Universidad del CEMA - Economía Monetaria Internacional

Trabajo Práctico Final

Federico N. Obermann*

Junio 2023

1. [**15 puntos**] *Balanced Growth.*

   Considere una pequeña economía abierta habitada por un agente representativo cuyas preferencias están dadas por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{C_t}$$

   donde C_t denota el consumo de un bien perecible en el período t y $\beta \in (0;1)$ es el factor subjetivo de descuento intertemporal.

   Los hogares pueden producir bienes domésticamente utilizando la tecnología de producción

$$Y_t = A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha}$$

   con $\alpha \in (0;1)$, donde Y_t denota la producción del bien de consumo final, K_t denota el stock de capital, y A_t denota el factor de productividad, que crece a una tasa bruta constante igual a $\gamma > 1$, esto es,

$$A_{t+1} = \gamma A_t$$

   con A_0 dado. La ecuación de movimiento del capital está dada por

$$K_{t+1} = K_t + I_t$$

   con $K_0 > 0$ dado, donde I_t denota la inversión neta.

   Los hogares tienen acceso perfecto a los mercados financieros internacionales. Cada período $t \geq 0$, pueden tomar D_t unidades de deuda, con madurez en $t+1$. Por cada unidad de deuda contraída, reciben una unidad del bien de consumo, y deberán repagar capital más intereses en el siguiente período. La tasa de interés internacional, denotada r, es constante y satisface

$$\beta(1+r) = \sqrt{\gamma}$$

   Considere que $(1+r)D_{-1} > 0$.

   La restricción presupuestaria flujo es

$$Y_t + D_t = C_t + I_t + (1+r)D_{t-1}$$

*fedeobermann@gmail.com

(a) Plantee el problema de optimización de los hogares.

$$
\begin{aligned}
\max_{\{C_t, D_t, I_t, Y_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{C_t} \\
\text{s.t.} \quad & C_t + (1+r)D_{t-1} + I_t = Y_t + D_t \\
& I_t = K_{t+1} - K_t \\
& Y_t = A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} \\
& \lim_{s \to \infty} \frac{D_{t+s}}{(1+r)^s} = 0 \quad \text{(Condición de Transversalidad)}
\end{aligned}
$$

Buscamos la Restricción Presupuestaria Intertemporal. Despejamos D_{t-1} de la Restricción Flujo:

$$
D_{t-1} = \frac{Y_t + D_t - C_t - I_t}{(1+r)}
$$

Iterarmos $t = 0$

$$
D_{-1} = \frac{Y_0}{1+r} - \frac{C_0}{1+0} - \frac{I_0}{1+r} + \frac{D_0}{1+r}
$$

Iteramos para $t = 1$

$$
D_0 = \frac{Y_1 + D_1 - C_1 - I_1}{(1+r)} \tag{1}
$$

Reemplazamos D_0 de (**??**) dentro de D_0 de (14):

$$
D_{-1} = \frac{Y_0}{1+r} - \frac{C_0}{1+r} - \frac{I_0}{1+r} + \frac{Y_1}{(1+r)^2} - \frac{C_1}{(1+r)^2} - \frac{I_1}{(1+r)^2} + \frac{D_1}{(1+r)^2} \tag{2}
$$

Iteramos para $t = 2$

$$
D_1 = \frac{Y_2 + D_2 - C_2 - I_2}{(1+r)} \tag{3}
$$

Reemplazamos en (15) con (16)

$$
\begin{aligned}
D_{-1} = & \frac{Y_0}{1+r} - \frac{C_0}{1+r} - \frac{I_0}{1+r} + \frac{Y_1}{(1+r)^2} - \frac{C_1}{(1+r)^2} - \frac{I_1}{(1+r)^2} + \frac{D_1}{(1+r)^2} \\
& + \frac{Y_2}{(1+r)^3} - \frac{C_2}{(1+r)^3} - \frac{I_2}{(1+r)^3} + \frac{D_2}{(1+r)^3}
\end{aligned}
$$

Multiplicamos por $(1+r)$

$$
\begin{aligned}
(1+r)D_{-1} = Y_0 - C_0 - I_0 + & \frac{Y_1}{(1+r)} - \frac{C_1}{(1+r)} - \frac{I_1}{(1+r)} + \frac{D_1}{(1+r)} \\
& + \frac{Y_2}{(1+r)^2} - \frac{C_2}{(1+r)^2} - \frac{I_2}{(1+r)^2} + \frac{D_2}{(1+r)^2}
\end{aligned}
$$

Observamos que podemos generalizar esto, entonces:

$$
(1+r)D_{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Y_t - C_t - I_t}{(1+r)^t} + \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t}}_{\text{Por CTV es } = 0}
$$

Por lo tanto, la Restricción Presupuestaria Intertemporal es:

$$(1+r)D_{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Y_t - C_t - I_t}{(1+r)^t} \tag{4}$$

Combinando las restricciones llegamos a:

$$\begin{aligned} \max_{\{C_t, D_t, I_t, Y_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{C_t} \\ \text{s.t.} \quad (1+r)D_{-1} &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t - (K_{t+1} - K_t)}{(1+r)^t} \end{aligned} \tag{5}$$

A partir de esto, planteamos el lagrangeano

$$\mathcal{L}_{\{C_t, K_{t+1}, \lambda_t\}} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^t \sqrt{C_t} + \lambda_t \left[\frac{A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t - K_{t+1} + K_t}{(1+r)^t} - (1+r)D_{-1} \right] \right) \tag{6}$$

(b) Obtenga las condiciones de optimalidad.
Resolvemos las First Order Conditions de (27)

$$\begin{aligned} &[C_t] & \beta^t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_t}} &= \frac{\lambda_t}{(1+r)^t} \\ &[K_{t+1}] & -\frac{\lambda_t}{(1+r)^t} + \frac{\lambda_{t+1}}{(1+r)^{t+1}} \alpha A_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} + \frac{\lambda_{t+1}}{(1+r)^{t+1}} &= 0 \\ &[\lambda_t] & \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t - K_{t+1} + K_t}{(1+r)^t} &= (1+r)D_{-1} \end{aligned} \tag{7}$$

Reeordemanos y nos queda:

$$\begin{aligned} &[C_t] & \beta^t (1+r)^t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_t}} &= \lambda_t \\ &[K_{t+1}] & \alpha A_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} &= r \\ &[\lambda_t] & \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t - K_{t+1} + K_t}{(1+r)^t} &= (1+r)D_{-1} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\beta(1+r) = \sqrt{\gamma}$ y que $A_{t+1} = \gamma A_t$. Las condiciones de optimalidad nos quedan

$$\begin{aligned} &[C_t] & \sqrt{\gamma}^t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_t}} &= \lambda_t \\ &[K_{t+1}] & \alpha (\gamma A_t)^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} &= r \\ &[\lambda_t] & \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t - K_{t+1} + K_t}{(1+r)^t} &= (1+r)D_{-1} \end{aligned} \tag{8}$$

(c) Caracterice las tasas de crecimiento (X_{t+1}/X_t) y las dinámicas de equilibrio de todas las variables del modelo, como función de parámetros y condiciones iniciales: K_{t+1}, I_t, C_t, Y_t, TB_t, D_t y CA_t. Donde TB y CA son la balanza comercial y la cuenta corriente, respectivamente.

La tasa de crecimiento del capital se define como $\frac{K_{t+1}}{K_t}$. Para poder plantear esto debemos tomar la $[K_{t+1}]$ e iterarla un periodo hacia atrás para obtener $[K_t]$

$$[K_t] \quad \alpha A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1} = r$$

Igualamos $[K_{t+1}]$ con $[K_t]$ a través de r y despejamos $\frac{K_{t+1}}{K_t}$

$$\alpha(\gamma A_t)^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} = \alpha A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1}$$
$$\gamma^{1-\alpha} A_t^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} = A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1}$$
$$\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha-1} \gamma^{1-\alpha} = 1$$
$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \left(\frac{1}{\gamma^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento del capital es

$$\boxed{\frac{K_{t+1}}{K_t} = \gamma} \tag{9}$$

Entonces $K_t = \gamma^t K_0$

Para la tasa de crecimiento de la inversión usaremos la Ayuda II que nos provee el ejercicio. Ya que K_0 está dado y γ es una constante, podemos llegar a:

$$K_{t+1} = \gamma K_t$$
$$K_t = \gamma^t K_0$$

Siendo que la tasa de crecimiento de la inversión se define como $\frac{I_{t+1}}{I_t}$ y que $I_{t+1} = K_{t+2} - K_{t+1}$ y $I_t = K_{t+1} - K_t$ dada la Ecuación de Movimiento del Capital, podemos llegar a

$$\frac{I_{t+1}}{I_t} = \frac{K_{t+2} - K_{t+1}}{K_{t+1} - K_t}$$

Y tomando la definición $K_t = \gamma^t K_0$, simplemente reemplazamos

$$\frac{I_{t+1}}{I_t} = \frac{\gamma^{t+2} K_0 - \gamma^{t+1} K_0}{\gamma^{t+1} K_0 - \gamma^t K_0}$$
$$\frac{I_{t+1}}{I_t} = \frac{\gamma^{t+2} - \gamma^{t+1}}{\gamma^{t+1} - \gamma^t}$$
$$\frac{I_{t+1}}{I_t} = \frac{\gamma^{t+1}(\gamma - 1)}{\gamma^t(\gamma - 1)}$$
$$\frac{I_{t+1}}{I_t} = \frac{\gamma^{t+1}}{\gamma^t}$$

Por lo que la tasa de crecimiento de la inversión será

$$\boxed{\frac{I_{t+1}}{I_t} = \gamma} \tag{10}$$

Entonces $I_t = \gamma^t I_0$

Para hallar la tasa de crecimiento del consumo $\frac{C_{t+1}}{C_t}$, iteramos $[C_t]$ hacia adelante 1 periodo

$$\begin{aligned}
[C_t] \quad & \sqrt{\gamma}^t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_t}} = \lambda_t \\
[C_{t+1}] \quad & \sqrt{\gamma}^{t+1} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_{t+1}}} = \lambda_{t+1} \\
& \frac{\sqrt{\gamma}^{t+1} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_{t+1}}}}{\sqrt{\gamma}^t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_t}}} = \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}
\end{aligned}$$

Sabemos que λ_t es constante para todo t, entonces $\lambda_t = \lambda_{t+1}$. Por lo que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\gamma} \frac{1}{\sqrt{C_{t+1}}}}{\frac{1}{\sqrt{C_t}}} &= 1 \\
\gamma^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento del consumo será

$$\boxed{\frac{C_{t+1}}{C_t} = \gamma} \tag{11}$$

Entonces $C_t = \gamma^t C_0$

Para hallar la tasa de crecimiento de la producción $\frac{Y_{t+1}}{Y_t}$ debemos usar la función del ingreso y K_t

$$Y_t = A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha}$$

Iteramos a Y_{t+1}

$$\begin{aligned}
Y_{t+1} &= (\gamma A_t)^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha} \\
\frac{Y_{t+1}}{Y_t} &= \frac{\gamma^{1-\alpha} A_t^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha}}{A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha}} \\
\frac{Y_{t+1}}{Y_t} &= \frac{\gamma^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha}}{K_t^{\alpha}}
\end{aligned}$$

Sabiendo que $\frac{K_{t+1}}{K_t} = \gamma$, entonces $\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} = \gamma^{\alpha}$

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \gamma^{1-\alpha}\gamma^{\alpha}$$

Por lo tanto, tenemos que la tasa de crecimiento del ingreso es

$$\boxed{\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \gamma} \tag{12}$$

Entonces $Y_t = \gamma^t Y_0$

Para hallar la tasa de crecimiento de la trade balance $\frac{TB_{t+1}}{TB_t}$, partimos de su definición e iteramos un periodo hacia adelante

$$TB_t = Y_t - C_t - I_t$$
$$TB_{t+1} = Y_{t+1} - C_{t+1} - I_{t+1}$$

Dividimos y reemplazamos por sus valores teniendo en cuenta las tasas de crecimiento halladas anteriormente

$$\frac{TB_{t+1}}{TB_t} = \frac{Y_{t+1} - C_{t+1} - I_{t+1}}{Y_t - C_t - I_t}$$
$$\frac{TB_{t+1}}{TB_t} = \frac{Y_t\gamma - C_t\gamma - (K_{t+2} - K_{t+1})}{Y_t - C_t - (K_{t+1} - K_t)}$$
$$\frac{TB_{t+1}}{TB_t} = \frac{Y_t\gamma - C_t\gamma - (K_{t+1}\gamma - K_t\gamma)}{Y_t - C_t - (K_{t+1} - K_t)}$$
$$\frac{TB_{t+1}}{TB_t} = \gamma\left(\frac{Y_t - C_t - (K_{t+1} - K_t)}{Y_t - C_t - (K_{t+1} - K_t)}\right)$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento de la trade balance es

$$\boxed{\frac{TB_{t+1}}{TB_t} = \gamma} \tag{13}$$

Entonces $TB_t = \gamma^t TB_0$

Para hallar la tasa de crecimiento de la deuda $\frac{D_{t+1}}{D_t}$

Para hallar la tasa de crecimiento de la Cuenta Corriente $\frac{CA_{t+1}}{CA_t}$

(d) ¿Comparten todas las variables una tendencia de crecimiento común? Provea intuición.

Sí, todas comparten γ. Esto es así ya que el ingreso se encuentra creciendo a la tasa constante γ^t debido a que hay un aumento sostenido en la tecnología de los factores de producción, entonces lo que provoca es que las otras variables también crezcan a la misma tasa con el objetivo de suavizar el consumo lo máximo posible.

Ayuda I. Para obtener los resultados, le podría ser útil llegar primero a la siguiente relación:

$$K_{t+1} = A_{t+1} \left(\frac{\beta\alpha}{\sqrt{\gamma}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ayuda II. Tenga en cuenta que si una variable X satisface

$$X_{t+1} = aX_t,$$

donde a es una constante, entonces,

$$X_t = a^t X_0$$

Demuéstrelo.

Si $t = 0$

$$X_1 = aX_0$$

Si $t = 1$

$$X_2 = aX_1$$

Despejamos X_1

$$X_1 = \frac{X_2}{a}$$

Lo reemplazamos en la ecuación cuando $t = 0$

$$\frac{X_2}{a} = aX_0$$
$$X_2 = a^2 X_0$$

Si $t = 2$

$$X_3 = aX_2$$

Despejamos X_2

$$X_2 = \frac{X_3}{a}$$

Lo reemplazamos en la ecuación cuando $t = 0$

$$\frac{X_3}{a} = aX_0$$
$$X_3 = a^3 X_0$$

Entonces podemos generalizar a

$$\boxed{X_t = a^t X_0}$$

2. [**25 puntos**] *Unbalaced Growth.*

   Considere la misma economía que en el ejercicio anterior, con la diferencia de que ahora la relación entre la tasa de interés y el factor de descuento es

   $$\beta(1 + r) = 1$$

   Resuelva, nuevamente, los inciso (a)-(d).

(a) Plantee el problema de optimización de los hogares.

$$
\begin{aligned}
\max_{\{C_t, D_t, I_t, Y_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{C_t} \\
\text{s.t.} \quad & C_t + (1+r)D_{t-1} + I_t = Y_t + D_t \\
& I_t = K_{t+1} - K_t \\
& Y_t = A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} \\
& \lim_{s\to\infty} \frac{D_{t+s}}{(1+r)^s} = 0 \quad \text{(Condición de Transversalidad)}
\end{aligned}
$$

Buscamos la Restricción Presupuestaria Intertemporal. Despejamos D_{t-1} de la Restricción Flujo:

$$D_{t-1} = \frac{Y_t + D_t - C_t - I_t}{(1+r)}$$

Iterarmos $t = 0$

$$D_{-1} = \frac{Y_0}{1+r} - \frac{C_0}{1+0} - \frac{I_0}{1+r} + \frac{D_0}{1+r}$$

Iteramos para $t = 1$

$$D_0 = \frac{Y_1 + D_1 - C_1 - I_1}{(1+r)} \tag{14}$$

Reemplazamos D_0 de (**??**) dentro de D_0 de (14):

$$D_{-1} = \frac{Y_0}{1+r} - \frac{C_0}{1+r} - \frac{I_0}{1+r} + \frac{Y_1}{(1+r)^2} - \frac{C_1}{(1+r)^2} - \frac{I_1}{(1+r)^2} + \frac{D_1}{(1+r)^2} \tag{15}$$

Iteramos para $t = 2$

$$D_1 = \frac{Y_2 + D_2 - C_2 - I_2}{(1+r)} \tag{16}$$

Reemplazamos en (15) con (16)

$$
\begin{aligned}
D_{-1} = & \frac{Y_0}{1+r} - \frac{C_0}{1+r} - \frac{I_0}{1+r} + \frac{Y_1}{(1+r)^2} - \frac{C_1}{(1+r)^2} - \frac{I_1}{(1+r)^2} + \frac{D_1}{(1+r)^2} \\
& + \frac{Y_2}{(1+r)^3} - \frac{C_2}{(1+r)^3} - \frac{I_2}{(1+r)^3} + \frac{D_2}{(1+r)^3}
\end{aligned}
$$

Multiplicamos por $(1+r)$

$$
\begin{aligned}
(1+r)D_{-1} = Y_0 - C_0 - I_0 + & \frac{Y_1}{(1+r)} - \frac{C_1}{(1+r)} - \frac{I_1}{(1+r)} + \frac{D_1}{(1+r)} \\
& + \frac{Y_2}{(1+r)^2} - \frac{C_2}{(1+r)^2} - \frac{I_2}{(1+r)^2} + \frac{D_2}{(1+r)^2}
\end{aligned}
$$

Observamos que podemos generalizar esto, entonces:

$$(1+r)D_{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Y_t - C_t - I_t}{(1+r)^t} + \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t}}_{\text{Por CTV es } =0}$$

Por lo tanto, la Restricción Presupuestaria Intertemporal es:

$$(1+r)D_{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Y_t - C_t - I_t}{(1+r)^t} \tag{17}$$

Combinando las restricciones llegamos a:

$$\begin{aligned} \max_{\{C_t, D_t, I_t, Y_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{C_t} \\ \text{s.t.} \quad (1+r)D_{-1} &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t - (K_{t+1} - K_t)}{(1+r)^t} \end{aligned} \tag{18}$$

A partir de esto, planteamos el lagrangeano

$$\mathcal{L}_{\{C_t, K_{t+1}, \lambda_t\}} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^t \sqrt{C_t} + \lambda_t \left[\frac{A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t - K_{t+1} + K_t}{(1+r)^t} - (1+r)D_{-1} \right] \right) \tag{19}$$

(b) Obtenga las condiciones de optimalidad.
Resolvemos las First Order Conditions de (27)

$$\begin{aligned} &[C_t] && \beta^t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_t}} = \frac{\lambda_t}{(1+r)^t} \\ &[K_{t+1}] && -\frac{\lambda_t}{(1+r)^t} + \frac{\lambda_{t+1}}{(1+r)^{t+1}} \alpha A_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} + \frac{\lambda_{t+1}}{(1+r)^{t+1}} = 0 \\ &[\lambda_t] && \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t - K_{t+1} + K_t}{(1+r)^t} = (1+r)D_{-1} \end{aligned} \tag{20}$$

Reeordemanos y nos queda:

$$\begin{aligned} &[C_t] && \beta^t (1+r)^t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_t}} = \lambda_t \\ &[K_{t+1}] && \alpha A_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} = r \\ &[\lambda_t] && \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t - K_{t+1} + K_t}{(1+r)^t} = (1+r)D_{-1} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\beta(1+r) = 1$ y que $A_{t+1} = \gamma A_t$. Las condiciones de optimalidad nos quedan

$$\begin{aligned} &[C_t] && \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_t}} = \lambda_t \\ &[K_{t+1}] && \alpha (\gamma A_t)^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} = r \\ &[\lambda_t] && \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t - K_{t+1} + K_t}{(1+r)^t} = (1+r)D_{-1} \end{aligned} \tag{21}$$

(c) Caracterice las tasas de crecimiento (X_{t+1}/X_t) y las dinámicas de equilibrio de todas las variables del modelo, como función de parámetros y condiciones iniciales: K_{t+1}, I_t, C_t, Y_t, TB_t, D_t y CA_t. Donde TB y CA son la balanza comercial y la cuenta corriente, respectivamente.

La tasa de crecimiento del capital se define como $\frac{K_{t+1}}{K_t}$. Para poder plantear esto debemos tomar la $[K_{t+1}]$ e iterarla un periodo hacia atrás para obtener $[K_t]$

$$[K_t] \quad \alpha A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1} = r$$

Igualamos $[K_{t+1}]$ con $[K_t]$ a través de r y despejamos $\frac{K_{t+1}}{K_t}$

$$\alpha(\gamma A_t)^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} = \alpha A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1}$$
$$\gamma^{1-\alpha} A_t^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} = A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1}$$
$$\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha-1} \gamma^{1-\alpha} = 1$$
$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \left(\frac{1}{\gamma^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento del capital es

$$\boxed{\frac{K_{t+1}}{K_t} = \gamma} \tag{22}$$

Entonces $K_t = \gamma^t K_0$

Para la tasa de crecimiento de la inversión usaremos la Ayuda II que nos provee el ejercicio. Ya que K_0 está dado y γ es una constante, podemos llegar a:

$$K_{t+1} = \gamma K_t$$
$$K_t = \gamma^t K_0$$

Siendo que la tasa de crecimiento de la inversión se define como $\frac{I_{t+1}}{I_t}$ y que $I_{t+1} = K_{t+2} - K_{t+1}$ y $I_t = K_{t+1} - K_t$ dada la Ecuación de Movimiento del Capital, podemos llegar a

$$\frac{I_{t+1}}{I_t} = \frac{K_{t+2} - K_{t+1}}{K_{t+1} - K_t}$$

Y tomando la definición $K_t = \gamma^t K_0$, simplemente reemplazamos

$$\frac{I_{t+1}}{I_t} = \frac{\gamma^{t+2} K_0 - \gamma^{t+1} K_0}{\gamma^{t+1} K_0 - \gamma^t K_0}$$
$$\frac{I_{t+1}}{I_t} = \frac{\gamma^{t+2} - \gamma^{t+1}}{\gamma^{t+1} - \gamma^t}$$
$$\frac{I_{t+1}}{I_t} = \frac{\gamma^{t+1}(\gamma - 1)}{\gamma^t(\gamma - 1)}$$
$$\frac{I_{t+1}}{I_t} = \frac{\gamma^{t+1}}{\gamma^t}$$

Por lo que la tasa de crecimiento de la inversión será

$$\boxed{\frac{I_{t+1}}{I_t} = \gamma} \tag{23}$$

Entonces $I_t = \gamma^t I_0$

Para hallar la tasa de crecimiento del consumo $\frac{C_{t+1}}{C_t}$, iteramos $[C_t]$ hacia adelante 1 periodo

$$\begin{aligned} [C_t] \quad \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{C_t}} &= \lambda_t \\ [C_{t+1}] \quad \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{C_{t+1}}} &= \lambda_{t+1} \\ \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{C_{t+1}}}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{C_t}}} &= \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \end{aligned}$$

Sabemos que λ_t es constante para todo t, entonces $\lambda_t = \lambda_{t+1}$. Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{\sqrt{C_{t+1}}}}{\frac{1}{\sqrt{C_t}}} &= 1 \\ \sqrt{C_t} &= \sqrt{C_{t+1}} \\ C_t &= C_{t+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento del consumo será

$$\boxed{\frac{C_{t+1}}{C_t} = 1} \tag{24}$$

Entonces $C_t = C_0$

Para hallar la tasa de crecimiento de la producción $\frac{Y_{t+1}}{Y_t}$ debemos usar la función del ingreso y K_t

$$Y_t = A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha}$$

Iteramos a Y_{t+1}

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= (\gamma A_t)^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha} \\ \frac{Y_{t+1}}{Y_t} &= \frac{\gamma^{1-\alpha} A_t^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha}}{A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha}} \\ \frac{Y_{t+1}}{Y_t} &= \frac{\gamma^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha}}{K_t^{\alpha}} \end{aligned}$$

Sabiendo que $\frac{K_{t+1}}{K_t} = \gamma$, entonces $\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} = \gamma^{\alpha}$

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \gamma^{1-\alpha}\gamma^{\alpha}$$

Por lo tanto, tenemos que la tasa de crecimiento del ingreso es

$$\boxed{\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \gamma} \tag{25}$$

Entonces $Y_t = \gamma^t Y_0$

Para hallar la tasa de crecimiento de la trade balance $\frac{TB_{t+1}}{TB_t}$, partimos de su definición e iteramos un periodo hacia adelante

$$TB_t = Y_t - C_t - I_t$$
$$TB_{t+1} = Y_{t+1} - C_{t+1} - I_{t+1}$$

Dividimos y reemplazamos por sus valores teniendo en cuenta las tasas de crecimiento halladas anteriormente

$$\frac{TB_{t+1}}{TB_t} = \frac{Y_{t+1} - C_{t+1} - I_{t+1}}{Y_t - C_t - I_t}$$
$$\frac{TB_{t+1}}{TB_t} = \frac{Y_t\gamma - C_t - (K_{t+2} - K_{t+1})}{Y_t - C_t - (K_{t+1} - K_t)}$$
$$\frac{TB_{t+1}}{TB_t} = \frac{Y_t\gamma - (K_{t+1}\gamma - K_t\gamma) - C_t}{Y_t - C_t - (K_{t+1} - K_t)}$$
$$\frac{TB_{t+1}}{TB_t} = \gamma\left(\frac{Y_t - C_t - (K_{t+1} - K_t)}{Y_t - C_t - (K_{t+1} - K_t)}\right)$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento de la trade balance es

$$\boxed{\frac{TB_{t+1}}{TB_t} = \gamma} \tag{26}$$

Entonces $TB_t = \gamma^t TB_0$

Para hallar la tasa de crecimiento de la deuda $\frac{D_{t+1}}{D_t}$

Para hallar la tasa de crecimiento de la Cuenta Corriente $\frac{CA_{t+1}}{CA_t}$

(d) ¿Comparten todas las variables una tendencia de crecimiento común? Provea intuición.

No, ya que al tener un consumo constante, la tasa de crecimiento de la trade balance será diferente a la tasa de crecimiento γ que tienen las demás variables (K_t, Y_t, etc)

3. [**25 puntos**] *CCAPM.*

Considere el *Lucas Tree Model* visto en clase.

Considere que hay un inversor representativo con una utilidad instantánea

$$u(C) = \frac{C^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$$

Sea Y_t la producción del árbol, D_t los dividendos y P_t el precio de cada acción. En la economía también hay un activo libre riesgo, cuyo precio por unidad es 1 unidad del bien de consumo y su payoff entre t y $t+1$ está dado por $1 + r_{f,t+1}$.

(a) Plantee y caracterice el problema de optimización del agente representativo.

$$\begin{aligned}
\max_{\{c_t, b_t, \theta_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \right\} \\
\text{s.t.} \quad & C_t + b_t + \theta_t P_t \geq (1 + r_{f,t+1}) b_{t-1} + \theta_{t-1}(P_t + D_t) \\
& (b, \theta) \text{ acotados} \\
& b_{-1}, \theta_{-1} \text{ dados}
\end{aligned}$$

El Lagrangiano nos queda:

$$\mathcal{L}_{\{C_t, b_t, \theta_t, \lambda_t\}} = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{C^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \lambda_t [(1 + r_{f,t+1}) b_{t-1} + \theta_{t-1}(P_t + D_t) - C_t - b_t - \theta_t P_t] \right] \right\} \tag{27}$$

Y las Condiciones de Optimalidad junto con las Condiciones de Transversalidad:

$$\begin{array}{ll}
[C_t] & C_t^{-\gamma} = \lambda_t \\
[b_t] & E_t\{\beta^{t+1} \lambda_{t+1} (1 + r_{f,t+1})\} = \beta^t \lambda_t \\
[\theta_t] & E_t\{\beta^{t+1} \lambda_{t+1} (P_{t+1} + D_{t+1})\} = \beta^t \lambda_t P_t \\
[\lambda_t] & (1 + r_{f,t+1}) b_{t-1} + \theta_{t-1}(P_t + D_t) = C_t + b_t - \theta_t P_t \\
[\text{CTV } \theta] & \lim_{T\to\infty} E_0\{\beta^{T+1} [\lambda_{T+1} (P_{T+1} + D_{T+1})] \theta_T\} \\
[\text{CTV } b] & \lim_{T\to\infty} E_0\{\beta^{T+1} [\lambda_{T+1} (1 + r_{f,T})] b_T\}
\end{array} \tag{28}$$

(b) Defina un equilibrio competitivo con mercados secuenciales para esta economía.

Tenemos un sistema de precios $\{P_t, r_t\}$ que hace que todo el mercado se limpie para t. Además suponemos que la firma paga su ingreso como dividendo tal que $D_t = Y_t$

$$\begin{aligned}
C_t &= Y_t \\
Y_t &= D_t \\
b_t &= 0 \\
\theta_t &= \Theta_t
\end{aligned}$$

(c) Demuestre que el precio de la acción satisface

$$P_t = \beta \mathbb{E}_t \Big[G_{t+1}^{-\gamma} (Y_{t+1} + P_{t+1}) \Big], \tag{29}$$

donde $G_{t+1} \equiv Y_{t+1}/Y_t$ es la tasa bruta de crecimiento de la producción y el consumo entre t y $t+1$.

Tomamos la condición de primer orden para $[\theta_t]$ y despejamos P_t:

$$E_t\{\beta^{t+1}\lambda_{t+1}(P_{t+1}+D_{t+1})\} = \beta^t\lambda_t P_t$$
$$P_t = E_t\left\{\frac{\beta^{t+1}}{\beta^t}\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}(P_{t+1}+D_{t+1})\right\}$$
$$P_t = E_t\left\{\beta\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}(P_{t+1}+D_{t+1})\right\}$$

Combinamos $[C_t]$ con $[\theta_t]$ a través de λ_t y para λ_{t+1}, utilizamos $[C_{t+1}$.

$$P_t = E_t\left\{\beta^t\frac{C_{t+1}}{C_t}(P_{t+1}+D_{t+1})\right\}$$

$$P_t = E_t\left\{\beta^t\left(\frac{C_{t+1}^{-\gamma}}{C_t^{-\gamma}}\right)^{-\gamma}(P_{t+1}+D_{t+1})\right\}$$

Reemplazando $G_{t+1} \equiv C_{t+1}/C_t$, sacando β de la esperanza por ser una constante, y tomando que la firma paga su ingreso como dividendo, $Y_t = D_t$, llegamos a que el precio satisface la ecuación:

$$P_t = \beta\mathbb{E}_t\Big[G_{t+1}^{-\gamma}(Y_{t+1}+P_{t+1})\Big] \tag{30}$$

De ahora en más, considere que el logaritmo natural de G_{t+1} se distribuye normal, con

$$\ln(G_{t+1}) \sim \mathcal{N}(\mu_g, \sigma_g^2)$$

Además, considere que G_{t+1} es independiente e idénticamente distribuido (iid) a lo largo del tiempo, de modo que la media μ_g y la varianza σ_g^2 del logaritmo de G_{t+1} son constantes a lo largo del tiempo.
Por propiedad de la distribución normal, aquello implica que

$$G_{t+1} \sim lognormal(\mu_g, \sigma_g^2)$$

Luego,

$$\mathbb{E}(G_{t+1}) = \exp\left(\mu_g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right)$$

donde exp refiere a exponencial: $\exp(a) \equiv e^a$.

(d) Utilizando las propiedades de la distribución normal, demuestre que, para cualquier valor constante α:

$$\mathbb{E}(G_{t+1}^{\alpha}) = \exp\left(\alpha\mu_g + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_g^2\right)$$

En el inciso anterior se definió que la esperanza del logaritmo natural de $G_t + 1$ es igual a μ_g, esto es:

$$\mathbb{E}[ln(G_{t+1})] = \mu_g$$

Mientras que su varianza es:

$$Var(ln(G_{t+1})) = \sigma_g^2$$

Si añadimos α como valor constante, la esperanza y la varianza nos quedan:

$$\mathbb{E}[\alpha ln(G_{t+1})]$$
$$Var(\alpha ln(G_{t+1}))$$

Aplicando las siguientes propiedades de la esperanza y de la varianza, llegaremos a la demostración final:

$$\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[x]$$
$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$

Entonces para nuestro caso con α, nos queda:

$$\mathbb{E}[\alpha ln(G_{t+1})] = \alpha\mathbb{E}[ln(G_{t+1})] = \alpha\mu_g$$
$$Var(\alpha ln(G_{t+1})) = \alpha^2 Var(ln(G_{t+1})) = \alpha^2\sigma_g^2$$

Teniendo en cuenta las propiedades del logaritmo, podemos expresarlas como:

$$\mathbb{E}[ln(G_{t+1}^{\alpha})] = \alpha\mu_g$$
$$Var(ln(G_{t+1}^{\alpha})) = \alpha^2\sigma_g^2$$

Entonces tenemos que:

$$G_{t+1}^{\alpha} \sim lognormal(\alpha\mu_g, \alpha^2\sigma_g^2)$$

Por lo tanto, reexpresamos y llegamos a la solución buscada:

$$\boxed{\mathbb{E}(G_{t+1}^{\alpha}) = \exp\left(\alpha\mu_g + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_g^2\right)} \tag{31}$$

(e) Nótese que la ecuación de Euler obtenida en el inciso (c) tiene una estructura de ecuación en diferencias. Emplearemos el método de conjetura y verificación para resolverla.
Suponga que

$$P_t = \nu Y_t \quad \forall\, t, \tag{32}$$

es decir, en cada período t, el precio de la acción (P_t) es igual a la producción del período (Y_t) multiplicada por una constante ν. La ecuación (32) es la conjetura, tal que ν es una constante a ser determinada.
Sustituya la conjetura, (32), en la ecuación de Euler, (29), y demuestre que

$$\nu = \frac{\beta\mathbb{E}_t(G_{t+1}^{1-\gamma})}{1 - \beta\mathbb{E}_t(G_{t+1}^{1-\gamma})}$$

Partimos de (29) y reemplazamos $P_t = \nu Y_t$

$$\begin{aligned}
P_t &= \beta E_t \left\{ G_{t+1}^{-\gamma}(P_{t+1} + Y_{t+1}) \right\} \\
\nu Y_t &= \beta E_t \left\{ G_{t+1}^{-\gamma}(\nu Y_{t+1} + Y_{t+1}) \right\} \\
\nu Y_t &= \beta E_t \left\{ G_{t+1}^{-\gamma}(1+\nu) Y_{t+1} \right\} \\
\nu &= \beta(1+\nu) E_t \left\{ G_{t+1}^{-\gamma} \frac{Y_{t+1}}{Y_t} \right\} \\
\nu &= (\beta + \beta\nu) E_t \left\{ G_{t+1}^{-\gamma} G_{t+1} \right\} \\
\nu &= (\beta + \beta\nu) E_t \left\{ G_{t+1}^{1-\gamma} \right\} \\
\nu &= \beta E_t \left\{ G_{t+1}^{1-\gamma} \right\} + \beta\nu E_t \left\{ G_{t+1}^{1-\gamma} \right\} \\
\nu - \beta\nu E_t \left\{ G_{t+1}^{1-\gamma} \right\} &= \beta E_t \left\{ G_{t+1}^{1-\gamma} \right\} \\
\nu \left(1 - \beta E_t \left\{ G_{t+1}^{1-\gamma} \right\} \right) &= \beta E_t \left\{ G_{t+1}^{1-\gamma} \right\}
\end{aligned}$$

Dividimos ambos lados por $1 - \beta E_t \left\{ G_{t+1}^{1-\gamma} \right\}$ y llegaremos a la solución buscada:

$$\boxed{\nu = \frac{\beta E_t \left\{ G_{t+1}^{1-\gamma} \right\}}{1 - \beta E_t \left\{ G_{t+1}^{1-\gamma} \right\}}} \tag{33}$$

(f) Demuestre que la tasa libre de riesgo satisface

$$1 + r_{f,t+1} = \frac{1}{\beta \mathbb{E}_t (G_{t+1}^{-\gamma})}$$

Reexpresamos $[b_t]$ como:

$$1 = \mathbb{E}_t \left[\beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} (1 + r_{f,t+1}) \right]$$

Combinamos con $[C_t]$:

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}_t \left[\beta \frac{(C_{t+1})^{-\gamma}}{C_t^{-\gamma}} (1 + r_{f,t+1}) \right] \\
1 &= \mathbb{E}_t \left[\beta G_{t+1}^{-\gamma} (1 + r_{f,t+1}) \right]
\end{aligned}$$

Despejamos las constantes y buscamos el valor de $(1 + r_{f,t+1})$:

$$1 = \beta(1 + r_{f,t+1}) \mathbb{E}_t \left[G_{t+1}^{-\gamma} \right]$$

$$\boxed{1 + r_{f,t+1} = \frac{1}{\beta \mathbb{E}_t \left[G_{t+1}^{-\gamma} \right]}} \tag{34}$$

(g) Demuestre que

$$1 + r_{f,t+1} = \frac{1}{\beta} \exp\left(\gamma\mu_g - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_g^2 \right)$$

¿Cómo depende de β, μ_g, σ_g^2 y γ? Provea intuición en cada caso.

Tomando la solución del inciso anterior, la reexpresamos como

$$1 + r_{f,t+1} = \frac{1}{\beta}\mathbb{E}_t\left[G_{t+1}^{\gamma}\right]$$

Por otro lado, de (31) conocemos que

$$\mathbb{E}(G_{t+1}^{\alpha}) = \exp\left(\alpha\mu_g - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_g^2\right)$$

Por lo tanto, como α es una constante y γ también, podemos extrapolarlo para el caso donde se usa γ

$$\mathbb{E}(G_{t+1}^{\gamma}) = \exp\left(\gamma\mu_g - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_g^2\right)$$

Reemplazamos en la primera solución de la tasa libre de riesgo que despejamos y llegamos a la solución buscada

$$\boxed{1 + r_{f,t+1} = \frac{1}{\beta}\exp\left(\gamma\mu_g - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_g^2\right)}$$

Podemos observar que depende negativamente de β, positivamente de μ_g, negativamente de σ_g^2, y para ver cómo depende de γ deberíamos derivar la expresión con respecto a este.

De β depende negativamente porque si β es alto, significa que los hogares son más pacientes, ahorran más y trasladarán consumo hacia el futuro. Para que esto no ocurra, deberá disminuir la tasa de los bonos para "fomentar" el consumo hoy y mantener el equilibrio.

De μ_g depende positivamente ya que μ_g es la tasa de crecimiento promedio del ingreso en la economía. Entonces al tener un ingreso más alto, los individuos se verán "tentados" en consumir más hoy que mañana, por lo que la tasa deberá aumentar para compensar esto y volver al equilibrio.

De σ_g^2 depende negativamente ya que este mide la volatilidad de la tasa de crecimiento del ingreso. Por lo tanto, a mayor volatilidad, los hogares querrán ahorrar para contra restar este efecto precautorio. Esto hace que la tasa deba bajar así los hogares desahorran ya que llevar consumo presente al futuro les saldría más caro.

Para ver cómo depende de γ debemos derivar respecto a este:

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} = \frac{1}{\beta}exp\left(\frac{2\mu_g\gamma - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_g^2}{2}\right)(\mu_g - \gamma\sigma_g^2)$$

La derivada no muestra fácilmente cómo depende la tasa de interés libre de riesgo de γ. El efecto es ambiguo a simple vista. Otra forma no tan prolija de observarlo, es otorgándole un valor a cada parámetro:

Si establecemos que $\beta = 0.5$, $\mu_g = 0.05$, $\sigma_g^2 = 0.1$ e imputamos a $\gamma = 0.2$. Esto nos dará como resultado 2.019. Ceteris paribus, si aumentamos $\gamma = 0.5$, nos dará como resultado 2.048. Podemos concluir que para estos parámetros, la tasa depende positivamente de γ

(h) Sea

$$\mathbb{E}_t\left\{1 + r_{e,t+1}\right\} = \mathbb{E}_t\left\{\frac{Y_{t+1} + P_{t+1}}{P_t}\right\}$$

el retorno sobre las acciones. Demuestre que

$$\mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \left(\frac{1}{\nu} + 1\right)\mathbb{E}_t(G_{t+1}) - 1$$

Partimos de

$$\mathbb{E}_t\left\{1 + r_{e,t+1}\right\} = \mathbb{E}_t\left\{\frac{Y_{t+1} + P_{t+1}}{P_t}\right\}$$

Reemplazamos $P_t = \nu Y_t$ y con un poco de álgebra llegamos a la solución buscada

$$\mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \mathbb{E}_t\left\{\frac{Y_{t+1} + \nu Y_{t+1}}{\nu Y_t}\right\} - 1$$

$$\mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \mathbb{E}_t\left\{(1+\nu)\frac{Y_{t+1}}{\nu Y_t}\right\} - 1$$

$$\mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \mathbb{E}_t\left\{\frac{(1+\nu)}{\nu}G_{t+1}\right\} - 1$$

$$\mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \frac{1+\nu}{\nu}\mathbb{E}_t\left\{G_{t+1}\right\} - 1$$

$$\boxed{\mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \left(\frac{1}{\nu} + 1\right)\mathbb{E}_t\left\{G_{t+1}\right\} - 1} \tag{35}$$

(i) Demuestre que

$$\begin{aligned} 1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) &= \frac{\mathbb{E}_t(G_{t+1})}{\beta\mathbb{E}_t(G_{t+1}^{1-\gamma})} \\ &= \frac{\exp\left(\mu_g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right)}{\beta\exp\left[(1-\gamma)\mu_g + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma_g^2\right]} \end{aligned}$$

Partimos de

$$\nu = \frac{\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}}{1 - \beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}}$$

$$\mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \left(\frac{1}{\nu} + 1\right)\mathbb{E}_t\left\{G_{t+1}\right\} - 1$$

Reordenamos (33) para que nos quede $1+\frac{1}{\nu}$ y así poder reemplazar dentro de (35)

$$\begin{aligned}
\nu &= -1 + \frac{1}{1-\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}} \\
\nu + 1 &= \frac{1}{1-\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}} \\
(\nu+1)\frac{\nu}{\nu} &= \frac{1}{1-\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}} \\
\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\nu &= \frac{1}{1-\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}} \\
\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\frac{\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}}{1-\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}} &= \frac{1}{1-\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}} \\
\left(1+\frac{1}{\nu}\right) &= \frac{1}{1-\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}}\frac{1-\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}}{\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}} \\
\left(1+\frac{1}{\nu}\right) &= \frac{1}{\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}}
\end{aligned}$$

Reemplazamos dentro de (35)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) &= \frac{1}{\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}}\mathbb{E}_t\left\{G_{t+1}\right\} - 1 \\
1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) &= \frac{\mathbb{E}_t\left\{G_{t+1}\right\}}{\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}}
\end{aligned}$$

De incisos anteriores obtuvimos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t\left\{G_{t+1}\right\} &= exp\left(\mu_g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right) \\
\mathbb{E}_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\} &= exp\left((1-\gamma)\mu_g + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma_g^2\right)
\end{aligned}$$

Simplemente reemplazamos y llegamos a la solución buscada

$$\boxed{1+\mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \frac{\mathbb{E}_t\left\{G_{t+1}\right\}}{\beta E_t\left\{G_{t+1}^{1-\gamma}\right\}} = \frac{exp\left(\mu_g+\frac{1}{2}\sigma_g^2\right)}{\beta exp\left((1-\gamma)\mu_g+\frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma_g^2\right)}} \tag{36}$$

(j) Demuestre que

$$1+\mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \frac{1}{\beta}\exp\left(\gamma\mu_g - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_g^2\right)\exp(\gamma\sigma_g^2)$$

Usando la solución del inciso anterior, seguimos haciendo pasos algeibráicos, esta vez una resta de exponentes

$$1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \frac{\exp\left(\mu_g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right)}{\beta \exp\left[(1-\gamma)\mu_g + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma_g^2\right]}$$

$$1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \frac{1}{\beta} exp\left(\mu_g + \frac{1}{2}\sigma_g^2 - \mu_g + \gamma\mu_g - \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma_g^2\right)$$

$$1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \frac{1}{\beta} exp\left(\gamma\mu_g + \gamma\sigma_g^2 - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_g^2\right)$$

Separamos el exponente $\gamma\sigma_g^2$ y llegamos a la solución buscada

$$\boxed{1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \frac{1}{\beta} exp\left(\gamma\mu_g - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_g^2\right) exp(\gamma\sigma_g^2)} \tag{37}$$

(k) Combine los resultados de los incisos (g) y (j) para obtener:

$$\frac{1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1})}{1 + r_{f,t+1}} = \exp(\gamma\sigma_g^2)$$

Los resultados que obtuvimos en los incisos (g) y (j) son

$$1 + r_{f,t+1} = \frac{1}{\beta} \exp\left(\gamma\mu_g - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_g^2\right)$$

$$1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) = \frac{1}{\beta} exp\left(\gamma\mu_g - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_g^2\right) exp(\gamma\sigma_g^2)$$

Simplemente las igualamos a través de $\frac{1}{\beta} exp\left(\gamma\mu_g - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_g^2\right)$ y despejando $exp(\gamma\sigma_g^2)$ llegamos a la solución buscada

$$1 + r_{f,t+1} = \frac{1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1})}{exp(\gamma\sigma_g^2)}$$

$$\boxed{\frac{1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1})}{1 + r_{f,t+1}} = exp(\gamma\sigma_g^2)} \tag{38}$$

(l) Utilizando la aproximación $\ln(1+a) \approx a$, demuestre que el *equity premium* está dado por

$$\mathbb{E}(r_{e,t+1}) - r_{f,t+1} = \gamma\sigma_g^2$$

Provea intuición acerca de cómo depende de σ_g^2 y γ.

Partimos de la ecuación del inciso anterior

$$\frac{1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1})}{1 + r_{f,t+1}} = \exp(\gamma\sigma_g^2)$$

Aplicamos logaritmo natural y resolvemos usando sus propiedades para llegar a la solución buscada

$$\frac{ln(1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1}))}{ln(1 + r_{f,t+1})} = ln(\exp(\gamma\sigma_g^2))$$

$$ln(1 + \mathbb{E}_t(r_{e,t+1})) - ln(1 + r_{f,t+1}) = \gamma\sigma_g^2$$

$$\boxed{\mathbb{E}_t(r_{e,t+1}) - r_{f,t+1} = \gamma\sigma_g^2} \tag{39}$$

Depende positivamente de σ_g^2 ya que al tener una tasa de crecimiento del ingreso más volátil, el *equity premium* que les retorna deberá ser más grande para incentivarlos a adquirir acciones de las firmas en lugar de bonos. Esto significa que deben recibir mayores dividendos.

Lo mismo ocurre en el caso de γ, como son aversos al riesgo y querés que compren activos con más riesgo que un bono con la tasa libre de riesgo, es necesario que tenga una compensación más alta tal que el *equity premium* compense la caída de la utilidad generada por el incremento en el riesgo que los agentes están tomando.

4. [**25 puntos**]. *Credibilidad.*

Para resolver este ejercicio deberá leer el capítulo 11 de Uribe & Schmitt-Grohé (2017)[1], *Policy Credibility and Balance-of-Payments Crises.*

(a) Demuestre que la restricción presupuestaria intertemporal puede expresarse de la siguiente manera:

$$(1+r)d_{-1}^h = \sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t \left[y^T + p_t y^N + s_t - (1+\tau_t)\left(c_t^T + p_t c_t^N\right)\right]$$

Partimos de la Restricción Secuencial

$$d_t^h = (1+r)d_{t-1}^h - y^T - p_t y^N - s_t + (1+\tau_t)(c_t^T + p_t c_t^N) \tag{40}$$

Despejamos d_{t-1}^h

$$d_{t-1}^h = \frac{y^T}{1+r} + \frac{p_t y^N}{1+r} + \frac{s_t}{1+r} + \frac{d_t^h}{1+r} - \frac{(1+\tau_t)(c_t^T + p_t c_t^N)}{1+r} \tag{41}$$

Iteramos $t = 0$

$$d_{-1}^h = \frac{y^T}{1+r} + \frac{p_0 y^N}{1+r} + \frac{s_0}{1+r} + \frac{d_0^h}{1+r} - \frac{(1+\tau_0)(c_0^T + p_0 c_0^N)}{1+r} \tag{42}$$

Iteramos $t = 1$

$$d_0^h = \frac{y^T}{1+r} + \frac{p_1 y^N}{1+r} + \frac{s_1}{1+r} + \frac{d_1^h}{1+r} - \frac{(1+\tau_1)(c_1^T + p_1 c_1^N)}{1+r} \tag{43}$$

Reemplazamos d_0^h de $t = 1$ en la iteración $t = 0$

$$d_{-1}^h = \frac{y^T}{1+r} + \frac{p_0 y^N}{1+r} + \frac{s_0}{1+r} - \frac{(1+\tau_0)(c_0^T + p_0 c_0^N)}{1+r} + \frac{\frac{y^T}{1+r} + \frac{p_1 y^N}{1+r} + \frac{s_1}{1+r} + \frac{d_1^h}{1+r} - \frac{(1+\tau_1)(c_1^T + p_1 c_1^N)}{1+r}}{1+r}$$

[1] Uribe, M., & Schmitt-Grohé, S. (2017). *Open economy macroeconomics.* Princeton University Press.

$$d_{-1}^h = \frac{y^T}{1+r} + \frac{p_0 y^N}{1+r} + \frac{s_0}{1+r} - \frac{(1+\tau_0)(c_0^T + p_0 c_0^N)}{1+r}$$
$$+ \frac{y^T}{(1+r)^2} + \frac{p_1 y^N}{(1+r)^2} + \frac{s_1}{(1+r)^2} + \frac{d_1^h}{(1+r)^2} - \frac{(1+\tau_1)(c_1^T + p_1 c_1^N)}{(1+r)^2} \quad (44)$$

Iteramos $t = 2$

$$d_1^h = \frac{y^T}{1+r} + \frac{p_2 y^N}{1+r} + \frac{s_2}{1+r} + \frac{d_2^h}{1+r} - \frac{(1+\tau_2)(c_2^T + p_2 c_2^N)}{1+r} \quad (45)$$

Reemplazamos

$$d_{-1}^h = \frac{y^T}{1+r} + \frac{p_0 y^N}{1+r} + \frac{s_0}{1+r} - \frac{(1+\tau_0)(c_0^T + p_0 c_0^N)}{1+r}$$
$$+ \frac{y^T}{(1+r)^2} + \frac{p_1 y^N}{(1+r)^2} + \frac{s_1}{(1+r)^2} - \frac{(1+\tau_1)(c_1^T + p_1 c_1^N)}{(1+r)^2}$$
$$+ \frac{y^T}{(1+r)^3} + \frac{p_2 y^N}{(1+r)^3} + \frac{s_2}{(1+r)^3} + \frac{d_2^h}{(1+r)^3} - \frac{(1+\tau_2)(c_2^T + p_2 c_2^N)}{(1+r)^3}$$

Multiplicamos por $(1+r)$

$$d_{-1}^h(1+r) = y^T + p_0 y^N + s_0 - (1+\tau_0)(c_0^T + p_0 c_0^N)$$
$$+ \frac{y^T}{(1+r)} + \frac{p_1 y^N}{(1+r)} + \frac{s_1}{(1+r)} - \frac{(1+\tau_1)(c_1^T + p_1 c_1^N)}{(1+r)}$$
$$+ \frac{y^T}{(1+r)^2} + \frac{p_2 y^N}{(1+r)^2} + \frac{s_2}{(1+r)^2} + \frac{d_2^h}{(1+r)^2} - \frac{(1+\tau_2)(c_2^T + p_2 c_2^N)}{(1+r)^2} \quad (46)$$

Vemos que a medida que iteramos, se repite el mismo comportamiento. Podemos generalizar a:

$$(1+r)d_{-1}^h = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t [y^T + p_t y^N + s_t - (1+\tau_t)(c_t^T + p_t c_t^N)] + \underbrace{\frac{d_t}{(1+r)^t}}_{\text{Por CTV es } =0}$$

Por lo tanto, la Restricción Presupuestaria Intertemporal queda:

$$\boxed{(1+r)d_{-1}^h = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t [y^T + p_t y^N + s_t - (1+\tau_t)(c_t^T + p_t c_t^N)]} \quad (47)$$

(b) Demuestre que las condiciones de primer orden del hogar pueden expresarse como

$$U'(c_t^T) = \lambda_0(1+\tau_t)$$

y

$$p_t = \frac{V'(c_t^N)}{U'(c_T^T)}$$

Para encontrar las condiciones de optimalidad, primero planteamos la función de utilidad:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [U(c_t^T) + V(c_t^N)] \tag{48}$$

Con esto y la RPI, planteamos el Lagrangiano:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\{C_t^T, C_t^N, \lambda_t\}} = \sum_{t=0}^{\infty} \Bigg(\beta^t [U(c_t^T) + V(c_t^N)] + \lambda_t \Bigg[\left(\frac{1}{1+r} \right)^t [y^T + p_t y^N + s_t \\ -(1+\tau_t)(c_t^T + p_t c_t^N)] - (1+r) d_{-1}^h \Bigg] \Bigg)\end{aligned} \tag{49}$$

$$[C_t^T] \qquad \beta^t U'(c_t^T) = \lambda_t \frac{1}{(1+r)^t} (1+\tau_t)$$

$$[C_t^N] \qquad \beta^t V'(c_t^N) = \lambda_t \frac{1}{(1+r)^t} (1+\tau_t) p_t$$

$$[\lambda_t] \quad \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t [y^T + p_t y^N + s_t] = \left(\frac{1}{1+r} \right)^t (1+\tau_t)(c_t^T + p_t c_t^N) + (1+r) d_{-1}^h \tag{50}$$

Suponemos que $\beta(1+r) = 1$, entonces las condiciones de primer orden nos quedan:

$$[C_t^T] \qquad \boxed{U'(c_t^T) = \lambda_t (1+\tau_t)}$$

$$[C_t^N] \qquad V'(c_t^N) = \lambda_t (1+\tau_t) p_t$$

$$[\lambda_t] \quad \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t [y^T + p_t y^N + s_t] = \left(\frac{1}{1+r} \right)^t (1+\tau_t)(c_t^T + p_t c_t^N) + (1+r) d_{-1}^h \tag{51}$$

Combinando λ_t de $[c_t^T]$ y $[c_t^N]$, llegamos a que

$$\frac{U'(c_t^T)}{1+\tau_t} = \frac{V'(C_t^N)}{(1+\tau_t)} \tag{52}$$

$$p_t U'(c_t^T) = V'(C_t^N) \tag{53}$$

$$\boxed{p_t = \frac{V'(C_t^N)}{U'(c_t^T)}} \tag{54}$$

Expliqué cómo son afectadas (o no) por la política impositiva. ¿Cómo se ve afectado c_t^T respecto a un caso con $\tau_t = 0$? Provea intuición.

En este caso, la decisión de consumo de transables se ve afectada por el impuesto de forma intertemporal, ya que a un impuesto más alto, una utilidad mayor del bien transable, lo que significa que se está dejando de consumir o se consume menos de este bien. Si τ_t fuera igual a 0, no habría distorsión del consumo del bien transable en el tiempo. Por otro lado, observamos que la introducción de un impuesto al consumo de transables y no transables no afecta la decisión de consumo relativo al otro, esto es, si consumo 20% transables y 80% no transables, esta decisión no se verá afectada si varía el tamaño del impuesto τ_t, ya que este se aplica sobre ambos consumos.

(c) Explique intuitivamente por qué la restricción presupuestaria flujo del gobierno puede expresarse como

$$d_t^g = (1+r)d_{t-1}^g - \tau_t(c_t^T + p_t c_t^N) + s_t$$

Identifique el déficit primario y el financiero.

La restricción presupuestaria del gobierno puede expresarse de esa forma porque los ingresos que obtiene el gobierno provienen de los impuestos que cobra al consumo de bienes transables y no transables y de la emisión de deuda. Mientras que los egresos que tiene son el pago de los intereses de deuda anterior y las transferencias que realiza a los hogares.

Déficit Primario y Déficit Financiero

$$d_t^g = d_{t-1}^g + \overbrace{r d_{t-1}^g \underbrace{- \tau_t(c_t^T + p_t c_t^N) + s_t}_{\text{Déficit Fiscal Primario}}}^{\text{Déficit Financiero}}$$

(d) Explique intuitivamente (no hace falta que lo demuestre analíticamente) por qué la restricción presupuestaria intertemporal del gobierno se puede expresar como:

$$(1+r)d_{-1}^g = \sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t \left[\tau_t(c_t^T + p_t c_t^N) - s_t\right]$$

¿Qué indica acerca de la sostenibilidad de la política fiscal?

La restricción presupuestaria intertemporal del gobierno se puede expresar de esta forma porque básicamente nos dice que el valor presente descontado de los superavit fiscales primarios deben cubrir la posición inicial de deuda del gobierno. Si comenzamos con deuda en el periodo inicial, deberemos tener superavits para repagar la deuda; si comenzamos como acreedores, entonces podremos tener déficits.

(e) Demuestre que

$$d_t = (1+r)d_{t-1} - y^T + c_t^T$$

donde $d_t \equiv d_t^h + d_t^g$. Demuestre que esta expresión no es más que la ecuación fundamental de la balanza de pagos.

Para hacer esto, debemos combinar la restricción secuencial de los hogares con la del gobierno y la condición de equilibrio de no transables ($y^N = C_t^N$). Partiendo de:

$$d_t = d_t^h + d_t^g$$

Reemplazamos dentro y nos queda

$$d_t = (1+r)d_t^h - y^T - p_t y_t^N - s_t + (1+\tau_t)(c_t^T + p_t C_t^N) + (1+r)d_{t-1}^g + s_t - \tau_t(c_t^T + p_t c_t^N)$$

Despejando y reemplazando $y^N = c_t^N$, nos queda

$$d_t = (1+r)\underbrace{d_{t-1}^h + d_{t-1}^g}_{=d_{t-1}} - y^T - p_t c_t^N + (c_t^T + p_t c_t^N)(1 + \tau_t - \tau_t)$$

Por lo tanto llegamos a:

$$d_t = (1+r)d_{t-1} - y^T + c_t^T \tag{55}$$

Desde esta expresión llegamos a la ecuación fundamental de la balanza de pagos donde

$$d_t - d_{t-1} = rd_{t-1} - y^T + c_t^T \tag{56}$$

Donde $d_t - d_{t-1}$ es la Cuenta Corriente, rd_{t-1} es la Cuenta Capital y $-y^T + c_t^T$ es la Trade Balance

(f) Explique intuitivamente (no hace falta que lo demuestre analíticamente) por qué, en equilibrio, la economía debe satisfacer:

$$(1+r)d_{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t \left(y^T - c_t^T\right)$$

¿Qué indica acerca de la trayectoria que debe seguir la deuda externa?

El stock de deuda inicial nos condiciona la deuda que podamos tomar en un futuro. Esto es que si comenzamos en una posición como acreedores, tendremos la posibilidad de tomar deuda y tener una trade balance negativa, en cambio, si comenzamos como deudores netos, deberemos generar superavit de trade balance para poder repagar esa deuda y por lo tanto la trayectoria que llevará es de 0. Si no lo hacemos, estaremos rompiendo con la Condición de Transversalidad.

(g) *A Credible Permanent Tax Reform*

(I) Demuestre cómo se obtiene la ecuación (11.9):

$$c_{-1}^T = y^T - rd_{-1}$$

Partimos de la restricción secuencial $d_t = (1+r)d_{t-1} - y^T + c_t^T$. Además suponemos que el nivel de deuda antes de $t = 0$ era constante, por lo que se cumple $d_t = d_{t-1} = d_{-1}$ para $t < 0$, por lo tanto nos queda:

$$d_{-1} = d_{-1} + rd_{-1} - y^T - c_{-1}^T \tag{57}$$

$$\boxed{c_{-1}^T = y^T - rd_{-1}} \tag{58}$$

(II) ¿Por qué, a pesar de la reducción impositiva de τ^H a τ^L, el consumo de bienes transables será constante?

El consumo de bienes transables será constante ya que no hay incentivos para sustituir su consumo intertemporalmente. Esto se debe a que el impuesto es permanente

(III) Demuestre que, bajo una reforma impositiva creíble, el sendero de consumo de transables es

$$c_t^T = y^T - rd_{-1} = c_{-1}^T \quad \forall\, t \geq 0$$

Para obtener dicha ecuación, partimos de la restricción presupuestaria intertemporal

$$(1+r)d_{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t \left(y^T - c_t^T\right) \tag{59}$$

Sabemos que y^T y c_t^T son constantes entonces podemos sacarlos de la sumatoria

$$(1+r)d_{-1} = (y^T - c_t^T) \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t$$

Y si resolvemos la sumatoria $\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t = \frac{1+r}{r}$ nos queda

$$\begin{aligned} (1+r)d_{-1} &= (y^T - c_t^T)\frac{1+r}{r} \\ rd_{-1} &= y^T - c_t^T \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\boxed{c_t^T = y^T - rd_{-1} = c_{-1}^T} \tag{60}$$

(IV) Explique intuitivamente por qué, bajo una reforma impositiva permanente creíble, las cuentas externas y el tipo de cambio real no se ven afectados.

Bajo una reforma impositiva permanente y creíble, las cuentas externas y el tipo de cambio real no se ven afectados porque el consumo de transables es constante y no se ve afectado, entonces los individuos no necesitan financiarse o desfinanciarse. Esto se debe a que el impuesto no afecta intertemporalmente la cantidad de transables a consumir ni tampoco afecta la decisión intratemporal entre transables y no transables.

(h) *A Noncredible Tax Reform.*
Explique en qué sentido la reforma impositiva no es creíble.

La reforma no es creíble en el sentido de que el gobierno anuncia que reducirá las tarifas permanentemente a partir de mañana, pero los hogares creen que la reducción será solo temporal y luego volverá al nivel inicial en el periodo T.

(i) *A Credible Temporary Tax Reform.*

(I) Demuestre que, si $U(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{(1-\sigma)}$, entonces

$$c^1 = \left(\frac{1+\tau^H}{1+\tau^L}\right)^{1/\sigma} c^2$$

donde c^1 es el nivel constante de consumo de transables entre 0 y $T-1$, y c^2 es el que rige de T en adelante. Debe realizar todos los pasos necesarios hasta llegar a esa expresión. Provea intuición.

Planteamos la nueva RPI

$$\sum_{t=0}^{T}\left[\frac{1}{(1+r)^t}\left[y^T + p_1 y^N - (1+\tau^L)(c_1^T + p_1 c_1^N)\right]\right] + \sum_{t=T}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+r)^t}\left[y^T + p_2 y^N - (1+\tau^H)(c_2^T + p_2 c_2^N)\right]\right] = (1+r)d_{-1}^h \quad (61)$$

Planteamos el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{\{c_1^T, c_1^N, c_2^T, c_2^N, \lambda\}} = \sum_{t=0}^{T}\beta^t\left[\frac{c_1^{T^{1-\sigma}}}{1-\sigma} + \frac{c_1^{N^{1-\sigma}}}{1-\sigma}\right] + \sum_{t=T}^{\infty}\beta^t\left[\frac{c_2^{T^{1-\sigma}}}{1-\sigma} + \frac{c_2^{N^{1-\sigma}}}{1-\sigma}\right] + \lambda_0\left\{\sum_{t=0}^{T}\left[\frac{1}{(1+r)^t}\left[y^T + p_1 y^N - (1+\tau^L)(c_1^T + p_1 c_1^N)\right]\right] + \sum_{t=T}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+r)^t}\left[y^T + p_2 y^N - (1+\tau^H)(c_2^T + p_2 c_2^N)\right]\right] - (1+r)d_{-1}^h\right\} \quad (62)$$

Si bien debemos obtener todas las condiciones de primer orden, las que nos interesan ahora son $[c_1^T]$ y $[c_2^T]$

$$[c_1^T] \quad \beta^t c_1^{T^{-\sigma}} = \lambda_0(1+\tau^L)\frac{1}{(1+r)^t}$$

$$[c_2^T] \quad \beta^t c_2^{T^{-\sigma}} = \lambda_0(1+\tau^H)\frac{1}{(1+r)^t}$$

Igualamos a través de λ_0 y obtenemos la expresión buscada

$$\beta^T c_1^{t^{-\sigma}}\frac{1}{(1+\tau^L)}(1+r)^t = \beta^t c_2^{T^{-\sigma}}(1+r)^t\frac{1}{(1+\tau^H)}$$

$$\left(\frac{c_1^T}{c_2^T}\right)^{-\sigma} = \frac{(1+\tau^L)}{(1+\tau^H)}$$

$$\frac{c_1^T}{c_2^T} = \left(\frac{(1+\tau^L)}{(1+\tau^H)}\right)^{\frac{1}{-\sigma}}$$

$$c_1^T = \left(\frac{1+\tau^H}{1+\tau^L}\right)^{\frac{1}{\sigma}} c_2^T$$

Llamando a $c^1 = c_1^T$ y a $c^2 = c_2^T$, entonces llegamos a la solución buscada

$$\boxed{c_1 = \left(\frac{1+\tau^H}{1+\tau^L}\right)^{\frac{1}{\sigma}} c_2} \tag{63}$$

La intuición que obtenemos es que el impuesto temporal lo que genera es distorsión del consumo intertemporal, entonces los individuos aprovecharan los periodos donde los impuestos son más bajos para consumir más ya que el consumo es más barato intertemporalmente.

(II) Demuestre que c^1 y c^2 deben satisfacer la siguiente expresión:

$$y^T - rd_{-1} = (1-\beta^T)c^1 + \beta^T c^2$$

Ya que nuestro análisis es sobre los bienes transables, podemos partir desde (59) pero para 2 periodos

$$(1+r)d_{-1} = \sum_{t=0}^{T}\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^t \left(y^T - c^1\right)\right] + \sum_{t=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^t \left(y^T - c^2\right)\right]$$

$$(1+r)d_{-1} = \sum_{t=0}^{T}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t + \sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t + y^T - c^1 + y^T - c^2$$

(III) Demuestre que

$$c_{-1}^T = (1-\beta^T)c^1 + \beta^T c^2,$$

y, por lo tanto, $c^1 > c_{-1}^T > c^2$. Provea intuición, teniendo en cuenta el rol de la deuda externa.

Utilizando (60) y la expresión obtenida en el inciso anterior

$$c_{-1}^T = y^T - rd_{-1}$$
$$y^T - rd_{-1} = (1-\beta^T)c^1 + \beta^T c^2$$

Igualando a través de $y^T - rd_{-1}$, llegamos a la solución buscada

$$\boxed{c_{-1}^T = (1-\beta^T)c^1 + \beta^T c^2} \tag{64}$$

Que $c^1 > c_{-1}^T > c^2$ ocurre ya que al enfrentar un reforma temporal, el consumo en c^1 será más barato intertemporalmente que en c_{-1}^T y que en c^2, por lo tanto, el agente aprovecha esta distorsión. Pero luego en el periodo 2, debe repagar la deuda tomada en el periodo 1 para consumir más, entonces esto explica por qué c^2 es el consumo más bajo de los 3 casos. Qué tan grande sean estas diferencias dependerán del valor de β^T. A menor β^T, más se querrá sustituir consumo futuro por consumo presente y mayor distancia/brecha existirá entre c^1 y c^2.

(IV) Explique claramente la Figure 11.1. y obtenga las siguientes expresiones:

$$d_t = (c^1 - y^T) \sum_{j=0}^{t} (1+r)^j > 0 \quad \forall\, 0 \leq t \leq T$$

y

$$ca_t = (y^T - c^1)(1+r)^t < 0 \quad \forall\, 0 \leq t \leq T$$

Úselas para explicar las dinámicas.

La figura 11.1 compara las dinámicas de un reducción permanente y de una reducción temporal de las tarifas.
Iremos caso por caso:

- Consumo:
  Para este apartado observamos que frente a una reducción permanente el consumo permanece flat para todo t, en cambio, si la reducción es transitoria, se observa que el consumo en el primer periodo hasta el momento T, será mayor que el consumo en c_{-1} y que en c^2. En el periodo 2 vemos una caída en el consumo para repagar la deuda tomada en en el primer periodo.
- Deuda: La dinámica de la deuda es diferente para los 2 casos. Cuando la reducción es permanente, esta se mantiene en 0, ya que el consumo no cambió sino que se mantiene constante. En cambio, en la situación transitoria, está se va incrementando a lo largo del primer periodo ya que los hogares toman prestado para poder consumir más y deja de crecer cuando se llega a T, donde se vuelve constante.
- Trade Balance: Para el caso donde la reducción es permanente, observamos que se mantiene constante en 0. Por otro lado, cuando la reducción es transitoria, observamos que esta se vuelve deficitaria durante el primer periodo, ya que estamos consumiendo más a costa de endeudarnos, pero en el segundo periodo, esta se vuelve superavitaria, reflejando la restricción que tienen los individuos por haber tomado deuda en el primer periodo que deberán repagar en este.
- Cuenta Corriente: Para la reducción permanente, observamos que se mantiene flat en 0. Sin embargo, para la situación donde la política es temporal, la dinámica nos muestra el trayecto que siguieron la deuda y la trade balance. En el periodo 1, la Cuenta Corriente se transforma en deficitaria y decrece a medida que pasa el tiempo hasta T, donde comienza el periodo 2 y allí vuelve a su nivel inicial 0.
- Precios: En el caso de una reforma permanente se mantienen constantes. Mientras que para una reducción temporal en las tarifas, observamos que en el periodo 1 se incrementan, esto es debido a que estamos consumiendo más bienes transables que antes, y luego de T, en el periodo 2 los precios relativos caen y quedan por debajo del nivel inicial, y esto es debido a una gran caída en el consumo.

(j) *Lack of Credibility and Overborrowing.*

(I) Explique intuitivamente por qué es socialmente ineficiente la reducción impositiva transitoria respecto a la permanente.

Es socialmente ineficiente porque lo que busca el hogar es maximizar su utilidad mantiendo un consumo flat. La introducción de un impuesto transitorio genera distorsiones intertemporales que rompe con el consumption smoothing. Entonces en el primer periodo consumirá más que en el segundo, esto hace que se endeude para tener más utilidad "hoy", pero cuando vuelva a subir el impuesto, deberá ahorrar y por lo tanto consumir menos y tener una menor utilidad para pagar los intereses de la deuda.

(II) Demuestre analíticamente que la solución eficiente es un cambio impositivo permanente, en lugar de transitorio. Deberá resolver el problema del planificador central. Vincule el resultado con la idea de *overborrowing.*
Resolvemos el problema del planificador

$$\begin{aligned} \max_{\{c^1,c^2\}} \quad & (1-\beta^T)U(c^1)+\beta^T U(c^2) \\ \text{s.t.} \quad & y^T - rd_{-1} = (1-\beta^T)c^1 + \beta^T c^2 \end{aligned}$$

Planteamos el lagrangeano:

$$\mathcal{L}_{\{c^1,c^2,\lambda_t\}} = (1-\beta^T)U(c^1)+\beta^T U(c^2) + \lambda_t\left[y^T - rd_{-1} - (1-\beta^T)c^1 - \beta^T c^2\right]$$

$$\begin{aligned} [c^1] \quad & U'(c^1) = \lambda_t \\ [c^2] \quad & U'(c^2) = \lambda_t \\ [\lambda_t] \quad & y^T - rd_{-1} = (1-\beta^T)c^1 + \beta^T c^2 \end{aligned} \tag{65}$$

Igualamos $[c^1]$ con $[c^2]$

$$U'(c^1) = U'(c^2)$$

Al ser iguales las utilidades marginales para c^1 y para c^2, entonces tenemos que:

$$c^1 = c^2$$

Por lo tanto, para que este resultado ocurra, debe pasar que $\tau^L = \tau^H$.
Entonces, ¿qué tiene que ver esto con el *overborrowing*? Se relaciona ya que si $\tau^L < \tau^H$ temporalmente, lo que ocurrirá es que aumentará el consumo durante el periodo en el que tenemos τ^L, esto llevará a que nos endeudemos muy fuertemente para aprovechar la distorción intertemporal de precios en el consumo y poder consumir más barato y en mayor cantidad hoy que mañana. Sin embargo, este *overborrowing* ocasionará que en el periodo donde se vuelve a τ^H tengamos una "recesión" y por lo tanto un gran ahorro que nos llevará a consumir menos para repagar la deuda.

(k) *Equivalence of Imperfect Credibility and Temporariness.*
Explique con precisión, tanto intuitiva como analíticamente, en qué sentido una reducción impositiva transitoria es equivalente a un plan de reducción impositiva

permanente no creíble.

Es equivalente ya que las decisiones que tomarían los individuos serían las mismas. En el momento en que se anuncia la reducción impositiva, los individuos reoptimizarán y tendrán un consumo más alto en el primer periodo para aprovechar el precio más barato intertemporalmente, esto lo harán tomando deuda. Luego los agentes esperarán que en el momento T, los impuestos vuelvan a su nivel inicial, pero como es una reforma permanente, esto no ocurre. Por lo tanto, los individuos deben volver a reoptimizar para que el consumo sea constante, pero se verá limitado por la siguiente restricción:

$$d_{T-1} = (1+r)d_{T-1} - y^T + c^T$$

Esto ocasionará que no puedan consumir tanto como quisieran ya que deben repagar la deuda tomada en el periodo anterior a T para cumplir la condición de No Ponzi. Entonces, el resultado será equivalente al de una reducción temporaria en los impuestos y los consumos para ambos casos durante el segundo periodo serán iguales; esto es que el consumo en el segundo periodo bajo una reforma temporal en los impuestos será igual al consumo en el segundo periodo de una reforma permanente no creíble.

5. [**10 puntos**]. *Paper.*

Explique en 7 páginas (ni más, ni menos), netas de gráficos, cuadros y tablas, la estructura del modelo, las ideas centrales y las conclusiones del paper elegido.

La explicación del paper puede encontrarse alojada en el siguiente link y además será enviada como archivo adjunto en el email.
Paper Summary in GitHub