Exercice-Ethème 2

Thomas Laurent

29/01/2018

Exercice 1

Pour des observations unidimensionnelles de distribution exponentielle, la vraisemblance est la suivante:

$L_i = f_i(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}$

On cherche à maximiser la vraisemblance. Ainsi, dans le cas de deux groupes, x sera affecté au groupe 1 si:

$\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \geq \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} x$

donc $\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} x \geq 0$

donc $e^{-\lambda_1 x}(1 - e^{\lambda_1 x - \lambda_2 x + ln(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})}) \geq 0$

Ainsi, l'observation x sera affectée au groupe 1 si:

$x(\lambda_1 - \lambda_2) + ln(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}) \leq 0$

Exercice 2

Posons μ_1 et μ_2, la moyenne de chaque groupe. Le vecteur propre de $W^{-1}B$ est $u = W^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$ or la règle de discrimination du discriminant linéaire de Fisher est:

$R_1 : u^T(x - \mu_1) \leq u^T(x - \mu_2)$

Ainsi x appartient au groupe 1 si: $W^{-1}(\mu_1 - \mu_2)(x - \mu_1) \leq W^{-1}(\mu_1 - \mu_2)(x - \mu_2)$

Si les matrices de covariances sont égales, on peut poser $\Sigma^{-1} = W^{-1}$ et donc l'expression est équivalente à $\Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2)(x - \mu_1) \leq \Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2)(x - \mu_2)$

Cette dernière expression est équivalent à la règle du maximum de vraisemblance lorsque les matrices de covariance sont égales.

Exercice 3

Pour chaque population, on calcule la probabilité a posteriori:

Population 1: $\pi_1 f_1(x) = \pi_1 \binom{10}{x} 0.2^x 0.8^{10-x}$

Population 2: $\pi_2 f_2(x) = \pi_2 \binom{10}{x} 0.3^x 0.7^{10-x}$

Population 3: $\pi_3 f_3(x) = \pi_3 \binom{10}{x} 0.5^{10}$

La règle de Bayes pour chaque groupe est:

$R_j = x : \pi_j f_j(x) \geq \pi_i f_i(x)$ pour tout $i \neq j$

En calculant pour toutes les valeurs de x, les probabilités a posteriori pour chaque population, on trouve:

x	Groupe attribué (Règle de Bayes)
0	1
1	1
2	2
3	3
4	3
5	3
6	3
7	3
8	3
9	3
10	1

Exercice 4

Question 1

Table 1: moyenne par groupe

t	x1	x2
1	3.00	10
2	4.33	7

Etant donné que l'on considère la matrice de covariance est supposée identique au sein des deux groupes, on calcule la matrice sur l'ensemble de l'échantillon.

Table 2: Matrice de covariance

1.07	-1.6
-1.60	5.9

La probabilité a priori est égale à 0.5 pour chaque groupe étant donné qu'il n'y a pas d'information a priori.

Question 2

Etant donné que les distributions pour chaque groupe sont normales, les matrices de covariance sont égales et les probabilités a priori sont égales, la fonction discriminante linéaire pour chaque groupe est de la forme:

$\delta^2(x, \mu_i) = \{\Sigma^{-1/2}(x - \mu_i)^T\}\Sigma^{-1/2}(x - \mu_i)$

En utilisant la matrice de covariance calculée et les moyennes pour chaque groupe, on trouve les fonctions discriminantes linéaires pour chaque groupe:

$\delta^2(x, \mu_1) = 1.58x_1^2 + 0.85x_1x_2 - 17.95x_1 + 0.28x_2^2 - 8.22x_2 + 68.02$

$\delta^2(x, \mu_2) = 1.58x_1^2 + 0.85x_1x_2 - 19.60x_1 + 0.28x_2^2 - 7.65x_2 + 69.22$

Question 3

Ainsi, la règle de classification est la suivante:

$R_1 = \{x : \delta^2(x, \mu_1) \leq \delta^2(x, \mu_2)\}$

et donc $R_1 = \{x : 1.65x_1 - 0.57x_2 - 1.2 \leq 0\}$

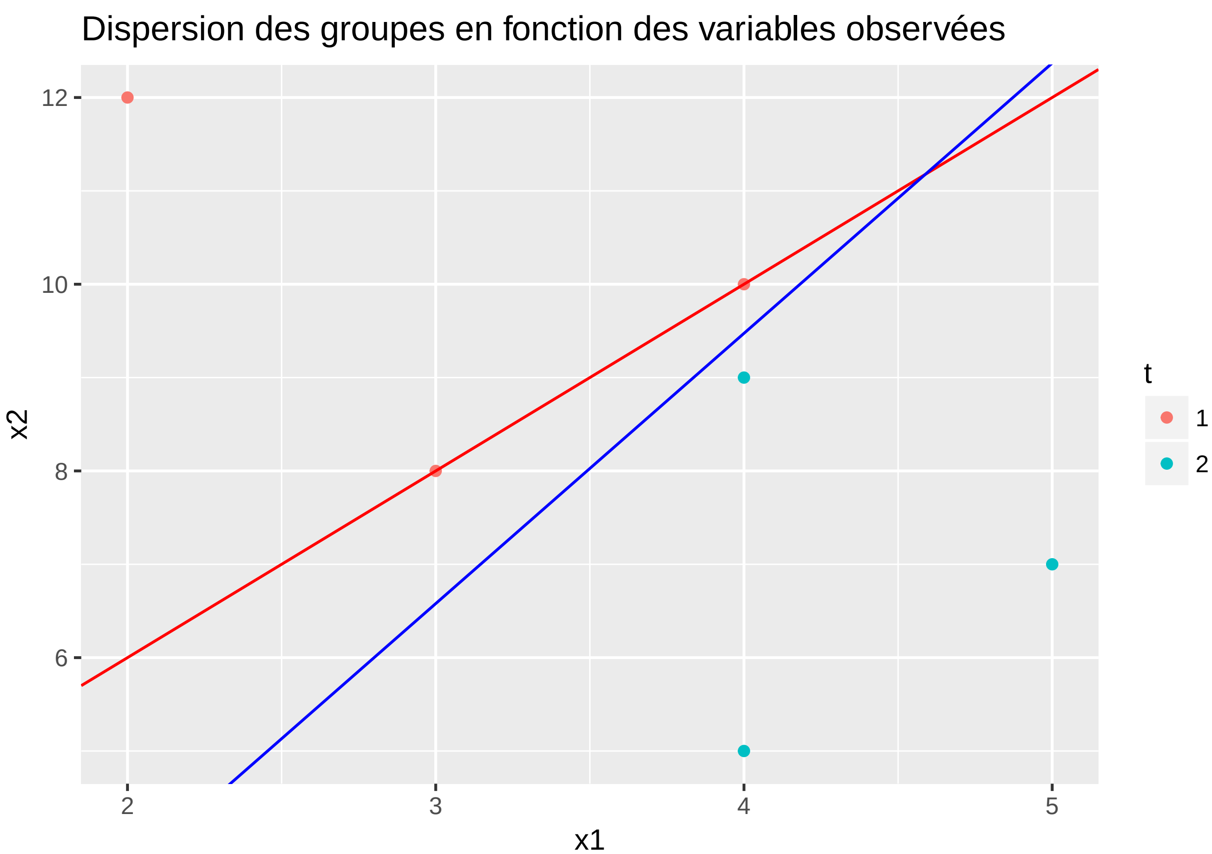
La table de confusion pour chaque groupe est donnée ci-dessous.

Valeur actuelle	Valeur prédictive		Total
	1	2	Total
1	3	0	3
2	0	3	3
Total	3	3	6

On remarque que le taux d'erreur est de 0%.

Question 4

On trace le graphique afin de visualiser la dispersion des groupes. La droite en bleu correspond à la règle de classification linéaire. Les observations au-dessus de la droite sont classées dans le groupe 1.



On remarque que la droite d'équation $x_2 = 2x_1 + 2$ (droite indiquée en rouge, passant par les deuxième et troisième observations du groupe 1) discrimine bien sur l'échantillon d'apprentissage avec un taux d'erreur de 0%.