

Álgebra Geométrica para Ciência da Computação

Fernando Náufel

03/05/2023 18:23

Índice

Prefácio	3
1 Introdução	4
1.1 Referências	4
2 O produto externo	5
2.1 Vetores em \mathbb{R}^2	5
2.2 Retas em \mathbb{R}^2	7
2.3 Vetores e retas em \mathbb{R}^3	10
2.4 Bivetores e planos em \mathbb{R}^3	11
2.5 O produto externo de vetores cria bivetores	14
2.6 Bivetores em \mathbb{R}^2 ?	15
2.7 Trivetores em \mathbb{R}^3	15
2.8 k -vetores em \mathbb{R}^n	15
2.9 Propriedades do produto externo	15
2.10 Resolvendo problemas com \wedge	15
2.11 Representando subespaços homogêneos orientados e com peso	15
2.12 <i>Blades</i>	15
2.13 Multivetores	15
2.14 Resumo	15
2.15 Exercícios	15
Referências	16

Prefácio

???

1 Introdução

???

1.1 Referências

???

Livros em português e em inglês

Sites

Playlists

???

2 O produto externo

2.1 Vetores em \mathbb{R}^2

- Por enquanto, vamos trabalhar no espaço vetorial \mathbb{R}^2 .
- Os elementos de \mathbb{R}^2 são vetores com duas coordenadas; por exemplo:

$$\mathbf{v} = (-1, 3)$$
$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

⚠ Notação: vetores em negrito

Você deve estar acostumado a escrever nomes de vetores como \vec{v} , \vec{w} etc. Neste livro, como na maioria dos livros sobre álgebra geométrica, nomes de vetores serão escritos em negrito: \mathbf{v} , \mathbf{w} .

- Usando a base canônica de \mathbb{R}^2 , com $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, os vetores do exemplo acima podem ser escritos como

$$\mathbf{v} = -1\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2$$

- Tecnicamente, estamos escrevendo cada vetor como uma **combinação linear** dos vetores da base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
- Para lembrar que estamos trabalhando com \mathbf{e}_1 e com \mathbf{e}_2 , vamos rotular os eixos x e y dos nossos gráficos com os nomes destes dois vetores, como na Figura 2.1.
- Mas você deve se lembrar que \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 representam os dois vetores unitários da figura, e não os eixos orientados (que são infinitos).

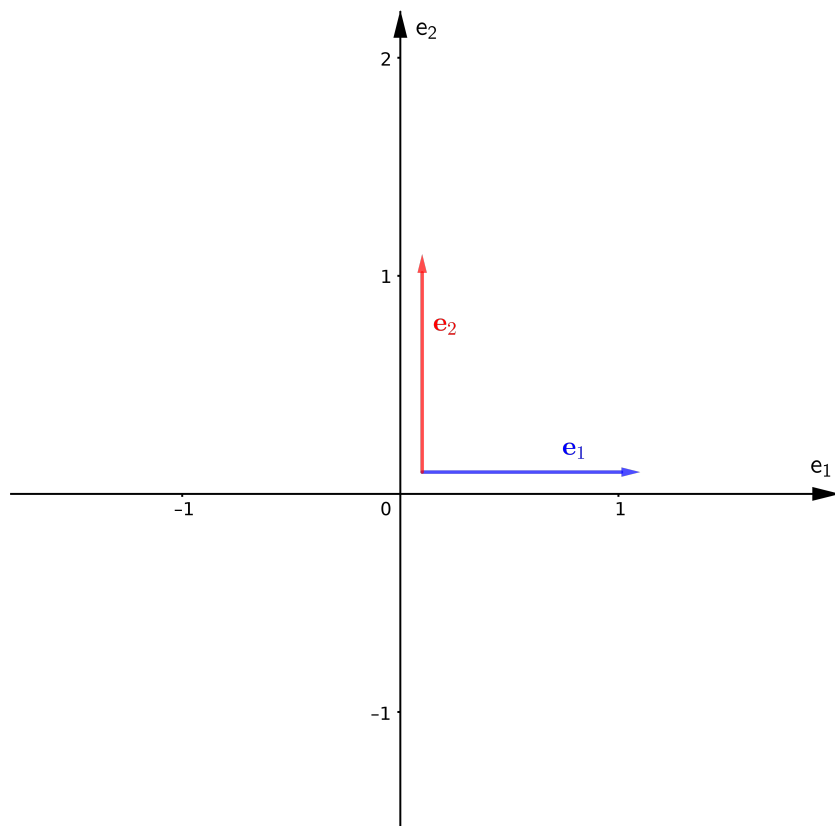


Figura 2.1: Vetores da base canônica e eixos

⚠ Notação: vetores como combinações lineares dos vetores da base

Como na maioria dos livros sobre álgebra geométrica, em vez de escrevermos

$$\mathbf{v} = (x, y)$$

vamos escrever

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

Se uma das coordenadas for zero, podemos omitir o vetor da base correspondente. Por exemplo, vamos escrever o vetor

$$\mathbf{u} = (0, 3)$$

como

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_2$$

- Para acompanhar o restante deste capítulo, você deve revisar os seguintes tópicos sobre vetores, especialmente em \mathbb{R}^2 e em \mathbb{R}^3 :
 - Adição de vetores,
 - Multiplicação de vetor por escalar (nossos escalares vão ser números reais),
 - Vetor nulo,
 - Vetor inverso (para a adição),
 - Dependência e independência linear,
 - Módulo (norma) de um vetor,
 - Produto vetorial,
 - Subespaços vetoriais.

2.2 Retas em \mathbb{R}^2

- Por enquanto, só temos vetores.
- Cada vetor (diferente de $\mathbf{0}$, o vetor nulo) indica uma direção.
- Mas apenas uma direção não basta para definir uma reta. Por exemplo, todas as retas da Figura 2.2 têm a mesma direção: a direção dada pelo vetor $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.
- Vamos combinar que **todas as nossas retas de interesse passam pela origem** — ou seja, pelo ponto $O = (0, 0)$.
- Fazendo isto, cada vetor determina uma única reta.
- Chamamos as retas que passam pela origem de **retas homogêneas**. Na Figura 2.2, só há uma reta homogênea (a reta r).
- Mas, além de uma direção, um vetor também um **sentido**.
- Na Figura 2.2, o vetor $\mathbf{w} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ tem a mesma direção da reta r , mas seu sentido é oposto ao sentido do vetor \mathbf{v} .
- Então, **qual dos dois vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} representa a reta r ?**
- Vamos decidir esta questão do seguinte modo: **nossas retas também vão ter um sentido**. Ou seja, vamos trabalhar com **retas orientadas**.
- Na Figura 2.2, então, os vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} representam duas retas r e r' , ambas com a mesma direção, mas com sentidos opostos.
- Mas, além de direção e sentido, um vetor também tem um **comprimento** (ou **magnitude**, ou **módulo**, ou **norma**).
- Na Figura 2.3, os 3 vetores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 têm a mesma direção e sentido que a reta r .

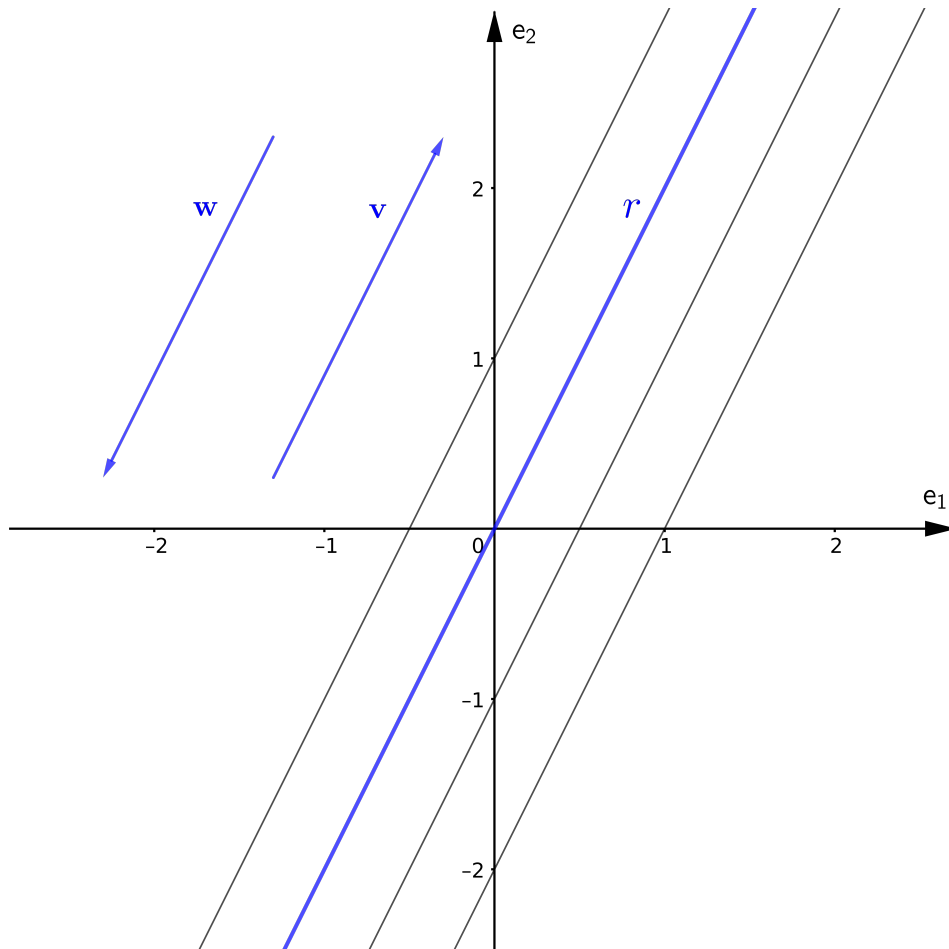


Figura 2.2: Retas e vetores

- De novo, vamos combinar que **cada um destes vetores define uma reta diferente**, todas as retas com a mesma direção e sentido, mas **cada reta com uma magnitude (ou peso) diferente**.
- Você pode imaginar o peso de uma reta como a **velocidade** com que um ponto percorre a reta, ou como a **velocidade** com que a reta avança na direção e no sentido especificados pelo vetor.

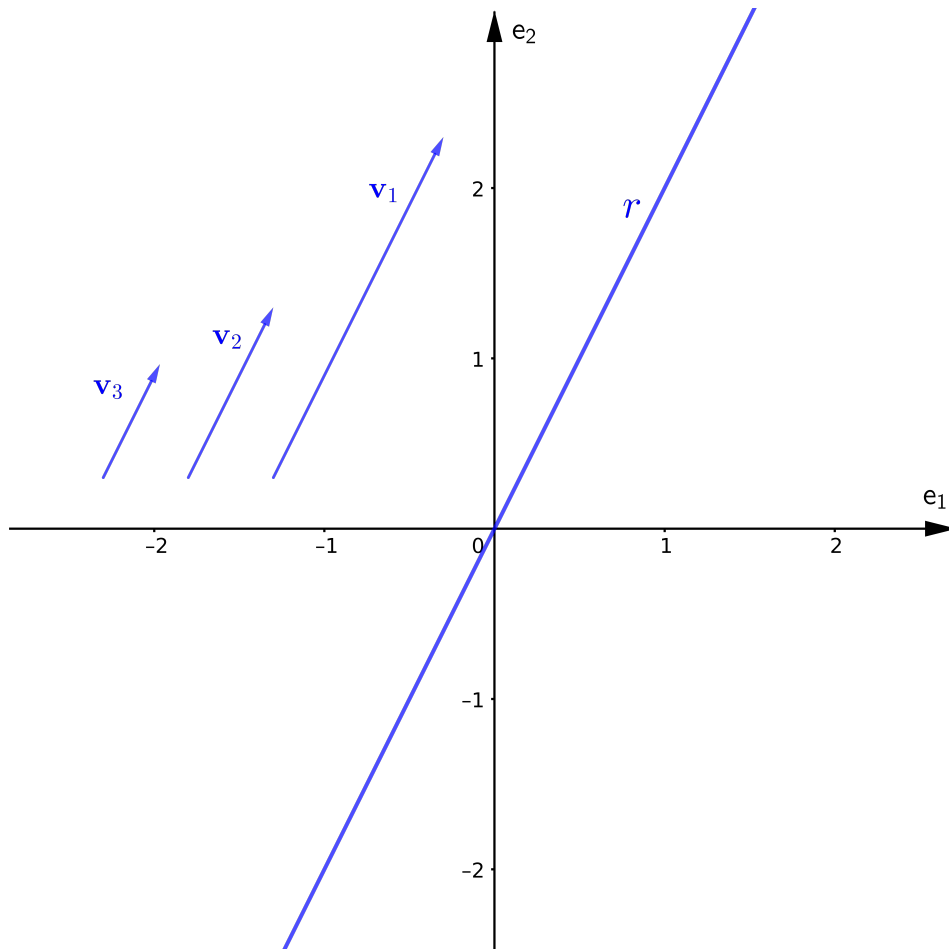


Figura 2.3: Vetores de magnitudes diferentes

i Resumindo: vetores = retas homogêneas orientadas e com peso

Um vetor

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$$

(com $a, b \in \mathbb{R}$, e com pelo menos um dentre a e b diferente de zero) representa uma reta homogênea orientada, com a direção e o sentido de \mathbf{v} , e com peso igual à norma de \mathbf{v} :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

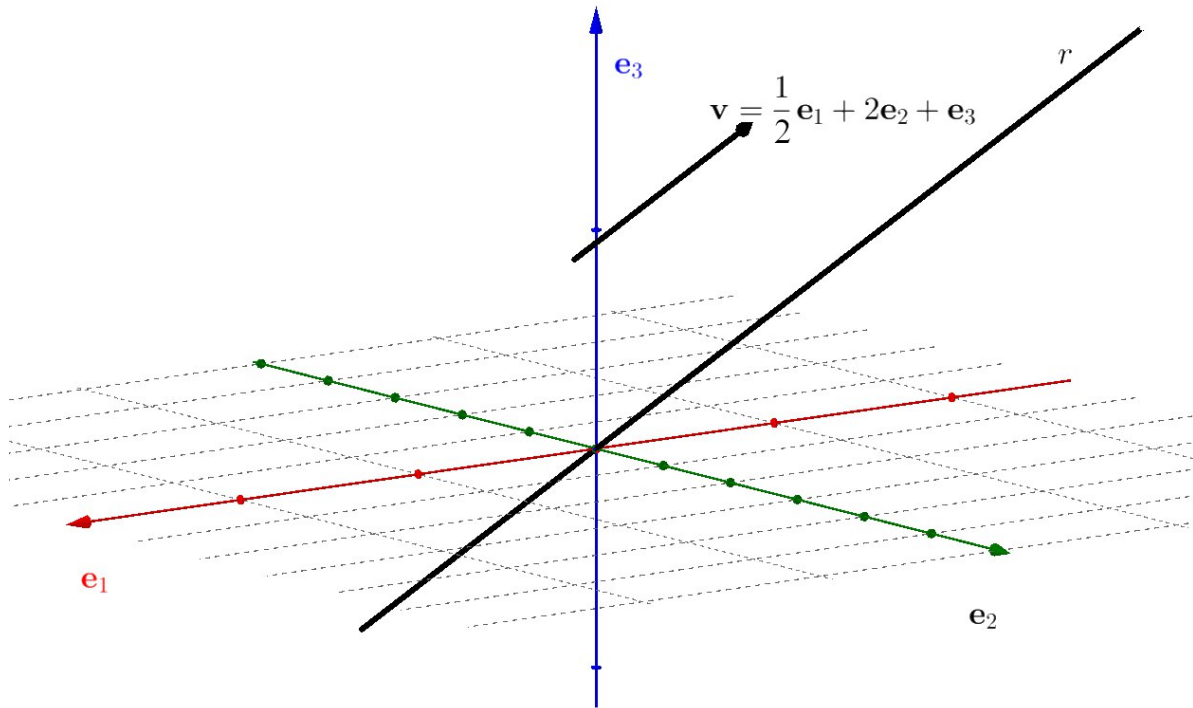


Figura 2.4: Vetor e reta em \mathbb{R}^3

2.3 Vetores e retas em \mathbb{R}^3

- Agora, vamos trabalhar em \mathbb{R}^3 .
- Tudo que falamos acima sobre vetores e retas em \mathbb{R}^2 se aplica a vetores e retas em \mathbb{R}^3 , com as seguintes alterações:
 - A base canônica agora é $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, onde os vetores correspondem aos eixos x , y e z , respectivamente.
 - Logo, um vetor em \mathbb{R}^3 é escrito como $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Cada vetor $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ (com $a, b, c \in \mathbb{R}$, e com pelo menos um dentre a , b e c diferente de zero) representa uma reta homogênea orientada, com a direção e o sentido de \mathbf{v} , e com peso igual à norma de \mathbf{v} :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- A Figura 2.4 mostra um exemplo.

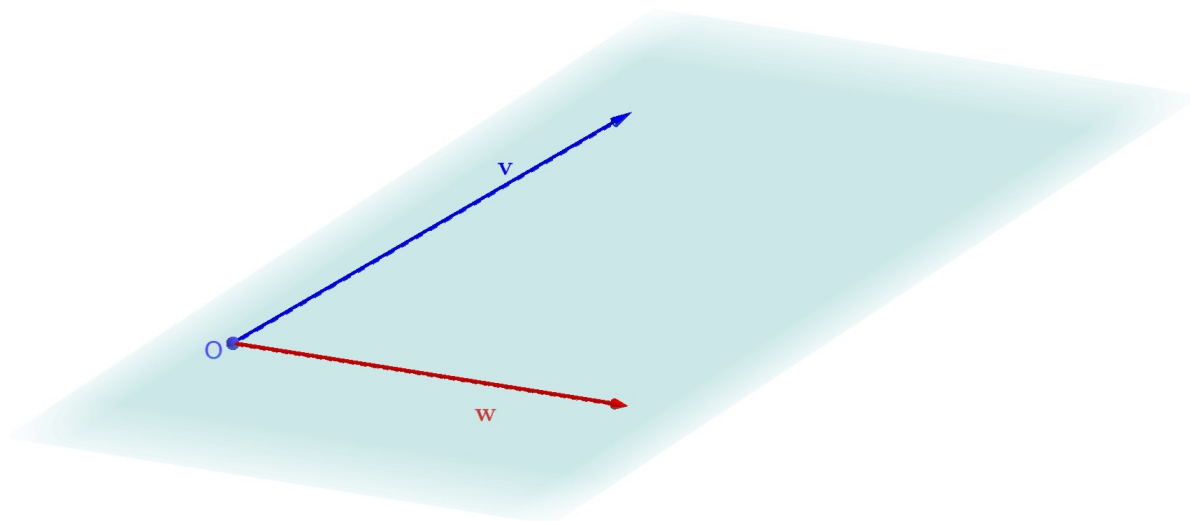


Figura 2.5: Plano homogêneo em \mathbb{R}^3

2.4 Bivetores e planos em \mathbb{R}^3

- Agora, ainda em \mathbb{R}^3 , considere planos **homogêneos** (que contêm a origem).
- Um plano homogêneo neste espaço tridimensional é definido por dois vetores linearmente independentes (isto é, com direções diferentes).
- Por exemplo, o plano da Figura 2.5 é definido pelos vetores $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{w} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.
- De novo, como fizemos antes com as retas, **vamos querer levar em conta os sentidos e as normas** destes dois vetores na maneira como eles definem um plano.
- Quanto aos sentidos: vamos dizer que o plano gerado por estes dois vetores pode ter **duas orientações**, dependendo da **ordem em que tomarmos os vetores**.
- Detalhando: o plano gerado por \mathbf{v} e \mathbf{w} (nesta ordem) vai ter uma orientação, e o plano gerado por \mathbf{w} e \mathbf{v} (nesta ordem) vai ter a orientação oposta.
- Se você revisou os **tópicos recomendados sobre vetores**, você deve estar lembrando que o **produto vetorial** tem um comportamento parecido:
- Quando \mathbf{v} e \mathbf{w} são linearmente independentes, o resultado do produto vetorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ é um vetor **perpendicular** ao plano definido por \mathbf{v} e \mathbf{w} .

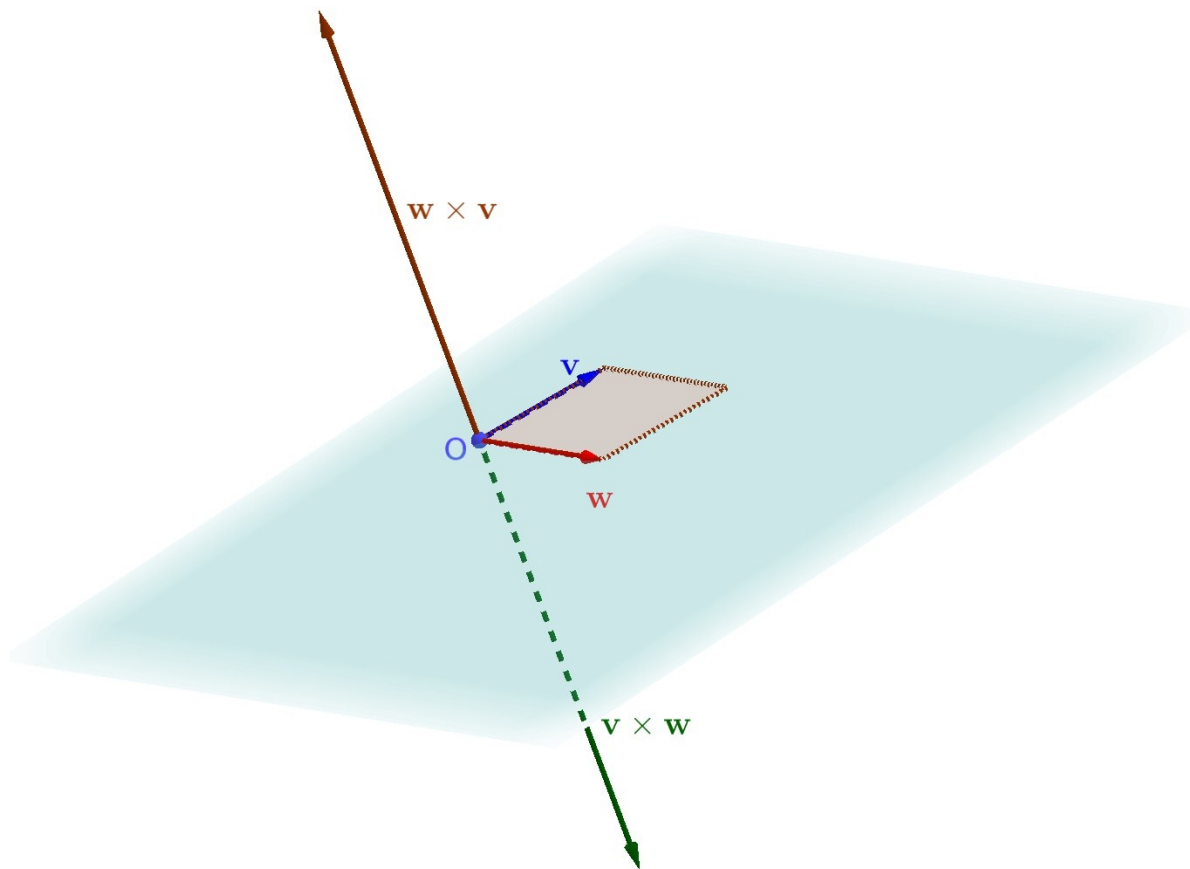


Figura 2.6: Produtos vetoriais

- O resultado do produto vetorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ é um vetor que tem o **sentido oposto** ao resultado do produto vetorial $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$. O sentido de cada resultado é dado pela regra da mão direita.
- Além disso, a **norma** do produto vetorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ — que é igual à norma do produto vetorial $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ — tem o mesmo valor do que a **área do paralelogramo** definido por \mathbf{v} e \mathbf{w} . Veja a Figura 2.6.
- Com isto, temos tudo de que precisamos para definir planos homogêneos que, além de direção, têm **peso** (magnitude) e **orientação** (sentido):
- O **peso** do plano definido por \mathbf{v} e \mathbf{w} tem o mesmo valor absoluto da **área do paralelogramo**, com o sinal positivo ou negativo, dependendo da regra da mão direita. Na Figura 2.6, o peso do plano definido por \mathbf{v} e \mathbf{w} (nesta ordem) é **negativo**, e o peso do plano definido por \mathbf{w} e \mathbf{v} (nesta ordem) é **positivo**.

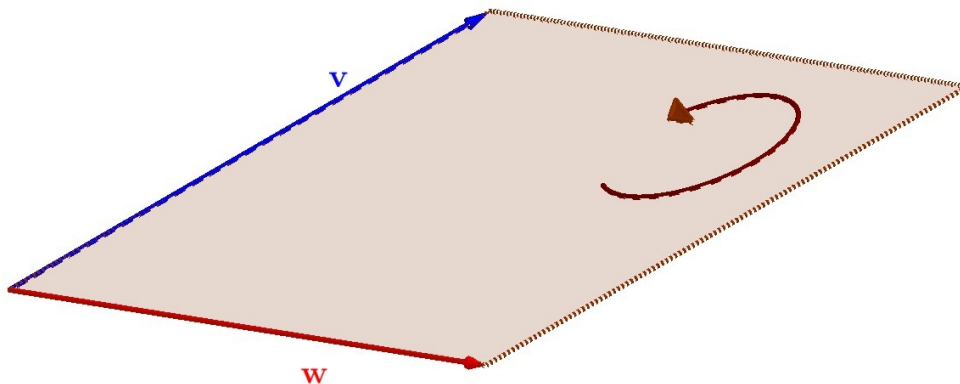


Figura 2.7: Bivector definido por \mathbf{w} e \mathbf{v} (nesta ordem)

- A **orientação** do plano definido por \mathbf{v} e \mathbf{w} (nesta ordem) é oposta à orientação do plano definido por \mathbf{w} e \mathbf{v} (nesta ordem).
- **Vamos chamar de bivector** este plano homogêneo, orientado e com peso.
- A Figura 2.7 mostra o bivector definido por \mathbf{w} e \mathbf{v} (nesta ordem). A orientação é dada por uma seta circular.
- A Figura 2.8 mostra o bivector definido por \mathbf{v} e \mathbf{w} (nesta ordem). A orientação é oposta à do bivector na Figura 2.7.
- Nas figuras, representamos um bivector como uma **área orientada** em um plano.
- Mas **a forma desta área não é importante**. As figuras mostram paralelogramos, mas os mesmos bivectores poderiam ser mostrados como círculos, triângulos etc. com a mesma área.
- As figuras parecem diferenciar planos (que são infinitos) e bivectores (que têm, associados a eles, áreas finitas). Mais adiante, vamos ver que, em algumas aplicações, **podemos interpretar um bivector como representando o plano no qual ele está contido**; em outras aplicações, **podemos interpretar um bivector como uma porção finita do plano**.

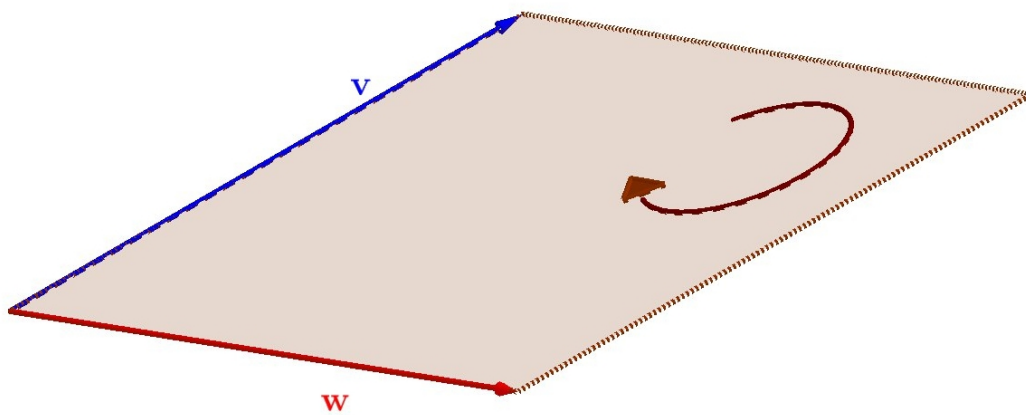


Figura 2.8: Bivector definido por v e w (nesta ordem)

2.5 O produto externo de vetores cria bivectores

???

Notação

Antissimetria

Vetores paralelos

Distributividade

Exemplos numéricos

2.6 Bivetores em \mathbb{R}^2 ?

2.7 Trivetores em \mathbb{R}^3

2.8 k -vetores em \mathbb{R}^n

2.9 Propriedades do produto externo

2.10 Resolvendo problemas com \wedge

2.11 Representando subespaços homogêneos orientados e com peso

2.12 *Blades*

2.13 Multivetores

2.14 Resumo

2.15 Exercícios

Referências