5^o φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2022

1 Ασκήσεις πάνω στη βελτιστοποίηση μονομεταβλητής συνάρτησης σε διάστημα και στην εισαγωγή σε πολυμεταβλητές συναρτήσεις

1.1 1^η Άσκηση

Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα και το ολικό μέγιστο της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

Εξετάζουμε πρώτα για τυχόν τοπικά μέγιστα σε εσωτερικό σημείο του διαστήματος:

$$f^{'}(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 1.$$

Άρα έχουμε δύο στάσιμα σημεία, τα οποία θα κατηγοριοποιήσουμε εξετάζοντας την τιμή της 2ης παραγώγου σε κάθε ένα από αυτά.

$$f''(x) = 12x - 6$$

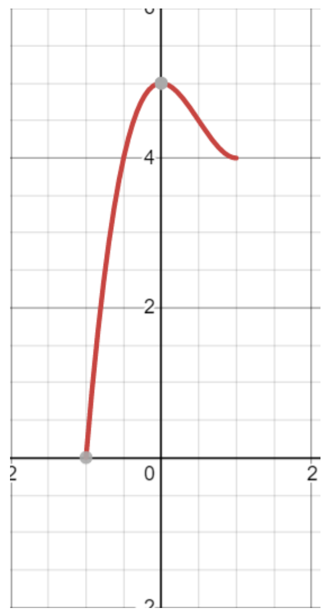
άρα $f''(0) = -6 < 0$ και $f''(1) = 6 > 0$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = 0$. Στη συνέχεια ελέγχουμε για τυχόν τ. μέγιστο στις ακραίες τιμές που μπορεί να λάβει το x.

Στην ελάχιστη επιτρεπτή τιμή $x = -1$ έχουμε $f'(-1) = 12 > 0$ άρα η f είναι αύξουσα, οπότε δεν υπάρχει τοπικό μέγιστο εκεί.

Στη μέγιστη επιτρεπτή τιμή $x = 1$ έχουμε ήδη δεί ότι $f'(1) = 0$, $f''(1) > 0$, άρα πρόκειται για τ. ελάχιστο.

Επειδή βρέθηκε μόνο ένα τοπικό μέγιστο, στο $x = 0$, θα αποτελεί και το ολικό μέγιστο της f στο εν λόγω διάστημα. Σε περίπτωση που είχαμε εντοπίσει περισσότερα από 1 τ. μέγιστα, θα έπρεπε να συγκρίνουμε τις τιμές της f σε κάθε ένα από αυτά.

Το διάγραμμα της συνάρτησης φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ στο $x \in [-1, 1]$

1.2 2^η Άσκηση

Να βρεθεί σε ποιο σημείο ελαχιστοποιείται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 1$$

στο διάστημα $[-1, 1]$.

Εχουμε:

$$f^{'}(x) = 6x^2 - 4x = 2x(3x - 2).$$

Τα στάσιμα σημεία ($f'(x) = 0$) είναι τα $x = 0$, $x = 2/3$. Εξετάζουμε το πρόσημο της 2ης παραγώγου σε αυτά. Είναι

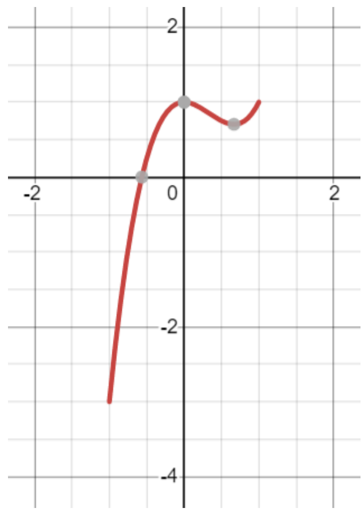
$$f''(x) = 12x - 4$$

άρα $f''(0) < 0$ και $f''(2/3) > 0$. Συνεπώς έχουμε τ.μέγιστο στο $x = 0$ και τ. ελάχιστο στο $x = 2/3$.

Τέλος, εξετάζουμε τη μονοτονία της συνάρτησης στα ακρία σημεία του διαστήματος $[-1, 1]$: Είναι $f'(-1) > 0$ άρα υπάρχει τ. ελάχιστο στο $x = -1$. Επίσης, $f'(1) > 0$ άρα υπάρχει τ. μέγιστο στο $x = 1$.

Συνοψίζοντας, έχουμε βρει τοπικά ελάχιστα στο $x = 2/3$ και $x = -1$, και

$$f(2/3) = \frac{16}{27} - \frac{8}{9} + 1 = \frac{16}{27} - \frac{24}{27} + 1 = \frac{-8}{27} + 1 = \frac{19}{27}$$



Σχήμα 2: Διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 1$ στο $x \in [-1, 1]$

ενώ

$$f(-1) = -3.$$

Συνεπώς το ολικό ελάχιστο βρίσκεται στο σημείο $x = -1$.

Το διάγραμμα της συνάρτησης φαίνεται στο Σχήμα 2.

1.3 3^η Άσκηση

Να υπολογιστεί το διάνυσμα κλίσης για την $f(x) = x_1^4 x_2^6$.

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους της f έχουμε:

$$\partial f/\partial x = \nabla f = \left[\begin{array}{c} 4x_1^3 x_2^6 \\ 6x_1^4 x_2^5 \end{array} \right]$$

1.4 4^η Άσκηση

Να υπολογιστεί η $\partial f/\partial x$ για την $f(x) = 2x_1x_2 + 4x_1 + 6x_2$.

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους της f έχουμε:

$$\partial f/\partial x = \left[\begin{array}{c} 2x_2 + 4 \\ 2x_1 + 6 \end{array} \right]$$

1.5 5^η Άσκηση

Να βρεθεί η Εσσιανή μήτρα για την $f(x) = x_1^4 x_2^6$.

Η Εσσιανή μήτρα ($H = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$) αποτελείται από τις 2ες παραγώγους της f κατάλληλα τοποθετημένες σε $2x2$ πίνακα (εφ΄όσον η f εχει 2 μεταβλητές). Υπολογίζουμε:

$f_1(x) = 4x_1^3 x_2^6$.
$f_2(x) = 6x_1^4 x_2^5$.
$f_{11}(x) = 12x_1^2 x_2^6$.
$f_{12}(x) = 24x_1^3 x_2^5 = f_{21}(x)$.
$f_{22}(x) = 30x_1^4 x_2^4$.

Άρα $H = \begin{bmatrix} 12x_1^2x_2^6 & 24x_1^3x_2^5 \\ 24x_1^3x_2^5 & 30x_1^4x_2^4 \end{bmatrix}$

1.6 6^η Άσκηση

Να βρεθεί η Εσσιανή μήτρα για την $f(x) = 2x_1x_2 + 4x_1 + 6x_2$.

Οπως και στην προηγούμενη άσκηση, έχουμε: $f_1(x) = 2x_2 + 4$.
$f_2(x) = 2x_1 + 6$.
$f_{11}(x) = 0$.
$f_{12}(x) = 2 = f_{21}(x)$.
$f_{22}(x) = 0$.

Άρα $H = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

1.7 7^η Άσκηση

Να βρεθεί η Εσσιανή μήτρα για την $f(x) = 4x_1^2x_2^2 + 5x_1 + x_2$.

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους: $f_1(x) = 8x_1x_2^2 + 5$.
$f_2(x) = 8x_1^2x_2 + 1$.
$f_{11}(x) = 8x_2^2$.
$f_{12}(x) = 16x_1x_2 = f_{21}(x)$.
$f_{22}(x) = 8x_1^2$.

Άρα $H = \begin{bmatrix} 8x_2^2 & 16x_1x_2 \\ 16x_1x_2 & 8x_1^2 \end{bmatrix}$

1.8 8^η Άσκηση

Να βρεθεί η δεύτερης τάξης προσέγγιση με σειρά Taylor για τη συνάρτηση $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)}$ στο σημείο $(0, 1)$.

$$P_2(x_1, x_2) = f(0,1) + (\nabla f|_{(0,1)})^T [x_1 - 0, x_2 - 1]^T + \frac{1}{2}[x_1 - 0, x_2 - 1] \nabla^2 f|_{(0,1)} [x_1 - 0, x_2 - 1]^T$$

Υπολογίζουμε τις απαιτούμενες μερικές παραγώγους για να σχηματίσουμε τις ποσότητες ∇f και $\nabla^2 f$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} = -e^{-(x_1+x_2)} && (1)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1,x_2) = e^{-(x_1+x_2)} && (2)\\
\frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} = e^{-(x_1+x_2)} && (3)
\end{aligned}
$$

Συνεπώς:

$P_2(0,1) = e^{-1} + [-e^{-1}, -e^{-1}][x_1, x_2-1]^T + \frac{1}{2}[x_1, x_2-1] \begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-1} \\ e^{-1} & e^{-1} \end{bmatrix} [x_1, x_2-1]^T =$
$e^{-1} - e^{-1}(x_1+x_2-1) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 e^{-1} + (x_2-1)e^{-1}, & x_1 e^{-1} + (x_2-1)e^{-1} \end{bmatrix} [x_1, x_2-1]^T =$
$e^{-1} - e^{-1}(x_1+x_2-1) + e^{-1}x_1^2 + e^{-1}x_1(x_2-1) + e^{-1}(x_2-1)^2.$
$= e^{-1}(1 - x_1 - x_2 + 1 + x_1^2 + x_1 x_2 - x_1 + (x_2-1)^2$
$= e^{-1}(2 - 2x_1 - x_2 + x_1^2 + x_1 x_2 + (x_2-1)^2).$

1.9 9^{η} Άσκηση

Να βρεθούν τα στάσιμα σημεία της $f(x) = 2x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$.

Τα στάσιμα σημεία είναι αυτά στα οποία όλες οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης μηδενίζονται ταυτόχρονα. Συνεπώς θα πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:
$f_1(x) = 0 \iff 4x_1 - x_2 = 0 \iff x_2 = 4x_1$, και επίσης
$f_2(x) = 0 \iff -x_1 + 2x_2 = 0$.

Λύνοντας τις παραπάνω 2 εξισώσεις (αντικαθιστούμε για το x_2) έχουμε:
$7x_1 = 0 \iff x_1 = 0$.

Αντικαθιστούμε στην έκφραση για το x_2 και συμπεραίνουμε ότι το μοναδικό στάσιμο σημείο της συνάρτησης είναι το $[0,0]^T$.

1.10 10^{η} Άσκηση

Να βρεθούν τα στάσιμα σημεία της $f(x) = 4x_1^3 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2$.

Ομοια με την προηγούμενη άσκηση, μηδενιζουμε τις μερικές παραγώγους της f και λύνουμε το σύστημα εξισώσεων που θα προκύψει. Αρχικά, υπολογίζουμε:
$f_1(x) = 12x_1^2 - 2x_2$.
$f_2(x) = -2x_1 + 4x_2$.

Άρα θα πρέπει:
$f_2(x) = 0 \iff -x_1 + 2x_2 = 0 \iff x_2 = x_1/2$.
$f_1(x) = 0 \iff 12x_1^2 - x_1 = 0$ (χρησιμοποιώντας τη σχέση $x_2 = x_1/2$).

Λύνοντας την $x_1(12x_1 - 1) = 0$, έχουμε ότι $x_1 = 0$ ή $x_1 = \frac{1}{12}$. Για αυτές τις τιμές του x_1 θα έχουμε αντίστοιχα ($x_2 = x_1/2$) ότι $x_2 = 0$ και $x_2 = \frac{1}{24}$.

Άρα, τα στάσιμα σημεία είναι το $[0,0]^T$ και το $[\frac{1}{12}, \frac{1}{24}]^T$.