Continuo lez. 38; ci siamo lasciati dicendo che:

Proposizione
f differenziabile in P_0 $\Rightarrow$ la funz. è continua in P_0.

Importante!

se la $f(x,y)$ è Derivabile NON E' DETTO che essa sia continua in P_0.

Per essere sicuri che una $f(x,y)$ sia continua in P_0, allora essa deve essere DIFFERENZIABILE.

ES:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funz è derivabile parzialmenti n $\Rightarrow$ le derivate parziali esistono;

Infatti: $f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

$f_y(0,0) = 0$

MA f non è continua in 0. $\to$ calcoliamo il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \stackrel{Th}{=} f(0,0)$$

Se calcoliamo il lim sulla retta $y=x$ dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Su $y=x$ il lim è $\frac{1}{2} \neq 0$ ($f(0,0)=0$) quindi la f non è continua. Dovrebbe venire, affinché continua, $f(0,0)$ (in questo caso $f(0,0) = 0 \neq \frac{1}{2}$).

Inoltre si vede anche che f NON è differenziabile;
f non essendo continua, non è Differenziabile.

Come verifichiamo che una f è DIFFERENZIABILE?
Tecnicamente possiamo svolgere il limite visto nella lezione 38, ma esiste un modo più veloce?

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE

Se f è derivabile parzialmente in A aperto di $\mathbb{R}^2$, se le derivate parz. f_x e f_y sono continue in A, allora f è differenziabile in A.

In altre parole per essere sicuri che f sia differenziabile basta che le derivate prime siano continue.

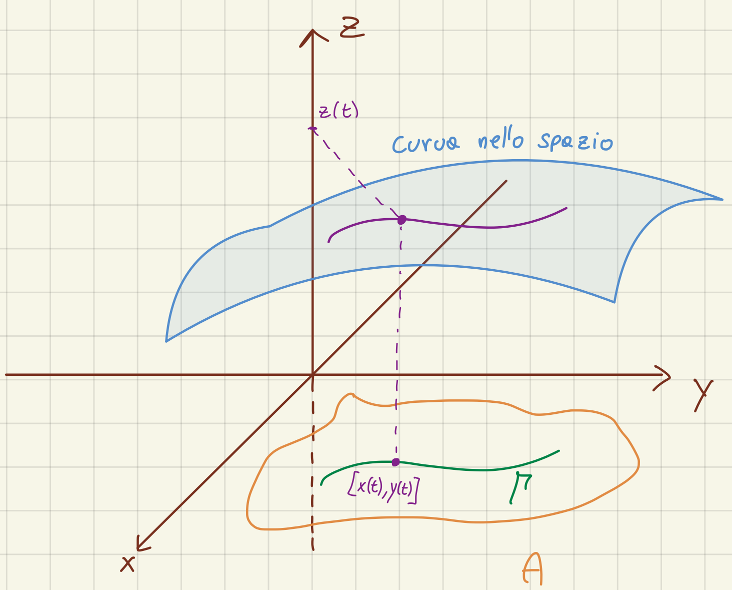
Funzioni Composte

Sia A aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia Γ una curva di eq parametriche:

$\varphi(t)=\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ con $t\in[a,b]$ Tale che la curva $\Gamma \overset{\text{contenuta}}{\subset} A$

Supponiamo di avere una funzione di 2 variabili definita in A: $f(x,y)$ def in A.

Cosa accade?



Calcoliamo ora $f(x,y)$ sui punti di Γ, ovvero consideriamo f solo sui punti di Γ.

$\to z(t)=f[x(t),y(t)]=g(t)$

Geometricamente significa prendere un pto sulla CURVA e calcolare z (Altezza).

Esegue queste op. per ogni t, ovvero per ogni punto della curva, ottenendo una seconda curva sulla superficie.

Allora otteniamo la funzione composta $F(t)=f[x(t),y(t)]$ con $t\in[a,b]$. Nel caso di f di una variabile avevamo $y=f(x)$, e prendevamo $x=g(t)$, quindi la f composta era:
$F(t)=f(g(t))$

Caso $\neq$ comp. 1 Var: $F'(t)=f'(g(t))\cdot g'(t)$ ← nulla di nuovo

Teorema di deriv. delle funzioni composte (f di 2 var)

Se $x(t), y(t)$ sono derivabili in $t\in I$ e $f(x,y)$ è differenziabile nel pto corrispondente $(x(t),y(t))\in A\in\mathbb{R}^2$

Allora la funz. composta $F(t)=f(x(t),y(t))$ è derivabile in $t\in I$ e si ha:

$$F'(t)=f_x[x(t),y(t)]\,x'(t)+f_y[x(t),y(t)]\,y'(t) \qquad (1)$$

ES: $f(x,y)=x^2+y^2$ → parametrica → $\begin{cases} x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$

Senza la formula (1)

Sostituisco in $f(x,y)$: $f(\cos t,\sin t)=\cos^2 t+\sin^2 t=1 \Rightarrow F'(t)=0$

Uso la (1): $F'(t)=2x\big|_{x=\cos t}\cdot(-\sin t)+2y\big|_{y=\sin t}\cdot\cos t=\cancel{-2\cos t\sin t}+\cancel{2\sin t\cos t}=0=F'(t)$

Notazione Vettoriale

Se indichiamo $\varphi(t) = \underbrace{[x(t), y(t)]}_{\text{vettore}} \to \underbrace{\varphi'(t) = [x'(t), y'(t)]}_{\text{Derivata delle componenti}}$.

Vettore velocità

Indichiamo il gradiente con $Df = (f_x, f_y) = \nabla f$.

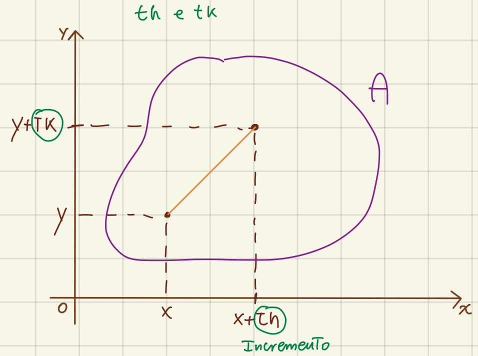
La formula ① può quindi essere scritta come: $F'(t) = \langle Df, \varphi' \rangle$ ottenendo:

Prodotto scalare

$$\underbrace{F'(t) = \langle Df, \varphi' \rangle}_{\text{Notazione Vettoriale}} = \underbrace{f_x[\varphi(t)] \cdot x'(t) + f_y[\varphi(t)] \cdot y'(t)}_{\text{Formula ①}}$$

Formula Di Taylor

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, e sia f definita in A. Sia $(x,y) \in A$ e consideriamo un incremento $(h,k) / \underbrace{(x+th, y+tk)}_{\text{Punto con incremento } th \text{ e } tk} \in A$, $\forall t \in [0,1]$



Consideriamo la f composta: $F(t) = f(x+th, y+tk)$
Supponiamo che f sia differenziabile in A. Allora per il Teorema di deriv. delle f composte, la f $F(t)$ è derivabile.

$$\Rightarrow F'(t) = f_x(x+th, y+tk) \cdot \overset{x'(t)}{h} + f_y(x+th, y+tk) \cdot \overset{y'(t)}{k}$$

Se anche in questo caso, le deriv. parz. f_x e f_y sono derivabili con derivate continue (la f è deriv. 2 volte)
allora $F(t)$ è derivabile 2 volte: dobbiamo derivare $F'(t)$:

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\underbrace{f_x(x+th, y+tk)}_{f \text{ composta}} h + \frac{d}{dt}\underbrace{f_y(x+th, y+tk)}_{f \text{ composta}} k$$

$$\Rightarrow F''(t) = f_{xx}(-)h^2 + f_{xy}(-)h \cdot k + f_{yy}(-)k^2 + f_{yx}(-)kh$$

Se f_{xy} e f_{yx} sono continue, per il Teorema di Schwarz, $f_{xy} = f_{yx}$, quindi otteniamo:

$$F \text{ cont} \to f_{xy} = f_{yx} \to \underset{②}{F''(t)} = f_{xx}(-)h^2 + f_{yy}(-)k^2 + 2f_{xy}(-)hk$$

Siccome uguali, si sommano.

Essendo $F(t)$ una funz. di una variabile, scriviamo la formula di Taylor (maclaurin) per $F(t)$ arrestata al II ordine.

$$F(t) = F(\overset{\text{Punto } t=0}{0}) + F'(0) \cdot t - 0 + \frac{F''(\xi)t^2}{2} \qquad \text{dove } \xi \in (0,t)$$

Formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange

Se prendo $t=1 \to F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\xi)$ Calcoliamo le quantità

$$F(\overset{t=1}{1}) = f(x+\overset{th}{h}, y+\overset{tk}{k}), \quad F(0) = f(x,y), \quad F'(0) = f_x(x,y)h + f_y(x,y)k,$$

$$F''(\xi) = \text{Sostituisco } t=\xi \text{ nella ②} = f_{xx}(x+\xi h, y+\xi k)h^2 + 2f_{xy}(-)hk + f_{yy}(-)k^2$$

Abbiamo quindi dimostrato la formula di Taylor al II ordine con il resto di Lagrange;

Enunciando: Sia f deriv. 2 volte con derivate II continue in $A \subseteq \mathbb{R}^2$; sia $(x,y) \in A$ e (h,k) sia <u>VICINO ALL'ORIGINE</u> ($\Rightarrow$ h e k sono incrementi molto piccoli).

Allora $\exists\, \xi \in (0,1)$ /

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x+\xi h, y+\xi k)k^2 + 2f_{xy}(-)hk + f_{yy}(-)k^2\right]$$

- Forma vettoriale a 1:48

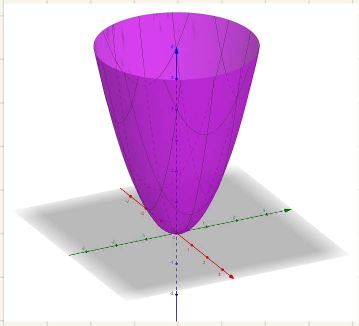
Massimi e minimi relativi

f è definita in A aperto di $\mathbb{R}^2$, abbiamo $P_0 = (x_0, y_0) \in A$.

Definizione: P_0 è un minimo relativo per f $\Leftrightarrow$ $\exists\, I_\delta(P_0) \,/\, f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \;\forall (x,y) \in I_\delta(P_0)$

P_0 è un max rel se $\exists\, I_\delta(P_0) \,/\, f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \;\forall (x,y) \in I_\delta(P_0)$

ES: $z = x^2 + y^2$ paraboloide $O = (0,0)$ minimo relativo



Quali sono le condiz. nec e suff. affinché ci sia un max/min rel?

Teorema Di Fermat

f definita in A aperto di $\mathbb{R}^2$, f deriv. in $P_0(x_0,y_0) \in A$. Se P_0 è un max o min relativo, allora il gradiente della funzione calcolato nel punto P_0, <u>Sarà ZERO</u>, ovvero avremo il <u>vettore nullo</u> $\Rightarrow$ il gradiente è un vettore.

Il gradiente è nullo $\Leftrightarrow$ ognuna delle sue componenti è nulla $\Rightarrow$ $\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = 0 \\ f_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$ Condizione <u>NECESSARIA</u>

Definizione: Un punto che annulla il gradiente di f si dice punto stazionario o critico.

$\Rightarrow$ Riscriviamo il teorema $\Rightarrow$ Condizione necessaria affinché P_0 sia un estremo relativo è che P_0 sia un punto STAZIONARIO per f.

Dim a 2:06