Integrazione funzioni Razionali fratte

– Lezione del prof incompleta, prima parte da Elia Bombardelli

Una f razionale fratta è una funzione che presenta sia al numeratore che al denominatore un polinomio. La procedura di integrazione è diversa da quelle viste fino a questo momento, essa prevede ④ passaggi, di cui il I va fatto solo in alcuni casi.

① **Divisione** Tra numeratore e denominatore:
Va fatta solo se il grado del denominatore $\deg d(x) \leq \deg n(x)$.
Se $\deg d(x) > \deg n(x)$ saltiamo il passaggio.

② **Fattorizzare** il Denominatore:
Dobbiamo scomporre il denominatore in un prodotto di fattori di primo grado e/o di II grado, non ulteriormente scomponibili.

③ **Decomporre** la frazione in fattori semplici

④ **Integrare** i vari "Pezzi" creati

ES: $\displaystyle\int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\,dx$

① $\deg n(x) > \deg d(x) \Rightarrow$

$$\begin{array}{rl|l} & x^3-3x-1 & x^2-x-2 \\ 2) & -x^3+x^2+2x & x+1 \\ \hline 3) & // \; x^2-x-1 & \\ & -x^2+x+2 & \\ \hline & // \quad // \quad 1 & \end{array}$$

questo algoritmo ci consente di riscrivere la frazione di Potenza come:

$$\frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2} = x+1+\frac{1}{x^2-x-2} \quad ⓐ$$

Divisione Tra polinomi
1) $x^3/x^2 = x$
2) $x \cdot$ polinomio divisore, riportato dall'altro lato cambiato di segno.
3) Somma
... Reitero

② Riscriviamo ⓐ come prodotto di parentesi di I o II grado non scomponibili

x^2-x-2 = Somma prodotto $\begin{cases} a+b=-1 \\ a\cdot b=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-1-b \\ (-1-b)\cdot b = -b-b^2=-2 \Rightarrow b(1-b)=-2 \end{cases}$

$1-b=-2 \Rightarrow b=2$

$a=-1-b \Rightarrow a=-(-2)-1=1$

$\Rightarrow x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

$\Rightarrow x+1+\dfrac{1}{x^2-x-2} = x+1+\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$

③ Riscriviamo la frazione ⓐ come somma di frazioni piu' semplici:

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} \overset{mcm}{=} \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{Ax+A+Bx-2B}{(x-2)(x+1)} = \frac{x(A+B)+A-2B}{(x-2)(x+1)}$$

Se vogliamo che $\dfrac{1}{x^2-x-2} = \dfrac{x(A+B)+A-2B}{(x-2)(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases}$ $\begin{cases} A=-B \\ -B-2B=1 \end{cases} \Rightarrow -3B=1$ Per $B=-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow A=\dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

④ $\int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int x+1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx = \int x+\int dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx$

$= \frac{x^2}{2}+x+\underbrace{\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|}_{\text{proprieta' log}}+c = \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+c$

proprieta' log $\rightarrow$ $\log a - \log b = \log\frac{a}{b}$

ES: $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

① $\deg n(x) \not> \deg d(x)$

② $x^2-1 = \underline{(x+1)(x-1)} = x^2 \cancel{-x} \cancel{+x} - 1 = x^2-1$

③ $\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} = \frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(A+B)-A+B}{(x+1)(x-1)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ \Rightarrow -(-B)+B=1 \end{cases}$ per $2B=1 \rightarrow B=\frac{1}{2} \Rightarrow A=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}$

④ $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+c$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$

II^a parte: fattore di $II°$ non scomponibile o potenza di un monomio

ES: $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$

① Divisione $N < D \Rightarrow$ Non serve

② Fattorizzare $x^3+x = x(x^2+1)$

③ Riscrivere $\frac{1}{x^3+x} = \underbrace{\frac{A}{x}}_{I°} + \underbrace{\frac{Bx+C}{x^2+1}}_{II°} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B)+A+Cx}{x(x^2+1)}$

$=$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \underline{C=0} \\ \underline{A=1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Rightarrow 1+B=0 \\ \underline{\text{per } B=-1} \end{cases}$$

④ $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x} + \frac{-x+0}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$

$= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + c$

$\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \ln|f(x)| + c$

ES 2: $\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

① Divisione $N<D$

② Fattorizziamo: $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = \underline{x(x-1)^2} = x(x^2-2x+1)$

③ Riscrivere la frazione come la somma di piu' frazioni semplici

$$\frac{x+1}{x^3-2x^2+x} = \underbrace{\frac{A}{x}}_{\text{uguale}} + \underbrace{\frac{B}{x-1}}_{\text{contenuto}} + \underbrace{\frac{C}{(x-1)^2}}_{\text{intero quadrato}} = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2} = \frac{A(x^2-2x+1)+Bx^2-Bx+Cx}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+Cx}{x(x-1)^2} = \frac{[x^2(A+B)+x(-2A-B+C)+A]}{x(x-1)^2} = x+1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C=1 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{B=-1} \\ \underline{A=1} \\ \underline{C=2-1+1=2} \end{cases}$$

④ $\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x} - \int \frac{1}{x-1} + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x| - \ln|x-1| + 2\int (x-2)^{-2}\,dx$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + 2\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c$

Riassumendo:

I caso: Scomposizione a parentesi di I grado, ad esempio $\overset{a}{(x+1)}\,\overset{b}{(x-1)}$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \underset{a}{\frac{A}{x+1}} + \underset{b}{\frac{B}{x-1}} \Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}\,dx$$

II Caso: Scomposizione a parentesi contenenti un polinomio di II grado, ad esempio $(x+1)(\underline{x^2-1})$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-1} \Rightarrow \int \frac{A(x^2-1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-1)}\,dx$$

III Caso: Scomposizione a parentesi di II grado, ad esempio: $x(x-1)^2$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \underset{\text{uguale}}{\frac{A}{\underline{x}}} + \underset{\text{contenuto}}{\frac{B}{\underline{x-1}}} + \underset{\text{intero quadrato}}{\frac{C}{\underline{(x-1)^2}}} \Rightarrow \int \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}\,dx$$

IV Caso: e se avessimo un polinomio di III grado, ad es: $\frac{1}{x(x-3)^3}$?

$$\frac{1}{x(x-3)} = \underset{\text{fissa}}{\frac{A}{x}} + \underset{\text{I}}{\frac{B}{x-3}} + \underset{\text{II}}{\frac{C}{(x-3)^2}} + \underset{\text{III}}{\frac{D}{(x-3)^3}} \ldots$$

In generale si aggiungono tante frazioni quanto è il grado del denominatore $\left(+\frac{A}{x}\right)$.

Continuo integrali di funzioni razionali

- $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx$ Supponiamo che Q_n abbia r radici reali ed s radici complesse con molteplicità >1

ES: $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}$ $x=0$ radice doppia, $x=\pm i$ radici complesse doppie

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax(x^4+2x^2+1) + B(x^4+2x^2+1) + (Cx+D)x^2\cdot(x^2+1) + (Ex+F)x^2}{x^2(x^2+1)^2}$$

[continuo]

00:29

ES: $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x+2)}\,dx$ Abbiamo solo radici reali $\Rightarrow$ Scomponiamo come $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

Generalmente, quello che si fa generalmente è il mcm e calcolo del sistema; in questo caso, però, possiamo ricavare A moltiplicando entrambi i membri per $(x-1)$, per via del fatto che $\frac{A}{(x-1)}(x-1) = A$.

$$\Rightarrow \frac{A}{(x-1)}(x-1) + \frac{B}{(x+2)}(x-1) = A + \frac{Bx-B}{(x+2)} \Rightarrow A + \boxed{\overset{b}{\frac{B(x-1)}{(x+2)}}} = \frac{2x-1}{(x+2)} = \frac{1}{3}$$

Prendendo $x=1$ in questa uguaglianza, abbiamo che b diventa zero.
$\Rightarrow A = \frac{1}{3}$, possiamo ricavare B facendo gli stessi passaggi

"Scorciatoia" per caso I

Risolviamo il sistema giusto per esercitarci

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)} = \overset{2}{\frac{x(A+B)+2A-B}{(x-1)(x+2)}}$$

Affinché $\frac{2x-3}{(x-1)(x+2)} = 2 \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \Rightarrow A=2-B \\ 2A-B=-3 \Rightarrow 2(2-B)-B=-3;\ 4-2B-B=-3;\ -3B+4=-3 \\ \Rightarrow 3B-4=3;\ B=\frac{3+4}{3}=\frac{7}{3} \end{cases}$

$A+B=2 \Rightarrow A+\frac{7}{3}=2;\ A=2-\frac{7}{3};\ A=\frac{6-7}{3}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{7}{3}$

Quindi $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x+2)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1} + \frac{7}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{7}{3}\ln|x+2| + c$

$= x\ln(a) = \ln(a^x) = \frac{1}{3}\ln\left(|x-1|\cdot|x+2|^7\right)+c$

ES: $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$ Siamo nel caso II $= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

Usiamo il "Trucchetto": $\frac{1}{x^2+1} = A + \underbrace{\frac{Bx+C}{x^2+1}(x-1)}_{\to 0} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

per $x=1$

Sinceramente non ci ho capito niente

Integrazione di funzioni irrazionali

Possiamo avere 3 tipi di casi:

I: $\int f(x, \sqrt{ax+b})\,dx$ l'integrando dipende da x e da $\sqrt{ax+b}$

II: $\int f\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ La x compare anche al denominatore sotto radice

III: $\int f(x, \underbrace{\sqrt{ax^2+bx+c}}_{y})\,dx$ sotto la radice compare una eq di II°.

la $f(x,y)$ è funzione razionale di x e y, dove la y è il secondo arg considerato prima.

Come si procede?

I: $\int f(x, \sqrt{ax+b})\,dx$ $\quad t = \sqrt{ax+b}$

II: $\int f\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ $\quad t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

III: $\int f(x, \underbrace{\sqrt{ax^2+bx+c}}_{y})\,dx$ Caso un po' più complicato pongo $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,(t-x)$

ES: I caso

$\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx$ la f è una funz razionale: $f(x,y) = \frac{1}{x\,y}$ radice pongo $t = \sqrt{x+4}$

Ci ricaviamo la x:

$t = \sqrt{x+4}$; $t^2 = x+4$; $x = t^2-4$ $\Rightarrow$ $dx = D(x) = D(t^2-4) = 2t\,dt$

$\Rightarrow \int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx = \int \frac{1}{(t^2-4)\cdot \cancel{t}} \cdot 2\cancel{t}\,dt = 2\int \frac{1}{(t+2)(t-2)}\,dt = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2)+B(t+2)}{(t+2)(t-2)}$

$= \frac{At-2A+Bt+2B}{(t+2)(t-2)} = \frac{t(A+B)\ 2(B-A)}{(t+2)(t-2)} = \frac{2}{(t+2)(t-2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ B-A=1 \Rightarrow B+B=1 \to B=\frac{1}{2} \end{cases}$

$A+B=0 \Rightarrow A+\frac{1}{2}=0$ per $A=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\int \frac{1}{t+2} + 2\,\frac{1}{4}\int \frac{1}{t-2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|t+2| + \frac{1}{2}\ln|t-2| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + c$

Siccome $t = \sqrt{x+4} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + c$

ES: $\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ pongo $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ricavo la $x \Rightarrow t^2=\frac{1-x}{1+x}$;

$t^2(1+x)=1-x$; $t^2+t^2x=1-x$; $t^2x+x=1-t^2$; $x(t^2-1)=1-t^2$

$\Rightarrow x=\frac{1-t^2}{t^2-1}$ ricavo $dx=\frac{-2t(t^2-1)-(1-t^2)2t}{(t^2-1)^2}=\frac{-2t^3+2t-[2t-2t^3]}{//}$

$=\frac{-\cancel{2t^3}-2t-2t+\cancel{2t^3}}{//}=\frac{-4t}{(t^2-1)^2}=dt$

$\Rightarrow \int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\int\frac{1-t^2}{t^2-1}\cdot t\cdot\left(-\frac{4t}{(t^2-1)^2}\right)dt=\int\frac{t-t^3}{t^2-1}\cdot\left(-\frac{4t}{(t^2-1)^2}\right)dt$

$=\int\frac{-4t^2+4t^4}{(t^2-1)^3}\,dt=4\int\frac{t^2(-1+t^2)}{(t^2-1)^3}\,dt$

molti calcoli dopo.. $=\arctan(t)-3\int\frac{1}{(1+t^2)^2}+2\int\frac{1}{(1+t^2)^3}\,dx$ Applichiamo la formula iterativa

[...]

ES: Caso III: $\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$, $a>0$

$\int\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx$ pongo $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,(t-x)$, nel nostro caso $a=1$

$\Rightarrow\sqrt{1+x^2}=t-x$, $t=x+\sqrt{1+x^2}$ che e' proprio il denom

Calcoliamo $dx=D(t=x+\sqrt{1+x^2})$

$\Rightarrow (t-x)^2=1+x^2\Rightarrow t^2-2tx+\cancel{x^2}=1+\cancel{x^2}$; $t^2-2tx=1$; $2tx=t^2-1$

$\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t}$

$dx=\frac{2t\,(2t)-(t^2-1)\cdot 2}{4t^2}=\frac{\overset{2t^2}{\cancel{4t^2}-\cancel{2t^2}}+2}{4t^2}=\frac{\cancel{2}(t^2+1)}{\underset{2}{\cancel{4}}t^2}$ Sostituiamo

$\int\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{t^3}\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{t^3}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^3}\,dt$

$=\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{2}\frac{t^{-2}}{-2}+c=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{4}\frac{1}{t^2}+c$ Sostituiamo $t=x\sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\ln\left|x\sqrt{1+x^2}\right|-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\right)^2+c$

02:41

Caso Particolare

$$\int f\left(x, \sqrt{-ax^2+bx+c}\right) dx$$

$a>0$ (ma ha il '-' davanti, quindi sicuramente negativo)

$b^2-4ac>0$ Il discriminante è positivo $\Downarrow$ Due radici reali e distinte

Siano δ_1 e δ_2 radici reali e distinte di $-ax^2+bx+c=0$

Si pone $t=\sqrt{a\,\dfrac{\delta_2-x}{x-\delta_1}}$

Es: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx \Rightarrow a=1$, $\Delta=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac = 1+3=4>0$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm 2}{-1} = \begin{cases} -3 \Rightarrow \delta_1=-3 \\ +1 \Rightarrow \delta_2=1 \end{cases}$$

Possiamo scomporre $\dfrac{1}{\sqrt{-(x^2+2x-3)}}$ come $\begin{cases} a+b=2 \\ a\cdot b=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} a=2-b \\ (2-b)b=-3 \end{cases} \Rightarrow 2b-b^2=-3$

$b^2-2b-3=0$

$\Delta=4-4(-3)=16$

$b_{1,2}=\dfrac{2\pm4}{2}$ $\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{-(x+3)(x-1)}} = \sqrt{\frac{1}{(x+3)(1-x)}}$$

$\Rightarrow a=2-b \Rightarrow \begin{cases} a=2-3=-1 \\ a=2+1=3 \end{cases}$

= mettiamo in evidenza $x+3$ = $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}}$ pongo $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{x+3}}$

Calcoliamo la x: $t^2=\dfrac{1-x}{x+3}$; $t^2(x+3)=1-x$; $t^2x+3t^2=1-x$; $3t^2-1=-t^2x-x$

$t^2x+x=-3t^2+1$

$\Rightarrow x\left(\cancel{t^2+1}\right)=\dfrac{-3t^2+1}{t^2+1}$; $x=\dfrac{1-3t^2}{1+t^2}$

$$dx = \frac{-6t(1+t^2)-(1-3t^2)2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-6t-\cancel{6t^3}-2t+\cancel{6t^3}}{(1+t^2)^2} = -\frac{8t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

Riscriviamo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1-3t^2}{1+t^2}+3\right)\cdot\cancel{t}}\cdot\left(-\frac{8\cancel{t}}{(1+t^2)^2}\right)dt = \int \frac{1}{\frac{1-\cancel{3t^2}+3+\cancel{3t^2}}{\cancel{1+t^2}}}\cdot\left(-\frac{8}{(1+t^2)^{\cancel{2}}}\right)dt$$

$$= \int -\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{1+t^2}\,dt = -\frac{8}{4}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt = -2\cdot \text{arcTg}(t)+c$$

Ritorniamo a x

$$t=\sqrt{\frac{1-x}{x+3}} \Rightarrow -2\,\text{arcTg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}\right)+c$$

2:50

Integrazione di funzioni Trascendenti: Trigonometriche, esponenziali, logaritmiche...

Abbiamo sostituzioni del Tipo...

ES: $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ pongo $t = e^x \Rightarrow x = \ln(t) \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$

quindi $\int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t(1+t)}\,dt$ ← potremmo risolverlo risolvendo il sistema con il metodo visto all'inizio della lezione

oppure semplificando $\int \frac{1+t-t}{t(1+t)}\,dt = \int \frac{\cancel{1+t}}{t\cancel{(1+t)}} - \int \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}(1+t)}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt$

$= \ln|t| - \ln|1+t| + c = \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + c$ Torniamo a $x = e^x$

$\Rightarrow \ln|e^x| - \ln|1+e^x| + c = x - \ln|1\cdot e^x| + c$

ES: $\int \frac{1}{1+tg\,x}\,dx$ pongo $t = tg\,x \Rightarrow x = arctg(t) \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{1+t^2+t+t^3}\,dt = \int \frac{1}{t^3+t^2+t+1}\,dt$

↑ non ci conviene

~~$\Rightarrow$ facciamo comparire al num termini utili in modo che quando spezziamo la frazione, uno o più termini si semplificano~~

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{1-t^2}\,dt \Rightarrow \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A(1+t^2)+Bt(1+t)+C(1+t)}{(1+t)(1-t^2)} = \frac{A+At^2+Bt+Bt^2+C+Ct}{//}$

$= \frac{t^2(B+A)+t(B+C)+A+C}{(1+t)(1-t^2)} = \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}$

$\begin{cases} B+A = 0 \Rightarrow B = -A \\ B+C = 0 \Rightarrow -A+C = 0 \Rightarrow A = +C \\ A+C = 1 \Rightarrow +C+C = 1 \Rightarrow \underline{C = 1/2} \end{cases}$

$A = C \Rightarrow \underline{A = 1/2}$, $B = -A \Rightarrow \underline{B = -1/2}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t} - \int \frac{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t}\,dt + \int \frac{\frac{-t+1}{2}}{t^2+1}\,dt$

$-\frac{1}{2}\left(\frac{t-1}{t^2+1}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\int\frac{t-1}{t^2+1}\,dt = // - \frac{1}{2\cdot 2}\int\frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}$

$= \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{4}\ln|t^2+1| - \frac{1}{2}\,arctg(t)$

Torniamo a $t = tg(x) \Rightarrow$

$= \frac{1}{2}\ln|1+tg(x)| - \frac{1}{4}\ln|tg^2(x)+1| - \frac{1}{2}\underbrace{arctg(tg\,x)}_{x} + c$

Sostituzione con le formule parametriche

quando abbiamo una dipendenza da sin e cos

ES: $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ si usano le F. parametriche

Se pongo $t = tg\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$ $\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$, $\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$

$t = tg\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = arcTg(t)$, $x = 2arcTg(t) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\cdot 1\ dt$

Sostituiamo

$$\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1+t^2}{t^2+2t+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{2+2t^2}{t^2+t^4+2t+2t^3+1+t^2}\,dt = \int \frac{2+2t^2}{t^4+2t^3+2t^2+2t+1}\,dt = \int \frac{(1+t^2)(2)}{(1+t^2)(1+t^2+2t)} =$$

$$= 2\int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = 2\,\frac{(t-1)^{-1}}{-1} + c = \frac{-2}{t+1} + c \qquad t = tg\left(\tfrac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{tg\left(\frac{x}{2}\right)+1} + c$$