Eq lin a Variabili separabili

$$\boxed{y' = y \cdot f(x)}$$

ES: $y' = 7x \cdot y$

Questo tipo di eq si risolve portando y e y' dallo stesso lato dell'uguale, in modo da integrare sia a Sx che a dx.

Siccome $\int \frac{y'}{y} dx = \ln|y|$ perche' $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

Otteniamo: $\ln|y| = \int f(x)\, dx$

Per ottenere L'integrale generale dell'eq diff, moltiplichiamo entrambi i membri per $e^{f(x)}$, perchè $e^{\ln|y|} = y(x)$ ($y(x)$ e' l'integrale generale da scoprire)

$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{\int f(x)\, dx} \Rightarrow \underline{y_0(x) = c\, e^{F(x)}}$

PASSI DI RISOLUZIONE

1) Portare tutte le y a Sx per ottenere $\frac{y'}{y} = f(x)$

2) Integrare entrambi i membri per ottenere $\ln|y| = \int f(x)\, dx$

3) Elevare per $e^{f(x)}$ per ottenere $\underbrace{y_0(x)}_{\text{Integrale generale dell'omogenea Associata}} = c\, e^{\int f(x)}$

Integrale generale dell'omogenea Associata → Vedi prossimo capitolo !

Eq diff lineari di I ordine

Rispetto alla forma precedente, è presente un termine in più AGGIUNTO: $g(x)$

$$\boxed{y' = y \cdot f(x) + g(x)}$$

Oppure:

$$\boxed{y' \pm \underset{a(x)}{f(x)} \cdot y = \underset{b(x)}{g(x)}}$$

Per risolvere questo tipo di eq basta prima considerare l'eq omogenea associata

omogenea associata $\quad y' \pm f(x) y = 0 \quad$ che non è altro che una eq diff a variabili separabili.

Risolta questa eq, avremo l'integrale generale $y(x)$; a noi, però, interessa l'integrale generale dell'eq completa, e non di quella parziale.

Questo integrale è dato dalla somma tra:

- Integrale generale dell'eq omogenea associata (quella a var sep)
- Integrale particolare $y_p(x)$

Calcolo dell'integrale particolare – Metodo di variazione delle costanti

Abbiamo visto che la sol all'eq omogenea è: $y_0(x) = c\, e^{-\int f(x)\, dx}$, con $c = \text{cost}$.
Per determinare l'integrale particolare, facciamo variare la costante c.

Perché? L'integrale particolare $y_p(x)$ NON è ALTRO che un integrale specifico che risolve una determinata eq differenziale.
È come dire "per quale x, $x + 2 = 5$? $\Rightarrow x = 3$" $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Per quale specifico c, l'integrale $y_0(x)$ risolve l'equazione?

Per trovare la c, risolviamo

$$y_p(x) = c(x) \cdot e^{-\int f(x)\, dx}$$

la c varia

Dobbiamo sostituire y_0 (come se fosse una y) nell'eq completa:

Eq completa: $y' + f(x) y = g(x)$ In questa eq compare y', cioè la derivata di $y = y_0$ quindi dobbiamo derivare l'integrale generale e poi sostituire

$$y' = D\left(c(x)\, e^{-\int f(x)\, dx}\right) \Rightarrow \boxed{\underbrace{D\left(c(x)\, e^{-\int f(x)\, dx}\right)}_{y'} + \underbrace{f(x)\left[c(x) \cdot e^{-\int f(x)\, dx}\right]}_{f(x)\, y} = \underbrace{g(x)}_{g(x)}}$$

A questo punto troviamo c' (c' per via della derivata); Per trovare la primitiva di c' integriamo:

$$\int c'\, dx = \int f(x)\, dx \Rightarrow c = \int f(x)$$

Dove $f(x)$ è la funzione che esprime c'

Trovata la c, procediamo sostituendo a:

Integrale generale dell'eq completa

$$\boxed{y(x) = \underset{\text{Integrale generale dell'eq omogenea}}{y_0(x)} + \underset{\text{Integrale particolare dell'eq}}{y_p(x)}}$$

Integrale particolare dell'eq $\rightarrow y_p(x) = c \cdot e^{-\int f(x)\, dx}$

Integrale generale dell'eq omogenea

Eq diff lineari di I ordine — FATTORE INTEGRANTE

1) Trovo una primitiva di $a(x)$, ovvero una funzione che se derivata è uguale ad $a(x)$
2) Moltiplico entrambi i membri per:

$e^{A(x)}$ ottenendo: $\underbrace{y'(x)e^{A(x)} + a(x)e^{A(x)}y(x)}_{\text{Derivata di } [y(x)e^{A(x)}]'} = f(x)e^{A(x)}$

3) Integriamo entrambi i membri per ottenere:

$$y(x)e^{A(x)} = \int f(x)e^{A(x)} + c$$

4) Ricavo $y(x)$ moltiplicando per $e^{-A(x)}$ PERCHE'? $y(x)\cdot e^{A(x)}\cdot e^{-A(x)} = y(x)\cdot e^{A(x)-A(x)}$ 1

$\Rightarrow \; y(x) = e^{-A(x)}\cdot \int f(x)e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)}$ Soluzione generale dell'eq differenziale

FAMIGLIA DI Soluzioni

ES) $y'(x) - xy(x) = 2x$

1) Trovare una primitiva di $a(x) = -x \Rightarrow A(x) = \int -x\,dx = -\frac{x^2}{2}$ il "+c" non ci interessa

2) Moltiplico per $e^{A(x)} \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \underbrace{y'(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}}}_{D(y(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}})} = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$

3) Integro: $\int y'e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx + c \Rightarrow y(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 2\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx + c \Rightarrow y(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = -2e^{-\frac{x^2}{2}} + c$

4) Trovo $y(x) \Rightarrow$ moltiplico per $e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y(x) = -2\cancel{e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}} + c\,e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y(x) = -2c\,e^{\frac{x^2}{2}}$

Soluzione generale

Eq diff lineari di I ordine

Metodo delle variazioni delle costanti

Abbiamo una eq del tipo: $y' = a(x)y + b(x)$

ES: $y' = \frac{y}{x} + x$

1) Consideriamo l'eq omogenea: $y' = \frac{y}{x}$ ottenendo un'eq a var sep.

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \xrightarrow{\text{Separiamo}} \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{integriamo}} \int \frac{dy}{y} dx = \int \frac{dx}{x} dx = \ln|y| = \ln|x| + c_1$

- Troviamo y $\Rightarrow$ usiamo la def di log: $y_0(x) = cx$ Soluzione dell'eq omogenea Associata

Applichiamo il Metodo delle variazioni delle costanti

Trasformiamo c da costante a funzione: $c \Rightarrow c(x)$ Troviamo la soluzione particolare della eq. NON omogenea.

$y(x) = c(x) \cdot x \xrightarrow[\text{nella eq iniziale}]{\text{Sostituiamo}}$ che era: $y' = \frac{y(x)}{x} + x$

! Nella eq iniziale compare y' $\Rightarrow$ Dobbiamo derivare: $D(c(x) \cdot x) = c'(x)x + c(x)$

$\Rightarrow c'(x)\cancel{x} + \cancel{c(x)} = \frac{\cancel{c(x)\,x}}{\cancel{x}} + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}^{1} \xrightarrow{\text{Isolo } c'} c' = 1 \xrightarrow[\text{Integrando}]{\text{troviamo } c} c = \int dx \Rightarrow \boxed{c = x + c}$

$\Rightarrow$ Sostituiamo c nell'eq $y = cx \Rightarrow y_p(x) = x \cdot x = x^2$

L'integrale generale si ottiene sommando le due soluzioni trovate: $y_0(x)$ e $y_p(x)$

$y(x) = cx + x^2$