

Lezione 20

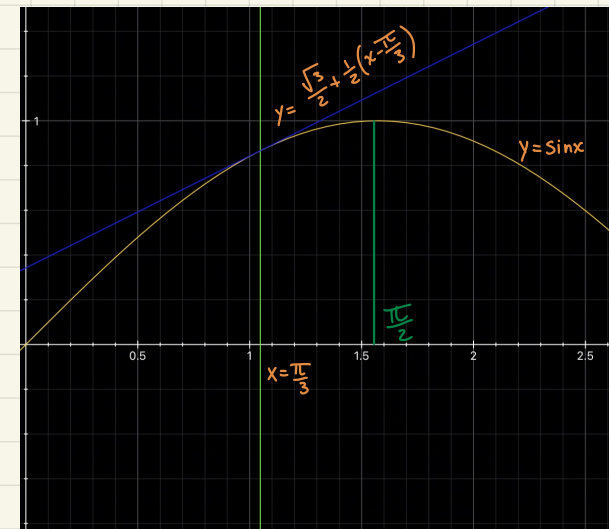
Calcolo delle derivate



Problema

Potremmo dover scrivere le equazioni della retta tangente alla funzione (in questo caso usiamo $f(x) = \sin x$ in $x_0 = \frac{\pi}{3}$)

Eq della tangente: $y = mx + q = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow y = \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \cdot (x - \frac{\pi}{3})$
 $\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})$



Osservazione: la derivata di $f(x)$ in x_0 , ovvero $f'(x_0)$ è un numero reale.
ES: $f'(\sin x)$ in $\frac{\pi}{3}$ è $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

Al variare di $x \in \mathbb{R}$ posso associare ad ogni x la derivata della funzione f al punto x .

$$x \longrightarrow f'(x) \longleftarrow$$

un'unica immagine

La funzione che otteniamo viene chiamata funzione derivata.

$$f': x \in \mathbb{D} \longrightarrow f'(x) \in \mathbb{R}$$

! La funzione derivata NON È la stessa cosa della derivata! Nel caso della f deriv. Ad un punto associamo un altro punto.

ES: $f(x) = \sin x \Rightarrow$ Associa $x \rightarrow f'(\sin x)$ in $x \Rightarrow$ Associa $x \rightarrow \cos(x)$

Derivate elementari

- \bullet $D x^a = a x^{a-1}$
- \bullet $D \ln x = \frac{1}{x}$
- \bullet $D e^x = e^x$
- \bullet $a^x = a^x \cdot \log_a e$ se $a = e \Rightarrow \log_e e = 1 \Rightarrow a^x = e^x = e^x$
- \bullet $\log_a x = \frac{1}{x} \log_e a$ se $a = e \Rightarrow \log_e e = 1 \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{x}$
- \bullet $\sin x = \cos x$
- \bullet $\cos x = -\sin x$
- \bullet $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- \bullet $\arctg x = \frac{1}{1+x^2}$

$$\bullet \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\bullet \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

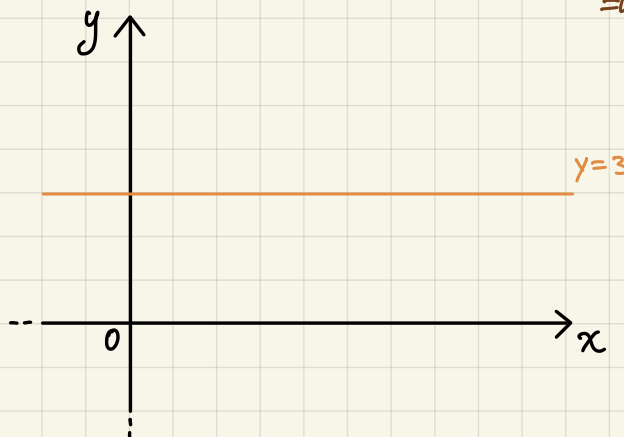
Costante per funzione
 $\frac{d}{dx} [k f(x)] = k \frac{d}{dx} [f(x)]$

ES: $\frac{d}{dx} [3x^2] = 6x$

Derivata di costante

$$\frac{d}{dx} k = 0 \quad \text{ES } f(x) = y = 3; \quad \frac{d}{dx} 3 = 0$$

★ Siccome la deriv è il coeff. della tan a $f(x)$, $m(y=3) = 0 \Rightarrow$ Parallela a x



Operazioni con le derivate

Siano f e g derivabili in x_0 ; allora sono derivabili in x_0 la: $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g .
Inoltre si ha che

$$\bullet \frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{d}{dx}f \pm \frac{d}{dx}g$$

$$\bullet \frac{d}{dx}(f \cdot g) = \frac{d}{dx}(f) \cdot g + f \cdot \frac{d}{dx}(g)$$

$$\bullet \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ES: $D(x^3 + \sin x) = 3x^2 + \cos x$ — Funz. derivata

ES: $D(x \log x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$ — Funz. derivata

ES: $\frac{\arcsin x}{e^x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^x - \arcsin x \cdot e^x = \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2} \cdot e^{2x}} - \frac{\arcsin x e^x}{e^{2x}}$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot e^x - e^x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2} e^{2x}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2} e^x}$$

1:36

Teorema di derivazione delle funzioni composte

Se f è derivabile in x ed g è derivabile in $f(x)$, allora la funzione composta $(g \circ f) = g(f(x))$ è derivabile in x , e si ha che la derivata della f comp. è:

$$\triangleright g(f(x)) = g'(f(x)) f'(x)$$

Orvero: faccio la derivata della f esterna, e la calcolo in $f(x)$ non derivata; moltiplichiamo poi per la derivata di $f(x)$.

ES: $\triangleright \sin(\log x) = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x}$

ES: $\triangleright \left(\begin{array}{l} \text{a) } \arctg(\sqrt{x^2-1}) \\ \text{b) } \cos(\text{tg}(\log(\sin x))) \end{array} \right)$

a) $= \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2-1})^2} \cdot \triangleright \left((x^2-1)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{1+x^2-1} \cdot \left(\frac{1}{2} (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \overset{\text{deriv}}{2x}$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

b) $\triangleright (\log(\sin x)) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \text{tg} x$

$$\triangleright (\text{tg}(\text{tg} x)) = \frac{1}{\cos^2(\text{tg} x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(\text{tg} x) \cdot \cos^2(x)}$$

$$\triangleright \cos\left(\frac{1}{\cos^2(x) \cdot \cos^2(\text{tg} x)}\right) = -\sin\left(\frac{1}{\cos^2(x) \cdot \cos^2(\text{tg} x)}\right) \cdot \triangleright \left((\cos^2(x) \cos^2(\text{tg} x))^{-1} \right)$$

41:00

Teorema di derivazione delle funzioni inverse

Se f è continua e strett. monotona in $I [a, b]$, se f è derivabile in x e $f'(x) \neq 0$, allora anche f^{-1} è derivabile $y = f(x)$, e si ha che:

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{quando } x = f^{-1}(y).$$

Osservazione:

$$f: x \rightarrow y = f(x) \quad \bullet \quad f, \text{ ad } x \text{ associa } y = f(x).$$

$$f^{-1}: y \rightarrow f^{-1}(y) = x \quad / \quad f(x) = y$$

ES: $f(x) = x^2$ in $[0, +\infty)$, sappiamo che in I è invertibile.

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$; per il Teorema di prima, $f^{-1}(y)$ è derivabile, e $\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{d}{dx} \sqrt{y}$ si può esprimere tramite la derivata di $f(x) \Rightarrow$

$$\frac{d}{dy} \sqrt{y} = \frac{1}{\frac{d}{dx} x^2} = \frac{1}{2x} \Big|_{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

\uparrow quando $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

ES: $\mathcal{D} \arcsin y$ è l'inversa della $f \sin$ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$= \frac{1}{\mathcal{D} \sin x \Big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\cos x \Big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

Facciamo comparire il \sin al posto di \cos usando la rel. fondamentale
 $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \nwarrow \frac{d}{dx} \text{ di } \arcsin x = \sin^{-1} x$$

$$\text{ES: } \mathcal{D} \arctg y = \frac{1}{\mathcal{D} \tg x \Big|_{x=\arctg y}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} \Big|_{x=\arctg y}} = \cos^2(\arctg y)$$

$$\cos = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tg^2 x}} \Rightarrow \cos^2 = \frac{1}{1 + \tg^2 x} \Rightarrow \cos^2(\arctg y) = \frac{1}{1 + \underbrace{\tg^2(\arctg y)}_{\text{si annullano}}} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Derivate d'ordine Superiore

Se f è deriv. in $[a, b]$, abbiamo la f derivata $f'(x)$. Se $f'(x)$ è anch'essa derivabile possiamo considerare la sua derivata che indicheremo con $f''(x)$, anche detta derivata Seconda.

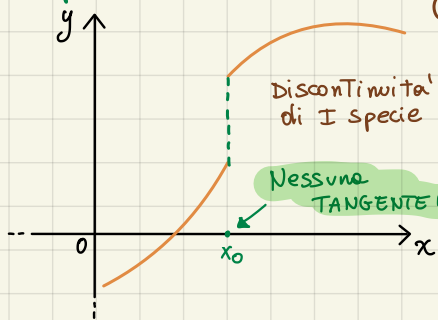
ES: $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$ del tipo x^a

$$f''(x) = -1(1+x^2)^{-1-1} \cdot \frac{d}{dx}(1+x^2)$$

$$= -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{1+x^4+2x^2} = -\frac{2x}{x^4+2x^2+1}$$

Proposizione Che relazione c'è tra continuità e derivabilità? Cioè f continua, indica che f è derivabile, e viceversa?

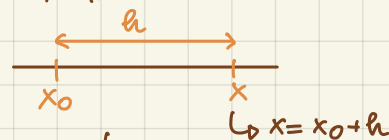
Proposizione Se la funzione è Derivabile, allora f è continua in $[a, b]$.



\Rightarrow Se è derivabile vuol dire che in quel punto (a, b) ESISTE la tangente alla $f(x)$.
Se f è continua, vuol dire (graficamente) che non ci sono "salti" nel grafico di f .

Dim Hp: Se f è derivabile in x_0 , allora è continua in x_0 .

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$



Dire che $x \rightarrow x_0$ è la stessa cosa di $x_0+h \rightarrow x_0$ se $h \rightarrow 0$.

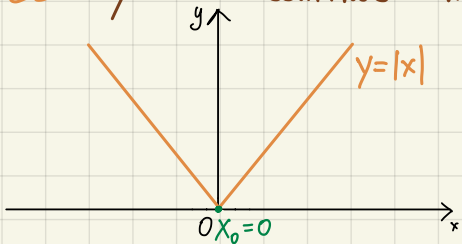
$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0) \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0$$

Calcoliamo il $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h$

Per Hp. f è derivabile in $x_0 \iff \exists$ finito \lim \rightarrow Rapporto incrementale di f

Quindi Per dimostrare qualcosa che non è vera, ci basta dare un singolo esempio:

ES: $y = |x|$ continua in $x=0$



la funzione, però, non è derivabile in $x=0$. Solitamente nei punti "spigolosi" non è presente la tangente.

Dim. che in $x_0=0$, $f(x)=|x|$ non è deriv:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 0^+ = \frac{|0^+|}{0^+} = +1 \\ 0^- = \frac{|0^-|}{0^-} = -1 \end{cases}$$

Non è deriv.

Funzioni Non derivabili

Se f NON è deriv in x_0 possiamo considerare i $\lim dx$ e Sx del rapp. increment.

Def: Si dice derivata destra di f , il $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$
Sinistra

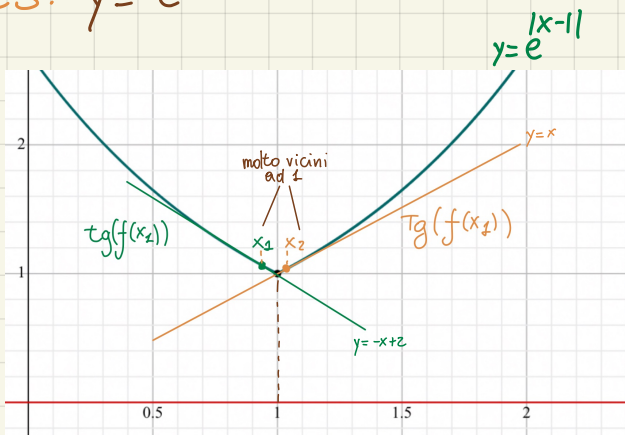
Def: Si dice che x_0 è un punto angoloso per f , se le derivate dx e Sx sono finite e distinte
 f_0

ES: $f(x) = |x|$ punto angoloso in 0; $f'_+(0) = +1$, $f'_-(0) = -1$

Def Si dice semi tg, la retta di eq $y = f(x_0) + f'_\pm(x_0)(x - x_0)$
Destra
Sinistra

ES: $y = e^{|x-1|}$

$$= \begin{cases} e^{x-1} & \text{per } x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ e^{-(x-1)} & \text{per } x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$



la semi tg Sx in $x=1$ è

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 - x + 1 = \underline{-x + 2}$$