Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 7

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2022

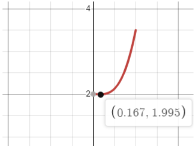
Θέματα 7ης διάλεξης

- Βελτιστοποίηση συναρτήσεων μίας μεταβλητής με περιορισμούς διαστήματος
- Βελτιστοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών με περιορισμούς διαστήματος
- Τεχνική πολλαπλασιαστή Lagrange

Βελτιστοποίηση σε ένα διάστημα - Παράδειγμα 1

Να λυθεί το πρόβλημα $\min y = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ υπό τον περιορισμό $0 \leq x \leq 1$.

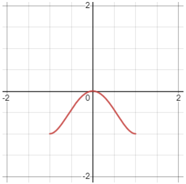
Η πρώτη παράγωγος είναι: $y' = 6x^2 - x$.
Τα στάσιμα σημεία είναι $x = 0$ και $x = 1/6$ τα οποία ανήκουν στο διάστημα που μας δίνεται.
Η δεύτερη παράγωγος είναι: $y'' = 12x - 1$
Στο $x = 0$, όπου $y'' = -1$ έχουμε τοπικό μέγιστο.
Στο $x = 1/6$, όπου $y'' = 1$ έχουμε τοπικό ελάχιστο.
Οι τιμές της y στα στάσιμα σημεία είναι $(0, 2)$ και $\left(\frac{1}{6}, 1.995\right)$.
Ελέγχουμε και το άκρο του διαστήματος για $x = 1$, δηλαδή το σημείο $(1, 7/2)$.
Συνεπώς έχουμε ολικό ελάχιστο στο $x = 1/6$.



Βελτιστοποίηση σε ένα διάστημα - Παράδειγμα 2

Να λυθεί το πρόβλημα max$y = x^4 - 2x^2$ υπό τον περιορισμό $-1 \leq x \leq 1$.

Η πρώτη παράγωγος είναι: $y' = 4x^3 - 4x$
Τα στάσιμα σημεία είναι $x = 0$, $x = -1$ και $x = 1$ τα οποία ανήκουν στο διάστημα που μας δίνεται.
Η δεύτερη παράγωγος είναι: $y'' = 12x^2 - 4$
Στο $x = 0$, όπου $y'' = -4$ έχουμε τοπικό μέγιστο.
Στο $x = -1$, όπου $y'' = 8$ έχουμε τοπικό ελάχιστο.
Στο $x = 1$, όπου $y'' = 8$ έχουμε τοπικό ελάχιστο.
Συνεπώς έχουμε ολικό μέγιστο στο $x = 0$ όπου $f(0) = 0$.



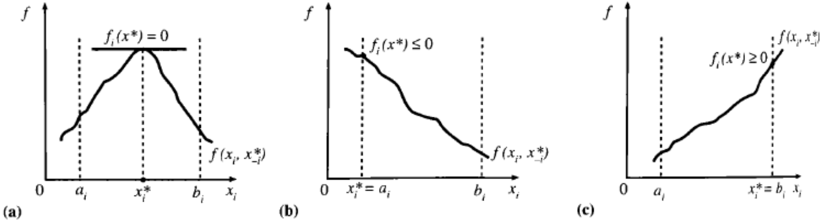
Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία συνάρτηση με n μεταβλητές και ας υποθέσουμε ότι κάθε μεταβλητή περιορίζεται σε ένα διάστημα $\alpha_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \cdots, n$.

Για μερικά i μπορεί το x_i να μην φράσσεται από πάνω ή κάτω, αλλά υποθέτουμε ότι για μερικά τουλάχιστον i, τα α_i και/ή τα b_i είναι πεπερασμένα.

Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

Ας υποθέσουμε ότι το σημείο $\mathbf{x}^*$ δίνει ένα μέγιστο της συνάρτησης με τον περιορισμό ότι κάθε τιμή x_i βρίσκεται μέσα σε δεδομένο διάστημα.
Για κάθε x_i επομένως πρέπει να έχουμε μία από τρεις πιθανές περιπτώσεις οι οποίες παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα, όπου με $\mathbf{x}^*_{-i}$ συμβολίζουμε το διάνυσμα των σταθερών τιμών $(x_1^*, \cdots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \cdots, x_n^*)$.



Σχήμα: Πιθανές λύσεις όταν κάποιο x_i πρέπει να βρίσκεται μέσα σε ένα διάστημα

Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

Περίπτωση 1^{η}: $\alpha_i < x_i^* < b_i$.
Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να ισχύει $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$. Για να το διαπιστώσουμε αυτό παίρνουμε τη συνιστώσα $f_i(\mathbf{x}^*)dx_i$ του ολικού διαφορικού df η οποία αντιστοιχεί στην x_i:

$$dy(\mathbf{x}^*) = f_1(x^*)dx_1 + \ldots + f_i(x^*)dx_i + \ldots + f_n(x^*)dx_n$$

Αν $f_i(\mathbf{x}^*) \neq 0$ τότε μπορούμε να βρούμε ένα κατάλληλα μικρό dx_i με το κατάλληλο πρόσημο, έτσι ώστε $f_i(\mathbf{x}^*)dx_i > 0$. Με αυτόν τον τρόπο θα αυξηθεί η τιμή της συνάρτησης, απορρίπτοντας την αρχική υπόθεση ότι βρίσκεται σε μέγιστο. Επομένως, πρέπει να ισχύει $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$.

Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

Περίπτωση 2^{η}: $\alpha_i = x_i^*$.
Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να ισχύει $f_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, υποθέτουμε ότι $f_i(\mathbf{x}^*) > 0$. Μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο $dx_i > 0$, αφού έτσι το x_i διατηρείται μέσα στο εφικτό διάστημα, και έχουμε τότε $f_i(\mathbf{x}^*)dx_i > 0$ γεγονός που αντιβαίνει στην αρχική υπόθεση ότι η συνάρτηση βρίσκεται σε μέγιστο. Επομένως μπορούμε να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο να ισχύει $f_i(\mathbf{x}^*) > 0$.

Αν $f_i(\mathbf{x}^*)dx_i > 0$ μόνο κάποιο $dx_i < 0$ θα μπορούσε να αυξήσει την τιμή της συνάρτησης, αλλά αυτό παραβιάζει τον περιορισμό και συνεπώς η τιμή της συνάρτησης δεν μπορεί να αυξηθεί. Όπως επίσης, αν $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$ η τιμή της συνάρτησης δεν μπορεί να αυξηθεί με μικρές διακυμάνσεις στο x_i.

Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

Περίπτωση 3^η: $x_i^* = b_i$.
Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να ισχύει $f_i(\mathbf{x}^*) \geq 0$. Για να το διαπιστώσουμε αυτό ας υποθέσουμε ότι $f_i(\mathbf{x}^*) < 0$. Μπορούμε να επιλέξουμε $dx_i < 0$ έτσι ώστε $f_i(\mathbf{x}^*)dx_i > 0$ και συνεπώς, χωρίς να παραβιαστεί ο περιορισμός, η τιμή της συνάρτησης μπορεί να αυξηθεί. Άρα πρέπει να αποκλείσουμε αυτήν την περίπτωση.

Αν $f_i(\mathbf{x}^*)dx_i > 0$ μόνο κάποιο $dx_i > 0$ θα μπορούσε να αυξήσει την τιμή της συνάρτησης, αλλά αυτό παραβιάζει τον περιορισμό και συνεπώς η τιμή της συνάρτησης δεν μπορεί να αυξηθεί. Όπως επίσης, αν $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$ η τιμή της συνάρτησης δεν μπορεί να αυξηθεί με μικρές διακυμάνσεις στο x_i.

Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

Θεώρημα: Αν $\mathbf{x}^*$ είναι μία λύση στο πρόβλημα της μεγιστοποίησης της $f(\mathbf{x})$, δηλαδή
max $f(\mathbf{x})$ υπό τον περιορισμό $\alpha_i \leq x_i \leq b_i$ με $i = 1, \cdots, n$,
τότε πρέπει να ισχύει μία ή και οι δύο από τις ακόλουθες συνθήκες:

1. $f_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$ και $(x_i^* - \alpha_i) f_i(\mathbf{x}^*) = 0$
2. $f_i(\mathbf{x}^*) \geq 0$ και $(b_i - x_i^*) f_i(\mathbf{x}^*) = 0$

για όλα τα $i = 1, \cdots, n$.

Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

Θεώρημα: Αν $\mathbf{x}^*$ είναι μία λύση στο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της $f(\mathbf{x})$ δηλαδή
min $f(\mathbf{x})$ υπό τον περιορισμό $\alpha_i \leq x_i \leq b_i$ με $i = 1, \cdots, n$,
τότε πρέπει να ισχύει μία ή και οι δύο από τις ακόλουθες συνθήκες:

1. $f_i(\mathbf{x}^*) \geq 0$ και $(x_i^* - \alpha_i) f_i(\mathbf{x}^*) = 0$
2. $f_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$ και $(b_i - x_i^*) f_i(\mathbf{x}^*) = 0$

για όλα τα $i = 1, \cdots, n$.

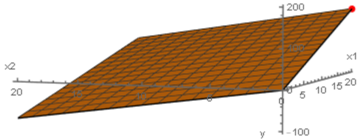
Παράδειγμα 1

Να λυθεί το πρόβλημα: $\max f(\mathbf{x}) = y = 10x_1 - 5x_2$
υποκείμενη στους περιορισμούς $0 \leq x_1 \leq 20,\ 0 \leq x_2 \leq 20$.

Η συνάρτηση αυτή είναι γραμμική και αύξουσα ως προς x_1 και γραμμική και φθίνουσα ως προς x_2. Όταν δεν υπάρχει διάστημα περιορισμών δεν υπάρχει καμία λύση (γιατί;). Μπορούμε να αντιληφθούμε ότι η λύση βρίσκεται στο άνω όριο της x_1 και στο κάτω όριο της x_2: $x_1^* = 20, x_2^* = 0$
Το σημείο αυτό πληροί τις αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο αφού:

$$f_1 = 10 \geq 0,\ (20 - x_1^*)10 = 0$$
$$f_2 = -5 \leq 0,\ (x_2^* - 0)(-5) = 0$$

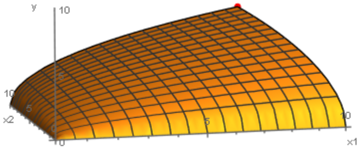
στο $(20, 0)$.



Παράδειγμα 2

Να λυθεί το πρόβλημα: $\max f(\mathbf{x}) = y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ υποκείμενη στους περιορισμούς $0 \leq x_1 \leq 10$, $0 \leq x_2 \leq 10$.

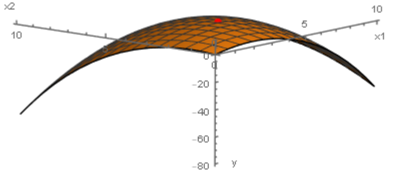
$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} > 0$ στο δεδομένο διάστημα, συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό ως προς x_1.
$f_2(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} x_2^{-\frac{1}{2}} > 0$ στο δεδομένο διάστημα, συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό ως προς x_2.
Άρα μπορούμε να αντιληφθούμε ότι η λύση βρίσκεται στα άνω όρια των διαστημάτων: $x_1^* = 10$, $x_2^* = 10$.
Το σημείο αυτό πληρεί την αναγκαία συνθήκη του θεωρήματος για μέγιστο, αφού:
$f_1(10, 10) = \frac{1}{2} 10^{-\frac{1}{2}} 10^{\frac{1}{2}} \geq 0$, $(10 - 10) f_1 = 0$
$f_2(10, 10) = \frac{1}{2} 10^{\frac{1}{2}} 10^{-\frac{1}{2}} \geq 0$, $(10 - 10) f_2 = 0$



Παράδειγμα 3

Να λυθεί το πρόβλημα: $\max f(\mathbf{x}) = y = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$ υποκείμενη στους περιορισμούς $0 \leq x_1 \leq 10$, $0 \leq x_2 \leq 10$.

Έχουμε $f_1 = 4 - 2x_1 + x_2$, $f_2 = 2 - 2x_2 + x_1$
Από τις συνθήκες πρώτης τάξης και τη δεύτερη εξίσωση έχουμε ότι $x_1 = 2x_2 - 2$.
Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε
$4 - 4x_2 + 4 + x_2 = 0 \iff 8 - 3x_2 = 0 \iff x_2 = \frac{8}{3}$. Αντικαθιστώντας έχουμε $x_1 = \frac{10}{3}$. Το σημείο είναι εσωτερικό και στα δύο διαστήματα και έχουμε στο σημείο $(\frac{10}{3}, \frac{8}{3})$:
$f_1 = 0$, $(\frac{10}{3} - 0)f_1 = (10 - \frac{10}{3})f_1 = 0$
$f_2 = 0$, $(\frac{8}{3} - 0)f_2 = (10 - \frac{8}{3})f_2 = 0$
Άρα ικανοποιούνται οι συνθήκες για μέγιστο.



Παράδειγμα 4

Να λυθεί το πρόβλημα: $\max f(\mathbf{x}) = y = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2$ υποκείμενη στους περιορισμούς $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq \frac{8}{3}$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε την ίδια συνάρτηση όπως και πριν, αλλά διαφέρουν τα διαστήματα.
Για το x_1, το δεδομένο διάστημα αποκλειεί την προηγούμενη βέλτιστη λύση.
Για το x_2 η προηγούμενη βέλτιστη λύση είναι το άνω όριο του διαστήματος και συνεχίζει να είναι διαθέσιμη.
Όμως χρειάζεται προσοχή γιατί ακόμη και αν συνεχίζει να είναι εφικτή, η τιμή αυτή του x_2 δεν είναι κατ΄ ανάγκη βέλτιστη για το νέο (λόγω αλλαγής περιορισμών) πρόβλημα.

Παράδειγμα 4

Μπορούμε να δοκιμάσουμε τα άνω όρια των δύο διαστημάτων, το σημείο $(1, \frac{8}{3})$.
Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης είναι:

$$f_1 = 4 - 2x_1 + x_2, \; f_2 = 2 - 2x_2 + x_1$$

Επομένως στο $(1, \frac{8}{3})$ έχουμε:

$$f_1(1, \tfrac{8}{3}) = \tfrac{14}{3} > 0, \; f_2(1, \tfrac{8}{3}) = -\tfrac{7}{3} < 0$$

Συμπεραίνουμε ότι αυτό το σημείο δεν μπορεί να είναι μέγιστο σύμφωνα με το θεώρημα, γιατί χρειαζόμαστε $f_2 \geq 0$, όταν το x_2 είναι στο άνω όριο του διαστήματός του.

Παράδειγμα 4

Μπορούμε να βρούμε την πιθανή λύση επισημαίνοντας πρώτα ότι για όλα τα x_1 μέσα στο διάστημα $[0, 1]$ και για όλα τα x_2 στο $\left[0, \frac{8}{3}\right]$ ισχύει $f_1 > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι *αύξουσα* ως προς x_1. Επομένως, έχει νόημα να θέσουμε την x_1 στο άνω όριό της $x_1 = 1$. Όπως είδαμε πριν λίγο στο $\left(1, \frac{8}{3}\right)$ η μερική παράγωγος $f_2 < 0$ γεγονός που σημαίνει ότι μπορούμε να αυξήσουμε την τιμή της συνάρτησης μειώνοντας την x_2. Όμως μέχρι που; Μπορούμε να βρούμε την απάντηση αν θέσουμε $x_1 = 1$ στη συνάρτηση y και την μεγιστοποιήσουμε ως προς τη x_2 στο διάστημα $\left[0, \frac{8}{3}\right]$. Δηλαδή, το πρόβλημά μας είναι:

$$\max y = 3 + 3x_2 - x_2^2 \text{ υπό τον περιορισμό } 0 \leq x_2 \leq \frac{8}{3}$$

Από τη συνθήκη πρώτης τάξης έχουμε:

$$3 - 2x_2 = 0$$

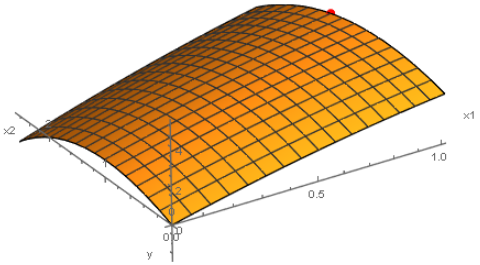
που σημαίνει ότι $x_2^* = 1.5$

Παράδειγμα 4

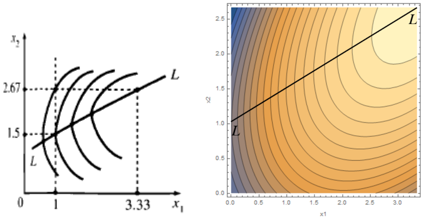
Για να ελέγξουμε αν το σημείο $(1, 1.5)$ ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο έχουμε:

$$f_1 = 4 - 2(1) + 1.5 = 3.5 > 0,\ f_1(1 - x_1^*) = 0$$
$$f_2 = 2 - 2(1.5) + 1 = 0,\ f_2(\tfrac{8}{3} - 1.5) = 0$$

και επομένως οι συνθήκες ισχύουν.



Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος



Σχήμα: Διάστημα περιορισμού που μεταβάλλει τις βέλτιστες τιμές και των δύο μεταβλητών

Η κορυφή του γραφήματος βρίσκεται στο (3.33, 2.67), αλλά στο υπό περιορισμούς πρόβλημα περιοριζόμαστε στο $[0, 1]$ για το x_1. Το σημείο (1, 2.67) δεν βρίσκεται στην υψηλότερη ισοϋψή καμπύλη που μπορούμε να πετύχουμε. Την υψηλότερη δυνατή ισοϋψή καμπύλη την πετυχαίνουμε μετακινούμενοι στο (1, 1.50). Παρατηρούμε ότι αυτό είναι ένα σημείο επαφής (point of tangency) ανάμεσα στην κάθετη γραμμή περιορισμού και την υψηλότερη κατά το δυνατόν ισοϋψη καμπύλη.

Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος

Το πρώτο στάδιο αυτής της διαδικασίας ισοδυναμεί με την εύρεση του γεωμετρικού τόπου των ισοϋψών καμπυλών αυτής της συνάρτησης με τις κάθετες ευθείες που αντιστοιχούν στις διάφορες τιμές της x_1.

Αυτός ο γεωμετρικός τόπος σημειώνεται με LL στο σχήμα. Επομένως η τομή αυτού του γεωμετρικού τόπου με την κάθετη ευθεία στο $x_1 = 1$ δίνει τη συνολική λύση.

Τεχνική του Πολλαπλασιαστή Lagrange

Ορισμός: Η **Μέθοδος Lagrange** για την εύρεση μίας λύσης (x_1^*, x_2^*) στο πρόβλημα
$\max f(x_1, x_2)$ υπό τον περιορισμό $g(x_1, x_2) = 0$
συνίσταται στη δημιουργία των ακόλουθων συνθηκών πρώτης τάξης για την εύρεση του ή των στάσιμων σημείων της συνάρτησης Lagrange.
$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$ που είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = f_1(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_1(x_1^*, x_2^*) = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = f_2(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_2(x_1^*, x_2^*) = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(x_1^*, x_2^*) = 0$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα δεσμευμένης μεγιστοποίησης
$\max \quad y = x_1^2 x_2$ υπό τον περιορισμό $100 - x_1 - 2x_2 = 0$

$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 x_2 + \lambda(100 - x_1 - 2x_2) = 0$
Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 x_2 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_1^2 - 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 100 - x_1 - 2x_2 = 0$$

Έχουμε $x_1 = 100 - 2x_2$ και $\lambda = 2x_1 x_2 = 2(100 - 2x_2)x_2$ και
$x_1^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow (100 - 2x_2)^2 - 4(100 - 2x_2)x_2 = 0 \Leftrightarrow (100 - 2x_2)(100 - 2x_2 - 4x_2) = 0$
$\Leftrightarrow (100 - 2x_2)(100 - 6x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 50$ ή $x_2 = \frac{50}{3}$
Συνεπώς τα στάσιμα σημεία είναι τα $(0, 50)$ και το $(\frac{200}{3}, \frac{50}{3})$.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα δεσμευμένης ελαχιστοποίησης:

$$\min\ y = x_1 + x_2 \text{ υπό τον περιορισμό } 1 - x_1^{1/2} - x_2 = 0$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$\mathcal{L} = x_1 + x_2 + \lambda(1 - x_1^{1/2} - x_2)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$1 - (\frac{\lambda}{2})x_1^{-1/2} = 0$$
$$1 - \lambda = 0$$
$$1 - x_1^{1/2} - x_2 = 0$$

Έχουμε $\lambda = 1$ από τη δεύτερη εξίσωση και αντικαθιστώντας στην πρώτη $\frac{1}{2}x_1^{-1/2} = 1 \iff x_1^{1/2} = \frac{1}{2} \iff x_1 = \frac{1}{4}$. Συνεπώς $x_1 = \frac{1}{4}$. Αντικαθιστώντας στην τρίτη εξίσωση έχουμε $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ικανές συνθήκες για βέλτιστα

Η περιφραγμένη εσσιανή μήτρα της συνάρτησης Lagrange είναι:

$$H^* = \begin{bmatrix} f_{11} + \lambda^* g_{11} & f_{12} + \lambda^* g_{12} & g_1 \\ f_{21} + \lambda^* g_{21} & f_{22} + \lambda^* g_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα: Αν το $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ δίνει μία στάσιμη τιμή της συνάρτησης Lagrange $\mathcal{L} = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$, τότε το σημείο

- δίνει ένα μέγιστο αν η ορίζουσα της περιφραγμένης εσσιανής $|H^*| > 0$, και
- δίνει ένα ελάχιστο αν η ορίζουσα της περιφραγμένης εσσιανής $|H^*| < 0$

Έλεγχος για το 1ο παράδειγμα

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2, \quad g(x_1, x_2) = 100 - x_1 - 2x_2 = 0$$

$f_1 = 2x_1x_2 - \lambda,\ f_{11} = 2x_2,\ f_{12} = 2x_1$
$f_2 = x_1^2 - 2\lambda,\ f_{21} = 2x_1,\ f_{22} = 0$
$g_1 = -1,\ g_2 = -2,\ g_{11} = 0,\ g_{12} = 0,\ g_{21} = 0,\ g_{22} = 0$

Η περιφραγμένη Εσσιανή είναι:

$$|H^*| = \begin{vmatrix} 2x_2 & 2x_1 & -1 \\ 2x_1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2x_1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2x_2 & -1 \\ 2x_1 & -2 \end{vmatrix} = 4x_1^* + 2(-4x_2^* + 2x_1^*) = 8x_1^* - 8x_2^*.$$

Για το $(\frac{200}{3}, \frac{50}{3})$, $|H^*| = 400 > 0$ άρα έχουμε τοπικό μέγιστο και για το $(0, 50)$, $|H^*| = -400 < 0$ άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Έλεγχος για το 2ο παράδειγμα

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad g(x_1, x_2) = 1 - x_1^{1/2} - x_2 = 0$$

$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_{11} = 0,\ f_{12} = 0,\ f_{21} = 0,\ f_{22} = 0$
$g_1 = -\frac{1}{2}x_1^{-1/2},\ g_2 = -1,\ g_{11} = \frac{1}{4}x_1^{-3/2},\ g_{12} = 0,\ g_{21} = 0,\ g_{22} = 0$

$$|H^*| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}x_1^{-3/2} & 0 & -\frac{1}{2}x_1^{-1/2} \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2}x_1^{-1/2} & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}x_1^{-3/2}$$

το οποίο στο $x_1^* = \frac{1}{4}$ δίνει $|H^*| = -\frac{1}{4}\frac{1}{4}^{-3/2} = -\frac{1}{4}^{-1/2} = -2 < 0.$

Συνεπώς έχουμε όντως ένα τοπικό ελάχιστο στο $x_1^* = \frac{1}{4},\ x_2^* = \frac{1}{2}.$

Παράδειγμα 3

Βρείτε τις διαστάσεις ενός κλειστού κυλινδρικού μεταλλικού κουτιού αναψυκτικού έτσι ώστε να μεγιστοποιείται ο όγκος του και η συνολική του επιφάνεια να είναι ίση με 24π.

Έστω ότι συμβολίζουμε με x_1 την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου, και με x_2 το ύψος του. Τότε ο όγκος του ισούται με $\pi x_1^2 x_2$ ενώ το εμβαδόν της επιφάνειάς του ίσο με $2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2$. Το πρόβλημα ανάγεται στο:

$$\max\ y = \pi x_1^2 x_2 \text{ υπό τον περιορισμό } 2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2 = 24\pi$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$\mathcal{L} = \pi x_1^2 x_2 + \lambda(2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2 - 24\pi)$$

Παράδειγμα 3

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2\pi x_1 x_2 + 2\lambda\pi x_2 + 4\lambda\pi x_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \pi x_1^2 + 2\lambda\pi x_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2 - 24\pi = 0$$

Από τη πρώτη συνθήκη έχουμε: $\lambda = -\frac{x_1 x_2}{2x_1 + x_2}$, ενώ από τη δεύτερη: $\pi x_1(x_1 + 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{x_1}{2}$ (δεν μπορούμε να έχουμε $x_1 = 0$ αφού είναι φυσική ποσότητα), επομένως $-\frac{x_1}{2} = -\frac{x_1 x_2}{2x_1 + x_2} \Rightarrow 2x_2 = 2x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{2}$. Από την τρίτη συνθήκη αντικαθιστώντας το x_1 παίρνουμε: $2\pi \frac{x_2}{2} x_2 + 2\pi \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 - 24\pi = 0 \Rightarrow x_2 = 4$. Αντικαθιστώντας στις υπόλοιπες συνθήκες, παίρνουμε το στάσιμο σημείο:

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 4 \quad \lambda^* = -1$$

Παράδειγμα 3

Ελέγχουμε εάν το σημείο που βρήκαμε αποτελεί μέγιστο της f.
$f_1 = 2\pi x_1 x_2,\ f_2 = \pi x_1^2,\ f_{11} = 2\pi x_2,\ f_{12} = 2\pi x_1,\ f_{21} = 2\pi x_1,\ f_{22} = 0$
$g_1 = 2\pi x_2 + 4\pi x_1,\ g_2 = 2\pi x_1,\ g_{11} = 4\pi,\ g_{12} = 2\pi,\ g_{21} = 2\pi,\ g_{22} = 0$

$$|H^*| = \begin{vmatrix} 2\pi x_2^* + \lambda^* 4\pi & 2\pi x_1^* + \lambda^* 2\pi & 2\pi x_2^* + 4\pi x_1^* \\ 2\pi x_1^* + \lambda^* 2\pi & 0 & 2\pi x_1^* \\ 2\pi x_2^* + 4\pi x_1^* & 2\pi x_1^* & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\pi & 2\pi & 16\pi \\ 2\pi & 0 & 4\pi \\ 16\pi & 4\pi & 0 \end{vmatrix} = 192\pi^3 > 0.$$

Συνεπώς έχουμε ένα τοπικό μέγιστο στο $x_1^* = 2$, $x_2^* = 4$, με μέγιστο όγκο $f(x_1^*, x_2^*) = 16\pi$.

Για πολλές διαστάσεις

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση Lagrange $f(x_1, \cdots, x_n) + \lambda g(x_1, \cdots, x_n)$ έχει μία στάσιμη τιμή στο $(x_1^*, \cdots, x_n^*, \lambda^*)$, τότε το σημείο $(x_1^*, \cdots, x_n^*)$ αποτελεί λύση του ακόλουθου προβλήματος:

1. Να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $f(x_1, \cdots, x_n)$ υπό τον περιορισμό $g(x_1, \cdots, x_n) = 0$ αν οι ακόλουθες διαδοχικές κύριες ελάσσονες της ορίζουσας $|H^*|$ έχουν εναλλασσόμενο πρόσημο ως εξής:
$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} < 0, \cdots$$
με την $|H^*|$ (ολόκληρη) να παίρνει το πρόσημο του $(-1)^n$
2. Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $f(x_1, \cdots, x_n)$ υποκείμενη στον περιορισμό $g(x_1, \cdots, x_n) = 0$ αν οι παραπάνω ηγετικές κύριες ελάσσονες της $|H^*|$ είναι αυστηρά αρνητικές.

Παράδειγμα

Βρείτε τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ υπό τον περιορισμό $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$\mathcal{L} = x_1^2 + x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 + 1 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 4x_2 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = 6x_3 + 2\lambda x_3 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

Παράδειγμα

Από τη 2η εξίσωση έχουμε $4x_2 + 2\lambda x_2 = 0 \Rightarrow 2x_2(2+\lambda) = 0$ οπότε $x_2 = 0$ ή $\lambda = -2$.
Από την 3η εξίσωση έχουμε $6x_3 + 2\lambda x_3 = 0 \Rightarrow 2x_3(3+\lambda)x_3 = 0$ οπότε $x_3 = 0$ ή $\lambda = -3$.
Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:
α) $x_2 = x_3 = 0$ τότε από την 4η εξίσωση έχουμε $x_1^2 + 0 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm 1$ και $\lambda = -\frac{3}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ αντίστοιχα (για $x = 1$ και $x = -1$)
β) $x_2 = 0,\ \lambda = -3$ τότε από την 1η εξίσωση έχουμε $2x_1 + 1 + 2(-3)x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$, και από την 4η εξίσωση: $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 0 + x_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_3 = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$
γ) $\lambda = -2,\ x_3 = 0$ τότε από τη 1η εξίσωση $2x_1 + 1 + 2(-2)x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ και από την 4η εξίσωση: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
Επομένως έχουμε συνολικά τα στάσιμα σημεία $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*)$: $(1, 0, 0, -\frac{3}{2})$, $(-1, 0, 0, -\frac{1}{2})$, $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}, -3\right)$, $\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{\sqrt{15}}{4}, -3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -2\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -2\right)$.

Παράδειγμα

Θα ελέγξουμε εάν τα στάσιμα σημεία που βρήκαμε αποτελούν μέγιστα ή ελάχιστα της f.

$\mathcal{L}_1 = 2x_1 + 1 + 2\lambda x_1$, $\mathcal{L}_2 = 4x_2 + 2\lambda x_2$, $\mathcal{L}_3 = 6x_3 + 2\lambda x_3$, $\mathcal{L}_{11} = 2 + 2\lambda$, $\mathcal{L}_{12} = 0$, $\mathcal{L}_{13} = 0$, $\mathcal{L}_{21} = 0$, $\mathcal{L}_{22} = 4 + 2\lambda$, $\mathcal{L}_{23} = 0$, $\mathcal{L}_{31} = 0$, $\mathcal{L}_{32} = 0$, $\mathcal{L}_{33} = 6 + 2\lambda$, $g_1 = 2x_1$, $g_2 = 2x_2$, $g_3 = 2x_3$.

Υπολογίζουμε τις διαδοχικές κύριες ελάσσονες της ορίζουσας $|H^*|$:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & 2x_1 \\ 0 & 4+2\lambda & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{vmatrix} = -4x_1^2(2\lambda+4) - 4x_2^2(2\lambda+2), \text{ και}$$

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 4+2\lambda & 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 6+2\lambda & 2x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$-16\left(x_3^2(\lambda+2)(\lambda+1) + (\lambda+3)\left(x_1^2(\lambda+2) + x_2^2(\lambda+1)\right)\right)$$

Παράδειγμα

Για κάθε σημείο ξεχωριστά έχουμε για τις διαδοχικές κύριες ελάσσονες της ορίζουσας $|H^*|$:

$$\left(1,0,0,-\tfrac{3}{2}\right):\ \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0,\ \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = -12 < 0$$

$$\left(-1,0,0,-\tfrac{1}{2}\right):\ \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = -12 < 0,\ \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = -60 < 0$$

Παράδειγμα

Για κάθε στάσιμο σημείο ξεχωριστά έχουμε για τις διαδοχικές κύριες ελάσσονες της ορίζουσας $|H^*|$:

$$\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}, -3\right) : \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0, \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = -30 < 0$$

$$\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{\sqrt{15}}{4}, -3\right) : \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0, \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = -30 < 0$$

Παράδειγμα

Για κάθε σημείο ξεχωριστά έχουμε για τις διαδοχικές κύριες ελάσσονες της ορίζουσας $|H^*|$:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -2\right): \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = 6 > 0, \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -2\right): \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = 6 > 0, \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Άρα τα σημεία $(1, 0, 0, -\frac{3}{2})$ και $(-1, 0, 0, -\frac{1}{2})$ είναι τοπικά ελάχιστα, ενώ τα $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}, -3\right)$ και $\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{\sqrt{15}}{4}, -3\right)$ τοπικά μέγιστα.