Øving 5

torsdag 24. oktober 2024 10:22

a) Det kan være lurt å ikke anvende kreftene F_1 og F_2 direkte[1] som pådrag, men heller nettokraften u_h og differenskraften u_ϑ gitt av

$$u_h = F_1 + F_2 - Mg, \quad u_\vartheta = F_2 - F_1. \tag{3}$$

Bestem F_1 og F_2 som funksjoner av u_h og u_ϑ.

$$F_1 = F_2 - u_\vartheta$$

$$u_h = (F_2 - u_\vartheta) + F_2 - Mg$$

$$F_2 = \frac{u_h + u_\vartheta + Mg}{2}$$

$$F_1 = \frac{u_h + u_\vartheta + Mg}{2} - u_\vartheta = \frac{u_h + Mg - u_\vartheta}{2}$$

b) Under antagelsene $|\vartheta| \ll 1$ og $|u_h| \ll 1$, vis at dronens bevegelse kan modelleres lineært med:

$$\ddot{p} = g\vartheta, \tag{4a}$$

$$\ddot{h} = M^{-1}u_h, \tag{4b}$$

$$\ddot{\vartheta} = J^{-1}\ell u_\vartheta. \tag{4c}$$

$$J\ddot{\vartheta} = \ell\underbrace{(F_1 - F_2)}_{-u_\vartheta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\vartheta} = -J^{-1}\ell u_\vartheta}$$

$$M\ddot{h} = \cos(\vartheta)(F_1 + F_2) - Mg$$

$$|\vartheta| << 1 \Rightarrow \cos(\vartheta) \approx 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{h} = M^{-1}u_h}$$

$$M\ddot{p} = \sin(\vartheta)(F_1 + F_2)$$

$$|\vartheta| << 1 \Rightarrow \sin(\vartheta) \approx \vartheta$$

$$M\ddot{p} = \vartheta(u_h + Mg)$$

$$|u_h| << 1 \Rightarrow u_h \approx 0$$

$|u_h| \ll 1 \Rightarrow u_h \approx 0$

$\Rightarrow M\ddot{p} = \vartheta M_g \Rightarrow \boxed{\ddot{p} = g\vartheta}$

c) Med (4), beregn overføringsfunksjonene $G_h(s)$ og $G_p(s)$ slik at

$$\hat{p}(s) = G_h(s)\hat{u}_\vartheta(s), \quad \hat{h}(s) = G_p(s)\hat{u}_h(s). \tag{5}$$

Finn egenverdiene i (4) - hva kan disse fortelle deg om systemets stabilitet? Beregn impulsresponsene forbundet med $G_h(s)$ og $G_p(s)$ og sjekk om de samsvarer med dine betraktninger rundt stabilitet.

$\ddot{h} = M^{-1}u_h \Rightarrow \hat{\ddot{h}} = M^{-1}\hat{u}_h$

$\hat{\ddot{h}} = s^2\hat{h} \Rightarrow \hat{h} = \frac{1}{s^2 M}\hat{u}_h = G_h(s)$

$\ddot{p} = g\vartheta \Rightarrow s^2\hat{p} = g\hat{\vartheta}$

$\ddot{\vartheta} = J^{-1}\ell u_\vartheta \Rightarrow s^2\hat{\vartheta} = J^{-1}\ell\hat{u}_\vartheta \Rightarrow \hat{\vartheta} = \frac{1}{s^2 J}\ell\hat{u}_\vartheta$

$\hat{p} = \frac{g\ell}{s^4 J}\hat{u}_\vartheta = G_p(s)$

Egenverdiene i (4) er polene til G_p og G_h:

$G_p: \lambda_{1,2,3,4} = 0$ og $G_h: \lambda_{1,2} = 0$

$Re(\lambda_i) < 0$ stemmer ikke for eg.verdiene, så systemet er ikke stabilt.

Impulsrespons:

$\mathcal{L}^{-1}(G_h(s)) = \frac{1}{M}\cdot t = \underline{\underline{\frac{1}{2}t}}$

$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$\mathcal{L}^{-1}(G_p(s)) = \frac{g\ell}{J3!}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3!}{s^4}\right) = \frac{g\ell}{6J}\cdot t^3 = \underline{\underline{5t^3}}$

Begge går mot ∞ når $t \to \infty$, så

Systemet er ustabilt.

a) Basert på (4), lag et reguleringssystem med ϑ_{ref} som referanse slik at

$$\hat{\vartheta}(s) = \frac{\omega_0^2}{(s+\omega_0)^2}\hat{\vartheta}_{\text{ref}}(s), \quad \omega_0 = 10. \tag{6}$$

Her trenger du en regulator på formen

$$\hat{u}_{\vartheta}(s) = F(s)\hat{\vartheta}_{\text{ref}}(s) - K(s)\hat{\vartheta}(s). \tag{7}$$

Skissér et Bodeplot av følgeforholdet i systemet. Vurdér hvorvidt antagelsen $\vartheta_{\text{ref}} \approx \vartheta$ er gyldig under vanlig manøvrering.

$$\ddot{\vartheta} = J^{-1} \ell u_\vartheta \Rightarrow s^2 \hat{\vartheta} = \frac{\ell}{J} \hat{u}_\vartheta$$

$$s^2 \hat{\vartheta} = \frac{\ell}{J}\left(F \hat{\vartheta}_{ref} - K \hat{\vartheta}\right)$$

$$s^2 \hat{\vartheta} \frac{J}{\ell} = F \hat{\vartheta}_{ref} - K \hat{\vartheta}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{\vartheta}}{\hat{\vartheta}_{ref}} = \frac{F}{s^2 \cdot \frac{J}{\ell} + K} = \frac{\frac{\ell}{J} F}{s^2 + \frac{\ell}{J} K} = \frac{\omega_0^2}{(s+\omega_0)^2}$$

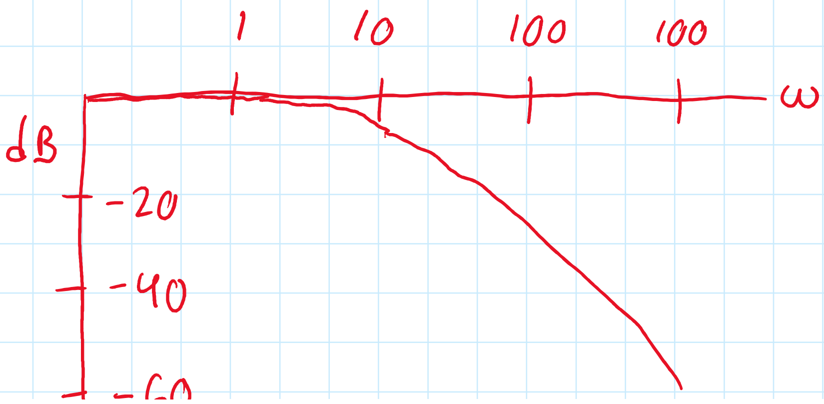
$$\Rightarrow F = \frac{J}{\ell}\omega_0^2 \text{ og } K = \frac{J}{\ell}\left(\omega_0^2 + 2\omega_0 s\right)$$

$$\text{Følgeforhold: } M(s) = \frac{\omega_0^2}{(s+\omega_0)^2} = \frac{100}{(s+10)^2}$$

$$M(j\omega) = \frac{100}{(j\omega+10)^2}$$

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \Rightarrow \frac{|100|}{|(j\omega+10)^2|} = \frac{100}{|j\omega+10|^2}$$

$$= \frac{100}{\left(\sqrt{\omega^2+10^2}\right)^2} = \frac{100}{\omega^2+100}$$



$\vartheta_{ref} \approx \vartheta$ når $\omega < 10\,Hz$ hvis vi kun ser på magnituden. $\omega < 10\,Hz$ kan sees på som vanlig manøvrering.

b) Det vil være en viss treghet i motorene. Dette medfører at den *egentlige* differenskraften u_ϑ^* oppfører seg mer som

$$\hat{u}_\vartheta^*(s) = \frac{1}{Ts+1}\hat{u}_\vartheta(s). \tag{8}$$

Med regulatoren fra oppgave a), vis at det nye følgeforholdet blir

$$\hat{\vartheta}(s) = \frac{\omega_0^2}{Ts^3 + (s+\omega_0)^2}\hat{\vartheta}_{\text{ref}}(s). \tag{9}$$

$$\ddot{\vartheta} = J^{-1}\ell u_\vartheta \Rightarrow s^2\hat{\vartheta} = \frac{\ell}{J}\hat{u}_\vartheta$$

$$s^2\hat{\vartheta} = \frac{\ell}{J}\left(\frac{1}{Ts+1}\hat{u}_\vartheta\right) = \frac{\ell}{J}\left(\frac{F\vartheta_{ref} - K\hat{\vartheta}}{Ts+1}\right)$$

$$\hat{\vartheta} = \frac{\ell}{Js^2}\cdot\frac{1}{Ts+1}\cdot\left(\frac{J}{\ell}\omega_0^2\vartheta_{ref} - \frac{J}{\ell}(\omega_0^2 + 2\omega_0 s)\hat{\vartheta}\right)$$

$$s^2(Ts+1)\hat{\vartheta} + (\omega_0^2 + 2\omega_0 s)\hat{\vartheta} = \omega_0^2\vartheta_{ref}$$

$$\hat{\vartheta}(Ts^3 + s^2 + \omega_0^2 + 2\omega_0 s) = \omega_0^2\vartheta_{ref}$$

$$\hat{\vartheta} = \frac{\omega_0^2}{Ts^3 + (s+\omega_0)^2}\vartheta_{ref}$$

Bruk Routh-Hurwitz kriteriet[2] for å finne den største T'en som kan tolereres i (9) før systemet blir ustabilt. Test svaret ved å beregne sprangresponsen for et utvalg av T'er og sammenlign med det nominelle tilfellet hvor $T = 0$. På hvilken måte er motorenes treghet vesentlig for systemets oppførsel?

$$\hat{\vartheta} = \frac{\omega_0^2}{Ts^3 + (s+\omega_0)^2}\vartheta_{ref}$$

ω_0^2

$$\vartheta = \frac{\quad}{Ts^3 + (s+\omega_0)^2}\vartheta_{ref}$$

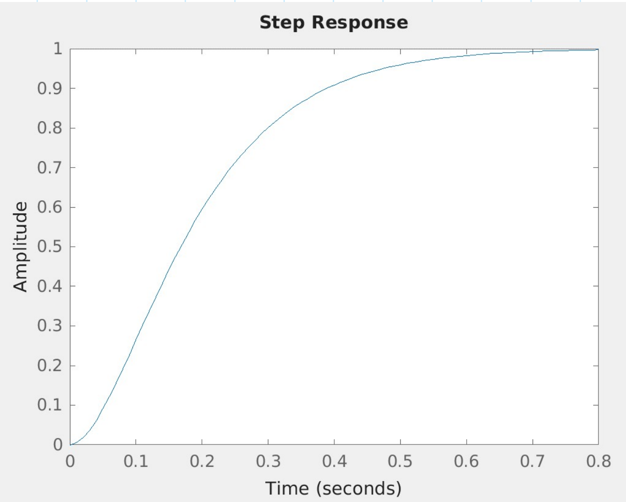
$$\hat{\vartheta} = \frac{\omega_0^2}{Ts^3 + s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2}\vartheta_{ref}$$

$a_3 = T \quad a_2 = 1 \quad a_1 = 20 \quad a_0 = 100$

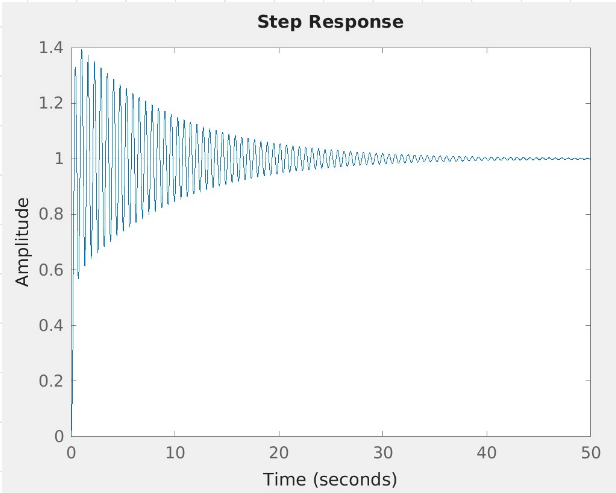
$$\frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_2} = 20 - 100T$$

$T > \frac{1}{5}$ gjør systemet ustabilt

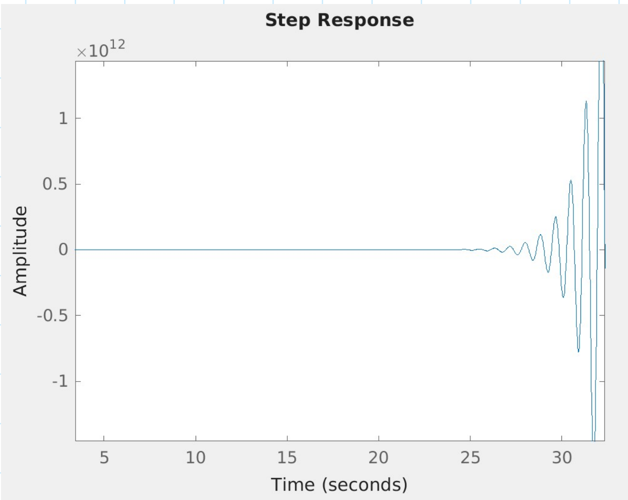
$T = 0$



$T = 0,19$



$T = 0,4$



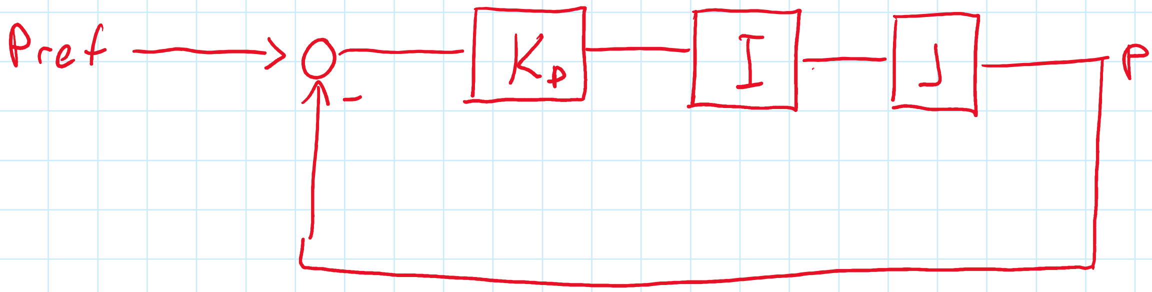
Vi når aldri pitch-referansen pga motorenes treghet når $T > 0,2$

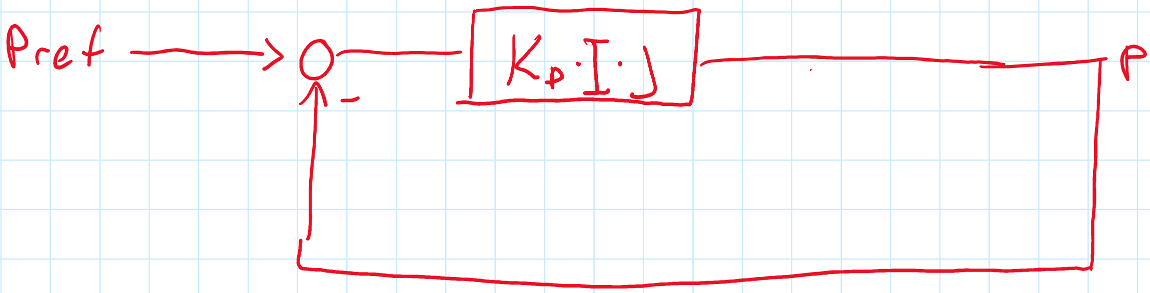
d) De trege motorene er et eksempel på *umodellert dynamikk* - et fenomen som det ikke har blitt tatt høyde for den matematiske modellen. På generell basis - er det rimelig å anta at *alle* fenomener er tatt høyde for i en matematisk modell?

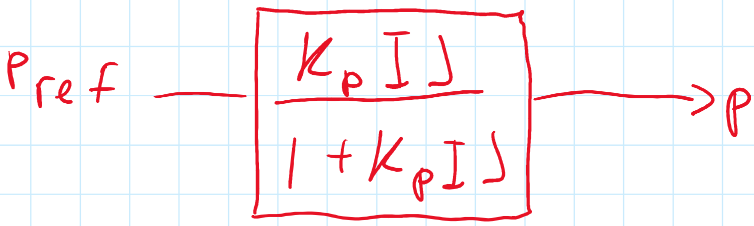
Nei, fordi det er alt for mange fenomener til å få med alt i en modell.

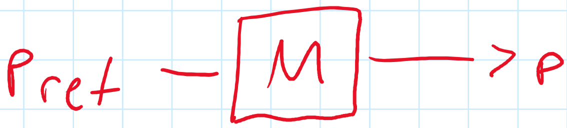
a) Betrakt (2). Lukk sløyfen rundt pitchregulatoren med en PD-regulator $K_p(s)$ for å få $p \to p_{\text{ref}}$. Anvend ϑ_{ref} som pådrag slik det er vist i fig. 2.

Sett polene slik at $\lambda_1 = \lambda_2 = -1/4$. Baser arbeidet på modellen i (10). Men, vurder ytelsen både med og uten antagelsen $\vartheta \approx \vartheta_{\text{ref}}$









$$K_p = k_p + s k_d, \quad I = \frac{\omega_0^2}{(s+\omega_0)^2}, \quad J = \frac{g}{s^2}$$

Hvis $\vartheta \approx \vartheta_{ref}$: $I = 1$

$$M(s) = \frac{(k_p + s k_d)\frac{g}{s^2}}{\ldots} = \frac{(k_p + s k_d) g}{\ldots}$$

$$M(s) = \frac{(k_p + s k_d)\frac{g}{s^2}}{1 + (k_p + s k_d)\frac{g}{s^2}} = \frac{(k_p + s k_d)g}{s^2 + s g k_d + k_p g}$$

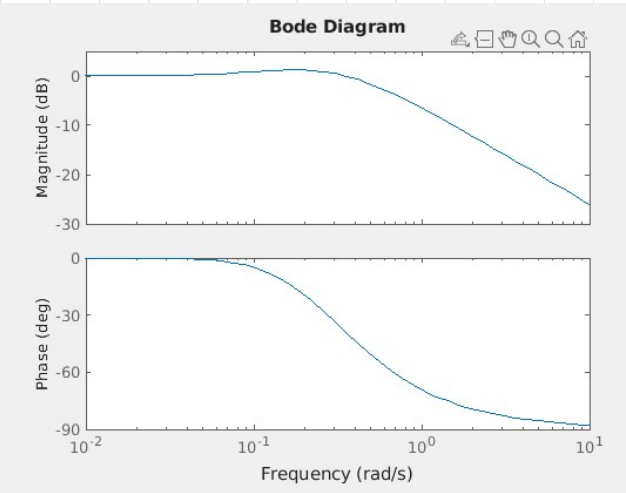
$$s^2 + s g k_d + k_p g = 0$$

$$= (s - \lambda)^2 = s^2 - 2\lambda s + \lambda^2 = 0$$

$$= s^2 + \frac{1}{2} s + \frac{1}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \; g k_d = \frac{1}{2} \;\wedge\; k_p g = \frac{1}{16}$$

$$\underline{\underline{k_d = \frac{1}{20} \;\wedge\; k_p = \frac{1}{160}}}$$




```
H = tf([g*(1/20), g*(1/160)],[1, g*(1/20), g*(1/160)]);
bode(H);
```

Ytelsen er god for lave frekvenser som er < 10^-1
Jeg vil anta at ytelsen blir enda verre uten antakelsen
$\vartheta \approx \vartheta_{ref}$