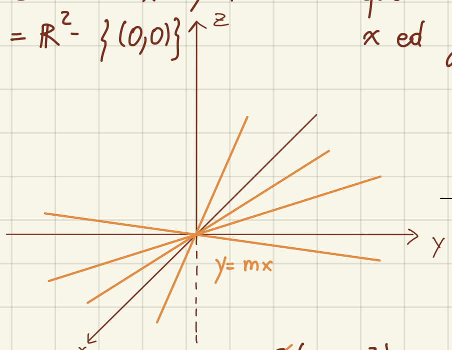
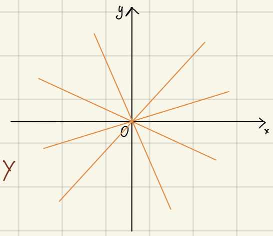
ES limite: $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Dominio $D \neq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \neq 0$ quando almeno uno tra x ed y è $\neq 0$

$\Rightarrow D[f(x,y)] = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$





Limite nel punto (0,0)

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ lungo $y = mx$ ← Fascio di rette passante per 0

Cosa significa fare il limite lungo $y = mx$?
Significa calcolare il $\lim f(x,y)$ ristretto ad $y = mx$:

$$\lim f(x,y)\Big|_{y=mx} = \lim f(x, mx) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{\cancel{x^2}(1-m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \boxed{\frac{1-m^2}{1+m^2}}$$

Poniamo mx al posto di y

y non ci interessa più!

Dipende da m

$\Rightarrow$ Se dipende da m, se cambia la m cambia anche il limite.

$\Rightarrow$ il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ NON ESISTE

Continuità

Sia f definita in A aperto di $\mathbb{R}^2$; prendiamo un punto $P_0(x_0,y_0) \in A$. Diremo che:

La funzione è continua in P_0 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)}$

Stessa definizione

f nel punto P_0

Derivazione

Una certa $f(x)$ è derivabile in x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists$ finito il $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ e si indica come $\dfrac{df}{dx}(x_0)$

Prendo $f(x,y)$ definita in A aperto di $\mathbb{R}^2$ continua in A. Prendiamo un punto $P_0 \in A$.
Con le funz. ad una variabile per avere la derivata facciamo il rapporto incrementale tra la crescita della funz. e quella della variabile; ora che le variabili sono 2, come facciamo?

Parliamo di Derivabilità Parziale. Una funzione $f(x,y)$ è deriv. parzialmente rispetto alla x rispetto al punto P_0 se esiste finito il:

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}}$$

DEF 1

E' lo stesso rapporto, ma incrementiamo solo una variabile; la y_0 resta fissa.

Se questo limite ESISTE ed è FINITO, questa funz. si dirà derivabile parzialmente rispetto ad x.
Si indica la derivata parziale con $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}$ oppure con $\boxed{f_x}$ oppure con $\boxed{D_x f(x_0,y_0)}$

Lo stesso discorso vale anche per la derivata parziale rispetto ad y, dove la variabile a cambiare sarà y:

$$\boxed{\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_y = D_y f(x_0,y_0)$$

Rispetto alla variabile y

Quindi con questo tipo di derivazione ci riconduciamo alle tecniche di derivazione ad 1 variabile:

ES: $f(x,y)=x^2-3xy+5y^2$

Per calcolare f_x, tengo fissa y e derivo rispetto ad x la funz. di una variabile corrispondente.

"Tenere fissa" la y significa considerarla come una costante!

$$f_x(x,y) = 2x - \underbrace{3y \cdot D_x(x) + D_x(5y^2)}_{\text{costanti}}$$

$\Rightarrow f_x(x,y) = 2x - 3y + 0 = 2x-3y$

$$f_y(x,y) = D_y(x^2) - 3x \cdot D_y(y) + D_y(5y^2) = -3x+10y$$

ES: $z = x^2\cos y$ $\rightarrow$ $f_x = 2x\cos y$ $\quad f_y = -x^2\sin y$

costanti

Funzioni non derivabili parzialmente

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ Definita in $\mathbb{R}^2$

Se $(x,y)\neq(0,0)$ $\longrightarrow$ in $(0,0)$ abbiamo problemi

$\rightarrow f_x = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad f_y = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cancel{2}y$

Perché in $(0,0)$ abbiamo problemi? Calcoliamo la deriv parz di $f(x,y)$ in $O=(0,0)$

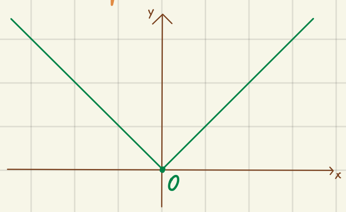
$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h-0)-f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2-0^2}-\sqrt{0^2-0^2}}{h} = \frac{|h|}{h} = \pm 1$$

se $h\to 0$ da Dx o Sx

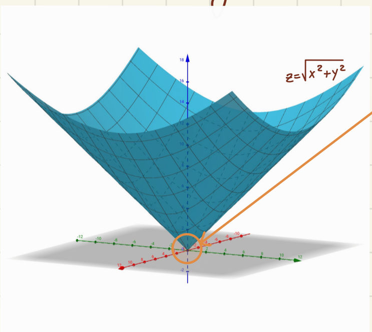
$\Rightarrow$ il lim non esiste! (risultato Dx e Sx diverso) $\rightarrow$ Che significa geometricamente?

$f(x)$ non è derivabile in x_0 $\Leftrightarrow$ f non ammette in x_0 retta tangente

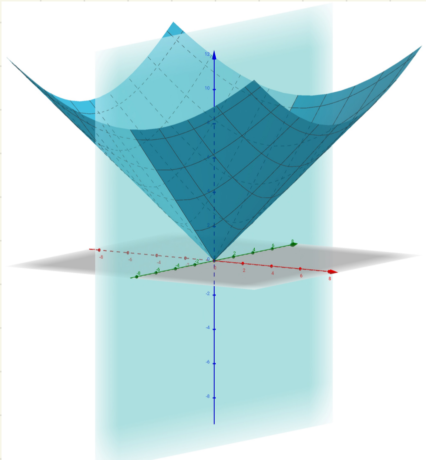
Ad esempio $|x|$ in $x=0$:

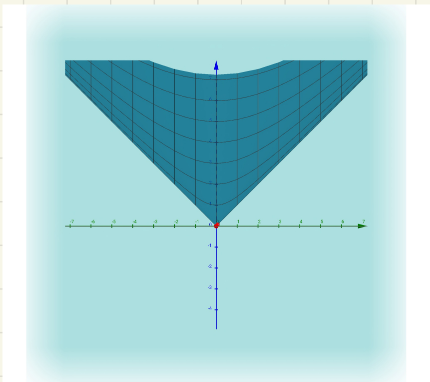


Nel caso di f a due variabili, invece, che succede?



Alla base, in $(0,0,0)$ la funzione è "aperta", ovvero ha un "buco".





Se intersechiamo la funzione $z=\sqrt{x^2+y^2}$ con la funzione $z=x$ (piano) notiamo che si crea proprio la funzione $y=|x|$ nel PIANO.

Derivate Successive

$$f(x,y) \begin{cases} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{cases}$$ Sono funz di 2 variabili

$$f_x \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Derivate II Parziali

$$f_y \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{cases}$$

Derivate II Parziali

f_{xx} e f_{yy} si dicono Deriv Seconde PURE perchè si derivano sempre rispetto la stessa variabile.

f_{xy} e f_{yx} sono dette Deriv Seconde MISTE

Se continuassimo a derivare...

$$f_{xx} \begin{cases} D_x(f_{xx}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx} \\ D_y(f_{xx}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f_{xxy} \end{cases} \qquad f_{yy} \begin{cases} D_x(f_{yy}) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f_{yyy} \\ D_y(f_{yy}) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = f_{yyx} \end{cases}$$

E così via ...
la Deriv III ha 8 deriv parz.

ES: $z = x^2 \cos y$

$$f_x = 2x \cos y \begin{cases} f_{xx} = 2\cos y \\ f_{xy} = -2x \sin y \end{cases} \qquad f_y = -x^2 \sin y \begin{cases} f_{yy} = -x^2 \cos y \\ f_{yx} = -2x \sin y \end{cases}$$

NEGLI ESERCIZI le derivate miste sono sempre uguali $\rightarrow$ Ma sono SEMPRE uguali? NO

Teorema di SCHWARZ

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto ← intervallo $\quad P_0(x_0, y_0) \in A$ ← punto $\quad$ supponiamo che $f(x,y)$ sia Deriv 2 volte in A.

Se f_{xy} e f_{yx} sono continue in P_0 allora $f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$ coincidono

ERGO $\rightarrow$ le funzioni le cui deriv parz. miste sono DIVERSE sono quelle le cui Derivate seconde sono CONTINUE $\rightarrow$ Siccome una funz è continua se derivabile, affinchè le deriv II parziali di una funz. siano uguali, la funzione deve essere derivabile 3 volte.

ES: $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{Se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(0,0)$ non esiste

Se $(x,y) \neq (0,0) \rightarrow$ la funz è continua!

$$f_x = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

Per vedere se f_{xy} è continua in $(0,0)$ facciamo il lim del rapp incr: $\lim_{h \to 0} \frac{f_x(0, 0+k) - f_x(0,0)}{k} = -\frac{\cancel{k^5}}{\cancel{k^5}} = -1$

$f_{yx}(0,0) = 1$ ← si dimostra $\Rightarrow$ le due derivate part. non sono continue infatti sono diverse!

Notazioni Vettoriali

$f(x,y)$ è deriv. due volte in A. Abbiamo le deriv. parz: f_x, f_y

Si dice **Gradiente** di f il vettore $Df(x,y) = [f_x(x,y), f_y(x,y)] = \nabla f = \text{grad } f$

* Con 2 variabili abbiamo 2 derivate

il gradiente è il vettore che ha come componenti le derivate parziali (prime) di $f(x,y)$

Matrice HESSIANA

E' la matrice che ha sulla diagonale principale le derivate pure, mentre negli altri posti ha le derivate miste:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$D^3 f = \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

Osservazione: Nella Hp del teorema di Schwarz si ha che la matrice Hessiana è' SIMMETRICA

DIFFERENZIABILITÀ

A aperto di $\mathbb{R}^2$, $P_0(x,y) \in A$, supponiamo di avere $f: A \to \mathbb{R}$

f si dice differenziabile in (x_0,y_0) $\Leftrightarrow$

1) f è deriv. parz in P_0 $\to$ ovvero $\exists$ le deriv. I parziali
2) Vale il limite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)\cdot h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \emptyset \quad (1)$$

Cerchiamo di capire il limite:

Torniamo alla definizione di derivabilità delle funz ad 1 variabile: $f(x)$ è deriv in x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $f'(x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0 \xrightarrow{\text{m.c.m}} \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{} - \overbrace{f'(x_0)h}^{}}{h} = 0$$

Forma alternativa in cui scrivere la def.

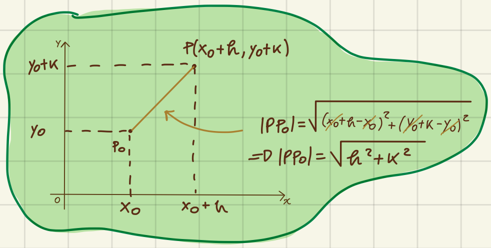
incremento f
Δf

Differenziale f
df

Continuiamo: Torniamo al limite (1);

Osserviamo che la forma del limite è la medesima:

$$\frac{\overbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)}^{\text{Incremento}} - \overbrace{f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}^{\text{Differenziale}}}{\underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{\text{Distanza}}}$$



Proposizione

f differenziabile in P_0 $\Rightarrow$ la funz. è continua in P_0. **Importante!**

Perché è importante?

Nel caso delle funz ad una variabile, affinché la funz fosse continua essa doveva essere DERIVABILE.
Ora, nel caso delle f a 2 variabili, se la $f(x,y)$ è Derivabile <u>NON E' DETTO</u> che essa sia continua in P_0.

> Per essere sicuri che una $f(x,y)$ sia continua in P_0, allora essa deve essere DIFFERENZIABILE.

Questo perché se guardiamo il limite di prima (e le deduzioni che abbiamo tratto) noteremo che il discorso è analogo a quello della derivabilità delle funz ad una variabile, che ne garantiva la continuità.