

Introduction to Probability (Joe Blitzstein)

Fernando Náufel

(versão de 06/02/2022)

Sumário

Apresentação	2
01: Probabilidade e contagem	3
Vídeo	3
Pascal e Fermat	3
R	3
Exercícios	5
02: Histórias e axiomas	8
Vídeo	8
Exercícios	8
03: Problema do aniversário, propriedades	14
Vídeo	14
Exercícios	14
04: Probabilidade condicional	15
Vídeo	15
Exercícios	15
Referências	17

Apresentação

- Página do livro: <https://projects.iq.harvard.edu/stat110/home>
- Strategic practice and homework: <https://projects.iq.harvard.edu/stat110/strategic-practice-problems>
- Handouts: <https://projects.iq.harvard.edu/stat110/handouts> — includes solutions to exercises marked with (s) in the book.
- Playlist: <https://www.youtube.com/playlist?list=PL2SOU6wwxB0uwwH80KTQ6ht66KWxbzTIo>

01: Probabilidade e contagem

Vídeo

<https://youtu.be/KbB0FjPg0mw>

Pascal e Fermat

- Ver artigo DEVLIN (2010).
 - Ver [originais em francês de toda a correspondência de Pascal](#).
-

R

Fatoriais e combinações

- Qual o maior valor de n para o qual o R calcula `factorial(n)`?

No meu computador, $n = 170$:

```
factorial(170:171)
## [1] 7,257416e+306      Inf
```

- Para valores maiores, podemos usar `lfactorial(n)` para calcular $\ln n!$:

```
lfactorial(170:171)
## [1] 706,5731 711,7147
```

- Da mesma forma, `lchoose(n, k)` calcula $\ln \binom{n}{k}$.

Tabulando dados: `tabulate` × `table`

```
b <- sample(1:365,23,replace=TRUE)
tabulate(b)
## [1] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1
## [34] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [67] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [100] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
## [133] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
## [166] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [199] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [232] 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
## [265] 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [298] 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [331] 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1
```

```
table(b)
## b
## 13 14 25 33 49 52 85 112 131 161 213 215 240 261 268 286 298
## 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
## 309 314 333 337 348 355
## 1 1 1 1 1 1
```

Funções para o problema do aniversário

```
pbirthday(23)
## [1] 0,5072972
```

```
qbirthday(.5)
## [1] 23
```

```
qbirthday(1)
## [1] 366
```

Para no mínimo 3 no mesmo dia:

```
qbirthday(.5, coincident = 3)
## [1] 88
```

Exercícios

[Enunciados \(pdf\).](#)

Practice

4. Norepeat words

A *norepeatword* is a sequence of at least one (and possibly all) of the usual 26 letters a, b, c, ..., z, with repetitions not allowed.

For example, “course” is a *norepeatword*, but “statistics” is not.

Order matters, e.g., “course” is not the same as “source”.

A *norepeatword* is chosen randomly, with all *norepeatwords* equally likely. Show that the probability that it uses all 26 letters is very close to $1/e$.

- O denominador vai ser o total de todas as *norepeatwords* (NRW), que é a soma de
 - NRW de 1 letra: 26
 - NRW de 2 letras: $26 \cdot 25$
 - NRW de 3 letras: $26 \cdot 25 \cdot 24$
 - ...
 - NRW de 24 letras: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 3$
 - NRW de 25 letras: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 2$
 - NRW de 26 letras: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 1$
- Ou seja,

$$\sum_{k=0}^{25} \frac{26!}{k!}$$

- Que é igual a

$$26! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{25!} \right)$$

- O total de NRW que usam as 26 letras é $26!$.

- A probabilidade procurada é

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{26!}{26! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{25!}\right)} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{25!}} \\
 &= \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

- A última igualdade se justifica porque a série de Taylor para e^x é

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- Numericamente:

```
1 / exp(1)
## [1] 0,3678794
```

```
1 / sum(1 / factorial(0:25))
## [1] 0,3678794
```

Exercícios do livro (cap. 1)

13

A certain casino uses 10 standard decks of cards mixed together into one big deck, which we will call a superdeck. Thus, the superdeck has $52 \cdot 10 = 520$ cards, with 10 copies of each card.

How many different 10-card hands can be dealt from the superdeck? The order of the cards does not matter, nor does it matter which of the original 10 decks the cards came from. Express your answer as a binomial coefficient.

- Usando a notação de OLIVEIRA MORGADO et al. (2004), onde CR_k^n é o número de combinações completas de n elementos de k tipos diferentes, a resposta é

$$CR_{52}^{10} = \binom{52 + 10 - 1}{10} = \binom{61}{10} = 90.177.170.226$$

- Só foi possível usar combinações completas porque a mão tem 10 cartas, o que faz com que haja, essencialmente, um número infinito de cópias de cada um dos 52

tipos de carta. Se a mão tivesse 11 ou mais cartas, seria impossível que todas as cartas fossem iguais, e este raciocínio não poderia ser usado.

02: Histórias e axiomas

Vídeo

https://youtu.be/FJd_1H3rZGg

Exercícios

[Enunciados \(pdf\)](#).

Homework

4. Teorema das colunas

(a) Mostre que

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

- O lado direito significa escolher $k + 1$ pessoas dentre $n + 1$ pessoas.
- O truque é **ordenar as pessoas** de algum modo.
- Um exemplo concreto, com $n = 4$ e $k = 2$, mostrando que

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$

1. Vamos chamar as $n + 1$ pessoas de 1, 2, 3, 4, 5.

2. Grupos de $k + 1$ pessoas onde o menor número é 1:

- 1, 2, 3
- 1, 2, 4
- 1, 2, 5
- 1, 3, 4
- 1, 3, 5
- 1, 4, 5

3. Grupos de $k + 1$ pessoas onde o menor número é 2:

- 2, 3, 4
- 2, 3, 5
- 2, 4, 5

4. Grupos de $k + 1$ pessoas onde o menor número é 3:

- 3, 4, 5

- No caso geral, vamos ordenar as $n + 1$ pessoas, rotulando-as como

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

- Como a ordem **dentro de cada grupo** não importa, vamos escolher primeiro um elemento para ser o de **menor índice do grupo** e escolher os restantes k elementos dentre os elementos de índice maior do que o primeiro.
- Se escolhermos a_0 como o de menor índice, temos $\binom{n}{k}$ modos de escolher os restantes.
- Se escolhermos a_1 como o de menor índice, temos $\binom{n-1}{k}$ modos de escolher os restantes.
- ...
- Se escolhermos $a_{n-(k+1)}$ como o de menor índice, temos $\binom{k+1}{k}$ modos de escolher os restantes.
- Se escolhermos a_{n-k} como o de menor índice, temos $\binom{k}{k}$ modos de escolher os restantes.

(b) Suppose that a large pack of Haribo gummi bears can have anywhere between 30 and 50 gummi bears. There are 5 delicious flavors. How many possibilities are there for the composition of such a pack of gummi bears?

- Usando a notação de OLIVEIRA MORGADO et al. (2004), onde CR_k^n é o número de combinações completas de n elementos de k tipos diferentes, a resposta é

$$\begin{aligned}
CR_5^{30} + CR_5^{31} + \dots + CR_5^{50} &= \binom{34}{4} + \binom{35}{4} + \dots + \binom{54}{4} \\
&= \binom{55}{5} - \left[\binom{33}{4} + \binom{32}{4} + \dots + \binom{4}{4} \right] \\
&= \binom{55}{5} - \binom{34}{5}
\end{aligned}$$

Exercícios do livro (cap. 1)

17

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

- Quero escolher n pessoas dentre $2n$ pessoas (lado direito).
- Divido as $2n$ pessoas em dois grupos de n cada.
- Para $k \in \{0, 1, \dots, n\}$:
 - Escolho k pessoas do primeiro grupo — $\binom{n}{k}$ — para entrar.
 - Escolho k pessoas do segundo grupo — $\binom{n}{k}$ — para **não** entrar.
 - Para este valor de k , tenho $\binom{n}{k}^2$ maneiras de selecionar n pessoas, com k pessoas do primeiro grupo e $n - k$ pessoas do segundo.

18

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$$

Usamos o mesmo raciocínio do exercício anterior, com a seguinte modificação:

- Temos $2n$ pessoas, divididas em dois grupos de n , como antes.
- Como antes, quero escolher n pessoas dentre as $2n$.
- Mas agora, para cada escolha, quero designar uma das n pessoas do primeiro grupo como chefe (i.e., sempre haverá pelo menos uma pessoa do primeiro grupo). Isto corresponde ao fator n no lado direito.

- Escolhido o chefe, preciso escolher $n-1$ pessoas dentre as $2n-1$ restantes ($n-1$ do primeiro grupo, n do segundo). Isto corresponde ao segundo fator do lado direito.
- Do lado esquerdo, para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:
 - Vou escolher k pessoas do primeiro grupo — $\binom{n}{k}$ — para entrar.
 - Dentre elas, vou escolher um chefe — k .
 - Vou escolher k pessoas do segundo grupo — $\binom{n}{k}$ — para **não** entrar.

19

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} \binom{n-k+2}{2} = \binom{n+3}{5}, \quad \forall n \geq 2$$

- Um exemplo concreto: $n = 3$
- Queremos escolher 5 elementos dentre 6.
- Para $k \in \{2, 3\}$:
 1. Escolhemos sempre o elemento $k+1$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \underbrace{3}_{k=2} & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & \underbrace{4}_{k=3} & 5 & 6 \end{array}$$

Este é o elemento que vai estar **no meio** do grupo dos escolhidos.

2. Escolhemos 2 dentre os k primeiros elementos:

$$\begin{array}{cccccc} \underbrace{1 \ 2}_{k=2} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \underbrace{1 \ 2 \ 3}_{k=3} & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

3. Escolhemos 2 dentre os $n-k+2$ últimos elementos:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \underbrace{4 \ 5 \ 6}_{k=2} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \underbrace{5 \ 6}_{k=3} \end{array}$$

Para provar

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

a. Vamos provar

$$1 + 2 + \dots + n = \binom{n+1}{2}$$

b. E vamos provar

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

a. Considere $n + 1$ times, numerados de 0 a n , num campeonato onde cada time joga com todos os outros exatamente uma vez. O total de jogos será

$$\binom{n+1}{2}$$

- O time 0 joga com n times com número maior que ele.
 - O time 1 joga com $n - 1$ times com número maior que ele.
 - O time 2 joga com $n - 2$ times com número maior que ele.
 - ...
 - O time $n - 2$ joga com 2 times com número maior que ele.
 - O time $n - 1$ joga com 1 time com número maior que ele.
 - O time n joga com 0 times com número maior que ele.
- b. Hint: Imagine choosing a number between 1 and n and then choosing 3 numbers between 0 and n smaller than the original number, with replacement. Then consider cases based on how many distinct numbers were chosen.
- Vamos chamar o número escolhido de k .
 - Para $k = 1$, só temos o 0 para escolher. É 1 possibilidade.
 - Para $k = 2$, temos 2 números. São 2^3 possibilidades.
 - Para $k = 3$, temos 3 números. São 3^3 possibilidades.
 - No geral, para $k = n$, são n^3 possibilidades.
 - A soma de todos os casos é a soma dos cubos.

- Vamos examinar o caso em que k foi o número escolhido. De quantas maneiras podemos escolher 3 números entre 0 e $k - 1$, com reposição?
 - Com 1 número, basta escolher o número: $\binom{k}{1}$ possibilidades.
 - Com 2 números distintos:
 - * Escolhemos os 2 números: $\binom{k}{2}$ possibilidades;
 - * Escolhemos qual dos 2 aparecerá 2 vezes: 2 possibilidades;
 - * Escolhemos a posição do número que aparece uma vez: 3 possibilidades.
 - * São $6\binom{k}{2}$ possibilidades.
 - Com 3 números distintos:
 - * Escolhemos os 3 números: $\binom{k}{3}$ possibilidades;
 - * Escolhemos a ordem dos 3 números: 6 possibilidades;
 - * São $6\binom{k}{3}$ possibilidades.
- Para todos os valores de k , o total de possibilidades é

$$\sum_{k=1}^n \left[\binom{k}{1} + 6\binom{k}{2} + 6\binom{k}{3} \right]$$

- Usando o teorema das colunas, chegamos ao resultado

$$\binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}$$

03: Problema do aniversário, propriedades

Vídeo

https://youtu.be/LZ5Wergp_PA

Exercícios

Exercícios do livro (cap. 1)

26

27

57

61

62

04: Probabilidade condicional

Vídeo

<https://youtu.be/P7NE4WF8j-Q>

Exercícios

[Enunciados \(pdf\)](#).

Homework

3.1 Lewis Carroll

A bag contains one marble which is either green or blue, with equal probabilities. A green marble is put in the bag (so there are 2 marbles now), and then a random marble is taken out. The marble taken out is green. What is the probability that the remaining marble is also green?

This problem was first posed by Lewis Carroll in 1893.

3.5 Xadrez

You are going to play 2 games of chess with an opponent whom you have never played against before (for the sake of this problem). Your opponent is equally likely to be a beginner, intermediate, or a master. Depending on which, your chances of winning an individual game are 90%, 50%, or 30%, respectively.

- a. What is your probability of winning the first game?
- b. Congratulations: you won the first game! Given this information, what is the probability that you will also win the second game (assume that, given the skill level of your opponent, the outcomes of the games are independent)?
- c. Explain the distinction between assuming that the outcomes of the games are independent and assuming that they are conditionally independent given the opponent's skill level. Which of these assumptions seems more reasonable, and why?

Exercícios do livro (cap. 2)

2

4

9

12

14

15

16

17

29

Referências

DEVLIN, K. [The Pascal-Fermat Correspondence: How Mathematics Is Really Done](#). **The Mathematics Teacher**, v. 103, n. 8, p. 579–582, abr. 2010.

OLIVEIRA MORGADO, A. C. DE et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Impa / Vitae, 2004.