Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 8

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2022

Θέματα 8ης διάλεξης

- Ορισμός εξισώσεων διαφορών
- Ταξινόμηση εξισώσεων διαφορών
- Εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης
- Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης
- Διάγραμμα φάσης

Εξισώσεις διαφορών

Μία **εξίσωση διαφορών** είναι μία εξίσωση που αφορά τη μεταβολή μίας μεταβλητής.

Έστω $y(t)$ μια πραγματική (ή μιγαδική) συνάρτηση της μεταβλητής t. Η *διαφορά* ή *μεταβολή* Δ ορίζεται ως:

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$$

ή

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t, \; t = 0, 1, 2, \ldots$$

Ταξινόμηση των εξισώσεων διαφορών

- **Τάξη**: Η τάξη μίας εξίσωσης διαφορών καθορίζεται από την ανώτερη τάξη της διαφοράς που υπάρχει στην εξίσωση.

  Για παράδειγμα, μία εξίσωση διαφορών **πρώτης τάξης** περιέχει μόνο την πρώτη διαφορά μίας μεταβλητής, δηλαδή τη διαφορά της μεταβλητής σε δύο διαδοχικές περιόδους $(y_{t+1} - y_t)$.

  Μία εξίσωση διαφορών **δεύτερης τάξης** περιέχει επίσης τη δεύτερη διαφορά μίας μεταβλητής, δηλαδή τη διαφορά της μεταβλητής που παρατηρείται όταν θεωρήσουμε κάθε δεύτερη από τις διαδοχικές περιόδους $(y_{t+2} - y_t)$.

Ταξινόμηση των εξισώσεων διαφορών

- Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι μία εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης περιέχει μεταβλητές που απέχουν μόνο μία περίοδο όπως $y_{t+1} = 5y_t + 1$, ενώ μία εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης περιέχει μεταβλητές που απέχουν το πολύ δύο περιόδους, όπως $y_{t+2} = 5y_{t+1} + 4y_t + 1$ ή ισοδύναμα $y_t = 5y_{t-1} + 4y_{t-2} + 1$
- Επομένως μία εξίσωση διαφορών n-οστής τάξης περιέχει μεταβλητές που απέχουν μεταξύ τους το πολύ n περιόδους. Θα ασχοληθούμε μόνο με εξισώσεις διαφορών πρώτης και δεύτερης τάξης

Ταξινόμηση των εξισώσεων διαφορών

- **Αυτόνομη**: Μία εξίσωση διαφορών λέμε ότι είναι αυτόνομη αν δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο. Η εξίσωση ονομάζεται μη αυτόνομη όταν η μεταβλητή t εμφανίζεται απευθείας ως ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ αυτόνομη όταν η μεταβλητή t υπεισέρχεται στην εξίσωση μόνο μέσω της y.

  Για παράδειγμα, η $y_{t+1} = 4y_t + 5t$ είναι μη αυτόνομη επειδή εξαρτάται ρητά από τη μεταβλητή t, ενώ η $y_{t+1} = 4y_t + 5$ είναι αυτόνομη, επειδή δεν εξαρτάται ρητά από τη μεταβλητή t.

Ταξινόμηση των εξισώσεων διαφορών

- **Γραμμική** ή **μη γραμμική**. Μία εξίσωση διαφορών είναι μη γραμμική αν περιέχει κάποιους μη γραμμικούς όρους ως προς κάποιους από τους y_t, y_{t+1}, y_{t+2} κ.λ.π., ενώ γραμμική διαφορετικά.

  Για παράδειγμα η $y_{t+1} = 4y_t^2 + 1$ και η $y_{t+1} = 4ln(y_t) + 1$ είναι μη γραμμικές αυτόνομες εξισώσεις πρώτης τάξης, ενώ η $y_{t+1} = 4y_t + t^2$ είναι μία γραμμική, μη αυτόνομη εξίσωση διαφορών.

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Η γενική μορφή της **γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης** δίνεται από την:

$$y_{t+1} = ay_t + b, t = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

- Επίλυση μίας εξίσωσης διαφορών σημαίνει να βρούμε τη σχετική *συνάρτηση* του χρόνου y_t από την οποία και δημιουργείται.
- Αν η y_0 είναι γνωστή, τότε όταν $t = 0$ η εξίσωση (1) συνεπάγεται ότι $y_1 = ay_0 + b$ όπου a και b είναι γνωστές σταθερές.
  Για $t = 1$: $y_2 = ay_1 + b = a(ay_0 + b) + b = a^2 y_0 + b(a + 1)$.
  Για $t = 2$: $y_3 = ay_2 + b = a(a^2 y_0 + b(a + 1)) + b = a^3 y_0 + b(a^2 + a + 1)$
- Κάνουμε την εικασία ότι $y_t = a^t y_0 + b(a^{t-1} + a^{t-2} + \cdots + a + 1)$

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

- Γνωρίζουμε ότι $1 + a + a^2 + \cdots + a^{t-1} = \begin{cases} \frac{1-a^t}{1-a}, & \text{αν } a \neq 1 \\ t, & \text{αν } a = 1 \end{cases}$
- Επομένως, η λύση που υποθέσαμε για την εξίσωση διαφορών μπορεί να εκφραστεί ως:

$$y_t = \begin{cases} a^t y_0 + b(\frac{1-a^t}{1-a}), & \text{αν } a \neq 1 \\ y_0 + bt, & \text{αν } a = 1 \end{cases} \quad t = 0, 1, 2 \cdots$$

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Θεώρημα: Η συνάρτηση y_t που δίνεται από την εξίσωση

$$y_t = \begin{cases} a^t y_0 + b\left(\frac{1-a^t}{1-a}\right), & \text{αν } a \neq 1 \\ y_0 + bt, & \text{αν } a = 1 \end{cases} \quad t = 0, 1, 2 \cdots$$

είναι η μοναδική λύση της γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης $y_{t+1} = ay_t + b$, όπου y_0 είναι η δεδομένη αρχική συνθήκη.

Απόδειξη:

1. Για $a = 1$, έχουμε με τη μέθοδο της μαθηματική επαγωγής:
   - Για $t = 0$: $y_0 + b \cdot 0 = y_0 + 0 = y_0$.
   - Έστω ότι ισχύει για $t = k$: $y_k = y_0 + bk$.
   - Θα δείξουμε ότι ισχύει για $t = k + 1$: Θ.δ.ο. $y_{k+1} = y_0 + b(k + 1)$. Ξεκινώντας από τη σχέση $y_{t+1} = y_t + b$ έχουμε $y_{k+1} = y_k + b$. Αντικαθιστούμε το y_k από την υπόθεση και έχουμε $y_{k+1} = y_0 + bk + b = y_0 + b(k + 1)$.

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

2. Για $a \neq 1$, θ.δ.ο. $y_t = a^t y_0 + b(\frac{1-a^t}{1-a})$. Έχουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής:
   - Για $t = 0$: $a^0 y_0 + b(\frac{1-a^0}{1-a}) = 1 \cdot y_0 + b(\frac{0}{1-a}) = y_0$ που ισχύει.
   - Έστω ότι ισχύει για $t = k$: $y_k = a^k y_0 + b(\frac{1-a^k}{1-a})$.
   - Για $t = k+1$: Θ.δ.ο. $y_{k+1} = a^{k+1} y_0 + b(\frac{1-a^{k+1}}{1-a})$. Προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο $ab(1-a^k)/(1-a)$ στο δεξιό μέλος και παίρνουμε:
     $y_{k+1} = a^{k+1} y_0 + \frac{ab(1-a^k)}{1-a} - \frac{ab(1-a^k)}{1-a} + b(\frac{1-a^{k+1}}{1-a}) =$
     $a(a^k y_0 + b(\frac{1-a^k}{1-a})) + \frac{b}{1-a}(-a + a^{k+1} + 1 - a^{k+1})$.
     Αντικαθιστούμε το y_k από την υπόθεση και έχουμε:
     $y_{k+1} = a y_k + \frac{b}{1-a}(1-a) = a y_k + b$ που ισχύει.

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Θεώρημα: Υπάρχει μία σταθερά C τέτοια ώστε κάθε λύση της γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$y_t = \begin{cases} Ca^t + b\left(\frac{1-a^t}{1-a}\right), & \text{αν } a \neq 1 \\ C + bt, & \text{αν } a = 1 \end{cases} \quad t = 0, 1, 2 \cdots$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών $y_{t+1} = 1/2y_t + 10$, με $y_0 = 1$.

Με βάση το θεώρημα έχουμε:

$$y_t = C(1/2)^t + 10\left(\frac{1-(1/2)^t}{1-1/2}\right)$$

Αν $y_0 = 1$ τότε για $t = 0$ έχουμε $1 = C + 10 \cdot 0 \Leftrightarrow C = 1$.
Άρα για να ικανοποιείται η δεδομένη αρχική συνθήκη, η λύση έχει την εξής μορφή:

$$y_t = (1/2)^t + 10\left(\frac{1-(1/2)^t}{1-1/2}\right)$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών $y_{t+1} = 5y_t - 3$, με $y_0 = 0$.

Με βάση το θεώρημα έχουμε:

$$y_t = C5^t - 3\left(\frac{1-5^t}{1-5}\right)$$

Αν $y_0 = 0$ τότε για $t = 0$ έχουμε $0 = C - 3 \cdot 0 \Leftrightarrow C = 0$.
Άρα για να ικανοποιείται η δεδομένη αρχική συνθήκη, η λύση έχει την εξής μορφή:

$$y_t = 0 \cdot 5^t - 3\left(\frac{1-5^t}{1-5}\right) = -3\left(\frac{1-5^t}{1-5}\right)$$

Σταθερή κατάσταση εξίσωσης διαφορών

Ορισμός: Η σταθερή κατάσταση ή στάσιμη τιμή σε μία γραμμική, αυτόνομη εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης ορίζεται ως η τιμή της y στην οποία το σύστημα παύει να μεταβάλλεται, δηλαδή ισχύει ότι $y_{t+1} = y_t$.

Για να βρούμε τη στάσιμη τιμή του y, την οποία θα ονομάσουμε $\bar{y}$, θέτουμε $y_{t+1} = y_t \equiv \bar{y}$ στην εξίσωση διαφορών. Αυτό μας οδηγεί στη σχέση:

$$\bar{y} = a\bar{y} + b.$$

Λύνοντας ως προς $\bar{y}$ παίρνουμε:

$$\bar{y} = \frac{b}{1-a}, \; a \neq 1.$$

Αν $a = 1$, δεν υπάρχει λύση σταθερής κατάστασης (γιατί;).

Σταθερή κατάσταση εξίσωσης διαφορών

Αν το y εξισωθεί κάποια στιγμή με τη στάσιμη τιμή του, θα παραμείνει σε αυτήν την τιμή για όλες τις διαδοχικές χρονικές περιόδους. Όμως το σημαντικό ερώτημα είναι: Αν το y ξεκινήσει από μία αυθαίρετη τιμή, θα συγκλίνει πάντοτε προς την τιμή της σταθερής κατάστασης;
Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, αναδιατάσσουμε τη λύση που διατυπώνεται με την εξίσωση:

$$y_t = \begin{cases} a^t y_0 + b\left(\frac{1-a^t}{1-a}\right), & \text{αν } a \neq 1 \\ y_0 + bt, & \text{αν } a = 1 \end{cases} \quad t = 0, 1, 2 \cdots$$

για να πάρουμε:

$$y_t = a^t \left(y_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}, \text{ αν } a \neq 1, \;\; t = 0, 1, 2, \cdots$$

Σταθερή κατάσταση εξίσωσης διαφορών

Εξετάζοντας την έκφραση αυτή, βλέπουμε ότι το θέμα της **σύγκλισης** ή της **απόκλισης** καθορίζεται αποκλειστικά από τον όρο a^t, δεδομένου ότι αυτός είναι ο μόνος που περιέχει το t.

Αν ο όρος αυτός συγκλίνει προς το μηδέν καθώς το t τείνει προς το άπειρο, τότε το y_t συγκλίνει προς το $\frac{b}{1-a}$. Αντίθετα, αν ο όρος αυτός αποκλίνει προς το άπειρο καθώς το t τείνει προς το άπειρο, τότε θα αποκλίνει και το y_t.

Μπορούμε να θεωρήσουμε τον όρο a^t με $t = 0, 1, 2, \cdots$ ως ακολουθία αριθμών:

$$\{a^t\} = 1, a, a^2, a^3, \cdots, a^t, \cdots$$

Τότε γνωρίζουμε ότι μία ακολουθία σαν αυτή συγκλίνει προς το μηδέν καθώς $t \to \infty$ αν $|a| < 1$ και αποκλίνει αν $|a| \geq 1$.

Θεώρημα: Στην περίπτωση μίας γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης, η y_t συγκλίνει προς την τιμή της σταθερής κατάστασης $b/(1-a)$ αν και μόνο αν $|a| < 1$.

Σταθερή κατάσταση εξίσωσης διαφορών

Όταν $|a| < 1$, ενώ η σύγκλιση είναι βέβαιη η *διαδρομή* που ακολουθεί διαχρονικά η y_t είναι πολύ διαφορετική ανάλογα με το πρόσημο του a.
Αν $0 < a < 1$, τότε η y_t θα συγκλίνει μονότονα προς το $b/(1-a)$. Αυτό γιατί κάθε όρος της ακολουθίας $\{a^t\}$ είναι μικρότερος από τον προηγούμενο. Για παράδειγμα αν $a = 1/2$ η ακολουθία είναι

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^t \right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

Όμως αν $-1 < a < 0$, η y_t θα συγκλίνει προς το $b/(1-a)$ διαγράφοντας μία **ταλαντούμενη διαδρομή**. Αυτό το γνωρίζουμε γιατί κάθε όρος της ακολουθίας $\{a^t\}$ θα έχει πρόσημο αντίθετο από τον προηγούμενο όρο. Για παράδειγμα, αν $a = -1/2$ η ακολουθία είναι:

$$\left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^t \right\} = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$$

Σταθερή κατάσταση εξίσωσης διαφορών

Υπάρχουν τρεις ακόμη περιπτώσεις που πρέπει να εξεταστούν χωριστά:
(α) Αν $a = 0$, βλέπουμε από την εξίσωση

$$y_t = a^t(y_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}, \;\; a \neq 1, \;\; t = 0, 1, 2, \cdots$$

ότι η y_t είναι διαχρονικά σταθερή και ίση με b.
(β) Αν $a = 1$, βλέπουμε από την εξίσωση

$$y_t = y_0 + bt, \;\; t = 0, 1, 2 \cdots$$

ότι η y_t συγκλίνει στο $+\infty$ αν $b > 0$ και στο $-\infty$ αν $b < 0$.
(γ) Αν $a = -1$ βλέπουμε από την εξίσωση

$$y_t = a^t(y_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}, \;\; t = 0, 1, 2, \cdots$$

ότι η y_t εναλλάσσεται μεταξύ των τιμών y_0 και $b - y_0$ ($y_t = (-1)^t(y_0 - b/2) + b/2$).

Παράδειγμα

Έστω ότι η y_t συμβολίζει το πλήθος των ψαριών σε έναν πληθυσμό ψαριών. Έστω ότι η δυναμική συμπεριφορά του πληθυσμού των ψαριών διέπεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y_{t+1} = ay_t + 10.$$

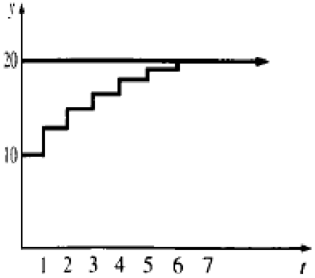
Να βρεθεί το πλήθος των ψαριών σε σταθερή κατάσταση και να κατασκευαστεί η γραφική απεικόνιση της y_t, αρχικά για την περίπτωση $a = 0.5$ και μετά για την περίπτωση $a = -0.5$.

Η στάσιμη τιμή της y βρίσκεται θέτοντας $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$. Αυτό μας δίνει $\bar{y} = \frac{10}{1-a}$. Η λύση της εξίσωσης διαφορών μπορεί να εκφραστεί ως:

$$y_t = a^t\left(y_0 - \frac{10}{1-a}\right) + \frac{10}{1-a}$$

Παράδειγμα

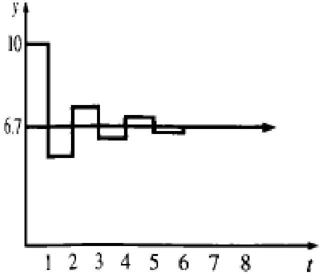
Αν $|a| < 1$, τότε η y_t συγκλίνει προς το $10/(1-a)$ καθώς το t τείνει προς το άπειρο. Συνεπώς αν $a = 0.5$, τότε η y_t προσεγγίζει την στάσιμη τιμή $\bar{y} = 20$ μονότονα.



Σχήμα: Διαδρομή προσέγγισης για $a = 0.5$

Παράδειγμα

Αν $a = -0.5$, τότε η y_t προσεγγίζει τη στάσιμη τιμή $\bar{y} = 10/1.5$ με ταλαντώσεις.



Σχήμα: Διαδρομή προσέγγισης για $a = -0.5$

Συνοπτική Παρουσίαση της Ανάλυσης για τη Σύγκλιση

Για την εξίσωση διαφορών

$$y_{t+1} = ay_t + b$$

η λύση είναι $y_t = \begin{cases} a^t(y_0 - \bar{y}) + \bar{y}, & \text{αν } a \neq 1 \\ y_0 + bt, & \text{αν } a = 1 \end{cases} \quad t = 0, 1, 2 \cdots$

όπου

$$\bar{y} = \tfrac{b}{1-a} \text{ αν } a \neq 1$$

είναι η σταθερή κατάσταση ισορροπίας που υπάρχει όταν $a \neq 1$.
Η σταθερή κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής (δηλαδή το y_t συγκλίνει προς το $\bar{y}$), αν και μόνο αν:

$$-1 < a < 1.$$

Η διαδρομή του y_t καθώς προσεγγίζει το $\bar{y}$ ονομάζεται **διαδρομή προσέγγισης** και είναι

- *Μονότονη*, αν το a είναι θετικό (και μικρότερο του 1)
- *Ταλαντούμενη*, αν το a είναι αρνητικό (και μεγαλύτερο του -1)

Συνοπτική Παρουσίαση της Ανάλυσης για τη Σύγκλιση

Επιπλέον, αν $a \geq 1$, τότε το y_t αποκλίνει από το $\bar{y}$ μονότονα.

Αν $a < -1$, τότε το y_t αποκλίνει από το $\bar{y}$ με ταλαντώσεις που διαρκώς αυξάνονται.

Αν $a = -1$, τότε το y_t δεν προσεγγίζει ποτέ το $\bar{y}$, αλλά η τιμή του εναλλάσσεται ανάμεσα στο y_0 και το $b - y_0$.

Αν $a = 0$, τότε το y_t είναι σταθερό και ίσο με το b.

Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

- Είδαμε ότι οι γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης μπορούν να έχουν αναλυτική λύση.
- Το ίδιο ισχύει όπως θα δούμε και για τις γραμμικές εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης.
- Αντίθετα, οι *μη γραμμικές* εξισώσεις διαφορών κατά κανόνα δεν μπορούν να έχουν αναλυτική λύση.
- Ωστόσο, είναι δυνατόν να αντλήσουμε πληροφορίες ποιοτικού χαρακτήρα σχετικά με τη λύση, αναλύοντας μία μη γραμμική εξίσωση διαφορών με τη βοήθεια ενός *διαγράμματος φάσης*.

Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Η γενική μορφή της μη γραμμικής εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης είναι η εξής:

$$y_t = g(y_t, t), \; t = 0, 1, 2, \cdots$$

Όμως, θα μελετήσουμε μόνο αυτόνομες, μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών, δηλαδή εξισώσεις διαφορών οι οποίες δεν εξαρτώνται άμεσα από το χρόνο.

Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Ορισμός: Η **μη γραμμική, αυτόνομη εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης** έχει την εξής μορφή:

$$y_{t+1} = f(y_t),\ t = 0, 1, 2, \cdots$$

Αν υπάρχει **ευσταθής ισορροπία** (ή ισορροπίες στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες από μία), βρίσκεται συνήθως θέτοντας $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$, όπου $\bar{y}$ είναι μία σταθερή τιμή της y. Γενικότερα, αυτό μας οδηγεί στην εξής σχέση:

$$\bar{y} = f(\bar{y})$$

Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Το κύριο μέλημά μας όταν κάνουμε ποιοτική ανάλυση μίας μη γραμμικής εξίσωσης διαφορών είναι να εξακριβώσουμε αν η y_t συγκλίνει ή όχι προς μία ευσταθή ισορροπία.

- Αν όντως συγκλίνει, τότε ανεξάρτητα από την τιμή εκκίνησης y_0, η πορεία της y_t τελικά θα οδηγήσει στην τιμή $\bar{y}$. Τότε, ακόμη και όταν δεν μπορούμε να επιλύσουμε αναλυτικά την y_t ως συνάρτηση του t, μπορούμε να δούμε που οδηγεί πάντα η διαδρομή της.
- Αν όμως δε συγκλίνει, τότε μπορούμε να εξακριβώσουμε αν η y_t αποκλίνει στο άπειρο ή αν παλινδρομεί κυκλικά μπρος-πίσω μεταξύ συγκεκριμένων τιμών ή αν εκδηλώνει μία χαοτική συμπεριφορά.

Παράδειγμα

Έστω η ακόλουθη μη γραμμική εξίσωση διαφορών:

$$y_{t+1} = y_t^{\alpha}, \alpha > 0, t = 0, 1, 2, \cdots$$

Οι τιμές της σταθερής κατάστασης (οι στάσιμες τιμές) της y βρίσκονται θέτοντας $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$. Με αυτόν τον τρόπο και με αναδιάταξη των όρων οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\bar{y}(\bar{y}^{\alpha-1} - 1) = 0.$$

Συνεπώς $\bar{y} = 0$ και $\bar{y} = 1$ είναι οι στάσιμες τιμές. Αν λοιπόν η y_t εξισωθεί κάποια στιγμή με το 0 ή το 1, θα παραμείνει για πάντα σε αυτήν την τιμή.

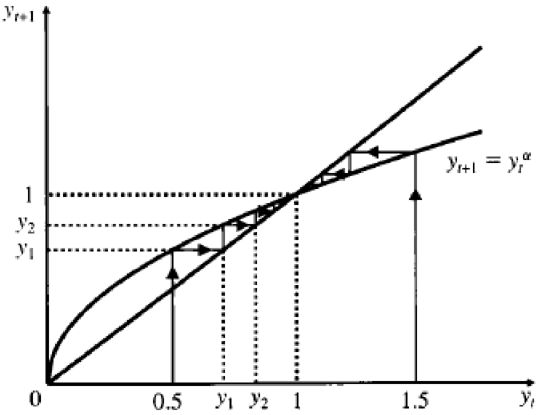
Διάγραμμα φάσης

Είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα φάσης για να δούμε αν η y_t τείνει να κινηθεί προς σταθερές τιμές ή μακριά από αυτές.

Το **διάγραμμα φάσης** για μία εξίσωση διαφορών είναι ένα διάγραμμα που απεικονίζει την y_{t+1} ως προς την y_t.

Τα στάσιμα σημεία θα εντοπιστούν εκεί όπου τέμνεται η $f(y_t)$ με τη γραμμή των 45° επειδή κατά μήκος της γραμμής αυτής ισχύει η σχέση $y_{t+1} = y_t$.

Διάγραμμα φάσης



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης για την εξίσωση $y_{t+1} = y_t^\alpha$ όταν $\alpha = 1/2$

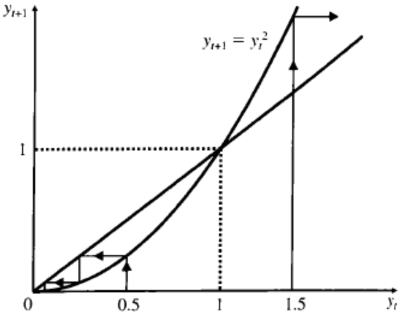
Διάγραμμα φάσης

Από οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης $y_0 > 0$ η πορεία της y_t φαίνεται να συγκλίνει προς το $\bar{y} = 1$ αναδεικνύοντας το $\bar{y} = 1$ σε σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

Αντίθετα, το σημείο $\bar{y} = 0$ είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας, επειδή για $y > 0$ η y_t αποκλίνει από το 0.

Διάγραμμα φάσης - Παράδειγμα

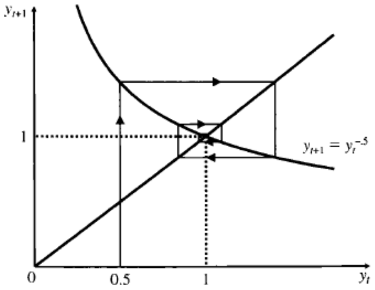
Να κατασκευαστεί το διάγραμμα φάσης και να γίνει ποιοτική ανάλυση της εξίσωσης διαφορών $y_{t+1} = y_t^2$.



Στο σημείο $\bar{y} = 1$ εμφανίζεται μία **ασταθής ισορροπία** ενώ στο $\bar{y} = 0$ εμφανίζεται μία **τοπικά ευσταθής ισορροπία**.

Διάγραμμα φάσης - Παράδειγμα 2

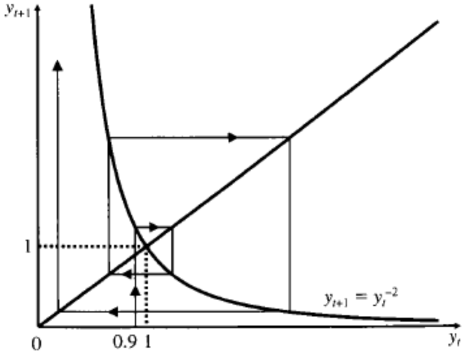
Να κατασκευαστούν τα διαγράμματα φάσης και να γίνει μία ποιοτική ανάλυση της εξίσωσης διαφορών $y_{t+1} = y_t^{\alpha}$ όταν $\alpha = -1/2$ και $\alpha = -2$.



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης όταν $\alpha = -1/2$

Στο $\bar{y} = 1$ φαίνεται να έχουμε ευσταθή ισορροπία.

Διάγραμμα φάσης - Παράδειγμα 2



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης όταν $\alpha = -2$

Στο $\bar{y} = 1$ φαίνεται να έχουμε ασταθή ισορροπία.

Θεώρημα

Θεώρημα: Μία σταθερή κατάσταση ισορροπίας σε ένα στάσιμο σημείο μίας οποιασδήποτε αυτόνομης, μη γραμμικής εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης, είναι τοπικά ευσταθής αν η απόλυτη τιμή της παραγώγου $f^{'}(\bar{y})$ είναι μικρότερη από 1.
Είναι ασταθής, αν η απόλυτη τιμή της παραγώγου είναι μεγαλύτερη από 1 σε αυτό το σημείο.

Παράδειγμα

Να χρησιμοποιηθεί το προηγούμενο θεώρημα για να βρεθούν οι ιδιότητες της τοπικής ευστάθειας της:

$$y_{t+1} = y_t^{\alpha},$$

για τις διάφορες τιμές του α.

Έχουμε:

$$f'(y_t) = \alpha y_t^{\alpha-1}.$$

Στο στάσιμο σημείο $\bar{y} = 1$ έχουμε:

$$f'(1) = \alpha.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα στο σημείο $\bar{y} = 1$ έχουμε τοπικά ευσταθή ισορροπία μόνο όταν $-1 < f'(\bar{y}) < 1 \Rightarrow -1 < \alpha < 1$. Για όλες τις άλλες τιμές, η ισορροπία στο $\bar{y} = 1$ είναι ασταθής.

Παράδειγμα

Για $\alpha > 0$, βρήκαμε ένα άλλο σημείο ισορροπίας, το $\bar{y} = 0$. Η παράγωγος στο σημείο αυτό είναι:

$$f^{'}(0) = 0 \text{ αν } \alpha > 1$$
$$f^{'}(0) \text{ δεν ορίζεται αν } 0 < \alpha < 1 \text{ (διαίρεση με το μηδέν)}$$

Αν $\alpha > 1$ η ισορροπία στο σημείο $\bar{y} = 0$ είναι τοπικά ευσταθής (διότι $f^{'}(0) < 1$). Δεν είναι ολικά ευσταθής γιατί δεν συγκλίνει στο 0 για οποιοδήποτε $y_t \geq 1$. Όταν $0 < \alpha < 1$ το $\bar{y} = 0$ είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας επειδή η παράγωγος γίνεται απείρως μεγάλη (το α διαιρείται με το 0).

Θεώρημα

Μία εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης θα οδηγήσει σε ταλαντώσεις της y_t αν η παράγωγος $f^{'}$ είναι αρνητική για όλα τα $y_t > 0$, αλλά η y_t θα κινηθεί μονότονα αν η παράγωγος είναι θετική για όλα τα $y_t > 0$.