual se expondrá hasta la siguiente sección. Esto pues para tratar el caso general, se requiere que el lector maneje algunas ideas de aritmética cardinal, cosa que no es requisito del curso. Una segunda razón para prestarle atención a esta restricción es que en dichos casos los argumentos tienen una carácter mucho más algorítmico, cosa que como se ha mencionado no tiene el lema de Zorn, que es el argumento que hemos usado para la teoría presentada.

4. Dimensión

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea V un K-espacio, S linealmente independiente y $T = \{w_1, \dots, w_n\}$ generador de V. Entonces $|S| \leq |T|$*

DEMOSTRACIÓN. Si $S \subseteq T$, ya terminamos. Por lo que supongamos que $S \nsubseteq T$, así $S \cap T \subsetneq T$.

De aquí $S \cap T = \{w_1, \dots, w_k\}$ con $k < n$, si es necesario renumeramos los vectores.

Sea $v_1 \in S \setminus (S \cap T)$, entonces $v_1, w_1, \dots, w_n$ es linealmente independiente puesto que $v_1, w_1, \dots, w_k \in S$ y son linealmente independientes, debe existir el mínimo $j \geq k$ que hace al conjunto $w_1, \dots, w_j$ linealmente dependiente. Así, tenemos que $v_1, w_1, \dots, w_{j-1}$ es

linealmente independiente, por lo que $w_j \in \langle v_1, w_1, \ldots, w_{j-1} \rangle$.
De esta manera definimos un nuevo conjunto generador

$$T_1 = (T \setminus \{w_j\}) \cup \{v_1\}$$

Ahora bien, $S \cap T_1 = \{v_1, w_1, \ldots, w_k\}$. De forma recursiva podemos repetir este proceso para tener T_k, pero en cada paso $S \cap T_{k+1}$ tendrá un elemento mas, es decir $|S \cap T| < |S \cap T_1| \leq |S \cap T_2| \leq \ldots$.
Como T es finito, el proceso termina a lo mas en $n-k$ pasos. Ahora bien, cuando el proceso se estaciona digamos al paso m, tenemos que

$$S \cap T_m = S$$

Por lo que

$$|S| = |S \cap T_m| \leq |T_m| = |T|$$

Por lo que T_i siempre tuvo la misma cardinalidad en cada iteración. □

COROLARIO 4.1. *Sea V un K-espacio con β base finita. Si γ es otra base de V, entonces $|\gamma| = |\beta|$*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el lema anterior a β como linealmente independiente y a γ como generador tenemos que $|\beta| \leq |\gamma|$.
Ahora, cambiando el orden, considerando a γ l.i y β generador tenemos que $|\gamma| \leq |\beta|$. Por lo tanto $|\beta| = |\gamma|$. □

Ahora bien, gracias a este último corolario podemos dar la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.1. *Sea V un K-espacio. Diremos que V es de dimensión finita, si tiene alguna base finita. Observemos que si este es el caso todas las bases serán finitas, más aún, tendrán la misma cantidad de elementos.*
Por lo que podemos definir la dimensión de tal espacio como la cardinalidad de alguna base. Este número lo denotamos por $dim_K V$, si no se presta a confusión, solo escribiremos $dim V$.

EJEMPLO 4.1. *$\mathbb{C}$ es $\mathbb{R}$-espacio con base $\{1, i\}$, por lo que $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, pero también es un $\mathbb{C}$-espacio con base $\{1\}$ por lo que $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.*

COROLARIO 4.2. *Sea V un K-espacio de dimensión n. Si $S \subseteq V$ con $|S| > n$, entonces S es linealmente dependiente.*

DEMOSTRACIÓN. Si S fuese linealmente independiente se podría completar a una base β, pero $n < |S| \leq |\beta| = n$, lo cual es una contradicción, por lo tanto S es linealmente dependiente. $\square$

COROLARIO 4.3. *Sea V un K-espacio de dimensión n. Si $S \subseteq V$ es linealmente independiente, entonces $|S| \leq n$*

COROLARIO 4.4. *Sea V un K-espacio de dimensión n. Si S es un generador, entonces* $|S \geq n|$

PROPOSICIÓN 4.2. *Sea V un K-espacio de dimensión n. Son equivalentes para $\beta \subseteq V$:*

1. *β es base*
2. *β es l.i y $|\beta| = n$*
3. *β es generador y $|\beta| = n$*

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2)$ Por ser base es l.i y como la $dimV = n$ entonces $|\beta| = n$.
$2 \Rightarrow 3)$ Si β es l.i entonces se puede extender a una base γ, pero dicha base tendría que cumplir que $|\gamma| = n$, por lo que $\beta = \gamma$.
$3 \Rightarrow 1)$ Notemos que β es un generador mínimo por uno de los corolarios anteriores que dice que $|\beta| \geq n$ para cualquier generador. Así β es base. $\square$

PROPOSICIÓN 4.3. *Sea V un K-espacio y $W_1, W_2 \leq V$. Entonces:*

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea γ base de $W_1 \cap W_2$, como γ es base es l.i y por lo que es l.i en W_1. Por este hecho sabemos que podemos extender a γ a una base β_1, de W_1, y $\gamma \subseteq \beta$. Análogamente, podemos extender a γ a una base de β_2 de W_2. Afirmamos que $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ es una base de $W_1 + W_2$.
Pondremos $\gamma = \{v_1, \dots, v_k\}$, $\beta_1 = \{v_1, \dots, v_k, w_{11}, \dots, w_{1s}\}$, $\beta_2 = \{v_1, \dots, v_k, w_{21}, \dots, w_{2s}\}$.
Primero veamos que genera. Sea $v \in W_1 + W_2$, entonces existen $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$.
Como β_1 es base de W_1, entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{1s} \in K$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \lambda_{11} w_{11} + \dots + \lambda_{1s} w_{1s} = w_1$$

Por el mismo hecho pero para β_2 y W_2 tenemos que existen $\mu_1, \dots, \mu_k, \mu_{21}, \dots, \mu_{2t} \in K$ tales que

$$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k + \mu_{21} w_{21} + \dots + \mu_{2t} w_{2t} = w_2$$

De aquí $v = w_1 + w_2$ es una combinación lineal de β.

Ahora, veamos que β es linealmente independiente. Supongamos β es linealmente dependiente.

Por lo que existe un $u \in \beta$ que es combinación lineal de los otros elementos. Como β_1 es l.i, se tendría que existe

$$w_{2r} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{s} \lambda_{1i} w_{1i} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{t} \lambda_{2i} w_{2i}$$

Entonces

$$w = w_{2r} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{t} \lambda_{2i} w_{2i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{s} \lambda_{1i} w_{1i} \in \langle \beta_1 \rangle$$

De la primera parte $w \in \langle \beta_2 \rangle$, de aquí $w \in W_1 \cap W_2$. Como γ es base de $W_1 \cap W_2$ entonces

$$w = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i \ \ con \ \ \mu_1, \ldots, \mu_k \in K$$

Por lo que

$$w_{2r} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{t} \lambda_{2i} w_{2i} \in V_2$$

Pero esto quiere decir, que β_2 es linealmente dependiente, contradiciendo el hecho de que β_2 sea base.

Calculando,

$$\begin{aligned} dim(W_1 + W_2) &= |\beta| = |\beta_1 \cup \beta_2| = |\beta_1| + |\beta_2| - |\beta_1 \cap \beta_2| \\ &= |\beta_1| + |\beta_2| - |\gamma| \\ &= dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2) \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 4.4. *Sea V un K-espacio y $W \leq V$. Si V tiene dimensión finita, entonces $dimW \leq dimV$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea β base de W. Entonces β se extiende a una base γ de V, por ser β l.i en V. Así $dim(W) = |\beta| \leq |\gamma| = dim(V)$ □

PROPOSICIÓN 4.5. *Sea V un K-espacio de dimensión finita, S linealmente independiente y T generador de V. Entonces $\exists T_0 \subseteq T$ tal que $\beta = S \cup T_0$ es base de V.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $T = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Procedemos a construir T_0 recursivamente.

Si S es base, pues $T_0 = \emptyset$ y ya terminamos. Como no es base debe existir w_{i_1} primero tal

que $w_{i_1} \notin \langle S \rangle$. Así definimos $T_1 = \{w_{i_1}\}$.
Si $S \cup T$ es base, ya terminamos. Si no, elegimos el primer elemento w_{i_2} de $T \setminus T_1$ tal que $w_{i_2} \notin \langle S \cup T_1 \rangle$. Ponemos $T_2 = \{w_{i_1}, w_{i_2}\}$.
Suponemos que $T_k = \{w_{i_1}, \ldots, w_{1_k}\}$ ya se definió.
Procedemos análogamente, si $S \cup T_k$ es base entonces ya terminamos. Caso contrario elegimos el primer elemento $w_{i_{k+1}}$ de $T \setminus T_k$ tal que $w_{i_{k+1}} \notin \langle S \cup T_k \rangle$. Ponemos $T_{k+1} = \{w_{i_1}, \ldots, w_{i_{k+1}}\}$. Observemos que por el lema técnico, siempre $S \cup T_k$ es l.i.
Por otro lado, el proceso debe parar en un punto, puesto que V tiene dimensión finita. Si paramos porque es base ponemos $T_0 = T_k$. Pero notemos que no es posible que se pare el proceso sin llegar a una base puesto $\langle S \cup T_k \rangle = \langle T \rangle$ lo que es una contradicción a que T sea generador. $\square$

Ejercicios

EJERCICIO 4.1. *Supongase que $1+1 \neq 0$ en K. Demuestre que si el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ es linealmente independiente, entonces el conjunto $\{v_1+v_3, v_2+v_3, v_1+v_2\}$ es linealmente independiente.*

EJERCICIO 4.2. *Considere el conjunto $X = \{(1+i, 3+8i, 5+7i), (1-i, 5, 2+i), (1+i, 3+2i, 4-i)\} \subseteq \mathbb{C}^3$.*

1. *¿Es X linealmente independiente si $\mathbb{C}^3$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial?*
2. *¿Es X linealmente independiente si $\mathbb{C}^3$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial?*

EJERCICIO 4.3. *Demuestre que el conjunto $\{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$.*

EJERCICIO 4.4. *Sean $v, w \in V_K$. Demostrar que v y w son linealmente dependientes si y sólo si uno es múltiplo del otro.*

EJERCICIO 4.5. *Demuestre que las funciones $e^{\lambda x}, e^{\mu x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ son linealmente independientes si y sólo si $\lambda \neq \mu$.*

EJERCICIO 4.6. *Demuestre que el conjunto* $\{\sum_{i=0}^{k} x^i \in K[x] \mid k = 0,...,n\}$ *es linealmente independiente en* $K[x]$.

EJERCICIO 4.7. *Encuentre todos los valores para que el conjunto* $\{(2, a-b, 1), (a, b, 3)\}$ *sea linealmente independiente en* $\mathbb{Q}^3_{\mathbb{Q}}$.

EJERCICIO 4.8. *Sea* $p \in \mathbb{N}$ *primo. Demuestre que el conjunto* $\{(1,2,0), (0,1,2), (2,0,1)\}$ *es linealmente independiente en* $\mathbb{Z}_p^3$ *si y sólo si* $p \neq 3$.

EJERCICIO 4.9. *Determine si los siguientes conjuntos son linealmente independientes en el espacio en cuestión.*

- $\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\}$ *en* $\mathbb{R}^3$.
- $\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\}$ *en* $\mathbb{Q}^3$.
- $\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\}$ *en* $\mathbb{Z}_2^3$.
- $\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\}$ *en* $\mathbb{Z}_3^3$.
- $\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\}$ *en* $\mathbb{Z}_5^3$.

EJERCICIO 4.10. *Sea* $S \subseteq V_K$. *Demuestre que* S *es linealmente independiente si y sólo si todo subconjunto de* S *es linealmente independiente.*

EJERCICIO 4.11. *Demuestre ó de un contraejemplo: Sean* $V_1, V_2, V_3 \leq V$ *entonces*

$$dim(V_1+V_2+V_3) = dim(V_1)+dim(V_2)+dim(V_3)-dim(V_1 \cap V_2)-dim(V_1 \cap V_3)-dim(V_2 \cap V_3)+dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$$

EJERCICIO 4.12. *Encuentre una base para* $S_n(K)$ *y determine su dimensión.*

EJERCICIO 4.13. *Encuentre una base para* $A_n(K)$ *y determine su dimensión.*

EJERCICIO 4.14. *Sea X un conjunto no vacío y finito. Para todo $x \in X$ se define $V_x = \{x\}$. ¿Es $\{V_x\}_{x\in X}$ base de $\wp(X)$ como $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial?. ¿Qué sucede con esta afirmación si X es infinito?.*

EJERCICIO 4.15. *Sea $W \leq V$. Demostrar que cualquier base de W es subconjunto de una base de V, es decir, que cualquier base de W se extiende a una base de V.*

EJERCICIO 4.16. *Sean $S_1, S_2 \subseteq V_K$. Demuestre que si $S_1 \subseteq S_2$, S_1 es linealmente independiente y S_2 es un generador, entonces existe $\beta \subseteq V$ base tal que $S_1 \subseteq \beta \subseteq S_2$.*

EJERCICIO 4.17. *Sea $v \in V$ con $v \neq 0$. Demuestre que existe $\beta \subseteq V$ base tal que $v \in \beta$.*

EJERCICIO 4.18. *Sea $v \in V$ con $v \neq 0$. Demuestre que existe $W \leq V$ máximo tal que $v \notin W$.*

EJERCICIO 4.19. *Sean $\beta \subseteq V$ una base y $S \subseteq V$ linealmente independiente. Demuestre que existe $T \subseteq \beta$ tal que $S \cup T$ es una base de V.*

EJERCICIO 4.20. *Sea $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V_K y $y \in V \setminus \beta$. Demuestre que el conjunto $\{v_1, ..., v_n, y\}$ tiene un único subconjunto linealmente dependiente mínimo.*

EJERCICIO 4.21. *Sean $V_1, V_2 \leq V_K$ tales que $dim(V_1) = m$ y $dim(V_2) = n$.*

1. *Demuestre que $dim(V_1 \cap V_2) \leq m \wedge n$. De un ejemplo donde esta desigualdad sea estricta.*
2. *Demuestre que $dim(V_1 + V_2) \leq m + n$. De un ejemplo donde esta desigualdad sea estricta.*

EJERCICIO 4.22. *Sea V un K-espacio. Demuestre que V tiene dimensión finita si y sólo si para toda familia de subespacios $\{V_i\}_{i\in I}$ de V tal que $\bigcap_{i\in I} V_i = 0$, existe $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_{i\in J} V_i = 0$.*

EJERCICIO 4.23. *Sean V un espacio vectorial de dimensión infinita y W un subespacio propio de V. Demuestre que existen $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ una familia de subespacios de V tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{i=0}^{n} V_i \nsubseteq W$ y que $\bigcap_{i=0}^{\infty} V_i \subseteq W$.*

EJERCICIO 4.24. *Demuestre que si K tiene q elementos entonces K^n tiene $\frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$ bases distintas.*

EJERCICIO 4.25. *Demuestre que si R es un dominio entero que tiene estructura de K-espacio vectorial con dimensión finita, entonces R es un campo.*

DEFINICIÓN 4.2. *Sea $(K,+,\cdot)$ un campo y $F \subseteq K$. Decimos que F es un subcampo de K si:*

1. $0,1 \in F$.
2. *Para todo $x,y \in F$, $x+y \in F$.*
3. *Para todo $x,y \in F$, $x \cdot y \in F$*

EJERCICIO 4.26.

1. *Sean V un K-espacio vectorial y F un subcampo de K. Demuestre que $dim_F(V) = dim_K(V) \cdot dim_F(K)$.*
2. *Demuestre que si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con $dim_{\mathbb{C}}(V) = n$, entonces $dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$.*

EJERCICIO 4.27. *Demuestre que si F es un subcampo de K tal que $dim_F(K)$ es un primo, entonces no existe L campo tal que F sea un subcampo propio de L y L sea un subcampo propio de K.*

DEFINICIÓN 4.3. *Si $v,w \in V_{\mathbb{R}}$ se define el conjunto $conv(v,w) = \{tv + (1-t)w \mid t \in [0,1]\}$.*

EJERCICIO 4.28. *Sean $v,w,y \in V_{\mathbb{R}}$ tales que $\{w-v, y-v\}$ es linealmente independiente. Prueba que el conjunto*

$$conv\left(v, \frac{1}{2}(w+y)\right) \cap conv\left(w, \frac{1}{2}(v+y)\right) \cap conv\left(y, \frac{1}{2}(v+w)\right)$$

es no vacío y calcula su cardinalidad.

EJERCICIO 4.29. *Demuestre que si K es un campo infinito y V es un K-espacio vectorial tal que $2 \leq dim_K(V)$, entonces todo subespacio no trivial de V tiene una cantidad infinita de seudocomplementos.*

EJERCICIO 4.30. *Sea V un K-espacio con dimensión finita y $W \leq V$. Demuestre que si $\dim(W) = \dim(V)$, entonces $V = W$.*

EJERCICIO 4.31. *Supongamos que $V = W \oplus U$ para $U, W \leq V$. Demuestre que si $\beta \subseteq W$ y $\gamma \subseteq U$ son bases, entonces $\beta \sqcup \gamma \subseteq V$ es base.*

Miscelánea.

Elijan dos ejercicios para entregar de esta sección.

Para los que les gusta la teoría de números.

EJERCICIO 4.32. *Sea $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ el conjunto de primos positivos. Demuestre que el conjunto $\{\ln(p)\}_{p\in\mathbb{P}}$ es linealmente independiente al considerar a $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.*

Para los que les gusta el cálculo.

EJERCICIO 4.33. *Demuestre que la dimensión del espacio $\ell_2(\mathbb{R})$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial no es finita.*

Para los que les gusta la geometría.

DEFINICIÓN 4.4. *Decimos que $H \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío es un k-plano o una k-variedad lineal afín, si existen $U \leq \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $dim_{\mathbb{R}}(U) = k$ y $H = x + U$. Los $(n-1)$-planos reciben el nombre de hiperplanos.*

EJERCICIO 4.34.

1. *Demuestre que si* $\{H_i\}_{i=1}^m \subseteq \wp(\mathbb{R}^n)$ *es una familia no vacía tal que para todo* $i \in \{1,\dots,m\}$ *se tiene que* H_i *es un* k_i*-plano y* $\bigcap_{i=1}^m H_i \neq \emptyset$*, entonces dicha intersección es un* k*-plano.*
2. *Demuestre que si* H *es un* k*-plano entonces* H *es intersección de* $n-k$ *hiperplanos.*

Para los que les gusta la teoría de conjuntos.

EJERCICIO 4.35. *Demuestre que para todo* $a,b \in \mathbb{R}$ *con* $a<b$*,* $dim_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})) = 2^{\aleph_0}$*, donde* $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ *es el conjunto de funciones continuas de* $[a,b]$ *en* $\mathbb{R}$*.*

Para los que les gusta el álgebra.

EJERCICIO 4.36. *Demuestre que* $\mathbb{R}^3$ *no admite un producto tal que* $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ *sea un campo.*

Capítulo 3

Transformaciones Lineales

"Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas."

Albert Einstein.

En este capítulo se introducirá una noción de función entre espacios vectoriales que preservan la estructura, esto es, la de transformación lineal. Con estas se definirá una forma de identificar dos espacios cuando estos tengan las mismas propiedades, aún y cuando estos sean aparentemente distintos, esto es, la noción de isomorfismo de espacios vectoriales.

Por otro lado, se estudiarán algunos teoremas que muestran la profunda relación entre transformaciones lineales entre espacios de dimensión finita y matrices. Para concluir, el capítulo concluye con el estudio de espacios libres y duales.

1. Transformaciones Lineales

DEFINICIÓN 1.1. *Sean V y W K-espacios, y $T : V \longrightarrow W$ una función. Decimos que T es una transformación lineal, si:*

- $T(v+w) = T(v) + T(w)$ *para* $v, w \in V$.
- $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ *para* $v \in V$ *y* $\lambda \in K$.

NOTA 1.1. *El algunos textos, a las transformaciones lineales se les suele llamar K-lineales haciendo énfasis en el campo sobre el que están definidos los espacios en cuestión. Para no cargar la notación nosotros las llamaremos simplemente K-lineales, a no ser que sea necesario indicar el campo en cuestión.*

OBSERVACIÓN 1.1. *Si $T : V \to W$ es transformación lineal, entonces $T(0) = 0$. Note que la función constante con valor cero es una transformación lineal.*

El primer resultado a demostrar da una caracterización de cuándo una función es lineal verificando una propiedad en lugar de dos.

PROPOSICIÓN 1.1. *Sean V y W K-espacios, y $T : V \longrightarrow W$ una función. Entonces T es una transformación lineal si y sólo si $T(v+\lambda w) = T(v)+\lambda T(w)$ para toda $v,w \in V$ y $\lambda \in K$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Dados $v,w \in V$ y $\lambda \in K$, la definición implica que:

$$T(v+\lambda w) = T(v)+T(\lambda w) = T(v)+\lambda T(w)$$

$\Leftarrow$) Hay que ver que se cumplen dos propiedades:

1. $T(v+w) = T(v)+T(w)$ se obtiene al aplicar la hipótesis para $\lambda = 1$
2. $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ al aplicar la hipótesis a $0, v \in V$ y $\lambda \in K$.

$\square$

A continuación estudiemos algunos ejemplos de transformaciones lineales.

EJEMPLO 1.1. *La identidad en cualquier espacio V, $1_V : V \to V$ es lineal.*

EJEMPLO 1.2. *Dados V un K-espacio y $W \leq V$, defina $\pi : V \to V/W$ como la proyección canónica. Por definición de la estructura de K-espacio de V/W, π es una transformación lineal.*

EJEMPLO 1.3. *Para K un campo y $A \in M_{n\times m}(K)$, considere la función $L_A : K^m \to K^n$ definida por*

$$L_A(x) = Ax,$$

donde se identifica $K^m = M_{m\times 1}(K)$ y $K^n = M_{n\times 1}(K)$.

Veamos que en efecto L_A es una transformación lineal. Para esto, sean $x,y \in K^m$ y $\lambda \in K$. Entonces

$$L_A(x+\lambda y) = A(x+\lambda y) = Ax+\lambda Ay = L_A(x)+\lambda L_A(y)$$

El resultado se sigue de la proposición anterior.

Este ejemplo proporciona una familia de ejemplos pues tiene como dato inicial una matriz $A \in M_{n\times m}(K)$. Algunos casos particulares son:

1. Si $A = I \in M_n(K)$, entonces $L_A : K^n \to K^n$ es la transformación $L_A = 1_{K^n}$
2. Si $A = -I \in M_n(K)$, entonces $L_A : K^n \to K^n$ tiene por regla de correspondencia

$$L_A(x_1,\dots,x_n) = (-x_1 \dots, -x_n)$$

En el caso de $K = \mathbb{R}$, L_A es la reflexión respecto al origen.
3. Sean $A,B,C \in M_2(K)$ definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La regla de correspondencia de

$$L_A, L_B, L_C : K^2 \to K^2$$

Están dadas por:

$$\begin{aligned} L_A(x,y) &= (x,-y) \\ L_B(x,y) &= (-x,y) \\ L_C(x,y) &= (y,x) \end{aligned}$$

Cuando $K = \mathbb{R}$, L_A es la reflexión respecto al eje x, L_B es la reflexión respecto al eje y y L_C es la reflexión respecto a la recta $y = x$. Por lo tanto, todas estas transformaciones son lineales.
4. Sean $A,B \in M_{1\times 2}(K)$ definidas mediante

$$A = (1\ 0) \qquad B = (0\ 1)$$

La regla de correspondencia de $L_A, L_B : K^2 \to K$ son:

$$\begin{aligned} L_A(x,y) &= x \\ L_B(x,y) &= y \end{aligned}$$

A estas transformaciones lineales se les conoce como proyecciones en la primera y segunda coordenada respectivamente.

EJEMPLO 1.4. *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$T(x,y) = (x+y,1)$$

Note que T no es lineal pues $T(0,0) = (0,1) \neq (0,0)$

EJEMPLO 1.5. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con regla de correspondencia $T(x,y) = (x-y, 2x+y)$. Veamos que T es lineal pues si $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:*

$$\begin{aligned} T((x_1,y_1)+\lambda(x_2,y_2)) &= T(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2) \\ &= ((x_1+\lambda x_2)-(y_1+\lambda y_2), 2(x_1+\lambda x_2)+(y_1+\lambda y_2)) \\ &= (x_1-y_1, 2x_1+y_1)+(\lambda x_2-\lambda y_2, 2\lambda x_2+\lambda y_2) \\ &= T(x_1,y_1)+\lambda T(x_2,y_2) \end{aligned}$$

Esto prueba que T es lineal. Una prueba alterna se obtiene al notar que si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

entonces $T = L_A$.

EJEMPLO 1.6. *Considere la función $(\_)^t : M_{n\times m}(K) \to M_{m\times n}(K)$ que a cada matriz le asocia su traspuesta. Esta es una transformación lineal.*

EJEMPLO 1.7. *Sea $D(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto de funciones diferenciales. Note que $D(\mathbb{R}) \leq C^0(\mathbb{R})$. Defina $d : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definida por*

$$d(f) = f'.$$

Entonces d es lineal.

EJEMPLO 1.8. *Sea $\mathscr{I}([a,b]) \subseteq \mathbb{R}^{[a,b]}$ el conjunto de funciones Riemann-integrables. Note que $\mathscr{I}([a,b]) \leq \mathbb{R}^{[a,b]}$. Por lo que se puede definir una función*

$$\begin{aligned} I : \mathscr{I}([a,b]) &\to \mathbb{R} \\ f \quad &\mapsto \int_a^b f(x)\ dx. \end{aligned}$$

Esta función es lineal.

Dejemos por un momento los ejemplos pues estos abundan de tal forma que podríamos dar un curso recopilándolos. En lugar de esto continuemos con la teoría y dejaremos algunos de estos para los ejercicios. Recomendamos al lector checar el ejercicio 3.7 antes de continuar con la teoría.

DEFINICIÓN 1.2. *Sean V y W K-espacios, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Definimos el núcleo de T, $nuc(T)$, como $\{v \in V \mid T(v) = 0\}$*

PROPOSICIÓN 1.2. *Sea V y W K-espacios, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces $nuc(T)$ es un subespacio de V*

DEMOSTRACIÓN. Note que $0 \in nuc(T)$. Si $v, w \in nuc(T)$ y $\lambda \in K$, entonces

$$T(v + \lambda w) = T(v) + \lambda T(w) = 0 + \lambda 0 = 0$$

Esto dice que $v + \lambda w \in nuc(T)$ □

EJEMPLO 1.9. *El conjunto definido en el ejercicio 4.23:*

$$\mathscr{S} = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \in K^m \,\middle|\, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \left(\sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j = 0 \right) \right\}$$

es subespacio de K^m. Esto puede demostrarse usando el resultado anterior al notar que

$$\mathscr{S} = nuc(L_A).$$

El lector atento podrá notar que la idea de la prueba anterior fue ver que el conjunto en cuestión es el núcleo de una transformación, pues los núcleos son siempre subespacios. Lo que es más interesante, es que la noción de subespacio queda totalmente determinada por la de núcleo. Esto queda como ejercicio (ejercicio 3.8).

Otro espacio asociado a una transformación lineal se muestra en el siguiente resultado. Para fijar notación, recordemos que si $f : A \to B$ es una función, su imagen se define como el conjunto $\{f(a) \mid a \in A\}$. Este se suele denotar por $im(f)$ o $f(A)$.

PROPOSICIÓN 1.3. *Sean V y W K-espacios, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces $im(T)$ es un subespacio de W*

DEMOSTRACIÓN. Como $T(0) = 0$, entonces $0 \in im(T)$. Sean $v, w \in im(T)$ y $\lambda \in K$. Por hipótesis, existen $x, y \in V$ tales que $T(x) = v$ y $T(y) = w$. De esto se deduce que $v + \lambda w = T(x) + \lambda T(y) = T(x + \lambda y)$. Esto muestra que $v + \lambda w \in im(T)$, lo que concluye la prueba. □

El siguiente resultado es uno de los principios más importantes y básicos de la definición de transformaciones lineales, pues este dice que cuando se tiene una base, estas están determinadas por los valores en la base.

PROPOSICIÓN 1.4 (Propiedad Universal de las Bases). *Sea V un K-espacio y $\beta \subseteq V$ una base de V. Entonces para toda función $f : \beta \longrightarrow W$, con W un K-espacio, existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T|_\beta = f$.*

DEMOSTRACIÓN. Para definir $T : V \to W$ note que si $x \in V$, existen únicos $v_1, \ldots, v_n \in \beta$ y $\lambda_!, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Definimos entonces

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$$

Afirmación: T es lineal.

Dados $x, y \in V$ y $\lambda \in K$, note que si

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \text{y} \quad y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j,$$

con $v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m \in \beta$ y $\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, ..., \mu_m \in K$, entonces $x + \lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda \mu_j w_j$ y así

$$\begin{aligned} T(x + \lambda y) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) + \sum_{j=1}^{m} \lambda \mu_j f(w_j) \\ &= T(x) + \lambda T(y) \end{aligned}$$

Afirmación: $T|_\beta = f$.

Como estas funciones tienen el mismo dominio y codominio, resta checar que tienen la misma regla de correspondencia, lo cual es claro.

Afirmación: T es única respecto a $T|_\beta = f$. En efecto, supongamos que $S : V \to W$ es una transformación lineal tal que $S|_\beta = f$. Lo que resta ver es que T y S tienen la misma regla de correspondencia. Para esto, dada $x \in V$, existen únicos $v_1, \ldots, v_n \in V$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Entonces

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) =: T(x)$$

□

COROLARIO 1.1. *Sean $T, S : V \to W$ transformaciones lineales y $\beta \subseteq V$ una base. Son equivalentes:*

1. $T = S$
2. $T|_\beta = S|_\beta$

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2)$ Es obvio.

$2 \Rightarrow 1)$ Es consecuencia directa de la propiedad universal de las bases. □

EJEMPLO 1.10. *Considere* $\beta = \{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *la base canónica. Para* $\theta \in \mathbb{R}$*, defina* $f_\theta : \beta \to \mathbb{R}^2$ *mediante:* $f_\theta(e_1) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$*,* $f_\theta(e_2) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$*. De la propiedad universal de las bases existe una única* $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *lineal tal que* $T_\theta \mid_\beta = f_\theta$*. La regla de correspondencia explícita de* T_θ *es:*

$$\begin{aligned} T_\theta(x,y) &= x f_\theta(e_1) + y f_\theta(e_2) \\ &= (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) \end{aligned}$$

Observe que T_θ *es la rotación por el ángulo* θ*. Note además que* $T_\theta = L_A$ *con*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

NOTA 1.2.

1. *La conclusión en la propiedad universal se las bases se suele expresar diciendo que se tiene un diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & V \arrow[d, dotted, "T"] \\ & W \end{tikzcd}$$

   donde ι *es la función de inclusión.*

2. *Si* $Hom(V,W) := \{T : V \to W \mid T \text{ es lineal}\}$ *y* $\beta \subseteq V$ *es una base, la propiedad universal de las bases implica que existe una biyección entre* W^β *y* $Hom(V,W)$*, donde a cada* $f \in W^\beta$ *se asocia la única* $T \in Hom(V,W)$ *tal que* $T|_\beta = f$*.*

Para concluir con las propiedades básicas de las transformaciones lineales, vamos a probar que la propiedad universal de las bases caracteriza el concepto de base.

PROPOSICIÓN 1.5. *Sean* $\beta \subseteq V$*. Si* β *satisface que dada cualquier función* $f : \beta \to W$ *con* W *un* K*-espacio, existe una única* $T : V \to W$ *lineal tal que* $T|_\beta = f$*, entonces* β *es base de* V*.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a ver que $\beta \subseteq V$ es linealmente independiente y generador.

Afirmación: β es linealmente independiente.

Sean $v_1, \ldots, v_n \in \beta$ tales que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ con la propiedad de que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$.

Considere $j \in \{1, \dots, n\}$ y defina $f_j : \beta \to K$ mediante

$$f_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = v_j \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases}$$

La hipótesis implica que existe una única $T_j \in Hom(V, K)$ tal que $(T_j) \mid_\beta = f_j$. Entonces

$$0 = T_j(0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_j(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$$

Como esto puede hacerse para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, se sigue el resultado.

Afirmación: $\langle \beta \rangle = V$.

Procederemos por contradicción, si $\langle \beta \rangle \lneq V$, existe $0 \neq W \lneq V$ tal que $\langle \beta \rangle \oplus W = V$. Note que al definir $S : V \to V$ mediante $S(x + w) = x$, entonces $S \in Hom(V, V)$ y $S \mid_\beta = i$, lo que contradice la unicidad en la hipótesis pues la identidad en V satisface las mismas propiedades y $S \neq 1_V$ pues $W \neq 0$. $\square$

Como recapitulación, observe que tenemos el siguiente teorema de clasificación de bases, el cual une los resultados del capítulo anterior y la propiedad universal de las bases.

PROPOSICIÓN 1.6. *Sean V un K-espacio y $\beta \subseteq V$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *β es base*
2. *β es linealmente independiente máximo*
3. *β es generador mínimo*
4. *Todo elemento de V se puede expresar como una única combinación lineal de elementos de β*
5. *(Propiedad universal de las bases) Dada cualquier función $f : \beta \to W$ con W un K-espacio, existe una única $T : V \to W$ lineal tal que $T|_\beta = f$,*

1.1. Isomorfismos y algunas transformaciones especiales. En esta subsección se caracterizarán a las transformaciones lineales con una característica extra, a saber: inyectividad, suprayectividad y biyectividad. Además estableceremos el concepto de isomorfismo.

El primer resultado caracteriza las transformaciones lineales inyectivas.

PROPOSICIÓN 1.7. *Sean V y W K-espacios, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces son equivalentes:*

1. *T es inyectiva*
2. $nuc(T) = 0$
3. *T manda conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes*
4. *Si $S_1, S_2 : U \longrightarrow V$ son transformaciones lineales tales que $TS_1 = TS_2$, entonces $S_1 = S_2$.*

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2)$ Sea $x \in nuc(T)$. Por definición $T(x) = 0$, y por ser T lineal $T(0) = 0$. La inyectividad implica que $x = 0$, lo que implica la contención no trivial en la igualdad buscada.

$2 \Rightarrow 3)$ Sea $S \subseteq V$ linealmente independiente. Note que si $S = \emptyset$, $T(S) = \emptyset$, por lo que el resultado se cumple. Luego, podemos suponer que $S \neq \emptyset$. Sean $T(v_1), \ldots, T(v_n) \in T(S)$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i) = 0$ para algunos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Al ser T lineal, esto implica que $\sum_{i=1}^{n} \lambda v_i \in nuc(T) = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$. Al usar la hipótesis se deduce que $\lambda_1 = \cdots \lambda_n = 0$, y esto concluye la prueba de la implicación.

$3 \Rightarrow 4)$ Sean $S_1, S_2 : U \to V$ lineales tales que $TS_1 = TS_2$. Considere $\beta \subseteq V$ una base y note que dado $u \in U$, existen únicos $v_1, \ldots, v_n \in \beta$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $S_1(u) - S_2(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Al aplicar T, la hipótesis y la linealidad implican que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i) = 0$. Como $T(\beta) \subseteq W$ es linealmente independiente, se deduce que $\lambda_1 = \cdots \lambda_n = 0$, luego, $S_1(u) = S_2(u)$. Como $u \in U$ fue arbitrario, se concluye que $S_1 = S_2$.

$4 \Rightarrow 1)$ Sean $x, y \in V$ tales que $T(x) = T(y)$. Defina $\iota, 0 : \langle x - y \rangle \to V$ como las funciones inclusión y cero respectivamente, las cuales son lineales claramente. La hipótesis implica que $T\iota = T0$, así que 4 implica que $\iota = 0$. Entonces

$$0 = 0(x - y) = \iota(x - y) = x - y,$$

de donde $x = y$. $\square$

Hay un resultado análogo que caracteriza a las transformaciones lineales suprayectivas. Para enunciarlo, es necesario introducir un concepto nuevo.

DEFINICIÓN 1.3. *Sea V y W K-espacios, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Definimos el conúcleo de T, $con(T)$, como el espacio cociente $W/im(T)$.*

PROPOSICIÓN 1.8. *Sea V y W K-espacios, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces son equivalentes:*

1. *T es suprayectiva*
2. *$con(T) = 0$*
3. *T manda subconjuntos generadores en subconjuntos generadores*
4. *Si $S_1, S_2 : W \longrightarrow U$ son transformaciones lineales tales que $S_1 T = S_2 T$, entonces $S_1 = S_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Tarea $\square$

Para el caso de transformaciones lineales biyectivas, tenemos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 1.9. *Sea V y W K-espacios, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces son equivalentes:*

1. *T es biyectiva*
2. *T manda bases en bases*
3. *T manda alguna base de V en una base de W*
4. *T es invertible con inversa lineal*

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2)$ Es consecuencia de las proposiciones 1.7 y 1.8.

$2 \Rightarrow 3)$ Es claro.

$3 \Rightarrow 4)$ Sea $\beta \subseteq V$ una base tal que $T(\beta) \subseteq W$ es base. Definamos la función $f : T(\beta) \to V$ mediante la regla de correspondencia $f(T(v)) = v$. Por la propiedad universal de las bases, existe una única $S : W \to V$ lineal tal que $S|_{T(\beta)} = f$. Note que $TS : W \to W$ y $ST : V \to V$. Además, por definición $ST = 1_V$ y $TS = 1_W$. Luego, T es invertible con inversa lineal.

$4 \Rightarrow 1)$ Es claro. $\square$

En el inciso 4 del resultado anterior quizá no es evidente que siempre se cumple lo siguiente:

PROPOSICIÓN 1.10. *Sea V y W K-espacios, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Si T es invertible, entonces T^{-1} es una transformación lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio □

Vamos a realizar una pequeña discusión previa a la siguiente definición: Considere $T : V \to W$ una transformación lineal biyectiva. En particular, esto implica que V y W son equipotentes y más aún, por la proposición 1.9 cualquier base de V es equipotente a cualquier base de W, es decir, $\dim(V) = \dim(W)$. Además, al ser T lineal, dados cualesquiera $v, w \in V$, el único elemento que le corresponde mediante T a $v + w \in V$, es $T(v) + T(w) \in W$. De forma análoga, en el caso de $\lambda \in K$, el único elemento que le corresponde a $\lambda v \in V$ mediante T es $\lambda T(v) \in W$. Por lo tanto, T es una biyección que preserva y refleja las operaciones de V y W. Intuitivamente esto nos dice que los espacios V y W son indistinguibles desde el punto de vista del álgebra lineal y que la función T juega el papel de un "un cambio de nombre de elementos". En resumen, para una transformación lineal biyectiva entre espacios, los espacios en cuestión pueden considerarse como los mismos. Con esto en mente podemos plantear el siguiente concepto.

DEFINICIÓN 1.4.

1. *Una transformación lineal $T : V \to W$ que cumple un de, y por lo tanto todas las implicaciones de la proposición 1.9, se le conoce como un isomorfismo.*
2. *Sean V y W K-espacios. Decimos V y W son isomorfos si existe $T : V \longrightarrow W$ un isomorfismo. Este hecho lo denotamos por $V \cong W$.*

EJEMPLO 1.11. *Para V un K-espacio cualquiera, $V/0 \cong V$ y $V/V \cong 0$.*

EJEMPLO 1.12. *Para K cualquier campo y $n \in \mathbb{N}$, podemos definir una transformación lineal $T : P_n(K) \to K^{n+1}$ usando la propiedad universal de las bases para $\beta = \{1, x, ..., x^n\} \subseteq P_n(K)$ y $f : \beta \to K^{n+1}$ con regla de correspondencia $f(x^i) = e_{i+1}$. Como T manda una base en una base (pues $T|_\beta = f$), es un isomorfismo. Así,*

$$P_n(K) \cong K^{n+1}$$

EJEMPLO 1.13. *Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{Q}^n$ no son isomorfos como $\mathbb{Q}$-espacios pues estos no son biyectables.*

En general, retomando lo que sucedió en el ejemplo 1.12 se tiene el siguiente resultado, el cual dice que en dimensión finita todos los espacios son esencialmente de la forma K^n para alguna $n \in \mathbb{N}$. Este resultado se generalizará en una sección posterior para el contexto no necesariamente finito.

PROPOSICIÓN 1.11. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tales que $V \cong K^n$.*

DEMOSTRACIÓN. Para definir el isomorfismo buscado usaremos la propiedad universal de las bases. Sea $\beta \subseteq V$ base con digamos $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$.[1] Definamos la función $f : \beta \to K^n$ mediante $f(v_i) = e_i$. La propiedad universal de las bases implica que existe una única transformación lineal $T : V \to K^n$ tal que $T|_\beta = f$. Esta última propiedad implica que T manda una base en una base y por lo tanto es el isomorfismo buscado. □

COROLARIO 1.2. *Si $n, m \in \mathbb{N}$ y K es un campo, entonces*

$$M_{n\times m}(K) \cong K^{nm}$$

Este último resultado muestra que de hecho el tipo de identificaciones que hemos hecho por ejemplo en la definición de funciones como L_A (ejemplo 1.3) no solo están correctas desde el punto de vista conjuntista (como biyección), sino que de hecho están de acuerdo con las estructuras de espacio vectorial consideradas.

COROLARIO 1.3. *Si V y W son K-espacios con dimensión finita, son equivalentes:*

1. $V \cong W$
2. $\dim(V) = \dim(W)$

DEMOSTRACIÓN. La ida es consecuencia de la discusión previa a dar la definición de isomorfismo. El regreso es consecuencia directa del resultado anterior. □

Para concluir esta parte vamos a realizar una discusión más: Sea $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva. Note que al correstringir esta transformación a su imagen, la transformación resultante $T' : V \to im(T)$, es un isomorfismo pues claramente es inyectiva y suprayectiva. Por tal razón $im(T)$ y V representan el mismo K-espacio. Lo que nos está diciendo esto es que en este caso podemos considerar a V como un subespacio de W al identificar V con $im(T)$. Por lo tanto, la noción de isomorfismo nos permite aligerar la noción de subespacio a espacios en los que de entrada puede no haber una relación en términos de sus elementos cuando se tiene una transformación inyectiva entre ellos.

[1] Note que $n = \dim(V)$

1.2. El teorema de la dimensión.

DEFINICIÓN 1.5. *Sean V y W K-espacios, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal.*

1. *Llamamos nulidad de T a la dimensión del núcleo de T y la denotamos por $nul(T) = dim(nuc(T))$.*
2. *Llamamos rango de T a la dimensión de la imagen de T y la denotamos por $ran(T) = dim(im(T))$.*

EJEMPLO 1.14. *Sean V un K-espacio y $W \leq V$. Considere la proyección canónica $\pi : V \to V/W$. Note que $nuc(\pi) = W$, entonces*

$$nul(\pi) = \dim(W)$$

Por otro lado, como π es suprayectiva, $im(\pi) = V/W$. Luego,

$$ran(T) = \dim(V/W)$$

A continuación presentamos el resultado básico de esta sección.

PROPOSICIÓN 1.12. *(Teorema de la dimensión) Sean V y W K-espacios, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces* $\dim(V) = nul(T) + ran(T)$.

DEMOSTRACIÓN. Considere $nuc(T) \leq V$ y sea $U \leq V$ un pseudocomplemento de $nuc(T)$. Observe que como por definición $V = nuc(T) \oplus U$, por el ejercicio 4.31 se deduce que:

$$\dim(V) = nul(T) + \dim(U) \tag{3}$$

Ahora considere $T' : U \to T(U)$ la transformación que se obtiene al restringuir T a U y correstringuir $T|_U$ a su imagen. Esta función es claramente lineal y surayectiva. Además, observemos que

$$nuc(T') = \{x \in U \mid T(x) = 0\} = nuc(T) \cap U = 0$$

Por lo tanto, la proposición 1.7 implica que T' es inyectiva y así, un isomorfismo. Esto implica en particular que

$$\dim U = \dim T(U) \tag{4}$$

Más aún, observe que como todo $v \in V$ se descompone de forma única como $v = x + u$ para $x \in nuc(T)$ y $u \in U$, entonces $T(v) = T(u)$. Esto implica que $im(T) \subseteq T(U)$ y por lo tanto que $im(T) = T(U)$ pues la contención restante es obvia. Al usar esta igualdad el la ecuación 4 y luego sustituir en 3 se obtiene el resultado deseado. □

Como una aplicación del resultado anterior y del ejemplo previo a este, se deduce lo siguiente:

COROLARIO 1.4. *Si $W \leq V$, entonces*

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(V/W)$$

Más aún, si V es de dimensión finita, entonces

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

El último resultado de esta sección muestra que nuevamente los espacios de dimensión finita se comportan como conjuntos finitos, ya que recuerde que para $f : X \to Y$ una función entre conjuntos finitos con $|X| = |Y|$, son equivalentes:

1. f es inyectiva
2. f es suprayectiva
3. f es biyectiva

El siguiente resultado muestra que hay un análogo del resultado anterior para espacios de dimensión finita.

PROPOSICIÓN 1.13. *Sean V y W K-espacios de dimensión finita, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Si V y W tienen dimensión n, entonces son equivalentes:*

1. T es inyectiva.

2. T es suprayectiva.

3. T es biyectiva.

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2)$ Por hipótesis $nuc(T) = 0$, entonces $nul(T) = 0$. Luego, el teorema de la dimensión implica que $\dim(V) = ran(T)$. Dado que $im(T) \leq W$ con $\dim(im(T)) = \dim(W)$, esto implica que $W = im(T)$,[2] lo que prueba que T es suprayectiva.

$2 \Rightarrow 3)$ Basta con probar que T es inyectiva. En efecto, como T es suprayectiva $ran(T) = \dim(W)$ y el teorema de la dimensión se escribe como

$$\dim(V) = nul(T) + \dim(W).$$

[2]Ver ejercicio 4.30

Esto implica que $nul(T) = 0$, lo que es equivalente a decir que $nuc(T) = 0$. Esto último es equivalente a decir que T es inyectiva.

$3 \Rightarrow 1)$ Es claro

$\square$

2. Matríz asociada a una transformación lineal

En esta sección todos los espacios son de dimensión finita.

DEFINICIÓN 2.1. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y β una base de V. Decimos que β es una base ordenada, si se tiene una función $o : \{1,\dots,n\} \to \beta$. Comúnmente escribimos $\beta = \{v_1,\dots,v_n\}$, aquí de alguna manera estamos dandole un orden donde $o(i) = v_i$.*

La notación correcta sería $(v_1,\dots,v_n)$, pero seguiremos con la notación $\{v_1,\dots,v_n\}$. Observando que como bases ordenadas $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ y $\{v_2,v_1,\dots,v_n\}$ no son iguales, aunque si lo son como bases.

DEFINICIÓN 2.2. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n con una base ordenada $\beta = \{v_1,\dots,v_n\}$ de V y $v \in V$. Por ser β base existen $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ tales que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Por lo que tenemos un vector $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in K^n$, a este vector lo llamamos el vector de coordenadas de v con respecto a la base ordenada β, a este vector lo denotamos por $[v]_\beta$.*

EJEMPLO 2.1. *Sea $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ y $\gamma = \{(0,1),(1,0)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Consideremos al vector $(2,1) \in \mathbb{R}^2$, así tenemos*

$$(2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$$
$$(2,1) = 1(0,1) + 2(1,0)$$

Por lo que

$$[(2,1)]_\beta = (2,1)$$
$$[(2,1)]_\gamma = (1,2)$$

Aquí observamos la importancia del orden en la base, puesto que nos puede dar coordenadas distintas para un mismo vector.

EJEMPLO 2.2. *Sea $V = P_2(\mathbb{R})$ y $\beta = \{1, 1+x, 1+x^2\}$. Consideremos $f = 1+x+x^2$ y $g = 2-x+3x^2$. Calculamos su vector de coordenadas*

$$\begin{aligned} f &= \lambda_1 1 + \lambda_2(1+x) + \lambda_3(1+x^2) \\ &= (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 \end{aligned}$$

De aquí tenemos $1+x+x^2 = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2 x+\lambda_3 x^2$ y esto plantea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 1 = \lambda_2 \\ 1 = \lambda_3 \end{cases}$$

De donde podemos deducir rápidamente que $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 1$. Sustituyendo en la primera ecuación

$$1 = \lambda_1 + 1 + 1$$

De donde se deduce que $\lambda_1 = -1$. Por lo que $[f]_\beta = (-1, 1, 1)$.
Ahora para g tenemos que

$$2 - x + 3x^2 = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2$$

Por lo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ -1 = \lambda_2 \\ 3 = \lambda_3 \end{cases}$$

Por lo que tenemos que $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 3$. Sustituyendo en la primera ecuación tenemos que

$$2 = \lambda_1 + (-1) + 3 = \lambda_1 + 2$$

De donde $\lambda_1 = 0$. Por lo que $[g]_\beta = (0, -1, 3)$.

DEFINICIÓN 2.3. *Sea n un natural y $A \in M_n(K)$. Si $1 \leq i \leq n$ entonces definimos A^i como la i-ésima columna de la matríz i.*

DEFINICIÓN 2.4. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre K-espacios con bases ordenadas $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\gamma = \{w_1, \ldots, w_m\}$ respectivamente.*
Definimos la matríz asociada a la transformación T con respecto a las bases β y γ, $[T]_\beta^\gamma$, como la matríz que en la i-esima columna tiene a $[T(v_i)]_\gamma^t$. Notamos que esta matríz tiene n-columnas y m renglones por lo que $[T]_\beta^\gamma \in M_{m\times n}(K)$

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre K-espacios con bases ordenadas $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\gamma = \{w_1, \dots, w_m\}$ respectivamente. Si $v \in V$, entonces*

$$[T]_\beta^\gamma [v]_\beta^t = [T(v)]_\gamma^t$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a poner $A = [T]_\beta^\gamma$ para ayudar a no cargar la notación y tenemos que para $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^m A_{ji} w_j = T(v_i)$$

Consideramos que $[v]_\beta = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = v$. Haciendo las cuentas tenemos que la entrada i-ésima de $[T]_\beta^\gamma [v]_\beta^t$ es

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \lambda_j \qquad \text{con } i = 1, \dots, m$$

Y calculamos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n A_{1j}\lambda_j w_1 + \dots + \sum_{j=1}^n A_{mj}\lambda_j w_n &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij}\lambda_j w_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij}\lambda_j w_i \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^m A_{ij} w_i \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j T(v_j) \\
&= T\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\right) \\
&= T(v)
\end{aligned}$$

Por la unicidad de las entradas de $[T(v)]_\gamma$ tenemos que

$$[T]_\beta^\gamma [v]_\beta = [T(v)]_\gamma$$

$\square$

A modo de recordatorio, planteemos la multiplicación de matrices, formalmente una matríz A de n por m con coeficientes en un campo K, es una función

$$A : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to K$$

Notacionalmente escribimos $A_{ij} := A(i, j)$. Al conjunto de matrices de n por m con coeficientes entonces K lo denotamos por $M_{n\times m}(K)$ y es caso de que $n = m$ ponemos $M_n(K)$. Si $A \in M_{n\times m}(K)$ y $B \in M_{m\times r}(K)$ entonces definimos $AB \in M_{n\times r}(K)$ como

$$(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^m A_{is} B_{sr}$$

EJEMPLO 2.3. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB_{11} = 1 \cdot 2 + 1(-3) = 2 - 3 = -1$$
$$AB_{12} = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 4 + 1 = 5$$
$$AB_{21} = 0 \cdot 2 + 1(-3) = -3$$
$$AB_{22} = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 1$$

Por lo que $AB = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

EJEMPLO 2.4. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$AB_{11} = 1 \cdot 1 + (-1)0 = 1$$
$$AB_{21} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$
$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$AC_{11} = 1 \cdot 0 + (-1)1 = -1$$
$$AC_{21} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$
$$AC = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con esto en mente ahora dejaremos ejemplos de la proposición pasada

EJEMPLO 2.5. *Sea* $V = \mathbb{R}^2$ *y* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x,y) = (x+y, x-3y, y)$ *con bases* $\beta = \{(1,1),(1,-1)\}$ *y* $\gamma = \{(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\}$.
Primero calculamos $[T]_\beta^\gamma$. *Para esto tenemos que calcular* $[T(1,1)]_\gamma$ *y* $[T(1,-1)]_\gamma$.
Haciendo las cuentas

$$T(1,1) = (1+1, 1-3-1, 1) = (2,-2,1)$$

Calculando las coordenadas

$$\begin{aligned}(2,-2,1) &= \lambda_1(-1,1,1) + \lambda_2(1,-1,1) + \lambda_3(1,1,-1) \\ &= (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)\end{aligned}$$

Lo que plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2 = -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ -2 = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \end{cases}$$

Sumando la primera y segunda ecuación tenemos $0 = 2\lambda_3$ *lo que implica* $\lambda_3 = 0$.
Sumando la primera y la segunda ecuación tenemos $3 = 2\lambda_2$ *de donde* $\lambda_2 = \frac{3}{2}$.
Sumando la segunda y la tercera tenemos $-1 = 2\lambda_1$ *de donde* $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$.
Por lo que $[T(1,1)]_{\beta\gamma} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$.
Ahora con el otro vector de la base

$$\begin{aligned} T(1,-1) &= (1+(-1), 1-3(-1), -1) \\ &= (0,4,-1) \end{aligned}$$

Para calcular las coordenadas tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 4 = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ -1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \end{cases}$$

Sumando la primera y la segunda ecuación tenemos $4 = 2\lambda_3$ *de donde* $\lambda_3 = 2$.
Sumando la primera y la tercera ecuación tenemos $-1 = 2\lambda_2$ *de donde* $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.
Sumando la segunda y la tercera ecuación tenemos $3 = 2\lambda_1$ *de donde* $\lambda_1 = \frac{3}{2}$.
Por lo que $[T(1,-1)]_{\gamma} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 4\right)$. *Por lo que*

$$[T]_{\beta}^{\gamma} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora tomemos tres vectores en $\mathbb{R}^2$, digamos $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,-1)$ y $v_3 = (5,-3)$. Primero calculamos las coordenadas, las de v_1 y v_2 son inmediatas, puesto que $\beta = \{v_1, v_2\}$.

$$\begin{aligned} T(1,1) &= 1\cdot(1,1) + 0\cdot(1,-1) \\ [(1,1)]_\beta &= (1,0) \\ (1,-1) &= 0(1,1) + 1(1,-1) \\ [(1,-1)]_\beta &= (0,1) \end{aligned}$$

Tenemos que calcular las coordenadas de v_3

$$\begin{aligned} (5,-3) &= \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) \end{aligned}$$

Por lo que tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ -3 = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones tenemos $2 = 2\lambda_1$. De donde $\lambda_1 = 1$, ahora bien sustituyendo en la primera ecuación $5 = 1 + \lambda_2$ de donde $\lambda_2 = 4$. Así $[(5,-3)]_\beta = (1,4)$.
Comprobemos, el teorema anterior

$$[T]_\beta^\gamma [v_1]^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifiquemos

$$\begin{aligned} -v_2(-1,1,1) + \frac{3}{2}(1,-1,1) + 0(1,1,-1) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{4}{2}, -\frac{4}{2}, \frac{2}{2}\right) \\ &= (2,-2,1) = T(1,1) \end{aligned}$$

Efectivamente $[T]_\beta^\gamma [v_1]_\beta^t = [T(v_1)]_\gamma^t$

$$[T]_\beta^\gamma [v_2]^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Verificando

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(-1,1,1) + \left(-\frac{1}{2}\right)(1,-1,1) + 4(1,1,-1) &= \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{4}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{4}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{2}\right) \\ &= \left(0, \frac{8}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (0,4,-1) \end{aligned}$$

Efectivamente

$$[T]_\beta^\gamma [v_2]^t = [T(v_2)]^t$$

Ahora para v_3

$$\begin{aligned} [T]_\beta^\gamma [v_3]_\beta &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{12}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{4}{2} \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculando

$$T(5,-3) = (2, 5-3(-3), -3) = (2, 5+9, -3) = (2,14,-3)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\frac{11}{2}(-1,1,1)-\frac{1}{2}(1,-1,1)+8(1,1,-1) &= \left(-\frac{11}{2}-\frac{1}{2}+8,\frac{11}{2}+\frac{1}{2}+8,\frac{11}{2}-\frac{1}{2}-8\right)\\ &= (-6+8,6+8,5-8)\\ &= (2,12,-3)\end{aligned}$$

Efectivamente

$$[T]_\beta^\gamma[v_3]_\beta^t = [T(v_3)]_\gamma$$

3. Sistemas de ecuaciones lineales

El objetivo de esta sección es estudiar los resultados principales respecto a sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\left\{\begin{array}{c} A_{11}x_1+A_{12}x_2+\ldots+A_{1n}x_n = b_1\\ \vdots \\ A_{m1}x_1+A_{m2}x_2+\ldots+A_{mn}x_n = b_m\end{array}\right. \tag{5}$$

Donde $A_{ij}\in K$, $b_j,\ldots,b_m\in K$ y las incógnitas son $x_1,\ldots,x_n$. Es decir, **sistemas de m ecuaciones con n incógnitas con coeficientes en un campo K.**

Como veremos, los resultados a obtener generalizan los resultados conocidos cuando los coeficientes son reales. Además, veremos que estos son básicamente consecuencia de la relación entre matrices y transformaciones lineales estudiada en la sección anterior. No está de mas decir que nos centraremos en la parte teórica por sobre la de métodos de solución, ya que la teoría suele usarse con coeficientes en $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$, y en sus cursos anteriores (Álgebra superior 1, Geometría analítica 1 y 2) fue vista.[3]

Comencemos con observar que el sistema (5) se puede reescribir al definir $A=(A_{ij})\in M_{m\times n}(K)$ e identificar $K^n=M_{n\times 1}(K)$ y $K^m=M_{m\times 1}(K)$, como sigue

$$Ax=b, \tag{6}$$

con $b=(b_1,\ldots,b_m)^t$ y $x=(x_1,\ldots,x_n)^t$. Esta forma de escribir las cosas nos permite notar que si consideramos la transformación asociada a A,

$$L_A: K^n\to K^m$$

Resolver la ecuación (6) es equivalente a encontrar los elementos de $L_A^{-1}(b):=L_A^{-1}(\{b\})$. Además observemos que $nuc(L_A):=\{x\in K^n \mid Ax=0\}$. Esto nos permite introducir lo siguiente:

[3] El otro uso se da en campos finitos, la teoría a presentar también sirve en este caso, pero para estos campos hay métodos particulares que son los que no trataremos.

DEFINICIÓN 3.1. *Para un sistema de la forma (6), al sistema*

$$Ax = 0$$

Se le conoce como su sistema homogéneo asociado. A la matriz A se le conoce como la matriz del sistema (6).

Lo anterior es más que una definición conveniente como lo muestra el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea $x_0 \in L_A^{-1}(b)$. Entonces toda solución del sistema (6) tiene la forma*

$$x_0 + x_h,$$

con $x_h \in nuc(L_A)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $x \in K^n$ es solución de (6), entonces $L_A(x) = b$. Así, $L_A(x - x_0) = 0$, lo que implica que $x - x_0 \in nuc(L_A)$ □

El resultado anterior dice cómo encontrar todas las soluciones del sistema (6). Analicemos esto con más detalle:

1. Primero hay que encontrar una solución particular de dicho sistema.
2. Hay que determinar el $nuc(L_A)$

De los puntos anteriores, el segundo ingrediente es un problema que en estos momentos entendemos y en un principio podemos calcular. Sin embargo, en este momento no tenemos una forma de obtener una solución particular, salvo que esta sea por inspección. Esto sin contar que no tenemos una forma de saber si (6) tiene solución, lo que de hecho es la pregunta inicial que tendríamos que hacernos. Estas serán las cuestiones que trataremos a continuación.

Respecto a la existencia de la solución, note que con $A \in M_{m\times n}(K)$ y $b \in K^m$, podemos definir $(A \mid b) \in M_{m\times(n+1)}(K)$ como la matriz que se obtiene al considerar todas las columnas de A y a esta agregar como columna el vector b, esto es:

$$(A \mid b) := \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A esta matriz se le conoce como la **matriz aumentada del sistema (6)**.

Con esta notación podemos plantear el siguiente resultado, para el cual recomendamos checar el ejercicio 3.50.

PROPOSICIÓN 3.2. *(Existencia de soluciones). La ecuación (6) tiene solución si y sólo si*

$$ran(A) = ran(A \mid b)$$

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Sea $x \in K^n$ una solución de (6). Entonces,

$$b = \sum_{i=1}^{n} x_i A^i.$$

Esto implica que $b \in \langle A^1, \ldots, A^n \rangle$. Luego, $\langle A^1, \ldots, A^n, b \rangle = \langle A^1, \ldots, A^n \rangle$, de lo que se sigue el resultado.

$\Leftarrow$) Dado que $\langle A^1, \ldots, A^n \rangle \subseteq \langle A^1, \ldots, A^n, b \rangle$, la hipótesis implica que dicha contención es igualdad. En particular, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $b = \sum_{i=1}^{n} x_i A^i$, lo que implica que $x := (x_1, \ldots, x_n)$ es solución de (6). □

EJEMPLO 3.1. *Considere el sistema con coeficientes $\mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mientras que

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Note que $(0,3) = (-2,1) + 2(1,1)$. Por lo tanto $ran(A) = ran(A \mid b) = 2$. Por lo tanto, del resultado anterior se deduce que este sistema tiene solución.

Para generar todas las soluciones de este sistema, note que una solución particular es

$$x_p = (1,1,1)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} nuc(L_A) &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_1+x_2+x_3=0,\ x_1+x_2+x_3=0\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1=0,\ x_2+x_3=0\} \\ &= \{(0,x_2,-x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(0,1,-1)\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones del sistema es:

$$\{(1,1,1)+\lambda(0,1,-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

EJEMPLO 3.2. *Considere el sistema con coeficientes en* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2-x_3=1 \\ x_1+x_2+3x_3=-1 \end{cases}$$

La matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Y su matriz aumentada asociada es

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Observe que $(1,-1,3)=(-1,1,1)+2(1,-1,1)$*, entonces* $ran(A)=2$*. Por otro lado* $ran(A \mid b)=3$ *pues* $\{(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *es base. Luego, el sistema no tiene solución.*

Antes de pasar al problema de cómo buscar una solución particular de un sistema, vamos a dar un resultado muy simple e importante de la teoría.

PROPOSICIÓN 3.3. *Si en el sistema (6) hay mas incógnitas que ecuaciones, entonces el sistema homogéneo asociado tiene una solución no trivial.*

DEMOSTRACIÓN. Considere la transformación lineal asociada

$$L_A : K^n \to K^m.$$

La hipótesis se traduce en decir que $n > m$. Al aplicar el teorema de la dimensión

$$n = nul(L_A) + ran(L_A) \leq nul(L_A) + m$$

Esto implica que $nul(L_A) \geq n - m > 0$. Por lo tanto, existe un elemento no cero en $nuc(L_A)$.

$\square$

En lo que sigue vamos a tratar el problema de cómo encontrar soluciones particulares de (6). Tal y como sucede en el caso real, la forma más básica de hacer esto es introduciendo la idea de operaciones elementales. Para hacer esto, vamos a introducir algunas funciones definidas por renglón.

1. $\mathscr{I}_{i,j} : M_{n\times m}(K) \to M_{n\times m}(K)$ es la función tal que $\mathscr{I}_{i,j}(A)$ se obtiene de la matriz A intercambiando el renglón i por el j y viceversa.

   EJEMPLO 3.3. *Para $I \in M_n(K)$ la matriz identidad*

   $$\mathscr{I}_{i,j}(I)_l = \begin{cases} e_j & si\ l = i \\ e_i & si\ l = j \\ e_l & si\ l \neq i,j \end{cases}$$

   Esto se puede escribir por coordenadas como sigue:

   $$\mathscr{I}_{i,j}(I)_{sl} = \begin{cases} \delta_{jl} & si\ s = i \\ \delta_{il} & si\ s = j \\ \delta_{sl} & si\ s \neq i,j \end{cases}$$

2. Para $\lambda \in K$, $\mathscr{M}_{\lambda,i} : M_{n\times m}(K) \to M_{n\times m}(K)$ es la función tal que $\mathscr{M}_{\lambda,i}(A)$ se obtiene de A multiplicando el i-esimo renglón de A por λ.
3. Para $\lambda \in K$, $\mathscr{S}_{\lambda,i,j} : M_{n\times m}(K) \to M_{n\times m}(K)$ es la función tal que $\mathscr{S}_{\lambda,i,j}(A)$ se obtiene de A al sustituir el j-ésimo renglón de A por $\lambda A_i + A_j$.

Vamos a estudiar un par de propiedades de estas funciones

PROPOSICIÓN 3.4. *Las funciones definidas anteriormente son lineales.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar simplemente un ejemplo pues los restantes son análogos. Esto lo haremos con $\mathscr{S}_{\lambda,i,j} : M_{n\times m}(K) \to M_{n\times m}(K)$. Sean $\mu \in K$ y $A, B \in M_{n\times m}(K)$. Entonces

$$\mathscr{S}_{\lambda,i,j}(\mu A + B)_k = \begin{cases} (\mu A + B)_k & \text{si } k \neq j \\ \lambda(\mu A + B)_i + (\mu A + B)_j & \text{si } k = j \end{cases} = \mu \mathscr{S}_{\lambda,i,j}(A)_k + \mathscr{S}_{\lambda,i,j}(B)_k$$

Como esto vale para cada renglón k, se deduce el resultado deseado. □

Estas transformaciones lineales son de hecho isomorfismos como lo muestra el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 3.1. *Demuestre que*

$$\mathscr{I}_{i,j}, \mathscr{M}_{\lambda,i}, \mathscr{S}_{\lambda,i,j} : M_{n\times m}(K) \to M_{n\times m}(K)$$

Son isomorfos, de hecho:

1. $\mathscr{I}_{i,j}^{-1} = \mathscr{I}_{i,j}$
2. *Si* $\lambda \neq 0$, $\mathscr{M}_{\lambda,i}^{-1} = \mathscr{M}_{\lambda^{-1},i}$
3. $\mathscr{S}_{\lambda,i,j}^{-1} = \mathscr{S}_{-\lambda,i,j}$

DEFINICIÓN 3.2.

1. *A las funciones 1,2 y 3 se les conoce como operaciones elementales por renglón de tipo 1,2 y 3 respectivamente.*
2. *Si* $I \in M_n(K)$ *es la matriz identidad, a las matrices*

$$\mathscr{I}_{i,j}(I), \mathscr{M}_{\lambda,i}(I), \mathscr{S}_{\lambda,i,j}(I)$$

con $\lambda \neq 0$*, se les conoce como matrices elementales por renglón.*

NOTA 3.1. *Hay una historia totalmente análoga donde se pueden definir la idea de operaciones por columna. Observe que no es necesario escribir estas funciones pues si* $\mathscr{E}$ *es una operación elemental por renglón, las operaciones por columna,* $\mathscr{E}^*$*, se definen mediante la composición*

$$M_{n\times m}(K) \stackrel{(\_)^t}{\to} M_{m\times n}(K) \stackrel{\mathscr{E}}{\to} M_{m\times n}(K) \stackrel{(\_)^t}{\to} M_{n\times m}(K)$$

Además es claro que esta composición son isomorfismos y que se pueden definir de estas las matrices elementales por columna.

El siguiente resultado dice que las operaciones elementales están determinadas por las matrices elementales, de ahí la importancia de estas últimas.

PROPOSICIÓN 3.5. *Si* $\mathscr{E} : M_{n\times m}(K) \to M_{n\times m}(K)$ *es una operación elemental (de renglón), entonces para cualquier* $A \in M_{n\times m}(K)$,

$$\mathscr{E}(A) = \mathscr{E}(I)A.$$

DEMOSTRACIÓN. Hay que probar el resultado para $\mathscr{E} = \mathscr{J}_{i,j}$, $\mathscr{M}_{\lambda,i}$ y $\mathscr{S}_{\lambda,i,j}$. Vamos a hacer el caso de $\mathscr{E} = \mathscr{S}_{\lambda,i,j}$ dejando los restantes al lector. En efecto, sea $A \in M_{n\times m}(K)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\mathscr{E}(I)A)_{ls} &= \sum_{t=1}^{n} \mathscr{E}(I)_{lt}A_{ts} \\
&= \begin{cases} \sum_{t=1}^{n}(e_l)_t A_{ts} & \text{si } l \neq j \\ \sum_{t=1}^{n}(\lambda e_i + e_j)_t A_{ts} & \text{si } l = j \end{cases} \\
&= \begin{cases} A_{ls} & \text{si } l \neq j \\ \lambda A_{is} + A_{js} & \text{si } l = j \end{cases} \\
&= \mathscr{E}(A)_{ls}
\end{aligned}$$

□

Del resultado anterior se deduce el resultado que buscamos, ya que recuerde que en el caso real, al considerar operaciones elementales se puede reducir un sistema y conseguir uno equivalente que sea más simple de resolver. Esto también sucede en general.

PROPOSICIÓN 3.6. *Las operaciones elementales no alteran las soluciones de un sistema de ecuaciones.*

DEMOSTRACIÓN. Para el sistema $Ax = b$ y $\mathscr{E} : M_{n\times m}(K) \to M_{n\times m}(K)$ una operación elemental, sean

$$\begin{aligned}
\mathscr{S} &= \{x_0 \in K^m \mid Ax_0 = b\} \\
\mathscr{S}(\mathscr{E}) &= \{x_0 \in K^m \mid \mathscr{E}(A)x_0 = \mathscr{E}(b)\}
\end{aligned}$$

Lo que se tiene que demostrar es que $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{E})$. Esto se va a hacer por una doble contención:

$\subseteq$) Si $x_0 \in \mathscr{S}$, entonces $Ax_0 = b$. Multiplicando por $\mathscr{E}(I)$, $\mathscr{E}(I)Ax_0 = \mathscr{E}(I)b$. Del resultado anterior se deduce que $\mathscr{E}(I)A = \mathscr{E}(A)$ y $\mathscr{E}(I)b = \mathscr{E}(b)$, de donde se deduce que $x_0 \in \mathscr{S}(\mathscr{E})$.

$\supseteq$) Si $x_0 \in \mathscr{S}(\mathscr{E})$, entonces $\mathscr{E}(A)x_0 = \mathscr{E}(b)$. Recuerde que $\mathscr{E}$ es un isomorfismo (ejercicio 3.1), entonces al aplicar $\mathscr{E}^{-1}$ a la igualdad anterior, es decir, hacer producto con la matriz $\mathscr{E}^{-1}(I)$ por la izquierda, se sigue que $Ax_0 = b$, es decir, $x_0 \in \mathscr{S}$. $\square$

EJEMPLO 3.4. *Regresemos al ejemplo 3.1. En este*

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Apliquemos las operaciones de renglón a este para intentar encontrar una solución particular:

$$\begin{aligned}(A \mid b) \underset{\mathscr{S}_{-1,2,1}}{\sim} & \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \underset{\mathscr{M}_{-\frac{1}{3},1}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \underset{\mathscr{S}_{-1,1,2}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Del teorema anterior se deduce que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b \quad \textit{si y sólo si} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

De aquí se ve la dependencia de x_2 y x_3, así que tomando un valor, el otro queda determinado. Si tomamos $x_2 = 1$, entonces $x_3 = 1$. En este caso la solución particular es $x_p = (1,1,1)$, que fue la que por inspección se propuso en dicho ejemplo. Note que como otra solución particular podemos tomar $x_2 = 0$, entonces $x_3 = 2$ y así $x_p = (1,0,2)$.

Con lo anterior ya tenemos un método de cómo encontrar soluciones particulares para sistemas lineales. Puede ser que este no sea el más efectivo en cuestión de métodos para obtener soluciones, pero como se dijo anteriormente este es un problema que no trataremos no porque no sea importante, sino porque es un tema de algoritmos. Lo que sí hemos logrado es obtener una forma de resolver sistemas lineales de la forma $Ax = b$ incluyendo un argumento para saber si este tiene o no solución. Más aún, por la nota 3.1, todo lo que hicimos por renglones, vale para columnas.

El último resultado a tratar tiene que ver con cómo las operaciones elementales nos ayudan a calcular rangos de matrices, cosa que es importante pues nuestro criterio de existencia de soluciones se refería a esto.

PROPOSICIÓN 3.7. *Las operaciones elementales no afectan el rango por renglón de una matriz.*

DEMOSTRACIÓN. Hay que checar que la afirmación vale para los tres tipos de operaciones elementales. Para $\mathscr{I}_{i,j}$ y $\mathscr{M}_{\lambda,i}$ con $\lambda \neq 0$ es claro. Tratemos el caso de $\mathscr{S}_{\lambda,i,j}(A)$ con $\lambda \neq 0$. Por el ejercicio 3.50, $ran(A) = \dim(\langle A_1,...,A_n\rangle)$ y

$$\begin{aligned} ran(\mathscr{S}_{\lambda,i,j}(A)) &= dim(\langle \mathscr{S}_{\lambda,i,j}(A)_1,\ldots,\mathscr{S}_{\lambda,i,j}(A)_n\rangle) \\ &= dim(\langle A_1,\ldots,A_{j-1},\lambda A_i + A_j, A_{j+1},\ldots,A_n\rangle) \end{aligned}$$

Es claro que

$$\langle A_1,\ldots,A_{j-1},\lambda A_i + A_j, A_{j+1},\ldots,A_n\rangle \subseteq \langle A_1,\ldots,A_n\rangle$$

Por otro lado, como $(\lambda A_i + A_j) - \lambda A_i = A_j$, se deduce que la contención en la otra dirección también sucede, lo que implica el resultado. □

Vale la pena comentar que en esta sección se han usado métodos que el lector que conoce ecuaciones diofantinas lineales en 2 incógnitas o ecuaciones diferenciales lineales, ya ha tratado, pues en ambas teorías las soluciones son determinadas por una solución particular y las soluciones de un sistema homogéneo en cuestión. Este comentario es para recalcar el hecho de que lo que es importante en cada uno de estos casos es encontrar los métodos correspondientes que permitan asegurar la existencia de soluciones, así como la forma de obtenerlas. Haciendo este interesante comentario, cerramos con un ejemplo que ponga en manifiesto cómo se usa la teoría desarrollada cuando se quiere tratar algo en concreto.

EJEMPLO 3.5. *Estudiar el sistema con coeficientes en $\mathbb{Q}$:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Primero veremos que la matríz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Y su matríz aumentada

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Para saber si este tiene solución analicemos los rangos, para lo que usaremos el último resultado

$$(A \mid b) \underset{\mathscr{S}_{-2,1,2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathscr{S}_{-3,1,3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

De esto se deduce que $ran(A \mid b) = 2$. *Note que siguiendo los mismos pasos*

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad entonces \quad ran(A) = 2$$

Así el sistema tiene solución. Más aún, podemos calcular una solución particular pues de $(A \mid b)$ *se tiene el sistema equivalente*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Es decir

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ \qquad\qquad x_3 = 5 \end{cases}$$

De la primera de estas ecuaciones se llega a que $x_1 + 2x_2 = -6$. *Entonces una solución particular es* $x_p = (0, -3, 5)$.

Para hallar las soluciones del sistema homogéneo note que directamente de A se tiene que este es equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} nuc(L_A) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,\ x_3 = 0\} \\ &= \{(-2x_2, x_2, 0) \in \mathbb{Q}^3 \mid x_2 \in \mathbb{Q}\} \\ &= \langle(-2, 1, 0)\rangle \end{aligned}$$

Así, el conjunto de soluciones del sistema es:

$$\{(0,-3,5)+\lambda(-2,1,0) \mid \lambda \in \mathbb{Q}\}.$$

Espacio Libre

Recordemos que para X conjunto, $K(X)$ es el K-espacio de las funciones $f : X \to K$ con soporte finito.

DEFINICIÓN 3.3. *Sea X un conjunto y $x \in X$. Definimos la función $e_x : X \to K$ como $e_x(y) = \delta_{x_y}$, donde δ es la delta de Kronecker.*

PROPOSICIÓN 3.8. *Sea X un conjunto. Entonces $\{e_x\}_{x\in X}$ es una base de $K(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos que es linealmente independiente. Sea $x_1,\dots,x_n \in X$ y $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{x_i} = 0$$

Entonces x_j con $j = 1,\dots,n$

$$0 = 0(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{x_i}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i x_j} = \lambda_j$$

Por lo tanto $\lambda_1,\dots,\lambda_n = 0$.

Sea $sop(f) = \{x_1,\dots,x_n\}$, afirmamos $f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)e_{x_i}$, si $y \notin sop(f)$, entonces $f(y) = 0$ y

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)e_{x_i}(y) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)0 = 0$$

Por otro lado

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)e_{x_i}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta_{x_i x_j} = f(x_j)$$

$\therefore \{e_x\}_{x\in X}$ es una base. $\square$

Observemos que si $X = \{1,\dots,n\}$ entonces $f : X \to K$ realmente está definida por $f(1),\dots,f(n)$, esto es $(f(1),\dots,f(n)) \in K^n$, dicho de otra forma, que K^n y $K(X)$ son prácticamente el mismo conjunto salvo notación. En efecto, la base mencionada anteriormente sería la base canónica.

PROPOSICIÓN 3.9. *Sea V un K-espacio, entonces existe X conjunto tal que $V \cong K(X)$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $X = \beta$, como $\{e_x\}_{x\in X}$ es una base de $K(X)$, entonces podemos considerar la función $f : \{e_x\}_{x\in X} \to V$ dada por $f(e_x) = x$. Por la propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $T : K(X) \to V$ que extiende a f. Ahora bien, $T(e_x) = f(e_x) = x$. De aquí que T mande a $\{e_x\}_{x\in X}$ en β, pero esto implica que T es un isomorfismo. $\square$

DEFINICIÓN 3.4. *Sea $f : X \to Y$ una función, entonces f indica una función $\overline{f}$: $\{e_x\}_{x\in X} \to \{e_y\}_{y\in Y}$ pensando $\{e_x\}_{x\in X} \subseteq K(X)$ y $\{e_y\}_{y\in Y} \subseteq K(Y)$, dada $\overline{f}(e_x) = e_{f(x)}$ para toda $x \in X$. Por lo que $\overline{f}$ la podemos pensar $\overline{f} : \{e_x\}_{x\in X} \to K(Y)$.*
Así, por la propiedad universal de las bases existe una única transformación lineal $K(f)$: $K(X) \to K$

PROPOSICIÓN 3.10. *Sea X un conjunto , entonces $K(1_X) = 1_{K(X)}$*

DEMOSTRACIÓN. Como $K(1_X)(e_x) = \overline{1}_X(e_x) = e_{1_X(x)} = e_x$. Como $K(1_X)$ es la identidad, entonces $b = 2e$ y entonces $K(1_X) = 1_{K(X)}$ $\square$

PROPOSICIÓN 3.11. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos transformaciones, entonces $K(gf) = K(g)K(f)$.*

DEMOSTRACIÓN. De nuevo esto basta verlo en la base de $K(X)$. Sea $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
K(gf)(e_x) &= \overline{gf}(e_x) \\
&= e_{gf(x)} \\
&= \overline{g}(e_{f(x)}) \\
&= K(g)(\overline{f}(e_x)) \\
&= K(g)K(f)(e_x)
\end{aligned}$$

$\square$

PROPOSICIÓN 3.12. *Sea X un conjunto y V un K-espacio, entonces*
$\theta_{XV} : V^X \to Hom(K(X),V)$ dado por $\theta_{XV}(f)(e_x) = f(x)$, $\forall x \in X$, $\forall f \in V^X$ es una biyección.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que $\theta_{XV}(f)$ está definida solo en la base, pero este se extiende de forma única a una transformación lineal.
Definimos $\eta_{XV} : Hom(K(X),V) \to V^X$, dado por $\eta_{XV}(T)(x) = T(e_x)$ para $T \in Hom(K(X),V)$ y $x \in X$.
Calculamos $\theta_{XV}(\eta_{XV}(T))(e_x) = \eta_{XV}(T(e_x)) = T(e_x)$. De aquí $\theta_{XV}(\eta_{XV}(T)) = T$ para $T \in Hom(K(X),V)$.

Por otro lado, $\eta_{XV}(\theta_{XV}(f)) = \theta_{XV}(f)(e_x) = f(x)$.

Por otro lado, θ y η son inversos, así $Hom(K(X),V)$ son isomorfos. $\square$

Recordatorio: V^X es el conjunto de funciones de X a V

Espacios Duales

Para V y W K-espacios, el conjunto
$$Hom(V,W) = \{T : V \to W \mid T \text{ es lineal}\}$$
tiene estructura de K-espacio al definir para $T,S \in Hom(V,W)$ y $\lambda \in K$:
$$(T+S)(x) := T(x) + S(x)$$
$$(\lambda T)(x) := \lambda T(x)$$

En particular, cuando $W = K$, el espacio anterior tiene un nombre especial.

DEFINICIÓN 3.5. *Si V es un K-espacio, al K-espacio $Hom(V,K)$ se le conoce como el espacio dual de V. Este se denota por V^*.*

NOTA 3.2. *Observe que la construcción de "tomar el dual"puede aplicarse cualquier cantidad finita de veces, dando una sucesión de espacios indexada en los naturales:*
$$V, V^*, V^{**}, V^{***}, \dots$$
donde $V^{**} := (V^*)^*$.

OBSERVACIÓN 3.1. *Sea $\beta \subseteq V$ una base. Por la propiedad universal de las bases tenemos una biyección: $Hom(V,K) \cong K^\beta$, por lo que*
$$|Hom(V,K)| = |K|^{|\beta|}$$

El resultado anterior da una forma de medir la cardinalidad del espacio dual. Sin embargo, quizá es más importante que este resultado conocer $\dim(V)$. En torno a esto, una primera pregunta a intentar responder es si existe una relación entre $\dim(V)$ y $\dim(V^*)$. Podemos decir algo en el contexto de dimensión finita.

PROPOSICIÓN 3.13. *Si V es un K-espacio con $dim(V) < \aleph_0$, entonces $dim(V) = dim(V^*)$. Por lo tanto,*
$$V \cong V^*.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ una base. Definamos $\beta^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\} \subseteq V^*$ como sigue:

$$v_i^* : V \to K$$

Se obtiene de la propiedad universal de las bases extendiendo la función que en la base β satisface:

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por construcción $\beta^* \subseteq V^*$. Veamos que β^* es base de V^*.

Afirmación 1: β^* es linealmente independiente.
En efecto, si $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^* = 0$ para algunos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, entonces al evaluar en v_j se tiene que

$$\lambda_j = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^* \right)(v_j) = 0(v_j) = 0$$

De esto se deduce el resultado.

Afirmación 2: β^* es generador.
Sea $T \in V^*$. Lo que afirmamos es que $T = \sum_{i=1}^n T(v_i) v_i^*$, para lo que basta ver que estas funciones tienen la misma regla de correspondencia pues claramente tienen el mismo dominio y codominio. Más aún, basta con ver que dicha igualdad se cumple en la base β. Así, dado $j \in \{1, ..., n\}$:

$$\left(\sum_{i=1}^n T(v_i) v_i^* \right)(v_j) = \sum_{i=1}^n T(v_i) \delta_{ij} = T(v_j)$$

De las afirmaciones se sigue que $\beta^* \subseteq V^*$ es base y además claramente $|\beta^*| = n = |\beta|$, lo que prueba la afirmación. □

NOTA 3.3.

1. *Dado $\beta \subseteq V$ base, a $\beta^* \subseteq V^*$ base se le conoce como la* ***base dual*** *de β.*
2. *En la demostración anterior es claro que la demostración de la segunda afirmación el por qué el resultado anterior no puede asegurarse en el caso de dimensión infinita, pues esto involucraría considerar una suma infinita, cosa que no tiene sentido desde el punto de vista puramente algebraico, a no ser que se trate desde el punto de vista formal, cosa que no encaja con lo que se está haciendo. Recordemos*

que todo espacio tiene una base, en particular V^* debe tener una base incluso en el contexto infinito; así lo que estamos diciendo es que en dimensión infinita no hay una idea de obtener la base dual de una base dada. En todo caso, dada una base $\beta \subseteq V$, siempre puede construirse el conjunto $\beta^* \subseteq V^*$, el cual resulta ser linealmente independiente, pero no podemos asegurar que este es un generador, luego, como todo conjunto linealmente independiente se puede extender a una base, de esto se concluye que $\dim(V) \leq \dim(V^*)$.

3. *Al pensar en el resultado $V^* \cong V$ en el contexto finito, note que lo que se está haciendo es encontrar una forma canónica de ver a los elementos de un espacio como un tipo especial de funciones. Quizá en este momento esta observación parezca que no agrega nada más que complejidad a lo que se está estudiando, sin embargo, este tipo de argumentos serán importantes en futuros cursos como lo pueden ser Geometria Diferencial, Geometria Riemanniana, Análisis Funcional, entre otros. Una pequeña intuición es que notemos que la integral es un elemento de $\mathscr{I}([a,b])^*$ (ver ejemplo 1.8) o la derivada en un punto (para una función con codominio $\mathbb{R}$) es un elemento de $\mathscr{D}(\mathbb{R})^*$. Por tal razón no daremos una discusión de por qué esta construcción es importante más allá de ser un tema algebraico interesante por sí mismo.*

El resultado anterior da pie a la pregunta de cómo calcular la base dual de una base dada. Esto es de lo que tratará el siguiente resultado que da la solución de K^n y que después se generaliza a cualquier espacio de dimensión finita.

PROPOSICIÓN 3.14. *Si $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq K^n$ es base y $A \in M_n(K)$ está definida por $A^i = v_i$, entonces $A \in GL_n(K)$ y los elementos de $\beta^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ se obtienen de*

$$v_i^*(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^{-1} \lambda_j$$

DEMOSTRACIÓN. Como las columnas de A son base de K^n, entonces A es invertible, es decir, $A \in GL_n(K)$. Por otro lado note que dado que $[v_i^*]_\beta^{can}[v_j]_\beta = \delta_{ij}$, entonces la matriz con renglones $\begin{pmatrix} [v_1^*]_\beta^{can} \\ \vdots \\ [v_n^*]_\beta^{can} \end{pmatrix}$ es inversa izquierda de A y por lo tanto la inversa de A. De esto se deduce que $[v_i^*]_\beta^{can} = A_i^{-1}$ y por lo tanto

$$v_i^*(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_i^*(e_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j A_{ij}^{-1}.$$

$\square$

Respecto a la obtención de la base dual de cualquier espacio de dimensión finita, V, denote por $\Phi_\beta : V \to K^n$ a la función que asocia a cada elemento de V su vector de coordenadas respecto a la base $\beta \subseteq V$.[4] Ahora considere $\gamma \subseteq V$ una base y supongamos que queremos determinar la base dual de γ.

Observemos que si $\{f_1,\dots,f_n\}$ es base dual de $\Phi_\beta(\gamma) \subseteq K^n$, entonces $\{f_1 \circ \Phi_\beta,\dots,f_n \circ \Phi_\beta\}$ es la base dual de γ. En efecto, si $\gamma = \{v_1,\dots,v_n\}$, entonces

$$(f_i \circ \Phi_\beta)(v_j) = f_i(\Phi_\beta(v_j)) = \delta_{i,j}$$

De esto se deduce la afirmación.

En resumen, dada $\gamma = \{v_1,....,v_n\} \subseteq V$ base (con V de dimensión finita), para obtener $\gamma^* \subseteq V^*$ se tienen que seguir los siguientes pasos:

1. Obtener los vectores de coordenadas $\Phi_\beta(\gamma)$.
2. Considerar la matriz $A \in M_n(K)$ que en columnas está definida por $A^i = \Phi_\beta(v_i)$. Calculamos A^{-1} para obtener la base dual de $\Phi_\beta(\gamma)$ como en la última proposición.
3. Si la base dual de $\Phi_\beta(\gamma)$ es $\{f_1,\dots,f_n\}$, la base dual de γ es $\{f_1 \circ \Phi_\beta,\dots,f_n \circ \Phi_\beta\}$.

Note que en los pasos anteriores aparece una base $\beta \subseteq V$ mediante la cual se obtienen los vectores de coordenadas y es mediante esta base que se construye la base dual de γ. La presencia de esta base es necesaria pues en ejemplos concretos siempre hay bases que se pueden considerar como canónicas y que por lo tanto nos permiten hacer cuentas más sencillas. Así, que β es una de tales bases de conveniencia. Estudiemos un ejemplo particular para ver cómo funciona esto.

EJEMPLO 3.6. *Sea $\gamma = \{(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Queremos calcular γ^*. En este caso no hay que hacer el cálculo del vector de coordenadas respecto a β la base canónica, pues este es el vector mismo. Entonces:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

[4] Obviamente $n = \dim(V)$

Por lo tanto los elementos de la base dual son

$$\begin{aligned} v_1^*(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) &= \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 \\ v_2^*(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) &= \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_3 \\ v_3^*(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) &= \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2, \end{aligned}$$

donde $v_1 = (-1,1,1), v_2 = (1,-1,1)$ *y* $v_3 = (1,1,-1)$.

EJEMPLO 3.7. *Calculemos la base dual de* $\gamma = \{1+x^2, 1+2x, 1-x\} \subseteq P_2(\mathbb{R})$. *Si* $\beta = \{1,x,x^2\}$, *entonces*

$$\begin{aligned} \Phi_\beta(1+x^2) &= (1,0,1) \\ \Phi_\beta(1+2x) &= (1,2,0) \\ \Phi_\beta(1-x) &= (1,-1,0) \end{aligned}$$

El siguiente paso es tomar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{y calculamos} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) &= \lambda_3 \\ f_2(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) &= \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 \\ f_3(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) &= \frac{2}{3}\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_3 \end{aligned}$$

La base dual es $\gamma^* = \{f_1 \circ \Phi_\beta, f_2 \circ \Phi_\beta, f_3 \circ \Phi_\beta\}$. *Analicemos los casos de forma explícita*

$$\begin{cases} f_1\Phi_\beta(1+x^2) = f_1(1,0,1) = 1 \\ f_1\Phi_\beta(1+2x) = f_1(1,2,0) = 0 \\ f_1\Phi_\beta(1-x) = f_1(1,-1,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2\Phi_\beta(1+x^2) = f_2(1,0,1) = 0 \\ f_2\Phi_\beta(1+2x) = f_2(1,2,0) = 1 \\ f_2\Phi_\beta(1-x) = f_2(1,-1,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3\Phi_\beta(1+x^2) = f_3(1,0,1) = 0 \\ f_3\Phi_\beta(1+2x) = f_3(1,2,0) = 0 \\ f_3\Phi_\beta(1-x) = f_3(1,-1,0) = 1 \end{cases}$$

Lo anterior dice como se comportan los elementos $f_i \circ \Phi$ en los elementos de la base y por lo tanto determinan dichas transformaciones. Sin embargo, note que si se quiere obtener la regla de correspondencia exacta de dichas funciones lo que habría que hacer es expresar en términos de la base γ a cualquier elemento en $P_2(\mathbb{R})$ y usar la linealidad de las transformaciones en cuestión. Vamos a hacer esto por completez con un ejemplo pues los restantes son análogos, tomemos $f_1 \circ \Phi_\beta$. Notemos que un polinomio arbitrario en $P_2(\mathbb{R})$ tiene la forma $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, y se expresa en términos de gamma como:

$$p = a_1(1+x^2) + \frac{a_1+a_0-a_2}{3}(1+2x) + \frac{2a_0-2a_2-a_1}{3}(1-x)$$

De esto se deduce que:

$$f_1\Phi_\beta(p) = a_1 f_1\Phi_\beta(1+x^2) + \frac{a_1+a_0-a_2}{3} f_1\Phi_\beta(1+2x) + \frac{2a_0-2a_2-a_1}{3} f_1\Phi_\beta(1-x) = a_1$$

Por lo tanto,

$$f_1\Phi_\beta\left(\sum_{i=0}^{2} a_i x^i\right) = a_1$$

De forma análoga se puede ver que

$$f_2\Phi_\beta\left(\sum_{i=0}^{2} a_i x^i\right) = \frac{a_1+a_0-a_2}{3}$$

$$f_3\Phi_\beta\left(\sum_{i=0}^{2} a_i x^i\right) = \frac{2a_0-2a_2-a_1}{3}$$

Regresando a la teoría, el siguiente paso es notar que si $T \in Hom(V,W)$, entonces podemos definir

$$\begin{aligned} T^* : W^* &\to V^* \\ \alpha &\mapsto \alpha \circ T \end{aligned}$$

Note que $T^* \in Hom(W^*, V^*)$. Esto muestra que la operación de "tomar el dual"no solo se aplica a espacios, sino también a transformaciones lineales entre los duales, dando como resultado una nueva transformación lineal, con el único detalle de que el dominio y codominio se voltean de lugar. Esta asignación a nivel de transformaciones lineales cumple las propiedades siguientes:

EJERCICIO 3.2. *(Funtorialidad del dual) Sean $T \in Hom(V,W)$ y $S \in Hom(W,U)$. Demuestre lo siguiente:*

1. $(1_V)^* = 1_{V^*}$

2. $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$

Para concluir esta sección, vamos a estudiar una función muy importante asociada a cualquier espacio V. Esta se denota por

$$ev : V \to V^{**},$$

donde $ev(x)(T) = T(x)$. La primera observación es que la función anterior está bien definida, es decir que para cada $x \in V$, $ev(x) : V^* \to K$ es lineal. En efecto, sean $T,S \in V^*$ y $\lambda \in K$. Entonces

$$\begin{aligned} ev(x)(\lambda T + S) &= (\lambda T + S)(x) = \lambda T(x) + S(x) \\ &= \lambda ev(x)(T) + ev(x)(S) \end{aligned}$$

La función anterior tiene mas estructura. Como lo muestra el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.15. *$ev : V \to V^{**}$ es lineal e inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Para la linealidad sean $x,y \in V$ y $\lambda \in K$. Para demostrar que $ev(x+\lambda y) = ev(x) + \lambda ev(y)$ notemos que estas funciones tienen el mismo dominio y codominio, así, resta ver que tienen la misma regla de correspondencia. Para esto, sea $T \in V^*$ y note que

$$\begin{aligned} ev(x+\lambda y)(T) &= T(x+\lambda y) = T(x) + \lambda T(y) \\ &= ev(x)(T) + \lambda ev(y)(T) \\ &= (ev(x) + \lambda ev(y))(T) \end{aligned}$$

Respecto a la inyectividad, sea $x \in nuc(ev)$. Observe que si $x \neq 0$, entonces existe $\beta \subseteq V$ base tal que $x \in \beta$. Por la propiedad universal de las bases, existe $T : V \to K$ lineal tal que $T|_\beta = \delta_x$. Luego, observe que como $ev(x) = 0$, entonces $0 = ev(x)(T) = T(x) = 1$, lo que es una contradicción y por lo tanto, $nuc(ev) = 0$. □

La importancia del resultado anterior aparece en el siguiente resultado, por el momento, el resultado anterior es lo suficientemente interesante pues no depende de la dimensión y este dice que dado que V siempre se puede encajar en V^{**}, nuevamente todo elemento de V se puede ver como una función, tal y como se discutió en una de las notas previas.

COROLARIO 3.1. *Si $dim(V) < \aleph_0$, entonces $ev : V \to V^{**}$ es un isomorfismo. A este se le conoce como* ***isomorfismo de evaluación****, aunque cuando no es isomorfismo se le conoce como transformación de evaluación.*

La importancia de la transformación $ev : V \to V^{**}$ radica en que en el caso de dimensión finita, el isomorfismo de evaluación es un isomorfismo canónico entre V y V^{**}. Esto no sucede si se usa dos veces la proposición 3.13, pues el isomorfismo depende de tomar una base.

El último resultado de la sección tiene una importancia que es difícil explicar en este momento pues dice que "la evaluación es natural". Básicamente este dice que la evaluación se comporta de forma coherente con transformaciones lineales.

PROPOSICIÓN 3.16. *Sea $T \in Hom(V,W)$. Entonces el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "ev_V"] \arrow[d, "T"'] & V^{**} \arrow[d, "T^{**}"] \\ W \arrow[r, "ev_W"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Es decir, $T^{**} \circ ev_V = ev_W \circ T$

DEMOSTRACIÓN. El diagrama muestra que las funciones involucradas tienen claramente el mismo dominio y codominio. Para la regla de correspondencia sea $x \in V$. Como se quiere ver que $(T^{**} \circ ev_V)(x) = (ev_W \circ T)(x)$ y esta igualdad se da en W^{**}, sea $\alpha \in W^{**}$. Luego,

$$\begin{aligned}
(T^{**} \circ ev_V)(x)(\alpha) &= T^{**}(ev_V(x))(\alpha) \\
&= (ev_V(x) \circ T^*)(\alpha) \\
&= ev_V(x)(T^*(\alpha)) \\
&= ev_V(x)(\alpha \circ T) \\
&= (\alpha \circ T)(x) \\
&= \alpha(T(x)) \\
&= ev_W(T(x))(\alpha) \\
&= (ev_W \circ T)(x)(\alpha)
\end{aligned}$$

□

Básicamente el resultado anterior es la razón por la cual no le ponemos un subíndice a la transformación evaluación para indicar el del dominio y codominio en cuestión (cosa que sí se hizo para plantear dicho resultado pensando en reducir la confusión en este), sin embargo, como se mencionó anteriormente queda fuera de nuestros alcances el explicar esto de forma precisa.

Ejercicios

Sean U, V y W K-espacios vectoriales.

EJERCICIO 3.3. *Sea $T : V \to W$ una función. Demuestre que T es lineal si y sólo si:*

1. *Para todo $x, y \in V$, $T(x+y) = T(x) + T(y)$.*
2. *Para todo $x \in V$ y $\lambda \in K$, $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.*

EJERCICIO 3.4.

1. *De un ejemplo de una función entre espacios vectoriales que satisfaga la propiedad* 1 *pero no* 2 *en el ejercicio anterior.*
2. *De un ejemplo de una función entre espacios vectoriales que satisfaga la propiedad* 2 *pero no* 1 *en el ejercicio anterior.*

EJERCICIO 3.5. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que $nuc(T) \leq V$ y $im(T) \leq W$.*

EJERCICIO 3.6. *Sea $T : V \to W$ lineal. Demuestre que si T es biyectiva entonces T^{-1} es lineal.*

EJERCICIO 3.7. *Demuestre que la composición de dos transformaciones lineales es una transformación lineal.*

EJERCICIO 3.8. *Sea $W \subseteq V$. Demuestre que $W \leq V$ si y solo si existe $T : V \to U$ lineal tal que $nuc(T) = W$.*

EJERCICIO 3.9. *Sean $V_1, \ldots, V_n$ K-espacios de dimensión finita y una secesión de transformaciones lineales*

$$0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} \ldots \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \xrightarrow{T_n} 0$$

tales que $im(T_i) = nuc(T_{i+1})$ para $i = 0, \ldots, n-1$. Entonces $\sum_{i=1}^{n} (-1)^n dim(V_i) = 0$.

EJERCICIO 3.10. *Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $T(a+b) = T(a) + T(b)$. Demuestre que T es lineal.*

EJERCICIO 3.11. *Sea $V = \mathscr{C}((0,1), \mathbb{R})$. Para todo $n \in \mathbb{N}^{+}$ se define la n-ésima función de Bernstein $\beta_n : V \to \mathbb{R}[x]$ mediante:*

$$\beta_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^k$$

1. *Demuestre que $(\beta_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq Hom(V, \mathbb{R}[x])$.*
2. *Calcule $\bigcap_{n=1}^{\infty} nuc(\beta_n)$.*

EJERCICIO 3.12.

1. *Calcule la cardinalidad de $Hom_{\mathbb{Z}_7}(\mathbb{Z}_7^2, \mathbb{Z}_7^4)$.*
2. *¿Cuántos monomorfismos distintos existen en $Hom_{\mathbb{Z}_7}(\mathbb{Z}_7^2, \mathbb{Z}_7^4)$?.*
3. *¿Cuántos epimorfismos distintos existen en $Hom_{\mathbb{Z}_7}(\mathbb{Z}_7^2, \mathbb{Z}_7^4)$?.*

EJERCICIO 3.13. *Diga si las siguientes funciones $T : V \to W$ son lineales. Demuestre su afirmación y en caso de ser lineales demuestre si son inyectivas, suprayectivas, isomorfismos o ninguna.*

- $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^3$ *con* $T(x,y,z) = (y, x+z, 0)$.
- $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^3$ *con* $T(x,y,z) = (y, x+z, 2z+1)$.
- $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$ *con* $T(x,y,z) = (z-8y, x)$.
- $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^3$ *con* $T(x,y,z) = (0, x, 0)$.
- $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $W = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *con* $T(p) = p'$.
- $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $W = \mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ *con* $T(p) = \int p$.

EJERCICIO 3.14. *Sea $V = K^{\mathbb{N}}$. Demuestre que las funciones $R : V \to V$ y $L : V \to V$ cuyas reglas de correspondencia son $R(\{x_i\})_0 = 0$ y para $j \in \mathbb{N}^{+}$, $R(\{x_i\})_{j+1} = x_j$ y $L(\{x_i\})_j = x_{j+1}$ son lineales. Además que R es inyectiva y L es suprayectiva pero ninguna es un automorfismo.*

EJERCICIO 3.15. *Encuentre transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que manden A en B.*

- $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ *y* $B = \{(3,4,5), (-1,0,2), (3,-5,0)\}$.
- $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ *y* $B = \{(1,0,1), (0,-1,0), (0,0,2)\}$.
- $A = \{(2,1,1), (-1,0,1), (0,0,1)\}$ *y* $B = \{(3,4,5), (-1,0,2), (3,-5,0)\}$.
- $A = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ *y* $B = \{(1,0,1), (0,-1,0), (0,0,2)\}$.
- $A = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,0,1)\}$ *y* $B = \{(-4,2,5), (-1,-7,2), (3,-5,0)\}$.

EJERCICIO 3.16. *Encuentre una transformación lineal* $T : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ *tal que:*

1. *Todo polinomio de grado exactamente 2 es un elemento del* $nuc(T)$.
2. $Im(T) = \langle 2 + x^2 \rangle$.

EJERCICIO 3.17. *Demuestre que no existe transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que mande a* $(1,-2)$ *en* $(4,-3)$*, a* $(1,1)$ *en* $(17,28)$ *y a* $(1,0)$ *en* $(35,0)$.

EJERCICIO 3.18. *Demuestre que* $\bigcap_{T \in Hom_K(V,K)} nuc(T) = 0$.

EJERCICIO 3.19. *Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Dada* $f : X \to Y$ *se define una función* $T_f : \wp(Y) \to \wp(X)$ *cuya regla de correspondecia es* $T_f(D) = f^{-1}(D) := \{x \in X \mid f(x) \in D\}$.

1. *Demuestre que* T_f *es lineal.*
2. *Calcule el núcleo de dicha transformación.*
3. *Demuestre que si f es biyectiva entonces* T_f *es un isomorfismo. ¿Qué sucede con el regreso de esta afirmación?*

EJERCICIO 3.20. *Demuestre que* $W \leq V$ *si y sólo si existe* $T : V \to U$ *lineal tal que* $nuc(T) = W$.

EJERCICIO 3.21. *Demuestre que si V tiene dimensión finita entonces para todo* $W \leq V$ *se tiene que* $dim(V/W) = dim(V) - dim(W)$.

EJERCICIO 3.22. *Sean* $T : V \to W$ *y* $S : W \to U$ *transformaciones lineales. Demuestre que* $nuc(ST) = T^{-1}(nuc(S))$.

EJERCICIO 3.23. *Demuestre que si* $End(V) := Hom(V,V)$ *entonces* $End(V)$ *es una anillo.*

EJERCICIO 3.24. *Sea* $T \in End(V)$. *Demuestre que* $T^2 = T$ *si y sólo si* $(1_V - T)^2 = 1_V - T$.

EJERCICIO 3.25. *Sea* $T \in End(V)$ *con* $T^2 = T$. *Demuestre que* $V = nuc(T) \oplus im(T)$.

EJERCICIO 3.26. *Sea* $T \in End(V)$ *con* V *de dimensión finita. Demuestre que existe* $n \in \mathbb{N}^+$ *tal que* $V = nuc(T^n) \oplus im(T^n)$.

DEFINICIÓN 3.6. *Sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal. Se definen dos funciones* $h^U(T) : Hom(U,V) \to Hom(U,W)$ *y* $h_U(T) : Hom(W,U) \to Hom(V,U)$ *mediante* $h^U(T)(S) = T \circ S$ *y* $h_U(T)(S) = S \circ T$.

EJERCICIO 3.27.

1. *Demuestre que* h^U *y* h_U *son funciones lineales.*
2. *Demuestre que si* T *es un isomorfismo entonces* h^U *y* h_U *son isomorfismos.*
3. *Demuestre que si* $V \cong V'$ *y* $W \cong W'$ *entonces* $Hom(V,W) \cong Hom(V',W')$.

EJERCICIO 3.28. *Sea* $T : V \to W$ *lineal. Demuestre que son equivalentes:*

1. T *es inyectiva.*
2. T *tiene una inversa izquierda lineal.*
3. T *es cancelable por la izquierda respecto a transformaciones lineales.*

También pruebe que son equivalentes:

1. T *es suprayectiva.*

2. *T tiene una inversa derecha lineal.*
3. *T es cancelable por la derecha respecto a transformaciones lineales.*

EJERCICIO 3.29. *Demuestre que para $T : V \to W$ lineal son equivalentes:*

- *T es un isomorfismo.*
- *T es invertible con inversa lineal.*
- *T manda bases en bases.*
- *T manda alguna base en alguna base.*

EJERCICIO 3.30.

1. *Sean $p : V \to W$ un epimorfismo y $T : U \to W$ una transformación lineal. Demuestre que existe $S : U \to V$ lineal tal que $p \circ S = T$.*
2. *Sean $i : V \to W$ un monomorfismo y $T : V \to U$ una transformación lineal. Demuestre que existe $S : W \to U$ lineal tal que $S \circ i = T$.*

EJERCICIO 3.31. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que:*

1. *Existen U un K-espacio vectorial, $S : V \to U$ y $i : U \to W$ lineales tales que i es un monomorfismo y $T = i \circ S$.*
2. *Existen U un K-espacio vectorial, $p : V \to U$ y $S : U \to W$ lineales tales que p es un epimorfismo y $T = S \circ p$.*

EJERCICIO 3.32. *Sean $T, S : V \to W$ lineales. Defínase el igualador de T y S como una pereja $(Eq(T,S), eq)$ donde $Eq(T,S) = \{x \in V \mid T(x) = S(x)\}$ y $eq : Eq(T,S) \to V$ con $eq(x) = x$. Demuestre las siguientes afirmaciones:*

1. *$Eq(T,S) \leq V$, eq es lineal y $T \circ eq = S \circ eq$.*
2. *Si existe $L : U \to V$ lineal tal que $T \circ L = S \circ L$, entonces existe una única $M : U \to Eq(T,S)$ lineal tal que $eq \circ M = L$.*

EJERCICIO 3.33. *Sean $T : V \to W$ y $S : W \to U$ transformaciones lineales con U, V, W de dimensión finita. Pruebe que:*

1. *$ran(ST) \leq ran(T) \wedge ran(S)$.*
2. *$nul(ST) \leq nul(S) + nul(T)$.*
3. *$ran(T) + ran(S) - dim(W) \leq ran(ST)$.*

EJERCICIO 3.34. *Sea X un conjunto.*

1. *Demuestre que el conjunto $\{\delta_x\}_{x\in X}$ es una base de $K^{(X)}$, donde para $x \in X$ se define*

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & Si\ y = x \\ 0 & Si\ y \neq x \end{cases}$$

2. *Pruebe que para todo conjunto Y y todo campo K existe V un K-espacio vectorial tal que* $\dim(V) = |Y|$.

DEFINICIÓN 3.7. *Sean $S : V \to W$ y $T : W \to U$ transformaciones lineales. Se dice que la pareja de transformaciones lineales (S, T) es exacta si:*

1. *S es un monomorfismo.*
2. *T es un epimorfismo.*
3. *$im(S) = nuc(T)$.*

Se denota por $\mathscr{EXT}(U,V)$ a la clase de parejas de trannsformaciones lineales tales que $dom(S) = V$ y $cod(T) = U$.

EJERCICIO 3.35. *Sea $W \leq V$, $\iota_W : W \to V$ la función inclusión de W en V y $\pi_W : V \to V\diagup W$ la proyección de V en $V\diagup W$. Demuestre que la pareja (ι_W, π_W) es exacta.*

EJERCICIO 3.36. *Para $(S,T),(S',T') \in \mathscr{EXT}(U,V)$ con $dom(T) = W$ y $dom(T') = W'$. Se define la relación:*

$$(S,T) \sim (S',T'),\ si\ existe\ \alpha : W \to W'\ tal\ que\ \alpha \circ S = S'\ y\ T = T' \circ \alpha.$$

Demuestre que α es un isomorfismo.

EJERCICIO 3.37. *Con las mismas hipótesis del ejercico anterior, demuestre que* $\sim$ *es una relación de equivalencia y que* $|\mathscr{E}\mathscr{X}\mathscr{T}(U,V)/\sim| = 1$.

EJERCICIO 3.38. *Demuestre que si* $V \neq 0$ *entonces para cualesquiera* $x, y \in V$ *con* $x \neq y$ *existe una transformación lineal* $T : V \to K$ *tal que* $T(x) \neq T(y)$.

EJERCICIO 3.39. *Demuestre que* $M_n(K)$ *es un anillo.*

EJERCICIO 3.40. *Encuentre las coordenadas de* $(1,0,8), (-1,4,4), (-2,0,-3) \in \mathbb{R}^3$ *con respecto a las siguientes bases:*

- *La base canónica* β_0.
- $\beta_1 = \{(1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1)\}$.
- $\beta_2 = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$.
- $\beta_3 = \{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,0)\}$.

EJERCICIO 3.41. *Con la misma notación del ejercicio anterior sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una transformación lineal. Encuentre* $T(1,0,8)$, $T(-1,4,4)$ *y* $T(-2,0,-3)$ *si:*

$$[T]_{\beta_1}^{\beta_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\beta_2}^{\beta_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\beta_3}^{\beta_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\beta_1}^{\beta_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\beta_2}^{\beta_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\beta_3}^{\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3.42. *Sean* $S,T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *con* $S(x,y,z) = (x,y,z)$ *y* $T(x,y,z) = (x-y, x-z, y-z)$. *Encuentre:* $[S]_{\beta_1}^{\beta_2}$, $[S]_{\beta_3}^{\beta_2}$, $[S]_{\beta_2}^{\beta_3}$, $[T]_{\beta_1}^{\beta_1}$, $[T]_{\beta_2}^{\beta_2}$ *y* $[T]_{\beta_3}^{\beta_3}$.

EJERCICIO 3.43. *Encuentre las matrices de cambio de base y realice el cambio de base correspondiente.*

1. *De* β_1 *a* β_2 *con*
$$[T]_{\beta_1}^{\beta_1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
2. *De* β_1 *a* β_3 *con*
$$[T]_{\beta_1}^{\beta_1} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. *De* β_2 *a* β_3 *con*
$$[T]_{\beta_2}^{\beta_2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
4. *De* β_3 *a* β_1 *con*
$$[T]_{\beta_3}^{\beta_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN 3.8. *Sea $n \in \mathbb{N}^+$. Se define una función $tr : M_n(K) \to K$ cuya regla de correspondencia es $tr(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{jj}$. A dicha función se le conoce como la función traza y a $tr(A)$ se le llama la traza de la matriz A.*

Sean $A, B \in M_n(K)$ con $n \in \mathbb{N}^+$.

EJERCICIO 3.44. *Demuestre que:*

- *La función traza es lineal.*
- *Calcule $nul(tr)$.*
- *Calcule $ran(tr)$.*

EJERCICIO 3.45. *Demuestre las siguientes propiedades de la función traza:*

1. $tr(AB) = tr(BA)$.
2. $tr(A) = tr(A^t)$.

EJERCICIO 3.46. *Demuestre que si A y B son similares entonces $tr(A) = tr(B)$. ¿Es cierto el regreso de la afirmación?*

EJERCICIO 3.47. *Demuestre que si $A, B \in GL_n(K)$ entonces $AB \in GL_n(K)$ y de hecho $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

EJERCICIO 3.48. *Sea $C \in M_{m\times n}(K)$. Demuestre que $L_C : K^n \to K^m$ es un isomorfismo si y sólo si $n = m$ y $C \in GL_n(K)$.*

EJERCICIO 3.49. *Sea $A \in GL_n(K)$ y $\beta \subseteq K^n$ base. Demuestre que existen $\gamma, \gamma' \subseteq K^n$ bases tales que $A = [1_{k^n}]_{\beta}^{\gamma} = [1_{k^n}]_{\gamma'}^{\beta}$. Con esto concluya que $A \in GL_n(K)$ si y sólo si A es una matriz de cambio de base.*

EJERCICIO 3.50. *Demuestre que para $A \in M_{n\times m}(K)$,*

$$\dim(\langle A^1,\ldots,A^m\rangle) = ran(L_A) = \dim(\langle A_1,\ldots,A_n\rangle)$$

A cualquiera de estos números naturales se le conoce como el ***rango de la matriz*** *A, el cual denotaremos por $ran(A)$.*

EJERCICIO 3.51. *Sean $A,B \in M_n(K)$. Demuestre que*

$$ran(AB) \leq \text{mín}\{ran(A), ran(B)\}.$$

Muestre con un ejemplo que esta desigualdad puede ser estricta.

EJERCICIO 3.52. *Demuestre que toda matriz invertible se puede escribir como producto de matrices elementales.*

EJERCICIO 3.53. *Sea $A \in M_n(K)$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $A \in GL_n(K)$
2. L_A *es inyectiva*
3. L_A *es suprayectiva*
4. *Para cualquier $b \in K^n$ la ecuación $Ax = b$ tiene una única solución*
5. *La ecuación $Ax = 0$ tiene por única solución a la trivial.*

EJERCICIO 3.54. *Determinar si los siguientes sistema de ecuaciones tiene solución sobre $\mathbb{Q}$ y en caso afirmativo, resolverlo.*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

EJERCICIO 3.55. *Considere el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$*:*

$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3 = 3 \\ x_1 + (1+\sqrt{2})x_2 + x_3 = 3 + \sqrt{2} \\ x_1 + x_2 - \sqrt{2}x_3 = 4 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Determinar si este sistema tiene solución y en caso afirmativo determinar todas las soluciones de este.

EJERCICIO 3.56. *Considere el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en* $\mathbb{Z}_5$*:*

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Determinar si este sistema tiene solución y en caso afirmativo determinar todas las soluciones de este.

EJERCICIO 3.57. *Considere el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en* $\mathbb{Z}_3$*:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Determinar si este sistema tiene solución y en caso afirmativo determinar todas las soluciones de este.

EJERCICIO 3.58. *Considere el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en* $\mathbb{C}$*:*

$$\begin{cases} (3-i)x_1+(2-i)x_2+(4+2i)x_3=2+6i \\ (4+3i)x_1-(5+i)x_2+(1+i)x_3=2+2i \\ (2-2i)x_1-(1-i)x_2+(2+4i)x_3=i \end{cases}$$

Determinar si este sistema tiene solución y en caso afirmativo determinar todas las soluciones de este.

EJERCICIO 3.59. *Encuentre todos los posibles* $\lambda \in \mathbb{R}$ *para que el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+3x_3=2 \\ 2x_1+3x_2+\lambda x_3=3 \end{cases}$$

satisfaga:

1. *Tener una única solución sobre* $\mathbb{R}$
2. *Tener una infinidad de soluciones sobre* $\mathbb{R}$
3. *No tener ninguna solución sobre* $\mathbb{R}$

EJERCICIO 3.60. *Observe que se tienen funciones lineales para* $n \in \mathbb{N}$ *e* $i \in \{1,....,n+1\}$ *dadas por*

$$I_i : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$I_i(p) = \int_0^i p(x)dx$$

1. *Demuestre que* $\beta = \{I_1,...,I_{n+1}\} \subseteq P_n(\mathbb{R})^*$ *es base.*
2. *Encuentre* $\gamma \subseteq P_n(\mathbb{R})$ *tal que* $\gamma^* = \beta$*.*

EJERCICIO 3.61. *Dar un ejemplo de un* K*-espacio* V *tal que* $ev : V \to V^{**}$ *no es un isomorfismo.*

Miscelánea.

Para los que les gusta el cálculo.

EJERCICIO 3.62. *Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Se denota por $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ al conjunto de funciones reales derivables en $[a,b]$ y con derivada continua. Se define una función $\mathscr{D} : \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \to \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ mediante $\mathscr{D}(f) = f'$.*

Demuestre las siguientes afirmaciones:

1. *$\mathscr{D}$ es un epimorfismo.*
2. *$nuc(\mathscr{D}) \cong \mathbb{R}$.*
3. *$\mathscr{D}$ tiene una infinidad de inversas derechas pero sólo una de ellas es lineal.*

Para los que les gusta la geometría.

DEFINICIÓN 3.9. *Sea $\{y_1,...,y_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto con $1 \leq k \leq n$. Se define la matriz de Gram de dicho conjunto, la que se denota por $\mathscr{G}(y_1,...,y_k)$, mediante:*

$$\mathscr{G}(y_1,...,y_k) = (y_1|...|y_k)^t(y_1|...|y_k)$$

EJERCICIO 3.63. *Demuestre las siguientes afirmaciones:*

1. *$\mathscr{G}(y_1,...,y_k) \in S_k(\mathbb{R})$.*
2. *Para todo $j \in \{1,...,k\}$, $\mathscr{G}(y_1,...,y_k)_{jj} = \|y_j\|^2$.*
3. *Si $\beta \subseteq \mathbb{R}^n$ es la base canónica, entonces que para todo $\{y_1,...,y_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ y para toda $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ base, existe $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal tal que $\mathscr{G}(y_1,...,y_n) = ([1_{\mathbb{R}^n}]_\gamma^\beta)^t[T]^t[T][1_{\mathbb{R}^n}]_\gamma^\beta$*

Para los que les gusta la teoría de conjuntos y un poco de categorías.

DEFINICIÓN 3.10. *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Se define el producto de esta familia, el que se denota por $\prod_{i\in I} X_i$, mediante:*

$$\prod_{i\in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid \forall i \in I, f(i) \in X_i\}.$$

EJERCICIO 3.64. *Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ una colección de K-espacios vectoriales.*

1. *Defínase una estructura de K-espacio vectorial en $\prod_{i\in I} V_i$ tal que todas las proyecciones $p_j : \prod_{i\in I} V_i \to V_j$ sean lineales.*
2. *Demuestre que si W es un K-espacio vectorial con una familia de trasformaciones lineales $\{T_j : W \to V_j\}_{j\in J}$ entonces existe una única transformación lineal $T : W \to \prod_{i\in I} V_i$ ta que para todo $j \in I$, $p_j \circ T = T_j$.*

Para los que les gusta el álgebra y la teoría de números.

EJERCICIO 3.65.

1. *Demuestre que si K es un campo finito entonces existen $n, p \in \mathbb{N}^{+}$ con p primo tal que $|K| = p^{n}$.*
2. *No existe un espacio vectorial con exactamente 15 elementos.*

Capítulo 4

Producto Interior

"No se pueden aplicar las matemáticas mientras las palabras oscurezcan la realidad.."

Hermann Weyl.

En el presente capítulo se introducirá la idea de espacio con producto interior, que son un tipo especial de espacios que tienen la mayor interpretación geométrica de todos los estudiados hasta el momento, pues en estos se puede introducir una forma de medir ángulos entre vectores mediante una función que generaliza el producto punto de $\mathbb{R}^n$. Con esta función se puede definir una noción de distancia vía una norma y hasta se tiene una noción de ortogonalidad. Con estos conceptos se definirá el operador adjunto y algunos operadores especiales mediante este.

En este capítulo el campo K será el campo de los números reales $\mathbb{R}$ o el campo de los números complejos $\mathbb{C}$. De otra manera no harían sentido ciertos conceptos.

1. Producto Interior

DEFINICIÓN 1.1. *Sea V un K-espacio. Una función $\langle \_, \_ \rangle : V \times V \longrightarrow K$ es un producto interior si:*

1. *Para todo $w, v_1, v_2 \in V$ y $\lambda \in K$ tenemos que*

   $$\langle v_1 + \lambda v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \lambda \langle v_2, w \rangle$$

   Es decir, si se fija la segunda entrada, tenemos una transformación lineal.
2. *Si para $v, w \in V$*

   $$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \text{ (el conjugado complejo)}$$

3. $\langle v, v \rangle \geq 0$ *para toda* $v \in V$.
4. *Si* $\langle v, v \rangle = 0$ *si y solo si* $v = 0$, *para toda* $v \in V$.

   Notemos que el regreso de 4 siempre ocurre debido a 1.

EJEMPLO 1.1. $V = \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

1. *Sean* $x, x', y \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\langle x+\lambda x', y\rangle &= \sum_{i=1}^{n}(x+\lambda x')_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+\lambda x_i')y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda x_i' y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i \\ &= \langle x, y\rangle + \lambda \langle x', y\rangle\end{aligned}$$

2. *Sean* $x, y \in \mathbb{R}^n$*, entonces*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y, x\rangle$$

En este caso como estamos en los reales , ignoramos el conjugado porque se cumple que $x = \overline{x}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$

3. *Sea* $x \in \mathbb{R}^n$*, entonces*

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

4. *Sea* $x \in \mathbb{R}^n$ *con* $0 = \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ *sabemos que la suma de velas mayores o iguales a cero si y solo si cada sumando es cero.*
De aquí $x_i^2 = 0$ *para* $i = 1\ldots, n$*. Por lo tanto* $x = 0$*.*
Por lo tanto, $\langle , \rangle$ *es un producto interior en* $\mathbb{R}^n$

EJEMPLO 1.2. *Sea* $V = \mathbb{C}^n$ *y* $\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i$ *con* $z, w \in \mathbb{C}^n$

1. *Sean* $z, z', w \in \mathbb{C}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\langle z+\lambda z', w\rangle &= \sum_{i=1}^{n}(z+\lambda z')_i \overline{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}[z_i+\lambda z_i']\overline{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i + \lambda z_i' \overline{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} z_i' \overline{w}_i \\ &= \langle z, w\rangle + \lambda \langle z', w\rangle\end{aligned}$$

2. *Sean* $z, w \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned}\langle z, w\rangle &= \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i \overline{\overline{z}}_i \\ &= \overline{\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{z}_i} \\ &= \overline{\langle w, z\rangle}\end{aligned}$$

3. *Sea* $z \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned}\langle z, z\rangle &= \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \geq 0\end{aligned}$$

4. *Sea* $z \in \mathbb{C}^n$ *tal que* $\langle z, z\rangle = 0$

$$0 = \langle z, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$$

De nuevo esto implica que $|z_i|^2 = 0$ *para* $i = 1, \ldots, n$*, de donde* $z_i = 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$*. Por lo tanto,* $z = 0$

Aquí aprovechamos para ver la linealidad de la segunda entrada

$$\begin{aligned}\langle v, w + \lambda w'\rangle &= \overline{\langle w + \lambda w', v\rangle} \\ &= \overline{\langle w, v\rangle + \lambda \langle w', v\rangle} \\ &= \overline{\langle w, v\rangle} + \overline{\lambda \langle w', v\rangle} \\ &= \langle v, w\rangle + \overline{\lambda} \langle v, w'\rangle\end{aligned}$$

La segunda entrada abre sumas y saca escalares pero conjugados.

EJEMPLO 1.3. *Sea* $V = C[0,1]$ *el espacio de las funciones contínuas con dominio* $[0,1]$ *y* $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ *para* $f, g \in V$

1. *Sean* $f_1, f_2, g \in V$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\begin{aligned}\langle f_1 + \lambda f_2, g\rangle &= \int_0^1 (f_1 + \lambda f_2)(x) g(x)\,dx \\ &= \int_0^1 [f_1(x) + \lambda f_2(x)] g(x)\,dx \\ &= \int_0^1 f_1(x)g(x) + \lambda f_2(x) g(x)\,dx \\ &= \int_0^1 f_1(x) g(x)\,dx + \lambda \int_0^1 f_2(x) g(x)\,dx \\ &= \langle f_1, g\rangle + \lambda \langle f_2, g\rangle\end{aligned}$$

2. *Sean* $f, g \in V$

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_0^1 f(x)g(x)\,dx\\ &= \int_0^1 g(x)f(x)\,dx\\ &= \langle g,f\rangle\end{aligned}$$

3. *Sea* $f \in V$

$$\langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

Como $f^2(x) \geq 0$ *en* $[0,1]$ *entonces* $\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq 0$. *Así* $\langle f,f\rangle \geq 0$

4. *Si* $\langle f,f\rangle = 0$, *entonces* $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 0$.

Sabemos que la integral de una función continua mayor o igual a cero es cero si y solo si la función es cero, por lo que $f^2(x) = 0$ *y de aquí concluimos que* $f(x) = 0$

DEFINICIÓN 1.2. *Sea* V *un* K*-espacio, una función* $\|\_\| : V \to [0,\infty)$ *es una norma si*

1. $\|v\| = 0$ *si y solo si* $v = 0$ *para todo* $v \in V$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ *para toda* $v \in V$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$
3. $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *para* $v, w \in V$

Queremos ver que todo producto interior induce una norma, para esto tenemos que ver antes la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz. Al parecer Cauchy la demostró para el caso de $\mathbb{R}^n$, Bunyakovsky para el caso de las integrales y Schwartz de la versión general.

PROPOSICIÓN 1.1. *(Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz)*

Sea V *un* K*-espacio vectorial con producto interior* $\langle \_,\_ \rangle$. *Entonces*

$$|\langle v,w\rangle|^2 \leq \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle \quad v,w \in V$$

DEMOSTRACIÓN. Consideramos $\lambda \in K$, y por las propiedades del producto interior

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle v-\lambda w, v-\lambda w\rangle\\ &= \langle v, v-\lambda w\rangle - \lambda\langle w, v-\lambda w\rangle\\ &= \langle v,v\rangle - \overline{\lambda}\langle v,w\rangle - \lambda\langle w,v\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w,w\rangle\\ &\text{Ponemos } \lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\\ &= \langle v,v\rangle - \overline{\left(\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\right)}\langle v,w\rangle - \left(\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\right)\langle w,v\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w,w\rangle\\ &= \langle v,v\rangle - \overline{\left(\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\right)}\langle v,w\rangle - \left(\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\right)\overline{\langle v,w\rangle} + \frac{\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle}}{\langle w,w\rangle^2}\langle w,w\rangle\end{aligned}$$

Multiplicando por $\langle w,w\rangle \geq 0$

$$0 \leq \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \overline{\langle v,w\rangle}\langle v,w\rangle - \langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle} + \langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle}$$

De aquí

$$0 \leq \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \overline{\langle v,w\rangle}\langle v,w\rangle$$

Despejando

$$|\langle v,w\rangle|^2 = \overline{\langle v,w\rangle}\langle v,w\rangle \leq \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle$$

□

DEFINICIÓN 1.3. *Sea V un K-espacio con un producto interior $\langle \_,\_\rangle$. Definimos $\|\_\| : V \to [0,\infty)$ como $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ para toda $v \in V$. Notemos que $\langle v,v\rangle = \|v\|^2$*

PROPOSICIÓN 1.2. *Sea V un K-espacio con producto interior $\langle \_,\_\rangle$. Entonces $\|\_\|$ es una norma en V*

DEMOSTRACIÓN. Primero observemos que el contradominio de $\|\ \|$ es $[0,\infty)$ puesto que para un producto interior tenemos que $\langle v,v\rangle \geq 0$, $\forall v \in V$

1. Si $v = 0$, entonces $\|0\| = \sqrt{\langle 0,0\rangle} = \sqrt{0} = 0$. Por otro lado, si $v \in V$ es tal que $\|v\| = 0$, entonces $\sqrt{\langle v,v\rangle} = 0$. Por lo que $\langle v,v\rangle = 0$ y sabemos que esto implica que $v = 0$.
2. Sea $\lambda \in K$ y $v \in V$, entonces
$$\begin{aligned}\|\lambda v\| &= \sqrt{\langle \lambda v,\lambda v\rangle}\\ &= \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle v,v\rangle}\\ &= \sqrt{|\lambda|^2}\sqrt{\langle v,v\rangle}\\ &= |\lambda|\|v\|\end{aligned}$$
3. Sea $v,w \in V$, entonces
$$\begin{aligned}\|v+w\| &= \sqrt{\langle v+w,v+w\rangle}\\ &= \sqrt{\langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle}\\ &= \sqrt{\langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} + \langle w,w\rangle}\\ &= \sqrt{\langle v,v\rangle + 2Re(\langle v,w\rangle) + \langle w,w\rangle}\end{aligned}$$

Notemos que $R4(\langle v,w\rangle) \leq |\langle v,w\rangle|$, usando la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{\langle v,v\rangle + 2(\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle)^{\frac{1}{2}} + \langle w,w\rangle} \\
&= (\|v|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|v\| + \|w\|
\end{aligned}$$

□

La noción de producto interior induce una norma y la de norma una distancia. Como sea notemos que de la desigualdad C-B-S tenemos

$$\frac{|\langle v,w\rangle|}{\|v\|\|w\|} \leq 1$$

Es decir

$$-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|} \leq 1$$

Por lo que podemos definir el ángulo entre v y w como el que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|} \tag{7}$$

De aquí podemos pensar que los espacios con producto interior tienen cierta geometría.

EJEMPLO 1.4. *Sea $V = \mathbb{R}^n$ y $\|x\| = \max_{i=1}^n |x_i|$ para $x \in \mathbb{R}^n$.*

1. *Primero $\|0\| = \max_{i=1}^n |0_i| = \max_{i=1}^n 0_i = 0$. Por otro lado, si $\|x\| = 0$, entonces observamos que $|x_i| \leq \|x\| = 0$. De aquí que $|x_i| = 0$ y esto implica que $x_i = 0$ para toda $i = 1,\dots,n$. Por lo tanto $x = 0$.*
2. *Sea $x \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces*
$$\|\lambda x\| = \max_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \max_{i=1}^{n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \max_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\|x\|$$
3. *Sean $x,y \in V$, entonces:*
$$\|x+y\| = \max_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| = \max_{i=1}^{n} |x_i| + \max_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\| + \|y\|$$

Por lo que efectivamente tenemos una norma.

PROPOSICIÓN 1.3 (Identidad del paralelogramo). *Sea V un K-espacio vectorial con producto interior $\langle \_, \_ \rangle$. Entonces*

$$2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2$$

para $v,w \in V$.

DEMOSTRACIÓN. Hacemos dos cuentas, la primera:

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} + \langle w,w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle + 2Re(\langle v,w\rangle) + \langle w,w\rangle
\end{aligned}$$

y la segunda:

$$\begin{aligned}
\|v-w\|^2 &= \langle v-w, v-w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \overline{\langle v,w\rangle} + \langle w,w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle - 2Re(\langle v,w\rangle) + \langle w,w\rangle
\end{aligned}$$

Sumando ambas tenemos el resultado □

Consideremos la norma anterior y los vectores $(1,0)$ y $(1,1)$. Notemos que $\|(1,0)\| = \|(1,1)\| = 1$. Por lo que $2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = 4$. Por otro lado $\|(2,1)\| = 2$ y $\|(0,-1)\| = 1$, de donde $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 5$. Notemos que en este caso, la norma no puede venir de un producto interior.

2. Ortogonalidad: El teorema de Gram-Schmidt

En lo que resta del capítulo, todas las normas que aparezcan serán inducidas por el producto interior definido en el espacio en cuestión. Comenzaremos con un resultado muy sencillo.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea V un K-espacio con un producto interior $\langle \_, \_ \rangle$ y $v \in V$. Si $\langle v,w\rangle = 0$ para toda $w \in V$, entonces $v = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que en particular $\langle v,v\rangle = 0$, entonces $v = 0$ por definición de producto interior. □

Note que la afirmación recíproca de la proposición anterior es trivialmente cierta. Por otro lado, esta proposición deja abierta una pregunta:

Dado $v \in V$, ¿será que existe $w \in V$ tal que $\langle v,w\rangle = 0$?

La respuesta es trivial pues $w = 0$ es un elemento que cumple dicha propiedad, así que para que la pregunta sea no trivial hay que pedir que dicho elemento sea no cero.

Inspirados en esta cuestión y la intuición geométrica de esta (que proviene de la ecuación 7), podemos plantear lo siguiente:

DEFINICIÓN 2.1. *Sea V un K-espacio con producto interior $\langle \_, \_ \rangle$, y $S \subseteq V$. Decimos que S es un subconjunto:*

1. *ortogonal, si para cualesquiera $v, w \in S$ con $v \neq w$, $\langle v, w \rangle = 0$. Dos vectores v y w son ortogonales si $\{w, v\} \subseteq V$ es ortogonal.*
2. *ortonormal si es ortogonal y para toda $v \in S$, $\|v\| = 1$.*

EJEMPLO 2.1. *Si $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $\langle \_, \_ \rangle$ es el producto interior usual, la base canónica $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq K^n$ es un conjunto ortonormal.*

EJEMPLO 2.2. *Si $S := \{(1, -1), (1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, note que S es ortogonal con el producto interior estándar de $\mathbb{R}^2$ pues*

$$\langle (1, -1), (1, 1) \rangle = 0.$$

Sin embargo, note que S no es ortonormal pues

$$\|(1, -1)\| = \|(1, 1)\| = \sqrt{2}.$$

El siguiente ejemplo es uno de los más importantes de la teoría desde una perspectiva histórica.

EJEMPLO 2.3. *De las identidades:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx)\, dx = \pi \delta_{nm}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx)\, dx = 0$$

Válidas para cualesquiera $n,m \in \mathbb{Z}$, se deduce que los conjuntos $S_1, S_2, S_3 \subseteq C^0([-\pi,\pi])$ definidos por

$$S_1 = \{\sin(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$
$$S_2 = \{\cos(mx) \mid m \in \mathbb{Z}\}$$
$$S_3 = S_1 \cup S_2,$$

son ortogonales. Ninguno de estos es ortonormal pues

$$\|\sin(nx)\| = \|\cos(nx)\| = \sqrt{\pi}.$$

EJEMPLO 2.4. *El conjunto $\{1,i\} \subseteq \mathbb{C}$ no es ortogonal con el producto interior usual de $\mathbb{C}$ pues:*

$$\langle 1,i\rangle = \bar{i} = -i \neq 0$$

Por otro lado note que

$$\|1\| = \|i\| = 1$$

OBSERVACIÓN 2.1. *Si $S \subseteq V$ es ortogonal y $0 \notin S$, entonces siempre podemos obtener de S un conjunto ortonormal $\tilde{S}$, al definir para cada $v \in S$, $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$ y así, $\tilde{S} = \{\tilde{v} \mid v \in S\}$. A este proceso se le conoce como la* ***normalización*** *del conjunto S. Más aún, note que $\langle S\rangle = \langle \tilde{S}\rangle$.*

Una de las propiedades más importantes respecto a conjuntos ortogonales se presenta en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea V un K-espacio con un producto interior $\langle \_,\_\rangle$ y $S \subseteq V$. Si S es ortogonal y $0 \notin S$, entonces S es linealmente independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $v_1,\dots,v_n \in S$ tales que existen $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ con la propiedad de que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$. Sea $j \in \{1,\dots,n\}$ y apliquemos $\langle \_, v_j\rangle$ en la igualdad anterior. Esto implica que se tienen las igualdades

$$\lambda_j \|v_j\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i, v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, v_j \right\rangle = \langle 0, v_j\rangle = 0$$

Como $\|v_j\| \neq 0$, esto implica que $\lambda_j = 0$ y como $j \in \{1,\dots,n\}$ fue arbitrario, se deduce el resultado. $\square$

NOTA 2.1. *En virtud del resultado anterior y el ejemplo 2.1, tenemos una nueva prueba de que el conjunto* $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq K^n$ *es linealmente independiente cuando* $K = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$.

De forma menos trivial, el ejemplo 2.3 implica que los conjuntos $S_1, S_2, S_3 \subseteq C^0([-\pi, \pi])$ *son linealmente independientes.*

Regresemos a la observación 2.1. Una pregunta muy interesante es si podemos hacer algo análogo para un conjunto respecto a la propiedad de ortogonalidad. La respuesta es menos obvia pero es cierta, al menos en el caso contable como lo muestra el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.3 (Gram-Schmidt). *Sea* V *un* K*-espacio con un producto interior* $\langle \_, \_ \rangle$*, y* $S \subseteq V$ *contable linealmente independiente. Entonces existe* S' *ortonormal tal que* $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $S = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. La prueba será por recursión: Si consideramos el conjunto $\{v_0\} \subseteq S$, como $v_0 \neq 0$, pues S es linealmente independiente, entonces definimos $w_0 := \frac{v_0}{\|v_0\|}$. Entonces $\{w_0\}$ es trivialmente ortonormal y $\langle \{v_0\} \rangle = \langle \{w_0\} \rangle$ pues w_0 es un múltiplo no cero de v_0.

Supongamos ahora que se tiene construido un conjunto $\{w_0, \ldots, w_{n-1}\} \subseteq V$ ortonormal tal que

$$\langle \{v_0, \ldots, v_{n-1}\} \rangle = \langle \{w_0, \ldots, w_{n-1}\} \rangle.$$

Definamos

$$\begin{aligned} w'_n &= v_n - \sum_{j=0}^{n-1} \langle v_n, w_j \rangle w_j \\ w_n &= \frac{w'_n}{\|w'_n\|} \end{aligned}$$

Afirmación: $\{w_0, \ldots, w_n\} \subseteq V$ es el conjunto buscado, es decir, es ortonormal y genera lo mismo que $\{v_0, \ldots, v_n\}$.

En efecto, para la primera afirmación lo único que resta ver es que $\langle w_n, w_i \rangle = 0$ para

$i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Esto se obtiene haciendo el cálculo directamente:

$$\begin{aligned}
\langle w_n, w_i \rangle &= \frac{1}{\|w'_n\|} \langle w'_n, w_i \rangle \\
&= \frac{1}{\|w'_n\|} \left(\langle v_n, w_i \rangle - \sum_{j=0}^{n-1} \langle v_n, w_j \rangle \langle w_j, w_i \rangle \right) \\
&= \frac{1}{\|w'_n\|} \left(\langle v_n, w_i \rangle - \sum_{j=0}^{n-1} \langle v_n, w_j \rangle \delta_{ji} \right) \\
&= \frac{1}{\|w'_n\|} \left(\langle v_n, w_i \rangle - \langle v_n, w_i \rangle \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Respecto a la propiedad de los generados, note que por definición de w_n, se tiene que $w_n \in \langle \{w_0, \ldots, w_{n-1}\} \cup \{v_n\} \rangle$. Además,

$$\langle \{w_0, \ldots, w_{n-1}\} \cup \{v_n\} \rangle = \langle \{w_0, \ldots, w_{n-1}\} \rangle + \langle v_n \rangle = \langle \{v_0, \ldots, v_{n-1}\} \rangle + \langle v_n \rangle = \langle \{v_0, \ldots, v_n\} \rangle$$

Esto implica que

$$\langle \{w_0, \ldots, w_n\} \rangle \subseteq \langle \{v_0, \ldots, v_n\} \rangle.$$

Para la contención restante note que de la definición de w_n se sigue que

$$v_n = \|w'_n\| w_n + \sum_{j=0}^{n-1} \langle v_n, w_j \rangle w_j \in \langle \{w_0, \ldots, w_n\} \rangle$$

Como por hipótesis $\langle \{v_0, \ldots, v_{n-1}\} \rangle = \langle \{w_0, \ldots, w_{n-1}\} \rangle$, esto implica que

$$\langle \{v_0, \ldots, v_n\} \rangle \subseteq \langle \{w_0, \ldots, w_n\} \rangle$$

y se concluye la prueba. □

NOTA 2.2.

1. *El proceso recursivo de la demostración en el resultado anterior se conoce como el proceso de Gram-Schmidt.*
2. *En virtud de la observación 2.1 se puede dar una prueba alternativa del resultado anterior simplemente construyendo un conjunto ortogonal y normalizando al final. En este caso no es difícil ver que la modificación que hay que hacer (previo a*

normalizar) es definir

$$\begin{aligned} w_0 &:= v_0 \\ w_n &:= v_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle v_i, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i \end{aligned}$$

Comúnmente se prefiere usar el proceso de la demostración dada pues en el que se acaba de presentar, a partir del segundo vector a calcular hay que obtener en cada paso una norma extra.

3. *En la demostración del teorema, la definición de w_i' para $i \geq 1$ está motivada por una idea geométrica, que aparece en la figura siguiente usada para el caso de w_1':*

Lo que estamos buscando es λ tal que $\langle v_1 - \lambda w_0, w_0 \rangle = 0$. Al resolver se obtiene $\lambda = \langle v_1, w_0 \rangle$ y este argumento se puede adaptar para los otros casos. Además note que este argumento se adapta para obtener la fórmula del punto anterior recordando que en este caso los vectores anteriores no son normales.

A continuación mostraremos algunos usos prácticos del proceso de Gram-Schmidt.

EJEMPLO 2.5. *Consideremos el conjunto S del ejemplo 2.2. Usaremos el proceso de Gram-Schmidt para asociarle un conjunto ortonormal. Para esto primero note que S es linealmente independiente en $\mathbb{R}^2$ (de hecho es una base). El primer vector w_0 queda como*

$$w_0 = \frac{(1,-1)}{\|(1,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

El vector restante se obtiene como

$$\begin{aligned} w_1' &= (1,1) - \langle (1,1), w_0 \rangle w_0 \\ &= (1,1) - \left\langle (1,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (1,1) \end{aligned}$$

Luego,

$$w_1 = \frac{w_1'}{\|w_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$$

Por otro lado, el conjunto ortonormal asociado a S es:

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

EJEMPLO 2.6. *Usar el proceso de Gram-Schmidt para asociarle un conjunto ortonormal a* $S = \{(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. *Note que* S *es linealmente independiente sobre* $\mathbb{R}$ *(de hecho una base). Definamos* $v_0 = (-1,1,1)$, $v_1 = (1,-1,1)$ *y* $v_2 = (1,1,-1)$. *Así,*

$$\begin{aligned}
w_0 &= \frac{v_0}{\|v_0\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\\
w_1' &= v_1 - \langle v_1, w_0\rangle w_0\\
&= (1,-1,1) - \left\langle (1,-1,1), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\rangle \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
&= (1,-1,1) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
&= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)
\end{aligned}$$

Entonces

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}}}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Para concluir,

$$\begin{aligned}
w_2' &= v_2 - \langle v_2, w_0\rangle w_0 - \langle v_2, w_1\rangle w_1\\
&= (1,-1,1) - \left\langle (1,-1,1), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\rangle \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
&- \left\langle (1,1,-1), \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}}}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}}}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)\\
&= (1,1,0)
\end{aligned}$$

Entonces

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

Por lo tanto, el conjunto ortonormal asociado a S *es:*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1), \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}}}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right\}.$$

Dejando de un lado los ejemplos, una consecuencia teórica del teorema de Gram-Schmidt es:

PROPOSICIÓN 2.4. *Sea* V *un* K*-espacio de dimensión finita con un producto interior* $\langle \_, \_ \rangle$. *Entonces* V *tiene una base ortonormal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\beta \subseteq V$ base de V. Apliquemos el proceso de Gram-Schmidt a β para obtener $\gamma \subseteq V$ ortonormal tal que $\langle \beta \rangle = \langle \gamma \rangle$. Esto último implica que $\langle \gamma \rangle = V$ y como γ es ortonormal, entonces γ es linealmente independiente. Luego, γ es la base buscada. □

Una pregunta muy interesante es qué tipo de beneficio tiene el conseguir una base ortonormal. Uno de ellos se encuentra en el siguiente resultado. La importancia de este es que en general encontrar la combinación lineal explícita de un vector en términos de la base puede ser complicado, cosa que no sucede con una base ortonormal.

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea V un K-espacio de dimensión finita con un producto interior $\langle \_, \_ \rangle$, y $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Para cualquier $v \in V$, tenemos:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ la combinación lineal que se obtiene al expresar a v en términos de la base. Considere $j \in \{1, \ldots, n\}$ y apliquemos a esta igualdad $\langle \_, v_j \rangle$:

$$\lambda_j = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_j \right\rangle = \langle v, v_j \rangle$$

□

En virtud del resultado anterior y de la aplicación de este al ejemplo 2.3, a los coeficientes $\langle v, v_j \rangle$ se les conoce como **coeficientes de Fourier** pues si $f \in C^0([-\pi, \pi])$ se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx)$$

Módulo un argumento de continuidad (que sucede por la desigualdad de Cauchy–Bunyakovsky-Schwartz pues esta implica que el producto interior es continuo en cada variable) se deduce que

$$A_n = \langle f, \sin(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$
$$B_n = \langle f, \cos(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx.$$

Concluimos esta sección con algunas identidades interesantes asociadas a bases ortonormales.

PROPOSICIÓN 2.6 (Identidad de Parseval). *Sea V un K-espacio de dimensión finita con un producto interior $\langle \_, \_ \rangle$, y $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Para $v, w \in V$, tenemos:*

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle v_i, v \rangle} \langle v_i, w \rangle$$

DEMOSTRACIÓN. Del resultado anterior se deduce que $w = \sum_{i=1}^{n} \langle w, v_i \rangle v_i$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle v, w \rangle &= \left\langle v, \sum_{i=1}^{n} \langle w, v_i \rangle v_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle w, v_i \rangle} \langle v, v_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, w \rangle \overline{\langle v_i, v \rangle}\end{aligned}$$

□

COROLARIO 2.1. *Sea V un K-espacio de dimensión finita con un producto interior $\langle \_, \_ \rangle$, y $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Para $v \in V$, tenemos:*

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v_i, v \rangle|^2$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$, el resultado se sigue del anterior. □

Entre los usos de la identidad de Parseval, para una función con expresión en serie de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx),$$

se deduce la identidad

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2)$$

Pero este tipo de cuestiones no las trataremos pues pertenecen al análisis armónico o funcional, simplemente es para tener una perspectiva de qué tipos de ideas se pueden desarrollar con las herramientas tratadas.

3. Operador Adjunto

DEFINICIÓN 3.1. *Sea V un K-espacio con un producto interior $\langle \_, \_ \rangle$, y V_1 y V_2 subespacios de V. Decimos que V_1 y V_2 son ortogonales, si para todo $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ tenemos que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. En caso de que $V = V_1 \oplus V_2$, decimos que V_2 es el complemento ortogonal de V_1 en V y denotamos este hecho por $V_1^{\perp} = V_2$.*

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea V un K-espacio de dimensión finita con un producto interior $\langle \_, \_ \rangle$. Si W es un subespacio de V, entonces existe $W^{\perp}$.*

DEMOSTRACIÓN. □

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea V un K-espacio de dimensión finita con producto interior $\langle \_, \_ \rangle$ y una base ortonormal $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Entonces*

$$[v]_{\beta j} = \langle v, v_j \rangle \quad \forall v \in V$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Hacemos producto interior con v_j

$$\begin{aligned}\langle v, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} \\ &= \lambda_j\end{aligned}$$

□

COROLARIO 3.1. *Sea V un K-espacio de dimensión finita con producto interior $\langle \_, \_ \rangle$ y base ortonormal $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Entonces para $T : V \to V$ transformación lineal*

$$\left([T]_{\beta}^{\beta} \right)_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle$$

PROPOSICIÓN 3.3 (Representación de Riesz). *Sea V un K-espacio de dimensión finita con producto interior $\langle \_, \_ \rangle$. Entonces para $T : V \to K$ transformación lineal existe un único $w \in V$ tal que $T(v) = \langle v, w \rangle$ para todo $v \in V$*

DEMOSTRACIÓN. Si $T = 0$ entonces $w = 0$. Si $T \neq 0$, entonces T es suprayectivo. Sabemos que $nul(T) + ran(T) = dim(V)$. Consideremos $ran(T) = 1$, entonces $nul(T) = dim(V) - 1$

Por otro lado tenemos que

$$V = nuc(T) + nuc(T)^{\perp}$$

Así, $dim\left(nuc(T)^{\perp}\right) = 1$. Elegimos $u \in nuc(T)^{\perp}$ con $u \neq 0$. Por lo que $T(u) \neq 0$.

Pondremos $w = \lambda u$. Calculando

$$\begin{aligned}T(u) &= \langle u, \lambda u \rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle u, u \rangle \\ &= \overline{\lambda} \|u\|^2\end{aligned}$$

Si ponemos $\lambda = \frac{\overline{T(u)}}{\|u\|^2}$ entonces veamos que w cumple lo deseado.

Sea $v \in V$ entonces $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in nuc(T)$ y $v_2 \in nuc(T)^\perp$. Ahora, como $v_2 \in nuc(T)^\perp$ entonces existe $\mu \in K$ tal que $\mu u = v_2$. Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\langle v, w \rangle &= \langle v_1 + v_2, w \rangle \\
&= \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \\
&= \langle v_2, w \rangle \\
&= \langle \mu u, \lambda u \rangle \\
&= \mu \overline{\lambda} \langle u, u \rangle \\
&= \mu \frac{T(u)}{\|u\|^2} \|u\|^2 \\
&= T(\mu u) \\
&= T(v_2) \\
&= T(v_1) + T(v_2) \\
&= T(v_1 + v_2) \\
&= T(v)
\end{aligned}$$

Supongamos que existe $w' \in V$ tal que $T(v) = \langle v, w \rangle$ para toda $v \in V$. Tenemos que $\langle v, w' \rangle = \langle v, w \rangle$, entonces $\langle v, w - w' \rangle = 0$.

Haciendo $v = w - w'$ tenemos que $\|w - w'\| = 0$ por lo que $w - w' = 0$. Así $w = w'$ □

DEFINICIÓN 3.2. *Sea V un K-espacio con producto interior $\langle \_, \_ \rangle$ y $T : V \to V$ un operador. Decimos $S : V \to V$ es un operador adjunto de T, si para todo $v, w \in V$*

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, s(w) \rangle$$

PROPOSICIÓN 3.4. *Sea V un K-espacio con producto interior $\langle \_, \_ \rangle$ y $T : V \to V$ un operador. Si $S, S' : V \to V$ son operadores adjuntos de T, entonces $S = S'$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\langle v, s(w) \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, S'(w) \rangle$$

Entonces $\langle v, S(w) - S'(w) \rangle = 0$. Haciendo $v = S(w) - S'(w)$, llegamos a que $\|S(w) - S'(w)\| = 0$, de donde $S(w) = S'(w)$ □

DEFINICIÓN 3.3. *Sea V un K-espacio con producto interior $\langle \_, \_ \rangle$ y $T, S : V \to V$ operadores. Decimos que S es un adjunto de T, si $\langle T(v), w \rangle = \langle v, S(w) \rangle$ para toda $v, w \in V$.*

PROPOSICIÓN 3.5. *Sea V un K-espacio con producto interior $\langle \_,\_ \rangle$ y $T,S,S' : V \to V$ operadores. Si S y S' son operadores adjuntos de T, entonces $S = S'$.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición de operador adjunto tenemos que $\langle T(v),w\rangle = \langle v,S(w)\rangle$ y $\langle T(v),w\rangle = \langle v,S'(w)\rangle$ para toda $v,w \in V$. Por lo que se tiene que $\langle v,S(w)\rangle = \langle v,S'(w)\rangle$. De donde tenemos que $\langle v,S(w)-S'(w)\rangle = 0$. En particular se vale para $v = S(w)-S'(w)$. Por lo qie $\|S(w)-S'(w)\|^2 = 0$. De aquí concluimos que $S = S'$. □

En general no podemos garantizar la existencia de un operador adjunto. Pero en caso de que si podamos hablar del operador adjunto, este es único. Por lo cual lo denotaremos por T^*.

PROPOSICIÓN 3.6. *Sea V un K-espacio con producto interior $\langle \_,\_ \rangle$ y $T : V \to V$ un operador. Entonces existe T^*.*

DEMOSTRACIÓN. Para $w \in V$, definimos $T_w : V \to K$ dado por $T_w(v) = \langle T(v),w\rangle$ para toda $v \in V$. Notemos que T_w es lineal por ser composición de transformaciones lineales. Por la proposición anterior existe un único $w' \in V$ tal que $T_w(v) = \langle v,w'\rangle$ para toda $v \in V$. Ponemos $T^*(v) = w'$, así tenemos

$$\langle T(v),w\rangle = \langle v,T^*(w)\rangle$$

Falta ver que esta asignación es lineal. Sea $w_1,w_2 \in V$ y $\lambda \in K$. Por lo que

$$\begin{aligned}\langle v,T^*(w_1+\lambda w_2)\rangle &= \langle T(v),w_1+\lambda w_2\rangle \\ &= \langle T(v),w_1\rangle + \overline{\lambda}\langle T(v),w_2\rangle \\ &= \langle v,T^*(w_1)\rangle + \langle v,\lambda T(w_2)\rangle \\ &= \langle v,T^*(w_1)+\lambda T^*(w_2)\rangle\end{aligned}$$

Entonces $\langle v,T^*(w_1+\lambda w_2)-(T^*(w_1)+\lambda T*(w_2))\rangle = 0$.
Haciendo $v = T^*(w_1+\lambda w_2)-(T^*(w_1)+\lambda T^*(w_2))$ concluimos que

$$T^*(w_1+\lambda w_2) = T^*(w_1)+\lambda T^*(w_2)$$

□

PROPOSICIÓN 3.7. *Sean V un K-espacio con producto interior $\langle \_,\_ \rangle$ y T,S operadores cuyos adjuntos existen, entonces*

1. $1_V^* = 1_V$
2. $0^* = 0$

3. $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^* \forall \lambda \in K$
4. $(ST)^* = T^* S^*$
5. $(S+T)^* = S^* + T^*$
6. $T^{**} = T$
7. *Si* T *es invertible, entonces* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

DEMOSTRACIÓN. Las demostraciones serán por la unicidad del adjunto

1. $\langle 1_V(v), w\rangle = \langle v, w\rangle = \langle v, 1_V(w)\rangle$
2. $\langle 0(v), w\rangle = \langle 0, w\rangle = 0 = \langle v, 0\rangle = \langle v, 0(w)\rangle$
3.
$$\begin{aligned}\langle \lambda T(v), w\rangle &= \lambda \langle T(v), w\rangle \\ &= \lambda \langle v, T^*(w)\rangle \\ &= \langle v, \overline{\lambda} T^*(w)\rangle\end{aligned}$$
4. $\langle ST(v), w\rangle = \langle T(v), S^*(w)\rangle = \langle v, T^*S^*(w)\rangle$
5.
$$\begin{aligned}\langle (S+T)(v), w\rangle &= \langle S(v) + T(v), w\rangle \\ &= \langle S(v), w\rangle + \langle T(v), w\rangle \\ &= \langle v, S^*(w)\rangle + \langle v, T^*(w)\rangle \\ &= \langle v, (S^* + T^*)(w)\rangle\end{aligned}$$
6.
$$\begin{aligned}\langle T^*(v), w\rangle &= \overline{\langle w, T^*(v)\rangle} \\ &= \overline{\langle T(w), v\rangle} \\ &= \langle v, T(w)\rangle\end{aligned}$$
7. Por unicidad del inverso
$$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = 1_V^* = 1_V$$

□

PROPOSICIÓN 3.8. *Sea* V *un* K*-espacio de dimensión finita con producto interior* $\langle \_, \_ \rangle$ *y base ortogonal* $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$. *Si* $T : V \to V$ *es un operador, entonces* $[T^*]_\beta^\beta = \overline{\left([T]_\beta^\beta\right)^t}$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}\left([T^*]_\beta^\beta\right)_{ij} &= \langle T^*(v_j), v_i\rangle \\ &= \langle v_j, T(v_i)\rangle \\ &= \overline{\langle T(v_i), v_j\rangle} \\ &= \overline{\left([T]_\beta^\beta\right)^t_{ij}}\end{aligned}$$

□

4. Algunos operadores especiales: Ortogonales y unitarios

En esta sección se introducirán un tipo especial de transformaciones lineales cuya definición tiene que ver con una propiedad de preservación del producto interior en un espacio. Antes de hacer esto introduciremos una terminología especial.

NOTACIÓN 4.1. *Si $T : V \to V$ es lineal, decimos que T es un operador (lineal).*

El resultado es:

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea V un K-espacio con producto interior $\langle \_, \_ \rangle$ y $\|\_\|$ la norma que este induce. Si $T : V \to V$ es un operador lineal suprayectivo, son equivalentes:*

1. *T preserva el producto interior, es decir, para cualesquiera $v, w \in V$,*
$$\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$
2. *T preserva la norma, es decir, para todo $v \in V$,*
$$\|T(v)\| = \|v\|$$
3. *T manda conjuntos ortonormales en conjuntos ortonormales*
4. *T es un isomorfismo y $T^* = T^{-1}$*

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2)$ Es claro pues $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$

$2 \Rightarrow 1)$ Es consecuencia de las identidades de polarización. En el caso real esto es:

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\|v-w\|^2$$

Mientras que en el caso complejo es:

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|v + i^k w\|^2$$

$1 \Rightarrow 3)$ Es claro, pues si $S = \{v_i \mid i \in I\} \subseteq V$ es ortonormal, entonces

$$\langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$$

$3 \Rightarrow 4)$ Para ver que T es invertible, basta con ver que T es inyectiva. Para esto vamos a ver la contención no trivial en $nuc(T) = 0$, para lo cual veremos que $V \setminus 0 \subseteq V \setminus nuc(T)$. Entonces, si $v \in V$ con $v \neq 0$, el conjunto $\left\{\frac{v}{\|v\|}\right\}$ es ortonormal, entonces $\left\{T\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\} \subseteq V$ es ortonormal. Esto implica que $T(v) \neq 0$. De hecho, observe que esto implica que T preserva la norma, lo que prueba que $3 \Rightarrow 1)$. Para concluir la implicación $3 \Rightarrow 4)$, note que por 1 se tiene que:

$$\langle Tv, w\rangle = \langle Tv, TT^{-1}w\rangle = \langle v, T^{-1}w\rangle$$

De esto se deduce $T^{-1} = T^*$ por unicidad del adjunto.

$4 \Rightarrow 1)$ Note que

$$\langle Tv, Tw\rangle = \langle v, T^*Tw\rangle = \langle v, T^{-1}Tw\rangle = \langle v, w\rangle$$

□

DEFINICIÓN 4.1. *Un operador $T: V \to V$ suprayectivo que cumple una de, y por lo tanto todas las propiedades del resultado anterior, se le llama:*

1. *Ortogonal si $K = \mathbb{R}$*
2. *Unitario si $K = \mathbb{C}$*

Recordemos que cuando un operador está definido entre espacios de dimensión finita, a este se le puede asociar una matriz respecto a cualquier base. Bajo estas hipótesis pueden agregarse más incisos de caracterización al teorema anterior como lo muestra el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.2. *Sea $T: V \to V$ un operador lineal con V de dimensión finita con $n = \dim(V)$. Son equivalentes:*

1. *T preserva el producto interior*
2. *Para todo $\beta \subseteq V$ base ortonormal,*
$$[T^*]_\beta^\beta = \left([T]_\beta^\beta\right)^{-1}$$
3. *Para toda $\beta \subseteq V$ base ortonormal, los renglones de $[T]_\beta^\beta$ son una base ortonormal de K^n*

4. *Para toda $\beta \subseteq V$ base ortonormal, las columnas de $[T]_\beta^\beta$ son una base ortonormal de K^n*

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2)$ Sea $\beta \subseteq V$ base ortonormal. Note que como T preserva en particular la norma, entonces T es inyectivo y como $\dim(V) < \aleph_0$ esto implica que T es un isomorfismo. De esto se deduce que $[T]_\beta^\beta$ es una matriz invertible.

Para concluir, al usar 4) de la proposición 4.1, se deduce que $T^* = T^{-1}$ y así:

$$[T^*]_\beta^\beta [T]_\beta^\beta = [T^*T]_\beta^\beta = \left[T^{-1}T\right]_\beta^\beta = I_n.$$

De esto se deduce que $[T^*]_\beta^\beta = \left([T]_\beta^\beta\right)^{-1}$.

$2 \Rightarrow 3)$ Dado que $[T^*]_\beta^\beta [T]_\beta^\beta = I_n$, entonces para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ se deduce que

$$\begin{aligned}
\delta_{i,j} &= \sum_{m=1}^{n} \left([T^*]_\beta^\beta\right)_{i,m} \left([T]_\beta^\beta\right)_{m,j} \\
&= \sum_{m=1}^{n} \left(\overline{[T]_\beta^\beta}^{\,t}\right)_{i,m} \left([T]_\beta^\beta\right)_{m,j} \\
&= \sum_{m=1}^{n} \overline{\left([T]_\beta^\beta\right)_{m,i}} \left([T]_\beta^\beta\right)_{m,j}
\end{aligned}$$

De esto se deduce que

$$\begin{aligned}
\delta_{j,i} &= \sum_{m=1}^{n} \left(\overline{[T]_\beta^\beta}\right)_{i,m} \left([T]_\beta^\beta\right)_{j,m} \\
&= \left\langle \left([T]_\beta^\beta\right)_j, \left([T]_\beta^\beta\right)_i \right\rangle
\end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 4)$ Dado que

$$\delta_{i,j} = \sum_{m=1}^{n} \left([T]_\beta^\beta\right)_{i,m} \overline{\left([T]_\beta^\beta\right)_{j,m}}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\delta_{j,i} &= \sum_{m=1}^{n} \left(\overline{[T]_\beta^\beta}\right)^t_{j,m} \left([T]_\beta^\beta\right)^t_{i,m} \\
&= \sum_{m=1}^{n} \overline{\left([T]_\beta^\beta\right)_{m,j}} \left([T]_\beta^\beta\right)_{m,i} \\
&= \left\langle \left([T]_\beta^\beta\right)^i, \left([T]_\beta^\beta\right)^j \right\rangle
\end{aligned}$$

$4 \Rightarrow 1)$ Notemos que si $[T]_\beta^\beta$ tiene por columnas una base ortonormal, entonces T es un isomorfismo. Además, la condición de ortonormalidad de las columnas implica que

$T^{-1} = T^*$, lo que al usar la proposición 4.1 permite concluir que T preserva el producto interior. $\square$

Los resultados anteriores dan caracterizaciones a los elementos de los siguientes conjuntos:

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ es invertible y } A^{-1} = A^*\}$$
$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ es invertible y } A^{-1} = A^*\},$$

en esta definición $A^* = \overline{A}^{\,t}$.

Estos conjuntos tienen una estructura algebraica conocida como grupo. Esto se muestra en el siguiente:

EJERCICIO 4.1. *Demuestre que $U(n)$ y $O(n)$ son cerradas bajo productos, inversos y contienen a la identidad correspondiente.*

En virtud de la definición 4.1 se tiene lo siguiente:

DEFINICIÓN 4.2. *A $U(n)$ se le conoce como el grupo unitario y a $O(n)$ como el grupo ortogonal.*

Los grupos $U(n)$ y $O(n)$ son importantes para estudiar distintas cuestiones geométricas. El precisar esto queda fuera de los objetivos del curso, pero incluimos un resultado que deja en manifiesto el tipo de información que estos guardan.

PROPOSICIÓN 4.3. *El grupo $O(2)$ consiste precisamente del conjunto de rotaciones y reflexiones de $\mathbb{R}^2$*

DEMOSTRACIÓN. Sean $Rot(\mathbb{R}^2)$ y $Ref(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de matrices de rotación y reflexión en $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

Si $A \in Rot(\mathbb{R}^2)$, entonces $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$. Note que

$$A^* = A^t = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Por otro lado,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Esto prueba que $A \in O(2)$, luego $Rot(\mathbb{R}^2) \subseteq O(2)$. Por otro lado, si $A \in Ref(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad \text{para algún } \theta \in \mathbb{R}$$

En este caso $A^* = A$ y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} = A$$

Esto muestra que $A \in O(2)$ y así $Ref(\mathbb{R}^2) \subseteq O(2)$.

Note que lo anterior demuestra que $Rot(\mathbb{R}^2) \cup Ref(\mathbb{R}^2) \subseteq O(2)$, así lo que resta es demostrar la otra contención. Para esto observe que si $A \in O(2)$, el hecho de que $AA^* = I$, implica que $\det(A) \in \{1, -1\}$. Supongamos que $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, luego

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

Analicemos los casos que provienen del determinante:

Caso 1: $\det(A) = 1$

El hecho de que $A^{-1} = A^*$ implica que

$$A_{11} = A_{22} \qquad A_{21} = -A_{12}$$

Como $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$, entonces

$$A_{11}^2 + A_{12}^2 = 1$$

Así, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$A_{11} = \cos(\theta) \quad \text{y} \quad A_{12} = \sin(\theta)$$

Luego,

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in Rot(\mathbb{R}^2)$$

Caso 2: $\det(A) = -1$

Como $A^{-1} = A^*$, entonces

$$A_{11} = -A_{22} \qquad A_{21} = A_{12}$$

Dado que $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$, entonces

$$-A_{11}^2 - A_{12}^2 = -1,$$

es decir $A_{11}^2 + A_{12}^2 = 1$. Entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $A_{11} = \cos(\theta)$ y $A_{12} = \sin(\theta)$. De esto se deduce que

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \in Ref(\mathbb{R}^2),$$

lo que concluye la prueba. □

OBSERVACIÓN 4.1.

1. *El resultado anterior es particular de $O(2)$ pues en $O(n)$ para $n \geq 3$, hay elementos que no son rotaciones ni reflexiones.*
2. *Inclusive en el caso de $U(2)$ no es fácil clasificar sus elementos pues en este caso, si $A \in U(2)$, entonces $|\det(A)| = 1$ y por lo tanto hay una infinidad de valores posibles para $\det(A)$: ¡Uno por cada valor de la circunferencia unitaria!*
   El caso más simple ocurre cuando $\det(A) = 1$, en este caso no es difícil demostrar que:
   $$\{A \in U(2) \mid \det(A) = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix} \,\middle|\, z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}$$
   Geométricamente este conjunto se puede identificar con $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$, la 3-esfera.

5. Ejercicios

Se recuerda que K siempre va a denotar a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ en esta parte de la tarea. Además, V siempre será un K-espacio vectorial con producto interior $\langle\ ,\ \rangle$ y en dicho espacio siempre se considera la norma inducida por el producto interior, a no ser que se diga lo contrario.

EJERCICIO 5.1. *Demuestre las siguientes afirmaciones:*

1. *Si* $\langle,\rangle : K \times K \to K$ *es un producto interior en* K*, entonces existe* $a \in K$ *tal que* $\langle v,w\rangle = av\overline{w}$.
2. *Existe una correspondencia biyectiva entre* K *y el conjunto de productos interiores definidos en* K.

EJERCICIO 5.2. *Demuestre que la función* $\langle\_,\_\rangle : M_{n\times m}(\mathbb{C}) \times M_{n\times m}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_{i,j}\overline{B_{i,j}},$$

es un producto interior en $M_{n\times m}(\mathbb{C})$*. A este producto interior se le conoce como el* ***producto de Frobenius***.

EJERCICIO 5.3. *Sea* $\langle\_,\_\rangle$ *un producto interior en* K^n*. Demuestra lo siguiente:*

1. *Existe* $A \in M_n(K)$ *tal que para cualquier* $x,y \in K^n$,
$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_i\overline{y_i}$$
2. *Concluir que*
$$\langle x,y\rangle = xAy^t$$
al identificar $K^n = M_{1\times n}(K)$

EJERCICIO 5.4. *Demuestre que para* $A,B \in M_n(K)$ *con* $n \in \mathbb{N}^+$, $\langle A,B\rangle = tr(\overline{B^t}A)$ *es un producto interior.*

EJERCICIO 5.5. *Sea* $\mathscr{D} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ *es derivable en* $[a,b]$ *y* $f(a) = f(b) = 0\}$.

1. *Demuestre que* $\mathscr{D} \leq \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

2. *Se define* $\langle\ ,\ \rangle : \mathscr{D} \times \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ *mediante:*
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f'(t)g'(t)dt$$
¿Es $\langle , \rangle$ *un producto interior en* $\mathscr{D}$*?*

EJERCICIO 5.6. *Demuestre que si* $S \subseteq V$ *es un conjunto ortogonal tal que* $0 \notin S$*, entonces* S *es linealmente independiente. ¿Es cierto el regreso de esta afirmación?*

EJERCICIO 5.7. *Sea* $\mathscr{P}[-1,1]$ *el espacio de funciones polinomiales reales con dominio el intervalo* $[-1,1]$*. Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *elijase una función polinomial* $P_n(x)$ *que satisfaga la ecuación:*

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0$$

Demuestre que la sucesión de funciones polinomiales $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *en* $\mathscr{P}[-1,1]$ *es ortogonal.*

EJERCICIO 5.8. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *tales que* $a < b$*. Considerese el espacio* $\mathscr{P}[a,b]$ *de todas las funciones polinomiales reales con dominio el intervalo* $[a,b]$*, con el producto interior* $\langle p, q\rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx$*.*

1. *Demuestre que si* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión ortogonal de funciones polinomiales tales que* $\partial(P_n(x)) = n$*, entonces para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $P_n(x)$ *es ortogonal a toda función polinomial de grado menor a* n*.*
2. *Demuestre que si* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *son sucesiones ortogonales de funciones polinomiales tales que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $\partial(P_n(x)) = \partial(Q_n(x)) = n$*, entonces para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $Q_n(x)$ *es un múltiplo de* $P_n(x)$*.*

EJERCICIO 5.9. *Sea* $\mathscr{L} = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)^2 dx\}$*.*

1. *Demuestre que* $\mathscr{L} \leq \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*.*
2. *Demuestre que la función* $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)g(x)dx$ *es un producto interior en* $\mathscr{L}$*.*

3. *Defínase para todo $n \in \mathbb{N}$ la función $H_n(x) = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Demuestre que $\langle H_n, H_m \rangle = n!\sqrt{\pi}\delta_{nm}$.*

EJERCICIO 5.10. *Sean $v, w \in V$ tales que $v, w \neq 0$ y $\{v, w\}$ es linealmente independiente. Demuestre que existen $z, w \in V$ tales que z es paralelo a x, w es ortogonal a x y $y = z + w$.*

EJERCICIO 5.11. *Supóngase que V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interior. Sea $x \in V$ tal que $\|x\| = 1$ y $y \in V$ tal que para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lambda x + \mu y$ es ortogonal a $4\mu x - 9\lambda y$. Encuentre $\|y\|$ y $\|2x + 3y\|$.*

EJERCICIO 5.12. *Sean $v, w \in V$ ortogonales. Demuestre que $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. ¿Es cierto el regreso de esta afirmación?*

EJERCICIO 5.13. *Sean $v, w \in V$. Demuestre que $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$.*

EJERCICIO 5.14. *Sea V un K-espacio con un producto interior $\langle \_, \_ \rangle$. Entonces $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$ para toda $v, w \in V$.*

EJERCICIO 5.15. *Sea V un K-espacio con un producto interior $\langle \_, \_ \rangle$, y T un operador en V tal que existe un real c con $0 < c < 1$ tal que $\|T(v)\| \leq c\|v\|$ para toda $v \in V$. Demuestre que el operador $1_V + T$ es inyectivo.*

EJERCICIO 5.16. *(Identidades de polarización) Sean $v, w \in V$. Demuestre que:*

1. *Si $K = \mathbb{R}$, entonces $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}\|v + w\|^2 - \frac{1}{4}\|v - w\|^2$.*
2. *Si $K = \mathbb{C}$, entonces $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|v + i^k w\|^2$.*

EJERCICIO 5.17. *Se recuerda que $\|\_\|$ es la norma inducida por el producto interior de V. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas ó falsas dando una demostración ó contraejemplo según sea el caso:*

1. *Si* $v, w \in V$ *son tales que* $v \perp w$*, entonces para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|v + \lambda w\| \geq \|v\|$.
2. *Si* $v, w \in V$ *son tales que para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|v + \lambda w\| \geq \|v\|$*, entonces* $v \perp w$.

EJERCICIO 5.18. *Sea* V *un* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial y* $v, w \in V$*. Demuestre que si* $v, w \neq 0$*, entonces:*

$$\frac{|Re(\langle v, w \rangle)|}{\|v\| \|w\|} \leq 1$$

Nota: Con esta relación es posible definir el ángulo para dos vectores v, w *en un* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial mediante la relación* $\sphericalangle(v, w) = \frac{|Re(\langle v, w \rangle)|}{\|v\| \|w\|}$.

EJERCICIO 5.19. *Sea* $\mathscr{C}((0, 2\pi), \mathbb{R})$ *el espacio vectorial de funciones continuas reales con dominio* $(0, 2\pi)$ *con el producto interior usual. Considere el subconjunto* $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *de dicho espacio, cuyos elementos son* $u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ *y para todo* $n \in \mathbb{N}^+$ *se tiene que* $u_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$ *y* $u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx)$*. Demuestre que dicho conjunto es ortonormal.*

EJERCICIO 5.20. *Para los siguientes subconjuntos de* V *aplique el proceso de Gram-Schmidt:*

- $\{(1, 1, -1, 0), (1, -1, 1, 0), (-1, 1, 1, 0)\}$ *con el producto interior usual.*
- $\{(1 + i, 2, 0, 0), (0, 2i, -1, 0), (0, 0, 4 + i, -3)\}$ *con el producto interior usual.*
- $\{1, x, x^2\}$ *con el producto interior* $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
- $\{1, x, x^2\}$ *con el producto interior* $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.
- $\{\cos(x), \cos(2x)\}$ *con el producto interior* $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.

EJERCICIO 5.21. *(Desigualdad de Bessel) Sea* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *una subconjunto ortonormal de* V*. Demuestre que para todo* $v \in V$,

$$\|v\|^2 \geq \sum_{j=1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2$$

.

EJERCICIO 5.22. *Sea* $n \in \mathbb{N}^+$*. Para* $A \in M_n(K)$ *se define* $\overline{A}_{ij} := \overline{A_{ij}}$*. Demuestre que para toda* $A \in M_n(K)$, $\overline{A}^t = \overline{A^t}$.

EJERCICIO 5.23. *Supóngase que V y W son K-espacios vectoriales normados y que $T : V \to W$ es una transformación lineal tal que para todo $v \in V$, $\|T(v)\| = \|v\|$. Demuestre que T es inyectiva.*

DEFINICIÓN 5.1. *Sea V un K-espacio vectorial normado. Una función $f : V \to K$ es acotada si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $v \in V$, $|f(v)| \leq M$.*

EJERCICIO 5.24. *Demuestre que $T \in V^*$ es acotada si y sólo si $T = 0$.*

DEFINICIÓN 5.2. *Sea V un K-espacio vectorial normado. Se dice que $T \in V^*$ es acotada si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $v \in V$, $|T(V)| \leq M\|v\|$. Además, se define $V' = \{T \in V^* \mid T \text{ es acotada}\}$.*

EJERCICIO 5.25.

1. *Demuestre que $V' \leq V^*$.*
2. *Se define una función $\|\_\|_* : V' \to \mathbb{R}$ mediante la regla de correspondencia:*

$$\|T\|_* = \sup_{v \neq 0} \frac{|T(v)|}{\|v\|}$$

Pruebe que $\|\_\|_*$ está bien definida y que da estructura de espacio vectorial normado a V'.

EJERCICIO 5.26. *Considérese $((\mathbb{R}^2)', \|\_\|_*)$, donde $\mathbb{R}^2$ tiene la norma $\|\_\|_\infty$. ¿Es esta norma inducida por un producto interior?*

EJERCICIO 5.27. *Sea $W \leq V$ de dimensión finita. Demuestre que existe $T : V \to V$ un epimorfismo tal que $T^2 = T$ y $nuc(T) = W^\perp$.*

EJERCICIO 5.28. *Sea $W \leq V$. Demuestre que $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ y encuentre un ejemplo donde la contención sea propia.*

EJERCICIO 5.29. *Sea $W \leq V$ con V de dimensión finita. Demuestre que $(W^{\perp})^{\perp} = W$.*

EJERCICIO 5.30. *Sean $W_1, W_2 \leq V$ con V de dimensión finita. Demuestre que $W_1^{\perp} + W_2^{\perp} = (W_1 \cap W_2)^{\perp}$. Encuentre un ejemplo donde esta igualdad no se cumpla si se quita la hipótesis de la dimensión finita.*

EJERCICIO 5.31. *Sea $W \leq V$ con $dim_K(V) < \infty$. Demuestre que para todo $v \in V$ existe $w_0 \in W$ tal que $\inf_{w \in W} \|v - w\| = \|v - w_0\|$. Además encuentre una forma explicíta de calcular w_0.*

EJERCICIO 5.32. *Para todo $v \in V$ encuentre el vector $w_0 \in V$ que satisface la conclusión del ejericio anterior para los siguientes espacios.*

1. *$V = \mathbb{R}^3$ y $W = \{(x, y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.*
2. *$V = \mathbb{C}^2$ y $W = \{(x + y, x - iy) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.*
3. *$V = \mathscr{P}_2[-1, 1]$ y $W = \{f \in V \mid f' = 0\}$.*

EJERCICIO 5.33. *Sea $V = P_2(\mathbb{R})$ y $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Encuentre $h \in V$ tal que $T(f) = \langle f, h\rangle$ para:*

- *$T(f) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.*
- *$T(f) = f'(0)$*

EJERCICIO 5.34. *Se define la función $\iota : V \to V^*$, cuya regla de correspondencia es $\iota(v) = \langle \_, v\rangle$.*

1. *Demuestre que ι está bien definida.*
2. *Demuestre que ι es un monomorfismo.*
3. *Demuestre que si $dim_K(V) < \infty$, entonces ι es un isomorfismo.*
4. *Usando la norma definida en el ejercicio 137, pruebe que ι es una isometría.*

EJERCICIO 5.35. *Supóngase que $K = \mathbb{R}$ y sea $T \in V^*$. Demuestre que son equivalentes:*

1. *$w_0 \in V$ satisface que para todo $v \in V$, $T(v) = \langle v, w_0\rangle$.*

2. *$w_0 \in V$ es un mínimo de la función $J_T : V \to \mathbb{R}$ definida mediante $J_T(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - T(v)$.*

EJERCICIO 5.36.

1. *Sea $W \leq V$. Demuestre que existe $S \subseteq V^*$ tal que $W^\perp = Ann(S)$.*
2. *Demuestre que si $dim_K(V) < \infty$, entonces para todo $S \subseteq V^*$ existe $W \leq V$ tal que $W^\perp = Ann(S)$.*

EJERCICIO 5.37. *Sea $(W, \langle\ ,\ \rangle_2)$ un espacio con producto interior y $T : V \to W$ una transformación lineal. Supongase que existe $S : W \to V$ tal que para todo $v \in V$ y $w \in W$ se tiene que $\langle T(v), w\rangle_2 = \langle v, S(w)\rangle$. Demuestre $S : W \to V$ es única.*

EJERCICIO 5.38. *Sean $S, T \in End(V)$ y $\lambda \in K$. Demuestre que:*

- $(1_V)^* = 1_V$.
- $(S+T)^* = S^* + T^*$.
- $(\lambda S)^* = \overline{\lambda} S^*$.
- $(ST)^* = T^* S^*$.
- *Si T es invertible entonces $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

EJERCICIO 5.39. *Supógase que $dim_K(V) < \infty$ y que $T \in End(V)$. Demuestre que:*

1. $nuc(T) = im(T^*)^\perp$.
2. $im(T) = nuc(T^*)^\perp$.
3. $nuc(T^*) = im(T)^\perp$.
4. $im(T^*) = nuc(T)^\perp$.

EJERCICIO 5.40. *Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $S : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dados por $T(x,y) = (2x-y, -x)$ y $S(z,w) = (z - iw, (2-i)w)$. Encuentre sus adjuntos T^* y S^*.*

EJERCICIO 5.41. *Demuestre que una transformación ortogonal es una reflexión o una rotación.*

EJERCICIO 5.42. *Demuestre que el inverso de una transformación ortogonal biyectiva es ortogonal.*

DEFINICIÓN 5.3. *Si $T \in End(V)$, entonces se dice que T es un operador autoadjunto si $T = T^*$. Si $A \in M_n(K)$, se dice que A es autoadjunta si L_A es un operador adjunto.*

EJERCICIO 5.43. *Sea $\mathscr{B} : K^n \times K^n \to K$ un producto interior en K^n. Se define $A_{\mathscr{B}} \in M_n(K)$ mediante: $(A_{\mathscr{B}})_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, donde e_j es el j-ésimo elemento de la base canónica de K^n.*

1. *Demuestre que si $K = \mathbb{R}$ entonces $A_{\mathscr{B}}$ es una matriz simétrica.*
2. *Demuestre que si $K = \mathbb{C}$ entonces $A_{\mathscr{B}}$ es una matriz adjunta.*

EJERCICIO 5.44. *Sean $S, T : V \to V$ dos transformaciones autoadjutas. Demuestre que ST es autoadjunta si y sólo si $ST = TS$.*

EJERCICIO 5.45. *Sea $T \in End(V)$ donde V tiene dimensión finita y $K = \mathbb{C}$. Demuestre que si para toda $v \in V$, $\langle v, T(v) \rangle \in \mathbb{R}$, entonces T es autoadjunto.*

DEFINICIÓN 5.4. *Sea $U \in End(V)$ autoadjunto. Se dice que U es positivo definido si para todo $v \in V$ se tiene que $\langle U(v), v \rangle \geq 0$.*

EJERCICIO 5.46. *Sean $S, T \in End(V)$.*

1. *De un ejemplo de un operador positivo definido.*
2. *Demuestre que si S es positivo definido entonces S^* también lo es.*
3. *Demuestre que si S y T son positivos definidos, entonces $T + S$ es positivo definido.*
4. *Si S y T son positivos definidos ¿es $S \circ T$ positivo definido?.*

EJERCICIO 5.47. *Para el conjunto de endemorfismos que son autoadjuntos se define la relación:*

$$T \preccurlyeq S, \text{ si } S - T \text{ es positivo definido.}$$

Demuestre que $(End(V), \preccurlyeq)$ *es un preórden. ¿Es parcial o total ese preórden?*

EJERCICIO 5.48. *Considerese el espacio de las funciones infinitamente diferenciales con periodo* $h > 0$*, el que se va a denotar por* $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$*, con el producto interior dado por:*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-h}^{h} f(x) g(x) dx$$

Se define $\mathscr{D} : C^{\infty}_{per}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ *mediante la regla de correspondencia:* $\mathscr{D}(f) = f'$.

1. *Demuestre que* $\mathscr{D}$ *está bien definido.*
2. *Calcule* $\mathscr{D}^*$.
3. *¿Es* $\mathscr{D}$ *unitario?*
4. *¿Es* $\mathscr{D}$ *autoadjunto?*

EJERCICIO 5.49. *Sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *con derivada continua y* $f(0) = 0$*. Demuestre que* $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx$.

DEFINICIÓN 5.5. *Sea* V *un* K*-espacio con un producto interior* $\langle \_, \_ \rangle$*, y* S *un conjunto no vacío. Un función* $f \in V^S$ *es acotada, si existe* $C \in \mathbb{R}$ *tal que* $\|f(s)\| \leq C$ *para toda* $s \in S$*. Denotamos por* V^S_b *al subsonjunto de* V^S *de todas las funciones acotadas.*

Sea n *un natural mayor que* 1*,* $S = \mathbb{Z}_n$ *y* $V = \mathbb{C}^S$*. Tenemos que* V *tiene un producto interior dado por* $\langle f, g \rangle = \sum_{s \in S} f(s) \overline{g(s)}$ *para* $f, g \in V^S$*. Cada elemento* $s \in S$ *define un elemento* $h_s \in V$ *dado por* $h_s(t) = cos(\frac{2\pi st}{n}) + isen(\frac{2\pi st}{n})$ *para todo* $t \in S$*. Dado un elemento* f *de* V*, definimos la funcón* $\widehat{f} \in V$ *dada por* $\widehat{f}(s) = \langle f, h_s \rangle = \sum_{t \in S} f(t) h_s(-t)$*. Esta función se llama la* ***transformación de Fourier discreta*** *de orden* n*.*

EJERCICIO 5.50. *Sea* V *un* K*-espacio con un producto interior* $\langle \_, \_ \rangle$*, y* S *un conjunto no vacío. Entonces* V^S_b *es un subespacio de* V^S*.*

EJERCICIO 5.51. *Sea V un K-espacio con un producto interior $\langle \_, \_ \rangle$, n un natural mayor que* 1*, $S = \mathbb{Z}_n$ y $V = \mathbb{C}^S$. Entonces $F: V \longrightarrow V$ dada por $F(f) = \widehat{f}$ para $f \in V$ es un isomorfismo.*

EJERCICIO 5.52. *Sea V un K-espacio con un producto interior $\langle \_, \_ \rangle$, n un natural mayor que* 1*, $S = \mathbb{Z}_n$ y $V = \mathbb{C}^S$.. Entonces:*

1. *$f(s) = \frac{1}{n}\widehat{\widehat{f}}(-s)$ para toda $f \in V$ y $s \in S$.*
2. *$\|f\| = \frac{1}{\sqrt{n}}\|\widehat{f}\|$ para toda $f \in V$.*

Miscelánea.

Elijan un ejercicio para entregar de esta sección.

Para los que les gusta la geometría.

EJERCICIO 5.53. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interior. Para $f : V \to V$ una isometría, se define una función $T_f : V \to V$ mediante la regla de correspondencia* $T_f(x) = f(x) - f(0)$.

1. *Demuestre que T_f es una transformación lineal.*
2. *Demuestre que T_f es una isometría y un monomorfismo.*
3. *Demuestre que toda isometría es la composición de un operador ortogonal con una traslación.*

Para los que les gusta el cálculo.

DEFINICIÓN 5.6. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interior. Se dice que una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge débilmente a x en V, si para todo $y \in V$ se tiene que* $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$.

EJERCICIO 5.54.

1. *Demuestre que si una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge, entonces dicha sucesión converge débilmente.*

2. *Supongase que* $dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$. *Demuestre que la sucesión* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *converge débilmente a* x, *si y sólo si pata todo* $f \in V^*$ *se tiene que* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Para los que les gustan los p-ádicos.

EJERCICIO 5.55. *Sea* $p \in \mathbb{N}$ *un primo. ¿Satisface la norma p-ádica en* $\mathbb{Q}_p$ *la identidad del paralelogramo?*

Para los que les gusta el álgebra.

EJERCICIO 5.56. *Sea* $Y \leq V^*$ *y* $\{v_1,...,v_n\} \subseteq V$ *tal que el conjunto* $\{[v_1],...,[v_n]\} \subseteq V/Ann(Y)$ *es linealmente independiente. Demuestre que para cualesquiera* $a_1,...,a_n \in K$, *existe* $f \in Y$ *tal que para todo* $i \in \{1,...,n\}$, $f(v_i) = a_i$.

Capítulo 5

Determinantes

"Las matemáticas no permiten hipocresía ni vagueza."

Stendahl.

En este capítulo se darán un par de definiciones que permitirán estudiar elementos especiales en el espacio $K^{M_{m\times n}(K)}$ para K cualquier campo. Al estudiar las propiedades básicas de dichos conceptos se llegará a la definición de determinante, el cual será un elemento especial del espacio mencionado.

Posteriormente se estudiarán las propiedades del determinante y para concluir se aplicarán los conceptos desarrollados para dar soluciones explícitas a sistemas de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones e incógnitas, teorema que se conoce como la regla de Cramer.

1. Introducción al grupo de permutaciones

Recordando de combinatoria, una permutación es una forma de acomodar n-objetos en n-lugares. Ahora, esto dicho de manera formal, si ponemos $I_n = \{1,\dots,n\}$ para n natural, entonces una permutación es una función $f : I_n \to I_n$ que es biyectiva. En este caso lo llamaremos una permutación de n elementos, al conjunto de permutaciones n elementos la denotaremos por S_n.

EJEMPLO 1.1. *1.* $\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ *dado por*

$$\sigma(1) = 2 \quad \sigma(2) = 3 \quad y \quad \sigma(3) = 1$$

2. $\sigma : I_n \to I_n$ *con* $\sigma_n = 1_{I_n}$

Veamos que el ejemplo 1 lo podemos escribir en una tabla:

x	$\sigma(x)$
1	*2*
2	*3*
3	*1*

Escribirlo en forma de tabla puede ser un poco engorroso por lo que lo escribiremos como una matriz de 2 por 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

En general eso lo podemos hacer para toda permutación $\sigma \in S_n$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

En particular $\sigma = 1_{I_n}$ *se escribe*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Por otro lado es bueno recordar que las permutaciones son funciones por lo cual se podrán componer, es decir, podemos pensar en la composición como una operación binaria en S_n puesto que composición de funciones biyectivas es una función biyectiva.

$$\circ : S_n \times S_n \to S_n$$

Si tenemos $\sigma, \tau \in S_n$, entonces la matríz que representa a $\sigma\tau$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 1.2. *Sean* $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculamos*

$$\begin{aligned} \sigma\tau &= \sigma\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(3) & \sigma(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \tau\sigma &= \tau\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \tau(3) & \tau(1) & \tau(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

Ahora recordemos que es un grupo.

DEFINICIÓN 1.1. *Un grupo es un conjunto G con una operación (función binaria)* $*: G \times G \to G$ *notacionalmente pondremos* $g * h := *(g,h)$ *para* $g,h \in G$*, esta operación cumple*

1. *Asociatividad* $(a*b)*c = a*(b*c)$ *para toda* $a,b,c \in G$
2. *Neutro* $\exists 1 \in G$ *tal que* $\forall a \in G$ $a*1 = a = 1*a$
3. *Inverso* $\forall a \in G$, $\exists a^{-1} \in G$ *tal que* $a*a^{-1} = 1 = a^{-1}*a$

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces* S_n *es un grupo.*

DEMOSTRACIÓN. La operación que consideraremos es la composición

1. Asociatividad: La composición de funciones es asociativa.
2. Neutro: La función identidad funge como el neutro de la operación.
3. Inverso: Como las funciones biyectivas son invertibles y sus inversos son biyectivos, entonces se cumple el axioma del inverso.

□

Calcular el inverso es relativamente sencillo. Consideremos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Realmente para ver quien es σ^{-1}, escribimos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Y vemos que en σ, 2 va a 1, por lo que en σ^{-1}, 1 va en 2, análogamente en σ, 3 va a 2, en σ^{-1}, 2 va a 3 y en σ, 1 va en 3, en σ^{-1}, 3 va a 1.
Ahora bien, la notación que estamos usando es muy pesada, por lo que usaremos una notación mas compacta, para

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Usaremos $(\sigma(1) \dots \sigma^{k_1}(1)) \dots (\sigma(s) \dots \sigma^{k_s}(s))$ donde para $i,j = 1,\dots,s$ no existe $a,b \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sigma^a(i) = \sigma^b(j) \quad \text{con} \quad i \neq j$$

Esto puede parecer complicado por lo que lo explicaremos. Sea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que

$$\sigma(1) = 2 \quad \sigma^2(1) = 3 \quad \sigma^3(1) = 1$$

Por lo cual escribiremos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora veamos $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ En este caso $\sigma(1) = 3$, $\sigma^2(1) = 5$, $\sigma^3(1) = 2$, $\sigma^4(1) = 4$, $\sigma^5(1) = 1$, $\sigma^6(1) = 3$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 1.3.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que

$$\sigma(1) = 4 \quad \sigma^2(1) = 5 \quad \sigma^3(1) = 1$$
$$\sigma(2) = 3 \quad \sigma^2(2) = 2$$

por lo que $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

EJEMPLO 1.4.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aquí

$$\sigma(1) = 3 \quad \sigma^2(1) = 1$$
$$\sigma(2) = 2$$
$$\sigma(4) = 4$$

De donde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} (2)(4)$. *Cuando tengamos un único símbolo lo omitiremos por lo que* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$
Notemos que $1_{I_n} = (1)\dots(n)$ *por lo que en este caso escribiremos* $1_{I_n} = (1)$

PROPOSICIÓN 1.2. *Sea* $\sigma \in S_n$. *Entonces* σ *es producto de transposiciones.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que a partir de esta igualdad, es fácil ver que se cumple

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_n \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}$$

□

Ahora podemos definir $sgn : S_n \to \{-1,1\}$ como $sgn(\sigma) = (-1)^n$ donde n es el número de transposiciones sucesivas para expresar σ. Obviamente este número no es único, pero cualesquiera 2 difieren en un número par por lo que la función está bien definida.

A las permutaciones con $sgn = 1$ las llamaremos pares, y al conjunto de estas las denotaremos por A_n, a las permutaciones con $sgn = -1$, las llamaremos impares y las denotamos por B_n. Esta última notación para B_n, no es estándar.
Una permutación que mueve dos símbolos la llamamos una transposición.

2. Funciones n-lineales y definición de determinante

DEFINICIÓN 2.1. *Decimos que $T \in K^{M_{m\times n}(K)}$ es n-lineal si para cualquier $A \in M_{m\times n}(K)$ e $i \in \{1,\dots,n\}$, la función*

$$T(A)_i : K^m \to K$$

Con regla de correspondencia

$$T(A)_i(x) = T(A^1|\dots|A^{i-1}|x|A^{i+1}|\dots|A^n),$$

es lineal

EJEMPLO 2.1. *La función constante con valor 0,*

$$0 : M_{m\times n}(K) \to K,$$

es n-lineal

Lo anterior muestra que el conjunto de funciones n-lineales es no vacío. Más aún;

PROPOSICIÓN 2.1. *El conjunto de funciones n-lineales es subespacio de $K^{M_{m\times n}(K)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que si $T,S \in K^{M_{m\times n}(K)}$ son n-lineales y $\lambda \in K$, entonces $\lambda T + S \in K^{M_{m\times n}(K)}$ es n-lineal.

Dados $A \in M_{m\times n}(K)$ e $i \in \{1,\dots,n\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\lambda T+S)(A)_i(\mu x+y) &= (\lambda T+S)(A^1|\dots|A^{i-1}|\mu x+y|A^{i+1}|\dots|A^n)\\
&= \lambda T(A^1|\dots|A^{i-1}|\mu x+y|A^{i+1}|\dots|A^n) + S(A^1|\dots|A^{i-1}|\mu x+y|A^{i+1}|\dots|A^n)\\
&= \lambda T(A)_i(\mu x+y) + S(A)_i(\mu x+y)\\
&= \lambda(\mu T(A)_i(x) + T(A)_i(y)) + (\mu S(A)_i(x) + S(A)_i(y))\\
&= \mu(\lambda T(A)_i(x) + S(A)_i(x)) + \lambda T(A)_i(y) + S(A)_i(y)\\
&= \mu(\lambda T+S)(A)_i(x) + (\lambda T+S)(A)_i(y)
\end{aligned}$$

Como $\mu \in K$ y $x, y \in K^m$ fueron arbitrarios, se deduce el resultado buscado. $\square$

Es importante señalar que el resultado anterior se puede decir así:

1. La suma de dos funciones n-lineales es n-lineal.
2. El producto de una función n-lineal con un escalar sigue siendo n-lineal.

Como una aplicación de estas ideas tenemos lo siguiente:

COROLARIO 2.1. *Definimos la función*

$$\det : M_n(K) \to K$$

mediante

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}.$$

Esta función es n-lineal.

DEMOSTRACIÓN. Por el resultado anterior basta con ver que dado $\sigma \in S_n$, la función $T_\sigma(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}$ es n-lineal. En efecto, notemos que dado $i \in \{1, \dots, n\}$, para $x \in K^n$ se tiene que

$$\begin{aligned} T_\sigma(A)_i(x) &= T_\sigma(A^1|\dots|A^{i-1}|x|A^{i+1}|\dots|A^n) \\ &= \left(\prod_{\substack{j=1 \\ \sigma(j) \neq i}}^{n} A_{j\sigma(j)} \right) x_{\sigma^{-1}(i)} \end{aligned}$$

Esto muestra que $T_\sigma(A)_i : K^n \to K$ se obtiene como composición de las funciones $\pi_{\sigma^{-1}(i)} : K^n \to K$, la proyección en la $\sigma^{-1}(i)$-ésima entrada, y $\mu : K \to K$ dada por

$$\mu(x) = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ \sigma(j) \neq i}}^{n} A_{j\sigma(j)} \right) x,$$

mediante $T_\sigma(A)_i = \mu \circ \pi_{\sigma^{-1}(i)}$. Dado que ambas funciones en la composición son lineales, $T_\sigma(A)_i$ lo es. $\square$

La definición de la función anterior puede parecer abstracta y complicada, sin embargo, es una función bien conocida que simplemente se ha escrito así pues tiene ciertas ventajas el hacerlo (las cuales veremos conforme avance el capítulo). Para tomar intuición analizaremos un par de casos particulares de esta.

EJEMPLO 2.2. *Para describir* $\det : M_2(K) \to K$ *notemos que* $S_2 = \{(1), \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\}$. *Entonces en la definición hay dos sumandos:*

$c_1)$ $\sigma = (1)$. *En este caso* $sgn(\sigma) = 1$ *y además*

$$\prod_{i=1}^{2} A_{i,\sigma(i)} = A_{1,\sigma(1)}A_{2,\sigma(2)} = A_{1,1}A_{2,2}$$

$c_2)$ $\sigma = (1\,2)$. *Dado que* $sgn(\sigma) = -1$, *note que*

$$\prod_{i=1}^{2} A_{i,\sigma(i)} = A_{1,2}A_{2,1}$$

Por lo tanto

$$\det(A) = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1},$$

que es la conocida fórmula del determinante para matrices de 2×2 *con coeficientes reales.*

EJEMPLO 2.3. *Describamos la regla de correspondencia de* $\det : M_3(K) \to K$. *En este caso* $S_3 = \{(1), \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\}$. *Al analizar los casos:*

$c_1)$ $\sigma = (1)$, $sgn(\sigma) = 1$ *y*

$$\prod_{i=1}^{3} A_{i,\sigma(i)} = A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}$$

$c_2)$ $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, $sgn(\sigma) = -1$ *y*

$$\prod_{i=1}^{3} A_{i,\sigma(i)} = A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3}$$

$c_3)$ $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$, $sgn(\sigma) = -1$ *y*

$$\prod_{i=1}^{3} A_{i,\sigma(i)} = A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1}$$

$c_4)$ $\sigma = \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$, $sgn(\sigma) = -1$ *y*

$$\prod_{i=1}^{3} A_{i,\sigma(i)} = A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2}$$

$c_5)$ $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $sgn(\sigma) = 1$ *y*

$$\prod_{i=1}^{3} A_{i,\sigma(i)} = A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1}$$

$c_6)$ $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $sgn(\sigma) = 1$ *y*

$$\prod_{i=1}^{3} A_{i,\sigma(i)} = A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2}$$

De esto se deduce que

$$\begin{aligned} det(A) &= A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} \\ &= A_{1,1}(A_{2,2}A_{3,3} - A_{3,2}A_{2,3}) - A_{1,2}(A_{2,1}A_{3,3} - A_{2,3}A_{3,1}) + A_{1,3}(A_{2,1}A_{3,2} - A_{2,2}A_{3,1}) \end{aligned}$$

Que es el conocido desarrollo "por menores" respecto al primer renglón del determinante de una matriz de 3×3 *con coeficientes reales.*

Antes de discutir la importancia de la definición dada en el corolario 2.1 introduciremos un nuevo concepto:

DEFINICIÓN 2.2. *Una función n-lineal* $T \in K^{M_n(K)}$ *es alternante si siempre que* T *se evalúa en una matriz con dos columnas consecutivas iguales, es cero.*

EJEMPLO 2.4. *La función constante con valor cero en* $K^{M_n(K)}$ *es alternante.*

Un ejemplo no trivial de la definición es:

PROPOSICIÓN 2.2. *La función* $\det : M_n(K) \to K$ *del corolario 2.1 es alternante.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \,\text{es par}\}$ y definamos $B_n = S_n \setminus A_n$. Ahora, sea $A \in M_n(K)$ tal que $A^i = A^{i+1}$ para algún $i \in \{1,\dots,n-1\}$. Observe que $\tau :=$ $(i\ \ i+1) \in B_n$ define una biyección $A_n \xrightarrow{\tau\cdot} B_n$. Luego,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma\in A_n} sgn(\sigma)\prod_{j=1}^{n} A_{j,\sigma(j)} + \sum_{\sigma\in B_n} sgn(\sigma)\prod_{j=1}^{n} A_{j,\sigma(j)} \\ &= \sum_{\sigma\in A_n} sgn(\sigma)\prod_{j=1}^{n} A_{j,\sigma(j)} + \sum_{\sigma\in A_n} sgn(\tau\sigma)\prod_{j=1}^{n} A_{j,\tau\sigma(j)} \\ &= \sum_{\sigma\in A_n} sgn(\sigma)\prod_{j=1}^{n} A_{j,\sigma(j)} - \sum_{\sigma\in A_n} sgn(\sigma)\prod_{j=1}^{n} A_{j,\tau\sigma(j)}. \end{aligned}$$

Respecto al segundo sumando notemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n} A_{j,\tau\sigma(j)} &= \prod_{j=1}^{n} A_{(\tau\sigma)^{-1}(j),j} \\
&= \prod_{j=1}^{n} A_{\sigma^{-1}\tau^{-1}(j),j} \\
&= \prod_{j=1}^{n} A_{\sigma^{-1}\tau(j),j} \\
&= \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i,i+1}}^{n} A_{\sigma^{-1}\tau(j),j} \right) A_{\sigma^{-1}\tau(i),i} A_{\sigma^{-1}\tau(i+1),i+1} \\
&= \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i,i+1}}^{n} A_{\sigma^{-1}\tau(j),j} \right) A_{\sigma^{-1}\tau(i),i+1} A_{\sigma^{-1}\tau(i+1),i} \\
&= \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i,i+1}}^{n} A_{\sigma^{-1}(j),j} \right) A_{\sigma^{-1}\tau\tau(i+1),i+1} A_{\sigma^{-1}\tau\tau(i),i} \\
&= \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i,i+1}}^{n} A_{\sigma^{-1}(j),j} \right) A_{\sigma^{-1}(i+1),i+1} A_{\sigma^{-1}(i),i} \\
&= \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i,i+1}}^{n} A_{\sigma^{-1}(j),j} \right) A_{\sigma^{-1}(i),i} A_{\sigma^{-1}(i+1),i+1} \\
&= \prod_{j=1}^{n} A_{\sigma^{-1}(j).j} \\
&= \prod_{j=1}^{n} A_{j,\sigma(j)},
\end{aligned}$$

donde note que en la quinta igualdad se usa la hipótesis de que $A^i = A^{i+1}$. Por lo tanto ambos sumandos se cancelan y así $\det(A) = 0$ □

Denotemos por $Alt_n(K) = \{T \in K^{M_n(K)} \mid T \text{ es alternante}\}$. Notemos que del resultado anterior se deduce que $\det \in Alt_n(K)$, por lo que este conjunto es siempre no vacío. Más aún, se tiene la siguiente propiedad.

PROPOSICIÓN 2.3. *Para cualquier $n \in \mathbb{N}^+$ y K campo, $Alt_n(K) \leq K^{M_n(K)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio □

La siguiente meta de la sección será estudiar el espacio $Alt_n(K)$. El primer resultado en esta dirección se presenta a continuación:

PROPOSICIÓN 2.4. *Con las hipótesis y notación del capítulo 3 (tema 3),*[1] *sean* $A \in M_n(K)$ *y* $\delta \in Alt_n(K)$. *Entonces, para cualquier* $i, j \in \{1, ..., n\}$ *y* $\lambda \in K$, *se tiene que:*

1. $\delta(\mathscr{I}^*_{i,j}(A)) = -\delta(A)$
2. $\delta(\mathscr{M}^*_{\lambda,i}(A)) = \lambda\delta(A)$
3. $\delta(\mathscr{S}^*_{\lambda,i,j}(A)) = \delta(A)$

DEMOSTRACIÓN. Para 1) note que basta con hacer el caso en el que $j = i+1$, ya que teniendo este resultado y el hecho de que

$$\mathscr{I}^*_{i,j} = \mathscr{I}^*_{i,i+1} \circ \mathscr{I}^*_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ \mathscr{I}^*_{j-2,j-1} \circ \mathscr{I}^*_{j-1,j} \circ \cdots \circ \mathscr{I}^*_{i+1,i+2} \circ \mathscr{I}^*_{i,i+1},$$

si $i < j$. Entonces, por ser δ alternante:

$$\delta(A^1|\dots|A^{i-1}|A^i + A^{i+1}|A^i + A^{i+1}|\dots|A^n) = 0$$

Al usar la n-linealidad de δ, podemos escribir el lado izquierdo de la igualdad anterior como:

$$\begin{aligned}
\delta(A^1|\dots|A^{i-1}|A^i + A^{i+1}|A^i + A^{i+1}|\dots|A^n) &= \delta(A^1|\dots|A^{i-1}|A^i|A^i|\dots|A^n) + \delta(A^1|\dots|A^{i-1}|A^i|A^{i+1}|\dots|A^n) \\
&\quad + \delta(A^1|\dots|A^{i-1}|A^{i+1}|A^i|\dots|A^n) + \delta(A^1|\dots|A^{i-1}|A^{i+1}|A^{i+1}|\dots|A^n) \\
&= \delta(A^1|\dots|A^{i-1}|A^i|A^{i+1}|\dots|A^n) + \delta(A^1|\dots|A^{i-1}|A^{i+1}|A^i|\dots|A^n) \\
&= \delta(A) + \delta(\mathscr{I}^*_{i,j}(A)),
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se ha usado la n-linealidad de δ.

El resultado se deduce pues lo anterior implica que

$$\delta(A) + \delta(\mathscr{I}^*_{i,j}(A)) = 0.$$

Respecto a 2) la observación es trivial por definición de n-linealidad, ya que

$$\delta(\mathscr{M}^*_{\lambda,i}(A)) = \delta(A)_i(\lambda A^i) = \lambda\delta(A)_i(A^i) = \lambda\delta(A).$$

Para concluir, la afirmación 3) se deduce por n-linealidad y alternancia pues

$$\delta(\mathscr{S}^*_{\lambda,i,j}(A)) = \delta(A)_j(\lambda A^i + A^j) = \lambda\delta(A)_j(A^i) + \delta(A)_j(A^j) = \delta(A).$$

[1] Recuerde que $\mathscr{E}^*$ es la operación por columnas correspondiente a la operación $\mathscr{E}$ por renglones.

□

De estos resultados se obtienen dos más, los cuales se presentan a continuación. El primero de ellos dice que en la definición de alternancia "podemos liberarnos de las columnas consecutivas".

COROLARIO 2.2. *Sea* $T \in K^{M_n(K)}$ *una función n-lineal. Entonces,* $T \in Alt_n(K)$ *si y sólo si* T *es cero en todas las matrices que tengan dos columnas repetidas.*

COROLARIO 2.3. *Si* $\delta \in Alt_n(K)$*, entonces para cualquier* $A \in M_n(K)$ *con* $ran(A) < n$*, se tiene que* $\delta(A) = 0$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, supongamos que $A \in M_n(K)$ es tal que $ran(A) < n$. Esto implica que existe $j \in \{1,...,n\}$ tal que $A^j = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \lambda_i A^i$. Entonces,

$$\begin{aligned}\delta(A) &= \delta(A^1|\dots|A^{j-1}|A^j|A^{j+1}|\dots|A^n)\\ &= \delta\left(A^1\middle|\dots\middle|A^{j-1}\middle|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\lambda_i A^i\middle|A^{j+1}\middle|\dots\middle|A^n\right)\\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\lambda_i\delta(A^1|\dots|A^{j-1}|A^i|A^{j+1}|\dots|A^n).\end{aligned}$$

Como para cada $i \in \{1,...,n\}$ con $i \neq j$ la matriz $(A^1|\dots|A^{j-1}|A^i|A^{j+1}|\dots|A^n) \in M_n(K)$ tiene al menos dos columnas iguales, entonces δ valuado en todas estas matrices es cero. Por lo tanto, $\delta(A) = 0$. □

Para continuar con nuestro estudio vamos a introducir una nueva definición motivada del siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.5. *Con la notación del corolario 2.1,*

$$\det(I_n) = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que $(I_n)_{i,j} = \delta_{i,j}$, entonces dada $\sigma \in S_n$, se tiene que $\prod_{i=1}^{n}(I_n)_{i,\sigma(i)} \neq 0$ si y sólo si para cualquier $i \in \{1,...,n\}$, $\sigma(i) = i$. Por lo tanto,

$$\det(I_n) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(I_n)_{i,\sigma(i)} = sgn((1))\prod_{i=1}^{n}(I_n)_{i,i} = 1$$

□

Este último resultado aunado a la descripción de det para los valores particulares de $n = 2,3$ hacen plausible introducir lo siguiente.

DEFINICIÓN 2.3. *Un determinante (de dimensión n) sobre un campo K es una función alternante, $\delta \in Alt_n(K)$, tal que*

$$\delta(I_n) = 1.$$

EJEMPLO 2.5. *La función* det *del corolario 2.1 es un determinante. Note que la función cero es un ejemplo de una función alternante que no es un determinante.*

La idea de determinante nos permitirá estudiar el espacio $Alt_n(K)$. Para esto, nuevamente requerimos de algunos resultados previos de carácter general. En los siguientes resultados nuevamente usaremos la notación usada en el tema 3 del capítulo 3.

PROPOSICIÓN 2.6. *Sean $\delta \in Alt_n(K)$ un determinante y $E \in M_n(K)$ una matriz elemental. Entonces, para cualquier $A \in M_n(K)$ se cumple que*

$$\delta(AE) = \delta(A)\delta(E).$$

DEMOSTRACIÓN. Si $E = \mathscr{E}^*(I_n)$, recuerde que $AE = \mathscr{E}^*(A)$. Luego, hay tres casos que analizar, los cuales vienen de la operación elemental que se aplica:

Caso 1: $\mathscr{E} = \mathscr{I}^*_{i,j}$. Entonces por la proposición 2.4 se tiene que $\delta(AE) = \delta(\mathscr{E}^*(A)) = -\delta(A)$. Además, $\delta(E) = -1$, por lo que en este caso se tiene el resultado.

Caso 2: $\mathscr{E} = \mathscr{M}^*_{\lambda,i}$. Al usar nuevamente la proposición 2.4 se tiene que $\delta(AE) = \delta(\mathscr{E}^*(A)) = \lambda\delta(A)$. Por otro lado, note que en este caso $\delta(E) = \lambda$, de lo que se deduce el resultado.

Caso 3: $\mathscr{E} = \mathscr{S}^*_{\lambda,i,j}$. En este caso la proposición 2.4 dice que $\delta(AE) = \delta(\mathscr{E}^*(A)) = \delta(A)$. Por otro lado, $\delta(E) = 1$, lo que concluye la prueba. $\square$

El siguiente resultado será crucial para lo que se busca pues básicamente nos ayudará para liberar el resultado anterior para cualesquiera dos matrices.

PROPOSICIÓN 2.7. *Sea $A \in M_n(K)$. Entonces $A \in GL_n(K)$ si y sólo si A es producto de matrices elementales.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Si $A \in GL_n(K)$, denotemos por $B := A^{-1}$. Dado que $B \in GL_n(K)$, entonces las columnas de B forman una base de K^n, en particular en la columna B^1 existen entradas no cero y sea $B_{m,1} \in K$ tal que $m = \text{mín}\{l \in \{1,...,n\} \mid B_{l,1} \neq 0\}$. Al considerar el producto

$$\mathscr{I}_{m,1}(I_n)B = \mathscr{I}_{m,1}(B), \tag{8}$$

se obtiene una matriz donde la entrada $(1,1)$ es no cero pues esta es $B_{m,1}$. Luego, al multiplicar la matriz de la ecuación 8 por la izquierda con la matriz $\mathscr{M}_{B_{m,1}^{-1},1}(I_n)$, se obtiene una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ * & * & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

Sea $s \in \{2,...,n\}$ y denote por $d(s)$ al inverso aditivo de la entrada $(s,1)$ de la matriz anterior. Al multiplicar esta por la izquierda con $\mathscr{S}_{d(s),1,s}(I_n)$ para cada $s \in \{2,...,n\}$ se obtiene una matriz $\tilde{B}$ tal que $\tilde{B}^1 = e_1$. Note que por construcción $\tilde{B} = C_1 B$, donde $C_1 \in M_n(K)$ es producto de matrices elementales, en particular $C_1 \in GL_n(K)$. Así, $\tilde{B} \in GL_n(K)$ pues esta es producto de matrices invertibles. Luego, las columnas de $\tilde{B}$ forman una base de K^n y en particular $\tilde{B}^2 \neq 0$. Así, se puede considerar $\tilde{B}_{m',2} \in K$ tal que $m' = \text{mín}\{l \in \{2,...,n\} \mid \tilde{B}_{l,2} \neq 0\}$. Entonces se puede repetir el proceso anterior para obtener una matriz $C_2 \in GL_n(K)$ que es producto de matrices elementales, tal que $(C_2\tilde{B})^1 = e_1$ y $(C_2\tilde{B})^2 = e_2$. Más aún, se puede iterar este proceso para conseguir una colección de matrices $C_1,...,C_n \in GL_n(K)$ todas producto de matrices elementales tales que $C_n \cdot ... \cdot C_1 B = I_n$. De esta igualdad se deduce por unicidad del inverso que $A = C_n \cdot ... \cdot C_1$, lo que concluye el resultado.

$\Leftarrow$) Es claro pues las matrices elementales son invertibles y el producto de matrices invertibles es invertible. $\square$

NOTA 2.1. *El resultado análogo al anterior vale si se usan en lugar de operaciones elementales por renglones, las operaciones elementales por columnas, haciendo los ajustes obvios.*

Retomando lo que se está trabajando, el primer resultado dice que los determinantes son funciones multiplicativas.

PROPOSICIÓN 2.8. *Si $\delta \in Alt_n(K)$ es un determinante, entonces para cualesquiera $A, B \in M_n(K)$ se cumple que*

$$\delta(AB) = \delta(A)\delta(B).$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que como $ran(AB) \leq \text{mín}\{ran(A), ran(B)\}$, si $ran(A) < n$ o $ran(B) < n$, entonces $ran(AB) < n$, lo que implica que ambos lados de la igualdad son cero por el corolario 2.3. Así, lo que resta probar es que la igualdad sucede si $ran(A) = ran(B) = n$, es decir, si $A, B \in GL_n(K)$. En tal caso, por el resultado anterior existen $E_1, \ldots, E_r \in M_n(K)$ matrices elementales tales que $B = E_1 \cdot \ldots \cdot E_r$. Entonces el resultado se sigue de un argumento inductivo en el lema 2.6 pues:

$$\begin{aligned}
\delta(AB) &= \delta((AE_1 \cdot \ldots \cdot E_{r-1})E_r) \\
&= \delta(AE_1 \cdot \ldots \cdot E_{r-1})\delta(E_r) \\
&\;\;\vdots \\
&= \delta(A)\delta(E_1) \cdot \ldots \cdot \delta(E_r) \\
&= \delta(A)\delta(E_1E_2)\delta(E_3) \cdot \ldots \cdot \delta(E_r) \\
&\;\;\vdots \\
&= \delta(A)\delta(E_1 \cdot \ldots \cdot E_r) \\
&= \delta(A)\delta(B)
\end{aligned}$$

□

Como consecuencia de los resultados anteriores y las técnicas tratadas, se deduce el siguiente importante resultado, que es el resultado más importante de la sección.

PROPOSICIÓN 2.9. *Para cualquier campo K, existe un único determinante sobre K de dimensión n.*

DEMOSTRACIÓN. Dados K un campo y $n \in \mathbb{N}^+$, supongamos que $\delta, \delta' \in Alt_n(K)$ son determinantes. Lo único que resta probar es que estas funciones tienen la misma regla de correspondencia, para lo que consideremos $A \in M_n(K)$. Note que si $ran(A) < n$, entonces $\delta(A) = \delta'(A) = 0$ por el corolario 2.3. Si por otro lado, $ran(A) = n$, entonces existen

$E_1,...,E_r \in M_n(K)$ elementales tales que $A = E_1 \cdot ... \cdot E_r$. Note que de la proposición 2.4 se deduce que $\delta(E_i) = \delta'(E_i)$ para cada $i \in \{1,...,r\}$. Así,

$$\delta(A) = \delta(E_1) \cdot ... \cdot \delta(E_r) = \delta'(E_1) \cdot ... \cdot \delta'(E_r) = \delta'(A)$$

□

NOTA 2.2. *El resultado anterior dice que hay un único determinante, y como por distintos resultados anteriores la función del corolario 2.1,* $\det : M_n(K) \to K$*, es un determinante, entonces a partir de ahora le diremos simplemente* ***el determinante (de dimensión n)*** *como seguramente el lector lo hacia, al menos para el caso real y complejo.*

Por otro lado, recuerde que todos los resultados que se han ido obteniendo tenían un trasfondo, pues lo que se dijo es que estos permitían estudiar el espacio $Alt_n(K)$. El siguiente resultado hace esto y muestra que aunque las definiciones pueden ser abstractas, dicho espacio no es tan grande desde el punto de vista del álgebra lineal.

COROLARIO 2.4. *Para cualquier campo K y $n \in \mathbb{N}^+$, se tiene que*

$$Alt_n(K) = \langle \det \rangle$$

En particular $\dim(Alt_n(K)) = 1$ *y así* $Alt_n(K) \cong K$.

DEMOSTRACIÓN. Anteriormente se vio $\det \in Alt_n(K)$, por lo que $\langle \det \rangle \subseteq Alt_n(K)$. Para la contención en el otro sentido, sea $\delta \in Alt_n(K)$ no cero. Defina la función $\hat{\delta} : M_n(K) \to K$ que tiene por regla de correspondencia $\hat{\delta}(A) = \delta(I_n)^{-1}\delta(A)$. Note que como $\hat{\delta}$ es la función δ multiplicada por un escalar no cero, entonces $\hat{\delta} \in Alt_n(K)$ y, por definición $\hat{\delta}(I_n) = 1$. Esto muestra que $\hat{\delta}$ es un determinante, así, por el teorema anterior, $\hat{\delta} = \det$, lo que implica que $\delta = \delta(I_n)^{-1} \det \in \langle \det \rangle$, lo que prueba la contención que faltaba.

Las afirmaciones restantes se deducen claramente de lo demostrado. □

Es importante hacer notar que todos los resultados demostrados en esta sección relativos a funciones n-lineales y alternantes son propiedades del determinante, $\det : M_n(K) \to K$ (por ejemplo la proposición 2.4, el corolario 2.3 y la proposición 2.8). La siguiente sección está dedicada a dar más propiedades de esta función en sentido de hacer cálculos, ya que esta sección fue al final de cuentas muy teórica en cuestión de los resultados obtenidos.

3. Propiedades del determinante

DEFINICIÓN 3.1. *Sea $A \in M_n(K)$ y $1 \leq i,j \leq n$. Definimos $\hat{A}_{ij} \in M_{n-L}(K)$ como la matriz resultante de eliminar el renglón i-ésimo y la columna j-ésima. Esto es, para $1 \leq a,b \leq n-1$*

$$(\hat{A}_{ij})_{ab} = \begin{cases} A_{ab}, & si \quad a < i y b < j \\ A_{a+1b}, & si \quad a \geq i y b < j \\ A_{ab+1}, & si \quad a < i y b \geq j \\ A_{a+1b+1}, & si \quad a > i y b > j \end{cases}$$

Veamoslo con unos ejemplos.

1. Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ entonces

$$\hat{A}_{11} = (-1)$$
$$\hat{A}_{12} = (4)$$
$$\hat{A}_{21} = (3)$$
$$\hat{A}_{22} = (-2)$$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ entonces

$$\hat{A}_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\hat{A}_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\hat{A}_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Esta definición hace sentido para matrices que no sean cuadradas pero para la cuestión de determinantes no es necesario.
Observación: Sea $\sigma \in S_n$, si $\sigma(n) = n$ entonces $\sigma(I_{n-1}) \subseteq I_{n-1}$. Por lo que $\sigma|_{I_{n-1}} : I_{n-1} \to I_{n-1}$ está bien definida y es una función biyectiva.
Así, definimos $S_n^k \subset \{\sigma \in S_n | \sigma(n) = k\}$. De primera instancia notamos que tenemos una función $\varphi : S_n^n \to S_{n-1}$ dada por $\varphi(\sigma) = \sigma|_{I_{n-1}}$

PROPOSICIÓN 3.1. *La función φ es biyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\sigma, \tau \in S_n^n$ con $\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)$ entonces $\sigma|_{I_{n-1}} = \tau|_{I_{n-1}}$. Por otro lado $\sigma(n) = n = \tau(n)$. Por lo tanto $\sigma = \tau$ y φ es inyectiva.

Sea $\tau \in S_{n-1}$, construimos $\sigma : I_n \to I_n$ como $\sigma(k) = \tau(k)$ si $| \leq k \leq n-1$ y $\sigma(n) = n$. Claramente $\varphi(\sigma) = \tau$ y la función es suprayectiva. $\square$

PROPOSICIÓN 3.2. *Para* $A \in M_n(K)$

$$\sum_{\sigma \in S_n^n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = A_{nn} det(\hat{A}_{nn})$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in S_n^n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} &= \sum_{\sigma \in S_n^n} sgn(\sigma) A_{nn} \prod_{i=1}^{n-1} A_i \sigma(i) \\
&= A_{nn} \sum_{\sigma \in S_n^n} sgn(\varphi(\sigma)) \prod_{i=1}^{n-1} A_i \varphi(\sigma)(i) \\
&= A_{nn} \sum_{\tau \in S_{n-1}} sgn(\tau) \prod_{i=1}^{n-1} A_{i\tau(i)} \\
&= A_{nn} det(\hat{A}_{nn})
\end{aligned}$$

Aquí ocupamos que $sgn(\sigma) = sgn(\varphi(\sigma))$ vemos que esto se sigue de que una descomposición de $\varphi(\sigma)$ es una descomposición de σ. □

Este es el caso sencillo del desarrollo por menores. Vamos a buscar dar una biyección entre S_n^k y S_{n-1} para poder tener el resultado análogo para las demás entradas.

DEFINICIÓN 3.2. *Sea n un natural y* $1 \leq k \leq n$. *Ponemos* $\gamma_k : \{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\} \to I_{n-1}$ *como*

$$\gamma_k(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leq k-1 \\ x-1 & si \quad x \geq k+1 \end{cases}$$

para $x \in \{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$. *Esta función* γ_k *es una biyeccion.*

Ahora bien, si tenemos $A \in M_n(K)$ y evaluamos

$$(\hat{A}_{nj})_{ab} = \begin{cases} A_{ab} & \text{si} \quad b < j \\ A_{ab+1} & \text{si} \quad b \geq j \end{cases}$$

Que esto no es más que un caso especial de lo que ya se había visto. Si $\sigma \in S_n^k$, entonces

$$(\hat{A}_{nk})_{j\gamma_k\sigma(j)} = A_{j\sigma(j)} \qquad \text{con } 1 \leq j \leq n$$

Esto porque $1 \leq \sigma(j) \leq n$, hay dos posibilidades:

Caso 1) Si $\sigma(j) < k$, entonces $\gamma_k\sigma(j) = \sigma(j) < k$. Continuando con los cálculos

$$(\hat{A}_{nk})_{j\gamma_k\sigma(j)} = A_{j\sigma(j)}$$

Caso 2) Si $\sigma(j) > k$ entonces $\gamma_k(\sigma(j)) = \sigma(j) - 1 \geq k$.
Así tenemos que

$$\begin{aligned}
(\hat{A}_{nk})_{j\gamma_k\sigma(j)} &= (\hat{A}_{nk})_{j\sigma(j)-1} \\
&= A_{nj\sigma(j)-1+1} \\
&= A_{j\sigma(j)}
\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea $A \in M_n(K)$ y $1 \leq k < n$. Entonces*

$$\sum_{\sigma \in S_n^k} sgn(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{j\sigma(j)} = A_{nk}(-1)^{n-k} det(\hat{A}_{nk})$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in S_n^k} sgn(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{j\sigma(j)} &= \sum_{\sigma \in S_n^k} sgn(\sigma) A_{nk} \prod_{j=1}^{n-1} A_{j\gamma_k\sigma(j)} \\
&= A_{nk} \sum_{\sigma \in S_n^k} sgn(\gamma^k) sgn(\gamma^k \sigma) \prod_{j=1}^{n-1} A_{j\gamma_k\sigma(j)}
\end{aligned}$$

Analicemos σ como parte de $\prod_{j=1}^{n-1} A_{j\gamma_k\sigma(j)}$, como $\sigma(n) = k$, en este caso σ va de I_{n-1} a $\{1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n\}$. Notemos que esto implica que $\gamma_k\sigma : I_{n-1} \to I_{n-1}$ es una biyección, esto es, $\gamma_k\sigma|_{I_{n-1}} \in S_n$.

Por otro lado hay que analizar el $sgn(\sigma)$ con respecto al $sgn(\gamma_k\sigma)$. De primera instancia no tienen que ser el mismo. Ahora bien $\gamma_k\sigma : I_{n-1} \to I_{n-1}$, si consideramos la inclusión $i : I_{n-1} \to I_n$ tendríamos que $\sigma i : I_{n-1} \to I_n$ y la diferencia de σi con σ. Es fácil ver que se está omitiendo el valor $\sigma(n) = k$. Dicho de otro modo $k \notin im(\sigma i)$.

Por otro lado, podemos definir $\gamma^k : I_n \to I_n$ dada por

$$\gamma^k(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < k \\ n & \text{si} \quad x = k \\ x-1 & \text{si} \quad x > k \end{cases}$$

En particular tenemos que $\gamma^n = 1_{I_n}$. Ahora notemos que $i\gamma^k\sigma = \gamma_k\sigma i$

Esto es $\gamma^k\sigma \in S_n^n$. Regresando a la ultima parte de la igualdad. Lo único que se hace al reemplazar $sgn(\sigma)$ con $sgn(\gamma^k\sigma)sgn(\gamma^k)$ son dos pasos.

$$\begin{aligned}
sgn(\sigma) &= sgn((\gamma^k)^{-1}\gamma^k\sigma) \\
&= sgn((\gamma^k)^{-1}) sgn(\gamma^k\sigma) \\
&= sgn(\gamma^k) sgn(\gamma^k\sigma)
\end{aligned}$$

Que consiste en que sgn abre productos y de este hecho se deriva que $sgn(\tau) = sgn(\tau^{-1})$ para todo $\tau \in S_n$.

Continuando con los signos, falta calcular $sgn(\gamma^k)$, ahora bien $\gamma^k = (n, n-1, \ldots, k)$ por lo que podemos expresar en transposiciones como $\gamma^k = \begin{pmatrix} n & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & n-2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} n & k \end{pmatrix}$ por lo que se tienen $n-k$ transposiciones, así $sgn(\gamma^k) = (-1)^{n-k}$.

Por otro lado regresamos a $\gamma_k\sigma$, veamos que esta asignación es una biyección entre S_n^k y

S_{n-1}.

Primero que es inyectiva. Sean $\sigma, \tau \in S_n^k$ tales que $\gamma_k \sigma i = \gamma_k \tau i$. Como ya se mencionó, γ_k es biyectiva, en particular inyectiva y así cancelable por la izquierda. Por lo que $\sigma i = \tau i$. De esta manera comprobamos que σ y τ coinciden en I_{n-1}, para ver que coinciden en "n" basta observar que $\sigma, \tau \in S_n^k$. Por lo tanto la asignación es inyectiva.

Para ver que es suprayectiva, basta observar que $|S_n^k| = (n-1)!$ y $|S_{n-1}| = (n-1)!$. Así la asignación es biyectiva y podemos seguir con las identidades.

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma \in S_n^k} sgn(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{j\sigma(j)} &= A_{nk}(-1)^{n-k} \sum_{\tau \in S_{n-1}} sgn(\tau) \prod_{i=1}^{n} (\hat{A}_{nk})_{i\tau(i)} \\ &= A_{nk}(-1)^{n-k} det(\hat{A}_{nk})\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 3.4. *Sea $A \in M_n(K)$. Entonces*

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}(-1)^{n-k} det(\hat{A}_{nk})$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que $S_n = \bigcup_{k=1}^{n} S_n^k$

$$\begin{aligned}det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n^k} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{nk}(-1)^{n-k} det(\hat{A}_{nk})\end{aligned}$$

□

COROLARIO 3.1. *Sea $A \in M_n(K)$. Entonces*

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{mk}(-1)^{m-k} det(\hat{A}_{mk})$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de que el determinante es una función alternante. □

PROPOSICIÓN 3.5. *Sea $A \in M_n(K)$. Entonces $det(A) = det(A^t)$*

DEMOSTRACIÓN.

$$
\begin{aligned}
det(A^t) &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A^t_{i\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i)i} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma^{-1})\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma^{-1}(i)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}
\end{aligned}
$$

Aquí usamos que

$$\prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i)i} = \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma^{-1}(i)}$$

Esto debido a que es el producto de los mismos factores en distinto orden. Para ver esto basta ver que $\{(\sigma(i),i)|i=1,\dots,n\} = \{(i,\sigma^{-1}(i))|i=|,\dots,n\}$
Consideramos $(\sigma(i),i)$ con $i=1,\dots,n$.
Como σ es biyectiva y esto implica que σ^{-1} es biyectiva, entonces existe $j=1,\dots,n$ con $\sigma^{-1}(j)=i$. Así

$$
\begin{aligned}
(\sigma(i),i) &= (\sigma(\sigma^{-1}(j)),\sigma^{-1}(j)) \\
&= (j,\sigma^{-1}(j))
\end{aligned}
$$

Por otro lado consideremos $(i,\sigma^{-1}(i))$ con $i=1,\dots,n$. De forma análoga existe $j=1,\dots,n$ con $\sigma(j)=i$ y así

$$
\begin{aligned}
(i,\sigma^{-1}(i)) &= (\sigma(j),\sigma^{-1}(\sigma(j))) \\
&= (\sigma(j),j)
\end{aligned}
$$

Para concluir la demostración podemos intercambiar σ por σ^{-1}, puesto que de nuevo solo cambia el orden de la suma puesto $\sigma\mapsto\sigma^{-1}$ determina una biyección en S_n. □

DEFINICIÓN 3.3. *Sea $A\in M_n(K)$. Vamos a definir la matriz de cofactores de A, $C\in M_n(K)$, esta es dada por*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} det(\hat{A}_{ij})$$

Desarrollemos el determinante con respecto al i-ésimo renglón.

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(-1)^{i+j}det(\hat{A}_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} A_{ij}C_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} A_{ij}C^{t}_{ji} \\ &= (AC^{t})_{ij} \end{aligned}$$

De aquí tenemos que la diagonal de AC^t tiene valor $det(A)$. Ahora calculemos lo que está afuera de la diagonal.
Sean $i \neq j$,

$$\begin{aligned} (AC^{t})_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}C^{t}_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(-1)^{j+k}det(\hat{A}_{jk}) \end{aligned}$$

Que observamos es el desarrollo del q-ésimo renglón de una matriz que tiene el renglón i y el renglón j iguales. Como el determinante es alternante esto vale cero. Así $(AC^t)_{ij} = 0$. Por lo que concluimos que $AC^t = det(A)I$. Este proceso se puede hacer de forma análoga para ver que $(C^tA) = det(A)I$.

COROLARIO 3.2. *Sea $A \in M_n(K)$. Entonces A es invertible si y solo si $det(A) \neq 0$*

DEMOSTRACIÓN. $\Leftarrow$) $(A\,det(A)^{-1}C^t) = det(A)det(A)^{-1}I = I$.
Análogamente $det(A)^{-1}C^tA = I$. Así $A^{-1} = det(A)^{-1}C^t$.
$\Rightarrow$) Si A es invertible, entonces

$$\begin{aligned} det(A)det(A^{-1}) &= det(AA^{-1}) \\ &= det(I) \\ &= 1 \end{aligned}$$

De aquí $det(A) \neq 0$ y más aún $det(A)^{-1} = det(A^{-1})$ □

4. La regla de Cramer

Esta es una de las secciones mas básicas e importantes de la teoría de determinantes. Como se mencionó anteriormente, este es un teorema para obtener soluciones de sistemas con el mismo número de ecuaciones que incógnitas. A estas alturas, y recordando nuestra experiencia con el tema 3 del capítulo 3, sabemos que resolver un sistema de ecuaciones puede ser una tarea muy compleja, de ahí la importancia de este tipo de resultados.

Antes de plantear dicho resultado hay algunas cosas previas que decir, pues la teoría también ayuda a determinar cuándo el sistema tiene solución. A continuación planteamos el problema.

Queremos resolver sistemas de n-ecuaciones y n-incógnitas:

$$\begin{cases} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \ldots + A_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \ldots + A_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

O de manera matricial

$$Ax = b, \tag{9}$$

con $A = (A_{i,j}) \in M_n(K)$, $b \in K^n \cong M_{n\times 1}(K)$ y $x := (x_1, \ldots, x_n)$ el vector definido a partir de las incógnitas.

Recordemos que si A es invertible, el sistema (9) tiene solución. Mas aún, $A \in M_n(K)$ es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$. Por lo tanto, si $\det(A) \neq 0$, el sistema (9) tiene solución. Esto da una condición necesaria para que existan soluciones. Más aún, bajo estas condiciones la solución es única, pues si $y_0, y_1 \in K^n$ son soluciones de la ecuación (9), entonces $Ay_0 = Ay_1$. Dado que $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible, por lo que se tiene que:

$$y_0 = I_n y_0 = A^{-1}(Ay_0) = A^{-1}(Ay_1) = I_n y_1 = y_1.$$

Por supuesto que hay que notar que bajo las condiciones anteriores, la solución del sistema (9) es

$$x = A^{-1}b.$$

Sin embargo note que aunque hay una fórmula para obtener las soluciones, el cálculo puede ser no trivial ya que en general calcular una inversa puede ser complicado y una vez que se haga esto, habría que multiplicar dicha inversa por b, lo que sube la complejidad de los cálculos. Teniendo esto en mente, el resultado buscado da una forma relativamente sencilla de encontrar las soluciones usando determinantes.

PROPOSICIÓN 4.1. *(Regla de Cramer) Sea $A \in M_n(K)$. Ai* $\det(A) \neq 0$*, entonces el sistema*

$$Ax = b$$

tiene una única solución, la cual está dada para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ por:

$$x_i = \det(A)^{-1} \det(A^1|\ldots|A^{i-1}|b|A^{i+1}|\ldots|A^n)$$

DEMOSTRACIÓN. Por la discusión previa sólo falta demostrar la fórmula que da las soluciones. Note que si $Ax = b$, entonces $b = \sum_{j=1}^{n} x_j A^j$, por lo que

$$\begin{aligned}\det(A^1|\dots|A^{i-1}|b|A^{i+1}|\dots|A^n) &= \det\left(A^1\middle|\dots\middle|A^{i-1}\middle|\sum_{j=1}^{n} x_j A^j\middle|A^{i+1}\middle|\dots|A^n\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(A^1|\dots|A^{i-1}|A^j|A^{i+1}|\dots|A^n)\end{aligned}$$

Por ser $\det \in K^{M_n(K)}$ alternante, $\det(A^1|\dots|A^{i-1}|A^j|A^{i+1}|\dots|A^n) \neq 0$ si y sólo si $j = i$. Por lo tanto, las igualdades implican que

$$\det(A^1|\dots|A^{i-1}|b|A^{i+1}|\dots|A^n) = x_i \det(A).$$

De esto se deduce el resultado. □

EJEMPLO 4.1. *Usaremos la regla de Cramer para estudiar el sistema*

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Entonces calculamos* $\det(A) = 3(2-3) + (3-1) = -3 + 2 = -1$ *usando el desarrollo por el tercer renglón. Lo primero que se deduce es que el sistema tiene solución, la cual es única. Para determinarla usamos la fórmula que da la regla de Cramer:*

$$x_1 = (-1)^{-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)[2(2-3) + (1+1)] = 0$$

$$x_2 = (-1)^{-1} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -[4(-1-4) + 5(5)] = -5$$

$$x_3 = (-1)^{-1} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1)[3(-1-1) + 2(3-1)] = 2$$

Una aplicación muy interesante respecto a la noción de interpolación se desarrolla en el siguiente ejemplo, el cual se generaliza en el ejercicio 4.30.

EJEMPLO 4.2. *¿Existe* $f \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}[x])$ *tal que* $f(1) = 1$*,* $f(2) = 0$ *y* $f(-1) = -1$*?*

Consideremos $f \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}[x])$ *y escribamos* $f = a_0 + a_1x + a_2x^2$*. Notemos que las condiciones que se piden, implican que para hallar los coeficientes de* f *se tienen que satisfacer el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1 = f(1) \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 = f(2) \\ a_0 - a_1 + a_2 = -1 = f(-1) \end{cases} \tag{10}$$

Luego, note que dicho polinomio existe si y sólo si el sistema (10) tiene solución. Para ver si esto sucede, usaremos la regla de Cramer, la cual afirma que esto sucede si el determinante de la matriz asociada a este sistema es no cero. Sin embargo, note que dicha matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

la cual es una matriz de Vandermonde con $\lambda_0 = 1$*,* $\lambda_1 = 2$ *y* $\lambda_2 = -1$ *(ver ejercicio 4.15). Por lo tanto,* $\det(A) \neq 0$*, de hecho,*

$$\det(A) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_1 - \lambda_0) = 6$$

Note que además de la existencia, de. hecho sabemos que ¡ tal polinomio que buscamos es único! Además, la regla de Cramer nos permite determinarlo de forma explícita pues nos da una forma de obtener sus coeficientes. Vamos a realizar esto a continuación:

$$a_0 = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}$$

$$a_1 = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, el polinomio buscado (el cual recordemos es único) está dado por

$$f = \frac{2}{3} + x - \frac{2}{3}x^2$$

Es importante mencionar que el método anterior solamente sirve cuando se busca un polinomio de grado a lo más n, cuando se tienen dos parejas de $(n+1)$-adas, otros casos no son posibles de tratar con la herramienta presentada. Este tipo de problemas son la base de un área del análisis conocida como teoría de aproximación, la cual dicho sea de paso, también usa técnicas de álgebra lineal.

Ejercicios

Sea K un campo y $n \in \mathbb{N}^+$. En toda la tarea V_K denota siempre un K-espacio vectorial.

EJERCICIO 4.1. *Demuestre que* $|S_n| = n!$.

EJERCICIO 4.2. *Considérese* $\sigma = (12)(123)$ *y* $\tau = (143)$ *en* S_5. *Calcule lo siguiente:*

1. σ^{-1}
2. σ^2
3. $\sigma\tau$
4. $\tau\sigma$
5. τ^2
6. τ^3
7. τ^5
8. τ^{-1}
9. $\sigma^2\tau^2$
10. $(\sigma\tau)^{-1}$

EJERCICIO 4.3. *Demuestre que si* $\sigma \in S_n$ *es una transposición, entonces* $\sigma^2 = (1)$. *Concluya de esto que* $\sigma = \sigma^{-1}$.

EJERCICIO 4.4. *Calcular* $sgn(\sigma)$ *si* $\sigma \in S_n$ *es:*

1. *la identidad*
2. *una transposición*
3. *un triciclo, es decir,* $\sigma = (i_1\ i_2\ i_3)$.

EJERCICIO 4.5. *Sean* $\sigma, \tau \in S_n$. *Demuestre que*

$$sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)sgn(\tau)$$

EJERCICIO 4.6. *Considérese* $\sigma \in S_9$ *definido por*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

1. *Expresar* σ *en notación cíclica.*
2. *Calcular* $sgn(\sigma)$

EJERCICIO 4.7. *Defína el* ***polinomio de Vandermonde***, $V_P \in \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$, *como*

$$V_P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Demuestre que para cada $\sigma \in S_n$,

$$sgn(\sigma) = \frac{V_P(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})}{V_P(x_1,\dots,x_n)}$$

EJERCICIO 4.8. *Determinar la regla de correspondencia explícita de*

$$\det : M_1(K) \to K$$

EJERCICIO 4.9. *Demuestre la proposición 2.3*

EJERCICIO 4.10. *Dar un ejemplo de una función n-lineal que no sea alternante.*

EJERCICIO 4.11. *Sean* $a,b,c,d,e,f \in K$. *Demuestre que*

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ f & g & e \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & c & d \\ f & g & e \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & c \\ f & g & e \end{pmatrix} = 0$$

EJERCICIO 4.12. *Demuestre que no existe* $A \in M_4(\mathbb{Q})$ *tal que*

$$A^4 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 30 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4.13. *Calcular el determinante de una matriz triangular superior arbitraria, así como de una matriz triangular inferior.*

EJERCICIO 4.14. *Sean $a,b,c,d,e,f \in K$. Calcular*

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4.15. *Sean $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$. Defina la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ mediante:*

$$A_{i,j} = \lambda_i^{j-1}$$

Demuestre que $\det(A) = \prod_{1\le j<i\le n}(\lambda_i - \lambda_j)$.[2]

EJERCICIO 4.16. *Demuestre directamente de la definición que para cualesquiera dos matrices $A,B \in M_n(K)$ se tiene que* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

EJERCICIO 4.17. *Sean $A,B \in M_n(K)$. Demuestre lo siguiente:*

1. $\det(AB) = \det(BA)$
2. *Si B es invertible, entonces* $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$

EJERCICIO 4.18. *Demuestre que si $A \in U(n)$, entonces* $|\det(A)| = 1$.

EJERCICIO 4.19. *Demuestre que si $A \in M_n(K)$ es inverible, entonces* $\det(A) \neq 0$ *y además* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

[2]A la matriz definida se le conoce como matriz de Vadermonde.

EJERCICIO 4.20. *Para $A \in M_n(K)$ y $\sigma \in S_n$, se define la matriz $A^\sigma \in M_n(K)$ mediante $(A^\sigma)_{ij} = A_{\sigma(i)j}$.*

Demuestre que para $\delta : M_n(K) \to K$ una función n-lineal en los renglones, son equivalentes:

1. *δ es alternante.*
2. *Para toda $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$, $\delta(A^{(ij)}) = -\delta(A)$.*
3. *Para toda $\sigma \in S_n$, $\delta(A^\sigma) = sgn(\sigma)\delta(A)$.*

EJERCICIO 4.21. *Supóngase que $1+1 \neq 0$ en K. Demuestre que si $\delta : M_n(K) \to K$ es una función n-lineal en los renglones, entonces son equivalentes:*

1. *δ es alternante.*
2. *Para $A \in M_n(K)$ si existen $i, j \in \{1, ..., n\}$ distintos tales que ${}_jA =_i A$, entonces $\delta(A) = 0$, donde ${}_iA$ es el i-ésimo renglón de A.*

EJERCICIO 4.22. *Suponga que existen $(k_1, ..., k_m) \in (\mathbb{N}^+)^m$ tales que $n = k_1 + \cdots k_m$ tales que $A \in M_n(K)$ se puede escribir de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_m \end{pmatrix},$$

con $A_i \in M_{k_i}(K)$. Demuestre que $\det(A) = \prod_{i=1}^m \det(A_i)$

EJERCICIO 4.23. *Usando cofactores demostrar que si $A \in M_2(K)$ es invertible, entonces*

$$A^{-1} = (A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1})^{-1} \begin{pmatrix} A_{2,2} & -A_{1,2} \\ -A_{2,1} & A_{1,1} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4.24. *Demostrar que la siguiente matriz es invertible y calcular su inversa usando cofactores:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

EJERCICIO 4.25. *Obtenga por medio de la regla de Cramer la solución a los siguientes sistemas de ecuaciones sobre $\mathbb{C}$:*

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-y+z=-5 \\ 2x+2y+3z=10 \\ 5x-2y+6z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+i)x+(2-i)y=2+7i \\ 7x+(8-2i)y=4-9i \end{cases}$$

EJERCICIO 4.26. *Demuestre que si $\delta : M_n(K) \to K$ es una función n-lineal en los renglones, alternante y $\delta(I)=1$, entonces $\delta = \det$.*

EJERCICIO 4.27. *Sea V un K-espacio vectorial con dimensión finita no nulo. Considérese el conjunto $\mathscr{B}_V = \{\beta \subseteq V \mid \beta$ es una base ordenada$\}$ y defínase la relación $\sim \subseteq \mathscr{B}_V \times \mathscr{B}_V$ mediante:*

$$\beta \sim \gamma, \text{ si } \det([1_V]_\beta^\gamma) > 0.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

1. *$\sim$ es una relación de equivalencia.*
2. $|\mathscr{B}_V/\sim| = 2$.

EJERCICIO 4.28. *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal con* $\dim_K V = n$*. Demuestre que existen $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1} \in K$ tal que:*

$$T^n + \lambda_{n-1} T^{n-1} + ... + \lambda_0 1_V = 0,$$

donde esta ecuación se cumple en $End(V)$ y T^k denota la composición de T con ella misma k veces.

EJERCICIO 4.29. *Dado $a \in K$, defina la función $e_a : K[x] \to K$ mediante la regla de correspondencia*

$$e_a(f) = f(a)$$

Demuestre lo siguiente:

1. *$e_a \in K[x]^*$*
2. *El conjunto $\{e_a \mid a \in K\} \subseteq K[x]^*$, es linealmente independiente.*

EJERCICIO 4.30. *Sean $(a_0, ..., a_n), (b_0, ..., b_n) \in K^n$ con $a_i \neq a_j$ para cualesquiera $i \neq j$. Demuestre que existe un único $f \in \mathscr{P}_n(K[x])$ tal que para cualquier $i \in \{0, ..., n\}$,*

$$f(a_i) = b_i$$

EJERCICIO 4.31. *Sea $A \in M_n(K)$. Defina el polinomio $p_A \in K[x]$ mediante*

$$p_A(x) = \det(A - xI_n)$$

Demuestre que:

1. *$\partial(p_A) \leq n$.*
2. *Para cualquier $B \in GL_n(K)$, $p_{BAB^{-1}}(x) = p_A(x)$*

EJERCICIO 4.32. *Sea $A \in M_n(K)$. Demuestre que si A es antisimétrica y n es impar, entonces* $\det(A) = 0$.

NOTA 4.1. *Retomando el ejercicio anterior, el caso de una matriz antisimétrica con n par es más complicado, sin embargo se puede decir algo de su determinante. El ejercicio 4.34 permite esbozar la prueba del resultado correspondiente, para esto introduciremos algunas definiciones e ideas previas:*

Dada $A \in M_n(K)$ y $r \in \{1,...,n\}$, definimos un ***r-menor*** *de A com el determinante de cualquier submatriz de A con r renglones y r columnas. Tomemos un menor M_r de una matriz A. Definimos el* ***menor complementario*** *de M_r, el cual denotaremos por M_r^c, como el determinante de la matriz que se obtiene de A al eliminar los renglones y columnas usados para definir M_r. El* ***menor complementado signado*** *de M_r se define como*

$$M^{(r)} := (-1)^{\sum_{s=1}^{r}(i_s+j_s)} M_r^c,$$

donde $\{i_1,...,i_r\}$ son los renglones de la matriz con la que se definió M_r y $\{j_1,...,j_r\}$ las columnas correspondientes.

Existe un importante resultado que relaciona lo definido anteriormente con el determinante de la matriz A. Este resultado se presenta a continuación:

PROPOSICIÓN 4.2. *(Jacobi) Dada $A \in M_n(K)$, M_r cualquier menor de A, así como M_r' el correspondiente r-menor de la matriz de cofactores de A (este esta formado con exactamente los mismos renglones y columnas tomados para construir M_r), entonces se cumple que*

$$M_r' = \det(A)^{r-1} M^{(r)}$$

EJERCICIO 4.33. *Toma una matriz con entradas reales (la que gustes) y verifica para algunos r-menores el resultado de Jacobi.*

EJERCICIO 4.34. *Sea $A \in M_n(K)$ una matriz antisimétrica con n par. Demuestre que existe $p \in K$ tal que*

$$\det(A) = p^2$$

A este elemento $p \in K$ se le conoce como ***Pfaffiano****, los cuales son útiles en geometría diferencia y algebraica para codificar algunos conceptos en intersecciones de superficies.*[3]

[3] Nota que si realizaste bien el ejercicio 4.13, este te proporciona un ejemplo de un Pfaffiano, el cual es $af - be + cd$.

Sugerencia: Hacer la prueba por inducción sobre n; para el paso inductivo toma una matriz antisimétrica general y aplica el teorema de Jacobi para el 2*-menor formado por la matriz que usa los primeros dos renglones y columnas de la matriz que tomaste. Usa la hipótesis de inducción en* M_2' *un* M_2 *los cuales deben ser cuadrados perfectos y concluye de esto que* $\det(A)$ *también debe serlo.*

Anexos

5. Retículas

DEFINICIÓN 5.1. *Sea P un conjunto y $\leq$ una relación sobre P. Decimos que P con $\leq$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

1. *Para toda $x \in P$, $x \leq x$*
2. *Para todo $x, y \in P$, si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$*
3. *Para todo $x, y, z \in P$, si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$*

EJEMPLO 5.1. *Sea X un conjunto. Entonces el conjunto potencia $\mathscr{P}(X)$ es un conjunto parcialmente ordenado con la contención $\subseteq$.*

DEFINICIÓN 5.2. *Sea L un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que L tiene un elemento máximo x. Si para todo $y \in L$, $y \leq x$. Por la asimetría el elemento maximo es único y lo denotamos por $\bar{1}$.*

En el caso de $\mathscr{P}(X)$ su elemento máximo es X.

DEFINICIÓN 5.3. *Sea L un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que L tiene un elemento máximo x. Si para todo $y \in L$, $x \leq y$. Por la asimetría el elemento maximo es único y lo denotamos por $\bar{o}$.*

En el caso de $\mathscr{P}(X)$ su elemento mínimo es $\emptyset$.

DEFINICIÓN 5.4. *Sea L un conjunto parcialmente ordenado, $S \subseteq L$ y $a \in L$. Decimos que a es una cota superiorde S, si $x \leq a$ para toda $x \in S$.*

En caso de S sea vacío, cualquier elemento de L es cota superior.

DEFINICIÓN 5.5. *Sea L un conjunto parcialmente ordenado, $S \subseteq L$ y $a \in L$. Decimos que a es el supremo de S, si a es la menor cota superior, es decir, si a cumple:*

- *Para todo $x \in S$, $x \leq a$.*
- *Si $b \in L$ es tal que para todo $x \in S$ tenemos que $x \leq b$, entonces $a \leq b$*

NOTACIÓN 5.1. *Sean L una retícula, $S \subseteq L$ y $x, y \in L$. Denotamos por $\bigvee S$ al supremo de S. En caso de que $S = \{x, y\}$, ponemos $x \vee y$ para denotar al supremo.*

En caso de S sea vacío, $\bigvee S = \bar{0}$.

DEFINICIÓN 5.6. *Sea L un conjunto parcialmente ordenado, $S \subseteq L$ y $a \in L$. Decimos que a es una cota inferior de S, si $a \leq x$ para toda $x \in S$.*

En caso de S sea vacío, cualquier elemento de L es cota inferior.

DEFINICIÓN 5.7. *Sea L un conjunto parcialmente ordenado, $S \subseteq L$ y $a \in L$. Decimos que a es el ínfimo de S, si a es la menor cota inferior, es decir, si a cumple:*

- *Para todo $x \in S$, $a \leq x$.*
- *Si $b \in L$ es tal que para todo $x \in S$ tenemos que $b \leq x$, entonces $b \leq a$*

NOTACIÓN 5.2. *Sean L una retícula, $S \subseteq L$ y $x, y \in L$. Denotamos por $\bigwedge S$ al ínfimo de S. En caso de que $S = \{x, y\}$, ponemos $x \wedge y$ para denotar al ínfimo.*

En caso de S sea vacío, $\bigwedge S = \bar{1}$.

DEFINICIÓN 5.8. *Sea L un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que L es una retícula, si para todo $x, y \in L$ $x \wedge y$ y $x \vee y$ existen.*

DEFINICIÓN 5.9. *Una retícula L es completa si todo subconjunto S de L, $\bigvee S$ y $\bigwedge S$ existen.*

Tenemos que $\mathscr{P}(X)$ es una retícula completa.

PROPOSICIÓN 5.1. *Sean L una retícula tal que existen todos los infimos. Entonces L es una retícula completa.*

DEFINICIÓN 5.10. *Una retícula L es modular, si $a \leq b$ implica $a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b$ para cualesquiera $a, b, x \in L$.*

DEFINICIÓN 5.11. *Sean L una retícula, y $x, y \in L$. Decimos que y es un pseudocomplemento de x si:*

- *$x \wedge y = \bar{0}$.*
- *Si $z \in L$ es tal que $z \wedge x = \bar{0}$ y $y \leq z$, entonces $z = y$.*

6. Lema de Zorn

Bibliografía

[1] J.S. Golan. *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know*. Texts in the Mathematical Sciences. Springer, 2004.

[2] Serge Lang. *Introduction to linear algebra*. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Hugo Alberto Rincón Mejía. *Álgebra lineal*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2006.

[4] Lawrence E Spence, Arnold J Insel, and Stephen H Friedberg. *Elementary linear algebra*. Prentice Hall, 2000.