Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 6

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2022

Θέματα 6ης διάλεξης

- Θεώρημα Young
- Μέγιστα, Ελάχιστα και Σαγματικά Σημεία
- Κύριες Ελάσσονες
- Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Διαφορίσιμες συναρτήσεις και κλάσεις

Μία συνάρτηση η οποία έχει k παραγώγους ονομάζεται k φορές παραγωγίσιμη. Εάν η k-οστή παράγωγός της είναι και συνεχής, τότε λέμε ότι η f είναι κλάσης C^k.

C^0 είναι η κλάση των συνεχών συναρτήσεων.

Θεώρημα του Young

Για μία συνάρτηση $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης, η σειρά της παραγώγισης κατά τον υπολογισμό των σταυροειδών μερικών παραγώγων είναι χωρίς σημασία.
Δηλαδή $f_{ij} = f_{ji}$ για οποιοδήποτε ζεύγος i, j με $i, j = 1, 2, \cdots, n$ και $i \neq j$ (προφανώς η ισότητα ισχύει και στην οριακή περίπτωση που $i = j$).

Παράδειγμα 1

Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2y^3 + x^4y + xe^y$.

Τότε

$$f_1 = 2xy^3 + 4x^3y + e^y$$
$$f_2 = 3x^2y^2 + x^4 + xe^y$$

και

$$f_{12} = 6xy^2 + 4x^3 + e^y$$
$$f_{21} = 6xy^2 + 4x^3 + e^y$$

Συνεπώς $f_{12} = f_{21}$.

Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 x_3$.

Τότε
$f_1 = 2x_1 + x_2 x_3$
$f_2 = 2x_2 + x_1 x_3$
$f_3 = 2x_3 + x_1 x_2$
και
$f_{12} = x_3$
$f_{21} = x_3$
$f_{13} = x_2$
$f_{31} = x_2$
$f_{23} = x_1$
$f_{32} = x_1$.
Συνεπώς $f_{12} = f_{21}$, $f_{13} = f_{31}$ και $f_{23} = f_{32}$.

Βελτιστοποίηση Συναρτήσεων n μεταβλητών

Μία στάσιμη τιμή συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}^n$ παρουσιάζεται σε ένα σημείο $(x_1^*, \cdots x_n^*)$ όπου αληθεύουν ταυτόχρονα οι ισότητες:

$$
\begin{gathered}
f_1(x_1^*, \cdots, x_n^*) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_n(x_1^*, \cdots, x_n^*) = 0
\end{gathered}
$$

ή

$$\nabla f(x_1^*, \cdots, x_n^*) = 0$$

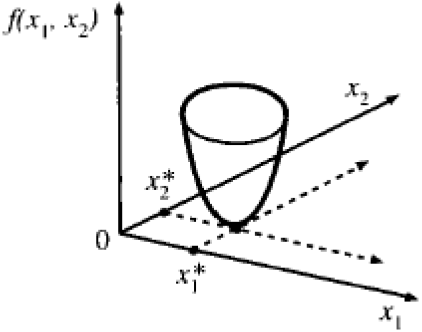
Βελτιστοποίηση Συναρτήσεων n μεταβλητών

Όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων με μία μεταβλητή, δεν είναι απαραίτητο όλα τα στάσιμα σημεία να δίνουν ακρότατες τιμές, καθότι ενδέχεται να πρόκειται για σημεία καμπής.

Στην περίπτωση συναρτήσεων με n μεταβλητές, υπάρχει επιπλέον το ενδεχόμενο μία στάσιμη τιμή να είναι ένα **σαγματικό σημείο** (saddle point), όπου η συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη τιμή της σε σχέση με τις μεταβολές των τιμών σε μερικά από τα $x_1, \cdots, x_n$ και την ελάχιστη τιμή της σε σχέση με άλλα.

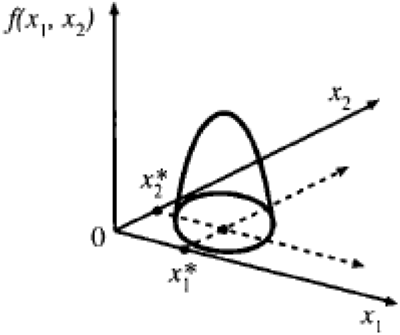
> Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών ονομάζονται τα στάσιμα σημεία της καθώς και τα σημεία που δεν υπάρχει τουλάχιστον μία από τις μερικές της παραγώγους.

Μέγιστα, Ελάχιστα και Σαγματικά Σημεία



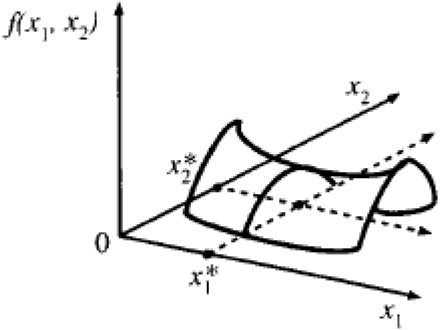
Σχήμα: Ελάχιστο στη x_1 διεύθυνση, ελάχιστο στη x_2 διεύθυνση

Μέγιστα, Ελάχιστα και Σαγματικά Σημεία



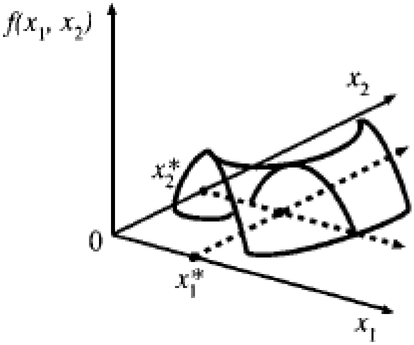
Σχήμα: Μέγιστο στη x_1 διεύθυνση, μέγιστο στη x_2 διεύθυνση

Μέγιστα, Ελάχιστα και Σαγματικά Σημεία



Σχήμα: Ελάχιστο στη x_1 διεύθυνση, μέγιστο στη x_2 διεύθυνση

Μέγιστα, Ελάχιστα και Σαγματικά Σημεία



Σχήμα: Μέγιστο στη x_1 διεύθυνση, ελάχιστο στη x_2 διεύθυνση

Παράδειγμα

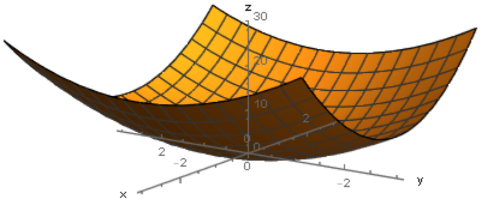
Βρείτε τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$f_x = 4x = 0, \; f_y = 2y = 0$$

Αυτές ικανοποιούνται μόνο όταν $x = y = 0$. Επομένως το $(0, 0)$ είναι ένα στάσιμο σημείο.



Παράδειγμα

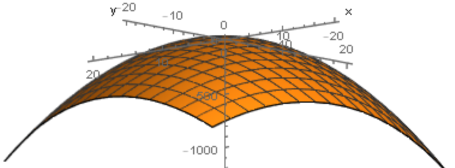
Βρείτε τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$f(x,y) = 4x + 2y - x^2 - y^2 + xy$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$f_x = 4 - 2x + y = 0$$
$$f_y = 2 - 2y + x = 0$$

Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $x = 2y - 2$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε $4 - 4y + 4 + y = 0$ ή ισοδύναμα $y = \frac{8}{3}$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε $x = \frac{10}{3}$.



Παράδειγμα

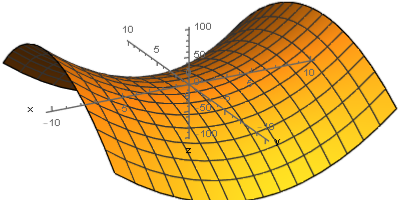
Βρείτε τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$f_x = 2x = 0$$
$$f_y = -2y = 0$$

Αυτές ικανοποιούνται μόνο όταν $x = y = 0$. Επομένως το $(0,0)$ είναι ένα στάσιμο σημείο.



Συνθήκες Δεύτερης Τάξης

Ικανή συνθήκη για να δώσει το $\mathbf{x}^*$ ένα τοπικό μέγιστο της C^2 συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ είναι:

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0,\ i = 1, \cdots, n$$

και η τετραγωνική μορφή

$$d^2y(\mathbf{x}^*) = \sum_i \sum_j f_{ij} dx_i dx_j < 0$$

Δηλαδή το d^2y είναι αρνητικά ορισμένο, ή η Εσσιανή μήτρα H είναι αρνητικά ορισμένη καθότι $d^2y = dx^T H dx$.

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

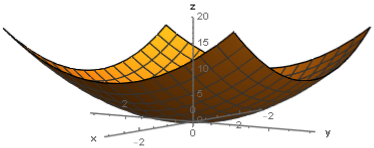
Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή (convex) αν για δύο οποιαδήποτε σημεία του πεδίου ορισμού της $u = (u_1, \dots, u_n)$ και $v = (v_1, \dots, v_n)$ ισχύει ότι:

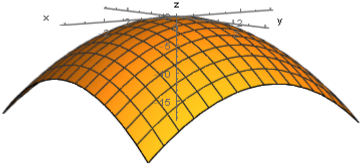
$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v),$$

ενώ είναι κοίλη (concave) όταν:

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v),$$

όπου $\lambda \in [0, 1]$.





Ολικά ακρότατα

Υποθέτουμε ότι η $y = f(\mathbf{x})$ είναι μία αυστηρά κοίλη συνάρτηση που ορίζεται για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Αν στο $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ όλες οι πρώτες παράγωγοι μηδενίζονται, δηλ. $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, τότε το $\mathbf{x}^*$ δίνει ένα μοναδικό ολικό μέγιστο.

Υποθέτουμε ότι η $y = f(\mathbf{x})$ είναι μία αυστηρά κυρτή συνάρτηση που ορίζεται για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Αν στο $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ όλες οι πρώτες παράγωγοι μηδενίζονται, δηλ. $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, τότε το $\mathbf{x}^*$ δίνει ένα μοναδικό ολικό ελάχιστο.

Ηγετικές κύριες ελάσσονες

Για μία συνάρτηση $y = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη με Εσσιανή μήτρα H, οι ηγετικές κύριες ελάσσονες είναι:

$|H_1| = f_{11}$,

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix},$$

$\vdots$

$$|H_n| = |H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

Θετικά/Αρνητικά ορισμένη μήτρα

Έστω H η Εσσιανή μήτρα που σχετίζεται με μία συνάρτηση $y = f(\mathbf{x})$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ισχύει ότι:

1. Η μήτρα H είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν οι ηγετικές κύριες ελάσσονές της είναι θετικές. Δηλαδή $|H_1| > 0, |H_2| > 0, \cdots, |H_n| = |H| > 0$ για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Σε αυτή την περίπτωση η f είναι αυστηρά κυρτή.
2. Η μήτρα H είναι αρνητικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν οι ηγετικές κύριες ελάσσονές της έχουν εναλλασσόμενο πρόσημο αρχής γενομένης με αρνητικό για $k = 1$. Δηλαδή:
$$|H_1| < 0, |H_2| > 0, \cdots, |H_n| = |H| = \begin{cases} > 0 & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος} \\ < 0 & \text{αν } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$
Σε αυτήν την περίπτωση η f είναι αυστηρά κοίλη.

Θετικά/Αρνητικά ορισμένη μήτρα

Έστω H η Εσσιανή μήτρα που σχετίζεται με μία συνάρτηση $y = f(\mathbf{x})$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ισχύει ότι:

1. Η H είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές της είναι θετικές. Σε αυτήν την περίπτωση η f είναι αυστηρά κυρτή.
2. Η H είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές της είναι αρνητικές. Σε αυτήν την περίπτωση η f είναι αυστηρά κοίλη.

Θετικά/Αρνητικά ορισμένη μήτρα: Παράδειγμα

Έστω η μήτρα $H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Τότε οι ηγετικές κύριες ελάσσονες της είναι:
$|H_1| = 2 > 0$, $|H_2| = |H| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$. Συνεπώς ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

Με χρήση των ιδιοτιμών:
$$|\lambda I - H| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 1 = \lambda^2 + 4 - 4\lambda - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$
$$|\lambda I - H| = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$
$$\Delta = 16 - 12 = 4,\ \lambda_1 = \tfrac{4+2}{2} = 3 > 0,\ \lambda_2 = \tfrac{4-2}{2} = 1 > 0.$$
Αφού και οι δύο ιδιοτιμές είναι θετικές ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

Παράδειγμα

Βρείτε και χαρακτηρίστε τα στάσιμα της συνάρτησης:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$$

$$f_1 = 4x_1,\ f_2 = 2x_2$$
$$f_{11} = 4,\ f_{12} = 0,\ f_{21} = 0,\ f_{22} = 2 \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$
$$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Συμπεραίνουμε ότι το στάσιμο σημείο $(0, 0)$ είναι το μοναδικό ολικό ελάχιστο της συνάρτησης.

Παράδειγμα 2

> Βρείτε και χαρακτηρίστε τα στάσιμα της συνάρτησης:
>
> $$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2$$

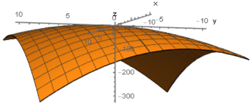
Έχουμε βρει προηγουμένως το στάσιμο σημείο $(10/3, 8/3)$.

$$f_1 = 4 - 2x_1 + x_2, \; f_2 = 2 - 2x_2 + x_1$$

$$f_{11} = -2, \; f_{12} = 1, \; f_{21} = 1, \; f_{22} = -2 \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$H = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Οι ηγετικές κύριες ελάσσονες αλλάζουν πρόσημο ξεκινώντας από το αρνητικό ($|H_1| = -2$, $|H_2| = 3$), άρα η Εσσιανή μήτρα είναι αρνητικά ορισμένη και συνεπώς η συνάρτηση είναι αυστηρά κοίλη και το στάσιμο σημείο είναι ένα ολικό μέγιστο.



Παράδειγμα 3

Βρείτε και χαρακτηρίστε τα στάσιμα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Τα στάσιμα σημεία της f υπολογίζονται θέτοντας:

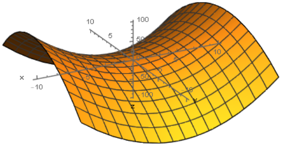
$$\nabla f(x, y) = (2x, -2y) = (0, 0).$$

Άρα το μοναδικό στάσιμο σημείο είναι το $(0, 0)$.

Η Εσσιανή μήτρα της f είναι $\nabla_2 f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Οι ηγετικές κύριες ελάσσονες της είναι: $|H_1| = 2 > 0$, $|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$.

Άρα η Εσσιανή μήτρα δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη. Το σημείο $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.



Κύριες ελάσσονες

Οι ορίζουσες για όλες τις κύριες ελάσσονες (όχι μόνο οι ηγετικές) για $n = 3$ δίνονται παρακάτω:

$$|H_1^*| = f_{11}, f_{22}, f_{33}$$

$$|H_2^*| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_{11} & f_{13} \\ f_{31} & f_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

$$|H_3^*| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

Θετικά/Αρνητικά ημί-ορισμένη μήτρα

Η Εσσιανή μήτρα H είναι θετικά ημί-ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$ εάν και μόνο αν όλες οι κύριες ελάσσονές της είναι θετικές ή μηδέν. Δηλαδή:
$|H_1^*| \geq 0, |H_2^*| \geq 0, |H_3^*| \geq 0, \cdots |H_n^*| = |H| \geq 0$ για $x \in \mathbb{R}^n$.

Η Εσσιανή μήτρα H είναι αρνητικά ημί-ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$ εάν και μόνο αν όλες οι κύριες ελάσσονες της εναλλάσσονται στο πρόσημο ή μηδενίζονται αρχής γενομένης από αρνητική ή μηδενική τιμή για $k = 1$. Δηλαδή:

$$|H_1^*| \leq 0,$$
$$|H_2^*| \geq 0,$$
$$\vdots$$
$$|H_n^*| = |H| = \begin{cases} \geq 0, \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ \leq 0, \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Ολικό Διαφορικό Πρώτης Τάξης για Συνάρτηση Δύο Μεταβλητών

Το **ολικό διαφορικό πρώτης τάξης** για τη συνάρτηση $y = f(x_1, x_2)$ είναι:

$$dy = f_1(x_1, x_2)dx_1 + f_2(x_1, x_2)dx_2$$

Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Πεπλεγμένη συνάρτηση είναι μια συνάρτηση της μορφής $F(x, y) = 0$.

Ένα απλό παράδειγμα είναι το $3y + 9x - 12 = 0$. Με λίγες μαθηματικές πράξεις μπορούμε να ορίσουμε αναλυτικά το y ως συνάρτηση του x με την $y = -3x + 4$ και βλέπουμε ότι η παράγωγος είναι $dy/dx = -3$.

Όμως η εξεύρεση μίας αναλυτικής λύσης για το y από μία εξίσωση που εμπλέκει και το x και το y δεν είναι πάντα τόσο εύκολη. Συνεπώς είναι χρήσιμη μία διαδικασία για την εξεύρεση του dy/dx όταν το y ορίζεται έμμεσα.

Για παράδειγμα στη $e^{x^2+y} - 7 = 0$ μία δεδομένη τιμή του x συνεπάγεται κάποιο συγκεκριμένο y ώστε να ικανοποιείται η ισότητα.

Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Αντί να επιλύσουμε αναλυτικά ως προς y, η εξεύρεση του dy/dx μπορεί να γίνει μέσω της διαδικασίας της **πεπλεγμένης παραγώγισης**. Καταρχήν υποθέτουμε προς στιγμήν ότι η πιο πάνω εξίσωση σημαίνει πως το y μπορούμε να το διατυπώσουμε ως εξής:

$$e^{x^2+f(x)} - 7 = 0$$

Με παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή x (χρησιμοποιώντας τον αλυσωτό κανόνα) έχουμε:

$$\left(\frac{d}{dx} \left[x^2 + f(x) \right] \right) e^{x^2+f(x)} = \left[2x + f'(x) \right] e^{x^2+f(x)} = 0$$

και μετά διαιρώντας με $e^{x^2+f(x)}$ που δεν μπορεί να είναι μηδέν, έχουμε ότι $2x + f'(x) = 0 \implies f'(x) = -2x$ που μας δίνει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα αρκετά εύκολα με το να επιλύσουμε πρώτα απευθείας ως προς y, θεωρώντας το ως συνάρτηση του x. Αν πάρουμε τον φυσικό λογάριθμο και των δύο μελών της εξίσωσης $e^{x^2+y} = 7$ καταλήγουμε σε:

$$(x^2 + y) \ln e = \ln 7$$

Όμως $\ln e = 1$, άρα:

$$y = \ln 7 - x^2$$

και επομένως $dy/dx = -2x$.

Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Όμως, ακολουθώντας τα πιο πάνω βήματα για να παραγωγίσουμε πεπλεγμένα μία συνάρτηση είναι μία διαδικασία πολλές φορές επίπονη. Μία πιο βολική μέθοδος είναι να διατυπώσουμε πρώτα της σχέση ανάμεσα στο x και το y με την πεπλεγμένη συνάρτηση $F(x, y) = 0$ και στη συνέχεια παίρνοντας το ολικό διαφορικό της έκφρασης αυτής να καταλήξουμε στη σχέση:

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους της καταλήγουμε στο:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης (για δύο μεταβλητές): Έστω ότι η $F(x, y) = 0$ είναι μία πεπλεγμένη συνάρτηση με συνεχείς πρώτες παραγώγους, η οποία ικανοποιείται σε κάποιο σημείο (x_0, y_0) και ορίζεται σε μία περιοχή αυτού του σημείου. Αν $F_y \neq 0$ σε αυτό το σημείο, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη σε μία περιοχή του $x = x_0$ και η οποία αντιστοιχεί στη σχέση που ορίζεται από την $F(x, y) = 0$, έτσι ώστε:
(1) $y_0 = f(x_0)$, και
(2) $f'(x_0) = -F_x/F_y$

Το θεώρημα αυτό καθορίζει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες είναι δυνατό να συμπαιράνουμε ότι η πεπλεγμένη συνάρτηση $F(x, y) = 0$ συνεπάγεται την ύπαρξη μίας σαφούς συναρτησιακής σχέσης $y = f(x)$ καθώς και ο τρόπος υπολογισμού της παραγώγου της. Το κεντρικό σημείο είναι ότι $F_y \neq 0$.

Παράδειγμα

Να ερμηνευτεί το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης χρησιμοποιώντας την

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

Αυτή είναι η εξίσωση ενός κύκλου στο $\mathbb{R}^2$ με κέντρο την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ και ακτίνα 5. Επειδή μπορούμε να γράψουμε αυτήν την εξίσωση είτε ως:

$$y^2 = 25 - x^2$$

είτε ως:

$$x^2 = 25 - y^2$$

έπεται ότι $-5 \leq x \leq 5$ και $-5 \leq y \leq 5$ γιατί τα αριστερά μέλη ως τετράγωνα είναι θετικοί αριθμοί.

Παράδειγμα

Επιλέγουμε $x_0 = 3, y_0 = 4$, ένα συγκεκριμένο σημείο που ικανοποιεί την $F(x, y) = 0$. Επειδή $F_y(x, y) = 2y$, συνεπάγεται ότι στο $y_0 = 4$ ισχύει $F_y \neq 0$ και συνεπώς ικανοποιείται η βασική συνθήκη. Επομένως στην περιοχή του $(3, 4)$ μπορούμε να σκεφτούμε ένα y ως συνάρτηση του x, και έχουμε:

$$f^{'}(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y}$$

Τώρα, στο σημείο $(3, 4)$ έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

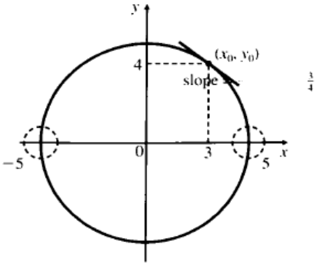
Παράδειγμα

Για το παράδειγμα αυτό είναι εύκολο να λύσουμε άμεσα ως προς $y = f(x)$ στην περιοχή του σημείου $(3, 4)$ με $y = \sqrt{25 - x^2}$ και να ελέγξουμε την τιμή της παραγώγου με τα ακόλουθα βήματα:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

και στο $x_0 = 3$ παίρνουμε $dy/dx = -3/4$.

Διάγραμμα



Σχήμα: Παράδειγμα πεπλεγμένης συνάρτησης

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παραπάνω σχήμα. Παρατηρούμε σε αυτό το σχήμα ότι στα σημεία $(5, 0)$ και $(-5, 0)$ δεν είναι δυνατό να δούμε τη σχέση ανάμεσα στο x και το y ως μία συνάρτηση $y = f(x)$. Το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης εντοπίζει αυτή τη δυσκολία δεδομένου ότι $F_y = 2y = 0$ στις τιμές $x = 5$ ή $x = -5$ (αφού $y = 0$ σε κάθε τέτοια περίπτωση).

Γενίκευση

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης: Έστω ότι η $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$ είναι μία πεπλεγμένη συνάρτηση με συνεχείς πρώτες παραγώγους, η οποία ικανοποιείται σε κάποιο σημείο $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0)$ και ορίζεται σε κάποια περιοχή αυτού του σημείου. Αν $F_y \neq 0$ σε αυτό το σημείο, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ορισμένη σε μία περιοχή του $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ έτσι ώστε:

1. $y^0 = f(\mathbf{x}^0)$, και
2. $f_i(\mathbf{x}^0) = -F_{x_i}/F_y$

Παράδειγμα

Να χρησιμοποιήσετε την πεπλεγμένη παραγώγιση και να βρείτε τις παραγώγους $\partial y/\partial x_1$ και $\partial y/\partial x_2$ της συνάρτησης που προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$F(x_1, x_2, y) = 5x_1x_2 + 2x_2y^2 + x_1^2x_2^2y - 5 = 0$$

$F_{x_1} = 5x_2 + 2x_1x_2^2y$, $F_{x_2} = 5x_1 + 2y^2 + 2x_1^2x_2y$ και $F_y = 4x_2y + x_1^2x_2^2$

Συνεπώς:

$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_y} = -\frac{5x_2+2x_1x_2^2y}{4x_2y+x_1^2x_2^2}$ και $\frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{F_{x_2}}{F_y} = -\frac{5x_1+2y^2+2x_1^2x_2y}{4x_2y+x_1^2x_2^2}$