



Discontinuità di III^a Specie

Si dice che x_0 è un punto di discontinuità di III^a specie o eliminabile se:

- 1) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- Quindi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ sono uguali \Rightarrow il \lim esiste, ma non coincide con x_0

ES: $f(x) = \frac{\sin x}{x} : \mathbb{D} = \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Dal limite notevole sappiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

In questo caso consideriamo funzioni del tipo:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 3 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow g ha una discontinuità eliminabile in $x=0$ perché $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
ma quanto vale $g(x_0) = g(0)$?

$$g(0) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

Perché è detto "eliminabile"?

Possiamo eliminare la discontinuità in 0, considerando un'altra funzione detta **prolungamento continuo** di f .

Nuova funzione $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = h(0)$

Quindi in generale:

Nuova funzione $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{per } x = x_0 \end{cases} \Rightarrow g(x) \text{ è ora continua in } x_0$

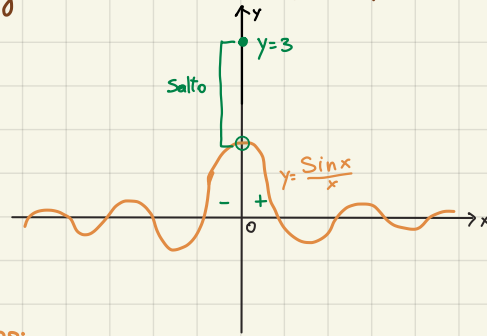
ES: Prolungare per continuità la funzione: $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}$ def in $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = 0 \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

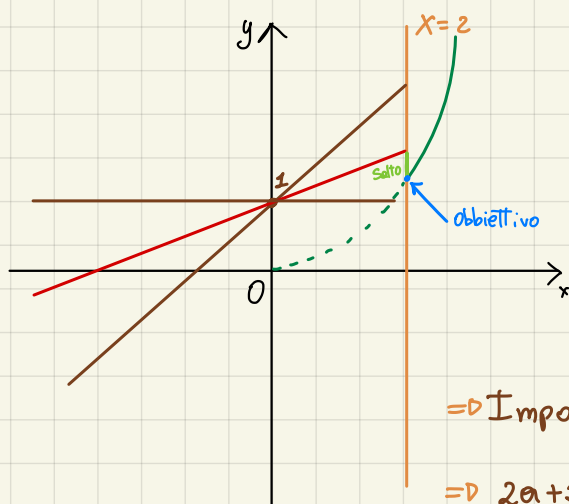
ES: $f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$ def per $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \{-1, +\infty\} - \{0\}$
limite notevole

* prolungare $f(x)$ in 0

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) \text{ è continua in } \{-1, +\infty\}$$



Calcolare il valore $a \in \mathbb{R}$ / $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{per } x \leq 2 \\ x^2 & \text{per } x > 2 \end{cases}$
 Al variare di a , varia la retta.



Affinché la f diventi continua, dobbiamo trovare il valore della funzione (retta) in modo che la retta vada a finire proprio dove inizia x^2 in $x=2$.

f sarà continua in $x=2$ se $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
 per definizione

$$\Rightarrow \text{Imponiamo l'uguaglianza: } \lim_{x \rightarrow 2^-} ax+1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2$$

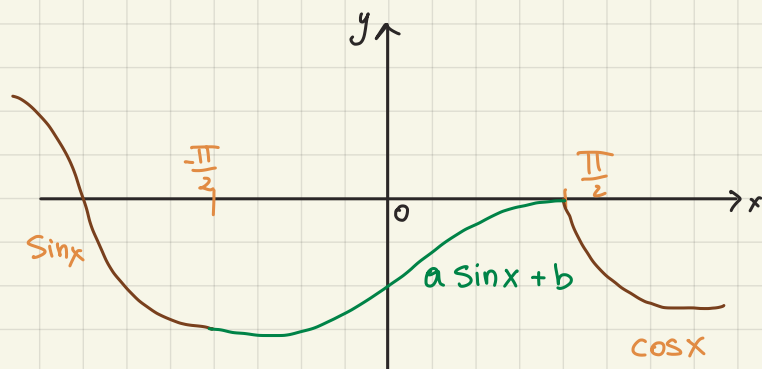
$$\quad \quad \quad = 2a+1 \quad \quad \quad = 4$$

$$\Rightarrow 2a+1=4 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

La $f(x) = \begin{cases} 3/2x+1 & \text{per } x \leq 2 \\ x^2 & \text{per } x > 2 \end{cases}$ è continua in tutto \mathbb{R} .

00:41

ES: Calcolare $a, b \in \mathbb{R}$ / la funzione $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Sia continua



Imponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x)$$

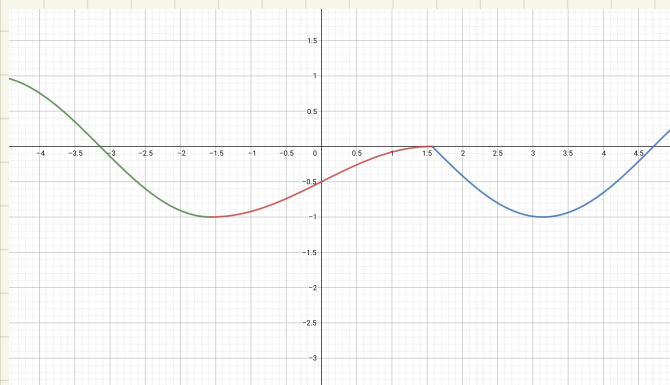
\downarrow $\sin x$ \downarrow $a \sin x + b$ \downarrow $a \sin x + b$ \downarrow $\cos x$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} \sin x = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} a \sin x + b = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} a \sin x + b = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos x$$

\downarrow -1 \downarrow $-a+b$ \downarrow $a+b$ \downarrow 0

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+b = -1 \\ a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(-b)+b = -1 \Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \\ a = -b \end{cases}$$

\downarrow $a - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$



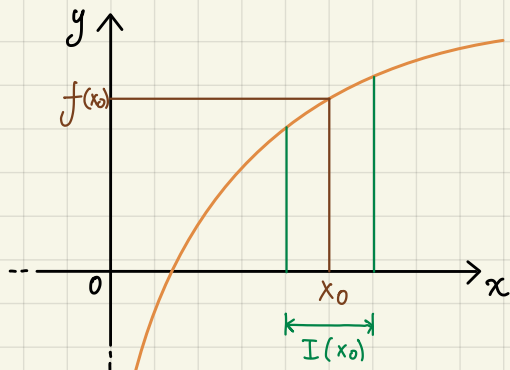
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < -\frac{\pi}{2} \\ \sin x & x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & x > \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \sin x & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Teorema della permanenza del Segno

Sia f continua in x_0 . Se $f(x_0) > 0$ allora $\exists \delta > 0 / f(x) > 0 \quad \forall x \in I(x_0)$
 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



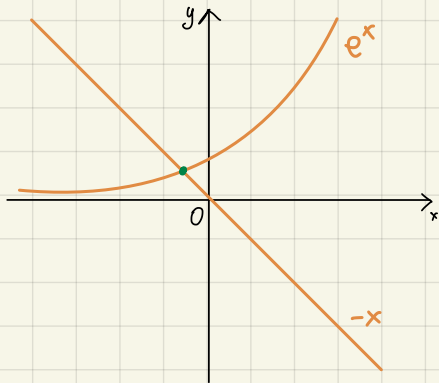
Gli "zeri"

x_0 è uno zero per una funzione $f(x) \Leftrightarrow f(x_0) = 0$, ovvero un punto in cui la funzione si annulla, ovvero $\Leftrightarrow x_0$ è soluzione del Sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero quando faccio l'intersezione tra una funzione e l'asse } x (y=0). \\ \text{quindi uno zero di } f \text{ è soluzione dell'eq } f(x) = 0$$

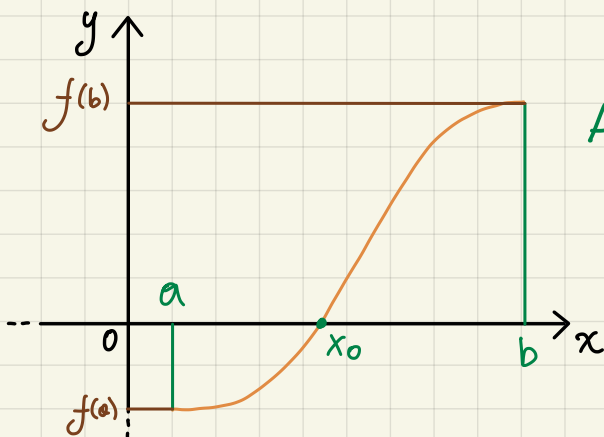
ES: $f(x) = -x - e^x$ $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ per } -x - e^x = 0, -x = e^x$? Difficile da risolvere

Per trovare la soluzione andiamo a vedere graficamente dove si intersecano:



Teorema degli Zeri

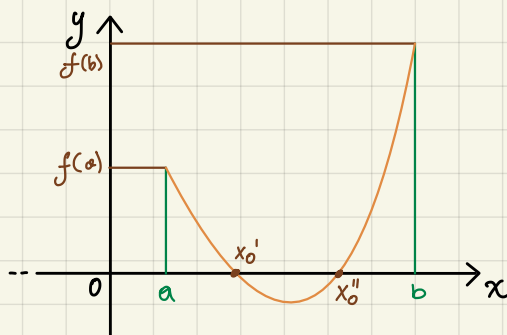
Se f è una funzione continua in un intervallo a, b , se $f(a) \cdot f(b) < 0, \Rightarrow$ almeno un $x_0 \in (a, b) / f(x_0) = 0$



ATTENZIONE !

Assume valore opposto agli estremi

Se una funzione ha $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$, non vuol dire che essa non abbia uno zero, ma POTREBBE averlo:



Quindi questa è una condizione sufficiente

I° teorema di esistenza dei valori intermedi

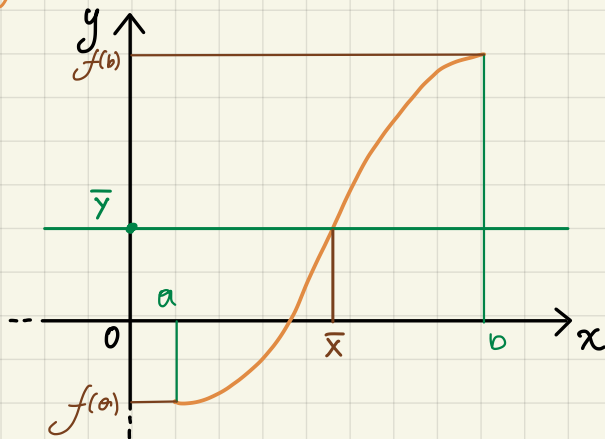
Se f è continua in (a, b) allora $\forall \bar{y} \in [f(a), f(b)]$, $\exists \bar{x} \in [a, b] / f(\bar{x}) = \bar{y}$

ovvero f assume i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

* per \bar{y} e \bar{x} intendiamo un valore particolare.

Intervalli

Geometricamente



Per ogni \bar{y} che prenda tra $f(a)$ e $f(b)$, esiste Almeno un \bar{x} da cui y proviene.

$\Rightarrow f$ assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$

Dimostrazione

Sia $\bar{y} \in [f(a), f(b)]$ e prendiamo un punto tra questi due e consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - \bar{y}$ (funzione ausiliaria)

Osserviamo:

1) g è continua in (a, b) perché f lo è.

2) a) Calcoliamo $g(a) = f(a) - \bar{y}$ siccome $\bar{y} \in [f(a), f(b)] \Rightarrow \bar{y} > f(a) \Rightarrow \underline{f(a) - \bar{y} < 0}$

b) $g(b) = \underline{f(b) - \bar{y} > 0}$

$$\underline{f(a) < \bar{y} < f(b)}$$

Quindi siamo nelle hp. del Teorema degli zeri (estremi a segno opposto)
 $\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a, b) / g(\bar{x}) = 0 = f(\bar{x}) - \bar{y} \Leftrightarrow \underline{f(\bar{x}) = \bar{y} \text{ C.V.D.}}$