Funzioni di due variabili

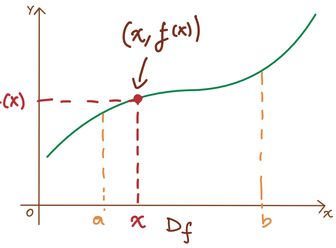
1:32

Finora abbiamo considerato funzioni del Tipo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dove $x \to \mathbb{R}$ un certo $x \in D \xrightarrow{\text{Associa}} f(x) \in \mathbb{R}$.

Il grafico di una funzione di una variabile, e' l'insieme degli (x,y) / $\underset{\text{Dominio}}{x \in D}$ e $\underset{\text{immagine}}{y = f(x)}$

$\Rightarrow$ $$\boxed{G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 / x \in D_f\}}$$

Grafico di una f ad 1 variabile



G_f e' una curva nel piano.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Queste funzioni sono tali che ad una coppia di numeri reali Associa l'immagine $f(x,y) \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x,y) \in \mathbb{R}}$$

Def di funzione a 2 variabili

La funzione non agisce piu' su un singolo numero reale, ma su una COPPIA.

Sappiamo che una coppia di num reali, individua un punto nel piano. Se prima avevamo che un punto era la coppia $(x, f(x))$, con le funzioni di 2 variabili abbiamo delle differenze:

Non inteso come Campo di esistenza

I) Il dominio di f e' un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$; ogni (x,y) identifica un punto del piano di Tale dominio.

$\Rightarrow$ $f: (x,y) \longrightarrow f(x,y) = z$ $\Rightarrow$ Quale sara' il grafico?

$$G_f = \{(x,y,z) / (x,y) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2, \ z = f(x,y)\}$$

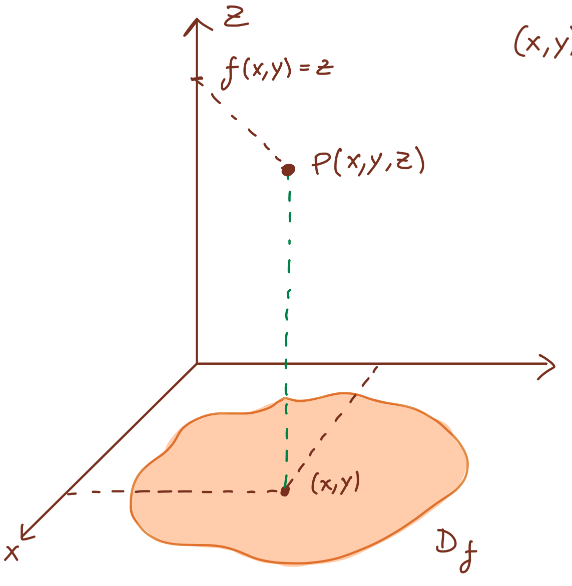
x e y apparTengono al dominio, che e' sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

z e' proprio l'immagine di $f(x,y)$

Grafico di una funzione a 2 variabili

$\Rightarrow$ $$\boxed{G_f = \{(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2\}}$$

Cosa significa graficamente?

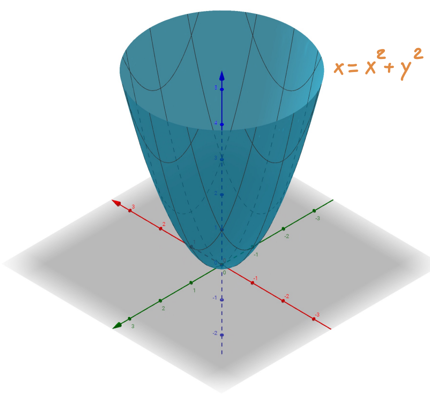


$(x,y) \xrightarrow{\text{Associo}} z = f(x,y) \in \mathbb{R}$

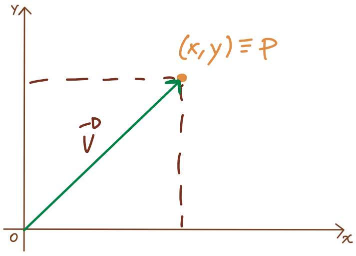
ALTEZZA O QUOTA di P

Quindi?

Se con le funz. ad una variabile, l'unione di tutti i punti costituivano una curva, ora i punti costituiscono Una superficie nello Spazio



$\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale; quando ho un punto x,y abbiamo:



Possiamo considerare il punto P come punto terminale di un vettore con componenti (x,y).

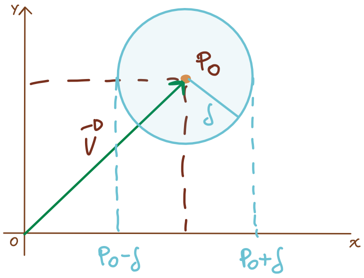
La distanza del punto P dal pto di origine $(0,0)$ è:

$$d(P,0) = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{y^2+x^2} \quad |\vec{v}|$$

La distanza di 2 punti $\boxed{d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$

Se $\vec{OP_1} = V_1$ e $\vec{OP_2} = V_2 \Rightarrow d(P_1,P_2) = ||\vec{V_1}-\vec{V_2}||$ NORMA DEL VETTORE

DEFINIZIONE: Si dice intorno (circolare) di centro P_0 e raggio δ il cerchio aperto di centro P_0 e raggio δ



$$I_\delta(P_0) = \{P(x,y) \,/\, \text{dist}(P,P_0) < \delta\} \Rightarrow \{P \,/\, ||P-P_0|| < \delta\} \Rightarrow \{P \,/\, \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_\delta(P_0) = \{P \,/\, (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \delta^2\}}$$

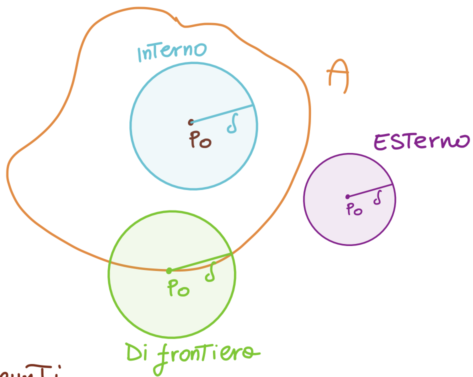
Equazione della circonferenza di centro P_0 e raggio δ.

=

DEFINIZIONE: Diremo che $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (Sottoinsieme), prendiamo $P_0 \in \mathbb{R}^2 \to$ Diremo che P_0 è INTERNO ad A $\Leftrightarrow \exists\, I_\delta(P_0) \subset A$

Intorno circolare — contenuto in A

In altre parole: sarà interno se esiste un cerchio di raggio δ tutto contenuto in A:



Avremo anche punti ESTERNI e DI FRONTIERA di A

ESTERNO: $\exists\, I_\delta(P_0) \,/\, I_\delta(P_0) \subset \mathbb{R}^2 - A$

DI FRONTIERA: Se in ogni intorno di P_0 cadono sia pti interni che esterni di A

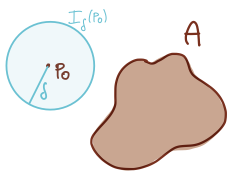
Si dice Frontiera di A (Insieme) l'insieme dei punti di frontiera di A, e si indica $F(A)$ oppure

$$F(A) = \partial A = \{P \in \mathbb{R}^2 \,/\, P \text{ è punto di frontiera per } A\}$$

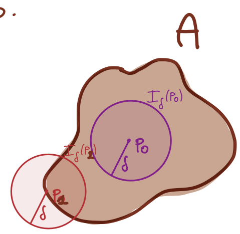
∂ → di parziale

DEFINIZIONE: Si dice che P_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A se in ogni intorno di A cade almeno un punto di A.

In altre parole quando in ogni suo intorno cade un punto di A $\to$ I pti di A si vanno ad accumulare nell'intorno di P_0.



P_0 NON E' pto di accumulaz.

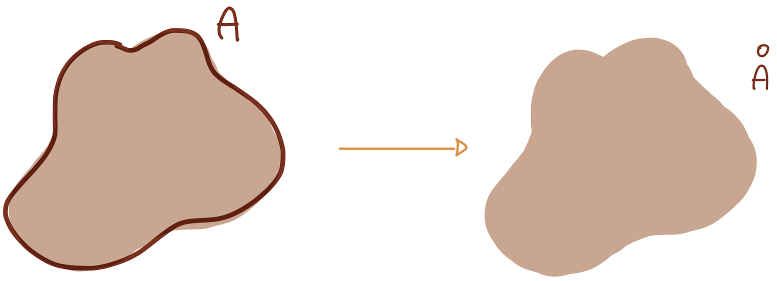


i due pti P_0 e P_1 SONO pti di acc.

TUTTI i punti di frontiera di A sono punti di accumulazione di A.

Definizione: Si dice **PARTE INTERNA** di A, e si denota con $\mathring{A}$ l'insieme dei pti interni di A.

$$\boxed{\mathring{A} = \{P \mid P \text{ è pto interno di } A\}}$$



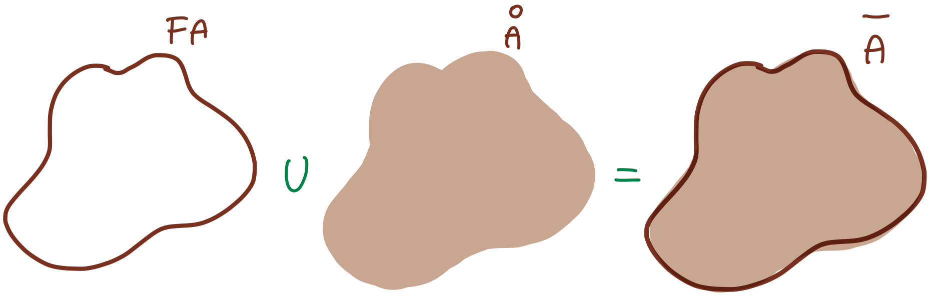
Tutti i punti interni di A, senza "il contorno".

Definizione: si dice **CHIUSURA DI A** e si denota con $\bar{A}$, l'unione tra $\mathring{A}$ e FA

Parte interna

Frontiera

$$\boxed{\bar{A} = FA \cup \mathring{A}}$$



- A è **APERTO** se $A = \mathring{A}$ → Senza il bordo → Analogo a $]a,b[\; = (a,b)$
- A è **CHIUSO** se $A = \bar{A}$ → Con il bordo → Analogo a $[a,b]$

D è un **DOMINIO** se esso è la chiusura di un aperto ⇒ se $\exists$ A aperto / $D = \bar{A}$