Esercizi
limiti

8.4 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$(a)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+|x|}{x} = 2 \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x+|x|}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+|x|}{x} = \begin{cases} \text{se } x>0: & \frac{x^2+x+x}{x} = \frac{x^2+2x}{x} = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 0^+ + 2 = 2 \\ \cancel{\text{se } x<0}: & \frac{x^2+x-x}{x} = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0 \end{cases}$$

$0^+ > 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x+|x|}{x} = \begin{cases} \text{se } x>0 & 0^- < 0 \\ \text{se } x<0 \Rightarrow & \frac{x^2+x-x}{x} = 0 \end{cases}$$

8.5 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to+\infty} (x - 2\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x - 2\sqrt{x}) = x - 2x^{1/2} = x(1-2(1)^{1/2}) = +\infty$$

8.7 Utilizzare la proprietà (11) del paragrafo 7D per dedurre che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Dal limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Verificare che il lim non esiste

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\sin}_{f(x)}\Big(\underbrace{\frac{2\pi}{x}}_{g(x)}\Big)$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\pi}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(g(x)) = \lim_{x\to 0^+} \sin(+\infty) = \nexists$$

Limiti Notevoli

8.15 Verificare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{a^x} = 0 \ (a > 1)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{a^x} = \log x \ll a^x \Rightarrow 0$$

8.16 Verificare che, qualunque sia il numero reale b, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b$$

Limite Notevole: $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Se $b=0$: $(1+0)^x = 1^x = 1$

8.18 Verificare che valgono le relazioni di limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{e}\Big] \Rightarrow \log(e) = 1$$

è un lim notevole

8.19 Verificare la relazione di limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow$$

Pongo $\frac{1}{x} = y$

$$\Rightarrow \lim y\log(1+x) = \lim_{x\to 0} \log(1+x)^y = \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \log(1+x)^{x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \log\left[(1+x)^x\right]^{-1} = 1$$

?

8.20 Verificare la validità della relazione

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \text{Limite Notevole} \Rightarrow 1$$