

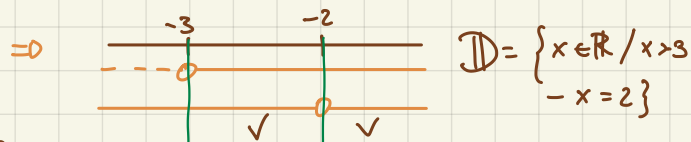


Esempi svolti

Esempio 2.1. Insieme di definizione. Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni (ossia il più ampio sottoinsieme di \mathbb{R} su cui la funzione è ben definita):

(a) $\frac{\log_2(3+x)}{\sqrt[3]{x+2}}$; (b) $\sqrt{2^x-8} \cdot \log|x-4|$; (c) $\tan(\log x)$; (d) $\log(\tan x)$.

a) • $\sqrt[3]{x+2} \neq 0$; $(x+2)^{\frac{1}{3}} \neq 0$ per $x \neq -2$
• $3+x > 0$; $x > -3$



b) $2^x - 8 \geq 0$ Per risolverlo, ci serve usare la definizione dei logaritmi: Il log e l'esponente della potenza al quale bisogna elevare un numero (base) per ottenere un determinato numero;

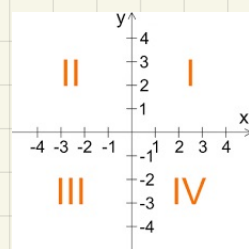
$\Rightarrow \log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$ quindi $2^{x^c} = 8^a = \log_2(8) = x \Rightarrow \underline{x \geq 3}$

• $\log|x-4|$; $|x-4| > 0$, siccome è sempre > 0 (per il modulo), ci basta che non sia \emptyset
 $\Rightarrow x-4 \neq 0$ per $x \neq 4$

$\Rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \geq 3, x \neq 4\}$

c) $\tan(\log x)$

Pari: $f(-x) = f(x)$
Dispari: $f(-x) = -f(x)$



a) $\frac{x}{1+x^2}$; $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x) \Rightarrow$ Dispari \rightarrow I e III o II e IV

b) $x \tan^3 x$; $f(-x) = -x \tan^3(-x) = x \tan^3 x = f(x)$ pari \rightarrow I e II o III e IV

c) $x + 2x^2$; $-x + 2(-x)^2 = -x + 2x^2$ Nessuna

d) 2^{-x^2} ; $f(-x) = 2^{-(-x)^2} = 2^{-x^2} = f(x) \rightarrow$ Pari \rightarrow I e II o III e IV

e) $\sin(x^3)$; $f(-x) = \sin(-x^3) = -\sin(x^3) = -f(x) \rightarrow$ Dispari

f) 3^{x^3} ; $f(-x) = 3^{-x^3}$ Nessuna

Esempio 2.4. Monotonia di una funzione. Dire se la seguente funzione è monotona in tutto il suo insieme di definizione (specificando se crescente o decrescente) oppure no:

(a) 2^{3x+x^3} ; (b) $\log_{1/2}(1+4x)$; (c) $\arctan(1+2^{-x})$;

(d) $\frac{1}{1+x^3}$; (e) $\frac{1}{1+x^2}$; (f) $\frac{1}{1+e^x}$

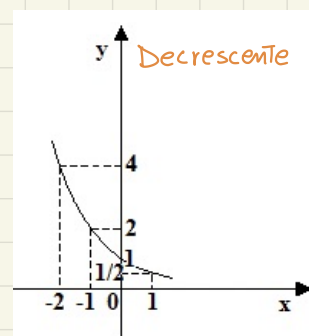
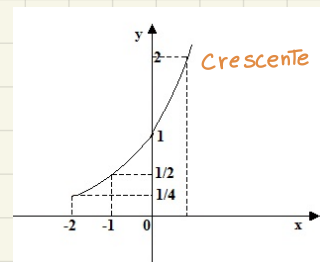
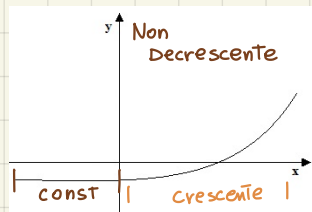
Una f è monotona se essa è:

- Crescente
- Non crescente
- Decrescente
- Non Decrescente

Crescente: $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ES: $y = 2^x$

Non Decrescente: $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Decrescente: $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
ES: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



QUINDI

a) 2^{3x+x^3} ; $3x$ è crescente in \mathbb{R} ✗
 x^3 è crescente ✗
 2^t è crescente

$\Rightarrow f$ è crescente e monotona crescente

b) $\log_{1/2}(1+4x)$; $1+4x$ è monotona e crescente ✗
 $\log_{1/2}$ è monotona e decrescente ✗
 $\Rightarrow f$ è monotona decrescente

c) $\arctan(1+2^{-x})$; $1+2^{-x}$ decrescente ✗

$\Rightarrow f$ è monotona decrescente

\arctan crescente ✗

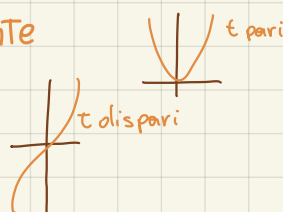
d) $\frac{1}{1+x^3}$; 1 è costante ✗
 $1+x^3$ è crescente ✗ $\Rightarrow f$ è crescente

e) $\frac{1}{1+x^2}$; $1+x^2$ non è monotona

Bonus

1) $\frac{1}{t}$ è Decrescente \rightarrow $\frac{1}{e^x}$ Decrescente

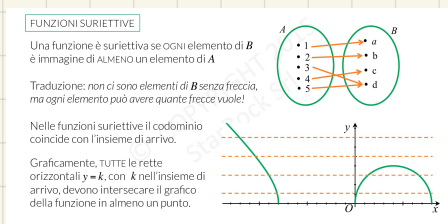
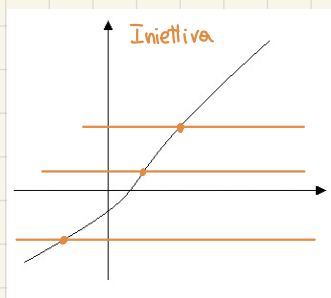
2) a t • t è PARI \rightarrow Ne' crescente ne' decrescente
• t è DISPARI \rightarrow Crescente



Funzioni inverse

Data la funzione $y = f(x)$, per trovare $x = f^{-1}(x)$ dobbiamo:

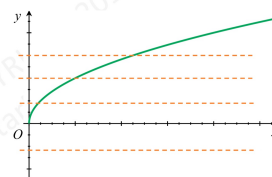
- Vedere se è invertibile: La funzione deve essere **Biunivoca**; se non è biunivoca, controlliamo se essa è **iniettiva**; se è iniettiva e invertibile, ma **solo in un dato intervallo**.



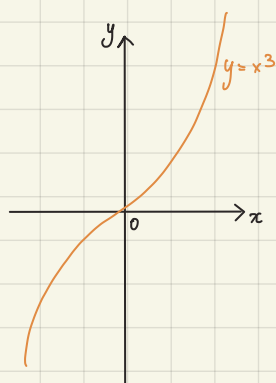
Graficamente, è facile riconoscere una funzione **iniettiva** **Iniettiva**

La funzione è iniettiva se OGNI retta orizzontale (parallela all'asse x) interseca il grafico al massimo in un punto!

Perché ad ogni x corrisponde al massimo uno e un solo valore di y (le rette orizzontali).



Non Invertibile! ↗



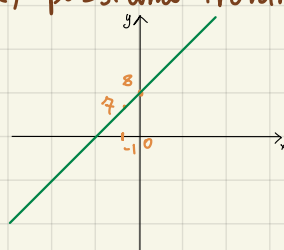
$y = x^3$ è **Biiettiva** o **Biunivoca** perché per tutto il suo dominio viene intersecata da linee orizzontali **ESATTAMENTE** una sola volta.

- Se la f $y = f(x)$ è invertibile, possiamo trovare $f^{-1}(x)$:

ES: $f(x) = y = x + 8$

| x | y |
|----|---|
| 0 | 8 |
| -1 | 7 |

\Rightarrow



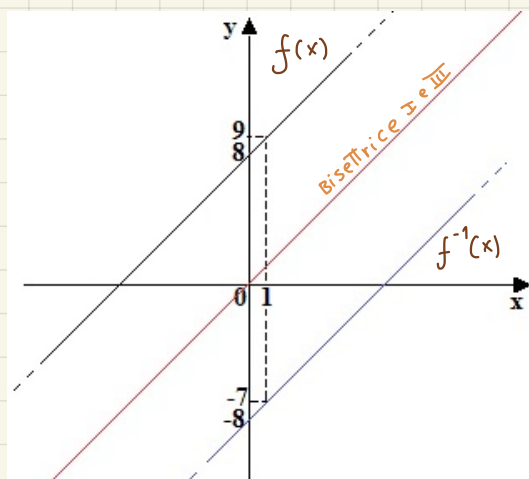
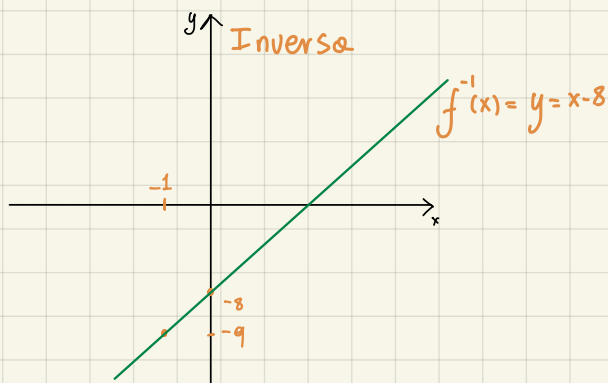
Per trovare l'inversa dobbiamo scambiare in f la x con la y :

$$f(x) = x + 8 \Rightarrow$$

$$x = y + 8$$

mettiamo in evidenza la y $y = x - 8$

| x | y |
|----|----|
| 0 | -8 |
| -1 | -9 |



! Tutte le funzioni inverse ha questa simmetria.

ES: $y = 2x + 8$ è iniettiva?

è iniettiva se $f(x_1) = f(x_2)$ quindi:

$$\frac{1}{2} 2x_1 + 8 = 2x_2 + 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Iniettiva!

ES: $y = \frac{x}{2} + 3$ è suriettiva?

$$\Rightarrow x = 2(y - 3) \text{ è suriettiva}$$

Es: $f = 4x + 5 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \cancel{4x_1 + 5} = \cancel{4x_2 + 5} \Rightarrow x_1 = x_2$ e' iniettiva!

Es: $f = x^2 + 4x - 5 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 4x_1 - \cancel{5} = x_2^2 + 4x_2 - \cancel{5} \Rightarrow x_1^2 + 4x_1 = x_2^2 + 4x_2$

Esercizi libro f inverse

Esempio 2.5. Funzione inversa. Scrivere esplicitamente la funzione inversa della seguente funzione, precisando il dominio della funzione inversa:

(a) $f(x) = \frac{3+2\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$; (b) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

a) $f(x) = \frac{3+2\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ Risolviamo per x : $(2-\sqrt{x})y = 3+2\sqrt{x}$; $2y - \sqrt{x}y = 3+2\sqrt{x}$; $2y - \sqrt{x}y - 2\sqrt{x} = 3$
 $\Rightarrow -\sqrt{x}(y+2) + 2y = 3$; $\sqrt{x}(y+2) = 2y-3$; $\sqrt{x} = \frac{2y-3}{y+2}$;
 $\Rightarrow x = \left(\frac{2y-3}{y+2} \right)^2$

La $f^{-1}(x)$ e' lecita solo se $y > 0$:

$\Rightarrow f^{-1}(x)$ e' definito in $(-\infty, -2) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

$\frac{2y-3}{y+2} > 0$ per $\left. \begin{array}{l} 2y-3 > 0; y > \frac{3}{2} \\ y+2 > 0; y > -2 \end{array} \right\}$ Vals
esterni