CHAPITRE

3

Système de numération

I- Définition :

On appelle système de numération un ensemble fini de symboles avec une stratégie de représentation qui permet de donner une représentation unique d'un nombre dans le système en question. Cet ensemble fini de symboles est appelé **élément de la base du système de numération.**

Un système de numération B (B>1) admet B symboles (0 …B-1) et permet de représenter tout nombre N de la façon suivante :

$N= a_{n-1} B^{n-1} + a_{n-2} B^{n-2} +\ldots + a_1B + a_0 B^0$.

Avec $a_i \in \{0, 1, \ldots, B-1\}$ et $a_{n-1} \neq 0$

La notation condensée : $N = (a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_1\ a_0)$ est aussi équivalente.

Exemple : Base 10

Les éléments de la base sont {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Le nombre cent trente neuf admet comme représentation développée :

$(139)_{10} = 1*10^2 + 5*10^1 + 7*10^0$

II- Exemples de systèmes de numération:

La base 2 ou binaire contient les éléments {0, 1}.

Exemple : $(1011)_2 = 1 * 2^0 + 1*2^1 + 0*2^2 + 1*2^3 = 1+ 2+ 8 = 11$ **en décimal**

La base 8 ou octale contient les éléments {0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Exemple : $(152)_8 = 2 * 8^0 + 5*8^1 + 1*8^2 = 64+ 40+ 2 = 106$ **en décimal**

La base 10 ou décimale contient les éléments {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

La base 16 ou hexadécimale contient les éléments {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}.

$(A)_{16} = 10$ **décimal**

$(B)_{16} = 11$ **décimal**

$(C)_{16} = 12$ **décimal**

$(D)_{16} = 13$ **décimal**

$(E)_{16} = 14$ **décimal**

$(F)_{16} = 15$ **décimal**

Exemple : $(1B)_{16} = 11 * 16^0 + 1*16^1 = 11 + 16 = 27$ **en décimal**

III- Conversion entre les bases :

Tout nombre représenté dans une base B peut être converti dans une autre base comme le montre la figure suivante. Cette conversion peut être faite directement ou, à travers la base décimal.

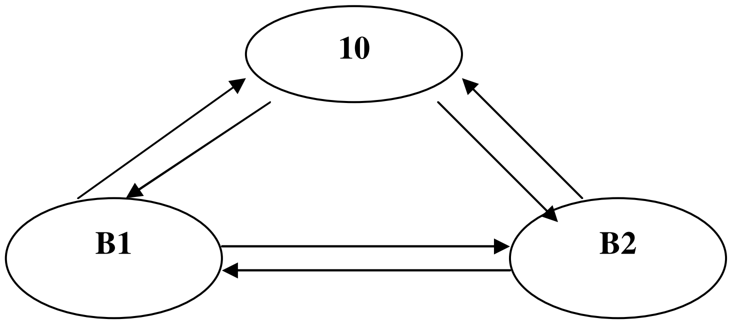


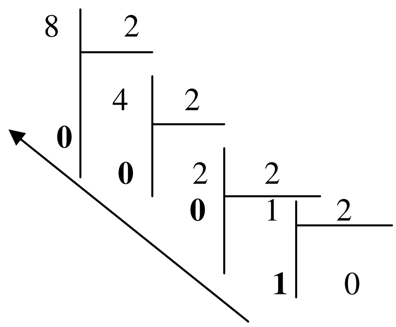
Figure 5 : Conversion entre les bases

1. Conversion d'un nombre décimal vers une base B :

Pour représenter un nombre décimal dans une base B, on procède par des divisions successives du nombre par la base, et on retient le reste de chaque division de façon ascendante, l'algorithme s'arrête dés qu'on obtient comme quotient 0.

Exemple : ***Convertir en binaire le nombre décimal (17) :***

$(8)_{10} = (1000)_2$



2. *Conversion d'un nombre d'une base B vers le décimal :*

Pour représenter un nombre dans une base B par son équivalent dans la base décimal, on procède par des multiplications successives de chaque bit par la valeur de son rang (la base portée à la puissance de la position du bit) à partir de la droite, puis on les ajoute.

Exemple : ***Convertir en décimale le nombre binaire (0101) :***

$(0\ 1\ 0\ 1)_2 = (5)_{10}$ → $1*\mathbf{2^0} + 0*\mathbf{2^1} + 1*\mathbf{2^2} + 0*\mathbf{2^3} = 1+4 = 5$

↓↓↓↓

$\mathbf{2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0}$

3. *Conversion d'un nombre d'une base quelconque vers une base quelconque :*

<u>Passage par la base décimale :</u>

Soient B_1 et B_2 deux bases :

Pour convertir un nombre de la base B_1 vers la base B_2, on procède comme suit :

- Convertir le nombre de la base B_1 vers la base B_{10} (base décimale)
- Convertir le résultat obtenu de la base décimale vers la base B_2

Exemple ***: Conversion de (53) de la base 6 vers la base 7***

$(53)_6 = 3*6^0 + 5*6^1 = (33)_{10}$

$(33)_{10} = (54)_7$

<u>Règle de regroupement :</u>

Soient B_1 et B_2 deux bases telle que $B_2 = (B_1)^n$

La conversion d'un nombre de la base B_1 vers la base B_2, se fait par un regroupement de n chiffres du nombre représenté dans B_1 , commençant par la droite puis la recherche de l'équivalent de ce groupement dans la base B_2 .

Exemple ***: Conversion de (001101011011) de la base 2 (binaire) vers la base 8(octale)***

$8 = 2^3$

$$\mathbf{(001\ \ 101\ \ 011\ \ 011)_2 \quad = \quad (1533)_8}$$

1 5 3 3

Avec :

$(001)_2 = (1)_8$
$(101)_2 = (5)_8$
$(011)_2 = (3)_8$

Exemple ***: Conversion de (001101011011) de la base 2 (binaire) vers la base***

16 (hexadécimale).

$16 = 2^4$

$$\mathbf{(0011\quad 0101\quad 1011)_2 \quad = \quad (35B)_{16}}$$

3 5 B

Avec :

$(0011)_2 = (3)_{16}$

$(0101)_2 = (5)_{16}$

$(1011)_2 = (B)_{16}$

<u>Règle d'éclatement :</u>

Soient B_1 et B_2 deux bases telle que $B_1 = (B_2)^n$

La conversion d'un nombre de la base B_1 vers la base B_2, se fait par un éclatement de chaque chiffre du nombre représenté dans B_1 sur n position dans la base B_2.

Exemple ***: Conversion de (276) de la base 8 (octale) vers la base 2 (binaire).***

$8 = 2^3$

(2 7 6) $_{\mathbf{8}}$ = $(010\ \ 111\ \ 110)_2$

010 111 110

Exemple ***: Conversion de (13A) de la base 16 (hexadécimal) vers la base 2 (binaire).***

$16 = 2^4$

(1 3 A) $_{\mathbf{16}}$ = $(0001\ \ 0011\ \ 1010)_2$

0001 0011 1010

Décimal	Binaire	octale	Hexadécimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12

Figure 6 : Table de correspondance entre les systèmes les plus utilisés :

4. Conversion d'un nombre fractionnaire :

Un nombre fractionnaire est un nombre qui comporte une partie inférieure à 1. Il s'écrit sous cette forme $(r_n\ r_{n-1} \ldots r_0 \mathbf{,}\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_p)_B$.

Avec la partie des r_i s'appelle partie entière et la partie des α_i s'appelle partie fractionnaire.

Exemple :

$(202{,}67)_{10}$; $(101{,}0110)_2$; $(45{,}11)_8$

<u>Conversion d'un nombre fractionnaire de la base décimale vers une base B :</u>

Pour **la partie entière** du nombre, on procède par des divisions successive par B jusqu'à annuler le quotient, ensuite on regroupe les restes des divisions dans le sens ascendant.

Pour **la partie fractionnaire** du nombre, on procède par des multiplications successives par B, on récupère à chaque fois la partie entière du résultat et on s'arrête dés qu'on obtient une partie fractionnaire nulle ou arriver au nombre d'itération souhaité.

Exemple ***: Conversion de (15,125) de la base 10 (décimale) vers la base 2 (binaire).***

Chercher l'équivalent binaire de la partie entière15 décimale:

$(15)_{10} = (1111)_2$

Chercher l'équivalent binaire de la partie fractionnaire 0,125 décimale:

$0{,}125 * 2 = 0{,}250 \longrightarrow \alpha_1 = \mathbf{0}$

$0{,}250 * 2 = 0{,}50 \longrightarrow \alpha_2 = \mathbf{0}$

$0{,}50 * 2 = 1{,}\mathbf{00} \longrightarrow \alpha_3 = \mathbf{1}$

D'où le résultat : $(15{,}125)_{10} = (1111{,}001)_2$

<u>Conversion d'un nombre fractionnaire d'une base B vers la base décimale :</u>

La conversion se fait en additionnant les puissances de 2 commençant par le rang 0 à gauche de la virgule et le rang (-1) à droite de la virgule.

Exemple ***: Conversion de (1,512) de la base 6 vers la base 10 décimale avec une précision de 4 (4 chiffres après la virgule)***

$(1{,}512)_6 = 1 * 6^0 + 5 * 6^{-1} + 1 * 6^{-2} + 2 * 6^{-3} = (1{,}8703)_{10}$