Lezione 15

ES: $iz^2 - 2z + 3i = 0$ $\quad z = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 3i^2}}{i} = \dfrac{1 \pm 2}{i}$ ($i^2 = -1$) $\Rightarrow \dfrac{3}{i} = -3i$; $-\dfrac{1}{i} = i$

Formula ridotta

Si applica quando b è pari, se b è divisibile per 4, si applica la ridottissima.

ES: $z^4 - (1+i)z^2 + i = 0$ $\quad$ pongo $t = z^2 \Rightarrow t^2 - (1+i)t + i = 0$ $\quad t = \dfrac{(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4i}}{2}$

$= (1+i) \pm \sqrt{1 + 2i + i^2 - 4i} = 1 + i^2 - 2i = \sqrt{(1-i)^2} \Rightarrow \dfrac{1+i \pm 1-i}{2} = 1 \text{ oppure } i$

$z^2 = t = 1 \Rightarrow z = \pm 1$

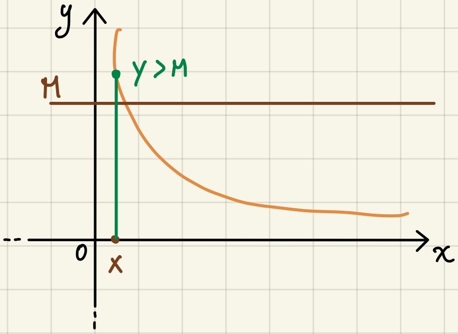
$z^2 = t = i \Rightarrow \rho = 1 \quad \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\quad z_0 = 1\left[\cos\left(\frac{\pi}{2/2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Varie definizioni di limite

I) x_0 e ℓ finiti $\Rightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \; /$ per ogni volta che $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ (Discusso già prima)

II) x_0 finito e $\ell = +\infty$: $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \; \exists \delta / |x - x_0| < \delta, \; f(x) > M$



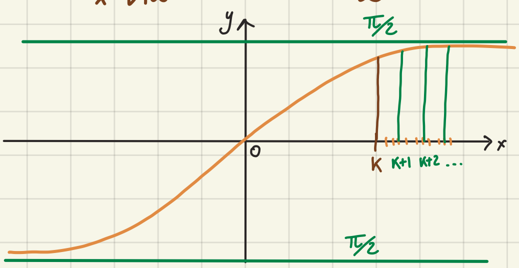
- Ogni volta che fisso un $M>0$, quando $x \to x_0$ (in questo caso 0) Trovo $f(x)$ che si trova al di sopra M, ovvero devo trovare sempre un intorno di 0

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \; \exists \delta / |x - x_0| < \delta, \; f(x) < -M$

III) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists K > 0 \; /$ ogni volta che $x > K$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

f è vicina ad ℓ

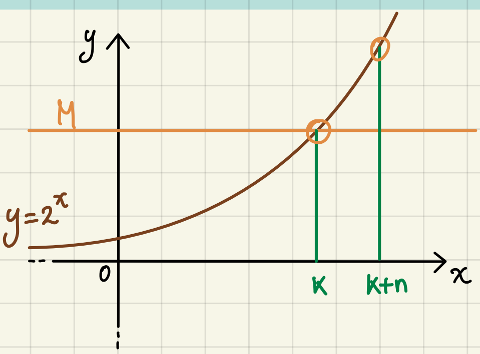
ES: $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$



$f(x)$ Dista da ℓ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ per meno di ε, ovvero si avvicina ad ℓ man mano che aumenta K.

IV) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \; \exists K > 0 \; / \; x > K, \; f(x) > M$

ES: $\lim_{x \to \infty} 2^x = +\infty$

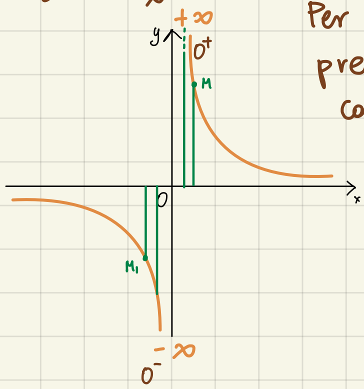


ogni volta che $x > K$, $f(x) > M$ "sta sopra".

1:11

Casi di non esistenza del limite

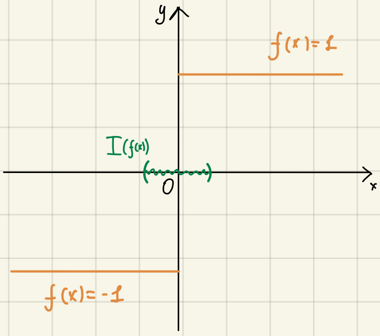
1) $f(x) = \frac{1}{x}$



Per definizione, dobbiamo poter trovare un intorno di $x_0 = 0$ / ogni volta che prendiamo un x nell'intorno, $f(x) > M$.
Con tutte le x che prendiamo nell'intorno e >0, rispettiamo la definizione, ma per $x < 0 \in I(x_0)$, $f(x) \to -\infty$!

Di conseguenza il limite non esiste!

2) $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \text{per } x \geq 0 = \frac{x}{x} = 1 \\ \text{per } x < 0 = \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$

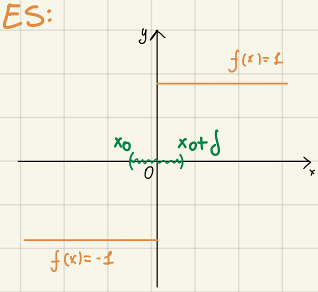


Qualsiasi intorno di $x_0 = 0$ io prenda troviamo sia valori che valgono 1 che -1.
Siccome il lim Sx e Dx sono diversi, il limite non esiste.

Limite destro e sinistro

Si dice che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow x \in (x_0, x_0 + \delta), \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$

ES:

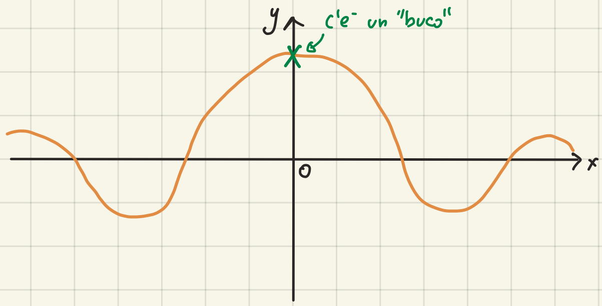


$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ Da Destra

$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ Da Sinistra

Osservazione: Il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste $\iff \left. \begin{array}{l} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \end{array} \right\}$ I due limiti coincidono

ES: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ esiste ed e' 1



Non vediamo il "buco" perche' $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$ Il lim Dx e Sx coincidono.

* In questi casi notiamo che $\mathbb{D}(f(x)) = x \in \mathbb{R} - \{0\}$
$\Rightarrow$ In $x = 0$ c'e' un buco, andiamo a calcolare i limiti Dx e Sx in 0^+ e 0^-