

Integrazione per parti e per sostituzione

Problema:

$$\int x \sin x \, dx \quad \text{Come si risolve il prodotto di due funzioni? (una delle quali NON E' derivabile nell'altra)}$$

Integrazione per parti

Se abbiamo due funz. f e g deriv. in $[a, b]$, con derivate continue, allora l'integrale:

$$\int f'(x) g(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \, dx$$

Quindi di uno dei due fattori dobbiamo conoscere la primitiva. Con questo metodo, l'integrale di partenza si trasforma in un nuovo integrale; ma a che pro?

Potrebbe succedere che il primo non lo sappiamo calcolare, mentre il secondo sì.

Dim a 00:18

Torniamo ad $\int x \sin x \, dx$. Dobbiamo scegliere tra x e $\sin x$ chi "farà la parte" di $f'(x)$.

Scegliamo: $f'(x) = \sin x$ e $g(x) = x$; Applichiamo la formula:

$$\int x \sin x \, dx = -\cos x \cdot x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Alternativa: $f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = -\cos x$

$\Rightarrow \int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \cos x \, dx \Rightarrow$ In questo caso, la situazione si è addirittura peggiorata!

ES: $\int x^2 \cos x \, dx$ $f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$

$$\Rightarrow \int x^2 \cos x \, dx = \sin x \cdot x^2 - \int \cos x \cdot 2x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \cos x \, dx$$

$$\begin{aligned} &\text{Applico di nuovo } \Rightarrow x^2 \sin x - 2 \cdot \left[-\sin x \cdot x - \int \cos x \, dx \right] \\ &= x^2 \sin x - 2 \left[-x \sin x + \sin x \right] + C \end{aligned}$$

ES: $\int \ln x \, dx$ quando non sappiamo procedere possiamo applicare la formula di derivazione per parti vedendo la funzione come

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

$\uparrow f(x)$ $\uparrow g'(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x, \quad g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x - x + C$$

ES: $\int x \cdot e^x dx$ = Ci conviene prendere sempre x come f' , perche' poi nell'integrale risultante sara' 1:

$$\Rightarrow e^x x - \int e^x dx = e^x x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

ES: $\int e^x \sin x dx \Rightarrow -\cos x e^x - \int -\cos x e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$

Riapplichiamo
 $\Rightarrow -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$

Sempre uguale
 Ma siccome abbiamo il "-" davanti l'integrale, possiamo "ricavarci" l'integrale stesso:

$$2 \int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}$$

ES: $\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cdot \cos x dx = \sin x \cos x - \int \sin x (-\sin x) dx$

$$= \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx \quad \text{Rel fondamentale} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin x \cos x + \int 1 - \cos^2 x dx$$

$$= \sin x \cos x + \int 1 dx - \int \cos x dx \quad \text{porto a primo membro} \Rightarrow 2 \int \cos x dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2}$$

Il "2" viene posto davanti perche' spostiamo l'integrale dall'altra parte dell'uguale.

■ 00:38

ES: $\int \sin dx \cos dx dx$ Questo integrale si tratta con la formula di duplicazione $\Rightarrow \sin(2dx) = 2 \sin dx \cos 2x$

$$= \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x \cos dx dx = \frac{\sin(2dx)}{2} + c$$

Se pero' i coefficienti sono diversi: $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$

Si applicano le formule di Prostaferesi \Rightarrow

- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$\bullet \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\bullet \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Queste formule si ottengono dalle formule di addizione e sottrazione

Siccome in questo problema specifico siamo interessati alle formule di moltiplicazione e non di addizione, ci servono le formule di Werner, che sono ricavabili da quelle di Prostaferesi, ma che esplicitamente sono:

$$\text{I}) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\text{II}) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\text{III}) \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

Quindi: $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$ = Applichiamo la I $\frac{1}{2} \int \sin(2+3)x + \sin(2-3)x \, dx$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(5x) \, dx + \frac{1}{2} \int \sin(-x) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \int \sin(5x) \, dx - \frac{1}{2} \int \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{10} (-\cos(5x)) + \frac{1}{2} \cos x + C$$

$\frac{1}{5} \cdot f'(x)$

■ 00:57

ES: $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$ Applichiamo la IIa $\Rightarrow \frac{1}{2} \int \cos(3+2) + \cos(3-2) \, dx$

$$= \frac{1}{2} \int \cos(5x) + \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \cos(5x) + \int \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \int \sin(5x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \cos(5x) + C$$

ES $\int \sin^3 x \, dx$ possiamo scriverlo come $\int \sin x \cdot \sin^2 x \, dx$

= Rel fondamentale = $\int \sin x \cdot (1 - \cos^2 x) \, dx = \int \sin x - \int \sin x \cos^2 x$

$\stackrel{\substack{\sin^2 + \cos^2 = 1 \\ \Rightarrow \sin^2 = 1 - \cos^2}}{\substack{f_1(x) \\ f_2(x)}} \quad \text{deriv} \uparrow$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$$

ES: $\int \arcsin x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

Formule Iterative

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ pongo } I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \underline{\text{BOT}}$$

Gia' alla I^a iterazione non sappiamo piu' calcolare l'integrale.

Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ vale la seguente **Formula di iterazione**:

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[(2n-3) I_{n-1} + \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \right]$$

Che cosa ci dice? Sostanzialmente possiamo calcolare I_n (ad es $I=3, 4, \dots$) in funzione dell'integrale precedente, che potremmo saper fare.

$$\text{ES: } I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} \text{ secondo la formula precedente} = \frac{1}{2(2-1)} \cdot \left[(2 \cdot 2 - 3) \cdot \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{x}{(1+x^2)^{2-1}} \right]$$

$$\text{Quindi } \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 4 \arctg x + \frac{x}{1+x^2} + C$$

$$\text{Di conseguenza } I_3 = \int \frac{1}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2 \cdot (3-1)} \cdot \left[(2 \cdot 3 - 3) \cdot I_2 + \frac{x}{(1+x^2)^2} \right]$$

\downarrow

$$2 \arctg x + \frac{x}{1+x^2} + C$$

In generale $I_n = \int x^n \cdot e^{dx} dx \rightarrow$ risolviamo applicando piu' volte l'integrazione per parti

$$I_n = \frac{1}{2} x^n - \frac{n}{2} I_{n-1} - \dots$$

Considerazioni sulle Formule Iterative

Ricordare un grande numero di formule non e' semplice, ma questa formula esiste e siccome vale $\forall n \in \mathbb{N}$, puo' risultare utile.

Integrazione Per Sostituzione

Se f è continua in un $I = (a, b)$, e la sua derivata f' è continua anch'essa, allora, quando calcoliamo l'integrale di $f(x)$ in dx , e sostituiamo $f(x)$ con $x = g(t)$:

$$\int f(x) dx \Big|_{x=g(t)} \quad \text{Cambiamento Variabile} \Rightarrow \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

ES: $\int \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx$ poniamo $x = \frac{t^2}{g(t)}$ $\Rightarrow \int \frac{1}{t - 3} \cdot \frac{g'(t)}{\sqrt{t^2}} dt$

$$= 2 \int \frac{t^{-3+3}}{t-3} dt = 2 \int \frac{t^{-3}}{t-3} + 6 \int \frac{1}{t-3} dt = 2t + 6 \ln |t-3| + C$$

Torniamo ad x : $x = t^2$

$$= 2\sqrt{x} + 6 \ln |\sqrt{x}-3| + C$$

Quindi $\int f(x) dx \Big|_{x=g(t)} = \int f(g(t)) g'(t) dt$

$$dx = d(g(t)) = g'(t) dt$$

Differenziale di una funzione

Si definisce come:

$$d(g(t)) = g'(t) dt$$

①

Formalmente è la stessa cosa di scrivere

$$\frac{d g(t)}{dt} = g'(t)$$

Cosa indica il differenziale?

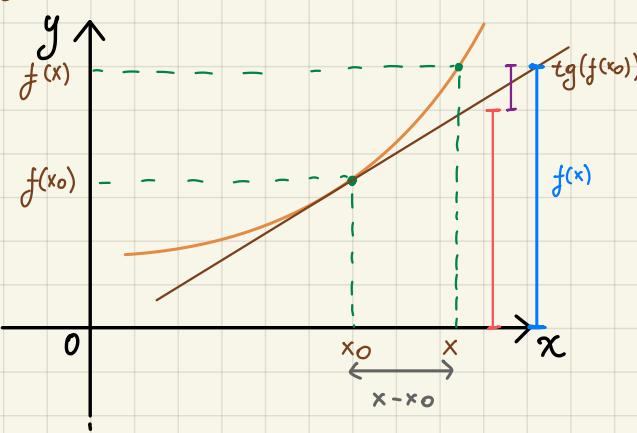
In generale per una funzione $y = f(x)$, definiamo la derivata come:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

lim rapp. incrementale

$$\text{m.c.m} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \text{Per il confronto} = \frac{0}{0} = \frac{N}{D} \Rightarrow D \gg N$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0) \Rightarrow f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)] = o(x-x_0)$$



punto $y =$
eq retta tg
a $f(x_0)$

La Differenza è l'ordinata calcolata a partire dalla funzione meno l'ordinata calcolata a partire dalla retta Tangente

Abbiamo detto che questa differenza è un O piccolo di $x - x_0$; quando $x \rightarrow x_0 \Rightarrow x - x_0$ è molto piccolo ($\rightarrow 0$), ma anche la distanza tra curva e Tangente tende ad essere molto piccola.

Dicendo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)}{x - x_0} = 0$$

Diciamo che quello che tende più velocemente a 0 è il Numeratore, ovvero $f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)$.

\Rightarrow Questo vuol dire che l'approssimazione della funzione con la Tangente è buona ovvero, l'errore commesso con questa approssimazione è molto piccolo.

\Rightarrow Questo concetto è stato ripetuto più volte durante il corso, ma in questa occasione è stato dimostrato graficamente e matematicamente.

Tornando al discorso di dx :

Soltamente $x - x_0$ viene indicato con dx :

Variazione dell'ascissa

$$x - x_0 = dx = \Delta x$$

La variazione della funzione viene indicata come:

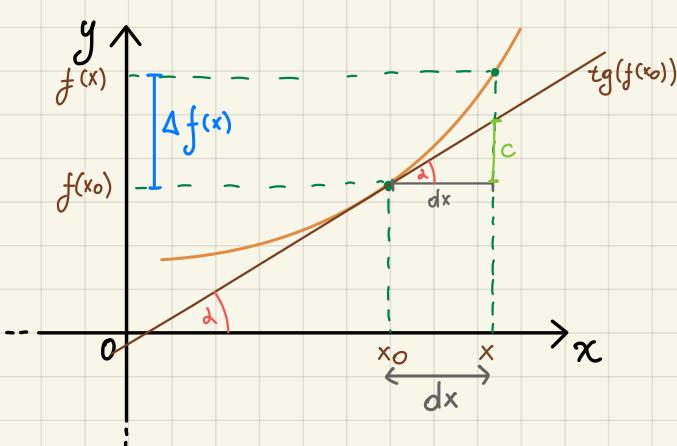
$$f(x) - f(x_0) = df(x) = \Delta f(x)$$

Variazione dell'ordinata

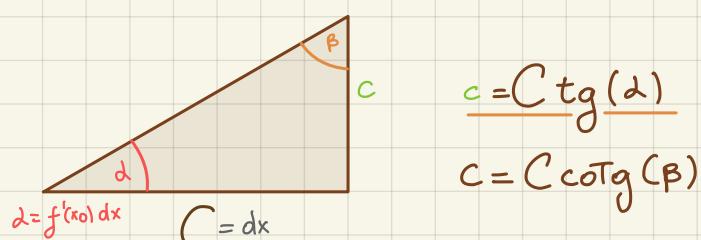
Usando questa notazione, riscriviamo

$$\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{df(x)} - \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{dx} = o(dx) \Rightarrow \Delta f(x) - f'(x) dx = o(dx)$$

coefficiente angolare
della Tangente
 $f'(x_0)$



Quando scrivono $f'(x_0) dx = \tan \alpha \cdot dx$
ovvero Cateto • Tangente (angolo opposto)



$$C = C \tan(\alpha)$$

$$C = C \cot(\beta)$$

Tutti questi calcoli servivano proprio a calcolare "C", ovvero proprio il Differenziale in x

Quindi $C = \text{Differenziale} = d(f(x)) = f'(x_0) dx$ Come al punto ① ↑

Il differenziale di f in x_0 rappresenta geometricamente il segmento c . Abbiamo che:

$$\Delta f(x) - df = o(dx)$$

La diff. tra la variazione della funzione, ed il differenziale, è un $O(dx)$, ovvero l'errore che si commette nell'approssimare la variazione della funzione con il differenziale $df = f'(x_0) dx$ è molto piccolo rispetto a $x - x_0$.

Tornando agli integrali

Tutta questa dimostrazione geometrica non è molto importante per gli integrali; ci interessa solo che quando effettuiamo la sostituzione, il differenziale si trasforma come detto.

$$ES: \int \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{pongo } x = \sin t \Rightarrow dx = d(\sin t) = \cos t dt$$

deriv $\sin t$

Importante Ogni volta che si deve fare una sostituzione, pensiamo alla sostituzione da fare, anche di dx .

$$\cos^2 + \sin^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 = 1 - \cos^2$$

$$x = \sin t \Rightarrow \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \sqrt{1-1-\cos^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos t \cdot \cos t dt$$

$$= \sin t \cdot \cos t - \int \sin t \cdot \sin t dt = \int \sin^2 t = \frac{\sin t \cos t + t}{2} + C$$

Torniamo ad x : $x = \sin t \Rightarrow t = \arcsin x \Rightarrow \frac{1}{2} (\arcsin x + \sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x)) + C$

$$ES: \int \sqrt{2^x - 1} dx \quad \text{pongo } t = \sqrt{2^x - 1} \Rightarrow t^2 = 2^x - 1, 2^x = 1+t^2 \Rightarrow x = \log_2(1+t^2)$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2t}{1+t^2} dt$$

derivo $\log_2(1+t^2)$

$$= \frac{2}{\ln 2} \cdot \frac{t}{1+t^2}$$

$\ln 2$

$D(\ln_2(\dots))$

$$= \int \sqrt{2^x - 1} dx = \int t \cdot \frac{2}{\ln 2} \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{2}{\ln 2} \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt = \frac{2}{\ln 2} \cdot \int \frac{t^2+1}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$= \frac{2}{\ln 2} \cdot t - \operatorname{arctg} t + C$$

ritorno a x

$x = \sqrt{2^x - 1}$

$$= \frac{2}{\ln 2} \cdot \sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x - 1} + C$$

$\operatorname{arctg} t$

$$ES: \int \cos(\ln x) dx \quad \text{pongo } x = \ln x \Rightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$$

Sostituisco $\int \cos(e^t) e^t dt =$ Si applicano i diversi metodi, sudgiamento visto prima