

6^ο Φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

1 Ασκήσεις πάνω σε θετικά/αρνητικά ορισμένους/ημί-ορισμένους/μη ορισμένους πίνακες, βελτιστοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, παράγωγο πεπλεγμένης συνάρτησης

1.1 1^η Άσκηση

Να χαρακτηριστεί ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ ως θετικά/αρνητικά ορισμένος/ημί-

ορισμένος ή μη ορισμένος με δύο μεθόδους.

$$|H_1| = f_{11} = 1 > 0.$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$|H_3| = 10 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 30 > 0$$

Συνεπώς ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

2^{ος} τρόπος: Εξετάζοντας τις ιδιοτιμές:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(10-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda)-1) = (10-\lambda)(4-5\lambda+\lambda^2-1) = (10-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+3)$$

$$\text{Συνεπώς } |A - \lambda I| = 0 \iff \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0 \text{ ή } 10 - \lambda = 0$$

Η συνθήκη $10 - \lambda = 0$ δίνει $\lambda = 10 > 0$. Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας

εξίσωσης είναι $\Delta = 25 - 12 = 13$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ και

$\rho_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ οι οποίες είναι και οι δύο θετικές. Συνεπώς αφού όλες οι ιδιοτιμές

είναι θετικές, ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

1.2 2^η Άσκηση

Να χαρακτηριστεί ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ως θετικά/αρνητικά ορισμένος/ημί-

ορισμένος ή μη ορισμένος.

$$|H_1| = f_{11} = -5 < 0.$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 19 > 0$$

$$|H_3| = -1 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -19 < 0$$

Συνεπώς ο πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος.

1.3 3^η Άσκηση

Να χαρακτηριστεί ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ως θετικά/αρνητικά ορισμένος/ημί-

ορισμένος ή μη ορισμένος.

$$|H_1| = f_{11} = -1 < 0.$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

Συνεπώς ο πίνακας είναι μη ορισμένος.

1.4 4^η Άσκηση

Να εξεταστεί ως προς τα τοπικά μέγιστα/ελάχιστα η συνάρτηση $y = -4x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_2 - x_3$.

Βρίσκουμε πρώτα τα στάσιμα σημεία:

$$f_1 = 0 \iff -8x_1 = 0 \iff x_1 = 0.$$

$$f_2 = 0 \iff -4x_2 - 1 = 0 \iff x_2 = -\frac{1}{4}.$$

$$f_3 = 0 \iff -2x_3 - 1 = 0 \iff x_3 = -\frac{1}{2}.$$

Συνεπώς το μοναδικό στάσιμο σημείο της συνάρτησης είναι το $x = (0, -1/4, -1/2)$.

Υπολογίζουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$f_{11} = -8, f_{12} = 0, f_{13} = 0.$$

$$f_{21} = 0, f_{22} = -4, f_{23} = 0.$$

$$f_{31} = 0, f_{32} = 0, f_{33} = -2.$$

Εξετάζουμε τις ορίζουσες των ηγετικών κύριων ελλασσόνων της Εσσιανής μήτρας:

$$|H_1| = f_{11} = -8 < 0.$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 32 > 0.$$

$$|H_3| = -2 \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -64 < 0.$$

Οι ηγετικές κύριες ελλάσσονες περιττής τάξης είναι αρνητικές και οι άρτιας τάξης θετικές. Συνεπώς έχουμε τοπικό μέγιστο στο $x = (0, -1/4, -1/2)$.

1.5 5^η Άσκηση

Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη $F(x, y) = 4x^2 - 2y^2 + 4$ στο σημείο $(1, 2)$.

$$F_x(x, y) = 8x.$$

$$F_y(x, y) = -4y.$$

$$\text{Κλίση εφαπτομένης: } -\frac{F_x(1,2)}{F_y(1,2)} = 1.$$

1.6 6^η Άσκηση

Να υπολογίσετε την κλίση των ισοσταθμικών καμπυλών της $f(x) = x_1 - 2x_1x_2 - x_2$.

$$f_{x_1}(x) = 1 - 2x_2$$

$$f_{x_2}(x) = -2x_1 - 1$$

$$\text{Κλίση ισοσταθμικών καμπυλών: } -\frac{f_{x_1}(x)}{f_{x_2}(x)} = -\frac{2x_2-1}{2x_1+1}.$$