Øving 2

mandag 18. september 2023 21:54

Oppgave 1.

a) Newtons andre lov: $\Sigma F = ma$

$$\Sigma F = u - r = ma$$

$$u - kv = m\dot{v}$$

$$m\dot{v} = -kv + u$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u$$

u er pådraget og det er en 1. ordens diff. ligning

b) $$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{u}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v + \frac{u}{m}$$

$$\int \frac{1}{-\frac{k}{m}v + \frac{u}{m}}\, dv = \int dt$$

$$-\frac{m}{k}\ln\left|-\frac{k}{m}v + \frac{u}{m}\right| = t + C_1$$

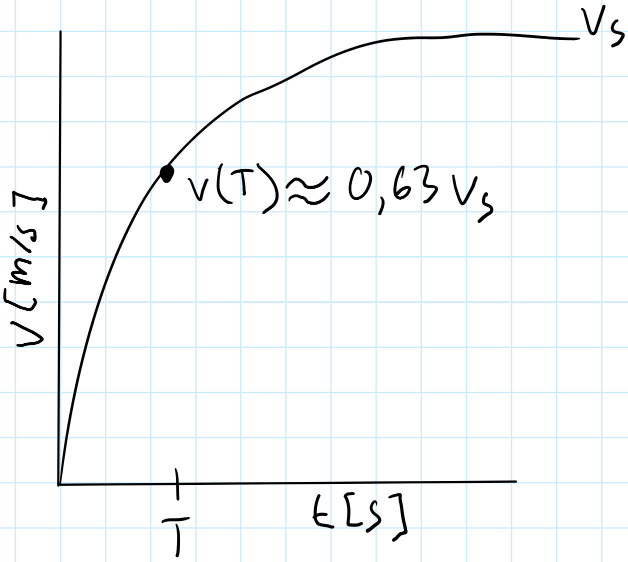
$$\left|-\frac{k}{m}v + \frac{u}{m}\right| = e^{-\frac{k}{m}(t + C_1)}$$

$$-\frac{k}{m}v + \frac{u}{m} = e^{-\frac{k}{m}t} \cdot e^{-\frac{k}{m}C_1}$$

$$\underline{\underline{v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{u}{k}}}$$

c) $$T = -\frac{1}{-\frac{k}{m}} = \frac{m}{k} \quad \left[\frac{kg}{kg/s}\right] = s$$

Vi ser at tidskonstanten har sekund som benevning. Når t = T har transienten nådd ca. 63% av stasjonærverdien.



Hvis vi øker k, så vil tidskonstanten bli mindre. Det er fordi T = m/k. Dersom T blir mindre, så vil det si at systemet når 63% av stasjonærverdien på kortere tid. Hvis vi øker massen derimot, så vil tidskonstanten bli større. Da tar da lenger tid før tilstanden blir 63% av stasjonærverdien.

d) $\dot{x} = ax + bu$

$$\dot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{1}{m}u$$

$$K = -\frac{b}{a} = -\frac{\frac{1}{m}}{-\frac{k}{m}} = \frac{1}{k}$$

Forsterkningen blir mindre hvis k øker. I tillegg til dette vil stasjonærverdien til systemet bli mindre. Dette er fordi stasjonærverdien er avhengig av K og u (som vist nedenfor). Stasjonærverdien vil også bli nådd raskere med en større k.

Vi setter $\dot{x} = 0$

$$0 = -\frac{k}{m}x + \frac{1}{m}u$$

$$\Rightarrow x_s = u \cdot \frac{1}{k} = Ku$$

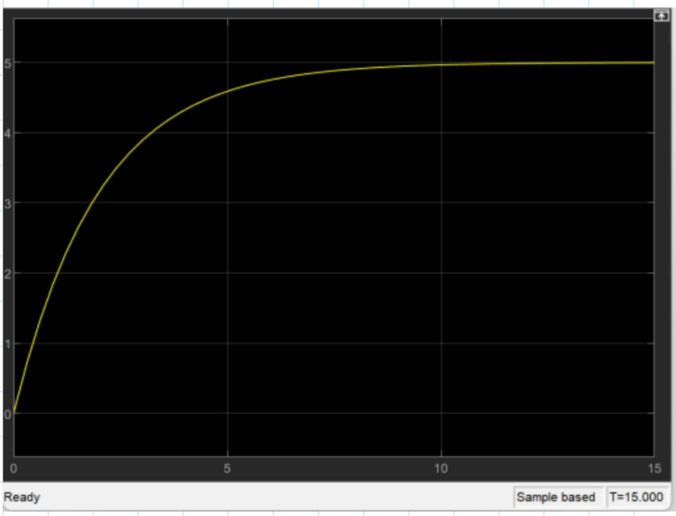
e) $m = 200kg$ og $k = 100kg/s$

$$T = \frac{m}{k} = 2s$$

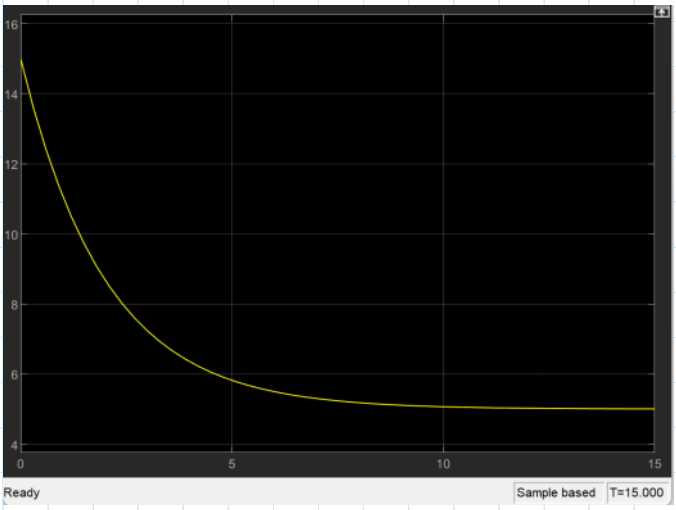
$$K = \frac{1}{k} = 0{,}01 \ s/kg$$

Tidskonstanten forteller oss at det tar 2 sekunder før tilstanden blir 63% av stasjonærverdien. Forsterkningen sier at stasjonærverdien vil bli 0.01s/kg*u.

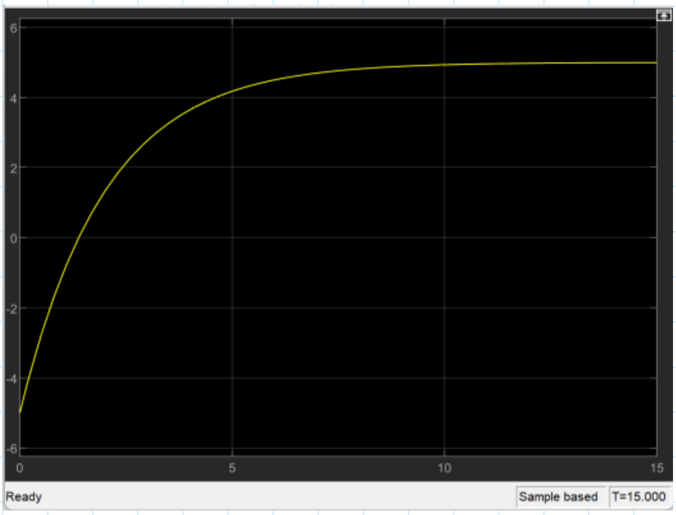
f)



g) 15 m/s som initialverdi



-5 m/s som initialverdi



Vi ser at uavhengig av initialverdi, så vil stasjonærverdien bli det samme

h) $\dot{x} = ax + bu$

$$\dot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{1}{m}u$$

$$K = -\frac{b}{a} = -\frac{\frac{1}{m}}{-\frac{k}{m}} = \frac{1}{k}$$

$\dot{x} = 0$ og $x = 3\,m/s$

$$0 = -\frac{100\,kg/s}{200\,kg} \cdot 3\,m/s + \frac{1}{200\,kg} \cdot u$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u = 300\,kg\frac{m}{s^2}}}$$

$$x_s = Ku, = \frac{1}{k}u$$

$$X_s = Ku = \frac{1}{k} u$$

$$3 m/s = \frac{1}{100 kg/s} \cdot u$$

$$\underline{\underline{u = 300 \, kg \frac{m}{s^2}}}$$

i)

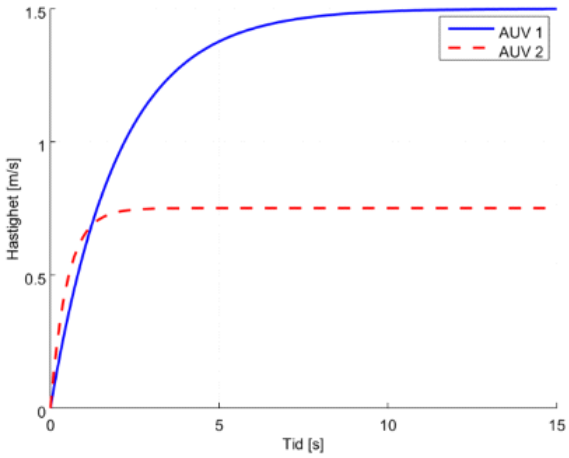
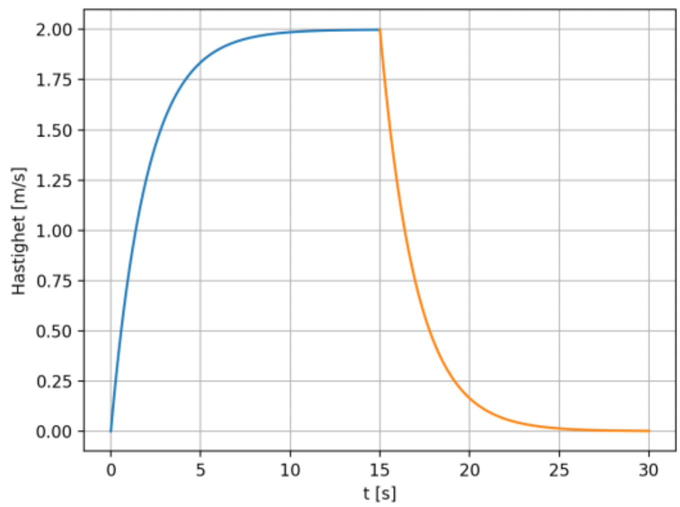


Figure 3: Tidsrespons.

Det er to store forskjeller mellom AUV'ene. De må ha forskjellig proporsjonalitetskonstant siden stasjonærverdien ikke er lik, men pådraget er det samme. Vi ser dette på formelen V_s = Ku=(1/k)*u. Det eneste som kan variere er k. AUV 1 vil ha en lavere k enn AUV 2 siden stasjonærverdien er større. Forskjellen i k kan ha noe å gjøre med designet på AUV'en som påvirker motstanden fra vannet.

Den andre faktoren er masse. Vi ser på grafene at det tar mye lenger tid for AUV 1 å nå 63% av stasjonærverdien sin. Dette må bety at tidskonstanten for AUV 1 er større enn for AUV 2. Det kan også hende at massene til AUV'ene er forskjellige. Dette er fordi proporsjonalitetskonstanten trolig avhenger av størrelsen/utformingen til AUV'ene. Det kan derfor hende at AUV 2 har større masse/volum som gir et større dragtall/tverrsnittareal som fører til mer motstand. Dette vet vi ikke sikkert, men kunne vært tilfellet.

j)



Denne grafen ser ut som at den kunne kommet fra en kondensator. Da hadde førsteaksen vært tid og andreaksen vært ladning. En kondensator lagrer ladning og gir alt fra seg.

Oppgave 2.

a) $\Sigma F = ma = -F_f - F_d$

$$m\ddot{x} = -kx - d\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Det er en andreordens differensialligning som trenger 3 initialverdier m, k og d for å ha en løsning.

b) $m=2, \quad d=4, \quad k=6$

Karakteristisk likning:

$$r^2+pr+q=0$$
$$r^2+2r+3=0$$
$$r=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}$$
$$\Rightarrow r_1=-1+i\sqrt{2} \qquad r_2=-1-i\sqrt{2}$$

2

c) Likningssystem:

$a=-1$ og $b=\sqrt{2}$

$$x(0)=C\cos 0=\underline{\underline{C=1}}$$

$$x'(t)=ae^{at}(C\cos(bt)+D\sin(bt)) + e^{at}(-bC\sin(bt)+bD\cos(bt))$$
$$x'(0)=-C+\sqrt{2}D=0$$
$$-1+\sqrt{2}D=0$$
$$\underline{\underline{D=\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

d) $\ddot{x}+\frac{d}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0^2=\frac{k}{m}$$
$$\zeta=\frac{d}{2\sqrt{km}}$$
$$2\omega_0\zeta=2\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{d}{2\sqrt{km}}=\frac{d}{m}$$

Siden vi har uttrykk for $\frac{k}{m}$ og $\frac{d}{m}$, er det bare å bytte dem ut i likningen:

$$\ddot{x}+2\omega_0\zeta\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

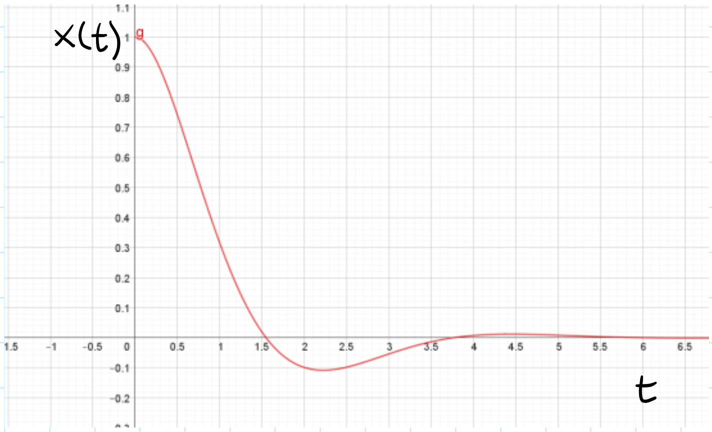
ω_0: Udempet resonansfrekvens

ζ: Relativ dempingsfaktor

Underdempet: $0<\zeta<1$
Kritisk dempet: $\zeta=1$
Overdempet: $\zeta>1$

$$\zeta=\frac{4}{2\sqrt{12}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$0<\frac{1}{\sqrt{3}}<1$ vil si underdempet.



e) For å finne frekvensen klossen vil svinge med, må vi først finne den dempede resonansfrekvensen. Den er gitt ved

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = 2\pi f$$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \approx \underline{\underline{0{,}22\,Hz}}$$

f) $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$

Vi innfører to nye tilstander $x_1 = x$ og $x_2 = \dot{x}$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \Rightarrow \boxed{\dot{x}_1 = x_2}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -p\dot{x} - qx = -px_2 - qx_1$$

$$\boxed{\dot{x}_2 = -qx_1 - px_2}$$