Problem5.1

April 24, 2017

1 5. Условные математические ожидания и условные распределения

```
In [5]: import warnings
        warnings.simplefilter('ignore')

        import numpy as np
        import pandas as pd
        from matplotlib import pyplot as plt
        import seaborn as sns

        %matplotlib inline
        from pylab import rcParams
        rcParams['figure.figsize'] = (15, 6)
        rcParams['image.cmap'] = 'viridis'
```

```
In [100]: from scipy.stats import multivariate_normal
          from scipy.stats import norm
```

```
In [43]: mean = [1,4]
         cov = [[10,8],[8,10]]
         Xi = multivariate_normal(mean, cov)
```

1.0.1 График плотности случайного вектора Xi

```
In [ ]: N = 1000
        df = pd.DataFrame(Xi.rvs(N), columns=["x", "y"])
        x1, y1 = np.mgrid[min(df.x):max(df.x):0.1, min(df.y):max(df.y):0.1]
        pos = np.empty(x1.shape + (2,))
        pos[:, :, 0] = x1
```

1. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2) \sim N(a, \Sigma)$, где $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ и $\Sigma = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$. Постройте график плотности этого случайного вектора. Для $y \in \{-3, 0, 1, 5\}$ постройте графики $f_{\xi_1|\xi_2}(x|y)$. Построить график $\mathsf{E}(\xi_1|\xi_2 = y)$ в зависимости от y и проведите на этом графике прямую $x = \mathsf{E}\xi_1$.

Задание

```
    pos[:, :, 1] = y1
    density = Xi.pdf(pos)
    plt.contourf(x1, y1, density)
    plt.scatter(df.x, df.y, c='w', alpha=0.1, s=18)
    plt.xlabel(r"$\xi_1$")
    plt.ylabel(r"$\xi_2$")
    plt.title(r'Линии уровня для плотности случайного вектора $(\xi_1, \xi_2)$')
    plt.show()
```

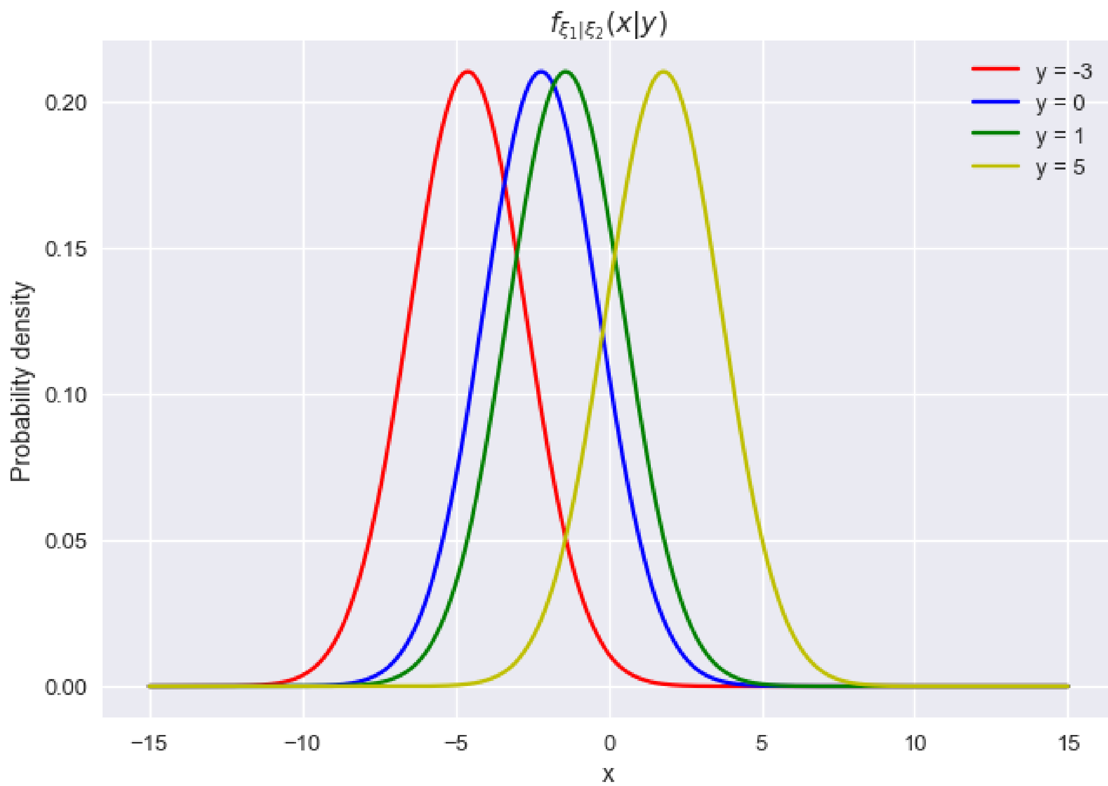
** Построим графики условной плотности $f_{\xi_1|\xi_2}(x|y)$ для всех значений из y **

```
In [106]: def ConditionalPDF(x,y):
              """
              Здесь * y -- значение случайной величины ξ1
                    * x -- значение случайной величины ξ2
              Функция возвращает значение условной вероятности f_{ξ1|ξ2}(x|y)

              """
              # вероятность ξ2 быть равной y:
              xi2_pdf = norm.pdf(y, loc = mean[1], scale = np.sqrt(cov[1][1]))
              # согласно формуле Байеса:
              return Xi.pdf([x,y])/xi2_pdf

          colors = ['r', 'b', 'g', 'y']
          x_ranges = np.linspace(-15, 15, 500)
          y = [-3, 0, 1, 5]

          for y_val, col in zip(y,colors):
              tmp = list(map(lambda x: ConditionalPDF(x, y_val), x_ranges))
              plt.plot(x_ranges, tmp, col, label = 'y = {}'.format(y_val))
          plt.title(r"$f_{\xi_1|\xi_2}(x|y)$")
          plt.xlabel("x")
          plt.ylabel("Probability density")
          plt.legend()
          plt.show()
```



** Построим график $E(\xi_1|\xi_2 = y)$ для всех y **

In [128]:
```
from scipy.integrate import quad

def ConditionalExpectation(y, limit):
    f = lambda x: x*ConditionalPDF(x, y) # функция под интегралом;
    result = quad(f, -limit, limit)[0] # итегрируем с определенной точностью;
    return result

limit = 500
expect_points = []
# для каждого y вычисляем условное матожидание;
for y_val, col in zip(y,colors):
    expect_points.append(ConditionalExpectation(y_val, limit))

# изображаем все на графике:
plt.scatter(y, expect_points, label=r'$E(\xi_1|\xi_2 = y)$')
plt.plot(y, expect_points)
plt.xlabel("Y")
plt.ylabel("Expectation")
plt.hlines(mean[0], -4, 5, colors='r', label=r'$E(\xi_1)$')
plt.title("Conditional Expectation")
```

```python
plt.legend(loc='center left')
plt.show()
```