Introduction to Probability (Joe Blitzstein)

Fernando Náufel

(versão de 11/02/2022)

Sumário

Apresentação

- Página do livro: https://projects.iq.harvard.edu/stat110/home
- Strategic practice and homework: https://projects.iq.harvard.edu/stat110/strategic-practice-problems
- Handouts: https://projects.iq.harvard.edu/stat110/handouts — includes solutions to exercises marked with (s) in the book.
- Playlist: https://www.youtube.com/playlist?list=PL2SOU6wwxB0uwwH80KTQ6ht66KWxbzTIo

01: Probabilidade e contagem

Vídeo

https://youtu.be/KbB0FjPg0mw

Pascal e Fermat

- Ver artigo DEVLIN (2010).
- Ver originais em francês de toda a correspondência de Pascal.

R

Fatoriais e combinações

- Qual o maior valor de n para o qual o R calcula `factorial(n)`?

  No meu computador, $n = 170$:

  ```
  factorial(170:171)
  ## [1] 7,257416e+306           Inf
  ```

- Para valores maiores, podemos usar `lfactorial(n)` para calcular $\ln n!$:

```r
lfactorial(170:171)
## [1] 706,5731 711,7147
```

- Da mesma forma, `lchoose(n, k)` calcula $\ln \binom{n}{k}$.

Tabulando dados: `tabulate` $\times$ `table`

```r
b <- sample(1:365,23,replace=TRUE)
tabulate(b)
##   [1] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
##  [34] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
##  [67] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
## [100] 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0
## [133] 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
## [166] 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
## [199] 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [232] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
## [265] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [298] 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
## [331] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1
```

```r
table(b)
## b
##  15  33  55  92 106 125 127 134 149 159 168 197 201 248 264 277 283
##   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   2   1   1   1
## 306 341 343 345 352
##   1   1   1   1   1
```

Funções para o problema do aniversário

```r
pbirthday(23)
## [1] 0,5072972
```

```r
qbirthday(.5)
## [1] 23
```

```r
qbirthday(1)
## [1] 366
```

Para no mínimo 3 no mesmo dia:

```
qbirthday(.5, coincident = 3)
## [1] 88
```

Exercícios

Enunciados (pdf).

Practice

4. Norepeat words

A *norepeatword* is a sequence of at least one (and possibly all) of the usual 26 letters a, b, c, ...,z, with repetitions not allowed.

For example, "course" is a *norepeatword*, but "statistics" is not.

Order matters, e.g., "course" is not the same as "source".

A *norepeatword* is chosen randomly, with all *norepeatwords* equally likely. Show that the probability that it uses all 26 letters is very close to $1/e$.

- O denominador vai ser o total de todas as *norepeatwords* (NRW), que é a soma de
  - NRW de 1 letra: 26
  - NRW de 2 letras: $26 \cdot 25$
  - NRW de 3 letras: $26 \cdot 25 \cdot 24$
  - $\ldots$
  - NRW de 24 letras: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \cdots \cdot 3$
  - NRW de 25 letras: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \cdots \cdot 2$
  - NRW de 26 letras: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \cdots \cdot 1$
- Ou seja,

$$\sum_{k=0}^{25} \frac{26!}{k!}$$

- Que é igual a

$$26!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{25!}\right)$$

- O total de NRW que usam as 26 letras é $26!$.

- A probabilidade procurada é

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{26!}{26!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{25!}\right)} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{25!}} \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

- A última igualdade se justifica porque a série de Taylor para e^x é

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- Numericamente:

```
1 / exp(1)
## [1] 0,3678794
```

```
1 / sum(1 / factorial(0:25))
## [1] 0,3678794
```

Exercícios do livro (cap. 1)

13

A certain casino uses 10 standard decks of cards mixed together into one big deck, which we will call a superdeck. Thus, the superdeck has $52 \cdot 10 = 520$ cards, with 10 copies of each card.

How many different 10-card hands can be dealt from the superdeck? The order of the cards does not matter, nor does it matter which of the original 10 decks the cards came from. Express your answer as a binomial coefficient.

- Usando a notação de OLIVEIRA MORGADO et al. (2004), onde CR_k^n é o número de combinações completas de n elementos de k tipos diferentes, a resposta é

$$\text{CR}_{52}^{10} = \binom{52 + 10 - 1}{10} = \binom{61}{10} = 90.177.170.226$$

- Só foi possível usar combinações completas porque a mão tem 10 cartas, o que faz com que haja, essencialmente, um número infinito de cópias de cada um dos 52

tipos de carta. Se a mão tivesse 11 ou mais cartas, seria impossível que todas as cartas fossem iguais, e este raciocínio não poderia ser usado.

02: Histórias e axiomas

Vídeo

https://youtu.be/FJd_1H3rZGg

Exercícios

Enunciados (pdf).

Homework

4. Teorema das colunas

(a) Mostre que

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

- O lado direito significa escolher $k+1$ pessoas dentre $n+1$ pessoas.
- O truque é ordenar as pessoas de algum modo.
- Um exemplo concreto, com $n = 4$ e $k = 2$, mostrando que

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$

1. Vamos chamar as $n+1$ pessoas de $1, 2, 3, 4, 5$.
2. Grupos de $k+1$ pessoas onde o menor número é 1:
   - $1, 2, 3$
   - $1, 2, 4$
   - $1, 2, 5$
   - $1, 3, 4$
   - $1, 3, 5$
   - $1, 4, 5$
3. Grupos de $k+1$ pessoas onde o menor número é 2:
   - $2, 3, 4$
   - $2, 3, 5$
   - $2, 4, 5$
4. Grupos de $k+1$ pessoas onde o menor número é 3:
   - $3, 4, 5$

- No caso geral, vamos ordenar as $n+1$ pessoas, rotulando-as como

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

- Como a ordem dentro de cada grupo não importa, vamos escolher primeiro um elemento para ser o de menor índice do grupo e escolher os restantes k elementos dentre os elementos de índice maior do que o primeiro.
- Se escolhermos a_0 como o de menor índice, temos $\binom{n}{k}$ modos de escolher os restantes.
- Se escolhermos a_1 como o de menor índice, temos $\binom{n-1}{k}$ modos de escolher os restantes.
- …
- Se escolhermos $a_{n-(k+1)}$ como o de menor índice, temos $\binom{k+1}{k}$ modos de escolher os restantes.
- Se escolhermos a_{n-k} como o de menor índice, temos $\binom{k}{k}$ modos de escolher os restantes.

(b) Suppose that a large pack of Haribo gummi bears can have anywhere between 30 and 50 gummi bears. There are 5 delicious flavors. How many possibilities are there for the composition of such a pack of gummi bears?

- Usando a notação de OLIVEIRA MORGADO et al. (2004), onde CR_k^n é o número de combinações completas de n elementos de k tipos diferentes, a resposta é

$$
\begin{aligned}
\mathsf{CR}_5^{30} + \mathsf{CR}_5^{31} + \cdots + \mathsf{CR}_5^{50} &= \binom{34}{4} + \binom{35}{4} + \cdots + \binom{54}{4} \\
&= \binom{55}{5} - \left[\binom{33}{4} + \binom{32}{4} + \cdots + \binom{4}{4}\right] \\
&= \binom{55}{5} - \binom{34}{5}
\end{aligned}
$$

Exercícios do livro (cap. 1)

17

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

- Quero escolher n pessoas dentre $2n$ pessoas (lado direito).
- Divido as $2n$ pessoas em dois grupos de n cada.
- Para $k \in \{0, 1, \dots n\}$:
  - Escolho k pessoas do primeiro grupo — $\binom{n}{k}$ — para entrar.
  - Escolho k pessoas do segundo grupo — $\binom{n}{k}$ — para não entrar.
  - Para este valor de k, tenho $\binom{n}{k}^2$ maneiras de selecionar n pessoas, com k pessoas do primeiro grupo e $n - k$ pessoas do segundo.

18

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$$

Usamos o mesmo raciocínio do exercício anterior, com a seguinte modificação:

- Temos $2n$ pessoas, divididas em dois grupos de n, como antes.
- Como antes, quero escolher n pessoas dentre as $2n$.
- Mas agora, para cada escolha, quero designar uma das n pessoas do primeiro grupo como chefe (i.e., sempre haverá pelo menos uma pessoa do primeiro grupo). Isto corresponde ao fator n no lado direito.

- Escolhido o chefe, preciso escolher $n-1$ pessoas dentre as $2n-1$ restantes ($n-1$ do primeiro grupo, n do segundo). Isto corresponde ao segundo fator do lado direito.
- Do lado esquerdo, para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:
  - Vou escolher k pessoas do primeiro grupo — $\binom{n}{k}$ — para entrar.
  - Dentre elas, vou escolher um chefe — k.
  - Vou escolher k pessoas do segundo grupo — $\binom{n}{k}$ — para não entrar.

19

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} \binom{n-k+2}{2} = \binom{n+3}{5}, \qquad \forall n \geq 2$$

- Um exemplo concreto: $n = 3$
- Queremos escolher 5 elementos dentre 6.
- Para $k \in \{2, 3\}$:
  1. Escolhemos sempre o elemento $k+1$:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \underbrace{3}_{k=2} \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad \underbrace{4}_{k=3} \quad 5 \quad 6 \end{array}$$

     Este é o elemento que vai estar no meio do grupo dos escolhidos.

  2. Escolhemos 2 dentre os k primeiros elementos:

$$\begin{array}{c} \underbrace{1 \quad 2}_{k=2} \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ \underbrace{1 \quad 2 \quad 3}_{k=3} \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array}$$

  3. Escolhemos 2 dentre os $n-k+2$ últimos elementos:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad \underbrace{4 \quad 5 \quad 6}_{k=2} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \underbrace{5 \quad 6}_{k=3} \end{array}$$

22

Para provar

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

a. Vamos provar

$$1 + 2 + \cdots + n = \binom{n+1}{2}$$

b. E vamos provar

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

a. Considere $n+1$ times, numerados de 0 a n, num campeonato onde cada time joga com todos os outros exatamente uma vez. O total de jogos será

$$\binom{n+1}{2}$$

- O time 0 joga com n times com número maior que ele.
- O time 1 joga com $n-1$ times com número maior que ele.
- O time 2 joga com $n-2$ times com número maior que ele.
- …
- O time $n-2$ joga com 2 times com número maior que ele.
- O time $n-1$ joga com 1 time com número maior que ele.
- O time n joga com 0 times com número maior que ele.

b. Hint: Imagine choosing a number between 1 and n and then choosing 3 numbers between 0 and n smaller than the original number, with replacement. Then consider cases based on how many distinct numbers were chosen.

- Vamos chamar o número escolhido de k.
- Para $k = 1$, só temos o 0 para escolher. É 1 possibilidade.
- Para $k = 2$, temos 2 números. São 2^3 possibilidades.
- Para $k = 3$, temos 3 números. São 3^3 possibilidades.
- No geral, para $k = n$, são n^3 possibilidades.
- A soma de todos os casos é a soma dos cubos.

- Vamos examinar o caso em que k foi o número escolhido. De quantas maneiras podemos escolher 3 números entre 0 e $k-1$, com reposição?
  - Com 1 número, basta escolher o número: $\binom{k}{1}$ possibilidades.
  - Com 2 números distintos:
    * Escolhemos os 2 números: $\binom{k}{2}$ possibilidades;
    * Escolhemos qual dos 2 aparecerá 2 vezes: 2 possibilidades;
    * Escolhemos a posição do número que aparece uma vez: 3 possibilidades.
    * São $6\binom{k}{2}$ possibilidades.
  - Com 3 números distintos:
    * Escolhemos os 3 números: $\binom{k}{3}$ possibilidades;
    * Escolhemos a ordem dos 3 números: 6 possibilidades;
    * São $6\binom{k}{3}$ possibilidades.
- Para todos os valores de k, o total de possibilidades é

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{k}{1}+6\binom{k}{2}+6\binom{k}{3}\right]$$

- Usando o teorema das colunas, chegamos ao resultado

$$\binom{n+1}{2}+6\binom{n+1}{3}+6\binom{n+1}{4}$$

03: Problema do aniversário, propriedades

Vídeo

https://youtu.be/LZ5Wergp_PA

Exercícios

Exercícios do livro (cap. 1)

26

Amostra com reposição de tamanho 1000 a partir de uma população de tamanho 1 milhão. Cada pessoa tem a mesma probabilidade de ser escolhida.

Qual a probabilidade de pelo menos uma pessoa ser escolhida mais de uma vez?

Usando $N = 1.000.000$ e $n = 1.000$:

$$
\begin{aligned}
P &= 1 - P(\text{ninguém escolhido mais de uma vez}) \\
&= 1 - \frac{\binom{N}{n} \cdot n!}{N^n} \\
&= 1 - \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} \cdot \ldots \cdot \frac{N-n+1}{N}
\end{aligned}
$$

N	n	P
1.000.000	1.000.000	1,0000000
1.000.000	100.000	1,0000000
1.000.000	10.000	1,0000000
1.000.000	1.000	0,3932670
1.000.000	100	0,0049379
1.000.000	10	0,0000450
1.000.000	1	0,0000000

Na verdade, esta é a mesma distribuição do problema dos aniversários, com N dias e n pessoas.

Para N grande e n pequeno, a probabilidade P de pelo menos uma pessoa ser escolhida mais de uma vez se aproxima de 0:

27

- Função de *hash* $h(x)$.
- k telefones armazenados em n posições, todas com a mesma probabilidade.
- Qual a probabilidade de colisão?

De novo, `pbirthday(k, n)`.

57

- Existem 10^{44} moléculas na atmosfera.
- No seu último suspiro, César respirou 10^{22} delas (sem reposição).
- Você respira 10^{22} moléculas agora (com reposição).
- Qual a probabilidade de que pelo menos uma molécula sua tenha sido de César também?

A resposta é $1 - P(\text{nenhuma molécula sua foi de César})$.

Para calcular $P(\text{nenhuma molécula sua foi de César})$:

- Todas as respiradas possíveis (com reposição, com ordem): $\left(10^{44}\right)^{\left(10^{22}\right)}$.
- Todas as respiradas sem moléculas de César (com reposição, com ordem): $\left(10^{44} - 10^{22}\right)^{\left(10^{22}\right)}$.
- Daí,

$$
\begin{aligned}
P(\text{nenhuma molécula sua foi de César}) &= \frac{(10^{44}-10^{22})^{(10^{22})}}{(10^{44})^{(10^{22})}} \\
&= \left(\frac{10^{44}-10^{22}}{10^{44}}\right)^{(10^{22})} \\
&= \left(1-\frac{1}{10^{22}}\right)^{(10^{22})} \\
&\approx e^{-1}
\end{aligned}
$$

- Logo, a probabilidade procurada é aproximadamente

$$1 - e^{-1} \approx 0{,}63$$

- Formulação original em PAULOS (1988):

Now for better news of a kind of immortal persistence. First, take a deep breath. Assume Shakespeare's account is accurate and Julius Caesar gasped "You too, Brutus" before breathing his last. What are the chances you just inhaled a molecule which Caesar exhaled in his dying breath? The surprising answer is that, with probability better than 99 percent, you did just inhale such a molecule.

For those who don't believe me: I'm assuming that after more than two thousand years the exhaled molecules are uniformly spread about the world and the vast majority are still free in the atmosphere. Given these reasonably valid assumptions, the problem of determining the relevant probability is straightforward. If there are N molecules of air in the world and Caesar exhaled A of them, then the probability that any given molecule you inhale is from Caesar is A/N. The probability that any given molecule you inhale is not from Caesar is thus $1 - A/N$. By the multiplication principle, if you inhale three molecules, the probability that none of these three is from Caesar is $[1 - A/N]^3$. Similarly, if you inhale B molecules, the probability that none of them is from Caesar is approximately $[1 - A/N]^B$. Hence, the probability of the complementary event, of your inhaling at least one of his exhaled molecules, is $1 - [1 - A/N]^B$. A, B (each about 1/30th of a liter, or 2.2×10^{22}), and N (about 10^{44} molecules) are such that this probability is more than .99. It's intriguing that we're all, at least in this minimal sense, eventually part of one another.

61

- n passageiros para n assentos.
- Passageiro k inicialmente alocado no assento k.
- MAS Passageiro 1 decide escolher assento ao acaso (cada assento com a mesma probabilidade).
- Então, cada passageiro seguinte se senta no assento inicialmente alocado para ele, se disponível; caso contrário, escolhe um assento ao acaso.
- Qual a probabilidade de que o último passageiro se sente no assento alocado para ele?

Possibilidades O último passageiro só pode se sentar no lugar 1 ou no lugar n.

Aliás, isto é um caso específico de um fenômeno mais geral, Qualquer que seja o valor de n:

- O passageiro 3 nunca fica no assento 2: ou o passageiro 1 pegou, ou ficou livre para o passageiro 2 (que é obrigado a pegá-lo).
- O passageiro 4 nunca fica nos assentos 2 nem 3: ou o passageiro 1 pegou o assento 3, ou aconteceu um dos casos acima e o assento 3 ficou livre para o passageiro 3 (que é obrigado a pegá-lo).
- O passageiro 5 nunca fica nos assentos 2 nem 3 nem 4: ou o passageiro 1 pegou o assento 4, ou aconteceu um dos casos acima e o assento 4 ficou livre para o passageiro 4 (que é obrigado a pegá-lo).
- etc.
- Seguindo o raciocínio, chegamos à conclusão de que o passageiro n só pode ocupar o assento 1 ou o assento n.

Probabilidades

- Examinando exemplos com $n \in \{3, 4, 5\}$, a probabilidade parece ser $1/2$.
- Por quê?
- O assento do passageiro n depende da pergunta (no momento em que o passageiro n vai se sentar)

  "O assento 1 já foi tomado?"

  cuja resposta é oposta à da pergunta

  "O assento n já foi tomado?"
- Com que probabilidade a resposta a esta última pergunta é sim?
- Em todos os passos anteriores, como explicado acima em "possibilidades", os assentos 1 e n sempre estão disponíveis para qualquer passageiro que vá escolher um assento ao acaso.
- Como todos os assentos têm a mesma probabilidade de ser escolhidos, a probabilidade de o assento 1 estar tomado é igual à probabilidade de o assento n estar tomado.
- Logo, a probabilidade de o passageiro n acabar no assento n é $1/2$.

Problema do aniversário com probabilidades diferentes:

- Seja $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{365})$ o vetor das probabilidades de alguém nascer em algum dos dias do ano.
- Seja

$$e_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} x_{j_1} \dots x_{j_k}$$

o k-ésimo polinômio simétrico elementar sobre as variáveis $x_1, \dots, x_n$.

Por exemplo,

$$\begin{aligned} e_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 \\ e_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ e_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

a. Seja $k \geq 2$. Qual a probabilidade de pelo menos uma coincidência de aniversários em termos de $\vec{p}$ e de um polinômio simétrico elementar?

A probabilidade de não haver coincidência é a soma das probabilidades de todos os eventos da forma

As pessoas $1, 2, \dots k$ nasceram em dias diferentes $j_1, j_2, \dots, j_k$.

Por exemplo, para $k = 3$, a soma será

$$3! \cdot (p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + \cdots + p_{363} p_{364} p_{365})$$

Isto é igual a

$$k! \cdot e_k(\vec{p})$$

A probabilidade de pelo menos uma coincidência é

$$1 - k! \cdot e_k(\vec{p})$$

b. Quando $p_j = 1/365$ para todo j, esta probabilidade é mínima.

No caso em que $p_j = p = 1/365$ para todo j, temos

$$
\begin{aligned}
1 - k! \cdot e_k(\vec{p}) &= 1 - k! \cdot \binom{365}{k} \cdot p^k \\
&= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - k + 1)}{365^k}
\end{aligned}
$$

Neste caso, o valor de $e_k(\vec{p})$ é máximo.

c. Considere a desigualdade

$$
\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}
$$

que vem do raciocínio

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 \geq 0 &\implies (x+y)^2 - 4xy \geq 0 \\
&\implies (x+y)^2 \geq 4xy \\
&\implies \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \\
&\implies \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}
\end{aligned}
$$

Defina $\vec{r} = (r_1, \dots, r_{365})$ tal que

- $r_1 = r_2 = (p_1 + p_2)/2$,
- $r_j = p_j$ para $3 \leq j \leq 365$.

Verifique que

$$
\begin{aligned}
e_k(x_1, \dots, x_n) = {} & x_1 x_2 e_{k-2}(x_3, \dots x_n) + \\
& (x_1 + x_2) e_{k-1}(x_3, \dots x_n) + \\
& e_k(x_3, \dots x_n)
\end{aligned}
$$

e use a desigualdade para mostrar que, quando $\vec{p} \neq \vec{r}$,

$$
P(\text{coincidência} \mid \vec{p}) > P(\text{coincidência} \mid \vec{r})
$$

- Observe que

$$
\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy} \implies x = y
$$

Ou seja, quando $x \neq y$, a desigualdade é estrita.

- Para o vetor $\vec{p}$:

$$P(\text{coincidência} \mid \vec{p})$$
$$= 1 - k! \cdot e_k(\vec{p})$$
$$= 1 - k! \cdot [p_1 p_2 \cdot e_{k-2}(p_3, \ldots p_n) + (p_1 + p_2) \cdot e_{k-1}(p_3, \ldots p_n) + e_k(p_3, \ldots p_n)]$$

- Para o vetor $\vec{r}$:

$$P(\text{coincidência} \mid \vec{r})$$
$$= 1 - k! \cdot e_k(\vec{r})$$
$$= 1 - k! \cdot \left[\frac{(p_1 + p_2)^2}{4} \cdot e_{k-2}(p_3, \ldots p_n) + (p_1 + p_2) \cdot e_{k-1}(p_3, \ldots p_n) + e_k(p_3, \ldots p_n)\right]$$

- A única diferença está no primeiro fator dentro dos colchetes.
- Pela desigualdade:

$$\frac{p_1 + p_2}{2} \geq \sqrt{p_1 p_2} \implies \frac{(p_1 + p_2)^2}{4} \geq p_1 p_2$$

- Conclusão: para todo vetor $\vec{p}$ de probabilidades, é possível preservar ou diminuir a probabilidade de uma coincidência substituindo quaisquer 2 de suas componentes pelo valor da média aritmética delas. Assim, o vetor que minimiza a probabilidade precisa ter todas as suas componentes iguais.

04: Probabilidade condicional

Vídeo

https://youtu.be/P7NE4WF8j-Q

Exercícios

Enunciados (pdf).

Homework

3.1 Lewis Carroll

A bag contains one marble which is either green or blue, with equal probabilities. A green marble is put in the bag (so there are 2 marbles now), and then a random marble is taken out. The marble taken out is green. What is the probability that the remaining marble is also green?

This problem was first posed by Lewis Carroll in 1893.

3.5 Xadrez

You are going to play 2 games of chess with an opponent whom you have never played against before (for the sake of this problem). Your opponent is equally likely to be a beginner, intermediate, or a master. Depending on which, your chances of winning an individual game are 90%, 50%, or 30%, respectively.

a. What is your probability of winning the first game?

b. Congratulations: you won the first game! Given this information, what is the probability that you will also win the second game (assume that, given the skill level of your opponent, the outcomes of the games are independent)?

c. Explain the distinction between assuming that the outcomes of the games are independent and assuming that they are conditionally independent given the opponent's skill level. Which of these assumptions seems more reasonable, and why?

Exercícios do livro (cap. 2)

2

4

9

12

14

15

16

17

29

Referências

DEVLIN, K. The Pascal-Fermat Correspondence: How Mathematics Is Really Done. **The Mathematics Teacher**, v. 103, n. 8, p. 579–582, abr. 2010.

OLIVEIRA MORGADO, A. C. DE et al. **Análise combinatória e probabilidade.** Rio de Janeiro: Impa / Vitae, 2004.

PAULOS, J. A. **Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences.** 1. ed. New York: Hill; Wang, 1988.