# Probabilidade e Estatística com R

Fernando Náufel

(versão de 28/03/2022)

# Sumário

Exercício	5
1 O Que É Estatística?	6
1.1 Vídeo 1	6
1.2 Exercícios	6
1.3 Vídeo 2	
1.4 Exercícios	
2 Introdução a R	10
2.1 Vídeo 1	10
2.2 Vídeo 2	10
2.3 Exercícios	10
3 Introdução ao tidyverse	12
3.1 Criando uma <i>tibble</i>	12
3.2 Operador de <i>pipe</i> (%>%)	
3.3 Formato <i>tidy</i>	
3.4 Manipulando os dados	
4 Visualização com ggplot2	34
4.1 Vídeo 1	34
4.2 Componentes de um gráfico ggplot2	
4.3 Conjunto de dados	
4.4 Gráficos de dispersão (scatter plots)	
4.5 Vídeo 2	
4.6 Histogramas e cia	
4.7 Ogiva	
4.8 Ramos e folhas	
4.9 Personalização do tema	

	4.10	Exercícios	70
5	Visu	ualização com ggplot2 (continuação)	74
	5.1	Vídeo 1	74
	5.2	Boxplots	74
	5.3	Vídeo 2	
	5.4	Gráficos de barras e de colunas	
	5.5	Gráficos de linha e séries temporais	
	5.6	Exercícios	
	5.7	Referências sobre visualização e R	
6	Med	didas 1	04
	6.1	<b>Vídeo</b>	L04
	6.2	Medidas de centralidade	
	6.3	Formas de uma distribuição	
	6.4	Re-expressão	
	6.5	Medidas de posição	
	6.6	Medidas de dispersão	
	6.7	Coeficiente de variação	
	6.8	Escores padrão	
	6.9	Teorema de Tchebychev	

# Apresentação

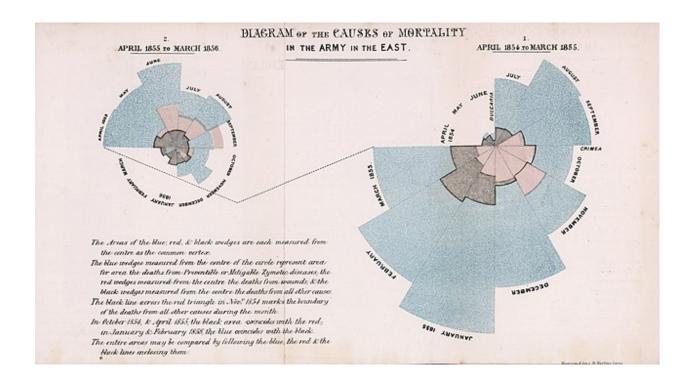
## Atenção



Este material ainda está em construção.

Pode haver mudanças a qualquer momento.

Verifique, no rodapé da página *web* ou na capa do arquivo pdf, a data desta versão.



Este livro/site foi iniciado em 2020, durante a pandemia de COVID-19, quando a Universidade Federal Fluminense (UFF) funcionou em regime de ensino remoto durante mais de um ano.

Para atender os alunos do curso de Probabilidade e Estatística do curso de graduação em Ciência da Computação da UFF, decidi gravar aulas em vídeo e disponibilizar os arquivos usados nelas. Foram esses arquivos que deram origem a este livro/site.

Este livro/site foi construído para pessoas que já saibam programar, embora não necessariamente em R.

Para tirar o máximo proveito deste material, você deve fazer o seguinte:

- 1. Assistir aos vídeos contidos em cada capítulo. A *playlist* completa está em https: //www.youtube.com/playlist?list=PL7SRLwLs7ocaV-Y1vrVU3W7mZnnS0qkWV.
- Instalar o R no seu computador ou abrir uma conta no RStudio Cloud, para poder usar o R online. Você encontra instruções para fazer isto no capítulo de introdução a R.
- 3. Baixar, neste repositório do Github, o código-fonte deste livro/site, para poder rodar e alterar os exemplos.
- 4. Seguir os *links* para outras fontes *online* que abordam assuntos que não são cobertos em detalhes neste curso.
- 5. Fazer os exercícios. Ao longo do tempo, acrescentarei *links* para vídeos explicando as soluções.



Se você estiver lendo este material na *web*, você pode clicar nos comandos e funções que aparecem nos blocos de código em R para abrir páginas da documentação sobre eles.

Se você preferir ler este livro em pdf, ou se quiser imprimi-lo, faça o *down-load* do arquivo aqui.

## Referências recomendadas

### Em português

- Sillas Gonzaga, *Introdução a R para Visualização e Apresentação de Dados*, http://sillasgonzaga.com/material/curso\_visualizacao/index.html
- Allan Vieira de Castro Quadros, Introdução à Análise de Dados em R utilizando Tidyverse, https://allanvc.github.io/book\_IADR-T/
- Paulo Felipe de Oliveira, Saulo Guerra, Robert McDonnel, Ciência de Dados com R Introdução, https://cdr.ibpad.com.br/index.html
- Curso R, Ciência de Dados em R, https://livro.curso-r.com/

### Em inglês

- Garrett Grolemund, Hadley Wickham, R for Data Science, https://r4ds.had.co.nz/
- Chester Ismay, Albert Y. Kim, A ModernDive into R and the Tidyverse, https://moderndive.com/

## Exercício

1. Pesquise sobre a imagem do início deste capítulo. Ela foi criada em 1858 por Florence Nightingale.

# CAPÍTULO 1

O Que	É	Estatística?
O Guc	_	LJIGIIJICG:

1.1

## Vídeo 1

https://youtu.be/6Q\_XSoLCIpc

1.2

## **Exercícios**

- Você está interessado em estimar a altura de todos os homens da sua faculdade. Para isso, você decide medir as alturas de todos os homens da sua turma de Estatística.
  - Qual é a amostra?
  - Qual é a população?
- 2. Um instituto de pesquisa entrevista um grupo de 1000 pessoas, perguntando a cada uma se ela vai votar a favor do candidato A na próxima eleição. Dos entrevistados, 600 responderam que sim. A proporção 0,6 (ou 60%) é uma estatística ou um parâmetro?
- 3. Você vê alguma diferença entre as cinco situações abaixo? Quais das situações são equivalentes em termos da probabilidade de conseguir 10 cartas do mesmo naipe?
  - a. Usando um baralho normal, você retira  $10\,\mathrm{cartas}$  e registra as cartas retiradas.

- b. Usando um baralho normal, você repete a seguinte sequência de ações 10 vezes: retirar uma carta do baralho, registrar a carta retirada e repor a carta no baralho.
- c. Usando uma caixa contendo todas as cartas de 1 milhão de baralhos reunidos, você retira 10 cartas e registra as cartas retiradas.
- d. Usando uma caixa contendo todas as cartas de 1 milhão de baralhos reunidos, você repete a seguinte sequência de ações 10 vezes: retirar uma carta da caixa, registrar a carta retirada e repor a carta na caixa.
- e. Usando um baralho *infinito*, você retira 10 cartas e registra as cartas retiradas.
- f. Usando um baralho *infinito*, você repete a seguinte sequência de ações 10 vezes: retirar uma carta do baralho, registrar a carta retirada e repor a carta no baralho.
- 4. Qual a graça dos quadrinhos na Figura 1.1, que também aparecem no vídeo?







Figura 1.1: http://xkcd.com/552/

- 5. Qual a graça dos quadrinhos na Figura 1.2?
- 6. Veja este vídeo sobre o cavalo Hans:

https://youtu.be/G3VkCmdUfZE

Qual a relação entre esta história e a necessidade de duplo cegamento?

1.3

Vídeo 2

https://youtu.be/492VASxIDRo



LIMITAÇÕES DE ESTUDOS COM CEGAMENTO

Figura 1.2: http://xkcd.com/1462/

1.4

## **Exercícios**

- 1. Por que não faz sentido calcular a média dos CEPs de um grupo de pessoas?
- 2. Uma temperatura de -40 graus Celsius é igual a uma temperatura de -40 graus Fahrenheit?
- 3. Uma temperatura de zero graus Celsius é igual a uma temperatura de zero graus Fahrenheit?
- 4. Uma variação de temperatura de 1 grau Celsius é igual a uma variação de temperatura de 1 grau Fahrenheit?
- 5. Um saldo bancário de zero reais é igual a um saldo bancário de zero dólares?
- 6. Um produto de 1 milhão de reais custa o mesmo que um produto de 1 milhão de dólares?
- 7. Meses representados por números de 1 a 12 são dados de que nível?

# CAPÍTULO 2

Introdução a R	
0.1	
2.1	
Vídeo 1	
	https://youtu.be/1kXQDNqm41c
2.2	
Vídeo 2	
	https://youtu.be/3GEc1oiKDrU
2.3	
Exercícios	

- 1. Para criar sua conta no RStudio Cloud, acesse https://rstudio.cloud/.
- 2. Se você preferir instalar o R no seu computador, acesse
  - https://cran.r-project.org/ para baixar e instalar o R, e
  - https://rstudio.com/products/rstudio/download/ para baixar e instalar o RStudio, um IDE específico para R.

- 3. Abra o RStudio Cloud ou o seu RStudio instalado localmente.
- 4. Crie um novo projeto. Sempre trabalhe em projetos para ter seus arquivos organizados.
- 5. Para instalar o swirl (pacote do R para exercícios interativos), execute o seguinte comando no console do RStudio:

```
install.packages("swirl")
```

6. Para instalar os exercícios de introdução a R, execute os seguintes comandos no console do RStudio:

```
library(swirl)
install_course_github('fnaufel', 'introR')
```

7. Mude o idioma para português e execute o swirl.

```
select_language('portuguese', append_rprofile = TRUE)
swirl()
```

- 8. Na primeira execução, você vai precisar se identificar (qualquer nome serve). Com essa identificação, o swirl vai registrar o seu progresso nas lições.
- 9. No swirl, as perguntas são mostradas no console. Você também deve responder no console.
- 10. Às vezes, um script será aberto no editor de textos para que você complete um programa. Quando seu programa estiver pronto, salve o arquivo e digite submit() no console para o swirl processar o script.
- 11. O swirl dá instruções claras no console. Na dúvida, digite info() no *prompt* do R (>).
- 12. Se, em vez do *prompt* do R, o console mostrar reticências (...), tecle *Enter*.
- 13. Se nada funcionar, tecle *ESC*.
- 14. Para sair do swirl(), digite bye() no prompt do R.
- 15. Para voltar para os exercícios, digite

```
library(swirl)
swirl()
```

# CAPÍTULO 3

# Introdução ao tidyverse



Busque mais informações sobre os pacotes que compõem o tidyverse nas referências recomendadas.

## 3.1

## Criando uma tibble

• Cada coluna é um vetor:

```
cores <- tibble(
  pessoa = c('João', 'Maria', 'Pedro', 'Ana'),
  'cor favorita' = c('azul', 'rosa', 'preto', 'branco')
)
cores</pre>
```

```
## # A tibble: 4 x 2
##   pessoa `cor favorita`
##   <chr>   <chr>
## 1 João   azul
## 2 Maria   rosa
## 3 Pedro   preto
## 4 Ana   branco
```

• A função tribble permite a entrada de forma mais natural. Lembre-se de usar ~ antes dos nomes das colunas.

```
## # A tibble: 4 x 2
## pessoa `cor favorita`
## <chr> <chr>
## 1 João azul
## 2 Maria rosa
## 3 Pedro preto
## 4 Ana branco
```

• Se uma coluna não puder ser armazenada em um vetor, a coluna será uma lista:

```
cores <- tibble(
  pessoa = c('João', 'Maria', 'Pedro', 'Ana'),
  'cor favorita' = list(
    c('azul', 'roxo'),
    c('rosa', 'magenta'),
    NA,
    'branco'
  )
)
cores</pre>
```

```
## # A tibble: 4 x 2
## pessoa `cor favorita`
## <chr> chr> tr> ## 1 João <chr [2]>
## 2 Maria <chr [2]>
## 3 Pedro <lgl [1]>
## 4 Ana <chr [1]>
```

• Use View() para examinar interativamente o conteúdo de uma coluna-lista:

```
cores %>% View()
```

## Operador de pipe (%>%)

- O tidyverse inclui o pacote magrittr<sup>1</sup>, que contém este operador.
- A idéia é facilitar a leitura de composições de comandos. O código

```
y \leftarrow h(g(f(x)))
```

pode ser escrito como

```
y <- x %>% f() %>% g() %>% h()
```

- Esta segunda versão é mais fiel à ordem em que as operações acontecem.
- Na verdade, R tem um operador de atribuição para a direita, mas poucas pessoas recomendam usá-lo:

```
x %>% f() %>% g() %>% h() -> y
```

• Se f, g e h forem funções de um argumento só, os parênteses podem ser omitidos:

```
y <- x %>% f %>% g %>% h
```

• Se a função f tiver outros argumentos, escreva-os normalmente na chamada a f:

```
y <- x %>% mean(na.rm = TRUE)
```

- O pipe EXP %>% f(...) sempre insere o resultado da expressão EXP do lado esquerdo como o primeiro argumento da função f.
- Se você precisar que o resultado da expressão EXP seja inserido em outra posição na lista de argumentos de f, use um ponto "." para isso:

```
x %>% consultar(df, .)
```

### 3.3

# Formato tidy

• Nossa última versão da tibble cores é um pouco mais complexa do que deveria ser:

```
cores
```

```
## # A tibble: 4 x 2
```

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Por que o nome do pacote e o nome do operador (*pipe*) formam um trocadilho?

```
## pessoa `cor favorita`
## <chr> the chr> the chr> the chr [2]>
## 2 Maria <chr [2]>
## 3 Pedro <lgl [1]>
## 4 Ana <chr [1]>
```

- O formato tidy exige que
  - 1. Cada linha da tibble corresponda a uma observação sobre um indivíduo,
  - 2. Cada coluna corresponda a uma variável observada, e
  - 3. Cada célula contenha um valor da variável.
- Na *tibble* cores, a primeira e a segunda exigências são satisfeitas, mas a terceira não, pois algumas células contém valores múltiplos.
- A tibble não está no formato tidy.
- Podemos "extrair" estes vetores "aninhados" usando o comando unnest, do pacote tidyr:

```
cores <- cores %>%
  unnest(`cor favorita`)

cores
## # A tibble: 6 x 2
```

```
## # A tibble: 6 x 2
## pessoa `cor favorita`
## <chr> <chr>
## 1 João azul
## 2 João roxo
## 3 Maria rosa
## 4 Maria magenta
## 5 Pedro <NA>
## 6 Ana branco
```

- A maioria das funções do tidyverse exige que as tibbles estejam neste formato tidy.
- Um exemplo mais complexo é o dataset billboard, com as seguintes colunas para cada música que estava no top 100 da Billboard no ano de 2000::
  - Nome do artista ou banda;
  - Nome da música;
  - Data em que a música entrou no top 100 da Billboard;
  - Para cada uma das 76 semanas seguintes, a posição da música no *top 100*.

```
billboard %>% glimpse()
```

## Rows: 317 ## Columns: 79 <chr> "2 Pac", "2Ge+her", "3 Doors Down", "3 Doors Dow~ ## \$ artist <chr> "Baby Don't Cry (Keep...", "The Hardest Part Of ~ ## \$ track ## \$ date.entered <date> 2000-02-26, 2000-09-02, 2000-04-08, 2000-10-21,~ <dbl> 87, 91, 81, 76, 57, 51, 97, 84, 59, 76, 84, 57, ~ ## \$ wk1 ## \$ wk2 <dbl> 82, 87, 70, 76, 34, 39, 97, 62, 53, 76, 84, 47, ~ <dbl> 72, 92, 68, 72, 25, 34, 96, 51, 38, 74, 75, 45, ## \$ wk3 ## \$ wk4 <dbl> 77, NA, 67, 69, 17, 26, 95, 41, 28, 69, 73, 29, ^ ## \$ wk5 <dbl> 87, NA, 66, 67, 17, 26, 100, 38, 21, 68, 73, 23,~ <dbl> 94, NA, 57, 65, 31, 19, NA, 35, 18, 67, 69, 18, ~ ## \$ wk6 ## \$ wk7 <dbl> 99, NA, 54, 55, 36, 2, NA, 35, 16, 61, 68, 11, 2~ <dbl> NA, NA, 53, 59, 49, 2, NA, 38, 14, 58, 65, 9, 17~ ## \$ wk8 ## \$ wk9 <dbl> NA, NA, 51, 62, 53, 3, NA, 38, 12, 57, 73, 9, 17~ ## \$ wk10 <dbl> NA, NA, 51, 61, 57, 6, NA, 36, 10, 59, 83, 11, 1~ <dbl> NA, NA, 51, 61, 64, 7, NA, 37, 9, 66, 92, 1, 17,~ ## \$ wk11 ## \$ wk12 <dbl> NA, NA, 51, 59, 70, 22, NA, 37, 8, 68, NA, 1, 3,~ <dbl> NA, NA, 47, 61, 75, 29, NA, 38, 6, 61, NA, 1, 3,~ ## \$ wk13 ## \$ wk14 <dbl> NA, NA, 44, 66, 76, 36, NA, 49, 1, 67, NA, 1, 7,~ <dbl> NA, NA, 38, 72, 78, 47, NA, 61, 2, 59, NA, 4, 10~ ## \$ wk15 ## \$ wk16 <dbl> NA, NA, 28, 76, 85, 67, NA, 63, 2, 63, NA, 8, 17~ ## \$ wk17 <dbl> NA, NA, 22, 75, 92, 66, NA, 62, 2, 67, NA, 12, 2~ ## \$ wk18 <dbl> NA, NA, 18, 67, 96, 84, NA, 67, 2, 71, NA, 22, 2~ <dbl> NA, NA, 18, 73, NA, 93, NA, 83, 3, 79, NA, 23, 2~ ## \$ wk19 ## \$ wk20 <dbl> NA, NA, 14, 70, NA, 94, NA, 86, 4, 89, NA, 43, 4~ ## \$ wk21 <dbl> NA, NA, 12, NA, NA, NA, NA, NA, S, NA, NA, 44, 4~ ## \$ wk22 ## \$ wk23 ## \$ wk24 ## \$ wk25 ## \$ wk26 ## \$ wk27 ## \$ wk28 ## \$ wk29 ## \$ wk30 ## \$ wk31 ## \$ wk32 ## \$ wk33 ## \$ wk34 ## \$ wk35 ## \$ wk36 ## \$ wk37 ## \$ wk38 ## \$ wk39 ## \$ wk40 ## \$ wk41 ## \$ wk42 ## \$ wk43 

```
## $ wk44
   ## $ wk45
   ## $ wk46
   ## $ wk47
   <dbl> NA, NA, 22, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
## $ wk48
   ## $ wk49
   ## $ wk50
   ## $ wk51
## $ wk52
   ## $ wk53
   ## $ wk54
   ## $ wk55
   ## $ wk56
## $ wk57
   ## $ wk58
   ## $ wk59
   ## $ wk60
   ## $ wk61
## $ wk62
   ## $ wk63
## $ wk64
   ## $ wk65
   ## $ wk66
   ## $ wk67
   ## $ wk68
   ## $ wk69
   ## $ wk70
## $ wk71
   ## $ wk72
   ## $ wk73
   ## $ wk74
## $ wk75
   ## $ wk76
```

#### · Vamos renomear as colunas:

bb %>% head()

```
bb <- billboard %>%
  rename(
    artista = artist,
    musica = track,
    entrou = date.entered
)
```

```
## # A tibble: 6 x 79
## artista musica entrou wk1 wk2 wk3 wk4 wk5 wk6 wk7
## <chr> <chr> <date> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <
```

```
## 1 2 Pac
               Baby ~ 2000-02-26
                                    87
                                          82
                                                 72
                                                       77
                                                             87
                                                                   94
                                                                         99
## 2 2Ge+her
               The H~ 2000-09-02
                                          87
                                    91
                                                 92
                                                       NA
                                                             NΑ
                                                                   NΑ
                                                                         NA
## 3 3 Doors ~ Krypt~ 2000-04-08
                                    81
                                          70
                                                 68
                                                       67
                                                             66
                                                                   57
                                                                         54
## 4 3 Doors ~ Loser 2000-10-21
                                    76
                                          76
                                                 72
                                                       69
                                                             67
                                                                   65
                                                                         55
## 5 504 Boyz Wobbl~ 2000-04-15
                                                 25
                                    57
                                          34
                                                       17
                                                             17
                                                                   31
                                                                         36
## 6 98^0
               Give ~ 2000-08-19
                                    51
                                          39
                                                 34
                                                       26
                                                             26
                                                                   19
                                                                          2
## # ... with 69 more variables: wk8 <dbl>, wk9 <dbl>, wk10 <dbl>,
       wk11 <dbl>, wk12 <dbl>, wk13 <dbl>, wk14 <dbl>, wk15 <dbl>,
## #
## #
      wk16 <dbl>, wk17 <dbl>, wk18 <dbl>, wk19 <dbl>, wk20 <dbl>,
      wk21 <dbl>, wk22 <dbl>, wk23 <dbl>, wk24 <dbl>, wk25 <dbl>,
## #
## #
     wk26 <dbl>, wk27 <dbl>, wk28 <dbl>, wk29 <dbl>, wk30 <dbl>,
## #
      wk31 <dbl>, wk32 <dbl>, wk33 <dbl>, wk34 <dbl>, wk35 <dbl>,
       wk36 <dbl>, wk37 <dbl>, wk38 <dbl>, wk39 <dbl>, wk40 <dbl>, ...
## #
```

O que é uma observação neste conjunto de dados?

Uma música que esteve no top 100 da Billboard durante o ano 2000.

- Quais são as variáveis que qualificam cada observação?
  - O artista,
  - O título da música,
  - A colocação da música no  $top\ 100$  da  $\it Billboard$  em cada uma das 76 semanas depois que ela entrou na lista.
- Este último item é complexo, e o criador da *tibble* decidiu criar uma coluna por semana.
- Uma decisão ruim, pois existe informação embutida nos nomes das colunas. A coluna wk68 corresponde à posição da música na semana 68 após ela entrar na lista.
- Isto nunca deve acontecer. A informação deve sempre estar nas células.
- Vamos simplificar as coisas criando duas colunas:
  - semana, com o número da semana; perceba que esta informação vem dos nomes das colunas,
  - pos, com a posição da música naquela semana.
- A tibble, que antes era larga, vai ser mais estreita e mais longa.
- A função pivot\_longer, do pacote tidyr, vai fazer o trabalho inclusive extraindo os números das semanas dos nomes das colunas:

```
bb_tidy <- bb %>%
  pivot_longer(
    wk1:wk76,
    names_to = 'semana',
    names_prefix = 'wk',
    names_transform = list(
    semana = as.integer
```

```
),
values_to = 'pos'
)

bb_tidy
```

```
## # A tibble: 24.092 x 5
    artista musica
                                    entrou
                                               semana
                                                       pos
##
    <chr> <chr>
                                    <date>
                                                <int> <dbl>
## 1 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                    1
## 2 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
## 3 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                        72
## 4 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                   4 77
## 5 2 Pac
            Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                        87
## 6 2 Pac
            Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                        94
## # ... with 24.086 more rows
```

 Existem linhas onde pos tem o valor NA. São resultado da organização original dos dados. No novo formato, não servem mais. Vamos eliminá-las.

```
bb_tidy <- bb_tidy %>%
  filter(!is.na(pos))

bb_tidy
```

```
## # A tibble: 5.307 x 5
    artista musica
                                   entrou
                                              semana
                                                       pos
##
    <chr> <chr>
                                    <date>
                                               <int> <dbl>
## 1 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                   1
                                                        87
## 2 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                        82
## 3 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                        72
                                                   4 77
## 4 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
## 5 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                   5
                                                       87
## 6 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                        94
## # ... with 5.301 more rows
```

### 3.4

# Manipulando os dados

### 3.4.1

Criando novas colunas: mutate, transmute

• O data frame cars tem dados (de 1920!) sobre as distâncias de frenagem (em pés) de um carro viajando a diversas velocidades (em milhas por hora):

```
cars
## # A tibble: 50 x 2
     speed dist
     <dbl> <dbl>
##
## 1
        4
               2
## 2
         4
              10
## 3
        7
             4
        7
## 4
             22
## 5
        8
              16
## 6
        9
              10
## # ... with 44 more rows
```

 Vamos criar colunas novas com os valores convertidos para km/h e metros; além disso, uma coluna com a taxa de frenagem:

```
cars %>%
  mutate(
    velocidade = speed * 1.6,
    distancia = dist * .33,
    taxa = velocidade / distancia
)
```

```
## # A tibble: 50 \times 5
##
    speed dist velocidade distancia taxa
##
    <dbl> <dbl>
                   <dbl>
                            <dbl> <dbl>
## 1
                      6.4
                               0.66 9.70
        4
             2
## 2
                               3.3
        4
             10
                     6.4
                                     1.94
            4
                              1.32 8.48
## 3
        7
                     11.2
## 4
        7
             22
                     11.2
                              7.26 1.54
## 5
        8 16
                     12.8
                             5.28 2.42
## 6
        9
             10
                     14.4
                               3.3 4.36
## # ... with 44 more rows
```

 Perceba que as colunas antigas continuam lá. Se quiser manter apenas as colunas novas, use transmute:

```
cars %>%
  transmute(
    velocidade = speed * 1.6,
    distancia = dist * .33,
    taxa = velocidade / distancia
)
```

```
## # A tibble: 50 x 3
## velocidade distancia taxa
## <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> ## 1 6.4 0.66 9.70
## 2 6.4 3.3 1.94
```

```
## 3 11.2 1.32 8.48
## 4 11.2 7.26 1.54
## 5 12.8 5.28 2.42
## 6 14.4 3.3 4.36
## # ... with 44 more rows
```

• Ou use o argumento .keep de mutate para escolher com mais precisão. Veja a ajuda de mutate.

#### 3.4.2

### Selecionando colunas: select, distinct, pull

- Vamos voltar à nossa tibble dos top  $100\,\mathrm{da}$  Billboard.
- Para ver só a coluna de artistas:

```
bb_tidy %>%
    select(artista)

## # A tibble: 5.307 x 1

## artista

## <chr>
## 1 2 Pac

## 2 2 Pac

## 3 2 Pac

## 4 2 Pac

## 5 2 Pac

## 6 2 Pac

## # ... with 5.301 more rows
```

• Para eliminar as repetições:

```
bb_tidy %>%
  select(artista) %>%
  distinct()

## # A tibble: 228 x 1
```

```
## # A tibble: 228 x 1
## artista
## <chr>
## 1 2 Pac
## 2 2Ge+her
## 3 3 Doors Down
## 4 504 Boyz
## 5 98^0
## 6 A*Teens
## # ... with 222 more rows
```

• Artistas e músicas:

```
bb_tidy %>%
   select(artista, musica) %>%
   distinct()
## # A tibble: 317 x 2
##
    artista
               musica
##
     <chr>
                 <chr>
## 1 2 Pac
                 Baby Don't Cry (Keep...
## 2 2Ge+her
                 The Hardest Part Of ...
## 3 3 Doors Down Kryptonite
## 4 3 Doors Down Loser
## 5 504 Boyz
                 Wobble Wobble
## 6 98^0
                  Give Me Just One Nig...
## # ... with 311 more rows
```

• Para especificar colunas a não mostrar:

```
bb_tidy %>%
  select(-entrou)
```

```
## # A tibble: 5.307 x 4
##
    artista musica
                                    semana
                                            pos
    <chr> <chr>
##
                                     <int> <dbl>
## 1 2 Pac Baby Don't Cry (Keep...
                                        1
                                             87
## 2 2 Pac Baby Don't Cry (Keep...
                                             82
## 3 2 Pac Baby Don't Cry (Keep...
                                           72
## 4 2 Pac Baby Don't Cry (Keep...
## 5 2 Pac Baby Don't Cry (Keep...
                                             87
                                        5
## 6 2 Pac Baby Don't Cry (Keep...
                                        6
                                             94
## # ... with 5.301 more rows
```

 Para extrair uma coluna na forma de vetor (unique é uma função do R base, aplicável a vetores):

```
bb_tidy %>%
  pull(artista) %>%
  unique()
```

```
##
     [1] "2 Pac"
                                            "2Ge+her"
##
     [3] "3 Doors Down"
                                            "504 Boyz"
                                            "A*Teens"
     [5] "98^0"
##
##
     [7] "Aaliyah"
                                            "Adams, Yolanda"
##
     [9] "Adkins, Trace"
                                            "Aguilera, Christina"
   [11] "Alice Deejay"
                                            "Allan, Gary"
##
                                            "Anastacia"
##
    [13] "Amber"
    [15] "Anthony, Marc"
                                            "Avant"
##
    [17] "BBMak"
##
                                            "Backstreet Boys, The"
                                            "Baha Men"
    [19] "Badu, Erkyah"
##
```

```
[21] "Barenaked Ladies"
                                            "Beenie Man"
##
    [23] "Before Dark"
##
                                            "Bega, Lou"
##
    [25] "Big Punisher"
                                            "Black Rob"
    [27] "Black, Clint"
                                            "Blaque"
##
    [29] "Blige, Mary J."
##
                                            "Blink-182"
    [31] "Bloodhound Gang"
                                            "Bon Jovi"
##
    [33] "Braxton, Toni"
                                            "Brock, Chad"
##
    [35] "Brooks & Dunn"
                                            "Brooks, Garth"
    [37] "Byrd, Tracy"
                                            "Cagle, Chris"
##
    [39] "Cam'ron"
##
                                            "Carey, Mariah"
    [41] "Carter, Aaron"
                                            "Carter, Torrey"
##
##
    [43] "Changing Faces"
                                            "Chesney, Kenny"
                                            "Clark, Terri"
    [45] "Clark Family Experience"
##
    [47] "Common"
                                            "Counting Crows"
##
    [49] "Creed"
##
                                            "Cyrus, Billy Ray"
    [51] "D'Angelo"
                                            "DMX"
##
##
    [53] "Da Brat"
                                            "Davidson, Clay"
##
    [55] "De La Soul"
                                            "Destiny's Child"
    [57] "Diffie, Joe"
                                            "Dion, Celine"
##
##
    [59] "Dixie Chicks, The"
                                            "Dr. Dre"
    [61] "Drama"
                                            "Dream"
##
    [63] "Eastsidaz, The"
                                            "Eiffel 65"
##
    [65] "Elliott, Missy \"Misdemeanor\"" "Eminem"
    [67] "En Vogue"
                                            "Estefan, Gloria"
##
##
    [69] "Evans, Sara"
                                            "Eve"
    [71] "Everclear"
                                            "Fabian, Lara"
##
                                            "Filter"
    [73] "Fatboy Slim"
##
##
    [75] "Foo Fighters"
                                            "Fragma"
##
    [77] "Funkmaster Flex"
                                            "Ghostface Killah"
    [79] "Gill, Vince"
                                            "Gilman, Billy"
    [81] "Ginuwine"
                                            "Goo Goo Dolls"
##
    [83] "Gray, Macy"
##
                                            "Griggs, Andy"
##
    [85] "Guy"
                                            "Hanson"
    [87] "Hart, Beth"
                                            "Heatherly, Eric"
##
##
    [89] "Henley, Don"
                                            "Herndon, Ty"
    [91] "Hill, Faith"
##
                                            "Hoku"
   [93] "Hollister, Dave"
                                            "Hot Boys"
   [95] "Houston, Whitney"
                                            "XMI"
   [97] "Ice Cube"
                                            "Ideal"
## [99] "Iglesias, Enrique"
                                            "J-Shin"
## [101] "Ja Rule"
                                            "Jackson, Alan"
## [103] "Jagged Edge"
                                            "Janet"
## [105] "Jay-Z"
                                            "Jean, Wyclef"
## [107] "Joe"
                                            "John, Elton"
## [109] "Jones, Donell"
                                            "Jordan, Montell"
## [111] "Juvenile"
                                            "Kandi"
## [113] "Keith, Toby"
                                            "Kelis"
## [115] "Kenny G"
                                            "Kid Rock"
```

	[44 <del>2</del> ]	H77	HTZ 3 . TZ . H
		"Kravitz, Lenny"	"Kumbia Kings"
	[119]		"LL Cool J"
		"Larrieux, Amel"	"Lawrence, Tracy"
		"Levert, Gerald"	"Lil Bow Wow"
		"Lil Wayne"	"Lil' Kim"
		"Lil' Mo"	"Lil' Zane"
		"Limp Bizkit"	"Lonestar"
	[131]	•	"Loveless, Patty"
	[133]		"Lucy Pearl"
		"Ludacris"	"M2M"
		"Madison Avenue"	"Madonna"
		"Martin, Ricky"	"Mary Mary"
		"Master P"	"McBride, Martina"
		"McEntire, Reba"	"McGraw, Tim"
		"McKnight, Brian"	"Messina, Jo Dee"
	[147]		"Montgomery Gentry"
		"Montgomery, John Michael"	"Moore, Chante"
	[151]	• •	"Mumba, Samantha"
	[153]	-	"Mya"
		"Mystikal"	"N'Sync"
	[157]		"Nelly"
		"Next"	"Nine Days"
		"No Doubt"	"Nu Flavor"
		"Offspring, The"	"Paisley, Brad"
		"Papa Roach"	"Pearl Jam"
		"Pink"	"Price, Kelly"
		"Profyle"	"Puff Daddy"
		"Q-Tip"	"R.E.M."
		"Rascal Flatts"	"Raye, Collin"
		"Red Hot Chili Peppers"	"Rimes, LeAnn"
	[177]	·	"Ruff Endz"
		"Sammie"	"Santana"
		"Savage Garden"	"SheDaisy"
		"Sheist, Shade"	"Shyne"
		"Simpson, Jessica"	"Sisqo"
		"Sister Hazel"	"Smash Mouth"
		"Smith, Will"	"Son By Four"
		"Sonique"	"SoulDecision"
		"Spears, Britney"	"Spencer, Tracie"
		"Splender"	"Sting"
		"Stone Temple Pilots"	"Stone, Angie"
	[199]		"Sugar Ray"
##			"Tamar"
		"Tamia"	"Third Eye Blind"
		"Thomas, Carl"	"Tippin, Aaron"
		"Train"	"Trick Daddy"
	[209]		"Tritt, Travis"
##	[211]	"Tuesday"	"Urban, Keith"

```
## [213] "Usher"
                                            "Vassar, Phil"
                                           "Vitamin C"
## [215] "Vertical Horizon"
## [217] "Walker, Clay"
                                           "Wallflowers, The"
## [219] "Westlife"
                                           "Williams, Robbie"
## [221] "Wills, Mark"
                                           "Worley, Darryl"
## [223] "Wright, Chely"
                                           "Yankee Grey"
## [225] "Yearwood, Trisha"
                                           "Ying Yang Twins"
## [227] "Zombie Nation"
                                           "matchbox twenty"
```

#### 3.4.3

Filtrando linhas: filter, slice

• Apenas as músicas da Britney Spears:

```
bb_tidy %>%
   filter(artista == 'Spears, Britney')
## # A tibble: 51 x 5
##
     artista
                     musica
                                              entrou
                                                         semana
                                                                  pos
##
                     <chr>>
     <chr>
                                              <date>
                                                          <int> <dbl>
## 1 Spears, Britney From The Bottom Of M... 2000-01-29
                                                                    76
                                                              1
## 2 Spears, Britney From The Bottom Of M... 2000-01-29
                                                                   59
## 3 Spears, Britney From The Bottom Of M... 2000-01-29
                                                                   52
## 4 Spears, Britney From The Bottom Of M... 2000-01-29
                                                                   52
## 5 Spears, Britney From The Bottom Of M... 2000-01-29
                                                                   14
## 6 Spears, Britney From The Bottom Of M... 2000-01-29
                                                                   14
```

Apenas músicas que chegaram à posição 1:

## # ... with 45 more rows

```
bb_tidy %>%
  filter(pos == 1) %>%
  select(-pos)
```

```
## # A tibble: 55 x 4
##
    artista
                         musica
                                                  entrou
                                                             semana
##
     <chr>
                         <chr>>
                                                  <date>
                                                              <int>
## 1 Aaliyah
                         Try Again
                                                  2000-03-18
                                                                 14
## 2 Aguilera, Christina Come On Over Baby (A... 2000-08-05
                                                                 11
## 3 Aguilera, Christina Come On Over Baby (A... 2000-08-05
                                                                 12
## 4 Aguilera, Christina Come On Over Baby (A... 2000-08-05
                                                                 13
## 5 Aguilera, Christina Come On Over Baby (A... 2000-08-05
                                                                 14
## 6 Aguilera, Christina What A Girl Wants
                                                  1999-11-27
                                                                  8
## # ... with 49 more rows
```

• Apenas músicas que chegaram à posição 1 em menos de 10 semanas:

```
bb_tidy %>%
    filter(pos == 1, semana < 10) %>%
    distinct(artista, musica)
 ## # A tibble: 5 x 2
 ##
      artista
                           musica
 ##
       <chr>
                           <chr>
 ## 1 Aguilera, Christina What A Girl Wants
 ## 2 Destiny's Child
                           Independent Women Pa...
 ## 3 Madonna
                           Music
 ## 4 Santana
                           Maria, Maria
 ## 5 Sisqo
                           Incomplete

    As funções da família slice filtram linhas de diversas maneiras.

• De acordo com seus índices (números de linha):
  bb_tidy %>%
    slice(c(1, 1000, 5000))
 ## # A tibble: 3 x 5
 ##
      artista
                               musica
                                                      entrou
                                                                  semana
                                                                           pos
 ##
      <chr>>
                               <chr>
                                                      <date>
                                                                   <int> <dbl>
 ## 1 2 Pac
                               Baby Don't Cry (Keep~ 2000-02-26
                                                                            87
 ## 2 Clark Family Experience Meanwhile Back At Th~ 2000-11-18
                                                                       3
                                                                            81
                                                      2000-03-04
 ## 3 Vassar, Phil
                               Carlene
                                                                       3
                                                                            64
  bb_tidy %>%
    slice_head(n = 4)
 ## # A tibble: 4 x 5
 ##
      artista musica
                                        entrou
                                                   semana
                                                             pos
      <chr> <chr>
                                                    <int> <dbl>
                                        <date>
 ## 1 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                        1
 ## 2 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                             82
 ## 3 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                             72
 ## 4 2 Pac Baby Don't Cry (Keep... 2000-02-26
                                                             77
  bb tidy %>%
    slice_tail(n = 4)
 ## # A tibble: 4 x 5
 ##
      artista
                       musica entrou
                                          semana
                                                   pos
 ##
       <chr>
                       <chr>
                              <date>
                                           <int> <dbl>
 ## 1 matchbox twenty Bent
                              2000-04-29
                                              36
                                                    37
 ## 2 matchbox twenty Bent
                              2000-04-29
                                              37
                                                    38
 ## 3 matchbox twenty Bent
                              2000-04-29
                                              38
                                                    38
 ## 4 matchbox twenty Bent
                              2000-04-29
                                              39
                                                    48
```

• De acordo com a ordenação de uma coluna ou de uma função das colunas:

```
bb_tidy %>%
   slice_min(pos)
## # A tibble: 55 x 5
##
     artista
                         musica
                                                  entrou
                                                             semana
                                                                       pos
##
     <chr>
                         <chr>>
                                                  <date>
                                                               <int> <dbl>
## 1 Aaliyah
                         Try Again
                                                  2000-03-18
                                                                  14
                                                                         1
## 2 Aguilera, Christina Come On Over Baby (A... 2000-08-05
                                                                  11
                                                                         1
## 3 Aguilera, Christina Come On Over Baby (A... 2000-08-05
                                                                  12
                                                                         1
## 4 Aguilera, Christina Come On Over Baby (A... 2000-08-05
                                                                         1
                                                                  13
## 5 Aguilera, Christina Come On Over Baby (A... 2000-08-05
                                                                  14
                                                                         1
## 6 Aguilera, Christina What A Girl Wants
                                                                         1
                                                  1999-11-27
                                                                   8
## # ... with 49 more rows
 bb_tidy %>%
   slice_max(semana)
## # A tibble: 1 x 5
     artista musica entrou
                                semana
                                         pos
##
     <chr>
           <chr> <date>
                                 <int> <dbl>
## 1 Creed Higher 1999-09-11
                                    65
                                          49
```

• Aleatoriamente, criando uma amostra:

```
bb_tidy %>%
   slice_sample(n = 5)
## # A tibble: 5 x 5
##
     artista
                    musica
                                             entrou
                                                        semana
                                                                  pos
##
                    <chr>
     <chr>
                                             <date>
                                                         <int> <dbl>
## 1 McGraw, Tim
                    Some Things Never Ch... 2000-05-13
                                                             8
                                                                  58
                                                             2
## 2 Foo Fighters
                    Learn To Fly
                                             1999-10-16
                                                                  69
## 3 Chesney, Kenny I Lost It
                                             2000-10-21
                                                             8
                                                                   47
## 4 Diffie, Joe
                    It's Always Somethin... 2000-08-12
                                                                   85
                                                            10
## 5 Paisley, Brad We Danced
                                             2000-10-14
                                                            17
                                                                   72
```

- Veja a ajuda de slice para saber mais sobre estas funções. Por exemplo:
  - slice\_min e slice\_max podem considerar ou não empates.
  - Você pode especificar uma proporção de linhas (usando prop) em vez da quantidade de linhas (n).
  - Você pode fazer amostragem com reposição, ou com probabilidades diferentes para cada linha.

### Ordenando linhas: arrange

• Por título, sem repetições:

```
bb_tidy %>%
  select(musica) %>%
  distinct() %>%
  arrange(musica)

## # A tibble: 316 x 1
```

```
## # A tibble: 316 x 1
## musica
## <chr>
## 1 (Hot S**t) Country G...
## 2 3 Little Words
## 3 911
## 4 A Country Boy Can Su...
## 5 A Little Gasoline
## 6 A Puro Dolor (Purest...
## # ... with 310 more rows
```

• Por título, sem repetições, em ordem inversa:

```
bb_tidy %>%
  select(musica) %>%
  distinct() %>%
  arrange(desc(musica))
```

```
## # A tibble: 316 x 1
## musica
## <chr>
## 1 Your Everything
## 2 You're A God
## 3 You'll Always Be Lov...
## 4 You Won't Be Lonely ...
## 5 You Should've Told M...
## 6 You Sang To Me
## # ... with 310 more rows
```

#### Contando linhas: count

• Quantas semanas cada artista ficou nos  $top\ 100$ ? Duas músicas na mesma semana contam como duas semanas.

```
bb_tidy %>%
   count(artista, sort = TRUE)
## # A tibble: 228 x 2
    artista
     <chr>
                    <int>
## 1 Creed
                       104
## 2 Lonestar
                        95
## 3 Destiny's Child
                        92
## 4 N'Sync
                        74
## 5 Sisqo
                        74
## 6 3 Doors Down
                        73
## # ... with 222 more rows
```

• Quantas semanas cada música ficou nos  $top\ 100$ ?

```
bb_tidy %>%
   count(musica, sort = TRUE)
## # A tibble: 316 x 2
##
    musica
                             n
     <chr>
                         <int>
## 1 Higher
                            57
## 2 Amazed
                            55
## 3 Breathe
                            53
## 4 Kryptonite
                            53
## 5 With Arms Wide Open
                            47
## 6 I Wanna Know
                            44
## # ... with 310 more rows
```

 Se houve músicas com o mesmo nome, mas de artistas diferentes, o código acima está errado. O certo é

```
bb_tidy %>%
   count(musica, artista, sort = TRUE)
## # A tibble: 317 x 3
##
    musica
                         artista
                                          n
##
    <chr>
                         <chr>
                                      <int>
## 1 Higher
                         Creed
                                         57
## 2 Amazed
                        Lonestar
                                         55
## 3 Breathe
                        Hill, Faith
                                         53
```

```
## 4 Kryptonite 3 Doors Down 53
## 5 With Arms Wide Open Creed 47
## 6 I Wanna Know Joe 44
## # ... with 311 more rows
```

3.4.6 \_\_\_\_\_

### Agrupando linhas: group\_by e summarize

• Qual foi a melhor posição que cada artista alcançou?

```
bb_tidy %>%
   group_by(artista) %>%
   summarize(melhor = min(pos)) %>%
   arrange(melhor)
## # A tibble: 228 x 2
    artista
                         melhor
##
    <chr>
                          <dbl>
## 1 Aaliyah
                              1
## 2 Aguilera, Christina
                              1
## 3 Carey, Mariah
                              1
## 4 Creed
## 5 Destiny's Child
## 6 Iglesias, Enrique
## # ... with 222 more rows
```

• Qual foi a melhor posição que cada música alcançou?

```
bb_tidy %>%
   group_by(artista, musica) %>%
   summarize(melhor = min(pos)) %>%
   arrange(melhor)
## `summarise()` has grouped output by 'artista'. You can override using the
## `.groups` argument.
## # A tibble: 317 x 3
##
    artista
                                                melhor
                        musica
##
    <chr>
                                                  <dbl>
                        <chr>
## 1 Aaliyah
                        Try Again
                                                      1
## 2 Aguilera, Christina Come On Over Baby (A...
## 3 Aguilera, Christina What A Girl Wants
                                                      1
                        Thank God I Found Yo...
## 4 Carey, Mariah
                                                     1
## 5 Creed
                        With Arms Wide Open
                                                     1
## 6 Destiny's Child
                        Independent Women Pa...
                                                      1
## # ... with 311 more rows
```

Quando usamos summarize, o agrupamento mais interno é desfeito. Isto significa

que o resultado acima ainda está agrupado por artista.

• Quantas semanas cada artista ficou na posição 1?

## <chr> <int> ## 1 Destiny's Child 14 ## 2 Santana 10 ## 3 Aguilera, Christina 6 ## 4 Madonna 4 4 ## 5 Savage Garden ## 6 Iglesias, Enrique 3 ## # ... with 9 more rows

• Perceba que count, que vimos mais acima, faz agrupamentos do mesmo modo:

```
bb_tidy %>%
  filter(pos == 1) %>%
  count(artista, sort = TRUE)

## # A tibble: 15 x 2
## artista n
```

• Uma pergunta diferente: quais são os artistas cujas músicas apareceram nos top 100 mais tempo depois do lançamento da música?

```
bb_tidy %>%
  group_by(artista) %>%
  summarize(semanas = max(semana)) %>%
  arrange(desc(semanas))
```

```
## 1 Creed 65
## 2 Lonestar 64
## 3 3 Doors Down 53
## 4 Hill, Faith 53
## 5 Joe 44
## 6 Vertical Horizon 41
## # ... with 222 more rows
```

 Qual a posição média de cada música? Lembre-se de que eliminamos as linhas com NA; logo, a média é sobre a quantidade de semanas em que a música esteve na lista.

```
media1 <- bb_tidy %>%
  group_by(artista, musica) %>%
  summarize(media = mean(pos), .groups = 'drop') %>%
  arrange(media)

media1
```

```
## # A tibble: 317 x 3
                                                               media
##
    artista
                                       musica
##
     <chr>
                                       <chr>
                                                               <dbl>
## 1 "Santana"
                                       Maria, Maria
                                                                10.5
## 2 "Madonna"
                                       Music
                                                                13.5
## 3 "N'Sync"
                                       Bye Bye Bye
                                                                14.3
## 4 "Elliott, Missy \"Misdemeanor\"" Hot Boyz
                                                                14.3
## 5 "Destiny's Child"
                                       Independent Women Pa... 14.8
## 6 "Iglesias, Enrique"
                                      Be With You
                                                                15.8
## # ... with 311 more rows
```

 E se quisermos a média sobre o número de semanas desde a entrada da música até a última semana em que a música apareceu na lista?

```
media2 <- bb_tidy %>%
  group_by(artista, musica) %>%
  summarize(media = sum(pos)/max(semana), .groups = 'drop') %>%
  arrange(media)

media2
```

```
## # A tibble: 317 x 3
##
     artista
                                       musica
                                                                media
##
     <chr>
                                                                <dbl>
                                       <chr>
## 1 "Santana"
                                       Maria, Maria
                                                                 10.5
## 2 "Madonna"
                                       Music
                                                                 13.5
                                       Bye Bye Bye
## 3 "N'Sync"
                                                                 14.3
## 4 "Elliott, Missy \"Misdemeanor\"" Hot Boyz
                                                                 14.3
## 5 "Destiny's Child"
                                       Independent Women Pa... 14.8
## 6 "Iglesias, Enrique"
                                       Be With You
                                                                 15.8
```

```
## # ... with 311 more rows
```

identical(media1, media2)

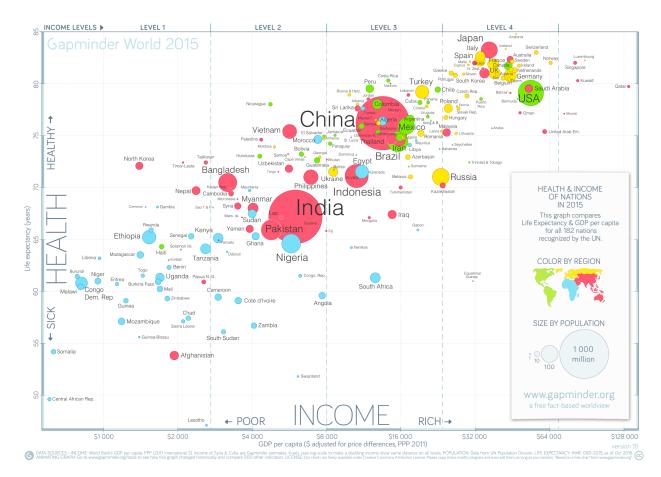
## [1] FALSE

# CAPÍTULO 4

Visualização com ggplot2		
	Busque mais informações sobre os pacotes tidyverse e ggplot2 nas referências recomendadas.	
4.1		
Vídeo 1		
	https://youtu.be/OBpNjqIIyhI	
4.2		
Compor	nentes de um gráfico ggplot2	

• Observe o gráfico abaixo, obtido de https://www.gapminder.org/downloads/upda ted-gapminder-world-poster-2015/.

Geometrias e mapeamentos estéticos (*mappings*)



- O gráfico mostra como, em cada país, a saúde (mais precisamente, a expectativa de vida) se relaciona com a riqueza (mais precisamente, o PIB *per capita*).
- Além da expectativa de vida e o do PIB per capita, o gráfico traz mais informações sobre cada país.
- Cada país é representado por um ponto (a geometria).
- Informações sobre cada país são representadas por características do ponto correspondente (as estéticas):

Variável	Geometria	Estética
PIB per capita	ponto	posição x
Expectativa de vida	ponto	posição y
População	ponto	tamanho
Continente	ponto	cor

- Você pode usar outras estéticas para representar informações:
  - Cor de preenchimento.
  - Cor do traço.
  - Tipo do traço (sólido, pontilhado, tracejado etc.).
  - Forma (círculo, quadrado, triângulo etc.).

- Opacidade.
- etc.
- Você pode usar outras geometrias:
  - Linhas.
  - Barras ou colunas.
  - Caixas.
  - etc.

#### 4.2.2

#### Escalas (scales)

- As escalas controlam os detalhes da aparência da geometria e do mapeamento (eixos, cores etc.).
- Os eixos do gráfico acima são escalas contínuas, com valores reais.
- Observe o eixo horizontal. Os valores não aumentam linearmente, mas sim exponencialmente: cada passo à direita equivale a dobrar o valor do PIB. O eixo horizontal segue uma escala logarítmica.
- Os tamanhos dos pontos formam uma escala  $\frac{\text{discreta}}{\text{discreta}}$ , com 4 valores possíveis (veja a legenda no canto inferior direito do gráfico).
- As cores também formam uma escala discreta.

#### 4.2.3

#### Rótulos (labels)

- O gráfico também representa informação na forma de texto.
- Além de rótulos (por exemplo, o texto que identifica cada eixo), o texto também pode, ele mesmo, ser uma geometria, com suas próprias estéticas: observe como o nome de cada país é escrito em um tamanho proporcional à sua população.

#### 4.2.4

#### Outros componentes

- · Coordenadas:
  - Este gráfico usa coordenadas cartesianas, com eixos x e y.
  - Existem gráficos que usam um sistema de coordenadas polares.
- Temas:
  - Incluem todos os elementos "decorativos": cor de fundo, linhas de grade, etc.
     Ajudam a facilitar a leitura e a interpretação.

- No gráfico acima, um detalhe interessante do tema é a divisão de cada eixo em segmentos claros e segmentos escuros.
- Legendas (guides).
- · Facetas:
  - Às vezes, um gráfico é composto por múltiplos subgráficos.
  - Cada subgráfico é uma faceta.
  - Facetas evitam que informações demais sejam apresentadas no mesmo lugar.

# Conjunto de dados

- Nossos exemplos de gráficos vão usar dados sobre o sono de diversos mamíferos.
- O conjunto de dados se chama msleep e está incluído no pacote ggplot2.
- Para ver a documentação, digite

```
library(ggplot2)
?msleep
```

• Vamos atribuir o conjunto de dados à variável df:

```
df <- msleep
## # A tibble: 83 x 11
                   genus vore order conservation sleep_total sleep_rem
##
    <chr>
                    <chr> <chr> <chr> <chr>
                                                          <dbl>
                                                                    <dbl>
## 1 Cheetah
                    Acin~ carni Carn~ lc
                                                           12.1
                                                                     NA
## 2 Owl monkey
                     Aotus omni Prim~ <NA>
                                                           17
                                                                      1.8
                                                           14.4
                                                                      2.4
## 3 Mountain beaver Aplo~ herbi Rode~ nt
## 4 Greater short-t~ Blar~ omni Sori~ lc
                                                           14.9
                                                                      2.3
## 5 Cow
                                                           4
                     Bos
                           herbi Arti~ domesticated
                                                                      0.7
## 6 Three-toed sloth Brad~ herbi Pilo~ <NA>
                                                           14.4
                                                                      2.2
## # ... with 77 more rows, and 4 more variables: sleep_cycle <dbl>,
      awake <dbl>, brainwt <dbl>, bodywt <dbl>
```

Vamos examinar a estrutura — usando R base:

```
## tibble [83 x 11] (S3: tbl_df/tbl/data.frame)

## $ name : chr [1:83] "Cheetah" "Owl monkey" "Mountain beaver" ...

## $ genus : chr [1:83] "Acinonyx" "Aotus" "Aplodontia" ...

## $ vore : chr [1:83] "carni" "omni" "herbi" ...
```

```
## $ order : chr [1:83] "Carnivora" "Primates" "Rodentia" ...

## $ conservation: chr [1:83] "lc" NA "nt" ...

## $ sleep_total : num [1:83] 12,1 17 14,4 14,9 4 14,4 8,7 7 ...

## $ sleep_rem : num [1:83] NA 1,8 2,4 2,3 0,7 2,2 1,4 NA ...

## $ sleep_cycle : num [1:83] NA NA NA 0,133 ...

## $ awake : num [1:83] 11,9 7 9,6 9,1 20 9,6 15,3 17 ...

## $ brainwt : num [1:83] NA 0,0155 NA 0,00029 0,423 NA NA NA ...

## $ bodywt : num [1:83] 50 0,48 1,35 0,019 ...
```

• Podemos usar glimpse, uma função do tidyverse:

```
glimpse(df)
## Rows: 83
## Columns: 11
## $ name
                  <chr> "Cheetah", "Owl monkey", "Mountain beaver", "Gre~
                  <chr> "Acinonyx", "Aotus", "Aplodontia", "Blarina", "B~
## $ genus
                  <chr> "carni", "omni", "herbi", "omni", "herbi", "herb~
## $ vore
## $ order
                  <chr> "Carnivora", "Primates", "Rodentia", "Soricomorp~
## $ conservation <chr> "lc", NA, "nt", "lc", "domesticated", NA, "vu", ~
## $ sleep_total <dbl> 12,1, 17,0, 14,4, 14,9, 4,0, 14,4, 8,7, 7,0, 10,~
## $ sleep rem
                 <dbl> NA, 1,8, 2,4, 2,3, 0,7, 2,2, 1,4, NA, 2,9, NA, 0~
## $ sleep_cycle <dbl> NA, NA, NA, 0,1333333, 0,6666667, 0,7666667, 0,3~
## $ awake
                 <dbl> 11,9, 7,0, 9,6, 9,1, 20,0, 9,6, 15,3, 17,0, 13,9~
## $ brainwt
                  <dbl> NA, 0,01550, NA, 0,00029, 0,42300, NA, NA, NA, O~
## $ bodywt
                 <dbl> 50,000, 0,480, 1,350, 0,019, 600,000, 3,850, 20,~
```

Para examinar só as primeiras linhas do data frame:

```
head(df)
## # A tibble: 6 x 11
##
    name
                      genus vore order conservation sleep_total sleep_rem
##
     <chr>>
                      <chr> <chr> <chr> <chr>
                                                            <dbl>
                                                                      <dbl>
## 1 Cheetah
                      Acin~ carni Carn~ lc
                                                             12.1
                                                                       NΑ
## 2 Owl monkey
                      Aotus omni Prim~ <NA>
                                                             17
                                                                        1.8
## 3 Mountain beaver Aplo~ herbi Rode~ nt
                                                                        2.4
                                                             14.4
## 4 Greater short-t~ Blar~ omni Sori~ lc
                                                             14.9
                                                                        2.3
                      Bos
                            herbi Arti~ domesticated
                                                              4
                                                                        0.7
## 6 Three-toed sloth Brad~ herbi Pilo~ <NA>
                                                             14.4
                                                                        2.2
## # ... with 4 more variables: sleep_cycle <dbl>, awake <dbl>,
      brainwt <dbl>, bodywt <dbl>
```

• Para examinar o data frame interativamente:

```
view(df)
```

• Podemos produzir um sumário dos dados usando o pacote *summarytools* (que já foi carregado neste documento):

df %>% dfSummary() %>% print()

Variável	Estatísticas / Valores	Freqs (% de Válidos)	Faltante
name	1. African elephant	1 (1,2%)	0
[character]	2. African giant pouched rat	1 (1,2%)	(0,0%)
	3. African striped mouse	1 (1,2%)	
	4. Arctic fox	1 (1,2%)	
	<ol><li>Arctic ground squirrel</li></ol>	1 ( 1,2%)	
	6. Asian elephant	1 (1,2%)	
	7. Baboon	1 (1,2%)	
	8. Big brown bat	1 (1,2%)	
	9. Bottle-nosed dolphin	1 (1,2%)	
	10. Brazilian tapir	1 ( 1,2%)	
	[ 73 outros ]	73 (88,0%)	
genus	1. Panthera	3 (3,6%)	0
[character]	2. Spermophilus	3 (3,6%)	(0,0%)
	3. Equus	2 ( 2,4%)	
	4. Vulpes	2 ( 2,4%)	
	5. Acinonyx	1 (1,2%)	
	6. Aotus	1 (1,2%)	
	7. Aplodontia	1 (1,2%)	
	8. Blarina	1 (1,2%)	
	9. Bos	1 (1,2%)	
	10. Bradypus	1 (1,2%)	
	[ 67 outros ]	67 (80,7%)	
vore	1. carni	19 (25,0%)	7
[character]	2. herbi	32 (42,1%)	(8,4%)
	3. insecti	5 (6,6%)	
	4. omni	20 (26,3%)	
order	1. Rodentia	22 (26,5%)	0
[character]	2. Carnivora	12 (14,5%)	(0,0%)
	3. Primates	12 (14,5%)	
	4. Artiodactyla	6 (7,2%)	
	5. Soricomorpha	5 (6,0%)	
	6. Cetacea	3 (3,6%)	
	7. Hyracoidea	3 (3,6%)	
	8. Perissodactyla	3 (3,6%)	
	9. Chiroptera	2 ( 2,4%)	
	10. Cingulata	2 ( 2,4%)	
	[ 9 outros ]	13 (15,7%)	
conservation	1. cd	2 (3,7%)	29
[character]	2. domesticated	10 (18,5%)	(34,9%)
	3. en	4 (7,4%)	
	4. lc	27 (50,0%)	
	5. nt	4 (7,4%)	
	6. vu	7 (13,0%)	

Variável	Estatísticas / Valores	Freqs (% de Válidos)	Faltante
sleep_total	Média (dp) : 10,4 (4,5)	65 valores distintos	0
[numeric]	mín < mediana < máx:		(0,0%)
	1,9 < 10,1 < 19,9		
	IQE (CV) : 5,9 (0,4)		
sleep_rem	Média (dp) : 1,9 (1,3)	32 valores distintos	22
[numeric]	mín < mediana < máx:		(26,5%)
	0,1 < 1,5 < 6,6		
	IQE (CV) : 1,5 (0,7)		
sleep_cycle	Média (dp) : 0,4 (0,4)	22 valores distintos	51
[numeric]	mín < mediana < máx:		(61,4%)
	0,1 < 0,3 < 1,5		
	IQE (CV) : 0,4 (0,8)		
awake	Média (dp) : 13,6 (4,5)	65 valores distintos	0
[numeric]	mín < mediana < máx:		(0,0%)
	4,1 < 13,9 < 22,1		
	IQE (CV) : 5,9 (0,3)		
brainwt	Média (dp) : 0,3 (1)	53 valores distintos	27
[numeric]	mín < mediana < máx:		(32,5%)
	0 < 0 < 5,7		
	IQE (CV) : 0,1 (3,5)		
bodywt	Média (dp) : 166,1 (786,8)	82 valores distintos	0
[numeric]	mín < mediana < máx:		(0,0%)
	0 < 1,7 < 6654		
	IQE (CV) : 41,6 (4,7)		

- Vemos que há muitos NA em diversas variáveis. Para nossos exemplos simples de visualização, vamos usar as colunas
  - name
  - genus
  - order
  - sleep\_total
  - awake
  - bodywt
  - brainwt
- Mas... a coluna que mostra a dieta (vore) tem só 7 NA. Quais são?

```
df %>%
  filter(is.na(vore)) %>%
  select(name)
```

```
## # A tibble: 7 \times 1
```

## name

## <chr>

## 1 Vesper mouse

```
## 2 Desert hedgehog
## 3 Deer mouse
## 4 Phalanger
## 5 Rock hyrax
## 6 Mole rat
## # ... with 1 more row
```

- OK. Vamos manter a coluna vore também, apesar dos NA. Quando formos usar esta variável, tomaremos cuidado.
- Também... a coluna bodywt tem 0 como valor mínimo. Como assim?

```
df %>%
  filter(bodywt < 1) %>%
  select(name, bodywt) %>%
  arrange(bodywt)
```

```
## # A tibble: 35 x 2
    name
                                bodywt
                                 <dbl>
##
    <chr>
## 1 Lesser short-tailed shrew
                                 0.005
## 2 Little brown bat
                                 0.01
## 3 Greater short-tailed shrew 0.019
## 4 Deer mouse
                                 0.021
## 5 House mouse
                                 0.022
## 6 Big brown bat
                                 0.023
## # ... with 29 more rows
```

- Ah, sem problema. A função dfSummary arredondou estes pesos para 0. Os valores de verdade ainda estão na *tibble*.
- Vamos criar uma tibble nova, só com as colunas que nos interessam:

```
sono <- df %>%
select(
  name, order, genus, vore, bodywt,
  brainwt, awake, sleep_total
)
```

· Vamos ver o sumário:

```
sono %>% dfSummary() %>% print()
```

Variável	Estatísticas / Valores	Freqs (% de Válidos)	Faltante
name	1. African elephant	1 ( 1,2%)	0
[character]	2. African giant pouched rat	1 (1,2%)	(0,0%)
	3. African striped mouse	1 ( 1,2%)	
	4. Arctic fox	1 ( 1,2%)	
	<ol><li>Arctic ground squirrel</li></ol>	1 ( 1,2%)	
	6. Asian elephant	1 ( 1,2%)	
	7. Baboon	1 ( 1,2%)	
	8. Big brown bat	1 ( 1,2%)	
	9. Bottle-nosed dolphin	1 ( 1,2%)	
	10. Brazilian tapir	1 ( 1,2%)	
	[ 73 outros ]	73 (88,0%)	
order	1. Rodentia	22 (26,5%)	0
[character]	2. Carnivora	12 (14,5%)	(0,0%)
	3. Primates	12 (14,5%)	
	4. Artiodactyla	6 (7,2%)	
	5. Soricomorpha	5 (6,0%)	
	6. Cetacea	3 (3,6%)	
	7. Hyracoidea	3 (3,6%)	
	8. Perissodactyla	3 (3,6%)	
	9. Chiroptera	2 ( 2,4%)	
	10. Cingulata	2 ( 2,4%)	
	[ 9 outros ]	13 (15,7%)	
genus	1. Panthera	3 (3,6%)	0
[character]	2. Spermophilus	3 (3,6%)	(0,0%)
	3. Equus	2 ( 2,4%)	
	4. Vulpes	2 ( 2,4%)	
	5. Acinonyx	1 (1,2%)	
	6. Aotus	1 (1,2%)	
	7. Aplodontia	1 (1,2%)	
	8. Blarina	1 (1,2%)	
	9. Bos	1 (1,2%)	
	10. Bradypus	1 (1,2%)	
	[ 67 outros ]	67 (80,7%)	
vore	1. carni	19 (25,0%)	7
[character]	2. herbi	32 (42,1%)	(8,4%)
	3. insecti	5 (6,6%)	
	4. omni	20 (26,3%)	
bodywt	Média (dp) : 166,1 (786,8)	82 valores distintos	0
[numeric]	mín < mediana < máx:		(0,0%)
	0 < 1,7 < 6654		
	IQE (CV) : 41,6 (4,7)		
brainwt	Média (dp) : 0,3 (1)	53 valores distintos	27
[numeric]	mín < mediana < máx:		(32,5%)
	0 < 0 < 5,7		
	IQE (CV) : 0,1 (3,5)		

Variável	Estatísticas / Valores	Freqs (% de Válidos)	Faltante
awake [numeric]	Média (dp) : 13,6 (4,5) mín < mediana < máx: 4,1 < 13,9 < 22,1 IQE (CV) : 5,9 (0,3)	65 valores distintos	0 (0,0%)
sleep_total [numeric]	Média (dp) : 10,4 (4,5) mín < mediana < máx: 1,9 < 10,1 < 19,9 IQE (CV) : 5,9 (0,4)	65 valores distintos	0 (0,0%)

# Gráficos de dispersão (scatter plots)

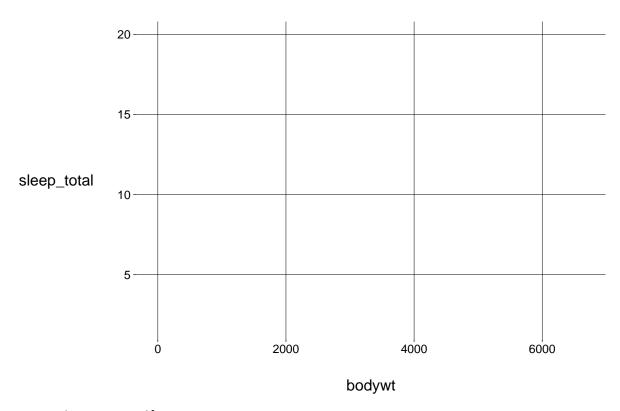
- Servem para visualizar a *relação* entre duas variáveis quantitativas.
- Essa relação *não* é necessariamente de causa e efeito.
- Isto é, a variável do eixo horizontal não determina, necessariamente, os valores da variável do eixo vertical.
- Pense em associação, correlação, não em causalidade.
- Troque as variáveis de eixo, se ajudar a deixar isto claro.

#### 4.4.1 \_\_\_\_\_

### Horas de sono e peso corporal

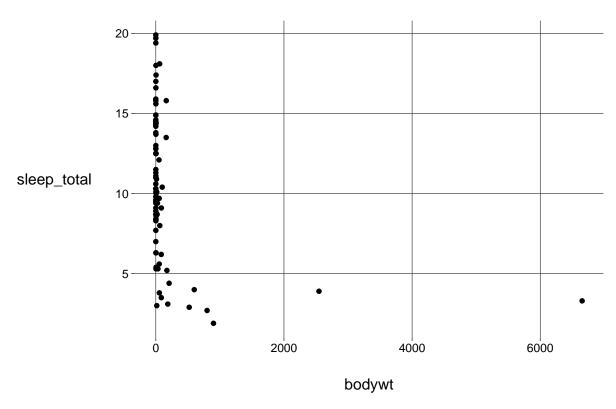
• Como as variáveis sleep\_total e bodywt estão relacionadas?

```
sono %>%
ggplot(aes(x = bodywt, y = sleep_total))
```



- O que houve? Cadê os pontos?
- O problema foi que só especificamos o mapeamento estético (com aes, que são as iniciais de *aesthetics*). Faltou a geometria.

```
sono %>%
ggplot(aes(x = bodywt, y = sleep_total)) +
geom_point()
```



- Que horror.
- $\bullet$  A única coisa que percebemos aqui é que os mamíferos muito pesados dormem menos de 5 horas por noite.
- Estes animais muito pesados estão estragando a escala do eixo x.
- Que animais são estes?

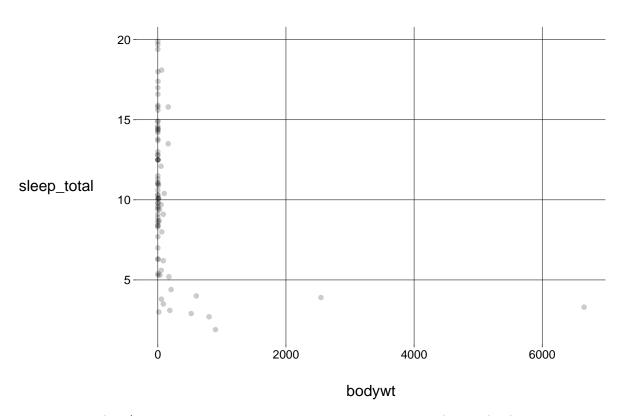
```
sono %>%
filter(bodywt > 250) %>%
select(name, bodywt) %>%
arrange(bodywt)
```

```
## # A tibble: 6 x 2
                      bodywt
##
     name
##
     <chr>
                        <dbl>
## 1 Horse
                         521
## 2 Cow
                         600
## 3 Pilot whale
                         800
## 4 Giraffe
                         900.
## 5 Asian elephant
                        2547
## 6 African elephant
                        6654
```

- Além disso, há muitos pontos sobrepostos. Em bom português, temos um problema de *overplotting*.
- Existem diversas maneiras de lidar com isso.

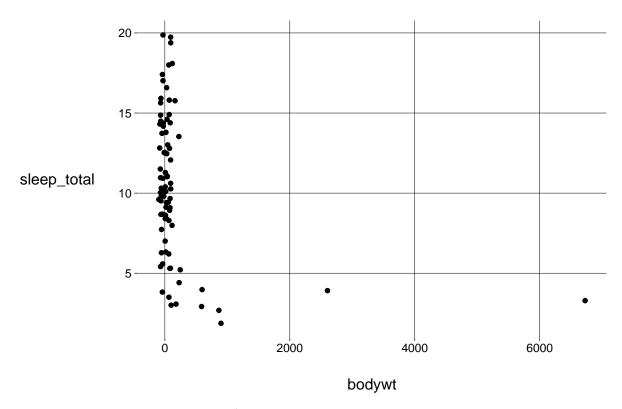
• A primeira delas é <mark>alterando a opacidade dos pontos</mark>. Isto é um ajuste na geometria apenas, pois a opacidade, aqui, não representa informação nenhuma.

```
sono %>%
ggplot(aes(x = bodywt, y = sleep_total)) +
  geom_point(alpha = 0.2)
```



Outra maneira é usar geom\_jitter em vez de geom\_point. "Jitter" significa "tremer".
 As posições dos pontos são ligeiramente perturbadas, para evitar colisões. Perdemos precisão, mas a visualização fica melhor.

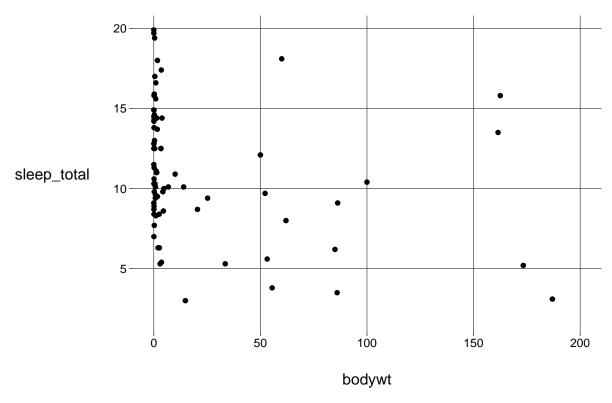
```
sono %>%
ggplot(aes(x = bodywt, y = sleep_total)) +
  geom_jitter(width = 100)
```



• Vamos mudar os limites do gráfico para nos concentrarmos nos animais menos pesados. Observe que isto é um ajuste na escala.

```
sono %>%
ggplot(aes(x = bodywt, y = sleep_total)) +
  geom_point() +
  scale_x_continuous(limits = c(0, 200))
```

## Warning: Removed 7 rows containing missing values (geom\_point).



• Nestes limites, a relação entre horas de sono e peso não é mais tão pronunciada.

#### 4.4.2

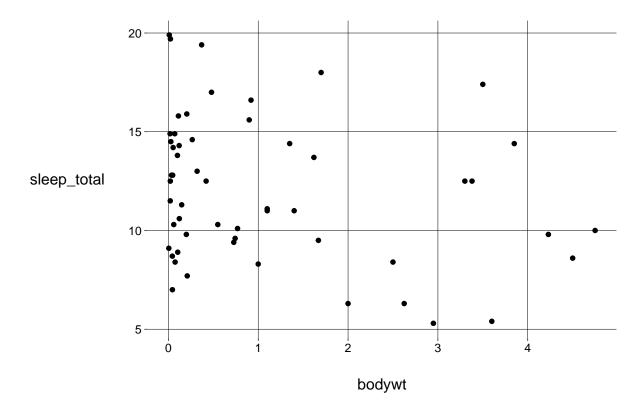
# Horas de sono e peso corporal para animais pequenos

- Vamos restringir o gráfico a animais com no máximo  $5\mathrm{kg}.$ 

```
limite <- 5
```

• Em vez de mudar a escala do gráfico, vamos filtrar as linhas do data frame:

```
sono %>%
  filter(bodywt < limite) %>%
  ggplot(aes(x = bodywt, y = sleep_total)) +
   geom_point()
```

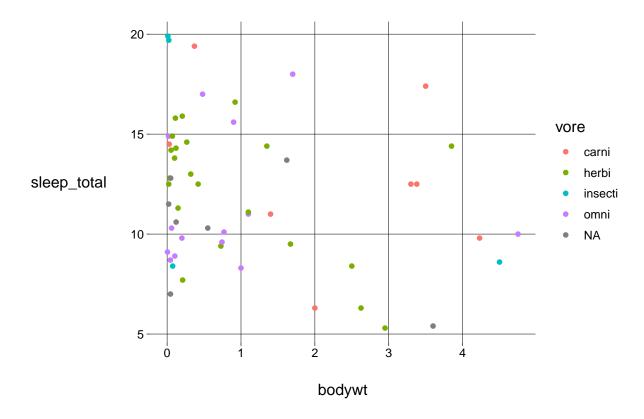


#### 4.4.3 \_\_

# Incluindo a dieta

• Com a estética color. Observe como a legenda aparece automaticamente.

```
sono %>%
filter(bodywt < limite) %>%
ggplot(aes(x = bodywt, y = sleep_total, color = vore)) +
   geom_point()
```

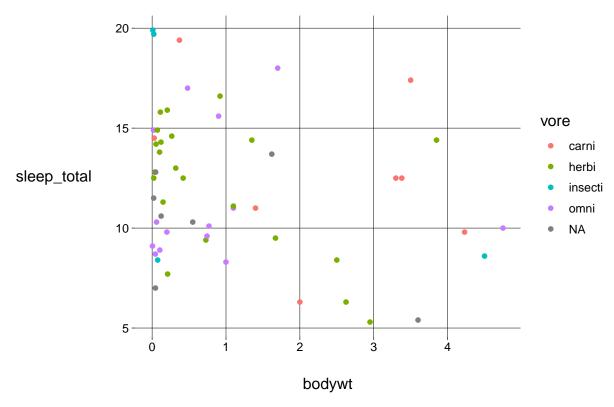


#### 444

# A estética pode ser especificada na geom

• Compare com o código anterior.

```
sono %>%
filter(bodywt < limite) %>%
ggplot() +
geom_point(aes(x = bodywt, y = sleep_total, color = vore))
```



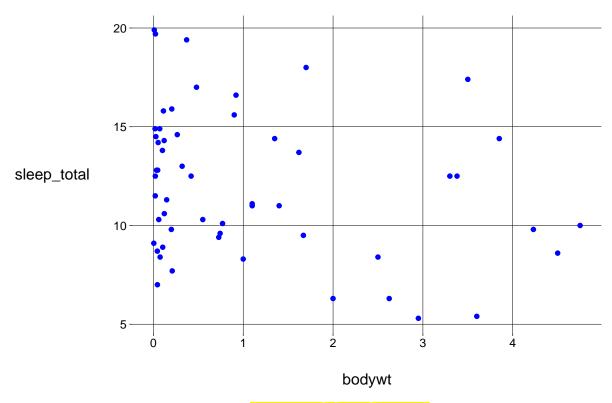
• Fazendo deste modo, a estética só vale para uma geometria. Se você acrescentar outras geometrias (linhas, por exemplo), a estética não valerá para elas.

#### 4.4.5 \_

# Aparência fixa ou dependendo de variável?

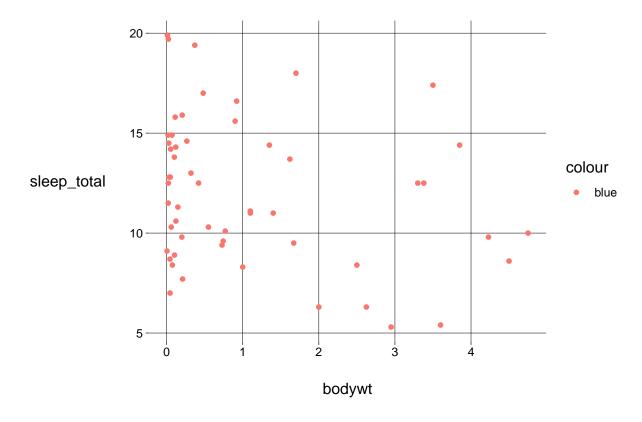
- Se for fixa, não é estética. Não representa informação.
- Se depender de variável, é estética. Representa informação.
- Compare o último *chunk* acima com:

```
sono %>%
filter(bodywt < limite) %>%
ggplot() +
geom_point(aes(x = bodywt, y = sleep_total), color = 'blue')
```



• Se for uma estética, precisa estar <mark>associada a uma variável</mark>, não a um valor fixo. Um erro comum seria fazer:

```
sono %>%
  filter(bodywt < limite) %>%
  ggplot() +
   geom_point(aes(x = bodywt, y = sleep_total, color = 'blue'))
```



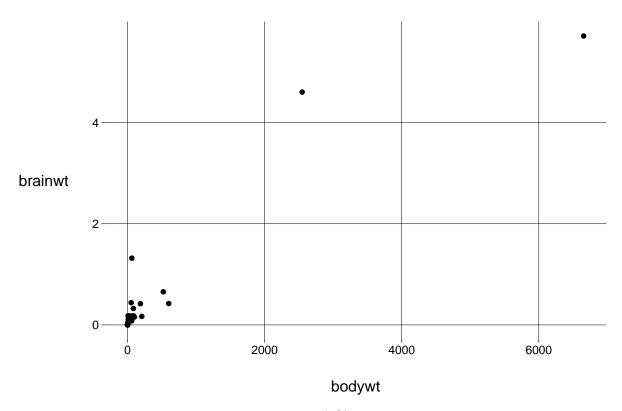
#### 4.4.6

# Uma correlação mais clara

• Peso cerebral versus peso corporal:

```
sono %>%
ggplot(aes(x = bodywt, y = brainwt)) +
  geom_point()
```

## Warning: Removed 27 rows containing missing values (geom\_point).



• A mensagem de aviso (warning) diz que há 27 valores faltantes (NA) em bodywt ou brainwt. De fato:

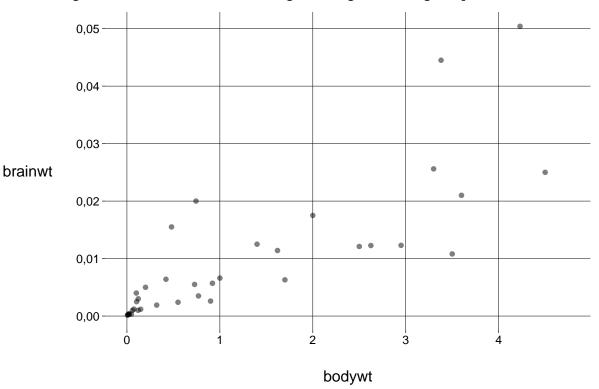
```
sono %>%
  filter(is.na(bodywt)) %>%
   count()
## # A tibble: 1 x 1
         n
##
    <int>
## 1
sono %>%
  filter(is.na(brainwt)) %>%
   count()
## # A tibble: 1 x 1
##
         n
##
     <int>
```

• Vamos restringir aos animais mais leves e mudar a opacidade:

```
sono %>%
filter(bodywt < limite) %>%
ggplot(aes(x = bodywt, y = brainwt)) +
```

```
geom_point(alpha = .5)
```

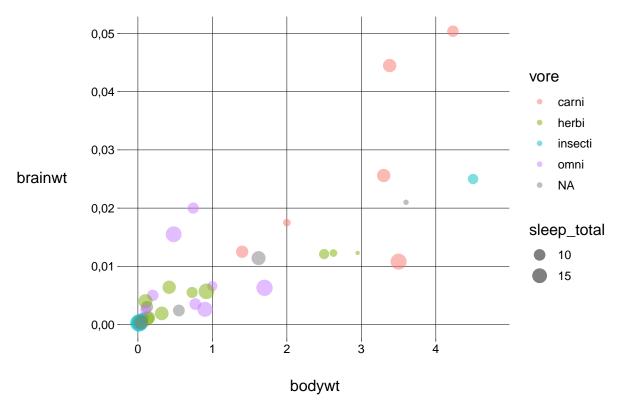
## Warning: Removed 18 rows containing missing values (geom\_point).



• Vamos incluir horas de sono e dieta. Observe as estéticas usadas.

```
sono %>%
filter(bodywt < limite) %>%
ggplot(
   aes(
        x = bodywt,
        y = brainwt,
        size = sleep_total,
        color = vore
   )
) +
   geom_point(alpha = .5)
```

## Warning: Removed 18 rows containing missing values (geom\_point).



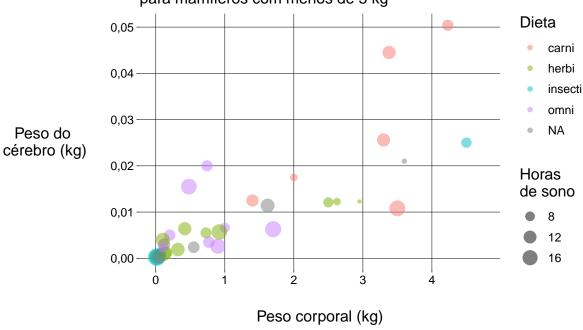
• Vamos mudar a escala dos tamanhos e incluir rótulos:

```
grafico <- sono %>%
  filter(bodywt < limite) %>%
 ggplot(
   aes(
     x = bodywt,
     y = brainwt,
     size = sleep_total,
     color = vore
   )
  ) +
   geom_point(alpha = .5) +
   scale_size(
     breaks = seq(0, 24, 4)
   ) +
   labs(
      title = 'Peso do cérebro versus peso corporal',
      subtitle = paste0(
        'para mamíferos com menos de ',
       limite,
        ' kg'
      caption = 'Fonte: dataset `msleep`',
      x = 'Peso corporal (kg)',
```

```
y = 'Peso do\n cérebro (kg)',
color = 'Dieta',
size = 'Horas\nde sono'
)
grafico
```

## Warning: Removed 18 rows containing missing values (geom\_point).

# Peso do cérebro versus peso corporal para mamíferos com menos de 5 kg



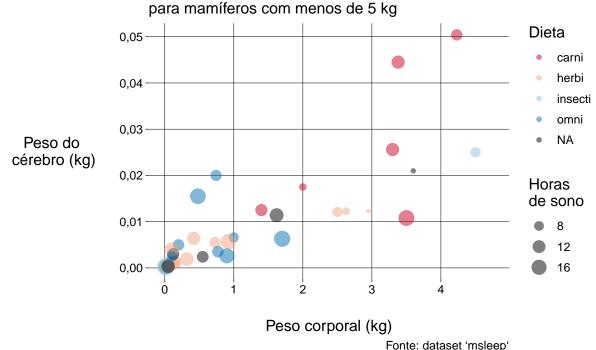
Fonte: dataset 'msleep'

• Vamos mudar as cores usadas para a dieta, usando uma escala diferente.

```
grafico2 <- grafico +
   scale_color_discrete(
    palette = 'RdBu',
    na.value = 'black',
    type = scale_color_brewer
)
grafico2</pre>
```

## Warning: Removed 18 rows containing missing values (geom\_point).

# Peso do cérebro versus peso corporal

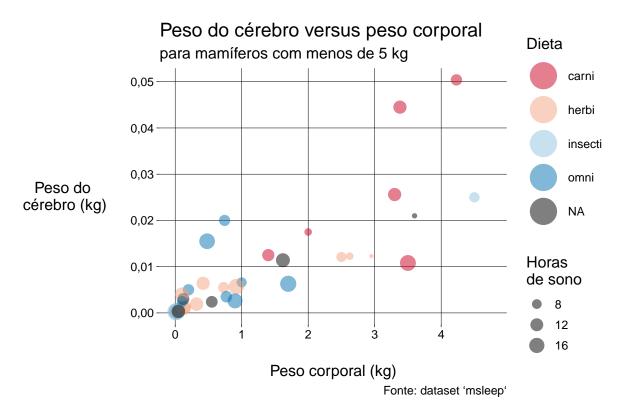


- Observe como usamos o gráfico já salvo na variável grafico e simplesmente acrescentamos a nova escala. Este tipo de "montagem" de gráficos ggplot2 é bem conveniente, para evitar repetição de código.
- Um último ajuste na aparência: os pontos na legenda "Dieta" estão pequenos demais. Quase não identificamos as cores deles.

Vamos usar a função guides para modificar (*override*) a estética color — apenas na legenda, não nos pontos mostrados no gráfico, cujos tamanhos representam o número de horas de sono — tornando o tamanho maior. Leia mais sobre override.aes neste *link* (em inglês).

```
grafico3 <- grafico2 +
  guides(color = guide_legend(override.aes = list(size = 10)))
grafico3</pre>
```

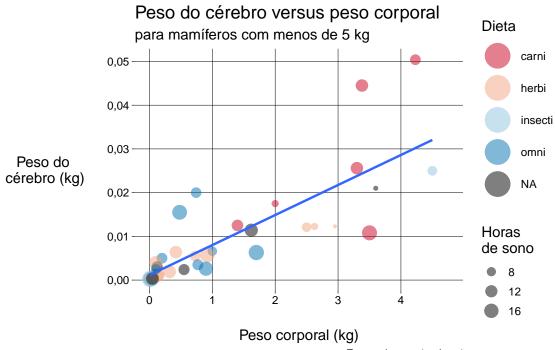
## Warning: Removed 18 rows containing missing values (geom\_point).



- Agora podemos finalmente comentar sobre a informação que o gráfico mostra sobre os dados:
  - De fato, existe uma correlação entre peso cerebral e peso corporal: quanto maior o peso corporal, maior o peso cerebral. Nada surprenndente.
  - Podemos fazer o ggplot2 traçar uma reta de regressão com a geometria geom\_smooth. Vamos falar mais sobre correlação em um capítulo futuro.

```
grafico4 <- grafico3 +
  geom_smooth(
   aes(group = 1),
   show.legend = FALSE,
   method = 'lm',
   se = FALSE
)
grafico4</pre>
```

```
## `geom_smooth()` using formula 'y ~ x'
## Warning: Removed 18 rows containing non-finite values (stat_smooth).
## Warning: Removed 18 rows containing missing values (geom_point).
```



Fonte: dataset 'msleep'

- Todos os carnívoros têm peso corporal maior que  $1{\rm kg}$  e peso cerebral maior ou igual a  $10{\rm g}$ .
- Só um carnívoro dorme 8 horas ou menos. Qual?
- Todos os insetívoros com exceção de um (qual?) são muito leves e dormem muito.
- Todos os onívoros têm menos de  $2{\rm kg}$  de peso corporal e  $20{\rm g}$  ou menos de peso cerebral.

# 4.5

# Vídeo 2

https://youtu.be/c-LoZ9e8xWc

#### 4.6

# Histogramas e cia.

• A idéia agora é <mark>agrupar indivíduos em classes,</mark> dependendo do valor de uma variável quantitativa.

#### Distribuições de frequência

Vamos nos concentrar nas horas de sono.

```
## [1] 12,1 17,0 14,4 14,9 4,0 14,4 8,7 7,0 10,1 3,0 5,3 9,4 10,0 ## [14] 12,5 10,3 8,3 9,1 17,4 5,3 18,0 3,9 19,7 2,9 3,1 10,1 10,9 ## [27] 14,9 12,5 9,8 1,9 2,7 6,2 6,3 8,0 9,5 3,3 19,4 10,1 14,2 ## [40] 14,3 12,8 12,5 19,9 14,6 11,0 7,7 14,5 8,4 3,8 9,7 15,8 10,4 ## [53] 13,5 9,4 10,3 11,0 11,5 13,7 3,5 5,6 11,1 18,1 5,4 13,0 8,7 ## [66] 9,6 8,4 11,3 10,6 16,6 13,8 15,9 12,8 9,1 8,6 15,8 4,4 15,6 ## [79] 8,9 5,2 6,3 12,5 9,8
```

- Antes de montar o histograma, vamos construir uma distribuição de frequência.
- A amplitude é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo. A função range não retorna a amplitude, mas sim os valores mínimo e máximo:

```
sono$sleep_total %>% range()
## [1] 1,9 19,9
```

• Vamos decidir que cada classe vai ter 2 horas. A função  ${\tt cut}$  substitui os valores do vetor pelos nomes das classes:

```
sono$sleep_total %>%
   cut(breaks = seq(0, 20, 2), right = FALSE)
## [1] [12,14) [16,18) [14,16) [14,16) [4,6)
                                                [14,16) [8,10) [6,8)
## [9] [10,12) [2,4)
                        [4,6)
                                [8,10) [10,12) [12,14) [10,12) [8,10)
## [17] [8,10) [16,18) [4,6)
                                [18,20) [2,4)
                                                [18,20) [2,4)
                                                                [2,4)
## [25] [10,12) [10,12) [14,16) [12,14) [8,10)
                                               [0,2)
                                                        [2,4)
                                                                [6,8)
## [33] [6,8)
                [8,10) [8,10) [2,4)
                                        [18,20) [10,12) [14,16) [14,16)
## [41] [12,14) [12,14) [18,20) [14,16) [10,12) [6,8)
                                                        [14,16) [8,10)
## [49] [2,4)
              [8,10) [14,16) [10,12) [12,14) [8,10) [10,12) [10,12)
## [57] [10,12) [12,14) [2,4)
                                [4,6)
                                        [10,12) [18,20) [4,6)
                                                                [12,14)
## [65] [8,10) [8,10) [8,10) [10,12) [10,12) [16,18) [12,14) [14,16)
## [73] [12,14) [8,10) [8,10)
                               [14,16) [4,6)
                                                [14,16) [8,10)
                                                               [4,6)
## [81] [6,8)
               [12,14) [8,10)
## 10 Levels: [0,2) [2,4) [4,6) [6,8) [8,10) [10,12) [12,14) ... [18,20)
```

• A função table faz a contagem dos elementos de cada classe:

```
sono$sleep_total %>%
cut(breaks = seq(0, 20, 2), right = FALSE) %>%
table(dnn = 'Horas de sono') %>%
```

```
as.data.frame()
## # A tibble: 10 x 2
     Horas.de.sono Freq
##
     <fct>
                   <int>
## 1 [0,2)
                        1
## 2 [2,4)
                        8
## 3 [4,6)
                        7
## 4 [6,8)
                        5
## 5 [8,10)
                       17
## 6 [10,12)
                       14
## # ... with 4 more rows
```

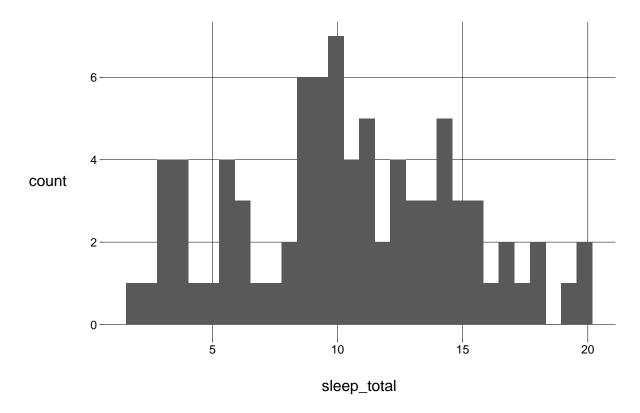
#### 4.6.2 \_\_\_

# Histograma

- Na verdade, o ggplot2 já faz esses cálculos para nós.
- O default é criar 30 classes (bins):

```
sono %>%
ggplot(aes(x = sleep_total)) +
  geom_histogram()
```

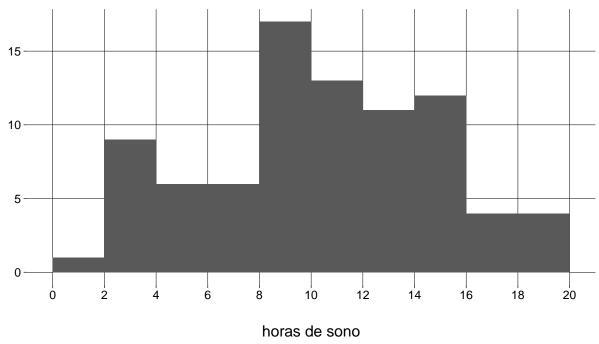
## `stat\_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.



 Vamos mudar isto passando um vetor de limites das classes (breaks). Vamos acrescentar rótulos também:

```
sono %>%
ggplot(aes(x = sleep_total)) +
  geom_histogram(breaks = seq(0, 20, 2)) +
  scale_x_continuous(breaks = seq(0, 20, 2)) +
  labs(
    title = 'Horas de sono de diversos mamíferos',
    x = 'horas de sono',
    y = NULL,
    caption = 'Fonte: dataset `msleep`'
)
```

# Horas de sono de diversos mamíferos



Fonte: dataset 'msleep'

- Nossas impressões:
  - A classe que mais tem elementos é a de 8 a 10 horas.
  - A distribuição é mais ou menos simétrica.
  - A distribuição tem forma aproximada de sino: há poucos mamíferos com valores extremos de horas de sono; a maioria está próxima do valor médio:

```
mean(sono$sleep_total)
```

## [1] 10,43373

# Polígono de frequência

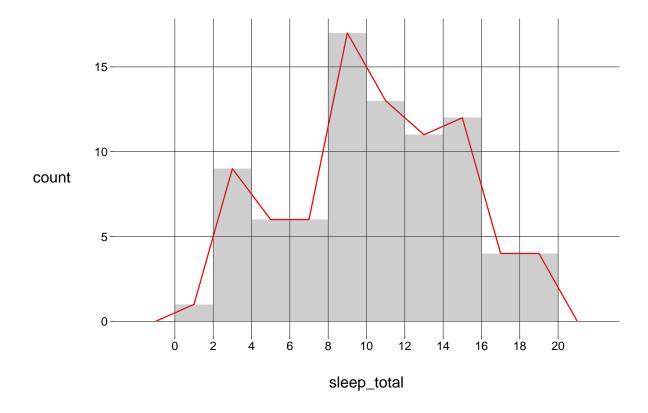
- Em vez das barras do histograma, podemos desenhar uma linha ligando seus topos.
- O resultado é um polígono de frequência.

```
pf <- sono %>%
   ggplot(aes(x = sleep_total)) +
    geom_freqpoly(breaks = seq(0, 20, 2), color = 'red') +
   scale_x_continuous(breaks = seq(0, 20, 2))
pf
```



• Vamos sobrepor o polígono de frequência ao histograma, para deixar claro o que está acontecendo:

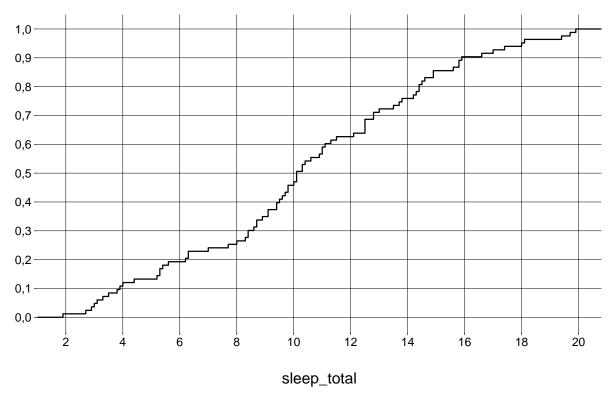
```
pf + geom_histogram(breaks = seq(0, 20, 2), alpha = .3)
```



# Ogiva

- A ogiva é um gráfico que mostra a frequência acumulada: para cada valor v da variável no eixo x, a proporção de indivíduos com valor menor ou igual a v.
- A geometria geom\_step gera o gráfico de uma função degrau.
- Cada geometria está ligada a uma stat, um algoritmo para computar o que vai ser desenhado. Aqui, passamos para a geometria a função ecdf (empirical cumulative distribution function), do pacote stats, que calcula as frequências acumuladas.

```
sono %>%
ggplot(aes(x = sleep_total)) +
  geom_step(stat = 'ecdf') +
  scale_x_continuous(breaks = seq(0, 20, 2)) +
  scale_y_continuous(breaks = seq(0, 1, .1)) +
  labs(y = NULL)
```



- Com a ogiva, podemos obter informações difíceis de visualizar no histograma. Por exemplo:
  - Cerca de 20% dos mamíferos têm menos de 6 horas de sono.
  - Cerca de metade dos mamíferos têm menos de  $10\,\mathrm{horas}$  de sono.
  - Cerca de 10% dos mamíferos têm mais de 16 horas de sono.

# Ramos e folhas

##

##

- No início dos anos 1900, quando estatísticas eram feitas à mão, Arthur Bowley criou os diagramas de ramos e folhas.
- Um diagrama de ramos e folhas é, basicamente, uma listagem de todos os valores de uma variável, agrupados de maneira que todos os valores de uma classe (i.e., de uma linha) têm os algarismos iniciais dentro de um intervalo.
- Para as horas de sono dos mamíferos:

```
sono$sleep_total %>%
  stem()
##
```

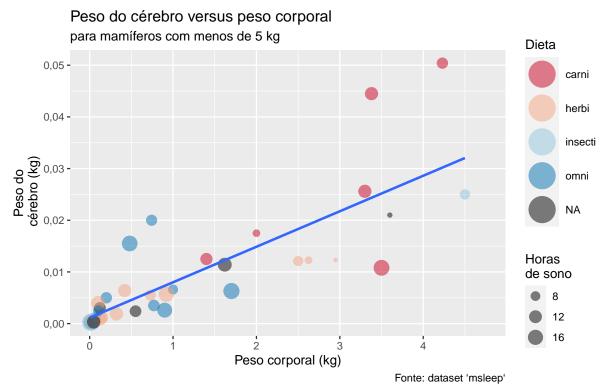
The decimal point is at the |

```
0 | 9
##
##
        | 79013589
      4 | 0423346
##
##
      6 | 23307
      8 | 03446779114456788
##
##
     10 | 01113346900135
##
     12 | 15555880578
     14 | 234456996889
##
##
     16 | 604
##
     18 | 01479
```

- A primeira linha representa um indivíduo com 0.9 horas de sono.
- A penúltima linha representa 3 valores:
  - **-** 16,6
  - **-** 17,0
  - **-** 17,4

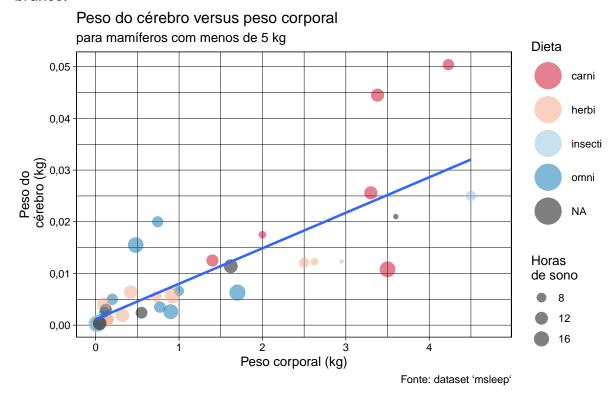
# Personalização do tema

• O ggplot2 tem um tema *default*, chamado theme\_gray, que gera o *scatterplot* de um exemplo anterior deste capítulo do seguinte modo:

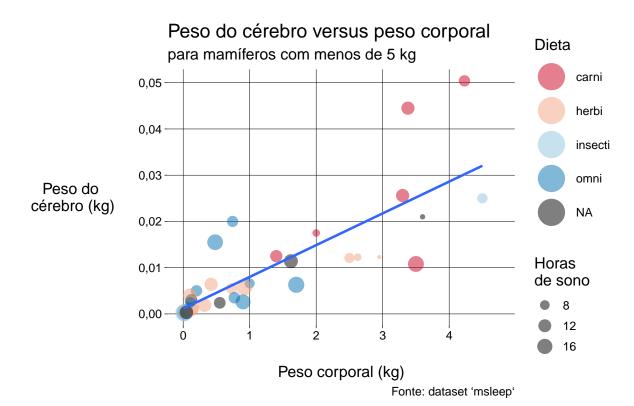


• Para este material, escolhi o tema theme\_linedraw, que usa linhas pretas sobre fundo

#### branco:



- Para deixar os gráficos mais leves e facilitar a leitura, fiz as seguintes alterações no tema:
  - Mudei o tamanho do texto dos rótulos.
  - Fiz o rótulo do eixo y aparecer na horizontal; embora isto ocupe um pouco mais de espaço, evita que o leitor tenha que girar a cabeça para ler o rótulo.
  - Eliminei as linhas dos eixos, para o gráfico ficar mais leve.
  - Eliminei a moldura da área de dados, para o gráfico ficar mais leve.
  - Eliminei a grade secundária, para o gráfico ficar mais leve.
- O resultado é



• Os meus comandos para alterar o tema são

```
# Tamanho do texto depende do formato de saída (html ou pdf):
plot_text_size = ifelse(is_html_output(), 12, 13)
# Tema mais leve:
theme set(
  theme_linedraw() +
    theme(
      # Tamanho do texto
      text = element_text(size = plot_text_size),
      # Eixo y
      axis.title.y.left = element_text(
        # Nunca girar o rótulo do eixo y
        angle = 0,
        # Separar o rótulo do eixo um pouco
       margin = margin(r = 20),
        # Posicionar verticalmente no meio
        vjust = .5
      ),
      # Eixo y secundário (à direita), quando presente
      axis.title.y.right = element_text(
        # Nunca girar o rótulo do eixo y
        angle = 0,
        # Separar o rótulo do eixo um pouco
```

```
margin = margin(1 = 20),
        # Posicionar verticalmente no meio
        viust = .5
      ),
      # Não colocar marcas no eixo y secundário
      axis.ticks.y.right = element_blank(),
      # Separar o eixo x do rótulo um pouco mais
      axis.title.x.bottom = element_text(
       margin = margin(t = 20)
      ),
      # Eliminar linhas dos eixos
      axis.line = element blank(),
      # Eliminar a moldura da área de dados
      panel.border = element blank(),
      # Eliminar a grade secundária
     panel.grid.minor = element_blank()
)
```

# **Exercícios**



Não se esqueça de incluir títulos nos gráficos e rótulos nos eixos.

#### 4.10.1 \_

#### Peso cerebral e peso corporal

- 1. Observe os comandos que geraram o gráfico grafico4.
- 2. O que acontece se você retirar aes (group = 1) da chamada a geom\_smooth? Explique.
- 3. O que acontece se você mudar show.legend = FALSE para show.legend = TRUE na chamada a geom\_smooth? Explique.
- 4. O que acontece se você mudar se = FALSE para se = TRUE na chamada a geom\_smooth? Explique.
- 5. Acrescente ao gráfico a camada facet\_wrap(~vore). O que acontece?
- 6. Examine o data frame sono e identifique o único insetívoro com mais de 4kg.
- 7. Instale o pacote gg\_repel e acrescente ao gráfico grafico4 (não facetado) a geometria geom\_label\_repel (consulte a ajuda) para rotular o mamífero insetívoro identificado no item anterior com o seu nome, sem cobrir outros pontos do gráfico. Cuidado para não alterar a legenda que já existe.

#### Peso cerebral e horas de sono

#### Use o data frame sono definido como

```
library(ggplot2)

sono <- msleep %>%
  select(
   name, order, genus, vore, bodywt,
   brainwt, awake, sleep_total
)
```

- 1. Construa um histograma da variável brainwt. Escolha o número de classes que você achar melhor. O que acontece com os valores NA?
- 2. Descubra que função da forma  $scale_x$ ... usar para fazer com que o eixo x tenha uma escala logarítmica. Gere um novo histograma.
- 3. Qual dos dois histogramas é melhor para responder a pergunta "Qual a faixa de peso cerebral que tem mais animais?" de forma satisfatória?
- 4. Construa um scatter plot de horas de sono versus peso do cérebro. Você percebe alguma correlação entre estas variáveis? Se precisar, concentre-se em um subconjunto dos dados.
- 5. Usando geom\_smooth (leia a respeito), sobreponha uma reta de regressão ao gráfico de dispersão, usando o método lm e sem o erro padrão (i.e., com se = FALSE). O que você observa? Discuta.

#### 4.10.3

#### Igualdade de gênero entre furacões?

Este artigo tenta achar uma relação entre o gênero do nome de um furação e a quantidade de vítimas fatais provocadas por ele.

Os dados estão no pacote DAAG, que deve ser instalado:

```
if (!require(DAAG))
  install.packages("DAAG")
```

Vamos usar apenas algumas das variáveis, com nomes em português.

```
df <- hurricNamed %>%
  as_tibble() %>%
  transmute(
   id = paste(Year, Name, sep = '-'),
   nome = Name,
  ano = Year,
  velocidade = LF.WindsMPH * 1.8,  # convertido para km/h
  pressao = LF.PressureMB,  # mbar
  prejuizo = BaseDam2014 %>% round(), # milhões de dólares de 2014
  mortes = deaths,
  genero = mf
)
```

- 1. Crie histogramas para as seguintes variáveis, escolhendo a quantidade de barras que você achar melhor.
  - velocidade
  - prejuizo
  - mortes

Não se esqueça de incluir títulos nos gráficos e rótulos nos eixos.

Comente os histogramas.

2. Os histogramas de prejuízos e mortes não ficaram bons. Vamos gerar histogramas transformados.

No data frame, crie duas novas colunas:

- logprejuizo: *logaritmo* do prejuízo (na base 10)
- logmortes: *logaritmo* do número de mortes (na base 10)

Agora, gere histogramas destas duas novas variáveis.

- 3. O que significa o valor do logaritmo do prejuízo na base 10?
- 4. O que significa o valor do logaritmo do número de mortes na base 10?
- 5. Por que o histograma do logaritmo do número de mortes vem com uma mensagem de aviso?
- 6. Por que isto não acontece com o logaritmo do prejuízo?
- 7. Faça um gráfico de dispersão com pressao no eixo y e velocidade no eixo x.
- 8. Usando geom\_smooth (leia a respeito), sobreponha uma reta de regressão ao gráfico, usando o método 1m e sem o erro padrão (i.e., com se = FALSE). O que você observa? Discuta.
- 9. Faça um gráfico de dispersão com logmortes no eixo y e pressao no eixo x.

- 10. Usando geom\_smooth (leia a respeito), sobreponha uma reta de regressão ao gráfico, usando o método lm e sem o erro padrão (i.e., com se = FALSE). O que você observa? Discuta.
- 11. Faça um gráfico de dispersão com logmortes no eixo y e pressao no eixo x, com pontos coloridos de acordo com o gênero do nome do furação.
- 12. Usando geom\_smooth (leia a respeito), sobreponha retas de regressão ao gráfico, uma para cada gênero, usando o método lm e sem o erro padrão (i.e., com se = FALSE). O que você observa? Discuta.



Visualizações como esta ajudam a explorar os dados, mas não servem para testar rigorosamente a hipótese de que furacões mulheres matam mais do que furacões homens.

Mais adiante no curso, vamos aprender a fazer testes mais rigorosos sobre hipóteses como esta.

# CAPÍTULO 5

# Visualização com ggplot2 (continuação)



Busque mais informações sobre os pacotes tidyverse e ggplot2 nas referências recomendadas.

5.1 \_\_\_\_\_

### Vídeo 1

https://youtu.be/TjgLDeIQHIc

5.2

# **Boxplots**

5.2.1 \_\_\_\_\_

### Conjunto de dados

 Vamos continuar a trabalhar com os dados sobre as horas de sono de alguns mamíferos:

```
sono <- msleep %>%
select(name, vore, order, sleep_total)
```

```
sono
## # A tibble: 83 x 4
##
    name
                                vore order
                                                    sleep_total
##
     <chr>
                                <chr> <chr>
                                                          <dbl>
## 1 Cheetah
                                                           12.1
                                carni Carnivora
## 2 Owl monkey
                                omni Primates
                                                           17
## 3 Mountain beaver
                                herbi Rodentia
                                                           14.4
## 4 Greater short-tailed shrew omni Soricomorpha
                                                           14.9
## 5 Cow
                                herbi Artiodactyla
                                                           4
                                herbi Pilosa
## 6 Three-toed sloth
                                                           14.4
## # ... with 77 more rows
```

#### 5.2.2 \_

### Mediana e quartis

- Para entender boxplots, precisamos, antes, entender algumas medidas.
- Se tomarmos as quantidades de horas de sono de todos os animais do conjunto de dados e classificarmos estas quantidades em ordem crescente, vamos ter:

```
horas <- sono %>%
  pull(sleep_total) %>%
  sort()
horas
```

```
## [1] 1,9 2,7 2,9 3,0 3,1 3,3 3,5 3,8 3,9 4,0 4,4 5,2 5,3 ## [14] 5,3 5,4 5,6 6,2 6,3 6,3 7,0 7,7 8,0 8,3 8,4 8,4 8,6 ## [27] 8,7 8,7 8,9 9,1 9,1 9,4 9,4 9,5 9,6 9,7 9,8 9,8 10,0 ## [40] 10,1 10,1 10,1 10,3 10,3 10,4 10,6 10,9 11,0 11,0 11,1 11,3 11,5 ## [53] 12,1 12,5 12,5 12,5 12,5 12,8 12,8 13,0 13,5 13,7 13,8 14,2 14,3 ## [66] 14,4 14,4 14,5 14,6 14,9 14,9 15,6 15,8 15,8 15,9 16,6 17,0 17,4 ## [79] 18,0 18,1 19,4 19,7 19,9
```

• Quantos valores são?

```
length(horas)
```

## [1] 83

• O valor que está bem no meio desta fila — i.e., na posição 42 — é a mediana:

```
horas[ceiling(length(horas) / 2)]
## [1] 10,1
```

• Em R:

```
median(horas)
```

## [1] 10,1

Mediana e média são coisas muito diferentes.

Por acaso, neste exemplo, a média das horas é próxima da mediana:



```
mean(horas)
```

## [1] 10,43373

Isto costuma acontecer quando a distribuição dos dados é aproximadamente simétrica.

• Os quartis são os valores que estão nas posições  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{4}$  da fila. São o primeiro, segundo e terceiro quartis, respectivamente.

```
horas[
  c(
    ceiling(length(horas) / 4),
    ceiling(length(horas) / 2),
    ceiling(3 * length(horas) / 4)
  )
]
```

- ## [1] 7,7 10,1 13,8
- Sim, a mediana é o segundo quartil.
- Em R, a função quantile generaliza esta idéia: dado um número q entre 0 e 1, o quantil (com "N") q é o elemento que está na posição que corresponde à fração q da fila ordenada.

```
horas %>% quantile(c(.25, .5, .75))

## 25% 50% 75%

## 7,85 10,10 13,75
```

- Na verdade, R tem 9 algoritmos diferentes para calcular os quantis de uma amostra! Leia a ajuda da função quantile para conhecê-los.
- As diferenças entre nossos cálculos "à mão" e os resultados retornados por quantile são porque, em algumas situações, quantile calcula uma média ponderada entre elementos vizinhos. Por isso, quantile pode retornar valores que nem estão no vetor.
- Em R, a função summary mostra o mínimo, os quartis (com "R"), a média, e o máximo de um vetor:

```
## Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
## 1,90 7,85 10,10 10,43 13,75 19,90
```

#### 5.2.3

#### Média × mediana

- Vamos ver um exemplo simples para entender a diferença entre a média e a mediana.
- Imagine o seguinte vetor com as receitas mensais de algumas pessoas (em milhares de reais:)

```
receitas <- c(1, 2, 2, 3.5, 1, 4, 1)
```

• Eis a mediana e a média deste vetor:

```
summary(receitas)[c('Median', 'Mean')]
## Median Mean
## 2,000000 2,071429
```

- A mediana e a média são bem próximas.
- Imagine, agora, que adicionamos ao vetor um sujeito com receita mensal de  $100\,$  mil reais:

```
receitas <- c(1, 2, 2, 3.5, 1, 4, 1, 100)
```

• Eis a nova mediana e a nova média:

```
summary(receitas)[c('Median', 'Mean')]
## Median Mean
## 2,0000 14,3125
```

- O sujeito com a receita de 2 mil reais continua no meio da fila, mas a média (que é a soma de todas as receitas, dividida pelo número de indivíduos) ficou muito diferente.
- A receita do novo sujeito é um valor discrepante, ou, em inglês, um outlier.

#### Conclusão:



A mediana é robusta, pouco afetada por outliers.

A média é pouco robusta, muito sensível a *outliers*.

### Intervalo interquartil (IQR) e outliers

Qual fração dos elementos está entre o primeiro e o terceiro quartis?

```
length(
  horas[between(horas, quantile(horas, .25), quantile(horas, .75))]
) /
length(
  horas
)
```

```
## [1] 0,4939759
```

- Metade do total de elementos está entre o primeiro e o terceiro quartis.
- Este é o chamado intervalo interquartil (interquartile range, em inglês).
- No nosso vetor horas, os limites do IQR são

```
quantile(horas, c(.25, .75))
## 25% 75%
## 7,85 13,75
```

• O comprimento deste intervalo é calculado pela função IQR:

```
IQR(horas)
## [1] 5,9
```

- \_ \_ \_ ,
- Valores muito abaixo do primeiro quartil podem ser considerados discrepantes (outliers), mas quão abaixo?
- A resposta (puramente convencional) é  $1.5 \times$  IQR abaixo do primeiro quartil.
- No nosso vetor horas, isto significa valores abaixo de

```
limite_inferior <- quantile(horas, .25) - 1.5 * IQR(horas)
unname(limite_inferior)</pre>
```

```
## [1] -1
```

Neste caso, não há outliers:

```
horas[horas < limite_inferior]
```

```
## numeric(0)
```

- Da mesma forma, valores muito acima do terceiro quartil podem ser considerados discrepantes (outliers), mas quão acima?
- De novo, a resposta (puramente convencional) é  $1.5 \times IQR$  acima do terceiro quartil.
- No nosso vetor horas, isto significa valores acima de

```
limite_superior <- quantile(horas, .75) + 1.5 * IQR(horas)
unname(limite_superior)</pre>
```

## [1] 22,6

• Neste caso, também não há outliers:

```
horas[horas > limite_superior]
```

## numeric(0)

• Outro exemplo: vamos tomar apenas os mamíferos onívoros:

```
onivoros <- sono %>%
  filter(vore == 'omni')
onivoros
```

```
## # A tibble: 20 x 4
##
    name
                             vore order
                                              sleep_total
##
    <chr>
                             <chr> <chr>
                                                     <dbl>
## 1 Owl monkey
                             omni Primates
                                                      17
## 2 Greater short-tailed shrew omni Soricomorpha
                                                     14.9
                             omni Primates
## 3 Grivet
                      omni Soricomorpha
## 4 Star-nosed mole
                                                     10.3
## 5 African giant pouched rat omni Rodentia
                                                      8.3
## 6 Lesser short-tailed shrew omni Soricomorpha
                                                      9.1
## # ... with 14 more rows
```

• Vamos extrair o vetor de horas de sono:

```
horas <- onivoros %>%
   pull(sleep_total)
horas
```

```
## [1] 17,0 14,9 10,0 10,3 8,3 9,1 18,0 10,1 10,9 9,8 8,0 10,1 9,7 ## [14] 9,4 11,0 8,7 9,6 9,1 15,6 8,9
```

Vamos calcular o primeiro e terceiro quartis:

```
quartis <- horas %>%
  quantile(c(.25, .75))
quartis
```

```
## 25% 75%
## 9,100 10,925
```

Vamos achar o IQR:

```
IQR(horas)
```

## [1] 1,825

• E os limites a partir dos quais os valores são *outliers*:

```
limites <- quartis + c(-1, 1) * 1.5 * IQR(horas)
unname(limites)</pre>
```

## [1] 6,3625 13,6625

Existem outliers inferiores?

```
onivoros %>%
  filter(sleep_total < limites[1])

## # A tibble: 0 x 4

## # ... with 4 variables: name <chr>, vore <chr>, order <chr>,
## # sleep_total <dbl>
```

Não.

• Existem outliers superiores?

```
onivoros %>%
  filter(sleep_total > limites[2])
```

```
## # A tibble: 4 x 4
##
    name
                                                      sleep_total
                                vore order
##
     <chr>>
                                                            <dbl>
                                <chr> <chr>
                                omni Primates
                                                              17
## 1 Owl monkey
## 2 Greater short-tailed shrew omni Soricomorpha
                                                             14.9
## 3 North American Opossum
                                omni Didelphimorphia
                                                             18
## 4 Tenrec
                                omni Afrosoricida
                                                             15.6
```

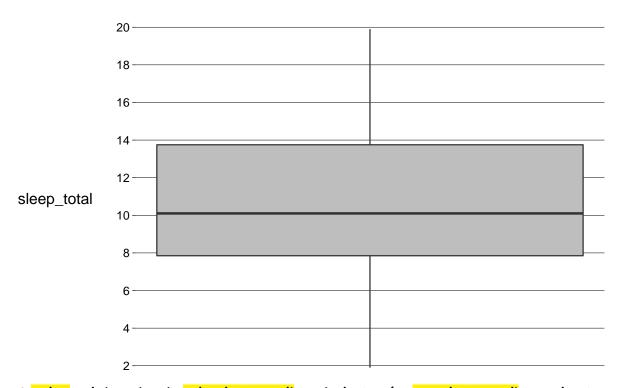
Sim! Estes animais dormem demais em comparação com os outros onívoros.

#### **Gerando boxplots**

- Um *boxplot* é uma representação visual dos valores que calculamos acima.
- No ggplot2, a geometria geom\_boxplot constrói boxplots:

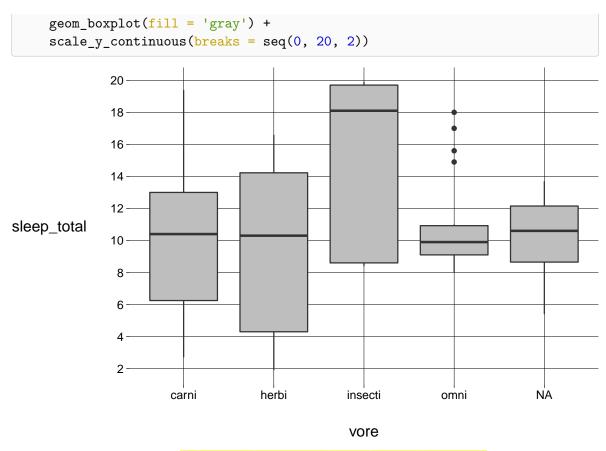
```
sono %>%

ggplot(aes(y = sleep_total)) +
  geom_boxplot(fill = 'gray') +
  scale_x_continuous(breaks = NULL) +
  scale_y_continuous(breaks = seq(0, 20, 2))
```



- A caixa vai do valor do primeiro quartil (embaixo) até o terceiro quartil (em cima).
- A linha horizontal dentro da caixa representa o valor da mediana.
- As <mark>linhas verticais</mark> acima e abaixo da caixa (pitorescamente chamadas de "bigodes") vão até o <mark>limite inferior</mark> (primeiro quartil  $-1.5 \times \text{IQR}$ ) e até o <mark>limite superior</mark> (terceiro quartil  $+1.5 \times \text{IQR}$ ).
- Neste boxplot, não há outliers.
- Podemos usar a posição x para desenhar vários *boxplots*, um para cada dieta:

```
sono %>%
ggplot(aes(x = vore, y = sleep_total)) +
```



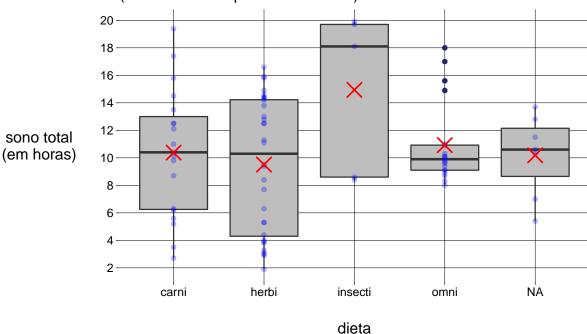
- No *boxplot* de onívoros, os *outliers* aparecem como pontos isolados, acima da caixa, além dos alcances do bigode superior (aliás, onde está bigode superior?).
- Boxplots lado a lado são úteis para compararmos grupos diferentes de dados.
- Veja como, com exceção dos insetívoros, as medianas dos grupos são parecidas.
- Veja como carnívoros, insetívoros e herbívoros apresentam maior variação, enquanto onívoros e animais sem dieta registrada apresentam menor variação.
- · Vamos combinar, em um só gráfico
  - Os pontos representando os animais,
  - Os boxplots,
  - As médias (que podem estar próximas ou distantes das medianas).

```
sono %>%
ggplot(aes(x = vore, y = sleep_total)) +
  geom_boxplot(fill = 'gray') +
  scale_y_continuous(breaks = seq(0, 20, 2)) +
  geom_point(
    color = 'blue',
    alpha = .3
) +
```

```
stat_summary(
   fun = mean,
   geom = 'point',
   color = 'red',
   shape = 'cross',
   size = 5,
   stroke = 1
) +
labs(
   title = 'Sono total de diversos mamíferos, por dieta',
   subtitle = '(o X vermelho representa a média)',
   x = 'dieta',
   y = 'sono total\n(em horas)'
)
```

### Sono total de diversos mamíferos, por dieta

(o X vermelho representa a média)



- Quando a caixa é longa, o IQR é grande, e os valores estão muito espalhados; é o caso dos herbívoros e insetívoros.
- Quando a caixa é curta, o IQR é pequeno, e os valores estão pouco espalhados; é o caso dos onívoros. Como o IQR é pequeno, os 4 mamíferos com mais de 14 horas de sono são *outliers*.
- Observe, ainda, como os *outliers* "puxam" a média dos onívoros para cima.

5.3

### Vídeo 2

### https://youtu.be/QqnOvgBXJ-s

5.4

### Gráficos de barras e de colunas

5.4.1

### Conjunto de dados

- O R tem um array de 3 dimensões com dados sobre as cores dos cabelos e dos olhos de 592 alunos e alunas de uma universidade americana em 1974.
- Se pedirmos para o R exibir os dados, veremos <mark>duas matrizes</mark>, uma para cada sexo:

```
HairEyeColor
## , , Sex = Male
##
##
        Eye
## Hair
        Brown Blue Hazel Green
           32 11 10
##
    Black
##
    Brown
           53 50
                     25
                          15
                          7
   Red
          10 10
                     7
   Blond 3 30
##
## , , Sex = Female
##
##
        Eye
## Hair
         Brown Blue Hazel Green
    Black
           36 9 5
    Brown
           66 34
                     29
                          14
##
    Red
           16 7
                     7
                           7
##
    Blond
            4
                64
                     5
                           8
```

- Vamos transformar este array em um data frame.
- O array contém apenas os totais de cada classe. Vamos usar a função uncount para gerar uma linha para cada aluno:

```
df_orig <- as.data.frame(HairEyeColor) %>%
  uncount(Freq) %>%
  as_tibble()
```

```
## # A tibble: 592 x 3
## Hair Eye Sex
## <fct> <fct> <fct>
## 1 Black Brown Male
## 2 Black Brown Male
## 3 Black Brown Male
## 4 Black Brown Male
## 6 Black Brown Male
## 6 Black Brown Male
## # ... with 586 more rows
```

- O ggplot2 e os outros pacotes do tidyverse foram projetados para trabalhar com data frames neste formato, com uma observação (um indivíduo, um elemento) por linha. É o chamado formato tidy.
- Usando vetores com elementos nomeados, podemos traduzir o conteúdo do *data frame* para português:

```
cabelo <- c(
 'Brown' = 'castanhos',
 'Blond' = 'louros',
 'Black' = 'pretos',
  'Red' = 'ruivos'
)
olhos <- c(
 'Brown' = 'castanhos',
 'Blue' = 'azuis',
 'Hazel' = 'avelã'.
  'Green' = 'verdes'
)
sexo <- c(
 'Male' = 'homem',
  'Female' = 'mulher'
df <- df_orig %>%
 transmute(
   cabelos = cabelo[Hair],
  olhos = olhos[Eye],
   sexo = sexo[Sex]
  )
```

• Um sumário:

df %>% dfSummary() %>% print()

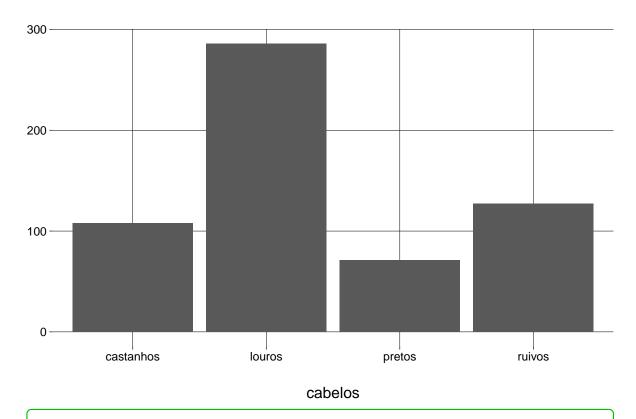
Variável	Estatísticas / Valores	Freqs (% de Válidos)	Faltante
cabelos	1. castanhos	108 (18,2%)	0
[character]	2. louros	286 (48,3%)	(0,0%)
	3. pretos	71 (12,0%)	
	4. ruivos	127 (21,5%)	
olhos	1. avelã	93 (15,7%)	0
[character]	2. azuis	215 (36,3%)	(0,0%)
	3. castanhos	220 (37,2%)	
	4. verdes	64 (10,8%)	
sexo	1. homem	279 (47,1%)	0
[character]	2. mulher	313 (52,9%)	(0,0%)

### 5.4.2 \_\_\_\_\_

### Gerando gráficos de barras

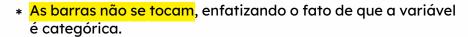
- Um gráfico de barras contém uma barra para cada valor de uma variável categórica.
- Usamos geom\_bar para gerar um gráfico de barras de cores de cabelo:

```
df %>%
  ggplot(aes(x = cabelos)) +
  geom_bar() +
  labs(y = NULL)
```



### Gráfico de barras $\times$ histograma:

- Os dois tipos de gráficos mostram a frequência (quantidade de elementos) no eixo vertical.
- No gráfico de barras:
  - \* A variável é categórica (nominal).
  - Cada barra corresponde a um valor da variável.

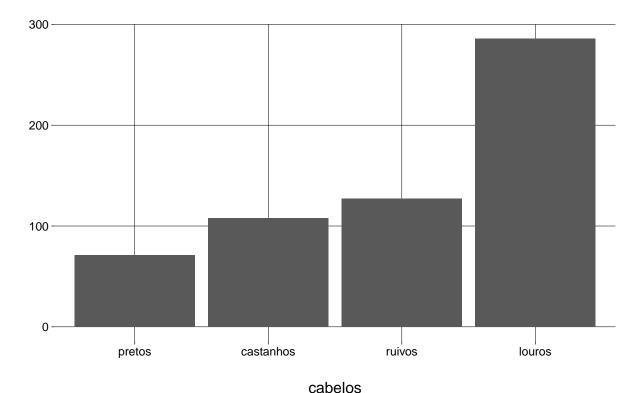


- No histograma (veja o exemplo):
  - \* A variável é quantitativa (intervalar ou racional).
  - Cada barra corresponde a uma classe de valores da variável.
  - \* As barras se tocam, para enfatizar que as classes são contíguas.
- Um gráfico de barras é mais legível quando as barras são mostradas em ordem crescente ou decrescente.
- Embora os valores da variável cabelos sejam *strings*, podemos aplicar a eles funções que manipulam fatores.
- A função fct\_infreq, do pacote forcats, ordena os valores em ordem decrescente

### de frequência.

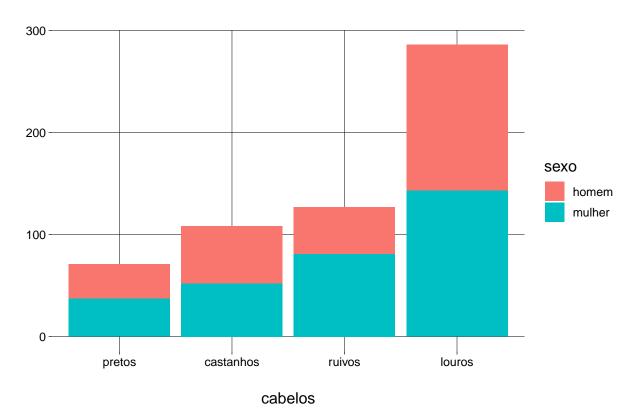
• A função fct\_rev, também do pacote forcats, inverte a ordenação.

```
df %>%
  ggplot(aes(x = fct_rev(fct_infreq(cabelos)))) +
   geom_bar() +
  labs(
    x = 'cabelos',
   y = NULL
  )
```



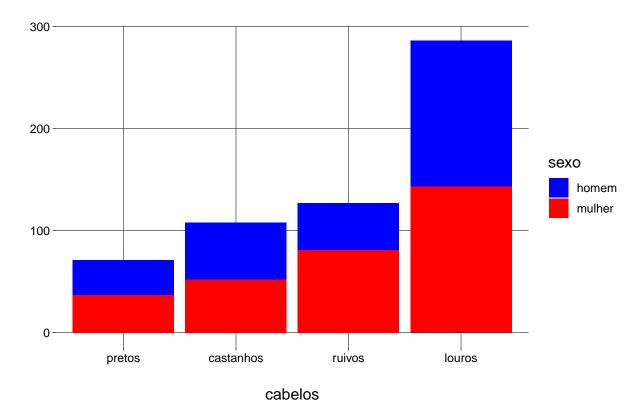
- A posição x e a altura de cada barra são estéticas: a posição x representa a cor dos cabelos, e a altura representa a frequência daquela cor.
- Vamos acrescentar mais uma estética: a cor de preenchimento vai representar o sexo.

```
df %>%
  ggplot(aes(x = fct_rev(fct_infreq(cabelos)), fill = sexo)) +
  geom_bar() +
  labs(
    x = 'cabelos',
    y = NULL
  )
```



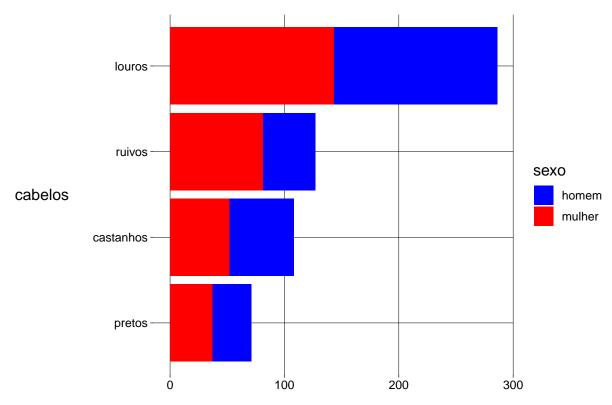
• Se a cor dos homens incomoda você, altere a escala que especifica o preenchimento (scale\_fill\_discrete):

```
df %>%
  ggplot(aes(x = fct_rev(fct_infreq(cabelos)), fill = sexo)) +
    geom_bar() +
    scale_fill_discrete(type = c('blue', 'red')) +
    labs(
        x = 'cabelos',
        y = NULL
    )
```



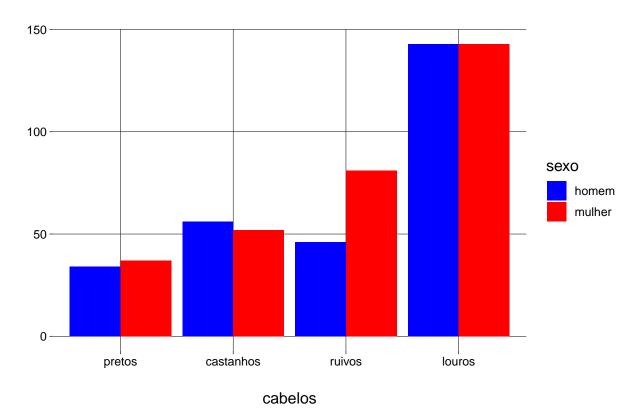
• Podemos fazer um gráfico de barras horizontais com coord\_flip. Isto geralmente é útil quando os rótulos das barras são longos:

```
df %>%
  ggplot(aes(x = fct_rev(fct_infreq(cabelos)), fill = sexo)) +
    geom_bar() +
    scale_fill_discrete(type = c('blue', 'red')) +
    labs(
        x = 'cabelos',
        y = NULL
    ) +
    coord_flip()
```



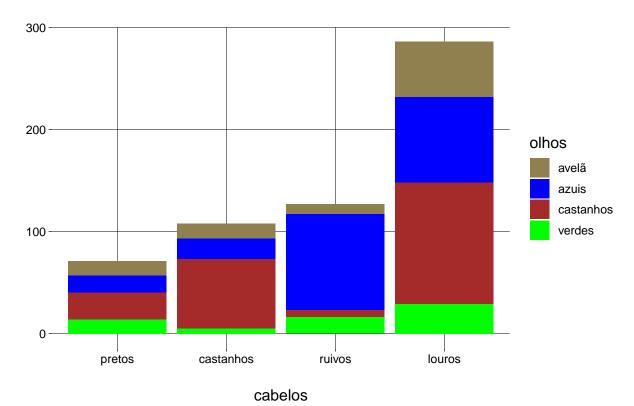
- Você consegue dizer se há mais homens ou mulheres com cabelos pretos? E castanhos? E ruivos?
- Se posicionarmos as barras lado a lado, fica mais fácil responder.
- Usamos o argumento position = 'dodge' de geom\_bar. "Dodge" significa "esquivar-se", em inglês.

```
df %>%
  ggplot(aes(x = fct_rev(fct_infreq(cabelos)), fill = sexo)) +
  geom_bar(position = 'dodge') +
  labs(
    x = 'cabelos',
    y = NULL
  ) +
  scale_fill_discrete(type = c('blue', 'red'))
```



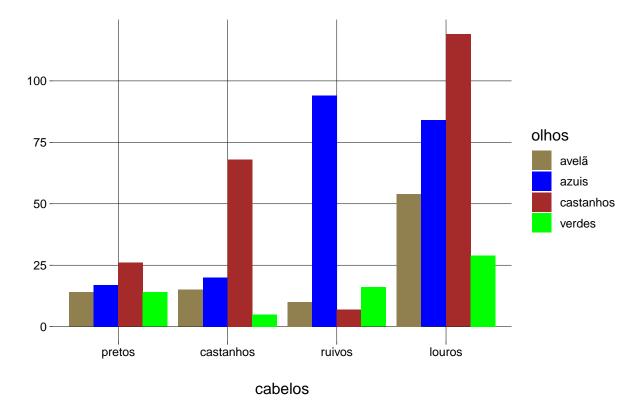
• Agora vamos examinar a relação entre as cores dos olhos e as cores dos cabelos:

```
df %>%
  ggplot(aes(x = fct_rev(fct_infreq(cabelos)), fill = olhos)) +
  geom_bar() +
  scale_fill_discrete(
    type = c('#908050', 'blue', 'brown', 'green')
  ) +
  labs(
    x = 'cabelos',
    y = NULL
  )
```



• Ou, com barras lado a lado:

```
df %>%
  ggplot(aes(x = fct_rev(fct_infreq(cabelos)), fill = olhos)) +
  geom_bar(position = 'dodge') +
  scale_fill_discrete(
    type = c('#908050', 'blue', 'brown', 'green')
  ) +
  labs(
    x = 'cabelos',
    y = NULL
  )
```

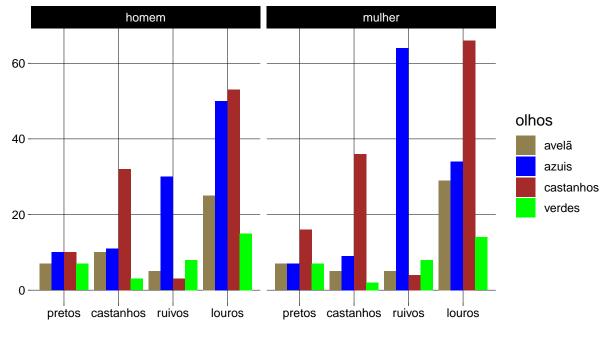


- Observações e perguntas:
  - 1. Há mais pessoas louras de olhos castanhos do que louras de olhos azuis. O esperado não seria mais pessoas louras de olhos azuis? Pessoas louras de olhos castanhos pintaram os cabelos?
  - 2. Há muito mais ruivos de olhos azuis do que ruivos de olhos verdes. Não deveria ser o contrário? Também são pessoas que pintaram os cabelos de ruivo? Ou houve erro no registro das cores dos olhos?
- Para incluir o sexo, podemos facetar o gráfico. Usando facet\_wrap¹, geramos dois subgráficos lado a lado:

```
df %>%
  ggplot(aes(x = fct_rev(fct_infreq(cabelos)), fill = olhos)) +
    geom_bar(position = 'dodge') +
    scale_fill_discrete(type = c('#908050', 'blue', 'brown', 'green')) +
    facet_wrap(~sexo) +
    labs(
        title = 'Cores de cabelos e olhos por sexo',
        y = NULL,
        x = 'cabelos'
    )
```

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>O nome da variável segundo a qual facetar deve aparecer depois de um ~.

### Cores de cabelos e olhos por sexo

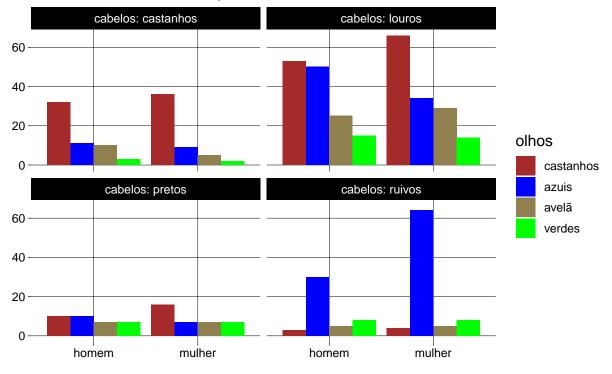


#### cabelos

- Se a quantidade grande de pessoas louras de olhos castanhos (em comparação com pessoas louras de olhos azuis) for por causa da pintura de cabelos, então o gráfico acima mostra que as mulheres pintam os cabelos de louro com mais frequência do que os homens.
- Quando facetamos por cor de cabelos, também podemos observar as mesmas diferenças entre homens e mulheres:

```
df %>%
  ggplot(aes(x = sexo, fill = fct_infreq(olhos))) +
   geom_bar(position = 'dodge') +
   facet_wrap(~cabelos, labeller = label_both) +
   scale_fill_discrete(type = c('brown', 'blue', '#908050', 'green')) +
   labs(
        x = NULL,
        y = NULL,
        fill = 'olhos',
        title = 'Cor dos olhos e sexo por cor dos cabelos'
)
```

## Cor dos olhos e sexo por cor dos cabelos



#### 5.4.3

### Data frame já contendo os totais

- Você percebeu que geom\_bar analisa o data frame e calcula as frequências necessárias para construir o gráfico.
- Em algumas situações, <mark>o *data frame* já contém as frequências</mark> (em vez de conter uma linha por indivíduo).
- Vamos usar count para criar um data frame assim:

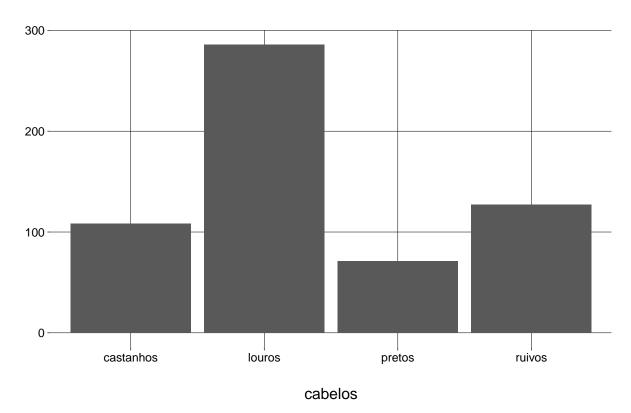
```
df_tot <- df %>%
  count(sexo, cabelos, olhos)

df_tot
```

```
## # A tibble: 32 x 4
##
     sexo cabelos
                     olhos
                                    n
##
     <chr> <chr>
                     <chr>
                                <int>
## 1 homem castanhos avelã
                                   10
## 2 homem castanhos azuis
                                   11
## 3 homem castanhos castanhos
                                   32
## 4 homem castanhos verdes
                                    3
## 5 homem louros
                     avelã
                                   25
## 6 homem louros
                     azuis
                                   50
## # ... with 26 more rows
```

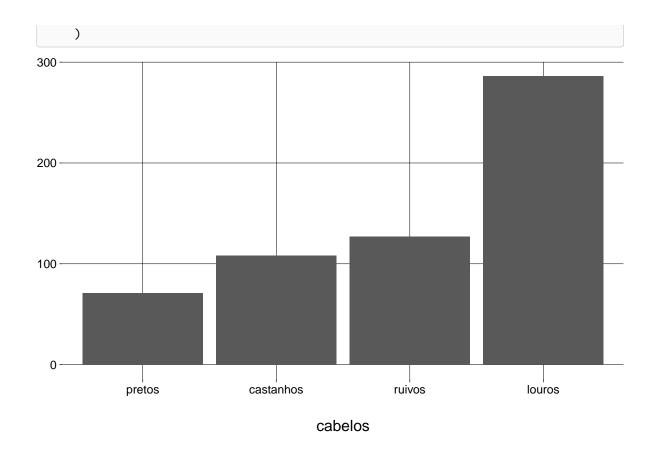
- Para 4 cores de cabelo, 4 cores de olhos, e 2 sexos, são 32 combinações possíveis.
- Com este *data frame*, podemos gerar todos os gráficos anteriores usando geom\_col no lugar de geom\_bar. Por exemplo:

```
df_tot %>%
  ggplot(aes(x = cabelos, y = n)) +
    geom_col() +
    labs(
        y = NULL
    )
```



- Com  $geom\_col$ , precisamos passar a estética y (no nosso exemplo, a variável n, que contém as frequências).
- Para ordenar as barras, usamos a função fct\_reorder, que ordena os níveis de um fator (cabelos) de acordo com o resultado de uma função (sum) aplicada sobre os valores de outra variável (n):

```
df_tot %>%
  ggplot(aes(x = fct_reorder(cabelos, n, sum), y = n)) +
  geom_col() +
  labs(
    x = 'cabelos',
    y = NULL
```



5.5

# Gráficos de linha e séries temporais

5.5.1 \_\_\_\_\_

### Conjunto de dados

• O R tem uma matriz com as quantidades de telefones em várias regiões do mundo ao longo de vários anos:

```
WorldPhones
##
       N.Amer Europe Asia S.Amer Oceania Africa Mid.Amer
## 1951 45939 21574 2876
                                             89
                                                     555
                            1815
                                    1646
## 1956 60423 29990 4708
                            2568
                                    2366
                                           1411
                                                     733
## 1957 64721 32510 5230
                            2695
                                    2526
                                                     773
                                           1546
## 1958 68484 35218 6662
                                    2691
                                           1663
                                                     836
                            2845
       71799 37598 6856
## 1959
                            3000
                                    2868
                                           1769
                                                     911
## 1960 76036 40341 8220
                                    3054
                                           1905
                                                     1008
                            3145
## 1961 79831 43173 9053
                            3338
                                    3224
                                           2005
                                                     1076
```

- Os números representam milhares.
- Os números dos anos são os nomes das linhas da matriz.

• Vamos transformar esta matriz em uma tibble:

```
fones <- WorldPhones %>%
  as_tibble(rownames = 'Ano') %>%
  mutate(Ano = as.numeric(Ano))

fones
```

```
## # A tibble: 7 x 8
##
      Ano N.Amer Europe Asia S.Amer Oceania Africa Mid.Amer
##
    <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <
                                     <dbl> <dbl>
                                                    <dbl>
## 1 1951 45939 21574 2876
                              1815
                                     1646
                                                     555
                                              89
## 2 1956 60423 29990 4708
                              2568
                                     2366
                                            1411
                                                     733
## 3 1957 64721 32510 5230
                              2695
                                     2526
                                                     773
                                            1546
## 4 1958 68484 35218 6662 2845
                                     2691
                                            1663
                                                     836
                              3000
## 5 1959 71799 37598 6856
                                     2868
                                            1769
                                                     911
## 6 1960 76036 40341 8220 3145
                                     3054
                                            1905
                                                    1008
## # ... with 1 more row
```

- Esta tibble não está no formato tidy. Queremos que cada linha corresponda a uma observação, contendo
  - Ano,
  - Região,
  - Quantidade de telefones.
- Usamos a função pivot\_longer para mudar o formato da tibble:

```
fones_long <- fones %>%
  pivot_longer(
    cols = -Ano,
    names_to = 'Região',
    values_to = 'n'
)

fones_long
```

```
## # A tibble: 49 x 3
##
      Ano Região
                      n
     <dbl> <chr>
##
                   <dbl>
## 1 1951 N.Amer 45939
## 2 1951 Europe
                  21574
## 3 1951 Asia
                    2876
## 4 1951 S.Amer
                   1815
## 5 1951 Oceania 1646
## 6 1951 Africa
## # ... with 43 more rows
```

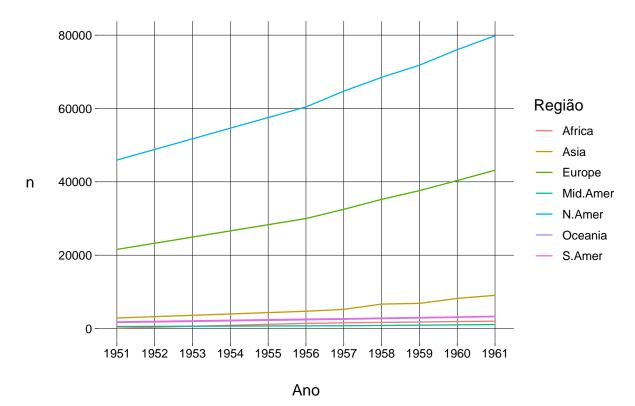
• Confira: antes, tínhamos 7 anos, com 7 quantidades por ano, uma quantidade por região. Eram 49 quantidades. Agora temos uma *tibble* de 49 linhas.

#### 5.5.2 \_\_\_\_

### Gerando gráficos de linha

• A geometria geom\_line gera gráficos de linha. Perceba como geramos uma linha por região:

```
fones_long %>%
  ggplot(aes(x = Ano, y = n, color = Região)) +
   geom_line() +
  scale_x_continuous(breaks = 1951:1961)
```

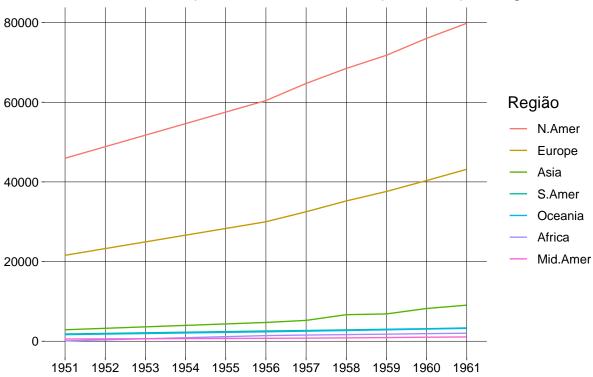


 Embora a legenda associe uma cor a cada região, a leitura seria mais fácil se a ordem das regiões na legenda coincidisse com a posição das linhas na borda direita da grade:

```
fones_long %>%
   ggplot(
    aes(
        x = Ano,
        y = n,
```

```
color = fct_rev(fct_reorder(Região, n, max))
)
) +
  geom_line() +
  scale_x_continuous(breaks = 1951:1961) +
  labs(
    color = 'Região',
    y = '',
    x = NULL,
    title = 'Quantidade de aparelhos de telefone por ano, por região'
)
```

# Quantidade de aparelhos de telefone por ano, por região



 Parece que está faltando uma linha, mas o que acontece é que as quantidades da América do Sul e da Oceania são bem parecidas:

```
fones_long %>%
  filter(Região %in% c('S.Amer', 'Oceania')) %>%
  ggplot(
  aes(
    x = Ano,
    y = n,
    color = fct_rev(fct_reorder(Região, n, max))
  )
) +
```

• Estamos tratando estes dados como simples números, mas, na verdade, este conjunto de dados é uma série temporal (*time series*).

Ano

1956 1957 1958 1959 1960 1961

- R tem todo um conjunto de funções para tratar séries temporais, calcular tendências, achar padrões cíclicos, fazer estimativas, e gerar gráficos específicos, entre outras coisas.
- Mas não vamos falar mais sobre séries temporais aqui.

1955

1952 1953 1954

 O pacote tsibble oferece maneiras de trabalhar com séries temporais de maneira tidy. Você pode ler a documentação do pacote entrando

```
library(tsibble)
?`tsibble-package`
```

5.6
Exercícios
5.6.1
O bigode dos onívoros
• Examine o <i>data frame</i> sono para descobrir o que houve com o bigode superior do <i>boxplot</i> dos onívoros neste gráfico.
5.6.2
Usando geom_col
• Use geom_col para reproduzir, a partir do <i>data frame</i> df_tot, todos os gráficos que foram gerados com geom_bar na seção Gerando gráficos de barras.
5.6.3
5.7
Referências sobre visualização e R



Busque mais informações sobre os pacotes tidyverse e ggplot2 nas referências recomendadas.

# CAPÍTULO 6

			ı
м	ed	IC	ตร

6.1 \_\_\_\_\_

Vídeo

https://youtu.be/C96MOP4YlaY

6.2 \_\_\_\_

Medidas de centralidade

**6.2.1** \_

Média

• A média de uma população é escrita como  $\mu$ , e é definida como

$$\mu = \frac{\sum x}{N}$$

- $\sum x$  é a soma de todos os dados x da população.
- N é a quantidade de elementos na população.
- A média de uma amostra é escrita como  $\bar{x}$ , e é definida como:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

- $\sum x$  é a soma de todos os dados x da amostra.
- n é a quantidade de elementos na amostra.
- O cálculo é essencialmente o mesmo. Só mudam os símbolos: N versus n, e  $\mu$  versus  $\bar{x}$ .

#### 6.2.1.1

### Exemplo

• Idades dos alunos de uma turma:

```
idades <- c(
20, 20, 20, 20, 20, 21, 21, 21, 21, 21, 22, 22, 22, 23, 23, 23, 24, 24, 65
)
```

• Média  $\frac{\text{com}}{\text{com}}$  o velhinho de 65 anos:

```
mean(idades)
```

## [1] 23,75

Média sem o velhinho:

```
mean(idades[-length(idades)])
```

## [1] 21,57895

#### 6.2.2

#### Mediana

- Já aprendemos sobre a mediana na seção sobre boxplots.
- A idéia é que, depois de ordenar os dados, 50% dos dados estarão à esquerda da mediana, e 50% à direita.
- A mediana não é tão sensível a *outliers* quanto à média.

#### 6.2.2.1 \_

### Exemplo

• Mediana com o velhinho:

```
median(idades)
```

```
## [1] 21,5
```

Mediana sem o velhinho:

```
median(idades[-length(idades)])
## [1] 21
```

#### 6.2.3

#### Moda

- A moda é o valor mais frequente do conjunto de dados.
- Pode haver mais de uma moda.
- Por que não existe uma função para a moda em R base? Porque, por incrível que pareça, é complicado definir a moda de forma a conseguir resultados interessantes.
- Vamos definir um conjunto de 1000 valores numéricos distribuídos normalmente<sup>1</sup>, com média igual a 5 e desvio padrão<sup>2</sup> igual a 2:

```
normal <- rnorm(1000, mean = 5, sd = 2)
```

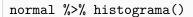
• Eis uma função para retornar um histograma com divisões nos valores inteiros:

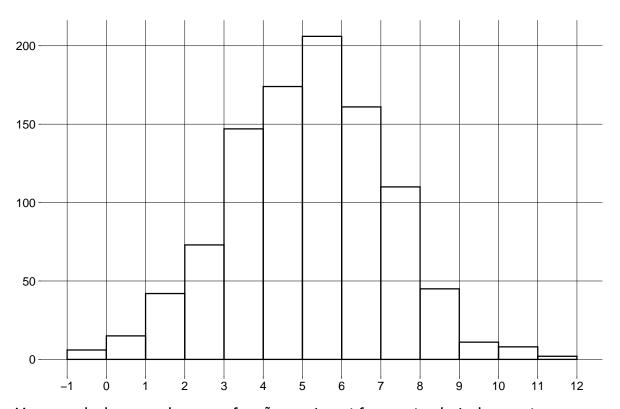
```
histograma <- function(
  dados,
 divisoes = floor(min(dados)):ceiling(max(dados))
) {
  dados %>%
   as_tibble() %>%
   ggplot(aes(x = value)) +
      geom_histogram(
        breaks = divisoes,
        color = 'black',
        fill = '#00000000'
      scale_x_continuous(breaks = divisoes) +
      labs(
        y = NULL,
        x = NULL
}
```

• O histograma dos nossos dados é

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Mais sobre a distribuição normal no capítulo ???.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Mais sobre o desvio padrão daqui a pouco.





• Vamos calcular a moda com a função mfv (most frequent value), do pacote modeest:

```
# Pacote com funções para calcular modas
library(modeest)
## Registered S3 method overwritten by 'rmutil':
##
    method
                   from
##
    print.response httr
# Por causa de um bug na função mfv,
 # precisamos de números com ponto decimal
 # (em vez de vírgula):
options(OutDec = '.')
mfv(normal)
##
      [1] -0.8045187439 -0.4419790783 -0.4266728682 -0.1389886850
##
      [5] -0.0863707930 -0.0422681595 0.0007677202 0.0267885836
##
      [9] 0.2759042287 0.3856376729 0.5915596078 0.5976605059
##
     [13] 0.6610369573 0.7213494732 0.7723116317 0.7808175928
##
     Γ17]
          0.8646089657 0.8847235214 0.8936661732 0.9179188512
##
     [21] 0.9390891982 1.0337889488 1.1330756691 1.1342620027
##
     [25]
          1.1942482944 1.1943330450 1.2133350439 1.2466394256
##
     [29]
          1.3009801589 1.3459529282 1.3486003170 1.3733789729
```

```
##
     [33]
           1.3894007277
                           1.3963250506
                                         1.4155000329
                                                        1.4357679215
##
     [37]
           1.4567332116
                           1.4802391853
                                         1.5037205725
                                                         1.5431483619
##
     [41]
           1.5507540950
                                         1.6047012996
                           1.5665819203
                                                         1.6142483665
##
     [45]
           1.6769931360
                           1.6785947292
                                         1.6830441273
                                                         1.6853658276
##
     [49]
           1.7109151779
                           1.7189421404
                                          1.7374158041
                                                         1.7625264785
##
     [53]
            1.7678981052
                           1.7777819056
                                          1.7806606935
                                                         1.7939747728
##
     [57]
           1.8207800425
                           1.8306691879
                                          1.8450565064
                                                         1.9238534338
##
     [61]
           1.9583408339
                           1.9812375373
                                          1.9945898213
                                                         2.0083788825
##
     [65]
           2.0407566539
                          2.1253164241
                                         2.1277962886
                                                         2.1775871207
##
     [69]
           2.1870542830
                          2.1936717674
                                         2.1976131803
                                                         2.1991128830
##
     [73]
           2.2023597807
                           2.2105446163
                                          2.2402312692
                                                         2.2650253983
##
     [77]
           2.2754984092
                           2.2829019223
                                         2.2883812696
                                                         2.2908645847
##
     [81]
                           2.3095872786
                                          2.3113221180
           2.3047585314
                                                         2.3228404223
##
     [85]
           2.3348061822
                           2.3376004975
                                          2.3397817912
                                                         2.3589906631
##
     [89]
           2.3691192262
                           2.3750753793
                                          2.4046861250
                                                         2.4218344954
                          2.4374269492
                                         2.4458710611
##
     [93]
           2.4221827146
                                                         2.4567450653
##
     [97]
           2.4703020372
                           2.4809553689
                                         2.4971110001
                                                         2.5081999697
##
    [101]
                          2.5541707905
                                         2.5552046171
           2.5409177439
                                                         2.5646992496
    [105]
           2.5665621135
                           2.5713452836
                                         2.6060889291
##
                                                         2.6102579189
##
    [109]
           2.6345789462
                          2.6666304715
                                          2.7083390964
                                                         2.7358271317
##
    [113]
           2.7469480095
                           2.7519617917
                                          2.7699397264
                                                         2.7726077656
##
    [117]
           2.8054356918
                          2.8102460011
                                          2.8127326386
                                                         2.8189896723
##
    [121]
           2.8349143502
                          2.8722231897
                                          2.8834252844
                                                         2.8875620756
##
    [125]
           2.9069716541
                           2.9086408934
                                         2.9095829706
                                                         2.9131999156
##
    [129]
           2.9256168045
                          2.9257430402
                                         2.9326501678
                                                         2.9352130452
##
    [133]
           2.9565887908
                           2.9615897626
                                          2.9773891932
                                                         2.9798322529
##
    [137]
           3.0062819436
                           3.0201036947
                                          3.0245726725
                                                         3.0326169235
##
    [141]
           3.0439648243
                           3.0480781756
                                          3.0487707207
                                                         3.0535562948
##
    [145]
           3.0588964752
                           3.0624392909
                                          3.0676719562
                                                         3.0729096197
##
    [149]
           3.0739295781
                           3.0793000662
                                         3.0795705662
                                                         3.0975900496
##
    [153]
           3.0993399577
                           3.1166060544
                                         3.1214114207
                                                         3.1332779842
##
    [157]
           3.1367105016
                           3.1399630222
                                         3.1551435226
                                                         3.1617256273
##
    [161]
           3.1629366410
                           3.1696143734
                                         3.2004664169
                                                         3.2058776521
    [165]
                          3.2282001179
                                         3.2429670573
##
           3.2276970738
                                                         3.2435846138
##
    [169]
           3.2453580383
                           3.2466718041
                                         3.2544765879
                                                         3.2635644521
##
    [173]
           3.2724817220
                           3.2868842348
                                         3.2876726135
                                                         3.3155720538
##
    [177]
           3.3202228359
                           3.3613833645
                                          3.3615251221
                                                         3.3647648146
##
    Γ181]
           3.3670288610
                           3.3733769936
                                         3.3773750074
                                                         3.3797359002
##
    [185]
           3.3827809720
                           3.3986007005
                                         3.3994107657
                                                         3.4025530038
##
    [189]
           3.4038265537
                           3.4074840588
                                         3.4097601488
                                                         3.4124393874
    [193]
                           3.4397869080
                                         3.4447090223
##
           3.4153331163
                                                         3.4467104911
##
    [197]
           3.4475605201
                           3.4576035423
                                         3.4625779884
                                                         3.4647748055
    [201]
           3.4714071932
                           3.4907048236
                                         3.4912755809
##
                                                         3.5039019914
##
    [205]
           3.5052503906
                           3.5177097141
                                          3.5209133044
                                                         3.5368779113
##
    [209]
           3.5370320544
                           3.5539935700
                                         3.5601824562
                                                         3.5698340750
                                          3.5776686058
##
    [213]
           3.5707943408
                           3.5740494785
                                                         3.5847453198
##
    [217]
           3.5867754511
                           3.5949935575
                                          3.5953125219
                                                         3.5984025995
##
    [221]
                          3.6061823711
                                         3.6152624275
           3.5993409233
                                                        3.6155020810
```

```
3.6487744685
    [225]
           3.6369112588
                          3.6472737444
##
                                                         3.6527683086
    [229]
##
           3.6599940951
                           3.6608108254
                                          3.6857597942
                                                         3.6907644463
##
    [233]
                           3.6914452129
                                          3.7007271797
                                                         3.7017534658
           3.6908991800
    [237]
##
           3.7097271637
                           3.7144065212
                                          3.7164977931
                                                         3.7257109245
##
    [241]
           3.7319545796
                           3.7358572727
                                          3.7402816437
                                                         3.7406844373
##
    [245]
           3.7673976748
                           3.7713270077
                                          3.7770008268
                                                         3.7773572250
##
    [249]
           3.7820232965
                           3.7869984875
                                          3.7888410099
                                                         3.7926930631
##
    [253]
           3.8016948938
                           3.8266274589
                                          3.8550842011
                                                         3.8571571480
##
    [257]
           3.8603414104
                           3.8609133149
                                          3.8676802711
                                                         3.8740143088
##
    [261]
           3.8857990664
                           3.8870929946
                                          3.8915903365
                                                         3.8935423053
##
    [265]
           3.8972389285
                           3.9033573947
                                                         3.9237900627
                                          3.9181688296
##
    [269]
           3.9268120766
                           3.9314988043
                                          3.9384119527
                                                         3.9386597021
    [273]
##
           3.9463806414
                           3.9477048389
                                          3.9557749111
                                                         3.9567269183
##
    [277]
           3.9673441808
                           3.9754754418
                                          3.9769756381
                                                         3.9796526725
##
    [281]
           3.9797829090
                           3.9858945234
                                          3.9959045854
                                                         4.0071933046
    [285]
##
           4.0091215521
                           4.0164595794
                                          4.0239499345
                                                         4.0314913849
##
    [289]
           4.0316493033
                          4.0495948683
                                          4.0525042812
                                                         4.0580787921
##
    [293]
                                          4.0637050029
           4.0591543551
                           4.0594606903
                                                         4.0640132929
    [297]
           4.0880513642
                                          4.0958139919
##
                          4.0915656171
                                                         4.1030903052
    [301]
                          4.1042715247
                                          4.1047305608
                                                         4.1066513509
##
           4.1038140058
##
    [305]
           4.1163480191
                           4.1173299357
                                          4.1293086199
                                                         4.1308330712
##
    [309]
           4.1315862532
                          4.1467112107
                                          4.1631468523
                                                         4.1645030801
##
    [313]
           4.1659141261
                          4.1695656445
                                          4.1880028390
                                                         4.2030937199
##
    [317]
           4.2123459655
                          4.2182708750
                                          4.2278931694
                                                         4.2323228570
##
    [321]
                          4.2371610796
                                          4.2453140925
                                                         4.2543928679
           4.2355584938
    [325]
##
           4.2561609878
                          4.2598000365
                                          4.2612060959
                                                         4.2645553434
    [329]
##
           4.2751276636
                          4.2800906839
                                          4.2870838539
                                                         4.2898261127
##
    [333]
           4.2898506283
                          4.2928167817
                                          4.3004245020
                                                         4.3074777788
##
    [337]
           4.3113244912
                          4.3204989705
                                          4.3271371904
                                                         4.3280121289
##
    [341]
           4.3380783920
                          4.3410797570
                                          4.3421277036
                                                         4.3449168757
    [345]
                                          4.3760222079
##
           4.3482276468
                          4.3582023041
                                                         4.3963093184
##
    [349]
           4.4020224322
                          4.4034633796
                                          4.4080961715
                                                         4.4095544011
##
    [353]
           4.4380551451
                          4.4448406638
                                          4.4605032257
                                                         4.4659718661
##
    [357]
           4.4686948239
                          4.4751565776
                                          4.4803716163
                                                         4.4857500063
##
    [361]
                           4.4909883940
                                          4.4932747893
                                                         4.4967935581
           4.4891133098
##
    [365]
           4.4976163038
                           4.5019860388
                                          4.5127803994
                                                         4.5132432445
##
    [369]
           4.5410483722
                          4.5419084080
                                          4.5425909843
                                                         4.5454662648
##
    [373]
                           4.5509654142
                                                         4.5595695262
           4.5484558311
                                          4.5513178190
##
    [377]
           4.5635249256
                          4.5644546404
                                          4.5678421362
                                                         4.5788393267
##
    [381]
           4.5799041910
                           4.5864473908
                                          4.5867127825
                                                         4.5899892241
    [385]
##
           4.5904658500
                          4.5984899721
                                          4.6017010609
                                                         4.6091116968
##
    [389]
           4.6198836038
                          4.6273517723
                                          4.6332476156
                                                         4.6367822874
    [393]
                                          4.6723788993
##
           4.6591530885
                           4.6605877890
                                                         4.6896524064
##
    [397]
           4.7200357623
                          4.7204958871
                                          4.7423980406
                                                         4.7458208961
##
    [401]
           4.7492001167
                           4.7494024079
                                          4.7497512708
                                                         4.7517991699
##
    [405]
           4.7664035987
                           4.7679566029
                                          4.7902944454
                                                         4.7999095001
##
    [409]
           4.8113767784
                          4.8122741592
                                          4.8154894347
                                                         4.8177499285
##
    [413]
           4.8233293929
                          4.8398174340
                                         4.8516714335
                                                        4.8527819547
```

```
Γ417]
           4.8644704006
                          4.8674685589
                                         4.8683109422
##
                                                        4.8688458914
    [421]
##
           4.8701657370
                          4.8709838855
                                         4.8769240087
                                                         4.8776429213
##
    [425]
                          4.8844647248
                                         4.8857567353
           4.8825636762
                                                        4.8871360883
    [429]
##
           4.8938387030
                          4.8963927726
                                         4.8969125849
                                                        4.8997408184
##
    [433]
           4.9015879570
                          4.9154410153
                                         4.9186282001
                                                         4.9209270630
    [437]
##
           4.9238694270
                          4.9257061535
                                         4.9265549674
                                                        4.9338088593
##
    [441]
           4.9387338453
                          4.9391190628
                                          4.9403485114
                                                         4.9415879919
##
    [445]
           4.9430950677
                          4.9462156105
                                         4.9471242575
                                                         4.9485303482
##
    [449]
           4.9546442287
                          4.9548209639
                                         4.9809553325
                                                        4.9830599608
##
    [453]
           4.9879508563
                          4.9901173330
                                         4.9915726196
                                                        4.9919937791
##
    [457]
           4.9949737850
                          5.0053699418
                                         5.0073507606
                                                         5.0126074135
##
    [461]
           5.0191403482
                          5.0215214709
                                          5.0267157775
                                                         5.0280272023
##
    [465]
           5.0297086910
                          5.0333577147
                                         5.0381501100
                                                         5.0416004837
##
    [469]
           5.0449125881
                           5.0479678793
                                         5.0482579957
                                                         5.0500108779
##
    [473]
           5.0649840843
                          5.0695055715
                                         5.0731450120
                                                         5.0731858973
    [477]
##
           5.0769351706
                          5.0797688381
                                         5.0807694067
                                                         5.0838285418
##
    [481]
           5.0862629805
                          5.0904283237
                                         5.0923213823
                                                         5.0947403556
##
    [485]
                                         5.1032372436
           5.0988805462
                          5.1016917124
                                                         5.1038823146
    [489]
                          5.1170972584
                                         5.1266518765
##
           5.1092274100
                                                         5.1424430442
    [493]
                          5.1549960702
                                         5.1590151938
                                                         5.1612230742
##
           5.1495646104
##
    [497]
           5.1612434308
                          5.1641662011
                                         5.1664719943
                                                         5.1675820813
##
    [501]
           5.1698829099
                          5.1786833449
                                         5.1880819732
                                                         5.1928018686
##
    [505]
           5.2019228922
                          5.2034914304
                                         5.2092989627
                                                         5.2115083443
##
    [509]
           5.2195675790
                          5.2255245217
                                          5.2268920670
                                                         5.2299405955
##
    [513]
           5.2335770003
                          5.2373668464
                                         5.2382460454
                                                         5.2390234828
##
    [517]
           5.2408890925
                          5.2477129212
                                         5.2612033264
                                                         5.2729429843
##
    [521]
           5.2779615772
                          5.2784345847
                                          5.2816827666
                                                         5.2894389408
##
    [525]
           5.2920608587
                          5.3030618807
                                          5.3037483561
                                                         5.3054471034
##
    [529]
           5.3111094751
                          5.3121087328
                                         5.3164665264
                                                         5.3171208059
##
    [533]
           5.3231269255
                          5.3235582551
                                         5.3297024029
                                                         5.3312171545
    [537]
##
           5.3326985298
                          5.3381272612
                                         5.3402452933
                                                         5.3428491363
##
    [541]
           5.3447469850
                          5.3461580257
                                         5.3492881811
                                                         5.3615190293
##
    [545]
           5.3640458923
                          5.3758353847
                                         5.3802152142
                                                         5.3814083432
    [549]
##
           5.3825652117
                          5.3859711958
                                         5.3875456196
                                                         5.3930728098
##
    [553]
           5.3964156334
                          5.3968285803
                                         5.4091214659
                                                         5.4270785406
##
    [557]
           5.4274622356
                          5.4402229240
                                         5.4405141792
                                                         5.4412478251
##
    [561]
           5.4412914387
                          5.4457404283
                                         5.4707829080
                                                         5.4721321921
##
    [565]
                          5.4909823289
                                         5.4980790737
                                                         5.5013554165
           5.4851015780
##
    [569]
           5.5021791472
                          5.5040517869
                                         5.5089771138
                                                         5.5113718734
##
    [573]
           5.5219394624
                          5.5308335186
                                         5.5427497952
                                                         5.5441912299
##
    [577]
           5.5517530704
                          5.5545104650
                                         5.5555926916
                                                         5.5589564228
##
    [581]
           5.5595311994
                          5.5632500641
                                          5.5690475027
                                                         5.5695563030
##
    [585]
                          5.5871232873
           5.5837244630
                                         5.6003498502
                                                         5.6057050633
##
    [589]
           5.6067731973
                          5.6083112817
                                          5.6133502549
                                                         5.6168276934
##
    [593]
           5.6260342469
                          5.6281359823
                                         5.6302301781
                                                         5.6313511074
##
    [597]
           5.6316777634
                          5.6332478380
                                          5.6354619095
                                                         5.6397376053
##
    [601]
           5.6474883984
                          5.6553761334
                                          5.6566957763
                                                         5.6579671900
##
    [605]
                          5.6647801630
                                         5.6680905907
                                                         5.6754483228
           5.6631491152
```

```
[609]
                                         5.7058984611
                                                         5.7097850078
##
           5.6886739856
                          5.6988831344
##
    [613]
           5.7133775610
                          5.7160013170
                                          5.7265113308
                                                         5.7266007737
##
    [617]
                                          5.7384145849
                                                         5.7606411093
           5.7277835428
                          5.7336536555
    [621]
##
           5.7711818829
                          5.7735314139
                                          5.7811816607
                                                         5.7946207599
##
    [625]
           5.8005266613
                           5.8020648104
                                          5.8024516341
                                                         5.8045617003
    [629]
##
           5.8049562501
                           5.8049818463
                                          5.8219253480
                                                         5.8320730735
##
    [633]
           5.8320774586
                           5.8322639915
                                          5.8335405241
                                                         5.8435953500
##
    [637]
           5.8448190530
                          5.8453855377
                                          5.8499158357
                                                         5.8547981695
##
    [641]
           5.8554368210
                           5.8571408875
                                          5.8704829552
                                                         5.8717287300
##
    [645]
           5.8757295155
                          5.8769657840
                                          5.8797226197
                                                         5.8860573158
##
    [649]
                                          5.9047891856
                                                         5.9062781083
           5.8923034983
                           5.9019551889
##
    [653]
           5.9068165883
                           5.9085417339
                                          5.9204558392
                                                         5.9240553035
                                          5.9532885236
##
    [657]
           5.9336742054
                           5.9483997353
                                                         5.9584329887
##
    [661]
           5.9743438889
                           5.9864499709
                                          5.9932577748
                                                         6.0021331553
##
    [665]
           6.0082765580
                           6.0183475043
                                          6.0254853237
                                                         6.0258838773
##
    [669]
           6.0262009520
                           6.0290327326
                                          6.0357126187
                                                         6.0394440199
##
    [673]
           6.0400092018
                           6.0443803670
                                          6.0469264769
                                                         6.0479992641
##
    [677]
                                          6.0820718092
           6.0620202468
                           6.0763235328
                                                         6.0823234628
    [681]
                           6.0958877598
##
           6.0904162531
                                          6.1087001468
                                                         6.1182807575
    [685]
           6.1242293354
                           6.1266771916
                                          6.1404453082
                                                         6.1406129034
##
##
    [689]
           6.1456206209
                           6.1465110258
                                          6.1514585786
                                                         6.1572741895
##
    [693]
           6.1688193679
                           6.1835132319
                                          6.1890378850
                                                         6.1902551646
##
    [697]
           6.2003361488
                           6.2077336545
                                          6.2081862023
                                                         6.2131778252
    [701]
##
           6.2242381421
                           6.2246893372
                                          6.2269094250
                                                         6.2276871207
##
    [705]
                           6.2294222655
                                          6.2350036465
                                                         6.2403179612
           6.2289394185
    [709]
##
           6.2411042464
                           6.2512202707
                                          6.2518164019
                                                         6.2524553439
##
    [713]
           6.2589970125
                           6.2628593409
                                          6.2648304051
                                                         6.2671878221
##
    [717]
           6.2814066504
                           6.2842299989
                                          6.2947685149
                                                         6.2969670911
    [721]
##
           6.2975826093
                           6.3197549502
                                          6.3222877289
                                                         6.3636159901
##
    [725]
           6.3685220292
                           6.3709232104
                                          6.3718692997
                                                         6.3740677555
    [729]
##
           6.3750023715
                           6.3770236181
                                          6.3829328460
                                                         6.3910205708
##
    [733]
           6.3941981462
                           6.4035973592
                                          6.4261046952
                                                         6.4298148306
##
    [737]
           6.4358659966
                           6.4403072234
                                          6.4475115434
                                                         6.4674270424
    [741]
##
           6.4761489574
                           6.4851459023
                                          6.5046485401
                                                         6.5082607188
##
    [745]
           6.5093926869
                           6.5140208719
                                          6.5231638989
                                                         6.5271034272
##
    [749]
           6.5276692244
                           6.5320287357
                                          6.5407484190
                                                         6.5447406290
##
    [753]
           6.5581194922
                           6.5650602184
                                          6.5660333853
                                                         6.5731225383
##
    [757]
                           6.5926936703
                                          6.5933912946
                                                         6.5999527130
           6.5882124657
##
    [761]
           6.6062247621
                           6.6077950015
                                          6.6081169255
                                                         6.6097681963
##
    [765]
           6.6141077140
                           6.6153673131
                                          6.6173652148
                                                         6.6178310123
##
    [769]
           6.6191940723
                           6.6241427168
                                          6.6250301643
                                                         6.6271001270
##
    [773]
           6.6291220346
                           6.6463554639
                                          6.6561329142
                                                         6.6684364487
    [777]
##
           6.6690764852
                           6.6706654962
                                          6.6810682805
                                                         6.6843744412
##
    [781]
           6.6880652284
                           6.6925021454
                                          6.6934250848
                                                         6.7186272008
##
    [785]
           6.7375604226
                           6.7395404648
                                          6.7413006766
                                                         6.7477524407
##
    [789]
           6.7505483500
                           6.7508468117
                                          6.7528328828
                                                         6.7561269184
##
    [793]
           6.7592606723
                           6.7619871044
                                          6.7691284430
                                                         6.7692473726
##
    [797]
                           6.7752255991
                                          6.7848985337
                                                         6.7916739553
           6.7701416095
```

```
[801]
           6.8046839997
                                         6.8089619471
##
                          6.8076185425
                                                        6.8101841578
##
    [805]
           6.8234257737
                          6.8405843379
                                         6.8681815655
                                                        6.8753072775
##
    [809]
           6.8871733036
                          6.9055051358
                                         6.9136850555
                                                        6.9150618274
##
    [813]
           6.9208174067
                          6.9298657094
                                         6.9350001733
                                                        6.9443394716
##
    [817]
           6.9526830765
                          6.9593134474
                                         6.9645323982
                                                        6.9713925753
##
    [821]
           6.984888349
                          6.9916046602
                                         6.9925600735
                                                        6.9976682046
##
    [825]
           7.0116130650
                          7.0247361068
                                         7.0251589689
                                                        7.0266576372
                          7.0596142696
##
    [829]
           7.0523802037
                                         7.0630974082
                                                        7.0745282595
##
    [833]
           7.0756554213
                          7.0912258563
                                         7.1017114382
                                                        7.1091316792
##
    [837]
           7.1148562124
                          7.1153283941
                                         7.1230275520
                                                        7.1289060551
##
    [841]
                          7.1497754927
                                         7.1568666784
                                                        7.1639759113
           7.1451508031
##
    [845]
           7.1696898540
                          7.1780373448
                                         7.1808514903
                                                        7.1816811367
                                         7.2100627855
##
    [849]
           7.1848886067
                          7.2005257827
                                                        7.2145185287
##
    [853]
           7.2284941242
                          7.2389887016
                                         7.2399442033
                                                        7.2400451744
##
    [857]
           7.2467722115
                          7.2650069015
                                         7.2652544730
                                                        7.2706262260
##
    [861]
           7.2744468007
                          7.2749384926
                                         7.2915670290
                                                        7.2959229548
##
    [865]
           7.3035301459
                          7.3108408464
                                         7.3218799466
                                                        7.3293851081
##
    [869]
                          7.3391908101
           7.3356191764
                                         7.3592138157
                                                        7.3618091063
           7.3710029122
                          7.3710963368
                                         7.3718828358
                                                        7.3827744394
##
    [873]
##
    [877]
           7.3862725088
                          7.3895498176
                                         7.4074537405
                                                        7.4108828241
##
    [881]
           7.4193135755
                          7.4208681706
                                         7.4226937763
                                                        7.4293308317
##
    [885]
           7.4350685153
                          7.4359007489
                                         7.4452870880
                                                        7.4475307959
##
    [889]
           7.4541811529
                          7.4588504967
                                         7.4612212672
                                                        7.4638522141
##
    [893]
           7.4722814781
                          7.4724958739
                                         7.4785148557
                                                        7.4789734931
##
    [897]
                          7.5097333323
                                         7.5241976521
                                                        7.5313217737
           7.5033694072
##
    [901]
           7.5360571171
                          7.5427825489
                                         7.5502023754
                                                        7.5646995412
##
    [905]
           7.5695953146
                          7.5870300475
                                         7.6006956829
                                                        7.6111639075
##
    [909]
           7.6129595826
                          7.6391391337
                                         7.6450410199
                                                        7.6473987916
##
    [913]
           7.6529377639
                          7.6801723602
                                         7.7055979028
                                                        7.7087998662
##
    [917]
           7.7349166994
                          7.7505080843
                                         7.7623173239
                                                        7.8147842393
    [921]
##
           7.8567939200
                          7.8593359555
                                         7.8680272765
                                                        7.8762901288
##
    [925]
           7.8970324309
                          7.9057599606
                                         7.9218738052
                                                        7.9329804523
##
    [929]
           7.9393745836
                          7.9489293145
                                         7.9698483809
                                                        7.9836277754
##
    [933]
           7.9857239245
                          7.9883754437
                                         8.0338321730
                                                        8.0409900454
##
    [937]
           8.0505608943
                          8.0562445960
                                         8.0573401963
                                                        8.0883135073
##
    [941]
           8.1028710832
                          8.1131104520
                                         8.1149670944
                                                        8.1165500985
##
    [945]
           8.1183691547
                          8.1497714040
                                         8.1548355393
                                                        8.1568083263
##
    [949]
           8.1659926563
                          8.1730725111
                                         8.1870019555
                                                        8.1939266527
##
    [953]
           8.2002160620
                          8.2007328457
                                         8.2157277596
                                                        8.2218999212
##
    [957]
           8.2551749785
                          8.2815664006
                                         8.3029038575
                                                        8.3158854477
                                                        8.3744881992
##
    [961]
           8.3285352847
                          8.3393714500
                                         8.3450512293
##
    [965]
           8.3970663970
                          8.4007719948
                                         8.4465155709
                                                        8.4606927340
##
    [969]
           8.4744512834
                          8.4907005938
                                         8.5835467825
                                                        8.6847341217
##
    [973]
           8.6942629063
                          8.7636919478
                                         8.7800556480
                                                        8.8226905920
##
    [977]
           8.8379813415
                          8.8914893995
                                         8.9973344210
                                                        9.1634336102
##
    [981]
           9.1738847563
                          9.1754649188
                                         9.1848644388
                                                        9.2829120890
##
    [985]
           9.3546242659
                          9.3593687565
                                         9.6622002201
                                                        9.9327748588
##
    [989]
           9.9372277431
                          9.9511269591 10.0605242602 10.0741090625
```

```
## [993] 10.1452346230 10.3080753485 10.4401740874 10.5478606354
## [997] 10.6242217756 10.9285984572 11.3228923013 11.6910893821
```

```
# Voltamos para a virgula como separador decimal:
options(OutDec = ',')
```

- · O que houve?!
- O problema é que não há valores repetidos no conjunto de dados! Por isso, todos os 1000 valores são modais.
- Uma maneira de evitar isto é definir a moda como o centro do intervalo mais curto que contém metade dos dados. Usamos a função mlv (most likely value):

```
moda <- mlv(normal, method = 'venter')
moda</pre>
```

```
## [1] 5,430854
```

• Esta moda estimada pode nem estar no conjunto de dados:

```
moda %in% normal
```

```
## [1] FALSE
```

• Mas o resultado de  ${\tt mlv}$ () é útil, pois nos diz que, embora não haja valores repetidos, valores próximos de 5 são mais frequentes, como mostra o histograma.

#### 6.2.3.1

#### Exercício

- Arrendonde os valores no vetor normal para 2 casas decimais e ache a(s) moda(s)
  - 1. com a função mfv, e
  - 2. com a função mlv, usando o método venter.

### 6.3

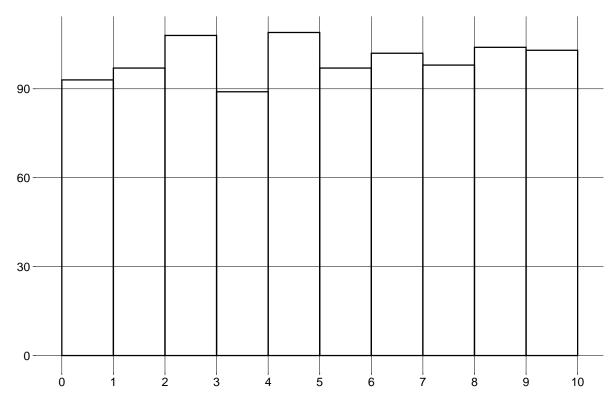
# Formas de uma distribuição

 A forma do histograma mostra aspectos importantes da distribuição de um conjunto de dados.

### Distribuição Uniforme

 Se o histograma tem todas as barras aproximadamente da mesma altura, dizemos que a distribuição é uniforme:

```
uniforme <- runif(1000, min = 0, max = 10)
histograma(uniforme)</pre>
```



A distribuição uniforme não tem moda, já que todos os valores têm aproximadamente a mesma frequência.

#### 6.3.2 \_\_\_\_

#### Simetria

- Se o histograma for simétrico (i.e., os lados esquerdo e direito são "espelhados"), dizemos que a distribuição é simétrica.
- A distribuição normal do exemplo acima é simétrica.
- A distribuição uniforme também é simétrica.
- Para distribuições simétricas, a média, a mediana e a moda (quando existe e é única) são bem próximas.

- Para a distribuição normal do exemplo:

```
mean(normal)

## [1] 5,136299

median(normal)

## [1] 5,168732

mlv(normal, method = 'venter')

## [1] 5,430854
```

- Para a distribuição uniforme do exemplo:

```
mean(uniforme)

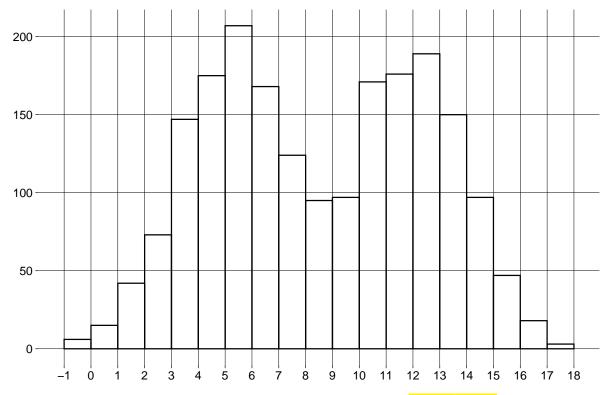
## [1] 5,066941

median(uniforme)

## [1] 5,054573
```

• Uma distribuição pode ser simétrica, mas ter duas (ou mais) modas diferentes:

```
sim2 <- rnorm(1000, mean = 12, sd = 2)
bimodal <- c(normal, sim2)
histograma(bimodal)</pre>
```



- Algumas distribuições não são simétricas, mas têm uma cauda longa à esquerda ou à direita.
- Dependendo da cauda, as distribuições são chamadas de assimétricas à esquerda ou assimétricas à direita.
- Um exemplo: receitas anuais (em milhões de dólares) de CEOs de grandes empresas:

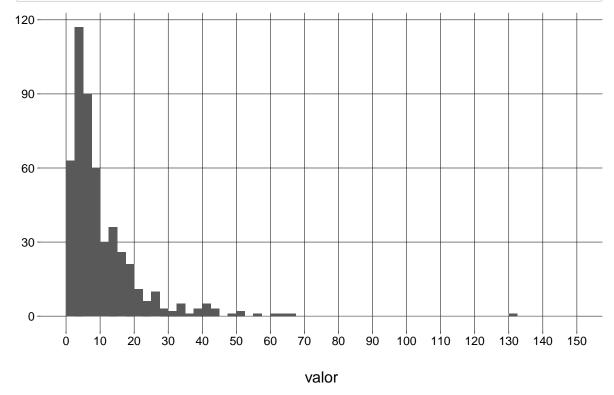
```
df <- read_csv('./data/CEO_Salary_2012.csv')</pre>
## Rows: 500 Columns: 9
## -- Column specification -
## Delimiter: ","
## chr (2): Name, Company
## dbl (7): Rank, 1-Year Pay ($mil), 5 Year Pay ($mil), Shares Owned (...
## i Use `spec()` to retrieve the full column specification for this data.
## i Specify the column types or set `show_col_types = FALSE` to quiet this message.
 glimpse(df)
## Rows: 500
## Columns: 9
## $ Rank
                           <dbl> 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ~
                           <chr> "John H Hammergren", "Ralph Lauren", "M~
## $ Name
## $ Company
                           <chr> "McKesson", "Ralph Lauren", "Vornado Re~
                           <dbl> 131,190, 66,650, 64,405, 60,940, 55,790~
## $ `1-Year Pay ($mil)`
```

• Vamos usar apenas os nomes e os valores anuais:

```
salarios <- df %>%
select(Name, valor = `1-Year Pay ($mil)`)
```

• Um histograma:

```
salarios %>%
ggplot(aes(x = valor)) +
geom_histogram(breaks = seq(0, 150, 2.5)) +
scale_x_continuous(breaks = seq(0, 150, 10)) +
labs(y = NULL)
```



- É uma distribuição <mark>assimétrica à direita</mark>: a maior parte dos CEOs têm receitas anuais "baixas", de menos de 10 milhões. À medida que examinamos valores maiores, a quantidade de CEOs vai diminuindo lentamente.
- Observe que a longa cauda à direita "puxa" a média para um valor mais alto do que a mediana.
- A moda, que corresponde à barra mais alta do histograma, é menor que a mediana

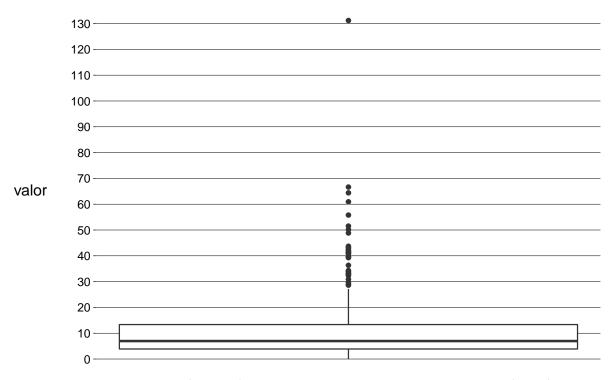
(e que a média):

```
sumario <- salarios %>%
  summarise(
    moda = mlv(valor, method = 'venter'),
    mediana = median(valor),
    media = mean(valor)
)
sumario
```

```
## # A tibble: 1 x 3
## moda mediana media
## <dbl> <dbl> <dbl> ## 1 4.60 6.97 10.5
```

• Em um *boxplot*, também é possível detectar a assimetria pela grande quantidade de *outliers* em um extremo:

```
salarios %>%
ggplot(aes(y = valor)) +
  geom_boxplot() +
  scale_x_continuous(breaks = NULL) +
  scale_y_continuous(breaks = seq(0, 150, 10))
```



• Com distribuições assimétricas à esquerda, a situação se inverte: a média é menor que a mediana, que é menor que a moda.

#### Exercício

- Ache um conjunto de dados com uma distribuição assimétrica à esquerda.
- Faça um histograma.
- Calcule a média, a mediana, e a moda dos dados.

## 6.4

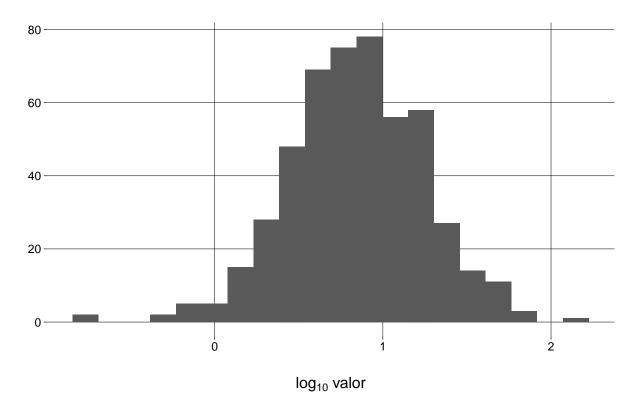
## Re-expressão

- Muitas vezes, é recomendável transformar a escala dos dados para que uma distribuição assimétrica se torne simétrica.
- No exemplo das receitas dos CEOs, podemos tomar os logaritmos dos valores, em vez dos valores:

```
salarios_log <- salarios %>%
mutate(log_valor = log10(valor))
```

```
salarios_log %>%
  ggplot(aes(x = log_valor)) +
    geom_histogram(bins = 20) +
    labs(
        x = TeX('$\\log_{10}$ valor'),
        y = NULL
    )
```

## Warning: Removed 3 rows containing non-finite values (stat\_bin).



- O logaritmo de um número na base 10 é, essencialmente, a quantidade de dígitos do número, vista como uma grandeza contínua.
- Logaritmos negativos vêm de valores entre 0 e 1.
- Logaritmo zero vem do valor 1.
- Valores iguais ou menores que zero não têm logaritmo definido.
- ullet Por isso a mensagem de aviso sobre 3 valores removidos. São valores iguais a zero:

```
salarios_log %>%
   filter(valor == 0)
## # A tibble: 3 x 3
##
     Name
                         valor log_valor
                         <dbl>
##
     <chr>
                                   <dbl>
## 1 Malon Wilkus
                             0
                                    -Inf
## 2 Matthew J Lambiase
                             0
                                    -Inf
## 3 Larry Page
                             0
                                    -Inf
```

• Uma vantagem desta escala logarítmica é que podemos entender melhor o histograma. Os dados não estão amontoados de um lado só.

6.4.1

#### Exercício

- Quais são os registros com  $\log_{10}$  valor < 0?
- Faça um boxplot dos logaritmos das receitas.

6.5 \_\_\_\_\_

## Medidas de posição

6.5.1 \_\_\_\_\_

#### **Quantis**

- Na seção sobre *boxplots*, falamos sobre quantis, que são medidas de posição.
- Em R, a função quantile calcula quantis de um vetor:

• Você pode passar frações entre 0 e 1 para quantile. Por exemplo, para calcular o primeiro, o quinto, e o décimo percentis das receitas dos CEOs:

```
salarios %>%
  pull(valor) %>%
  quantile(c(.01, .05, .1))

## 1% 5% 10%
## 0,48695 1,48405 2,19400
```

6.6

# Medidas de dispersão

- Tão importantes quanto as medidas de centralidade são as medidas de dispersão (ou espalhamento).
- Elas informam o quanto os dados variam.

#### **Amplitude**

- Uma medida simples é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo.
- Lembrando do nosso exemplo das idades dos alunos:

```
idades
## [1] 20 20 20 20 20 20 21 21 21 22 22 22 23 23 23 23 24 24 65
```

• A função range retorna o mínimo e o máximo:

```
range(idades)
```

## [1] 20 65

• A amplitude destes dados é, então

```
range(idades)[2] - range(idades)[1]
```

## [1] 45

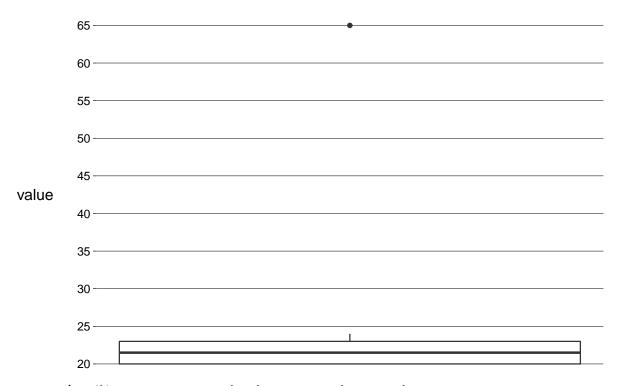
• A diferença de idade entre o aluno mais novo e o mais velho é de  $45\,\mathrm{anos}$ , um valor alto, por causa do velhinho.

#### 6.6.2 \_

#### **IQR**

- Na seção sobre *boxplots*, também falamos sobre o intervalo interquartil (IQR).
- No *boxplot*, é a <mark>altura da caixa</mark>. Para as idades dos alunos:

```
idades %>%
  as_tibble() %>%
  ggplot(aes(y = value)) +
   geom_boxplot() +
  scale_x_continuous(breaks = NULL) +
  scale_y_continuous(breaks = seq(20, 70, 5))
```



• O IQR é a diferença entre o primeiro e o terceiro quartis:

```
summary(idades)
##
      Min. 1st Qu. Median
                              Mean 3rd Qu.
                                               Max.
##
     20,00
             20,00
                     21,50
                             23,75
                                      23,00
                                              65,00
 unname(summary(idades)[5] - summary(idades)[2])
## [1] 3
 IQR(idades)
## [1] 3
```

- Ou seja, os 50% centrais dos alunos têm idade entre 20 e 23 anos, um IQR de 3.
- É uma variação pequena, mais fiel à realidade do que a amplitude, que é alta por causa do velhinho.
- Quanto maior o IQR, mais espalhados estão os dados.

#### Variância

• Agora, vamos trabalhar com os pesos (kg) e alturas (m) de um time de basquete:

```
medidas <- tibble(
  altura = .025 *
    c(72, 74, 68, 76, 74, 69, 72, 79, 70, 69, 77, 73),
  peso = 0.45 *
    c(180, 168, 225, 201, 189, 192, 197, 162, 174, 171, 185, 210)
)
medidas</pre>
```

```
## # A tibble: 12 x 2
    altura peso
##
     <dbl> <dbl>
## 1
     1.8
          81
## 2
     1.85 75.6
## 3
     1.7 101.
## 4
     1.9
          90.4
     1.85 85.0
## 5
     1.72 86.4
## 6
## # ... with 6 more rows
```

valores intermediários.

```
## Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
```

```
## 1,700 1,744 1,812 1,819 1,863 1,975
```

```
summary(medidas$peso)

## Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
```

- ## 72,90 77,96 84,15 84,53 89,10 101,25

   A variância é a maneira mais usada de medir o espalhamento em torno da média.
- Para calcular a variância das alturas e a variância dos pesos, precisamos calcular
- O desvio de um valor é a diferença entre o valor e a média. O desvio pode ser positivo ou negativo.

```
d_medidas <- medidas %>%
  mutate(
    d_altura = altura - mean(altura),
    d_peso = peso - mean(peso)
)
```

```
d_medidas
## # A tibble: 12 x 4
    altura peso d_altura d_peso
     <dbl> <dbl>
                   <dbl> <dbl>
##
## 1
      1.8
           81
                  -0.0188 -3.53
## 2
      1.85 75.6
                 0.0312 -8.92
## 3
      1.7 101.
                  -0.119 16.7
## 4
      1.9
          90.4
                   0.0813 5.92
## 5
      1.85 85.0
                   0.0312 0.525
## 6
      1.72 86.4 -0.0938 1.88
## # ... with 6 more rows
```

• Vamos calcular o desvio médio das alturas e o desvio médio dos pesos:

- Não foi uma boa idéia. Os desvios médios sempre são iguais a zero.<sup>3</sup>
- Como resolver isto? Elevando os desvios ao quadrado:

```
dq_medidas <- d_medidas %>%
  mutate(
    dq_altura = d_altura^2,
    dq_peso = d_peso^2
)

dq_medidas
```

```
## # A tibble: 12 x 6
    altura peso d_altura d_peso dq_altura dq_peso
##
     <dbl> <dbl>
                    <dbl> <dbl>
                                    <dbl>
                                            <dbl>
## 1
      1.8
                  -0.0188 -3.53
                                 0.000352 12.4
           81
## 2
      1.85 75.6
                  0.0312 -8.92
                                 0.000977 79.7
## 3
      1.7 101. -0.119 16.7
                                 0.0141
                                          280.
## 4
      1.9
          90.4
                 0.0813 5.92
                                 0.00660
                                           35.1
      1.85 85.0
## 5
                   0.0312 0.525 0.000977
                                            0.276
## 6
      1.72 86.4 -0.0938 1.88
                                 0.00879
                                            3.52
```

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Você vai provar isto em um exercício.

```
## # ... with 6 more rows
```

- Agora temos os desvios quadrados, que são todos positivos.
- O desvio quadrado médio vai ser a variância:

- Uma vantagem da variância é que outliers (que têm desvios quadrados maiores) contribuem mais do que elementos próximos à média (que têm desvios quadrados menores).
- Uma desvantagem da variância é que a sua unidade é o quadrado da unidade dos valores.
- Neste exemplo, as unidades são  $m^2$  e  $kg^2$ !

#### 6.6.4 \_\_\_

### Desvio-padrão

- É melhor trabalhar com a raiz quadrada da variância, que chamamos de desvio-padrão.
- As unidades são as mesmas que as unidades dos dados.

```
dq_medidas %>%
   summarize(
    dp_altura = sqrt(mean(dq_altura)),
    dp_peso = sqrt((mean(dq_peso)))
)

## # A tibble: 1 x 2

## dp_altura dp_peso

## <dbl> <dbl>
## 1 0.0824 7.96
```

• Claro que o R tem funções para calcular isso:

```
medidas %>%
summarize(
```

```
altura_var = var(altura),
     altura_dp = sd(altura),
    peso_var = var(peso),
    peso_dp = sd(peso)
## # A tibble: 1 x 4
     altura_var altura_dp peso_var peso_dp
##
          <dbl>
                    <dbl>
                          <dbl>
                                     <dbl>
        0.00740
                   0.0860
## 1
                              69.1
                                      8.31
```

• Mas os valores são diferentes dos que calculamos. Por quê?

6.6.5

## **Definições**

• Para uma população com N elementos e média  $\mu$ , a <mark>variância</mark> é

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{N}$$

e o <mark>desvio-padrão</mark> é

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \mu)^2}{N}}$$

• Para uma amostra com n elementos e média  $\bar{x}$ , a variância é

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

e o <mark>desvio-padrão</mark> é

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

- Nós calculamos a versão populacional destas medidas.
- R calcula a versão amostral destas medidas.
- Reveja os cálculos e entenda a diferença.
- Note, também, que as medidas populacionais são representadas por letras gregas  $-\mu$ ,  $\sigma^2$ ,  $\sigma$  —, enquanto as medidas amostrais são representadas por letras latinas  $\bar{x}$ ,  $s^2$ , s.



Mais adiante no curso, você vai entender por que o denominador da variância amostral é n-1, em vez de n.

Nada é por acaso, nem mesmo em Estatística.

6.7

## Coeficiente de variação

• Proporção entre desvio padrão e média:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

- Não tem unidades. É uma razão, que também pode ser lida como uma percentagem.
- · Para alturas:

statip::cv(medidas\$altura)

## [1] 0,04729982

• Para pesos:

statip::cv(medidas\$peso)

## [1] 0,09834649

6.8

## Escores padrão

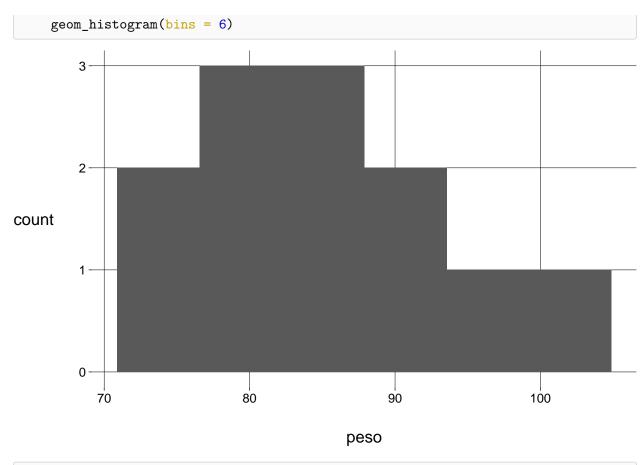
- Mudar a escala de uma variável, mudando as unidades:
  - A média passa a ser zero.
  - O desvio-padrão passa a ser 1.
  - I.e., a unidade passa a ser 1 desvio padrão
- Se a média for  $\bar{x}$  e o desvio padrão for s, basta criar a nova variãvel z, tal que

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

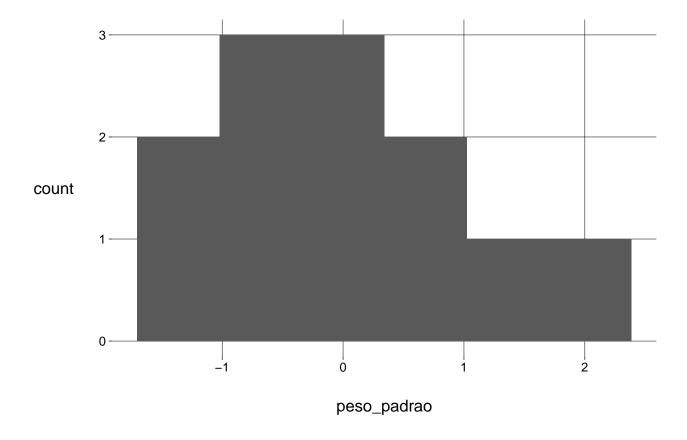
• Em R, a função scale faz isso:

medidas\$altura\_padrao <- scale(medidas\$altura)
medidas %>%

```
select(altura, altura_padrao)
## # A tibble: 12 x 2
     altura altura_padrao[,1]
##
      <dbl>
                        <dbl>
                       -0.218
## 1
       1.8
## 2
       1.85
                        0.363
## 3
       1.7
                       -1.38
## 4
       1.9
                        0.944
## 5
       1.85
                        0.363
## 6
      1.72
                       -1.09
## # ... with 6 more rows
mean(medidas$altura_padrao)
## [1] -0,00000000000000004610683
 sd(medidas$altura_padrao)
## [1] 1
medidas$peso_padrao <- scale(medidas$peso)</pre>
medidas %>%
  select(peso, peso_padrao)
## # A tibble: 12 x 2
     peso peso_padrao[,1]
##
##
     <dbl>
                     <dbl>
## 1 81
                   -0.424
## 2 75.6
                   -1.07
## 3 101.
                    2.01
## 4 90.4
                    0.713
## 5 85.0
                    0.0632
## 6 86.4
                    0.226
## # ... with 6 more rows
mean(medidas$peso_padrao)
## [1] -0,000000000000004255855
sd(medidas$peso_padrao)
## [1] 1
medidas %>%
  ggplot(aes(x = peso)) +
```



```
medidas %>%
   ggplot(aes(x = peso_padrao)) +
   geom_histogram(bins = 6)
```



6.9

# Teorema de Tchebychev

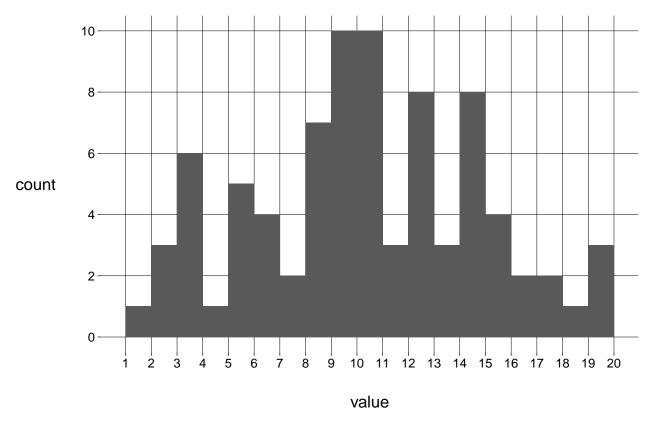
Em qualquer distribuição, a proporção de dados dentro de  $\pm k$  desvios padrão (k>1) da média é de, no mínimo

$$1 - \frac{1}{k^2}$$

### Exemplo

```
df <- msleep$sleep_total %>%
  as_tibble()
```

```
grafico <- df %>%
  ggplot(aes(x = value)) +
    geom_histogram(breaks = 1:20) +
    scale_x_continuous(breaks = 1:20) +
    scale_y_continuous(breaks = seq(0, 10, 2))
grafico
```



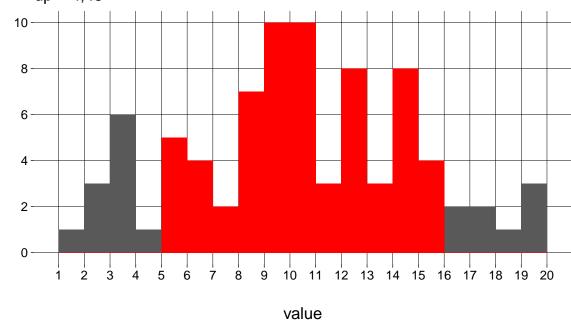
```
media <- mean(df$value)</pre>
dp <- sd(df$value)</pre>
k <- 1.3
inicio <- media - k * dp
fim \leftarrow media + k * dp
proporcao <- 1 - 1 / k^2
grafico +
  geom_histogram(
    data = df %>%
      filter(value >= inicio & value <= fim),
    fill = 'red',
    breaks = 1:20
  ) +
  labs(
    title = paste('Exemplo do teorema de Tchebychev: k =', k),
    subtitle = paste(
      'Pelo menos', round(proporcao, 2), 'dos dados estão na área vermelha',
      '\nmédia =', round(media, 2),
      '\ndp =', round(dp, 2)
```

) )

# Exemplo do teorema de Tchebychev: k = 1,3

Pelo menos 0,41 dos dados estão na área vermelha média = 10,43

dp = 4,45



count