Problem3

April 26, 2017

```
In [35]: import warnings
         warnings.simplefilter('ignore')

         import numpy as np
         import pandas as pd
         from matplotlib import pyplot as plt
         import seaborn as sns
         from scipy import stats

         from tqdm import tqdm

         %matplotlib inline
         from pylab import rcParams
         rcParams['figure.figsize'] = (15, 6)
         rcParams['image.cmap'] = 'viridis'
```

0.1 [1] Задача

(К теоретическим задачам 1-3) Сгенерируйте выборки $X_1, ..., X_N$ из всех распределений из задач 1-3 (N = 1000).

Для всех n <=N посчитайте значение полученных оценок (по выборке $X_1, ..., X_n$) методом моментов и методом максимального правдоподобия.

Оцените дисперсию (с помощью выборочной дисперсии) каждой оценки, сгенерировав для каждой из них K = 1000 бутстрепных выборок * а) с помощью параметрического бутстрепа (у каждого распределения и у каждой оценки своя бутстрепная выборка), * б) с помощью непараметрического бутстрепа (у каждого распределения своя бутстрепная выборка).

Проведите эксперимент для разных значений θ (рассмотрите не менее трех различных значений).

0.2 Решение

0.3 [2] Задача

На высоте 1 метр от поверхности Земли закреплено устройство, которое периодически излучает лучи на поверхность Земли (считайте, что поверхность Земли представляет из себя прямую).

Пусть l — перпендикуляр к поверхности Земли, опущенный из точки, в которой закреплено устройство. Угол к прямой l (под которым происходит излучение) устройство выбирает случайно из равномерного распределения на отрезке $(-\pi/2, \pi/2)$ (все выборы осуществляются независимо).

Можно доказать, что в этих предположениях точки пересечения с поверхностью имеют распределение Коши (плотность равна $\frac{\theta}{\pi(\theta^2+(x-x_0)^2)}$) с параметром масштаба $\theta = 1$.

Неизвестный параметр сдвига x_0 соответствует проекции (вдоль прямой l) точки расположения устройства на поверхность Земли (направление оси и начало координат на поверхности Земли выбраны заранее некоторым образом независимо от расположения устройства). В файле Cauchy.csv находятся координаты точек пересечения лучей с поверхностью Земли. Оцените параметр сдвига методом максимального правдоподобия * а) по половине выборки (первые 500 элементов выборки, т.е. выборка состоит из 1000 наблюдений); * б) по всей выборке.

Оценку произведите по сетке (т.е. возьмите набор точек с некоторым шагом и верните ту, на которой достигается максимум функции правдоподобия).

Известно, что параметр масштаба принадлежит интервалу $[-1000, 1000]$. Выберите шаг равным 0.01. Если получается долго или не хватает памяти, то уменьшите интервал поиска и поясните (в комментариях), почему берете именно такой интервал

0.4 Решение

Из условия задачи плотность распределения Коши задается формулой (в нашей задаче):

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+(x-x_0)^2)}$$

- Функция правдоподобия по выборке размера N:

$$L = \frac{1}{\pi(1+(x_1-x_0)^2)} \cdot \frac{1}{\pi(1+(x_2-x_0)^2)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\pi(1+(x_N-x_0)^2)} = \frac{1}{\pi^N \prod_{i=1}^N (1+(x_i-x_0)^2)}$$

- Логарифмируем ее и дифференцируем, получаем следующее:

- $l(x, x_0) = -N\log \pi - \log \prod_{i=1}^{N} (1+(x_i-x_0)^2)$ $\frac{\partial l}{\partial x_0} = \sum_{i=1}^N \frac{2(x-x_0)}{(1+(x-x_0)^2)} = 0$

Решить последнее уравнение совсем не просто, поэтому действуем как предложено в задании -- ищем по сетке значение, максимизирующее функцию правдоподобия. Но на деле удобнее минимизировать такую функцию (*):

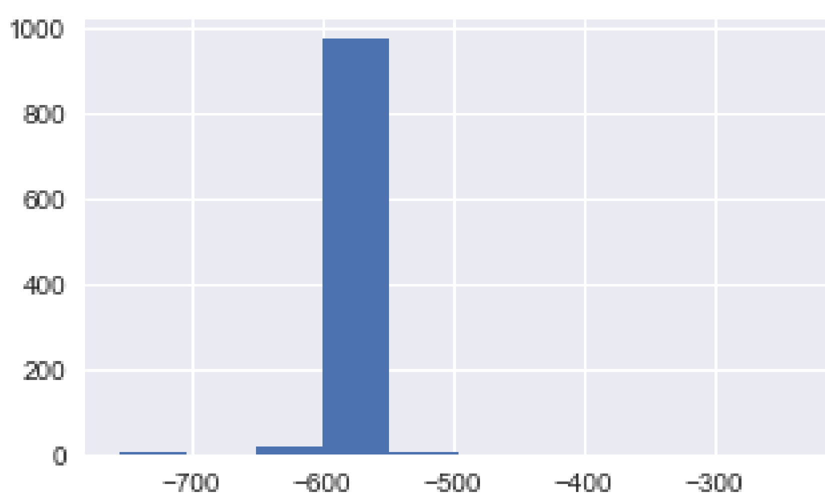
$$\prod_{i=1}^N (1+(x_i-x_0)^2)$$

```
In [46]: def max_likelihood(start, stop, step, X):
             """
             start -- начало интервала для поиска x0
             stop -- конец интервала для поиска x0
             step -- шаг по сетке
             X -- выборка
```

```
    """
    scale = 1000
    X_trsf = X/scale ## чтобы избежать переполнения

    def fun_to_min(x0):
        x0 = x0/scale ## все приводим к такому масштабу, даже x0
        return np.prod([(1+(x-x0)**2) for x in X_trsf], dtype=np.float32)

    search_range = np.arange(start, stop, step)
    print('Number of points to concider: {}'.format(len(search_range)))

    hist = []
    best_pair = {'val':np.inf, 'x0':start}

    for x0 in tqdm(search_range):
        tmp_val = fun_to_min(x0)
        hist.append(tmp_val)
        if tmp_val < best_pair['val']:
            best_pair['val'] = tmp_val
            best_pair['x0'] = x0

    return best_pair, hist
```

In [13]:
```
cauchy = pd.read_csv("../Cauchy.csv", header=None)
cauchy = np.array(cauchy[0])
print("Размер выборки:", len(cauchy))
print("Медиана:", np.median(cauchy))
plt.figure(figsize=(5,3))
plt.hist(cauchy)
plt.show()
```

```
Размер выборки: 1000
Медиана: -585.0
```

- 

Видно, что все значения отрицательные, причем большинство из них сосредоточено в интервале от -750 до -500;

Т.к. устройство из равномерного распределения на отрезке $(-\pi/2, \pi/2)$ выбирает угол, под которым излучать на поверхность Земли, то есть основания полагать, что координата устройства, а значит и x_0, расположена где-то на этом отрезке. Но если даже она расположена не на нем, то очень маловероятно, чтобы координата устройства была расположена на положительной полуоси координат.

Поэтому я буду искать в итервале от -1000 до 0.

Для N = 1000

In [47]:
```
best_pair, hist = max_likelihood(-1000, 0, 0.01, cauchy)
```

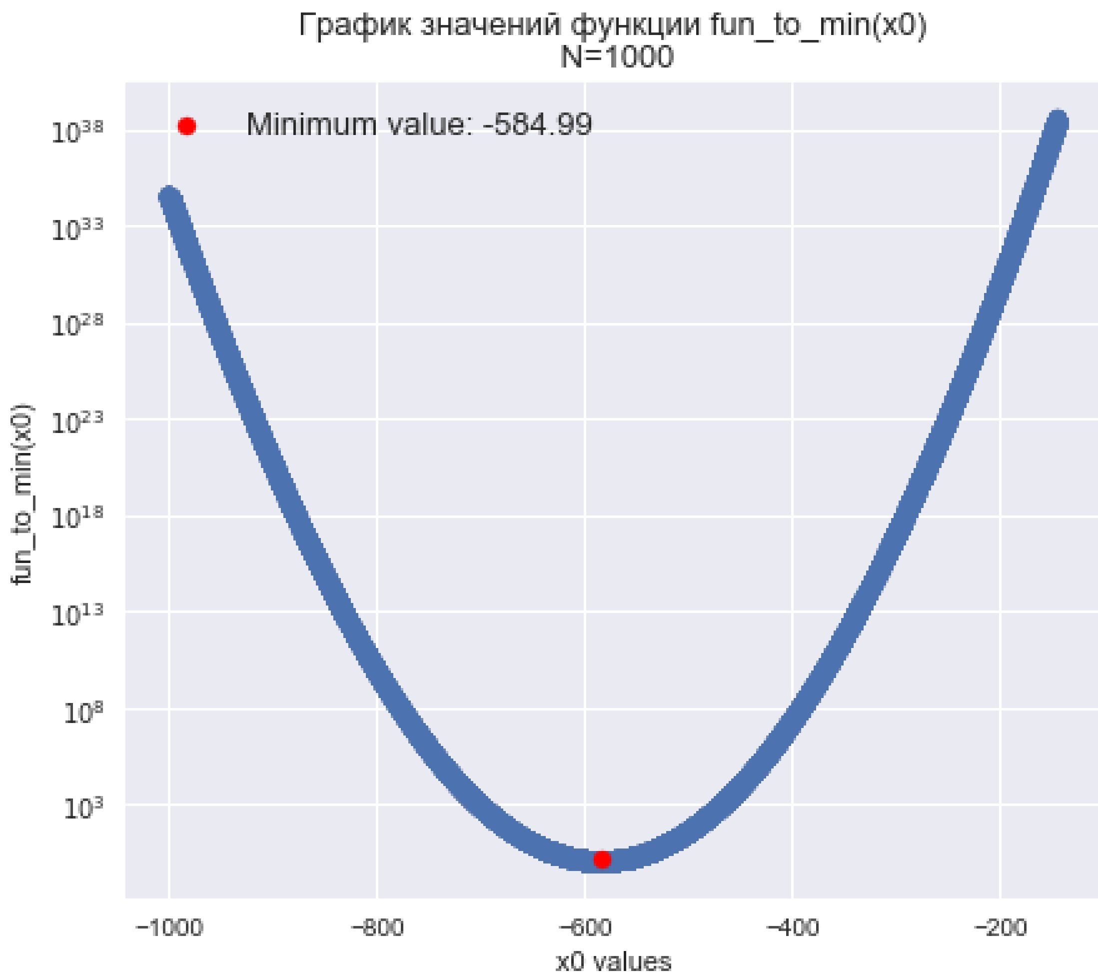
```
  0%|          | 86/100000 [00:00<01:57, 853.18it/s]

Number of points to concider: 100000


100%|[U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588]| 100000/1
```

In [91]:
```
plt.figure(figsize=(7,6))
plt.scatter(np.arange(-1000, 0, 0.01), hist)
plt.title("График значений функции fun_to_min(x0)\n N=1000", fontsize = 13)
plt.scatter(best_pair['x0'], best_pair['val'], c='r', label = 'Minimum value: {}'.forma
plt.legend(fontsize = 13)
plt.xlabel('x0 values')
plt.ylabel('fun_to_min(x0)')
plt.semilogy()
plt.show()
```

Для N = 500

```
In [82]: best_pair500, hist500 = max_likelihood(-1000, 0, 0.01, cauchy[:500])

  0%|          | 157/100000 [00:00<01:03, 1561.82it/s]

Number of points to concider: 100000


100%|[U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588]| 100000/1


In [92]: plt.figure(figsize=(7,6))
         plt.scatter(np.arange(-1000, 0, 0.01), hist500)
         plt.title("График значений функции fun_to_min(x0)\n N=1000", fontsize = 13)
         plt.scatter(best_pair['x0'], best_pair['val'], c='r', label = 'Minimum value: {}'.forma
         plt.legend(fontsize = 13)
```

```
plt.xlabel('x0 values')
plt.ylabel('fun_to_min(x0)')
plt.semilogy()
plt.show()
```



0.4.1 Вывод:

Полученные значения x0 по выборкам разных размеров согласуются между собой и со значением медианы распределения.

0.5 [2] Задача

В банке каждую минуту подсчитывается баланс по сравнению с началом дня (6 часов утра).

В полночь работники банка измеряют две величины: X_1 — максимальное значение баланса за день, X_2 — значение баланса в полночь. Считается,что величина $X = X_1 - X_2$ имеет распределение Вейбулла с функцией распределения:

$$F(x, \gamma) = 1 - e^{-x^\gamma} I(x \geq 0)$$

где [U+1D6FE] > 0 — параметр формы. В течение 10 лет каждый день банк проводил измерение величины X, получив, в результате выборку $X_1, ..., X_{3652}$.

В файле Weibull.csv находятся соответствующие измерения. Оцените параметр формы методом максимального правдоподобия * а) по первым 4 годам; * б) по всей выборке.

Оценку произведите по сетке (в логарифмической шкале). Известно, что $\log_{10} \gamma \in [-2, 2]$. Выберите шаг равным 10^{-3}

0.5.1 Решение

1) Найдем функцию плотности распределения, $x \geq 0$:

$$F'_x(x, \gamma) = f(x, \gamma) = \gamma \cdot x^{\gamma - 1} e^{-x^\gamma}$$

2) Функция правдоподобия:

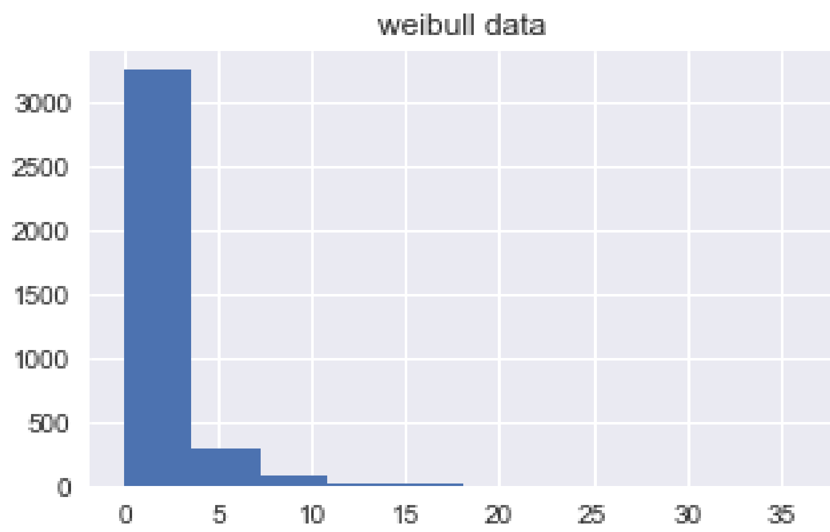
$$L(x, \gamma) = \gamma^N \prod_{i=1}^{N} e^{-x_i^\gamma} \cdot x_i^{\gamma-1} = \gamma^N e^{-\sum_{i=1}^{N} x_i^\gamma} \prod_{i=1}^{N} x_i^{\gamma-1}$$

3) Логарифм от функции правдоподобия:

$$l(x, \gamma) = N \log \gamma - \sum_{i=1}^{N} x_i^\gamma + (\gamma - 1) \cdot \sum_{i=1}^{N} \log x_i$$

Максимизируем функцию правдоподобия, исключаем из выборки 0, т.к. согласно распределению их не должно быть.

In [101]:
```
weibull = pd.read_csv("../Weibull.csv", header=None)
weibull = np.array(weibull[0])
plt.figure(figsize=(5,3))
plt.title('weibull data')
plt.hist(weibull)
plt.show()
```



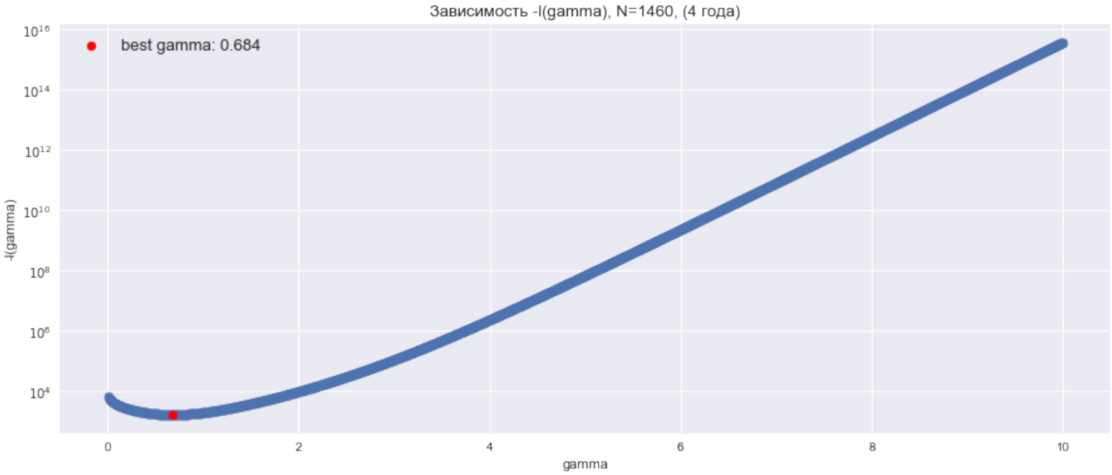

```
In [258]: def max_likelihood_weibull(X, start = -2, stop = 1, step = -3):
              """
              10**start -- начало интервала для поиска g
              10**stop -- конец интервала для поиска g
              10**step -- шаг по сетке
              X -- выборка

              """

              X = X[X>0] ## убрали нули, потому что согласно распределению их быть не должно
              N = len(X)

              def fun_to_max(g):
                  res = N*np.log(g) - np.sum(X**g)+(g-1)*np.sum(np.log(X))
                  if not np.isfinite(res):
                      print(g)
                  assert np.isfinite(res)
                  return res

              search_range = np.arange(10**start, 10**stop, 10**step)
              print('Number of points to concider: {}'.format(len(search_range)))

              hist = []
              best_pair = {'val':-np.inf, 'gamma':start}

              for g in tqdm(search_range):
                  tmp_val = fun_to_max(g)
                  hist.append(tmp_val)
                  if tmp_val > best_pair['val']:
```

```
                    best_pair['val'] = tmp_val
                    best_pair['gamma'] = g

            return best_pair, hist
```

In [232]:
```
best_pair, hist = max_likelihood_weibull(weibull[:365*4])
```

```
  6%|[U+258C]         | 568/9990 [00:00<00:01, 5675.74it/s]

Number of points to concider: 9990


100%|[U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588]| 9990/999
```

In [273]:
```
plt.scatter(np.arange(10**(-2), 10**1, 10**(-3)), -hist, alpha=0.3)
plt.scatter(best_pair['gamma'], -best_pair['val'], c='r', label = 'best gamma: {}'.for
plt.legend(fontsize = 13)
plt.title("Зависимость -l(gamma), N={}, (4 года)".format(365*4), fontsize = 13)
plt.xlabel("gamma")
plt.ylabel('-l(gamma)')
# plt.loglog()
plt.semilogy()
# plt.ylim((-10**5, 0))
plt.show()
```



In [274]:
```
best_pair, hist = max_likelihood_weibull(weibull)
```

```
  3%|[U+258E]         | 313/9990 [00:00<00:03, 3119.74it/s]

Number of points to concider: 9990
```

```
100%|[U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588][U+2588]| 9990/999
```

```
In [277]: tmp = np.array(hist)
          # plt.plot(np.arange(10**(-2), 10**1, 10**(-3)), - tmp)
          plt.scatter(np.arange(10**(-2), 10**1, 10**(-3)), - tmp, alpha=0.3)
          plt.scatter(best_pair['gamma'], -best_pair['val'], c='r', label = 'best gamma: {}'.for
          plt.legend(fontsize = 13)
          plt.title("Зависимость - l(gamma), N={}, (10 лет)".format(len(weibull)), fontsize = 13
          plt.xlabel("gamma")
          plt.ylabel('- l(gamma)')
          plt.semilogy()
          plt.show()
```