7^o Φροντιστηριακό Μάθημα Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

1 Ασκήσεις σε βελτιστοποίηση πολυμεταβλητών συναρτήσεων σε περιοχές και βελτιστοποίηση με περιορισμούς ισότητας

1.1 1^η Άσκηση

Να λυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης:
$max\ f(x) = 10x_1 - 2x_2$ για $-1 \leq x_1 \leq 1$ και $-1 \leq x_2 \leq 1$.

$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 10$, συνεπώς η συνάρτηση είναι αύξουσα ως προς x_1.

$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2$, συνεπώς η συνάρτηση είναι φθίνουσα ως προς x_2.

Άρα το μέγιστο βρίσκεται στο $(1, -1)$.
Το σημείο αυτό πληροί τις αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο αφού:
$f_1 = 10 \geq 0$ και $(\beta_1 - x_1) \cdot 10 = (1 - 1) \cdot 10 = 0$
$f_2 = -2 \leq 0$ και $(x_2 - \alpha_2) \cdot (-2) = (-1 - (-1)) \cdot (-2) = 0$.

1.2 2^η Άσκηση

Να λυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης:
$max\ f(x) = 2x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 + 1$ για $-2 \leq x_1 \leq 2$ και $-2 \leq x_2 \leq 2$.

Στα στάσιμα σημεία:
$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - x_2 = 0 \iff x_2 = 2 - 2x_1.(1)$

$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -1 - 2x_2 - x_1 = 0\ (2)$.
Αντικαθιστούμε την σχέση (1) στην (2) και έχουμε:
$-1 - 4 + 4x_1 - x_1 = 0 \iff x_1 = \frac{5}{3}$.

Συνεπώς $x_2 = -\frac{4}{3}$ (από τη σχέση (1)).

Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης στο στάσιμο σημείο:
$f(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}) = \frac{10}{3} + \frac{4}{3} - \frac{25}{9} - \frac{16}{9} + \frac{20}{9} + 1 =$
$\frac{30}{9} + \frac{12}{9} - \frac{25}{9} - \frac{16}{9} + \frac{20}{9} + 1 = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$.

Στα συνοριακά σημεία της περιοχής:

$f(-2,-2) = -4+2-4-4-4+1 = -13$
$f(2,2) = 4-2-4-4-4+1 = -9.$
$f(2,-2) = 4+2-4-4+4+1 = 3$
$f(-2,2) = -4-2-4-4+4+1 = -9.$

Συνεπώς το μέγιστο βρίσκεται στο σημείο $(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$. Το σημείο αυτό πληροί την αναγκαία συνθήκη για μέγιστο αφού οι πρώτες μερικές παράγωγοι σε αυτό το σημείο είναι ίσες με μηδέν.

1.3 3^η Άσκηση

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της:
$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 5$ υπό τη συνθήκη: $g(x) = 10 - x_1 - x_2 = 0$.

Η Λαγκρατζιανή $\mathcal{L}$ δίνεται από τον τύπο:
$\mathcal{L} = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 5 + \lambda(10 - x_1 - x_2)$.

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης έχουμε:
$2x_1 - x_2 - \lambda = 0 \iff x_2 = 2x_1 - \lambda$.
$4x_2 - x_1 - \lambda = 0$
Αντικάθιστούμε την προηγούμενη εξίσωση και έχουμε $8x_1 - 4\lambda - x_1 - \lambda = 0 \iff 7x_1 - 5\lambda = 0$
$10 - x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = 10 - x_2$
Αντικαθιστούμε αυτήν την σχέση και την $\lambda = 2x_1 - x_2$ στην προηγούμενη και έχουμε
$70 - 7x_2 - 5(2(10 - x_2) - x_2) = 0 \iff 70 - 7x_2 - 5(20 - 3x_2) = 0 \iff -30 - 7x_2 + 15x_2 = 0 \iff -8x_2 = -30 \iff x_2 = \frac{15}{4}$. Συνεπώς $x_1 = \frac{25}{4}$.

Υπολογίζουμε την περιφραγμένη Εσσιανή μήτρα:
$f_1 = 2x_1 - x_2,\ f_2 = 4x_2 - x_1$.
$f_{11} = 2,\ f_{12} = f_{21} = -1,\ f_{22} = 4$.
$g_1 = -1,\ g_2 = -1,\ g_{11} = g_{12} = g_{21} = g_{22} = 0$.
$|H^*| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 3 = -8 < 0.$
Άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο στο $(\frac{25}{4}, \frac{15}{4})$.
Το σχετικό διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 1.

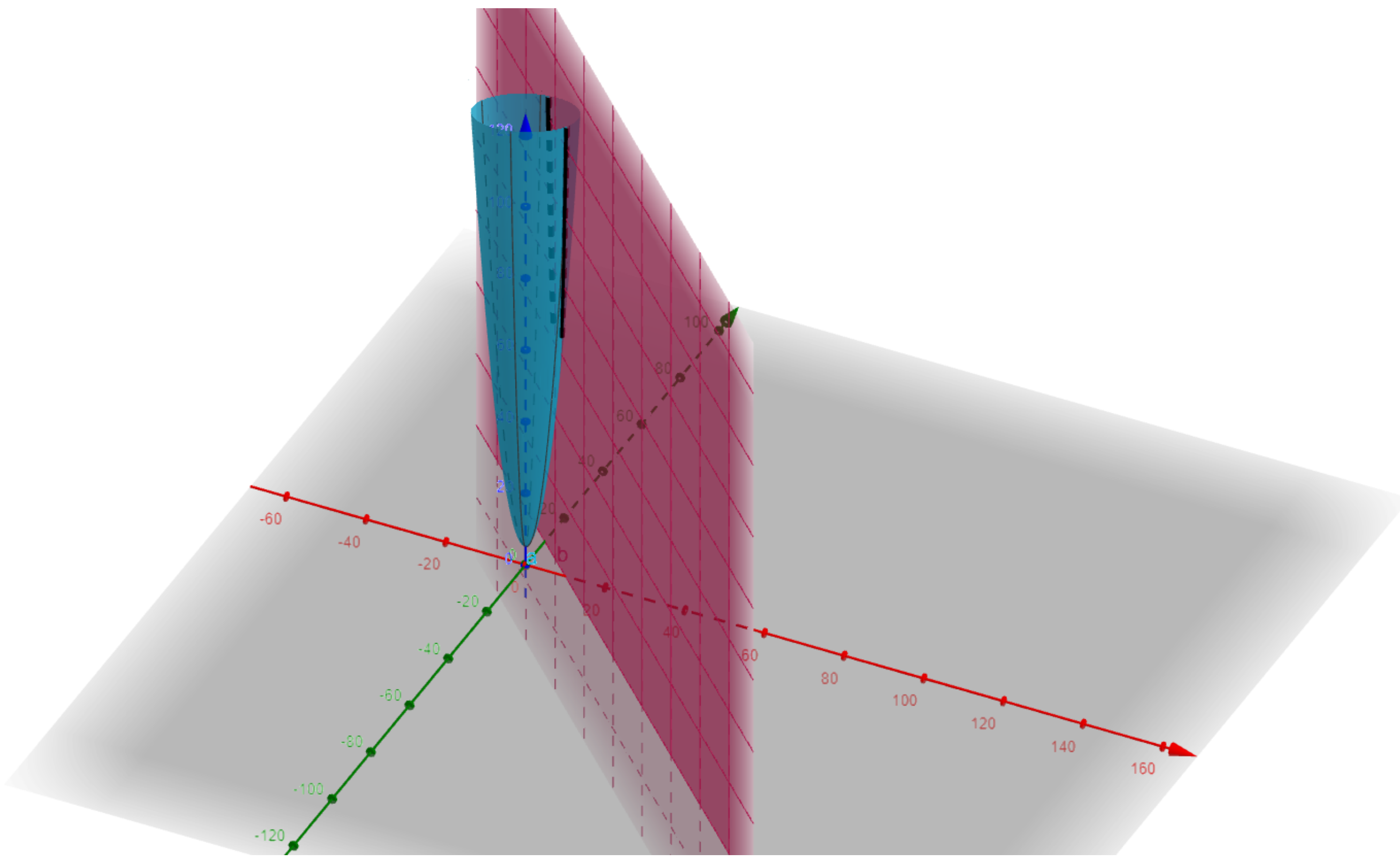
1.4 4^η Άσκηση

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της:
$f(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 5$ υπό τη συνθήκη: $g(x) = 10 - x_1 - x_2 = 0$.

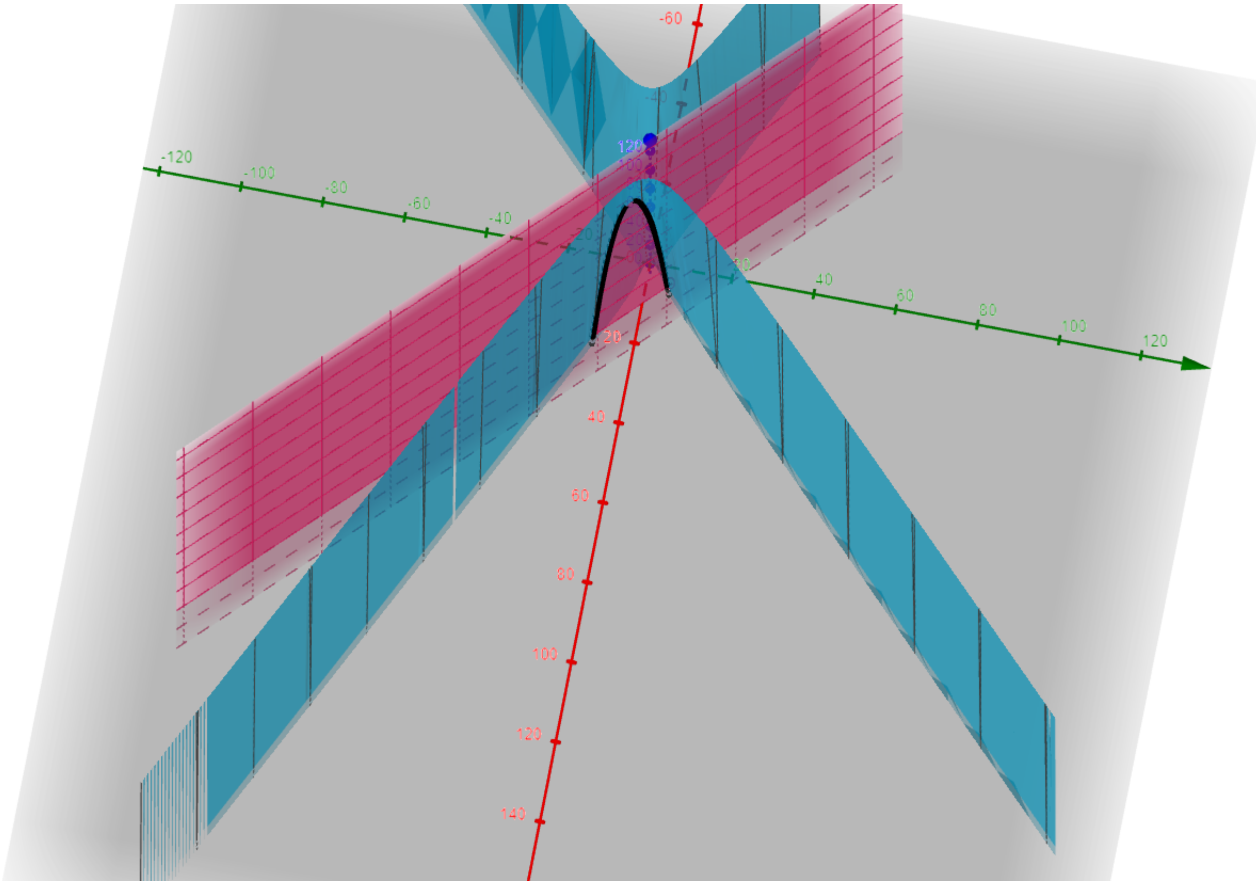
Η Λαγκρατζιανή $\mathcal{L}$ δίνεται από τον τύπο:
$\mathcal{L} = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 5 + \lambda(10 - x_1 - x_2)$.

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης έχουμε:
$2x_1 + x_2 - \lambda = 0.(1)$
$-4x_2 + x_1 - \lambda = 0.(2)$
$10 - x_1 - x_2 = 0.(3)$

Από την τελευταία σχέση έχουμε $x_1 = 10 - x_2.(4)$
Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε $-4x_2 + 10 - x_2 - \lambda = 0 \iff \lambda = 10 - 5x_2$. (5).



Σχήμα 1: Το διάγραμμα για τη βελτιστοποίηση με περιορισμούς ισότητας της Άσκησης 3



Σχήμα 2: Το διάγραμμα για τη βελτιστοποίηση με περιορισμούς ισότητας της Άσκησης 4

Αντικαθιστώντας την (4) και την (5) στην (1) έχουμε:
$20 - 2x_2 + x_2 - 10 + 5x_2 = 0 \iff 10 + 4x_2 = 0 \iff x_2 = -\frac{5}{2}$ και από την (4) έχουμε $x_1 = \frac{25}{2}$.

Υπολογίζουμε την περιφραγμένη Εσσιανή μήτρα:
$f_1 = 2x_1 + x_2,\ f_2 = -4x_2 + x_1.$
$f_{11} = 2,\ f_{12} = f_{21} = 1,\ f_{22} = -4.$
$g_1 = -1,\ g_2 = -1,\ g_{11} = g_{12} = g_{21} = g_{22} = 0.$

$$|H^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 - 2 = 4 > 0.$$

Άρα έχουμε τοπικό μέγιστο στο $(-\frac{5}{2}, \frac{25}{2})$.
Το σχετικό διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 2.