Comparando listas e rankings

Fernando Náufel

10/02/2024 19:06

Índice

Apresentação

???

1 Listas e *rankings*

1.1 Problema

Vamos trabalhar com listas e *rankings* sujeitos às seguintes condições:

- A lista tem k elementos, $k > 0$, não ordenados.
- O *ranking* tem p elementos, $p \geq k$, ordenados, sem empates.
- Todos os elementos da lista também pertencem ao *ranking*.
- O último elemento do *ranking* sempre pertence à lista.
- As identidades dos elementos do *ranking* não importam — i.e., eles são indistinguíveis, a não ser por pertencerem ou não à lista (e pela ordem que ocupam no *ranking*, claro).

1.2 Criando *rankings*

1.2.1 Quantidade de *rankings*

Dados $k > 0$ e $p \geq k$ fixos, quantos *rankings* existem?

Para montar um *ranking*:

1. Sabemos que a última posição é ocupada por alguém da lista.
2. Só resta escolher as posições dos $k-1$ elementos restantes da lista dentre as $p-1$ posições restantes no *ranking*, o que dá $\binom{p-1}{k-1}$ escolhas.

Assim, a quantidade total de *rankings* para k e p dados é

$$\binom{p-1}{k-1}$$

1.2.2 Representação

Considere naturais $k > 0$ e $p \geq k$.

Podemos representar um *ranking* através de um *string* contendo k caracteres “`x`” e $p - k$ caracteres “`-`”.

“`x`” representa uma posição ocupada por um elemento da lista.

“`-`” representa uma posição ocupada por um elemento que não está na lista.

Por exemplo, para $k = 3, p = 5$, os $\binom{4}{2} = 6$ *rankings* possíveis são

- `xx--x`
- `x-x-x`
- `x--xx`
- `-xx-x`
- `-x-xx`
- `--xxx`

A tabela a seguir (na verdade, um pedaço do triângulo de Pascal) mostra as quantidades de *rankings* possíveis para alguns valores de k e p:

	k									
p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	2	1							
4	1	3	3	1						
5	1	4	6	4	1					
6	1	5	10	10	5	1				
7	1	6	15	20	15	6	1			
8	1	7	21	35	35	21	7	1		
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
11	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10
12	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55
13	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220
14	1	13	78	286	715	1.287	1.716	1.716	1.287	715
15	1	14	91	364	1.001	2.002	3.003	3.432	3.003	2.002
16	1	15	105	455	1.365	3.003	5.005	6.435	6.435	5.005
17	1	16	120	560	1.820	4.368	8.008	11.440	12.870	11.440
18	1	17	136	680	2.380	6.188	12.376	19.448	24.310	24.310
19	1	18	153	816	3.060	8.568	18.564	31.824	43.758	48.620

20	1	19	171	969	3.876	11.628	27.132	50.388	75.582	92.378
21	1	20	190	1.140	4.845	15.504	38.760	77.520	125.970	167.960
22	1	21	210	1.330	5.985	20.349	54.264	116.280	203.490	293.930
23	1	22	231	1.540	7.315	26.334	74.613	170.544	319.770	497.420
24	1	23	253	1.771	8.855	33.649	100.947	245.157	490.314	817.190
25	1	24	276	2.024	10.626	42.504	134.596	346.104	735.471	1.307.504
26	1	25	300	2.300	12.650	53.130	177.100	480.700	1.081.575	2.042.975
27	1	26	325	2.600	14.950	65.780	230.230	657.800	1.562.275	3.124.550
28	1	27	351	2.925	17.550	80.730	296.010	888.030	2.220.075	4.686.825
29	1	28	378	3.276	20.475	98.280	376.740	1.184.040	3.108.105	6.906.900
30	1	29	406	3.654	23.751	118.755	475.020	1.560.780	4.292.145	10.015.005

1.2.3 Criar um *ranking* a partir de um vetor

Em vez de especificar as p posições do *ranking*, pode ser mais compacto especificar as k posições do *ranking* que são ocupadas por elementos da lista.

A função `rk()` faz isso, recebendo um vetor numérico com k elementos e retornando um *string*.

```
rk(c(1, 3, 5, 7))
```

```
[1] "x-x-x-x"
```

Observe que as posições não precisam ser passadas em ordem:

```
rk(c(3, 7, 5, 1))
```

```
[1] "x-x-x-x"
```

A função detecta vetores que não podem representar *rankings*:

```
rk(c(3, 7, 3, 1))
```

```
Error in rk(c(3, 7, 3, 1)): Valores precisam ser inteiros positivos, sem repetições.
```

```
rk(c(5, 7, 3, 1.5))
```

```
Error in rk(c(5, 7, 3, 1.5)): Valores precisam ser inteiros positivos, sem repetições.
```

```r
rk(c(5, -7, 3, 1))
```

```
Error in rk(c(5, -7, 3, 1)): Valores precisam ser inteiros positivos, sem repetições.
```

1.3 Outras funções

1.3.1 Converter para *tibble*

Para calcular a correlação entre a lista e o *ranking*, vamos precisar ordenar a lista de alguma forma, pois, se todos os elementos da lista estiverem empatados (i.e., se todos tiverem o mesmo valor de posição), vamos cair em um caso em que o desvio-padrão é 0 (quando o *ranking* só contiver jogadores da lista).

Dado um *ranking*, a maneira mais conveniente de ordenar a lista afetando a correlação de forma previsível é concordando com o *ranking*! Isto vai ficar mais claro mais adiante.

Além disso, os elementos que não estavam na lista mas estão no *ranking*, se existirem, também precisam entrar na *tibble*.

Eles vão entrar todos empatados no fim da lista, como no exemplo mais abaixo.

A função `criar_df()` recebe o *string* correspondente a um *ranking* e retorna uma *tibble* com as colunas `nome`, `pos_lista` e `pos_ranking`.

```r
r = 'x-x-x-xx'
df <- criar_df(r)
df
```

```
# A tibble: 8 x 3
  nome  pos_lista pos_ranking
  <chr>     <dbl>       <int>
1 x             1           1
2 -             7           2
3 x             2           3
4 -             7           4
5 x             3           5
6 -             7           6
# i 2 more rows
```

A partir da *tibble*, o *string* do *ranking* pode ser recuperado com

```r
df_string(df)
```

```
[1] "x-x-x-xx"
```

1.3.2 Criar *plot*

A função `criar_plot` recebe um *ranking*, na forma de *string* ou de *tibble*.

A função gera um gráfico de pontos, com um ponto para cada elemento.

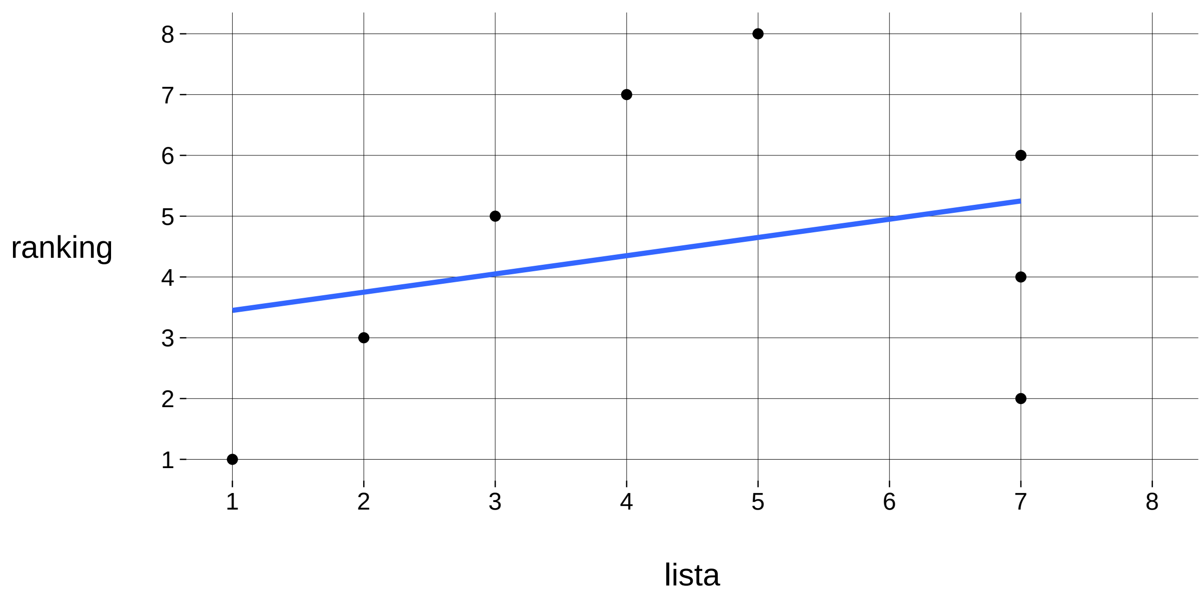
No eixo x, a posição do elemento na lista.

No eixo y, a posição do elemento no *ranking*.

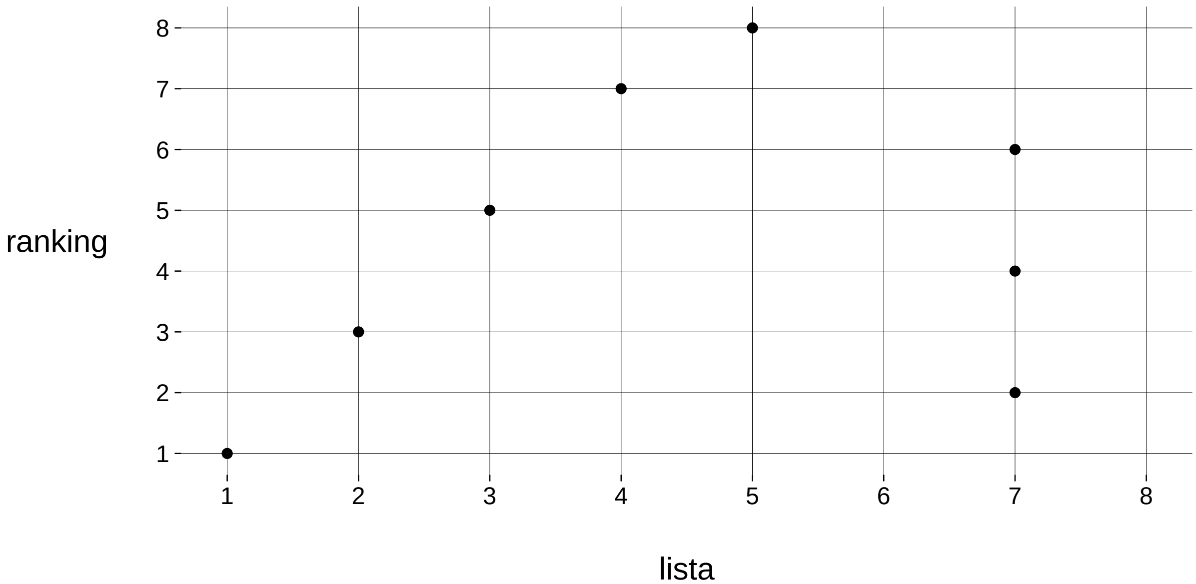
A função `criar_plot` pode receber um segundo argumento, opcional, especificando uma função para calcular o *score* deste *ranking* (i.e., alguma forma de correlação entre o *ranking* e a lista). O *score* vai ser mostrado no título do gráfico.

O terceiro argumento especifica se deve ser incluída uma reta de regressão linear via mínimos quadrados. O *default* é `TRUE`.

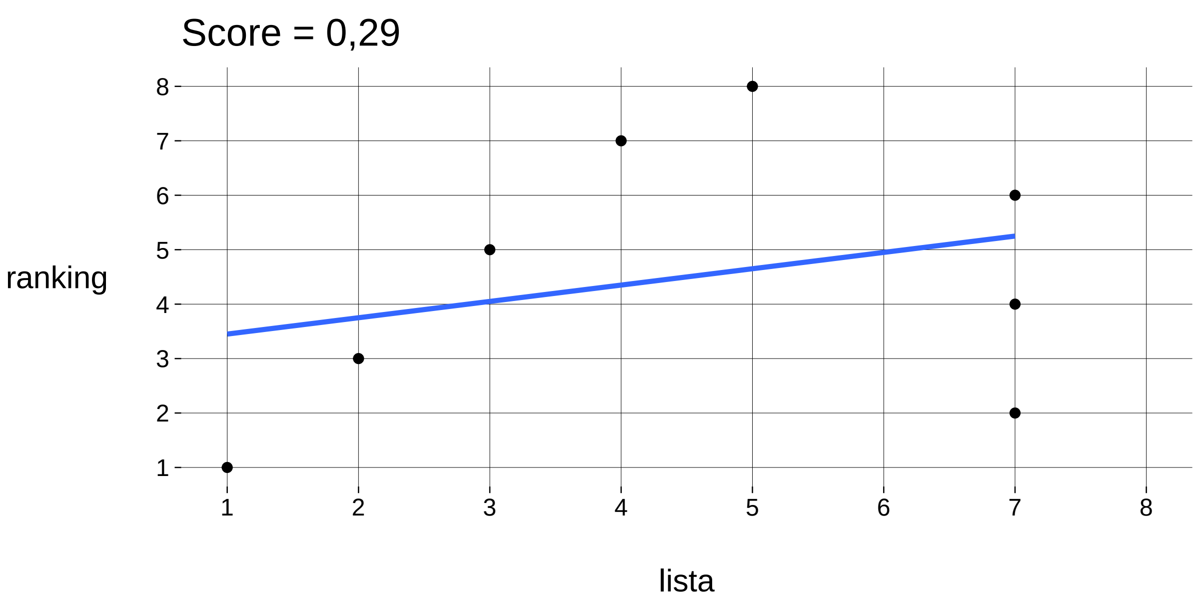
```r
r <- 'x-x-x-xx'
criar_plot(r)
```



```r
criar_plot(r, reta = FALSE)
```




```r
criar_plot(r, \(df) { cor(df$pos_lista, df$pos_ranking) %>% round(2) })
```



1.3.3 Criar uma tibble com todos os *rankings*

Dados valores de p e k (nesta ordem), a função `criar_df_rankings()` retorna uma *tibble* com todos os $\binom{p-1}{k-1}$ *rankings* possíveis.

Se for passado apenas o valor de p, a função retorna uma *tibble* com todos os *rankings* possíveis de comprimento p (com k variando de 1 até p). Exercício: quantos são?

Cada *ranking* é representado por um *string*, como descrito na seção sobre a representação de *rankings*.

Todos os *rankings* com $p = 8$ e $k = 5$:

```
criar_df_rankings(8, 5)
```

```
# A tibble: 35 x 1
  ranking
  <chr>
1 xxxx---x
2 xxx-x--x
3 xxx--x-x
4 xxx---xx
5 xx-xx--x
6 xx-x-x-x
# i 29 more rows
```

Todos os *rankings* com $p = 5$:

```
criar_df_rankings(5)
```

```
# A tibble: 16 x 1
  ranking
  <chr>
1 ----x
2 x---x
3 -x--x
4 --x-x
5 ---xx
6 xx--x
# i 10 more rows
```

2 O *ranking* concorda com a lista? Posições

2.1 Usando p como medida de concordância

Imagine que a lista de k elementos foi definida por uma autoridade, usando critérios que não conhecemos.

Em uma tentativa de descobrir esses critérios, construímos um modelo para avaliar todos os elementos da população (que inclui os k elementos da lista e outros).

Nosso modelo produz um *ranking* de todos os elementos. Para facilitar, vamos supor que não há empates no *ranking*.

Uma pergunta natural sobre a qualidade do *ranking* produzido é

> Quantas posições do *ranking* são necessárias para incluir todos os k elementos da lista?

A resposta é p, a posição, no *ranking*, do elemento da lista com pior classificação.

Aliás, é por isso que convencionamos, no capítulo anterior, que nossos *rankings* sempre terminam com um elemento da lista.

Um exemplo:

- A lista contém $k = 5$ elementos.
- O *ranking* r_1 é `xx-x-xx`, com $p = 7$.
- O *ranking* r_2 é `-xxxxx`, com $p = 6$.

Segundo a medida proposta aqui, r_2 é melhor que r_1.

Embora comparar *rankings* através de seus valores de p seja simples, podemos examinar medidas alternativas, que sejam mais finas que esta.

Por exemplo, é discutível se os dois rankings `xx---x` e `---xxx` devem ser considerados igualmente bons; no entanto, ambos têm $p = 6$.

2.2 Usando p e as posições dos elementos da lista

2.2.1 Contando posições –

Dado um *ranking* r com k e p, queremos definir uma função $s(r)$ com as seguintes características:

- Se r não contiver "`-`", então $s(r) = 1$. Neste caso, r é um *ranking* perfeito, que coincide com a lista (por exemplo, `xxxxx`). Em casos assim, $k = p$. Vamos definir s como sendo da forma

  $$s(r) = \frac{k}{p} + \cdots$$

  onde as reticências representam termos que ainda vamos definir. Se r for um *ranking* perfeito, a parcela k/p será 1, e vamos definir os termos restantes para que sejam iguais a zero.

- Os termos restantes devem ter valores maiores quanto melhor for o *ranking*. Quanto mais próximos do fim do *ranking* estiverem os caracteres "`-`", melhor ele será. Uma quantidade natural seria

  $$\frac{\text{soma\_}}{\sum_{i=1,p} i} \quad = \quad \frac{\text{soma\_}}{p(p+1)/2} \quad = \quad \frac{2\,\text{soma\_}}{p(p+1)}$$

  onde soma_ é a soma das posições ocupadas por "`_`" em r.

  Como queríamos, quando r for um *ranking* perfeito, soma_ $= 0$, e então $s(r) = 1$.

- Mas também queremos que somente *rankings* perfeitos tenham $s(r) = 1$. Para isso, considere que um *ranking* mais próximo do perfeito é da forma

  `x...x-x`

  Ou seja, $k = p - 1$ e soma_ $= p - 1$.

  Vamos multiplicar a segunda parcela por α de forma que $s(r) < 1$ para este *ranking* quase perfeito:

  $$s(r) = \frac{p-1}{p} + \frac{2(p-1)}{p(p+1)} \cdot \alpha$$

  Então

$$
\begin{aligned}
s(r) < 1 &\iff \frac{2(p-1)}{p(p+1)} \cdot \alpha < \frac{1}{p} \\
&\iff 2\alpha(p-1) < p+1 \\
&\iff \alpha < \frac{1}{2} \cdot \frac{p+1}{p-1} \\
&\iff \alpha = \frac{1}{m} \cdot \frac{p+1}{p-1} \qquad (m > 2)
\end{aligned}
$$

o que dá

$$
\begin{aligned}
s(r) &= \frac{k}{p} + \frac{2\,\text{soma\_}}{p(p+1)} \cdot \alpha \\
&= \frac{k}{p} + \frac{2\,\text{soma\_}}{p(p+1)} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{p+1}{p-1} \quad (m > 2) \\
&= \frac{k}{p} + \frac{2\,\text{soma\_}}{p(p-1)} \cdot \frac{1}{m} \qquad (m > 2) \\
&= \frac{k}{p} + \frac{\text{soma\_}}{p(p-1)} \cdot \frac{2}{m} \qquad (m > 2)
\end{aligned}
$$

Dependendo do valor de $m > 2$ escolhido, teremos medidas diferentes.

- Vamos escolher $m = 4$. Nossa função fica

$$
s(r) = \frac{k}{p} + \frac{\text{soma\_}}{2p(p-1)}
$$

```
s <- function(ranking) {

  if (!is_tibble(ranking)) {
    ranking <- criar_df(ranking)
  }

  p <- nrow(ranking)

  nomes <- ranking %>% pull(nome)
  k <- sum(nomes == 'x')

  soma_ <- ranking %>%
    filter(nome == '-') %>%
    pull(pos_ranking) %>%
    sum()
```

```
  (k / p) + (soma_ / (2 * p * (p - 1)))

}

s <- Vectorize(s)
```

Para $p = 8$, alguns exemplos:

```
s(
  c(
    'xxxxxxxx',
    'xxxxxx-x',
    '-xxxxxxx'
  )
)
```

```
 xxxxxxxx  xxxxxx-x  -xxxxxxx
1,0000000 0,9375000 0,8839286
```

Todos os *rankings* de comprimento 8, com suas pontuações:

```
df <- criar_df_rankings(8) %>%
  mutate(
    s = s(ranking)
  ) %>%
  arrange(desc(s))

df
```

```
# A tibble: 128 x 2
  ranking      s
  <chr>    <dbl>
1 xxxxxxxx 1
2 xxxxxx-x 0.938
3 xxxxx-xx 0.929
4 xxxx-xxx 0.920
5 xxx-xxxx 0.911
6 xx-xxxxx 0.902
# i 122 more rows
```

Perceba que pode haver empates: `xxxx--xx` e `xxx-xx-x` têm o mesmo valor de s. É razoável achar que estes dois *rankings* têm a mesma qualidade.