

Elementos de Matemática Discreta para Computação: Soluções

Anamaria Gomide, Jorge Stolfi, Fernando Náufel

10/04/2024 16:20

Índice

Apresentação	3
Agradecimentos	3
2 Teoria dos Conjuntos	4
2.1 Conjuntos, elementos e pertinência	4
Exercício 2.1	4
Exercício 2.2	6
Exercício 2.3	8
Referências	12

Apresentação

Este livro eletrônico — um trabalho em construção — reúne soluções dos exercícios do livro *Elementos de Matemática Discreta para Computação*, de autoria de Anamaria Gomide e Jorge Stolfi (Anamaria Gomide 2023), disponível em <https://www.ic.unicamp.br/~stolfi/fmc-book/2022-08-24-js/livro.pdf>.

Além das soluções teóricas, incluímos código em SETLX (*Set Language Extended*), uma linguagem de programação de alto nível projetada especificamente para resolver problemas envolvendo conjuntos, relações, funções e outros objetos estudados em um curso de Matemática Discreta.

Para saber mais sobre SETLX — incluindo como instalar a linguagem nos principais sistemas operacionais — visite <https://randoom.org/Software/SetlX/>. Um tutorial completo de SETLX está disponível em <https://download.randoom.org/setlX/tutorial.pdf>.

Agradecimentos

Muitas das soluções foram desenvolvidas ao longo do ano de 2024 pelos alunos da disciplina de Matemática Discreta do curso de Ciência da Computação do Pólo de Rio das Ostras da Universidade Federal Fluminense.

2 Teoria dos Conjuntos

2.1 Conjuntos, elementos e pertinência

Exercício 2.1

Escreva os elementos dos conjuntos abaixo:

- a) $\{x : x \text{ é raiz do polinômio } x^4 - 5x^2 + 6\}$
- b) $\{x^2 + 1 : x \text{ é raiz do polinômio } x^4 - 5x^2 + 6\}$
- c) $\{x \in \{1, 2, 3, 4\} : x \text{ é raiz do polinômio } x^4 - 5x^2 + 6\}$

Resposta (a)

Precisamos usar algum método para resolver a equação

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

Uma maneira: se fizermos $y = x^2$, a equação fica

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

que tem raízes $y = 2$ e $y = 3$.

Daí, resolvendo $2 = x^2$, temos $x = \pm\sqrt{2}$.

E resolvendo $3 = x^2$, temos $x = \pm\sqrt{3}$.

Escrevendo o conjunto como uma enumeração dos elementos:

$$\{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$$

Resposta (b)

Preste atenção: agora, não queremos as raízes, mas sim os valores de $x^2 + 1$, onde x assume os valores das raízes.

O conjunto poderia ser escrito como

$$\{x^2 + 1 : x \in \{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}\}$$

Calculando os valores de $x^2 + 1$, temos:

x	$x^2 + 1$
$-\sqrt{3}$	4
$-\sqrt{2}$	3
$\sqrt{2}$	3
$\sqrt{3}$	4

Na tabela acima, há elementos repetidos, mas isto não pode acontecer em um conjunto. Então, a resposta é

$$\{3, 4\}$$

Em SETLX

```
A := { -sqrt(3), -sqrt(2), sqrt(3), sqrt(2) };
B := { x**2 + 1 : x in A };
print("B = ", B);
```

```
// Como SETLX usou ponto flutuante, houve erro.
// Vamos arredondar:
print( "B = ", { round(x) : x in B } );
```

```
B = {3.0000000000000004, 3.9999999999999996}
B = {3, 4}
```

Resposta (c)

Este item se parece com o item (a), mas há uma diferença importante: os valores de x — isto é, os elementos do conjunto — precisam pertencer a $\{1, 2, 3, 4\}$. Além disso, os valores de x precisam ser raízes do polinômio dado.

No item (a), vimos que as raízes são $-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$, e $\sqrt{3}$. Nenhuma delas pertence ao conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

Conclusão: o conjunto do item (c) é vazio.

Em SETLX

```
C := { x : x in {1, 2, 3, 4} | x**4 - 5*x**2 + 6 == 0 };  
print("C = ", C);
```

C = {}

Observe que a **notação de SETLX** divide a especificação do conjunto **em três partes**:

1. A forma geral do elemento: x ;
2. O domínio de onde vêm os valores da variável: $x \text{ in } \{1, 2, 3, 4\}$;
3. A condição que deve ser satisfeita pelos elementos do conjunto: $x**4 - 5*x**2 + 6 == 0$.

A **notação do livro** divide a especificação do conjunto **em duas partes**:

1. A forma geral do elemento e o universo: $x \in \{1, 2, 3, 4\}$;
2. A condição que deve ser satisfeita pelos elementos do conjunto: x é raiz do polinômio $x^4 - 5x^2 + 6$.

Lembre-se disso para poder implementar corretamente em SETLX os exemplos do livro.

Exercício 2.2

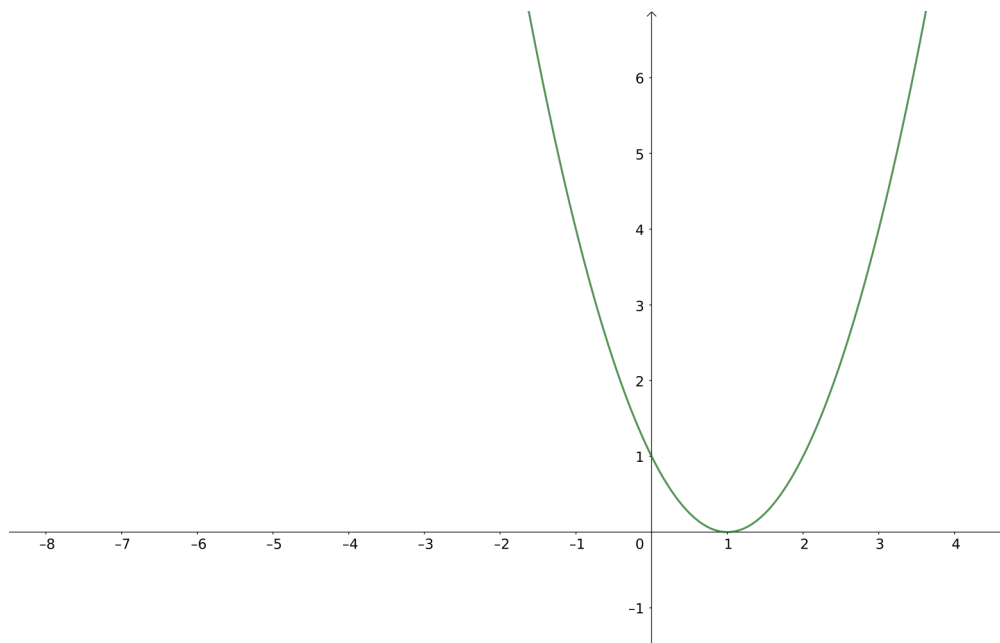
Escreva explicitamente os elementos dos seguintes conjuntos:

- a) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 2x + 1 < 0\}$
- b) $\{x \in \mathbb{Z} : 2 \leq x \leq 20 \text{ e } x \text{ é primo}\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x = 0\}$

Resposta (a)

Usando seus conhecimentos de Geometria Analítica, você pode traçar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$



O único valor de x para o qual $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ é 1 (que também é a única raiz desta função).

O conjunto deste item tem os inteiros (\mathbb{Z}) como universo, e 1 é inteiro. Então, o conjunto é $\{1\}$.

Resposta (b)

Este é o conjunto dos primos entre 2 e 20, inclusive:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

Em SETLX

```

// Função para testar se x é primo:
primo := procedure(x) {

    // Para cada inteiro i entre 2 e teto (ceiling) de √x:
    for (i in {2..ceil(sqrt(x))}) {

        // Se o resto de x dividido por i for zero, x não é primo:
        if (x % i == 0) {
            return false;
        }

    }

    // Se testou todos os valores de i sem dar resto zero, x é primo:
    return true;

};

B := { x : x in {2..20} | primo(x) };
print("B = ", B);

```

B = {3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

Você verá, em outros exercícios, maneiras mais curtas para calcular os primos em um dado intervalo em SETLX. A função acima é a mais parecida com o que você vai aprender na sua disciplina de programação.

Resposta (c)

Basta achar as soluções da equação:

$$x^2 - 2x = 0 \iff x(x - 2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Então, o conjunto é $\{0, 2\}$.

Exercício 2.3

Determine a cardinalidade dos seguintes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x \leq 4\}$

- b) $\{x \in \mathbb{Z} : 10 \leq x^2 \leq 100\}$
 c) $\{x \in \mathbb{R} : x^4 - 5x^2 + 6 = 0\}$
 d) $\{\sin(k\pi/7) : k \in \mathbb{Z}\}$

Resposta (a)

Este é o conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, que tem 7 elementos. Logo, $|A| = 7$.

Resposta (b)

Este é o conjunto dos inteiros cujo quadrado está entre 10 e 100, inclusive.

Preste atenção: números negativos, quando elevados ao quadrado, resultam em números positivos.

Este conjunto é

$$B = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

e $|B| = 14$.

Em SETLX

E se os limites não fossem 10 e 100?

Vamos fazer uma função mais geral, que recebe dois valores (**minimo** e **maximo**) e retorna o conjunto

$$\{x \in \mathbb{Z} : x \in \{-\sqrt{\text{maximo}}, \dots, +\sqrt{\text{maximo}}\} \text{ e } \text{minimo} \leq x^2 \leq \text{maximo}\}$$

Leia com atenção a definição acima. Por que o domínio é $\{-\sqrt{\text{maximo}}, \dots, +\sqrt{\text{maximo}}\}$?

```

calcular := procedure(minimo, maximo) {

    extremo_esquerdo := -floor(sqrt(maximo));
    extremo_direito  := floor(sqrt(maximo));

    return {
        x :
        x in { extremo_esquerdo..extremo_direito } |
        minimo <= x**2 && x**2 <= maximo
    };
};

// Vários conjuntos, com valores diferentes:
print("B = ", calcular(10, 100));
print("B2 = ", calcular(5, 50));
print("B3 = ", calcular(0, 5));
print("B4 = ", calcular(0, 0));

// B5 está correto?
print("B5 = ", calcular(10, 0));

print("\n");

// Nossa função não é muito robusta.
// Ela quebra se maximo for negativo. Por quê?
print("B6 = ", calcular(-20, -10));

B = {-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
B2 = {-7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7}
B3 = {-2, -1, 0, 1, 2}
B4 = {0}
B5 = {}

Error in "print("B6 = ", calcular(-20, -10))":
Error in "calcular(-20, -10)":
Error in "extremo_esquerdo := -floor(sqrt(maximo))":
Error in "-floor(sqrt(maximo))":
Error in "floor(sqrt(maximo))":
Error in "sqrt(maximo)":

```

Result of this operation is undefined/not a number.

Replay:

2.4: sqrt(maximo) FAILED

2.3: maximo <~> -10

2.2: sqrt <~> procedure(x) { /* predefined procedure `sqrt' */ }

2.1: floor <~> procedure(numberValue) { /* predefined procedure `floor' */ }

1.8: calcular(-20, -10) FAILED

1.7: -10 <~> -10

1.6: 10 <~> 10

1.5: -20 <~> -20

1.4: 20 <~> 20

1.3: calcular <~> procedure(minimo, maximo) { extremo_esquerdo := -floor(sqrt(maximo)); ext

1.2: "B6 = " <~> "B6 = "

1.1: print <~> procedure(*value) { /* predefined procedure `print' */ }

Resposta (c)

Este é o conjunto A do [Exercício 2.1 \(a\)](#), que tem 4 elementos. logo, $|A| = 4$.

Referências

Anamaria Gomide, Jorge Stolfi. 2023. *Elementos de Matemática Discreta para Computação*.
<https://www.ic.unicamp.br/~stolfi/fmc-book/2022-08-24-js/livro.pdf>.