Исследование устойчивости стационарных точек динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1 вариант):

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x(1-x) - y) \\ \dot{y} = y(x - a) \end{cases} \tag{1}$$

где $x, y \geq 0$, $a \geq 0$.

Найдём стационарные точки из следующей системы:

$$\begin{cases} x(x(1-x) - y) = 0 \\ y(x - a) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) имеет следующие решения:

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0, 0) \\ (x_1, y_1) = (1, 0) \\ (x_2, y_2) = (a, a(1-a)) \end{cases} \tag{3}$$

Якобиан в точке $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \tag{4}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -a$.

Теорема Хартмана-Гробмана неприменима.

Якобиан в точке $(x_1, y_1) = (1, 0)$:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} \tag{5}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 - a$.

- $a \in [0; 1)$ - седло
- $a = 1$ - теорема Хартмана-Гробмана неприменима
- $a \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$ - устойчивый узел

- $a = 2$ - дикритический устойчивый узел

Якобиан в точке $(x_2, y_2) = (a, a(1-a))$:

$$J = \begin{pmatrix} a(1-2a) & a(a-1) \\ a(1-a) & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = \frac{a(1-2a) \pm \sqrt{a^2(4a-3)}}{2}$.

- $a = 0$ - теорема Хартмана-гробмана неприменима
- $a \in (0, \frac{1}{2})$ - неустойчивый фокус
- $a = \frac{1}{2}$ - центр
- $a \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ - устойчивый фокус
- $a = \frac{3}{4}$ - дикритический устойчивый узел
- $a \in (\frac{3}{4}, 1) \cup (1, +\infty)$ - устойчивый узел
- $a = 1$ - дикритический устойчивый узел

Стоит отметить, что при $a > 0$ стационарная точка покидает исследуемую область.

Построенные поля направлений и фазовые портреты:

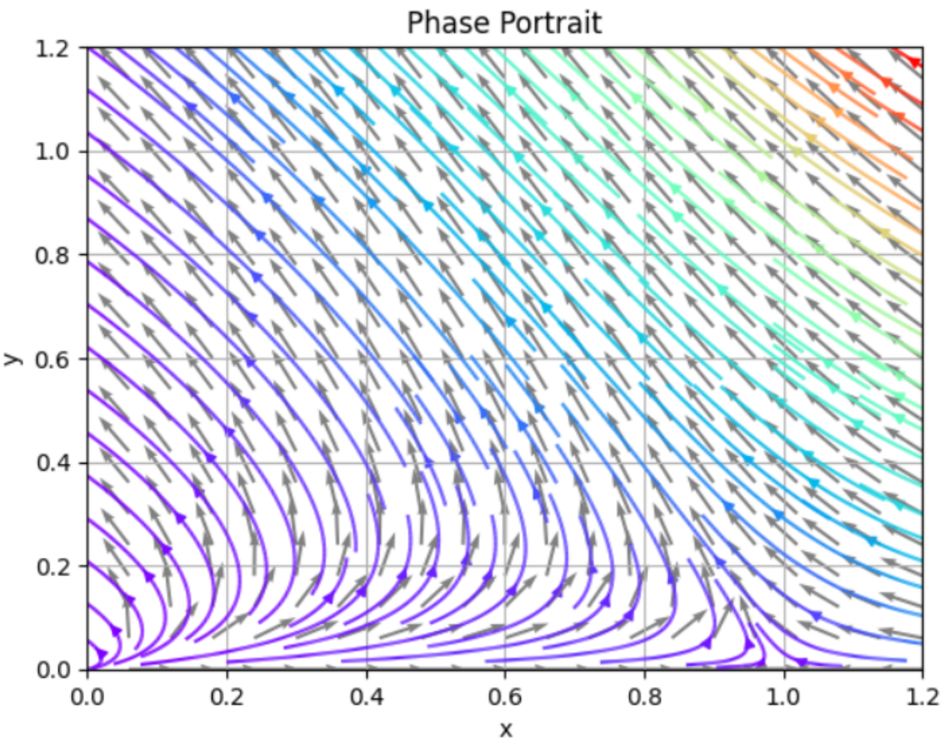

Рис. 1: a = 0

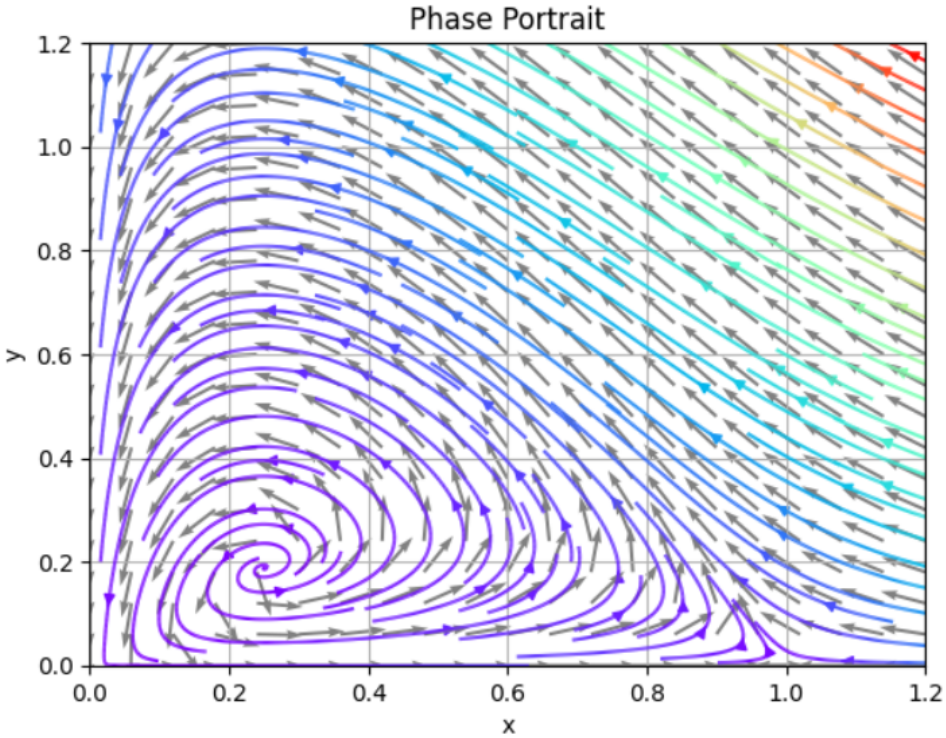

Рис. 2: a = 0.25

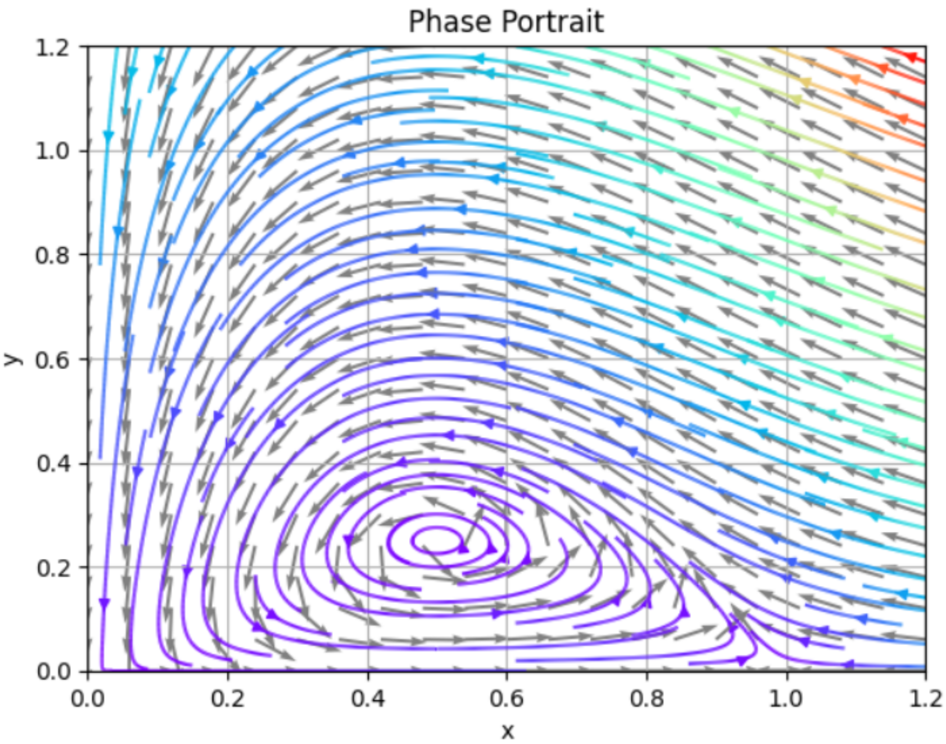

Рис. 3: a = 0.5

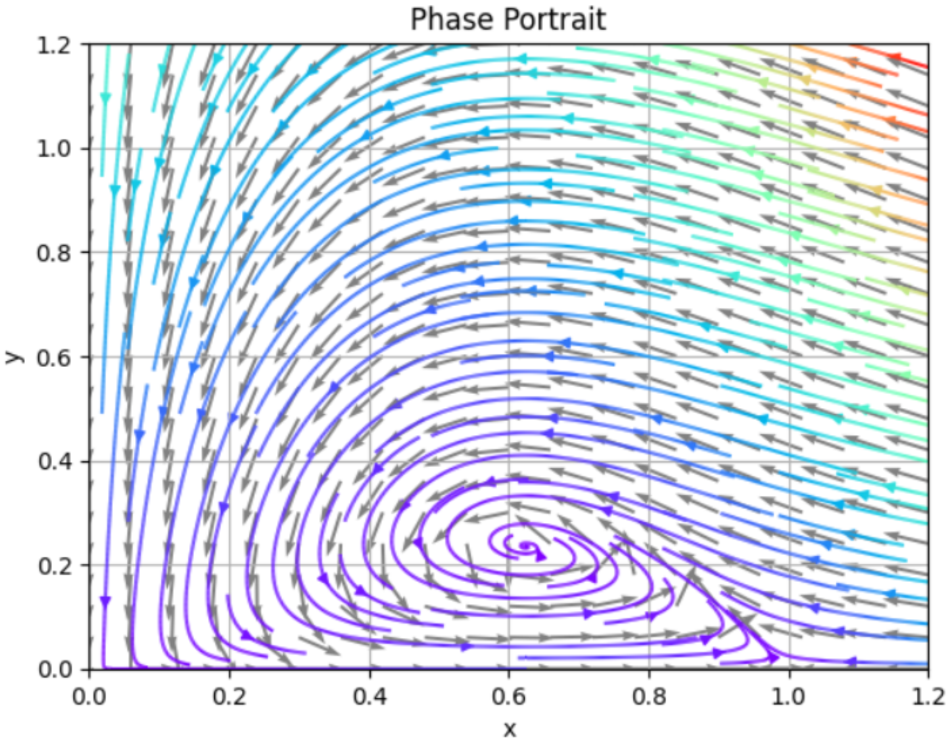

Рис. 4: a = 0.625

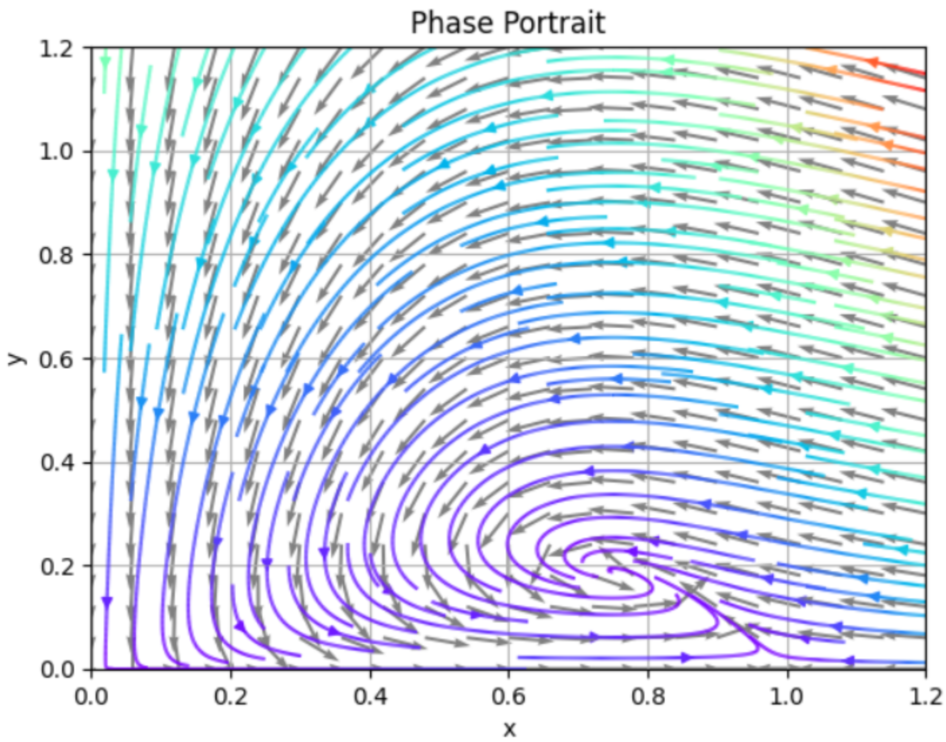

Рис. 5: a = 0.75

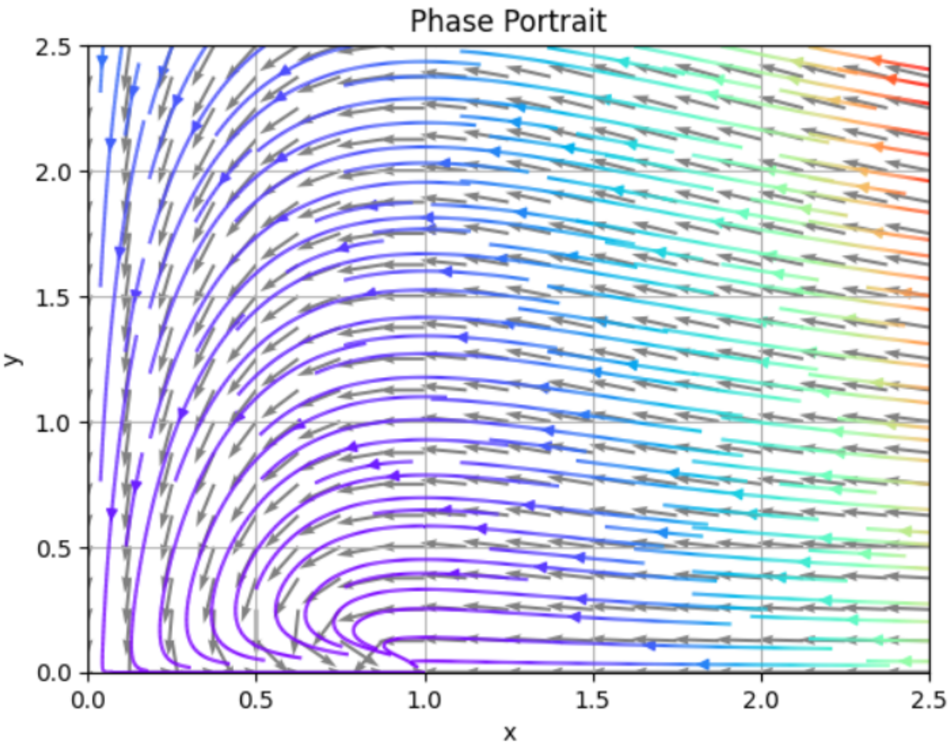

Рис. 6: a = 1

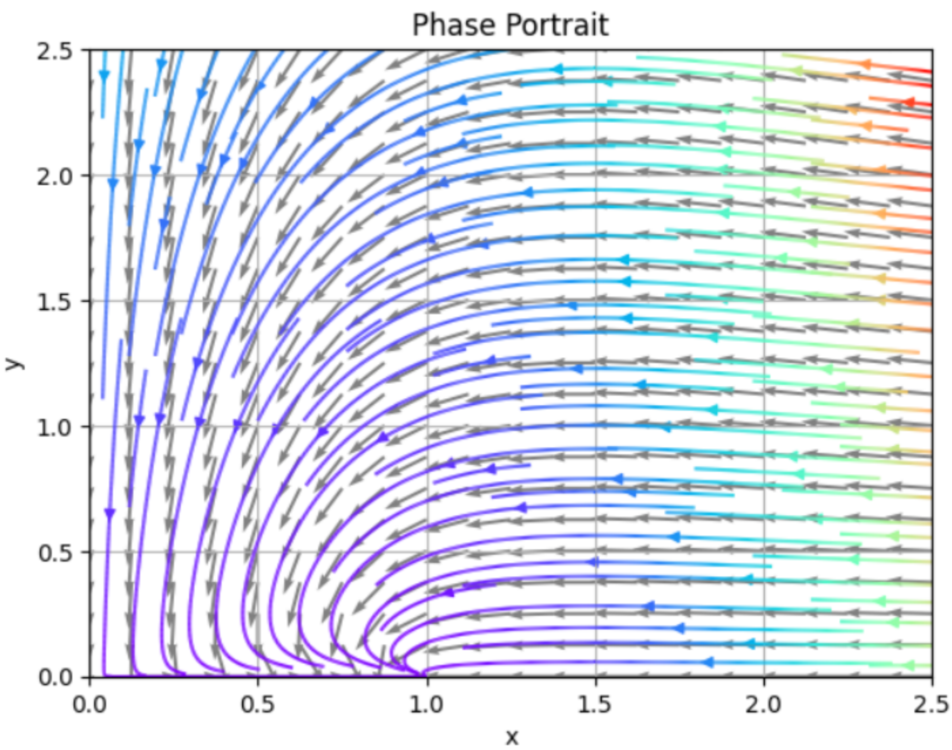

Рис. 7: a = 1.5

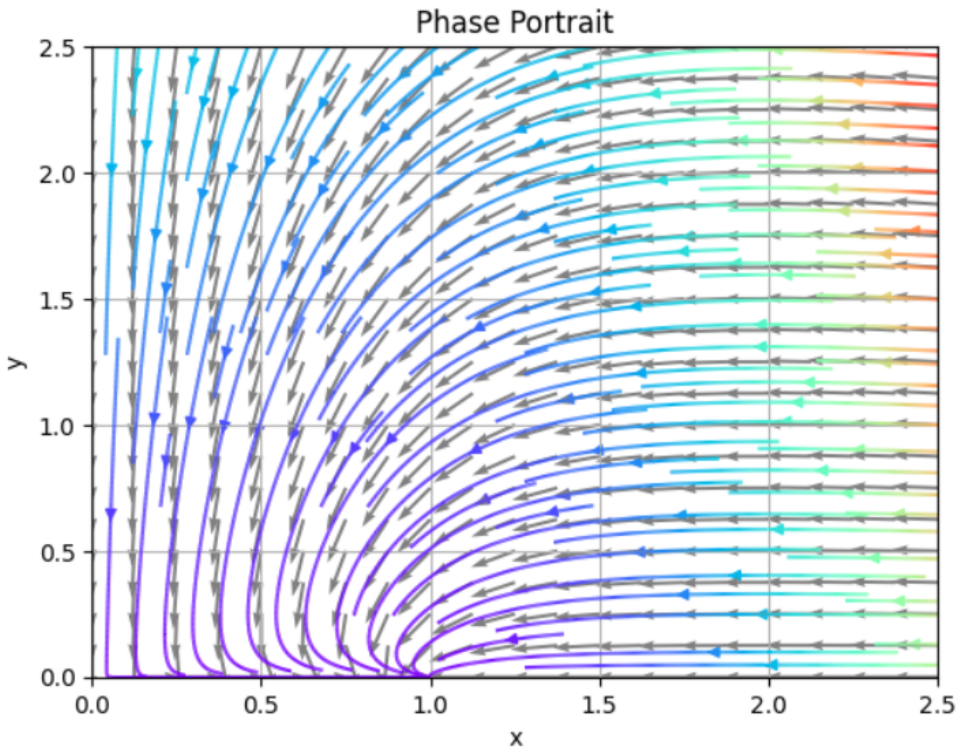

Рис. 8: a = 2