Tira de ejercicios N°2

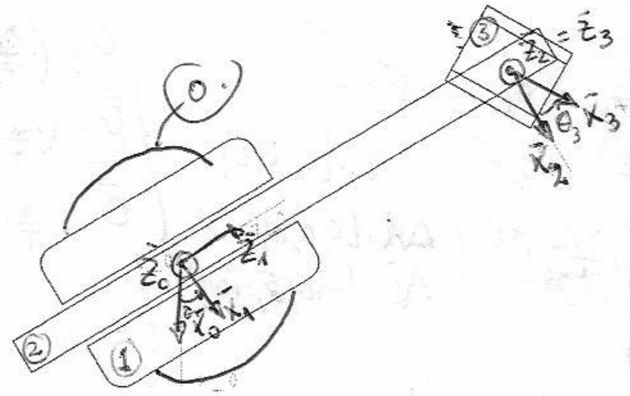
Robótica. Primer Cuatrimestre 2017

22/4/2017

1 Generación de trayectoria Joint

Un robot RPR como el que se muestra en la Fig. 1, parte de reposo en la posición $\theta_1 = [90, 0, -90]^T$ con movimiento Joint hacia $\theta_2 = [0, l, 0]^T$ y sin detenerse vuelve a θ_1, donde termina en reposo.

Defina las ternas sobre el mismo plano $(\bar{x}_0 \wedge \bar{y}_0)$



	a	d	α	θ
1	0	0	-90	$\boxed{\theta_1}$
2	0	$\boxed{d_2}$	90	0
3	0	0	0	θ_3

Figure 1: Robot RPR. Puede rotar sobre el eje 1, desplazarse linealmente sobre el 2, y rotar sobre el 3

Las velocidades máximas de cada eje son:

- $v_{1max} =$ 90°/s $l = 0,5$ m
- $v_{2max} =$ 1m/s
- $v_{3max} =$ 90°/s.

El tiempo de aceleración es $t_{acc} =$ 200ms y los movimientos se realizan a velocidad máxima.

Se pide:

- Indicar los eslabones

- Completar las ternas en la figura
- Obtener los parámetros D-H
- Graficar las curvas de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo para cada eje para el movimiento solicitado.

2 Dinámica Robot RP

Para el robot de la Fig. 1, considerando solamente los dos primeros ejes se pide calcular la matriz M

$\bar{\theta}_i = [90, 0, -90]^T \quad \bar{\theta}_f = [0, l, 0]^T \quad v_{max} = [90°/s, 1 m/s, 90°/s]$

$t_{acc} = 200$ ms.

$$\begin{cases} \ddot{\bar{\theta}} = \left(\frac{\Delta \bar{C}}{T_1} + \frac{\Delta \bar{A}}{t_{acc}}\right)\frac{1}{2t_{acc}} \\ \dot{\bar{\theta}} = \left(\frac{\Delta \bar{C}}{T}\right)\left(\frac{t_{seg}+t_{acc}}{2t_{acc}}\right) + \frac{\Delta \bar{A}}{T_{acc}}\left(\frac{t_{seg}-t_{acc}}{2t_{acc}}\right) \\ \bar{\theta} = \frac{\Delta \bar{C}}{T_1}\frac{(t_{seg}+t_{acc})^2}{4t_{acc}} + \frac{\Delta \bar{A}}{t_{acc}}\frac{(t_{seg}-t_{acc})^2}{4t_{acc}} + \bar{\theta}^B \end{cases}$$

$$\left\{ \ddot{\bar{\theta}} = 0, \quad \dot{\bar{\theta}} = \frac{\Delta \bar{C}}{T_1}, \quad \bar{\theta} = \frac{\Delta \bar{C}}{T_1} t_{seg} + \bar{\theta}^B \right.$$

1° movimiento de θ_i a θ_f sin parar.

$\bar{\theta}^A = [90, 0, -90]^T \quad \bar{\theta}^B = [90, 0, -90]^T \quad \bar{\theta}^C = [0, l, 0]^T$

$T_1 = \max\left\{\underbrace{2t_{acc}}_{0,4 seg}, \underbrace{\frac{90°}{90°/s}}_{1 seg}, \frac{0,5 m}{1 m/s}, \frac{90°}{90°/s}\right\} \quad \Delta \bar{A} = [0,0,0]^T \quad \Delta \bar{C} = [-90, 0,5, 90]^T$

$\underline{T_1 = 1 \text{ seg}}.$

2° mov. Primero calculo $\bar{\theta}^A$ con los datos del segmento anterior $\Rightarrow t_{seg} = T_1 - t_{acc} = 0,8$

$$\bar{\theta}^A = \begin{bmatrix} -90 \\ 0,5 \\ 90 \end{bmatrix}(T_1 - t_{acc}) + \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ -90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 0,4 \\ -18 \end{bmatrix}$$

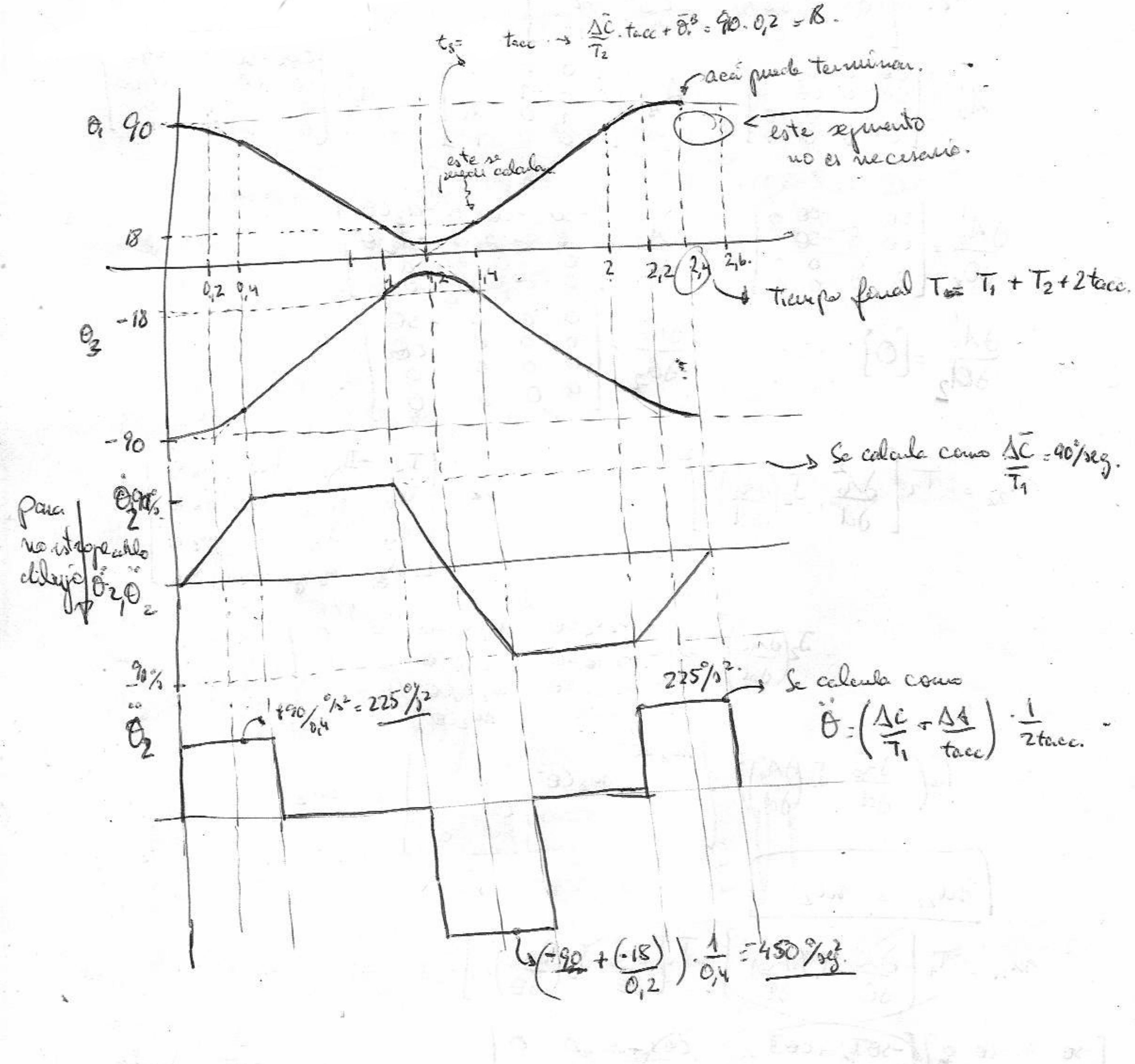
$\underline{T_2} = \max\{0,4; 1 seg; 0,5 seg; 1 seg\} = \underline{1 seg}. \quad \bar{\theta}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\theta}^C = \begin{bmatrix} +90 \\ 0 \\ -90 \end{bmatrix} \quad \Delta \bar{A} = \begin{bmatrix} 18 \\ -0,1 \\ -18 \end{bmatrix} \quad \Delta \bar{C} = \begin{bmatrix} +90 \\ -0,5 \\ -90 \end{bmatrix}$

3° $\underline{mov}$. Detenerse en $\bar{\theta}^i$. Calculo el $\bar{\theta}^A$ del segmento anterior en $t_{seg} = T_2 - t_{acc} = 0,8$

$$\bar{\theta}^A = \begin{bmatrix} 90 \\ -0,5 \\ -90 \end{bmatrix} 0,8 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \\ 0,1 \\ -72 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta}^B = \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ -90 \end{bmatrix} \quad \bar{\theta}^C = \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ -90 \end{bmatrix} \quad \Delta \bar{A} = \begin{bmatrix} -18 \\ 0,1 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \Delta \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$T_3 = \max\{0,4; 0; 0; 0\} = 0,4.$



ts = tacc → ΔC/T2 · tacc + θ1 = 90 · 0,2 = 18.
acá puede terminar.
este segmento no es necesario.
este se puede calcular
θ1 90
18
0,2 0,4 1 1,2 1,4 2 2,2 2,4 2,6.
Tiempo final T = T1 + T2 + 2tacc.
-18
θ3
-90
Se calcula como ΔC/T1 = 90°/seg.
θ̇2 90°/s
Para no estropear el dibujo θ̇2, θ̈2
90°/s
θ̈2
90/0,4 °/s² = 225°/s²
225°/s².
Se calcula como θ̈ = (ΔC/T1 + Δ/tacc) · 1/2tacc.
(-90 + (-18)/0,2) · 1/0,4 = 450°/seg²

2) Dinámica robot RP.

$$m_{sj} = \sum_{i=\max(s,j)}^{n} T_r\left[\frac{\partial A_0^i}{\partial \theta_s} J_i \left(\frac{\partial A_0^i}{\partial \theta_j}\right)^t\right]$$

$$A_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta C\alpha & S\theta S\alpha & a\,C\theta \\ S\theta & C\theta C\alpha & -C\theta S\alpha & a\,S\theta \\ 0 & S\alpha & C\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & -S\theta & 0 \\ S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_0^2 = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & -d_3 S\theta \\ S\theta & C\theta & 0 & d_3 C\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A_0^1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta & 0 & -C\theta & 0 \\ C\theta & 0 & -S\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial A_0^2}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta & -C\theta & 0 & -d_3 C\theta \\ C\theta & -S\theta & 0 & -d_3 S\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A_0^1}{\partial d_2} = [0] \qquad \frac{\partial A_0^2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta \\ 0 & 0 & 0 & C\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m_{22} = T_r\left[\frac{\partial A_0^2}{\partial d} J_2 \left(\frac{\partial A_0^2}{\partial d}\right)^t\right] \qquad J_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} & m_2 x_G \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} & m_2 y_G \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z & m_2 z_G \\ \hline m_2 x_G & m_2 y_G & m_2 z_G & m_2 \end{array}\right]$$

$$J_2\left(\frac{\partial A_0^2}{\partial d}\right)^t = \begin{bmatrix} -m_2 x_G S\theta & m_2 x_G C\theta & 0 & 0 \\ -m_2 y_G S\theta & m_2 y_G C\theta & 0 & 0 \\ -m_2 y_G S\theta & m_2 z_G C\theta & 0 & 0 \\ -m_2 S\theta & m_2 C\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_r\left(\frac{\partial A_0^2}{\partial d} J_2 \left(\frac{\partial A_0^2}{\partial d}\right)^t\right) = T_r\begin{bmatrix} m_2 S\theta^2 & & & \\ & m_2 C\theta^2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} = m_2$$

$$\boxed{m_{22} = m_2}$$

$$m_{11} = T_r\left[\frac{\partial A_0^1}{\partial \theta} J_1 \left(\frac{\partial A_0^1}{\partial \theta}\right)^t\right] + T_r\left[\frac{\partial A_0^2}{\partial \theta} J_2 \left(\frac{\partial A_0^2}{\partial \theta}\right)^t\right]$$

$$\begin{bmatrix} -S\theta & 0 & -C\theta & 0 \\ C\theta & 0 & -S\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S\theta I_{1x} + C\theta I_{1xz} & C\theta I_{1x} + S\theta I_{1xz} & 0 & 0 \\ \cancel{S\theta I_{1xy} + C\theta I_{1yz}} & & 0 & 0 \\ -S\theta I_{xz} + C\theta I_z & C\theta I_{xz} - S\theta I_z & 0 & 0 \\ \cancel{-m_1 x_{G_1} S\theta + m_1 z_G C\theta} & & 0 & 0 \end{bmatrix} = -S\theta\left(-S\theta I_{1x} + C\theta I_{1xz}\right) - C\theta\left(S\theta I_{1xz} + C\theta I_{1z}\right)$$

$$C^2\theta I_x + C\theta S\theta I_{xz} + C\theta S\theta I_{xz} + S^2\theta I_z$$

$$= S^2\theta I_{1x} - S\theta \cancel{C\theta} I_{1xz} - C\theta \cancel{S\theta} I_{1xz}$$

$$+ C^2\theta I_{1z} + C^2\theta I_x + S\theta C\theta I_{xz} +$$

$$\begin{bmatrix} & -c\theta & 0 & -d_3 c\theta \\ \theta & s\theta & 0 & -d_3 s\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \times & \times \\ \boxed{} & \boxed{} & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \boxed{} & \boxed{} & \times & \times \end{bmatrix} = \Bigg[$$

$$T_r\left(\Bigg[\quad \cdot \quad \Bigg] \begin{bmatrix} -s\theta I_{2x} + c\theta \mathbb{I}_{2xy} - d_3 m_2 x_G c\theta & c\theta I_{2xy} + s\theta \mathbb{I}_{2xy} - d_3 m_2 x_G s\theta & \times & \times \\ s\theta \mathbb{I}_{2xy} + c\theta \mathbb{I}_{2y} - d_3 m_2 y_G c\theta & -c\theta \mathbb{I}_{2xy} - s\theta \mathbb{I}_{2y} - d_3 m_2 y_G s\theta & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ -s\theta m_2 x_G - c\theta m_2 y_G - d_3 m_2 c\theta & c\theta m_2 x_G - s\theta m_2 y_G - d_3 s\theta m_2 & \times & \times \end{bmatrix} \right)$$

$$= s^2\theta I_{2x} - \cancel{s\theta c\theta \mathbb{I}_{2xy}} + \cancel{s\theta c\theta d_3 m_2 x_G} - \cancel{s\theta c\theta \mathbb{I}_{2xy}} + c^2\theta I_{2y} + c^2\theta d_3 m_2 y_G$$
$$+ d_3 \cancel{s\theta c\theta m_2 x_G} + d_3 c^2\theta m_2 y_G + d_3^2 c^2\theta m_2 + c^2\theta I_{2x} + \cancel{c\theta s\theta \mathbb{I}_{2xy}} - \cancel{d_3 m_2 x_G s\theta c\theta}$$
$$+ \cancel{d_3 s\theta c\theta \mathbb{I}_{2xy}} + \cancel{d_3 s^2\theta I_{2y}} + s\theta c\theta \mathbb{I}_{2xy} + s^2\theta \mathbb{I}_{2y} + d_3 s^2\theta m_2 y_G$$
$$- \cancel{d_3 s\theta c\theta m_2 x_G} + d_3 s^2\theta m_2 y_G + d_3^2 s^2\theta m_2$$

$$= I_{2x} + I_{2y} + 2 d_2 m_2 y_G + d_2^2 m_2$$

$$m_{11} = \underbrace{\left(I_{1x} + I_{1z} \right)}_{\mathbb{I}_{01yy}} + \underbrace{\left(I_{2x} + I_{2y} \right)}_{\mathbb{I}_{02zz}} + 2 d_2 m_2 y_{G_2} + d_2^2 m_2$$

$$m_{12} = T_r \left(\frac{\partial A_0^2}{\partial \theta_1} J_2 \left(\frac{\partial A_0^2}{\partial d} \right)^T \right)$$

$$T_r\left(\begin{bmatrix} s\theta & -c\theta & 0 & -d_2 c\theta \\ c\theta & -s\theta & 0 & -d_2 s\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{-s\theta x_G m} & \boxed{c\theta m x_G} & \times & \times \\ \boxed{-s\theta y_G m} & \boxed{c\theta m y_G} & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \boxed{-s\theta m} & \boxed{c\theta m} & \times & \times \end{bmatrix} \right) = \Bigg[$$

$$m_{12} = s^2\theta m_2 x_{G_2} + \cancel{s\theta c\theta y_{G_2} m_2} + d_2 \cancel{s\theta c\theta m_2} + c^2\theta m_2 x_{G_2} - \cancel{s\theta c\theta m_2 y_{G_2}} - d_2 \cancel{s\theta c\theta m_2}$$

$$\boxed{m_{12} = m_2 x_{G_2}}$$

$$M = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{01yy} + \mathbb{I}_{02zz} + m_2\left(2 d_2 y_{G_2} + d_2^2 \right) & m_2 x_{G_2} \\ m_2 x_{G_2} & m_2 \end{bmatrix}$$