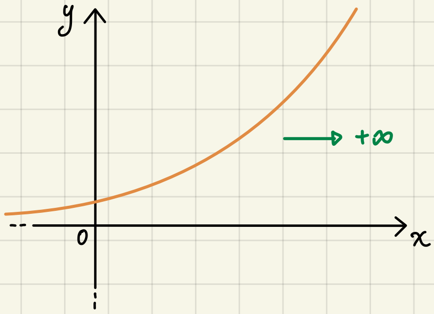
Lezione 16

Calcolo limiti funzioni elementari

Tip: basta ricordare il grafico della funzione per capire il limite di essa:

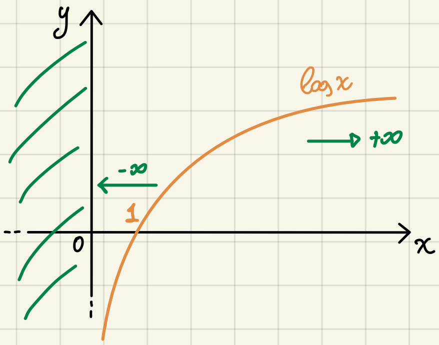
ES: $y = 2^x$



$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$$

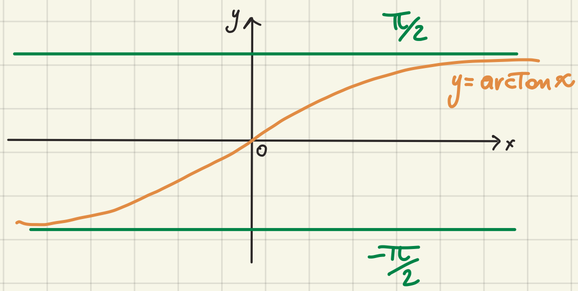
ES: $y = \log x$



$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \log x = -\infty$$

ES: $y = \arctan x$



$$\lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$$

Operazioni con i limiti

Il limite delle somma, prodotto, quoziente di due funzioni è uguale alle somma, prodotto, quoziente dei limiti delle funzioni, a meno che non si presentino delle forme indeterminate.

Limiti Notevoli

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log_a x \equiv \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \frac{\log x \to -\infty}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha \to +\infty}$ $\quad x^\alpha >> \log x \Rightarrow \to 0$

Da cui otteniamo..

- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{x^2\,(1+\cos x)} = \frac{1 + \cos x - \cos x - \cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$

$$= \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\text{Lim notevole} \to 1} \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to 1/2} = \frac{1}{2}$$

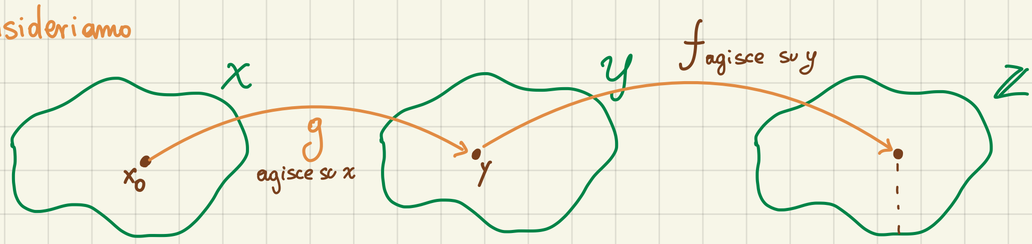
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = \underline{1}$

Teoreme sui limiti di f. composte

Usiamo due funzioni: $g: X \to Y$, $f: Y \to Z$ / esistano i limiti $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$

① Hp.

Consideriamo



Questa y non è altro che $y = g(x)$ ovvero l'immagine di $g(x)$

$f(y) = f(g(x))$

Quindi se il Dominio di f è uguale o contenuto nel codominio di $g(x)$, si può considerare la funzione composta, che si denota come

$$f \circ g : \; x \in X \xrightarrow[\text{Associa tramite } g]{g} g(x) = y \in Y \xrightarrow{f} f(y) = f(g(x)) \in Z$$

② Hp. $\exists\, \delta > 0 \;/\; g(x) \neq y_0 \;\; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $x \neq x_0$

Ovvero: esiste un intorno di x_0 all'interno del quale, quando calcolo $g(x)$, l'immagine è diversa da y_0

Praticamente ← Esiste solo un punto dove $g(x) = y_0$ ovvero x_0.

🚩 00:27 Quindi

Il $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell$

ES: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$: $x \xrightarrow{g} \frac{1}{x} \xrightarrow{f} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Si calcola prima

$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g} = \underbrace{0}_{y_0}$

Poi calcoliamo

$\lim_{y \to 0} \sin(y) = 0$

$y = \frac{1}{x}$

In pratica

$x \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$

ES: $\lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\log\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)$

$x \to \underset{+\infty}{x^2-1} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \underset{+\infty}{\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow{\log} \underset{+\infty}{\log\left(\sqrt{x^2-1}\right)} \xrightarrow{\text{arctg}} \underset{\frac{\pi}{2}}{\text{arctg}\left(\log\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)}$

ES: $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

se $y = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ quindi $x = \frac{1}{y} \Rightarrow x \to +\infty \Rightarrow y = \frac{1}{x} = 0$ Bott!

ES: $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \log(1+x) = \lim_{x \to 0} \log (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

ES: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$y = e^x - 1$
$e^x = 1 + y$ $\quad x = \log(1+y) \quad x \to 0 \Rightarrow y = 0$

riscriviamo: $\lim_{y \to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{\log(1+y)}{y}} = 1$

ES: $\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$

1:38

Infinitesimi

$f(x)$ è un infinitesimo in x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

Supponiamo che f e g siano due inf. in x_0, diremo che f e g sono inf. dello stesso ordine se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$, con $\ell \neq 0$ e finito.

f è un inf di ordine superiore a g se $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = 0}$ $f >> g$, $f = o(g)$ o piccolo

f è un inf di ordine inferiore a g se $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \infty}$ $f << g$

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x$ e x sono infin. dello stesso ordine.

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1-\cos x$ e x^2 sono infin. dello stesso ordine.

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \log()$ e x sono infin. dello stesso ordine.

Si dice che se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow f$ e g sono asintotiche : $f \sim g$

Se però $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$, "si può fare qualcosa lo stesso":

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ lo scriviamo come $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{2} x^2} = 1 \Rightarrow f \sim \frac{1}{2} g \Rightarrow 1-\cos x \sim \frac{1}{2} x^2$

! non sono uguali!

ES $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)}{e^{\sin x}-1}$ 1 2

1) $\log(1+x^3)\frac{x^3}{x^3} =$ ovvero $\frac{\log(1+x)}{x}$

2) $e^{\sin x}-1 \cdot \frac{\sin x}{\sin x}$ ovvero $\frac{e^x-1}{x} = 1$

quindi possiamo dire che:

$$\frac{\log(1+x^3)}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{x^3}{\sin x} \sim \frac{x^3}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}^{\,2}}{x} = 0$$

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 x}$ 1 2

1) $1-\cos x \cdot \frac{1}{x^2} \; x^2$ 2) $\tan^2 x \sim x^2$

$\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos x}{\tan^2 x} \sim \frac{\frac{1}{2}\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$$

ES: $(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$

Limiti notevoli

funzioni goniometriche	
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{arcsenx}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$

funzioni esponenziali e logaritmiche		
$\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$	
$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$	
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = lna$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ $\quad \alpha > 0$	
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{a^x} = 0$ $\quad a > 1$	
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$	$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\cdot ln[f(x)]}$	l' uguaglianza a sinistra può essere utile per risolvere alcuni limiti che si presentano nelle forme indeterminate $\mathbf{0^0}$ $\mathbf{1^{\pm\infty}}$ $+\infty^0$

ad ogni limite notevole si possono applicare le seguenti proprietà che lasciano invariato il risultato			
limite iniziale	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito	se nel limite al posto di x c'è **nx** il risultato del limite resta lo stesso	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{senx} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\,\mathbf{nx}}{\mathbf{nx}} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{nx}{sen\,nx} = 1$

frazioni equivalenti			
per il calcolo dei limiti notevoli può essere utile ricordare alcune delle possibili operazioni con le frazioni:			
scomporre la frazione iniziale in due frazioni	dividere ogni monomio del numeratore e del denominatore per la stessa quantità **n**	moltiplicare e dividere la fra- zione per la stessa quantità **n**	moltiplicare e dividere il numeratore per **n** e/o moltiplicare e dividere il denominatore per **m**
$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = a \cdot \frac{1}{b}$	$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}$	$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n}$	$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{n}\cdot n}{\frac{b}{m}\cdot m}$
$\frac{\mathbf{a\cdot b}}{\mathbf{c\cdot d}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$	$\frac{a\cdot b}{c\cdot d} = \frac{\frac{a\cdot b}{n}}{\frac{d\cdot c}{n}}$	$\frac{a\cdot b}{c\cdot d} = \frac{a\cdot b}{c\cdot d} \cdot \frac{n}{n}$	$\frac{a\cdot b}{c\cdot d} = \frac{\frac{a\cdot b}{n}}{\frac{d\cdot c}{n}}$
$\frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{c+d}} = \frac{a}{c+d} + \frac{b}{c+d}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{\frac{a}{n}+\frac{b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{(a+b)}{(c+d)} \cdot \frac{n}{n}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{\frac{a}{n}+\frac{b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$
$\frac{\mathbf{a\cdot b}}{\mathbf{c+d}} = a \cdot \frac{b}{c+d}$	$\frac{a\cdot b}{c+d} = \frac{\frac{a\cdot b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$	$\frac{a\cdot b}{c+d} = \frac{a\cdot b}{(c+d)} \cdot \frac{n}{n}$	$\frac{a\cdot b}{c+d} = \frac{\frac{a\cdot b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$

© 2013 - www.matematika.it

Teorema — Principio di sostituzione degli infinitesimi

Siano f_1 ed f_2 infinitesimi in x_0 / $f_1 = o(f_2)$ (f_1 tende più velocemente a 0 di f_2)
Abbiamo anche g_1 e g_2 infinitesime in x_0 / $g_1 = o(g_2)$.

Allora $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_2}{g_2}}$

In poche parole: possiamo sostituire (eliminare) degli infinitesimi di ordine superiore.

Dim: $\lim \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} \overset{\text{in evidenza}}{\underset{\text{grado superiore}}{=}} \frac{f_2\left(\frac{f_1}{f_2}+1\right)}{g_2\left(\frac{g_1}{g_2}+1\right)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_2}{g_2}$ stessa cosa dei limiti "normali"

(con $\frac{f_1}{f_2} \to 0$ e $\frac{g_1}{g_2} \to 0$)

ES: $\lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{3}{tg^3 x} + \overset{1}{\sin x} + \overset{2}{1 - \cos x}}{\underset{4}{\log^4(1+x)} - \underset{5}{(e^{x^5} - 1)}}$

$=$ Posso ignorare quelli di ordine superiore $= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\log^4(1+x)} \sim \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}} = \frac{1}{x^3} \to \infty$

Ordine di un infinitesimo

Si confronta un infinitesimo con l'infinitesimo campione x^α in $x_0 = 0$ (ovvero una f che in x_0 tende a 0). Nei casi generali l'inf. campione è $(x - x_0)^\alpha$ in x_0

Definizione: f è un infinitesimo di ordine α se $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \ell$ con $\ell \neq 0$ e finito, ovvero se $f(x)$ ha lo stesso ordine di x^α

ES: $tg^3(x)$: $\lim_{x \to 0} \frac{tg^3 x}{x^3} = 1$

ES: $(1 - \cos x)^8$ $\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^8}{(x^2)^8} = \frac{1}{2^8}$ perché $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$