



## ROBÓTICA MÓVIL - UN ENFOQUE PROBABILÍSTICO ( 86.48 )

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Año 2020 - 2<sup>do</sup> cuatrimestre

TRABAJO PRÁCTICO N.º 1  
TEMA: Transformaciones, locomoción y sensado.  
FECHA: 12 de octubre de 2020  
GITHUB: [github.com/fnastasi/8648\\_Robotica\\_movil\\_TPs](https://github.com/fnastasi/8648_Robotica_movil_TPs)

INTEGRANTE :

Nastasi, Franco Gabriel  
[fnastasi@fi.uba.ar](mailto:fnastasi@fi.uba.ar)

- #100002

## 1. Transformaciones 2D y matrices afines

Dado un punto  $p \in \mathbb{R}^2$ , la transformación homogénea  $T$  que mapea las coordenadas de  $p$  expresadas en una terna  $(x, y)^1$  en otra terna  $(x, y)^0$  es:

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} R(\theta) & t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Donde  $R(\theta)$  es la matriz de rotación que se obtiene a partir de escribir los versores de la terna 1 en las coordenadas de la terna 0, que coincide con la rotación en un ángulo  $\theta$  de la terna 0 en sentido antihorario, y  $t_1$  es la distancia de la terna 1 a la terna 0 en las coordenadas de esta última. A partir de esta matriz se obtiene la siguiente ecuación:

$$p^0 = T_0^1 p^1 \quad (1.2)$$

Donde  $p^1$  es un vector columna que contiene las coordenadas de un punto  $p$  en  $\mathbb{R}^2$  con respecto a la terna 1 y  $p^0$  un vector columna con las coordenadas del mismo punto con respecto a la terna 0. Tanto  $p^1$  y  $p^0$  tienen dimensión 3 dado que se agrega un elemento igual a 1 a las coordenadas del punto para poder realizar la multiplicación con la matriz homogénea. Por lo tanto si se toma la terna 1 como aquella que está solidaria al

robot y la terna 0 como una terna global, las coordenadas de un obstáculo  $p$  tal que  $p^1 = \begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ 1 \end{bmatrix}$  se pueden escribir en la terna global como:

$$p^0 = T_0^1 p^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_1 \\ \sin \theta & \cos \theta & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x^1 \cos \theta - p_y^1 \sin \theta + x_1 \\ p_x^1 \sin \theta + p_y^1 \cos \theta + y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Esto es, las coordenadas del punto  $p$  en la terna global se pueden escribir como:

$$(p_x^1 \cos \theta - p_y^1 \sin \theta + x_1, p_x^1 \sin \theta + p_y^1 \cos \theta + y_1)$$

Para conocer las coordenadas en la terna del robot de un obstáculo del cual se conocen sus coordenadas en la terna global se debe invertir con cierto cuidado la matriz  $T_0^1$ . Para ello se sigue el siguiente razonamiento:

$$\begin{bmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \end{bmatrix} = R^{-1}(\theta) \left( \begin{bmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) = R^{-1}(\theta) \left( \begin{bmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \end{bmatrix} \right) - R^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Por lo tanto la matriz homogénea inversa de  $T_0^1$ ,  $T_1^0$  tal que  $\begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ 1 \end{bmatrix} = T_1^0 \begin{bmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ 1 \end{bmatrix}$  es

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} R^{-1}(\theta) & -R^{-1}(\theta)t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Dada una nueva pose  $x_2 = [x_2, y_2, \theta_2]^T$  en la terna global y la pose anterior  $x_1 = [x_1, y_1, \theta_1]^T$ , se tiene las siguientes ecuaciones:

$$p^0 = T_0^1 p^1 \quad (1.6)$$

$$p^0 = T_0^2 p^2 \quad (1.7)$$

Igualando ambas ecuaciones se tiene:

$$T_0^2 p^2 = T_0^1 p^1 \Rightarrow p^2 = (T_0^2)^{-1} T_0^1 p^1 = T_2^0 T_0^1 p^1 \quad (1.8)$$

Entonces la matriz homogénea  $T_2^1$  que mapea las coordenadas de un punto en la terna 1 en coordenadas de la terna 2 se puede escribir como

$$T_2^1 = T_2^0 T_0^1 = \begin{bmatrix} R^{-1}(\theta_2) & -R^{-1}(\theta_2)t_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(\theta_1) & t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{-1}(\theta_2)R(\theta_1) & R^{-1}(\theta_2)(t_1 - t_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Desarrollando  $R^{-1}(\theta_2)R(\theta_1)$  se obtiene otra matriz de rotación que depende de  $\theta_1 - \theta_2$ . Por lo tanto  $T_2^1$  se puede escribir como:

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) & -\sin(\theta_1 - \theta_2) & \cos(\theta_2)(x_1 - x_2) + \sin(\theta_2)(y_1 - y_2) \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) & \cos(\theta_1 - \theta_2) & \cos(\theta_2)(y_1 - y_2) - \sin(\theta_2)(x_1 - x_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Por último para conocer la posición del obstáculo en la terna solidaria al robot que se encuentra en la pose  $x_2$ , simplemente hay que calcular  $p^2$  como

$$p^2 = T_2^1 p^1 = T_2^1 \begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

## 2. Sensado

A continuación se muestran las mediciones obtenidas por el sensor. Dado que se tiene el valor de la distancia hacia el objeto detectado  $d$  y el ángulo correspondiente de esa medición  $\theta$ , se puede obtener las coordenadas cartesianas de los puntos detectados en la terna solidaria al sensor como:

$$(x, y) = (d \cdot \cos(\theta), d \cdot \sin(\theta))$$

Teniendo en cuenta que un sensor LiDaR emite pulsos que cuando son reflejados por un objeto, permite conocer la distancia hacia dicho objeto, cada punto de la figura 2.1 representa un punto perteneciente a algo que ha reflejado los pulsos emitidos. Dado que los puntos forman rectas paralelas y perpendiculares, se podría interpretar que el entorno es un recinto similar a un pasillo.

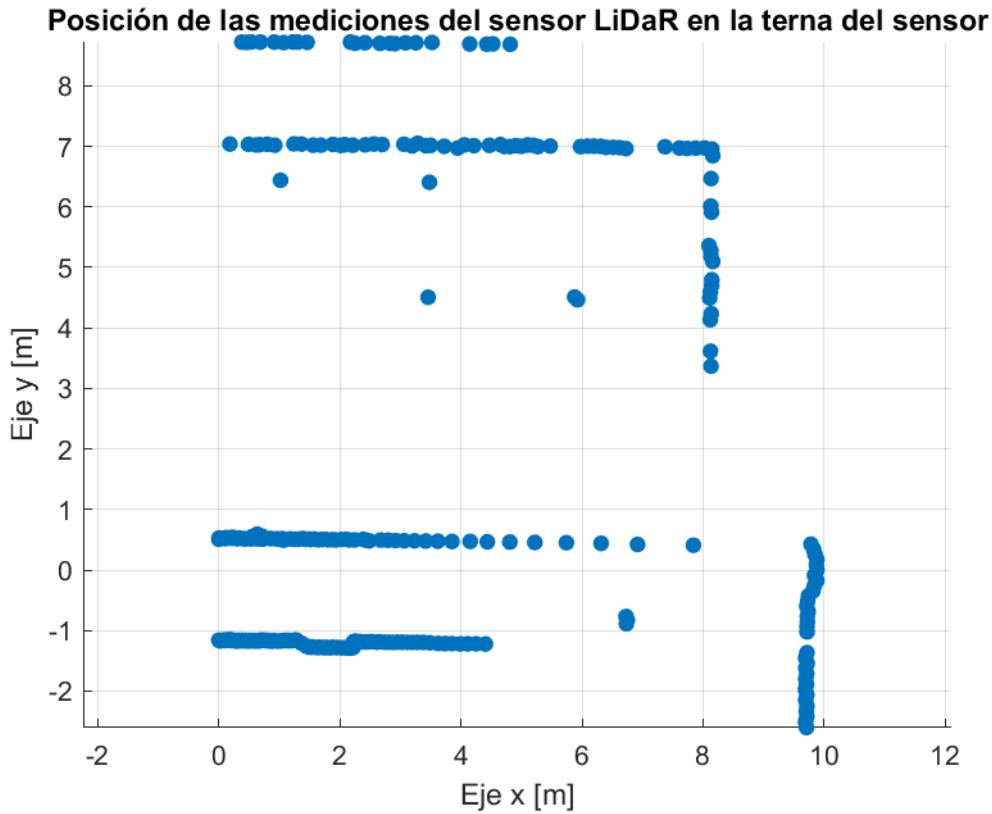


Figura 2.1: Mediciones obtenidas por el LiDaR en la terna solidaria al sensor

Conociendo la pose de sensor con respecto al robot se puede obtener la transformación homogénea  $T_{robot}^{sensor}$  que mapea las coordenadas de un objeto referidas a la terna del sensor a la terna del robot. Se puede realizar el mismo procedimiento para obtener la transformación homogénea  $T_{global}^{robot}$  que mapea coordenadas en la terna solidaria al robot a la terna global. Con ambas transformaciones se logra obtener las coordenadas de las mediciones en la terna global a partir de los valores de coordenadas de los mismo objetos referidos a la terna solidaria al sensor.

$$med^{global} = T_{global}^{robot} \cdot T_{robot}^{sensor} \cdot med^{sensor} \quad (2.1)$$

A partir de la pose del sensor referida al robot,  $pose_{sensor}^{robot} = (0,2m, 0m, \pi)$ , la transformación homogénea que se obtiene es

$$T_{robot}^{sensor} = \begin{bmatrix} \cos \pi & -\sin \pi & 0,2 \\ \sin \pi & \cos \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0,2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

De la misma manera, a partir de  $pose_{robot}^{global} = (1m, 0,5m, \frac{\pi}{4})$ , se obtiene la transformación homogénea

$$T_{global}^{robot} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} & 1 \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,707 & -0,707 & 1 \\ 0,707 & 0,707 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

A partir de estas transformaciones se puede calcular todas las coordenadas referidos a la terna global los cuales se grafican en la figura 2.2.

$$r_{robot}^{global} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$r_{sensor}^{global} = \left( T_{global}^{robot} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)_{filas \ 1:2} = \begin{bmatrix} 1,1414 \\ 0,6414 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Posición de los objetos y las mediciones del sensor LiDaR en la terna global

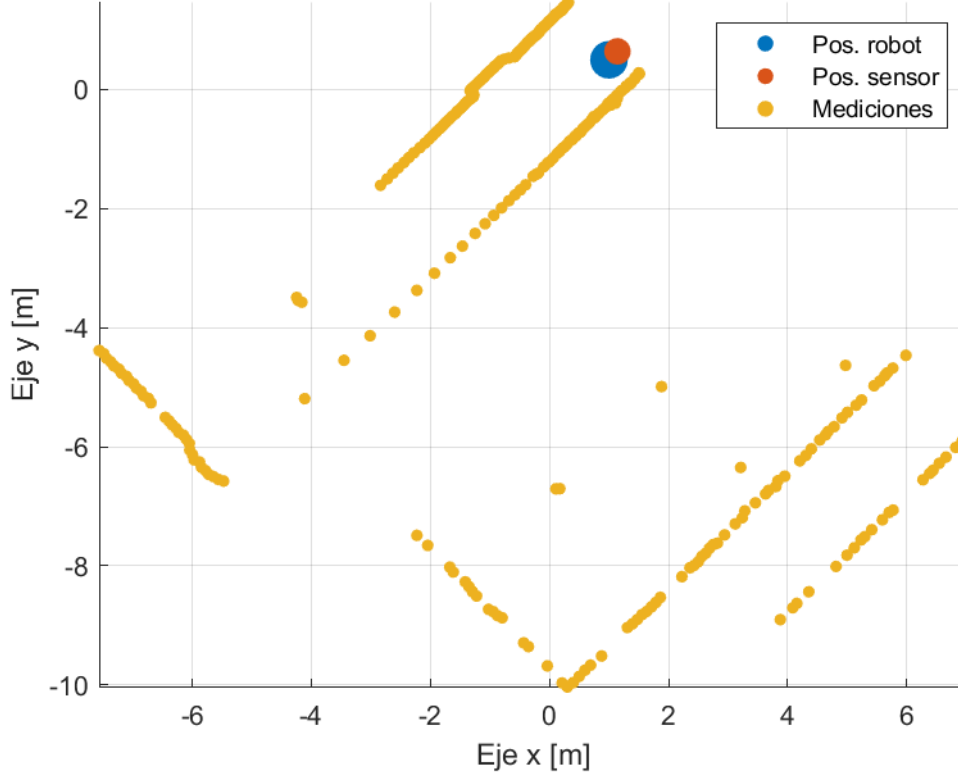


Figura 2.2: Mediciones obtenidas por el LiDaR referidas a la terna global.

### 3. Accionamiento diferencial

Dada las velocidades de ambas ruedas,  $v_r$ ,  $v_l$  y la distancia entre las ruedas  $l$ , es posible calcular el centro de curvatura instantáneo ICC, la velocidad de rotación  $\omega$  y la velocidad de robot  $v$ :

$$R = \frac{l}{2} \frac{v_l + v_r}{v_r - v_l} \quad (3.1)$$

$$\omega = \frac{v_r - v_l}{l} \quad (3.2)$$

$$v = \frac{v_r + v_l}{2} \quad (3.3)$$

$$ICC = (x - R \sin \theta, y + R \sin \theta) \quad (3.4)$$

Mientras que para obtener la pose  $(x, y, \theta)$ , se integra  $v$  y  $\omega$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') \cos(\theta(t')) dt' \quad (3.5)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(t') \sin(\theta(t')) dt' \quad (3.6)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t') dt' \quad (3.7)$$

Entonces si inicialmente el robot se encuentra en  $x_0 = 1,5$ ,  $y_0 = 2$  y  $\theta_0 = \pi/3$ , dada las velocidades de las ruedas se puede conocer la trayectoria y orientación del robot en todo momento. Analicemos 3 casos:

- $v_l = 0,3m/s$ ,  $v_r = 0,3m/s$ ,  $t = 2s$ . Dado que las velocidades de las ruedas son iguales, no se modifica la orientación del robot ( $\omega = 0rad/s$ ) y se espera que la trayectoria sea una línea recta
- $v_l = 0,2m/s$ ,  $v_r = -0,2m/s$ ,  $t = 2s$ . En este caso, dado que la velocidad de la rueda derecha es igual en magnitud pero en signo contrario al de la rueda izquierda, se espera que la posición del robot no se vea modificada pero si su orientación.
- $v_l = 0,1m/s$ ,  $v_r = 0,6m/s$ ,  $t = 2s$ . Dado que la velocidad de la rueda izquierda es diferente a la velocidad de la rueda derecha, se espera que tanto la posición como la orientación del robot se vean modificada. Dado que  $v_l < v_r$  se espera que la trayectoria del robot sea circular en sentido antihorario.

A continuación se muestra la trayectoria del robot durante todas las acciones junto con el valor del ICC. Para la primer trayectoria, el ICC puede considerarse en infinito dado que para calcular R habría que dividir por 0. Dado que se realiza una trayectoria recta, el radio de curvatura puede considerarse en algún punto infinito. En la segunda trayectoria el ICC coincide con el centro del robot ya que éste produce una rotación sobre si mismo. Para la última trayectoria, el ICC coincide con el centro del círculo sobre el cual el robot se está moviendo.

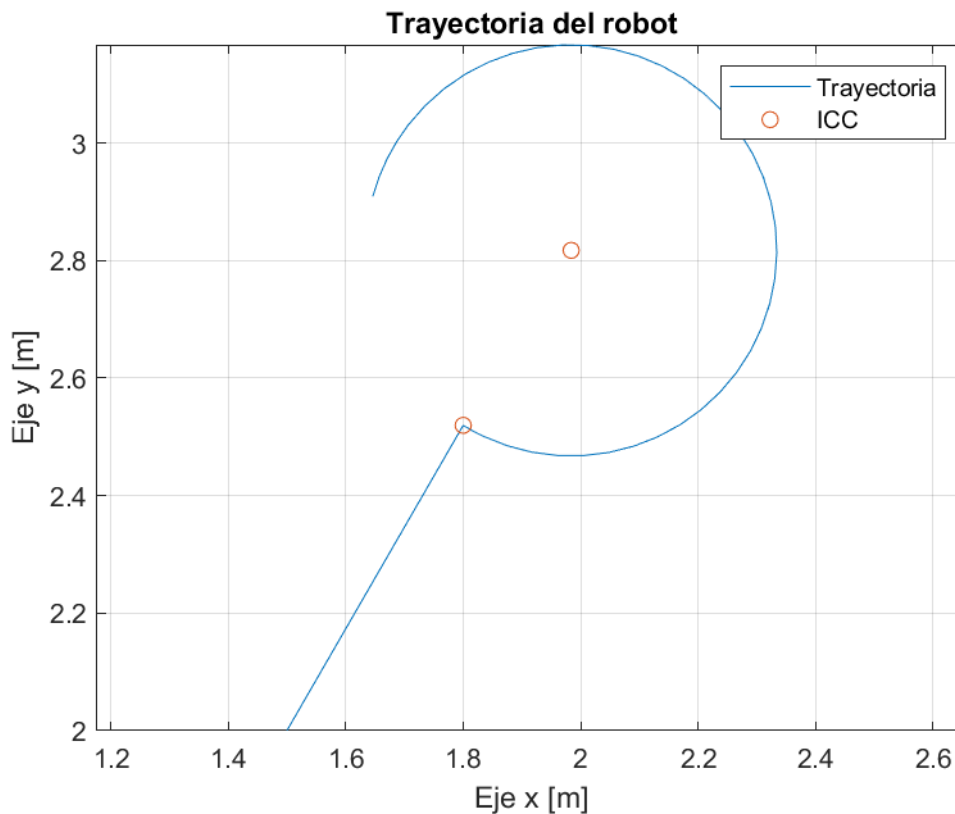


Figura 3.1: Trayectoria del robot y ICC

A continuación se muestra la evolución temporal de lo que le sucede a cada una de las variables de la pose en donde se puede apreciar algunos aspectos que no se ven en la trayectoria, como por ejemplo la variación lineal de la orientación mientras que la posición en  $x$  e  $y$  no se ve modificada durante el segundo accionamiento.

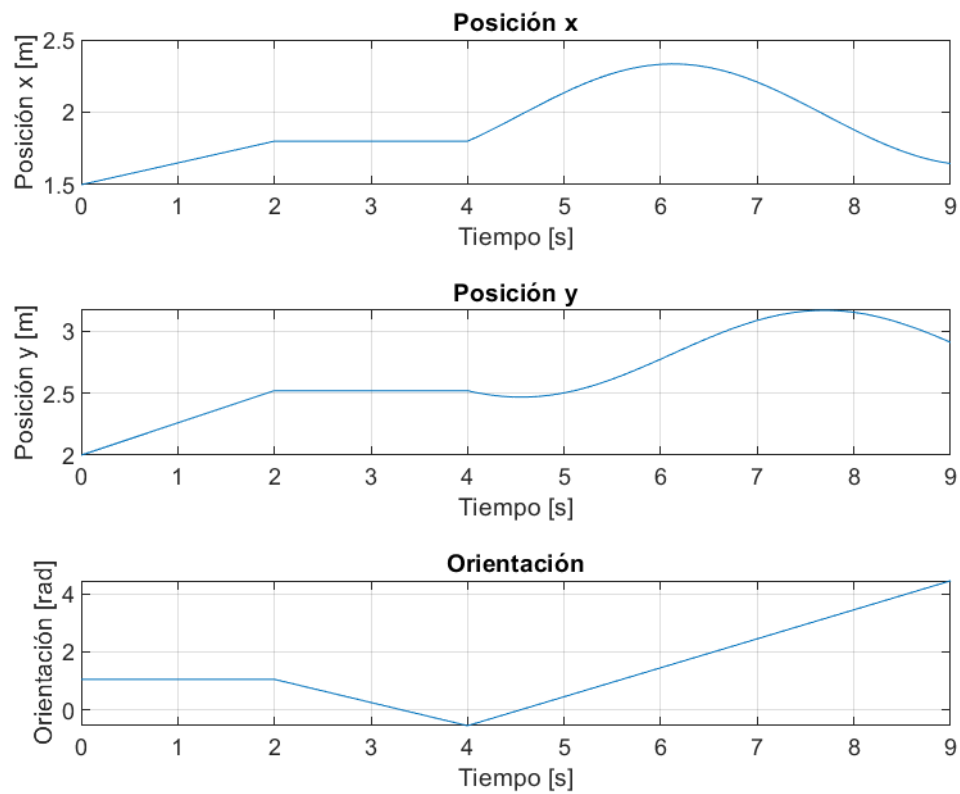


Figura 3.2: Evolución temporal de la pose del robot

## 4. Conclusiones

Se logró generar un conjunto de transformaciones homogéneas que permitieron, mediante simulación, conocer como se transforman las coordenadas de objetos en la terna solidaria a un sensor a una terna global. También se logró generar la trayectoria que realiza un robot bajo accionamiento diferencial y conocer como se modifica el ICC en cada caso. Ambas actividades permiten familiarizarse con conceptos básicos relacionados a la cinemática de un robot.