Øving 4

tirsdag 1. oktober 2024 10:21

Oppgave 1.
Det er fort gjort å overse "raske" tidskonstanter i modelleringsarbeidet. Anta derfor at

$$G_0(s) = \frac{1}{\tau s + 1} G(s). \tag{17}$$

Beregn den relative usikkerheten $\delta_G(s)$ og skisser den i et Bodediagram. Har den fellestrekk med det foregående eksemplet?

$$\delta_G(s) = \frac{G_0(s) - G(s)}{G(s)}$$

$$= \frac{1}{\tau s + 1} - 1 = \frac{1 - \tau s - 1}{\tau s + 1} = \frac{-\tau s}{\tau s + 1}$$

$$|\delta_G(j\omega)| = \left| \frac{-\tau j\omega}{\tau j\omega + 1} \right|$$

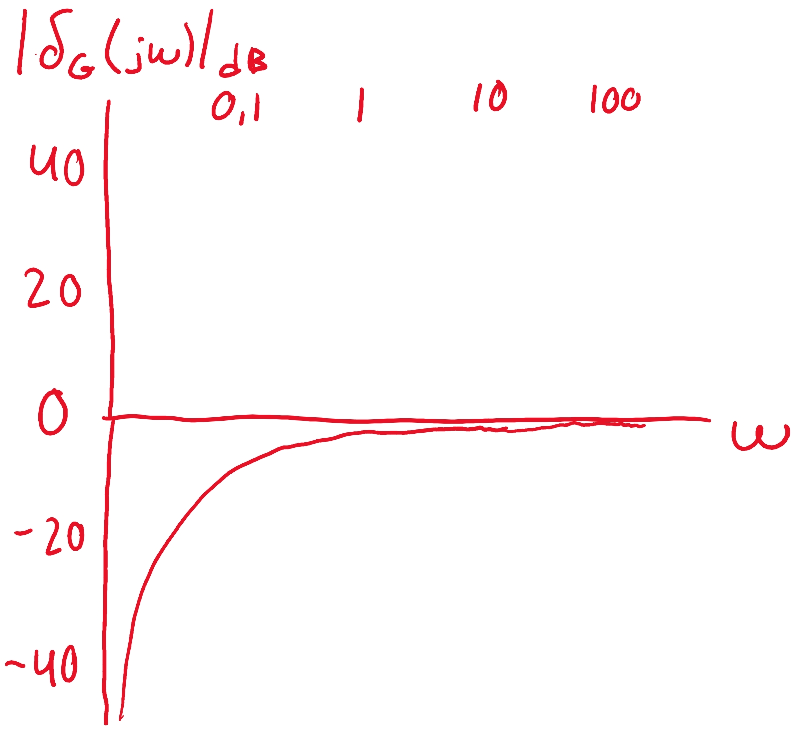
$$= \left| \frac{-\tau j\omega}{\tau j\omega + 1} \cdot \frac{-\tau j\omega + 1}{-\tau j\omega + 1} \right| = \left| \frac{-\tau^2\omega^2 - \tau j\omega}{1 + \tau^2\omega^2} \right|$$

$$= \left| -\frac{\tau^2\omega^2}{1+\tau^2\omega^2} - \frac{\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} j \right|$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{\tau^2\omega^2}{1+\tau^2\omega^2}\right)^2 + \left(-\frac{\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\tau^4\omega^4 + \tau^2\omega^2}{(1+\tau^2\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{\tau^2\omega^2(\tau^2\omega^2+1)}{(1+\tau^2\omega^2)^2}} = \frac{\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}\sqrt{\tau^2\omega^2+1}$$

$$= \frac{\tau\omega}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$ Hvis $\tau > 0$, så er $\lim_{\omega\to\infty} |\delta_G(j\omega)| = 1$



Oppgave 2.
Sett $f = v = 0$ og fremskaff uttrykkene for $\hat{y}$, $\hat{u}$ og $\hat{e}$ fra ligningene i (18).

$$\hat{z} = \mathrm{G}(\hat{u} + \hat{w}) + \hat{v},$$
$$\hat{y} = \hat{z} - \hat{v},$$
$$\hat{u} = \mathrm{K}(\hat{r} - \hat{z}) + \hat{f},$$
$$\hat{e} = \hat{r} - \hat{y}.$$

$$\hat{y} = \hat{z} = G(\hat{u} + \hat{w}) = G(K(\hat{r} - \hat{z}) + \hat{w})$$
$$= GK\hat{r} - GK\hat{z} + G\hat{w}$$
$$\Rightarrow \hat{u} = \frac{GK\hat{r} + G\hat{w}}{}$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \frac{GK\hat{r} + G\hat{w}}{1+GK}$$

$$\hat{u} = K(\hat{r} - \hat{z}) = K\left(\hat{r} - \frac{GK\hat{r} + G\hat{w}}{1+GK}\right)$$

$$\hat{e} = \hat{r} - \hat{y} = \hat{r} - \frac{GK\hat{r} + G\hat{w}}{1+GK}$$

Oppgave 3.
Med utgangspunkt i eksempel 3: beregn firergjengen for prosessen og regulatoren. Forklar deretter hvordan pol/nullpunkt kanselleringen fra eksemplet manifesterer seg i disse overføringsfunksjonene.

$$\left\{ \frac{1}{1+\mathrm{GK}}, \frac{\mathrm{G}}{1+\mathrm{GK}}, \frac{\mathrm{K}}{1+\mathrm{GK}}, \frac{\mathrm{GK}}{1+\mathrm{GK}} \right\}$$

$$\mathrm{G}(s) = \frac{k}{\mathrm{T}s+1}, \quad \mathrm{K}(s) = \frac{k_p s + k_i}{s}.$$

Avviksforholdet:

$$\frac{1}{1+GK} = \frac{1}{1 + \frac{k(k_p s + k_i)}{s(Ts+1)}} = \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1) + k(k_p s + k_i)}$$

Forstyrrelsessensitiviteten:

$$\frac{G}{1+GK} = \frac{\frac{k}{Ts+1}}{1+\frac{k(k_p s + k_i)}{s(Ts+1)}} = \frac{k}{Ts+1+\frac{k(k_p s + k_i)}{s}}$$

Lastsensitivitetsfunksjon:

$$\frac{K}{1+GK} = \frac{\frac{k_p s + k_i}{s}}{1+\frac{k(k_p s + k_i)}{s(Ts+1)}} = \frac{k_p s + k_i}{s+\frac{k(k_p s + k_i)}{Ts+1}}$$

Følgeforholdet:

$$\frac{GK}{1+GK} = \frac{\frac{k}{Ts+1}\cdot\frac{k_p s + k_i}{s}}{1+\frac{k(k_p s + k_i)}{s(Ts+1)}} = \frac{\frac{k}{Ts+1}}{\frac{s}{k_p s + k_i}+k}$$

$$k_p = T k_i$$

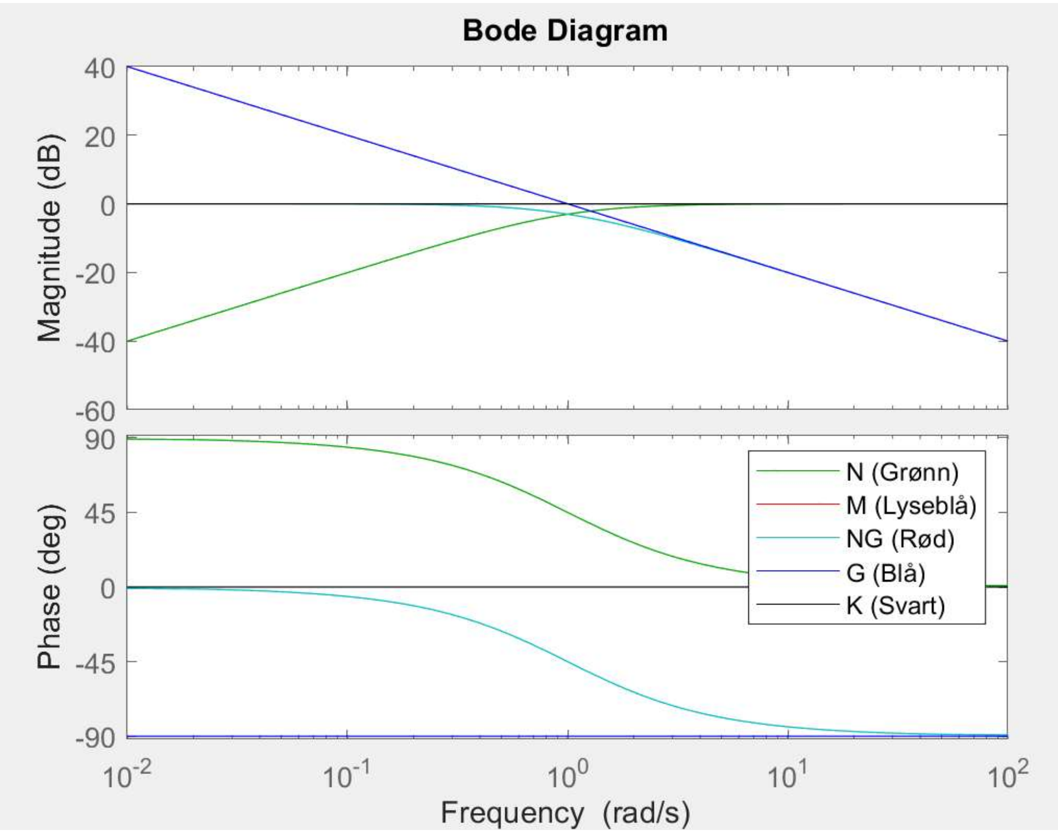
$$\Rightarrow G\left(-\frac{1}{T}\right) = \infty \quad \text{og} \quad K\left(-\frac{1}{T}\right) = 0$$

Derfor er $p = -\frac{1}{T}$ en pol for overføringsfunksjonene i firergjengen også.

Oppgave 4.
La en løsning på et tankstyringsproblem være beskrevet ved

$$G(s) = \frac{1}{s}, \quad K(s) = 1. \tag{38}$$

Gjenskap Bodediagrammene fra ovenstående eksempel (f.eks. med Matlab kommandoen bode) og se om de overordnede observasjonene er gyldige, også her.



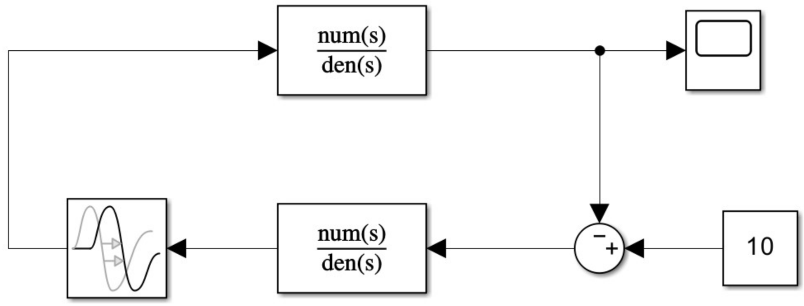

```
G = tf([1],[1 0]);
K = tf([1],[1]);
N = 1/(1+G*K);
M = G*K/(1+G*K);
NG = N*G;

hold on;

bode(N, 'g');
bode(NG, 'r');
bode(M, 'c');
bode(G, 'b');
bode(K, 'k');
legend('N (Grønn)', 'M (Lyseblå)', 'NG (Rød)', 'G (Blå)', 'K (Svart)');
hold off;
```

M ligger på NG fordi: M=NG
M og N har samme form, så man kan gjøre de samme observasjonene som i eksempelet.

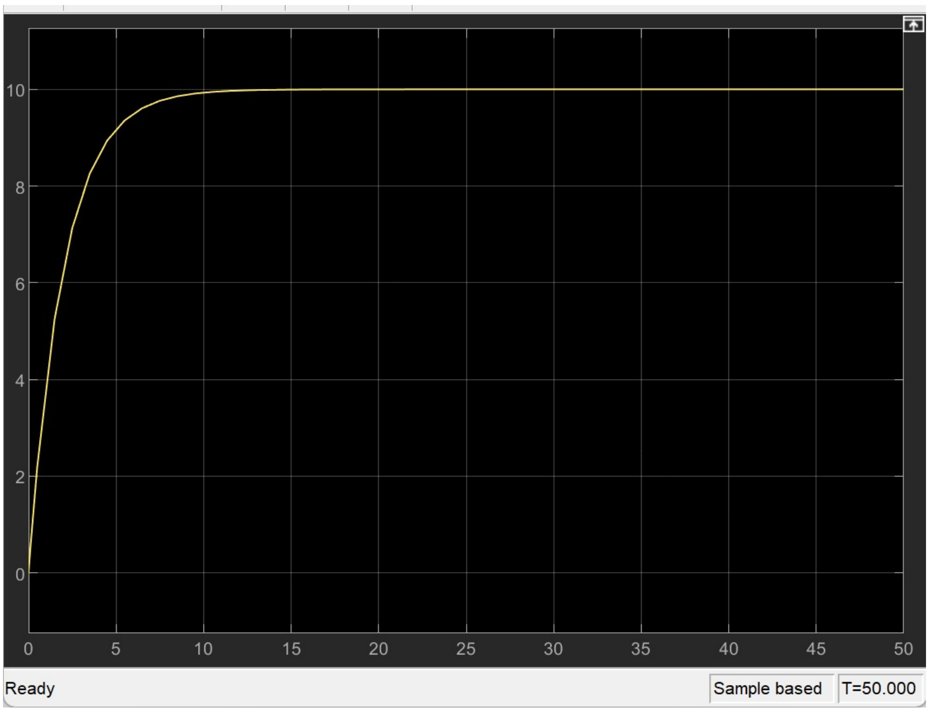
Oppgave 5.
Vend tilbake til eksempel 4 men nå med en tidsforsinkelse τ i reguleringssystemet slik at

$$\mathrm{K}'(s) = e^{-\tau s}\mathrm{K}(s). \tag{49}$$

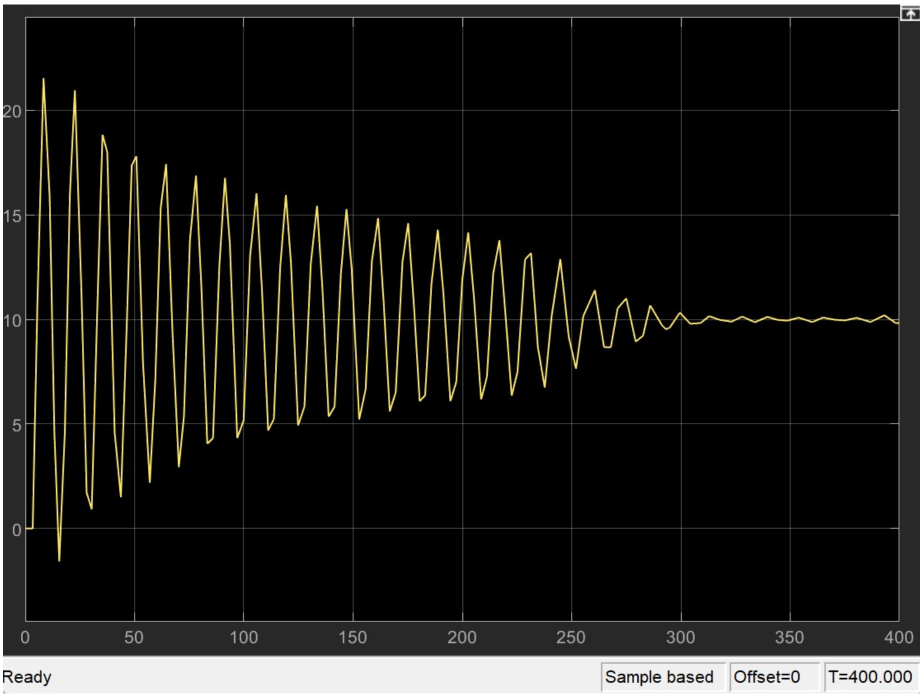
Implementer den modifiserte regulatoren sammen med modellen i Simulink og test stabiliteten for den lukkede sløyfen for et utvalg av τ. Gjør deg erfaringer mhp. tilstedeværelsen av uforutsette tidsforsinkelser



Ingen tidsforsinkelse



Tau = 3,4. Mer enn dette og systemet er ustabilt.



Oppgave 6.
Sjekk konklusjonen i det foregående eksemplet ved å beregne polene til både M og N eksplisitt.

$$M = \frac{L}{1+L}, \quad N = \frac{1}{1+L}, \quad L = \frac{1}{s(s+1)}$$

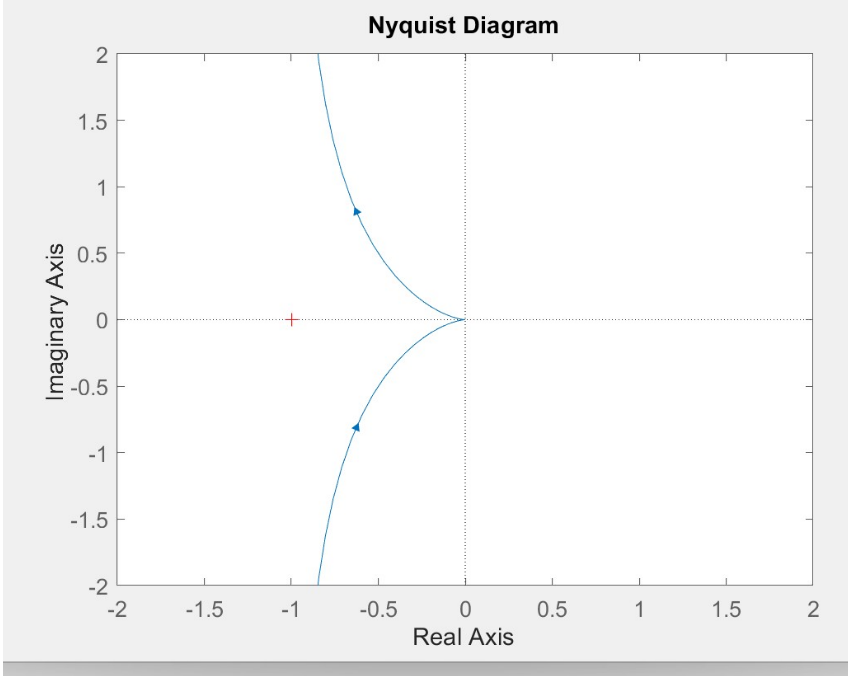
Poler:

$$s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

M og N har poler med $Re(p) < 0$, så det er ingen ustabile poler.

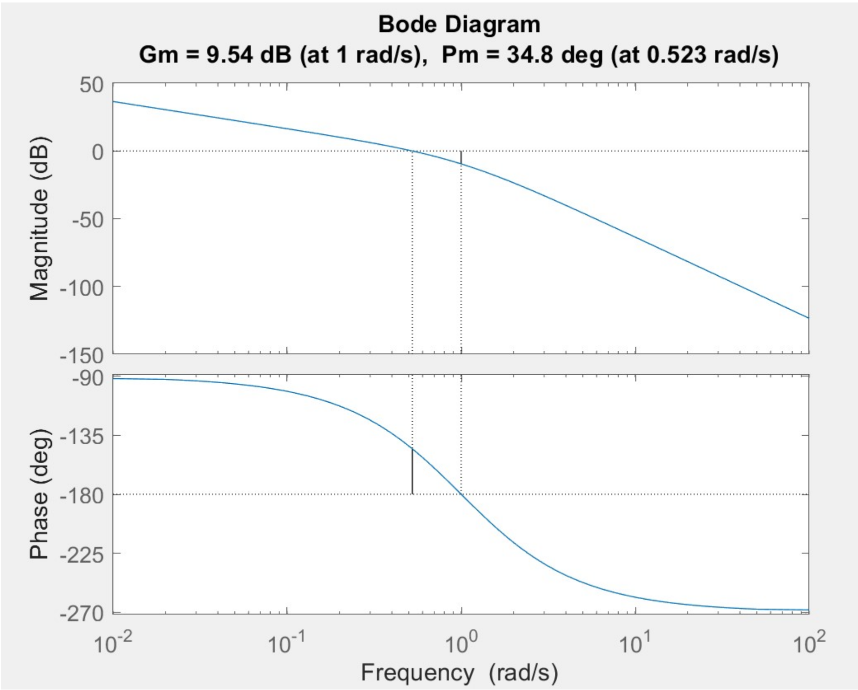
Oppgave 7.
Gjenskap Nyquistplottet i Matlab ved først å definere overføringsfunksjonen med "`L = tf(1,[1 1 0]);`" og deretter produsere plottet med "`nyquist(L);`". Aksene kan justeres med kommandoen "`axis([-2,2,-2,2]);`".



Oppgave 8.
La en sløyfeoverføringsfunksjon være gitt ved

$$L(s) = \frac{2}{3} \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s}. \tag{59}$$

Bruk Matlab til å beregne fase- og forsterkningsmarginene, f.eks. vha. kommandoen “`margin`”.



$\psi = 34{,}8^\circ > 30^\circ$

$\Rightarrow$ Stabilt

$\Delta K = 9{,}54\,dB > 2$

$\Rightarrow$ Stabilt