

## 8<sup>ο</sup> φροντιστηριακό Μάθημα Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

### 1 Ασκήσεις σε εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

#### 1.1 1<sup>η</sup> Άσκηση

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης διαφορών

$$y_{t+1} = \frac{1}{4}y_t^2 - \frac{1}{2}$$

και να εξεταστούν ως προς την ευστάθεια.

Εξίσωση ισορροπίας:

$$\frac{1}{4}\bar{y}^2 - \bar{y} - \frac{1}{2} = 0$$

$\Delta = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ . Ρίζες:  $\rho_1 = 2 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $\rho_2 = 2 - 2\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

$$f'(\bar{y}) = \frac{1}{2}\bar{y}.$$

$f'(\rho_1) = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$  συνεπώς είναι ασταθές.  $f'(\rho_2) = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} > -1$  και αρνητικό, συνεπώς είναι ευσταθές.

#### 1.2 2<sup>η</sup> Άσκηση

Να βρεθεί η σταθερή κατάσταση της εξίσωσης διαφορών και να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια:

$$y_{t+1} = \frac{1}{4}y_t + 10$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4}\bar{y} + 10 \iff \bar{y} = \frac{40}{3}.$$

$\frac{1}{4}$  θετικό και μικρότερο της μονάδας, συνεπώς η εξίσωση διαφορών έχει ευστάθεια σε αυτό το σημείο.

#### 1.3 3<sup>η</sup> Άσκηση

Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης διαφορών:  $y_{t+1} = -\frac{1}{2}y_t + 4$  αν  $y_0 = 4$   
 $\bar{y} = -\frac{1}{2}\bar{y} + 4 \iff \bar{y} = \frac{8}{3}$

Συνεπώς:  $y_t = C_1(-\frac{1}{2})^t + \frac{8}{3}$   
 $y_0 = 4 \iff 4 = C_1 + \frac{8}{3} \iff C_1 = \frac{4}{3}$ .  
 Συνεπώς  $y_t = \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^t + \frac{8}{3}$

## 1.4 4<sup>η</sup> Άσκηση

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της  $y_{t+1} = y_t^{\frac{3}{4}}$  και να εξεταστούν ως προς την ευστάθεια.

Στο σημείο ισορροπίας

$$\bar{y} - \bar{y}^{\frac{3}{4}} = 0 \iff \bar{y}^{\frac{3}{4}}(\bar{y}^{\frac{1}{4}} - 1) = 0$$

Συνεπώς, τα σημεία ισορροπίας είναι το 0 και το 1.

$$f'(\bar{y}) = \frac{3}{4}\bar{y}^{-\frac{1}{4}}$$

Στο  $\bar{y} = 0$ , απειρίζεται, άρα είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

Στο  $\bar{y} = 1$ ,  $f'(\bar{y}) = \frac{3}{4}$ , που είναι μικρότερο της μονάδας και μεγαλύτερο του μηδενός, συνεπώς είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας.

## 1.5 5<sup>η</sup> Άσκηση

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της  $y_{t+1} = y_t^2 - 1$  και να εξεταστούν ως προς την ευστάθεια.

Στο σημείο ισορροπίας  $\bar{y}^2 - \bar{y} - 1 = 0$ .

$\Delta = 5$ , ρίζες  $\rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  και  $\rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

$f'(\bar{y}) = 2\bar{y}$ . Στο  $\rho_1$  η παράγωγος είναι  $1 + \sqrt{5} > 1$  συνεπώς η εξίσωση διαφορών είναι τοπικά ασταθής σε αυτό το σημείο. Στο  $\rho_2$  η παράγωγος είναι  $1 - \sqrt{5} < -1$  συνεπώς η εξίσωση διαφορών είναι τοπικά ασταθής σε αυτό το σημείο.

## 1.6 6<sup>η</sup> Άσκηση

Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης διαφορών:  $y_{t+1} = y_t + 5$ .

Η λύση είναι  $y_t = C + 5t$ .