

Manoel PAIVA

MODERNA
PLUS

MATEMÁTICA PAIVA

2

PARTE 1

DE ACORDO
COM A BNCC
E REFERENCIAIS
CURRICULARES
DE ITINERÁRIOS
FORMATIVOS

LIVRO PARA ANÁLISE
DO PROFESSOR
• VENDA PROIBIDA •

ABRELIVROS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA
DE EDITORES DE LIVROS



COMPARTILHA

Manoel Paiva

Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santo André.

Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Professor do ensino fundamental, médio e de cursos pré-vestibular durante 29 anos.

MODERNA
PLUS

MATEMÁTICA PAIVA 2



Livro do
Professor
Venda proibida

4ª edição





Coordenação editorial: Fabio Martins de Leonardo
Edição de texto: Edson Ferreira de Souza, Juliana Ikeda, Renata Martins Fortes Gonçalves
Gerência de design e produção gráfica: Everson de Paula
Coordenação de produção: Patrícia Costa
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de design e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Daniel Messias e Otávio dos Santos
Capa: Daniela Cunha
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva
Editoração eletrônica: Teclas Editorial
Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo
Ilustrações: Adilson Secco, Biry Sarkis, Bruno Mota, Cláudio Chiyo, Hector Gómez Manohead, Paulo Manzi
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero
Revisão: Alessandra Félix, Palavra Certa, ReCriar Editorial
Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron
Pesquisa iconográfica: Carol Böck, Junior Rozzo e Mariana Alencar
Coordenação de bureau: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro, Vânia Aparecida M. de Oliveira
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Fabio Roldan, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Paiva, Manoel
Moderna plus matemática Paiva 2 [livro eletrônico] / Manoel Paiva. -- 4. ed. --
São Paulo : Moderna, 2021.
HTML

ISBN 978-85-16-13043-5

1. Matemática (Ensino médio) I. Título.

21-72632

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

ISBN 978-85-16-13043-5 (LA)

ISBN 978-85-16-13044-2 (LP)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.

Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho

São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904

Vendas e Atendimento: Tel. (0__11) 2602-5510

Fax (0__11) 2790-1501

www.moderna.com.br

2021

Impresso no Brasil

Vivemos o processo de implantação de uma reforma do Ensino Médio, que pretende se alinhar com as exigências contemporâneas. Os objetivos gerais do Novo Ensino Médio podem ser resumidos em formar cidadãos produtivos e criativos; com raciocínio analítico; capazes de se antecipar a inovações; que busquem novos conhecimentos em um processo de formação contínua; conscientes de seus direitos e deveres; capazes de atuar com protagonismo no mundo do trabalho e no convívio social.

Elaboramos esta obra nesse contexto, destacando que a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo e instrumental, mas deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas.

Assim, buscamos atingir nossos objetivos gerais recorrendo à progressão do pensamento científico, ao pensamento computacional, às relações interdisciplinares, à contextualização, ao uso de novas tecnologias, aos aspectos históricos e às múltiplas representações de um mesmo objeto matemático.

Esperamos contribuir para a sua formação, instigar seu espírito crítico e científico e despertar sua curiosidade para o vasto universo do qual conhecemos uma minúscula parte.

Manoel Paiva

Ao tio Paulo, cujos ensinamentos transpõem gerações.

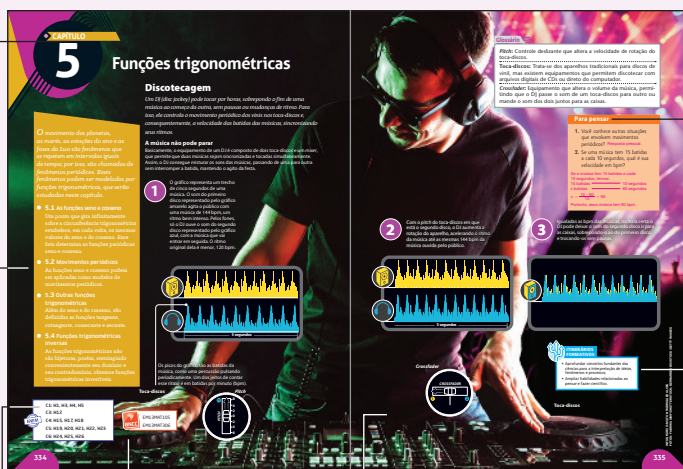
Organização do capítulo

Abertura de capítulo

Cada abertura de capítulo traz uma imagem retratando situações cotidianas que envolvem a Matemática ou propiciam a aquisição de informações sobre assuntos relacionados ao capítulo.

Breve descrição do que será estudado e uma síntese de cada item do capítulo.

Lista das competências e habilidades da Matriz de referência do Enem que têm maior destaque no capítulo.



BNCC

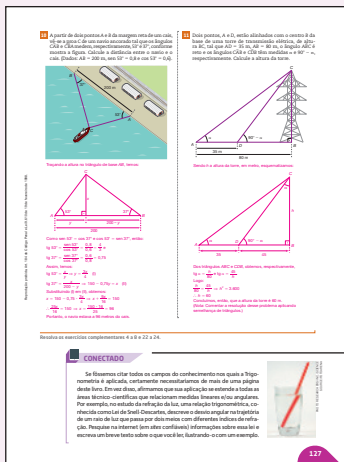
Lista das competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular trabalhadas no capítulo.

Para pensar

Presente na abertura de cada capítulo, traz algumas questões que possibilitam o estudo do tema proposto.

Itinerários Formativos

Objetivos dos Itinerários Formativos favorecidos no capítulo.



Mentes brilhantes

Nessa seção são apresentados feitos de pessoas que revolucionaram a Matemática ou a Ciência em sua época.

Conectado

Nessa seção são propostas atividades usando a internet e softwares.



Conteúdo digital e Material complementar

Ao longo do livro, você irá encontrar remissões para o Conteúdo digital e Material complementar:



Vídeo

As matrizes e as transformações geométricas na computação gráfica



Texto complementar

Princípio da indução matemática (PIM)

5

C1

Competência de área 1

Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

- H1** Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais e reais.
- H2** Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- H3** Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- H4** Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- H5** Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

C2

Competência de área 2

Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

- H6** Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- H7** Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- H8** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- H9** Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

C3

Competência de área 3

Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

- H10** Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
- H11** Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
- H12** Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
- H13** Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
- H14** Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

C4

Competência de área 4

Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

- H15** Identificar a relação de dependência entre grandezas.
- H16** Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
- H17** Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
- H18** Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

C5

Competência de área 5

Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

- H19** Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- H20** Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
- H21** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- H22** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
- H23** Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

C6

Competência de área 6

Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

- H24** Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- H25** Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- H26** Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

C7

Competência de área 7

Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

- H27** Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
- H28** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
- H29** Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
- H30** Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Fonte: BRASIL. *Matriz de referência Enem*. Brasília: MEC/Inep, 2011.
Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>.
Acesso em: 27 abr. 2021.

Competência é a capacidade de mobilização de conhecimentos (conceituais e procedimentais), habilidades (práticas, cognitivas e emocionais), atitudes e valores para resolver as demandas da vida. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) definiu dez competências gerais que devem ser desenvolvidas por todos os alunos ao longo da Educação Básica.

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018. p. 9-10.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias



Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas.

• COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

• COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2

Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

• COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1ª ou 2ª grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

• COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

• COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

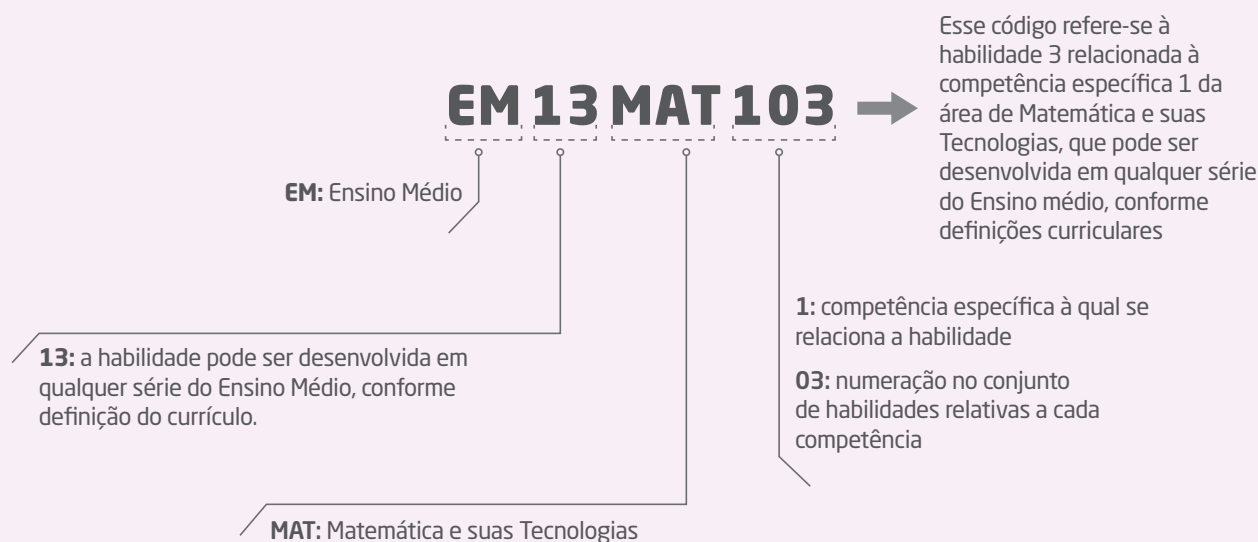
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018. p. 532-541.

Para entender os códigos veja o esquema a seguir.





O aprofundamento das aprendizagens relacionadas às competências gerais e às áreas de conhecimento, bem como o desenvolvimento da autonomia dos estudantes para a realização de seus projetos de vida e a promoção de valores universais, como ética, justiça social, solidariedade e sustentabilidade, são alguns dos objetivos dos itinerários formativos.

Para promover a formação pessoal, profissional e cidadã dos estudantes, por meio de experiências educativas ligadas à realidade contemporânea, e integrar os possíveis arranjos dos Itinerários Formativos, foram estabelecidos 4 eixos estruturantes: investigação científica, processos criativos, mediação e intervenção sociocultural e empreendedorismo.

INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA

Este eixo tem como ênfase ampliar a capacidade dos estudantes de investigar a realidade, compreendendo, valorizando e aplicando o conhecimento sistematizado, por meio da realização de **práticas e produções científicas** relativas a uma ou mais Áreas de Conhecimento, à Formação Técnica e Profissional, bem como a temáticas de seu interesse.

JUSTIFICATIVA	Para participar da sociedade da informação, os estudantes precisam se apropriar cada vez mais de conhecimentos e habilidades que os permitam acessar, selecionar, processar, analisar e utilizar dados sobre os mais diferentes assuntos, seja para compreender e intervir na realidade, seja para lidar de forma crítica, reflexiva e produtiva com a quantidade cada vez maior de informações disponíveis.
OBJETIVOS	<ul style="list-style-type: none">• Aprofundar conceitos fundantes das ciências para a interpretação de ideias, fenômenos e processos;• Ampliar habilidades relacionadas ao pensar e fazer científico;• Utilizar esses conceitos e habilidades em procedimentos de investigação voltados à compreensão e enfrentamento de situações cotidianas, com proposição de intervenções que considerem o desenvolvimento local e a melhoria da qualidade de vida da comunidade.

PROCESSOS CRIATIVOS

Este eixo tem como ênfase expandir a capacidade dos estudantes de idealizar e realizar **projetos criativos** associados a uma ou mais Áreas de Conhecimento, à Formação Técnica e Profissional, bem como a temáticas de seu interesse.

JUSTIFICATIVA	Para participar de uma sociedade cada vez mais pautada pela criatividade e inovação, os estudantes precisam aprender a utilizar conhecimentos, habilidades e recursos de forma criativa para propor, inventar, inovar.
OBJETIVOS	<ul style="list-style-type: none">• Aprofundar conhecimentos sobre as artes, a cultura, as mídias e as ciências aplicadas e sobre como utilizá-los para a criação de processos e produtos criativos;• Ampliar habilidades relacionadas ao pensar e fazer criativo;• Utilizar esses conhecimentos e habilidades em processos de criação e produção voltados à expressão criativa e/ou à construção de soluções inovadoras para problemas identificados na sociedade e no mundo do trabalho.

MEDIAÇÃO E INTERVENÇÃO SOCIOCULTURAL

Este eixo tem como ênfase ampliar a capacidade dos estudantes de utilizar conhecimentos relacionados a uma ou mais Áreas de Conhecimento, à Formação Técnica e Profissional, bem como a temas de seu interesse para realizar **projetos que contribuam com a sociedade e o meio ambiente**.

JUSTIFICATIVA	Para participar de uma sociedade desafiada por questões socioculturais e ambientais cada vez mais complexas, os estudantes precisam se apropriar de conhecimentos e habilidades que os permitam atuar como agentes de mudanças e de construção de uma sociedade mais ética, justa, democrática, inclusiva, solidária e sustentável.
OBJETIVOS	<ul style="list-style-type: none"> • Aprofundar conhecimentos sobre questões que afetam a vida dos seres humanos e do planeta em nível local, regional, nacional e global, e compreender como podem ser utilizados em diferentes contextos e situações; • Ampliar habilidades relacionadas à convivência e atuação sociocultural; • Utilizar esses conhecimentos e habilidades para mediar conflitos, promover entendimentos e propor soluções para questões e problemas socioculturais e ambientais identificados em suas comunidades.

EMPREENDEDORISMO

Este eixo tem como ênfase expandir a capacidade dos estudantes de mobilizar conhecimentos de diferentes áreas para empreender **projetos pessoais ou produtivos** articulados ao seu projeto de vida.

JUSTIFICATIVA	Para participar de uma sociedade cada vez mais marcada pela incerteza, volatilidade e mudança permanente, os estudantes precisam se apropriar cada vez mais de conhecimentos e habilidades que os permitam se adaptar a diferentes contextos e criar novas oportunidades para si e para os demais.
OBJETIVOS	<ul style="list-style-type: none"> • Aprofundar conhecimentos relacionados a contexto, ao mundo do trabalho e à gestão de iniciativas empreendedoras, incluindo seus impactos nos seres humanos, na sociedade e no meio ambiente; • Ampliar habilidades relacionadas ao autoconhecimento, empreendedorismo e projeto de vida; • Utilizar esses conhecimentos e habilidades para estruturar iniciativas empreendedoras com propósitos diversos, voltadas a viabilizar projetos pessoais ou produtivos com foco no desenvolvimento de processos e produtos com o uso de tecnologias variadas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Referenciais curriculares para a elaboração de Itinerários Formativos*. Brasília: MEC, 2018. p. 6-9.

PARTE I

Capítulo 1 Sequências 26

1.1 O conceito de sequência	27
Sequência finita	28
Sequência infinita	28
■ Termos de uma sequência	29
■ Lei de formação de uma sequência	29
1.2 Progressão aritmética (PA)	33
■ Classificação de uma PA	35
■ Representação genérica de uma PA	38
■ Fórmula do termo geral de uma PA	40
Outra fórmula do termo geral de uma PA	41
■ Representação gráfica de uma PA	45
■ Propriedades das progressões aritméticas	47
■ Soma dos n primeiros termos de uma PA	50
Interpretação gráfica da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA	51
1.3 Progressão geométrica (PG)	55
■ Classificação de uma PG	56
■ Representação genérica de uma PG	60
■ Fórmula do termo geral de uma PG	62
Outra fórmula do termo geral de uma PG	62
■ Representação gráfica de uma PG	67
Teorema	67
Consequência	67
■ Propriedades das progressões geométricas	70
Consequência	70
■ Soma dos n primeiros termos de uma PG	73
■ Produto dos n primeiros termos de uma PG	76
■ Soma dos infinitos termos de uma PG	78
Teorema	78

■ Exercícios complementares	81
■ Pré-requisitos para o capítulo 2	109
■ Matemática sem fronteiras	112
■ Análise da resolução	114

Capítulo 2 Trigonometria no triângulo retângulo 115

2.1 Estudo da Trigonometria no triângulo retângulo	116
■ A origem da Trigonometria	116
■ A ideia central da Trigonometria	117
■ O triângulo fundamental	117
■ Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo	117
2.2 Transformações trigonométricas	124
■ Relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo	124
■ Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares	125
■ A Trigonometria e o teorema de Pitágoras	128
■ Ângulos notáveis	131
Ângulo de 45°	131
Ângulos de 30° e 60°	131
■ Exercícios complementares	135
■ Pré-requisitos para o capítulo 3	146
■ Matemática sem fronteiras	150
■ Análise da resolução	151

Capítulo 3 A circunferência trigonométrica: seno, cosseno e tangente 153

3.1 Unidades de medida de arco e de ângulo	154
■ Grau	154
Submúltiplos do grau	154
■ Radiano	154
A medida da circunferência em radiano	155
■ Transformações de unidades	155

3.2	Circunferência trigonométrica	159
■	Arcos trigonométricos	160
■	Arcos congruos	160
■	Associando números reais aos pontos da circunferência trigonométrica	164
■	Simetrias	167
3.3	Seno e cosseno de um arco trigonométrico	170
■	Varição de sinal do seno	172
■	Varição de sinal do cosseno	172
■	Tabela trigonométrica dos arcos notáveis	173
■	Redução ao 1º quadrante	175
	Arcos de medidas opostas	177
■	Relação fundamental da Trigonometria	182
3.4	Tangente de um arco trigonométrico	186
■	Varição de sinal da tangente	187
■	A tangente como razão do seno pelo cosseno	188
■	Tabela trigonométrica dos arcos notáveis	189
■	Redução ao 1º quadrante	192
	Arcos de medidas opostas	193
3.5	Equações trigonométricas	196
■	Resolução de uma equação trigonométrica imediata	197
■	Resolução de uma equação trigonométrica na forma fatorada	202
■	Resolução de uma equação trigonométrica por meio de equações polinomiais	205
3.6	Inequações trigonométricas	208
■	Resolução de uma inequação trigonométrica imediata	208
■	Resolução de uma inequação trigonométrica por meio de inequações polinomiais	218
■	Exercícios complementares	223
■	Pré-requisitos para o capítulo 4	264
■	Matemática sem fronteiras	266
■	Análise da resolução	268

Outras razões trigonométricas, adição de arcos e resolução de triângulos

Capítulo 4

4.1	Secante, cossecante e cotangente	270
■	As razões trigonométricas inversas de um ângulo agudo	270
■	Secante de um arco trigonométrico	271
■	Cossecante de um arco trigonométrico	272
■	Cotangente de um arco trigonométrico	273
4.2	Identidades	279
■	Técnicas para demonstração de identidades	279
4.3	Adição de arcos	282
4.4	Arco duplo	289
4.5	Resolução de triângulos	299
■	Lei dos cossenos	300
■	Lei dos senos	304
■	Área de um polígono convexo	308
	Área de um triângulo	308
■	Exercícios complementares	311
■	Pré-requisitos para o capítulo 5	329
■	Matemática sem fronteiras	331
■	Análise da resolução	333

Funções trigonométricas

Capítulo 5

5.1	As funções seno e cosseno	336
	Definição	337
	O gráfico da função seno	337
	O gráfico da função cosseno	342
	Período das funções seno e cosseno	346
5.2	Movimentos periódicos	356
■	O movimento periódico e as funções trigonométricas	357
	Associando um movimento circular a um movimento periódico	358
5.3	Outras funções trigonométricas	365
■	Função tangente	365

O gráfico da função tangente	366
Período de funções que envolvem tangente	371
■ Função cotangente	372
O gráfico da função cotangente	372
■ Função cossecante	378
O gráfico da função cossecante	378
■ Função secante	381
O gráfico da função secante	381
5.4 Funções trigonométricas inversas	387
■ Funções trigonométricas na calculadora	387
■ Restrições a domínios e contradomínios	387
■ Função arco-seno	388
■ Função arco-cosseno	393
■ Função arco-tangente	399
■ Exercícios complementares	404
■ Pré-requisitos para o capítulo 6	444
■ Matemática sem fronteiras	445
■ Análise da resolução	447
■ Projeto de pesquisa	448
■ Respostas da Parte I	450

PARTE II

Capítulo 6 Matrizes 476

6.1 O conceito de matriz	478
■ Um pouco de história	478
■ Introdução	479
■ Definição	479
■ Representação genérica	479
■ Algumas matrizes especiais	480
Matriz quadrada	480
Matriz identidade	481
Matriz nula	481
■ Transposta de uma matriz	481
■ Igualdade de matrizes	481
6.2 Operações entre matrizes	484
■ Adição de matrizes	484
Propriedades da adição de matrizes	485

■ Subtração de matrizes	485
■ Multiplicação de um número real por uma matriz	486
■ Multiplicação de matrizes	488
Produto de linha por coluna	489
Multiplicação de matrizes	489
Propriedades da multiplicação de matrizes	490
■ Matrizes inversas	494
Propriedade	495
■ Exercícios complementares	497
■ Pré-requisitos para o capítulo 7	510
■ Matemática sem fronteiras	512
■ Análise da resolução	514

Capítulo 7 Sistemas lineares e determinantes 516

7.1 Sistemas lineares	517
■ Sistemas de equações	517
■ Equação linear	517
Solução de uma equação linear	518
Equação linear homogênea	519
Propriedade	519
■ Sistema linear	521
Sistema linear homogêneo	522
Solução de um sistema linear	522
■ Classificação de um sistema linear	523
Classificação de um sistema linear homogêneo	524
7.2 Resolução de um sistema linear	527
■ Sistema linear escalonado	527
■ Resolução de um sistema linear escalonado	528
Propriedade	528
Propriedade	529
Propriedade	530
■ Sistemas lineares equivalentes	531
■ Escalonamento de um sistema linear	531
Teoremas	532
■ Interpretação geométrica de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas	536

7.3	Os sistemas lineares e o conceito de determinante	540
■	A origem dos determinantes	540
■	Determinante de ordem 2	540
■	Determinante de ordem 3	541
	Generalização	542
■	Discussão de um sistema linear	547
	1º caso: discussão de um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas	548
	2º caso: discussão de um sistema linear com número de equações diferente do número de incógnitas	552
7.4	Ampliando o conceito de determinante	554
■	Determinante de ordem n	554
	Determinante de ordem 1	555
	Cofator	555
■	Teorema de Laplace	556
■	Propriedades dos determinantes	559
	P1. Matrizes transpostas	559
	P2. Fila nula	559
	P3. Permutação de filas paralelas	560
	P4. Produto de um número por um determinante	560
	P5. Filas paralelas iguais	562
	P6. Filas paralelas múltiplas	562
	P7. Determinante de uma matriz triangular	563
	P8. Soma de determinantes	565
	P9. Combinação linear	566
	P10. Teorema de Jacobi	567
	P11. Teorema de Cauchy	568
	P12. Teorema de Binet	569
■	Um método para a obtenção da inversa de uma matriz	573
	Matriz adjunta	573
	Teorema	573
	Cálculo da inversa de uma matriz	574
■	Exercícios complementares	576
■	Pré-requisitos para o capítulo 8	602
■	Matemática sem fronteiras	603
■	Análise da resolução	605

Capítulo 8	Análise combinatória e binômio de Newton	606
8.1	O que é Análise combinatória	608
■	O princípio fundamental da contagem	608
	Formalizando o princípio fundamental da contagem	610
■	O princípio aditivo da contagem	616
8.2	Fatorial	623
■	Propriedade fundamental dos fatoriais	623
■	Extensão da definição de fatorial	623
8.3	Classificação dos agrupamentos	628
■	Arranjos simples	629
	Cálculo do número de arranjos simples	630
■	Permutações	633
	Permutações simples	634
	Cálculo do número de permutações simples	634
	Generalização	635
	Permutações com elementos repetidos	639
	Cálculo do número de permutações com elementos repetidos	639
	Generalização	640
■	Combinações simples	644
	Cálculo do número de combinações simples	644
	Generalização	646
■	Critério diferenciador entre arranjo e combinação	646
8.4	O binômio de Newton	653
■	Um problema fundamental de escolhas	653
■	Desenvolvimento da potência $(x + a)^n$	654
■	Termo geral do binômio de Newton	661
■	Construindo uma tabela de números binomiais	664
■	O triângulo de Pascal	665
	Propriedades do triângulo de Pascal	666

■ Exercícios complementares	673
■ Pré-requisitos para o capítulo 9	700
■ Matemática sem fronteiras	701
■ Análise da resolução	702
■ Projeto de pesquisa	703

Capítulo 9 Probabilidade 704

9.1 Fundamentos da teoria das probabilidades	705
■ O conceito de probabilidade	705
■ Experimento aleatório	706
■ Espaço amostral e evento de um experimento	706
Espaço amostral equiprovável	708
■ Definição de probabilidade	708
■ Eventos complementares	715
Determinação do complementar de A por uma propriedade comum a seus elementos	715
■ Propriedades das probabilidades	716
9.2 Adição de probabilidades	720
■ Teorema da adição de probabilidades	721
Eventos mutuamente exclusivos	721
9.3 Probabilidade condicional	724
■ Eventos independentes	729
9.4 Multiplicação de probabilidades	733
■ Teorema da multiplicação de probabilidades	734
Propriedade das retiradas simultâneas	736
■ Exercícios complementares	740
■ Pré-requisitos para o capítulo 10	761
■ Matemática sem fronteiras	763
■ Análise da resolução	764
■ Projeto de pesquisa	765

Capítulo 10 Geometria plana 766

10.1 Ângulos e polígonos	768
■ As origens da Geometria	768
■ Ângulos	769
Definição	769
Retas paralelas	771
Retas paralelas interceptadas por uma transversal	771
■ Polígonos	771
Elementos de um polígono	772
Nomenclatura dos polígonos	772
Polígono convexo	772
Polígono regular	773
■ Triângulos	774
Classificação dos triângulos	774
Elementos de um triângulo	775
Soma dos ângulos internos de um triângulo	775
Teorema do ângulo externo de um triângulo	776
■ Congruência de triângulos	779
Definição	779
Casos de congruência de triângulos	779
Caso LAL (lado-ângulo-lado)	780
Caso ALA (ângulo-lado-ângulo)	780
Caso LLL (lado-lado-lado)	780
Caso LAA _o (lado-ângulo-ângulo oposto)	780
Caso RHC (ângulo reto-hipotenusa-cateto)	780
Propriedades do triângulo isósceles	784
Propriedades do triângulo retângulo	787
■ Quadriláteros notáveis	790
Trapézio	790
Paralelogramo	790
Retângulo	790
Losango	790
Quadrado	790
Propriedades dos quadriláteros notáveis	791

10.2 Teorema de Tales e semelhança de figuras	796
■ Teorema de Tales	796
■ Semelhança de figuras planas	800
■ Semelhança de triângulos	801
Casos de semelhança de triângulos	802
Caso AA (ângulo-ângulo)	802
Caso LAL (lado-ângulo-lado)	802
Caso LLL (lado-lado-lado)	802
Cálculo da razão de semelhança de dois triângulos	805
■ Relações métricas no triângulo retângulo	807
10.3 Circunferência e círculo	811
■ Arcos e cordas	812
Propriedade das cordas	812
■ Ângulo central de uma circunferência	815
■ Ângulo inscrito em uma circunferência	815
Propriedade	815
■ Reta tangente a uma circunferência	819
Propriedades	819
■ Circunferências tangentes	820
Propriedade	820
■ Comprimento da circunferência	823
10.4 Cálculo de áreas	826
■ Unidade de medida	826
■ Unidade de medida de área	827
■ Cálculo da área de alguns polígonos	828
Retângulo	828
Quadrado	828
Paralelogramo	828
Triângulo	829
Área de um triângulo em função das medidas de dois lados e do ângulo compreendido por eles	829
Hexágono regular	830
Trapézio	831
Losango	831
■ Cálculo da área do círculo e de suas partes	836
Círculo	836

Setor circular	836
Segmento circular	837
Coroa circular	838
■ Razão entre áreas de figuras semelhantes	843
■ Exercícios complementares	846
■ Pré-requisitos para o capítulo 11	868
■ Matemática sem fronteiras	870
■ Análise da resolução	872
■ Projeto de pesquisa	873

Capítulo 11 Geometria de posição 874

11.1 Aspectos preliminares da Geometria	876
■ Como estudar a Geometria de posição	877
■ Uma técnica de desenho	877
■ O espaço e suas partes	878
Conceitos primitivos	878
O espaço	878
Representações e notações	878
Outros conceitos	880
Figuras geométricas	880
Segmento de reta	881
Conjunto convexo de pontos (figura geométrica convexa)	882
Semirreta	882
Semi-plano	883
Semiespaço	883
■ A linguagem dos conjuntos e a Geometria	884
11.2 Posições relativas entre retas, planos e entre reta e plano	888
■ Posições relativas entre duas retas	888
Retas paralelas	888
Postulado das paralelas	888
Retas concorrentes	889
Retas reversas	889
■ Determinação de um plano	889
■ Posições relativas entre reta e plano	894
Reta contida em um plano	894

Reta paralela a um plano	894
Reta secante (ou concorrente) a um plano	895
Postulado e teoremas	895
■ Posições relativas entre dois planos.....	900
Planos paralelos	901
Planos secantes	901
Teoremas.....	901
11.3 Perpendicularidade	910
■ Retas perpendiculares.....	910
■ Retas ortogonais	911
Teoremas.....	912
■ Reta perpendicular a um plano	914
Teoremas.....	914
■ Planos perpendiculares	921
Teoremas.....	921
■ Projecção ortogonal sobre um plano	927
■ Exercícios complementares	932
■ Pré-requisitos para o capítulo 12	950
■ Matemática sem fronteiras	951
■ Análise da resolução	953

Capítulo 12	Geometria métrica: poliedros	954
--------------------	-------------------------------------	------------

12.1 Ângulos e distâncias	956
■ Ângulos	956
Ângulos entre reta e plano	957
Ângulos entre dois planos.....	957
■ Distância entre duas figuras geométricas	962
Distância entre dois pontos	962
Distância entre um ponto e uma reta	962
Distância entre duas retas paralelas	963
Distância entre um ponto e um plano	963
Distância entre uma reta e um plano paralelo	963
Distância entre dois planos paralelos	963
Distância entre duas retas reversas	964

12.2 Poliedro	967
■ O conceito de poliedro	967
Definição	968
Elementos de um poliedro	968
Nomenclatura dos poliedros	969
■ Poliedro convexo.....	970
■ Ângulo poliédrico convexo	970
Nomenclatura dos ângulos poliédricos.....	971
Ângulos poliédricos congruentes	971
■ Relação de Euler	972
■ Poliedro regular.....	976
Propriedade	976
12.3 Prisma	980
■ O conceito de prisma	980
Definição	981
Elementos de um prisma.....	981
Nomenclatura dos prismas.....	981
Secção transversal de um prisma.....	982
Áreas de um prisma	982
Prisma reto e prisma oblíquo	982
Prisma regular	982
■ Paralelepípedo reto-retângulo	987
Diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo	988
Diagonal de um cubo.....	988
Área total de um paralelepípedo reto-retângulo	989
Área total de um cubo	989
12.4 Cálculo de volumes	993
■ Unidades de volume.....	993
O cubo como unidade de volume	993
O litro	994
■ Volume de um paralelepípedo reto-retângulo.....	995
Volume de um cubo	995
■ O princípio de Cavalieri.....	999
■ Volume de um prisma.....	999
12.5 Pirâmide	1.004
■ O conceito de pirâmide.....	1.004
Definição	1.004

Elementos de uma pirâmide	1.004
Nomenclatura das pirâmides.....	1.005
Secção transversal de uma pirâmide	1.005
Áreas de uma pirâmide	1.005
■ Pirâmide regular	1.005
Apótema de uma pirâmide regular e apótema da base	1.006
Relações entre os elementos de uma pirâmide regular	1.006

12.6 Volume e semelhança de pirâmides

.....	1.011
■ Volume de uma pirâmide	1.011
Propriedades.....	1.011
Volume de uma pirâmide triangular.....	1.012
Volume de uma pirâmide qualquer	1.013
■ Pirâmides semelhantes.....	1.018
Propriedade	1.018
■ Tronco de pirâmide de bases paralelas....	1.019
■ Exercícios complementares	1.023
■ Pré-requisitos para o capítulo 13	1.053
■ Matemática sem fronteiras.....	1.055
■ Análise da resolução	1.056

Capítulo 13 Geometria métrica: corpos redondos 1.058

13.1 Cilindro circular

.....	1.060
■ O conceito de cilindro circular.....	1.060
Definição	1.061
Elementos de um cilindro circular	1.061
Secções de um cilindro circular	1.061
Cilindro circular reto e cilindro circular oblíquo	1.062
Propriedade.....	1.062
Cilindro equilátero	1.063
■ Área lateral e área total de um cilindro circular reto	1.063
Área lateral	1.064
Área total	1.064
■ Volume de um cilindro circular	1.068

■ Tronco reto de um cilindro circular	1.073
Volume de um tronco reto de cilindro circular	1.073

13.2 Cone circular

.....	1.076
■ O conceito de cone circular	1.076
Definição	1.076
Elementos de um cone circular	1.077
Secções de um cone circular	1.077
Cone circular reto e cone circular oblíquo.....	1.077
Propriedade.....	1.078
Cone equilátero	1.078
■ Relação entre os elementos de um cone circular reto	1.078
■ Área lateral e área total de um cone circular reto	1.079
Área lateral	1.079
Área total	1.079
Medida do ângulo central	1.080
■ Razão entre as áreas de uma secção transversal e da base de um cone circular	1.083
■ Volume de um cone circular	1.084
■ Tronco de cone circular de bases paralelas	1.090
■ Cones semelhantes	1.092
Propriedade	1.092

13.3 Esfera

.....	1.095
■ O conceito de esfera	1.095
Definição	1.096
■ Posições relativas entre uma reta e uma esfera	1.096
Reta secante a uma esfera	1.096
Reta tangente a uma esfera	1.097
Propriedade.....	1.097
Reta exterior a uma esfera	1.097
■ Posições relativas entre um plano e uma esfera	1.098
Plano secante a uma esfera	1.098
Plano tangente a uma esfera	1.099
Propriedade.....	1.099
Plano exterior a uma esfera	1.099

■ Volume de uma esfera.....	1.101	■ Esfera e cilindro circular reto.....	1.118
■ Área da superfície esférica.....	1.103	Esfera inscrita em um	
■ Cunha esférica e fuso esférico.....	1.104	cilindro circular reto.....	1.118
■ Esferas tangentes.....	1.108	Esfera circunscrita a	
Propriedade.....	1.108	um cilindro circular reto.....	1.118
13.4 Inscrição e circunscrição		■ Esfera e cone circular reto.....	1.121
de uma esfera.....	1.111	Esfera inscrita em um	
■ Esfera e poliedro.....	1.111	cone circular reto.....	1.121
Esfera inscrita em um poliedro.....	1.111	Esfera circunscrita a	
Esfera circunscrita a um poliedro.....	1.112	um cone circular reto.....	1.121
■ Esfera e cubo.....	1.112	■ Exercícios complementares.....	1.125
Esfera inscrita em um cubo.....	1.112	■ Matemática sem fronteiras.....	1.158
Esfera circunscrita a um cubo.....	1.112	■ Análise da resolução.....	1.160
■ Esfera e octaedro regular.....	1.115	■ Respostas da Parte II.....	1.161
Esfera circunscrita a		■ Lista de siglas.....	1.184
um octaedro regular.....	1.115	■ Bibliografia.....	1.186
Esfera inscrita em um			
octaedro regular.....	1.115		