

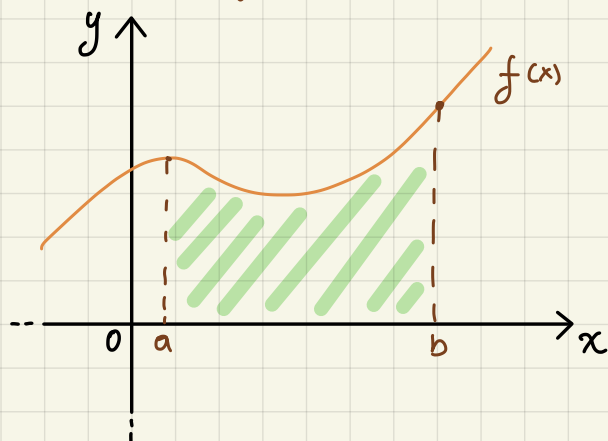
The background is a light beige color, densely populated with small, multi-colored dots in shades of orange, teal, green, and grey. Interspersed among these dots are several large, solid white circles of varying diameters, creating a modern, abstract pattern.

# Integrali Definiti

## Integrali Definiti

Anche se usano lo stesso nome degli I. Indefiniti, gli I. definiti appartengono ad un "problema" completamente diverso.

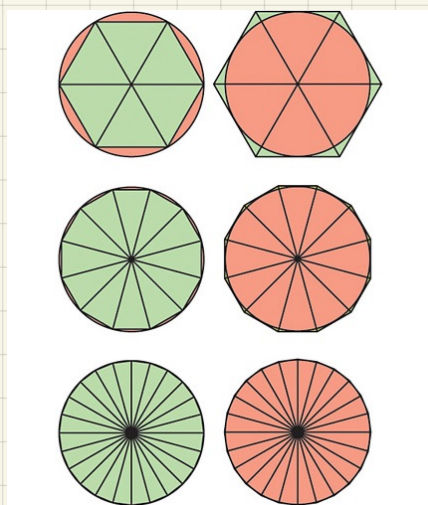
**Problema:** sia  $f$  continua in  $[a, b]$ , ed  $f(x) \geq 0$  in  $[a, b]$ .



Come calcoliamo l'area compresa tra il grafico della funzione  $f$  e l'asse  $x$ ?

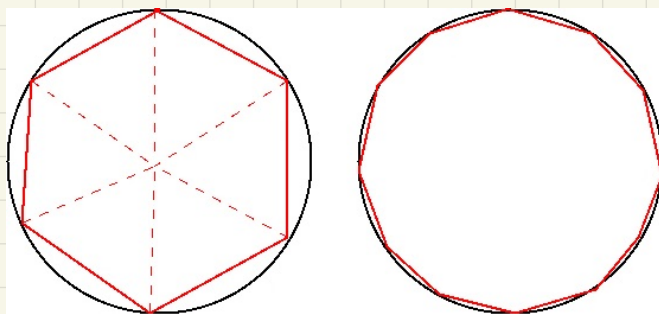
O più in generale: come calcoliamo l'area di una figura CURVILINEA, o quantomeno approssimarne l'area?

Per approssimare l'area di un cerchio possiamo usare un poligono regolare inscritto o circoscritto al cerchio.



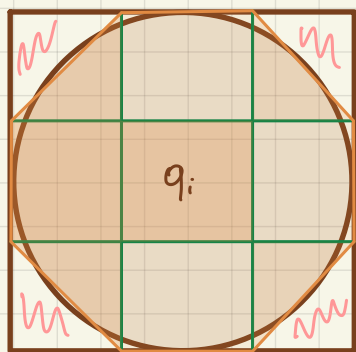
Infatti:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{area}(P_n) = \text{area Cerchio}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Perimetro}(P_n) = \text{lunghezza cerchio}.$



Man mano che il numero dei lati di  $P_n$  aumenta, il perimetro o area di  $P_n$  tende ad essere proprio uguale a quello del cerchio.

**Metodo degli Egizi:**



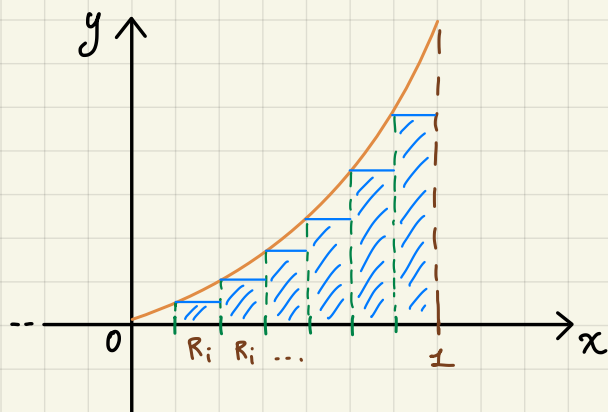
L'area del quadrato è molto diversa da quella del cerchio; ma se consideriamo l'area dell'ottagono che si crea andando a togliere gli spigoli al quadrato stesso, otteniamo:

$$\text{area } O_8 = \text{area } Q - 2q_i$$

↑ quadrato grande ↑ quadrati piccoli

## Metodo di Esauzione

Tramite questo metodo possiamo calcolare l'area del segmento Parabolico:



Prendiamo  $y = x^2$  in  $I = [0, 1]$

Dividiamo  $[0, 1]$  in  $n$  intervalli più piccoli che chiamiamo:  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$

La somma dei vari rettangoli in **BLU** è un'approssimazione dell'area sottesa alla curva.

Calcoliamo l'area

$$= \sum_{i=1}^n \text{area } R_i = \sum_{i=1}^n b \times h = \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i) = \frac{1}{n} \cdot x_i^2$$

$\uparrow$   
n rettangoli

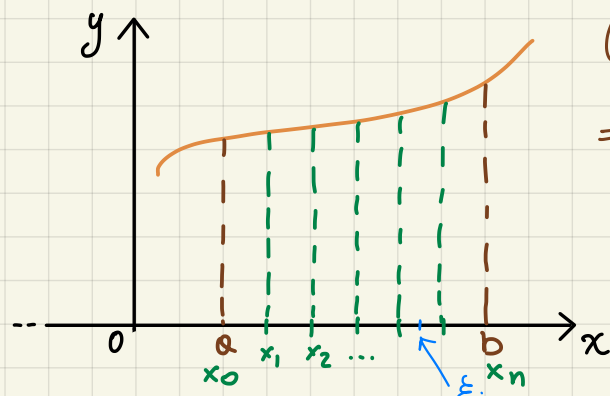
$$\text{area } P_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i^2}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2$$

independ  
da i

$$x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, x_3 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \dots \Rightarrow x_i = \frac{i}{n}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

# Integrale secondo Riemann

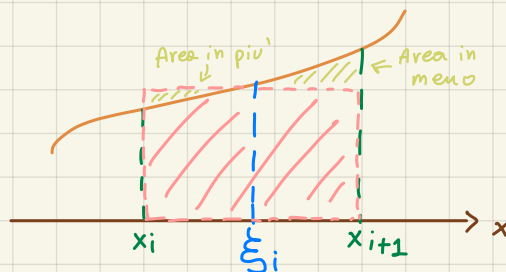
Sia  $f$  continua in  $[a, b]$ ; dividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  parti tramite i punti  $x_0 \equiv a, x_1, x_2, \dots, x_n \equiv b$ .



$$(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n} \leftarrow \text{ogni intervallo è lungo } \frac{b-a}{n}$$

$\Rightarrow$  Consideriamo la seguente quantità:

$$S_n = \sum (x_{i+1} - x_i) \cdot f(\xi_i)$$



Prendo un generico punto  $\xi_i$  compreso nell'intervallo  $(x_i, x_{i+1})$ , quindi faccio questo per ogni intervallo  $e (a, b)$ .

Quindi, con  $S_n = \sum (x_{i+1} - x_i) \cdot f(\xi_i)$  stiamo prendendo la "base" di un ipotetico rettangolo, e la stiamo moltiplicando per l'"altezza"  $f(\xi_i)$ .

facendo questo, andiamo a calcolare l'area dell' $n$ -esimo rettangolo, andando a calcolare "un po' di area in più" a  $\Delta x$  ed "un po' di area in meno" a  $\Delta x$  (per una  $f$  crescente). In questo modo, la somma di tutti i rettangoli  $n$ -esimi, Approssima l'area sottesa alla curva:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f(\xi_i) \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)$$

Le  $S_n$  si dicono **somme di CAUCHY-RIEMANN**

**Definizione:** Si dice che  $f$  è integrabile secondo Riemann se esiste finito il:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = c \quad \text{per definizione si indica} \quad \int_a^b f(x) dx$$

**Osservazione:** Se  $f(x) \geq 0$ , allora:

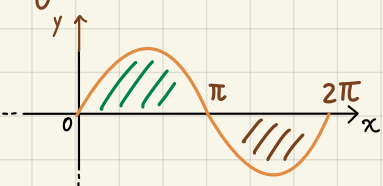
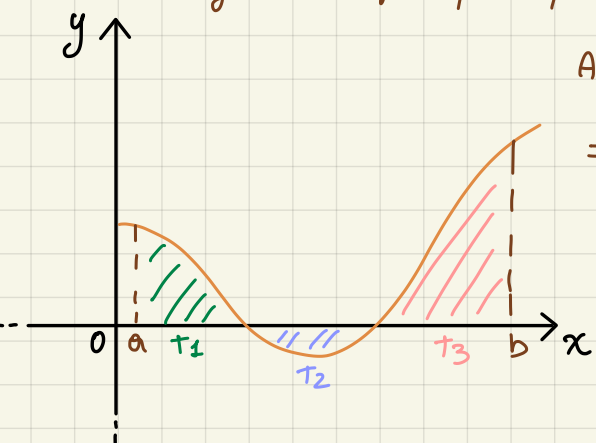
$$\int_a^b f(x) dx \text{ rappresenta la misura dell'area sottesa dalla curva } y=f(x) \text{ in } [a, b]$$

Se invece  $f$  ha segno qualunque:

$$\text{Abbiamo che } \int_a^b f(x) dx = A_{T_1} - A_{T_2} + A_{T_3}$$

$\Rightarrow$  l'area dove  $f(x) < 0$  viene sottratta a quella dove  $f(x) > 0$ .

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$



## Proprietà degli integrali

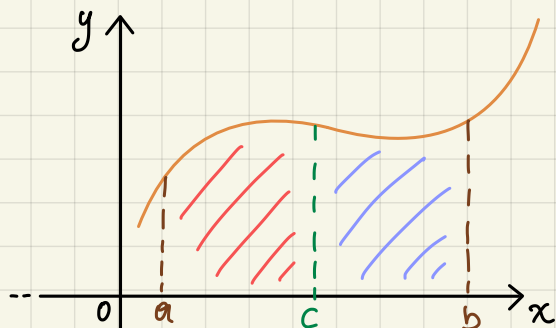
Linearità:  $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$

II)  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

quando si invertono gli estremi si cambia anche il segno, perché l'area è sempre la stessa, ma con segno opposto.

III) se  $c \in (a, b)$

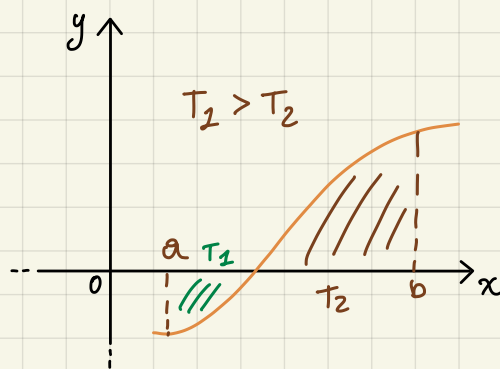
$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



• Si sommano le aree.

IV)  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

$$\int_a^b f(x) dx = A(t_2) - A(t_1)$$



Quando facciamo il valore assoluto di  $T_2 - T_1$ , otteniamo un valore sempre positivo, anche se  $T_1 < T_2$ , ma

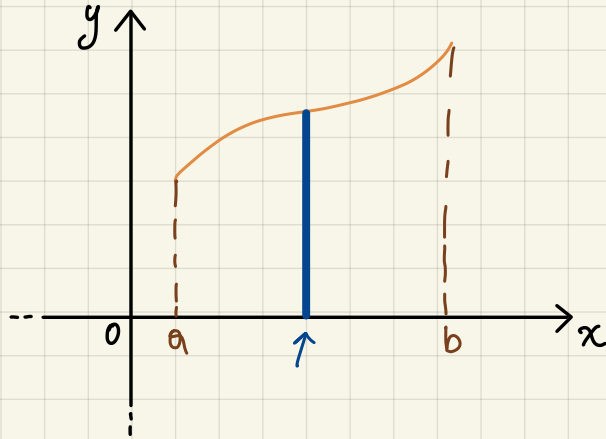
se  $T_2 > T_1 \Rightarrow |T_2 + (-T_1)| \leq |T_2| + |T_1|$ , la stessa cosa vale per l'integrale.

## Teorema della media integrale

Supponiamo che  $f$  sia continua in  $[a, b]$ , allora  $\exists \xi \in (a, b)$  /

$$f(\xi) = \frac{1}{\underbrace{b-a}_{\textcircled{1}}} \int_a^b f(x) dx$$

**Osservazione** La quantità  $\textcircled{1}$  è la media integrale di  $f$  su  $[a, b]$ ; l'integrale tra  $a$  e  $b$  è semplicemente un limite delle sommatorie viste prima;

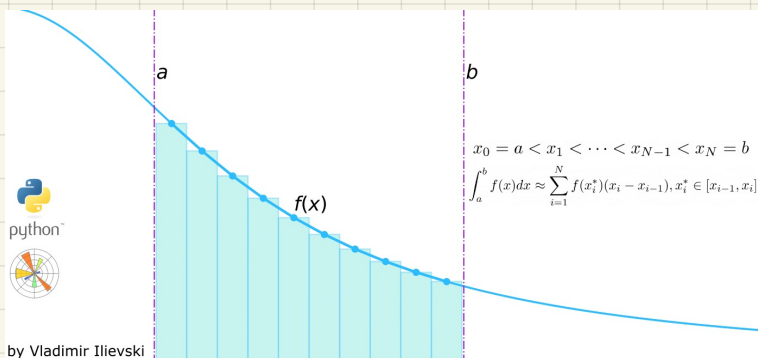


Quando passo al limite, ogni intervallo, tendendo a zero, tende a diventare un punto. Quelli che prima erano dei rettangoli, tendono a diventare dei "segmenti".

$\Rightarrow \int_a^b f$  è la "somma infinita" di tali segmenti.

Questa somma è l'area sottesa alla curva.

Quindi quando parliamo di integrale definito, stiamo parlando di una **somma infinita** di  $f(x)$ , quando  $x \in (a, b)$ .



Tornando alla media integrale...

$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow$  faccio una sommatoria (integrale) e lo dividiamo per il "numero di elementi", ovvero l'intervallo stesso:  $b-a$

È come se facessimo la media dei voti presi:

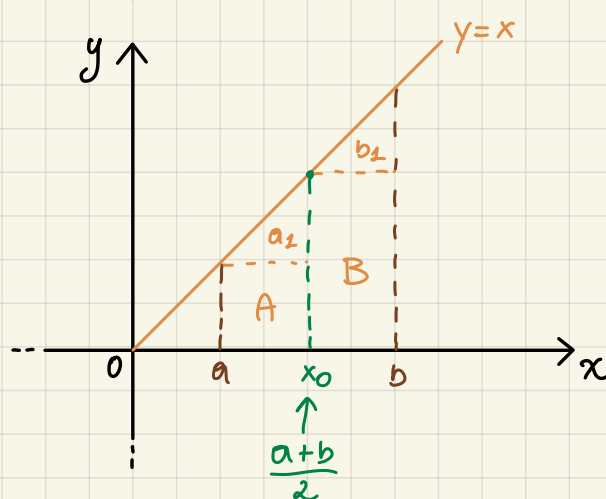
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

diviso il numero dei voti

Somma dei voti presi

Quindi la media integrale ci dà il valore che i segmenti assumono mediamente; il teorema ci dice che all'interno dell'intervallo **ESISTE ALMENO** un punto  $x_0$  in cui  $f(x_0)$  è proprio uguale al valore medio.

Provo a dimostrarlo



uso la funzione  $f(x)=x$  in  $I=(a,b)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x dx =$$

$$A = (x_0 - a)^2 \Rightarrow x_0^2 + 2ax_0 + a^2$$

$$B = 2 \cdot A \Rightarrow 2x_0^2 + 4ax_0 + 2a^2 \text{ oppure } 2(x_0 - a)^2$$

$$a_1 = b_1 = \frac{(x_0 - a)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b x dx = (x_0 - a)^2 + 2(x_0 - a)^2 + \frac{(x_0 - a)^2}{2} = \frac{2(x_0 - a)^2 + (x_0 - a)^2 + (x_0 - a)^2}{2}$$

$$= \frac{4(x_0 - a)^2}{2} = \underline{2(x_0 - a)^2}$$

Il Teorema dice che  $\exists$  un pto  $x_0$  /  $x_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

$\Rightarrow$  calcolo l'integrale: pongo  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $f(x)=x$

$$\Rightarrow f(\xi_{\text{med}}) = \frac{1}{b-a} \cdot 2(x_0 - a)^2 \Rightarrow \frac{1}{2-1} \cdot 2\left(\frac{2-1}{2} - 1\right)^2 = 1 \cdot 2\left(\frac{1-2}{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \leftarrow \text{Valore medio in } (a,b)$$

Domanda esiste un pto  $x_0$  in  $(a,b)$  /  $f(x_0) = \frac{1}{2}$ ?

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \text{ per } \underline{x = \frac{1}{2}} \quad \underline{\text{C.V.D}}$$