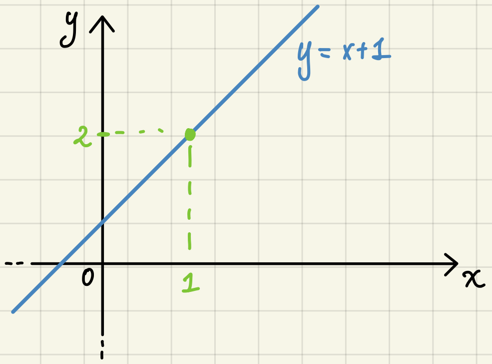
Limiti

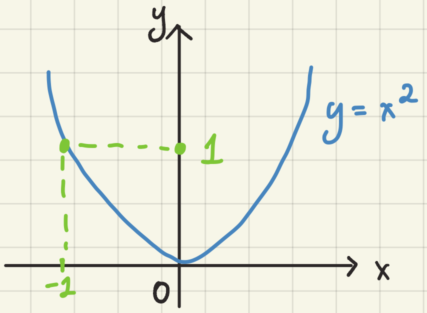
Introduzione



Supponiamo di dover calcolare:

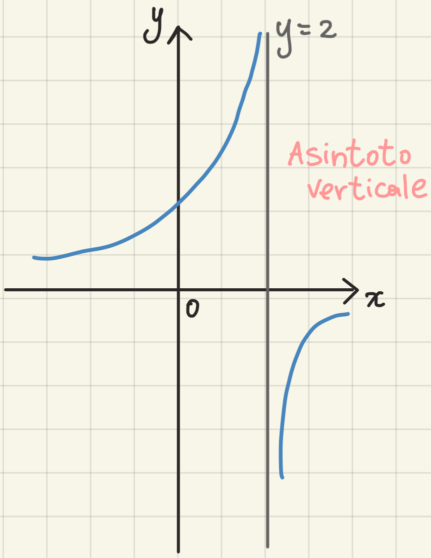
$$\lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

Cosa succede ad $x+1$ (sulla y) quando x si avvicina ad $x=1$?



$$\lim_{x \to -1} x^2 = 1$$

In questi casi banali ha senso sostituire il valore nella funzione.



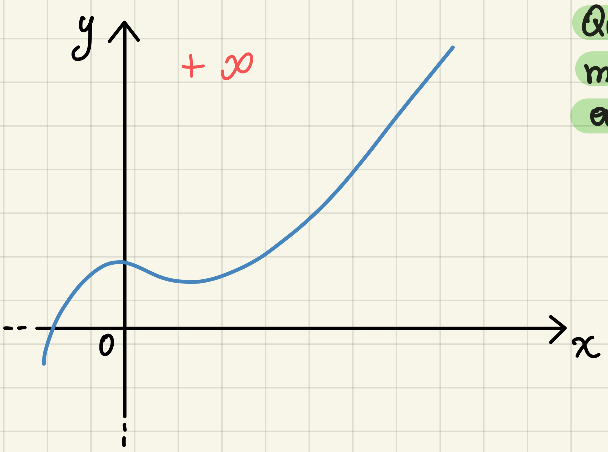
$$y = \frac{-3x-2}{x-2} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{-3x-2}{x-2} \xrightarrow{\text{sostituz.}} \frac{-8}{0}$$

Non si puo' fare

$$D = x-2 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 2\}$$

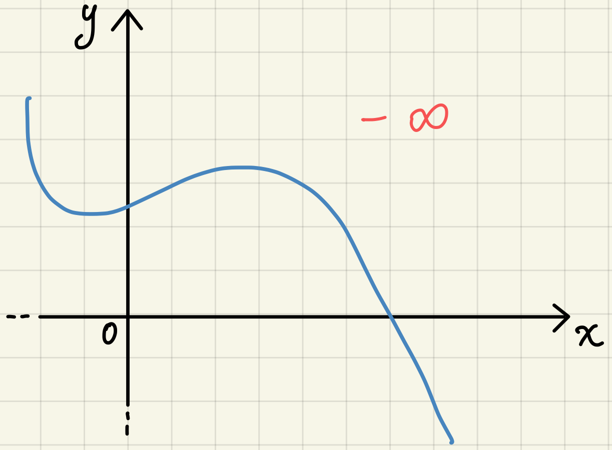
Limiti All' infinito

Che significa $\lim_{x \to +\infty} f(x)$? $\Rightarrow$ Che fa la funzione quando la x diventa sempre piu' grande



Quando ad x molto grandi corrispondono y molto grandi, si dice che il limite tende all'infinito.

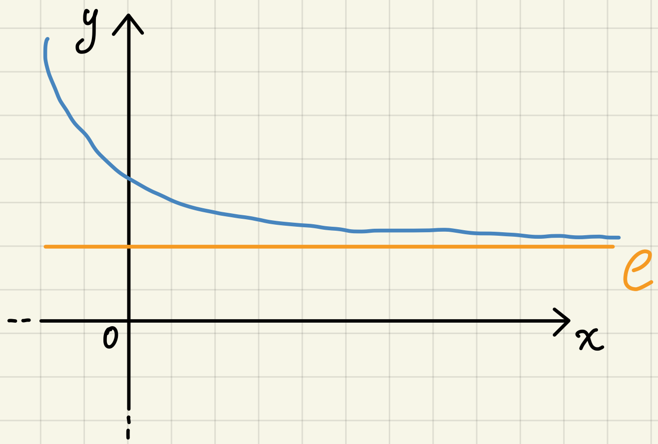
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ Questo caso è analogo al precedente.

$\lim = \ell$

Quando facciamo tendere il limite a $+\infty$ ma otteniamo come risultato ℓ, le y tendono ad avvicinarsi proprio ad ℓ:

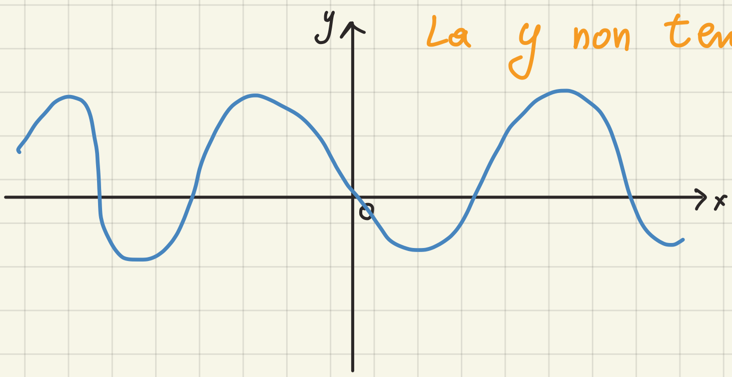


Limiti indefiniti

Il risultato del limite potrebbe essere non determinato:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = N. E.$

La y non tende a nulla

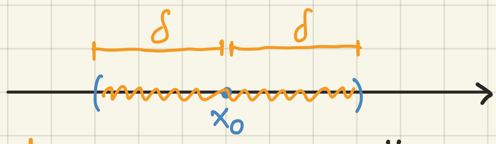


Definizioni

Intorno

Chiamiamo Intorno di x_0 e di raggio $\delta > 0$ (Delta) Un intervallo APERTO:

$$V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

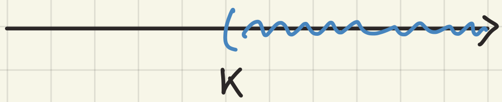


Possiamo anche definire Intorno di $-\infty$ un Intervallo APERTO del tipo:

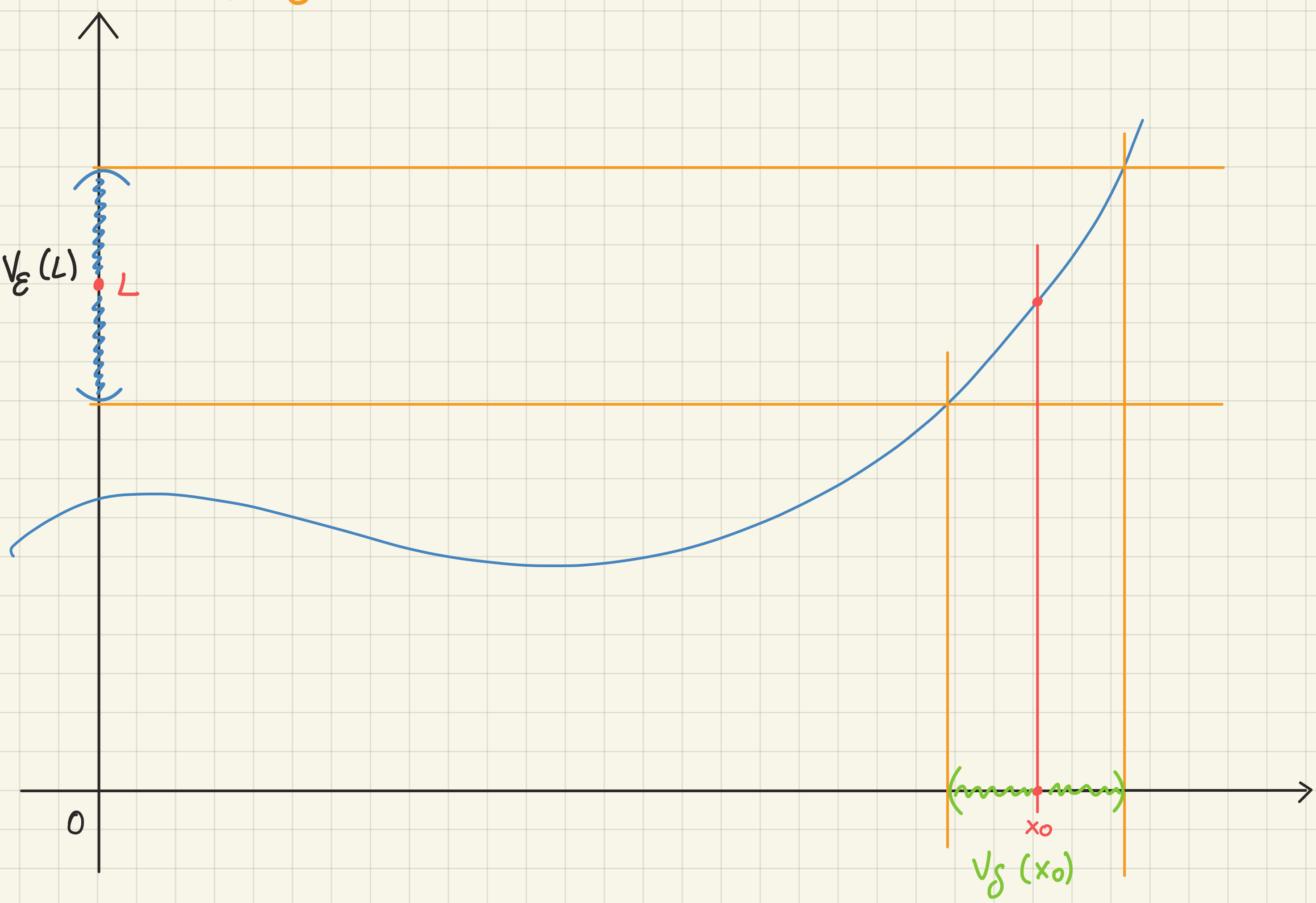
$$(-\infty, K) = \{x \in \mathbb{R} : x < K\}$$

Possiamo dire lo stesso per L' Intorno di $+\infty$:

$$(K, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > K\}$$



Cosa significa quindi calcolare il lim di una funzione?

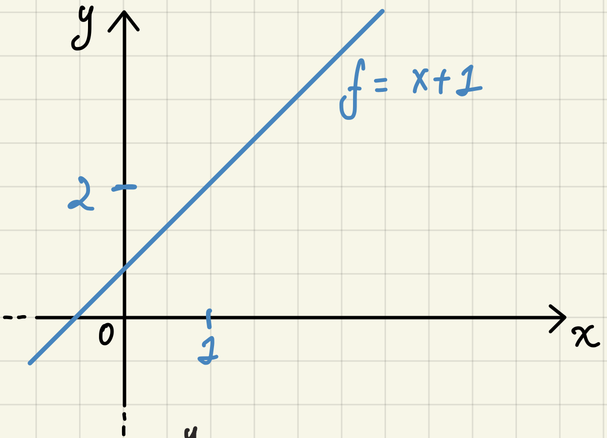


Per ogni intorno di L che consideriamo (BLU) riusciamo a trovare un intorno di x_0 (verde); Se calcoliamo quanto vale la funzione quando $\{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} - x_0$, otteniamo un numero reale che sara' compreso nell'intervallo $\{L - \delta < y < L + \delta\} - L$

$\{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} - x_0 \longrightarrow$ Intorno di x_0

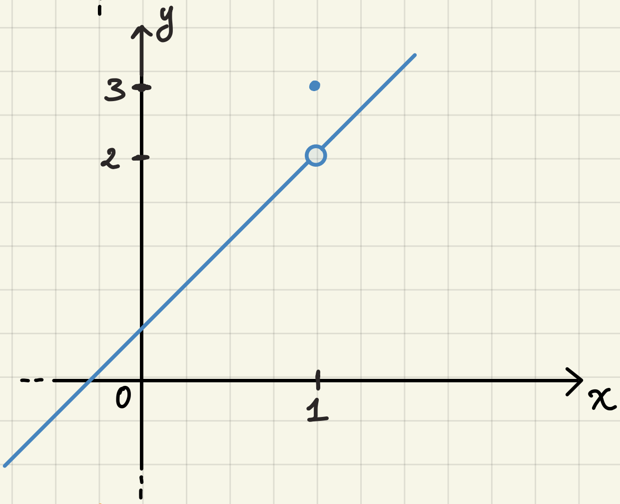
$\{L - \delta < y < L + \delta\} - L \longrightarrow$ Intorno Di L

Funzioni continue elementari



$$\lim_{x \to 1} x+1 = 2$$
$$\updownarrow$$
$$f(1)\ x+1 = 2$$

; 2 e' proprio il valore che f assume quando la calcoliamo in $x = 1$.



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Se calcoliamo

$$f(1) = 1 \neq \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Quindi ...

E' chiaro che il primo caso e' quello piu' comune, mentre il secondo e' "piu' strano".
Nel primo caso la funzione e' CONTINUA nel punto che ci interessa, ovvero in $x = 1$, perche' il $\lim_{x \to 1} f = f(1)$.

Funzioni CONTINUE

Si dice che f e' continua in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se la f e' continua non solo in x_0 ma in OGNI PUNTO di un intervallo, allora f e' continua sull'intervallo.
In questo caso, la funzione si puo' tracciare "senza staccare la penna dal foglio". (nell'intervallo)

Funzioni elementari continue

- **Potenze:** $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{2}}$
- **Funz. esponenziali:** $y = 2^x$, $y = e^x$
- **Funz. logaritmiche:** $y = \log_3 x$, $y = \ln x$
- **Funz. goniometriche:** $y = \sin x$, $y = \cos x$

} Sono continue nel loro insieme di definizione.

Esempio

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} e^x = 1$$

Quindi
Se la funzione in esame e' continua, il limite della f per quel valore specifico, e' uguale proprio al valore che la f assume in quel punto.

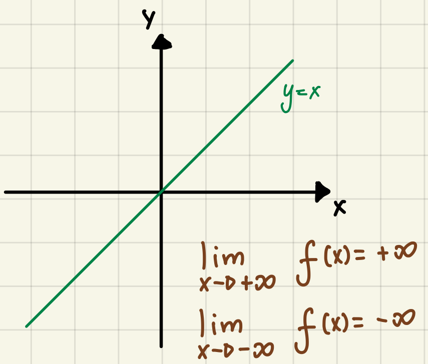
Inoltre tutte le funz che si possono ottenere come somma, prodotto, quoziente e composizione da funzioni elementari, sono continue nel loro dominio naturale.

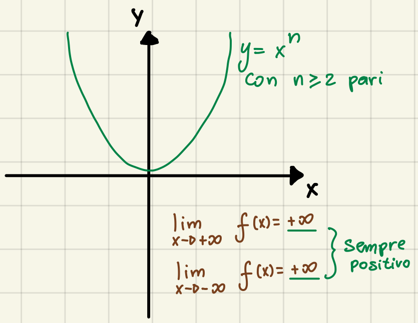
Esempi:

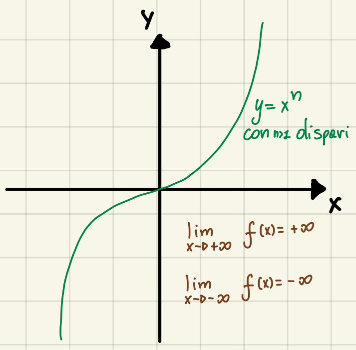
$y = e^{x^2}$ composizione di f potenza ed esponenziale

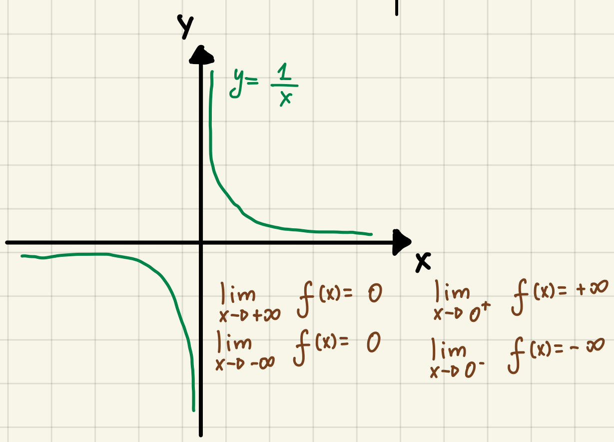
$y = 3x^2 - x - 1$ sottrazione

Funzioni elementari - grafici





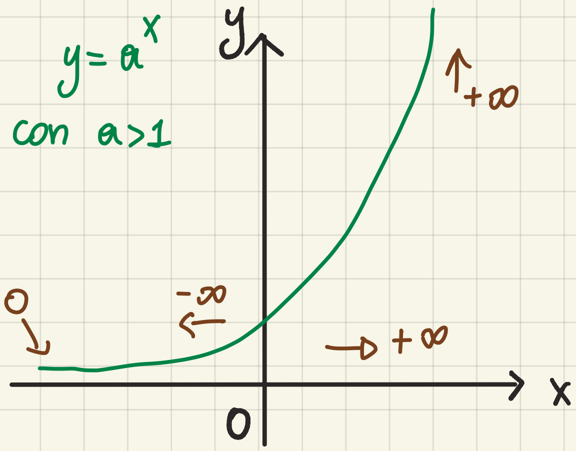




Funzioni esponenziali e logaritmi

$y = a^x$

con $a > 1$

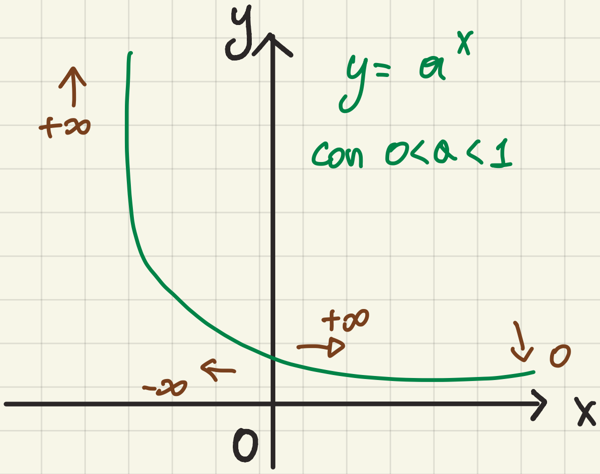


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$y = a^x$

con $0 < a < 1$

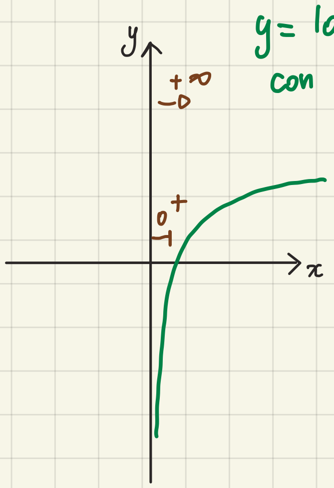


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$y = \log_a x$

con $a > 1$

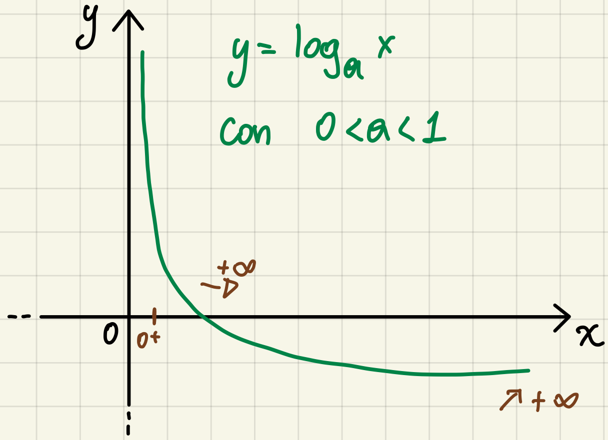


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$y = \log_a x$

con $0 < a < 1$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

* Anche se non sembra, i logaritmi crescono (o decrescono) all'infinito, anche se molto lentamente.

Limiti di f razionali per $x \to x_0$

Caso 1: Quando sostituisco x_0 NON si annulla né numeratore né denominatore:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{1} = 3$$ Non si annulla ✓

Caso 2: Quando provo a sostituire x_0 si annulla il numeratore ma non il denominatore.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x+2} = \frac{1^2-1}{1+3} = 0$$

Sia nel caso 1 che 2, possiamo dare il risultato immediatamente perché le funzioni sono continue.

Caso 3:

a) Si annulla il denominatore ma non il numeratore

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0} \longrightarrow$$

Metodo di risoluzione

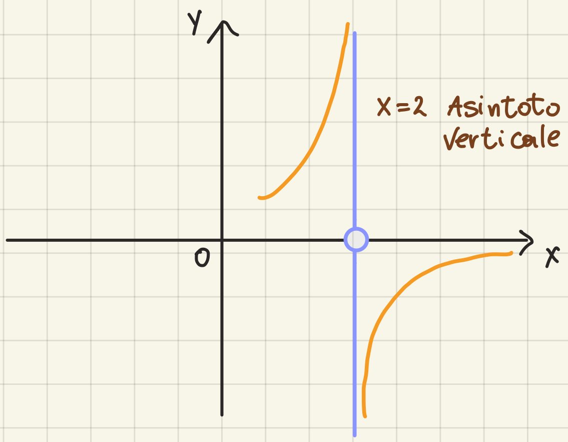
In questo caso dobbiamo separare il limite in limite destro e sinistro.

Destro $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

Sinistro $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

Se il lim dx e Sx sono diversi, il $\lim\limits_{x \to 2}$ NON ESISTE

$\Downarrow$

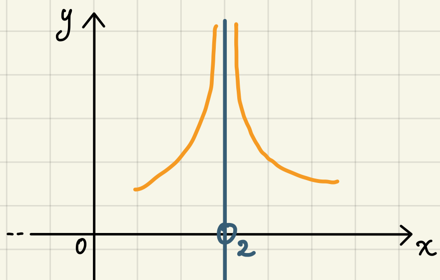


Questo risultato ci dice che la funz quando si avvicina a 2 da Sx tende a $+\infty$, mentre quando vi si avvicina da Dx tende a $-\infty$

$\Rightarrow$ Abbiamo un asintoto

Proviamo a calcolare $f = \displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{(2-x)^2} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{(0^-)^2} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{(0^+)^2} = +\infty \end{cases}$

Siccome i limiti dx e Sx hanno lo stesso risultato, anche il limite di partenza fa $+\infty$.

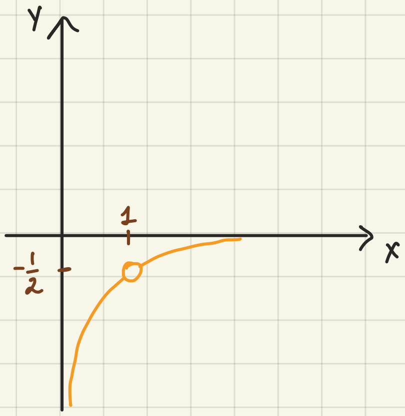


b) Quando, sostituendo, si annullano sia numeratore che denominatore:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$ Forma indeterminata.

Metodo di risoluzione: Scomporre e semplificare:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$



Limiti di funzioni razionali per $x \to \infty$

ES: $\lim_{x \to +\infty} \cancel{x^3} - \cancel{5x^2} + 1 = [+\infty - \infty]$ ← Forma indeterminata

In questo caso è evidente che la x elevata alla 3ª cresca più velocemente di quella elevata alla 2ª, ma come possiamo dimostrarlo?

Mettiamo in evidenza il termine di grado >

$$= \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

ES: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x - 3}{2x^2 + 5} = \frac{x^{\cancel{3}}\left(1 - \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \frac{5}{x^2}\right)} = +\infty$$

ES: $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x}{5x^6 - 1} = \frac{\cancel{x^3}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}{x^{\cancel{6}\,3}\left(5 - \frac{1}{x^6}\right)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

ES: $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} = \frac{\cancel{x^2}\left(2 - \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 2$$

Metodo di risoluzione - pattern

1) Raccogliere il termine di grado massimo sia al num che denom
2) Semplificare
3) A cosa tendono i termini rimanenti?
4) fare i conti

Cosa potrebbe verificarsi?

Quando si risolvono questi limiti possono succedere 3 cose:

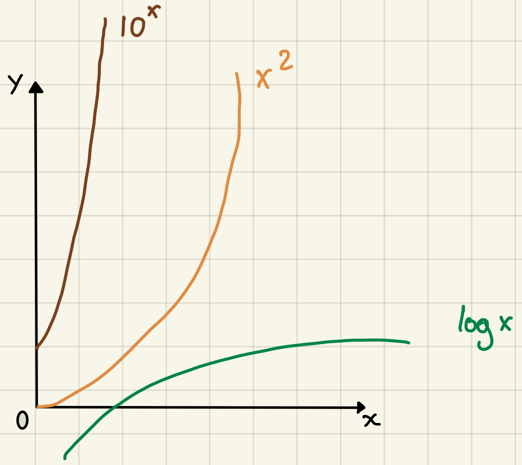
1) funz. razionale avente al num un polinomio di grado > polin. al denom:
   Il risultato sarà $+\infty$ o $-\infty$.

2) deg(Denom) > deg(Num) → Il risultato sarà $\emptyset$.

3) deg(Denom) = deg(Num) → Il risultato sarà un numero ℓ.

Limiti con esponenziali

Si procede in maniera simile ai limiti visti prima, ma dobbiamo capire quale elemento tende ad ∞ più velocemente.



Scala di crescita:

$$\log_a x << x^b << c^x << x^x$$

ES:

	$x=10$	$x=100$	$x=1000$
$y=\log_{10} x =$	1	2	3
$y= x^2 =$	10^2	10^4	10^6
$y= 10^x =$	10^{10}	100^{100}	10^{1000}

ES:

$$\lim_{x\to+\infty} x^6-6^x = 6^x >> x^6 = \lim_{x\to+\infty} 6^x\left(\cancel{\frac{x^6}{6^x}}_{\to 0}-1\right) = \infty[-1] = -\infty$$

ES: $$\frac{e^x-x^2}{3x+\ln x} = \frac{e^x\left(1-\cancel{\frac{x^2}{e^x}}^{\to 0}\right)}{x\left(3+\cancel{\frac{\ln x}{x}}^{\to 0}\right)} = \frac{e^x}{x} = +\infty$$

! quando portiamo x^2 fuori dalla radice dobbiamo stare attenti a scrivere $|x|$ e non solo x; questo perchè il valore di x sotto radice è sempre >0. Se avessimo avuto $x\to-\infty$ $|x|$ sarebbe stato $(-x) \Rightarrow +\infty$.

ES: $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{e\log_2 x-2x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\cancel{\frac{3}{x}}^{\to 0}\right)}}{x\left(\cancel{\frac{e\log x}{x}}_{\to 0}-2\right)} = \frac{\cancel{|x|}\sqrt{1+0}}{\cancel{x}(0-2)} = \frac{\sqrt{1}}{-2} = -1/2$$

Limiti di funzioni composte

ES:

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{3}{e^x}\right)$$

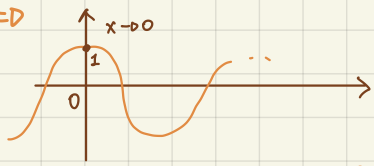
Metodo di risoluzione:

Bisogna innanzitutto capire cosa succede alla funzione più interna

1) A cosa tende $\frac{3}{e^x}$ quando $x\to+\infty$ $\Rightarrow$ tende a 0.

2) Cosa succede a $\cos(x)$ quando $x\to 0$?

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{3}{e^x}\right) = 1$$

ES:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x^2+1}{2x^2-x}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = \frac{x^2+1}{2x^2-x} = \frac{\cancel{x^2}\left(1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\cancel{\frac{1}{x}}^{\to 0}\right)} = 1/2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^y = \lim_{x\to+\infty} e^{1/2} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

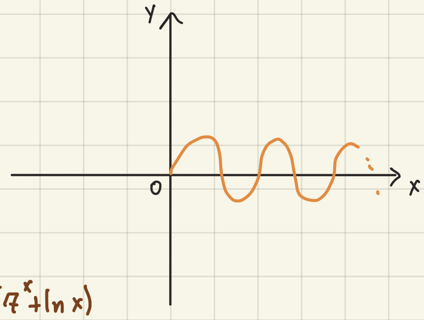
Strumenti per il Calcolo dei limiti

Teorema dei Carabinieri

ES:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\cancel{7^x+\ln x})}{\cancel{5x^2+1}} \quad \begin{matrix}\to +\infty \\ \to +\infty\end{matrix}$$

Il problema: non sappiamo a che tende il seno quando $x \to +\infty$



$\Downarrow$

Se avessimo avuto solo $\lim_{x\to+\infty} \sin(7^x+\ln x)$ avremmo dovuto dire che quel limite NON esiste!

Ad ogni modo, siccome il seno oscilla tra +1 e -1, è sempre una quantità finita! Di conseguenza, se dividiamo $\ell/+\infty$, il risultato del limite è zero.

Perché? $-1 \leq \sin(7^x+\ln x) \leq 1$, possiamo dividere ciascun membro per $5x^2+1$:

$$\frac{-1}{5x^2+1} \leq \frac{\sin(7^x+\ln x)}{5x^2+1} \leq \frac{1}{5x^2+1}$$

! Siccome quando $x \to +\infty$, $5x^2+1$ tende a $+\infty$ (positiva) lasciamo i versi invariati. Se avessimo avuto una quantità negativa, avremmo dovuto invertire i versi.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{5x^2+1} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5x^2+1} = 0 \Rightarrow \text{Siccome } 0 \leq \frac{\sin(7^x+\ln x)}{5x^2+1} \leq 0 \Rightarrow$$

teorema dei Carabinieri o confronto

$$\Rightarrow \frac{\sin(7^x+\ln x)}{5x^2+1} = 0$$

Utilizzo dei prodotti notevoli

ES:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{3x-12} = \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{3(x-4)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\overset{\sqrt{x}^2-2^2}{\cancel{x-4}}}{3(\cancel{x-4})(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{12}$$

Limiti Notevoli

Sono delle forme indeterminate ricorrenti di cui ricordiamo il risultato, in modo da poter risolvere limiti piu' complessi.

Limiti fondamentali – Da imparare!

① $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

② $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Limiti risolvibili con ①

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1^2 - \cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1^2 = 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to 1/2} = \frac{1}{2}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\Rightarrow 1 - \cos x^2 = \sin^2$

Da imparare!

ES: $$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + 4 tg x}{x\cos x + 2 \sin x} = \frac{\cancel{x}\left(2\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} + 4 \underbrace{\frac{tg x}{x}}_{\to 1}\right)}{\cancel{x}\left(\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\to 1} + 2 \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\right)}$$ lim notevole $= \frac{6}{3} = 2$

ES: $$\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\cos x - \cos^2 x}{2x^2}} = \sqrt{\frac{\cos x(1-\cos x)}{2x^2}} = \sqrt{\underbrace{\frac{\cos x}{2}}_{\to 1/2} \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to 1/2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Limiti risolvibili con ② $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x} =$ pongo $1/x = y$ $= \ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}_{\to e} = \ln(e) = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} =$ pongo $e^x - 1 = y$ quindi $e^x = 1+y \Rightarrow x = \ln(1+y)$

  Inoltre se $x \to 0$, allora anche $y \to 0$ $\Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)}$

  Otteniamo esattamente il limite precedente ma il num e denom sono invertiti

  $\Leftarrow$ possiamo quindi dire che il limite tende al reciproco del risultato precedente $\Leftarrow$ $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{1} = 1$

In breve

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\to \lim_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = 1$
- $\to \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

② $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\to \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\to \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

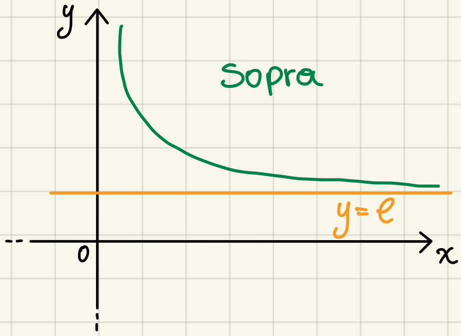
$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

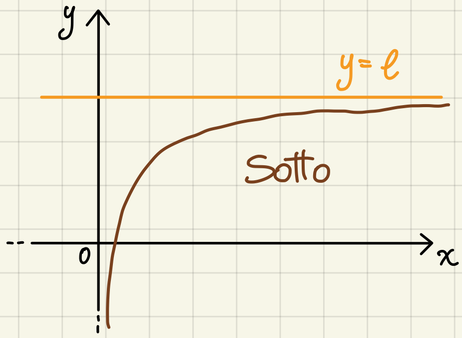
Asintoti orizzontali

Abbiamo un Asintoto orizzontale quando, nel momento in cui la x cresce, la y si avvicina ad un valore preciso (ℓ), quindi:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \implies \text{la retta avrà equazione } y = \ell$$

Potrebbe interessarci anche sapere se la funzione si trova SOPRA o SOTTO l'asintoto (retta)





Per capirlo ci basta sostituire al numero dell'asintoto (ℓ) un numero più piccolo o più grande e vedendo se l'orizzontale relativa interseca o meno la funzione.

Questa pratica potrebbe essere utile ma non è molto usata nello studio di funzione.

ES:

$$f = \frac{3x}{x-1} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(3)}{\cancel{x}(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0})} = 3 \implies y = 3 \quad \text{A. O.}$$

Asintoti Verticali

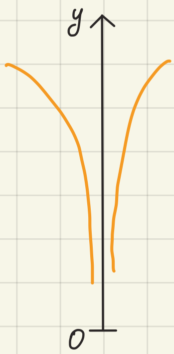
Abbiamo un Asintoto verticale quando, nel momento in cui la $x \to \ell$, la y cresce ad infinito. Siccome l'asintoto non viene mai intersecato dalla funzione, la funzione non è definita nel punto ℓ.

Quindi: se $\lim_{x \to \ell} f(x) = \pm\infty$, $x = \ell$ è Asintoto Verticale

Che tipo di Asintoto?

A differenza degli A.O., i Verticali possono essere di 4 tipi:

$$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to \ell^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \ell^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to \ell^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \ell^+} f(x) = +\infty$$

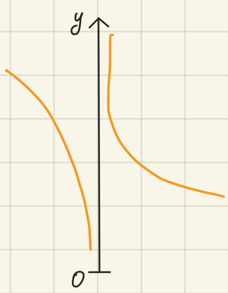
ES:

$$f = \frac{3x}{x-1} \qquad \mathbb{D} = x - 1 \neq 0 \text{ per } x \neq 1$$

cerco in $1^{\pm}$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} \frac{3x}{x-1} &= \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \to 1^-} \frac{3x}{x-1} &= \frac{3}{0^-} = -\infty \end{aligned}\right\}$$

Il limite è del tipo:



Equivalenze Asintotiche

Date due f $f(x)$ e $g(x)$, si dicono Asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$, se il lim $x \to x_0$ del loro rapporto è uguale ad 1. Il simbolo usato è $\sim$ (tilde): $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$.

Possiamo riscrivere tutti i limiti notevoli sotto forma di E.A.:

- $\sin x \sim x$
- $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
- $tg\,x \sim x$
- $e^x - 1 \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Inoltre, possiamo sostituire x con una generica $\varepsilon(x)$ che tenda a 0:

- $\sin(5x) \sim 5x$ per $x \to 0$ ($5x \to 0$)
- $e^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x}$ per $x \to \infty$ ($\frac{1}{x} \to 0$)

Proprietà delle eq. Asint.

1) Se per $x \to x_0$ $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$, possiamo dire che $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$ ed in particolare, se i limiti dei prodotti esistono, sono uguali.
Questo ci "autorizza", quando dobbiamo calcolare il lim di un prodotto a sostituire uno o entrambi i fattori con degli altri fattori ad essi Asintoticamente Equivalenti.

2) La stessa cosa di prima vale per i rapporti: se per $x \to x_0$ $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$
$\Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ Anche in questo caso i rapporti sono uguali.

3) Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ $\Rightarrow [f(x)]^\alpha \sim [g(x)]^\alpha$ per $x \to x_0$.

ES $\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{(e^{3x}-1)} \cdot \cancel{\sin(4x)}}{\cancel{tg(2x^2)}}$ ($\sim 3x$, $\sim 4x$, $\to 2x^2$) $\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{3\cancel{x} \cdot 4\cancel{x}}{2\cancel{x^2}} = 6$ Il risultato è accettabile perché

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \frac{(e^{3x}-1)\cdot\sin(4x)}{tg(2x^2)} & \sim & \frac{3x \cdot 4x}{2x^2} \\ \lim f(x) & = & \lim g(x) \end{array}}$$

ES $\lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{\sqrt{1-\cos x^2}}}{\cancel{\ln(1+2x)}}$ ($\to \sim \sqrt{\frac{1}{2}x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$, $\to \sim 2x$) $\sim \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x^2}{2x} = \frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}\sqrt{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{0}{e} = 0$

O piccolo

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice che $f(x)$ e' o piccolo di $g(x)$ se:

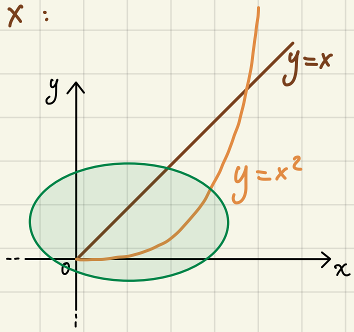
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si scrive quindi: $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

Inoltre, dire che $f(x)$ e' o piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$ equivale a dire che $f(x)$ e' infinitamente piccola, rispetto a $g(x)$

ES: $f = x^2 = o(x)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$

Non sembra, ma per valori piccoli $x^2 < x$:



ES: $x^3 = o(x)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}} = 0$

Attenzione!
La notazione $o(x) = o(f)$ indica semplicemente una funzione il cui limite del rapporto con f $(o(f))$, fa 0 nel punto in esame.

Proprieta'

- $o(x) \pm o(x) = o(x)$ NON ZERO! e' un po' come fare $-\infty - \infty$.
- $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x)$
- $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $x^n \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $x^n = o(x^m)$. quando $x \to 0$, x^n e' un o piccolo di x^m, se $n > m$
  $\hookrightarrow$ Questo vuol dire che le potenze con esponente maggiore sono degli o piccoli delle potenze con gli esponenti piu' piccoli:

  ES: $x^3 = o(x) \Rightarrow x^3 << x$ in $x \to 0$
  $x^2 = o(x) \Rightarrow x^2 << x$ in $x \to 0$

- Deduciamo quindi che $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^n)$ se $n < m$
  $\hookrightarrow$ "Sopravvive" il termine con esponente minore!

Eq. Asintotiche ed o piccolo

Per $x \to x_0$ $\quad f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$

Questo significa che le due funzioni sono A. equivalenti se e solo se differiscono per un termine che diventa trascurabile nel momento in cui facciamo il limite per $x \to x_0$.

Possiamo quindi dire che:

- $\sin x \sim x \to \sin x = x + o(x)$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x \to 1 - \cos x = \frac{1}{2}x + o(\frac{1}{2}x^2)$ si puo' omettere
- $\mathrm{tg}\, x \sim x \to \mathrm{tg}\, x = x + o(x)$
- $e^x - 1 \sim x \to e^x - 1 = x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \to (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(\cancel{\alpha} x)$
- $\ln(1+x) \sim x \to \ln(1+x) = x + o(x)$

ES: $\sin x^3 + 3x^4 + \ln(1+2x^5) = x^3 + \underbrace{o(x^3) + \cancel{3x^4} + \cancel{2x^5} + o(x^5)}_{\text{Rimane solo il più piccolo}} = x^3 + o(x^3)$

$<< x^3 \quad << x^3$

Formula di Taylor con resto di Peano

Questa formula ci consente di approssimare tutte le funzioni sufficientemente regolari con dei Polinomi.

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $(-\overset{\text{Delta}}{\delta}, \delta)$ per qualche $\delta > 0$ e supponiamo che:

- $f(x)$ sia derivabile $n-1$ volte nell' intervallo
- Esista la derivata n-esima perlomeno in $x=0$

Se soddisfiamo i requisiti

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + o(x^n)} \quad \text{per } x \to 0$$

$T_n(x)$ e' il polinomio di grado $\leq n$ dato dalla formula:

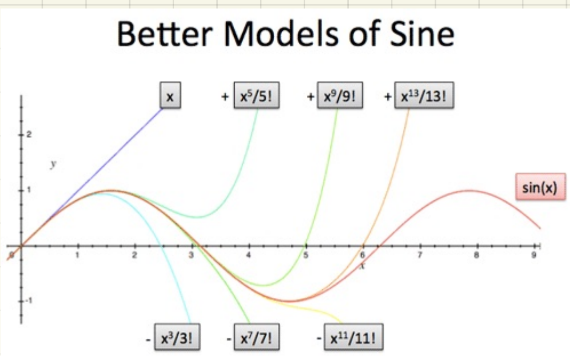
$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$T_n(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} \cdot x^k}$$

In poche parole...

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Funzione da approssimare}} = \underbrace{T_n(x)}_{\text{Polinomio Approssimante}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{ERRORE di Approssimazione}}$$

Capiamo che l'err. di appr. e' PICCOLO, essendo un o piccolo di x^n; queste quantita' divente sempre piu' Trascurabile al crescere di n.



La formula di taylor non fa altro che approssimare, cioe' "emulare" una funzione tramite dei polinomi.

Quando usiamo un n troppo piccolo, l'errore e' Alto, ovvero non abbiamo una buona approssimazione. In questo esempio si approssima $\sin x$, e come si puo' vedere, x ha una cattiva approx, mentre $\frac{x^{13}}{13!}$ ha una approx migliore.

Approssimare $f(x) = \sin x$

siccome $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$

Usando $f(x) = \sin x$, $a = 0$ $\Rightarrow \sin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3$

Tabella delle derivate:

$f(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\sin x$
$f'''(x) = -\cos x$
$f''''(x) = \sin x$

Si ripetono uguali

Riscrivo la serie:

$$\Rightarrow \sin x = \underset{0}{\sin(0)} + \frac{\overset{1}{\cancel{\cos 0}}}{1} + \frac{\overset{0}{\cancel{-\sin 0}}}{2} x^2 + \frac{\overset{-\frac{1}{6}x^3}{\cancel{-\cos 0}}}{6} x^3$$

$$= 0 + \frac{1}{1} x + 0 - \frac{1}{6} x^3 + 0 + \frac{1}{5!} x^5 + 0 - \frac{1}{7!} x^7 \dots$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1}}_{\text{Alterna il segno}} \cdot \frac{x^{\overbrace{2n-1}^{\text{Potenze dispari}}}}{\underbrace{(2n-1)!}_{\text{Fattoriale dispari}}}$$

Usare taylor per risolvere i limiti

ES:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + 2x^5}{3x^3}$$

Il sin da problemi → taylor

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

per $n=3$

$$\sin x = 0 + (-1)^2 \cdot \frac{x}{1} + (-1)^3 \cdot \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$$

Per riscrivere sin x dobbiamo aggiungere anche l'errore:

$$\ldots = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \underbrace{o(x^3)}_{\text{ERRORE}} - \cancel{x} + \cancel{2x^5}}{3x^3}$$

mangiato da $o(x^3)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{3x^3} = -\frac{1}{18} + \cancel{\frac{o(x^3)}{3x^3}} \to 0 = -\frac{1}{18}$$

Approssimare $f(x) = 3\sin x + \cos x$ per $n=4$

Sostituiamo direttamente gli sviluppi di IV ordine di sin x e cos x

$$= 3\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right] + \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right] = 1 + 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Limiti con taylor

ES:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{e^x - 1 + \ln(1-x)}$$

Sviluppo per tg x:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \underbrace{\frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9}_{\text{trascurabili per } x\to 0} + o(x^{10})$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Inoltre (denom)

$$[e^x - 1] + [\ln(1-x)] = \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] + \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] = \left[-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{3} + \cancel{\frac{o(x^3)}{x^3}}\right)\to 0}{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{6} + \cancel{\frac{o(x^3)}{x^3}}\right)\to 0} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} \cdot (-6) = -2$$

ES:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 \left(e^{\sin x} - 1 - x\right)}{\sin^2 x - x^2}$$

- $\sin x = (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ quindi $\sin x^2 = x^2 + o(x^2)$
- $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ Sostituiamo : $x \to \sin x$ $\quad e^{\sin x}_{n=2} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + o(\sin^2 x)$

Siccome $\sin x = x + o(x^2) \to e^{\sin x} = 1 + (x + o(x^2)) + \frac{1}{2}(x + o(x^2))^2 + o\left((x + o(x^2))^2\right)$
$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

- $\sin^2 x - x^2 = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$

Quindi: $e^{\sin x} - 1 - x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Otteniamo quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 \left(e^{\sin x} - 1 - x\right)}{\sin^2 x - x^2} = \frac{x^2 + o(x^2) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{\cancel{x^2}\left[\left(1 + \cancel{\frac{o(x^2)}{x^2}}\right)\to 0 \cdot \left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{o(x^2)}{x^2}}\right)\right]\to 0}{\cancel{x^4}\left(-\frac{1}{3} + \cancel{\frac{o(x^4)}{x^4}}\right)\to 0}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{3}{2}$$

Ordine di infinitesimo e parte principale

Se, per $x \to 0$, $f(x) \sim Kx^{\alpha}$ (con $\alpha > 0$)

In questo caso, $f(x)$ e' un infinitesimo di ordine α, e Kx^{α} e' la sua parte principale

ES: $f(x) = \sin x$ per $x \to 0$, $\sin x \sim x \Rightarrow f(x)$ e' un infinitesimo di ordine 1, con p. principale x

ES: $f(x) = \cos x - 1$ per $x \to 0$, $\cos x - 1 \sim \underbrace{-\frac{1}{2}x^{2}}_{Kx^{\alpha}} \Rightarrow f(x)$ e' un inf. di ordine 2, con p.p. $-\frac{1}{2}x^2$

Come risolviamo quando non abbiamo l'eq. As. gia' pronta?

$f(x) \sim Kx^{\alpha} \Leftrightarrow f(x) = Kx^{\alpha} + o(x^{\alpha})$

- Due f sono A.Eq. (si comportano allo stesso modo) se differiscono solo per un termine che diventa trascurabile

$\Rightarrow$ Possiamo usare gli sviluppi di taylor per determinare la parte principale, e quindi l'ordine.

ES: $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x$

* Se vogliamo sapere come si comporta $f(x)$ in prossimita' di $x=0$, dobbiamo usare gli sviluppi di Taylor.

$$T_n(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} \cdot x^{k}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

quindi $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

per $x \to 0$, $f(x) = \left[\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}x} - \cancel{\frac{1}{8}x^2} + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right] - \left[\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}x} - \cancel{\frac{1}{8}x^2} - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right] \cancel{-x} = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$

Quindi possiamo dire che $f(x)$ e' un infinitesimo di ordine 3 avente come parte principale $\frac{1}{8}x^3$.

Osservazioni

1) Il limite di un rapporto tra quantita' infinitesime NON CAMBIA aggiungendo o togliendo agli infinitesimi Dati, degli infinitesimi di ordine superiore.

ES: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x^2 + 2x^5}{x + \sin(x^2)}$

Numeratore: $\sin x \sim x$, quindi e' un infin. di ordine 1; per questo motivo x^2 e $2x^5$, di ordine $2, 5 > 1$, sono trascurabili.

Denominatore: $\sin(x^2) \sim x^2$, e' di ordine 2; siccome $2 > 1$, $\sin(x^2)$ e' trascurabile rispetto ad x.

Possiamo quindi dire che: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x^2 + 2x^5}{x + \sin(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) Conoscere la parte principale puo' essere utile per tracciare il grafico di una funzione nell'intorno di $x=0$

ES: $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} - 1$ in prossimita' di $x=0$ $= e^x \cdot (x+1)^{-1/2} - 1 = [\cancel{1} + x + o(x)] \cdot [\cancel{1} - \frac{x}{2} + o(x)] - 1 = \frac{x}{2} + o(x) \sim \frac{x}{2}$

Per cui, possiamo dire che il grafico di $\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ in prox di 0, sara' molto simile a quello di $f(x) = \frac{x}{2}$

Dalle lezioni del Prof

Criterio del rapporto per successioni

Lez 8, 00:47

Sia a_n una succ a termini positivi, ovvero che $/\ a_n > 0 \ \forall n$.

posto $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow$ se $\lim_n b_n = b < 1$, allora il $\lim_n a_n = 0$

Questo criterio ci dice che se consideriamo il rapporto b_n (ottenuto da a_n), ed il suo limite tende ad un numero minore di 1, la successione tende a 0.

Il criterio ci serve per dimostrare i seguenti casi:

Prop: valgono i limiti:

Con $\alpha > 0$, $a > 1$

$$\lim_n \frac{\log n}{n^\alpha} = \lim_n \frac{n^\alpha}{a^n} = \lim_n \frac{a^n}{n!} = \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$$

Tutti uguali a zero!

Che vuol dire?

Dire che $\lim_n \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$, significa dire: Il denominatore tende ad infinito più velocemente del logaritmo.

cresce lentamente

Possiamo quindi dire: $\log n < n^\alpha < a^n < n! < n^n \leftarrow$ cresce velocemente

Dimostriamo che $\lim_n \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ per il criterio visto prima, calcoliamo $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\Rightarrow b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} =$ Nel nostro caso $\frac{n^\alpha}{a^n}$ e' a_n stessa $\Rightarrow$

$$\frac{\frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{a^n}} = \frac{(n+1)^\alpha}{\cancel{a^{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{a^n}}{n^\alpha}$$

a_{n+1} ; succ a_n ; si capovolge

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^\alpha}{a \cdot n^\alpha} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{a} \left(\frac{\cancel{n}+1}{\cancel{n}}\right)^\alpha = \frac{1}{a}$$

rapporto di polinomio dello stesso ordine $\Rightarrow$ tende al grado max $\Rightarrow 1$

$a > 1$

nel criterio di prima dicevamo che se $\lim_n b_n = \ell < 1$ quindi

$$\lim_n \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

Dimostriamo $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$ (a_n)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \frac{a^{\cancel{n+1}}}{\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{a^n}} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow \lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$$

perche?

Perche'? $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Dimostriamo $\lim_n \frac{n!}{n^n} \Rightarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cancel{!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{\cancel{(n+1)} \ n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right)^n = \text{Ci ricorda un } \lim \text{ notevole } = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^n} = \frac{1}{e} \Rightarrow \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$$

$e > 1$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Es: $\lim_{n\to\infty} e^n - 2^n = +\infty - \infty =$ nei polinomi si metteva in evidenza il grado max → la stessa cosa vale in questo caso → Siccome sono due esponenziali, "vince" quello con la base maggiore.

$\Rightarrow$ Mettiamo in evidenza e^n: $\lim_{n} e^n \left(1 - \frac{2^n}{e^n}\right) \sim e^n = +\infty$

$\frac{2^n}{e^n} \to 0$; $\sim$ è asintotica

Es: $\lim_{n} 2^n - n! = \lim_{n} n! \left(\frac{2^n}{n!} - 1\right) \sim n! = -\infty$

$\frac{2^n}{n!} \to 0$

ES: $\lim_{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ • Ricorda il limite notevole $\left(\frac{1}{x}+1\right)^x$ ma per usare un lim notevole, dobbiamo ricondurci esattamente a quello $= \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^n$ Dobbiamo avere lo stesso valore sia al denom che all'esponente!

$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{(-)(-n)} = \left[\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = \left[\, e \,\right]^{-1} = e^{-1}$

$\to +$; deve sparire

ES: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e^{-1}} = e$

e^{-1}; $\left(1-\frac{1}{n}\right) \to 0$; stesse basi → somma

ES: $\lim_{n} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n$ $\quad \frac{n^2+n}{n^2-n+2} = 1 + \frac{1}{a_n} \to e$

$\Rightarrow$ Consideriamo a_n una incognita e la ricaviamo: $\frac{1}{a_n} = \frac{n^2+n}{n^2-n+2} - 1 = \frac{1}{a_n} = \frac{\cancel{n^2}+n \cancel{-n^2}+n-2}{n^2-n+2}$

$= \frac{1}{a_n} = \frac{2n-2}{n^2-n+2} \Rightarrow a_n = \frac{n^2-n+2}{2n-2}$ Di conseguenza $\lim_{n} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n = \lim_{n} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-n+2}{2n-2}}\right)^n$

Quindi? Possiamo applicare $1 + \frac{1}{a_n} \to e$ Solo se $a_n \to \infty \Rightarrow$ possiamo per applicare il limite, però, a_n deve comparire anche all'esponente.

$\Rightarrow \lim_{n} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{n \cdot \frac{a_n}{a_n}} = \left[\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{\frac{n}{a_n}} = e^{\frac{n \cdot 2n-2}{n^2-n+2}} = e^{\frac{2n^2-2}{n^2-n+2}} \to \sim \frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} = 2 \longrightarrow e^2$

$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$

Altro limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ dove $a_n \to 0$

ES: $\lim_{n} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ $\quad n \to \frac{1}{n}$, $\quad \frac{1}{n} \to 0$

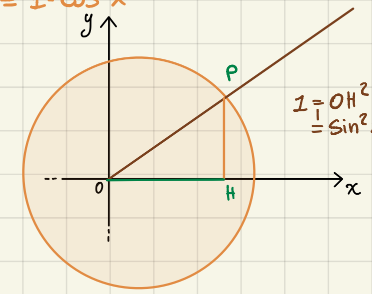
ES: $\lim_{n} n\, tg\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad tg = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow n \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$ $\quad \cos(0) = 1$

ES: $\lim_{n} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)} = n^2\left(\underbrace{1-\cos^2\frac{1}{n}}_{\sin^2 x}\right) \cdot \frac{1}{1+\cos\frac{1}{n}} = n^2\left(\sin^2\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{1+\cos\frac{1}{n}}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\Rightarrow \sin^2 = 1 - \cos^2 x$

$\Rightarrow \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)^2$



$1 = OH^2 + HP^2$
$= \sin^2 x + \cos^2 x$

ES: $\lim_{n} n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ $\quad \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$

ES: $\frac{tg^2\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{\cancel{\left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]}\cdot\left[1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\cancel{\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} = \frac{1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}$ $\quad \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$

$= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} + \frac{\cancel{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}{\cos^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + 1 = 2$

Lezione 9

Proposizione: Se $(a_n)_n$ è una succ. limitata e $(b_n)_n$ è una succ. infinitesima, allora $a_n \cdot b_n \to 0$

ES: $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sin(n)$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\sin(n)}_{\text{è limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{è infinitesima}} \Rightarrow \left(\underset{+1,-1}{\text{oscillante}}\right) \cdot 0 = 0$

$\frac{1}{n} \to 0$; $\sin(n) \to$? $\to +1,-1,+1\ldots$ Indet ; $\left(\underset{+1,-1}{\text{oscillante}}\right) \to$ numero

ES: $\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{3n^2+1} \sim \frac{n(1+0)}{n^2(3+0)} = 0 \Rightarrow \left(\underset{+1,-1}{\text{oscillante}}\right) \cdot \text{Infinitesimo} = 0$

$(-1)^n \to$ Oscillante limitata

Successioni crescenti

a_n è crescente se e solo se $a_m \le a_{m+1} \; \forall m$.

Se con le funzioni dicevamo che una f. è crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, lo stesso vale anche per le successioni; $n < n+1 \Rightarrow a_n \le a_{n+1}$

a_n è decrescente se $n < n+1 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$

Teorema sul limite delle successioni monotone

Ogni succ. monotona è regolare, ammette limite $\to$ finito o infinito. $\Rightarrow$ Non può capitare che una succ monotona sia indeterminata!

Se la succ è monotona limitata, essa converge.

Dim 00:11 Lez 9

ES: $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ è conseguenza di due risultati:

1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente $\Rightarrow$ il suo limite esiste (può essere sia finito che infinito)
2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è limitata $\Rightarrow$ $2 < a_n < 4 \quad \forall n$ si dimostra

Per il teorema delle succ monotone, la succ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge (perchè essendo limitata non può divergere) poichè converge, convergerà ad un limite compreso tra $\underbrace{2 \text{ e } 4}$, (per il teorema dei carabinieri)

anche il num di nepero e è compreso tra 2 e 4

~ 45:00

Serie numeriche

Problema: Sommare un numero infinito di termini $\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_n + \dots = ?$

Caso in cui abbiamo termini finiti: $a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = ?$

finchè abbiamo dei termini finiti, possiamo computare la somma.

2 termini $= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

3 termini $= 1 + 1/4 + 1/9 = \frac{36+9+4}{36} = \frac{49}{36}$

...

Però, la serie $a_n = \frac{1}{n^2}$ è finita!

00:48

Def: Sia $(a_n)_m$ una succ num.; Consideriamo la succ: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ...
Questa succ è detta succ delle somme parziali di a_n. Questo perchè il termine S_n è composto da somme parziali di a_n.
Ogni termine di S_n è ben determinato, poichè sono tutte somme finite.

Def: Si dice che la serie numerica, ovvero $a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è:

Punto di arrivo
Si somma l'argomento
Punto di partenza
indice che cambia

è Convergente / Divergente / Indeterminata } Se e solo se $\Leftrightarrow$ La succ S_n (somme parziali) è { Convergente / Divergente / Indeterminata

In parole povere, dirò che la serie Converge, se la Successione S_n convergerà.

⋮

$\rightarrow$ Se $\lim_{n \to \infty} S_n = \ell$ finito, allora ℓ si dirà Somma della serie, e si scrive:

numero

$$\boxed{\sum_n a_n = S} \leftarrow \text{Converge}$$

Se $\lim_{n \to \infty} = \pm\infty$, la serie Diverge, e si scrive:

$$\boxed{\sum_n a_n = \pm\infty}$$

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$

1) Dobbiamo scrivere la successione delle somme parziali:
Si usa anche nel caso finito

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

si dimostra essere questa somma.

2) Per la definizione, dobbiamo calcolare il limite di S_n:

$\rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ Converge!

1:05

Serie Telescopiche

Sono quelle serie il cui termine generale può essere scritto nella forma $\sum_n (a_n - a_{n-1})$.
Si dimostra che questo tipo di serie converge $\Leftrightarrow$ a_n converge.

Calcoliamo

$S_1 = a_1 - a_0 = a_1 - a_0$

$S_2 = (\cancel{a_1} - a_0) + (a_2 - \cancel{a_1}) = a_2 - a_0$

$S_3 = (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (a_3 - \cancel{a_2}) = a_3 - a_0$

...

con succ

$S_n = (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + \dots + (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}}) + (a_n - \cancel{a_{n-1}}) = a_n - a_0$

con prec

Troviamo che la serie $\sum_n a_n - a_{n-1}$ Converge $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ S_n converge $\overset{\text{Se e solo se}}{\Leftrightarrow}$ $a_n - a_0$ converge;
e si ha che $\sum_n a_n - a_{n-1} = \lim_n a_n - a_0$

Es: $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ Può essere vista come una serie Telescopica? $\rightarrow$ Si può scrivere come una serie il cui termine generale è fatto da $a_n - a_{n-1}$?

$= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \overset{mcm}{=} \frac{(\cancel{n}+1)-\cancel{n}}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$ possiamo quindi scriverla come: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

a_n

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$ Converge ad $a_1 - \lim a_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1$

Es: $\sum_n \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \overset{mcm}{=} \frac{\cancel{2n}+1 - \cancel{2n}+1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ $\rightarrow$ non troviamo il termine generale ma quasi

Possiamo dire che la serie è uguale a : = $\sum_n \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$

Per togliere il 2 al num.

$a_n = \frac{1}{2n-1}$ $\quad = \frac{1}{2}\left[a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5} - \lim \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{1}{10}$

Fine lez 9.

Non so quanto questo Es sia giusto il prof ha fatto un bordello (?)