Lezione 20

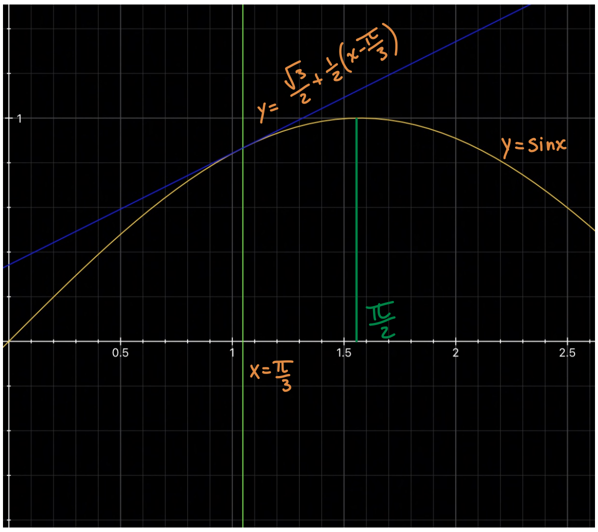
Calcolo delle derivate

Problema

Potremmo dover scrivere le equazioni della retta tangente alla funzione (in questo caso usiamo $f(x) = \sin x$ in $x_0 = \frac{\pi}{3}$)

Eq della tangente: $y = mx + q = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow y = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$



Osservazione: la derivata di $f(x)$ in x_0, ovvero $f'(x_0)$ e' un numero reale.
ES: $f'(\sin x)$ in $\frac{\pi}{3}$ e' $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Al variare di $x \in \mathbb{R}$ posso associare ad ogni x la derivata della funzione f al punto x.

$$x \longrightarrow f'(x)$$

un' unica immagine

La funzione che otteniamo viene chiamata funzione Derivata

$$f' : x \in \mathbb{D} \longrightarrow f'(x) \in \mathbb{R}$$

! La funzione derivata NON E' la stessa cosa della derivata! Nel caso della f deriv. Ad un punto associamo un altro punto.

ES: $f(x) = \sin x \Rightarrow x \xrightarrow{\text{Associo}} f'(\sin x)$ in $x \Rightarrow x \xrightarrow{\text{Associo}} \cos(x)$

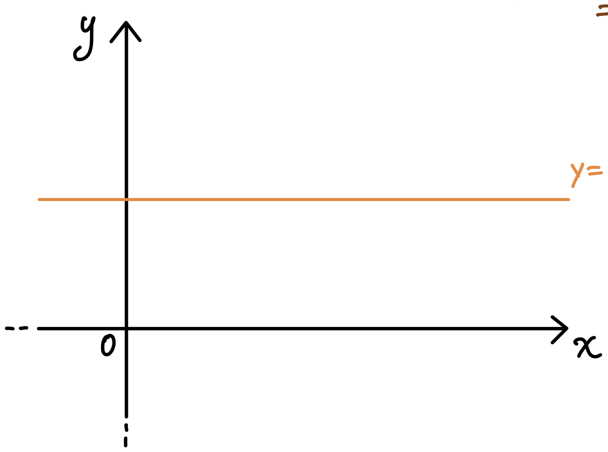
Derivate elementari

- $D\, x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}$
- $D\, \ln x = \frac{1}{x}$
- $D\, e^x = e^x$
- $a^x = a^x \cdot \log_a e$ se $a = e \Rightarrow \log_e e = 1 \Rightarrow a^x = e^x = e^x$
- $\log_a x = \frac{1}{x} \log_e a$ se $a = e \Rightarrow \log_e e = 1 \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{x}$
- $\sin x = \cos x$
- $\cos x = -\sin x$
- $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\text{arctg}\, x = \frac{1}{1 + x^2}$
- $\text{arc}\sin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $\text{arcos}\, x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Derivata di costante

$\frac{d}{dx} k = 0$ ES $f(x) = y = 3$; $\frac{d}{dx} 3 = 0$

☆ Siccome la deriv e' il coeff. della Tan a $f(x)$, $m(y=3) = 0$
$\Rightarrow$ Parallela a x



Costante per funzione

$\frac{d}{dx}\left[k f(x)\right] = k \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$

ES: $\frac{d}{dx}\left[3x^2\right] = 6x$

Operazioni con le derivate

Siano f e g derivabili in x_0; allora sono derivabili in x_0 la: $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g.
Inoltre si ha che

- $\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{d}{dx} f \pm \frac{d}{dx} g$
- $\frac{d}{dx}(f\,g) = \frac{d}{dx}(f) \cdot g + f \cdot \frac{d}{dx}(g)$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

ES: $D(x^3 + \sin x) = 3x^2 + \cos x$ Funz. derivata
ES: $D\, x \log x = \log x + \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} = \log x + 1$

ES: $\frac{\arcsin x}{e^x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^x - \arcsin \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2} \cdot e^{2x}} - \frac{\arcsin x \, e^x}{e^{2x}}$

$= \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot e^x - e^x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\ e^{2x}} = \cancel{e^x} \frac{\sqrt{1-x^2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\ e^{\cancel{2}x}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - \arcsin x}{e^x \sqrt{1-x^2}}$

🚩 1:36

Teorema di derivazione delle funzioni composte

Immagine tramite f di x

Se f è derivabile in x ed g è derivabile in $f(x)$, allora la funzione composta $(g \circ f) = g(f(x))$ è derivabile in x, e si ha che la derivata della f comp. è:

$$\boxed{D\, g(f(x)) = g'(f(x))\, f'(x)}$$

Ovvero: faccio la derivata della f esterna, e la calcoliamo in $f(x)$ non derivata; moltiplichiamo poi per la derivata di $f(x)$.

ES: $D \sin(\log x) = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x}$

ES: $D \begin{pmatrix} a)\ \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) \\ b)\ \underbrace{\cos(\underbrace{tg(\underbrace{\log(\sin x)}_{1})}_{2})}_{3} \end{pmatrix}$

a) $= \frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} \cdot D\left(\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}} \cdot \left(\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x$

Deriv

$= \frac{1}{x^{\cancel{2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} \cdot \cancel{2x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

b) 1 $D(\log(\sin x)) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = tg\, x$

2 $D(tg(tg\, x)) = \frac{1}{\cos^2(tg\, x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(tg\, x) \cdot \cos^2(x)}$

3 $\cos\left(\frac{1}{\cos^2(x) \cdot \cos^2(tg\, x)}\right) = -\sin\left(\frac{1}{\cos^2(x) \cdot \cos^2(tg\, x)}\right) \cdot D\left(\left(\cos^2(x)\ \cos^2(tg\, x)\right)^{-1}\right)$

41:00

Teorema di derivazione delle funzioni inverse

Se f è continua e strett. monotona in I $[a,b]$, se f è derivabile in x e $f'(x) \neq 0$, allora anche f^{-1} è derivabile $y = f(x)$, e si ha che:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{quando } x = f^{-1}(y).$$

Osservazione:

$f: x \to y = f(x)$ • f, ad x associa $y = f(x)$.

$f^{-1}: y \to f^{-1}(y) = x \;/\; f(x) = y$

ES: $f(x) = x^2$ in $[0, +\infty)$, sappiamo che in I è invertibile.

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$; per il Teorema di prima, $f^{-1}(y)$ è derivabile, e $\frac{d}{dx} f^{-1}(y) = \frac{d}{dx}\sqrt{y}$ si può esprimere tramite la derivata di $f(x)$ $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{y} = \frac{1}{\frac{d}{dx}x^2} = \frac{1}{2x\Big|_{x=\sqrt{y}}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

quando $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

ES: $D \arcsin y$ è l'inversa della f sin in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$= \frac{1}{D \sin x\Big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\cos x\Big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

Facciamo comparire il sin al posto di cos usando la rel fondamentale $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\frac{d}{dx}$ di $\arcsin x = \sin^{-1} x$

ES: $$D \arctg y = \frac{1}{D \tg x\Big|_{x=\arctg y}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}\Big|_{x=\arctg y}} = \cos^2(\arctg y)$$

$\cos = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tg^2 x}} \Rightarrow \cos^2 = \frac{1}{1+\tg^2 x} \Rightarrow \cos^2(\arctg y) =$

$$= \frac{1}{1+\tg^2(\arctg y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

si annullano

1:18

Derivate d'ordine Superiore

Se f è deriv. in $[a,b]$, abbiamo la f derivata $f'(x)$. Se $f'(x)$ è anch'essa derivabile possiamo considerare la sua derivata che indicheremo con $f''(x)$, anche detta derivata Seconda.

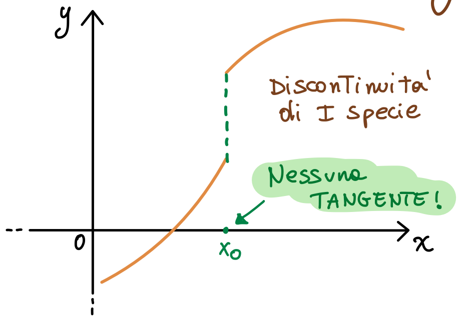
ES: $\frac{d}{dx} \underbrace{tg\, x}_{f(x)} = \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{f'(x)} = (1+x^2)^{-1}$

del tipo x^α

$$f''(x) = -1\,(1+x^2)^{-1-1} \cdot \frac{d}{dx}(1+x^2) = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{1+x^4+2x^2} = -\frac{2x}{x^4+2x^2+1}$$

Proposizione Che relazione c'è tra continuità e derivabilità? Cioè f continua, indica che f è derivabile, e viceversa?

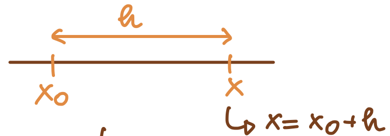
Proposizione Se la funzione è Derivabile, allora f è continua in $[a,b]$.



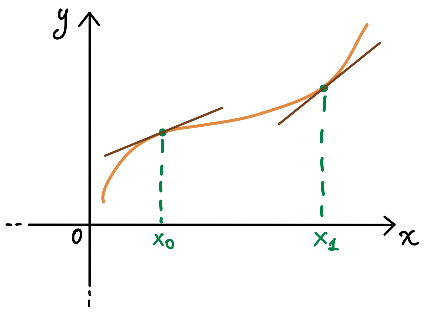
⇒ Se è derivabile vuol dire che in quel punto $\in (a,b)$ ESISTE la Tangente alla $f(x)$.
Se f è continua, vuol dire (graficamente) che non ci sono "salti" nel grafico di f.

Dim Hp: Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0.

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$



Dire che $x \to x_0$ è la stessa cosa di $x_0+h \to x_0$ se $h \to 0$.



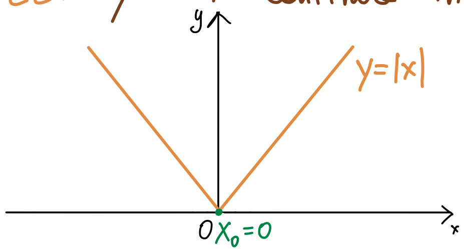
$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \iff \lim_{h \to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0$$

Calcoliamo il lim $\lim_{h \to 0} f(x_0+h)-f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \left(f(x_0+h)-f(x_0)\right) \cdot \frac{h}{h}$

Per Hp. f è derivabile in x_0 $\iff$ $\exists$ finito lim ⟶ Rapporto incrementale di f

Quindi Per dimostrare qualcosa che non è vera, ci basta dare un singolo esempio:

ES: $y = |x|$ continua in $x = 0$



la funzione, però, non è derivabile in $x = 0$. Solitamente nei punti "spigolosi" non è presente la Tangente.

Dim. che in $X_0=0$, $f(x)=|x|$ non è deriv:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 0^+ = \frac{|0^+|}{0^+} = +1 \\ 0^- = \frac{|0^-|}{0^+} = -1 \end{cases}$$

Non è deriv.

Funzioni Non derivabili

Se f NON è deriv in x_0 possiamo considerare i lim dx e Sx del rapp. increm.

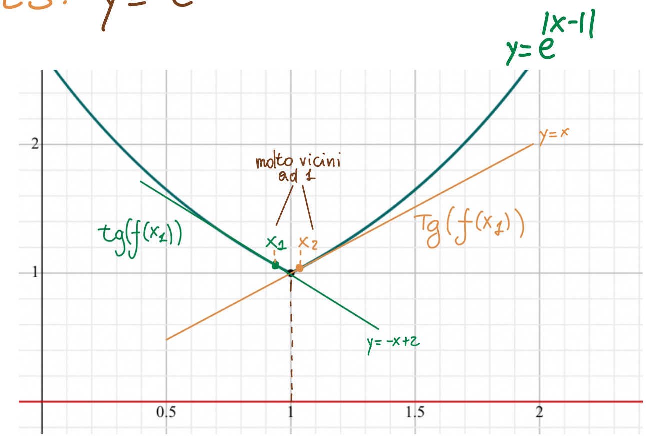
Def: Si dice derivata destra/Sinistra di f, il $\boxed{\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_\pm(x_0)}$

Def: Si dice che x_0 è un punto angoloso per f, se le derivate dx e Sx sono finite e distinte f^o

ES: $f(x) = |x|$ punto angoloso in 0; $f'_+(0) = +1$, $f'_-(0) = -1$

Def Si dice semi tg (Destra/Sinistra), la retta di eq $y = f(x_0) + f'_\pm(x_0)(x - x_0)$

ES: $y = e^{|x-1|}$ $= \begin{cases} e^{x-1} & \text{per } x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ e^{-(x-1)} & \text{per } x-1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$



la semi tg sx in $x=1$ è

$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 - x + 1 = \underline{-x+2}$