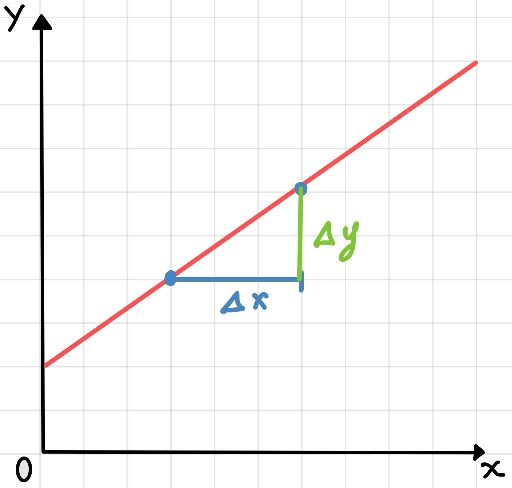
Derivate

Derivate - Concetto



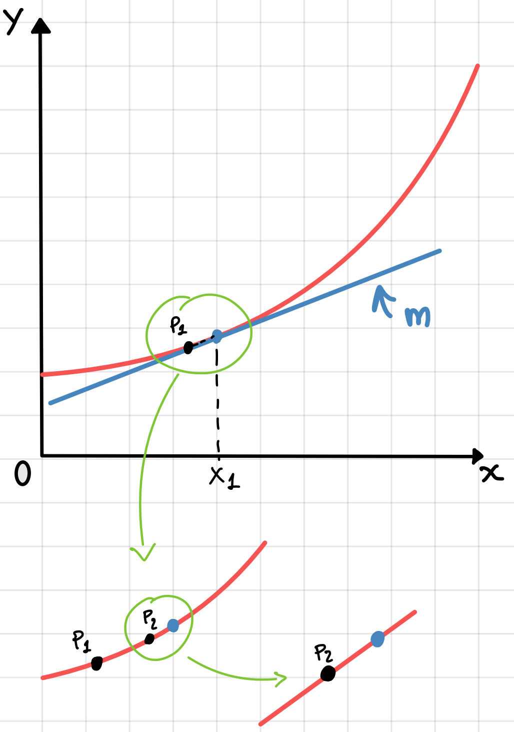
Conosciamo bene il concetto di pendenza di una retta, anche nota come "m".

Quello che m fa, e' descrivere il ratio del cambiamento della variabile y rispetto ad x.

Per trovare la pendenza di una linea ci basta prendere 2 punti della retta, calcolare Δx e Δy e fare il rapporto tra i due:

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

ogni linea e' associata ad una m, perche' il rapporto rimane costante.



Quando, pero', abbiamo non più una vetta, ma una curva, non possiamo più calcolare m allo stesso modo.

Se prendiamo due punti e calcoliamo la m della vetta passante tra i due punti, calcoliamo la m media tra un intervallo.

A noi interessa calcolare l'm istantanea, che e' dato dalla m della retta passante per quel punto, la tangente.

Se la distanza tra i due punti che prendiamo in causa e' prossima allo zero, la retta che passa tra i due punti, e' proprio la tangente al punto di partenza, e quindi la retta che rappresenta la nostra m.

Indichiamo quindi la derivata come

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x_1) = \dot{y}}$$

Concetti fondamentali

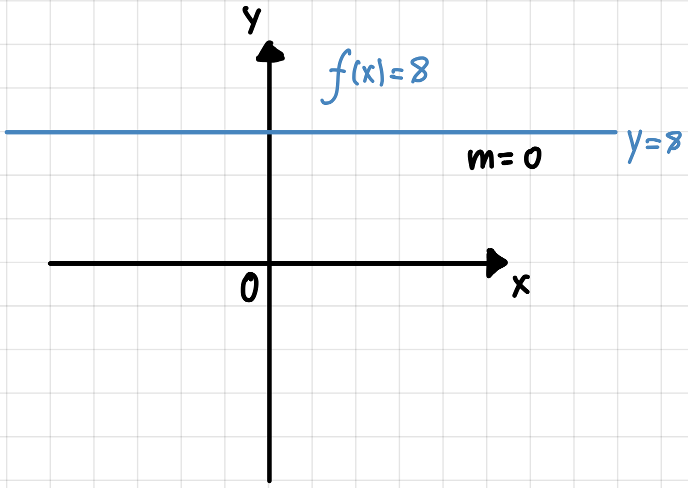
La derivata di una qualsiasi costante e' zero

$$\boxed{\frac{d}{dx}[c] = 0}$$

quindi: $\frac{d}{dx} 5 = 0$

$\frac{d}{dx} 7 = 0$

Perche' ?



La pendenza di una retta parallela ad x sara' sempre 0.

Regola della potenza

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1}}$$

quindi $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

$\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$

Derivata di una costante per una funzione

$$\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot \frac{d}{dx}[f(x)]$$

La derivata di una costante per una funzione e' la costante moltiplicata per la derivata della funzione.

Quindi:

- $\frac{d}{dx}(4x^7) = 4 \cdot \frac{d}{dx}(x^7) \stackrel{!}{=} 4 \cdot (7x^6) = \underline{28x^6}$
- $\frac{d}{dx}(8x^4) = 32x^3$
- $\frac{d}{dx} 9x^5 = 45x^4$
- $\frac{d}{dx}(5x^6) = 30x^5$
- $\frac{d}{dx} 6x^7 = 42x^6$

Perché la derivata funziona?

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$ perché?

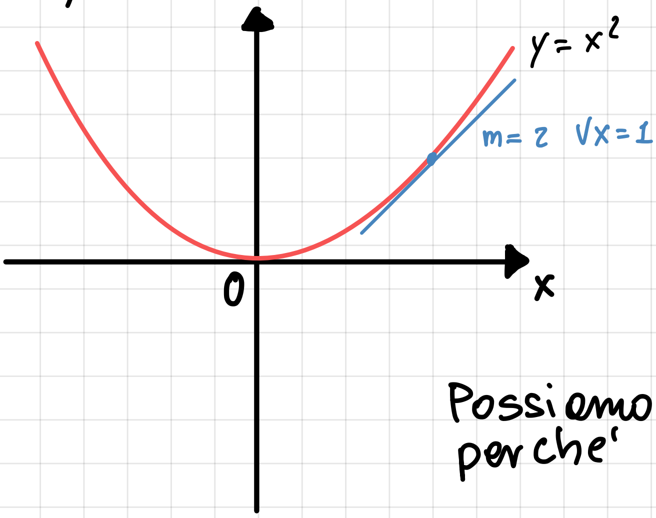
$$\boxed{f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Derivata espressa in limite

Trovare la derivata di una funzione in un punto preciso

$f(x) = x^2$ in $x = 1$

$f'(x) = 2x$ in $x = 1 \Rightarrow f'(1) = \underline{2}$



Seguendo il ragionamento di prendere due numeri sempre piu' vicini che abbiamo visto prima, possiamo prendere due numeri la quale media ci dia proprio il punto $x = 1$:

Possiamo prendere $x_1 = 0.9$ $x_2 = 1.1$ perche' $\frac{0.9 + 1.1}{2} = 1$

Per essere piu' precisi possiamo usare $x_1 = 0.99$ e $x_2 = 1.01$, visto che la m delle retta secante passante per x_1, x_2, sara' molto piu' vicina a quella della curva in $x = 1$:

Per calcolare la m di una retta usiamo $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\Rightarrow m_{sec} = \frac{1.1^2 - 0.9^2}{1.1 - 0.9} = \frac{1.21 - 0.81}{0.2} = \frac{0.4}{0.2} = 2$$

Non era necessario usare 0.99 e 1.01

Altro esempio

$f(x) = x^3$ in $x = 2$

$f'(x) = 3x^2$ $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = \underline{12} = m$

Proviamo ad approssimare m con la secante

$x_1 = 1.9$ $x_2 = 2.1$

$$m = \frac{2.1^3 - 1.9^3}{2.1 - 1.9} = \frac{9.26 - 6.85}{0.2} = 12.05$$

Derivata di una Funzione composta da monomi

$f(x) = x^3 + 7x^2 - 8x + 6$

$f'(x) =$ Derivare ogni monomio separatamente

$= 3x^2 + 14x - 8$

$f(x) = 4x^5 + 3x^4 + 9x - 7$

$f'(x) = 20x^4 + 12x^3 + 9$

Derivata in un punto

$f(x) = 2x^5 + 5x^3 + 3x^2 + 4$ in $x = 2$

$f'(x) = 10x^4 + 15x^2 + 6x$; $f'(2) = 10 \cdot 2^4 + 15 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2$

$= 160 + 60 + 12 = \boxed{232}$

Derivata di un inverso (f irrazionale)

$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -1\,x^{-2}$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

ES $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = \boxed{-\frac{2}{x^3}}$

ES $f(x) = \frac{8}{x^4} = 8x^{-4} \Rightarrow f'(x) = -32\,x^{-5} = \boxed{-\frac{32}{x^5}}$

Derivate di radici

$f(x) = \boxed{\sqrt[2]{x^1}} = x^{1/2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{\frac{1-2}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2x^{1/2}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

ES $f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{5/3}$ $\quad f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3} - 1} = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$

Razionalizzazione dei radicali

Per raz. del denominatore di una frazione, si intende il procedimento che consente di eliminare dal denominatore quantita' irrazionali (radicali).

Il risultato e' quello di ottenere una forma priva di radici al denominatore.

1) Se il denominatore e' la radice quadrata di una certa quantita', e' sufficiente moltiplicare sia numeratore che denominatore per la radice:

ES $$\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Formula generale: $$\frac{3a}{\sqrt{a}} = \frac{3a}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{3a\sqrt{a}}{a} = 3\sqrt{a}$$

ES: $$\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$$

$\frac{n}{n} = 1$

2) Se il denominatore e' del tipo $\sqrt[n]{a^m}$, con $m < n$, ci conviene moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt[n]{a^{n-m}}$

ES: $$\frac{3}{\sqrt[7]{2^2}} = \frac{3}{\sqrt[7]{2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{2^5}}{\sqrt[7]{2^5}} = \frac{3\sqrt[7]{2^5}}{\sqrt[7]{2^7}} = \frac{3}{2}\sqrt[7]{2^5}$$

$\to 2$

ES: $$\frac{10}{\sqrt[3]{5}} = \frac{10}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{10\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\cancel{10}}{\cancel{5}}\sqrt[3]{5^2} = 2\sqrt[3]{5^2}$$

$\to 5$

3) Se il denom e' la somma o differenza di 2 radicali quadratici, per razionalizzare usiamo il prodotto notevole

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

ES $$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

ES $$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

Rimane sempre il meno per via del prodotto notevole

ES 1

$$f(x) = x^2(x^3+7) = x^5 + 7x^2 = 5x^4 + 14x = x(5x^3+14)$$

ES 2

$$f(x) = (2x-3)^2 = 4x^2+9+2\cdot 2x\cdot(-3) = 4x^2-12x+9$$

$$f'(x) = 8x-12$$

ES 3 $f(x) = \dfrac{x^5+6x^4+5x^3}{x^2}$

Strategia 1: Dividiamo ogni monomio per x^2

$$\frac{x^5}{x^2} + \frac{6x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} = x^3+6x^2+5x \Rightarrow \underline{f'(x) = 3x^2+12x+5}$$

Strategia 2: messa in evidenza

$$\frac{\cancel{x^2}(x^3+6x^2+5x)}{\cancel{x^2}} = x^3+6x^2+5x$$

Derivate di funzioni trigonometriche

- $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$
- $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
- $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \cdot \tan x$
- $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$
- $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \equiv \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cotan} x = -\operatorname{cosec}^2 x$

Derivate fondamentali

- $\ln x = \frac{1}{x}$

Derivative	Value	Integral	Value
$\frac{d}{dx}(c)$	0	$\int c\,dx$	cx
$\frac{d}{dx}(x)$	1	$\int 1\,dx$	x
$\frac{d}{dx}(x^n)$	nx^{n-1}	$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{d}{dx}(g(u))$	$\frac{d}{du}g(u)\frac{du}{dx}$	$\int\frac{dx}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\log\lvert ax+b\rvert$
$\frac{d}{dx}(u(x)+v(x))$	$\frac{d}{dx}u(x)+\frac{d}{dx}v(x)$	$\int(u(x)\pm v(x))dx$	$\int u(x)dx \pm \int v(x)dx$
$\frac{d}{dx}(u(x)\times v(x))$	$u(x)\frac{d}{dx}v(x)+v(x)\frac{d}{dx}u(x)$	$\int u(x)v(x)dx$	$u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$	$\frac{v(x)\frac{d}{dx}u(x)-u(x)\frac{d}{dx}v(x)}{v(x)^2}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{d}{dx}(\sin x)$	$\cos x$	$\int\cos x\,dx$	$\sin x$
$\frac{d}{dx}(\cos x)$	$-\sin x$	$\int\sin x\,dx$	$-\cos x$
$\frac{d}{dx}(\tan x)$	$\sec^2 x$	$\int\tan x\,dx$	$-\log\cos x$
$\frac{d}{dx}(\cot x)$	$-\mathrm{cosec}^2 x$	$\int\cot x\,dx$	$\log\sin x$
$\frac{d}{dx}(\sec x)$	$\sec x\tan x$	$\int\sin^2 x\,dx$	$\left(-\frac{1}{4}\right)\sin(2x)+\frac{1}{2}x$
$\frac{d}{dx}(\csc x)$	$-\csc x\cot x$	$\int\cos^2 x\,dx$	$\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{2}x$
$\frac{d}{dx}(e^x)$	e^x	$\int e^x\,dx$	e^x
$\frac{d}{dx}(\log x)$	$\frac{1}{x}$	$\int\frac{1}{x}dx$	$\log x$
$\frac{d}{dx}(a^x)$	$a^x\log a$	$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\log a}$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{asin}\,x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}}$	$\mathrm{asin}\frac{x}{b}$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{acos}\,x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-b^2}}$	$\mathrm{acosh}\frac{x}{b} = \log(x+\sqrt{x^2-b^2})$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{atan}\,x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int\frac{dx}{b^2+x^2}$	$\frac{1}{b}\mathrm{atan}\frac{x}{b}$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{acot}\,x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\int\frac{dx}{b^2-x^2}$	$\frac{1}{b}\mathrm{atanh}\frac{x}{b} = \frac{-1}{2b}\log\frac{(\lvert x-b\rvert)}{(\lvert x+b\rvert)}$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{asec}\,x)$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int\frac{dx}{x^2-b^2}$	$-\frac{1}{b}\mathrm{acoth}\frac{x}{b} = \frac{1}{2b}\log\frac{(\lvert x-b\rvert)}{(\lvert x+b\rvert)}$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{acsc}\,x)$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$	$\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\mathrm{atan}\frac{(2ax+b)}{\sqrt{4ac-b^2}}$
$\frac{d}{dx}(\log\sin x)$	$\cot x$	$\int e^{ax}\sin bx\,dx$	$\frac{(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}e^{ax}$
$\frac{d}{dx}(\log\cos x)$	$-\tan x$	$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$	$\frac{(a\cos(bx)+b\sin(bx))}{a^2+b^2}e^{ax}$
$\frac{d}{dx}(\log\tan x)$	$\frac{2}{\sin 2x}$	$\int\frac{1}{\sin x}dx$	$\log\tan\frac{x}{2}$
$\frac{d}{dx}(\log\cot x)$	$\frac{-2}{\sin 2x}$	$\int\frac{1}{\cos x}dx$	$\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$
$\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int\frac{1}{1+\cos x}dx$	$\tan\frac{x}{2}$
$\frac{d}{dx}(\log_{10}x)$	$\frac{\log_{10}e}{x}$	$\int\log x\,dx$	$x\log x - x$

www.engineersedge.com
www.engineersedge.com

Derivate di funzioni composte - Regola del prodotto

$$[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

ES $f(x) = x^2 \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cos x$

ES $f(x) = (3x^4 + 7) \cdot (x^3 - 5x)$

$$f'(x) = 12x^3 \cdot (x^3 - 5x) + (3x^4 + 7) \cdot (3x^2 - 5)$$
$$= 12x^6 - 60x^4 + 9x^6 - 35$$
$$= 21x^6 - 60x^4 - 35$$

ES $f(x) = \underbrace{x^3}_{1} \underbrace{(\tan x)}_{2} \underbrace{(3x^2 - 9)}_{3}$

$f(x) = a \cdot b \cdot c$

$\Rightarrow f'(x) = a'bc + ab'c + abc'$

$$f'(x) = 3x^2 (\tan x)(3x^2 - 9) + x^3 \cdot \sec^2 x \cdot (3x^2 - 9) + x^3 (\tan x)\, 6x$$

Derivate di funzioni fratte - regola del quoziente

$$\frac{d}{dx} \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ES $f(x) = \dfrac{5x + 6}{3x - 7}$

$$f'(x) = \frac{[5 \cdot (3x - 7)] - [(5x + 6) \cdot 3]}{(3x - 7)^2}$$
$$= \frac{\cancel{15x} - 35 - \cancel{15x} - 18}{9x^2 - 49 - 42x}$$
$$= -\frac{53}{9x^2 - 42x - 49}$$

Derivata di Funzione composta del tipo $f(g(x))$

La derivata di una f composta è il prodotto tra la derivata della Funzione esterna, avente come argomento la funzione interna, e la derivata della funzione interna:

$$\boxed{D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Derivata funzione composta

ES $f(x) = \sin x^2$

$f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$

$f'(x) = \cos(x^2)$ $g'(x) = 2x$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

ES $f(x) = \ln(\sin x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$

ES $f(x) = e^{x^{2013}} = e^{x^{2013}} \cdot 2013 \cdot x^{2012}$

ES $f(x) = \sin(x \cdot tg x)$ calcoliamo prima $f(x) = x\, tg x$

1) $f'(x tg x) = tg x + x \sec^2 x \equiv \frac{1}{\cos^2 x}$

2) $f'(x) = \cos(x tg x) \cdot \tan x + x \sec^2 x$

ES: più funzioni composte:

$f(x) = \sin(e^{x^2})$ $f'(x) = \cos(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x$

$\quad f'(x) \quad f'(e^{x^2}) \quad f'(x^2)$

Quindi

Ci basta quindi derivare la funzione più esterna avente come argomento quelle più interne; successivamente, moltiplichiamo la derivata dell'argomento della precedente.

Derivata di $[f(x)]^{g(x)}$

ES $f(x) = x^x$

$\Rightarrow x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln x}$

Regola generale

Dobbiamo ricordare di riscrivere x^x come $e^{\ln(x^x)}$, questo perche' esponenziale e logaritmo sono funzioni inverse tra loro, quindi non cambia nulla.

Infine, possiamo portare la x davanti al $\ln$: $x\ln(x^x) \Rightarrow x\ln x$
e quindi possiamo dire che: $[x^x]' = [e^{x\ln x}]'$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{x\ln x} \cdot \ln x + \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} = e^{x\ln x} \cdot \ln x + 1$$

Ma siccome $e^{x\ln x} = x^x \Rightarrow f'(x) = \underline{x^x \ln x + 1}$

ES $f(x) = \sin x^{\cos x}$ la riscriviamo come $e^{\ln(\sin x)\cos x}$

$$\Rightarrow \sin x^{\cos x} = e^{\cos x \ln(\sin x)}$$

composta

Quindi $f'(x) = e^{\cos x \ln \sin x} \cdot -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$

Derivata di sin x

Derivata di ln(sinx) avente come argomento sin x

Come comportarsi

Ogni volta che ci troviamo in una situazione del tipo $[f(x)]^{g(x)}$, ci basta usare l'uguaglianza:

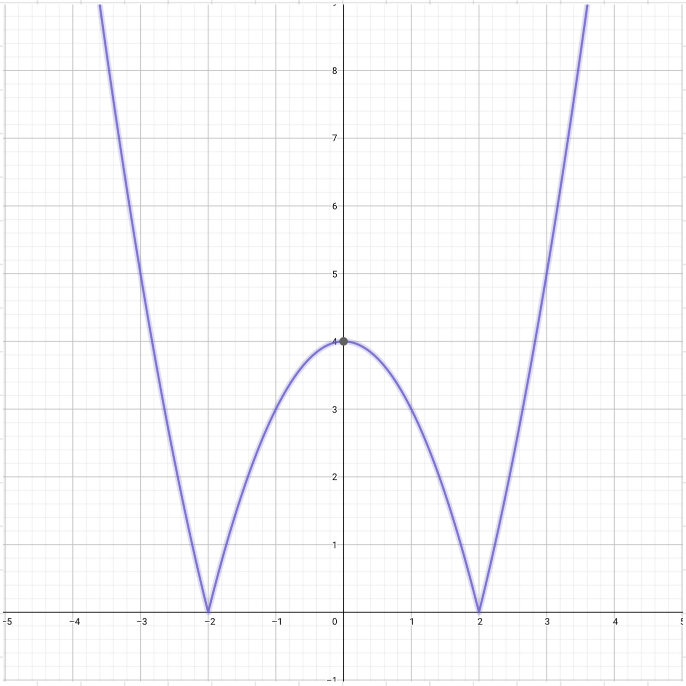
$$\boxed{\begin{aligned} x^x &= e^{\ln x^x} = e^{x\ln x} \\ a^b &= e^{\ln a^b} = e^{b\ln a} \end{aligned}}$$

Derivata destra e sinistra

Prendiamo in esame la funzione: $y = |x^2-4|$ in $x = 2$

Siccome $x^2-4 \geq 0 \rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$ possiamo scrivere la funzione nella forma:

$$\begin{cases} x^2-4 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -x^2+4 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$



A sinistra ed a destra di 2 la funzione ha due espressioni diverse

Per $h<0 \rightarrow$ sx di 2

$$f(2+h) = -(2+h)^2+4$$
$$= -\cancel{4}-h^2-4h+\cancel{4}$$
$$= \underline{-h^2-4h}$$

Per $h>0 \rightarrow$ Dx di 2

$$f(2+h) = (2+h)^2-4$$
$$= h^2+\cancel{4}+2h-\cancel{4} = \underline{h^2+4h}$$

Definizione

Una funzione di eq $y = f(x)$, definita in un intorno di x_0, si dice derivabile a Sx in x_0 se il limite del rapporto incrementale con $h \rightarrow 0^-$ esiste ed e' finito.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h)}^{a} - \overbrace{f(x_0)}^{b}}{h}$$

ESISTE ED E' FINITO

ESEMPIO

$f(x) = |x-1|$ in $x_0 = 1$

1) Derivata Dx — Quando h tende a 0 da destra $\Rightarrow h \to 0^+$

a) $f(x_0+h) = f(1+h)$

$\Rightarrow |1+h-1| = \underline{|h|}$

b) $f(x_0) = f(1)$

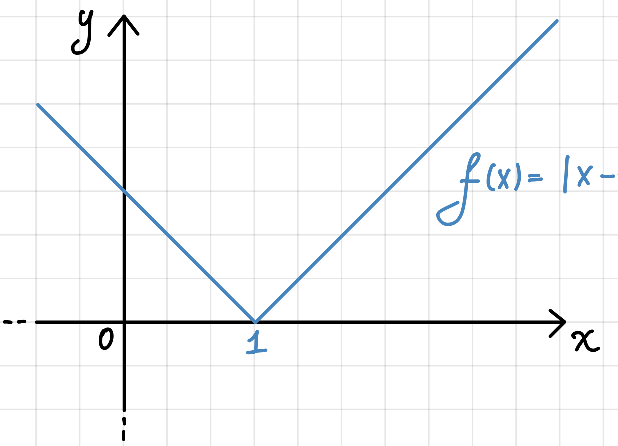
$\Rightarrow |1-1| = \underline{0}$

Sostituendo otteniamo $\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$

$\Rightarrow \underline{f'_+(1)}$

2) Derivata Sx

$$\dots = \lim_{h\to 0^-} \frac{-|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1 \Rightarrow f'_-(-1)$$



! I risultati dei due limiti sono si finiti ed esistenti, ma non sono uguali tra loro: $+1 \neq -1$

$\Rightarrow$ La funzione f non è derivabile in $x_0 = 1$ infatti non esiste.

$\Rightarrow$ Non è definita la retta tangente al grafico di $f(x)$ in $x_0 = 1$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è però derivabile a Dx e Sx di x_0!

Osservazione:

Se abbiamo una f definita SOLO in un intorno Destro di x_0, la funzione si dirà derivabile in x_0 se è derivabile a Destra in x_0.
La stessa cosa accade per l'intorno Sx

Osservazione

Una f è derivabile in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ se:

1) la funzione è derivabile $\forall x \in (a, b)$
2) la f è derivabile a Dx in $x = a$
3) la f è derivabile a Sx in $x = b$

Tornando all'esempio...

Prendiamo come intervallo $i = [1, 3]$, possiamo affermare che f è derivabile in $i = [1, 3]$ perché:

1) f derivabile $\forall x \in \,]1, 3[$
2) f deriv a Sx in 3
3) f deriv a Dx in 1