4^o φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2022

1 Ασκήσεις πάνω στις σειρές

1.1 $1^η$ Άσκηση

Να βρεθεί που συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$:
$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = lim\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

1.2 $2^η$ Άσκηση

Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ συγκλίνει:
Η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x^2}$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός για $x \in [1, +\infty]$.
Έχει παράγωγο $f^{'}(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ και είναι φθίνουσα για $x \in [1, +\infty]$
$\int_{x=1}^{\infty} xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}lim_{t\to+\infty}[e^{-x^2}]_1^t = \frac{1}{2e}$ Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρώματος εφόσον το ολοκλήρωμα της $f(x)$ με $f(n) = ne^{-n^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η αντίστοιχη σειρά.

1.3 $3^η$ Άσκηση

Για ποιες τιμές του λ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$:
$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{\lambda^{n+1}n!}{(n+1)!\lambda^n}| = |\frac{\lambda}{n+1}|$.
$lim|\frac{\lambda}{n+1}| = 0$, συνεπώς αφού το όριο είναι μικρότερο του 1 για όλες τις τιμές του λ, συγκλίνει για όλες τις τιμές του λ.

1.4 $4^η$ Άσκηση

Για ποιες τιμές του λ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n 2^n}{n!}$:
$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{\lambda^{n+1}2^{n+1}n!}{(n+1)!\lambda^n 2^n}| = |\frac{2\lambda}{n+1}|$.
$lim|\frac{2\lambda}{n+1}| = 0$, συνεπώς συνεπώς αφού το όριο είναι μικρότερο του 1 για όλες τις τιμές του λ, συγκλίνει για όλες τις τιμές του λ.

1.5 5^{η} Άσκηση

Για ποιες τιμές του λ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n}$:
$|\frac{\lambda^{2(n+1)}}{\lambda^{2n}}| = |\frac{\lambda^{2n+2}}{\lambda^{2n}}| = |\lambda^2| = \lambda^2$. Για να συγκλίνει η σειρά θα πρέπει αυτή η τιμή να είναι μικρότερη του 1 για $n \to \infty$. Συνεπώς συγκλίνει για $\lambda^2 < 1$.

1.6 6^{η} Άσκηση

Ποια η τέταρτης τάξης προσέγγιση με σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = xsin(x)$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$:
$f(x) = xsin(x)$,
$f^{'}(x) = sin(x) + xcos(x)$,
$f^{''}(x) = cos(x) - xsin(x) + cos(x) = 2cos(x) - xsin(x)$,
$f^{'''}(x) = -2sin(x) - sin(x) - xcos(x) = -3sin(x) - xcos(x)$,
$f^{(4)}(x) = -3cos(x) + xsin(x) - cos(x) = -4cos(x) + xsin(x)$.
Η προσέγγιση είναι: $P_4(x) = 0 + 0 + \frac{2cos(0)x^2}{2!} + 0 - \frac{4cos(0)x^4}{4!} = x^2 - \frac{x^4}{6}$.

1.7 7^{η} Άσκηση

Ποια η δεύτερης τάξης προσέγγιση με σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x cos(x)$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$:
$f(x) = e^x cos(x)$,
$f^{'}(x) = e^x cos(x) - e^x sin(x)$,
$f^{''}(x) = e^x cos(x) - e^x sin(x) - e^x sin(x) - e^x cos(x) = -2e^x sin(x)$.
Η προσέγγιση είναι: $P_2(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + 0 = 1 + x$

1.8 8^{η} Άσκηση

Έστω ότι $P_3(x)$ είναι η τρίτης τάξης προσέγγιση με σειρά Taylor στο σημείο $x_0 = 0$ για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$. Ποιο από είναι το άνω όριο για το σφάλμα αποκοπής στο σημείο $x = 1$ (δηλαδή η μέγιστη απόλυτη διαφορά που μπορεί να προκύψει μεταξύ της τιμής $P_3(1)$ και e^1):
$f^{(4)}(x) = e^x$. $|R_4(x)| \leq \frac{M|x|^4}{4!}$, όπου M ένα άνω φράγμα για την τιμή $|f^{(4)}(x)|$ στο διάστημα $[0,1]$.
Στο διάστημα $[0,1]$, $|x| \leq 1 \iff |x|^4 \leq 1$. $|f^{(4)}(x)| = e^x \leq e$ για $|x| \leq 1$.
Συνεπώς $|R_4(x)| \leq \frac{e}{24}$, για $x \in [0,1]$.

1.9 9^{η} Άσκηση

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{5^n+4}$.
$5^n < 5^n + 4 \implies \frac{7}{5^n} > \frac{7}{5^n+4} \implies 7(\frac{1}{5})^n > \frac{7}{5^n+4}$.
Όμως $\sum_{n=1}^{\infty} 7(\frac{1}{5})^n = 7\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{5})^n$, η οποία σειρά συγκλίνει ως γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{5} < 1$. Συνεπώς, συγκλίνει και η αρχική σειρά.

1.10 10^η Άσκηση

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ισχύει $lim \frac{a_n}{b_n} = lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Εξετάζουμε ως προς τη σύγκλιση την $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Η $\frac{1}{n}$ είναι θετική για $n \geq 1$
Η $f(x) = 1/x$ έχει παράγωγο $f^{'}(x) = -\frac{1}{x^2}$ η οποία είναι αρνητική και συνεπώς είναι φθίνουσα. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = lim_{t \to +\infty} [lnx]_1^t = +\infty$.
Συνεπώς η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος.
Άρα αποκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

1.11 11^η Άσκηση

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
$a_n > 0, \forall n \geq 1$.
$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \iff a_{n+1} \leq a_n$.
$lim a_n = 0$.
Συνεπώς η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του Leibniz.
Η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει, καθώς σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{+\infty} x^{-1/2} dx = lim_{t \to +\infty} [\frac{x^{1/2}}{1/2}]_1^t = lim_{t \to +\infty} (2t^{1/2} - 2) = +\infty$

1.12 12^η Άσκηση

Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$.
Η δυναμοσειρά είναι γύρω από το $c = -1$.
$\frac{1}{r} = lim \frac{1/(n+1)}{1/n} = lim \frac{n}{n+1} = 1$.
Συνεπώς, η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$.
Η δυναμοσειρά συγκλίνει γύρω από τα $x = r + c = 1 - 1 = 0$ και $x = c - r = -1 - 1 = -2$.
Για $x = 0$ έχουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρώματος έχουμε $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = lim_{t \to +\infty} [lnx]_1^t = +\infty$. Συνεπώς στο $x = 0$ η σειρά αποκλίνει.
Για $x = -2$ έχουμε την εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
$a_n = \frac{1}{n} > 0$. Η a_n είναι φθίνουσα, καθώς $a_{n+1} < a_n$ και $lim a_n = 0$. Συνεπώς, σύμφωνα με το κριτήριο Leibniz συγκλίνει.
Συνεπώς, το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-2, 0)$.