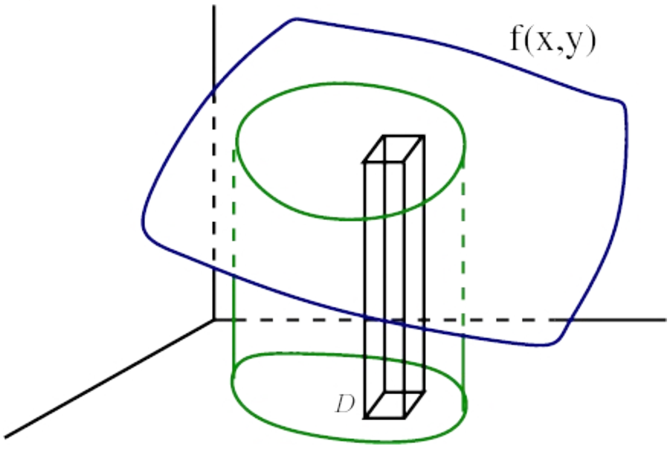
Area Dominio Piano

Nel caso di 1 variabile: $I = [a, b]$, $\int_I dx = \int_a^b dx = [x]_a^b = b-a$

Misura di I $\to m(I)$

Nel caso di 2 variabili

$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy$ se $f(x,y) \geq 0$ l'integrale rappresenta il volume compreso tra $z = f(x,y)$ ed il piano xy



Se $z = f(x,y) = 1$ abbiamo un piano parallelo a xy

Se facciamo l'integrale $\iint_A dx\, dy$ otteniamo il volume del "cilindroide".

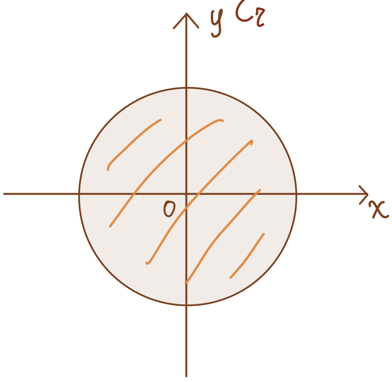
Il volume di un cilindro è $\text{area}_{base} \times h$ $\to$

$\to$ area$(A) \cdot 1 z = m(A)$

Se $A \subset \mathbb{R}^2 \to m(A) = \text{area}(A) = \iint_A dx\, dy$

ES: Area di $C_r(0)$

Area di $C_r(0) = \iint_{C_r} \overset{1}{dx\, dy}$



convertiamo in coord polari

$$\int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} \rho\, d\theta = \int_0^r \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^r \rho\, [\theta]_0^{2\pi}\, d\theta = \int_0^r \rho\, 2\pi\, d\rho$$

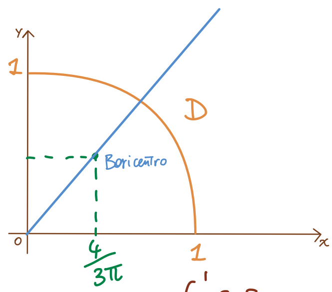
$$= 2\pi \int_0^r \rho\, d\rho = \cancel{2}\pi \left[\frac{\rho^2}{\cancel{2}}\right]_0^r = \underline{\pi r^2}$$ Area del cerchio

Baricentro di D

$$x_0 = \frac{1}{m(D)} \iint_D x \, dx \, dy \qquad y_0 = \frac{1}{m(D)} \iint_D y \, dx \, dy$$

invece della lunghezza

ES: calc il baricentro del dominio D:



$$x_0 = \frac{1}{m(D)} \iint_D x \, dx \, dy \quad \to \quad m(D) = \frac{\pi \overbrace{r^2}^{\to 1}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \iint_D x \, dx \, dy \quad \to \quad \text{coord polari} \quad \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho \cos\theta \cdot \rho \, d\theta = \int_0^1 \rho^2 \left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

quindi: $\frac{1}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{\pi 3} = y_0 = x_0$