Innlevering 2

onsdag 31. januar 2024 13:14

Oppg. 1

i) $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= \underline{\underline{0,40}}$

ii)

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f_x = np.array([0.05,0.10,0.25,0.40,0.15,0.05])
# kumulativ fordelingsfunksjon
F_x = [np.sum(f_x[:i]) for i in range(1,7)]
print(F_x)
def simX(n):
    # verdimengde
    x = np.arange(6)
    # for lagring av realisasjoner
    x_sim = np.zeros(n)
    for i in range(n): # vi simulerer hver og en x for seg
        u = np.random.uniform() # en realisasjon fra U(0,1)
        if(u < F_x[0]): # hvis u er mindre enn den laveste
        # verdien i F_x vil
        # vi at realisasjonen skal være 0
            x_sim[i] = x[0]
        elif(u <= F_x[1]): # hvis u er mindre enn den nest
        # laveste verdien (men større enn laveste)
        # vil vi at x skal bli 1
            x_sim[i] = x[1]
        elif(u <= F_x[2]):
            x_sim[i] = x[2]
        elif(u <= F_x[3]):
            x_sim[i] = x[3]
        elif(u <= F_x[4]):
            x_sim[i] = x[4]
        elif(u > F_x[4]):
            x_sim[i] = x[5]
    return x_sim

# Antall realisasjoner man skal bruke
n = 1000
# Simuler realisasjoner av X ved å kalle på simX-funksjonen i cellen over
simulerte_X = list(simX(n))
print(simulerte_X)
# Approksimer sannsynligheten
P_X_le_2 = (simulerte_X.count(0)+simulerte_X.count(1)+simulerte_X.count(2))/n
# Skriv ut resultatet
print("Approksimert sannsynlighet: ",P_X_le_2)
```

```
Approksimert sannsynlighet:  0.393
```

Dette er ganske nærme fasiten på 0.40

Oppg. 2

i) $E[X] = \sum_{x} x \cdot f(x)$

$= 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,10 + 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,40 + 4 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,05$

$= \underline{2,65}$

$$= \underline{\underline{2,65}}$$

ii) $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$$E[X^2] = \sum_x x^2 \cdot f(x)$$

$$= 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}25 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 4^2 \cdot 0{,}15 + 5^2 \cdot 0{,}05$$

$$= \underline{8{,}35}$$

$$Var[X] = 8{,}35 - 2{,}65^2 = \underline{\underline{1{,}3275}}$$

$$SD[X] = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{1{,}3275} = \underline{\underline{1{,}1521}}$$

```python
n = 1000
# Simuler realisasjoner av X ved å kalle på simX-funksjonen i cellen over
simulerte_X = list(simX(n))
print(simulerte_X)
# Approksimer sannsynligheten
forventningsverdi = (sum(simulerte_X))/n
# Skriv ut resultatet
print("Approksimert forventningsverdi: ", forventningsverdi)
```

```
Approksimert forventningsverdi:  2.678
```

$\approx 2{,}65$

```python
def E(X):
    return np.sum(X)/len(X)

def SD(X):
    varians = E(X**2)-E(X)**2
    return np.sqrt(varians)

# Antall realisasjoner man skal bruke
n = 1000
# Simuler realisasjoner av X ved å kalle på simX-funksjonen i cellen over
simulerte_X = simX(n)
standardavvik = SD(simulerte_X)
print(standardavvik)
```

```
1.1236899038435832
```

$\approx 1{,}1521$

Oppg. 3 a)

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{\alpha}} \quad ; \quad x \geq 0$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{2x}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{2x}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{a}}$$

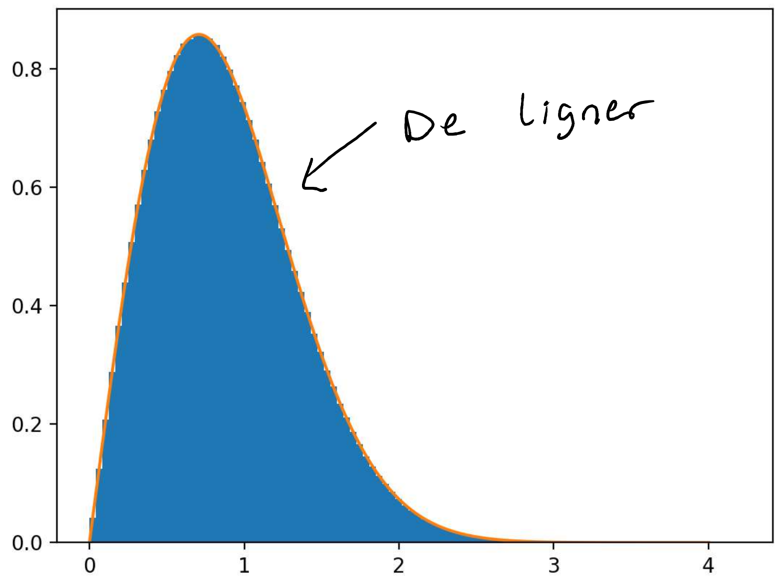
b) $X = F_X^{-1}(U)$

$$U = 1 - e^{-\frac{X^2}{a}}$$

$$\ln(1-U) = -\frac{X^2}{a}$$

$$\Rightarrow X = \pm\sqrt{-a\ln(1-U)}$$

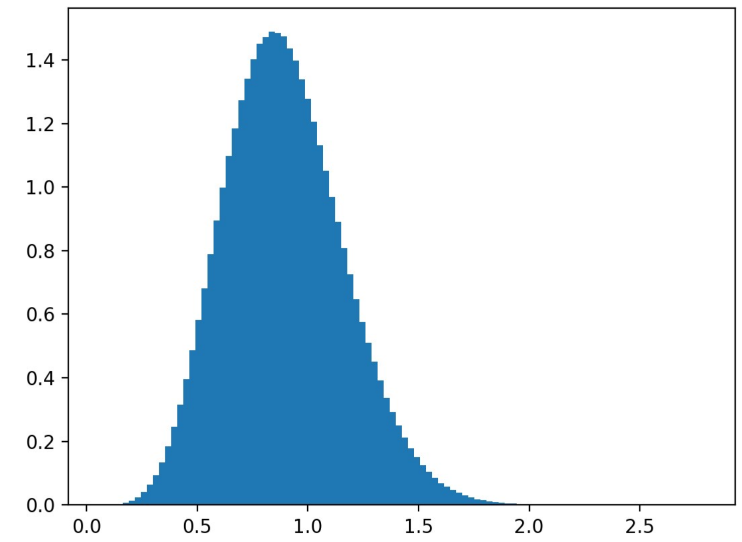
$$x \geq 0 \Rightarrow X = \sqrt{-a\ln(1-U)}$$



c)

```
def generateX(n,alpha):
    u = np.random.uniform(size=n) #array med n elementer.
    x = np.sqrt(-alpha*np.log(1-u))
    return x

def Y(n):
    a = generateX(n, 1)
    b = generateX(n, 1)
    c = generateX(n, 1.2)
    d = generateX(n, 1.2)
    e = generateX(n, 1.2)
    liste = np.zeros(n)

    for i in range(n):
        tmp_liste = np.zeros(5)
        tmp_liste[0]=a[i]
        tmp_liste[1]=b[i]
        tmp_liste[2]=c[i]
        tmp_liste[3]=d[i]
        tmp_liste[4]=e[i]
        tmp_liste.sort()
```

```
        tmp_liste[3]=d[i]
        tmp_liste[4]=e[i]
        tmp_liste.sort()

        liste[i]=tmp_liste[2]
    return liste

n = 10000
simulerte_Y = Y(n)

plt.hist(simulerte_Y, density=True,bins=100)
plt.show()
```




```
count = 0
for i in range(n):
    if simulerte_Y[i]>=1:
        count+=1
print("P(Y>=1) =", count/n)
```

```
P(Y>=1) = 0.3308
```

```
simulerte_Y = Y(n)

count = 0
for i in range(n):
    if simulerte_Y[i]>=1:
        count+=1

count1 = 0
for j in range(n):
    if simulerte_Y[j]>=0.75:
        count1+=1

print("P(Y>=1 | Y>=0.75) = ", count/count1)
```

```
P(Y>=1 | Y>=0.75) =  0.4725163161711385
```

Oppg 4.

i) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x \frac{2x}{a} e^{-\frac{x^2}{a}}\, dx$

Delvis integrasjon:

$-\infty$ $\quad$ 0

Delvis integrasjon:

$$\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dx$$

$$u' = \frac{2x}{a} e^{-\frac{x^2}{a}} \qquad v = x$$

$$u = -e^{-\frac{x^2}{a}} \qquad v' = 1$$

$$\int_0^\infty x^2 \frac{2x}{a} e^{-\frac{x^2}{a}} dx = \left[-xe^{-\frac{x^2}{a}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\frac{x^2}{a}}\,dx$$

$$= (0-0) + \int e^{-\frac{x^2}{a}}\,dx$$

U-substitusjon

$$u = \frac{x}{\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$dx = \sqrt{a}\,du$$

Symmetrisk funksjon: $\boxed{2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$

$$\sqrt{a}\int_0^\infty e^{-u^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{\alpha\pi}}{2}}}$$

ii)

```
simulerte_Y = Y(n)
forventet_verdi = np.mean(simulerte_Y)
standardavvik = np.std(simulerte_Y)
print( forventet_verdi, standardavvik)
```

```
0.8947393068383928 0.2698061006615396
```

5. i)

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x,y)$$

$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x,y)$

$$f_X(0) = f_X(1) = f_X(2) = \frac{1}{3}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{for } x=0 \\ \frac{1}{3} & \text{for } x=1 \\ \frac{1}{3} & \text{for } x=2 \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

x \ y	0	1	2	3
0	1/6	1/2	1/6	1/6
1	1/6	1/6	1/2	1/6
2	1/6	1/6	1/6	1/2

ii) $E[X] = \sum_x x f_X(x) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3}$

$= \underline{\underline{1}}$

$E[Y] = \sum_y y f_Y(y) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{5}{18} + 3 \cdot \frac{5}{18}$

$= \frac{30}{18} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$

iii) Hvis uavhengige: $E(XY) = E(X)E(Y)$

$E(X)E(Y) = \frac{5}{3}$

$E(XY) = \sum_y \sum_x xy f_{XY}(x,y)$

$= \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + 1 = \frac{17}{9}$

Siden $E(X)E(Y) \neq E(XY)$, så er X og Y avhengige.

iiii) $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= \frac{17}{9} - \frac{5}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$

Oppg. 6 a)

i) X_1: vekt av aluminiumsplate 1

⋮

X_{10}: vekt av plate 10

$E(X_1 + \dots X_{10} + 50) = E(X_1) + \dots + E(X_{10}) + 50$

$= 1000\,g + 50\,g = \underline{\underline{1050\,g}}$

ii) $Var(X_1 + \dots + X_{10} + 50) = 10\,var(X_1) + var(50)$

$= \underline{6{,}4g^2}$

$SD(X_1 + \dots + X_{10} + 50) = \sqrt{6{,}4g^2} \approx \underline{2{,}53g}$

$$SD(X_1 + \ldots + X_{10} + 50) = \sqrt{6{,}4g^2} \approx \underline{\underline{2{,}53g}}$$

b)

i) Y: antall defekte plater

$$E(Y) = np = 10 \cdot 0{,}21 = \underline{\underline{2{,}1}}$$

ii) $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$

$p = 0.21, \quad n = 10, \quad x = 0$

$$P(Y \geq 1) = 1 - \binom{10}{0} 0.21^0 (1 - 0.21)^{10} \approx \underline{\underline{0{,}905}}$$