Μιγαδικοί Αριθμοί - Ολοκληρώματα

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Οκτώβριος 2022

1 Ασκήσεις στους Μιγαδικούς Αριθμούς

1.1 Τριγωνομετρική μορφή Μιγαδικών Αριθμών

α) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον αριθμό $z = 1 + \sqrt{3}i$.
$\theta = atan(\sqrt{3})$. $\theta = \frac{\pi}{3}$. $\rho = \sqrt{1+3} = 2$.
$z = 2(cos(\frac{\pi}{3}) + sin(\frac{\pi}{3})i)$
β) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον αριθμό $z = 1 - \sqrt{3}i$
$\theta = atan(-\sqrt{3})$. $\theta = \frac{5\pi}{3}$. $\rho = 2$.
$z = 2(cos(\frac{5\pi}{3}) + sin(\frac{5\pi}{3})i)$
γ) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον αριθμό $z = 4$.
$z = 4(cos(0) + sin(0)i)$
δ) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον αριθμό $z = -4$.
$z = 4(cos(\pi) + sin(\pi)i)$

1.2 Άλλες ασκήσεις

Αν $|z| = 1$ να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = (x^2 + y^2) = |z|^2$. Όμως $|z| = 1$, συνεπώς $z \cdot \bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$
Να βρείτε τη δύναμη $[2(cos(20^\circ) + isin(20^\circ))]^3$:
Λύση: $8(cos(60^\circ) + isin(60^\circ))$
Να υπολογίσετε την παράσταση $z = (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{-6}$
$\theta = \frac{\pi}{4}$, $R = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$.
Συνεπώς: $z = cos(\frac{-3\pi}{2}) + isin(\frac{-3\pi}{2})$
Αν $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ να υπολογίσετε τον z^{2000}.
$\theta = \frac{\pi}{3}$. $R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$.
Συνεπώς $z^{2000} = cos(\frac{2000\pi}{3}) + isin(\frac{2000\pi}{3}) = cos(\frac{2\pi}{3}) + isin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 Ασκήσεις στα ολοκληρώματα

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int(x^3+sin(x)+cos(x))dx$
$\int(x^3+sin(x)+cos(x))dx = \frac{x^4}{4} - cos(x) + sin(x) + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2+x+1}{x}dx$
$\int \frac{x^2+x+1}{x}dx = \frac{x^2}{2} + x + ln(|x|) + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int 3x\sqrt{x}dx$
$\int 3x\sqrt{x}dx = \int 3x^{\frac{3}{2}}dx = 3\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^3+8}{x+2}dx$
$\frac{x^3+8}{x+2} = x^2 - 2x + 4$. Συνεπώς $\int \frac{x^3+8}{x+2}dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int e^x - \frac{3}{x} + cos(2x)dx$
$\int e^x - \frac{3}{x} + cos(2x)dx = e^x - 3ln(|x|) + \frac{1}{2}sin(2x) + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{cos^2(x)} - \frac{1}{sin^2(x)}dx$
$\int \frac{1}{cos^2(x)} - \frac{1}{sin^2(x)}dx = tan(x) + cot(x) + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+3}{x+2}dx$
$\int \frac{x+3}{x+2}dx = \int \frac{(x+2)+1}{x+2}dx = x + ln(|x+2|) + C$
Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^{''}(x) = 3, f^{'}(1) = 6$ και $f(0) = 4$.
$f^{'}(x) = 3x + C_1$ $f^{'}(1) = 6$ συνεπώς $C_1 = 3$ και $f^{'}(x) = 3x + 3$
Άρα $f(x) = 3\frac{x^2}{2} + 3x + C_2$. Όμως $f(0) = 4$, άρα $C_2 = 4$ και $f(x) = 3\frac{x^2}{2} + 3x + 4$.

2.1 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int x^2e^{-x}dx$.
$\int x^2e^{-x}dx = -\int x^2(e^{-x})^{'}dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx =$
$-x^2e^{-x} - 2\int x(e^{-x})^{'}dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx =$
$-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int lnxdx$.
$\int lnxdx = \int(x)^{'}lnxdx = xlnx - \int x\frac{1}{x}dx = xlnx - x + C$

2.2 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$
$\Delta = 9 - 8 = 1$ $r_{1,2} = \frac{3\pm1}{2}$, $r_1 = 2, r_2 = 1$ $\frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}$. $A + B = 2$. $-2A - B = -3 \iff 2A + B = 3$, $B = 2 - A$, $2A + 2 - A = 3 \iff A = 1$ και συνεπώς $B = 1$.
Συνεπώς $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}dx = ln(|x-1|) + ln(|x-2|) + C$