# Teoria das Categorias para Programadores

Fabrício Olivetti de França

03 de Agosto de 2019

# Topics

# Teoria das Categorias

# Teoria das Categorias

Teoria das Categorias é uma área da Matemática que formaliza, descreve e estuda estruturas abstratas com foco nas relações entre seus objetos.

# Teoria das Categorias

Uma categoria $C$ é definida como um conjunto de **objetos** e **morfismos** junto com um operador de composição ($\circ$) que garantem as seguintes propriedades:

- **Associatividade:** $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$.
- **Identidade:** $f \circ id_A = id_B \circ f = f$.
- **Transitividade:** se $a, b, c \in C$ e $f : a \to b, g : b \to c$, então existe um $h = g \circ f : a \to c$.

# Propriedades

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[loop above] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed] & b \arrow[loop above] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed] \\
d \arrow[loop below] & c \arrow[l, "h"] \arrow[loop below]
\end{tikzcd}$$

# Composição e Abstração

Tanto o conceito de **composição** como de **abstração** são conhecidos na Ciência da Computação e entre programadores.

# Composição e Abstração

Category theory is the study of compositionality: building big things out of little things, preserving guarantees.It would be utterly *astonishing* if this were not deeply useful for programming.We have barely scratched the surface of learning how to take advantage of this!

— kenbot (@KenScambler) 15 de abril de 2019

# Composição e Abstração

'The purpose of abstraction is not to be vague, but to create a new semantic level in which one can be absolutely precise' - Edsger Dijkstra pic.twitter.com/S6UruJbBjF

— Computer Science (@CompSciFact) 4 de janeiro de 2018

# Exemplo

```c
char * inverte_str(char * orig) {
    int len = 0;
    char *ptr = orig, *dest, *pilha;
    int i, topo = -1;

    while (*ptr != '\0') ++ptr;
    len = ptr - orig;

    dest = malloc(sizeof(char)*(len+1));
    pilha = malloc(sizeof(char)*len);

    for (i=0; i<len; ++i) {
        pilha[++topo] = orig[i];
    }

    i = 0;
    while (topo != -1) dest[i++] = pilha[topo--];

    dest[len] = '\0';
    free(pilha);
    return dest;
}
```

# Exemplo com Modularização e Abstração

```c
char * inverte_str(char * orig) {
    int len = strlen(orig);
    pilha * p = cria_pilha();
    char * dest;

    dest = cria_str(len);

    while (*orig != '\0') {
        empilha(p, *orig);
        ++orig;
    }

    while (!vazia(p)) {
        *dest = desempilha(p);
        ++dest;
    }

    return dest;
}
```

# Utilizando composição

```c
char * inverte_str(char * orig) {
    pilha * p = cria_pilha();
    return desempilha_str(empilha_str(p, *orig));
}
```

# Pergunta

Quais vantagens vocês percebem nessa última versão?

# Resposta

- Construir o conceito de pilha uma única vez, utilizar em diversos contextos.
- Testar a corretude de cada módulo independentemente.
- Código declarativo
- Número menor de variáveis por módulo

# Fim do curso?

O uso de abstração e composição é apenas o começo...

# Fim do curso?

O estudo de Teoria das Categorias também compreende a identificação de padrões recorrentes.

Esses padrões são úteis para criações de estruturas genéricas que permitem lidar com diversos problemas recorrentes em programação.

# Pergunta

Como você definiria a categoria das páginas Web? Quem são os objetos e morfismos? As propriedades são atendidas?

# Pergunta

Como você definiria a categoria do Facebook? Quem são os objetos e morfismos? As propriedades são atendidas?

# Categoria para Programadores

# Categoria da Programação

Como podemos definir uma categoria apropriada para linguagens de programação? Quem são os objetos e morfismos?

# Categoria dos Tipos

**Categoria dos Tipos:** os objetos são os tipos de uma linguagem de programação (primitivos ou compostos) e os morfismos são as funções que mapeiam um valor de um tipo para outro.

# Tipo

Um **tipo** nada mais é que um conjunto de valores:

- `Int` compreende números inteiros representáveis com 32 bits
- `Char` caracteres da tabela ASCII ou Unicode
- `Primo` conjunto de números primos
- `Bool` contém apenas dois valores: `True, False`

# Função

Representa um mapa do valor de um tipo para outro tipo (ou para o mesmo):

```
bool f (int);
```

Por ora vamos assumir apenas funções com apenas um único argumento como parte dos morfismos.

# Haskell

Em Haskell a assinatura de uma função é similar a notação matemática:

```haskell
f :: Bool -> Int
```

A função `f` mapeia um valor booleano para um inteiro.

# É uma categoria?

Para os tipos e funções formarem uma categoria eles devem conter um morfismo identidade, um operador de composição e obedecer três propriedades: **identidade**, **associatividade** e **transitividade**.

# Morfismo Identidade

A propriedade de identidade diz que existe um morfismo identidade (`id`) que pode receber qualquer tipo e retorna o mesmo valor de entrada para esse mesmo tipo.

# Haskell

```haskell
id :: a -> a
id x = x
```

O tipo a é um tipo paramétrico, deve ser lido como *para qualquer a*.

# C++

```
template <class A>
A id(A x) return x;
```

# Python

```python
def id(x):
    return x
```

# Operador de Composição

O operador de composição $g \circ f$ pode ser lido como $g$ *após* $f$ e deve aplicar a função $g$ na saída da função $f$.

# Haskell

O Haskell já possui um operador de composição:

```
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> (a -> c)
g . f = \x -> g (f x)
```

Dada uma função $g : b \to c$ e uma função $f : a \to b$, me entregue uma função $g \circ f : a \to c$.

# C++

O C++11 introduziu o conceito de funções anônimas que nos permitem fazer:

```cpp
auto const compose = [](auto g, auto f) {
        return [f, g](auto x) {
                return g(f(x));
        };
};
```

# Python

Em Python fazemos:

```python
def compose(g, f):
    return lambda x: g(f(x))
```

# Identidade

```
(f . id) x             = f x
(\x -> f (id x)) x = f x
(\x -> f x) x        = f x
f x                    = f x
```

# Associatividade

```
(f . (g . h)) x          = ((f . g) . h) x
(f . (\x -> g (h x)) x = (\x -> (f . g)(h x)) x
(\y -> f ((\x -> g (h x) y)) x = (\x -> (\y -> f (g y))(h x)) x
f ((\x -> g (h x) x)  = (\y -> f (g y))(h x)
f (g (h x))             = f (g (h x))
```

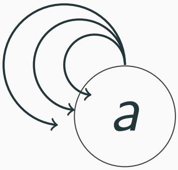
# Transitividade

Consequência do nosso operador de composição.

# Monoids

# Monoids

O primeiro padrão que iremos aprender é uma categoria bastante simples, ela contém apenas um objeto!




Essa categoria é conhecida como **Monoid**.

# Monoids

Em algebra um Monoid $M(C, \otimes, \epsilon_{\otimes})$ é composto por um objeto $C$, um operador binário $\otimes : m \rightarrow m \rightarrow m$, com $m \in C$ e um valor identidade $\epsilon_{\otimes}$ correspondente a esse operador.

# Propriedades

$a, b, c \in C, (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) = a \otimes b \otimes c$

$a \otimes \epsilon = \epsilon \otimes a = a$

# Monoids em Haskell

Em Haskell podemos criar uma classe de tipos:

```haskell
class Monoid m where
    mempty  :: m
    mappend :: m -> m -> m
```

# Monoids em Haskell

Exemplo: multiplicação em números inteiros.

```
instance Monoid Int where
    mempty  = 1
    mappend = (*)
```

# Notação point-free

No Haskell as expressões `mappend x y = x*y` e `mappend = (*)` representam a mesma coisa!

Essa segunda expressão é chamada de *point-free* ou *igualdade extensional*.

# Monoids em C++

Em C++20, podemos definir um Monoid como:

```
template<class T>
  T mempty = delete;

template<class T>
  T mappend(T, T) = delete;

template<class M>
  concept bool Monoid = requires (M m) {
    { mempty<M> } -> M;
    { mappend(m, m); } -> M;
  };
```

# Monoids em C++

E o exemplo para inteiros com multiplicação (g++-8 com flags `-fconcepts -std=c++2a`):

```
template<>
int mempty<int> = {1};

int mappend(int x, int y) {
    return x*y;
}
```

# Monoids em Python

Em Python utilizamos `singledispatch`:

```python
from functools import singledispatch

@singledispatch
def mempty(a):
    raise Error("Not implemented for" + a)

@singledispatch
def mappend(a, b):
    raise Error("Not implemented for" + a)
```

# Monoids em Python

E o exemplo para inteiros com multiplicação:

```python
@mempty.register(int)
def _(a):
    return 1

@mappend.register(int)
def _(a,b):
    return a * b
```

# Sistema de Estoque

Vamos exemplificar com o seguinte trecho de código:

```haskell
type Qtd     = Int
type Preco   = Double
data Produto = P Qtd Preco

soma_produtos :: [Produto] -> Produto
soma_produtos ps = foldl somaProds prod0 ps
  where
    somaProds (P q1 p1) (P q2 p2) = P (q1+q2) (p1+p2)
    prod0 = P 0 0.0

zera_estoque :: Produto -> Produto
zera_estoque _ = P 0 0.0
```

# Sistema de Estoque

Se eu quiser acrescentar um campo imposto? O que devo fazer?

```haskell
type Qtd     = Int
type Preco   = Double
type Imposto = Double
data Produto = P Qtd Preco Imposto

soma_produtos :: [Produto] -> Produto
soma_produtos ps = foldl somaProds prod0 ps
  where
    somaProds (P q1 p1 i1) (P q2 p2 i2) = P (q1+q2) (p1+p2)
                                            (max i1 i2)
    prod0 = P 0 0.0 0.0

zera_estoque :: Produto -> Produto
zera_estoque _ = P 0 0.0 0.0
```

# Sistema de Estoque

Se eu tiver $n$ funções que processam o tipo produto, tenho que fazer alteração em cada uma delas.

Devo tomar cuidado para que todas as alterações, repetitivas, sejam feitas corretamente!

# Monoid de Estoque

```haskell
type Qtd     = Int
type Preco   = Double
data Produto = P Qtd Preco

instance Monoid Produto where
  mempty = Produto 0 0.0
  mappend (P q1 p1) (P q2 p2) = P (q1+q2) (p1+p2)

soma_produtos :: [Produto] -> Produto
soma_produtos ps = foldl mappend mempty ps

zera_estoque :: Produto -> Produto
zera_estoque _ = mempty
```

# Monoid de Estoque

```haskell
type Qtd     = Int
type Preco   = Double
type Imposto = Double
data Produto = P Qtd Preco Imposto

instance Monoid Produto where
  mempty = Produto 0 0.0 0.0
  mappend (P q1 p1 i1) (P q2 p2 i2) = P (q1+q2) (p1+p2)
                                        (max i1 i2)

soma_produtos :: [Produto] -> Produto
soma_produtos ps = foldl mappend mempty ps

zera_estoque :: Produto -> Produto
zera_estoque _ = mempty
```

# Monoid de Estoque

Agora eu só preciso alterar a instância de Monoid para o tipo Produto! Isso será feito uma única vez! Todas as outras funções continuam funcionando corretamente.

# Categoria Kleisli

# Traço de Execução

Imagine que temos diversas funções em C++, como por exemplo:

```
bool not(bool b) {
    return !b;
}

bool is_even(int x) {
    return x%2==0;
}
```

# Traço de Execução

Precisamos criação um *log* do traço de execução de cada função no programa. Algo como:

```
int main () {
   not(is_even(2));
   not(is_even(3));
}
```

resultaria no *log* “even not even not”. Quais soluções podemos propor?

# Traço de Execução

Alteramos todas as funções para retornarem `pair<T, string>` e concatenamos o log na função principal:

```
pair<bool, string> not(bool b) {
    return make_pair(!b, "not ");
}

pair<bool, string> is_even(int x) {
    return make_pair(x%2==0, "even ");
}
```

# Traço de Execução

```cpp
int main () {
   pair<bool, string> p;
   string log = "";

   p = is_even(2);
   log += p.second;
   p = not(p.first);
   log += p.second;

   p = is_even(3);
   log += p.second;
   p = not(p.first);
   log += p.second;
}
```

# Traço de Execução

Código confuso, verboso, trabalhoso (aumentando a chance de *bugs*).

As funções não podem ser compostas como `not(is_even(3))`.

# Traço de Execução

Para facilitar usamos uma variável global:

```
string log = "";

bool not(bool b) {
    log += "not ";
    return !b;
}

bool is_even(int x) {
    log += "even ";
    return x%2==0;
}
```

# Traço de Execução

Nosso código precisa de poucas alterações e as funções continuam com a propriedade de composição:

```c
int main () {
   not(is_even(2));
   not(is_even(3));
}
```

# Traço de Execução

# Efeito colateral

Cometemos um erro grave. Transformamos todas as nossas funções puras em funções com efeitos colaterais...

# Funções Puras

Uma função $f$ é pura se, para um mesmo valor de entrada, ela **sempre** retorna a mesma saída (inclusive suas saídas escondidas):

```
def f(x):
  return 2*x
```

# Função impura

Funções que retornam valores distintos ou causam um efeito em alguma outra forma de saída (arquivo, banco de dados, etc.):

```python
def multRand(x):
    return random()*x
```

# Função impura

```python
def escreve(s):
    with open("arq.txt","a") as f:
        f.write(s)
    with open("arq.txt","r") as f:
        lines = f.readlines()
    return lines
```

# Função Pura vs Impura

Para testar a pureza de uma função podemos tentar **memoizar**.
Se eu puder memoizar, então ela é pura, caso contrário não.

# Pergunta

Essa função é pura ou impura?

```
int fatorial(int n) {
  if (n <= 0) return 0;
  if (n == 1) return 1;
  return n * fatorial(n-1);
}
```

# Pergunta

Essa função é pura ou impura?

```
std::getchar()
```

# Pergunta

Essa função é pura ou impura?

```cpp
bool f() {
    std::cout << "Hello!" << std::endl;
    return true;
}
```

# Pergunta

Essa função é pura ou impura?

```c
int f(int x) {
    static int y = 0;
    y += x;
    return y;
}
```

# Efeitos colaterais e bugs

Funções que causam efeitos colaterais devem ser evitadas ou muito bem documentadas e isoladas de todo o resto do programa pois

- Dependem de fontes externas que podem não ser confiáveis.
- Podem danificar essas fontes externas causando falhas em outras funções impuras.
- Mascarar alterações em uma estrutura de dados sendo utilizada (ex.: listas em Python)

# Traço de Execução

Retomando nosso problema, não tem outro jeito exceto a primeira solução verbosa, feia, trabalhosa :(

```
pair<bool, string> is_odd(int x) {
    pair<bool, string> p1, p2;
    p1 = is_even(x);
    p2 = not(p1.first);
    return make_pair(p2.first, p1.second + p2.second);

}
```

# Traço de Execução

Mas peraí, tem um padrão aí!

```
pair<bool, string> is_not_odd(int x) {
    pair<bool, string> p1, p2;
    p1 = is_odd(x);
    p2 = not(p1.first);
    return make_pair(p2.first, p1.second + p2.second);

}
```

# Traço de Execução

Nosso objetivo é fazer com que as funções se conversem de forma natural. Vamos tentar criar uma categoria para esse tipo de função!

# Traço de Execução

Vamos voltar a usar o Haskell por conta de sua notação mais próxima da matemática. Temos funções:

```haskell
is_even :: Int  -> (Bool, String)
not     :: Bool -> (Bool, String)
```

# Traço de Execução

E queremos criar um operador de composição para elas:

```
compose :: (a -> (b, String))
        -> (b -> (c, String))
        -> (a -> (c, String))
```

# Traço de Execução

Para facilitar a notação, vamos criar o tipo `Writer` definido por:

```haskell
type Writer a = (a, String)
```

# Categoria Writer

Para que o tipo `Writer` forme uma categoria, precisamos de uma função identidade.

Essa função deve ter a propriedade de que, quando composta com uma função $f$, retorne o próprio $f$.

# Identidade Writer

Vamos analisar se essa função atende nossa propriedade:

```haskell
return :: a -> Writer a
return x = (x, "")
```

(o nome `return` será explicado no final do curso)

# Pergunta

Utilizamos a string vazia na função `return` por ela ser um elemento neutro da concatenação. Tenho um elemento neutro, um operador binário (concatenação) e o tipo `String`. O que isso forma?

# Composição: >=>

A composição é feita pelo operador conhecido como *peixe*:

```haskell
(>=>) :: (a -> Writer b) -> (b -> Writer c) -> (a -> Writer c)
m1 >=> m2 = \a ->
    let (b, s1) = m1 a
        (c, s2) = m2 b
    in (c, s1 ++ s2)
```

# Categoria Writer

```haskell
notW :: Bool -> Writer Bool
notW b = (b, "not")

is_even :: Int -> Writer Bool
is_even x = (x `mod` 2 == 0, "even")

is_odd :: Int -> Writer Bool
is_odd = is_even >=> notW
```

# Categoria Writer C++

```
template<class A>
Writer<A> identity(A x) {
    return make_pair(x, "");
}
```

# Categoria Writer C++

```cpp
auto const compose = [](auto m1, auto m2) {
    return [m1, m2](auto a) {
        auto p1 = m1(a);
        auto p2 = m2(p1.first);
        return make_pair(p2.first, p1.second + p2.second);
    };
};
```

# Categoria Writer C++

```cpp
Writer<bool> notW(bool b) {
    return make_pair(!b, "not ");
}

Writer<bool> is_even(int x) {
    return make_pair(x%2==0, "even ");
}

Writer<bool> is_odd(int x) {
    return compose(is_even, notW)(x);
}
```

# Categoria Kleisli

Essa categoria que acabamos de criar é generalizada pela categoria **Kleisli** que é um dos componentes da definição de **Monads** (mas ainda é cedo pra dizer que sabem o que é um Monad).

# Categoria Kleisli

Generalizando, a categoria Kleisli possui os mesmos objetos da categoria dos tipos. . .

. . . porém os morfismos são da forma `a -> m b`.

# Exercício

O que acontece se alterarmos a definição de `Writer` para carregar um inteiro no segundo componente?

```haskell
type Writer a = (a, Int)

(>=>) :: (a -> Writer b) -> (b -> Writer c) -> (a -> Writer c)
m1 >=> m2 = \x ->
    let (y, s1) = m1 x
        (z, s2) = m2 y
    in (z, s1 + s2)
```

# Exercício

```haskell
fatorial :: Int -> Writer Int
fatorial 0 = (1,1)
fatorial 1 = (1,1)
fatorial n = (fatorial >=> (mul n)) (n-1)

mul :: Int -> Int -> Writer Int
mul n x = (n*x, 1)


main = do
    print $ fatorial 5
```

# Writer para funções impuras

A nossa definição do tipo `Writer` nos permitiu transformar uma solução que gera efeitos colaterais em uma função pura!

# Categoria Kleisli para funções parciais

Uma função parcial é aquela que não tem um valor definido para todos os possíveis argumentos. Exemplo: raíz quadrada para números reais.

# Categoria Kleisli para funções parciais

Uma forma de tratar esse tipo de função é utilizando o tipo `Maybe` no Haskell:

```haskell
data Maybe a = Nothing | Just a
```

# Categoria Kleisli para funções parciais

E `optional` no C++:

```cpp
template<class A> class optional {
    bool _isValid;
    A    _value;
public:
    optional()    : _isValid(false) {}
    optional(A v) : _isValid(true), _value(v) {}
    bool isValid() const { return _isValid; }
    A value() const { return _value; }
};
```

# Categoria Kleisli para funções parciais

Vamos supor a existência de duas funções `safe_root` e `safe_reciprocal`:

```cpp
optional<double> safe_root(double x) {
    if (x >= 0) return optional<double>{sqrt(x)};
    else return optional<double>{};
}

optional<double> safe_reciprocal(double x) {
    if (x != 0) return optional<double>{1.0/x};
    else return optional<double>{};
}
```

# Categoria Kleisli para funções parciais

Nosso operador *peixe* para compor duas funções que retornam `optional` devem seguir a lógica:

- Se o resultado da primeira função for **nada**, retorna nada. Senão, passa o resultado como argumento para a segunda função.
- Se o resultado da segunda função for **nada**, retorna nada. Senão retorna o resultado.

# Categoria Kleisli para funções parciais

```
auto const fish = [](auto f, auto g) {
    return [f, g](double x) {
        auto z = f(x);
        if (z) return g(z.value());
        else return z;
    };
};
```

# Categoria Kleisli para funções parciais

Com isso podemos fazer a sequência:

```
auto sequencia = fish(safe_reciprocal, safe_root);
```

# Tipos de Dados Algébricos

# Tipos Fundamentais

Podemos analisar os tipos em uma linguagem de programação pela quantidade de elementos que eles representam e as funções que eles podem fazer parte como entrada ou saída.

# Tipos Fundamentais

Dentre os tipos listados anteriomente, o menor deles foi o `Bool`, contendo apenas dois elementos.

# Absurdo!

Podemos pensar em um tipo com 0 elementos?

# Void

No Haskell temos o tipo `Void` definido por:

```haskell
data Void
```

Não existe equivalente em C++ ou Python.

# Funções com Void

Que tipo de funções podemos criar com `Void`?

```haskell
absurd :: Void -> a
```

Essa função é equivalente a lei da lógica clássica *ex falso quodlibet* que diz que *qualquer coisa pode seguir de uma contradição*.

# Unit

E um tipo com apenas um elemento?

```haskell
data () = ()
```

ele é chamado de **unit** e é implementado pelo tipo `void` no C/C++/Java e `None` no Python.

# Funções com Unit

Que funções podemos construir que retorna um unit?

```haskell
unit :: a -> ()
unit x = ()
```

# Funções com Unit

E funções que recebem um unit?

```haskell
x :: () -> Int
x () = 10
```

que, nesse exemplo, escolhe um valor do tipo `Int`.

# Exercício: Funções com Bool

Que tipos de funções construímos com o tipo `Bool`?

# Exercício: Funções com Bool

Que tipos de funções construímos com o tipo `Bool`?

```haskell
isAlpha :: Char -> Bool
isGreaterThanFive :: Int -> Bool
```

Predicados!

# Exercício: Funções com Bool

Que tipos de funções construímos com o tipo `Bool`?

```haskell
ifthenelse :: Bool -> Int
ifthenelse True  = 10
ifthenelse False = 20
```

# Tipos Compostos

Digamos que eu tenha uma função que recebe um `Bool` e, dependendo do valor, deve retornar ou um inteiro, ou um caractere.

Também pense no tipo que representa produtos em nosso estoque, eles são compostos por `Int` e `Double`, como represento tais tipos?

Vamos definir os tipos **produtos** e **soma** (**coprodutos**)

# Tipo Produto

**Spoiler:** o tipo produto é uma tupla.

# Tipo Produto

Como definimos uma tupla utilizando Teoria das Categorias?

# Construção Universal

Na Teoria das Categorias temos uma visão *de fora* dos objetos, ou seja, não temos acesso ao seu conteúdo. Isso permite criar estruturas abstratas.

# Construção Universal

A Construção Universal é feito em dois passos:

- Criamos um padrão que compreende o que nos interessa (e outros que não).
- Criamos um rank para que o que nos interessa fique em primeiro lugar.

# Isomorfismo

**Isomorfismo:** relação que indica que dois objetos são estruturalmente iguais.

Nem sempre conseguimos comparar dois objetos por igualdade.

# Isomorfismo

Um objeto `a` é isomórfico ao objeto `b` se temos:

```
f . g = id
g . f = id
```

# Tipo Produto

O tipo *c* é um tipo produto dos tipos *a* e *b*. O padrão que define *c* é a de duas funções de projeção:

```haskell
p :: c -> a
q :: c -> b
```

# Tipo Produto

Pensando no par `Int` e `Bool`, podemos definir `c :: Int` fazendo:

```haskell
p :: Int -> Int
p x = x

q :: Int -> Bool
q _ = True
```

# Tipo Produto

Outro candidato é fazer com que `c :: (Int, Int, Bool)`:

```
p :: (Int, Int, Bool) -> Int
p (x, _, _) = x

q :: (Int, Int, Bool) -> Bool
q (_, _, b) = b
```

# Tipo Produto

Para rankear nossos candidatos e encontrar o **melhor** tipo produto, dizemos que, dado $c, c'$ e os morfismos $p, q, p', q'$, $c$ é melhor que $c'$ se existe apenas um único $m$ tal que:

```
m :: c' -> c

p' = p . m
q' = q . m
```

# Tipo Produto

Pensando na opção $c = (Int, Bool)$ e nas alternativas anteriores, podemos fazer:

```
m1 x = (x, True)

m2 (x, _, b) = (x, b)
```

# Tipo Produto

Vamos tentar fazer o oposto agora, encontrar um `m2'` que converta `c` na segunda opção de `c'`:

```
m2' (x, b) = (x, 1, b)
```

mas também podemos fazer:

```
m2' (x, b) = (x, 2, b)
```

# Tipo Produto

Conclusão: o melhor tipo para representar o nosso tipo produto é uma tupla!

# Exercício

O tipo produto `((Int, Bool), Int)` é isomórfico com o tipo `(Int, (Bool, Int))`? Defina duas funções que converta uma em outra e sejam inversas.

# Exercício

Fazendo `a = Int` como a quantidade de valores contidos no tipo `Int` e, analogamente, `b = Bool` como a quantidade de valores no tipo `Bool`. Quantos valores possui o tipo `(Int, Bool)`?

# Tipo Algébrico Produto

Como temos um tipo chamado *produto*, será que ele possui as mesmas propriedades algébricas de um produto? Já vimos que ele é associativo...

# Tipo Algébrico Produto

Na álgebra o produto possui um elemento neutro, que tem valor 1. Em tipos temos o unit:

```haskell
f :: (a, ()) -> a
f (x, ()) = x

g :: a -> (a, ())
g x = (x, ())

f . g = id
g . f = id
```

Ou seja, o tipo `(a, ())` (e analogamente `((), a)`) são isomórficos a a, pois carregam a mesma informação.

# Tipo Produto no Haskell

No Haskell, podemos representar pares utilizando nomes específicos para diferenciar um par de outro:

```haskell
data Circunferencia     = Circ Double Double Double
data TrianguloRetangulo = Tri Double Double Double
```

# Tipo Produto no Haskell

Nesse código `Circunferencia` é o nome do tipo criado e `Circ` é o nome do construtor desse tipo:

```haskell
Circ :: Double -> Double -> Double -> Circunferencia
```

# Tipo Produto no Haskell

Embora os tipos `Circunferencia` e `TrianguloRetangulo` sejam isomórficos, no Haskell um não pode ser utilizado no lugar do outro (como poderiam em Python e C++):

```haskell
area :: Circunferencia -> Double
area (Circ xc yc r) = pi*r*r

tri :: TrianguloRetangulo
tri = Tri 10.0 10.0 5.0

z = area tri
```

# Type-driven Development

Esse código apresentará um erro de compilação, pois o Haskell exige que os tipos da assinatura de função e seus argumentos sejam os mesmos.

# Type-driven Development

Lema do Haskell: *"if a Haskell program compiles, it probably works"* pois o sistema de tipos da linguagem impede que você passe argumentos para funções que sejam isomórficos porém representam diferentes contextos.

# Type-driven Development

Essa ideia é atualmente estudada com o nome de **Type-driven Development**, em que o objetivo é dificultar a compilação de um programa de tal forma que, quando ele compila corretamente, minimiza as chances de *bugs*.

# Tipo Produto no Haskell

Também podemos representar um produto como um registro:

```haskell
data Circunferencia = Circ { x_center :: Double
                           , y_center :: Double
                           , radius   :: Double }

area :: Circunferencia -> Double
area c = pi*r*r where r = radius c
```

# Tipo Coproduto

Vamos pensar agora no padrão dual ao produto, chamado **coproduto**:

```
i :: a -> c
j :: b -> c
```

# Tipo Coproduto

A fatoração para rankeamento do melhor tipo para definir o coproduto é:

```
m :: c -> c'

i' = m . i
j' = m . j
```

# Tipo Coproduto

O **tipo coproduto** ou **tipo soma** de dois objetos `a` e `b` é o objeto `c` equipado com duas funções injetivas para `a` e `b`.

# Tipo Coproduto

É uma união disjunta de dois conjuntos. Em Haskell podemos definir um tipo soma como:

```haskell
data C = A Int | B Bool
```

Lemos essa definição como "O tipo `C` é composto de **ou** um componente `A` do tipo `Int` **ou** um componente `B` do tipo `Bool`.

# Tipo Coproduto

Uma forma mais genérica é obtida pelo tipo paramétrico `Either`:

```haskell
data Either a b = Left a | Right b
```

# Tipo Coproduto

Em C++ implementamos o tipo soma como um *tagged union*:

```
template<class A, class B>
struct Either {
    enum { isLeft, isRight } tag;
    union { A left; B right; };
};
```

# Tipo Coproduto

Um outro exemplo de tipo soma no Haskell é o tipo `Bool` definido como:

```haskell
data Bool = True | False
```

que é isomórfico a:

```haskell
data Bool = Either () ()
```

# Tipo Coproduto / Maybe

Um exemplo de tipo soma que vimos recentemente é o `Maybe`:

```haskell
data Maybe a = Nothing | Just a -- = Either () a
```

# Álgebra dos Tipos

Será que podemos representar outras regras de soma e produto com tipos?

```haskell
-- a * 0 = 0
data Absurdo a = Ab a Void = Void

-- a * 1 = a
data Unity a = U a () = a

-- a + 0 = a
data Soma0 a = a | Void = a
```

# Álgebra dos Tipos

Esses tipos também possuem propriedades distributivas entre eles?

```haskell
type Alpha a b c = (a, (Either b c))

type Beta a b c = Either (a, b) (a, c)

f :: Alpha -> Beta
f (x, Left y)  = Left (x, y)
f (x, Right y) = Right (x, y)

g :: Beta -> Alpha
g Left (x, y)  = (x, Left y)
g Right (x, y) = (x, Right y)
```

# Semi-Anel

Tanto o tipo Soma como o tipo Produto formam um Monoid e essa combinação forma um **semi-anel**:

```
instance Monoid Soma where
    mempty  = Void
    mappend = Either

instance Monoid Prod where
    mempty  = ()
    mappend = (,)
```

# Equivalência Álgebra-Tipos

Temos a seguinte tabela de equivalência entre a algebra e os tipos soma e produto:

| Algebra | Tipos |
|---|---|
| $0$ | `Void` |
| $1$ | `()` |
| $a + b$ | Either a b |
| $a * b$ | (a, b) |
| $2 = 1 + 1$ | `Bool = True \| False` |
| $1 + a$ | `Maybe a = Nothing \| Just a` |

# Equivalência Lógica-Tipos

Da mesma forma que os tipos em Haskell são isomórficos ao semi-anel da álgebra, eles também são isomórficos com a lógica clássica:

| Lógica | Tipos |
|---|---|
| Falso | `Void` |
| Verdadeiro | `()` |
| $a \vee b$ | Either a b |
| $a \wedge b$ | (a, b) |

Esse isomorfismo é conhecido como *Isomorfismo de Curry-Howard* e pode ser estendido para categorias.

# Tipos Recursivos

Uma outra forma interessante de construção de tipos é através da recursão. Por exemplo, considere o tipo que representa uma lista em Haskell:

```haskell
data List a = Vazio | (:) a (List a)
```

# Tipos Recursivos

Essencialmente isso nos permite definir uma lista como:

```
xs = List Int
xs = 1 : 2 : 3 : Vazio
```

que representa a lista `[1,2,3]`.

# Lista

Quantos valores possíveis temos para um tipo `List a`?

Podemos resolver isso algebricamente também definindo `x = List a`:

$$x = 1 + a \cdot x$$

$$x = 1 + a \cdot (1 + a \cdot x)$$

$$x = 1 + a + a^2 \cdot x$$

$$x = 1 + a + a^2 + a^3 \cdot x$$

$$x = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots$$

# Lista

Esse resultado pode ser interpretado como:

Uma lista do tipo a pode conter um único valor (lista vazia) **ou** um valor do tipo a **ou** dois valores do tipo a, etc.

# Tipos Buracos

# Mais e mais álgebra

O que mais podemos fazer com os tipos algébricos? Uma outra operação possível é o cálculo da derivada de nossos tipos!

# Derivada de Tipos

Vamos estabelecer algumas derivadas básicas em função de um tipo a:

```
()'    = Void
a'     = ()
(a+b)' = () + Void
(a*b)' = 1*b = b
(a*a)' = 2a = a + a
```

# Tipos Buracos

Os tipos resultantes da derivada são chamados de **buracos** pois elas criam um ponto de foco na nossa estrutura.

# Buraco de uma Lista

A representação algébrica da lista é:

$x = 1 + a \cdot x$

Isolando a variável $x$ temos:

$x = 1/(1 - a)$

Derivando esse tipo, temos:

$x' = 1/(1 - a)^2$

# Buraco de uma Lista

O buraco de uma lista é o produto de duas listas!

```haskell
data Zipper a = Zip [a] [a]

criaZip :: [a] -> Zipper a
criaZip xs = Zip [] xs

esq :: Zipper a -> Zipper a
esq (Zip []     ds) = Zip [] ds
esq (Zip (e:es) ds) = Zip es (e:ds)

dir :: Zipper a -> Zipper a
dir (Zip es [])     = Zip es []
dir (Zip es (d:ds)) = Zip (d:es) ds
```

# Buraco de uma Lista

Com isso definimos uma lista duplamente ligada:

```haskell
xs :: [Int]
xs = [1,2,3,4,5]

zs :: Zipper Int
zs = criaZip xs
-- zs = Zip [] [1,2,3,4,5]

zs' :: Zipper Int
zs' = (dir . dir) zs
-- zs' = Zip [2,1] [3,4,5]

zs'' :: Zipper Int
zs'' = esq zs'
-- zs'' = Zip [1] [2,3,4,5]
```

# Buraco de uma árvore

Outro `Zipper` interessante é o de uma árvore com elemento apenas nos nós internos:

```haskell
data Tree a = Empty | Node (Tree a) a (Tree a)
```

# Buraco de uma árvore

Fazendo `Tree a = 1 + a * (Tree a) * (Tree a)` e substituindo `Tree a` por $x$, temos:

$x = 1 + a * x^2$

Derivando em função de $a$ temos:

$x' = x^2 + 2 * a * x * x'$

Que pode ser resolvido como:

$x' = (x^2)/(1 - 2ax) = x^2 \cdot 1/(1 - (ax + ax))$

# Buraco de uma árvore

Transformando em um tipo algébrico, isso representa o produto entre uma tupla de árvores e uma lista com o foco atual, a árvore acima e o caminho utilizado, ou

```
(Tree a, Tree a, [Either (a, Tree a)])
```

# Buraco de uma árvore

```haskell
data Zipper a = Zip { left  :: Tree a
                    , right :: Tree a
                    , focus :: [Either (a, Tree a) (a, Tree a)]
                    }
```

# Buraco de uma árvore

Então o foco em um elemento $x$ nessa árvore binária é composta por:

- ramo da esquerda
- ramo da direita
- lista de subárvores acima, sendo o primeiro elemento o nó-foco

Cada subárvore é sinalizada com `Left` ou `Right` indicando o caminho tomado para chegar até ele.

# Buraco de uma árvore

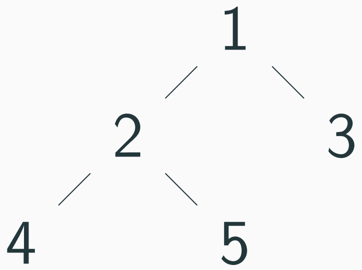
```haskell
criaZip :: Tree a -> Zipper a
criaZip Empty = Zip Empty Empty []
-- Foco inicial não tem ninguém acima dele (Empty)
criaZip (Node l x r) = Zip l r [Left (x, Empty)]

esq :: Zipper a -> Zipper a
esq tz =
  case left tz of
    Empty      -> tz  -- se não temos nós a esquerda
    -- O novo foco é o nó raiz da árvore esquerda
    -- acima dele é a árvore direita
    Node l x r -> Zip l r (Left (x, (right tz)) : focus tz)

dir :: Zipper a -> Zipper a
dir tz =
  case right tz of
    Empty      -> tz
    Node l x r -> Zip l r (Right (x, (left tz)) : focus tz)
```

# Buraco de uma árvore

```haskell
upwards :: Zipper a -> Zipper a
upwards (Zip l r [])     = Zip l r []
upwards (Zip l r [x])    = Zip l r [x]
upwards (Zip l r (f:fs)) = t
  where t = case f of
              Left  (x, t') -> Zip (Node l x r) t' fs
              Right (x, t') -> Zip t' (Node l x r) fs
```

# Buraco de uma árvore

Com esse tipo de árvore podemos fazer um algoritmo de *backtracking* de forma eficiente:



# Buraco de uma árvore

```haskell
t :: Tree Int
t = Node (Node (Node Empty 4 Empty) 2 (Node Empty 5 Empty))
         1
         (Node Empty 3 Empty)

tz :: Zipper Int
tz = criaZip t
-- Zip {left = Node (Node Empty 4 Empty) 2 (Node Empty 5 Empty)
--      , right = Node Empty 3 Empty
--      , focus = [Left (1,Empty)]}

esq tz
-- Zip {left = Node Empty 4 Empty
--      , right = Node Empty 5 Empty
--      , focus = [Left (2,Node Empty 3 Empty),
                  Left (1,Empty)]
      }
```

# Buraco de uma árvore

```
(esq . esq) tz
-- Zip {left = Empty
--     , right = Empty
--     , focus = [Left (4,Node Empty 5 Empty),
                  Left (2,Node Empty 3 Empty),
                  Left (1,Empty)]
       }

(dir . esq . esq) tz
-- Zip {left = Empty
--     , right = Empty
--     , focus = [Left (4,Node Empty 5 Empty),
                  Left (2,Node Empty 3 Empty),
                  Left (1,Empty)]
       }


(upwards . esq) tz = tz
```

# Atividades para Casa

1. Escreva a definição de Monoid em sua linguagem favorita. Crie um outro exemplo de aplicação.
2. Escreva o operador de composição da categoria Writer na sua linguagem favorita.
3. Implemente o tipo `Either` na sua segunda linguagem favorita (a primeira sendo o Haskell). Teste com aplicações como Pedra-Papel-Tesoura, o tipo Maybe, etc.
4. Mostre que os tipos $a + a = 2 * a$ são isomórficos.

# Atividades para Casa

5. Dado o tipo soma definido em Haskell:

```haskell
data Shape = Circle Float
           | Rect Float Float
```

podemos definir uma função genérica `area`:

```haskell
area :: Shape -> Float
area (Circle r) = pi * r * r
area (Rect d h) = d * h
```

Implemente a estrutura Shape como um `interface` na sua linguagem OOP favorita!

# Atividades para Casa

6. Podemos acrescentar uma função para calcular circunferência das formas no Haskell:

```haskell
circ :: Shape -> Float
circ (Circle r) = 2.0 * pi * r
circ (Rect d h) = 2.0 * (d + h)
```

Acrescente essa função na `interface` criada no exercício anterior. Marque as linhas de código que você teve que alterar.

# Atividades para Casa

7. Adicione a forma `Square` tanto no tipo `Shape` do Haskell como na `interface` implementada por você. O que teve que ser feito em Haskell e na sua linguagem favorita?