

# **Álgebra Geométrica para Ciência da Computação**

Fernando Náufel

06/05/2023 19:42

# Índice

<b>Prefácio</b>	<b>3</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>4</b>
1.1 Referências . . . . .	4
<b>2 O produto externo</b>	<b>5</b>
2.1 Vetores em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	5
2.2 Retas em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	7
2.3 Bivetores em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	10
2.4 O produto externo . . . . .	12
2.5 O espaço vetorial $G(2)$ . . . . .	12
2.6 Vetores e retas em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	12
2.7 Trivetores e paralelepípedos em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	14
2.8 O espaço vetorial $G(3)$ . . . . .	14
2.9 Representando objetos geométricos . . . . .	14
2.10 Resolvendo problemas . . . . .	14
2.11 Resumo . . . . .	14
2.12 Exercícios . . . . .	14
<b>Referências</b>	<b>15</b>

# Prefácio

???

# 1 Introdução

???

## 1.1 Referências

???

Livros em português e em inglês

Sites

Playlists

???

## 2 O produto externo

### 2.1 Vetores em $\mathbb{R}^2$

- Por enquanto, vamos trabalhar no espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ .
- Os elementos de  $\mathbb{R}^2$  são vetores com duas coordenadas; por exemplo:

$$\mathbf{v} = (-1, 3)$$
$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

#### ⚠ Notação: vetores em negrito

Você deve estar acostumado a escrever nomes de vetores como  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  etc. Neste livro, como na maioria dos livros sobre álgebra geométrica, nomes de vetores serão escritos em negrito:  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ .

- Usando a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , com  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  e  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ , os vetores do exemplo acima podem ser escritos como

$$\mathbf{v} = -1\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2$$

- Tecnicamente, estamos escrevendo cada vetor como uma **combinação linear** dos vetores da base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ .
- Nesta seção e na próxima, para lembrar que estamos trabalhando com  $\mathbf{e}_1$  e com  $\mathbf{e}_2$ , vamos rotular os eixos  $x$  e  $y$  dos nossos gráficos com os nomes destes dois vetores, como na Figura 2.1.
- Mas você deve se lembrar que  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  representam os dois vetores unitários da figura, e não os eixos orientados (que são infinitos).

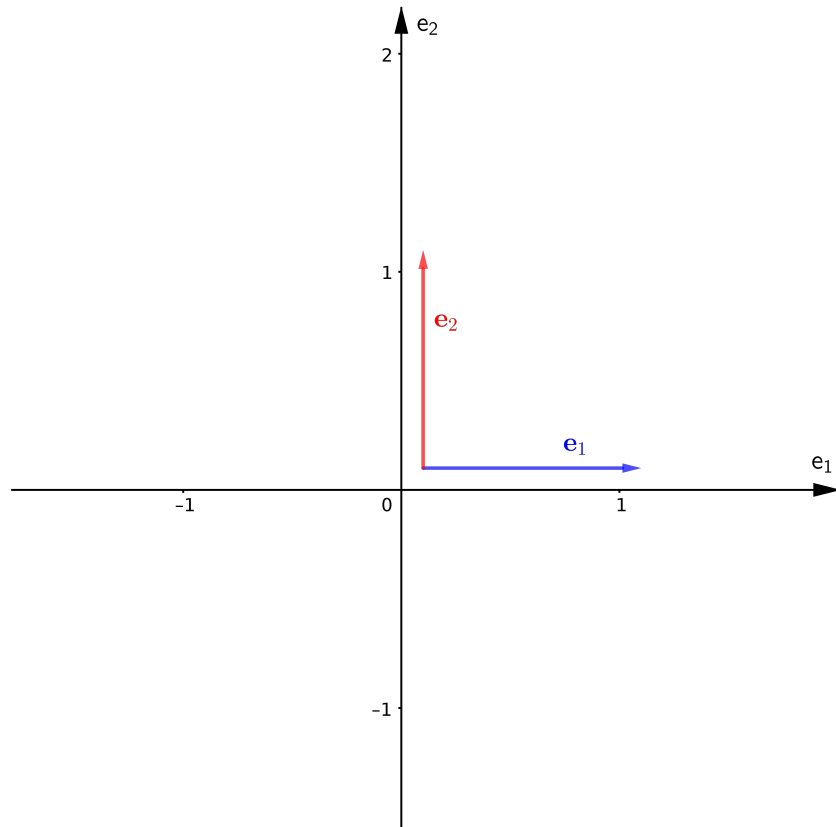


Figura 2.1: Vetores da base canônica e eixos

- Nas seções posteriores, não vamos mais mostrar os eixos nas figuras.

**⚠ Notação: vetores como combinações lineares dos vetores da base**

Como na maioria dos livros sobre álgebra geométrica, em vez de escrevermos

$$\mathbf{v} = (x, y)$$

vamos escrever

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

Se uma das coordenadas for zero, podemos omitir o vetor da base correspondente. Por exemplo, vamos escrever o vetor

$$\mathbf{u} = (0, 3)$$

como

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_2$$

- Para acompanhar o restante deste capítulo, você deve revisar os seguintes tópicos sobre vetores, especialmente em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{R}^3$ :
  - Adição de vetores,
  - Multiplicação de vetor por escalar (nossos escalares vão ser números reais),
  - Vetor nulo,
  - Vetor inverso (para a adição),
  - Dependência e independência linear,
  - Módulo (norma) de um vetor,
  - Produto vetorial,
  - Subespaços vetoriais.

## 2.2 Retas em $\mathbb{R}^2$

- Por enquanto, só temos vetores.
- Cada vetor (diferente de  $\mathbf{0}$ , o vetor nulo) indica uma direção.
- Mas apenas uma direção não basta para definir uma reta. Por exemplo, todas as retas da Figura 2.2 têm a mesma direção: a direção dada pelo vetor  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ .
- Vamos combinar que **todas as nossas retas de interesse passam pela origem** — ou seja, pelo ponto  $O = (0, 0)$ .
- Fazendo isto, cada vetor determina uma única reta.
- Chamamos as retas que passam pela origem de **retas homogêneas**. Na Figura 2.2, só há uma reta homogênea (a reta  $r$ ).

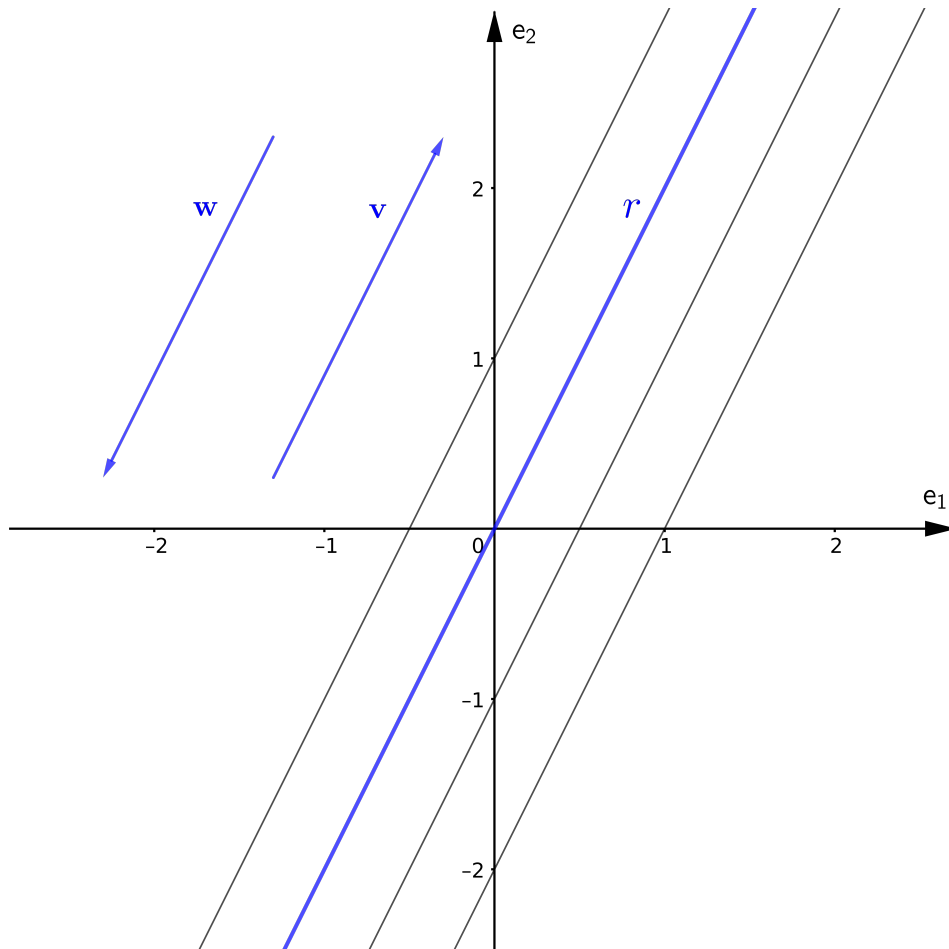


Figura 2.2: Retas e vetores

- Mas, além de uma direção, um vetor também tem um **sentido**.
- Na Figura 2.2, o vetor  $\mathbf{w} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$  tem a mesma direção da reta  $r$ , mas seu sentido é oposto ao sentido do vetor  $\mathbf{v}$ .
- Então, **qual dos dois vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  representa a reta  $r$ ?**
- Vamos decidir esta questão do seguinte modo: **nossas retas também vão ter um sentido**. Ou seja, vamos trabalhar com **retas orientadas**.
- Na Figura 2.2, então, os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  representam duas retas  $r$  e  $r'$ , ambas com a mesma direção, mas com sentidos opostos.
- Mas, além de direção e sentido, um vetor também tem um **comprimento** (ou **magnitude**, ou **módulo**, ou **norma**).



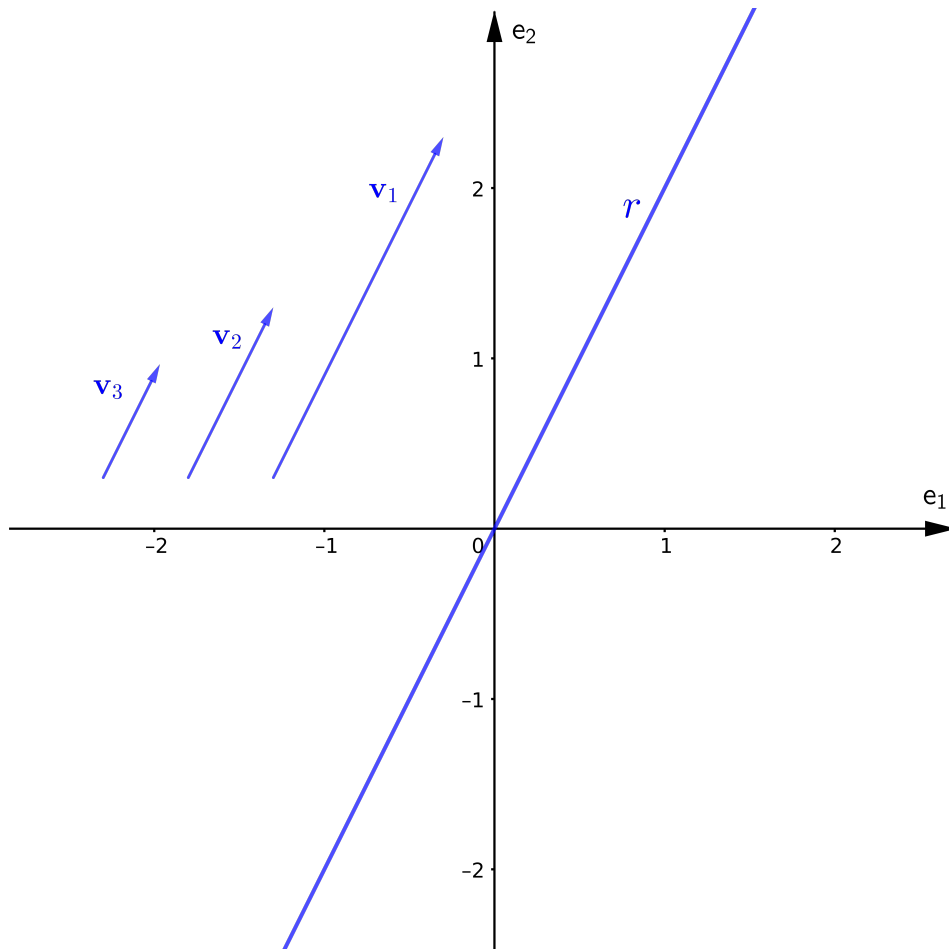


Figura 2.3: Vetores de magnitudes diferentes

- Na Figura 2.3, os 3 vetores  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  têm a mesma direção e sentido que a reta  $r$ .
- De novo, vamos combinar que cada um destes vetores define uma reta diferente, todas as retas com a mesma direção e sentido, mas cada reta com uma magnitude (ou peso) diferente.
- Você pode imaginar o peso de uma reta como a velocidade com que um ponto percorre a reta, ou como a velocidade com que a reta avança na direção e no sentido especificados pelo vetor.

**i Resumindo: vetores = retas homogêneas orientadas e com peso**

Um vetor

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$$

(com  $a, b \in \mathbb{R}$ , e com pelo menos um dentre  $a$  e  $b$  diferente de zero) representa uma reta homogênea orientada, com a direção e o sentido de  $\mathbf{v}$ , e com peso igual à norma de  $\mathbf{v}$ :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

## 2.3 Bivetores em $\mathbb{R}^2$

- Acabamos de ver que vetores em  $\mathbb{R}^2$  correspondem a comprimentos orientados.
- Agora, vamos definir objetos em  $\mathbb{R}^2$  que correspondem a áreas orientadas.
- Uma área orientada vai ser construída a partir de dois vetores linearmente independentes (isto é, não paralelos).
- Por exemplo, a Figura 2.4 mostra a área orientada definida pelos vetores  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{w} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  (nesta ordem). A orientação, indicada na figura pelo círculo com os raios, é no sentido horário.
- A orientação depende da ordem dos vetores. A Figura 2.5 mostra a área orientada definida pelos mesmos vetores  $\mathbf{w} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ , na ordem inversa da Figura 2.4. A orientação, agora, é no sentido anti-horário.
- Estas áreas orientadas são chamadas bivectores.
- Um bivector em  $\mathbb{R}^2$  tem, além da orientação, um peso. O valor absoluto do peso é a área correspondente ao bivector — isto é, a área do paralelogramo definido pelos vetores.
- A área do paralelogramo definido pelos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  é

$$\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \sin \theta$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .

- Esta área também pode ser calculada através de um determinante específico, usado no cálculo do produto vetorial  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ . Você vai lembrar isto no exercício ???.
- No exemplo da Figura 2.4, o peso do bivector é  $-7$ , se convencionarmos que a orientação no sentido horário corresponde a áreas negativas.

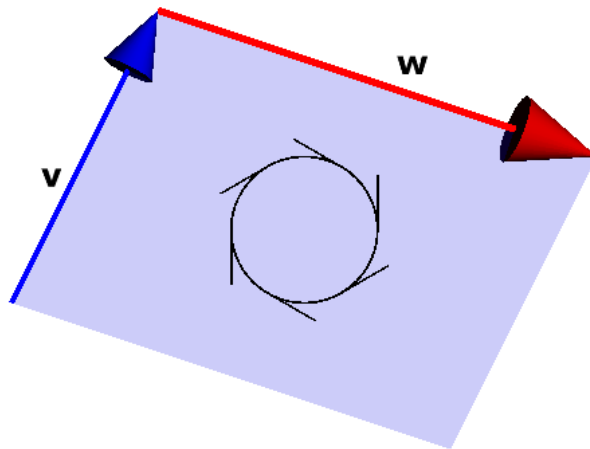


Figura 2.4: Área orientada definida por  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  (nesta ordem)

- No exemplo da Figura 2.5, o peso do bivector é 7, se convencionarmos que a orientação no sentido anti-horário corresponde a áreas positivas.
- Em  $\mathbb{R}^2$ , a atitude (ou direção) de todo bivector é a mesma, pois todos os bivectores estão no mesmo plano.
- Então, assim como fizemos com os vetores (que associamos a retas orientadas e com peso na Seção 2.2), vamos associar a cada bivector um plano (ou uma parte do plano) orientado e com peso.
- A forma e a posição da área correspondente a um bivector não são importantes. As figuras mostram paralelogramos, mas os mesmos bivectores poderiam ser mostrados como círculos, triângulos etc. com a mesma área, em qualquer posição do plano.
- As figuras parecem diferenciar o plano (que é infinito) e bivectores (que têm, associados a eles, áreas finitas). Mais adiante, vamos ver que, em algumas aplicações, podemos interpretar um bivector como representando o plano no qual ele está contido; em outras aplicações, podemos interpretar um bivector como uma porção finita do plano.

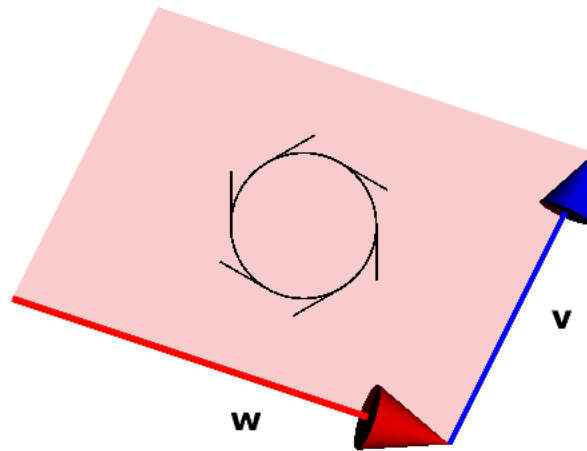


Figura 2.5: Área orientada definida por  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  (nesta ordem)

**i Resumindo: bivectores = áreas orientadas e com peso**

Um bivector definido pelos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  representa uma área orientada e com peso no plano que contém  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .

O valor absoluto do peso do bivector é dado por

$$||\mathbf{v}|| ||\mathbf{w}|| \sin \theta$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .

O sinal do peso depende da orientação do bivector, segundo a convenção adotada.

## 2.4 O produto externo

## 2.5 O espaço vetorial $G(2)$

## 2.6 Vetores e retas em $\mathbb{R}^3$

- Agora, vamos trabalhar em  $\mathbb{R}^3$ .
- Tudo que falamos acima sobre vetores e retas em  $\mathbb{R}^2$  se aplica a vetores e retas em  $\mathbb{R}^3$ , com as seguintes alterações:

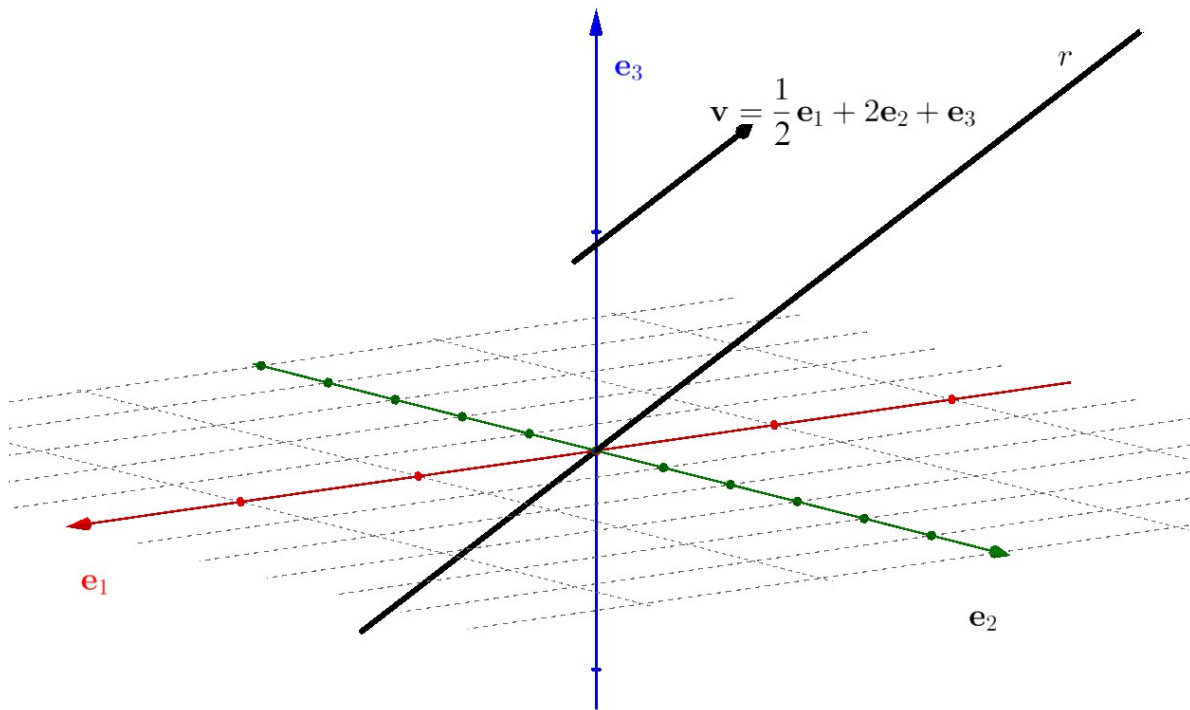


Figura 2.6: Vetor e reta em  $\mathbb{R}^3$

- A base canônica agora é  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , onde os vetores correspondem aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.
- Logo, um vetor em  $\mathbb{R}^3$  é escrito como  $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ , com  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
- Cada vetor  $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$  (com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , e com pelo menos um dentre  $a$ ,  $b$  e  $c$  diferente de zero) representa uma reta homogênea orientada, com a direção e o sentido de  $\mathbf{v}$ , e com peso igual à norma de  $\mathbf{v}$ :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- A Figura 2.6 mostra um exemplo.

**2.7 Trivetores e paralelepípedos em  $\mathbb{R}^3$**

**2.8 O espaço vetorial  $G(3)$**

**2.9 Representando objetos geométricos**

**2.10 Resolvendo problemas**

**2.11 Resumo**

**2.12 Exercícios**

## Referências