Trabajo de Investigación: Ajuste de Curvas por Mínimos Cuadrados

Alberto Ramos Cruz Moisés Alonso Marroquin Ayala
Rene Eduardo Hernandez Castro Roberto Jose Melgares Zelaya

19 de marzo de 2025

1. Regresión lineal por mínimos cuadrados

1.1. Ajuste de una recta por regresión por mínimos cuadrados

1.2. Linealización de relaciones no lineales

2. Aproximación polinomial con mínimos cuadrados

Con el fin de encontrar un modelo matemático que represente lo mejor posible a una serie de datos experimentales, es posible abordarlo por medio de una curva $y = \phi(x)$ que se aproxime a los datos, sin la necesidad de que esta curva pase por ellos. Lo anterior plantea el problema de verificar que en los términos: $\{(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, 2, 3, \cdots, N\}$ se debe de hallar un $\phi(x)$ que verifique

$$Minima = \sum_{i=0}^{N} (y_i - \phi(x_i))^2$$

Para evitar problemas se suele utilizar una diferencia cuadrada para evitar problemas de derivabilidad.

2.1. Parábola de mínimos cuadrados

La parábola de mínimos cuadrados tiene como objetivo aproximar un conjunto de puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots, (x_n, y_N)$, donde N es el número de elementos en el conjunto de puntos, a través de una curva polinomial de grado 2. Entonces, podemos entender la parábola de mínimos cuadrados como una curva de $y = \phi(x)$ donde $\phi(x)$ es un polinomio de segundo grado que viene dado por la ecuación

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

donde $a_0, a_1, a_2 \in R$ y se determinan resolviendo las ecuaciones simultaneas :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{N} y_i = a_0 N + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{N} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{N} x_i y = a_0 \sum_{i=0}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{N} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{N} x_i^2 y = a_0 \sum_{i=0}^{N} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{N} x_i^4 \end{cases} \tag{1}$$

Las ecuaciones anteriores son conocidas como *ecuaciones normales de mínimos cuadrados*. Estas ecuaciones se obtienen al multiplicar la ecuación $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ por 1, x, y x^2, respectivamente. Como se puede observar, se obtiene un *sistema con 3 incógnitas y 3 ecuaciones.*

Para obtener los valores que acompañan a las incógnitas a_i en el sistema de ecuaciones se debe de obtener la suma de los productos, tomando en cuenta los valores respectivos de x_i con sus imágenes en

y_i; esto a excepción del valor N que acompaña a la incógnita a_0 en la primera ecuación como se puede observar en la Ecuación 1.

A continuación, se procede a resolver el sistema de ecuaciones por medio de una matriz de 4×3 para que de esste modo se obtengan los valores de las 3 incógnitas. En este caso, se puede usar cualquier método de resolución de sistemas de ecuaciones por medio de matrices, aunque para esta investigación se hará uso del método de Cramer. *Con el objetivo de mejorar la comprensión lectora, a partir de este punto se usará la siguiente notación.*

Símbolo	Significado
X	$\sum_{i=0}^{N} x_i$
Y	$\sum_{i=0}^{N} y_i$
X^2	$\sum_{i=0}^{N} x_i^2$
X^3	$\sum_{i=0}^{N} x_i^3$
X^4	$\sum_{i=0}^{N} x_i^4$
XY	$\sum_{i=0}^{N} x_i y_i$
X^2Y	$\sum_{i=0}^{N} x_i^2 y_i$

Usando la notación anterior, pasamos a resolver la matriz y obtener las ecuaciones que nos dan los determinantes. *Recordar que estas matrices no contienen variables simbólicas, sino que valores escalares representados con letras mayúsculas.*

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} Y & X & X^2 \\ XY & X^2 & X^3 \\ X^2Y & X^3 & X^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & X & X^2 \\ X & X^2 & X^3 \\ X^2 & X^3 & X^4 \end{vmatrix}} \qquad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} N & Y & X^2 \\ X & XY & X^3 \\ X^2 & X^2Y & X^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & X & X^2 \\ X & X^2 & X^3 \\ X^2 & X^3 & X^4 \end{vmatrix}} \qquad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} N & X & Y \\ X & X^2 & XY \\ X^2 & X^3 & X^2Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & X & X^2 \\ X & X^2 & X^3 \\ X^2 & X^3 & X^4 \end{vmatrix}}$$

2.2. Ajuste de polinomios de grado n (caso general)

aserejejadejedejedetudejedeseinoubadajabeedebugidiji

Referencias