Esempio

$$\gamma = \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Calcolare la lunghezza di questa curva

I) derivate: $x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t \qquad y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\varphi'(t)\|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2}$$

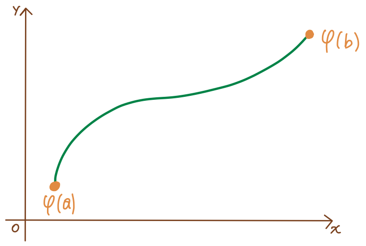
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t}[\cos^2 t + \sin^2 t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2 \sin t \cos t]} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{2t} \cdot 2}\, dt = \sqrt{2}\left[e^t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\left[e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right] \leftarrow$$ Lunghezza della curva

Ascissa Curvilinea

Supponiamo di avere: $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ curva in $\mathbb{R}^2$. γ è il sostegno della curva: $\gamma = \varphi([a,b])$

$\Rightarrow \gamma$ ha eq param $\varphi = \varphi(t)$



$$L(\gamma) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt$$

$\uparrow$ Sappiamo che la lunghezza della curva è...

Prendiamo $t \geq a$ e consideriamo il punto $P_t = \varphi(t)$. Se voglio la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{P_a P_t}$ dobbiamo calcolare:

$$L(\overset{\frown}{P_a P_t}) = \int_a^t \|\varphi'(\tau)\|\, d\tau = \int_a^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2}\, d\tau$$

$\uparrow$ Var di integr.

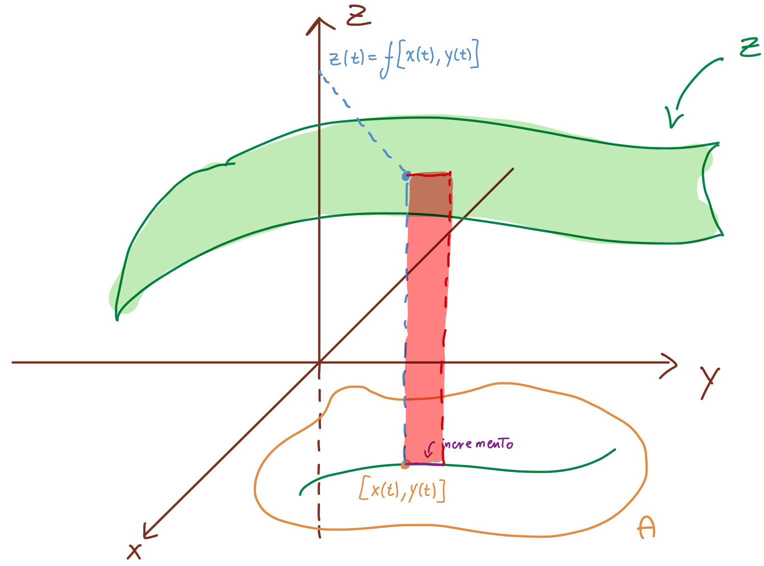
La lunghezza di questo arco si denota con $S(t)$ e prende il nome di Ascissa curvilinea.

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\varphi'(\tau)\|\, d\tau \qquad \frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad dt \quad \rightarrow \quad ds(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Integrale curvilineo

Sia γ una curva regolare. Sia $\varphi = \varphi(t)$, $t \in [a,b]$ una rappresentazione parametrica di $\gamma = \varphi([a,b])$.

Supponiamo di avere una f continua in A aperto di $\mathbb{R}^2$; supponiamo che $\gamma \overset{\text{Contenuta}}{\subset} A$

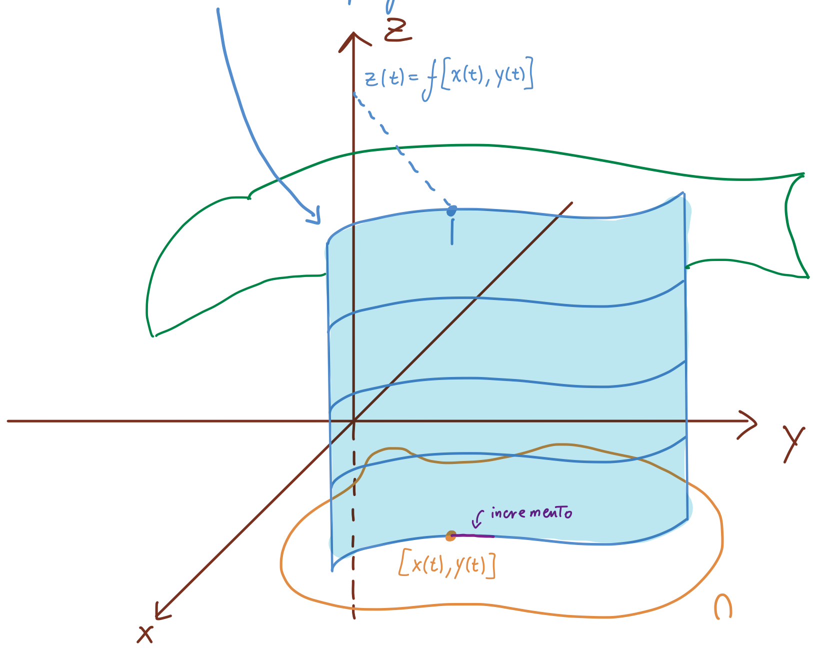


DEF. Si dice integrale curvilineo di f lungo γ il seguente integrale:

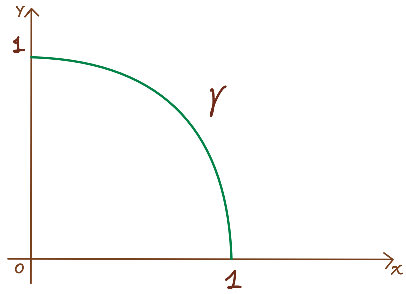
$$\int_{\underset{\text{ESTESO A }\gamma}{\gamma}} f \, ds \overset{def}{=} \int_a^b \underbrace{f[x(t), y(t)]}_{\text{Punti sulla curva}} \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

Cosa accade in pratica? Prendiamo un punto sulla curva che avrà coordinate $[x(t), y(t)]$. Successivamente calcoliamo f sul questo punto, che ci darà l'altezza z.
Poi, moltiplichiamo f per la quantità $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ ovvero l'incremento dell'ascissa curvilinea. Questa quantità ci da l'incremento infinitesimale della lunghezza di curva.

E' come se stessimo ottenendo l'area della porzione di superficie. Facendo l'integrale, calcoliamo l'area di TUTTA la superficie:



ES: γ arco di circonf di r unitario



Calcolare

$$\int_\gamma x^2 y \, ds$$

1) eq parametriche di γ. Siccome γ è un arco di circonf. conosciamo le sue eq parametriche:

Eq param: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ Primo quadrante

$$z = x^2 y \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \sin t \cdot \underbrace{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}_{\text{Se regolare la rad non si annulla}} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t \, dt = \left[-\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

1 → Rel Fond.

$$\Rightarrow +\frac{1}{3}$$

🚩 33:00

ES: Calcolare:

$$\int_\gamma x^3 + y \, ds$$ dove γ è la curva di eq: $\begin{cases} x = 2t \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 3t^2 \end{cases}$ $t \in [0,1]$

$$\int_0^1 (8t^3 + t^3) \sqrt{4 + 9t^4} = \frac{1}{4} \int_0^1 4 \cdot 9t^3 \cdot \sqrt{4 + 9t^4} = \frac{1}{4} \left[\frac{(4 + 9t^4)^{3/2}}{3/2} \right] = \frac{1}{6} \left[13\sqrt{13} - 8 \right]$$

- Tutto ciò che abbiamo visto vale sia nel piano che nello spazio:

ES: Consideriamo una curva nello spazio:

$$\varphi : t \in [a,b] \to \varphi(t) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \varphi(t) \text{ ha coordinate } [x(t), y(t), z(t)]$$

$$\Rightarrow \gamma = \varphi[(a,b)] \text{ ha eq parametriche: } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

Sostegno

$$\Rightarrow \|\varphi'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

Ⓐ

ES: possiamo avere una funzione $f(x,y,z)$ ← NON RAPPRESENTABILE (4 dimensioni)

$$w = f(x,y,z) \to \int_\gamma f(x,y,z) \, ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \cdot \|\varphi'(t)\|$$ Ⓐ

ES: $\gamma = \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 4t \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$ Calcoliamo $\int_\gamma z \, dt \Rightarrow \begin{cases} x' = -3\sin t \\ y' = 3\cos t \\ z' = 4 \end{cases}$

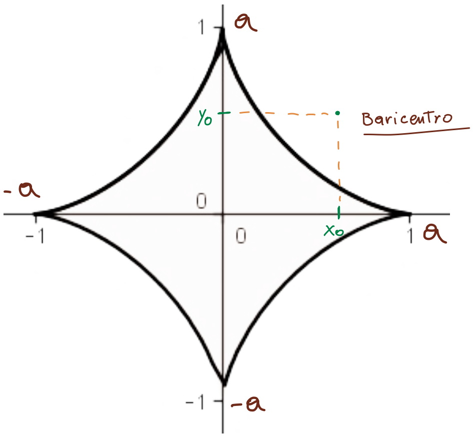
$$\Rightarrow \int_0^\pi 4t \cdot \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} \, dt = 4 \int_0^\pi t \sqrt{9 + 16} = 20 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = 20 \cdot \frac{\pi^2}{2} = 10\pi$$

Baricentro di γ

Si dice Baricentro di $\gamma = \varphi([a,b])$ di eq param: $\varphi = \varphi(t)$, regolare, il punto $P_0(x_0, y_0)$:

$$x_0 = \frac{1}{L(\gamma)} \cdot \int_\gamma x \, ds \quad , \quad y_0 = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma y \, ds$$

ES: Abbiamo la curva "ASTEROIDE" ha eq:



$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \begin{cases} x' = -3\cos^2 t \sin t \\ y' = 3\sin^2 \cos t \end{cases}$$

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}$$

$$\Rightarrow \text{sqrt}\left[9\sin^2 t \cos^2 t \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1}\right] = \underline{\sqrt{3\sin t \cos t}} \text{ radice}$$

Quindi: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{I quadr}}}{L(\gamma)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t \cos t \, dt = 3\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$

Calcoliamo le lungh. dei baricentri:

$$x_0 = \frac{1}{\frac{\cancel{3}}{2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \cdot \overbrace{\sqrt{\cancel{3}\sin t \cos t}}^{\text{Radice}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t \, dt = -2\left[\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{5}$$

Quindi $\Rightarrow$ $y_0 = \frac{2}{5}$, $x_0 = \frac{2}{5}$ $\Rightarrow$ guarda grafico