Elementos de Matemática Discreta para Computação: Soluções

Anamaria Gomide, Jorge Stolfi, Fernando Náufel

26/03/2024 18:00

Índice

Apresentação

???

Anamaria Gomide (2023)

2 Teoria dos Conjuntos

2.1 Conjuntos, elementos e pertinência

Exercício 2.1

Escreva os elementos dos conjuntos abaixo:

a) $\{x : x \text{ é raiz do polinômio } x^4 - 5x^2 + 6\}$

b) $\{x^2 + 1 : x \text{ é raiz do polinômio } x^4 - 5x^2 + 6\}$

c) $\{x \in \{1, 2, 3, 4\} : x \text{ é raiz do polinômio } x^4 - 5x^2 + 6\}$

Resposta (a)

Precisamos usar algum método para resolver a equação

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

Uma maneira: se fizermos $y = x^2$, a equação fica

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

que tem raízes $y = 2$ e $y = 3$.
Daí, resolvendo $2 = x^2$, temos $x = \pm\sqrt{2}$.
E resolvendo $3 = x^2$, temos $x = \pm\sqrt{3}$.
Escrevendo o conjunto como uma enumeração dos elementos:

$$\left\{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$$

Resposta (b)

Preste atenção: agora, não queremos as raízes, mas sim os valores de $x^2 + 1$, onde x assume os valores das raízes.
O conjunto poderia ser escrito como

$$\left\{x^2+1 : x \in \{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}\right\}$$

Calculando os valores de x^2+1, temos:

x	x^2+1
$-\sqrt{3}$	4
$-\sqrt{2}$	3
$\sqrt{2}$	3
$\sqrt{3}$	4

Na tabela acima, há elementos repetidos, mas isto não pode acontecer em um conjunto. Então, a resposta é

$$\{3, 4\}$$

Em SETLX

```
A := { -sqrt(3), -sqrt(2), sqrt(3), sqrt(2) };
B := { x**2 + 1 : x in A };
print("B = ", B);

// Como SETLX usou ponto flutuante, houve erro.
// Vamos arredondar:
print( "B = ", { round(x) : x in B } );
```

```
B = {3.0000000000000004, 3.9999999999999996}
B = {3, 4}
```

Resposta (c)

Este item se parece com o item (a), mas há uma diferença importante: os valores de x — isto é, os elementos do conjunto — precisam pertencer a $\{1, 2, 3, 4\}$. Além disso, os valores de x precisam ser raízes do polinômio dado.
No item (a), vimos que as raízes são $-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$, e $\sqrt{3}$. Nenhuma delas pertence ao conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.
Conclusão: o conjunto do item (c) é vazio.

Em SETLX

```
C := { x : x in {1, 2, 3, 4} | x**4 - 5*x**2 + 6 == 0 };
print("C = ", C);
```

```
C = {}
```

Observe que a notação de SETLX divide a especificação do conjunto em três partes:

1. A forma geral do elemento: `x`;
2. O domínio de onde vêm os valores da variável: `x in {1, 2, 3, 4}`;
3. A condição que deve ser satisfeita pelos elementos do conjunto: `x**4 - 5*x**2 + 6 == 0`.

A notação do livro divide a especificação do conjunto em duas partes:

1. A forma geral do elemento e o universo: $x \in \{1, 2, 3, 4\}$;
2. A condição que deve ser satisfeita pelos elementos do conjunto: *x é raiz do polinômio* $x^4 - 5x^2 + 6$.

Lembre-se disso para poder implementar corretamente em SETLX os exemplos do livro.

Exercício 2.2

Escreva explicitamente os elementos dos seguintes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 2x + 1 < 0\}$

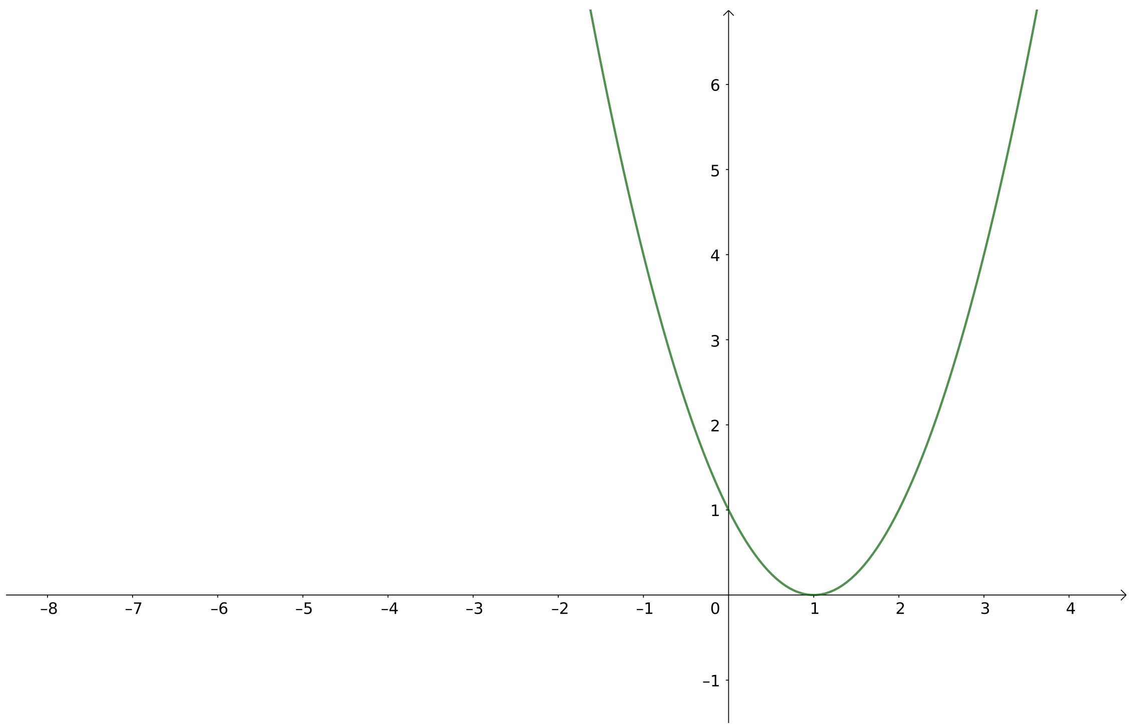
b) $\{x \in \mathbb{Z} : 2 \leq x \leq 20 \text{ e } x \text{ é primo}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x = 0\}$

Resposta (a)

Usando seus conhecimentos de Geometria Analítica, você pode traçar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$



O único valor de x para o qual $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ é 1 (que também é a única raiz desta função).
O conjunto deste item tem os inteiros ($\mathbb{Z}$) como universo, e 1 é inteiro. Então, o conjunto é $\{1\}$.

Resposta (b)

Este é o conjunto dos primos entre 2 e 20, inclusive:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

Em SETLX

```
// Função para testar se x é primo:
primo := procedure(x) {

  // Para cada inteiro i entre 2 e teto (ceiling) de √x:
  for (i in {2..ceil(sqrt(x))}) {

    // Se o resto de x dividido por i for zero, x não é primo:
    if (x % i == 0) {
      return false;
    }

  }

  // Se testou todos os valores de i sem dar resto zero, x é primo:
  return true;

};

B := { x : x in {2..20} | primo(x) };
print("B = ", B);
```

```
B = {3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
```

Você verá, em outros exercícios, maneiras mais curtas para calcular os primos em um dado intervalo em SETLX. A função acima é a mais parecida com o que você vai aprender na sua disciplina de programação.

Resposta (c)

Basta achar as soluções da equação:

$$x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Então, o conjunto é $\{0, 2\}$.

Exercício 2.3

Determine a cardinalidade dos seguintes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x \leq 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} : 10 \leq x^2 \leq 100\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x^4 - 5x^2 + 6 = 0\}$

d) $\{\sin(k\pi/7) : k \in \mathbb{Z}\}$

Resposta (a)

Este é o conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, que tem 7 elementos. Logo, $|A| = 7$.

Resposta (b)

Este é o conjunto dos inteiros cujo quadrado está entre 10 e 100, inclusive.
Preste atenção: números negativos, quando elevados ao quadrado, resultam em números positivos.
Este conjunto é

$$B = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

e $|B| = 14$.

Em SETLX

E se os limites não fossem 10 e 100?
Vamos fazer uma função mais geral, que recebe dois valores (`minimo` e `maximo`) e retorna o conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{Z} : x \in \{-\sqrt{\texttt{maximo}}, \ldots, +\sqrt{\texttt{maximo}}\} \text{ e } \texttt{minimo} \leq x^2 \leq \texttt{maximo}\right\}$$

Leia com atenção a definição acima. Por que o domínio é $\{-\sqrt{\texttt{maximo}}, \ldots, +\sqrt{\texttt{maximo}}\}$?

```
calcular := procedure(minimo, maximo) {

  extremo_esquerdo := -floor(sqrt(maximo));
  extremo_direito  :=  floor(sqrt(maximo));

  return {
    x :
      x in { extremo_esquerdo..extremo_direito } |
        minimo <= x**2 && x**2 <= maximo
  };

};

// Vários conjuntos, com valores diferentes:
print("B  = ", calcular(10, 100));
print("B2 = ", calcular(5, 50));
print("B3 = ", calcular(0, 5));
print("B4 = ", calcular(0, 0));

// B5 está correto?
print("B5 = ", calcular(10, 0));

print("\n");

// Nossa função não é muito robusta.
// Ela quebra se maximo for negativo. Por quê?
print("B6 = ", calcular(-20, -10));
```

```
B  = {-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
B2 = {-7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7}
B3 = {-2, -1, 0, 1, 2}
B4 = {0}
B5 = {}


Error in "print("B6 = ", calcular(-20, -10))":
Error in "calcular(-20, -10)":
Error in "extremo_esquerdo := -floor(sqrt(maximo))":
Error in "-floor(sqrt(maximo))":
Error in "floor(sqrt(maximo))":
Error in "sqrt(maximo)":
```

```
Result of this operation is undefined/not a number.

Replay:
2.4: sqrt(maximo) FAILED
2.3: maximo <~> -10
2.2: sqrt <~> procedure(x) { /* predefined procedure `sqrt' */ }
2.1: floor <~> procedure(numberValue) { /* predefined procedure `floor' */ }
1.8: calcular(-20, -10) FAILED
1.7: -10 <~> -10
1.6: 10 <~> 10
1.5: -20 <~> -20
1.4: 20 <~> 20
1.3: calcular <~> procedure(minimo, maximo) { extremo_esquerdo := -floor(sqrt(maximo)); ext
1.2: "B6 = " <~> "B6 = "
1.1: print <~> procedure(*value) { /* predefined procedure `print' */ }
```

Resposta (c)

Este é o conjunto A do Exercício 2.1 (a), que tem 4 elementos. logo, $|A| = 4$.

Referências

Anamaria Gomide, Jorge Stolfi. 2023. *Elementos de Matemática Discreta para Computação.* https://www.ic.unicamp.br/~stolfi/fmc-book/2022-08-24-js/livro.pdf.