ES: $z=\underset{x}{\sqrt{3}}+\underset{y}{i} \Rightarrow |z|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1}=\sqrt{4}=2$ Modulo

θ / $\left.\begin{array}{l}\cos\theta = x/|z| = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = y/|z| = 1/2\end{array}\right\} \Rightarrow 30^\circ$

$\pi:180 = x:30$

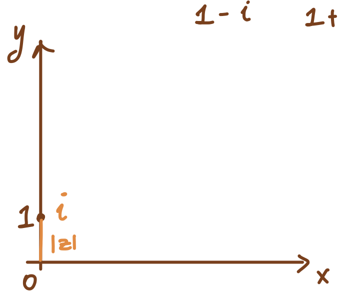
$\frac{\pi \cancel{30}^{1}}{\cancel{180}_{\cancel{18}\,6}} = \frac{\pi}{6}$

Da gradi a radianti

$\Rightarrow z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Verifica $= \cancel{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}+\frac{1}{\cancel{2}}i\right) = \underline{\sqrt{3}+i}$

ES: $z=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1+i)^2}{1-i^2}=\frac{1+i^2+2i}{2}=\frac{\cancel{1-1}+2i}{\cancel{2}}=i \Rightarrow z=0+1i$



$|z|=\sqrt{0+1}=1=\varphi$

θ / $\cos\theta = \frac{x}{\varphi} = 0$

$\sin\theta = \frac{y}{\varphi} = \frac{1}{1} = 1$

90°

Verifica: $z=1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=(0+i)=i$

00:26

Precisazione

θ (theta) si dice anche "argomento principale di z" $\Rightarrow$ $\boxed{\theta = \mathrm{Arg}(z)}$

In generale, si dice Argomento l'angolo che si forma con l'asse delle x.

θ è l'angolo compreso tra $\vec{Oz}$ e l'asse reale x, compreso tra 0 e 2π (senza aggiungere $2k\pi$).

Dall'argomento principale $\mathrm{Arg}(z)$ si ottengono tutti gli altri argomenti di z:

$$\boxed{\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi \quad , \, k\in\mathbb{Z}}$$

Identità di Eulero

$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, con $z \in \mathbb{C}$

L'Id. di Eulero dice che $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

* Per il momento non viene spiegato cosa significa $e^{i\theta}$, ma viene visto come un SIMBOLO.

Possiamo scrivere il num complesso z come $\boxed{z = |z| e^{i\theta}}$

Prodotto e quoziente di numeri complessi in $\mathbb{C}$ quando z è in forma trigonometrica.

Proposizione: Supponiamo di avere $z = \rho \cdot \cos\theta + i\sin\theta = \rho e^{i\theta}$ e $z' = \rho' \cdot \cos\theta' + i\sin\theta' = \rho e^{i\theta'}$

Allora:

1) $z \cdot z' = \rho e^{i\theta} \cdot \rho' e^{i\theta'} = \underbrace{\rho \cdot \rho'} \cdot \underbrace{[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]} = \rho \cdot \rho' \cdot e^{i\theta + \theta'}$

Il modulo del prodotto dei due num complessi è uguale al prodotto dei due moduli.

l'argomento di $z \cdot z'$ non è uguale al prodotto degli argomenti, ma alla loro somma.

Quindi...

Modulo $z \cdot z'$ = Prodotto dei moduli

Argomento $z \cdot z'$ = Somma degli Argomenti

2) $\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}[\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')] \Rightarrow z/z' = \frac{\rho}{\rho'} e^{i\theta - \theta'}$

3) $z^n = z \cdot z \cdot \ldots \overset{n \text{ volte } z}{\Rightarrow} \rho^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] = \rho^n \cdot e^{in\theta}$

Dim punto 1 : $z \cdot z' = [\rho \cos(\theta) + i\sin(\theta)] \cdot [\rho' \cos(\theta') + i\sin(\theta')] =$

$= \rho \cdot \rho' [\cos\theta \cdot \cos\theta' + \cos\theta \cdot i\sin\theta' + i\sin\theta \cdot \cos\theta' + i\sin\theta \cdot i\sin\theta']$

$= \rho \cdot \rho' [\boxed{\cos\theta \cdot \cos\theta'} + \boxed{\cos\theta\, i\sin\theta'} + \boxed{i\sin\theta \cdot \cos\theta'} + \boxed{i^{2} \sin\theta \sin\theta'}]$ -1

$= \rho \cdot \rho' \; [(\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$

Per la Dim 2 si procede in modo simile usando le formule di sottrazione di sin e cos.

Dim 3 $\; z^n = z \cdot z \cdot \ldots = \underbrace{\rho \cdot \rho \cdot \rho \ldots}_{n \text{ volte}} \cdot [\cos(\theta+\theta+\ldots) + i\sin(\theta+\theta+\ldots)] = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

ES: Calcolare $(1+\sqrt{3}i)^6 = \quad \rho = 2 \Rightarrow z^n = \rho^n \cdot (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

$\theta \,/\, \cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Big\} \Rightarrow 60°$

$180 : \pi = 60 : x$

$\frac{60\pi}{180} = \frac{1}{3}\pi$

$= 2^6 \cdot (\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) \equiv 2^6 e^{i2\pi}$

$= 64 \cdot (1 + 0i) = 64$

ES: $z=\sqrt{3}-i$, $z'=1+i$

$\varphi=\sqrt{3+1}=2$

$\varphi'=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=-\frac{1}{2}$

$\cos\theta'=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Downarrow$

$\theta=-30^{\circ}=-\frac{\pi}{6}=\frac{11}{6}\pi$

$\theta'=45^{\circ}=\frac{\pi}{4}$

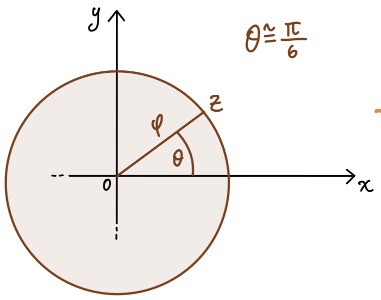
Calcolare $z\cdot z'=2\cdot\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$

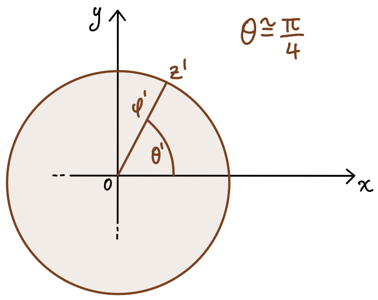
Calcolare $\frac{z}{z'}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right]$

$\cancel{2}$

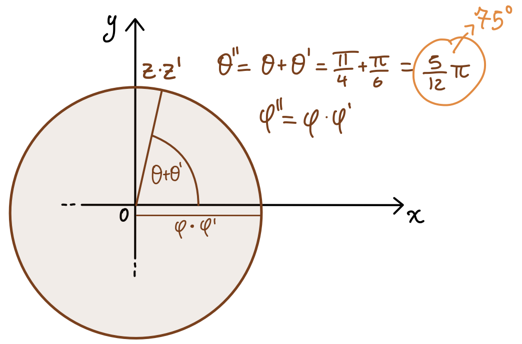
Geometricamente quando ho $z=\varphi e^{i\theta}$ e $z'\varphi' e^{i\theta'}$



+



=



Radici n-esime di $z \in \mathbb{C}$

Teorema: Sia $z = \varphi e^{i\theta}$. Consideriamo l'eq $w^n = z$ con $w \in \mathbb{C}$; le soluzioni w di tale eq sono le radici n-esime di z.

Ovvero: qual e' il numero complesso w / $w^n = z$?

Proposizione: le radici n-esime di un numero complesso $z = \varphi e^{i\theta}$ sono esattamente n, e sono date dalla formula:

$$\boxed{w_K = \sqrt[n]{\varphi} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right)}} \quad , \quad K = \underbrace{0, 1, \dots, n-1}_{\text{Esattamente } n \text{ distinte}}$$

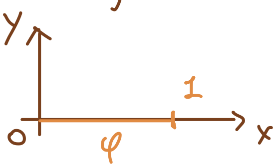
1:49 Dim.

ES: $z^3 = 1$ e' un'eq in $\mathbb{C}$, cerchiamo le radici cubiche complesse di 1
$w^3 = 1$ In $\mathbb{R}$, l'eq corrispondente e' $x^3 = 1$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow x = 1$ unica radice $\in \mathbb{R}$.

Il teorema precedente ci dice che l'eq ha esattamente $\overset{\to n}{3}$ radici complesse.

Calcoliamo: 1) Scriviamo la forma trigonometrica di $z = 1 \Rightarrow \varphi = 1$

geometricamente



$$\theta \; / \left\langle \begin{matrix} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 \end{matrix} \right\rangle 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

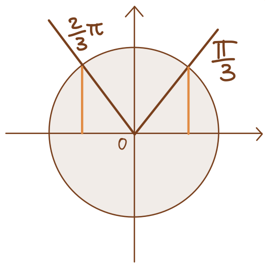
2) le radici cubiche di 1 sono date da:

$$z_K = \sqrt[3]{\varphi} \cdot \left[\cos\left(\frac{0 + 2K\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0 + 2K\pi}{3}\right)\right] \quad \text{con } K = 0, 1, 2$$

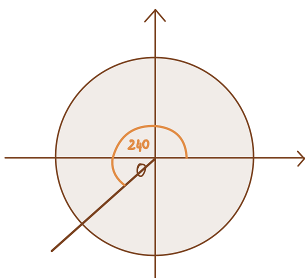
$$z_0 = 1\left[\underbrace{\cos(0)}_{1} + i \underbrace{\sin(0)}_{0}\right] = 1$$

Dobbiamo ritrovare la radice reale tra le radici complesse perche' una radice reale e' si un numero reale, ma anche un particolare numero complesso.

$$z_1 = 1 \cdot \left[\cos\underbrace{\left(\frac{0+2\pi}{3}\right)}_{-1/2} + i \sin\underbrace{\left(\frac{0+2\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{2}}\right] = \left(-\frac{1}{2} \cdot i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



$$z_2 = 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{0 + 4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0 + 4\pi}{3}\right)\right] = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$



Osservazione: z_1 e z_2 sono l'uno il coniugato dell'altro, Infatti il coniugato di un num imm. e' il numero stesso ma con la parte Imm. cambiata di segno.

Osservazione: Se z e' una radice n-esima di un num complesso, anche il suo coniugato $\bar{z} = x - iy$ sara' una radice.

ES: Calcolare le radici quadrate di $z = -1 - i\sqrt{3}$ $\qquad \varphi = \sqrt{1+3} = 2$

1) forma trigonometrica $\qquad \cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad 120$

$180 : \pi = 120 : x \qquad \cancel{\frac{120\pi}{180}} \qquad \frac{2}{3}\pi$

$$z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{2}{3}\pi + 0}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2}{3}\pi + 0}{2}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$z_1 =$ Per l'oss prec sappiamo che $z_2 = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

🚩 2:19

Equazioni di II grado in $\mathbb{C}$

$z^2 + 4z + 5 = 0 \qquad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ridotta (abbiamo 4 come coefficiente) $\qquad z = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$

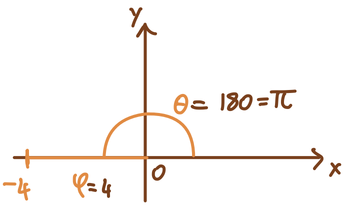
$\Rightarrow z = -2 \pm \sqrt{4 - 5} = -2 \pm \sqrt{-1}$ $\quad \pm i$

Abbiamo due radici complesse e coniugate $= -2 \pm i$

ES: Se avessimo avuto $\sqrt{-4}$?

$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = \pm 2i$ ⟵ Versione "Veloce"

Versione completa: Scriviamo la forma trigonometrica:



$\Rightarrow z = 4[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$

$z_0 = 2\left[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\right] = 2i$

$z_1 = 2\left[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi + 2\pi}{2}\right)}_{0} + i\underbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}_{-1}\right] = -2i$