Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Laboratorio 4

Principio de Pontryaguin

Nombre: Tabita Catalán
Felipe Olivares
Profesor: Héctor Ramírez
Auxiliares: Antoine Haddon
Emilio Molina
Ayudante: Pablo Arratia
Fecha de Laboratorio: 7 de noviembre de 2018
Fecha Entrega Informe: 14 de noviembre de 2018
Santiago, Chile

Introducción

En el presente informe se estudiará el Principio de Pontryaguin, aplicándolo a la resolución de un modelo agrícola. El objetivo es usar las condiciones de transversalidad para obtener un control óptimo, y usarlo para resolver numéricamente el sistema de EDOs involucrado. Se aprende también el Método de Tiro, el cual es muy útil a la hora de determinar las condiciones iniciales para la ecuación (cosa que hasta ahora se hacía "por tanteo"). Los resultados obtenidos se comparan con los entregados por BOCOP.

Parte A: Modelo sin insectos

Se resuelve el siguiente problema:

$$\min_{u(\cdot)} J(u) = \int_0^T x(t)^2 - \sqrt{(M - u(t))(m + u(t))} dt$$

Con $x(\cdot)$ satisfaciendo

$$\dot{x} = u(t) - \alpha x(t)$$

y $0 \leq u(t) \leq M$ para $t \in [0, T]$.

Problema 1

Queremos utilizar el Principio de Pontryaguin, por lo que identificamos:

- $f(t, x(t), u(t)) = u(t) - \alpha x(t)$
- $l(t, x(t), u(t)) = x(t)^2 - \sqrt{(M - u(t))(m + u(t))}$
- $g = 0$
- $I = [0, T]$
- $U = [0, M]$ cerrado
- $u(\cdot)$ acotado en I
- $B = \{T\} \times \mathbb{R}$
- $B' = \{0\} \times \mathbb{R}$ (que es un espacio lineal).

Si escribimos las condiciones de transversalidad obtenemos que:

- Existe $p(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}$ abs. cont. y $p_0 \geq 0$ tal que $(p(\cdot), p_0)$ es no trivial (sin pérdida de generalidad podemos suponer $p_0 = 1$) y $p(\cdot)$ satisface la sgte dinámica:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t, x(t), u(t)) \\ -\partial_x H(t, x(t), p_0, p(t), u(t))) \end{pmatrix}$$

Calculamos el hamiltoniano del problema:

$$\begin{aligned} H(t, x(t, p_0, p(t), u(t))) &= p_0 l(t, x, u) + p f(t, x, u) \\ &= x(t)^2 - \sqrt{(M - u(t))(m + u(t))} + p(u(t) - \alpha x(t)) \end{aligned}$$

Luego

$$-\partial_x H(t, x(t, p_0, p(t), u(t))) = -2x(t) + \alpha p$$

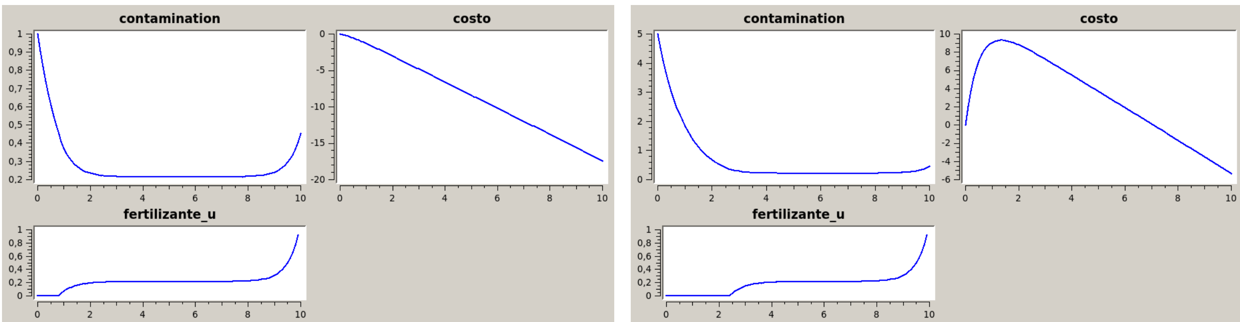
Esto nos permite reescribir el sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ -2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\Theta(t_f)dt_f - p(t_f)^\top dx_f = -p(t)^\top dx_f = 0$ para $(dt_f, dx_f) \in B'$, es decir, para los puntos de la forma $(0, x(T))$. Eso deja que $-p(T)x(T) = 0$, o sea para $x(T) \in \mathbb{R}$. Luego $p(T) = 0$.

Problema 2

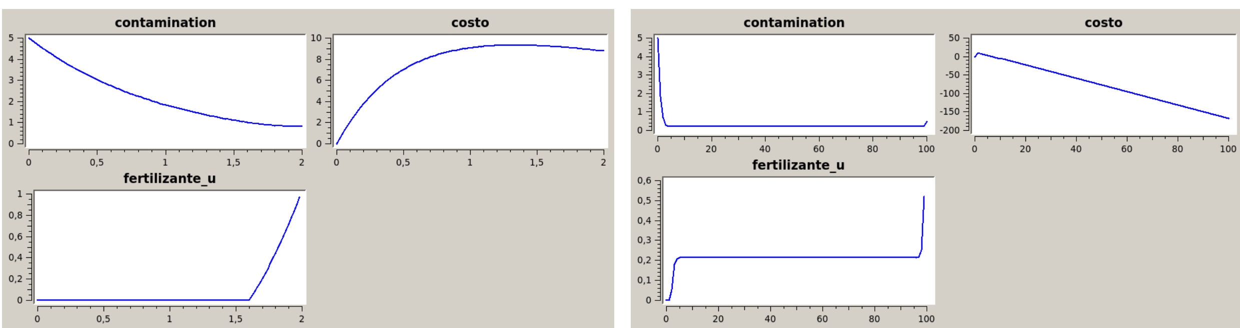
Ingresando los datos en el software Bocop se obtienen las siguientes soluciones para las variables y para el control en distintas condiciones iniciales y para distintos tiempos finales.



(a) Solución con $x_0 = 1$ y $T = 10$

(b) Solución con $x_0 = 5$ y $T = 10$

Figura 1: Solución y control óptimo



(a) Solución con $x_0 = 5$ y $T = 2$

(b) Solución con $x_0 = 5$ y $T = 100$

Figura 2: Solución y control óptimo

Se puede observar que el costo adopta un decaimiento practicamente lineal cuando se le da el suficiente tiempo, y que mientras mayor sea el tiempo que se le da, el control tiende a tener cambios más radicales.

Problema 3

Usando el **Método de tiro**, buscaremos la condición inicial para el estado adjunto p. Para eso utilizamos la dinámica y el control óptimo u encontrados en la parte anterior. Llamando $z = (x, p)$ se tiene que la condición final ($p(T) = 0$) se traduce en $z_2(T) = 0$. Luego la función $R(z_0, z(t_f, z_0)) := z_2(T)$ (es decir, es la segunda coordenada de la solución del sistema $\dot{z} = F(t, z)$ con condición inicial z_0, evaluando en el instante final).

Código 1: Función `F` con la dinámica de z

```
function zdot = F(t,z)
    alpha = 1;
    AA = [-alpha 0; -2 alpha];
    p = z(2);
    ut =(p<(1/sqrt(3)))*(1-(2*p)/(sqrt(p^2+1))); %control optimo
    zdot = AA*z + [ut;0]; % dinamica para (x,p)
end
```

Código 2: Función `R` de condiciones finales

```
function pT = R(p0)
T = 5;
x0 = 1;
tspan = [0 T];
z0 = [x0;p0];  % condiciones iniciales
[t,y] = ode45(@F,tspan,z0); % reslver EDO
p = y(:,2);  % p es la segunda coordenada
pT = p(length(t)); % instante final
end
```

Luego se debe encontrar un cero de la función R, lo que podemos hacer usando la función $fzero$ de Matlab. Una complicación que se presentó durante el laboratorio fue que inicialmente se escribió `R` como función de dos variables (x_0 y p_0), pero `fzero` solo puede trabajar con funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Además durante el Laboratorio no fue posible hacer funcionar `R`, pero fue debido a un error en la implementación.

Finalmente resolvemos el problema usando $T = 10, x_0 = 2$. La solución obtenida puede verse en la figura

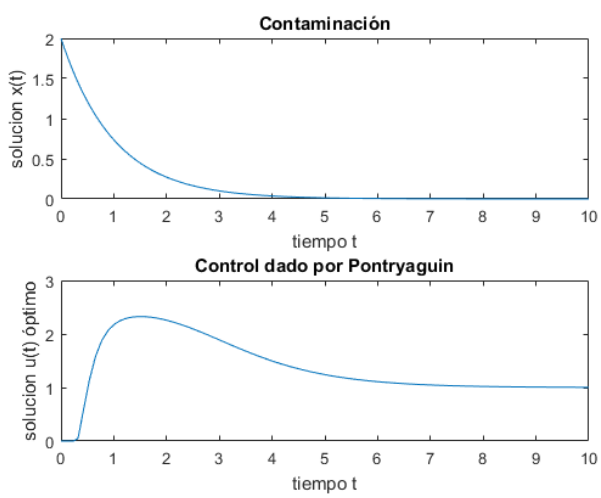


Figura 3: Solución con **Método de tiro** para $T = 10, x_0 = 2$

Notamos que no coincide con lo obtenido mediante BOCOP, pero esto probablemente se debe a un error en la dinámica.

Parte B: Modelo con insectos

Identificamos términos. Denotaremos $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{u} = (u, v)$:

- $$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u(t) + v(t) - \alpha x(t) \\ -by(t)z(t) + \sqrt{(M - u(t))(m + u(t))} \\ z(t)(c(t)y(t) - d(t)) - v(t) \end{pmatrix}$$
- $l(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$
- $g(T, \mathbf{x}(T)) = \beta x(T) - y(T)$
- $U = [0, M] \times [0, V]$ cerrado
- $B = \{T\} \times \mathbb{R}^3$
- $B' = \{0\} \times \mathbb{R}^3$ (que es un espacio lineal).

Por Pontryaguin, existen $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$, $\mathbf{p_0}$ no nulos, que satisfacen:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ -\partial_{\mathbf{x}} H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p_0}, \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) \end{pmatrix}$$

El Hamiltoniano del problema es $H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p_0}, \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{p}^\top f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$. Luego:

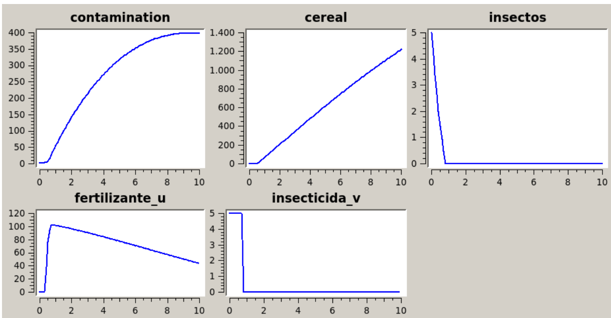
$$\partial_{\mathbf{x}} H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p_0}, \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{pmatrix} \partial_x H \\ \partial_y H \\ \partial_z H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha p_x(t) \\ -p_y(t)bz(t) + p_z(t)z(t)c(t) \\ -p_y(t)by(t) + p_z(t)y(t)c(t) \end{pmatrix}$$

Podemos reescribir la dinámica:

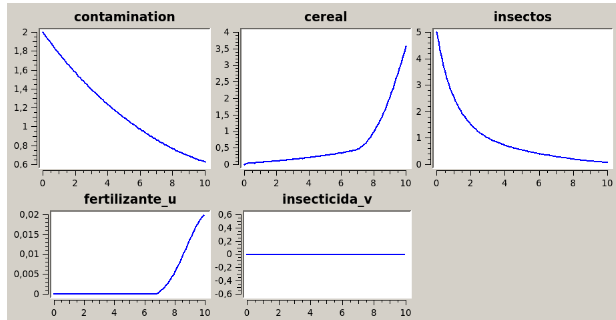
$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{p_x} \\ \dot{p_y} \\ \dot{p_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \alpha p_x(t) \\ p_y(t)bz(t) - p_z(t)z(t)c(t) \\ p_y(t)by(t) - p_z(t)y(t)c(t) \end{pmatrix}$$

Problema 5

Los resultados de resolver el problema mediante Bocop para distintas condiciones iniciales son los siguientes:

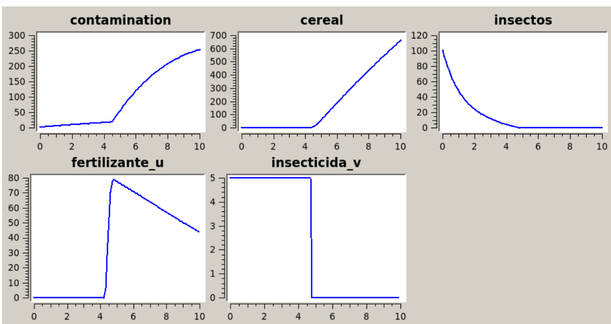


(a) Solución con $x_0 = 2$, $z_0 = 5$ y $\beta = 1$

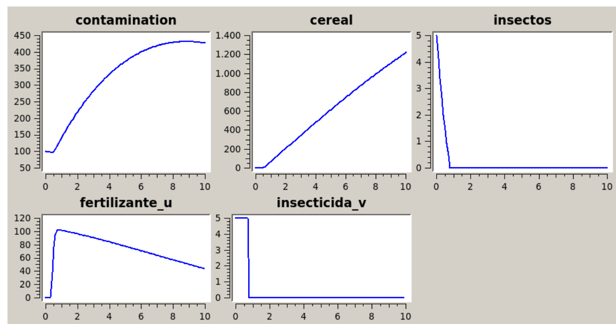


(b) Solución con $x_0 = 2$, $z_0 = 5$ y $\beta = 60$

Figura 4: Solución y control óptimo



(a) Solución con $x_0 = 2$, $z_0 = 101$ y $\beta = 1$



(b) Solución con $x_0 = 100$, $z_0 = 5$ y $\beta = 1$

Figura 5: Solución y control óptimo

Se puede observar que el control v (insecticida) es de tipo Bang-Bang para valores pequeños de β, pero a medida que se le da más peso a la contaminación (por ejemplo, $\beta = 60$) el control v se vuelve cero y u (fertilizante) que es precisamente el control que regula la contaminación cambia su comportamiento y provoca que la variable x (contaminación) sea decreciente, como se puede ver en la Figura 4 (b).

Problema 6

Similarmente a lo hecho en la parte 3, se hacen funciones para los controles óptimos dados por Pontryaguin, la dinámica y la función R del Método de Tiro.

Se encontraron varias dificultades; por ejemplo, no fue posible usar `fsolve`, aunque se aproximaron las condiciones iniciales del adjunto. Además no era posible resolver numéricamente la EDO, cosa que se corrigió modificando las opciones de `ode45`. Se obtienen los siguientes resultados:

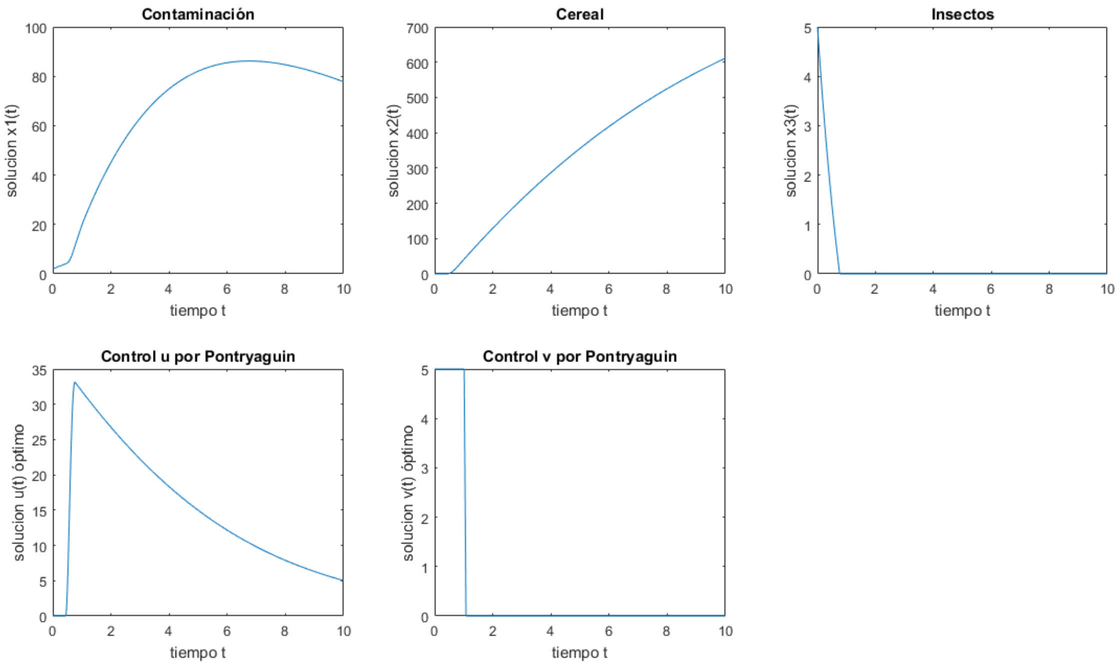


Figura 6: Solución con **Método de tiro** para $T = 10, x_0 = 2, y_0 = 0, z_0 = 5$

Se observa que coinciden con lo obtenido en BOCOP en la forma, pero hay un problema de escalamiento.