# Álgebra Geométrica para Ciência da Computação

Fernando Náufel

03/05/2023 18:05

# Índice

# Prefácio

???

# 1 Introdução

???

## 1.1 Referências

???

Livros em português e em inglês

Sites

Playlists

???

# 2 O produto externo

## 2.1 Vetores em $\mathbb{R}^2$

- Vamos trabalhar no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.
- Os elementos de $\mathbb{R}^2$ são vetores com duas coordenadas; por exemplo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-1, 3) \\ \mathbf{w} &= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

> **Notação: vetores em negrito**
>
> Você deve estar acostumado a escrever nomes de vetores como $\vec{v}$, $\vec{w}$ etc.
> Neste livro, como na maioria dos livros sobre álgebra geométrica, nomes de vetores serão escritos em negrito: $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

- Usando a base canônica de $\mathbb{R}^2$, com $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, os vetores do exemplo acima podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -1\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{w} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

- Tecnicamente, estamos escrevendo cada vetor como uma combinação linear dos vetores da base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
- Para lembrar que estamos trabalhando com $\mathbf{e}_1$ e com $\mathbf{e}_2$, vamos rotular os eixos $x$ e $y$ dos nossos gráficos com os nomes destes dois vetores, como na Figura 2.1.
- Mas você deve se lembrar que $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ representam os dois vetores unitários da figura, e não os eixos orientados (que são infinitos).

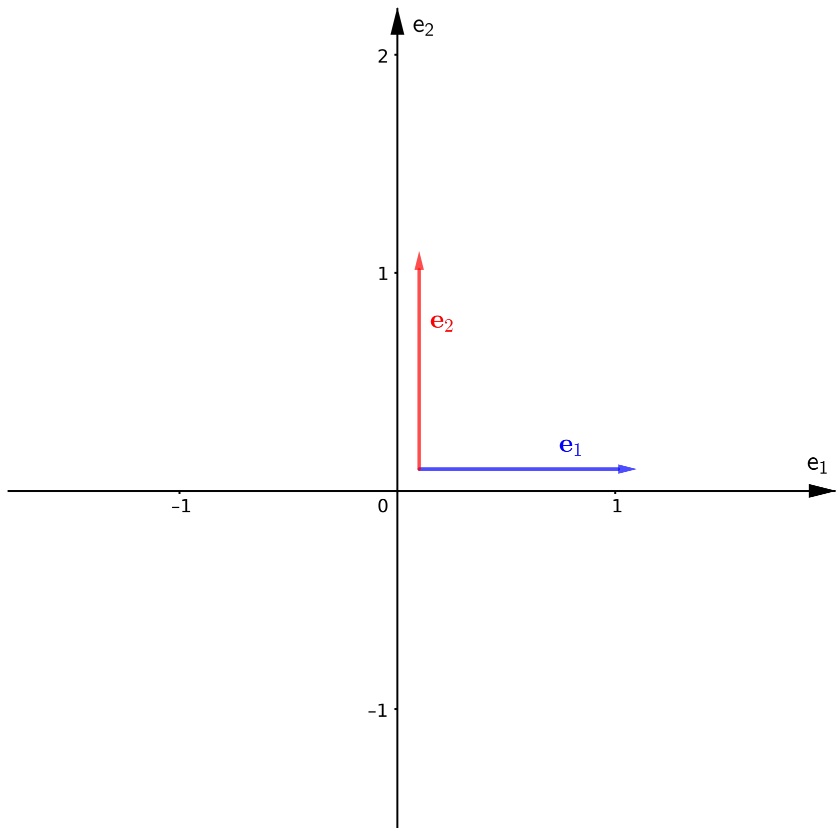


Figura 2.1: Vetores da base canônica e eixos

**Notação: vetores como combinações lineares dos vetores da base**

Como na maioria dos livros sobre álgebra geométrica, em vez de escrevermos

$$\mathbf{v} = (x, y)$$

vamos escrever

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

Se uma das coordenadas for zero, podemos omitir o vetor da base correspondente. Por exemplo, vamos escrever o vetor

$$\mathbf{u} = (0, 3)$$

como

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_2$$

- Para acompanhar o restante deste capítulo, você deve revisar os seguintes tópicos sobre vetores, especialmente em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$:
  - Adição de vetores,
  - Multiplicação de vetor por escalar (nossos escalares vão ser números reais),
  - Vetor nulo,
  - Vetor inverso (para a adição),
  - Dependência e independência linear,
  - Módulo (norma) de um vetor,
  - Produto vetorial,
  - Subespaços vetoriais.

## 2.2 Retas em $\mathbb{R}^2$

- Por enquanto, só temos vetores.
- Cada vetor (diferente de $\mathbf{0}$, o vetor nulo) indica uma direção.
- Mas apenas uma direção não basta para definir uma reta. Por exemplo, todas as retas da Figura 2.2 têm a mesma direção: a direção dada pelo vetor $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.
- Vamos combinar que todas as nossas retas de interesse passam pela origem — ou seja, pelo ponto $O = (0, 0)$.
- Fazendo isto, cada vetor determina uma única reta.
- Chamamos as retas que passam pela origem de retas homogêneas. Na Figura 2.2, só há uma reta homogênea (a reta $r$).
- Mas, além de uma direção, um vetor também um sentido.
- Na Figura 2.2, o vetor $\mathbf{w} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ tem a mesma direção da reta $r$, mas seu sentido é oposto ao sentido do vetor $\mathbf{v}$.
- Então, qual dos dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ representa a reta $r$?
- Vamos decidir esta questão do seguinte modo: nossas retas também vão ter um sentido. Ou seja, vamos trabalhar com retas orientadas.
- Na Figura 2.2, então, os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ representam duas retas $r$ e $r'$, ambas com a mesma direção, mas com sentidos opostos.
- Mas, além de direção e sentido, um vetor também tem um comprimento (ou magnitude, ou módulo, ou norma).
- Na Figura 2.3, os 3 vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ têm a mesma direção e sentido que a reta $r$.

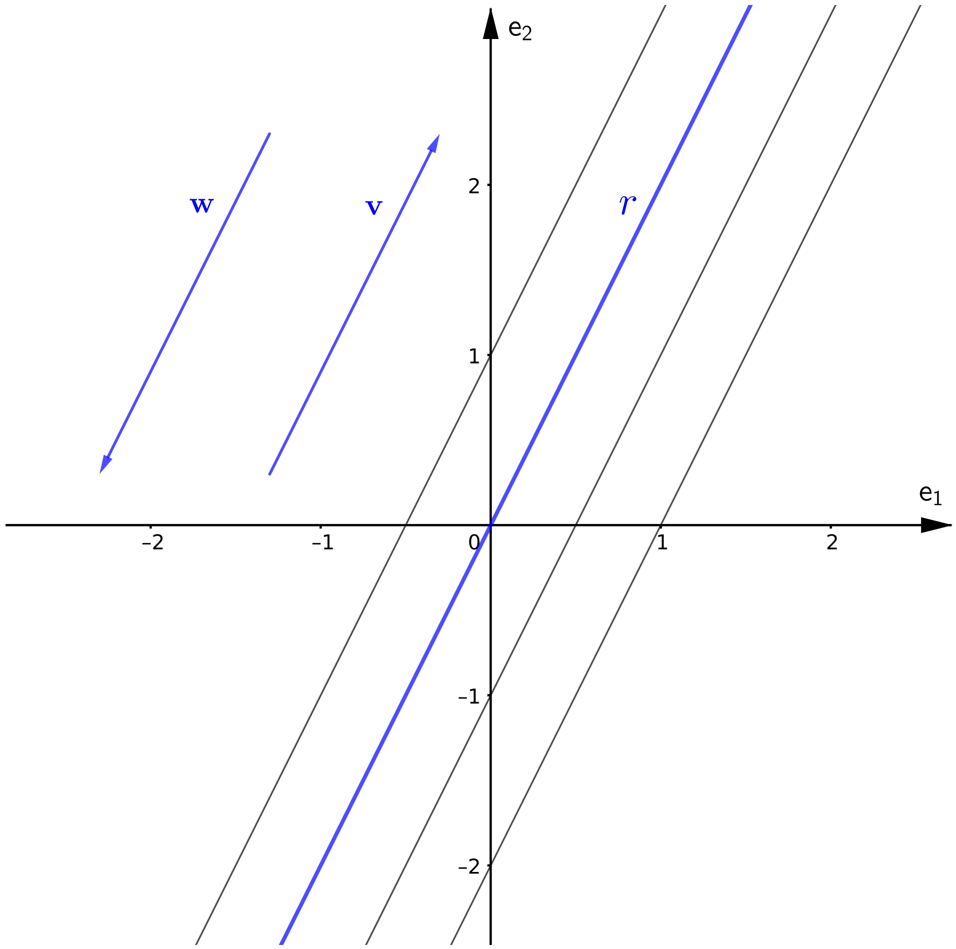


Figura 2.2: Retas e vetores

- De novo, vamos combinar que cada um destes vetores define uma reta diferente, todas as retas com a mesma direção e sentido, mas cada reta com uma magnitude (ou peso) diferente.
- Você pode imaginar o peso de uma reta como a velocidade com que um ponto percorre a reta, ou como a velocidade com que a reta avança na direção e no sentido especificados pelo vetor.

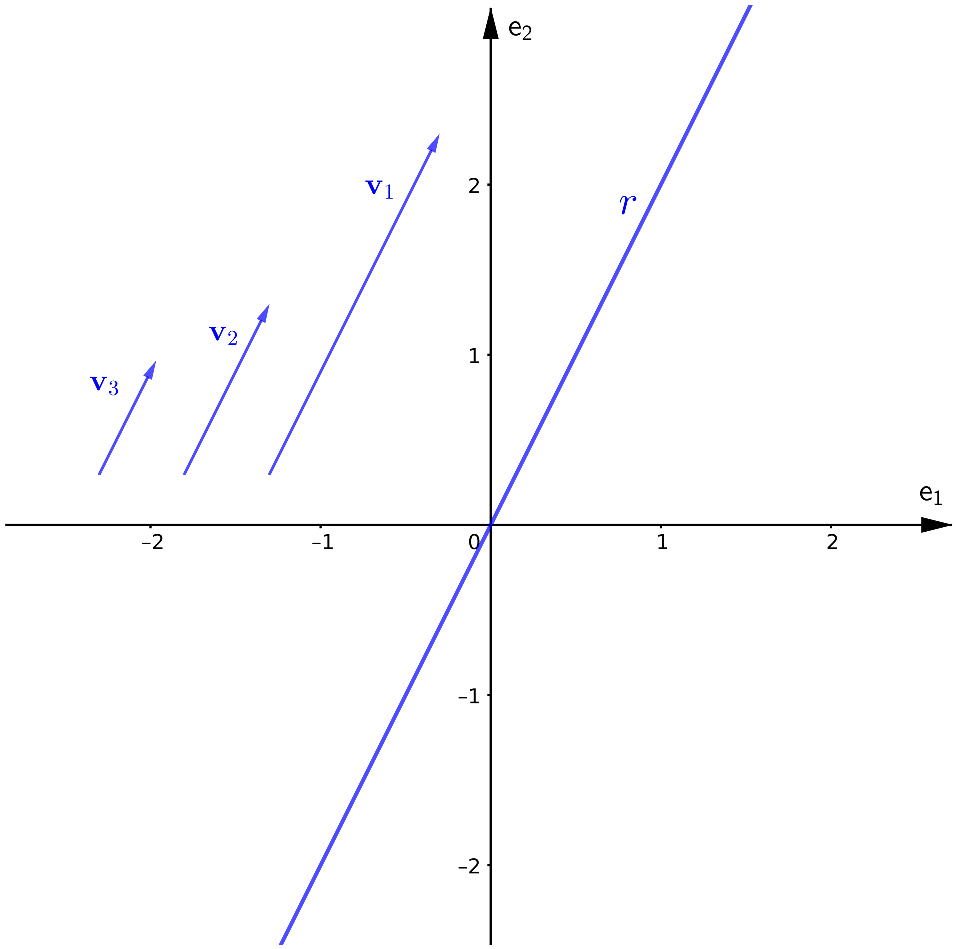


Figura 2.3: Vetores de magnitudes diferentes

**Resumindo: vetores = retas homogêneas orientadas e com peso**

Um vetor

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$$

(com $a, b \in \mathbb{R}$, e com pelo menos um dentre $a$ e $b$ diferente de zero) representa uma reta homogênea orientada, com a direção e o sentido de $\mathbf{v}$, e com peso igual à norma de $\mathbf{v}$:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

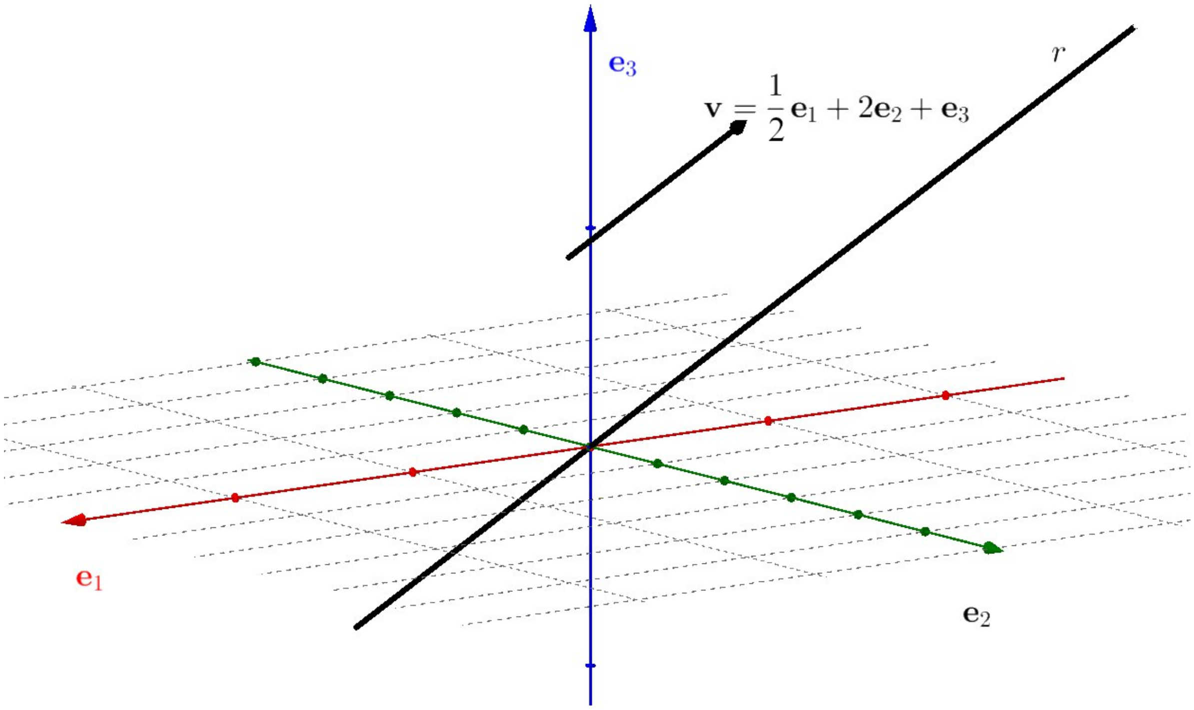


Figura 2.4: Vetor e reta em $\mathbb{R}^3$

## 2.3 Vetores e retas em $\mathbb{R}^3$

- Tudo que falamos acima sobre vetores e retas em $\mathbb{R}^2$ se aplica a vetores e retas em $\mathbb{R}^3$, com as seguintes alterações:
  - A base canônica agora é $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, onde os vetores correspondem aos eixos $x$, $y$ e $z$, respectivamente.
  - Logo, um vetor em $\mathbb{R}^3$ é escrito como $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$.
  - Cada vetor $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ (com $a, b, c \in \mathbb{R}$, e com pelo menos um dentre $a$, $b$ e $c$ diferente de zero) representa uma reta homogênea orientada, com a direção e o sentido de $\mathbf{v}$, e com peso igual à norma de $\mathbf{v}$:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- A Figura 2.4 mostra um exemplo.

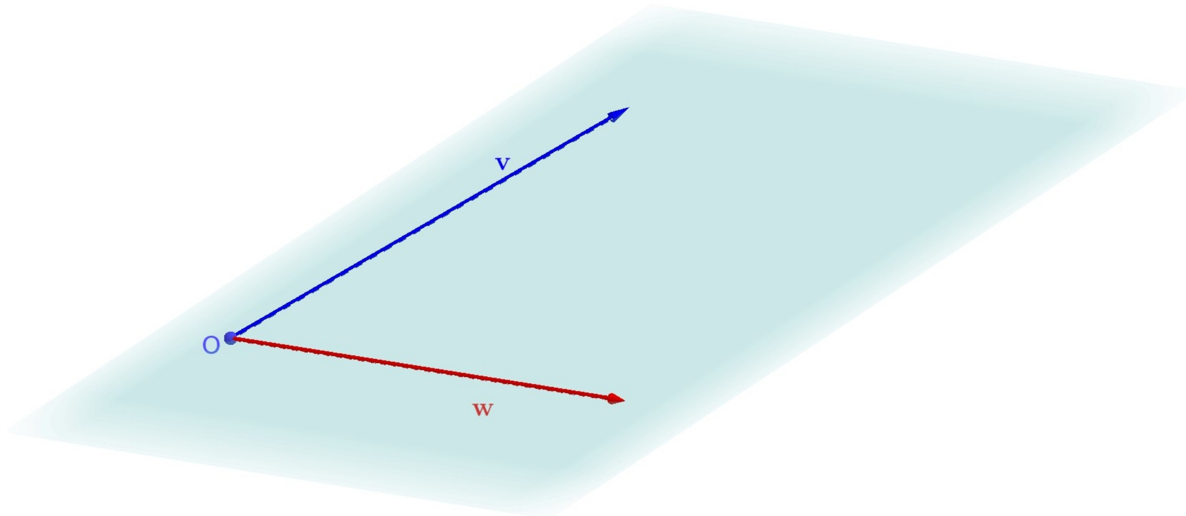


Figura 2.5: Plano homogêneo em $\mathbb{R}^3$

## 2.4 Bivetores e planos em $\mathbb{R}^3$

- Agora, em $\mathbb{R}^3$, considere planos homogêneos (que contêm a origem).
- Um plano homogêneo neste espaço tridimensional é definido por dois vetores linearmente independentes (isto é, com direções diferentes).
- Por exemplo, o plano da Figura 2.5 é definido pelos vetores $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{w} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.
- Mas, como fizemos antes com as retas, vamos querer levar em conta os sentidos e as normas destes dois vetores.
- Quanto aos sentidos: vamos dizer que o plano gerado por estes dois vetores pode ter duas orientações, dependendo da ordem em que tomarmos os vetores.
- Detalhando: o plano gerado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (nesta ordem) vai ter uma orientação, e o plano gerado por $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ (nesta ordem) vai ter a orientação oposta.
- Se você revisou os tópicos recomendados sobre vetores, você deve estar lembrando que o produto vetorial tem um comportamento parecido:
- Quando $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são linearmente independentes, o resultado do produto vetorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ é um vetor perpendicular ao plano definido por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

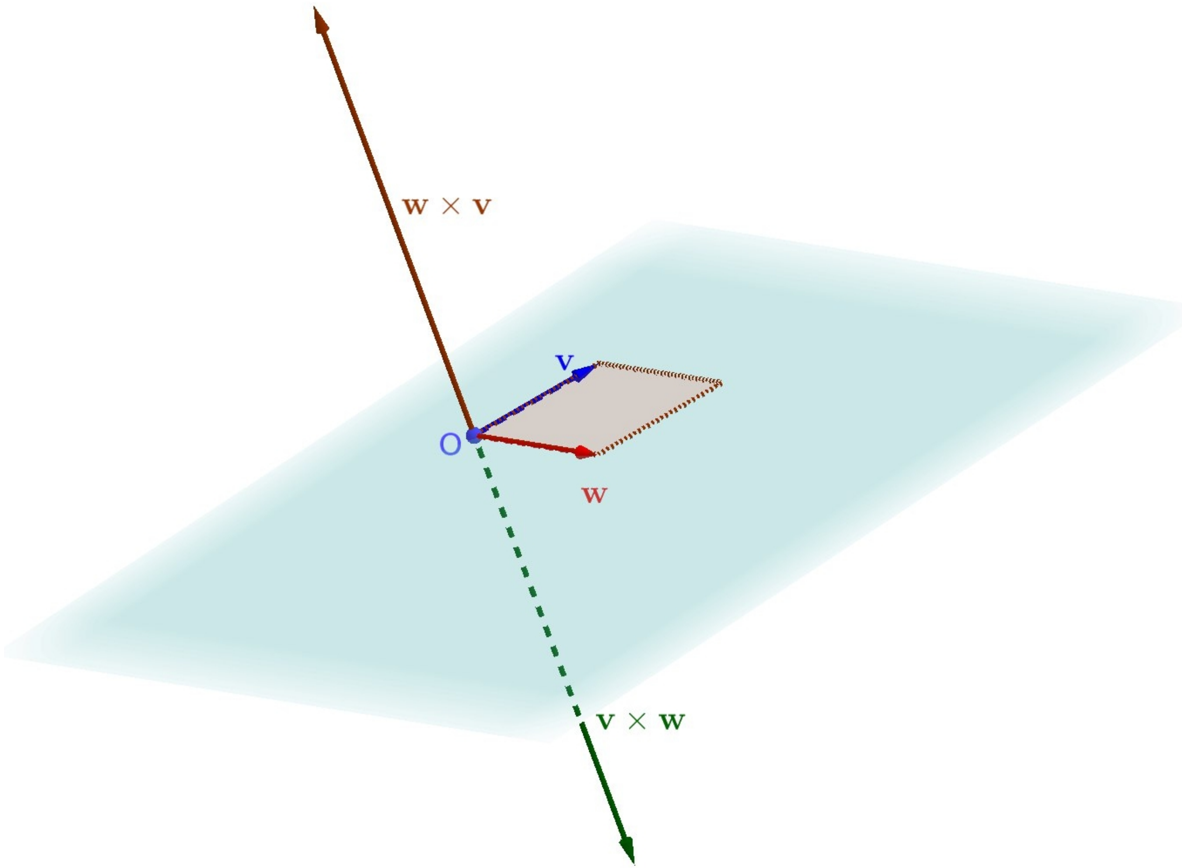


Figura 2.6: Produtos vetoriais

- O resultado do produto vetorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ é um vetor que tem o sentido oposto ao resultado do produto vetorial $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$. O sentido de cada resultado é dado pela regra da mão direita.
- Além disso, a norma do produto vetorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ — que é igual à norma do produto vetorial $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ — tem o mesmo valor do que a área do paralelogramo definido por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Veja a Figura 2.6.
- Com isto, temos tudo de que precisamos para definir planos homogêneos que, além de direção, têm peso (magnitude) e orientação (sentido):
- O peso do plano definido por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ tem o mesmo valor absoluto da área do paralelogramo, com o sinal positivo ou negativo, dependendo da regra da mão direita. Na Figura 2.6, o peso do plano definido por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (nesta ordem) é negativo, e o peso do plano definido por $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ (nesta ordem) é positivo.

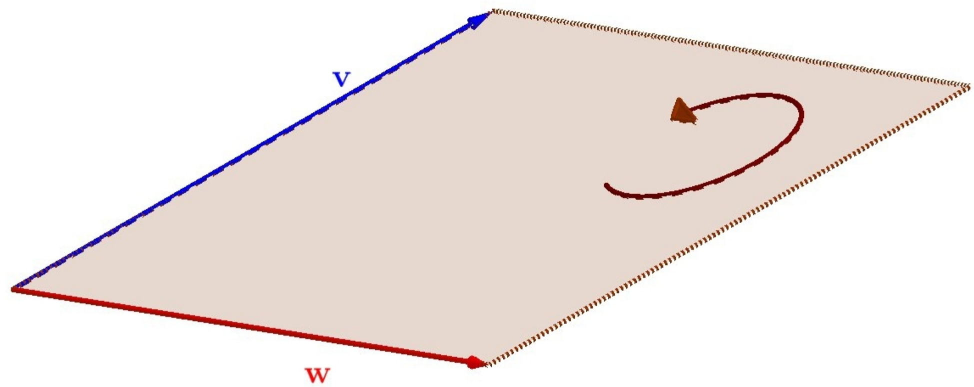


Figura 2.7: Bivetor definido por **w** e **v** (nesta ordem)

- A orientação do plano definido por **v** e **w** (nesta ordem) é oposta à orientação do plano definido por **w** e **v** (nesta ordem).
- Vamos chamar de bivetor este plano homogêneo, orientado e com peso.
- A Figura 2.7 mostra o bivetor definido por **w** e **v** (nesta ordem). A orientação é dada por uma seta circular.
- A Figura 2.8 mostra o bivetor definido por **v** e **w** (nesta ordem). A orientação é oposta à do bivetor na Figura 2.7.
- Nas figuras, representamos um bivetor como uma área orientada em um plano.
- Mas a forma desta área não é importante. As figuras mostram paralelogramos, mas os mesmos bivetores poderiam ser mostrados como círculos, triângulos etc. com a mesma área.
- As figuras parecem diferenciar planos (que são infinitos) e bivetores (que têm, associados a eles, áreas finitas). Mais adiante, vamos ver que, em algumas aplicações, podemos interpretar um bivetor como representando o plano no qual ele está contido; em outras aplicações, podemos interpretar um bivetor como um subespaço do plano.

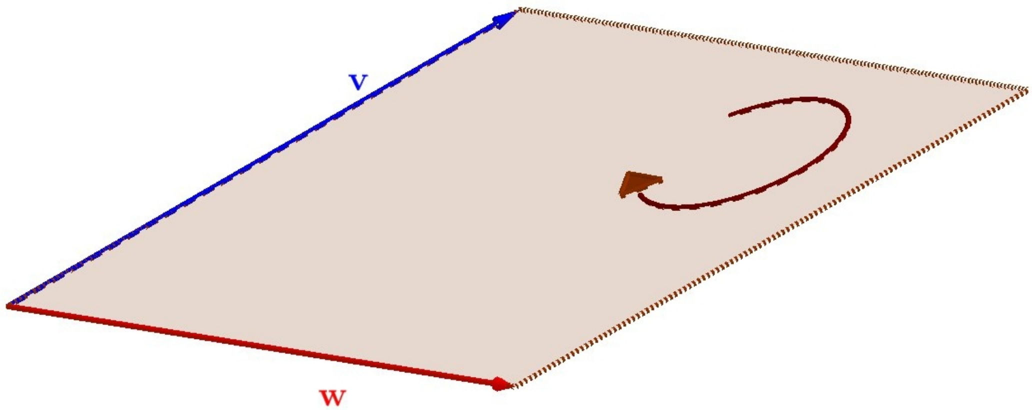


Figura 2.8: Bivetor definido por **v** e **w** (nesta ordem)

## 2.5 O produto externo de vetores cria bivetores

???

Notação

Antissimetria

Vetores paralelos

Distributividade

Exemplos numéricos

## 2.6 Bivetores em $\mathbb{R}^2$?

## 2.7 Trivetores em $\mathbb{R}^3$

## 2.8 $k$-vetores em $\mathbb{R}^n$

## 2.9 Propriedades do produto externo

## 2.10 Resolvendo problemas com $\wedge$

## 2.11 Representando subespaços homogêneos orientados e com peso

## 2.12 *Blades*

## 2.13 Multivetores

## 2.14 Resumo

## 2.15 Exercícios

# Referências