



Lezione 15

Limiti di funzione

Limiti di funzioni

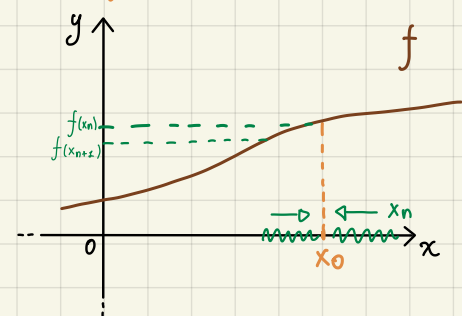
Questo argomento è molto simile ai limiti di successioni, ma se in quel caso i lim tendevano solo ad infinito, in questo caso tendono anche a $-\infty$ o $+\infty$.
Vogliamo studiare il comportamento di una funzione f intorno ad un suo punto del suo dominio o a $\pm\infty$.

ES: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\mathbb{D}: x \neq 0 \Rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} \equiv \mathbb{R} - \{0\}$

Quando mi avvicino a 0, cosa succede alla funzione?

Definizione: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall (x_n)_n \text{ / } x_n \rightarrow x_0 \text{ Si ha che } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$
Successione x_n contenuta nel \mathbb{D} di f

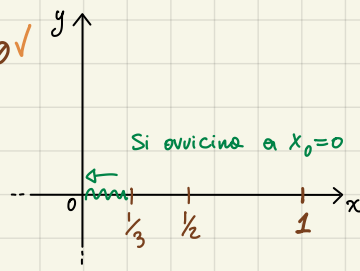
Che significa?



• In x_0 non so cosa faccia la funzione, quindi considero per ogni successione $x_n \rightarrow x_0$, quindi prendo una successione che piano piano si avvicina a x_0 , o da Dx o da Sx

ES: $f = \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \forall \text{ succ} \rightarrow x_0 \Rightarrow \forall \text{ succ} \rightarrow 0$

Posso quindi considerare $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow x_0 = 0 \checkmark$



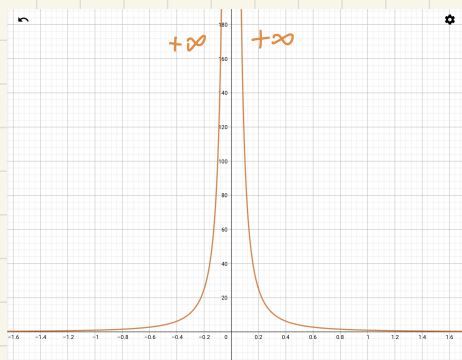
\Rightarrow Se calcolo f sui punti della succ $\frac{1}{n}$, quindi prendo x_n e calcolo $f(x_n)$; Continuo calcolando f su TUTTI i punti della Successione. Dal calcolo capisco dove "va a finire" $f(x_n)$.

Quando considero $f(x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \leftarrow$ Questa è una successione! Visto che sappiamo calcolare i limiti delle successioni, $\frac{1}{n}$ possiamo calcolare il lim della succ; Per definizione, se il risultato del $\lim = l$, allora il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ Questa funzione tende a $+\infty$ da destra

Quindi... $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ Siccome il lim Dx e Sx hanno due risultati diversi, si dice che il limite non esiste.

ES: $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ Perché? $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = +\infty$ Stesso risultato!



* Il metodo riportato sopra è un metodo puramente TEORICO usato per calcolare i limiti delle funzioni tronche i limiti di successioni.

Teorema Ponte

"fa da ponte tra limiti di successioni e funzioni".

Le seguenti affermazioni sono equivalenti $\textcircled{1} \Leftrightarrow \textcircled{2}$

1) \nexists successione $(x_n)_n \subseteq \mathbb{D}_f - \{x_0\}$ / $x_n \rightarrow x_0$, $f(x_n) \rightarrow \ell$

Contenuta nel \mathbb{D}_f di f

x_0 potrebbe non essere nel dominio

Delta

Per cui

Risultato

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ / $\forall x \in \mathbb{D}_f$, $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

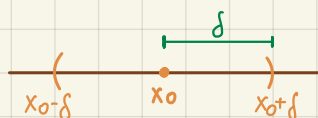
$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$
 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Cosa significa?

La $\textcircled{1}$ è la def vista nella pg. precedente. La $\textcircled{2}$ dice che quando fisso un ε piccolo a piacere esiste un numero δ tale che $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, calcolo $f(x)$ e $f(x_0) = \ell$, abbiamo che la distanza da $f(x)$ ad ℓ (calcolata tramite il valore assoluto della differenza), quindi $|f(x) - \ell|$ è più piccola del numero molto piccolo ε che avevo fissato inizialmente.

L'Intorno

Si dice intorno di x_0 di semiampiezza δ , un qualunque intervallo aperto contenente x_0 , con centro in x_0 e semiamp. δ .



1:00