Forme Differenziali Lineari

Uno dei problemi del calcolo differenziale ad una variabile, era quello di trovare una primitiva $F(x)$ definita in un intervallo che presentasse come derivata una $f(x)$ anch'essa continua.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Ad n variabili il problema è analogo: dobbiamo trovare una funzione ad n variabili definita in un campo connesso tale che:

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che presenti come derivate parziali rispetto $x_1, x_2, \dots, x_n$ un certo numero n di funzioni continue del tipo:

$$\left.\begin{matrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{matrix}\right\} F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ha forma differenziale $\underbrace{f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \dots + f_n\,dx_n}_{\text{Differenziale Totale di } F(x)}$

Il Problema

Il problema di questo capitolo è di trovare una primitiva $F(x,y)$ che abbia come differenziale totale una forma del tipo $f\,dx + g\,dy$

Questo significa risolvere la seguente EQUAZIONE differenziale:

$$\boxed{dF = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \dots + f_n\,dx_n}$$

questo equivale a... Risolvere un sistema di n equazioni ed n incognite

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2, x_n) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2, x_n) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = f_n(x_1, x_2, x_n) \end{cases}}$$

La funzione $F(x)$, se esiste, risulta certamente continua, e si chiama "Integrale della data forma differenziale lineare"

Come si presentano?

Per $n=2$ → $\underbrace{X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy}$

Vogliamo trovare una PRIMITIVA della forma differenziale, che significa risolvere l'eq diff:

$$\boxed{dF = X\,dx + Y\,dy}$$

Forma differenziale ESATTA

Si dice che una F.D. e' esatta quando la F.D. e' INTEGRABILE, ovvero ammette una primitiva $F(x,y)$.

Tipi di ESERCIZI

1) Studio a priori di una forma differenziale lineare dove ci viene chiesto di studiarne l'esattezza, ovvero: "mi sai trovare una primitiva della forma diff?".

2) Integrare direttamente la F.D., ovvero risolvere un integrale curvilineo di II specie esteso a γ (gamma):

$$\int_\gamma X\,dx + Y\,dy$$

Insiemi Connessi

Un insieme del piano si dice CONNESSO quando e' formato da un solo "PEZZO", ovvero NON E' POSSIBILE rappresentarlo come l'unione di due o più insiemi APERTI e NON VUOTI.

Supponiamo quindi che $X(x,y)\,dx$ e $Y(x,y)\,dy$ siano definite nel campo connesso A, siano CONTINUE e siano dotate delle derivate parziali:

$$\left.\begin{aligned} X'_y &= \frac{\partial X}{\partial y} \\ Y'_x &= \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{Anche esse continue in } A.$$

Forme Differenziali Chiuse

Una F.D. lineare definita in $\mathbb{R}^2$: $X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$ si definisce chiusa se risulta:

$$\boxed{\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}}$$

Una F.D. e' chiusa se le derivate parziali coincidono

Teoremi Fondamentali

ci forniscono una condizione necessaria ma NON SUFFICIENTE!

Teorema A

Se nel campo connesso A del piano xy le funzioni X e Y sono continue e dotate delle derivate parziali X_y e Y_x continue, condizione necessaria affinché la forma Diff. $X(x,y)dx + Y(x,y)dy$ sia in A un diff esatto è che sia IVI CHIUSA

Integrali curvilinei

(Consideriamo $n=3$)

$$C \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

$X(x,y,z)$; $Y(x,y,z)$; $Z(x,y,z)$ continue e definite in un insieme E, $C \subseteq E$

Fissiamo su c due punti P' e P'', corrispondenti a $t=t'$ e $t=t''$. Sia γ l'arco di curva da essi individuato.

$\rightarrow$ Si dimostra come l'integrale è pari a.

$$\int_{\gamma(P',P'')} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{t'}^{t''} X[x(t);y(t);z(t)]x'(t) + Y[x(t);y(t);z(t)]y'(t) + Z[x(t);y(t);z(t)]z'(t)\,dt$$

Integrale curvilineo di II specie

Inoltre vale che.

$$\int_{\gamma(P'',P')} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = - \int_{\gamma(P',P'')} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

Teorema

$\int_{\gamma(P',P'')} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \rightarrow$ Se è ESATTA in un campo connesso A e ammette $F(x,y,z)$, ovvero ha come integrale una funzione $F(x,y,z)$, allora:

COMUNQUE SI SCELGANO in A due punti: $P'(x',y',z')$ e $P''(x'',y'',z'')$ ed un arco di curva regolare avente tali punti come estremi risulta che:

$$\boxed{\int_{\gamma(P',P'')} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = F(x'',y'',z'') - F(x',y',z')}$$

Il valore dell'integrale non dipende dal percorso, quindi non dipende dalla scelta dell'arco di curva regolare γ, ma il valore dell'integrale dipende UNICAMENTE dai due punti P' e P''.

Che succede se $P' = P''$

Considerata una F.D.

$$\boxed{\int_{\gamma(P',P'') \text{ dove } P'=P''} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \emptyset}$$

e supponiamo sia ESATTA.

Se γ è una curva chiusa, ovvero $P' = P''$, l'integrale curvilineo, in base a quanto detto nel prec Teorema, è zero.

Teorema

Se la F.D. lineare è ESATTA, allora

$$F(x,y,z) = C + \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} X(u,v,w)\,du + Y(u,v,w)\,dv + Z(u,v,w)\,dw$$

- $(x_0, y_0, z) \equiv P$, $(x,y,z) \equiv P'$ Dove P è un qualsiasi punto fissato in A e P' è un punto variabile in A.

ESERCIZI

$x(16x^2 - 15xy + 2)\,dx + (3y^2 - 5x^3)\,dy$

1ª Fase Stabilire se la F.D. e' esatta.
2ª Fase Se e' esatta, calcolarne $F(x,y)$
$\downarrow$
integrare

1) Applicare il I Teorema: deve essere chiusa in un campo connesso A.

Leggendo la F.D. ci accorgiamo che e' definita in un campo $\boxed{A \equiv \mathbb{R}^2}$.

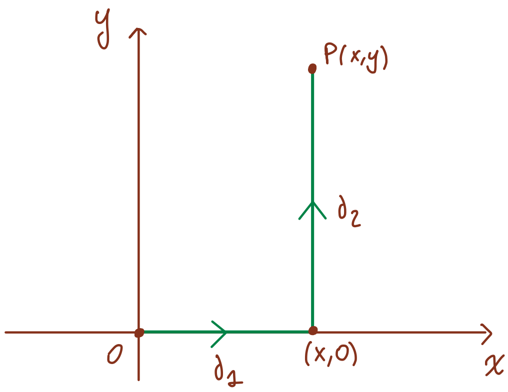
$$\left.\begin{array}{l} X(x,y) = 16x^3 - 15x^2y + 2x \\ Y(x,y) = 3y^2 - 5x^3 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial X}{\partial y} = -15x^2 \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} = -15x^2 \end{array}\right\} \text{coincidono} \qquad \boxed{X'_y = Y'_x}$$

Forma Chiusa

Se la Forma e' chiusa in un campo di un piano $\mathbb{R}^2$ (semplicemente connesso) possiamo dire che la F.D. lin e' esatta.

$\Rightarrow$ E' integrabile e possiamo calcolarne una primitiva (2 metodi)

I: $$f(x,y) = C + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X(u,v)\,du + Y(u,v)\,dv$$



$\gamma_1 : \begin{cases} y = 0 \\ x = t \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le x \quad dx = \frac{1}{1}dt$

$\gamma_2 \begin{cases} x = x \\ y = t \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le y \quad \rightarrow dy = \frac{1}{1}dt$

$$\Rightarrow f(x,y) = C + \int_0^x t(16t^2 + 2)\cdot 1\,dt + \int_0^y 3t^2 - 5x^3 \cdot 1\,dt$$

$$= C + 16\int_0^x t^3 + 2\int_0^x t\,dt + 3\int_0^y t^2 dt - 5x^3\int_0^y dt = C + 16\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^x + 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x + 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^y \cdot 5x^3\left[t\right]_0^y$$

$$= C + \frac{1}{4}x^4 + x^2 + y^3 + 5x^3y = f(x,y)$$ Primitiva

Esercizio esame 20 Giugno

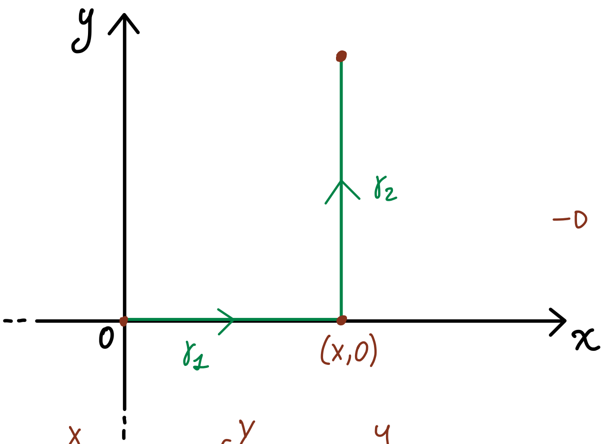
$$W = 2xy\,dx + (x^2 + y\sin y)\,dy \quad \to \quad \begin{matrix} X(x,y) = 2xy \to X'_y = 2x \\ Y(x,y) = x^2 + y\sin y \to Y'_x = 2x \end{matrix} \Big\} \text{ coincidono} \Downarrow \text{ chiusa}$$

Campo A: $\mathbb{R}^2 \to$ campo semplic. connesso $\Rightarrow$ ESATTA

$$\Rightarrow f(x,y) = c + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X(u,v)\,du,\ Y(u,v)\,dv$$

Tempo 8

$$\gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow dx = \frac{1}{1}dt \qquad 0 < t < x$$



$$\gamma_2: \begin{cases} x = x \\ y = t \end{cases} \qquad 0 < t < y, \quad dy = \frac{1}{1}dt$$

$$\to \int_0^x dx + \int_0^y x^2 + y\sin y\,dy$$

$$= \int_0^x dx + x^2 \int_0^y dt + \int_0^y t\sin t\,dt = \qquad \int t\sin t\,dt \overset{\text{PARTI}}{=} -t\cos t + \int \cos t\,dt = -t\sin t + \sin t$$

$$= \sin t\,(1-t)$$

$$[x]_0^x + x^2[t]_0^y + [\sin t\,(1-t)]_0^y = x + x^2 y + \sin y\,(1-y) - \cancel{\sin(0)}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2 y + x + \sin y\,(1-y)$$

$e^{x-y}\left[(1+x+y)\,dx + (1-x-y)\,dy\right]$ Se la F.D. è esatta trovare la primitiva Tale che $F(x,y)=0$ in $(x,y)=(0,0)$

1) Verifichiamo la cond. necess.

$\mathbb{D}$: $\mathbb{R}^2 \to$ Piano $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso $\to$ F.D. Esatta?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y}(1+x+y) \to X'_y = D\left[e^{x}\cdot e^{-y}(1+x+y)\right] = -e^{x-y}(1+x+y) + e^{x-y} = \underline{-e^{x-y}(x+y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x-y}(1-x-y) \to Y'_x = e^{x-y}(1-x-y) + e^{x-y}(-1) = \underline{e^{x-y}(-x-y)}$$

$X'_y = Y'_x = -e^{x-y}(x+y)$ CHIUSA $\to$ Siccome è chiuso in un campo sempl. conn $\Rightarrow$ ESATTA

2) Calcolo della primitiva: integrarla

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y}(1+x+y)}_{} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x-y}(1-x-y)$$

integriamo entrambi rispetto ad x

costante

$$\to f(x,y) = \int e^{x-y}(1+x+y)\,dx + \rho(y) = \int e^{x-y} + \int x e^{x-y}dx + y\int e^{x-y}dx + \rho(y)$$

$e^{x}\cdot e^{-y} \to e^{-y}\int e^{x}dx$

PARTI

$$\to e^{x-y} + \left[x e^{x-y} - \int e^{x-y}dx\right] + y e^{x-y} + \rho(x)$$

$$\to \cancel{e^{x-y}} + x e^{x-y} - \cancel{e^{x-y}} + y e^{x-y} + f(x) = \boxed{x e^{x-y} + y e^{x-y} + \rho(y)}$$

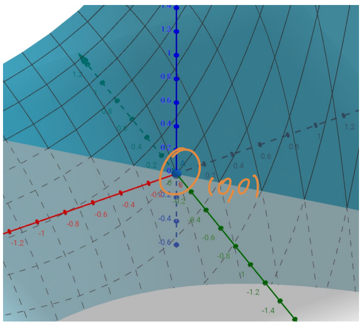
Deriviamo entrambi rispetto ad y

$f(x,y)$ ← ci manca come incognita $\rho(y)$

$$\to \frac{\partial f}{\partial y} = -x e^{x-y} + e^{x-y} - y e^{x-y} + \rho'(y)$$

$$\Rightarrow e^{x-y}(1-x-y) = -x e^{x-y} + e^{x-y} - y e^{x-y} + \rho'(y) \to \cancel{e^{x-y}} - \cancel{x e^{x-y}} - \cancel{y e^{x-y}} = -\cancel{x e^{x-y}} + \cancel{e^{x-y}} - \cancel{y e^{x-y}} + \rho'(y)$$

$\Rightarrow \rho'(y) = 0 \to \rho(y) = C$



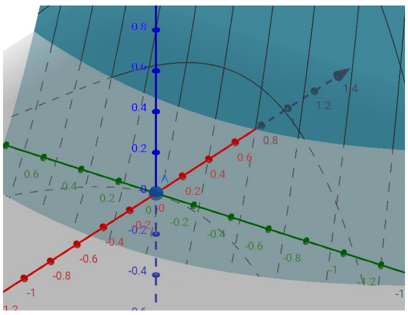
C=0

Quindi $f(x,y) = C + x e^{x-y} + y e^{x-y} = \boxed{C + e^{x-y}(x+y)}$

3) Trovare la $f(x,y)$ / $f(0,0) = 0$

$\to f(x,y) = e^{x-y}(x+y) + C \Rightarrow f(0,0) = C = 0 \to C = 0$

$\Rightarrow f(x,y)$ / $f(0,0) = 0 \to \boxed{e^{x-y}(x+y)}$



$C \neq 0$

Esercizio esame 20 giugno

$$W = 2xy\,dx + (x^2 + y\sin y)\,dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \rightarrow \quad X'_y = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y\sin y\,dy \rightarrow Y'_x = 2x$$

$\left.\right\}$ uguali in $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ Esatta

2) Primitiva prendo $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ ed integro entrambi

$$\int x\,dx = \int 2xy\,dx \rightarrow f(x,y) = 2y\int x\,dx \rightarrow f(x,y) = \cancel{2}y\frac{x^2}{\cancel{2}} = yx^2 + \rho(x)$$

Derivo rispetto ad y

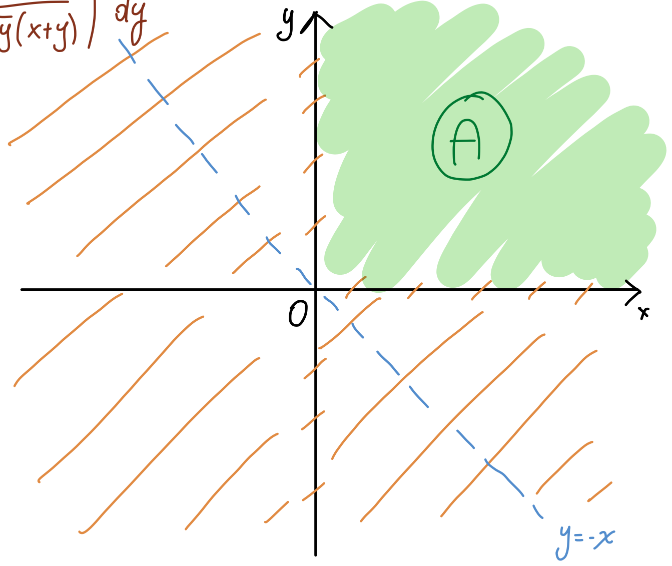
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \rho'(x) \Rightarrow \cancel{x^2} + y\sin y = \cancel{x^2} + \rho'(x) \rightarrow y\sin y = \rho'(x)$$

$$\rightarrow \int y\sin y\,dy = \rho(x) \Rightarrow \rho(x) \overset{\text{Parti}}{=} -y\cos y + \int \cos y\,dy \Rightarrow \rho(x) = -y\cos y + \sin y$$

$$\Rightarrow f(x,y) = yx^2 + \sin y(1 - y)$$

Si trova con i passaggi fatti prima anche se manca una x (?)

- $\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{y}}{x+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+y^2}\right)dx + \left(\frac{2y}{\sqrt{x}+y^2}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}(x+y)}\right)dy$



Continue e derivabili in A:

$$A: \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x+y\neq 0 \Rightarrow y\neq -x \\ \sqrt{x}+y^2\neq 0 \end{cases}$$

Verifichiamo la chiusura

$$X = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{y}}{x+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+y^2}\right)$$

$$Y = \frac{2y}{\sqrt{x}+y^2}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}\,(x+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot(x+y)-\sqrt{y}}{(x+y)^2}-\frac{(2y)}{(\sqrt{x}+y^2)^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left\{\frac{x+y-2y}{2\sqrt{y}\,(x+y)^2}-\frac{2y}{(\sqrt{x}+y)^2}\right\}$$

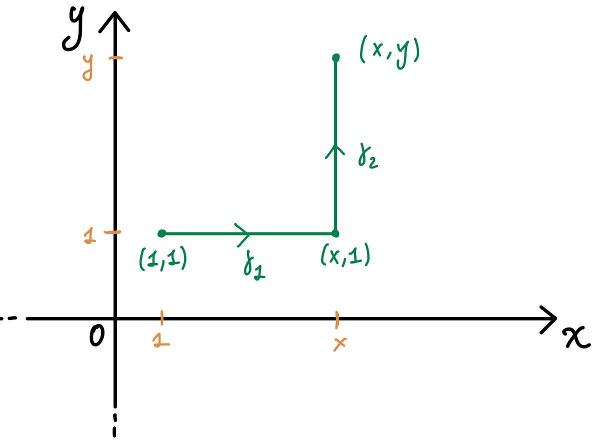
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 2y\left(-\frac{1}{(\sqrt{x}+y^2)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y)-\sqrt{x}}{(x+y)^2}\right) = -\frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+y^2)^2}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\frac{(x+y)-2x}{2\sqrt{x}\,(x+y)^2}$$

$$X'_y = \frac{x-y}{4\sqrt{x}\sqrt{y}\,(x+y)^2}-\frac{y}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+y^2)^2}$$

UGUALI $\Rightarrow$ F.D. Chiusa, in A (Campo s.c.)
$\Rightarrow$ ESATTA

$$Y'_x = \frac{x-y}{4\sqrt{x}\sqrt{y}\,(x+y)^2}-\frac{y}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+y^2)^2}$$

2) Integrazione



$$\gamma_1: \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} \quad 1<t<x \quad \Rightarrow dy = \frac{1}{1}dt$$

$$\gamma_2: \begin{cases} y=t \\ x=x \end{cases} \quad 1<t<y \quad \Rightarrow dx = 1\,dt$$

$$f(x,y) = \bar{c} + \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\sqrt{t}+1}\right)dt + \int_1^y \frac{2t}{\sqrt{x}+t^2}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{t}\,(x+t)}\,dt$$

Pongo $\boxed{\sqrt{t}=u}$ $\rightarrow t=u^2 \rightarrow dt = 2u\,du$

$$f(x,y) = \bar{c} + \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{\cancel{2u}}\left(\frac{1}{u^2+1}+\frac{1}{u+1}\right)\cdot \cancel{2u}\,du - \int_1^{\sqrt{y}} \frac{\sqrt{x}}{\cancel{2u}(x+u^2)}\cancel{2u}\,du + \int_1^y \frac{2t}{\sqrt{x}+t^2}\,dt$$

cost $D[t^2]=2t$

$$= \bar{c} + \int_1^{\sqrt{x}}\frac{du}{u^2+1} + \int_1^{\sqrt{x}}\frac{du}{u+1} - \sqrt{x}\int_1^{\sqrt{y}}\frac{du}{x+u^2} + \left[\ln\left(\sqrt{x}+t^2\right)\right]_1^y$$

$x=(\sqrt{x})^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{aTan}\left(\frac{x}{a}\right)$

$$= \bar{c} + \left[\operatorname{atan}(u)\right]_1^{\sqrt{x}} + \left[\ln|u+1|\right]_1^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{atan}\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\right]_1^{\sqrt{y}} + \ln(\sqrt{x}+y^2) - \ln(\sqrt{x}+1)$$

$$= \bar{C} + \operatorname{atan}(\sqrt{x}) - \underbrace{\operatorname{atan}(1)}_{\frac{\pi}{4}} + \cancel{\ln|\sqrt{x}+1|} - \ln|2| - \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) + \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \ln(\sqrt{x}+y^2) - \cancel{\ln(\sqrt{x}+1)}$$

$\operatorname{atan}(\sqrt{x}) + \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\quad \operatorname{atan}(1) - \ln(2) = \underline{\text{Cost}}$ $\quad \Rightarrow \bar{C} - \ln 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2k+1) = C$

$$\Rightarrow f(x,y) = C + \ln(\sqrt{x}+y^2) - \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$$

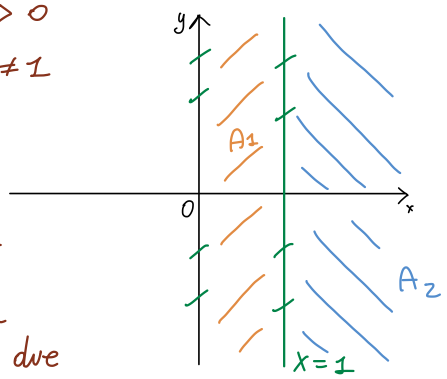
PRIMITIVA

• $\frac{1}{\ln x}\left(-\frac{y}{x\ln x}\,dx + dy\right)$

$X = -\frac{y}{x\ln^2 x}$

$Y = \frac{1}{\ln x}$

$A: \begin{cases} \ln x \neq 0 \\ x > 0 \\ x\ln x \neq 0 \longrightarrow x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

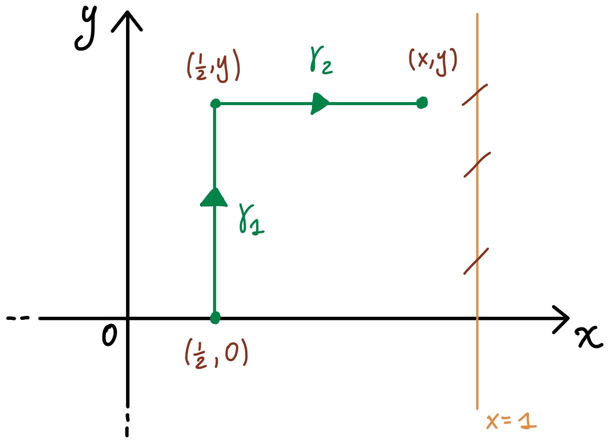


• Qualora fosse chiusa (w) sarebbe esatta in A_1 oppure in A_2.

Potremmo quindi calcolarne una primitiva locale in A_1 o A_2; le due primitive dovrebbero essere uguali.

$X'_y = -\frac{1}{x\ln^2 x}$; $Y'_x = -\frac{1}{x\ln^2 x}$ $\quad X'_y = Y'_x \longrightarrow$ CHIUSA, esatta in A_1 e A_2

2) Scegliamo un percorso



retta verticale

$\gamma_1: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = t \end{cases}$ $\quad 0 < t < y$

$y = t \longrightarrow dx = \frac{1}{1}\,dt$

retta orizzontale

$\gamma_2: \begin{cases} y = y \\ x = t \end{cases}$ $\quad \frac{1}{2} < t < x$

$dy = dt$

$$f(x,y) = C + \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{y}{t\ln^2 t}\,dt + \int_0^y \frac{1}{\ln(\frac{1}{2})}\,dt = C + y\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{1}{t\ln^2 t}\,dt + \frac{1}{\ln(\frac{1}{2})}\int_0^y dt$$

$$= C + \frac{1}{\ln(1)-\ln(2)} + y\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{1}{t(\ln t)^2} + [t]_0^y = C - \frac{y}{\ln(2)} + y\left[\frac{1}{\ln(t)}\right]_{\frac{1}{2}}^{x}$$

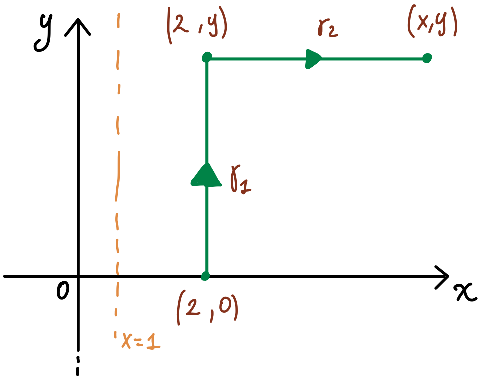
$\int \frac{1}{f^2}\cdot f' = -\frac{1}{f} + c$

$$F(x,y) = C - \frac{1}{\ln(2)}y + \frac{y}{\ln(x)} - \frac{y}{\ln(\frac{1}{2})} = C - \cancel{\frac{y}{\ln(2)}} - \cancel{\frac{y}{\ln(2)}} + \frac{y}{\ln(x)} \Longrightarrow \boxed{F(x,y) = C + \frac{y}{\ln(x)}}$$

$\longrightarrow -\frac{y}{\ln 1 - \ln(2)} = \frac{y}{\ln 2}$

Primitiva

2) OPZIONALE Scelgo A_2 come campo



$\gamma_1: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$ $\quad 0 < t < y$

$\gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = y \end{cases}$ $\quad 2 < t < x$

$$\Longrightarrow F(x,y) = C + \int_2^x -\frac{y}{t\ln^2 t}\,dt + \int_0^y \frac{1}{\ln 2}\,dt$$

$$= C - y\int_2^x \frac{1}{t\,\ln^2 t}\,dt + \frac{1}{\ln 2}\int_0^y dt = C + y\left[\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^x + \frac{1}{\ln 2}\left[t\right]_0^y = C + y\left[\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(2)}\right] + \frac{y}{\ln 2}$$

$$\int \frac{\frac{1}{t}}{\ln^2(t)}\,dt \Rightarrow \int \frac{1}{f^2}\cdot f' = -\frac{1}{f} + c$$

$$\boxed{\text{Target} \quad C + \frac{y}{\ln x}}$$

$$= C + \frac{y}{\ln x} - \cancel{\frac{y}{\ln(2)}} + \cancel{\frac{y}{\ln(2)}} = C + \frac{y}{\ln(x)}$$

Metodo 2:

- $\frac{1}{\ln x}\left(-\frac{y}{x\ln x}\,dx + dy\right)$ $\quad X = -\frac{y}{x\ln^2 x}$; $Y = \frac{1}{\ln x}$

$X'_y = -\frac{1}{x\ln^2 x}$ $\quad Y'_x = D[\ln x^{-1}] = -\frac{\ln(x)^{-2}}{x} = -\frac{1}{x\ln^2 x}$ $\Rightarrow$ chiusa esatta in A_1 o A_2

Trovo la primitiva

$$-\int \frac{y}{x\ln^2 x}\,dx \qquad t = \ln(x) \Rightarrow dx = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x\,dt$$

$$\Rightarrow -y\int \frac{1}{t^2}\,dt = -y\int t^{-2}\,dt = -y\left(\frac{t^{-2}}{-1}\right) = \frac{y}{t} + c = \frac{y}{\ln(x)} + c(y)$$

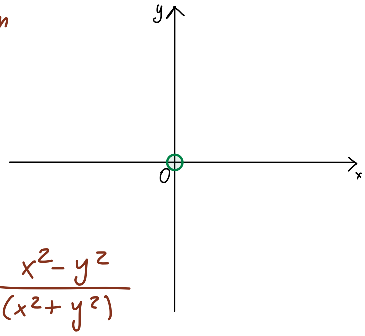
$$\Rightarrow D_y = \cancel{\frac{1}{\ln x}} + c'(y) = \cancel{\frac{1}{\ln x}} \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = K$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{y}{\ln(x)} + K$$ Si trova

$$\omega = y\left(y - \frac{1}{x^2+y^2}\right)dx + x\left(\frac{1}{x^2+y^2} + 2y\right)dy \qquad A : \{x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \,/\, (x,y) = (0,0)\}$$

$$X = y^2 - \frac{y}{x^2+y^2}$$

Per via di A, $\mathbb{R} - \{(0,0)\}$ NON E' un campo sempl. connesso.



$$Y = \frac{x}{x^2+y^2} + 2xy$$

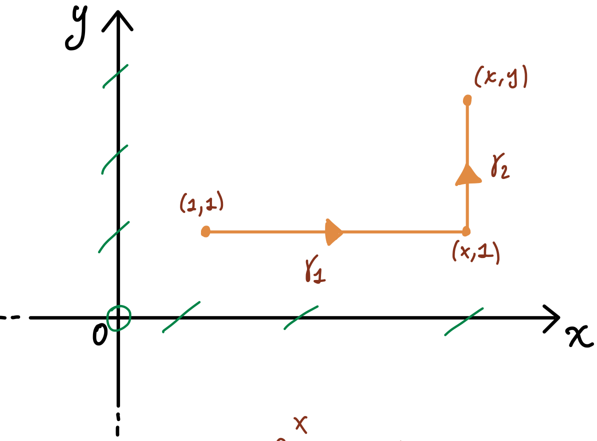
$$X_y' = 2y - \left\{\frac{(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right\} = 2y - \frac{x^2 + \cancel{y^2} - \cancel{2}y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2y - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}$$

$$Y_x' = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)} + 2y = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} + 2y$$

uguali $\Rightarrow$ Forma chiusa

ma $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \Rightarrow$ quindi non esatta in $A \,/\, \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

$\Rightarrow$ Consideriamo come campo connesso il 1° quadrante.



$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad 1 < t < x \Rightarrow X$

$\gamma_2 : \begin{cases} x = x \\ y = t \end{cases} \quad 1 < t < y \Rightarrow Y$

$$F(x,y) = C + \int_1^x 1 - \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_1^y \frac{x}{x^2+t^2}\,dt = C + [x-1] - \int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt + x\int_1^y \frac{1}{x^2+t^2} + 2xt\,dt$$

$$= C + [x-1] - [\operatorname{atan}(t)]_1^x + x\int_1^y \frac{dt}{x^2+t^2} + 2x\int_1^y t\,dt$$

$$\frac{1}{a^2+t^2} = \left(\frac{1}{a}\right)\operatorname{atan}\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\Rightarrow C + x - 1 - \operatorname{atan}(x) + \frac{\pi}{4} + x\left[\frac{1}{x}\operatorname{atan}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_1^y + 2x\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^y$$

$$= C + \cancel{x} - \operatorname{atan}(x) + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right) + xy^2 - \cancel{x} - 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$= C - 1 + \frac{\pi}{4} - \operatorname{atan}(x) + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right) + xy^2$$

$$\operatorname{atan} x + \operatorname{atan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$$

$$\Rightarrow C - 1 - \frac{\pi}{4}(2k+1) = C_1 \Rightarrow F(x,y) = C_1 + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + xy^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{atan} x + \operatorname{atan}\frac{1}{x} = \text{Cost}$$

in $x > 0 \cup y > 0$ (1° quadrante)

• $\omega = -y\,dx + \sin x\,dy$ A: $\mathbb{R}^2$

$X = -y$ $\quad X'_y = -1$
$Y = \sin x$ $\quad Y'_x = \cos x$ } Diversi $\Rightarrow$ Non chiusa

• $\omega = xy\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy$ A: $\mathbb{R}$ $\quad X = xy \quad Y = \frac{x^2}{2} \rightarrow X'_y = x \quad Y'_x = x$ chiusa ✓

• $\omega = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(y\,dx - x\,dy)$

$X = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \rightarrow X'_y = D\left[\frac{1}{x^2}y + y^{-1}\right] = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

$Y = -\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2} \rightarrow Y'_x = D\left[x^{-1} + \frac{1}{y^2}x\right] = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

} uguali $\rightarrow$ chiusa

$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ A: $x^2+y^2 \neq 0 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid (x,y) = (0,0)\}$

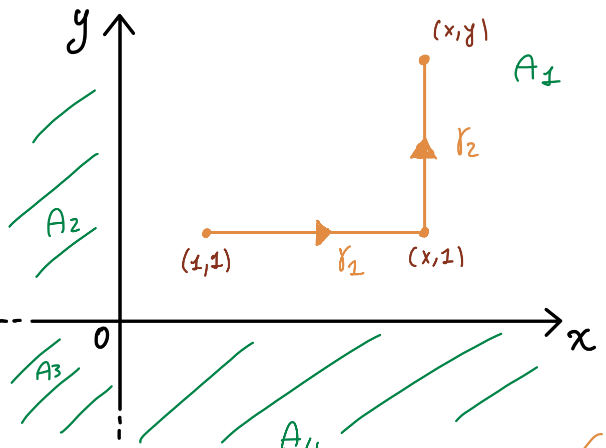
$\rightarrow A' = \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \rightarrow$ I° quadrante

$\rightarrow X = -\frac{y}{x^2+y^2} \rightarrow X'_y = -\frac{(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$Y = \frac{x}{x^2+y^2} \rightarrow$

$Y'_x = \frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ uguali

F.D. Chiusa



$\gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad 1 < t < x$

$\gamma_2: \begin{cases} x = x \\ y = t \end{cases} \quad 1 < t < y$

$\Rightarrow F(x,y) = C + \underbrace{\int_1^x -\frac{1}{t^2+1}\,dt}_{a} + \underbrace{\int_1^y \frac{x}{x^2+t^2}\,dt}_{b}$

a) $-\int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\left[\operatorname{atan}(t)\right]_1^x = -\operatorname{atan}(x) + \underbrace{\operatorname{atan}(1)}_{\frac{\pi}{4}}$

b) $x\int_1^y \frac{1}{x^2+t^2}\,dt \qquad \int \frac{1}{a^2+t^2}\,dt = \boxed{\frac{1}{a}\operatorname{atan}\left(\frac{t}{a}\right)} \Rightarrow x\left[\frac{1}{x}\operatorname{atan}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_1^y$

$= \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow F(x,y) = C + \frac{\pi}{4} - \operatorname{atan}(x) + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad \operatorname{atan}(x) + \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}(2k+1)$

$\Rightarrow C + \frac{\pi}{4} - \underbrace{\left[\operatorname{atan}(x) + \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right)\right]}_{\frac{\pi}{2}(2k+1)} + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow \bar{C} = C + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2k+1) \rightarrow F(x,y) = \bar{C} + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$

Esercizio 4. Si consideri la seguente forma differenziale

$$\omega = y\sin(2x)\,dx + x\,dy$$

Calcolare l'integrale curvilineo di ω lungo le curve $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ date da

$$\gamma_1(t) = (t,t),$$

$$\gamma_2(t) = (t,t^2).$$

Dire se ω è una forma differenziale esatta giustificando la risposta.

1) Considero la F.D. :

Punto 1

$\omega(x,y) = y\sin(2x)\,dx + x\,dy$

Ne segue che

$X = y\sin(2x) \quad , \quad Y = x$

$\Rightarrow$ Calcolo le derivate Parziali

$X'_y = \sin(2x) \quad ; \quad Y'_x = 1 \quad \Rightarrow \quad X'_y \neq Y'_x \Rightarrow$ Per Definizione la F.D. non e' chiusa.

Per il Teorema Di condizione necessaria, se una F.D. NON E' chiusa, non e' nemmeno esatta.

FINE ESERCIZIO (?)

Punto 2

Domanda dire che $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ date da $\gamma_1(t) = (t,t)$, $\gamma_2(t) = (t,t^2)$

Equivale a dire ...

$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 < t < 1 \quad , \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 < t < 1 \qquad ?$

Punto 3

Inoltre ... qualora la F.D. ω fosse stata ESATTA, avrei integrato nel seguente modo:

$$F(x,y) = c + \int_0^1 X\,dt + \int_0^1 Y\,dt = c + \int_0^1 t\sin(t)\,dt + \int_0^1 t\,dt$$

Metodo di risoluzione consigliato dal prof - Youmath

$$\omega = \alpha(x,y)\,dx + \beta(x,y)\,dy$$

1) Scegliamo una delle due componenti (quella più facile da derivare) e la integriamo:

$$\int [\alpha(x,y)]\,dx = f(x,y) + C(y)$$ Funzione da determinare

2) Deriviamo rispetto all'altra variabile il risultato dell'integrale e lo poniamo uguale all'altra componente:

$$\frac{d}{dy}[f(x,y) + C(y)] = \beta(x,y)$$

Attenzione! Trattiamo $C(y)$ come una funzione, e non come costante!

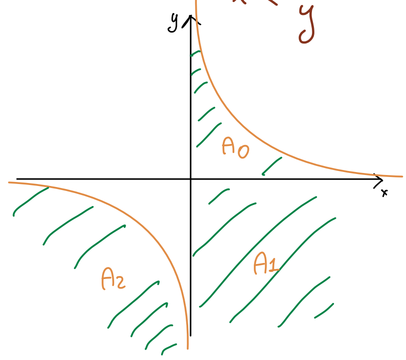
Derivando, otterremo $c'(y)$ che ci permetterà di trovare $c(y)$ (integrando
$\int c'(y) = \int \frac{d}{dy} f(x,y) + \beta(x,y)\,dy$

3) Si sostituisce il valore trovato $[C(y)]$ nel risultato dell'integrale del passaggio 1.

Esempio: Studiare la F.D.

$$\omega = \frac{xy-(1-xy)\ln(1-xy)}{1-xy}\,dx + \frac{x^2}{1-xy}\,dy$$

$$A: \begin{cases} 1-xy>0 \\ 1-xy \neq 0 \end{cases} \quad 1-xy>0 \text{ per } xy<1 \begin{cases} y<\frac{1}{x} \\ x<\frac{1}{y} \end{cases}$$



$$X = \frac{xy-(1-xy)\ln(1-xy)}{1-xy} =$$

$$X'_y = \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{2x(1-xy)-x^2(-y)}{(1-xy)^2} = \frac{2x-\cancel{2x^2y}+\cancel{x^2y}}{(1-xy)^2} = \frac{2x-x^2y}{(1-xy)^2}$$

(sopra: $-x^2y$)

2) Integriamo la componente $\beta(x,y)$

$$\int \frac{x^2}{1-xy}\,dy = -x\int \frac{-x}{1-xy}\,dy = -x\ln(1-xy) + C(x)$$

$$D_y[1-xy] = -x$$

3) Deriviamo $$\frac{d}{dx}\,-x\ln(1-xy)+C(x) = -\ln(1-xy)+(-x)\frac{-y}{1-xy} + c'(x)$$

$$= -\ln(1-xy) + \frac{xy}{1-xy} + c'(x)$$

Poniamo il tutto uguale ad $\alpha(x,y)$

$$\frac{xy}{1-xy} - \ln(1-xy) + c'(x) = \frac{[xy-1+xy]\ln(1-xy)}{\cancel{1-xy}}$$

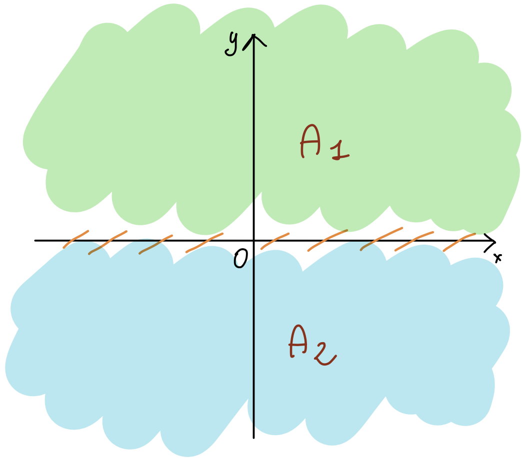
$$\frac{xy-\ln(1-xy)+xy\ln(1-xy)+c'(x)(1-xy)}{\cancel{1-xy}}$$

$\omega = 2xy - \frac{1}{x} \, dx + x^2 dy$ $\qquad A: x \neq 0$

$X = 2xy - \frac{1}{x} \to X'_y = 2x$

$Y = x^2 \to Y'_x = 2x$ $\Big\}$ uguali

$\boxed{\begin{array}{l} A_1: \{(x,y) \,/\, x>0\} \\ A_2: \{(x,y) \,/\, x<0\} \end{array}}$



$\Rightarrow \omega$ chiusa ma non esatta in $A = \mathbb{R}^2$
è esatta in A_1 OR A_2

1) Integro Y

$\Rightarrow \int x^2 \, dy = x^2 y + c(x)$

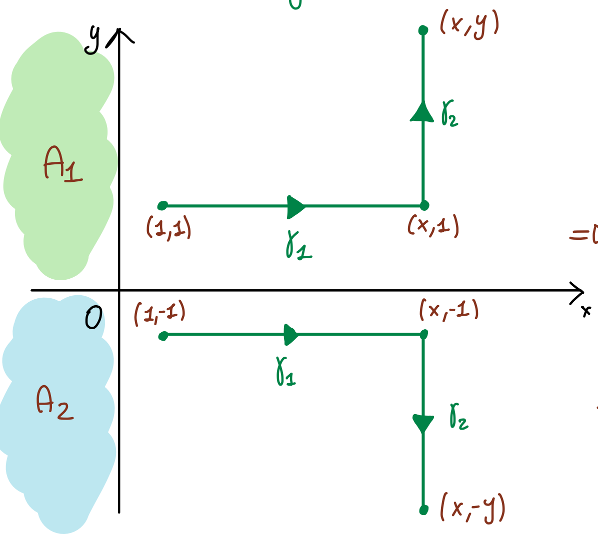
$\frac{d}{dx} x^2 y + c(x) = 2xy + c'(x) \Rightarrow 2xy + c'(x) = 2xy - \frac{1}{x}$

$\Rightarrow c'(x) = \cancel{2xy} - \frac{1}{x} - \cancel{2xy} \Rightarrow \int c'(x)\,dx = -\int \frac{1}{x} dx \to c(x) = -\ln|x| + K$

$\begin{cases} A_1: \text{ per } x>0 \\ A_2: \text{ per } x<0 \end{cases} \begin{cases} x^2 y - \ln(x) + K \\ x^2 y - \ln(-x) + K \end{cases}$ con $K \in \mathbb{R}$

Primitiva

Con metodo integ. curvilinei



$\gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad 1 < t < x$

$\gamma_2: \begin{cases} x = x \\ y = t \end{cases} \quad 1 < t < y$

$\Rightarrow F(x,y) = c + \int_1^x 2t - \frac{1}{t} \, dt + \int_1^y x^2 \, dt$

$= c + \left[t^2\right]_1^x + \left[-\ln(t)\right]_1^x + \left[x^2 t\right]_1^y$

$= c + \left[x^2 - 1\right] + \left[-\ln(x) + \underbrace{\cancel{\ln(1)}}_{0}\right] + \left[x^2 y - x^2\right]$

$= c + \cancel{x^2} - 1 - \ln(x) + x^2 y - \cancel{x^2}$

$= c - 1 - \ln(x) + x^2 y$

Non mi trovo per questo 1

$\gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases} \quad 1 < t < x$

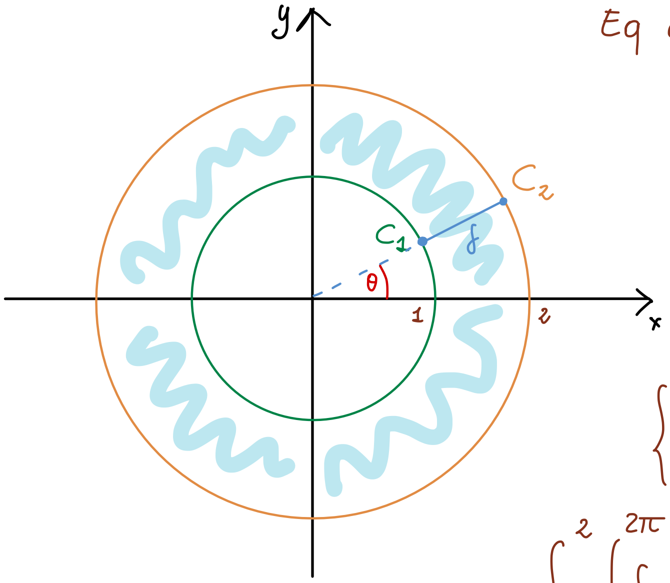
$\gamma_2: \begin{cases} x = x \\ y = t \end{cases} \quad -1 < t < -y$

$= c + \int_1^x -2t - \frac{1}{t} \, dt + \int_{-1}^y x^2 \, dt$

$= c - 2\int_1^x t - \int_1^x \frac{1}{t} \, dt + x^2 \int_{-1}^y dt = c + \left[t^2\right]_1^x - \left[\ln(t)\right]_1^x + x^2 y^2 - x^2$

$= c + \cancel{x^2} - 1 - \ln(x) + \overset{0}{\cancel{\ln(1)}} + x^2 y^2 - \cancel{x^2} = c - 1 - \ln(x) + x^2 y \to$ per $x<0 \to c - 1 - \ln(-x) + x^2 y$

anche qui



Eq cerchi $\quad C_2: x^2+y^2=4$

$C_1: x^2+y^2=1$

Lungo $f(x,y)=1 \leftarrow$ Piano $z=1$

eq in coordinate Polari

$$\begin{cases} x=\delta\cos\theta \\ y=\delta\sin\theta \end{cases} \Rightarrow D:\{(\delta,\theta)\ /\ 1<\delta<2\ ,\ 0<\theta<2\pi\}$$

$$\Rightarrow \int_1^2\int_0^{2\pi} \delta\, d\delta\, d\theta = \int_1^2 \delta \int_0^{2\pi} d\theta\, d\delta = \int_1^2 \delta\,[\theta]_0^{2\pi}\, d\delta$$

$$= \int_1^2 \delta\, 2\pi\, d\delta = 2\pi\int_1^2 \delta\, d\delta = 2\pi\left[\frac{\delta^2}{2}\right]_1^2$$

$$= 2\pi\left[\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right] = 2\pi\left[\frac{3}{2}\right] = 3\pi$$

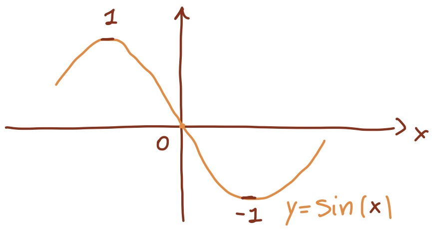
$$A_c = \pi r^2 \Rightarrow C_2 - C_1 = \pi 2^2 - \pi = \pi\cdot 4 - \pi = 3\pi \ \checkmark$$

Deriviamo la formula

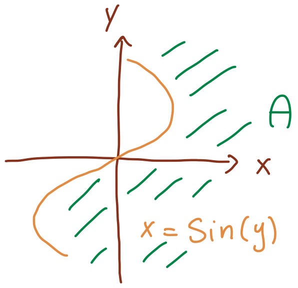
$$2\pi\left[\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2}\right] \qquad R = \text{Raggio}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x-\sin(2y)}}\,dx - \frac{2\cos(2y)}{\sqrt{x-\sin(2y)}}\,dy$$

1) $A: \begin{cases} \sqrt{x-\sin(2y)} \neq 0 \\ x-\sin(2y) > 0 \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x > \sin(2y) \\ \sin(2y) < x \rightarrow 2y < \text{asin}(x) \rightarrow y < \frac{1}{2}\text{asin}(x) \end{array} \right.$



$\Rightarrow$



A non presenta "buchi"

2) $X = \frac{1}{\sqrt{x-\sin(2y)}}$; $Y = -\frac{2\cos(2y)}{\sqrt{x-\sin(2y)}}$

$$X'_y = D(x-\sin(2y))^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(x-\sin(2y))^{-\frac{3}{2}}\cdot(\cancel{-}\cos(2y)\cdot\cancel{2}) = \frac{\cos(2y)}{\sqrt{[x-\sin(2y)]^3}}$$

$$Y'_x = \left[-2\cos(2y)\cdot(x-\sin(2y))^{-\frac{1}{2}}\right] = \cancel{-2}\cos(2y)\cdot\left[\cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}}(x-\sin(2y))^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$= \frac{\cos(2y)}{\sqrt{[x-\sin(2y)]^3}} = X'_y \Rightarrow$ F.D. Chiusa, in $A \Rightarrow$ Esatta

3) Calcolo la primitiva

$\int X\,dx = \int (x-\sin(2y))^{-\frac{1}{2}}dx$ pongo $\sin(2y) = k \Rightarrow \int (x-k)^{-\frac{1}{2}}dx$

pongo $(x-k)^{-\frac{1}{2}} = t \Rightarrow dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}(x-k)^{-\frac{3}{2}}} = \frac{1}{-\frac{1}{2\sqrt{[x-k]^3}}} = -\frac{(x-k)\sqrt{x-k}}{2}\,dt$

$\rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cancel{\sqrt{x-k}}}\cdot(x-k)\cancel{\sqrt{x-k}}\,dt = -\frac{1}{2}\int x-k\,dt$

$\frac{1}{\sqrt{x-k}} = t \Rightarrow \sqrt{x-k} = \frac{1}{t} \Rightarrow x-k = \frac{1}{t^2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int t^{-2}dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right] = \frac{1}{2t}$

$\Rightarrow \frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{x-k}}} = \frac{1}{2}\sqrt{x-k} = \frac{1}{2}\sqrt{x-\sin(2y)} + c(y)$

$\rightarrow$ Derivo rispetto ad y

$$D_y\left[\frac{1}{2}(x-\sin(2y))^{\frac{1}{2}} + c(y)\right] = \frac{1}{\cancel{4}\,2}(x-\sin(2y))^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\cos(2y)\cdot\cancel{2}) + c'(y)$$

$$\rightarrow -\frac{\cos(2y)}{2\sqrt{x-\sin(2y)}} + c'(y) = -\frac{2\cos(2y)}{\sqrt{x-\sin(2y)}}$$

$$\Rightarrow c'(y) = \frac{\cos(2y)}{2\sqrt{x-\sin(2y)}} - \frac{2\cos(2y)}{\sqrt{x-\sin(2y)}} = \frac{\cos(2y) - 4\cos(2y)}{2\sqrt{x-\sin(2y)}} = -\frac{3\cos(2y)}{2\sqrt{x-\sin(2y)}}$$

$$\Rightarrow c(y) = -\frac{3}{2}\int \frac{\cos(2y)}{\sqrt{x-\sin(2y)}}\,dy \qquad t = (x-\sin(2y))^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x-\sin(2y))^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2\cos(2y))$$

$$\Rightarrow dy = \frac{1}{\dfrac{\cos(2y)}{(x-\sin(2y))\sqrt{x-\sin(2y)}}}\,dt \Rightarrow -\frac{3}{2}\int \frac{\cancel{\cos(2y)}}{\cancel{\sqrt{x-\sin(2y)}}} \cdot \frac{(x-\sin(2y))\cancel{\sqrt{x-\sin(2y)}}}{\cancel{\cos(2y)}}\,dt$$

$$= -\frac{3}{2}\int x-\sin(2y)\,dt \Rightarrow (x-\sin(2y))^{-\frac{1}{2}} = t \Rightarrow x-\sin(2y) = \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}\int t^{-2}\,dt = -\frac{3}{2}\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right] = \frac{3}{2t} = \frac{3}{2\dfrac{1}{\sqrt{x-\sin(2t)}}} = \underbrace{\frac{3}{2}\sqrt{x-\sin(2t)}}_{c(y)} + K$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{x-\sin(2y)} + \frac{3}{2}\sqrt{x-\sin(2t)} + K$$

$$\Rightarrow F(x,y) = 2\sqrt{x-\sin(2y)} + K$$

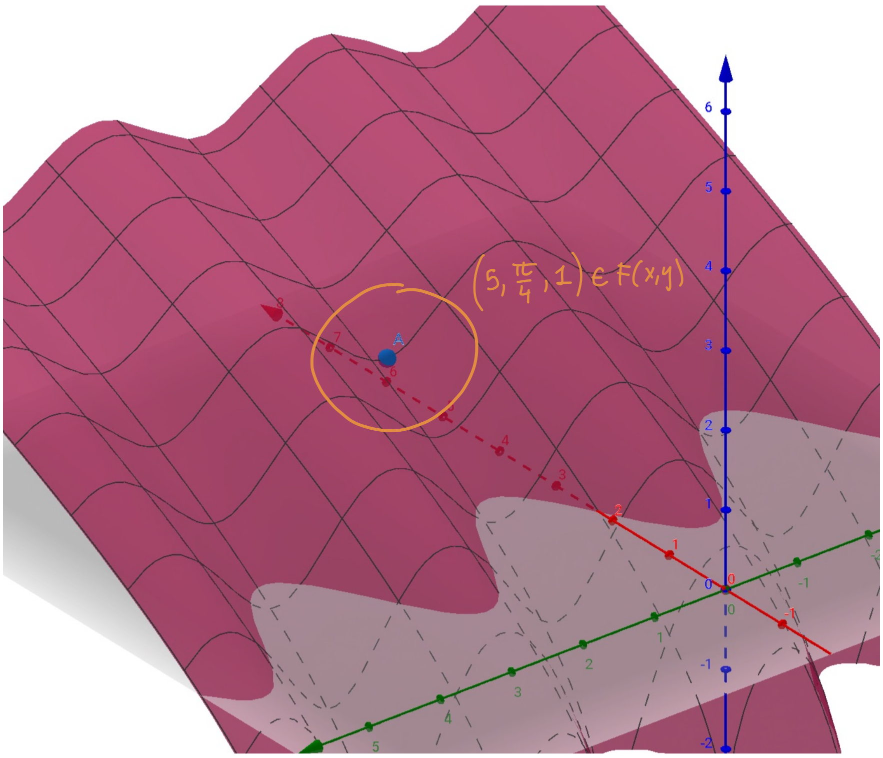
Tempo $\underbrace{8'}_{A} + \underbrace{20'}_{F(x,y)}$

Determinare $F(5, \frac{\pi}{4}) = 1$

$$\Rightarrow F(5,\tfrac{\pi}{4}) = 2\sqrt{5-\sin(\tfrac{\pi}{2})} + K = 1 \rightarrow 2\sqrt{5-1} + K = 1 \rightarrow 2(2) + K = 1$$

$$\rightarrow 4 + K = 1 \rightarrow K = 1 - 4 = -3$$

$$\Rightarrow F(5,\tfrac{\pi}{4}) = 1 = 2\sqrt{x-\sin(2y)} - 3$$



$$\omega = \frac{x\,dx + dy}{x^2+2y+1}$$

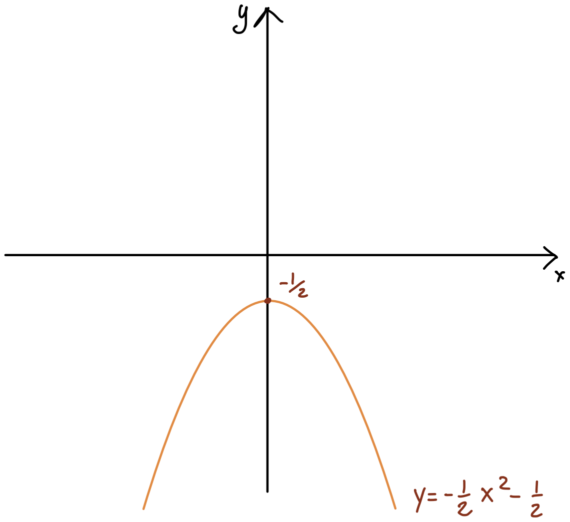
$$X = \frac{x}{x^2+2y+1} \qquad Y = \frac{1}{x^2+2y+1}$$

$$X'_y = x\cdot\left(x^2+2y+1\right)^{-1} = -x\left(x^2+2y+1\right)^{-2}\cdot 2 = -\frac{2x}{(x^2+2y+1)^2}$$

$$Y'_x = \left(x^2+2y+1\right)^{-1} = -\left(x^2+2y+1\right)^{-2}\cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+2y+1)^2}$$

uguali

A: $x^2+2y+1 \neq 0$ per $y \neq \frac{-x^2-1}{2} \neq -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$



L'insieme di Def presenta dei "buchi" lungo la funzione $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

Potremmo considerare $A: y>0$

2)

$$\int \frac{x}{x^2+2y+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2y+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2y+1| + c(y)$$

$$D_y = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{x^2+2y+1} + c'(y) = \frac{1}{x^2+2y+1} + c'(y)$$

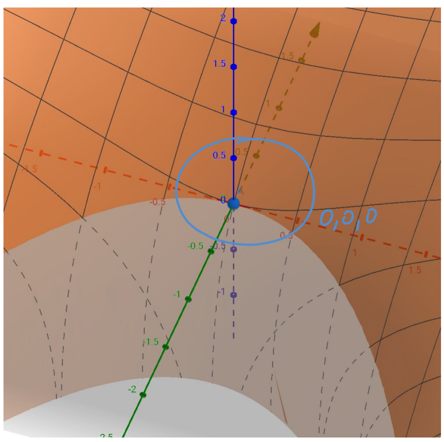
$$\Rightarrow c'(y) = \frac{1}{x^2+2y+1} - \frac{1}{x^2+2y+1} \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = K$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+2y+1) + K$$

$$F(0,0) = \frac{1}{2}\ln(0+0+1) + K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\underbrace{\ln(1)}_{0} + K = 0 \Rightarrow K = 0$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+2y+1)$$

Primitiva che si annulla nell'origine



$$w = y\,a(x)\,dx + x\,b(y)\,dy \qquad A = D_{a(x)} \cap D_{b(x)}$$

Due funzioni

$$X = y \cdot a(x) \quad \Rightarrow \quad X'_y = a(x)$$
$$Y = x\,b(y) \qquad\quad Y'_x = b(y)$$

sulla base che la F.D. e' esatta $\Rightarrow a(x) = b(y)$

$$\Rightarrow w = y\,a(x)\,dx + x\,b(x)\,dy$$

$$\int y\,a(x)\,dx = y\,A(x) + C(y) \quad \Rightarrow D = A(x) + C'(y) = a(x)$$

$$\Rightarrow C'(y) = a(x) - A(x) \quad \Rightarrow C(y) = \int a(x)\,dy - \int A(x)\,dy$$

$$\Rightarrow C(y) = y\,a(x) - y\,A(x) = \underbrace{y\big(a(x) - A(x)\big) + k}_{C}$$

$$\Rightarrow F(x,y) = y\,A(x) + y\big(a(x) - A(x)\big) + k \quad \Rightarrow F(x,y) = y\big(\cancel{A(x)} + a(x) - \cancel{A(x)}\big) + k$$

$$\Rightarrow F(x,y) = y\,a(x) + k$$

$w = \left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} \right] dx + \left[\frac{2xy}{x^2+y^2} \right] dy$ lungo la curva

$\gamma: \begin{cases} x = 2+\cos(t) \\ y = 2\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0,\pi]$

calcolare $\int_\gamma w$

1) A: $x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow$

"buco" in $(x,y)=(0,0)$

Possiamo considerare come c.c. il 1° quadrante

$$X'_y = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2x^2 \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4yx^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(x^2+y^2) - 4yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Y'_x = \frac{2y(x^2+y^2) - (2xy)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2yx^2+2y^3-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$X'_y = \frac{2x^2y+2y^3-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

uguali

Controlliamo l'esattezza   Calcoliamo l'integrale lungo la circonferenza di $C=(0,0)$ e $r=1$ che avvolge il punto $(0,0)$ dove è presente il "buco"

C di $C=(0,0)$ e $r=1$ $= \begin{cases} \cos(t) \\ \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0,2\pi] \;/\; 0<t<2\pi$

$$\Rightarrow \int_C w = \int_0^{2\pi} A[\cos(t), \sin(t)] \cdot D_t[\cos(t)] + B(\cos(t), \sin(t)) \cdot D_t[\sin(t)]$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2(\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) = -2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{1} dt \overset{\text{Parti}}{\Rightarrow} -\sin t \cdot \cos t - \int \cos^2 t \, dt$$

$$\Rightarrow -\sin t \cos t - \int 1 + \int \sin^2 t = \int \sin^2 t \Rightarrow 2\sin t \cos t + 2t - 2\int \sin^2 t = \int \sin^2 t$$

$$\Rightarrow 3I = 2\sin t \cos t + 2t \Rightarrow -2\int \sin^2 t = \left[\frac{2}{3} \sin t \cos t + \frac{2}{3} t \right]_0^{2\pi}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 0 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2\pi - \frac{2}{3} 0 \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 2\pi = \emptyset$$ Identicamente nulla $\Rightarrow$ ESATTA

Calcoliamo la primitiva

$$\int \frac{2xy}{x^2+y^2} dy = x \int \frac{2y}{x^2+y^2} = x \ln|x^2+y^2| + c(x)$$

$D_y[x^2+y^2] = 2y$

$$\Rightarrow D_x = \ln|x^2+y^2| + x \cdot \frac{2x}{x^2+y^2} + c'(x) = \ln|x^2+y^2| + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + c'(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = \cancel{\ln(x^2+y^2)} + \cancel{\frac{2x^2}{x^2+y^2}} - \cancel{\ln|x^2+y^2|} - \cancel{\frac{2x^2}{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow c'(x) = \emptyset$$

$\Rightarrow \quad c(x) = K$

$\Rightarrow \quad F(x,y) = x \ln(x^2+y^2) + K \quad = U(x,y)$

Calcolo lungo la curva:

Possiamo calcolarlo come: $\int_\gamma w = U(\beta) - U(\alpha)$ dove β e α sono i punti estremi

$U(\beta) = F(2+\cos(\pi), 2\sin(\pi))$, $U(\alpha) = F(2+\cos(0), 2\sin(0))$

$= F(2+(-1), 2\cdot(0)) = F_\beta(1,0)$, $F_\alpha(3,0)$

$F_\beta = \ln(1+0) = \ln(1) = 0$, $F_\alpha = 3\ln(9+0) = 3\ln(9)$

$$\int_\gamma w = U(\beta) - U(\alpha) = 0 - 3\ln(9) = -3\ln(9)$$

Metodo "manuale"

$\gamma: \begin{cases} x = 2+\cos(t) \\ y = 2\sin(t) \end{cases} \quad 0 < t < \pi$

$X = \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} \qquad Y = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \underbrace{\ln\left[(2+\cos(t))^2 + 4\sin^2(y)\right]}_{a} dt + \int_0^\pi \frac{2(2+\cos(t))^2}{(2+\cos(t))^2 + (2\sin t)^2} dt + 2\int \frac{(2+\cos t)(2\sin t)}{(2+\cos(t))^2 + (2\sin(t))^2} dt$$

a) $\int \ln\left[4+\cos^2(t) + 4\cos t + 4\sin^2(t)\right] \Rightarrow \int \ln\left[1 + 3\sin^2(t) + 4(1+\cos t)\right] dt$

$= \text{Parti} = t\ln\left[1+3\sin^2(t)+4(1+\cos t)\right] - \int \dfrac{3\sin(2t) - 4\sin(t)}{5+3\sin^2(t)+4\cos(t)} \sim \int \dfrac{f'(t)}{f(t)} dt$

$D: \dfrac{3\sin(2t) - 4\sin t}{5 + 3\sin^2(t) + 4\cos t}$

$$\Rightarrow \left[t\ln\left[3\sin^2(t) + 5 + 4\cos t\right] - \ln\left[5+3\sin^2(t)+4\cos(t)\right]\right]_0^\pi$$

$$\Rightarrow \left[(t-1)\cdot\ln\left[3\sin^2(t)+5+4\cos t\right]\right]_0^\pi = (\pi-1)\cdot\ln(0+5+4) - \left[(\pi)^0(\ln(0+5+4)\right]$$

$$= (\pi-1)(\ln(9)) - \pi\ln(9) = \ln(9)(\pi-1-\pi) = -\ln 9 \quad a$$

b) $\displaystyle\int \frac{2(4+2\cos^2 t + 4\cos t)}{4+\cos^2 t + 4\cos t + 4\sin^2 t} = \int \frac{8+4\cos^2 t + 8\cos t}{5+3\sin^2 t + 4\cos t} dt$ Diventa difficile