Álgebra Geométrica para Ciência da Computação

Fernando Náufel

06/05/2023 19:57

Índice

Prefácio

???

1 Introdução

???

1.1 Referências

???

Livros em português e em inglês

Sites

Playlists

???

2 O produto externo

2.1 Vetores em $\mathbb{R}^2$

- Por enquanto, vamos trabalhar no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.
- Os elementos de $\mathbb{R}^2$ são vetores com duas coordenadas; por exemplo:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (-1, 3)\\ \mathbf{w} &= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

> **⚠ Notação: vetores em negrito**
>
> Você deve estar acostumado a escrever nomes de vetores como $\vec{v}$, $\vec{w}$ etc.
> Neste livro, como na maioria dos livros sobre álgebra geométrica, nomes de vetores serão escritos em negrito: $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

- Usando a base canônica de $\mathbb{R}^2$, com $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, os vetores do exemplo acima podem ser escritos como

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= -1\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2\\ \mathbf{w} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

- Tecnicamente, estamos escrevendo cada vetor como uma combinação linear dos vetores da base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
- Nesta seção e na próxima, para lembrar que estamos trabalhando com $\mathbf{e}_1$ e com $\mathbf{e}_2$, vamos rotular os eixos x e y dos nossos gráficos com os nomes destes dois vetores, como na Figura 2.1.
- Mas você deve se lembrar que $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ representam os dois vetores unitários da figura, e não os eixos orientados (que são infinitos).

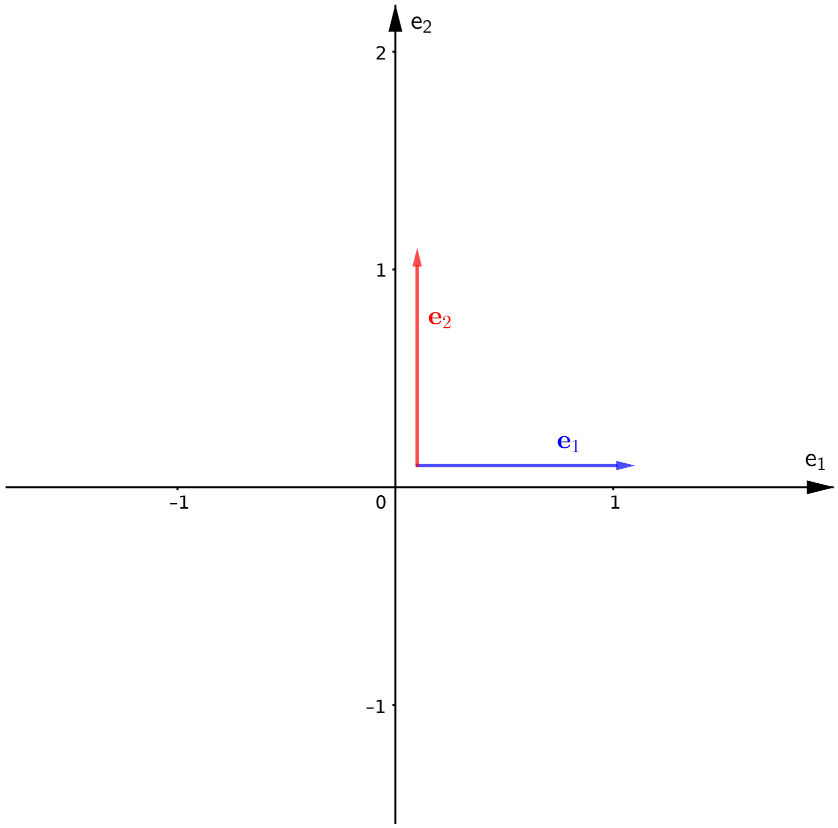

Figura 2.1: Vetores da base canônica e eixos

- Nas seções posteriores, não vamos mais mostrar os eixos nas figuras.

Notação: vetores como combinações lineares dos vetores da base

Como na maioria dos livros sobre álgebra geométrica, em vez de escrevermos

$$\mathbf{v} = (x, y)$$

vamos escrever

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

Se uma das coordenadas for zero, podemos omitir o vetor da base correspondente. Por exemplo, vamos escrever o vetor

$$\mathbf{u} = (0, 3)$$

como

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_2$$

- Para acompanhar o restante deste capítulo, você deve revisar os seguintes tópicos sobre vetores, especialmente em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$:
  - Adição de vetores,
  - Multiplicação de vetor por escalar (nossos escalares vão ser números reais),
  - Vetor nulo,
  - Vetor inverso (para a adição),
  - Dependência e independência linear,
  - Módulo (norma) de um vetor,
  - Produto vetorial,
  - Subespaços vetoriais.

2.2 Retas em $\mathbb{R}^2$

- Por enquanto, só temos vetores.
- Cada vetor (diferente de $\mathbf{0}$, o vetor nulo) indica uma direção.
- Mas apenas uma direção não basta para definir uma reta. Por exemplo, todas as retas da Figura 2.2 têm a mesma direção: a direção dada pelo vetor $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.
- Vamos combinar que todas as nossas retas de interesse passam pela origem — ou seja, pelo ponto $O = (0, 0)$.
- Fazendo isto, cada vetor determina uma única reta.
- Chamamos as retas que passam pela origem de retas homogêneas. Na Figura 2.2, só há uma reta homogênea (a reta r).

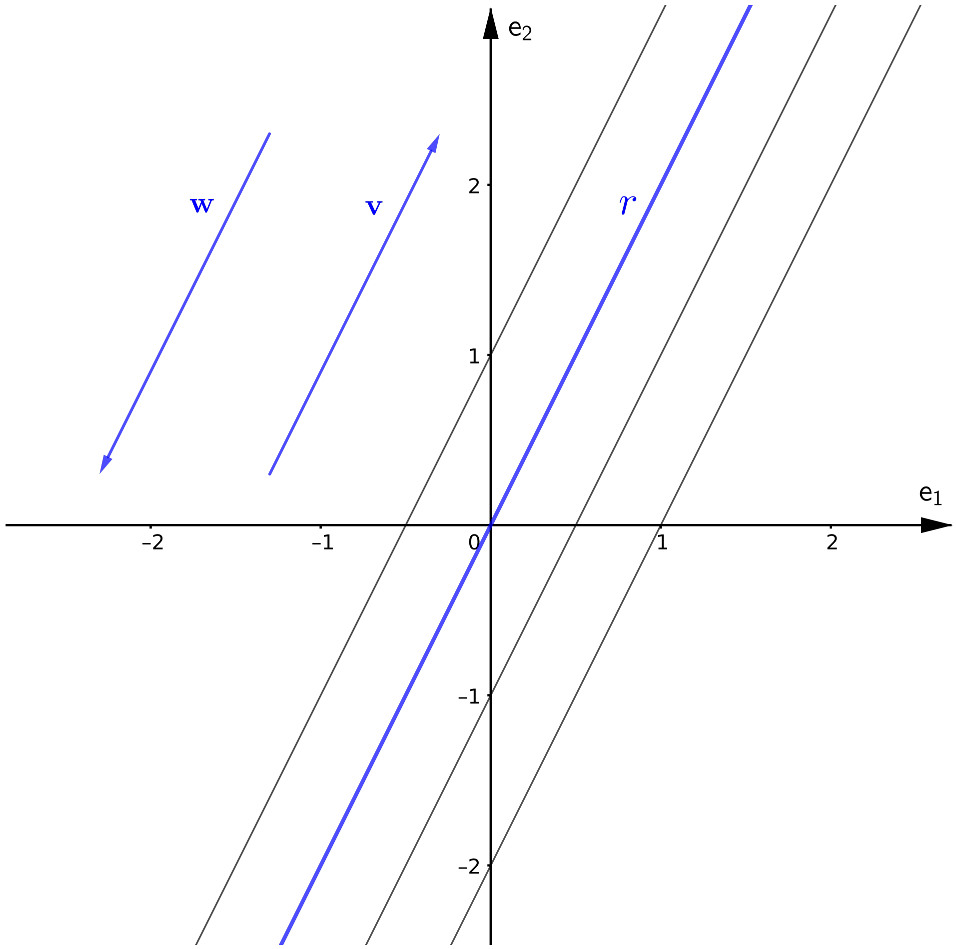

Figura 2.2: Retas e vetores

- Mas, além de uma direção, um vetor também um sentido.
- Na Figura 2.2, o vetor $\mathbf{w} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ tem a mesma direção da reta r, mas seu sentido é oposto ao sentido do vetor $\mathbf{v}$.
- Então, qual dos dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ representa a reta r?
- Vamos decidir esta questão do seguinte modo: nossas retas também vão ter um sentido. Ou seja, vamos trabalhar com retas orientadas.
- Na Figura 2.2, então, os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ representam duas retas r e r', ambas com a mesma direção, mas com sentidos opostos.
- Mas, além de direção e sentido, um vetor também tem um comprimento (ou magnitude, ou módulo, ou norma).

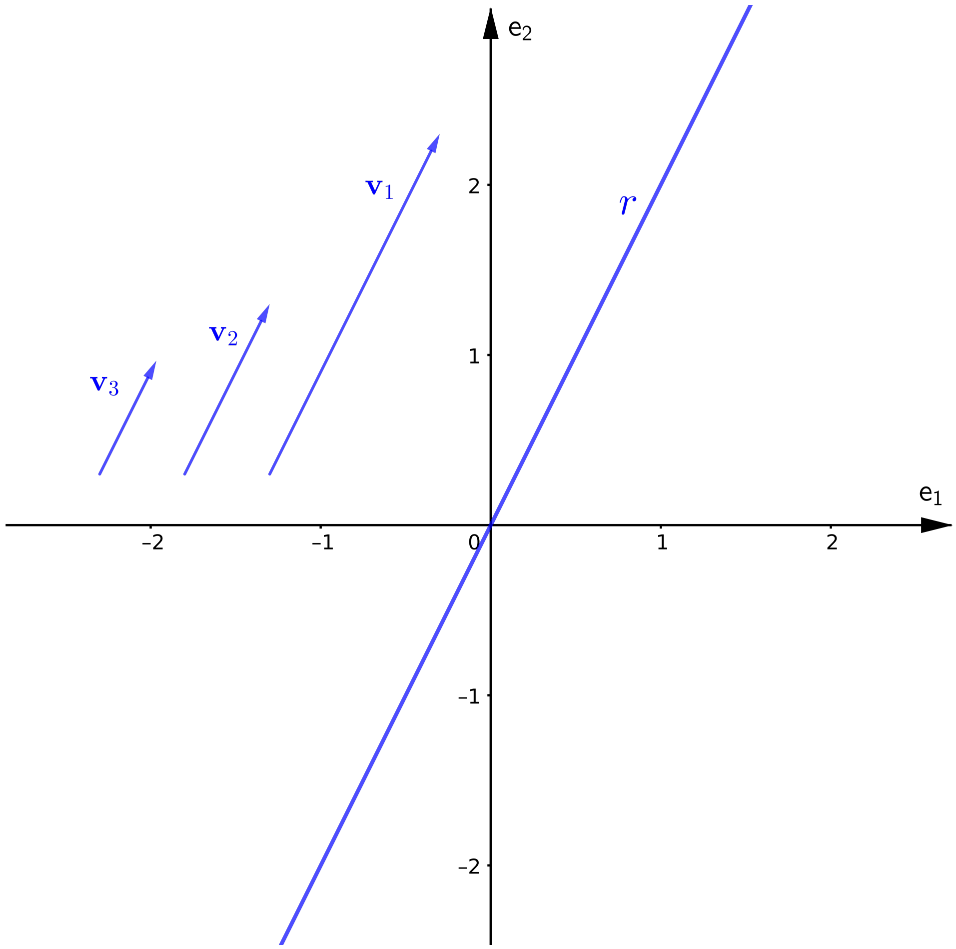

Figura 2.3: Vetores de magnitudes diferentes

- Na Figura 2.3, os 3 vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ têm a mesma direção e sentido que a reta r.
- De novo, vamos combinar que cada um destes vetores define uma reta diferente, todas as retas com a mesma direção e sentido, mas cada reta com uma magnitude (ou peso) diferente.
- Você pode imaginar o peso de uma reta como a velocidade com que um ponto percorre a reta, ou como a velocidade com que a reta avança na direção e no sentido especificados pelo vetor.

Resumindo: vetores = retas homogêneas orientadas e com peso

Um vetor

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$$

(com $a, b \in \mathbb{R}$, e com pelo menos um dentre a e b diferente de zero) representa uma reta homogênea orientada, com a direção e o sentido de $\mathbf{v}$, e com peso igual à norma de $\mathbf{v}$:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.3 Bivetores em $\mathbb{R}^2$

- Acabamos de ver que vetores em $\mathbb{R}^2$ correspondem a comprimentos orientados.
- Agora, vamos definir objetos em $\mathbb{R}^2$ que correspondem a áreas orientadas.
- Uma área orientada vai ser construída a partir de dois vetores linearmente independentes (isto é, não paralelos).
- Por exemplo, a Figura 2.4 mostra a área orientada definida pelos vetores $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ (nesta ordem). A orientação, indicada na figura pelo círculo com os raios, é no sentido horário.
- A orientação depende da ordem dos vetores. A Figura 2.5 mostra a área orientada definida pelos mesmos vetores $\mathbf{w} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, na ordem inversa da Figura 2.4. A orientação, agora, é no sentido anti-horário.
- Estas áreas orientadas são chamadas bivetores.
- Um bivetor em $\mathbb{R}^2$ tem, além da orientação, um peso. O valor absoluto do peso é a área correspondente ao bivetor — isto é, a área do paralelogramo definido pelos vetores.
- A área do paralelogramo definido pelos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é

  $$||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||\operatorname{sen}\theta$$

  onde θ é o ângulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
- Esta área também pode ser calculada através de um determinante específico, usado no cálculo do produto vetorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Você vai relembrar isto no exercício ???.
- No exemplo da Figura 2.4, o peso do bivetor é -7, se convencionarmos que a orientação no sentido horário corresponde a áreas negativas.

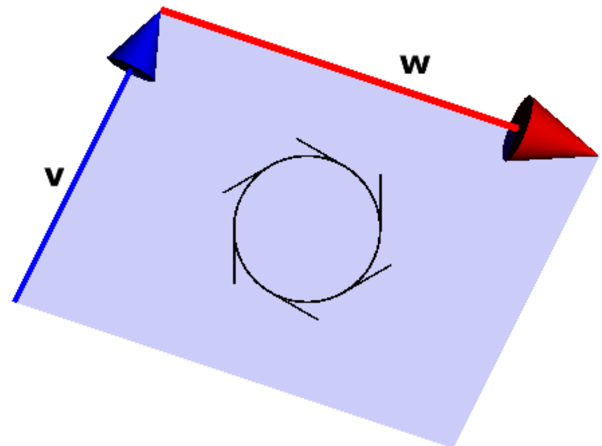

Figura 2.4: Área orientada definida por **v** e **w** (nesta ordem)

- No exemplo da Figura 2.5, o peso do bivetor é 7, se convencionarmos que a orientação no sentido anti-horário corresponde a áreas positivas.
- Em $\mathbb{R}^2$, a atitude (ou direção) de todo bivetor é a mesma, pois todos os bivetores estão no mesmo plano.
- Então, assim como fizemos com os vetores (que associamos a retas orientadas e com peso na Seção 2.2), vamos associar a cada bivetor um plano (ou uma parte do plano) orientado e com peso.
- A forma e a posição da área correspondente a um bivetor não são importantes. As figuras mostram paralelogramos, mas os mesmos bivetores poderiam ser mostrados como círculos, triângulos etc. com a mesma área, em qualquer posição do plano.
- As figuras parecem diferenciar o plano (que é infinito) e bivetores (que têm, associados a eles, áreas finitas). Mais adiante, vamos ver que, em algumas aplicações, podemos interpretar um bivetor como representando o plano no qual ele está contido; em outras aplicações, podemos interpretar um bivetor como uma porção finita do plano.

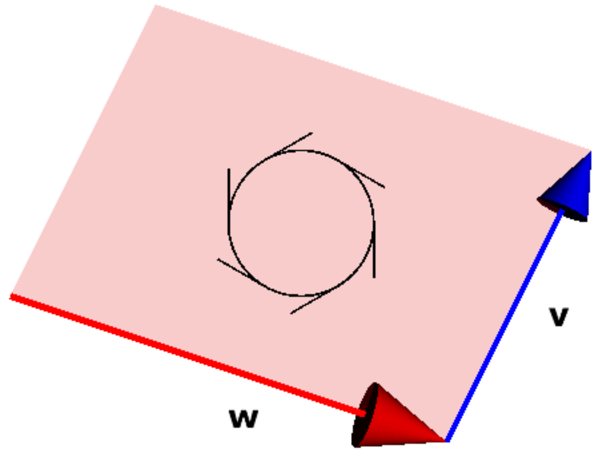

Figura 2.5: Área orientada definida por $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ (nesta ordem)

Resumindo: bivetores = áreas orientadas e com peso

Um bivetor definido pelos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ representa uma área orientada e com peso no plano que contém $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
O valor absoluto do peso do bivetor é dado por

$$||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||\,\mathrm{sen}\,\theta$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
O sinal do peso depende da orientação do bivetor, segundo a convenção adotada.

2.4 O produto externo

2.5 O espaço vetorial $G(2)$

2.6 Vetores e retas em $\mathbb{R}^3$

- Agora, vamos trabalhar em $\mathbb{R}^3$.
- Tudo que falamos acima sobre vetores e retas em $\mathbb{R}^2$ se aplica a vetores e retas em $\mathbb{R}^3$, com as seguintes alterações:

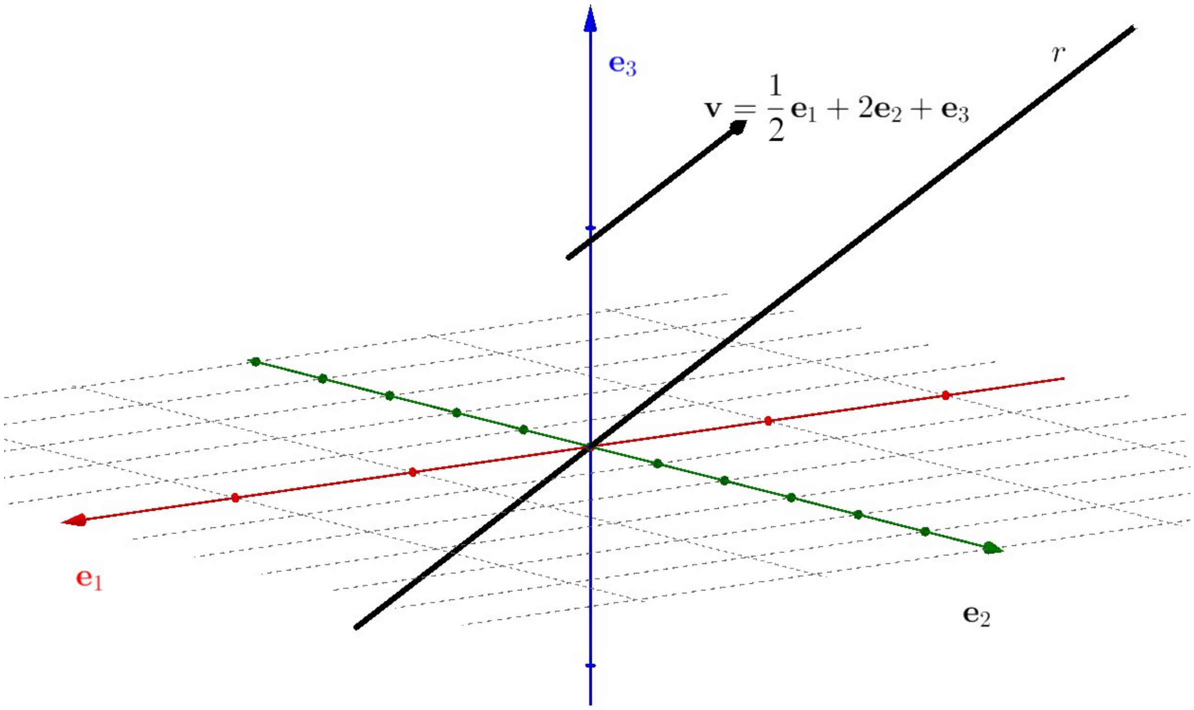

Figura 2.6: Vetor e reta em $\mathbb{R}^3$

- A base canônica agora é $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, onde os vetores correspondem aos eixos x, y e z, respectivamente.
- Logo, um vetor em $\mathbb{R}^3$ é escrito como $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Cada vetor $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ (com $a, b, c \in \mathbb{R}$, e com pelo menos um dentre a, b e c diferente de zero) representa uma reta homogênea orientada, com a direção e o sentido de $\mathbf{v}$, e com peso igual à norma de $\mathbf{v}$:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- A Figura 2.6 mostra um exemplo.

2.7 Trivetores e paralelepípedos em $\mathbb{R}^3$

2.8 O espaço vetorial $G(3)$

2.9 Representando objetos geométricos

2.10 Resolvendo problemas

2.11 Resumo

2.12 Exercícios

Referências