Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 5

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Οκτώβριος 2022

Θέματα 5ης διάλεξης

- Μονοτονία συναρτήσεων, στάσιμα και κρίσιμα σημεία
- Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών
- Μερικές παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης
- Εσσιανή μήτρα
- Σειρές Taylor πολυμεταβλητών συναρτήσεων

Μονοτονία συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$. Αυτή καλείται:

Γνησίως αύξουσα εάν για οποιαδήποτε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Γνησίως φθίνουσα εάν για οποιαδήποτε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Αύξουσα εάν για οποιαδήποτε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Φθίνουσα εάν για οποιαδήποτε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Μονοτονία συνάρτησης

Εάν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής, τότε:

- Στα διαστήματα του πεδίου ορισμού όπου $f'(x) > 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα
- Στα διαστήματα του πεδίου ορισμού όπου $f'(x) < 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα

> Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

Η συνάρτηση είναι συνεχής (γιατί;) οπότε υπολογίζουμε την πρώτη της παράγωγο:
$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 12 = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Μέγιστο συνάρτησης

Σε ένα σημείο $\hat{x}$ ολικού μεγίστου ισχύει:

$$f(\hat{x}) \geq f(x) \text{ για όλα τα } x \text{ στο πεδίο ορισμού της,}$$

ενώ σε ένα σημείο x^* τοπικού μεγίστου, ισχύει:

$$f(x^*) \geq f(x), x^* - \epsilon \leq x \leq x^* + \epsilon, \epsilon > 0$$

για τα x που βρίσκονται σε ένα διάστημα, ενδεχομένως πολύ μικρό, γύρω από το x^*.

Αν η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο x^* τότε για f παραγωγίσιμη, θα πρέπει η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης να μηδενίζεται στο $x = x^*$, δηλαδή

$$f^{'}(x^*) = 0$$

Συνθήκη πρώτης τάξης

Τη συνθήκη αυτή την ονομάζουμε συνθήκη πρώτης τάξης. Για να καταλάβουμε γιατί πρέπει να ισχύει, βρίσκουμε το διαφορικό της $y = f(x)$ στο x^*:

$$dy = f^{'}(x)dx$$

Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x^* πρέπει να είναι αδύνατο να αυξηθεί η τιμή της με μικρές μεταβολές dx προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση του x^*. Αυτό δε θα μπορούσε να αληθεύει αν $f^{'}(x^*) \neq 0$. Γιατί αν $f^{'}(x^*) > 0$, τότε επιλέγοντας $dx > 0$, παίρνουμε $dy > 0$ και αυξάνεται η τιμή της συνάρτησης. Αν $f^{'}(x^*) < 0$, τότε αν επιλέξουμε $dx < 0$ πάλι παίρνουμε $dy > 0$ και αυξάνεται η τιμή της συνάρτησης. Μόνο αν $f^{'}(x^*) = 0$, ένα οποιοδήποτε $dx \neq 0$ δίνει $dy = 0$, ώστε η συνάρτηση να μην μπορεί να αυξηθεί.

Αναγκαία συνθήκη

Θεώρημα Fermat

Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f παίρνει μία ακρότατη τιμή σε ένα σημείο x^*, τότε $f^{'}(x^*) = 0$.

Η συνθήκη πρώτης τάξης $f^{'}(x^*) = 0$ είναι μία **αναγκαία συνθήκη** για να δώσει το x^* μία ακρότατη τιμή στη συνάρτηση. Η συνθήκη αυτή δεν είναι ικανή για μία ακρότατη τιμή, καθότι υπάρχει μία άλλη ομάδα σημείων, τα λεγόμενα **σημεία καμπής**, όπου η παράγωγος είναι δυνατόν να μηδενίζεται, δηλαδή $f^{'}(x^*) = 0$.
Για παράδειγμα για τη συνάρτηση

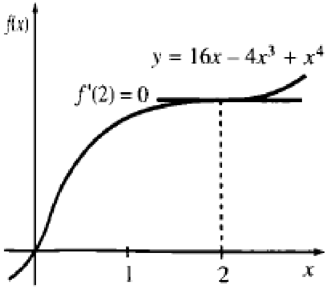
$$y = 16x - 4x^3 + x^4$$

Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = 16 - 12x^2 + 4x^3 = f^{'}(x)$$

και για $x = 2$ παίρνουμε $f^{'}(2) = 0$.

Γραφική παράσταση



Σχήμα: Συνάρτηση με σημείο καμπής

Το $x = 2$ δεν οδηγεί σε μία ακρότατη τιμή της συνάρτησης. Συμβαίνει η εφαπτομένη της συνάρτησης σε αυτό το σημείο να είναι οριζόντια ($y = 16$).

Στάσιμα και κρίσιμα σημεία

Για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f, το σημείο x^* όπου $f^{'}(x^*) = 0$, χαρακτηρίζεται ως **στάσιμη τιμή** της συνάρτησης. Σε τέτοιες στάσιμες τιμές η συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει ακρότατες τιμές ή σημεία καμπής. Κάθε ακρότατη τιμή μίας συνάρτησης παρουσιάζεται σε μία στάσιμη τιμή, αλλά δεν έχουμε υποχρεωτικά ακρότατη τιμή σε κάθε στάσιμη τιμή.

Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης ονομάζονται τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης μαζί με τα σημεία για τα οποία δεν ορίζεται η παράγωγός τους.

Συνθήκες Δεύτερης Τάξης

Αν η $f(x)$ είναι αυστηρά κοίλη στην περιοχή του x^* και δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε η καμπυλότητα της συνάρτησης είναι αρνητική ή διαφορετικά $f''(x^*) < 0$ καθώς στρέφει τα κοίλα κάτω.

> Αν $f'(x^*) = 0$ και $f''(x^*) < 0$, τότε η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο στο x^*.

Αν η $f(x)$ είναι αυστηρά κυρτή στην περιοχή του x^* και δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε η καμπυλότητα της συνάρτησης είναι θετική ή διαφορετικά $f''(x^*) > 0$ καθώς στρέφει τα κοίλα άνω.

> Αν $f'(x^*) = 0$ και $f''(x^*) > 0$, τότε η f παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στο x^*.

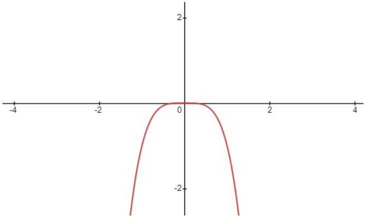
Στην περίπτωση ενός σημείου καμπής η καμπυλότα της συνάρτησης αλλάζει από κοίλη σε κυρτή ή αντίστροφα. Σε αυτήν την περίπτωση $f''(x^*) = 0$.

Συνθήκες Δεύτερης Τάξης

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης είναι ικανές για να δώσουν ένα τοπικό ακρότατο αλλά όχι αναγκαίες. Δηλαδή, μπορεί να έχουμε ένα τοπικό ακρότατο και παρόλα αυτά να ισχύει $f^{''}(x^*) = 0$.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -x^4$ παρουσιάζει ένα μέγιστο στο $x^* = 0$, αλλά

$$f^{''}(0) = -12(0)^2 = 0$$

.

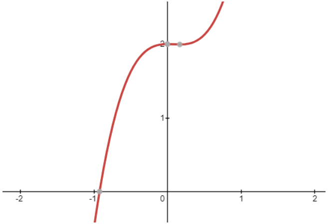


Παράδειγμα

Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση:

$$f(x) = y = 2x^3 - 0.5x^2 + 2$$

Έχουμε $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - x$, συνεπώς τα στάσιμα σημεία είναι το $x = 0$ και το $x = 1/6$.
$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 1$.
Στο $x = 0$, $f''(x) = -1 < 0$, συνεπώς έχουμε ένα τοπικό μέγιστο της συνάρτησης.
Στο $x = 1/6$, $f''(x) = 1 > 0$ συνεπώς έχουμε ένα τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης.



Άσκηση

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 2x^2$, βρίσκοντας τα διαστήματα μονοτονίας, κυρτότητας, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

Λύση

Αρχικά βρίσκουμε που τέμνει η συνάρτηση τον άξονα των x:
$f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$.
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια, δηλαδή ισχύει $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y.
Υπολογίζουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου:
$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$. Για τα διαστήματα μονοτονίας κατασκευάζουμε τον πίνακα:

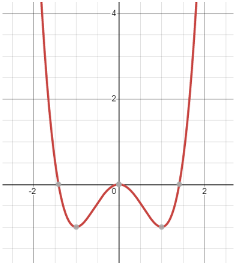
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = 0$ (με $f(0) = 0$), και τοπικά ελάχιστα στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$ (με $f(1) = f(-1) = -1$).

Λύση

Βρίσκουμε που μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος:
$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Τα σημεία αυτά είναι σημεία καμπής, επομένως επεκτείνουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↗		↘		↘		↗	



Συνθήκες δεύτερης τάξης και ανάπτυγμα της σειράς Taylor

- Όταν $f^{'}(x^*) = 0$ μία χρήσιμη μέθοδος για να μελετήσουμε τι συμβαίνει για να διατυπώσουμε τις συνθήκες δεύτερης τάξης είναι να πάρουμε το ανάπτυγμα της σειρας Taylor.
- Έστω ότι $\hat{x}$ είναι ένα οποιοδήποτε x που ανήκει σε ένα μικρό διάστημα γύρω από το x^*. Τότε το ανάπτυγμα της σειράς Taylor με μορφή υπολοίπου μας δίνει:
  $f(\hat{x}) = f(x^*) + \frac{f^{'}(x^*)(\hat{x}-x^*)}{1!} + \frac{f^{''}(\zeta)(\hat{x}-x^*)^2}{2!}$
  για κάποιο σημείο ζ που βρίσκεται ανάμεσα στο x^* και το $\hat{x}$.
- Επειδή $f^{'}(x^*) = 0$ αν $f^{''}(\zeta) < 0$ τότε $f(\hat{x}) - f(x^*) < 0$ ή $f(x^*) > f(\hat{x})$ και συνεπώς το x^* δίνει ένα τοπικό μέγιστο.
- Αν $f^{''}(\zeta) > 0$ τότε $f(\hat{x}) - f(x^*) > 0$ ή $f(x^*) < f(\hat{x})$ και συνεπώς το x^* δίνει ένα τοπικό ελάχιστο.

Συνθήκες δεύτερης τάξης και ανάπτυγμα της σειράς Taylor

- Αν $f^{''}(\zeta) = 0$ ο επόμενος όρος της σειράς της ακολουθίας είναι ο $f^{'''}(x^*)(\hat{x} - x^*)^3/3!$ και αυτό δεν μπορεί να μας οδηγήσει σε συμπέρασμα αφού το πρόσημο του $(\hat{x} - x^*)^3$ μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό.
- Αν υποθέσουμε ότι $f^{'''}(x^*) = 0$ και αυτό ισχύει για όλες τις παραγώγους μέχρι την παράγωγο $(n-1)$-οστής τάξης που συμβολίζουμε με $f^{(n-1)}(x)$ τότε: $f(\hat{x}) = f(x^*) + \frac{f^{(n)}(\zeta)(\hat{x}-x^*)^n}{n!}$
- Αν ο n είναι άρτιος τότε $(\hat{x} - x^*)^n > 0$. Συνεπώς, αν $f^{(n)}(\zeta) < 0$ τότε $f(x^*) > f(\hat{x})$ και συνεπώς το x^* δίνει ένα τοπικό μέγιστο. Αν $f^{(n)}(\zeta) > 0$ τότε $f(x^*) < f(\hat{x})$ και συνεπώς το x^* δίνει ένα τοπικό ελάχιστο. Αυτό ονομάζεται **Κριτήριο** ***n*****-οστής παραγώγου**.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 10 - x^4$. Έχουμε:

$$f'(x) = -4x^3$$

$$f''(x) = -12x^2$$

$$f'''(x) = -24x$$

$$f^{(4)}(x) = -24$$

Όλες οι πάραγωγοι μέχρι την τρίτη παράγωγο μηδενίζονται στο $x^* = 0$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την τέταρτη παράγωγο ως τελευταίο όρο στο ανάπτυγμα της σειράς Taylor για να διερευνήσουμε το χαρακτήρα της συνάρτησης γύρω από το $x^* = 0$:

$$f(\hat{x}) = f(0) + \frac{f^{(4)}(\zeta)(\hat{x})^4}{24}$$

Παράδειγμα

Δεδομένου ότι $f^{(4)}(x) = -24$ για όλα τα x, αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε ως εξής:
$f(\hat{x}) = f(0) - \hat{x}^4$ ή $f(\hat{x}) - f(0) < -\hat{x}^4$
Για οποιαδήποτε τιμή του $\hat{x} \neq 0$ έχουμε $-\hat{x}^4 < 0$ και επομένως $f(\hat{x}) - f(0) < 0$ ή $f(0) > f(\hat{x})$. Δηλαδή το σημείο $x^* = 0$ δίνει ένα τοπικό μέγιστο αυτής της συνάρτησης.

- Γενικά αν όλες οι παράγωγοι σε ένα σημείο μέχρι και μία παράγωγο περιττής τάξης είναι μηδέν, ενώ η επόμενη παράγωγος άρτιας τάξης είναι αρνητική, τότε έχουμε ένα τοπικό μέγιστο σε αυτό το σημείο, ενώ αν είναι θετική τότε έχουμε ένα τοπικό ελάχιστο σε αυτό το σημείο.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$. Έχουμε:

$$f^{'}(x) = 3x^2$$

$$f^{''}(x) = 6x$$

$$f^{'''}(x) = 6$$

Με την $f^{'''}(x)$ να είναι η πρώτη από τις παραγώγους ανώτερης τάξης που δε μηδενίζεται στο x^* πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την τρίτη παράγωγο ως τον τελευταίο όρο του αναπτύγματος της σειράς Taylor για να διερευνήσουμε το χαρακτήρα της συνάρτησης γύρω από το $x^* = 0$. Δηλαδή,

$$f(\hat{x}) = f(0) + \frac{f^{'''}(\zeta)(\hat{x})^3}{6}$$

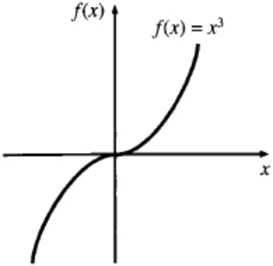
για ζ ανάμεσα στο x^* και το $\hat{x}$.

Παράδειγμα 2

Επειδή $f'''(x) = 6$ για όλα τα x μπορούμε να γράψουμε αυτήν την εξίσωση ως:

$$f(\hat{x}) = f(0) + \hat{x}^3$$

Για $\hat{x} > 0$ παίρνουμε $f(\hat{x}) > f(0)$ ενώ για $\hat{x} < 0$ παίρνουμε $f(\hat{x}) < f(0)$. Επομένως το $x^* = 0$ δε δίνει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο. Πρόκειται για ένα σημείο καμπής, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα.



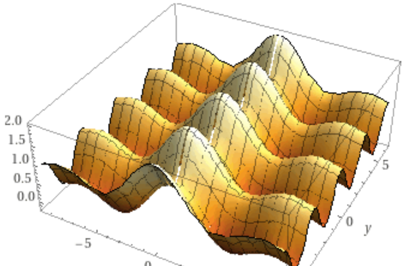
Σχήμα: Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Συνάρτηση (βαθμωτή) n μεταβλητών ονομάζεται μια αντιστοιχία που απεικονίζει κάθε n-άδα $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ του $\mathbb{R}^n$ (ή κάθε σημείο του n-διάστατου χώρου) σε έναν πραγματικό αριθμό. Το πεδίο ορισμού μιας τέτοιας συνάρτησης είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

$$f : X \to \mathbb{R}, \text{ όπου } X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{\sin(x)}{x} + \cos^2(y)$



Ισοσταθμικά σύνολα

Ισοσταθμικό σύνολο (level set) της συνάρτησης $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ είναι το σύνολο

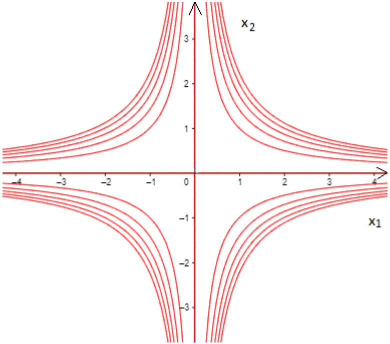
$$L = \{(x_1, \cdots, x_n)\} \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c\}$$

για ένα δεδομένο αριθμό $c \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα Ισοσταθμικών συνόλων

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τα ισοσταθμικά σύνολα της συνάρτησης $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$.

Θέτουμε $x_1^2 x_2^2 = c \iff x_2 = \pm\sqrt{\frac{c}{x_1^2}}$. Τα ισοσταθμικά σύνολα της συνάρτησης απεικονίζονται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα: Ισοσταθμικά σύνολα της συνάρτησης $y = x_1^2 x_2^2$

Εφαρμογές Ισοσταθμικών Καμπυλών

Στα Οικονομικά τα ισοσταθμικά σύνολα τα συναντάμε:

- στη θεωρία καταναλωτή (εκεί όπου αναφέρονται ως **καμπύλες αδιαφορίας**), όπου οποιοδήποτε σημείο πάνω στην ίδια καμπύλη έχει την ίδια χρησιμότητα.
- στη θεωρία παραγωγού (εκεί όπου αναφέρονται ως **καμπύλες ισοπαραγωγής**), όπου οποιοδήποτε σημείο πάνω στην ίδια καμπύλη αντιστοιχεί στο ίδιο επίπεδο παραγωγής.

Παραγώγιση πολυμεταβλητών συναρτήσεων

Η **μερική παράγωγος** μίας συνάρτησης $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ (μπορεί να γραφεί και ως $y = f(x)$ όπου $x \in \mathbb{R}^n$) ως προς τη μεταβλητή x_i είναι:

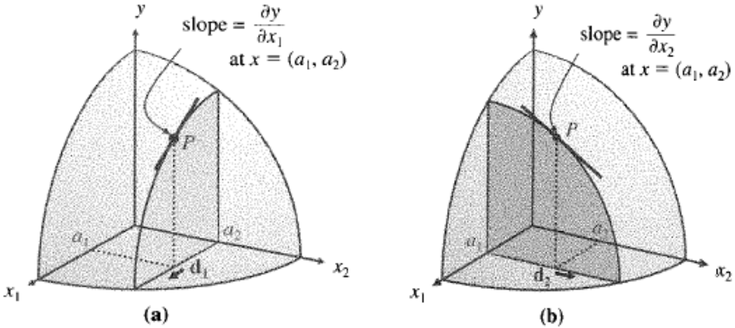
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_i + \Delta x_i, \cdots x_n) - f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Χρησιμοποιούνται εναλλακτικά οι συμβολισμοί $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ή $f_i(\mathbf{x})$ ή απλά f_i.

Για μία συνάρτηση $z = f(x, y)$, οι μερικές παράγωγοι ως προς x και y είναι:
$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta x) - f(x,y)}{\Delta x}$

Γεωμετρική ερμηνία

Η μερική παράγωγος εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης ως προς μία μεταβλητή, όταν όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές παραμένουν σταθερές.



Σχήμα: Μερικές Παράγωγοι

Παραγώγιση πολυμεταβλητών συναρτήσεων

Αντί να υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους με βάση τις αρχές που εισάγει ο ορισμός τους, μπορούμε να τις βρούμε χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης, όπως κάναμε για τις μονομεταβλητές συναρτήσεις. Επειδή όταν υπολογίζουμε την $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ κρατούμε σταθερές όλες τις μεταβλητές εκτός από την x_i μπορούμε να θεωρήσουμε όλους τους όρους της συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ που δεν εξαρτώνται από το x_i ως μία σταθερά c και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες παραγώγισης για συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Ιδιότητες

Εάν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι ως προς τη μεταβλητή x των συναρτήσεων f, g, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- $\frac{\partial(f \pm g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}$
- $\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \ \lambda \in \mathbb{R}$
- $\frac{\partial(fg)}{\partial x} = g \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial g}{\partial x}$
- $\frac{\partial(f/g)}{\partial x} = \frac{g \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$

Παράδειγμα

Έστω $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$. Η μεταβλητή x_2 κρατιέται σταθερή όταν υπολογίζουμε την $\frac{\partial f}{\partial x_1}$. Αν θέσουμε $x_2 = c$, όπου c μία σταθερά, τότε η συνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$y = cx_1^2$$

και επομένως:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{d[cx_1^2]}{dx_1} = 2cx_1$$

Αντικαθιστούμε το c με x_2 και έχουμε

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 x_2$$

Άσκηση

Εάν $f(x, y, z) = 3x^2y^3 - 2xy^2 + 4y^4 + z^2$, υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της f ως προς x, y και z.

Λύση

Αφού $f(x,y,z) = 3x^2y^3 - 2xy^2 + 4y^4 + z^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3 - 2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2 - 4xy + 16y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

Κάθε μία παράγωγος δεύτερης τάξης μίας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συμβολίζεται ως:

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, \cdots, n$$

όπου η f_{ij} βρίσκεται παραγωγίζοντας πρώτα τη συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ ως προς την μεταβλητή x_i και κατόπιν παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα $f_i(\mathbf{x})$ ως προς τη μεταβλητή x_j.

Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

Για μία συνάρτηση $f(x,y)$, οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Οι δύο τελευταίες ονομάζονται μεικτές ή σταυροειδείς παράγωγοι.

Παράδειγμα

Έστω $f(x,y,z) = x^2y^3 + x^4y + xe^y$. Τότε οι μερικές παράγωγοι 2ης τάξης είναι:

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3 + 4x^3y + e^y) = 2y^3 + 12x^2y$
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + x^4 + xe^y) = 6x^2y + xe^y$
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + x^4 + xe^y) = 6xy^2 + 4x^3 + e^y$
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 + 4x^3y + e^y) = 6xy^2 + 4x^3 + e^y$

Μεικτές παράγωγοι

Δύο μεικτές παράγωγοι τάξης $k \geq 2$ μίας συνάρτησης $f(x, y)$ με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό σύνολο είναι ίσες εάν:

- Όλες οι μερικές παράγωγοι μέχρι τάξης k είναι συνεχείς
- Εάν ο συνολικός αριθμός παραγωγίσεων ως προς κάθε μεταβλητή είναι ο ίδιος και στις δύο μεικτές παραγώγους

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{για } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{για } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Υπολογίστε και συγκρίνετε τις $f_{yx}(0, 0)$ και $f_{xy}(0, 0)$.

Μεικτές παράγωγοι

$$f_x(0,0) = lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{h\cdot 0\frac{h^2-0}{h^2+0}}{h} = lim_{h\to 0}0 = 0$$

$$f_y(0,0) = lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{0\cdot h\frac{0-h^2}{0+h^2}-0}{h} = lim_{h\to 0}0 = 0$$

$$f_x(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}(0,0) = lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h^5}{h^4}-0}{h} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = lim_{h\to 0}\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^5}{h^4}-0}{h} = 1$$

Διάνυσμα κλίσης

Τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης είναι συνηθισμένη τακτική να τις τοποθετούμε μαζί σε ένα διάνυσμα-στήλη ή ένα διάνυσμα-γραμμή που το ονομάζουμε **διάνυσμα κλίσης** χρησιμοποιώντας τα παρακάτω σύμβολα:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \text{ ή } \nabla f^T = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Βρείτε το διάνυσμα κλίσης για τη συνάρτηση $f(x) = 5 - 2x_1 + 3x_2$.

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι της συνάρτησης είναι $f_1 = -2$ και $f_2 = 3$. Συνεπώς το διάνυσμα κλίσης είναι:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Εσσιανή μήτρα

Για να παρακολουθούμε καλύτερα τις παραγώγους δεύτερης τάξης είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε μία μήτρα. Για μία συνάρτηση δύο μεταβλητών $y = f(x_1, x_2)$ υπάρχουν 4 μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης:
$f_{11} \equiv \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $f_{12} \equiv \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, $f_{21} \equiv \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $f_{22} \equiv \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}$
Αυτές μπορούμε να τις παρουσιάσουμε με τη μορφή μήτρας ως εξής:

$$\nabla_2 F \equiv \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

Μία συνάρτηση τριών μεταβλητών $y = f(x_1, x_2, x_3)$ έχει 9 παραγώγους δεύτερης τάξης και ούτω καθεξής. Αυτές μπορούμε να τις παρουσιάσουμε με τη μορφή μήτρας ως εξής:

$$\nabla_2 F \equiv \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

Εσσιανή μήτρα

$$\nabla_2 F \equiv \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

γενικά για συναρτήσεις n μεταβλητών.
Για την περίπτωση με τις n μεταβλητές μπορούμε πιο απλά να γράψουμε τη μήτρα με τις μερικές παραγώγους δεύτερης ταξής ως εξής:

$$\nabla_2 F \equiv [f_{ij}]$$

με το στοιχείο τάξης i, j της μήτρας $\nabla_2 F$ να αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα της παραγώγισης της συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ πρώτα ως προς τη μεταβλητή x_i και κατόπιν ως προς τη μεταβλητή x_j.
Η μήτρα με τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης f ονομάζεται **Εσσιανή μήτρα**.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ και να παρουσιαστούν υπό μορφή διανύσματος/μήτρας αντίστοιχα.

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι:

$$f_1 = 2x_1x_2, \; f_2 = x_1^2$$

Ενώ οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι:

$$f_{11} = 2x_2, \; f_{12} = 2x_1, \; f_{21} = 2x_1, \; f_{22} = 0$$

Τοποθετώντας τις παραγώγους αυτές σε διάνυσμα και μήτρα αντίστοιχα έχουμε:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} \text{ και } \nabla_2 F = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Σειρά Taylor πολυμεταβλητής συνάρτησης

Για τη σειρά Taylor μεταξύ των σημείων $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}$ και $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$ για συνάρτηση δύο μεταβλητών έχουμε:

$$\mathbf{dx} = \hat{x} - x^{(0)} \begin{bmatrix} (\hat{x}_1 - x_1^{(0)}) \\ (\hat{x}_2 - x_2^{(0)}) \end{bmatrix}$$

και συνεπώς για το ολικό διαφορικό πρώτης τάξης παίρνουμε:

$$dy(\mathbf{x}^{(0)}) = \left[f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}), f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \right] \begin{bmatrix} (\hat{x}_1 - x_1^{(0)}) \\ (\hat{x}_2 - x_2^{(0)}) \end{bmatrix}$$

Για το ολικό διαφορικό δεύτερης τάξης παίρνουμε με τη χρήση του συμβολισμού $H \equiv \nabla_2 F$

$$d^2y(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{dx}^T H \mathbf{dx} =$$

$$\left[(\hat{x}_1 - x_1^{(0)}), (\hat{x}_2 - x_2^{(0)}) \right] \begin{bmatrix} f_{11}(\xi_1, \xi_2) & f_{12}(\xi_1, \xi_2) \\ f_{21}(\xi_1, \xi_2) & f_{22}(\xi_1, \xi_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\hat{x}_1 - x_1^{(0)}) \\ (\hat{x}_2 - x_2^{(0)}) \end{bmatrix}$$

Σειρά Taylor πολυμεταβλητής συνάρτησης

Ο **τύπος του υπολοίπου** για το ανάπτυγμα της σειράς Taylor μίας συνάρτησης $y = f(\mathbf{x})$ που ορίζεται στο $\mathbb{R}^n$, ο οποίος αναπτύσσεται γύρω από το σημείο $\mathbf{x}^{(0)}$ και περιλαμβάνει δύο όρους είναι:

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x}^{(0)}) + dy(\mathbf{x}^{(0)}) + \frac{1}{2}d^2y(\xi)$$

όπου το ξ βρίσκεται μεταξύ του $\mathbf{x}^{\mathbf{(0)}}$ και του $\hat{\mathbf{x}}$.

Αναγκαίες και Ικανές συνθήκες για βέλτιστο πολυμεταβλητής συνάρτησης

Ικανή συνθήκη για να δώσει το $\mathbf{x}^*$ ένα τοπικό βέλτιστο της δύο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης $y = f(\mathbf{x})$ είναι:

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0,\ i = 1, \cdots, n \text{ (αναγκαίες)}$$

και

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^n, \delta \neq 0, \delta^T H \delta > 0 \text{ για τοπικό ελάχιστο ή } < 0 \text{ για τοπικό μέγιστο}$$

Δηλαδή η Εσσιανή μήτρα H είναι θετικά ορισμένη για τοπικό ελάχιστο ή αρνητικά ορισμένη για τοπικό μέγιστο.