Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 11

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

Θέματα 11ης διάλεξης

- Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης
- Λύση ομογενούς εξίσωσης
- Πλήρης λύση
- Σύγκλιση εξισώσεων δεύτερης τάξης
- Μη αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Ορισμός: Η **γραμμική, αύτονομη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης** εκφράζεται ως εξής:

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_2 y = b$$

Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η πλήρης λύση μίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι ίση με το άθροισμα της λύσης της ομογενούς μορφής της και μίας μερικής λύσης της πλήρους εξίσωσης, έχουμε:

$$y = y_h + y_p$$

Ορισμός: Η ομογενής μορφή της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_2 y = 0$$

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

Για να λύσουμε τη ομογενή εξίσωση, θα χρησιμοποιήσουμε αυτά που γνωρίζουμε σχετικά με τη λύση της γραμμικής, ομογενούς διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Έχουμε δει ότι οι λύσεις των εξισώσεων αυτού του είδους έχουν τη μορφή:

$$y(t) = Ae^{rt}$$

όπου οι τιμές για το A και το r καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες για τον συντελεστή της εξίσωσης. Μία λογική υπόθεση είναι ότι οι λύσεις των εξισώσεων δεύτερης τάξης έχουν την ίδια μορφή.

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

Αν είναι σωστή η υπόθεσή μας, τότε η εξίσωση αυτή πρέπει να ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση. Αντικαθιστώντας την εικαζόμενη λύση ($y(t) = Ae^{rt}$) και τις παραγώγους της στην ομογενή εξίσωση το αριστερό μέλος γίνεται:

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_2 y = r^2 Ae^{rt} + \alpha_1 r Ae^{rt} + \alpha_2 Ae^{rt} =$$

$$Ae^{rt}(r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2)$$

Αν εξαιρέσουμε την ειδική περίπτωση όπου $A = 0$, η υπόθεσή μας είναι σωστή αν η έκφραση εντός των παρενθέσεων είναι μηδέν, γιατί τότε η λύση που υποθέσαμε ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση. Αν επιλέξουμε το r να ικανοποιεί την:

$$r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2 = 0$$

τότε η εξίσωση είναι πράγματι μία λύση της ομογενούς εξίσωσης.

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

Ορισμός: Η **χαρακτηριστική εξίσωση** της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι:

$$r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2 = 0$$

Οι τιμές του r που επιλύουν τη χαρακτηριστική εξίσωση είναι γνωστές ως **χαρακτηριστικές ρίζες** της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Θεώρημα: Έστω ότι y_1 και y_2 είναι δύο διαφορετικές ρίζες της ομογενούς εξίσωσης. Αν c_1 και c_2 είναι δύο οποιεσδήποτε σταθερές, τότε η συνάρτηση $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ είναι μία λύση της ομογενούς εξίσωσης. Αντίστροφα, αν y είναι μία οποιαδήποτε λύση της ομογενούς εξίσωσης, τότε υπάρχουν μοναδικές σταθερές, η c_1 και η c_2, για τις οποίες ισχύει $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Απόδειξη

Απόδειξη: Αν y_1 και y_2 είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης τότε έπεται ότι $\ddot{y}_1 + \alpha_1\dot{y}_1 + \alpha_2 y_1 = \ddot{y}_2 + \alpha_1\dot{y}_2 + \alpha_2 y_2 = 0$.
Έχουμε ως δεδομένο ότι $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Αν η y είναι μία λύση, τότε πρέπει να είναι αληθές ότι:

$$\ddot{y} + \alpha_1\dot{y} + \alpha_2 y = 0$$

Όμως $\dot{y} = c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2$ και $\ddot{y} = c_1\ddot{y}_1 + c_2\ddot{y}_2$. Μετά από αντικατάσταση καταλήγουμε στο:

$$\ddot{y} + \alpha_1\dot{y} + \alpha_2 y = (c_1\ddot{y}_1 + c_2\ddot{y}_2) + \alpha_1(c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2) + \alpha_2(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$

$$c_1(\ddot{y}_1 + \alpha_1\dot{y}_1 + \alpha_2 y_1) + c_2(\ddot{y}_2 + \alpha_1\dot{y}_2 + \alpha_2 y_2) = 0$$

Επομένως η y είναι μία λύση της ομογενούς εξίσωσης.
Το δεύτερο μέρος του θεωρήματος λέει ότι οποιαδήποτε λύση της διαφορικής εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός της y_1 και της y_2 μέσω κατάλληλης επιλογής των σταθερών c_1 και c_2. Για να γίνει αυτό πρέπει η y_1 και η y_2 να είναι διακεκριμένες, πράγμα που σημαίνει ότι πρέπει να είναι *γραμμικά ανεξάρτητες*.

Συνέπειες του θεωρήματος

Οι συνέπειες του θεωρήματος είναι ότι η γενική λύση της ομογενούς μορφής της εξίσωσης είναι:

$$y_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

όπου έχουμε δύο νέες σταθερές $C_1 = c_1 A_1$ και $C_2 = c_2 A_2$.

Απόδειξη για την περίπτωση της διπλής ρίζας

Αν $r_1 = r_2 = r$, οι δύο διακεκριμένες ρίζες της ομογενούς εξίσωσης δίνονται από:

$$y_1 = A_1 e^{rt} \text{ και } y_2 = tA_2 e^{rt}$$

Οι λύσεις αυτές είναι διακεκριμένες επειδή είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επίσης είναι δυνατόν να επαληθεύσουμε ότι η δεύτερη λύση ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση. Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την y_2 για να πάρουμε:

$$\dot{y}_2 = A_2 e^{rt} + rtA_2 e^{rt}$$

Παραγωγίζοντας πάλι παίρνουμε:

$$\ddot{y}_2 = rA_2 e^{rt} + rA_2 e^{rt} + r^2 tA_2 e^{rt}$$

Απόδειξη για την περίπτωση της διπλής ρίζας

Το αριστερό μέλος της ομογενούς εξίσωσης παίρνει τη μορφή:

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_2 y = 2rA_2 e^{rt} + r^2 t A_2 e^{rt} + \alpha_1 (A_2 e^{rt} + rtA_2 e^{rt}) + \alpha_2 (tA_2 e^{rt})$$
$$= A_2 e^{rt} (t(r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2) + 2r + \alpha_1)$$

Όμως $r = -\alpha_1/2$ συνεπώς η παραπάνω έκφραση ισούται με:

$$A_2 e^{rt} (t(\alpha_1^2/4 - \alpha_1^2/2 + \alpha_2) - \alpha_1 + \alpha_1))$$

$$= A_2 e^{rt} \left(\frac{t}{4} (4\alpha_2 - \alpha_1^2) \right)$$

Επειδή η διακρίνουσα είναι ίση με μηδέν, αυτή η έκφραση είναι ίση με μηδέν.

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

Αν $r_1 = r_2 = r$ οι δύο διακεκριμένες ρίζες της ομογενούς εξίσωσης δίνονται από:

$$y_1 = A_1 e^{rt} \text{ και } y_2 = tA_2 e^{rt}$$

Θεώρημα: Η λύση της ομογενούς μορφής της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, εφόσον οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης r_1, r_2 είναι πραγματικοί αριθμοί είναι:

$$y_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \text{ αν } r_1 \neq r_2$$
$$y_h(t) = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} \text{ αν } r_1 = r_2 = r$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η ακόλουθη ομογενής διαφορική εξίσωση:

$$4\ddot{y} - 8\dot{y} + 3y = 0$$

Αφού διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με 4, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^2 - 2r + \frac{3}{4} = 0$$

$\Delta = 4 - 3 = 1$ και οι ρίζες είναι $r_1 = 1/2$ και $r_2 = 3/2$. Με βάση το προηγούμενο θεώρημα η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y_h(t) = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{3t/2}$$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η ακόλουθη ομογενής διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 4r + 4 = 0$ με διπλή ρίζα $r_1 = r_2 = 2$. Συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα:

$$y_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$$

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

Θεώρημα: Αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικοί αριθμοί $z_{1,2} = h \pm vi$, η λύση της ομογενούς μορφής της διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές μπορεί να εκφραστεί ως:

$$y_h = A_1 e^{ht} \cos(vt) + A_2 e^{ht} \sin(vt)$$

Μιγαδικές ρίζες

Αν $\Delta = \alpha_1^2 - 4\alpha_2 < 0$ τότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι μιγαδικοί αριθμοί. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε τη λύση ως:

$$r_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \pm i\sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2}}{2}$$

Συνεπώς $r_{1,2} = h \pm vi$ όπου $h = -\frac{\alpha_1}{2}$ και $v = \pm\frac{\sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2}}{2}$.
Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε τη λύση ως εξής:
$y_h = C_1 e^{(h+vi)t} + C_2 e^{(h-vi)t} = e^{ht}(C_1 e^{vit} + C_2 e^{-vit})$
Από τον τύπο του Euler έχουμε:

$$e^{i(vt)} = \cos(vt) + i\sin(vt)$$

και

$$e^{-i(vt)} = \cos(vt) - i\sin(vt)$$

Μιγαδικές ρίζες

Συνεπώς

$$y_h = e^{ht}(C_1(\cos(vt) + i\sin(vt)) + C_2(\cos(vt) - i\sin(vt)))$$

ή

$$y_h = e^{ht}(C_1 + C_2)\cos(vt) + ie^{ht}(C_1 - C_2)\sin(vt)$$

Αφού $(C_1 + C_2)$ και $(C_1 - C_2)i$ είναι σταθερές, μπορούμε να τις μετονομάσουμε σε A_1 και A_2

$$A_1 = C_1 + C_2$$

και

$$A_2 = (C_1 - C_2)i$$

Οι A_1 και A_2 είναι πραγματικοί αριθμοί. Ο λόγος είναι ότι οι C_1 και C_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί, όπως οι ρίζες. Όμως το άθροισμα συζυγών μιγαδικών είναι πάντα πραγματικός αριθμός. Το γινόμενο του i και της διαφοράς συζυγών μιγαδικών είναι πάλι πραγματικός αριθμός. Συνεπώς παίρνουμε μία πραγματική λύση της διαφορικής εξίσωσης ακόμη κι όταν οι ρίζες είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Μιγαδικές ρίζες

Θεώρημα: Αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικοί αριθμοί, η λύση της ομογενούς μορφής της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές μπορεί να εκφραστεί ως:

$$y_h = A_1 e^{ht} \cos(vt) + A_2 e^{ht} \sin(vt)$$

όπου $h = -\frac{\alpha_1}{2}$ και $v = \frac{\sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2}}{2}$

Παράδειγμα

Να λυθεί η ακόλουθη ομογενής διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

$\Delta = -16$, $r_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$
Συνεπώς, με βάση το θεώρημα έχουμε:

$$y_h(t) = A_1 e^{-t} \cos(2t) + A_2 e^{-t} \sin(2t)$$

Η πλήρης λύση

Η μερική λύση βρίσκεται θέτοντας $\ddot{y} = \dot{y} = 0$. Αυτό μας δίνει για $\alpha_2 \neq 0$: $y_p = \bar{y} = \frac{b}{\alpha_2}$.

Η **πλήρης λύση** μίας διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης είναι το άθροισμα της ομογενούς λύσης και της μερικής λύσης

$$y = y_h + y_p$$

Θεώρημα: Η πλήρης λύση της γραμμικής αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης (με σταθερούς συντελεστές και έναν σταθερό όρο) είναι

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{b}{\alpha_2}, \text{ αν } r_1 \neq r_2$$
$$y(t) = C_1 e^{rt} + tC_2 e^{rt} + \frac{b}{\alpha_2}, \text{ αν } r_1 = r_2 = r$$
$$y(t) = e^{ht}(A_1 \cos(vt) + A_2 \sin(vt)) + \frac{b}{\alpha_2} \text{ αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικοί αριθμοί.}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η ακόλουθη γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 10$$

Η μερική λύση είναι η $y_p = 2$. Συνεπώς με βάση τη λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που βρήκαμε προηγουμένως, η γενική λύση είναι:

$$y(t) = A_1 e^{-t}\cos(2t) + A_2 e^{-t}\sin(2t) + 2$$

Η ισορροπία και η σύγκλιση

Θεώρημα: Η λύση μίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές και σταθερό όρο συγκλίνει προς την σταθερή κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας αν και μόνο αν τα πραγματικά μέρη των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσής της είναι αρνητικά.

Η ισορροπία και η σύγκλιση

Περίπτωση 1: *Οι ρίζες είναι πραγματικές και άνισες.* Η πλήρης λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{b}{\alpha_2}$$

Συνεπώς:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = C_1 \lim_{t\to\infty}(e^{r_1 t}) + C_2 \lim_{t\to\infty}(e^{r_2 t}) + \frac{b}{\alpha_2}$$

Αν και οι δύο ρίζες είναι αρνητικές οι δύο εκθετικοί όροι συγκλίνουν στο 0 ως όριο και συνεπώς η $y(t)$ συγκλίνει στο $\frac{b}{\alpha_2}$. Αν και οι δύο ρίζες είναι θετικές, τότε οι δύο όροι που εμπεριέχουν το t αποκλίνουν στο άπειρο, έτσι ώστε η $y(t)$ αποκλίνει προς το $+\infty$ ή στο $-\infty$.
Αν η μία ρίζα είναι θετική και η άλλη αρνητική, ο όρος με την αρνητική ρίζα συγκλίνει προς το μηδέν, αλλά ο άλλος όρος αποκλίνει προς το άπειρο εκτός από την περίπτωση που η αντίστοιχη σταθερά είναι μηδέν. Ως αποτέλεσμα η $y(t)$ αποκλίνει, εκτός από αυτήν την ειδική περίπτωση.

Η ισορροπία και η σύγκλιση

Περίπτωση 2: *Οι ρίζες είναι πραγματικές και ίσες.* Η πλήρης λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$y(t) = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} + \frac{b}{\alpha_2}$$

Παίρνοντας τα όρια και στα δύο μέλη έχουμε:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{b}{\alpha_2} + C_1 \lim_{t \to \infty}(e^{rt}) + C_2 \lim_{t \to \infty}(te^{rt})$$

Αν η διπλή ρίζα r είναι θετική, τότε η $y(t)$ θα αποκλίνει προς το θετικό ή το αρνητικό άπειρο. Αν η ρίζα είναι αρνητική, τότε η $y(t)$ θα συγκλίνει προς το $\frac{b}{\alpha_2}$. Τότε ο όρος te^{rt} παίρνει τη μορφή $(\infty \cdot 0)$. Μπορούμε να τον φέρουμε στη μορφή (∞/∞) γράφοντας τον ως t/e^{-rt}. Στη συνέχεια, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα L' Hospital και παραγωγίζοντας αριθμητή και παρανομαστή παίρνουμε $(-1/r)e^{rt}$, το όριο της οποίας είναι μηδέν για $r < 0$.

Η ισορροπία και η σύγκλιση

Περίπτωση 3: *Μιγαδικές ρίζες.* Η πλήρης λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι

$$y(t) = e^{ht}(A_1 \cos(vt) + A_2 \sin(vt)) + \frac{b}{\alpha_2}$$

Ο όρος εντός των παρενθέσεων είναι μία ταλαντούμενη συνάρτηση που είναι φραγμένη καθώς $t \to \infty$. Ο όρος αυτός πολλαπλασιάζεται επί e^{ht} και θα αυξάνεται απεριόριστα αν $h > 0$.

Αν $h < 0$, τότε η e^{ht} συγκλίνει προς το μηδέν.

Συνεπώς η $y(t)$ αποκλίνει με αυξανόμενες ταλαντώσεις αν $h > 0$, ενώ συγκλίνει προς $\frac{b}{\alpha_2}$ με διαρκώς συρρικνούμενες ταλαντώσεις αν $h < 0$. Το h είναι όμως το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ρίζας ($h = -a_1/2$) και συμπεραίνουμε ότι η $y(t)$ συγκλίνει προς το $\frac{b}{\alpha_2}$ αν το πραγματικό μέρος των μιγαδικών ριζών είναι αρνητικό.

Παράδειγμα

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 4y = 10$$

Έχουμε $\Delta = -7$, άρα $r_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$.
Το πραγματικό μέρος των ριζών είναι αρνητικό $(-3/2)$ συνεπώς η λύσεις συγκλίνουν στο σταθερό σημείο $\bar{y} = 5/2$.

Η γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης με ένα μεταβλητό όρο

Περίπτωση 1: Αν ο όρος $b(t)$ είναι ένα πολυώνυμο n-οστού βαθμού ως προς t, έστω το $p_n(t)$ τότε υποθέτουμε ότι η μερική λύση είναι και αυτή ένα πολυώνυμο. Δηλαδή υποθέτουμε ότι:

$$y_p = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0$$

όπου A_i είναι οι σταθερές, οι τιμές των οποίων καθορίζονται με αντικατάσταση της εικαζόμενης μερικής λύσης στη διαφορική εξίσωση και στη συνέχεια εξισώνοντας τους συντελεστές των όμοιων όρων.

Περίπτωση 2: Αν ο όρος $b(t)$ είναι της μορφής $e^{\alpha t} p_n(t)$, όπου $p_n(t)$ είναι ένα πολυώνυμο ως προς t και αν α είναι μία γνωστή σταθερά, τότε υποθέτουμε ότι η μερική λύση δίνεται από την:

$$y_p = e^{\alpha t}(A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0)$$

Η γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης με ένα μεταβλητό όρο

Περίπτωση 3: Αν ο όρος $b(t)$ είναι της μορφής $e^{kt}(p_1(t)\cos(mt) + p_2(t)\sin(mt))$, όπου $p_1(t)$, $p_2(t)$ είναι πολυώνυμα βαθμού n_1 και n_2 αντίστοιχα, τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής:

$$y_p = e^{kt}(Q_n(t)\cos(mt) + R_n(t)\sin(mt))$$

όπου $Q_n(t)$ και $R_n(t)$ είναι πολυώνυμα βαθμού n, όπου n ο μέγιστος των n_1 και n_2.

Σε κάθε περίπτωση, αν ένας οποιοσδήποτε όρος της εικαζόμενης λύσης είναι και όρος της y_h, τότε η υποτιθέμενη λύση πρέπει να τροποποιηθεί ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε την υποτιθέμενη λύση επί t^k, όπου k είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος ώστε οι κοινοί όροι να εξαλείφονται.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η εξίσωση $\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = t^2$

Πρώτα επιλύουμε την ομογενή εξίσωση

$$\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = 0$$

$\Delta = 25$, $r_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$ με ρίζες 1 και -4. Άρα

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-4t}$$

Για να βρούμε μία μερική λύση, παρατηρούμε ότι ο όρος $b(t)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς t. Επομένως, υποθέτουμε ότι

$$y_p = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

Παράδειγμα 1

$$\dot{y}_p = 2A_2 t + A_1$$

$$\ddot{y}_p = 2A_2$$

Αντικαθιστούμε τη μερική λύση στη διαφορική εξίσωση και έχουμε:

$$2A_2 + 3(2A_2 t + A_1) - 4(A_2 t^2 + A_1 t + A_0) = t^2$$

Ισοδύναμα:

$$-(4A_2 + 1)t^2 + (6A_2 - 4A_1)t + (2A_2 + 3A_1 - 4A_0) = 0$$

Συνεπώς: $A_2 = -\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{2} - 4A_1 = 0 \Leftrightarrow A_1 = -\frac{3}{8}$,
$2A_2 + 3A_1 - 4A_0 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{9}{8} - 4A_0 = 0 \Leftrightarrow A_0 = -\frac{13}{32}$ Συνεπώς η γενική λύση είναι:

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-4t} - \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{8}t - \frac{13}{32}$$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η εξίσωση: $\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = 5e^t$.

Η ομογενής λύση είναι η ίδια όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Η μερική λύση βρίσκεται υποθέτοντας ότι

$$y_p = A_0 e^t$$

Όμως αυτή έχει την ίδια μορφή με έναν από τους όρους της λύσης της ομογενούς εξίσωσης. Συνεπώς, πολλαπλασιάζουμε με t και έχουμε $y_p = tA_0 e^t$. Συνεπώς $\dot{y}_p = A_0 e^t + tA_0 e^t$ και $\ddot{y}_p = 2A_0 e^t + tA_0 e^t$. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$2A_0 e^t + tA_0 e^t + 3A_0 e^t + 3tA_0 e^t - 4tA_0 e^t = 5e^t \Leftrightarrow 5A_0 e^t = 5e^t$$

Συνεπώς $A_0 = 1$ και η λύση είναι:

$$y(t) = te^t + C_1 e^t + C_2 e^{-4t}$$

Παράδειγμα 3

Να λυθεί η εξίσωση: $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = \sin(3t)$.

Η ομογενής εξίσωση είναι η $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = 0$, έχοντας χαρακτηριστικό πολυώνυμο $r^2 - 4r + 5 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$.
Η λύση της ομογενούς είναι $y_h = e^{2t}(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t))$.

Το δεύτερο μέλος της διαφορικής ($\sin(3t)$) είναι της μορφής της Περίπτωσης 3 με $k = 0$, $m = 3$ και $n = 0$. Επομένως, η μερική λύση θα είναι της μορφής (τα πολυώνυμα $Q_n(t)$, $R_n(x)$ μηδενικού βαθμού θα είναι σταθερές):

$$y_p = a \sin(3t) + b \cos(3t)$$

Παράδειγμα 3

Υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$\dot{y}_p = (a\sin(3t) + b\cos(3t))' = 3a\cos(3t) - 3b\sin(3t)$$

$$\ddot{y}_p = (3a\cos(3t) - 3b\sin(3t))' = -9a\sin(3t) - 9b\cos(3t)$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση:
$-9a\sin(3t) - 9b\cos(3t) - 4(3a\cos(3t) - 3b\sin(3t)) + 5(a\sin(3t) + b\cos(3t)) =$
$\sin(3t) \Rightarrow (-4a + 12b)\sin(3t) + (-12a - 4b)\cos(3t) = \sin(3t) \Rightarrow$

$$-4a + 12b = 1 \text{ και } -12a - 4b = 0$$

Επιλύοντας το γραμμικό σύστημα προκύπτει ότι $a = -\frac{1}{40}$ και $b = \frac{3}{40}$. Έτσι, η μερική λύση είναι:

$$y_p = -\frac{1}{40}\sin(3t) + \frac{3}{40}\cos(3t)$$

και η γενική λύση:

$$y = e^{2t}(C_1\cos(t) + C_2\sin(t)) - \frac{1}{40}\sin(3t) + \frac{3}{40}\cos(3t)$$