Introduction to Probability (Joe Blitzstein)

Fernando Náufel

(versão de 04/02/2022)

Sumário

Apresentação

- Página do livro: https://projects.iq.harvard.edu/stat110/home
- Strategic practice and homework: https://projects.iq.harvard.edu/stat110/strategic-practice-problems
- Handouts: https://projects.iq.harvard.edu/stat110/handouts — includes solutions to exercises marked with (s) in the book.
- Playlist: https://www.youtube.com/playlist?list=PL2SOU6wwxB0uwwH80KTQ6ht66KWxbzTIo

01: Probabilidade e contagem

Vídeo

https://youtu.be/KbB0FjPg0mw

Pascal e Fermat

- Ver artigo DEVLIN (2010).
- Ver originais em francês de toda a correspondência de Pascal.

R

Fatoriais e combinações

- Qual o maior valor de n para o qual o R calcula `factorial(n)`?

  No meu computador, $n = 170$:

  ```
  factorial(170:171)
  ## [1] 7,257416e+306           Inf
  ```

- Para valores maiores, podemos usar `lfactorial(n)` para calcular $\ln n!$:

```r
lfactorial(170:171)
## [1] 706,5731 711,7147
```

- Da mesma forma, `lchoose(n, k)` calcula ln $\binom{n}{k}$.

Tabulando dados: `tabulate` $\times$ `table`

```r
b <- sample(1:365,23,replace=TRUE)
tabulate(b)
##   [1] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0
##  [34] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
##  [67] 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
## [100] 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [133] 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0
## [166] 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [199] 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [232] 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [265] 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [298] 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [331] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
```

```r
table(b)
## b
##  26  27  45  62  68  93 107 140 157 160 161 172 206 208 214 234 265
##   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
## 271 284 298 310 319 348
##   1   1   1   1   1   1
```

Funções para o problema do aniversário

```r
pbirthday(23)
## [1] 0,5072972
```

```r
qbirthday(.5)
## [1] 23
```

```r
qbirthday(1)
## [1] 366
```

Para no mínimo 3 no mesmo dia:

```r
qbirthday(.5, coincident = 3)
## [1] 88
```

Exercícios

Enunciados (pdf).

Practice

4. Norepeat words

A *norepeatword* is a sequence of at least one (and possibly all) of the usual 26 letters a, b, c, ...,z, with repetitions not allowed.

For example, "course" is a *norepeatword*, but "statistics" is not.

Order matters, e.g., "course" is not the same as "source".

A *norepeatword* is chosen randomly, with all *norepeatwords* equally likely. Show that the probability that it uses all 26 letters is very close to $1/e$.

- O denominador vai ser o total de todas as *norepeatwords* (NRW), que é a soma de
  - NRW de 1 letra: 26
  - NRW de 2 letras: $26 \cdot 25$
  - NRW de 3 letras: $26 \cdot 25 \cdot 24$
  - $\dots$
  - NRW de 24 letras: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 3$
  - NRW de 25 letras: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 2$
  - NRW de 26 letras: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 1$
- Ou seja,

$$\sum_{k=0}^{25} \frac{26!}{k!}$$

- Que é igual a

$$26! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{25!}\right)$$

- O total de NRW que usam as 26 letras é $26!$.

- A probabilidade procurada é

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{26!}{26!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{25!}\right)} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{25!}} \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

- A última igualdade se justifica porque a série de Taylor para e^x é

$$
e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}
$$

- Numericamente:

```
1 / exp(1)
## [1] 0,3678794
```

```
1 / sum(1 / factorial(0:25))
## [1] 0,3678794
```

Exercícios do livro (cap. 1)

13

> A certain casino uses 10 standard decks of cards mixed together into one big deck, which we will call a superdeck. Thus, the superdeck has $52 \cdot 10 = 520$ cards, with 10 copies of each card.
>
> How many different 10-card hands can be dealt from the superdeck? The order of the cards does not matter, nor does it matter which of the original 10 decks the cards came from. Express your answer as a binomial coefficient.

- Usando a notação de OLIVEIRA MORGADO et al. (2004), onde CR_k^n é o número de combinações completas de n elementos de k tipos diferentes, a resposta é

$$
\text{CR}_{52}^{10} = \binom{52 + 10 - 1}{10} = \binom{61}{10} = 90.177.170.226
$$

- Só foi possível usar combinações completas porque a mão tem 10 cartas, o que faz com que haja, essencialmente, um número infinito de cópias de cada um dos 52

tipos de carta. Se a mão tivesse 11 ou mais cartas, seria impossível que todas as cartas fossem iguais, e este raciocínio não poderia ser usado.

02: Histórias e axiomas

Vídeo

https://youtu.be/FJd_1H3rZGg

Exercícios

Enunciados (pdf).

Homework

4. Teorema das colunas

(a) Mostre que

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

- O lado direito significa escolher $k+1$ pessoas dentre $n+1$ pessoas.
- O truque é ordenar as pessoas de algum modo.
- Um exemplo concreto, com $n = 4$ e $k = 2$, mostrando que

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$

1. Vamos chamar as $n + 1$ pessoas de $1, 2, 3, 4, 5$.
2. Grupos de $k + 1$ pessoas onde o menor número é 1:
   - $1, 2, 3$
   - $1, 2, 4$
   - $1, 2, 5$
   - $1, 3, 4$
   - $1, 3, 5$
   - $1, 4, 5$
3. Grupos de $k + 1$ pessoas onde o menor número é 2:
   - $2, 3, 4$
   - $2, 3, 5$
   - $2, 4, 5$
4. Grupos de $k + 1$ pessoas onde o menor número é 3:
   - $3, 4, 5$

- No caso geral, vamos ordenar as $n + 1$ pessoas, rotulando-as como

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

- Como a ordem dentro de cada grupo não importa, vamos escolher primeiro um elemento para ser o de menor índice do grupo e escolher os restantes k elementos dentre os elementos de índice maior do que o primeiro.
- Se escolhermos a_0 como o de menor índice, temos $\binom{n}{k}$ modos de escolher os restantes.
- Se escolhermos a_1 como o de menor índice, temos $\binom{n-1}{k}$ modos de escolher os restantes.
- …
- Se escolhermos $a_{n-(k+1)}$ como o de menor índice, temos $\binom{k+1}{k}$ modos de escolher os restantes.
- Se escolhermos a_{n-k} como o de menor índice, temos $\binom{k}{k}$ modos de escolher os restantes.

(b) Suppose that a large pack of Haribo gummi bears can have anywhere between 30 and 50 gummi bears. There are 5 delicious flavors. How many possibilities are there for the composition of such a pack of gummi bears?

- Usando a notação de OLIVEIRA MORGADO et al. (2004), onde CR_k^n é o número de combinações completas de n elementos de k tipos diferentes, a resposta é

$$
\begin{aligned}
\mathsf{CR}_5^{30} + \mathsf{CR}_5^{31} + \cdots + \mathsf{CR}_5^{50} &= \binom{34}{4} + \binom{35}{4} + \cdots + \binom{54}{4} \\
&= \binom{55}{5} - \left[\binom{33}{4} + \binom{32}{4} + \cdots + \binom{4}{4}\right] \\
&= \binom{55}{5} - \binom{34}{5}
\end{aligned}
$$

Exercícios do livro (cap. 1)

17

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}
$$

- Quero escolher n pessoas dentre $2n$ pessoas (lado direito).
- Divido as $2n$ pessoas em dois grupos de n cada.
- Para $k \in \{0, 1, \ldots n\}$:
  - Escolho k pessoas do primeiro grupo — $\binom{n}{k}$ — para entrar.
  - Escolho k pessoas do segundo grupo — $\binom{n}{k}$ — para não entrar.
  - Para este valor de k, tenho $\binom{n}{k}^2$ maneiras de selecionar n pessoas, com k pessoas do primeiro grupo e $n - k$ pessoas do segundo.

18

$$
\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}
$$

Usamos o mesmo raciocínio do exercício anterior, com a seguinte modificação:

- Temos $2n$ pessoas, divididas em dois grupos de n, como antes.
- Como antes, quero escolher n pessoas dentre as $2n$.
- Mas agora, para cada escolha, quero designar uma das n pessoas do primeiro grupo como chefe (i.e., sempre haverá pelo menos uma pessoa do primeiro grupo). Isto corresponde ao fator n no lado direito.

- Escolhido o chefe, preciso escolher $n-1$ pessoas dentre as $2n-1$ restantes ($n-1$ do primeiro grupo, n do segundo). Isto corresponde ao segundo fator do lado direito.
- Do lado esquerdo, para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
  - Vou escolher k pessoas do primeiro grupo — $\binom{n}{k}$ — para entrar.
  - Dentre elas, vou escolher um chefe — k.
  - Vou escolher k pessoas do segundo grupo — $\binom{n}{k}$ — para não entrar.

19

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} \binom{n-k+2}{2} = \binom{n+3}{5}, \quad \forall n \geq 2$$

22

Para provar

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

a. Vamos provar

$$1 + 2 + \cdots + n = \binom{n+1}{2}$$

b. E vamos provar

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

03: Problema do aniversário, propriedades

Vídeo

https://youtu.be/LZ5Wergp_PA

Exercícios

Enunciados (pdf).

Homework

Exercícios do livro (cap. 1)

26

27

57

61

62

Referências

DEVLIN, K. The Pascal-Fermat Correspondence: How Mathematics Is Really Done. **The Mathematics Teacher**, v. 103, n. 8, p. 579–582, abr. 2010.

OLIVEIRA MORGADO, A. C. DE et al. **Análise combinatória e probabilidade.** Rio de Janeiro: Impa / Vitae, 2004.