



Scomposizione di polinomi

Premesse

Ogni polinomio a coefficienti reali o è Irriducibile o si può scrivere come prodotto di polinomi di primo e secondo grado.

Esempi:

- $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$
- $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = (x-2)^2(x^2+1)$

Metodo di risoluzione

Non esiste un metodo standardizzato per la scomposizione; abbiamo però delle tecniche:

- Raccoglimento Totale
- Raccoglimento Parziale
- Scomposizione mediante prodotti notevoli
- Scomposizione di trinomi di 2° grado
- Scomposizione con RUFFINI

Raccoglimento Totale

$$x(x+3) = \underbrace{x^2 + 3x}_{\text{possiamo raccogliere}} \rightarrow x(x+3)$$

$$9x^3 + 6x^2 + 3x = x(9x^2 + 6x) = 3x(3x^2 + 2x)$$

Raccoglimento Parziale

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 \quad \begin{matrix} \text{Non c'è presente un} \\ \text{divisore comune!} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2(x+1) + 2(x+1) \\ \underline{\underline{|}} \\ (x+1)(x^2+2) \end{matrix}$$

$$2x^3 - x^2 + 6x - 3 = x^2(2x-1) + 3(2x-1) = (2x-1)(x^2+3)$$

Nota: Questo raccoglimento va fatto in modo da consentire un raccoglimento totale; altrimenti non ha molto senso.

Scomposizione mediante prodotti notevoli

$$(x+2)(x-2) = x^2 - 4 \quad \rightarrow \text{Differenza dei quadrati}$$

Prodotti notevoli più importanti:

- Differenza di quadrati $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
ES: $16x^2 - 1 = (4x-1)(4x+1)$

- Quadrato del binomio $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$
ES: $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

- Cubo del binomio $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$
ES: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$

- Differenza di cubi $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$
ES: $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 - 2x + 4)$

- Somma di cubi $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$
ES: $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

Può succedere...

Il prodotto notevole potrebbe palesarsi dopo il raccoglimento:

- $x^3 + 4x^2 + 4x = x \underbrace{(x^2 + 4x + 4)}_{\text{quadrato di binomio}} = x(x+2)^2$

- $x^2 + 2x + 1 - y^2 = \underbrace{(x+1)^2}_{\text{quadrato di binomio}} - y^2 = (x+1-y)(x+1+y)$

Scomposizione di un trinomio di II grado

Per fattorizzare qualcosa del tipo $x^2 + bx + c$ dobbiamo cercare 2 numeri p e q aventi:

- Somma b e prodotto c

Se troviamo questi due numeri allora la scomposizione del trinomio sarà: $(x+p)(x+q)$

$$\text{ES: } x^2 + 4x + 3 \quad \begin{cases} p+q=4 \\ p \cdot q=3 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} p=4-q \\ \Rightarrow (4-q)q=3 \end{array} \right. \quad \begin{cases} 4q-q^2-3=0 \\ q^2-4q+3=0 \end{cases} \quad \Delta = 16-4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{+4 \pm 2}{2} = \frac{x_1=3}{x_2=1}$$

$$3+q=4 \Rightarrow q=4-3=\underline{1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p=3 \\ q=1 \end{cases}$$

Quindi $(x+p)(x+q) = (x+3)(x+1)$

* Non era difficile trovare la soluzione a mente, ma ho mostrato il processo per equazioni più difficili.

$$ES: x^2 - 7x + 12$$

$$\begin{cases} p+q = -7 \\ p \cdot q = 12 \end{cases}$$

A mente

$$\begin{cases} p = -3 \\ q = -4 \end{cases}$$

$$-3 \cdot (-4) = 12$$

$$-3 + (-4) = -7$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} p+q = -7 \\ p \cdot q = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} p = -7-q \\ \Rightarrow (-7-q) \cdot q = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -q^2 - 7q - 12 = 0 \\ \Rightarrow q^2 + 7q + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^2 + 4q + 3q + 12 = 0 \\ q(q+4) + 3(q+4) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (q+4)(q+3) = 0 \quad \begin{cases} q+4 = 0 \\ q+3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} q_1 = -4 \\ q_2 = -3 \end{cases}$$

$$\text{Quindi: } x^2 - 7x + 12 = (x-4)(x-3)$$

$$ES: x^2 - 2x - 4 \quad \begin{cases} p+q = -2 \\ p \cdot q = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} p = -2-q \\ \Rightarrow (-2-q)q = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} -q^2 - 2q + 4 = 0 \\ q^2 + 2q - 4 = 0 \end{cases} \quad \Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 4 + 16 = 20$$

Quando non riusciamo a trovare due coefficienti p e q
Interi, allora il Trinomio è irriducibile. Non troviamo p e q interi

Regola di Ruffini

ES: Svolgere la divisione tra $A(x) = x^3 - 4x - 2$ e $B(x) = x + 1$

				Coefficienti del dividendo
				1 0 -4 -2
	-1			1 -1 1 3
Opposto del termine noto del divisore		1	-1	-3
				1
				1 -1 -3 1
				Coefficienti del quoziente

Si ricomincia

Fasi di risoluzione

- Il primo coefficiente viene fatto scendere (1)
- Il coefficiente appena sceso viene moltiplicato per l'opposto del termine noto (-1)
- Si somma il risultato del punto 2 ed il secondo coefficiente; il risultato va fatto scendere

* Il grado del polinomio risultante sarà il grado del dividendo meno il grado del divisore.

$$\Rightarrow Q(x) = 1x^2 - 1x - 3 = x^2 - x - 3$$

Per verificare di aver calcolato correttamente basta moltiplicare divisore e quoziente ed aggiungere il resto.

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 3) + 1 - \text{Resto} \\ \text{Dividendo} \quad \text{Divisore} \quad | \quad \text{quoziente} \end{array}$$

Caveats: Se il divisore è un binomio di 1 grado del tipo $ax+b$ con $a \neq 1$, La regola di Ruffini non può essere utilizzata direttamente

Come risolvere?

E' possibile ri condursi ad una nuova divisione, dividendo sia il dividendo che il divisore per a . In questo modo, la nuova divisione, avente per divisore $x + \frac{b}{a}$, avrà lo stesso quoziente di quella originale e resto diviso per a ; Dobbiamo quindi moltiplicare il resto per a in modo da ottenere il resto originale.

ES: Dividere $A(x) = 4x^2 - 6x + 8$ per $B(x) = 2x - 4$

! Non possiamo applicare ruffini DIRETTAMENTE (il divisore non è del tipo $x+b$)

- a) Divido the old fashioned way
- b) Soluzione riportata sopra

\Rightarrow Divido dividendo e divisore per il numero davanti alla x (coefficiente) nel divisore:

$$\frac{4x^2 - 6x + 8}{2} = 2x^2 - 3x + 4 \quad E \quad \frac{2x - 4}{2} = x - 2$$

Penso quindi dividere $(2x^2 - 3x + 4) : (x - 2)$ con Ruffini!

2	-3	4
2	4	2
2	1	6

Ottengo: $Q(x) = 2x + 1$

$$R = 6 \quad \xrightarrow{\text{Resto reale}} \quad 6 \cdot 2 = 12$$

Teorema di Ruffini e teorema del Resto

Teorema del Resto

Dividere un polinomio $P(x)$ per un altro $B(x)$, è equivalente a trovare due nuovi polinomi (quoziente e resto) legati ai due polinomi $P(x)$ e $B(x)$ dalla relazione

$$P(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

↑ Il resto o è nullo o ha un grado minore di $P(x)$.

Se, ad esempio, abbiamo un polinomio divisore di grado 1, del tipo $x-a$, allora il resto o è nullo, o è un numero.

Possiamo quindi indicarlo con R , e non $R(x)$.

Siccome l'equazione $P(x) = (x-a) \cdot Q(x) + R$ vale per ogni x in \mathbb{R} , allora se calcoliamo $P(a)$ otteniamo:

$$P(a) = (a-a) \cdot Q(a) + R \Rightarrow \text{Il resto della divisione è uguale al valore che il polinomio assume quando è calcolato in } a.$$

⇒ Teorema del Resto

Se un polinomio $P(x)$ viene diviso per un binomio di I grado del tipo $x-a$, il resto della divisione è uguale a $P(a)$

ES determinare il resto della divisione $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2$ / $x-2$

Applichiamo il teorema del resto \rightarrow Il divisore è del tipo $x-a$ ✓

$$\Rightarrow R = P(a) \Rightarrow P(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 2 = 16 - 16 - 2 \Rightarrow R = -2$$

$$\text{ES } P(x) = x^5 - x^3 - x - 4 \quad / \quad \textcircled{x+1} \rightarrow x - (-1) \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow P(a) = -1^5 - (-1)^3 - (-1) - 4 = -1 + 1 + 1 - 4 = R = -3$$

Se il Resto è zero, allora $B(x)$ DIVIDE $P(x)$.

Teorema di Ruffini

Un polinomio $P(x)$ è divisibile per $x-a$ se e solo se $P(a)=0$

Sulla base di quanto detto prima

! Il teorema di Ruffini è diverso dalla Regola di Ruffini!

ES: Stabilire se $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$ è divisibile per $x-1$

Controlliamo se $P(a)=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow P(1) = 2 - 1 + 3 - 4 = 0$

ES: Per quale K $P(x) = x^3 - Kx^2 + x + 1$ è div. per $x-1$

$P(a)=0 \Rightarrow 1 - K + 2 = 0 ; K - 1 - 2 = 0$ per $K=3$

Scomposizione di polinomi con RUFFINI

ES: scomporre $x^3 + 4x^2 + x - 6$ → nessuna delle tecniche viste ci aiuta

Se sostituiamo 1 al posto della x otteniamo:

$f(1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 0 \rightarrow$ Da questo capiamo che $P(x)$ è divisibile per $x-1$

1	4	1	-6
1	1	5	6
1	5	6	0

coeffienti
di $Q(x)$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 + 5x + 6 \\ &= x^2 + 3x + 2x + 6 \\ &= (x+3)(x+2) \cdot (x-1) \end{aligned}$$

Metodo di risoluzione

- Cerchiamo uno zero del polinomio: un valore che sostituito ad x , rende $P(x)=0 \rightarrow$ Per il teorema di Ruffini questo valore ci dice che $P(x)$ è divisibile per $(x-\{\text{valore}\})$
- Trovato $Q(x)$ tramite la Regola di Ruffini, riscriviamo il polinomio come $D(x) \cdot Q(x)$; possiamo poi procedere ulteriormente alla scomposizione.

Come troviamo lo zero di una funzione?

Gli eventuali Zeri interi di un polinomio a coefficienti interi vanno ricercati all'interno dei divisori del termine noto del polinomio.
Se esistono dei divisori interi, fanno parte del divisore noto.

ES: $x^3 + x^2 - 5x + 3$

$P(1) = 1 + 1 - 5 + 3 = 0$ 1 è uno zero per $P(x) \Rightarrow P(x)$ divisibile per $x-1$

1	1	-5	3
1	1	2	-3
1	2	-3	0

$$P(x) = (x^2 + 2x - 3)(x-1)$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} p+q=2 \\ p \cdot q=3 \end{cases} \quad & \begin{cases} p=2-q \\ =\Rightarrow (2-q)q=3 \end{cases} \quad \begin{cases} -q^2+2q=3 \\ q^2-2q-3=0 \end{cases} \\ q^2+3q-q-3=0 & \Rightarrow q(q+3)-(q-3)=0 \\ \Rightarrow (q+3)(q-1)=0 & \begin{cases} q+3=0 \\ q-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} q=-3 \\ q=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

$$\hookrightarrow (x^2 + 2x - 3)(x-1) = (x-3)(x-1)(x-1) = (x-1)^2(x+3)$$

Zeri non interi

Gli zeri razionali di un polinomio a coefficienti interi vanno cercati
 tra le frazioni aventi come numeratore un divisore del termine noto
 di $P(x)$, e come denominatore un numero intero. Divisore del coefficiente
 del termine di grado massimo.

ES: $2x^3 + x^2 + x - 1$ Convenzionalmente possiamo provare $P(1)$ e $P(-1)$

Cerchiamo zeri razionali

$$\frac{\text{Num}}{\text{denom}} = \frac{\text{Divisori di } -1}{\text{Divisori di } 2}$$

$$= -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cancel{1}, \cancel{-1}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} P(1) &= 2 + 1 + 1 - 1 = 3 \\ P(-1) &= -2 + 1 - 1 = -3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{NON} \\ \text{Zeri!} \end{array} \right\}$$

Siccome $\frac{1}{2}$ è uno zero, $P(x)$ è divisibile per $(x - \frac{1}{2})$

2	1	1	-1
$\frac{1}{2}$	1	1	1
2	2	2	0

$$\Rightarrow P(x) = (2x^2 + 2x + 2)(x - \frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} &= 2(x^2 + x + 1)(x - \frac{1}{2}) \\ &= (2x - 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{2}) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 \\ &= 2\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1+1+2-4}{4} \\ &= \frac{0}{4} = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

ESERCIZI

$$62) (a-1)^2 - b^2 = (a-1-b)(a-1+b)$$

$$63) (a+b)^2 - (x-y)^2 = (a+b-x+y)(a+b+x-y)$$

$$64) a^6 - 4(b-2)^2 = (a^3)^2 - [2(b-2)]^2 = [a^3 - 2(b-2)][(a^3 + 2(b-2))] \\ = (a^3 - 2b + 4)(a^3 + 2b - 4)$$

• Quadrato di binomio

Semplifici

$$68) x^2 + 2xy^2 + y^4 = (x + y^2)^2$$

$$69) x^4 - 2x^2y + y^2 = (x^2 - y)^2$$

$$70) x^2 + 9 + 6x = (x+3)^2$$

$$71) 4a^2 + 9 - 12a = (2a-3)^2$$

$$72) 9a^2 - 6ax + x^2 = (3a-x)^2$$

$$73) 4a^2x^2 + 4ax + 1 = (2ax+1)^2$$

$$74) x^2y^2 - 10xyz^2 + 25z^4 = (xy - 5z^2)^2$$

$$75) 1 + 9a^2 + 6a(3a+1)^2$$

$$76) \frac{1}{9}b^2 - 4/3b + 4 = (\frac{1}{3}b - 2)^2$$

$$77) 9/4a^2 + 4b^2 + 6ab = (3/2a + 2b)^2$$

$$78) 1/16x^2 + 4y^2 + xy = (1/4x + 2y)^2$$

$$79) 9/4a^2 + b^6 - 3ab^3 = (\frac{3}{2}a - b^3)^2$$

Avanzati

$$82) 16a^2b^2 + 40abc + 25c^2 = (4ab + 5c)^2$$

$$83) 1/4x^2 + 1/3xy + 1/9y^2 = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y)^2$$

$$85) (a-1)^2 - 2(a-1) + 1 = (a-1)^2 - 2a - 2 + 1 \\ = a^2 - 2a + 1 - 2a - 2 + 1 = -4a + 2 + a^2 \\ = (a-2)^2$$

$$87) (x+2b)^2 - 2(x+2b)(a+b) + (a+b)^2 = \\ = (x+2b - a+b)^2 = (x+b-a)^2$$

$$88) b - 2ab - 2(x-3y) + (x-3y)^2 = \\ = (x-3y - 1)^2 =$$

$$89) a^2 - 2ab - 2c(x+1) - c^2 = \\ = -(x+1)^2 - 2c(x+1) - c^2$$

Quadrato di trinomio

$$\text{Formula: } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$91) x^2 + y^2z^2 + 4 - 2xyz + 4x - 4yz = (x - yz + 2)^2$$

$$92) 4x^2 + yz^4 + 1 - 4xyz^2 + 4x - 2yz^2 = (2x - yz^2 + 1)^2$$

$$93) a^6 + b^4 + 4c^2 + 2a^3b^2 - 4a^3c - 4b^2c = (a^3 + b^2 - 2c)^2$$

$$94) a^8 + 4a^4b^4 - 10a^4 - 2a^6b^2 + 25 + a^4b^4 = (5 - a^4 + a^2b^2)^2$$

Trinomi di secondo grado

$$146) a^2 + a - 2 = \begin{cases} p+q=1 \\ p \cdot q=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} p=-1 \\ q=2 \end{cases} \Rightarrow (a-1)(a+2)$$

$$147) x^2 - x - 2 \\ p+q=-1 \\ p \cdot q=-2 \\ p=-2 \\ q=1 \\ \Rightarrow (x-2)(x+1)$$

$$148) a^2 - 5a + 6 \\ \begin{cases} p+q=5 \\ p \cdot q=6 \end{cases} \quad \begin{cases} p=5-q \\ (5-q)q=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 5q - q^2 - 6 = 0 \\ = q^2 - 5q + 6 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} q^2 - 3q - 2q + 6 = 0 \\ = q(q-3) - 2(q-3) = 0 \\ = (q-3)(q-2) \end{array}$$

$$149) x^2 + x - 6 \\ \begin{cases} p+q=1 \\ p \cdot q=-6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} p=3 \\ q=-2 \end{array} \Rightarrow (x+3)(x-2)$$

$$150) b^2 - 5b - 6 \\ \text{``''} \\ \begin{cases} p+q=-5 \\ p \cdot q=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} p=-q-5 \\ (-q-5)q+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -q^2 - 5q + 6 = 0 \\ = -q(q-1) - 6(q-1) = -(q-1)(q+6) \end{array}$$

$$151) y^2 - y - 6 \\ \begin{cases} p+q=-1 \\ p \cdot q=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} -3+2=-1 \\ -3 \cdot 2=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} p=-3 \\ q=2 \end{array} \Rightarrow y^2 - y - 6 = (y-3)(y+2)$$

$$152) z^2 + 5z - 6 \\ \begin{cases} p+q=5 \\ p \cdot q=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} 6-1=5 \\ 6 \cdot (-1)=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} p=5 \\ q=-6 \end{array} \Rightarrow z^2 + 5z - 6 = (z+5)(z-6)$$

$$153) b^2 - 22b + 40 \\ \begin{cases} p+q=-22 \\ p \cdot q=40 \end{cases} \quad \begin{cases} p=-22-q \\ (-22-q) \cdot q - 40 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -q^2 - 22q - 40 = 0 \\ = q^2 + 22q + 40 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} q(q+2) + 20(q+2) \\ = (q+2)(q+20) \end{array} \\ \Rightarrow \begin{array}{l} q_1=-2 \\ q_2=-20 \end{array}$$

$$154) a^2 - 18a - 40 \\ \begin{cases} p+q=-18 \\ p \cdot q=-40 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 2-20=-18 \\ 2 \cdot (-20)=-40 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} p=2 \\ q=-20 \end{array} \Rightarrow (a+2)(a-20)$$

$$155) a^2 - 3ab + 2b^2 \\ \begin{cases} p+q=-3b \\ p \cdot q=2b^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -1+(-2)=-3b \\ -1 \cdot (-2)=2b^2 \end{array} \Rightarrow p=-1b \Rightarrow a^2 - 3ab + 2b^2 = (a-b)(a-2b)$$

$$166) 3a^2 + a - 10 = 3a^2 + 6a - 5a - 10 = 3a(a+2) - 5(a+2) = (a+2)(3a-5)$$

$$167) 2t^2 + t - 3 = 2t^2 + 3t - 2t - 3 = 2t(t-1) + 3(t-1) = (t-1)(2t+3)$$

$$168) 3a^2 - 7a - 6 \Rightarrow 3a^2 + 2a - 9a - 6 = 0 \Rightarrow a(3a+2) - 3(3a+2) = (3a+2)(a-3)$$