11^o φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Ιανουάριος 2023

1 Ασκήσεις σε διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

1.1 1^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $\ddot{y} + 2\dot{y} - y = 0$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + 2r - 1 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4 + 4 = 8$ και συνεπώς οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $r_{1,2} = \frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$.
Συνεπώς, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:
$y(t) = C_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{2})t}$.

1.2 2^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $\ddot{y} + 2\dot{y} + 4y = 0$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + 2r + 4 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4 - 16 = -12$.
Συνεπώς, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:
$r_{1,2} = \frac{-2\pm2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$
$h = -1$, $v = \sqrt{3}$.
Άρα: $y(t) = A_1 e^{-t} cos(\sqrt{3}t) + A_2 e^{-t} sin(\sqrt{3}t)$.

1.3 3^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $\ddot{y} + 4\dot{y} - y = 4$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + 4r - 1 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 16 + 4 = 20$.
Συνεπώς, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:
$r_{1,2} = \frac{-4\pm2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$.
Το σημείο ισορροπίας είναι $\bar{y} = -4$.
Συνεπώς $y(t) = C_1 e^{(-2+\sqrt{5})t} + C_2 e^{(-2-\sqrt{5})t} - 4$ και η συνάρτηση αποκλίνει από το σταθερό σημείο $\bar{y} = -4$.

1.4 4^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 20$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 2r + 1 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4 - 4 = 0$, συνεπώς έχουμε διπλή ρίζα την $r_{1,2} = 1$.
Το σημείο ισορροπίας είναι το $\bar{y} = 20$.
Συνεπώς $y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + 20$ και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

1.5 5^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η λύση της $\ddot{y} - 4\dot{y} + \frac{7}{4}y = 20$ όταν $y(0) = 10$ και $\dot{y}(0) = 4$
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 4r + \frac{7}{4} = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 16 - 7 = 9$.
Άρα $r_{1,2} = \frac{4 \pm 3}{2}$ και συνεπώς $r_1 = \frac{7}{2}$ και $r_2 = \frac{1}{2}$.
Το σημείο ισορροπίας είναι το $\bar{y} = \frac{80}{7}$.
Άρα $y(t) = C_1 e^{\frac{7}{2}t} + C_2 e^{\frac{1}{2}t} + \frac{80}{7}$
και $\dot{y}(t) = \frac{7}{2}C_1 e^{\frac{7}{2}t} + \frac{1}{2}C_2 e^{\frac{1}{2}t}$.
$y(0) = 10 \iff C_1 + C_2 + \frac{80}{7} = 10 \iff C_1 = -C_2 - \frac{10}{7}$.
$\dot{y}(0) = 4 \iff -\frac{7}{2}C_2 - 5 + \frac{1}{2}C_2 = 4 \iff -3C_2 = 9 \iff C_2 = -3$.
Συνεπώς $C_1 = 3 - \frac{10}{7} = \frac{11}{7}$ και
$y(t) = \frac{11}{7}e^{\frac{7}{2}t} - 3e^{\frac{1}{2}t} + \frac{80}{7}$

1.6 6^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = t$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - 2r + 1 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4 - 4 = 0$.
Άρα έχουμε διπλή ρίζα την $r_{1,2} = 1$.
Η μερική λύση θα είναι της μορφής $y_p = A_0 + A_1 t$.
$\frac{dy_p}{dt} = A_1$ και $\frac{d^2 y_p}{dt} = 0$.
Συνεπώς $-2A_1 + A_0 + A_1 t = t$ και άρα $A_1 = 1$ και $-2A_1 + A_0 = 0 \iff A_0 = 2A_1$ και συνεπώς $A_0 = 2$.
Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής:
$y(t) = C_1 t e^t + C_2 e^t + t + 2$.

1.7 7^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = 10$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 + 3r - 4 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι ίση με $\Delta = 9 + 16 = 25$ και οι ρίζες:
$r_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$. Συνεπώς $r_1 = -4$ και $r_2 = 1$.
Για το σημείο ισορροπίας ισχύει $-4\bar{y} = 10 \iff \bar{y} = -\frac{5}{2}$. Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής:
$y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^t - \frac{5}{2}$.

1.8 8^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\ddot{y} - \dot{y} + 2y = 5$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - r + 2 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 1 - 8 = -7$ και οι ρίζες:
$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$.
Για το σημείο ισορροπίας ισχύει $2\bar{y} = 5 \iff \bar{y} = \frac{5}{2}$.
$h = \frac{1}{2}$ και $v = \frac{\sqrt{7}}{2}$.
Συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής:
$y(t) = C_1 e^{\frac{t}{2}} cos(\frac{\sqrt{7}}{2}t) + C_2 e^{\frac{t}{2}} sin(\frac{\sqrt{7}}{2}t) + \frac{5}{2}$