Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 2

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Οκτώβριος 2022

Θέματα 2ης διάλεξης

- Συναρτήσεις, εικόνα συνάρτησης και αντίστροφη συνάρτηση
- Κυρτότητα συναρτήσεων
- ϵ-περιοχές
- Παράγωγος συνάρτησης
- Διαφορικό

Εικόνα συνόλου μέσω συνάρτησης f

Ορισμός: Όταν έχουμε δύο σύνολα X και Y, η **συνάρτηση** (function) από το X στο Y είναι ένας κανόνας που συνδέει με κάθε στοιχείο του X, ένα και μόνο στοιχείο του Y.

- Το σύνολο X ονομάζεται σύνολο αφετηρίας ή **πεδίο ορισμού** (domain) της συνάρτησης, το Y ονομάζεται **σύνολο άφιξης** (codomain) και το σύνολο των στοιχείων του Y (που μπορεί να είναι ή και να μην είναι ολόκληρο το σύνολο Y) τα οποία συνδέονται με τα στοιχεία του X μέσω της συνάρτησης ονομάζεται **πεδίο τιμών** (range) της συνάρτησης.
- Χρησιμοποιώντας το σύμβολο f για τον κανόνα με τον οποίο συνδέονται τα στοιχεία των δύο συνόλων, μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$f : X \to Y, \ \text{με } y = f(x), x \in X$$

όπου το y συχνά ονομάζεται **εικόνα** (image) του x ή **τιμή** (value) της συνάρτησης f στο σημείο x.

Εικόνα συνόλου μέσω συνάρτησης f

- Το **πεδίο τιμών** ή **εικόνα** του X μίας συνάρτησης μπορεί να εμφανιστεί ως το **σύνολο των εικόνων** (image set):

$$f(X) = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\}$$

- Αν $f(X) = Y$, λέμε ότι η f απεικονίζει το X επί του Y ή ότι η συνάρτηση f είναι **επί**.
- Μπορεί κάθε x να έχει ως εικόνα του ένα διαφορετικό στοιχείο του Y, οπότε η απεικόνιση λέμε ότι είναι *ένα προς ένα*. Για να αποδείξουμε εάν μια συνάρτηση είναι *ένα προς ένα* αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ή ισοδύναμα

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

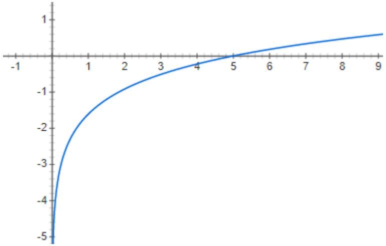
Αντιστροφή συναρτήσεων

- Συχνά μπορεί να θέλουμε να αντιστρέψουμε τη συνάρτηση $y = f(x)$ και να εμφανίσουμε το x ως συνάρτηση του y, δηλαδή $x = f^{-1}(y)$. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν η f **είναι ένα προς ένα**.

- Αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$ ή ισοδύναμα η f είναι ένα προς ένα, για ένα σύνολο $B \subset Y$ ορίζεται η **προεικόνα** του $A = f^{-1}(B)$.

Παράδειγμα προεικόνας συνόλου

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την προεικόνα του συνόλου $B = [1, 2]$ για τη συνάρτηση $f(x) = 5e^x$.
Αρχικά θα βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f:
$y = 5e^x \iff \frac{y}{5} = e^x \iff x = \ln(\frac{y}{5})$ ή $f^{-1}(x) = \ln(\frac{x}{5})$.
Εάν αντικαταστήσουμε τις ακραίες τιμές για το σύνολο B, αφού η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε ότι η προεικόνα του συνόλου είναι η
$A = \left[f^{-1}(1), f^{-1}(2)\right] = \left[\ln(\frac{1}{5}), \ln(\frac{2}{5})\right]$.



Σχήμα: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\ln\left(\frac{x}{5}\right)$

Κυρτές συναρτήσεις

Η συνάρτηση f είναι **κυρτή** (convex) αν για δύο οποιαδήποτε σημεία του πεδίου ορισμού της x_1 και x_2 ισχύει ότι:

$$f(\bar{x}) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

όπου $\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ και $\lambda \in [0,1]$. Είναι αυστηρά κυρτή αν:

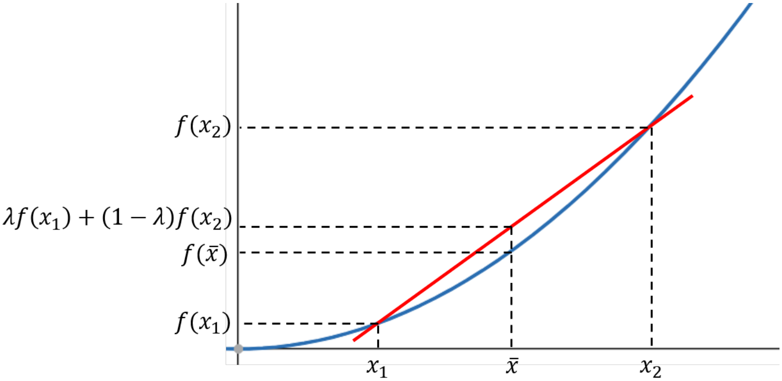
$$f(\bar{x}) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

όταν $\lambda \in (0,1)$.

Αν η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε είναι κυρτή αν $f''(x) \geq 0$ και αυστηρά κυρτή αν $f''(x) > 0$ στην περιοχή που την εξετάζουμε.

Παράδειγμα κυρτής συνάρτησης

$$f(\bar{x}) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),\ \ \bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2,\ \ \lambda \in [0,1]$$



Σχήμα: Παράδειγμα κυρτής συνάρτησης

Κοίλες συναρτήσεις

Η συνάρτηση f είναι **κοίλη** (concave) αν για δύο οποιαδήποτε σημεία του πεδίου ορισμού της x_1 και x_2 ισχύει ότι:

$$f(\bar{x}) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

όπου $\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ και $\lambda \in [0,1]$. Είναι αυστηρά κοίλη αν:

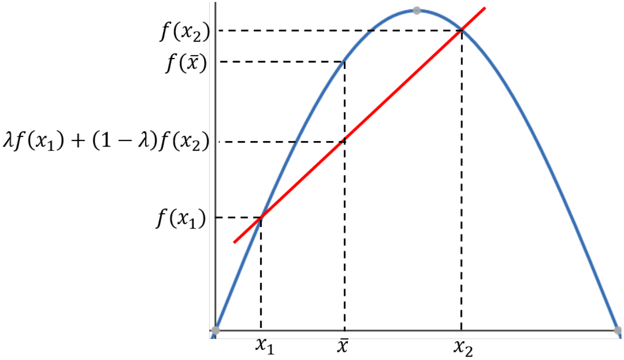
$$f(\bar{x}) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

όταν $\lambda \in (0,1)$.

Αν η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε είναι κοίλη αν $f''(x) \leq 0$ και αυστηρά κοίλη αν $f''(x) < 0$ στην περιοχή που την εξετάζουμε.

Παράδειγμα κοίλης συνάρτησης

$$f(\bar{x}) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \ \ \bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \ \ \lambda \in [0,1]$$



Σχήμα: Παράδειγμα κοίλης συνάρτησης

Παράδειγμα: Απόδειξη ότι η απόλυτη τιμή είναι κυρτή συνάρτηση

Σημειώνουμε ότι δεν μπορεί να χρησιμοποιθεί το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου γιατί η συνάρτηση της απόλυτης τιμής δεν είναι παραγωγίσιμη.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ όπου $\alpha + \beta = 1$. $(\alpha = \lambda, \beta = 1 - \lambda)(\lambda \in [0, 1])$.
Τότε:
$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = |\alpha x_1 + \beta x_2|$
$\leq |\alpha x_1| + |\beta x_2|$ (από την τριγωνική ανισότητα για πραγματικούς αριθμούς)
$= |\alpha||x_1| + |\beta||x_2| = \alpha|x_1| + \beta|x_2| = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$

Άσκηση

Να δειχθεί με δύο τρόπους ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι κυρτή.

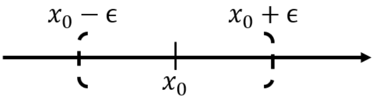
Λύση

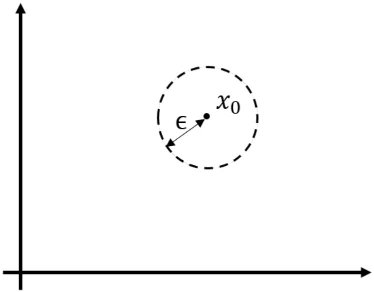
1ος τρόπος: Η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 2 > 0$ συνεπώς είναι κυρτή.

2ος τρόπος:$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \Leftrightarrow$
$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 \leq \lambda {x_1}^2 + (1-\lambda){x_2}^2 \Leftrightarrow$
$\lambda^2 {x_1}^2 + 2x_1x_2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2{x_2}^2 \leq \lambda {x_1}^2 + (1-\lambda){x_2}^2 \Leftrightarrow$
$(\lambda - \lambda^2){x_1}^2 - 2x_1x_2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda-1+2\lambda-\lambda^2){x_2}^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
$(\lambda - \lambda^2){x_1}^2 - 2x_1x_2\lambda(1-\lambda) + (\lambda-\lambda^2){x_2}^2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \geq 0 \Leftrightarrow$
$\lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ που ισχύει.

Περιοχή-ϵ

Η περιοχή-ϵ (ϵ-neighborhood) ενός σημείου $x_0 \in \mathbb{R}^n$ δίνεται από το σύνολο $N_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x_0, x) < \epsilon\}$. Πιο απλά το $N_\epsilon(x_0)$ είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται σε απόσταση ϵ από το x_0.





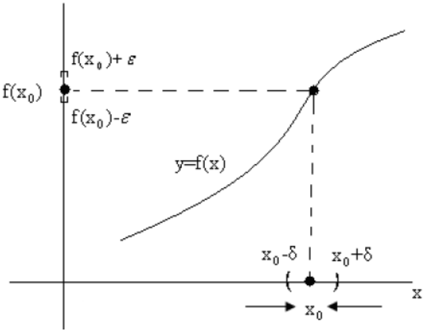
Σχήμα: Περιοχές-ϵ στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^2$

Ανοιχτό σύνολο

Ένα σύνολο $X \subset \mathbb{R}^n$ είναι **ανοιχτό** (open) αν, για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα ϵ έτσι ώστε $N_\epsilon(x) \subset X$.

Συνεχής συνάρτηση

Μία συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται σε ένα ανοιχτό διάστημα στο οποίο ανήκει το σημείο $x = x_0$ είναι συνεχής σε αυτό το σημείο, αν για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, όποτε $|x - x_0| < \delta$.



Σχήμα: Συνέχεια συνάρτησης

Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με $A \subset \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του A αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό $V \subset \mathbb{R}$, η προεικόνα $f^{-1}(V)$ του V είναι ανοικτό σύνολο.

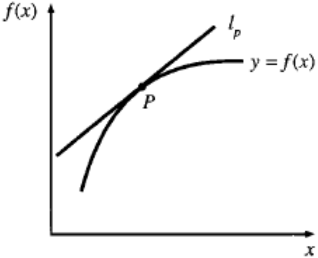
Απόδειξη:
1) "$\Rightarrow$" Έστω f συνεχής στο A και $V \subset \mathbb{R}$ ανοικτό. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(V)$ ανοικτό.
Για κάθε σημείο $c \in f^{-1}(V)$ έχουμε (εξ' ορισμού) ότι $f(c) \in V$.
Επειδή το V είναι ανοικτό, υπάρχει $\epsilon > 0$ έτσι ώστε $N_\epsilon(f(c)) \subset V$. Επειδή η f είναι συνεχής στο c υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$.
Δηλαδή, αν $x \in N_\delta(c)$ τότε $f(x) \in N_\epsilon(f(c)) \subset V$.
Όμως το ότι όλα τα σημεία του $N_\delta(c)$ αντιστοιχίζονται από την f εντός του V σημαίνει ότι όλο το $N_\delta(c)$ περιέχεται στην προ-εικόνα $f^{-1}(V)$ του V. Άρα για κάθε σημείο c του $f^{-1}(V)$, βρήκαμε μία περιοχή-δ η οποία "περιέχεται" στο $f^{-1}(V)$ που σημαίνει ότι το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό.

Απόδειξη Θεωρήματος

2) "$\Leftarrow$" Υποθέτουμε τώρα ότι $f^{-1}(V)$ ανοικτό για κάθε V ανοικτό στο πεδιο τιμών, και θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $c \in A$.
Για $c \in A$ και $\epsilon > 0$ ξέρουμε ότι η περιοχή-ϵ $N_\epsilon(f(c))$ είναι ανοικτό σύνολο στο πεδίο τιμών. Άρα (σύμφωνα με την υπόθεσή μας) και η προ-εικόνα του $f^{-1}(N_\epsilon(f(c))$ είναι ανοικτό σύνολο το οποίο φυσικά περιέχει το c.
Επειδή $c \in f^{-1}(N_\epsilon(f(c))$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $N_\delta(c) \subset f^{-1}(N_\epsilon(f(c))$ γιατί η προ-εικόνα είναι ανοικτό σύνολο σύμφωνα με την αρχική υπόθεσή μας.
Η τελευταία πρόταση μπορεί να γραφτεί και ως $|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon$ το οποίο ισοδυναμεί με την πρόταση ότι η f είναι συνεχής στο c.

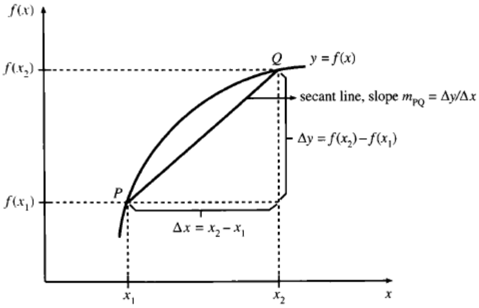
Εφαπτομένη καμπύλης

Η **εφαπτομένη** (tangent) μίας καμπύλης είναι μία ευθεία γραμμή η οποία εφάπτεται ακριβώς στην καμπύλη σε ένα δεδομένο σημείο.



Σχήμα: Η εφαπτομένη μίας καμπύλης στο σημείο P

Τέμνουσα καμπύλης



Σχήμα: Η τέμνουσα μίας καμπύλης

Η διαδικασία καθορισμού του ρυθμού μεταβολής $\Delta y/\Delta x$ γίνεται λαμβάνοντας διαδοχικά όλο και μικρότερες τιμές του Δx. Ο λόγος $\Delta y/\Delta x$ καθώς $\Delta x \to 0$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης. Όταν λαμβάνουμε αυτό το όριο η τέμνουσα ουσιαστικά ταυτίζεται με την εφαπτομένη. Η κλίση της τέμνουσας ανάμεσα στα σημεία P και Q συμβολίζεται ως m_{PQ}.

Ορισμός της παραγώγου

Η **παράγωγος** (derivative) μίας συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο $P = (x_1, f(x_1))$ είναι η κλίση της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

όπου $\Delta x = x_2 - x_1$. Επίσης μπορούμε να γράψουμε:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Η παράγωγος μίας συνάρτησης $f(x)$ γράφεται και ώς $\frac{dy}{dx}$. Διαισθητικά το dy και το dx αντικατοπρίζουν την έννοια των μεταβολών του y και του x, όπως το Δy και το Δx αντίστοιχα. Η έκφρασή $dy = f'(x)dx$ είναι γνωστή ως το διαφορικό της συνάρτησης $f(x)$.

Ολικό διαφορικό σε σημείο

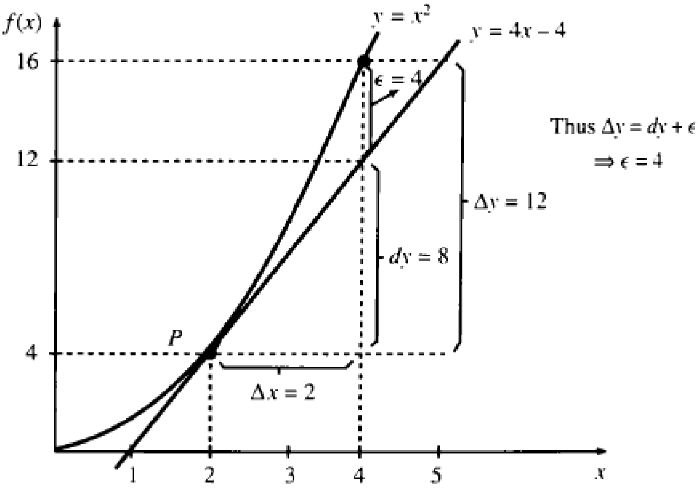
Αν $f^{'}(x_0)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο x_0, τότε το **ολικό διαφορικό** στο σημείο είναι:

$$dy = df(x_0, dx) = f^{'}(x_0)dx$$

Επομένως το διαφορικό είναι συνάρτηση του x και του dx.

Το διαφορικό μας εξασφαλίζει μία μέθοδο εκτίμησης της επίπτωσης που έχει στο y μία μεταβολή του x ίση με Δx. Το Δy είναι η ακριβής μεταβολή του y ενώ το dy είναι η *κατά προσέγγιση* μεταβολή. Με βάση τον ορισμό της παραγώγου, αυτό ισοδυναμεί με το να χρησιμοποιήσουμε την εφαπτομένη μίας συνάρτησης για να εκτιμήσουμε την επίπτωση μίας μεταβολής του x επί του y.

Προσέγγιση με το ολικό διαφορικό



Σχήμα: Η $dy = f^{'}(x)dx$ ως προσέγγιση μίας μεταβολής στο y

Κανόνες παραγώγισης

1ος κανόνας: Παράγωγος μίας σταθερής συνάρτησης

Αν $f(x) = c$, όπου c είναι μία σταθερά, τότε $f^{'}(x) = 0$.

2ος κανόνας: Παράγωγος μίας γραμμικής συνάρτησης

Αν $f(x) = mx + b$, όπου m και b είναι σταθερές, τότε $f^{'}(x) = m$.

3ος κανόνας: Παράγωγος μίας δυναμοσυνάρτησης

Αν $f(x) = x^n$, τότε $f^{'}(x) = nx^{n-1}$.

Κανόνες παραγώγισης

4ος κανόνας: Παράγωγος γινομένου σταθεράς επί συνάρτηση

Αν $g(x) = cf(x)$, με c μία σταθερά, τότε $g^{'}(x) = cf^{'}(x)$.

5ος κανόνας: Παράγωγος του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο συναρτήσεων

Αν $h(x) = g(x) + f(x)$ τότε $h^{'}(x) = g^{'}(x) + f^{'}(x)$. αν $h(x) = g(x) - f(x)$ τότε $h^{'}(x) = g^{'}(x) - f^{'}(x)$.

6ος κανόνας: Παράγωγος αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων

Αν $h(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$ τότε $h^{'}(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i^{'}(x)$.

Κανόνες παραγώγισης

7ος κανόνας: Παράγωγος του γινομένου δύο συναρτήσεων

Αν $h(x) = f(x)g(x)$, τότε $h^{'}(x) = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x)$.

8ος κανόνας: Παράγωγος πηλίκου δύο συναρτήσεων

Αν $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$, τότε $h^{'}(x) = \frac{f^{'}(x)g(x) - f(x)g^{'}(x)}{[g(x)]^2}$.

9ος κανόνας: Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης - αλυσωτός κανόνας

Αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, δηλαδή $y = f(g(x)) = h(x)$, τότε $h^{'}(x) = f^{'}(u)g^{'}(x)$
ή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Κανόνες παραγώγισης

10ος κανόνας: Παράγωγος της αντίστροφης μίας συνάρτησης

Αν η $y = f(x)$ έχει ως αντίστροφη συνάρτηση την $x = g(y)$, δηλαδή αν $g(y) = f^{-1}(y)$ και $f^{'} \neq 0$ τότε:
$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$ ή $g^{'}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ όπου $y = f(x)$.

11ος κανόνας: Παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης

Αν $y = e^x$, τότε $dy/dx = e^x$.

12ος κανόνας: Παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης

Αν $y = \ln x$, τότε $dy/dx = 1/x$.

Παραδείγματα

- $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}\right] = \frac{(x^2-5x+6)\frac{d}{dx}(x^2-2x+1)-(x^2-2x+1)\frac{d}{dx}(x^2-5x+6)}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{(x^2-5x+6)(2x-2)-(x^2-2x+1)(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}$

- $\frac{d}{dx}\left[(3x+1)^2\right] = [2(3x+1)]\frac{d}{dx}[3x+1] = 2(3x+1)3 = 6(3x+1)$

Λογαριθμική παραγώγιση

Λογαριθμική παραγώγιση ονομάζεται η τεχνική κατά την οποία ο υπολογισμός της παραγώγου μίας συνάρτησης $f'(x)$ γίνεται μέσω της παραγώγου του $\ln(f(x))$, εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο της

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x)$$

τότε έχουμε ισοδύναμα:
$y = \sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x) \Leftrightarrow \ln(y) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x)\right) \Leftrightarrow$
$\ln(y) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right) + \ln(\sin^3(x)) + \ln(\cos^2(x))$

Λογαριθμική παραγώγιση (συνέχεια)

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε ισοδύναμα:

$$(\ln(y))' = \left(\ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right) + \ln(\sin^3(x)) + \ln(\cos^2(x))\right)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3}\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}(1-x)' - \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)' + 3\frac{1}{\sin(x)}(\sin(x))' + 2\frac{1}{\cos(x)}(\cos(x))' \Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Leftrightarrow$$

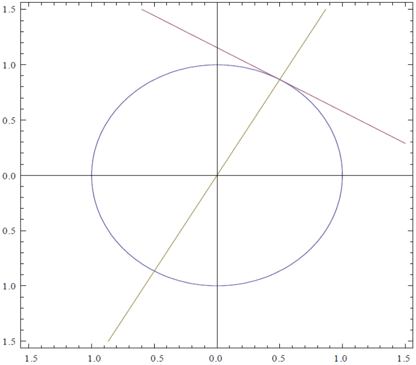
$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot(x) - 2\tan(x) \Leftrightarrow$$

$$y' = y\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot(x) - 2\tan(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$y' = \sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x)\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot(x) - 2\tan(x)\right)$$

Άσκηση

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1, στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ καθώς και την εξίσωση της κάθετης της εφαπτομένης στο σημείο αυτό.



Λύση

Η εξίσωση του κύκλου περιγράφεται από την $x^2 + y^2 = 1$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς x έχουμε:
$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1) \Leftrightarrow 2x\frac{d}{dx}(x) + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1) \Leftrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
Επομένως, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1/2,\sqrt{3}/2)} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$
Η εξίσωση της κάθετης της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, έχει κλίση $\lambda = \frac{-1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$.

Επομένως, η εξίσωσή της είναι: $y = \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}x$