Øving 2

onsdag 11. september 2024 12:32

Oppgave 1: Egenverdier

a) Finn egenverdier i følgende matriser:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) A_1: $\det(A_1 - \lambda I) = 0$

$$\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{3}{2} - \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$$

A_2: $(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$$

A_3: $(3-\lambda)\cdot -\lambda + 2 = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$$

b) Finn egenverdier (med multiplisitet) i følgende matriser:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Hvilke av matrisene kan diagonaliseres?

b) B_1: $(1-\lambda)^2 = 0$

$\lambda = 1$ Multiplisitet: 2

Teorem 11.14. *La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da har A n* reelle *egenverdier (talt med multiplisitet) og A er diagonaliserbar (som en reell matrise).*

B_1 er diagonaliserbar ifølge teorem 11.14

B_2: $-\lambda(2-\lambda) + 1 = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$\lambda = 1$ Multiplistet : 2

Teorem 11.2. *En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer.*

Ser om vi har 2 lineært uavh. egenvektorer :

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$-v_1 - 2v_2 = 0$$

$$v_1 = s$$

$$-s - 2v_2 = 0$$

$$v_2 = -\frac{1}{2}s$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} s$$

Vi har bare 1 egenvektor, så B_2 kan ikke diagonaliseres.

B_3: $(1-\lambda)^2 = 0$

$\lambda = 1$ Mult : 2

Finner egenvektorer :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$v_1 = 0 \quad v_2 = s$

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} s \Rightarrow B_3$ ikke diagonaliserbar.

c) Finn egenverdier i følgende matriser:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 3 & f \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ b & d & 3 & 0 \\ c & e & f & 4 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

C_1: $\det(C_1 - \lambda I) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & a & b & c \\ 0 & 2-\lambda & d & e \\ 0 & 0 & 3-\lambda & f \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (1-\lambda)\cdot(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

$\lambda \in \{1, 2, 3, 4\}$

C_2:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & 2-\lambda & 0 & 0 \\ b & d & 3-\lambda & 0 \\ c & e & f & 4-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

$\lambda \in \{1, 2, 3, 4\}$

C_3:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \end{bmatrix}\right.$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

$$\lambda \in \{1, 2, 3, 4\}$$

d) La

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Diagonalisér A (om mulig). Det vil si, finn en diagonal Λ og en invertibel Q slik at

$$A = Q\Lambda Q^{-1}. \qquad (5)$$

Finner egenverdier til A

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$(8-\lambda)(3-\lambda) + 6 = 0$$

$$24 - 8\lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 11\lambda + 30 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = 6$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Q er egenvektorene satt i en matrise

Egenvektorer:

$(A - \lambda I)\vec{v} = 0 \qquad \lambda = 5$ først

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$3v_1 - v_2 = 0$$

$$v_1 = s$$

$v_1 = s$

$v_2 = 3s$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} s$

$\lambda = 6:$

$$\left.\begin{matrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \sim \left.\begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$2v_1 - v_2 = 0$

$v_1 = s$

$v_2 = 2s$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} s$

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$A = Q \Lambda Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

e) Anta at egenverdiene til matrisen A er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$. Anta videre at egenverdiene til matrisen B er $\mu_1 = 3$ og $\mu_2 = 4$. Hva er da egenverdiene til

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ Y & B \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}? \tag{6}$$

$\det(\Sigma_i - \lambda I) = \det(A - \lambda I) \cdot \det(B - \lambda I) = 0$

$\lambda \in \{1, 2, 3, 4\}$

a) Sett opp systemene i fig. 2 som tilstandsrommodeller (finn A, b, c).

$S: \dot{s} = As + bu$

$$y = cs + du$$

$$\dot{s}_1 = -a_0 s_3 + u$$
$$\dot{s}_2 = -a_1 s_3 + s_1$$
$$\dot{s}_3 = -a_2 s_3 + s_2$$
$$y = \gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 + \gamma_3 s_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \qquad d = 0$$

$$S_*: \quad \dot{z}_1 = -a_0 z_3 - a_1 z_2 - a_2 z_1 + u$$
$$\dot{z}_2 = z_1$$
$$\dot{z}_3 = z_2$$
$$y = \beta_2 z_1 + \beta_1 z_2 + \beta_0 z_3$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{pmatrix}$$

$$O: \quad \dot{z}_1 = z_2 + \gamma_1 u$$
$$\dot{z}_2 = z_3 + \gamma_2 u$$
$$\dot{z}_3 = -a_0 z_1 - a_1 z_2 - a_2 z_3 + \gamma_3 u$$
$$y = z_1$$

$y = z_1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O_*: $\dot{v}_1 = v_2 - a_2 v_1 + \beta_2 u$

$\dot{v}_2 = v_3 - a_1 v_1 + \beta_1 u$

$\dot{v}_3 = -a_0 v_1 + \beta_0 u$

$y = v_1$

$$A = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Sett opp systemene i fig. 3 som tilstandsrommodeller (finn A, b, c).

D: $\dot{x} = Ax + bu$

$y = cx + du$

$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + b_1 u$

$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + b_2 u$

$\dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 + b_3 u$

$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \cdots \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$J: \quad \dot{x}_1 = \lambda x_1 + u$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + \lambda x_2$$
$$\dot{x}_3 = x_2 + \lambda x_3$$
$$y = x_3$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

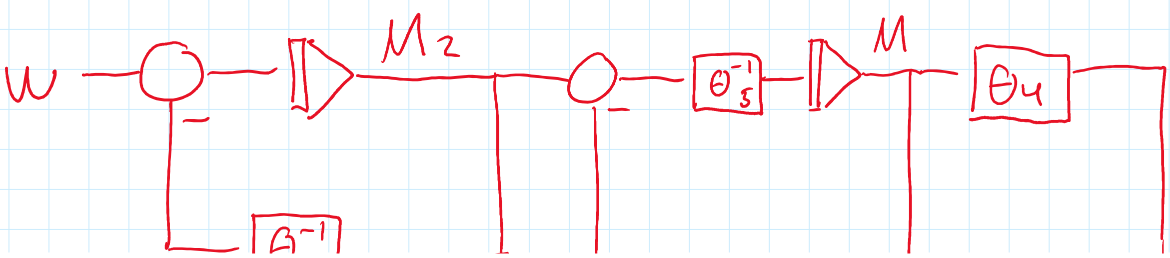
$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

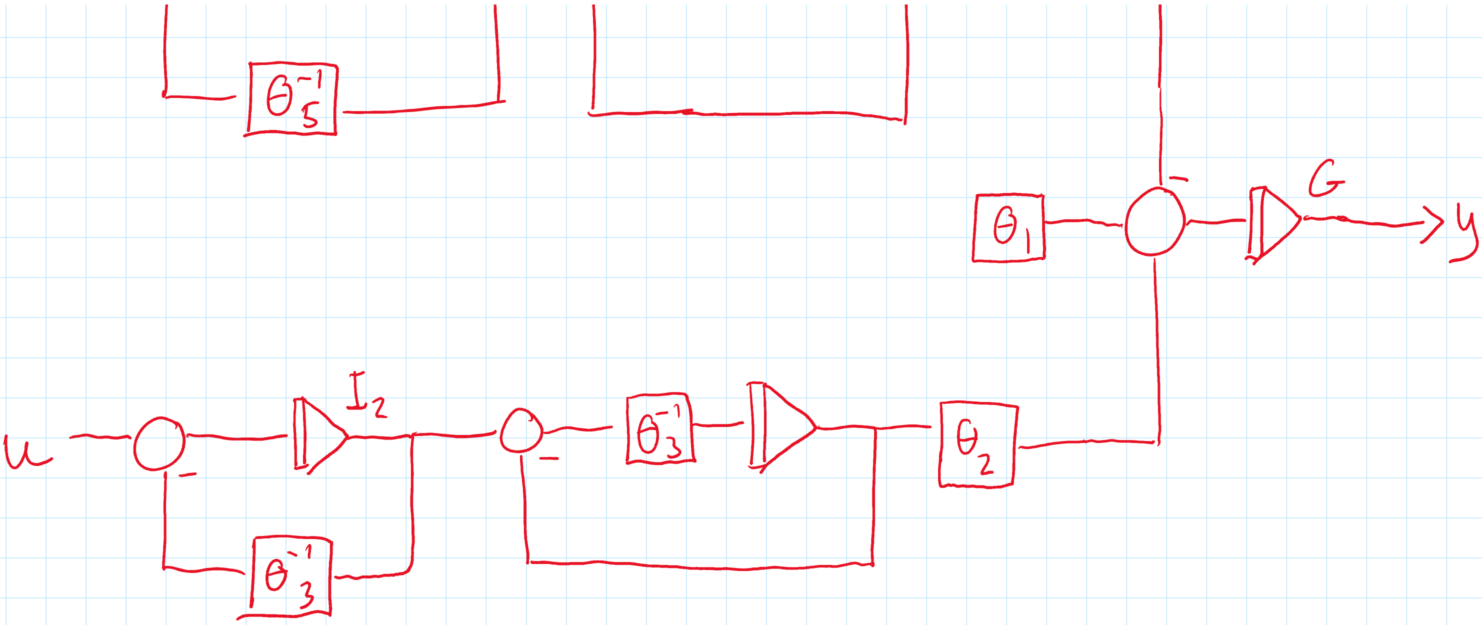
a) Sett opp insulin/glukose modellen på tilstandsromform.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_2 & 0 & \theta_4 & 0 \\ 0 & -\theta_3^{-1} & \theta_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_5^{-1} & \theta_5^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta_5^{-1} \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \theta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$$

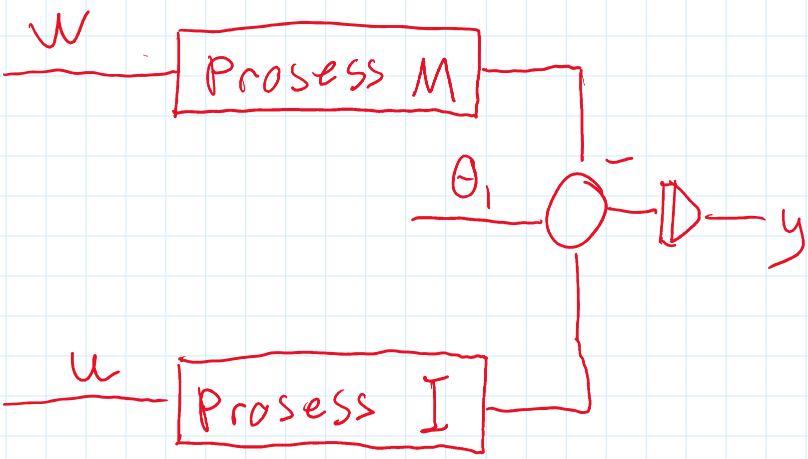
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

b) Sett opp insulin/glukose modellen på blokkdiagramform.





c) Kan blokkdiagrammet gjøres enklere ved å introdusere velvalgte subsystem?



En matrise A tilfredsstiller sitt eget karakteristiske polynom. La

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Beregn $\Delta_A(\mu)$ og verifisér at $\Delta_A(A) = 0$.

$$\Delta_A(\mu) = \det(A - \mu I)$$

$$A - \mu I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-\mu & b \\ c & d-\mu \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a-\mu & b \\ c & d-\mu \end{bmatrix}\right) = (a-\mu)(d-\mu) - bc$$

$$= ad - a\mu - d\mu + \mu^2 - bc$$

$$= \mu^2 - \mu(a+d) + (ad - bc)$$

$$\Delta_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

$$(a+d)A = \begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{bmatrix}$$

$$(ad-bc)I = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Gi et kort hydraulisk argument for validiteten til systemmatrisen A

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x}_{\begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}} + bu$$

Dette gir mening hvis vi antar at volumstrømmen ut er proporsjonal

volumstrømmen ut er proporsjonal med vannivået i tanken.
Mer vann => tanken tømmes raskere.

b) Hva er egenverdiene til tanksystemet?

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}=0$$

$$(-1-\lambda)^3=0$$

$\lambda=-1$ Multiplisitet: 3

c) Vis, ved hjelp av styrbarhetsmatrisen P, hvor du må plassere vannslangen for å gjøre systemet styrbart. Sjekk at P mister rang ved feil valg. Gi en barnevennlig forklaring av svaret på max. 2 setninger.

Vi prøver alle b-vektorene

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}: \quad \overset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}} \overset{b}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}} \overset{Ab}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{Rang: } 3$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rang: } 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Ab} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{Rang: } 2$$

Man må plassere slangen i den øverste tanken for å kunne styre alle nivåene.

d) Vis, ved hjelp av observerbarhetsmatrisen Q, hvor du må plassere målestaven for å gjøre systemet observerbart. Sjekk at Q mister rang ved feil valg. Gi en barnevennlig forklaring av svaret på max. 2 setninger.

Det gir mest mening å plassere målestaven i nederste tank for å måle nivåene.
I øverste hadde du ikke fått noe info om de under.

$c = (0\ 0\ 1):$

$$\overset{c}{(0\ 0\ 1)} \overset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}} = (0\ 1\ -1)$$

$$\overset{cA}{(0\ 1\ -1)} \overset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}} = (1\ -2\ 1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rang: } 3$$

$c = (1\ 0\ 0):$

$$\overset{c}{(1\ 0\ 0)} \overset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}} = (-1\ 0\ 0)$$

$$\overset{cA}{(-1\ 0\ 0)} \overset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}} = (1\ 0\ 0)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Rang: 1