Lezione 25

Esempi formula di Taylor

Esempio: Continuo formula di Taylor

Scriviamo la formula di Mac Laurin di $\arctan x$

$f' = \frac{1}{1+x^2} \to 1$, $f'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \to 0$; $f''' = \frac{2\left[(1+x^2)^2\right] - 2x\left[2(1+x^2)\cdot 2x\right]}{(1+x^2)^4}$

$= \frac{-2\left[1+x^2-4x^2\right]}{(1+x^2)^3} \to 2$

$f(x) = \arctan x \Rightarrow$

$= \arctan(0) + \frac{f'(x)\cdot x}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} + \frac{f'''(x)}{3!}x^3 + \dots$

$= 0 + (x) - \left(\frac{\cancel{2}}{3\cdot\cancel{2}}\cdot x^3\right) + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

$= (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

Proposizione

Supponiamo che esistano le derivate di f in x_0 seguenti, allora vale il seguente schema:

1. $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ Possiamo avere 3 casi:

Vado a calcolare f'': (2)

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ min Rel
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ max Rel
- $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ facciamo la derivata 3 $\Rightarrow$

(3)

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Ne Max Ne min
- $f'''(x_0) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Si ricomincia come nel caso $f'(x_0) = 0$.

Facciamo la Deriv IV^a (4)

- $f^{IV}(x_0) > 0 \Rightarrow$ min
- $f^{IV}(x_0) < 0 \Rightarrow$ Max
- $f^{IV}(x_0) = 0 \Rightarrow$ Deriv V^a ...

Quando ci conviene questo giochetto?

Quando non riesco a studiare la disequazione (quindi la crescenza della funzione), può essere più semplice calcolare la derivata seconda; se questa calcolata in $x_0 = 0$, andiamo a calcolare la derivata 3. Continuiamo in questo modo finché non troviamo una soluzione o le derivate sono troppo difficili da calcolare.

Studio di funzione Esempio

$f(x) = \ln x - \ln^2 x$

1) Dominio

arg. log > 0 : $x > 0 \Rightarrow D = x > 0$

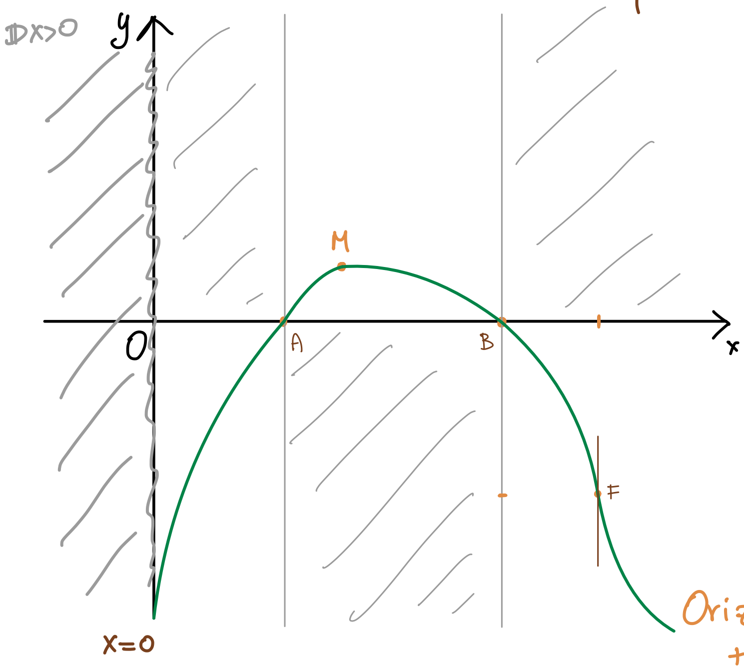
2) Intersezioni

$\begin{cases} x = 0 \\ y = \ln 0 - \ln^2 0 \Rightarrow \text{Non def in } 0. \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ \ln x - \ln^2 x = 0 \end{cases}$ per $\ln x(1 - \ln x) = 0$

$\hookrightarrow x = 1$ $\quad \hookrightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

$A(1, 0) \qquad B(e, 0)$



3) Segno $f(x) > 0$

$\ln x - \ln^2 x > 0$ per $1 < x < e$

4) Limiti : Asintoti

$x = 0$ Non definita $\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$\lim_{x \to 0^+} \ln x - \ln^2 x = \underbrace{\ln 0^+}_{-\infty} - \underbrace{\ln^2 0^+}_{+\infty} = -\infty$

$\Rightarrow x = 0$ è A.V. Dx

Orizzontale. $\lim_{x \to \infty} \ln x - \ln^2 x = \underbrace{\ln \infty}_{+\infty} - \underbrace{\ln^2 \infty}_{+\infty}$

$= \underbrace{\ln^2 x}_{+\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{0} - 1 \right) = -\infty \Rightarrow$ NO A. Oriz

A. Ob.

$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x - \ln^2 x}{x} = \frac{\ln^2 x (-1)}{x} = \frac{-\ln}{x}$ $\quad \ln << x \to 0 \Rightarrow$ NO A. Ob.

5) Deriv I^a

$f' = \frac{1}{x} - 2 \ln x \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} (1 - 2 \ln x)$

1.a) Condiz. necessaria: $f'(x) = 0$; $\cancel{\frac{1}{x}}(1 - 2\ln x) \Leftrightarrow 1 - 2\ln x = 0$ per $\ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{1/2}$

$\cancel{\exists} x$

possibile estremo rel.

$f' > 0 \Leftrightarrow x < e^{1/2}$

$e^{1/2}$ 1,6

$- \mid +$

$\nearrow \mid \searrow$

max

Calcolo le coord.

$f(e^{1/2}) = \ln e^{1/2} - (\ln e^{1/2})^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow (e^{1/2}, \frac{1}{4})$ max

Troviamo il max con il metodo della deriv II:

$f'' = -\frac{1}{x^2}(1 - 2\ln x) + \frac{1}{x}\left(-\frac{2}{x}\right) = -\frac{1 - 2\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\left[3 - 2\ln x\right] \geq 0$

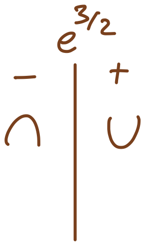
Per trovare il max con la deriv II dobbiamo calcolare $f''(e^{1/2})$:

$f''(e^{1/2}) = -\frac{1}{(e^{1/2})^2}\left[3 - 2\ln e^{1/2}\right] = -\frac{1}{e}\left[3 - 2\ln e^{1/2}\right] = -\frac{2}{e} < 0 \Rightarrow e^{1/2}$ MAX

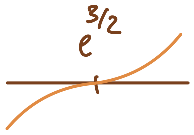
6) Concavità e convessità: $f''(x) \geq 0$

$-\frac{1}{x^2}\left[3-2\ln x\right] \geq 0$ per $3-2\ln x \leq 0$; $\ln x \geq \frac{3}{2}$; $x \geq e^{\frac{3}{2}}$

Possibile flesso



$\Rightarrow$



Calcolo l'ordinata

$$f(e^{3/2}) = \ln e^{3/2} - \ln^2 e^{3/2} = \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{6-9}{4} = -\frac{3}{4}$$

$\Rightarrow \left(e^{3/2}, -\frac{3}{4}\right) F$