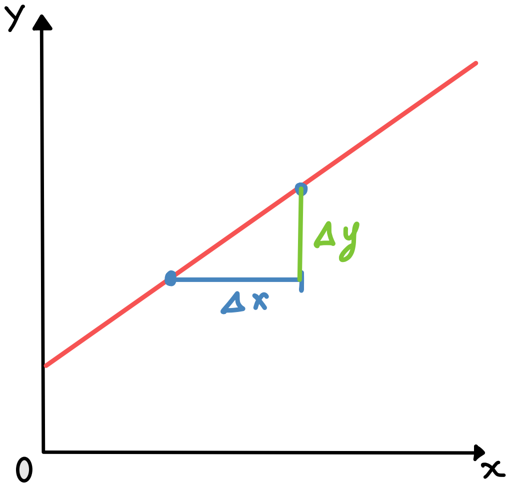
Derivate

Derivate - Concetto



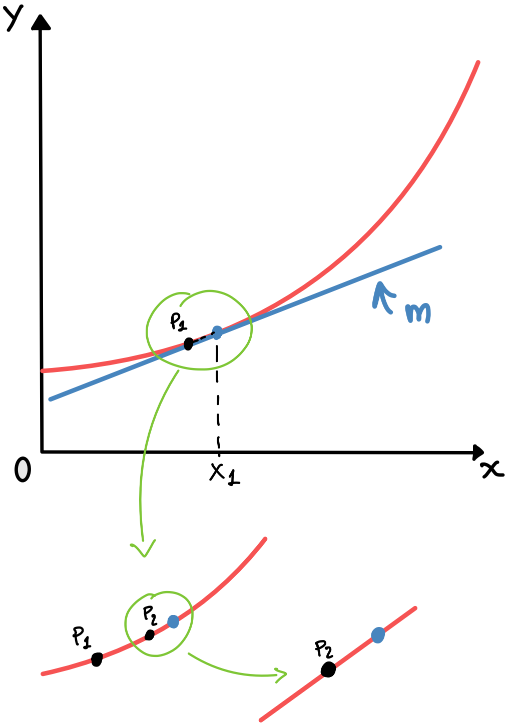
Conosciamo bene il concetto di pendenza di una retta, anche nota come "m".

Quello che m fa, e' descrivere il ratio del cambiamento della variabile y rispetto ad x.

Per trovare la pendenza di una linea ci basta prendere 2 punti della retta, calcolare Δx e Δy e fare il rapporto tra i due:

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

ogni linea e' associata ad una m, perche' il rapporto rimane costante.



Quando, pero', abbiamo non piu' una retta, ma una curva, non possiamo piu' calcolare m allo stesso modo.

Se prendiamo due punti e calcoliamo la m della retta passante tra i due punti, calcoliamo la m media tra un intervallo.

A noi interessa calcolare l'm istantanea, che e' dato dalla m della retta passante per quel punto, la tangente.

Se la distanza tra i due punti che prendiamo in causa e' prossima allo zero, la retta che passa tra i due punti, e' proprio la tangente al punto di partenza, e quindi la retta che rappresenta la nostra m.

Indichiamo quindi la derivata come

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x_1) = \dot{y}}$$

Concetti fondamentali

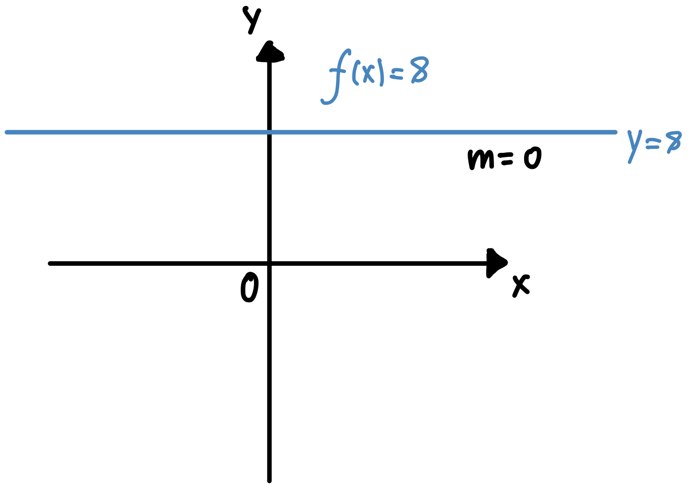
La derivata di una qualsiasi costante e' zero

$$\boxed{\frac{d}{dx}[c] = 0}$$

quindi: $\frac{d}{dx} 5 = 0$

$\frac{d}{dx} 7 = 0$

Perche' ?



La pendenza di una retta parallela ad x sara' sempre 0.

Regola della potenza

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}}$$

quindi $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

$\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$

Derivata di una costante per una funzione

$$\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot \frac{d}{dx}[f(x)]$$

La derivata di una costante per una funzione e' la costante moltiplicata per la derivata della funzione.

Quindi:

- $\frac{d}{dx}(4x^7) = 4 \cdot \frac{d}{dx}(x^7) \overset{!}{=} 4 \cdot (7x^6) = \underline{28x^6}$
- $\frac{d}{dx}(8x^4) = 32x^3$
- $\frac{d}{dx} 9x^5 = 45x^4$
- $\frac{d}{dx}(5x^6) = 30x^5$
- $\frac{d}{dx} 6x^7 = 42x^6$

Perché la derivata funziona?

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$ perché?

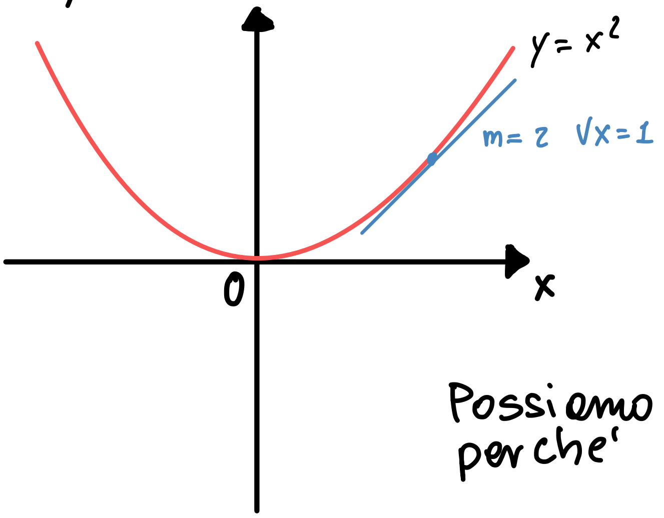
$$\boxed{f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Derivata espressa in limite

Trovare la derivata di una funzione in un punto preciso

$f(x) = x^2$ in $x = 1$

$f'(x) = 2x$ in $x=1 \Rightarrow f'(1) = \underline{2}$



Seguendo il ragionamento di prendere due numeri sempre più vicini che abbiamo visto prima, possiamo prendere due numeri la quale media ci dia proprio il punto $x = 1$:

Possiamo prendere $x_1 = 0.9$ $x_2 = 1.1$ perché $\frac{0.9 + 1.1}{2} = 1$

Per essere più precisi possiamo usare $x_1 = 0.99$ e $x_2 = 1.01$, visto che la m della retta secante passante per x_1, x_2, sarà molto più vicina a quella della curva in $x = 1$:

Per calcolare la m di una retta usiamo $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\Rightarrow m_{sec} = \frac{1.1^2 - 0.9^2}{1.1 - 0.9} = \frac{1.21 - 0.81}{0.2} = \frac{0.4}{0.2} = 2$$

Non era necessario usare 0.99 e 1.01

Altro esempio

$f(x) = x^3$ in $x = 2$

$f'(x) = 3x^2$ $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = \underline{12} = m$

Proviamo ad approssimare m con la secante

$x_1 = 1.9$ $x_2 = 2.1$

$$m = \frac{2.1^3 - 1.9^3}{2.1 - 1.9} = \frac{9.26 - 6.85}{0.2} = 12.05$$

Derivata di una Funzione composta da monomi

$f(x) = x^3 + 7x^2 - 8x + 6$

$f'(x) =$ Derivare ogni monomio separatamente

$= 3x^2 + 14x - 8$

$f(x) = 4x^5 + 3x^4 + 9x - 7$

$f'(x) = 20x^4 + 12x^3 + 9$

Derivata in un punto

$f(x) = 2x^5 + 5x^3 + 3x^2 + 4$ in $x = 2$

$f'(x) = 10x^4 + 15x^2 + 6x$; $f'(2) = 10 \cdot 2^4 + 15 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2$

$= 160 + 60 + 12 = \boxed{232}$

Derivata di un inverso (f irrazionale)

$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -1\, x^{-2}$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

ES $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = \boxed{-\frac{2}{x^3}}$

ES $f(x) = \frac{8}{x^4} = 8x^{-4} \Rightarrow f'(x) = -32\, x^{-5} = \boxed{-\frac{32}{x^5}}$

Derivate di radici

$f(x) = \boxed{\sqrt[2]{x^1}} = x^{1/2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{\frac{1-2}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2x^{1/2}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

ES $f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{5/3}$ $\quad f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3} - 1} = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$

Razionalizzazione dei radicali

Per raz. del denominatore di una frazione, si intende il procedimento che consente di eliminare dal denominatore quantità irrazionali (radicali).

Il risultato è quello di ottenere una forma priva di radici al denominatore.

1) Se il denominatore è la radice quadrata di una certa quantità, è sufficiente moltiplicare sia numeratore che denominatore per la radice:

ES $\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Formula generale: $\frac{3a}{\sqrt{a}} = \frac{3a}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{3a\sqrt{a}}{a} = 3\sqrt{a}$

ES: $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$

$\frac{n}{n} = 1$

2) Se il denominatore è del tipo $\sqrt[n]{a^m}$, con $m < n$, ci conviene moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt[n]{a^{n-m}}$

ES: $\frac{3}{\sqrt[7]{2^2}} = \frac{3}{\sqrt[7]{2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{2^5}}{\sqrt[7]{2^5}} = \frac{3\sqrt[7]{2^5}}{\sqrt[7]{2^7}} = \frac{3}{2}\sqrt[7]{2^5}$

$\rightarrow 2$

ES: $\frac{10}{\sqrt[3]{5}} = \frac{10}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{10\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\cancel{10}}{\cancel{5}}\sqrt[3]{5^2} = 2\sqrt[3]{5^2}$

$\rightarrow 5$

3) Se il denom è la somma o differenza di 2 radicali quadratici, per razionalizzare usiamo il prodotto notevole

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

ES $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

ES $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

Rimane sempre il meno per via del prodotto notevole

ES 1

$f(x) = x^2(x^3+7) = x^5 + 7x^2 = 5x^4 + 14x = x(5x^3+14)$

ES 2

$f(x) = (2x-3)^2 = 4x^2+9+2\cdot 2x\cdot(-3) = 4x^2-12x+9$

$f'(x) = 8x-12$

ES 3 $f(x) = \dfrac{x^5+6x^4+5x^3}{x^2}$

Strategia 1: Dividiamo ogni monomio per x^2

$$\frac{x^5}{x^2} + \frac{6x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} = x^3 + 6x^2 + 5x \Rightarrow \underline{f'(x) = 3x^2 + 12x + 5}$$

Strategia 2: messa in evidenza

$$\frac{\cancel{x^2}(x^3+6x^2+5x)}{\cancel{x^2}} = x^3+6x^2+5x$$

Derivate di funzioni trigonometriche

- $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$
- $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
- $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \cdot \tan x$
- $\dfrac{d}{dx}\mathrm{cosec}\, x = -\mathrm{cosec}\, x \cdot \cot x$
- $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \equiv \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $\dfrac{d}{dx}\mathrm{cotan}\, x = -\mathrm{cosec}^2 x$

Derivate fondamentali

• $\ln x = \frac{1}{x}$

Derivative	Value	Integral	Value
$\frac{d}{dx}(c)$	0	$\int c\,dx$	cx
$\frac{d}{dx}(x)$	1	$\int 1\,dx$	x
$\frac{d}{dx}(x^n)$	nx^{n-1}	$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{d}{dx}(g(u))$	$\frac{d}{du}g(u)\frac{du}{dx}$	$\int \frac{dx}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\log\lvert ax+b\rvert$
$\frac{d}{dx}(u(x)+v(x))$	$\frac{d}{dx}u(x)+\frac{d}{dx}v(x)$	$\int (u(x)\pm v(x))dx$	$\int u(x)dx \pm \int v(x)dx$
$\frac{d}{dx}(u(x)\times v(x))$	$u(x)\frac{d}{dx}v(x)+v(x)\frac{d}{dx}u(x)$	$\int u(x)v(x)dx$	$u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$	$\frac{v(x)\frac{d}{dx}u(x)-u(x)\frac{d}{dx}v(x)}{v(x)^2}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{d}{dx}(\sin x)$	$\cos x$	$\int \cos x\,dx$	$\sin x$
$\frac{d}{dx}(\cos x)$	$-\sin x$	$\int \sin x\,dx$	$-\cos x$
$\frac{d}{dx}(\tan x)$	$\sec^2 x$	$\int \tan x\,dx$	$-\log\cos x$
$\frac{d}{dx}(\cot x)$	$-\mathrm{cosec}^2 x$	$\int \cot x\,dx$	$\log\sin x$
$\frac{d}{dx}(\sec x)$	$\sec x\tan x$	$\int \sin^2 x\,dx$	$\left(-\frac{1}{4}\right)\sin(2x)+\frac{1}{2}x$
$\frac{d}{dx}(\csc x)$	$-\csc x\cot x$	$\int \cos^2 x\,dx$	$\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{2}x$
$\frac{d}{dx}(e^x)$	e^x	$\int e^x dx$	e^x
$\frac{d}{dx}(\log x)$	$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx$	$\log x$
$\frac{d}{dx}(a^x)$	$a^x\log a$	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\log a}$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{asin}\,x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}}$	$\mathrm{asin}\frac{x}{b}$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{acos}\,x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-b^2}}$	$\mathrm{acosh}\frac{x}{b} = \log(x+\sqrt{x^2-b^2})$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{atan}\,x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{b^2+x^2}$	$\frac{1}{b}\mathrm{atan}\frac{x}{b}$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{acot}\,x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{b^2-x^2}$	$\frac{1}{b}\mathrm{atanh}\frac{x}{b} = \frac{-1}{2b}\log\frac{(\lvert x-b\rvert)}{(\lvert x+b\rvert)}$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{asec}\,x)$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{x^2-b^2}$	$-\frac{1}{b}\mathrm{acoth}\frac{x}{b} = \frac{1}{2b}\log\frac{(\lvert x-b\rvert)}{(\lvert x+b\rvert)}$
$\frac{d}{dx}(\mathrm{acsc}\,x)$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$	$\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\mathrm{atan}\frac{(2ax+b)}{\sqrt{4ac-b^2}}$
$\frac{d}{dx}(\log\sin x)$	$\cot x$	$\int e^{ax}\sin bx\,dx$	$\frac{(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}e^{ax}$
$\frac{d}{dx}(\log\cos x)$	$-\tan x$	$\int e^{ax}\cos(bx)dx$	$\frac{(a\cos(bx)+b\sin(bx))}{a^2+b^2}e^{ax}$
$\frac{d}{dx}(\log\tan x)$	$\frac{2}{\sin 2x}$	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\log\tan\frac{x}{2}$
$\frac{d}{dx}(\log\cot x)$	$\frac{-2}{\sin 2x}$	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$
$\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int \frac{1}{1+\cos x}dx$	$\tan\frac{x}{2}$
$\frac{d}{dx}(\log_{10}x)$	$\frac{\log_{10}e}{x}$	$\int \log x\,dx$	$x\log x - x$

Derivate di funzioni composte - Regola del prodotto

$$[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

ES $f(x) = x^2 \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cos x$

ES $f(x) = (3x^4 + 7) \cdot (x^3 - 5x)$

$$f'(x) = 12x^3 \cdot (x^3 - 5x) + (3x^4 + 7) \cdot (3x^2 - 5)$$
$$= 12x^6 - 60x^4 + 9x^6 - 35$$
$$= 21x^6 - 60x^4 - 35$$

ES $f(x) = \underbrace{x^3}_{1} \underbrace{(\tan x)}_{2} \underbrace{(3x^2 - 9)}_{3}$

$f(x) = a \cdot b \cdot c$

$\Rightarrow f'(x) = a'bc + ab'c + abc'$

$$f'(x) = 3x^2 (\tan x)(3x^2 - 9) + x^3 \cdot \sec^2 x \cdot (3x^2 - 9) + x^3 (\tan x)\, 6x$$

Derivate di funzioni fratte - regola del quoziente

$$\frac{d}{dx} \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ES $f(x) = \dfrac{5x + 6}{3x - 7}$

$$f'(x) = \frac{[5 \cdot (3x - 7)] - [(5x + 6) \cdot 3]}{(3x - 7)^2}$$
$$= \frac{\cancel{15x} - 35 - \cancel{15x} - 18}{9x^2 - 49 - 42x}$$
$$= -\frac{53}{9x^2 - 42x - 49}$$

Derivata di funzione composta del tipo $f(g(x))$

La derivata di una f composta è il prodotto tra la derivata della funzione esterna, avente come argomento la funzione interna, e la derivata della funzione interna:

$$\boxed{D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Derivata funzione composta

ES $f(x) = \sin x^2$

$f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$

$f'(x) = \cos(x^2)$ $g'(x) = 2x$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

ES $f(x) = \ln(\sin x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x$

ES $f(x) = e^{x^{2013}} = e^{x^{2013}} \cdot 2013 \cdot x^{2012}$

ES $f(x) = \sin(x \cdot tgx)$ calcoliamo prima $f(x) = x\,tgx$

1) $f'(x\,tgx) = tgx + x\sec^2 x \equiv \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2) $f'(x) = \cos(x\,tgx) \cdot \tan x + x\sec^2 x$

ES: più funzioni composte:

$f(x) = \sin(e^{x^2})$ $f'(x) = \underbrace{\cos(e^{x^2})}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^{x^2}}_{f'(e^{x^2})} \cdot \underbrace{2x}_{f'(x^2)}$

Quindi

Ci basta quindi derivare la funzione più esterna avente come argomento quelle più interne; successivamente, moltiplichiamo la derivata dell'argomento della precedente.

Derivata di $[f(x)]^{g(x)}$

ES $f(x) = x^x$

$\Rightarrow x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$

Regola generale

Dobbiamo ricordare di riscrivere x^x come $e^{\ln(x^x)}$, questo perché esponenziale e logaritmo sono funzioni inverse tra loro, quindi non cambia nulla.

Infine, possiamo portare la x davanti al ln : $x \ln(x^x) \Rightarrow x \ln x$
e quindi possiamo dire che: $[x^x]' = [e^{x \ln x}]'$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{x \ln x} \cdot \ln x + \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} = e^{x \ln x} \cdot \ln x + 1$$

Ma siccome $e^{x \ln x} = x^x \Rightarrow f'(x) = \underline{x^x \ln x + 1}$

ES $f(x) = \sin x^{\cos x}$ la riscriviamo come $e^{\ln(\sin x)^{\cos x}}$

$$\Rightarrow \sin x^{\cos x} = e^{\cos x \underbrace{\ln(\sin x)}_{\text{composta}}}$$

Quindi $f'(x) = e^{\cos x \ln \sin x} \cdot -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$

Derivata di $\sin x$

Derivata di $\ln(\sin x)$ avente come argomento $\sin x$

Come comportarsi

Ogni volta che ci troviamo in una situazione del tipo $[f(x)]^{g(x)}$, ci basta usare l'uguaglianza:

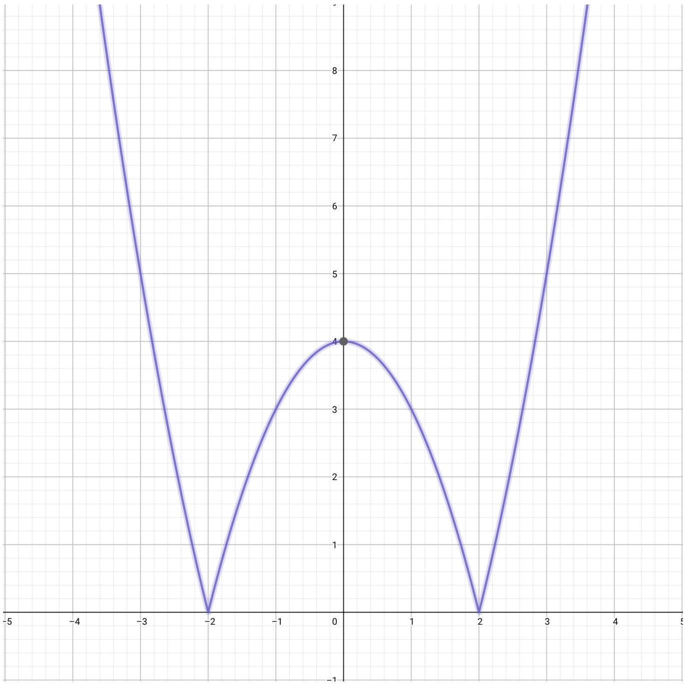
$$\boxed{\begin{aligned} x^x &= e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \\ a^b &= e^{\ln a^b} = e^{b \ln a} \end{aligned}}$$

Derivata destra e sinistra

Prendiamo in esame la funzione: $y = |x^2 - 4|$ in $x = 2$

Siccome $x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$ possiamo scrivere la funzione nella forma:

$$\begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$



A sinistra ed a destra di 2 la funzione ha due espressioni diverse

Per $h < 0 \rightarrow$ sx di 2

$$f(2+h) = -(2+h)^2 + 4 \stackrel{!}{=} -\cancel{4} - h^2 - 4h + \cancel{4} \stackrel{!}{=} \underline{-h^2 - 4h}$$

Per $h > 0 \rightarrow$ Dx di 2

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 4 \stackrel{!}{=} h^2 + \cancel{4} + 4h - \cancel{4} = \underline{h^2 + 4h}$$

Definizione

Una funzione di eq $y = f(x)$, definita in un intorno di x_0, si dice derivabile a Sx in x_0 se il limite del rapporto incrementale con $h \rightarrow 0^-$ esiste ed e' finito.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h)}^{a} - \overbrace{f(x_0)}^{b}}{h}$$

ESISTE ED E' FINITO

ESEMPIO

$f(x) = |x - 1|$ in $x_0 = 1$

1) Derivata Dx — Quando h tende a 0 da destra $\Rightarrow h \to 0^+$

a) $f(x_0 + h) = f(1+h)$ b) $f(x_0) = f(1)$

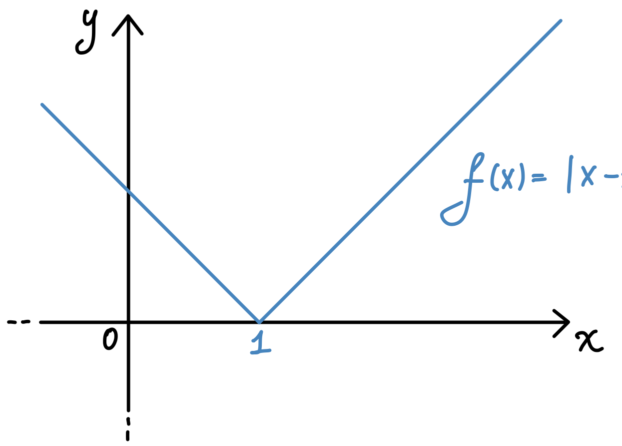
$\Rightarrow |1 + h - 1| = \underline{|h|}$ $\Rightarrow |1 - 1| = \underline{0}$

Sostituendo otteniamo $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$

$\Rightarrow \underline{f'_+(1)}$

2) Derivata Sx

$$\ldots = \lim_{h \to 0^-} \frac{-|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} -1 = -1 \Rightarrow f'_-(-1)$$



! I risultati dei due limiti sono sì finiti ed esistenti, ma non sono uguali tra loro: $+1 \neq -1$

$\Rightarrow$ La funzione f non è derivabile in $x_0 = 1$ infatti non esiste.

$\Rightarrow$ Non è definita la retta tangente al grafico di $f(x)$ in $x_0 = 1$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è però derivabile a Dx e Sx di x_0!

Osservazione:
Se abbiamo una f definita SOLO in un intorno Destro di x_0, la funzione si dirà derivabile in x_0 se è derivabile a Destra in x_0.
La stessa cosa accade per l'intorno Sx

Osservazione
Una f è derivabile in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ se:

1) la funzione è derivabile $\forall x \in (a, b)$
2) la f è derivabile a Dx in $x = a$
3) la f è derivabile a Sx in $x = b$

Tornando all'esempio...
Prendiamo come intervallo $i = [1, 3]$, possiamo affermare che f è derivabile in $i = [1, 3]$ perchè:

1) f derivabile $\forall x \in]1, 3[$
2) f deriv a Sx in 3
3) f deriv a Dx in 1