Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 9

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

Θέματα 9ης διάλεξης

- Γραμμικές εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης
- Ομογενής μορφή
- Γενική λύση εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης
- Σταθερή κατάσταση και σύγκλιση
- Γραμμικές εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης με μεταβλητό όρο

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης

Ορισμός: Η γενική μορφή της **γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης** είναι:

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = b, \; t = 0, 1, 2, \cdots$$

Η εξίσωση αυτή είναι:

- Γραμμική επειδή οι όροι y_t, y_{t+1} και y_{t+2} είναι υψωμένοι στην πρώτη δύναμη.
- Δεύτερης τάξης επειδή η μεγαλύτερη διαφορά που εμφανίζεται στην εξίσωση είναι διαφορά δύο περιόδων.
- Αυτόνομη επειδή έχει σταθερούς συντελεστές, a_1 και a_2 και έναν σταθερό όρο, τον b.

Αν οι συντελεστές ή ο όρος b μεταβαλλόταν μαζί με το t τότε η εξίσωση θα ήταν μη αυτόνομη.

Ορισμοί

Ορισμός: Η **ομογενής μορφή** της γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης είναι:

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0, \ t = 0, 1, 2, \cdots$$

Ορισμός: Η **χαρακτηριστική εξίσωση** της γραμμικής εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι:

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0$$

Οι τιμές του r που επαληθεύουν τη χαρακτηριστική εξίσωση ονομάζονται **ρίζες** ή **ιδιοτιμές** ή **χαρακτηριστικές ρίζες** της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Θεώρημα

Για μια γραμμική, αυτόνομη εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης της μορφής

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = b,$$

εάν η y_p είναι μία **μερική λύση** (όπως η λύση της σταθερής κατάστασης) και y_h είναι η γενική λύση της **ομογενούς μορφής** της εξίσωσης, τότε η **γενική λύση** της πλήρους εξίσωσης διαφορών δίνεται από την:

$$y_t = y_h + y_p,$$

όπου χάριν ευκολίας έχουμε παραλείψει τους δείκτες t στα y_p και y_h.

Θεώρημα

Θεώρημα: Η γενική λύση της ομογενούς μορφής της γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης δίνεται από τη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ ως εξής (όπου $\Delta = a_1^2 - 4a_2$):

- Αν $\Delta > 0$ (**άνισες πραγματικές ρίζες**) τότε:

$$y_h = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t$$

- Αν $\Delta = 0$ (**ίσες πραγματικές ρίζες**) τότε:

$$y_h = C_1 r^t + C_2 t r^t$$

όπου C_1 και C_2 είναι σταθερές (οι τιμές των οποίων θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες αν δοθούν) και r_1 και r_2 δίνονται από την $r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, ενώ στη περίπτωση που $\Delta = 0$ έχουμε $r = \frac{-a_1}{2}$.

Θεώρημα (Συνέχεια)

- Αν $\Delta < 0$ (**μιγαδικές ρίζες**), τότε

$$y_h = a_2^{\frac{t}{2}}(C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t))$$

τα C_1 και C_2 είναι σταθερές (οι τιμές των οποίων θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες αν δοθούν) και το θ μπορεί να προσδιοριστεί από τις σχέσεις:

$$\cos\theta = \frac{-a_1}{2\sqrt{a_2}}, \text{ ή } \sin\theta = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2\sqrt{a_2}}.$$

Θεώρημα: Εάν η μιγαδική ρίζα είναι της μορφής $h \pm iv$, τότε το μέτρο των ριζών είναι $R = \sqrt{h^2 + v^2}$ ενώ το θ μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια των δύο ακόλουθων σχέσεων:

$$\cos(\theta) = \frac{h}{R}, \sin(\theta) = \frac{v}{R}$$

Απόδειξη

Δοκιμάζουμε τη μορφή $y_t = Ar^t$ όπου A είναι μία σταθερά. Τότε έχουμε $y_{t+1} = Ar^{t+1}$ και $y_{t+2} = Ar^{t+2}$. Αντικαθιστώντας στην ομογενή μορφή της εξίσωσης έχουμε:

$$Ar^{t+2} + a_1 Ar^{t+1} + a_2 Ar^t = 0$$

Παραγοντοποιώντας παίρνουμε:

$$(r^2 + a_1 r + a_2)Ar^t = 0$$

Η προτεινόμενη λύση θα επαληθεύει την εξίσωση αν επιλέξουμε τιμές για το r που ικανοποιούν τη δευτεροβάθμια εξίσωση $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ (αφού αποκλείσουμε τις μηδενικές λύσεις $r = 0$ και $A = 0$). Αυτή είναι η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών.

Απόδειξη

Περίπτωση $\Delta > 0$: Υποθέτουμε ότι οι δύο ρίζες που επαληθεύουν τη χαρακτηριστική εξίσωση είναι διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί. Τότε στην ουσία έχουμε βρει δύο λύσεις που ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση. Αυτές είναι:

$$y_t^{(1)} = A_1 r_1^t \text{ και } y_t^{(2)} = A_2 r_2^t$$

Ας επιβεβαιώσουμε ότι η $y_t^{(1)}$ είναι μία λύση της ομογενούς εξίσωσης (όμοια για την $y_t^{(2)}$). Με δεδομένη την $y_t^{(1)}$ προκύπτει:

$$y_{t+1}^{(1)} = A_1 r_1^{t+1} \text{ και } y_{t+2}^{(1)} = A_1 r_1^{t+2}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην ομογενή εξίσωση προκύπτει

$$y_{t+2}^{(1)} + a_1 y_{t+1}^{(1)} + a_2 y_t^{(1)} =$$

$$A_1 r_1^{t+2} + a_1 A_1 r_1^{t+1} + a_2 A_1 r_1^t =$$

$$A_1 r_1^t (r_1^2 + a_1 r_1 + a_2) = 0$$

Απόδειξη

Η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή γνωρίζουμε ότι η r_1 ικανοποιεί τη χαρακτηριστική εξίσωση. Επομένως η $y_t^{(1)}$ ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση και είναι μία λύση.

Περίπτωση $\Delta = 0$: Αν $r_1 = r_2 = r$ οι δύο διαφορετικές λύσεις είναι:

$$y_t^{(1)} = A_1 r^t \text{ και } y_t^{(2)} = A_2 t r^t$$

Είναι δυνατόν να επαληθέυσουμε ότι και οι δύο αυτές είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης με αντικατάσταση όπως κάναμε νωρίτερα. Θα το κάνουμε για τη δεύτερη λύση. Λόγω του ότι $y_t^{(2)} = A_2 t r^t$, έχουμε

$$y_{t+1}^{(2)} = A_2(t+1)r^{t+1} \text{ και } y_{t+2}^{(2)} = A_2(t+2)r^{t+2}$$

Απόδειξη

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην ομογενή εξίσωση έχουμε:

$$y_{t+2}^{(2)} + a_1 y_{t+1}^{(2)} + a_2 y_t^{(2)} =$$

$$A_2(t+2)r^{t+2} + a_1 A_2(t+1)r^{t+1} + a_2 A_2 t r^t =$$

$$A_2 r^t((t+2)r^2 + a_1(t+1)r + a_2 t) =$$

$$A_2 r^t(t(r^2 + a_1 r + a_2) + r(2r + a_1))$$

Επειδή το r επαληθεύει τη χαρακτηριστική εξίσωση έχουμε $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$, ενώ επειδή στην περίπτωση όπου $\Delta = 0 \Rightarrow r = -a_1/2$ προκύπτει ότι:

$$A_2 r^t(t(r^2 + a_1 r + a_2) + r(2r + a_1)) =$$

$$A_2 r^t(0 + 0) = 0$$

Συνεπώς, η παραπάνω εξίσωση δίνει μηδέν.

Απόδειξη

Περίπτωση $\Delta < 0$: Αν η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι αρνητική ($a_1^2 - 4a_2 < 0$) τότε πάλι μπορούμε να βρούμε μία λύση. Η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης θα έχει τη μορφή:

$$r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(-1)(4a_2 - a_1^2)}}{2} = \frac{-a_1 \pm i\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας την έννοια της φανταστικής μονάδας, οι ρίζες μπορούν να γραφούν ως συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί:

$$r_{1,2} = h \pm vi$$

όπου $h = \frac{-a_1}{2}$, $v = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$. Η λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών παίρνει τη μορφή:

$$y_h = c_1(h + vi)^t + c_2(h - vi)^t$$

Απόδειξη

Για να μπορούμε να ερμηνεύσουμε πιο εύκολα την εξίσωση $y_h = c_1(h+vi)^t + c_2(h-vi)^t$ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί με πολική ή τριγωνομετρική μορφή ως:

$$h \pm vi = R(\cos(\theta) \pm i \sin(\theta))$$

όπου $R = \sqrt{h^2 + v^2}$ είναι το *μέτρο* ή η *απόλυτη τιμή* των μιγαδικών ριζών και $\cos(\theta) = h/R$ και $\sin(\theta) = v/R$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το *θεώρημα de Moivre* για να φέρουμε την εξίσωση σε μία έκφραση που ερμηνεύεται πιο εύκολα. Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα:

$$(R(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = R^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Απόδειξη

Επομένως η εξίσωση γράφεται

$$y_h = c_1 R^t(\cos(\theta t) + i\sin(\theta t)) + c_2 R^t(\cos(\theta t) - i\sin(\theta t))$$

Αυτό μπορεί να απλοποιηθεί ακόμη περισσότερο αν λάβουμε υπόψη ότι

$$R = (h^2 + v^2)^{1/2} = \left(\frac{a_1^2}{4} + \frac{4a_2 - a_1^2}{4}\right)^{1/2} = {a_2}^{1/2}$$

Με αναγωγή όμοιων όρων και ορίζοντας καινούριες σταθερές C_1, C_2 που αντικαθιστούν τις c_1, c_2 της παραπάνω εξίσωσης, βρίσκουμε τη λύση για την ομογενή μορφή της γραμμικής εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης στην περίπτωση μιγαδικών ριζών:

$$y_h = a_2^{t/2}(C_1\cos(\theta t) + C_2\sin(\theta t))$$

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η ακόλουθη εξίσωση διαφορών.

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = 0, \ t = 0, 1, 2, \cdots$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 6r + 8 = 0$. Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$ και οι ρίζες 4 και 2.
Σύμφωνα με το θεώρημα η γενική λύση είναι:

$$y_t = C_1 2^t + C_2 4^t$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση έχουμε:
$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t =$
$C_1(2^{t+2} - 6(2^{t+1}) + 8(2^t)) + C_2(4^{t+2} - 6(4^{t+1}) + 8(4^t)) =$
$C_1 2^t(2^2 - 6(2) + 8) + C_2 4^t(4^2 - 6(4) + 8) = 0.$
Επομένως η εξίσωση που βρήκαμε είναι μία λύση της εξίσωσης.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 4r + 4 = 0$ με $\Delta = 16 - 16 = 0$.
Άρα η χαρακτηριστική ρίζα είναι $r = \frac{4}{2} = 2$.
Σύμφωνα με το θεώρημα η γενική λύση είναι:

$$y_t = C_1 2^t + C_2 t 2^t$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση έχουμε:
$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t =$
$C_1 2^{t+2} + C_2(t+2)2^{t+2} - 4\left(C_1 2^{t+1} + C_2(t+1)2^{t+1}\right) + 4(C_1 2^t + C_2 t 2^t) =$
$2^t\left(4C_1 + 4tC_2 + 8C_2 - 8C_1 - 8tC_2 - 8C_2 + 4C_1 + 4tC_2\right) = 0$
Επομένως η εξίσωση που βρήκαμε είναι μία λύση της εξίσωσης.

Παράδειγμα 3

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 2r + 2 = 0$ με $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$.
Άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι $r_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$.
Το μέτρο των ριζών είναι $R = \sqrt{2}$ και η γωνία $cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$. Συνεπώς:

$$y_t = 2^{t/2} \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right) \right)$$

Η πλήρης λύση

Η πλήρης λύση προκύπτει αν προσθέσουμε στη γενική λύση της *ομογενούς* μορφής και μία *μερική* λύση της εξίσωσης διαφορών.
Για τις αυτόνομες εξισώσεις διαφορών η μερική λύση που αναζητούμε είναι η τιμή της σταθερής κατάστασης της y. Αυτή προκύπτει όταν η y_t γίνει στάσιμη, πράγμα που σημαίνει ότι $y_{t+2} = y_{t+1} = y_t$, την οποία όπως και πριν συμβολίζουμε $\bar{y}$.
Θέτοντας $y_{t+2} = y_{t+1} = y_t = \bar{y}$ έχουμε:

$$\bar{y} + a_1\bar{y} + a_2\bar{y} = b$$

Επιλύοντας έχουμε:

$$\bar{y} = \frac{b}{1+a_1+a_2},\ a_1 + a_2 \neq -1$$

Αν $a_1 + a_2 = -1$ τέτοια τιμή δεν υπάρχει. Σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να βρούμε μία εναλλακτική μερική λύση και να βρούμε τη γενική λύση. Η λύση που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτήν την περίπτωση είναι η $y_p = At$, όπου A είναι μία σταθερά χρησιμοποιώντας μία μέθοδο που θα προσδιορίσουμε παρακάτω.

Η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης διαφορών

Η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης διαφορών

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = b,$$

όταν $a_1 + a_2 \neq -1$, είναι η εξής:

- Αν $\Delta > 0$ (πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες):
  $y_t = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t + \frac{b}{1+a_1+a_2}$
- Αν $\Delta = 0$ (πραγματικές και ίσες ρίζες):
  $y_t = C_1 r^t + C_2 t r^t + \frac{b}{1+a_1+a_2}$
- Αν $\Delta < 0$ (μιγαδικές ρίζες):
  $y_t = R^t(C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t)) + \frac{b}{1+a_1+a_2}$

όπου C_1 και C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές, τα r_1, r_2 οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης και τα R, θ το μέτρο και η γωνία του μιγαδικού αριθμού που προκύπτει στην περίπτωση μιγαδικών ριζών.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών:

$$2y_{t+2} + 8y_{t+1} + 6y_t = 32.$$

με αρχικές τιμές $y_0 = 1$ και $y_1 = 2$.

Διατυπώνουμε την εξίσωση διαφορών στη συνήθη μορφή της

$$y_{t+2} + 4y_{t+1} + 3y_t = 16$$

Η ομογενής μορφή αυτής της εξίσωσης διαφορών είναι η

$$y_{t+2} + 4y_{t+1} + 3y_t = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 + 4r + 3 = 0$$

με διακρίνουσα $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$ και ρίζες $r_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$ άρα $r_1 = -1$ και $r_2 = -3$.

Παράδειγμα 1

Η μερική λύση ισορροπίας προκύπτει λύνοντας την:

$$\bar{y} + 4\bar{y} + 3\bar{y} = 16$$

που δίνει $\bar{y} = 2$.
Συνεπώς, η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

$$y_t = C_1(-1)^t + C_2(-3)^t + 2$$

Για $t = 0$ η λύση γίνεται $y_0 = C_1 + C_2 + 2 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = -1$, ενώ για $t = 1$ έχουμε $y_1 = -C_1 - 3C_2 + 2 = 2 \Rightarrow -C_1 - 3C_2 = 0$. Επιλύοντας αυτό το γραμμικό σύστημα παίρνουμε $C_1 = -\frac{3}{2}$ και $C_2 = \frac{1}{2}$, επομένως η λύση της εξίσωσης διαφορών είναι:

$$y_t = -\frac{3}{2}(-1)^t + \frac{1}{2}(-3)^t + 2$$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών:

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 10$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης διαφορών είναι η:

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

$\Delta = 4 - 8 = -4$ και $r_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$
Υπολογίζουμε $R = \sqrt{2}$ και $\theta = \frac{\pi}{4}$. Η λύση ισορροπίας προκύπτει λύνοντας την:

$$\bar{y} - 2\bar{y} + 2\bar{y} = 10$$

που δίνει $\bar{y} = 10$. Συνεπώς, η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης είναι η:

$$y_t = 2^{t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 10$$

Παράδειγμα 2

Στην προηγούμενη εξίσωση να προσδιοριστούν οι σταθερές ώστε οι λύσεις να ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $y_0 = 1$ και $y_1 = 2$.

- Για $t = 0$ έχουμε $1 = C_1 + 10$ από όπου προκύπτει $C_1 = -9$.
- Για $t = 1$ έχουμε $2 = \sqrt{2}(C_1 \cos(\frac{\pi}{4}) + C_2 \sin(\frac{\pi}{4})) + 10 \Rightarrow$ $2 = \sqrt{2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\right) + 10 \Rightarrow -8 = -9 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$.

Συνεπώς, η λύση παίρνει τη μορφή:

$$y_t = 2^{t/2}\left(-9\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 10$$

Σταθερή κατάσταση και σύγκλιση

Θεώρημα: Η διαδρομή της y_t σε μία γραμμική, αυτόνομη εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης συγκλίνει προς την τιμή σταθερής κατάστασης $\bar{y}$ από οποιαδήποτε αρχική τιμή, όπου

$$\bar{y} = \frac{b}{1 + a_1 + a_2}$$

αν $a_1 + a_2 \neq -1$ όταν και μόνο όταν οι απόλυτες τιμές και των δύο ριζών είναι μικρότερες από τη μονάδα.

Απόδειξη θεωρήματος για σταθερή κατάσταση και σύγκλιση

Εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις:
Πραγματικές και άνισες ρίζες: Τότε η λύση είναι:

$$y_t = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t + \bar{y}$$

Σε αυτήν την περίπτωση επειδή και η r_1 και η r_2 υψώνονται στην t, καθώς $t \to +\infty$ η λύση συγκλίνει στην σταθερή κατάσταση $\bar{y}$ αν και μόνο αν οι απόλυτες τιμές και των δύο ριζών είναι μικρότερες της μονάδας. Σε αυτήν την περίπτωση οι όροι r_1^t και r_2^t συγκλίνουν στο μηδέν. Σε αντίθετη περίπτωση, καθώς $t \to +\infty$ η y_t απειρίζεται.

Απόδειξη θεωρήματος για σταθερή κατάσταση και σύγκλιση

Πραγματικές και ίσες ρίζες: Τότε η λύση είναι:

$$y_t = C_1 r^t + C_2 t r^t + \bar{y}$$

Αν η ρίζα r είναι κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του 1 είναι σαφές ότι η ρίζα αποκλίνει. Αν η ρίζα r είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερη του 1 τότε ο όρος $C_1 r^t$ συγκλίνει στο μηδέν. Για να υπολογίσουμε το όριο του tr^t μετατρέπουμε τον όρο σε $\frac{t}{r^{-t}}$ και έτσι έχουμε τη μορφή (∞/∞) όταν $|r| < 1$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της παραγώγισης $\frac{da^x}{dx} = a^x \ln(a)$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hospital παίρνουμε $\frac{1}{-r^{-t}\ln(r)}$ που συγκλίνει στο μηδέν.

Απόδειξη θεωρήματος για σταθερή κατάσταση και σύγκλιση

Μιγαδικές ρίζες: Η λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$y_t = R^t(C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t)) + \bar{y}$$

Σε αυτήν τη περίπτωση οι συναρτήσεις $C_1 \cos(\theta t)$ και $C_2 \sin(\theta t)$ είναι φραγμένες κατά απόλυτη τιμή από τα C_1 και C_2 αντίστοιχα. Συνεπώς η σύγκλιση εξαρτάται αποκλειστικά από τον όρο R^t. Αν για το μέτρο των δύο μιγαδικών ριζών ισχύει $|R| < 1$, τότε η y_t συγκλίνει στο $\bar{y}$, διαφορετικά αποκλίνει.

Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για σύγκλιση

Θεώρημα: Η απόλυτη τιμή των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης (για τη γραμμική, αυτόνομη εξίσωση διαφορών 2ης τάξης) είναι μικρότερη από 1, αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες:

i) $1 + a_1 + a_2 > 0$

ii) $1 - a_1 + a_2 > 0$

iii) $a_2 < 1$

Παράδειγμα: Για την εξίσωση $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 10$ έχουμε

i) $1 + a_1 + a_2 = 1 - 2 + 2 = 1 > 0$

ii) $1 - a_1 + a_2 = 1 + 2 + 2 = 5 > 0$

iii) $a_2 = 2 > 1$

επομένως η απόλυτη τιμή των ριζών δεν είναι μικρότερη από 1 ($|1 \pm i| = \sqrt{2} > 1$).

Η γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με μεταβλητό όρο

Όταν ο όρος b δεν είναι σταθερός και είναι συνάρτηση του t (θα τον συμβολίζουμε με b_t), τότε η γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης είναι μη αυτόνομη. Ακόμη και όταν το b είναι σταθερό, δεν υπάρχει λύση σταθερής κατάστασης αν $1 + a_1 + a_2 = 0$.

Υπάρχει μία εναλλακτική τεχνική για την εύρεση σταθερής λύσης. Όταν ο όρος b_t δεν είναι σταθερά, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των **απροσδιόριστων συντελεστών**. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην ικανότητα κάποιου να 'υποθέσει' τη μορφή της μερικής λύσης.

Η γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με μεταβλητό όρο

Περίπτωση 1: Αν η b_t είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς t, τότε υποθέτουμε ότι η μερική λύση είναι και αυτή πολυώνυμο. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι:

$$y_p = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_n t^n$$

όπου τα A_i είναι σταθερές που προσδιορίζουμε.
Περίπτωση 2: Αν η b_t είναι της μορφής k^t όπου k είναι μία σταθερά, τότε υποθέτουμε ότι:

$$y_p = Ak^t$$

όπου A μία σταθερά την οποία προσδιορίζουμε.
Περίπτωση 3: Αν η b_t είναι της μορφής $k^t p_n(t)$, τότε υποθέτουμε ότι:

$$y_p = Ak^t(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_n t^n)$$

Η γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με μεταβλητό όρο

Υπάρχει μία σημαντική εξαίρεση σε αυτές τις κατευθυντήριες γραμμές για τις υποθέσεις σχετικά με τη μορφή των λύσεων.

Αν ένας οποιοσδήποτε όρος της εικαζόμενης μερικής λύσης είναι ταυτόχρονα και όρος της ομογενούς λύσης (αδιαφορώντας για τις σταθερές με τις οποίες είναι πολλαπλασιασμένος) τότε η εικαζόμενη λύση πρέπει να τροποποιηθεί ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε την υποτιθέμενη λύση με t^k, όπου k είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος, έτσι ώστε να μην έχουμε κοινούς όρους.

Παράδειγμα 1

Να επιλυθεί η εξίσωση

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 10$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 3r + 2 = 0$ και έχει ρίζες το 1 και το 2.
Συνεπώς, η λύση για την ομογενή μορφή είναι:

$$y_h = C_1 2^t + C_2$$

Θέλουμε να βρούμε μία μερική λύση, αλλά παρατηρούμε ότι $1 + a_1 + a_2 = 1 - 3 + 2 = 0$. Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των απροσδιορίστων συντελεστών.
Επειδή η b_t σε αυτήν την περίπτωση είναι μία σταθερά ($b_t = 10$), πρώτα θα δοκιμάσουμε μια μερική λύση αυτής της μορφής, δηλαδή $y_p = A$. Όμως, αυτή είναι όμοια με τον όρο C_2 της ομογενούς λύσης, γιαυτό και θα δοκιμάσουμε τη λύση $y_p = At$.

Παράδειγμα 1

Η μερική λύση πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών και αυτό το χρησιμοποιούμε για να λύσουμε ως προς A.

$$A(t+2) - 3A(t+1) + 2At = 10$$

Επιλύοντας παίρνουμε $A(t+2-3t-3+2t) = 10 \Leftrightarrow A = -10$
Συνεπώς η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης είναι

$$y_t = C_1 2^t + C_2 - 10t$$

Παράδειγμα 2

> Να επιλυθεί η εξίσωση
>
> $$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 1 + t$$

Η ομογενής λύση είναι η ίδια με του προηγούμενου παραδείγματος ($y_h = C_1 2^t + C_2$). Η αρχική μας υπόθεση για τη μερική λύση είναι:

$$y_p = A_0 + A_1 t$$

Όμως η εικαζόμενη λύση έχει έναν όρο κοινής μορφής με την ομογενή λύση. Συνεπώς, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη δοκιμαστική λύση με t για να πάρουμε:

$$y_p = A_0 t + A_1 t^2$$

Παράδειγμα 2

Αυτή η δοκιμαστική λύση δεν έχει κοινούς όρους με τη λύση της ομογενούς και συνεπώς μπορούμε να την αντικαταστήσουμε στην πλήρη εξίσωση διαφορών:

$$(A_0(t+2) + A_1(t+2)^2) - 3(A_0(t+1) + A_1(t+1)^2) + 2(A_0 t + A_1 t^2) = 1 + t$$

$\Leftrightarrow (A_0 t + 2A_0 + A_1 t^2 + 4A_1 + 4A_1 t) - 3(A_0 t + A_0 + A_1 t^2 + A_1 + 2A_1 t) + 2(A_0 t + A_1 t^2) = 1 + t$
$\Leftrightarrow (2A_0 + 4A_1 - 3A_0 - 3A_1) + t(A_0 + 4A_1 - 3A_0 - 6A_1 + 2A_0) + (A_1 - 3A_1 + 2A_1)t^2 = 1 + t$
$\Leftrightarrow (A_1 - A_0) + t(-2A_1) + (0)t^2 = 1 + t$. Συνεπώς $A_1 = -\frac{1}{2}$ και $A_0 = -\frac{3}{2}$.
Επομένως η πλήρης λύση της εξίσωσης διαφορών είναι:

$$y_t = C_1 2^t + C_2 - \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^2$$

Παράδειγμα 3

Να επιλυθεί η εξίσωση

$$y_{t+2} - \frac{5}{2}y_{t+1} + y_t = 3^t$$

.

Βρίσκουμε την ομογενή λύση: $\Delta = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} > 0$, άρα οι ρίζες είναι η 2 και 1/2. Η ομογενής λύση είναι

$$y_h = C_1 2^t + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

.

Η αρχική μας υπόθεση για τη μερική λύση είναι:

$$y_p = A3^t$$

Παράδειγμα 3

Αυτή η δοκιμαστική λύση δεν έχει κοινούς όρους με τη λύση της ομογενούς και συνεπώς μπορούμε να την αντικαταστήσουμε στην πλήρη εξίσωση διαφορών: $A3^{t+2} - \frac{5}{2}A3^{t+1} + A3^{t} = 3^{t} \Leftrightarrow A3^{2} - \frac{15}{2}A + A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{2}{5}$

Άρα η πλήρης λύση είναι η:

$$y_t = C_1 2^t + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{2}{5}3^t$$