



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**Una visión de la dualidad de Matlis desde el punto de vista de las
categorías derivadas mediante el teorema de representabilidad-
adjunción de Brown-Neeman**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
EDUARDO LEÓN RODRÍGUEZ

DIRECTOR
DR. FRANK PATRICK MURPHY HERNÁNDEZ
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO DE 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi madre y mi hermano,
por su cariño y apoyo incondicional.
Sin ustedes, este logro no habría sido
posible.*

Índice general

Agradecimientos	5
Introducción	7
1. Dualidad de Matlis	11
1.1. Cápsulas inyectivas del campo de residuo	11
1.2. Dualidad sobre anillos locales artinianos	14
1.3. Dualidad de Matlis	18
2. Categorías trianguladas	25
2.1. Definición, propiedades básicas y funtores triangulados	25
2.2. Localización de categorías	29
2.3. Localización de categorías trianguladas	32
2.4. La categoría homotópica es triangulada	33
2.5. La categoría derivada de una categoría abeliana	37
2.6. Funtores entre categorías derivadas inducidos por funtores exactos	37
2.7. Funtores de truncamiento	38
3. Representabilidad de Brown-Neeman	45
3.1. Objetos compactos y categorías trianguladas compactamente generadas	45
3.2. Caracterización de objetos compactos	48
3.3. El colímite homotópico	51
3.4. El teorema de representabilidad de Brown-Neeman	56
3.5. El teorema del funtor adjunto	66
4. Dualidad en categorías derivadas	71
4.1. Resoluciones proyectivas de complejos de cocadena	71
4.2. Objetos compactos en $R\text{-Mod}$ y $D(R)$	74
4.3. Producto tensorial de complejos de cocadena	80
4.4. Complejos K -planos	85
4.5. Producto tensorial derivado	91
4.6. Adjunción de cambio de anillos derivada	94
4.7. Dualidad de Matlis derivada	98

Agradecimientos

Mi pasión y amor por la matemática, especialmente por el álgebra, me han guiado hasta este punto como una brújula guía a un marinero perdido. En esta etapa, colmada de aciertos y errores, he tenido la fortuna de encontrar personas cuyo valor es inestimable. Estas personas, con sus enseñanzas y gratos momentos, me han hecho sentir verdaderamente privilegiado. Hoy, quiero expresar mi profunda gratitud a algunas de estas personas, aun con el riesgo de olvidar mencionar a alguna. A todos ellos, les dedico las siguientes palabras:

A mi asesor de tesis y amigo, el Dr. Frank Murphy, quiero expresar mi sincero agradecimiento por su guía experta y su paciencia inagotable. Su dedicación y compromiso con mi formación académica han sido esenciales para el desarrollo de esta tesis. Agradezco profundamente las oportunidades que me ha brindado. Su apoyo constante y su confianza en mis capacidades me han motivado en los momentos más desafiantes, haciendo posible la realización de este trabajo.

Al Dr. Octavio Mendoza, quiero expresar mi gratitud por estos dos años de invaluable enseñanzas matemáticas. Su paciencia, confianza en mí y su excelente calidad humana han sido fundamentales para mi desarrollo académico. Es para mí un verdadero ejemplo a seguir, tanto en el ámbito profesional como personal.

A mi tutor, el Dr. José Ríos, quiero expresarle mi más profundo agradecimiento por su inestimable guía y apoyo a lo largo de mi maestría. Aprecio enormemente su excelente disposición, su paciencia para escucharme y por facilitarme un área de estudio en el instituto.

Me gustaría extender mi agradecimiento al Dr. Valente Santiago y a la Dra. Mindy Huerta por su amable disposición para revisar este trabajo. También valoro profundamente las enseñanzas impartidas en el seminario de representaciones, que han enriquecido significativamente mi formación.

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento y cariño a mis amigos Juan Camilo y Fernando por su incondicional apoyo y su valiosa amistad a lo largo de estos años. Aprecio profundamente los buenos momentos compartidos, las horas de comida y las charlas que tanto disfrutamos, los consejos siempre acertados y su compañía en los momentos difíciles. Su respaldo ha sido fundamental para superar los desafíos de esta etapa académica.

Introducción

La dualidad de Matlis es un resultado fundamental en el campo del álgebra conmutativa, introducido por E. Matlis en su trabajo de 1958 [19]. Este teorema establece una dualidad entre las subcategorías de módulos artinianos y noetherianos, resultando en una autodualidad en la subcategoría de módulos de longitud finita. Este resultado tiene una interpretación geométrica presentada en la dualidad de Grothendieck, la cual fue presentada y demostrada por A. Grothendieck en el SGA 2 (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 2) [6].

Las ideas de Matlis se pueden combinar con la cohomología local de Grothendieck, lo que resulta en una prueba más elegante de la dualidad de Matlis. Un texto clásico de la cohomología local es [8]. Ahora bien, existen referencias modernas sobre la cohomología local, como las de Iyengar y Takahashi [11] y de Brodmann y Sharp [2].

Una de las ideas más fructíferas e interesantes de A. Grothendieck fue la introducción de la teoría de categorías derivadas, como una reconsideración de su planteamiento del álgebra homológica planteada en [5]. Esta teoría fue posteriormente estudiada y desarrollada por su estudiante Jean-Louis Verdier en su tesis doctoral, titulada "Des catégories dérivées des catégories abéliennes" [30], en 1967. En dicha tesis, Verdier también introdujo la teoría de categorías trianguladas. Las notas de Verdier sobre estas teorías fueron finalmente publicadas por Luc Illusie y aparecieron como parte del Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie (SGA 4 1/2), editado por Pierre Deligne y Luc Illusie [28]. La teoría de categorías trianguladas ha demostrado ser una herramienta importante en diversas áreas de las matemáticas, como la teoría de representaciones, la geometría algebraica, en particular en la teoría de D -módulos, y la topología algebraica, por mencionar algunas áreas.

A. Grothendieck logra dar la adjunción entre el Hom y el tensor en categorías derivadas de forma constructiva y se basa en un cálculo local. Sin embargo, dado que las categorías derivadas no son adecuadas para cálculos locales, este argumento resulta ser bastante incómodo [8]. Existe un enfoque abstracto para demostrar la existencia de la adjunción en la literatura, debido a P. Deligne [4]. Este método fue desarrollado y ampliado por Verdier en [31], quien mostró que casi todo en [8] se puede obtener directamente del resultado de Deligne.

Todos estos resultados asumían una hipótesis de noetherianidad que recientemente J. Lipman pudo eliminar en [13]. Desafortunadamente, ninguno de estos enfoques se generaliza bien a la teoría de D -módulos.

A. Neeman, conocido por sus trabajos en categorías trianguladas [23], categorías derivadas y, en particular, en la dualidad de Grothendieck, en su artículo “The Grothendieck Duality Theorem via Bousfield’s Techniques and Brown Representability,” publicado en 1996 [22], generaliza el clásico teorema de representabilidad de Brown para el caso de categorías trianguladas. En particular, le permite dar un teorema de existencia de adjunción, lo que generaliza aún más los resultados de Lipman, y en particular, resuelve el problema para los D -módulos. También le permite aplicarlo en el contexto de categorías derivadas y obtener una versión derivada de la ya mencionada dualidad de Grothendieck. Es aquí donde la teoría desarrollada por A. Neeman muestra su potencial.

Ahora bien, a la par de las dificultades con las que se tienen que lidiar, tanto el Hom como el tensor en los primeros trabajos se suelen trabajar en el contexto de categorías acotadas. No es hasta que N. Spaltenstein, en su artículo “Resolutions of Unbounded Complexes”, publicado en 1988 [29], muestra cómo se pueden extender estas definiciones al contexto de complejos no acotados. La teoría de Neeman, como se define en el contexto de categorías trianguladas, permite trabajarse también en el contexto no acotado.

Finalmente, toda esta maquinaria converge para establecer lo que se llama la situación de adjunción de cambio de anillos derivada. Esta es simplemente la extensión canónica de la situación de adjunción de cambio de anillos anivel de categorías de módulos, pero considerando todas las sutilezas mencionadas anteriormente. El caso más sencillo es cuando el funtor de extensión de escalares es exacto, y aquí no se necesita toda la maquinaria que se construyó. Pero esto se da cuando el campo de residuo es plano, lo que es equivalente a que el ideal máximo sea cero, y la situación resulta trivial. Es por esta razón que se necesita la herramienta introducida por N. Spaltenstein y A. Neeman. Esta maquinaria demuestra su músculo, con el enunciado de la dualidad de Matlis derivada que dice que, para un anillo neteriano local, existe una autodualidad para la subcategoría de complejos acotados de longitud finita de la categoría derivada. Cabe mencionar que se elimina la hipótesis de completez del anillo en esta versión.

La presente tesis se compone de cuatro capítulos. A continuación, se describe brevemente el contenido de cada capítulo.

En el primer capítulo se estudia la dualidad de Matlis desde la teoría clásica de álgebra conmutativa y teoría de módulos. Para obtener dicho resultado, es necesario estudiar algunas caracterizaciones de la cápsula inyectiva del campo de residuo. En una segunda etapa, se obtienen algunos resultados sobre dualidad cuando el anillo en cuestión es artiniano, ya que esta herramienta será necesaria para el caso clásico cuando el anillo es neteriano. Finalmente, aplicando la teoría desarrollada en las secciones anteriores y recordando algunas caracterizaciones de los módulos artinianos y neterianos, se obtiene la célebre dualidad de Matlis. En particular, se demuestra una autodualidad cuando se restringe a la subcategoría de módulos de longitud finita.

El segundo capítulo está dedicado a introducir las definiciones, conceptos y resultados básicos de las teorías de categorías trianguladas y de localización, con el fin de presentar las construcciones de la categoría homotópica y la categoría derivada de una categoría

abeliana. Así mismo, el objetivo del presente capítulo es precisar la notación para que todo el texto sea consistente. En este capítulo no se presentan demostraciones; para ello, se pueden consultar los textos de Amnon Neeman [23] y Bernard Keller [12].

El objetivo del tercer capítulo es demostrar el teorema de representabilidad de Brown-Neeman, obtenido por A. Neeman en [22]. Para lograr este objetivo, es necesario introducir los conceptos de objeto compacto y categoría triangulada compactamente generada, los cuales son fundamentales a lo largo de esta tesis. Puesto que en este capítulo se trabaja en el contexto triangulado, es imprescindible utilizar herramientas que emulen los colímites clásicos. Es aquí donde el concepto de colímite homotópico se vuelve indispensable. Una de las principales aplicaciones del Teorema de Representabilidad de Brown-Neeman es que permite obtener situaciones de adjunción sin demasiadas hipótesis. Este principio será explotado en el último capítulo.

El objetivo del cuarto capítulo es dar testimonio del potencial que las categorías trianguladas ofrecen para solucionar problemas, particularmente en el contexto de la categoría derivada de un anillo. Para lograr esto, se busca aplicar el Teorema de Representabilidad de Brown-Neeman en un contexto que permita obtener una autodualidad en la subcategoría de complejos acotados de longitud finita. La primera problemática que se presenta es que, para obtener funtores entre categorías derivadas, se requieren ciertas nociones de exactitud. Por ello, es imprescindible el concepto de resoluciones K-planas, que pueden ser aproximadas mediante resoluciones proyectivas. Una vez estudiados estos conceptos, es posible definir un funtor entre ciertas categorías derivadas de interés. En una segunda etapa, se busca obtener una doble situación de adjunción utilizando el ya mencionado Teorema de Representabilidad de Brown-Neeman. Desarrollado este contexto, es posible establecer la autodualidad deseada.

Capítulo 1

Dualidad de Matlis

Sea R un anillo conmutativo. La dualidad de Matlis establece que, cuando el anillo R es local, neteriano y completo, existe una correspondencia biyectiva entre las subcategorías de R -módulos artinianos y R -módulos neterianos mediante el funtor contravariante

$$D = \text{Hom}_R(-, E) : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$$

donde E denota la cápsula inyectiva del campo de residuo como R -módulo. Más aún, cuando se restringe el funtor D a la subcategoría de R -módulos de longitud finita, se obtiene una autodualidad.

Para obtener el resultado que concierne, es necesario iniciar estudiando y caracterizando las cápsulas inyectivas del campo de residuo sobre diferentes estructuras.

A lo largo de este capítulo R denota un anillo conmutativo con unidad.

1.1. Cápsulas inyectivas del campo de residuo

Se inicia la sección presentando definiciones con el fin de establecer y precisar la notación.

Definición 1. *Se dice que R es un anillo local si posee un único ideal máximo.*

Definición 2. *Sea R un anillo local con ideal máximo \mathfrak{m} . Se define el campo de residuo de R como el anillo cociente $\kappa := R/\mathfrak{m}$.*

Notación 1. *Sea R un anillo local. Cuando sea necesario precisar el ideal máximo y el campo de residuo se denota por $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ al anillo local.*

La completación de un anillo con respecto a un ideal es una construcción importante en álgebra conmutativa y geometría algebraica, que permite estudiar las propiedades locales de los anillos y sus módulos. A continuación se introduce dicho concepto.

Definición 3. Sean R un anillo y J un ideal de R . Se define la completación de R con respecto a J como

$$\widehat{R}^J := \varprojlim (R/J^n).$$

Definición 4. Sean R un anillo y J un ideal de R . Se dice que R es J -completo si $R = \widehat{R}^J$.

Uno de los objetos que más figuran en la presente sección es el siguiente.

Definición 5. Sean R un anillo, I, J ideales de R y M un R -módulo. Se define

$$(J :_M I) := \{m \in M : Im \subseteq J\}.$$

Note que $(J :_M I)$ es un R -submódulo de M .

Definición 6. Sean R un anillo, I, J ideales de R y M un R -módulo. Se define

$$(J :_M I^\infty) := \{m \in M : \text{Existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } I^n m \subseteq J\}.$$

Note que $(J :_M I^\infty)$ es un R -submódulo de M .

Observación 1. Sean R un anillo, I, J ideales de R y M un R -módulo. Es claro que

$$(J :_M I^\infty) = \bigcup_{n>0} (J :_M I^n).$$

Proposición 1. Sean R un anillo neteriano, J un ideal de R y Q un R -módulo. Si Q es un R -módulo inyectivo, entonces $(0 :_Q J^\infty)$ es un R -módulo inyectivo.

Demostración. Sean I un ideal de R y $h : I \rightarrow (0 :_Q J^\infty)$ un morfismo de R -módulos. Por el criterio de Baer, basta demostrar que existe $q \in (0 :_Q J^\infty)$ tal que $h(r) = rq$ para todo $r \in I$. La asignación $1 \mapsto q$ define la extensión buscada.

Dado que Q es un R -módulo inyectivo por hipótesis, existe $p \in Q$ tal que

$$h(r) = rp \tag{1.1}$$

para todo $r \in I$. Ahora, como R es neteriano, se sigue que $h(I)$ es un R -submódulo finitamente generado de $(0 :_Q J^\infty)$. Por consiguiente, existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que

$$J^\alpha h(I) = 0. \tag{1.2}$$

Además, se deduce de la ecuación anterior que $h(I)$ es un R -submódulo de Rp . Por el Lema de Artin-Rees, existe $\beta \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq \beta$ se cumple que

$$J^n(Rp) \cap h(I) = J^{n-\beta}(J^\beta(Rp) \cap h(I)).$$

En particular, se deduce que

$$J^{\alpha+\beta}(Rp) \cap h(I) = J^\alpha(J^\beta(Rp) \cap h(I)) \subseteq J^\alpha h(I) = 0. \tag{1.3}$$

Considere el siguiente morfismo de R -módulos:

$$J^{\alpha+\beta} + I \xrightarrow{\widehat{h}} (0 :_Q J^\infty)$$

definido por $\widehat{h}(s+r) := rp$ para todo $s \in J^{\alpha+\beta}$ y todo $r \in I$. Si $r_1, r_2 \in I$ son tales que $r_1 - r_2 \in J^{\alpha+\beta}$, entonces $r_1p - r_2p = (r_1 - r_2)p \in J^{\alpha+\beta} \cap h(I) = 0$ por la ecuación anterior. Dado que Q es un R -módulo inyectivo, existe $q \in Q$ tal que $\widehat{h}(r) = rq$ para todo $r \in J^{\alpha+\beta} + I$. Dado que \widehat{h} extiende a h , basta demostrar que $q \in (0 :_Q J^\infty)$. Note que $sp = \widehat{h}(s) = \widehat{h}(s+0) = 0p = 0$ para toda $s \in J^{\alpha+\beta}$, es decir, $J^{\alpha+\beta}q = 0$. Por lo tanto, $q \in (0 :_Q J^\infty)$. Esto concluye la demostración. \square

Notación 2. Sea M un R -módulo. Se denota por $E_R(M)$ a la cápsula inyectiva de M como R -módulo.

Proposición 2. Sean R un anillo, J un ideal de R y M un R -módulo. Si $JM = 0$, entonces

$$E_{R/J}(M) = (0 :_{E_R(M)} J).$$

Demostración. En primer lugar, observe que $(0 :_{E_R(M)} J)$ y M tienen estructura natural de R/J -módulos, pues $J(0 :_{E_R(M)} J) = 0$ y $JM = 0$. Lo anterior justifica que el enunciado está escrito correctamente, pues se está considerando la cápsula inyectiva de M como R/J -módulo.

Por otra parte, es claro que $M \subseteq (0 :_{E_R(M)} J)$ como R/J -módulos pues $M \subseteq E_R(M)$ y $JM = 0$.

Note que todo R/J -submódulo N de $(0 :_{E_R(M)} J)$ es un R -submódulo de $E_R(M)$. Lo anterior asegura que $(0 :_{E_R(M)} J)$ es una extensión esencial de M como R/J -módulos.

Resta ver que $(0 :_{E_R(M)} J)$ es un R/J -módulo inyectivo. Para ello, considere el siguiente diagrama en R/J -Mod:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N \\ & & \downarrow g & & \\ & & (0 :_{E_R(M)} J) & & \end{array}.$$

La situación anterior se puede completar en R -Mod de forma natural:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N \\ & & \downarrow g & & \nearrow h \\ & & (0 :_{E_R(M)} J) & & \\ & & \downarrow i & & \\ & & E_R(M) & & \end{array}$$

pues $E_R(M)$ es un R -módulo inyectivo. Por otra parte, note que $jh(n) = h(jn) = 0$ para todo $j \in J$ y $n \in N$, pues N es un R/J -módulo. Lo anterior implica que $\text{Im}(h) \subseteq (0 :_{E_R(M)} J)$. Por lo tanto, h es un morfismo de R/J -módulos tal que $hf = g$. \square

Corolario 1. *Sean $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local y J un ideal propio de R . Entonces,*

$$E_{R/J}(\kappa) = (0 :_{E_R(\kappa)} J).$$

Demostración. Se observa que $J \subseteq \mathfrak{m}$, ya que \mathfrak{m} es el único ideal máximo de R y J es un ideal propio. Luego, $J\kappa = J(R/\mathfrak{m}) = J/\mathfrak{m} = 0$. El resultado se sigue de la Proposición 2 considerando que $M = \kappa$. \square

Corolario 2. *Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Entonces,*

$$E_{R/\mathfrak{m}^n}(\kappa) = (0 :_{E_R(\kappa)} \mathfrak{m}^n) \text{ para toda } n \geq 1.$$

Demostración. Se considera $n \geq 1$. El resultado se deduce del Corolario 1 al tomar $J = \mathfrak{m}^n$. \square

Corolario 3. *Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Si R es neteriano, entonces*

$$E_R(\kappa) = \bigcup_{n \geq 0} E_{R/\mathfrak{m}^n}(\kappa).$$

Demostración. Se deduce del Corolario 2 y la Observación 1 que

$$\bigcup_{n \geq 0} E_{R/\mathfrak{m}^n}(\kappa) = \bigcup_{n \geq 0} (0 :_{E_R(\kappa)} \mathfrak{m}^n) = (0 :_{E_R(\kappa)} \mathfrak{m}^\infty).$$

Dado que R es un anillo neteriano, se deduce de la Proposición 1 que $(0 :_{E_R(\kappa)} \mathfrak{m}^\infty)$ es un R -módulo inyectivo, puesto que $E_R(\kappa)$ es un R -módulo inyectivo. Como $\kappa \subseteq (0 :_{E_R(\kappa)} \mathfrak{m}^\infty) \subseteq E_R(\kappa)$, se concluye que $(0 :_{E_R(\kappa)} \mathfrak{m}^\infty) = E_R(\kappa)$. \square

1.2. Dualidad sobre anillos locales artinianos

En esta sección se presentan resultados clave que facilitan construcciones necesarias para desarrollar teoría subsecuente. En particular, se destaca la autodualidad entre módulos finitamente generados en anillos artinianos.

Lema 1. *Sea R un anillo, J un ideal de R y M un R -módulo. Si $JM = 0$, entonces existe*

$$(0 :_{E_R(M)} J) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_R(R/J, E_R(M))$$

un isomorfismo de R -módulos.

Demostración. Sea $m \in (0 :_{E_R(M)} J)$. Se define $\varphi(m)(r + J) := rm$ para todo $r + J \in R/J$. Se verifica que $\varphi(m)$ es un morfismo de R -módulos bien definido. Sean $r + J, r' + J \in R/J$ tales que $r + J = r' + J$; luego, $r - r' \in J$. Dado que $m \in (0 :_{E_R(M)} J)$, entonces $(r - r')m = 0$. Es decir, $rm = r'm$, lo que implica que $\varphi(m)(r + J) = \varphi(m)(r' + J)$. Para demostrar que φ es un isomorfismo de R -módulos, se buscará encontrar su inverso.

Se define

$$\text{Hom}_R(R/J, E_R(M)) \xrightarrow{\psi} E_R(M)$$

como $\psi(f) := f(1 + J)$ para todo $f \in \text{Hom}_R(R/J, E_R(M))$. En efecto, ψ es un morfismo de R -módulos puesto que la definición está en función de morfismos de R -módulos. Por otra parte, sea $m \in \text{imagen}(\psi)$; entonces, existe $f \in \text{Hom}_R(R/J, E_R(M))$ tal que $f(1 + J) = m$. Además, $jm = jf(1 + J) = f(j + J) = 0$ para toda $j \in J$. Por lo tanto, $m \in (0 :_{E_R(M)} J)$. Lo anterior justifica que el codominio de ψ es de hecho $(0 :_{E_R(M)} J)$.

Para finalizar, observe que

$$\begin{aligned} (\varphi\psi)(f)(r + J) &= \varphi(\psi(f))(r + J) \\ &= \varphi(f(1 + J))(r + J) \\ &= rf(1 + J) \\ &= f(r + J) \end{aligned}$$

para todo $f \in \text{Hom}_R(R/J, E_R(M))$ y para todo $r + J \in R/J$. Además,

$$\begin{aligned} (\psi\varphi)(m) &= \psi(\varphi(m)) \\ &= \varphi(m)(1 + J) \\ &= 1m \\ &= m \end{aligned}$$

para todo $m \in (0 :_{E_R(M)} J)$. Se concluye que

$$(0 :_{E_R(M)} J) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_R(R/J, E_R(M))$$

es un isomorfismo de R -módulos. □

Lema 2. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Entonces,

$$\text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, E_R(\kappa)) = R/\mathfrak{m}.$$

Demostración. Note que

$\text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, E_R(\kappa)) = (0 :_{E_R(\kappa)} \mathfrak{m})$	Se sigue del Lema 1
$= E_{R/\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{m})$	Se sigue del Corolario 2
$= R/\mathfrak{m}$	Se sigue de que κ es campo

□

Lema 3. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Si R artiniano, entonces para todo R -módulo finitamente generado M se cumple que

$$\ell_R(M) = \ell_R(\text{Hom}_R(M, E_R(\kappa))).$$

En particular $E_R(\kappa)$ es un R -módulo finitamente generado y $\ell_R(E_R(\kappa)) = \ell_R(R)$.

Demostración. Sea M un R -módulo finitamente generado. El enunciado se demuestra por inducción sobre $\ell_R(M)$.

Caso base. Cuando $\ell_R(M) = 1$. Entonces, M es un R -módulo simple. En particular $M = R/\mathfrak{m}$. Luego,

$$\begin{aligned} \ell_R(\text{Hom}_R(M, E_R(\kappa))) &= \ell_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, E_R(\kappa))) \\ &= \ell_R(R/\mathfrak{m}) && \text{Se sigue del Lema 2} \\ &= \ell_R(M). \end{aligned}$$

Por lo tanto el caso base está cubierto.

Paso inductivo. Sea S un R -submódulo simple de M . Considere la siguiente sucesión exacta en $R\text{-Mod}$

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/S \longrightarrow 0.$$

Aplicando el funtor exacto $\text{Hom}_R(-, E_R(\kappa)) : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ a la sucesión exacta anterior, se obtiene la siguiente sucesión exacta en Ab

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M/S, E_R(\kappa)) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, E_R(\kappa)) \longrightarrow \text{Hom}_R(S, E_R(\kappa)) \longrightarrow 0$$

Luego,

$$\begin{aligned} \ell_R(\text{Hom}_R(M, E_R(\kappa))) &= \ell_R(\text{Hom}_R(M/S, E_R(\kappa))) + \ell_R(\text{Hom}_R(S, E_R(\kappa))) \\ &= \ell_R(M/S) + \ell_R(S) && \text{(H.I.)} \\ &= \ell_R(M). \end{aligned}$$

Por otra parte. Dado que R es artiniiano, en particular R como R -módulo es de longitud finita. Luego,

$$\ell_R(R) = \ell_R(\text{Hom}_R(R, E_R(\kappa))) = \ell_R(E_R(\kappa)).$$

Por lo tanto $E_R(\kappa)$ es finitamente generado. □

Lema 4. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo. Si R artiniiano, entonces para todo R -módulo finitamente generado M se cumple que el morfismo canónico de R -módulos

$$\mu_M : M \rightarrow \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, E_R(\kappa)), E_R(\kappa))$$

es un isomorfismo de R -módulos. En particular $R = \text{Hom}_R(E_R(\kappa), E_R(\kappa))$.

Demostración. Sea M un R -módulo finitamente generado. Se inicia verificando que el morfismo canónico μ_M es inyectivo.

Sea $m \in M$ con $m \neq 0$. Se busca demostrar que $\mu_M(m) \neq 0$. Para ello, basta demostrar que existe $f \in \text{Hom}_R(M, E_R(\kappa))$ tal que $(\mu_M(m))(f) = f(m) \neq 0$. La asignación

$$1 \mapsto m,$$

define un epimorfismo canónico de R -módulos

$$R \xrightarrow{f'} Rm.$$

Luego, por el Primer Teorema de Isomorfismo, $Rm = R / \text{Nuc}(f')$. Como R es local, se deduce que $\text{Nuc}(f') \subseteq \mathfrak{m}$. Por lo tanto, la asignación

$$Rm \xrightarrow{f''} R/\mathfrak{m}$$

dada por $f''(rm) := r + \mathfrak{m}$ está bien definida y es un morfismo de R -módulos. Luego, se tiene la siguiente situación

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & Rm & \xrightarrow{i_{Rm}} & M \\ & & \downarrow f'' & & \uparrow f \\ & & R/\mathfrak{m} & & \\ & & \downarrow i & & \\ & & E_R(\kappa) & & \end{array}$$

Dado que el diagrama anterior conmuta, se tiene que

$$f(m) = f(i_{Rm}(m)) = i(f''(m)) = i(1 + \mathfrak{m}) \neq 0.$$

Como se buscaba demostrar.

Por otra parte, como M es un R -módulo finitamente generado, se sigue del Lema 3 lo siguiente

$$\begin{aligned} \ell_R(M) &= \ell_R(\text{Hom}_R(M, E_R(\kappa))) \\ &= \ell_R(\text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, E_R(\kappa)), E_R(\kappa))). \end{aligned}$$

Es decir, la longitud del dominio y codominio de μ_M coinciden. Dado que μ_M es inyectiva, se concluye que μ_M es un isomorfismo de R -módulos. La última afirmación se sigue de tomar $M = R$. \square

Lema 5. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Si R es neteriano, entonces $(R/\mathfrak{m}^n, \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n, \kappa)$ es un anillo local artiniano para cada $n \geq 1$.

Demostración. Sea $n \geq 1$. Se inicia demostrando que R/\mathfrak{m}^n es un anillo artiniiano.

En primer lugar, puesto que R es un anillo neteriano, se deduce que R/\mathfrak{m}^n es también un anillo neteriano. Para demostrar que R/\mathfrak{m}^n es un anillo artiniiano, basta demostrar que todo ideal primo de R/\mathfrak{m}^n es máximo.

Sea P' un ideal primo de R/\mathfrak{m}^n . Por el teorema de la correspondencia, existe P , un ideal primo de R tal que $P \supseteq \mathfrak{m}^n$ y $P' = P/\mathfrak{m}^n$. Puesto que P es primo, se deduce que $\mathfrak{m} \subseteq P$. Luego, se tiene la siguiente situación:

$$\mathfrak{m} \subseteq P \subseteq R.$$

Note que $P \neq R$ pues P es un ideal primo de R . Luego, como \mathfrak{m} es un ideal máximo de R , se concluye que $P = \mathfrak{m}$. Por lo tanto, $P' = P/\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$ es un ideal máximo de R/\mathfrak{m}^n . Esto demuestra que R/\mathfrak{m}^n es un anillo artiniiano.

Por otra parte, por el teorema de la correspondencia, el anillo R/\mathfrak{m}^n tiene un único ideal máximo, a saber, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$. Por lo tanto, R/\mathfrak{m}^n es un anillo local. Además, note que $R/\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n = R/\mathfrak{m} = \kappa$. \square

1.3. Dualidad de Matlis

En esta sección convergen los resultados obtenidos en las secciones anteriores, y además se presentan un par de caracterizaciones de R -módulos artinianos y R -módulos neterianos. Estas caracterizaciones facilitarán la obtención de la dualidad de Matlis. Se inicia obteniendo una propiedad que relaciona la completación del anillo con respecto al ideal máximo y un anillo de endomorfismos.

Proposición 3. *Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Si R neteriano, entonces*

$$\text{Hom}_R(E_R(\kappa), (E_R(\kappa))) = \widehat{R}^{\mathfrak{m}}.$$

Demostración. Sean $E = E_R(\kappa)$ y $E_n = E_{R/\mathfrak{m}^n}(\kappa)$ para toda $n \geq 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(E, E) &= \text{Hom}_R\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n, E\right) && \text{Se sigue del Corolario 3} \\ &= \text{Hom}_R(\varinjlim (E_n), E) \\ &= \varprojlim (\text{Hom}_R(E_n, E)) && \text{Propiedad de } \text{Hom}_R(-, E_R(\kappa)) \\ &= \varprojlim (\text{Hom}_R(E_n, E_n)) \\ &= \varprojlim (\text{Hom}_{R/\mathfrak{m}^n}(E_n, E_n)) \\ &= \varprojlim (R/\mathfrak{m}^n) && \text{Se sigue de los Lema 4 y 5} \\ &= \widehat{R}^{\mathfrak{m}} \end{aligned}$$

\square

El siguiente resultado, debido a L. Melkersson, proporciona una solución para demostrar que la cápsula inyectiva del campo de residuo es un R -módulo artiniiano [20].

Teorema 1. (*L. Melkersson*) Sean R un anillo, I un ideal finitamente generado de R y M un R -módulo. Si $(0 :_M I)$ es un R -módulo artiniiano y $M = \bigcup_{n \geq 1} (0 :_M I^n)$, entonces M es un R -módulo artiniiano.

Demostración. La demostración se puede encontrar en [20]. \square

Lema 6. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Si R es neteriano, entonces $E_R(\kappa)$ es un R -módulo artiniiano.

Demostración. Observe que

$$\begin{aligned} (0 :_{E_R(\kappa)} \mathfrak{m}) &= E_{R/\mathfrak{m}}(\kappa) && \text{Se sigue del Corolario 2} \\ &= \kappa && \text{Se sigue de que } \kappa \text{ es un campo} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(0 :_{E_R(\kappa)} \mathfrak{m})$ es un R -módulo artiniiano. Luego, por los Corolarios 2 y 3 se tiene que

$$E_R(\kappa) = \bigcup_{n \geq 1} E_{R/\mathfrak{m}^n}(\kappa) = \bigcup_{n \geq 1} (0 :_{E_R(\kappa)} \mathfrak{m}^n).$$

Además, por hipótesis, R es un anillo neteriano. Lo anterior implica que \mathfrak{m} es un ideal finitamente generado de R . Luego, se satisfacen las hipótesis del Teorema 1. Por lo tanto, $E_R(\kappa)$ es un R -módulo artiniiano. \square

Definición 7. Sean R un anillo, J un ideal de R y M un R -módulo. Se dice que M es de torsión por potencias de J si para todo $m \in M$ existe $n \geq 1$ tal que $J^n m = 0$.

Lema 7. Sean $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local y M un R -módulo. Si M es de torsión por potencias de \mathfrak{m} y $\dim_{\kappa}(0 :_M \mathfrak{m}) = n < \infty$, entonces M es isomorfo a algún R -submódulo de $E_R(\kappa)^n$.

Demostración. En primer lugar, observe que $(0 :_M \mathfrak{m})$ tiene estructura natural de R/\mathfrak{m} -módulos, pues $\mathfrak{m}(0 :_M \mathfrak{m}) = 0$. Lo anterior justifica que el enunciado está escrito correctamente.

Por hipótesis $\dim_{\kappa}(0 :_M \mathfrak{m}) = n$, así $(0 :_M \mathfrak{m}) = \kappa^{\oplus n}$. Puesto que $E_R(\kappa)^n$ es la cápsula inyectiva de κ^n se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & (0 :_M \mathfrak{m}) \xrightarrow{i_M} M \\ & & \downarrow i_{E^{\oplus n}} \quad \swarrow h \\ & & E_R(\kappa)^n \end{array}$$

con renglón superior exacto. Como M es de torsión por potencias de J se deduce que $(0 :_M \mathfrak{m}) \subseteq M$ es una extensión esencial. Por lo tanto $\text{Nuc}(h) = 0$, pues $(0 :_M \mathfrak{m}) \cap \text{Nuc}(h) = 0$. En conclusión $M = \text{Im}(h) \subseteq E_{\mathbf{R}}(\kappa)^n$. \square

Lema 8. *Sea $(\mathbf{R}, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local neteriano. Para cualquier \mathbf{R} -módulo M las siguientes condiciones son equivalentes*

1. M es neteriano.
2. M es finitamente generado.
3. Existen $m, n \in \mathbb{N}$ y

$$\mathbf{R}^m \xrightarrow{f} \mathbf{R}^n \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) Puesto que M es un \mathbf{R} -módulo neteriano, entonces todo \mathbf{R} -submódulo de M es finitamente generado. En particular M es finitamente generado.

2) \Rightarrow 3) Se supone que M es un \mathbf{R} -módulo finitamente generado. Luego, existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbf{R}^n \rightarrow M$ un epimorfismo de \mathbf{R} -módulos. Observe que $\text{Nuc}(g)$ es un \mathbf{R} -submódulo del \mathbf{R} -módulo neteriano \mathbf{R}^n . Es decir, $\text{Nuc}(g)$ es un \mathbf{R} -módulo finitamente generado. Luego, existen $m \in \mathbb{N}$ y $f' : \mathbf{R}^m \rightarrow \text{Nuc}(g)$ un epimorfismo de \mathbf{R} -módulos.

Sea $f := if'$. Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo con renglón superior exacto

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R}^m & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbf{R}^n & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0 \\ & \searrow f' & \nearrow i & & \\ & & \text{Nuc}(g) & & \end{array}$$

3) \Rightarrow 1) Si se satisfacen las hipótesis de 3, en particular M es un \mathbf{R} -módulo finitamente generado. Puesto que \mathbf{R} es neteriano se concluye que M es neteriano. \square

Lema 9. *Sea $(\mathbf{R}, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local neteriano. Para cualquier \mathbf{R} -módulo M las siguientes condiciones son equivalentes*

1. M es artiniiano.
2. M es de torsión por potencias de \mathfrak{m} y $\dim_{\kappa}(0 :_M \mathfrak{m}) = n < \infty$.
3. Existen $m, n \in \mathbb{N}$ y

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E_{\mathbf{R}}(\kappa)^m \xrightarrow{g} E_{\mathbf{R}}(\kappa)^n$$

una sucesión exacta.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) Sea $x \in M$. Basta ver que existe $n \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}^n x = 0$. Considere la siguiente cadena descendente de R-submódulos de M

$$M \supseteq \mathfrak{m}x \supseteq \mathfrak{m}^2x \supseteq \mathfrak{m}^3x \supseteq \dots$$

Por hipótesis M es un R-módulo artiniiano, Por lo tanto la cadena anterior se estaciona. Es decir, existe $n \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}^{n+1}x = \mathfrak{m}^n x$. Sea $N = \mathfrak{m}^n x$. Entonces, $mN = N$. Luego, por el Lema de Nakayama se concluye que $N = 0$. Es decir, $\mathfrak{m}^n x = 0$.

2) \Rightarrow 3) Por hipótesis se satisfacen las hipótesis del Lema 7. Por lo tanto $M \subseteq E_R(\kappa)^m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Sea $N = E_R(\kappa)^m / M$. Por el Lema 6 el R-módulo $E_R(\kappa)$ es artiniiano. Por lo tanto N es un R-módulo artiniiano. Aplicando el argumento anterior para N se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N \subseteq E_R(\kappa)^n$. En conclusión se tiene el siguiente diagrama conmutativo con renglón exacto

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_m} & E_R(\kappa)^m & \dashrightarrow & E_R(\kappa)^n \\ & & & & \searrow \pi & & \nearrow i_n \\ & & & & & N & \end{array}$$

3) \Rightarrow 1) Si se satisfacen las hipótesis de 3, en particular M es un R-submódulo del R-módulo artiniiano $E_R(\kappa)^m$. Por lo tanto M es artiniiano. \square

Definición 8. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Se define el funtor

$$D(-) := \text{Hom}_R(-, E_R(\kappa)) : R\text{-Mod}^{\text{op}} \rightarrow R\text{-Mod}.$$

Lema 10. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local, neteriano y completo. Entonces $D(R) = E_R(\kappa)$ y $D(E_R(\kappa)) = R$.

Demostración. En primer lugar observe que

$$\begin{aligned} D(E_R(\kappa)) &= \text{Hom}_R(E_R(\kappa), E_R(\kappa)) \\ &= \widehat{R}^{\mathfrak{m}} && \text{Se sigue de la Proposición 3} \\ &= R. && \text{Se sigue de que } R \text{ es completo} \end{aligned}$$

Por otra parte. Es claro que $D(R) = \text{Hom}_R(R, E_R(\kappa)) = E_R(\kappa)$. \square

Proposición 4. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local, neteriano y completo. Para todo R-módulo neteriano M se tiene que $D(M)$ es un R-módulo artiniiano. Más aun, $D(D(M)) = M$.

Demostración. Sea M un R-módulo neteriano. Por el Lema 8 existen $m, n \in \mathbb{N}$ y

$$R^m \xrightarrow{f} R^n \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta. Note que $D(-) = \text{Hom}_R(-, E_R(\kappa))$ es un funtor contravariante exacto pues $E_R(\kappa)$ es un R -módulo inyectivo. Además, se sigue del Lema 10 que $D(R^k) = D(R)^k = E_R(\kappa)^k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Luego, se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow D(M) \xrightarrow{D(g)} E_R(\kappa)^n \xrightarrow{D(f)} E_R(\kappa)^m .$$

Se concluye por el Lema 9 que $D(M)$ es un R -módulo artinianiano.

En lo que respecta a la última afirmación basta aplicar el funtor contravariante exacto D a la última sucesión exacta obtenida. Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccccc} R^m & \xrightarrow{f} & R^n & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \mu_M \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ R^m & \xrightarrow{D(D(f))} & R^n & \xrightarrow{D(D(g))} & D(D(M)) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Se concluye por el Lema del Cinco que $\mu_M : M \rightarrow D(D(M))$ es un isomorfismo de R -módulos. \square

Proposición 5. *Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local, neteriano y completo. Para todo R -módulo artinianiano M se tiene que $D(M)$ es un R -módulo neteriano. Más aun, $D(D(M)) = M$.*

Demostración. Sea M un R -módulo artinianiano. Por el Lema 8 existen $m, n \in \mathbb{N}$ y

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E_R(\kappa)^m \xrightarrow{g} E_R(\kappa)^n$$

una sucesión exacta. Note que $D(-) = \text{Hom}_R(-, E_R(\kappa))$ es un funtor contravariante exacto pues $E_R(\kappa)$ es un R -módulo inyectivo. Además, se sigue del Lema 10 que $D(E_R(\kappa)^k) = D(E_R(\kappa))^k = R^k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Luego, se tiene la siguiente sucesión exacta

$$R^n \xrightarrow{D(g)} R^m \xrightarrow{D(f)} D(M) \longrightarrow 0 .$$

Se concluye por el Lema 9 que $D(M)$ es un R -módulo neteriano.

En lo que respecta a la última afirmación basta aplicar el funtor contravariante exacto D a la última sucesión exacta obtenida. Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & E_R(\kappa)^m & \xrightarrow{g} & E_R(\kappa)^n \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \mu_M \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & D(D(M)) & \xrightarrow{D(D(f))} & E_R(\kappa)^m & \xrightarrow{D(D(g))} & E_R(\kappa)^n. \end{array}$$

Se concluye por el Lema del Cinco que $\mu_M : M \rightarrow D(D(M))$ es un isomorfismo de R -módulos. \square

Corolario 4. (*Dualidad de Matlis*) Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local, neteriano y completo. El funtor

$$D(-) := \operatorname{Hom}_R(-, E_R(\kappa)) : R\text{-Mod}^{\text{op}} \rightarrow R\text{-Mod}.$$

induce una dualidad entre las subcategorías de R -módulos artinianos y R -módulos neterianos. Más aun, induce una autodualidad cuando se restringe a la subcategoría de R -módulos de longitud finita.

Demostración. La demostración se sigue de las Proposiciones 4 y 5. \square

Capítulo 2

Categorías trianguladas

El objetivo de este capítulo es recopilar los elementos necesarios para presentar la construcción de la categoría derivada de una categoría abeliana. Asimismo, se busca precisar la notación para asegurar consistencia a lo largo del texto. Se asume que el lector posee cierta familiaridad con la teoría de categorías trianguladas; por este motivo, se remite únicamente a las definiciones y resultados imprescindibles que se utilizarán en capítulos posteriores. El lector interesado en las demostraciones puede consultar [7], [10], [12], [23] entre otros.

2.1. Definición, propiedades básicas y funtores triangulados

Definición 9. Sea \mathcal{C} una categoría aditiva. Un funtor de traslación es un automorfismo aditivo $\Sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

Definición 10. Sean \mathcal{C} una categoría aditiva y $\Sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor de traslación. Un triángulo en \mathcal{C} es un diagrama de la forma

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X) .$$

Notación 3. Es común denotar un triángulo por medio de sus componentes (X, Y, Z, u, v, w) o también como

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ w \swarrow & & \nwarrow v \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

Definición 11. Sean \mathcal{C} una categoría aditiva y $\Sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor de traslación. Se dice que la terna $(f, g, h) : (X, Y, Z, u, v, w) \rightarrow (X', Y', Z', u', v', w')$ es un morfismo de triángulos si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma(X) \\
f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow \Sigma(f) \\
X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma(X')
\end{array}$$

Observación 2. Sean \mathcal{C} una categoría aditiva y $\Sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor de traslación. Las clases de triángulos en \mathcal{C} , morfismos de triángulos en \mathcal{C} y la composición de morfismos de triángulos inducida componente a componente, definen una categoría, llamada la categoría de triángulos asociada al par (\mathcal{C}, Σ) la cual se denota por $\text{Triang}(\mathcal{C}, \Sigma)$.

Definición 12. Una categoría pre-triangulada es una terna $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$, donde:

1. \mathcal{T} una categoría aditiva y $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ un funtor de traslación.
2. Δ una clase de objetos de $\text{Triang}(\mathcal{T}, \Sigma)$, cuyos elementos se conocen como triángulos distinguidos, los cuales satisfacen los siguientes axiomas

TR1A. Para todo $X \in \mathcal{T}$, el triángulo

$$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma(X)$$

es distinguido.

TR1B. La clase Δ es cerrada por isomorfismos en \mathcal{T} .

TR1C. Para todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{T} , existe un triángulo

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X)$$

el cual es distinguido.

TR2. Si

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X)$$

es un triángulo distinguido. Entonces,

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X) \xrightarrow{-\Sigma(u)} \Sigma(Y)$$

también es un triángulo distinguido.

TR3. Considere el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma(X) \\
f \downarrow & & g \downarrow & & & & \downarrow \Sigma(f) \\
X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma(X')
\end{array}$$

Si los renglones son triángulos distinguidos y el cuadrado izquierdo conmuta. Entonces, existe $h : Z \rightarrow Z'$ en \mathcal{T} tal que (f, g, h) es un morfismo de triángulos.

Definición 13. Una categoría pre-triangulada $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ es triangulada si satisface el siguiente axioma

TR4. Para cualesquiera morfismos $u : X \rightarrow Y, v : Y \rightarrow Z$ en \mathcal{T} , el siguiente diagrama cuyos renglones son triángulos distinguidos por TR1C

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{p} & Z' & \xrightarrow{q} & \Sigma(X) \\
 1_X \downarrow & & \downarrow v & & & & \downarrow 1_X \\
 X & \xrightarrow{vu} & Z & \xrightarrow{r} & Y' & \xrightarrow{s} & \Sigma(X) \\
 u \downarrow & & \downarrow 1_Z & & & & \downarrow \Sigma(u) \\
 Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{m} & X' & \xrightarrow{n} & \Sigma(Y)
 \end{array}$$

se puede completar al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{p} & Z' & \xrightarrow{q} & \Sigma(X) \\
 1_X \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow \exists i & & \downarrow 1_X \\
 X & \xrightarrow{vu} & Z & \xrightarrow{r} & Y' & \xrightarrow{s} & \Sigma(X) \\
 u \downarrow & & \downarrow 1_Z & & \downarrow \exists j & & \downarrow \Sigma(u) \\
 Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{m} & X' & \xrightarrow{n} & \Sigma(Y) \\
 & & & & \downarrow k & & \downarrow \Sigma(p) \\
 & & & & \Sigma(Z') & \xrightarrow{1_{\Sigma(Z')}} & \Sigma(Z')
 \end{array}$$

donde la tercer columna es un triángulo distinguido.

Proposición 6. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría pre-triangulada y $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$ un triángulo distinguido. Entonces, $vu = 0$ y $wv = 0$.

Definición 14. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría pre-triangulada, \mathcal{A} una categoría abeliana y $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ un funtor covariante (resp. contravariante) aditivo. Se dice que F es cohomológico, si para todo triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X)$$

se tiene que la sucesión

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z)$$

es exacta en \mathcal{A} .

Proposición 7. Sea $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría pre-triangulada. Entonces, para todo $A \in \mathcal{T}$, se cumple lo siguiente

1. El funtor $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, -) : \mathcal{T} \rightarrow \text{Ab}$ es cohomológico.
2. El funtor $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, A) : \mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ es cohomológico.

Proposición 8. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría pre-triangulada y

$$(f, g, h) : \eta = (X, Y, Z, u, v, w) \rightarrow \eta' = (X', Y', Z', u', v', w')$$

un morfismo de triángulos distinguidos. Si $f : X \rightarrow X'$ y $g : Y \rightarrow Y'$ son isomorfismos en \mathcal{T} . Entonces, $h : Z \rightarrow Z'$ es un isomorfismo en \mathcal{T} .

Proposición 9. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría pre-triangulada y $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$ un triángulo en \mathcal{C} . Entonces, $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$ es un triángulo distinguido si y sólo si $\mu = (Y, Z, \Sigma(X), v, w, -\Sigma(u))$ es un triángulo distinguido.

Proposición 10. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría pre-triangulada y $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$ un triángulo distinguido. Entonces, $Z = 0$ en \mathcal{T} si y sólo si $u : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo en \mathcal{T} .

Definición 15. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría triangulada y \mathcal{S} una subcategoría plena de \mathcal{T} . Se dice que \mathcal{S} es una subcategoría triangulada de \mathcal{T} si satisface las siguientes condiciones:

ST1. \mathcal{S} tiene un objeto cero de \mathcal{T} .

ST2. Para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{S}$ el coproducto $X \oplus Y$ en \mathcal{T} está en \mathcal{S} .

ST3. Para todo $X \in \mathcal{S}$ se tiene que $\Sigma(X) \in \mathcal{S}$ y $\Sigma^{-1}(X) \in \mathcal{S}$.

ST4. Para todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{S} , existe un triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma(X)$$

tal que $Z \in \mathcal{S}$.

Definición 16. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría triangulada, \mathcal{S} una subcategoría triangulada de \mathcal{T} y

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X)$$

un triángulo distinguido. Se dice que

1. \mathcal{S} es cerrada por conos (respectivamente co-conos) si $X, Y \in \mathcal{S}$, entonces $Z \in \mathcal{S}$ (respectivamente $\Sigma^{-1}(Z) \in \mathcal{S}$).

2. \mathcal{S} es cerrada por extensiones si $X, Z \in \mathcal{S}$, entonces $Y \in \mathcal{S}$.

Proposición 11. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría triangulada y \mathcal{S} una subcategoría plena de \mathcal{T} . Las siguientes condiciones son equivalentes

1. \mathcal{S} es una subcategoría triangulada de \mathcal{T} .
2. $\Sigma^{-1}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ y \mathcal{S} es cerrada por conos.
3. $\Sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ y \mathcal{S} es cerrada por co-conos.

Definición 17. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría triangulada y \mathcal{S} una subcategoría triangulada de \mathcal{T} . Se dice que \mathcal{S} es una subcategoría gruesa de \mathcal{T} , si para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{T}$ tales que $X \oplus Y \in \mathcal{S}$ se tiene que $X, Y \in \mathcal{S}$.

Definición 18. Sea $F : (\mathcal{T}_1, \Sigma_1, \Delta_1) \rightarrow (\mathcal{T}_2, \Sigma_2, \Delta_2)$ un funtor aditivo entre categorías trianguladas. Se dice que F es triangulado si existe $\eta : F\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2 F$ un isomorfismo natural tal que para todo triángulo

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma_1(X) \in \Delta_1$$

se tiene que

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\eta_X F(w)} \Sigma_2(F(X)) \in \Delta_2 .$$

2.2. Localización de categorías

Definición 19. Sean \mathcal{C} una categoría y $\mathcal{S} \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$. La localización de \mathcal{C} con respecto a \mathcal{S} es un par $(\mathcal{C}_{\mathcal{S}}, \mathcal{Q})$ donde $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ es una categoría y $\mathcal{Q} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ es un funtor que satisface la siguiente propiedad universal

Loc1. Para todo $\sigma \in \mathcal{S}$ se tiene que $\mathcal{Q}(\sigma) \in \text{Mor}(\mathcal{C}_{\mathcal{S}})$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$.

Loc2. Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un funtor tal que para todo $\sigma \in \mathcal{S}$ se tiene que $F(\sigma) \in \text{Mor}(\mathcal{D})$ es un isomorfismo en \mathcal{D} . Entonces, existe un único funtor $\hat{F} : \mathcal{C}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{Q}} & \mathcal{C}_{\mathcal{S}} \\ & \searrow F & \downarrow \hat{F} \\ & & \mathcal{D} \end{array}$$

La categoría $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ se conoce como la categoría de fracciones mientras que el funtor $\mathcal{Q} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ se conoce como funtor de localización.

Teorema 2. Sean \mathcal{C} una categoría y $\mathcal{S} \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$. La localización de \mathcal{C} con respecto a \mathcal{S} siempre existe y es única salvo isomorfismo.

Definición 20. Sean \mathcal{C} una categoría y $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$. Se dice que S es un sistema multiplicativo en \mathcal{C} si se satisfacen las siguientes condiciones

Mult1. Para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ se tiene que $1_X \in S$.

Mult2. S es cerrada bajo composición de morfismos en \mathcal{C} .

Definición 21. Sean \mathcal{C} una categoría y $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$. Se dice que S es localizante a derecha en \mathcal{C} si S es un sistema multiplicativo y además satisface las siguientes condiciones

FD1. Considere cualesquiera morfismos $X \xrightarrow{g} Z \xleftarrow{\mu} Y$ en $\text{Mor}(\mathcal{C})$, con $\mu \in S$. Entonces, se puede completar el siguiente diagrama conmutativo en \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{f} & Y \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \mu \\ X & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

FD2. Considere cualesquiera morfismos $X \xrightarrow[g]{f} Y$ en $\text{Mor}(\mathcal{C})$. Si existe un morfismo $\mu : Y \rightarrow Y'$ en S tal que $\mu f = \mu g$, entonces existe un morfismo $\sigma : X' \rightarrow X$ en S tal que $f\sigma = g\sigma$.

Definición 22. Sean \mathcal{C} una categoría, $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ y $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. Se define un S -tejado a derecha en \mathcal{C} , de X en Y como un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} & X' & \\ \sigma \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array}$$

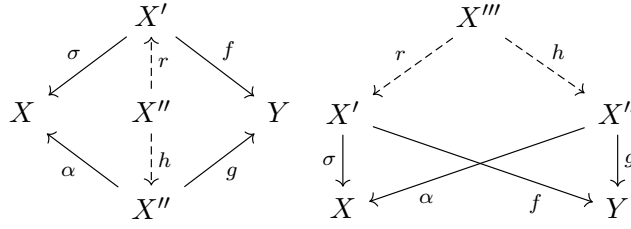
donde $\sigma : X' \rightarrow X$ es un morfismo en S .

Notación 4. Sean \mathcal{C} una categoría y $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$. Para cualesquiera $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ se denota por $[S, \mathcal{C}](X, Y)$ a la clase de todos los S -tejados a derecha en \mathcal{C} , de X en Y . Además, los elementos de tal clase se denotan por (σ, f) haciendo énfasis en los morfismos que componen al diagrama.

Definición 23. Sean \mathcal{C} una categoría, $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ y $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. Se define la siguiente relación sobre $[S, \mathcal{C}](X, Y)$

$$\sim_S := \{((\sigma, f), (\alpha, g)) : \text{Existen } r, h \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \text{ tales que } fr = gh \text{ y } \alpha h = \sigma r \in S\}.$$

Los siguientes diagramas ilustran la relación



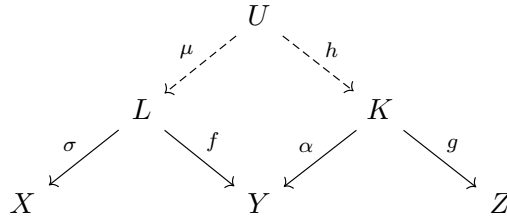
Proposición 12. Sean \mathcal{C} una categoría y $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ localizante a derecha en \mathcal{C} . Para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$ la relación definida en 23 es de equivalencia.

Definición 24. Sean \mathcal{C} una categoría y $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ localizante a derecha en \mathcal{C} . Para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$ se define

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}S^{-1}}(X, Y) := [S, \mathcal{C}](X, Y) / \sim_S.$$

Se denota por $[\sigma, f]$ a la clase de equivalencia de $(\sigma, f) \in [S, \mathcal{C}](X, Y)$. Es común denotar $f\sigma^{-1} := [\sigma, f]$.

Proposición 13. Sean \mathcal{C} una categoría y $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ localizante a derecha en \mathcal{C} . Para cualesquiera $(\sigma, f) \in [S, \mathcal{C}](X, Y)$ y $(\alpha, g) \in [S, \mathcal{C}](Y, Z)$ existen $\mu \in S$ y $h \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ tales que el siguiente diagrama conmuta



Proposición 14. Sean \mathcal{C} una categoría y $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ localizante a derecha en \mathcal{C} . La composición de S-tejados a derecha inducida por 13

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}S^{-1}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}S^{-1}}(X, Y) \xrightarrow{\circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}S^{-1}}(X, Z)$$

está bien definida para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

Corolario 5. Sean \mathcal{C} una categoría y $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ localizante a derecha en \mathcal{C} . Se tiene una categoría $\mathcal{C}S^{-1}$ donde $\text{Obj}(\mathcal{C}S^{-1}) := \text{Obj}(\mathcal{C})$ y $\text{Mor}(\mathcal{C}S^{-1}) := \bigcup_{(X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Proposición 15. Sean \mathcal{C} una categoría y $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ localizante a derecha en \mathcal{C} . Se definen las siguientes asignaciones

$$\text{sq} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}S^{-1}.$$

A nivel de objetos. Sea $X \in \mathcal{C}$. Se define

$${}_S\mathbf{q}(X) := X.$$

A nivel de morfismos. Sea $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} . Se define

$${}_S\mathbf{q}(f) := [1_X, f].$$

Se afirma que la asignación ${}_S\mathbf{q} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}S^{-1}$ es funtorial.

Teorema 3. Sean \mathcal{C} una categoría y $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ localizante a derecha en \mathcal{C} . El par $(\mathcal{C}S^{-1}, {}_S\mathbf{q})$ es la localización de \mathcal{C} con respecto a S .

Observación 3. Es posible dotar a la categoría $\mathcal{C}S^{-1}$ de una estructura de categoría aditiva y demostrar que el funtor de localización ${}_S\mathbf{q} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}S^{-1}$ es aditivo. Sin embargo, la metodología para lograr estos resultados se desvía de los intereses principales de este trabajo. Por esta razón, se asumirán dichos resultados de ahora en adelante.

2.3. Localización de categorías trianguladas

Observación 4. De manera análoga a la definición de un sistema localizante a derecha, se puede introducir el concepto de un sistema localizante a izquierda y desarrollar la correspondiente teoría de localización para este sistema. Así, un sistema se considera localizante si cumple con las propiedades de localización tanto a izquierda como a derecha.

Definición 25. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría triangulada y $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{T})$. Se dice que S es un sistema localizante compatible con la triangulación Δ en \mathcal{T} si se satisfacen las siguientes condiciones

SL0. S es un sistema localizante en \mathcal{T} .

SL1. $\Sigma(S) = S$.

SL2. Para cualquier morfismo de triángulos distinguidos $(\alpha, \beta, h) : \eta \rightarrow \mu$ tal que $\alpha, \beta \in S$ existe $\sigma \in S$ tal que $(\alpha, \beta, \sigma) : \eta \rightarrow \mu$ es un morfismo de triángulos distinguidos.

Notación 5. Sea $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría triangulada. Se denota por $\text{Loc}(\mathcal{T})$ a la clase de todos los sistemas localizantes compatibles con la triangulación Δ en \mathcal{T} .

Proposición 16. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría triangulada y $S \in \text{Loc}(\mathcal{T})$. Se definen las siguientes asignaciones

$${}_S\Sigma : \mathcal{T}S^{-1} \rightarrow \mathcal{T}S^{-1}.$$

A nivel de objetos. Sea $X \in \mathcal{T}S^{-1}$. Se define

$${}_S\Sigma(X) := X.$$

A nivel de morfismos. Sea $[\sigma, f] : X \rightarrow Y$ en $\mathcal{T}S^{-1}$. Se define

$${}_S\Sigma([\sigma, f]) := {}_Sq(\Sigma(f)){}_Sq(\Sigma(\sigma))^{-1}.$$

Se afirma que la asignación ${}_S\Sigma : \mathcal{C}S^{-1}\mathcal{T}S^{-1} \rightarrow \mathcal{T}S^{-1}$ es un isomorfismo de categorías aditivas que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{{}_Sq} & \mathcal{T}S^{-1} \\ {}_S\Sigma \downarrow & & \downarrow {}_S\Sigma \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{{}_Sq} & \mathcal{T}S^{-1} \end{array}$$

Definición 26. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría triangulada y $S \in \text{Loc}(\mathcal{T})$. Se define la clase

$${}_S\Delta := \{\eta \in \text{Triang}(\mathcal{T}S^{-1}, {}_S\Sigma) : \exists \mu \in \Delta \text{ tal que } \eta \cong {}_Sq(\mu) \text{ en } \text{Triang}(\mathcal{T}S^{-1}, {}_S\Sigma)\}.$$

Teorema 4. Sean $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ una categoría triangulada y $S \in \text{Loc}(\mathcal{T})$. Las siguientes condiciones se satisfacen

1. $(\mathcal{T}S^{-1}, {}_S\Sigma, {}_S\Delta)$ es una categoría triangulada.
2. El funtor de localización ${}_Sq : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}S^{-1}$ es triangulado.
3. Si $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ es un funtor triangulado tal que para todo $\sigma \in S$ se tiene que $F(\sigma)$ es un isomorfismo en \mathcal{S} . Entonces, existe un único funtor $\widehat{F} : \mathcal{T}S^{-1} \rightarrow \mathcal{S}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{{}_Sq} & \mathcal{T}S^{-1} \\ & \searrow F & \downarrow \widehat{F} \\ & & \mathcal{S} \end{array}.$$

2.4. La categoría homotópica es triangulada

Notación 6. Sea \mathcal{C} una categoría aditiva. Se denota por $\text{Ch}(\mathcal{C})$ la categoría de complejos de cocadena en \mathcal{C} .

Proposición 17. Sea \mathcal{C} una categoría aditiva. Se definen las siguientes asignaciones

$$(-)^\circ : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{C}).$$

A nivel de objetos. Sea $A \in \mathcal{C}$. Se define

$$(A^\circ)^n := \begin{cases} A & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

A nivel de morfismos. Sea $f : A \rightarrow B$ en \mathcal{C} . Se define

$$(f^\circ)^n := \begin{cases} f & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Se afirma que $(-)^\circ : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{C})$ es un funtor aditivo, fiel y pleno.

Proposición 18. Sea \mathcal{C} una categoría aditiva. Se definen las siguientes asignaciones

$$\Sigma : \text{Ch}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{C}).$$

A nivel de objetos. Sea $(X^\bullet, d_X^\bullet) \in \text{Ch}(\mathcal{C})$. Se define

$$(\Sigma(X^\bullet))^n := X^{n+1} \text{ y } d_{\Sigma(X^\bullet)}^n := -d_X^{n+1} \text{ para toda } n \in \mathbb{Z}.$$

A nivel de morfismos. Sea $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathcal{C})$. Se define

$$(\Sigma(f))^n := f^{n+1} \text{ para toda } n \in \mathbb{Z}.$$

Se afirma que la asignación $\Sigma : \text{Ch}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{C})$ es un isomorfismo de categorías aditivas. Dicho funtor se conoce como traslación de complejos. Es usual denotar $[1] := \Sigma$.

Definición 27. Sean \mathcal{C} una categoría aditiva y $J \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$. Se dice que J es un ideal de \mathcal{C} si se satisfacen las siguientes condiciones

1. Para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$ se tiene que $J(X, Y)$ es un subgrupo abeliano de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.
2. Para $W \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\beta} Z$ en \mathcal{C} tal que $f \in J(X, Y)$. Entonces, $\beta f \in J(X, Z)$ y $f\alpha \in J(W, Y)$.

Proposición 19. Sean \mathcal{C} una categoría aditiva y J un ideal de \mathcal{C} . Se define la categoría cociente de \mathcal{C} sobre J . La cual se denota por \mathcal{C}/J .

- $\text{Obj}(\mathcal{C}/J) := \text{Obj}(\mathcal{C})$.
- Para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}/J$. Se define

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}/J}(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/J(X, Y).$$

■ Para cualesquiera

$$X \xrightarrow{[f]} Y \xrightarrow{[g]} Z$$

en \mathcal{C}/J . Se define $[g][f] := [gf]$.

Se afirma que \mathcal{C}/J es una categoría aditiva.

Proposición 20. Sean \mathcal{C} una categoría aditiva y J un ideal de \mathcal{C} . Se definen las siguientes asignaciones

$$\pi_J : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/J.$$

A nivel de objetos. Sea $X \in \mathcal{C}$. Se define

$$\pi_J(X) := X.$$

A nivel de morfismos. Sea $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} . Se define

$$\pi_J(f) := [f] = f + J(X, Y).$$

Se afirma que $\pi_J : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/J$ es un funtor aditivo, pleno y denso.

Proposición 21. Sean \mathcal{C} una categoría aditiva y J un ideal de \mathcal{C} . Para todo funtor aditivo $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ tal que $F(f) = 0$ para todo $f \in J$. Existe un único funtor aditivo $\widehat{F} : \mathcal{C}/J \rightarrow \mathcal{C}'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi_J} & \mathcal{C}/J \\ & \searrow F & \downarrow \widehat{F} \\ & & \mathcal{C}'. \end{array}$$

La propiedad anterior se conoce como propiedad universal de la categoría cociente.

Observación 5. Se recuerda que si \mathcal{C} es una categoría aditiva, entonces $\text{Ch}(\mathcal{C})$ es también una categoría aditiva.

Proposición 22. Sea \mathcal{C} una categoría aditiva. Para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$. Se define

$$\mathbf{H}(X, Y) := \{f \in \text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{C})}(X, Y) : f \sim 0\}.$$

Entonces, \mathbf{H} es un ideal de $\text{Ch}(\mathcal{C})$.

Definición 28. Sea \mathcal{C} una categoría aditiva. Por las proposiciones 19 y 22 se puede considerar la categoría cociente de $\text{Ch}(\mathcal{C})$ sobre \mathbf{H} . Se define

$$K(\mathcal{C}) := \text{Ch}(\mathcal{C})/H.$$

Dicha categoría se conoce como la categoría homotópica de \mathcal{C} .

Proposición 23. Sea \mathcal{C} una categoría aditiva. El funtor traslación de complejos $[1] : \text{Ch}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{C})$ induce un único isomorfismo de categorías aditivas

$$\widehat{[1]} : K(\mathcal{C}) \rightarrow K(\mathcal{C})$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Ch}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\pi_H} & K(\mathcal{C}) \\ [1] \downarrow & & \downarrow \widehat{[1]} \\ \text{Ch}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\pi_H} & K(\mathcal{C}). \end{array}$$

Es usual denotar a $\widehat{[1]}$ simplemente por $[1]$.

Definición 29. Sean \mathcal{C} una categoría aditiva y $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathcal{C})$. Se define el complejo cono de f como

$$c(f)^n := X^{n+1} \oplus Y^n$$

$$d_{c(f)}^n := \begin{pmatrix} -d_{X^\bullet}^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_{Y^\bullet}^n \end{pmatrix}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. El siguiente diagrama ilustra al complejo en cuestión

$$c(f) : \cdots \longrightarrow X^n \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{d_{c(f)}^{n-1}} X^{n+1} \oplus Y^n \xrightarrow{d_{c(f)}^n} X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Definición 30. Sea \mathcal{C} una categoría aditiva. Se denota por ${}_K\Delta$ a la clase de todos los $\eta \in \text{Triang}(K(\mathcal{C}), \widehat{[1]})$ que admiten $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ tal que $\eta \cong \pi_H(\mu)$ en $\text{Triang}(K(\mathcal{C}), \widehat{[1]})$, donde

$$\mu : X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{i_f} c(f) \xrightarrow{p_f} X^\bullet[1]$$

se conoce como el triángulo estándar asociado al morfismo f .

Teorema 5. Sea \mathcal{C} una categoría aditiva. Entonces, $(K(\mathcal{C}), \widehat{[1]}, {}_K\Delta)$ es una categoría triangulada.

2.5. La categoría derivada de una categoría abeliana

Definición 31. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathcal{A})$. Se dice que f es un *casi-isomorfismo*, si $H^n(f) : H^n(X^\bullet) \rightarrow H^n(Y^\bullet)$ es un isomorfismo en \mathcal{A} para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definición 32. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Se define la clase de casi-isomorfismos en $K(\mathcal{A})$

$$\text{Qis}(\mathcal{A}) := \{[f] : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \in K(\mathcal{A}) : \widehat{H}^n([f]) : H^n(X^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n(Y^\bullet) \text{ para toda } n \in \mathbb{Z}\}.$$

donde

$$\begin{array}{ccc} \text{Ch}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_H} & K(\mathcal{A}) \\ & \searrow H^n & \downarrow \widehat{H}^n \\ & & \mathcal{A} \end{array}$$

se obtiene por medio de la propiedad universal del cociente.

Observación 6. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Observe que $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathcal{A})$ es un casi-isomorfismo si y sólo si $\pi_H(f) \in \text{Qis}(\mathcal{A})$.

Proposición 24. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Entonces, $\text{Qis}(\mathcal{A})$ es un sistema localizante compatible con la triangulación ${}_K\Delta$ en $K(\mathcal{A})$.

Definición 33. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Se define la categoría derivada de \mathcal{A} como la localización de $K(\mathcal{A})$ con respecto a $\text{Qis}(\mathcal{A})$. Es decir

$$D(\mathcal{A}) := K(\mathcal{A}) \text{Qis}(\mathcal{A})^{-1}.$$

Por la Proposición 24 y el Teorema 4 se sabe que $D(\mathcal{A})$ es una categoría triangulada.

2.6. Funtores entre categorías derivadas inducidos por funtores exactos

Proposición 25. Sea $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas. Entonces, F induce un funtor aditivo entre las correspondientes categorías de complejos de cocadena

$$\text{Ch}(\mathcal{A}) \xrightarrow{F_{\text{Ch}}} \text{Ch}(\mathcal{B})$$

Proposición 26. Sea $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas. El funtor aditivo $F_{\text{Ch}} : \text{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{B})$ induce un único funtor aditivo

$$K(\mathcal{A}) \xrightarrow{F_K} K(\mathcal{B})$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Ch}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_H} & K(\mathcal{A}) \\ F_{\text{Ch}} \downarrow & & \downarrow F_K \\ \text{Ch}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\pi_{H'}} & K(\mathcal{B}) \end{array}$$

donde $H \leq \text{Ch}(\mathcal{A})$ y $H' \leq \text{Ch}(\mathcal{B})$.

Corolario 6. Sea $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas. Si F es un funtor exacto. Entonces, el funtor aditivo $F_K : K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$ induce un único funtor aditivo

$$D(\mathcal{A}) \xrightarrow{F_D} D(\mathcal{B})$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{A}) & \xrightarrow{s^q} & D(\mathcal{A}) \\ F_K \downarrow & & \downarrow F_D \\ K(\mathcal{B}) & \xrightarrow{s'^q} & D(\mathcal{B}) \end{array}$$

donde $S = \text{Qis}(\mathcal{A})$ y $S' = \text{Qis}(\mathcal{B})$. Más aun, si F_K es un funtor triangulado, entonces F_D es un funtor triangulado.

2.7. Funtores de truncamiento

Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ un morfismo en $\text{Ch}(\mathcal{A})$. Considere la siguiente situación

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet : \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} \\ & & & & & \text{Conuc}(d_X^{n-1}) & \\ & & & & j_{X^n} \searrow & \nearrow \hat{d}_{X^\bullet}^n & \\ & & & & & \downarrow c_{X^\bullet}^n & \\ & & & & & \text{Conuc}(d_Y^{n-1}) & \\ & & & & j_{Y^n} \nearrow & \searrow \hat{d}_{Y^\bullet}^n & \\ Y^\bullet : \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Proposición 27. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $n \in \mathbb{Z}$. Se definen las siguientes asignaciones

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\tau^{\geq n}} \mathrm{Ch}(\mathcal{A})$$

A nivel de objetos. Sea $X^\bullet \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A})$. Se define

$$(\tau^{\geq n}(X^\bullet))^k = \begin{cases} X^k, & \text{si } k > n, \\ \mathrm{Conuc}(d_X^{n-1}), & \text{si } k = n, \\ 0, & \text{si } k < n. \end{cases}$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$.

A nivel de morfismos. Sea $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$. Se define

$$(\tau^{\geq n}(f))^k = \begin{cases} f^k, & \text{si } k > n, \\ c_X^n, & \text{si } k = n, \\ 0, & \text{si } k < n. \end{cases}$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$. El diagrama siguiente ilustra la situación

$$\begin{array}{ccccccccc} \tau^{\geq n}(X^\bullet) : \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{Conuc}(d_{X^\bullet}^{n-1}) & \xrightarrow{\widehat{d}_{X^\bullet}^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow & \dots \\ \tau^{\geq n}(f) \downarrow & & \downarrow & & c_{X^\bullet}^n \downarrow & & f^{n+1} \downarrow & & f^{n+2} \downarrow & & \\ \tau^{\geq n}(Y^\bullet) : \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{Conuc}(d_{Y^\bullet}^{n-1}) & \xrightarrow{\widehat{d}_{Y^\bullet}^n} & Y^{n+1} & \xrightarrow{d_{Y^\bullet}^{n+1}} & Y^{n+2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Se afirma que $\tau^{\geq n} : \mathrm{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ es un funtor aditivo.

Proposición 28. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $n \in \mathbb{Z}$. El funtor de truncación canónico $\tau^{\geq n} : \mathrm{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ induce un único funtor aditivo $\widehat{\tau}^{\geq n} : \mathrm{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{K}(\mathcal{A})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ch}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_H} & \mathrm{K}(\mathcal{A}) \\ \tau^{\geq n} \downarrow & & \downarrow \widehat{\tau}^{\geq n} \\ \mathrm{Ch}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_H} & \mathrm{K}(\mathcal{A}). \end{array}$$

Es usual denotar a $\widehat{\tau}^{\geq n}$ simplemente por $\tau^{\geq n}$.

Proposición 29. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana, $n \in \mathbb{Z}$ y $X^\bullet \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A})$. Se define

$$j_{X^\bullet}^n : X^\bullet \rightarrow \tau^{\geq n}(X^\bullet)$$

el cociente de complejos, como

$$(j_{X^\bullet}^n)^k := \begin{cases} 1_{X^k}, & \text{si } k > n, \\ j_{X^k}, & \text{si } k = n, \\ 0, & \text{si } k < n. \end{cases}$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$. El siguiente diagrama ilustra la situación

$$\begin{array}{ccccccc}
X^\bullet : \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^n} & X^{n+1} \xrightarrow{d_{X^\bullet}^{n+1}} X^{n+2} \longrightarrow \cdots \\
j_{X^\bullet}^n \downarrow & & \downarrow & & j_{X^n} \downarrow & & 1_{X^{n+1}} \downarrow \quad 1_{X^{n+2}} \downarrow \\
\tau^{\geq n}(X^\bullet) : \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Conuc}(d_{X^\bullet}^{n-1}) & \xrightarrow{\widehat{d}_{X^\bullet}^n} & X^{n+1} \xrightarrow{d_{X^\bullet}^{n+1}} X^{n+2} \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Se afirma que $j^n := \{j_{X^\bullet}^n : X^\bullet \rightarrow \tau^{\geq n}(X^\bullet)\}_{X^\bullet \in \text{Ch}(\mathcal{A})}$ es una transformación natural.

Proposición 30. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $n \in \mathbb{Z}$. Se definen las siguientes asignaciones

$$\text{Ch}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sigma^{\geq n}} \text{Ch}(\mathcal{A})$$

A nivel de objetos. Sea $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathcal{A})$. Se define

$$(\sigma^{\geq n}(X))^k = \begin{cases} X^k, & \text{si } k \geq n, \\ 0, & \text{si } k < n. \end{cases}$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$.

A nivel de morfismos. Sea $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathcal{A})$. Se define

$$(\sigma^{\geq n}(f))^k = \begin{cases} f^k, & \text{si } k \geq n, \\ 0, & \text{si } k < n. \end{cases}$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$. El siguiente diagrama ilustra la situación

$$\begin{array}{ccccccc}
\sigma^{\geq n}(X^\bullet) : \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^n \xrightarrow{d_{X^\bullet}^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots \\
\sigma^{\geq n}(f) \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & f^n \downarrow \quad f^{n+1} \downarrow \\
\sigma^{\geq n}(Y^\bullet) : \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y^n \xrightarrow{d_{Y^\bullet}^n} Y^{n+1} \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Se afirma que $\sigma^{\geq n} : \text{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{A})$ es un funtor aditivo.

Proposición 31. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $n \in \mathbb{Z}$. El funtor de truncación estúpida $\sigma^{\geq n} : \text{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{A})$ induce un único funtor aditivo $\widehat{\sigma}^{\geq n} : \text{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{K}(\mathcal{A})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ch}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_H} & \text{K}(\mathcal{A}) \\
\sigma^{\geq n} \downarrow & & \downarrow \widehat{\sigma}^{\geq n} \\
\text{Ch}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_H} & \text{K}(\mathcal{A}).
\end{array}$$

Es usual denotar a $\widehat{\sigma}^{\geq n}$ simplemente por $\sigma^{\geq n}$.

Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ un morfismo en $\text{Ch}(\mathcal{A})$. Considere la siguiente situación

$$\begin{array}{ccccccc}
 X^\bullet : \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^n} & X^{n+1} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow f^{n-1} & \nearrow \hat{d}_{X^\bullet}^{n-1} & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} \\
 & & & \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^n) & & & \\
 & & & \downarrow b_{X^\bullet}^n & & & \\
 & & & \text{Nuc}(d_{Y^\bullet}^n) & & & \\
 & & \nearrow \hat{d}_{Y^\bullet}^{n-1} & \downarrow i_{Y^n} & \nearrow i_{X^n} & & \\
 Y^\bullet : \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_{Y^\bullet}^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_{Y^\bullet}^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Proposición 32. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $n \in \mathbb{Z}$. Se definen las siguientes asignaciones

$$\text{Ch}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\tau^{\leq n}} \text{Ch}(\mathcal{A})$$

A nivel de objetos. Sea $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathcal{A})$. Se define

$$(\tau^{\leq n}(X^\bullet))^k = \begin{cases} X^k, & \text{si } k < n, \\ \text{Nuc}(d_X^n), & \text{si } k = n, \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$.

A nivel de morfismos. Sea $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathcal{A})$. Se define

$$(\tau^{\leq n}(f))^k = \begin{cases} f^k, & \text{si } k < n, \\ b_X^n, & \text{si } k = n, \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$. El diagrama siguiente ilustra la situación

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tau^{\leq n}(X^\bullet) : \dots & \longrightarrow & X^{n-2} & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^{n-2}} & X^{n-1} & \xrightarrow{\hat{d}_{X^\bullet}^{n-1}} & \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\
 \tau^{\leq n}(f) \downarrow & & \downarrow f^{n-2} & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow b_{X^\bullet}^n \\
 \tau^{\leq n}(Y^\bullet) : \dots & \longrightarrow & Y^{n-2} & \xrightarrow{d_{Y^\bullet}^{n-2}} & Y^{n-1} & \xrightarrow{\hat{d}_{Y^\bullet}^{n-1}} & \text{Nuc}(d_{Y^\bullet}^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Se afirma que $\tau^{\geq n} : \text{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{A})$ es un funtor aditivo.

Proposición 33. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $n \in \mathbb{Z}$. El funtor de truncación canónico $\tau^{\leq n} : \text{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{A})$ induce un único funtor aditivo $\widehat{\tau}^{\leq n} : \text{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{K}(\mathcal{A})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Ch}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_{\text{H}}} & \text{K}(\mathcal{A}) \\ \tau^{\geq n} \downarrow & & \downarrow \widehat{\tau}^{\leq n} \\ \text{Ch}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_{\text{H}}} & \text{K}(\mathcal{A}). \end{array}$$

Es usual denotar a $\widehat{\tau}^{\leq n}$ simplemente por $\tau^{\leq n}$.

Proposición 34. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana, $n \in \mathbb{Z}$ y $X^{\bullet} \in \text{Ch}(\mathcal{A})$. Se define

$$i_{X^{\bullet}}^n : \tau^{\leq n}(X^{\bullet}) \rightarrow X^{\bullet}$$

el subcomplejo, como

$$(i_{X^{\bullet}}^n)^k := \begin{cases} 1_{X^k}, & \text{si } k < n, \\ i_{X^k}, & \text{si } k = n, \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$. El siguiente diagrama ilustra la situación

$$\begin{array}{ccccccccccc} \tau^{\leq n}(X^{\bullet}) : \dots & \longrightarrow & X^{n-2} & \xrightarrow{d_{X^{\bullet}}^{n-2}} & X^{n-1} & \xrightarrow{\widehat{d}_{X^{\bullet}}^{n-1}} & \text{Nuc}(d_{X^{\bullet}}^n) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ i_{X^{\bullet}}^n \downarrow & & 1_{X^{n-2}} \downarrow & & 1_{X^{n-1}} \downarrow & & i_{X^n} \downarrow & & \downarrow & & \\ X^{\bullet} : \dots & \longrightarrow & X^{n-2} & \xrightarrow{d_{X^{\bullet}}^{n-2}} & X^{n-1} & \xrightarrow{d_{X^{\bullet}}^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_{X^{\bullet}}^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}.$$

Se afirma que $i^n := \{i_{X^{\bullet}}^n : \tau^{\leq n}(X^{\bullet}) \rightarrow X^{\bullet}\}_{X^{\bullet} \in \text{Ch}(\mathcal{A})}$ es una transformación natural.

Proposición 35. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $n \in \mathbb{Z}$. Se definen las siguientes asignaciones

$$\text{Ch}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sigma^{\leq n}} \text{Ch}(\mathcal{A})$$

A nivel de objetos. Sea $X^{\bullet} \in \text{Ch}(\mathcal{A})$. Se define

$$(\sigma^{\leq n}(X))^k = \begin{cases} X^k, & \text{si } k \leq n, \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$.

A nivel de morfismos. Sea $f : X^{\bullet} \rightarrow Y^{\bullet}$ en $\text{Ch}(\mathcal{A})$. Se define

$$(\sigma^{\leq n}(f))^k = \begin{cases} f^k, & \text{si } k \leq n, \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$. El siguiente diagrama ilustra la situación

$$\begin{array}{ccccccccc}
\sigma^{\leq n}(X^\bullet) : \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^{n-1}} & X^n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
\sigma^{\leq n}(f) \downarrow & & f^{n-1} \downarrow & & f^n \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\sigma^{\leq n}(Y^\bullet) : \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_{Y^\bullet}^{n-1}} & Y^n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Se afirma que $\sigma^{\leq n} : \text{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{A})$ es un funtor aditivo.

Proposición 36. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $n \in \mathbb{Z}$. El funtor de truncación estúpida $\sigma^{\leq n} : \text{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{A})$ induce un único funtor aditivo $\widehat{\sigma}^{\leq n} : \text{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{K}(\mathcal{A})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ch}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_H} & \text{K}(\mathcal{A}) \\
\sigma^{\leq n} \downarrow & & \downarrow \widehat{\sigma}^{\leq n} \\
\text{Ch}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_H} & \text{K}(\mathcal{A}).
\end{array}$$

Es usual denotar a $\widehat{\sigma}^{\leq n}$ simplemente por $\sigma^{\leq n}$.

Capítulo 3

Representabilidad de Brown-Neeman

Uno de los resultados más destacados de A. Neeman es, indudablemente, la extensión del clásico Teorema de Representabilidad de Brown al contexto de las categorías trianguladas. Dicho teorema afirma que, bajo ciertas condiciones, los funtores cohomológicos son representables. Una aplicación fundamental de este resultado es la posibilidad de obtener funtores adjuntos sin la necesidad de demasiadas hipótesis. El objetivo de este capítulo es desarrollar la teoría necesaria para disponer de tales resultados. El capítulo comienza con la introducción de los esenciales conceptos de objeto compacto y categoría triangulada compactamente generada. En la segunda sección, se aborda el concepto de colímite homotópico, una extensión apropiada de los colímites clásicos. Finalmente, se demuestran los teoremas establecidos por A. Neeman.

Observación 7. *En el presente capítulo, se asume que todas las categorías consideradas cumplen con la hipótesis adicional de admitir coproductos arbitrarios (numerables).*

3.1. Objetos compactos y categorías trianguladas compactamente generadas

El concepto de objeto compacto en una categoría no requiere que la categoría posea una estructura particular para ser definido. Sin embargo, para los propósitos de este trabajo, se limitará el estudio al caso de las categorías aditivas.

Definición 34. *Sea \mathcal{C} una categoría aditiva. Se dice que $X \in \mathcal{C}$ es compacto en \mathcal{C} , si el funtor*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

preserva coproductos.

Notación 7. *Sea \mathcal{C} una categoría aditiva. Se denota por $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ a la subcategoría plena de \mathcal{C} que consta de objetos compactos en \mathcal{C} .*

Proposición 37. Sean \mathcal{T} una categoría triangulada y $X \in \mathcal{T}^C$. Entonces, $\Sigma^n(X) \in \mathcal{T}^C$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sean $X \in \mathcal{T}^C$, $n \in \mathbb{Z}$ y $\{Y_j\}_{j \in J}$ una familia de objetos de \mathcal{C} . Dado que $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ es un automorfismo de categorías aditivas se satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^n(X), \bigoplus_{j \in J} Y_j) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, \Sigma^{-n}(\bigoplus_{j \in J} Y_j)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, \bigoplus_{j \in J} \Sigma^{-n}(Y_j)) \\ &= \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, \Sigma^{-n}(Y_j)) \\ &= \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^n(X), Y_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Sigma^n(X) \in \mathcal{T}^C$. □

Proposición 38. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada. Entonces, \mathcal{T}^C es una subcategoría triangulada de \mathcal{T} .

Demostración. Por las Proposiciones 11 y 22 es suficiente con demostrar que \mathcal{T}^C es cerrada por conos.

Sea

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X)$$

un triángulo distinguido en \mathcal{T} tal que $X, Y \in \mathcal{T}^C$. Sea $\{A_j\}_{j \in J}$ una familia de objetos en \mathcal{T} . Aplicando el funtor cohomológico

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, \bigoplus_{j \in J} A_j) : \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Ab}$$

al triángulo distinguido en cuestión se tiene el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos en Ab

$$\begin{array}{ccccccccc} \bigoplus_{j \in J} (\Sigma(Y), A_j) & \longrightarrow & \bigoplus_{j \in J} (\Sigma(X), A_j) & \longrightarrow & \bigoplus_{j \in J} (Z, A_j) & \longrightarrow & \bigoplus_{j \in J} (Y, A_j) & \longrightarrow & \bigoplus_{j \in J} (X, A_j) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ (\Sigma(Y), \bigoplus_{j \in J} A_j) & \longrightarrow & (\Sigma(X), \bigoplus_{j \in J} A_j) & \longrightarrow & (Z, \bigoplus_{j \in J} A_j) & \longrightarrow & (Y, \bigoplus_{j \in J} A_j) & \longrightarrow & (X, \bigoplus_{j \in J} A_j). \end{array}$$

Se concluye por el Lema del Cinco que el morfismo canónico $\bigoplus_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, A_j) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, \bigoplus_{j \in J} A_j)$ es un isomorfismo en Ab . Por lo tanto $Z \in \mathcal{T}^C$. □

Definición 35. Sean \mathcal{T} una categoría triangulada y Ω un conjunto de objetos compactos de \mathcal{T} . Se dice que Ω es un conjunto generador para \mathcal{T} , si para todo $X \in \mathcal{T}$ tal que $X \neq 0$ existe $\omega \in \Omega$ y $f : \omega \rightarrow X$ en \mathcal{T} tal que $f \neq 0$.

Observación 8. Sean \mathcal{T} una categoría triangulada y Ω un conjunto de objetos compactos de \mathcal{T} . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Sea $X \in \mathcal{T}$ tal que $X \neq 0$. Entonces, existe $\omega \in \Omega$ y $f : \omega \rightarrow X$ en \mathcal{T} tal que $f \neq 0$.
2. Sea $X \in \mathcal{T}$ tal que $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\omega, X) = 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Entonces, $X = 0$.

Definición 36. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada. Se dice que \mathcal{T} es compactamente generada si existe Ω un conjunto generador para \mathcal{T} .

Definición 37. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada. Se dice que un conjunto generador Ω para \mathcal{T} es perfectamente generador si $\Sigma(\Omega) = \Omega$.

Proposición 39. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada. Si Ω es un conjunto generador para \mathcal{T} , entonces $\Omega' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma^n(\Omega)$ es un conjunto perfectamente generador para \mathcal{T} .

Demostración. Se inicia verificando que Ω' es un conjunto generador para \mathcal{T} .

Sea $\omega' \in \Omega'$. Luego, existen $m \in \mathbb{Z}$ y $\omega \in \Omega$ tales que $\omega' = \Sigma^m(\omega)$. Se sigue de la Proposición 22 que $\omega' \in \mathcal{T}^C$. Es decir, $\Omega' \subseteq \text{Obj}(\mathcal{T}^C)$.

Por otra parte. Sea $X \in \mathcal{T}$ tal que $X \neq 0$. Como Ω es un conjunto generador para \mathcal{T} , existe $\omega \in \Omega$ y $f : \omega \rightarrow X$ en \mathcal{T} tal que $f \neq 0$. En particular

$$\omega = \Sigma^0(\omega) \in \Sigma^0(\Omega) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma^n(\Omega) = \Omega'.$$

Por lo tanto Ω' es un conjunto generador para \mathcal{T} . Por último se verifica que es perfectamente generador.

Sea $\omega' \in \Omega'$. Luego, existen $m \in \mathbb{Z}$ y $\omega \in \Omega$ tales que $\omega' = \Sigma^m(\omega)$. Además,

$$\Sigma(\omega') = \Sigma^{m+1}(\omega) \in \Sigma^{m+1}(\Omega) \subseteq \Omega' \text{ y } \Sigma^{-1}(\omega') = \Sigma^{m-1}(\omega) \in \Sigma^{m-1}(\Omega) \subseteq \Omega'.$$

Por lo tanto $\Sigma(\Omega') = \Omega'$. □

Corolario 7. Toda categoría triangulada \mathcal{T} compactamente generada tiene un conjunto perfectamente generador.

Demostración. Se sigue de la Proposición 39. □

3.2. Caracterización de objetos compactos

En la sección anterior, se introdujo la definición de objeto compacto en una categoría triangulada, y en lo que resta del capítulo, la definición proporcionada es suficiente para manipular tales objetos. Sin embargo, para la teoría que se necesita desarrollar en el último capítulo será necesario introducir condiciones equivalentes que determinen cuándo un objeto es compacto. Dependiendo de la situación, se utilizará la caracterización más adecuada.

La siguiente proposición establece que, en el contexto de una categoría aditiva, para demostrar que un objeto es compacto, basta con verificar que el morfismo canónico inducido por la propiedad universal del coproducto es una asignación sobreyectiva en Ab . Este resultado es clave para las caracterizaciones que se presentan posteriormente.

Proposición 40. *Sean \mathcal{C} una categoría aditiva, $X \in \mathcal{C}$ y $\{Y_j\}_{j \in J}$ una familia de objetos de \mathcal{C} . El morfismo canónico inducido por la propiedad universal del coproducto*

$$\bigoplus_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_j) \xrightarrow{\Psi_{X, Y_j}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bigoplus_{j \in J} Y_j)$$

es un monomorfismo en Ab .

Demostración. Lo primero a realizar es encontrar una descripción puntual del candidato a monomorfismo.

Se busca definir la asignación

$$\bigoplus_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_j) \xrightarrow{\Psi'_{X, Y_j}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bigoplus_{j \in J} Y_j) .$$

Sea $f \in \bigoplus_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_j)$. Luego, f induce $\hat{f} : X \rightarrow \prod_{j \in J} Y_j$ de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j \in J} Y_j & \xrightarrow{\pi_j} & Y_j \\ \uparrow \hat{f} & \nearrow f(j) & \\ X & & \end{array} .$$

Sea $I := \text{Sop}(f)$. Se define $\Psi'_{X, Y_j}(f)$ como la siguiente composición de morfismos

$$X \xrightarrow{\hat{f}} \prod_{j \in J} Y_j \xrightarrow{\pi_I} \prod_{i \in I} Y_i \xrightarrow[\cong]{\alpha^{-1}} \bigoplus_{i \in I} Y_i \xrightarrow{\mu_I} \bigoplus_{j \in J} Y_j$$

donde $\alpha : \bigoplus_{i \in I} Y_i \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ es el isomorfismo canónico en \mathcal{C} que se obtiene por medio de la propiedad universal del producto y del hecho de que I es finito.

Se afirma que $\Psi_{X, Y_j} = \Psi'_{X, Y_j}$. Para demostrar tal afirmación basta ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_j) & \xrightarrow{\mu_{(X, Y_j)}} & \bigoplus_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_j) \\ & \searrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mu_j) & \downarrow \Psi'_{X, Y_j} \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bigoplus_{j \in J} Y_j) \end{array}$$

para toda $j \in J$. Sean $j \in J$ y $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_j)$. Luego, $\mu_{(X, Y_j)}(f) = f_j$ donde

$$f_j(k) = \begin{cases} f & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

para toda $k \in J$. Por lo tanto f_j induce $\hat{f}_j : X \rightarrow \prod_{j \in J} Y_j$ de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\hat{f}_j} & \prod_{j \in J} Y_j & \xrightarrow{\pi_j} & Y_j & \xlongequal{\quad} & Y_j \xrightarrow{\mu_j} \bigoplus_{j \in J} Y_j \\ & \searrow & & \nearrow & & & \\ & & & f & & & \end{array}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \Psi'_{X, Y_j}(\mu_{(X, Y_j)}(f)) &= \mu_j(\pi_j \hat{f}_j) \\ &= \mu_j f \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mu_j)(f). \end{aligned}$$

Encontrada una descripción más precisa de Ψ_{X, Y_j} es sencillo verificar que es un monomorfismo en Ab .

Sea $f \in \bigoplus_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_j)$ tal que $\Psi_{X, Y_j}(f) = 0$. Luego,

$$\mu_I \alpha^{-1} \pi_I \hat{f} = 0.$$

Lo anterior sucede sólo si $\hat{f} = 0$. Puesto que $f(j) = \pi_j \hat{f} = 0$ para toda $j \in J$. Se concluye que $f = 0$. Por lo tanto el morfismo canónico Ψ_{X, Y_j} es un monomorfismo en Ab . \square

Proposición 41. Sea \mathcal{C} una categoría aditiva. Para $X \in \mathcal{C}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es compacto en \mathcal{C} .
2. Para toda familia de objetos $\{Y_j\}_{j \in J}$ en \mathcal{C} y para todo morfismo $f : X \rightarrow \bigoplus_{j \in J} Y_j$ en \mathcal{C} , existe $I \subseteq J$ con I finito tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \bigoplus_{j \in J} Y_j \\ & \searrow f' & \nearrow \mu_I \\ & \bigoplus_{i \in I} Y_i & \end{array}$$

3. Para toda familia de objetos $\{Y_j\}_{j \in J}$ en \mathcal{C} y para todo morfismo $f : X \rightarrow \bigoplus_{j \in J} Y_j$ en \mathcal{C} se tiene que la composición de morfismos

$$X \xrightarrow{f} \bigoplus_{j \in J} Y_j \xrightarrow{\pi_j} Y_j$$

se anula salvo una cantidad finita de $j \in J$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) Sean $\{Y_j\}_{j \in J}$ una familia de objetos en \mathcal{C} y $f : X \rightarrow \bigoplus_{j \in J} Y_j$ en \mathcal{C} . Puesto que X es compacto en \mathcal{C} , existe $g \in \bigoplus_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_j)$ tal que $\Psi_{X, Y_j}(g) = f$. Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \bigoplus_{j \in J} Y_j \\ & \searrow \alpha^{-1} \pi_I \hat{g} & \nearrow \mu_I \\ & \bigoplus_{i \in I} Y_i & \end{array}$$

donde $I := \text{Sop}(g)$ es un conjunto finito.

2) \Rightarrow 3) Sean $\{Y_j\}_{j \in J}$ una familia de objetos en \mathcal{C} y $f : X \rightarrow \bigoplus_{j \in J} Y_j$ en \mathcal{C} . Por hipótesis existe $I \subseteq J$ con I finito tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \bigoplus_{j \in J} Y_j \xrightarrow{\pi_j} Y_j \\ & \searrow f' & \nearrow \mu_I \\ & \bigoplus_{i \in I} Y_i & \end{array} .$$

Luego, $\pi_j f = \pi_j(\mu_I f') = (\pi_j \mu_I) f' = 0$ para toda $j \in J \setminus I$.

3) \Rightarrow 1) Sea $\{Y_j\}_{j \in J}$ una familia de objetos en \mathcal{C} . Por la Proposición 40 basta ver que el morfismo canónico inducido por la propiedad universal del coproducto

$$\bigoplus_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_j) \xrightarrow{\Psi_{X, Y_j}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bigoplus_{j \in J} Y_j)$$

es un epimorfismo en Ab . Sea $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bigoplus_{j \in J} Y_j)$.

Se define $g : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_j)$ como $g(j) := \pi_j f$ para toda $j \in J$. Por hipótesis $\pi_j f = 0$ salvo una cantidad finita de $j \in J$. Por lo tanto $g \in \bigoplus_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_j)$. Por construcción se sigue que $\Psi_{X, Y_j}(g) = f$. \square

3.3. El colímite homotópico

En las categorías abelianas, los colímites se pueden calcular utilizando coproductos y conúcleos. En las categorías trianguladas, donde no siempre se dispone de conúcleos, los conos juegan un papel similar. En este contexto, el colímite homotópico se determina tomando el cono de un coproducto adecuado de objetos. Esta técnica busca emular la metodología empleada en las categorías abelianas para calcular colímites, adaptándose a las construcciones disponibles en las categorías trianguladas.

Definición 38. *Un sistema directo sobre un conjunto dirigido (I, \leq) en una categoría \mathcal{C} consta de una colección de objetos $\{X_i\}_{i \in I}$ en \mathcal{C} y una colección de morfismos $\{f_{ij} : X_i \rightarrow X_j\}_{i \leq j}$ en \mathcal{C} para cada $i \leq j$ en I , tales que las siguientes condiciones se satisfacen*

1. $f_{i,i} = 1_{X_i}$ para cada $i \in I$.
2. Si $i \leq j \leq k$, entonces $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$.

Definición 39. *Sean \mathcal{C} una categoría aditiva y $\{s_n : X_n \rightarrow X_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema directo sobre \mathbb{N} en \mathcal{C} . Se define el morfismo transición*

$$\tau : \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

inducido por el sistema directo $\{s_n : X_n \rightarrow X_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre \mathbb{N} en \mathcal{C} como aquel que se obtiene de completar el siguiente diagrama por medio de la propiedad universal del coproducto

$$\begin{array}{ccc}
X_n & \xrightarrow{\mu_n} & \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \\
s_n \downarrow & & \downarrow \tau \\
X_{n+1} & \xrightarrow{\mu_{n+1}} & \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n.
\end{array}$$

En términos matriciales,

$$[\tau]_{r,s} = \begin{cases} s_{r-1}, & \text{si } s = r - 1 \text{ y } r \geq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $[\tau]_{r,s} : X_s \rightarrow X_r$.

Ilustrando aun más la situación se tiene que

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Definición 40. Sean \mathcal{T} una categoría triangulada y $\{s_n : X_n \rightarrow X_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema directo sobre \mathbb{N} en \mathcal{T} . Por el axioma TR1C el morfismo $1 - \tau : \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n$ se puede completar a un triángulo distinguido

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{1-\tau} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{\gamma} \Sigma(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n).$$

Se define el colímite homotópico del sistema $\{s_n : X_n \rightarrow X_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ como el cono del triángulo anterior y se denota por $\text{hocolim}(X_n) := X$.

Observación 9. Por el axioma TR3 el colímite homotópico es único salvo isomorfismo. Más aun, por TR1C para asegurar la existencia de colímites homotópicos basta asegurar la existencia de coproductos numerables.

Proposición 42. Sean \mathcal{C} una categoría aditiva y $\{s_n : X_n \rightarrow X_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema directo sobre \mathbb{N} en \mathcal{C} . Entonces,

$$1 - \tau : \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

es un monomorfismo en \mathcal{C} .

Demostración. Sea $f : Z \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n$ tal que $(1 - \tau)f = 0$. Es decir, $\tau f = f$. Luego,

$$\begin{aligned}
s_{r-1}f_{r-1} &= [\tau]_{r,r-1}[f]_{r-1} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} ([\tau]_{r,k}[f]_k) \\
&= [\tau f]_r \\
&= [f]_r \\
&= f_r,
\end{aligned}$$

para toda $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq 1$. Note que cuando $r = 0$ se tiene que $[\tau f]_r = 0$. Entonces, $f_0 = 0$. Lo anterior permite concluir que $f_r = 0$ para toda $r \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $f = 0$. \square

Proposición 43. *Sea \mathcal{A} una categoría abeliana con colímites. Para cualquier sistema directo $\{s_n : X_n \rightarrow X_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre \mathbb{N} en \mathcal{A} existe*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{1-\tau} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{\beta} \text{colim}(X_n) \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en \mathcal{A} .

Demostración. Sea $\{s_n : X_n \rightarrow X_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema directo sobre \mathbb{N} en \mathcal{A} . De hecho observe que $\text{colim}(X_n) = \varinjlim(X_n)$. A continuación considere las componentes del limite directo del sistema

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & \varinjlim(X_n) & & & \\
& & \nearrow \beta_{n-1} & \uparrow \beta_n & \nwarrow \beta_{n+1} & & \\
\cdots & \longrightarrow & X_{n-1} & \xrightarrow{s_{n-1}} & X_n & \xrightarrow{s_n} & X_{n+1} \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Luego, por la propiedad universal del coproducto se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
X_n & \xrightarrow{\mu_n} & \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \\
& \searrow \beta_n & \downarrow \beta \\
& & \varinjlim(X_n)
\end{array}$$

Para exhibir la sucesión exacta de interés por la Proposición 42 basta demostrar que

$$\text{Conuc}\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{1-\tau} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n\right) = \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{\beta} \varinjlim(X_n)\right).$$

Sea $\alpha : \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow Y$ un morfismo en \mathcal{A} tal que $\alpha(1-\tau) = 0$. Lo anterior implica que el siguiente diagrama conmuta para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc}
& Y & \\
\alpha_n \nearrow & & \nwarrow \alpha_{n+1} \\
X_n & \xrightarrow{s_n} & X_{n+1}
\end{array}$$

Luego, por la propiedad universal del limite directo se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
X_n & \xrightarrow{\beta_n} & \varinjlim(X_n) \\
& \searrow \alpha_n & \downarrow \gamma \\
& & Y
\end{array}$$

Más aun, por la propiedad universal del limite directo $\gamma : \varinjlim(X_n) \rightarrow Y$ es el único morfismo en \mathcal{A} que satisface $\gamma\beta = \alpha$. Por lo tanto se tiene la siguiente sucesión exacta en \mathcal{A}

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{1-\tau} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{\beta} \text{colim}(X_n) \longrightarrow 0 .$$

□

Proposición 44. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana con colímites y $\{s_n : X_n^\bullet \rightarrow X_{n+1}^\bullet\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema directo sobre \mathbb{N} en $D(\mathcal{A})$. Entonces,

$$\text{hocolim}(X_n^\bullet) = X^\bullet$$

donde $X^k = \text{colim}(X_n^k)$ para toda $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. El sistema directo $\{s_n : X_n^\bullet \rightarrow X_{n+1}^\bullet\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre \mathbb{N} en $D(\mathcal{A})$ induce a la par $\{s_n^k : X_n^k \rightarrow X_{n+1}^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema directo sobre \mathbb{N} en \mathcal{A} . Por la Proposición 43 se tiene la siguiente sucesión exacta en $\text{Ch}(\mathcal{A})$

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n^k \xrightarrow{1-\tau_k} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n^k \xrightarrow{\beta_k} \text{colim}(X_n^k) \longrightarrow 0$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto se tiene la siguiente sucesión exacta en $\text{Ch}(\mathcal{A})$

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n^\bullet \xrightarrow{1-\tau} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n^\bullet \xrightarrow{\beta} X^\bullet \longrightarrow 0 .$$

Luego, existe $\delta : X^\bullet \rightarrow \Sigma(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n^\bullet)$ en $D(\mathcal{A})$ tal que

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n^\bullet \xrightarrow{1-\tau} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n^\bullet \xrightarrow{\beta} X^\bullet \xrightarrow{\delta} \Sigma(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n^\bullet)$$

es un triangulo distinguido en $D(\mathcal{R})$. Se sigue de la definición de colímite homotópico que $X^\bullet = \text{hocolim}(X_n^\bullet)$. □

Proposición 45. Sean \mathcal{T} una categoría triangulada, \mathcal{A} una categoría abeliana con colímites y $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ un funtor cohomológico que preserva coproductos. Para cualquier sistema directo $\{s_n : X_n \rightarrow X_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre \mathbb{N} en \mathcal{T} se tiene que

$$H(\text{hocolim}(X_n)) = \text{colim}(H(X_n)).$$

Demostración. Sea $\{s_n : X_n \rightarrow X_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema directo sobre \mathbb{N} en \mathcal{T} . Sea $X = \text{hocolim}(X_n)$. Considere el triángulo distinguido

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{1-\tau} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{\gamma} \Sigma(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n) .$$

Luego, se tiene la siguiente sucesión exacta en \mathcal{A}

$$H(X) \xrightarrow{H(\gamma)} H(\Sigma(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n)) \xrightarrow{-H(\Sigma(1-\tau))} H(\Sigma(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n)) .$$

Además, $\text{Nuc}(-H(\Sigma(1-\tau))) = \text{Im}(H(\gamma)) = 0$, pues $\Sigma(1-\tau)$ es un monomorfismo en \mathcal{T} por el Lema 42. Por hipótesis $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ preserva coproductos. Entonces, por la Proposición 43 se tiene el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n) & \longrightarrow & H(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n) & \longrightarrow & H(X) \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \text{---} \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H(X_n) & \longrightarrow & \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H(X_n) & \longrightarrow & \text{colim}(H(X_n)) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Se concluye por el Lema del cinco (agregando dos ceros) que $H(\text{hocolim}(X_n)) = \text{colim}(H(X_n))$. \square

Corolario 8. Sean \mathcal{T} una categoría triangulada, $\{s_n : X_n \rightarrow X_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema sobre \mathbb{N} en \mathcal{T} y $Y \in \mathcal{T}^C$. Entonces,

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, \text{hocolim}(X_n)) = \text{colim}(\text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X_n)).$$

Demostración. Puesto que $Y \in \mathcal{T}$ es un objeto compacto en \mathcal{T} se tiene que el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, -) : \mathcal{T} \rightarrow \text{Ab}$ preserva coproductos. Note que Ab es una categoría abeliana con colímites. El resultado se sigue de la Proposición 45 considerando $\mathcal{A} = \text{Ab}$ y $H = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, -)$. \square

Lema 11. Sean R un anillo y $K^\bullet \in D(R)^C$. Para cualquier sistema directo $\{s_n : X_n^\bullet \rightarrow X_{n+1}^\bullet\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre \mathbb{N} en $D(R)$ se cumple que

$$\text{Hom}_{D(R)}(K^\bullet, X^\bullet) = \text{colim}(\text{Hom}_{D(R)}(K^\bullet, X_n^\bullet)).$$

donde $X^k = \text{colim}(X_n^k)$ para toda $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Es consecuencia directa de la Proposición 44 y el Corolario 8. \square

3.4. El teorema de representabilidad de Brown-Neeman

El enfoque adoptado para obtener el resultado principal de este capítulo consiste en abordar la demostración en tres partes bien diferenciadas, que clarifican las construcciones necesarias. Una vez que se enuncian y demuestran los lemas pertinentes, el teorema de representabilidad de Brown-Neeman se deduce de manera natural como un corolario directo.

Lema 12. *Sean \mathcal{T} una categoría triangulada compactamente generada, Ω un conjunto perfectamente generador para \mathcal{T} y $H : \mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ un funtor cohomológico. Si para cualquier familia de objetos $\{X_j\}_{j \in J}$ en \mathcal{T} el morfismo canónico*

$$H(\bigoplus_{j \in J} X_j) \longrightarrow \prod_{j \in J} H(X_j)$$

es un isomorfismo en Ab. Entonces, existe

$$\{s_n : X_n \rightarrow X_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

un sistema sobre \mathbb{N} en \mathcal{T} tal que las siguientes condiciones se satisfacen

1. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ existe un transformación natural*

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_n) \xrightarrow{\varphi_n} H$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ \varphi_n \nearrow & & \nwarrow \varphi_{n+1} \\ \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_n) & \xrightarrow{(-, s_n)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_{n+1}) \end{array}$$

2. *Sea $X := \text{hocolim}(X_n)$. Entonces, existe una transformación natural*

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X) \xrightarrow{\varphi} H$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ \varphi_n \nearrow & & \nwarrow \varphi \\ \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_n) & \xrightarrow{(-, \beta_n)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X) \end{array}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

3. Para todo $\omega \in \Omega$ se tiene que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\omega, X) \xrightarrow{\varphi(\omega)} H(\omega)$$

es un isomorfismo en Ab .

Demostración. El sistema de interés se construye por recursión sobre n .

Paso inicial. Se define

$$A_0 := \bigcup_{\omega \in \Omega} H(\omega).$$

Sea $a \in A_0$. Luego, existe $\omega \in \Omega$ tal que $a \in H(\omega)$. Por lo tanto los elementos de A_0 se pueden identificar con parejas (a, ω) donde $a \in H(\omega)$. Dicho esto. Se define

$$X_0 := \bigoplus_{(a, \omega) \in A_0} \omega.$$

Por hipótesis se cumple lo siguiente

$$H(X_0) = H\left(\bigoplus_{(a, \omega) \in A_0} \omega\right) = \prod_{(a, \omega) \in A_0} H(\omega).$$

Existe $a_0 \in H(X_0)$ un elemento distinguido, a saber el que satisface que $a_0(a, \omega) = a \in H(\omega)$ para todo $(a, \omega) \in A_0$. Por el Lema de Yoneda se tiene que la correspondencia

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_0), H) \longrightarrow H(X_0) \quad .$$

es biyectiva. Por lo tanto $a_0 \in H(X_0)$ corresponde a una transformación natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_0) \xrightarrow{\varphi_0} H \quad .$$

Se afirma que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\omega, X_0) \xrightarrow{\varphi_0(\omega)} H$$

es sobreyectiva para todo $\omega \in \Omega$.

Sean $\omega \in \Omega$ y $a \in H(\omega)$. Considere el la inclusión canónica

$$\omega \xrightarrow{\mu_{(a, \omega)}} \bigoplus_{(a, \omega) \in A_0} \omega = X_0 \quad .$$

Luego,

$$\begin{aligned}\varphi_0(\omega)(\mu_{(a,\omega)}) &= H(\mu_{(a,\omega)})(a_0) \\ &= \eta_{(a,\omega)}(a_0) \\ &= a,\end{aligned}$$

donde $\eta_{(a,\omega)} : \prod_{(a,\omega) \in A_0} H(\omega) \rightarrow H(\omega)$ denota la (a,ω) -ésima proyección canónica.

Paso recursivo. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1$. Se supone que existe $X_n \in \mathcal{T}$ y una transformación natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_n) \xrightarrow{\varphi_n} H. \quad (3.1)$$

Se define

$$K_\omega := \mathrm{Nuc}(\varphi_n(\omega))$$

para todo $\omega \in \Omega$. Luego, se define

$$A_{n+1} := \bigcup_{\omega \in \Omega} K_\omega.$$

Sea $f \in A_{n+1}$. Luego, existe $\omega \in \Omega$ tal que $f \in K_\omega$. Note que $f : \omega \rightarrow X_n$ en \mathcal{T} tal que $\varphi_n(\omega)(f) = 0$. Así, los elementos de A_{n+1} se pueden identificar con parejas (f, ω) donde $f \in K_\omega$. Dicho esto. Se define

$$B_{n+1} := \bigoplus_{(f,\omega) \in A_{n+1}} \omega.$$

Luego, por la propiedad universal del coproducto $\{\mu_{(f,\omega)} : \omega \rightarrow B_{n+1}\}_{(f,\omega) \in A_{n+1}}$ aplicada a la familia $\{f : \omega \rightarrow X_n\}_{(f,\omega) \in A_{n+1}}$. Existe, un único morfismo $\gamma : B_{n+1} \rightarrow X_n$ en \mathcal{T} tal que $\gamma\mu_{(f,\omega)} = f$ para toda $(f,\omega) \in A_{n+1}$. El siguiente diagrama ilustra la situación

$$\begin{array}{ccc} \omega & \xrightarrow{\mu_{(f,\omega)}} & \bigoplus_{(f,\omega) \in A_{n+1}} \omega \\ & \searrow f & \swarrow \gamma \\ & X_n & \end{array}$$

Por el axioma TR1C, el morfismo $\gamma : B_{n+1} \rightarrow X_n$ se puede completar a un triángulo distinguido

$$B_{n+1} \xrightarrow{\gamma} X_n \dashrightarrow^{s_n} X_{n+1} \dashrightarrow^{\delta} \Sigma(B_{n+1}). \quad (3.2)$$

Por otra parte. Por el Lema de Yoneda se tiene que la correspondencia

$$\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_n), H) \longrightarrow H(X_n)$$

es biyectiva. Por lo tanto la transformación natural considerada en (3.1) corresponde a un elemento $a_n \in H(X_n)$. Se afirma que

$$a_n \in \text{Nuc}(H(\gamma)).$$

Para demostrar tal afirmación basta ver que

$$(\rho_{(f,\omega)} H(\gamma))(a_n) = 0$$

para todo $(f, \omega) \in A_{n+1}$. Donde $\rho_{(f,\omega)} : \prod_{(f,\omega) \in A_{n+1}} H(\omega) \rightarrow H(\omega)$ denota la (f, ω) -ésima proyección canónica. Luego,

$$\begin{aligned} (\rho_{(f,\omega)} H(\gamma))(a_n) &= (H(\mu_{(f,\omega)}) H(\gamma))(a_n) \\ &= H(\mu_{(f,\omega)} \gamma)(a_n) \\ &= H(f)(a_n) \\ &= \varphi_n(\omega)(f) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $(f, \omega) \in A_{n+1}$. Por lo tanto $a_n \in \text{Nuc}(H(\gamma))$.

Aplicando el funtor cohomológico $H : \mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ al triángulo de (3.2) se tiene la siguiente sucesión exacta

$$H(X_{n+1}) \xrightarrow{H(s_n)} H(X_n) \xrightarrow{H(\gamma)} H(B_{n+1}) .$$

Así, existe $a_{n+1} \in H(X_{n+1})$ tal que $H(s_n)(a_{n+1}) = a_n$. Por el Lema de Yoneda se tiene que la correspondencia

$$\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_{n+1}), H) \longrightarrow H(X_{n+1})$$

es biyectiva. Entonces, $a_{n+1} \in H(X_{n+1})$ corresponde a una transformación natural

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_{n+1}) \xrightarrow{\varphi_{n+1}} H .$$

Dicha transformación natural satisface lo siguiente. Sea $Y \in \mathcal{T}$. Luego,

$$\begin{aligned} (\varphi_{n+1}(-, s_n))_Y(f) &= \varphi_{n+1}(Y)(Y, s_n)(f) \\ &= \varphi_{n+1}(s_n f) \\ &= H(s_n f)(a_{n+1}) \\ &= H(f)H(s_n)(a_{n+1}) \\ &= H(f)(a_n) \\ &= \varphi_n(Y)(f) \end{aligned}$$

para todo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X_n)$. Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ \varphi_n \nearrow & & \nwarrow \varphi_{n+1} \\ \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_n) & \xrightarrow{(-, s_n)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_{n+1}). \end{array}$$

Esto demuestra la primer parte del enunciado.

En lo que respecta a la segunda afirmación se tiene lo siguiente. Sea $X = \text{hocolim}(X_n)$. Considere el triángulo distinguido que define el colímite homotópico del sistema

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{1-\tau} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{\delta} \Sigma(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n).$$

Aplicando el funtor cohomológico $H : \mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ al triángulo anterior y de las hipótesis del enunciado, se deduce la siguiente situación

$$\begin{array}{ccccc} H(X) & \xrightarrow{H(\beta)} & H(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n) & \xrightarrow{H(1-\tau)} & H(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n) \\ \downarrow 1_{H(X)} & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H(X) & \longrightarrow & \prod_{n \in \mathbb{N}} H(X_n) & \longrightarrow & \prod_{n \in \mathbb{N}} H(X_n). \end{array}$$

Existe $\hat{a} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} H(X_n)$ un elemento distinguido, a saber el que satisface $\hat{a}(n) = a_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Se afirma que $\hat{a} \in \text{Nuc}(H(1-\tau))$. Para demostrar tal afirmación basta ver que

$$(p_n H(1-\tau))(\hat{a}) = 0$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Donde $p_n : \prod_{n \in \mathbb{N}} H(X_n) \rightarrow H(X_n)$ denota la n -ésima proyección canónica. Luego,

$$\begin{aligned} (p_n H(1-\tau))(\hat{a}) &= (H(\mu_n) H(1-\tau))(\hat{a}) \\ &= H((1-\tau)\mu_n)(\hat{a}) \\ &= H(\mu_n - \tau\mu_n)(\hat{a}) \\ &= H(\mu_n)(\hat{a}) - H(\mu_n)H(\tau)(\hat{a}) \\ &= p_n(\hat{a}) - H(s_n)H(\mu_{n+1})(\hat{a}) \\ &= a_n - H(s_n)p_{n+1}(\hat{a}) \\ &= a_n - H(s_n)(a_{n+1}) \\ &= a_n - a_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto existe $a \in H(X)$ tal que $H(\beta) = \hat{a}$. Por el Lema de Yoneda se tiene que la correspondencia

$$\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X), H) \longrightarrow H(X)$$

es biyectiva. Entonces, $a \in H(X)$ corresponde a una transformación natural

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X) \xrightarrow{\varphi} H.$$

Dicha transformación natural satisface lo siguiente. Sea $Y \in \mathcal{T}$. Luego,

$$\begin{aligned} (\varphi(-, \beta_n))(Y)(f) &= \varphi(Y)(Y, \beta_n)(f) \\ &= \varphi(Y)(\beta_n f) \\ &= H(\beta_n f)(a) \\ &= H(f)H(\beta_n)(a) \\ &= H(f)H(\beta\mu_n)(a) \\ &= H(f)(H(\mu_n)H(\beta)(a)) \\ &= H(f)(p_n)(\hat{a}) \\ &= H(f)(a_n) \\ &= \varphi_n(Y)(f) \end{aligned}$$

para todo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X_n)$. Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ \varphi_n \nearrow & & \nwarrow \varphi \\ \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_n) & \xrightarrow{(-, \beta_n)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X) \end{array}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto demuestra la segunda afirmación.

En lo que respecta a la tercera afirmación se tiene lo siguiente. Sea $\omega \in \Omega$. Por lo demostrado en el primer inciso, se sabe que $\varphi_0(\omega)$ es sobreyectiva. Dado $\varphi(-, \beta_0) = \varphi_0$, se concluye que $\varphi(\omega)$ es sobreyectiva.

Resta ver que $\varphi(\omega)$ es inyectiva. Sea $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\omega, X)$ tal que $\varphi(\omega)(f) = 0$. Puesto que ω es un objeto compacto en \mathcal{T} se deduce del Corolario 8 que

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\omega, X) = \text{colim}(\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\omega, X_n)).$$

Luego, existe $g : \omega \rightarrow X_n$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \omega & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow g & \nearrow \beta_n \\ & X_n & \end{array}$$

Note que,

$$\begin{aligned}\varphi_n(\omega)(g) &= \varphi(\omega)(\omega, \beta_n)(g) \\ &= \varphi(\omega)(\beta_n g) \\ &= \varphi(\omega)(f) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Es decir, $g \in \text{Nuc}(\varphi_n(\omega)) = K_\omega$. Por lo tanto $(g, \omega) \in A_{n+1}$. Considere el triángulo distinguido

$$B_{n+1} \xrightarrow{\gamma} X_n \xrightarrow{s_n} X_{n+1} \xrightarrow{\delta} \Sigma(B_{n+1}) .$$

Luego,

$$\begin{aligned}s_n g &= s_n(\gamma \mu_{(g, \omega)}) \\ &= (s_n \gamma) \mu_{(g, \omega)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto ,

$$\begin{aligned}f &= \beta_n g \\ &= (\beta_{n+1} s_n) g \\ &= \beta_{n+1}(s_n g) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Se concluye que

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\omega, X) \xrightarrow{\varphi(\omega)} H(\omega)$$

es un isomorfismo en Ab para todo $\omega \in \Omega$. □

Lema 13. Sean \mathcal{T} una categoría triangulada compactamente generada, Ω un conjunto perfectamente generador para \mathcal{T} y $H : \mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ un funtor cohomológico. Suponga además que para cualquier familia de objetos $\{X_j\}_{j \in J}$ en \mathcal{T} el morfismo canónico

$$H(\bigoplus_{j \in J} X_j) \longrightarrow \prod_{j \in J} H(X_j)$$

es un isomorfismo en Ab . Considere la subcategoría plena $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ cuyo conjunto de objetos se describe como

$\text{Obj}(\mathcal{S}) := \{Y \in \mathcal{T} : \varphi(\Sigma^n(Y)) \text{ es un isomorfismo en } \text{Ab} \text{ para toda } n \in \mathbb{Z}\},$

donde

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X) \xrightarrow{\varphi} H$$

es la transformación natural descrita en el segundo inciso del Lema 12. Se afirma lo siguiente

1. $\Omega \subseteq \mathcal{S}$.
2. \mathcal{S} es una subcategoría triangulada de \mathcal{T} .
3. \mathcal{S} es cerrada por coproductos en \mathcal{T} .

Demostración. En lo que respecta a la primer afirmación se cumple lo siguiente. Sea $\omega \in \Omega$. Puesto que Ω es un conjunto perfectamente generador para \mathcal{T} , se deduce que $\Sigma^n(\omega) \in \Omega$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se sigue del tercer inciso del Lema 12 que $\omega \in \mathcal{S}$. Es decir, $\Omega \subseteq \mathcal{S}$.

Para demostrar las segunda afirmación basta ver que $\Sigma^{-1}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ y que \mathcal{S} es cerrada por conos.

Sean $Y \in \Sigma^{-1}(\mathcal{S})$ y $n \in \mathbb{Z}$. Luego, existe $Z \in \mathcal{S}$ tal que $Y = \Sigma^{-1}(Z)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \Sigma^n(Y) &= \Sigma^n(\Sigma^{-1}(Z)) \\ &= \Sigma^{n-1}(Z), \end{aligned}$$

el cual es un isomorfismo en Ab , pues $Z \in \mathcal{S}$. Por lo tanto $Y \in \mathcal{S}$.

Sea

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} \Sigma(A)$$

un triángulo distinguido tal que $A, B \in \mathcal{S}$.

Sean $n \in \mathbb{Z}$ y $F := \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X) : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \text{Ab}$. Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos en Ab

$$\begin{array}{ccccccccc} F^{n+1}(B) & \xrightarrow{F^{n+1}(u)} & F^{n+1}(A) & \xrightarrow{F^n(w)} & F^n(C) & \xrightarrow{F^n(v)} & F^n(B) & \xrightarrow{F^n(u)} & F^n(A) \\ \varphi(\Sigma^{n+1}(B)) \downarrow \cong & & \varphi(\Sigma^{n+1}(A)) \downarrow \cong & & \varphi(\Sigma^n(C)) \downarrow \cong & & \varphi(\Sigma^n(B)) \downarrow \cong & & \varphi(\Sigma^n(A)) \downarrow \cong \\ H(\Sigma^{n+1}(B)) & \xrightarrow{H(\Sigma^{n+1}(u))} & H(\Sigma^{n+1}(A)) & \xrightarrow{H(\Sigma^n(w))} & H(\Sigma^n(C)) & \xrightarrow{H(\Sigma^n(v))} & H(\Sigma^n(B)) & \xrightarrow{H(\Sigma^n(u))} & H(\Sigma^n(A)). \end{array}$$

Se concluye por el Lema del Cinco que $\varphi(\Sigma^n(C))$ es un isomorfismo en Ab . Por lo tanto $C \in \mathcal{S}$. Es decir, \mathcal{S} es una subcategoría triangulada de \mathcal{T} .

Resta demostrar que \mathcal{S} es cerrada por coproductos en \mathcal{T} .

Sea $\{Y_j\}_{j \in J}$ una familia de objetos en \mathcal{S} . Considere $\bigoplus_{j \in J} Y_j$ en \mathcal{T} . Sea $n \in \mathbb{Z}$. Se debe verificar que

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^n(\bigoplus_{j \in J} Y_j), X) \xrightarrow{\varphi(\Sigma^n(\bigoplus_{j \in J} Y_j))} H(\Sigma^n(\bigoplus_{j \in J} Y_j))$$

es un isomorfismo en Ab . Note que

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^n(\bigoplus_{j \in J} Y_j), X) &= \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigoplus_{j \in J} \Sigma^n(Y_j), X) \\ &= \prod_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^n(Y_j), X) \\ &= \prod_{j \in J} H(\Sigma^n(Y_j)) \\ &= H(\bigoplus_{j \in J} \Sigma^n(Y_j)) \\ &= H(\Sigma^n(\bigoplus_{j \in J} Y_j)). \end{aligned}$$

Se concluye el resultado. □

Lema 14. Sean \mathcal{T} una categoría triangulada compactamente generada, Ω un conjunto perfectamente generador para \mathcal{T} y \mathcal{S} una subcategoría triangulada plena de \mathcal{T} cerrada por coproductos en \mathcal{T} tal que $\Omega \subseteq \mathcal{S}$. Entonces, $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

Demostración. Sea \mathcal{S} la subcategoría triangulada plena de \mathcal{T} más pequeña que satisface las hipótesis. Note que \mathcal{S} es compactamente generada con conjunto perfectamente generador Ω .

Sea $Y \in \mathcal{T}$. Considere el funtor cohomológico

$$H = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Y) : \mathcal{S}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Ab}.$$

Para cualquier familia de objetos $\{X_j\}_{j \in J}$ en \mathcal{S} el morfismo canónico

$$H(\bigoplus_{j \in J} X_j) \longrightarrow \prod_{j \in J} H(X_j)$$

es un isomorfismo en Ab . Luego, se verifican las hipótesis del Lema 12. Por lo tanto existe $X \in \mathcal{S}$ y

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, X) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Y)$$

una transformación natural. Dicha transformación natural satisface que $\varphi(\omega)$ es un isomorfismo en Ab para todo $\omega \in \Omega$.

Más aún, por el Lema 13 se tiene que φ es un isomorfismo en \mathcal{S}' una subcategoría triangulada plena de \mathcal{T} cerrada por coproductos en \mathcal{T} tal que $\Omega \subseteq \mathcal{S}'$. Por hipótesis \mathcal{S} es la subcategoría triangulada plena de \mathcal{T} más pequeña que satisface dichas condiciones. Entonces,

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, X) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Y)$$

es un isomorfismo natural de funtores en \mathcal{S} . Ahora, como el encaje de Yoneda es pleno, existe $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{T} tal que $\varphi = (-, f)$. Por el axioma TR1C, el morfismo $f : X \rightarrow Y$ se puede completar a un triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma(X) .$$

Se afirma que $f : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo en \mathcal{T} . Para demostrar tal afirmación basta ver que $Z = 0$.

Sea $A \in \mathcal{S}$. Aplicando el funtor cohomológico

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, -) : \mathcal{T}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Ab}$$

al triángulo antes descrito, se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X) \xrightarrow{\varphi(A)} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Y) \xrightarrow{(A, g)} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Z) .$$

Dado que $A \in \mathcal{S}$, se sigue que $\varphi(A)$ es un isomorfismo en Ab . Por lo tanto $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Z) = 0$ para todo $A \in \mathcal{S}$. Puesto que $\Omega \subseteq \mathcal{S}$. En particular $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\omega, Z) = 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Por lo tanto $Z = 0$, pues Ω es un conjunto generador para \mathcal{T} . Lo anterior implica que $f : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo en \mathcal{T} . Por lo tanto $Y \in \mathcal{S}$, pues $X \in \mathcal{S}$. Se concluye que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. \square

Teorema 6. Sean \mathcal{T} una categoría triangulada compactamente generada y $H : \mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ un funtor cohomológico. Si para cualquier familia de objetos $\{X_j\}_{j \in J}$ en \mathcal{T} el morfismo canónico

$$H\left(\bigoplus_{j \in J} X_j\right) \longrightarrow \prod_{j \in J} H(X_j)$$

es un isomorfismo en Ab . Entonces, H es representable.

Demostración. La demostración se sigue de los Lemas 12, 13 y 14. \square

3.5. El teorema del funtor adjunto

Como se mencionó al inicio del capítulo, uno de los primeros resultados que se derivan del teorema de representabilidad de Brown-Neeman es el conocido como teorema del funtor adjunto. Este resultado establece lo siguiente.

Teorema 7. *Sean \mathcal{S}, \mathcal{T} categorías trianguladas con \mathcal{S} compactamente generada y $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ un funtor triangulado. Si F preserva coproductos. Entonces, existe un funtor triangulado $G : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ tal que*

$$\mathcal{S} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \perp \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{T} .$$

Demostración. Se buscará definir el funtor $G : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ y comprobar que cumple con las condiciones enunciadas.

Se comienza estableciendo la asignación a nivel de objetos. Sea $X \in \mathcal{T}$. Considere la siguiente composición de funtores

$$H_X := \text{Hom}_{\mathcal{T}}(F(-), X) : \mathcal{S} \longrightarrow \text{Ab} .$$

Puesto que $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ es un funtor triangulado este preserva triángulos distinguidos. Entonces, H_X es un funtor cohomológico. Además, para cualquier familia de objetos $\{X_j\}_{j \in J}$ en \mathcal{S} el morfismo canónico

$$H_X(\bigoplus_{j \in J} X_j) \longrightarrow \prod_{j \in J} H_X(X_j)$$

es un isomorfismo en Ab . Pues, por hipótesis F preserva coproductos. Por lo tanto se satisfacen las hipótesis del Teorema 6. Entonces, existe $A \in \mathcal{S}$ tal que

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(F(-), X) = H_X = \text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, A).$$

Se define $G(X) := A$.

Ahora, se precisa la asignación a nivel de morfismos. Sea $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{T} . Considere el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(F(-), X) & \xrightarrow{(F(-), f)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(F(-), Y) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, G(X)) & \xrightarrow{\Psi} & \text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, G(Y)). \end{array}$$

Dado que el encaje de Yoneda es fiel y pleno, existe un único $g : G(X) \rightarrow G(Y)$ en \mathcal{S} tal que $\Psi = (-, g)$. Se define $G(f) := g$. Se verifica que la asignación anterior es funtorial.

Sean $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ en \mathcal{T} . De la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
& & \xrightarrow{(F(-),gf)} & & \\
\text{Hom}_{\mathcal{T}}(F(-), X) & \xrightarrow{(F(-),f)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(F(-), Y) & \xrightarrow{(F(-),g)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(F(-), Z) \\
\cong \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
\text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, G(X)) & \xrightarrow{(-, G(f))} & \text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, G(Y)) & \xrightarrow{(-, G(g))} & \text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, G(Z)) \\
& & \xleftarrow{(-, G(gf))} & &
\end{array}$$

se deduce que $G(gf) = G(g)G(f)$.

Sea $X \in \mathcal{T}$. De la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_{\mathcal{T}}(F(-), X) & \xrightarrow{(F(-), 1_X)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(F(-), X) \\
\cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
\text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, G(X)) & \xrightarrow{(-, 1_{G(X)})} & \text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, G(X))
\end{array}$$

se deduce que $G(1_X) = 1_{G(X)}$.

Por otra parte. Para cualesquiera $X \in \mathcal{S}, Y \in \mathcal{T}$. Se cumple que

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(F(X), Y) = \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, G(Y)).$$

Del Teorema 6 se deduce que dicho isomorfismo es natural en la variable X . Además, por construcción, dicho isomorfismo es natural en la variable Y . Por lo tanto

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{S} & \xrightarrow{F} & \mathcal{T} \\
& \perp & \\
& \xleftarrow{G} &
\end{array}$$

□

El último resultado de este capítulo nos permitirá, en secciones posteriores, establecer una situación de adjunción en la que intervienen tres funtores distintos.

Teorema 8. Sean \mathcal{S}, \mathcal{T} categorías trianguladas con \mathcal{S} compactamente generada y $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ un funtor triangulado que preserva coproductos. Por el Teorema 7 existe un funtor triangulado $G : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{S} & \xrightarrow{F} & \mathcal{T} \\
& \perp & \\
& \xleftarrow{G} &
\end{array}$$

Considere $\Omega_{\mathcal{S}}$ un conjunto perfectamente generador para \mathcal{S} . Entonces, G preserva coproductos si y sólo si $F(\Omega_{\mathcal{S}}) \subseteq \text{Obj}(\mathcal{T}^c)$.

Demostración. \Rightarrow) Sean $\omega \in \Omega_{\mathcal{S}}$ y $\{X_j\}_{j \in J}$ una familia de objetos en \mathcal{T} . Luego,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F(\omega), \bigoplus_{j \in J} X_j) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\omega, G(\bigoplus_{j \in J} X_j)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\omega, \bigoplus_{j \in J} G(X_j)) \\ &= \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\omega, G(X_j)) \\ &= \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F(\omega), X_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto $F(\omega) \in \mathcal{T}^{\mathrm{C}}$.

\Leftarrow) Sea $\{X_j\}_{j \in J}$ una familia de objetos en \mathcal{T} . Considere $\bigoplus_{j \in J} X_j$ en \mathcal{T} . Observe que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\omega, G(\bigoplus_{j \in J} X_j)) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F(\omega), \bigoplus_{j \in J} X_j) \\ &= \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F(\omega), X_j) \\ &= \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\omega, G(X_j)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\omega, \bigoplus_{j \in J} G(X_j)) \end{aligned}$$

para todo $\omega \in \Omega_{\mathcal{S}}$. El morfismo canónico

$$G(\bigoplus_{j \in J} X_j) \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{j \in J} G(X_j)$$

induce una transformación natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-, G(\bigoplus_{j \in J} X_j)) \xrightarrow{(-, \rho)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-, \bigoplus_{j \in J} G(X_j))$$

la cual satisface que (ω, ρ) es un isomorfismo en Ab para todo $\omega \in \Omega_{\mathcal{S}}$. Se afirma que ρ es un isomorfismo en \mathcal{S} .

Por el axioma TR1C, el morfismo ρ se puede completar a un triángulo distinguido en \mathcal{S}

$$G(\bigoplus_{j \in J} X_j) \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{j \in J} G(X_j) \dashrightarrow Z \dashrightarrow \Sigma(G(\bigoplus_{j \in J} X_j)) .$$

Sea $\omega \in \Omega_{\mathcal{S}}$. Aplicando el funtor cohomológico

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\omega, -) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

al triángulo antes descrito, se obtiene la siguiente sucesión exacta en Ab

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\omega, G(\bigoplus_{j \in J} X_j)) \xrightarrow{(\omega, \rho)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\omega, \bigoplus_{j \in J} G(X_j)) \xrightarrow{(\omega, \delta)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\omega, Z) .$$

Luego, (ω, ρ) es un isomorfismo en Ab . Por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\omega, Z) = 0$ para todo $\omega \in \Omega_{\mathcal{S}}$. Puesto que $\Omega_{\mathcal{S}}$ es un conjunto perfectamente generador para \mathcal{S} , se concluye que $Z = 0$. Por lo tanto ρ es un isomorfismo en \mathcal{S} . Se concluye el resultado. \square

Capítulo 4

Dualidad en categorías derivadas

El objetivo de este capítulo es establecer una autodualidad en la subcategoría de complejos de cocadena acotados de longitud finita dentro de la categoría derivada de un anillo. Para lograr este objetivo, mediante el teorema de representabilidad-adjunción de Brown-Neeman se buscará definir una situación de adjunción en el contexto de categorías derivadas. Para definir el funtor del cual se derivan los adjuntos, surgen problemas al definirlos fuera del contexto de categorías derivadas no acotadas. Para eliminar tal restricción, se introduce el concepto de resolución K -plana debido a N. Spaltenstein. Dado que el funtor de restricción de escalares está en función del producto tensorial, es preciso introducir previamente dicho concepto en el nivel de categorías de complejos de cadenas. Finalmente, se obtiene la autodualidad buscada.

A lo largo de este capítulo R denota un anillo conmutativo con unidad.

4.1. Resoluciones proyectivas de complejos de cocadena

Una de las principales virtudes de las categorías derivadas es que permiten intercambiar complejos acotados por otros equivalentes con propiedades más deseables. En el contexto específico de este estudio, se está interesado en la existencia de resoluciones proyectivas de complejos de cocadena. Más adelante, esta herramienta facilitará la construcción de resoluciones para complejos no acotados.

Notación 8. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Se denota por $\mathcal{A}\text{-Proj}$ a la clase de objetos proyectivos de \mathcal{A} .

Definición 41. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Se dice que \mathcal{A} tiene suficientes proyectivos si para todo $A \in \mathcal{A}$ existe $f : P \rightarrow A$ un epimorfismo en \mathcal{A} tal que $P \in \mathcal{A}\text{-Proj}$.

Definición 42. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana con suficientes proyectivos y $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathcal{A})$ acotado superiormente. Una resolución proyectiva de X^\bullet es un casi-isomorfismo

$$P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} X^\bullet$$

en $\text{Ch}(\mathcal{A})$ tal que $P^n \in \mathcal{A}\text{-Proj}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 46. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana con suficientes proyectivos. Todo $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathcal{A})$ acotado superiormente admite una resolución proyectiva.

Demostración. Sea $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathcal{A})$ acotado superiormente. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $X^\bullet \neq 0$, pues en tal caso $1_{X^\bullet} : X^\bullet \rightarrow X^\bullet$ es la resolución proyectiva buscada. Puesto que X^\bullet es acotado superiormente, existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $X^k = 0$ para toda $k > \alpha$ y $X^\alpha \neq 0$. Se construye la resolución proyectiva por recursión.

Paso base. Puesto que \mathcal{A} tiene suficientes proyectivos existe $\varepsilon^\alpha : P^\alpha \rightarrow X^\alpha$ un epimorfismo en \mathcal{A} tal que $P^\alpha \in \mathcal{A}\text{-Proj}$. Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P^\alpha & \longrightarrow & 0 \\ \varepsilon^\alpha \downarrow & & \downarrow \\ X^\alpha & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Paso recursivo. Sea $n < \alpha$. Se supone que se ha construido el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & P^n & \xrightarrow{d^n} & P^{n+1} & \xrightarrow{d^{n+1}} & P^{n+2} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \varepsilon^n & & \downarrow \varepsilon^{n+1} & & \downarrow \varepsilon^{n+2} \\ X^\bullet : \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^n} & X^{n+1} \xrightarrow{d_{X^\bullet}^{n+1}} X^{n+2} \longrightarrow \dots \end{array}$$

donde se cumplen las siguientes condiciones

1. $P^k \in \mathcal{A}\text{-Proj}$ para toda $k \geq n$ y $P^k = 0$ para toda $k > \alpha$.
2. $d^{k+1}d^k = 0$ para toda $k \geq n$.
3. $\varepsilon^k : P^k \rightarrow X^k$ es un epimorfismo en \mathcal{A} para toda $k \geq n$.
4. $H^k(\varepsilon) : \text{Nuc}(d^k)/\text{Im}(d^{k-1}) \rightarrow \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^k)/\text{Im}(d_{X^\bullet}^{k-1})$ es un isomorfismo en Ab para toda $k > n$.

A continuación se busca construir la situación anterior para el caso $n-1$. En primer lugar considere el siguiente diagrama de pull back

$$\begin{array}{ccc} Q^{n-1} & \xrightarrow{p} & \text{Nuc}(d^n) \\ q \downarrow & \lrcorner & \downarrow \varepsilon^n|_{\text{Nuc}(d^n)} \\ X^{n-1} & \xrightarrow{\widehat{d}_{X^\bullet}^{n-1}} & \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^n). \end{array} \quad (4.1)$$

Puesto que \mathcal{A} tiene suficientes proyectivos existe $r : P^{n-1} \rightarrow Q^{n-1}$ un epimorfismo en \mathcal{A} tal que $P^{n-1} \in \mathcal{A}\text{-Proj}$.

Sea $\varepsilon^{n-1} := qr$ y $d^{n-1} := i^n pr$. Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
P^{n-1} & \xrightarrow{\quad d^{n-1} \quad} & & & \\
\searrow r & & & & \\
Q^{n-1} & \xrightarrow{p} & \text{Nuc}(d^n) & \xrightarrow{i^n} & P^n \\
\downarrow q & \lrcorner & \downarrow \varepsilon^n|_{\text{Nuc}(d^n)} & & \downarrow \varepsilon^n \\
X^{n-1} & \xrightarrow{\widehat{d}_{X^\bullet}^{n-1}} & \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^n) & \xrightarrow{i_{X^\bullet}^n} & X^n.
\end{array}$$

$\varepsilon^{n-1} : P^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ (dashed arrow), $d^{n-1} : P^{n-1} \rightarrow P^n$ (dashed arrow).

Por construcción se tiene que $P^{n-1} \in \mathcal{A}\text{-Proj}$ y $d^n d^{n-1} = (d^n i^n)pr = 0$. Se supone además que $\varepsilon^n|_{\text{Nuc}(d^n)} : \text{Nuc}(d^n) \rightarrow \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^n)$ es un epimorfismo en \mathcal{A} . Lo anterior implica que en el diagrama conmutativo (4.1) el morfismo $q : Q^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ es un epimorfismo en \mathcal{A} , entonces $\varepsilon^{n-1} : P^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ es también un epimorfismo en \mathcal{A} .

A continuación se demuestra que

$$\text{Nuc}(d^n)/\text{Im}(d^{n-1}) \xrightarrow{H^n(\varepsilon)} \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^n)/\text{Im}(d_{X^\bullet}^{n-1})$$

es un isomorfismo en Ab.

En el lenguaje de elementos (vía el teorema de inmersión de Freyd-Mitchell) se cumple lo siguiente.

Sobreyectividad. Sea $y + \text{Im}(d_{X^\bullet}^{n-1}) \in \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^n)/\text{Im}(d_{X^\bullet}^{n-1})$. En virtud de que $\varepsilon^n|_{\text{Nuc}(d^n)} : \text{Nuc}(d^n) \rightarrow \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^n)$ es un epimorfismo en \mathcal{A} , entonces existe $x \in \text{Nuc}(d^n)$ tal que $\varepsilon^n(x) = y$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
H^n(\varepsilon)(x + \text{Im}(d^{n-1})) &= \varepsilon^n(x) + \text{Im}(d_{X^\bullet}^{n-1}) \\
&= y + \text{Im}(d_{X^\bullet}^{n-1}).
\end{aligned}$$

Inyectividad. Sea $x + \text{Im}(d_{X^\bullet}^{n-1}) \in \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^n)/\text{Im}(d_{X^\bullet}^{n-1})$ tal que

$$H^n(\varepsilon)(x + \text{Im}(d_{X^\bullet}^{n-1})) = \varepsilon^n(x) + \text{Im}(d_{X^\bullet}^{n-1}) = 0.$$

Luego, $\varepsilon^n(x) \in \text{Im}(d_{X^\bullet}^{n-1}) = \text{Im}(\widehat{d}_{X^\bullet}^{n-1})$. Así, existe $w \in X^{n-1}$ tal que $\widehat{d}_{X^\bullet}^{n-1}(w) = \varepsilon^n(x)$.

El diagrama (4.1) induce la siguiente sucesión exacta en \mathcal{A}

$$0 \longrightarrow Q^{n-1} \xrightarrow{g} X^{n-1} \oplus \text{Nuc}(d^n) \xrightarrow{h} \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^n) \longrightarrow 0$$

donde $g = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ y $h = \begin{pmatrix} \widehat{d}_{X^\bullet}^{n-1} & \varepsilon^n \end{pmatrix}$. Luego, $\begin{pmatrix} \widehat{d}_{X^\bullet}^{n-1} & \varepsilon^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ -x \end{pmatrix} = 0$. Por lo tanto existe $y \in Q^{n-1}$ tal que $\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix} (y) = \begin{pmatrix} w \\ -x \end{pmatrix}$. En particular $p(y) = x$. Para finalizar, como

$r : P^{n-1} \rightarrow Q^{n-1}$ un epimorfismo en \mathcal{A} , existe $z \in P^{n-1}$ tal que $r(z) = y$. Por lo tanto $d^{n-1}(z) = x$, es decir $x \in \text{Im}(d^{n-1})$. En conclusión $x + \text{Im}(d^{n-1}) = 0$ como se buscaba demostrar.

Para finalizar la demostración resta ver que $\varepsilon^{n-1}|_{\text{Nuc}(d^{n-1})} : \text{Nuc}(d^{n-1}) \rightarrow \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^{n-1})$ es un epimorfismo en \mathcal{A} . Sea $x \in \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^{n-1})$. En particular $\widehat{d}_{X^\bullet}^{n-1}(x) = 0$. Por construcción se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \text{Nuc}(p) & \xleftarrow{i} & Q^{n-1} & \xrightarrow{p} & \text{Nuc}(d^n) \\ q|_{\text{Nuc}(p)} \downarrow \cong & & q \downarrow & & \downarrow \varepsilon^n \\ \text{Nuc}(\widehat{d}_{X^\bullet}^{n-1}) & \xleftarrow{i'} & X^{n-1} & \xrightarrow{\widehat{d}_{X^\bullet}^{n-1}} & \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^n). \end{array}$$

Luego, existe $y \in \text{Nuc}(p)$ tal que $q(y) = x$. Puesto que $r : P^{n-1} \rightarrow Q^{n-1}$ es un epimorfismo en \mathcal{A} existe $z \in P^{n-1}$ tal que $r(z) = y$. Además, note que $d^{n-1}(z) = pr(z) = p(y) = 0$. Por lo tanto $z \in \text{Nuc}(d^{n-1})$. Por último observe que $qr(z) = q(y) = x$. En conclusión $\varepsilon^{n-1}|_{\text{Nuc}(d^{n-1})} : \text{Nuc}(d^{n-1}) \rightarrow \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^{n-1})$ es un epimorfismo en \mathcal{A} . \square

4.2. Objetos compactos en $\mathbf{R}\text{-Mod}$ y $\mathbf{D}(\mathbf{R})$

El objetivo principal de esta sección es ofrecer una caracterización precisa de los objetos compactos en la categoría derivada de un anillo, es decir, $\mathbf{D}(\mathbf{R})$. Considerando que los objetos de estudio son complejos de cocadena de \mathbf{R} -módulos, no es sorprendente que los módulos que conforman estos complejos jueguen un papel crucial en determinar cuándo el complejo en cuestión es un objeto compacto. Por esta razón, se inicia la sección identificando algunos de los objetos compactos en la categoría de \mathbf{R} -módulos, es decir, $\mathbf{R}\text{-Mod}$.

Proposición 47. *Sea $f : M \rightarrow N$ un epimorfismo de \mathbf{R} -módulos. Si $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(M, -) : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ preserva coproductos. Entonces, $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(N, -) : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ preserva coproductos.*

Demostración. Sean $\{M_j\}_{j \in J}$ una familia de \mathbf{R} -módulos y $g : N \rightarrow \bigoplus_{j \in J} M_j$ un morfismo de \mathbf{R} -módulos. Puesto que $\mathbf{R}\text{-Mod}$ es una categoría aditiva, por la Proposición 41 basta ver que la siguiente composición de morfismos de \mathbf{R} -módulos

$$N \xrightarrow{g} \bigoplus_{j \in J} M_j \xrightarrow{\pi_j} M_j$$

se anula salvo una cantidad finita de $j \in J$. Luego, la siguiente composición de morfismos de \mathbf{R} -módulos

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} \bigoplus_{j \in J} M_j \xrightarrow{\pi_j} M_j$$

se anula salvo una cantidad finita de $j \in J$, pues por hipótesis M es compacto en $R\text{-Mod}$. Por lo tanto $\pi_j g = 0$ salvo una cantidad finita de $j \in J$, pues $f : M \rightarrow N$ es un epimorfismo de R -módulos. \square

Corolario 9. *Sea M un R -módulo. Si M es finitamente generado. Entonces, M es compacto en $R\text{-Mod}$.*

Demostración. Puesto que M es finitamente generado existen $n \in \mathbb{N}$ y $f : R^{\oplus n} \rightarrow M$ un epimorfismo de R -módulos. En virtud de que $\text{Hom}_R(R^{\oplus n}, -) : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ preserva coproductos el resultado se sigue de la Proposición 47. \square

Proposición 48. *Sea $M^\bullet \in \text{Ch}(R)$ un complejo acotado de R -módulos finitamente generados. Entonces, $\text{Hom}_{\text{Ch}(R)}(M^\bullet, -) : \text{Ch}(R) \rightarrow \text{Ab}$ preserva coproductos.*

Demostración. Sean $\{M_{j \in J}^\bullet\}_{j \in J}$ una familia de objetos en $\text{Ch}(R)$ y $f : M^\bullet \rightarrow \bigoplus_{j \in J} M_j^\bullet$ en $\text{Ch}(R)$. Puesto que $\text{Ch}(R)$ es una categoría aditiva, por la Proposición 41 basta ver que la siguiente composición de morfismos de complejos de R -módulos

$$M^\bullet \xrightarrow{f} \bigoplus_{j \in J} M_j^\bullet \xrightarrow{\pi_j} M_j^\bullet$$

se anula salvo una cantidad finita de $j \in J$.

Sea $j \in J$. Observe que $\pi_j f = 0$ si y sólo si $\pi_j^k f^k = 0$ para toda $k \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, como M^k es un R -módulo finitamente generado para toda $k \in \mathbb{Z}$, se concluye de la Proposición 9 que la que la siguiente composición de morfismos de R -módulos

$$M^k \xrightarrow{f^k} \bigoplus_{j \in J} M_j^k \xrightarrow{\pi_j^k} M_j^k$$

se anula salvo una cantidad finita de $j \in J$.

Puesto que M^\bullet es acotado se concluye que $\pi_j f = 0$ salvo una cantidad finita de $j \in J$. \square

Definición 43. *Sea $X^\bullet \in \text{Ch}(R)$. Se dice que X^\bullet es un complejo perfecto si este es casi-isomorfo a un complejo acotado de R -módulos proyectivos finitamente generados.*

El siguiente teorema establece una caracterización realmente útil de los objetos compactos en la categoría derivada de un anillo.

Teorema 9. *Sea $X^\bullet \in D(R)$. Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. X^\bullet es un complejo perfecto.
2. X^\bullet es compacto en $D(R)$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) Sea $\{Y_j\}_{j \in J}$ una familia de objetos en $D(R)$. Puesto que X^\bullet es perfecto, existe P^\bullet un complejo acotado de R -módulos proyectivos finitamente generados tal que $X^\bullet = P^\bullet$ en $D(R)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{D(R)}(X^\bullet, \bigoplus_{j \in J} Y_j^\bullet) &= \mathrm{Hom}_{D(R)}(P^\bullet, \bigoplus_{j \in J} Y_j^\bullet) \\
&= \mathrm{Hom}_{K(R)}(P^\bullet, \bigoplus_{j \in J} Y_j^\bullet) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(R)}(P^\bullet, \bigoplus_{j \in J} Y_j^\bullet) / H(P^\bullet, \bigoplus_{j \in J} Y_j^\bullet) \\
&= (\bigoplus_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(R)}(P^\bullet, Y_j^\bullet)) / (\bigoplus_{j \in J} H(P^\bullet, Y_j^\bullet)) \\
&= \bigoplus_{j \in J} (\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(R)}(P^\bullet, Y_j^\bullet) / H(P^\bullet, Y_j^\bullet)) \\
&= \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Hom}_{K(R)}(P^\bullet, Y_j^\bullet) \\
&= \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Hom}_{D(R)}(P^\bullet, Y_j^\bullet) \\
&= \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Hom}_{D(R)}(X^\bullet, Y_j^\bullet).
\end{aligned}$$

Por lo tanto X^\bullet es compacto en $D(R)$.

2) \Rightarrow 1) Se supone ahora que $X^\bullet \in D(R)$ es compacto. Considere la siguiente familia de morfismos en $\mathrm{Ch}(R)$ descritos en la Proposición 29

$$\{j_{X^\bullet}^n : X^\bullet \rightarrow \tau^{\geq n}(X^\bullet)\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Por la propiedad universal del producto se obtiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathrm{Ch}(R)$

$$\begin{array}{ccc}
\prod_{n \in \mathbb{N}} \tau^{\geq n}(X^\bullet) & \xrightarrow{\rho_n} & \tau^{\geq n}(X^\bullet) \\
\uparrow \varepsilon & \nearrow j_{X^\bullet}^n & \\
X & &
\end{array}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Puesto que en cada grado del complejo $\prod_{n \in \mathbb{N}} \tau^{\geq n}(X^\bullet)$ tiene un numero finito de factores se deduce que de hecho

$$X \xrightarrow{\varepsilon} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \tau^{\geq n}(X^\bullet) .$$

Puesto que $X^\bullet \in D(R)$ es compacto, se sigue de la caracterización de objetos compactos (Proposición 41) que la siguiente composición de morfismos en $D(R)$

$$X \xrightarrow{q(\pi(\varepsilon))} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \tau^{\geq n}(X^\bullet) \xrightarrow{q(\pi(\rho_n))} \tau^{\geq n}(X^\bullet)$$

se anula salvo una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$. En particular existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q(\pi(\rho_n))q(\pi(\varepsilon)) = q(\pi(\rho_n\varepsilon)) = 0$. Lo anterior implica que $X^k = 0$ para toda $k \geq n_0 + 1$. Lo anterior demuestra que X^\bullet es un complejo acotado superiormente. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $X^k = 0$ para toda $k > 0$.

Puesto que X^\bullet es acotado superiormente se sigue de la Proposición 46 que existe

$$P^\bullet \xrightarrow{\eta} X^\bullet$$

una resolución proyectiva de X^\bullet . Ahora, considere el sistema directo sobre \mathbb{N} en $D(R)$ inducido por las truncaciones estúpidas

$$\{q(\pi(s_n)) : \sigma^{\geq(-n)}(P^\bullet) \rightarrow \sigma^{\geq-(n+1)}(P^\bullet)\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (4.2)$$

donde

$$(s_n)^k = \begin{cases} 1_{P^k}, & \text{si } k \geq -n, \\ 0, & \text{si } k < -n. \end{cases}$$

El siguiente diagrama ilustra las componentes del sistema directo en $\text{Ch}(R)$

$$\begin{array}{ccccccccc} \sigma^{\geq(-n)}(P^\bullet) : \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P^{-n} & \longrightarrow & P^{-(n-1)} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow s_n & & \downarrow & & \downarrow 1_{P^{-n}} & & \downarrow 1_{P^{-(n-1)}} & & \\ \sigma^{\geq-(n+1)}(P^\bullet) : \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P^{-(n+1)} & \longrightarrow & P^{-n} & \longrightarrow & P^{-(n-1)} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

El sistema descrito en (4.2) induce a la par un sistema directo sobre \mathbb{N} en $R\text{-Mod}$

$$\{(s_n)^k : (\sigma^{\geq(-n)}(P^\bullet))^k \rightarrow (\sigma^{\geq-(n+1)}(P^\bullet))^k\}_{n \in \mathbb{N}}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$ (en particular en \mathbb{N} pues el complejo es acotado). Es claro que $P^k = \text{colim}(\sigma^{\geq(-n)}(P^\bullet)^k)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto se deduce del Lema [?] que

$$\text{colim}(\text{Hom}_{D(R)}(P^\bullet, \sigma^{\geq(-n)}(P^\bullet))) = \text{Hom}_{D(R)}(P^\bullet, P^\bullet).$$

En particular existen $m \in \mathbb{N}$ y $f : P^\bullet \rightarrow \sigma^{\geq(-m)}(P^\bullet)$ en $D(R)$ tal que el siguiente diagrama conmuta en $D(R)$

$$\begin{array}{ccc}
 P^\bullet & \xrightarrow{1_{P^\bullet}} & P^\bullet \\
 & \searrow f & \nearrow q(\pi(i_{P^\bullet}^{-m})) \\
 & \sigma^{\geq(-m)}(P^\bullet) &
 \end{array} \tag{4.3}$$

Es importante notar que $\sigma^{\geq(-m)}(P^\bullet)$ es un complejo acotado inferiormente y por lo tanto acotado. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que existen $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$ tales que $\sigma^{\geq(-m)}(P^\bullet)^k = 0$ para toda $k \notin [a, b]$.

Sea $Q^\bullet = \sigma^{\geq(-m)}(P^\bullet)$. Hasta este punto se ha logrado demostrar que el morfismo $1_{P^\bullet} : P^\bullet \rightarrow P^\bullet$ en $D(R)$ se puede factorizar a través de Q^\bullet un complejo acotado de R -módulos proyectivos. Se demuestra por inducción que dicha factorización se puede lograr a través de un complejo acotado de R -módulos proyectivos finitamente generados.

Sea $c \in [a, b]$ el mayor entero tal que se puede encontrar una factorización como en (4.3) tal que Q^k es un R -módulo proyectivo finitamente generado para toda $k < c$. Se sabe que Q^c es un R -módulo proyectivo. Más aun, se puede suponer que Q^c es un R -módulo libre (por la forma en que se encuentran las resoluciones proyectivas), entonces existe I_c un conjunto tal que $Q^c = R^{(I_c)} = \bigoplus_{i \in I_c} R$. Por hipótesis de inducción Q^{c-1} es un R -módulo finitamente generado, por el Corolario 9 se concluye que Q^{c-1} es un objeto compacto en $R\text{-Mod}$. Se sigue de la caracterización de objetos compactos (Proposición 41) que existe $J_c \subseteq I_c$ con J_c finito tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 Q^{c-1} & \xrightarrow{d_{Q^\bullet}^{c-1}} & \bigoplus_{i \in I_c} R \\
 & \searrow \hat{d}_{Q^\bullet}^{c-1} & \nearrow \mu_{J_c} \\
 & \bigoplus_{i \in J_c} R &
 \end{array}$$

Por otra parte, el epimorfismo canónico de R -módulos $\pi_{J_c} : \bigoplus_{i \in I_c} R \rightarrow \bigoplus_{i \in I_c - J_c} R$ induce un epimorfismo en $\text{Ch}(R)$

$$Q^\bullet \xrightarrow{\eta} \left(\bigoplus_{i \in I_c - J_c} R \right)^\circ[-c]$$

donde,

$$\eta^k = \begin{cases} \pi_{J_c}, & \text{si } k = c, \\ 0, & \text{si } k \neq c. \end{cases}$$

El siguiente diagrama ilustra la situación

$$\begin{array}{ccccccc}
Q^\bullet : \dots & \longrightarrow & Q^{c-1} & \xrightarrow{d_{Q^\bullet}^{c-1}} & Q^c & \xrightarrow{d_{Q^\bullet}^c} & Q^{c+1} \longrightarrow \dots \\
\eta \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi_{J_c} & & \downarrow \\
(\bigoplus_{i \in I_c - J_c} R)^\circ[-c] : \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I_c - J_c} R & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \dots
\end{array}$$

Sea $K^\bullet = \text{Nuc}(\eta)$. Observe que

$$K^m = \begin{cases} \text{Nuc}(\pi_{J_c}) = \bigoplus_{i \in J_c} R, & \text{si } m = c, \\ Q^m, & \text{si } m \neq c. \end{cases}$$

Por lo tanto se tiene la siguiente sucesión exacta en $\text{Ch}(R)$

$$0 \longrightarrow K^\bullet \xrightarrow{\gamma} Q^\bullet \xrightarrow{\eta} (\bigoplus_{i \in I_c - J_c} R)^\circ[-c] \longrightarrow 0.$$

Luego, existe $\delta(\eta) : (\bigoplus_{i \in I_c - J_c} R)^\circ[-c] \rightarrow K^\bullet[1]$ en $D(R)$ tal que

$$K^\bullet \xrightarrow{q(\pi(\gamma))} Q^\bullet \xrightarrow{q(\pi(\eta))} (\bigoplus_{i \in I_c - J_c} R)^\circ[-c] \xrightarrow{\delta(\eta)} K^\bullet[1]$$

es un triángulo distinguido en $D(R)$. Aplicando el funtor cohomológico $\text{Hom}_{D(R)}(P^\bullet, -) : D(R) \rightarrow \text{Ab}$ al triángulo distinguido anterior, se obtiene la siguiente sucesión exacta en Ab

$$\text{Hom}_{D(R)}(P^\bullet, K^\bullet) \xrightarrow{(P^\bullet, \hat{\gamma})} \text{Hom}_{D(R)}(P^\bullet, Q^\bullet) \xrightarrow{(P^\bullet, \hat{\eta})} \text{Hom}_{D(R)}(P^\bullet, (\bigoplus_{i \in I_c - J_c} R)^\circ[-c])$$

donde $\hat{\gamma} = q(\pi(\gamma))$ y $\hat{\eta} = q(\pi(\eta))$. De (4.3) se deduce que $(P^\bullet, \hat{\eta})(f) = \hat{\eta}f = 0$, entonces existe $g \in \text{Hom}_{D(R)}(P^\bullet, K^\bullet)$ tal que $(P^\bullet, \hat{\gamma})(g) = \hat{\gamma}g = f$. Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
P^\bullet & \xrightarrow{1_{P^\bullet}} & P^\bullet \\
& \searrow g & \nearrow h \\
& K^\bullet &
\end{array}$$

donde $h = q(\pi(i_{P^\bullet}^{-m}))\hat{\gamma}$. Observe que K^\bullet es un complejo acotado de R -módulos proyectivos tal que K^n es un R -módulo finitamente generado para toda $n \leq c$. El paso inductivo está cubierto.

Lo anterior demuestra que el morfismo $1_{P^\bullet} : P^\bullet \rightarrow P^\bullet$ en $D(R)$ se puede factorizar a través de L^\bullet un complejo acotado de R -módulos proyectivos finitamente generado, en particular L^\bullet es un complejo perfecto. Considere una factorización de este tipo

$$\begin{array}{ccc}
P^\bullet & \xrightarrow{1_{P^\bullet}} & P^\bullet \\
& \searrow \alpha & \nearrow \beta \\
& L^\bullet &
\end{array}$$

Sea $e = \alpha\beta$. Observe que $e^2 = (\alpha\beta)(\alpha\beta) = \alpha(\beta\alpha)\beta = \alpha\beta$, entonces $e : L^\bullet \rightarrow L^\bullet$ es un idempotente en $D(R)$. Así, $L^\bullet = \text{Nuc}(e) \oplus \text{Nuc}(1 - e)$. Más aun, $P^\bullet = \text{Nuc}(1 - e)$. Puesto que L^\bullet es perfecto se concluye que P^\bullet es también perfecto. Se concluye la demostración \square

4.3. Producto tensorial de complejos de cocadena

Como indica el nombre de la sección, se introduce el concepto de producto tensorial de complejos de cocadena de R -módulos, motivado en el producto tensorial de $R\text{-Mod}$. Además, se demostrará que esta construcción es funtorial en ambas variables y, más aún, se extenderá de manera canónica a la categoría homotópica.

Proposición 49. Sean $X^\bullet, Y^\bullet \in \text{Ch}(R)$. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Se define

$$(X^\bullet \otimes Y^\bullet)^n := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^{n+k} \otimes_R Y^{-k}).$$

Además, se busca definir el n -ésimo diferencial

$$d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n : (X^\bullet \otimes Y^\bullet)^n \longrightarrow (X^\bullet \otimes Y^\bullet)^{n+1}.$$

En particular,

$$d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n : \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^{n+k} \otimes_R Y^{-k}) \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (X^{(n+1)+j} \otimes_R Y^{-j}).$$

En términos matriciales. Se define

$$[d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n]_{r,s} := \begin{cases} d_{X^\bullet}^{n+r} \otimes 1_{Y^{-r}}, & \text{si } s = r \\ (-1)^{n+r+1} (1_{X^{n+r+1}} \otimes d_{Y^\bullet}^{-(r+1)}), & \text{si } s = r + 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $[d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n]_{r,s} : X^{n+s} \otimes_R Y^{-s} \rightarrow X^{(n+1)+r} \otimes_R Y^{-r}$.

Se afirma que $(X^\bullet \otimes Y^\bullet, d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet})$ es un complejo de cocadena de R -módulos.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Basta ver que $(d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n)(d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1}) = 0$.

Recuerde que

$$[(d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n)(d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1})]_{r,s} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n]_{r,k} [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1}]_{k,s}.$$

Sea $r \in \mathbb{Z}$. Por la forma en que se definieron las diferenciales basta estudiar los casos cuando $s \in \{r, r+1, r+2\}$ pues fuera de este conjunto los diferenciales son cero.

Caso $s=r$.

$$\begin{aligned}
 [(d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n)(d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1})]_{r,r} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n]_{r,k} [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1}]_{k,r} \\
 &= [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n]_{r,r} [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1}]_{r,r} \\
 &= (d_{X^\bullet}^{n+r} \otimes 1_{Y^{-r}})(d_{X^\bullet}^{(n-1)+r} \otimes 1_{Y^{-r}}) \\
 &= d_{X^\bullet}^{n+r} d_{X^\bullet}^{(n-1)+r} \otimes 1_{Y^{-r}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Caso $s=r+1$.

$$\begin{aligned}
 [(d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n)(d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1})]_{r,r+1} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n]_{r,k} [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1}]_{k,r+1} \\
 &= [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n]_{r,r} [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1}]_{r,r+1} + [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n]_{r,r+1} [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1}]_{r+1,r+1} \\
 &= (d_{X^\bullet}^{n+r} \otimes 1_{Y^{-r}})((-1)^{(n-1)+r+1}(1_{X^{(n-1)+r+1}} \otimes d_{Y^\bullet}^{-(r+1)})) \\
 &\quad + ((-1)^{n+r+1}(1_{X^{n+r+1}} \otimes d_{Y^\bullet}^{-(r+1)}))(d_{X^\bullet}^{(n-1)+(r+1)} \otimes 1_{Y^{-(r+1)}}) \\
 &= (-1)^{n+r}(d_{X^\bullet}^{n+r} \otimes d_{Y^\bullet}^{-(r+1)}) + (-1)^{n+r+1}(d_{X^\bullet}^{n+r} \otimes d_{Y^\bullet}^{-(r+1)}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Caso $s=r+2$.

$$\begin{aligned}
 [(d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n)(d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1})]_{r,r+2} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n]_{r,k} [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1}]_{k,r+2} \\
 &= [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^n]_{r,r+1} [d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet}^{n-1}]_{r+1,r+2} \\
 &= ((-1)^{n+r+1}(1_{X^{n+r+1}} \otimes d_{Y^\bullet}^{-(r+1)}))((-1)^{(n+r+1)}(1_{X^{n+r+1}} \otimes d_{Y^\bullet}^{-(r+2)})) \\
 &= (-1)^{n+r+1}(1_{X^{n+r+1}} \otimes d_{Y^\bullet}^{-(r+1)} d_{Y^\bullet}^{-(r+2)}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Se concluye que $(X^\bullet \otimes Y^\bullet, d_{X^\bullet \otimes Y^\bullet})$ es un complejo de cocadena de Rmódulos. \square

Proposición 50. Sea $X \in \text{Ch}(\mathbf{R})$. Se definen las siguientes asignaciones

$$X^\bullet \otimes - : \text{Ch}(\mathbf{R}) \rightarrow \text{Ch}(\mathbf{R}).$$

A nivel de objetos. Sea $Y^\bullet \in \text{Ch}(\mathbf{R})$. Se define $X^\bullet \otimes Y^\bullet$ como en la Proposición 49.

A nivel de morfismos. Sea $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathbf{R})$. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Debe suceder que

$$(X^\bullet \otimes f)^n : (X^\bullet \otimes A^\bullet)^n \rightarrow (X^\bullet \otimes B^\bullet)^n.$$

En particular,

$$(X^\bullet \otimes f)^n : \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^{n+k} \otimes_{\mathbb{R}} A^{-k}) \rightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (X^{n+j} \otimes_{\mathbb{R}} B^{-j}).$$

En términos matriciales. Se define

$$[(X^\bullet \otimes f)^n]_{r,s} := \begin{cases} 1_{X^{n+r}} \otimes f^{-r}, & \text{si } s = r \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $[(X^\bullet \otimes f)^n]_{r,s} : X^{n+s} \otimes_{\mathbb{R}} A^{-s} \rightarrow X^{n+r} \otimes_{\mathbb{R}} B^{-r}$.

Se afirma que

$$X^\bullet \otimes - : \text{Ch}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Ch}(\mathbb{R})$$

es funtor aditivo.

Demostración. La asignación en objetos está bien definida en virtud de la Proposición 49.

Sea $f : Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathbb{R})$. Se inicia demostrando que en efecto $X^\bullet \otimes f : X^\bullet \otimes Y^\bullet \rightarrow X^\bullet \otimes Z^\bullet$ es un morfismo en $\text{Ch}(\mathbb{R})$.

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Basta ver que

$$(X^\bullet \otimes f)^{n+1}(d_{X^\bullet \otimes A^\bullet}^n) = (d_{X^\bullet \otimes B^\bullet}^n)(X^\bullet \otimes f)^n.$$

Sea $r \in \mathbb{Z}$. Por la forma en que se definió el candidato a morfismo de complejos basta estudiar el caso cuando $s = r$ pues en otro caso la identidad se satisface trivialmente. Luego,

$$\begin{aligned} [(d_{X^\bullet \otimes B^\bullet}^n)(X^\bullet \otimes f)^n]_{r,r} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} [d_{X^\bullet \otimes B^\bullet}^n]_{r,k} [(X^\bullet \otimes f)^n]_{k,r} \\ &= [d_{X^\bullet \otimes B^\bullet}^n]_{r,r} [(X^\bullet \otimes f)^n]_{r,r} \\ &= (d_{X^\bullet}^{n+r} \otimes 1_{B^{-r}})(1_{X^{n+r}} \otimes f^{-r}) \\ &= d_{X^\bullet}^{n+r} \otimes f^{-r} \\ &= (1_{X^{n+1+r}} \otimes f^{-r})(d_{X^\bullet}^{n+r} \otimes 1_{A^{-r}}) \\ &= [(X^\bullet \otimes f)^{n+1}]_{r,r} [d_{X^\bullet \otimes A^\bullet}^n]_{r,r} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} [(X^\bullet \otimes f)^{n+1}]_{r,k} [d_{X^\bullet \otimes A^\bullet}^n]_{k,r} \\ &= [(X^\bullet \otimes f)^{n+1}(d_{X^\bullet \otimes A^\bullet}^n)]_{r,r}. \end{aligned}$$

Sean $f : W^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ y $g : Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ morfismos en $\text{Ch}(\mathbb{R})$. Lo siguiente a demostrar es que

$$X^\bullet \otimes (gf) = (X^\bullet \otimes g)(X^\bullet \otimes f).$$

Sean $n, r \in \mathbb{N}$. De nuevo, el caso de interés es cuando $s = r$, pues cuando $s \neq r$ la identidad se satisface trivialmente. Luego,

$$\begin{aligned}
 [(X^\bullet \otimes g)^n (X^\bullet \otimes f)^n]_{r,r} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} [(X^\bullet \otimes g)^n]_{r,k} [(X^\bullet \otimes f)^n]_{k,r} \\
 &= [(X^\bullet \otimes g)^n]_{r,r} [(X^\bullet \otimes f)^n]_{r,r} \\
 &= (1_{X^{n+r}} \otimes g^{-r})(1_{X^{n+r}} \otimes f^{-r}) \\
 &= (1_{X^{n+r}} \otimes g^{-r} f^{-r}) \\
 &= (1_{X^{n+r}} \otimes (gf)^{-r}) \\
 &= [(X^\bullet \otimes (gf))^n]_{r,r}.
 \end{aligned}$$

Resta verificar la aditividad. Sean $f, g : Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ morfismos en $\text{Ch}(\mathbf{R})$. Lo último a demostrar es que

$$X^\bullet \otimes (f + g) = (X^\bullet \otimes f) + (X^\bullet \otimes g).$$

Sean $n, r \in \mathbb{N}$. De nuevo, el caso de interés es cuando $s = r$, pues cuando $s \neq r$ la identidad se satisface trivialmente. Luego,

$$\begin{aligned}
 [(X^\bullet \otimes (f + g))^n]_{r,r} &= 1_{X^{n+r}} \otimes (f + g)^{-r} \\
 &= 1_{X^{n+r}} \otimes (f^{-r} + g^{-r}) \\
 &= (1_{X^{n+r}} \otimes f^{-r}) + (1_{X^{n+r}} \otimes g^{-r}) \\
 &= [(X^\bullet \otimes f)^n]_{r,r} + [(X^\bullet \otimes g)^n]_{r,r}.
 \end{aligned}$$

Por todo lo demostrado anteriormente se concluye que $X^\bullet \otimes - : \text{Ch}(\mathbf{R}) \rightarrow \text{Ch}(\mathbf{R})$ es un funtor aditivo. \square

Proposición 51. Sea $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathbf{R})$. El funtor aditivo $X^\bullet \otimes - : \text{Ch}(\mathbf{R}) \rightarrow \text{Ch}(\mathbf{R})$ induce un único funtor aditivo $X^\bullet \widehat{\otimes} - : \mathbf{K}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{R})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ch}(\mathbf{R}) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{K}(\mathbf{R}) \\
 X^\bullet \otimes - \downarrow & & \downarrow X^\bullet \widehat{\otimes} - \\
 \text{Ch}(\mathbf{R}) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{K}(\mathbf{R})
 \end{array}$$

Demostración. Sea $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathbf{R})$. Por la propiedad universal de la categoría homotópica $\mathbf{K}(\mathbf{R})$ basta demostrar que si $f \sim 0$, entonces $X^\bullet \otimes f \sim 0$.

Se supone que $f \sim 0$. Luego, existe $\{h^k : A^k \rightarrow B^{k-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ una familia de morfismos en $\text{Ch}(\mathbf{R})$ tal que

$$f^{-r} = h^{-r+1} d_{A^\bullet}^{-r} + d_{B^\bullet}^{-r-1} h^{-r} \quad (4.4)$$

para toda $r \in \mathbb{Z}$.

Sea $k \in \mathbb{Z}$. Se define $\widehat{h}^k : (X^\bullet \otimes A^\bullet)^k \rightarrow (X^\bullet \otimes B^\bullet)^{k-1}$ como

$$[\widehat{h}^k]_{r,s} := \begin{cases} 1_{X^{k+r-1}} \otimes h^{-(r-1)}, & \text{si } s = r - 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $[\widehat{h}^k]_{r,s} : X^{k+s} \otimes_{\mathbb{R}} A^{-s} \rightarrow X^{(k-1)+r} \otimes_{\mathbb{R}} B^{-r}$.

Sean $k, r \in \mathbb{Z}$. De nuevo, el caso de interés es cuando $s = r$, pues cuando $s \neq r$ la identidad se satisface trivialmente. Luego, de (4.4) se deduce lo siguiente

$$\begin{aligned} [(X^\bullet \otimes f)^k]_{r,r} &= 1_{X^{k+r}} \otimes f^{-r} \\ &= 1_{X^{k+r}} \otimes (h^{-r+1} d_{A^\bullet}^{-r} + d_{B^\bullet}^{-r-1} h^{-r}) \\ &= ((1_{X^{k+r}} \otimes h^{-r+1})(1_{X^{k+r}} \otimes d_{X^\bullet}^{-r})) + ((1_{X^{k+r}} \otimes d_{B^\bullet}^{-r-1})(1_{X^{k+r}} \otimes h^{-r})) \\ &= ((1_{X^{k+r}} \otimes h^{-r+1})(-1)^{k+r}(1_{X^{k+r}} \otimes d_{X^\bullet}^{-r})) \\ &\quad + ((-1)^{k+r}(1_{X^{k+r}} \otimes d_{B^\bullet}^{-r-1})(1_{X^{k+r}} \otimes h^{-r})) \\ &= [\widehat{h}^{k+1}]_{r,r-1} [d_{X^\bullet \otimes A^\bullet}^k]_{r-1,r} + [d_{X^\bullet \otimes B^\bullet}^{k-1}]_{r,r+1} [\widehat{h}^k]_{r+1,r} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} [\widehat{h}^{k+1}]_{r,j} [d_{X^\bullet \otimes A^\bullet}^k]_{j,r} + \sum_{i \in \mathbb{Z}} [d_{X^\bullet \otimes B^\bullet}^{k-1}]_{r,i} [\widehat{h}^k]_{i,r} \\ &= [\widehat{h}^{k+1} d_{X^\bullet \otimes A^\bullet}^k]_{r,r} + [d_{X^\bullet \otimes B^\bullet}^{k-1} \widehat{h}^k]_{r,r} \\ &= [\widehat{h}^{k+1} d_{X^\bullet \otimes A^\bullet}^k + d_{X^\bullet \otimes B^\bullet}^{k-1} \widehat{h}^k]_{r,r}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $X^\bullet \otimes f \sim 0$. Luego, existe $X^\bullet \widehat{\otimes} - : \mathbf{K}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbb{R})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ch}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{K}(\mathbb{R}) \\ X^\bullet \otimes - \downarrow & & \downarrow X^\bullet \widehat{\otimes} - \\ \mathbf{Ch}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{K}(\mathbb{R}) \end{array}$$

□

Notación 9. Sea $X^\bullet \in \mathbf{Ch}(\mathbb{R})$. Por simplicidad se suele denotar a $X^\bullet \widehat{\otimes} -$ por $X^\bullet \otimes -$ cuando no exista lugar a confusión.

Proposición 52. Sea $Y^\bullet \in \mathbf{Ch}(\mathbb{R})$. Se definen las siguientes asignaciones

$$- \otimes Y^\bullet : \mathbf{Ch}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{Ch}(\mathbb{R}).$$

A nivel de objetos. Sea $A^\bullet \in \mathbf{Ch}(\mathbb{R})$. Se define $A^\bullet \otimes Y^\bullet$ como en la Proposición 49.

A nivel de morfismos. Sea $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ en $\mathbf{Ch}(\mathbb{R})$. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Debe suceder que

$$(f \otimes Y^\bullet)^n : (A^\bullet \otimes Y^\bullet)^n \rightarrow (B^\bullet \otimes Y^\bullet)^n.$$

En particular,

$$(f \otimes Y^\bullet)^n : \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (A^{n+k} \otimes_{\mathbb{R}} Y^{-k}) \rightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (B^{n+j} \otimes_{\mathbb{R}} Y^{-j}).$$

En términos matriciales. Se define

$$[(f \otimes Y^\bullet)^n]_{r,s} := \begin{cases} f^{n+r} \otimes 1_{Y^{-r}}, & \text{si } s = r \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $[(f \otimes Y^\bullet)^n]_{r,s} : A^{n+s} \otimes_{\mathbb{R}} Y^{-s} \rightarrow B^{n+r} \otimes_{\mathbb{R}} Y^{-r}$.

Se afirma que

$$- \otimes Y^\bullet : \text{Ch}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Ch}(\mathbb{R})$$

es funtor aditivo.

Demostración. Esta demostración es análoga a la de la Proposición 50. \square

Proposición 53. Sea $Y^\bullet \in \text{Ch}(\mathbb{R})$. El funtor aditivo $- \otimes Y^\bullet : \text{Ch}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Ch}(\mathbb{R})$ induce un único funtor aditivo $-\widehat{\otimes} Y^\bullet : \text{K}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{K}(\mathbb{R})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Ch}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi} & \text{K}(\mathbb{R}) \\ - \otimes Y^\bullet \downarrow & & \downarrow - \widehat{\otimes} Y^\bullet \\ \text{Ch}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi} & \text{K}(\mathbb{R}) \end{array}$$

Demostración. Esta demostración es análoga a la de la Proposición 51. \square

4.4. Complejos K-planos

En 1988, N. Spaltenstein introdujo en "Resolutions of Unbounded Complexes"[29] la definición de resolución K-plana. Esta noción permite la definición de funtores derivados en contextos más generales, donde no es necesario trabajar exclusivamente dentro del marco de las categorías derivadas acotadas. La demostración que aquí se presenta de la existencia de tales resoluciones es una adaptación utilizando la existencia de resoluciones proyectivas.

Definición 44. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathcal{A})$. Se dice que X^\bullet es acíclico si $H^n(X^\bullet) = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 45. Sea $K^\bullet \in \text{Ch}(\mathbb{R})$. Se dice que K^\bullet es K-plano si para cualquier $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathbb{R})$ acíclico se tiene que $X^\bullet \otimes K^\bullet$ es acíclico.

La siguiente proposición suele demostrarse utilizando herramientas como la teoría de sucesiones espectrales. Sin embargo, la demostración que aquí se presenta adopta un enfoque más artesanal.

Proposición 54. *Sea $P^\bullet \in \text{Ch}(\mathbf{R})$. Si P^k es un \mathbf{R} -módulo plano para toda $k \in \mathbb{Z}$, entonces P^\bullet es \mathbf{K} -plano.*

Demostración. Sea $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathbf{R})$ acíclico. Por la Proposición 49 para demostrar que $X^\bullet \otimes P^\bullet$ es acíclico basta ver que

$$\text{Nuc}(d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^n) \subseteq \text{Im}(d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n-1}).$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. El siguiente diagrama ilustra el complejo $X^\bullet \otimes P^\bullet$;

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^{(n-1)+k} \otimes_{\mathbf{R}} P^{-k}) \xrightarrow{d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n-1}} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^{n+k} \otimes_{\mathbf{R}} P^{-k}) \xrightarrow{d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^n} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^{(n+1)+k} \otimes_{\mathbf{R}} P^{-k}) \longrightarrow \cdots$$

Sean $n \in \mathbb{Z}$ y $z \in \text{Nuc}(d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^n)$. En particular

$$z \in \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^{n+k} \otimes_{\mathbf{R}} P^{-k}).$$

Por lo tanto $z(k) \in X^{n+k} \otimes_{\mathbf{R}} P^{-k}$ para toda $k \in \mathbb{Z}$ y $z(k) \neq 0$ para una cantidad finita de $k \in \mathbb{Z}$. Luego, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ con $\alpha \leq \beta$ tales que $z(k) \neq 0$ para toda $k \in [\alpha, \beta]$.

Puesto que $d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^n(z) = 0$ se deduce que

$$(d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n+k} \otimes 1_{P^{-k}})(z(k)) = (-1)^{n+k} (1_{X^{n+k+1}} \otimes d_{P^\bullet}^{-(k+1)})(z(k+1)). \quad (4.5)$$

En particular

$$\begin{aligned} (d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n+\beta} \otimes 1_{P^{-\beta}})(z(\beta)) &= (-1)^{n+\beta} (1_{X^{n+\beta+1}} \otimes d_{P^\bullet}^{-(\beta+1)})(z(\beta+1)) \\ &= (-1)^{n+\beta} (1_{X^{n+\beta+1}} \otimes d_{P^\bullet}^{-(\beta+1)})(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que

$$z(\beta) \in \text{Nuc}((d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n+\beta} \otimes 1_{P^{-\beta}}) = \text{Im}(d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n+\beta-1} \otimes 1_{P^{-\beta}}),$$

puesto que el complejo $X^\bullet \otimes P^{-\beta}$ es acíclico ya que por hipótesis $P^{-\beta}$ es un \mathbf{R} -módulo plano. Luego, existe $w(\beta) \in X^{n+\beta-1} \otimes_{\mathbf{R}} P^{-\beta}$ tal que

$$(d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n+\beta-1} \otimes 1_{P^{-\beta}})(w(\beta)) = z(\beta). \quad (4.6)$$

Por lo tanto

$$[d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n-1}]_{\beta, \beta}(w(\beta)) = z(\beta).$$

Por otra parte. De (4.5) y (4.6) se sigue que

$$\begin{aligned}
 (d_{X^\bullet}^{n+\beta-1} \otimes 1_{P^{-\beta+1}})((-1)^{n+\beta-1}(1_{X^{n+\beta-1}} \otimes d_{P^\bullet}^{-\beta})(w(\beta))) &= \\
 &= (-1)^{n+\beta-1}(1_{X^{n+\beta}} \otimes d_{P^\bullet}^{-\beta})(d_{X^\bullet}^{n+\beta-1} \otimes 1_{P^{-\beta}})(w(\beta)) \\
 &= (-1)^{n+\beta-1}(1_{X^{n+\beta}} \otimes d_{P^\bullet}^{-\beta})(z(\beta)) \\
 &= (d_{X^\bullet}^{n+\beta-1} \otimes 1_{P^{-\beta+1}})(z(\beta-1)).
 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
 (d_{X^\bullet}^{n+\beta-1} \otimes 1_{P^{-\beta+1}})(z(\beta-1) + (-1)^{n+\beta}(1_{X^{n+\beta-1}} \otimes d_{P^\bullet}^{-\beta})(w(\beta))) &= \\
 &= (d_{X^\bullet}^{n+\beta-1} \otimes 1_{P^{-\beta+1}})(z(\beta-1)) \\
 &\quad + (d_{X^\bullet}^{n+\beta-1} \otimes 1_{P^{-\beta+1}})((-1)^{n+\beta}(1_{X^{n+\beta-1}} \otimes d_{P^\bullet}^{-\beta})(w(\beta))) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Lo anterior implica que

$$z(\beta-1) + (-1)^{n+\beta}(1_{X^{n+\beta-1}} \otimes d_{P^\bullet}^{-\beta})(w(\beta)) \in \text{Nuc}(d_{X^\bullet}^{n+\beta-1} \otimes 1_{P^{-\beta+1}}) = \text{Im}(d_{X^\bullet}^{n+\beta-2} \otimes 1_{P^{-\beta+1}})$$

puesto que el complejo $X^\bullet \otimes P^{-\beta+1}$ es acíclico ya que por hipótesis $P^{-\beta+1}$ es un R-módulo plano. Luego, existe $w(\beta-1) \in X^{n+\beta-2} \otimes_R P^{-\beta+1}$ tal que

$$(d_{X^\bullet}^{n+\beta-2} \otimes 1_{P^{-\beta+1}})(w(\beta-1)) = z(\beta-1) + (-1)^{n+\beta}(1_{X^{n+\beta-1}} \otimes d_{P^\bullet}^{-\beta})(w(\beta)).$$

Por lo tanto

$$[d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n-1}]_{\beta-1, \beta-1}(w(\beta-1)) + [d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n-1}]_{\beta-1, \beta}(w(\beta)) = z(\beta-1).$$

Seguindo este proceso se puede encontrar $w(k) \in X^{(n-1)+k} \otimes_R P^{-k}$ tal que

$$(d_{X^\bullet}^{(n-1)+k} \otimes 1_{P^{-k}})(w(k)) = z(k) + (-1)^{n+k-1}(1_{X^{n+k}} \otimes d_{P^\bullet}^{-k-1})(w(k+1)),$$

para toda $k \in [\alpha, \beta]$. Es decir

$$[d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n-1}]_{k, k}(w(k)) + [d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n-1}]_{k, k+1}(w(k+1)) = z(k), \quad (4.7)$$

para toda $k \in [\alpha, \beta]$. Para finalizar, basta definir

$$w(k) := \begin{cases} w(k), & \text{si } k \in [\alpha, \beta] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Por construcción se tiene que $w \in \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^{(n-1)+k} \otimes_R P^{-k})$ y de (4.7) se concluye que $d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n-1}(w) = z$. Es decir, $z \in \text{Im}(d_{X^\bullet \otimes P^\bullet}^{n-1})$. Por lo tanto $X^\bullet \otimes P^\bullet$ es acíclico. En particular P^\bullet es K-plano. \square

Teorema 10. *Todo $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathbf{R})$ admite una resolución \mathbf{K} -plana.*

Demostración. Sean $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathbf{R})$ y $N = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\}$. Considere $\{r_n : \tau^{\leq n}(X^\bullet) \rightarrow \tau^{\leq n+1}(X^\bullet)\}_{n \in N}$ el sistema directo sobre N en $\text{Ch}(\mathbf{R})$ donde

$$(r_n)^k = \begin{cases} 1_{X^k} & \text{si } k \leq n-1 \\ i_{X^k} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

Por recursión se busca construir

$$\{s_n : P_n^\bullet \rightarrow P_{n+1}^\bullet\}_{n \in N}$$

un sistema directo sobre N en $\text{Ch}(\mathbf{R})$ talque P_n^\bullet es un complejo acotado superiormente de \mathbf{R} -módulos planos para toda $n \in N$. Simultáneamente, se establece la existencia de una familia de casi-isomorfismos

$$\{\varepsilon_n : P_n^\bullet \rightarrow \tau^{\leq n}(X^\bullet)\}_{n \in N}$$

con la propiedad de que $s_n \varepsilon_{n+1} = r_n \varepsilon_n$ para toda $n \in N$.

Paso base. Puesto que $\tau^{\leq 0}(X^\bullet)$ es un complejo acotado superiormente, por la Proposición 46 existe

$$P_0^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_0} \tau^{\leq 0}(X^\bullet)$$

un casi-isomorfismo tal que P_0^\bullet es un complejo acotado superiormente de \mathbf{R} -módulos proyectivos, en particular planos. Luego, basta considerar $P_{-1}^\bullet = 0$ y $\varepsilon_{-1} = 0$. De tal forma se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & P_0^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \varepsilon_0 \\ \tau^{\leq -1}(X^\bullet) & \xrightarrow{r_{-1}} & \tau^{\leq 0}(X^\bullet). \end{array}$$

Paso recursivo. Sea $n \geq 1$. Se supone que se ha construido la siguiente situación

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_{n-1}^\bullet & \xrightarrow{s_{n-1}} & P_n^\bullet & & \\ & & \varepsilon_{n-1} \downarrow & & \downarrow \varepsilon_n & & \\ \cdots & \longrightarrow & \tau^{\leq n-1}(X^\bullet) & \xrightarrow{r_{n-1}} & \tau^{\leq n}(X^\bullet) & \xrightarrow{r_n} & \tau^{\leq n+1}(X^\bullet) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Sean $Q^\bullet = P_n^\bullet$, $Y^\bullet = \tau^{\leq n+1}(X^\bullet)$ y $f = r_n \varepsilon_n : Q^\bullet \rightarrow Y^\bullet$.

En vista de que Q^\bullet y Y^\bullet son complejos acotados superiormente se concluye que $c(f)[-1]$ es también un complejo acotado superiormente. Por lo tanto, por la Proposición 46 existe

$$L^\bullet \xrightarrow{g} \mathbf{c}(f)[-1]$$

un casi-isomorfismo tal que L^\bullet es un complejo acotado superiormente de R-módulos proyectivos, en particular planos. Para ser precisos g es de la forma

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} : L^\bullet \rightarrow \mathbf{c}(f)[-1].$$

Además, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L^n & \xrightarrow{d_{L^\bullet}^n} & L_{n+1} \\ g^n \downarrow & & \downarrow g^{n+1} \\ Q^n \oplus Y^{n-1} & \xrightarrow{d_{\mathbf{c}(f)[-1]}^n} & Q^n \oplus Y^{n-1} \end{array}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto

$$d_{Q^\bullet}^n g_1^n = g_1^{n+1} d_{L^\bullet}^n, \quad (4.8)$$

$$(-1)(f^n g_1^n + d_{Y^\bullet}^{n-1} g_2^n) = g_2^{n+1} d_{L^\bullet}^n. \quad (4.9)$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. La ecuación (4.8) implica que $g_1 : L^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ es un morfismo en $\text{Ch}(\mathbf{R})$. Se define

$$h := (g_2[1] \quad f) : \mathbf{c}(-g_1) \rightarrow Y^\bullet.$$

La ecuación (4.9) implica que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} L^{n+1} \oplus Q^n & \xrightarrow{d_{\mathbf{c}(-g_1)}^n} & L^{n+2} \oplus Q^{n+1} \\ h^n \downarrow & & \downarrow h^{n+1} \\ Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \end{array}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $h : \mathbf{c}(-g_1) \rightarrow Y^\bullet$ es un morfismo en $\text{Ch}(\mathbf{R})$.

Observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(h) &= ((L^\bullet[1] \oplus Q^\bullet)[1]) \oplus Y^\bullet \\ &= (L^\bullet[2] \oplus Q^\bullet[1]) \oplus Y^\bullet \\ &= L^\bullet[2] \oplus (Q^\bullet[1] \oplus Y^\bullet) \\ &= (L^\bullet[1])[1] \oplus (Q^\bullet \oplus Y^\bullet[-1])[1] \\ &= (L^\bullet[1] \oplus (Q^\bullet \oplus Y^\bullet[-1]))[1] \\ &= \mathbf{c}(g)[1]. \end{aligned}$$

En vista de que g es un casi-isomorfismo se deduce que $\mathbf{c}(g)$ es un complejo acíclico. En particular, $\mathbf{c}(g)[1]$ también es un complejo acíclico. Ahora bien, como $\mathbf{c}(h) = \mathbf{c}(g)[1]$ se concluye que $\mathbf{c}(h)$ es un complejo acíclico y por lo tanto h es un casi-isomorfismo.

Para finalizar, considere $P_{n+1}^\bullet := c(-g_1)$, $f_{n+1} := h$ y $s_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Q^\bullet} \end{pmatrix}$. Es importante observar que $\mathbf{c}(-g_1)$ es un complejo acotado superiormente de R-módulos planos. Además,

$$hs_n = (g_2[1] \quad f) \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Q^\bullet} \end{pmatrix} = f = r_n \varepsilon_n.$$

Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} P_n^\bullet & \xrightarrow{s_n} & P_{n+1}^\bullet \\ \varepsilon_n \downarrow & & \downarrow \varepsilon_{n+1} \\ \tau^{\leq n}(X^\bullet) & \xrightarrow{r_n} & \tau^{\leq n+1}(X^\bullet). \end{array}$$

El paso recursivo está cubierto.

Sea $P^\bullet := \text{colim}(P_n^\bullet)$. Luego, se tiene la siguiente situación

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P^\bullet & & & \\ & \nearrow \varphi_n & & \nwarrow \varphi_{n+1} & & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_n^\bullet & \xrightarrow{s_n} & P_{n+1}^\bullet & \longrightarrow & \cdots \\ & \searrow \varepsilon_n & & & \searrow \varepsilon_{n+1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \tau^{\leq n}(X^\bullet) & \xrightarrow{r_n} & \tau^{\leq n+1}(X^\bullet) & \longrightarrow & \cdots \\ & \searrow \psi_n & & \nwarrow \psi_{n+1} & & & \\ & & & X^\bullet & & & \end{array}$$

Por otra parte, de la Proposición 43 se obtiene el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos en Ab

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H^n(P_k^\bullet) & \longrightarrow & \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H^n(P_k^\bullet) & \longrightarrow & H^n(P^\bullet) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow H^n(\varepsilon) \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H^n(\tau^{\leq k}(X^\bullet)) & \longrightarrow & \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H^n(\tau^{\leq k}(X^\bullet)) & \longrightarrow & H^n(X^\bullet) \longrightarrow 0 \end{array}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Se concluye del Lema del Cinco que $H^n(\varepsilon) : H^n(P^\bullet) \rightarrow H^n(X^\bullet)$ es un isomorfismo en Ab para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Para finalizar. Observe que $P^k = \text{colim}(P_n^k)$, por construcción P_n^k es un R-módulo plano para toda $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\text{colim}(P_n^k) = P^k$ es un R-módulo plano para toda $k \in \mathbb{Z}$. Se concluye de la Proposición 10 que P^\bullet es un complejo K-plano. \square

4.5. Producto tensorial derivado

Una vez definido el esencial concepto de complejo K -plano, esta sección se dedica a explorar algunas de las propiedades que estos complejos ofrecen para la definición de funtores entre categorías derivadas no acotadas.

Lema 15. Sea $K^\bullet \in \text{Ch}(\mathbf{R})$. El funtor $- \otimes K^\bullet : \text{Ch}(\mathbf{R}) \rightarrow \text{Ch}(\mathbf{R})$ preserva conos.

Demostración. Sea $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathbf{R})$. Luego,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}(f \otimes K^\bullet)^n &= [(X^\bullet \otimes K^\bullet)[1] \oplus (Y^\bullet \otimes K^\bullet)]^n \\
 &= (X^\bullet \otimes K^\bullet)^{n+1} \oplus (Y^\bullet \otimes K^\bullet)^n \\
 &= \left[\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^{(n+1)+k} \otimes_{\mathbf{R}} K^{-k}) \right] \oplus \left[\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (Y^{n+j} \otimes_{\mathbf{R}} K^{-j}) \right] \\
 &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} [(X^{(n+i)+1} \otimes_{\mathbf{R}} K^{-i}) \oplus (Y^{n+i} \otimes_{\mathbf{R}} K^{-i})] \\
 &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} ((X^\bullet[1] \oplus Y^\bullet)^{n+i} \otimes_{\mathbf{R}} K^{-i}) \\
 &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathbf{c}(f)^{n+i} \otimes_{\mathbf{R}} K^{-i}) \\
 &= (\mathbf{c}(f) \otimes K^\bullet)^n.
 \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. □

Proposición 55. Sea $K^\bullet \in \text{Ch}(\mathbf{R})$. Si K^\bullet es un complejo K -plano, entonces el funtor aditivo

$$- \otimes K^\bullet : \text{Ch}(\mathbf{R}) \rightarrow \text{Ch}(\mathbf{R})$$

preserva casi-isomorfismos.

Demostración. Sea $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathbf{R})$ un casi-isomorfismo. Por el Lema 15 se deduce que $\mathbf{c}(f \otimes K^\bullet) = \mathbf{c}(f) \otimes K^\bullet$. Puesto que $\mathbf{c}(f)$ es un complejo acíclico y K^\bullet es un complejo K -plano se concluye que $\mathbf{c}(f \otimes K^\bullet)$ es un complejo acíclico. □

Lema 16. Para cualesquiera $X^\bullet, Y^\bullet \in \text{Ch}(\mathbf{R})$ se satisface que $(X^\bullet \otimes Y^\bullet)[1] = X^\bullet[1] \otimes Y^\bullet$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Observe que

$$\begin{aligned}
((X^\bullet \otimes Y^\bullet)[1])^n &= (X^\bullet \otimes Y^\bullet)^{n+1} \\
&= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^{(n+1)+k}) \otimes_{\mathbb{R}} Y^{-k} \\
&= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^{(n++)+1}) \otimes_{\mathbb{R}} Y^{-k} \\
&= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} ((X^\bullet[1]) \otimes_{\mathbb{R}} Y^\bullet) \\
&= (X^\bullet[1] \otimes Y^\bullet)^n.
\end{aligned}$$

□

Proposición 56. Sea $K^\bullet \in \text{Ch}(\mathbb{R})$. El funtor aditivo

$$-\widehat{\otimes} K^\bullet : \mathbb{K}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathbb{R})$$

es triangulado.

Demostración. Sea

$$\eta : A^\bullet \xrightarrow{[f]} B^\bullet \xrightarrow{[g]} C^\bullet \xrightarrow{[h]} A^\bullet[1]$$

un triángulo distinguido en $\mathbb{K}(\mathbb{R})$. Por el Lema 16 basta demostrar que

$$A^\bullet \otimes K^\bullet \xrightarrow{[f] \widehat{\otimes} K^\bullet} B^\bullet \otimes K^\bullet \xrightarrow{[g] \widehat{\otimes} K^\bullet} C^\bullet \otimes K^\bullet \xrightarrow{[h] \widehat{\otimes} K^\bullet} A^\bullet[1] \otimes K^\bullet$$

un triángulo distinguido en $\mathbb{K}(\mathbb{R})$. Puesto que η es un triángulo distinguido, existe $s : Q^\bullet \rightarrow P^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathbb{R})$ tal que el siguiente diagrama conmuta en $\mathbb{K}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccccccc}
A^\bullet & \xrightarrow{[f]} & B^\bullet & \xrightarrow{[g]} & C^\bullet & \xrightarrow{[h]} & A^\bullet[1] \\
\cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
Q^\bullet & \xrightarrow{[s]} & P^\bullet & \xrightarrow{[i_s]} & c(s) & \xrightarrow{[p_s]} & Q^\bullet[1].
\end{array}$$

Basta aplicar el funtor aditivo $-\widehat{\otimes} K^\bullet : \mathbb{K}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathbb{R})$ al diagrama anterior para concluir el resultado. □

Corolario 10. Sea $K^\bullet \in \text{Ch}(\mathbb{R})$. Si K^\bullet es un complejo \mathbb{K} -plano, entonces el funtor triangulado $-\widehat{\otimes} K^\bullet : \mathbb{K}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathbb{R})$ induce un único funtor triangulado $-\widetilde{\otimes} K^\bullet : \mathbb{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{R})$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
K(R) & \xrightarrow{q} & D(R) \\
-\widehat{\otimes} K^\bullet \downarrow & & \downarrow -\widetilde{\otimes} K^\bullet \\
K(R) & \xrightarrow{q} & D(R).
\end{array}$$

Es usual denotar a $-\widetilde{\otimes} K^\bullet$ simplemente por $-\otimes K^\bullet$.

Demostración. La demostración se sigue de la Proposición 55, la Observación 6 y el Corolario 6. \square

Lema 17. Sea $K^\bullet \in \text{Ch}(R)$. El funtor $K^\bullet \otimes - : \text{Ch}(R) \rightarrow \text{Ch}(R)$ preserva conos.

Demostración. Esta demostración es análoga a la del Lema 15. \square

Proposición 57. Sea $K^\bullet \in \text{Ch}(R)$. Si K^\bullet es un complejo K -plano, entonces el funtor aditivo

$$K^\bullet \otimes - : \text{Ch}(R) \rightarrow \text{Ch}(R)$$

preserva casi-isomorfismos.

Demostración. Esta demostración es análoga a la de la Proposición 55. \square

Lema 18. Para cualesquiera $X^\bullet, Y^\bullet \in \text{Ch}(R)$ se satisface que $(X^\bullet \otimes Y^\bullet)[1] = X^\bullet \otimes Y^\bullet[1]$.

Demostración. Esta demostración es análoga a la del Lema 16. \square

Proposición 58. Sea $K^\bullet \in \text{Ch}(R)$. El funtor aditivo

$$K^\bullet \widehat{\otimes} - : K(R) \rightarrow K(R)$$

es triangulado.

Demostración. Esta demostración es análoga a la de la Proposición 56. \square

Corolario 11. Sea $K^\bullet \in \text{Ch}(R)$. Si K^\bullet es un complejo K -plano, entonces el funtor triangulado $K^\bullet \widehat{\otimes} - : K(R) \rightarrow K(R)$ induce un único funtor triangulado $K^\bullet \widetilde{\otimes} - : D(R) \rightarrow D(R)$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
K(R) & \xrightarrow{q} & D(R) \\
K^\bullet \widehat{\otimes} - \downarrow & & \downarrow K^\bullet \widetilde{\otimes} - \\
K(R) & \xrightarrow{q} & D(R).
\end{array}$$

Es usual denotar a $K^\bullet \widetilde{\otimes} -$ simplemente por $K^\bullet \otimes -$.

Demostración. Esta demostración es análoga a la del Corolario 10. \square

Lema 19. Sea $f : P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathbf{R})$ con P^\bullet y Q^\bullet complejos \mathbf{K} -planos. Si f es un casi-isomorfismo, entonces para todo $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathbf{R})$ se tiene que

$$X^\bullet \otimes f : X^\bullet \otimes P^\bullet \rightarrow X^\bullet \otimes Q^\bullet$$

es un casi-isomorfismo.

Demostración. Sea $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathbf{R})$. Por la Proposición 10 existe $\varepsilon : K_{X^\bullet} \rightarrow X^\bullet$ una resolución \mathbf{K} -plana de X^\bullet . Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K_{X^\bullet} \otimes P^\bullet & \xrightarrow{K_{X^\bullet} \otimes f} & K_{X^\bullet} \otimes Q^\bullet \\ \varepsilon \otimes P^\bullet \downarrow & & \downarrow \varepsilon \otimes Q^\bullet \\ X^\bullet \otimes P^\bullet & \xrightarrow{X^\bullet \otimes f} & X^\bullet \otimes Q^\bullet \end{array}$$

donde las flechas punteadas son casi-isomorfismos por los Lemas 55 y 57. De lo anterior se concluye que $X^\bullet \otimes f$ es un casi-isomorfismo. \square

4.6. Adjunción de cambio de anillos derivada

Es en esta sección donde el teorema de representabilidad-adjunción de Brown-Neeman exhibe su potencial. Se inicia la sección demostrando que la categoría derivada de un anillo es compactamente generada.

Lema 20. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana, $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathcal{A})$ y $A \in \mathcal{A}$. Entonces,

$$H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X^\bullet)) = \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(A^\circ[-n], X^\bullet)$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $f = \{f^k : (A^\circ[-n])^k \rightarrow X^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ una familia de morfismos en \mathcal{A} . El siguiente diagrama ilustra la situación

$$\begin{array}{ccccccc} A^\circ[-n] : \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} \\ X^\bullet : \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^n} & X^{n+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

En primer lugar observe que f es un morfismo en $\text{Ch}(\mathcal{A})$ si y sólo si $d_{X^\bullet}^n \cdot f^n = 0$. Lo anterior es equivalente a que $f \in \text{Nuc}(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, d_{X^\bullet}^n))$.

En segundo lugar observe que $f \sim 0$ si y sólo si existe $h^n : A \rightarrow X^{n-1}$ un morfismo en \mathcal{A} tal que $d_{X^\bullet}^{n-1} h^n = f^n$. Lo anterior es equivalente a que $f^n \in \text{Im}(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, d_{X^\bullet}^{n-1}))$.

Por las dos observaciones anteriores se concluye el resultado. \square

Corolario 12. Sea R un anillo. Para todo $X^\bullet \in \text{Ch}(R)$ se tiene que

$$H^n(X^\bullet) = \text{Hom}_{K(R)}(R^\circ[-n], X^\bullet)$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. El resultado se sigue del Lema 20 considerando $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ y $A = R$. \square

Proposición 59. Sea R un anillo. La categoría derivada $D(R)$ es compactamente generada.

Demostración. Sea $\Omega = \{R^\circ[-n] : n \in \mathbb{Z}\}$. Se deduce del Teorema 9 que $R^\circ[-n]$ es un objeto compacto en $D(R)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Sea $X^\bullet \in D(R)$ tal que $\text{Hom}_{D(R)}(\omega, X^\bullet) = 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Luego,

$$\begin{aligned} H^n(X^\bullet) &= \text{Hom}_{K(R)}(R^\circ[-n], X^\bullet) \\ &= \text{Hom}_{D(R)}(\omega, X^\bullet) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Es decir, X^\bullet es un complejo acíclico. Por lo tanto $X^\bullet = 0$ en $D(R)$. Se concluye que $D(R)$ es compactamente generada. \square

Proposición 60. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Se definen las siguientes asignaciones

$$-\otimes^{\mathbf{L}} \kappa : D(R) \rightarrow D(\kappa).$$

A nivel de objetos. Sea $X^\bullet \in D(R)$. Por el Teorema 10 existe $\varepsilon : K_{X^\bullet} \rightarrow X^\bullet$ una resolución K -plana de X^\bullet . Se define

$$X^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \kappa := K_{X^\bullet} \otimes \kappa^\circ.$$

A nivel de morfismos. Sea $\lambda : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $D(R)$. Por el Teorema 10 existen $\varepsilon_{X^\bullet} : K_{X^\bullet} \rightarrow X^\bullet$, $\varepsilon_{Y^\bullet} : K_{Y^\bullet} \rightarrow Y^\bullet$ y $\varepsilon_{\kappa^\circ} : K_{\kappa^\circ} \rightarrow \kappa^\circ$ resoluciones K -planas de X^\bullet , Y^\bullet y κ° respectivamente, donde $\varepsilon_{X^\bullet}, \varepsilon_{Y^\bullet}$ son morfismo en $\text{Ch}(R)$ y $\varepsilon_{\kappa^\circ}$ es un morfismo en $\text{Ch}(\kappa)$. Se busca definir

$$\lambda \otimes^{\mathbf{L}} \kappa : X^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \kappa \rightarrow Y^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \kappa.$$

En particular debe suceder que

$$\lambda \otimes^{\mathbf{L}} \kappa : K_{X^\bullet} \otimes \kappa^\circ \rightarrow K_{Y^\bullet} \otimes \kappa^\circ.$$

Considere el siguiente diagrama en $D(\kappa)$

$$\begin{array}{ccc}
X^\bullet \otimes K_{\kappa^\circ} & \xrightarrow{\lambda \tilde{\otimes} K_{\kappa^\circ}} & Y^\bullet \otimes K_{\kappa^\circ} \\
\uparrow q(\pi(\varepsilon_X^\bullet)) \tilde{\otimes} K_{\kappa^\circ} & & \uparrow q(\pi(\varepsilon_Y^\bullet)) \tilde{\otimes} K_{\kappa^\circ} \\
K_{X^\bullet} \otimes K_{\kappa^\circ} & & K_{Y^\bullet} \otimes K_{\kappa^\circ} \\
\downarrow K_{X^\bullet} \tilde{\otimes} q(\pi(\varepsilon_{K_{\kappa^\circ}})) & & \downarrow K_{Y^\bullet} \tilde{\otimes} q(\pi(\varepsilon_{K_{\kappa^\circ}})) \\
K_{X^\bullet} \otimes \kappa^\circ & & K_{Y^\bullet} \otimes \kappa^\circ
\end{array}$$

donde las flechas punteadas son isomorfismos en $D(R)$. Sean $\alpha = K_{X^\bullet} \tilde{\otimes} q(\pi(\varepsilon_{K_{\kappa^\circ}}))$, $\beta = q(\pi(\varepsilon_X^\bullet)) \tilde{\otimes} K_{\kappa^\circ}$, $\gamma = q(\pi(\varepsilon_Y^\bullet)) \tilde{\otimes} K_{\kappa^\circ}$ y $\delta = K_{Y^\bullet} \tilde{\otimes} q(\pi(\varepsilon_{K_{\kappa^\circ}}))$. Finalmente, se define

$$\lambda \otimes^{\mathbf{L}} \kappa := \delta \gamma^{-1} (\lambda \tilde{\otimes} K_{\kappa^\circ}) \beta \alpha^{-1}.$$

Se afirma que $-\otimes^{\mathbf{L}} \kappa : D(R) \rightarrow D(\kappa)$ es funtor triangulado.

Demostración. La demostración de sigue del Lema 19 y el Corolario 10. \square

Lema 21. Sea $\{M_j^\bullet\}_{j \in J}$ una colección de objetos en $D(R)$. Por el Teorema 10 existe

$$\varepsilon_j : K_j^\bullet \rightarrow M_j^\bullet$$

una resolución K -plana de M_j^\bullet para cada $j \in J$. Entonces,

$$\varepsilon : \bigoplus_{j \in J} K_j^\bullet \rightarrow \bigoplus_{j \in J} M_j^\bullet$$

es una resolución K -plana de $\bigoplus_{j \in J} M_j^\bullet$.

Demostración. En primer lugar. Note que

$$c(\varepsilon) = \bigoplus_{j \in J} c(\varepsilon_j). \quad (4.10)$$

Además, $c(\varepsilon_j)$ es un complejo acíclico para cada $j \in J$. Pues, $\varepsilon_j : K_j^\bullet \rightarrow M_j^\bullet$ es un casi-isomorfismo para cada $j \in J$. Dado que el coproducto de complejos acíclicos es acíclico, se concluye de 4.10 que $c(\varepsilon)$ es un complejo acíclico. Por lo tanto $\varepsilon : \bigoplus_{j \in J} K_j^\bullet \rightarrow \bigoplus_{j \in J} M_j^\bullet$ es un casi-isomorfismo.

En segundo lugar. Note que $(\bigoplus_{j \in J} K_j^\bullet)^n = \bigoplus_{j \in J} K_j^n$ es un R -módulo plano para toda $n \in \mathbb{Z}$. Pues, el coproducto de R -módulos planos es plano. \square

Proposición 61. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. El funtor triangulado

$$-\otimes^{\mathbf{L}} \kappa : D(R) \rightarrow D(\kappa)$$

preserva coproductos.

Demostración. Sea $\{M_j^\bullet\}_{j \in J}$ una colección de objetos en $D(R)$. Por el Teorema 10 existe $\varepsilon_j : K_j^\bullet \rightarrow M_j^\bullet$ una resolución K-plana de M_j^\bullet para cada $j \in J$. Se sigue del Lema 21 que

$$\varepsilon : \bigoplus_{j \in J} K_j^\bullet \rightarrow \bigoplus_{j \in J} M_j^\bullet$$

es una resolución K-plana de $\bigoplus_{j \in J} M_j^\bullet$. Luego,

$$\begin{aligned} ((\bigoplus_{j \in J} M_j^\bullet) \otimes^{\mathbf{L}} \kappa)^n &= ((\bigoplus_{j \in J} K_j^\bullet) \otimes \kappa^\circ)^n \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} ((\bigoplus_{j \in J} K_j^\bullet)^{n+k} \otimes_{\mathbf{R}} (\kappa^\circ)^{-k}) \\ &= (\bigoplus_{j \in J} K_j^\bullet)^n \otimes_{\mathbf{R}} (\kappa^\circ)^0 \\ &= (\bigoplus_{j \in J} K_j^n) \otimes_{\mathbf{R}} \kappa \\ &= \bigoplus_{j \in J} (K_j^n \otimes_{\mathbf{R}} \kappa) \\ &= \bigoplus_{j \in J} ((K_j^\bullet)^n \otimes_{\mathbf{R}} (\kappa^\circ)^0) \\ &= \bigoplus_{j \in J} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} ((K_j^\bullet)^{n+k} \otimes_{\mathbf{R}} (\kappa^\circ)^{-k}) \\ &= \bigoplus_{j \in J} (J_j^\bullet \otimes \kappa^\circ)^n \\ &= (\bigoplus_{j \in J} (M_j^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \kappa))^n \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Se concluye el resultado. \square

Corolario 13. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Se presenta la siguiente situación de adjunción

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{-\otimes^{\mathbf{L}} \kappa} & \\ D(R) & \perp & D(\kappa) \\ & \xleftarrow{\Gamma} & \end{array}$$

Demostración. La demostración se sigue de la Proposición 61 y el Teorema 7. \square

Lema 22. Sean $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local y $\Omega = \{R^\circ[-n] : n \in \mathbb{Z}\}$. Para todo $\omega \in \Omega$ se tiene que $\omega \otimes^{\mathbf{L}} \kappa \in D(\kappa)^{\mathbf{C}}$.

Demostración. Sea $\omega \in \Omega$. Luego, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\omega = R^\circ[-n]$. Cabe señalar que ω es un complejo K-plano por la Proposición 10. Entonces,

$$\begin{aligned} (\omega \otimes^{\mathbf{L}} \kappa)^m &= (\omega \otimes \kappa^\circ)^m \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (\omega^{m+k} \otimes_R (\kappa^\circ)^{-k}) \\ &= R^\circ[-n]^m \otimes_R \kappa \\ &= (R^\circ)^{-n+m} \otimes_R \kappa \end{aligned}$$

para toda $m \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente

$$(\omega \otimes^{\mathbf{L}} \kappa)^m = \begin{cases} R \otimes_R \kappa = \kappa & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

Por lo tanto $\omega \otimes^{\mathbf{L}} \kappa = \kappa^\circ[-n] \in D(\kappa)^C$. \square

Corolario 14. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Se presenta la siguiente situación de adjunción

$$D(\kappa) \begin{array}{c} \xrightarrow{\Gamma} \\ \perp \\ \xleftarrow{\Theta} \end{array} D(R) .$$

Demostración. La demostración de sigue del Lema 22 y el Teorema 8. \square

4.7. Dualidad de Matlis derivada

En esta sección culminan los esfuerzos realizados. Para obtener la autodualidad de interés, será necesario primero establecer una autodualidad más conocida y manipulable, para después conectarla a la autodualidad buscada por medio de una transformación natural y un diagrama conmutativo, dicha situación se conoce como funtor que preserva dualidad en [3].

Observación 10. En esta última sección se supone que R es un anillo noetheriano.

Lema 23. Sean $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funtores aditivos entre categorías abelianas y $\eta : F \rightarrow G$ una transformación natural. Por la Proposición 25 los funtores F, G inducen funtores entre las correspondientes categorías de complejos de cadena

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{A}) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_{\mathrm{Ch}}} \\ \xrightarrow{G_{\mathrm{Ch}}} \end{array} \mathrm{Ch}(\mathcal{B}) .$$

Entonces, la transformación natural η induce una transformación natural

$$F_{\text{Ch}} \xrightarrow{\eta_{\text{Ch}}} G_{\text{Ch}}$$

la cual se define como

$$\eta_{\text{Ch}}(X^\bullet)^k := \eta(X^k)$$

para todo $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathcal{A})$ y para toda $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $X^\bullet \in \text{Ch}(\mathcal{A})$. Se inicia verificando que $\eta_{\text{Ch}}(X^\bullet)$ es un morfismo de complejos de cadena. Puesto que $\eta : F \rightarrow G$ es una transformación natural se deduce que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(X^k) & \xrightarrow{F(d_{X^\bullet}^k)} & F(X^{k+1}) \\ \eta(X^k) \downarrow & & \downarrow \eta(X^{k+1}) \\ G(X^k) & \xrightarrow{G(d_{X^\bullet}^k)} & G(X^{k+1}) \end{array}$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$.

Resta verificar que $\eta_{\text{Ch}} : F_{\text{Ch}} \rightarrow G_{\text{Ch}}$ es natural. Sea $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $\text{Ch}(\mathcal{A})$. Se busca demostrar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F_{\text{Ch}}(X^\bullet) & \xrightarrow{F_{\text{Ch}}(f)} & F_{\text{Ch}}(Y^\bullet) \\ \eta_{\text{Ch}}(X^\bullet) \downarrow & & \downarrow \eta_{\text{Ch}}(Y^\bullet) \\ G_{\text{Ch}}(X^\bullet) & \xrightarrow{G_{\text{Ch}}(f)} & G_{\text{Ch}}(Y^\bullet). \end{array}$$

Sea $k \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\begin{aligned} (G_{\text{Ch}}(f)\eta_{\text{Ch}}(X^\bullet))^k &= G_{\text{Ch}}(f)^k \eta_{\text{Ch}}(X^\bullet)^k \\ &= G(f^k) \eta(X^k) \\ &= \eta(Y^k) F(f^k) \\ &= \eta_{\text{Ch}}(Y^\bullet)^k F_{\text{Ch}}(f)^k \\ &= (\eta_{\text{Ch}}(Y^\bullet) F_{\text{Ch}}(f))^k. \end{aligned}$$

Se concluye el resultado. □

Lema 24. Sean $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funtores aditivos entre categorías abelianas y $\eta : F \rightarrow G$ una transformación natural. Por el Lema 23 dicha transformación natural se extiende a

$$F_{\text{Ch}} \xrightarrow{\eta_{\text{Ch}}} G_{\text{Ch}}$$

una transformación natural entre los funtores inducidos por F y G .

Si F y G son funtores exactos, entonces

$$F_D \xrightarrow{\eta_D} G_D$$

es una transformación natural donde $\eta_D(X^\bullet) := q(\pi(\eta_{Ch}(X^\bullet)))$ para $X^\bullet \in D(\mathcal{A})$.

Demostración. Considere el diagrama conmutativo inducido por la exactitud de los funtores $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y las Proposiciones 25, 26 y el Corolario 6

$$\begin{array}{ccccc} Ch(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi} & K(\mathcal{A}) & \xrightarrow{q} & D(\mathcal{A}) \\ F_{Ch} \downarrow \downarrow G_{Ch} & & F_K \downarrow \downarrow G_K & & F_D \downarrow \downarrow G_D \\ Ch(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\pi} & K(\mathcal{B}) & \xrightarrow{q} & D(\mathcal{A}). \end{array}$$

Sea $X^\bullet \in D(\mathcal{A})$. Por definición es claro que $\eta_D(X^\bullet) : F_D(X^\bullet) \rightarrow G_D(X^\bullet)$ es un morfismo en $D(\mathcal{B})$. Resta verificar la naturalidad.

Sea $\lambda : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $D(\mathcal{A})$. Luego, $\lambda = [[\sigma], [f]]$ donde

$$\begin{array}{ccc} & Z^\bullet & \\ [\sigma] \swarrow & & \searrow [f] \\ X^\bullet & & Y^\bullet \end{array}$$

es un $\text{Qis}(\mathcal{A})$ -tejado a derecha en $K(\mathcal{A})$ de X^\bullet en Y^\bullet . Ahora, por la naturalidad de $\eta_{Ch} : F_{Ch} \rightarrow G_{Ch}$ se deduce que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F_K(Z^\bullet) & \xrightarrow{F_K(\pi(f))} & F_K(Y^\bullet) \\ \pi(\eta_{Ch}(Z^\bullet)) \downarrow & & \downarrow \pi(\eta_{Ch}(Y^\bullet)) \\ G_K(Z^\bullet) & \xrightarrow{G_K(\pi(f))} & G_K(Y^\bullet). \end{array}$$

Además, por la naturalidad de $\eta_{Ch} : F_{Ch} \rightarrow G_{Ch}$ se deduce que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F_K(Z^\bullet) & \xrightarrow{F_K(\pi(\sigma))} & F_K(X^\bullet) \\ \pi(\eta_{Ch}(Z^\bullet)) \downarrow & & \downarrow \pi(\eta_{Ch}(X^\bullet)) \\ G_K(Z^\bullet) & \xrightarrow{G_K(\pi(\sigma))} & G_K(X^\bullet). \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\eta_D(Y^\bullet)F_D(\lambda) &= q(\pi(\eta_{Ch}(Y^\bullet))) [qF_K(\pi(f))qF_K(\pi(\sigma))^{-1}] \\
&= [q(\pi(\eta_{Ch}(Y^\bullet)))qF_K(\pi(f))]qF_K(\pi(\sigma))^{-1} \\
&= [qG_K(\pi(f))q(\pi(\eta_{Ch}(Z^\bullet)))]qF_K(\pi(\sigma))^{-1} \\
&= qG_K(\pi(f)) [q(\pi(\eta_{Ch}(Z^\bullet)))qF_K(\pi(\sigma))^{-1}] \\
&= qG_K(\pi(f)) [qG_K(\pi(\sigma)^{-1})q(\pi(\eta_{Ch}(X^\bullet)))] \\
&= [qG_K(\pi(f))qG_K(\pi(\sigma)^{-1})]q(\pi(\eta_{Ch}(X^\bullet))) \\
&= G_D(\lambda)\eta_D(X^\bullet).
\end{aligned}$$

Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
F_D(X^\bullet) & \xrightarrow{F_D(\lambda)} & F_D(Y^\bullet) \\
\eta_D(X^\bullet) \downarrow & & \downarrow \eta_D(Y^\bullet) \\
G_D(X^\bullet) & \xrightarrow{G_D(\lambda)} & G_D(Y^\bullet).
\end{array}$$

Se concluye que $\eta_D : F_D \rightarrow G_D$ es una transformación natural. \square

Notación 10. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Por el Corolario 6 el funtor exacto $\text{Hom}_\kappa(-, \kappa) : \kappa\text{-Vect}^{\text{op}} \rightarrow \kappa\text{-Vect}$ induce un funtor contravariante triangulado entre categorías derivadas el cual se denota por

$$D(\kappa) \xrightarrow{D_\kappa} D(\kappa) .$$

Corolario 15. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. La transformación natural

$$1_{\kappa\text{-Vect}} \xrightarrow{\kappa^\mu} \text{Hom}_\kappa(\text{Hom}_\kappa(-, \kappa), \kappa)$$

induce una transformación natural

$$1_{D(\kappa)} \xrightarrow{\xi_\kappa} D_\kappa^2$$

a nivel de categorías derivadas.

Demostración. La demostración se sigue de los Lemas 23 y 24. \square

Proposición 62. Sean $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local y $V^\bullet \in D(\kappa)$. Si $V^\bullet \in D(\kappa)^C$, entonces $D_\kappa(V^\bullet) \in D(\kappa)^C$.

Demostración. Se supone que $V^\bullet \in D(\kappa)^C$. Por la caracterización de objetos compactos V^\bullet es casi-isomorfo a P^\bullet un complejo acotado de κ -espacios vectoriales proyectivos finitamente generados. Es decir, P^\bullet es un complejo acotado de κ -espacios vectoriales de dimensión finita. Sin pérdida de generalidad se supone que de hecho $P^\bullet = V^\bullet$. Luego,

$$\begin{aligned} \dim_\kappa(D_\kappa(V^\bullet)^n) &= \dim_\kappa(\text{Hom}_\kappa(V^\bullet, \kappa)^n) \\ &= \dim_\kappa(\text{Hom}_\kappa(X^n, \kappa)) \\ &= \dim_\kappa(X^n) < \infty \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Por otra parte. Es claro que $D_\kappa(V^\bullet)$ es acotado. Se concluye por la caracterización de objetos compactos que $D_\kappa(V^\bullet) \in D(\kappa)^C$. \square

Proposición 63. *Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. El funtor contravariante triangulado $D_\kappa : D(\kappa) \rightarrow D(\kappa)$ induce una autodualidad en la subcategoría triangulada $D(\kappa)^C$.*

Demostración. Considere la transformación natural descrita en el Corolario 15

$$1_{D(\kappa)} \xrightarrow{\xi_\kappa} D_\kappa^2.$$

Sea $V^\bullet \in D(\kappa)^C$. Basta demostrar que $\xi_\kappa(V^\bullet)$ es un isomorfismo en $D(\kappa)$. Puesto que V^\bullet es un complejo perfecto, se deduce que V^n es un κ -espacio vectorial de dimensión finita para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto ${}_\kappa\mu(V^n)$ es un isomorfismo de κ -espacios vectoriales para toda $n \in \mathbb{N}$. Puesto que los funtores $\pi : \text{Ch}(\kappa) \rightarrow K(\kappa)$ y $q : K(\kappa) \rightarrow D(\kappa)$ preservan isomorfismos se concluye el resultado. \square

Notación 11. *Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Se denota por $(-)_* : \kappa\text{-Vect} \rightarrow R\text{-Mod}$ al funtor restricción de escalares inducido por el morfismo de R -módulos $R \rightarrow \kappa$.*

Lema 25. *Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Para todo $f \in \text{Hom}_R(\kappa_*, E_R(\kappa))$ tal que $f \neq 0$ se tiene que $\text{Im}(f) = \kappa_*$.*

Demostración. Sea $f : \kappa \rightarrow E_R(\kappa)$ tal que $f \neq 0$. Se sigue que f es un monomorfismo de R -módulos, así $\kappa \cong \text{Im}(f)$. Además, $\text{Im}(f) \neq 0$, entonces $\kappa \cap \text{Im}(f) \neq 0$, más aun $\kappa \cap \text{Im}(f) = \kappa$. Por lo tanto $\text{Im}(f) = \kappa$. \square

Proposición 64. *Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Para todo κ -espacio vectorial V existe*

$$\text{Hom}_\kappa(V, \kappa)_* \xrightarrow{\eta(V)} \text{Hom}_R(V_*, E_R(\kappa))$$

un isomorfismo de R -módulos. Más aun, la asignación anterior induce un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_\kappa(-, \kappa)_* \xrightarrow{\eta} \text{Hom}_R((-)_*, E_R(\kappa))$$

Demostración. Sea V un κ -espacio vectorial y considere β una base de V . Observe que $V_* = (\kappa^{(\beta)})_* = \kappa_*^{(\beta)}$. Por lo tanto

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_*, E_{\mathbf{R}}(\kappa)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\kappa_*^{(\beta)}, E_{\mathbf{R}}(\kappa)) = \prod_{v \in \beta} \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\kappa_*, E_{\mathbf{R}}(\kappa)).$$

Luego, se sigue del Lema 25 que si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_*, E_{\mathbf{R}}(\kappa))$ es tal que $f \neq 0$, entonces $\mathrm{Im}(f) = \kappa_*$. Así, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V_* & \xrightarrow{f} & E_{\mathbf{R}}(\kappa) \\ & \searrow \hat{f} & \nearrow i_E \\ & \mathrm{Im}(f) = \kappa_* & \end{array}$$

donde $i_E : \kappa_* \hookrightarrow E_{\mathbf{R}}(\kappa)$ denota la inclusión canónica de κ_* en su cápsula inyectiva. Dicho lo anterior, se define

$$\mathrm{Hom}_{\kappa}(V, \kappa)_* \xrightarrow{\eta(V)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_*, E_{\mathbf{R}}(\kappa))$$

como

$$\eta(V)(f_*) := i_E f_*.$$

para todo $f_* \in \mathrm{Hom}_{\kappa}(V, \kappa)_*$. Por otra parte, se define

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_*, E_{\mathbf{R}}(\kappa)) \xrightarrow{\mu(V)} \mathrm{Hom}_{\kappa}(V, \kappa)_*$$

como

$$\mu(V)(f) := \hat{f} = f \upharpoonright \mathrm{Im}(f).$$

para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_*, E_{\mathbf{R}}(\kappa))$. Es claro que $\eta(V)\mu(V) = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_*, E_{\mathbf{R}}(\kappa))}$ y $\mu(V)\eta(V) = 1_{\mathrm{Hom}_{\kappa}(V, \kappa)_*}$. Por lo tanto $\eta(V)$ es un isomorfismo de \mathbf{R} -módulos.

Resta verificar que la asignación es natural. Sea $\alpha : V \rightarrow W$ una transformación lineal entre κ -espacios vectoriales. Se busca demostrar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\kappa}(V, \kappa)_* & \xrightarrow{(\alpha, \kappa)_*} & \mathrm{Hom}_{\kappa}(W, \kappa)_* \\ \eta(V) \downarrow & & \downarrow \eta(W) \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_*, E_{\mathbf{R}}(\kappa)) & \xrightarrow{(\alpha_*, E_{\mathbf{R}}(\kappa))} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(W_*, E_{\mathbf{R}}(\kappa)). \end{array}$$

Sea $f_* \in \text{Hom}_\kappa(V, \kappa)_*$. Observe que

$$\begin{aligned}
 \eta(W)(\alpha, \kappa)_*(f_*) &= \eta(W)(f_*\alpha_*) \\
 &= \eta(W)((f\alpha)_*) \\
 &= i_E(f\alpha)_* \\
 &= (i_E f_*)\alpha_* \\
 &= (i_E f_*)\alpha_* \\
 &= (\alpha_*, E_R(\kappa))(i_E f_*) \\
 &= (\alpha_*, E_R(\kappa))\eta(V)(f_*).
 \end{aligned}$$

Se concluye el resultado. \square

Notación 12. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Por el Corolario 6 el funtor exacto $\text{Hom}_R(-, E_R(\kappa)) : R\text{-Mod}^{\text{op}} \rightarrow R\text{-Mod}$ induce un funtor contravariante triangulado entre categorías derivadas el cual se denota por

$$D(R) \xrightarrow{D_E} D(R) .$$

Corolario 16. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. La transformación natural

$$1_{R\text{-Mod}} \xrightarrow{R^\mu} \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(-, E_R(\kappa)), E_R(\kappa))$$

induce una transformación natural

$$1_{D(R)} \xrightarrow{\xi_R} D_E^2$$

a nivel de categorías derivadas.

Demostración. La demostración se sigue de los Lemas 23 y 24. \square

Corolario 17. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. La transformación natural descrita en 64

$$\text{Hom}_\kappa(-, \kappa)_* \xrightarrow{\eta} \text{Hom}_R((-)_*, E_R(\kappa))$$

induce un isomorfismo natural

$$\Gamma(D_\kappa) \xrightarrow{\zeta} D_E(\Gamma)$$

a nivel de categorías derivadas donde $\Gamma : D(\kappa) \rightarrow D(R)$ es el funtor triangulado descrito en la situación de adjunción 13.

Demostración. El resultado se sigue de los Lemas 23, 24 y la Proposición 64 después de considerar la siguiente composición de funtores exactos

$$\begin{array}{ccc}
\kappa\text{-Vect} & \xrightarrow{\quad F \quad} & \text{R-Mod} \\
\text{Hom}_{\kappa}(-, \kappa) \searrow & & \nearrow (-)_* \\
& \kappa\text{-Vect} & \\
\kappa\text{-Vect} & \xrightarrow{\quad G \quad} & \text{R-Mod} \\
(-)_* \searrow & & \nearrow \text{Hom}_{\text{R}}(-, E_{\text{R}}(\kappa)) \\
& \text{R-Mod} &
\end{array}$$

□

Lema 26. Sean $(\text{R}, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local y $E = E_{\text{R}}(\kappa)$. Para todo κ -espacio vectorial V se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
V_* & \xrightarrow{\quad \kappa\mu(V)_* \quad} & \text{Hom}_{\kappa}(\text{Hom}_{\kappa}(V, \kappa), \kappa)_* \\
\text{\scriptsize R}\mu(V_*) \downarrow & & \downarrow \eta(\text{Hom}_{\kappa}(V, \kappa)) \\
\text{Hom}_{\text{R}}(\text{Hom}_{\text{R}}(V_*, E), E) & \xrightarrow{\quad \text{Hom}_{\text{R}}(\eta(V), E) \quad} & \text{Hom}_{\text{R}}(\text{Hom}_{\kappa}(V, \kappa)_*, E)
\end{array}$$

Demostración. Sean V un κ -espacio vectorial y $v \in V_*$. Para demostrar la conmutatividad del diagrama de interés, es suficiente con demostrar la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_{\kappa}(V, \kappa)_* & \xrightarrow{\quad \kappa\mu(V)_*(v) \quad} & \kappa_* \\
\eta(V) \downarrow & & \downarrow i_E \\
\text{Hom}_{\text{R}}(V_*, E) & \xrightarrow{\quad \text{\scriptsize R}\mu(V_*)(v) \quad} & E.
\end{array}$$

Sea $f_* \in \text{Hom}_{\kappa}(V, \kappa)_*$. Observe que

$$\begin{aligned}
[\text{\scriptsize R}\mu(V_*)(v)]\eta(V)(f_*) &= [\text{\scriptsize R}\mu(V_*)(v)](i_E f_*) \\
&= (i_E f_*)(v) \\
&= f_*(v) \\
&= [\kappa\mu(V)_*(v)](f_*) \\
&= i_E[\kappa\mu(V)_*(v)](f_*).
\end{aligned}$$

Lo anterior permite concluir el resultado. □

Corolario 18. Sea $(\text{R}, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma & \xrightarrow{\Gamma(\xi_\kappa)} & \Gamma(D_\kappa^2) \\
\xi_R(\Gamma) \downarrow & & \downarrow \zeta(D_\kappa) \\
D_E^2(\Gamma) & \xrightarrow{D_E(\zeta)} & D_E(\Gamma(D_\kappa))
\end{array}$$

Demostración. La demostración se sigue de los Lemas 24 y 26. \square

Definición 46. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Se dice que $X^\bullet \in D(R)$ es un complejo Matlis reflexivo si $\xi_R(X^\bullet) : X^\bullet \rightarrow D_E^2(X^\bullet)$ es un isomorfismo en $D(R)$.

Notación 13. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Se denota por $D_{\text{ref}}(R) \subseteq D(R)$ a la subcategoría plena de complejos Matlis reflexivos.

Proposición 65. Sea $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. $D_{\text{ref}}(R)$ es una subcategoría triangulada de $D(R)$.

Demostración. Por la Proposición 11 basta demostrar que $D_{\text{ref}}(R)$ es cerrada por conos y traslaciones. En claro que la clase es cerrada por traslaciones, se verifica la condición restante.

Sea

$$X^\bullet \xrightarrow{\alpha} Y^\bullet \xrightarrow{\beta} Z^\bullet \xrightarrow{\gamma} X^\bullet[1]$$

un triángulo en $D(R)$ tal que $X^\bullet, Y^\bullet \in D_{\text{ref}}(R)$. Puesto que $D_E : D(R) \rightarrow D(R)$ es un funtor triangulado se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
X^\bullet & \xrightarrow{\alpha} & Y^\bullet & \xrightarrow{\beta} & Z^\bullet & \xrightarrow{\gamma} & X^\bullet[1] \\
\xi_{X^\bullet} \downarrow \cong & & \xi_{Y^\bullet} \downarrow \cong & & \xi_{Z^\bullet} \downarrow & & \xi_{X^\bullet[1]} \downarrow \cong \\
D_E^2(X^\bullet) & \xrightarrow{D_E^2(\alpha)} & D_E^2(Y^\bullet) & \xrightarrow{D_E^2(\beta)} & D_E^2(Z^\bullet) & \xrightarrow{D_E^2(\gamma)} & D_E^2(X^\bullet)[1].
\end{array}$$

Se concluye de la Proposición 8 que $Z^\bullet \in D_{\text{ref}}(R)$. \square

Notación 14. Considere el funtor triangulado $\Gamma : D(\kappa) \rightarrow D(R)$ descrito en la situación de adjunción 13. Se denota por $\mathcal{G} = \Gamma(D(\kappa)^C)$.

Proposición 66. Sean $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local y $X^\bullet \in D(R)$. Si $X^\bullet \in \mathcal{G}$, entonces X^\bullet es Matlis reflexivo. Es decir $\mathcal{G} \subseteq D_{\text{ref}}(R)$.

Demostración. Sea $X^\bullet \in \mathcal{G}$. Luego, existe $Y^\bullet \in D(\kappa)^C$ tal que $X^\bullet = \Gamma(Y^\bullet)$. Se busca demostrar que $\xi_R(X^\bullet) : X^\bullet \rightarrow D_E^2(X^\bullet)$ es un isomorfismo en $D(R)$. Por el Corolario 18 se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(Y^\bullet) & \xrightarrow{\Gamma(\xi_\kappa(Y^\bullet))} & \Gamma(D_\kappa^2(Y^\bullet)) \\
\xi_R(\Gamma(Y^\bullet)) \downarrow & & \downarrow \zeta(D_\kappa(Y^\bullet)) \\
D_E^2(\Gamma(Y^\bullet)) & \xrightarrow{D_E(\zeta(Y^\bullet))} & D_E(\Gamma(D_\kappa(Y^\bullet))).
\end{array}$$

Del Corolario 17 se deduce que las flechas vertical derecha y horizontal inferior son isomorfismos en $D(R)$. Por otra parte, como Y^\bullet es un complejo perfecto se concluye de la Proposición 63 que $\xi_\kappa(Y^\bullet) : Y^\bullet \rightarrow D_\kappa^2(Y^\bullet)$ es un isomorfismo en $D(\kappa)$. Por lo tanto la flecha horizontal superior del diagrama anterior es un isomorfismo en $D(R)$. Se concluye que $\xi_R(\Gamma(Y^\bullet)) : \Gamma(Y^\bullet) \rightarrow D_E^2(\Gamma(Y^\bullet))$ es un isomorfismo en $D(R)$. Por lo tanto $X^\bullet \in D_{\text{ref}}(R)$. \square

Definición 47. Se define

$$\mathcal{A} := \{M^\bullet \in \text{Ch}(R) : M^\bullet \text{ es acotado y } \ell_R(M^k) < \infty \text{ para toda } k \in \mathbb{N}\}$$

así como

$$\mathcal{A}_n := \{M^\bullet \in \text{Ch}(R) : M^\bullet \text{ es acotado y } \ell_R(M^k) \leq n \text{ para toda } k \in \mathbb{N}\}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Observación 11. Sea $M^\bullet \in \mathcal{A}$. Puesto que M^\bullet es acotado existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\ell_R(M^k) \leq \ell_R(M^{k_0})$ para toda $k \in \mathbb{Z}$, entonces $M^\bullet \in \mathcal{A}_{k_0}$. Por lo tanto $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.

Proposición 67. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para todo $M^\bullet \in \mathcal{A}_n$ existen $L^\bullet \in \mathcal{A}_{n-1}$, $N^\bullet \in \mathcal{A}_1$ y

$$0 \longrightarrow L^\bullet \xrightarrow{f} M^\bullet \xrightarrow{g} N^\bullet \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $\text{Ch}(R)$.

Demostración. Puesto que M^\bullet es acotado existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $M^k = 0$ para toda $k > \alpha$. Por hipótesis $M^\bullet \in \mathcal{A}_n$, entonces $\ell_R(M^\alpha) = m_\alpha \leq n$. Además, existe

$$0 = M_0^\alpha \subseteq M_1^\alpha \subseteq \cdots \subseteq M_{m_\alpha}^\alpha = M^\alpha$$

una serie de composición de longitud máxima. En particular existe $L_\alpha \subseteq M_\alpha$ tal que $\ell_R(L_\alpha) = l_\alpha = m_\alpha - 1 \leq n - 1$. Luego, considere el siguiente diagrama de que se obtiene de tomar el pull back

$$\begin{array}{ccc} L^{\alpha-1} & \xrightarrow{d^{\alpha-1}} & L^\alpha \\ j^{\alpha-1} \downarrow & \lrcorner & \downarrow j^\alpha \\ M^{\alpha-1} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{\alpha-1}} & M^\alpha \end{array}$$

donde $j^\alpha : L^\alpha \rightarrow M^\alpha$ denota el morfismo de inclusión canónica. El diagrama anterior induce

$$0 \longrightarrow L^{\alpha-1} \xrightarrow{q} M^{\alpha-1} \oplus L^\alpha \xrightarrow{p} M^\alpha \longrightarrow 0$$

donde $q = \begin{pmatrix} j^{\alpha-1} \\ d^{\alpha-1} \end{pmatrix}$ y $p = \begin{pmatrix} d_{M^\bullet}^{\alpha-1} & -j^\alpha \end{pmatrix}$. De lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbf{R}}(L^{\alpha-1}) &= \ell_{\mathbf{R}}(M^{\alpha-1} \oplus L^\alpha) - \ell_{\mathbf{R}}(M^\alpha) \\ &= (m_{\alpha-1} + l_\alpha) - m_\alpha \\ &= (m_{\alpha-1} + (m_\alpha - 1)) - m_\alpha \\ &= m_{\alpha-1} - 1 \\ &\leq n - 1. \end{aligned}$$

Siguiendo este proceso se construye L^\bullet un complejo de cocadena de \mathbf{R} -módulos tal que $L^\bullet \in \mathcal{A}_{n-1}$ y un morfismo de complejos $j : L^\bullet \rightarrow M^\bullet$ como en el diagrama siguiente

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \dashrightarrow & L^\beta & \xrightarrow{d^\beta} & L^{\beta+1} & \dashrightarrow & \cdots & \dashrightarrow & L^{\alpha-1} & \xrightarrow{d^{\alpha-1}} & L^\alpha & \dashrightarrow & 0 & \dashrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & j^\beta \downarrow & \lrcorner & j^{\beta+1} \downarrow & & & & j^{\alpha-1} \downarrow & \lrcorner & j^{\alpha-1} \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M^\beta & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^\beta} & M^{\beta+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & M^{\alpha-1} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{\alpha-1}} & M^\alpha & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Por último, se define $N^k := \text{Conuc}(j^k)$ para toda $k \in \mathbb{Z}$. Observe que

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbf{R}}(N^k) &= \ell_{\mathbf{R}}(M^k) - \ell_{\mathbf{R}}(L^k) \\ &= m_k - l_k \\ &= m_k - (m_k - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

para toda $k \in [\beta, \alpha]$. De esta forma se concluye que $N^\bullet \in \mathcal{A}_1$. La existencia de la sucesión exacta se sigue de la construcción puntual. \square

Observación 12. Sean $(\mathbf{R}, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local y $M^\bullet \in \mathcal{A}_1$. Luego, M^n es un \mathbf{R} -módulo simple para toda $n \in [\alpha, \beta]$. Puesto que \mathbf{R} es un anillo local se deduce que $M^n = \mathbf{R}/\mathfrak{m} = \kappa$ para toda $n \in [\alpha, \beta]$. Por lo tanto $M^\bullet \in \mathcal{G}$. Se concluye que $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{G}$.

Proposición 68. Sea $(\mathbf{R}, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Entonces, $\mathcal{A}_n \subseteq \text{D}_{\text{ref}}(\mathbf{R})$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Demostración por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

Caso base. La observación 12 cubre este caso.

Paso inductivo. Sean $n \geq 1$ y $M^\bullet \in \mathcal{A}_n$. Por la Proposición 67 existen $L^\bullet \in \mathcal{A}_{n-1}$, $N^\bullet \in \mathcal{A}_1$ y

$$\varepsilon : 0 \longrightarrow L^\bullet \xrightarrow{f} M^\bullet \xrightarrow{g} N^\bullet \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $\text{Ch}(\mathbf{R})$. Luego, existe $\delta(\varepsilon) : N^\bullet \rightarrow L^\bullet[1]$ en $\mathbf{D}(\mathbf{R})$ tal que

$$L^\bullet \xrightarrow{q(\pi(f))} M^\bullet \xrightarrow{q(\pi(g))} N^\bullet \xrightarrow{\delta(\varepsilon)} L^\bullet[1]$$

es un triángulo distinguido en $\mathbf{D}(\mathbf{R})$. Por la Observación 12 y la Proposición 66 se deduce que $N^\bullet \in \mathbf{D}_{\text{ref}}(\mathbf{R})$. Además, por hipótesis de inducción $L^\bullet \in \mathbf{D}_{\text{ref}}(\mathbf{R})$. Se concluye por la Proposición 65 que $M^\bullet \in \mathbf{D}_{\text{ref}}(\mathbf{R})$. \square

Corolario 19. (*Dualidad de Matlis derivada*) Sea $(\mathbf{R}, \mathfrak{m}, \kappa)$ un anillo local. Entonces, $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{D}_{\text{ref}}(\mathbf{R})$.

Demostración. La demostración se sigue de la Observación 11 y la Proposición 68. \square

Bibliografía

- [1] Balmer, P., Dell’Ambrogio, I., and Sanders, B., *Grothendieck–Neeman duality and the Wirthmüller isomorphism*, *Compositio Mathematica*, Vol. 152, No. 8, pp. 1740–1776, 2016.
- [2] Brodmann, M. P. y Sharp, R. Y., *Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 60, Cambridge University Press, 1998.
- [3] Calmès, B. and Hornbostel, J., *Tensor-triangulated categories and dualities*, *Theory Appl. Categ.*, Vol. 22 (2009), pp. 136–200.
- [4] Deligne, P., *Cohomologie à support propre et construction du foncteur $f^!$* , in: *Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 225, Springer-Verlag, Berlin, 1971, pp. 404–421.
- [5] Grothendieck, A., *Sur quelques points d’algèbre homologique*, *Tôhoku Mathematical Journal*, vol. 9, no. 2, pp. 119–221, 1957. <https://doi.org/10.2748/tmj/1178244839>.
- [6] Grothendieck, A., *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*, North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [7] Happel, Dieter, *Triangulated Categories in the Representation of Finite Dimensional Algebras*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, 1988.
- [8] Hartshorne, R., *Residues and Duality*, *Lecture Notes in Mathematics*, No. 20, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.
- [9] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 52, Springer-Verlag, 1977.
- [10] Holm, Thorsten; Jørgensen, Peter; Rouquier, Raphaël (Eds.), *Triangulated Categories*, Cambridge University Press, 2010.
- [11] Iyengar, S. B. y Takahashi, R., *Twenty-Four Hours of Local Cohomology*, *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 87, American Mathematical Society, 2022.

- [12] Keller, B., *On Triangulated Categories*, Cambridge University Press, 1994.
- [13] Lipman, J., *Notes on Derived Categories and Derived Functors*, in: Lecture Notes at the Summer Institute on Algebraic Geometry, Bowdoin College, 1964.
- [14] Lipman, J., LaTarrío, A., López, J., *Grothendieck duality on formal schemes*, Math. Purdue (Year not specified), Purdue University.
- [15] Lipman, J., *Lectures on local cohomology and duality*, Local cohomology and its applications (2001), Taylor and Francis.
- [16] Lipman, J., Hashimoto, M., Lipman, J. L., *Abstract Grothendieck Duality for Schemes*, Springer, 2009.
- [17] LaTarrío, A., López, J., Lipman, J., *Bivariance, Grothendieck duality and Hochschild homology I: Construction of a bivariant theory*, Project Euclid (2011).
- [18] Lipman, J., LaTarrío, A., López, J., *Studies in duality on Noetherian formal schemes and non-Noetherian ordinary schemes*, (1999), books.google.com.
- [19] Matlis, E., *Injective Modules over Noetherian Rings*, vol. 13, pp. 385-391, 1958.
- [20] Melkersson, L., “Some applications of a criterion for artinianness of a module,” Department of Mathematics, University of Lund, communicated by L. Robbiano, received 1 July 1993; revised 1 January 1994.
- [21] Neeman, A., *Grothendieck duality via homotopy theory*, arXiv preprint alg-geom/9412022 (1994).
- [22] Neeman, A., *The Grothendieck duality theorem via Bousfield’s techniques and Brown representability*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 1, 205–236.
- [23] Neeman, A., *Triangulated Categories*, Princeton University Press, 2001.
- [24] Neeman, A., *The homotopy category of flat modules, and Grothendieck duality*, Invent. Math. **174** (2008), no. 2, 255–308.
- [25] Neeman, A., *The relation between Grothendieck duality and Hochschild homology*, arXiv preprint arXiv:1706.06662 (2017).
- [26] Neeman, A., *Grothendieck duality made simple*, arXiv preprint arXiv:1806.03293 (2018).
- [27] Neeman, A., *New progress on Grothendieck duality, explained to those familiar with category theory and with algebraic geometry*, Bull. Lond. Math. Soc. **2021**, Wiley Online Library.
- [28] Illusie, L. (ed.), *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie – Cohomologie Étale (SGA 4 1/2)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 569, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

- [29] Spaltenstein, N., *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio Mathematica, vol. 65, no. 2, pp. 121–154, 1988.
- [30] Verdier, J. L., *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1967.
- [31] Verdier, J. L., *Base change for twisted inverse images of coherent sheaves*, in: Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 1969, pp. 393–408.