Condizioni Sufficienti affinchè un punto sia estremo relativo

Con le funz ad 1 variabile, per un pto di min avevamo le 2 condizioni:
1) $f'(x_0)=0$ ⟶ la deriv. si annulla nel punto di max / min
2) $f''(x_0)>0$

Teorema
Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, $P_0(x_0,y_0)$ interno ad A. Sia f deriv 2 volte (parzialmente) in A, con deriv. II continue.

$$\text{Sia } Hf(P_0) = \det D^2 f = \begin{vmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{vmatrix}$$ che prende il nome di Hessiano di f in P_0.

Quindi il ruolo giocato dalle deriv II (nelle funz ad 1 variabile), in questo caso è "giocato" dal det Hessiano.

$Hf \; > \; = \; < \; 0$

Abbiamo 3 casi:
1) L'Hessiano $Hf(P_0)>0$.

Ⓐ Allora se:
1) $f_x(P_0)=f_y(P_0)=0$
2) $f_{xx}(P_0)>0 \quad f_{yy}(P_0)>0$

⟹ il punto P_0 è un minimo relativo per f.

Ⓑ Se:
1) $f_x(P_0)=f_y(P_0)=0$
2) $f_{xx}(P_0)<0 \quad , \quad f_{yy}(P_0)<0$

⟹ il punto P_0 è un punto di massimo relativo

2) L'Hessiano $Hf(P_0)<0$ ⟶ P_0 si dice punto "sella": Esso non è nè max nè min.

3) L'Hessiano $Hf(P_0)=0$ ⟶ non sappiamo dire nulla, dovremmo studiare ulteriormente la funzione (curva).

* Siccome questo "studio esteso" non viene fatto durante questo corso, se negli esercizi capita un $Hf(P_0)=0$, non lo discutiamo.

Ricordiamo come si calcola l'Hessiano in una f a 2 variabili:

$$Hf(P_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}^{(P_0)} & f_{xy}^{(P_0)} \\ f_{yx}^{(P_0)} & f_{yy}^{(P_0)} \end{vmatrix} = f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}\cdot f_{yx}$$

Forma esplicita

MA con il teorema prec. siamo anche nelle Hp. del Teorema di Schwarz, quindi $f_{xy}=f_{yx}$
quindi esprimiamo $Hf(P_0)$ come:

$$\boxed{Hf(P_0) = f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2}$$

Inoltre prestiamo attenzione ai punti (A) e (B); Nel caso $Hf(P_0)>0$ abbiamo che

$f_{xx} f_{yy} > f_{xy}$ ≥ 0 $\Rightarrow$ $f_{xx} \cdot f_{xy}$ Positivo se entrambe hanno lo stesso segno.

Quindi per vedere se abbiamo un max o min ci basta guardare il segno di una sola derivata, visto che entrambe hanno lo stesso segno.

ESEMPI

$z = 3x^2 + y^2 - x^3 y$ Calcolare max e min

I) Derivate $f_x\ 6x - 3x^2 y$ $f_y = 2y - x^3$ $f_{xx} = 6 - 6xy$ $f_{xy}\ -3x^2$

$f_{yy} = 2$ $f_{yx} = -3x^2$

II) Calcolo Hessiano (Determinante)

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 6-6xy & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{vmatrix} = (6-6xy \cdot 2) - 9x^4$$

III) Condiz. Necessaria: ricerca punti stazionari - punti che annullano il gradiente.
Affinché si annulli il gradiente, devono annullarsi anche le deriv. Prime:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - 3x^2 y = 0 \Rightarrow 6x - 3\left[\frac{x^3}{2}\right]^2 y = 0 \Rightarrow 6x - \frac{3x^5}{4} y = 0 \Rightarrow \frac{4x - x^5}{2} = 0 \\ 2y - x^3 = 0 \Rightarrow \cancel{2}y = \frac{x^3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow x(4 - x^4) = 0$ ovvero $x = 0$ o $x = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt{2}$ Sostituiamo nella 2

$y|_{x=0} = 0$ possibile Max/min $(0,0) = A$

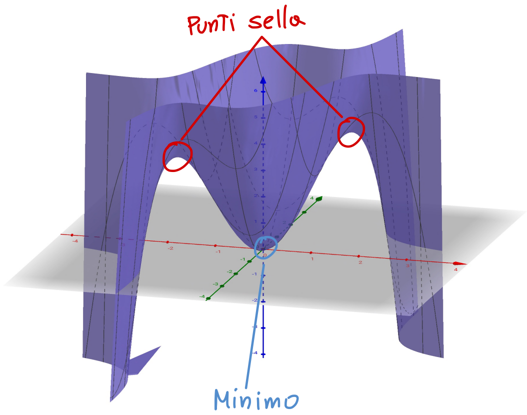
$y|_{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^3}{2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$ $y|_{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ $B = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $C = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

IV) Segno dell'Hessiano: $12 - 12xy - 9x^4$

basta calcolare solo una deriv.

$Hf(0,0) = 12 > 0$ $\Rightarrow$ vediamo le derivate II pure $f_{yy} = 2$ sempre pos $\Rightarrow$ $A(0,0)$ minimo relativo

$Hf(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 12 - 12 \cdot 2 - 9\sqrt{2}^4 = 12 - 24 - 9 \cdot 4 = -48 < 0$ $\Rightarrow$ B e C sono punti sella.
$Hf(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ uguale



ES: $f = 2(x^2+y^2+1) - (x^4+y^4)$

$f_x = 2(2x) - 4x^3 \qquad f_y = 4y - 4y^3 \qquad f_{xx} = 4 - 12x^2 \qquad f_{yy} = 4 - 12y^2 \qquad f_{xy} = 0 = f_{yx}$

$HP(x,y) = (4-12x^2)\cdot(4-12y^2)$

I) Pti stazionari: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4x^3 = 0 \\ 4y - 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - x^3 = 0 \\ y - y^3 = 0 \end{cases}$

$x - x^3 = 0 \rightarrow x(1-x^2) = 0 \rightarrow x = 0, \; x = \pm 1$

$y - y^3 = 0 \rightarrow y(1-y^2) = 0 \rightarrow y = 0, \; y = \pm 1$

Attenzione!

Quando $x = 0$, abbiamo $\Rightarrow y \begin{cases} 0 \\ 1 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} O = (0,0) \\ A = (0,1) \\ B = (0,-1) \end{matrix}$

$x = 1 \Rightarrow y = \begin{cases} (1,0)\ C \\ (1,1)\ D \\ (1,-1)\ E \end{cases}$; $x = -1 \Rightarrow y = \begin{cases} (-1,0)\ F \\ (-1,1)\ G \\ (-1,-1)\ H \end{cases}$

9 punti da verificare

II) Hessiana:

$Hf(0,0) = 16 > 0 \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 4 > 0 \Rightarrow O = (0,0)$ Minimo

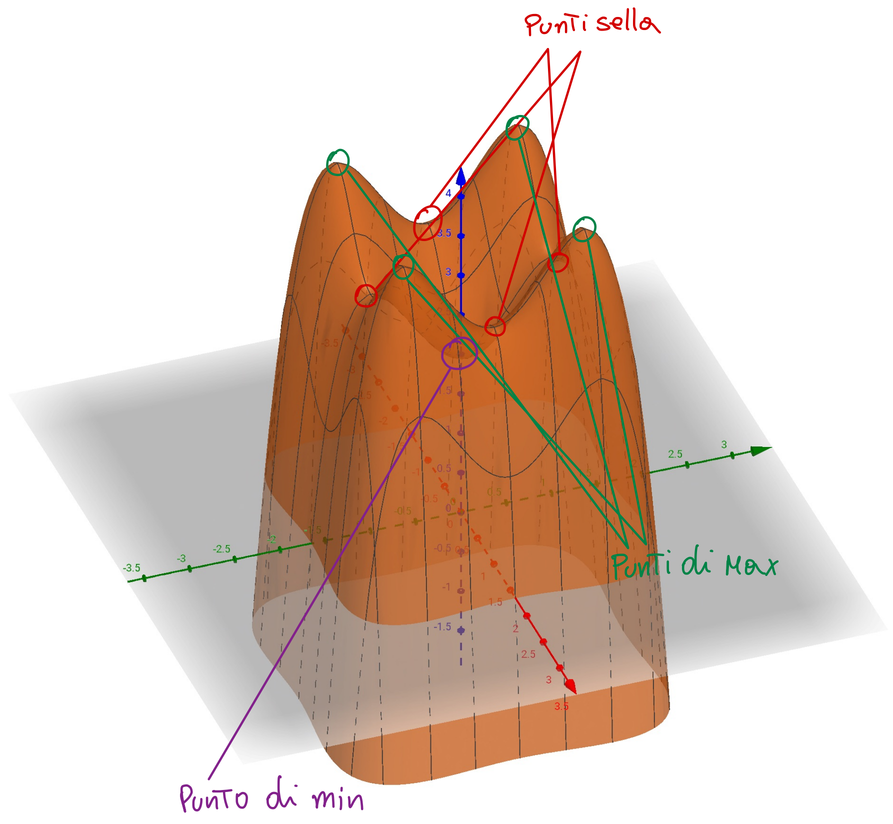
Siccome $Hf - (4-12x^2)(4-12y^2)$ i punti con lo stesso valore ma con segno opposto hanno lo stesso risultato; quindi:

$D = E = G = H \quad , \quad C = F \quad ; \quad A = B$

Continuo: $Hf(A) = 4\cdot(-8) = -32 < 0 \Rightarrow$ punti A, B Sella

$Hf(D) = (-8)\cdot(-8) = 64 > 0 \rightarrow f_{xx}(D) = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow$ D, E, G, H punti di Max

$Hf(C) = 4\cdot(-8) = -32 < 0 \Rightarrow$ Punti C, F Sella



1:16