Problem7.1

May 14, 2017

1 Байесовские оценки

In [6]:
```
import warnings
warnings.simplefilter('ignore')

import numpy as np
import pandas as pd
from matplotlib import pyplot as plt
import seaborn as sns

%matplotlib inline
from pylab import rcParams
rcParams['figure.figsize'] = (15, 6)
rcParams['image.cmap'] = 'viridis'
```

In [154]:
```
from scipy.stats import norm


  #1-й параметр -- сдвига, 2-ой масштаба;
  param_sets_1 = [(0,1), (0,100), (10,1), (10,100)]
  param_sets_2 = [(1,1), (1,100), (10,1), (10,100)]
```

1. Сгенерируйте выборку $X_1, ..., X_{100}$ из распределения $N(0,1)$. Для каждого $n \leqslant 100$ в модели $N(\theta, 1)$ найдите оценку максимального правдоподобия по выборке $X_1, ..., X_n$ и байесовскую оценку, для которой в качестве априорного распределения возьмите сопряженное из теоретической задачи 8.3. Возьмите несколько значений параметров сдвига и масштаба для априорного распределения: (0, 1), (0, 100), (10, 1), (10, 100). Постройте графики абсолютной величины отклонения оценки от истинного значения параметра в зависимости от n для оценки максимального правдоподобия и байесовских оценок, которым соответствуют разные значения параметров априорного распределения (5 кривых на одном графике). Сделайте выводы.

   Аналогичные исследования произведите для модели $N(0, \theta)$. В этом случае возьмите следующие параметры для априорного распределения: (1, 1), (1, 100), (10, 1), (10, 100).

Задание

1.1 Модель $N(\theta, 1)$

Из задачи 8.3 найденное сопряженное распределение является нормальным и имеет следующие параметры:

- Параметр сдвига (это и есть наша оценка для θ):

$$\frac{< X > n\sigma^2 + a}{n\sigma^2 + 1}$$

- Параметр масштаба (что в данном случае не так важно):

$$\frac{n\sigma^2 + 1}{n\sigma^2}$$

Тут априорное распределение $N(a, \sigma^2)$, где a и σ будем брать из param_sets_1
$< X >$ -- среднее значение по выборке

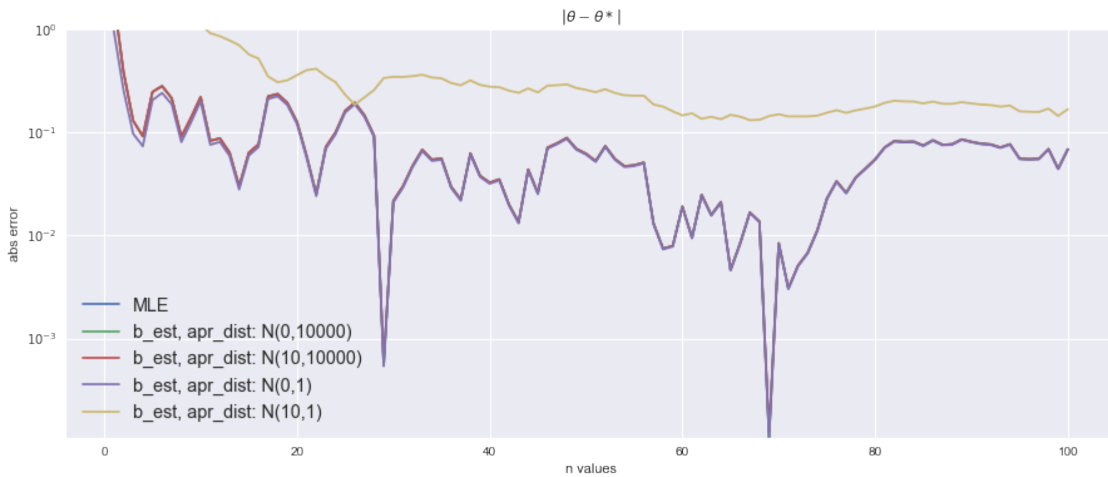
Также известно, что среднее значение выборки (или $< X >$ в данных обозначениях) -- это оценка максимального правдоподобия для нормального распределения.

Таким образом ОМП$(\theta) =< X >$

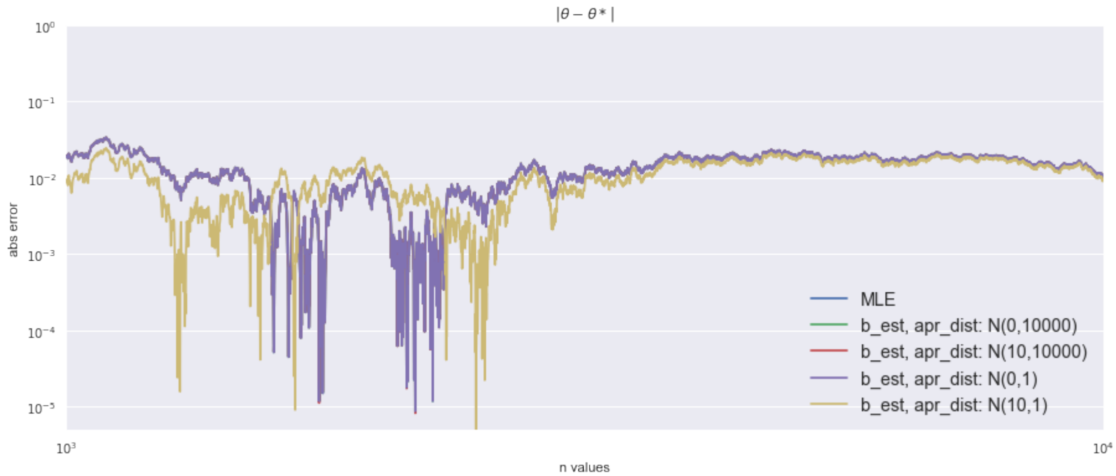
In [155]:
```
def get_bayes_est(n, a, sigma, x_mean):
    """
    Подразумевается, что отсчет начинается с 1;

    """
    return (x_mean*n*(sigma**2)+a)/(n*(sigma**2)+1)
```

In [180]:
```
N = 100 # размер выборки
X = norm.rvs(loc=0, scale=1, size=N)

mle = np.array([np.mean(X[:n]) for n in range(1,N+1)]) # набор средних для каждого n;
get_name = lambda a,sigma: 'N('+str(a)+','+str(sigma**2)+')' # просто имя для каждого

# словарь массивов для каждого из параметров из param_sets_1
# где каждый массив -- это массив абсолютных величин разностей между нулем и байесовск
b_est = {get_name(a,sigma):np.array([np.abs(0-get_bayes_est(n,a,sigma,mle[n-1])) for n
         for a,sigma in param_sets_1}

x_range = range(1,N+1)
plt.plot(x_range, np.abs(mle-0), label='MLE')
for name, arr in b_est.items():
    plt.plot(x_range, arr, label="b_est, apr_dist: "+name)

plt.legend(fontsize='x-large')
```

```
plt.title(r'$|\theta-\theta*|$')
plt.xlabel("n values")
plt.ylabel("abs error")
plt.semilogy()
plt.ylim((0, 1))
plt.show()
```




```
In [179]: N = 10000 # размер выборки
          X = norm.rvs(loc=0, scale=1, size=N)

          mle = np.array([np.mean(X[:n]) for n in range(1,N+1)]) # набор средних для каждого n;
          get_name = lambda a,sigma: 'N('+str(a)+','+str(sigma**2)+')' # просто имя для каждого

          # словарь массивов для каждого из параметров из param_sets_1
          # где каждый массив -- это массив абсолютных величин разностей между нулем и байесовск
          b_est = {get_name(a,sigma):np.array([np.abs(0-get_bayes_est(n,a,sigma,mle[n-1])) for n
                   for a,sigma in param_sets_1}

          x_range = range(1,N+1)
          plt.plot(x_range, np.abs(mle-0), label='MLE')
          for name, arr in b_est.items():
              plt.plot(x_range, arr, label="b_est, apr_dist: "+name)

          plt.legend(fontsize='x-large')
          plt.title(r'$|\theta-\theta*|$')
          plt.xlabel("n values")
          plt.ylabel("abs error")
          plt.loglog()
          plt.ylim((0, 1))
          plt.xlim((10**3, 10**4))
          plt.show()
```



1.1.1 Выводы:

- По первому графику кажется, что лучше всего себя показывают MLE и байесовские оценки с параметрами априорного распределения (0, 100), (10, 10000), (0,1) -- их графики почти полностью совпадают;
- Оценка с параметрами априорного распределения (0, 100) показывает худший результат в начале, но при бОльших n уже становится неочевидно кто лучше;

При каждой новой генерации выборки график несколько отличается от предыдущего, что говорит скорее о недостаточности числа N=100 для того, чтобы делать какие-то выводы.

Если построить график при N=10000, то видно, что все оценки дают примерно одинаковые ошибки при достаточно больших n.

1.2 Модель $N(0, \theta)$

Сопряженное к $N(0, \theta)$ - Inverse-gamma Distribution: $\Gamma_{inv}(\alpha_0, \beta_0)$

- Его среднее $= \frac{\beta_0}{\alpha_0 - 1}$

Для получения апостериорного распределения его параметры выражаются через параметры выборочного распределения $N(0, \theta)$ так:

- $\alpha = \alpha_0 + \frac{n}{2}$
- $\beta = \beta_0 + \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2}$.

Следовательно, т.к. байесовская оценка -- это условное матожидание по апостериорному распределению, то

$$\theta^* = \frac{\beta}{\alpha - 1} = \frac{2\beta_0 + \sum_{i=1}^n X_i^2}{2\alpha_0 + n - 2}$$

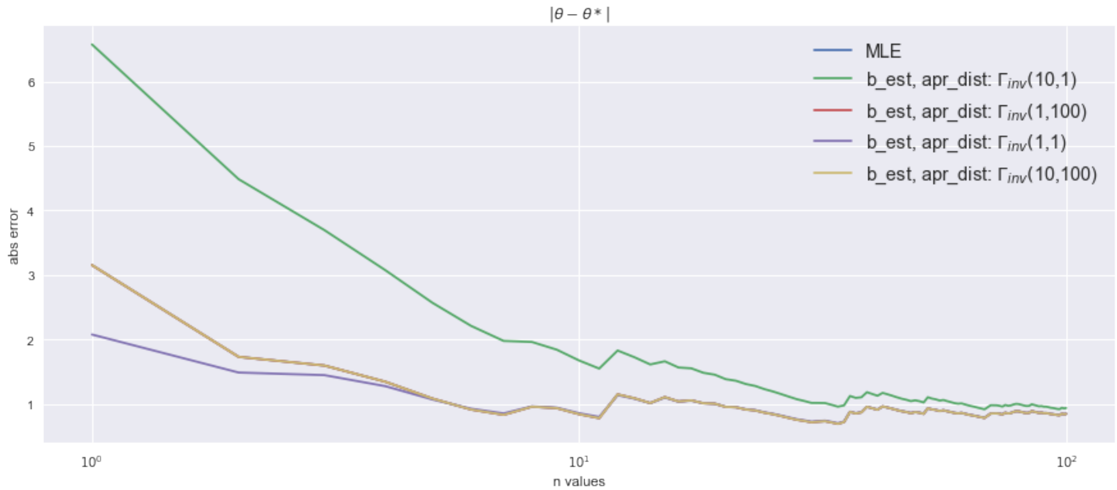
ОМП для параметра масштаба нормального распределения это:

$$\sigma^{2*} = \frac{\sum(X_i - \mu)^2}{n} = \frac{\sum X_i^2}{n}$$

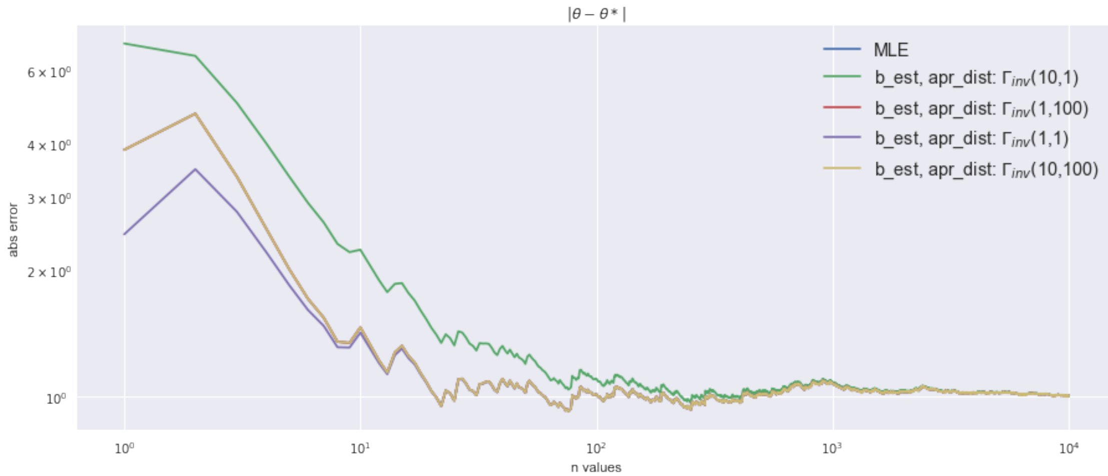
т.к $\mu = 0$ в нашей задаче

```
In [139]: def get_bayes_est2(n, alpha, beta, mle_val):
              """
              Подразумевается, что отсчет начинается с 1;

              """
          #     sum_x = np.sum([x**2 for x in X[:n]])
              return (2*beta+mle_val*n)/(2*alpha+n-2)
```

```
In [177]: N = 100 # размер выборки
          X = norm.rvs(loc=0, scale=1, size=N)

          mle_2 = np.array([np.mean(X[:n]**2) for n in range(1,N+1)]) # ОМП для каждого n;
          get_name_2 = lambda alpha,beta: r'$\Gamma_{inv}($'+str(alpha)+','+str(beta)+')' # прос

          # словарь массивов для каждого из параметров из param_sets_2
          # где каждый массив -- это массив абсолютных величин разностей между нулем и байесовск
          b_est_2 = {get_name_2(alpha,beta):np.array([np.abs(0-get_bayes_est(n,alpha,beta,mle_2[
                  for alpha,beta in param_sets_2}

          x_range = range(1,N+1)
          plt.plot(x_range, np.abs(mle_2-0), label='MLE')
          for name, arr in b_est_2.items():
              plt.plot(x_range, arr, label="b_est, apr_dist: "+name)

          plt.legend(fontsize='x-large')
          plt.title(r'$|\theta-\theta*|$')
          plt.xlabel("n values")
          plt.ylabel("abs error")
          plt.semilogx()
          plt.show()
```



In [178]:
```
N = 10000 # размер выборки
X = norm.rvs(loc=0, scale=1, size=N)

mle_2 = np.array([np.mean(X[:n]**2) for n in range(1,N+1)]) # ОМП для каждого n;
get_name_2 = lambda alpha,beta: r'$\Gamma_{inv}($'+str(alpha)+','+str(beta)+')' # проc

# словарь массивов для каждого из параметров из param_sets_2
# где каждый массив -- это массив абсолютных величин разностей между нулем и байесовск
b_est_2 = {get_name_2(alpha,beta):np.array([np.abs(0-get_bayes_est(n,alpha,beta,mle_2[
         for alpha,beta in param_sets_2}

x_range = range(1,N+1)
plt.plot(x_range, np.abs(mle_2-0), label='MLE')
for name, arr in b_est_2.items():
    plt.plot(x_range, arr, label="b_est, apr_dist: "+name)

plt.legend(fontsize='x-large')
plt.title(r'$|\theta-\theta*|$')
plt.xlabel("n values")
plt.ylabel("abs error")
plt.loglog()
plt.show()
```



1.2.1 Вывод:

Лучше всего на небольшой выборке работает оценка дисперсии MLE и байесовские оценки с параметрами априорного распределения: (1,100), (10,100)