Scomposizione di polinomi

Premesse

Ogni polinomio a coefficienti reali o è irriducibile o si può scrivere come prodotto di polinomi di primo e secondo grado.

Esempi:

- $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$
- $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = (x-2)^2(x^2+1)$

Metodo di risoluzione

Non esiste un metodo standardizzato per la scomposizione; abbiamo però delle tecniche:

- Raccoglimento Totale
- Raccoglimento Parziale
- Scomposizione mediante prodotti notevoli
- Scomposizione di trinomi di 2° grado
- Scomposizione con RUFFINI

Raccoglimento Totale

$x(x+3) = x^2 + 3x \xrightarrow{\text{possiamo raccogliere}} x(x+3)$

$$9x^3 + 6x^2 + 3x = x(9x^2 + 6x) = 3x(3x^2 + 2x)$$

Raccoglimento Parziale

$x^3 + x^2 + 2x + 2$ Non è presente un divisore comune! $\Rightarrow$ $x^2\underbrace{(x+1)} + 2\underbrace{(x+1)}$ $= (x+1)(x^2+2)$

$$2x^3 - x^2 + 6x - 3 = x^2\underbrace{(2x-1)} + 3\underbrace{(2x-1)} = (2x-1)(x^2+3)$$

Nota: Questo raccoglimento va fatto in modo da consentire un raccoglimento totale; altrimenti non ha molto senso.

Scomposizione mediante prodotti notevoli

$$(x+2)(x-2) = x^2-4 \longrightarrow \text{Differenza dei quadrati}$$

Prodotti notevoli piu' importanti:

- Differenza di quadrati $A^2-B^2 = (A-B)(A+B)$
  ES: $16x^2-1 = (4x-1)(4x+1)$
- Quadrato del binomio $A^2+2AB+B^2 = (A+B)^2$
  ES: $x^2+4x+4 = (x+2)^2$
- Cubo del binomio $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 = (A+B)^3$
  ES: $x^3+6x^2+12x+8 = (x)^3+3(x)^2\cdot 2+3\cdot x(2)^2+(2)^3 = (x+2)^3$
- Differenza di cubi $A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$
  ES: $x^3-8 = (x-2)(x^2-2x+4)$
- Somma di cubi $A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)$
  ES: $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$

Puo' succedere...
Il prodotto notevole potrebbe palesarsi dopo il raccoglimento:

- $x^3+4x^2+4x = x\underbrace{(x^2+4x+4)}_{\text{quadrato di binomio}} = x(x+2)^2$
- $\underbrace{x^2+2x+1}_{\text{quadrato di binomio}}-\underbrace{y^2} = \underbrace{(x+1)^2-y^2}_{\text{Differenza di quadrati}} = (x+1-y)(x+1+y)$

Scomposizione di un trinomio di II grado

Per fattorizzare qualcosa del tipo x^2+bx+c dobbiamo cercare 2 numeri p e q aventi:

- Somma b e prodotto c

Se troviamo questi due numeri allora la scomposizione del trinomio sara': $(x+p)(x+q)$

ES: x^2+4x+3 $\quad \begin{cases} p+q=4 \\ p\cdot q=3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} p=4-q \\ \Rightarrow (4-q)q=3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4q-q^2-3=0 \\ q^2-4q+3=0 \end{cases}$ $\quad \Delta = 16-4\cdot 1\cdot 3 = 4$

$$x_{1,2} = \frac{+4\pm 2}{2} = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

$3+q=4 \Rightarrow q=4-3=\underline{1} \Rightarrow \begin{matrix} p=3 \\ q=1 \end{matrix}$

Quindi $(x+p)(x+q) = (x+3)(x+1)$

* Non era difficile trovare la soluzione a mente, ma ho mostrato il processo per equazioni piu' difficili.

ES: $x^2-7x+12$ $\quad \begin{cases} p+q=-7 \\ p\cdot q=12 \end{cases}$

A mente
$p=-3 \qquad -3\cdot(-4)=12$
$q=-4 \qquad -3+(-4)=-7$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} p+q=-7 \\ p\cdot q=12 \end{cases} \quad \begin{cases} p=-7-q \\ \Rightarrow (-7-q)\cdot q=12 \end{cases} \quad \begin{cases} -q^2-7q-12=0 \\ \Rightarrow q^2+7q+12=0 \end{cases} \quad \begin{cases} q^2+4q+3q+12=0 \\ q(q+4)+3(q+4)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (q+4)(q+3)=0 \quad \begin{cases} q+4=0 \\ q+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{q_1=-4} \\ \underline{q_2=-3} \end{cases}$$

Quindi: $x^2-7x+12=(x-4)(x-3)$

ES: x^2-2x-4 $\quad \begin{cases} p+q=-2 \\ p\cdot q=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} p=-2-q \\ \Rightarrow (-2-q)q=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} -q^2-2q+4=0 \\ q^2+2q-4=0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \Delta &= 4-4\cdot 1\cdot(-4) \\ &= 4+16=\underline{20} \end{aligned}$

Quando non riusciamo a trovare due coefficienti p e q Interi, allora il Trinomio e' irriducibile.

Non troviamo p e q interi

Regola di Ruffini

ES: Svolgere la divisione tra $A(x)=x^3-4x-2$ e $B(x)=x+1$

Coefficienti del dividendo

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 1 \end{array}$$

Opposto del termine noto del divisore

Si ricomincia

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 1 \end{array}$$

Coefficienti del quoziente

Resto

Fasi di risoluzione

1) Il primo coefficiente viene fatto scendere (1)

2) Il coefficiente appena sceso viene moltiplicato per l'opposto del termine noto (-1)

3) Si somma il risultato del punto 2 ed il secondo coefficiente; il risultato va fatto scendere

* Il grado del polinomio risultante sarà il grado del dividendo meno il grado del divisore.

$$\Rightarrow Q(x) = 1x^2-1x-3 = x^2-x-3$$

Per verificare di aver calcolato correttamente basta moltiplicare divisore e quoziente ed aggiungere il resto.

$$\underbrace{x^3-4x-2}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x+1)}_{\text{Divisore}}\underbrace{(x^2-x-3)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{1}_{\text{Resto}}$$

Caveats: Se il divisore e' un binomio di I grado del tipo $ax+b$ con $a \neq 1$, La regola di Ruffini non puo' essere utilizzata direttamente

Come risolvere?
E' possibile ricondursi ad una nuova divisione, dividendo sia il dividendo che il divisore per a. In questo modo, la nuova divisione, avente per divisore $x + \frac{b}{a}$, avra' lo stesso quoziente di quella originale e resto diviso per a; Dobbiamo quindi moltiplicare il resto per a in modo da ottenere il resto originale.

ES: Dividere $A(x) = 4x^2 - 6x + 8$ per $B(x) = 2x - 4$

! Non possiamo applicare ruffini DIRETTAMENTE (il divisore non e' del tipo $x+b$)
a) Divido the old fashioned way
b) Soluzione riportata sopra

⇒ Divido dividendo e divisore per il numero davanti alla x (coefficiente) nel divisore:

$$\frac{4x^2-6x+8}{2} = 2x^2 - 3x + 4 \qquad \text{E} \qquad \frac{2x-4}{2} = x - 2$$

Posso quindi dividere $(2x^2 - 3x + 4) : (x-2)$ con Ruffini!

	2	-3	4
2		4	2
	2	1	6

Ottengo: $Q(x) = 2x + 1$
$R = 6 \xrightarrow{\text{Resto reale}} 6 \cdot 2 = 12$

Teorema di Ruffini e teorema del Resto

Teorema del Resto

Dividere un polinomio P(x) per un altro B(x), e' equivalente a trovare due nuovi polinomi (quoziente e resto) legati ai due polinomi P(x) e B(x) dalla relazione

$$P(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Il resto o e' nullo o ha un grado minore di P(x).

Se, ad esempio, abbiamo un polinomio divisore di grado 1, del tipo $x-a$, allora il resto o e' nullo, o e' un numero.

Possiamo quindi indicarlo con R, e non R(x).
Siccome l'equazione $P(x) = (x-a) \cdot Q(x) + R$ vale per ogni x in $\mathbb{R}$, allora se calcoliamo P(a) otteniamo:

$P(a) = \cancel{(a-a)} \cdot \cancel{Q(a)} + R \Rightarrow$ Il resto della divisione e' uguale al valore che il polinomio assume quando e' calcolato in a.

$\Rightarrow$ teorema del Resto

Se un polinomio P(x) viene diviso per un binomio di I grado del tipo $x-a$, il resto della divisione e' uguale a P(a)

ES determinare il resto della divisione $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2 \ / \ x-2$

Applichiamo il teorema del resto $\longrightarrow$ Il divisore e' del tip $x-a$ ✓

$\Rightarrow R = P(a) \Rightarrow P(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 2 = 16 - 16 - 2 \Rightarrow R = -2$

ES $P(x) = x^5 - x^3 - x - 4 \ / \ x+1 \longrightarrow x-(-1) \Rightarrow a = -1$

$\Rightarrow P(a) = -1^5 - (-1)^3 - (-1) - 4 = \cancel{-1} + \cancel{1} + 1 - 4 = R = -3$

Se il Resto e' zero, allora B(x) DIVIDE P(x).

Teorema di Ruffini

Un polinomio P(x) e' divisibile per $x-a$ se e solo se $P(a) = 0$ — Sulla base di quanto detto prima

! Il teorema di Ruffini e' diverso dalla Regola di Ruffini!

ES: Stabilire se $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$ E' divisibile per $x-1$

Controlliamo se $P(a) = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow P(1) = 2 - 1 + 3 - 4 = 0$

ES: Per quale K $P(x) = x^3 - Kx^2 + x + 1$ e' Div. per $x-1$

$P(a) = 0 \Rightarrow 1 - K + 2 = 0$; $K - 1 - 2 = 0$ per $K = 3$

Scomposizione di polinomi con RUFFINI

ES: Scomporre x^3+4x^2+x-6 $\longrightarrow$ nessuna delle tecniche viste ci aiuta

Se sostituiamo 1 al posto della x otteniamo:

$f(1)=1^3+4\cdot 1^2+1-6=0$ $\longrightarrow$ Da questo capiamo che $P(x)$ e' divisibile per $\underline{x-1}$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

coefficienti di $Q(x)$

$Q(x)=x^2+5x+6$

$= x^2+3x+2x+6 = x(x+3)+2(x+3)$

$= (x+3)(x+2)\cdot(x-1)$

Metodo di risoluzione

- Cerchiamo uno zero del polinomio: un valore che sostituito ad x, rende $P(x)=0$ $\rightarrow$ Per il teorema di Ruffini questo valore ci dice che $P(x)$ e' divisibile per $(x-\{valore\})$

- Trovato $Q(x)$ tramite la Regola di Ruffini, riscriviamo il polinomio come $D(x)\cdot Q(x)$; possiamo poi procedere ulteriormente alla scomposizione.

Come troviamo lo zero di una funzione?

Gli eventuali zeri interi di un polinomio a coefficienti interi vanno ricercati all'interno dei divisori del termine noto del polinomio.
Se esistono dei divisori interi, fanno parte del divisore noto.

ES: x^3+x^2-5x+3

$P(1)=1+1-5+3=0$ 1 e' uno zero per $P(x) \Rightarrow P(x)$ divisibile per $x-1$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x^2+2x-3)(x-1)$

$\begin{cases} p+q=2 \\ p\cdot q=3 \end{cases}$ $\begin{cases} p=2-q \\ \Rightarrow (2-q)q=3 \end{cases}$ $\begin{cases} -q^2+2q=3 \\ q^2-2q-3=0 \end{cases}$

$q^2+3q-q-3=0 \Rightarrow q(q+3)-(q-3)=0$

$\Rightarrow (q+3)(q-1)=0$ $\begin{cases} q+3=0 \\ q-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} q=-3 \\ p=1 \end{cases}$

Quindi $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$\hookrightarrow (x^2+2x-3)(x-1)=(x-3)(x-1)(x-1)=(x-1)^2(x+3)$

Zeri nono interi

Gli zeri razionali di un polinomio a coefficienti interi vanno cercati tra le frazioni aventi come numeratore un divisore del termine noto di P(x), e come denominatore un numero intero Divisore del coefficiente del termine di grado massimo.

ES: $2x^3+x^2+x-1$

Convenzionalmente possiamo provare P(1) e P(-1)

$$P(1) = 2+1+1-1 = 3$$
$$P(-1) = -2+1-2 = -3$$

NON zeri!

Cerchiamo zeri razionali

$$\frac{\text{Num}}{\text{denom}} = \frac{\text{Divisori di } -1}{\text{Divisori di } 2} = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \cancel{1},\ \cancel{-1}$$

$\Rightarrow$

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} - 1 = 2\left(\tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1+1+2-4}{4} = \frac{0}{4} = 0 \ \checkmark$$

Siccome $\frac{1}{2}$ e' uno zero, P(x) e' divisibile per $(x-\frac{1}{2})$

	2	1	1	-1
$\frac{1}{2}$		1	1	1
	2	2	2	0

$$\Rightarrow P(x) = (2x^2+2x+2)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) = 2(x^2+x+1)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) = (2x-1)(x^2+x+1)$$

ESERCIZI

62) $(a-1)^2 - b^2 = (a-1-b)(a-1+b)$

63) $(a+b)^2 - (x-y)^2 = (a+b-x+y)(a+b+x-y)$

64) $a^6 - 4(b-2)^2 = (a^3)^2 - [2(b-2)]^2 = [a^3 - 2(b-2)][(a^3+2(b-2)]$

$= (a^3-2b+4)(a^3+2b-4)$

• Quadrato di binomio

Semplici

68) $x^2 + 2xy^2 + y^4 = (x+y^2)^2$

69) $x^4 - 2x^2y + y^2 = (x^2-y)^2$

70) $x^2 + 9 + 6x = (x+3)^2$

71) $4a^2 + 9 - 12a = (2a-3)^2$

72) $9a^2 - 6ax + x^2 = (3a-x)^2$

73) $4a^2x^2 + 4ax + 1 = (2ax+1)^2$

74) $x^2y^2 - 10xyz^2 + 25z^4 = (xy-5z^2)^2$

75) $1 + 9a^2 + 6a \quad (3a+1)^2$

76) $1/9\, b^2 - 4/3\, b + 4 = (\frac{1}{3}b - 2)^2$

77) $9/4\, a^2 + 4b^2 + 6ab = (3/2\, a + 2b)^2$

78) $1/16\, x^2 + 4y^2 + xy = (1/4\, x + 2y)^2$

79) $9/4\, a^2 + b^6 - 3ab^3 = (\frac{3}{2}a - b^3)^2$

Avanzati

82) $16a^2b^2 + 40abc + 25c^2 = (4ab+5c)^2$

83) $1/4\, x^2 + 1/3\, xy + 1/9\, y^2 = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y)^2$

85) $(a-1)^2 - 2(a-1) + 1 = (a-1)^2 - 2a - 2 + 1$

$= a^2 - 2a + 1 - 2a - 2 + 1 = -4a + 2 + a^2$

$= (a-2)^2$

87) $\overset{a^2}{(x+2b)^2} - \overset{-2ab}{2(x+2b)(a+b)} + \overset{b^2}{(a+b)^2} =$

$= (x+2b-a+b)^2 = (x+b-a)^2$

88) $\overset{b}{1} \overset{-2ab}{-2(x-3y)} + \overset{a}{(x-3y)^2}$

$= (x-3y-1)^2 =$

89) $-\overset{a^2}{(x+1)^2} - \overset{2ab}{2c(x+1)} - \overset{b^2}{c^2}$

$= -(x+1+c)^2$

Quadrato di trinomio

Formula: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

91) $x^2 + y^2z^2 + 4 - 2xyz + 4x - 4yz = (x - yz + 2)^2$

92) $4x^2 + yz^4 + 1 - 4xyz^2 + 4x - 2yz^2 = (2x - yz^2 + 1)^2$

93) $a^6 + b^4 + 4c^2 + 2a^3b^2 - 4a^3c - 4b^2c = (a^3 + b^2 - 2c)^2$

94) $a^8 + 4a^4b^4 - 10a^4 - 2a^6b^2 + 25 + a^4b^4 = (5 - a^4 + a^2b^2 \quad)^2$

Trinomi di secondo grado

146) $a^2+a-2 = \begin{cases} p+q=1 \\ p\cdot q=-2 \end{cases} \begin{cases} p=-1 \\ q=2 \end{cases} \Rightarrow (a-1)(a+2)$

147) x^2-x-2

$\begin{matrix} p+q=-1 \\ p\cdot q=-2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} p=-2 \\ q=1 \end{matrix} \Rightarrow (x-2)(x+1)$

148) $a^2-5a+6 \quad \begin{cases} p+q=5 \\ p\cdot q=6 \end{cases} \begin{cases} p=5-q \\ (5-q)q-6=0 \end{cases} \Rightarrow 5q-q^2-6=0 \Rightarrow q^2-3q-2q+6=0$

$= q^2-5q+6=0 \quad = q(q-3)-2(q-3)=0$

$= (q-3)(q-2)$

149) $x^2+x-6 \quad \begin{cases} p+q=1 \\ p\cdot q=-6 \end{cases} \quad \begin{matrix} p=3 \\ q=-2 \end{matrix} \Rightarrow (x+3)(x-2)$

150) $b^2-5b-6 \quad \begin{cases} p+q=-5 \\ p\cdot q=-6 \end{cases} \begin{cases} p=-q-5 \\ (-q-5)q+6=0 \end{cases} \Rightarrow -q^2-5q+6=0 \Rightarrow -q^2-6q+q+6=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -q(q-1)-6(q-1) = -(q-1)(q+6)$

$\Vert$

$(b-6)(b+1)$

151) $y^2-y-6 \quad \begin{cases} p+q=-1 \\ p\cdot q=-6 \end{cases} \begin{cases} -3+2=-1 \\ -3\cdot 2=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p=-3 \\ q=2 \end{matrix} \Rightarrow y^2-y-6=(y-3)(y+2)$

152) $z^2+5z-6 \quad \begin{cases} p+q=5 \\ p\cdot q=-6 \end{cases} \begin{cases} 6-1=5 \\ 6\cdot(-1)=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p=5 \\ q=-6 \end{matrix} \Rightarrow z^2+5z-6 = (z+5)(z-6)$

153) $b^2-22b+40 \quad \begin{cases} p+q=-22 \\ p\cdot q=40 \end{cases} \begin{cases} p=-22-q \\ (-22-q)\cdot q-40=0 \end{cases} \Rightarrow -q^2-22q-40=0 \Rightarrow q(q+2)+20(q+2)$

$\Rightarrow +q^2+2q+20q+40=0 \Rightarrow (q+2)(q+20)$

$\Rightarrow \begin{matrix} q_1=-2 \\ q_2=-20 \end{matrix}$

$\Rightarrow b^2-22b+40 = (b-2)(b-20)$

154) $a^2-18a-40 \quad \begin{matrix} p+q=-18 \\ p\cdot q=-40 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2-20=-18 \\ 2\cdot(-20)=-40 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} p=2 \\ q=-20 \end{matrix} \Rightarrow (a+2)(a-20)$

155) $a^2-3ab+2b^2 \quad \begin{matrix} p+q=-3b \\ p\cdot q=2b^2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -1+-2=-3b \\ -1\cdot(-2)=2b^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} p=-1b \\ q=-2b \end{matrix} \Rightarrow a^2-3ab+2b^2=(a-b)(a-2b)$

166) $3a^2+a-10 = 3a^2+6a-5a-10 = 3a(a+2)-5(a+2) = (a+2)(3a-5)$

167) $2t^2+t-3 = 2t^2+3t-2t-3 = 2t(t-1)+3(t-1) = (t-1)(2t+3)$

168) $3a^2-7a-6 \Rightarrow 3a^2+2a-9a-6=0 \Rightarrow a(3a+2)-3(3a+2)=(3a+2)(a-3)$