Matemáticas Discretas II - Entrega 1

Fernando Novoa Salazar, Universidad Nacional de Colombia

13 de febrero de 2023

1. Verificar que la operación $*$ sobre el conjunto $\{a, b, c, d\}$ es asociativa.

$$\begin{array}{c c} * & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & d & d \\ a & b & d & c \\ d & a & c & b \end{pmatrix} \end{array}$$

   Primero, verificar la asociatividad.

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$a * d = b * c$$

$$d = d$$

   Se cumple para un caso, verificar el siguiente.

$$b * (c * d) = (b * c) * d$$

$$b * c = d * d$$

$$d \neq b$$

   No se cumple en este caso. Dado que hallamos al menos un caso en el que la asociatividad no se cumple, podemos decir que la operación no es asociativa. Por lo tanto, la operación $*$ sobre el conjunto $\{a, b, c, d\}$ **no** es un grupo.

2. Verificar que la multiplicación de matrices cuadradas es asociativa.

$$A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Recordamos que la multiplicación de matrices cuadradas se define así:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

Resolvemos.

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right)$$

Empezamos desarrollando el lado izquierdo.

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11}+a_{12}b_{21}c_{11}+a_{11}b_{12}c_{21}+a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12}+a_{12}b_{21}c_{12}+a_{11}b_{12}c_{22}+a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11}+a_{22}b_{21}c_{11}+a_{21}b_{12}c_{21}+a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12}+a_{22}b_{21}c_{12}+a_{21}b_{12}c_{22}+a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

Ahora desarrollamos el lado derecho.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11}+a_{12}b_{21}c_{11}+a_{11}b_{12}c_{21}+a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12}+a_{12}b_{21}c_{12}+a_{11}b_{12}c_{22}+a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11}+a_{22}b_{21}c_{11}+a_{21}b_{12}c_{21}+a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12}+a_{22}b_{21}c_{12}+a_{21}b_{12}c_{22}+a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

Podemos ver que el lado izquierdo y el lado derecho de la igualdad dan la misma matriz, por lo tanto, podemos decir que la multiplicación de matrices cuadradas es asociativa.

3. Verificar que la operación de multiplicación sobre los números complejos es un grupo. Definimos la multiplicación entre dos complejos como:

$$(a+bi) \times (c+di)$$

$$= (ac-bd) + (bc+ad)\, i$$

$$= ac + (bc+ad)\, i - bd$$

Con $(a+bi)\,,(c+di)\in\mathbb{C}$ e $i=\sqrt{-1}$

Empezamos verificando la asociatividad, sabiendo que el producto de complejos siempre da otro complejo (es cerrado). Verificamos con tres complejos.

$$((a+bi)(c+di))(e+fi)=(a+bi)((c+di)(e+fi))$$

Desarrollamos el lado izquierdo primero.

$$((a+bi)(c+di))(e+fi)$$

$$\begin{gathered}
=(ac+adi+bci+bidi)(e+fi)\\
=\left(ac+adi+bci+i^2db\right)(e+fi)\\
=(ac+adi+bci-db)\,(e+fi)\\
=ace+acfi+adie+adifi+bcie+bcifi+(-db)\,e+(-db)\,fi\\
=eac+iacf+iead-afd+iecb-cfb-edb-ifdb\\
=(eac-afd-cfb-edb)+(acf+ead+ecb-fdb)\,i
\end{gathered}$$

Ahora, desarrollamos el lado derecho.

$$(a+bi)((c+di)(e+fi))$$

$$\begin{gathered}
=(a+bi)(ce+cfi+die+difi)\\
=(a+bi)(ce+cfi+die+i^2fd)\\
=(a+bi)(ce+cfi+die-fd)\\
=(a\,(ce-fd)-b\,(cf+de))+(a\,(cf+de)+b\,(ce-fd))\,i\\
=(eac-afd-cfb-edb)+(acf+ead+ecb-fdb)\,i
\end{gathered}$$

Comprobamos al desarrollar que ambos lados son iguales. Por lo tanto, hemos verificado que la asociatividad se cumple para el producto de complejos.

El elemento neutro o identidad para el producto de complejos es:

$$1+0i=1$$

Que como sabemos, equivale al 1 en números reales, el elemento neutro de la multiplicación. Y el elemento inverso multiplicativo de cada complejo de la forma $a+bi$ a excepción de $0+0i$ es:

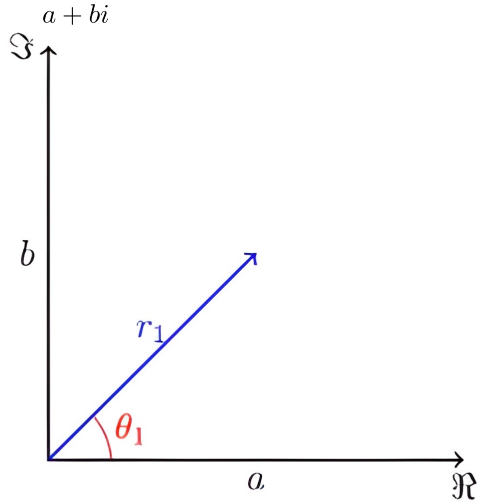
$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Ya que, al multiplicar este inverso por el complejo original obtenemos la identidad 1.

$$\begin{aligned}(a+bi) \times \frac{a\ -\ bi}{a^2+b^2} &= \frac{a^2-b^2i^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

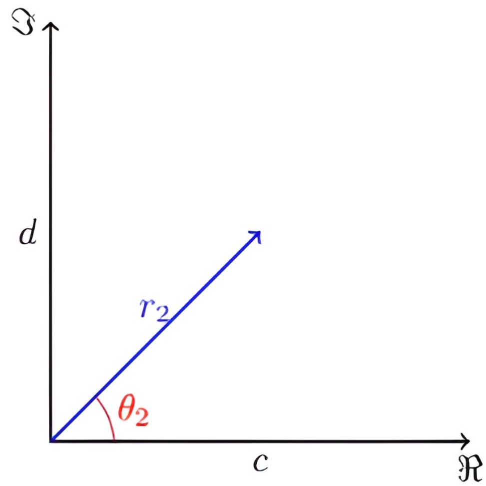
También podemos abordar el problema desde el punto de vista gráfico, usando las coordenadas polares. Para demostrar la asociatividad consideramos tres complejos:
$a+bi$
$c+di$
$e+fi$
Consideramos sus representaciones gráficas y la fórmula de Euler.
$re^{ie} = rcos(\theta) + rsen(\theta)$
Usamos las coordenadas polares en cada número complejo y aplicamos la fórmula de Euler en cada caso.

$a+bi$



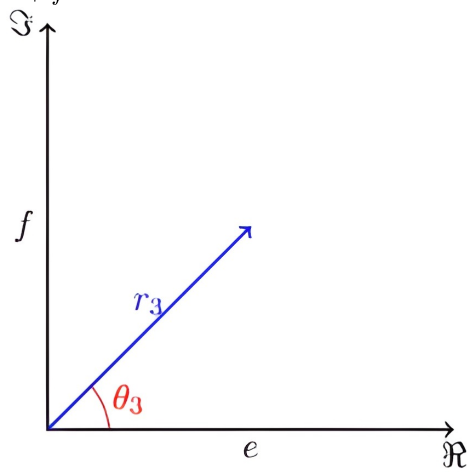
$a = r_1cos(\theta_1)$, $b = r_1sen(\theta_1)$
$r_1e^{i\theta_1} = r_1cos(\theta_1) + ir_1sen(\theta_1)$
$r_1e^{i\theta_1} = a+bi = z_1$

$c+di$



$c = r_2 cos(\theta_2)$, $d = r_2 sen(\theta_2)$
$r_2 e^{i\theta_2} = r_2 cos(\theta_2) + i r_2 sen(\theta_1)$
$r_2 e^{i\theta_2} = c + di = z_2$

$e + fi$



$e = r_3 cos(\theta_3)$, $f = r_3 sen(\theta_3)$
$r_3 e^{i\theta_3} = r_3 cos(\theta_3) + i r_3 sen(\theta_1)$
$r_3 e^{i\theta_3} = e + fi = z_3$

Y demostramos la asociatividad:
$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
$r_1 e^{i\theta_1} \times (r_2 e^{i\theta_2} \times r_3 e^{i\theta_3}) = (r_1 e^{i\theta_1} \times r_2 e^{i\theta_2}) \times r_3 e^{i\theta_3}$
$r_1 e^{i\theta_1} \times (r_2 r_3 e^{i\theta_2 + i\theta_3}) = (r_1 r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2}) \times r_3 e^{i\theta_3}$
$r_1 r_2 r_3 e^{i\theta_1 + i\theta_2 + i\theta_3} = r_1 r_2 r_3 e^{i\theta_1 + i\theta_2 + i\theta_3}$
Vemos que ambos lados de la igualdad son iguales, por lo tanto, se cumple la

asociatividad para el producto de números complejos.
Solamente probamos la asociatividad, porque en clase vimos la demostración de las demás condiciones.