Dominio o campo di esistenza

Se abbiamo $z = f(x,y)$, qual è il suo campo di esistenza?

ES: $z = \log(x^2-1)$ se $(x,y) = (1,1) \Rightarrow x^2-y=0 \Rightarrow \log(0) \nexists$

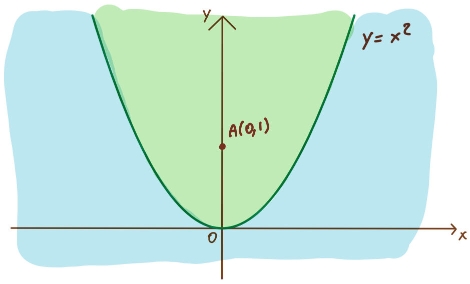
$\longrightarrow$ imponiamo che l'argomento del log sia >0 $\longrightarrow$ $\underline{x^2-y>0}$ Diseq 2 variabili

Risoluzione diseq a 2 variabili

1) Scrivere l'eq corrispondente $\longrightarrow$ $x^2-y=0$

$\Rightarrow$ Quali sono i punti del piano x,y / $x^2-y=0$? Ovvero quando $y=x^2$?

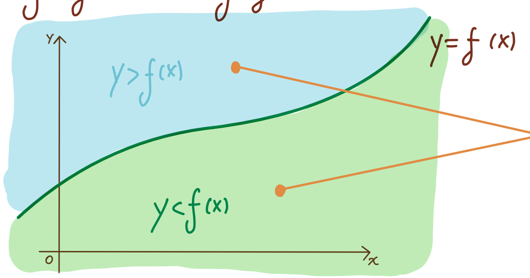
$y=x^2 \Leftrightarrow (x,y) \in$ parabola con vertice in $(0,0)$



a

2) $x^2-y>0$ quando ho una curva $y=f(x)$ essa divide il piano in due aree in ognuna delle quali si ha $y>f(x)$ o $y<f(x)$

Osservazione: in uno dei due semipiani, cioè in tutti i punti di esso si ha sempre $y>f(x)$ oppure $y<f(x)$; quindi non esistono in un semipiano due punti in cui $y>f(x)$ e $y<f(x)$.



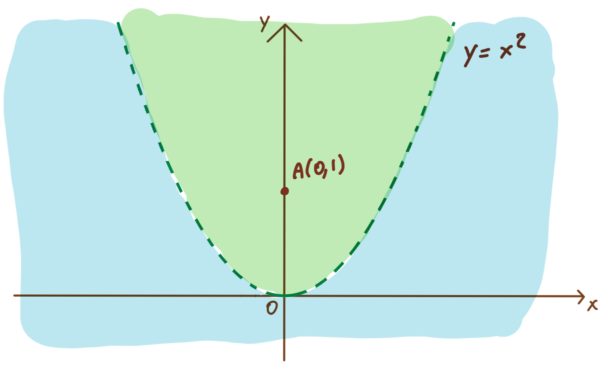
Quindi, quando $x^2-y>0$ (1) ? Guardando il grafico (a), quale semipiano soddisfa la (1) ?
Basta prendere un qualunque punto dei due semipiani, e sostituirlo nella disequazione.

Prendiamo $A=(0,1)$ e lo sostituiamo: $0^2-1>0$ $\quad -1 \not> 0$ $\Rightarrow$ i pti che soddisfano la (1) sono quelli del semipiano $\underline{\text{CELESTE}}$

- Siccome vogliamo i punti in cui $x^2-y \overset{\text{stretto}}{>} 0$, dobbiamo eliminare i punti in cui $x^2-y=0$, che sono i punti della parabola $y=x^2$.

I punti che soddisfano l'eq $x^2-y>0$ sono tutti quelli dell'area celeste $-\{\text{Parabola}\}$.

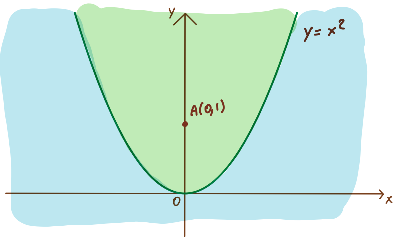
$\Rightarrow$ La risoluzione è GRAFICA!



Es: $z=\sqrt{y^2-x^4}$ $\quad y^2-x^4\geq 0 \Rightarrow y^2\geq x^4 \Rightarrow \underbrace{(y-x^2)}_{1}\underbrace{(y+x^2)}_{2}\geq 0$ Diseq prodotto

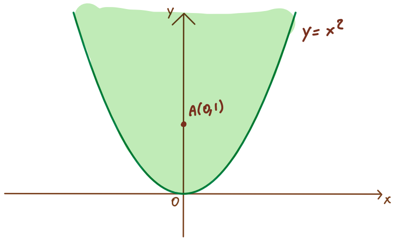
Grafico per ogni diseq.

$\Rightarrow$ 1) $y-x^2\geq 0 \to y=x^2$

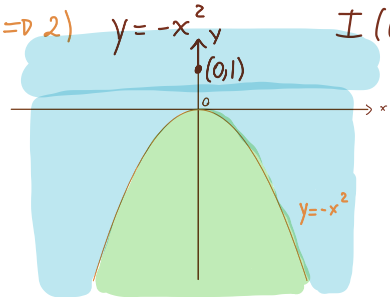


In $(0,1)$: $1-0^2\geq 0$ Si

$\Rightarrow$ Soluzione:

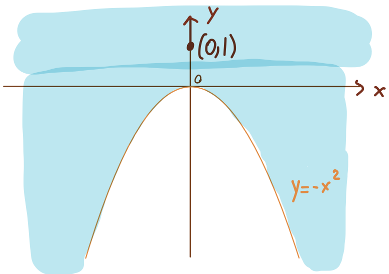


$\Rightarrow$ 2) $y=-x^2$



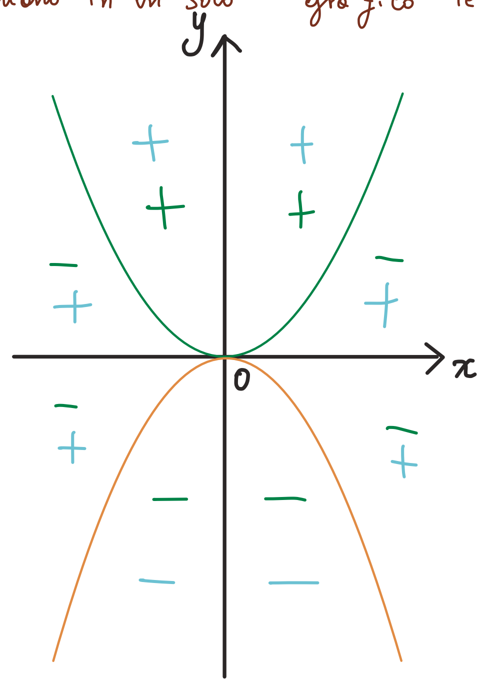
I $(0,1)$: $1+0^2\geq 0$? Si

$\Rightarrow$ Soluzione:

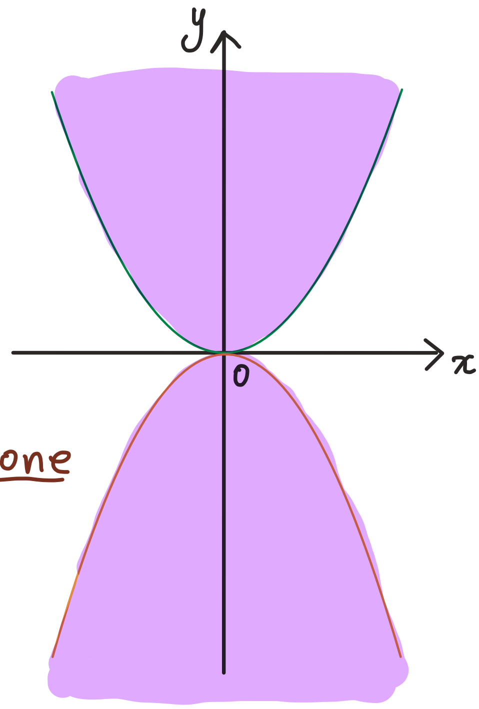


III) Diseq prodotto $(y-x^2)(y+x^2)\geq 0$

Poniamo in un solo grafico le due curve:



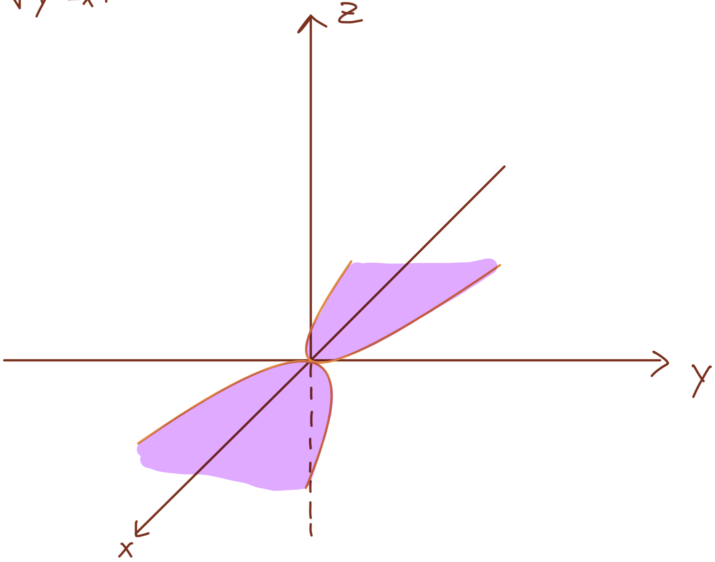
Soluzione

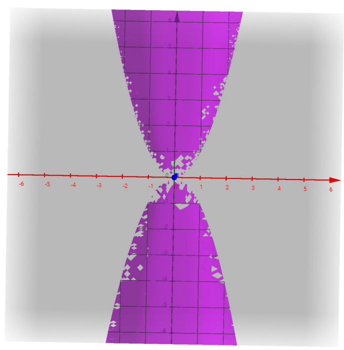


A che ci serve tutto questo?

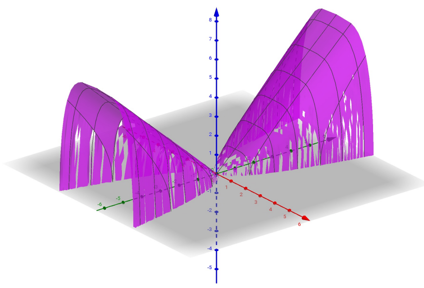
$z=\sqrt{y^2-x^4}$

La funzione è nello SPAZIO
Il dominio è nel PIANO





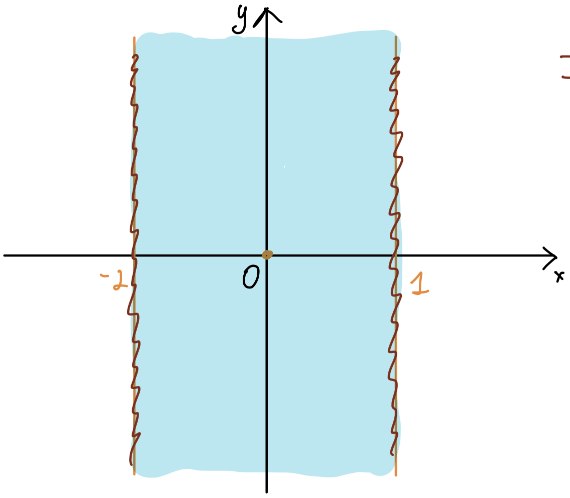
DOMINIO PIANO



CODOMINIO SPAZIO

ES: $z = \ln\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right) \to \frac{1-x^2}{1-y^2} > 0 \to$

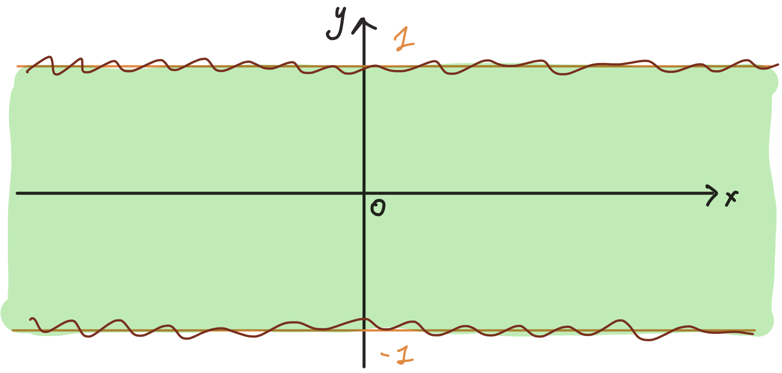
I) N: $1-x^2>0$ $\quad x^2 = 1 \to x = \pm 1$ $\quad$ 2 rette



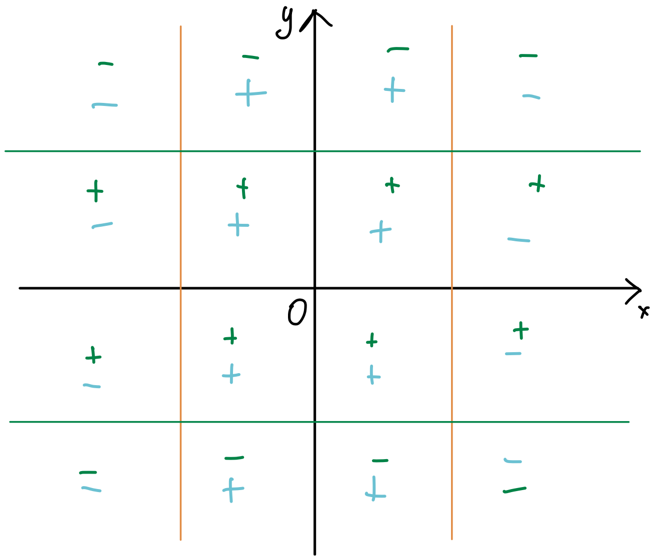
$I(0,0) = 1-0>0$ Si

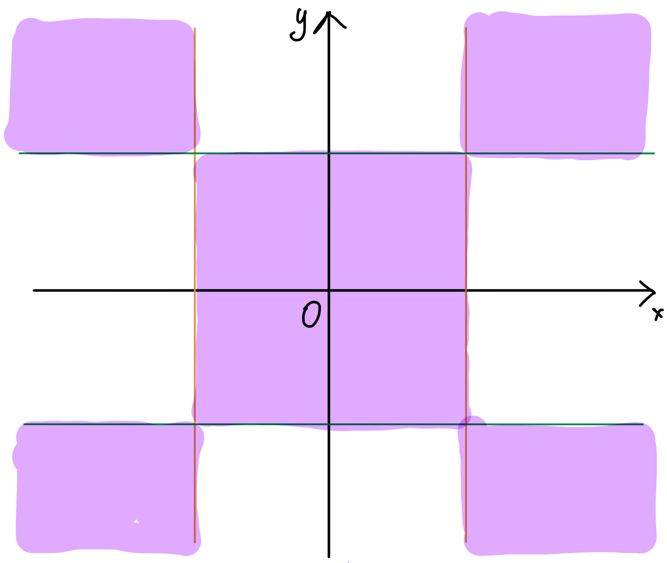
Oppure risolviamo la diseq di II grado: $x^2-1<0$ Val int
$-1<x<1$

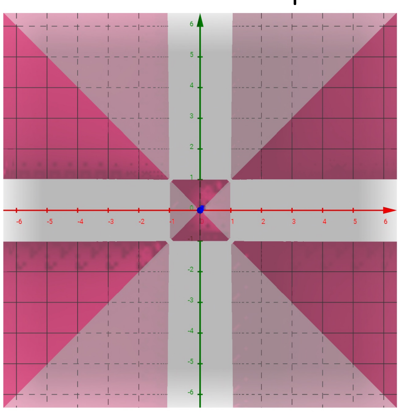
II) $1-y^2>0$ per $y^2-1<0 \to$ Val int $\to$ $-1<y<1$

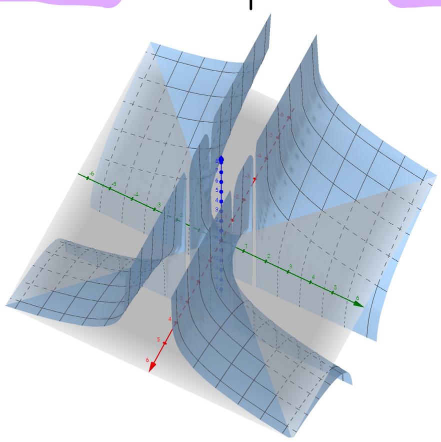


Quindi: unisco i grafici









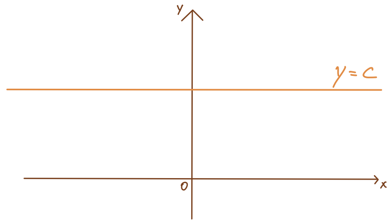
Curve di livello

Data $z = f(x,y)$ si dicono curve di livello le curve date dall'eq:

$$f(x,y) = \text{cost} \iff \begin{cases} z = f(x,y) \\ z = c \end{cases} \longrightarrow \text{Chi è } z=c\,?$$

OSS: $z = c$

$y=c$ rappresenta una retta orizzontale:



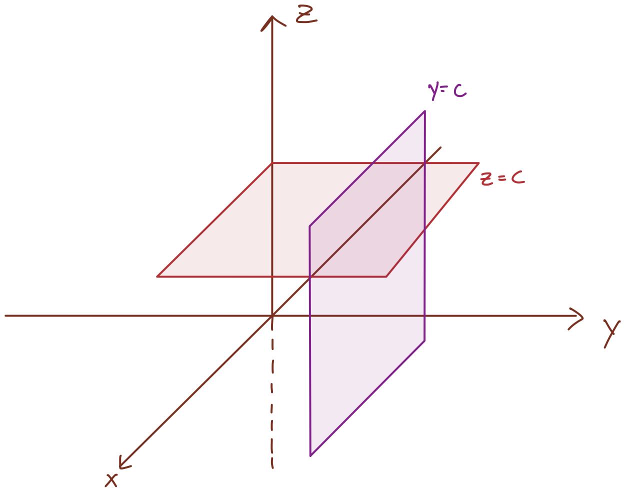
$\Rightarrow z=c = \text{insieme } \{(x,y,z) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2, z=c\}$

Altezza COSTANTE

x e y si "muovono" arbitrariamente

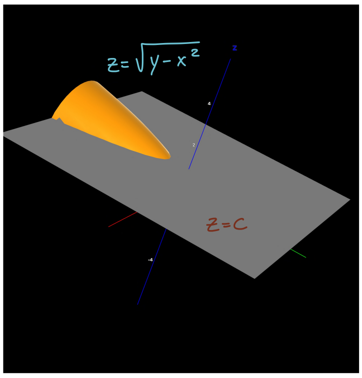
Quindi $z=c$ è il Piano parallelo al piano x,y $\Rightarrow$ Tutti i punti del piano $(z=c)$ sono la "copia sovraelevata" del piano x,y

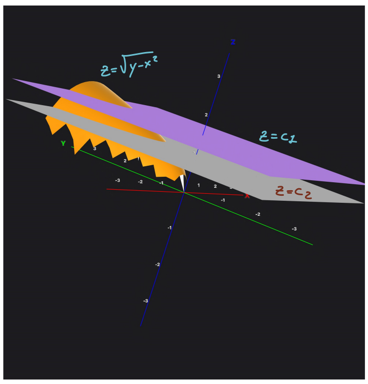
Se oltre $z=c$ abbiamo anche $y=c$ otteniamo:



Torniamo alle curve di livello:

Quando interseco il grafico nello spazio con il piano $z=c$, ed osserviamo l'intersezione dall'alto, avremo il "bordo" della funzione, ovvero una funzione ad UNA variabile:



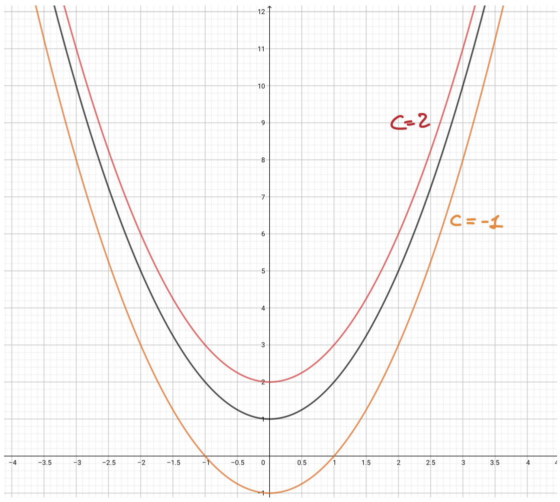


ES: $\begin{cases} z = \sqrt{y-x^2} \\ z = c \end{cases} \Rightarrow \sqrt{y-x^2} = c$

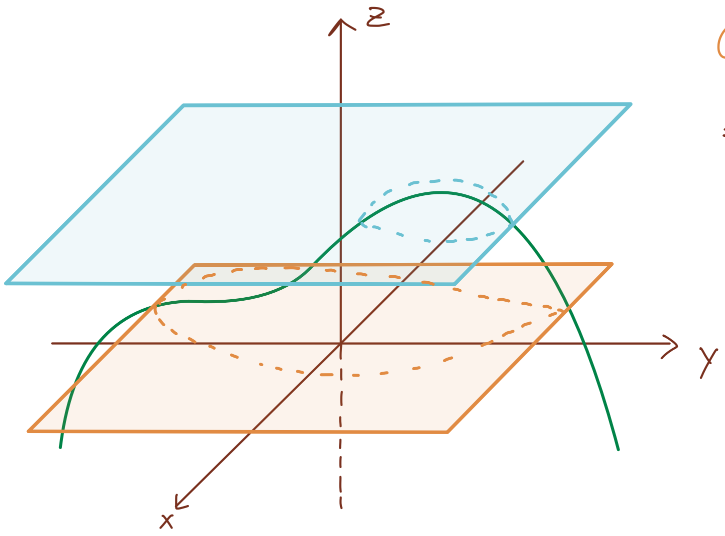
$y - x^2 = c^2$

$y = x^2 + c$

Al variare di c otteniamo diverse parabole:



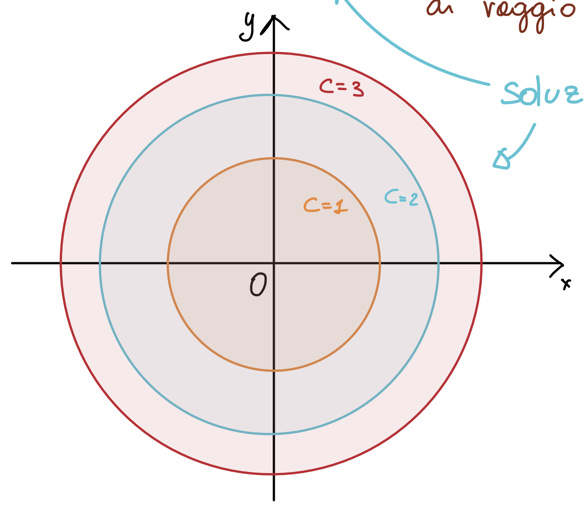
$\Rightarrow$ Al variare di c $(z=c)$ varia l'altezza! Ovvero ogni parabola è "un piano diverso"



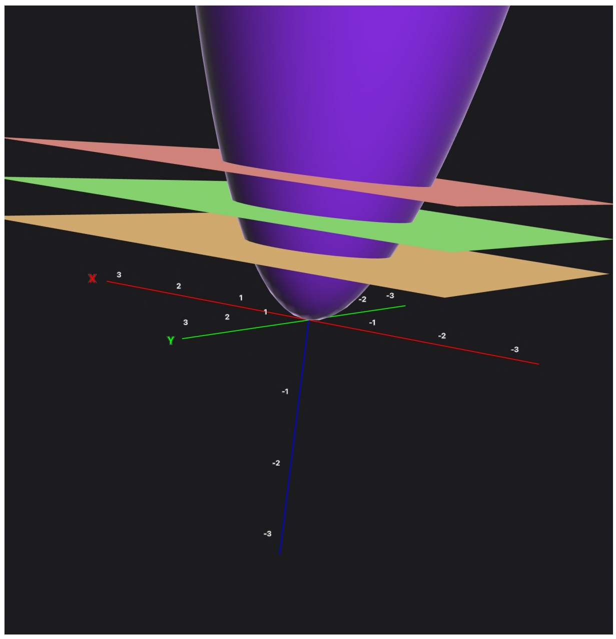
Come Trovo le curve di livello di una eq $z = x + y$

$\Rightarrow z = x^2 + y^2 \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = C}$ Tutte le circonferenze di raggio $r = \sqrt{C}$

Soluzione



Man mano che z aumenta, ovvero che il piano z si "Alza", la funzione nello spazio "si allarga".



Limiti

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ A aperto.

Si suppone di avere un punto $P_0(x_0, y_0)$ che è un punto di Accumulazione di A.

Definizione: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall \underset{\text{punto}}{(x,y)} : \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta$

Abbiamo che: $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$