

$$(a) \quad x_1 + x_2 = 40$$

$$400x_1 + 400x_2 = 16000$$

$$500x_1 + 400x_2 = 19000$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 400 & 400 \\ 500 & 400 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 40 \\ 16000 \\ 19000 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 400^2 + 500^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix} = \frac{1}{640.31} \begin{bmatrix} 1 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = v_2 - (v_2^T q_1) q_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 400 & 400 \end{bmatrix} \frac{1}{640.31} \begin{bmatrix} 1 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{640.31} \begin{bmatrix} 1 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix} - \frac{360001}{640.31} \cdot \frac{1}{640.31} \begin{bmatrix} 1 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix} - 0.878 \begin{bmatrix} 1 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.122 \\ 48.8 \\ -39 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{0.122^2 + 48.8^2 + (-39)^2}} \begin{bmatrix} 0.122 \\ 48.8 \\ -39 \end{bmatrix} = \frac{1}{62.47} \begin{bmatrix} 0.122 \\ 48.8 \\ -39 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0016 & 0.002 \\ 0.625 & 0.781 \\ 0.781 & -0.624 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} u_1^T q_1 & u_2^T q_1 \\ 0 & u_2^T q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 640.31 & 562.23 \\ 0 & 62.75 \end{bmatrix}$$

(d) $Rx = Q^T b$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 640.31x_1 + 562.23x_2 \\ 62.75x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0016 & 0.625 & 0.781 \\ 0.002 & 0.781 & -0.624 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 16000 \\ 19000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24839.064 \\ 640.08 \end{bmatrix}$$

$$62.75x_2 = 640.08 \quad \Rightarrow x_2 = 10.200 \quad \approx x_2 = 10$$

$$640.31x_1 + 562.23x_2 = 24839.064 \quad \Rightarrow x_1 = 29.836 \quad \approx x_1 = 30$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$