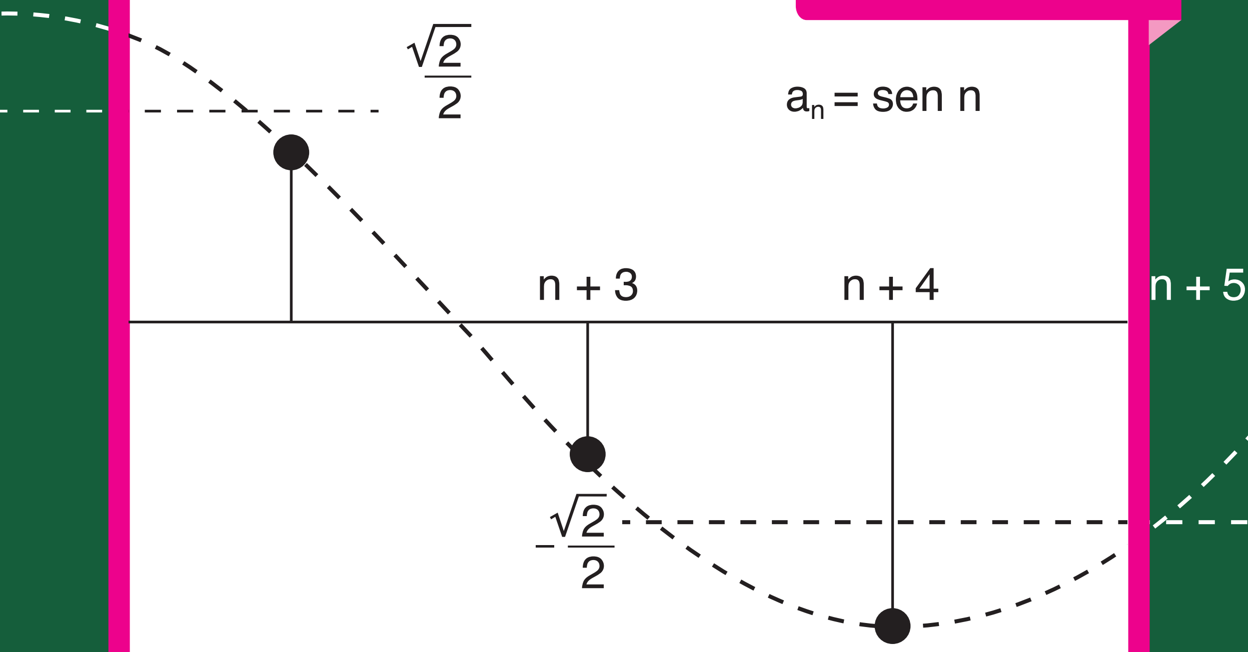
Paolo Marcellini - Carlo Sbordone

Esercitazioni di Matematica

1° VOLUME
PARTE PRIMA



Liguori Editore

Paolo Marcellini   *Carlo Sbordone*

Esercitazioni di Matematica

1° Volume
Parte prima

nuova edizione

Liguori Editore

Liguori Editore
Via Posillipo 394 - I 80123 Napoli NA
http://www.liguori.it/

Prima edizione italiana Settembre 2013

Marcellini, Paolo :
Esercitazioni di Matematica – 1° Volume – Parte prima/Paolo Marcellini, Carlo Sbordone
Napoli : Liguori, 2013

ISBN 978 - 88 - 207 - 6351 - 0 (a stampa)
eISBN 978 - 88 - 207 - 6352 - 7 (eBook)

1. Funzioni 2. Equazioni e disequazioni I. Titolo II. Collana III. Serie

Aggiornamenti:

---

23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Indice

Capitolo 1

NUMERI REALI

1A. Operazioni sugli insiemi

Sia S un insieme e P una proprietà definita su S. L'insieme di tutti gli elementi di S per cui P è vera si indica con

$$\{x \in S : \ P\}$$

(il simbolo "$\in$" si legge "appartiene"; il simbolo "$:$" si legge "tale che") e si chiama *sottoinsieme* (o *parte*) di S determinato dalla proprietà P.

L'*insieme delle parti di* S si indica con il simbolo $P(S)$. Il sottoinsieme *vuoto* di S è l'insieme degli elementi di S determinato da una proprietà falsa in S e si indica con $\emptyset$. L'insieme i cui elementi sono $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si indica con $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Se X, Y sono due sottoinsiemi di S, la loro *unione* $X \cup Y$ è il sottoinsieme di S determinato dalla proprietà $P = \ll x \in X$ oppure $x \in Y \gg$; cioè

$$X \cup Y = \{x \in S : \ x \in X \text{ oppure } x \in Y\}.$$

L'*intersezione* $X \cap Y$ di X, Y è il sottoinsieme di S determinato dalla proprietà $P = \ll x \in X$ e $x \in Y \gg$; quindi

$$X \cap Y = \{x \in S : \ x \in X \text{ e } x \in Y\}.$$

Il *complemento* di Y rispetto ad X è il sottoinsieme di S determinato dalla proprietà $P = \ll x \in X$ e $x \notin Y \gg$ (il simbolo "$\notin$" si legge "non appartiene"); quindi il complemento, che si indica con $X - Y$, è definito da

$$X - Y = \{x \in S : \ x \in X \text{ e } x \notin Y\}.$$

In particolare, il *complementare* di un sottoinsieme X di S è l'insieme $S - X$ e si indica con $\mathcal{C}X$, oppure con X^c, oppure con $-X$. Risulta quindi:

$$X^c = \{x \in S : \ x \notin X\}.$$

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n sottoinsiemi di S. La loro *unione* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ è il sottoinsieme di S definito da

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = \{x \in S : \ \exists\, i \in \{1, 2, \cdots, n\} : \ x \in X_i\};$$

la loro *intersezione* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$ è il sottoinsieme di S definito da

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i = \{x \in S : \ x \in X_i, \ \forall\, i \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$$

(il simbolo "$\forall$" si legge "per ogni").

Una successione $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ di sottoinsiemi di S si indica anche con il simbolo $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, dove $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali. Si pone inoltre:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = \{x \in S : \ \exists\, i \ \in \mathbb{N} : \ x \in X_i\},$$
$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i = \{x \in S : \ x \in X_i, \ \forall\, i \in \mathbb{N}\}.$$

Si dice che X è *contenuto* (o *incluso*) in Y se ogni elemento di X è anche elemento di Y; in tal caso si scrive $X \subseteq Y$. In simboli risulta

$$X \subseteq Y \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in X \Longrightarrow x \in Y)$$

(il simbolo "$\Longleftrightarrow$" si legge "se e solo se"; il simbolo "$\Longrightarrow$" si legge "implica").

Due insiemi X, Y sono *uguali* se ognuno di essi è contenuto nell'altro:

$$X = Y \quad \Longleftrightarrow \quad (X \subseteq Y \quad \text{e} \quad Y \subseteq X).$$

Si dice inoltre che X è *contenuto strettamente* (o *propriamente*) in Y se $X \subseteq Y$ e se $X \neq Y$ e si scrive $X \subset Y$.

Come già detto, indichiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri *naturali*, cioè l'insieme

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\};$$

indichiamo inoltre con $\mathbb{Z}$ l'insieme degli *interi* (o interi relativi), con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri *razionali* e con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri *reali*.

1.1 Dato l'insieme $S = \{a, b\}$, quali delle seguenti scritture sono corrette?

$$a \in S, \quad \{a\} \in S, \quad a \subseteq S, \quad \{a\} \subseteq S.$$

[La prima e l'ultima]

1.2 Se $\emptyset$ è l'insieme vuoto di S, quali delle seguenti scritture è corretta?

$$\emptyset \in S, \quad \emptyset \subseteq S.$$

[S può non avere tra i suoi elementi l'insieme vuoto (per cui la prima scrittura in generale non è corretta), mentre l'insieme vuoto $\emptyset$ è, per convenzione, sottoinsieme di ogni insieme. Così ad esempio, se $S = \{1, 2\}$, allora $\emptyset \notin S$, mentre $\emptyset \subseteq S$]

1.3 Sia $S = \{1, 2, 3\}$. Quali delle seguenti scritture sono corrette?

$$1 \in S, \quad 2 \notin S, \quad \{1\} \in S, \quad \{1\} \subseteq S.$$

[La prima e la quarta]

1.4 Quali delle seguenti scritture sono corrette?

$$-1 \in \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 = 1\}, \qquad 0 \in \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \neq 1\},$$
$$0 \in \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \leq 1\} \qquad 1 \in \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 < 1\},$$
$$\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \leq 1\} \subset \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \leq 4\}.$$

[Tutte tranne la quarta]

1.5 Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ sono vuoti?

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \ n = n - 3\}, \qquad B = \{n \in \mathbb{N} : \ n = 2n - 3\},$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} : \ 1/(n+2) \in \mathbb{N}\}, \qquad D = \{n \in \mathbb{N} : \ n/2 \in \mathbb{N}\}.$$

[Soltanto A e C sono vuoti. Invece $B = \{3\}$, mentre D è costituito dai numeri naturali pari]

1.6 Sia $S = \{1, 2, 3\}$. Determinare l'insieme $P(S)$ delle parti di S.

[$P(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$]

1.7 Determinare i tre sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ individuati dalle seguenti proprietà (il simbolo "$\exists$" si legge "esiste"):

$$\begin{aligned} P_1 &= \ \ll \exists\, k \in \mathbb{N} : \ x = 3k \gg, \\ P_2 &= \ \ll \exists\, k \in \mathbb{N} : \ x = 3k + 1 \gg, \\ P_3 &= \ \ll \exists\, k \in \mathbb{N} : \ x = 3k + 2 \gg . \end{aligned}$$

[$\{3, 6, 9, 12, \dots\}$; $\{4, 7, 10, 13, \dots\}$; $\{5, 8, 11, 14, \dots\}$]

1.8 Indicare per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ una proprietà che lo determini:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}, \qquad B = \{3, 5, 7, 9, 11, \ldots\},$$
$$C = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}, \qquad D = \{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\},$$
$$E = \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}, \qquad F = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}.$$

[A : $\ll \exists\, k \in \mathbb{N} :\ x = 2k - 1 \gg$; B : $\ll \exists\, k \in \mathbb{N} :\ x = 2k + 1 \gg$;
C : $\ll \exists\, k \in \mathbb{N} :\ x = 3k \gg$; D : $\ll \exists\, k \in \mathbb{N} :\ x = 3k - 1 \gg$;
E : $\ll \exists\, k \in \mathbb{N} :\ x = 2^k \gg$; F : $\ll \exists\, k \in \mathbb{N} :\ x = k^2 \gg$]

1.9 Determinare esplicitamente il seguente sottoinsieme dell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi:

$$X = \{x \in \mathbb{Z} :\ 1/x\ \in \mathbb{Z}\}.$$

[Se $x > 1$ allora $0 < (1/x) < 1$; perciò in tal caso $1/x \notin \mathbb{Z}$. Si verifica in modo analogo che $1/x \notin \mathbb{Z}$ se $x < -1$. Rimane il caso $-1 \leq x \leq 1$. La risposta finale è $X = \{-1, 1\}$]

1.10 Sia $X = \{x \in \mathbb{Z} :\ \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ x = 3k\}$. Quale relazione sussiste tra i due insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{Z} :\ \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ x = 6k\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Z} :\ \exists\, k \in \mathbb{X} :\ x = 2k\}$$

[$A = B$]

1.11 Indichiamo con N_p, N_d rispettivamente l'insieme dei numeri *pari* e quello dei numeri *dispari*, cioè

$$N_p = \{n \in \mathbb{N} : \exists\, k \in \mathbb{N} :\ n = 2k\}, \quad N_d = \{n \in \mathbb{N} : \exists\, k \in \mathbb{N} :\ n = 2k - 1\}.$$

In quale relazione sono con N_p, N_d i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$?

$$A = \{n \in \mathbb{N} :\ n^2 \in N_p\}, \qquad B = \{n \in \mathbb{N} :\ n^2 \in N_d\},$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} :\ n^3 \in N_p\}, \qquad D = \{n \in \mathbb{N} :\ n^3 \in N_d\}.$$

[Risulta $A = N_p$, $B = N_d$. Infatti se n è pari anche n^2 è pari ($n = 2k \Rightarrow n^2 = 2(2k^2)$) e se n è dispari anche n^2 è dispari ($n = 2k - 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k + 1) - 1$); dunque un numero naturale è pari se e solo se il suo quadrato è pari, mentre è dispari se e solo se il suo quadrato è dispari. Analogamente si verifica che $C = N_p$, $D = N_d$]

1.12 Verificare che

$$X \subseteq Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad X \cup Y = Y\ .$$

[$\Rightarrow$ In generale risulta $Y \subseteq X \cup Y$. Quindi basta verificare che $X \cup Y \subseteq Y$. Ciò segue dal fatto che, se $x \in X \cup Y$, allora $x \in Y$ oppure $x \in X \subseteq Y$; perciò in ogni caso $x \in Y$.
$\Leftarrow$ Basta osservare che $X \subseteq X \cup Y = Y$]

1.13 Verificare che

$$X \subseteq Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad X \cap Y = X\ .$$

[$\Rightarrow$ Essendo certamente $X \cap Y \subseteq X$, basta dimostrare che $X \subseteq X \cap Y$; ciò segue subito dall'ipotesi, dato che, se $x \in X$, allora anche $x \in Y$ e quindi $x \in X \cap Y$.
$\Leftarrow$ Basta osservare che $X = X \cap Y \subseteq Y$]

1.14 Verificare che

$$X \subseteq Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y^c \subseteq X^c\ .$$

[Supponiamo che $X \subseteq Y$; allora $x \in Y^c \Rightarrow x \notin Y \Rightarrow x \notin X \Rightarrow x \in X^c$. Viceversa se $Y^c \subseteq X^c$, allora $x \in X \Rightarrow x \notin X^c \Rightarrow x \notin Y^c \Rightarrow x \in Y$]

1.15 Verificare che $X - Y = X \cap Y^c$.

[$x \in X - Y \Leftrightarrow x \in X$ e $x \notin Y \Leftrightarrow x \in X$ e $x \in Y^c \Leftrightarrow x \in X \cap Y^c$]

1.16 Verificare che $(X^c)^c = X$.

[$x \in (X^c)^c \Leftrightarrow x \notin X^c \Leftrightarrow x \in X$]

1.17 Dimostrare la *proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione:*

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

1.18 Dimostrare la *proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

1.19 Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$:

$$X_0 = \{n \in \mathbb{N} : \exists\, k \in \mathbb{N} :\ n = 4k\},$$

$$X_1 = \{n \in \mathbb{N} : \exists\, k \in \mathbb{N} :\ n = 4k - 1\},$$

$$X_2 = \{n \in \mathbb{N} : \exists\, k \in \mathbb{N} :\ n = 4k - 2\},$$

$$X_3 = \{n \in \mathbb{N} : \exists\, k \in \mathbb{N} :\ n = 4k - 3\}.$$

Verificare che essi sono a due a due disgiunti e che si ha:

$$X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \mathbb{N}$$

[Verifichiamo ad esempio che $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Se esistesse $n \in X_1 \cap X_2$, esisterebbero due numeri naturali k_1, k_2 tale che $n = 4k_1 - 1$, $n = 4k_2 - 2$; ciò è assurdo in quanto ne seguirebbe $4k_1 - 1 = 4k_2 - 2$ cioè $k_2 - k_1 = 1/4$ non sarebbe un numero intero. L'ultima uguaglianza si può dimostrare verificando che ogni numero pari appartiene a $X_0 \cup X_2$, mentre ogni numero dispari appartiene a $X_1 \cup X_3$. A tale scopo consideriamo n pari. In tal caso esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $n = 2h$; inoltre esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $h = 2k$ oppure $h = 2k - 1$ a seconda che h sia pari o dispari. Nel primo caso risulta $n = 2h$, $h = 2k$ e perciò $n = 4k \in X_0$. Nel secondo caso si ha $n = 2h$, $h = 2k - 1$ e perciò $n = 4k - 2 \in X_2$. Analogamente si procede se n è dispari]

1.20 Dimostrare le *relazioni di De Morgan:*

$$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c; \quad (X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c.$$

[Dimostriamo la prima: $x \in (X \cup Y)^c \Leftrightarrow x \notin X \cup Y \Leftrightarrow x \notin X$ e $x \notin Y \Leftrightarrow x \in X^c$ e $x \in Y^c \Leftrightarrow x \in X^c \cap Y^c$.
Dimostriamo la seconda: $x \in (X \cap Y)^c \Leftrightarrow x \notin X \cap Y \Leftrightarrow x \notin X$ o $x \notin Y \Leftrightarrow x \in X^c$ o $x \in Y^c \Leftrightarrow x \in X^c \cup Y^c$]

1.21 Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n sottoinsiemi di un insieme prefissato. Generalizzando l'esercizio precedente, dimostrare le relazioni di De Morgan:

$$(\bigcup_{i=1}^{n} X_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^c; \qquad (\bigcap_{i=1}^{n} X_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} X_i^c.$$

[Dimostriamo la prima: $x \in (\bigcup_{i=1}^{n} X_i)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^{n} X_i \Leftrightarrow x \notin X_i,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow x \in X_i^c\ \forall i = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} X_i^c$. Analogamente si dimostra la seconda]

1.22 Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo $X_k = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}\}$. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dato da $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$.

[$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k = \{1\}$. Ciò segue dalle relazioni $\quad 1 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k \subseteq X_1 = \{1\}$]

1.23 Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo $X_k = \{n \in \mathbb{N} :\ n > k\}$. Determinare l'insieme $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$.

[$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k = \emptyset$. Infatti, se esistesse $m \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$, risulterebbe $m \in X_k\ \forall k \in \mathbb{N}$. In particolare, per $k = m$, avremmo $m \in X_m$, cioè l'assurdo $m > m$]

1.24 Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo $X_k = \{n \in \mathbb{N} :\ n \geq k\}$. Determinare l'insieme $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$.

[Come nell'esercizio precedente risulta $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k = \emptyset$. Però la dimostrazione va modificata]

1B. Funzioni

Una *funzione* dall'insieme X all'insieme Y è una legge che ad ogni elemento dell'insieme X fa corrispondere un elemento dell'insieme Y. Se indichiamo con f tale funzione, scriveremo $f : X \to Y$, oppure $y = f(x)$ con $x \in X$ e $y \in Y$. Si dice che X è il *dominio* (o *insieme di definizione*) di f.

Sottolineamo che una funzione $f : X \to Y$ è una relazione che ad ogni $x \in X$ associa *un solo* $y \in Y$. In generale non è detto che ad ogni $y \in Y$ corrisponda un $x \in X$ per cui $y = f(x)$; potrebbe infatti accadere che a qualche $y \in Y$ non corrisponda alcun x, oppure che a qualche $y \in Y$ corrispondano molti $x \in X$ per cui $y = f(x)$.

Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(x) = 2x$ è la corrispondenza che ad ogni numero naturale associa il suo doppio. Con i simboli usati in precedenza risulta $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N}$. Ad ogni numero naturale $x \in X$ corrisponde un solo $y \in Y$ (uguale a $2x$). Non vale però il viceversa: non è vero che ad ogni $y \in Y$ corrisponde un numero naturale $x \in X$ tale che $2x = y$; ciò è possibile soltanto se y è pari; infatti, solo se y è pari $x = y/2 \in \mathbb{N}$.

Consideriamo un altro esempio: la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$, cioè $y = x^2$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Anche in questo caso ad ogni $x \in \mathbb{R}$ è associato un solo $y \in \mathbb{R}$ per cui $y = x^2$. Però solo ad $y = 0$ corrisponde un solo x ($x = 0$) per cui $y = x^2$; al contrario, se $y > 0$ esistono due numeri x reali per cui $y = x^2$ ($x = \pm\sqrt{y}$), mentre se $y < 0$ non esiste alcun numero reale per cui $x^2 = y < 0$.

Sia $f : X \to Y$. Si dice che f è *suriettiva* (o *surgettiva*) se per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ per cui $y = f(x)$.

Ad esempio, le due funzioni considerate precedentemente non sono suriettive. Viceversa, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x$ è suriettiva. Sia $f : X \to Y$. Si dice che f è *iniettiva* se dalla relazione $f(x) = f(x')$ segue $x = x'$. Ciò è equivalente a dire che se $x \neq x'$ allora $f(x) \neq f(x')$.

La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(x) = 2x$ è iniettiva, mentre la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non è iniettiva (perché, se $(x)^2 = (x')^2$, allora risulta $x = x'$ oppure $x = -x'$, e ciò contrasta con la definizione data se $x' \neq 0$).

Se $f : X \to Y$ è contemporaneamente iniettiva e suriettiva, allora si dice che f è *invertibile* o *bigettiva* (oppure si dice che f è una *corrispondenza biunivoca*).

Se $f : X \to Y$ è una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi X, Y, allora è definita la *funzione inversa*, come quella funzione che ad ogni $y \in Y$ fa corrispondere il solo $x \in X$ per cui $y = f(x)$. La funzione inversa si indica con il simbolo f^{-1}. Naturalmente il dominio di f^{-1} è Y e si ha $f^{-1} : Y \to X$.

Infine, se abbiamo due funzioni $g : X \to Y$ e $f : Y \to Z$, possiamo considerare la *funzione composta* $h : X \to Z$ definita combinando le due precedenti funzioni nel modo seguente: se $y = g(x)$ e $z = f(y)$ allora $z = h(x)$. Si usano i simboli: $h(x) = f(g(x))$, oppure $h = f \circ g$.

1.25 Verificare che le due funzioni

$$f(x) = 2x - 3, \quad g(x) = \tfrac{x}{3} + 5$$

sono corrispondenze biunivoche da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Calcolare inoltre le funzioni inverse.

[$f^{-1}(y) = (y+3)/2$; $g^{-1}(y) = 3y - 15$]

1.26 Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = x + 1$. Verificare che f è iniettiva e suriettiva e determinare la funzione inversa.

[$f^{-1}(y) = y - 1$]

1.27 É suriettiva la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(x) = x + 1$?

[No. Attenzione a non confondere questa funzione con quella dell'esercizio precedente, che invece è suriettiva]

1.28 Verificare che la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f : x \in \mathbb{N} \to \begin{cases} x+1 & \text{se } x \text{ è dispari} \\ x-1 & \text{se } x \text{ è pari} \end{cases}$$

è invertibile e suriettiva e determinare la sua inversa.

[Se $x \neq x'$ con x, x' entrambi pari, allora è $f(x) = x - 1$, $f(x') = x' - 1$ e perciò risulta $f(x) \neq f(x')$. Analogamente, se x, x' sono entrambi dispari. Se invece x è pari e x' è dispari allora $f(x)$ è dispari e $f(x')$ è pari e perciò risulta anche in questo caso $f(x) \neq f(x')$. Si verifica facilmente che f è suriettiva e che l'inversa di f è la funzione $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da: $f^{-1}(y) = y + 1$ se y è dispari, $f^{-1}(y) = y - 1$ se y è pari. Quindi, in questo caso f^{-1} coincide con f]

1.29 Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Verificare che la funzione composta di f con f stessa è la funzione identità, cioè verificare che $f(f(x)) = x$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

1.30 Consideriamo le funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definite da $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x$. Determinare le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

[$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2x^3$; $f \circ g(x) = f(g(x)) = 8x^3$]

1.31 Date le funzioni $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$, $h = f \circ g$, (perciò $h : X \to Z$), dimostrare che:

(a) Se h è iniettiva anche g è iniettiva.
(b) Se h è iniettiva e g è suriettiva allora f è iniettiva.

[(a) Se $g(x) = g(x')$ allora $f(g(x)) = f(g(x'))$, cioè $h(x) = h(x')$. Dato che per ipotesi h è iniettiva, allora $x = x'$.
(b) Allo scopo di provare che $f : Y \to Z$ è iniettiva, consideriamo y, y' tali che $f(y) = f(y')$. Dato che g è suriettiva, esistono x, $x' \in X$ tali che $g(x) = y$, $g(x') = y'$. Allora $f(g(x)) = f(g(x'))$, cioè $h(x) = h(x')$. Dato che h è iniettiva risulta $x = x'$ e perciò $y = g(x) = g(x') = y'$]

Consideriamo una funzione $f : X \to Y$. Se A è un sottoinsieme di X, l'*immagine* di A mediante f, indicata con $f(A)$, è il sottoinsieme di Y definito da

$$f(A) = \{y \in Y : \exists\, x \in A : \; y = f(x)\}.$$

Se B è un sottoinsieme di Y, l'*immagine inversa* di B mediante f, indicata con $f^{-1}(B)$, è il sottoinsieme di X definito da

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \; f(x) \in B\}.$$

1.32 Sia $f : X \to Y$. Verificare che

(a) $\quad f^{-1}(f(A)) \supseteq A, \qquad \forall A \subseteq X$
(b) $\quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B, \qquad \forall B \subseteq Y$

[(a) Se $x \in A$ allora $f(x) \in f(A)$ e perciò $x \in f^{-1}(f(A))$ per la stessa definizione di immagine inversa.
(b) Se $y \in f(f^{-1}(B))$ allora esiste $x \in f^{-1}(B)$ tale che $y = f(x)$. Essendo $x \in f^{-1}(B)$, per definizione si ha che $f(x) \in B$. Dunque $y \in B$]

1.33 Esibire un esempio di funzione per cui non vale il segno $''{=}''$, invece che $''\supseteq''$, nella formula (a) dell'esercizio precedente.

[Ad esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Se $A = \{x \in \mathbb{R} : \; 0 \le x \le 1\}$, risulta $f(A) = A$ e $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} : \; -1 \le x \le 1\}$]

1.34 Esibire un esempio di funzione per cui non vale il segno $''={}''$, invece che $''\subseteq''$, nella formula (b) dell'esercizio 1.32.

[Ad esempio ogni funzione costante $f : X \to Y$ con Y contenente più di un punto. Una funzione f costante è definita da $f(x) = y_0$ per ogni $x \in X$, con y_0 fissato in Y. Risulta

$f(A) = \{y_0\}$ qualunque sia $A \subseteq X$; risulta quindi anche $f(f^{-1}(B)) = \{y_0\}$ qualunque sia $B \subseteq Y$]

1.35 Dimostrare che $f : X \to Y$ è iniettiva se e solo se $f^{-1}(f(A)) = A$ per ogni $A \subseteq X$.

[Se la condizione enunciata è soddisfatta, allora, in particolare, per ogni $\overline{x} \in X$ si ha $f^{-1}(f(\{\overline{x}\})) = \{\overline{x}\}$, cioè $\{x \in X : f(x) = f(\overline{x})\} = \{\overline{x}\}$ e dunque f è iniettiva.
Viceversa, se f è iniettiva e $A \subseteq X$, per la (a) dell'esercizio 1.32, basta dimostrare che è $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$. Sia dunque $x \in f^{-1}(f(A))$, allora è $f(x) \in f(A)$ ed essendo f iniettiva, si ha necessariamente $x \in A$]

1.36 Dimostrare che $f : X \to Y$ è suriettiva se e solo se $f(f^{-1}(B)) = B$ per ogni $B \subseteq Y$.

[Se la condizione enunciata è soddisfatta, si ha in particolare $f(f^{-1}(Y)) = Y$ ed essendo $f^{-1}(Y) = X$ se ne deduce $f(X) = Y$, cioè che f è suriettiva. Viceversa, se f è suriettiva e $B \subseteq Y$, per la (b) dell'esercizio 1.32, basta provare che $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$. Se $y \in B$ esiste $x \in X$ tale che $y = f(x)$. Allora $y = f(x) \in B$ e cioè $x \in f^{-1}(B)$; pertanto esiste $x \in f^{-1}(B)$ tale che $y = f(x)$. Da cui l'asserto, per definizione di immagine di un insieme]

1C. Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore

Un sottoinsieme X dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali si dice *limitato superiormente* se esiste un numero reale L tale che $x \leq L$ per ogni $x \in X$. Un siffatto L si dice *maggiorante* di X. Analogamente diciamo che X è *limitato inferiormente* se esiste un *minorante* di X, cioè se esiste un numero reale l tale che $l \leq x$ per ogni $x \in X$.

Ad esempio l'insieme X dei numeri reali positivi è *limitato inferiormente* ma non è *limitato superiormente*. Infatti lo zero (ed anche ogni numero reale negativo) è un minorante per X; mentre se, per assurdo, supponiamo che L sia un maggiorante di X, dovrebbe risultare $L \geq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ciò non vale ad esempio per $x = L + 1$.

Un sottoinsieme X dell'insieme dei numeri reali si dice *limitato* se è limitato sia superiormente che inferiormente. Quindi X è limitato se e solo se esistono due numeri reali l, L tali che $l \leq x \leq L$ per ogni $x \in X$.

1.37 Verificare che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} \, : \, n \in \mathbb{N} \right\} \qquad\qquad B = \left\{ \frac{2n}{n^2+1} \, : \, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

[Risulta $0 \leq x \leq 1$ per ogni $x \in A$. Invece per l'insieme B, si può verificare la relazione $-1 \leq x \leq 1$ per ogni $x \in B$ (si veda anche l'esercizio 1.40)]

1.38 Ricordando la definizione di valore assoluto ($|x| = x$ se $x \geq 0$, $|x| = -x$ se $x < 0$), verificare che un insieme X è limitato se e solo se esiste un numero reale M tale che $|x| \leq M$ per ogni $x \in X$.

[Se X è limitato, per definizione esistono due numeri reali l, L tali che $l \leq x \leq L$ per ogni $x \in X$. Sia M il più grande tra $|l|$, $|L|$; risulta $L \leq |L| \leq M$ e $l \geq -|l| \geq -M$. Se ne deduce $-M \leq x \leq M$ per ogni $x \in X$ e ciò equivale a (vedere l'esercizio 3.30) $|x| \leq M$. Viceversa, se $|x| \leq M$ per ogni $x \in X$, allora risulta $-M \leq x \leq M$ e quindi $-M$ è un minorante per X, mentre M è un maggiorante]

Sia X un sottoinsieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente. Si dice che un numero reale M è l'*estremo superiore* di X se M è il più piccolo dei maggiornati di X. Ciò equivale a dire che M è uno dei maggioranti e che inoltre ogni numero inferiore ad M, diciamo $M - \epsilon$ con ϵ positivo, non è un maggiorante; quindi $M - \epsilon$ è minore di qualche elemento di X. In simboli:

$$\left.\begin{array}{l} M = \text{estremo superiore} \\ \text{dell'insieme X} \\ (M = \sup\, X) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{ll} M \geq x, & \forall\, x \in X \\ & \\ \forall\, \epsilon > 0 & \exists\, x \in X :\; M - \epsilon < x. \end{array}\right.$$

Analogamente, se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente, si dice che m è l'*estremo inferiore* di X se m è il più grande dei minoranti di X. Ciò significa che m è un minorante di X e che ogni numero superiore ad m, diciamo $m+\epsilon$, con ϵ positivo, non è un minorante. In simboli:

$$\left.\begin{array}{l} m = \text{estremo inferiore} \\ \text{dell'insieme X} \\ (m = \inf\, X) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{ll} m \leq x, & \forall\, x \in X \\ & \\ \forall\, \epsilon > 0 & \exists\, x \in X :\; m + \epsilon > x. \end{array}\right.$$

Per descrivere gli insiemi non limitati si utilizzano i simboli $+\infty$, $-\infty$. In particolare si dice che l'estremo superiore di un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è $+\infty$ se X non è limitato superiormente; mentre si dice che l'estremo inferiore di X è $-\infty$ se X non è limitato inferiormente. In simboli:

$$\begin{array}{lcl} \sup X = +\infty & \iff & \forall\, L \;\; \exists\, x \in X :\; x > L; \\ \inf X = -\infty & \iff & \forall\, l \;\; \exists\, x \in X :\; x < l. \end{array}$$

La prima delle due relazioni sopra scritte si spiega in questo modo: l'estremo superiore di X vale $+\infty$ se X non è limitato superiormente; cioè se, qualunque sia il numero $L \in \mathbb{R}$ che fissiamo, L non è un maggiorante di X; dire che L non è un maggiorante equivale a dire che non vale la relazione $x \leq L$ per ogni

$x \in X$; ciò significa che per almeno un $x \in X$ vale la relazione opposta: $x > L$. Analogamente si spiega la definizione di $\inf X = -\infty$.

Osserviamo che nelle relazioni sopra scritte ci si può limitare a considerare $L > 0$, $l < 0$.

Per finire ricordiamo che se l'estremo superiore M di un insieme X è un numero reale che appartiene ad X stesso, si dice che M è il *massimo* di X. Analogamente si dice che un numero reale m è il *minimo* di X se m è l'estremo inferiore di X e se m è anche un elemento di X. In simboli:

$$\left.\begin{array}{l} M = \text{massimo di} X \\ (M = \max X) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{ll} M \geq x, & \forall\, x \in X \\ \\ M \in X. & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \text{minimo di} X \\ (m = \min X) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{ll} m \leq x, & \forall\, x \in X \\ \\ m \in X. & \end{array}\right.$$

Ad esempio, la prima delle due relazioni sopra scritte si spiega in questo modo: per definizione M è il massimo di X se valgono le seguenti tre relazioni

$$M \geq x, \quad \forall\, x \in X; \quad \forall\, \epsilon > 0 \qquad \exists\, x \in X : \; M - \epsilon < x; \; M \in X$$

Allora, dato che $M \in X$, la seconda relazione è verificata automaticamente perché, per ogni $\epsilon > 0$, risulta $M - \epsilon < x$ pur di scegliere $x = M$.

1.39 Calcolare gli estremi superiore ed inferiore ed eventualmente il massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} \; : \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

[Dato che $n \in \mathbb{N}$, risulta $(n-1)/n \geq 0$; inoltre per $n = 1$ risulta $(n-1)/n = 0$. Ciò significa che il numero reale 0 è il minimo di A (e quindi è anche l'estremo inferiore) perché $0 \leq x$, $\forall x \in A$; $0 \in A$. Perciò $\inf A = \min A = 0$. Verifichiamo ora che $\sup A = 1$, cioè che $1 \geq x$, $\forall x \in A$; e che $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A : \; 1 - \epsilon < x$. La relazione $1 \geq x$, $\forall x \in A$ significa $1 \geq (n-1)/n$, che equivale a $n \geq (n-1)$, cioè $0 \geq -1$ che è quindi verificata. Fissato $\epsilon > 0$ risolviamo la disequazione nell'incognita $n : 1 - \epsilon < (n-1)/n$; semplificando la frazione a secondo membro abbiamo $1 - \epsilon < 1 - 1/n$, cioè $-\epsilon < -1/n$, che equivale a $\epsilon > 1/n$, cioè ancora $n > 1/\epsilon$. Quindi per ogni $\epsilon > 0$ fissato, abbiamo trovato dei valori di $n \in \mathbb{N}$ per cui $(n-1)/n > 1 - \epsilon$; abbiamo infatti verificato che basta scegliere $n > 1/\epsilon$. Ad esempio, se $\epsilon = 1$ possiamo scegliere $n = 2$; se $\epsilon = 0.001$ basta prendere n più grande di mille, e così via. Il numero 1 non è un massimo per l'insieme A perché $1 \notin A$. Infatti la relazione $1 \in A$ significa che per qualche $n \in \mathbb{N}$ risulta $1 = (n-1)/n$; tale relazione equivale a $n = n - 1$, cioè $0 = -1$ che è una relazione falsa]

1.40 Calcolare gli estremi superiore ed inferiore ed eventualmente il massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{2n}{n^2+1} \,:\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

[Come già indicato nell'esercizio 1.37, l'insieme dato è limitato. Infatti risulta $-1 \leq 2n/(n^2+1) \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, come si verifica facilmente seguendo i conti:

$$-1 \leq 2n/(n^2+1) \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -(n^2+1) \leq 2n \leq n^2+1 \;\Leftrightarrow$$
$$-(n^2+2n+1) \leq 0 \leq n^2-2n+1 \;\Leftrightarrow\; -(n+1)^2 \leq 0 \leq (n-1)^2$$

L'ultima relazione è manifestamente vera a causa dei quadrati.

Dato che per $n = \pm 1$ risulta $2n/(n^2+1) = \pm 1$, il numero $m = -1$ è il minimo di A, mentre $M = 1$ è il massimo. Riassumendo abbiamo che $\sup A = \max A = 1$, $\inf A = \min A = -1$]

1.41 Calcolare gli estremi superiore ed inferiore ed eventualmente il massimo e minimo dei seguenti insiemi

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}; \qquad B = \left\{ \frac{3n+2}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\};$$
$$C = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}; \qquad D = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

[$\sup A = \max A = 2$, $\inf A = 1$. Coviene rappresentare gli elementi di B nella forma $3+2/n$; rsulta $\sup B = \max B = 5$, $\inf B = 3$. Riguardo agli insiemi C, D, è opportuno considerare separatamente i termini che hanno l'indice n pari (ed in tal caso $(-1)^n = 1$) da quelli che hanno l'indice n dispari (per cui risulta $(-1)^n = -1$). Si ottiene $\sup C = \max C = 1/2$, $\inf C = \min C = -1$; $\sup D = 1$, $\inf D = -1$]

1.42 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore del sottoinsieme di numeri reali X che in forma decimale hanno parte intera uguale a zero e parte decimale con una sola cifra decimale diversa da zero.

[L'insieme considerato si può rappresentare nella forma:

$$X = \left\{ \frac{a}{10^n} \,:\, a \in \{1,2,3,\ldots,9\},\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Risulta $\inf X = 0$, $\max X = \frac{9}{10}$]

1.43 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore del sottoinsieme di numeri reali X che in forma decimale hanno parte intera uguale a zero e parte decimale formata da un numero finito di cifre diverse da zero.

[Risulta $\inf X = 0$, $\sup X = 1$. Se si ammette che il numero finito di cifre decimali diverse da zero possa anche essere zero, allora risulta $\min X = 0$]

1.44 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore del sottoinsieme di numeri reali X che in forma decimale hanno parte intera uguale a zero e parte decimale composta dalle sole cifre 0 e 7.

[$\min X = 0$, $\max X = 0.\overline{7} = \frac{7}{9}$]

1.45 Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ n + \frac{2}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

[Per ogni $n \in \mathbb{N}$ indichiamo con $x_n = n + 2/n$. Se $n > 2$ risulta $0 < 2/n < 1$; sommando n in tutti i membri otteniamo $n < x_n < n + 1$ per ogni $n > 2$. Ciò implica che l'insieme A non è limitato superiormente e quindi $\sup A = +\infty$. Inoltre, dalla relazione $n < x_n$, $\forall n \geq 3$, deduciamo che $x_n > n \geq 3$. Dato che da verifica diretta risulta $x_1 = x_2 = 3$, possiamo concludere che $\min A = \inf A = 3$]

1.46 Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore degli insiemi

$$A = \left\{ n + \frac{3}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}; \quad B = \left\{ n + \frac{4}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\};$$
$$C = \left\{ \frac{1}{n} - n \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}; \quad D = \left\{ (-1)^n n + \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

[$\sup A = +\infty$, $\min A = 7/2$; $\sup B = +\infty$, $\min B = 4$; $\max C = 0$, $\inf C = -\infty$; $\sup D = +\infty$, $\inf D = -\infty$]

1.47 Siano A e B due insiemi limitati e non vuoti di numeri reali, con $A \subseteq B$. Verificare che

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

[L'estremo inferiore di A è un minorante di A e l'estremo superiore è un maggiorante, quindi $\inf A \leq \sup A$. L'estremo inferiore di B è un minorante di B, cioè $\inf B \leq b$ per ogni $b \in B$; essendo $A \subseteq B$, in particolare si ha $\inf B \leq a$ per ogni $a \in A$ e perciò $\inf B$ è un minorate di A. Ma allora $\inf B \leq \inf A$, perché $\inf A$ è il più grande minorante di A. Analogamente si dimostra l'ultima disguaglianza]

1.48 Siano $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni limitate. Verificare che

$$\inf_{x \in X} f(x) + \inf_{x \in X} g(x) \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\};$$

$$\sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x) \geq \sup_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}.$$

[Indichiamo con $m = \inf_{x\in X} f(x)$, $m' = \inf_{x\in X} g(x)$. Risulta $m \leq f(x)$, $m' \leq g(x)$, $\forall x \in X$; quindi $m+m' \leq f(x)+g(x)$ per ogni $x \in X$. Ciò significa che $m+m'$ è un minorante della funzione somma $f(x)+g(x)$. Perciò $m+m' \leq \inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}$. In modo analogo si dimostra l'altra disguaglianza]

1D. Numeri razionali e numeri reali

Ricordiamo che il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ è *completo*; ciò si può esprimere dicendo che ogni sottoinsieme X di $\mathbb{R}$, non vuoto e limitato superiormente, ammette in $\mathbb{R}$ estremo superiore. Analogamente ogni insieme $X \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente, ammette in $\mathbb{R}$ estremo inferiore.

Il campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali non gode di tale proprietà, cioè non è completo. In altre parole esistono degli insiemi limitati in $\mathbb{Q}$ che non hanno in $\mathbb{Q}$ estremo inferiore o estremo superiore (si vedano ad esempio gli esercizi 1.51, 1.52).

1.49 Dimostrare che non esiste alcun numero razionale $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^3 = 2$.

[Supponiamo per assurdo che esista una frazione m/n, con m ed n interi positivi primi fra loro, tale che $(m/n)^3 = 2$. In tal caso $m^3 = 2n^3$; perciò m^3 è pari. Ma allora anche m è pari, perché se fosse dispari anche m^3 sarebbe dispari. Qiundi m è della forma $m = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$; ne segue $8k^3 = 2n^3$, cioè $n^3 = 4k^3$. Ma allora anche n è pari e ciò è assurdo, perché avevamo suposto m, n primi fra loro]

1.50 Sia M l'estremo superiore in $\mathbb{R}$ dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : \; x^3 < 2\}.$$

Verificare che risulta $M^3 = 2$.

[Si può dimostrare che non sono possibili le relazioni $M^3 < 2$ e $M^3 > 2$. Limitatamente alla prima delle due, supponiamo per assurdo che $M^3 < 2$ e mostriamo che in tal caso M non è un maggiorante di A, cioè che esiste $x \in A$, per cui $M < x$; se un tale x esiste, deve essere della forma $x = M + \epsilon$ con $\epsilon > 0$. Poniamo quindi $x = M + \epsilon$ e mostriamo che è possibile scegliere $\epsilon > 0$ (con $0 < \epsilon \leq 1$) in modo che $x \in A$, cioè in particolare $(M+\epsilon)^3 < 2$.
Essendo $\epsilon \leq 1$ si ha pure $\epsilon^2 \leq \epsilon$; quindi $(M+\epsilon)^3 = M^3+3M^2\epsilon+3M\epsilon^2+\epsilon^3 \leq M^3+\epsilon(3M^2+3M+1)$. Ma allora risulta $(M+\epsilon)^3 < 2$ se scegliamo ϵ minore di $(2-M^3)/(3M^2+3M+1)$]

1.51 Verificare che l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} : \; x^3 < 2\}$ non ammette estremo superiore nell'ambito dei numeri razionali.

[Utilizzare i risultati degli esercizi 1.50 e 1.49]

1.52 Verificare che l'insieme $B = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^3 > 2\}$ non ammette estremo inferiore nell'ambito dei numeri razionali.

1.53 Dimostrare che $\sqrt{10}$ è un numero irrazionale. Cioè, dimostrare che non esiste alcun numero razionale positivo $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 10$.

[Supponiamo per assurdo che $x = m/n$, con m ed n interi positivi primi fra loro. Allora $10 = x^2 = m^2/n^2$; pertanto $m^2 = 10n^2$. Quindi m^2 è un multiplo di 10; ma allora anche m è un multiplo di 10 perché, se non lo fosse (cioè se m non contenesse fra i suoi fattori primi i numeri 2 e 5), neanche m^2 sarebbe un multiplo di 10 (m^2 non potrebbe contenere tra i suoi fattori primi i numeri 2 e 5). Perciò m è della forma $m = 10k$, con $k \in \mathbb{N}$; ne segue $(10k)^2 = 10n^2$, cioè $n^2 = 10k^2$. Con lo stesso ragionamento fatto per m, troveremo che anche n è un multiplo di 10, contrariamente all'ipotesi che m ed n siano numeri primi fra loro]

1.54 Evidentemente il numero $\sqrt{9}$ è razionale (in effetti è un numero naturale). Dove cade (cioè, perché non si applica) la dimostrazione proposta nell'esercizio precedente per il numero $\sqrt{10}$?

1.55 Dimostrare che il numero $(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ non è razionale.

[Supponiamo per assurdo che $(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = m/n$, con m ed n numeri naturali primi fra loro. Allora

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 2 + 2\sqrt{10} + 5 = \frac{m^2}{n^2},$$

da cui

$$\sqrt{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n^2} - 7\right) = \frac{m^2 - 7n^2}{2n^2}.$$

A secondo membro compare un numero razionale, e ciò è assurdo perché a primo membro compare un numero irrazionale (si veda l'esercizio 1.53)]

1.56 Se a è un numero razionale e x, y sono numeri irrazionali ($a \in \mathbb{Q}$; $\ x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$), che cosa si può dire su $a + x$, $x + y$, $a \cdot x$, $x \cdot y$?

[$a + x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $a \cdot x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ se $a \neq 0$; su $x + y$ e $x \cdot y$ non si può in generale dire nulla, nel senso che è possibile che siano razionali o irrazionali (il lettore esibisca degli esempi)]

1.57 Siano m, $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che $\sqrt{m}$ sia un numero irrazionale. Verificare che $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ è irrazionale.

[Se $a = \sqrt{m} + \sqrt{n}$ fosse razionale, allora anche

$$a^2 = m + 2\sqrt{m}\sqrt{n} + n = 2a\sqrt{m} - m + n$$

sarebbe razionale; il che è assurdo perché nell'uguaglianza sopra scritta a secondo membro compare un numero irrazionale, essendo $a \neq 0$]

Ricordiamo che due insiemi non vuoti di numeri reali A, B si dicono *contigui* se $x = \sup A = \inf B$. In tal caso x è l'*elemento di separazione* di A e B. Si verifica che A, B sono contigui se:

$$A,\, B \text{ contigui} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a \leq b,\ \forall a \in A,\ \forall b \in B; \\ \\ \forall \epsilon > 0\ \exists\, a \in A,\ \exists\, b \in B:\ b - a < \epsilon. \end{cases}$$

In tal caso l'elemento di separazione x di A, B verifica le disuguaglianze $a \leq x \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$.

1.58 Consideriamo i due insiemi di numeri razionali

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n+1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Verificare che A, B sono contigui e determinare il loro elemento di separazione.

[Si può verificare che $\sup A = \inf B = 1$. Oppure si può ricorrere alla caratterizzazione precedente cominciando col mostrare che $a \leq 1 \leq b$, per ogni $a \in A$, $b \in B$, cioè che $(n-1)/n \leq 1 \leq (n+1)/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sottraendo 1 a tutti i membri si trova $-1/n \leq 0 \leq 1/n$ che è una relazione manifestamente vera, essendo $n > 0$. Verifichiamo poi che per ogni $\epsilon > 0$ esiste almeno un $n \in \mathbb{N}$ tale che $(n+1)/n - (n-1)/n < \epsilon$. Semplificando il primo membro si ottiene $2/n < \epsilon$ che è soddisfatta per $n > 2/\epsilon$. Dunque A, B sono contigui e $x = 1$ è il loro elemento di separazione]

1.59 Verificare che i due insiemi seguenti

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n+1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\},$$

sono contigui e determinare il loro elemento di separazione.

[1]

1.60 Sia B l'insieme costituito da un solo numero $b_0 > 0$. Determinare b_0 in modo che gli insiemi

$$A = \left\{ \frac{n}{n^2+9} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \{b_0\},$$

risultino contigui.

[Si impone la condizione $b_0 = \sup A$. Allo sopo di calcolare l'estremo superiore di A, posto $a_n = n/(n^2+9)$, si possono verificare le relazioni $a_n \leq 1/6$, $\forall n$ e $a_3 = 1/6$. Quindi $b_0 = \max A = 1/6$]

1.61 Sia A l'insieme costituito da un solo numero $a_0 \leq 0$. Determinare a_0 in modo che gli insiemi

$$A = \{a_0\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{n^2+4} \, : \, n \in \mathbb{N} \right\},$$

risultino contigui.

[$a_0 = \inf B = 0$]

1.62 *Nell'ambito dei numeri razionali* non sempre due insiemi contigui ammettono un elemento di separazione. Esibire due insiemi contigui di numeri razionali che non hanno elemento di separazione razionale.

[Ad esempio gli insiemi A, B degli esercizi 1.51, 1.52]

1E. Valori approssimati di numeri reali

La *parte intera* del numero reale x, indicata con $[x]$, è il più grande intero (relativo) minore o uguale ad x. Si ha perciò

$$[x] = m \; : \; m \in \mathbb{Z}, \; m \leq x < m+1.$$

Sia x un numero reale positivo, con rappresentazione decimale $x = m.a_1a_2a_3\ldots$. I numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono interi compresi fra 0 e 9 e si chiamano le *cifre decimali* di x. I numeri razionali

$$\begin{array}{lll} x_0 = m, & x_1 = m.a_1, & x_2 = m.a_1a_2, \; \ldots \\ x_0' = m+1, & x_1' = x_1 + \dfrac{1}{10}, & x_2' = x_2 + \dfrac{1}{10^2}, \; \ldots \end{array}$$

si chiamano rispettivamente *valori approssimati per difetto* e *valori approssimati per eccesso* di x, a meno di un'unità, di 1/10, di 1/100, ecc.

Per ogni $k = 0, 1, 2, \ldots$ si ha

$$x_k \leq x \leq x_k', \qquad x_k' - x_k = 10^{-k},$$

da cui $0 \leq x - x_k \leq x_k' - x_k = 10^{-k}$.

Per $k \geq 1$, il numero x_k si chiama anche *valore abbreviato* di x alla k-sima cifra decimale.

Se x è un numero reale positivo, dei due valori x_k, x'_k approssimati per difetto e per eccesso a meno di 10^{-k}, uno è più prossimo ad x dell'altro (a parità, se $x'_k - x = x - x_k = 1/(2 \cdot 10^k)$, conveniamo che x'_k sia il più prossimo ad x); lo chiameremo *valore arrotondato* di x alla k-sima cifra decimale (a meno di 10^{-k}) e lo indicheremo con x^*_k.

Per stabilire quale dei valori x_k, x'_k è il valore arrotondato di x alla k-sima cifra decimale, si procede nel modo seguente:

(a) Si considera la $(k+1)$-sima cifra decimale a_{k+1} di x;

(b) se $a_{k+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ allora $x^*_k = x_k$;

(c) se $a_{k+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ allora $x^*_k = x'_k$.

1.63 Utilizzando le disuguaglianze

$$3.141592 < \pi < 3.141593,$$

determinare per ciascuno dei numeri π, $\pi/100$, $\pi \cdot 100$, la parte intera, il valore abbreviato alla seconda cifra decimale, il valore arrotondato alla seconda cifra decimale.

[$x = \pi \Rightarrow [x] = 3$, $x_2 = 3.14$, $x^*_2 = 3.14$;
$x = \pi/100 \Rightarrow [x] = 0$, $x_2 = 0.03$, $x^*_2 = 0.03$;
$x = \pi \cdot 100 \Rightarrow [x] = 314$, $x_2 = 314.15$, $x^*_2 = 314.16$]

1.64 Scrivere due numeri reali che differiscono fra loro per meno di $1/100$, ma che non hanno nè parte intera, nè cifre decimali uguali.

[Ad esempio 0.999 e 1=1.000]

1.65 Sia x_k il valore abbreviato alla k-sima cifra decimale di un numero positivo x. Verificare che $x_k = [10^k x]/10^k$.

[Se $x = ma_1a_2a_3\ldots$, allora $10^k x = ma_1a_2\ldots a_k.a_{k+1}\ldots$; quindi $[10^k x] = ma_1a_2\ldots a_k$, da cui segue $[10^k x]/10^k = ma_1a_2\ldots a_k = x_k$]

1.66 Siano x, y due numeri reali positivi e x_k, y_k i rispettivi valori abbreviati alla k-sima cifra decimale. Verificare che $x_k + y_k$ è un'approssimazione di $x+y$ con un errore inferiore a $2/10^k$.

[Essendo $0 \le x - x_k \le 10^{-k}$, $0 \le y - y_k \le 10^{-k}$, sommando risulta $0 \le (x+y) - -(x_k + y_k) \le 2 \cdot 10^{-k}$]

1.67 Ricordiamo che $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$, $\sqrt{3} = 1.732050\ldots$; per ottenere l'espressione decimale di $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ con errore minore di 0.001, quali valori abbreviati di $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ basterà sommare?

[Tenendo conto dell'esercizio precedente si ha $0 \le \sqrt{2}+\sqrt{3}-(x_4+y_4) < 2\cdot 10^{-4} < 0.001$, ove $x_4+y_4 = 1.4142+1.7320 = 3.1462$. Pertanto $\sqrt{2}+\sqrt{3} = 3.146\ldots$ con tre cifre decimali esatte]

1.68 Sia x_k^* il valore arrotondato alla k-sima cifra decimale di un numero positivo x. Verificare che $x_k^* = [10^k x + 0.5]/10^k$

[Si può procedere in modo simile a come indicato nell'esercizio 1.65]

1.69 Determinare i valori arrotondati alla seconda cifra decimale dei seguenti numeri reali

$$4.855; \quad 83.7; \quad 2.718; \quad 3.994; \quad 3.997.$$

[4.9; 83.7; 2.72; 3.99; 4]

1.70 Per ognuno dei seguenti numeri scrivere i valori approssimati per difetto, per eccesso ed il valore arrotondato a meno di 10^{-3}.

$$(a)\ 1.2368 \qquad (b)\ 0.1295 \qquad (c)\ 0.0011$$

[(a) $1.236, 1.237, 1.237$; (b) $0.129, 0.13, 1.13$; (c) $0.001, 0.002, 0.001$]

1.71 Per ognuno dei seguenti numeri scrivere i valori approssimati per difetto, per eccesso ed il valore arrotondato a meno di 10^{-2}

$$(a)\frac{1}{3} \qquad (b)\ \frac{1}{4} \qquad (c)\ \frac{1}{6}$$

[(a) $0.33, 0.34, 0.33$; (b) $0.25, 0.26, 0.25$; (c) $0.16, 0.17, 0.17$]

1.72 Qual è il più grande valore di k per cui i valori arrotondati a meno di 10^{-k} dei seguenti numeri coincidono?

$$\begin{array}{lll} (a) & 2.71828, & 2.71832 \\ (b) & 0.39765, & 0.4 \\ (c) & 3.14159, & 3.13961 \end{array}$$

[(a) $k=4$; (b) $k=2$; (c) $k=2$]

1.73 Se un numero x differisce da un numero y per meno di 10^{-4}, possiamo dire che le prime tre cifre decimali di x sono identiche alle prime tre cifre decimali di y?

[Dipende. Se $y = m.a_1a_2a_3a_4\ldots$ e se a_4 è diverso da 0 e da 9 allora $x = m.a_1a_2a_3\ldots$, cioè le prime tre cifre decimali di x sono identiche alle corrispondenti cifre decimali di y. Se invece $a_4 = 0$ oppure $a_4 = 9$ allora x può avere cifre decimali differenti da y, come accade ad esempio con $x = 0.9999$, $y = 1 = 1.0000$ oppure con $x = 2$, $y = 1.9999$]

1F. Il principio di induzione

Il principio di induzione matematica può essere enunciato nel modo seguente: *supponiamo di avere una successione P_n di proposizioni* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; *P_n è vera per ogni n se*

(i) P_1 *è vera*;

(ii) *per ogni $k \in \mathbb{N}$, P_k implica P_{k+1}.*

La validità di tale principio si basa sul fatto che ogni insieme non vuoto di numeri naturali è dotato di minimo. Dunque, se P_n fosse falsa per qualche n, vi sarebbe il più piccolo n per cui P_n è falsa, diciamolo n_0. Per la (i) non potrebbe essere $n_0 = 1$, quindi $n_0 \geq 2$. Allora $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ e inoltre P_{n_0-1} sarebbe vera in contrasto con la (ii).

1.74 Facendo uso del principio di induzione dimostrare la formula $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$, che, per esteso si scrive:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

[Per $n = 1$ la formula è vera, infatti: $2^0 + 2^1 = 2^2 - 1$. Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e cerchiamo di dedurne che la formula è vera anche per $n = k + 1$. Perciò per ipotesi risulta

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

Sommando ad entrambi i membri 2^{k+1} otteniamo

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Abbiamo quindi ottenuto la validità della formula anche per $n = k + 1$. In base al principio di induzione la formula data vale per ogni $n \in \mathbb{N}$]

1.75 Utilizzando il principio di induzione dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

[La formula vale per $n = 1$, infatti: $1 = \frac{(1 \cdot 2)}{2}$. Supponiamola vera per $n = k$ e dimostriamo che essa è allora anche vera per $n = k + 1$:

$$(1 + 2 + \ldots + k) + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = (k + 1)(\frac{k}{2} + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}]$$

1.76 Utilizzando il principio di induzione dimostrare la formula:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

[La formula è vera per $n = 1$, infatti: $1 = 1^2$. Supponendo che l'uguaglianza valga per $n = k$ e sommando $(2k + 1)$ ad entrambi i membri, la si ottiene per $n = k + 1$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2]$$

1.77 Dimostrare l'uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1).$$

[Si può far uso del principio di induzione, oppure si può utilizzare la formula dell'esercizio 1.75, moltiplicando entrambi i membri per 2]

1.78 Consideriamo la formula dell'esercizio 1.75. Da essa, cambiando n con $2n$, oppure moltiplicando entrambi i membri per 2, otteniamo le due identità:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2n = n(2n + 1);$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1).$$

La prima uguaglianza esprime la somma dei primi $2n$ numeri naturali, mentre la seconda esprime la somma dei numeri naturali *pari* $\leq 2n$. Dedurre da esse la somma dei numeri naturali *dispari* $\leq 2n$.

[Per differenza si ottiene la formula dell'esercizio 1.76]

1.79 Dimostrare mediante il principio di induzione che $2^n > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

[Per $n = 1$ la disuguaglianza si scrive $2^1 > 1$ ed è quindi verificata. Dimostriamo ora che, dall'ipotesi $2^k > k$, segue la tesi $2^{k+1} > k + 1$. A tale scopo dall'ipotesi otteniamo $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > 2k$. Ciò non è equivalente alla tesi; però implica la tesi, dato che $2k = k + k \geq k + 1$. Riassumendo, dall'ipotesi $2^k > k$ deduciamo che: $2^{k+1} > 2k \geq k + 1$; confrontando il primo e l'ultimo membro riconosciamo la tesi $2^{k+1} > k + 1$]

1.80 Sia $a \geq -1$. Dimostrare che vale la seguente *disuguaglianza di Bernoulli*:

$$(1+a)^n \geq 1+na, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[La relazione data vale per $n = 1$ (in particolare con il segno di $=$). Supponendo che essa valga per $n = k$ ne deduciamo

$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a) =$
$= 1+a+ka+ka^2 = 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a.$

L'ultimo passaggio è stato possibile perché $ka^2 \geq 0$]

1.81 Nella dimostrazione sopra proposta, per provare la disuguaglianza di Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na$, dove è stata utilizzata l'ipotesi $a \geq -1$?

[Abbiamo moltiplicato entrambi i membri della disuguaglianza $(1+a)^k \geq 1+ka$ per la quantità $(1+a)$. Affinchè il verso della disuguaglianza rimanga inalterato occorre che $(1+a) \geq 0$, cioè $a \geq -1$]

1.82 Dimostrare la seguente *disuguaglianza stretta di Bernoulli*:

$$(1+a)^n > 1+na, \qquad \forall n \geq 2, \quad \forall a \geq -1, \quad a \neq 0.$$

[Osserviamo che la relazione è vera per $a = -1$, essendo il primo membro uguale a zero ed il secondo membro uguale a $1-n < 0$. Supponendo $a > -1$, $a \neq 0$, procediamo per induzione, con $n = 2, 3, 4, \ldots$. Per $n = 2$ abbiamo

$$(1+a)^2 = 1+2a+a^2 > 1+2a,$$

essendo $a \neq 0$. Nell'ipotesi di induzione, $(1+a)^n > 1+na$, moliplichiamo entrambi i membri per la quantità positiva (ed, in particolare, non nulla) $1+a$, ottenendo

$$(1+a)^{n+1} > (1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 > 1+(n+1)a,$$

essendo $na^2 > 0$]

1.83 Consideriamo ancora la disuguaglianza di Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na$. Dimostrare che, se $n = 2$, la disuguaglianza vale per ogni $a \in \mathbb{R}$. Inoltre, mostrare con un esempio che, se $n = 3$, esistono numeri reali a per cui la disuguaglianza non vale.

[Se $n = 2$: $(1+a)^2 = 1+2a+a^2 \geq 1+2a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$. Se $n = 3$ la disuguaglianza non vale ad esempio con $a = -4$, o più generalmente, se $a < -3$; infatti

$$(1+a)^3 = 1+3a+3a^2+a^3 = 1+3a+a^2(3+a).$$

Perciò, se $a < -3$ risulta $3+a < 0$ e quindi $(1+a)^3 < 1+3a$; viceversa se $a \geq -3$ allora $3+a \geq 0$ e quindi $(1+a)^3 \geq 1+3a$]

1.84 Sia $x \geq 1$. Utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli verificare che

$$\sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{x-1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[La disuguaglianza si può scrivere in modo equivalente $\sqrt[n]{x} \leq 1 + (x-1)/n$, cioè ancora $x \leq [1+(x-1)/n]^n$. É quindi naturale scegliere, nella disuguaglianza di Bernoulli $(1+a)^n \geq 1 + na$, $a = (x-1)/n$. Si ottiene ....]

1.85 Utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli dimostrare che

$$\log(1+n) < n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[La disuguaglianza si può scrivere equivalentemente $1 > (1/n) \cdot \log(1+n) = \log(1+n)^{1/n}$, cioè ancora $e > (1+n)^{1/n} \Leftrightarrow e^n > 1 + n$; l'ultima relazione è conseguenza della disuguaglianza di Bernoulli; infatti $e^n = [1 + (e-1)]^n \geq 1 + (e-1)n > 1 + n$]

1.86 Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, valgono i seguenti raffinamenti della disuguaglianza di Bernoulli

$$(a) \quad (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2, \qquad \forall a \geq 0$$

$$(b) \quad (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3, \qquad \forall a \geq -1.$$

[Tener conto, nel caso (a), che è $a^3 \geq 0$, mentre, nel caso (b), utilizzare il fatto che $a^4 \geq 0$]

1.87 Dimostrare mediante il principio di induzione che, se x_1, x_2 sono numeri reali positivi con $x_1 < x_2$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $x_1^n < x_2^n$.

[Se $x_1^k < x_2^k$ allora $x_1^{k+1} = x_1^k x_1 < x_2^k x_1 < x_2^k x_2 = x_2^{k+1}$]

1.88 Sia $a \neq -1$. Facendo uso del principio di induzione dimostrare la formula che esprime la somma di una progressione geometrica di ragione a:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}.$$

[La formula è vera per $n = 1$, in quanto in tal caso essa si riduce alla uguaglianza $1 + a = (1-a^2)/(1-a)$. Supponiamo ora che la formula sia vera per un certo n e verifichiamo che essa risulta vera anche per il successivo $n+1$; infatti:

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+1} - a^{n+1} + a^{n+2}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$]

1.89 Dimostrare l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$[\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6};$$

si ottiene la conclusione osservando che $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$]

1.90 Dimostrare che $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

[Si può procedere per induzione, oppure si può dedurre il risultato da 1.89 mediante la relazione

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} (2k)^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k^2\,]$$

1.91 Dimostrare la formula

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

[Conviene verificare per induzione separatamente le due uguaglianze:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

oppure, dopo aver verificato la prima delle due uguaglianze, si può procedere per induzione sulla formula originaria effettuando la verifica diretta per $n=1$ e procedendo poi così:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)(n+1)^2 =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2 =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)(n+1) + (n+1)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2\,]$$

1.92 Dimostrare che, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$, il numero n^2+n è pari.

[1^2+1 è pari. Supponiamo ora che k^2+k sia pari; allora

$$(k+1)^2 + (k+1) = k^2+3k+2 = (k^2+k) + 2(k+1)$$

è anche un numero pari]

1.93 La seguente proprietà è manifestamente falsa:

"Comunque si scelgono due numeri naturali a, b risulta sempre $a=b$".

Indichiamo con n il più grande tra due numeri naturali a, b, cioè $n = \max\{a, b\}$. Altrettanto falsa risulta la seguente proposizione:

"Comunque si scelgono due numeri naturali a, b posto $n = \max\{a, b\}$, risulta $a = b = n$".

É ovvio che la proposizione è falsa, perché ad esempio $\max\{4, 7\} = 7$ ma $4 \neq 7$. Diamo di seguito una dimostrazione sbagliata basata sul principio di induzione. Si chiede di trovare l'errore nella dimostrazione proposta.

"TEOREMA" $a, b \in \mathbb{N}$; $\max\{a, b\} = n \quad \Rightarrow \quad a = b = n.$

"Dimostrazione". Procediamo per induzione su n. Se $n = 1$ il teorema è vero; infatti, se $\max\{a, b\} = 1$ essendo a, b interi positivi deve essere $a = b = 1$. Con il metodo di induzione supponiamo vero il teorema per $n = k$:

$$\max\{a, b\} = k \quad \Rightarrow \quad a = b = k.$$

Per verificare il teorema con $n = k + 1$, siano a', b' due numeri naturali tali che $\max\{a', b'\} = k + 1$. Occorre provare che $a' = b' = k + 1$. A tale scopo poniamo $a = a' - 1$, $b = b' - 1$. Risulta $\max\{a, b\} = \max\{a', b'\} - 1 = k$. Per l'ipotesi di induzione risulta $a = b = k$. Dato che $a' = a + 1$, $b' = b + 1$, si ottiene infine $a' = b' = k + 1$.

[L'errore non è nell'aver posto convenzionalmente $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, invece che $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; perché, con la seconda scelta, avremmo potuto applicare il metodo di induzione partendo da $n = 0$, invece che da $n = 1$, con una dimostrazione identica nella sostanza.
L'errore è nel non aver verificato se tutti i numeri considerati appartengono all'insieme $\mathbb{N}$. Infatti, a', $b' \in \mathbb{N}$; è vero che anche $a = a' - 1$ e $b = b' - 1$ sono numeri naturali?
Per ben comprendere l'importanza di questa verifica il lettore rilegga la seconda parte della "dimostrazione" proposta nel caso particolare $k = 1$]

1.94 Dimostrare che

$$3^n \geq 2^{n+1} - 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[Per $n = 1$ la relazione vale con il segno di uguale.
Dall'ipotesi di induzione $3^n \geq 2^{n+1} - 1$ otteniamo $3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \geq (2^{n+1} - 1) \cdot 3$; la tesi di induzione è $3^{n+1} \geq 2^{n+2} - 1$. Tenendo conto di quanto già ottenuto, è opportuno chiedersi se $(2^{n+1} - 1) \cdot 3 \geq 2^{n+2} - 1$, cioè se $3 \cdot 2^{n+1} - 3 \geq 2 \cdot 2^{n+1} - 1$, che equivale a $2^{n+1} \cdot (3 - 2) = 2^{n+2} \geq 2$, che è verificata, essendo l'esponente $n + 2$ maggiore di 1]

1.95 Stabilire se e per quali $n \in N$ risulta

$$n! > 2^n$$

(con il simbolo $n!$ si indica n *fattoriale*, cioè il prodotto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

[Utilizzando la seguente tabella

n	1	2	3	4	5	...
$n!$	1	2	6	24	...	...
2^n	2	4	8	16	...	...

si vede che $n!$ *non* è maggiore di 2^n per $n = 1, 2, 3$, mentre $n! > 2^n$ per $n = 4$. Procediamo per induzione per $n \geq 4$; dall'ipotesi $n! > 2^n$ segue

$$(n+1)! = n!(n+1) > 2^n \cdot (n+1) > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1},$$

cioè la tesi di induzione $(n+1)! > 2^{n+1}$. Pertanto la relazione $n! > 2^n$ è vera per ogni numero naturale $n \geq 4$]

1.96 Stabilire se e per quali $n \in N$ risulta

$$2^n \geq n^2 + 1$$

[Consideriamo la tabella

n	1	2	3	4	5	...
2^n	2	4	8	16	32	...
n^2+1	2	5	10	17	26	...

Risulta che la relazione $2^n \geq n^2 + 1$ vale per $n = 1$ e per $n = 5$, mentre non vale per $n = 2, 3, 4$. Procediamo per induzione per $n \geq 5$: dall'ipotesi $2^n \geq n^2 + 1$ otteniamo

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geq (n^2 + 1) \cdot 2;$$

ricordando la tesi $2^{n+1} > (n+1)^2 + 1$, ci si chiede se $(n^2+1) \cdot 2 \geq (n+1)^2 + 1$, cioè se $2n^2 + 2 \geq n^2 + 2n + 2 \Leftrightarrow n^2 - 2n = n(n-2) \geq 0$, che è vero, perché $n \geq 5$. Pertanto la relazione data è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, con l'eccezione di $n = 2, 3, 4$]

1G. Potenza di insiemi

Due insiemi X e Y si dicono *equipotenti*, se esiste una funzione invertibile $f : X \xrightarrow{su} Y$. In tal caso si dice anche che X e Y sono in *corrispondenza biunivoca*, o che X e Y hanno la stessa **potenza**, e si scrive $X \sim Y$. Si dice che *la potenza di X è minore o uguale della potenza di Y*, se X è equipotente ad una parte di Y e si scrive $X \lesssim Y$.

Si dice che *la potenza di X è minore della potenza di Y*, se $X \lesssim Y$ e X non è equipotente a Y.

Sia X un insieme e supponiamo che esista $n \in \mathbb{N}$ tale che X sia equipotente all'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$. Allora si dice che X è un insieme *finito*; si dice inoltre che n è il *numero* degli elementi di X. Diremo che X è *infinito* se X è non vuoto e non è un insieme finito.

Si dimostra che un insieme X è *infinito* se esso è equipotente ad almeno una sua parte propria $Y \subset X$ $(Y \neq X)$.

Un insieme X si dice *numerabile* se è equipotente all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

1.97 Verificare che per ogni insieme non vuoto S, la potenza di S è minore della potenza dell'insieme $P(S)$ delle parti di S.

[Poichè la funzione

$$f : x \in S \longrightarrow \{x\} \in P(S)$$

è iniettiva, ma non suriettiva, allora S è equipotente ad una parte propria di $P(S)$ e perciò la sua potenza è minore o uguale di quella di $P(S)$. D'altra parte, S non è equipotente a $P(S)$, perché non esiste alcuna funzione suriettiva $g : S \overset{su}{\longrightarrow} P(S)$, (*teorema di Cantor*). Se esistesse una tale g, la parte di S

$$X = \{x \in S : \ll x \notin g(x) \gg\}$$

sarebbe immagine di un $x_0 \in S$. Cioè si avrebbe

$$g(x_0) = \{x \in S : \ll x \notin g(x) \gg\}.$$

Ciò è assurdo, perché, se $x_0 \in g(x_0)$ allora $x_0 \notin g(x_0)$ e viceversa]

1.98 Verificare che il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dell'insieme dei numeri naturali per se stesso è un insieme numerabile.

[Disponendo gli elementi di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ come segue

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & \ldots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & \ldots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & \ldots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4) & \ldots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots &
\end{array}$$

possiamo considerare la funzione da $\mathbb{N}$ verso $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ che a 1 associa $(1,1)$, a 2 associa $(1,2)$, a 3 associa $(2,1)$ e così via procedendo per diagonali, come indicato dalle frecce. Si prova facilmente che tale funzione è invertibile]

1.99 Sia S un insieme ed indichiamo con $\{0,1\}^S$ l'insieme di tutte le funzioni f da S verso $\{0,1\}$. Verificare che $\{0,1\}^S$ è equipotente all'insieme $P(S)$ di tutte le parti di S.

[Se $X \in P(S)$, ad esso associamo l'elemeno di $\{0,1\}^S$ definito da

$$f_X : x \in S \longrightarrow \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \notin X \end{cases}$$

La funzione $X \in P(S) \longrightarrow f_X \in \{0,1\}^S$ è invertibile]

1.100 Dimostrare che l'intervallo $[0,1]$ non è numerabile.

[Supponiamo per assurdo che esista una successione $a_n : \mathbb{N} \xrightarrow{su} [0,1]$, il cui insieme di elementi coincide con $[0,1]$. Gli elementi a_n potranno essere espressi in forma decimale:

$$\begin{array}{rl} a_1 = & 0.b_{11}b_{12}b_{13}\dots b_{1n}\dots \\ a_2 = & 0.b_{21}b_{22}b_{23}\dots b_{2n}\dots \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = & 0.b_{n1}b_{n2}b_{n3}\dots b_{nn}\dots \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

e si potrà far in modo che ogni allineamento decimale contenga infinite cifre diverse da zero. Ed esempio nel caso di

$$\tfrac{1}{5} = 0.2 = 0.2000 = \dots = 0.1999\dots$$

sceglieremo l'ultima scrittura. Posto $x = 0.x_1x_2x_3\dots x_n\dots$ con $x_i \notin \{0, b_{ii}\}$, si ha $x \neq a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e cioè $x \notin [0,1]$ il che è assurdo]

1.101 Verificare che il numero delle funzioni da $\{1,2,\dots,n\}$ verso $\{0,1\}$ è 2^n.

[Applichiamo il principio di induzione. Per $n = 1$ la tesi è vera. Supposta vera per $n = k$, verifichiamo che vi sono 2^{k+1} funzioni da $X = \{1,2,\dots,k,k+1\}$ verso $\{0,1\}$. Evidentemente l'insieme F delle funzioni da X verso $\{0,1\}$ è l'unione dell'insieme G delle funzioni da X verso $\{0,1\}$ che in $k+1$ assumono il valore 0 con l'insieme H delle funzioni da X verso $\{0,1\}$ che in $k+1$ assumono il valore 1. Tali insiemi hanno entrambi potenza pari a 2^k e dunque F ha potenza $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ in quanto $G \cap H = \emptyset$]

Capitolo 2

RICHIAMI DI TRIGONOMETRIA

2A. Definizioni

Due semirette r, r' con vertice in uno stesso punto O dividono il piano che le contiene (privato delle due semirette) in due parti; tali parti vengono chiamate angoli (figura 2.1).

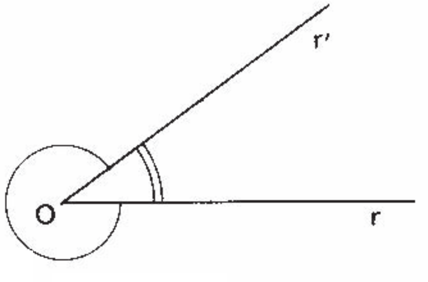


figura 2.1

Se le due semirette coincidono, cioè se $r = r'$, allora una delle due parti in cui è diviso il piano è vuota; in tal caso l'angolo non vuoto è chiamato *angolo giro*. Per convenzione, la *misura in gradi* dell'angolo giro è 360, e si scrive 360° (360 gradi).

In figura 2.2 è disegnato l'angolo giro ed alcuni suoi multipli interi. La metà dell'angolo giro è chiamata *angolo piatto*, misura 180° e corrisponde a due semirette r, r' allineate con versi opposti. La quarta parte dell'angolo giro è chiamata *angolo retto* e misura 90°.

È noto dalla geometria che è possibile associare una misura in gradi a qualsiasi angolo piano.

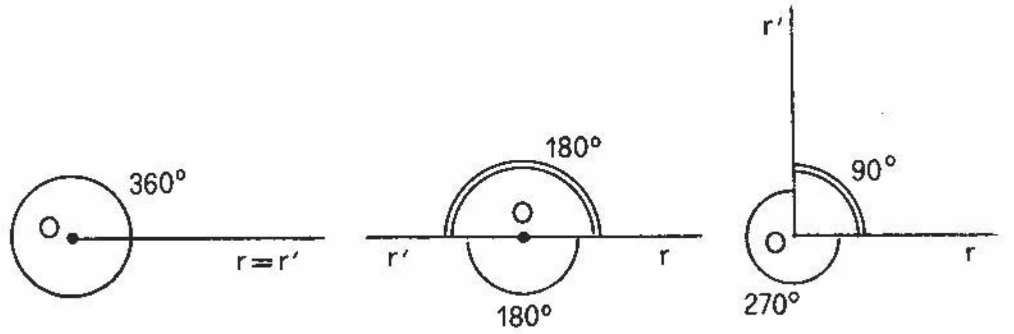


figura 2.2 - misure in gradi

Oltre che in gradi, è utile misurare gli angoli in *radianti*. Per far ciò, consideriamo la circonferenza di raggio 1 con centro nel vertice O, punto di incontro delle due semirette r, r', come in figura 2.3.

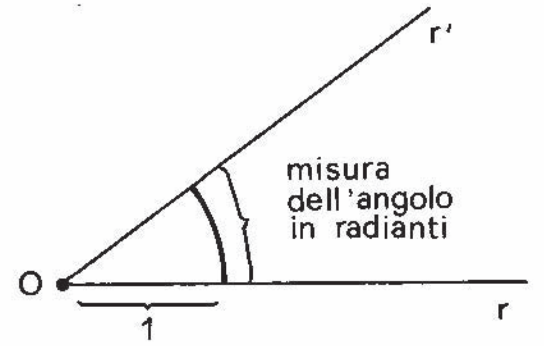


figura 2.3

La misura in radianti di un angolo è la lunghezza dell'arco di circonferenza intercettato dalle due semirette. Dato che la lunghezza di una circonferenza di raggio 1 è 2π, il numero 2π è appunto la misura in radianti dell'angolo giro, π è la misura in radianti dell'angolo piatto, $\pi/2$ è la misura in radianti dell'angolo retto (si veda la figura 2.4).

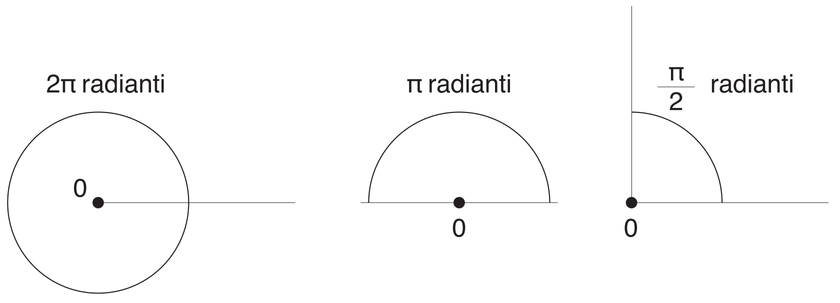


figura 2.4 - misure in radianti

2.1 Verificare che vale la seguente tabella di corrispondenze tra valori di angoli espressi in gradi ed in radianti.

gradi	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

[Alcune risposte sono state date sopra; ad esempio, 180 è la misura in gradi dell'angolo piatto. L'arco di circonferenza di raggio 1 corrispondente all'angolo piatto è una semicirconferenza di lunghezza

$$\frac{2\pi r}{2} = \pi r \qquad \text{con} \qquad r = 1, \quad \text{cioè} \quad \pi;$$

π è appunto la misura in radianti di un angolo di 180 gradi. Analogamente, 60 è la misura in gradi di un angolo di $\pi/3$ radianti, perchè l'arco di circonferenza di raggio 1 corrispondente ha lunghezza pari alla terza parte della lunghezza della semicirconferenza di raggio 1]

Poiché un valore numerico approssimato di π è 3.14, un angolo giro misura più di 6 radianti, un angolo piatto misura circa 3 radianti, mentre un angolo retto misura circa un radiante e mezzo. Per lo stesso motivo un angolo di un radiante misura circa 60° (essendo all'incirca i 2/3 di un angolo retto); più precisamente:

2.2 Determinare la misura in gradi di un angolo che, espresso in radianti, vale 1.

[Indicando con x la misura in gradi dell'angolo di un radiante, abbiamo la proporzione $x : 1 = 360 : 2\pi$, da cui $x = 360/2\pi = 180/\pi \cong 57$. Quindi un angolo di un radiante misura circa 57°; utilizzando anche i *primi* ed i *secondi*, si trova più precisamente che un radiante corrisponde all'incirca a $57^\circ\, 17'\, 44''$]

2.3 Determinare la misura in radianti degli angoli che, espressi in gradi, valgono rispettivamente 1°, 60°.

[Se x rappresenta la misura in radianti dell'angolo di un grado, vale la proporzione $x : 1 = 2\pi : 360$, da cui $x = \pi/180 \cong 0.017$. Analogamente un angolo di 60° misura $\pi/3 \cong 1.047$ radianti]

Si è detto che un angolo è individuato da due semirette r, r' uscenti da uno stesso punto O e che la misura dell'angolo in radianti è la lunghezza dell'arco di circonferenza, di raggio 1 e centro O, intercettato dalle due semirette. Consideriamo r come retta di riferimento fissata e pensiamo di percorrere la circonferenza di raggio 1 per passare da r ad r'.

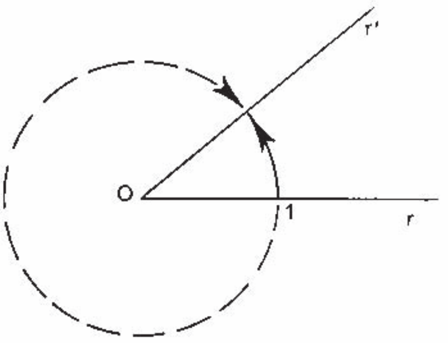


figura 2.5

In figura 2.5 l'angolo minore formato da r, r' è percorso in *senso antiorario*, mentre l'angolo maggiore (tratteggiato) è percorso in *senso orario*. Nel primo caso si dice che l'angolo è orientato positivamente, nel secondo che è orientato negativamente.

Perciò possiamo definire la *misura di un angolo orientato* individuato da due semirette r, r', come la misura dell'angolo presa rispettivamente con il segno positivo o negativo a seconda che l'angolo sia percorso da r a r' in senso antiorario oppure orario.

Allo stesso modo, nel movimento da r a r' si può percorrere più volte la circonferenza di raggio 1 con centro nel vertice dell'angolo. Ad esempio, consideriamo in figura 2.5 la retta r fissata e percorriamo la circonferenza di raggio 1 fino a raggiungere la retta r'. Se andiamo in verso antiorario e ci fermiamo al primo incontro di r', individuiamo un angolo la cui misura in radianti è un numero α positivo. Se percorriamo in senso antiorario la circonferenza fino ad incontrare più volte r', individuiamo un angolo le cui misure in radianti valgono

$$\alpha + 2\pi, \qquad \alpha + 4\pi, \qquad \alpha + 6\pi, \quad \cdots, \qquad \alpha + 2k\pi, \quad \cdots$$

Se invece, a partire da r percorriamo la circonferenza in senso orario fino ad incontrare la semiretta r', in funzione del numero di giri otteniamo gli angoli le cui misure in radianti valgono

$$\alpha - 2\pi, \qquad \alpha - 4\pi, \qquad \alpha - 6\pi, \quad \cdots, \qquad \alpha - 2k\pi, \quad \cdots$$

Definiamo ora le funzioni *seno* e *coseno*. A tale scopo consideriamo un riferimento cartesiano ortogonale di assi x, y ed assumiamo il semiasse positivo delle x (ascisse) come retta r di riferimento per misurare gli angoli. Consideriamo inoltre un angolo orientato che misura α radianti ($\alpha \in \mathbb{R}$), come in uno dei casi indicati in figura 2.6. Ricordiamo che la circonferenza di riferimento ha centro nell'origine degli assi ed ha raggio 1.

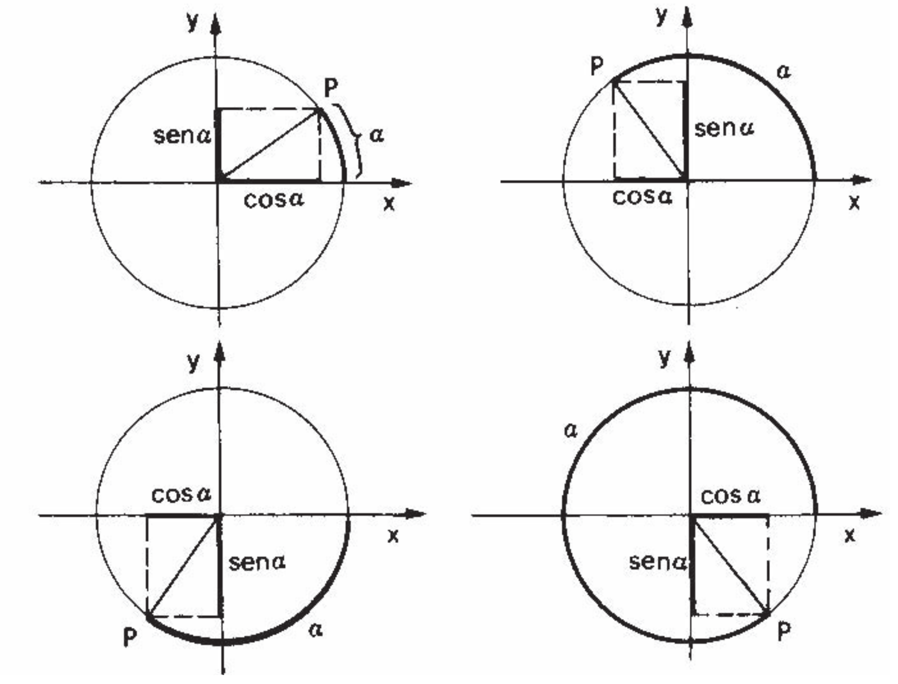


figura 2.6

Il *seno di* α, indicato con sen α, *è l'ordinata del punto P sulla circonferenza di riferimento che sottende un angolo di misura* α, cioè del punto P estremo dell'arco di circonferenza di misura α.

Il *coseno di* α indicato con cos α, *è l'ascissa del punto P sulla circonferenza di riferimento che sottende un angolo di misura* α, cioè del punto P estremo dell'arco di circonferenza di misura α.

Consideriamo alcuni esempi: cominciamo con $\alpha = 0$; in questo caso il punto P è sull'asse delle x ed ha coordinate (1,0); in base alla definizione risulta

sen 0=0, cos 0=1. Troviamo lo stesso risultato per $\alpha = 2\pi$, oppure per $\alpha = -2\pi$; cioè

$$\operatorname{sen} 2\pi = \operatorname{sen}(-2\pi) = \operatorname{sen} 2k\pi = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos 2\pi = \cos(-2\pi) = \cos 2k\pi = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Se invece $\alpha = \pi/2$ il punto P si trova sull'asse y ed ha coordinate (0,1); perciò sen $\pi/2 = 1$, cos $\pi/2 = 0$. Allo stesso modo si verifica che

$$\operatorname{sen}\pi = 0, \qquad \cos\pi = -1;$$
$$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1, \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0.$$

Dalla stessa definizione segue che le funzioni seno e coseno sono *periodiche* di periodo 2π, cioè

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha, \qquad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha, \qquad \forall\,\alpha.$$

2.4 Stabilire per quali valori di $\alpha \in [0, 2\pi]$ risulta

(a) $\operatorname{sen}\alpha = 0$ $\qquad$ (b) $\cos\alpha = 0$

[(a) $\alpha = 0,\ \alpha = \pi,\ \alpha = 2\pi$; (b) $\alpha = \frac{\pi}{2},\ \alpha = \frac{3}{2}\pi$]

2.5 Stabilire per quali valori di $\alpha \in [0, 2\pi]$ risulta

(a) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ $\qquad$ (b) $\operatorname{sen}\alpha < 0$

[(a) $0 < \alpha < \pi$; (b) $\pi < \alpha < 2\pi$]

2.6 Stabilire per quali valori di $\alpha \in [0, 2\pi]$ risulta

(a) $\cos\alpha > 0$ $\qquad$ (b) $\cos\alpha < 0$

[(a) $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha \le 2\pi$; (b) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi$]

2.7 Determinare tutti i numeri reali α per cui risulta

(a) $\operatorname{sen}\alpha = 0$ $\qquad$ (b) $\cos\alpha = 0$

[(a) $\alpha = k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$; (b) $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

2.8 Determinare tutti i numeri reali α per cui risulta

$$(a) \quad \operatorname{sen}\alpha = 1 \qquad\qquad (b) \quad \operatorname{sen}\alpha = -1$$

[(a) $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$; (b) $\alpha = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

2.9 Determinare tutti i numeri reali α per cui si ha

$$(a) \quad \cos\alpha = 1 \qquad\qquad (b) \quad \cos\alpha = -1$$

[(a) $\alpha = 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$; (b) $\alpha = (2k+1)\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

2.10 Stabilire per quali numeri $\alpha \in [0, 2\pi]$ risulta

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$$

[$\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$]

2.11 Utilizzando la definizione delle funzioni seno e coseno verificare che

$$(a) \quad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad (b) \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

La tangente di α, indicata con tg α, è definita mediante il rapporto

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Naturalmente il denominatore cos α deve essere diverso da zero e ciò accade per $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Quindi la funzione tangente è definita se il suo argomento α è diverso da $\pi/2 + k\pi$.

Analogamente si definisce la *cotangente di* α, indicata con cotg α, mediante il rapporto

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,, \qquad\qquad \alpha \neq k\pi.$$

Le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo π, cioè, per ogni α per cui sono definite, risulta

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha\,, \qquad\qquad \operatorname{cotg}(\alpha + \pi) = \operatorname{cotg}\alpha.$$

2B. Elenco delle principali proprietà

Per comodità del lettore indichiamo di seguito alcune tra le principali proprietà delle funzioni trigonometriche sen α, cos α, tg α, con solo alcuni cenni di dimostrazione. Daremo ulteriori elementi di dimostrazione nei paragrafi successivi.

Dalla definizione del seno e del coseno risulta immediatamente che

$$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}; \tag{1}$$

ciò si può scrivere in modo equivalente con il valore assoluto (si veda l'esercizio 3.30):

$$|\operatorname{sen} \alpha| \leq 1, \qquad |\cos \alpha| \leq 1, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Altre disuguaglianze molto utili, sono le seguenti per la funzione seno:

$$\operatorname{sen} \alpha < \alpha,\ \forall\, \alpha > 0; \quad |\operatorname{sen} \alpha| \leq |\alpha|,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

La relazione fondamentale tra seno e coseno è

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}; \tag{4}$$

tale formula segue dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo di cateti $|\operatorname{sen} \alpha|$, $|\cos \alpha|$ in figura 2.7 (si ricordi che l'ipotenusa è lunga 1).

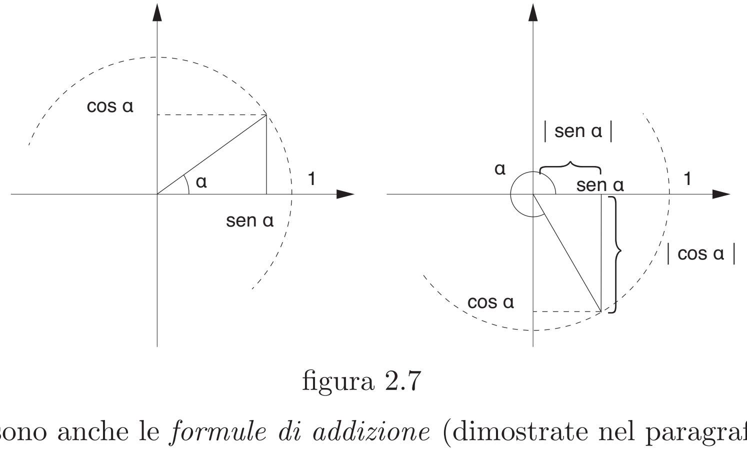


figura 2.7

Utili sono anche le *formule di addizione* (dimostrate nel paragrafo 2D):

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha, \tag{5}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \tag{6}$$

e le *formule di sottrazione*:

$$\text{sen}\,(\alpha-\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta-\text{sen}\,\beta\cos\alpha, \tag{7}$$

$$\cos\,(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta. \tag{8}$$

Ponendo $\beta=\alpha$ nelle (5), (6) si ottengono le *formule di duplicazione*:

$$\text{sen}\,2\alpha=2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha, \tag{9}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\,\alpha. \tag{10}$$

Altra conseguenza delle formule di addizione e sottrazione (si veda l'esercizio 2.31) sono le *formule di prostaferesi*:

$$\text{sen}\,p+\text{sen}\,q=2\,\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2}, \tag{11}$$

$$\text{sen}\,p-\text{sen}\,q=2\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}\,\cos\frac{p+q}{2}, \tag{12}$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2}, \tag{13}$$

$$\cos p-\cos q=-\,2\,\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}. \tag{14}$$

Circa la tangente, dalla definizione tgα = sen α/cos α, e dalle corrispondenti formule per seno e coseno, si ottengono le *formule di addizione, sottrazione e duplicazione* per la tangente

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\text{tg}\beta},\qquad \text{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}{1+\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}, \tag{15}$$

$$\text{tg}\,2\alpha=\frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}. \tag{16}$$

Le formule seguenti, dimostrate nell'esercizio 2.33, esprimono sen α, cos α, tg α come funzione razionale di tg $\alpha/2$ e sono utili, ad esempio, per risolvere per sostituzione alcuni integrali indefiniti od alcune equazioni trigonometriche (si veda l'esercizio 2.50).

Posto $t = \mathrm{tg}\,(\alpha/2)$, si ha:

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}. \tag{17}$$

Riportiamo una tabella di valori del seno, coseno e tangente per alcuni angoli particolari. All'inizio del paragrafo successivo è indicato il metodo per ricavare tali valori.

α radianti		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α gradi		$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
sen α		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non è definita	0	non è definita	0

I valori della tavola precedente possono essere riportati in un riferimento cartesiano come nelle figure 2.8, 2.9, 2.10, ottenendo alcuni punti (evidenziati nelle figure) appartenenti rispettivamente ai grafici delle funzioni seno, coseno e tangente. I grafici completi si disegnano in modo preciso facendo uso delle derivate.

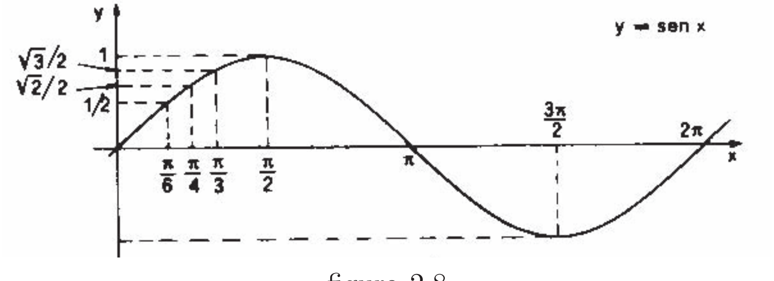


figura 2.8

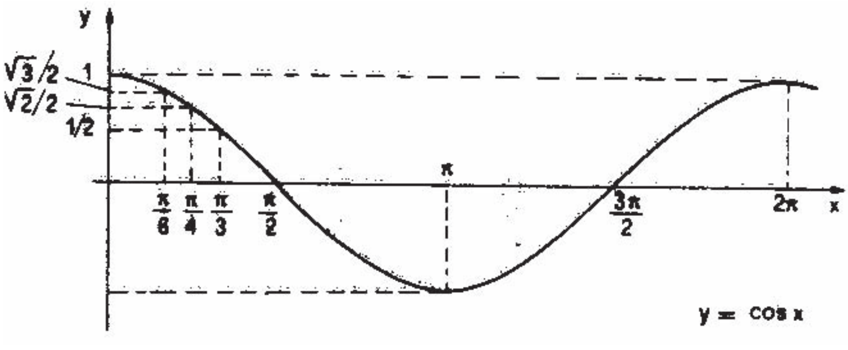


figura 2.9

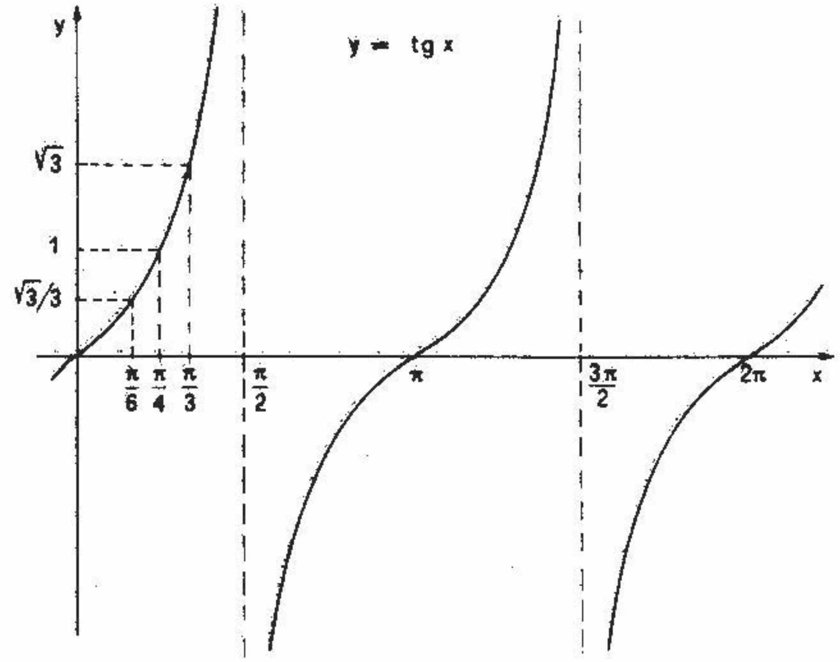


figura 2.10

Nel leggere le figure 2.8, 2.9, è utile tener presente i valori approssimati $\sqrt{2}/2 \cong 0.7$, $\sqrt{3}/2 \cong 0.87$; mentre in figura 2.10 sono utili i valori $\sqrt{3}/3 \cong 0.58$, $\sqrt{3} \cong 1.73$.

2C. Risoluzione di triangoli rettangoli

Nella tavola proposta nel paragrafo precedente sono indicati i valori di sen α, cos α, tg α in particolare per $\alpha = 30°, 45°, 60°$. Di seguito proponiamo la verifica di tali valori.

2.12 Verificare che sen $(\pi/6) = 1/2$.

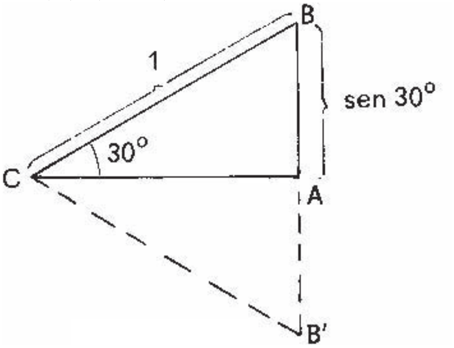


figura 2.11

[Si consideri la figura 2.11 dove è disegnato un triangolo rettangolo ABC avente l'ipotenusa di lunghezza 1 ed un angolo di 30°. Dato che la somma degli angoli interni ad ogni triangolo vale 180°, l'angolo in B vale 60°. Perciò, il triangolo BCB', disegnato in figura 2.11 raddoppiando il triangolo iniziale, ha tre angoli uguali ed è quindi equilatero; dunque il lato BB' è lungo 1, cioè $\overline{AB} = 1/2$]

2.13 Verificare che sen $(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

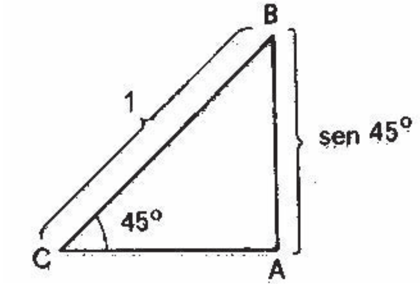


figura 2.12

[Si consideri in figura 2.12 il triangolo ABC, rettangolo in A. Dato che la somma degli angoli interni al triangolo vale 180°, l'angolo in B vale 45° come l'angolo in C. Perciò, il triangolo è isoscele e $\overline{AB} = \overline{CA}$. Per il teorema di Pitagora $1 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = 2\overline{AB}^2$, da cui $\overline{AB}^2 = 1/2$ cioè $\overline{AB} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$]

2.14 Verificare che sen $(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

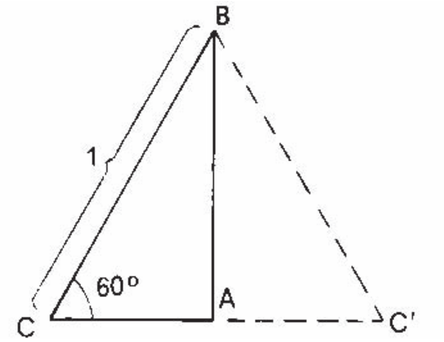


figura 2.13

[Il triangolo BCC' in figura 2.13, ottenuto raddoppiando il triangolo rettangolo ABC, è equilatero. Perciò, $\overline{CC}\,' = 1$ e $\overline{CA} = 1/2$. Per il teorema di Pitagora sen $60^\circ = \overline{AB} = \sqrt{\overline{CB}\,^2 + \overline{CA}\,^2} = \sqrt{3}/2$]

2.15 Verificare che

$$(a)\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (b)\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (c)\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

[Si può procedere in modo analogo a quanto fatto rispettivamente negli esercizi 2.14, 2.13, 2.12]

Consideriamo un triangolo rettangolo ABC, rettangolo in A, come in figura 2.14. Per semplicità di disegno supponiamo che il lato CB abbia lunghezza maggiore di 1.

Con centro in C tracciamo una circonferenza (tratteggiata in figura) di raggio 1 che incontra CB in $B\,'$; sia poi A$'$ il piede della perpendicolare al cateto CA passante per B'. Per definizione risulta sen $\alpha = \overline{A'B'}$, cos $\alpha = \overline{CA}\,'$.

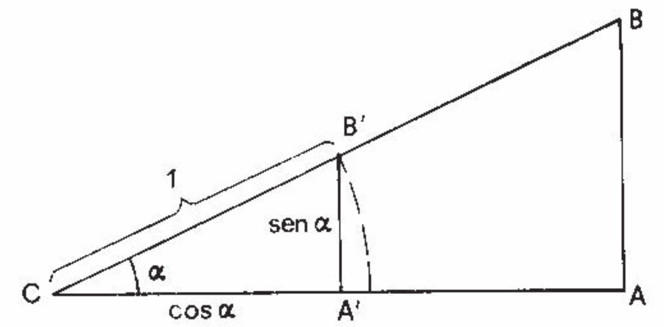


figura 2.14

Per le proprietà dei triangoli simili (i triangoli ABC e $A'B'$C sono simili perchè hanno gli angoli corrispondenti uguali fra loro) vale la proporzione $\overline{A'B'}/\overline{CB'} = \overline{AB}/\overline{CB}$. Dato che $\overline{CB'} = 1$, risulta quindi

$$\operatorname{sen}\alpha = \overline{A'B'} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}.$$

Si ricava quindi che $\overline{AB} = \overline{CB}\operatorname{sen}\alpha$. Abbiamo perciò verificato che *in un triangolo rettangolo la lunghezza di un cateto è uguale alla lunghezza dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto.*

Analogamente per il coseno si ottiene

$$\cos\alpha = \overline{C'A'} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}};$$

cioè $\overline{CA} = \overline{CB}\cos\alpha$. Quindi *in un triangolo rettangolo la lunghezza di un cateto è uguale alla lunghezza dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente.*

Dividendo membro a membro le due relazioni trovate: $\overline{AB} = \overline{CB}\operatorname{sen}\alpha$, $\overline{CA} = \overline{CB}\cos\alpha$, otteniamo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$$

cioè $\overline{AB} = \overline{CA}\operatorname{tg}\alpha$. Quindi *in un triangolo rettangolo la lunghezza di un cateto è uguale alla lunghezza dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.*

Ricordiamo infine la relazione fondamentale

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

che si ottiene dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo $A'B'$C in figura 2.1. L'esercizio seguente si risolve mediante tale identità fondamentale.

2.16 Verificare le identità

$$(a)\quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad\qquad (b)\quad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

2D. Formule di addizione e conseguenze

Le formule di addizione e sottrazione (dette anche soltanto formule di addizione) sono le seguenti

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta \cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = (\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta)/(1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta).$$

Indichiamo come dimostrare tali formule, limitandoci per semplicità al caso in cui gli angoli α, β sono positivi e $\alpha + \beta < \pi/2$.

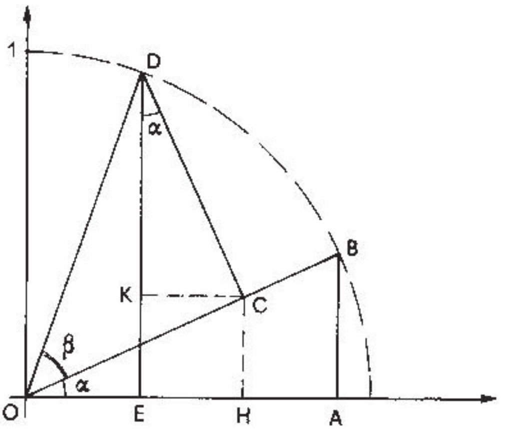


figura 2.15

Con riferimento alla figura 2.15 risulta

$$\operatorname{sen}\alpha = \overline{AB}, \qquad \cos\alpha = \overline{OA},$$
$$\operatorname{sen}\beta = \overline{CD}, \qquad \cos\beta = \overline{OC},$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \overline{ED}, \qquad \cos(\alpha+\beta) = \overline{OE}.$$

Inoltre l'angolo segnato in D vale α perchè i lati sono perpendicolari a quelli corrispondenti all'angolo in O.

Per dimostrare la formula che esprime sen $(\alpha + \beta)$ scriviamo:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \overline{ED} = \overline{HC} + \overline{KD}.$$

Il segmento HC è il cateto opposto all'angolo α del triangolo rettangolo HCO, la cui ipotenusa vale $\overline{OC} = \cos\beta$. Perciò:

$$\overline{HC} = \overline{OC}\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \operatorname{sen}\alpha.$$

Analogamente $\overline{KD} = \overline{CD} \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$, che, insieme alla relazione precedente, prova la formula di addizione $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

2.17 Con riferimento alla figura 2.15, dimostrare la formula di addizione relativa a $\cos(\alpha+\beta)$, con $\alpha, \beta > 0,\ \alpha+\beta < \pi/2$.

[Con i simboli della figura 2.15 risulta $\cos(\alpha+\beta) = \overline{OE} = \overline{OH} - \overline{KC}$. Inoltre $\overline{OH} = \overline{OC}\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha$, $\quad \overline{KC} = \overline{CD}\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$]

2.18 Dimostrare la formula di addizione relativa a $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

[Utilizzando le formule di addizione relative al seno e coseno abbiamo

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\ +\ \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta\ -\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$ si ottiene il risultato]

2.19 Utilizzando le formule di addizione e sottrazione dimostrare che valgono le identità

$(a)\quad \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

$(b)\quad \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha\ -\ \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\ +\ \operatorname{tg}\beta}$

purchè tutte le quantità siano definite.

2.20 Verificare che risulta

$$(a)\quad \operatorname{sen}15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad (b)\quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Verificare inoltre che la somma dei quadrati dei valori indicati vale 1, come ci si deve aspettare in generale dalla relazione $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

[È utile scrivere $\operatorname{sen}15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ)$ e poi applicare le formule di sottrazione. Analogamente per il coseno]

2.21 Verificare che $\operatorname{tg}15^\circ = 2-\sqrt{3}$.

[Basta utilizzare l'esercizio precedente e poi verificare, eseguendo il prodotto, che $(2-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = (\sqrt{6}-\sqrt{2})$.]

2.22 Verificare che risulta

$$(a) \quad \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad (b) \quad \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2.23 Verificare che $\operatorname{tg} 75^\circ = 2+\sqrt{3}$.

2.24 Indichiamo con α, β, γ, $(0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi/2)$ gli angoli di un triangolo. Verificare che

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$$

[Si usi il fatto che, essendo $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, risulta $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(\pi-\gamma) = -\operatorname{tg}\gamma$]

2.25 Verificare le formule di duplicazione

$$(a) \quad \operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$(b) \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \; (= 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1)$$

[Basta porre $\beta = \alpha$ nelle formule di addizione. Le formule indicate in parentesi in (b) seguono dalla relazione fondamentale $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$]

2.26 Verificare la formula di duplicazione per la tangente

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

2.27 Verificare le identità (dette formule di triplicazione):

$$(a) \quad \operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$$

$$(b) \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

[Cominciare con il porre $\beta = 2\alpha$ nelle formule di addizione]

2.28 Verificare che, per $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, valgono le identità

$$(a) \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$(b) \quad \frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}{2} = \frac{1 + \operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

2.29 Verificare le identità

$$(a) \quad \operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad (b) \quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$

$$(c) \quad \operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha \qquad (d) \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$

$$(e) \quad \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha \qquad (f) \quad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$

$$(g) \quad \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha \qquad (h) \quad \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

[Verifichiamo ad esempio la (a): per le formule di addizione si ha

$$\operatorname{sen}(\pi+\alpha) = \operatorname{sen}\pi\cos\alpha + \cos\pi\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\alpha]$$

2.30 Verificare le identità

$$(a) \quad \operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \quad (b) \quad \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2}\pm\alpha) = \mp\operatorname{cotg}\alpha$$

2.31 Utilizzando le formule di addizione verificare le formule di prostaferesi:

$$(a) \quad \operatorname{sen}p + \operatorname{sen}q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$(b) \quad \operatorname{sen}p - \operatorname{sen}q = 2\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$(c) \quad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$(d) \quad \cos p - \cos q = -\,2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

[Ponendo $\alpha = (p+q)/2$, $\beta = (p-q)/2$, si ha $\alpha+\beta = p$, $\alpha-\beta = q$. Ponendo tali valori nelle formule di addizione relative a sen $(\alpha\pm\beta)$ abbiamo

$$\operatorname{sen}p = \operatorname{sen}\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} + \cos\tfrac{p+q}{2}\operatorname{sen}\tfrac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen}q = \operatorname{sen}\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} - \cos\tfrac{p+q}{2}\operatorname{sen}\tfrac{p-q}{2}.$$

Addizionando membro a membro le due relazioni otteniamo (a), sottraendo otteniamo (b). Si procede in modo analogo per ottenere (c), (d) a partire da cos $(\alpha\pm\beta)$]

2.32 Mediante le formule di prostaferesi verificare le identità

$$(a) \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$$

$$(a) \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}$$

2.33 Facendo uso delle formule di duplicazione (esercizi 2.25 e 2.26) verificare che, posto $t = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ con $\alpha \neq (2k+1)\pi$, risulta

$$(a)\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad (b)\ \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad (c)\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

[Si scrivano le formule di duplicazione relative all'angolo $\alpha/2$, invece di α. Con tale sostituzione (c) corrisponde esattamente alla formula dell'esercizio 2.26. Per le (a), (b) abbiamo

$$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Dividendo per $1 = \text{sen}^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)$ e poi, dividendo ancora numeratore e denominatore per $\cos^2(\alpha/2)$, otteniamo

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{2\text{sen}\,(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{\text{sen}^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)} = \frac{2\text{tg}(\alpha/2)}{\text{tg}^2(\alpha/2) + 1}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2(\alpha/2) - \text{sen}^2(\alpha/2)}{\text{sen}^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)} = \frac{1 - \text{tg}^2(\alpha/2)}{\text{tg}^2(\alpha/2) + 1}\ ]$$

Negli esercizi 2.50, 2.51 è proposta un'applicazione delle formule dell'esercizio precedente.

2E. Equazioni trigonometriche

Una *equazione* è un'espressione del tipo $f(x) = 0$, con $f(x)$ funzione (reale di variabile reale) assegnata. Una *soluzione* dell'equazione è un numero reale x per cui $f(x) = 0$. Risolvere un'equazione significa determinare tutte le sue soluzioni. Se $f(x)$ è una funzione trigonometrica (sen x, cos x, tg x) od è espressa mediante funzioni trigonometriche, diremo che la corrispondente equazione $f(x) = 0$ è un'*equazione trigonometrica.*

Le seguenti si dicono *equazioni trigonometriche elementari:*

$$\text{sen}\,x = a, \quad \cos x = a, \quad \text{tg}\,x = a,$$

dove a è un numero reale assegnato. Per scrivere correttamente *tutte* le soluzioni di tali equazioni è utile far riferimento ai grafici delle funzioni sen x, cos x, tg x e tener presente che tali funzioni sono periodiche.

Cominciamo con $\text{sen}\,x = a$, $a \in \mathbb{R}$, facendo riferimento alla figura 2.16, dove sono disegnati in uno stesso sistema di assi cartesiani x, y i grafici della funzione $y = \text{sen}\,x$ e della retta $y = a$, per tre diversi valori di a.

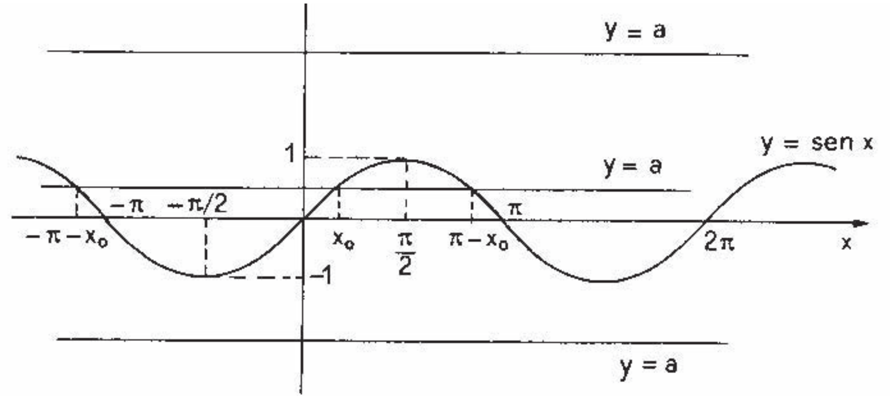


figura 2.16

Otteniamo il seguente schema di risoluzione

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen} x = a & \\ a > 1 & \text{oppure } a < -1 \end{array}\right\} \iff \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = a \\ -1 < a < 1 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} \text{scelto } x_0 \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ tale che} \\ \text{sen } x_0 = a \text{, le soluzioni sono:} \\ x_0 + 2k\pi,\ \pi - x_0 + 2k\pi\ \forall k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

2.34 Risolvere le equazioni

$$(a) \quad \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (b) \quad \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$$

[(a) Risulta sen $x = \sqrt{2}/2$ per $x = \pi/4$. Leggendo il grafico in figura 2.17 si trova sen $x = \sqrt{2}/2$ anche per $x = \pi - \pi/4 = (3/4)\pi$. Dato che la funzione sen x è periodica di periodo 2π, tutte le soluzioni dell'equazione data sono $x = \pi/4 + 2k\pi$, $x = (3/4)\pi + 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
(b) Ricordiamo che sen $x = \frac{1}{2}$ per $x = \pi/6$; dalla figura 2.17 si legge che sen $x = -\frac{1}{2}$ per $x = -\pi/6$ e $x = \pi + \pi/6 = (7/6)\pi$. Per la periodicità le soluzioni dell'equazione data sono $x = -\pi/6 + 2k\pi$ (che si può scrivere in modo equivalente $x = (11/6)\pi + 2k\pi$) e $x = (7/6)\pi + 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$]

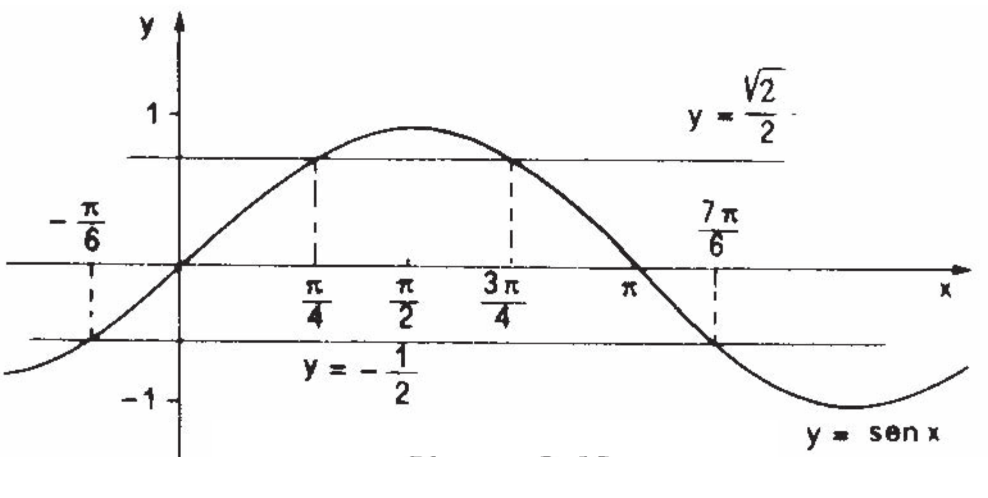


figura 2.17

2.35 Risolvere le equazioni

$$(a)\ \text{sen}\ x = 0 \quad (b)\ \text{sen}\ x = 1 \quad (c)\ \text{sen}\ x = 2$$

[(a) $x = k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$; (b) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$; (c) nessuna soluzione]

Consideriamo ora l'equazione $\cos x = a,\ a \in \mathbb{R}$, e facciamo riferimento alla figura 2.18.

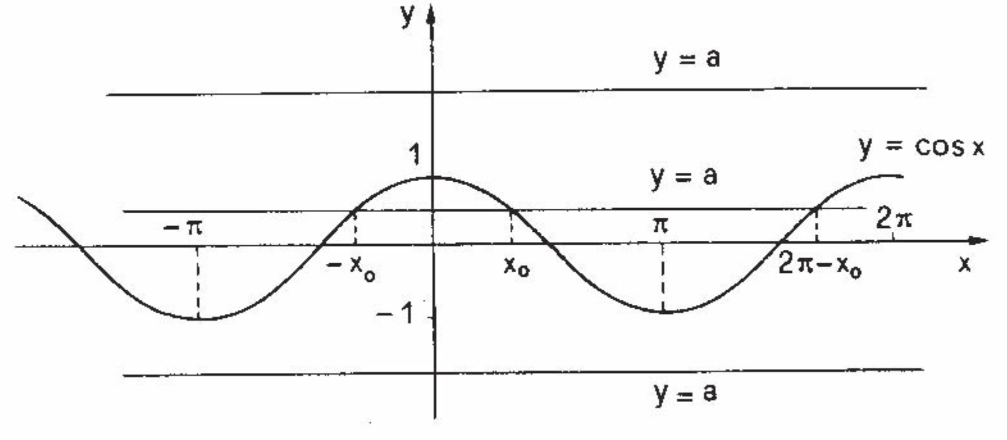


figura 2.18

Otteniamo il seguente schema di risoluzione

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = a \\ a > 1 \qquad \text{oppure} \quad a < -1 \end{array}\right\} \iff \quad \text{nessuna soluzione}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = a \\ -1 < a < 1 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} \text{scelto } x_0 \in [0, \pi] \text{ tale che} \\ \cos\ x_0 = a, \text{ le soluzioni sono:} \\ x = \pm x_0 + 2k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

2.36 Risolvere le equazioni

$$(a) \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (b) \quad \cos x = 0$$

[(a) $x = \pm\pi/6 + 2k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$ (si veda la figura 2.19); (b) $x = \pm\pi/2 + 2k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$, che si può scrivere in modo equivalente $x = \pi/2 + k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$]

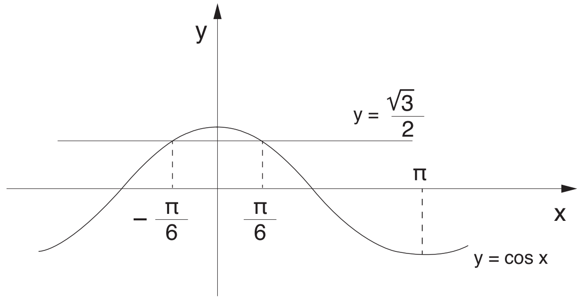


figura 2.19

2.37 Risolvere le equazioni

$$(a) \quad \cos x = -\frac{1}{2} \qquad (b) \quad \cos x = 1$$

[(a) $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$; (b) $x = 2k\pi$]

Facciamo riferimento alla figura 2.20 per l'equazione tg $x = a$, con $a \in \mathbb{R}$.

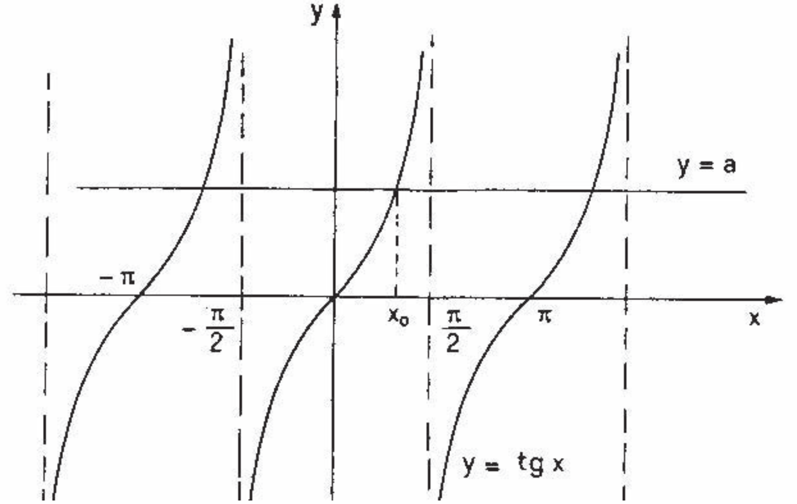


figura 2.20

Otteniamo le soluzioni seguenti

$$\operatorname{tg} x = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{l} \text{scelto } x_0 \in (-\pi/2, \pi/2) \text{ tale che} \\ tg\, x_0 = a, \text{ le soluzioni sono} \\ x = x_0 + k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

2.38 Risolvere le equazioni

$$(a) \quad \operatorname{tg} x = 0 \qquad (b) \quad \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 1$$

[(a) $x = k\pi$; (b) $x = \pi/6 + k\pi$]

2.39 Risolvere le equazioni

$$(a) \quad 1 - \operatorname{tg} x = 0 \qquad (b) \quad \operatorname{sen} x + \cos x = 0$$

[(a) $x = \pi/4 + k\pi$; (b) l'equazione data equivale a $\operatorname{tg} x = -1$, che ha per soluzioni $x = -\pi/4 + k\pi$]

Negli esercizi che seguono proponiamo la risoluzione di alcune equazioni trigonometriche più generali.

2.40 Risolvere le equazioni trigonometriche

$$(a) \quad \operatorname{sen}^2 x = 1 \qquad (b) \quad 2\cos^2 x - 1 = 0$$

[(a) $x = \pi/2 + k\pi$; (b) $x = \pm\pi/4 + 2k\pi$ e inoltre $x = \pm(3/4)\pi + 2k\pi$, che si può anche scrivere: $x = \pi/4 + k\pi$]

2.41 Risolvere le equazioni

$$(a) \quad \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \quad (b) \quad 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

[(a) Attenzione a non semplificare entrambi i membri per sen x, perchè in tal caso si perdono le soluzioni corrispondenti a sen $x = 0$. Le soluzioni dell'equazione data sono $x = k\pi$ e $x = \pi/2 + 2k\pi$; (b) si tratta di una equazione di secondo grado in cos x. Risolvendo rispetto a cos x si trova cos $x = 1$ oppure cos $x = 1/2$. Perciò le soluzioni dell'equazione data sono $x = 2k\pi$ e $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$]

2.42 Risolvere le equazioni trigonometriche

$$(a) \quad \cos^2 x + 3\operatorname{sen} x - 3 = 0 \qquad (b) \quad 2\operatorname{sen}^2 x + 7\cos x = 8$$

[(a) Ponendo $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ si ottiene un' equazione di secondo grado in sen x che, risolta, dà sen $x = 1$ oppure sen $x = 2$; sen $x = 1$ ha per soluzioni $x = \pi/2 + 2k\pi$, che sono anche le soluzioni dell'equazione data, perchè sen $x = 2$ non è verificata da alcun valore reale di x; (b) ponendo $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$,si verifica che non ci sono soluzioni]

2.43 Risolvere le equazioni trigonometriche

$$(a) \quad 2\text{sen}^2 x = \cos x + 1 \qquad (b) \quad \text{sen}^2 x = \cos x - 1$$

$[(a)\ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi;\ (b)\ 2k\pi]$

2.44 Risolvere le equazioni

$$(a) \quad \text{tg}^2 x - \text{tg}\, x = 0 \qquad (b) \quad \text{tg}\, x + \text{cotg}\, x + 2 = 0$$

$[(a)\ k\pi,\ \pi/4 + k\pi;\ (b)\ -\pi/4 + k\pi]$

2.45 Risolvere le equazioni trigonometriche

$$(a) \quad \text{tg}\, x + \text{sen}\, x = 1 + \cos x \qquad (b) \quad 1 + \text{sen}^2 x = \text{tg}^2 x + \cos^2 x$$

$[(a)\ \pi + 2k\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\pi;\ (b)\ k\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\pi/2]$

2.46 Risolvere le equazioni trigonometriche

$$(a) \quad 2\text{sen}^2 x = 4\cos^2 x - 1 \qquad (b) \quad \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 2$$

[(a) $\pm\pi/4 + k\pi$; (b) la risposta è immediata senza alcun conto: nessuna soluzione]

2.47 Risolvere le equazioni

$$(a) \quad \text{sen}\, 2x - \cos x = 0 \qquad (b) \quad \cos 2x - \text{sen}\, x = 0$$

[Utilizzare le formule di duplicazione]

2.48 Determinare le soluzioni delle equazioni

$$(a) \quad \text{sen}\, x \cdot \cos x \cdot \text{tg}\, x = 1 \qquad (b) \quad 1 - 4\text{sen}\, x \cos x = 0$$

[(a) Nessuna soluzione, dato che $\text{sen}^2 x = 1$ solo se $\cos x = 0$; (b) con la sostituzione $2\text{sen}\, x \cos x = \text{sen}\, 2x$ si trovano le soluzioni $x = \pi/12 + k\pi$, $x = (5/12)\pi + k\pi$]

2.49 Risolvere le equazioni trigonometriche

$$(a) \quad 2\cos^2 x + \text{sen}^2\, 2x = 2 \qquad (b) \quad 4\cos x + 2\cos 2x = 1$$

$[(a)\ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k\pi;\ (b)\ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ]$

2.50 Risolvere le equazioni

$$(a) \quad \text{sen}\, x + \cos x = 1 \qquad (b) \quad \text{sen}\, x - \cos x = 1$$

[Conviene scrivere le equazioni date in funzione di $t = \text{tg}\,(x/2)$,ponendo

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Nell'effettuare tale sostituzione occorre verificare se si scartano eventuali soluzioni corrispondenti al caso in cui tg $(x/2)$ non è definita, cioè $x/2 = \pi/2 + k\pi$, cioè ancora $x = \pi + 2k\pi$.
(a) $x = \pi + 2k\pi$ non è soluzione dell'equazione data. Scrivendo l'equazione corrispondente in funzione di $t = \operatorname{tg}(x/2)$, si trova $2t^2 - 2t = 0$ che ammette le soluzioni $t = 0$ e $t = 1$. Essendo $t = \operatorname{tg}(x/2)$, risulta infine $x = 2k\pi$ e $x = \pi/2 + 2k\pi$; (b) con la sostituzione tg $(x/2) = t$ si trova $t = 1$, da cui $x = \pi/2 + 2k\pi$. Inoltre l'equazione data ammette anche le soluzioni $\pi + 2k\pi$]

2.51 Risolvere le seguenti equazioni trigonometriche con il metodo indicato nell'esercizio precedente

$$(a) \quad \sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x = 1 \qquad (b) \quad \operatorname{sen} x + 2\cos x - 1 = 0$$

[(a) $2k\pi$, $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$; (b) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$]

2.52 Risolvere le equazioni

$$(a) \quad \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \qquad (b) \quad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0$$

[Utilizzare le formule di prostaferesi (a) $\pi/4 + k\pi/2$, $\pm(2/3)\pi + 2k\pi$; (b) $k\pi$, $\pm\pi/2 + 2k\pi$, $\pm(2/3)\pi + 2k\pi$]

2.53 Risolvere le equazioni trigonometriche

$$(a) \quad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = 0 \qquad (b) \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 3x - 2\cos 2x$$

[(a) $k\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + k\pi$; (b) $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$]

2.54 Risolvere le equazioni trigonometriche

$$(a) \quad 4\operatorname{sen}^2 x - 8\cos x + 1 = 0 \qquad (b) \quad 3\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$$

$$(c) \quad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (d) \quad \operatorname{tg}\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) = 2 + 3\operatorname{tg} x$$

[(a) $\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; (b) $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$; (c) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$; (d) $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$]

2.55 Determinare le soluzioni delle equazioni

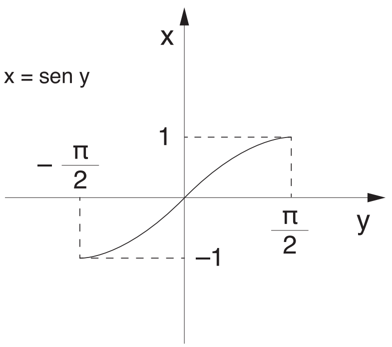
$$(a) \quad \operatorname{sen}(\cos x) = 0 \qquad (b) \quad \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) = 1$$

[(a) Ponendo cos $x = t$, l'equazione sen $t = 0$ ha per soluzioni $t = k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$. Se $k \neq 0$, l'equazione $t = \cos x = k\pi$ non ha soluzioni, perchè i valori della funzione cos x sono nell'intervallo $[-1, 1]$, mentre $k\pi$ è esterno all'intervallo $[-3.3]$. Se $k = 0$, l'equazione cos $x = 0$ ha come soluzioni $x = \pi/2 + k\pi$, che sono quindi le soluzioni dell'equazione data; (b) nessuna soluzione]

2F. Le funzioni trigonometriche inverse

Le principali funzioni trigonometriche inverse sono l'arcoseno, l'arcocoseno e l'arcotangente.

La funzione *arcoseno* è definita come funzione inversa della funzione seno, se quest'ultima è ristretta all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. In altre parole, si considera la funzione $x = \operatorname{sen} y$, con $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ (si veda il grafico in figura 2.21) e si scambia il ruolo delle variabili x,y, assumendo x come variabile indipendente, ottenendo la funzione rappresentata in figura 2.22, chiamata *funzione arcoseno*, e indicata con il simbolo $y = \operatorname{arcsen} x$.



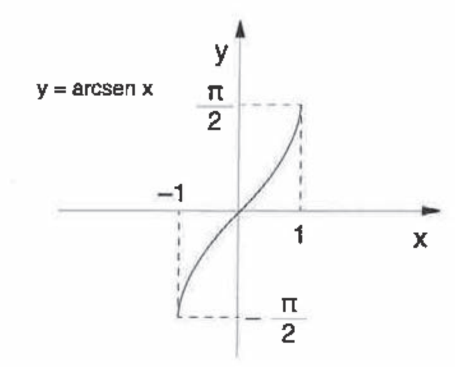


figura 2.21 e figura 2.22

La funzione arcoseno è quindi definita nell'intervallo $[-1, 1]$. La relazione fondamentale che intercorre tra la funzione seno e la funzione arcoseno è la seguente: se $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, allora

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{sen} y.$$

Si comprende facilmente il motivo di restringere a priori la funzione seno nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, utilizzando il concetto di *funzione inversa* (paragrafo 1B). Infatti, la funzione seno stabilisce una corrispondenza tra l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e l'intervallo $[-1, 1]$; tale corrispondenza non è però biunivoca (ad esempio, risulta $\operatorname{sen}(k\pi) = 0$, cioè tutti i numeri reali che sono multipli interi di π hanno come immagine, tramite la funzione seno, il numero $0 \in [-1, 1]$). La stessa corrispondenza, ristretta al dominio $[-\pi/2, \pi/2]$, risulta invece biunivoca. In altre parole, la funzione seno (che non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$), come corrispondenza tra gli insiemi $[-\pi/2, \pi/2]$ e $[-1, 1]$ è invertibile e la sua funzione inversa è chiamata arcoseno.

2.56 Utilizzando la definizione della funzione arcoseno, calcolare i valori:

(a) $\quad \text{arcsen}\, 1 \qquad (b) \quad \text{arcsen}\, \dfrac{1}{2}$

(c) $\quad \text{arcsen}\,(-1) \qquad (d) \quad \text{arcsen}\, 2$

[(a) Ricordando la relazione fondamentale fra la funzione seno e la funzione arcoseno, risulta $y = \text{arcsen}\, 1$ se e solo se $\text{sen}\, y = 1$, con $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, l'unico valore di y in tale intervallo, il cui seno vale 1, è $y = \pi/2$. Perciò arcsen $1 = \pi/2$.
(b) Risulta $y = \text{arcsen}\,(1/2)$ se e solo se $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $\text{sen}\, y = 1/2$. L'unico valore di y dell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ il cui seno vale $1/2$ è $y = \pi/6$. Perciò $\text{arcsen}\,(1/2) = \pi/6$.
(c) Risulta $y = \text{arcsen}\,(-1)$ se e solo se $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $\text{sen}\, y = -1$. Quindi $y = -\pi/2$ e pertanto $\text{arcsen}\,(-1) = -\pi/2$.
(d) Occorrerebbe determinare un numero reale y tale che $y = \text{arcsen}\, 2$, cioè $\text{sen}\, y = 2$, che evidentemente non è verificata da alcun numero reale y. Perciò arcsen 2 non esiste. Si ricordi che, in generale, la funzione $y = \text{arcsen}\, x$ è definita solo per $x \in [-1, 1]$ (pertanto $x = 2$ non è nell'insieme di definizione della funzione arcoseno)]

2.57 Calcolare i valori:

$(a) \quad \text{arcsen}\,(-\dfrac{1}{2}) \qquad (b) \quad \text{arcsen}\, \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$(c) \quad \text{arcsen}\, \pi \qquad (d) \quad \text{arcsen}\,(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

[(a) $-\pi/6$; (b) $\pi/3$; (c) non è definito; (d) $-\pi/4$]

La funzione *arcocoseno* è definita come funzione inversa della funzione coseno, quando quest'ultima sia ristretta all'intervallo $[0, \pi]$. Cioè, si considera la funzione $x = \cos y$, con $y \in [0, \pi]$ (come in figura 2.23) e si scambia il ruolo delle variabili x, y, ottenendo la funzione della variabile indipendente x rappresentata in figura 2.24, chiamata *funzione arcocoseno*, e indicata con il simbolo $y = \arccos x$.

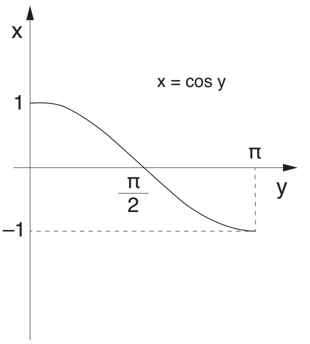


figura 2.23

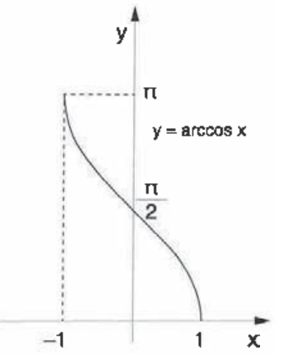


figura 2.24

La funzione arcocoseno è quindi definita nell'intervallo $[-1, 1]$. La relazione fondamentale che intercorre tra la funzione coseno e la funzione arcocoseno è la seguente: se $x \in [-1, 1]$ e $y \in [0, \pi]$, allora

$$y = \arccos x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \cos y.$$

Con il linguaggio delle funzioni inverse (paragrafo 1B), la funzione coseno (che non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$), come corrispondenza tra gli insiemi $[0, \pi]$ e $[-1, 1]$ è invertibile e la sua funzione inversa è chiamata arcocoseno.

2.58 Utilizzando la definizione della funzione arcocoseno, calcolare i valori:

(a) $\arccos 0$ $\quad$ (b) $\arccos 1$

(c) $\arccos \dfrac{1}{2}$ $\quad$ (d) $\arccos \dfrac{3}{2}$

[(a) In base alla relazione fondamentale che intercorre fra la funzione coseno e la funzione arcocoseno, risulta $y = \arccos 0$ se e solo se $\cos y = 0$, con $y \in [0, \pi]$. L'unico valore di y in tale intervallo, il cui coseno vale 0, è $y = \pi/2$. Perciò $\arccos 0 = \pi/2$.
(b) Risulta $y = \arccos 1$ se e soltanto se $\cos y = 1$, con $y \in [0, \pi]$. L'unico valore di y dell'intervallo $[0, \pi]$ il cui coseno vale 1 è $y = 0$. Quindi $\arccos 1 = 0$.
(c) Risulta $y = \arccos (1/2)$ se e solo se $y \in [0, \pi]$ e $\cos\ y = 1/2$. Quindi $y = \pi/3$ e $\arccos (1/2) = \pi/3$.
(d) La funzione arcocoseno è definita nell'intervallo $[-1, 1]$ e non è quindi calcolabile in corrispondenza di $x = 3/2$]

2.59 Calcolare i valori:

(a) $\arccos (-\dfrac{1}{2})$ $\quad$ (b) $\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\arccos \pi$ $\quad$ (d) $\arccos (-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

[(a) $\frac{2}{3}\pi$; (b) $\frac{\pi}{6}$; (c) non è definito; (d) $\frac{3}{4}\pi$]

La funzione *arcotangente* è, probabilmente la più importante tra le funzioni trigonometriche inverse. Essa è definita come la funzione inversa della funzione tangente, quando quest'ultima sia ristretta all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. In altre parole, si considera la funzione $x = \operatorname{tg} y$, con $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ e si scambia il ruolo delle variabili x, y, ottenendo la funzione della variabile indipendente x rappresentata in figura 2.25, chiamata *funzione arcotangente*, e indicata con il simbolo

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

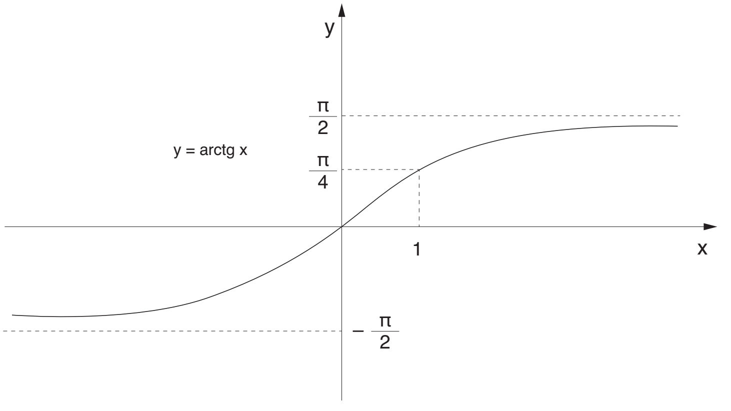


figura 2.25

La funzione arcotangente è quindi definita su tutto l'asse reale ed assume valori nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. La relazione fondamentale che intercorre tra la funzione tangente e la funzione arcotangente è la seguente: se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, allora

$$y = \operatorname{arctg} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \operatorname{tg} y.$$

In termini di funzioni inverse (paragrafo 1B), la funzione tangente (che non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$), come corrispondenza tra gli insiemi $(-\pi/2, \pi/2)$ e $\mathbb{R}$ è invertibile e la sua funzione inversa è chiamata arcotangente.

2.60 Utilizzando la definizione della funzione arcotangente, calcolare i valori:

(a) $\operatorname{arctg} 1$ $\quad$ (b) $\operatorname{arctg}(-1)$

(c) $\operatorname{arctg} 0$ $\quad$ (d) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$

[(a) Ricordando la relazione fondamentale che intercorre fra la funzione tangente e la funzione arcotangente, risulta $y = \operatorname{arctg} 1$ se e solo se $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $\operatorname{tg} y = 1$. L'unico valore di y in tale intervallo la cui tangente vale 1 è $y = \pi/4$; perciò $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$.
(b) Risulta $y = \operatorname{arctg}(-1)$ se e soltanto se $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $\operatorname{tg} y = -1$. Si ottiene $y = -\pi/4$; pertanto $\operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$.
(c) 0; (d) $\pi/3$]

2.61 Calcolare i valori:

(a) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ $\quad$ (b) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(c) $\operatorname{arctg}(-\dfrac{\sqrt{3}}{3})$ $\quad$ (d) $\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})$

[(a) $-\pi/3$; (b) $\pi/6$; (c) $-\pi/6$; (d) occorre utilizzare il risultato dell'esercizio 2.21; la risposta è $\pi/12$]

2.62 Verificare che arcoseno e arcotangente sono *funzioni dispari*, cioè che soddisfano le proprietà:

$$(a) \quad \text{arcsen}\,(-x) = -\text{arcsen}\,x \qquad \forall\, x \in [-1,1]$$

$$(b) \quad \text{arctg}\,(-x) = -\text{arctg}\,x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

[Proviamo (a) (la verifica di (b) è analoga): poniamo $y_1 = \text{arcsen}\,x$, $y_2 = \text{arcsen}\,(-x)$; occorre dimostrare che $y_2 = -y_1$. A tale scopo risulta $y_1, y_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$, $x = \text{sen}\,y_1$ e inoltre $-x = \text{sen}\,y_2$; quindi $x = -\text{sen}\,y_2 = \text{sen}\,(-y_2)$. Pertanto $\text{sen}\,y_1 = \text{sen}\,(-y_2)$ con y_1 e $-y_2$ nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Dato che, in tale intervallo, la funzione seno è invertibile, risulta infine $y_1 = -y_2$]

2.63 Calcolare i valori delle seguenti composizioni di funzioni trigonometriche:

$$(a) \quad \text{arcsen}\,(\text{sen}\,\pi) \qquad (b) \quad \text{arcsen}\,(\cos 0)$$

$$(c) \quad \arccos\,(\text{sen}\,0) \qquad (d) \quad \arccos\,(\cos\pi)$$

$$(e) \quad \text{arctg}\,(\cos\pi) \qquad (f) \quad \text{arctg}\,(\text{sen}\,\pi)$$

[(a) arcsen (sen π)= arcsen $0 = 0$; (b) $\pi/2$; (c) $-\pi/2$; (d) π; (e) $-\pi/4$; (f) 0]

2.64 Calcolare

$$(a) \quad \text{arcsen}\,(\text{sen}\,(\tfrac{21}{10}\pi))$$

$$(b) \quad \text{arctg}\,(\text{tg}\,(\tfrac{23}{7}\pi))$$

[(a) Ponendo $y = $ arcsen sen$(21/10)\pi$ deve essere $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ e sen $y = \text{sen}\,(21/10)\pi$. Risulta anche $\frac{21}{10}\pi = \frac{1}{10}\pi + 2\pi$, da cui $\text{sen}\,(21/10)\pi = \text{sen}\,(1/10)\pi$. Dato che $\pi/10 \in [-\pi/2, \pi/2]$ e dato che la funzione seno è invertibile in tale intervallo, dalla relazione $\text{sen}\,y = \text{sen}\,(\pi/10)$ segue $y = \pi/10$. Risulta quindi $\text{arcsen}\,(\text{sen}\,(21/10)\pi) = \pi/10$. (b) Con la scomposizione (si ricordi che la funzione tangente è periodica di periodo π):

$$\frac{23}{7}\pi = 3\pi + \frac{2}{7}\pi$$

si trova il risultato finale $(2/7)\pi$]

2.65 Verificare le identità:

$$(a) \quad \text{arcsen}\,x = \text{arctg}\,\tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall\, x \in (-1,1)$$

$$(b) \quad \arccos x = \text{arctg}\,\tfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad \forall\, x \in (0,1]$$

[Proviamo (a) (la verifica di (b) è analoga): poniamo $y = \operatorname{arcsen} x$. Risulta $x = \operatorname{sen} y$ e inoltre, dato che $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, risulta anche $\cos y > 0$ e quindi

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ma allora $\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \operatorname{arctg} \operatorname{tg} y = y$, dato che, per $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, la funzione tangente è inveritibile. Ricordando il significato di y, l'identità risulta provata]

Capitolo 3

DISEQUAZIONI

3A. Disequazioni di primo e di secondo grado

Se n è un numero naturale; un polinomio $p(x)$ di grado n è un'espressione del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

dove x è la variabile (che supponiamo reale) e a_k, per $k = 0, 1, ..., n$, sono i *coefficienti* (che supponiamo reali), con $a_n \neq 0$.

Una *disequazione algebrica* è una espressione di uno dei seguenti quattro tipi:

$$p(x) > 0, \quad p(x) \geq 0, \quad p(x) < 0, \quad p(x) \leq 0.$$

Notiamo che, pur di cambiare il segno a tutti i coefficienti del polinomio $p(x)$ (il che equivale a considerare il polinomio $-p(x)$), ci si può sempre ricondurre ad una disequazione del tipo $p(x) > 0$, oppure $p(x) \geq 0$.

Allo scopo di elencare alcuni metodi risolutivi per le disequazioni algebriche, andiamo per ordine in base al grado del polinomio.

Consideriamo una disequazione algebrica di *primo grado*, ad esempio del tipo

$$ax + b > 0, \qquad \text{con} \qquad a \neq 0.$$

Dopo aver scritto la disequazione nella forma equivalente: $ax > -b$, si divide per il coefficiente a. Occorre tener conto del segno di a, perché, *dividendo entrambi i membri di una disequazione per una quantità $a \neq 0$, il verso della disequazione rimane invariato o cambia a seconda che a sia positivo o negativo.* Nel nostro caso si ottiene:

$$\begin{array}{llcccc} a>0: & ax+b>0 & \iff & ax>-b & \iff & x>-b/a; \\ a<0: & ax+b>0 & \iff & ax>-b & \iff & x<-b/a. \end{array}$$

3.1 Risolvere le seguenti disequazioni di primo grado

$(a)\quad x+1<0 \qquad (b)\quad 1-x>0$

$(c)\quad 4x+8>0 \qquad (d)\quad 2x-6\geq 0$

[(a) $x<-1$; (b) $x<1$; (c) $x>-2$; (d) $x\geq 3$]

3.2 Risolvere le seguenti disequazioni di primo grado:

$(a)\quad x+5\geq 0 \qquad (b)\quad 3x+7>0$

$(c)\quad 5-x>0 \qquad (d)\quad -x-7>0$

[(a) $x\geq -5$; (b) $x>-\frac{7}{3}$; (c) $x<5$; (d) $x<-7$]

3.3 Risolvere le seguenti disequazioni di primo grado:

$(a)\quad 2x+1\geq 0 \qquad (b)\quad 2x+1<0$

$(c)\quad -x>0 \qquad (d)\quad 2x-4\leq 0$

[(a) $x\geq -\frac{1}{2}$; (b) $x<-\frac{1}{2}$; (c) $x<0$; (d) $x\leq 2$]

3.4 Risolvere le seguenti disequazioni

$(a)\quad 3x+4-x+1<x-6$

$(b)\quad \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{4}x\geq\dfrac{5}{4}x+2$

$(c)\quad x-7-2x<7-x$

$(d)\quad x+7+2x\leq 7-x$

[(a) $x<-11$; (b) dopo aver semplificato, la disequazione data si scrive $1/3\geq 2$ che è una relazione falsa, indipendentemente da x; quindi (b) non ha alcuna soluzione; (c) la disequazione data è equivalente alla scrittura $-7<7$, che è vera indipendentemente da x; quindi tutti i numeri reali x risolvono (c); (d) $x\leq 0$]

Una disequazione (algebrica) di *secondo grado* è ad esempio, del tipo

$$ax^2+bx+c>0, \qquad \text{con} \quad a\neq 0.$$

Per risolvere tale disequazione è opportuno considerare il *discriminante*, o *delta*, definito da $\Delta=b^2-4ac$, e distinguere i casi in cui $\Delta>0$, $\Delta=0$, $\Delta<0$.

1° caso: $\Delta > 0$. Se il Δ è positivo, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ammette due radici reali distinte x_1, x_2 definite da

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Verifichiamo che vale la scomposizione

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

infatti

$$\begin{aligned}
a(x - x_1)(x - x_2) &= a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\
&= \frac{1}{4a}\left[(2ax + b) + \sqrt{b^2 - 4ac}\right]\left[(2ax + b) - \sqrt{b^2 - 4ac}\right] \\
&= \frac{1}{4a}\left[(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)\right] = \frac{1}{4a}\left[4a^2x^2 + 4abx + 4ac\right] \\
&= ax^2 + bx + c.
\end{aligned}$$

Perciò

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a(x - x_1)(x - x_2) > 0\,.$$

Se $a > 0$, deve risultare $(x-x_1)(x-x_2) > 0$ e ciò è possibile se $(x-x_1)$, $(x-x_2)$ hanno lo stesso segno, cio`e se sono entrambi positivi o entrambi negativi. Le quantità $(x-x_1)$ e $(x-x_2)$ sono positive se $x > x_1$ e $x > x_2$; dato che $x_2 > x_1$, cio è verificato se $x > x_2$. Analogamente $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono entrambi negativi se $x < x_1$.

Se $a < 0$, deve essere $(x - x_1)(x - x_2) < 0$; ciò è equivalente a dire che $(x - x_1)$, $(x - x_2)$ hanno segno discorde. Essendo $x_2 > x_1$, non è possibile che $x - x_2$ sia positivo e $x - x_1$ negativo. Quindi deve essere $x - x_2 < 0$ (cioè $x < x_2$) e $x - x_1 > 0$ (cioè $x > x_1$). Quindi in questo caso le soluzioni sono tutti i numeri x compresi tra x_1 e x_2.

Se siamo interessati a risolvere la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$, possiamo ricondurci al caso precedente cambiando i segni di tutti i coefficienti. Naturalmente le radici x_1, x_2 rimangono invariate, mentre occorre ricordare che è cambiato il segno di a. Le soluzioni della disequazione cambiano in corrispondenza.

Riassumiamo di seguito il caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} ax^2 + bx + c > 0 \\ a > 0, \quad \Delta > 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x < x_1 \quad \text{o} \quad x > x_2\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c>0 \\ a<0, \quad \Delta>0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_1<x<x_2\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c<0 \\ a>0, \quad \Delta>0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_1<x<x_2\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c<0 \\ a<0, \quad \Delta>0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x<x_1 \quad \text{o} \quad x>x_2\,.$$

Risultati analoghi valgono per le disequazioni $ax^2+bx+c \geq 0$, $ax^2+bx+c \leq 0$.

2° caso: $\Delta = 0$. Se il discriminante è nullo, la equazione $ax^2+bx+c=0$ ammette una sola radice reale o, come si dice anche, due radici coincidenti $x_1 = x_2 = -b/2a$. Come in precedenza risulta

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = a(x-x_1)^2.$$

Se ne deduce che, se $a>0$, allora $ax^2+bx+c>0$ per ogni $x \neq x_1$; mentre, se $a<0$, allora $ax^2+bx+c<0$ per ogni $x \neq x_1$.

Riassumiamo il caso $\Delta = b^2-4ac = 0$ nel seguente schema:

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c>0 \\ a>0, \quad \Delta=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x \neq x_1 (= x_2);$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c>0 \\ a<0, \quad \Delta=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c\geq 0 \\ a>0, \quad \Delta=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ è soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c\geq 0 \\ a<0, \quad \Delta=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = x_1 (= x_2);$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c<0 \\ a>0, \quad \Delta=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c<0 \\ a<0, \quad \Delta=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x \neq x_1 (= x_2);$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c\le 0 \\ a>0, \quad \Delta=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x=x_1(=x_2);$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c\le 0 \\ a<0, \quad \Delta=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \forall\, x\in\mathbb{R} \text{ è soluzione;}$$

3° caso: $\Delta<0$. Se il discriminante Δ è negativo l'equazione $ax^2+bx+c=0$ non ammette soluzioni reali. Non è possibile effettuare la scomposizione del polinomio ax^2+bx+c come effettuato nel caso $\Delta>0$; però continua a valere l'ultima parte della scomposizione che qui riprendiamo:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \frac{1}{4a}[4a^2x^2+4abx+4ac] \\ &= \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2-(b^2-4ac)] \end{aligned}$$

Dato che stiamo supponendo che $b^2-4ac<0$, nella parentesi quadra appare una quantità sicuramente positiva. Perciò il segno di ax^2+bx+c è identico al segno del coefficiente a. Si ottiene il seguente schema:

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c>0 \\ a>0, \quad \Delta<0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \forall\, x\in\mathbb{R} \text{ è soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c>0 \\ a<0, \quad \Delta<0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c<0 \\ a>0, \quad \Delta<0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c<0 \\ a<0, \quad \Delta<0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \forall\, x\in\mathbb{R} \text{ è soluzione.}$$

Risultati analoghi valgono per le disequazioni $ax^2+bx+c\ge 0$, $ax^2+bx+c\le 0$.

3.5 Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado:

$(a)\quad x^2-3x+2<0 \qquad (b)\quad 1-x^2\le 0$

$(c)\quad 2x^2-3x+1\ge 0 \qquad (d)\quad x^2+5x>0$

[(a) $1<x<2$; (b) $x\le -1$ e $x\ge 1$; (c) $x\le 1/2$ e $x\ge 1$; (d) $x<-5$ e $x>0$]

3.6 Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado:

$(a)\quad 16x^2+8x+1>0 \qquad (b)\quad 16x^2+8x+1<0$

$(c)\quad x^2\le 0 \qquad (d)\quad -9x^2+12x-4\ge 0$

[(a) $x\neq -1/4$; (b) nessuna soluzione; (c) $x=0$; (d) $x=2/3$]

3.7 Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado:

$(a)\quad x^2-x+1<0 \qquad (b)\quad -2x^2+3x-2<0$

$(c)\quad 3x^2-7x+5\ge 0 \qquad (d)\quad -1+5x-7x^2\ge 0$

[(a) nessuna soluzione; (b) $\forall\, x\in\mathbb{R}$; (c) $\forall\, x\in\mathbb{R}$; (d) nessuna soluzione]

3.8 Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado:

$(a)\quad 16x^2+24x+9\le 0 \qquad (b)\quad 5+4x-3x^2>0$

$(c)\quad 5+4x+3x^2>0 \qquad (d)\quad (x+5)(6-x)\le 0$

[(a) $x=-3/4$; (b) $(2-\sqrt{19})/3<x<(2+\sqrt{19})/3$; (c) $\forall\, x\in\mathbb{R}$; (d) $x\le -5$ e $x\ge 6$]

3.9 Risolvere le seguenti disequazioni

$(a)\quad (x-2)(x+2)+(x+1)^2-1<0$

$(b)\quad (x-2)(x+2)-(x+1)^2-1>0$

$(c)\quad (x+1)^2+(x-1)^2\le 0$

$(d)\quad (x+1)^2\le (x-1)^2$

[(a) $-2<x<1$; (b) si riduce ad una disequazione di primo grado le cui soluzioni sono $x<-3$; (c) non ha soluzioni; (d) si tratta di una disequazione di primo grado con soluzioni $x\le 0$]

3B. Disequazioni algebriche di grado superiore al secondo

Non esistono metodi risolutivi per equazioni o disequazioni algebriche di grado n comunque elevato. In questo paragrafo esponiamo alcuni metodi risolutivi, che sono validi nell'ambito delle condizioni specificate. Una disequazione di quarto grado del tipo seguente è detta *disequazione biquadratica*:

$$ax^4+bx^2+c>0.$$

Si risolve tale disequazione in due passi, con la sostituzione $t=x^2$. Si risolve preliminarmente la disequazione $at^2+bt+c>0$; supponiamo ad esempio che sia $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, $a > 0$ per cui si trovano limitazioni del tipo $t < t_1$, $t > t_2$. Ci si è ricondotti a studiare le due disequazioni di secondo grado $x^2 < t_1$, $x^2 > t_2$. Di seguito sono proposti alcuni esempi.

3.10 Risolvere la seguente disequazione biquadratica

$$4x^4 - 17x^2 + 4 > 0$$

[Ponendo $x^2 = t$, si risolve preliminarmente la disequazione $4t^2 - 17t + 4 > 0$. Risulta $\Delta = 289 - 64 = 225 > 0$. Le due radici dell'equazione $4t^2 - 17t + 4 = 0$ sono $t_1 = 1/4$, $t_2 = 4$; perciò la disequazione nell'incognita t ha soluzioni: $t < 1/4$ e $t > 4$. In corrispondenza otteniamo le due disequazioni di secondo grado $x^2 < 1/4$, $x^2 > 4$. La prima delle due disequazioni ha per soluzioni $-1/2 < x < 1/2$; la seconda $x < -2$, $x > 2$. In definitiva, la disequazione biquadratica ha soluzioni: $x < -2$, $-1/2 < x < 1/2$, $x > 2$]

3.11 Risolvere la seguente disequazione biquadratica

$$9x^4 + 4x^2 - 5 > 0$$

[Poniamo $x^2 = t$; risolviamo preliminarmente la disequazione $9t^2 + 4t - 5 > 0$ ottenendo $t < -1$ e $t > 5/9$. In termini della incognita x abbiamo ottenuto le due disequazioni $x^2 < -1$, $x^2 > 5/9$. La prima delle due non ha alcuna soluzione, mentre per la seconda otteniamo $x < -\sqrt{5}/3$, $x > \sqrt{5}/3$. Riassumendo, le soluzioni della disequazione data sono $x < -\sqrt{5}/3$ e $x > \sqrt{5}/3$]

3.12 Risolvere la seguente disequazione biquadratica

$$x^4 - 2x^2 - 8 \leq 0$$

[Ponendo $x^2 = t$ otteniamo la disequazione $t^2 - 2t - 8 \leq 0$, che ha come soluzioni $-2 \leq t \leq 4$. Quindi devono valere contemporaneamente le due disequazioni $-2 \leq x^2$, $x^2 \leq 4$. La prima delle due è soddisfatta da ogni $x \in \mathbb{R}$; la seconda è soddisfatta da $-2 \leq x \leq 2$. L'intersezione dei due insiemi è costituita dall'intervallo $-2 \leq x \leq 2$, che rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione biquadratica data]

3.13 Risolvere le seguenti disequazioni biquadratiche

$$(a) \quad x^4 - 3x^2 \geq 0 \qquad\qquad (b) \quad x^4 + 8x^2 + 15 \leq 0$$

[(a) $x \leq -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x \geq \sqrt{3}$; (b) nessuna soluzione]

3.14 Risolvere le seguenti disequazioni biquadratiche

$$(a) \quad x^4 - x^2 + 1 > 0 \qquad\qquad (b) \quad x^4 + 2x^2 > 0$$

[(a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$; (b) $x \neq 0$]

Un altro tipo di equazioni o disequazioni per cui è noto un semplice metodo risolutivo è quello delle equazioni o disequazioni *reciproche* di quarto grado, che sono relative ad un polinomio $p(x)$ della forma

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a,$$

ed in tal caso si parla di *polinomio reciproco di prima specie*, oppure

$$p(x) = ax^4 + bx^3 - bx - a,$$

ed in questo caso si dice che $p(x)$ è un *polinomio reciproco di seconda specie.*

3.15 Sia $p(x)$ un polinomio reciproco di prima o di seconda specie. Sia x_0 una radice del polinomio, cioè $p(x_0) = 0$, con $x_0 \neq 0$. Verificare che anche $1/x_0$ è radice del polinomio dato.

[Se ad esempio $p(x)$ è un polinomio reciproco di prima specie e di quarto grado, allora, per ogni $x \neq 0$ risulta $p(x)/x^4 = p(1/x)$. Perciò, se $p(x_0) = 0$ allora anche $p(1/x_0) = 0$. Se $p(x)$ è un polinomio reciproco di seconda specie e di quarto grado risulta $p(x)/x^4 = -p(1/x)$ per ogni $x \neq 0$]

Per risolvere una disequazione reciproca di prima specie di quarto grado del tipo

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a > 0,$$

per $x \neq 0$, si dividono entrambi i membri per x^2; con ciò non si altera il verso della disuguaglianza. Si ottiene la disequazione equivalente

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c > 0.$$

Ponendo $t = x + 1/x$, risulta

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2.$$

Effettuando le sostituzioni, si trova la disequazione di secondo grado nell'incognita t

$$at^2 + bt + c - 2a = 0.$$

Ricordando che $t = x + 1/x$, occorre poi risalire ai valori x.

3.16 Risolvere la seguente disequazione reciproca di prima specie

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 > 0.$$

[Si verifica direttamente che $x = 0$ è soluzione. Assumendo $x \neq 0$ e dividendo per x^2 si trova la disequazione equivalente

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 > 0.$$

Ponendo $t = x + 1/x$, risulta $x^2 + 1/x^2 = t^2 - 2$, da cui $2t^2 - 3t > 0$. È una disequazione di secondo grado che ha per soluzioni $t < 0$ e $t > 3/2$. In corrispondenza abbiamo le due disequazioni:

$$x + \frac{1}{x} < 0, \qquad\qquad x + \frac{1}{x} > \frac{3}{2}.$$

Moltiplicando entrambi i membri per x, e tenendo conto del segno di x, otteniamo i quattro casi:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 1 < 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 1 > \dfrac{3}{2}x \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 1 < \dfrac{3}{2}x \, . \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni; il secondo ha come soluzioni ogni $x < 0$; il terzo ha per soluzioni ogni $x > 0$; il quarto non ha soluzioni.
Riassumendo, ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione della disequazione data]

3.17 Risolvere le seguenti disequazioni reciproche di prima specie

(a) $\quad x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \leq 0$

(b) $\quad x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 \geq 0$

[(a) $x = 1$; (b) $x \leq (3 - \sqrt{5})/2$, $x = 1$, $x \geq (3 + \sqrt{5})/2$]

Consideriamo un polinomio reciproco di seconda specie di quarto grado:

$$p(x) = ax^4 + bx^3 - bx - a, \qquad (a \neq 0).$$

Si verifica direttamente che $x = 1$, $x = -1$ sono radici del polinomio, cioè $p(1) = p(-1) = 0$. Sempre direttamente si verifica che vale la scomposizione

$$p(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + a).$$

Perciò, una disequazione reciproca di seconda specie del tipo

$$ax^4 + bx^3 - bx - a > 0,$$

equivale a risolvere separatamente i due sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ ax^2 + bx + a > 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ ax^2 + bx + a < 0. \end{cases}$$

3.18 Risolvere la seguente disequazione reciproca di seconda specie

$$2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 > 0.$$

[Utilizzando la scomposizione

$$2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = (x^2 - 1)(2x^2 - 5x + 2),$$

la disequazione data è equivalente ai due sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 > 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 < 0. \end{cases}$$

Il polinomio $p_1(x) = x^2 - 1$ è positivo se $x < -1$, $x > 1$, ed è negativo altrimenti. Otteniamo i tre sistemi equiva1enti

$$\begin{cases} x < -1 \\ 2x^2 - 5x + 2 > 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 5x + 2 > 0. \end{cases} ; \qquad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 2x^2 - 5x + 2 < 0. \end{cases}$$

Il polinomio $p_2(x) = 2x^2 - 5x + 2$ è positivo se $x < 1/2$, $x > 2$, ed è negativo altrimenti. Ne segue che il primo sistema ha per soluzioni $x < -1$, il secondo $x > 2$, il terzo $1/2 < x < 1$. Perciò, le soluzioni della disequazione iniziale sono: $x < -1$, $1/2 < x < 1$, $x > 2$]

3.19 Risolvere le seguenti disequazioni reciproche di seconda specie

$(a) \quad x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \leq 0$

$(b) \quad 3x^4 + 10x^3 - 10x - 3 \geq 0$

[(a) $-1 \leq x \leq 1$; (b) $x \leq -3$, $-1 \leq x \leq -\dfrac{1}{3}$, $x \geq 1$]

3.20 Risolvere le seguenti disequazioni reciproche

$(a) \quad 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 < 0$

$(b) \quad x^4 - 4x^3 + 4x - 1 < 0$

[(a) $\dfrac{1}{2} < x < 2$; (b) $-1 < x < 2 - \sqrt{3}$, $1 < x < 2 + \sqrt{3}$]

3.21 Risolvere le seguenti disequazioni reciproche

$(a) \quad 4x^4 - 17x^3 + 17x - 4 \geq 0$

$(b) \quad 4x^4 - 17x^3 + 8x^2 - 17x + 4 \geq 0$

[(a) $x \leq -1$, $\dfrac{1}{4} \leq x \leq 1$, $x \geq 4$; (b) $x \leq \dfrac{1}{4}$, $x \geq 4$]

3.22 Risolvere le disequazioni

$(a) \quad x^8 - 7x^4 + 12 > 0$ $\qquad (b) \quad x^6 - 7x^3 + 12 > 0$

$(c) \quad x^8 - 2x^7 - 3x^6 \geq 0$ $\qquad (d) \quad x^{10} - x^6 \geq 0$

[(a) Effettuando la sostituzione $x^4 = t$, si determina il risultato finale: $x < -\sqrt{2}$, $-\sqrt[4]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{3}$, $x > \sqrt{2}$; (b) $x < \sqrt[3]{3}$, $x > \sqrt[3]{4}$; (c) Si metta in evidenza il fattore x^6. Il risultato finale è: $x \leq -1$, $x = 0$, $x \geq 3$; (d) $x \leq -1$, $x = 0$, $x \geq 1$]

3C. Disequazioni razionali. Sistemi di disequazioni

Un'espressione del tipo

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0,$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi, si dice *disequazione razionale.* Risolvere tale disequazione significa determinare quei numeri reali x per cui $p(x)$ e $q(x)$ hanno lo stesso segno; perciò la disequazione data è equivalente ai due *sistemi di disequazioni*:

$$\begin{cases} p(x) > 0 \\ q(x) > 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} p(x) < 0 \\ q(x) < 0. \end{cases}$$

3.23 Risolvere la disequazione razionale

$$\frac{x+1}{x-1} > 0,$$

[Consideriamo i due sistemi:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x+1 < 0 \\ x-1 < 0. \end{cases}$$

Il primo sistema è soddisfatto da $x > 1$, il secondo da $x < -1$. Perciò la disequazione razionale data ha per soluzioni $x < -1$ e $x > 1$]

3.24 Risolvere le disequazioni razionali

(a) $\dfrac{x+5}{x+6} < 0$ $\qquad$ (b) $\dfrac{1-x}{x} > 0$

[(a) $-6 < x < -5$; (b) $0 < x < 1$]

3.25 Risolvere le disequazioni razionali

(a) $\dfrac{3-x}{x+1} \geq 0$ $\qquad$ (b) $\dfrac{7-x}{4-3x} \leq 0$

[(a) La disequazione data è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} 3-x \leq 0 \\ x+1 < 0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha per soluzioni $-1 < x \leq 3$. Tale intervallo è anche l'insieme delle soluzioni della disequazione razionale data, perché il secondo sistema non ammette soluzioni; (b) $4/3 < x \leq 7$]

3.26 Risolvere la disequazione razionale

$$\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3}<0$$

[La disequazione è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2-2x>0 \\ x^2-4x+3<0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x^2-2x<0 \\ x^2-4x+3>0. \end{cases}$$

Consideriamo il primo sistema: la prima disequazione del primo sistema ha per soluzioni $x<0$, $x>2$; mentre la seconda disequazione ha per soluzioni $1<x<3$; i valori di x comuni sono quindi $2<x<3$. Il secondo sistema ha per soluzioni $0<x<1$. Perciò la disequazione data ha per soluzioni $2<x<3$, $0<x<1$]

3.27 Risolvere le disequazioni razionali

$$(a) \quad 2+\frac{1}{x-1}\geq\frac{1}{x+1} \qquad\qquad (b) \quad \frac{1}{x}\geq\frac{1}{2-x}$$

[(a) È conveniente portare tutti gli addendi a primo membro, riducendo le frazioni a comune denominatore. Il risultato è $x<-1$, $x=0$, $x>1$; (b) $0<x\leq 1$, $x>2$]

3.28 Risolvere le disequazioni razionali

$$(a) \quad \frac{3x^2+7x+4}{x^4-2x^2-3}\leq 0 \qquad\qquad (b) \quad \frac{10}{x^2+1}>6-x^2$$

[(a) $-\sqrt{3}<x\leq -4/3$, $-1\leq x<\sqrt{3}$; (b) $x<-2$, $-1<x<1$, $x>2$]

3.29 Risolvere la disequazione razionale

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\geq 0$$

[$0<x\leq 1-(\sqrt{3}/3)$, $1<x\leq 1+(\sqrt{3}/3)$, $x>2$]

3D. Disequazioni con il valore assoluto

Ricordiamo la definizione di *valore assoluto*, indicato con $|x|$, di un numero reale x:

$$|x|=\begin{cases} x & \text{se} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x<0\,. \end{cases}$$

Risulta $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$. Valgono inoltre le proprietà: $|-x| = |x|$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $|x/y| = |x|/|y|$. Altre importanti proprietà sono enunciate nei tre esercizi che seguono.

3.30 Sia $r \geq 0$. Dimostrare che:

$$|x| \leq r \qquad \Longleftrightarrow \qquad -r \leq x \leq r.$$

[Ricordando la definizione di $|x|$, la relazione $|x| \leq r$ equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq r \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x < 0 \\ -x \leq r. \end{cases}$$

Il primo sistema equivale a $0 \leq x \leq r$, mentre il secondo equivale a $-r \leq x < 0$; l'unione dei due intervalli è appunto l'intervallo $-r \leq x \leq r$]

3.31 Sia $r > 0$. Dimostrare che:

$$|x| < r \qquad \Longleftrightarrow \qquad -r < x < r.$$

3.32 Dimostrare la *disuguaglianza triangolare*:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|, \qquad \forall\, x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}.$$

[Prendiamo in considerazione la relazione $|x| \leq r$, già studiata nell'esercizio 3.30. Ponendo $r = |x|$, risulta evidentemente $|x| \leq |x|$ (in particolare vale il segno di uguale); in base all'esercizio 3.30 otteniamo $-|x| \leq x \leq |x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Se x_1, x_2 sono numeri reali, abbiamo quindi

$$-|x_1| \leq x_1 \leq |x_1|, \qquad -|x_2| \leq x_2 \leq |x_2|.$$

Sommando membro a membro otteniamo

$$-(|x_1| + |x_2|) \leq x_1 + x_2 \leq (|x_1| + |x_2|).$$

Utilizzando di nuovo l'esercizio 3.30 con $r = |x_1| + |x_2|$, otteniamo la disuguaglianza triangolare]

3.33 Dimostrare la disuguaglianza

$$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|, \qquad \forall\, x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}.$$

[Utilizzando la disuguaglianza triangolare (esercizio precedente) abbiamo

$$|x_1| = |x_1 - x_2 + x_2| = |(x_1 - x_2) + x_2| \leq |x_1 - x_2| + |x_2|,$$

da cui $|x_1| - |x_2| \leq |x_1 - x_2|$. scambiando il ruolo di x_1, x_2 otteniamo anche

$$|x_2| - |x_1| \leq |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|,$$

cioè $|x_1| - |x_2| \geq -|x_1 - x_2|$. Riassumendo abbiamo

$$-|x_1 - x_2| \leq |x_1| - |x_2| \leq |x_1 - x_2|,$$

che, in base all'esercizio 3.30, equivale alla tesi]

3.34 Risolvere la disequazione $|x+3|-2>0$.

[La disequazione è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+3-2<0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x+3<0 \\ -(x+3)-2>0. \end{cases}$$

Dal primo si ottiene $x > -1$, dal secondo $x < -5$. Perciò la disequazione data ha per soluzione tutti i numeri reali x per cui $x < -5$ e $x > -1$]

3.35 Risolvere le disequazioni:

$$(a) \quad 2-|x-2| \geq 0 \qquad\qquad (b) \quad x \geq 2(|x|-1)$$

[(a) $0 \leq x \leq 4$; (b) $-2/3 \leq x \leq 2$]

3.36 Risolvere le disequazioni:

$$(a) \quad x^2+2|x|-3<0 \qquad\qquad (b) \quad x^2-2|x|-3>0$$

[La disequazione (a) è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+2x-3<0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x<0 \\ x^2-2x-3<0. \end{cases}$$

Risolvendo le disequazioni di secondo grado si ottiene

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -3<x<1 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x<0 \\ -1<x<3. \end{cases}$$

Il primo sistema dà $0 \leq x < 1$, il secondo $-1 < x < 0$. Perciò la disequazione iniziale ha per soluzioni: $-1 < x < 1$; (b) Procedendo in modo simile a quanto indicato per l'esercizio (a), si trova il risultato: $x < -3$, $x > 3$]

3.37 Risolvere le disequazioni:

$$(a) \quad \frac{4|x|}{x^2-2|x|-3} < -1 \qquad\qquad (b) \quad 2|x^2-x| > |x|$$

[(a) $-3 < x < -1$, $1 < x < 3$; (b) $x < 0$, $0 < x < 1/2$, $x > 3/2$ (senza risolvere disequazioni di secondo grado, il risultato si ottiene più semplicemente dividendo entrambi i membri della disequazione per $|x|$)]

3.38 Risolvere le disequazioni:

$$(a)\quad \left|\frac{x-1}{x-7}\right| > 1 \qquad\qquad (b)\quad \left|\frac{2x-1}{5-x}\right| < 2$$

[(a) $x > 4$, $x \neq 7$; (b) $x < 11/4$]

3.39 Risolvere le disequazioni:

$$(a)\quad |2x^2 - 16x + 31| < 1 \qquad\qquad (b)\quad (x^2+1) < |x^2-1|$$

[(a) $3 < x < 5$, $x \neq 4$; (b) $x < 0$, $x \neq -1$]

3E. Disequazioni irrazionali

Fissato un numero naturale n, espressioni del tipo

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x), \qquad \sqrt[n]{p(x)} < q(x),$$

dove $p(x)$, $q(x)$ sono polinomi, si dicono *disequazioni irrazionali.* Il metodo di risoluzione è differente a secondo che n sia pari o dispari. Di seguito distinguiamo i due casi.

La funzione $y = x^n$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ se n è un numero naturale *dispari* (si veda la figura 3.1). In formule ciò si esprime:

$$x_1 < x_2, \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1^n < x_2^n \qquad (n \textit{ dispari})$$

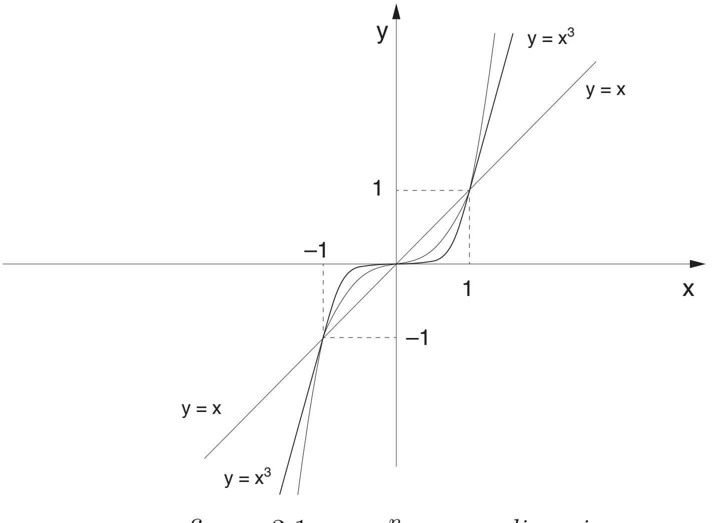


figura 3.1 $y = x^n$, con n *dispari*

Ne segue in particolare che la funzione x^n è invertibile su tutto l'asse reale, se n è dispari. La funzione inversa $y = \sqrt[n]{x}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è strettamente crescente, cioè:

$$x_1 < x_2, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2} \qquad (n \text{ } dispari)$$

In base a tali proprietà, le disequazioni irrazionali con n dispari si risolvono elevando alla n-sima potenza entrambi i membri. Precisamente:

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x), \qquad \overset{n \text{ } dispari}{\Longleftrightarrow} \qquad p(x) > [q(x)]^n;$$

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x), \qquad \overset{n \text{ } dispari}{\Longleftrightarrow} \qquad p(x) < [q(x)]^n.$$

3.40 Risolvere la disequazione irrazionale:

$$\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 3x - 2} > x$$

[Elevando entrambi i membri alla terza potenza e semplificando per x^3 si ottiene la disequazione equivalente $-x^2 + 3x - 2 > 0$, che ha per soluzioni: $1 < x < 2$]

3.41 Risolvere la disequazione irrazionale:

$$\sqrt[3]{x(x^2 - 1)} > x - 1$$

[Elevando alla terza potenza entrambi i membri otteniamo la disequazione equivalente

$$x^3 - x > (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

Semplificando per x^3 si ottiene la disequazione di secondo grado $3x^2 - 4x + 1 > 0$, che ha per soluzioni $x < 1/3$ e $x > 1$]

Se n è un numero naturale *pari* la funzione $y = x^n$ è strettamente crescente per $x \geq 0$ (si veda la figura 3.2). In formule ciò si esprime:

$$0 \leq x_1 < x_2, \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1^n < x_2^n \qquad (n \text{ } pari)$$

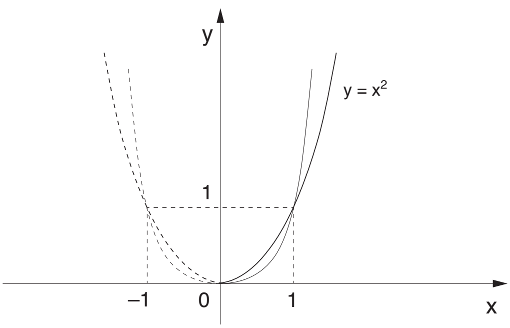


figura 3.2 $y = x^n$, con n *pari*

La funzione x^n è invertibile nell'intervallo $[0, +\infty)$ se n è pari. La funzione inversa è $y = \sqrt[n]{x}$; è definita per $x \geq 0$ ed è strettamente crescente, cioè:

$$0 \leq x_1 < x_2, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2} \qquad (n \textit{ pari})$$

Consideriamo ora la disequazione irrazionale con n pari:

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x).$$

Per le proprietà di monotonia espresse in precedenza, anche in questo caso eleviamo entrambi i membri della disequazione alla n-sima potenza; però richiediamo anche che $p(x) \geq 0$ e $q(x) > 0$. In simboli:

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x) \qquad \overset{n\ pari}{\Longleftrightarrow} \qquad \begin{cases} p(x) < [q(x)]^n \\ p(x) \geq 0 \\ q(x) > 0 \end{cases}$$

Osserviamo che la condizione $q(x) > 0$ é necessaria affinchè valga l'equivalenza sopra scritta; infatti la relazione $p(x) < [q(x)]^n$ può essere verificata anche se $q(x)$ è negativo (dato che n è pari), ma in tal caso non sarebbe verificata la relazione $\sqrt[n]{p(x)} < q(x)$, perché il primo membro è maggiore od uguale a zero. Infine consideriamo la disequazione irrazionale con n pari:

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x);$$

occorre richiedere che $p(x) \geq 0$. In tal caso, se $q(x)$ è negativo, la disequazione data è verificata; mentre, se $q(x) \geq 0$, allora possiamo imporre la condizione $p(x) > [q(x)]^n$, ed in tal caso risulta automaticamente $p(x) \geq 0$. In definitiva abbiamo:

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) \qquad \overset{n\ pari}{\Longleftrightarrow} \qquad \begin{cases} q(x) < 0 \\ p(x) \geq 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} q(x) \geq 0 \\ p(x) > [q(x)]^n. \end{cases}$$

3.42 Risolvere la disequazione irrazionale:

$$\sqrt{4x^2 - 1} < x - 3$$

[La disequazione data è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 4x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \\ 4x^2 - 1 < (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9; \end{cases}$$

la terza disequazione si scrive anche $3x^2 + 6x - 10 < 0$, che ha per soluzioni $-1 - \sqrt{39}/3 < x < -1 + \sqrt{39}/3$; la seconda disequazione ha per soluzioni $x > 3$. Dato che $-1 + \sqrt{39}/3 < 3$ (infatti ciò equivale a $\sqrt{39}/3 < 4$, cioè $\sqrt{39} < 12$, cioè ancora $39 < 144$, che è vera), il sistema non ha soluzioni. Perciò la disequazione data non ha soluzioni]

3.43 Risolvere la disequazione irrazionale:

$$\sqrt{2 - x^2} > 2x - 1$$

[La disequazione data ha per soluzioni l'unione delle soluzioni dei sistemi:

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2 - x^2 > (2x - 1)^2. \end{cases}$$

Eseguendo i conti otteniamo i due sistemi equivalenti

$$\begin{cases} x < 1/2 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x \geq 1/2 \\ -1/5 < x < 1. \end{cases}$$

Cioè ancora:

$$-\sqrt{2} \leq x < 1/2 \quad ; \quad 1/2 \leq x < 1.$$

Perciò la disequazione data ha per soluzioni: $-\sqrt{2} \leq x < 1$]

3.44 Risolvere le disequazioni:

$$(a) \quad \sqrt{3x - 1} \geq 2 \qquad\qquad (b) \quad \sqrt{1 - x^2} < x$$

[(a) $x \geq 5/3$; (b) $\sqrt{2}/2 < x \leq 1$]

3.45 Risolvere le disequazioni:

$$(a) \quad \sqrt{1 - x^2} > x \qquad\qquad (b) \quad \sqrt{1 - x^2} + x \geq 0$$

[(a) $-1 \leq x < \sqrt{2}/2$; (b) $-\sqrt{2}/2 \leq x \leq 1$]

3.46 Risolvere le disequazioni:

$$(a) \quad \sqrt[3]{64\, x^3 - x} > 4x - 3 \qquad\qquad (b) \quad \sqrt[3]{8x^3 - 7} < 2x - 1$$

[(a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$; (b) $-1/2 < x < 1$]

3.47 Risolvere la disequazione $\sqrt{3x^2 - 1} > \sqrt{x^2 - 3}$.

[La disequazione data è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3 \geq 0 \\ 3x^2 - 1 > x^2 - 3, \end{cases}$$

che ha per soluzioni: $x \leq -\sqrt{3}$, $x \geq \sqrt{3}$]

3.48 Risolvere le disequazioni:

$$(a) \quad |x|\sqrt{1-2x^2} > 2x^2 - 1 \qquad\qquad (b) \quad x\sqrt{1-2x^2} > 2x^2 - 1$$

[(a) Dato che $|x| = \sqrt{x^2}$, la disequazione data è equivalente a $\sqrt{x^2(1-2x^2)} > 2x^2 - 1$, che ha come soluzioni: $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$. Tali soluzioni si trovano più semplicemente osservando che deve essere $1 - 2x^2 \geq 0$ e che per tali x il secondo membro della disequazione è minore o uguale a zero. Perciò la disequazione data è equivalente alla disequazione di secondo grado $1 - 2x^2 > 0$;
(b) Conviene studiare separatamente i casi $x \geq 0$ e $x < 0$. Se $x \geq 0$ la disequazione si risolve come nel caso (a) e si ottiene $0 \leq x < \sqrt{2}/2$. Se invece $x < 0$, si può porre $y = -x$ e risolvere la disequazione $y\sqrt{1-2y^2} < 1 - 2y^2$ con $y > 0$. Semplificando per $\sqrt{1-2y^2}$ (> 0) si ottiene la disequazione più semplice $y < \sqrt{1-2y^2}$ che, nell'ambito delle $y > 0$, ha soluzioni $0 < y < \sqrt{3}/3$. Riassumendo, le soluzioni della disequazione iniziale sono $-\sqrt{3}/3 < x < \sqrt{2}/2$]

3.49 Risolvere la disequazione

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1} - 2 < 0$$

[Ponendo $y = \sqrt[6]{x-1}$, risulta $\sqrt[3]{x-1} = y^2$. Con tali notazioni occorre risolvere $y^2 + y - 2 < 0$. Tenendo conto che $y \geq 0$, deve essere $0 \leq y < 1 \ldots$ la soluzione è $1 \leq x < 2$]

3F. Disequazioni esponenziali e logaritmiche

In questo paragrafo prendiamo in considerazione le funzioni *esponenziale* $y = a^x$ e *logaritmo* $y = log_a x$, con a numero reale positivo e diverso da 1.

A titolo di esempio consideriamo la funzione esponenziale con base $a = 2$: $y = 2^x$. Allo scopo di disegnare un grafico approssimativo della funzione 2^x, riportiamo i valori di tale funzione in corrispondenza ad alcuni valori interi di x:

x	2	1	0	-1	-2
2^x	4	2	1	1/2	1/4

Con l'aiuto di tali valori disegniamo il grafico approssimato in figura 3.3.

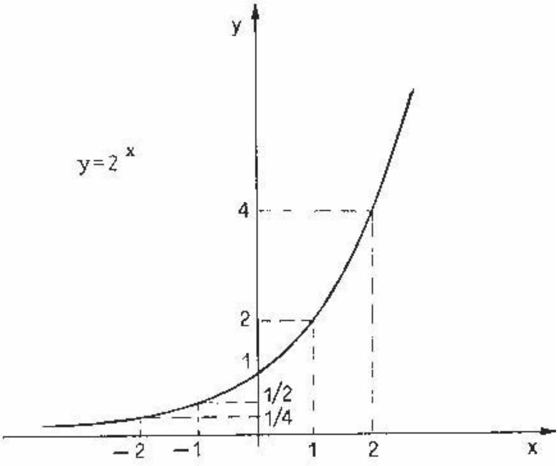


figura 3.3

La funzione 2^x è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è positiva per ogni x, ed è *strettamente crescente*, cioè:

$$x_1 < x_2, \qquad \Longrightarrow \qquad 2^{x_1} < 2^{x_2}.$$

Consideriamo ora una funzione esponenziale con base minore di 1, ad esempio $a = 1/2$. Abbiamo la seguente tavola di valori, ed in corrispondenza il grafico della funzione $(1/2)^x$ in figura 3.4.

x	2	1	0	-1	-2
$(1/2)^x$	1/4	1/2	1	2	4

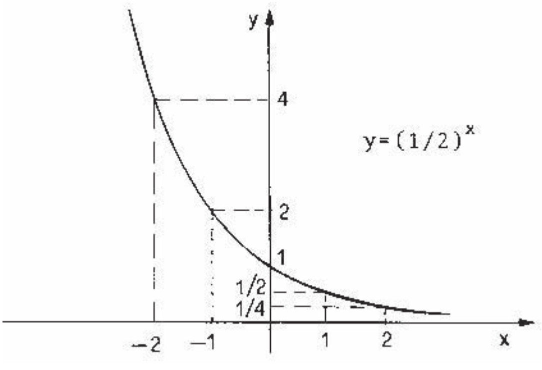


figura 3.4

La funzione $(1/2)^x$ è definita e positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è *strettamente decrescente*, cioè:

$$x_1 < x_2, \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}.$$

Più in generale, la funzione esponenziale $y = a^x$ è strettamente crescente se la base a è maggiore di 1, ed è strettamente decrescente se $0 < a < 1$. In formule:

$$\begin{array}{llll} x_1 < x_2, & a > 1 & \Longrightarrow & a^{x_1} < a^{x_2}; \\ x_1 < x_2, & 0 < a < 1 & \Longrightarrow & a^{x_1} > a^{x_2}. \end{array}$$

Particolarmente importante è il caso in cui la base è uguale al numero di Nepero e $(= 2.71\ldots)$. Dato che $e > 1$, la funzione esponenziale $y = e^x$ è strettamente crescente.

Qualunque sia la base a ($a > 0$, $a \neq 1$) la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ è definita su $\mathbb{R}$ e la sua immagine (o codominio) è l'insieme dei numeri reali positivi. Inoltre la corrispondenza tra $\mathbb{R}$ e $(0, +\infty)$ è biunivoca, dato che a^x è strettamente monotona; infatti per verificare che a^x è invertibile, consideriamo $x_1 \neq x_2$ e verifichiamo che $f(x_1) \neq f(x_2)$. Pur di cambiare l'ordine dei due punti, risulterà $x_1 < x_2$ e quindi, se $a > 1$, $f(x_1) < f(x_2)$; mentre, se $0 < a < 1$, $f(x_1) > f(x_2)$.

La funzione logaritmo è l'inversa della funzione esponenziale. Scriveremo $y = log_a x$, intendendo che y è l'esponente che occorre dare alla base a per ottenere x; in formule:

$$y = log_a x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = a^y.$$

Come in precedenza la base a è un numero positivo e diverso da 1. Come inversa della funzione esponenziale, la funzione logaritmo è definita nell'insieme $(0, +\infty)$, con valori in $\mathbb{R}$. Quando si scrive $y = log\, x$, senza indicare esplicitamente la base, si intende che essa è uguale al numero di Nepero e.

Se la base è maggiore di 1, la funzione logaritmo è strettamente crescente. Infatti, consideriamo $y_1 = log_a x_1$, $y_2 = log_a x_2$, con $x_1 < x_2$; se fosse $y_1 > y_2$, per la monotonia della funzione esponenziale, avremmo $a^{y_1} > a^{y_2}$, cioè $x_1 = a^{y_1} > a^{y_2} = x_2$, contrariamente alle ipotesi. Per lo stesso motivo è assurdo che $y_1 = y_2$, perché avremmo $x_1 = x_2$. Deve perciò risultare $y_1 < y_2$. Con lo stesso ragionamento si verifica che la funzione logaritmo è strettamente decrescente se la base è un numero positivo minore di 1. In formule abbiamo quindi:

$$\begin{array}{llll} x_1 < x_2, & a > 1 & \Longrightarrow & log_a x_1 < log_a x_2; \\ x_1 < x_2, & 0 < a < 1 & \Longrightarrow & log_a x_1 > log_a x_2. \end{array}$$

Esempi di grafici della funzione logaritmo, con base maggiore o minore di 1, sono riportati in figura 3.5.

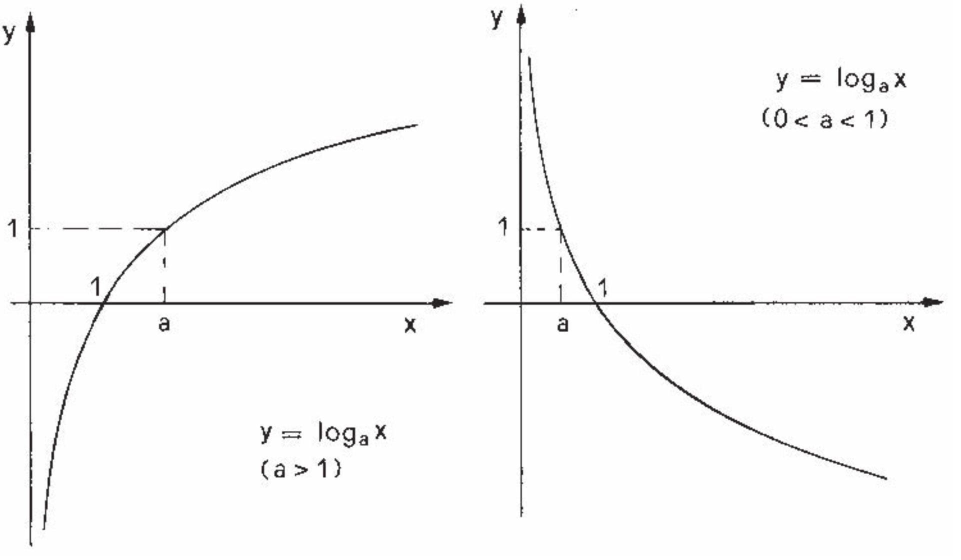


figura 3.5

3.50 Calcolare il valore dei seguenti logaritmi

$$(a) \quad log_{10} 10 \qquad (b) \quad log_2 8 \qquad (c) \quad log_7 1$$

[(a) $log_{10} 10$ è uguale al numero reale y per cui $10^y = 10$; evidentemente $y = 1$, cioè $log_{10} 10 = 1$; (b) $log_2 8$ è l'esponente y da dare alla base 2 per ottenere 8, cioè $2^y = 8$; risulta quindi $log_2 8 = y = 3$; (c) l'esponente da dare a 7 per ottenere 1 è 0; quindi $log_7 1 = 0$]

3.51 Calcolare il valore dei seguenti logaritmi

$$(a) \quad log_8 4 \qquad (b) \quad log_3 \frac{1}{3} \qquad (c) \quad log_{1/2} 4$$

[(a) L'espressione $y = log_8 4$ è equivalente a $8^y = 4$. ricordando che $8 = 2^3$, risulta $8^y = 2^{3y} = 4$; quindi $3y = 2$, cioè $y = 2/3$; in definitiva $log_8 4 = 2/3$; (b) l'esponente da dare a 3 per ottenere $1/3$, è -1; quindi $log_3 (1/3) = -1$; (c) Risulta $(1/2)^{-2} = 4$, quindi $log_{1/2} 4 = -2$]

3.52 Calcolare il valore dei seguenti logaritmi

$$(a) \quad log_{1/8} 4 \qquad (b) \quad log_{1/4} 8 \qquad (c) \quad log_{1/2} \frac{1}{8}$$

[(a) $-2/3$; (b) $-3/2$; (c) 3]

3.53 Calcolare il valore dei seguenti logaritmi

$$(a)\quad log_9 3 \qquad (b)\quad log_{10} 10^{\sqrt{2}} \quad (c)\quad log_{11} \sqrt{11}$$

[(a) 1/2; (b) $\sqrt{2}$; (c) 1/2]

3.54 Risolvere la disequazione $log_5 x > 2$.

[Scrivendo anche a secondo membro della disequazione un logaritmo in base 5 abbiamo $log_5 x > 2 = log_5 25$; dato che la funzione $log_5 x$ è strettamente crescente, ciò equivale a $x > 25$]

3.55 Risolvere la disequazione $log_3 x < 1/2$.

[La disequazione data si può anche scrivere $log_3 x < log_3 \sqrt{3}$; dato che la funzione $log_3 x$ è strettamente crescente, ciò equivale a $0 < x < \sqrt{3}$]

3.56 Risolvere la disequazione $log_{1/7} x < \sqrt{2}$.

[La disequazione $log_{1/7} x < \sqrt{2} = log_{1/7} (1/7)^{\sqrt{2}}$ ha per soluzione i numeri $x > (1/7)^{\sqrt{2}}$ dato che la funzione $y = log_{1/7} x$ è strettamente decrescente.]

3.57 Risolvere la disequazione $log_{1/5} (x^2 + 4x) > -1$.

[La disequazione data si può anche scrivere:

$$log_{1/5} (x^2 + 4x) > log_{1/5} 5.$$

Dato che la funzione logaritmo in base 1/5 è strettamente decrescente, otteniamo le relazioni equivalenti

$$0 < x^2 + 4x < 5.$$

La prima delle due disequazioni di secondo grado ha per soluzioni: $x < -4$, $x > 0$; la seconda ha per soluzioni: $-5 < x < 1$. Riportiamo tali valori nello schema in figura 3.6.

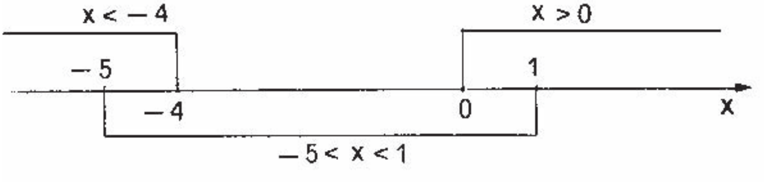


figura 3.6

I numeri x che risolvono la disequazione data sono quindi quelli che verificano le relazioni: $-5 < x < -4$, $0 < x < 1$]

3.58 Risolvere la disequazione

$$log\,(1 + \tfrac{1}{x}) \leq 1.$$

[La base del logaritmo è il numero di Nepero e. Dato che $log\, e = 1$, la disequazione data è equivalente al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 1 + 1/x \le e \\ 1 + 1/x > 0. \end{cases}$$

La prima delle due disequazioni ha per soluzioni: $x < 0$ e $x \ge 1/(e-1)$; la seconda disequazione ha per soluzioni: $x < -1$ e $x > 0$. I va1ori comuni sono $x < -1$ e $x \ge 1/(e-1)$]

3.59 Risolvere le disequazioni:

$$(a) \quad log\,(x-1) < -1 \qquad\qquad (b) \quad log_{1/2}\,(3x - 2x^2) < 0$$

[(a) $1 < x < 1 + 1/e$; (b) $1/2 < x < 1$]

3.60 Risolvere le disequazioni:

$$(a) \quad log_2\,[x^2(x^2-2)] < 3 \qquad\qquad (b) \quad log\, x^2 > log\, x$$

[(a) $-2 < x < -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} < x < 2$; (b) $x > 1$]

3.61 Risolvere la disequazione

$$log\,(x^4 - 4x^2 + 5) \ge log\,(x^2 + 1)$$

[$x \le -2$, $-1 \le x \le 1$, $x \ge 2$]

3.62 Risolvere la disequazione $4^x > 2$.

[La disequazione si può anche scrivere $4^x > 2 = 4^{1/2}$; dato che la funzione esponenziale 4^x è strettamente crescente, la disequazione è soddisfatta se e solo se $x > 1/2$]

3.63 Risolvere la disequazione $(1/3)^{(1-12x)x} < 3$.

[La disequazione $(1/3)^{(1-12x)x} < 3 = (1/3)^{-1}$ è equivalente a $x - 12x^2 > -1$, dato che la funzione esponenziale con base $1/3$ è strettamente decrescente. Il risultato finale è $-1/4 < x < 1/3$]

3.64 Risolvere la disequazione $8^{x+1} \ge 2^{x^2}$.

[Dato che $8 = 2^3$, la disequazione data si può anche scrivere $2^{3(x+1)} \ge 2^{x^2}$, ed è quindi equivalente a $3(x+1) \ge x^2$. Tale disequazione di secondo grado ha per soluzioni i numeri reali x per cui $(3-\sqrt{21})/2 \le x \le (3+\sqrt{21})/2$]

3.65 Risolvere le disequazioni

$$(a) \quad e^{4x^4 - 5x^2 + 1} < 1 \qquad\qquad (b) \quad e^{|x-1|} < e^x$$

[(a) $-1 < x < -1/2$, $1/2 < x < 1$; (b) $x > 1/2$]

3.66 Risolvere la disequazione $4^x + 2^x - 2 < 0$.

[Ponendo $t = 2^x$, risu1ta $4^x = t^2$. La disequazione $t^2 + t - 2 < 0$ è soddisfatta da $-2 < t < 1$. Perciò abbiamo $-2 < 2^x < 1$; la prima disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre la seconda è soddisfatta da $x < 0$. Riassumendo, i numeri reali negativi sono le soluzioni della disequazione data]

3.67 Risolvere le disequazioni

$$(a) \quad e^x + e^{-x} < \frac{10}{3} \qquad\qquad (b) \quad e^x - e^{-x} > -2$$

[(a) Ponendo $e^x = t$ risulta $e^{-x} = 1/t$; quindi occorre risolvere la disequazione $t + 1/t < 10/3$. Si tratta di una disequazione razionale che ha per soluzioni: $t < 0$ e $1/3 < t < 3$. In corrispondenza la disequazione $e^x < 0$ non ha soluzioni, mentre le disequazioni $1/3 < e^x < 3$ hanno per soluzioni $-log\,3 = log\,(1/3) < x < log\,3$;
(b) $x > log\,(-1 + \sqrt{5})$]

3.68 Risolvere le disequazioni

$$(a) \quad (x+1)^{(x^2-1)} > 1 \qquad\qquad (b) \quad (x^2-3)^x < x^2 - 3$$

[(a) Occorre distinguere i casi in cui la base $x + 1$ è compresa tra 0 e 1, oppure è maggiore di 1. Si ottengono i due sistemi

$$\begin{cases} 0 < x + 1 < 1 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases} \qquad ; \qquad \begin{cases} x + 1 > 1 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

Eseguendo i calcoli si ottiene il risultato finale: $-1 < x < 0$ e $x > 1$; (b) $x < -2$, $\sqrt{3} < x < 2$]

3.69 Risolvere le disequazioni

$$(a) \quad log\,(x-1)^2 - log\,(x-2)^2 > 0$$

$$(b) \quad log_{(x-2)}\,(2x^2 - 13x + 21) > 0$$

[(a) $x > 3/2$, $x \neq 2$; (b) $5/2 < x < 3$, $x > 4$]

3G. Disequazioni trigonometriche

Nel capitolo 2 abbiamo già dato alcuni richiami di trigonometria. Ricordiamo qui alcune proprietà delle funzioni $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Le funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sono periodiche di *periodiche* di periodo 2π; la funzione $\operatorname{tg} x$ è periodica di periodo π; ciò significa che:

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x, \qquad k \in \mathbb{Z};$$
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \qquad k \in \mathbb{Z};$$
$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Per comodità del lettore riportiamo la seguente tavola di valori.

x radianti	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$(3/2)\pi$	2π
x gradi	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sen x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
tg x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	non definita	0	non definita	0

Prendiamo in considerazione disequazioni trigonometriche del tipo $\operatorname{sen} x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$, essendo a un numero reale assegnato. Cominciamo con la disequazione relativa alla funzione $\operatorname{sen} x$ e facciamo riferimento alla figura 3.7, dove è tracciato il grafico della funzione $\operatorname{sen} x$ e, nello stesso sistema di riferimento, anche il grafico della funzione costante $y = a$, per diversi valori del parametro reale a.

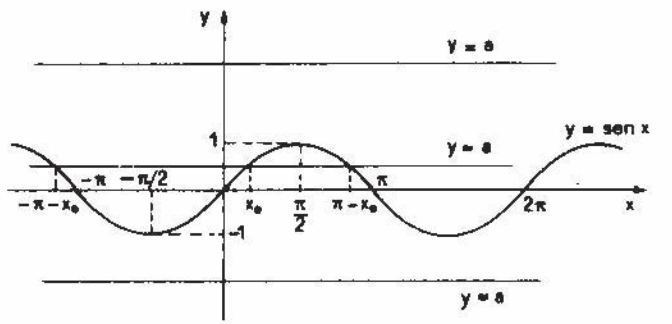


figura 3.7

Tenendo presente che i valori della funzione $\operatorname{sen} x$ sono compresi tra -1 e 1, abbiamo il seguente schema di risoluzione:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} x > a \\ a \geq 1\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} x > a \\ a < -1\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,;$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} x > a \\ -1 \leq a < 1\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{scelto } x_0 \text{ tale che } \operatorname{sen} x_0 = a \text{ con} \\ -\pi/2 \leq x_0 < \pi/2, \text{ le soluzioni sono:} \\ x_0 + 2k\pi < x < \pi - x_0 + 2k\pi,\ \forall\ k\ \in \mathbb{Z}.\end{array}$$

In modo analogo otteniamo uno schema di risoluzione per la disequazione $\operatorname{sen} x < a$:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} x < a \\ a > 1\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,;$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} x < a \\ a \leq -1\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} x < a \\ -1 < a \leq 1\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{scelto } x_0 \text{ tale che } \operatorname{sen} x_0 = a \text{ con} \\ -\pi/2 < x_0 \leq \pi/2, \text{ le soluzioni sono:} \\ -\pi - x_0 + 2k\pi < x < x_0 + 2k\pi,\ \forall\ k\ \in \mathbb{Z}.\end{array}$$

3.70 Risolvere le disequazioni trigonometriche

$$(a) \quad \operatorname{sen} x > \sqrt{2}/2 \qquad\qquad (b) \quad \operatorname{sen} x < 1/2$$

[(a) $(\pi/4) + 2k\pi < x < (3/4)\pi + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$;
(b) $-(7/6)\pi + 2k\pi < x < (\pi/6) + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

3.71 Risolvere le disequazioni trigonometriche

$$(a) \quad \operatorname{sen} x > -1 \qquad\qquad (b) \quad \operatorname{sen} x < -1/2$$

[(a) $(-\pi/2) + 2k\pi < x < (3/2)\pi + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, cioè: $x \neq (-\pi/2) + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$;
(b) $-(7/6)\pi + 2k\pi < x < (-\pi/6) + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

3.72 Risolvere le disequazioni trigonometriche

$$(a) \quad 2\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 2 < 0 \qquad\qquad (b) \quad \operatorname{sen}^2 x < \operatorname{sen} x$$

[(a) Ponendo $t = \operatorname{sen} x$, si ottiene la disequazione di secondo grado $2t^2 - 5t + 2 < 0$, che ha per soluzioni $1/2 < t < 2$. La disequazione $\operatorname{sen} x < 2$ è soddisfatta da ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre

la disequazione $1/2 < \operatorname{sen} x$ è soddisfatta da $(\pi/6) + 2k\pi < x < (5/6)\pi + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, che costituisce quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione data;
(b) ponendo $t = \operatorname{sen} x$, si determinano le soluzioni: $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $x \neq \pi/2 + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

3.73 Determinare i numeri reali x dell'intervallo $[0, 2\pi]$ che soddisfano le disequazioni

$$(a) \quad 2\operatorname{sen} x < \sqrt{3} \qquad\qquad (b) \quad 2\operatorname{sen}^2 x > 1$$

[(a) $0 \leq x < \pi/3$, $(2/3)\pi < x \leq 2\pi$; (b) $\pi/4 < x < (3/4)\pi$, $(5/4)\pi < x < (7/4)\pi$]

Studiamo la disequazione $\cos x > a$ facendo riferimento alla figura 3.8.

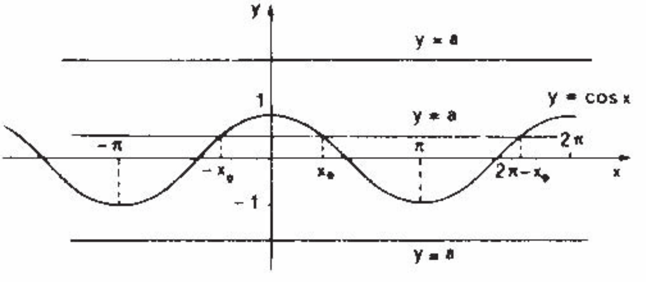


figura 3.8

Si ottiene il seguente schema di risoluzione:

$$\left.\begin{array}{l} \cos x > a \\ a \geq 1 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x > a \\ a < -1 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x > a \\ -1 \leq a < 1 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{scelto } x_0 \text{ tale che } \cos x_0 = a \text{ con} \\ 0 < x_0 \leq \pi, \text{ le soluzioni sono:} \\ -x_0 + 2k\pi < x < x_0 + 2k\pi,\ \forall\, k\, \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Analogamente si ottiene uno schema di risoluzione per la disequazione $\cos x < a$:

$$\left.\begin{array}{l} \cos x < a \\ a > 1 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,;$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos x < a \\ a \leq -1\end{array}\right\} \implies \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos x < a \\ -1 < a \leq 1\end{array}\right\} \implies \begin{array}{l}\text{scelto } x_0 \text{ tale che } \cos x_0 = a \text{ con} \\ 0 \leq x_0 < \pi, \text{ le soluzioni sono:} \\ x_0 + 2k\pi < x < 2\pi - x_0 + 2k\pi,\ \forall\, k\ \in \mathbb{Z}.\end{array}$$

3.74 Risolvere le disequazioni trigonometriche

$$(a) \quad 2\cos x > \sqrt{3} \qquad\qquad (b) \quad 2\cos x < 1$$

[(a) $-(\pi/6) + 2k\pi < x < (\pi/6) + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$; (b) $(\pi/3) + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi - (\pi/3)$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

3.75 Risolvere le disequazioni trigonometriche

$$(a) \quad \cos x > 1 \qquad\qquad (b) \quad \cos x < 0$$

[(a) nessuna so1uzione; (b) $(\pi/2) + 2k\pi < x < (3/2)\pi + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

3.76 Risolvere le disequazioni trigonometriche

$$(a) \quad \cos^2 x - 2\cos x - 3 < 0 \qquad\qquad (b) \quad |\cos x - 1| < \cos x$$

[(a) Ponendo $t = \cos x$, si ottiene la disequazione $t^2 - 2t - 3 < 0$ che ha per soluzioni $-1 < t < 3$. Le corrispondenti disequazioni $-1 < \cos x < 3$ sono soddisfatte da ogni $x \neq \pi + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$; (b) dato che $\cos x - 1 \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta $|\cos x - 1| = 1 - \cos x$; perciò la disequazione data è equivalente a $1 - \cos x < \cos x$, cioè $\cos x > 1/2$, che ha per soluzioni $-\pi/3 + 2k\pi < x < \pi/3 + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

3.77 Determinare i numeri reali x dell'intervallo $[0, 2\pi]$ che soddisfano le disequazioni

$$(a) \quad 1 + 2\cos x > 0 \qquad\qquad (b) \quad 3 - 4\cos^2 x > 0$$

[(a) $0 \leq x < (2/3)\pi$, $(4/3)\pi < x \leq 2\pi$; (b) $\pi/6 < x < (5/6)\pi$, $(7/6)\pi < x < (11/6)\pi$]

Studiamo le disequazioni $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$, facendo riferimento alla figura 3.9.

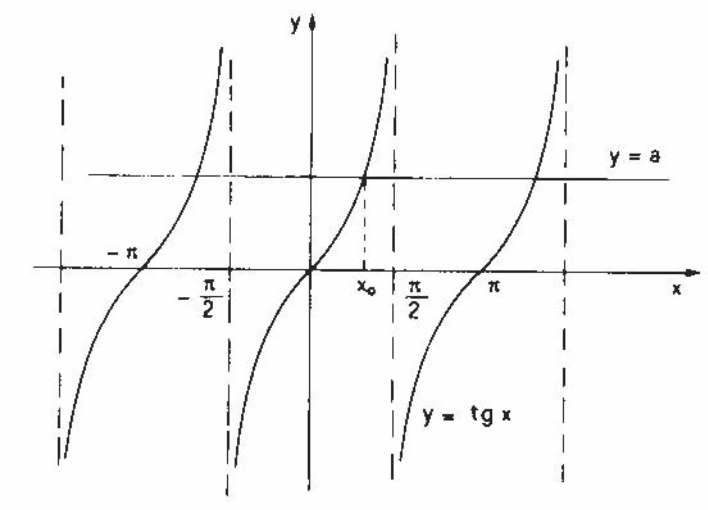


figura 3.9

Tenendo presente che la funzione $y = \operatorname{tg} x$ è periodica di periodo π, abbiamo il seguente schema di risoluzione:

$\operatorname{tg} x > a \quad \Longrightarrow \quad$ scelto x_0 tale che $\operatorname{tg} x_0 = a$, con $-\pi/2 < x_0 < \pi/2$, le soluzioni sono:
$$x_0 + k\pi < x < \pi/2 + k\pi, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z};$$

$\operatorname{tg} x < a \quad \Longrightarrow \quad$ scelto x_0 tale che $\operatorname{tg} x_0 = a$, con $-\pi/2 < x_0 < \pi/2$, le soluzioni sono:
$$-\pi/2 + k\pi < x < x_0 + k\pi, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

3.78 Risolvere le disequazioni trigonometriche

$(a)\quad \operatorname{tg} x > 0 \qquad\qquad (b)\quad \operatorname{tg} x < -1$

[(a) $k\pi < x < (\pi/2) + k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$; (b) $-(\pi/2) + k\pi < x < -(\pi/4) + k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

3.79 Risolvere le disequazioni trigonometriche

$(a)\quad \sqrt{3} + \operatorname{tg} x > 0 \qquad\qquad (b)\quad 1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x > 0$

[(a) $-(\pi/3) + k\pi < x < (\pi/2) + k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$; (b) $-(\pi/2) + k\pi < x < (\pi/6) + k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

3.80 Risolvere nell'intervallo $[0, \pi]$ le disequazioni

$(a)\quad \operatorname{sen} x < \cos x \qquad\qquad (b)\quad \operatorname{sen}^2 x < \cos^2 x$

[(a) La disequazione data è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \operatorname{tg} x < 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \cos x < 0 \\ \operatorname{tg} x > 1. \end{cases}$$

Osserviamo che l'equivalenza dipende anche dal fatto che, nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione $\cos x$ si annulla per $x = \pi/2$, ma in tal caso, essendo $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$, la disequazione $\operatorname{sen} x < \cos x$ non è verificata. Le soluzioni finali sono: $0 \le x < \pi/4$; (b) $0 \le x < \pi/4$, $(3/4)\pi < x \le \pi$]

3.81 Risolvere nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ le disequazioni

$(a)\quad 3 - \operatorname{tg}^2 x \le 0 \qquad\qquad (b)\quad (3\operatorname{tg}^2 x - 2)\operatorname{tg}^2 x < 1$

[(a) $-\pi/2 < x \le -\pi/3$, $\pi/3 \le x < \pi/2$; (b) $-\pi/4 < x < \pi/4$]

3.82 Risolvere la disequazione $\operatorname{sen} x < \cos 2x$

[Ricordando la formula di duplicazione $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, possiamo scrivere la disequazione equivalente $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 < 0$. Ponendo $t = \operatorname{sen} x$, si trova $-1 < t < 1/2$. Le soluzioni finali sono: $-(7/6)\pi + 2k\pi < x < (\pi/6) + 2k\pi$, $x \ne -(\pi/2) + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

3.83 Risolvere nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la disequazione

$$4\operatorname{sen} x \cos x + 1 < 0$$

[Utilizzando la formula di duplicazione $2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$, si ottiene la disequazione equivalente $2\operatorname{sen} 2x + 1 < 0$, cioè $\operatorname{sen} 2x < -1/2$. Ponendo $2x = t$, occorre risolvere la disequazione $\operatorname{sen} t < -1/2$ per $t \in [-2\pi, 2\pi]$. Si ottiene $-(5/6)\pi < t < -\pi/6$, $(7/6)\pi < t < (11/6)\pi$. Le soluzioni della disequazione data sono perciò $-(5/12)\pi < x < -\pi/12$, $(7/12)\pi < x < (11/12)\pi$]

3.84 Risolvere la disequazione trigonometrica

$$2\cos^2 x + 3\operatorname{sen} x - 3 > 0$$

[Con la sostituzione $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ si ottiene la disequazione equivalente $2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1 < 0$, che a sua volta equivale a $1/2 < \operatorname{sen} x < 1$. La soluzione finale è: $(\pi/6) + 2k\pi < x < (5/6)\pi + 2k\pi$, $x \ne (\pi/2) + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

3.85 Risolvere le disequazioni

$(a)\quad \sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2 x} \ge \sqrt{2}\operatorname{sen} x + 1$

$(b)\quad \sqrt[3]{7 - 8\cos^3 x} \ge 1 - 2\cos x$

[(a) $(2k+1)\pi \le x \le (5/4)\pi + 2k\pi$, $(7/4)\pi \le x \le 2(k+1)\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$;

(b) $-(5/6)\pi + 2k\pi \leq x \leq (5/6)\pi + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

3.86 Risolvere la disequazione

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + 2} > \sqrt[3]{\operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 6\right)}$$

[Utilizzare la sostituzione $1/\cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)/\cos^2 x = \ldots$
Il risultato è: $(\pi/2) + k\pi < x < (\pi/4) + k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$]

3H. Disequazioni con le funzioni trigonometriche inverse

Prendiamo ora in considerazione alcune disequazioni relative a *funzioni trigonometriche inverse* (si veda il paragrafo 2F). Ricordiamo che la *funzione arcoseno* (y = arcsen x) è definita nell'intervallo $[-1, 1]$ ed è *strettamente crescente*, cioè:

$$-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{arcsen} x_1 < \operatorname{arcsen} x_2 .$$

Da tale proprietà, anche con riferimento alla figura 3.10, otteniamo il seguente schema di risoluzione:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arcsen} x > a \\ a \geq \pi/2 \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arcsen} x > a \\ a < -\pi/2 \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \forall\, x \in [-1, 1]\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arcsen} x > a \\ -\pi/2 \leq a < \pi/2 \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \text{scelto } x_0 \in [-1, 1) \text{ tale che} \\ \operatorname{arcsen} x_0 = a \text{ (cioè } \operatorname{sen} a = x_0\text{),} \\ \text{le soluzioni sono: } x_0 < x \leq 1. \end{array}$$

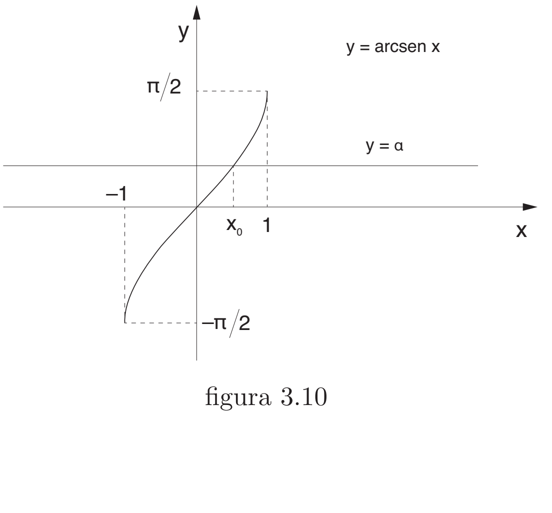


figura 3.10

In modo analogo otteniamo uno schema di risoluzione per la disequazione $\operatorname{arcsen} x < a$:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{arcsen} x < a\\ a > \pi/2\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \forall\, x \in [-1,1]\,;$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{arcsen} x < a\\ a \le -\pi/2\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{arcsen} x < a\\ -\pi/2 < a \le \pi/2\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{l}\text{scelto } x_0 \in (-1,1] \text{ tale che}\\ \operatorname{arcsen} x_0 = a \text{ (cioè } \operatorname{sen} a = x_0),\\ \text{le soluzioni sono: } -1 \le x < x_0.\end{array}$$

3.87 Risolvere le disequazioni

(a) $\operatorname{arcsen} x > \pi/6$ $\qquad$ (b) $\operatorname{arcsen} x < -\pi/4$

[(a) Risulta arcsen $(1/2) = \pi/6$ (perché sen $(\pi/6)$=1/2). Le soluzioni della disequazione data sono quindi espresse dai numeri reali x tali che $1/2 < x \le 1$; (b) $-1 \le x < -\sqrt{2}/2$]

3.88 Risolvere le disequazioni

(a) $\operatorname{arcsen} x < 0$ $\qquad$ (b) $\operatorname{arcsen} x > 2$

(c) $\operatorname{arcsen} x < \pi$ $\qquad$ (d) $\operatorname{arcsen} x > -\pi/3$

[(a) $-1 \le x < 0$; (b) nessuna soluzione; (c) $-1 \le x \le 1$; (d) $-\sqrt{3}/2 < x \le 1$]

3.89 Determinare i numeri reali x che soddisfano le disequazioni

(a) $(\operatorname{arcsen} x)^2 \ge 3 \operatorname{arcsen} x$

(b) $6\,(\operatorname{arcsen} x)^2 - \pi \operatorname{arcsen} x < 0$

[(a) Ponendo $t = \operatorname{arcsen} x$, si ottiene la disequazione di secondo grado $t^2 - 3t \ge 0$, che ha per soluzioni i numeri reali $t \ge 3$, oppure i numeri reali $t \le 0$. In corrispondenza, la disequazione arcsen $x \ge 3$ non è soddisfatta da alcuni $x \in \mathbb{R}$, mentre la disequazione arcsen $x \le 0$ vale se $x \in [-1, 0]$. Pertanto i numeri reali x che soddisfano la disequazione in (a) sono tutti i numeri dell'intervallo $[-1, 0]$; (b) $0 < x < 1/2$]

La *funzione arcocoseno* ($y = \arccos x$) è definita nell'intervallo $[-1, 1]$ ed è *strettamente decrescente*, cioè:

$$-1 \le x_1 < x_2 \le 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \arccos x_1 > \arccos x_2.$$

Da tale proprietà di monotonia, anche con riferimento alla figura 3.11, otteniamo il seguente schema di risoluzione:

$$\left.\begin{array}{l}\arccos x > a\\ a \geq \pi\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\arccos x > a\\ a < 0\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, x \in [-1,1]\,;$$

$$\left.\begin{array}{l}\arccos x > a\\ 0 \leq a < \pi\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{scelto } x_0 \in (-1,1] \text{ tale che}\\ \arccos x_0 = a \text{ (cioè } \cos a = x_0),\\ \text{le soluzioni sono: } -1 \leq x < x_0.\end{array}$$

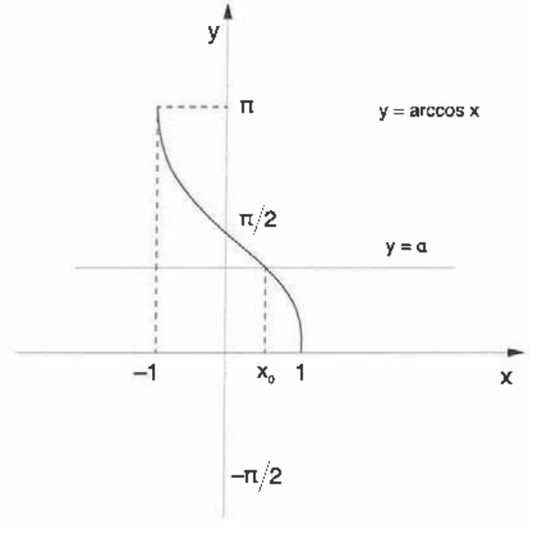


figura 3.11

Analogamente otteniamo uno schema di risoluzione per la disequazione arcos $x < a$:

$$\left.\begin{array}{l}\arccos x < a\\ a > \pi\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, x \in [-1,1]\,;$$

$$\left.\begin{array}{l}\arccos x < a\\ a \leq 0\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\arccos x < a\\ 0 < a \leq \pi\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{scelto } x_0 \in [-1,1) \text{ tale che}\\ \arccos x_0 = a \text{ (cioè } \cos a = x_0),\\ \text{le soluzioni sono: } x_0 < x \leq 1.\end{array}$$

3.90 Risolvere le disequazioni

$$(a) \quad \arccos x > \pi/2 \qquad\qquad (b) \quad \arccos x < \pi/4$$

$[(a)\ -1 \le x < 0;\ (b)\ \sqrt{2}/2 < x \le 1]$

3.91 Determinare i numeri reali x che soddisfano le disequazioni

$$(a) \quad 12\,(\arccos x)^2 - 8\,\pi \arccos x + \pi^2 > 0$$

$$(b) \quad (\arccos\ x)^2 - (\frac{\pi}{3} + 3)(\arccos\ x) + \pi < 0$$

$[(a)\ 0 < x < \sqrt{3}/2;\ (b)\ -1 \le x < 1/2]$

La *funzione arcotangente* ($y = \operatorname{arctg}\ x$) è *strettamente crescente* su tutto l'asse reale, cioè:

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2.$$

Da tale proprietà di monotonia, dato che la funzione arcotangente assume valori nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, anche con riferimento alla figura 3.12, otteniamo il seguente schema di risoluzione:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x > a \\ a \ge \pi/2 \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x > a \\ a \le -\pi/2 \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x > a \\ -\pi/2 < a < \pi/2 \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \text{scelto } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che} \\ \operatorname{arctg} x_0 = a \text{ (cioè } \operatorname{tg} a = x_0\text{),} \\ \text{le soluzioni sono: } x > x_0. \end{array}$$

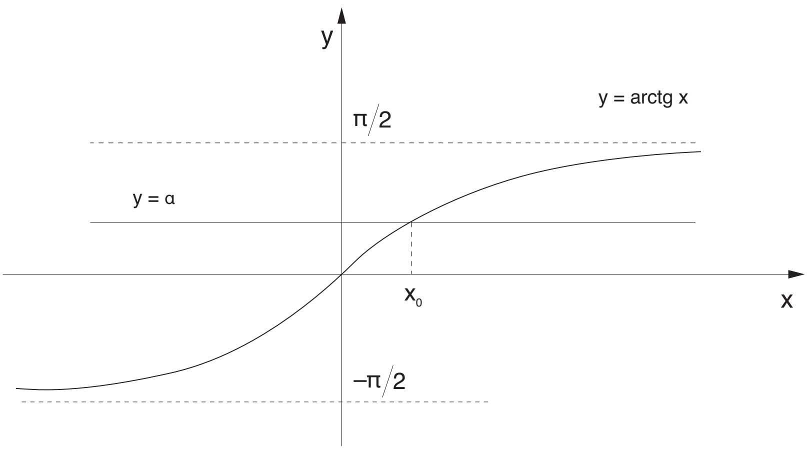


figura 3.12

In modo analogo otteniamo uno schema di risoluzione per la disequazione arctg $x < a$:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{arctg} x < a \\ a \geq \pi/2\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,;$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{arctg} x < a \\ a \leq -\pi/2\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{arctg} x < a \\ -\pi/2 < a < \pi/2\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{l}\text{scelto } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che} \\ \operatorname{arctg} x_0 = a \text{ (cioè } \operatorname{tg} a = x_0), \\ \text{le soluzioni sono: } x < x_0.\end{array}$$

3.92 Risolvere le disequazioni

(a) $\operatorname{arctg} x > -\pi/4$ $\qquad$ (b) $\operatorname{arctg} x < \pi/3$

[(a) $x > -1$; (b) $x < \sqrt{3}$]

3.93 Risolvere le disequazioni

(a) $\operatorname{arctg} x < 0$ $\qquad$ (b) $\operatorname{arctg} x > -2$

(c) $\operatorname{arctg} x > 2$ $\qquad$ (d) $\operatorname{arctg} x < 1$

[(a) $x < 0$; (b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$; (c) nessuna soluzione; (d) $x < x_0 = \operatorname{arctg} 1$]

3.94 Determinare i numeri reali x che soddisfano le disequazioni

(a) $4\,(\operatorname{arctg} x)^2 + \pi\, arctg\, x < 0$

(b) $(\operatorname{arctg}\, x)^2 + \operatorname{arctg}\, x + 1 > 0$

(c) $(\operatorname{arctg}\, x)^2 - 5\operatorname{arctg}\, x + 6 < 0$

(d) $12\,(\operatorname{arctg}\, x)^2 - 7\,\pi \operatorname{arctg}\, x + \pi^2 > 0$

[(a) $-1 < x < 0$; (b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$; (c) nessuna soluzione; (d) $\{x < 1\} \cup \{x > \sqrt{3}\}$]

Capitolo 4

NUMERI COMPLESSI

4A. Forma algebrica e trigonometrica

Un numero complesso si può rappresentare sotto la forma

$$a + i\,b$$

con a, b numeri reali. In tal caso si dice che il numero complesso è rappresentato in *forma algebrica*. Il simbolo i prende il nome di *unità immaginaria* ed ha la proprietà che $i \cdot i = i^2 = -1$. Il numero reale a si chiama *parte reale* del numero complesso, mentre b è detto *coefficiente della parte immaginaria*. Se il coefficiente della parte immaginaria é nullo il numero è reale; se la parte reale è nulla si dice che il numero è *immaginario puro*.

Le operazioni di somma, differenza, prodotto tra numeri complessi si svolgono senza difficoltà, pur di ricordare che $i^2 = -1$. Per il quoziente conviene moltiplicare sia il dividendo $a+ib$, che il divisore $c+id$, per il *numero complesso coniugato* $c - id$:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)\,\cdot\,(c-id)}{(c+id)\,\cdot\,(c-id)}\;.$$

Il vantaggio di tale operazione è nel fatto che il prodotto $(c+id)(c-id)$ a denominatore è un numero reale; infatti:

$$(c+id)(c-id) = c^2 - (id)^2 = c^2 - i^2 d^2 = c^2 + d^2\;.$$

La divisione è quindi possibile se $c^2 + d^2 \neq 0$, cioè quando il numero complesso divisore $c + id$ è diverso da zero.

4.1 Eseguire le seguenti operazioni tra numeri complessi

$(a)\quad (1+i)+(1-2i) \qquad\qquad (b)\quad (1-i)-(1+i)$

$(c)\quad (1+i)\cdot(1-2i) \qquad\qquad (d)\quad (1+i)\cdot(1+i)$

[(a) $2-i$; (b) $-2i$; (c) $1-2i+i-2i^2=3-i$; (d) $1+2i+i^2=2i$]

4.2 Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi

$(a)\quad \dfrac{i}{1-i} \qquad\qquad (b)\quad \dfrac{1}{i}$

$(c)\quad \dfrac{1-i}{1+i} \qquad\qquad (d)\quad 13\,\dfrac{1+i}{2-3i}$

[(a) Moltiplicando numeratore e denominatore per $1+i$ otteniamo

$$\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{i-1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,i.$$

Perciò la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria del numero complesso quoziente sono rispettivamente $-1/2$ e $1/2$;
(b) $-i$; (c) $-i$; (d) $-1+5i$]

4.3 Verificare l'identità

$$(3+i)\cdot\left(1+\frac{2i}{1-i}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{(1+i)^2}\right)=10.$$

In figura 4.1 è disegnata la *rappresentazione geometrica* del numero complesso $z=a+ib$.

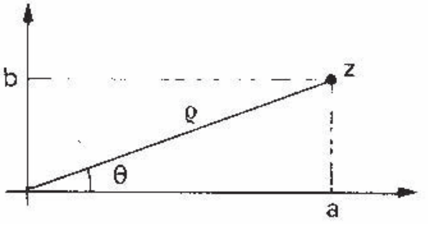


figura 4.1

Nella stessa figura 4.1 è anche rappresentato il *modulo* ρ e l'*argomento* ϑ del numero complesso z. L'argomento è determinato a meno di multipli di 2π; il valore di ϑ compreso nell'intervallo $(-\pi,\pi]$ si chiama *argomento principale*. Valgono le relazioni:

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad\qquad \begin{cases} a=\rho\cos\vartheta \\ b=\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,. \end{cases}$$

Quindi $z = a + ib = \rho \cos\vartheta + i\,\rho \operatorname{sen}\vartheta$. Perciò possiamo rappresentare il numero complesso z in *forma trigonometrica*

$$z = \rho\,(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta).$$

Dato un numero complesso z in forma algebrica: $z = a+ib$, per ottenere la corrispondente forma trigonometrica si calcola prima il modulo $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, poi si scrivono le relazioni

$$\operatorname{sen}\vartheta = \frac{b}{\rho}, \quad \cos\vartheta = \frac{a}{\rho}, \quad (\Rightarrow\ \operatorname{tg}\vartheta = \frac{b}{a} \quad \text{se}\ \ a \neq 0),$$

le quali permettono di determinare l'argomento ϑ a meno di multipli di 2π.

4.4 Calcolare il modulo e l'argomento dei numeri complessi

(a) $\quad 1+i$ $\qquad$ (b) $\quad 2-2i$

(c) $\quad \sqrt{3}+i$ $\qquad$ (d) $\quad -1+i\sqrt{3}$

[(a) $\rho = \sqrt{2}$, $\vartheta = \pi/4 + 2k\pi$; (b) $\rho = 2\sqrt{2}$, $\vartheta = -\pi/4 + 2k\pi$; (c) $\rho = 2$, $\vartheta = \pi/6 + 2k\pi$; (d) $\rho = 2$, $\vartheta = (2/3)\pi + 2k\pi$]

4.5 Scrivere in forma algebrica i numeri complessi che hanno come modulo e come argomento principale le coppie di numeri indicati di seguito

(a) $\quad \rho = 1,\ \vartheta = \pi/2$ $\qquad$ (b) $\quad \rho = 3,\ \vartheta = -\pi/2$

(c) $\quad \rho = 4,\ \vartheta = \pi/3$ $\qquad$ (d) $\quad \rho = \sqrt{2},\ \vartheta = -\pi/4$

[(a) i; (b) $-3i$; (c) $2\sqrt{3}+2i$; (d) $1-i$]

4B. Potenze e radici

Mediante le formule di addizione per il seno e il coseno (richiamate nel paragrafo 2D) è possibile esprimere in forma trigonometrica il prodotto di due numeri complessi z, z':

$$\begin{aligned} z \cdot z' =& \rho\,(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) \cdot \rho'(\cos\vartheta' + i \operatorname{sen}\vartheta') \\ =& \rho\rho'\,[(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta') + i\,(\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta' + \operatorname{sen}\vartheta'\cos\vartheta)] \\ =& \rho\rho'\,[\cos(\vartheta+\vartheta') + i \operatorname{sen}(\vartheta+\vartheta')] \end{aligned}$$

Quindi il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli, mentre l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti dei singoli fattori.

Ponendo $\vartheta' = \vartheta$, si ottiene la formula per il quadrato di un numero complesso z:

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\vartheta + i \operatorname{sen} 2\vartheta);$$

più generalmente si verifica (il lettore esegua la verifica per induzione su n) che vale la *formula di De Moivre* per la potenza n-sima, con n numero naturale:

$$z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta).$$

4.6 Verificare che la potenza sesta del numero complesso $z = (\sqrt{3} + i)/2$ vale -1.

[Il numero complesso dato ha modulo $\rho = 1$ e argomento $\vartheta = \pi/6 + 2k\pi$. Quindi in forma trigonometrica si scrive $z = \cos(\pi/6) + i \operatorname{sen}(\pi/6)$. Dalla formula di De Moivre si ottiene quindi $z^6 = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$]

4.7 Determinare la forma algebrica dei numeri complessi

$$(a) \quad (1-i)^6 \qquad (b) \quad (1+i)^8 \qquad (c) \quad (1-i)^{12}$$

[(a) $8i$; (b) 16; (c) -64]

4.8 Determinare la forma algebrica dei numeri complessi

$$(a) \quad (\sqrt{3}+i)^6 \qquad (b) \quad \left(\frac{1}{i}\right)^4 \qquad (c) \quad \left(\frac{1+i}{i-1}\right)^3$$

[(a) -64; (b) 1; (c) i]

Una radice n-sima di un numero complesso z è un numero complesso w tale che $w^n = z$. Se i moduli e gli argomenti di z, w sono rispettivamente (ρ, ϑ), (ρ', ϑ'), dato che $w^n = z$, per le formule di De Moivre risulta

$$\rho = (\rho')^n, \qquad \vartheta + 2k\pi = n\vartheta';$$

perciò $\rho' = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{1/n}$, $\vartheta' = (\vartheta + 2k\pi)/n$.

In forma trigonometrica le radici n-sime di un numero complesso $z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$ si rappresentano nella forma

$$w_k = \rho^{1/n}\left[\cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right],$$

e si verifica che si ottengono n radici distinte (se $\rho \neq 0$), corrispondenti ai valori $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

4.9 Determinare le tre radici cubiche del numero $z = 1$.

[Il numero complesso $z = 1$ ha modulo $\rho = 1$ e argomento principale $\vartheta = 0$. Pertanto le radici cubiche sono rappresentate da

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{3}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Cioè $w_0 = \cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0 = 1$, $w_1 = \cos(2/3)\pi + i\,\mathrm{sen}\,(2/3)\pi = -1/2 + +i\sqrt{3}/2$, $w_2 = \cos(4/3)\pi + i\,\mathrm{sen}\,(4/3)\pi = -1/2 - i\sqrt{3}/2$. In figura 4.2 sono rappresentati geometricamente w_0, w_1, w_2 nel piano complesso]

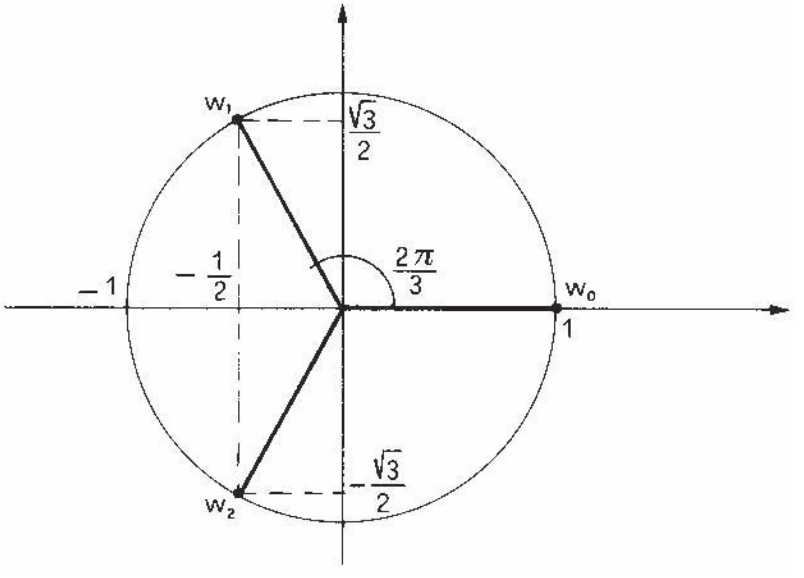


figura 4.2

4.10 Determinare le radici quadrate dei numeri complessi

(a) 1 $\quad (b)$ -1 $\quad (c)$ i $\quad (d)$ $-i$

[(a) ± 1; (b) $\pm i$; (c) $(\pm\sqrt{2}/2)\,(1+i)$; (d) $(\pm\sqrt{2}/2)\,(1-i)$]

4.11 Determinare le radici terze dei numeri complessi

(a) 8 $\quad (b)$ -8

[(a) 2, $-1 \pm i\sqrt{3}$; (b) -2, $1 \pm i\sqrt{3}$]

4.12 Determinare le radici quarte dei numeri complessi

(a) 1 $\quad (b)$ -4

[(a) ± 1, $\pm i$; (b) $\pm(1+i)$, $\pm(1-i)$]

4.13 Determinare le radici cubiche di $-i$.

[i, $\pm\sqrt{3}/2 - i/2$]

4.14 Verificare che le radici quadrate di un numero complesso (non nullo) sono una opposta dell'altra.

[Sia $z = \rho(\cos\vartheta + i\ \operatorname{sen}\vartheta)$. Allora $w_0 = \sqrt{\rho}\,[\cos\,(\vartheta/2) + i\operatorname{sen}\,(\vartheta/2)]$ è una delle due radici, mentre l'altra è

$$w_1 = \sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \pi\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta}{2} + \pi\right)\right] = -\sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right]$$

Perciò $w_1 = -w_0$]

4.15 Verificare che le radici quadrate di un numero reale negativo $-a$ $(a > 0)$ sono date da $\pm\, i\sqrt{a}$.

[Il numero complesso $-a$ $(a > 0)$ ha modulo $\rho = a$ ed argomento principale $\vartheta = \pi$. Le sue radici quadrate sono quindi

$$\sqrt{a}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{a}, \quad \sqrt{a}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt{a}\,]$$

4C. Radici complesse di equazioni algebriche

Un'*equazione algebrica* di grado $n \in \mathbb{N}$ nel campo complesso è un'espressione del tipo

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0;$$

n è il *grado* dell'equazione; z è la *variabile* (o incognita) complessa; a_k per $k = 0, 1, \ldots, n$ sono i *coefficienti* complessi, con $a_n \neq 0$.

Un'equazione algebrica di *primo grado* è del tipo

$$az + b = 0$$

e, se $a \neq 0$, ha per soluzione il numero complesso $z = -b/a$.

4.16 Risolvere le equazioni algebriche di primo grado

$$(a) \quad iz + 1 = 0 \qquad (b) \quad (2 + i)z - 4 + 3i = 0$$

[(a) $z = -1/i = i$; (b) $z = 1 - 2i$]

4.17 Risolvere le equazioni di primo grado

$$(a) \quad (1-i)z-2=0 \qquad (b) \quad iz+1-i=0$$

[(a) $1+i$; (b) $1+i$]

Un'equazione algebrica di *secondo grado* è del tipo

$$az^2+bz+c=0$$

con $a \neq 0$. Ha due soluzioni complesse (distinte se $\Delta = b^2-4ac \neq 0$) che sono espresse da

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Naturalmente la radice quadrata va intesa nel campo complesso, come indicato nel paragrafo precedente. Si noti che, nel campo complesso, le radici quadrate (di $\Delta = b^2-4ac$) sono due (coincidenti solo se $\Delta = 0$) e sono una opposta dell'altra (si veda l'esercizio 4.14).

4.18 Risolvere l'equazione di secondo grado $z^2+z+1=0$.

[Utilizzando la formula risolutiva si trovano due soluzioni $z=(-1\pm\sqrt{-3})/2$. Con la regola di calcolo delle radici di numeri complessi, o più semplicemente (si veda l'esercizio 4.15) osservando che

$$\sqrt{-3}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{3}=\pm i\sqrt{3},$$

si trova poi $z=(-1\pm i\sqrt{3})/2$]

4.19 Risolvere nel campo complesso le equazioni di secondo grado

$$(a) \quad z^2+4=0 \qquad (b) \quad z^2-4=0$$

[(a) $\pm 2i$; (b) ± 2]

4.20 Risolvere nel campo complesso le equazioni

$$(a) \quad 5z^2-4z+1=0 \qquad (b) \quad z^2+4z+5=0$$

[(a) $(2\pm i)/5$; (b) $-2\pm i$]

4.21 Risolvere l'equazione $4z^2-4z+3-2\sqrt{3}\,i=0$.

[La formula risolutiva fornisce $z=(1\pm\sqrt{-2+2\sqrt{3}\,i})/2$. Per calcolare la radice quadrata utilizziamo la forma trigonometrica

$$-2+2\sqrt{3}\,i = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$$

da cui $\sqrt{-2+2\sqrt{3}\,i} = \pm(1+\sqrt{3}\,i)$. Perciò le soluzioni dell'equazione data sono $z_1 = 1+(\sqrt{3}/2)\,i,\ z_2 = -(\sqrt{3}/2)\,i$]

4.22 Risolvere le equazioni di secondo grado a coefficienti complessi

$$(a) \quad iz^2 - 2z + 3i = 0 \qquad (b) \quad iz^2 + 2z - 2 = 0$$

[(a) i, $-3i$; (b) $(\pm\sqrt[4]{5}/2) + i\,(1 \pm \sqrt[4]{5}\cdot\sqrt{3}/2)$]

4.23 Risolvere l'equazione biquadratica

$$z^4 - (1+i)z^2 + i = 0.$$

[Ponendo $z^2 = w$ si ottiene l'equazione di secondo grado in w: $w^2 - (1+i)w + i = 0$, che ha per soluzioni $w = (1+i\pm\sqrt{-2i})/2$. Calcolando la radice quadrata si ottiene $w_1 = 1$, $w_2 = i$. In corrispondenza abbiamo $z^2 = 1$, $z^2 = i$, che risolte danno $z = \pm 1$, $z = \pm(1+i)/\sqrt{2}$]

4.24 Risolvere le equazioni biquadratiche

$$(a) \quad z^4 + 1 = 0 \qquad (b) \quad z^4 + (1-2i)z^2 - 2i = 0$$

[(a) $\pm(1+i)/\sqrt{2}$, $\pm(1-i)/\sqrt{2}$; (b) $\pm i$, $\pm(1+i)$]

Un altro metodo per risolvere un'equazione consiste nel sostituire all'incognita complessa z l'espressione algebrica $x + i\,y$, con x, y incognite reali, come negli esempi che seguono.

4.25 Si risolva con la sostituzione $z = x + i\,y$ l'equazione già considerata nell'esercizio 4.22 (a):

$$iz^2 - 2z + 3i = 0.$$

[Ponendo $z = x + i\,y$ si ottiene

$$\begin{aligned} 0 =& i\,(x+i\,y)^2 - 2(x+i\,y) + 3i \\ =& i\,(x^2 + 2i\,xy - y^2) - 2(x+i\,y) + 3i \\ =& i\,x^2 - 2xy - i\,y^2 - 2x - 2i\,y + 3i \\ =& -2\,(xy+x) + i\,(x^2 - y^2 - 2y + 3). \end{aligned}$$

Il numero complesso trovato è zero se e solo se sia la parte reale che il coefficiente della parte immaginaria sono nulli. In tal modo si ottiene il sistema in due equazioni e due incognite reali

$$\begin{cases} xy + x = 0 \\ x^2 - y^2 - 2y + 3 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione si scinde in $x = 0$ opure $y + 1 = 0$. Sostituendo il valore $x = 0$ nella seconda equazione, si ottiene $y^2 + 2y - 3 = 0$, cioè $y = -3$ oppure $y = 1$. Le coppie

$(x, y) = (0, -3)$, $(x, y) = (0, 1)$ sono soluzioni del sistema. In corrispondenza i numeri complessi $z = -3i$, $z = i$ sono soluzioni dell'equazione data.
Infine sostituendo $y = -1$ nella seconda equazione del sistema, si trova $x^2 + 4 = 0$, che non ha soluzioni reali. Perciò l'equazione data non ha altre soluzioni oltre quelle già indicate]

4.26 Risolvere, con la sostituzione $z = x + i\,y$, le equazioni algebriche già proposte negli esercizi da 4.18 a 4.22.

4.27 Indicato con $\overline{z} = x - i\,y$ il numero complesso coniugato di $z = x + i\,y$, si risolva l'equazione

$$z^2 + z\overline{z} - 2 + i = 0.$$

[Con la sostituzione $z = x + i\,y$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ 2xy + 1 = 0\,, \end{cases}$$

che ha per soluzioni $x = \pm 1$, $y = \mp 1/2$. Le soluzioni dell'equazione data sono quindi $z = \pm(1 - i/2)$]

4.28 Risolvere nel campo complesso le seguenti equazioni

$$(a) \quad (z + i)^3 = i \qquad (b) \quad z^3 + i = (1 + 3i)i$$

[(a) Ponendo $z + i = w$ si ottiene l'equazione $w^3 = i$. In forma trigonometrica $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$, pertanto le radici cubiche sono rappresentate da

$$w_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Cioè $w_0 = \cos(\pi/6) + i \operatorname{sen}(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$, $w_1 = \cos(5/6)\pi + i \operatorname{sen}(5/6)\pi = -\sqrt{3}/2 + i/2$, $w_2 = \cos(3/2)\pi + i \operatorname{sen}(3/2)\pi = -i$.

In corrispondenza abbiamo $z_0 = \sqrt{3}/2 - i/2$, $z_1 = -\sqrt{3}/2 - i/2$, $z_2 = -2i$;
(b) L'equazione data si scrive in modo equivalente nella forma $z^3 = -3$. Poichè in forma trigonometrica $-3 = 3(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$, le radici cubiche sono rappresentate da

$$z_k = \sqrt[3]{3}[\cos(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{2}{3}k\pi) + i \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{2}{3}k\pi)], \qquad k = 0, 1, 2.$$

In forma algebrica le soluzioni sono date da

$$z_0 = \sqrt[3]{3}(1/2 + i(\sqrt{3}/2)),\ z_1 = \sqrt[3]{3}(1/2 - i(\sqrt{3}/2)),\ z_2 = -\sqrt[3]{3}\ ]$$

4.29 Risolvere nel campo complesso la seguente equazione:

$$\left(\frac{z}{i} + 1\right)^4 = 16$$

[Ponendo $z/i + 1 = w$ si ottiene l'equazione $w^4 = 16$. In forma trigonometrica $16 = 16(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$, pertanto le radici quarte sono rappresentate da

$$w_k = 2(\cos(k/2)\pi + i \operatorname{sen}(k/2)\pi), \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Cioè $w_0 = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2$, $w_1 = 2(\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)) = 2i$, $w_2 = 2(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) = -2$, $w_3 = 2(\cos(3/2)\pi + i \operatorname{sen}(3/2)\pi = -2i$. In corrispondenza abbiamo $z_0 = i$, $z_1 = -2 - i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = 2 - i$]

4.30 Risolvere nel campo complesso la seguente equazione:

$$z^3 = (1 + i)^{12}$$

[Occorre prima calcolare $(1 + i)^{12}$. Poiché in forma trigonometrica $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4))$, applicando la formula delle potenze otteniamo

$$(1 + i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}[\cos(3\pi) + i \operatorname{sen}(3\pi)] = 64(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi).$$

Le radici cubiche di $(1 + i)^{12}$ sono rappresentate da

$$z_k = \sqrt[3]{64}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Cioè in forma algebrica $z_0 = 2 + i2\sqrt{3}$, $z_1 = -4$, $z_2 = 2 - i2\sqrt{3}$]

Capitolo 5

MATRICI E SISTEMI LINEARI

5A. Determinanti

Ricordiamo alcune proprietà delle matrici $n \times n$ e dei loro determinanti:

1) Scambiando fra loro due righe o due colonne, il determinante cambia di segno.

2) Moltiplicando tutti gli elementi di una riga (o di una colonna) per una costante, il determinante risulta moltiplicato per la stessa costante.

3) Se due righe (o due colonne) sono uguali, il determinante è nullo.

Diremo che *una riga* (o *una colonna*) *si moltiplica per un fattore* se tutti gli elementi di quella riga (o colonna) si moltiplicano per quello stesso fattore.

Diremo inoltre che una riga (risp. una colonna) di una matrice è *combinazione lineare* di altre righe (risp. colonne) se i suoi elementi si ottengono sommando i corrispondenti elementi di tali righe (risp. colonne) dopo aver moltiplicato ciascuna di queste per un fattore.

Si dimostrano allora le seguenti ulteriori proprietà:

4) Se una riga (risp. una colonna) di una matrice A è combinazione lineare di altre righe (risp. colonne) di A, allora $\det A = 0$.

5) Se ad una riga (risp. ad una colonna) si aggiunge una combinazione lineare di altre righe (risp. colonne), allora il determinante non cambia.

Infine sussiste la seguente proprietà:

6) La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi analoghi di un'altra riga (o colonna) è uguale a zero.

5.1 Calcolare il determinante delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

[det $A = -16$; det $B = 0.012$; det C=20; det D=0]

5.2 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

sia ${}^tA$ la matrice trasposta di A, cioè la matrice che ha per righe le colonne di A:

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Verificare che sussiste l'uguaglianza $\det {}^tA = \det A$.

5.3 Ricordando che il minore complementare di a_{ij} è il determinante, ottenuto da quello dato, cancellando la riga i-sima e la colonna j-sima, determinare il minore complementare di a_{14} e di a_{41} nel determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

[Il minore complementare di a_{14} si ottiene da A cancellando la prima riga e la quarta colonna ed è precisamente

$$A = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \qquad]$$

5.4 Determinare i complementi algebrici degli elementi a_{14} e a_{41}, di cui all'esercizio precedente.

[Ad esempio il complemento algebrico di a_{14} è

$$-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \qquad]$$

5.5 Sia A una *matrice triangolare superiore*, cioè tale che gli elementi al di sotto della diagonale principale sono tutti nulli:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Verificare che vale l'uguaglianza:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

[Sviluppando il determinante di A secondo la prima colonna si ha:

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sviluppando il determinante a secondo membro secondo la sua prima colonna si ha

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

e così via]

5.6 Dimostrare che

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

[Sottraendo la prima riga da ognuna delle rimanenti, si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n]$$

5.7 Sviluppare il determinante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

secondo gli elementi della prima riga. Verificare poi che la somma dei prodotti degli elementi della seconda riga per i complementi algebrici dei corrispondenti elementi della prima riga è uguale a zero.

[Si ha

$$A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 31 - 76 = -50\,]$$

5.8 Per quali valori del parametro λ il determinante

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda - 1 & 2 - 2\lambda & 2\lambda - 2 \\ 2\lambda - 2 & 3 - 2\lambda & 2\lambda - 2 \\ \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

è uguale a a zero?

[Sottraendo e sommando l'ultima colonna rispettivamente dalla prima ed alla seconda colonna, si ottiene

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\lambda - 2 \\ 0 & 1 & 2\lambda - 2 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda$$

che è zero se e solo se $\lambda = 0$]

5.9 Sviluppare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} 2x & \operatorname{sen} 3x \\ \operatorname{sen} 2x & \operatorname{sen} 3x & \operatorname{sen} 4x \\ \operatorname{sen} 3x & \operatorname{sen} 4x & \operatorname{sen} 5x \end{pmatrix}.$$

[Addizionando la terza riga alla prima, trasformando le somme in prodotti mediante le formule di prostaferesi (ved. cap. secondo) e mettendo in evidenza un fattore nella prima riga, si ottiene

$$\det A = 2\cos x \begin{vmatrix} \operatorname{sen} 2x & \operatorname{sen} 3x & \operatorname{sen} 4x \\ \operatorname{sen} 2x & \operatorname{sen} 3x & \operatorname{sen} 4x \\ \operatorname{sen} 3x & \operatorname{sen} 4x & \operatorname{sen} 5x \end{vmatrix} = 0\,]$$

5.10 Verificare che il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

è nullo, senza svilupparlo.

[Sottraendo dalla seconda riga la prima e dalla quarta riga la terza, si ottiene una matrice con due righe uguali]

5.11 Verificare che il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & -3 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

è uguale a zero.

[Sottraendo la seconda colonna dalla prima si ottiene la terza colonna]

5.12 Verificare che il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

è uguale a zero.

[La terza riga è la somma delle prime due]

5.13 sviluppare il determinante della matrice $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

[Sottraendo la prima riga da ognuna delle successive e poi sviluppando secondo gli elementi della prima colonna, si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}2^{n-1}\,]$$

5.14 Una matrice $n \times n$ di elementi a_{ij} si dice *simmetrica* se per ogni i, j risulta $a_{ij} = a_{ji}$, *antisimmetrica* se invece è

$$a_{ij} = -a_{ji}\,, \qquad\qquad \forall\, i, j.$$

Verificare che una matrice antisimmetrica di ordine n dispari ha determinante nullo.

[In primo luogo risulta $a_{ii} = -a_{ii}$ e quindi $a_{ii} = 0$ per $i = 1, \dots, n$. Pertanto, la matrice data ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando per -1 tutte le righe, il determinante non cambia perché si ottiene dall'altro scambiando le righe con le colonne. D'altra parte, per la 2) del principio del presente paragrafo, moltiplicando per -1 tutte le righe il determinante verrà moltiplicato per il fattore $(-1)^n$. Dunque $\det A = (-1)^n \det A$ che, per n dispari, implica l'asserto]

5.15 Verificare che

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2$$

5.16 Sviluppare il determinante

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

come polinomio in x.

[Addizionando alla quarta colonna la terza moltiplicata per x, la seconda moltiplicata per x^2 e la prima moltiplicata per x^3, si ha $D(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$]

5.17 Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ e sia $B = (b_{ij})$ la matrice che si ottiene da A addizionando gli elementi di una riga (risp. di una colonna) ordinatamente agli elementi di un vettore $c = (c_1, \dots, c_n)$ e lasciando inalterate le altre righe (risp. colonne).
Dimostrare che

$$\det B = \det A + \det C$$

dove C è la matrice ottenuta da A sostituendo a quella riga (risp. colonna) il vettore c.

[Indicata con $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la riga (risp. colonna) i cui elementi vanno addizionati ordinatamente a quelli del vettore c, siano $B_1, B_2, \dots, B_n$ i complementi algebrici in B degli elementi $(a_1 + c_1, a_2 + c_2, \dots, a_n + c_n)$ rispettivamente.
Ne segue:

$$\begin{aligned} \det B &= B_1(a_1 + c_1) + \ldots + B_n(a_n + c_n) = \\ &= (B_1 a_1 + \ldots + B_n a_n) + (B_1 c_1 + \ldots + B_n c_n) \\ &= \det A + \det C \ \ ] \end{aligned}$$

5.18 Sviluppare il determinante

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}$$

come polinomio in x.

[Indichiamo con σ_k, (per $k = 1, 2, \ldots, n-1$) la somma degli $\binom{n}{k}$ minori *principali* di ordine k di (a_{ij}), cioè dei minori di ordine k, la cui diagonale principale è parte della diagonale $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. Utilizzando l'esercizio 5.17, si ha facilmente

$$D(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + \sigma_{n-1} x + D(0) \quad]$$

5.19 Si chiama *determinante di Vandermonde* di n numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il determinante di ordine n

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Verificare che lo sviluppo del determinante di Vandermonde è uguale al prodotto di tutte le $n!/2!(n-2)!$ possibili differenze $a_k - a_h$ con $k > h$.

[Sottraendo da ogni riga la precedente moltiplicata per a_1 e poi sviluppando secondo gli elementi della prima colonna, si è ricondotti ad un determinante di ordine $n-1$ in ogni colonna del quale si può mettere in evidenza una differenza del tipo $a_k - a_1$.
Si ha infatti:

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Il determinante che figura a secondo membro è il determinante di Vandermonde degli $n-1$ numeri $a_2, a_3, \ldots, a_n$ e perciò vale la formula di ricorrenza

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_1) \cdot V(a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Applicando ripetutamente tale formula, si ottengono le relazioni

$$V(a_2, a_3, \ldots, a_n) = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \ldots (a_n - a_2) \cdot V(a_3, a_4, \ldots, a_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (a_{n-1} - a_{n-2})(a_n - a_{n-2}) V(a_{n-1}, a_n)$$

$$V(a_{n-1}, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_n - a_{n-1}$$

Moltiplicando membro a membro le precedenti relazioni si ottiene poi facilmente la formula

$$\begin{aligned} V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \cdot \\ \cdot (a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_2) \cdot \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cdot (a_{n-1} - a_{n-3})(a_{n-1} - a_{n-2}) \cdot \\ \cdot (a_n - a_{n-1}) \;] \end{aligned}$$

5.20 Utilizzando l'esercizio precedente, verificare che:

$$\begin{vmatrix} 1^0 & 2^0 & \dots & n^0 \\ 1^1 & 2^1 & \dots & n^1 \\ 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} = 1^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot 3^{n-3} \cdot \ldots \cdot (n-2)^2 \cdot (n-1)$$

5B. Caratteristica di una matrice

Oltre alle matrici (quadrate) $n \times n$, si possono considerare più in generale le matrici rettangolari, $m \times n$, cioè le matrici del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

con m righe ed n colonne. É ben noto che, se $m \neq n$, non si definisce il determinante di una siffatta matrice, ma che da essa si possono estrarre delle matrici quadrate i cui determinanti si dicono *minori* estratti dalla matrice rettangolare. Il numero di righe (o di colonne) della matrice estratta si chiama *ordine* del minore.

Si chiama *caratteristica* o *rango* di A l'ordine massimo dei minori non tutti nulli che si possono estrarre dalla matrice A. Perciò l'intero positico k è la caratteristica della matrice A se

i) dalla matrice A si può estrarre almeno un minore non nullo di ordine k

ii) tutti i minori di ordine maggiore di k, che si possono estrarre dalla matrice A, sono nulli

5.21 Determinare la caratteristica della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

[Poiché il minore del secondo ordine $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7 \neq 0$, la caratteristica è ≥ 2. Essendo $\det A = 0$, la caratteristica è 2]

5.22 Determinare la caratteristica di ciascuna delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 6 \\ 1 & 12 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

[$A : 2$; $B : 2$; $C : 2$; $D : 2$]

5.23 Determinare la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2]

5.24 Determinare la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \\ 6 & 2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

[3]

5.25 Determinare, in funzione del parametro λ, la caratteristica della matrice

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

[La caratteristica di $A(\lambda)$ è uguale a 3 per $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -2$; è uguale a 2 per $\lambda = -2$; è uguale a 1 per $\lambda = 1$]

5.26 Determinare, al variare del parametro λ, il rango della matrice

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda \\ 2 & 2\lambda & 5\lambda \\ 1 & 2(\lambda+1) & 4\lambda \end{pmatrix}$$

[Poiché la terza riga è la differenza tra la seconda e la prima, la matrice ha rango $r \leq 2$. Il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2\lambda \end{vmatrix} = 2(\lambda + 2)$$

è nullo per $\lambda = -2$. Pertanto, se $\lambda \neq -2$ si ha $r = 2$. Anche per $\lambda = -2$ si ha $r = 2$ perché la matrice diviene

$$A(-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -10 \\ 1 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

ed è:

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -10 \end{vmatrix} \neq 0 \,]$$

5C. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$

Sia n un intero positivo ed indichiamo con $\mathbb{R}^n$ l'insieme delle n-ple ordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di numeri reali.

Se $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, \ldots, y_n)$ sono due elementi di $\mathbb{R}^n$, si chiama *somma* di u e v e si indica con $u + v$ l'n-pla

$$u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si chiama *prodotto* di λ per u e si indica con λu l'n-pla

$$\lambda u = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

L'insieme $\mathbb{R}^n$, munito dell'addizione e della moltiplicazione sopra definite è uno *spazio vettoriale*, ed i suoi elementi si chiamano anche *vettori*. Il vettore $0 = (0, \ldots, 0)$ si chiama *vettore nullo*.

Sia $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ una k-pla di vettori di $\mathbb{R}^n$. Si chiama *combinazione lineare* di $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ogni vettore della forma

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k,$$

ove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sono numeri reali.

Si dimostra che l'insieme E di tutte le possibili combinazioni lineari di $u_1, u_2, \ldots, u_k$ è un *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^n$, cioè gode delle seguenti proprietà:

$$u, v \in E \quad \Rightarrow \quad u + v \in E$$

$$\lambda \in \mathbb{R},\ u \in E \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in E$$

e prende il nome di *sottospazio vettoriale generato* da $(u_1, \ldots, u_k)$.

Una k-pla $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ di vettori di $\mathbb{R}^n$ si chiama *famiglia generatrice* di $\mathbb{R}^n$ se il sottospazio vettoriale generato da $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ coincide con $\mathbb{R}^n$; cioè se

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^n, \quad \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad \text{tali che}$$

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k.$$

I vettori $u_1, u_2, \ldots, u_k$ si dicono *linearmente indipendenti* se, per $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

altrimenti si dice che essi sono *linearmente dipendenti*.

Si verifica che se i vettori $(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$ sono linearmente indipendenti e se u_k non è combinazione lineare di $(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$, allora anche i vettori $(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_k)$ sono linearmente indipendenti.

Inoltre i vettori $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno almeno di essi è combinazione lineare dei rimanenti.

Si chiama *base* di $\mathbb{R}^n$ una famiglia generatrice di $\mathbb{R}^n$ costituita da vettori linearmente indipendenti.

Posto $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$ $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$, la famiglia $(e_1, \ldots, e_n)$ è una particolare base di $\mathbb{R}^n$, detta *base canonica* di $\mathbb{R}^n$.

Siano $u_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $u_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$, $\ldots\ldots\ldots$, $u_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$, dei vettori di $\mathbb{R}^n$.

Si chiama *matrice nella base canonica* di $\mathbb{R}^n$ dei vettori $u_1, \ldots, u_k$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

Si dimostra che i vettori $u_1, \ldots, u_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se tale matrice ha caratteristica k.

Per stabilire se i vettori $u_1, \ldots, u_k$ sono linearmente indipendenti, ovvero se essi costituiscono una famiglia generatrice, si può applicare il *metodo di Gauss*:
indichiamo con $L_1, L_2, \ldots, L_n$ le righe della matrice A;

- se $a_{11} \neq 0$, sostituiamo L_2 con $L_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} L_1$, L_3 con $L_3 - \dfrac{a_{31}}{a_{11}} L_1$, ..., L_n con $L_n - \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} L_1$.

In tal modo otteniamo una matrice del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

che è la matrice di una famiglia di vettori aventi le stesse caratteristiche di quella iniziale.

- se $a_{11} = 0$: se tutti gli elementi della prima colonna sono nulli, allora u_1 è il vettore nullo ed i vettori sono linearmente dipendenti. Per stabilire se la famiglia $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ è generatrice basta verificare che la famiglia $(u_2, u_3, \dots, u_k)$ lo è, cioè si tratta di applicare il metodo alla matrice privata della sua prima colonna. Se uno degli a_{i1} non è nullo, basta scambiare tra loro le righe L_1 e L_i, riconducendosi al caso cui a_{11} non è nullo.

  Si compiono poi le stesse operazioni sulle righe $L_2, \dots, L_n$ e così via. Alla fine si ottiene una matrice di uno dei seguenti tipi:

- se $n > k$:
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{kk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
  I vettori sono linearmente indipendenti se nessuno dei numeri $c_{11}, c_{22}, \dots,$ c_{kk} è nullo; inoltre la famiglia $(u_1, \dots, u_k)$ non è generatrice.

- se $n = k$:
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$
  La famiglia $(u_1, \dots, u_k)$ è una base se nessuno dei numeri $c_{11}, c_{22}, \dots, c_{nn}$ è nullo.

- se $n < k$:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & \dots & c_{1k} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & \dots & c_{nk} \end{pmatrix}$$

I vettori sono linearmente dipendenti. Inoltre la famiglia $(u_1, \dots, u_k)$ è generatrice se e solo se nessuno dei numeri $c_{11}, c_{22}, \dots, c_{nn}$ è nullo.

5.27 Siano x_1, x_2, x_3 vettori di $\mathbb{R}^3$. Se le coppie (x_1, x_2), (x_1, x_3) e (x_2, x_3) sono costituite da vettori linearmente indipendenti, si può concludere che i vettori x_1, x_2, x_3 sono linearmente indipendenti?

[No. Ad esempio i vettori $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 0)$ e $x_3 = (1, 1, 0)$ verificano le nostre ipotesi ma, essendo $x_3 = x_1 + x_2$, i vettori dati sono linearmente dipendenti]

5.28 Siano x_1, x_2, x_3 vettori di $\mathbb{R}^3$. Se i vettori x_1, x_2, x_3 sono linearmente indipendenti, si può concludere che i vettori x_1, x_2 sono anch'essi linearmente indipendenti?

[Si. Siano λ_1 e λ_2 numeri reali tali che $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$; allora ovviamente è anche $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 0 x_3 = 0$ ed essendo x_1, x_2, x_3 linearmente indipendenti, deve essere $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Da cui l'asserto]

5.29 Sia E l'insieme dei vettori (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ tali che $x - 2y - z = 0$. Verificare che E è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $u = (1, 1, -1)$ e $v = (1, 0, 1)$.

[Sia $w = (x, y, z)$ un elemento di $\mathbb{R}^3$. Allora w è una combinazione lineare di u e v se e solo se esistono due numeri reali λ e μ tali che $w = \lambda u + \mu v$, cioè tali che

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu - \lambda \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni di tale sistema si ricava

$$\lambda = \mu \qquad \text{e} \qquad \mu = x - y$$

Tali valori di λ e μ verificano l'ultima equazione se e solo se $z = x - 2y$ cioè se solo se w appartiene ad E]

5.30 Sia $a \in \mathbb{R}$ e consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1, a, a), \qquad u_2 = (a, 1, a), \qquad u_3 = (a, a, 1).$$

Per quali valori di a i tre vettori sono linearmente indipendenti?

[Utilizziamo il metodo di Gauss. Moltiplichiamo la prima riga della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

per a e sottraiamo la riga risultante dalle altre due. Otteniamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Se $a = -1$, allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Scambiando fra loro le ultime due righe si ricava subito che i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti.
Se è $a \neq 1$, moltiplichiamo la seconda riga della matrice A per $a/(a+1)$ e sottraiamo la riga risultante dall'ultima riga. Otteniamo così la matrice B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & 0 & 1-a^2-\dfrac{a(a-a^2)}{1+a} \end{pmatrix}$$

Essendo

$$1-a^2-\frac{a(a-a^2)}{1+a} = \frac{-2a^2+a+1}{1+a}$$

ed essendo 1 e $-1/2$ le radici del trinomio $x \to -2x^2+x+1$, possiamo concludere che se $a \in \mathbb{R} - \{1, -1/2\}$, allora i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti]

5.31 Siano a, b, c numeri reali. Consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$x = (1, a, a^2); \qquad y = (1, b, b^2); \qquad z = (1, c, c^2).$$

Verificare che essi costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se il prodotto $(a-b)(a-c)(b-c)$ non è nullo, cioè se e solo se i numeri a, b, c sono a due a due distinti fra loro.

[Se due dei tre numeri a, b, c sono uguali fra loro, due dei tre vettori x, y, z saranno linearmente dipendenti.
Se a, b, c sono a due a due distinti, la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo col metodo di Gauss che il suo determinante è diverso da zero (si veda l'esercizio 5.19).
Sottraiamo la prima riga moltiplicata per a dalla seconda riga e sottraiamo la prima riga moltiplicata per a^2 dall'ultima riga. Si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

Sottraiamo ora la seconda riga moltiplicata per $b+a$ dall'ultima riga. Si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(c-a)(b+a) \end{pmatrix}$$

Essendo $b-a \neq 0$ ed essendo $c^2-a^2-(c-a)(b+a) = (c-a)(c-b) \neq 0$, il determinante è diverso da zero]

5D. Sistemi lineari di n equazioni in n incognite

Sia dato il *sistema* di n equazioni in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

i cui *coefficienti* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ costituiscono la matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e i cui *termini noti* $b_i \in \mathbb{R}$ costituiscono il vettore $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Per risolvere tale sistema si può ricorrere alla seguente

REGOLA DI CRAMER. *Se* $\det A \neq 0$ *allora il sistema (*) ammette un'unica soluzione* $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$.

Precisamente, indicata con B_j *la matrice che si ottiene da* A *sostituendo la sua* j*-sima colonna con il vettore* b*, si ha:*

$$\overline{x}_j = \det B_j / \det A.$$

Invece, se risulta $\det A = 0$, allora occorre invocare il teorema di Rouchè-Capelli esposto nel paragrafo seguente.

Il metodo di Cramer si rivela però poco efficiente nella pratica, specialmente nel caso di sistemi di n equazioni in n incognite con n abbastanza grande.

Ad esempio un sistema di 25 equazioni in 25 incognite richiede più di 26! moltiplicazioni. Questo numero è dell'ordine di 10^{26} e così un computer che sappia eseguire 10^3 moltiplicazioni al secondo, impiegherebbe 10^{16} anni per completarle.

Un altro metodo risolutivo di uso frequente è il *metodo di eliminazione di Gauss* che consiste nel trasformare il dato sistema lineare in un altro di *forma triangolare*, ad esso equivalente, cioè avente le sue stesse soluzioni.

Poiché tale metodo è sostanzialmente equivalente a quello descritto nel paragrafo 5C, ci limiteremo adesso a descriverlo nel caso particolare di un sistema di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Se è $a_{11} \neq 0$, moltiplichiamo la prima riga per a_{21}/a_{11} e sottraiamo dalla seconda riga la riga risultante. Poi moltiplichiamo la prima riga per a_{31}/a_{11} e sottraiamo dalla terza riga la riga risultante.

In tal modo otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\quad + a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Se è $a'_{22} \neq 0$, moltiplichiamo la seconda riga per a'_{32}/a'_{22} e sottraiamo dalla terza riga la riga risultante.

In tal modo otteniamo il sistema in *forma triangolare*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad + a'_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

che è equivalente a quello originario.

Il procedimento risolutivo continua riscrivendo le equazioni "all'indietro" nel modo seguente

$$\begin{aligned} x_3 &= b''_3/a''_{33} && \text{(se } a''_{33} \neq 0) \\ x_2 &= (b'_2 - a'_{23}x_3)/a'_{22} \\ x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \end{aligned}$$

Notiamo che nel trasformare un sistema in forma triangolare si eseguono le seguenti operazioni:

1. moltiplicazione di un'equazione per una costante;
2. addizione di equazioni;
3. scambio di due equazioni.

Si dimostra che, eseguendo tali operazioni su un dato sistema, si perviene ad un sistema equivalente.

5.32 Risolvere con la regola di Cramer il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 1 \\ x + 3y - z = 2 \\ -x + y + 2z = 1. \end{cases}$$

[La matrice del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ed il suo determinante è $\det A = 24$. Inoltre si ha $\det B_1 = -27$, $\det B_2 = 21$, $\det B_3 = -12$, ove con B_i abbiamo indicato la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i-sima col vettore $(1, 2, 1)$. Allora, per la regola di Cramer è

$$x = \frac{\det B_1}{\det A} = -\frac{9}{8}; \quad y = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{7}{8}; \quad x = \frac{\det B_3}{\det A} = -\frac{1}{2}\ ]$$

Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi lineari

5.33 $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$ $\qquad [x = \frac{13}{5};\ y = -3;\ z = -\frac{12}{5}]$

5.34 $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$ $\qquad [x = 1;\ y = z = 0]$

5.35 $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$ $[x = y = z = 0]$

5.36 $\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{3} \\ 2x + \dfrac{1}{3}y - z = 2 \\ x + y - z = \dfrac{4}{3} \end{cases}$ $[x = \frac{8}{15};\ y = -\frac{1}{5};\ z = -1]$

5.37 $\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = 6 \\ -x + 3y + 4z = 4 \end{cases}$ $[x = 1;\ y = -1;\ z = 2]$

5.38 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 6x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 12x_4 = 36 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$ $[x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1;\ x_4 = 3]$

5.39 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 9 \end{cases}$ $[x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1]$

5.40 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \end{cases}$ $[x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2]$

5.41 Risolvere con il metodo di Gauss il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 11y + 19z = 7 \\ 6x + 19y + 47z = 10. \end{cases}$$

[Per eliminare l'incognita x dalle ultime due equazioni, moltiplichiamo la prima equazione per 5 e sottraiamo dalla seconda equazione l'equazione risultante; poi moltiplichiamo la prima equazione per 6 e sottraiamo dalla terza equazione l'equazione risultante. Otteniamo così il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ \qquad y + 4z = -13 \\ \quad 7y + 29z = -14. \end{cases}$$

Per eliminare l'incognita y dalla terza equazione, moltiplichiamo la seconda equazione per 7 e sottraiamo dalla terza equazione l'equazione risultante. In tal modo otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ \qquad y + 4z = -13 \\ \qquad\qquad z = 77. \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione il valore di $z = 77$ dato dalla terza, si ricava $y = -321$.
Sostituendo tali valori di z e y nella prima equazione si ottiene il valore di $x = 415$.
Dunque la soluzione del sistema dato è $(415, -321, 77)$]

Risolvere con il metodo di Gauss i seguenti sistemi lineari con l'accorgimento di "riordinare" le equazioni di un sistema, nel caso che la sua prima equazione manchi dell'incognita x.

5.42 $$\begin{cases} 3x - y + z = -2 \\ x + 5y + 2z = 6 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$ [$x = -2$; $y = 0$; $z = 4$]

5.43 $$\begin{cases} \qquad y + 3z = 9 \\ 2x + 2y - z = 8 \\ -x + 5z = 8 \end{cases}$$ [$x = 2$; $y = 3$; $z = 2$]

5.44 $$\begin{cases} \qquad y + z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$$ [$x = 0$; $y = 1$; $z = 0$]

5.45 $$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z = 0 \end{cases}$$ [$x = 9$; $y = -36$; $z = 30$]

5.46 Risolvere con il metodo di Gauss il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

[Sottraiamo opportuni multipli della prima equazione dalle altre tre, in modo da eliminare x_1 in ciascuna di queste.

Otteniamo così il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ -x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 - 5x_4 = -13 \\ x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Sottraiamo ora opportuni multipli della seconda equazione dalla terza e dalla quarta, in modo da eliminare da queste la variabile x_2.
Si ha così il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ -x_2 + x_4 = 2 \\ -x_3 - 4x_4 = -11 \\ -3x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Sottraendo dalla quarta equazione il triplo della terza, otteniamo il sistema triangolare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ -x_2 + x_4 = 2 \\ -x_3 - 4x_4 = -11 \\ 13x_4 = 39 \end{cases}$$

Con una sostituzione "all'indietro" otteniamo $x_4 = 3$; $x_3 = -1$; $x_2 = 1$; $x_1 = 2$]

5.47 Discutere rispetto al parametro λ il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ \lambda y + z = 2 \\ x + y + \lambda z = -1 \end{cases}$$

[Il determinante del sistema è

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

per cui, per $\lambda \neq 1$ il sistema ammette una sola soluzione, che si ottiene con la regola di Cramer. Se invece $\lambda = 1$, con verifica diretta si trovano infinite soluzioni del tipo $(-3, y, 2-y)$]

5E. Sistemi lineari di m equazioni in n incognite

Dato il sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

le due matrici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

si chiamano *matrice incompleta* e *matrice completa* del sistema (*).

Ricordiamo il seguente notevole

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI.- *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema (*) abbia soluzioni é che le matrici completa ed incompleta del sistema abbiano la stessa caratteristica.*

Inoltre, se il sistema ha soluzioni, detta k la caratteristica delle due matrici del sistema, per risolvere il sistema stesso si procede nel modo seguente:

1. si scelgono k delle m equazioni, in modo tale che la matrice dei coefficienti di queste abbia caratteristica uguale a k

2. nel nuovo sistema ottenuto, avente k equazioni in n incognite, si scelgono k incognite, in modo tale che il determinante dei loro coefficienti sia non nullo ed alle rimanenti $n-k$ incognite si attribuiscono valori arbitrari

3. si risolve questo sistema di k equazioni in k incognite, con determinante non nullo, mediante le regole note

4. gli n numeri così trovati, costituiscono una soluzione del sistema (*).

Nel caso $k < n$, si suol dire che il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni. Nel caso $k = n$, il sistema ha evidentemente una sola soluzione.

5.48 Risolvere il sistema di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$$

[Poiché le due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe caratteristica 2, grazie al teorema di Rouchè-Capelli, il sistema ammette ∞^{3-2} cioè ∞^1 soluzioni. Per trovare le soluzioni, osserviamo che il determinante della matrice formata con i coefficienti delle incognite x e y è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\,;$$

possiamo attribuire a z un valore arbitrario e risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 - z \\ 2x - y = z + 3 \end{cases}$$

con la regola di Cramer. Essendo:

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ z+3 & -1 \end{vmatrix} = 2(z+1)\,; \qquad B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & z+3 \end{vmatrix} = 3z+1$$

si ottiene $x = 2(z+1)$; $y = 3z+1$. Le soluzioni del sistema dato sono pertanto: $x = 2(z+1)$; $y = 3z+1$; $z = z$, con z arbitrario]

5.49 Risolvere il sistema di tre equazioni in due incognite

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + y = 3 \\ 4x + 5y = 7\,. \end{cases}$$

[La matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2, essendo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$; la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

ha anch'essa caratteristica 2, perché il suo determinante è zero. Per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema ha un'unica soluzione, essendo $k = n = 2$. Per determinare tale soluzione, consideriamo il sistema delle prime due equazioni del sistema dato:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

nel quale il determinante dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Dalla regola di Cramer si trova la soluzione

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{3} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3} \quad]$$

5.50 Risolvere il sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ x \quad - z = -2 \end{cases}$$

[Essendo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

il sistema non si può risolvere con la regola di Cramer. Vediamo se è possibile utilizzare il teorema di Rouché-Capelli. La caratteristica della matrice incompleta è 2, in quanto ad esempio

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Anche la matrice completa ha caratteristica 2, giacché si verifica facilmente che tutti i suoi minori del terzo ordine sono nulli. Dunque per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette ∞^{n-k} cioè ∞^1 soluzioni. Per determinare tali soluzioni basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 - 2z \\ x = z - 2 \end{cases}$$

Si trova $x = z - 2$; $y = 5 - 4z$; $z = z$ con z arbitrario]

5.51 Risolvere il sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 4z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

[La matrice incompleta ha caratteristica 2, mentre quella completa ha caratteristica 3. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ammette alcuna soluzione]

5.52 Studiare al variare del parametro λ il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 2x + 2y + \lambda z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

[Il determinante della matrice incompleta è uguale a $\lambda - 6$. Pertanto per $\lambda \neq 6$ il sistema ammette un'unica soluzione e precisamente $x = 3$; $y = z = 0$. Per $\lambda = 6$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni]

5.53 Studiare il sistema

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + 2z = 6 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.
[Il determinante dei coefficienti è $2\lambda - 8$. Per $\lambda \neq 4$ il sistema ammette l'unica soluzione $x = 0$; $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{5}{2}$. Per $\lambda = 4$ il sistema ha ∞^1 soluzioni: $x = 1 - 2k$; $y = k$; $z = 3k + 1$ al variare di k]

5.54 Studiare il sistema

$$\begin{cases} x + 5y + \lambda z = 1 \\ 2x + \lambda y + 5z = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

[I minori di ordine 2 della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & \lambda \\ 2 & \lambda & 5 \end{pmatrix}$$

non si annullano mai simultaneamente. Dunque per ogni valore di λ avremo ∞^1 soluzioni. Per $\lambda \neq 10$ avremo le soluzioni

$$x = \frac{5 - \lambda + k(\lambda^2 - 25)}{10 - \lambda}, \quad y = \frac{1 + (5 - 2\lambda)k}{10 - \lambda}, \quad z = k$$

al variare di k. Per $\lambda = 10$ si hanno le soluzioni

$$x = \frac{1}{3} - 5k, \quad y = k, \quad z = \frac{1}{15}$$

al variare di k]

5.55 Risolvere al variare del parametro λ, il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + \lambda y \quad = 4 \\ 2x + (\lambda + 1)y + z = 10 \end{cases}$$

[Poiché la terza equazione è somma delle prime due, il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + \lambda y \quad = 4. \end{cases}$$

Poiché la matrice dei coefficienti di questo sistema ha rango 2 per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, occorre distinguere il caso $\lambda \neq 1$, nel quale avremo le soluzioni

$$x = 6 - k - \frac{k-2}{\lambda - 1}, \quad y = \frac{k-2}{\lambda - 1}, \quad z = k$$

al variare di k, dal caso $\lambda = 1$, nel quale avremo le soluzioni

$$x = k, \quad y = 4 - k, \quad z = 2$$

al variare di k]

5.56 Discutere il sistema

$$\begin{cases} x - 2\lambda y + \lambda z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ \lambda x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$

[La matrice incompleta di questo sistema di 3 equazioni in 3 incognite avrà caratteristica 3 se e solo se risulta diverso da zero il determinante

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -2\lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & -2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1,$$

cioè se e solo se $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -1$. In tal caso il sistema ha un'unica soluzione

$$x = \frac{2}{\lambda + 1}, \quad y = 0, \quad z = \frac{2}{\lambda + 1}.$$

Per $\lambda = 1$ la prima e la terza equazione coincidono, per cui basterà studiare il sistema costituito dalle prime due. La matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

di tale sistema ha caratteristica 2 e quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni che si ottengono con la regola di Cramer attribuendo valori arbitrari ad una incognita (ad una qualsiasi delle incognite, in quanto tutti i minori del 2° ordine sono diversi da zero).

Per $\lambda = -1$, la matrice incompleta ha caratteristica 2, mentre quella incompleta ha caratteristica 3 in quanto il suo minore

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

è diverso da zero. Pertanto, per $\lambda = -1$, il sistema non ha soluzione]

5.57 Risolvere il sistema di tre equazioni in quattro incognite

$$\begin{cases} x - y + 2z \quad = 2 \\ x + y + 3z + t = 1 \\ 2x - 4y + 3z - t = 5 \end{cases}$$

[Consideriamo le due matrici incompleta e completa del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

poiché la terza riga si ottiene sottraendo dagli elementi della prima riga, moltiplicati per 3, i corrispondenti elementi della seconda, tutti i minori del terzo ordine di tali matrici sono nulli. Essendo poi

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

le due matrici hanno caratteristica 2, e perciò il sistema ammette ∞^2 soluzioni, che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - y = 2 - 2z \\ x + y = 1 - 3z - t \end{cases}$$

Si trova $x = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}z - \frac{1}{2}t$, $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t$, $z = z$, $t = t$]

5F. Applicazioni lineari

Siano E, F due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ e sia $\phi : E \longrightarrow F$ un'*applicazione lineare* di E in F, cioè una funzione da E verso F tale che

$$\phi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 \phi(u_1) + \lambda_2 \phi(u_2)$$

per ogni u_1, $u_2 \in E$ e per ogni λ_1, $\lambda_2 \in R$.

Si chiama *nucleo* di ϕ l'insieme $\text{Ker}\phi$ dei vettori $u \in E$ la cui immagine mediante ϕ è il vettore nullo di F.

Si chiama *immagine* di ϕ l'insieme $\text{Im}\phi$ dei vettori $v \in F$ del tipo $v = \phi(u)$ con $u \in E$.

Sia $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

L'applicazione ϕ è univocamente determinata da $(\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n))$. Si chiama *matrice di* ϕ la matrice della famiglia $(\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n))$ nella base canonica di $\mathbb{R}^m$.

Sia $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Si dimostra che la funzione ϕ è iniettiva se e solo se è verificata una delle seguenti condizioni fra loro equivalenti

i) $\ker\phi = \{0\}$

j) i vettori $\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n)$ sono linearmente indipendenti.

L'immagine di ϕ, Imϕ é il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ generato dalla famiglia $(\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n))$. Pertanto ϕ è suriettiva se e solo se tale famiglia è generatrice.

Alla luce di tali nozioni e risultati possiamo interpretare in modo diverso la questione della risoluzione di un sistema di m equazioni in n incognite. Precisamente, considerato il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\,, \end{cases}$$

sia $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ l'applicazione lineare di matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Posto $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, siamo così ricondotti a risolvere in $\mathbb{R}^n$ l'equazione nell'incognita u

$$(*) \qquad \phi(u) = b.$$

Se ϕ è iniettiva e suriettiva, il sistema ammette un'unica soluzione. Altrimenti, se u è una soluzione di (*), allora l'insieme delle soluzioni di (*) è costituito dai vettori $v + u$, ove $v \in$ Kerϕ.

5.58 Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e sia $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare la cui matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice dell'applicazione lineare $\psi \circ \phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

[Per determinare la matrice $\psi \circ \phi$, basta determinare l'immagine mediante $\psi \circ \phi$ di ciascuno dei vettori $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$ della base canonica di $\mathbb{R}^2$.
Essendo $\phi(e_1) = \phi(1, 0) = (1, 0, 2)$, si ha

$$\psi \circ \phi(e_1) = \psi(1, 0, 2) = \psi(1, 0, 0) + 2\psi(0, 0, 1) = (1, -1) + 2(0, 1) = (1, 1)$$

Analogamente, essendo $\phi(e_2) = \phi(0, 1) = (1, 2, -1)$, si ha

$$\begin{aligned}\psi \circ \phi(e_2) = \psi(1, 2, -1) &= \psi(1, 0, 0) + 2\psi(0, 1, 0) - \psi(0, 0, 1) = \\ &= (1, -1) + 2(4, 2) - (0, 1) = (9, 2)\end{aligned}$$

Pertanto la matrice di $\psi \circ \phi$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad]$$

5.59 Sia ϕ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$ la cui matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare Imϕ e Kerϕ.

[Per ogni elemento $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ si ha $\phi(u) = (x + y - z + 2t, x + y + 3t, -x + z)$. Il vettore u appartiene perciò a Kerϕ se e solo se

$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 0 \\ x + y \quad + 3t = 0 \\ -x \quad + z \quad = 0 \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema sottraiamo la prima equazione dalla seconda, addizioniamo alla prima la terza equazione e lasciamo inalterata la terza equazione.
Si ottiene così il sistema equivalente

$$\begin{cases} z + t = 0 \\ y + 2t = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}$$

Pertanto Kerϕ è la retta di $\mathbb{R}^4$ generata dal vettore $(-1, -2, -1, 1)$. Determiniamo ora Imϕ. Questo è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dalle immagini mediante ϕ dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$, cioè dai vettori $(1, 1, -1)$, $(1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, $(2, 3, 0)$.
Verifichiamo che i vettori $e_1 = (1, 1, -1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ ed $e_3 = (-1, 0, 1)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, cioè che essi sono linearmente indipendenti.

Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il vettore $xe_1 + ye_2 + ze_3$ è nullo se e solo se

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

Utilizzando le stesse combinazioni lineari di equazioni che nel sistema precedentemente studiato, si ottiene come unica soluzione il vettore $(0, 0, 0)$. Allora e_1, e_2, e_3 sono linearmente indipendenti e $\mathrm{Im}\phi = \mathbb{R}^3$]

5G. Autovalori

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ ad elementi reali. Si chiama *autovalore* di A ogni soluzione λ dell'equazione

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{18}$$

ove con I abbiamo indicato la matrice identica $I = (\delta_{ij})$ ove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker, cioè $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Perciò l'equazione (18) può essere riscritta esplicitamente come

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

Evidentemente, il determinante a primo membro della (19) genera un polinomio di grado n in λ, per cui (19) è un'equazione algebrica di grado n in λ. Pertanto, a norma del teorema fondamentale dell'algebra, essa ammette n soluzioni nel campo complesso. Se inoltre la matrice A è simmetrica, si dimostra che tali soluzioni sono tutte reali.

Dunque, una matrice simmetrica ha n autovalori reali contati con la dovuta molteplicità.

Il polinomio a primo membro della (19) si chiama *polinomio caratteristico* della matrice A e si verifica che esso ha la forma (vedi esercizio 5.18)

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A = 0.$$

Consideriamo ora il sistema lineare

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

ove λ è un autovalore di A. Essendo soddisfatta la (19), tale sistema ammette almeno una soluzione non banale, cioè diversa dal vettore nullo di $\mathbb{R}^n$. Una tale soluzione si chiama *autovettore* di A corrispondente all'autovalore λ.

Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è un autovettore di A, evidentemente tale è anche kx per $k \neq 0$ e corrisponde allo stesso autovalore.

5.60 Tenendo conto dell'esercizio 5.18 verificare che l'equazione caratteristica (19) può essere scritta sotto la forma

$$\lambda^n - \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)\lambda^{n-1} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^n \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \lambda^{n-2} + \tag{20}$$

$$- \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^n \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \lambda^{n-3} + \ldots + (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Si noti inoltre che il coefficiente di λ^{n-2} è una sommatoria di $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ addendi, quello di λ^{n-3}, di $\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}$ addendi e così via.

5.61 Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[L'equazione caratteristica è

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

ed ammette le soluzioni $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$.
Separatamente, per ciascun autovalore, determiniamo il corrispondente autovettore: per $\lambda_1 = 6$ dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

posto $x_2 = k$, si ha $x_1 = 4k$ e perciò l'autovettore corrspondente a $\lambda_1 = 6$ è del tipo $(4k, k)$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Analogamente si vede che l'autovettore corrspondente a $\lambda_2 = 1$ è del tipo $(k, -k)$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$]

5.62 Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

[Il polinomio caratteristico è

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162$$

perciò l'equazione caratteristica è

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9) = 0$$

e gli autovalori sono $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.
Separatamente, per ciascun autovalore cerchiamo il corrispondente autovettore: per $\lambda_1 = 3$ dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 \qquad = 0 \\ 2x_1 \qquad + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

posto $x_3 = -k$, si ha $x_1 = x_2 = 2k$, con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$; per $\lambda_2 = 6$, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \qquad -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 \qquad = 0 \\ 2x_1 \qquad + x_3 = 0 \end{cases}$$

posto $x_1 = -k$, si ha $x_2 = x_3 = 2k$, con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$; per $\lambda_3 = 9$, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 \qquad = 0 \\ 2x_1 \qquad - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

posto $x_2 = -k$, si ha $x_1 = x_3 = 2k$, con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Dunque l'autovettore corrispondente a λ_1 è del tipo $(2k, 2k, -k)$; quello corrispondente a λ_2 è del tipo $(-k, 2k, 2k)$; quello corrispondente a λ_3 è del tipo $(2k, -k, 2k)$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$]

5.63 Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

[Gli autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$; i corrispondenti autovettori sono $(1, 2, -1)$; $(-2, 1, 0)$; $(3, 0, 1)$]

5.64 Determinare gli autovalori (complessi) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} - \{0\}$.

[Si ha $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$]

5.65 Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

[Si ha $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$, $\lambda_3 = a_{33}$; i corrispondenti autovettori sono $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$]

5H. Matrici inverse

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Diremo che A è *invertibile* se esiste una matrice A^{-1} di ordine n tale che

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

ove I è la *matrice identica*, cioè

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

In tal caso la matrice A^{-1} si chiama *inversa* di A. Si può verificare che, se esiste, l'inversa di una matrice è unica.

Ad esempio, la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

è la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$

in quanto risulta

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

in simboli risulta quindi $B = A^{-1}$. Sussiste il seguente

TEOREMA. - *Se $A = (a_{ij})$ è una matrice di ordine n con det $A \neq 0$, allora A è invertibile e gli elementi b_{ij} della matrice inversa A^{-1} sono dati da*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A},$$

ove det A_{ji} è il minore complementare di a_{ji} (si veda l'esercizio 5.3)

5.66 Verificare che, se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ha determinante det $A \neq 0$, allora la sua inversa è data da

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det A} & -\dfrac{a_{12}}{\det A} \\[2ex] -\dfrac{a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

Capitolo 6

GEOMETRIA ANALITICA

6A. Coordinate cartesiane nel piano

Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali, la distanza $\overline{P_0P_1}$ di due punti P_0, P_1 di coordinate (x_0, y_0) e (x_1, y_1) si esprime mediante la formula

$$\overline{P_0P_1} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

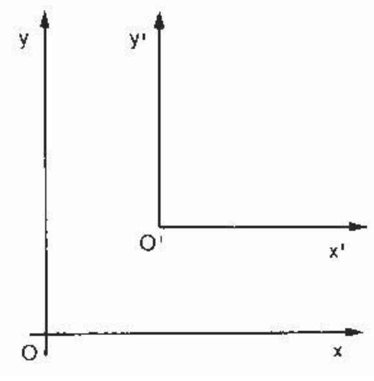
In particolare, la distanza del punto $P \equiv (x, y)$ dall'origine O è data da

$$\overline{PO} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le coordinante (x, y) del punto medio P del segmento P_0P_1 di estremi $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ sono date da $x = (x_0 + x_1)/2$ e $y = (y_0 + y_1)/2$.

Ricordiamo che il problema del cambiamento di coordinate cartesiane consiste nell'esprimere le coordiante di un punto P rispetto ad un sistema Oxy, mediante le coordinate dello stesso punto in un nuovo sistema $O'x'y'$.

1° caso: *traslazione degli assi.* Gli assi dei due sistemi di riferimento sono paralleli ed equiversi e siano (a, b) le coordinate di O' nel sistema di riferimento Oxy (fig. 6.1).



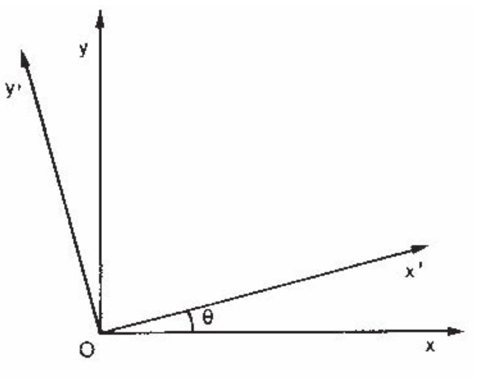


figura 6.1 e figura 6.2

Dette (x, y) le coordinate del punto P nel sistema di riferimento Oxy e (x', y') le coordinate dello stesso punto nel nuovo sistema di riferimento, le equazioni del cambiamento di coordinate sono

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b. \end{cases}$$

2° caso: *rotazione degli assi.* I due sistemi di riferimento hanno la stessa origine O ma il nuovo sistema di assi si ottiene dal primo mediante la rotazione di un angolo ϑ (figura 6.2).

Dette (x, y) le coordinate del punto P nel sistema di riferimento Oxy e (x', y') quelle dello stesso punto nel nuovo sistema di riferimento $O'x'y'$, le equazioni del cambiamento di coordinate sono

$$\begin{cases} x' = x\cos\vartheta + y\mathrm{sen}\,\vartheta \\ y' = -x\mathrm{sen}\,\vartheta + y\cos\vartheta \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} x = x'\cos\vartheta - y'\mathrm{sen}\,\vartheta \\ y = x'\mathrm{sen}\,\vartheta + y'\cos\vartheta \end{cases}$$

3° caso: *cambiamento generale di coordinate.* I due sistemi sono arbitrari con origine O e O' rispettivamente; sia ϑ l'angolo $\widehat{xx'}$ e siano (a, b) le coordinate di O' nel sistema Oxy (fig. 6.3).

Allora le equazioni del cambiamento di coordinate sono

$$\begin{cases} x' = (x - a)\cos\vartheta + (y - b)\mathrm{sen}\,\vartheta \\ y' = -(x - a)\mathrm{sen}\,\vartheta + (y - b)\cos\vartheta \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} x = x'\cos\vartheta - y'\mathrm{sen}\,\vartheta + a \\ y = x'\mathrm{sen}\,\vartheta + y'\cos\vartheta + b \end{cases}$$

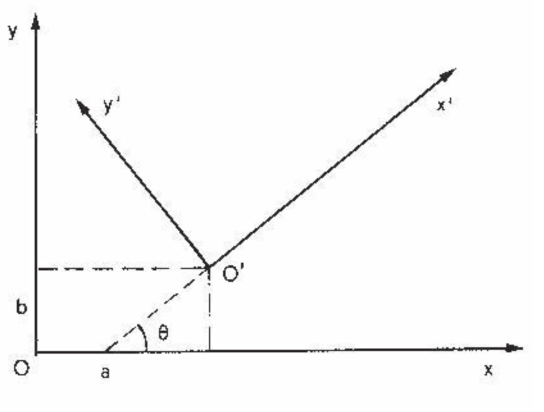


figura 6.3

6.1 Dati i numeri reali positivi $x > 0$ e $y > 0$, dire a quale quadrante appartiene ciascuno dei seguenti punti del piano cartesiano

$$(x, y); \quad (-x, -y); \quad (x, -y); \quad (-x, y).$$

[1°; 3°; 4°; 2°]

6.2 Determinare le coordinate del punto medio del segmento di estremi A, B.

(a) $A \equiv (1, 2)$; $B \equiv (2, 1)$ (b) $A \equiv (1, 2)$; $B \equiv (3, 3)$

(c) $A \equiv (0, -1)$; $B \equiv (-1, -2)$ (d) $A \equiv (0, \sqrt{3})$; $B \equiv (1, \sqrt{2})$

[(a) $(3/2, 3/2)$; (b) $(2, 5/2)$; (c) $(-1/2, -3/2)$; (d) $(1/2, (\sqrt{3} + \sqrt{2})/2)$]

6.3 Calcolare la distanza delle seguenti coppie di punti A, B del piano cartesiano.

(a) $A \equiv (0, 0)$; $B \equiv (1, 1)$

(b) $A \equiv (0, 0)$; $B \equiv (0, 1)$

(c) $A \equiv (2/3, 1)$; $B \equiv (1, 2/3)$

(d) $A \equiv (1 + \sqrt{3}, 2)$; $B \equiv (\sqrt{3}, 2 + \sqrt{2})$

[(a) $\sqrt{2}$; (b) 1; (c) $\sqrt{2}/3$; (d) $\sqrt{3}$]

6.4 Determinare il perimetro del triangolo i cui vertici hanno le seguenti coordinate nel piano cartesiano: $A \equiv (2,-1)$, $B \equiv (2,4)$, $C \equiv (4,0)$.

[$5+\sqrt{20}+\sqrt{5}$]

6.5 Verificare che il triangolo di vertici $A \equiv (0,0)$, $B \equiv (2,2)$, $C \equiv (1-\sqrt{3}, 1+$ $+\sqrt{3})$ è equilatero.

6.6 Determinare il numero positivo x tale che il triangolo di vertici $A \equiv (0,0)$, $B \equiv (1,0)$, $C \equiv (1/2, x)$ sia equilatero.

[$x = \sqrt{3}/2$]

6.7 Determinare le coordinate del punto equidistante dai tre punti $A \equiv (0,0)$, $B \equiv (-1,1)$, $C \equiv (0,2)$.

[$(0,1)$]

6.8 Quali sono le nuove coordinate dei punti $(-1,4)$, $(3,1)$, $(3,-2)$ se l'origine si sposta nel punto $(2,1)$ ed i nuovi assi sono paralleli ed equiversi ai primi?

[$(-3,3)$; $(1,0)$; $(1,-3)$]

6.9 Quali sono le nuove coordinate del punto $(1,1)$ quando si fanno ruotare gli assi attorno all'origine di un angolo di $60°$?

[$(1+\sqrt{3})/2, (1-\sqrt{3})/2$]

6B. Equazioni della retta

Ricordiamo che ad ogni retta r di un piano, nel quale si sia fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali, si può associare un'equazione di primo grado in due variabili

$$(1) \qquad ax + by + c = 0$$

nel senso che le coordinate di tutti (e solo) i punti della retta soddisfano tale equazione. L'equazione (1) prende il nome di *equazione cartesiana* della retta r.

Nel caso particolare che r sia parallela all'asse delle y, l'equazione (1) assume la forma $x - c = 0$ mentre se r è parallela all'asse x, la (1) assume la forma $y - c = 0$.

Viceversa, ad ogni equazione del tipo (1), con a e b non entrambi nulli, si può associare una retta r di cui essa è l'equazione cartesiana.

Se nell'equazione (1) risulta $a = 0$, $b \neq 0$, allora l'equazione diviene $by+c = 0$ ovvero

$$y = -c/b$$

e rappresenta la retta parallela all'asse delle x, passante per il punto dell'asse y di ordinata $-c/b$.

Se invece è $a \neq 0$, $b = 0$, allora l'equazione diviene $ax + c = 0$ ovvero

$$x = -c/a$$

e rappresenta la retta parallela all'asse delle y, passante per il punto dell'asse x di ascissa $-c/a$.

Se infine è $c = 0$, l'equazione rappresenta una retta passante per l'origine.

A seconda del tipo di problema che si vuol studiare, l'equazione della retta assume forme particolari:

- L'*equazione esplicita* di una retta r (non parallela all'asse delle y) è

$$y = mx + q$$

ove m è il coefficiente angolare di r, cioè la tangente trigonometrica dell'angolo ϑ che l'asse delle x forma con r e q è l'ordinata all'origine di r, cioè l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse delle y (figura 6.4)

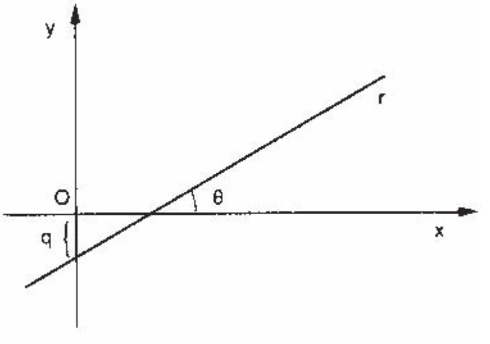


figura 6.4

- L'*equazione della retta passante per i punti* $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, (non parallela ad alcun asse coordinato) è

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

- L'*equazione segmentaria* di una retta (non passante per l'origine, nè parallela ad alcun asse) è

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

ove p è l'ascissa del punto A di intersezione della retta con l'asse delle x e q è l'ordinata del punto B di intersezione della retta con l'asse delle y (figura 6.5)

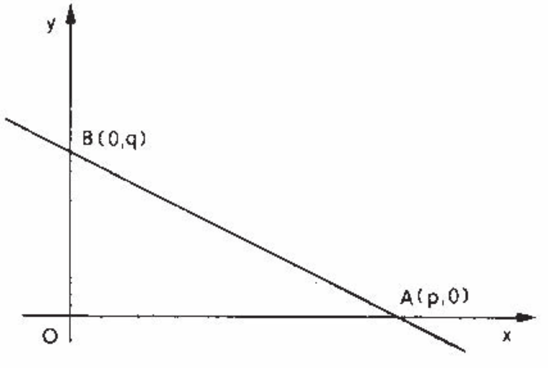


figura 6.5

- Le *equazioni parametriche* di una retta sono del tipo

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda t \\ y = y_0 + \mu t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

ove (x_0, y_0) sono le coordinate di un punto della retta e λ, μ sono due numeri non entrambi nulli, detti *numeri direttori* della retta.

6.10 Qual è l'equazione della retta i cui punti hanno ascissa uguale a d?

[$x = d$]

6.11 Qual è l'equazione della retta i cui punti hanno ordinata uguale a c?

[$y = c$]

6.12 Scrivere le equazioni delle rette passanti per le seguenti coppie A, B di punti del piano cartesiano

(a) $A \equiv (0,0)$; $B \equiv (3,3)$ (b) $A \equiv (0,1)$; $B \equiv (3,4)$

$(c)\quad A \equiv (2,5);\qquad B \equiv (6,3)\qquad\qquad (d)\quad A \equiv (0,-1);\quad B \equiv (1/3,0)$

$(e)\quad A \equiv (1/5,3);\quad B \equiv (1,2/3)\qquad\quad (f)\quad A \equiv (5,1/3);\quad B \equiv (1,3/2)$

[(a) $y = x$; (b) $y = x+1$; (c) $y = -x/2+6$; (d) $y = 3x-1$; (e) $35x+12y-43=0$; (f) $7x+24y-43=0$]

6.13 Determinare il coefficiente angolare della retta passante per i punti A, B indicati

$(a)\quad A \equiv (0,0);\qquad B \equiv (1,3)\qquad\qquad (b)\quad A \equiv (1,3);\quad B \equiv (-2,4)$

$(c)\quad A \equiv (0,0);\qquad B \equiv (1,0)\qquad\qquad (d)\quad A \equiv (0,0);\quad B \equiv (0,1)$

[(a) 3; (b) $-1/3$; (c) 0; (d) non è definito]

6.14 Scrivere l'equazione segmentaria di ciascuna delle rette di cui è data l'equazione cartesiana

$(a)\quad 3x+y-3=0\qquad\qquad (b)\quad x+3y-3=0$

$(c)\quad \sqrt{2}x+\pi y-\pi\sqrt{2}=0\qquad\qquad (d)\quad \sqrt{2}x+\sqrt{3}y-\sqrt{6}=0$

[(a) $x+\dfrac{y}{3}=1$; (b) $\dfrac{x}{3}+y=1$; (c) $\dfrac{x}{\pi}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}=1$; (d) $\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}=1$]

6.15 Scrivere l'equazione segmentaria della retta che interseca gli assi nei punti $A \equiv (\sqrt{2},0)$ e $B \equiv (0,\sqrt{3})$.

[$\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{y}{\sqrt{3}}=1$]

6.16 Scrivere le equazioni parametriche della retta r che congiunge l'origine O delle coordinate con il punto $A \equiv (2,3)$

[$x = 2t$; $y = 3t$ per $t \in \mathbb{R}$]

6C. Problemi sulle rette

Siano r e r' due rette di equazioni

$$(*)\qquad \begin{aligned} ax+by+c&=0\\ a'x+b'y+c'&=0 \end{aligned}$$

con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a' \neq 0$, $b' \neq 0$. Se le due rette si incontrano in un punto P, le coordinate di questo punto costituiscono una soluzione di entrambe le equazioni e perciò del sistema da esse formato.

Viceversa, se il sistema $(*)$ ammette una soluzione (x, y), allora x, y sono le coordinate di un punto comune alle due rette.

Pertanto, per stabilire se le rette r e r' sono fra loro incidenti o parallele o coincidenti basta risolvere il sistema $(*)$. Se tale sistema ha una soluzione, allora le rette r, r' sono *incidenti*. Se il sistema non ha soluzioni, le rette r, r' sono *parallele*. Se il sistema ha infinite soluzioni, le rette sono *coincidenti*.

Supponiamo ora che il determinante $ab' - a'b$ della matrice incompleta del sistema $(*)$ sia diverso da zero, cioè supponiamo che sia

$$a/a' \neq b/b';$$

allora il sistema (*) ammette l'unica soluzione

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \qquad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$$

e tali sono le coordinate dell'unico punto di intersezione delle due rette r, r'.

Se invece il determinante $ab' - a'b$ è nullo, cioè, se è

$$a/a' = b/b',$$

allora, detto k il valore comune dei rapporti a/a', b/b' si ha $a = ka'$, $b = kb'$ e il sistema $(*)$ assume la forma

$$\begin{cases} a'x + b'y = -\dfrac{c}{k} \\ a'x + b'y = -c' \end{cases}$$

da cui si vede che, se é $c/k \neq c'$ il sistema non ha soluzioni e le rette sono parallele; se invece è $c/k = c'$ allora le due equazioni del sistema coincidono e perciò $r = r'$.

Dalle considerazioni precedenti segue, in particolare, che due rette r ed r' di equazioni

$$ax + by + c = 0$$

$$a'x + b'y + c' = 0$$

sono *parallele* se e solo se esiste k tale che $a = ka'$, $b = kb'$.

Ricordiamo, invece, che tali rette sono *perpendicolari* fra loro se e solo se è $aa' + bb' = 0$.

Inoltre, l'equazione della retta passante per il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, parallela (risp. perpendicolare) alla retta di equazione $ax + by + c = 0$ è $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ (risp. $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$).

Se le rette r e r' sono espresse mediante la loro equazione esplicita

$$y = mx + q$$

$$y = m'x + q',$$

allora esse sono parallele se $m = m'$, sono perpendicolari tra loro se $mm' = -1$.

Ricordiamo infine che la distanza d del punto $P \equiv (x_0, y_0)$ dalla retta di equazione $ax + by + c = 0$ è data da $d = |ax_0 + by_0 + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$.

6.17 Determinare le coordinate del punto P di intersezione di ciascuna delle seguenti coppie di rette del piano

(a) $3x + y - 9 = 0;$ $\quad 2x + 5y - 19 = 0$

(b) $2x + 3y - 5 = 0;$ $\quad 4x + 9y - 12 = 0$

(c) $2x + 3y - 1 = 0;$ $\quad x - y + 2 = 0.$

[(a) $P \equiv (2, 3)$; (b) $P \equiv (3/2, 2/3)$; (c) $P \equiv (-1, 1)$]

6.18 Verificare che, condizione necessaria e sufficiente affinchè i tre punti $A \equiv (x_0, y_0)$, $B \equiv (x_1, y_1)$, $C \equiv (x_2, y_2)$ siano allineati su di una medesima retta è che sia

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

[Tale é infatti la condizione di compatibilità del sistema nelle incognite a, b, c

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$]

6.19 Stabilire se i tre punti A, B, C, di cui sono specificate le coordinate, sono o non sono allineati

(a) $(0, 1);\ (2, -1);\ (3, -2)$ $\qquad (b)$ $(1, 1);\ (5, 5); (13, 11)$

(c) $(1/2, 7/4);\ (0.2, 2.2);\ (1, 1)$ $\qquad (d)$ $(1, 5/3);\ (1/2, 2);\ (3, 1/3)$

[(a) si; (b) no; (c) si; (d) si]

6.20 Scrivere l'equazione della retta parallela alla retta data e passante per il punto indicato

(a) $2x+3y-1=0;\ \ P\equiv(1,1)$ (b) $2x+y-3=0;\ \ P\equiv(2,1)$

(c) $x+y-1=0;\ \ P\equiv(1,1)$ (d) $x+8y-3=0;\ \ P\equiv(3,5)$

(e) $y=mx+q;\ \ P\equiv(x_1,y_1)$.

[(a) $2x+3y-5=0$; (b) $2x+y-5=0$; (c) $x+y-2=0$; (d) $x+8y-43=0$; (e) $y=m(x-x_1)+y_1$]

6.21 Scrivere l'equazione della retta perpendicolare alla retta data e passante per il punto indicato

(a) $y=3x+1;\ \ P\equiv(0,0)$ (b) $y=2x+7;\ \ P\equiv(1,3)$

(c) $y=x+9;\ \ P\equiv(3,3)$

(d) $y=mx+q$; (con $m\neq 0$); $P\equiv(x_1,y_1)$.

[(a) $y=-(1/3)x$; (b) $y=-x/2+7/2$; (c) $y=-x+6$; (d) $y=-(x-x_1)/m+y_1$]

6.22 Determinare la distanza del punto $P\equiv(2,2)$ dalla retta di equazione $2x+y-5=0$.

[$1\sqrt{5}$]

6.23 Determinare la distanza del punto $P\equiv(1,1/3)$ dalla retta di equazione $x-y-2=0$.

[$4/3\sqrt{2}$]

6.24 I lati di un triangolo ABC hanno equazioni $x=0$; $y=0$; $x+y=a$. Determinare le coordinate dei vertici A, B e C.

[$(0,0)$; $(a,0)$; $(0,a)$]

6.25 Determinare le coordinate dei vertici del triangolo i cui lati hanno equazioni $y=0$; $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$; $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1$.

[$(a,0)$; $(b,0)$; $(ab/(a+b), ab/(a+b))$]

6.26 Scrivere le equazioni delle mediane del triangolo di vertici $A\equiv(2,3)$; $B\equiv(-2,-3)$; $C\equiv(4,-1)$.

[$x + 4y = 0$; $5x - y - 7 = 0$; $4x - 5y - 7 = 0$]

6.27 Determinare il parametro λ in modo tale che la retta r_λ di equazione

$$(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2\lambda - 1 = 0$$

soddisfi ad una delle seguenti condizioni

(*a*) passi per il punto $(1, 2)$

(*b*) sia parallela all'asse delle y

(*c*) sia perpendicolare alla retta di equazione: $2x - y + 1 = 0$.

[(*a*) Affinché la retta r_λ passi per il punto $(1, 2)$ occorre che la coppia $(1, 2)$ soddisfi l'equazione di r_λ. Deve essere perciò $\lambda + 1 + 2(\lambda - 1) + 2\lambda - 1 = 0$ e cioé $\lambda = 2/5$. (*b*) Affinché la retta r_λ risulti parallela all'asse delle y occorre che nella sua equazione manchi il termine contenente la y; dev'essere perciò $\lambda = 1$. (*c*) Affinché la retta r_λ sia perpendicolare alla retta $2x - y + 1 = 0$, occorre che il coefficiente angolare di r_λ sia uguale all'opposto del reciproco del coefficiente angolare della retta $2x - y + 1 = 0$. Si ricava $\lambda = -3$]

6D. Equazioni della circonferenza

L'equazione cartesiana della circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio $r > 0$ è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Sviluppando i calcoli si perviene ad un'equazione del tipo

$$(*) \qquad x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

con $\alpha = -2x_0$, $\beta = -2y_0$, $\gamma = x_0^2 + y_0^2 - r^2$.

Viceversa, un'equazione del tipo $(*)$ è l'equazione di una circonferenza, se e solo se è $\alpha^2/4 + \beta^2/4 - \gamma > 0$; in tal caso le coordinate del centro sono : $-\alpha/2, -\beta/2$ ed il raggio è dato da $r = \sqrt{\alpha^2/4 + \beta^2/4 - \gamma}$.

6.28 Scrivere le equazioni delle circonferenze di centro C e raggio r, con C ed r indicati

(*a*) $C \equiv (0, 0)$; $r = 2$ (*b*) $C \equiv (1, 2)$; $r = 3$

(*c*) $C \equiv (-3, 3)$; $r = 4$ (*d*) $C \equiv (1, 0)$; $r = 1/5$

[(*a*) $x^2 + y^2 - 4 = 0$; (*b*) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$; (*c*) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$; (*d*) $x^2 + y^2 - 2x + 24/25 = 0$]

6.29 Stabilire se le seguenti equazioni rappresentano o meno una circonferenza e, in caso affermativo, determinare le coordinate del centro C ed il raggio r.

(a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$; (b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$; (d) $9x^2 + 9y^2 - 6y - 26 = 0$

[(a) $C \equiv (1, -1)$; $r = 1$; (b) $C \equiv (2, -1)$; $r = 2$; (c) no; (d) $C \equiv (0, 1/3)$; $r = \sqrt{3}$]

6.30 Sia C la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$ e consideriamo la retta di equazione $y = mx + q$. Verificare che tale retta è tangente alla circonferenza C se e solo se l'equazione di secondo grado

$$(1 + m^2)x^2 + 2mqx + q^2 - r^2 = 0$$

ha due radici coincidenti.

[Basta imporre che il sistema nelle incognite x, y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = mx + q \end{cases}$$

abbia una sola soluzione]

6.31 Verificare che la retta di equazione $y = 2$ è tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$.

6.32 Scrivere l'equazione della circonferenza con centro in $(1, 1)$ e tangente all'asse delle y.

[$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$]

6.33 Determinare l'equazione della tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ nel punto $P \equiv (5, 7)$.

[$3x + 4y - 43 = 0$]

6.34 Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 + y^2 - 2x + ky + k = 0$ rappresenta una circonferenza?

[$k \neq 2$]

6.35 Determinare i punti di intersezione della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 3x - 5y + 8 = 0$ con la retta di equazione $y = 2x$.

$[(1,2)$ e $(8/5,16/5)]$

6.36 Determinare i punti di intersezione della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ con la retta di equazione $x - y - 2 = 0$.

$[(0,-2)$ e $(1,-1)]$

6.37 Determinare l'equazione della circonferenza di centro nell'origine degli assi e passante per il punto $(3,4)$.

$[x^2 + y^2 = 25]$

6.38 Scrivere l'equazione di una generica circonferenza con centro sull'asse x.

$[x^2 + y^2 + \alpha x + \gamma = 0$, con $\gamma < \alpha^2/4]$

6.39 Scrivere l'equazione di una generica circonferenza con centro sull'asse y.

$[x^2 + y^2 + \beta y + \gamma = 0$, con $\gamma < \beta^2/4]$

6.40 Scrivere l'equazione di una generica circonferenza passante per l'origine degli assi.

$[x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y = 0, \ \ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0]$

6.41 Scrivere l'equazione della circonferenza avente il centro di coordinate $(1,1)$ e passante per l'origine degli assi.

$[x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0]$

6.42 Determinare l'equazione della circonferenza passante per i tre punti non allineati di coordinate $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

$[x^2 + y^2 - x - y = 0]$

6.43 Determinare l'equazione della circonferenza passante per i tre punti non allineati di coordinate $(4,7)$, $(5,0)$, $(-3,6)$.

$[x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0]$

6.44 Determinare, al variare del parametro k, le coordinate dei punti di intersezione della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ con la retta di equazione $y = kx$.

$[(0,0)$ e $(2(k+1)/(k^2+1)), 2k(k+1)/(k^2+1)]$

6E. Luoghi geometrici. Ellisse, iperbole, parabola

Si chiama *luogo geometrico* (piano) l'insieme dei punti del piano verificante una certa proprietà.

Oltre alle rette ed alle circonferenze, che costituiscono gli esempi più semplici di luoghi geometrici, è interessante studiare le ellissi, le iperbole e le parabole.

L'*ellisse* è il luogo dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2, detti *fuochi*.

Considerando un sistema di assi cartesiani ortogonali, tali che F_1 e F_2 si trovino sull'asse delle x, con coordinate $(-c, 0)$, $(c, 0)$; detta a una costante positiva, l'ellisse costituita dai punti P tali che $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, con $a > c$, ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (fig. 6.6).

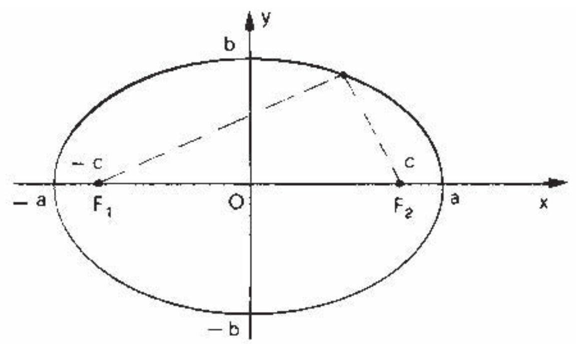


figura 6.6

I due numeri a e b si chiamano *semiassi* dell'ellisse; se risulta $a = b$, allora l'ellisse si riduce alla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio a.

Il rapporto $e = c/a$ compreso fra 0 e 1 (0 per la circonferenza) si chiama *eccentricità* dell'ellisse e misura di quanto l'ellisse, per la sua forma più o meno allungata, differisce dalla circonferenza.

Ricordiamo, infine, che i quattro punti di intersezione dell'ellisse con gli assi coordinati si chiamano *vertici* dell'ellisse.

L'*iperbole* è il l uogo dei punti del piano per cui è costante la differenza in valore assoluto delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2, detti *f uochi*.

Considerando un sistema di assi cartesiani ortogonali, tali che F_1 e F_2 si trovino sull'asse delle x con coordinate $(-c, 0)$, $(c, 0)$; detta a una costante positiva, l'iperbole costituita dai punti P tali che $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$, con $a < c$, ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (fig. 6.7).

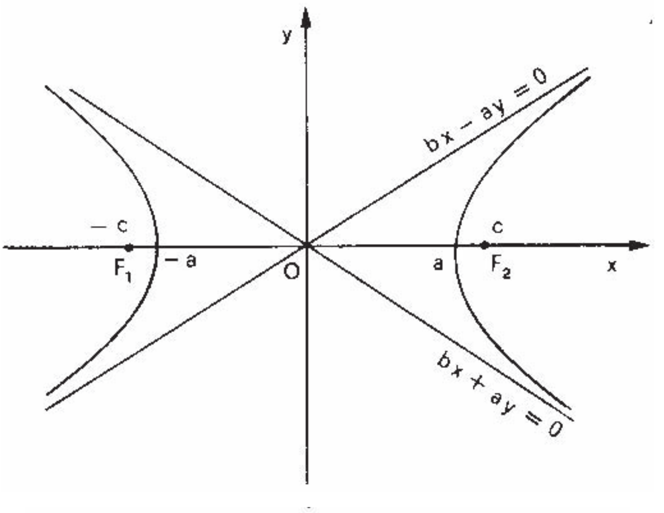


figura 6.7

I due numeri a e b si chiamano *semiassi* dell'iperbole; gli assi delle x e delle y *assi* dell'iperbole, le rette $bx - ay = 0$ e $bx + ay = 0$ *asintoti* dell'iperbole. Se risulta $a = b$ l'iperbole si dice *equilatera.*

Ricordiamo infine che i due punti di intersezione dell'iperbole con l'asse delle x si chiamano *vertici* dell'iperbole.

La *parabola* è il luogo dei punti del piano che sono equidistanti da un punto F (detto *fuoco*) e da una retta d (detta *direttrice*).

Considerando un sistema di assi cartesiani ortogonali tali che F si trovi sul semiasse positivo delle x con coordinate $(c/2, 0)$ e la retta d sia parallela all'asse delle y con equazione $x = -c/2$, si vede facilmente che l'equazione della parabola è

$$y^2 = 2cx$$

ll numero c si chiama *diametro* della parabola, l'asse delle x si chiama *asse* della parabola, il punto di intersezione della parabola col suo asse (in questo caso l'origine) si chiama *vertice* della parabola.

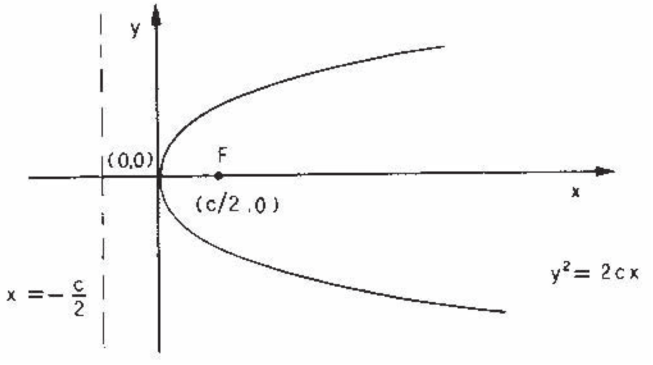


figura 6.8

Se il fuoco e la direttrice di una parabola sono orientati diversamente rispetto agli assi coordinati si ottengono equazioni diverse per la parabola stessa, pur continuando a supporre che il vertice coincida con l'origine degli assi e che il fuoco giaccia su uno degli assi.

Si hanno così altri tre tipi di equazioni, nelle quali il numero c rappresenta sempre la distanza tra il fuoco e la direttrice (fig. 6.9).

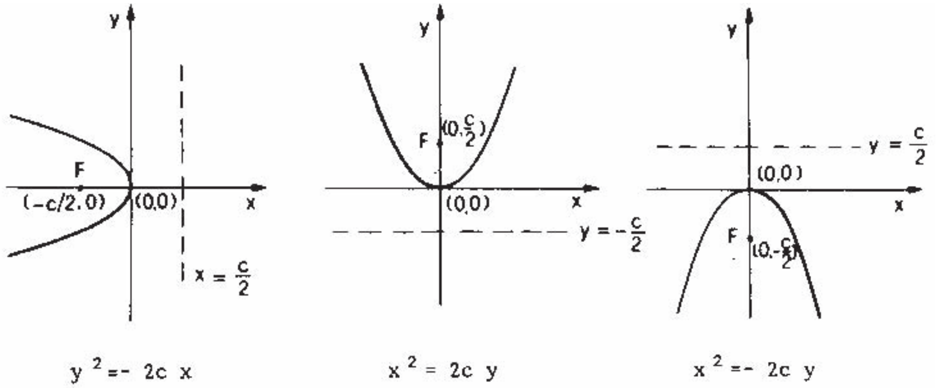


figura 6.9

L'ellisse, l'iperbole e la parabola hanno dunque in comune la proprietà di esser rappresentate da equazioni algebriche di secondo grado.

Le loro equazioni sono casi particolari della più generale equazione di secondo grado in x e y

$$(*) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

È perciò interessante studiare in generale le curve piane rappresentate da un'equazione di tale tipo. Tali curve si dicono *coniche* perché si dimostra che si possono ottenere come sezioni di un piano con un cono circolare retto.

Per lo studio della conica di equazione $(*)$ si devono esaminare i determinanti

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad\qquad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Si dimostra infatti che se è $A \neq 0$, la conica di equazione $(*)$ è un'ellisse, un'iperbole o una parabola, a seconda che sia $A_{33} > 0$ e $A \cdot a_{11} \leq 0$, oppure $A_{33} < 0$, oppure $A_{33} = 0$. Ciò va inteso nel senso che è allora possibile determinare un sistema cartesiano rispetto al quale l'equazione della curva assuma, a seconda del segno di A_{33}, una delle forme canoniche precedentemente indicate.

6.45 Calcolare i semiassi e le coordinate dei fuochi delle seguenti ellissi

$$(a) \quad x^2/25 + y^2/4 = 1 \qquad (b) \quad 4x^2 + 9y^2 = 27$$
$$(c) \quad 4x^2 + 6y^2 = 36 \qquad (d) \quad x^2/9 + y^2/5 = 1.$$

[(a) $5, 2$, $(\pm\sqrt{21}, 0)$; (b) $3\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}$, $(\pm\sqrt{15}/2, 0)$; (c) $6, 2\sqrt{6}$, $(\pm\sqrt{3}, 0)$; (d) 3, $\sqrt{5}$, $(\pm 2, 0)$]

6.46 Scrivere l'equazione dell'ellisse passante per i punti $P \equiv (2, 2\sqrt{5}/5)$ e $Q \equiv (-1, 4\sqrt{5}/5)$ e con i fuochi sull'asse x.

[$x^2/5 + y^2/4 = 1$]

6.47 Scrivere l'equazione dell'ellisse i cui fuochi hanno coordinate $(\pm\sqrt{2}, 0)$ e il cui semiasse maggiore è 3.

[$x^2/9 + y^2/7 = 1$]

6.48 Determinare l'equazione dell'ellisse il cui semiasse minore è $b = \sqrt{6}$, la cui eccentricità è $e = 1/\sqrt{7}$ e avente i fuochi sull'asse x.

[$x^2/7 + y^2/6 = 1$]

6.49 Determinare l'equazione dell'ellisse che ha due vertici coincidenti con i punti $(\pm 3, 0)$ e fuochi nei punti $(\pm 2, 0)$.

[$x^2/9 + y^2/5 = 1$]

6.50 Determinare l'equazione dell'ellisse che ha due vertici nei punti $(\pm n, 0)$ e fuochi nei punti $(\pm(n-1), 0)$ con n intero positivo.

$[x^2/n^2 + y^2/(2n-1) = 1]$

6.51 Scrivere l'equazione dell'ellisse la cui eccentricità è uguale a $1/2$ e i cui fuochi sono i punti $(\pm 2, 0)$.

$[x^2/16 + y^2/12 = 1]$

6.52 Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{R}$ esistono due tangenti all'ellisse di equazione $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ aventi coefficiente angolare uguale a m. Determinare le equazioni delle tangenti.

[I punti di intersezione dell'ellisse con la retta $y = mx + q$ si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$$

Eliminando la y tra le due equazioni, otteniamo l'equazione di secondo grado in x

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mqx + a^2(q^2 - b^2) = 0.$$

Imponendo che tale equazione abbia due soluzioni coincidenti, ossia che il suo discriminante sia nullo, otteniamo la condizione $a^2m^2 + b^2 - q^2 = 0$, da cui si ricava $q = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$. Dunque le rette $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ sono le due tangenti all'ellisse aventi coefficiente angolare uguale a m]

6.53 Scrivere le equazioni delle rette, di coefficiente angolare $m = 4$, tangenti all'ellisse $x^2/4 + y^2/3 = 1$.

$[y = 4x \pm \sqrt{67}]$

6.54 Scrivere l'equazione dell'iperbole che hai vertici in $(\pm 3, 0)$ e distanza focale (cioè distanza tra i fuochi) uguale a 8.

$[x^2/9 - y^2/7 = 1]$

6.55 Scrivere l'equazione dell'iperbole di vertici $(\pm 3, 0)$ e fuochi $(\pm\sqrt{13}, 0)$.

$[x^2/9 - y^2/4 = 1]$

6.56 Scrivere l'equazione dell'iperbole di vertici $(\pm 4, 0)$ e passante per il punto di coordinate $(8, 2)$.

[$x^2/16 - 3y^2/4 = 1$]

6.57 Scrivere l'equazione dell'iperbole che ha per asintoti le rette $y = \pm(1/3)x$ e passa per il punto $(3, 0)$.

[$x^2 - 9y^2 = 9$]

6.58 Scrivere l'equazione dell'iperbole passante per $(5, 3/2)$, con l'asintoto di equazione $y = x/2$ e fuochi sull'asse x.

[$x^2/16 - y^2/4 = 1$]

6.59 Data l'iperbole di equazione $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, verificare che, per ogni numero reale m tale che $|m| > b/a$, esistono due tangenti all'iperbole aventi coefficiente angolare uguale a m.
Determinare le equazioni delle tangenti.

[Si procede in modo analogo a come nel caso dell'esercizio 6.52. Si trova $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$]

6.60 Scrivere le equazioni delle rette, di coefficiente angolare $m = 1$, tangenti all'iperbole di equazione $x^2/9 - y^2/4 = 1$.

[$y = x \pm \sqrt{5}$]

6.61 Sia data l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = a^2$. Supponendo di far ruotare di 45° il sistema di assi, quale sarà la nuova equazione dell'iperbole riferita al nuovo sistema di assi $Ox'y'$?

[Applicando le formule di cambiamento di coordinate per rotazione di un angolo $\vartheta = 45°$ (ved par. 6A) si ha

$$\begin{cases} x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = \sqrt{2}(x' - y')/2 \\ y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = \sqrt{2}(x' + y')/2 \end{cases}$$

da cui, con facili passaggi, si perviene all'equazione $x'y' = -a^2/2$]

6.62 Scrivere l'equazione della parabola il cui fuoco è in $(2, 0)$ e la cui direttrice ha equazione $x = -2$

[$y^2 = 8x$]

6.63 Determinare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice della parabola $y^2 = 12x$.

$[(3,0);\ x=-3]$

6.64 Scrivere l'equazione della parabola il cui fuoco è in $(1/3,0)$ e la cui direttrice ha equazione $x=-1/3$.

$[y^2=(4/3)x]$

6.65 Verificare che la retta di equazione $y=x+1$ è tangente alla parabola di equazione $y^2=4x$.

6.66 Verificare che la retta di equazione $y=mx+p/2m$ è tangente alla parabola di equazione $y^2=2px$.

6.67 Determinare l'equazione della tangente alla parabola $y^2=3x$ nel punto $P\equiv(3,3)$.

[La retta per P di equazione $y-3=m(x-3)$ é tangente alla parabola se e solo se l'equazione $my^2-3y+9(1-m)=0$ nell'incognita y ha due radici coincidenti, ossia se il suo discriminante è nullo. Si ottiene così la condizione $(2m-1)^2=0$, cioé $m=1/2$. Dunque la tangente cercata ha equazione $y-3=(1/2)(x-3)$]

6.68 Scrivere l'equazione della parabola con vertice nell'origine e fuoco in $(-3,0)$

$[y^2=-12x]$

6.69 Scrivere l'equazione della parabola con fuoco in $(0,1/4)$ e direttrice $y=-1/4$.

$[x^2=y]$

6.70 Determinare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice della parabola $y=-x^2/12$.

$[(0,-3);\ y=3]$

6.71 Verificare che la conica di equazione

$$y=ax^2+bx+c \qquad\qquad (a>0)$$

è una parabola, facendo vedere che, assumendo due nuovi assi x', y' ottenuti da x, y con una rotazione di angolo $\vartheta=\pi/2$ e con l'origine nel punto $O'=(-b/2a,c-b^2/4a)$, la conica ha equazione $y'^2=(1/a)x'$.

[Le formule di cambiamento di coordinate (ved il par. 6A, 3° caso) si scrivono:

$$\begin{cases} x = -b/2a - y' \\ y = c - b^2/4a + x' \end{cases}$$

sostituendo tali valori nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ si ottiene l'equazione della conica rispetto ai nuovi assi: $y'^2 = (1/a)x'$. Ciò conferma quanto affermato nel presente paragrafo perché la nostra conica può essere scritta sotto la forma $(*)$ con $A = a/4 \neq 0$ e $A_{33} = 0$]

6.72 Verificare che anche nel caso $a < 0$ la conica di equazione $y = ax^2+bx+c$ è una parabola.

[Come nell'esercizio precedente, in cui però si scelga $\vartheta = -\pi/4$]

6.73 Verificare che la conica di equazione

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - 2x/a = 0$$

è un'ellisse.

[Si ha $A = -1/a^2b^2$, $A_{33} = 1/a^2b^2$, $a_{11} = 1/a^2$ e in particolare A e a_{11} hanno segni opposti. Per disegnare l'ellisse basta eseguire la traslazione $x = a + x'$, $y = y'$ e osservare che $x'^2/a^2 + y'^2/b^2 = 1$]

Capitolo 7

LIMITI DI SUCCESSIONI

7A. Uso della definizione

Ricordiamo la definizione di limite (finito o infinito) di una successione. Cominciamo con il caso del limite finito.

Diremo che una successione a_n *tende ad un numero reale* a, (a_n *converge ad* a), e scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to a,$$

se, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, *esiste un numero* ν *tale che* $|a_n - a| < \varepsilon$, *per ogni* $n > \nu$.

Diremo che una successione a_n *tende a* $+\infty$ (a_n *diverge a* $+\infty$), e scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to +\infty,$$

se, per ogni numero reale $M > 0$, *esiste un numero* ν *tale che* $a_n > M$, *per ogni* $n > \nu$.

Diremo che una successione a_n *tende a* $-\infty$ (a_n *diverge a* $-\infty$), e scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty, \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to -\infty,$$

se, per ogni numero reale $M > 0$, *esiste un numero* ν *tale che* $a_n < -M$, *per ogni* $n > \nu$.

Gli esercizi proposti in questo paragrafo hanno lo scopo di far familiarizzare il lettore con la definizione di limite di una successione.

7.1 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}.$$

[Discutiamo la disuguaglianza

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon, \quad \text{cioè} \quad \left| \frac{n}{2n+5} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Semplifichiamo il primo membro :

$$\left| \frac{2n-(2n+5)}{2(2n+5)} \right| = \left| \frac{-5}{2(2n+5)} \right| = \frac{5}{4n+10}.$$

Perciò la disuguaglianza iniziale equivale a $5/(4n+10) < \varepsilon$. Interpretiamo tale disuguaglianza come una disequazione nell'incognita n, che è facilmente ricavabile:

$$4n+10 > \frac{5}{\varepsilon}, \quad 4n > \frac{5}{\varepsilon} - 10, \quad n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}.$$

Ponendo $\nu = 5/(4\varepsilon) - 5/2$ abbiamo verificato ciò che volevamo, e cioè che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste ν per cui $|a_n - 1/2| < \varepsilon$, per ogni $n > \nu$.]

È noto che, se il limite di una successione esiste, esso è unico. Perciò è chiaro che la successione considerata nell'esercizio precedente non può convergere ad un numero reale diverso da 1/2; per esempio, non può convergere ad 1. Verifichiamo ciò direttamente con la definizione.

7.2 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+5} \neq 1.$$

[Occorre discutere la disequazione $|n/(2n+5) - 1| < \varepsilon$. Semplifichiamo:

$$\left| \frac{n}{2n+5} - 1 \right| = \left| \frac{-n-5}{2n+5} \right| = \frac{n+5}{2n+5} < \varepsilon.$$

Ricaviamo n:

$$n+5 < 2\varepsilon n + 5\varepsilon, \qquad (1-2\varepsilon)n < 5(\varepsilon - 1).$$

Se ε è abbastanza grande, ad esempio se $\varepsilon > 1$, la disequazione è verificata da ogni $n \in \mathbb{N}$, perché il primo membro $(1-2\varepsilon)n$ è negativo, mentre il secondo membro $5(\varepsilon - 1)$ è positivo. Però, se scegliamo ε più piccolo, ad esempio $\varepsilon = 1/4$, si trova la disequazione

$$(1-1/2)n < 5(-3/4), \quad \text{cioè} \quad n/2 < -15/4,$$

che non è verificata da nessun intero positivo.
Ricordando che la definizione di limite richiede la verifica di disuguaglianze utilizzando un parametro $\varepsilon > 0$ *arbitrario*, possiamo concludere che il limite dato non vale 1]

7.3 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n+4}{n} = 1 \qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n-4}{3n+1} = \frac{1}{3}$$

[(a) $\nu = 4/\varepsilon$; (b) $\nu = (13/\varepsilon - 3)/9$]

7.4 Verificare che la seguente successione converge a zero:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

[Risulta $|a_n - 0| = |(-1)^n/n| = 1/n$. Ponendo $\nu = 1/\varepsilon$, si trova che $|a_n - 0| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$]

7.5 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{3n}{n^2-10}} = 0$$

[(a) Per $n > \nu = 1/\varepsilon^2 - 1$ risulta $1/\sqrt{n+1} < \varepsilon$;
(b) Semplifichiamo la relazione:

$$\left|\sqrt{\frac{3n}{n^2-10}}\right| < \varepsilon \quad \iff \quad \frac{3n}{n^2-10} < \varepsilon^2.$$

Per $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$, risulta $n^2 - 10 > 0$. Possiamo quindi moltiplicare per tale valore entrambi i membri dell'ultima disuguaglianza, ottenendo $3n < \varepsilon^2(n^2 - 10)$, cioè $\varepsilon^2 n^2 - 3n - 10\varepsilon^2 > 0$. Si tratta di una disequazione di secondo grado in n, che è verificata se n è esterno all'intervallo di estremi $(3 \pm \sqrt{9 + 40\varepsilon^4})/2\varepsilon^2$. Quindi se

$$n > \nu = \max\{3;\ (3 + \sqrt{9 + 40\varepsilon^4})/2\varepsilon^2\},$$

allora vale la disuguaglianza di limite da cui siamo partiti]

7.6 Mediante la definizione verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}} = 2.$$

[Fissato $\varepsilon > 0$, occorre risolvere la disequazione nell'incognita n:

$$|\sqrt{4 + 1/n} - 2| < \varepsilon.$$

Dato che $4 + 1/n > 4$, risulta anche $\sqrt{4 + 1/n} > \sqrt{4} = 2$. Perciò l'argomento del valore assoluto è positivo e basta risolvere

$$(*) \qquad \sqrt{4 + 1/n} - 2 < \varepsilon.$$

Portando il 2 a secondo membro ed elevando al quadrato si trova

$$\nu = [(2 + \varepsilon)^2 - 4]^{-1} = 1/(4\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Proponiamo un altro metodo: si possono moltiplicare entrambi i membri della $(*)$ per la quantità $\sqrt{4+1/n}+2$, che è positiva ed anzi $\sqrt{4+1/n}+2>\sqrt{4}+2=4$.
La disuguaglianza che si ottiene

$$(4+1/n)-4<\varepsilon(\sqrt{4+1/n}+2),$$

segue quindi dalla disuguaglianza seguente, che è più semplice da risolvere:

$$(4+1/n)-4<4\varepsilon.$$

Semplificando a primo membro si ottiene $n>\nu=1/(4\varepsilon)$.
Naturalmente, la stima trovata con il secondo metodo ($n>1/(4\varepsilon)$) è peggiore della stima precedente]

7.7 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2-1)=+\infty$$

[La relazione $n^2-1>M$ equivale a $n^2>M+1$. Essendo $n>0$, ciò equivale ancora a $n>\sqrt{M+1}$. Perciò, se $n>\nu=\sqrt{M+1}$, risulta $n^2-1>M$]

7.8 Mediante la definizione verificare che le seguenti successioni divergono a $+\infty$.

$$(a)\quad a_n=n^2-2n-3 \qquad (b)\quad a_n=n^2-6n+1$$

[(a) Per $n>\nu=1+\sqrt{4+M}$ risulta $n^2-2n-3>M$; (b) $\nu=3+\sqrt{8+M}$]

7.9 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$(a)\quad \frac{n^2+2n}{n+1}\to+\infty \qquad (b)\quad \frac{n^2-8n+4}{n-4}\to+\infty$$

[(a) $\nu=(M-2+\sqrt{4+M^2})/2$; (b) $\nu=\max\{4;\ (8+M+\sqrt{48+M^2})/2\}$]

7.10 Mediante la definizione verificare che

$$\lim_{n\to+\infty}(5-n^2)=-\infty$$

[La relazione $5-n^2<-M$ equivale a $n^2>M+5$. Perciò, per $n>\nu=\sqrt{M+5}$ risulta $5-n^2<-M$]

7.11 Utilizzando la definizione di limite verificare che le seguenti successioni divergono a $-\infty$.

$$(a)\quad a_n=1-4n-n^2 \qquad (b)\quad a_n=4n-n^2-4$$

[(a) Se $n>\nu=-2+\sqrt{5+M}$ risulta $a_n<-M$;
(b) Per $n>\nu=2+\sqrt{M}$ risulta $-(n-2)^2=a_n<-M$]

7B. Operazioni sui limiti. Forme indeterminate

Siano a_n, b_n due successioni convergenti e a, $b \in \mathbb{R}$ i rispettivi limiti. Valgono le seguenti proprietà, dette *operazioni sui limiti*:

$$a_n + b_n \to a + b; \qquad a_n - b_n \to a - b;$$
$$a_n \cdot b_n \to a \cdot b; \qquad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}, \quad \text{se} \quad b \neq 0.$$

Valgono inoltre analoghe proprietà per successioni divergenti nei casi specificati di seguito. Indichiamo con a un numeo reale.

$a_n \to a$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to +\infty$
$a_n \to a$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to -\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to +\infty$
$a_n \to -\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to -\infty$
$a_n \to a > 0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to a < 0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to -\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to -\infty$
$a_n \to -\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to a$	$b_n \to \pm\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n/b_n \to 0$
$a_n \to a > 0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$b_n/a_n \to +\infty$
$a_n \to a < 0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$b_n/a_n \to -\infty$
$a_n \to a \neq 0$	$b_n \to 0$	$\Longrightarrow$	$\lvert a_n/b_n \rvert \to +\infty$
$a_n \to \pm\infty$	$b_n \to 0$	$\Longrightarrow$	$\lvert a_n/b_n \rvert \to +\infty$

Non rientrano nella tabella sopra proposta le seguenti situazioni, che vengono dette *forme indeterminate*:

$$\infty - \infty : \quad \begin{cases} a_n \to +\infty \\ b_n \to +\infty \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n - b_n \to \quad ?$$

$$0 \cdot \infty : \quad \begin{cases} a_n \to 0 \\ b_n \to \pm\infty \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \cdot b_n \to \quad ?$$

$$\frac{\infty}{\infty}: \quad \begin{cases} a_n \to \pm\infty \\ b_n \to \pm\infty \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_n}{b_n} \to \quad ?$$

$$\frac{0}{0}: \quad \begin{cases} a_n \to 0 \\ b_n \to 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_n}{b_n} \to \quad ?$$

Altre *forme indeterminate*, legate alla elavazione ad esponente reale, sono espresse da:

$$1^{\infty}: \quad \begin{cases} a_n \to 1 \\ b_n \to \pm\infty \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n^{b_n} \to \quad ?$$

$$\infty^{0}: \quad \begin{cases} a_n \to +\infty \\ b_n \to 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n^{b_n} \to \quad ?$$

$$0^{0}: \quad \begin{cases} a_n \to 0^+ \\ b_n \to 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n^{b_n} \to \quad ?$$

Affermare che un dato limite è una forma indeterminata non significa dire che il limite non esiste, ma significa che esso non è immediatamente calcolabile con delle regole della tabella precedentemente proposta. Vuol dire che è necessario semplificare o, comunque, trasformare l'espressione data in modo da togliere, se possibile, l'indeterminazione.

Si vedano gli esempi seguenti.

7.12 Calcolare il limite: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-1}{n+3}$.

[Il limite si presenta sotto la forma indeterminata ∞/∞. Dividendo numeratore e denominatore per n si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3-1/n}{1+3/n} = \frac{3-\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n}{1+\lim\limits_{n\to+\infty} 3/n} = 3$$

Sono state utilizzate le proprietà che il limite del quoziente, della differenza, della somma é uguale rispettivamente al quoziente, alla differenza, alla somma dei limiti]

7.13 Calcolare i limiti per $n \to +\infty$ delle successioni

$$(a)\quad \frac{n+1}{n^2+1} \qquad (b)\quad \frac{n^4+5}{n^5+7n-1}$$

$$(c)\quad \frac{n^3+1}{2n-1} \qquad (d)\quad \frac{1-n^2}{(n+2)^2}$$

[Si divida sia il numeratore che il denominatore per n, oppure per n^2, oppure ...
(a) 0; (b) 0; (c) $+\infty$; (d) -1]

7.14 Calcolare il limite: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{\sqrt{n}+1}$.

[Dividendo il numeratore ed il denominatore per $\sqrt{n}$, si verifica che la successione tende a $-\infty$]

7.15 Calcolare il limite: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

[1]

7.16 Calcolare il limite: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})$.

[Si tratta di una forma indetrminata $+\infty-\infty$. Moltiplichiamo e dividiamo per la somma delle radici:

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1} = \frac{(n+2)-(n-1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}} = \frac{3}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}} \to 0 \ \ ]$$

7.17 Calcolare il limite: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n})$.

$$[\ \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n} = \frac{(n^2+1)-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1/n-1}{\sqrt{1+1/n^2}+\sqrt{1/n}} \to +\infty\ \ ]$$

7.18 Calcolare i limiti di successione

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-n) \qquad (b)\quad \lim_{n\to+\infty} n\sqrt{\frac{1}{n+1}}$$

[(a) $-\infty$; (b) $+\infty$]

7.19 Verificare che se una successione a_n converge, allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.

[Basta scrivere il limite della differenza come differenza di limiti]

7.20 L'enunciato dell'esercizio precedente non è invertibile. Verificare che, ad esempio, la successione $a_n = \log n$ ha la proprietà che $a_{n+1} - a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, ma a_n non è convergente.

[$a_{n+1} - a_n = \log(n+1) - \log n = \log(1 + \frac{1}{n}) \to \log 1 = 0$]

7.21 Verificare che se una successione a_n converge ad un numero reale non nullo, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

[Basta calcolare il limite del rapporto come rapporto di limiti]

7.22 L'enunciato dell'esercizio precedente non è invertibile. Cioè se il rapporto a_{n+1}/a_n converge ad 1 per $n \to +\infty$, allora:

(a) non necessariamente a_n converge;

(b) se a_n converge, non necessariamente converge ad un numero reale non nullo.

Trovare degli esempi.

[(a) $a_n = n$, oppure $a_n = n^2$, oppure ... (b) $a_n = 1/n$, oppure ...]

7C. Successioni e valore assoluto

7.23 Verificare che a_n converge a zero se e solo se $|a_n|$ converge a zero.

[Basta applicare la definizione di limite alla successione $b_n = |a_n|$: $b_n \to 0$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero ν per cui $|b_n| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$. Dato che $|b_n| = |a_n|$, l'asserto è provato]

7.24 L'enunciato dell'esercizio precedente non vale se si sostituisce il valore zero con un valore differente da zero. Trovare un esempio.

[Ad esempio $a_n = (-1)^n$ non ha limite, mentre $b_n = |a_n|$ è la successione costante, uguale ad 1, che quindi converge ad 1]

7.25 Dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| + |b_n| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

[Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν per cui

$$||a_n| + |b_n|| = |a_n| + |b_n| < \varepsilon, \quad \forall\, n > \nu.$$

Dato che $|a_n| \leq |a_n| + |b_n|$, risulta anche $|a_n| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$. Perciò a_n converge a zero. Analogamente per b_n]

7.26 L'enunciato dell'esercizio precedente non vale se, nell'ipotesi, si abolisce il valore assoluto. Esibire un esempio.

[Basta porre $b_n = -a_n$, con a_n comunque scelta. In tal caso evidentemente $a_n + b_n \to 0$]

7.27 Siano a_n, b_n due successioni tali che $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, per ogni n. Dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0, \;\; \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

[Come nell'esercizio 7.25; anzi, si tratta di un caso particolare, perché nelle ipotesi attuali risulta $|a_n| = a_n$, $|b_n| = b_n$]

7.28 Dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| + |b_n| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} |a_n b_n| = 0.$$

Dimostrare inoltre, con un esempio, che non vale l'implicazione opposta; cioè che se il prodotto converge a zero, la somma non necessariamente converge a zero.

[Segue dagli esercizi 7.25 e 7.23. Circa il controesempio, basta considerare la successione b_n costante uguale a zero ed a_n comunqua scelta]

7.29 Dimostrare che, se a_n converge ad a, allora $b_n = |a_n|$ converge a $|a|$ (notare che questo enunciato non contrasta con quanto affermato nell'esercizio 7.24: se $|a_n| \to |a| \neq 0$, non è detto che $a_n \to a$).

[Si utilizzi la definizione di limite e la disuguaglianza

$$||x| - |y|| \leq |x - y|, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Questo esercizio è riproposto, con il linguaggio delle funzioni continue, nel capitolo 9 (si vedano gli esercizi 9.6 e 9.7)]

7.30 Verificare che a_n è convergente se e solo se sono convergenti le due successioni b_n, c_n definite da:

$$b_n = a_n + |a_n|, \qquad c_n = a_n - |a_n|.$$

[Se $a_n \to a$ allora (esercizio precedente) $|a_n| \to |a|$. Perciò b_n, c_n convergono rispettivamente ai valori $a \pm |a|$. Viceversa, per somma si ha

$$b_n + c_n = 2a_n, \qquad \text{cioè} \qquad a_n = (b_n + c_n)/2.$$

Perciò, se b_n e c_n convergono, anche a_n converge]

7.31 Verificare con un esempio che la convergenza della successione $b_n = a_n + |a_n|$ non implica la convergenza della successione a_n.

[Ad esempio $a_n = -1 + (-1)^n$ è una successione che non ammette limite per $n \to +\infty$, mentre $b_n = 0$ per ogni n. Più in generale, basta scegliere per a_n una qualsiasi successione non convergente, con $a_n \leq 0$ per ogni n]

7D. Elenco dei principali limiti notevoli

Riportiamo un elenco di *limiti notevoli* che sono alla base del calcolo di altri limiti di successione.

Cominciamo con i limiti dell'*esponenziale* a^n e della *potenza* n^b

$$(1) \qquad \lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 1 & \text{se} \quad a = 1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 < a < 1 \\ \text{non esiste,} & \text{se} \quad a \leq -1; \end{cases}$$

$$(2) \qquad \lim_{n \to +\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad b > 0 \\ 1 & \text{se} \quad b = 0 \\ 0 & \text{se} \quad b < 0. \end{cases}$$

Altri limiti notevoli di tipo esponenziale (cioè dove l'esponente dipende dalla variabile n) sono i seguenti:

$$(3) \qquad \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \to +\infty} a^{1/n} = 1, \qquad \forall\, a > 0.$$

$$(4) \qquad \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n \to +\infty} n^{b/n} = 1, \qquad \forall\, b \in \mathbb{R}.$$

La successione esponenziale a^n, con $a > 1$, e la successione potenza n^b, con $b > 0$, divergono a $+\infty$. Spesso tali successioni vengono confrontate con

$\log n$ e con $n!$ (*n fattoriale*, definito da $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-1) \cdot n$) che pure divergono a $+\infty$. Consideriamole nell'ordine:

$$\log n; \quad n^b; \quad a^n; \quad n!$$

Nel modo indicato sono *infiniti di ordine crescente*, nel senso che valgono i seguenti limiti notevoli

$$\lim_{n\to+\infty} (\log n)/n^b = 0 \qquad (b>0); \tag{5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^b/a^n = 0 \qquad (a>1, b>0); \tag{6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n/n! = 0 \qquad (a>1). \tag{7}$$

Molto importante è il limite alla base della definizione del *numero di Nepero e*:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e; \tag{8}$$

più generalmente, per ogni numero reale x:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x; \tag{9}$$

$$a_n \to \pm\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} \to e^x. \tag{10}$$

Il seguente limite è fondamentale per trattare successioni trigonometriche

$$a_n \to 0 \qquad (a_n \neq 0, \forall\, n) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} \to 1. \tag{11}$$

Infine ricordiamo le proprietà seguenti, che discendono dai teoremi sulle medie aritmetiche e geometriche di una successione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n), \tag{12}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \tag{13}$$

purché, in entrambi i casi, *esista il limite a secondo membro.* Inoltre in (13) si assume che $a_n > 0$ per ogni n.

7E. Uso dei limiti notevoli

Proponiamo una serie di esercizi che si risolvono con i limiti notevoli elencati nel paragrafo precedente. Di seguito facciamo riferimento ai numeri (1), (2), ... ,(13) di tale paragrafo.

7.32 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty} e^n \qquad (b)\quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

[Si utilizza il limite notevole (1) del paragrafo 7D.
(a) $+\infty$, dato che la base e è maggiore di 1; (b) 0]

7.33 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty} (e^n - 2^n) \qquad (b)\quad \lim_{n\to+\infty} (3^n + 4^n - 5^n)$$

[(a) $e^n - 2^n = e^n[1-(2/e)^n] \to +\infty$; (b) $-\infty$]

7.34 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}-4^{n-1}}{3^n} \qquad (b)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+1}{3^n+1}$$

[(a) $\dfrac{2^{n+1}-4^{n-1}}{3^n} = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n \to -\infty$; (b) 0]

7.35 Calcolare i limiti di successione

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{2}} \qquad (b)\quad \lim_{n\to+\infty} n^{-e}$$

[I risultati seguono direttamente dal limite notevole (2): (a) $+\infty$; (b) 0]

7.36 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi} \qquad (b)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}}$$

[Dal limite notevole (3) si ottiene, in entrambi i casi, il valore limite 1]

7.37 Calcolare i limiti di successione

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} \qquad (b)\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n}$$

[Si utilizzi il limite notevole (4): (a) 1; (b) $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1$]

7.38 Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - \log n)$.

[$n - \log n = n[1 - (\log n)/n]$ diverge a $+\infty$, utilizzando il limite notevole (5) con $b = 1$]

7.39 Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n - n^2)$.

[Utilizzando il limite notevole (6) si ottiene: $2^n - n^2 = 2^n(1 - n^2/2^n) \to +\infty$]

7.40 Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n - n!)$.

[Il limite vale $-\infty$. Infatti, in base alla (7): $2^n - n! = n!(2^n/n! - 1) \to -\infty$]

7.41 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a)\ \frac{\sqrt{n}}{\log n} \qquad (b)\ \frac{3^n}{n^3} \qquad (c)\ \frac{n}{e^n} \qquad (d)\ \frac{n^5}{n!}$$

[(a) Il limite vale $+\infty$, per la (5) con $b = 1/2$; (b) $+\infty$; (c) 0; (d) Per le (6), (7), il limite vale 0]

7.42 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a)\ \frac{2^n - 4^n}{3^n - n!} \qquad (b)\ \frac{(n3^{n+1} + n^5 + 1)n!}{(3^n + 2^n)(n+1)!}$$

[(a) Dividendo numeratore e denominatore per $n!$, si verifica che la successione converge a zero; (b) Si noti che $n!/(n+1)! = 1/(n+1)$. Dividendo numeratore e denominatore per 3^n, si verifica che la successione converge a 3]

7.43 Calcolare i limiti

$$(a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\log^2 n}{n} \qquad (b)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + \log^3 n}$$

[(a) $\dfrac{\log^2 n}{n} = \left(\dfrac{\log n}{\sqrt{n}}\right)^2 \to 0$; (b) $+\infty$]

7.44 Calcolare i limiti

$$(a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n - n^5}{4^n + n^6} \qquad (b)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+1)\log n}{n^3}$$

[(a) $+\infty$; (b) 0]

7.45 Calcolare i limiti, per $n \to +\infty$, delle successioni

$$(a) \quad \frac{n! + 2^n}{(n+1)!} \qquad (b) \quad \frac{n! - (n+1)!}{n^2 e^n}$$

$\left[(a)\ \frac{n! + 2^n}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{2^n}{n!}\right) \to 0;\ (b)\ \frac{n! - (n+1)!}{n^2 e^n} = \frac{-n!n}{n^2 e^n} = -\frac{1}{e}\frac{(n-1)!}{e^{n-1}} \to -\infty\right]$

7.46 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a) \quad 3^{n+1} - 3^{\sqrt{n^2-1}} \qquad (b) \quad 2^{n-2} - 2^{\sqrt{n^2-1}}$$

[(a) $3^{n+1} - 3^{\sqrt{n^2-1}} = 3^{n+1}\{1 - 3^{\sqrt{n^2-1}-(n+1)}\}$. Calcoliamo separatamente:

$$\sqrt{n^2-1} - (n+1) = \frac{(n^2-1) - (n+1)^2}{\sqrt{n^2-1} + (n+1)} = \frac{-2n-2}{\sqrt{n^2-1} + (n+1)} \to -1.$$

Perciò la quantità in parentesi graffa converge a $1 - 3^{-1} = 1 - 1/3 = 2/3$. Ne segue che la successione data diverge a $+\infty$; (b) $-\infty$]

7.47 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$.

[Si utilizza il limite notevole (8): $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 \to e^2$]

7.48 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

[Si può utilizzare il limite notevole (9), prima con $x = 1/2$, poi con $x = -1$. (a) $\sqrt{e}$; (b) $1/e$]

7.49 Calcolare i limiti di successione

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}$$

[Si utilizzi il limite notevole (10). (a) e^2;

(b) $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \to e$]

7.50 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a) \quad \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n \qquad (b) \quad \left(\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$$

[(a) Allo scopo di applicare il limite notevole (10), ricerchiamo x_n per cui:

$$\frac{n^2+n}{n^2-n+2} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

Risulta evidentemente

$$\frac{1}{x_n} = \frac{n^2+n}{n^2-n+2} - 1 = \frac{2n-2}{n^2-n+2}.$$

Invertendo la frazione si vede che $x_n \to +\infty$. Inoltre

$$\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\right]^{n/x_n}.$$

La successione in parentesi quadra converge al numero e, in base al limite notevole (10). Inoltre il rapporto n/x_n converge a 2, per $n \to +\infty$. Perciò la successione data converge a e^2; (b) con lo stesso metodo proposto nel caso precedente si trova il valore limite $1/e$]

7.51 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a) \quad \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+1}\right)^{n^2} \qquad (b) \quad \left(\frac{n^2-n}{n^2-n+3}\right)^n$$

[(a) $+\infty$; (b) 1]

7.52 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n} \qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen} \frac{3}{n}$$

$$(c) \quad \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{n} \qquad (d) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\operatorname{sen}(3/n)}$$

[Si utilizzi il limite notevole (11), con $a_n = 1/n$, oppure con $a_n = 3/n$. (a) 1; (b) 3; (c) 1; (d) 1/3]

7.53 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a) \quad n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \qquad (b) \quad n^2\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)$$

[(a) $n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = n^2\frac{1-\cos^2(1/n)}{1+\cos(1/n)} = \frac{n^2\operatorname{sen}^2(1/n)}{1+\cos(1/n)}$.

Dal limite notevole (11) otteniamo $n^2\operatorname{sen}^2(1/n) \to 1$. Dato che $\cos(1/n) \to 1$ per $n \to +\infty$, la successione data converge a 1/2; (b) osservando che $n^2\operatorname{sen}^2(2/n) \to 4$, la successione data converge a 2]

7.54 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a) \quad \frac{\operatorname{tg}^2(1/n)}{1-\cos(1/n)} \qquad (b) \quad \frac{1-\cos(3/n)}{\operatorname{sen}(3/n^2)}$$

[(a) 2; (b) 3/2]

7.55 Utilizzando la successione $a_n = (-1)^n$, verificare che la formula (12) del paragrafo precedente non vale se non esiste il limite a secondo membro.

[$a_{n+1} - a_n = 2(-1)^{n+1}$ non ha limite, mentre a_n/n converge a zero]

7.56 Con l'aiuto della proprietà (13) del paragrafo precedente, calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n(n-1)} \qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+1}$$

[Posto $a_n = n(n-1)$, risulta $a_{n+1}/a_n \to 1$. Per la proprietà (13), la successione data converge a 1; (b) 2]

7.57 Calcolare il limite della successione $\sqrt[n]{n!}$.

[$+\infty$]

7.58 Calcolare il limite della successione $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

[Possiamo scrivere la successione data nel modo seguente $\sqrt[n]{a_n}$, con $a_n = n^n/n!$. Applichiamo il criterio (13) del paragrafo precedente; otteniamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

Perciò la successione data converge ad e]

7.59 Allo scopo di mostrare che la formula (13) del paragrafo precedente non vale nel caso in cui non esiste il limite a secondo membro, si consideri l'esempio seguente: siano A, B due numeri positivi distinti e sia a_n la successione tale che $a_n = A$, se n è pari, $a_n = B$ se n è dispari. Verificare che

$$\sqrt[n]{a_n} \to 1, \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ non ammette limite.}$$

7.60 Scegliendo opportunamente la successione a_n, verificare che le formule (3), (4) del paragrafo precedente discendono dalla (13).

[In particolare, per la (4), ponendo $a_n = n^b$, risulta $a_{n+1}/a_n = (1+1/n)^b \to 1$]

7.61 Dimostrare che, se a_n è una successione convergente ad un numero positivo, allora $\sqrt[n]{a_n}$ converge ad 1

[Utilizzare la formula (13)]

7.62 Se A, B sono due numeri reali positivi, verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{A^n + B^n} = \max\{A; B\}.$$

[Utilizzare il limite notevole (13)]

7.63 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a) \quad \frac{e^{n^2} + 4^n}{n! + n^n + 5^n} \qquad (b) \quad \frac{n^{3n} + n!}{10^n - (3n)^n}$$

[(a) Si noti che $e^{n^2}/n^n = (e^n/n)^n \to +\infty$. Dividendo numeratore e denominatore per e^{n^2}, si verifica che la successione diverge a $+\infty$; (b) Si noti che $n^{3n}/(3n)^n = n^{2n}/3^n \to +\infty$. La successione data diverge a $-\infty$]

7.64 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a) \quad \frac{\sqrt{4^n + 1}}{2^n + 1} \qquad (b) \quad \sqrt{9^n + 3^n} - 3^n$$

[(a) Dividendo numeratore e denominatore per 2^n, si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4^n + 1}}{2^n + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1 + 4^{-n}}}{1 + 2^{-n}} = 1.$$

(b) Moltiplicando e dividendo per la somma delle radici, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{9^n + 3^n} - 3^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{\sqrt{9^n + 3^n} + 3^n} = 1/2 \quad]$$

7.65 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a) \quad \frac{(n^4 + n)^n}{(n^2 - n)^{2n}} \qquad (b) \quad \frac{(n^3 + 1)^n}{(n + 1)^{3n}}$$

[(a) Con un metodo simile a quello proposto nell'esercizio 7.50, si trova che:

$$\frac{(n^4 + n)^n}{(n^2 - n)^{2n}} = \left(\frac{n^4 + n}{(n^2 - n)^2}\right)^n = \left(\frac{n^4 + n}{n^4 - 2n^3 + n^2}\right)^n =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{2n^3 - n^2}{n^4 - 2n^3 + n^2}\right)^{\frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{2n^3 - n^2}}\right]^{\frac{2n^3 - n^2}{n^4 - 2n^3 + n^2} \cdot n}.$$

La successione in parentesi quadra converge al numero e, mentre l'esponente, per $n \to +\infty$, converge a 2. Perciò la successione data converge a e^2; (b) Con lo stesso metodo si trova che la successione data converge a e^3]

Gli esercizi che seguono in questo paragrafo fanno uso del *criterio del rapporto*, che enunciamo di seguito.

CRITERIO DEL RAPPORTO PER LE SUCCESSIONI.- Sia a_n una successione a termini positivi. Definiamo la successione ausiliaria

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Se b_n converge ad un limite $b \in [0,1)$, allora la successione a_n converge a zero. Se invece b_n converge ad un limite $b \in (1,+\infty)$, oppure b_n diverge a $+\infty$, allora a_n diverge a $+\infty$.

Si noti che il caso $b = 1$ non è contemplato nell'enunciato precedente. Ad esempio $a_n = 2^n/n!$ converge a zero. Infatti, si può calcolare semplicemente il limite, per $n \to +\infty$, di b_n:

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2^n \cdot 2}{n!(n+1)} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0;$$

in base al criterio del rapporto, dato che $b_n \to 0 < 1$, allora anche a_n converge a zero.

7.66 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^{n+1}} \qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{3^{n+1}}$$

[(a) $b_n = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+2)}} \cdot \dfrac{n^{n+1}}{n!} = \dfrac{n!(n+1)}{(n+1)^{n+1}(n+1)} \cdot \dfrac{n^{n+1}}{n!} = \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} =$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-1} \to e^{-1}.$$

Dato che $b_n \to b = e^{-1} < 1$, ne segue che il limite dato vale zero. (b) Si verifica che $b_n = a_{n+1}/a_n$ diverge a $+\infty$. Pertanto anche il limite dato vale a $+\infty$]

7.67 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a) \quad \frac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad (b) \quad \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}}$$

[(a) Applichiamo il criterio del rapporto per le successioni:

$$\frac{[3(n+1)]!}{[(n+1)!]^3}\cdot\frac{(n!)^3}{(3n)!}=\frac{(3n+3)!}{(3n)!}\cdot\frac{(n!)^3}{[(n+1)!]^3}=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(3n)!}\cdot\frac{(n!)^3}{(n!)^3(n+1)^3}=$$
$$=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}\quad\to\quad 27.$$

La successione data diverge a $+\infty$; (b) applicando nuovamente il criterio del rapporto, otteniamo:

$$\frac{(n+1)!}{\sqrt{2(n+1)!}}\cdot\frac{\sqrt{(2n)!}}{n!}=\frac{n!(n+1)}{n!}\cdot\frac{\sqrt{(2n)!}}{\sqrt{(2n+2)(2n+1)(2n)!}}=$$
$$=\frac{n+1}{\sqrt{(2n+2)(2n+1)}}\quad\to\quad\frac{1}{2}.$$

La successione data converge a zero]

7.68 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^{n/2}}\qquad\qquad (b)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$$

[(a) Utilizzando il criterio del rapporto si ottiene

$$b_n=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)/2}}\cdot\frac{n^{n/2}}{n!}=\frac{n!(n+1)}{[(n+1)^n(n+1)]^{1/2}}\cdot\frac{[n^n]^{1/2}}{n!}=\frac{n+1}{(n+1)^{1/2}}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2}$$

Nel prodotto sopra indicato il primo dei due fattori diverge a $+\infty$ quando $n\to+\infty$, mentre il secondo fattore converge ad $e^{-1/2}$. Pertanto $b_n\to+\infty$ ed anche $a_n\to+\infty$.
(b) Utilizziamo di nuovo il criterio del rapporto:

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{2^n n!}{n^n}=\frac{(n+1)^n(n+1)}{n^n 2(n+1)}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\to\frac{e}{2};$$

essendo $b=e/2>1$, la successione data diverge a $+\infty$]

7F. Uso dei teoremi di confronto

Riportiamo di seguito alcuni *teoremi di confronto per successioni* che risultano particolarmente utili nel calcolo di limiti:

(I) *Se esiste un numero ν per cui $a_n\le b_n$ per ogni $n>\nu$, e se a_n diverge a $+\infty$, allora anche b_n diverge a $+\infty$.*

(II) *Se esiste un numero ν per cui $a_n\le b_n$ per ogni $n>\nu$, e se b_n diverge a $-\infty$, allora anche b_n diverge a $-\infty$.*

(III) *Se esiste ν per cui $a_n\le c_n\le b_n$ per ogni $n>\nu$, e se le due successioni a_n, b_n convergono ad uno stesso limite a, allora anche la successione c_n converge al valore a.*

Come mostrato nell'esercizio che segue, da (III) si deduce il seguente teorema di confronto.

(IV) *Se* a_n *converge a zero e se* b_n *è limitata, allora il prodotto* $a_n b_n$ *converge a zero* (ricordiamo che una successione b_n si dice *limitata* se esiste una costante M per cui $|b_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

7.69 Dimostrare l'enunciato (IV)

[Per ipotesi esiste un numero M per cui $|b_n| \leq M$ per ogni n. Quindi $|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq M|a_n|$, cioè (si ricordi la proprietà del valore assoluto dell'esercizio 3.30):

$$-M|a_n| \leq a_n b_n \leq M|a_n|, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Se $a_n \to 0$, anche $|a_n| \to 0$ (si veda l'esercizio 7.23). Per il teorema (III) la successione $a_n b_n$ converge a zero]

Proponiamo alcuni esercizi che si risolvono utilizzando i teoremi di confronto (I), (II), (III), (IV).

7.70 Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - \operatorname{sen} n)$.

[Dato che $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in particolare $\operatorname{sen} n \leq 1$, cioè $-1 \leq -\operatorname{sen} n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Perciò $n-1 \leq n - \operatorname{sen} n$. In base al teorema (I) di confronto, il limite vale $+\infty$]

7.71 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a) \quad [\cos(n+1)]^2 - (n+1)^2 \qquad\qquad (b) \quad n[2 - \operatorname{sen}(n^2+1)]$$

[(a) $[\cos(n+1)]^2 - (n+1)^2 \leq 1 - (n+1)^2 \to -\infty$; (b) $n[2 - \operatorname{sen}(n^2+1)] \geq n[2-1] = n \to +\infty$]

7.72 Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3 + \operatorname{sen} n}{n}$

[Risulta $2/n \leq (3 + \operatorname{sen} n)/n \leq 4/n$. In base al teorema (III) di confronto, il limite dato vale zero]

7.73 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

$$(a) \quad \frac{2 + \cos n}{\operatorname{sen}^2(1/n)} \qquad\qquad (b) \quad \frac{2n + \operatorname{sen} n \log n}{n}$$

[(a) $+\infty$; (b) 2]

7.74 Calcolare: $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n[\log(\sqrt{n} - 1) - \log\sqrt{n-1}]$.

[$b_n = \cos n$ è una successione limitata, mentre

$$a_n = \log(\sqrt{n} - 1) - \log\sqrt{n-1} = \log\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n-1}}$$

converge a zero. In base al teorema (IV) il limite dato vale zero]

7.75 Calcolare: $\lim_{n\to+\infty} [\log n - \frac{1}{2}\log(n^2+1)]\operatorname{sen} n$.

[0]

7.76 Calcolare: $\lim_{n\to+\infty} (n^n - 2^n)$.

[$n^n - 2^n = n^n(1 - (2/n)^n)$. Tenendo presente che $2/n \le 2/3$ se $n \ge 3$, risulta

$$n^n - 2^n \ge n^n[1 - (2/3)^n], \qquad \forall\, n \ge 3.$$

In base al teorema (I) di confronto, il limite dato vale $+\infty$]

7.77 Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} [3^n - (\sqrt{n})^n]$.

[Il risultato è $-\infty$ e si ottiene dalla disuguaglianza

$$3^n - (\sqrt{n})^n \le 3^n[1 - (\sqrt{n}/3)^n] \le 3^n[1 - (4/3)^n],$$

che vale per ogni $n \ge 16$]

7.78 Dopo aver dimostrato per induzione la validità della disuguaglianza

$$\frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

verificare che la successione $a_n = \frac{n!}{n^n}$ converge a zero.

[Per $n = 1$ la disuguaglianza è un'identità. Procediamo per induzione considerando

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!(n+1)}{(n+1)^n(n+1)} = \frac{n!}{n^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n!}{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Ricordiamo che la sucessione $(1 + 1/n)^n$ è strettamente crescente e che quindi tutti i suoi termini sono maggiori del primo, che vale 2; perciò $(1+1/n)^n \ge 2$. Dall'ipotesi di induzione $n!/n^n \le 2^{n-1}$ otteniamo $(n+1)!/(n+1)^{n+1} \le 2^{-n}$. A questo punto, dal teorema (III) e dalle disuguaglianze

$$0 < \frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

deduciamo che $n!/n^n$ converge a zero]

7G. Successioni non regolari

Abbiamo detto che una successione si dice convergente se, per $n \to +\infty$, ammette limite finito; si dice divergente se ammette limite $+\infty$, oppure $-\infty$. Se una successione è convergente o divergente si dice *regolare*.

Se una successione non ammette limite si dice *non regolare*. Proponiamo ora alcuni esempi di successioni non regolari; altri esempi verranno forniti nel paragrafo successivo.

7.79 Verificare che la successione $a_n = (-1)^n$ non è regolare.

[La successione a_n ammette soltanto i valori ± 1; é pertanto limitata e non può divergere a $+\infty$, oppure a $-\infty$. Mostriamo che a_n non può convergere ad un limite $a \geq 0$; infatti, se $a \geq 0$ e se n é dispari, dato che $a_n = -1$, risulta

$$|a_n - a| = |-1 - a| = 1 + a \geq 1$$

e pertanto non è minore di ε, se scegliamo $\varepsilon < 1$. Analogamente, a_n non può convergere ad un limite $a < 0$, e lo si vede prendendo in considerazione gli indici n pari]

La successione

$$a_n = \operatorname{sen} nx,$$

con x numero reale fissato, costituisce un interessante esempio di successione non regolare. C'è però qualche eccezione, perché, in corrispondenza a particolari valori di x, $\operatorname{sen} nx$ risulta convergente.

Studieremo in dettaglio, nel capitolo 12, la successione $\operatorname{sen} nx$, per ogni valore reale di x. Qui consideriamo i due semplici casi $x = \pi/2$, $x = \pi$, ed anche il caso $x = 1$. Prendiamo in considerazione il caso $x = 1$ anche negli esercizi 7.92, 7.93, nel determinare sottosuccessioni regolari di $a_n = \operatorname{sen} n$.

7.80 Studiare la convergenza delle successioni

$$(a) \quad \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \qquad (b) \quad \operatorname{sen} n\pi$$

[(a) La successione $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)$ ammette, per infiniti indici, i valori 0, 1, -1. Come nell'esercizio 7.73 si verifica che non ha limite; (b) si tratta della successione costante $a_n = 0$, che ovviamente converge a zero]

7.81 Si consideri la successione $a_n = \operatorname{sen} n$.

(a) Verificare che i termini a_n della successione sono a due a due distinti.
(b) Con l'aiuto del disegno in figura 7.1 verificare che a_n non è regolare.

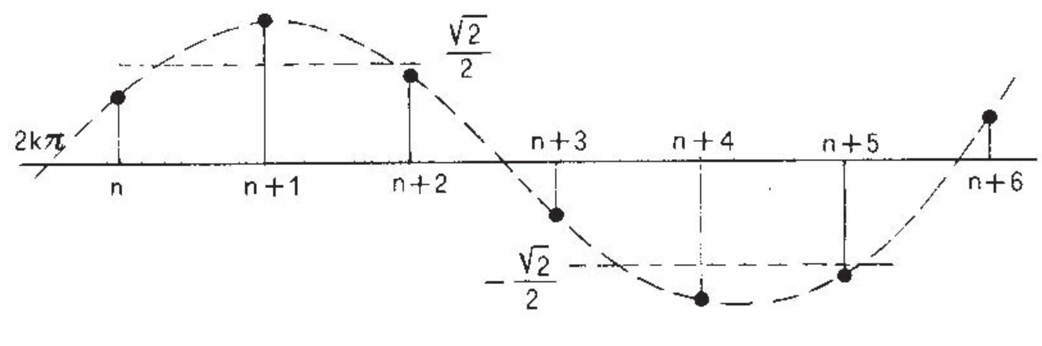


figura 7.1

[(*a*) Occorre verificare che $\operatorname{sen} n \neq \operatorname{sen} m$, se n, m sono numeri naturali distinti. A tale scopo utilizziamo la formula di prostaferesi

$$\operatorname{sen} n - \operatorname{sen} m = 2 \operatorname{sen} \frac{n-m}{2} \cos \frac{n+m}{2}.$$

Ricordando le semplici proprietà dell'esercizio 2.4, si deduce che $\operatorname{sen} n = \operatorname{sen} m$ se e solo se

$$\frac{n-m}{2} = k\pi \qquad \text{oppure} \qquad \frac{n+m}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

per qualche $k \in \mathbb{Z}$; cioè, se e solo se

$$n - m = 2k\pi \qquad \text{oppure} \qquad n + m = (2k+1)\pi.$$

Nella prima delle due relazioni deve essere $k \neq 0$, dato che $n \neq m$. Perciò, in entrambe le relazioni scritte, a primo membro c'è un numero intero, mentre a secondo membro c'è un numero irrazionale (dato che π è irrazionale). Ciò prova che tali relazioni non sono verificate per alcun valore di k, cioè che $\operatorname{sen} n \neq \operatorname{sen} m$, se $n \neq m$.
(*b*) Si consideri la figura 7.1, dove sono rappresentati valori di $a_n = \operatorname{sen} n$ per alcuni valori consecutivi dell'indice n. In figura 7.1 n è scelto in dipendenza da $k \in \mathbb{N}$ in modo che

$$[(n-1)/2\pi] < k = [n/2\pi].$$

Dato che $\pi \cong 3.14$, in ogni intervallo lungo $\pi/2$ cade almeno un numero intero (ed al più due). In particolare, c'è almeno un intero n_k (in figura $n_k = n+1$) nell'intervallo $[2k\pi + \pi/4, 2k\pi + (3/4)\pi]$, per cui

$$a_{n_k} \geq \sqrt{2}/2.$$

Inoltre, c'è almeno un intero m_k (in figura 7.1 può essere $m_k = n+4$, oppure $m_k = n+5$) nell'intervallo $[2k\pi + (5/4)\pi, 2k\pi + (7/4)\pi]$, per cui risulta

$$a_{m_k} \leq -\sqrt{2}/2.$$

Abbiamo quindi verificato che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, esistono due interi n_k, m_k, entrambi maggiori di $2k\pi$, per cui $a_{n_k} \geq \sqrt{2}/2$, $a_{m_k} \leq -\sqrt{2}/2$. Se ne conclude che la successione a_n non ammette limite; infatti, se a_n tendesse ad a per $n \to +\infty$, allora anche ogni successione estratta da a_n dovrebbe tendere allo stesso limite a. Ciò contrasta con il fatto che le due successioni estratte a_{n_k}, a_{m_k} non possono tendere allo stesso limite.

Nel capitolo 12 è proposta una diversa dimostrazione del fatto che $\operatorname{sen} nx$, anche per $x = 1$, non ammette limite quando $n \to +\infty$]

7H. Successioni estratte

In conformità con il fatto che n è uno dei simboli più usati per indicare un numero naturale, si suole indicare una generica successione di numeri naturali con il simbolo n_k. Cioè, n_k è un'applicazione dall'insieme $\mathbb{N} = \{k = 1, 2, 3, \dots\}$ in se stesso.

Sia a_n una successione reale. Se n_k è una *successione strettamente crescente di numeri naturali*, allora la composizione a_{n_k} si dice *successione estratta* (o *sottosuccessione*) della successione a_n data.

Ad esempio, se n_k è la successione dei numeri naturali pari

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 4, \quad n_3 = 6, \quad \dots, \quad n_k = 2k, \dots$$

allora, per composizione con a_n, si ottiene la *sottosuccessione dei termini di posto pari* $a_{n_k} = a_{2k}$:

$$a_2, \quad a_4, \quad a_6, \quad \dots, \quad a_{2k}, \dots$$

Se n_k è la successione dei numeri naturali dispari

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 5, \quad \dots, \quad n_k = 2k - 1, \dots$$

allora, per composizione con a_n, si ottiene la *sottosuccessione dei termini di posto dispari* $a_{n_k} = a_{2k-1}$:

$$a_1, \quad a_3, \quad a_5, \quad \dots, \quad a_{2k-1}, \dots$$

Se una successione ammette limite,anche ogni successione da essa estratta ammette lo stesso limite. Viceversa, esistono successioni che non ammettono limite (non regolari), ma tali che opportune sottosuccessioni hanno limite. Ad esempio, $a_n = (-1)^n$ non ha limite per $n \to +\infty$; mentre $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ è la successione costante (uguale ad 1) e quindi converge ad 1; analogamente $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1$ converge a -1.

7.82 Verificare che una successione a_n converge ad un numero a se e solo se entrambe le successioni estratte a_{2k}, a_{2k-1} convergono allo stesso numero a.

[Se $|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$, risulta anche

$$(1) \qquad |a_{2k} - a| < \varepsilon,$$

pur di scegliere $2k > \nu$, cioè $k > \nu/2$. Analogamente

$$(2) \qquad |a_{2k-1} - a| < \varepsilon,$$

per ogni $k > (\nu + 1)/2$.

Viceversa, se vale la (1) per $k > \nu_1$ e se vale la (2) per $k > \nu_2$, allora risulta $|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > \max\{2\nu_1; 2\nu_2 - 1\}$]

7.83 Supponiamo che a_n sia una successione crescente cioè $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni n. Dimostrare che

$$\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

[Dato che a_n è monotòna, essa ammette limite. Sia $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale valore limite. Ogni successione estratta da a_n tende ad a. In particolare $a_{2k} \to a$. Per l'unicità del limite $a = 1$]

7.84 Supponendo che a_n sia una successione decrescente, dimostrare che

$$\lim_{k\to+\infty} a_{2k-1} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty.$$

[Come nell'esercizio precedente]

7.85 Dimostrare che due successioni estratte da una stessa successione monotòna ammettono lo stesso limite.

[Basta osservare che la successione data ammette limite, e quindi ogni estratta ammette lo stesso limite]

7.86 Supponiamo che le successioni a_{2k}, a_{2k-1}, dei termini di posto pari e dispari, estratte da una successione a_n, siano entrambe monotòne. Dimostrare che, se

$$(3) \qquad \lim_{k\to+\infty} (a_{2k} - a_{2k-1}) = 0,$$

allora a_n ammette limite.

[Le successioni a_{2k}, a_{2k-1}, essendo monotòne, ammettono limite. Siano a, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ i rispettivi limiti. Per l'ipotesi (3), $a = b$. In base all'esercizio 7.76 (che vale anche per successioni divergenti) anche a_n è regolare]

7.87 Verificare con un esempio che l'enunciato dell'esercizio precedente non è invertibile. Cioè, esistono successioni regolari a_n, tali che a_{2k}, a_{2k-1}, sono monotone, ma

$$\lim_{k\to+\infty} (a_{2k} - a_{2k-1}) \neq 0.$$

[Ad esempio la successione $a_n = n$ verifica tutte le ipotesi, mentre $a_{2k} - a_{2k-1} = 1$]

7.88 Verificare che, se la successione a_n ammette limite e se $\lim_{k\to+\infty}(a_{2k} - a_{2k-1}) \neq 0$, allora a_n è divergente

[Se a_n convergesse ad un numero reale a, allora anche a_{2k}, a_{2k-1} sarebbero convergenti ad a, quindi ...]

7.89 Supponiamo che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo inoltre che le sottosuccessioni a_{2k}, a_{2k-1} siano entrambe monotòne. Dimostrare che, se

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = 1, \tag{4}$$

allora a_n ammette limite.

[Le successioni a_{2k}, a_{2k-1}, essendo monotòne, ammettono entrambe limite. Siano a, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ i rispettivi limiti. Per l'ipotesi (4) risulta $a = b$ (ciò vale anche se $a, b = 0$ oppure se $a, b = \pm\infty$). Perciò tutta la successione a_n converge ad a]

7.90 Esibire un esempio di successione a_n convergente con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, tale che a_{2k}, a_{2k-1}, siano monotòne, ma $\lim_{k\to+\infty} a_{2k}/a_{2k-1} \neq 1$.

[Ad esempio $a_n = (-1)^n/n$. Risulta $a_{2k} = 1/2k$, che è decrescente, mentre $a_{2k-1} = -1/(2k-1)$ è crescente. Inoltre $a_{2k}/a_{2k-1} = -(2k-1)/(2k) \to -1$]

Un risultato fondamentale sulle successioni è il *teorema di Bolzano-Weierstrass*, di cui ricordiamo l'enunciato: *Da ogni successione limitata* è *possibile estrarre una sottosuccessione convergente.*

(Ricordiamo che una successione a_n è *limitata* se è contenuta in un intervallo; cioè, se esistono due numeri reali A, B per cui $A \leq a_n \leq B$, per ogni $n \in \mathbb{N}$; equivalentemente, se esiste una costante M per cui $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

Nei due esercizi che seguono proponiamo prima una generalizzazione, poi un raffinamento del teorema di Bolzano - Weierstrass.

7.91 Provare che da ogni successione è possibile estrarre una sottosuccessione regolare.

[Se la successione è limitata si può applicare il teorema di Bolzano- Weierstrass. Nel caso che a_n non sia limitata, supponiamo, per fissare le idee, che a_n non sia limitata superiormente. Ciò significa che, qualunque sia il numero reale M, esiste un indice $\overline{n}$ per cui $a_{\overline{n}} > M$. Poniamo $M = k$ con $k \in \mathbb{N}$; per ogni k esiste un indice n_k tale $a_{n_k} > k$. Pur di cambiare n_k (per $k = 2, 3, \ldots$) con $n'_k = \max\{n'_{k-1} + 1, n_k\}$, possiamo supporre n_k strettamente crescente. La successione estratta a_{n_k} così costruita diverge a $+\infty$]

7.92 Provare che da ogni successione è possibile estrarre una sottosuccessione monotòna (strettamente monotòna, se la successione assume infiniti valori).

[In base al teorema di Bolzano-Weierstrass e all'enunciato dell'esercizio precedente, esiste una successione a_{n_k}, estratta da a_n, che ammette limite. Sia $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ il limite, per $k \to +\infty$, di a_{n_k}. Supponiamo preliminarmente che $a \in \mathbb{R}$. In base alla definizione di limite, almeno uno dei due intervalli

$$(a-1, a], \qquad [a, a+1)$$

contiene infiniti termini della sottosuccessione a_{n_k}. Per fissare le idee, sia $[a, a+1)$ l'intervallo con la proprietà anzidetta. Allora esiste un primo indice k_1 per cui $a_{n_{k_1}} \in [a, a+1)$. Consideriamo poi l'intervallo $[a, a_{n_{k_1}})$ (occorre considerare l'intervallo *chiuso* $[a, a_{n_{k_1}}] = \{a\}$ nel caso $a = a_{n_{k_1}}$); esiste un primo indice $k_2 > k_1$ per cui $a_{n_{k_2}} \in [a, a_{n_{k_1}})$. Evidentemente $a_{n_{k_2}} < a_{n_{k_1}}$. Iterando il procedimento otteniamo una successione $a_{n_{k_h}}$ strettamente decrescente, che converge ad a.

Se $a = -\infty$, si inizia il procedimento, ad esempio, dall'intervallo $(-\infty, 0)$. Esiste un primo indice k_1 per cui $a_{n_{k_1}} < 0$; esiste poi $a_{n_{k_2}} < a_{n_{k_1}}$, con $k_2 > k_1$, eccetera. Il caso $a = +\infty$ è analogo]

7.93 Verificare che una successione non è regolare se e soltanto se esistono almeno due successioni estratte che tendono a limiti distinti.

[In base all'esercizio 7.85, esiste una successione a_{n_k}, estratta da a_n, che tende ad $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dato che a_n non è regolare, esistono un intorno I di a ed infiniti termini di a_n che non cadono in I. Da tale insieme di infiniti termini è possibile estrarre una successione a_{m_k} regolare; dato che $a_{m_k} \notin I$ per ogni k, il limite di a_{m_k} non é a. Viceversa, se esistono due sottosuccessioni che tendono a limiti distinti, allora a_n non é regolare, perché, se lo fosse, tutte le successioni estratte dovrebbero tendere allo stesso limite di a_n]

7I. Ricerca di successioni estratte regolari

Il teorema di Bolzano-Weierstrass non è costruttivo, infatti afferma l'esistenza di una sottosuccessione convergente, ma non precisa il metodo per determinarla; inoltre non precisa quale sia il valore limite.

Negli esercizi che seguono proponiamo la ricerca esplicita di sottosuccessioni convergenti e dei loro limiti. Gli esercizi sono presentati in ordine di difficoltà crescente.

7.94 Estrarre dalla successione

$$a_n = (-1)^n \frac{3n+1}{n}.$$

due sottosuccessioni convergenti a limiti distinti.

[a_{2k} converge a 3, mentre a_{2k-1} converge a -3]

7.95 Estrarre dalla successione $a_n = 2^{n(-1)^n}$ due sottosuccessioni convergenti a limiti distinti.

[a_{2k} diverge a $+\infty$, a_{2k-1} converge a 0]

7.96 Estrarre una sottosuccessione convergente da

$$a_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}.$$

[Risulta convergente ad esempio $a_{4k} = \operatorname{sen} k\pi = 0$]

7.97 Consideriamo l'insieme dei numeri razionali

$$\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \, : \, n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ordiniamo in successione gli elementi di tale insieme, utilizzando il *procedimento diagonale* illustrato nello schema seguente:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & m=1 & & m=2 & & m=3 & & m=4 & & \dots \\
n=1 & \frac{1}{1}+\frac{1}{1} & & \frac{1}{1}+\frac{1}{2} & \rightarrow & \frac{1}{1}+\frac{1}{3} & & \frac{1}{1}+\frac{1}{4} & \rightarrow & \dots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
n=2 & \frac{1}{2}+\frac{1}{1} & & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & & \frac{1}{2}+\frac{1}{3} & & \frac{1}{2}+\frac{1}{4} & & \dots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
n=3 & \frac{1}{3}+\frac{1}{1} & & \frac{1}{3}+\frac{1}{2} & & \frac{1}{3}+\frac{1}{3} & & \frac{1}{3}+\frac{1}{4} & & \dots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
n=4 & \frac{1}{4}+\frac{1}{1} & & \frac{1}{4}+\frac{1}{2} & & \dots & & \dots & & \\
\dots & \dots & & \dots & & & & & &
\end{array}$$

Così ad esempio

$$a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{3}{2},\ a_4 = \frac{4}{3},\ a_5 = 1,\ \dots$$

(a) Determinare una sottosuccessione che converge a zero.
(b) Verificare che è possibile estrarre infinite sottosuccessioni che convergono a limiti fra loro distinti.

[(a) La successione estratta che si ottiene considerando la diagonale principale ($m = n$) della tabella sopraindicata è data da:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3},\ldots,\ \frac{1}{n}+\frac{1}{n},\ldots$$

Si tratta quindi della successione $2/n$, che converge a zero per $n \to +\infty$.
(b) Tutte le sottosuccessioni ottenute considerando una riga, od una colonna, risultano convergenti. Ad esempio, la successione estratta dalla prima riga converge ad 1; quella estratta della seconda riga converge ad $1/2$; quella estratta dalla n-sima riga converge ad $1/n$]

Allo scopo di studiare la successione

$$a_n = \operatorname{sen} n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

e di determinarne alcune sottosuccessioni convergenti, premettiamo il lemma seguente.

LEMMA. - Sia A un numero reale positivo. Esistono due successioni di numeri naturali strettamente crescente, per cui

$$\lim_{k\to+\infty} (n_k - Am_k) = 0.$$

Dimostrazione: Supponiamo preliminarmente $A > 1$. Consideriamo la successione di numeri naturali $a_k = [Ak]$, cioè a_k è la *parte intera* di Ak. Dato che $Ak - 1 < a_k \le Ak$, risulta anche

$$a_{k+1} - a_k > A(k+1) - 1 - Ak = A - 1.$$

Iterando la disuguaglianza precedente, per ogni coppia di numeri naturali k', k'', con $k' < k''$, abbiamo

$$(1) \qquad a_{k''} - a_{k'} > (k'' - k')(A - 1).$$

Definiamo $x_k = Ak - a_k = Ak - [Ak]$ (x_k si chiama la *parte decimale* di Ak). Chiaramente risulta $0 \le x_k < 1$.

Per $k \ge 2$, consideriamo l'insieme

$$\{x_k,\ x_{2k},\ x_{3k},\ \ldots, x_{(k-1)k},\ x_{k^2}\}.$$

Si tratta di un insieme composto da k numeri reali appartenenti all'intervallo $[0, 1)$.

Dato che l'intervallo è lungo 1 ed i numeri sono k, ne esistono certamente due che distano fra loro non più di $1/(k-1)$. Indichiamo i corrispondenti indici con k', k''; abbiamo

$$|x_{k'} - x_{k''}| \le \frac{1}{k-1}.$$

Dato che $k'' - k' \ge k$, dalla (1) otteniamo

$$(2) \qquad a_{k''} - a_{k'} > k(A - 1).$$

Definiamo le successioni n_k, m_k nel modo seguente:

$$n_k = a_{k''} - a_{k'}, \qquad m_k = k'' - k'.$$

Dalla (2) si deduce che n_k diverge a $+\infty$ (ed anche m_k perché $k'' - k' \geq k$). Pur di passare ad una successione estratta, possiamo supporre n_k strettamente crescente, in base al risultato dell'esercizio 7.86. Inoltre, ricordando la definizione di x_k, abbiamo:

$$n_k = a_{k''} - a_{k'} = x_{k'} - x_{k''} + A(k'' - k') = x_{k'} - x_{k''} + Am_k.$$

Perciò $|n_k - Am_k| = |x_{k'} - x_{k''}| \leq 1/(k-1)|$, da cui la tesi.

Se $0 < A \leq 1$, indichiamo con λ un numero naturale per cui $\lambda A > 1$ (abbiamo utilizzato la cosiddetta "proprietà di Archimede"). In base alla dimostrazione sopra proposta, esistono due successioni di interi n_k, m_k tali che

$$\lim_{k\to+\infty} (n_k - \lambda A m_k) = 0.$$

Definiamo $m'_k = \lambda m_k$. La coppia di successioni (n_k, m'_k) verifica la tesi del lemma.

7.98 Facendo uso del lemma precedente con $A = 2\pi$, dimostrare che la successione $a_n = \operatorname{sen} n$ ammette una successione estratta che converge a zero.

[Siano n_k, m_k le successioni di numeri naturali del lemma precedente, per cui risulta

$$x_k = n_k - 2\pi m_k \to 0.$$

Risulta anche

$$\operatorname{sen} x_k = \operatorname{sen}(n_k - 2\pi m_k) = \operatorname{sen} n_k.$$

Facendo uso della disuguaglianza $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, abbiamo infine

$$|a_{n_k}| = |\operatorname{sen} n_k| = |\operatorname{sen} x_k| \leq |x_k| \to 0 \quad]$$

7.99 Facendo uso del lemma precedente, verificare che:

(a) Esiste una successione strettamente crescente di interi n_k per cui valgono contemporaneamente le relazioni di limite

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{sen} n_k = 0; \qquad \lim_{k\to+\infty} \cos n_k = 1.$$

(b) Qualunque sia $k_0 \in \mathbb{N}$, esiste una successione estratta da $a_n = \operatorname{sen} n$, che converge a $\operatorname{sen} k_0$.

(c) Qualunque sia $k_0 \in \mathbb{N}$, esiste una successione estratta da $b_n = \cos n$, che converge a $\cos k_0$.

(d) Tenendo presente che π è un numero irrazionale, verificare che le successioni $\operatorname{sen} n$, $\cos n$ ammettono infinite sottosuccessioni convergenti a limiti fra loro distinti.

[(a) Si può procedere come nella dimostrazione dell'esercizio precedente, tenendo anche conto che $\cos x_k = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x_k}$, se $|x_k| \leq \pi/2$.
(b) Si consideri la successione estratta a'_{n_k}, con $n'_k = k_0 + n_k$, ed n_k come in (a). Dalle formule di addizione deduciamo

$$\operatorname{sen} n'_k = \operatorname{sen}(k_0 + n_k) = \operatorname{sen} k_0 \cos n_k + \operatorname{sen} n_k \cos k_0 .$$

Per la parte (a), $\operatorname{sen} n'_k \to \operatorname{sen} k_0$ per $k \to +\infty$.
(c) Analogo a (b).
(d) Limitiamoci alla successione $\operatorname{sen} n$. Abbiamo già verificato in (b) che, per ogni $k_0 \in \mathbb{N}$, esiste una successione estratta che converge a $\operatorname{sen} k_0$. Per provare l'asserto basta verificare che $\operatorname{sen} k_0 \neq \operatorname{sen} k_1$ se k_0 e k_1 sono numeri naturali distinti. Ciò si verifica come nella parte (a) dell'esercizio 7.75]

Capitolo 8

LIMITI DI FUNZIONI

8A. Definizioni

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita in un insieme X di numeri reali e sia x_0 un *punto di accumulazione* per X, cioè un punto tale che in ogni suo intorno cadono punti di X distinti da x_0. Se il lettore non ha familiarità con i punti di accumulazione, può limitarsi a considerare il caso semplice in cui X è l'intervallo chiuso $[a, b]$, oppure l'intervallo aperto (a, b), e $x_0 \in [a, b]$.

Ricordiamo le definizioni di limite di funzione. Cominciamo con il caso in cui x tende ad x_0 ed il limite è finito.

Diremo che $f(x)$ *tende* (o *converge*) ad l *per* x *che tende ad* x_0, e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

se, per ogni $\varepsilon > 0$, *esiste un numero* $\delta > 0$ *tale che* $|f(x) - l| < \varepsilon$, *per ogni* $x \in X$, *con* $0 < |x - x_0| < \delta$.

Schematizzando la definizione precedente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,:\, |f(x) - l| < \varepsilon, \\ \forall\, x \in X \,:\, 0 < |x - x_0| < \delta. \end{cases}$$

Analogamente si definiscono i limiti $\pm\infty$ di $f(x)$ per x che tende ad x_0; ricordiamo le definizioni in simboli:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, M > 0, \exists\, \delta > 0 \,:\, f(x) > M, \\ \forall\, x \in X \,:\, 0 < |x - x_0| < \delta. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, M > 0,\, \exists\, \delta > 0 \,:\, f(x) < -M, \\ \forall\, x \in X \,:\, 0 < |x - x_0| < \delta. \end{cases}$$

Nelle definizioni precedenti la limitazione $M > 0$ non è necessaria; così pure, se M è un numero reale di segno arbitrario, è equivalente scrivere M oppure $-M$. Si definiscono anche il *limite destro* ($x \to x_0^+$) ed il *limite sinistro* ($x \to x_0^-$):

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 \,:\, |f(x) - l| < \varepsilon, \\ \forall\, x \in X \,:\, 0 < x - x_0 < \delta. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 \,:\, |f(x) - l| < \varepsilon, \\ \forall\, x \in X \,:\, -\delta < x - x_0 < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, M > 0,\, \exists\, \delta > 0 \,:\, f(x) > M, \\ \forall\, x \in X \,:\, 0 < x - x_0 < \delta. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, M > 0,\, \exists\, \delta > 0 \,:\, f(x) > M, \\ \forall\, x \in X \,:\, -\delta < x - x_0 < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, M > 0,\, \exists\, \delta > 0 \,:\, f(x) < -M, \\ \forall\, x \in X \,:\, 0 < x - x_0 < \delta. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, M > 0,\, \exists\, \delta > 0 \,:\, f(x) < -M, \\ \forall\, x \in X \,:\, -\delta < x - x_0 < 0. \end{cases}$$

Supponiamo ora che l'insieme X, di definizione della funzione $f(x)$, sia *illimitato superiormente*, cioè, per ogni $k > 0$, esiste almeno un numero $x \in X$ più grande di k. In tal caso si danno le definizioni di limite per x che tende a $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, k > 0 \,:\, |f(x) - l| < \varepsilon, \\ \forall\, x \in X \,:\, x > k. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, M > 0,\, \exists\, k > 0 \,:\, f(x) > M, \\ \forall\, x \in X \,:\, x > k. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, M > 0,\, \exists\, k > 0 \,:\, f(x) < -M, \\ \forall\, x \in X \,:\, x > k. \end{cases}$$

Se l'insieme X, di definizione della funzione $f(x)$, è *illimitato inferiormente* (per ogni $k > 0$, esiste almeno un numero $x \in X$ minore di $-k$), si danno le definizioni di limite per x che tende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, k > 0\ :\ |f(x) - l| < \varepsilon, \\ \forall\, x \in X\ :\ x < -k. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, M > 0,\ \exists\, k > 0\ :\ f(x) > M, \\ \forall\, x \in X\ :\ x < -k. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, M > 0,\ \exists\, k > 0\ :\ f(x) < -M, \\ \forall\, x \in X\ :\ x < -k. \end{cases}$$

Tutte le definizioni di limite date dopra rientrano in uno schema generale. Ricordiamo preliminarmente che un *intorno* di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un insieme del tipo $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$, con $\delta > 0$; mentre intorni di $\pm\infty$ sono rispettivamente insiemi del tipo $\{x \in \mathbb{R} : x > M\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x < -M\}$, con $M > 0$.

Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ supporremo che x_0 è un punto di accumulazione per l'insieme X di definizione della funzione $f(x)$; mentre, se $x_0 = \pm\infty$, supporremo che X è illimitato, superiormente se $x_0 = +\infty$, inferiormente se $x_0 = -\infty$. Infine sia $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Si dice che $f(x)$ *tende ad l per $x \to x_0$ se per ogni intorno U di l, esiste un intorno V di x_0 tale che*

$$x \in X \cap V - \{x_0\} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \in U.$$

Il lettore controlli che le definizioni di limite date in precedenza con i simboli ε, δ, M, k, sono esemplificazioni della definizione con gli intorni U, V.

8.1 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{5}.$$

[Abbiamo $\left|\dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{5}\right| = \dfrac{2}{5}\left|\dfrac{3-x}{2x-1}\right|$. Limitatamente ai numeri reali x per cui $2 < x < 4$ risulta $3 < 2x - 1 < 7$. Abbiamo quindi

$$\left|\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{5}\right| < \frac{2}{15}|x-3|,$$

se $2 < x < 4$, cioè se $|x - 3| < 1$. Perciò, ponendo $\delta = \min\{1; (15/2)\varepsilon\}$ se $|x - 3| < \delta$ risulta anche $|1/(2x - 1) - 1/5| < \varepsilon$]

8.2 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

[Utilizzando la formula di prostaferesi:

$$\cos x - 1 = \cos x - \cos 0 = -2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2},$$

e la disuguaglianza $|\operatorname{sen} t| \leq |t|$, con $t = x/2$:

$$|\cos x - 1| = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \leq 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, risulta $x^2/2 < \varepsilon$ se $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$. Ponendo $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ si verifica la definizione di limite; cioè $|x| < \delta$ implica $|\cos x - 1| < \varepsilon$]

8.3 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

[Risulta $1/x^2 > M$ se $|x| < 1/\sqrt{M}$. La definizione di limite è soddisfatta scegliendo $\delta = 1/\sqrt{M}$]

8.4 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$(a) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + x + |x|}{x} = 2 \qquad (b) \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + x + |x|}{x} = 0$$

[Limitiamoci al caso (a): per $x > 0$ risulta $|x| = x$; perciò la funzione data vale $(x^2 + 2x)/x = x + 2$. Si verifica facilmente che la definizione di limite è soddisfatta scegliendo $\delta = \varepsilon$]

8.5 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to +\infty} (x - 2\sqrt{x}) = +\infty$$

[Fissato $M > 0$, risolviamo la disequazione $x - 2\sqrt{x} > M$; con la sostituzione $t = \sqrt{x}$ otteniamo la disequazione di secondo grado $t^2 - 2t - M > 0$, che ha per soluzioni $t < 1 - \sqrt{1+M}$ e $t > 1 + \sqrt{1+M}$. Il caso $t < 1 - \sqrt{1+M}$ è da scartare, essendo t negativo. Quindi, se

$$x = t^2 > k = (1 + \sqrt{1+M})^2,$$

risulta $x - 2\sqrt{x} > M$, che è quanto si voleva verificare]

8.6 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$(a) \quad \lim_{x\to +\infty} \log x = +\infty \qquad (b) \quad \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$$

[(a) Per ogni $M > 0$, se $x > k = e^M$, risulta $\log x > M$; (b) Fissato $M > 0$, la disequazione $\log x < -M$ è soddisfatta da $0 < x < e^{-M}$. Perciò, posto $\delta = e^{-M}$, se $0 < x < \delta$, risulta $\log x < -M$]

8B. Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Il limiti di funzioni sono strettamente collegati ai limiti di successioni. Ad esempio, relativamente al limite finito di $f(x)$ per $x \to x_0$, vale il seguente teorema:

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'insieme X e sia x_0 un punto di accumulazione per X. Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

se e soltanto se, per ogni successione x_n convergente ad x_0, con $x_n \in X-\{x_0\}$ per ogni n, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$$

Il teorema precedente in simboli si scrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall\,\{x_n\} \subset X,\ x_n \neq x_0\ \forall\, n, \\ x_n \to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n) \to l. \end{cases}$$

Analogamente valgono le seguenti caratterizzazioni

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\,\{x_n\} \subset X,\ x_n \neq x_0\ \forall\, n, \\ x_n \to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n) \to \pm\infty. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = l \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\,\{x_n\} \subset X,\ x_n \underset{<}{>} x_0\ \forall\, n, \\ x_n \to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n) \to l. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\,\{x_n\} \subset X,\ x_n > x_0\ \forall\, n, \\ x_n \to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n) \to \pm\infty. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\,\{x_n\} \subset X,\ x_n < x_0\ \forall\, n, \\ x_n \to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n) \to \pm\infty. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\,\{x_n\} \subset X, \\ x_n \to \pm\infty \ \Rightarrow\ f(x_n) \to l. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\,\{x_n\} \subset X, \\ x_n \to +\infty \ \Rightarrow\ f(x_n) \to \pm\infty. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\,\{x_n\} \subset X, \\ x_n \to -\infty \ \Rightarrow\ f(x_n) \to \pm\infty. \end{cases}$$

8.7 Utilizzare la proprietà (11) del paragrafo 7D per dedurre che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

8.8 Utilizzare la proprietà (10) del paragrafo 7D per dedurre che

$$(a) \quad \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (b) \quad \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

8.9 Verificare che vale l'implicazione

$$\lim_{x\to 0} f(x) = l \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = l$$

[Basta osservare che la successione $x_n = 1/n$ converge a zero]

8.10 Verificare che non vale il viceversa dell'implicazione precedente; cioè, trovare una funzione $f(x)$ per cui $f(1/n)$ converge per $n \to +\infty$, ma $f(x)$ non ammette limite per $x \to 0$.

[Ad esempio $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi/x)$; si veda l'esercizio 8.13]

8.11 Verificare che vale l'implicazione

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to +\infty} f(n) = l$$

[Basta considerare $x_n = n$, con $n \in \mathbb{N}$, che è una successione che diverge a $+\infty$]

Nell'esercizio 8.58 proporremo un'applicazione dell'implicazione precedente al calcolo di limiti di successioni.

Le caratterizzazioni presentate all'inizio di questo paragrafo possono essere utilizzate anche per dimostrare che un dato limite di funzione non esiste. Infatti, se è possibile determinare due successioni x_n, y_n, entrambe convergenti a x_0, con $x_n \neq x_0$, $y_n \neq x_0$ per ogni n, e tali che $f(x_n)$, $f(y_n)$ convergono a limiti distinti, allora si può affermare che non esiste il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$.

8.12 Verificare che non esiste il limite per $x \to 0$, della funzione $f(x) = x/|x|$.

[Posto $x_n = 1/n$, $y_n = -1/n$, risulta $f(x_n) = 1$ e $f(y_n) = -1$]

8.13 Verificare che non esiste il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{x}$$

[Posto $x_n = 1/n$ risulta $\operatorname{sen}(2\pi/x_n) = \operatorname{sen}(2n\pi) = 0$. Determiniamo poi una successione y_n tale che, ad esempio, $\operatorname{sen}(2\pi/y_n) = 1$. Possiamo porre $2\pi/y_n = \pi/2 + 2n\pi$, cioè $y_n = 4/(4n+1)$. Dato che y_n converge a zero, vale lo schema:

$$x_n > 0, \quad x_n \to 0, \quad f(x_n) \to 0;$$

$$y_n > 0, \quad y_n \to 0, \quad f(y_n) \to 1;$$

dove $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi/x)$. In base alla caratterizzazione del limite di funzioni mediante il limite di successioni, possiamo affermare che il limite dato non esiste]

8.14 Verificare che il seguente limite non esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$$

[Considerare $x_n = \alpha + 2n\pi$, essendo α un numero reale fissato]

8C. Limiti notevoli

Diamo un elenco di *limiti notevoli* che sono alla base del calcolo di altri limiti di funzioni.

$$(1) \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$(2) \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$(3) \qquad \lim_{x\to+\infty} x^b = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad b > 0 \\ 0 & \text{se} \quad b < 0; \end{cases}$$

$$(4) \qquad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty;$$

$$(5) \qquad \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty;$$

$$(6) \qquad \lim_{x\to 0^+} x^b \log x = 0 \qquad (b > 0);$$

$$(7) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0 \qquad (b > 0);$$

$$(8) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \qquad\qquad (a > 1,\ b > 0);$$

$$(9) \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$(10) \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$(11) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Inoltre possono essere considerati limiti notevoli anche i seguenti, che sono proposti nuovamente anche più avanti, nel capitolo 9 sulle *funzioni continue*

$$(12) \qquad \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \qquad\qquad (a > 0);$$

$$(13) \qquad \lim_{x\to x_0} x^b = x_0^b \qquad\qquad (x_0 > 0);$$

$$(14) \qquad \lim_{x\to x_0} \log x = \log x_0 \qquad\qquad (x_0 > 0);$$

$$(15) \qquad \lim_{x\to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0;$$

$$(16) \qquad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

Dai limiti notevoli fin qui elencati si deducono i limiti che seguono, che sono non meno importanti dei precedenti.

8.15 Verificare che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{a^x} = 0$ $(a > 1)$.

[Segue da (7), (8)]

8.16 Verificare che, qualunque sia il numero reale b, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b.$$

[Il risultato è immediato se $b = 0$. Altrimenti, con la sostituzione $y = x/b$, otteniamo

$$\left(1+\frac{b}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{by}=\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^b.$$

Se $b>0$, y tende a $+\infty$ quando $x\to+\infty$; perciò il risultato segue dai limiti (9) e (13). Se $b<0$, y tende a $-\infty$ per $x\to+\infty$; in questo caso il risultato segue da (10), (13)]

8.17 Verificare che, qualunque sia il numero reale b, risulta

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^x=e^b.$$

[Come nell'esercizio precedente]

8.18 Verificare che valgono le relazioni di limite

$$\lim_{x\to+\infty}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

[Per le proprietà dei logaritmi risulta

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\to\log e=1;$$

abbiamo utilizzato i limiti notevoli (9), (10), (14)]

8.19 Verificare la relazione di limite

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

[Con la sostituzione $y=1/x$, ci si riconduce ai casi considerati nell'esercizio precedente]

8.20 Verificare la validità della relazione

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

[Con la sostituzione $y=e^x-1$ otteniamo

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{y}{\log(1+y)}.$$

Se $x\to0$, per (12) anche $y\to0$. Perciò il risultato segue dall'esercizio precedente]

8.21 Generalizzando i risultati dei due esercizi precedenti, verificare che, per ogni numero reale a positivo e diverso da 1, valgono le relazioni

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\log a};\qquad\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\log a.$$

8.22 Verificare che valgono le relazioni di limite

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

[Moltiplicare numeratore e denominatore per $1+\cos x$ ed utilizzare i limiti notevoli (11) e (16)]

Ulteriori limiti notevoli sono i seguenti

$$(17) \qquad \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty; \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

$$(18) \qquad \lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\tfrac{\pi}{2}; \qquad \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} x = \tfrac{\pi}{2}$$

$$(19) \qquad \lim_{x\to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty; \qquad \lim_{x\to \pi^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$$

$$(20) \qquad \lim_{x\to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi; \qquad \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$$

che si utilizzano assai spesso nella pratica.

8D. Limiti di funzioni composte

In questo paragrafo proponiamo il calcolo di limiti utilizzando il seguente *teorema sul limite di funzioni composte:*

Siano $g : X \longrightarrow Y$ e $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni tali che

$$(1) \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = y_0; \qquad (2) \quad \lim_{y\to y_0} f(y) = l,$$

ed esista $\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow g(x) \neq y_0$. Allora è anche :

$$(3) \quad \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l.$$

Una semplice dimostrazione di tale teorema si ottiene invocando il teorema del paragrafo 8B. (Sia $x_n \to x_0$ tale che $x_n \neq x_0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; allora $\exists\, \nu$ tale che $0 < |x_n - x_0| < \delta$, $\forall\, n > \nu$ e perciò, per la (1), si ha $g(x_n) \to y_0$ con $g(x_n) \neq y_0$ $\forall\, n > \nu$. Dalla (2) segue allora $f(g(x_n)) \to l$ e perciò vale la (3)).

Dal teorema precedente segue in particolare la formula

$$(*) \qquad \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$$

e perciò, quando si calcola il limite a primo membro della $(*)$ mediante tale teorema, si suol dire che esso si calcola *ponendo* $g(x) = y$ (o, *mediante la sostituzione* $g(x) = y$).

Osserviamo la condizione: $\exists\, \delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; g(x) \neq y_0$, è essenziale per la validità del teorema. Infatti, se $g(x)$ e $f(y)$ sono definite da

$$g(x) = y_0 \quad \forall\, x\,; \qquad\qquad f(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq y_0 \\ 0 & \text{se } y = y_0 \end{cases}$$

allora $f(g(x)) = f(y_0) = 0\; \forall\, x$, e perciò risulta $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = 0$, mentre si ha $\lim_{y \to y_0} f(y) = 1$.

Osserviamo inoltre che già in qualcuno degli esercizi precedenti abbiamo calcolato dei limiti eseguendo semplici sostituzioni.

Si vede subito che se, più in generale, abbiamo due funzioni $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, allora il teorema precedente continua a sussistere purché abbia significato la funzione $f \circ g$ e x_0 sia di accumulazione per il suo dominio.

8.23 Calcolare il limite di funzione composta

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2.$$

[Posto $g(x) = |x+1|/|x-1|$, $f(y) = y^2$ il limite dato coincide con $\lim_{x \to 1} f(g(x))$ e si può calcolare ponendo $y = |x+1|/|x-1|$. Poiché, per $x \to 1$ si ha $y = |x+1|/|x-1| \to +\infty$ e per $y \to +\infty$ si ha $y^2 \to +\infty$, allora risulta

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 = \lim_{y \to +\infty} y^2 = +\infty.$$

Si osservi che la condizione $g(x) \neq y_0 = +\infty$ per $0 < |x-1| < \delta$ è certamente verificata]

8.24 Calcolare il limite di funzione composta

$$\lim_{x \to 0^+} (\log x)^2.$$

[Posto $y = \log x$, per $x \to 0^+$ si ha $y = \log x \to -\infty$ e per $y \to -\infty$ si ha $y^2 \to +\infty$. Pertanto $\lim_{x \to 0^+} (\log x)^2 = \lim_{y \to -\infty} y^2 = +\infty$]

Il teorema sul limite di funzioni composte si può applicare anche nel caso di funzioni composte mediante più di due funzioni, come si vede nel seguente esercizio.

8.25 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}^4 \frac{1}{x}.$$

[Il limite per $x \to 0$ di $1/x$ non esiste e tuttavia esistono i limiti destro e sinistro. Pertanto possiamo applicare il teorema sul limite delle funzioni composte, calcolando i limiti destro e sinistro in 0 per la funzione data.

Per $x \to 0^+$ si ha $y = 1/x \to +\infty$; per $y \to +\infty$ si ha $t = \operatorname{arctg} y \to \pi/2$ (in base alla (18) del paragrafo precedente); per $t \to \pi/2$ si ha $t^4 \to (\pi/2)^4$. Perciò $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}^4 \frac{1}{x} = (\pi/2)^4$. Analogamente si vede che $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}^4 \frac{1}{x} = (-\pi/2)^4$ e perciò il limite proposto è uguale a $(\pi/2)^4$]

8.26 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}.$$

[Essendo $x^{1/x} = e^{(\log x)/x}$, eseguendo la sostituzione $y = (\log x)/x$ ed applicando le (7), (12) del paragrafo precedente si trova che il limite dato è uguale a 1]

8.27 Verificare l'uguaglianza

$$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} \log^3 x = \frac{\pi}{2}.$$

8E. Calcolo di limiti

In questo paragrafo proponiamo il calcolo di limiti utilizzando i teoremi fondamentali, quali i teoremi di confronto ed i teoremi relativi alle operazioni di somma, prodotto e quoziente di limiti. Faremo uso anche dei limiti notevoli elencati nel paragrafo 8C.

8.28 Calcolare i limiti di funzione

$$(a) \quad \lim_{x\to +\infty} 2^x - x^2 \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to +\infty} \log x - \sqrt{x}$$

[(a) Si tratta di una forma indeterminata $\infty - \infty$. Con la rappresentazione

$$2^x - x^2 = 2^x \left(1 - \frac{x^2}{2^x}\right),$$

si ottiene una forma del tipo $+\infty \cdot 1$ (in base al limite notevole (8) del paragrafo 8C); quindi il limite dato $+\infty$; (b) con la fattorizzazione

$$\log x - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}} - 1\right),$$

si vede che la funzione data tende a $-\infty$, per $x \to +\infty$, in base al limite notevole (7) del paragrafo 8C, con $b = 1/2$]

8.29 Calcolare i limiti di funzione

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\sqrt{x+1}}{x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3+1)}{x}$$

[Si utilizzi in entrambi i casi il limite notevole (7) del paragrafo 8C

$$(a) \quad \frac{\log\sqrt{x+1}}{x} = \frac{1}{2}\frac{\log(x+1)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x} \to 0\,;$$

$$(b) \quad \frac{\log(x^3+1)}{x} = 3\,\frac{\log\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} \to 0\ ]$$

8.30 Calcolare i limiti di funzione

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log\sqrt{x+1}}{x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(x^3+1)}{x}$$

[Si utilizzi il limite dell'esercizio 8.19: (a) 1/2; (b) 0]

8.31 Calcolare i limiti di funzione

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{2^x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-e^{2x}}$$

[Si utilizzino i limiti notevoli (7), (8). Il risultato in entrambi i casi è 0]

8.32 Calcolare i limiti di funzione

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2+1)}{2^x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{2x}}$$

[(a) È un limite immediato, uguale a 0; (b) Utilizzando il limite dell'esercizio 8.20, si trova

$$\frac{x}{1-e^{2x}} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{1-e^{2x}} \to -\frac{1}{2}]$$

8.33 Calcolare i limiti di funzione

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{1-x}$$

[(a) Utilizzando il limite dell'esercizio 8.16, con $b = -1$, si determina il valore limite e^{-2}; (b) $e^{-3/2}$]

8.34 Calcolare i limiti di funzione

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}}$$

[(*a*) Il risultato segue dal limite notevole (9), con la scomposizione:

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = \left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\dfrac{x}{x+1}} \to e$$

(*b*) con la sostituzione $2/(x-1)=y$ ed utilizzando i limiti degli esercizi 8.16, 8.17, si trova il risultato e^2]

8.35 Calcolare i limiti di funzione

$$(a) \quad \lim_{x\to 0^+} x^x \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\log x}$$

[Si utilizzi la relazione (che è immediata conseguenza della definzione del logaritmo):

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)}.$$

(*a*) $x^x = e^{x\log x} \to e^0 = 1$, per i limiti degli esercizi (6), (12); (*b*) $x^{\log x} = e^{(\log x)^2} \to +\infty$]

8.36 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \log\left(1-\frac{1}{x}\right)$.

[Analogamente all'esercizio 8.18, si trova il valore limite -1]

8.37 Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to+\infty} x^2[\log(x^2+2) - 2\log x]$$

[Utilizzando il limite dell'esercizio 8.18, si ottiene

$$x^2[\log(x^2+2) - 2\log x] = x^2 \log\frac{x^2+2}{x^2} = 2\left[\frac{x^2}{2}\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\right] \to 2\,]$$

8.38 Calcolare i limiti di funzione

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{2^{3x}-1}{x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to+\infty} x \log_{10}\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

[Si veda l'esercizio 8.21. (*a*) $3\log 2$; (*b*) $2\log_{10} e$]

8.39 Calcolare i limiti di funzione

$$(a) \quad \lim_{x\to 1} \frac{\log\, x}{x-1} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{\log\,(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}}$$

[(a) Il risultato è 1; si ottiene effettuando la sostituzione $y = x-1$ e utilizzando il limite dell'esercizio 8.19; (b) È utile la scomposizione del denominatore: $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$. Il risultato è $1/\sqrt{2}$]

8.40 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\,(1+x) + \log\,(1-x)}{x^2}$$

[Dato che la somma di logaritmi è uguale a ... il risultato è -1]

8.41 Calcolare i limiti di funzioni trigonometriche

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{tg} x}$$

[Si utilizzi il limite notevole (11).

$$(a) \quad \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{3}{2}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\frac{2x}{\operatorname{sen} 2x} \to \frac{3}{2};$$

$$(b) \quad \frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{tg} x} = \cos\frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x} \to 4\ ]$$

8.42 Calcolare i limiti di funzione

$$(a) \quad \lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to -\infty} (2-x)\operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

[(a) $x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} \to 1$; (b) -1]

8.43 Calcolare i limiti di funzioni trigonometriche

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x}$$

[Si moltiplichi e divida per $1+\cos x$. (a) $1/2$; (b) 2]

8.44 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\, 2x}{\log\, 3x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\,(x+x^2)}{\log\, x}$$

[(a) $\dfrac{\log\, 2x}{\log\, 3x} = \dfrac{\log\, 2 + \log\, x}{\log\, 3 + \log\, x} = \dfrac{1 + \log\, 2/\log\, x}{1+\log\, 3/\log\, x} \to 1;$

$$(b)\ \frac{\log(x+x^2)}{\log x} = \frac{\log x + \log(x+1)}{\log x} = 1 + \frac{\log(x+1)}{\log x} \to 1$$

Si ricordi che la forma $0/\infty$ non è indeterminata, ma vale 0]

8.45 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x+x^2)}{x} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log \cos x}{x^2}$$

[Si utilizzi il limite notevole dell'esercizio 8.19.

$$(a)\ \frac{\log(1-x+x^2)}{x} = \frac{\log(1-x+x^2)}{-x+x^2}(x-1) \to -1;$$

$$(b)\ \frac{\log \cos x}{x^2} = \frac{\log[1+(\cos x - 1)]}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \to -\frac{1}{2}\ ]$$

8.46 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to 0^+} (1+|\mathrm{sen}\, x|)^{\frac{1}{x}} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^-} (1+|\mathrm{sen}\, x|)^{\frac{1}{x}}$$

[Rappresentare la funzione data nel modo seguente

$$(1+|\mathrm{sen}\, x|)^{\frac{1}{x}} = \left[\left(1+\frac{1}{1/|\mathrm{sen}\, x|}\right)^{\dfrac{1}{|\mathrm{sen}\, x|}}\right]^{\dfrac{|\mathrm{sen}\, x|}{x}}.$$

(a) e; (b) $1/e$]

8.47 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to 0^+} (1+|\mathrm{sen}\, x|)^{-\frac{1}{|x|}} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^-} (1+\mathrm{sen}\, 2x)^{-\frac{1}{|x|}}$$

[Rappresentare la funzione data in modo analogo a quanto indicato nell'esercizio precedente. (a) e^{-1}; (b) e^2]

8.48 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{\log x}\right)^x \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{\log |x|}\right)^x$$

[Moltiplicare e dividere l'esponente per la funzione ... (a) $+\infty$; (b) 0]

8.49 Calcolare i limiti di funzioni esponenziali

$$(a)\quad \lim_{x\to -\infty} (1+e^x)^x \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to +\infty} (1+e^x)^{-x}$$

[(a) 1; (b) si tratta di un limite immediato, uguale a 0]

8.50 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/\operatorname{sen}^2 x}$$

[(a) Ricordando il limite dell'esercizio 8.45 (b), si ottiene

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\log\cos x} \to e^{-\frac{1}{2}};$$

(b) e^{-2}]

8.51 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}+\log x\right) \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\log \operatorname{sen} x\right)$$

[(a) $\frac{1}{\operatorname{sen} x}+\log x = \frac{1}{x}(\frac{x}{\operatorname{sen} x}+x\log x) \to +\infty$.
Abbiamo utilizzato i limiti notevoli (11) e (6) (b) $+\infty$]

8.52 Calcolare il limite: $\lim_{x\to+\infty}(e^{\sqrt{x^2+x}}-e^{\sqrt{x^2-1}})$.

[Utilizziamo la scomposizione

$$e^{\sqrt{x^2+x}}-e^{\sqrt{x^2-1}} = e^{\sqrt{x^2+x}}(1-e^{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x}})$$

e consideriamo separatamente l'esponente:

$$\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x} = \frac{-1-x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1/x-1}{\sqrt{1-1/x^2}+\sqrt{1+1/x}}.$$

Per $x\to+\infty$, l'esponente converge a $-1/2$. Perciò l'espressione in parentesi converge a $(1-e^{-1/2}) = (1-1/\sqrt{e})$, che è un numero reale positivo. Ne segue che il limite richiesto vale $+\infty$]

8.53 Calcolare il limite: $\lim_{x\to+\infty}(e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x^2-1}})$.

[Con il metodo proposto nell'esercizio precedente si trova che il limite vale $-\infty$]

8.54 Utilizzando i *teoremi di confronto* per i limiti di funzione, calcolare:

$$(a)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2\cos x}{3x}$$

[(a) Dato che, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, valgono le disuguaglianze $-1\le \operatorname{sen} x\le 1$, allora, per $x>0$, risulta anche

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Per $x \to +\infty$, il primo e l'ultimo membro convergono a zero; perciò il limite dato vale 0; (b) dato che, $(\cos x)/x \to 0$ per $x \to +\infty$, il risultato è $1/3$]

8.55 Facendo uso dei teoremi di confronto per i limiti di funzione, calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x[\log(\sqrt{x}+1) - \log\sqrt{x+1}]$$

[Calcolando preliminarmente il limite, per $x \to +\infty$, della funzione in parentesi quadra

$$\log(\sqrt{x}+1) - \log\sqrt{x+1} = \log\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}} \to \log 1 = 0.$$

Essendo $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, il limite dato vale 0]

8.56 Calcolare: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\sqrt{x}-1) - [\log(x-1)]/2}{5 - 2\cos x}$.

[Osservando che $3 \leq 5 - 2\cos x \leq 7$, si verifica che il limite dato vale 0]

8.57 Utilizzando i teoremi di confronto per i limiti di funzione, calcolare:

$$(a)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x+\cos x}} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\cos x + \sqrt{1+x^2}}$$

[(a) Utilizzando le disuguaglianze $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $\cos x \geq -1$, otteniamo

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x+\cos x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Il secondo membro converge a zero per $x \to +\infty$; perciò il limite dato vale 0; (b) Dividendo numeratore e denominatore per x, si trova che il limite vale -1]

8.58 Calcolare i seguenti limiti di successione facendo uso della proprietà dell'esercizio 8.11, in cui il calcolo di limiti di successione è ricondotto al calcolo di limiti di funzione.

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \operatorname{sen}\frac{2}{n}\right)^n \qquad\qquad (b)\quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$(c)\quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^n \qquad\qquad (d)\quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \operatorname{sen}\frac{1}{n^2}\right)^n$$

[Alla variabile discreta n si sostituisca la variabile reale x. (a) e^2; (b) $+\infty$; (c) $1/e$; (d) 1]

8.59 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3 \operatorname{sen}(1/x)}{e^{x^2}-1} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 3}\frac{\log(x/3)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

[(a) Risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=1,$$

da cui si deduce che il limite dato vale zero; (b) dato che $\log(x/3)/(x-3)$ tende a 1, per $x \to 3$, si trova che il limite dato vale $2\sqrt{3}/3$]

8.60 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x^2}+1}{x^x+5} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{3^{x^2}-2}{x^{2x+1}+1}$$

[(a) Dato che $e^{x^2}/x^x = (e^x/x)^x \to +\infty$, il limite di funzioni dato diverge a $+\infty$; (b) si osservi che

$$\frac{3^{x^2}}{x^{2x+1}} = \left(\frac{3^x}{x^{2+\frac{1}{x}}}\right)^x \to +\infty,$$

trattandosi di una forma ∞^∞; pertanto il limite dato vale $+\infty$]

8F. Infinitesimi

Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme X e sia x_0 un punto di accumulazione per X. Si dice che la funzione $f(x)$ è *infinitesima* in x_0 (o per $x \to x_0$) se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni infinitesime per $x \to x_0$. Supporremo d'ora in avanti che $f(x)$ e $g(x)$ non si annullano quando x è in un opportuno intorno di x_0, con $x \neq x_0$.

Si dice $f(x)$ è un *infinitesimo di ordine superiore* a $g(x)$ se

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

In tal caso si dice anche che $f(x)$ è un "*o piccolo*" di $g(x)$, e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \qquad\qquad (\text{per } x \to x_0)\ .$$

8.61 Verificare che per il simbolo "*o piccolo*" valgono le relazioni seguenti:

$(a)\quad o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$

$$(b) \quad o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g^2(x))$$

[(a) Siano $f_1(x) = o(g(x))$, $f_2(x) = o(g(x))$, due funzioni infinitesime di ordine superiore rispetto a $g(x)$, (per $x \to x_0$), cioè

$$(*) \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0.$$

Allora $[f_1(x) + f_2(x)]/g(x) \to 0$ per $x \to x_0$, cioè $f_1(x) + f_2(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$, cioè ancora $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$;
(b) Come in precedenza, se vale $(*)$, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{g^2(x)} = 0.$$

cioè $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g^2(x))$]

8.62 Verificare che, per il simbolo "*o piccolo*" vale la proprietà seguente: se $g_1(x) > 0$, $g_2(x) > 0$, per ogni $x \neq x_0$, allora

$$o(g_1(x)) + o(g_2(x)) = o(g_1(x) + g_2(x)) \qquad (x \to x_0)\ .$$

[Poniamo $f_1(x) = o(g_1(x))$, $f_2(x) = o(g_2(x))$. Risulta quindi:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0.$$

Tenendo presente che g_1 e g_2 sono funzioni positive, per $x \to x_0$ otteniamo

$$\left|\frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)}\right| = \frac{|f_1(x) + f_2(x)|}{g_1(x) + g_2(x)} \leq \frac{|f_1(x)|}{g_1(x) + g_2(x)} + \frac{|f_2(x)|}{g_1(x) + g_2(x)} \leq \frac{|f_1(x)|}{g_1(x)} + \frac{|f_2(x)|}{g_2(x)} \to 0$$

Perciò $f_1(x) + f_2(x) = o(g_1(x) + g_2(x))$]

8.63 Confrontando la formula (a) dell'esercizio 8.59 e la formula dell'esercizio 8.60, si ottiene

$$o(g(x)) = o(2g(x)).$$

Tale formula non è contraddittoria. Verificarlo con degli esempi.

[Ad esempio la funzione x^2 è allo stesso tempo $o(x)$ e $o(2x)$]

Si dice $f(x)$ e $g(x)$ sono *infinitesimi dello stesso ordine* se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

essendo l un numero reale diverso da zero. Se $l = 1$ si dice anche che $f(x)$ e $g(x)$ sono *infinitesimi equivalenti.*

Si dice infine che $f(x)$ è un *infinitesimo di ordine inferiore* a $g(x)$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Si danno analoghe definizioni per $x \to x_0^{\pm}$, oppure per $x \to \pm\infty$.

8.64 Verificare che, per $x \to 0^+$, $f(x) = x$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x) = 1/\log x$.

[$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$]

8.65 Verificare che, per $x \to 0$, $f(x) = 1 - \cos x$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x) = \operatorname{sen} x$.

[$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \to 0$]

8.66 Verificare che, per $x \to 0$, $f(x) = 1 - \cos x$ e $g(x) = x^2$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

[$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)/x^2 = 1/2$]

Spesso si confronta una data funzione $f(x)$, infinitesima per $x \to x_0$, con l'infinitesimo $g(x) = x - x_0$, oppure con una potenza di $x - x_0$. Molto utilizzata è l'espressione

$$f(x) = g(x) + o(x - x_0) \qquad\qquad (x \to x_0);$$

secondo la definizione data, con la relazione precedente si intende che la differenza $f(x) - g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

8.67 Utilizzando i limiti notevoli del paragrafo 8C, verificare la validità delle formule seguenti:

(a) $\quad \operatorname{sen} x = x + o(x)$

(b) $\quad \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

(c) $\quad \log(1 + x) = x + o(x)$

(d) $\quad e^x = 1 + x + o(x)$

Si dice che $f(x)$ è una funzione *infinitesima di ordine* α in x_0 se $|f(x)|$ e $|x-x_0|^\alpha$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to x_0$.

8.68 Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, delle seguenti funzioni:

$$(a) \quad \operatorname{sen} 2x \qquad\qquad (b) \quad 1-\cos x$$

[(a) 1; (b) 2]

8.69 Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, delle seguenti funzioni:

$$(a) \quad \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x \qquad\qquad (b) \quad \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

[(a) È un infinitesimo del terzo ordine, come si riconosce facilmente dall'identità

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x(\cos x - 1)}{\cos x};$$

(b) È un infinitesimo di ordine 3/2]

8.70 Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, delle seguenti funzioni:

$$(a) \quad \sqrt{1+x^5} - \sqrt{1-x^5} \qquad\qquad (b) \quad \log(1+x)^x$$

[(a) 5; (b) 2]

8.71 Verificare che, per il simbolo "*o piccolo*" vale la proprietà per $x \to 0^+$ $(\alpha,\, \beta > 0)$:

$$o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\gamma), \qquad\qquad \text{dove } \gamma = \min\{\alpha,\, \beta\}.$$

[Siano $f_1(x) = o(x^\alpha)$, $f_2(x) = o(x^\beta)$; ciò significa che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f_2(x)}{x^\beta} = 0.$$

Se, ad esempio $\alpha = \gamma = \min\{\alpha,\, \beta\}$, cioè se $\alpha \le \beta$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x)}{x^\alpha} + \lim_{x\to 0^+} \frac{f_2(x)}{x^\beta} x^{\beta-\alpha} = 0.$$

Quindi $f_1(x) + f_2(x) = o(x^\alpha)$]

Utile si rivela il *principio di sostituzione degli infinitesimi*, che si può enunciare nel modo seguente:
Consideriamo funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, infinitesime per $x \to x_0$. Se $g_1(x)$ è infinitesima di ordine superiore rispetto a $f_1(x)$ e se $g_2(x)$ è infinitesima di ordine superiore rispetto a $f_2(x)$, allora i limiti seguenti sono uguali, purché uno di essi esista:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Con il simbolo “o piccolo” tale relazione si scrive:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+o(f_1(x))}{f_2(x)+o(f_2(x))} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

La dimostrazione è immediata e segue dall'identità:

$$\frac{f_1(x)+g_1(x)}{f_2(x)+g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \frac{1+g_1(x)/f_1(x)}{1+g_2(x)/f_2(x)}$$

Il principio di sostituzione degli infinitesimi sarà ampliamente utilizzato nel capitolo 11, nel calcolo di limiti di funzioni con l'ausilio della formula di Taylor.

8.72 Utilizzando le formule (a), (c) dell'esercizio 8.65 ed il principio di sostituzione degli infinitesimi, calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\log(1+x)}$$

[1]

8.73 Utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi, calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}^3 x}-1}{\log(1-x^3)}.$$

[In base alle formule (c), (d) dell'esercizio 8.65, abbiamo

$$e^t = 1+t+o(t) \quad \Longrightarrow \quad e^{\operatorname{sen}^3 x} = 1+\operatorname{sen}^3 x + o(\operatorname{sen}^3 x);$$

$$\log(1+t) = t+o(t) \quad \Longrightarrow \quad \log(1-x^3) = -x^3+o(-x^3).$$

Dal principio di sostituzione degli infinitesimi otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}^3 x}-1}{\log(1-x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{-x^3} = -1\ ]$$

8.74 Facendo uso del principio di sostituzione degli infinitesimi, calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\log(1-x)+\log(1+x)}.$$

[Si utilizzino le formule (b), (c) dell'esercizio 8.65 e la proprietà dei logaritmi

$$\log(1-x)+\log(1+x) = \log(1-x^2).$$

Il limite vale -2]

8G. Infiniti

Considerazioni analoghe a quelle fatte nel paragrafo precedente valgono per limiti infiniti.

Precisamente, $f(x)$ si dice *infinita* in x_0 (o per $x \to x_0$) se

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty.$$

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni infinite per $x \to x_0$.
Si dice $f(x)$ è un *infinito di ordine superiore* a $g(x)$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Si dice $f(x)$, $g(x)$ sono *infiniti dello stesso ordine* se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

essendo l un numero reale diverso da zero. Se $l = 1$ si dice anche che $f(x)$ e $g(x)$ sono *infiniti equivalenti*.

Si dice che $f(x)$ è un *infinito di ordine inferiore* a $g(x)$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Si danno analoghe definizioni per $x \to x_0^{\pm}$, oppure per $x \to \pm\infty$.

8.73 Verificare che, per $x \to +\infty$, $\log x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto alla potenza x^b, qualunque sia $b > 0$.

[Si ricordi il limite notevole (7) del paragrafo 8C]

8.74 Verificare che, per $x \to 0^+$, $\log x$ è un infinito di ordine inferiore alla potenza x^b, qualunque sia $b < 0$.

[Si ricordi il limite notevole (6) del paragrafo 8C]

8.75 Verificare che, per $x \to +\infty$, la potenza x^b $(b > 0)$ è un infinito di ordine inferiore rispetto all'esponenziale a^x $(a > 1)$.

[Si ricordi il limite notevole (8) del paragrafo 8C]

Analogamente agli infinitesimi, vale il *principio di sostituzione degli infiniti*: Consideriamo funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, infinite per $x \to x_0$. Se

$f_1(x)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g_1(x)$ e se $f_2(x)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g_2(x)$, allora i limiti seguenti sono uguali

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

La dimostrazione si ottiene come nel caso degli infinitesimi.

8.76 Utilizzando il principio di sostituzione degli infiniti, calcolare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^6 + x^4(2 + \operatorname{sen} x) + \log x}{1 + 3x^3 + 6x^6}.$$

[$f_1(x) = x^6$ è un infinito di ordine superiore a $g_1(x) = x^4(2+\operatorname{sen} x)+\log x$; inoltre $f_2(x) = 6x^6$ è un infinito di ordine superiore a $g_2(x) = 1 + 3x^3$. In base al principio di sostituzione degli infiniti il limite vale 1/6]

8.77 Utilizzando il principio di sostituzione degli infiniti, calcolare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x \log x - x^2 \log^2 x + \cos x}{\sqrt{1 + x^4 \log^4 x}}$$

[Il numeratore è un infinito di ordine equivalente a $-x^2 \log^2 x$, mentre il denominatore è un infinito di ordine equivalente a $x^2 \log^2 x$. In base al principio di sostituzione degli infiniti il limite vale -1]

Capitolo 9

FUNZIONI CONTINUE

9A. Continuità e discontinuità

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo I di $\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$.

Si dice che $f(x)$ *è continua in* x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

o, ciò che è lo stesso, se per ogni successione $x_n \to x_0$, si ha $f(x_n) \to f(x_0)$.

Si dice che $f(x)$ *è continua da sinistra* (risp. *da destra*) *in* x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \qquad\qquad (\text{risp. } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)).$$

Evidentemente, se $I = [a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$, la continuità di f in $x_0 = a$ (risp. in $x_0 = b$) va intesa come continuità da destra (risp. da sinistra).

Si dice che $f(x)$ *è continua in* I se essa è continua in ogni punto di I. In particolare $f(x)$ è continua in $[a, b]$ se e solo se $f(x)$ è continua in (a, b) ed è continua da destra in a e da sinistra in b.

Se $f(x)$ è una funzione definita nell'intervallo I di $\mathbb{R}$ ed essa non è continua nel punto x_0 di I, si dice che x_0 *è un punto di discontinuità per* f.

Vi sono *tre tipi* di discontinuità per una funzione in un punto:

(a) x_0 è un *punto di discontinuità eliminabile* se esiste il limite di f in x_0 e risulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

In questo caso, posto $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$, la funzione $\overline{f}(x)$ definita da

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq x_0 \\ l & \text{se} \quad x = x_0 \end{cases}$$

è evidentemente continua in x_0. Per tale ragione si parla di discontinuità eliminabile.

(b) x_0 è un *punto di discontinuità di prima specie* se esistono finiti i limiti destro e sinistro di $f(x)$ in x_0, e si ha

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

(c) x_0 è un *punto di discontinuità di seconda specie* se uno almeno dei due limiti

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \qquad , \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

non esiste oppure è infinito.

Ricordiamo che *una funzione monotòna può ammettere al più discontinuità di prima specie.*

Sia $x_0 \in I$ e sia $f(x)$ una funzione definita nell'insieme $I - \{x_0\}$. Se esiste il limite

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

allora, la funzione $\overline{f}(x)$ definita in I da

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per} \quad x \neq x_0 \\ l & \text{per} \quad x = x_0 \end{cases}$$

si chiama *prolungamento per continuità* di $f(x)$ in x_0 ed è una funzione continua in x_0. In particolare, se $f(x)$ era già continua in $I - \{x_0\}$, si dice che la funzione $\overline{f}(x)$ è il prolungamento per continuità di $f(x)$ su I.

Ricordiamo che *una funzione composta mediante funzioni continue è anch'essa continua.*

9.1 Dire se la funzione $f : x \in \mathbb{R} - \{2\} \to \dfrac{1}{x-2}$ è continua in $x_0 = 2$.

[No, perchè non è definita in $x_0 = 2$]

9.2 Sia $f(x)$ la funzione definita in $(0, 2)$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Determinare l'insieme X dei punti di discontinuità di $f(x)$.

[$X = \emptyset$]

9.3 Sia $f(x)$ la funzione definita in $(0, 2)$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Determinare l'insieme X dei punti di discontinuità di $f(x)$.

[$X = \{1\}$]

9.4 Sia x_0 un numero reale e sia $f(x)$ la funzione definita in $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se} \quad x \leq x_0 \\ c & \text{se} \quad x > x_0 \end{cases}$$

Sotto quali condizioni su a, b e c la funzione $f(x)$ è continua?

[Dev'essere $ax_0 + b = c$]

9.5 Studiare la continuità della funzione definita in $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

[È continua in $\mathbb{R} - \{0\}$. Nel punto 0 ammette una discontinuità di prima specie, essendo $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$]

9.6 Dedurre dalla disuguaglianza triangolare del valore assoluto: $|a + b| \leq |a| + |b|$ per ogni a, $b \in \mathbb{R}$, la seguente disuguaglianza:

$$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$$

per ogni x, $x_0 \in \mathbb{R}$.

[Dimostriamo dapprima che $|x| - |x_0| \leq |x - x_0|$. A tale scopo basta osservare che, per la disuguaglianza triangolare, si ha $|x| = |(x - x_0) + x_0| \leq |x - x_0| + |x_0|$. Analogamente si ottiene l'altra disuguaglianza $|x_0| - |x| \leq |x_0 - x| = |x - x_0|$. Ne segue l'asserto, in quanto il valore assoluto di $|x| - |x_0|$ è uguale a $|x| - |x_0|$ oppure $|x_0| - |x|$]

9.7 Tenendo presente l'esercizio precedente, dimostrare che la funzione $f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$.

9.8 Verificare che la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è continua in alcun punto. Che tipo di discontinuità ammette tale funzione?

[Di seconda specie. Infatti, verifichiamo che, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$ non esiste $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Se per assurdo, fosse $l = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, con $l \geq 0$, per fissare le idee, numero reale, esisterebbe un numero $\delta > 0$ tale che

$$(*) \qquad x_0 < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \frac{1}{2}.$$

Scegliendo in $(*)$ $x \in \mathbb{Q}$, la disuguaglianza a destra implica $l < \frac{1}{2}$; scegliendo invece $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, si trova $|1 - l| < \frac{1}{2}$. Poiché queste due disuguaglianze su l non possono coesistere, abbiamo ottenuto un assurdo]

9.9 Verificare che la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

è continua solo in $x_0 = 0$

9.10 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Verificare che f è continua solo in $x_0 = 0$

[Dato che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$, dal teorema dei carabinieri si deduce che $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Per verificare che f non è continua in alcun punto $x_0 \neq 0$, procedere come nell'esercizio 9.8]

9.11 Tenendo conto dell'esercizio precedente, verificare che il seguente enunciato è falso: "Se $f(x)$ è continua in x_0, allora essa è continua anche in un

intorno di x_0". Proponiamo di seguito una dimostrazione sbagliata. Trovare l'errore.
Per ipotesi $f(x)$ è continua in x_0. Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$(*) \qquad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \, .$$

Se indichiamo con $I = \{x \in \mathbb{R} : \; |x - x_0| < \delta\}$ l'intorno di x_0 di raggio δ, allora f è continua in I. Infatti, per ogni $x_1 \in I$ risulta

$$|f(x) - f(x_1)| < |f(x) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_1)| \le$$

$$\le |f(x) - f(x_0)| + |f(x_1) - f(x_0)| < 2\varepsilon.$$

L'ultimo passaggio segue dall'ipotesi $(*)$, dato che sia x che x_1 distano da x_0 per meno di δ . La disuguaglianza sopra scritta prova che $f(x)$ è continua per $x = x_1$, che è un generico punto dell'intorno I.

[L'intorno I non è stato ben definito, essendo dipendente da ε. Avremmo avuto una buona definizione di I, utilizzando un raggio diverso, ad esempio ε_0 con ε_0 numero positivo fissato. Così facendo, però, naturalmente, non si riesce a provare la disuguaglianza di continuità per ogni ε]

9.12 Sia $f(x)$ la funzione definita in $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Che tipo di discontinuità ammette tale funzione?

[Una discontinuità eliminabile in $x_0 = 0$]

9.13 Sia $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ per $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Dimostrare che $f(x)$ ammette un (unico) prolungamento per continuità su $\mathbb{R}$.

9.14 Dire se la funzione definita in $\mathbb{R} - \{0\}$ da $f(x) = x/|x|$ può essere prolungata per continuità su $\mathbb{R}$.

[No]

9.15 Dire se le seguenti funzioni f_i, continue in ogni punto di $\mathbb{R} - \{0\}$, possono essere prolungate per continuità su $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo, determinare il prolungamento $\overline{f}_i$:

$$f_1(x) = e^{-1/x^2} \, ; \qquad\qquad f_2(x) = (\operatorname{sen} x)/x \, ;$$

$$f_3(x) = [\log(1+x)]/x\,; \qquad f_4(x) = (e^x - 1)/x\,.$$

[Essendo $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$, basta porre $\overline{f}_1(0) = 0$.

Essendo $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x = 1$, basta porre $\overline{f}_2(0) = 1$.

Essendo $\lim\limits_{x\to 0} [\log(1+x)]/x = 1$, basta porre $\overline{f}_3(0) = 1$.

Essendo $\lim\limits_{x\to 0} (e^x - 1)/x = 1$, basta porre $\overline{f}_4(0) = 1$.]

9.16 Studiare la discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot 2^{1/x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

[La funzione è continua in $\mathbb{R} - \{0\}$. Essendo

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \cdot 2^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{2^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{y\to +\infty} \frac{2^y}{y} = +\infty,$$

lo zero è un punto di discontinuità di seconda specie per $f(x)$]

9.17 Determinare a e b in modo che la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + b & \text{se} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{se} \quad x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

sia continua in $\mathbb{R}$.

[Essendo $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, deve risultare $b - a = -1$ e $a + b = 0$. Da cui $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$]

9.18 Dimostrare che la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} [\log(1+x)]/x & \text{se} \quad x \in (-1, 0) \\ \\ (e^x - 1)/x & \text{se} \quad x \in (0, 1) \end{cases}$$

è continua in $(-1, 1) - \{0\}$, ammette prolungamento continuo in $(-1, 1)$, ma non su $[-1, 1]$

[Basta osservare che $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$]

9.19 Determinare α e β in modo che la funzione $f(x)$ definita in $(-1,1)$ da

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \operatorname{sen}^2 x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ |x|^\beta \cos^2(1/x) & \text{se} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

sia continua.

[Dovendo essere $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, deve risultare $\alpha > -2$. Dovendo essere $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$, deve risultare $\beta > 0$]

9.20 Sia $f : x \in \mathbb{R} \to [x]$, ove $[x]$ rappresenta il più grande intero minore o uguale a x. Verificare che f è discontinua in ogni $n \in \mathbb{Z}$, con discontinuità di prima specie.

[Risulta $\lim\limits_{x\to n^-} [x] = n - 1$; $\lim\limits_{x\to n^+} [x] = [n] = n$]

9B. Funzioni continue in un intervallo

Per le funzioni continue in un intervallo valgono i seguenti fondamentali teoremi:

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I di $\mathbb{R}$. Allora f assume un qualunque valore compreso fra il suo estremo inferiore ed il suo estremo superiore su I.*

COROLLARIO (TEOREMA DEGLI ZERI). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

TEOREMA DI WEIERSTRASS. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$. Allora esistono x_1, $x_2 \in [a,b]$ tali che*

$$f(x_1) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad f(x_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Ricordiamo inoltre che una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se per ogni $x_0 \in [a,b]$ e per ogni successione (x_n) con $x_n \in [a,b]$, si ha

$$\lim_n x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_n f(x_n) = f(x_0).$$

9.21 Sia $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ un polinomio a coefficienti reali, avente grado dispari. Verificare che esso ammette almeno una radice reale, ossia che $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $P(x_0) = 0$.

[Essendo $P(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n} \right)$

si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se} \quad a_n > 0 \\ +\infty & \text{se} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

Dunque: $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} P(x) = -\infty; \quad \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} P(x) = +\infty.$

Poiché $P(x)$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$, essa assume un qualsiasi valore compreso fra il suo estremo inferiore ed il suo estremo superiore. Pertanto esiste almeno un $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $P(x_0) = 0$]

9.22 Sia $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ un polinomio a coefficienti reali, avente grado pari. Se $a_0 < 0$, $a_n > 0$, $P(x)$ ammette almeno una radice positiva ed una negativa.

[Essendo $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$, $P(0) = a_0 < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, la funzione continua $P(x)$ si annulla almeno una volta nell'intervallo $(-\infty, 0]$ ed almeno una volta nell'intervallo $[0, +\infty)$]

9.23 Sia $f : [a, b] \to [a, b]$ una funzione continua. Verificare che esiste almeno un punto unito, cioè un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = x_0$.

[Considerata la funzione $g(x) = f(x) - x$, essa è continua in $[a, b]$ ed inoltre risulta $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Se $g(a) = 0$ oppure $g(b) = 0$, abbiamo trovato un punto unito per f. Altrimenti, se $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$, a norma del teorema degli zeri, esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $g(x_0) = 0$, cioè tale che $f(x_0) = x_0$]

9.24 Mostrare con esempi che esistono funzioni continue in intervalli non chiusi oppure non limitati prive di massimo o di minimo

[Sia $f(x) = x$ per $x \in (0, 1)$ oppure per $x \in [0, +\infty) \ldots$]

9.25 Calcolare gli estremi inferiore e superiore della funzione definita in $\mathbb{R}$ da $f(x) = 1/(1 + 4x^2)$. Verificare che $f(x)$ è dotata di massimo, ma è priva di minimo in $\mathbb{R}$.

[La funzione è limitata, in quanto è $0 < f(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essendo $f(0) = 1$ si ha $f(0) = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Per verificare che è $0 = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, basta ossrevare che per $0 < \varepsilon < 1$ la disuguaglianza $1/(1 + 4x^2) < \varepsilon$ è verificata dagli x tali che $|x| > \sqrt{(1 - \varepsilon)/4\varepsilon}$]

9.26 Calcolare gli estremi inferiore e superiore della funzione definita in $\mathbb{R}$ da $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

[Essendo $-1 < \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione è limitata. L'estremo superiore è 1, in quanto per $0 < \varepsilon < 2$ la disuguaglianza $(e^x - 1)/(e^x + 1) > 1 - \varepsilon$ è certamente verificata per $x > \log[(2-\varepsilon)/\varepsilon]$. Analogamente si verifica che l'estremo inferiore è -1. Evidentemente non esistono nè il minimo nè il massimo di f su $\mathbb{R}$]

9.27 Sia I un i ntervallo di $\mathbb{R}$non necessariamente chiuso né limitato. Sia $f(x)$ continua i n I. Se $f(x)$ tende a $+\infty$ per x tendente agli estremi dell'intervallo I, allora esiste il minimo di $f(x)$ su I.

[Per fissare le idee sia $I = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Sia $M > f((a + b)/2)$. Essendo $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ esiste $\delta = \delta(M)$ tale che:

$$x \in (a, a + \delta) \cup (b - \delta, b) \Longrightarrow f(x) > M.$$

Per il teorema di Weierstrass $\exists\, x_0 \in [a + \delta, b - \delta]$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall\, x \in [a + \delta, b - \delta]$. In particolare è $f(x_0) \leq f((a + b)/2)$, e perciò si ha

$$f(x_0) \leq f((a + b)/2) < M < f(x) \qquad \forall\, x \in (a, a + \delta) \cup (b - \delta, b),$$

cioè $f(x_0) \leq f(x)\ \forall\, x \in I$]

9.28 Una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se per $x, y \in (a, b)$ e per $\lambda \in (0, 1)$ si ha

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Verificare che una funzione convessa in (a, b) è ivi continua.

[Siano $x_0 \in (a, b)$ e $\delta > 0$ tali che $x_0 - \delta \in (a, b)$ e $x_0 + \delta \in (a, b)$. Per ogni $\vartheta \in (0, 1)$ si ha $x_0 = (x_0 - \delta)\vartheta/(1 + \vartheta) + (x_0 + \vartheta\delta)/(1 + \vartheta)$ e, per la convessità di f:

(1) $\qquad f(x_0) \leq \vartheta f(x_0 - \delta)/(1 + \vartheta) + f(x_0 + \vartheta\delta)/(1 + \vartheta).$

D'altra parte è $x_0 + \vartheta\delta = \vartheta(x_0 + \delta) + (1 - \vartheta)x_0$ e, per la convessità di f:

(2) $\qquad f(x_0 + \vartheta\delta) \leq \vartheta f(x_0 + \delta) + (1 - \vartheta)f(x_0).$

Da (1) e (2) si ha, in definitiva, $\forall\, \vartheta \in (0, 1)$

$$(1 + \vartheta)f(x_0) - \vartheta f(x_0 - \delta) \leq f(x_0 + \vartheta\delta) \leq \vartheta f(x_0 + \delta) + (1 - \vartheta)f(x_0)$$

e allora è $\lim_{\vartheta \to 0^+} f(x_0 + \vartheta\delta) = f(x_0)$, cioè f è continua da destra in x_0. Analogamente si vede che f è continua da sinistra in x_0]

9C. Funzioni uniformemente continue

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I di $\mathbb{R}$. Si dice che f è *uniformemente continua* se $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tale che risulti $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni coppia x, y di punti di I tali che $|x - y| < \delta$.

Notevole è il seguente

TEOREMA DI CANTOR. *Se f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, allora essa è uniformemente continua.*

9.29 Verificare che la funzione $f : x \in [1, +\infty) \to \sqrt{x}$ è uniformemente continua.

[Per ogni coppia $x, y \in [1, +\infty)$ si ha

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, posto $\delta_\varepsilon = 2\varepsilon$ si ha $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$ per ogni coppia $x, y \in [1, +\infty)$, tali che $|x - y| < \delta_\varepsilon$]

9.30 Sia $b \in \mathbb{R}$. Verificare che la funzione $f : x \in (-\infty, b] \to e^x$ è uniformemente continua.

[Essendo $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$, esiste $\eta > 0$ tale che $|t| < \eta \Longrightarrow |e^t - 1| < \dfrac{3}{2}|t|$. Allora, per $x, y \in (-\infty, b]$ tali che $|x - y| < \eta$, si ha

$$|e^x - e^y| = e^y |e^{x-y} - 1| < \frac{3}{2} e^b |x - y|.$$

Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, posto

$$\delta = \min\left\{\eta, \frac{2\varepsilon}{3e^b}\right\},$$

si ha $|x - y| < \delta \Longrightarrow |e^x - e^y| < \varepsilon$]

9.31 Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I di $\mathbb{R}$. Verificare che f è uniformemente continua se e solo se per ogni coppia (x_n), (y_n) di successioni di punti di I tali che $\lim\limits_n |x_n - y_n| = 0$, si ha $\lim\limits_n |f(x_n) - f(y_n)| = 0$.

[Sia f uniformemente continua e siano (x_n), (y_n) due successioni di punti di I tali che $\lim\limits_n |x_n - y_n| = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ tale che $|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Per ipotesi esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall\, n \geq \nu$, $|x_n - y_n| < \delta$; allora, per l'implicazione precedente è $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq \nu$ cioè $\lim\limits_n |f(x_n) - f(y_n)| = 0$. Viceversa, se è verificata la condizione indicata, la f è necessariamente uniformemente continua. Supponiamo per assurdo che $\exists\, \varepsilon > 0$ e $\exists\, (x_n)$, (y_n) tali che $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Allora è $\lim\limits_n |x_n - y_n| = 0$ mentre non può essere $\lim\limits_n |f(x_n) - f(y_n)| = 0$]

9.32 Tenendo presente l'esercizio precedente, mostrare che la funzione $f : x \in (0,+\infty) \to \dfrac{1}{x}$ non è uniformemente continua.

[Posto $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{2}{n}$, si ha $\lim\limits_n |y_n - x_n| = \lim\limits_n |\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n}| = 0$, mentre si ha $\lim\limits_n |f(x_n) - f(y_n)| = \lim\limits_n |f(\dfrac{2}{n}) - f(\dfrac{1}{n})| = \lim\limits_n \dfrac{n}{2} = +\infty$]

9.33 Sia $\alpha > 0$ e sia $f : x \in [0,+\infty) \to x^\alpha \in [0,+\infty)$. Verificare che f è uniformemente continua se e solo se $0 < \alpha \leq 1$.

[Poiché, a norma del teorema di Cantor, f è uniformemente continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0,1]$, basta verificare la tesi nell'intervallo $[1,+\infty)$.
Se $\alpha \leq 1$, per $y \geq x \geq 1$ si ha $\dfrac{y}{x} \geq 1$ e quindi $(\dfrac{y}{x})^\alpha \leq \dfrac{y}{x}$. Allora:

$$y^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left[(\frac{y}{x})^\alpha - 1\right] \leq x^\alpha \left[\frac{y}{x} - 1\right],$$

cioè, risulta

$$y^\alpha - x^\alpha \leq x^{\alpha-1}(y - x).$$

Essendo $\alpha \leq 1$, $x \geq 1$, allora è anche $x^{\alpha-1} \leq 1$ e perciò

$$y^\alpha - x^\alpha \leq y - x.$$

Da cui segue facilmente che f è uniformemente continua.
Se invece è $\alpha > 1$, $y \geq x \geq 1$, allora si ha $\left(\dfrac{y}{x}\right)^\alpha \geq \dfrac{y}{x}$ e quindi

$$y^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left[(\frac{y}{x})^\alpha - 1\right] \geq x^\alpha \left[\frac{y}{x} - 1\right],$$

cioè, risulta per $y \geq x \geq 1$

$$y^\alpha - x^\alpha \geq x^{\alpha-1}(y - x).$$

Allora, posto $x_n = n$, $y_n = n + 1/n^{\alpha-1}$, si ha

$$y_n^\alpha - x_n^\alpha \geq x_n^{\alpha-1}(y_n - x_n) = n^{\alpha-1}/n^{\alpha-1} = 1$$

e dunque, pur essendo $\lim\limits_n |y_n - x_n| = 0$, non si ha $\lim\limits_n |y_n^\alpha - x_n^\alpha| = 0$. Ciò, a norma dell'esercizio 9.31, implica che $f(x) = x^\alpha$ per $\alpha > 1$ non è uniformemente continua]

9.34 Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita nell'intervallo I di $\mathbb{R}$ si dice *lipschitziana* se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall\, x, y \in I.$$

Verificare che una funzione lipschitziana è anche uniformemente continua.

[Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{L}$; allora risulta $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per gni coppia x, y di punti di I tali che $|x - y| < \delta_\varepsilon$]

9.35 Tenendo presente l'esercizio precedente, dimostrare che le funzioni sen x e cos x sono uniformemente continue in $\mathbb{R}$.

[Tenendo presente le formule di prostaferesi, si ha:

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right|\left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \leq 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right| \leq |x-y|$$

in quanto $|\operatorname{sen} t| \leq |t|$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Analogamente si prova che $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$. Da cui, grazie all'esercizio precedente, segue l'asserto]

9.36 Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo limitato (a,b) e supponiamo che esistano finiti i limiti di f in a ed in b. Verificare che f è uniformemente continua.

[Posto $l' = \lim_{x\to a^+} f(x)$, $l'' = \lim_{x\to b^-} f(x)$, la funzione

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} l' & \text{se} \quad x = a \\ f(x) & \text{se} \quad x \in (a,b) \\ l'' & \text{se} \quad x = b \end{cases}$$

è continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$ ed allora è uniformemente continua, a norma del teorema di Cantor. Di conseguenza, anche f è uniformemente continua]

9.37 Verificare che la funzione $f(x) = x^2$ è lipschitziana nell'intervallo $[-1,1]$.

[Per ogni coppia x, y di numeri reali si ha $|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |(x+y)(x-y)| = |x+y||x-y|$. Inoltre $x, y \in [-1,1] \Longrightarrow -1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1 \Longrightarrow -2 \leq x+y \leq 2 \Longrightarrow |x+y| \leq 2$. Abbiamo così dimostrato che per $x, y \in [-1,1]$, $|f(x)-f(y)| \leq 2|x-y|$]

9.38 Verificare che la funzione $f(x) = x^2$ non è lipschitziana in $\mathbb{R}$.

[Se fosse lipschitziana, esisterebbe $k > 0$ tale che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ $|x^2 - y^2| \leq k|x-y|$. In particolare, per $y = 0$, si avrebbe $|x^2| \leq k|x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque $x^2 \leq kx$, $\forall\, x > 0$. Da ciò seguirebbe $x \leq k$ per ogni $x > 0$, il che è assurdo]

9.39 Verificare che la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ non è lipschitziana nell'intervallo $[0,1]$.

[Se $f(x)$ fosse lipschitziana, esisterebbe $L > 0$ tale che $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x-y|$ per ogni coppia x, y di punti di $[0,1]$. In particolare, scegliendo $y = 0$, si avrebbe $\sqrt{x} \leq Lx$, $\forall\, x \in [0,1]$ e cioè $1/\sqrt{x} \leq L$, per ogni $x \in (0,1]$. Ciò è assurdo, in quanto $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$]

9.40 Sia $f(x)$ una funzione continua su $\mathbb{R}$ e periodica di periodo $T(> 0)$, cioè tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Verificare che $f(x)$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

[In base al teorema di Cantor, $f(x)$ è uniformemente continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 2T]$. Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$x, y \in [0, 2T], \ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Pur di cambiare δ con $\delta' = \min\{\delta, T\}$, possiamo supporre che sia $\delta \leq T$.
Consideriamo ora due numeri reali x', y' tali che $|x' - y'| < \delta$. Se, ad esempio, è $x' \leq y'$, allora risulta $x' \leq y' < x' + \delta$. Indichiamo con k $(= [x'/T])$ la parte intera di x'/T, cioè l'intero tale che

$$k \leq \frac{x'}{T} < k + 1.$$

Risulta $kT \leq x' < (k+1)T$. Essendo $\delta \leq T$, risulta anche

$$kT \leq x' \leq y' < x' + \delta < (k+1)T + T = (k+2)T.$$

Posto $x = x' - kT$, $y = y' - kT$, si ha

$$0 \leq x < T; \ 0 \leq y < 2T; \ |x - y| = |x' - y'| < \delta.$$

Dato che $f(x) = f(x + kT) = f(x')$, $f(y) = f(y + kT) = f(y')$, la tesi segue dall'uniforme continuità di $f(x)$ nell'intervallo $[0, 2T]$:

$$|f(x') - f(y')| = |f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$

Capitolo 10

DERIVATE

10A. Derivate delle funzioni elementari

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x \in X$ un punto di accumulazione per X. Ricordiamo che f si dice *derivabile* in x se esiste ed è finito il limite

$$(*) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tale limite si indica con $f'(x)$ o con $Df(x)$ e prende il nome di *derivata* di f in x.

Se nella $(*)$ si considera, in luogo del limite per $h \to 0$, soltanto il limite destro per $h \to 0^+$ oppure il limite sinistro per $h \to 0^-$ si parla di derivabilità (o di derivata) destra oppure sinistra in x.

Assai utile è la seguente *tabella delle derivate* di funzioni elementari

$$\boxed{\begin{array}{l}
Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}; \quad D\log_a x = \dfrac{1}{x \log a}; \quad Da^x = a^x \log a; \\
D\mathrm{sen}\, x = \cos x; \quad D\cos x = -\mathrm{sen}\, x; \\
D\mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{\cos^2 x}; \quad D\mathrm{cotg}\, x = -\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2\, x}; \\
D\mathrm{arcsen}\, x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad D\mathrm{arccos}\, x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \\
D\mathrm{arctg}\, x = \dfrac{1}{1+x^2}
\end{array}}$$

In particolare:

$$D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}; \quad D\log x = \frac{1}{x}; \quad De^x = e^x.$$

Ricordiamo inoltre le *regole di derivazione* della somma, del prodotto e del quoziente

(1) $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$

(2) $D(f \cdot g)(x) = Df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x)$

(3) $D\,\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{Df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot Dg(x)}{(g(x))^2}$

10.1 Applicando le regole di derivazione, dimostrare che

$$D(\sqrt[4]{x} + x) = 1/4\sqrt[4]{x^3} + 1$$

$$D(3x^2 + 5x + 4) = 6x + 5$$

$$D(x^3 - 2x + \cos x) = 3x^2 - 2 - \operatorname{sen} x$$

$$D(x\cos x + \operatorname{sen} x) = 2\cos x - x\operatorname{sen} x$$

$$D(x\operatorname{sen} x + \cos x) = x\cos x$$

$$D(\operatorname{sen} x\cos x + x) = 2\cos^2 x$$

$$D\,\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}; \qquad D\,\frac{x^3}{1-x} = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}$$

$$D\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} 2x; \qquad D\operatorname{tg}^2 x = 2\operatorname{tg} x/\cos^2 x$$

$$D(\operatorname{tg} x + 1/\cos x) = (1 + \operatorname{sen} x)/\cos^2 x$$

$$D(x\log\, x - x) = \log\, x; \qquad D(1/x^2) = -2/x^3$$

$$D(x^2 2^x) = x2^x(2 + x\log\, 2)$$

$$D(2^x \log_2\, x) = 2^x(\log\, 2\log_2\, x + 1/x\log\, 2)$$

$$D(1/\operatorname{sen} x) = -\,\cos x/\operatorname{sen}^2 x$$

$$D(1/\log_2\, x) = -1/(x\log\, 2\, \log_2^2\, x)$$

$$D[(a-x)/(a+x)] = -2a/(a+x)^2$$

$$D[(ax+b)/(cx+d)] = (ad-bc)/(cx+d)^2$$

$$D[(x+\sqrt{x})/\sqrt{x}] = 1/(2\sqrt{x})$$

$$D[(1+\sqrt[4]{x^3})/(1-\sqrt[4]{x^3})] = 3/[2\sqrt[4]{x}(1-\sqrt[4]{x^3})^2]$$

$$D[\cos x(\operatorname{tg} x - 1)] = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$D[(\log\, x)/x^n] = (1 - n\log\, x)/x^{n+1}$$

$$D(x^n \log\, x) = x^{n-1}(n \log\, x + 1)$$

$$D(e^x/x^2) = e^x(x-2)/x^3$$

$$D(e^x/\mathrm{sen}\, x) = e^x(\mathrm{sen}\, x - \cos x)/\mathrm{sen}^2\, x$$

$$D[(1+e^x)/(1-e^x)] = 2e^x/(1-e^x)^2$$

$$D[\log\, x/(1+x^2)] = [1 + x^2(1 - 2\log\, x)]/x(1+x^2)^2$$

$$D(x \mathrm{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2}) = \mathrm{arcsen}\, x$$

$$D[e^x \mathrm{tg}\,(x/2)] = (1 + \mathrm{sen}\, x)e^x/(1+\cos x)$$

$$D(x - \mathrm{sen}\, x \cos x)/2 = \mathrm{sen}^2\, x$$

$$D(x + \mathrm{sen}\, x \cos x)/2 = \cos^2 x$$

$$D(e^x \cos x) = e^x(\cos x - \mathrm{sen}\, x)$$

$$D(\cos x/e^x) = -(\mathrm{sen}\, x + \cos x)/e^x$$

$$D[(1-e^x)/(1+e^x)] = -2e^x/(1+e^x)^2$$

$$D(e^x/\mathrm{sen}\, x) = e^x(\mathrm{sen}\, x - \cos x)/\mathrm{sen}^2\, x$$

$$D[(1-\mathrm{tg}\, x)/(1+\mathrm{tg}\, x)] = -2/(\mathrm{sen}\, x + \cos x)^2$$

$$D(x \cos x \log\, x) = \log\, x(\cos x - x\mathrm{sen}\, x) + \cos x$$

$$D[(1+\sqrt{x})/(1-\sqrt{x})] = 1/[\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2]$$
$$D[(1+\cos x)/\cos x] = \mathrm{sen}\, x/\cos^2 x$$

10.2 Calcolare, in base alla definizione, la derivata $D(1/x)$.

[Si ha $D(1/x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x-(x+h)}{hx(x+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{hx(x+h)} =$
$= \lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{1}{x(x+h)} = -1/x^2$]

10.3 Calcolare, in base alla definizione, la derivata $D\sqrt{x}$.

[Si ha $D\sqrt{x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \;]$$

10.4 Calcolare, in base alla definizione, la derivata $D\mathrm{tg}\, x$.

$$D\mathrm{tg}\, x = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{tg}\,(x+h)-\mathrm{tg}\, x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{tg}\, x+\mathrm{tg}\, h}{1-\mathrm{tg}\, x\mathrm{tg}\, h}-\mathrm{tg}\, x}{h} =$$
$$= (1+\mathrm{tg}^2\, x)\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{tg}\, h}{h}\cdot \lim_{h\to 0}\frac{1}{1-\mathrm{tg}\, x\mathrm{tg}\, h} = 1+\mathrm{tg}^2\, x = 1/\cos^2 x$$
per $x \neq (2k+1)\pi/2$, infatti
$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{tg}\, h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}\, h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos h} = 1]$$

10.5 Calcolare, in base alla definizione, la derivata Dx^n, con n intero positivo.

$$Dx^n = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}h + n(n-1)x^{n-2}h^2/2+\ldots+nxh^{n-1}+h^n-x^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\,[nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}h/2+\ldots+nxh^{n-2}+h^{n-1}] = nx^{n-1}]$$

Ricordiamo che le *funzioni iperboliche* sono definite per $x \in \mathbb{R}$ da

$$\mathrm{senh}\, x = (e^x - e^{-x})/2; \qquad \cosh x = (e^x + e^{-x})/2;$$
$$\mathrm{tgh}\, x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}).$$

Determiniamo le loro inverse. Ad esempio, nel caso della funzione seno iperbolico, se è $y = \mathrm{senh}\, x = (e^x - e^{-x})/2$, posto $e^x = \alpha$, si trova $\alpha^2 - 2y\alpha - 1 = 0$ e quindi, essendo $\alpha > 0$, si ha

$$\alpha = y + \sqrt{1+y^2} \quad , \quad x = \log\,(y+\sqrt{1+y^2}).$$

Perciò la funzione inversa del seno iperbolico, che prende il nome di *settore seno iperbolico*, è definita per $y \in \mathbb{R}$ da $\mathrm{settsenh}\, y = \log\,(y+\sqrt{1+y^2})$.

Analogamente, da

$$y = \cosh x = (e^x + e^{-x})/2 \quad , \quad y = \mathrm{tgh}\, x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$$

si ricava rispettivamente

$$x = \log\,(y \pm \sqrt{y^2-1}) \quad , \quad x = [\log\,(1+y)/(1-y)]/2$$

per cui le funzioni inverse di $y = \cosh x$ e $y = \mathrm{tgh}\, x$ sono definite, rispettivamente per $y \geq 1$ e per $|y| < 1$ da $\mathrm{settcosh}\, y = \log\,(y+\sqrt{y^2-1})$, $\mathrm{setttgh}\, y =$

$[\log(1+y)/(1-y)]/2$ stabilendo di assumere il segno + dinanzi al radicale che figura nell'espressione di $\operatorname{settcosh} y$.

10.6 Verificare che

$$D\operatorname{senh} x = \cosh x; \qquad D\operatorname{settsenh} y = 1/\sqrt{1+y^2}$$

$$D\cosh x = \operatorname{senh} x; \qquad D\operatorname{settcosh} y = 1/\sqrt{y^2-1} \quad (\text{per } y \neq 1)$$

$$D\operatorname{tgh} x = 1/\cosh^2 x; \qquad D\operatorname{setttgh} y = 1/(1-y^2)$$

$$D[(1-\operatorname{setttgh} x)/(1+\operatorname{setttgh} x) = 2/(x^2-1)(1+\operatorname{setttgh} x)^2.$$

10B. Derivate delle funzioni composte e delle funzioni inverse

Ricordiamo le *regole di derivazione* delle funzioni composte e delle funzioni inverse:

$$(4) \quad Df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

$$(5) \quad Df^{-1}(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$$

Dalla (4), tenendo presente le derivate delle funzioni elementari, si ricava l'ulteriore *tabella di derivate*

$$D[g(x)]^\alpha = \alpha[g(x)]^{\alpha-1} Dg(x);$$

$$D\sqrt{g(x)} = Dg(x)/2\sqrt{g(x)}; \qquad D[1/g(x)] = -Dg(x)/g^2(x);$$

$$D\log\, g(x) = \frac{Dg(x)}{g(x)}; \qquad De^{g(x)} = e^{g(x)} Dg(x);$$

$$D\log_a\, g(x) = \frac{Dg(x)}{g(x)\log\, a}; \qquad Da^{g(x)} = a^{g(x)}\log\, aDg(x);$$

$$D\operatorname{sen} g(x) = \cos g(x) Dg(x); \qquad D\cos g(x) = -\operatorname{sen} g(x) Dg(x);$$

$$D\operatorname{tg} g(x) = \frac{Dg(x)}{\cos^2 g(x)}; \qquad D\operatorname{cotg} g(x) = -\frac{Dg(x)}{\operatorname{sen}^2 g(x)};$$

$$D\operatorname{arcsen} g(x) = \frac{Dg(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}; \qquad D\arccos g(x) = -\frac{Dg(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}};$$

$$D\operatorname{arctg} g(x) = \frac{Dg(x)}{1+g(x)^2}.$$

Ricordiamo che le funzioni elementari sono derivabili in ogni punto del loro dominio, ad eccezione della funzione $y = x^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ che non è derivabile per $x = 0$, delle funzioni $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$ che non sono derivabili per $x = -1$ e per $x = 1$ e della funzione $y = \operatorname{settcosh} x$ che non è derivabile per $x = 1$.

Pertanto, se f è una di tali funzioni, detto X l'insieme di definizione della funzione $h(x) = f(g(x))$ non è detto che tale funzione sia derivabile in ogni punto di X.

Ad esempio, nel caso della funzione $h(x) = \operatorname{arcsen} g(x)$, il teorema di derivazione delle funzioni composte non si potrà applicare nei punti $x_0 \in X$ tali che $g(x_0) = \pm 1$. Per stabilire l'eventuale derivabilità della funzione $h(x) = \operatorname{arcsen} g(x)$ in tali punti, si potrà studiare il limite del rapporto incrementale, oppure, se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} h'(x) = l,$$

si potrà utilizzare il teorema (ved. esercizio 10.36) in base al quale, se $l \in \mathbb{R}$, allora h è derivabile in x_0 e risulta $h'(x_0) = l$; se $l = \pm\infty$ allora h non è derivabile in x_0.

10.7 Verificare che la funzione $h(x) = \operatorname{arcsen} \sqrt{1 - x^2}$, definita in $[-1, 1]$, è derivabile in $(-1, 0) \cup (0, 1)$, ma non è derivabile in -1, 0 e 1.

[Essendo $\forall x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ $h'(x) = -x/(|x|\sqrt{1 - x^2})$, ne segue che $\lim_{x \to -1^+} h'(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} h'(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^+} h'(x) = -1$, $\lim_{x \to 1^-} h'(x) = -\infty$]

10.8 Verificare, mediante le regole di derivazione, che le seguenti funzioni sono derivabili in un sottoinsieme proprio X' del loro dominio X. Verificare poi che, per ciascuna di esse, il limite del rapporto incrementale relativo ad $x_0 \in X - X'$ (x_0 di accumulazione per X) è $+\infty$.

(a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ $\quad$ (b) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

(c) $f(x) = \log \operatorname{arcsen} x$ $\quad$ (d) $f(x) = \sqrt{\log x}$

10.9 Utilizzando la regola (4) di derivazione delle funzioni composte, verificare che

$$D\operatorname{sen} \alpha x = \alpha \cos \alpha x; \qquad D\cos \alpha x = -\alpha \operatorname{sen} \alpha x$$

$$D \log \log x = 1/x \log x$$

$$D \log \log \log x = 1/[x \log x \log \log x]$$

$D3^{\operatorname{sen} x} = 3^{\operatorname{sen} x} \log\, 3\cos x$

$D9^{\operatorname{arctg} x} = 9^{\operatorname{arctg} x} \log\, 9/(1+x^2)$

$De^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}/2\sqrt{x}$

$D\cos 3^x = -\operatorname{sen} 3^x \cdot 3^x \log\, 3$

$D \log\, \cos x = -\operatorname{tg} x$

$D(x\operatorname{tg} x + \log\, \cos x - x^2/2) = x\operatorname{tg}^2 x$

$D\sqrt{x^2+x+1} = (2x+1)/2\sqrt{x^2+x+1}$

$D\operatorname{arcsen}^5 x = (5\operatorname{arcsen}^4 x)/\sqrt{1-x^2}$

$D(\log_2\, x)^3 = 3(\log_2\, x)^2/(x \log\, 2)$

$D5^{x^3+x+1} = 5^{x^3+x+1} \log\, 5(3x^2+1)$

$D \log\,(\sqrt{1+x}/\sqrt{1-x}) = 1/(1-x^2)$

$D4^{\operatorname{arcsen} x} = (4^{\operatorname{arcsen} x} \log\, 4)/\sqrt{1-x^2}$

$D7^{\operatorname{arctg} x} = (7^{\operatorname{arctg} x} \log\, 7)/(1+x^2)$

$D3^{\operatorname{tg} x} = (3^{\operatorname{tg} x} \log\, 3)/\cos^2 x$

$D \log\, \operatorname{sen} x = \cos x/\operatorname{sen} x$

$D\operatorname{sen}\, \log\, x = (\cos\, \log\, x)/x$

$D\operatorname{sen} 3^x = (\cos 3^x)3^x \log\, 3$

$D\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) = [\cos(\operatorname{arctg} x)]/(1+x^2) =$
$= 1/[(1+x^2)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}] = 1/(1+x^2)\sqrt{1+x^2}$

$De^{1/\log\, x} = -e^{1/\log\, x}/x \log^2\, x$

$D2^{x/\log\, x} = 2^{x/\log\, x} \log\, 2(\log\, x - 1)/\log^2\, x$

$D \log\,[e^x/(e^x+1)] = 1/(1+e^x)$

$D(x^n e^{\operatorname{sen} x}) = x^{n-1} e^{\operatorname{sen} x}(n + x\cos x)$

$D \log\, \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{\cos x}$

$D\operatorname{arcsen}[(x^2-1)/x^2] = 2/(x\sqrt{2x^2-1})$

$D\operatorname{arcsen}(x/\sqrt{1+x^2}) = 1/(1+x^2)$

$D[\operatorname{arctg}(\log\, x) + \log\,(\operatorname{arctg} x)] = 1/[x(1+\log^2\, x)] + 1/[(1+x^2)\operatorname{arctg} x]$

$D\text{arctg}\,(1/x) = -1/(1+x^2)$

$D\cos\cos\cos x = -(\text{sen}\cos\cos x)(\text{sen}\cos x)(\text{sen}\, x)$

$D\sqrt[3]{x+\sqrt{x}} = (1+2\sqrt{x})/[6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}]$

$D\log\,\cos\,[(x-1)/x] = (-1/x^2)\text{tg}\,[(x-1)/x]$

$D\text{arctg}\,[(\log\,x+1)/(\log\,x-1)] = -1/[x(\log^2\,x+1)]$

10.10 Verificare che $D|x| = x/|x|$ per $x \neq 0$.

[Basta verificare che $D|x| = 1$ per $x > 0$ e $D|x| = -1$ per $x < 0$]

10.11 Verificare che $D\log\,|x| = 1/x$ per $x \neq 0$.

[Essendo $D|x| = x/|x|$ per $x \neq 0$, allora, per il teorema di derivazione delle funzioni composte, è $D\log\,|x| = \dfrac{1}{|x|}\cdot\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{1}{x}$]

10.12 Sia $f(x)$ una funzione derivabile nell'intervallo I di $\mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $x \in I$ tale che $f(x) \neq 0$:

$$D\log\,|f(x)| = f'(x)/f(x)$$

[Se è $f(x) > 0$, allora f è positiva in un intorno di x e dunque:

$$D\log\,|f(x)| = D\log\,f(x) = f'(x)/f(x).$$

Se è $f(x) < 0$, allora f è negativa in un intorno di x e perciò:

$$D\log\,|f(x)| = D\log\,(-f(x)) = (-1/f(x))\cdot D(-f(x)) = (-1/f(x))(-f'(x)) = f'(x)/f(x)\ ]$$

10.13 Utilizzando l'esercizio precedente, verificare che

$D\log\,|\cos x| = -\text{tg}\, x$

$D\log\,|\log\,|x|| = 1/(x\log\,|x|)$

$D\log_2\,|\text{sen}\, x| = \text{cotg}\, x/\log\,2$

$D\log\,|\text{tg}\,(x/2)| = 1/\text{sen}\, x$

$D(x-2\log\,|x+1|) = (x-1)/(x+1)$

$D\log\,|\text{tg}\, x| = 1/(\text{sen}\, x\cos x)$

$D\log\,|\text{cotg}\, x| = -2/\text{sen}\, 2x$

10.14 Siano f e g due funzioni derivabili nell'intervallo $[a,b]$ e sia $f(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$. Calcolare la derivata

$$D[f(x)]^{g(x)}$$

[Essendo $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\log\, f(x)}$, per la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha:

$$D[f(x)]^{g(x)} = De^{g(x)\log\, f(x)} = e^{g(x)\log\, f(x)} D(g(x)\log\, f(x)) =$$

$$= [f(x)]^{g(x)} \cdot [g'(x)\log\, f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}]\ ]$$

10.15 Utilizzando l'esercizio precedente, provare che:

$$Dx^x = x^x(1 + \log\, x)$$

$$D(\sqrt{x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}[(\log\, x)/4\sqrt{x} + 1/2\sqrt{x}]$$

$$Dx^{1/x} = x^{(1/x)-2}(1 - \log\, x)$$

$$Dx^{\arccos x} = x^{\arccos x}[(-\log\, x)/\sqrt{1-x^2} + (\arccos x)/x]$$

$$Dx^{x^x} = x^{x^x} \cdot x^x(\log^2\, x + \log\, x + 1/x)$$

$$D(\operatorname{sen} x)^x = (\operatorname{sen} x)^x(\log\, \operatorname{sen} x + x/\operatorname{tg} x)$$

$$D(\operatorname{sen} x)^{\cos x} = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}(\cos^2 x/\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \log\, \operatorname{sen} x)$$

$$D(\cos x)^{\operatorname{sen} x} = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}(\cos x \log\, \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x)$$

$$Dx^{\log\, x} = 2x^{\log\, x - 1}\log\, x$$

$$D(\log\, x)^x = (\log\, x)^x(1/\log\, x + \log\, \log\, x)$$

$$De^{x^x} = e^{x^x}(1 + \log\, x)x^x$$

$$D\operatorname{sen}(x^{\log\, x}) = 2(\log\, x)x^{\log\, x}\cos(x^{\log\, x})/x$$

$$D(\cos x)^{1/x} = -(\cos x)^{1/x}[(\log\, \cos x)/x + \operatorname{tg} x]/x$$

10.16 Dire se la funzione $f(x) = x|x-2|$ è derivabile nel punto $x = 2$.

[Essendo $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x(x-2)}{x-2} = 2$, e $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x(2-x)}{x-2} = -2$, la funzione non è derivabile nel punto $x = 2$]

10.17 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \le c \\ & \\ ax+b & \text{se} \quad x > c \end{cases} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

determinare a e b in funzione di c, in modo che esista $f'(c)$.

[Deve risultare $c^2 = ac + b$ e $2c = a$. Da cui $a = 2c$, $b = -c^2$]

10.18 Scrivere l'equazione della tangente al grafico della funzione $y = x^n$, n intero positivo, nel punto $(1, 1)$.

[Ricordiamo che se f è derivabile in x_0 la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$

la tangente cercata ha equazione $y = nx + 1 - n$]

10.19 Scrivere l'equazione della retta perpendicolare al grafico della funzione $y = \log x$ nel punto di ascissa 1.

[Se f è derivabile in x_0, la retta perpendicolare al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è la retta passante per il punto e perpendicolare alla tangente. Perciò, se è $f'(x_0) \neq 0$ la perpendicolare ha equazione

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Nel nostro caso, allora, la perpendicolare ha equazione $y = 1 - x$]

10C. Derivate di ordine superiore

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile nell'intervallo (a, b), cioè derivabile in ogni punto di (a, b). Se la funzione $x \in (a, b) \to f'(x)$ è derivabile in un punto x, allora la sua derivata in x si chiama *derivata seconda* di f in x e si indica con $f''(x)$. Analogamente si definisce la derivata terza $f'''(x), \ldots,$ la derivata n-sima $f^{(n)}(x)$ di f in x.

Spesso la derivata n-sima di f in x si indica con il simbolo $D^n f(x)$.

Ricordiamo la formula di Leibnitz per il calcolo della derivata n-sima di un prodotto $f \cdot g$:

$$D^n(f \cdot g) = g \cdot D^n f + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} Dg \cdot D^{n-1} f + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} D^{n-1} g \cdot Df + f D^n g$$

ove $$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \, .$$

10.20 Calcolare la derivata seconda della funzione

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

[Si ha $y' = [(ab' - a'b)x^2 + 2(ac' - a'c)x + (bc' - b'c)]/(a'x^2 + b'x + c')^2$.

Inoltre è $y'' = [-2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)]/(a'x^2 + b'x + c')^3$ con $A = a'(ab' - a'b)$; $B = 3a'(ac' - a'c)$; $C = 3a'(bc' - b'c)$; $D = b'(bc' - b'c) + c'(a'c - ac')$]

10.21 Posto, per $x > 0$, $f(x) = 1/x$, verificare, per induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per $x > 0$ si ha

$$(*) \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-(n+1)}$$

[La $(*)$ è evidente per $n = 1$. Supponiamola vera per $n = m$ e dimostriamola per $n = m+1$; in tal modo, per il principio di induzione, la $(*)$ sarà vera per ogni n. Sia dunque $f^{(m)}(x) = (-1)^m m!\, x^{-(m+1)}$ per $x > 0$. Derivando si ha $f^{(m+1)}(x) = f^{(m)'}(x) = (-1)^m m!\, [-(m+1)]x^{-(m+1)-1} = (-1)^{m+1}(m+1)!\, x^{-(m+2)}$. Da cui l'asserto]

10.22 Verificare che, per $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha:

$$D^n x^\alpha = \alpha(\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)x^{\alpha - n} \qquad \forall\, x > 0.$$

10.23 Sia $p(x)$ il polinomio $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$; verificare che è

$$D^n p(x) = n!\, a_n, \quad D^k p(x) = 0 \quad \forall\, k > n.$$

10.24 Calcolare le derivate n-sime delle seguenti funzioni

$(a)\quad y = e^x \qquad (b)\quad y = 3^x$

$(c)\quad y = e^{-x} \qquad (d)\quad y = \log x$

[(a) e^x, (b) $3^x(\log 3)^n$, (c) $(-1)^n e^{-x}$, (d) $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$]

10.25 Verificare che

$$D^n \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + n\pi/2); \quad D^n \cos x = \cos(x + n\pi/2).$$

10.26 Calcolare la derivata

$$D^n \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (ad - bc \neq 0).$$

[$(-1)^{n-1}c^{n-1}n!\, (ad - bc)/(cx + d)^{n+1}$]

10.27 Calcolare la derivata $D^n(x^2 \log x)$.

[Per la formula di Leibnitz si ha $D^n(x^2 \log x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (D^k x^2)(D^{n-k} \log x) =$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)!/(n-2) + (-1)^{n-2} 2n(n-2)!/x^{n-2} + (-1)^{n-3} n(n-1)(n-3)!/x^{n-2} =$$

$= (-1)^{n-3} 2(n-3)!/x^{n-2}]$

10.28 Calcolare la derivata

$$D^n \operatorname{arctg} x$$

per $x = 0$.

[Posto $f(x) = \operatorname{arctg} x$, si ha $f'(x) = 1/(1+x^2)$, $f''(x) = -2x(1+x^2)^2, \ldots$. Per ottenere una formula relativa alla derivata n-sima si procede nel modo seguente: derivando $n-1$ volte ambo i membri dell'uguaglianza $(1+x^2)f'(x) = 1$, con la formula di Leibnitz, si ha:

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0$$

da cui $f^{(n)}(x) = -(n-1)[2xf^{(n-1)}(x) + (n-2)f^{(n-2)}(x)]/(1+x^2)$.

Per $x = 0$ si ha $f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$. Essendo $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$ ne segue $f^{(2n)}(0) = 0$. Essendo $f'(0) = 1$, ne segue $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (2n)!$]

10D. Applicazioni delle derivate

Ricordiamo alcune conseguenze del teorema di Lagrange:

- Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) allora f è crescente in $[a, b]$ se e solo se risulta $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.
- Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ ed è $f'(x) > 0$ (risp. $f'(x) < 0$) per ogni $x \in (a, b)$, allora f è strettamente crescente (risp. decrescente) in $[a, b]$.

Ricordiamo le definizioni di punto di massimo o di minimo relativo per una funzione f, definita nell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$.

Si dice che $x_0 \in X$ è di massimo (risp. minimo) relativo per f se esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x_0) \geq f(x)$ (risp. $f(x_0) \leq f(x)$) per ogni $x \in I \cap X$.

Notevole, per la ricerca dei punti di massimo o minimo relativo per una funzione derivabile è il seguente

TEOREMA DI FERMAT. *Sia $x_0 \in (a, b)$ e sia f derivabile in x_0. Allora, se x_0 è punto di massimo o minimo relativo per f, si ha $f'(x_0) = 0$.*

Osserviamo che l'annullarsi della derivata prima $f'(x_0)$ in un punto x_0 interno all'intervallo $[a, b]$ è condizione *necessaria*, ma *non sufficiente*, affinchè x_0 sia di massimo o di minimo relativo.

Ad esempio, si $f(x) = x^3$ per $x \in [-1, 1]$. Allora è $f'(0) = 0$, ma 0 non è nè punto di minimo nè di massimo relativo per f.

Una condizione sufficiente è fornita dal seguente teorema:

Sia $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0) = 0$. Sia f derivabile due volte in (a,b). Allora

$$f''(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \quad \text{di minimo relativo;}$$

$$f''(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \quad \text{di massimo relativo.}$$

10.29 Determinare gli insiemi in cui le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti:

$$(a) \quad f_1(x) = x^2 - 3x + 5 \qquad\qquad (b) \quad f_2(x) = x^3 - 3x - 4$$

$$(c) \quad f_3(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \qquad\qquad (d) \quad f_4(x) = x + 1/x \text{ per } x > 0$$

$$(e) \quad f_5(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$$

[(a) decrescente in $(-\infty, 3/2]$, (b) decrescente in $[-1,1]$, (c) crescente in $\mathbb{R}$, (d) decrescente in $(0,1]$, (e) decrescente in $[2/3, +\infty)$]

10.30 Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare i punti di massimo o di minimo relativo:

$$(a) \quad f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4 \qquad \text{per } x \in [0,2]$$

$$(b) \quad f_2(x) = 3x + 1/x \qquad \text{per } x \in (0,3]$$

$$(c) \quad f_3(x) = x^{2/3}(x-5) \qquad \text{per } x \in [0,4]$$

$$(d) \quad f_4(x) = x^2/\sqrt{x^2+1} \qquad \text{per } x \in [-4,3]$$

$$(e) \quad f_5(x) = x^2/\sqrt{x^2+a^2} \qquad \text{per } x \in \mathbb{R} \ \ (a \neq 0)$$

[(a) $x = 0$ di minimo relativo, $x = 2$ di massimo relativo; (b) $x = 1/\sqrt{3}$ di min. rel. $x = 3$ di mass. rel.; (c) $x = 0$ e $x = 4$ di mass. rel., $x = 2$ di min. rel.; (d) $x = -4$ e $x = 3$ di mass. rel., $x = 0$ di min. rel.; (e) $x = 0$ di min. rel.]

10.31 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo in $[0,1]$ per la funzione ivi definita da $f(x) = x^2 - x^4$.

[Poiché $0 = f(0) = f(1) \leq f(x)$ per ogni $x \in [0,1]$, i punti 0 e 1 sono di minimo assoluto e perciò anche di minimo relativo per f. D'altra parte l'unico punto x di $[0,1]$ in cui $f'(x) = 0$ è $x = 1/\sqrt{2}$. Tale punto, grazie al teorema di Weierstrass, è di massimo assoluto per f e perciò anche di massimo relativo. Non vi sono altri punti di massimo o minimo relativo per f]

10.32 Determinare due numeri positivi aventi somma assegnata uguale a s e tali che il loro prodotto sia massimo.

[Detto x uno dei due numeri e $s-x$ l'altro, dobbiamo trovare il massimo della funzione $f : x \in [0, s] \longrightarrow x(s-x)$. Poiché $f(0) = f(s) = 0$ ed $f(x) > 0 \; \forall \, x \in (0, s)$, la funzione f ha un massimo positivo assunto in un punto di $(0, s)$. Essendo $f'(x) = s - 2x$, si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = s/2$. Essendo inoltre $f''(x) = -2 < 0$, il punto $x = s/2$ è di massimo per f]

10.33 Dimostrare la seguente versione del teorema di Rolle: Sia $f(x)$ continua in $[a, +\infty)$ e derivabile in $(a, +\infty)$; se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$, allora esiste $\xi \in (a, +\infty)$ tale che $f'(\xi) = 0$.

[Se $f(x)$ è costante il risultato è ovvio. Altrimenti, esite $b > a$ con $f(b) \neq f(a)$. Supponiamo che $f(b) > f(a)$; allora esiste $k = k(b)$ tale che $x \geq k \Longrightarrow f(x) < f(b)$; pertanto, in $[a, k]$, $f(x)$ ha un punto di massimo assoluto ξ diverso da a e da k. Ne segue $f'(\xi) = 0$]

10.34 Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b) ed esista $c \in (a, b)$ tale che $f(a) = f(b) = f(c)$. Dimostrare che esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f''(\xi) = 0$.

[Per il teorema di Rolle, esistono $\xi_1 \in (a, c)$, $\xi_2 \in (c, b)$ tali che $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Poiché f' verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[\xi_1, \xi_2]$, esiste $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ tale che $f''(\xi) = 0$]

10.35 Sia $f(x)$ una funzione derivabile nell'intervallo I di $\mathbb{R}$. Verificare che, se il prodotto $f(x)f'(x)$ ha segno costante, allora sia $f(x)$ che $f'(x)$ hanno segno costante in I.

[Per la formula di derivazione delle funzioni composte si ha $D[f^2(x)] = 2f(x)f'(x)$. Poiché per ipotesi tale derivata ha segno costante, allora la funzione $g(x) = f^2(x)$ è monotòna in I. Da ciò segue che $f(x)$ non cambia di segno in I. Infatti, se per assurdo esistessero x_1, $x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, tali che $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, a norma del teorema degli zeri esisterebbe $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_0) = 0$. Si avrebbe quindi $x_1 < x_0 < x_2$ e $g(x_1) > 0$, $g(x_0) = 0$, $g(x_2) > 0$; perciò $g(x) = f^2(x)$ non sarebbe monotòna.
Da quanto appena dimostrato e dall'ipotesi che $f(x)f'(x)$ ha segno costante segue che anche $f'(x)$ ha segno costante]

10.36 Sia f una funzione continua nell'intervallo I di $\mathbb{R}$ e derivabile $I - \{x_0\}$. Verificare che, se esiste finito il limite $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l$, allora esiste anche $f'(x_0)$ e si ha $f'(x_0) = l$.

[Sia $h \neq 0$ tale che $x_0 + h \in I$. Per il teorema di Lagrange esiste ξ nell'intervallo di estremi x_0, $x_0 + h$ tale che $[f(x_0 + h) - f(x_0)]/h = f'(\xi)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in I \Longrightarrow |f'(x) - l| < \varepsilon$. Per ogni h tale che $0 < h < \delta$, $x_0 + h \in I$, si ha, essendo $0 < |\xi - x_0| < \delta$, $|[f(x_0 + h) - f(x_0)]/h \; - l| = |f'(\xi) - l| < \varepsilon$. Da cui l'asserto]

10.37 Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ per $x \in [1,2]$, dedurre la stima $13/12 < \sqrt[3]{2} < 4/3$.

[Per il teorema di Lagrange esiste $c \in (1,2)$ tale che $\sqrt[3]{2} - 1 = 1/3c^{2/3}$. Poiché $1 < c < 2 \Longrightarrow 1 < c^{1/3} < 2$ ne segue $1/12 < 1/3c^{2/3} < 1/3$, da cui segue subito l'asserto]

10.38 Sia $f(x)$ una funzione derivabile nell'intervallo I di $\mathbb{R}$ ed esista $k > 0$ tale che $|f'(x)| \leq k$ per ogni $x \in I$. Dimostrare che f è lipschitziana di costante k e perciò uniformemente continua in I.

[Siano $a, b \in I$ con $a < b$. Per il teorema di Lagrange esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Ne segue $|f(b) - f(a)| = |f'(c)(b-a)| \leq k|b-a|$]

10.39 Sia $f(x)$ una funzione continua con la sua derivata prima nell'intervallo $[a, +\infty)$. Se esiste ed è finito il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = l$, allora f è uniformemente continua.

[Sia $\delta > a$ tale che $|f'(x) - l| < 1$ per $x > \delta$. Allora è $|f'(x)| < 1 + |l|$ per $x > \delta$. Posto $k = \max\{\sup\limits_{[a,\delta]}|f'|, 1 + |l|\}$, risulta $|f'(x)| \leq k$ per ogni $x \in [a, +\infty)$. Dall'esercizio precedente segue l'asserto]

10.40 Dimostrare la disuguaglianza

$$\log x \leq x - 1 \qquad \forall\, x > 0.$$

Dedurre da questa l'altra disuguaglianza (per n intero positivo):

$$\log x \leq n(x^{1/n} - 1) \qquad \forall\, x > 0.$$

[Posto $f(x) = \log x - x + 1$, si ha $f'(x) = 1/x - 1$ e dunque il punto $x = 1$, è di massimo per f. Ne segue $f(x) \leq f(1) = 0 \ \forall\, x > 0$. Per ottenere la seconda disuguaglianza basta porre $x^{1/n}$ al posto di x nella prima]

10.41 Sia $p > 1$. Dimostrare che per $x \geq 0$, $y \geq 0$ risulta

$$x^p + y^p \leq (x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

[Se $y = 0$, le disuguaglianze sono ovviamente verificate. Se $y > 0$, dividendo i tre termini per y^p otteniamo le disuguaglianze equivalenti a quelle date

$$(x/y)^p + 1 \leq (x/y + 1)^p \leq 2^{p-1}[(x/y)^p + 1].$$

Posto $t = x/y$, le disuguaglianze da dimostrare diventano

$$(*) \qquad t^p + 1 \leq (t+1)^p \leq 2^{p-1}(t^p + 1) \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Consideriamo la funzione $g(t) = (t+1)^p - t^p - 1$ e dimostriamo che $g(t) \geq 0$, $\forall\, t \in [0, +\infty)$. Essendo $g'(t) = p[(t+1)^{p-1} - t^{p-1}] > 0$, la funzione g è crescente; essendo $g(0) = 0$, ne segue la prima disuguaglianza $(*)$. Consideriamo la funzione $f(t) = 2^{p-1}(t^p + 1) - (t+1)^p$ e dimostriamo che $f(t) \geq 0$, $\forall\, t \in [0, +\infty)$. Essendo $f'(t) = p[(2t)^{p-1} - (t+1)^{p-1}]$, si ha $f'(t) = 0$ per $t = 1$; $f'(t) > 0$ per $t > 1$; $f'(t) < 0$ per $0 \leq t < 1$. Allora il punto $t = 1$ è di minimo per f ed essendo $f(1) = 0$, ne segue la seconda disuguaglianza $(*)$]

10.42 Se una funzione ha derivata nulla in un intervallo, allora è ivi costante. Utilizzare tale proprietà per provare le identità:

$$(a) \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall\, x > 0$$

$$(b) \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \qquad \forall\, x < 0$$

$$(c) \quad \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} x, \qquad \forall\, x < 1$$

$$(d) \quad \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$(e) \quad \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall\, x \in (-1, 1)$$

$$(f) \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall\, x \in (-1, 1).$$

[Verifichiamo, ad esempio, le identità (a) e (b). Posto $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x)$, risulta $f'(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$. Perciò $f(x)$ è costante in $(0, +\infty)$ ed è anche costante (eventualmente un diverso valore della costante) in $(-\infty, 0)$. Le costanti si determinano calcolando $f(x)$ ad esempio per $x = \pm 1$, oppure calcolando il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ o per $x \to 0^{\pm}$; in particolare per $x > 0$ risulta

$$f(x) = f(1) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \pi/2.$$

Notiamo che le identità (e), (f) sono utili programmando con il computer, per calcolare rispettivamente le funzioni arcoseno ed arcocoseno in termini dell'arcotangente, che in genere è una funzione di libreria già predefinita nel linguaggio di programmazione]

Capitolo 11

CALCOLO DI LIMITI CON L'USO DELLE DERIVATE

11A. Il teorema di L'Hôpital

Consideriamo un limite della forma

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} ,$$

essendo $f(x)$, $g(x)$ funzioni infinitesime per $x \to x_0$. Si dice che il limite dato si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$. Se invece $f(x)$, $g(x)$ sono infinite per $x \to x_0$, allora il limite si presenta sotto la forma indeterminata ∞/∞.

Abbiamo già visto nei capitoli 7 e 8 che, se un limite si presenta sotto forma indeterminata, è necessario operare su di esso fino a trasformarlo, se possibile, in un limite calcolabile elementarmente. Il teorema di L'Hôpital è un ausilio a tale scopo.

TEOREMA DI L'HÔPITAL. - *Sia I un intorno di x_0 e siano $f(x)$, $g(x)$ funzioni derivabili in $I - \{x_0\}$. Supponiamo che*

(I) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, *oppure* $= \pm\infty$;

(II) $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in I - \{x_0\}$;

(III) *esista (finito o infinito) il limite* $\lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$.

Allora anche il rapporto $f(x)/g(x)$ ammette limite per $x \to x_0$ e si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Il teorema di L'Hôpital vale anche per limiti destri e sinistri ($x \to x_0^{\pm}$) e per $x \to \pm\infty$.

Prima di applicare il teorema di L'Hôpital al calcolo di un limite, è opportuno accertarsi che valgono le ipotesi (I), (II), (III). Negli esercizi che seguono mettiamo in luce l'importanza di tale verifica.

11.1 La regola di L'Hôpital può non valere se applicata ad un rapporto $f(x)/g(x)$ della formula l_1/l_2, con l_1, l_2 numeri reali non nulli. Verificare ciò ponendo $f(x) = x$, $g(x) = x - 1$ ed x_0 generico in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

[I seguenti limiti sono immediati:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x}{x-1} = \frac{x_0}{x_0 - 1}, \text{ se } x_0 \neq 1; \ \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x}{x-1} = \pm\infty.$$

Il rapporto delle derivate delle funzioni $f(x) = x$, $g(x) = x - 1$ è $f'(x)/g'(x) = 1$ per ogni x. Evidentemente, per $x \to x_0$, il rapporto delle derivate converge ad 1, ed 1 è diverso dai limiti trovati, qualunque sia $x_0 \in \mathbb{R}$ (infatti $x_0/(x_0 - 1) \neq 1$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$).
Infine $f(x)/g(x) = x/(x - 1) \to 1$ per $x \to \pm\infty$. Quindi la regola di L'Hôpital vale per il rapporto delle funzioni $f(x) = x$, $g(x) = x - 1$ nel caso in cui $x \to \pm\infty$. Ciò non meraviglia perchè, per $x \to \pm\infty$, il rapporto $f(x)/g(x)$ è una forma indeterminata ∞/∞]

11.2 Verificare che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, nel caso in cui $f(x) = \log x$ e $g(x) = x$. Spiegarne il motivo.

[Per $x \to 0^+$ il rapporto $f(x)/g(x) = \log x/x$ tende a $-\infty$, mentre $f'(x)/g'(x) = 1/x$ tende a $+\infty$. Non sono verificate le ipotesi del teorema di L'Hôpital, perchè il rapporto $f(x)/g(x)$, per $x \to 0^+$ non è una forma indeterminata, ma è del tipo $-\infty/0^+ = -\infty$]

11.3 L'ipotesi (II) del teorema di L'Hôpital garantisce che il rapporto $f'(x)/g'(x)$ sia ben definito. Anche il rapporto $f(x)/g(x)$ è ben definito, dato che $g(x)$ è diversa da zero in un intorno di x_0, escluso al più il punto x_0. Verificare ciò separando i due casi:

$$(a) \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

[(a) Se $g(x)$ diverge a $+\infty$ per $x \to x_0$, allora esiste un numero δ per cui $g(x) > 1$ se $0 < |x - x_0| < \delta$; (b) Supponiamo per assurdo che esista un numero $x_1 \in I - \{x_0\}$ per cui $g(x_1) = 0$. Definiamo in I la funzione $\overline{g}(x)$ nel modo seguente:

$$\overline{g}(x) = g(x) \text{ se } x \in I - \{x_0\}, \quad \overline{g}(x_0) = 0.$$

La funzione $\overline{g}(x)$ è continua in I; dato che coincide con $g(x)$ se $x \neq x_0$, risulta $\overline{g}(x_1) = g(x_1) = 0$. Applichiamo il teorema di Rolle alla funzione $\overline{g}(x)$ nell'intervallo $[x_0, x_1]$. Le ipotesi del teorema di Rolle sono soddisfatte perchè $\overline{g}(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[x_0, x_1]$ ed è derivabile nell'intervallo aperto (x_0, x_1). Inoltre $\overline{g}(x_0) = \overline{g}(x_1) = 0$. Perciò esiste un punto $\xi \in (x_0, x_1)$ per cui $\overline{g}'(\xi) = 0$. Ciò contrasta con l'ipotesi che $\overline{g}'(x) = g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I - \{x_0\}$]

11.4 L'ipotesi (III) del teorema di L'Hôpital è importante perchè, anche se il limite del rapporto delle derivate non esiste, può esistere il limite del rapporto delle funzioni. Verificare ciò nei casi seguenti:

$$(a) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$$

[Poniamo $f(x) = x + \operatorname{sen} x$, $g(x) = x$. Si tratta di funzioni che divergono a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Inoltre $g'(x) = 1 \neq 0$ per ogni x. Dato che $\operatorname{sen} x / x$ converge a 0 per $x \to +\infty$, il rapporto $f(x)/g(x) = 1 + \operatorname{sen} x / x$ converge ad 1 per $x \to +\infty$. Invece il limite del rapporto delle derivate $f'(x)/g'(x) = 1 + \cos x$ non ammette limite per $x \to +\infty$.
(*b*) Poniamo $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, $g(x) = \operatorname{sen} x$. Per $x \to 0$ entrambe le funzioni convergono a 0. Inoltre $g'(x) = \cos x \neq 0$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Il rapporto $f(x)/g(x)$ converge a 0 per $x \to 0$, perchè

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1, \qquad\qquad \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

Al contrario, verifichiamo che il limite del rapporto delle derivate non esiste:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \operatorname{sen}(1/x)}{\cos x} - \frac{\cos(1/x)}{\cos x}.$$

Per $x \to 0$ il primo addendo converge a 0 (il numeratore converge a zero ed il denominatore converge a 1), mentre il secondo addendo non ammette limite]

Supponiamo che le funzioni $f(x)$, $g(x)$ verifichino le ipotesi del teorema di L'Hôpital per $x \to x_0$. Allora il limite del rapporto $f(x)/g(x)$ è ricondotto al limite del rapporto delle derivate $f'(x)/g'(x)$. Se tale rapporto è ancora una forma indeterminata per $x \to x_0$, si può iterare il procedimento e calcolare il limite del rapporto delle derivate seconde $f''(x)/g''(x)$ e così via. Ad esempio, si voglia calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3}.$$

Tale limite si presenta sotto la forma indeterminata ∞/∞. Si vede subito che anche il rapporto delle derivate è una forma indeterminata ∞/∞. Applichiamo tre volte la regola di L'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2} \overset{(2)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6x} \overset{(3)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6} \overset{(4)}{=} +\infty.$$

L'uguaglianza (4) è immediata, mentre le uguaglianze (1), (2), (3) vanno "interpretate". Infatti tali uguaglianze valgono, in base al teorema di L'Hôpital, solo se il limite a secondo membro esiste. È allora opportuno considerare preliminarmente la (3). La (3) vale perchè il limite a secondo membro (della funzione $e^x/6$) esiste. Quindi, a ritroso, vale anche la (2), perchè il limite a secondo membro (di $e^x/6x$) esiste, e, per lo stesso motivo, vale anche la (1).

Nel seguito sottointenderemo questo argomento a ritroso. Però ricordiamo ancora che, se non esiste il limite finale ottenuto iterando la regola di L'Hôpital, non è lecito dedurne che anche il limite iniziale non esiste.

Un consiglio importante: prima di applicare la regola di L'Hôpital è opportuno semplificare, se possibile, l'espressione di cui si vuole calcolare il limite. Consideriamo l'esempio seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{x^3} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{3x^2}.$$

Dopo aver applicato la regola di L'Hôpital abbiamo ottenuto una nuova forma indeterminata $0/0$. Invece di applicare nuovamente la regola di L'Hôpital, è più semplice porre $1-\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$. Ricordando che $\operatorname{sen} x/x \to 1$ per $x \to 0$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

Terminiamo il paragrafo facendo notare un errore concettuale in cui è possibile cadere applicando la regola di L'Hôpital in modo acritico come ad esempio per studiare il limite

$$(*) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

È vero che la regola di L'Hôpital stabilisce che il risultato è uguale al limite di $\cos x$ per $x \to 0$, cioè $\cos 0 = 1$. Però, per affermare ciò, è necessario sapere a priori che la derivata della funzione $\operatorname{sen} x$ è la funzione $\cos x$. A tal proposito il lettore ricorderà (se non lo ricorda è bene che lo vada a controllare) che il calcolo della derivata della funzione $\operatorname{sen} x$ presuppone la conoscenza del limite notevole $(*)$.

Questo è il motivo per cui si dimostra la formula $(*)$ normalmente per mezzo dei teoremi di confronto sui limiti, senza l'ausilio del teorema di L'Hôpital.

11B. Uso del teorema di L'Hôpital

11.5 Per mezzo della formula di L'Hôpital calcolare i limiti ($b > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$):

$(a)\quad \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^b} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$

[(a) 0; (b) α]

11.6 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^3}{x}$$

[(a) $+\infty$; (b) Il limite vale 0 e si ottiene applicando tre volte la formula di L'Hôpital, oppure verificando che il limite per $x \to +\infty$ della radice cubica della funzione data tende a zero:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to+\infty} 3\frac{1/x}{x^{-2/3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$]

11.7 Con il teorema di L'Hôpital calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2x+1)}{\log x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\log x}$$

[(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2x+1)}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x+1} = 1$;

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(1+\sqrt{x})2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$]

11.8 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\log x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^5)}{\log(2+x^3)}$$

[(a) 2; (b) 5/3]

11.9 Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log[x(x+1)(x+2)(x+3)]}{\log x}$

[Invece di applicare la formula di L'Hôpital al rapporto così come scritto, è opportuno utilizzare le proprietà dei logaritmi. Il numeratore si può scomporre nella somma:

$$\log[x(x+1)(x+2)(x+3)] = \log x + \log(x+1) + \log(x+2) + \log(x+3).$$

In base al teorema di L'Hôpital, da tale espressione otteniamo il limite equivalente

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right) x = 4]$$

11.10 Con il teorema di L'Hôpital calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{\log \operatorname{sen} x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to0} \frac{\log|\operatorname{sen} 2x|}{\log|\operatorname{sen} 3x|}$$

[(a) $\lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{\log \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$;

(b) È opportuno calcolare separatamente i limiti destro e sinistro, oppure, più rapidamente, utilizzare la formula di derivazione:

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Otteniamo il limite: $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3\cos 3x} = 1$]

11.11 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

[Si giunge al risultato finale sia con la regola di L'Hôpital, che moltiplicando numeratore e denominatore per $1+\operatorname{sen} x$. (a) 0; (b) 1/2]

11.12 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos 2x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos(x+\pi/2)}$$

[(a) Non si può applicare la regola di L'Hôpital! Si tratta di un limite immediato uguale a 0; (b) Il limite vale -1 anche in base alla regola di L'Hôpital ma, a maggior ragione, dato che $\cos(x+\pi/2) = -\operatorname{sen} x$]

11.13 Facendo uso del teorema di L'Hôpital, calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

[(a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\operatorname{sen}^2 x} = 0$; (b) $-1/2$]

11.14 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^x}{1-\cos\sqrt{x}} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x}$$

[(a) -2; (b) Prima di applicare la regola di L'Hôpital è opportuno semplificare il numeratore ponendo $\log\sqrt{1+x^2} = (1/2)\log(1+x^2)$. Il risultato del limite è 1]

11.15 Il limite $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$ si presenta sotto la forma indeterminata $\infty\cdot 0$. Calcolarlo con la regola di L'Hôpital, dopo averlo trasformato in una forma indeterminata ∞/∞.

[$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$]

11.16 Il limite $\lim_{x\to 0^+} x\log x$ si presenta sotto la forma indeterminata $0\cdot\infty$. Calcolarlo con la regola di L'Hôpital, dopo averlo trasformato in una forma indeterminata ∞/∞.

[$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = 0$]

11.17 Il limite $\lim_{x\to +\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right)$ si presenta nella forma indeterminata $\infty\cdot 0$. Calcolarlo con la regola di L'Hôpital, dopo averlo trasformato in una forma indeterminata $0/0$.

[$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x - \pi/2}{1/x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/(1+x^2)}{-1/x^2} = -1$]

11.18 Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right)$.

[Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$. Dopo aver ridotto a denominatore comune abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\log(x+1)-x}{x\log(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{\log(x+1)+x/(x+1)}.$$

Si può derivare ulteriormente, oppure è possibile dividere numeratore e denominatore per $\log(x+1)$, ottenendo

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\log(x+1)}\cdot\frac{1}{x+1}\right)^{-1} = \frac{1}{2},$$

avendo tenuto in conto che $x/\log(x+1)\to 1$ per $x\to 0$]

11.19 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$$

[(a) 0; (b) 0]

11.20 Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

[Si applichi due volte L'Hôpital e poi si divida numeratore e denominatore per x^2. Si trova $-1/3$]

11.21 Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\left[\log\operatorname{sen} x^2 - \log(1-\cos x)\right]$

[Per le proprietà dei logaritmi il limite dato si può esprimere nella forma

$$\lim_{x\to 0} \log \frac{\operatorname{sen} x^2}{1-\cos x}.$$

Calcolando separatamente il limite per $x \to 0$ della funzione $\operatorname{sen} x^2/(1-\cos x)$ si trova il valore 2. Quindi il limite dato vale log 2]

11.22 Proponiamo una generalizzazione dell'esercizio precedente. Siano $f(x)$, $g(x)$ funzioni derivabili in un intorno di x_0 e tali che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0; \qquad f(x),\ g(x) > 0 \ \text{ se } \ x \neq x_0.$$

Se esiste $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x) = l \in (0,+\infty)$ allora

$$\lim_{x\to x_0} [\log f(x) - \log g(x)] = \log l.$$

[In base alla regola di L'Hôpital e alla continuità della funzione logaritmo abbiamo

$\log f(x) - \log g(x) = \log \dfrac{f(x)}{g(x)} \to \log l$]

11.23 Calcolare i limiti seguenti, che si presentano nella forma indeterminata $\infty - \infty$.

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} (x - \log x) \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \log x\right)$$

[(a) Dato che $\log x/x \to 0$ per $x \to +\infty$ otteniamo

$$x - \log x = x(1 - \log x/x) \to +\infty.$$

(b) Poniamo $1/x + \log x = (1 + x\log x)/x$. Dato che, in base alla regola di L'Hôpital, $x \log x \to 0$, per $x \to 0^+$ (si veda l'esercizio 11.16) il limite dato vale $+\infty$]

11.24 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{x} - \cos x}{2x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to+\infty} \left(x\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

[(a) $-1/4$; (b) Il risultato è $-1/2$ e si ottiene così:

$$x\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x} = x^2\left(\frac{1}{x}\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right);$$

con la sostituzione $y = 1/x$ ci riconduciamo al calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y\cos\sqrt{y} - \operatorname{sen} y}{y^2}.$$

In base al teorema di L'Hôpital il limite è anche uguale a

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{y} - y\,\mathrm{sen}\sqrt{y}/(2\sqrt{y}) - \cos y}{2y} =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{y} - \cos y}{2y} - \frac{1}{4}\lim_{y\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Il risultato è stato ottenuto utilizzando il limite in (a)]

11.25 Calcolare i limiti $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\mathrm{arcsen}\,x} - \frac{1}{x}\right) = 0.$

11.26 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(\mathrm{sen}\,(1/x))^{-1}}}{e^x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(\mathrm{sen}\,(1/x))^{-2}}}{e^{x^2}}$$

[(a) La funzione data si scrive nella forma equivalente

$$e^{\frac{1}{\mathrm{sen}\,(1/x)} - x}.$$

Calcoliamo saparatamente il limite dell'esponente con la sostituzione $y = 1/x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{sen}\,(1/x)} - x = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{sen}\,y} - \frac{1}{y} = 0$$

L'ultimo risultato si ottiene, ad esempio, riducendo a comune denominatore ed applicando la regola di L'Hôpital. Perciò il limite dato vale $e^0 = 1$; (b) $e^{1/3}$]

11.27 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} x^{1/\sqrt{x}} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\mathrm{sen}\,x}$$

[È utile la relazione $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$ $\quad (f(x) > 0)$.

(a) $x^{1/\sqrt{x}} = e^{\log x/\sqrt{x}}$ converge ad 1 per $x \to +\infty$, perchè $\log x/\sqrt{x}$ tende a zero; (b) $x^{\mathrm{sen}\,x} = e^{\mathrm{sen}\,x\log x} \to e^0 = 1$, dato che $\mathrm{sen}\,x \log x$ converge a zero per $x \to 0^+$]

11.28 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\mathrm{sen}\,x)^{\mathrm{tg}\,x} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos^2 x)^{\mathrm{tg}^2 x}$$

[(a) 1; (b) e^2. Indichiamo il metodo nel caso (a):

$$(\mathrm{sen}\,x)^{\mathrm{tg}\,x} = e^{\mathrm{tg}\,x\log\,\mathrm{sen}\,x} = e^{\mathrm{sen}\,x\frac{\log\mathrm{sen}\,x}{\cos x}};$$

come nell'esercizio 11.13 (a), si verifica che $(\log\,\mathrm{sen}\,x)/\cos x$ converge a zero per $x \to \dfrac{\pi}{2}$. Perciò l'esponente converge a zero e quindi la funzione data converge a $e^0 = 1$]

11C. La formula di Taylor

La *formula di Taylor con il resto di Peano* è utile nel calcolo di limiti di funzioni e di successioni; ricordiamola: *Se $f(x)$ è una funzione derivabile n volte in un punto x_0, risulta*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \circ((x - x_0)^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \circ((x - x_0)^n).$$

Come nel paragrafo 8F, "$\circ$ *piccolo*" di $(x - x_0)^n$ significa che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\circ((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Si utilizza spesso la formula di Taylor con centro $x_0 = 0$ (ed in tal caso si chiama anche *formula di Mac Laurin*):

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \circ(x^n).$$

Esplicitiamo tale formula per alcune funzioni elementari:

(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \circ(x^n);$

(2) $\log(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \circ(x^n);$

(3) $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2});$

(4) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1});$

(5) $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+2});$

(6) $\operatorname{senh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2});$

(7) $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1}).$

Le formule precedenti sono sviluppi in formula di Taylor *di ordine n* (oppure $2n+1$, $2n+2$, a seconda dei casi). Ad esempio, gli sviluppi delle funzioni $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, con centro $x_0 = 0$, di ordine rispettivamente 2 e 3 sono dati da

$$\operatorname{sen} x = x + \circ(x^2); \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^3).$$

Nell'elenco che segue ricordiamo gli sviluppi ai primi ordini di altre funzioni elementari. Cominciamo con la potenza ad esponente reale α:

$$(8) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \circ(x^2),$$

che, nei casi particolari $\alpha = -1$, $\alpha = 1/2$, diventa

$$(9) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \circ(x^2),$$

$$(10) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \circ(x^2),$$

Valgono inoltre:

$$(11) \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \circ(x^4);$$

$$(12) \quad \operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \circ(x^4);$$

$$(13) \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + \circ(x^4).$$

Per scrivere la formula di Taylor di somme, prodotti, composizioni di funzioni elementari, sono utili le proprietà del simbolo "$\circ$ *piccolo*" elencate nel seguente esercizio.

11.29 Verificare che, per il simbolo di "$\circ$ *piccolo*", valgono le seguenti proprietà ($m, n \in \mathbb{N}$):

(a) $\quad \circ(x^n) + \circ(x^n) = \circ(x^n)$

(b) $\quad a \cdot \circ(x^n) = \circ(ax^n) = \circ(x^n), \quad a =$costante $\neq 0$

(c) $\quad \circ(x^n) - \circ(x^n) = \circ(x^n)$

(d) $\quad x^m \cdot \circ(x^n) = \circ(x^{m+n})$

(e) $\quad \circ(x^m) \cdot \circ(x^n) = \circ(x^{m+n})$

(f) $\quad \circ(\circ(x^n)) = \circ(x^n)$

(g) $\quad \circ(x^n + \circ(x^n)) = \circ(x^n)$

[Per (a), (b), (c), (d), (e) si può procedere come nell'esercizio 8.59. Dimostriamo (f): posto $g(x) = \circ(\circ(x^n))$, occorre provare che $g(x) = \circ(x^n)$, cioè $g(x)/x^n \to 0$ per $x \to 0$; infatti:

$$\frac{g(x)}{x^n} = \frac{\circ(\circ(x^n))}{x^n} = \frac{\circ(\circ(x^n))}{\circ(x^n)} \cdot \frac{\circ(x^n)}{x^n} \to 0;$$

(g) si dimostra in modo analogo]

11.30 Utilizzando le proprietà dell'esercizio precedente e la formula di Taylor di centro $x_0 = 0$ delle funzioni $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ verificare che

$$(a) \quad \operatorname{sen}^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \circ(x^5)$$

$$(b) \quad \cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + \circ(x^5)$$

[(a) Utilizziamo la formula di Taylor al secondo ordine della funzione $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen}^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^4)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + [\circ(x^4)]^2 - \frac{x^4}{3} + 2x \circ (x^4) - \frac{x^3}{3} \circ (x^4).$$

Valutiamo separatamente ogni singolo addendo. Si vede che per $x \to 0$, sono infinitesimi di ordine superiore a x^5, cioè sono $\circ(x^5)$, i seguenti addendi:

$$\frac{x^6}{36}, \quad [\circ(x^4)]^2, \quad 2x \circ (x^4), \quad -\frac{x^3}{3} \circ (x^4).$$

Perciò $\operatorname{sen}^2 x = x^2 - x^4/3 + \circ(x^5)$; (b) Si può procedere in modo analogo (il lettore esegua i conti), oppure, più velocemente, si può utilizzare la formula (a) ed il fatto che $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$]

11.31 Verificare che $\cos 2x = 1 - 2x^2 + (2/3)x^4 + \circ(x^5)$, sia direttamente dalla formula di Taylor, che per differenza dalle formule (b), (a) dell'esercizio precedente.

11.32 Utilizzando la (9) e gli sviluppi in formula di Taylor delle funzioni $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, dimostrare la formula (11) relativa alla tangente.

[Cominciamo con lo scrivere lo sviluppo di $1/\cos x$ in base alla (9):

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - x^2/2 + \circ(x^3)} = 1 - [-x^2/2 + \circ(x^3)] + [\ldots]^2 + \circ(x^4) = 1 + x^2/2 + \circ(x^3).$$

Perciò otteniamo

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^4)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^3)\right) =$$

$$= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^4) = x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^4)]$$

11.33 Verificare che, per $x \to 0$, vale lo sviluppo

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \circ(x^2).$$

[Si può procedere direttamente calcolando la funzione e la derivata prima per $x = 0$, oppure si possono utilizzare lo sviluppo di e^x e la formula (9):

$$(1+e^x)^{-1} = \{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\}^{-1} = \frac{1}{2}\{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\circ(x^2)\}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\{1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\circ(x^2))+(\frac{x}{2}+\ldots)^2+\circ(x^2)\} = \frac{1}{2}\{1-(\frac{x}{2}+\circ(x^2)\}]$$

11.34 Verificare che, per $x \to 0$, valgono gli sviluppi

$$(a) \quad \log(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \circ(x^4)$$

$$(b) \quad e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \circ(x^4)$$

[Verifichiamo (a) (la verifica di (b) è analoga). Partiamo da

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^5), \quad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \circ(y^2).$$

Ponendo $y = -x^2/2 + x^4/24 + \circ(x^5)$, otteniamo

$$\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^5) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2}+\ldots)^2 + \circ(x^4)\ ]$$

11D. Uso della formula di Taylor nel calcolo di limiti

Gli esercizi che proponiamo di seguito si risolvono utilizzando la formula di Taylor con il resto di Peano e le altre proprietà descritte nel paragrafo precedente. Avvertiamo il lettore che alcuni tra gli esercizi proposti in questo paragrafo sono particolarmente complessi e che in genere non si risolvono agevolmente senza gli sviluppi asintotici in formula di Taylor.

11.35 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + \log\cos x}{x^4}$$

[Utilizzando la formula di Taylor, di centro $x_0 = 0$, della funzione $\cos x$ e della funzione $\log\cos x$ (si veda l'esercizio 11.34 (a)) otteniamo il limite seguente

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^5)\right)-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\circ(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{8}\ ]$$

11.36 Utilizzando la formula di Taylor, calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\operatorname{tg} x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$[\ \dfrac{1}{x\operatorname{tg} x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\cos x}{x\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2\operatorname{sen} x}=$

$=\dfrac{x(1-x^2/2+\circ(x^3))-(x-x^3/6+\circ(x^4))}{x^2(x+\circ(x))}\to-\dfrac{1}{3}]$

11.37 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^5}{\left(\operatorname{sen} x-x\cos\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}.$

[Il risultato è $270^2/2$ e si ottiene con gli sviluppi:

$1-\cos x^5=1-(1-\dfrac{1}{2}x^{10}+\circ(x^{10}))=\dfrac{1}{2}x^{10}+\circ(x^{10});$

$\operatorname{sen} x-x\cos\dfrac{x}{\sqrt{3}}=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{5!}+\circ(x^6)-x[1-\dfrac{1}{2}(\dfrac{x}{\sqrt{3}})^2+\dfrac{1}{4!}(\dfrac{x}{\sqrt{3}})^4+\circ(x^5)]=$

$=x^5(\dfrac{1}{5!}-\dfrac{1}{4!9})+\circ(x^5)=\dfrac{x^5}{270}+\circ(x^5).$

Perciò il limite del rapporto, per $x\to 0$, è $270^2/2=36\,450$]

11.38 Utilizzando la formula di Taylor, calcolare i limiti

$$(a)\quad\lim_{x\to 0}\frac{\cosh^2 x-1-x^2}{x^4}\qquad\qquad(b)\quad\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{senh}^2 x-3x^2-x^4}{x^6}$$

[(a) 1/3; (b) 2/15]

11.39 Calcolare i limiti seguenti con la formula di Taylor

$$(a)\quad\lim_{x\to 0}\frac{(\cosh x-\cos x)^3}{(\operatorname{senh} x-\operatorname{sen} x)^2}\qquad\qquad(b)\quad\lim_{x\to 0}\frac{x^3(e^x-\cos x)}{x^2-\operatorname{sen}^2 x}$$

[(a) 9; (b) 3]

11.40 Verificare che

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{(3+x^2)\operatorname{senh} x-3x\cosh x}=15.$$

11.41 Utilizzando la formula di Taylor, calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}-\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0} x^2\frac{\operatorname{sen} x^2-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2-\operatorname{tg} x^2}$$

[(a) $-1/3$; (b) $-2/3$]

11.42 Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n\to+\infty} n^2[(1+e^{1/n})^{-1}-\frac{2n-1}{4n}]$$

[Il risultato è 0 e si ottiene con lo sviluppo in formula di Taylor proposto nell'esercizio 11.33:

$$(1+e^{1/n})^{-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}+\circ(\frac{1}{n^2})=\frac{2n-1}{4n}+\circ(\frac{1}{n^2})\ ]$$

11.43 Calcolare i limiti di successione

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}-1}{\log\sqrt[n]{n}}\qquad (b)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{1/n}-1}{\log\sqrt[n]{n}}$$

[(a) Scriviamo la successione in forma esponenziale

$$\frac{\sqrt[n]{n^2}-1}{\log\sqrt[n]{n}}=\frac{e^{(2/n)\log n}-1}{(1/n)\log n}.$$

Poniamo $y=(2/n)\log n\to 0$ nello sviluppo $e^y=1+y+\circ(y)$. L'espressione precedente risulta uguale a

$\dfrac{e^y-1}{y/2}=2\dfrac{y+\circ(y)}{y}\to 2$; (b) -1]

11.44 Calcolare i limiti seguenti con la formula di Taylor

$$(a)\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{x-\operatorname{sen}^2\sqrt{x}-\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x+3(x-\operatorname{sen}^2\sqrt{x})}{x^2}$$

[(a) $-2/3$; (b) 2]

11.45 Calcolare i limiti seguenti con la formula di Taylor

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}\left[(\frac{1}{\operatorname{sen} x})^2-(\frac{\cos x}{x})^2\right.$$

[(a) Porre $\operatorname{tg} x=\operatorname{sen} x/\cos x$ e poi ridurre ad un unico denominatore. Il risultato è $2/3$; (b) $4/3$]

11.46 Utilizzando la formula di Taylor, calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-\log(1+x+\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1+2x^4}-1}$$

$$(b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{(e^{x^2}-\cos x)} - \cosh 3x}{x(x - \operatorname{arcsen} x)}$$

[(a) $4/3$; (b) $+\infty$]

11.47 Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(5^x - 2^x)}{\operatorname{sen} x + \log(1-x)} \qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x(x4^x - 2^x + 1)^2}{x - \operatorname{arctg} x}$$

[(a) $2\log(2/5)$; (b) $3(1-\log 2)^2$]

11.48 Calcolare i limiti di successione

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} (\sqrt[3]{n^3+1} - n) \qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} (\sqrt[4]{n^4+n^3+1} - n)$$

[(a) 0; (b) $1/4$. Indichiamo il metodo nel caso (a): Ricordando lo sviluppo (8) della potenza con esponente $\alpha = 1/3$, otteniamo

$$\sqrt[3]{n^3+1} - n = n(\sqrt[3]{1+1/n^3} - 1) = n\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + \circ(\frac{1}{n^3}) - 1\right) = \frac{1}{3n^2} + \circ(\frac{1}{n^2}) \to 0]$$

11.49 Calcolare il limite seguente con la formula di Taylor

$$\lim_{x\to+\infty} \{2x(x-1) - x^3 \log(1 + \operatorname{sen}\frac{2}{x})\}$$

[Il risultato è $-4/3$. Si inizi con lo sviluppo:

$$\log(1+\operatorname{sen} y) = \log(1 + y - \frac{y^3}{6} + \circ(y^3)) =$$

$$= y - \frac{y^3}{6} + \circ(y^3) - \frac{1}{2}(y - \ldots)^2 + \frac{1}{3}(y - \ldots)^3 + \circ(y^3) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \circ(y^3).$$

Poniamo $y = 2/x$, osservando che $y \to 0^+$ per $x \to +\infty$:

$$\log(1 + \operatorname{sen}\frac{2}{x}) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{3}\frac{1}{x^3} + \circ(\frac{1}{x^3}).$$

Poi, con semplici passaggi, si ottiene il risultato finale]

11.50 Con il metodo dell'esercizio precedente, calcolare i limiti di successione

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \{n^3 \log(1 + \operatorname{sen}\frac{3}{n}) - 3n^2 + \frac{9}{2}n\}$$

$$(b) \quad \lim_{n\to+\infty} \{n^2 + \frac{n}{2} + n^3 \log(1 - \operatorname{sen}\frac{1}{n})\}$$

[(a) $9/2$; (b) $-1/6$]

11.51 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{[(1-x)^{-1}+e^x]^2-4e^{2x}-2x^2}{x^3}.$$

[Utilizzare lo sviluppo $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+x^3+\circ(x^3)$. Eseguendo i conti si trova

$[(1-x)^{-1}+e^x]^2 = 4+8x+10x^2+\dfrac{32}{3}x^3+\circ(x^3)$.

Il risultato finale è 16/3]

11.52 Calcolare i limiti di funzioni esponenziali:

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}(1+x^3)^{\frac{1}{x^2\operatorname{sen}2x}} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}(1+x^3)^{\frac{1}{x-\operatorname{sen}x}}$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} \qquad (d)\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}$$

[(a) Il risultato è $\sqrt{e}$ e si ottiene scrivendo la formula data in forma esponenziale con base fissa uguale ad e:

$$(1+x^3)^{\frac{1}{x^2\operatorname{sen}2x}} = e^{\dfrac{\log(1+x^3)}{x^2\operatorname{sen}2x}}$$

e calcolando separatamente il limite dell'esponente:

$$\frac{\log(1+x^3)}{x^2\operatorname{sen}2x} = \frac{x^3+\circ(x^3)}{x^2(2x+\circ(x))} \to \frac{1}{2};$$

(b) e^6; (c) $e^{-1/2}$; (d) $e^{-1/4}$]

11.53 Utilizzando la formula di Taylor, calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{1/x^2} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{1/x}$$

[(a) $e^{-1/6}$; (b) 1. Il metodo, ad esempio nel caso (a), è il seguente:

$$(a)\quad \left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{\dfrac{1}{x^2}\log\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}} = e^{\dfrac{1}{x^2}\log\dfrac{x-x^3/6+\circ(x^3)}{x}} =$$

$$= e^{\dfrac{1}{x^2}\log(1-x^2/6+\circ(x^2))} = e^{\dfrac{-x^2/6+\circ(x^2)}{x^2}} \to e^{-1/6}]$$

11.54 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen}x\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^x$.

[Il risultato è 0. Si utilizzino i teoremi di confronto per i limiti e le relazioni:

$$\left|\operatorname{sen} x\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^x\right| \leq \left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^x \underset{y=1/x}{=} \left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)^{1/y}.$$

Il risultato si ottiene come nella parte (b) dell'esercizio precedente]

11.55 Calcolare i limiti seguenti con la formula di Taylor

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)^{1/x^2} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)^{1/x^2}$$

[(a) $e^{-2/3}$; (b) $e^{-3/2}$]

11.56 Calcolare il limite $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^{\frac{1}{1-x}}-e^{-x}}{x-1}$.

[Si può eseguire la sostituzione $y=1-x$. Il risultato è $3/(2e)$]

11.57 Calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{\log x}$.

[$(\cos x)^{\log x}=e^{\log x\log(\cos x)}$. Calcoliamo separatamente il limite, per $x\to 0^+$, dell'esponente con la regola di L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{(\log\cos x)^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\log\cos x)^2}{x\operatorname{sen} x}\cos x.$$

Mediante la formula di Taylor si verifica che

$$\frac{(\log\cos x)^2}{x\operatorname{sen} x} = \frac{(\log(1-x^2/2+\circ(x^2)))^2}{x(x+\circ(x))} = \frac{x^4/4+\circ(x^4)}{x^2+\circ(x^2)} \to 0.$$

Quindi il limite dato vale $e^0=1$]

11.58 Dopo aver verificato che $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{1/x^2}-1/\sqrt{e}}{x^2}$$

[Il risultato è $-1/(12\sqrt{e})$. Partiamo da

$$(\cos x)^{1/x^2}=e^{(\log\cos x)/x^2}.$$

Utilizzando lo sviluppo in formula di Taylor di centro $x_0=0$ della funzione $\log\cos x$ (si veda l'esercizio 11.34 (a)) otteniamo

$$\frac{\log\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{12}x^2+\circ(x^2).$$

Risulta quindi $(\cos x)^{1/x^2}=e^{-1/2}\cdot e^{-x^2/12+\circ(x^2)}$.

Infine si conclude:

$$\frac{(\cos x)^{1/x^2} - e^{-1/2}}{x^2} = e^{-1/2}\, \frac{e^{-x^2/12 + \circ(x^2)} - 1}{x^2} \to -\frac{e^{-1/2}}{12}\ ]$$

11.59 Calcolare i limiti di successione

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} n^2[(\cos\frac{1}{n})^{n^2} - \frac{1}{\sqrt{e}}] \qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} n^2[(1+\frac{1}{n})^n - e(1-\frac{1}{2n})]$$

[(a) È lo stesso limite dell'esercizio precedente, quando si ponga $x = 1/n$. Naturalmente il risultato è $-1/(12\sqrt{e})$; (b) $(11/24)e$]

11.60 Calcolare i limiti seguenti con la formula di Taylor

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x+x^2/2)^{1/x} - e}{x} \qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x-x^2/2)^{1/x} - e}{x}$$

[(a) 0; (b) $-e$]

11.61 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1 - x\log x}{x^{3/2}}$

[Il risultato è 0 e si ottiene con lo sviluppo

$$x^x = e^{x\log x} = 1 + x\log x + \frac{1}{2}x^2\log^2 x + \circ(x^2\log^2 x)]$$

11.62 Utilizzando la formula di Taylor, calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(7x^3) - (1+x^2)^x - (1+x^2)^{-x}}{x^6}$$

$$(b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^3)^x + (1+x^3)^{-x} - 2\cos(5x^4)}{x^8}$$

[(a) -50; (b) 26]

11.63 Verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-(\cos x)^{\log x}}{x^2\log x} = \frac{1}{2}.$$

11.64 Calcolare il limite seguente con la formula di Taylor

$$\lim_{x\to 0^+} [(1-\frac{1}{\log x})^{-\log x} - (1+x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}]\log\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

[Il risultato è $e/2$. Utilizziamo la rappresentazione esponenziale:

$$(1-\frac{1}{\log\, x})^{-\log\, x} = e^{-\log\, x \log(1-\dfrac{1}{\log\, x})}; \quad (1+x)^{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} = e^{\dfrac{\log(1+x)}{\operatorname{sen} x}}.$$

Valgono gli sviluppi:

$$-\log\, x \log(1-\frac{1}{\log\, x}) = -\log\, x(\frac{-1}{\log\, x} - \frac{1}{2\log^2\, x} + \circ(\frac{1}{\log^2\, x})) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2\log\, x} + \circ(\frac{1}{\log\, x});$$

$$e^{-\log\, x \log(1-\dfrac{1}{\log\, x})} = e \cdot e^{\dfrac{1}{2\log\, x} + \circ(\dfrac{1}{\log\, x})} = e(1 + \frac{1}{2\log\, x} + \circ(\frac{1}{\log\, x})).$$

$$\frac{\log(1+x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{x - x^2/2 + \circ(x^2)}{x + \circ(x^2)} = \frac{1 - x/2 + \circ(x)}{1 + \circ(x)} = 1 - \frac{x}{2} + \circ(x);$$

$$e^{\dfrac{\log(1+x)}{\operatorname{sen} x}} = e \cdot e^{-\dfrac{x}{2} + \circ(x)} = e(1 - \frac{x}{2} + \circ(x)).$$

Quindi, dato che $-x/2 + \circ(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $1/\log\, x$, otteniamo

$$(1-\frac{1}{\log\, x})^{-\log\, x} - (1+x)^{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{e}{2\log\, x} + \circ(\frac{1}{\log\, x}).$$

Il risultato finale è conseguenza del limite seguente, che calcoliamo con la regola di L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\log\, x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1]$$

Capitolo 12

SUCCESSIONI DEFINITE PER RICORRENZA

12A. Uso del principio di induzione

Consideriamo successioni a_n *definite per ricorrenza*, o *per induzione*, nel modo seguente

$$a_1 \quad \textit{assegnato}, \qquad a_{n+1} = f(a_n),$$

essendo $f(x)$ una funzione continua.

Per studiare il comportamento di una successione definita per ricorrenza si esaminano i seguenti aspetti:

Si calcolano i possibili valori del limite. Più precisamente, si suppone che la successione a_n sia regolare, e sia $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ il limite della successione. Perciò $a_n \to a$ e quindi anche $a_{n+1} \to a$. Essendo $f(x)$ continua, risulta $a = f(a)$.

Si verifica preliminarmente se $a = \pm\infty$ può soddisfare tale equazione. Poi si risolve $a = f(a)$, supponendo $a \in \mathbb{R}$. Si vengono così a determinare i possibili valori del limite.

Si cerca di stabilire se la successione è regolare, cioè se essa ammette limite (finito o infinito). Ciò accade, ad esempio, se a_n è una successione monotòna; in questa fase può essere utile il principio di induzione.

Se il limite esiste, si cercano delle relazioni atte a stabilire quale, tra i possibili valori trovati, è il limite effettivo. Anche in questa fase può essere utile il principio di induzione.

Ad esempio, se i possibili limiti di una successione a_n sono $a = 0$ oppure $a = +\infty$, e se si riconosce che a_n è una successione crescente a termini positivi, allora necessariamente il limite è $+\infty$; viceversa, se a_n è decrescente, allora il limite è zero. Un esempo in cui si verifica questa situazione è quello proposto nell'esercizio seguente.

12.1 Studiare la successione definita per ricorrenza da

$$a_1 = 2, \qquad\qquad a_{n+1} = a_n^2.$$

[Se $a_n \to a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, anche $a_{n+1} \to a$; quindi, passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione $a_{n+1} = a_n^2$, si ottiene $a = a^2$. Il valore $a = +\infty$ è una possibile soluzione; invece $-\infty$ non è un possibile limite, perché la relazione $-\infty = (-\infty)^2 = +\infty$ non è soddisfatta. Se $a \in \mathbb{R}$, l'equazione di secondo grado $a = a^2$ ha per soluzioni $a = 0$ e $a = 1$.

Dimostriamo che a_n è strettamente crescente, verificando per induzione che

$$a_n < a_{n+1}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo preliminarmente che tutti i termini sono positivi. Per $n = 1$ la relazione è vera, infatti $a_1 = 2 < a_2 = 4$. Supponiamo $a_n < a_{n+1}$; da $0 < a_n < a_{n+1}$ segue $0 < a_n^2 < a_{n+1}^2$ cioè $a_{n+1} < a_{n+2}$. Perciò a_n è strettamente crescente e quindi, come tutte le successioni monotòne, ammette limite.
Abbiamo già visto che i possibili limiti sono 0, 1, $+\infty$. Dato che tutti i termini a_n sono maggiori del primo termine $a_1 = 2$, il limite non può essere nè 0, nè 1. Perciò a_n diverge a $+\infty$]

12.2 Studiare le successioni definite per ricorrenza

$$(a) \quad \begin{cases} a_1 = 1/2 \\ a_{n+1} = a_n^2 \end{cases} \qquad\qquad (b) \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 \end{cases}$$

[(a) Come nell'esercizio precedente si verifica che i possibili limiti sono 0, 1, $+\infty$. Si verifica poi che la successione è strettamente decrescente: infatti $a_1 = 1/2 > a_2 = 1/4$; dall'ipotesi di induzione $0 < a_{n+1} < a_n$ si deduce che $0 < a_{n+1}^2 < a_n^2$, cioè $a_{n+2} < a_{n+1}$.

Dato che il primo termine della successione è $1/2$, il limite non può essere nè 1, nè $+\infty$. Perciò il limite è zero.
(b) Si tratta della successione costante, uguale ad 1]

12.3 Studiare le successioni definite per ricorrenza

$$(a) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \end{cases} \qquad\qquad (b) \begin{cases} a_1 = 13 \\ a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n} \end{cases}$$

[(a) Per induzione si verifica che tutti i termini sono positivi, perciò la successione è ben definita. Se $a_n \to a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, anche $a_{n+1} \to a$ e quindi $a = \sqrt{6 + a}$. Il valore $a = +\infty$ è un possibile limite; inoltre, se a è reale, l'equazione di secondo grado $a^2 - a - 6 = 0$ ammette $a = 3$ come unica soluzione positiva.

Verifichiamo che a_n è una successione strettamente crescente; proviamo cioè, per induzione, che $a_n < a_{n+1}$ per ogni n: Per $n = 1$ risulta $a_1 = 1 < a_2 = \sqrt{7}$; supponendo che $a_n < a_{n+1}$, otteniamo $6 + a_n < 6 + a_{n+1}$, da cui $\sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + a_{n+1}}$, cioè $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Dato che a_n è strettamente crescente, essa è regolare. I limiti possibili sono $a = 3$ e $a = +\infty$ che, con gli elementi che abbiamo fino ad ora, sono entrambi possibili.

Proviamo per induzione che $a_n < 3$ per ogni n: risulta $a_1 = 1 < 3$; se $a_n < 3$ allora $6 + a_n < 9$ e quindi $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{9} = 3$.

Riassumendo, a_n è una successione a termini positivi e minori di 3 ed è strettamente crescente; perciò, per $n \to +\infty$, a_n converge a 3.
(b) La successione converge decrescendo a 4]

12.4 Studiare le successioni definite per ricorrenza

$$(a) \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2(a_n - 1) \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2(a_n - 1) \end{cases}$$

[(a) Se a è il limite della successione, risulta $a = 2(a-1)$. Perciò $a = \pm\infty$, oppure $a = 2$. Da verifica diretta risulta $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10, \ldots$. Si può perciò congetturare che la successione diverge a $+\infty$ crescendo.

Proviamo per induzione che $a_n < a_{n+1}$ per ogni n: già sappiamo che $a_1 < a_2$; supponendo $a_n < a_{n+1}$ otteniamo $a_n - 1 < a_{n+1} - 1$ da cui $2(a_n - 1) < 2(a_{n+1} - 1)$, cioè $a_{n+1} < a_{n+2}$. Quindi la successione è strettamente crescente. Il limite, che esiste, deve essere maggiore del primo termine. Perciò il limite e $+\infty$.
(b) La successione è strettamente decrescente e diverge a $-\infty$]

12.5 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a) \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 4}{5} \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 4}{5} \end{cases}$$

[(a) La successione è strettamente crescente e converge ad 1; (b) la successione è strettamente crescente e diverge a $+\infty$]

12.6 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a) \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{4}{4 - a_n} \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{8}{6 - a_n} \end{cases}$$

[(a) La successione è strettamente crescente e converge a 2; (b) la successione è strettamente decrescente e converge a 2]

12.7 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a) \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \dfrac{5}{6 - a_n} \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{5}{6 - a_n} \end{cases}$$

[(*a*) La successione è strettamente decrescente e converge ad 1; (*b*) la successione è strettamente crescente e converge ad 1]

12.8 Studiare le successioni definite per ricorrenza

$$(a) \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n} \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3\sqrt{a_n} \end{cases}$$

[(*a*) La successione è strettamente decrescente e converge ad 1; (*b*) la successione è strettamente crescente e converge a 9]

12.9 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 6}{5} \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 6}{5} \end{cases}$$

[(*a*) La successione è strettamente crescente e converge a 2; (*b*) la successione è strettamente crescente e diverge a $+\infty$]

12.10 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a) \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = 4 - a_n \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{3 - a_n^2} \end{cases}$$

[(*a*) La successione non ammette limite. Infatti, se $a_n = -1$, allora $a_{n+1} = 4 - a_n = 5$ e quindi $a_{n+2} = 4 - a_{n+1} = 4 - 5 = -1$. Perciò, per induzione, risulta

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 5 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

(*b*) La successione non ammette limite perchè risulta $a_{2k-1} = 1$, $a_{2k} = \sqrt{2}$]

12.11 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a) \quad a_1 = e, \qquad a_{n+1} = a_n \log^2 a_n$$

$$(b) \quad a_1 = 1/e, \qquad a_{n+1} = a_n \log^2 a_n$$

$$(c) \quad a_1 = e, \qquad a_{n+1} = (\log a_n)^2 / a_n$$

[(*a*) Si verifica per induzione che a_n è la successione costante, uguale ad e; (*b*) $a_n = 1/e$ per ogni n; (*c*) Si verifica per induzione che $a_n = e$ se n è dispari, mentre $a_n = 1/e$ se n è pari. Perciò la successione non ammette limite]

12.12 Studiare le successioni definite per ricorrenza

$$(a) \quad a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$$

$$(b) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$$

[(a) Si verifica per induzione che $a_n > 0$ per ogni n. Da un calcolo diretto dei primi termini si può congetturare che la successione è strettamente decrescente, cioè che

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} < a_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Moltiplicando entrambi i membri per $2a_n$ (che è una quantità positiva) si ottiene la disequazione di secondo grado in a_n:

$$a_n^2 - 4 > 0.$$

Limitatamente ad $a_n > 0$, tale disequazione `e soddisfatta purché risulti $a_n > 2$.

Proviamo per induzione che $a_n > 2$ per ogni n: per $n = 1$, $a_1 = 4 > 2$; risulta poi

$$(*) \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad a_n^2 - 4a_n + 4 = (a_n - 2)^2 > 0.$$

Quindi a_n è strettamente decrescente e converge a 2.

(b) In $(*)$ abbiamo verificato che $a_{n+1} \geq 2$ indipendentemente da a_n. Perciò tutti i termini della successione, tranne il primo, sono maggiori di 2. Quindi la successione è definitivamente decrescente e converge a 2]

12.13 Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$$

[La successione a_n non ammette limite. Infatti, se a_n convergesse ad un numero reale a, avremmo $a = (a-1)/a$; $a = 0$ non è soluzione; se $a \neq 0$, otteniamo l'equazione di secondo grado $a^2 - a + 1 = 0$, che non ha soluzioni reali. Infine, se supponiamo $a = \pm\infty$, passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n},$$

otteniamo $a = 1 - 1/a$, cioè l'assurdo $\pm\infty = 1 - 0$]

12.14 Studiare le successioni definite per ricorrenza

$$(a) \quad \begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n} \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n} \end{cases}$$

[(a) Per induzione si verifica che tutti i termini della successione sono positivi (quindi il denominatore non si annulla e la successione è ben definita). La successione a_n non è però monotòna. Infatti, se per qualche n risulta $a_n < a_{n+1}$ si ottiene equivalentemente

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n+1}} \Leftrightarrow a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} > 1 + \frac{1}{a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

Pertanto $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} > a_{n+2}$. Iterando risulta anche $a_{n+1} > a_{n+2} \Leftrightarrow a_{n+2} < a_{n+3}$. Leggendo insieme la prima e la seconda implicazione si ottiene quindi

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+2} < a_{n+3}$$

e analogamente $a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+2} > a_{n+3}$. Ciò prova che le due successioni estratte a_{2k} e a_{2k+1}, rispettivamente dei termini di indici pari e dispari, sono monotòne. Se la successione a_n ammette limite uguale ad $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, dovendo risultare anche $a_{n+1} \to a$, si ottiene

$$a = 1 + \frac{1}{a}.$$

Si osserva che $a = +\infty$ è da scartare. Nel caso $a \in \mathbb{R}$ si trova l'equazione $a^2 - a - 1 = 0$ che ha come soluzioni $a = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Dato che $(1 - \sqrt{5})/2$ è un numero negativo, rimane la sola possibilità $a = (1 + \sqrt{5})/2$. Le due successioni estratte a_{2k} e a_{2k+1} verificano la relazione di ricorrenza che si ottiene scrivendo a_{n+2} in funzione di a_n nel modo seguente:

$$a_{n+2} = 1 + \frac{1}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} = 1 + \frac{a_n}{1 + a_n} = \frac{1 + 2a_n}{1 + a_n}.$$

Pertanto

$$a_{n+2} = \frac{1 + 2a_n}{1 + a_n}$$

e passado al limite per $n \to +\infty$ si verifica che anche le due estratte a_{2k} e a_{2k+1}, essendo monotòne, convergono a priori a due possibili limiti b_1 e b_2 che sono entrambi soluzioni della stessa equazione. Infatti, se $a_{2k} \to b_1$ anche $a_{2k+2} \to b_1$ e risulta

$$b_1 = \frac{1 + 2b_1}{1 + b_1} \quad \Leftrightarrow \quad b_1^2 - b_1 - 1 = 0$$

ed analogamente per b_2. Quindi le due estratte a_{2k} e a_{2k+1} convergono entrambe all'unica soluzione positiva dell'equazione $b_1^2 - b_1 - 1 = 0$, ed anche equivalentemente all'unica soluzione positiva $a \in \mathbb{R}$ dell'equazione $a^2 - a - 1 = 0$, cioè $b_1 = b_2 = a = (1 + \sqrt{5})/2$. In definitiva tutta la successione a_n converge al numero $(1 + \sqrt{5})/2$. La convergenza, come si è già detto, non è monotòna: essendo $a_1 = 10$ e $a_2 = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10} = 1,1 < \frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, risulta

$$a_2 < \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} < a_1$$

e la successione a_{2k} dei termini di indice pari converge crescendo a $(1 + \sqrt{5})/2$, mentre la successione a_{2k+1} dei termini di posto dispari converge decrescendo a $(1 + \sqrt{5})/2$. La successione data a_n converge oscillando al numero $(1 + \sqrt{5})/2$.
(b) Con lo stesso metodo del caso (a) si trova che a_n converge oscillando al numero

$$\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2};$$

l'estratta di posto pari converge crescendo a tale numero, mentre l'estratta di posto dispari converge decrescendo]

12.15 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a) \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -\operatorname{arctg} a_n \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \operatorname{arctg} a_n \end{cases}$$

[(*a*) La funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$ è positiva per $x > 0$ ed è negativa per $x < 0$. Ne risulta $a_1 = 1 > 0$, $a_2 = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4} < 0$, $a_3 = -\operatorname{arctg}(-\frac{\pi}{4}) > 0$, e per induzione si vede che la successione estratta a_{2k+1}, con $k = 0, 1, 2, \ldots$, dei termini di indice dispari è positiva, mentre la successione estratta a_{2k}, con $k = 1, 2, 3, \ldots$, dei termini di indice pari è negativa. La successione a_n non è quindi monotòna ed occorre studiare separatamente le due estratte a_{2k} e a_{2k+1}. Essendo $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x)$, si ha

$$a_{n+2} = -\operatorname{arctg} a_{n+1} = -\operatorname{arctg}(-\operatorname{arctg} a_n) = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} a_n).$$

Utilizzando l'ulteriore disuguaglianza

$$\operatorname{arctg} x < x, \quad \forall\ x > 0,$$

per la successione a_{2k+1} dei termini positivi si trova quindi

$$a_{2k+3} = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} a_{2k+1}) < \operatorname{arctg} a_{2k+1} < a_{2k+1},$$

da cui a_{2k+1} è una estratta (con termini positivi) decrescente. Passando al limite, se $a_{2k+1} \to a$ per $k \to +\infty$, si trova $a = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} a)$ e l'unica soluzione è $a = 0$. Pertanto a_{2k+1} converge, per $k \to +\infty$, descrescendo ad $a = 0$. Analogamente si verifica che a_{2k} converge crescendo a zero. Ciò prova che tutta la successione a_n converge (oscillando) a zero.
(*b*) Si utilizzano le disuguaglianze

$$0 < \operatorname{arctg} x < x, \qquad \forall\ x > 0.$$

Si verifica per induzione che tutti i termini a_n sono positivi. Essendo $a_{n+1} = \operatorname{arctg} a_n < a_n$, la successone a_n è (strettamente) decrescente. L'unico limite possibile, certo esistente essendo la successione monotòna, è zero]

12.16 Si studi la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 - 1 \\ a_1 = \alpha \end{cases}$$

quando il primo termine α è dato da uno di questi valori

$$(a) \quad \alpha = 2 \quad (b) \quad \alpha = -2 \quad (c) \quad \alpha = 1$$

[Valutiamo i possibili limiti della successione a_n. Se $a_n \to a$ anche $a_{n+1} \to a$ e quindi

$$a = a^2 - 1$$

cioè $a^2 - a - 1 = 0$, oltre ad $a = +\infty$ (mentre $a = -\infty$ è da scartare). Se $a \in \mathbb{R}$, risolvendo l'equazione di secondo grado si trova $a = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Per testare la monotonia, supponiamo che, per qualche $n \in \mathbb{N}$, risulti

$$a_n > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Si ottiene allora

$$a_{n+1} = a_n^2 - 1 > \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1 = \tfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - 1$$

cioè $a_{n+1} > \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Quindi se per qualche n risulta $a_n > (1+\sqrt{5})/2$, per induzione tutti i successivi termini della successione verificano tale limitazione.

Inoltre la funzione $f(x) = x^2 - 1$ è monotòna strettamente crescente per $x > 0$. Pertanto

$$0 \leq a_n < a_{n+1} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = f(a_n) < f(a_{n+1}) = a_{n+2}.$$

Quindi, se per qualche n risulta $a_n > (1+\sqrt{5})/2$, allora per gli indici successivi la successione risulta crescente. Siamo ora in grado di trattare i casi (a), (b), (c) proposti nel testo.
(a) Da verifica diretta si vede che

$$a_1 = \alpha = 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

infatti ciò equivale a $4 > 1 + \sqrt{5}$, cioè $3 > \sqrt{5}$, cioè ancora $9 > 5$. Dall'analisi fatta sopra risulta quindi $a_n > (1 + \sqrt{5})/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre $a_2 = (a_1)^2 - 1 = 3 > a_1$ e quindi, per induzione (come sopra mostrato) la successione è monotòna crescente. Il limite (unico limite possibile) è $+\infty$.
(b) Risulta $a_1 = \alpha = -2$, $a_2 = (-2)^2 - 1 = 3$, $a_3 = (3)^2 - 1 = 8$. Dall'analisi fatta in precedenza, la successione è monotòna strettamente crescente e diverge a $+\infty$.
(c) Risulta $a_1 = \alpha = 1$, $a_2 = (1)^2 - 1 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = (-1)^2 - 1 = 0$, $a_5 = -1, \ldots$. Tranne il primo termine, tutti i termini della successione con indice dispari sono uguali a -1, mentre i termini di posto pari valgono zero. La successione non ha limite]

12.17 Studiare la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2 - (a_n - 2)^2 \\ a_1 = \alpha \end{cases}$$

nei casi in cui il primo termine α assume il valore

$$(a) \quad \alpha = 0 \qquad (b) \quad \alpha = 3 \qquad (c) \quad \alpha = \tfrac{3}{2}$$

[Dato che $a_{n+1} = 2 - (a_n - 2)^2 \leq 2$, ne segue che tutti i termini della successione a_n, con $n \geq 2$, sono minori od uguali a 2 (si noti che nel caso (b) il primo termine a_1 è invece maggiore di 2). Il termine generico della successione può essere rappresentato nella forma $a_{n+1} = f(a_n)$, con

$$f(x) = 2 - (x - 2)^2$$

il cui grafico è una parabola rivolta verso il basso, con vertice nel punto di coordinate $(x, y) = (2, 2)$. La funzione $f(x)$ è quindi (strettamente) crescente nell'intervallo $(-\infty, 2]$.
(a) Essendo $a_1 = \alpha = 0$, si ottiene $a_2 = -2$. Per induzione si verifica che a_n è strettamente decrescente; infatti $a_2 < a_1$ e, dato che $f(x)$ è strettamente crescente per $x \leq 2$, se $a_{n+1} < a_n$ risulta anche

$$a_{n+2} = f(a_{n+1}) < f(a_n) = a_{n+1}.$$

La successione ammette quindi limite $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Se $a \in \mathbb{R}$, deve risultare $a = 2-(a-2)^2$, cioè $a^2 - 3a + 2 = 0$, da cui $a = 1$ oppure $a = 2$. Essendo a_n decrescendo e $a_1 = 0$, nessuno di tali valori reali può essere il limite della successione. Pertanto a_n diverge a $-\infty$.
(b) Risulta $a_1 = \alpha = 3$, $a_2 = 1$, e analogamente $a_n = 1$ per ogni $n \geq 2$. La successione converge a 1 (è definitivamente costante).
(c) Da verifica diretta risulta

$$a_1 = \alpha = \frac{3}{2}, \quad a_2 = 2 - (\frac{3}{2} - 2)^2 = \frac{7}{4}.$$

Essendo $\frac{7}{4} > \frac{3}{2}$, ne segue per induzione che la successione è strettamente crescente. Infatti, $a_1 < a_2$ e, supponendo $a_n < a_{n+1}$. per la monotonia di $f(x)$ nell'intervallo $(-\infty, 2)$ risulta

$$a_{n+1} = f(a_n) < f(a_{n+1}) = a_{n+2}.$$

I possibili limiti sono $a = -\infty$, $a = 1$, $a = 2$. Dato che la successione è monotòna crescente ed il primo termine vale $\alpha = 3/2 > 1$, il limite della successione è uguale a 2]

12.18 Si studi la successione definita per ricorrenza al variare di $\alpha in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\dfrac{a_n^2}{4} + a_n + \dfrac{1}{2} \\ a_1 = \alpha \end{cases}$$

[È opportuno rappresentare i termini della successione nella forma

$$a_{n+1} = f(a_n), \qquad \text{con} \qquad f(x) = -\frac{x^2}{4} + x + \frac{1}{2}.$$

La funzione $f(x)$ ha per grafico una parabola. Il vertice si può determinare agevolmente con l'uso delle derivate, oppure evidenziando nell'espressione analitica di $f(x)$ il termine quadratico, nel modo seguente:

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + x - 1 + 1 + \frac{1}{2} = -(\frac{x}{2} - 1)^2 + \frac{3}{2}$$

da cui segue che

$$a_{n+1} = -(\frac{a_n}{2} - 1)^2 + \frac{3}{2} \le \frac{3}{2}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Quindi, i termini della successione $a_{n+1} = f(a_n)$ sono, dopo il primo, tutti minori od uguali a $3/2$. Per $x \le 3/2$ la funzione $f(x)$ è crescente (è infatti crescente fino al vertice di ascissa $x = 2$, che si ottiene annullando la parte quadratica $-(\frac{x}{2} - 1)^2$, cioè $f(x)$ è crescente nell'intervallo $(-\infty, 2]$). Ciò permette di stabilire la monotonia della successione a_n per $n \ge 2$. Infatti, per la monotonia di $f(x)$ in $(-\infty, 2]$, per il principio di induzione si ottiene la crescenza o decrescenza di a_n (per $n \ge 2$) in base alla relazione fra a_2 e a_3. Cioè:

$$a_3 \ge a_2 \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} \ge a_n \qquad \forall\, n \ge 2,$$

$$a_3 \le a_2 \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} \le a_n \qquad \forall\, n \ge 2.$$

La successione a_n, essendo definitivamente monotòna, ammette quindi limite qualunque sia il dato iniziale $a_1 = \alpha \in \mathbb{R}$. Per determinare il valore limite poniamo $a_n \to a$, da cui anche $a_{n+1} \to a$, con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (il valore $+\infty$ è da scartare a priori). Se $a \in \mathbb{R}$ si ottiene

$$a = -\frac{a^2}{4} + a + \frac{1}{2},$$

cioè equivalentemente $a^2 = 2$, od anche $a = \pm\sqrt{2}$. Il lettore rappresenti in uno stesso sistema di riferimento cartesiano il grafico della parabola di equazione $y = f(x)$ e la retta di equazione $y = x$. Si vede che i due grafici si incontrano quando

$$f(x) = -(\frac{x}{2} - 1)^2 + \frac{3}{2} = x,$$

cioè appunto in corrispondenza di $x = \pm\sqrt{2}$. Per $x \in [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$ risulta $f(x) \geq x$, cioè

$$a_3 = f(a_2) \geq a_2.$$

Se $a_2 \in (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$ risulta quindi $a_3 \geq a_2$ e la successione a_n converge crescendo a $+\sqrt{2}$. Se invece $a_2 = -\sqrt{2}$ risulta $a_3 = -\sqrt{2}$ e tutta la successione è definitivamente (cioè per $n \geq 2$) costante. Se invece $a_2 < -\sqrt{2}$, risulta

$$a_3 = f(a_2) < a_2$$

e quindi la successione è (strettamente) decrescente. Essendo $a_2 < -\sqrt{2}$, la successione diverge a $-\infty$. Nel caso in cui $a_2 \in [\sqrt{2}, 3/2]$, (si ricordi che il valore $3/2$ è l'ordinata del vertice della parabola) è ciò corrisponde ad $\alpha \in [\sqrt{2}, 2]$, risulta ancora $a_3 = f(a_2) < a_2$ e la succesione a_n è decrescente e, in questo caso, converge a $+\sqrt{2}$. Gli altri casi si determinano dal grafico. Precisamente, riassumendo in termini del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha:

(a) Se $\alpha \in (-\infty, -\sqrt{2})$ la successione a_n è strettamente decrescente e diverge a $-\infty$;

(b) se $\alpha = -\sqrt{2}$ la successione a_n è costante, uguale a $-\sqrt{2}$;

(c) se $\alpha \in (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$ la successione a_n converge crescendo a $+\sqrt{2}$; in particolare se $\alpha = \sqrt{2}$ la successione è costante, uguale a $+\sqrt{2}$;

(d) se $\alpha \in (\sqrt{2}, 2]$ la successione converge decrescendo a $+\sqrt{2}$;

(e) se $\alpha \in (2, 4-\sqrt{2})$; dal grafico della funzione $y = f(x)$, in particolare utilizzando la simmetria della parabola rispetto all'ascissa del suo vertice $x = 2$, si vede che $f(x) = +\sqrt{2}$ non solo per $x = +\sqrt{2}$, ma anche per $x = 4 - \sqrt{2}$ (infatti la distanza $2 - \sqrt{2}$ fra le ascisse $x = \sqrt{2}$ e $x = 2$ è uguale alla distanza fra le ascisse $4 - \sqrt{2}$ e $x = 2$). Pertanto, se $\alpha \in (2, 4 - \sqrt{2})$, risulta

$$a_2 = f(x) \in (\sqrt{2}, 2)$$

e la successione a_n definitivamente, cioè per $n \geq 2$, si comporta come nel caso (d) e converge decrescendo a $\sqrt{2}$;

(f) se $\alpha \in [4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}]$; come nel caso precedente, si verifica che $f(x) = -\sqrt{2}$ non solo per $x = -\sqrt{2}$, ma anche per $x = 4 + \sqrt{2}$; infatti

$$f(4 + \sqrt{2}) = -\tfrac{1}{4}(4 + \sqrt{2})^2 + 4 + \sqrt{2} + \tfrac{1}{2} = -\sqrt{2}.$$

Dal grafico di $y = f(x)$ si vede che

$$a_2 = f(\alpha) \in (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$$

e quindi per $n \geq 2$ la successione a_n ha il comportamento descritto nel caso (c), cioè a_n converge crescendo a $+\sqrt{2}$;

(g) se $\alpha = 4 + \sqrt{2}$. In questo caso a_n per $n \geq 2$ è costante e assume il valore $-\sqrt{2}$;

(h) se $\alpha \in (4 + \sqrt{2}, +\infty)$ risulta

$$a_2 = f(\alpha) < -\sqrt{2},$$

e quindi la successione è decrescente (per $n \geq 2$) e diverge a $-\infty$]

12B. Successioni definite tramite funzioni monotòne

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ in sè, cioè $f : I \longrightarrow I$. Un numero $x_0 \in I$ si dice *punto unito*, o *punto fisso*, per la funzione $f(x)$ se

$$x_0 = f(x_0).$$

Ricordiamo (si veda l'esercizio 9.23) che, se $f(x)$ è continua in I e se I è un intervallo chiuso e limitato, allora $f(x)$ ha almeno un punto unito in I.

Se $f : I \longrightarrow I$, è ben definita la successione

$$a_1 \in I, \qquad a_{n+1} = f(a_n).$$

In questo paragrafo supponiamo $f(x)$ monotòna in I. Cominciamo col caso in cui $f(x)$ è crescente in I.

TEOREMA. - *Sia $f : I \longrightarrow I$ una funzione crescente. Allora la successione a_n definita da*

$$a_1 \in I, \qquad a_{n+1} = f(a_n),$$

è monotòna. In particolare, se $a_1 \leq a_2$ allora a_n è crescente, mentre se $a_1 \geq a_2$ allora a_n è decrescente (quindi a_n è costante se $a_1 = a_2$).

Circa il limite di a_n (che esiste), se $f(x)$ è crescente e continua in I ed I è un intervallo chiuso, vale il seguente schema:

1) *Se $a_1 < a_2$ allora a_n converge (crescendo) al punto unito x_0 più vicino ad a_1 e maggiore di a_1, se esiste un tale punto unito. Altrimenti a_n diverge a $+\infty$.*

2) *Se $a_1 > a_2$ allora a_n converge (decrescendo) al punto unito x_0 più vicino ad a_1 e minore di a_1 se esiste un tale punto unito. Altrimenti a_n diverge a $-\infty$.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che $a_1 \leq a_2$ e proviamo per induzione che $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni n:

Per $n = 1$ la relazione è vera per ipotesi. Se $a_n \leq a_{n+1}$ dato che $f(x)$ è crescente in I, si ottiene $f(a_n) \leq f(a_{n+1})$, cioè $a_{n+1} \leq a_{n+2}$.

Se $a_1 \geq a_2$ si procede in modo analogo utilizzando la relazione: $a_{n+1} \geq a_n \implies a_{n+2} = f(a_{n+1}) \geq f(a_n) = a_{n+1}$.

Supponiamo ora che $f : I \longrightarrow I$ sia una funzione crescente e continua e che $a_1 < a_2$, come in figura 12.1

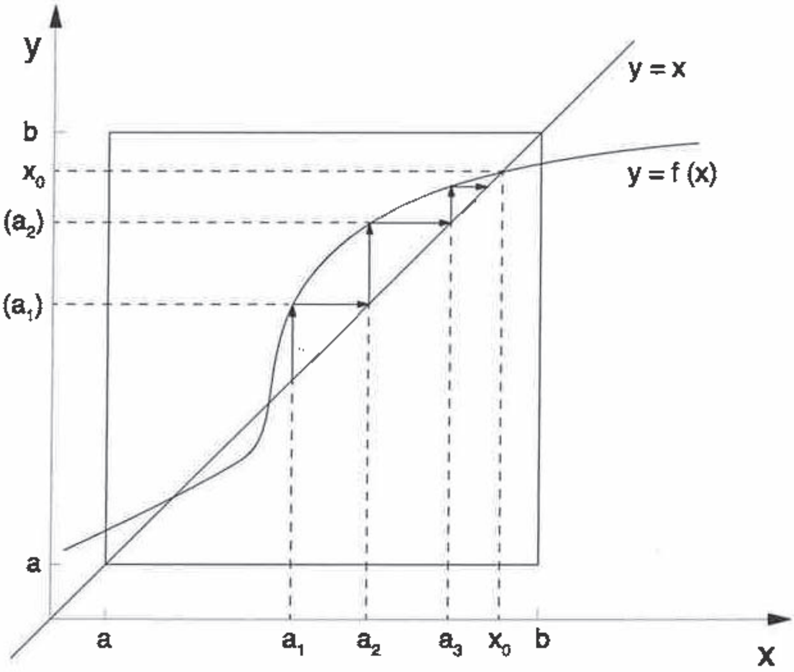


figura 12.1

Ricordiamo che I è un intervallo chiuso. Perciò, o I è illimitato superiormente, oppure esso ammette un numero reale b come massimo. Proviamo preliminarmente che, se I è limitato superiormente, allora $f(x)$ ammette almeno un punto unito nell'intervallo $(a_1, b]$.

Infatti, la funzione $g(x) = f(x) - x$ assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[a_1, b]$ perché:

$$g(a_1) = f(a_1) - a_1 = a_2 - a_1 > 0;$$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0, \quad \text{essendo } f(b) \in I.$$

Per il teorema dell'esistenza degli zeri, esiste $x_0 \in (a_1, b]$ per cui $g(x_0) = 0$, cioè $x_0 = f(x_0)$.

Indichiamo con x_0 il più piccolo tra i punti uniti di $f(x)$ nell'intervallo $(a_1, b]$ (utilizzando la continuità di $f(x)$ il lettore verifichi che esiste il minimo dei punti uniti) e verifichiamo per induzione che $a_n \leq x_0$ per ogni n:

La relazione è vera per $n = 1$ perchè $x_0 \in (a_1, b]$; se $a_n \leq x_0$, dato che $f(x)$ è crescente, risulta anche $a_{n+1} = f(a_n) \leq f(x_0) = x_0$.

Essendo a_n crescente e limitata superiormente da x_0, essa converge ad un limite $a \leq x_0$. Passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione $a_{n+1} = f(a_n)$

ed utilizzando la continuità di $f(x)$ si trova che a è un punto unito per $f(x)$ nell'intervallo $(a_1, b]$. Ciò implica che $a = x_0$, perché altrimenti x_0 non sarebbe il più piccolo punto unito per $f(x)$ in $(a_1, b]$.

Se poi l'intervallo I è illimitato e $f(x)$ non ha punti fissi maggiori di a_1, allora la successione a_n diverge a $+\infty$ perché, se fosse una successione limitata, dovrebbe convergere ad un punto fisso maggiore di a_1 che, come detto, non esiste.

Si procede in modo analogo se $a_1 > a_2$.

12.19 Utilizzando il teorema precedente studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$a_1 = \pi/2, \quad a_{n+1} = \operatorname{sen} a_n.$$

[Scriviamo la successione nel modo equivalente :

$$a_1 = \pi/2, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{con} \quad f(x) = \operatorname{sen} x.$$

La funzione $f(x)$ applica l'intervallo $[0, \pi/2]$ in sè, perché $0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 < \pi/2$ se $x \in [0, \pi/2]$. Inoltre $f(x)$ è continua e crescente in $[0, \pi/2]$. Dato che $a_2 = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1 < \pi/2 = a_1$, in base alla parte 2) del teorema precedente si può affermare che a_n converge a $x_0 = 0$, unico punto unito della funzione $\operatorname{sen} x$]

12.20 Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \log(1 + a_n).$$

[La funzione $f(x) = (1/2) \log(1 + x)$ è continua e crescente per $x > -1$. È opportuno restringere l'insieme di definizione; scegliendo come dominio l'intervallo $I = [0, +\infty)$, risulta $f : I \longrightarrow I$.

Si verifica che l'equazione $x = f(x)$ ammette, per $x \geq 0$, solo la soluzione $x_0 = 0$: infatti, la funzione $g(x) = x - f(x)$ è tale che

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1+2x}{2(1+x)} > 0 \qquad \forall\, x \geq 0;$$

perciò $g(x)$ è strettamente crescente in I. Essendo $g(0) = 0$, risulta $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$; cioè $x > f(x)$ per ogni $x > 0$.

Essendo $x > f(x)$ è anche $a_1 > f(a_1) = a_2$. In base alla parte 2) del teorema precedente la successione a_n converge a zero]

12.21 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

(a) $\quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \log(1 + a_n)/\log 2$

(b) $\quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2\log(1 + a_n)/\log 3$

[(a) Si proceda in modo analogo a quanto indicato nell'esercizio precedente, tenendo conto che la funzione $f(x) = \log(1+x)/\log 2$ ha due punti uniti, per $x_0 = 0$ e per $x_0 = 1$. Si trova che la successione a_n converge decrescendo ad 1; (b) la successione converge crescendo a $x_0 = 2$, che è un punto unito per la funzione $f(x) = 2\log(1+x)/\log 3$]

12.22 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a) \quad a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = e^{a_n} - 1$$
$$(b) \quad a_1 = -1, \quad a_{n+1} = e^{a_n} - 1$$

[La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^x - 1$ è continua e crescente ed ha l'unico punto unito $x_0 = 0$. Risulta anche $f(x) > x$ se $x \neq 0$ (si confronti $f(x)$ con la sua retta tangente nel punto $x_0 = 0$). Perciò $a_2 = f(a_1) > a_1$ se $a_1 \neq 0$. In base al teorema precedente si ottengono i seguenti risultati: (a) la successione diverge a $+\infty$; (b) la successione converge a 0]

12.23 Studiare le successioni definite per ricorrenza

$$(a) \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

dove $f(x) = x + 1 - \log x$.

[La funzione $f(x)$ applica l'intervallo $[1, +\infty)$ in sè. Più precisamente, $f : [1, +\infty) \longrightarrow [2, +\infty)$, perché $f(1) = 2$ e perché $f(x)$ è crescente, essendo $f'(x) = 1 - 1/x \geq 0$ per ogni $x \geq 1$. Inoltre $f(x)$ ha $x_0 = e$ come unico punto unito. Si ottengono i risultati: (a) a_n converge crescendo ad e; (b) a_n converge decrescendo ad e]

12.24 Studiare le successioni definite per ricorrenza tramite la funzione $f(x) = 3x + \cos x - 1$

$$(a) \quad \begin{cases} a_1 = \pi \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} a_1 = -\pi \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

[La funzione $f(x)$ è definita su tutto l'asse reale ed è strettamente crescente, dato che $f'(x) = 3 - \operatorname{sen} x \geq 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In modo simile si verifica che $x_0 = 0$ è l'unico punto unito di $f(x)$ e che $f(x) \gtrless x$ se $x \gtrless 0$. In base al teorema precedente si ottengono i risultati: (a) a_n diverge a $+\infty$; (b) a_n diverge a $-\infty$]

12.25 Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 \geq 0, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{con} \quad f(x) = \frac{x^2 + 8}{6},$$

al variare del primo termine $a_1 \in [0, +\infty)$.

[La funzione $f(x)$ è crescente per $x \geq 0$ ed ammette in $[0, +\infty)$ i punti uniti $x = 2$ e $x = 4$. Inoltre:

$$f(x) > x \quad \text{se} \quad x < 2 \quad \text{oppure} \quad x > 4;$$
$$f(x) < x \quad \text{se} \quad 2 < x < 4.$$

In base al teorema precedente si ottengono i risultati:

$$0 \leq a_1 \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad a_n \text{ converge crescendo a } 2$$
$$2 < a_1 < 4 \quad \Longrightarrow \quad a_n \text{ converge decrescendo a } 2$$
$$a_1 = 4 \quad \Longrightarrow \quad a_n \text{ è costante} = 4$$
$$a_1 > 4 \quad \Longrightarrow \quad a_n \text{ diverge a } +\infty]$$

12.26 Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 \geq 2, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{con} \quad f(x) = x^2 - 2,$$

al variare del primo termine $a_1 \in [2, +\infty)$.

[Posto $I = [2, +\infty)$, si verifica che $f : I \to I$; infatti $f(x)$ è crescente per $x \geq 0$ e $f(2) = 2$. Risulta inoltre

$$a_2 = f(a_1) = a_1^2 - 2 > 2, \qquad \forall\, a_1 > 2.$$

Quindi, se $a_1 > 2$, risulta $a_2 > a_1$ e, in base al teorema precedente, a_n diverge crescendo a $+\infty$, dato che $f(x) = x^2 - 2 > x$ per ogni $x > 2$, come si può verificare direttamente (cioè $f(x)$ ha come unici punti uniti su $\mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione $x^2 - 2 = x$, cioè i valori $x = 2$ e $x = -1$); in particolare non esistono punti uniti (punti fissi) di $f(x)$ per $x > 2$. Se invece $a_1 = 2$, la successione a_n è costante, uguale a 2]

12.27 Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 \geq 1, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{con} \quad f(x) = 2x^2 - 1,$$

al variare del primo termine $a_1 \in [1, +\infty)$.

[La funzione $f(x) = 2x^2 - 1$ ha come punti uniti (punti fissi) su $\mathbb{R}$ i valori $x = 1$ e $x = -1/2$. In particolare $f(1) = 1$ ed $f(x)$ è crescente per $x \geq 1$ (anzi è crescente in $[0, +\infty)$). Pertanto $f : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ ed ha come unico punto unito in tale intervallo il numero $x = 1$. Se $a_1 = 1$ la successione a_n è costante e converge a 1. Se invece $a_1 > 1$, la successione a_n è crescente (in particolare $a_2 = 2a_1^2 - 1 > a_1$) e, in base al teorema enunciato in precedenza, diverge a $+\infty$]

Consideriamo ora il caso in cui $f(x)$ è decrescente.

TEOREMA. - *Sia* $f : I \longrightarrow I$ *una funzione decrescente. Allora la successione* a_n *definita da*

$$a_1 \in I, \qquad\qquad a_{n+1} = f(a_n),$$

ha le sottosuccessioni a_{2k}, a_{2k-1} *monotòne. In particolare, se* $a_1 \leq a_3$ *allora* a_{2k-1} *è crescente e* a_{2k} *è decrescente; mentre, se* $a_1 \geq a_3$ *allora* a_{2k-1} *è decrescente e* a_{2k} *è crescente.*

Inoltre, se $a_1 \leq a_2$ *allora* $a_{2k-1} \leq a_{2k}$ *per ogni* k*; se* $a_1 \geq a_2$ *allora* $a_{2k-1} \geq a_{2k}$ *per ogni* k*.*

Infine, una condizione necessaria affinchè la successione a_n *abbia limite è che* a_3 *sia compreso tra* a_1 *e* a_2*.*

Dimostrazione: La funzione $g(x) = f(f(x))$ è crescente; infatti:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad f(f(x_1)) < f(f(x_2)).$$

Inoltre, dato che $a_{2k} = f(a_{2k-1})$, risulta

$$a_{2k+1} = f(a_{2k}) = f(f(a_{2k-1})) = g(a_{2k-1}).$$

Perciò la successione a_{2k-1} dei termini di posto dispari è definita per ricorrenza tramite la funzione crescente $g(x)$. In base al teorema precedente a_{2k-1} è una successione monotòna, crescente se $a_1 \leq a_3$ e decrescente se $a_1 \geq a_3$.

Si procede in modo analogo per la successione a_{2k} dei termini di posto pari, dopo aver osservato che $a_2 \gtreqless a_4$ se $a_1 \lesseqgtr a_3$.

Supponendo $a_1 \leq a_2$, proviamo per induzione su k che $a_{2k-1} \leq a_{2k}$: per $k = 1$ la relazione è vera per ipotesi; supponendo che $a_{2k-1} \leq a_{2k}$ otteniamo

$$a_{2k+1} = g(a_{2k-1}) \leq g(a_{2k}) = a_{2k+2}.$$

In figura 12.2 schematizziamo due diverse situazioni a seconda che a_3 sia interno od esterno all'intervallo di estremi a_1 e a_2.

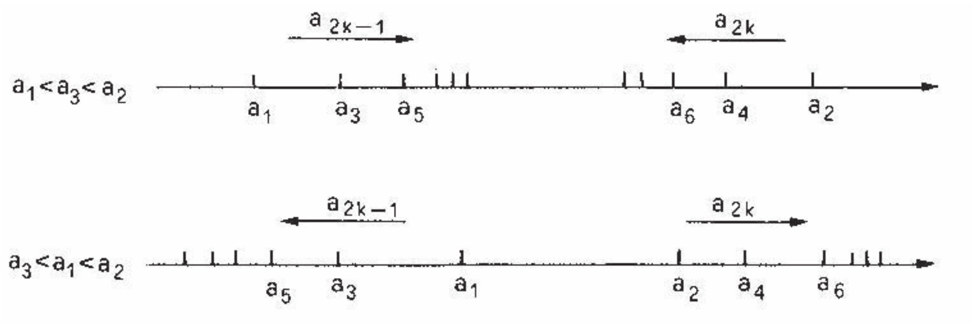


figura 12.2

Se a_3 è esterno all'intervallo di estremi a_1, a_2, ad esempio se, come in figura 12.2, $a_3 \leq a_1 < a_2$, allora a_{2k-1} è decrescente e a_{2k} è crescente. Perciò, essendo

$$a_{2k-1} \leq a_1 < a_2 \leq a_{2k},$$

il limite per $k \to +\infty$ di a_{2k-1} è diverso dal limite di a_{2k}; quindi il limite per $n \to +\infty$ di a_n non esiste.

12.28 Verificare che la seguente successione soddisfa le ipotesi (ed ovviamente anche la tesi) del teorema precedente ma non è convergente:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1/a_n.$$

[La funzione $f(x) = 1/x$ è un'applicazione decrescente dell'intervallo $I = (0, +\infty)$ in sè e risulta $a_{2k-1} = 2$, $a_{2k} = 1/2$ per ogni $k \in \mathbb{N}$]

12.29 Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2/a_n^2.$$

[La successione non ammette limite. Ciò segue dal teorema precedente. Infatti la funzione $f(x) = 2/x^2$ è un'applicazione dell'intervallo $(0, +\infty)$ in sè ed è decrescente. Dato che $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1/2$, non è verificata la condizione necessaria (a_3 compreso tra a_1 e a_2) affinchè la successione abbia limite]

12.30 Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{con} \quad f(x) = \frac{x+2}{2x+1}.$$

[La funzione $f(x)$ è positiva e decrescente (dato che $f'(x) < 0$) per $x \geq 0$. Perciò

$$0 < f(x) \leq f(0) = 2, \qquad \forall\, x \geq 0.$$

Quindi $f : I \longrightarrow I$, dove I è l'intervallo $[0, 2]$. Risulta $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4/5$. Perciò a_{2k-1} è crescente, a_{2k} è decrescente e $a_{2k-1} \leq a_{2k}$. La condizione necessaria $a_1 < a_3 < a_2$ è verificata. In figura 12.3 sono rappresentati alcuni termini della successione.

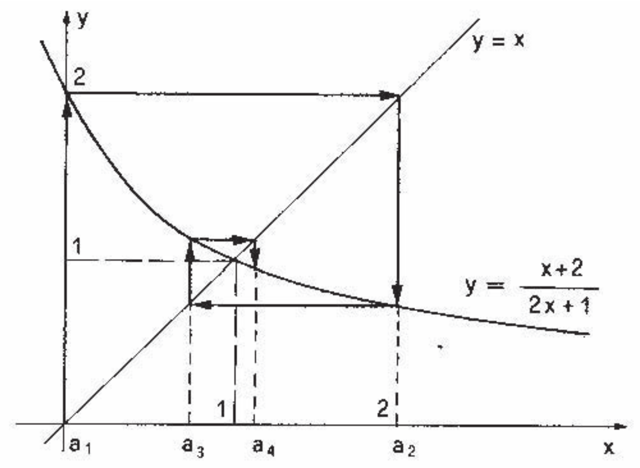


figura 12.3

Osservando la figura 12.3 si può congetturare che la successione a_n converge ad 1. Per dimostrarlo è opportuno studiare separatamente le successioni a_{2k-1}, a_{2k}. Per a_{2k-1} risulta $a_1 = 0$ e $a_{2k+1} = g(a_{2k-1})$, dove

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{\dfrac{x+2}{2x+1}+2}{2\dfrac{x+2}{2x+1}+1} = \frac{5x+4}{4x+5}.$$

La funzione $g(x)$ è crescente nell'intervallo $[0,2]$ ed ha in tale intervallo un unico punto unito, uguale ad 1. Perciò, per $k \to +\infty$, la successione a_{2k-1} converge ad 1. Analogamente $a_{2k} \to 1$. Quindi tutta la successione a_n converge ad 1 per $n \to +\infty$]

12.31 Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{4}{a_n + 2}$$

[La funzione $f(x) = 1 + 4/(x+2)$ è un'applicazione decrescente dell'intervallo $[1,+\infty)$ in sè. Con lo stesso metodo dell'esercizio precedente si verifica che per $n \to +\infty$ la successione a_n converge a 2, unico punto unito di $f(x)$ in tale intervallo]

12.32 Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{con} \quad f(x) = 1 + \frac{1}{x},$$

al variare del primo termine $a_1 \in (0,+\infty)$.

[La funzione $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ è decrescente per $x > 0$. Inoltre

$$f : (0,+\infty) \to (1,+\infty) \subset (0,+\infty).$$

L'unico punto unito di $f(x)$ per $x > 0$ è $x = (1+\sqrt{5})/2$. Essendo f decrescente in $(0, +\infty)$, la successione a_n non è monotòna, ma oscilla intorno al valore $(1+\sqrt{5})/2$. Se $a_1 = (1+\sqrt{5})/2$ allora tutti i termini della successione assumono tale valore e la successione è costante. Se invece $a_1 > (1+\sqrt{5})/2$, allora i termini di indice dispari a_{2k+1} sono maggiori del punto fisso, i termini a_{2k}, di posto pari, sono minori (ma rimangono positivi). Si verifica direttamente il legame fra a_n e a_{n+2}, risultando $a_{n+2} = f(f(a_n))$, con

$$f(f(x)) = \frac{1+2x}{1+x}, \qquad\qquad x > 0.$$

L'equazione $f(f(x)) = x$ ha come unica soluzione positiva il numero $x = (1+\sqrt{5})/2$. Il valore di limite infinito deve essere escluso, perchè

$$x = f(f(x)) = \frac{1+2x}{1+x} = \frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+1}$$

non ha formalmente la soluzione $x = +\infty$. Quindi le due estratte a_{2k} e a_{2k+1}, essendo monotòne, convergono e l'unico loro limite possibile è $(1+\sqrt{5})/2$. Tutta la successione a_n converge quindi a $(1+\sqrt{5})/2$. Si confronti con il metodo dell'esercizio 12.14 (a)]

12.33 Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 \geq 0, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{con} \quad f(x) = \frac{1}{1+x},$$

al variare del primo termine $a_1 \in [0, +\infty)$.

[In modo simile a come fatto nell'esercizio precedente si verifica che la successione, qualunque sia $a_1 \geq 0$, converge al numero $(\sqrt{5}-1)/2$. Si confronti anche con il metodo utilizzato nell'esercizio 12.14 (b)]

12C. Contrazioni

Una funzione $f(x)$ è *lipschitziana* in un insieme I se esiste una costante L (*costante di Lipschitz*) tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \qquad\qquad \forall\, x_1,\, x_2 \in I.$$

Se $f(x)$ è un'applicazione da I in sè ed è lipschitziana con costante $L < 1$ allora si dice che essa è una *contrazione* nell'insieme I.

Alcuni esercizi sulle funzioni lipschitziane sono proposti nel paragrafo 9C. Qui proponiamo il seguente:

12.25 Verificare che

(a) $\quad f(x) = |x|\quad$ è lipschitziana su $\mathbb{R}$

(b) $\quad f(x) = |x-1|/2\quad$ è una contrazione su $\mathbb{R}$

[Utilizzare la disuguaglianza proposta nell'esercizio 9.6]

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI. -*Sia I un intervallo chiuso (non necessariamente limitato) e sia $f : I \longrightarrow I$ una contrazione con costante $L < 1$. Allora esiste in I un unico punto unito x_0 per $f(x)$, cioè tale che $x_0 = f(x_0)$. Inoltre, comunque si scelga $a_1 \in I$, la successione a_n, definita per ricorrenza da $a_{n+1} = f(a_n)$, è convergente ad x_0 e vale la stima dell'errore:*

$$(*) \qquad |a_{n+1} - x_0| \leq L^n |a_1 - x_0|, \qquad \forall\, n \geq 0.$$

Dimostrazione: Proviamo preliminarmente l'unicità del punto unito: se per assurdo supponiamo che x_1 e x_2 siano due punti uniti distinti per $f(x)$ in I, cioè tali che $x_1 = f(x_1)$ e $x_2 = f(x_2)$, allora, dato che $L < 1$, otteniamo la contraddizione

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|.$$

Proviamo ora l'esistenza del punto unito. Osserviamo preliminarmente che ogni funzione lipschitziana è continua (anzi uniformemente continua) in I.

Se $I = [a, b]$ è un intervallo chiuso e limitato allora il risultato segue, come nell'esercizio 9.23, dal teorema dell'esistenza degli zeri applicato alla funzione $g(x) = f(x) - x$ nell'intervallo $[a, b]$ (infatti $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$ e quindi esiste $x_0 \in I$ per cui $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$).

Supponiamo ora che I sia un intervallo illimitato del tipo $[a, +\infty)$ (i casi $(-\infty, b]$, oppure $(-\infty, +\infty)$ si trattano in modo analogo).

Dato che $f : I \longrightarrow I$, risulta $f(a) \geq a$. Inoltre, dalla disuguaglianza $|f(x) - f(a)| \leq L|x - a| = L(x - a)$ valida per $x \in [a, +\infty)$, otteniamo $f(x) \leq f(a) + L(x - a)$ e quindi

$$f(x) - x \leq f(a) - La + x(L - 1), \qquad \forall\, x \in [a, +\infty).$$

Dato che $L < 1$, il secondo membro tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$. Perciò

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = -\infty.$$

Esiste quindi un numero $b > a$ per cui $f(b) - b < 0$. Per il teorema dell'esistenza degli zeri, esiste $x_0 \in [a, b)$ per cui $f(x_0) - x_0 = 0$.

Proviamo ora per induzione che vale la stima dell'errore $(*)$: Tale relazione è vera (con il segno $=$) per $n = 0$. Assumendo che $(*)$ sia vera per n, dato che $x_0 = f(x_0)$, risulta anche

$$|a_{n+2} - x_0| = |f(a_{n+1}) - f(x_0)| \leq L|a_{n+1} - x_0| \leq L^{n+1}|a_1 - x_0|.$$

Perciò la $(*)$ è dimostrata. Da essa deduciamo che, per $n \to +\infty$, a_n converge ad x_0, perché $L^n \to 0$, essendo $0 \leq L < 1$.

12.26 Mostrare con un esempio che il teorema precedente non vale in generale se I è un intervallo aperto.

[Ad esempio la funzione $f(x) = x/2$ è una contrazione nell'intervallo aperto $(0,1)$, ma non ammette alcun punto unito in tale intervallo. Evidentemente $x_0 = 0$ è un punto unito per la funzione $x/2$ nell'intervallo chiuso $[0,1]$]

Un criterio per verificare se una funzione è lipschitziana, o se è una contrazione, è il seguente

TEOREMA. - *Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intervallo I. $f(x)$ è lipschitziana in I con costante L se e solo se*

$$|f'(x)| \leq L, \qquad\qquad \forall\, x \in I.$$

Dimostrazione: Dati x_1, $x_2 \in I$, applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[x_1, x_2]$. Esiste un punto $\xi \in (x_1, x_2)$ per cui $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$. Essendo $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in I$, in particolare $|f'(\xi)| \leq L$; perciò

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Viceversa, se $f(x)$ è lipschitziana, allora se x_0, $x_0 + h \in I$, risulta

$$|f(x+h) - f(x)| \leq L|h|.$$

Dividendo per $|h|$ $(\neq 0)$ e passando al limite per $h \to 0$ otteniamo la tesi.

12.27 Verificare che la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x+5}$ è un'applicazione dell'intervallo $[1,3]$ in sè ed è una contrazione in tale intervallo.

[La funzione $f(x)$ è crescente su $\mathbb{R}$. Dato che $f(1) = \sqrt[3]{6} > 1$ e $f(3) = \sqrt[3]{8} = 2$, risulta

$$f : [1,3] \longrightarrow [\sqrt[3]{6}, 2] \subset [1,3].$$

La derivata $f'(x) = (1/3)(x+5)^{-2/3}$ è decrescente nell'intervallo $[1,3]$, perciò

$$0 \leq f'(x) \leq f'(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6^{2/3}} < 1, \qquad \forall\, x \in [1,3].$$

Quindi $f(x)$ è una contrazione in $[1,3]$, con costante $3^{-1} \cdot 6^{-2/3}$]

12.28 Verificare che la funzione $f(x) = x + 1 - \log x$

(a) è lipschitziana nell'intervallo $[1, +\infty)$;

(b) è un'applicazione dell'intervallo $[1,b]$ in sè, per ogni $b \geq e$;

(c) è una contrazione con costante $1 - b^{-1}$ nell'intervallo $[1,b]$, per ogni

$b \geq e$.

[(a) La funzione $f(x)$ è lipschitziana in $[1, +\infty)$ con costante di Lipschitz uguale ad 1, dato che $0 \leq f'(x) = 1 - 1/x \leq 1$, $\forall\, x \geq 1$; (b) Essendo $f'(x) \geq 0$, la funzione è crescente per $x \geq 1$; perciò se $b > 1$

$$2 = f(1) \leq f(x) \leq f(b) = b + 1 - \log b.$$

Dato che $\log b \geq 1$ se $b \geq e$, risulta $[2, b + 1 - \log b] \subset [1, b]$; (c) Dato che $f'(x)$ è crescente, risulta $0 \leq f'(x) \leq f'(b) = 1 - 1/b$]

12.29 Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 \geq 1, \quad a_{n+1} = a_n + 1 - \log a_n$$

[Poniamo $b = \max\{a_1, e\}$. In base all'esercizio precedente la funzione $f(x) = x + 1 - \log x$ è una contrazione nell'intervallo $[1, b]$. Perciò, per $n \to +\infty$, a_n converge all'unico punto unito di $f(x)$, che è $x_0 = e$]

12.30 Verificare che la funzione $f(x) = (2x - x^2 + 2)/3$ è un'applicazione dell'intervallo $[0, 2]$ in sè e che è una contrazione in tale intervallo.

[Dal segno della derivata $f'(x)$ si verifica che $f(x)$ è crescente nell'intervallo $[0, 1]$ ed è decrescente in $[1, 2]$. Essendo $f(0) = f(2) == 2/3$, $f(1) = 1$, risulta $2/3 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0, 2]$. Perciò $f(x)$ applica l'intervallo $[0, 2]$ in $[2/3, 1] \subset [0, 2]$. Dato che la derivata è decrescente, si ha

$$-\frac{2}{3} = f'(2) \leq f'(x) = \frac{2 - 2x}{3} \leq f'(0) = \frac{2}{3}.$$

Perciò $f(x)$ è una contrazione in $[0, 2]$ con costante $2/3$]

12.31 Studiare la successione

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = (2a_n - a_n^2 + 2)/3$$

[In base all'esercizio precedente la funzione $f(x) = (2x - x^2 + 2)/3$ è una contrazione nell'intervallo $[0, 2]$. Inoltre $x_0 = 1$ è il punto unito di $f(x)$ in tale intervallo. Perciò, per $n \to +\infty$, a_n converge ad 1]

12.32 Studiare la successione: $a_1 = -7$, $a_{n+1} = \dfrac{|a_n + 1|}{2}$.

[Si verifichi che la funzione $f(x) = |x + 1|/2$ è una contrazione su $\mathbb{R}$. La successione a_n, per $n \to +\infty$, converge ad 1, unico punto unito di $f(x)$]

12.33 Studiare la successione: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \cos(1 - a_n)$.

[La funzione $f(x) = \cos(1-x)$ è un'applicazione dell'intervallo $[0,1]$ in sè ed in tale intervallo è una contrazione con costante $L = \text{sen}\,1$. La successione a_n converge ad 1, punto fisso di $f(x)$]

12.34 Si studi la successione definita per ricorrenza

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{con} \quad f(x) = \begin{cases} x^3 \text{sen}\,\dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

[La funzione $f(x)$ applica l'intervallo $[-1/3, 1/3]$ in sé; infatti, se $|x| \leq 1/3$, risulta

$$|f(x)| \leq |x^3| \leq 1/27 < 1/3.$$

Inoltre $f(x)$ è una contrazione in tale intervallo, perché, se $|x| < 1/3$, si ha $f'(0) = 0$ e se $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} |f'(x)| = |3x^2 \text{sen}\,(1/x) - x\cos(1/x)| &\leq |x|(3|x||\text{sen}\,(1/x)| + |\cos(1/x)|) \leq \\ &\leq |x|(|\text{sen}\,(1/x)| + |\cos(1/x)|) \leq 2|x| \leq 2/3. \end{aligned}$$

Il punto fisso di $f(x)$ in $[-1/3, 1/3]$ è $x_0 = 0$. Perciò $a_n \to 0$]

12D. Le successioni sen nx, cos nx

Con l'ausilio del metodo di induzione riprendiamo in questa sede le successioni sen nx, cos nx già considerate nei paragrafi 7G e 7I.

PROPOSIZIONE . - *La successione $a_n = \text{sen}\,nx$ è convergente se e solo se $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. La successione $b_n = \cos nx$ è convergente se e solo se $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione: Le successioni $a_n = \text{sen}\,nx$ per $x = k\pi$ e $b_n = \cos nx$ per $x = 2k\pi$, sono costanti (rispettivamente uguali a 0 ed 1); è quindi ovvio che sono convergenti.

Studiamo la successione $a_n = \text{sen}\,nx$ con $x \neq k\pi$. In base alle formule di addizione abbiamo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \text{sen}\,[(n+1)x] = \text{sen}\,(nx + x) \\ &= \text{sen}\,nx \cdot \cos x + \cos nx \cdot \text{sen}\,x = \\ &= a_n \cos x + b_n \text{sen}\,x; \\ a_{n-1} &= \text{sen}\,[(n-1)x] = \text{sen}\,(nx - x) \\ &= \text{sen}\,nx \cdot \cos x - \cos nx \cdot \text{sen}\,x = \\ &= a_n \cos x - b_n \text{sen}\,x. \end{aligned}$$

Sommando e sottraendo otteniamo

(1) $\quad a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n \cos x; \qquad$ (2) $\quad a_{n+1} - a_{n-1} = 2b_n \operatorname{sen} x.$

Supponiamo ora, per assurdo, che a_n converga ad un numero a. In tal caso dalla (2), dato che sen $x \neq 0$ (essendo $x \neq k\pi$), segue che $b_n \to 0$. Dalla (1) segue poi che $2a = 2a\cos x$, cioè

$$2a(1 - \cos x) = 0.$$

Essendo $\cos x \neq 1$, deve essere $a = 0$. Perciò, se a_n è convergente, allora necessariamente $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$. Ciò contrasta con la relazione fondamentale $a_n^2 + b_n^2 = 1$.

Procediamo in modo analogo per la successione $b_n = \cos nx$, con $x \neq 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Dalle formule di addizione si ottiene

$$b_{n+1} = b_n \cos x - a_n \operatorname{sen} x;$$

$$b_{n-1} = b_n \cos x + a_n \operatorname{sen} x.$$

Per somma e sottrazione otteniamo

(3) $\quad b_{n+1} + b_{n-1} = 2b_n \cos x;$

(4) $\quad b_{n+1} - b_{n-1} = -2a_n \operatorname{sen} x.$

Se, per assurdo, supponiamo che b_n converga ad un numero reale b, dalla (3) otteniamo

$$2b(1 - \cos x) = 0.$$

Dato che $x \neq 2k\pi$, risulta $\cos x \neq 1$ e quindi $b = 0$.

Prima di procedere oltre è opportuno osservare che, se $x = k\pi$ con k dispari, allora si verifica direttamente che $b_n = (-1)^n$. Perciò in tal caso la successione b_n non è convergente. Nel seguito ci limitiamo a considerare $b = \cos nx$ con $x \neq k\pi$.

Se $x \neq k\pi$ risulta $\operatorname{sen} x \neq 0$ e quindi dalla (4) deduciamo che $a_n \to 0$. Le relazioni di limite $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ contraddicono di nuovo il fatto che $a_n^2 + b_n^2 = 1$.

12E. Successioni dipendenti da un parametro. Comportamento caotico

In questo paragrafo esaminiamo una successione definita per ricorrenza e dipendente da un parametro reale λ. Vedremo che il comportamento della successione è fortemente influenzato dalla scelta del parametro. Infatti, mentre per alcuni valori di λ la successione risulta convergente, per altri valori di λ non è regolare e, in quest'ultimo caso, può essere fortemente influenzata dalla scelta del dato iniziale a_1, nel senso che dati iniziali fra loro vicini possono dar luogo a successioni molto diverse fra loro. In presenza di tali instabilità si parla di *caos* e di *successioni caotiche*.

Esponiamo preliminarmente alcuni risultati teorici e chiudiamo il paragrafo con due elaborazioni numeriche. Consigliamo il lettore che può far uso di un computer di "verificare sperimentalmente" i risultati esposti in questo paragrafo.

La successione che prendiamo in considerazione è definita per ricorrenza da

$$a_1 \in [0,1], \qquad\qquad a_{n+1} = \lambda a_n(1-a_n).$$

Come già detto λ è un parametro reale. Possiamo riscrivere la legge di induzione nel modo seguente

$$a_{n+1} = f(a_n) \qquad \text{con} \qquad f(x) = \lambda x(1-x).$$

Con un rapido calcolo si verifica che $f(x)$ è positiva in $[0,1]$ se $\lambda \geq 0$, che il massimo di $f(x)$ si ottiene per $x = 1/2$ e che $f(1/2) = \lambda/4$. Perciò $f(x)$ è un'applicazione dell'intervallo $[0,1]$ in sé se $0 \leq \lambda \leq 4$.

Discutiamo quindi il comportamento della successione a_n per $\lambda \in [0,4]$. Cominciamo con l'osservare che i criteri del paragrafo 12B non sono applicabili globalmente in $[0,1]$ perché $f(x)$ non è monotòna in tale intervallo. Vedremo però fra poco che saranno applicabili ad un sottointervallo per alcuni valori del parametro λ.

12.35 Verificare che la successione a_n risulta convergente (qualunque sia λ) se per a_1 si sceglie uno dei valori sottoindicati:

$$(a) \quad a_1 = 0 \qquad\qquad (b) \quad a_1 = 1$$

[(a) $a_n = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$; (b) $a_n = 0\ \forall\, n \geq 2$]

12.36 Determinare per $\lambda \geq 0$ i punti uniti della funzione $f(x) = \lambda x(1-x)$ nell'intervallo $[0,1]$.

[Se $0 \leq \lambda \leq 1$, $f(x)$ ammette in $[0,1]$ l'unico punto unito $x_0 = 0$. Se invece $\lambda > 1$, $f(x)$ ha due punti uniti: $x_0 = 0$ e $x_0 = 1 - 1/\lambda$]

12.37 Supponendo che a_n sia convergente, determinare i possibili valori del limite per $\lambda \in [0,4]$.

[Dato che $0 \le a_n \le 1$ per ogni n, il limite di a_n, se esiste, è un punto unito di $f(x)$ nell'intervallo $[0,1]$. Perciò i possibili valori del limite sono: 0 se $0 \le \lambda \le 1$; 0 oppure $1-1/\lambda$ se $\lambda > 1$]

12.38 Sia $0 \le \lambda < 1$. Verificare che

(a) $f(x)$ è una contrazione nell'intervallo $[0,1]$

(b) la successione a_n converge a zero qualunque sia il valore iniziale $a_1 \in [0,1]$.

[(a) La derivata $f'(x) = \lambda(1-2x)$ è una funzione decrescente. Perciò il suo massimo nell'intervallo $[0,1]$ è assunto per $x=0$, e vale $f'(0)=\lambda$, mentre il minimo si ottiene per $x=1$ e vale $f'(1)=-\lambda$.
Quindi $|f'(x)| \le \lambda$ per ogni $x \in [0,1]$. Dato che $\lambda < 1$, $f(x)$ è una contrazione in $[0,1]$ con costante λ; (b) $f(x)$ è una contrazione in $[0,1]$. Perciò, in base all'analisi fatta nel paragrafo 12C, la successione a_n converge all'unico punto unito di $f(x)$, che è lo zero]

12.39 Sia $1 \le \lambda \le 2$. Verificare che

(a) $f(x)$ è un'applicazione dell'intervallo $[0,1/2]$ in sè;

(b) $f(x)$ è crescente in $[0,1/2]$;

(c) $f(x) > x$ se $x \in (0, 1-1/\lambda)$;

$f(x) < x$ se $x \in (1-1/\lambda, 1/2)$;

(d) qualunque sia $a_1 \in (0,1)$, la successione a_n è convergente ed il limite vale $1-1/\lambda$.

[(a) Abbiamo già verificato che il massimo di $f(x)$ è $f(1/2)=\lambda/4$. Perciò, se $\lambda \le 2$, risulta $0 \le f(x) \le 2$ per ogni $x \in [0,1]$ e quindi, a maggior ragione, per ogni $x \in [0,1/2]$; (b) $f'(x) = \lambda(1-2x) \ge 0$ per $x \in [0,1/2]$; (c) l'enunciato si vede chiaramente rappresentando in uno stesso sistema di assi cartesiani le funzioni $y=f(x)$ e $y=x$. Lasciamo al lettore la verifica analitica, che consiste nel risolvere una disequazione di secondo grado; (d) consideriamo preliminarmente $a_1 \in (0,1/2]$. In base all'analisi fatta nel paragrafo 12B la successione a_n è monotòna e converge (crescendo se $a_1 < 1-1/\lambda$, decrescendo se $a_1 > 1-1/\lambda$) ad $1-1/\lambda$. Se invece $a_1 > 1/2$, dato che $f(x) \le 1/2$ per ogni $x \in [0,1]$, risulta $a_2 = f(a_1) < 1/2$. Quindi $a_2 \in (0,1/2)$ se $a_1 \in (1/2,1)$. Si procede poi come in precedenza per la successione $a_2, a_3, a_4, \ldots$]

12.40 Sia $\lambda > 2$. Verificare che:

(a) $a_n \le \lambda/4$ per ogni $n \ge 2$;

(b) esiste un indice ν per cui $a_\nu > 1/2$.

[(a) Dato che $f(x) \leq \lambda/4$ per ogni x, risulta anche $a_{n+1} = f(a_n) \leq \lambda/4$ per ogni $n \geq 1$; (b) supponiamo per assurdo che $a_n \leq 1/2$ per ogni n. Dato che $f(x)$ è crescente in $[0, 1/2]$, per l'analisi fatta nel paragrafo 12B, a_n sarebbe una successione monotòna, convergente ad $1 - 1/\lambda$.
Però $1 - 1/\lambda > 1/2$ perché $\lambda > 2$. Ciò contrasta con l'ipotesi $a_n \leq 1/2$ per ogni n]

12.41 Sia $2 \leq \lambda \leq 1 + \sqrt{5} = 3.2\ldots$. Verificare che $f(x)$ è un'applicazione dell'intervallo $[1/2, \lambda\,/\,4]$ in sé.

[Abbiamo provato in precedenza che $f(x) \leq \lambda/4$ per ogni x. Dato che $f(x)$ è decrescente nell'intervallo $[1/2, 1]$, rimane da verificare che $f(\lambda/4) \geq 1/2$, cioè che

$$\lambda\frac{\lambda}{4}(1 - \frac{\lambda}{4}) \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + 8 \leq 0.$$

Dopo aver osservato che il polinomio di terzo grado in λ si annulla per $\lambda = 2$, possiamo scomporlo nel modo seguente:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 4) \leq 0.$$

É facile verificare che tale disequazione è soddisfatta se $2 \leq \lambda \leq 1 + \sqrt{5}$]

12.42 Sia $2 \leq \lambda < 1 + \sqrt{3} = 2.7\ldots$. Verificare che

(a) $f(x)$ è una contrazione nell'intervallo $[1/2, \lambda/4]$;

(b) qualunque sia il valore iniziale $a_1 \in (0, 1)$, la successione a_n converge a $1 - 1/\lambda$.

[(a) In base all'esercizio precedente, $f(x)$ è un'applicazione dell'intervallo $[1/2, \lambda/4]$ in sè. La derivata $f'(x) = \lambda(1 - 2x)$ è decrescente, perciò

$$f'(\lambda/4) = \lambda(1 - \lambda/2) \leq f'(x) \leq f'(1/2) = 0.$$

Ne segue che $f(x)$ è una contrazione se

$$|f'(x)| \leq |\lambda(1 - \lambda/2)| = \lambda(\lambda/2 - 1) < 1,$$

cioè se $\lambda^2 - 2\lambda - 2 < 0$, e ciò è verificato nel nostro caso; (b) in base alla parte (b) dell'esercizio 12.40 esiste un indice ν per cui $a_\nu > 1/2$. Il risultato discende dal teorema delle contrazioni, applicato alla successione a_n, con $n \geq \nu$]

12.43 Sia $1 < \lambda < 3$. Verificare che esiste un intorno I del punto $x_0 = 1 - 1/\lambda$ con le proprietà:

(a) $f(x)$ è un'applicazione di I in sè;

(b) $f(x)$ è una contrazione su I;

(c) se $a_1 \in I$, allora a_n converge ad $1 - 1/\lambda$.

[Posto $x_0 = 1 - 1/\lambda$, risulta $f'(x_0) = 2 - \lambda$. Perciò se $1 < \lambda < 3$, risulta $|f'(x_0)| < 1$. Per il teorema della permanenza del segno esiste un intervallo $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, con $\delta > 0$, per cui $|f'(x)| < 1$ per $x \in I$. Dato che $f(x_0) = x_0$, per il teorema di Lagrange applicato all'intervallo di estremi x_0, $x \in I$, otteniamo

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi)(x - x_0)| \leq |x - x_0| \leq \delta.$$

Perciò $x_0 - \delta \leq f(x) \leq x_0 + \delta$, cioè $f(x) \in I$. Ciò prova (a) e (b). Infine (c) è conseguenza del teorema delle contrazioni]

Dall'analisi fatta fino ad ora si deduce che la successione a_n è convergente se $\lambda < 3$.

Più complicato è lo studio per $\lambda \geq 3$. Ci limitiamo pertanto ad elencare alcuni valori numerici trovati per a_n in corrispondenza a due diversi valori del parametro λ.

Cominciamo col considerare $\lambda = 7/2$. Nella tabella che segue riportiamo alcuni valori di a_n in corrispondenza a due diverse scelte del primo termine a_1

$\boxed{\lambda = 3.5}$

n	a_n $(a_1 = 0.5)$	a_n $(a_1 = 0.3)$
1	0.5	0.3
2	0.875	0.735
3	0.3828125	0.6817125
4	0.8269348	0.7594319
5	0.5008976	0.6394326
6	0.8749971	0.8069548
7	0.3828199	0.5452254
8	0.8269408	0.8678412
9	0.5008837	0.4014247
10	0.8749972	0.8409902
...	...	...
30	0.8749972	0.8269407
31	0.3828196	0.5008840
32	0.8269407	0.8749972
33	0.5008842	0.3828196
34	0.8749972	0.8269407
...	...	...

Dalla tabella si può intuire che in nessuno dei due casi la successione a_n è convergente. Però siamo in presenza di un *comportamento periodico*: in intrambi i casi si ripetono in sequenza quattro valori (approssimati) $0.87\ldots, 0.38\ldots, 0.82\ldots, 0.50\ldots$; in questo caso si dice che la successione ha un *ciclo di periodo 4*. Abbiamo schematizzato questo ciclo in figura 12.4.

Consideriamo il caso $\lambda = 3.98$, partendo da due valori iniziali vicini fra loro ($a_1 = 0.3$ oppure $a_1 = 0.301$).

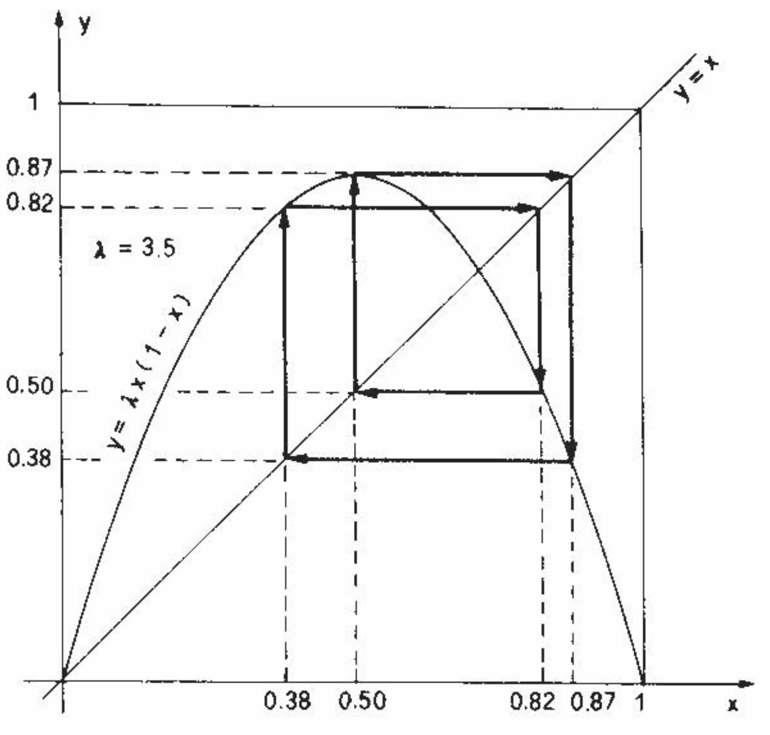


figura 12.4

$\boxed{\lambda = 3.98}$

n	a_n ($a_1 = 0.3$)	a_n ($a_1 = 0.301$)
1	0.5	0.301
2	0.8358	0.8373880
3	0.5462086	0.5419539
4	0.9865017	0.9879946
5	0.5299791	0.4720754
6	0.1997527	0.1790163
7	0.6362093	0.5849386
8	0.9211591	0.9662859
9	0.2890473	0.1296580
10	0.8178859	0.4491303
11	0.5928150	0.9847008
12	0.9607137	0.0599589
...	...	...

Come si vede, la differenza iniziale su a_1 si amplifica ad ogni passo e dopo poche iterazioni genera numeri molto distanti fra loro. In questo caso si può forse intuire che la successione non è convergente; però è opportuno diffidare dei risultati numerici indicati in quest'ultima tabella perché, se le piccole differenze iniziali si amplificano, allo stesso modo ad ogni iterazione si amplificano gli errori di troncamento che ogni computer necessariamente fa. Questa viene normalmente chiamata *situazione caotica*.

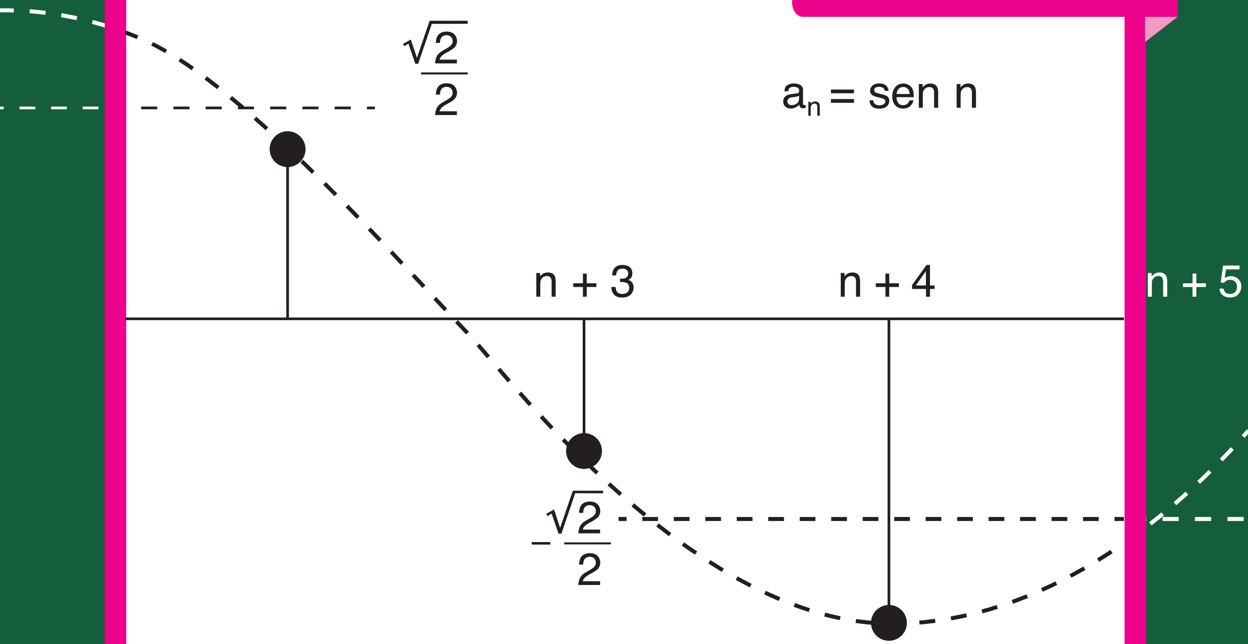
I risultati indicati sopra sono stati ottenuti con un computer che operava con 16 cifre decimali. Il lettore non si meravigli se, facendo girare un proprio programma su un diverso computer, ottiene per $\lambda = 3.98$ risultati anche molto diversi da quelli indicati. Viceversa, per $\lambda = 3.5$, dovrebbe ottenere sostanzialmente i risultati indicati nella tabella precedente perché, come è possibile dimostrare, in quel caso l'algoritmo di ricorrenza è stabile.

Paolo Marcellini - Carlo Sbordone

Esercitazioni di Matematica

MATERIALI INTEGRATIVI

1° VOLUME
PARTE PRIMA



Liguori Editore

Paolo Marcellini   *Carlo Sbordone*

Esercitazioni di Matematica

1° Volume
Parte prima

nuova edizione

MATERIALI INTEGRATIVI

Liguori Editore

Liguori Editore
Via Posillipo 394 - I 80123 Napoli NA
http://www.liguori.it/

Prima edizione italiana Ottobre 2014

Questa pubblicazione non può essere commercializzata separatamente ma solo in abbinamento al testo contrassegnato dal codice ISBN-13 **978 - 88 - 207 - 6351 - 0**

Aggiornamenti:

20 19 18 17 16 15 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

INDICE[1]

[1] I numeri dei capitoli degli “Approfondimenti” fanno riferimento ai capitoli del testo di *Esercitazioni di Matematica 1° volume Parte prima*.

AVVERTENZE

Lo scopo di questo capitolo “zero” è quello di aiutare lo studente ad affrontare le prime settimane di studio universitario, proponendo una drastica semplificazione della prima parte di un corso di insegna- mento di matematica, spesso dedicato ai fondamenti dei numeri reali e delle funzioni reali, ed ai limiti di successione e di funzione.

Tali argomenti, appunto i numeri e le funzioni reali ed i limiti di successione e di funzione, rimangono comunque fondamentali per la comprensione approfondita del calcolo e dell’analisi matematica ma, in una nuova ottica di riduzione dei programmi e di primo approccio allo studio universitario di materie matematiche, possono forse più di altri argomenti essere proposti in una forma semplificata, per essere eventualmente approfonditi in un secondo tempo.

Il lettore che desideri autonomamente approfondire qualche argomento affrontato in questo capitolo “zero”, potrà consultare la prima parte del libro di **Calcolo** (ISBN 9788820722180), in particolare i capitoli 1, 7 e 8, da cui questo capitolo “zero” è tratto.

Dopo questo capitolo “zero”, contenente cenni sulle funzioni e sui limiti, in una prima lettura si potrà passare direttamente allo studio delle proprietà differenziali delle funzioni, iniziando con la nozione di derivata, concetto fondamentale nell’analisi, nel calcolo scientifico e nelle applicazioni della matematica, la cui definizione si basa sui limiti, ma che dovrebbe poter essere affrontato con sufficiente preparazione dopo aver studiato il materiale del presente capitolo “zero”.

CAPITOLO 0

CENNI SULLE FUNZIONI REALI E SUI LIMITI DI SUCCESSIONI E DI FUNZIONI

A. Premessa

Con la riforma dell'Università, che ha introdotto i Corsi di Laurea di tre anni, si è reso necessario rivedere i contenuti dei vari insegnamenti, aggiornando e spesso riducendo i programmi.

Anche i corsi di matematica rientrano fra gli insegnamenti da impartire, in genere, in un numero minore di ore di lezione e di esercitazione. Naturalmente sarà compito dei docenti di ogni singolo corso individuare il programma più appropriato per la propria classe. Con il presente materiale proponiamo un approccio semplificato alla prima parte del corso.

Lo scopo di questo *capitolo "zero"* è infatti quello di proporre una drastica semplificazione della prima parte di un corso di insegnamento di matematica, spesso dedicato ai fondamenti dei numeri reali e delle funzioni reali, ed ai limiti di successione e di funzione.

Tali argomenti, appunto i numeri e le funzioni reali ed i limiti di successione e di funzione, rimangono comunque fondamentali per la comprensione approfondita del calcolo e dell'analisi matematica ma, in una nuova ottica di riduzione dei programmi, possono forse più di altri argomenti essere proposti in una forma semplificata, per essere eventualmente approfonditi in un secondo tempo.

Il lettore che desideri autonomamente approfondire qualche argomento affrontato in questo *capitolo "zero"*, potrà consultare la prima parte del libro, in particolare i capitoli 1, 7 e 8.

Dopo questo capitolo "zero", contenente cenni sulle funzioni e sui limiti, in una prima lettura si potrà passare direttamente al capitolo 10, sulle derivate, iniziando dal paragrafo 88 con la nozione di derivata, concetto fondamentale nell'analisi, nel calcolo scientifico e nelle applicazioni della matematica, la cui definizione si basa sui limiti, ma che dovrebbe poter essere affrontato con sufficiente preparazione dopo aver studiato il materiale del presente *capitolo "zero".*

B. Funzioni e loro proprietà

Consideriamo un *insieme* A di *numeri reali*. Indicando con **R** l'insieme dei numeri reali, ad esempio consideriamo l'insieme (talvolta diremo il sottoinsieme) dei numeri positivi

(B.1) $$A = \{x \in \mathbf{R}: \quad x > 0\}$$

(il simbolo $\in$ si legge *appartiene*). Oppure consideriamo un intervallo di estremi a e b (a, b sono due numeri reali fissati, con $a < b$), intendendo con ciò l'insieme di tutti i numeri reali compresi fra a e b; più precisamente scriveremo $A = (a, b)$, oppure $A = [a, b]$, dove

(B.2) $$(a, b) = \{x \in \mathbf{R}: \quad a < x < b\}$$

(B.3) $$[a, b] = \{x \in \mathbf{R}: \quad a \le x \le b\}$$

sono gli intervalli di estremi a, b, nel primo caso con gli estremi a, b esclusi, mentre nel secondo caso a, b sono inclusi nell'insieme A.

È talvolta utile anche la notazione $[a, +\infty)$ per indicare l'intervallo di numeri reali di primo estremo (compreso) a, illimitato a destra, della forma

(B.4) $$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: \quad x \ge a\}$$

o quella analoga per l'intervallo $(a, +\infty)$, quando il primo estremo non è compreso. Notazioni analoghe si hanno per gli intervalli illimitati a sinistra $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$.

Insiemi notevoli di numeri reali sono costituiti dai *numeri naturali* **N** e dai *numeri interi* (*relativi*) **Z**

(B.5) $$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

(B.6) $$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, n, \ldots\}$$

dove, in entrambi i casi, il simbolo n indica un generico elemento di $\mathbf{N}$, cioè $n \in \mathbf{N}$.

Siano A, B due insiemi di numeri reali. Una *funzione* definita su A con valori in B è *una legge* che ad ogni elemento di A fa corrispondere un elemendo di B (ed uno solo).

Se indichiamo con la letterà f tale funzione, utilizzeremo anche il simbolo $y = f(x)$, intendendo che la funzione f fa corrispondere ad ogni elemento $x \in A$ un elemento $y \in B$.

Si dice che x è la *variabile indipendente*, mentre y è la *variabile dipendente*. Si dice inoltre che l'insieme A è il *dominio* (o *insieme di definizione*) della funzione f, mentre B è il *codominio*.

Simboli equivalenti per indicare la funzione f sono f(x), oppure $f: A \to B$, che si utilizzano, nel primo caso quando non è necessario indicare esplicitamente la variabile dipendente y, mentre nel secondo caso quando è opportuno denotare esplicitamente il dominio ed il codominio della funzione.

ESEMPIO 1. Un esempio di funzione è il seguente

(B.7) $$f(x) = \frac{x-1}{2}.$$

La funzione f(x) è definita (calcolabile) per ogni $x \in \mathbf{R}$; pertanto il suo dominio è tutto $\mathbf{R}$.

Il lettore sa come rappresentare il grafico di una funzione in un sistema di assi cartesiani. In particolare per la funzione f(x), definita in (B.7), utilizziamo l'espressione equivalente $y = (x - 1)/2$. Il grafico si esegue facilmente, trattandosi di una retta; basta infatti determinare due punti di tale retta. Si possono fissare due distinti valori della variabile indipendente x, determinando in conseguenza i corrispondenti valori y; una scelta è, ad esempio,

(B.8) $$x = 0 \;\Rightarrow\; y = f(0) = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2},$$

(B.9) $$x = 2 \;\Rightarrow\; y = f(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Si ottiene il grafico in figura 0.1, in un sistema di riferimento di assi x, y. Il lettore può notare anche la scelta della variabile indipendente $x = 1$, che fornisce il valore $f(1) = 0$; in corrispondenza il grafico della funzione $y = f(x)$ interseca l'asse delle x.

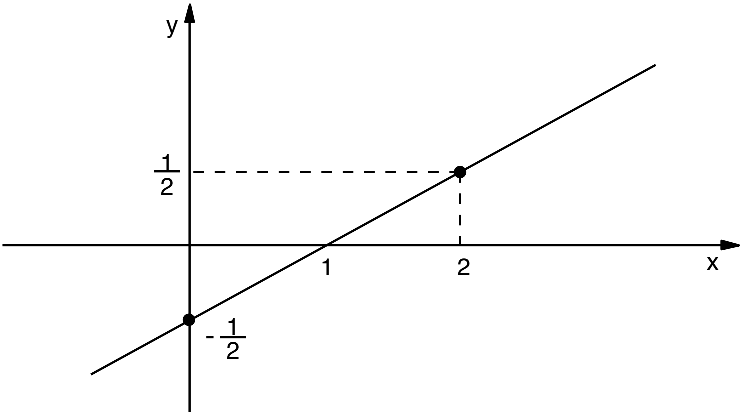


Figura 0.1

ESEMPIO 2. Un altro esempio di funzione è il seguente

(B.10) $$f(x) = x^2 .$$

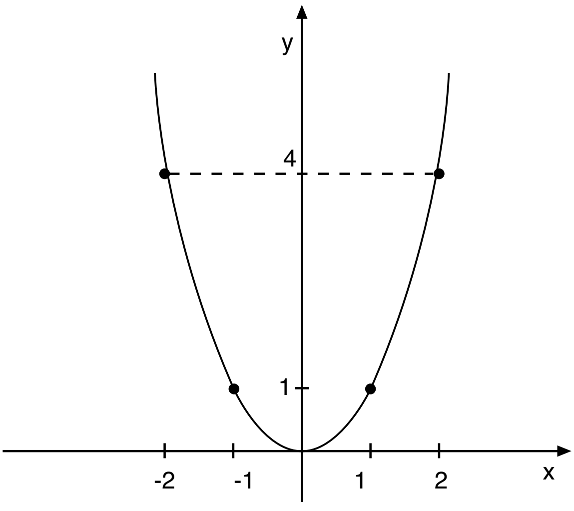


Figura 0.2

Anche questa funzione f(x) è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$; quindi il suo dominio è tutto **R**. Calcoliamo alcuni valori della funzione, secondo la seguente tabella

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4
f(x)	0	1	1	4	4	9	9	16

e riportiamo i valori in un riferimento cartesiano, come in figura 0.2. Si ottiene come grafico della funzione f(x) la ben nota parabola rivolta verso l'alto, con vertice nell'origine degli assi.

ESEMPIO 3. Un terzo esempio di funzione è il seguente

$$f(x) = \frac{1}{x}. \tag{B.11}$$

A differenza delle funzioni considerate negli esempi precedenti, questa funzione f(x) non è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$; infatti il suo dominio è costituito dall'insieme $\{x \in \mathbf{R}: x \neq 0\}$. Calcoliamo alcuni valori della funzione rappresentandoli con la seguente tabella

x	1	2	1/2	1/4	–1	–2	–3	–1/2
f(x)	1	1/2	2	4	–1	–1/2	–1/3	–2

e riportiamo i valori in un riferimento cartesiano, come in figura 0.3, ottenendo come grafico della funzione f(x) l'iperbole equilatera, avente come asintoti gli assi cartesiani, x, y.

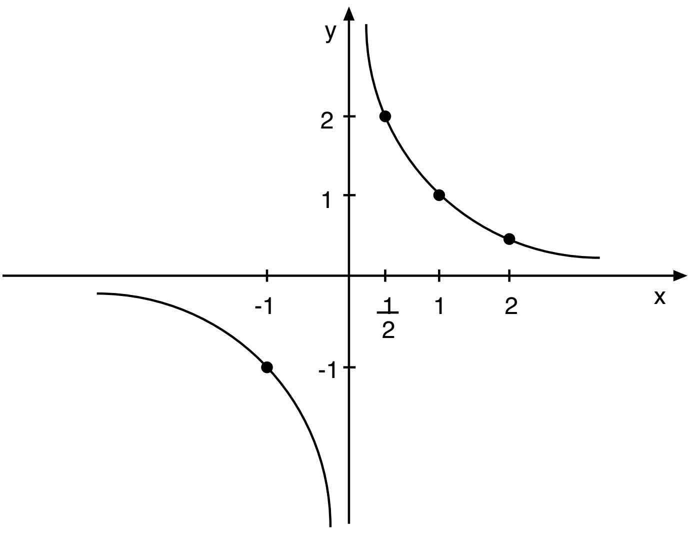


Figura 0.3

Diremo che la corrispondenza stabilita dalla funzione f tra due insiemi A, B è *biunivoca* se, non solo ad ogni $x \in A$ corrisponde un valore (ed uno solo) $y \in B$, ma anche per ogni $y \in B$ esiste un valore $x \in A$ (ed uno solo) tale che $f(x) = y$. In tal caso diremo anche che la funzione $f: A \to B$ è *invertibile*.

Inoltre, se la corrispondenza determinata dalla funzione f fra A e B è biunivoca, e quindi se f: A→B è *invertibile*, si può definire la *funzione inversa* di f, indicata con il simbolo f^{-1}, che ad ogni $y \in B$ associa l'unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$. In simboli ciò equivale a scrivere

(B.12) $$x = f^{-1}(y) \Rightarrow y = f(x).$$

Notiamo anche che f^{-1} è una corrispondenza fra B ed A, cioè, ancora in simboli, f^{-1}: B→A.

Ad esempio, la funzione $f(x) = (x - 1)/2$, definita in (B.7), stabilisce una corrispondenza biunivoca fra A = **R** e B = **R**; infatti, fissato $y \in \mathbf{R}$, si ricava il corrispondente unico numero $x \in \mathbf{R}$ (i facili passaggi sono lasciati al lettore)

(B.13) $$y = \frac{x-1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y + 1.$$

Pertanto la funzione $f(x) = (x - 1)/2$ è invertibile su **R** e la funzione inversa è data da $f^{-1}(y) = 2y + 1$.

Al contrario, la funzione $f(x) = x^2$, definita in (B.11), non stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme A = **R** e l'insieme $B = \{y \in \mathbf{R}: y \geq 0\} = [0, +\infty)$; infatti, fissato $y \in B$, si ricavano i corrispondenti valori di $x \in \mathbf{R}$

(B.14) $$y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{y}\,;$$

si trovano quindi due valori *distinti* per $x \in \mathbf{R}$ per ogni $y \in B$ con $y \neq 0$ (un solo valore solo se $y = 0$). La corrispondenza fra i due insiemi A e B, stabilita dalla funzione $f(x) = x^2$ definita in (B.7), non è quindi biunivoca e f(x) non è invertibile sull'insieme A = **R**.

Se però restringiamo il dominio di definizione, limitandoci all'insieme $A_1 = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\} = [0, +\infty)$, allora la corrispondenza fra l'insieme A_1 e l'insieme B, mediante la legge $f(x) = x^2$, f: A_1→B, risulta biunivoca perché ad ogni $y \in B$ corrisponde il solo valore di $x \in A_1$ dato da $x = \sqrt{y}$; in formula:

(B.15) $$y = x^2, \quad x \in A_1 = \{x \in \mathbf{R}:\ x \geq 0\} \quad \Leftrightarrow \quad x = +\sqrt{y}\,.$$

In figura 0.4 sono schematizzati i grafici delle nuove corrispondenze fra x e y, mediante la funzione $y = f(x) = x^2$, con $x \in A_1$, e la funzione inversa $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Si noti in particolare che i grafici delle due funzioni f(x) e $f^{-1}(y)$ sono costituiti da *archi* di parabola ("metà" parabola) ottenuti limitando la variabilità della x all'insieme $A_1 = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$.

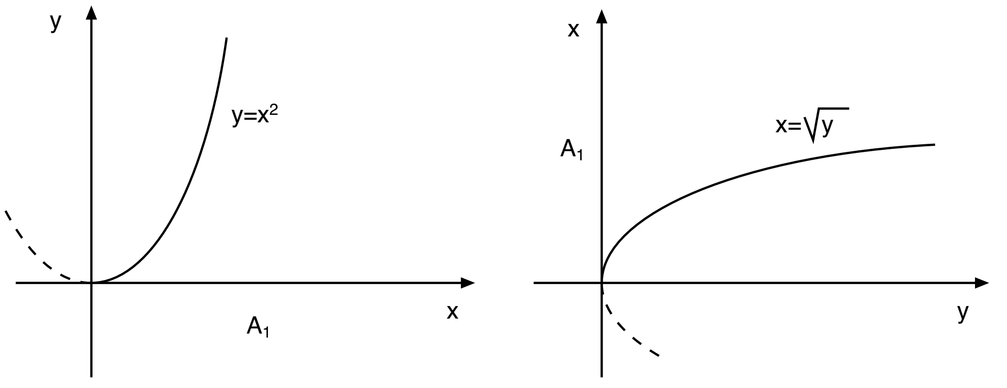


Figura 0.4

Con riferimento ai grafici in figura 0.5, relativi in entrambi i casi ad una funzione f: A→B, si evidenzia nel primo grafico che la funzione f è *crescente*, mentre nel secondo grafico è rappresentata una funzione f *decrescente*.

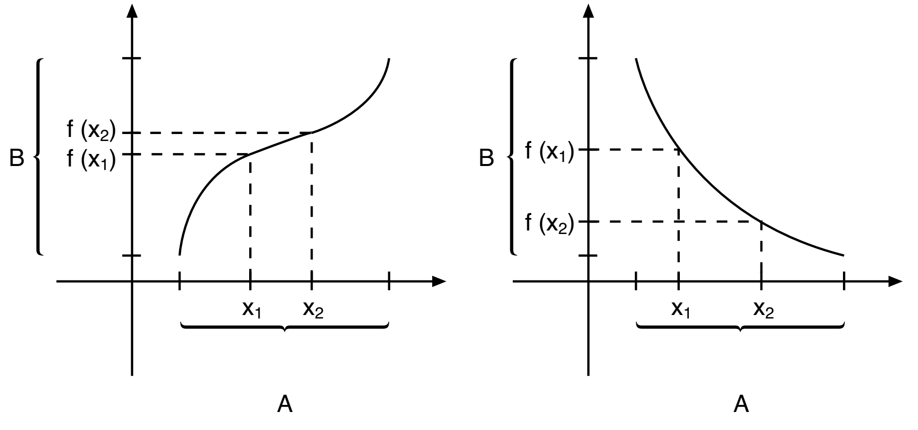


Figura 0.5

Precisamente, si dice che una funzione f: A→B è *monotòna crescente* sull'insieme A se

(B.16) $$f(x_1) \leq f(x_2), \qquad \forall\, x_1, x_2 \in A, \text{ con } \quad x_1 < x_2$$

(il simbolo ∀ si legge *per ogni*). Analogamente una funzione f: A→B è *monotòna decrescente* sull'insieme A se

(B.17) $$f(x_1) \geq f(x_2), \qquad \forall\, x_1, x_2 \in A, \text{ con } \quad x_1 < x_2 .$$

Una funzione f: A→B che verifica *una* delle due condizioni sopra scritte per ogni coppia di punti x_1, $x_2 \in$ A si dice *monotòna* sull'insieme A. Se poi vale anche la disuguaglianza stretta $f(x_1) < f(x_2)$ per ogni coppia di punti x_1, $x_2 \in$ A, con $x_1 < x_2$, si dice che f è *monotòna strettamente crescente* sull'insieme A, o più semplicemente, che f è *strettamente crescente* su A. Naturalmente, nel caso in cui $f(x_1) > f(x_2)$ per ogni x_1, $x_2 \in$ A, con $x_1 < x_2$, f è *strettamente decrescente* su A.

Si noti che l'unica funzione che su di un insieme A risulta allo stesso tempo crescente e decrescente è la *funzione costante* si A, cioè la funzione f(x) = c, che assume un valore costante c ∈ **R** per ogni x ∈ A.

Ad esempio, la funzione f(x) = (x − 1)/2, considerata nell'esempio 1, è monotòna *strettamente crescente* su A = **R**; infatti per ogni coppia di punti x_1, $x_2 \in$ **R**, con $x_1 < x_2$, risulta

(B.18) $$x_1 - 1 < x_2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1 - 1}{2} < \frac{x_2 - 1}{2} ,$$

cioè

(B.19) $$f(x_1) = \frac{x_1 - 1}{2} < \frac{x_2 - 1}{2} = f(x_2).$$

Invece la funzione analoga g(x) = 3 – 2x (anche g(x) ha per grafico una retta; il lettore ne disegni il grafico) è monotòna *strettamente decrescente* su **R**, a causa delle implicazioni

(B.20) $$\begin{gathered} x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; 2x_1 < 2x_2 \;\Rightarrow\; -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow\; g(x_1) = 3 - 2x_1 > 3 - 2x_2 = g(x_2). \end{gathered}$$

Infine la funzione $f(x) = x^2$, considerata nell'esempio 2, *non* è monotòna su tutto l'insieme A = **R**. Il lettore può invece verificare che la funzione $y = x^2$ risulta separatamente *crescente* nell'insieme $A_1 = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\} = [0, +\infty)$ e *decrescente* nell'insieme $A_2 = \{x \in \mathbf{R}: x \leq 0\} = (-\infty, 0]$.

C'è un lagame fra la stretta monotonia di una funzione in un insieme e la sua invertibilità. Vale infatti il risultato seguente.

PROPOSIZIONE. — *Sia* $f: A \to B$ *una funzione definita su di un insieme* A *e tale che per ogni* $y \in B$ *esista sempre almeno un numero* $x \in A$ *per cui* $f(x) = y$. *Se* f *è strettamente monotòna su* A *allora* f *è anche invertibile su* A *e la sua funzione inversa* $f^{-1}: B \to A$ *è definita e strettamente monotona su* B.

Dimostrazione: basta osservare che la funzione f stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i due insiemi A e B. Per provare ciò, supponiamo per assurdo che un numero $y_0 \in B$ violi la corrispondenza biunivoca, cioè che in corrispondenza ad y_0 esistano almeno due numeri distinti $x_1, x_2 \in A$ per cui $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Dato che x_1, x_2 sono distinti, uno fra i due numeri sarà più piccolo dell'altro; diciamo che, ad esempio, $x_1 < x_2$. Per l'ipotesi di stretta monotonia, risulta quindi $f(x_1) < f(x_2)$ se è strettamente crescente, oppure $f(x_1) > f(x_2)$ se f è strettamente decrescente. In ogni caso si ottiene l'assurdo $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Il viceversa di quanto enunciato nella proposizione precedente non è vero. Infatti esistono funzioni invertibili in un insieme e, allo stesso tempo, non monotòne su tale insieme. Un tale esempio è fornito dalla funzione $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x & \text{se } x \in (1, +\infty) \end{cases} \tag{B.21}$$

il cui grafico è rappresentato in figura 0.6. Tale funzione presenta una evidente singolarità in corrispondenza di $x = 1$; questo argomento verrà approfondito nel paragrafo G di questo capitolo, quando verranno esaminate alcune proprietà delle *funzioni continue*.

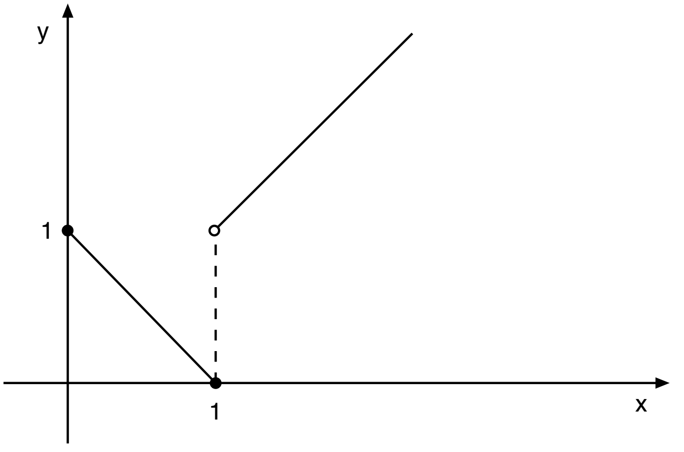


Figura 0.6

C. Un elenco di funzioni elementari

Proponiamo in questo paragrafo un elenco di funzioni elementari, insieme ad alcune loro proprietà ed ai loro grafici, utili per affrontare alcuni esercizi e per esemplificare i primi risultati sulle funzioni, relativi ai limiti e alle derivate.

Cominciamo dalle *funzioni lineari*, del tipo

$$f(x) = mx + q, \tag{C.1}$$

con m, q numeri reali fissati. La funzione è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$. Il numero reale m è detto *coefficiente angolare* della retta. Il numero reale è q il valore che la funzione f(x) assume in corrispondenza di $x = 0$, cioè $f(0) = q$. Se $m > 0$ la funzione f(x) è (strettamente) crescente; se $m < 0$ la funzione f(x) è (strettamente) decrescente.

Infatti, se $m > 0$,

$$x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; mx_1 + q < mx_2 + q, \tag{C.2}$$

cioè $f(x_1) < f(x_2)$ ed f(x) è strettamente crescente; mentre, se $m < 0$,

$$x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; mx_1 + q > mx_2 + q, \tag{C.3}$$

(perché il coefficiente moltiplicativo m, essendo negativo, ha l'effetto di cambiare il verso della disuguaglianza) cioè $f(x_1) > f(x_2)$ ed f(x) è strettamente decrescente. Infine, se $m = 0$, la funzione $f(x) \equiv q$ è costante (ed il suo grafico è una *retta orizzontale*). Queste proprietà di monotonia sono schematizzate in figura 0.7.

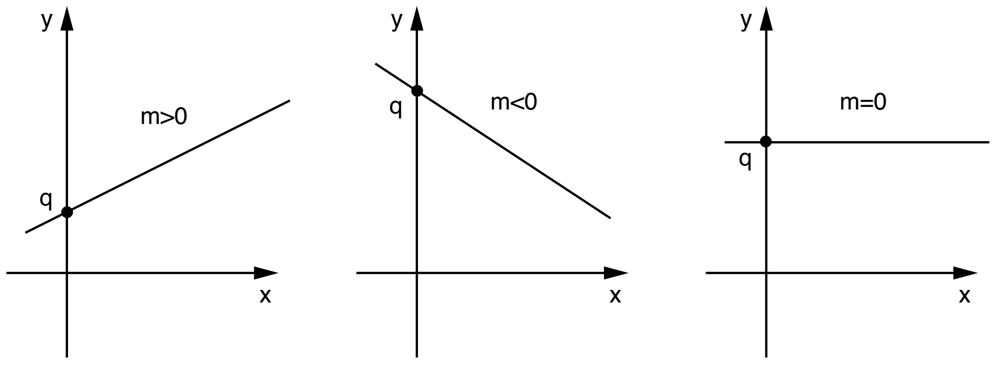


Figura 0.7 – f(x) = mx + q

La *funzione valore assoluto* è indicata con il simbolo $f(x) = |x|$ ed è definita, per ogni $x \in R$, dalla formula

(C.4)
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Quindi la funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ è uguale a $y = x$ quando $x \geq 0$. Il suo grafico in questo caso è la semiretta di equazione $y = x$, perché occorre tener conto della limitazione $x \geq 0$ (si veda la figura 0.8). Invece $f(x) = |x|$ è uguale a $y = -x$ quando $x < 0$. Il suo grafico in questo caso è la semiretta di equazione $y = -x$, con la limitazione $x < 0$ (si veda la figura 0.9). Unendo i due casi si ottiene il grafico completo della funzione valore assoluto in figura 0.10.

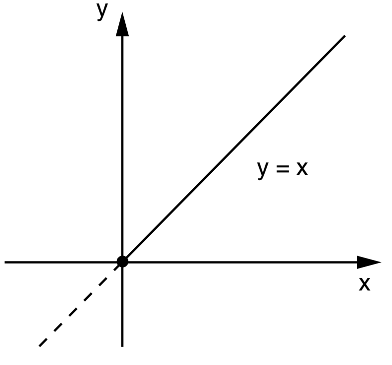


Figura 0.8

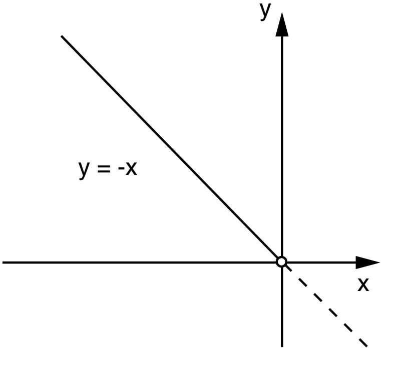


Figura 0.9

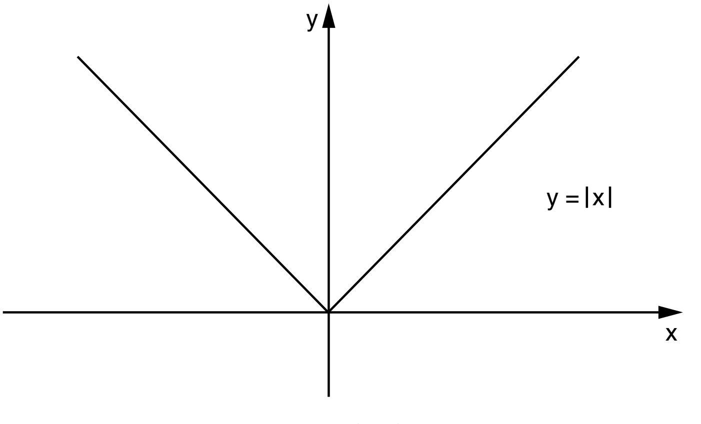


Figura 0.10

La *funzione potenza* con esponente n intero positivo ($n \in \mathbf{N}$)

(C.5) $$f(x) = x^n,$$

non è altro che la moltiplicazione del numero reale x per se stesso n volte.

Qualunque sia $n \in \mathbf{N}$, la funzione potenza è quindi definita per ogni $x \in \mathbf{R}$. Il valore $f(x) = x^n$ è positivo se $x > 0$, mentre se $x < 0$ il risultato $f(x) = x^n$ è positivo se n è pari (ad esempio $f(x) = x^2$, per $n = 2$), ma è negativo se n è dispari (ad esempio $f(x) = x^3$ per $n - 3$, oppure con $f(x = x$ con $n = 1)$. Per n = 1, 2, 3, i grafici delle funzioni $f_1(x) = x^1 = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, sono rappresentati in figura 0.11.

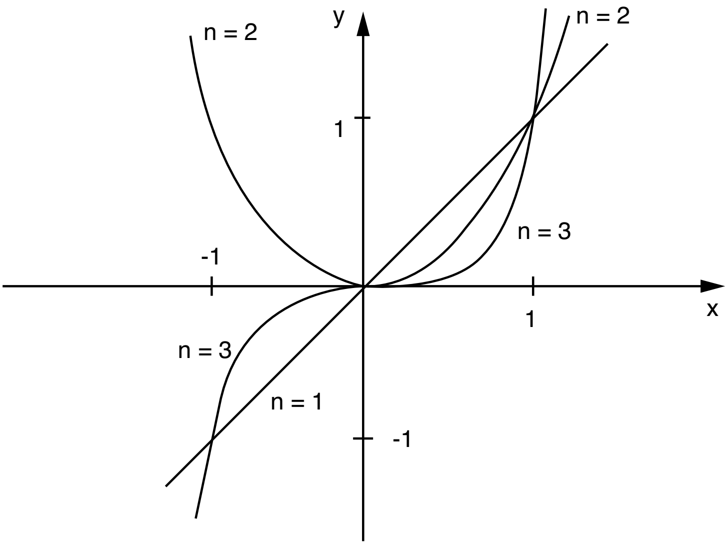


Figura 0.11

In particolare, come già osservato nel paragrafo precedente, la funzione $f(x) = x^2$ non è invertibile su tutto l'asse reale. Così pure la funzione potenza $f(x) = x^n$ per ogni n pari (invece x^n risulta invertibile su tutto l'asse reale se n è dispari).

Pertanto, quando si considera la funzione potenza con esponente $n \in \mathbf{N}$ generico (pari e dispari), nell'esaminare l'invertibilità di tale funzione si conviene di restringere l'insieme di definizione all'intervallo $[0, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$. In tale intervallo la funzione potenza $f(x) = x^n$ è strettamente monotona ed invertibile, ed il legame inverso fra le variabili x, y è dato da

$$\text{(C.6)} \qquad y = x^n \ (x \geq 0) \ \Leftrightarrow \ x = +\sqrt[n]{y} = y^{1/n};$$

si noti come sia stato scelto il segno più ($x = +\sqrt[n]{y}$ invece di $x = \pm\sqrt[n]{y}$) anche quando n è pari, a causa della limitazione $x \geq 0$.

Si dice quindi che la funzione potenza $f(x) = x^n$ è invertibile per $x \geq 0$ e che la funzione inversa è la *radice n-sima*, indicata con il simbolo

$$\text{(C.7)} \qquad f^{-1}(y) = y^{1/n}.$$

In figura 0.12 sono rappresentati i grafici delle funzioni potenza e radice n-sima.

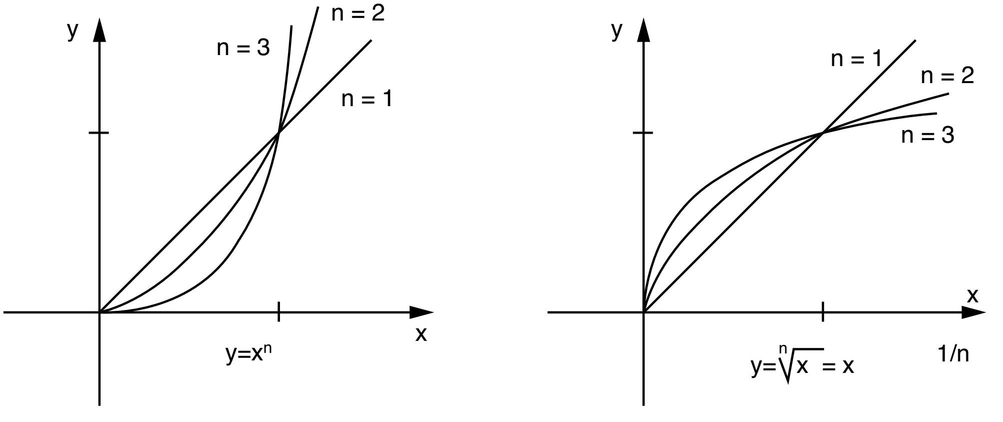


Figura 0.12

Osserviamo esplicitamente che, per n dispari, la funzione radice n-sima può essere definita per ogni $x \in \mathbf{R}$, assumendo che $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$. Il valore $f^{-1}(y) = y^{1/n}$, per n dispari, è quindi positivo se $y > 0$, mentre è negativo se $y < 0$. In tal modo, se n è dispari, la funzione potenza $f(x) = x^n$ risulta invertibile su tutto l'asse reale e la sua inversa è $f^{-1}(y) = y^{1/n}$ per ogni $y \in \mathbf{R}$.

Tali definizioni (delle funzioni potenza e radice n-sima) si possono interpretare, in un contesto unificante, parlando di *funzione potenza* x^b con esponente b reale; in formula

$$\text{(C.8)} \qquad f(x) = x^b.$$

Con tale notazione i casi precedenti si ottengono quando b = n (funzione potenza con esponente intero positivo) e per b = 1/n (funzione radice n-sima).

Rientrano però in questo contesto, ad esempio, anche le potenze con esponente negativo. Ad esempio, se b = – 1, si ottiene la funzione $f(x) = x^{-1} = 1/x$, che ha per grafico l'iperbole rappresentata in figura 0.3. Ma, secondo la convenzione di considerare solamente i numeri reali x positivi, in questo contesto diremo che la funzione $f(x) = x^{-1}$ ha per grafico un ramo di iperbole, limitata dalla condizione $x > 0$.

Dato che b è un generico numero reale (come già detto, in caso, anche negativo), l'insieme di definizione della funzione potenza con esponente reale $f(x) = x^b$, invece che uguale a $[0, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$, per convenzione si assume uguale a $(0, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: x > 0\}$.

Tre grafici della funzione potenza con esponente reale $f(x) = x^b$, in corrispondenza ai tre casi $b > 1$, $0 < b < 1$, $b < 0$, sono rappresentati in figura 0.13. Il lettore pensi ad esempio ai valori b = 2, b = 1/2, b = – 1.

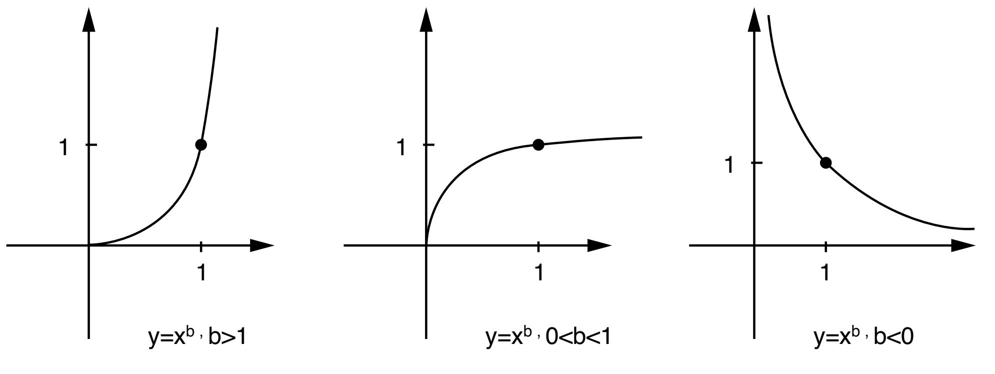


Figura 0.13

La *funzione esponenziale*, avente come base il numero reale positivo a, si indica con il simbolo

$$f(x) = a^x. \tag{C.9}$$

Allo scopo di disegnare il grafico della funzione esponenziale per qualche valore della base a > 0, consideriamo preliminarmente ad esempio il caso a = 2. Si ottiene la seguente tabella

x	1	2	3	0	–1	–2	–3	–4
$f(x) = 2^x$	2	4	8	1	1/2	1/4	1/8	1/16

Si noti che tutti i valori della funzione (sia che x sia positivo, che negativo, ed anche nullo) sono positivi. Riportando i valori in un riferimento cartesiano come in figura 0.14, otteniamo “per punti” il grafico della funzione $f(x) = 2^x$. La “positività “ della funzione corrisponde ad un grafico “al di sopra” dell’asse x.

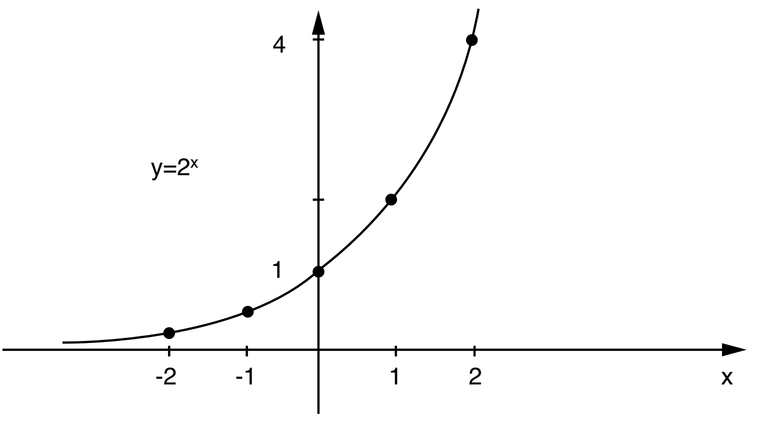


Figura 0.14

La funzione 2^x è strettamente crescente su **R**; così pure la funzione esponenziale a^x quando la base a è un numero reale *maggiore* di 1.

Al contrario, se la base a è un numero reale positivo e *minore* di 1, allora la funzione esponenzialè è strettamente decrescente su **R**; infatti, ad esempio, per a = 1/2 si ottiene la funzione

(C.10)
$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

e, in corrispondenza, la seguente tabella ed il grafico in figura 0.15.

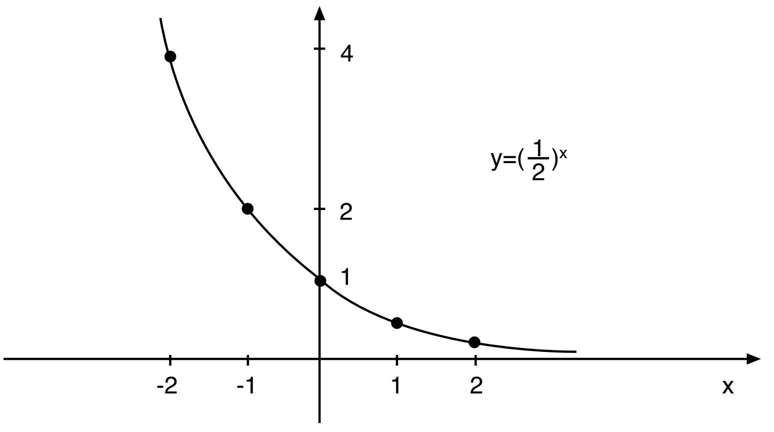


Figura 0.15

x	1	2	3	0	−1	−2	−3	−4
$f(x) = 2^{-x}$	1/2	1/4	1/8	1	2	4	8	16

Riassumendo le proprietà di monotonia della funzione esponenziale $f(x) = a^x$, tale funzione risulta strettamente crescente su **R** se $a > 1$, mentre è strettamente decrescente su **R** se $0 < a < 1$. Si noti che, se $a = 1$, la funzione $f(x) = 1^x$ è costante, identicamente uguale ad 1.

Se $a \neq 1$, la funzione esponenziale $y = a^x$, come applicazione fra l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R}\}$ e l'insieme $B = \{y > 0\}$ è *invertibile*. La funzione inversa è definita sull'insieme dei numeri reali positivi B ed ha valori in $A = \mathbf{R}$. La funzione inversa della funzione $f(x) = a^x$ si chiama *logaritmo in base* a e si indica con il simbolo $f^{-1}(y) = \log_a y$. Ciò equivale a scrivere

(C.11) $$x = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad y = a^x.$$

Per evidenziare il ruolo della variabile indipendente, spesso si invertono i simboli x e y e si usa la notazione $y = \log_a x$; naturalmente con questi simboli risulta

(C.12) $$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y.$$

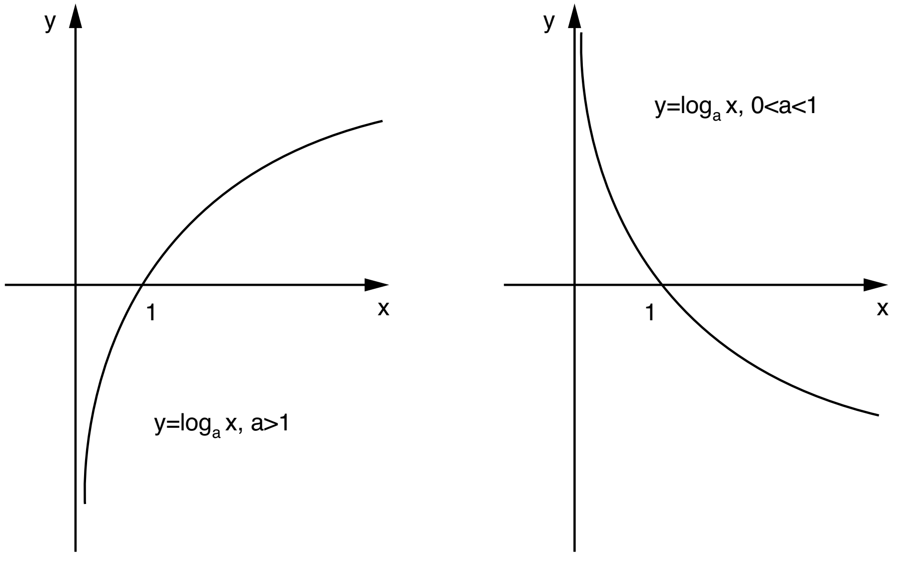


Figura 0.16

La *funzione logaritmo* $y = \log_a x$ (con base a maggiore di zero e diversa da 1) è quindi definita per $x > 0$. Utilizzando le corrispondenti proprietà della funzione esponenziale, si verifica che la funzione logaritmo è una funzione strettamente crescente se $a > 1$, mentre è una funzione strettamente decrescente se $0 < a < 1$. I grafici nei due casi sono schematizzati in figura 0.16 e si possono ottenere dai grafici della funzione esponenziale, rappresentati in casi particolari nelle figure 0.14 e 0.15, scambiando fra loro gli assi orizzontale e verticale.

Un ruolo speciale (e ciò risulterà chiaro nel paragrafo 92, nello studio delle derivate) viene assunto dalla funzione logaritmo (ed in corrispondenza anche dalla funzione esponenziale) quando la base a è uguale al *numero di Nepero* e, definito nel paragrafo 64 (si veda anche il paragrafo E di questo capitolo), che è un numero reale compreso fra 2 e 3 e la cui espressione decimale approssimata è data da $e = 2{,}71\ldots$ In tal caso si suole omettere l'indicazione esplicita della base e si utilizzano i simboli, fra loro equivalenti, $\log_e x = \log x$.

Dato che il numero e è maggiore di 1, $\log x$ ed e^x (cioè il logaritmo e l'esponenziale con base e) sono funzioni strettamente crescenti.

Per permettere al lettore che li incontra per la prima volta di familiarizzare con i logaritmi consideriamo, ad esempio, i seguenti valori logaritmici

(C.13) $$\log_2 8,\quad \log_4 2,\quad \log_3 \frac{1}{3},\quad \log_e 1,\quad \log_{10} 0.$$

Utilizzando la relazione (C.12), abbiamo

(C.14) $$y = \log_2 8 \quad \Leftrightarrow \quad 8 = 2^y,$$

da cui, essendo $2^3 = 8$, si ottiene $y = 3$. Quindi $\log_2 8 = 3$. Analogamente risulta $\log_4 2 = 1/2$, $\log_3(1/3) = -1$, $\log_e 1 = 0$. Mentre $\log_{10} 0$ non esiste (od anche, non è definito) perché se esistesse un numero reale $y = \log_{10} 0$, allora l'equazione $10^y = 0$ dovrebbe essere soddisfatta da tale valore $y \in \mathbf{R}$, contrariamente al fatto che a^y (ed anche 10^y) è una funzione positiva, cioè $a^y > 0$ (in particolare $a^y \neq 0$) per ogni $y \in \mathbf{R}$. Il lettore ricordi, come già detto, che la funzione $\log_a x$ è definita per $x > 0$. In particolare non è definita per $x = 0$ e per x negativo.

Le *funzioni trigonometriche* senx, cosx, tgx dovrebbero essere già note al lettore. Infatti molti studenti hanno a lungo studiato la trigonometria nei loro corsi di studio di scuola secondaria; chi invece non avesse avuto l'occasione in precedenza, potrà trovare alcuni dettagli elementari nel paragrafo 11 di questo testo, oppure in un libro di esercizi.

La misura di un angolo sarà in genere espressa in *radianti*. Con riferimento alla figura 0.17 la misura di un angolo in radianti si ottiene considerando una circonferenza di raggio 1, di centro nel vertice dell'angolo, e misurando la lunghezza dell'arco di circonferenza a partire dall'asse delle ordinate, in senso antiorario (avendo fissato tale orientamento, talvolta parleremo di *angoli orientati*).

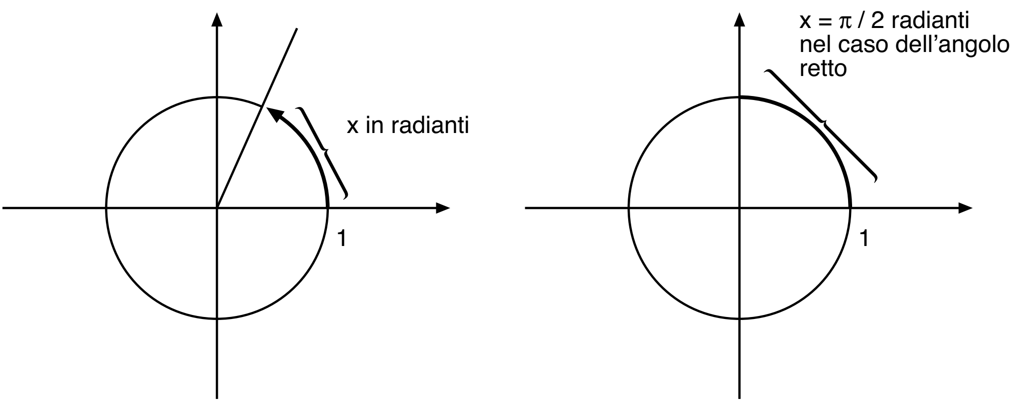


Figura 0.17

Quindi, ad esempio, la misura in radianti dell'angolo giro, è uguale alla lunghezza dell'intera circonferenza; avendo fissato il raggio uguale ad 1, tale lunghezza vale $2\pi r = 2\pi$. Pertanto la misura in radianti dell'angolo giro (che in *gradi* corrisponde a 360°) è pari a 2π. Con successive suddivisioni, si verifica subito che la misura in radianti dell'angolo piatto è uguale a π, mentre la misura in radianti dell'angolo retto vale $\pi/2$.

La *funzione seno*, indicata con il simbolo senx, è definita per ogni valore dell'angolo (o *argomento*) orientato x, espresso in radianti. Con riferimento alla figura 0.18, assegnato un angolo orientato x, il valore senx è *l'ordinata* del punto P che si trova sulla circonferenza di centro nell'angolo e raggio 1, che sottende l'angolo x.

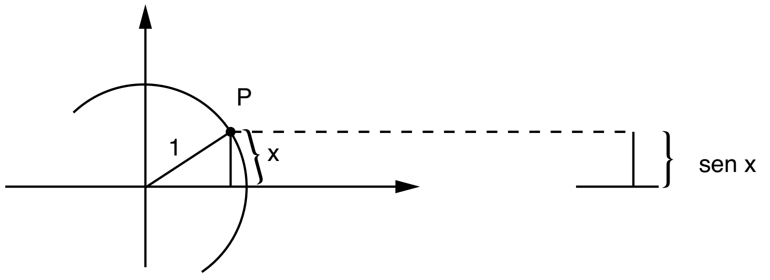


Figura 0.18

A titolo esemplificativo, utilizzando la definizione, si ottiene la seguente tabella, ed in corrispondenza, il grafico in figura 0.19.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$
f(x) = senx	0	1	0	-1	0	1	0	-1

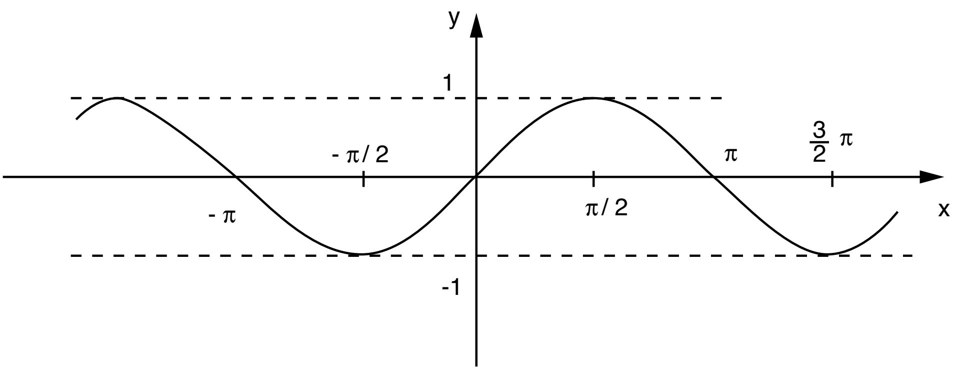


Figura 0.19

Una proprietà evidente, conseguente dalla definizione e ben visibile nel grafico in figura 0.19 (si vedano i valori sull'asse y), è che tutti i valori della funzione senx sono compresi fra –1 ed 1; in formula:

(C.15) $$-1 \leq \operatorname{sen}x \leq 1, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

La *funzione coseno*, indicata con il simbolo cosx, è definita per ogni valore dell'angolo (o *argomento*) orientato x, espresso in radianti. Con riferimento alla figura 0.20, assegnato un angolo orientato x, il valore cosx è l'*ascissa* del punto P che si trova sulla circonferenza di centro nell'angolo e raggio 1, che sottende l'angolo x.

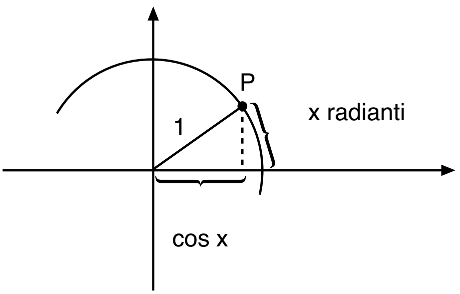


Figura 0.20

Utilizzando la definizione, si ottiene la seguente tabella, ed in corrispondenza, il grafico della funzione coseno in figura 0.21.

x	0	π/2	π	3π/2	2π	5π/2	3π	7π/2
f(x) = cosx	1	0	–1	0	1	0	–1	0

Come per il seno, tutti i valori della funzione cosx sono compresi fra –1 e + 1. Cioè

(C.16) $$-1 \leq \cos x \leq 1, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Una relazione importante che lega le due funzioni seno e coseno è conseguenza del teorema di Pitagora, applicato al triangolo rettangolo avente uno dei due angoli non retti di misurà x (consideriamo in questa sede soltanto il caso in cui l'angolo x sia compreso fra 0 e π/2, anche se il risultato vale in generale). Se in un tale triangolo

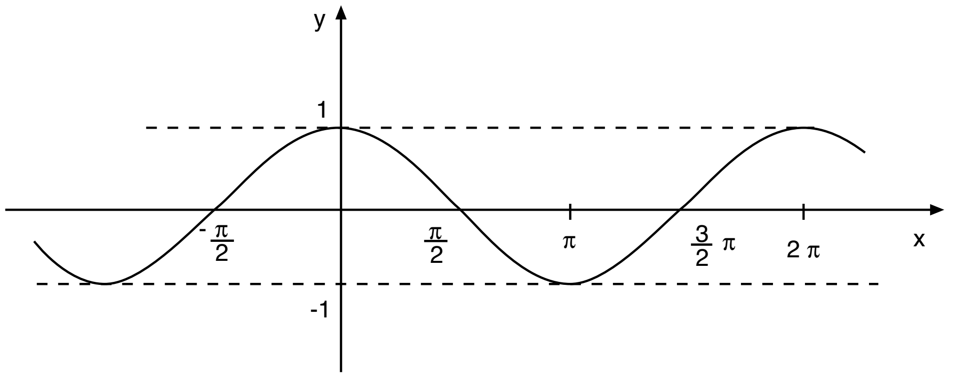


Figura 0.21

scegliamo l'ipotenusa di lunghezza 1, allora possiamo utilizzare le definizioni di senx, cosx, date precedentemente; ne risulta che i due cateti sono lunghi appunto senx, cosx, come in figura 0.22.

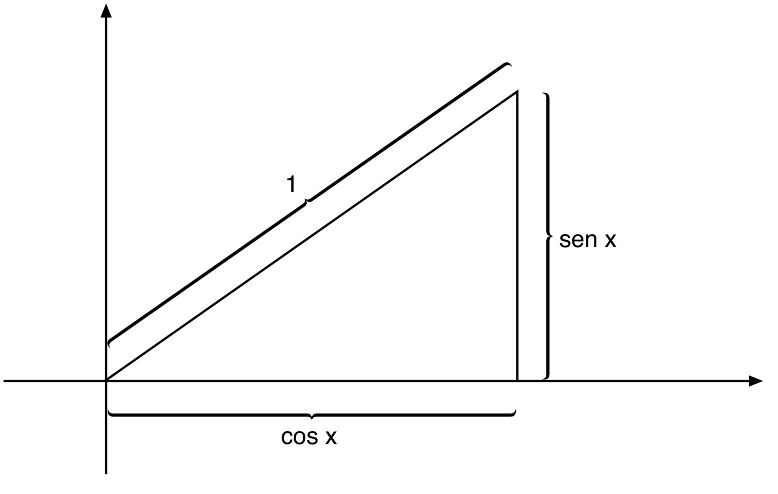


Figura 0.22

Per il teorema di Pitagora vale la relazione fondamentale

(C.17) $$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Altre relazioni importanti sono elencate nel paragrafo 11; ad esempio particolarmente rilevanti sono le cosiddette *formule di addizione*

(C.18) $$\mathrm{sen}(x_1 + x_2) = \mathrm{sen}x_1 \cdot \cos x_2 + \cos x_1 \cdot \mathrm{sen}x_2,$$

(C.19) $$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 - \mathrm{sen}x_1 \cdot \mathrm{sen}x_2.$$

La *funzione tangente* è definita dalla relazione

(C.20) $$\mathrm{tg}x = \frac{\mathrm{sen}x}{\cos x}.$$

Dato che il denominatore deve risultare differente da zero, la funzione tangente è definita per ogni numero reale x diverso dai valori che annullano la funzione coseno, che sono $\pi/2$, $3\pi/2$, ..., ed anche i valori negativi $-\pi/2$, $-3\pi/2$, ..., ecc. In formula compatta si scrive che la funzione tangente è definita per ogni numero reale x tale che

(C.21) $$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \forall k \in \mathbf{Z}.$$

Il grafico della funzione tangente è rappresentato in figura 0.23. Si notino i valori $x = \pm\,\pi/2$, $\pm\,3\pi/2$, ..., ecc, dove la funzione tangente non è definita.

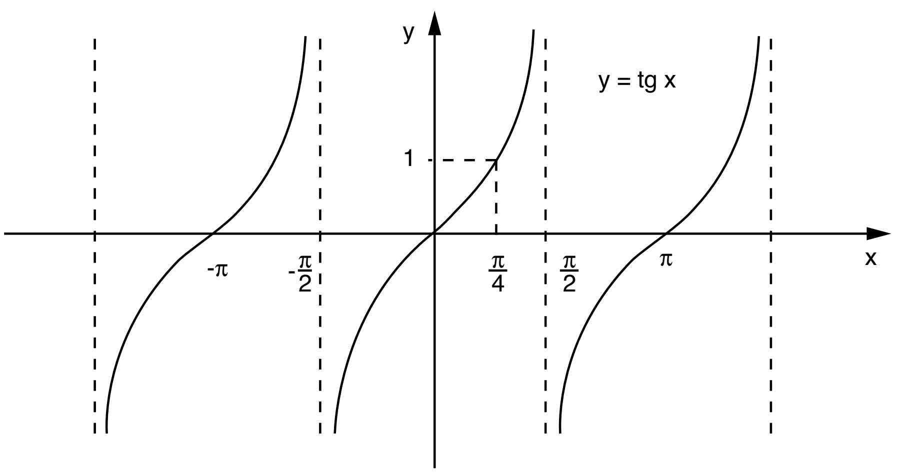


Figura 0.23

Una relazione importante che coinvolge la funzione tangente si può dedurre dal disegno in figura 0.24. Si considera un angolo compreso fra 0 e $\pi/2$, che esprime la lunghezza dell'arco di circonferenza disegnato in figura 0.24, di centro l'origine e raggio 1. Il segmento AP ha lunghezza pari a senx. Infine la lunghezza del segmento BT vale tgx; infatti, per le proporzioni che valgono nel caso di triangoli simili, risulta BT = BT/OB = AP/OA = senx/cosx = tgx.

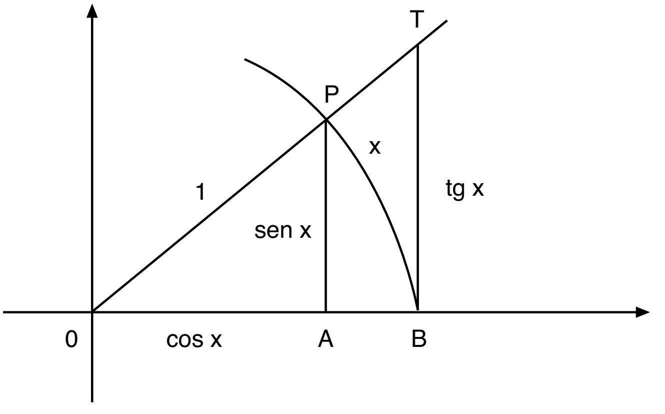


Figura 0.24

Si ottiene la seguente catena di disuguaglianze, che esprime il fatto che l'arco x ha lunghezza compresa tra le lunghezze del segmento AP e del segmento BT

$$0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x, \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{C.22}$$

D. Introduzione ai limiti di successione

Una *successione* è una funzione definita sull'insieme **N** dei numeri naturali, con valori in **R**.

Con le notazioni relative alle funzioni, introdotte nel paragrafo B, una successione f si può rappresentare con il simbolo f: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Se $n \in \mathbf{N}$ è la variabile indipendente, i valori della successione possono essere denotati con il simbolo f(n), od anche, più esplicitamente, con la seguente tabella

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	4	5	...	n	...
$f(n) \in \mathbf{R}$	f(1)	f(2)	f(3)	f(4)	f(5)	...	f(n)	...

È però consuetudine rappresentare il valore generico f(n) di una successione, corrispondente al numero naturale n, con un indice nel modo seguente; ad esempio a_n oppure b_n oppure c_n e così via. Quindi la precedente tabella diviene

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	4	5	...	n	...
$a_n \in \mathbf{R}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...	a_n	...

Consideriamo gli esempi seguenti

(D.1) $$a_n = \frac{n+2}{2n},$$

(D.2) $$b_n = \frac{n-3}{n},$$

(D.3) $$c_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Calcoliamo alcuni termini della successione $a_n = (n + 2)/2n$ in (D.1). Ponendo $n = 1$ si ottiene $a_1 = (1 + 2)/2 = 3/2$. Per $n = 2$ ottieniamo $a_2 = (2 + 2)/(2 \cdot 2) = 1$, eccetera. Per $n = 100$ abbiamo $a_{100} = (100 + 2)/(2 \cdot 100) = 51/100 = 0{,}51$, mentre risulta $a_{1000} = (1000 + 2)/(2 \cdot 100) = 501/1000 = 0{,}501$. Vale quindi la seguente tabella

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	...	100	...	1000	...
$a_n = (n + 2)/2n$	3/2	1	5/6	...	0,51	...	0,501	...

Rappresentiamo su di un asse i valori trovati, come in figura 0.25.

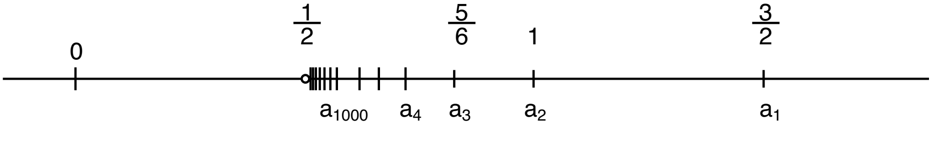


Figura 0.25

Aumentiamo ulteriormente il valore dell'indice n; risulta ad esempio $a_{10.000}$ = 0,5001, $a_{100.000}$ = 0,50001. Dalla figura 0.25 e dalle espressioni numeriche trovate si nota che il valore di a_n si avvicina al numero 1/2 = 0,5 tanto più quanto più n è grande.

Il limite per n che tende all'infinito (si scrive $n \to +\infty$) della successione a_n definita in (D.1) è ugule a 1/2; in simboli

(D.4) $$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ciò significa che, qualunque sia l'intervallo $(1/2 - \varepsilon,\ 1/2 + \varepsilon)$, in tale intervallo cadono tutti i valori a_n della successione, purché l'indice n sia sufficientemente grande. In figura 0.26 sono schematizzati tre intervalli $(1/2 - \varepsilon,\ 1/2 + \varepsilon)$, per tre differenti valori di ε.

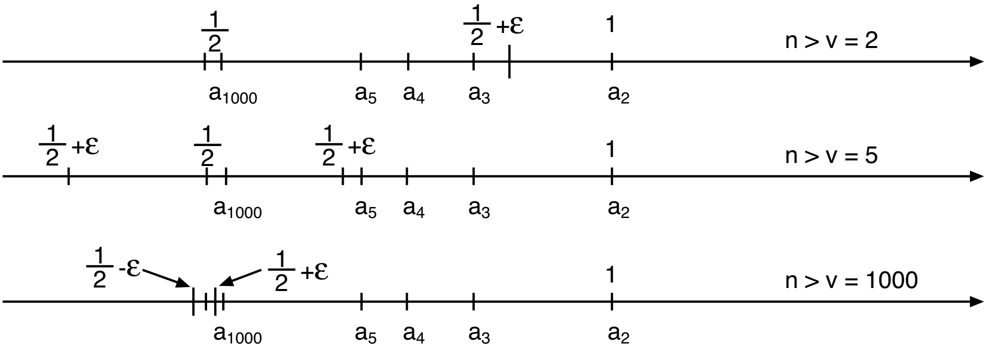


Figura 0.26

Consideriamo il caso generico di limite $a \in \mathbf{R}$. La condizione geometrica di appartenenza di a_n all'intervallo $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ si esprime analiticamente con le disuguaglianze $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. La condizione che l'indice n debba essere sufficientemente grande si esprime con una disuguaglianza del tipo $n > \nu$, dove ν è un numero da determinare in dipendenza del valore ε positivo fissato (ν è tanto più grande quanto più ε è piccolo).

La definizione formale di limite (finito) di successione è la seguente: *una successione* a_n *converge ad un numero reale* a (*equivalentemente*, a_n *tende ad* a, *oppure ha limite uguale ad* a), *e si scrive*

(D.5) $$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \quad (\textit{oppure}\ a_n \to a),$$

se, qualunque sia il numero positivo ε fissato, esiste in corrispondenza un numero ν tale che

(D.6) $$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

per ogni $n > \nu$.

Consideriamo ora la successione $b_n = (n - 3)/n$ in (D.2). Ponendo n = 1 si ottiene $b_1 = (1 - 3)/1 = - 2$. Per n = 2 risulta $b_2 = (2 - 3)/2 = - 1/2$, e così via. Per n = 100 abbiamo $b_{100} = (100 - 3)/100 = 0{,}97$, mentre per n = 1000 risulta $b_{1000} = (1000 - 3)/1000 = 0{,}997$. Otteniamo la tabella

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	…	100	…	1000	…
$b_n = (n - 3)/n$	–2	–1/2	0	…	0,97	…	0,997	…

Rappresentiamo su di un asse i valori trovati, come in figura 0.27.

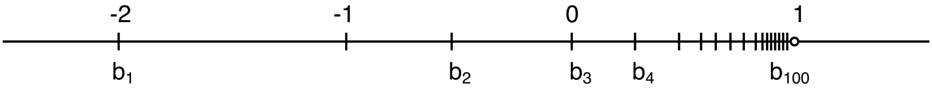


Figura 0.27

Aumentando l'indice n si trovano, ad esempio, i valori $b_{10.000} = 0{,}9997$, $a_{100.000} = 0{,}99997$. Dalla figura 0.27 e dalle espressioni numeriche trovate si intuisce facilmente che a_n è vicino al numero 1, tanto più quanto più n è grande.

Con la definizione data precedentemente si può verificare che il limite per $n \to + \infty$ della successione b_n definita in (D.2) è ugule a 1; in simboli

(D.7) $$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-3}{n} = 1.$$

Infine prendiamo in considerazione la successione in $c_n = (- 1)^n/n$ in (D.3). Per n = 1 si ottiene $c_1 = (- 1)^1/1 = - 1$. Per n = 2 abbiamo $c_2 = (- 1)^2/2 = + 1/2$. Per n = 100 si ha $c_{100} = (- 1)^{100} = 1/100 = 0{,}01$; per n = 1000 risulta $c_{1000} = (- 1)^{1000}/1000 = 1/1000 = 0{,}001$. Otteniamo la tabella

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	…	100	…	1000	…
$c_n = (- 1)^n/n$	– 1	1/2	– 1/3	…	0,01	…	0,001	…

Rappresentiamo su di un asse i valori trovati, come in figura 0.28.

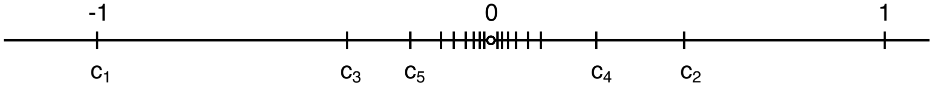


Figura 0.28

Tutti i termini di posto pari (cioè i termini della successione c_n con n pari) sono positivi; sono quindi a destra dello zero, ma con valore vicino al numero 0 tanto più quanto più n è grande. I termini di posto dispari (cioè i termini c_n con n dispari) sono negativi; essi sono a sinistra dello zero, ma anche in questo caso il loro valore è vicino al numero 0, tanto più quanto più n è grande.

Con la definizione di limite, data precedentemente, si verifica che il limite per $n \to +\infty$ della successione c_n definita in (D.3) è uguale a 0; in simboli

(D.8) $$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

È opportuno utilizzare una proprietà della *funzione valore assoluto* (funzione introdotta in (C.4)), che si esprime mediante l'equivalenza

(D.9) $$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r,$$

valida per ogni $r \geq 0$.

Per dimostrare la (D.9) utilizziamo la definizione (C.4) di valore assoluto. Occorre quindi distinguere i due casi $x \geq 0$ e $x < 0$; in corrispondenza otteniamo

(D.10) se $x \geq 0$ $$\begin{cases} |x| = x < r \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 \leq x < r\,,$$

(D.11) se $x < 0$ $$\begin{cases} |x| = -x < r \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -r < x < 0,$$

e, unendo le disuguaglianze ai membri destri di (D.10) e di (D.11) nell'unica catena di disuguaglianze $-r < x < r$, otteniamo l'equivalenza formulata in (D.9).

In base alla proprietà (D.9) del valore assoluto, possiamo enunciare la definizione di limite nella seguente forma equivalente: *una successione* a_n *converge ad un numero reale* a *se, qualunque sia il* *numero ε positivo fissato, esiste in corrispondenza un numero ν tale che*

(D.12)
$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

per ogni $n > \nu$.

Occorre provare soltanto che vale l'equivalenza

(D.13)
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon,$$

e ciò è conseguenza della (D.9) con $x = a_n - a$ e con $r = \varepsilon$; infatti vale la catena di equivalenze

(D.14)
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

(D.15)
$$-\varepsilon < a_n - a < +\varepsilon,$$

(D.16)
$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Con la nuova formulazione della definizione di limite di successione possiamo subito verificare la relazione (D.8). Infatti

(D.17)
$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

segue dalla stima

(D.18)
$$|c_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

che vale, pur di scegliere $1/n < \varepsilon$, cioè $n > 1/\varepsilon$. La definizione di limite risulta soddisfatta definendo $\nu = 1/\varepsilon$.

Consideriamo gli esempi ulteriori di successione

(D.19)
$$a_n = (-1)^n,$$

(D.20)
$$b_n = \frac{n^2 + 1}{n},$$

(D.21)
$$c_n = -n^2.$$

Per la prima successione in (D.19) vale la seguente tabella

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	...	100	...	1001	...
$a_n = (-1)^n$	-1	1	-1	...	1	...	-1	...

Precisamente, risulta che i termini di posto pari (cioè i termini della successione a_n con n pari) valgono + 1, mentre i termini di posto dispari (cioè i termini a_n con n dispari) valgono − 1.

In questo caso il limite della successione a_n *non esiste*. Infatti la disuguaglianza $|a_n - a| < \varepsilon$ non può essere soddisfatta da nessun valore $a \in \mathbf{R}$ se $\varepsilon < 1$, perché la quantità $|a_n - a|$, che rappresenta la *distanza* fra a_n ed a, è sicuramente maggiore od uguale ad 1 per alcuni valori di n arbitrariamente grandi (la diseguagliana $|a_n - a| < \varepsilon$ non vale se $|a_n - a| \geq 1$ e se $\varepsilon < 1$).

Ad esempio, se $a \geq 0$, per n dispari risulta $a_n = -1$ e quindi

(D.22) $$|a_n - a| = |-1 - a| = 1 + a \geq 1.$$

Se invece $a \leq 0$, per n pari si ha $a_n = 1$ e quindi $|a_n - a| = |1 - a|$; essendo $a \leq 0$ risulta $1 - a \geq 0$ e quindi ancora $|1 - a| = 1 - a \geq 1$.

Consideriamo ora la successione in (D.20)

(D.23) $$b_n = \frac{n^2 + 1}{n}$$

e calcoliamone alcuni termini secondo la seguente tabella

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	...	10	...	100	...
$b_n = (n^2 + 1)/n$	2	5/2	10/3	...	10,1	...	100,01	...

Dalle espressioni numeriche trovate si intuisce facilmente che b_n può assumere valori tanto più grandi quanto più l'indice n è grande. Il limite per n che tende all'infinito della successione b_n è uguale a $+\infty$, secondo la definizione che segue.

La definizione di limite infinito di successione è la seguente: *una successione* a_n *diverge* a $+\infty$ (*equivalentemente* a_n *tende* a $+\infty$), *e si scrive*

(D.24) $$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \qquad (\textit{oppure}\ a_n \to +\infty),$$

se, qualunque sia il numero M positivo fissato, esiste in corrispondenza un numero ν *tale che*

(D.25) $$a_n > M\,,$$

per ogni $n > \nu$.

Infine la successione $-n^2$ in (D.21) diverge a $-\infty$ secondo la definizione seguente: *una successione* a_n *diverge a* $-\infty$ (*equivalentemente* a_n *tende a* $-\infty$), *e si scrive*

(D.26) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad (\textit{oppure}\ a_n \to -\infty),$$

se, qualunque sia il numero M *positivo fissato, esiste in corrispondenza un numero* ν *tale che*

(D.27) $$a_n < -M\,,$$

per ogni $n > \nu$.

Utilizzando la definizione ora data, verifichiamo che la successione $c_n = -n^2$ in (D.21) diverge a $-\infty$. Risulta infatti

(D.28) $$c_n = -n^2 < -M,$$

se e solo se $n^2 > M$, e ciò è verificato scegliendo il numero $\nu = \sqrt{M}$, in modo che $n^2 > M$ per ogni $n > \nu$.

In conclusione abbiamo visto esempi di successioni che ammettono limite finito, cioè che hanno per limite un numero reale $a \in \mathbf{R}$, ed in tal caso diremo che la successione è *convergente.* Abbiamo anche incontrato esempi di successioni che ammettono limite infinito, precisamente uguale a $+\infty$ oppure uguale a $-\infty$, ed in tal caso diremo che la successione è *divergente*. Infine abbiamo osservato che esistono successioni che *non ammettono limite*, ed in tal caso diremo anche che la corrispondente successione è *indeterminata*.

E. Proprietà principali e limiti notevoli di successione

Riprendiamo in considerazione la successione $(n+2)/2n$ in (D.1). Con la scomposizione della frazione in somma di due frazioni otteniamo

(E.1) $$\frac{n+2}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n};$$

è chiaro che la successione costante $a_n = 1/2$

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	...	100	...	1000	...
$a_n = 1/2$	1/2	1/2	1/2	...	1/2	..	1/2	...

converge al numero 1/2. È anche semplice verificare che la successione $b_n = 1/n$

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	...	100	...	1000	...
$b_n = 1/n$	1	1/2	1/3	...	0,01	..	0,001	...

converge a zero. Il limite della successione $(n + 2)/2n$ è quindi ottenibile come somma dei limiti delle due successioni $a_n = 1/2 \to 1/2$ e $b_b = 1/n \to 0$, cioè

(E.2) $$a_n + b_n \to 1/2 + 0 = 1/2,$$

riottenendo il valore del limite della successione $(n + 2)/2n$, già determinato in (D.4).

Enunciamo in generale la proprietà utilizzata nell'esempio precedente, relativa alla *somma* di due successioni. La proprietà vale anche per le operazioni di *differenza*, *prodotto* e *quoziente* (con denominatore non nullo).

OPERAZIONI CON I LIMITI. — *Se* a_n *e* b_n *sono due successioni convergenti, con* $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(a, b \in \mathbf{R})$, *allora anche*

(E.3) $$a_n + b_n \to a + b,$$

(E.4) $$a_n - b_n \to a - b,$$

(E.5) $$a_n \cdot b_n \to a \cdot b,$$

(E.6) $$a_n/b_n \to a/b \qquad (\textit{se} \quad b_n, b \neq 0).$$

Si noti che, nelle operazioni con i limiti sopra enunciate, si suppone che i valori limite a, b siano numeri reali, cioè non siano $+\infty$ né $-\infty$. Ad esempio, l'espressione formale $+\infty - (+\infty) = +\infty - \infty$ non è "semplificabile" e non permette di scrivere $+\infty - \infty = 0$!!

Infatti con il simbolo $+\infty - (+\infty)$ si intende la differenza di due successioni a_n e b_n divergenti a $+\infty$ e la corrispondente successione $c_n = a_n - b_n$ può avere diversi comportamenti al limite. Di seguito sono elencati alcuni casi di successioni divergenti a $+\infty$, la cui successione differenza ha limiti diversi

(E.7) $a_n = n^2 \to +\infty,\ b_n = n^2 + 7 \to +\infty \ \Rightarrow\ a_n - b_n = -7 \to -7,$

(E.8) $a_n = n^2 \to +\infty,\ b_n = n^2 - 13 \to +\infty \ \Rightarrow\ a_n - b_n = 13 \to 13,$

(E.9) $a_n = n^2 \to +\infty,\ b_n = n^2 + n \to +\infty \ \Rightarrow\ a_n - b_n = -n \to -\infty,$

(E.10) $a_n = n^2 + n \to +\infty,\ b_n = n^2 \to +\infty \ \Rightarrow\ a_n - b_n = n \to +\infty,$

od anche il limite della differenza può non esistere

(E.11) $a_n = n^2 + (-1)^n \to +\infty,\ b_n = n^2 \to +\infty \Rightarrow a_n - b_n = (-1)^n$ non ha limite

(per verificare in (E.11) che $a_n = n^2 + (-1)^n \to +\infty$ si osservi che $(-1)^n = -1$ per n dispari, mentre $(-1)^n = 1$ per n pari; quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta $(-1)^n \geq -1$, da cui $a_n = n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1 \to +\infty$).

Esempi analoghi si possono costruire anche per la somma, il prodotto ed il quoziente; per il quoziente in particolare risulta *indeterminato* anche il caso 0/0.

Risultano quindi escluse dalle operazioni con i limiti sopra enunciate le seguenti

FORME INDETERMINATE. — *Si dicono forme indeterminate, cioè a cui non si applicano le operazioni con i limiti, le seguenti espressioni*

(E.12) $\infty - \infty,\quad 0 \cdot \infty,\quad \infty/\infty,\quad 0/0.$

Tenendo in conto di quali siano le forme indeterminate (E.12), si può invece osservare che per alcuni limiti infiniti si possono subito dare i risultati delle operazioni.

Ad esempio, se $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, allora evidentemente $a_n + b_n \to +\infty$.

Se $a_n \to a > 0,\ b_n \to +\infty$, allora $a_n \cdot b_n \to +\infty$.

Se $a_n \to a < 0,\ b_n \to +\infty$, allora $a_n \cdot b_n \to -\infty$.

Si noti a tal proposito che l'espressione $a_n \to 0$, $b_n \to +\infty$ è elencata in (E.12) fra le forme indeterminate, proprio perché non è possibile applicare alcuna proprietà generale per dedurre, in questo caso, il limite del prodotto $a_n \cdot b_n$, ma occorre invece eseguire semplificazioni per poter giungere al risultato del limite del prodotto. Un elenco di operazioni con limiti infiniti è fornito nel paragrafo 60.

Riprendiamo in considerazione la successione in (D.3)

(E.13) $$c_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Essendo $(-1)^n = -1$ per n dispari, $(-1)^n = 1$ per n pari, per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta $-1 \le (-1)^n \le 1$, da cui

(E.14) $$-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}, \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Indicando con $a_n = -1/n$, $b_n = 1/n$, risulta

(E.15) $$\begin{cases} a_n \le c_n \le b_n \\ a_n \to 0, \ b_n \to 0 \end{cases}$$

e tali condizioni implicano che anche per la successione intermedia si possa calcolare il limite $c_n \to 0$, concordemente con quanto avevamo già trovato in (D.8), ed anche conformemente al teorema dei carabinieri che segue (le due successioni a_n, b_n sono i cosiddetti carabinieri, che costringono la successione c_n a seguirli).

TEOREMA DEI CARABINIERI. — *Se* a_n, b_n *sono due successioni convergenti ad uno stesso numero reale* a *e se* c_n *è un'altra successione tale che*

(E.16) $$a_n \le c_n \le b_n, \qquad \forall\, n \in \mathbf{N},$$

allora anche c_n *converge al numero* a.

Sia b un numero reale fissato. La *successione potenza* è data da n^b (mediante il simbolo a_n, utilizzato per rappresentare una generica successione, dovremmo scrivere $a_n = n^b$).

Vediamo due esempi, per b = 2 e per b = − 1. Nel primo caso abbiamo

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	…	100	…	1000	…
n^2 (b = 2)	1	4	9	…	10000	…	10^6	…

e si vede facilmente che la successione diverge a +∞. Del resto, come limite di un prodotto, per $n \to +\infty$ risulta $n^2 = n \cdot n \to +\infty$.

Nel secondo caso abbiamo

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	…	100	…	1000	…
$1/n$ ($b = -1$)	1	1/2	1/3	…	0,01	…	10^{-3}	…

e si tratta della già nota successione $1/n$, che converge a zero per $n \to +\infty$.

Il risultato dipende dall'esponente b ed è diverso se $b > 0$, oppure se $b < 0$ (per $b = 0$ si ottiene il caso ovvio della successione costante, in cui $n^b = n^0 = 1 \to 1$). In generale vale il seguente schema

(E.17) $$\lim_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 0 & \text{se } b < 0 \end{cases}.$$

Ad esempio

(E.18) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad (b = 1/2), \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = 0 \quad (b = -3/2).$$

Sia a un numero reale fissato. La *successione esponenziale* è data da a^n (mediante il simbolo a_n, utilizzato per rappresentare una generica successione, dovremmo scrivere $a_n = a^n$, con $a \in \mathbf{R}$).

Consideriamo due esempi, per $a = 2$ e per $a = 1/2$. Nel primo caso abbiamo

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	…	100	…	1000	…
2^n ($a = 2$)	2	4	8	…	2^{100}	…	2^{1000}	…

e risulta $2^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Nel secondo caso, essendo $(1/2)^n = 1/(2^n) = 2^{-n}$, otteniamo

$n \in \mathbf{N}$	1	2	3	…	100	…	1000	…
$1/2^n$ ($a = 1/2$)	1/2	1/4	1/8	…	2^{-100}	…	2^{-1000}	…

e la successione $(1/2)^n$ converge a zero per $n \to +\infty$.

Il risultato dipende dalla base a ed è diverso se $a > 1$, oppure se $0 < a < 1$ (per $a = 1$ si ottiene il caso ovvio della successione costante, in cui $a^n = 1^n = 1 \to 1$). In generale vale lo schema

(E.19) $$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}.$$

Più in generale, anche prendendo in considerazione valori negativi (o nulli) della base a, vale la seguente formula per il limite della successione esponenziale

$$\text{(E.20)} \qquad \lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \textit{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Ad esempio

$$\text{(E.21)} \qquad \lim_{n\to+\infty} \pi^n = +\infty \ (a = \pi > 1), \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{57}\right)^n = 0 \ (a = 1/57 < 1),$$

mentre, per $a = -1$, si ottiene la successione $(-1)^n$ che, come già sappiamo, non ammette limite per $n \to +\infty$.

Molto importante è il limite seguente, in cui varia sia la base $(1 + 1/n)$ che l'esponente

$$\text{(E.22)} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

dove a secondo membro compare il *numero di Nepero* e, che è un numero reale compreso fra 2 e 3, che in forma decimale è approssimativamente uguale a 2,71.

Dicevamo che, nell'espressione analitica della successione, $a_n = (1 + 1/n)^n$, variano sia la base che l'esponente. Consideriamo di seguito due successioni b_n e c_n, simili (nell'espressione analitica, ma differenti nel comportamento al limite!) ad a_n, ottenute da a_n fissando una volta la base e un'altra volta l'esponente

$$\text{(E.23)} \qquad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\text{(E.24)} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100}, \qquad c_n = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n.$$

Nel caso di $b_n = (1 + 1/n)^{100}$, si tratta della successione $(1 + 1/n)$ moltiplicata per se stessa 100 volte. Dato che $(1 + 1/n) \to 1$ per $n \to +\infty$, per le operazioni sui limiti (limite del prodotto applicato più volte), risulta $b_n = (1 + 1/n)^{100} \to 1$ per $n \to +\infty$.

Nel caso di $c_n = (1 + 1/100)^n$, si tratta di una successione esponenziale, con base $1 + 1/100 > 1$, che quindi diverge a $+\infty$ per $n \to +\infty$, in base alla (E.19).

Vediamo quindi che fissando l'esponente (come in b_n) la tendenza della base è di avere un limite uguale ad 1, mentre fissando la base (come in c_n) la tendenza dell'esponente è di avere un limite uguale a $+\infty$. Pertanto la successione $a_n = (1 + 1/n)^n$ in (E.23) rappresenta una nuova forma indeterminata $1^{+\infty}$. Riportiamo un ulteriore elenco di forme indeterminate di tipo potenza-esponenziale.

ULTERIORI FORME INDETERMINATE. — *Sono forme indeterminate anche le seguenti espressioni*

$$1^{+\infty},\ 1^{-\infty},\ +\infty^0,\ 0^0. \tag{E.25}$$

In particolare la successione $a_n = (1 + 1/n)^n$ in (E.23) rappresenta una forma indeterminata del tipo $1^{+\infty}$, nel senso che la base tende ad 1, mentre l'esponente tende a $+\infty$. Il risultato del limite bilancia entrambe le tendenze (della base e dell'esponente) fra loro contrastanti, risultandone il limite indicato in (E.22), uguale al numero e, che è appunto un numero reale intermedio fra 1 e $+\infty$ (più precisamente compreso fra e 2 e 3).

F. Introduzione ai limiti di funzione e proprietà principali

Le definizioni per i *limiti di funzione* si formulano mediante disuguaglianze, in modo analogo a quanto fatto per i limiti di successione. Il lettore interessato potrà trovare maggiori dettagli nel capitolo 8; in questo paragrafo ci limitiamo a familiarizzare con tali limiti, partendo dalle analogie con i limiti di successione.

Ad esempio, il limite di funzione seguente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \tag{F.1}$$

è analogo al limite di successione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0, \tag{F.2}$$

e si interpreta dicendo che la funzione $f(x) = 1/x$ assume valori vicini allo 0 quando la variabile indipendente x diverge a $+\infty$.

Più precisamente, di dice che *la funzione* $f(x)= 1/x$ *converge al limite* $\ell = 0$ *per* $x \to +\infty$ *se, qualunque sia il numero* ε *positivo fissato, esiste in corrispondenza un numero* k *tale che*

(F.3) $$|f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

per ogni $x > k$. *In tal caso si scrive*

(F.4) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \qquad (\textit{oppure}\ f(x) \to \ell \ \ \textit{per} \ \ x \to +\infty).$$

Analoghe definizioni si danno per il caso in cui $x \to x_0 \in \mathbf{R}$

(F.5) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \ \ (f(x) \to \ell \ \ \textit{per} \qquad x \to x_0),$$

oppure per il limite infinito (consideriamo il caso di limite $+\infty$, essendo analogo il caso di limite $-\infty$)

(F.6) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \ \ (f(x) \to +\infty \ \ \textit{per} \quad x \to x_0).$$

Altre combinazioni sono possibili, ad esempio il caso di limite uguale a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

Il lettore interessato ad approfondire questo argomento potrà trovare maggiori dettagli nel capitolo 8.

Per i limiti di funzione valgono analoghe proprietà dei limiti di successione. In particolare valgono le operazioni con i limiti. Quindi ad esempio dal limite in (F.1) otteniamo

(F.7) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

e così pure

(F.8) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Utilizzando le *operazioni con i limiti*, calcoliamo il seguente limite del rapporto di due *polinomi*

(F.9) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x + 1}{x^3 - 3x^2 + 15x - 6}.$$

Mettendo in evidenza sia a numeratore che a denominatore una stessa potenza della variabile x (quella con l'esponente più grande), otteniamo il limite equivalente

(F.10) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(2+7\cdot\frac{1}{x}-4\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-3\cdot\frac{1}{x}+15\cdot\frac{1}{x^2}-6\cdot\frac{1}{x^3}\right)},$$

da cui, semplificando sia il numeratore che il denominatore per x^3 e ricordando che sia $1/x$ che $1/x^2$, $1/x^3$ convergono a zero per $x \to +\infty$ (si veda (F.8)), otteniamo il valore del limite

(F.11) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2+7\cdot\frac{1}{x}-4\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-3\cdot\frac{1}{x}+15\cdot\frac{1}{x^2}-6\cdot\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Il lettore verifichi, eseguendo il calcolo con lo stesso metodo, che per i limiti seguenti si ottengono i risultati indicati

(F.12) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{2x^3 - x + 12} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^5 + x^2 + 1}{24x^5 - x + 9} = \frac{5}{24},$$

(F.13) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^3-2x+5} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^2-2x+5} = +\infty.$$

Un limite notevole, analogo al limite di successione (E.22), è il seguente

(F.14) $$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Come esercizio, calcoliamo il limite

(F.15) $$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x.$$

Con i passaggi seguenti ci riconduciamo al limite precedente (F.14) ponendo $y = x/2$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^x =$$

(F.16)
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{x/2}\right]^2 =$$

$$+ \lim_{y\to+\infty}\left[\left(\ 1+\frac{1}{y}\ \right)^y\right]^2 = e^2.$$

Con lo stesso metodo di calcolo, il lettore verifichi che valgono le relazioni di limite seguente (nel secondo caso si noti che $1/x^2 \to +\infty$ quando $x \to 0$)

(F.17)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}, \qquad \lim_{x\to 0}(1+2x^2)^{3/x^2} = e^6.$$

Talvolta si prendono in considerazione *limiti destri* e *sinistri* in un punto x_0. Ad esempio la funzione $f(x) = 1/x$ non è definita in corrispondenza di $x = 0$; è quindi naturale porsi il problema del "comportamento" di tale funzione quando x "si avvicina" al valore $x_0 = 0$, separatamente per $x > x_0$ o per $x < x_0$. In generale diremo che stiamo valutando un *limite destro* (per x che tende a x_0^+), oppure un *limite sinistro* (per x che tende a x_0^-). Nel caso specifico abbiamo

(F.18)
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty,$$

e ciò è evidenziato nel grafico della funzione $f(x) = 1/x$ in figura 0.29, in cui risulta che f(x) assume valori "grandi" ($f(x) \to+\infty$) quando x "si avvicina" ad $x_0 = 0$ da destra ($x \to 0^+$), mentre f(x) assume valori "grandi, ma di segno negativo" ($f(x) \to -\infty$) quando x "si avvicina" ad $x_0 = 0$ da sinistra ($x \to 0^-$).

Terminiamo questo paragrafo prendendo in considerazione alcuni limiti notevoli di funzioni trigonometriche. Cominciamo con i limiti seguenti

(F.19)
$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}x = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\cos x = 1,$$

che hanno una interpretazione molto intuitiva, nel senso che, ad esempio, la funzione senx assume valori "vicini" allo 0 (che è appunto il valore della funzione in corrispondenza di x = 0, cioè è il valore sen0) quando x "si avvicina" a 0. Analogamente, cosx assu-

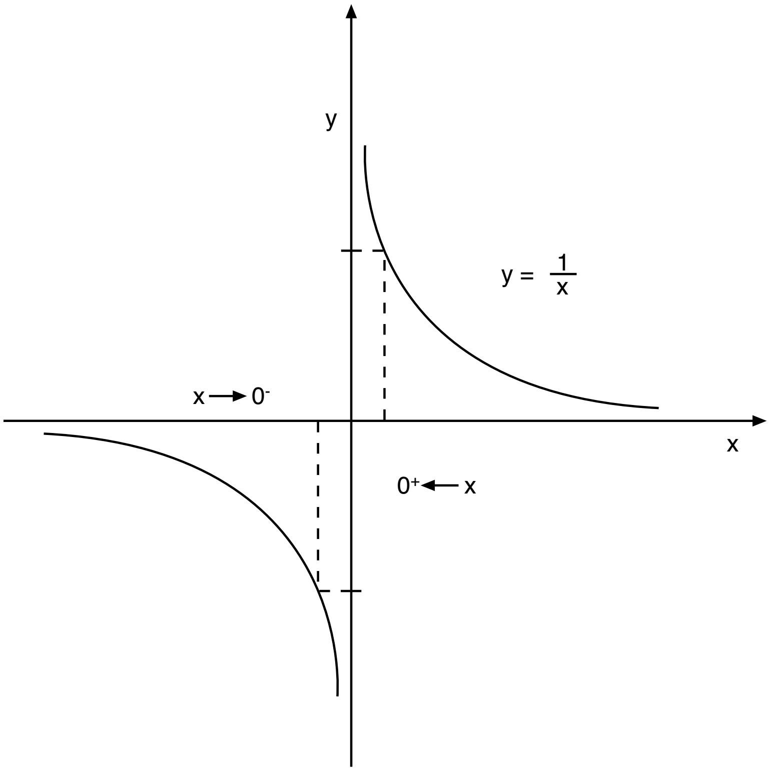


Figura 0.29

me valori "vicini" a 1 (che è il valore della funzione in corrispondenza di x = 0, cioè è il valore cos0) quando x "si avvicina" a 0. Esamineremo di nuovo questi concetti nel paragrafo che segue, a proposito delle *funzioni continue*.

Un limite fondamentale di funzione trigonometrica è il seguente

(F.20) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1.$$

Dimostriamo tale relazione di limite riprendendo in considerazione le disuguaglianze in (C.22), che riscriviamo qui di seguito

(F.21) $$0 < \operatorname{sen}x < x < \operatorname{tg}x, \qquad \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Quindi, per ogni $x \in (0, \pi/2)$, abbiamo

(F.22) $$\operatorname{sen}x < x < \operatorname{tg} = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x},$$

da cui, dividendo tutti i membri per senx > 0 e considerando i reciproci (per cui occorre cambiare il verso delle disuguaglianze), otteniamo

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen}x} < \frac{1}{\cos x}\,; \tag{F.23}$$

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen}x}{x} < 1. \tag{F.24}$$

Tali disuguaglianze valgono per ogni $x \in (0, \pi/2)$, quindi con la limitazione $x > 0$. Però, se $x < 0$, ponendo nelle (F.24) $y = -x$ (si noti che $y > 0$) risulta

$$\cos y < \frac{\operatorname{sen}y}{y} < 1, \tag{F.25}$$

da cui, essendo $\cos y = \cos(-x) = \cos x$, $\operatorname{sen}y = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}x$, otteniamo

$$\cos x < \frac{-\operatorname{sen}x}{-x} = \frac{\operatorname{sen}x}{x} < 1 \tag{F.26}$$

cioè di nuovo la (F.24). Pertanto la (F.24) vale per ogni $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $x \neq 0$.

Passando al limite per $x \to 0$ nella (F.24), dato che $\cos x \to 1$, per il teorema dei carabinieri (applicato ai limiti di funzioni, invece che alle successioni) la funzione intermedia $\operatorname{sen}x/x$ converge anch'essa ad 1.

Per finire calcoliamo i seguenti limiti (il primo dei quali sarà utilizzato per determinare la *derivata* delle funzioni senx e cosx)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0; \tag{F.27}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{F.28}$$

Infatti, nel caso del limite in (F.27), moltiplichiamo numeratore e denominatore per la quantità $1 + \cos x$, ottenendo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x\cdot(1+\cos x)} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cdot(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = 1\cdot 0\cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned} \tag{F.29}$$

Il limite in (F.28) si risolve in modo analogo. Comunque il conto esplicito è proposto nel paragrafo 73.

G. Cenni sulle funzioni continue

C'è una sostanziale differenza tra le due funzioni f(x) e g(x) definite di seguito

(G.1) $$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

(G.2) $$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

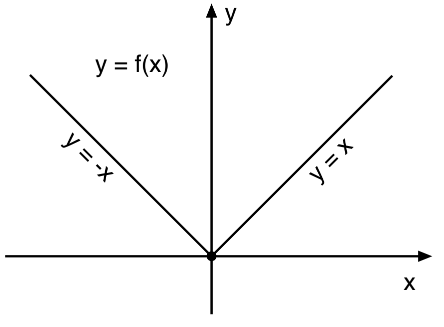


Figura 0.30

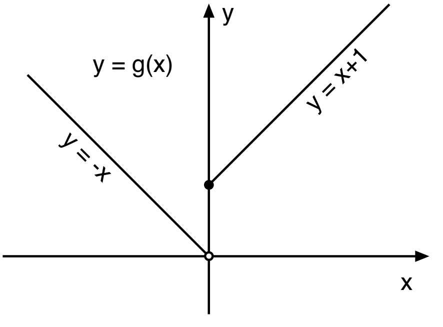


Figura 0.31

La prima delle due funzioni f(x) = |x| è la funzione *valore assoluto*, già vista nel paragrafo C. Si dice che le due funzioni sono *lineari a tratti*, nel senso che i loro grafici sono costituiti da *tratti di linea retta*. È quindi facile disegnarne i rispettivi grafici; il lettore provi da solo a rappresentare le due funzioni *per punti*, cioè assegnando alcuni valori alla variabile indipendente x e determinando in corrispondenza i valori y = f(x) e y = g(x), raccordando poi i punti di coordinate (x, y) con segmenti di retta.

I grafici delle due funzioni sono rappresentati nelle figure 0.30 e 0.31. Si nota che, in corrispondenza del valore della variabile indipendente $x_0 = 0$, il grafico della funzione g(x) presenta una "*discontinuità*", a differenza del grafico della funzione f(x), che invece anche nel punto $x_0 = 0$ è "*continuo*".

La proprietà analitica che differenzia i due casi è la seguente: per f(x) in $x_0 = 0$ vale la relazione di limite

(G.3) $$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

mentre nel caso della funzione g(x) il limite per $x \to 0$ *non esiste*, risultando fra loro differenti i limiti destro e sinistro; infatti si ha

(G.4) $$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} g(x) = 0.$$

Diremo che la funzione f(x) è *continua* per $x_0 = 0$ (ed anzi f(x) è continua in tutti i punti $x_0 \in \mathbf{R}$). Diremo invece che la funzione g(x) è *discontinua* per $x_0 = 0$ (mentre g(x) risulta continua in tutti i punti $x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \neq 0$).

In generale, si dice che una funzione f(x), definita in un intervallo contenente x_0, è *continua* in x_0 se

(G.5) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si dice poi che la funzione f(x) è *continua in un intervallo* se essa è continua in tutti i punti dell'intervallo.

Le funzioni continue su di un intervallo soddisfano proprietà importanti, molte delle quali sono discusse nel paragrafo 76. In questa sede riportiamo una di tali proprietà, perché ne faremo uso in particolare per dedurne il *teorema della media* sugli *integrali definiti* (si veda il paragrafo 115).

Occorre premettere che, se f(x) è una funzione definita in un intervallo [a, b], diremo che il *minimo* della funzione in [a, b] (se esiste) è un valore $f(x_1)$ della funzione più piccolo di tutti gli altri valori. In formula $f(x_1)$ è il valore di minimo della funzione f(x) in [a, b] se

(G.6) $$f(x_1) \leq f(x), \qquad \forall x \in [a, b].$$

Analogamente il *massimo* della funzione f(x) in [a, b] (se esiste) è un valore $f(x_2)$ della funzione più grande di tutti gli altri valori. In formula $f(x_2)$ è il valore di *massimo* di f(x) in [a, b] se

(G.7) $$f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in [a, b].$$

La proprietà in esame è la seguente:

TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI. — *Una funzione continua in un intervallo* [a, b] *assume tutti i valori compresi fra il massimo ed il minimo.*

Una funzione definita in un intervallo [a, b], ma *discontinua* in alcuni punti dell'intervallo, può non assumere tutti i valori compresi fra il valore minimo ed il valore massimo. Ciò è quanto accade per la funzione rappresentata in figura 0.32, che è discontinua in corrispondenza al punto x_0. Il teorema precedente afferma che se invece la funzione è continua, allora deve necessariamente assumere tutti i valori intermedi fra il minimo $f(x_1)$ ed il massimo $f(x_2)$.

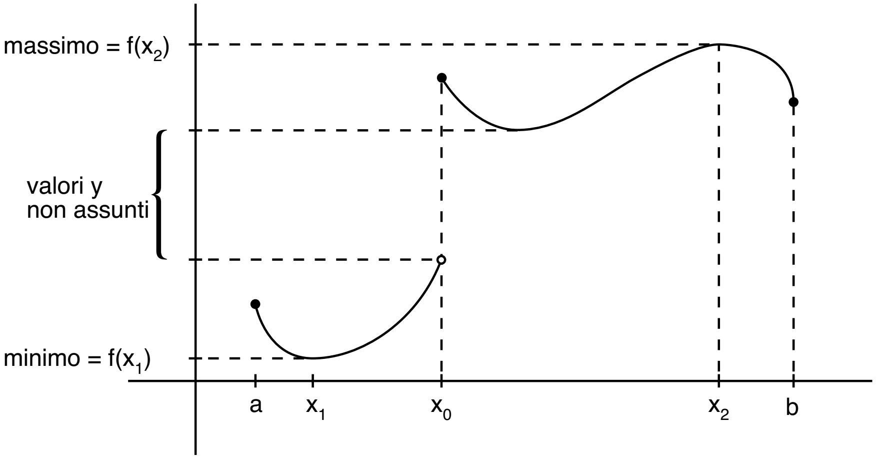


Figura 0.32

APPROFONDIMENTI

CAPITOLO 1

A.1.1.) Siano $a_1, a_2, \cdots, a_n$ numeri reali e poniamo $s_n = \sum_{r=1}^{n} a_r$. Dimostrare la formula di "addizione per parti "

$$\sum_{r=1}^{n} r a_r = (n+1)s_n - \sum_{r=1}^{n} s_r. \tag{A.1.1.}$$

[Consideriamo la matrice con n righe uguali a $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{matrix}$$

La somma dei termini della parte triangolare superiore, incluso la diagonale è

$$\sum_{r=1}^{n} r a_r$$

,

mentre la somma dei termini rimanenti, considerata per righe è uguale a

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} = \sum_{r=1}^{n-1} s_r,$$

ossia, si ha

$$n s_n = \sum_{r=1}^{n} r a_r + \sum_{r=1}^{n-1} s_r \quad]$$

A.1.2.) Utilizzando il risultato dell'approfondimento precedente, si dimostri la formula

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{(n+1)n}{2} \tag{A.1.2.}$$

[Scegliendo $a_r = 1$ per $r = 1, 2, \vdots, n$ si ha in questo caso $s_r = a_1 + a_2 + \vdots + a_r = r$ e la (A.1.1) diventa

$$\sum_{r=1}^{n} r = (n+1)n - \sum_{r=1}^{n} r$$

da cui evidentemente segue

$$2\sum_{r=1}^{n} r = (n+1)n$$

e quindi la tesi (A.1.2)]

A.1.3.) Utilizzando il risultato dell'approfondimento precedente, si dimostri la formula

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

per la somma dei quadrati degli interi.

[Essendo $a_r = r$, si ha $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ e poi

$$\sum_{r=1}^{n} r \cdot r = (n+1)\frac{1}{2}n(n+1) - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2}r(r+1)$$

da cui

$$\frac{3}{2}\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{2}\,n(n+1)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

e facilmente l'asserto.]

A.1.4.) Utilizzando il metodo di "addizione per parti "dell' Approfondimento A.1.1., si dimostri la formula

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

per la somma dei cubi degli interi.

[Essendo questa volta $a_r = r^2$ si ha $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ e poi

(1)

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n} r \cdot r^2 &= (n+1)\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{6} r(r+1)(2r+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)^2(2n+1) - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{6}\left(r + 3r^2 + 2r^3\right) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)^2(2n+1) - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{6}\left(r + 3r^2 + 2r^3\right) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)^2(2n+1) - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{n} r^3 \\
&= \frac{1}{12}n(n+1)(4n^2+4n) - \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{n} r^3
\end{aligned}
$$

da cui l'asserto.]

CAPITOLO 3

A.3.1.) Risolvere la disequazione irrazionale

$$\sqrt{\text{sen } x} \leq 1 - \cos x \tag{3.1}$$

[La disequazione data equivale al sistema (si veda il paragrafo 3E)

$$\begin{cases} \text{sen } x \leq (1-\cos x)^2 \\ \text{sen } x \geq 0 \\ 1-\cos x \geq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

che a sua volta equivale al sistema

$$\begin{cases} \text{sen } x \leq (1-\cos x)^2 \\ \text{sen } x \geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

essendo, per la seconda disequazione in (3.3)

$$\text{sen } x = \sqrt{1-\cos^2 x}$$

la prima disequazione in (3.3) si può riscrivere nella forma

$$\sqrt{1-\cos^2 x} \leq (1{-}\cos x)^2. \tag{3.4}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (10.4) si ottiene

$$(1{-}\cos x)(1{+}\cos x) \leq (1{-}\cos x)^4. \tag{3.5}$$

Se risulta $\cos x = 1$, la (3.5) è senz' altro soddisfatta con il segno di uguaglianza; se invece $\cos x \neq 1$ dividendo ambo i membri per $1 - \cos x$ si ottiene

$$1 + \cos x \leq (1-\cos x)^3$$

che equivale alla disequazione

$$\cos x \left(\cos^2 x - 3\cos x + 4\right) \leq 0. \tag{3.6}$$

Essendo $t^2 - 3t + 4 > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ la (10.6) è equivalente a

$$\cos x \leq 0. \tag{3.7}$$

Tenendo conto di quanto finora stabilito il sistema (10.3) equivale al sistema

$$\begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x \geq 0 \end{cases} \qquad o \qquad \cos x = 1 \tag{3.8}$$

le cui soluzioni sono $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$ ovvero $x = 2h\pi$ con $h, k \in \mathbb{Z}$.]

CAPITOLO 4

1) Determinare l'insieme dei punti z del piano complesso per cui

$$P(z) = z^2 - 2\bar{z} + 1 \in \mathbb{R}$$

[Posto $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $z^2 - 2\bar{z} + 1 = x^2 - y^2 + 2ixy - 2x + 2iy + 1 =$
$\big(x^2 - 2x - y^2 + 1\big) + 2i(xy + y)$.
Evidentemente,

$$P(z) \in \mathbb{R} \ \text{ se e solo se } \ xy + y = 0$$

ovvero se e solo se

$$x = -1 \text{ o } y = 0$$

Pertanto, l'insieme da determinare è l'unione delle rette di equazioni $x = -1$ e $y = 0$]

2) Ricordando che la notazione di tipo esponenziale per i numeri complessi è $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, essendo dati i numeri complessi,

$$z_1 = -1 - i \quad \text{ e } \quad z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(a) Scrivere in forma algebrica $\dfrac{z_1}{z_2}$.
(b) Scrivere in forma esponenziale z_1 e z_2.

[(a) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(-1-i)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = (-1-i)\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$;
(b) $z_1 = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{3}{4}\pi}, \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$]

3) Dati i numeri complessi

$$z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{6} \qquad z_2 = 1 + i$$

esprimere in forma esponenziale il numero

$$z = \frac{z_1}{(z_2)^3}$$

[Poiché $|z_1| = 2\sqrt{2}$, si può scrivere $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ in forma esponenziale. Analogamente, essendo $|z_2| = \sqrt{2}$, si scrive

$$z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Da cui, $z = \frac{z_1}{(z_2)^3} = \frac{2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}}{(\sqrt{2})^3\,e^{i\frac{3\pi}{4}}} = e^{-i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3}{4}\pi\right)} = e^{-i\frac{13\pi}{12}}$.]

4) Calcolare il prodotto tra i numeri complessi

$$\left[2\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]\left[8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

in forma trigonometrica ed in forma algebrica.

[I due numeri complessi sono assegnati in forma trigonometrica $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $\rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ e ricordiamo la regola della moltiplicazione

$$\begin{aligned}
&[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]\left[\rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')\right] = \\
&= \rho\rho'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i\sin\theta\sin\theta' + i\cos\theta\cos\theta') = \\
&= \rho\rho'\left[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right]
\end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned}
&\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]\left[8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right] = 16\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right] = \\
&= 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 16(0+i) = 0 + 16i.
\end{aligned}$$

Ricordando i valori notevoli delle funzioni goniometriche, si ha:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

$$8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4 + 4\sqrt{3}i$$

e pertanto si ha il prodotto in forma algebrica

$$\left(\sqrt{3}+i\right)\left(4+4\sqrt{3}i\right) = 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + i(4+12) = 0 + 16i\,]$$

5) Determinare la forma algebrica del numero complesso

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{10}$$

[Utilizzando la formula di de Moivre, con $n \in \mathbb{N}$

$$[r\,(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ed osservando che

$$1+\sqrt{3}i = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\,(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ove $\theta = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$, si ha

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10}{3}\pi + i\sin\frac{10}{3}\pi\right) = 2^{10}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) =$$

$$= 1024\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -512 - 512\sqrt{3}i\,]$$

6) Determinare le tre radici cubiche del numero $z = -1$.

[Il numero complesso $z = -1$ è in realtà un numero reale, perciò nella sua rappresentazione trigonometrica $z = -1 = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ sarà $\rho = 1$ e l'argomento θ deve soddisfare la relazione $\sin\theta = 0$ ovvero $\theta = \pi + 2k\pi$. Pertanto le radici cubiche sono rappresentate da

$$w_k = \cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3} \quad \text{con } k = 0, 1, 2$$

Cioè

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ w_1 &= \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\ w_2 &= \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\,] \end{aligned}$$

7) Determinare le cinque radici quinte del numero $z = 2$.

[Essendo

$$2 = 2\,[\cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi)]$$

e ricordando la forma trigonometrica delle radici n–esime w_k di $z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ cioè

$$w_k = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

corrispondenti ai valori $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ si ha nel caso in esame $\theta = 0, n = 5$ e

$$w_k = 2^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}\right)$$

Da cui

$$\begin{aligned} w_0 &= 2^{\frac{1}{5}}\,(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{\frac{1}{5}} \\ w_1 &= 2^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right) \\ w_2 &= 2^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi\right) \\ w_3 &= 2^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi\right) \\ w_4 &= 2^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{8}{5}\pi + i\sin\frac{8}{5}\pi\right)] \end{aligned}$$

8) Dimostrare le formule di duplicazione

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

mediante applicazione della formula di de Moivre per la potenza n–esima con $n = 2$.

[La formula di de Moivre

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

implica che

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

Sviluppando il quadrato a primo membro troviamo

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^2 &= \cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta + i^2\sin^2\theta = \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

Da cui segue subito l'asserto.]

CAPITOLO 5

A.5.1.) Verificare che per ogni coppia di matrici 2×2 A e B si ha

$$\det (A - B) = \det A - (\operatorname{adj} A)^t \, B + \det B$$

ove $\operatorname{adj} A$ è la matrice definita da

$$A \operatorname{adj} A = (\det A) \, I.$$

<u>Dim</u> $(\operatorname{adj} A)^t \, B$ è lineare negli elementi a_{ij} di A.

A.5.2.) Siano A e B due matrici 2×2 simmetriche tali che

$$\det A = \det B > 0 \qquad\qquad \det (A - B) = 0$$

verificare che $A = B$.

<u>Dim</u> Sia

$$C = A^{-\frac{1}{2}} \, B \, A^{\frac{1}{2}}$$

dove $A^{-\frac{1}{2}}$ è la matrice inversa della radice quadrata $A^{\frac{1}{2}}$ della matrice A. Allora C è simmetrica e si ha

$$\det C = \frac{\det B}{\det A} = 1.$$

Inoltre

$$A - B = A^{\frac{1}{2}} (I - C) A^{\frac{1}{2}}$$

e quindi, per ipotesi

$$0 = \det (A - B) = (\det A)^{\frac{1}{2}} \det (I - C) \, (\det A)^{\frac{1}{2}}$$

pertanto

$$0 = \det (I - C) \; = 1 - \operatorname{tr} C + \det C = 2 - \operatorname{tr} C.$$

Posto

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

si ha

$$(a + c)^2 = (\operatorname{tr} C)^2 = 4 = 4\det C = 4ac - 4b^2$$

e perciò

$$(a - c)^2 = -4b^2$$

cioè $a = c$ e $b = 0$. Poiché si è già visto che $\operatorname{tr} C = 2$, si ricava $a = c = 1$.

A.5.3.) Dati due vettori $E = (E_1, E_2)$ e $B = (B_1, B_2)$ di $\mathbb{R}^2$ soddisfacenti la condizione di non ortogonalità

$$\langle B, E\rangle = \sum_{i=1}^{2} E_i B_i > 0$$

verificare che esiste un'unica matrice 2×2 simmetrica A tale che

$$\det \mathcal{A} = 1 \qquad\qquad \mathcal{A}E = B$$

<u>Dim</u> Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, verifichiamo che

$$a = \frac{B_1^2 + E_2^2}{\langle B, E\rangle}$$

$$b = \frac{B_1 B_2 - E_1 E_2}{\langle B, E\rangle}$$

$$c = \frac{B_2^2 + E_1^2}{\langle B, E\rangle}$$

Si fa verifica diretta per $\mathcal{A}E = B$. Se poi $\mathcal{C}$ fosse un'altra matrice con $\det \mathcal{C} = 1$ per cui

$$\mathcal{A}E = B = \mathcal{C}E$$

allora avremmo un vettore non nullo E per cui

$$(\mathcal{A} - \mathcal{C})(E) = 0$$

quindi $\det(\mathcal{A} - \mathcal{C}) = 0$ e per l'esercizio precedente $\mathcal{A} = \mathcal{C}$.

A.5.4.) Sia A una matrice 2×2 verificante la condizione $\det A > 0$ e sia

$$B = \frac{A^t\,A}{\det A}.$$

Allora $\det B = 1$, inoltre, fissato $K \geq 1$, le condizioni

$$\frac{|\xi|^2}{K} \leq \langle A\xi, \xi\rangle \leq K|\xi|^2 \tag{1}$$

e

$$\operatorname{tr} A^t\,A \leq \left(K + \frac{1}{K}\right)\det A \tag{2}$$

sono equivalenti.

<u>Dim</u> La condizione (2) equivale a

$$\operatorname{tr} B \leq K + \frac{1}{K} \tag{3}$$

Inoltre se λ e $1/\lambda$ sono gli autovalori di B (necessariamente l'uno l'inverso dell'altro, grazie al fatto che $\det B = 1$), la (3) equivale a

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} \leq K + \frac{1}{K}$$

e ciò equivale a dire che $\dfrac{1}{K} \leq \lambda \leq K$.

CAPITOLO 7

A.7.1) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(5n+2)}{\log n}$$

[Utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ha

$$\log(5n+2) = \log\left[n\left(5+\frac{2}{n}\right)\right] = \log n + \log\left(5+\frac{2}{n}\right),$$

da cui

$$\frac{\log(5n+2)}{\log n} = 1 + \frac{\log\left(5+\frac{2}{n}\right)}{\log n}$$

Per $n \to +\infty$, $\log\left(5+\frac{2}{n}\right) \to \log 5$, mentre $\log n \to +\infty$. Pertanto il limite dato vale 1.]

A.7.2) Generalizzando l'esercizio precedente, calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(an^{\alpha}+b\right)}{\log\left(cn^{\beta}+d\right)},$$

dove $a, b, c, d, \alpha, \beta$ sono numeri reali positivi fissati.

[Per le proprietà dei logaritmi risulta

$$\begin{aligned}\log(an^{\alpha}+b) &= \log\left[n^{\alpha}(a+bn^{-\alpha})\right]\\ &= \alpha\log n + \log\left(a+bn^{-\alpha}\right)\end{aligned}$$

e analogamente per $\log\left(cn^{\beta}+d\right)$.

Si ottiene la scomposizione

$$\begin{aligned}\frac{\log(an^{\alpha}+b)}{\log\left(cn^{\beta}+d\right)} &= \frac{\alpha\log n + \log\left(a+bn^{-\alpha}\right)}{\beta\log n + \log\left(c+dn^{-\beta}\right)}\\ &= \frac{\alpha + \dfrac{\log\left(a+bn^{-\alpha}\right)}{\log n}}{\beta + \dfrac{\log\left(c+dn^{-\beta}\right)}{\log n}}\end{aligned}$$

e si verifica facilmente che l'ultimo membro converge a $\frac{\alpha}{\beta}$ per $n \to +\infty$.]

A.7.3) Calcolare i limiti

$$(a) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(2n^3+1)}$$

$$(b) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(5n+1)+\log(n+3)}{\log(n^2+1)}$$

$$(c) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+2)+\log(n^2+2)}{\log(6n+1)}$$

[(a) Con il metodo dell'esercizio precedente il risultato vale $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{3}$.
(b) si tratta della somma di due frazioni del tipo considerato nell'esercizio precedente. Cioè, il limite dato è dalla forma

$$\frac{\log(5n+1)}{\log(n^2+1)} + \frac{\log(n+3)}{\log(n^2+1)}$$

che, per $n \to +\infty$, converge a $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Pertanto il limite dato vale 1.
(c) Per $n \to +\infty$ si ottiene il valore del limite $1 + 2 = 3$. Infatti

$$\frac{\log(n+2)}{\log(6n+1)} = 1,$$

$$\frac{\log(n^2+2)}{\log(6n+1)} = 2. \ ]$$

CAPITOLO 8

A.8.1) Verificare le seguenti relazioni di limite

$$(a) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^x} = 0$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^x} = +\infty$$

[(a) Per $x > e$ risulta $\frac{e}{x} < 1$ e, più precisamente, ad esempio per $x > 2e$,

$$\frac{e}{x} < \frac{e}{2e} = \frac{1}{2},$$

da cui

$$\frac{e^x}{x^x} = \left(\frac{e}{x}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

per ogni $x > 2e$. Ne segue che $\frac{e^x}{x^2} \to 0$ per $x \to +\infty$.
(b) Risulta $e^{x^2} = e^{x \cdot x} = (e^x)^x$. Da cui

$$\frac{e^{x^2}}{x^x} = \frac{(e^x)^x}{x^x} = \left(\frac{e^x}{x}\right)^x.$$

Dato che $\frac{e^x}{x} \to +\infty$ per $x \to +\infty$, il limite dato vale $+\infty$.]

A.8.2) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4^{x^2} + x}}{2^{x^2} - \log(x^2 + 1)}.$$

[Risulta $\sqrt{4^{x^2}} = \sqrt{(2x^2)^2} = 2x^2$, da cui, mettendo a fattore comune tale quantità sia a numeratore che a denominatore, si ottiene il valore finale del limite uguale ad 1.]

A.8.3) Calcolare i limiti di funzione

$$(a) \qquad \lim_{x\to 0^+} (1 - \text{ sen } 2x)^{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{x^2 + \text{ sen } 3x}$$

[(a) e^{-2}; (b) $\frac{4}{3}$]

CAPITOLO 9

A.9.1.) Sia $f : [a,b] \xrightarrow{su} [c,d]$ una funzione invertibile e continua insieme con la sua inversa $f^{-1} : [c,d] \xrightarrow{su} [a,b]$. Verificare che f è strettamente monotòna.

<u>Dim</u> Facciamo vedere che :
a) per ogni coppia x_1, x_2 di punti distinti di $[a,b]$ vale l'implicazione

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(x_1) = \min\limits_{I[x_1,x_2]} f \\ f(x_2) = \max\limits_{I[x_1,x_2]} f \end{cases} \tag{9.1}$$

ove, con $I[x_1, x_2]$ indichiamo l'intervallo chiuso di estremi il $\min\{x_1, x_2\}$ e $\max\{x_1, x_2\}$.
Supponiamo, per fissare le idee, che sia $x_1 < x_2$ e supponiamo per assurdo che esista $x \in]x_1, x_2[$ tale che $f(x) < f(x_1)$ (risp. $f(x) > f(x_1)$).
Allora si avrebbe

$$f(x) < f(x_1) < f(x_2) \qquad\qquad (\text{risp.} \quad f(x_1) < f(x_2) < f(x))$$

e quindi, poiché la restrizione di f a $[x, x_2]$ (risp. $[x_1, x]$) è continua, per il teorema di Bolzano esisterebbe

$$c \in]x, x_2[\qquad\qquad (\text{risp.} \quad c \in]x_1, x[)$$

tale che $f(c) = f(x_1)$ (risp. $f(c) = f(x_2)$) e ciò contrasta con l'iniettività di f.
Dunque l'implicazione (9.1) è soddisfatta e da essa segue che f è crescente o decrescente.
Supponiamo, a tale scopo

$$f(a) < f(b).$$

Allora, per (9.1),

$$f(a) = \min_{[a,b]} f, \qquad\qquad f(b) = \max_{[a,b]} f.$$

Indicati con x_1 e x_2 due punti di $[a,b]$ tali che $x_1 < x_2$ essendo ovviamente $f(x_1) < f(b)$ si ha, sempre per (9.1)

$$f(x_1) = \min_{[x_1,b]} f$$

da cui $f(x_1) < f(x_2)$. Cioè f è crescente.
Analogamente si prova che, se $f(a) > f(b)$, la f è decrescente.

A.9.2) L'insieme dei punti di discontinuità di una funzione monotòna $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è al più numerabile.

Dim Ricordando che i punti di discontinuità $x_0 \in]a,b[$ di f sono di prima specie, cioè esistono finiti i limiti sinistro e destro di f in x_0 che indichiamo:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$$

chiamiamo salto di f in x_0 la differenza

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$$

Evidentemente la somma di un numero finito di salti di f è minore o uguale a $f(b) - f(a)$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero di salti maggiori di $\frac{1}{n}$ è finito. Calcolando la somma per $n = 1, 2, \ldots$ si vede che il numero totale dei salti è finito o numerabile.

CAPITOLO 10

A.10.1.) Siano ε, $\delta > 0$ allora per ogni $a \geq 0$

$$|a - a^{1-\varepsilon}| \leq \varepsilon \left(2 + \frac{a^{1+\delta}}{\delta}\right)$$

purché $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

<u>Dim.</u> Partendo dalla ben nota disuguaglianza (es. 1.50, 1.53 e 1.54 da Esercitazioni I/2)

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$$

per ogni $x > 0$ e ponendo ivi $x = a^{\varepsilon}$, si ha

$$1 - a^{-\varepsilon} \leq \varepsilon \log a \leq a^{\varepsilon} - 1$$

con $\varepsilon > 0$. Da cui

$$a - a^{1-\varepsilon} \leq \varepsilon\, a \log a \leq \varepsilon\, a\, \frac{a^{\delta} - 1}{\delta} \leq \varepsilon \frac{a^{1+\delta}}{\delta}.$$

Analogamente per $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

$$a - a^{1-\varepsilon} \geq \varepsilon\, a^{1-\varepsilon} \log a > \varepsilon\, \frac{a^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}(1 - a^{\varepsilon-1}) \geq -2\varepsilon$$

da cui l'asserto.

A.10.2.) Per ogni $a > 0$ esiste $c = c(a)$ tale che per $0 \leq \varepsilon \leq a$ e per ogni s, $t \geq 0$ si ha

$$t[\log(1+s)]^a \leq s[\log(1+s)]^{a-\varepsilon} + c(a)t[\log(1+t)]^a \tag{10.1}$$

<u>Dim.</u> Essendo la funzione $g(s) = [\log(1+s)]^a$ crescente, si ha

$$t[\log(1+s)]^a \leq s[\log(1+s)]^a + t[\log(1+t)]^a$$

e perció la (10.1) sussiste con $c(a) = 1$ se si suppone $\log(1 + s) \leq 1$. La disuguaglianza (10.1) è ovvia anche nel caso $t[\log(1 + s)]^\varepsilon \leq s$, per cui supponiamo, d'ora in avanti, che

$$\log(1 + s) \geq 1 \qquad\qquad t[\log(1 + s)]^\varepsilon \geq s$$

in modo che sia

$$\frac{s}{[\log(1 + s)]^a} \leq t \tag{10.2}$$

e verifichiamo che esiste $c = c(a)$ tale che $[\log(1 + s)]^a \leq c(a)\,[\log(1 + t)]^a$.

Osserviamo in primo luogo che (10.2) implica evidentemente

$$\log(1 + t) \geq \log\left(1 + \frac{s}{[\log(1 + s)]^a}\right) \geq$$

$$\log\left(\frac{1 + s}{[\log(1 + s)]^a}\right) = \log(1 + s) - a \log\log(1 + s). \tag{10.3}$$

D'altra parte esiste x_0 in funzione di a, tale che

$$x \geq x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x}{2} \geq a \log x$$

e per $a \leq 1$ si puó scegliere $x_0 = 1$. Pertanto per $a \leq 1$ e per $\log(1 + s) \geq x_0$ se $a > 1$, dalla (10.3) segue

$$[\log(1 + s)]^a \leq 2^a[\log(1 + t)]^a.$$

Resta da trattare il caso $a > 1$ e $\log(1 + s) \leq x_0$. Dalla (10.2) si ricava che, posto

$$t(a) = \inf\left\{\frac{\tau}{[\log(1 + \tau)]^a} \ : \ \tau > 0\right\}$$

si ha

$$t \geq t(a) > 0$$

per cui

$$[\log(1+s)]^a \leq x_0^a \leq \frac{x_0^a}{[\log(1+t(a))]^a} \cdot [\log(1+t)]^a$$

da cui segue l'asserto.

A.10.3.) Siano $a \geq 1$ e $b \geq 0$. Allora per ogni $\lambda > 0$

$$ab \leq e^{\lambda\, a} + \frac{2b}{\lambda}\log(e + \frac{b}{\lambda})$$

Dim. Se $ab \leq e^{\lambda\, a}$, la disuguaglianza è ovvia. Dunque possiamo supporre che

$$e^{\lambda\, a} < ab.$$

In tal caso la disuguaglianza ben nota $x^2 < e^x$ per ogni $x \geq 0$, implica che

$$\lambda^2 a^2 \leq e^{\lambda\, a} < ab.$$

Perció otteniamo le disuguaglianze

$$e^{\lambda\, a} \leq ab < \frac{b^2}{\lambda^2}$$

che implicano

$$ab < \frac{2b}{\lambda}\log(e + \frac{b}{\lambda})$$

A.10.4.) Per ogni $a < 0$ si ha

$$\frac{(1+x)^{1+\alpha} - 1}{x} \leq (1+x)^\alpha$$

per ogni $x > 0$.

Dim. Basta osservare che

$$\frac{(1+x)^{1+\alpha} - 1}{x(1+x)^\alpha} = 1 - \frac{[(1+x)^{-\alpha} - 1]}{x} < 1$$

A.10.5.) Verificare che $\forall\, t \geq 0$, se $q > r > 0$, si ha

$$t^r \log^2 t \leq r^{-2} + (q-r)^{-2} t^q \tag{10.4}$$

<u>Dim.</u> Essendo per $x \geq 1$

$$\log x \leq \frac{x}{e}$$

ne segue che $y \geq 1$

$$\log^2 y \leq (\tfrac{2}{e})^2 y < y \tag{10.5}$$

Rimpiazzando y con t^{q-r} si ottiene

$$t^r \log^2 t \leq (q-r)^{-2}\, t^q, \qquad \forall\, t \geq 1. \tag{10.6}$$

Invece per $0 < t \leq 1$, rimpiazzando y con t^{-r} in (10.5), si ha

$$t^r \log^2 t \leq r^{-2}, \qquad \forall\, 0 < t \leq 1. \tag{10.7}$$

Combinando (10.6) con (10.7) si ottiene la tesi (10.4) che vale anche per $t = 0$.

A.10.6.) Dimostrare che per $a,\, b \geq 0$, $C \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$

$$ab \log^{\alpha-1}(c\, \sqrt[n]{ab}) \leq \frac{C}{\beta}\, a \log^{\alpha}(\sqrt[n]{a}) + C' e^{\beta b}$$

dove $C = C(n)$ e $C' = C(\alpha,\, \beta,\, n)$.

<u>Dim.</u> Il caso $a \leq e$ è semplice. Pertanto supponiamo $a > e$. Si ha

$$ab \log^{-1}(c\, \sqrt[n]{ab}) \leq ab \log^{-1}(\sqrt[n]{a}) \leq \tfrac{4}{\beta}(a \log \alpha + e^{\frac{\beta}{2} b}) \log^{-1}(\sqrt[n]{a}) \leq \tfrac{c}{\beta}(a + e^{\frac{\beta}{2} b})$$

ove abbiamo usato la disuguaglianza ben nota

$$ab \leq a \log a + e^{2b}$$

valida per $a \geq 1$, $b \geq 1$. Inoltre si ha

$$\log^{\alpha}(c\sqrt[n]{ab}) \leq 2\log^{\alpha}(\sqrt[n]{a}) + c(n,\alpha)\log^{\alpha}(cb)$$

che si ricava dalla disuguaglianza nota:

$$(x+y)^{\alpha} \leq 2x^{\alpha} + c(\alpha)y^{\alpha}$$

per x, y, $\alpha > 0$. Combinando le precedenti disuguaglianze si ha

$$ab\log^{\alpha-1}(c\sqrt[n]{ab}) \leq \frac{c}{\beta}(a + e^{\frac{\beta}{2}b})(2\log^{\alpha}(\sqrt[n]{a}) + c(n,\,\alpha)\log^{\alpha}(cb)) \leq$$

$$\frac{c}{\beta}(a + \log^{\alpha}(\sqrt[n]{a}) + c(n,\,\alpha,\,\beta)e^{\beta b}).$$

L'ultima disuguaglianza segue dalle due disuguaglianze

$$c(n,\,\alpha)a\log^{\alpha}(c(n)b) \leq a\log^{\alpha}(\sqrt[n]{a}) + c(n,\,\alpha,\,\beta)e^{\beta b}$$

e

$$e^{\frac{\beta}{2}b}\log^{\alpha}(\sqrt[n]{a}) \leq a\log^{\alpha}(\sqrt[n]{a}) + c(n,\,\alpha,\,\beta)e^{\beta b}.$$

A.10.7.) Se sul numero x sappiamo solo che esso è compreso tra a e b con $0 < a < b$, scegliendo un valore approssimato p di x rischiamo un certo *errore* $p-x$ ed un certo *errore relativo* $\frac{p-x}{x}$. Per ridurre il più possibile il rischio di errore, vedremo che converrà scegliere $p = \frac{a+b}{2}$. Sia $c = \frac{a+b}{2}$ il punto medio dell'intervallo $[a,b]$ con $0 < a < b$. Per $p \in [a,b]$ sia

$$M(p) = \max_{a \leq x \leq b} |p-x|.$$

Dimostrare che

$$\min_{a \leq p \leq b} M(p) = M(c) = \frac{b-a}{2}.$$

[Fissato $p \in [a,b]$ l'errore $\epsilon(x) = |p - x|$ per $x \in [a,b]$ decresce dal valore $\epsilon(a) = p - a$ al valore $\epsilon(p) = 0$ e poi cresce fino al valore $\epsilon(b) = b - p$. Pertanto il massimo $M(p)$ è raggiunto in uno degli estremi $x = a$ oppure $x = b$:

$$M(p) \in \{p - a,\, p - b\}$$

cioè si ha

$$\max_{a \le p \le b} |p - x| = \max\{p - a, b - p\}.$$

Basta perciò dimostrare che

$$\min_{a \le p \le b} \max\{p - a, b - p\} = \frac{b - a}{2}$$

si vede subito che

$$\max\{p - a, b - p\} \ge \frac{b - a}{2}$$

per ogni $a \le p \le b$. Inoltre scegliendo $p = \frac{a+b}{2}$, si ha

$$\max\left\{\frac{a+b}{2} - a, b - \frac{a+b}{2}\right\} = \max\left\{\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right\} = \frac{b-a}{2}$$

(figura A.10.1) Ne segue, evidentemente l'asserto.]

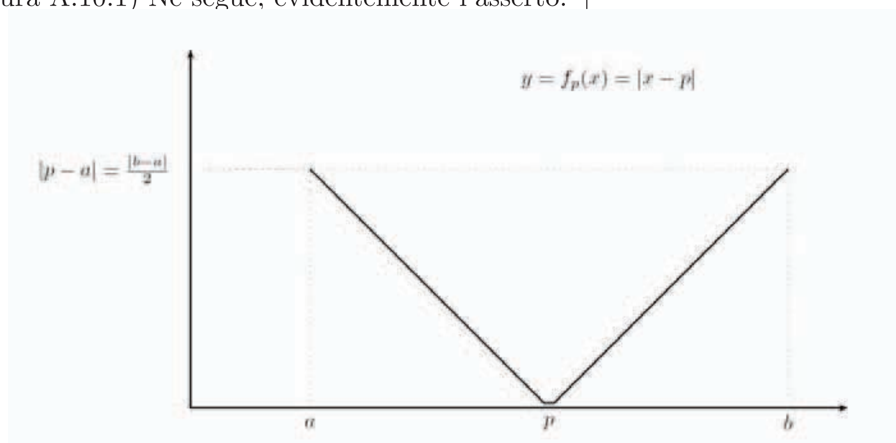


Figura A.10.1 La media aritmetica $p = \frac{a+b}{2}$ di a e b è l'approssimazione che produce il minimo valore dell'errore assoluto commesso nell'approssimare la quantità incognita x compresa tra a e b.

A.10.8.) Siano $0 < a < b$ numeri reali. Dimostrare che

$$m = \min_{p\in[a,b]} \left(\max_{a\leq x\leq b} \frac{|p-x|}{x} \right)$$

viene raggiunto per

$$p = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \right)^{-1}$$

(che è la media armonica tra a e b) e vale

$$m = \frac{b-a}{b+a}.$$

[Euristico:

gli errori relativi commessi agli estremi coincidono in valore assoluto (ma sono opposti)

$$\frac{p_0-a}{a} = -\frac{p_0-b}{b} \tag{10.8}$$

ciò implica

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \\ \\ \dfrac{p_0-a}{a} = \dfrac{b-a}{b+a} \end{cases} \tag{10.9}$$

Dim. :

Fissato $p \in [a,b]$ poniamo

$$g_p(x) = \frac{|p-x|}{x} = \begin{cases} \frac{p}{x} - 1 & \searrow \quad a \leq x \leq p \\ \\ 1 - \frac{p}{x} & \nearrow \quad p \leq x \leq b \end{cases}$$

g_p decresce da

$$g_p(a) = \frac{p}{a} - 1 \quad \text{a} \quad g_p(p) = 0$$

e cresce da

$$g_p(p) = 0 \quad \text{a} \quad g_p(b) = 1 - \frac{p}{b}$$

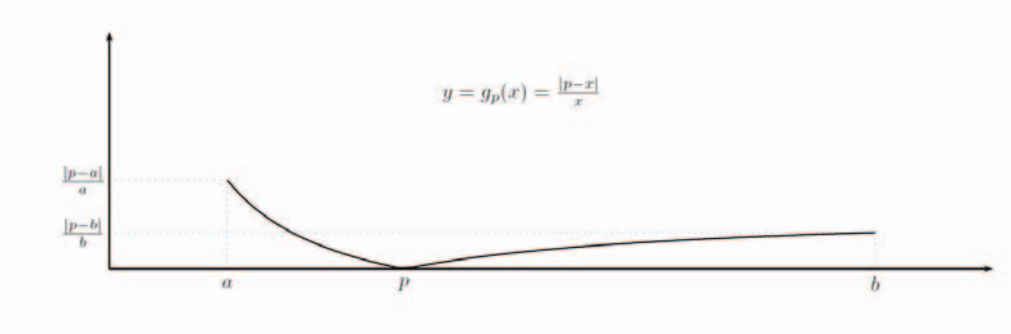


Figura A.10.2 La media armonica

$$p = \frac{2ab}{a+b} = \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \right)^{-1}$$

di a e b è l'approssimazione che produce il minimo valore dell'errore relativo commesso nell'approssimare la quantità incognita x compresa tra a e b.

$\Longrightarrow$ il $\max g_p$ è raggiunto in a o in b.

cioè

$$\max \frac{|p-x|}{x} = \max \left\{ \frac{p-a}{a}, \frac{b-p}{b} \right\}.$$

Basta perció dimostrare che

$$\min_{a \le p \le b} \max \left\{ \frac{p-a}{a}, \frac{b-p}{b} \right\} = \frac{b-a}{b+a}.$$

Si vede subito che $\forall a \le p \le b$

$$\max \left\{ \frac{p-a}{a}, \frac{b-p}{b} \right\} \ge \frac{b-a}{b+a}.$$

Si noti
$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{p-a}{a}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-p}{b}=\frac{b-a}{b+a}$$
è media ponderata di $\dfrac{p-a}{a}$ e $\dfrac{b-p}{b}$ e se queste sono diverse, una di esse (quella piú grande) sará maggiore di $\dfrac{b-a}{b+a}$. Allora nel caso (10.8), (10.9) si ha l'uguale e solo in tal caso.]

A.10.9.) Siano a e b due numeri positivi. La loro *media aritmetica* è

$$A(a,b)=\frac{a+b}{2}. \tag{10.10}$$

La loro *media geometrica* è

$$G(a,b)=\sqrt{ab} \tag{10.11}$$

e la loro *media aritmetica* è

$$H(a,b)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \tag{10.12}$$

Dimostrare che

$$\min\{a,b\}\le H(a,b)\le G(a,b)\le A(a,b)\le \max\{a,b\} \tag{10.13}$$

e che si ha un segno di uguale nella (10.13) se e solo se $a=b$.

[Poiché si ha
$$\frac{a+b}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}+\sqrt{ab}$$
allora è vera la disuguaglianza

$$A(a,b)\ge G(a,b) \tag{10.14}$$

con uguaglianza se e solo se $a=b$.

Applicando alla coppia $\frac{1}{b}, \frac{1}{a}$ la (10.14) si ha

$$A\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right) \geq G\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right). \tag{10.15}$$

ovvero

$$\sqrt{\frac{1}{ab}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

da cui

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

ossia

$$H(a, b) \leq G(a, b). \tag{10.16}$$

Evidentemente l'uguaglianza in (10.16) sussiste se e solo se essa sussiste nella (10.15) da cui segue $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ e $a = b$.
Verifichiamo ora che

$$\min\{a, b\} \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \tag{10.17}$$

Supponiamo che risulti $a \leq b$ e verifichiamo che la tesi (10.17) diviene

$$\frac{a}{a} + \frac{a}{b} \leq 2$$

ed è perciò vera. Analogamente si prova che

$$\frac{a+b}{2} \leq \max\{a, b\}. \;]$$

A.10.10.) Siano $0 < a \leq b$ numeri positivi e sia

$$m_2 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \tag{10.18}$$

la media quadratica di a e b. Allora si ha

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{10.19}$$

con l'uguale solo se $a = b$.
Verificare inoltre che m_2 coincide con il valore assunto dalla funzione lineare

$$f(x) = (b-a)x+a \qquad x \in [0,1] \tag{10.20}$$

nel punto $0 \leq x_0 \leq 1$ tale che l'area $A(x_0)$ del trapezio indicato con $T(x_0)$ in figura sia uguale a metà dell'area $A(1)$ del trapezio di basi a e b della figura.

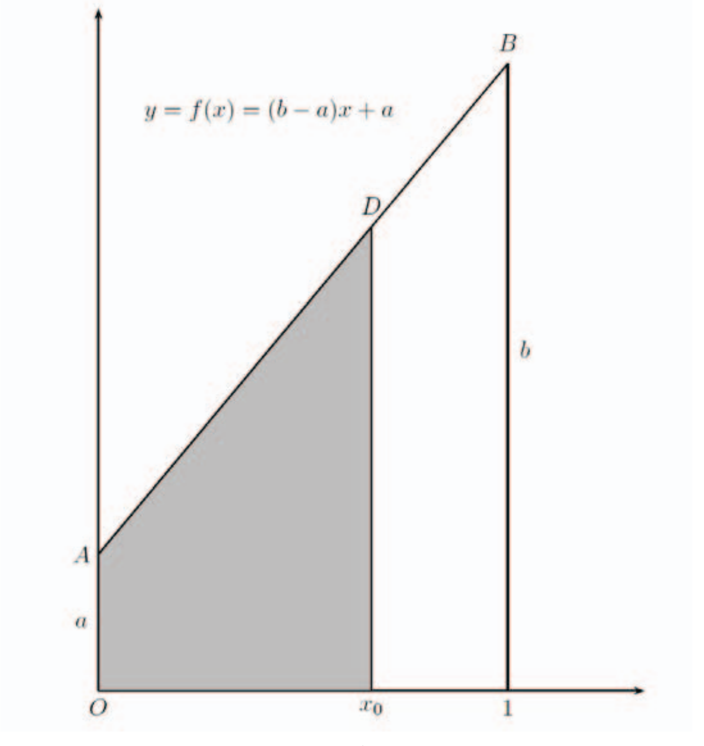


Figura A.10.3
$A(x)$=area (trapezio OADE)=area(trapezio EDBC)

[La (10.19) è equivalente alla ben nota disuguaglianza

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$$

che si riduce ad uguaglianza se e solo se $a = b$.

Sia

$$x_0 = \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - a}{b-a}$$

allora si verifica facilmente che

$$f(x_0) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

e che

$$\frac{b-a}{2}\, x_0^2 + a x_0 = \frac{a+b}{4}.$$

Essendo

$$A(x_0) = \frac{b-a}{2}\, x_0^2 + a x_0$$

l'area del trapezio rettangolo di basi $x = a$, $x = x_0$ ed altezza x_0, si ha l'asserto.

CAPITOLO 11

1 Calcolare i limiti

(a) $\qquad \lim_{x\to+\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

(b) $\qquad \lim_{x\to+\infty} x^2(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

(c) $\qquad \lim_{x\to+\infty} x(\operatorname{arctg} x^2 - \frac{\pi}{2})$

[(a) Dato che $\operatorname{arctg} x \to \frac{\pi}{2}$ per $x \to +\infty$, il limite si presenta sotto la forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Si può applicare la regola di de L'Hôpital nel modo seguente

$$\lim_{x\to+\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1 \ ;$$

(b) $-\infty$; (c) 0]

2 Calcolare i limiti

(a) $\qquad \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]$

(b) $\qquad \lim_{x\to+\infty} x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]$

[(a) La funzione $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ converge ad e per $x \to +\infty$. Il limite dato si presenta sotto la forma indeterminata $\infty \cdot 0$. È opportuno utilizzare gli sviluppi in formula di Taylor, nel modo seguente. Essendo

$$f(x) = (1+\frac{1}{x})^x = e^{x \log(1+\frac{1}{x})},$$

si ottiene

$$\log(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \circ(\frac{1}{x^2})$$

da cui

$$f(x) = e^{x\ \log(1+\frac{1}{x})} = e^{1-\frac{1}{2x}+\circ(\frac{1}{x})} = e \cdot e^{-\frac{1}{2x}+\circ(\frac{1}{x})} = e[1 - \frac{1}{2x} + \circ(\frac{1}{x})] \ .$$

Siamo ora in grado di completare il calcolo del limite dato. Risulta infatti

$$\lim_{x\to+\infty} x[(1+\frac{1}{x})^x - e] = \lim_{x\to+\infty} x[f(x)-e] = \lim_{x\to+\infty} x[e - \frac{e}{2x} + \circ(\frac{1}{x}) - e] =$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{e}{2} + \frac{\circ(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = -\frac{e}{2} \ ;$$

(b) $-\infty$]

3 Calcolare i limiti di successioni

(a) $$\lim_{n\to+\infty} n^2(n \operatorname{sen}\frac{1}{n} - 1)$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty} (n^2 \operatorname{sen}\frac{1}{n} - n)$$

[(a) Tenendo presente il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n} = 1$$

si vede che il limite da calcolare si presenta come forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Utilizziamo lo sviluppo in formula di Taylor per la funzione seno:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \circ(\frac{1}{n^3})$$

da cui

$$n \operatorname{sen}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{6n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})$$

e ancora

$$n \operatorname{sen}\frac{1}{n} - 1 = -\frac{1}{6n^2} + \circ(\frac{1}{n^2}).$$

Si ottiene quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n^2(n \operatorname{sen}\frac{1}{n} - 1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n \operatorname{sen}\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{6} + \frac{\circ(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \right) = -\frac{1}{6} \ ;$$

(b) 0]

Questo volume di esercitazioni di Matematica è rivolto agli studenti che affrontano corsi di Matematica nel primo anno di università. Esso è articolato nei seguenti capitoli:

1. NUMERI REALI
2. RICHIAMI DI TRIGONOMETRIA
3. DISEQUAZIONI
4. NUMERI COMPLESSI
5. MATRICI E SISTEMI LINEARI
6. GEOMETRIA ANALITICA
7. LIMITI DI SUCCESSIONI
8. LIMITI DI FUNZIONI
9. FUNZIONI CONTINUE
10. DERIVATE
11. CALCOLO DI LIMITI CON L'USO DELLE DERIVATE
12. SUCCESSIONI DEFINITE PER RICORRENZA

Il testo viene integrato con numerosi approfondimenti teorici e pratici scaricabili dal sito web della Casa Editrice www.liguori.it come da istruzioni contenute all'interno del volume.

Paolo Marcellini *è professore ordinario di Analisi Matematica presso l'Università di Firenze.*

Carlo Sbordone *è professore ordinario di Analisi Matematica presso l'Università "Federico II" di Napoli.*