Equazioni differenziali

Problema: Considerata la funzione $f(x)=x$, qual è la funzione $F(x)$ derivabile / $F'(x) = x$?

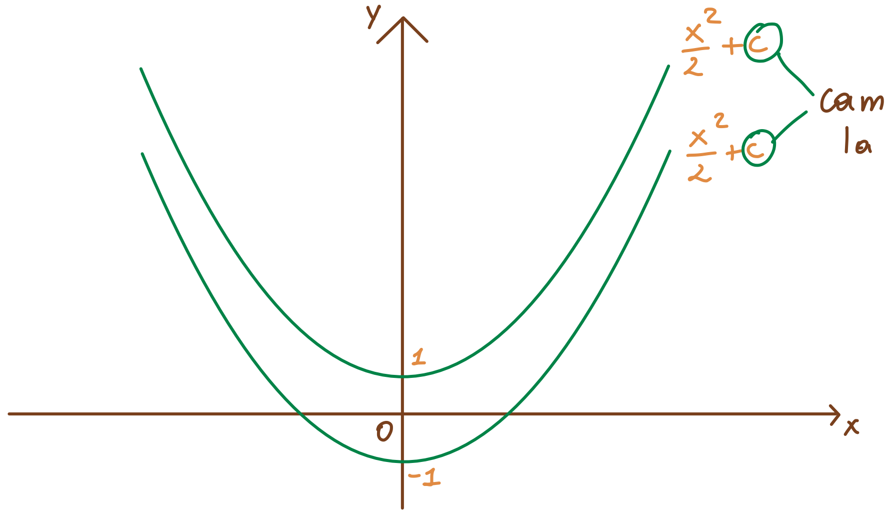
$$F'(x) = x \iff F(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

La guardiamo come un'equazione in cui l'incognita è una (o più) funzione $F(x)$ la cui derivata è uguale ad x. Finora abbiamo sempre considerato equazioni la cui incognita era una certa x (lettera) che rappresentava dei numeri reali.

ES: $x^2 = 1$, $x = \pm 1$ ... L'incognita rappresenta numeri REALI o COMPLESSI.

Nel caso delle eq diff., l'incognita non è più un numero, ma una FUNZIONE.

Osservazione: la soluzione, o famiglia di soluzioni è $\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + c}$



cambiando la costante cambia anche la funzione.

In questo ambito, l'incognita si indica con $y(x)$; quindi il "problema" precedente si indica con:

$$y'(x) = x \iff y(x) = \frac{x^2}{2} + c \quad \text{perché} \quad D\left(\frac{x^2}{2} + c\right) = x$$

Definizione Si dice Equazione Differenziale d'ordine n un'espressione del tipo:

$$G(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Dove $y(x)$ è la funzione incognita derivabile n volte in $[a,b]$.

ES: $x^2 y^{(5)}(x) + y^{(3)}(x) - 2y'' + \log x \cdot y(x) = 0$ Ordine 5

Ordine di una eq diff: l'ordine è il massimo ordine di derivazione che appare nell'equazione

Definizione: una eq diff. si dice di Forma normale se la derivata di $y(x)$ di ordine massimo si può esprimere in funzione di tutto il resto, ovvero se è del tipo:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

← Se posso prendere la derivata massima $y^{(n)}$, la porto a Sx dell'uguale e porto tutto il resto a Dx; ovvero se posso esprimere $y^{n}(x)$ in funzione degli altri termini.

N.B. Potrebbe essere sostituita la notazione "$y(x)$" con "y", ma con y si indica sempre y come funzione della x.
→ Mentre la x continua ad assumere valori REALI, la y è funzione della x.

Definizione: Una soluzione di un'eq. diff. di ordine n, è una funzione $y(x)$ derivabile n volte, e prende il nome di integrale particolare dell'eq. diff.
Quindi invece di parlare di soluzioni, la soluzione dell'eq. diff. è proprio l'integ. part.

ES: $y' = x$, $y = \frac{x^2}{2}$ è un integrale particolare, come lo è $y = \frac{x^2}{2} + c$

Come troviamo y da y'?
Integro entrambi i membri: $\int y'dx = \int x\,dx \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + c$

L'integrale di una derivata è proprio $f(x)$.

Perchè si usa la parola "particolare"?
Perchè è una particolare soluzione, infatti per $c = 1$ abbiamo una soluzione, per $c = 2$ ne abbiamo un'altra ecc.

La soluzione di una eq differenziale del I° ordine come $y' = x$, è in realtà una Famiglia di soluzioni particolari, ed $y(x) = \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.
o integrali

Tale famiglia di soluzioni prende il nome di integrale generale dell'eq differenziale.
Insieme di tutte le sue soluzioni

In generale, data un'eq diff di ordine n (ordine 1) in forma normale, (le considereremo sempre in f. norm)

$y' = f(x,y)$ ← è una f a 2 variabili, ma per il momento la vediamo solo come un'espressione

L'insieme delle sue soluzioni sarà l'integrale generale: $y = y(x,c)$ con $c \in \mathbb{R}$
y dipende da x e c

A cosa servono le eq differenziali?
Questo tipo di eq trovano applicazione in molti campi della vita, in questo corso vedremo diverse applicazioni nella fisica.
Ad esempio, dire che l'epidemia di Coronavirus segue un andamento esponenziale, è possibile risolvendo una eq diff.

Es: $x = x(t) \quad t \in [t_0, t_1]$ supponiamo che f sia derivabile in $[t_0, t_1]$.
Il moto rettilineo uniforme ci dice che la velocità è COSTANTE

$v(t) = \text{cost} \Rightarrow$ la velocità non è altro che la derivata 1ª della funzione spostamento

$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}{x'(t) = c}$ è un'eq diff del I° ordine!

Per risolvere integriamo ambo i membri: $\int_{t_0}^{t} x'(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} c\, d\tau \Leftrightarrow x(t) - x(t_0) = c(t - t_0)$

$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + ct - ct_0 \Rightarrow x(t_0) = x_0$ ← Si indica con x_0

Posizione iniziale

Riscriviamo
$x(t) = c(t - t_0) + x_0$ Indichiamo $c = v_0$

$\Rightarrow x(t) = v_0(t - t_0) + x_0 = v_0 t - v_0 t_0 + x_0$

$\begin{cases} x'(t) = v_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ Supponendo che la vel = cost, dopo un certo periodo di tempo, dove arrivo?

ES 2: Moto uniformemente accelerato
In questo caso la vel non è più costante, ma lo è l'accelerazione:

$x''(t) = a_0$ costante ← eq diff del II ordine

Integriamo: $\int x''(t)\, dt = \int \overset{\text{cost}}{a_0}\, dt \Rightarrow x'(t) = a_0 t + c_1$

Se vogliamo $x(t)$, dobbiamo integrare una seconda volta: $S(t) = \frac{1}{2} a t^2 + V_0 t + S_0$

$\int x'(t)\, dt = \int a_0 t + c_1\, dt \Rightarrow x(t) = \boxed{a_0 \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2}$

$a \int t\, dt + c_1 \int dt$

2 costanti

Otteniamo l'integrale generale dell'eq $x''(t) = a_0$: eq diff del II ordine

Nel moto unif. accelerato, il moto dipende da 2 costanti, mentre l'eq del moto rett unif, che era del I° ordine, dipendeva da un'unica costante.

🚩 1:07
Nel Moto uniformemente Accelerato ci poniamo il seguente problema:

$x''(t) = a$ Ma dobbiamo sapere all'istante $t(0)$ dove ci si trova: $x(t_0) = x_0$
Per fare ciò abbiamo bisogno di posizione iniziale e velocità iniziale. Questo è noto come problema di Cauchy per le equazioni differenziali di II ordine.

$\begin{cases} x''(t) = a_0 \\ x(t) = x_0 \\ x'(t_0) = v_0 \end{cases}$ > Due condizioni

$$x'(t) = 2t \cdot \frac{a_0}{2} + V_0$$ Imponiamo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = V_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{\frac{a_0}{2} \cdot t_0^2 + V_0 t_0 + C_2}^{x(t_0)} = x_0 \\ \underbrace{t_0 a_0 + C_1}_{x'(t_0)} = V_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a_0}{2} t_0^2 + V_0 t_0 - a_0 t_0^2 + C_2 = x_0 \\ C_1 = V_0 - t_0 a_0 \end{cases}$$

Sostituisco

$$\begin{cases} -\frac{a_0}{2} t_0^2 + V_0 t_0 + C_2 = x_0 \\ // \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = \frac{a_0}{2} t_0^2 - V_0 t_0 + x_0 \\ C_1 = V_0 - a_0 t_0 \end{cases}$$

Sostituiamo nell'integrale generale

$$x(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \Rightarrow x(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + (V_0 - a_0 t_0) \cdot t + \left(\frac{a_0}{2} t_0^2 - V_0 t_0 + x_0 \right)$$

Fattore comune $= \frac{a_0}{2}\left(t^2 - t_0^2\right) + t\left(V_0 - a_0 t\right) + x_0 - V_0 t_0$

🚩 1:33

Esempi dal punto di vista prettamente matematico

Sul libro sono presenti molti esempi fisici; tutti i fenomeni fisici provengono da equazioni differenziali.

Equazioni a variabili separabili

Sono eq del tipo: $y' = f(x)\, g(y)$

Ovvero equazioni del I ordine in cui il II membro si può esprimere come il prodotto di due quantità dipendenti "separatamente" da x e y.
Per risolvere l'eq. basta separare le variabili, cioè si portano tutte le y da una parte e tutte le x dall'altra (dell'uguale).

Quindi se ho $y' = f(x)\, g(y)$ mi basterà dividere tutto per la quantità che dipende da y:

$$\frac{y'}{g(y)} = \frac{f(x)\, g(y)}{g(y)} \Rightarrow \frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

A questo punto integriamo entrambi i membri

ES: $y' = x y^2$ ⟵ Forma Normale: max ordine di derivazione a sx e tutto il resto a dx

Possiamo vedere il secondo membro come due quantità che si sono separate tra di loro;
Dividiamo per y^2:

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^2} = x \quad \text{Integriamo:} \quad \int \frac{y'}{y^2}\, dx = \int x\, dx$$

$y = y(x)$ y dipende da x!

Integriamo per x!

Quando integriamo il I° membro è importante che ci sia la derivata I^a y'.

$$\Rightarrow \int y^{-2} \cdot y'\, dx = \int x\, dx = \frac{y(x)^{-1}}{-1} = \frac{x^2}{2} + c = \frac{-1}{y(x)} = \frac{x^2}{2} + c = \frac{1}{y(x)} = -\frac{x^2}{2} - c$$

ottenendo quindi: $\boxed{y(x) = -\dfrac{1}{\frac{x^2}{2}+c}}$ Integrale generale dell' eq a variabili separate

ES: $y' = tg\,x \cdot y$ → Forma Normale ✓ → $\frac{y'}{y} = tg\,x \Rightarrow \int \frac{y'}{y}\,dx = \int tg\,x\,dx$

$= \ln|y| = -\ln|\cos x| + c_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln|\cos x|^{-1} + c_1 \Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{\ln|\cos x|^{-1} - c_1}$

$\Rightarrow y(x) = e^{\ln|\cos x|^{-1}} \cdot e^{c_1} =$ nuova costante $= c$ $\quad y(x) = \frac{1}{\cos x}\cdot c = \frac{c}{\cos x}$ Integrale generale

Eq. Diff. Lineare del I° ordine

E' un'eq del tipo: $y' + a(x)\,y = b(x)$ Si dice Lineare perchè abbiamo una combinazione lineare di y' e y.

In questo caso, però, non la abbiamo! Una comb. lineare sarebbe del tipo:

$a_1 y' + a_2 y = d(x)$ Dividiamo per a_1 ottenendo:

$y' + \underbrace{\frac{a_2(x)}{a_1(x)}}_{a(x)}\, y = \underbrace{\frac{d(x)}{a_1(x)}}_{b\,x} \Rightarrow$ otteniamo: $\boxed{y' + a(x)\,y = b(x)}$ (1)

Eq. Lineare del I ordine completa (con Termine noto)

Si considera l'eq differenziale OMOGENEA: $b(x) = 0$ ottenendo:

$\boxed{y' + a(x)\,y = 0}$

Teorema L'integrale generale dell'eq (1) è dato dalla somma dell'integrale generale $y_0(x)$ dell'eq omogenea associata e di un integrale particolare $y_p(x)$ dell'eq. completa; quindi:

$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$ Come risolviamo l'eq?

I) Calcolo integrale generale dell'omogenea associata:

$y' + a(x)y = 0$ Tale equazione è a variabili separabili (vista prima): Dividiamo per y:

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -a(x)$ → Integriamo → $\int \frac{y'}{y}\,dx = -\int a(x)\,dx + c_1 = \ln|y| = -\int a(x)\,dx + c_1$

esponenziale: $y(x) = e^{-\int a(x)\,dx}\, e^{c_1} = c \quad = y(x) = \underbrace{e^{-\int a(x)\,dx}\cdot c}_{y_0(x)}$

II) Calcolo di un integrale particolare dell'eq completa $y' + a(x) y = b(x)$
Per farlo ci sono molti modi, useremo il Metodo di variazione delle costanti

→ Un integrale particolare dell'eq completa è del tipo:

$$\text{②} \quad y_p(x) = C(x)\, e^{-\int a(x)\,dx}$$

Cioè è l'integrale generale dell'omogenea associata in cui facciamo variare la costante C; che infatti viene considerata come funzione della x. Funzione da determinare in modo che y_p sia soluzione dell'equazione completa.

Cioè il metodo ci dice che una soluzione dell'eq completa è fatta come la ② con $C(x)$ funzione che deve però essere determinata; come la determiniamo?
Imponendo che y_p sia SOLUZIONE dell'eq completa.

Imponiamo che y_p sia soluzione, e ricaviamo $C(x)$ ⇒ Sostituiamo y_p nell'eq compl.

Calcoliamo $D'(y_p) = y_p' = C'(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} + C(x) \cdot \left[e^{-\int a(x)\,dx} \cdot D\left(-\int a(x)dx\right) \right]$ → $a(x)$

$$\Rightarrow y_p' = C'(x) e^{-\int a(x)\,dx} + C(x) e^{-\int a(x)\,dx} \cdot C(x)\left(-a(x)\right)$$

Sostituiamo nella eq completa

$$\underbrace{C'(x) e^{-\int a(x)\,dx} \cancel{- a(x) C(x) e^{-\int a(x)dx}}}_{y_p'} \cancel{+ a(x)\underbrace{C(x) e^{-\int a(x)\,dx}}_{y_p}} = b(x)$$

Sempre opposti *

* Se negli esercizi non si semplificano, stiamo sbagliando qualcosa!

Ricaviamo la $C(x)$ ⇒ $C'(x) e^{-\int a(x)dx} = b(x)$

$$\Rightarrow C'(x) = b(x) \cdot e^{\int a(t)\,dt} \Rightarrow \int C'(x)\,dx = \int b(x)\, e^{\int a(t)\,dt}\,dx$$

Allora $y_p(x) = \int b(x)\, e^{\int a(t)dt}\,dx \cdot e^{-\int a(t)dt}$

Quindi l'integrale generale dell'eq completa è $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{C e^{-\int a(x)dx}}_{y_0(x)} + \underbrace{\int b(x)\, e^{\int a(t)dt}\,dx \cdot e^{-\int a(t)dt}}_{y_p(x)}$$

Raccolgo $e^{-\int a(x)dx}$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = e^{-\int a(x)\,dx}\left[C + \int b(x)\, e^{\int a(t)\,dt}\,dx\right]}$$

Formula magica

Tiriamo le somme Il libro riporta solo l'ultima formula; solitamente nessuno se la ricorda, di conseguenza è bene ricavarsela.

🚩 Esercizi nella prossima lezione