9^o φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

1 Ασκήσεις σε εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης

1.1 1^η Άσκηση

Να βρεθεί το σημείο ισορροπίας της $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 4y_t = 5$.
$\bar{y} = -5$.

1.2 2^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t = 0$.
$\Delta = 25 - 4 = 21$.
$\rho_1 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$
$\rho_2 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$
$y(t) = C_1(\frac{5-\sqrt{21}}{2})^t + C_2(\frac{5+\sqrt{21}}{2})^t$

1.3 3^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 7y_{t+1} + 5y_t = 0$.
$\Delta = 29$
$y(t) = C_1(\frac{7-\sqrt{29}}{2})^t + C_2(\frac{7+\sqrt{29}}{2})^t$

1.4 4^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t = 5$.
$\bar{y} - 5\bar{y} + \bar{y} = 5 \iff \bar{y} = -\frac{5}{3}$.
$y(t) = C_1(\frac{5-\sqrt{21}}{2})^t + C_2(\frac{5+\sqrt{21}}{2})^t - \frac{5}{3}$

1.5 5^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 7y_{t+1} + 5y_t = 10$
$\bar{y} = -10$
$y(t) = C_1(\frac{7-\sqrt{29}}{2})^t + C_2(\frac{7+\sqrt{29}}{2})^t - 10$

1.6 6^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 3y_t = 5$
$\bar{y} = \frac{5}{2}$.
$\Delta = 4 - 12 = -8$
$\rho_1 = \frac{2-2\sqrt{2}i}{2} = 1 - \sqrt{2}i$
$\rho_2 = \frac{2+2\sqrt{2}i}{2} = 1 + \sqrt{2}i$
$R = \sqrt{3}$, $h = 1$, $v = \sqrt{2}$
$cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $sin(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}}$
$y(t) = (\sqrt{3})^t (C_1 cos(0.955t) + C_2 sin(0.955t)) + \frac{5}{2}$.

1.7 7^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t = 4t$.
Βρίσκουμε την μερική λύση και ακόμη τη λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.
Θέτουμε $y_t^* = A_0 + A_1 t$
Τότε: $A_0 + A_1(t+2) - 5(A_0 + A_1(t+1)) + A_0 + A_1 t = 4t$.
Συνεπώς: $-3A_0 - 3A_1 = 0 \iff A_0 = -A_1$.
Έχουμε $(A_1 - 5A_1 + A_1)t = 4t \iff -3A_1 t = 4t \iff A_1 = -\frac{4}{3}$
Συνεπώς $A_0 = \frac{4}{3}$
$y(t) = C_1 (\frac{5-\sqrt{21}}{2})^t + C_2 (\frac{5+\sqrt{21}}{2})^t - \frac{4t}{3} + \frac{4}{3}$.

1.8 8^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 5$.
Βρίσκουμε πρώτα τις λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης:
$\Delta = 16 - 12 = 4$
$\rho_1 = \frac{4+2}{2} = 3$
$\rho_2 = \frac{4-2}{2} = 1$.

Συνεπώς, η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι:
$y_h(t) = C_1 3^t + C_2$.

Θέλουμε να βρούμε μία μερική λύση, αλλά παρατηρούμε ότι $1 + a_1 + a_2 = 1 - 4 + 3 = 0$. Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των απροσδιορίστων συντελεστών.

Επειδή η b_t σε αυτήν την περίπτωση είναι μία σταθερά ($b_t = 5$), πρώτα θα δοκιμάσουμε μία λύση αυτής της μορφής, δηλαδή $y_p = A$.

Όμως, αυτή είναι όμοια με τον όρο C_2 της ομογενούς λύσης, γιαυτό και θα δοκιμάσουμε τη λύση $y_p = At$.

Η μερική λύση πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών και αυτό το χρησιμοποιούμε για να επιλύσουμε ως προς A:

$$A(t+2) - 4A(t+1) + 3At = 5 \iff -2A = 5 \iff A = -\frac{5}{2}$$

.

Συνεπώς, η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης είναι:

$$y_t = C_1 3^t + C_2 - \frac{5}{2}t$$

.