



ROBÓTICA (86.15)

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA
Año 2019 - 2^{do} cuatrimestre

TRABAJO PRÁCTICO N.º 3
TEMA: Jacobiano de velocidades
FECHA: 23 de noviembre de 2019

INTEGRANTE :

Nastasi, Franco Gabriel
fnastasi@fi.uba.ar

- #100002

1. Desarrollo

1.1. Jacobiano y singularidades

Para conocer las condiciones en que se produce una singularidad sobre el robot IRB 140 de la marca ABB, es necesario conocer el Jacobiano del robot y los valores de θ_i que hacen su determinante nulo. Debido a que los últimos 3 ejes del robot forman una articulación esférica, es posible conocer la velocidad de la TCP utilizando solamente la matriz homogénea que transforma la terna 0 en la terna 4. Se tiene:

$$\vec{v}_{o4} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \end{bmatrix} \dot{\vec{\theta}} \quad (1.1)$$

Si se toma la terna 3 para expresar la velocidad del origen de la terna 4, se llega a que $J_{12}^3 = 0$ y que

$$J_{12}^3 = \begin{bmatrix} 0 & d_4 + a_2 s_3 & d_4 \\ d_4 s_{23} + a_2 c_2 + a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 c_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Ahora el vector $\vec{\omega}_6$ se puede escribir como:

$$\vec{\omega}_6 = \begin{bmatrix} J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \dot{\vec{\theta}} \quad (1.3)$$

Por lo que si el vector $\vec{\omega}_6$ se escribe en la terna 4 se tiene que

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_{o4}^3 \\ \vec{\omega}_6^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^3 & 0 \\ J_{21}^4 & J_{22}^4 \end{bmatrix} \dot{\vec{\theta}} \quad (1.4)$$

Entonces se observa que para conocer el determinante del jacobiano, solo es necesario conocer el determinante de J_{11}^3 y J_{22}^4 . Esta última matriz tiene la expresión:

$$J_{22}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_5 \\ -1 & 0 & -c_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Por lo tanto se tiene que :

$$|J_{11}^3| = (d_4 s_{23} + a_2 c_2 + a_1) \times (-a_2 c_3) = 0 \quad |J_{22}^4| = -s_5 = 0 \quad (1.6)$$

Es decir que las condiciones que anulan en determinante son

$$d_4 s_{23} + a_2 c_2 + a_1 = 0 \quad (1.7)$$

$$c_3 = 0 \quad (1.8)$$

$$s_5 = 0 \quad (1.9)$$

La singularidad dada por la ecuación 1.7 que se suele nombrar como singularidad del hombro, se corresponde cuando el origen de la terna 4 está sobre el eje 1, es decir sobre la prolongación del eje z de la terna 0. La singularidad dada por $c_3 = 0$ corresponde cuando el brazo se encuentra estirado completamente mientras que la singularidad de la ecuación 1.9, referida como singularidad de la muñeca, se da cuando el eje 4 y el eje 6 quedan alineados.

1.2. POSE alcanzable

A continuación se muestran las imágenes de una POSE con las 8 formas de ser alcanzable al cambiar los índices de configuración.

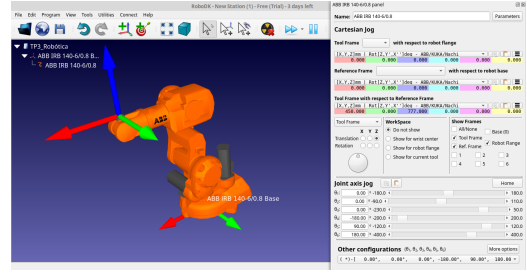
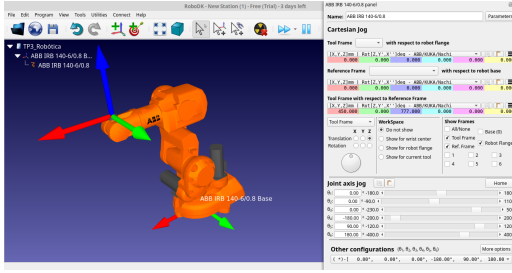


Figura 1.1: POSE alcanzable con configuración 0 (izquierda) y 1 (derecha)

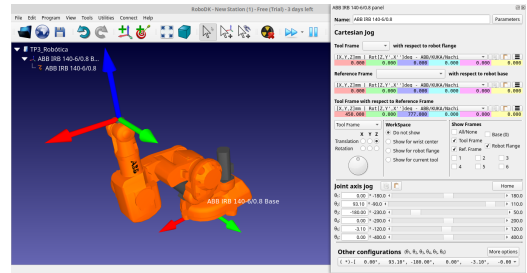
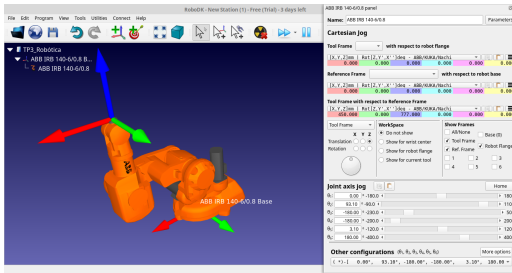


Figura 1.2: POSE alcanzable con configuración 2 (izquierda) y 3 (derecha)

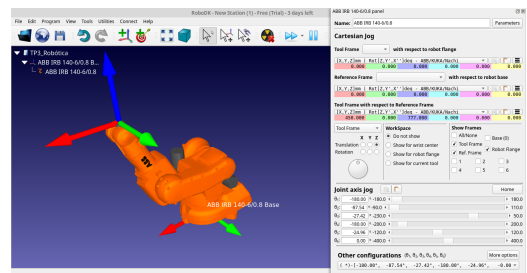
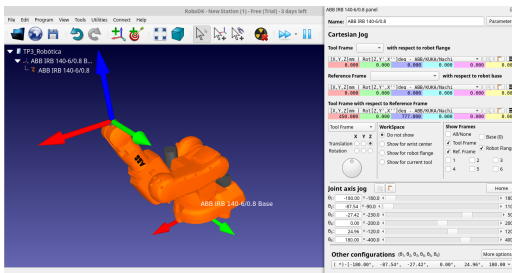


Figura 1.3: POSE alcanzable con configuración 4 (izquierda) y 5 (derecha)

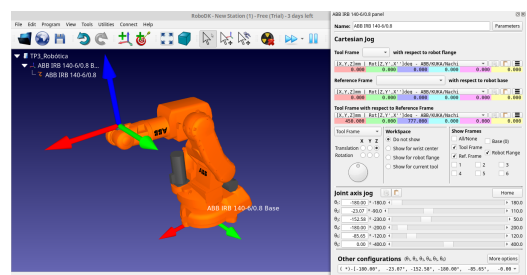
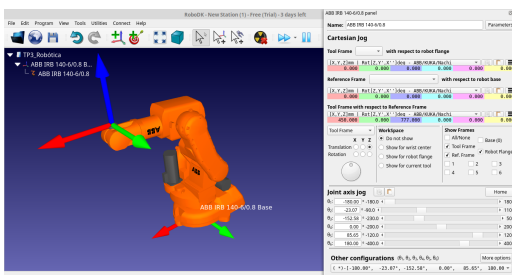


Figura 1.4: POSE alcanzable con configuración 6 (izquierda) y 7 (derecha)

1.3. Robot IRB 140 en puntos singulares

Cuando el robot se encuentra en los puntos singulares, la dimensión del núcleo del Jacobiano es mayor a 0 indicando que si el vector $\hat{\theta}$ no es nulo pero pertenece al núcleo, no se producirá movimiento lineal ni de traslación de la terna asociada a la muñeca ya que

$$\begin{bmatrix} \ddot{v}_{04}^3 \\ \ddot{\omega}_6^4 \end{bmatrix} = J\ddot{\theta} = 0 \quad \ddot{\theta} \in Nu(J) \quad (1.10)$$

Es decir que aunque las variables articulares posean movimiento, se puede dar el caso en que no se produzca movimiento de la muñeca. De forma similar debido a la ecuación:

$$\vec{\tau} = J^T \vec{F} = 0 \quad \vec{F} \in Nu(J^T) \quad (1.11)$$

Como $|J| = |J^T|$, en los puntos singulares de J se tiene es posible que no se produzca movimiento aunque se esté realizando torques en las articulaciones.

Para la singularidad del hombro que se observa en la figura 1.5, se tiene que se da la condición:

$$d_4 s_{23} + a_2 c_2 + a_1 = 0 \quad (1.12)$$

Y se tiene que el jacobiano y el jacobiano transpuesto son:

$$J_{12}^3 = \begin{bmatrix} 0 & d_4 + a_2 s_3 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 c_3 & 0 \end{bmatrix}; \quad (J_{12}^3)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_4 + a_2 s_3 & 0 & -a_2 c_3 \\ d_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Por lo que se tiene que no se produce velocidad en la muñeca cuando los valores de $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_3$ adquieren algún valor del subespacio:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto es, el eje 1 no produce velocidad en la muñeca en esta singularidad. Mientras que no se produce movimiento en el siguiente subespacio referido a la terna 3:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es decir que no se realiza movimiento en la dirección y de la terna 3, la cual siempre es ortogonal a la dirección longitudinal del eslabón 3.

No es posible salir de la condición de singularidad al moverse por el núcleo del Jacobiano por lo que es una singularidad del tipo 2 y la única forma de salir del núcleo es mediante un movimiento del tipo joint.

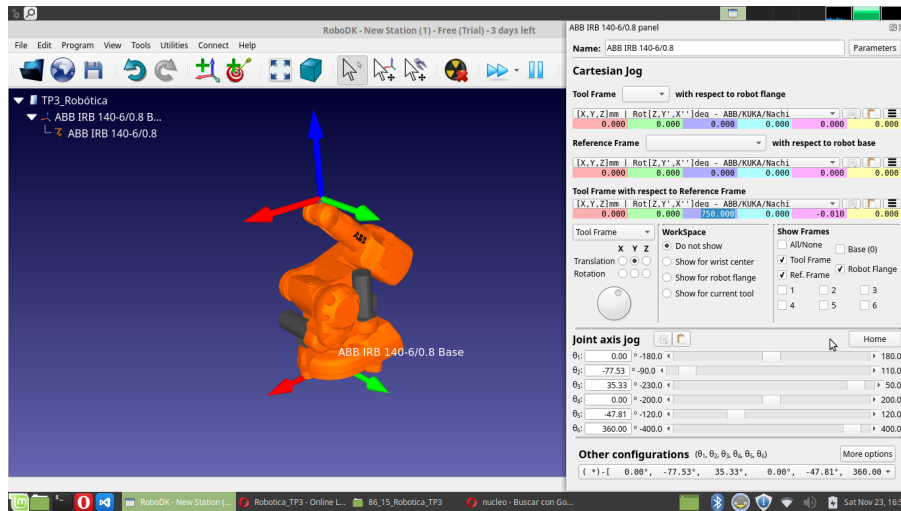


Figura 1.5: Singularidad del hombro

La singularidad de la muñeca está dada por $s_3 = 0$, esto es cuando el eje 4 y el eje 6 se alinean como se ve en la figura 1.6. En este caso se tiene:

$$J_{22}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Por lo que el núcleo es el subespacio generado por

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Mientras que el núcleo del transpuesto del Jacobiano es:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Es decir que no se produce velocidad al variar el eje 4 y el eje 6 en sentidos contrario y no se producen movimiento en el eje x de la terna 4. La singularidad de la muñeca es de tipo 2 por lo que solo se puede salir de esta condición con un movimiento *joint* y no es posible salir al moverse por el núcleo.

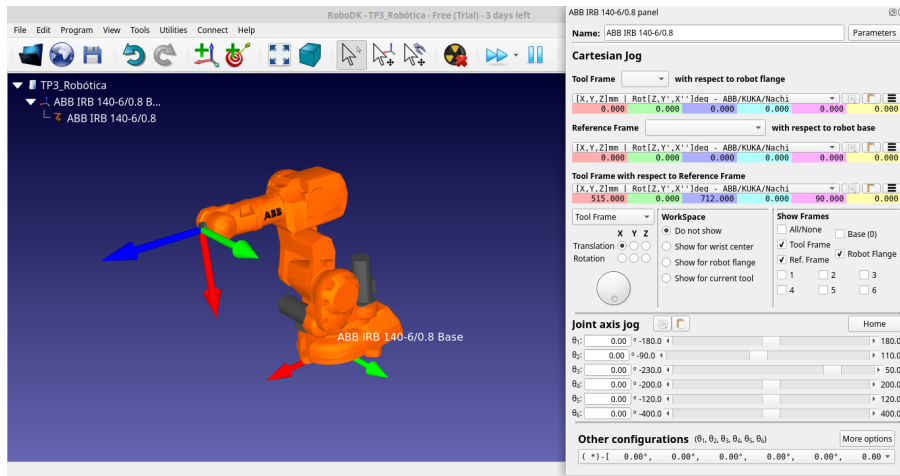


Figura 1.6: Singularidad cuando los ejes 4 y 6 se alinean

La singularidad dada por $c_3 = 0$, como se muestra en la figura 1.7 es la singularidad del codo y se produce cuando el brazo está completamente estirado. Realizando un análisis similar a las otras singularidades se obtiene que el núcleo del Jacobiano es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{d_4 - a_2}{d_4} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Esto es, no se produce movimiento cuando el eje 2 y el eje 3 están dotados de una velocidad dada por la relación que indica el subespacio. El núcleo del Jacobiano transpuesto es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Lo que indica que no es posible que se produzca movimiento en la dirección z de la terna 3 que coincide con la dirección longitudinal del eslabón 3 por lo que esto indica que no se pueden realizar movimientos de avance en la dirección del brazo como es esperable por estar completamente estirado. Esta singularidad es del tipo 1 por lo que es posible salir del núcleo al moverse dentro del subespacio que lo genera.

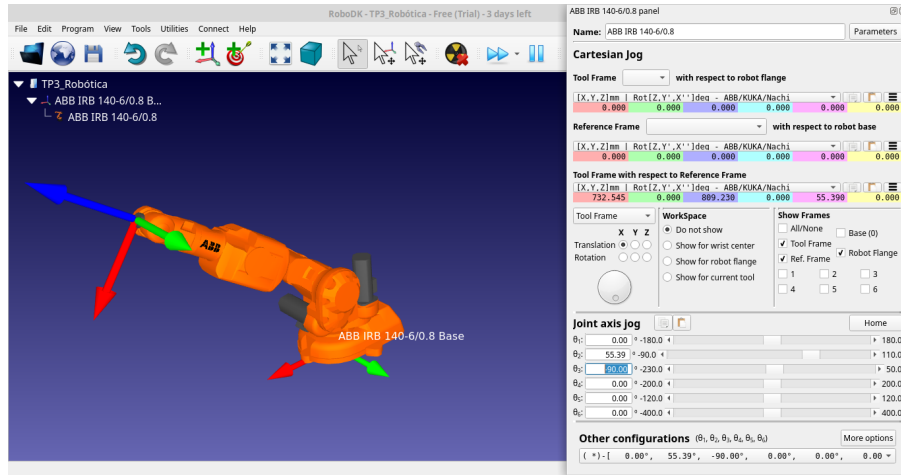


Figura 1.7: Singularidad cuando el brazo se encuentra extendido

1.4. Variación de las variables articulares ante movimiento lineal.

Se decidió graficar la variación de θ_1 , θ_2 y θ_3 al mover el extremo del robot con un movimiento lineal de $200 \frac{mm}{s}$ en la dirección y de la terna 0 y sin cambiar de orientación. Esto es, se quiere mantener velocidad constante sobre el robot y moverlo entre las pose:

$$POSE_{ini} = [[x, -100, 500], [1, 0, 0, 0]]$$

$$POSE_{fin} = [[x, 100, 500], [1, 0, 0, 0]]$$

Tanto para $x = 10 \text{ mm}$ y $x = 0,1 \text{ mm}$

$$\dot{v}_{o4}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{mm}{s}$$

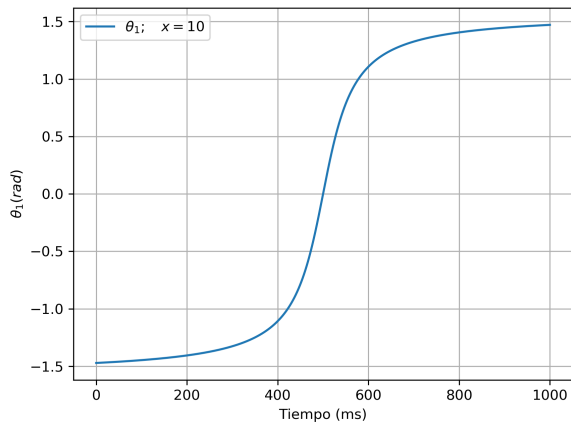
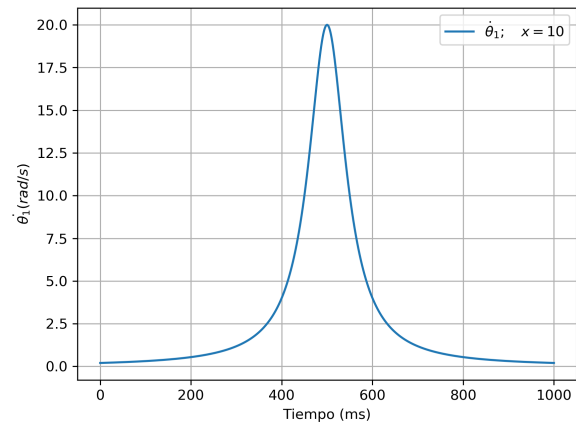
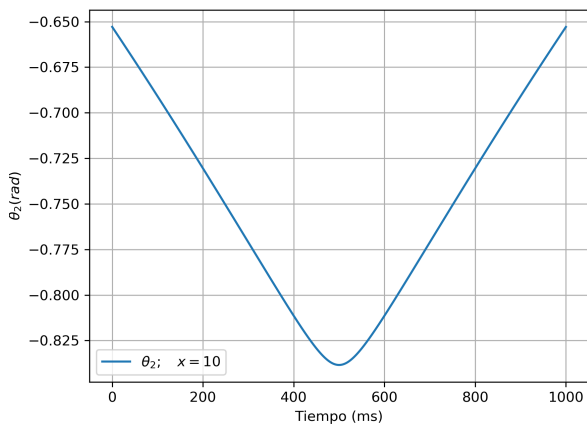
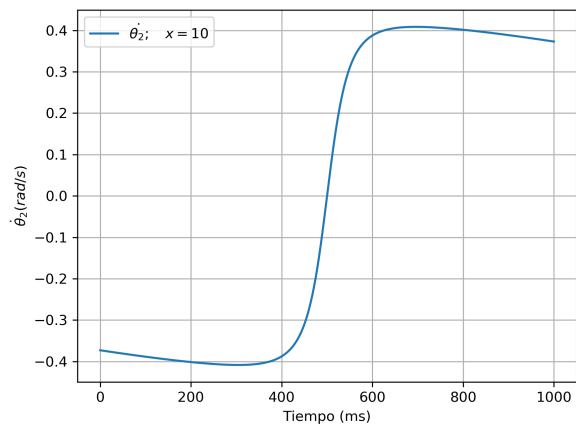
Para ello se utilizó el Jacobiano del robot en la terna 3. Para calcular correctamente el valor de las derivadas de las variables articuladas, se debe escribir la velocidad de la TCP en la terna 3. Esto puede realizarse mediante el cálculo de $R_3^0 = (R_0^3)^T = (R_0^1 \times R_1^2 \times R_2^3)^T$ a través de las matrices homogéneas A_0^1 , A_1^2 , A_2^3 obtenidas con los parámetros D-H. Es decir que se procedió de la siguiente manera:

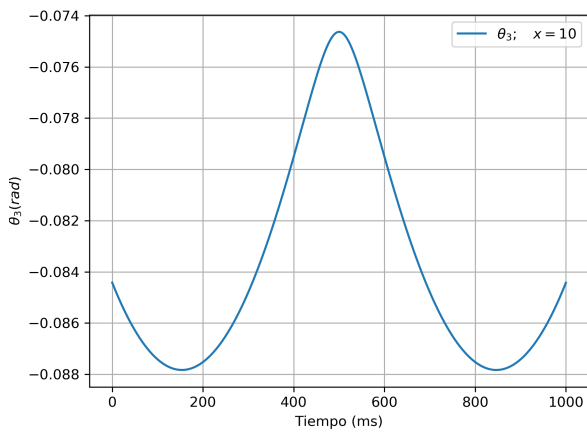
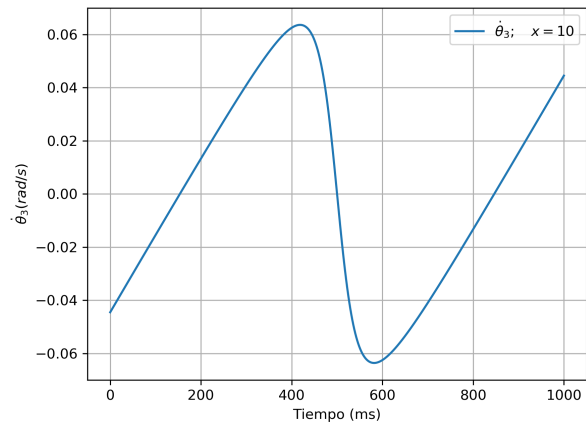
$$\dot{v}_{o4}^3 = J \dot{\theta} \quad (1.19)$$

$$R_3^0 \dot{v}_{o4}^0 = J^3 \dot{\theta} \quad (1.20)$$

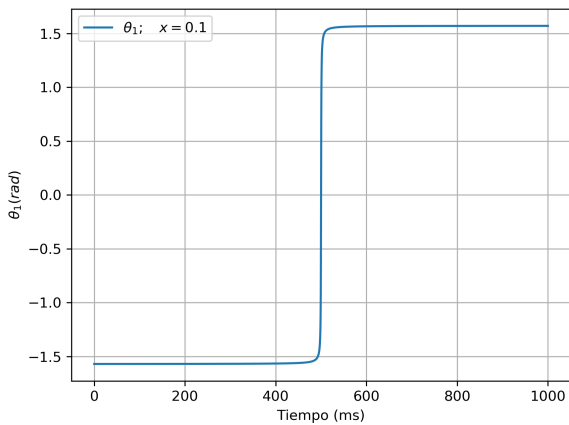
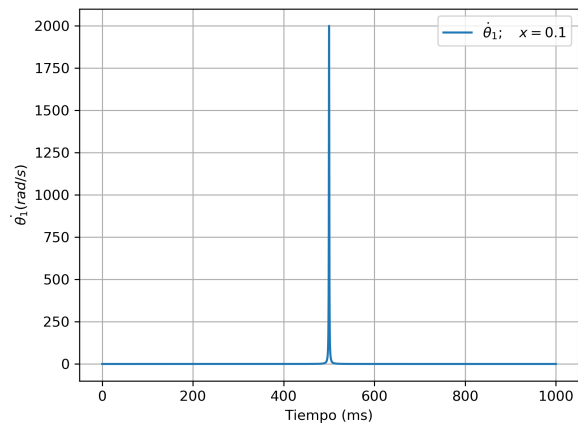
$$\dot{\theta} = (J^3)^{-1} R_3^0 \dot{v}_{o4}^0 \quad (1.21)$$

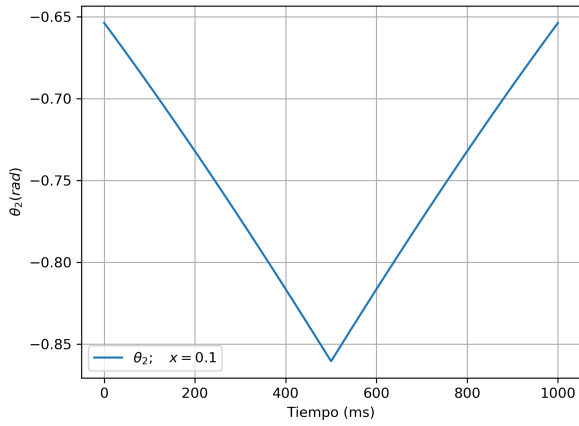
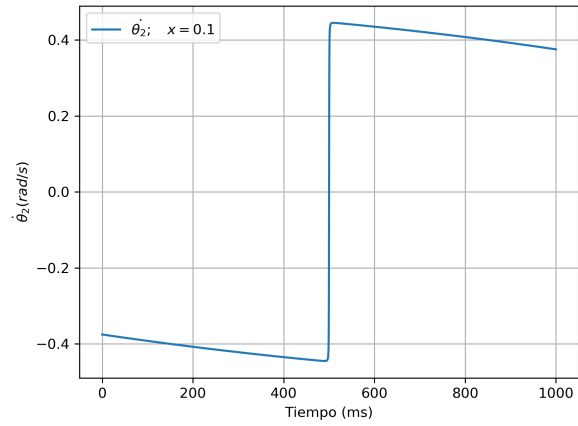
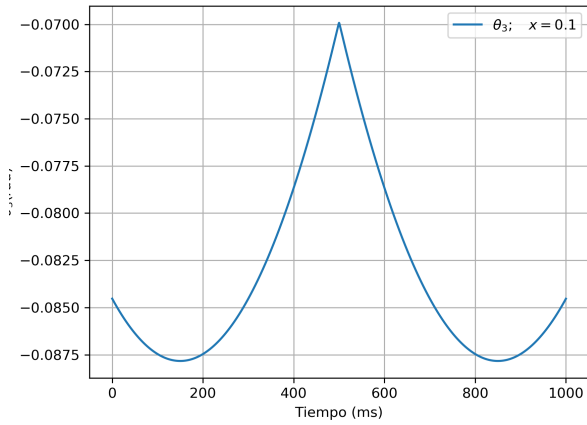
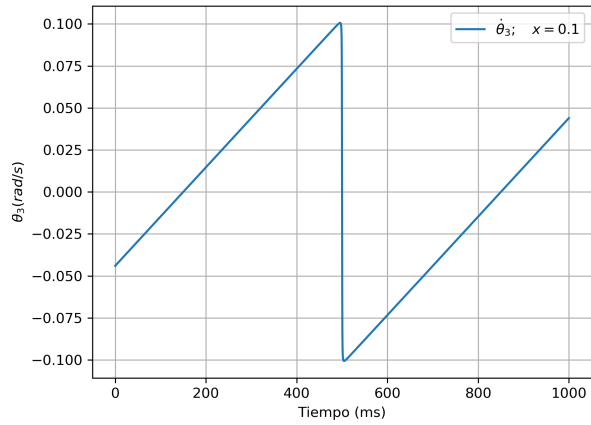
A continuación se muestran los resultados obtenidos tanto para θ_i como para $\dot{\theta}_i$ en el caso $x_i = 10 \text{ mm}$:

(a) θ_1 en función del tiempo(b) $\dot{\theta}_1$ en función del tiempoFigura 1.8: θ_1 y $\dot{\theta}_1$ para $x_i = 10\text{ mm}$ (a) θ_2 en función del tiempo(b) $\dot{\theta}_2$ en función del tiempoFigura 1.9: θ_2 y $\dot{\theta}_2$ para $x_i = 10\text{ mm}$

(a) θ_3 en función del tiempo(b) $\dot{\theta}_3$ en función del tiempoFigura 1.10: θ_3 y $\dot{\theta}_3$ para $x_i = 10 \text{ mm}$

Para $x_i = 0,1 \text{ mm}$ los resultados fueron:

(a) θ_1 en función del tiempo(b) $\dot{\theta}_1$ en función del tiempoFigura 1.11: θ_1 y $\dot{\theta}_1$ para $x_i = 0,1 \text{ mm}$

(a) θ_2 en función del tiempo(b) $\dot{\theta}_2$ en función del tiempoFigura 1.12: θ_2 y $\dot{\theta}_2$ para $x_i = 0,1 \text{ mm}$ (a) θ_3 en función del tiempo(b) $\dot{\theta}_3$ en función del tiempoFigura 1.13: θ_3 y $\dot{\theta}_3$ para $x_i = 0,1 \text{ mm}$

Donde se observa que cuando $x_i = 0,1 \text{ mm}$, la velocidad del eje 1 es mucho mayor debido a que el robot se mueve por una zona cercana a la singularidad del hombro.

Además, se verificó que al utilizar el Jacobiano con respecto a la terna 0, se obtuvieran los mismos resultados. Al proyectar el Jacobiano sobre la terna de la base se obtuvo el siguiente resultado

$$J_{11}^0 = \begin{bmatrix} -s_1(d_4s_{23} + a_2c_2 + a_1) & c_1(d_4c_{23} - a_2s_2) & d_4c_1c_{23} \\ c_1(d_4s_{23} + a_2c_2 + a_1) & s_1(d_4c_{23} - a_2s_2) & d_4s_1c_{23} \\ 0 & -(d_4s_{23} + a_2c_2) & -d_4s_{23} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Luego se utilizó este Jacobiano para resolver el problema inverso de la ecuación

$$\vec{v}_{o4}^0 = J_{11}^0 \dot{\vec{\theta}} \quad (1.23)$$

En este caso no es necesario aplicar una matriz de rotación al vector \vec{v}_{o4}^0 ya que se encuentra proyectado en la misma terna que el Jacobiano por lo que los valores de $\dot{\vec{\theta}}$ queda:

$$\dot{\vec{\theta}} = (J_{11}^0)^{-1} \vec{v}_{o4}^0 = (J_{11}^0)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix} \text{mm} \quad (1.24)$$

Se debe tener en cuenta que, si bien con ambas formas de calcular el valor de $\dot{\theta}$ se obtuvieron los mismos resultados, el Jacobiano proyectado en la terna 3 posee una mayor cantidad de componentes nulas por lo que, con respecto al requerimiento de cómputo, se recomienda utilizar el primer cálculo para facilitar la inversión del Jacobiano a pesar de tener que calcular la matriz de rotación R_3^0

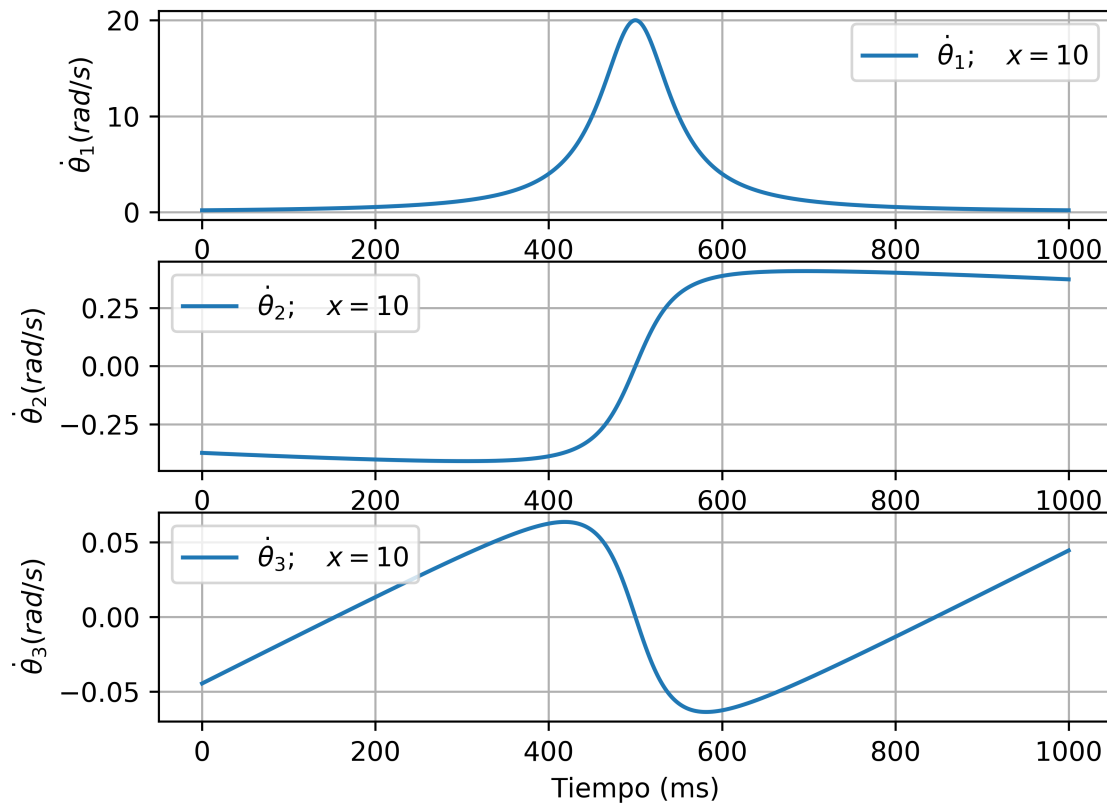


Figura 1.14: Velocidad de las variables articulares calculadas con J_{11}^0 y $x_i = 10mm$

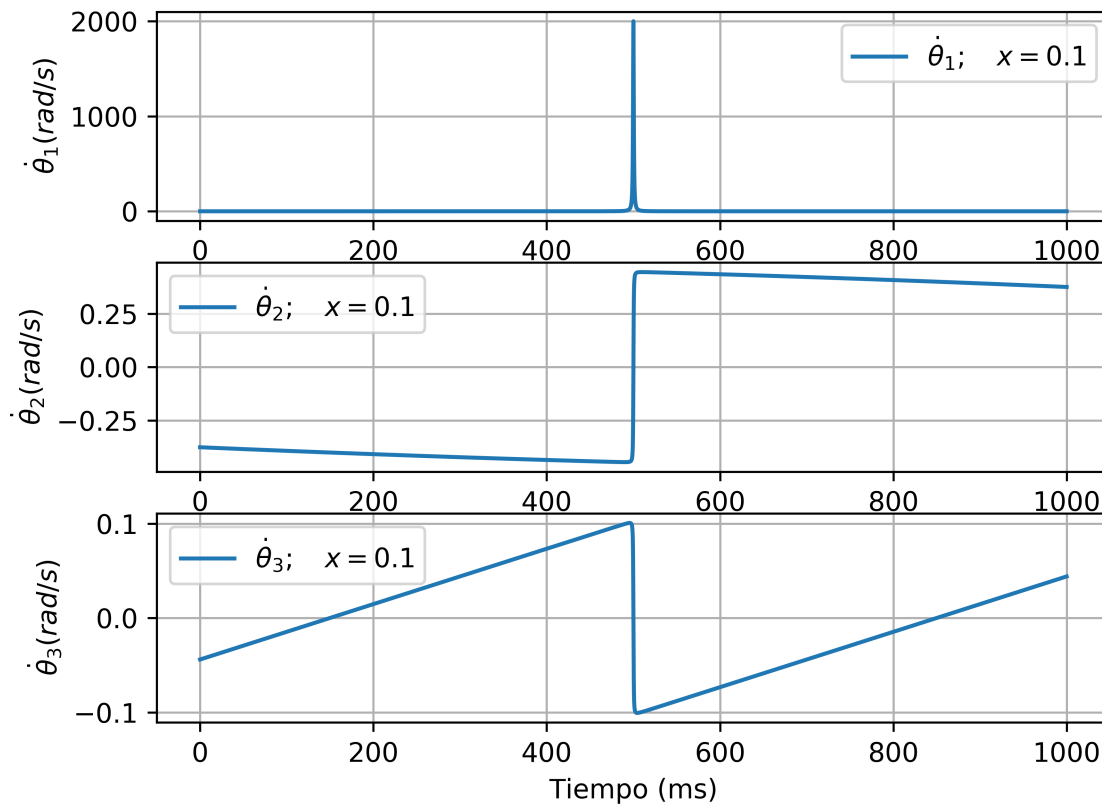


Figura 1.15: Velocidad de las variables articulares calculadas con J_{11}^0 y $x_i = 0,1mm$

2. Conclusiones

Se estudió las condiciones en la que los ejes no producen velocidad y no se produce movimiento a través de analizar las singularidades del Jacobiano de un robot ARB 140. Se simuló un movimiento lineal del robot y con esto se conocieron los valores de velocidad de las variables articuladas. Mediante la simulación se comprobó que al pasar cerca de una singularidad es necesario que los ejes puedan moverse con mayor velocidad. Además se comprobó que se tiene el mismo resultado al proyectar el Jacobiano en 2 ternas distintas.