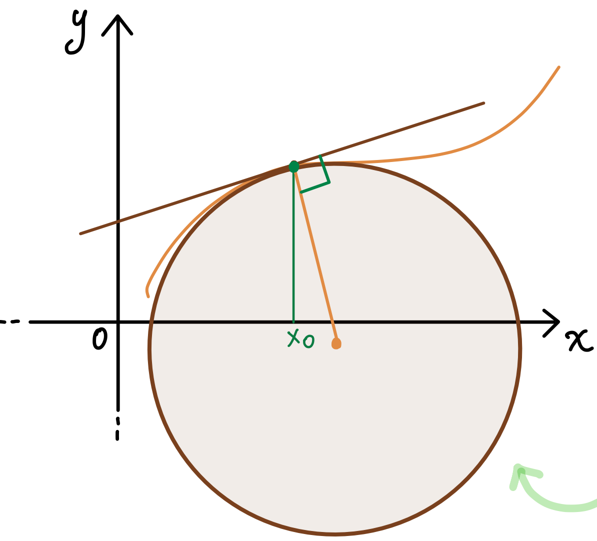
Lezione 19

Le derivate

Le Derivate

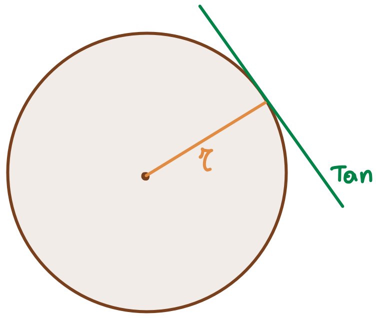
Data una curva $y = f(x)$, cos'è o come si definisce la retta Tangente a tale curva in un punto x_0?



Se non graficamente, è abbastanza difficile definire la retta Tangente ad una curva.

È ben definita la Tangente in un punto di una circonferenza. Basta infatti dire che la Tan in x_0 di una circonferenza è la retta perpendicolare al raggio.

Potremmo dedurre la Tangente alla curva tramite il cerchio osculatore, ma sarebbe una approssimazione.



Il problema da risolvere

In fisica, sappiamo che la velocità media viene calcolata come:

$$V = \frac{S_f - S_i}{t_f - t_i} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} \quad \text{tra due punti}$$

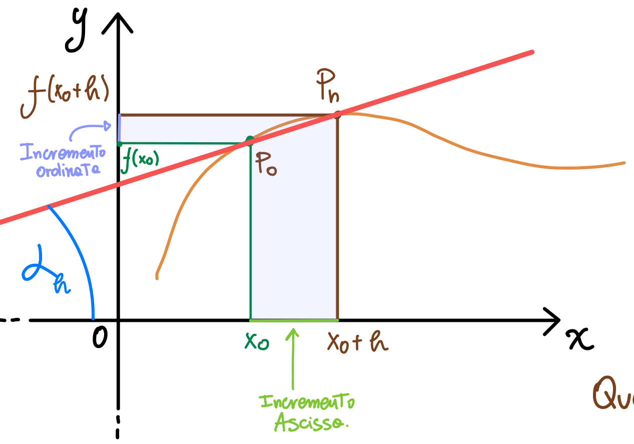
Vel media

Sappiamo quindi calcolare la V_{med} tra due punti. Lo stesso problema si verifica con la Tangente: sappiamo infatti calcolare la retta Tangente ad una retta (tra due punti) ma non ad una curva (più punti).

Possiamo fare un'altra domanda: cosa è la velocità istantanea, ovvero la vel in un istante t_0?

Risolviamo il problema

Consideriamo f continua in $[a,b]$, e sia $x_0 \in (a,b)$



Consideriamo un incremento di x_0: $\boxed{x_0 + h}$ ed otteniamo P_h.

Possiamo calcolare l'incremento totale con:

$$\Delta f = \underbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}_{\text{ORDINATA}}$$

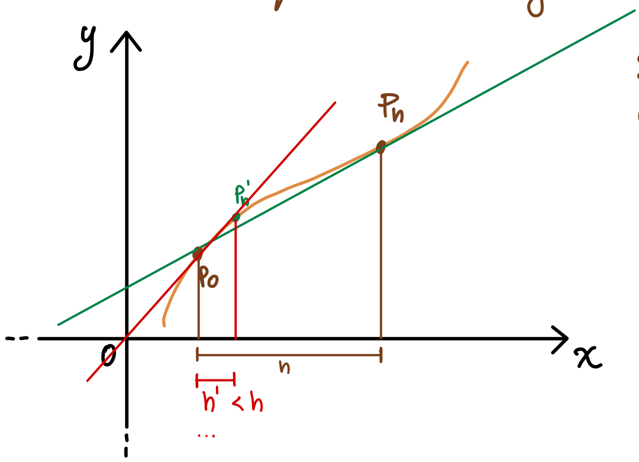
Consideriamo la retta passante per P_0 e P_h (In rosa).

Questa retta avrà equazione: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{y - f(x_0)}{f(x_0+h) - f(x_0)} =$

$$= \frac{x - x_0}{x_0 + h - x_0} \Rightarrow y - f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

$$= y = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{m_h \text{ coeff. Angolare } = \tan \alpha_h}(x - x_0)$$

Idea: Se h diventa piccolo, ovvero $h \to 0$ il punto P_h si avvicina a P_0.
Quindi otteniamo qualcosa del genere:



Se $h=0$, r_h non è definita, ed infatti anche il coeff. angolare $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ diventa una forma indeterminata del tipo $0/0$.

Quindi...

Definizione: Si dice che f è Derivabile in x_0 se esiste finito il $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}$ ed esso prende il nome di Derivata di f in x_0, e si denota:
- $f'(x_0)$
- $Df(x_0)$
- $\frac{df}{dx}(x_0)$

Il rapporto $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è detto rapporto incrementale; Di conseguenza, la derivata è il limite del rapporto incrementale.

Significato geometrico

Se f è derivabile in x_0, esiste $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, e passando al limite nell'eq. della retta r_h si ha:

$$\boxed{y = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Derivata}}(x-x_0)}$$

che è l'eq. di una retta che definiamo retta Tangente a $y=f(x)$ in x_0.

Quindi la Tangente è la posizione limite della retta r_h quando $h \to 0$.

Definizione retta Tangente: È la posizione limite delle rette secanti passanti per il punto x_0. Infatti, quando facciamo il $\lim_{h \to 0} m$, otteniamo la retta che passa per quel singolo punto con quel particolare coeff. angolare m.

ES: $y = \sin x$ in $x_0 = 0$
Calcoliamo il rapp. incrementale

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = \frac{\sin h}{h} \to 1 \Rightarrow \sin x \text{ è derivabile in } 0, \text{ e } f'(0) = 1$$

Graficamente si vede che $\sin x$ è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cosh - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} = \sin x\left[-\underbrace{\frac{(1-\cos h)}{h}}_{\to 0}\right] + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} = \cos x$$

Quindi nel generico punto $x \in \mathbb{R}$ si ha che la derivata di $\sin x = \cos(x)$.