Ανασκόπηση Παραγώγων

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Οκτώβριος 2022

1 Παράγωγοι

Η παράγωγος μίας συνάρτησης ορισμένης στο σημείο $x_0 \in (a, b)$ ορίζεται είτε ώς:

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

είτε ως:

$$lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Οι δύο ορισμοί είναι ίδιοι μόνο που στη δεύτερη περίπτωση έχουμε αντικαταστήσει το x_0 με το x και το x με το $x + h$.

Παράδειγμα: Παράγωγος της $f(x) = x^2$. $lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$

Κάθε συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Ωστόσο, υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς αλλά όχι παραγωγίσιμες.

Π.χ. $f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ στο $x_0 = 0$.

Για $x < 0$ $f(x) = \sqrt{-x} = (-x)^{\frac{1}{2}}$. $f^{'}(x) = -\frac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}}$. Συνεπώς η παράγωγος για $x < 0$ είναι αρνητική και συνεπώς η συνάρτηση f σε αυτό το διάστημα είναι φθίνουσα. $f^{''}(x) = -\frac{1}{4}(-x)^{-\frac{3}{2}}$. Συνεπώς η δεύτερη παράγωγος για $x < 0$ είναι αρνητική και συνεπώς η συνάρτηση f σε αυτό το διάστημα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

Για $x > 0$ $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. $f^{'}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. Η πρώτη παράγωγος για $x > 0$ είναι θετική και συνεπώς η συνάρτηση f σε αυτό το διάστημα είναι αύξουσα. $f^{''}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$. Συνεπώς η δεύτερη παράγωγος για $x > 0$ είναι αρνητική και συνεπώς η συνάρτηση f σε αυτό το διάστημα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

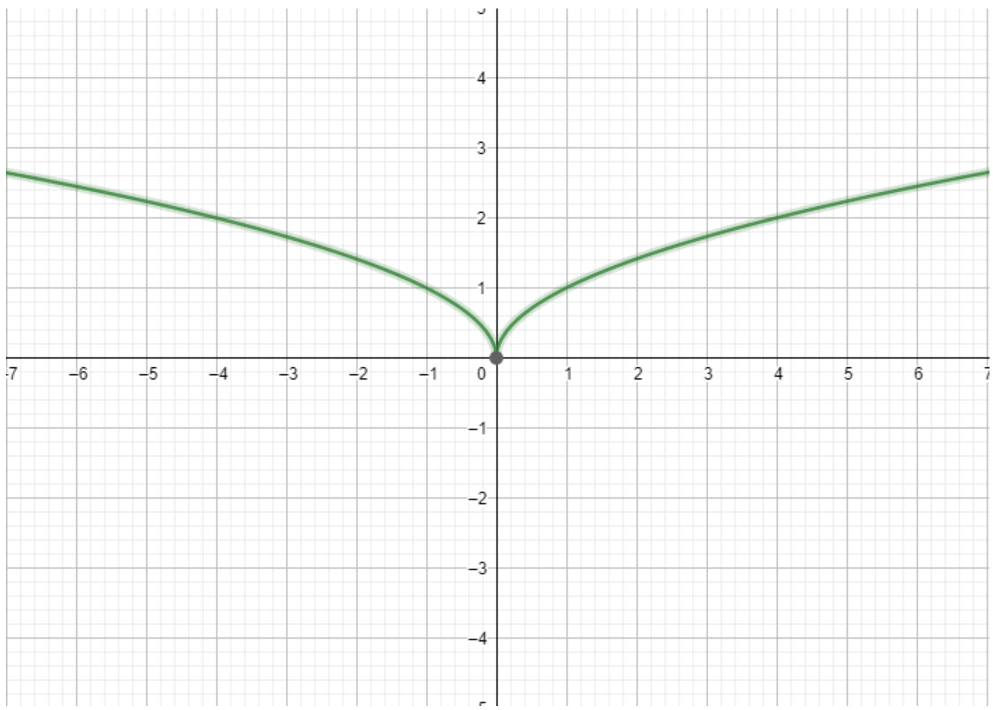
Το διάγραμμα της συνάρτησης φαίνεται στο Σχήμα 1.

Εξετάζουμε τώρα τις παραγώγους από αριστερά και από δεξιά στο $x_0 = 0$:

$lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = lim_{x \to 0^-} - \frac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty$.

$lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Η παράγωγος τείνει στο $-\infty$ από αριστερά και στο $+\infty$ από δεξιά. Συνεπώς, δεν υπάρχει (τόσο γιατί είναι διαφορετική από δεξιά και από αριστερά, αλλά ούτως ή



Σχήμα 1: Διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$

άλλως γιατί απειρίζεται). Λέμε ότι η συνάρτηση έχει ‘κατακόρυφη εφαπτομένη’ στο $x = 0$.

1.1 Ιδιότητες παραγώγων

- $(f(x)g(x))^{'} = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x)$,
- $(\frac{f(x)}{g(x)})^{'} = \frac{f^{'}(x)g(x) - f(x)g^{'}(x)}{g^2(x)}$
- $(e^x)^{'} = e^x$
- $(ln(x))^{'} = \frac{1}{x}$
- $(ax^k + bx^{k-1} + \cdots + 1)^{'} = akx^{k-1} + b(k-1)x^{k-2} + \cdots + 0$
- $f(g(x))^{'} = f^{'}(u) \circ g^{'}(x)$, όπου $u = g(x)$
- $[f^{-1}]^{'}(x) = \frac{1}{f^{'}(f^{-1})(x)}$
- $\frac{d(tanx)}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{sinx}{cosx} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$
- $\frac{d(cotx)}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{cosx}{sinx} = \frac{-sin^2x - cos^2x}{sin^2x} = -\frac{1}{sin^2x}$

1.2 Άσκηση

Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και $f(x) = y$ τότε $(f^{-1}(y))^{'} = 1/f^{'}(x)$.
Αν $x \to x_0$ τότε $y = f(x) \implies f(x_0) = y_0$ από συνέχεια.
$(f^{-1})^{'}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f^{'}(x_0)} = \frac{1}{f^{'}(f^{-1}(y_0))}$
Πιο απλά $f^{-1}(f(x)) = x$. Παραγωγίζοντας έχουμε $(f^{-1})^{'}(f(x))f^{'}(x) = 1 \iff (f^{-1})^{'}(f(x)) = \frac{1}{f^{'}(x)}$

1.3 Συνέχεια με ε-δ ορισμό

Μία συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta \iff |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
Παράδειγμα: $f(x) = \alpha x + b$.
$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \iff |\alpha x + b - \alpha x_0 - b| < \epsilon \iff |\alpha||x - x_0| < \epsilon \iff |x - x_0| < \frac{\epsilon}{|\alpha|}$. Επιλέγω $\delta = \frac{\epsilon}{|\alpha|}$
Για την περίπτωση $\alpha = 0$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \iff |b - b| < \epsilon \iff \epsilon > 0$ το οποίο ισχύει.

1.4 Άσκηση

Με βάση τον ορισμό της παραγώγου να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = 2x^3$.
$f^{'}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2x^3-2x_0^3}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 2(x^2 + xx_0 + x_0^2) = 6x_0^2$