Comparando listas e rankings

Fernando Náufel

12/02/2024 16:27

Índice

Apresentação

???

1 Listas e *rankings*

1.1 Problema

Vamos trabalhar com listas e *rankings* sujeitos às seguintes condições:

- A lista tem k elementos, $k > 0$, não ordenados.
- O *ranking* tem p elementos, $p \geq k$, ordenados, sem empates.
- Todos os elementos da lista também pertencem ao *ranking*.
- O último elemento do *ranking* sempre pertence à lista.
- As identidades dos elementos do *ranking* não importam — i.e., eles são indistinguíveis, a não ser por pertencerem ou não à lista (e pela ordem que ocupam no *ranking*, claro).

1.2 Criando *rankings*

1.2.1 Representação

Considere naturais $k > 0$ e $p \geq k$.

Podemos representar um *ranking* através de um *string* contendo k caracteres "`x`" e $p - k$ caracteres "`-`".

"`x`" representa uma posição ocupada por um elemento da lista.

"`-`" representa uma posição ocupada por um elemento que não está na lista.

Você pode usar a função `rk()` para criar um *ranking*, passando um *string* da forma acima:

```
rk('xx--x')
```

```
ranking: [ •• ] (p = 5, k = 3)
```

R vai mostrar o *ranking* com os valores de k e p e com caracteres unicode (por default). Se quiser ver o *ranking* com caracteres ASCII, use a função `print` com o argumento `unicode = FALSE`:

```
print(rk('xx--x'), unicode = FALSE)
```

```
ranking: [xx--x] (p = 5, k = 3)
```

1.2.2 Quantidade de *rankings*

Dados $k > 0$ e $p \geq k$ fixos, quantos *rankings* existem?

Para montar um *ranking*:

1. Sabemos que a última posição é ocupada por alguém da lista.
2. Só resta escolher as posições dos $k-1$ elementos restantes da lista dentre as $p-1$ posições restantes no *ranking*, o que dá $\binom{p-1}{k-1}$ escolhas.

Assim, a quantidade total de *rankings* para k e p dados é

$$\binom{p-1}{k-1}$$

Por exemplo, para $k = 3, p = 5$, os $\binom{4}{2} = 6$ *rankings* possíveis são

- `xx--x`
- `x-x-x`
- `x--xx`
- `-xx-x`
- `-x-xx`
- `--xxx`

A tabela a seguir (na verdade, um pedaço do triângulo de Pascal) mostra as quantidades de *rankings* possíveis para alguns valores de k e p:

	k									
p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	2	1							
4	1	3	3	1						

5	1	4	6	4	1					
6	1	5	10	10	5	1				
7	1	6	15	20	15	6	1			
8	1	7	21	35	35	21	7	1		
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
11	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10
12	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55
13	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220
14	1	13	78	286	715	1.287	1.716	1.716	1.287	715
15	1	14	91	364	1.001	2.002	3.003	3.432	3.003	2.002
16	1	15	105	455	1.365	3.003	5.005	6.435	6.435	5.005
17	1	16	120	560	1.820	4.368	8.008	11.440	12.870	11.440
18	1	17	136	680	2.380	6.188	12.376	19.448	24.310	24.310
19	1	18	153	816	3.060	8.568	18.564	31.824	43.758	48.620
20	1	19	171	969	3.876	11.628	27.132	50.388	75.582	92.378
21	1	20	190	1.140	4.845	15.504	38.760	77.520	125.970	167.960
22	1	21	210	1.330	5.985	20.349	54.264	116.280	203.490	293.930
23	1	22	231	1.540	7.315	26.334	74.613	170.544	319.770	497.420
24	1	23	253	1.771	8.855	33.649	100.947	245.157	490.314	817.190
25	1	24	276	2.024	10.626	42.504	134.596	346.104	735.471	1.307.504
26	1	25	300	2.300	12.650	53.130	177.100	480.700	1.081.575	2.042.975
27	1	26	325	2.600	14.950	65.780	230.230	657.800	1.562.275	3.124.550
28	1	27	351	2.925	17.550	80.730	296.010	888.030	2.220.075	4.686.825
29	1	28	378	3.276	20.475	98.280	376.740	1.184.040	3.108.105	6.906.900
30	1	29	406	3.654	23.751	118.755	475.020	1.560.780	4.292.145	10.015.005

1.2.3 Criando um *ranking* a partir de um vetor

Em vez de especificar as p posições do *ranking*, pode ser mais compacto especificar as k posições do *ranking* que são ocupadas por elementos da lista.

A função `rk()` também faz isso, recebendo um vetor numérico com k elementos.

```
rk(c(1, 3, 5, 7))
```

```
ranking: [ • • • ] (p = 7, k = 4)
```

Observe que as posições não precisam ser passadas em ordem:

```
rk(c(3, 7, 5, 1))
```

```
ranking: [ • • • ] (p = 7, k = 4)
```

A função detecta vetores que não podem representar *rankings*:

```
rk(c(3, 7, 3, 1))
```

```
Error in validate_rk(x):
Valores precisam ser inteiros positivos, sem repetições.
```

```
rk(c(5, 7, 3, 1.5))
```

```
Error in validate_rk(x):
Valores precisam ser inteiros positivos, sem repetições.
```

```
rk(c(5, -7, 3, 1))
```

```
Error in validate_rk(x):
Valores precisam ser inteiros positivos, sem repetições.
```

1.3 Outras funções

1.3.1 Mostrando um *ranking* graficamente

A função `plot` recebe um *ranking* e gera um gráfico de pontos, com um ponto para cada elemento.

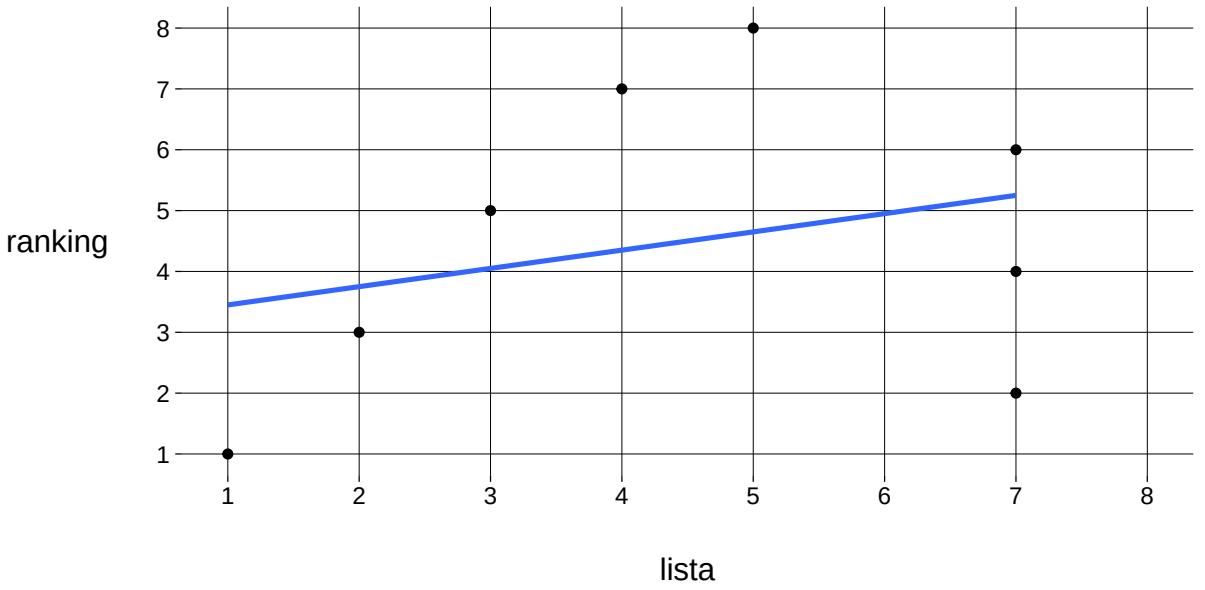
No eixo x, a posição do elemento na lista.

No eixo y, a posição do elemento no *ranking*.

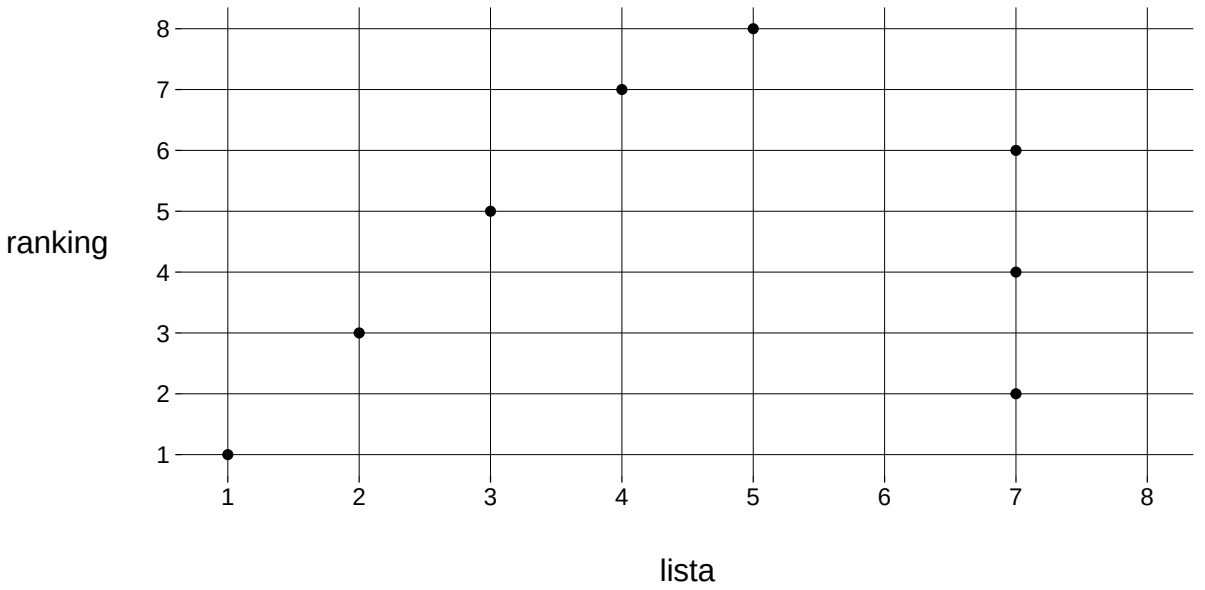
A função `plot` pode receber um argumento `fun`, opcional, especificando uma função para calcular o *score* deste *ranking* (i.e., alguma forma de correlação entre o *ranking* e a lista). O *score* vai ser mostrado no título do gráfico.

O argumento `reta`, opcional, especifica se deve ser incluída uma reta de regressão linear via mínimos quadrados. O *default* é `TRUE`.

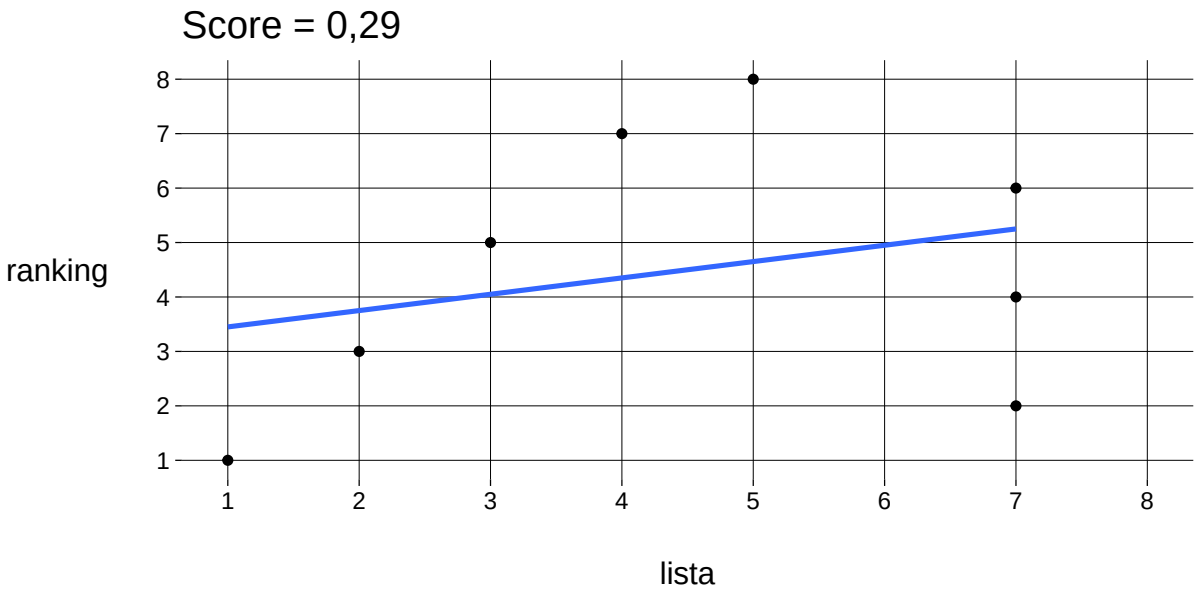
```
r <- rk('x-x-x-xx')
plot(r)
```




```
plot(r, reta = FALSE)
```



```r
plot(r, fun = \(df) { cor(df$pos_lista, df$pos_ranking) %>% round(2) })
```



A função passada em `fun` deve receber, como único argumento, uma *tibble* com uma linha para cada elemento, e as colunas

- `nome`: um vetor de caracteres contendo '`x`' e '`-`'.
- `pos_lista`: um vetor numérico com a posição de cada elemento na lista, sendo que elementos do *ranking* que não pertencem à lista são adicionados à lista todos empatados no final.
- `pos_ranking`: um vetor numérico com a posição de cada elemento no *ranking*.

1.3.2 Criando uma *tibble* com todos os *rankings*

Dados valores de p e k (nesta ordem), a função `criar_df_rankings()` retorna uma *tibble* com todos os $\binom{p-1}{k-1}$ *rankings* possíveis, como objetos (S3) e como *strings*.

Se for passado apenas o valor de p, a função retorna uma *tibble* com todos os *rankings* possíveis de comprimento p (com k variando de 1 até p). Exercício: quantos são?

Cada *ranking* é representado por um *string*, como descrito na seção sobre a representação de *rankings*.

Todos os *rankings* com $p = 8$ e $k = 5$:

```r
criar_df_rankings(8, 5)
```

```
# A tibble: 35 x 2
   ranking ranking_str
   <list>  <chr>
 1 <rk>    xxxx---x
 2 <rk>    xxx-x--x
 3 <rk>    xxx--x-x
 4 <rk>    xxx---xx
 5 <rk>    xx-xx--x
 6 <rk>    xx-x-x-x
 7 <rk>    xx-x--xx
 8 <rk>    xx--xx-x
 9 <rk>    xx--x-xx
10 <rk>    xx---xxx
11 <rk>    x-xxx--x
12 <rk>    x-xx-x-x
13 <rk>    x-xx--xx
14 <rk>    x-x-xx-x
15 <rk>    x-x-x-xx
16 <rk>    x-x--xxx
17 <rk>    x--xxx-x
18 <rk>    x--xx-xx
19 <rk>    x--x-xxx
20 <rk>    x---xxxx
21 <rk>    -xxxx--x
22 <rk>    -xxx-x-x
23 <rk>    -xxx--xx
24 <rk>    -xx-xx-x
25 <rk>    -xx-x-xx
26 <rk>    -xx--xxx
27 <rk>    -x-xxx-x
28 <rk>    -x-xx-xx
29 <rk>    -x-x-xxx
30 <rk>    -x--xxxx
31 <rk>    --xxxx-x
32 <rk>    --xxx-xx
33 <rk>    --xx-xxx
34 <rk>    --x-xxxx
35 <rk>    ---xxxxx
```

Todos os *rankings* com $p = 5$:

```r
criar_df_rankings(5)
```

```
# A tibble: 16 x 2
   ranking ranking_str
   <list>  <chr>
 1 <rk>    ----x
 2 <rk>    x---x
 3 <rk>    -x--x
 4 <rk>    --x-x
 5 <rk>    ---xx
 6 <rk>    xx--x
 7 <rk>    x-x-x
 8 <rk>    x--xx
 9 <rk>    -xx-x
10 <rk>    -x-xx
11 <rk>    --xxx
12 <rk>    xxx-x
13 <rk>    xx-xx
14 <rk>    x-xxx
15 <rk>    -xxxx
16 <rk>    xxxxx
```

Se você quiser a representação em *string* usando unicode, basta passar o argumento `unicode = TRUE`:

```r
criar_df_rankings(5, unicode = TRUE)
```

```
# A tibble: 16 x 2
   ranking ranking_str
   <list>  <chr>
 1 <rk>    •••• 
 2 <rk>     •••
 3 <rk>    • ••
 4 <rk>    •• •
 5 <rk>    •••
 6 <rk>      ••
 7 <rk>     • •
 8 <rk>     ••
 9 <rk>    • •
10 <rk>    • •
11 <rk>    ••
```

12 <rk>
13 <rk>
14 <rk>
15 <rk>
16 <rk>

2 O *ranking* concorda com a lista? Posições

2.1 Usando p como medida de concordância

Imagine que a lista de k elementos foi definida por uma autoridade, usando critérios que não conhecemos.

Em uma tentativa de descobrir esses critérios, construímos um modelo para avaliar todos os elementos da população (que inclui os k elementos da lista e outros).

Nosso modelo produz um *ranking* de todos os elementos. Para facilitar, vamos supor que não há empates no *ranking*.

Uma pergunta natural sobre a qualidade do *ranking* produzido é

> Quantas posições do *ranking* são necessárias para incluir todos os k elementos da lista?

A resposta é p, a posição, no *ranking*, do elemento da lista com pior classificação.

Aliás, é por isso que convencionamos, no capítulo anterior, que nossos *rankings* sempre terminam com um elemento da lista.

Um exemplo:

- A lista contém $k = 5$ elementos.
- O *ranking* r_1 é `xx-x-xx`, com $p = 7$.
- O *ranking* r_2 é `-xxxxx`, com $p = 6$.

Segundo a medida proposta aqui, r_2 é melhor que r_1.

Ou seja, quanto menor o valor de p, melhor o *ranking*.

Embora comparar *rankings* através de seus valores de p seja simples, podemos examinar medidas alternativas, que sejam mais finas que esta.

Por exemplo, é discutível se os dois rankings `xx---x` e `---xxx` devem ser considerados igualmente bons; no entanto, ambos têm $p = 6$.

2.2 Usando p e as posições dos elementos da lista

2.2.1 Contando posições –

Dado um *ranking* r com k e p, queremos definir uma função $s(r)$ com as seguintes características:

- Se r não contiver "`-`", então $s(r) = 1$. Neste caso, r é um *ranking* perfeito, que coincide com a lista (por exemplo, `xxxxx`). Em casos assim, $k = p$. Vamos definir s como sendo da forma

  $$s(r) = \frac{k}{p} + \cdots$$

  onde as reticências representam termos que ainda vamos definir. Se r for um *ranking* perfeito, a parcela k/p será 1, e vamos definir os termos restantes para que sejam iguais a zero.

- Os termos restantes devem ter valores maiores quanto melhor for o *ranking*. Quanto mais próximos do fim do *ranking* estiverem os caracteres "`-`", melhor ele será. Uma quantidade natural seria

  $$\frac{\text{soma\_}}{\sum_{i=1,p} i} \quad = \quad \frac{\text{soma\_}}{p(p+1)/2} \quad = \quad \frac{2\,\text{soma\_}}{p(p+1)}$$

  onde soma_ é a soma das posições ocupadas por "`_`" em r.

  Como queríamos, quando r for um *ranking* perfeito, soma_ $= 0$, e então $s(r) = 1$.

- Mas também queremos que somente *rankings* perfeitos tenham $s(r) = 1$. Para isso, considere que um *ranking* mais próximo do perfeito é da forma

  `x...x-x`

  Ou seja, $k = p - 1$ e soma_ $= p - 1$.

  Vamos multiplicar a segunda parcela por α de forma que $s(r) < 1$ para este *ranking* quase perfeito:

  $$s(r) = \frac{p-1}{p} + \frac{2(p-1)}{p(p+1)} \cdot \alpha$$

  Então

$$
\begin{aligned}
s(r) < 1 &\iff \frac{2(p-1)}{p(p+1)} \cdot \alpha < \frac{1}{p} \\
&\iff 2\alpha(p-1) < p+1 \\
&\iff \alpha < \frac{1}{2} \cdot \frac{p+1}{p-1} \\
&\iff \alpha = \frac{1}{m} \cdot \frac{p+1}{p-1} \qquad (m > 2)
\end{aligned}
$$

o que dá

$$
\begin{aligned}
s(r) &= \frac{k}{p} + \frac{2\,\text{soma\_}}{p(p+1)} \cdot \alpha \\
&= \frac{k}{p} + \frac{2\,\text{soma\_}}{p(p+1)} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{p+1}{p-1} \qquad (m > 2) \\
&= \frac{k}{p} + \frac{2\,\text{soma\_}}{p(p-1)} \cdot \frac{1}{m} \qquad (m > 2) \\
&= \frac{k}{p} + \frac{\text{soma\_}}{p(p-1)} \cdot \frac{2}{m} \qquad (m > 2)
\end{aligned}
$$

Dependendo do valor de $m > 2$ escolhido, teremos medidas diferentes.

A função abaixo usa o *default* de $m = 10$, mas valores diferentes podem ser passados.

```
s1 <- function(um_rk, m) {

  p <- um_rk$p
  k <- um_rk$k
  soma_ <- sum(um_rk$no)

  (k / p) + ((2 * soma_) / (m * p * (p - 1)))

}

s <- function(rk, m = 10) {

  if (is.rk(rk)) {
    s1(rk, m)
  } else {
    rk %>% map_dbl(s1, m)
  }

}
```

```
[1] 0,84
```

Para $p = 8$, alguns exemplos:

```
s(
  list(
    rk('xxxxxxxx'),
    rk('xxxxxx-x'),
    rk('-xxxxxxx')
  )
)
```

```
[1] 1,0000000 0,9000000 0,8785714
```

Todos os *rankings* de comprimento 8, com suas pontuações:

```
# A tibble: 128 x 3
    ranking ranking_str     s
    <list>  <chr>       <dbl>
  1 <rk>    xxxxxxxx    1
  2 <rk>    xxxxxx-x    0.9
  3 <rk>    xxxxx-xx    0.896
  4 <rk>    xxxx-xxx    0.893
  5 <rk>    xxx-xxxx    0.889
  6 <rk>    xx-xxxxx    0.886
  7 <rk>    x-xxxxxx    0.882
  8 <rk>    -xxxxxxx    0.879
  9 <rk>    xxxxx--x    0.796
 10 <rk>    xxxx-x-x    0.793
 11 <rk>    xxxx--xx    0.789
 12 <rk>    xxx-xx-x    0.789
 13 <rk>    xxx-x-xx    0.786
 14 <rk>    xx-xxx-x    0.786
 15 <rk>    xxx--xxx    0.782
 16 <rk>    xx-xx-xx    0.782
 17 <rk>    x-xxxx-x    0.782
 18 <rk>    xx-x-xxx    0.779
 19 <rk>    x-xxx-xx    0.779
 20 <rk>    -xxxxx-x    0.779
 21 <rk>    xx--xxxx    0.775
 22 <rk>    x-xx-xxx    0.775
```

```
23 <rk>    -xxxx-xx    0.775
24 <rk>    x-x-xxxx    0.771
25 <rk>    -xxx-xxx    0.771
26 <rk>    x--xxxxx    0.768
27 <rk>    -xx-xxxx    0.768
28 <rk>    -x-xxxxx    0.764
29 <rk>    --xxxxxx    0.761
30 <rk>    xxxx---x    0.689
31 <rk>    xxx-x--x    0.686
32 <rk>    xxx--x-x    0.682
33 <rk>    xx-xx--x    0.682
34 <rk>    xxx---xx    0.679
35 <rk>    xx-x-x-x    0.679
36 <rk>    x-xxx--x    0.679
37 <rk>    xx-x--xx    0.675
38 <rk>    xx--xx-x    0.675
39 <rk>    x-xx-x-x    0.675
40 <rk>    -xxxx--x    0.675
41 <rk>    xx--x-xx    0.671
42 <rk>    x-xx--xx    0.671
43 <rk>    x-x-xx-x    0.671
44 <rk>    -xxx-x-x    0.671
45 <rk>    xx---xxx    0.668
46 <rk>    x-x-x-xx    0.668
47 <rk>    x--xxx-x    0.668
48 <rk>    -xxx--xx    0.668
49 <rk>    -xx-xx-x    0.668
50 <rk>    x-x--xxx    0.664
51 <rk>    x--xx-xx    0.664
52 <rk>    -xx-x-xx    0.664
53 <rk>    -x-xxx-x    0.664
54 <rk>    x--x-xxx    0.661
55 <rk>    -xx--xxx    0.661
56 <rk>    -x-xx-xx    0.661
57 <rk>    --xxxx-x    0.661
58 <rk>    x---xxxx    0.657
59 <rk>    -x-x-xxx    0.657
60 <rk>    --xxx-xx    0.657
61 <rk>    -x--xxxx    0.654
62 <rk>    --xx-xxx    0.654
63 <rk>    --x-xxxx    0.65
64 <rk>    ---xxxxx    0.646
65 <rk>    xxx----x    0.579
```

```
 66 <rk>    xx-x---x    0.575
 67 <rk>    xx--x--x    0.571
 68 <rk>    x-xx---x    0.571
 69 <rk>    xx---x-x    0.568
 70 <rk>    x-x-x--x    0.568
 71 <rk>    -xxx---x    0.568
 72 <rk>    xx----xx    0.564
 73 <rk>    x-x--x-x    0.564
 74 <rk>    x--xx--x    0.564
 75 <rk>    -xx-x--x    0.564
 76 <rk>    x-x---xx    0.561
 77 <rk>    x--x-x-x    0.561
 78 <rk>    -xx--x-x    0.561
 79 <rk>    -x-xx--x    0.561
 80 <rk>    x--x--xx    0.557
 81 <rk>    x---xx-x    0.557
 82 <rk>    -xx---xx    0.557
 83 <rk>    -x-x-x-x    0.557
 84 <rk>    --xxx--x    0.557
 85 <rk>    x---x-xx    0.554
 86 <rk>    -x-x--xx    0.554
 87 <rk>    -x--xx-x    0.554
 88 <rk>    --xx-x-x    0.554
 89 <rk>    x----xxx    0.55
 90 <rk>    -x--x-xx    0.55
 91 <rk>    --xx--xx    0.55
 92 <rk>    --x-xx-x    0.55
 93 <rk>    -x---xxx    0.546
 94 <rk>    --x-x-xx    0.546
 95 <rk>    ---xxx-x    0.546
 96 <rk>    --x--xxx    0.543
 97 <rk>    ---xx-xx    0.543
 98 <rk>    ---x-xxx    0.539
 99 <rk>    ----xxxx    0.536
100 <rk>    xx-----x    0.464
101 <rk>    x-x----x    0.461
102 <rk>    x--x---x    0.457
103 <rk>    -xx----x    0.457
104 <rk>    x---x--x    0.454
105 <rk>    -x-x---x    0.454
106 <rk>    x----x-x    0.45
107 <rk>    -x--x--x    0.45
108 <rk>    --xx---x    0.45
```

```
109 <rk>    x-----xx    0.446
110 <rk>    -x---x-x    0.446
111 <rk>    --x-x--x    0.446
112 <rk>    -x----xx    0.443
113 <rk>    --x--x-x    0.443
114 <rk>    ---xx--x    0.443
115 <rk>    --x---xx    0.439
116 <rk>    ---x-x-x    0.439
117 <rk>    ---x--xx    0.436
118 <rk>    ----xx-x    0.436
119 <rk>    ----x-xx    0.432
120 <rk>    -----xxx    0.429
121 <rk>    x------x    0.346
122 <rk>    -x-----x    0.343
123 <rk>    --x----x    0.339
124 <rk>    ---x---x    0.336
125 <rk>    ----x--x    0.332
126 <rk>    -----x-x    0.329
127 <rk>    ------xx    0.325
128 <rk>    -------x    0.225
```

Perceba que pode haver empates: `xxxx--xx` e `xxx-xx-x` têm o mesmo valor de s. É razoável achar que estes dois *rankings* têm a mesma qualidade.

2.2.2 Comparando *rankings* com valores diferentes de p

Como a lista é dada e fixa, só faz sentido, na prática, comparar *rankings* com o mesmo valor de k.

Vamos examinar, para uma lista com $k = 15$, os *rankings* possíveis com p variando de 15 a 20.

São 15.504 *rankings*. Eis os 100 melhores:

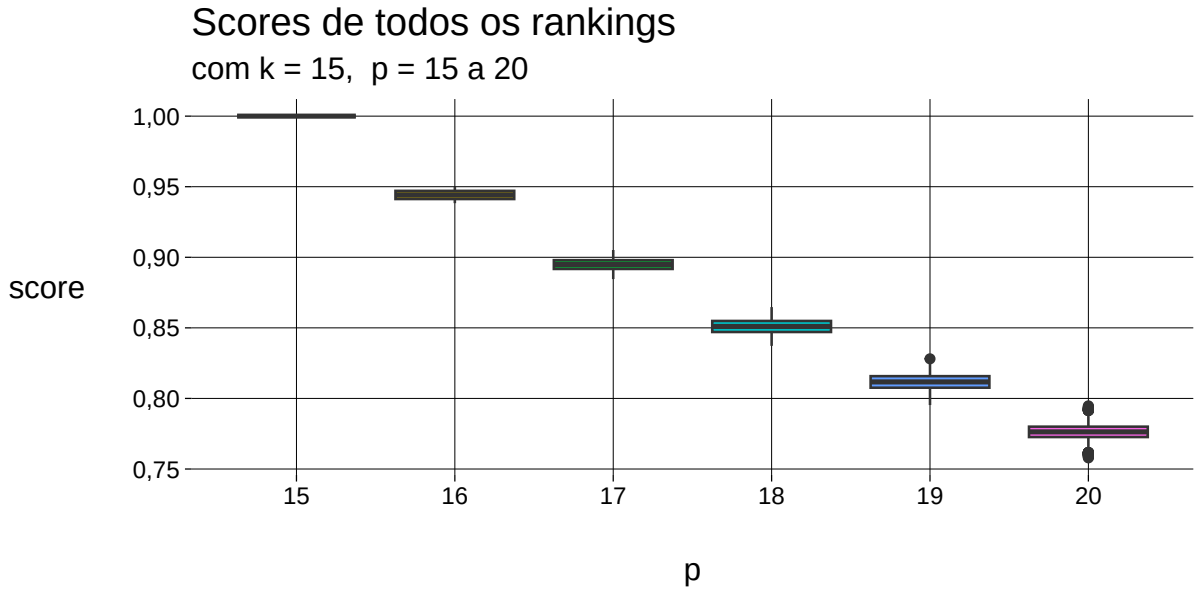
```
# A tibble: 100 x 4
    ranking ranking_str           s     p
    <list>  <chr>             <dbl> <int>
  1 <rk>    xxxxxxxxxxxxxxx   1        15
  2 <rk>    xxxxxxxxxxxxxx-x  0.95     16
  3 <rk>    xxxxxxxxxxxxx-xx  0.949    16
  4 <rk>    xxxxxxxxxxxx-xxx  0.948    16
  5 <rk>    xxxxxxxxxxx-xxxx  0.948    16
```

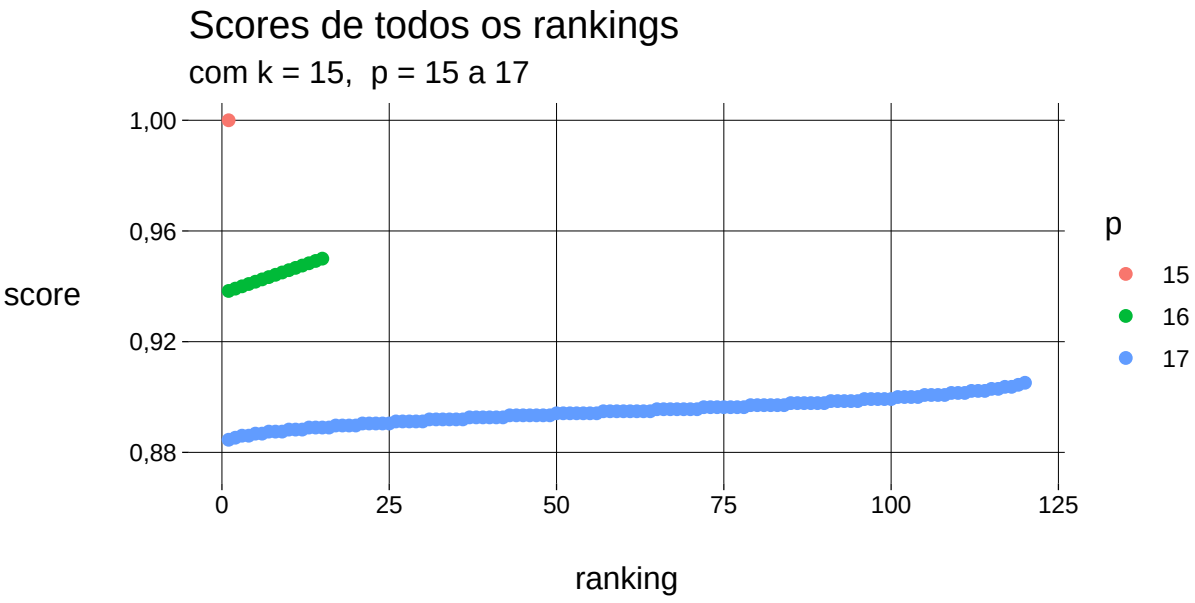
```
 6 <rk>    xxxxxxxxxx-xxxxx  0.947    16
 7 <rk>    xxxxxxxxx-xxxxxx  0.946    16
 8 <rk>    xxxxxxxx-xxxxxxx  0.945    16
 9 <rk>    xxxxxxx-xxxxxxxx  0.944    16
10 <rk>    xxxxxx-xxxxxxxxx  0.943    16
11 <rk>    xxxxx-xxxxxxxxxx  0.942    16
12 <rk>    xxxx-xxxxxxxxxxx  0.942    16
13 <rk>    xxx-xxxxxxxxxxxx  0.941    16
14 <rk>    xx-xxxxxxxxxxxxx  0.94     16
15 <rk>    x-xxxxxxxxxxxxxx  0.939    16
16 <rk>    -xxxxxxxxxxxxxxx  0.938    16
17 <rk>    xxxxxxxxxxxxxx--x 0.905    17
18 <rk>    xxxxxxxxxxxxx-x-x 0.904    17
19 <rk>    xxxxxxxxxxxxx--xx 0.904    17
20 <rk>    xxxxxxxxxxxx-xx-x 0.904    17
21 <rk>    xxxxxxxxxxxx-x-xx 0.903    17
22 <rk>    xxxxxxxxxxx-xxx-x 0.903    17
23 <rk>    xxxxxxxxxxx--xxx 0.902    17
24 <rk>    xxxxxxxxxx-xx-xx 0.902    17
25 <rk>    xxxxxxxxxx-xxxx-x 0.902    17
26 <rk>    xxxxxxxxxx-x-xxx 0.901    17
27 <rk>    xxxxxxxxxx-xxx-xx 0.901    17
28 <rk>    xxxxxxxxx-xxxxx-x 0.901    17
29 <rk>    xxxxxxxxxx--xxxx 0.901    17
30 <rk>    xxxxxxxxxx-xx-xxx 0.901    17
31 <rk>    xxxxxxxxx-xxxx-xx 0.901    17
32 <rk>    xxxxxxxx-xxxxxx-x 0.901    17
33 <rk>    xxxxxxxxxx-x-xxxx 0.9      17
34 <rk>    xxxxxxxxx-xxx-xxx 0.9      17
35 <rk>    xxxxxxxx-xxxxx-xx 0.9      17
36 <rk>    xxxxxxx-xxxxxxx-x 0.9      17
37 <rk>    xxxxxxxxxx--xxxxx 0.899    17
38 <rk>    xxxxxxxxx-xx-xxxx 0.899    17
39 <rk>    xxxxxxxx-xxxx-xxx 0.899    17
40 <rk>    xxxxxxx-xxxxxx-xx 0.899    17
41 <rk>    xxxxxx-xxxxxxxx-x 0.899    17
42 <rk>    xxxxxxxxx-x-xxxxx 0.899    17
43 <rk>    xxxxxxxx-xxx-xxxx 0.899    17
44 <rk>    xxxxxxx-xxxxx-xxx 0.899    17
45 <rk>    xxxxxx-xxxxxxx-xx 0.899    17
46 <rk>    xxxxx-xxxxxxxxx-x 0.899    17
47 <rk>    xxxxxxxxx--xxxxxx 0.898    17
48 <rk>    xxxxxxxx-xx-xxxxx 0.898    17
```

```
49 <rk>    xxxxxxx-xxxx-xxxx 0.898    17
50 <rk>    xxxxxx-xxxxxx-xxx 0.898    17
51 <rk>    xxxxx-xxxxxxxx-xx 0.898    17
52 <rk>    xxxx-xxxxxxxxxx-x 0.898    17
53 <rk>    xxxxxxxx-x-xxxxxx 0.897    17
54 <rk>    xxxxxxx-xxx-xxxxx 0.897    17
55 <rk>    xxxxxx-xxxxx-xxxx 0.897    17
56 <rk>    xxxxx-xxxxxxx-xxx 0.897    17
57 <rk>    xxxx-xxxxxxxxx-xx 0.897    17
58 <rk>    xxx-xxxxxxxxxxx-x 0.897    17
59 <rk>    xxxxxxxx--xxxxxxx 0.896    17
60 <rk>    xxxxxxx-xx-xxxxxx 0.896    17
61 <rk>    xxxxxx-xxxx-xxxxx 0.896    17
62 <rk>    xxxxx-xxxxxx-xxxx 0.896    17
63 <rk>    xxxx-xxxxxxxx-xxx 0.896    17
64 <rk>    xxx-xxxxxxxxxx-xx 0.896    17
65 <rk>    xx-xxxxxxxxxxxx-x 0.896    17
66 <rk>    xxxxxxx-x-xxxxxxx 0.896    17
67 <rk>    xxxxxx-xxx-xxxxxx 0.896    17
68 <rk>    xxxxx-xxxxx-xxxxx 0.896    17
69 <rk>    xxxx-xxxxxxx-xxxx 0.896    17
70 <rk>    xxx-xxxxxxxxx-xxx 0.896    17
71 <rk>    xx-xxxxxxxxxxx-xx 0.896    17
72 <rk>    x-xxxxxxxxxxxxx-x 0.896    17
73 <rk>    xxxxxxx--xxxxxxxx 0.895    17
74 <rk>    xxxxxx-xx-xxxxxxx 0.895    17
75 <rk>    xxxxx-xxxx-xxxxxx 0.895    17
76 <rk>    xxxx-xxxxxx-xxxxx 0.895    17
77 <rk>    xxx-xxxxxxxx-xxxx 0.895    17
78 <rk>    xx-xxxxxxxxx-xxx 0.895    17
79 <rk>    x-xxxxxxxxxxx-xx 0.895    17
80 <rk>    -xxxxxxxxxxxxx-x 0.895    17
81 <rk>    xxxxxx-x-xxxxxxx 0.894    17
82 <rk>    xxxxx-xxx-xxxxxxx 0.894    17
83 <rk>    xxxx-xxxxx-xxxxxx 0.894    17
84 <rk>    xxx-xxxxxxx-xxxxx 0.894    17
85 <rk>    xx-xxxxxxxxx-xxxx 0.894    17
86 <rk>    x-xxxxxxxxxx-xxx 0.894    17
87 <rk>    -xxxxxxxxxxxx-xx 0.894    17
88 <rk>    xxxxxx--xxxxxxxx 0.893    17
89 <rk>    xxxxx-xx-xxxxxxx 0.893    17
90 <rk>    xxxx-xxxx-xxxxxxx 0.893    17
91 <rk>    xxx-xxxxxx-xxxxxx 0.893    17
```

```
 92 <rk>    xx-xxxxxxxx-xxxxx 0.893    17
 93 <rk>    x-xxxxxxxxxx-xxxx 0.893    17
 94 <rk>    -xxxxxxxxxxxx-xxx 0.893    17
 95 <rk>    xxxxx-x-xxxxxxxxx 0.893    17
 96 <rk>    xxxx-xxx-xxxxxxxx 0.893    17
 97 <rk>    xxx-xxxxx-xxxxxxx 0.893    17
 98 <rk>    xx-xxxxxxx-xxxxxx 0.893    17
 99 <rk>    x-xxxxxxxxx-xxxxx 0.893    17
100 <rk>    -xxxxxxxxxxx-xxxx 0.893    17
```

Os gráficos abaixo mostram os *scores* atribuídos para todos os *rankings* com $k = 15$ e p variando de 15 a 20, separados por valores de p:




Scores de todos os rankings
com k = 15, p = 15 a 17
score
1,00
0,96
0,92
0,88
0
25
50
75
100
125
ranking
p
15
16
17


Scores de todos os rankings
com k = 15, p = 18 a 20
score
0,87
0,84
0,81
0,78
0,75
0
3000
6000
9000
12000
ranking
p
18
19
20