Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 1

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

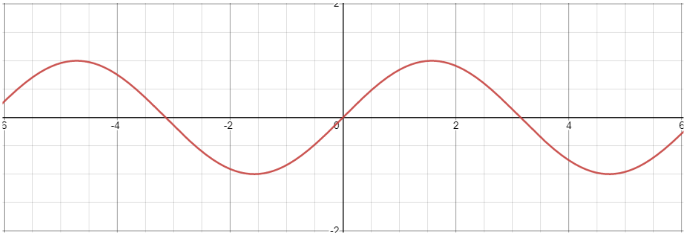
Οκτώβριος 2022

Θέματα 1ης διάλεξης

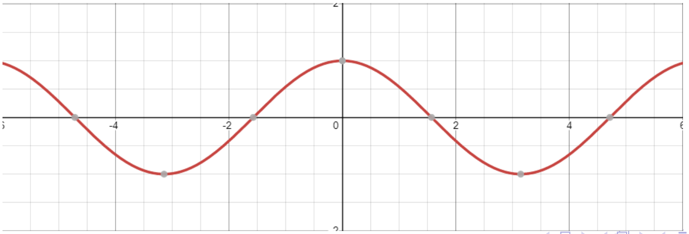
- Βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Μιγαδικοί αριθμοί
- Αόριστα ολοκληρώματα
- Ορισμένα ολοκληρώματα

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Ημίτονο ($\sin x$)

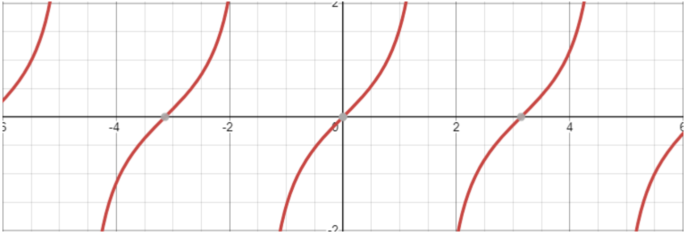


- Συνημίτονο ($\cos x$)

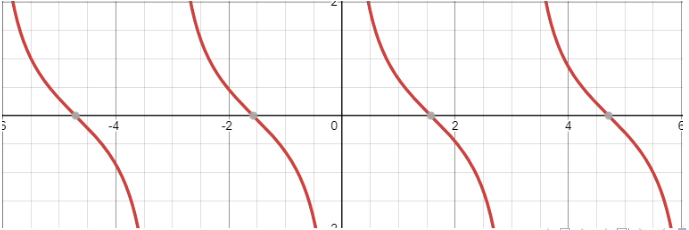


Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Εφαπτομένη ($\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$)

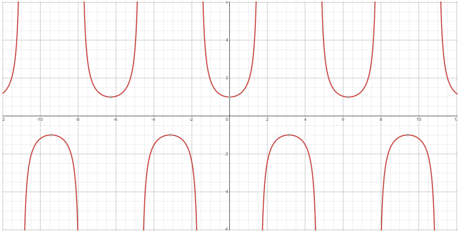


- Συνεφαπτομένη ($\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$)

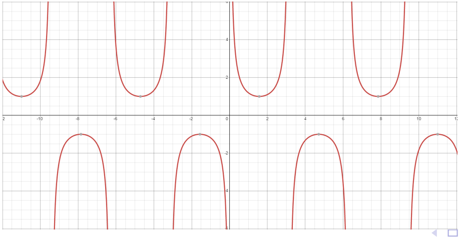


Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Τέμνουσα ($\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$)

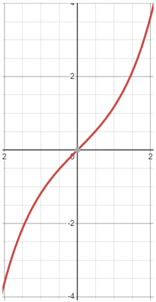


- Συντέμνουσα ($\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$)

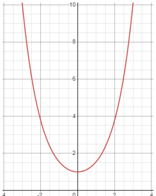


Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Τόξο ημιτόνου ($\arcsin x$)

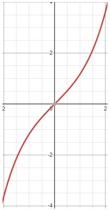


- Τόξο συνημιτόνου ($\arccos x$)

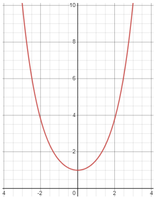


Υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Υπερβολικό ημίτονο ($\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$)



- Υπερβολικό συνημίτονο ($\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)



Ορισμός μιγαδικών αριθμών

Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να ορισθεί ώς ένα διατεταγμένο ζεύγος:

$$z = (x, y), \text{όπου } x, y \in \mathbb{R}$$

με τις πράξεις της πρόσθεσης:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

και πολλαπλασιασμού:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Οι πραγματικοί αριθμοί στην έκφραση $z = (x, y)$ είναι γνωστοί ως το *πραγματικό* και *φανταστικό* μέρος του z, και συμβολίζονται ως:

$$\mathrm{Re}(z) = x, \ \mathrm{Im}(z) = y$$

Συμβολισμός μιγαδικών αριθμών

Εάν συμβολίσουμε έναν πραγματικό άριθμό x ως $(x, 0)$ και τον φανταστικό αριθμό $(0, 1)$ με i, τότε ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως:

$$(x, y) = x + iy$$

Επιπλέον, βάσει των ορισμών, ισχύει:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

δηλαδή

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

Βάσει αυτού του συμβολισμού, η πρόσθεση και πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών διαμορφώνονται ως:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Παράδειγμα - Δευτεροβάθμια εξίσωση

Για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2 - x + 1 = 0$, παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα είναι αρνητική:

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

Δεν υπάρχει λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, αλλά στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών υπάρχουν οι λύσεις:

$$\rho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Αλγεβρικές ιδιότητες

- Αντιμεταθετική
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$$
- Προσεταιριστική
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$
- Επιμεριστική
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$
- Προσθετικό ταυτοτικό στοιχείο $0 = (0, 0)$ και πολλαπλασιαστική μονάδα $1 = (1, 0)$
$$z + 0 = z, z \cdot 1 = z$$
- Προσθετικό αντίστροφο στοιχείο $-z = (-x, -y)$
$$z + (-z) = 0$$
- Πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στοιχείο $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ για $z = x + iy \neq 0$
$$zz^{-1} = 1$$

Άσκηση

Εάν $z = x + iy \neq 0$, αποδείξτε ότι το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στοιχείο του z είναι το $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

Λύση

Για να βρούμε το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στοιχείο του $z = x + iy$, θα πρέπει να αναζητήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς, έστω u και v έτσι ώστε:

$$(x + iy)(u + iv) = 1 + i0$$

Αναλύοντας το αριστερό μέλος της εξίσωσης, έχουμε:

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) = 1 + i0$$

Για να είναι οι δύο μιγαδικοί αριθμοί ίσοι, θα πρέπει τα πραγματικά και φανταστικά τους μέρη να είναι ίσα. Επομένως:

$$xu - yv = 1 \text{ και } xv + yu = 0$$

Εάν επιλύσουμε το γραμμικό αυτό σύστημα (άγνωστοι τα u, v) τότε παίρνουμε:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Διαίρεση μιγαδικών αριθμών

Η διαίρεση με έναν μη-μηδενικό μιγαδικό αριθμό ορίζεται ως:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}, z_2 \neq 0$$

ή (εάν $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$):

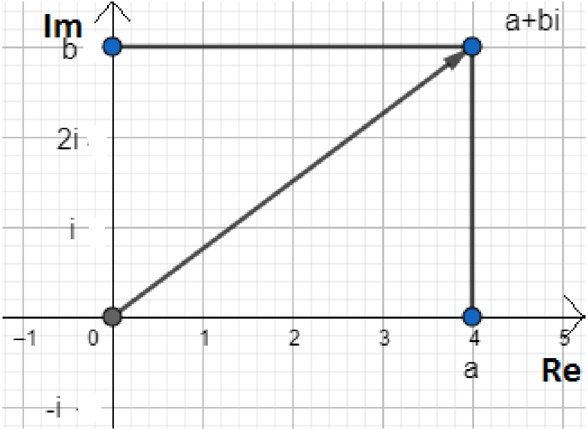
$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i \left(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

Άλλες ιδιότητες της διαίρεσης που μπορούν εύκολα να προκύψουν:

- $(z_1 z_2)(z_1^{-1} z_2^{-1}) = (z_1 z_1^{-1})(z_2 z_2^{-1}) = 1$, για $z_1, z_2 \neq 0$
- $\frac{1}{z_1 z_2} = \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right)$, για $z_1, z_2 \neq 0$
- $\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}$, $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right)$, για $z_3, z_4 \neq 0$

Ισομορφισμός με το $\mathbb{R}^2$

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{C}$.
Το $\mathbb{C}$ είναι ισόμορφο με το $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{I}$). Έτσι μπορούμε να κατάλαβουμε διαισθητικά καλύτερα το νοήμά του:



Σχήμα: Ισομορφισμός του $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Ως μέτρο ή απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ ορίζεται η ποσότητα:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Γεωμετρικά, το μέτρο εκφράζει την απόσταση του σημείου (x, y) από την αρχή των αξόνων. Εάν $y = 0$, τότε το μέτρο συμπίπτει με τη συνήθη απόλυτη τιμή των πραγματικών αριθμών.

Τριγωνική ανισότητα:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού

Με βάση τον ισομορφισμό του $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$, μπορούμε να γράψουμε έναν μιγαδικό αριθμό με συντεταγμένες (a, b) σε "πολική" μορφή με συντεταγμένες (ρ, θ).

$$\theta = \arctan(b/a)$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

όπου

$$a = \rho\cos(\theta)$$

και

$$b = \rho\sin(\theta)$$

και η πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού z είναι:

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Συζυγείς Μιγαδικοί Αριθμοί

Αν έχουμε έναν μιγαδικό αριθμό z, ο αντίστοιχος μιγαδικός αριθμός ο οποίος έχει το ίδιο πραγματικό μέρος και αντίθετο φανταστικό μέρος ονομάζεται **συζυγής** του z και συμβολίζεται $\bar{z}$. Δηλαδή, αν $z = a + bi$ τότε $\bar{z} = a - bi$.

Ιδιότητες:

$z + \bar{z} = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$.

$z - \bar{z} = 2bi = 2\mathrm{Im}(z)i$.

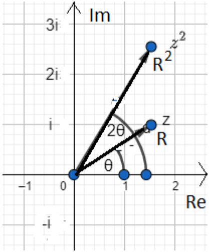
$z\bar{z} = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$.

Τύπος του Euler

Ο τύπος του Euler μας δίνει ότι:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

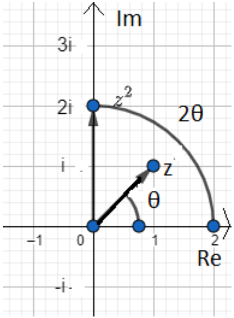
Αυτός ο τύπος μας δίνει τη δυνατότητα να υψώσουμε εύκολα έναν μιγαδικό αριθμό σε μία δύναμη.
Για παράδειγμα, αντί να υπολογίσουμε το $(a+bi)^n$ μετατρέπουμε τον αριθμό $a+bi$ σε πολική μορφή και υπολογίζουμε το $(Re^{i\theta})^n = R^n e^{in\theta} = R^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$.



Σχήμα: Ο τύπος του Euler διαγραμματικά

Παράδειγμα για τον τύπο του Euler

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i$. Μετατρέπουμε τον αριθμό σε πολική μορφή $R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ και $\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Τότε, υψώνοντας στο τετράγωνο, υψώνουμε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού στο τετράγωνο και διπλασιάζεται η γωνία. Δηλαδή, έχουμε $z^2 = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$.



Σχήμα: Ο τύπος του Euler για το δεδομένο παράδειγμα

Αόριστο ολοκλήρωμα

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα ή αντιπαράγωγος της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F^{'}(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Θεώρημα: Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ τότε:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής
  $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$
  είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:
  $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

Αόριστο ολοκλήρωμα

Αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)$ ονομάζεται το σύνολο των παραγουσών συναρτήσεων της:

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Για παράδειγμα:

$$\int x^2 dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx = \frac{x^3}{3} + c$$

διότι ισχύει:

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

ενώ $\int e^{2x}dx = \int \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$, διότι: $\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' = \frac{2e^{2x}}{2} = e^{2x}$

Βασικό τυπολόγιο αόριστων ολοκληρωμάτων

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}^*$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
6. $\int \cos x dx = \sin x + c$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
8. $\int e^x dx = e^x + c$
9. $\int \alpha^x dx = \frac{1}{\ln \alpha}\alpha^x + c, \quad 0 < \alpha \neq 1$
10. $\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \text{arctan}x + c, \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \text{arcsin}x + c, \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \text{arccos}x + c$
11. $\int \sinh x dx = \cosh x + c, \int \cosh x dx = \sinh x + c$

Γραμμικότητα ολοκληρώματος

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int f(x)dx + c_2 \int g(x)dx$$

Παραδείγματα

- $\int \sqrt{3x}dx = \sqrt{3}\int \sqrt{x}dx = \sqrt{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{3}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \sqrt{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3} + c$

- $\int \sqrt[4]{\frac{2}{x^3}}dx = \int \frac{\sqrt[4]{2}}{x^{\frac{3}{4}}}dx = \sqrt[4]{2}\int x^{-\frac{3}{4}}dx = \sqrt[4]{2}\frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + c = \sqrt[4]{2}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c = 4\sqrt[4]{2x} + c$

- $\int \frac{2x^2-x+5}{x^2}dx = \int \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}\right)dx = \int 2dx - \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{5}{x^2}dx =$
  $2x - \ln|x| - 5x^{-1} + c = 2x - \ln|x| - \frac{5}{x} + c$

- $\int \frac{1-\sin^2(x)}{\cos(x)}dx = \int \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)}dx = \int \cos(x)dx = \sin(x) + c$

Άσκηση

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{4}{\sin^2(2x)} dx$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

έχουμε:

$$\int \frac{4}{\sin^2(2x)}dx = \int \frac{4}{(2\sin(x)\cos(x))^2}dx = \int \frac{4}{4\sin^2(x)\cos^2(x)}dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)} = \int \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx + \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx + \int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = \tan(x) - \cot(x) + c$$

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\int f(x)g^{'}(x)dx = f(x)g(x) - \int f^{'}(x)g(x)dx$$

Παραδείγματα:

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x^2 e^x dx$:
  $\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)^{'} dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2\int x(e^x)^{'} dx =$
  $x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$
- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x\cos(ax)dx$:
  $\int x\cos(ax)dx = \int x\left(\frac{\sin(ax)}{a}\right)^{'} dx = \frac{x\sin(ax)}{a} - \frac{1}{a}\int x'\sin(ax)dx =$
  $\frac{x\sin(ax)}{a} - \frac{1}{a}\int \sin(ax)dx = \frac{x\sin(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2} + c$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\int f(g(x))g^{'}(x)dx = \int f(u)du$$

όπου $u = g(x)$ και $du = g^{'}(x)dx$

Παραδείγματα:

- $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$. Θέτουμε $u = x^2+1$ οπότε $du = (x^2+1)^{'}dx = 2xdx$.
  Συνεπώς $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c =$
  $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$
- $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$. Θέτουμε $u = x^3$ οπότε $du = (x^3)^{'} = 3x^2dx$.
  Συνεπώς $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(x^3)^{'}}{\sqrt{1-(x^3)^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{u(x)^{'}}{\sqrt{1-(u(x))^2}}dx =$
  $\frac{1}{3}\arcsin(u(x)) + c = \frac{1}{3}\arcsin(x^3) + c$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

$$\int \frac{p(x)}{(q(x))^k} dx$$

Όπου $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα για τα οποία ισχύει $p(x) = q'(x)$ και $k \in \mathbb{N}$.
Η αντικατάσταση που κάνουμε είναι $u = q(x)$.

Παράδειγμα: $\int \frac{6x-1}{(3x^2-x-12)^2} dx$. Θέτουμε
$u = 3x^2 - x - 12 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 6x - 1 \Leftrightarrow du = (6x - 1)dx$. Επομένως
$\int \frac{6x-1}{(3x^2-x-12)^2} dx = \int \frac{du}{u^2} = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{3x^2-x-12} + c$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$$

Ρητή συνάρτηση με αριθμητή ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού και παρονομαστή ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού το οποίο δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε δεν παραγοντοποιείται.

$$\int \frac{8x+4}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{8x+4}{x^2-2x+1+4}dx = \int \frac{8x+4}{(x-1)^2+4}dx \underset{\substack{u=x-1\\du=dx}}{=} \int \frac{8(u+1)+4}{u^2+4}du =$$

$$\int \frac{8u}{u^2+4}du + \int \frac{12}{u^2+2^2}du = 4\int \frac{2u}{u^2+4}du + 6\int \frac{2}{u^2+2^2}du \underset{\substack{v=u^2+4\\dv=2udu}}{=} 4\int \frac{dv}{v} + 6\int \frac{2}{u^2+2^2}du =$$

$$4\ln|v| + 6\arctan(\tfrac{u}{2}) + c = 4\ln|u^2+4| + 6\arctan\left(\tfrac{x-1}{2}\right) + c =$$

$$4\ln(x^2-2x+5) + 6\arctan\left(\tfrac{x-1}{2}\right) + c$$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Περίπτωση που ο αριθμητής έχει βαθμό μικρότερο από τον παρονομαστή και αυτός έχει απλές ρίζες:
$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} = \frac{n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_n)}$

Παράδειγμα: $\int \frac{x+2}{x^2+2x-8}$. Αναλύουμε σε παράγοντες:
$\frac{x+2}{x^2+2x-8} = \frac{x+2}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+4)}{(x+4)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+4B}{(x+4)(x-2)}$
Η ισότητα των αριθμητών μας οδηγεί στο σύστημα $\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+4B=2 \end{cases}$ το οποίο έχει μοναδική λύση $A=1/3$ και $B=2/3$. Επομένως:
$\int \frac{x+2}{x^2+2x-8}dx = \int \left(\frac{1}{3(x+4)} + \frac{2}{3(x-2)}\right) dx = \frac{1}{3}\ln|x+4| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + c$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Περιπτώσεις που ο αριθμητής έχει βαθμό μικρότερο από τον παρονομαστή και αυτός έχει πολλαπλές ρίζες:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x+a_1)^k(x+a_2)^m \cdots (x+a_\ell)^n} = \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{(x+a_1)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x+a_1)^k} + \frac{B_1}{x+a_2} + \frac{B_2}{(x+a_2)^2} + \cdots + \frac{B_m}{(x+a_2)^m} + \cdots + \frac{C_1}{x+a_\ell} + \frac{C_2}{(x+a_\ell)^2} + \cdots \frac{C_k}{(x+a_\ell)^n}$$

ή

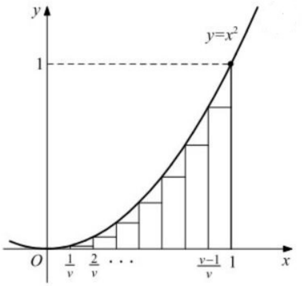
$$f(x) = \frac{p(x)}{(x+a)^k(x^2+bx+c)^n} = \frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x+a)^k} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Περιπτώσεις που ο αριθμητής έχει βαθμό μεγαλύτερο από τον παρονομαστή $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = A(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$ (διαίρεση πολυωνύμων), τότε:
$\int A(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)} dx = \int A(x)dx + \frac{p_1(x)}{q(x)} dx$, με $\deg p_1(x) < \deg q(x)$

Παράδειγμα:
$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1} dx = \int (x^2 - x + 1) + \frac{x-2}{x^2-1} dx = \int (x^2 - x + 1) dx + \int \frac{x-2}{x^2-1} dx$

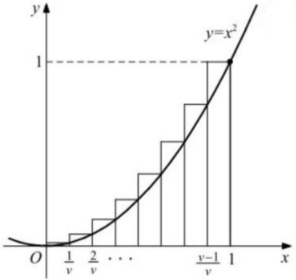
Εμβαδόν παραβολικού χωρίου



Σχήμα: Προσέγγιση εμβαδού της $f(x) = x^2$ ‘από κάτω’

$\epsilon_\nu = f(0)\frac{1}{\nu} + f(\frac{1}{\nu})\frac{1}{\nu} + f(\frac{2}{\nu})\frac{1}{\nu} + \cdots f(\frac{\nu-1}{\nu})\frac{1}{\nu} =$
$\frac{1}{\nu}(0^2 + (\frac{1}{\nu})^2 + (\frac{2}{\nu})^2 + \cdots + (\frac{\nu-1}{\nu})^2) = \frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2) =$
$\frac{1}{\nu^3}\frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6} = \frac{2\nu^2-3\nu+1}{6\nu^2}$
(χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$)

Εμβαδόν παραβολικού χωρίου

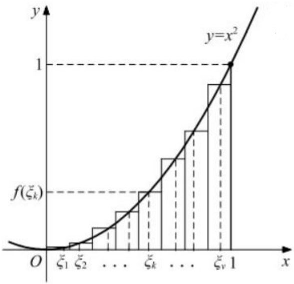


Σχήμα: Προσέγγιση εμβαδού της $f(x) = x^2$ 'από πάνω'

$$E_\nu = f(\tfrac{1}{\nu})\tfrac{1}{\nu} + f(\tfrac{2}{\nu})\tfrac{1}{\nu} + \cdots + f(\tfrac{\nu}{\nu})\tfrac{1}{\nu} = \tfrac{1}{\nu}((\tfrac{1}{\nu})^2 + (\tfrac{2}{\nu})^2 + \cdots + (\tfrac{\nu}{\nu})^2) =$$
$$\tfrac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^2) = \tfrac{1}{\nu^3}\tfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \tfrac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu^2}$$

Όμως για το εμβαδό E ισχύει $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \epsilon_\nu \leq E \leq \lim\limits_{\nu\to+\infty} E_\nu$. Συνεπώς $E = \frac{1}{3}$.

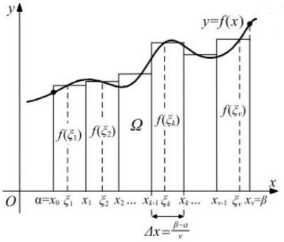
Εμβαδόν παραβολικού χωρίου



Σχήμα: Προσέγγιση εμβαδού της $f(x) = x^2$ 'με ενδιάμεσα σημεία'

$S_\nu = \frac{1}{\nu} f(\xi_1) + \frac{1}{\nu} f(\xi_2) + \cdots + \frac{1}{\nu} f(\xi_\nu)$. Επειδή $f(x_{k-1}) \leq f(\xi_k) \leq f(x_k)$, $k = 1, \cdots, \nu$ θα είναι: $\frac{1}{\nu} f(x_{k-1}) \leq \frac{1}{\nu} f(\xi_k) \leq \frac{1}{\nu} f(x_k)$. Συνεπώς $\epsilon_\nu \leq S_\nu \leq E_\nu$. Συνεπώς $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \epsilon_\nu = \lim\limits_{\nu \to +\infty} E_\nu = S_\nu$ και $S_\nu = \frac{1}{3}$.

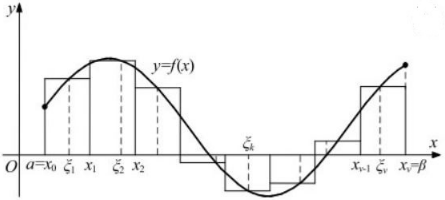
Ορισμός εμβαδού



Σχήμα: Γενικός ορισμός εμβαδού

Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη διαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}$ με
$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_\nu = \beta$
Σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα ξ_k
$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = \Delta x(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_\nu))$.
Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu \to +\infty} S_\nu$.

Ορισμένο ολοκλήρωμα



Σχήμα: Ορισμένο Ολοκλήρωμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = \Delta x(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots f(\xi_\nu) = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x.$$

Το όριο του παραπάνω αθροίσματος όταν $\nu \to +\infty$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ξ_k.

Γράφεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται ως ολοκλήρωμα της f από το α στο β.

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Ισχύει ότι:

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ για $a < b$

Θεώρημα 1^o: Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Θεώρημα 2^o: Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Θεώρημα 3^o: Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό τότε

$$\int_{a}^{b} f(x)dx > 0$$

Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Θεώρημα: Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \; x \in \Delta$$

είναι μία παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Θεώρημα: (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)
Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Οι τύποι της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και για ορισμένα ολοκληρώματα

Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_a^b f(x)g^{'}(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f^{'}(x)g(x)dx$$

όπου $f^{'}, g^{'}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.

Για παράδειγμα:
$\int_0^{\pi/2} xcosxdx = \int_0^{\pi/2} x(sinx)^{'}dx = [xsinx]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} sinxdx =$
$[xsinx]_0^{\pi/2} + [cosx]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}$

Ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για ορισμένα ολοκληρώματα

Ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_a^b f(g(x))g^{'}(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$$

όπου $f, g^{'}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g^{'}(x)dx$ και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(b)$.

Για παράδειγμα $I = \int_1^e \frac{lnx}{x} dx = \int_1^e lnx(lnx)^{'} dx$. Θέτουμε $u = lnx$, οπότε $du = (lnx)^{'} dx$, $u_1 = ln1 = 0$, $u_2 = lne = 1$. Συνεπώς

$$I = \int_0^1 udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

.

Εφαρμογές ολοκληρωμάτων - Υπολογισμός εμβαδών

Το εμβαδόν μεταξύ δύο συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει $f_1(x) \geq f_2(x)$ για $a \leq x \leq b$ ισούται με

$$E = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| \, dx$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κλειστού χωρίου που ορίζουν οι συναρτήσεις $f_1(x) = \sqrt{x}$ και $f_2(x) = x^2$.

Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών: $\sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x = x^4 \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(0, 1)$ η συνάρτηση $\sqrt{x} - x^2$ παίρνει θετικές τιμές, οπότε το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 \left|\sqrt{x} - x^2\right| dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Εφαρμογές ολοκληρωμάτων - Υπολογισμός μήκους τμήματος καμπύλης

Το μήκος τμήματος καμπύλης μιας συνάρτησης $y = f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ ισούται με:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το μήκος τμήματος καμπύλης της $y = x^{\frac{3}{2}}$ που ορίζεται ανάμεσα στις ευθείες $x = 0$ και $x = 4$.
Για τη συγκεκριμένη συνάρτηση έχουμε $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, επομένως το μήκος είναι:
$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{4 + 9x} dx$. Εάν κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u = \sqrt{4 + 9x}$, τότε εύκολα μπορούμε να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα $L = \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right)$

Γενικευμένα ολοκληρώματα (α′ είδους)

Εάν σε ένα ολοκλήρωμα ένα τουλάχιστον από τα δύο άκρα ολοκλήρωσης είναι $\pm\infty$, τότε αυτό ονομάζεται γενικευμένο ολοκλήρωμα α′ είδους.

Μπορούμε να διαχωρίσουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις σε σχέση με το διάστημα ολοκλήρωσης:

- διάστημα $[a, \infty)$, τότε
$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$
- διάστημα $(-\infty, a]$, τότε
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx$$
- διάστημα $(-\infty, +\infty)$, τότε
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

Άν το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, διαφορετικά αποκλίνει.

Παραδείγματα

- $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty$
- $\int_0^\infty \cos(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos(x)dx = \lim_{b\to\infty} [\sin(x)]_0^b = \lim_{b\to\infty} (\sin(b) - sin(0))$.
  Το όριο όμως $\lim_{b\to\infty} \sin(b)$ δεν υπάρχει (γιατί;), επομένως το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.
- $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.