INSTITUT UNIVERSITAIRE DE LA COTE

PROGRAMMES INTERNATIONAUX DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE INNOVATION

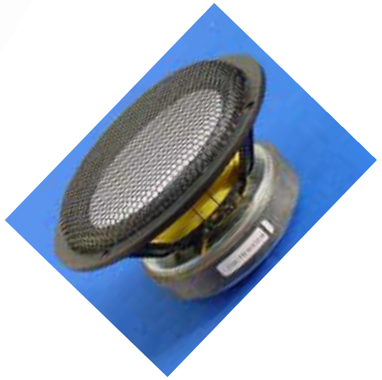
AUTOMATIQUE-ROBOTIQUE

COURS ANALYSE DU SIGNAL ET D'IMAGES

Niveau: Bachelor BY3

Dr KUATE Alain François

Doctorat/Ph.D en EEAT



Année académique 2022/2023

Objectif du cours

Après ce cours vous serez en mesure:

- ❖ d’identifier les outils d’analyse temporelle et fréquentielle adaptés à l’étude des signaux stationnaires et non stationnaires; déterministe et aléatoire

- ❖ Utiliser des outils de calcul numérique pour faire l'analyse fréquentielle d'un signal.

- ❖ Utiliser la transformation de Fourier pour l'étude de signaux déterministes et comprendre son utilité pour l'analyse et la transformation de ces signaux

- ❖ Échantillonne / numériser un signal et analyser le résultat obtenu en utilisant l'espace fréquentiel et de reconstruire le signal de départ à partir de ces échantillons et analyser le résultat obtenu.

Plan du cours

Chap. 1: Introduction au Traitement du Signal

1. Caractérisation du signal
2. Signaux usuels
3. . Notion de filtrage

Chap. 2: Numérisation des signaux

1. Signal échantillonné
2. Processus de numérisation d’un signal
3. Caractérisation d’un signal 2D (Image)

Chap. 3: Analyse spectrale des signaux

1. Notion du spectre d’un signal
2. spectre des signaux continu et périodiques
3. spectre des signaux continu et apériodiques
4. spectre des signaux échantillonné numériques

Chap. 4: Signal aléatoire

1. Rappel: Notion de probabilité et processus aléatoire
2. Caractérisation du signal aléatoire
3. spectre des signaux aléatoires

Travaux Pratiques

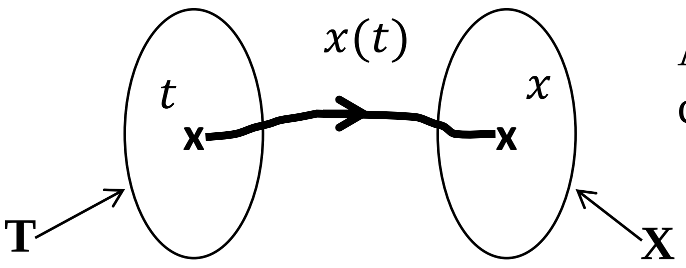
1. CARACTÉRISATION DU SIGNAL

DEFINITION:

Qu'est-ce qu'un signal ?

1. C'est une grandeur physique mesurable dépendant du temps
2. C'est une entité mathématique associant deux espaces: Espace temporel **T** et espace des valeurs mésusées **X**
3. C'est le support de l'information émise par une source et destinée à un récepteur; c'est le véhicule de l'intelligence dans les systèmes

grandeur mesurable = (courant, tension, force, température, pression, la parole, l'image, onde acoustique, optique, magnétique, radioélectrique etc.)



A partir de ce modèle mathématique du signal, le problème major réside au niveau de la continuité-discontinuité des espaces.

Espace continu ou analogique: $\mathbb{C}$ **et** $\mathbb{R}$

Espace discontinu ou discret: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ **et** $\mathbb{Q}$

Figure1: Modèle mathématique du signal

1. CARACTÉRISATION DU SIGNAL

NATURE DU SIGNAL: A partir de la continuité-discontinuité des espaces, il existe 4 natures du signal

Espace temporel T	Espace des valeurs X	Nature du signal
continu	continu	Signal analogique
discret	continu	Signal échantillonné
continu	discret	Signal quantifié
discret	discret	Signal discret/ Numérique

REPRÉSENTATION TEMPORELLE DES SIGNAUX

La première classification, basée sur l'évolution du signal en fonction du temps, fait apparaître deux types fondamentaux :

- les **signaux certains** (ou **déterministes**) dont l'évolution en fonction du temps est décrite par un modèle mathématique. Ces signaux proviennent de phénomènes pour lesquels on connaît les lois physiques correspondantes et les conditions initiales, permettant ainsi de prévoir le résultat ;
- les **signaux aléatoires** (ou probabilistes) dont le comportement temporel est imprévisible et pour la description desquels il faut se contenter d'observations statistiques.

Question 1: En examinant votre environnement, citer 3 signaux déterministes et 3 signaux aléatoires

Question 2:Réprésenter les signaux suivants:$x(t) = 2t - 3; y(t) = 3\cos(2\pi t)\,; v(n) = \{1; 0; 1; -2\}$

1. CARACTÉRISATION DU SIGNAL

SIGNAUX À ÉNERGIE FINIE/INFINIE

- Signaux à énergie finie $\boldsymbol{E_x} = \int |\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})|^2 \boldsymbol{dt}$ existe
- Signaux à énergie infinie $\boldsymbol{E_x} = \int |\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})|^2 \boldsymbol{dt}$ N'existe pas

À RETENIR

caractérisation d'un signal

1. Donner sa **nature:** *continu, échantillonné, quantifie ou numérique*
2. Donner sa morphologie: *représentation temporelle: **déterministe/aléatoire***
3. Donner sa Energie: signaux à énergie finie/infinie; signaux puissance moyenne finie/infinie
4. Donner sa période

Exercice 1: caractériser des signaux suivants

$$x(t) = \begin{cases} 2\cos(4\pi t + \frac{\pi}{4} & si\ |t| \le 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} (t + 1 & si\ |t| \le 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$v(n) = 3\cos(4\pi n)$$

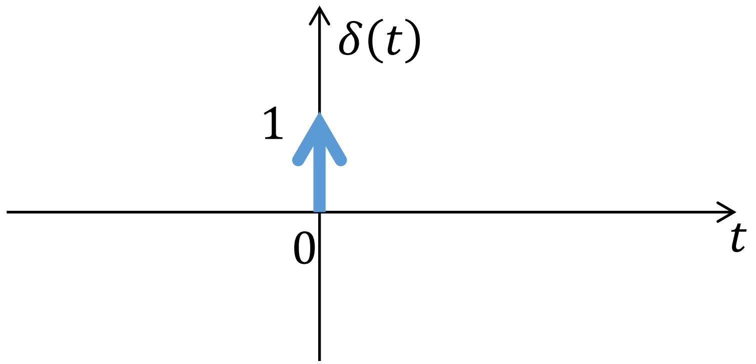
$$g(t) = e^{-2t}$$

2. SIGNAUX USUELS

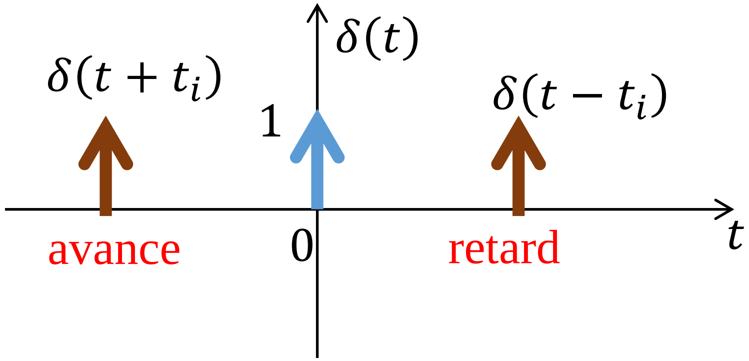
1 Impulsion de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad \text{avec} \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}$$

Théorème de l'unité d'aire



Notion avance/retard



Avance=translation de vecteur t_i vers la gauche

Retard=translation de vecteur t_i vers la droite

Application 1:*Représenter le signal*

$$x(t) = 2\delta(t+1) - 1{,}5\delta(t-2)$$

$$\underbrace{P(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)}$$

peigne de Dirac

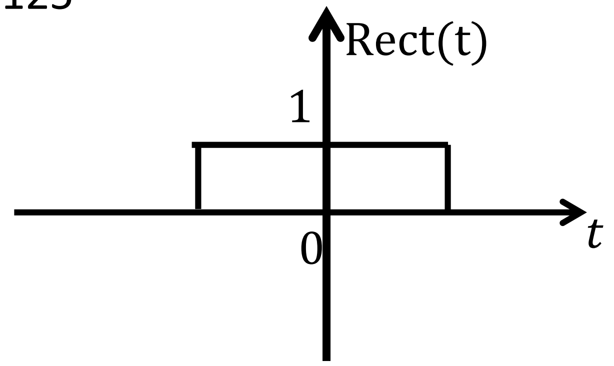
Exercice 2: caractériser des signaux suivants

$$\text{tri}(t) = \begin{cases} t+1\ si\ -1 \le t \le 0 \\ -t+1\ si\ 0 \le t \le 1 \\ 0 \quad ailleurs \end{cases}$$

$$f(t) = tri(t) \times P(t) \quad \text{Avec } T_e\text{=0,125}$$

2 Signal porte ou rectangulaire

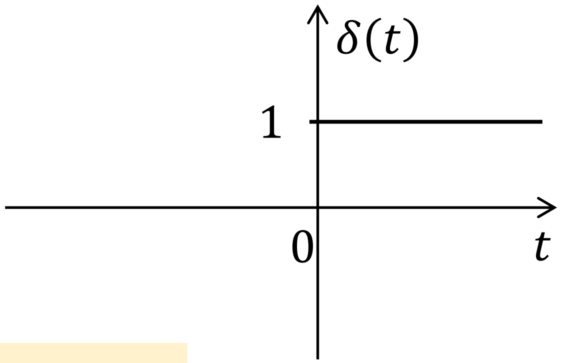
$$\underset{\alpha}{\text{Rect}}(t) = \begin{cases} 1 & si\ |t| \le \dfrac{\alpha}{2} \\ 0 & sinon \end{cases}$$



Question 3: donner l'utilité du Signal porte ,

2. SIGNAUX USUELS

3 **Echelon unité** $\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$



Echelon unité permet de rendre un signal $x(t)$ causal par une simple multiplication ($x(t) \times \epsilon(t)$)

un signal $x(t)$ est **causal** si et seulement si ($\forall t < 0\ x(t) = 0$

Exercice 3: représenter des signaux suivants

$$Sign(t) = \begin{cases} 1 & si\ t > 0 \\ -1 & si\ t > 0 \end{cases}$$

$$h(t) = \epsilon(t) \times Sign(t) \qquad \mathrm{w}(t) = \epsilon(t) \times cos(2\pi t)$$

3.NOTION FILTRAGE ++ TP

Un **filtre** est un circuit dont le comportement dépend de la fréquence du signal d'entrée. Il permet de privilégier ou d’éliminer **certaines fréquences** d’un signal.

Le filtrage est une forme de traitement de signal, obtenu en envoyant le signal à travers un ensemble de circuits électroniques, qui modifient son spectre de fréquence et/ou sa phase et donc sa forme temporelle.

Il peut s ‘agir soit :

- d’éliminer ou d’affaiblir des fréquences parasites indésirables
- d’isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles.

Applications :

- systèmes de télécommunications (téléphone, télévision, radio, transmission de données…)
- systèmes d’acquisition et de traitement de signaux physiques (surveillance médicale, ensemble de mesure, radars…)

1. Contexte

Aujourd’hui, de plus en plus, Le traitement des signaux se fait sous forme numérique. Le numérique présente en effet un grand nombre d’avantage tels que: la reproduction des systèmes , l’absence de dérive en temps, l’absence de réglages compliqués , la possibilités de traitement adaptatif . D’autre part, les performances des processeurs numériques s’améliore très rapidement: augmentations de leur vitesse, diminution de leur consommation, diminution de leur coût

On appelle **numérisation d’un signal** l’opération qui consiste à faire passer un signal de la représentation dans le domaine des temps et des amplitudes continus au domaine des temps et des amplitudes discrets.

La numérisation d’un signal analogique est un algorithme à trois étapes donc les trois paramètres les plus importants sont :

:

1. la période d’échantillonnage
2. le pas de quantification ou la précision de numérisation du signal
3. le temps de réponse du système numérique entre l’acquisition et la restitution du signal.

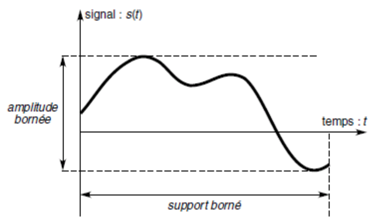
1. Contexte ++ TP

signal analogique
à spectre borné

Echantillonnage

Quantification

Codage



A quelle fréquence d'échantillonner les signaux?

quel type de quantification choisir?
Quel sera le pas de quantification?

Sur combien de bits numérise?

Figure 3: Convertisseur Analogique/ Numérique

Convertisseur Analogique/ Numérique
Circuit Intégré

Après la phase de prélèvement des échantillons, il est nécessaire de représenter la donnée réelle obtenue dans un ensemble fini de valeurs : opération de **quantification**. Après cette quantification du signal, les différentes valeurs sont mémorisées dans le système numérique selon l'ordre de leurs arrivées, formant ainsi une suite de valeurs numériques $Ve(n)$ qui seront codé en binaire: le **codage**

2. SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ

L'**échantillonnage** consiste à prélever sur un signal analogique $x(t)$ des échantillons de valeurs $x(\mathrm{n}T_e)$ avec n entier situées à des instants espacés de T_e constante, appelée la **période d'échantillonnage.** le signal $x(t)$ a un spectre à support borné. Cette limitation spectrale est soit naturelle (répartition initiale du signal), soit artificielle en utilisant un filtre

Dans le domaine temporel, le processus d'échantillonnage revient à multiplier le signal analogique $x(t)$ **soit** par une série d'impulsions de Dirac $\mathsf{P}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$ **échantillonnage idéal** **soit** par une série d'impulsions rectangulaire, $\mathsf{P}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Rect}(t - nT_e)$ **échantillonnage réel**

$x(t) \longrightarrow$

$\mathsf{P}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$

$\mathsf{P}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Rect}(t - nT_e)$

$$\underbrace{x_e(t) = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{+\infty} x(\mathrm{n}T_e)\ \delta(t - nT_e) & \textbf{échantillonnage idéal} \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} x(\mathrm{n}T_e)\ \mathrm{Rect}(t - nT_e) & \textbf{échantillonnage réel} \end{cases}}_{\text{Expression mathématique du signal échantillonné}}$$

Type échantillonnage

- **Naturel** : amplitude égale à $x(t)$ pendant la durée τ
- **Régulier** bloqueur: amplitude constante et égale à $x(\mathrm{n}T_e)$ pendant la durée τ ;
- **Moyenneur** : amplitude égale à la moyenne de $x(t)$ sur l'intervalle τ .

Exercice 5:

Échantillonner le signal $g(t)$en utilisant chaque d'échantillonnage

$$g(t) = e^{-2t}$$

2. SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ ++ TP

Théorème de Shannon: Pour numériser convenablement un signal, il faut que la fréquence d'échantillonnage soit au moins deux fois supérieure a la fréquence du signal a numériser.

Question 5: La voix humaine est comprise dans une bande de fréquence comprise entre 100 et 3400 Hz. Quelle fréquence d'échantillonnage doit-on choisir pour la téléphonie ?

Question 6: Expliquer pourquoi les sons des CD sont échantillonnés a 44,1 kHz

Exercice 6:

Soit $s(t)$ le signal défini par l'égalité : $s(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{3} \cos\left(2\pi \frac{kt}{8} + \varphi_k\right) + \cos(\pi t + \varphi_4)$

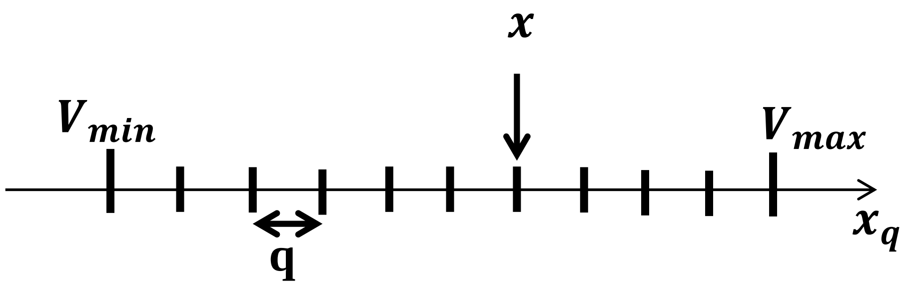
Ce signal est échantillonné avec la période T = 1. Quelle est la valeur maximale que peut prendre $s(n)$ avec n entier ? Montrer qu'il existe un ensemble de valeurs φ_k (k = 1, 2, 3, 4) qui minimisent la valeur maximale des $s(n)$. Peut-on généraliser cette propriété ?

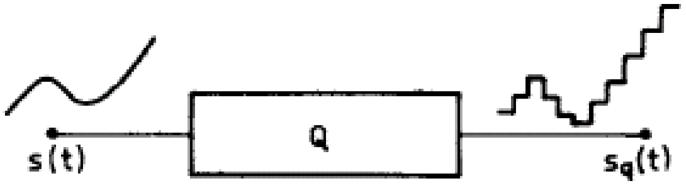
2. QUANTIFICATION DU SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ

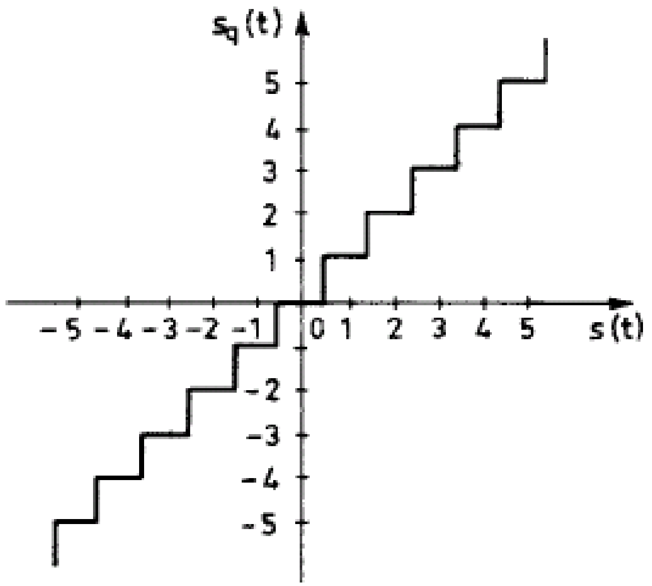
Quantifier une valeur x réelle quelconque, c'est remplacer cette valeur par une valeur x_q appartenant à un ensemble dénombrable de valeurs entières, suivant une certaine loi : arrondi au plus proche voisin, arrondi par défaut,..etc..

La **quantification** est une règle de correspondance entre :

- l'ensemble infini des valeurs des échantillons
- et un nombre fini de valeurs dans $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{Z}$







La valeur numérique de x est: $\mathrm{N} = \mathrm{E}(\frac{x - V_{min}}{q})$

$$V_{max} = \frac{2^n - 1}{2} q$$

Résolution : 2^n nombre de sorties distinctes

Exercice 8: Une personne malintentionnée télécharge sur un forum une chanson de 3 minutes au format mp3.La chanson a été numérisée par un pirate a 16 kHz et 8 bits mono. La personne, voulant une qualité « DVD » pour la chanson, modifie le fichier et le transforme en 48 kHz et 24 bits stéréo.

1. Calculer le poids en octet de la chanson avant transformation.
2. Même question après transformation.
3. Décrire la sensation auditive que l'on éprouve en écoutant le fichier télécharge avant transformation.
4. La qualité de la chanson a-t-elle été améliorée par la transformation ?
5. Comment la personne peut-elle améliorer la qualité du fichier téléchargé ?

2. QUANTIFICATION DU SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ

Bruit de quantification

Le processus de quantification, nécessaire pour le traitement numérique des données, introduit toujours une **erreur**, appelée **bruit de quantification**,

La puissance du bruit de quantification $\boldsymbol{P_q = \frac{q^2}{12}}$

Le rapport signal sur bruit de quantification définie par $\boldsymbol{D_q = 6,02n + 1,76}$

Exercice 5:

Un signal sinusoïdal à la fréquence 1 050 Hz est échantillonné à 8 kHz et codé à 10 bits. Quelle est la valeur du rapport signal à bruit maximal ? Quel est le niveau par rapport au signal du bruit de quantification mesuré dans la bande de fréquence 300-500 Hz ?

Exercice 6 Quelle est la capacité mémoire nécessaire pour stocker une minute de signal téléphonique, sachant que ce signal a une fréquence maximale de 4KHz et qu'on le mémorise en respectant le théorème de Shannon et en utilisant la loi A à 8 bits par échantillon ?

3. CARACTÉRISATION D’UN SIGNAL 2D (IMAGE)

Une image est un signal bidimensionnel

Un image analogique est par exemple celle formée sur la rétine de l‘œil ou l'images obtenue par la photographie argentique classique.

Une image numérique est un signal numérique compose d'unités élémentaires (appelées pixels) qui représentent chacun une portion de l'image.

Une image numérique est définie par :

- le **nombre de pixels** qui la composent en largeur et en hauteur,
- **étendue des teintes de gris ou des couleurs** que peut prendre chaque pixel (on parle de dynamique de l'image).

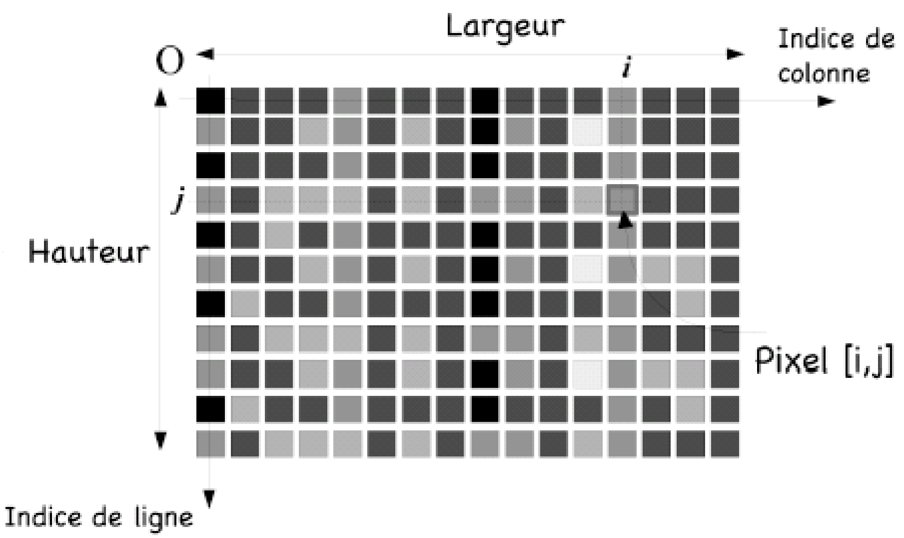


Figure 3: Image Numérique

- **I** est l'image numérique : $\mathbf{I}[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{n}$ est la valeur du niveau de gris.
- Lorsque $\mathbf{N}\boldsymbol{\epsilon}[\boldsymbol{N_{min}},\boldsymbol{N_{max}}]$ $\boldsymbol{N_{min}}, -\boldsymbol{N_{max}}$est le nombre de niveaux de gris .
- La **dynamique** de l'image est donnée par $\boldsymbol{Log_2}(\boldsymbol{N_{min}}, -\boldsymbol{N_{max}})$.

1. Notion du spectre d’un signal

➔ **Principe** Le passage du domaine temporelle au domaine fréquentielle

$$\underbrace{x(t)}_{\text{Domaine Temporel}} \longrightarrow \boxed{\textbf{TRANSFORMATION}} \longrightarrow \underbrace{\boldsymbol{X}(\mathbf{f}) \in \mathbb{C}}_{\text{Domaine Fréquentiel}}$$

Le spectre d’un signal est l’ensemble des fréquences contenu dans un signal

Pourquoi analyser les fréquences d’un signal ?

➔ **Outils**

1. **Série de Fourier** pour Signal continu périodique
2. **Transformée de Fourier** pour Signal continu apériodique
3. **Transformée de Fourier direct** pour Signal numérique

➔ **Conditions et contraintes** Conditions de **Dirichlet**

$x(t)$ possède un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle fini

$x(t)$ possède un nombre fini de maxima et de minima sur tout intervalle fini

$x(t)$ est absolument intégrable $x(t) = \int_{-\propto}^{+\propto}|x(t)|dt$

Cas applicatif: Composante spectrale $x(t) = A\cos\theta$

Pulsation $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ Fréquence instantanée $f_i = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\theta}{dt}$

Déterminer la Composante spectrale des signaux et dessiner le graphe Temps-Fréquence:

$x_1(t) = 2\cos(500\pi t - \frac{\pi}{3})$

$x_2(t) = 2\cos(3000\pi t - \frac{\pi}{3}t^2)$

$x_3(t) = 2 + 1{,}75\cos(60\pi t - \frac{\pi}{3}) + 2 + 1{,}75\cos(100\pi t - \frac{\pi}{3})$

Signal stationnaire: Un signal est stationnaire lorsque sa fréquence instantané **ne dépend pas du temps**

2. Analyse spectrale des signaux continus apériodiques

Soit un signal $x(t)$ continu et apériodique vérifiant les trois conditions de **Dirichlet**

$$\mathrm{X}(f) = \int_{-\propto}^{+\propto} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

Le spectre de $x(t)$ est la représentation du module dé $\mathrm{X}(f)$ $fonction\ de\ f$

Exercice 7: représenter le spectre des signaux suivants

$g(t) = e^{-2t} \in (t)$

$$\underset{\alpha}{\mathrm{Rect}}(t) = \begin{cases} 1 & si\ |t| \leq \dfrac{\alpha}{2} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Propriétés de la Transformée de Fourier:

1. Translation temporelle: $x(t-t_i) \rightarrow X(f)e^{-j2\pi t t_i}$
2. Modulation dans le domaine temporel $x(t)e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow X(f-f_0)$:
3. Contraction ou dilatation temporelle $x(at) \rightarrow \frac{1}{a}X(\frac{f}{a})$

NB: si $x(t)$ est réel, alors
- La partie réelle de $X(f)$ est paire
- La partie imaginaire de $X(f)$ est impaire
- Le module de $|X(f)|$est paire

2. Analyse spectrale des signaux continus périodiques

Soit un signal x(t) continu et périodique de période T_0 *Il peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales et cosinusoïdales de fréquences f multiple de la fréquence* f_0*, dite fréquence fondamentale*

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos2\pi f_0 t + b_n sin2\pi f_0 t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_0 \mathrm{t} + \varphi_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-j2\pi f_0 t}$$

Question 8: déterminer l'expression de:

1. $\frac{a_0}{2}$; a_n et b_n
2. A_n etφ_n
3. C_n

3. Analyse spectrale des signaux continus périodiques

Le spectre de $x(t)$ *continu et périodique de période* T_0 est la représentation du module dé A_n *fonction de* n

La représentation fréquentielle ou le **spectre en fréquence** $\mathbf{X}(f)$ du signal $x(t)$ est constitué de la composante continue à la fréquence 0, du fondamental à la fréquence $\boldsymbol{f_0}$ (ou harmonique d'ordre 1) et des différents harmoniques aux fréquences $\boldsymbol{f = nf_0}$.

Il est important de remarquer que le spectre d'un signal périodique, de période T_0), est **discontinu** et composé de raies d'amplitude $|A_n|$

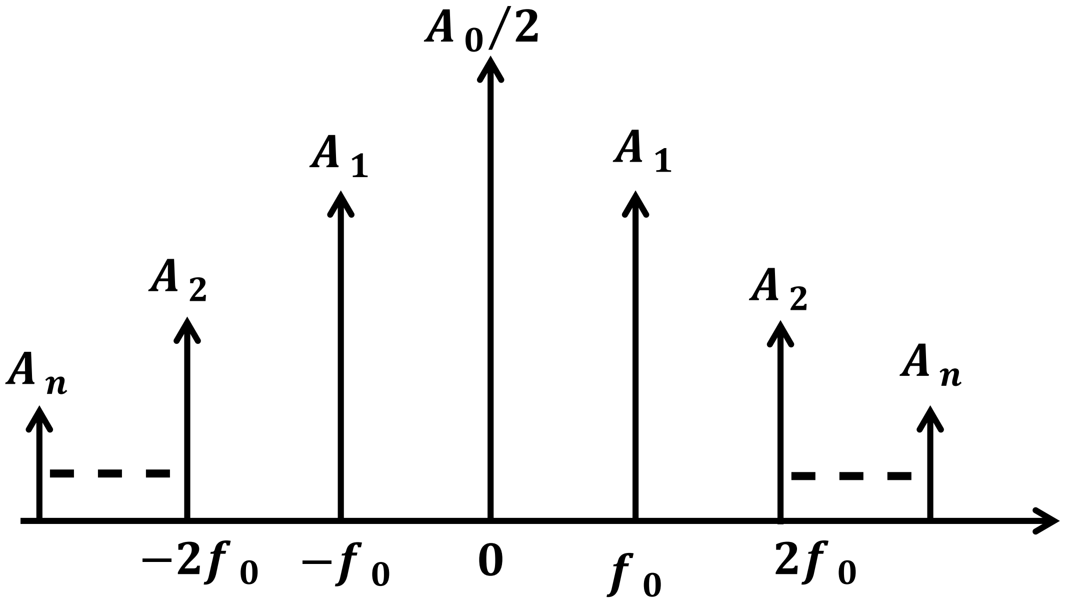
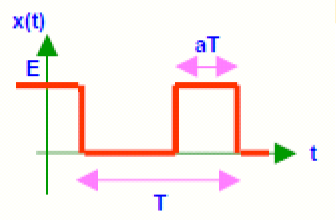
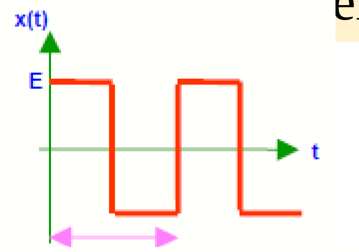


Figure 5: Représentation fréquentielle bilatérale d'un signal périodique

Exercice 7: représenter le spectre des signaux suivants tout vérifiant leurs décomposition en série de Fourier



$$x(t) = aE\left[1 + \frac{2\sin(\pi a)}{\pi a}\cos(\omega t) + \ldots + \frac{2\sin(n\pi a)}{n\pi a}\cos(n\omega t) + \ldots\right]$$



$$x(t) = \frac{4E}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \ldots\right]$$

4. Analyse spectrale des signaux numériques

$$x(n) \xrightarrow{TFD} \mathrm{X}(K) \in \mathbb{C}$$

Domaine Temporel → Domaine Fréquentiel

La transformée de Fourier Discrète (TFD) est un algorithme de calcul de la transformée de Fourier à l'aide d'un calculateur (ordinateur)

$$\mathrm{X}(K) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} x(n)\, e^{-j2\pi n\frac{K}{N}} \qquad N = \mathrm{card}(x(n))$$

$\mathrm{X}(K)$ est le spectre du numérique $x(n)$

Question 9: Mettre que $\mathrm{X}(K)$ sous matricielle en exploitant la matrice de Vandermonde Fourier de dim $= n$

Question 10: determiner d'opérations arithmétique lors du calcul de la TFD et décrire le principe de **TFR** (**Transformée de Fourier Rapide**)

Exercice 7: représenter le spectre des signaux suivants

$$x(n) = \{0,0,2,1\}$$

$$x(n) = \begin{cases} 3\cos(2\frac{\pi}{3}n & si\ n = 0,1,2,3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

5. Analyse spectrale des signaux échantillonnés

Question 11: rappeler l'expression du signal échantillonné **Question 12:** rappeler l'expression de la TF du peigne de Dirac

Question 13: Rappeler les: Propriété du Produit de convolution

Le **spectre du signal échantillonné** $X_e(f)$a pour expression le **produit de convolution** de $\boldsymbol{X(f)}$ par $\mathbf{P}(\boldsymbol{f})$ (spectre du peigne de Dirac) soit :

$$X_e(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)$$

Interprétations

1. Le spectre du signal échantillonné $X_e(f)$ est **somme des répliques** (copies) de $X(f)$
2. Le spectre du signal échantillonné $X_e(f)$ est **périodique de période** nf_e

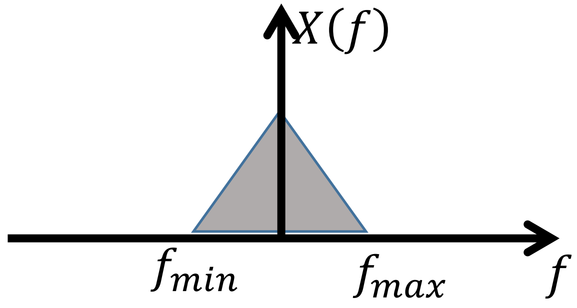


Figure 6: spectre du signal continu

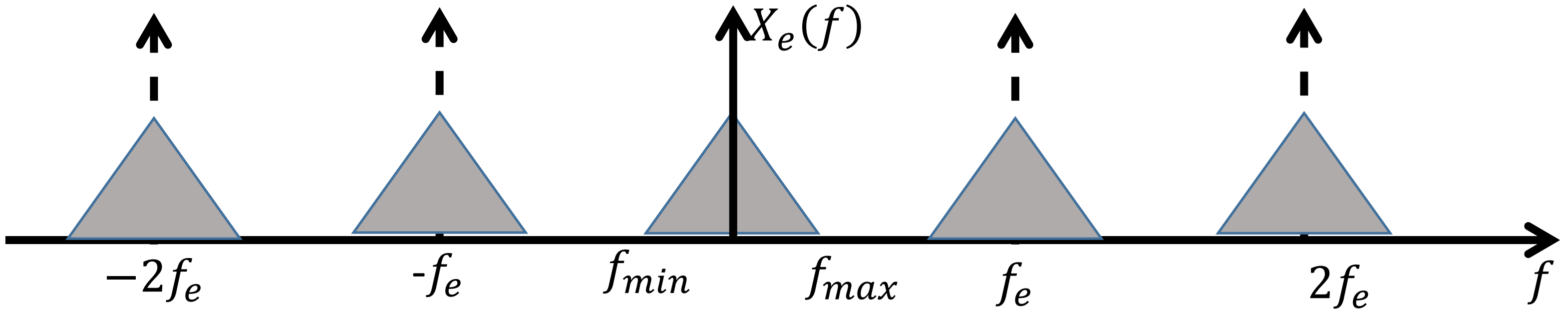


Figure 7: spectre du signal échantillonné $X_e(f)$

1. Rappel: Notion de probabilité et processus aléatoire

Une **variable aléatoire** définie sur un ensemble d'expériences est donc une variable discret ou continue $\boldsymbol{x}$ dont la valeur est déterminée par le résultat de chaque expérience ou épreuve. Le modèle mathématique d'une telle variable est une **fonction aléatoire caractérisée** par une **distribution de probabilité *P***

1 ***Moyenne = espérance mathématique***

$$\begin{cases} m = E_{esp}[x] = \sum_i x_i P_i & \text{variable aléatoire discrète} \\ m = E_{esp}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx & \text{variable aléatoire continue} \end{cases}$$

2 ***Variance*** $Var = E_{esp}[(x-m)^2]$ ***Ecart type*** $\sigma = \sqrt{Var}$

3 **autocorrélation**

$$\begin{cases} C_{xx} = E_{esp}[x(n)x(n-k)] & \text{variable aléatoire discrète} \\ C_{xx} = E_{esp}[x(t)x(t-\tau)] & \text{variable aléatoire continue} \end{cases}$$

Exercice 8

Soit le signal $\boldsymbol{x(n) = 2\,sin(n\pi/4)}$. Calculer les 3 premiers éléments de la fonction d'autocorrélation.

1. Rappel: Notion de probabilité et processus aléatoire

→ Un processus aléatoire est défini comme une fonction : Du **temps**, Des **épreuves aléatoires**, d'une **expérience aléatoire**

→ L'**observation** d'un processus aléatoire, à un instant donné, permet de définir une **variable aléatoire**

→ la **réalisation** du processus pour une épreuve aléatoire donné, constitue le **signal aléatoire**

2. Caractérisation du signal aléatoire

Un signal est dit aléatoire si ses valeurs ou réalisations dépendent du hasard et s'il ne possède pas de représentation analytique. Par contre l'observation de ce signal peut être caractérisée par des grandeurs statistiques ou fréquentielles.

Soit un signal aléatoire $x_a(t)$ défini par sa **loi de distribution ou loi de probabilité** et caractériser par ces **paramètres statistiques** :

paramètres statistiques
- Moyenne = espérance mathématique
- Variance = Ecart type
- autocorrélation

Un signal est dit aléatoire qui suit une loi de Gauss est très importantes car il correspond à de nombreux cas. La densité de probabilité d'un signal aléatoire gaussienne est

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

2. Caractérisation et Propriétés d'un signal aléatoire

Propriétés d'un SA

- un signal aléatoire est **stationnaire** si ses propriétés statistiques sont indépendantes du choix de l'origine du temps
- un signal aléatoire est **ergodique** si les moyennes sur plusieurs réalisations sont équivalentes à des moyennes temporelles correspondant à une seule épreuve

Exercice 9

Soit le signal aléatoire $x(t) = r\cos(wt + \varphi)$ où w *est réel* et φ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-\pi, \pi]$. r est une variable réelle. Calculer la moyenne et la corrélation de $x(t)$.

3. spectre des signaux aléatoires

La **transformée de Fourier** de la **fonction d'autocorrélation** de $x_a(t)$, est **la densité spectrale de puissance** du signal aléatoire

$$x_a(t) \xrightarrow{\textit{Spectre}} TF(C_{xx}) \in \mathbb{C}$$

Domaine Temporel — Domaine Fréquentiel

Question 10 Quand dit-on qu'un signal est stationnaire au sens large?

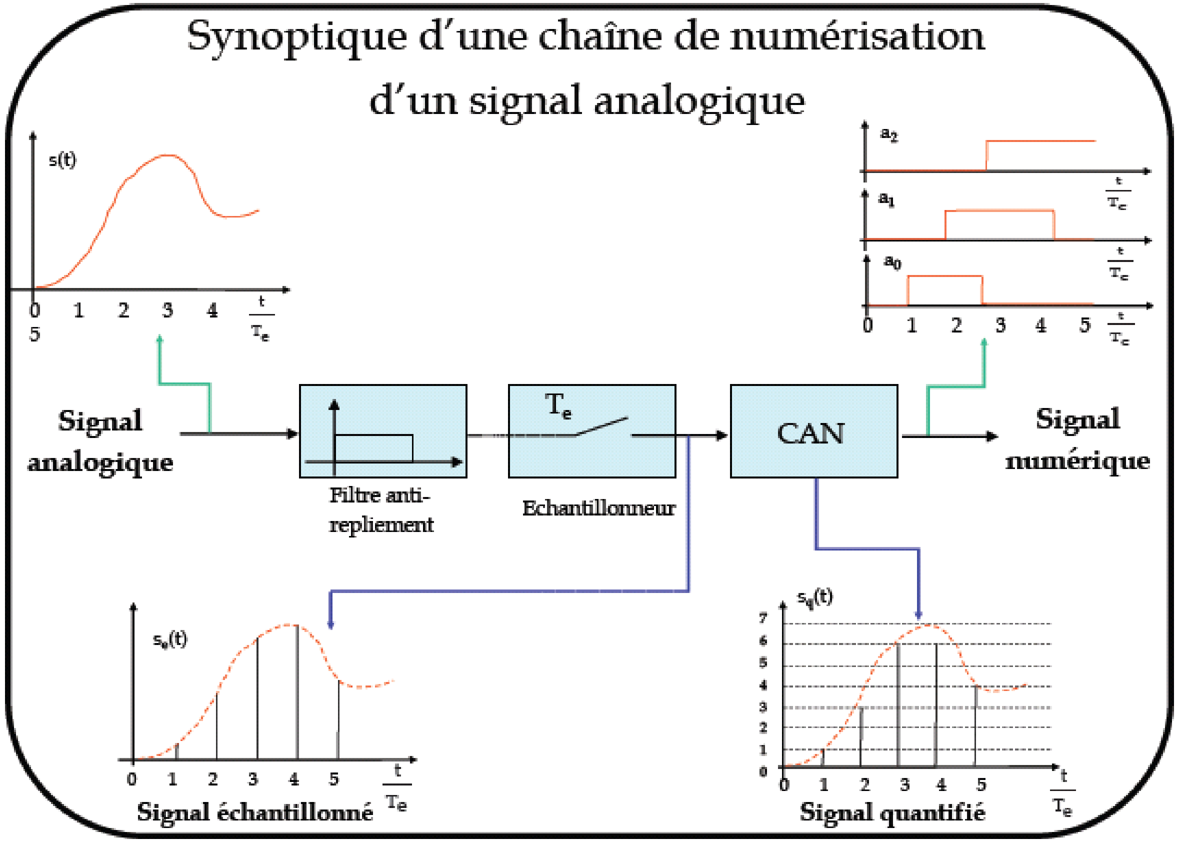
Exercice 10 $y(t) = x(t)\cos(wt + \varphi)$

$x(t)$ est un SA modulant une porteuse sinusoïdale. $x(t)$ est de moyenne nulle, de corrélation. $R_{xx}(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$; φ est une constante et est uniformément répartie sur $[0, 2]$. $x(t)$ et φ sont considérés comme indépendants.

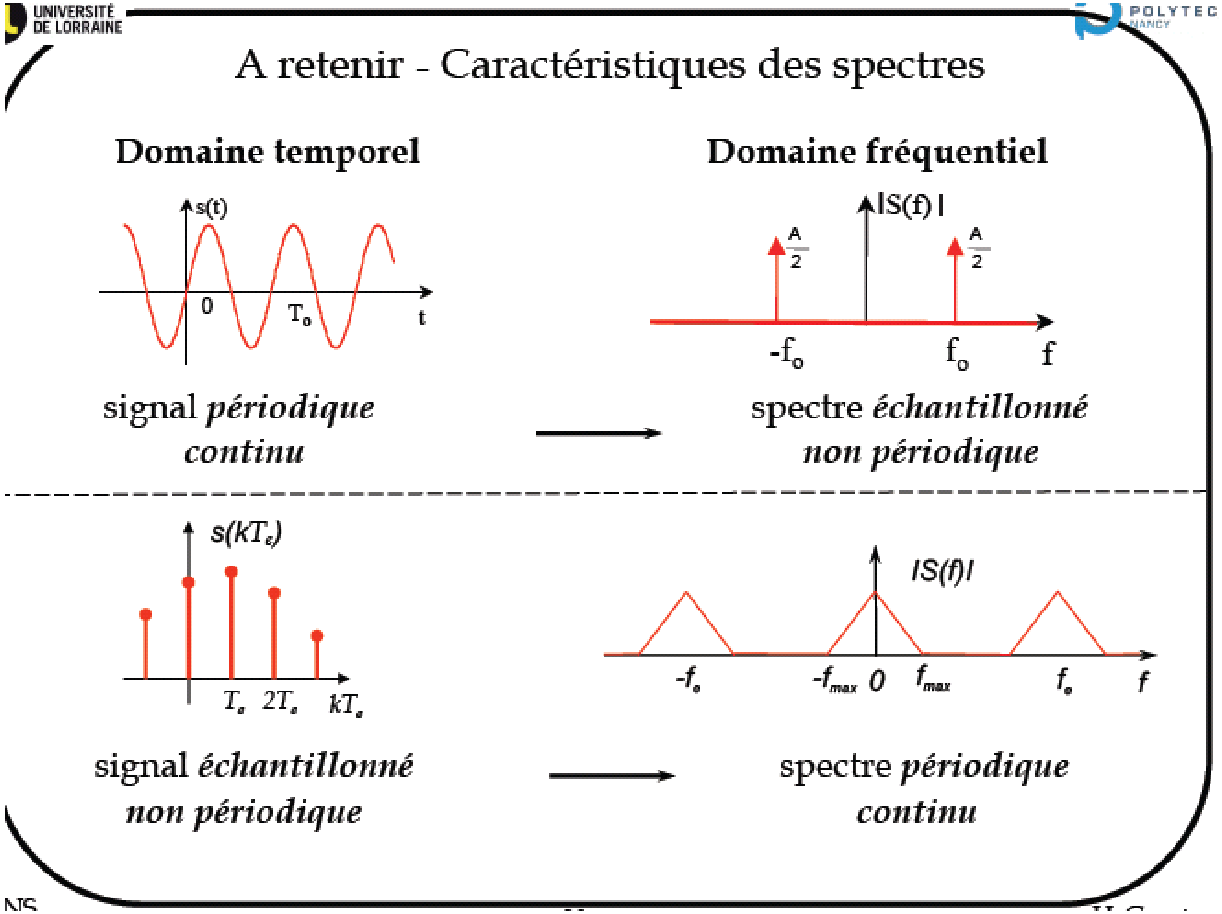
Représenter la densité spectrale de puissance de $y(t)$

$y(t)$ est il stationnaire au sens large ?

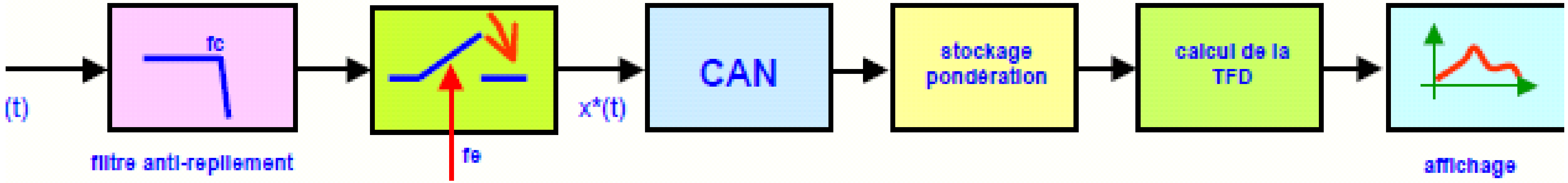
RESUME



Synoptique d'une chaîne de numérisation d'un signal analogique
Signal analogique
Filtre anti-repliement
Echantillonneur
CAN
Signal numérique
Signal échantillonné
Signal quantifié



A retenir - Caractéristiques des spectres
Domaine temporel
Domaine fréquentiel
signal *périodique continu*
spectre *échantillonné non périodique*
signal *échantillonné non périodique*
spectre *périodique continu*



fc
filtre anti-repliement
fe
x*(t)
CAN
stockage pondération
calcul de la TFD
affichage

FIN