Lezione 15

ES: $iz^2-2z+3i=0$ $\qquad z=\dfrac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a} = \dfrac{1\pm\sqrt{1-3i^{2}}}{i} = \dfrac{1\pm 2}{i}$ $\begin{cases} \frac{3}{i} = \underline{-3i} \\ -\frac{1}{i} = \underline{i} \end{cases}$

Formula ridotta

Si applica quando b è pari, se b è divisibile per 4, si applica la ridottissima.

ES: $z^4-(1+i)z^2+i=0$ $\quad$ pongo $t=z^2 \Rightarrow \quad t^2-(1+i)t+i=0 \qquad t=\dfrac{(1+i)\pm\sqrt{(1+i)^2-4i}}{2}$

$= (1+i)\pm\sqrt{1+2i+i^2-4i} = 1+i^2-2i = \sqrt{(1-i)^2} \Rightarrow \dfrac{1+i \pm 1-i}{2} = \begin{cases} 1 \\ i \end{cases}$

$z^2=t=1 \Rightarrow z=\pm 1$

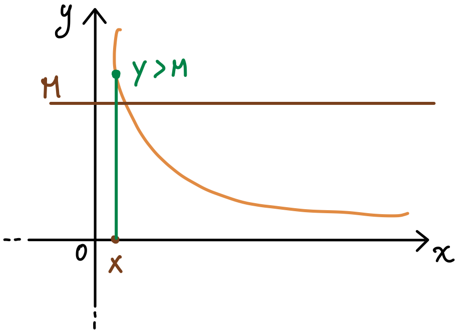
$z^2=t=i \Rightarrow \varphi=1 \ \theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad z_0 = 1\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}/2\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

Varie definizioni di limite

I) x_0 e ℓ finiti $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta$ / per ogni volta che $|x-x_0|<\delta$, $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ (Discusso già prima)

II) x_0 finito e $\ell=+\infty$: $\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \iff \forall M>0\ \exists\delta / |x-x_0|<\delta,\ f(x)>M$



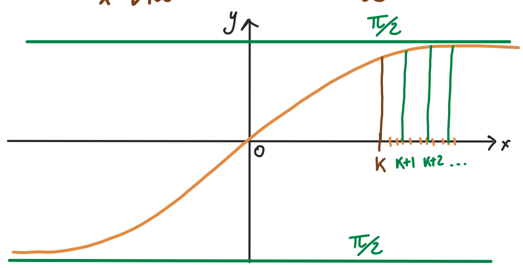
- Ogni volta che fisso un $M>0$, quando $x\to x_0$ (in questo caso 0) Trovo $f(x)$ che si trova al di sopra M, ovvero devo trovare sempre un intorno di 0

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \iff \forall M>0\ \exists\delta / |x-x_0|<\delta,\ f(x)<-M$

III) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists K>0$ / ogni volta che $x>K$, $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

f è vicina ad ℓ

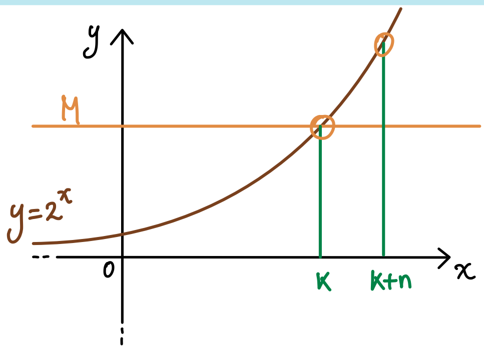
ES: $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$



$f(x)$ Dista da ℓ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ per meno di ε, ovvero si avvicina ad ℓ man mano che aumenta K.

IV) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \iff \forall M>0\ \exists K>0$ / $x>K$, $f(x)>M$

ES: $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x=+\infty$

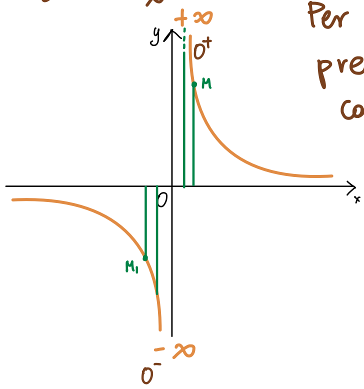


ogni volta che $x>K$, $f(x)>M$ "sta sopra".

1:11

Casi di non esistenza del limite

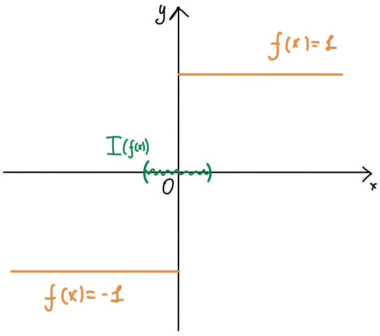
1) $f(x) = \frac{1}{x}$



Per definizione, dobbiamo poter trovare un intorno di $x_0 = 0$ / ogni volta che prendiamo un x nell'intorno, $f(x) > M$.
Con tutte le x che prendiamo nell'intorno e > 0, rispettiamo la definizione, ma per $x < 0 \in I(x_0)$, $f(x) \to -\infty$!

Di conseguenza il limite non esiste!

2) $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \text{per } x \geq 0 = \frac{x}{x} = 1 \\ \text{per } x < 0 = \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$

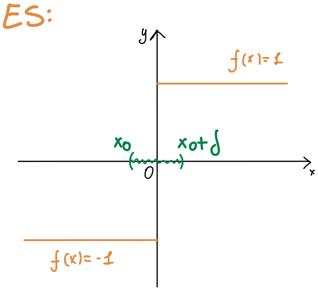


Qualsiasi intorno di $x_0 = 0$ io prenda troviamo sia valori che valgono 1 che -1. Siccome il lim Sx e Dx sono diversi, il limite non esiste.

Limite destro e sinistro

Si dice che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;/\; x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow x \in (x_0, x_0 + \delta), \; |f(x) - \ell| < \varepsilon$

ES:

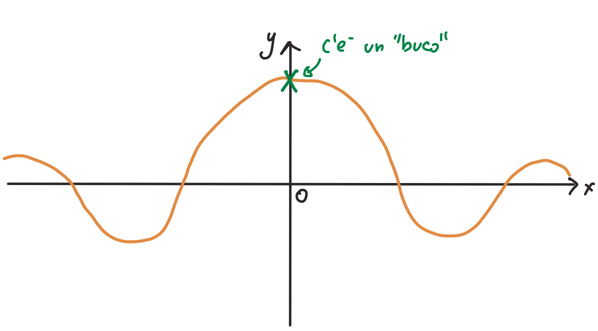


$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ Da Destra

$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ Da Sinistra

Osservazione: Il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste $\iff$ $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \end{array}\right\}$ I due limiti coincidono

ES: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ esiste ed e' 1



Non vediamo il "buco" perche' $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$ Il lim Dx e Sx coincidono.

* In questi casi notiamo che $D(f(x)) = x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\Rightarrow$ In $x = 0$ c'e' un buco, andiamo a calcolare i limiti Dx e Sx in 0^+ e 0^-