

Problema cinemático inverso (IRB-140)

Pablo González

8 de julio de 2017

1. Estudio de la muñeca

La ubicación del centro de la muñeca depende de las variables joint $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. En la primera parte del problema cinemático inverso se resuelve ésta relación. Queda por estudiar los valores que tomarán las variables $(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$. Para esto se observa que intervienen sólo en la orientación de la herramienta.

Recordando la definición de la matriz $A_0^6(\theta)$

$$A_0^6(\theta) = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Por convención el versor \mathbf{a} recibe el nombre de *approach* pues indica la dirección de acercamiento de la herramienta (versor \mathbf{z}_6), el versor \mathbf{s} el nombre de *slide to open* pues indica la dirección en la que abre la pinza en el caso general que ésta sea la herramienta (versor \mathbf{y}_6) y finalmente el versor \mathbf{n} el nombre de *normal* indicando la normal a los anteriores (versor \mathbf{x}_6).

Tomando la parte de rotación de la ecuación 1 tenemos

$$\begin{aligned} R_0^6 &= [\mathbf{n} \quad \mathbf{s} \quad \mathbf{a}] \\ R_0^3 R_3^6(\theta_4, \theta_5, \theta_6) &= [\mathbf{n} \quad \mathbf{s} \quad \mathbf{a}] \\ R_3^6(\theta_4, \theta_5, \theta_6) &= (R_0^3)^T [\mathbf{n} \quad \mathbf{s} \quad \mathbf{a}] = [\mathbf{n}' \quad \mathbf{s}' \quad \mathbf{a}'] \end{aligned}$$

La matriz R_3^6 se obtiene como $R_3^4 R_4^5 R_5^6$ donde la relación con las variables joint θ_4, θ_5 y θ_6 se evidencia al escribir la expresión de las matrices de rotación

$$\begin{aligned}
R_3^4 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & -\sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
R_4^5 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & 0 & -\sin \theta_5 \\ \sin \theta_5 & 0 & \cos \theta_5 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
R_5^6 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Calculando $R_4^6 = R_4^5 R_5^6$ se tiene

$$R_4^6 = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 \cos \theta_6 & -\cos \theta_5 \sin \theta_6 & \sin \theta_5 \\ \sin \theta_5 \cos \theta_6 & -\sin \theta_5 \sin \theta_6 & -\cos \theta_5 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Por otro lado, se puede escribir

$$\begin{aligned}
R_3^4 R_4^6 &= [\mathbf{n}' \quad \mathbf{s}' \quad \mathbf{a}'] \\
R_4^6 &= (R_3^4)^T [\mathbf{n}' \quad \mathbf{s}' \quad \mathbf{a}']
\end{aligned}$$

Calculando solamente la tercera columna de R_4^6 en la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned}
R_4^6 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{bmatrix} \\
R_4^6|_{(:,3)} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 a'_x + \sin \theta_4 a'_y \\ -a'_z \\ -\sin \theta_4 a'_x + \cos \theta_4 a'_y \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Igualando a 2 se puede escribir

$$\begin{aligned}
\cos \theta_4 a'_x + \sin \theta_4 a'_y &= \sin \theta_5 \\
-a'_z &= -\cos \theta_5 \\
-\sin \theta_4 a'_x + \cos \theta_4 a'_y &= 0
\end{aligned}$$

Despejando θ_4 de la tercera ecuación

$$\theta_4 = \text{atan2}(\pm a'_y, \pm a'_x) \rightarrow \theta_4 \text{ y } \theta_4 \pm \pi \quad (3)$$

Además θ_5 se obtiene de la primera y la segunda ecuación

$$\theta_5 = \text{atan2}(\cos \theta_4 a'_x + \sin \theta_4 a'_y, a'_z) \rightarrow \theta_5 \text{ o } -\theta_5 \quad (4)$$

Por otro lado si calculamos la tercer fila de R_4^6 se tiene

$$R_4^6|_{(3,:)} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_x & s'_x & a'_x \\ n'_y & s'_y & a'_y \\ n'_z & s'_z & a'_z \end{bmatrix}$$

$$R_4^6|_{(3,:)} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_4 n'_x + \cos \theta_4 n'_y & -\sin \theta_4 s'_x + \cos \theta_4 s'_y & -\sin \theta_4 a'_x + \cos \theta_4 a'_y \end{bmatrix}$$

Igualando a 2 se puede escribir

$$\begin{aligned} -\sin \theta_4 n'_x + \cos \theta_4 n'_y &= \sin \theta_6 \\ -\sin \theta_4 s'_x + \cos \theta_4 s'_y &= \cos \theta_6 \\ -\sin \theta_4 a'_x + \cos \theta_4 a'_y &= 0 \end{aligned}$$

Donde se puede despejar de la primera y la segunda la expresión de θ_6

$$\theta_6 = \text{atan2}(-\sin \theta_4 n'_x + \cos \theta_4 n'_y, -\sin \theta_4 s'_x + \cos \theta_4 s'_y) \rightarrow \theta_6 \text{ o } -\theta_6 \quad (5)$$

Aun queda por definir el grado de indeterminación que surge en las ecs. 3,4 y 5. Calculando $R_3^4 R_4^6$ para obtener R_3^6 y mirando la tercer columna

$$R_3^6|_{(:,3)} = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & -\sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_5 \\ -\cos \theta_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3^6|_{(:,3)} = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \sin \theta_5 \\ \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\ \cos \theta_5 \end{bmatrix}$$

Igualando en la definición a la tercer columna de R_3^6 se cumple

$$\begin{aligned} \cos \theta_4 \sin \theta_5 &= a'_x \\ \sin \theta_4 \sin \theta_5 &= a'_y \\ \cos \theta_5 &= a'_z \end{aligned}$$

De la primera y la segunda resulta

$$\theta_4 = \text{atan2}\left(\frac{a'_y}{\sin \theta_5}, \frac{a'_x}{\sin \theta_5}\right) \quad (6)$$

La ec. 4 resulta

$$\theta_5 = \text{atan2}(\cos \theta_4 a'_x + \sin \theta_4 a'_y, a'_z) \quad (7)$$

Y la ec. 5

$$\theta_6 = \text{atan2}(-\sin \theta_4 n'_x + \cos \theta_4 n'_y, -\sin \theta_4 s'_x + \cos \theta_4 s'_y) \quad (8)$$

El indicador de configuración es entonces el signo de $\sin \theta_5$ o bien $\text{sign}(\theta_5)$. En este caso las dos posibles configuraciones que se tienen al nivel de la muñeca son *muñeca positiva* o *muñeca negativa*.

En la Fig. 1 se observan las dos posibles configuraciones de la muñeca para la configuración brazo adelante y codo arriba. En el software del robot toman los valores

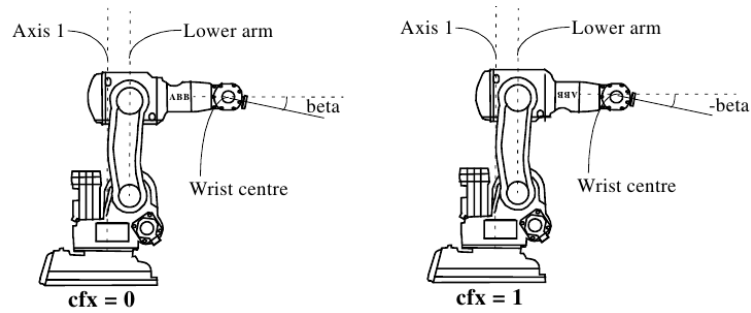


Figura 1: Dos posibles configuraciones de la muñeca para el caso de brazo adelante y codo arriba. Notar que el eslabón 4 rota 180° al cambiar la configuración.

`cfx=0`

para (brazo adelante, codo arriba, muñeca positiva) y

`cfx=1`

para (brazo adelante, codo arriba, muñeca negativa).

Otras posibilidades se encuentran en el manual de referencia de *Rapid* del robot (ver tipo de dato `confdata`, capítulo 1 página 13).