3ο Φροντιστηριακό Μάθημα Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Οκτώβριος 2022

1^{η} Άσκηση 1

Να κατατάξετε τις συναρτήσεις $f(x) = 2(x+2)^2$, g(x) = ln(x), $h(x) = 1 - e^{-x}$ ως κοίλες ή κυρτές αφού υπολογίσετε τις δεύτερες παραγώγους τους.

$$f_{_{_{_{}}}}^{'}(x)=4(x+2),\,f_{_{_{_{_{}}}}}^{''}(x)=4$$
 άρα f κυρτή.

$$g^{'}(x) = \frac{1}{x}, g^{''}(x) = -\frac{1}{x^2}$$
 άρα g κοίλη.

$$h^{'}(x) = e^{-x}, h^{''}(x) = -e^{-x}$$
 άρα h κοίλη.

2 2^{η} Άσκηση

Να υπολογίσετε την παράγωγο της $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-1}$ και της $g(x)=\sqrt{e^{2x}-x^2}.$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{8x}{(x^2 - 1)^2}$$
$$g'(x) = \frac{2e^{2x} - 2x}{2\sqrt{e^{2x} - x^2}} = \frac{e^{2x} - x}{\sqrt{e^{2x} - x^2}}$$

$$g'(x) = \frac{2e^{2x} - 2x}{2\sqrt{e^{2x} - x^2}} = \frac{e^{2x} - x}{\sqrt{e^{2x} - x^2}}$$

3^η Άσκηση 3

Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων $f(x)=\frac{10x^2+3x^4+5}{x^2-5x},$ $g(x)=e^{3x^2+5x+1},$

$$h(x) = (3x^2 + 5x + 1)^{50}$$

$$f'(x) = (20x + 12x^3)(x^2 - 5x) - ((2x - 5)(10x^2 + 3x^4 + 5)) = (2x - 5)(10x^2 + 3x^4 + 5)$$

$$h(x) = (3x^2 + 5x + 1)^{50}$$

$$f'(x) = \frac{(20x + 12x^3)(x^2 - 5x) - ((2x - 5)(10x^2 + 3x^4 + 5))}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 100x^2 + 12x^5 - 60x^4 - (20x^3 + 6x^5 + 10x - 50x^2 - 15x^4 - 25)}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 100x^2 + 12x^5 - 60x^4 - (20x^3 + 6x^5 + 10x - 50x^2 - 15x^4 - 25)}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 100x^2 + 12x^5 - 60x^4 - (20x^3 + 6x^5 + 10x - 50x^2 - 15x^4 - 25)}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 100x^2 + 12x^5 - 60x^4 - (20x^3 + 6x^5 + 10x - 50x^2 - 15x^4 - 25)}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 100x^2 + 12x^5 - 60x^4 - (20x^3 + 6x^5 + 10x - 50x^2 - 15x^4 - 25)}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 100x^2 + 12x^5 - 60x^4 - (20x^3 + 6x^5 + 10x - 50x^2 - 15x^4 - 25)}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 100x^2 + 12x^5 - 60x^4 - (20x^3 + 6x^5 + 10x - 50x^2 - 15x^4 - 25)}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 100x^2 + 12x^5 - 60x^4 - (20x^3 + 6x^5 + 10x - 50x^2 - 15x^4 - 25)}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 100x^2 + 12x^5 - 60x^4 - (20x^3 + 6x^5 + 10x - 50x^2 - 15x^4 - 25)}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 100x^2 + 12x^5 - 60x^4 - (20x^3 + 6x^5 + 10x - 50x^2 - 15x^4 - 25)}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 10x^2 - 15x^4 - 25}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 10x^2 - 15x^4 - 25}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 10x^2 - 15x^4 - 25}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 10x^2 - 15x^4 - 25}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 10x^2 - 15x^4 - 25}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{20x^3 - 10x^2 - 15x^4 - 15x^2 - 15x^4 - 15x^4 - 15x^2 - 15x^4 - 15x^2 - 15x^4 - 15x^2 - 15x^4 -$$

$$\frac{6x^5 - 45x^4 - 50x^2 - 10x + 25}{(x^2 - 5x)^2}$$

$$g'(x) = (6x+5)e^{3x^2+5x+1}$$

$$h'(x) = 50(3x^2 + 5x + 1)^{49}(6x + 5)$$

4^{η} Άσχηση 4

Για την ακολουθία $\alpha_{n+1}=2\alpha_n+1,\ \alpha_0=0$ να δείξετε με επαγωγή ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Για n=0 $\alpha_1=2\cdot 0+1=1>\alpha_0.$ Για n=k Έστω $\alpha_k>\alpha_{k-1}\iff 2\alpha_{k-1}+1>\alpha_{k-1}\iff \alpha_{k-1}>-1.$ Για n=k+1 Θ.δ.ό. $\alpha_{k+1}>\alpha_k\iff 2\alpha_k+1>\alpha_k\iff 2(2\alpha_{k-1}+1)+1>2\alpha_{k-1}+1\iff 4\alpha_{k-1}+3>2\alpha_{k-1}+1\iff 2\alpha_{k-1}>-2\iff \alpha_{k-1}>-1,$ το οποίο ισχύει από την υπόθεση.

5 5 $^{\eta}$ Άσχηση

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$ είναι κοίλη, χωρίς να κάνετε χρήση των παραγώγων της.

$$\begin{array}{l} f(tx_1+(1-t)x_2)\geq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\iff\\ \sqrt{tx_1+(1-t)x_2}\geq t\sqrt{x_1}+(1-t)\sqrt{x_2}\iff\\ tx_1+(1-t)x_2\geq t^2x_1+(1-t)^2x_2+2t(1-t)\sqrt{x_1x_2}\iff\\ t(1-t)x_1+(1-t)(1-(1-t))x_2-2t(1-t)\sqrt{x_1x_2}\geq 0\iff\\ t(1-t)x_1+(1-t)tx_2-2t(1-t)\sqrt{x_1x_2}\geq 0\iff\\ t(1-t)(x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2})\geq 0\iff\\ t(1-t)(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2\geq 0, \text{ to opiois iscnission.} \end{array}$$

6 6 $^{\eta}$ Άσχηση

Για την ακολουθία $\alpha_{n+1}=\frac{1}{2}\alpha_n+1, \alpha_0=1$ να βρείτε το όριό της υποθέτωντας ότι συγκλίνει.

 $lim\alpha_{n+1}=lim\frac{1}{2}\alpha_n+1$. Θέτοντας $x=lim\alpha_{n+1}=lim\alpha_n$ έχουμε $x=\frac{1}{2}x+1$ ή ισοδύναμα x=2.

7 7 $^{\eta}$ Άσχηση

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες συγκλίνει η ακολουθία: $\alpha_{n+1} = \frac{\lambda}{4}\alpha_n + 1, \alpha_0 = 1.$ Πρέπει $|\frac{\lambda}{4}| < 1 \iff |\lambda| < 4.$

8 8^η Άσκηση

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_{n+1}=\frac{3}{4}\alpha_n+1, \alpha_0=1$ συγκλίνει. Δείχνουμε με επαγωγή ότι η ακολουθία είναι αύξουσα: Για $n=0, \ \alpha_1=\frac{7}{4}\geq\alpha_0=1.$ Για n=k, Έστω $\alpha_k\geq\alpha_{k-1}$. Για n=k+1 Θ.δ.ό. $\alpha_{k+1}\geq\alpha_k\iff \frac{3}{4}\alpha_k+1\geq\alpha_k\iff \frac{3}{4}\alpha_{k-1}+1\iff \alpha_k\geq\alpha_{k-1}$ που ισχύει από την υπόθεση.

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι είναι άνω φραγμένη. Για να βρούμε ένα πιθανό άνω φράγμα, λύνουμε την εξίσωση $x=\frac{3}{4}x+1 \iff x=4$.

 $\Gamma \text{ia } n = 0 \ \alpha_0 = 1 \le 4.$

Για n = k Έστω $\alpha_k \le 4$.

Για n=k+1 $\alpha_{k+1} \leq 4 \iff \frac{3}{4}\alpha_k+1 \leq 4 \iff \frac{3}{4}\alpha_k \leq 3 \iff \alpha_k \leq \frac{12}{3} \iff \alpha_k \leq 4$, που ισχύει από την υπόθεση.

Συνεπώς η αχολουθία α_n συγκλίνει ως αύξουσα και άνω φραγμένη.

9 9^η Άσκηση

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την προειχόνα του συνόλου B=[4,5] για τη συνάρτηση $f(x)=4e^{2x}.$

 $y=4e^{2x}\iff \frac{y}{4}=e^{2x}\iff 2x=ln(\frac{y}{4})\iff x=\frac{1}{2}ln(\frac{y}{4})\ \text{h}\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}ln(\frac{x}{4}).$ Αντικαθιστούμε τις ακραίες τιμές για το σύνολο B και αφού η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε ότι η προεικόνα του συνόλου είναι η $A=[f^{-1}(4),f^{-1}(5)]=[0,\frac{1}{2}ln(\frac{5}{4})].$