



## IDENTIFICACIÓN Y CONTROL ADAPTATIVO ( 8620 )

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Año 2020 - 2<sup>do</sup> cuatrimestre

TRABAJO PRÁCTICO N.º 1

TEMA: Modelización, Linealización y Discretización de Sistemas Dinámicos.

FECHA: 8 de noviembre de 2020

INTEGRANTE:

Nastasi, Franco Gabriel  
fnastasi@fi.uba.ar

- #100002

## 1. Introducción

En este informe se detallan las simulaciones realizadas para conocer la respuesta del nivel de un tanque cónico ante incrementos en el caudal de salida. Para ello se linealizó el modelo de la planta y se lo comparó con el modelo no lineal del tanque en donde se observó los efectos de aumentar la apertura de la válvula y alejarse del punto de trabajo sobre el cual se linealizó. Además se discretizó el modelo linealizado mediante el método de Tustín y ZOH y se observaron las diferencias en la respuesta temporal.

A continuación se detallan los archivos de simulación

- *tanque\_simulink\_param.m* Este archivo debería correrse antes de ejecutar cualquier otra simulación ya que configura los parámetros a utilizarse en las simulaciones siguientes.
- *tanque\_simulink.slx* En este archivo se encuentra la simulación de la dinámica del nivel del tanque
- *graficar\_modelo\_no\_lineal.m* Archivo para graficar lo obtenido en *tanque\_simulink.slx*
- *tanque\_simulink\_lineal.slx* En este archivo se encuentra el modelo no lineal del tanque y la linealización alrededor del punto de trabajo indicado más adelante
- *graficar\_comparacion\_lineal.m* Archivo para graficar lo obtenido en *tanque\_simulink\_lineal.slx*
- *tanque\_simulink\_disc.slx* En este archivo se encuentra las simulaciones del modelo no lineal, el linealizado y la discretización mediante los métodos de Tustín y ZOH
- *graficar\_comparacion\_disc.m* Archivo para graficar lo obtenido en *tanque\_simulink\_disc.slx*

## 2. Desarrollo

### 2.1. Modelo no lineal de un tanque cónico

El primer paso consistió en obtener un modelo matemático de un tanque cónico, el cuál posee una válvula proporcional de salida, un caudal de entrada  $Q_i$  y del cual se sabe el ángulo de la pared  $\varphi$ . Primero se calcula el volumen del tanque en función de la altura  $h$ :

$$V = \int_0^h dV = \int_0^h \pi r^2(h) dh = \int_0^h \pi \left( r + \frac{h}{\tan(\varphi)} \right)^2 dh = \tan(\varphi) \frac{\pi}{3} \left[ \left( r + \frac{h}{\tan(\varphi)} \right)^3 - r^3 \right] \quad (2.1)$$

Donde  $r$  es el radio menor del tanque. A partir de la ecuación del volumen del tanque se puede plantear la conservación de masa:

$$\dot{V}(h) = \pi \left( r + \frac{h}{\tan(\varphi)} \right)^2 \dot{h} = Q_{in} - Q_{out} = Q_{in} - A_{out} \times V_{out} = Q_{in} - \alpha \pi a^2 V_{out} \quad (2.2)$$

Donde  $a$  es radio del orificio de salida y  $\alpha$  es el valor de apertura de la válvula. Dado que se conoce cuanto es  $Q_{in}$ , solo resta obtener  $Q_{out}$  en función de  $h$ . Para ello se aplica la ecuación de Bernoullí suponiendo que la velocidad en el punto con altura  $h$  es despreciable.

$$\frac{P}{\rho} + gh = \frac{V_{out}^2}{2} + \frac{P}{\rho} \Rightarrow V_{out} = \sqrt{2gh} \quad (2.3)$$

Por lo tanto se tiene que la ecuación no lineal que debe cumplir la altura  $h$ , a la que se encuentra lleno el tanque cónico, es:

$$\dot{h} = F(h, \alpha) = \frac{Q_{in} - \alpha \pi a^2 \sqrt{2gh}}{\pi \left( r + \frac{h}{\tan(\varphi)} \right)^2} \quad (2.4)$$

## 2.2. Simulación del tanque cónico

La dinámica expresada en la ecuación 2.4 se simuló utilizando matlab y simulink. En el archivo *tanque\_simulink\_param.m* se definen todas las variables y parámetros que se utilizan en las simulaciones realizadas en simulink por lo que se recomienda ejecutar este archivo primero. En el archivo *tanque\_simulink.slx* se encuentra el bloque que representa la dinámica no lineal del tanque. El parámetro *h\_ini* indica el nivel inicial del tanque y *p\_apertura* indica el porcentaje de apertura de la válvula. En la simulación también se incluyó un saturador para el nivel del tanque en 1 m que corresponde a la altura del mismo. Se simuló la evolución del nivel del tanque para diferentes valores de los parámetros comentados y se obtuvo resultados coherentes con lo que se esperaría. A continuación se muestra uno de los resultados en el cual se simuló la apertura completa del la válvula de salida, es decir configurando *p\_apertura* = 1 y *h\_ini* = 0.6 m. Se puede observar como al abrir completamente el nivel de agua en el tanque se reduce hasta alcanzar un nivel en el cual el caudal de salida se iguala al caudal de entrada  $Q_{in}$  y, a partir de ese momento, se alcanza el estado estacionario. En la simulación esto se puede observar en la salida  $Q_{out}$ .

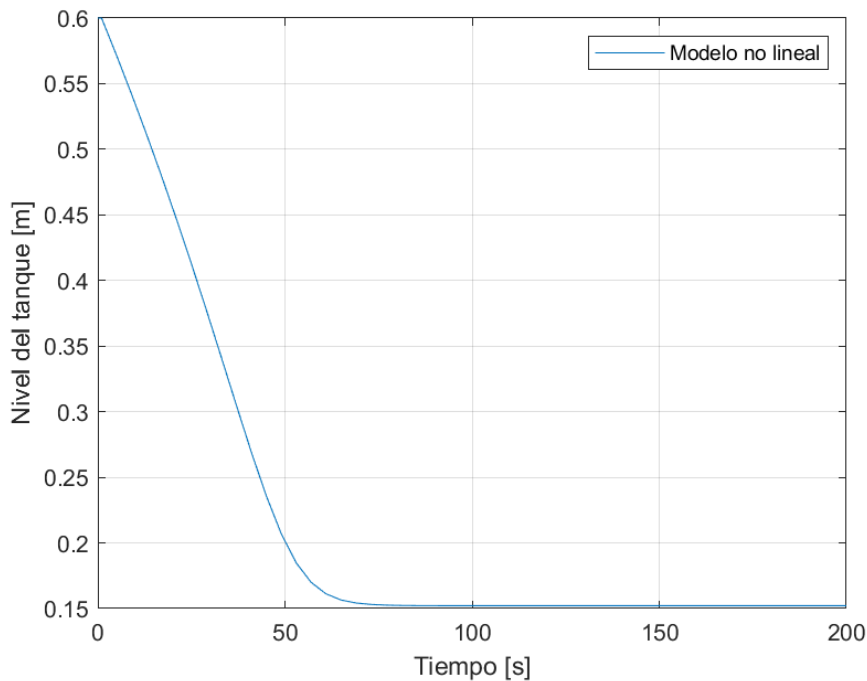


Figura 2.1: Respuesta del sistema cuando se abre completamente la válvula

## 2.3. Linearización del tanque cónico

Se linealizó la dinámica del sistema alrededor de un valor de  $h_0 = 0.6$  m. Para que efectivamente el sistema se encuentre en un estado de equilibrio se debe cumplir que  $\dot{h} = 0 \frac{m}{s}$ . Dada esta condición se obtiene que el porcentaje de apertura de la válvula correspondiente es:

$$\alpha_0 = \frac{Q_{in}}{\pi a^2 \sqrt{2gh_0}} = 0.5036 \quad (2.5)$$

Con este valor se linealiza la dinámica del tanque, obteniendo:

$$A = \left. \frac{\partial F(h, \alpha)}{\partial h} \right|_{h=h_0; \alpha=\alpha_0} = -0.0059 \frac{1}{s} \quad (2.6)$$

$$B = \left. \frac{\partial F(h, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{h=h_0; \alpha=\alpha_0} = -0.0141 \text{ m} \quad (2.7)$$

$$C = 1 \quad D = 0 \quad (2.8)$$

Se utilizó la herramienta *linear analysis* que se encuentra en simulink para verificar estos valores y se observó que los valores del sistema linealizado correspondían con los obtenidos de forma teórica. En el archivo de simulink llamado *tanque\_simulink\_lineal.slx* se encuentran 2 bloques de la planta no lineal junto con el sistema linealizado. En ambos bloques se inician con la condición inicial de  $h_0 = 0.6\text{ m}$  y la apertura de la válvula en  $\alpha_0 = 0,5036$ . De esta forma se aplica un incremento en la apertura de la válvula al sistema no lineal y el resultado se lo compara con lo que se obtiene al aplicar el mismo incremento al sistema linealizado que luego se suma al punto de trabajo. Se simularon ambos sistemas para incrementos del 5%, 15%, 30%, 50% y 90% del porcentaje de apertura de la válvula  $\alpha_0$ . Los incrementos se configuran a partir de la variable *d\_p\_apertura*. A continuación se muestran los resultados obtenidos para algunos de estos valores en donde se observa como a medida que el incremento en la apertura de la válvula es mayor, aumenta la diferencia entre el sistema no lineal y el sistema linealizado. Esto se debe a que el sistema linealizado se aparta cada vez más del punto de trabajo en donde fue calculado.

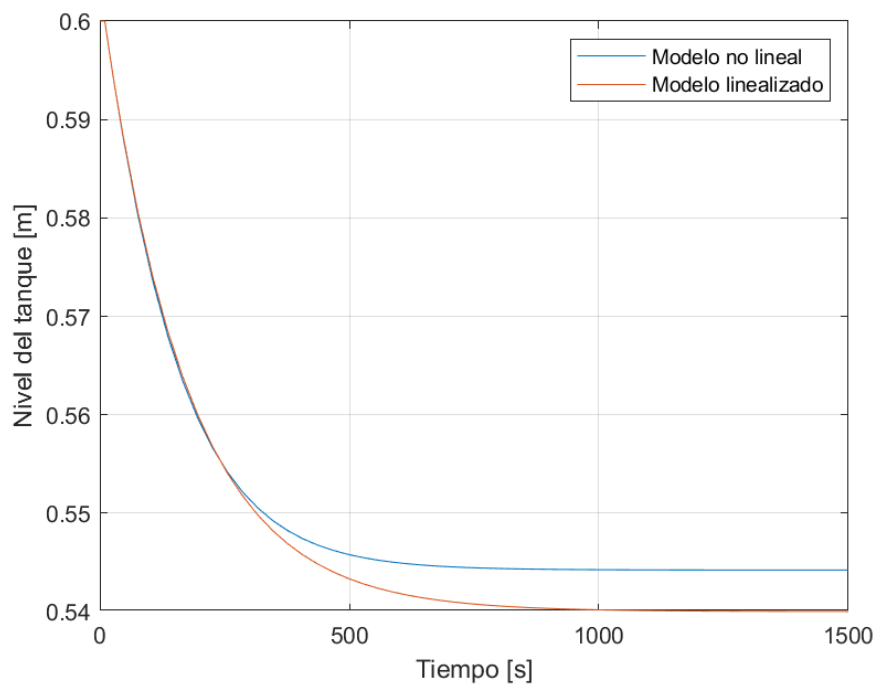


Figura 2.2: Comparación entre el sistema lineal y no lineal para un incremento de la apertura de la válvula de 5%

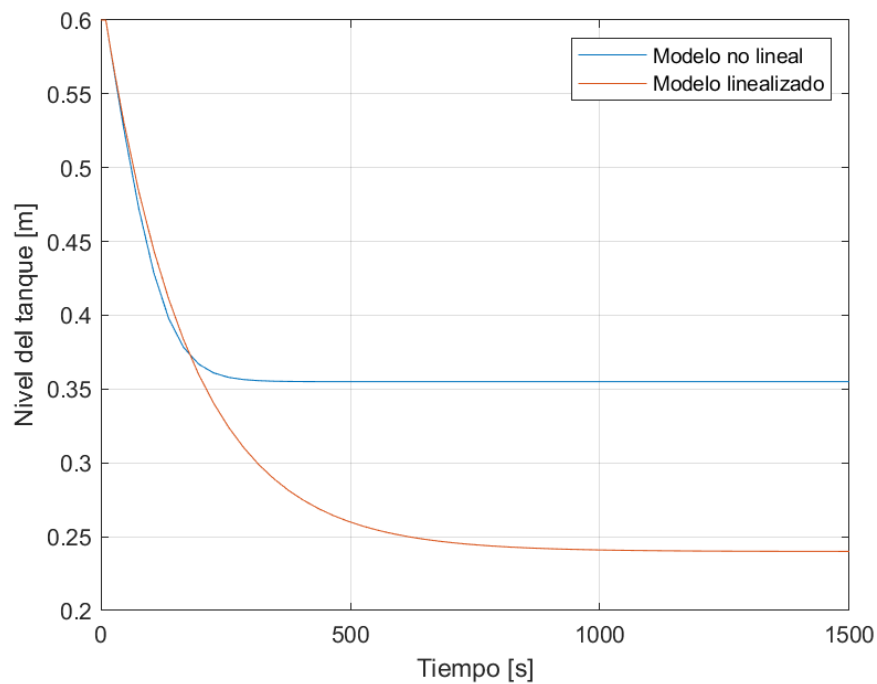


Figura 2.3: Comparación entre el sistema lineal y no lineal para un incremento de la apertura de la válvula de 30%

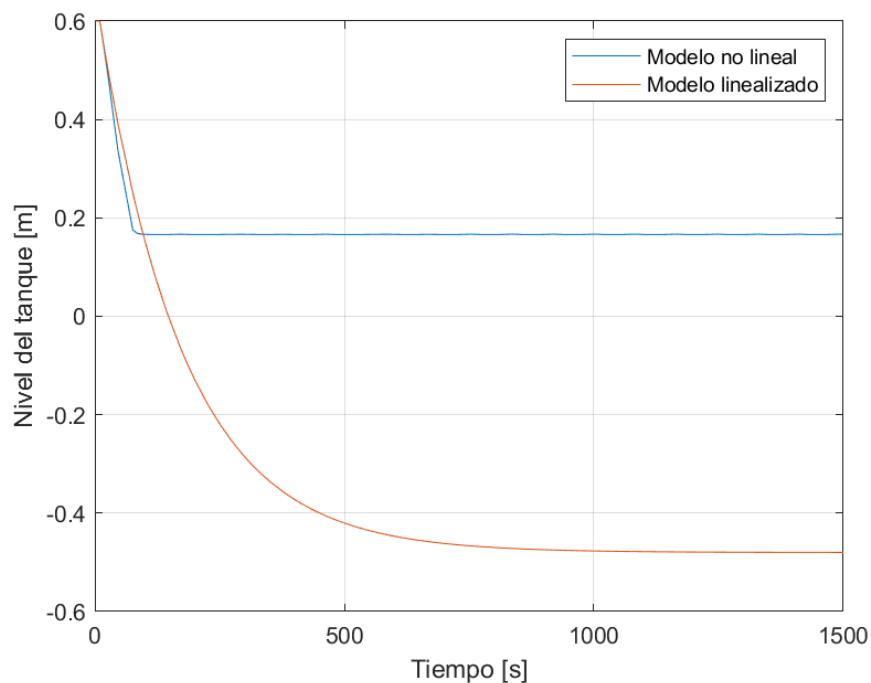


Figura 2.4: Comparación entre el sistema lineal y no lineal para un incremento de la apertura de la válvula de 90%

A continuación se muestra la diferencia relativa en estado estacionario entre el modelo no lineal del tanque y el modelo linealizado para los distintos incrementos simulados donde se observa como aumenta la diferencia en estado estacionario entre ambos modelos. Además en el caso extremo de un incremento de 90% se observa

como carece de sentido la simulación del sistema linealizado dado que se obtienen valores de nivel negativos.

Incremento	Diferencia relativa
5 %	0.7 %
15 %	7.42 %
30 %	32.38 %
50 %	99.97 %
90 %	388 %

Tabla 2.1: Diferencia relativa en estado estacionario del nivel del tanque para distintos incrementos de la apertura de la válvula.

## 2.4. Discretización del modelo linealizado

Se discretizó el sistema linealizado utilizando los métodos de Tustín y ZOH y se comparó el resultado de ambas discretización con los resultados del modelo no lineal y del linealizado. En el archivo `tanque_simulink_disc.slx` se encuentra el bloque en donde se simuló la dinámica del tanque cónico junto con la linealización del sistema y sus discretizaciones. Dado que de la linealización del modelo no lineal se obtuvo un sistema con una constante de tiempo  $\frac{1}{A} = 169\text{ s}$ , se decidió discretizar el sistema con un tiempo de muestreo por lo menos 10 veces menor, por lo que se utilizó un valor tiempo de muestreo de  $T_s = 10\text{ s}$ . En la figura 2.6 se muestra la comparación entre los 4 sistemas al aplicar un incremento del 5 % en la apertura de la válvula con respecto al punto de trabajo que se analizó anteriormente.

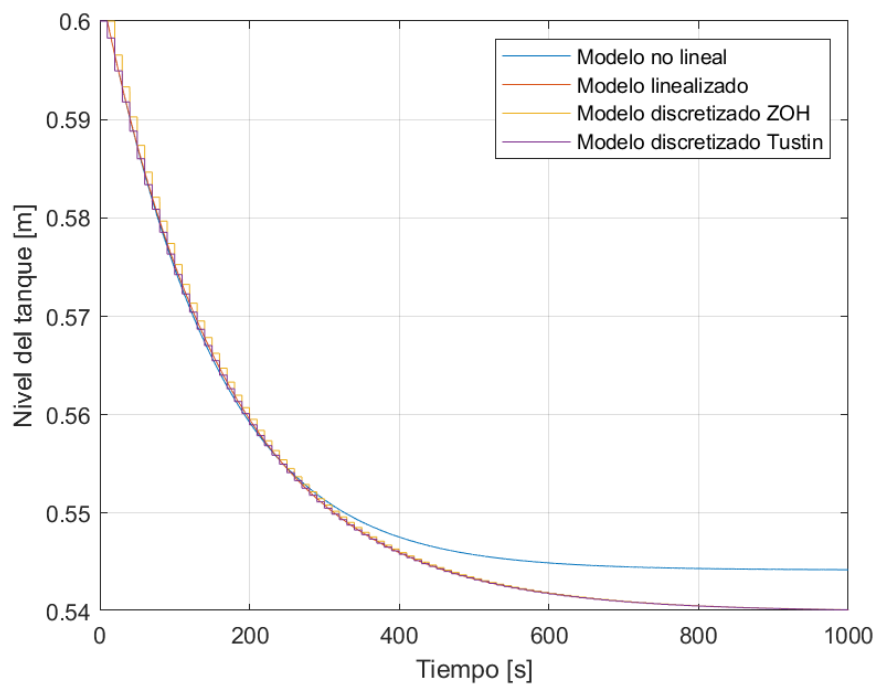


Figura 2.5: Comparación del modelo no lineal con la linealización del mismo y las discretizaciones correspondientes

A continuación se muestra el mismo resultado durante los primeros 70 segundos de la simulación para poder apreciar mejor la variación del modelo linealizado con las discretizaciones realizadas. Se observa como para la discretización mediante el método ZOH, se toma el valor correspondiente al modelo linealizado y se mantiene durante un tiempo de muestreo  $T_s$ . Este comportamiento coincide con la formulación del método ya que supone una entrada que puede aproximarse como constante durante el tiempo de muestreo. Se observa que para la respuesta obtenida a partir del método de Tustin, la respuesta del sistema linealizado se mantiene entre 2 valores consecutivos de la discretización.

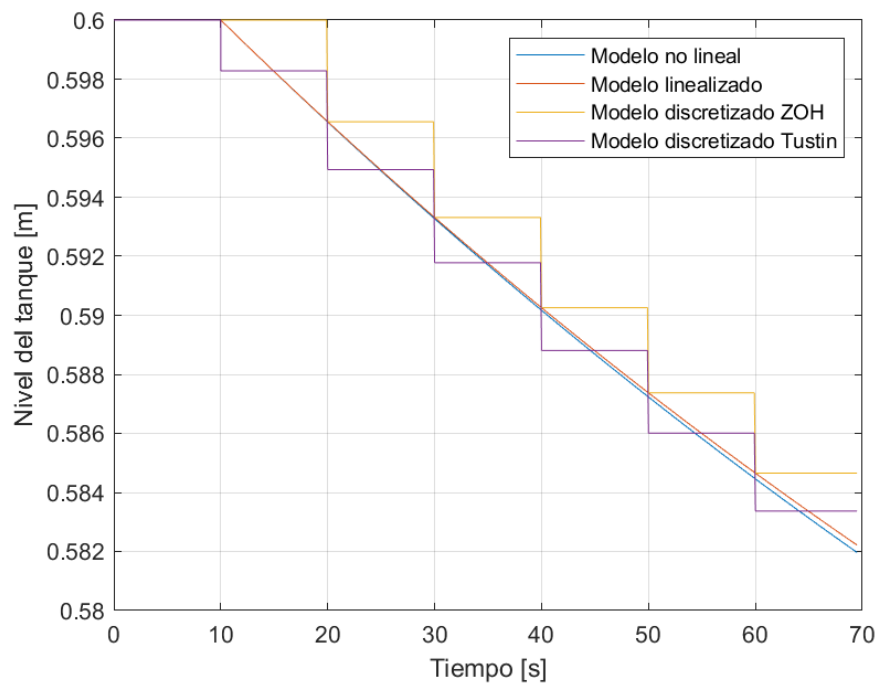


Figura 2.6: Comparación del modelo no lineal con la linealización del mismo y las discretizaciones correspondientes durante los primeros 70 segundos

### 3. Conclusiones

Se logró modelar el nivel de un tanque cónico cuando se aplica un caudal de entrada y se varía la apertura de una válvula de salida modificando de esta forma el caudal de salida. Se linealizó el sistema alrededor de un punto de equilibrio y se comparó el sistema no lineal donde se observaron las limitaciones al alejarse del punto de trabajo sobre el cual se linealizó. Luego se comparó la respuesta del modelo linealizado con la discretización del mismo a partir del método de Tustin y ZOH en donde se observó que al elegir un tiempo de muestreo lo suficientemente chico, ambos métodos se aproximan a la respuesta del modelo linealizado.