Problem2

April 26, 2017

In [1]:
```python
import warnings
warnings.simplefilter('ignore')

import numpy as np
import pandas as pd
from matplotlib import pyplot as plt
import seaborn as sns

%matplotlib inline
from pylab import rcParams
rcParams['figure.figsize'] = (15, 6)
rcParams['image.cmap'] = 'viridis'
```

1 [1] (К теоретической задаче 1)

Сгенерируйте выборку $X_1, ..., X_N$ из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ для N = 104. Для всех n <= N посчитайте оценки параметра θ из теоретической задачи:

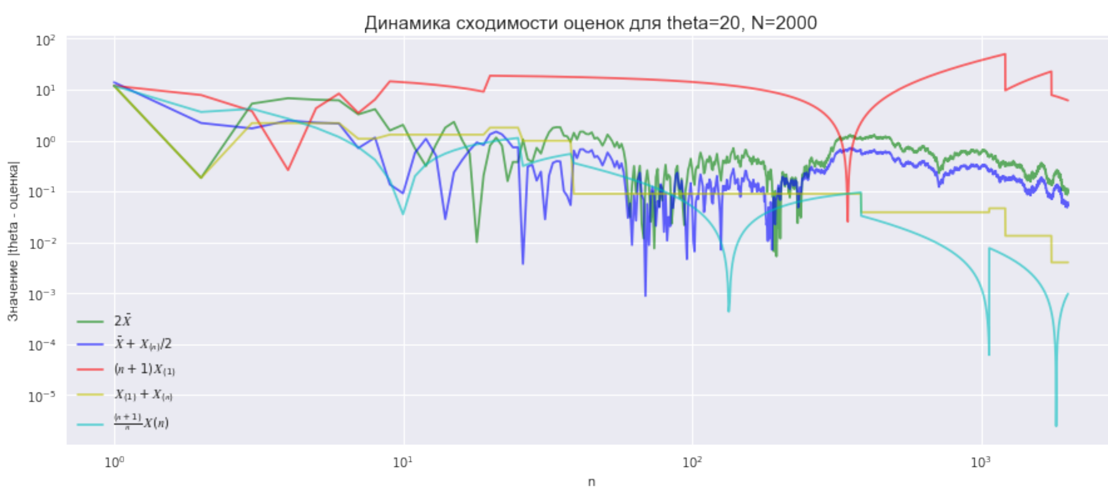
1) $2\bar{X}$
2) $\bar{X} + X_{(n)}/2$
3) $(n+1)X_{(1)}$
4) $X_{(1)} + X_{(n)}$
5) $\frac{(n+1)}{n}X(n)$

Постройте на одном графике разными цветами для всех оценок функции модуля разности оценки и истинного значения θ в зависимости от n. Если некоторые оценки (при фиксированном значении θ) сильно отличаются от истинного значения параметра θ, то исключите их и постройте еще один график со всеми кривыми (для измененного значения θ). Для избавления от больших значений разности в начале ограничьте масштаб графика. Для наглядности точки можно соединить линиями. Какая оценка получилась лучше (в смысле упомянутого модуля разности при n = N)? Проведите эксперимент для разных значений θ (количество графиков равно количеству значений θ).

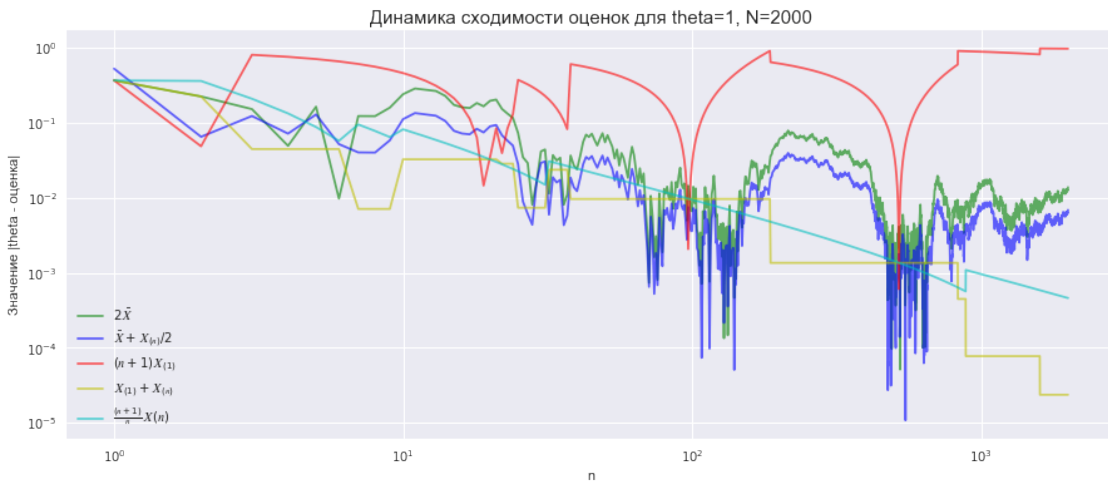
2 Решение

In [15]:
```
def plot_theta(theta, N=104):
    X = np.random.uniform(low=0, high=theta, size=N)
    x_range = list(range(1, N+1))
    g1 = [np.abs(theta - 2*np.mean(X[:n])) for n in x_range]
    g2 = [np.abs(theta - (np.mean(X[:n]) + 0.5*np.max(X[:n]))) for n in x_range]
    g3 = [np.abs(theta - (n+1)*np.min(X[:n])) for n in x_range]
    g4 = [np.abs(theta - np.min(X[:n])-np.max(X[:n])) for n in x_range]
    g5 = [np.abs(theta - np.max(X[:n])*(n+1)/n) for n in x_range]

    plt.figure(figsize=(15,6))
    plt.plot(x_range, g1, 'g-', label=r'$2\bar{X}$', alpha = 0.6)
    plt.plot(x_range, g2, 'b-', label=r'$\bar{X} + X_{(n)}/2$', alpha = 0.6)
    plt.plot(x_range, g3, 'r-', label=r'$(n + 1)X_{(1)}$', alpha = 0.6)
    plt.plot(x_range, g4, 'y-', label=r'$X_{(1)} + X_{(n)}$', alpha = 0.6)
    plt.plot(x_range, g5, 'c-', label=r'$\frac{(n+1)}{n}X(n)$', alpha = 0.6)
    plt.loglog()
    plt.xlabel("n")
    plt.ylabel('Значение |theta - оценка|')
    plt.title("Динамика сходимости оценок для theta={}, N={}".format(theta,N), {'fontsi
    plt.legend()
    plt.show()
```

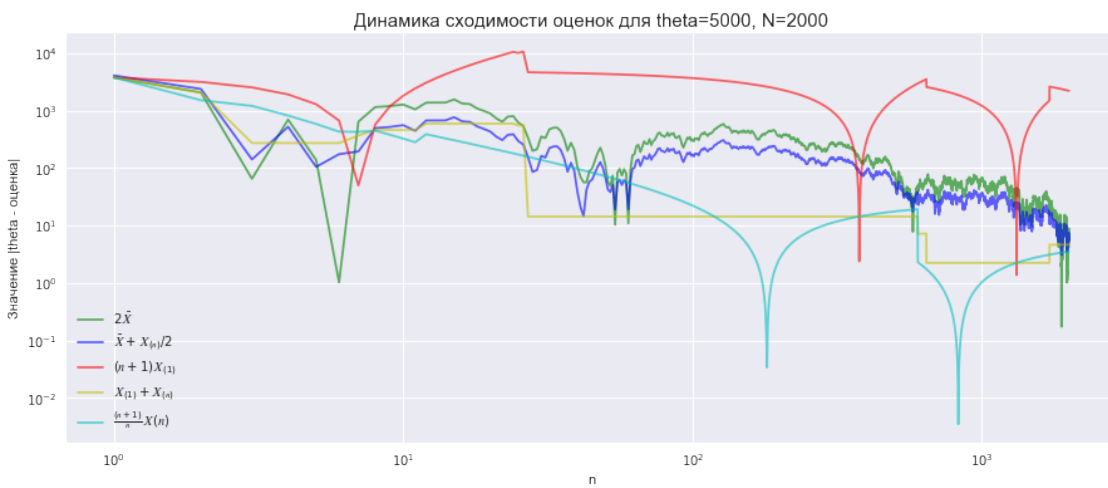
In [16]:
```
plot_theta(theta=20, N=2000)
```



In [17]:
```
plot_theta(theta=1, N=2000)
```




```
In [18]: plot_theta(theta=5000, N=2000)
```



2.0.1 Вывод:

Кажется наилучшей оценкой вышла оценка (5), судя по графикам.

Оценка (3) наихудшая; это подтверждается теоретически -- оценка не является состоятельной;

Еще одно замечание -- с ростом θ величина ошибки растет;

3 [2] (К теоретическои˘ задаче 5)

Сгенерируи˘те выборку $X_1, ..., X_N$ из экспоненциального распределения с параметром $\theta = 1$ для N $= 104$.

Для всех n <=N посчитайте оценку $(k!/\bar{X^k})^{1/k}$ параметра θ.

Проведите исследование, аналогичное предыдущей задаче, и выясните, при каком k оценка ведет себя лучше (рассмотрите не менее 10 различных значений k).

4 Решение

Функция плотности вероятности, использующаяся в реализации numpy для экспоненциального распределения:

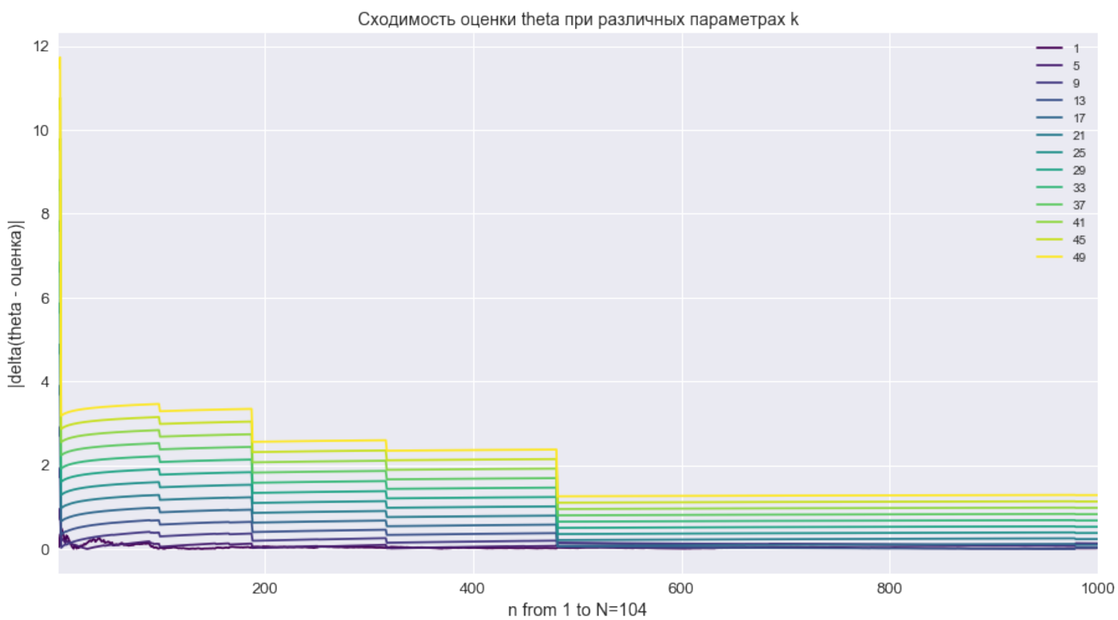
$$f(x; \frac{1}{\beta}) = \frac{1}{\beta} \exp(-\frac{x}{\beta})$$

```
In [19]: ## Беспощадно стащенная с хабра быстрая реализация факториала,
         ## чтобы мой маленький ноутбук не умер от возможных больших вычислений
         ## link: https://habrahabr.ru/post/255761/#comment_8379739

         def bin_pow_factorial(n):
             def eratosthenes(N):
                 simp = [2]
                 nonsimp = set()
                 for i in range(3, N + 1, 2):
                     if i not in nonsimp:
                         nonsimp |= {j for j in range(i * i, N + 1, 2 * i)}
                         simp.append(i)
                 return simp
             def calc_pow_in_factorial(a, b):
                 res = 0
                 while a:
                     a //= b
                     res += a
                 return res
             fact_pows = [(x, calc_pow_in_factorial(n, x)) for x in reversed(eratosthenes(n+1))]
             if len(fact_pows) % 2 == 1:
                 fact_pows.append((1, 1))
             mul = [fact_pows[i][0] ** fact_pows[i][1] * fact_pows[-i-1][0] ** fact_pows[-i-1][1
             while len(mul) > 1:
                 if len(mul) % 2 == 1:
                     mul.append(1)
                 mul = [mul[i] * mul[-i-1] for i in range(len(mul)//2)]
             return mul[0]
```

```
In [20]: N=1000
         def exp_plot(k_list, theta=1):

             X = np.random.exponential(scale=1, size=N)

             def estim_theta(k, data):
                 data=np.array(data)
```

```
        k_fact = bin_pow_factorial(k)
        return np.abs((k_fact/np.mean(data**k))**(1.0/k) - theta)

    dict_res = {}
    x_range = list(range(1,N+1))
    for k in k_list:
        estim = [estim_theta(k, X[:n]) for n in x_range]
        dict_res[k] = estim

    res_df = pd.DataFrame(dict_res, index=x_range)

    res_df.plot(figsize=(15,8), fontsize=13, colormap='viridis')
    plt.xlabel("n from 1 to N=104", fontsize=14)
    plt.ylabel("|delta(theta - оценка)|", fontsize=14)
    plt.title('Сходимость оценки theta при различных параметрах k', fontsize=14)
    plt.show()
    return res_df
```

```
In [21]: df = exp_plot(range(1,50,4))
```



4.0.1 Вывод:

По градиенту на графике видно, что наиболее хорошие оценки дают наименьшие параметры k.

5 [3] (К теоретической задаче 5)

Придумайте распределение, у которого конечны первые четыре момента, а пятый — нет.

Сгенерируйте выборку $X_1, ..., X_N$ из этого распределения для $N = 104$.

Постройте график плотности, а также нанесите точки выборки на график (с нулевой y-координатой). Для всех $n <= N$ посчитайте оценку $s_2 = s_2(X_1, ..., X_n)$ для дисперсии.

Постройте график зависимости модуля разности оценки дисперсии и ее истинного значения от n.

Проведите аналогичное исследование для выборки из распределения Коши, где вместо графика модуля разности оценки дисперсии и ее истинного значения (которого не существует) постройте график оценки дисперсии.

6 Решение

Если 5-ый момент не конечен, это значит, что интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x^5 dx$$

расходится, где $f(x)$ -- плотность вероятности искомого распределения.

Под такие условия идеально подходит $f(x) = \frac{1}{x^6}$, т.к. интегралы для всех моментов кроме 5-ого будут сходится, а для 5-ого интеграл не сойдется, т.к. ряд $\frac{1}{x}$ расходится.

Для данной задачи идеально подходит распределение Парето, которое в общем виде выглядит так:

$$p(x) = \frac{am^a}{x^{a+1}}$$

- a = 5
- m = 1, тогда для всех x>=m:

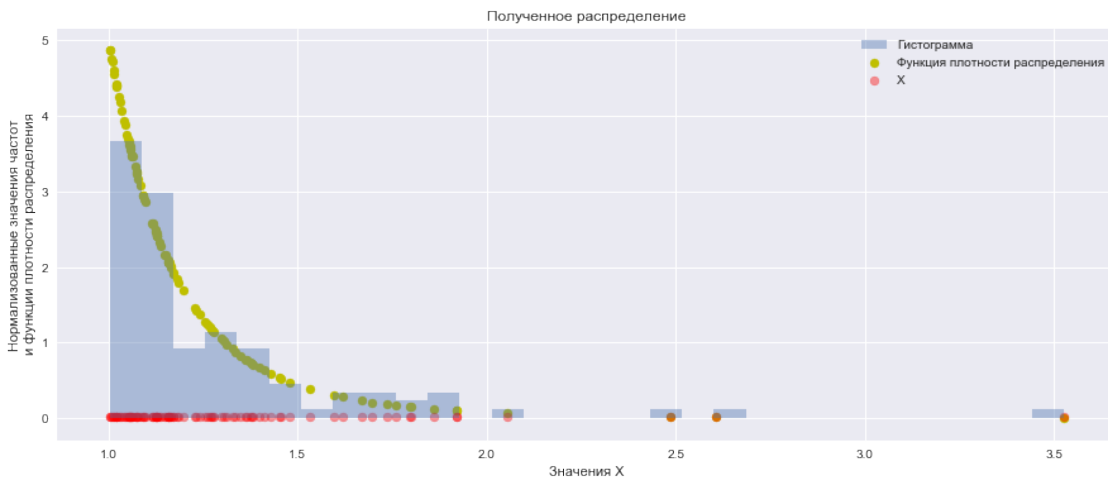
$$p(x) = \frac{5}{x^6}$$

  а для остальных x: $p(x) = 0$

In [21]:
```
from scipy import stats
N = 104

class my_dist(stats.rv_continuous):
    def _pdf(self, x):
        if x>=1:
            return 5.0/(x**6)
        else:
            return 0

distribution = my_dist()
```

In [22]:
```
### Нарисуем функцию распределения, гистограмму с точечками ###

N = 104
X = [distribution.rvs() for i in range(N)]
plt.hist(X, label='Гистограмма', alpha=0.4, bins=30, normed=True)
x_tmp = list(set(X))
plt.scatter(x_tmp, [5.0/(x**6) for x in x_tmp], label='Функция плотности распределения'
```

```
plt.scatter(X, [0.01]*len(X), label='X', c='r', alpha=0.4)
plt.legend()
plt.title("Полученное распределение")
plt.xlabel("Значения X")
plt.ylabel("Нормализованные значения частот\n и функции плотности распределения")
plt.show()
```



Истинное значение дисперсии для такого распределения задается формулой: $D = (\frac{m}{a-1})^2 \frac{a}{a-2}$, откуда $D = \frac{5}{16*3}$

В качестве оценки используем S_2 :

$$S_2(X_1, ..., X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

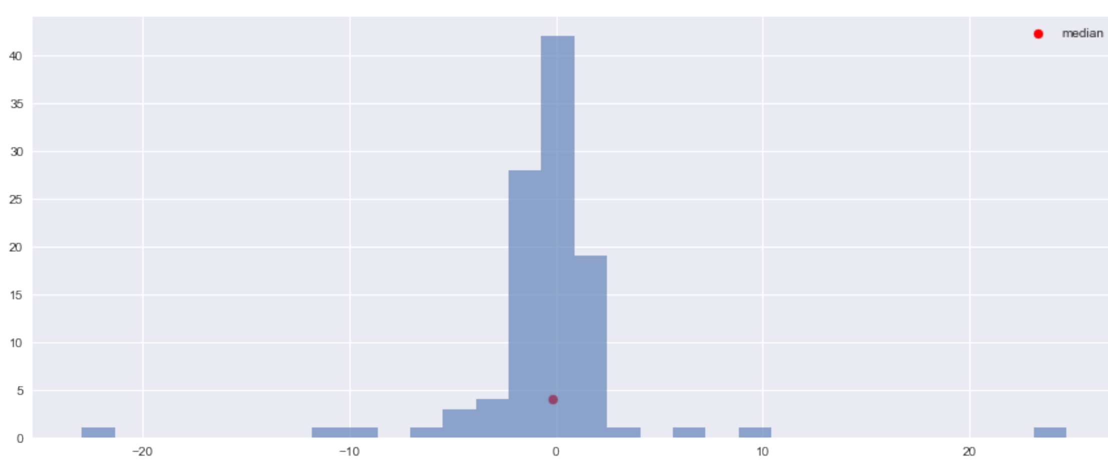
In [23]:
```
## можно было бы использовать и встроенную функцию np.var,
## но я написала свою для наглядности
def variance(data):
    data = np.array(data)
    return np.mean((data-np.mean(data))**2)

true_variance = 5.0/(16*3)
deltas = [np.abs(variance(X[:n])-true_variance) for n in range(1, N+1)]
plt.plot(range(1, N+1), deltas)
plt.xlabel("n from 1 to N")
plt.ylabel("Модуль разности оценки и истинной дисперсии")
plt.title("Зависимости модуля разности от размера выборки", fontsize=15)
plt.show()
```

6.0.1 Проведем аналогичное исследование для выборки из стандартного распределения Коши:

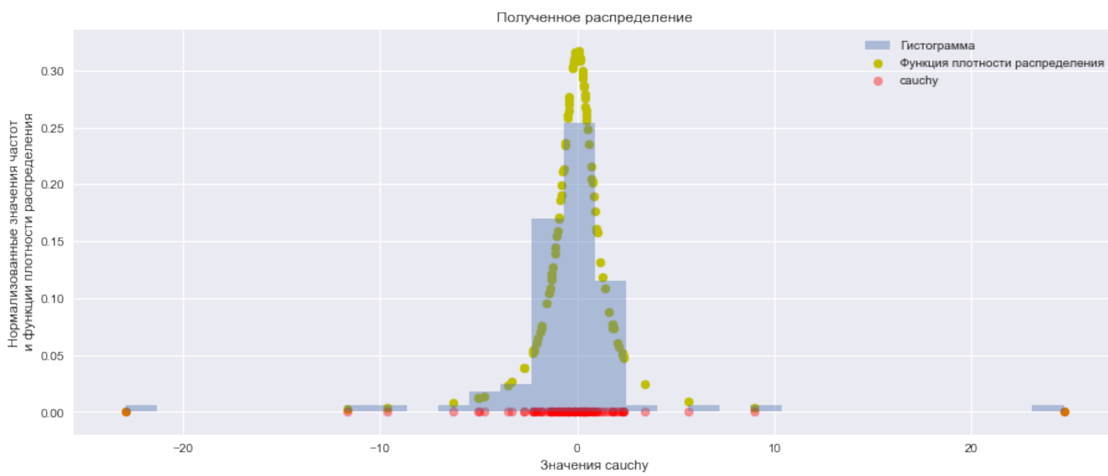
$$P(x) = \frac{1}{\pi\left[1 + x^2\right]}$$

In [17]:
```
cauchy = np.random.standard_cauchy(size=104)
# cauchy = [stats.cauchy.rvs() for i in range(104)]
print("Размер выборки:", len(cauchy))
print("Медиана:", np.median(cauchy))
plt.hist(cauchy, bins=30, alpha=0.6)
plt.scatter(x=np.median(cauchy), y=4, c='r', label='median')
plt.legend()
plt.show()
```

```
Размер выборки: 104
Медиана: -0.175784094222
```



```
In [18]: plt.hist(cauchy, label='Гистограмма', alpha=0.4, bins=30, normed=True)
         x_tmp = list(set(cauchy))
         prob = [stats.cauchy.pdf(x) for x in x_tmp]
         plt.scatter(x_tmp, prob, label='Функция плотности распределения', c='y')
         plt.scatter(cauchy, [0]*len(cauchy), label='cauchy', c='r', alpha=0.4)
         plt.legend()
         plt.title("Полученное распределение")
         plt.xlabel("Значения cauchy")
         plt.ylabel("Нормализованные значения частот\n и функции плотности распределения")
         plt.show()
```



И наконец график оценки дисперсии для распределения Коши:

```
In [24]: N1 = len(cauchy)
         deltas = [variance(X[:n]) for n in range(1, N1+1)]
         plt.plot(range(1, N1+1), deltas)
         plt.xlabel("n from 1 to 1000")
         plt.ylabel("Значение оценки s2 дисперсии")
         plt.title("Зависимость оценки значения дисперсии от размера выборки\n для выборки из ра
         plt.show()
```

7 [4] (...)

Сгенерируйте выборку $X_1, ..., X_N$ из стандартного нормального распределения для $N = 104$.

Для всех n<=N посчитайте по ней эмпирическую функцию распределения.

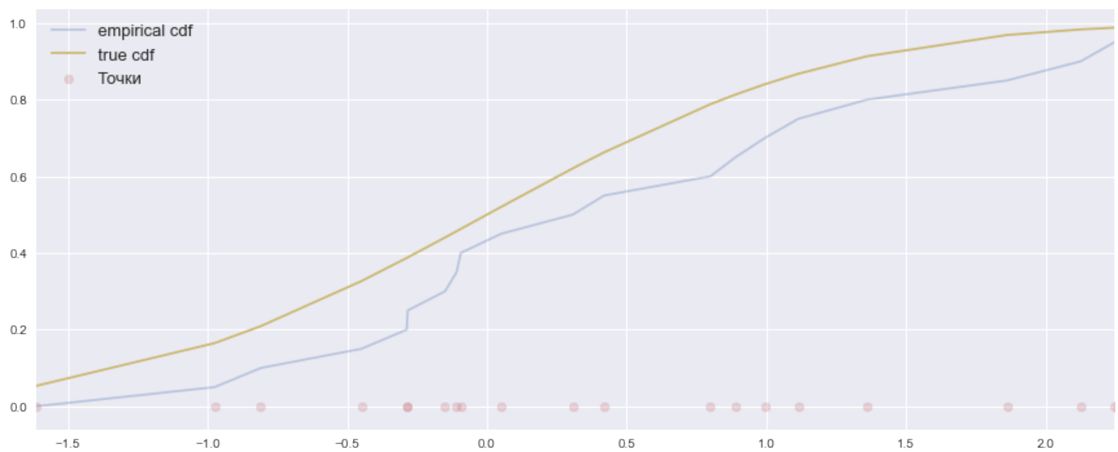
Для некоторых n (например, $n \in \{10, 25, 50, 100, 1000, N\}$) постройте графики эмпирической функции распределения

(отметьте на оси абсцисс точки "скачков" кривых, нанеся каждую из "подвыборок" на ось абсцисс на каждом соответствующем графике с коэффициентом прозрачности 0.2), нанеся на каждый из них истинную функцию распределения (количество графиков равно количеству различных значений n)

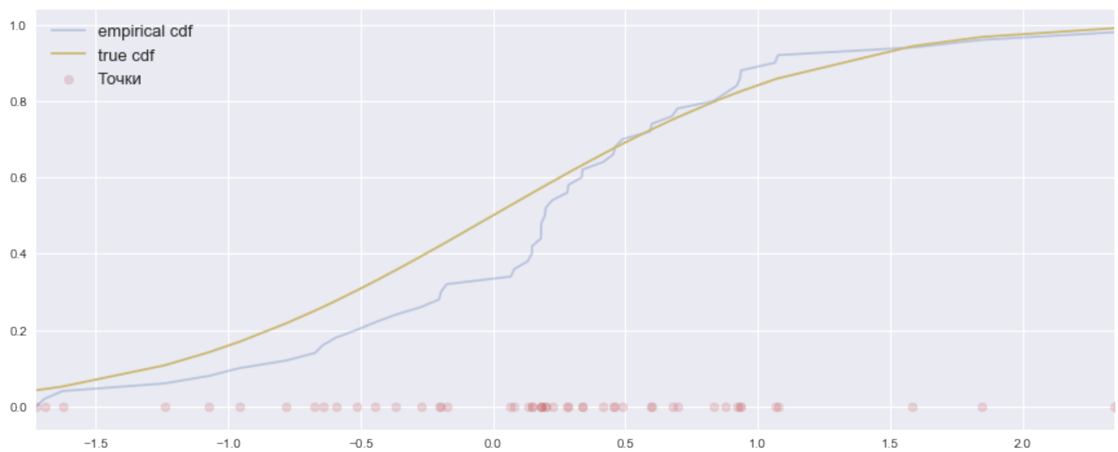
```
In [291]: def empirical_dist_func(data):
              N = len(data)
              ## making variation series
              srt = np.argsort(data) # сортируем от min к max
              srt_dict = {data[i]:j for j,i in enumerate(srt)}
              res = []
              for i in data:
                  k = srt_dict[i] # место данного значения в вариационном ряду
                  if k>0:
                      t = srt[k-1] # индекс ближайшего меньшего или равного соседа в data
                      while data[t]==i: # двигаемся назад по вариационному ряду пока не встретим
                          k-=1
                          t = srt[k-1]
                  res.append(k/N)
              return res

In [342]: def plot_emp_dist(n):
              X = np.random.normal(size=n)
              tmp = empirical_dist_func(X)
```

```
        plt.scatter(X, [0]*len(tmp), c='r', alpha=0.2, label='Точки')
        sns.tsplot(tmp, X, alpha=0.3, condition='empirical cdf')
        sns.tsplot([stats.norm.cdf(x) for x in X], X, color='y', condition='true cdf')
        plt.legend(fontsize = 13)
        plt.show()
```

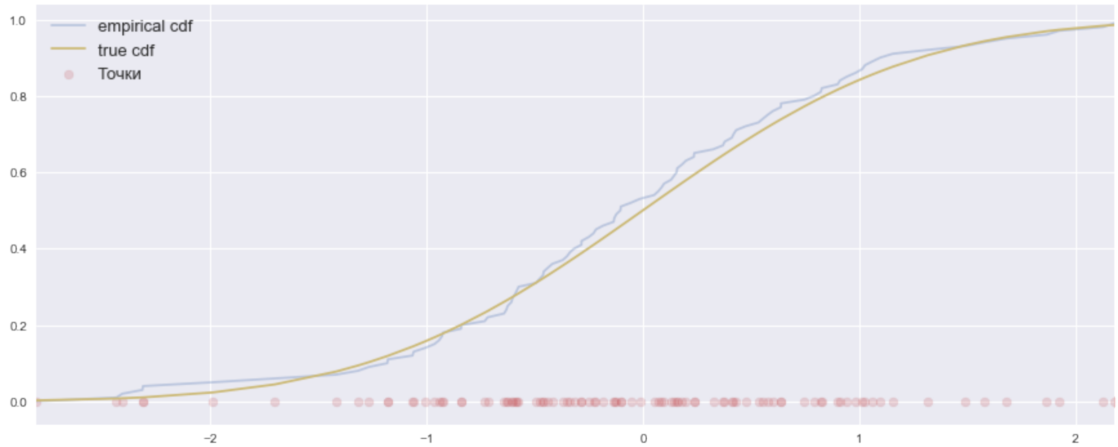
In [343]: `plot_emp_dist(20)`



In [344]: `plot_emp_dist(50)`



In [345]: `plot_emp_dist(100)`




```
In [346]: plot_emp_dist(1000)
```