Matemáticas Discretas II - Tarea 4
Fernando Novoa Salazar, Universidad Nacional de Colombia
27 de febrero de 2023

1. Si $\theta : G \to H$ es un homomorfismo, Kernel($\theta$) $= \{x \in G : \theta x = 1\}$ y Img($\theta$) $= \{y \in H : \theta x = y \vee x \in G\}$, probar que Kernel($\theta$) y Img($\theta$) son subgrupos.
   Para demostrar que Kernel($\theta$) y Img($\theta$) son subgrupos, verificamos las tres propiedades de un subgrupo:
   Cerradura: si $a$,$b$ están en Kernel($\theta$) y en Img($\theta$), entonces $a{\cdot}b$ también está en Kernel($\theta$) y en Img($\theta$).
   Inversos: si $a$ está en Kernel($\theta$) y en Img($\theta$), entonces su inverso $a^{-1}$ también está en Kernel($\theta$) y en Img($\theta$).
   Elemento neutro: la identidad de $G$ está en Kernel($\theta$) y en Img($\theta$).

   - Kernel($\theta$):
     Sea $a$,$b$ en Kernel($\theta$), es decir
     $\theta(a) = \theta(b) = 1$. Entonces, $\theta(ab) = \theta(a)\ \theta(b) = 1{\cdot}1 = 1$, por lo que $ab \in$ Kernel($\theta$).
     $\therefore$ Kernel($\theta$) es cerrado bajo la operación del grupo $G$.
     a $\in$ Kernel($\theta$) $\to \theta(a)$=1
     ↳ $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1}$=$1^{-1}$=1
     $\therefore a^{-1} \in$ G $\iff$ Kernel($\theta$) es cerrado bajo inversos.
     $id_G$: elemento neutro del grupo $G$.
     $id_G \in$ Kernel($\theta$) $\leftarrow \theta(id_G) = 1H$ ya que es un homomorfismo.
     $\therefore$ Kernel($\theta$) contiene el elemento neutro.
     Kernel($\theta$) es un subgrupo de $G$.
   - Img($\theta$):
     Sea $c$,$d$ en Img($\theta$), es decir,
     $\exists$ $a$,$b$ tales que $\theta(a) = c \wedge \theta(b) = d \to$
     $\theta(ab^{-1}) = \theta(a)\theta(b^{-1})$=c$\theta(b)^{-1}$=$cd^{-1}$
     $\therefore ab^{-1} \in$G $\wedge$ $\theta(ab^{-1}) \in$ Img($\theta$)
     Img($\theta$) es cerrado bajo la operación del grupo $H$.
     $C \in$ Img($\theta$) $\to \exists\ a \in G$ tal que $\theta(a) = c$.
     Como $\theta$ es un homomorfismo, $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1}$=c$^{-1}$
     $\therefore c^{-1} \in$ Img($\theta$) es cerrado bajo inversos.
     $id_H \in$ Img($\theta$) $\leftarrow \theta(id_G) = id_H$ ya que es un homomorfismo.
     Para mostrar que Img($\theta$) contiene el elemento neutro de $H$, $id_H$, debemos encontrar un elemento $a{\in}G$ tal que $\theta(a)$=$id_H$.
     Como $\theta$ es un homomorfismo, sabemos que $\theta(id_G)$=$id_H$. Por lo tanto, $id_H$ está en la imagen de $\theta$. $id_H \in$ Img($\theta$), ya que $id_G$ es el elemento neutro de $G$, y el homomorfismo $\theta$ preserva el elemento neutro.

2. Demostrar el siguiente teorema:

   Sea $X$ un subconjunto del grupo $G$, entonces hay un subgrupo más pequeño $S$ de $G$ que contiene a $X$. Es decir, si $T$ es cualquier otro subgrupo que contiene $X$, $S \subseteq T$.

Para demostrar el teorema, construimos un subgrupo $S$ de $G$ a partir de $X$ usando la siguiente definición.
$S$: el conjunto de todos los elementos de $G$ que se pueden escribir como una combinación finita de elementos de $X$ y sus inversos.
$S = \{g_1^{e_1} \cdot g_2^{e_2} \cdot ... \cdot g_n^{e_n} : n \in N, g_1, g_2, ..., g_n \in X \cup X^{-1}, e_1, e_2, ..., e_n \in \{-1, 1\}\}$
$X^{-1}$: conjunto de inversos de los elementos de $X$.
Ahora demostrar que $S$ es un grupo de $G$ que contiene a $X$ y es más pequeño que cualquier otro subgrupo $T$ de $G$ que contenga a $X$.
$S$ es cerrado bajo la operación del grupo $G$:
Sea $a$ y $b$ en $S$, entonces existen elementos finitos de $X$ y sus inversos $(a_1, a_2, ..., a_n)$ y $(b_1, b_2, ..., b_m)$ tales que

$a = a_1^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot ... \cdot a_n^{e_n} \wedge b = b_1^{f_1} \cdot b_2^{f_2} \cdot ... \cdot b_m^{f_m}$
pertenecen a $S$ porque son una combinación finita de elemento de $X$ y sus inversos.
$S$ contiene el elemento neutro de $G$:
Como $X$ es un subconjunto de $G$, entonces el elemento neutro de $G$ pertenece a $X$ y, por lo tanto, pertenece a $S$.
$S$ es cerrado bajo la operación inversa del grupo $G$:
Sea $a$ en $S$, entonces existe una combinación finita de elementos de $X$ y sus inversos $(a_1, a_2, ..., a_n)$ tales que
$a = a_1^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot ... \cdot a_n^{e_n}$. Entonces,
$a^{-1} = ({a_1}^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot ... \cdot a_n^{e_n})^{-1} = a_n^{-e_n} \cdot ... \cdot {a_2}^{-e_2} \cdot a_1^{-e_1}$
pertenece a $S$ porque es una combinación finita de elementos $X$ y sus inversos.
pertenece a $S$ porque es una combinación finita de elementos de $X$ y sus inversos.
$S$ es un subconjunto de cualquier subgrupo $G$ que contiene a $X$:
Sea $T$ un subgrupo de $G$ que contiene a $X$, debemos demostrar que $S$ es un subconjunto de $T$.
Sea $a$ en $S$, entonces existe una combinación finita de elementos de $X$ y sus inversos
($a_1$,$a_2$,...,$a_n$) tal que
$a = {a_1}^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot ... \cdot a_n^{e_n}$
Como $T$ es un subgrupo que contiene a $X$, entonces todos los elementos de $X$ y sus inversos pertenecen a $T$. Entonces,
$a_1$,$a_2$,...,$a_n \in T$.
Como $T$ es cerrado bajo la operación $G$, entonces
$a_1^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot ... \cdot a_n^{e_n} \in T$. Por lo tanto, $a \in T$, lo que demuestra que $S$ es un subconjunto de $T$.

$S$ es un subgrupo de $G$ que contiene a $X$.
$S$ es más pequeño que cualquier otro subgrupo $T$ de $G$ que contenga a $X$.