

Oppgave 1:

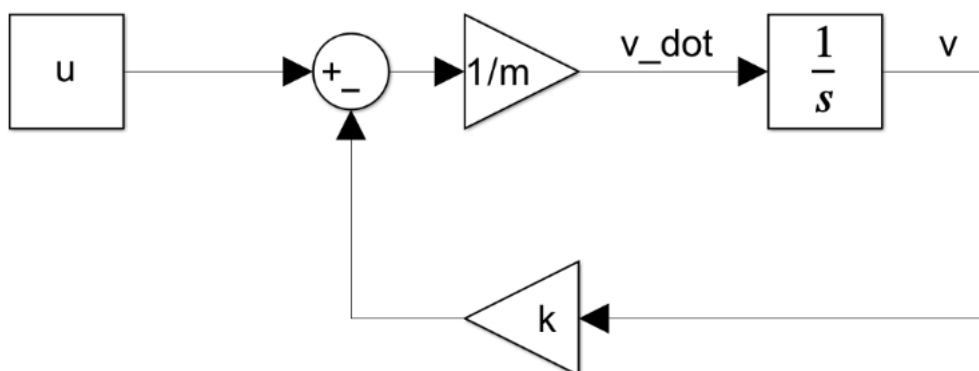


Figure 1: Blokkdiagram for systemet gitt av (1)

- (a) Systemet er monovariabelt fordi prosessen kun har én inngang og én utgang. Vi ser at det er en tilbakekobling i systemet. Vi sender v tilbake til summasjonspunktet siden \dot{v} er avhengig av v .
- (b) Eulers metode for simulering er en iterativ metode som finner en tilnærmet løsning på en differensialligning på formen $\dot{x} = f(x)$. Vi kan tilnærme neste punkt på grafen ved hjelp av det forrige. For å gjøre dette deler vi opp t-aksen inn i diskrete tidspunkter. Vi innfører deretter en skrittlengde h som er avstanden mellom to tidspunkter på t-aksen som vi beregner. Dersom vi har en x -verdi, så kan vi finne den neste x -verdien ved hjelp av den nåværende x -verdien og skrittlengden h . Dette gjør vi ved å tilnærme det neste punktet ved hjelp av tangenten i det nåværende punktet.

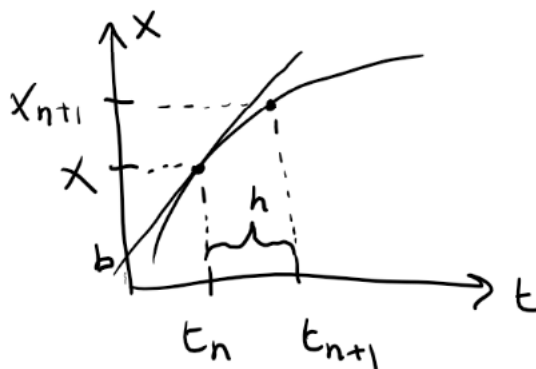


Figure 2: Eulers metode

Denne illustrasjonen viser at vi lager en lineær funksjon for tangenten. Dette gjør vi ved hjelp av den deriverte i det punktet og x -verdien i punktet. Vi bruker denne tangenten for å finne en tilnærmet verdi for x_{n+1} . Med denne informasjonen kan vi utlede formelen for Eulers metode. Tangenten i (t_n, x_n) har stigningstall $a = \dot{x} = f(x)$. Dette gir oss uttrykkene:

(1) $x_n = f(x_n)t_n + b$ for tangenten

(2) $x_{n+1} = f(x)t_{n+1} + b$

(2-1) gir oss Eulers metode $x_{n+1} = x_n + hf(x_n)$

Nå som vi har formelen kan vi løse diff.ligningen numerisk dersom vi har initialbetingelser. Hvis vi for eksempel vet $x(0)$, så kan vi finne ut $x_1, x_2 \dots x_n$ med Eulers metode. Vi kan sette inn x_0 i høyre side av formelen, noe som vil gi oss x_1 . Tilsvarende kan vi gjøre med x_1 for å finne x_2 og alle andre x-verdier.

- (c) Skrittlengden er det som bestemmer nøyaktigheten av løsningen ved bruk av Eulers metode. Hvis vi ser på illustrasjonen fra forrige oppgave, så ser vi at tangenten vil gi oss en verre tilnærming dersom skrittlengden blir større. Det finnes nemlig en øvre grense for h hvis vi vil ha numerisk stabilitet. Vi velger å studere denne diff.ligningen:

$$\dot{x} = (\lambda x, \lambda < 0)$$

Eulers metode gir:

$$x_{n+1} = x_n + h\lambda x_n = (1 + h\lambda)x_n$$

For at løsningen skal være numerisk stabil har vi

$$|x_{n+1}| \leq |x_n|$$

Vi får da

$$|(1 + h\lambda)x_n| \leq |1 + h\lambda| \cdot |x_n|$$

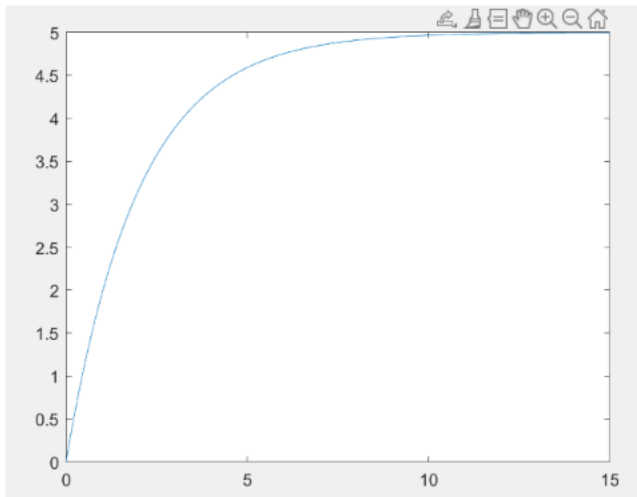
ved hjelp av Cauchy-Schwarz ulikhet. Vi ser nå at $|1 + h\lambda| \leq 1$ Dette betyr at

$$-1 - h\lambda \leq 1$$

$$-h\lambda \leq 2$$

$$h \leq -\frac{2}{\lambda}$$

I dette eksempelet ser vi at vi faktisk får en øvre verdi for h som gir numerisk stabilitet. Vi kan ikke gå over denne h-verdien fordi da begynner vi å få svingninger. Desto lavere skrittlengde, desto høyere nøyaktighet på den numeriske løsningen av ligningen.



```

1  h = 0.01;
2  u = 500;
3  m = 200;
4  k = 100;
5  v(1) = 0;
6  T = 15;
7
8  for n=2:(T/h+1),
9      v(n)= v(n-1)+h*((u/m)-(k*v(n-1)/m));
10 end
11
12 t=0:h:T;
13 plot(t,v)

```

Figure 3: Plot og MATLAB-script

(d) Her ser vi at den numeriske løsningen ikke stemmer overens med den eksakte løsningen. Dette er fordi vi bruker Eulers metode som kun gir oss en tilnærming av grafen. Den numeriske løsningen gir oss litt høyere hastighet enn det som faktisk er tilfellet. Vi kan gjøre den numeriske løsningen bedre ved å ha større skritt lengde. Dette gjør at løsningen blir mer nøyaktig.

(e) Plot

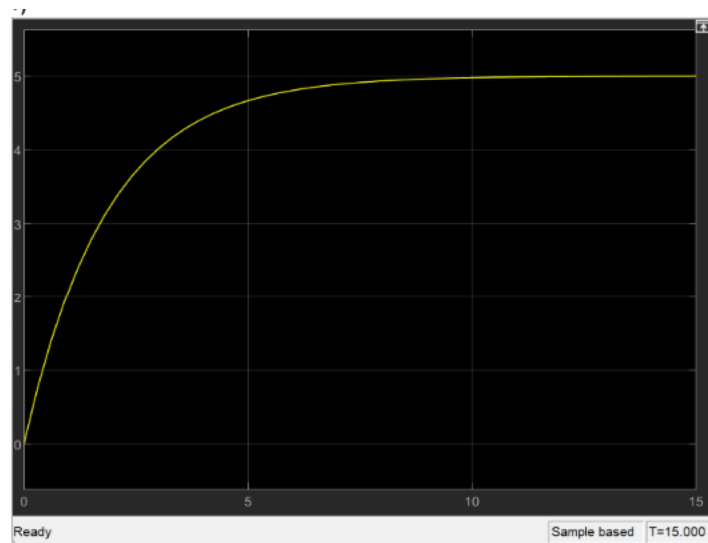


Figure 4: Plot fra Simulink

Oppgave 2: Pitch

(a)

$$J\ddot{\theta} = \Sigma M = -k_2\dot{\theta} - k_3\theta - k_4\delta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{J}(k_2\dot{\theta} + k_3\theta + k_4\delta)$$

Dette blir da et andreordens system fordi vi har $\ddot{\theta}$ i uttrykket. Disse kan gjøres om til et ligningssystem med to lineære førsteordens diff.ligninger. Dette er noe vi gjør senere.

(b) Blokkdiagrammet for pitch-systemet blir slik

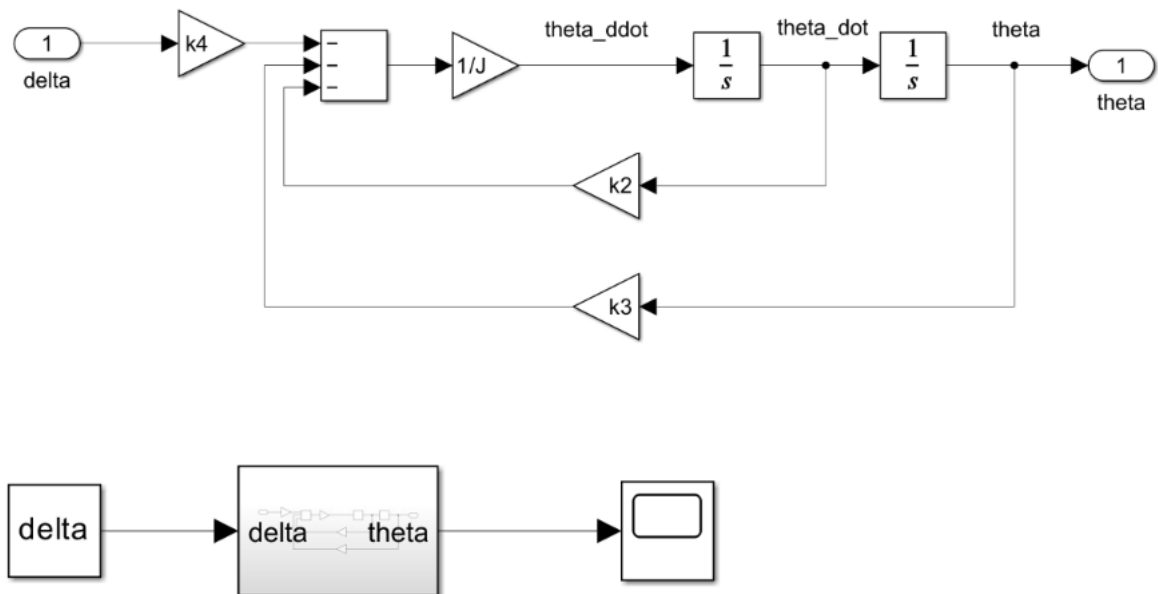


Figure 5: Blokkdiagram pitch-system

Oppgave 3: Posisjon

(a) For å finne bevegelsesligningen i x-retning kan vi dekomponere farten i bevegelsesretningen. Vi får da $\dot{x} = v \cos \theta$

(b) Det tilsvarende kan bli gjort for bevegelsesligningen i z-retning: $\dot{z} = v \sin \theta$

(c) Modellen består av følgende differensialligninger

$$\dot{v} = \frac{1}{m}u - \frac{k}{m}v$$

$$\dot{x} = v \cos \theta$$

$$\dot{z} = v \sin \theta$$

Den andreordens diff.ligningen for pitchen kan vi gjøre om til to førsteordens diff.ligninger. Totalt gir dette oss fem førsteordens diff.ligninger.

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{k_2}{J}\dot{\theta} + \frac{k_3}{J}\theta + \frac{k_4\delta}{J}\right)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k_2}{J}\dot{\theta} + \frac{k_3}{J}\theta = \frac{k_4\delta}{J}$$

Vi innfører to nye tilstander:

$$\theta_1 = \theta \quad \text{og} \quad \theta_2 = \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} = \theta_2 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_1 = \theta_2}$$

$$\dot{\theta}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{k_2}{J}\dot{\theta} - \frac{k_3}{J}\theta - \frac{k_4\delta}{J} = -\frac{k_2}{J}\theta_2 - \frac{k_3}{J}\theta_1 - \frac{k_4\delta}{J}$$

$$\boxed{\dot{\theta}_2 = -\frac{1}{J}(k_2\theta_2 - k_3\theta_1 - k_4\delta)}$$

Figure 6: Omgjøring av ligning for pitch

Ut ifra diff.ligningene kan vi konkludere med at det er en lineær modell av andre orden. Dette er fordi ligningen for pitchen har theta dobbelderivert i seg. Systemet i seg selv vil være multivariabelt fordi prosessen har flere innganger og utganger. Som innganger har vi blant annet pådraget u og vingens vinkel δ . Utgangene vil bli tilstandene i alle diff.ligningene.

(d) Alle subsystemer i simulink

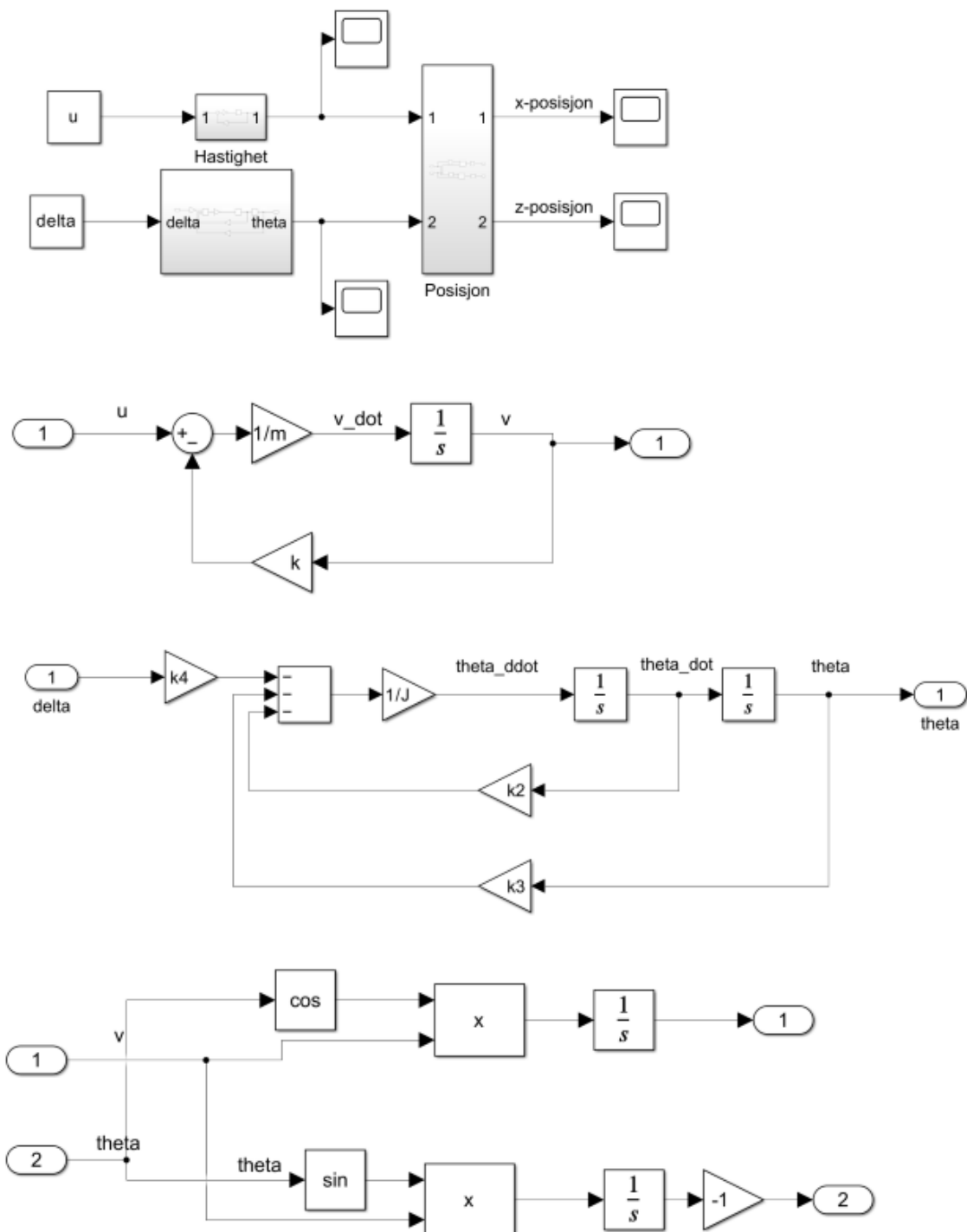


Figure 7: Subsystemer

- (e) Dersom vi øker rorvinkelen, så ser vi at trajektoren går mer og mer oppover og at avstanden tilbaketilgjort forblir ca. det samme. Det er altså en tydelig forskjell i θ .

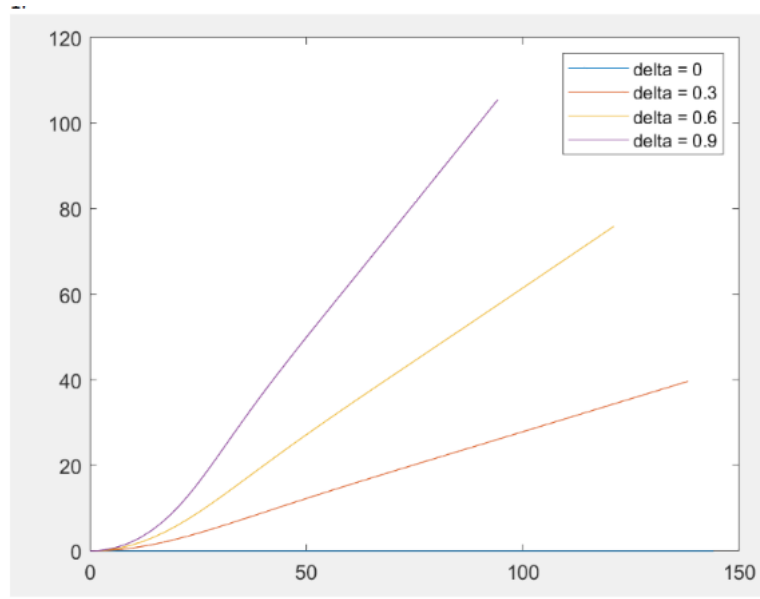


Figure 8: AUV-trajektor

- (f) Dersom vi gjør δ negativ, så har vi et tilsvarende fenomen, men vi ser at AUV'en synker og at θ stiger.

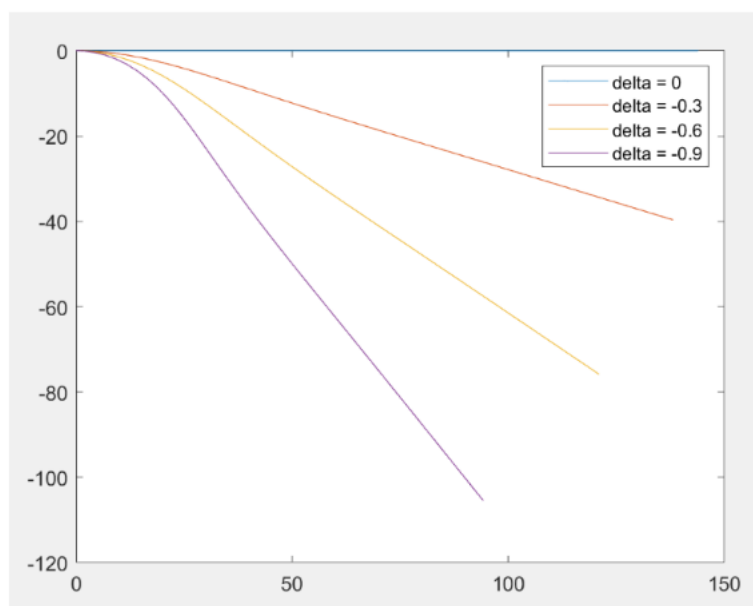


Figure 9: AUV-trajektor

- (g) Når vi øker θ_0 så ser vi at AUV'en er nødt til å svinge mye mer i starten før den holder kursen. Etter hvert vil banene ligge ganske parallelt med hverandre.

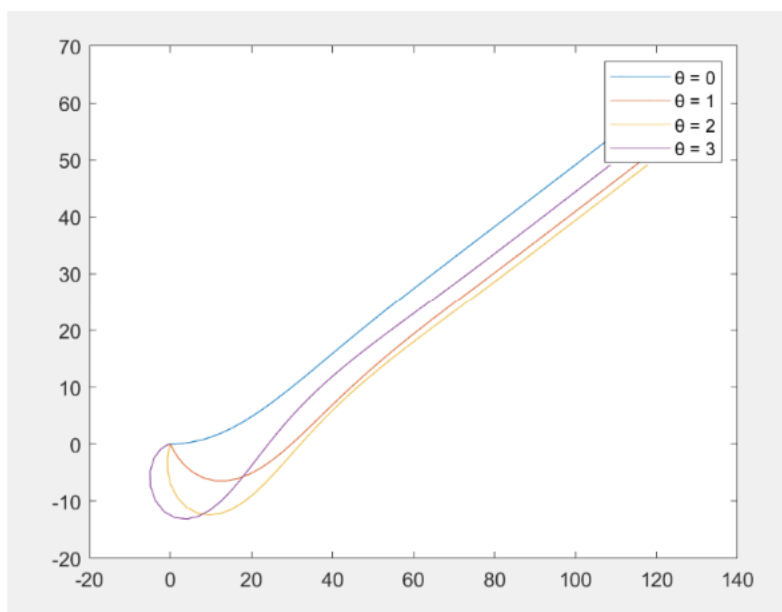


Figure 10: AUV-trajektor

- (h) Når vi øker u , så ser vi at AUV'en beveger seg en lenger avstand. Dette er fordi en økning i u tilsvarer høyere motorkraft som vil si høyere akselerasjon.

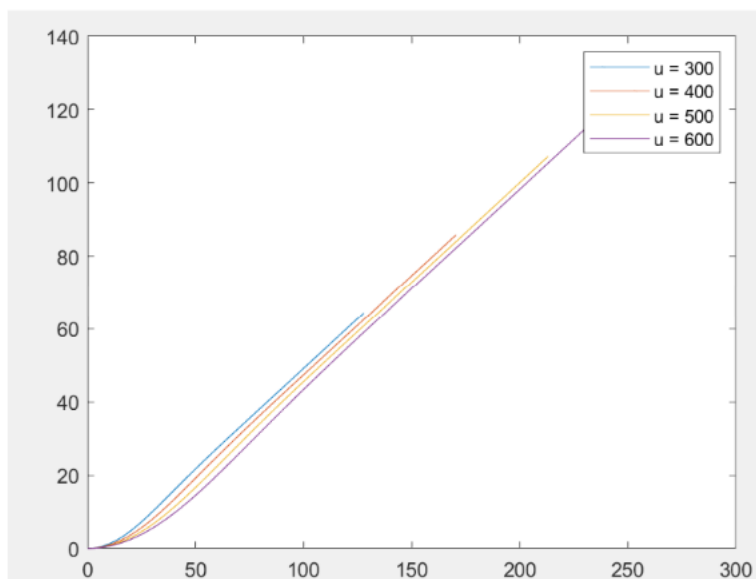


Figure 11: AUV-trajektor