

Álgebra Geométrica para Ciência da Computação

Fernando Náufel

07/05/2023 15:35

Índice

Prefácio	3
1 Introdução	4
1.1 Referências	4
2 O produto externo	5
2.1 Vetores em \mathbb{R}^2	5
2.2 Retas em \mathbb{R}^2	6
2.3 Bivetores em \mathbb{R}^2	8
2.4 O produto externo	11
2.5 O espaço vetorial $G(2)$	11
2.6 Vetores e retas em \mathbb{R}^3	11
2.7 Trivetores e paralelepípedos em \mathbb{R}^3	11
2.8 O espaço vetorial $G(3)$	11
2.9 Representando objetos geométricos	11
2.10 Resolvendo problemas	11
2.11 Resumo	11
2.12 Exercícios	11
Referências	13

Prefácio

???

1 Introdução

???

1.1 Referências

???

Livros em português e em inglês

Sites

Playlists

???

2 O produto externo

2.1 Vetores em \mathbb{R}^2

- Por enquanto, vamos trabalhar no espaço vetorial \mathbb{R}^2 .
- Os elementos de \mathbb{R}^2 são vetores com duas coordenadas; por exemplo:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$
$$\mathbf{w} = \left(-3, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

⚠ Notação: vetores em negrito

Você deve estar acostumado a escrever nomes de vetores como \vec{v} , \vec{w} etc. Neste livro, como na maioria dos livros sobre álgebra geométrica, nomes de vetores serão escritos em negrito: \mathbf{v} , \mathbf{w} .

- Usando a base canônica de \mathbb{R}^2 , com $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, os vetores do exemplo acima podem ser escritos como

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{w} = -3\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2$$

- Tecnicamente, estamos escrevendo cada vetor como uma **combinação linear** dos vetores da base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Veja a Figura 2.1.

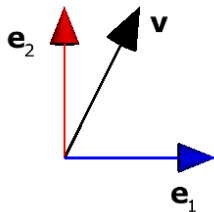


Figura 2.1: Vetores da base canônica e vetor $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$

⚠ Notação: vetores como combinações lineares dos vetores da base

Como na maioria dos livros sobre álgebra geométrica, em vez de escrevermos

$$\mathbf{v} = (x, y)$$

vamos escrever

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

Se uma das coordenadas for zero, podemos omitir o vetor da base correspondente. Por exemplo, vamos escrever o vetor

$$\mathbf{u} = (0, 3)$$

como

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_2$$

- Para acompanhar o restante deste capítulo, você deve revisar os seguintes tópicos sobre vetores, especialmente em \mathbb{R}^2 e em \mathbb{R}^3 :
 - Adição de vetores,
 - Multiplicação de vetor por escalar (nossos escalares vão ser números reais),
 - Vetor nulo,
 - Vetor inverso (para a adição),
 - Dependência e independência linear,
 - Módulo (norma) de um vetor,
 - Produto vetorial,
 - Subespaços vetoriais.

2.2 Retas em \mathbb{R}^2

- Por enquanto, só temos vetores.
- Cada vetor (diferente de $\mathbf{0}$, o vetor nulo) indica uma direção.
- Mas apenas uma direção não basta para definir uma reta. Por exemplo, todas as retas da Figura 2.2 têm a mesma direção: a direção dada pelo vetor $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.
- Vamos combinar que **todas as nossas retas de interesse passam pela origem** — ou seja, pelo ponto $O = (0, 0)$.
- Fazendo isto, cada vetor determina uma única reta.
- Chamamos as retas que passam pela origem de **retas homogêneas**. Na Figura 2.2, só há uma reta homogênea (a reta r).

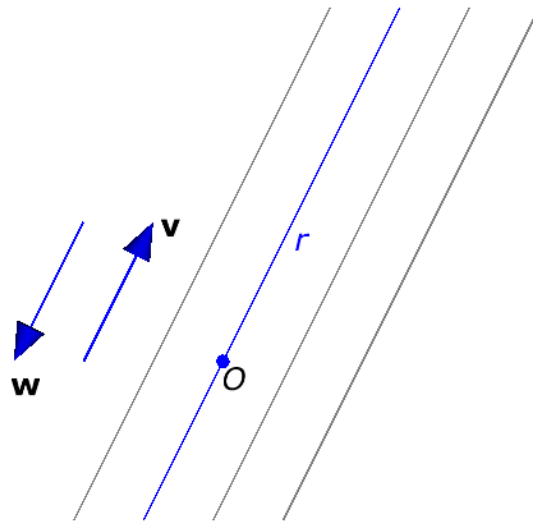


Figura 2.2: Retas e vetores

- Mas, além de uma direção, um vetor também um **sentido**.
- Na Figura 2.2, o vetor $\mathbf{w} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ tem a mesma direção da reta r , mas seu sentido é oposto ao sentido do vetor \mathbf{v} .
- Então, **qual dos dois vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} representa a reta r ?**
- Vamos decidir esta questão do seguinte modo: **nossas retas também vão ter um sentido**. Ou seja, vamos trabalhar com **retas orientadas**.
- Na Figura 2.2, então, os vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} representam duas retas r e r' , ambas com a mesma direção, mas com sentidos opostos.
- Mas, além de direção e sentido, um vetor também tem um **comprimento** (ou **magnitude**, ou **módulo**, ou **norma**).
- Na Figura 2.3, os 3 vetores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 têm a mesma direção e sentido que a reta r .
- De novo, vamos combinar que **cada um destes vetores define uma reta diferente**, todas as retas com a mesma direção e sentido, mas **cada reta com uma magnitude (ou peso) diferente**.
- Você pode imaginar o peso de uma reta como a **velocidade** com que um ponto percorre a reta, ou como a **velocidade** com que a reta avança na direção e no sentido especificados pelo vetor.

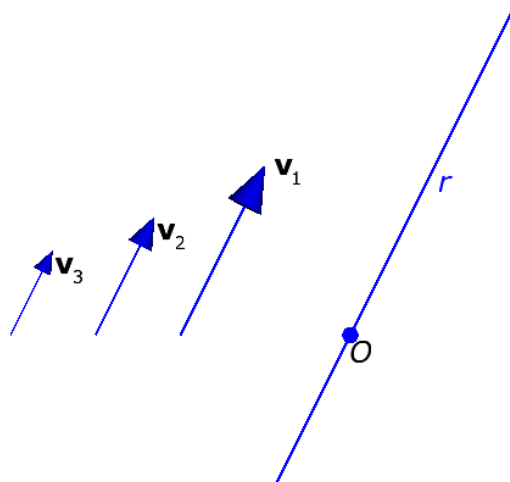


Figura 2.3: Vetores de magnitudes diferentes

i Resumindo: vetores = retas homogêneas orientadas e com peso

Um vetor $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ (com $a, b \in \mathbb{R}$, e com pelo menos um dentre a e b diferente de zero) representa uma reta homogênea orientada, com a direção e o sentido de \mathbf{v} , e com peso igual à norma de \mathbf{v} :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.3 Bivetores em \mathbb{R}^2

- Acabamos de ver que vetores em \mathbb{R}^2 correspondem a **comprimentos orientados**.
- Agora, vamos definir objetos em \mathbb{R}^2 que correspondem a **áreas orientadas**.
- Uma área orientada vai ser construída a partir de **dois vetores linearmente independentes** (isto é, não paralelos).
- Por exemplo, a Figura 2.4 mostra a área orientada definida pelos vetores $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ (**nesta ordem**). A orientação, indicada na figura pelo círculo com os raios, é no sentido horário.

- A orientação depende da ordem dos vetores. A Figura 2.5 mostra a área orientada definida pelos mesmos vetores $\mathbf{w} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, na ordem inversa da Figura 2.4. A orientação, agora, é no sentido anti-horário.

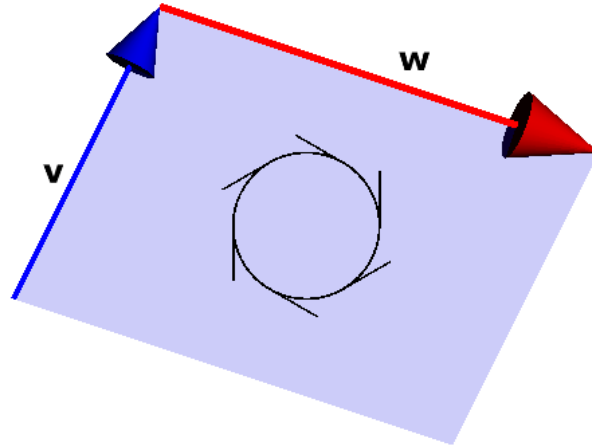


Figura 2.4: Área orientada definida por \mathbf{v} e \mathbf{w} (nesta ordem)

- Estas áreas orientadas são chamadas bivectores.
- Um bivector em \mathbb{R}^2 tem, além da orientação, um peso. O valor absoluto do peso é a área correspondente ao bivector — isto é, a área do paralelogramo definido pelos vetores.
- A área do paralelogramo definido pelos vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} é

$$||\mathbf{v}|| ||\mathbf{w}|| \sin \theta$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{v} e \mathbf{w} .

- Esta área também pode ser calculada através de um determinante específico, usado no cálculo do produto vetorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Você vai relembrar isto no exercício ???.
- No exemplo da Figura 2.4, o peso do bivector é -7 , se convencionarmos que a orientação no sentido horário corresponde a áreas negativas.
- No exemplo da Figura 2.5, o peso do bivector é 7 , se convencionarmos que a orientação no sentido anti-horário corresponde a áreas positivas.
- Em \mathbb{R}^2 , a atitude (ou direção) de todo bivector é a mesma, pois todos os bivectores estão no mesmo plano.

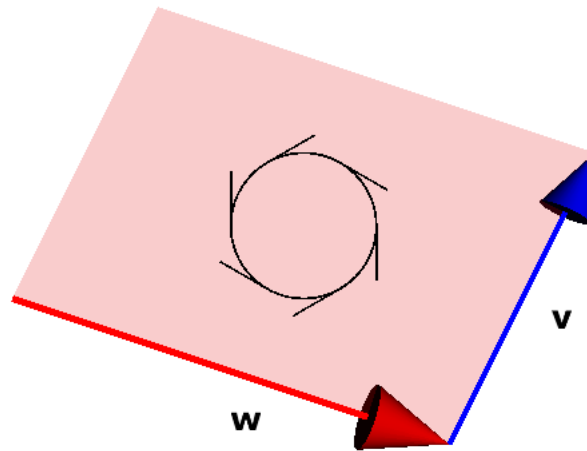


Figura 2.5: Área orientada definida por \mathbf{w} e \mathbf{v} (nesta ordem)

- Então, assim como fizemos com os vetores (que associamos a retas orientadas e com peso na Seção 2.2), vamos associar a cada bivector um plano (ou uma parte do plano) orientado e com peso.
- A forma e a posição da área correspondente a um bivector não são importantes. As figuras mostram paralelogramos, mas os mesmos bivectores poderiam ser mostrados como círculos, triângulos etc. com a mesma área, em qualquer posição do plano.
- As figuras parecem diferenciar o plano (que é infinito) e bivectores (que têm, associados a eles, áreas finitas). Mais adiante, vamos ver que, em algumas aplicações, podemos interpretar um bivector como representando o plano no qual ele está contido; em outras aplicações, podemos interpretar um bivector como uma porção finita do plano.

i Resumindo: bivectores = áreas orientadas e com peso

Um bivector definido pelos vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} representa uma área orientada e com peso no plano que contém \mathbf{v} e \mathbf{w} .

O valor absoluto do peso do bivector é dado por

$$||\mathbf{v}|| ||\mathbf{w}|| \sin \theta$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{v} e \mathbf{w} .

O sinal do peso depende da orientação do bivector, segundo a convenção adotada.

2.4 O produto externo

2.5 O espaço vetorial $G(2)$

2.6 Vetores e retas em \mathbb{R}^3

- Agora, vamos trabalhar em \mathbb{R}^3 .
- Tudo que falamos acima sobre vetores e retas em \mathbb{R}^2 se aplica a vetores e retas em \mathbb{R}^3 , com as seguintes alterações:
 - A base canônica agora é $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, onde os vetores correspondem aos eixos x , y e z , respectivamente.
 - Logo, um vetor em \mathbb{R}^3 é escrito como $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Cada vetor $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ (com $a, b, c \in \mathbb{R}$, e com pelo menos um dentre a , b e c diferente de zero) representa uma reta homogênea orientada, com a direção e o sentido de \mathbf{v} , e com peso igual à norma de \mathbf{v} :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- A Figura 2.6 mostra um exemplo.

2.7 Trivetores e paralelepípedos em \mathbb{R}^3

2.8 O espaço vetorial $G(3)$

2.9 Representando objetos geométricos

2.10 Resolvendo problemas

2.11 Resumo

2.12 Exercícios

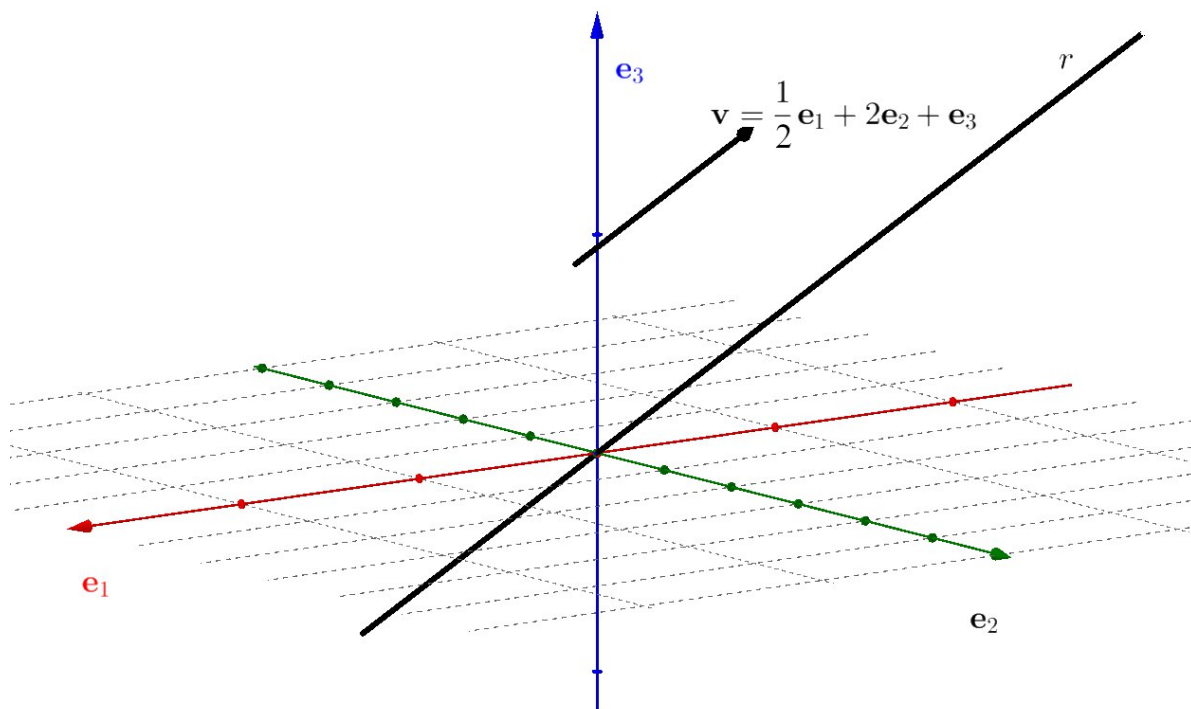


Figura 2.6: Vetor e reta em \mathbb{R}^3

Referências