MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2018
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Antoine Haddon, Emilio Molina **Ayudante:** Pablo Arratia

Laboratorio #1

Uso de `Matlab` - `BOCOP`

Descripción: El objetivo de esta primera sesión es probar los sofware `Matlab` y `BOCOP`. Puede realizar consultas vía U-cursos.

Parte A. Uso de `Matlab`

Ejercicio 1 (Ecuaciones diferenciales ordinarias) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - \frac{1}{2}x^2 - xy, \\ \\ \dot{y} = -y + xy, \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$.

a) Encuentre la solución general del sistema sin considerar condiciones iniciales en `Matlab` (use `dsolve`).

b) Resuelva el sistema de forma numérica en el intervalo de tiempo $[0, 2]$ en `Matlab` mediante `ode45`. Grafique las soluciones.

c) Utilice el applet `pplane` desde el sitio `http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html` (o descárguelo desde `http://math.rice.edu/~dfield/index.html`) en `Matlab` para dibujar los diagramas de fase del sistema para distintas condiciones iniciales.

Ejercicio 2 Considere el sistema de control en $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con condiciones iniciales $x_0 = (0, 0)'$. Resuelva el sistema de forma numérica en el intervalo de tiempo $[0, 10]$ en `Matlab` mediante `ode45` para los controles $u(t) = 1, u(t) = t, u(t) = \sin(t)$. Grafique las soluciones. Calcule la solución usando la formula de variaciones de parámetros. Grafique y compare con la anterior.

Ejercicio 3 (Optimización lineal) Resuelva con `Matlab` el siguiente problema de programación lineal (PL). Utilice para ello los dos algoritmos disponibles `interior-point` y `dual-simplex` y compare los resultados. Analice también todas las posibilidades que ofrece la función `linprog`.

$$\min f(x, y, z) = -2x - 7y - 3z$$

$$s.\ a. \quad \begin{cases} -x + y + z \leq 13, \\ 2x + y + 5z \leq 37, \\ 7x + 3y \leq 20, \\ x, y, z \geq 0\ . \end{cases}$$

Ejercicio 4 (Optimización no lineal) Un paquete postal (en forma de cubo) debe satisfacer que su altura más la longitud de su contorno no puede exceder de 97 cm. Se pretende diseñar un paquete tal que cumpla con esta restricción y que además posea un volumen máximo. Escriba un modelo matemático para este problema y resuélvalo utilizando el comando `fmincon`.

Ejercicio 5 Una clase interesante de problemas de programación no lineal son los llamados problemas min-max. Se trata simplemente de un problema de programación no lineal donde la función objetivo se define como el máximo de un número finito de funciones. Por ejemplo, consideremos las tres funciones siguientes

$$F_1(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3, \quad F_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2, \quad F_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 7.$$

A partir de estas se define la función objetivo

$$f(x_1, x_2) = \max\{F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2), F_3(x_1, x_2)\}.$$

Consideremos también las restricciones

$$\begin{cases} -1 \leq x_1 \leq 0, \\ -1 \leq x_2 \leq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Podemos formular el siguente problema de min-max:

$$\min_x \{\max_{F_i} F_i\},$$

sujeto a las restricciones dadas por (1). Resuelva el problema anterior usando el comando `fminimax`.

Parte B. Control Óptimo : Uso de `BOCOP`

`BOCOP` es un programa *open-source* diseñado para resolver problemas de control óptimo tipo Mayer a tiempo final fijo o libre y con restricciones de control y estado. Para instalar el solver de control óptimo `BOCOP` ver el archivo 'bocop.pdf'.

`BOCOP` puede resolver problemas de la forma siguente

$$(\mathrm{M}) \begin{cases} \min\limits_{u(\cdot)} \; J(t_0, y(t_0), t_f, y(t_f)) & (\textit{Criterio}) \\ \quad \dot{y}(t) = f(y(t), u(t)) \qquad \forall t \in [t_0, t_f] & (\textit{Dynamica}) \\ \quad \Phi_l \leqslant \Phi(t_0, y(t_0), t_f, y(t_f)) \leqslant \Phi_u & (\textit{Condicion de borde}) \\ \quad y_l \leqslant y(t) \leqslant y_u \quad u_l \leqslant u(t) \leqslant u_u \qquad \forall t \in [t_0, t_f] & (\textit{Cotas}) \\ \quad g_l \leqslant g(y(t), u(t)) \leqslant g_u \qquad \forall t \in [t_0, t_f] & (\textit{Restricciones mixtas}) \end{cases}$$

donde $y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema y $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ el control. En particular, nota que el critero solo depende del tiempo inicial y final y de los estados iniciales y finales.

Ejercicio 6 Consideremos en este ejercicio el problema de Goddard, que modela el ascenso de un cohete a través de la atmósfera, y restringimos el estudio a trayectorias verticales (monodimensionales). Las variables de estado son la altitud r, la velocidad v y la masa m del cohete durante el vuelo. El cohete está sujeto a fuerzas de gravedad, aerodinámica y del motor. El tiempo final es libre, y el objetivo es alcanzar una cierta altitud con un consumo mínimo de combustible, es decir con masa final máxima. El control es la fuerza u del motor del cohete.

El problema de control óptimo es el siguiente:

$$
(G)\begin{cases}
\min\limits_{u(\cdot)} \quad m(t_f) \\
\qquad \dot r = v, \quad r(0) = 1, \quad r(t_f) = 1{,}01 \\
\qquad \dot v = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{m}(T_{max}u - D(r,v)), \quad v(0) = 0 \\
\qquad \dot m = -bu, \quad m(0) = 1 \\
\qquad u(t) \in [0,1], \quad \forall t \in [0, t_f] \\
\qquad D(r,v) \leqslant C
\end{cases}
$$

y la fuerza aerodinámica es $D(r,v) = Av^2 e^{-k(r-r_0)}$.

Este problema ya está programado y es uno de los ejemplos que viene con `BOCOP`, el cual se puede encontrar en la carpeta 'examples/goddard'.

1. Escribe este problema en la forma (M) y identifique las funciones J, f, Φ y g y las cotas Φ_l, Φ_u, g_l, g_u, y_l, y_u, u_l y u_u.
2. Hace las modificaciones necesarias para resolver el problema de alcanzar la altitud de $r(t_f) = 1{,}05$. Grafique la solución y el control óptimo.
3. Queremos ahora que el cohete llega a la altitud deseada con velocidad nula, es decir queremos $v(t_f) = 0$. Hace las modificaciones necesarias para resolver este nuevo problema. Grafique la solución y el control óptimo.

Ejercicio 7 Considere el siguiente problema de control óptimo:

$$
(B)\begin{cases}
\min\limits_{u(\cdot)} \quad \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u(t)^2\, dt \\
\qquad \ddot x(t) = u(t) \\
\qquad x(t) \leq a \\
\qquad x(0) = x(t_f) = 0 \\
\qquad \dot x(0) = -\dot x(t_f) = 1 \\
\qquad u(t) \in [-10, 10] \quad \forall t \in [0, t_f]
\end{cases}
$$

con $t_f = 1$. Notar que el criterio depende del control y entonces se debe modificar el problema para resolver lo con `BOCOP`.

Este problema ya está programado y es uno de los ejemplos que viene con `BOCOP`, el cual se puede encontrar en la carpeta 'examples/beam'.

1. Introduce una nueva variable de estado z tal que $z(t_f) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u(t)^2\, dt$. ¿Cual es la dinámica y la condición inicial de z?
2. Usando esta variable adicional, escribe un problema de Mayer (M) que es equivalente al problema (B). Identifique las funciones J, f, Φ y g.
3. Resuelva este problema para $a = 0{,}05$ y $0{,}2$. Grafique las soluciones y los controles óptimo.