Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 12

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Ιανουάριος 2023

Θέματα 12ης διάλεξης

- Συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης
- Ομογενής λύση
- Πλήρης λύση
- Άμεση μέθοδος
- Ευστάθεια και διαγράμματα φάσης

Συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

Ορισμός: Ένα σύστημα δύο αυτόνομων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ορίζεται ως:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + b_1 \\ \dot{y}_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + b_2 \end{cases}, a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$$

Διαχωρίζουμε το πρόβλημα της εύρεσης των **πλήρων λύσεων** σε δύο μέρη. Πρώτα βρίσκουμε τις **ομογενείς λύσεις** και ύστερα τις **μερικές λύσεις**. Οι πλήρεις λύσεις είναι το άθροισμα των ομογενών και των μερικών λύσεων. Δηλαδή:

$$y_1 = y_1^h + y_1^p$$

$$y_2 = y_2^h + y_2^p$$

όπου y_i είναι η πλήρης λύση, y_i^h είναι η γενική ομογενής λύση της y_i και y_i^p είναι η μερική λύση της y_i.

Η γενική λύση στις ομογενείς μορφές

Ορισμός: Η *ομογενής μορφή του συστήματος δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης είναι*:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 \\ \dot{y}_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 \end{cases}$$

Είναι δυνατό να μετασχηματίσουμε αυτό το σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης σε μία μόνο διαφορική εξίσωση *δεύτερης τάξης* χρησιμοποιώντας συνδυασμό παραγωγίσεων και αντικαταστάσεων.

Η γενική λύση στις ομογενείς μορφές

Παραγωγίζουμε την πρώτη εξίσωση και έχουμε:

$$\ddot{y}_1 = \alpha_{11}\dot{y}_1 + \alpha_{12}\dot{y}_2$$

Χρησιμοποιούμε τη δεύτερη εξίσωση για να αντικαταστήσουμε την $\dot{y}_2$. Αυτό μας δίνει:

$$\ddot{y}_1 = \alpha_{11}\dot{y}_1 + \alpha_{12}(\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2)$$

Επιλύουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y_2:

$$y_2 = \frac{\dot{y}_1 - \alpha_{11}y_1}{\alpha_{12}}$$

υποθέτοντας ότι $\alpha_{12} \neq 0$. Αντικαθιστώντας αυτήν την έκφραση του y_2 έχουμε:

$$\ddot{y}_1 = \alpha_{11}\dot{y}_1 + \alpha_{12}\left(\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}\frac{\dot{y}_1 - \alpha_{11}y_1}{\alpha_{12}}\right)$$

Η γενική λύση στις ομογενείς μορφές

Με απλοποιήσεις και αναδιάταξη των όρων παίρνουμε:

$$\ddot{y}_1 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\dot{y}_1 + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})y_1 = 0$$

Η οποία είναι γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Βρίσκουμε τις λύσεις για το y_1 και οι λύσεις για το y_2 προκύπτουν από την $y_2 = \frac{\dot{y}_1 - \alpha_{11}y_1}{\alpha_{12}}$.

Παράδειγμα

Να λυθεί το ακόλουθο σύστημα ομογενών διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - 3y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{4}y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Παραγωγίζουμε την πρώτη εξίσωση και έχουμε:

$$\ddot{y}_1 = \dot{y}_1 - 3\dot{y}_2$$

Χρησιμοποιούμε τη δεύτερη εξίσωση για να αντικαταστήσουμε το $\dot{y}_2$. Αυτό μας δίνει:

$$\ddot{y}_1 = \dot{y}_1 - 3\left(\frac{1}{4}y_1 + 3y_2\right)$$

Χρησιμοποιούμε την πρώτη εξίσωση για να πάρουμε μία έκφραση για το y_2:

$$y_2 = \frac{y_1 - \dot{y}_1}{3}$$

Παράδειγμα

Συνεπώς:

$$\ddot{y}_1 = \dot{y}_1 - 3\left(\frac{1}{4}y_1 + 3\frac{y_1 - \dot{y}_1}{3}\right)$$

Ισοδύναμα:

$$\ddot{y}_1 - 4\dot{y}_1 + \frac{15}{4}y_1 = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 - 4r + \frac{15}{4} = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 1$ και οι ρίζες $r_{1,2} = \frac{4 \pm 1}{2}$, δηλαδή $r_1 = 3/2$, $r_2 = 5/2$.
Επομένως, η λύση για την y_1 είναι:

$$y_1(t) = C_1 e^{3t/2} + C_2 e^{5t/2}$$

Παράδειγμα

Για να βρούμε την y_2 με βάση την $y_2 = \frac{y_1 - \dot{y}_1}{3}$, υπολογίζουμε την $\dot{y}_1$:

$$\dot{y}_1(t) = \frac{3}{2} C_1 e^{3t/2} + \frac{5}{2} C_2 e^{5t/2}$$

Με βάση την $y_2 = \frac{y_1 - \dot{y}_1}{3}$ έχουμε:

$$y_2(t) = \frac{1}{3} \left(C_1 (1 - 3/2) e^{3t/2} + C_2 (1 - 5/2) e^{5t/2} \right)$$

$$= -\frac{1}{6} C_1 e^{3t/2} - \frac{1}{2} C_2 e^{5t/2}$$

Η λύση της σταθερής κατάστασης ισορροπίας

Ορισμός: Η **λύση σταθερής κατάστασης ισορροπίας** ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων είναι το ζεύγος τιμών $\bar{y}_1$ και $\bar{y}_2$ όπου οι $\dot{y}_1$ και $\dot{y}_2$ είναι ίσες με μηδέν.

Οι πλήρεις λύσεις - Παράδειγμα

Να βρεθεί η πλήρης λύση στο ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - 3y_2 - 5 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{4}y_1 + 3y_2 - 5 \end{cases}$$

Πρώτα διατυπώνουμε το σύστημα στην ομογενή μορφή του:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - 3y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{4}y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Βρήκαμε προηγουμένως ότι:

$$y_1^h(t) = C_1 e^{3t/2} + C_2 e^{5t/2}$$

$$y_2^h(t) = -\frac{1}{6}C_1 e^{3t/2} - \frac{1}{2}C_2 e^{5t/2}$$

Οι πλήρεις λύσεις - Παράδειγμα

Για να βρούμε τις λύσεις ισορροπίας θέτουμε $\dot{y}_1 = 0$ και $\dot{y}_2 = 0$. Συνεπώς έχουμε:

$$\bar{y}_1 - 3\bar{y}_2 - 5 = 0$$

$$\frac{1}{4}\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 - 5 = 0$$

Άρα $\bar{y}_1 = 3\bar{y}_2 + 5$ και συνεπώς:

$$\frac{1}{4}(3\bar{y}_2 + 5) + 3\bar{y}_2 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{15}{4}\bar{y}_2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow$$

$$\bar{y}_2 = 1$$

και $\bar{y}_1 = 8$.

Οι πλήρεις λύσεις - Παράδειγμα

Έτσι, οι πλήρεις λύσεις είναι:

$$y_1(t) = C_1 e^{3t/2} + C_2 e^{5t/2} + 8$$

$$y_2(t) = -\frac{1}{6} C_1 e^{3t/2} - \frac{1}{2} C_2 e^{5t/2} + 1$$

Οι πλήρεις λύσεις - Παράδειγμα

Να βρεθούν οι σταθερές ολοκλήρωσης στο προηγούμενο παράδειγμα ώστε οι λύσεις να ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 1$ και $y_2(0) = 3$.

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$1 = C_1 + C_2 + 8$$
$$3 = -\frac{1}{6}C_1 - \frac{1}{2}C_2 + 1$$

Έχουμε $C_1 = 1 - C_2 - 8$ και αντικαθιστώντας:

$$3 = -\frac{1}{6}(1 - C_2 - 8) - \frac{1}{2}C_2 + 1 \Leftrightarrow$$
$$3 = \frac{1}{6}(C_2 + 7) - \frac{1}{2}C_2 + 1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{5}{6} = -\frac{2}{6}C_2 \Leftrightarrow C_2 = -\frac{5}{2}$$

και $C_1 = -9/2$.

Οι πλήρεις λύσεις - Παράδειγμα

Συνεπώς οι πλήρεις λύσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$y_1(t) = -\frac{9}{2}e^{3t/2} - \frac{5}{2}e^{5t/2} + 8$$

$$y_2(t) = \frac{9}{12}e^{3t/2} + \frac{5}{4}e^{5t/2} + 1$$
$$= \frac{3}{4}e^{3t/2} + \frac{5}{4}e^{5t/2} + 1$$

Η άμεση μέθοδος

Ορισμός: Ένα **γραμμικό σύστημα** με n αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις εκφράζεται με τη μορφή μήτρας ως εξής:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

όπου A είναι μία μήτρα $n \times n$ σταθερών συντελεστών $\mathbf{b}$ είναι ένα διάνυσμα σταθερών όρων $\mathbf{y}$ είναι ένα διάνυσμα n μεταβλητών και $\dot{\mathbf{y}}$ είναι ένα διάνυσμα n παραγώγων.

Η λύση στο πλήρες σύστημα εξισώσεων προκύπτει αθροίζοντας τις *ομογενείς λύσεις* και τις *μερικές λύσεις*. Ξεκινούμε γράφοντας το πλήρες σύστημα στην ομογενή μορφή του:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$$

Η άμεση μέθοδος

Συνεχίζουμε ‘εικάζοντας’ ότι οι ομογενείς λύσεις είναι της μορφής:

$$\mathbf{y} = \mathbf{k}\mathbf{e}^{\mathbf{rt}}$$

όπου $\mathbf{k}$ είναι ένα διάνυσμα n διαστάσεων με σταθερές και r ένα βαθμωτό. Για να διαπιστώσουμε αν αυτή η υπόθεση που κάναμε είναι σωστή, ελέγχουμε αν η εικαζόμενη λύση και η πρώτη παράγωγός της ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Η παράγωγος της λύσης που δοκιμάζουμε είναι:

$$\dot{\mathbf{y}} = r\mathbf{k}e^{rt}$$

Με αντικατάσταση των παραγώγων αυτών και των εικαζόμενων λύσεων στο αρχικό σύστημα εξισώσεων παίρνουμε:

$$r\mathbf{k}e^{rt} = A\mathbf{k}e^{rt}$$

ισοδύναμα:

$$(A - rI)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

όπου I είναι η μοναδιαία μήτρα και $\mathbf{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Η άμεση μέθοδος

Το προηγούμενο σύστημα έχει μη μηδενική λύση, όταν και μόνο όταν η ορίζουσα της μήτρας $[A - rI]$ είναι ίση με το μηδέν. Επομένως οι τιμές των λύσεων για την r προκύπτουν λύνοντας την:

$$|A - rI| = 0$$

που είναι μία πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n ως προς τον άγνωστο r. Αυτή είναι γνωστή ως **χαρακτηριστική εξίσωση** της μήτρας A και οι λύσεις της ονομάζονται χαρακτηριστικές ρίζες ή **ιδιοτιμές** της μήτρας A. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{k}_1$ το οποίο είναι λύση της εξίσωσης $[A - rI]\mathbf{k} = \mathbf{0}$ για μία συγκεκριμένη ιδιοτιμή r_1 ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** της μήτρας A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή r_1.

Παράδειγμα

Να λυθεί το ακόλουθο 2x2 σύστημα διαφορικών εξισώσεων με χρήση της άμεσης μεθόδου:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 4 - r & -1 \\ -4 & 4 - r \end{vmatrix} = 0$$

η οποία γίνεται: $(4 - r)^2 - 4 = 0 \iff 16 + r^2 - 8r - 4 = 0 \iff r^2 - 8r + 12 = 0$, $\Delta = 64 - 48 = 16$, $r_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{2}$ άρα $r_1 = 2$ και $r_2 = 6$.

Παράδειγμα

Για $r_1 = 2$ θέλουμε να υπολογίσουμε μη μηδενικές λύσεις για τα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{bmatrix} 4-2 & -1 \\ -4 & 4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Αυτό μας δίνει $2k_1 - k_2 = 0$. Θέτουμε $k_1 = 1$ που δίνει $k_2 = 2$. Επομένως, το πρώτο σύνολο λύσεων είναι:

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Παράδειγμα

Για $r_2 = 6$ τα ιδιοδιανύσματα είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\begin{bmatrix} 4-6 & -1 \\ -4 & 4-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

που δίνει $-2k_1 - k_2 = 0$. Με $k_1 = 1$ έχουμε $k_2 = -2$ Επομένως, το δεύτερο σύνολο λύσεων είναι:

$$\mathbf{y}^2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{6t}$$

Δεδομένου ότι οι δύο λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, η γενική λύση είναι:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{6t}$$

Θεώρημα

Θεώρημα: Αν ένα ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων έχει ως ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης έναν μιγαδικό αριθμό r, τότε ρίζες του συστήματος αποτελούν το διάνυσμα του πραγματικού και το διάνυσμα του φανταστικού μέρους που προκύπτουν από τα ιδιοδιανύσματα-λύσεις της $[A - rI]\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί το ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}, \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$|A - rI| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-r & -5 \\ 2 & -4-r \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -8 + 2r + r^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow r^2 + 2r + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4$, $r_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$. Συνεπώς $r_1 = -1 + i$ και $r_2 = -1 - i$.

Για $r_1 = -1 + i$ (στην περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις δύο) τα ιδιοδιανύσματα είναι η λύσεις της:

$$\begin{bmatrix} 3-i & -5 \\ 2 & -3-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Παράδειγμα 2

Από την πρώτη γραμμή έχουμε $(3-i)k_1 - 5k_2 = 0$ ή $k_2 = (3-i)k_1/5$. Θέτοντας $k_1 = 5$ έχουμε $k_2 = 3 - i$. Επομένως η πρώτη λύση είναι:

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3-i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t}$$

Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $r_1 = -1 + i$ είναι:

$$k = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix}$$

Η μιγαδική λύση που προκύπτει είναι:

$$y(t) = e^{(-1+i)t} \cdot k = e^{-t}(\cos(t) + i\sin(t)) \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix} \right) =$$

$$e^{-t}(\cos(t) + i\sin(t)) \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

Παράδειγμα 2

Χωρίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος και έχουμε τις δύο βασικές λύσεις του συστήματος:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t} \cos(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} \sin(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 5\cos(t) \\ 3\cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix}$$

$$y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} cos(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t} \sin(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 5\sin(t) \\ -\cos(t) + 3\sin(t) \end{bmatrix}$$

Τελικά, η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$y(t) = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} =$$

$$e^{-t} \left(C_1 \begin{bmatrix} 5\cos(t) \\ 3\cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 5\sin(t) \\ -\cos(t) + 3\sin(t) \end{bmatrix} \right)$$

Οι μερικές λύσεις

Οι λύσεις σταθερής κατάστασης ισορροπίας μας δίνουν τις μερικές λύσεις. Θέτουμε $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ στο πλήρες σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Αυτό μας δίνει:

$$A\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

για το οποίο η λύση είναι:

$$\bar{\mathbf{y}} = -A^{-1}\mathbf{b}$$

υπό τον όρο ότι η αντίστροφη μήτρα A^{-1} υπάρχει.

Παράδειγμα

Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Βρήκαμε προηγουμένως την ομογενή λύση του συστήματος:

$$y^h(t) = e^{-t}\left(C_1 \begin{bmatrix} 5\cos(t) \\ 3\cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 5\sin(t) \\ -\cos(t) + 3\sin(t) \end{bmatrix} \right)$$

Η μερική λύση υπολογίζεται ως

$$y^p(t) = \bar{\mathbf{y}} = -A^{-1}\mathbf{b} = -\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -2 & 5/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Έτσι η πλήρης λύση είναι: $y(t) = y^h(t) + y^p(t) =$

$$e^{-t}\left(C_1 \begin{bmatrix} 5\cos(t) \\ 3\cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 5\sin(t) \\ -\cos(t) + 3\sin(t) \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 9/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ανάλυση ευστάθειας και γραμμικά διαγράμματα φάσης

Οι λύσεις σταθερής κατάστασης ισορροπίας για ένα αυτόνομο σύστημα διαφορικών εξισώσεων λέμε ότι είναι *ευσταθείς* αν το σύστημα *συγκλίνει* προς τις λύσεις αυτές.

Θεώρημα: Η λύση σταθερής κατάστασης ισορροπίας ενός συστήματος γραμμικών, αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι αρνητικές (στην περίπτωση μιγαδικών ριζών αν το πραγματικό μέρος είναι αρνητικό).

Ισορροπία σαγματικού σημείου

Θεώρημα: Αν μία από τις χαρακτηριστικές ρίζες είναι θετική και η άλλη είναι αρνητική, η κατάσταση ισορροπίας ονομάζεται **ισορροπία σαγματικού σημείου**. Είναι ασταθής. Όμως η $y_1(t)$ και η $y_2(t)$ συγκλίνουν προς τις λύσεις της σταθερής τους κατάστασης ισορροπίας αν οι αρχικές συνθήκες για την y_1 και την y_2 ικανοποιούν την παρακάτω εξίσωση:

$$y_2 = \frac{r_1 - \alpha_{11}}{\alpha_{12}}(y_1 - \bar{y}_1) + \bar{y}_2$$

όπου r_1 είναι η αρνητική ρίζα. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (y_1, y_2) που ορίζεται από αύτην την εξίσωση είναι γνωστός ως **σαγματική διαδρομή**.

Διάγραμμα φάσης για δύο αρνητικές ρίζες (Ευσταθής κόμβος)

Έστω οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -2y_1 + 2 \\ \dot{y}_2 = -3y_2 + 6 \end{cases}$$

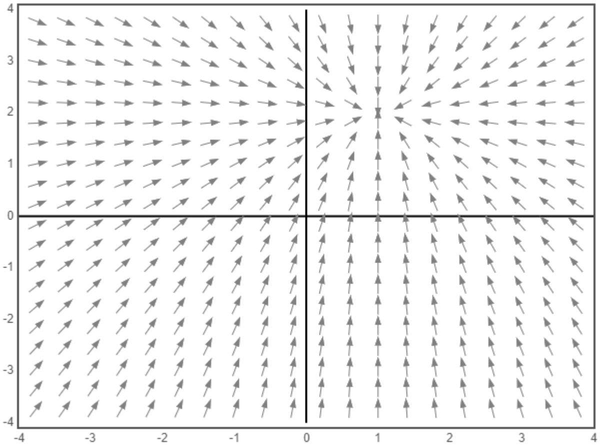
Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη και οι λύσεις είναι

$$y_1(t) = C_1 e^{-2t} + 1$$

$$y_2(t) = C_2 e^{-3t} + 2$$

Διάγραμμα φάσης για δύο αρνητικές ρίζες (Ευσταθής κόμβος)

Το διάγραμμα φάσης είναι:



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης για ευσταθή κόμβο

Διάγραμμα φάσης για δύο θετικές ρίζες (Ασταθής κόμβος)

Έστω οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 - 2 \\ \dot{y}_2 = 3y_2 - 6 \end{cases}$$

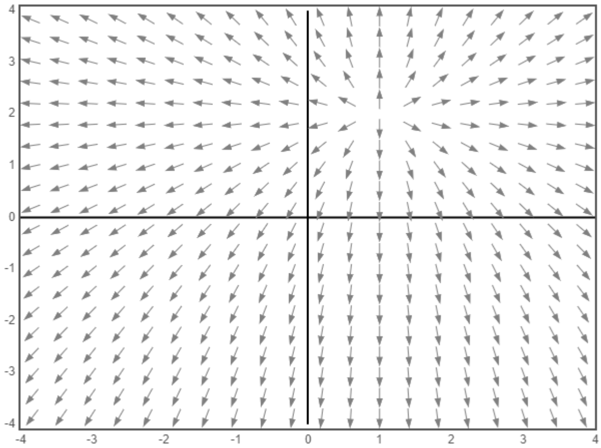
Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη και οι λύσεις είναι

$$y_1(t) = C_1 e^{2t} + 1$$

$$y_2(t) = C_2 e^{3t} + 2$$

Διάγραμμα φάσης για δύο θετικές ρίζες (Ασταθής κόμβος)

Το διάγραμμα φάσης είναι:



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης για ασταθή κόμβο

Διάγραμμα φάσης για ρίζες με αντίθετα πρόσημα (Σαγματικό σημείο)

Έστω οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 - 2 \\ \dot{y}_2 = \frac{y_1}{4} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

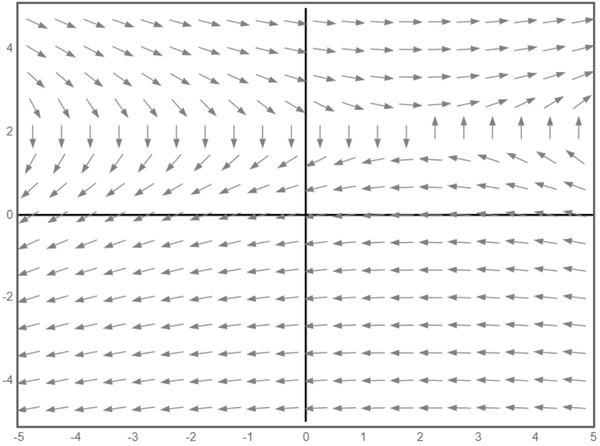
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 0 - r & 1 \\ 1/4 & 0 - r \end{vmatrix}$$

με ρίζες $r_1 = -1/2$ και $r_2 = 1/2$. Δεδομένου ότι οι ρίζες έχουν αντίθετο πρόσημο, η λύση σταθερής κατάστασης είναι μία ισορροπία σαγματικού σημείου.

Διάγραμμα φάσης για ρίζες με αντίθετα πρόσημα (Σαγματικό σημείο)

Το διάγραμμα φάσης είναι:



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης για σαγματικό σημείο

Διάγραμμα φάσης για μιγαδικές ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος (ευσταθής εστία)

Έστω οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_2 + 2 \\ \dot{y}_2 = y_1 - y_2 + 1 \end{cases}$$

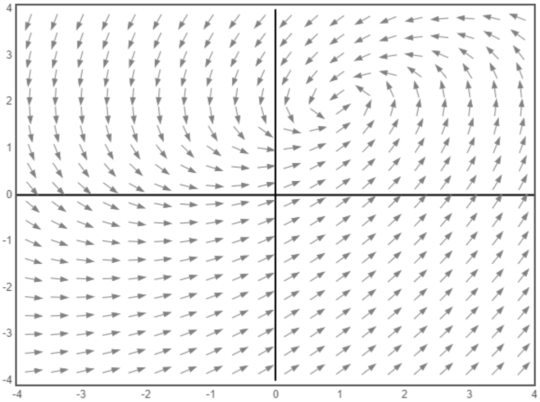
Τότε:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} -r & -1 \\ 1 & -1 - r \end{vmatrix} = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + r + 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3$. Οι ρίζες είναι $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.
Οι λύσεις σταθερής κατάστασης είναι $\bar{y}_1 = 1$ και $\bar{y}_2 = 2$.

Διάγραμμα φάσης για μιγαδικές ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος (ευσταθής εστία)

Το διάγραμμα φάσης είναι:



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης για ευσταθή εστία

Διάγραμμα φάσης για μιγαδικές ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος (ασταθής εστία)

Έστω οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -2y_1 + y_2 \end{cases}$$

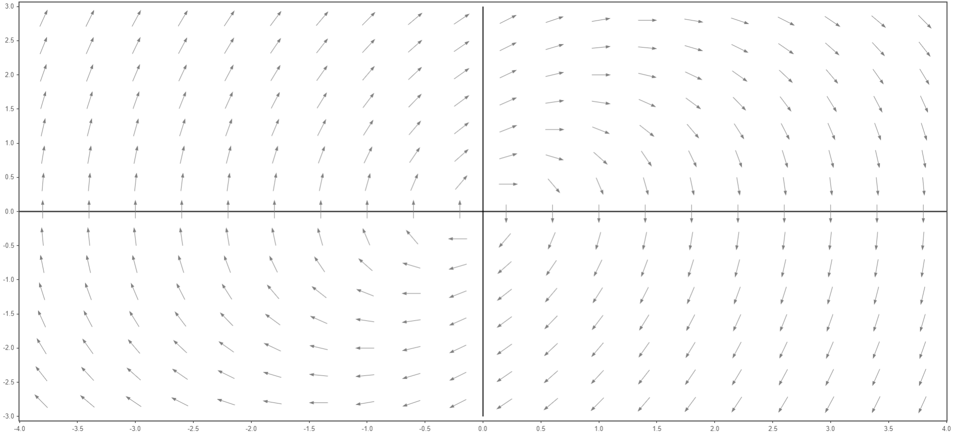
Τότε:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} -r & 1 \\ -2 & 1-r \end{vmatrix} = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - r + 2 = 0$, $\Delta = 1 - 8 = -7$. Οι ρίζες είναι $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$.
Οι λύσεις σταθερής κατάστασης είναι $\bar{y}_1 = 0$ και $\bar{y}_2 = 0$.

Διάγραμμα φάσης για μιγαδικές ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος (ασταθής εστία)

Το διάγραμμα φάσης είναι:



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης για ασταθή εστία

Είδη ισορροπίας

- Εάν $|A| < 0$
  - οι r_1, r_2 ετερόσημοι πραγματικοί τότε έχουμε σαγματικό σημείο
- Εάν $|A| > 0$
  - Εάν $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$
    - $r_1, r_2 < 0$ τότε έχουμε ευσταθή κόμβο
    - $r_1, r_2 > 0$ τότε έχουμε ασταθή κόμβο
    - $r_1 = r_2 < 0$ τότε έχουμε γενικευμένο ευσταθή κόμβο
    - $r_1 = r_2 > 0$ τότε έχουμε γενικευμένο ασταθή κόμβο
  - Εάν $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ (με $\mathrm{Im(r_1)}, \mathrm{Im(r_2)} \neq 0$)
    - $\mathrm{Re}(r_1), \mathrm{Re}(r_2) < 0$ τότε έχουμε ευσταθή εστία
    - $\mathrm{Re}(r_1), \mathrm{Re}(r_2) > 0$ τότε έχουμε ασταθή εστία
    - $\mathrm{Re}(r_1) = \mathrm{Re}(r_2) = 0$ τότε έχουμε κέντρο (δίνη)