Problema:

In I_δ, a cui converge la serie di potenze?
Consideriamo come esempio la serie geometrica di ragione x:

ES: $\sum_n x^n$ sappiamo che converge in $I(-1,1)$, quando $x \in (-1,1) \Rightarrow \delta = 1$
In questo intervallo, la serie converge a $\frac{1}{1-x}$

Di conseguenza, $\sum_n x^n$ converge, in $I=(-1,1)$ ad una funzione di x: $\frac{1}{1-x}$.
$\Rightarrow$ Al variare di x in $I=(-1,1)$, ovviamente varia la somma $\rightarrow$

E con le serie di potenze generalizzate?
$\sum_n a_n x^n$ converge in I_δ, per ogni x fissato in I_δ, la serie converge ad una certa somma numerica (numero) chiamato S_x. Lo chiamo in questo modo perché
fisso $x \in I_\delta \xrightarrow{\text{Associo}} S_x \;/\; \sum_n a_n x^n = S_x \leftarrow S_x$ è la somma a cui la serie converge.

ES: Serie geometrica $\Rightarrow x \in I_\delta = (-1,1) \rightarrow S_x = \frac{1}{1-x} \;/\; \sum_n x^n = \frac{1}{1-x}$

ES $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} \rightarrow 2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

Osservazione ad ogni $x \in I_\delta$ corrisponde un'unica somma S_x. Quindi la corrispondenza è univoca, allora essa è una funzione della x:

$$\boxed{f: x \in I_\delta \rightarrow f(x) = S_x \in \mathbb{R}}$$

In generale una serie di funzioni, e quindi nel nostro caso, una serie di potenze, converge ad una funzione, detta funzione somma.

$$\Rightarrow \boxed{\sum_n a_n x^n \underset{\text{Converge}}{=} f(x) \quad \forall x \in I_\delta}$$

Solitamente non è semplice trovare la somma, e ci si accontenta solo di vedere dove converge, ovvero solo il suo intervallo di convergenza.

In alcuni casi si può però calcolare la funz. di convergenza; quando?
Questo succede quando siamo nel caso delle Serie di Taylor

Serie Di Taylor

Teorema Sia $\sum a_n (x-x_0)^n$ una serie di potenza di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e di raggio di convergenza δ. Sia $f(x)$ la sua funzione somma in $I_\delta = (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Allora:

1) La funzione f è infinitamente derivabile in I_δ, ovvero possiamo calcolarne la derivata infinite volte $\Rightarrow f$ è una funzione molto regolare.

2) $f(x)$ è proprio la somma di questa serie: $\underbrace{\sum_n \boxed{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}^{a_n} (x-x_0)^n}$ in I_δ (1)

In altri termini, i coefficienti a_n della serie di potenze, coincidono con i coefficienti di Taylor della sua somma $f(x)$

$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ che non sono altro che i coefficienti di taylor (vedi formula di Taylor) Lez 24

La serie (1) prende il nome di Serie di Taylor di punto iniziale x_0.

Quindi se ho una serie di potenze, nel suo I_δ essa converge ad una certa funzione $f(x)$. Questa funzione somma f, è derivabile, continua, ecc.?

Il Teorema ci dice che la funzione f è infinitamente derivabile; inoltre la serie di potenze coincide con la Serie di Taylor della sua somma $(f(x))$:

Quegli a_n non sono a_n generici, ma li calcoliamo calcolando la derivata n-esima della funzione somma in x_0, e dividendo per $n!$: $a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$.

🚩 00:22

Problema

Consideriamo una funzione f infinitamente derivabile in un intorno $I(x_0)$ con raggio δ, quindi $I_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Sappiamo per la formula di Taylor che:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \overset{\text{Resto}}{R_n(x_0)}$$

Cosa Accade se $n \to +\infty$?

Se $n \to +\infty$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$ converge ad $f(x)$? NO!

ES: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (1)

Si nota che:

1) f è infinitamente derivabile in $\mathbb{R}$, ed in particolare in $x=0$

$\Rightarrow$ Andiamo a calcolare le sue derivate: $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}$ se $x \neq 0$

In $x=0$, $f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{x^3}}{e^{1/x^2}} \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to +\infty}} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = e^y \gg ay = \emptyset$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(n)}(0) = \emptyset$ Quindi la sua serie di Taylor in $x_0 = 0$ sarà:

$\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \emptyset$ perché le deriv sono tutte $\emptyset$

la funzione (1) non è identicamente nulla (siccome $f(x)=0$ solo per $x=0$)

Definizione: Sia $f(x)$ una funz. infinitamente deriv. in $I_\delta(x_0)$, allora si dice Serie di Taylor di f di punto iniziale x_0 la serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ se $x_0=0$, essa prende il nome di Serie di MacLaurin

Si dice che f è sviluppabile in serie di Taylor se essa coincide con la somma della sua serie di Taylor, cioè $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

00:40

In parole semplici

Abbiamo una funzione infinitamente derivabile; da essa costruiamo la serie di Taylor (con le derivate). Otteniamo quindi una serie di potenze; questa serie converge a qualcosa?

=> Sì, proprio nell'intervallo di convergenza. Converge proprio ad $f(x)$? NO
Se per caso essa è la somma della sua serie di potenze (può succedere), allora essa si dice sviluppabile in serie di Taylor.

Quindi: Una funzione si dice sviluppabile in serie di Taylor se essa è proprio la somma della sua serie di Taylor; cioè prendo la sua serie di T., se essa converge a $f(x)$, essa è sviluppabile in S. di T.

Siccome non sempre le f sono sviluppabili in S. di Taylor, usiamo il seguente Teorema:

Teorema: Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor

Sia f inf. deriv. in (a,b) / $\exists\ M>0$ / $|f^{(k)}(x)| \leq M$, $\forall x \in (a,b)$ e $\forall k \in \mathbb{N}$

Non possono Tendere a $\pm\infty$

Cioè le derivate di f sono equilimitate, ovvero sono limitate tutte dalla stessa costante.

Allora

$\forall x_0 \in (a,b)$ f è sviluppabile in serie di taylor, di pto iniziale x_0 in (a,b).

Dim a 00:48

1:18

Nota: D'ora in poi parleremo di Serie di Mac Laurin, ovvero prendiamo $x_0=0$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$ questa forma è una generalizzazione della F. di Taylor

Quando abbiamo visto la formula di Taylor abbiamo visto le F. "notevoli"; ci basterà quindi prendere una f. di T. notevole dalla Tabella, fare il $\lim_{n\to\infty}$ e troviamo quindi lo Sviluppo in serie Di Taylor o Maclaurin.

ES: sappiamo che $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Problema possiamo dire che e^x è proprio la sommatoria: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^k}{n!}$? Per dire questo, dobbiamo vedere se le derivate dell'esponenziale sono equilimitate.

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = f''(x) = f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow$ È infinitamente derivabile.

Si osserva che le derivate di e^x sono limitate in ogni intervallo $I = (-a, a)$; perché?

$\boxed{\text{Se } |x| < a \Rightarrow e^x < e^a}$ per l'arbitrarietà di a, le derivate sono limitate e quindi e^x soddisfa il criterio di sviluppabilità in serie di Taylor.

$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \delta = +\infty, \ I_\delta = \mathbb{R}$

1:25

ES: $\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(0)$ ci chiediamo: Se $n \to \infty$ cosa abbiamo?

$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin \quad f''' = -\cos x \quad f''''(x) = \sin x \ \ldots \Rightarrow |D^n \sin x| \leq 1$ in $\mathbb{R}$

Sin x è sviluppabile in serie di Taylor (MacLaurin) e $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

ES: $\cos x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(1)

Teorema

f è infinitamente Derivabile in (a,b) e $x_0 \in (a,b)$, allora se risulta $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}$ $\forall x \in (a,b)$, cioè se la serie derivata della serie di Taylor di f converge proprio alla derivata di f (f'), allora f è sviluppabile in serie di Taylor.

Osservazione: (Dimostrazione) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$; Deriviamo il Termine generale:

$$D\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right] = \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{\text{costante}}\, n (x-x_0)^{n-1} = \cancel{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{\cancel{n}(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

numero

numero

i numeri (costanti) rimangono tali

Derivata

Quindi: Se prendo la serie di T, e derivo 1 volta il Termine generale, otteniamo proprio la (1); questa prende il nome di Serie derivata prima, e non è detto che converga alla derivata I^a di $f(x)$.
Se però essa converge proprio a f, allora la funzione di f è sviluppabile in serie di Taylor.

1:35

ES: Vogliamo calcolare lo sviluppo di MacLaurin di: $f(x) = \log(1+x)$

$$\log(1+x) \overset{F.T.}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

La serie di Taylor di $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ (1)

Converge a $\log(1+x)$? Calcoliamo la serie derivata di (1)

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n$$

Se consideriamo la s. geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ e sostituiamo $x=-x$, abbiamo:

$$x=-x \Rightarrow \sum_n (-x)^n = \sum (-1)^n x^n \qquad \sum x^n \overset{\text{Converge}}{=} \frac{1}{1-x} \quad \text{in } (-1,1)$$

$$\Rightarrow \sum_n (-1)^n x^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \quad \text{in } (-1,1)$$

← La serie derivata del log è proprio questa. Essa converge in $(-1,1)$ a $\frac{1}{1+x}$, quindi siamo nelle Hp. del Teorema; Infatti, $\frac{1}{1+x}$ è proprio la derivata di $\log(1+x)$: $\log(1+x) = \frac{1}{1+x}\cdot 1$.

$\Rightarrow \log(1+x)$ è sviluppabile in serie di MacLaurin in $I=(-1,1)$, e si ha che:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} \quad \text{in } (-1,1)$$

ES: Studiare il carattere e calcolare la somma della seguente serie:

$$\frac{\log^5 x}{5} - \frac{\log^7 x}{7} + \frac{\log^9 x}{9} + \dots$$

Quando viene chiesto di calcolare la somma di una serie, in qualche modo dobbiamo pensare alle serie di taylor.

Lo step piu' importante e' riconoscere la serie come sviluppo notevole; ci conviene scrivere:

$t - \frac{t^3}{3} +$

Pongo $t = \log x$ $\Rightarrow \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + \dots$ Ci accorgiamo di avere tutte potenze dispari e nessun fattoriale al denominatore.

Pensiamo quindi allo sviluppo notevole della Tangente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

La nostra serie, pero', inizia da $\frac{t^5}{5}$

Possiamo scrivere la serie come: $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} = \text{arctg}(t)$

Siccome i primi due membri non compaiono, e' come se venissero portati al secondo membro:

$$= \text{arctg}\, t - t + \frac{t^3}{3} \overset{t=\log x}{=} \text{arctg}(\log x) - \log x + \frac{\log^3 x}{3} \quad \text{con} \quad -1 \leq \log x \leq 1$$

$\forall x \in [-1, 1]$ $\qquad \Leftrightarrow e^{-1} \leq x \leq e$

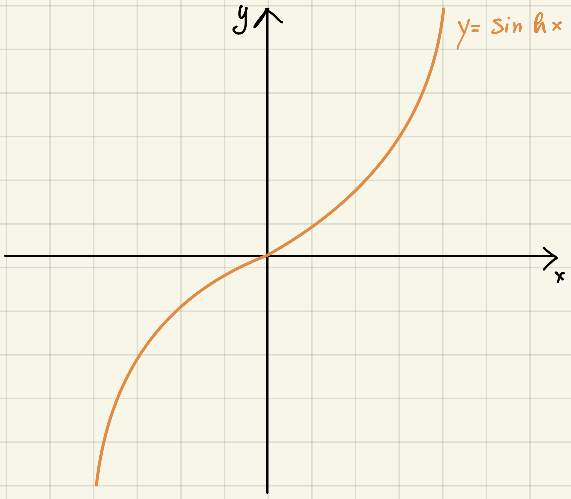
La serie converge in $e^{-1} \leq x \leq e$ e la sua somma e' $\text{arctg}(\log x) - \log x + \frac{\log^3 x}{3}$

2:04

Funzioni Iperboliche

Si definisce il Seno iperbolico, e si scrive $\sin h x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$. Capiamo subito che stiamo parlando di esponenziali, inoltre sin, cos, ecc. iperbolici non hanno nulla a che fare con i sin, cos, ecc. Trigonometrici.

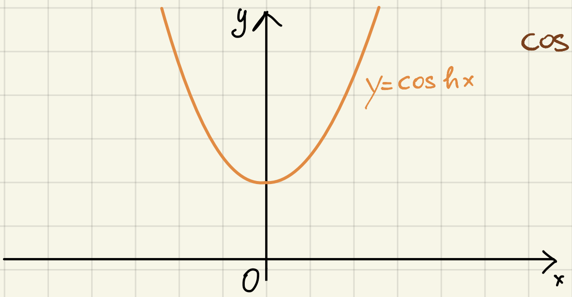
$f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ $\quad D = \mathbb{R} \Rightarrow \quad \sin h x : x \in \mathbb{R} \rightarrow \sin h x \in \mathbb{R}$



Sin hx è una funzione crescente ed invertibile in $\mathbb{R}$.

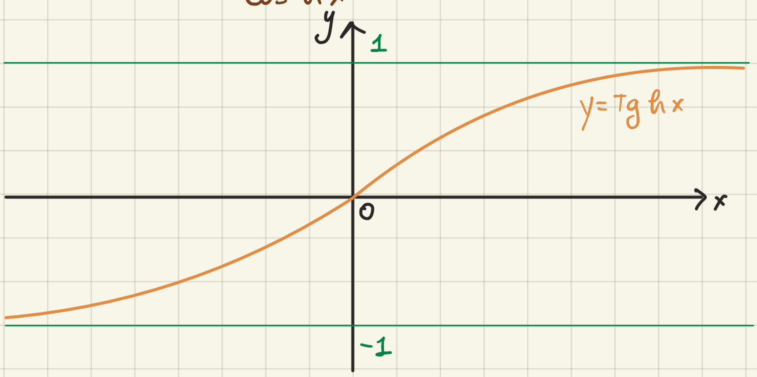
- $\cos h x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ Il coseno iperbolico di x è definito in Tutto $\mathbb{R}$:

$\cos h x : x \in \mathbb{R} \rightarrow \cos h x \in [1, +\infty)$ ha valore in I



Il grafico di $y = \cos h x$, si chiama CATENARIA, perché sembra una parabola

- $\tan h x = \frac{\sin hx}{\cos hx}$ $\quad Tg\, h x : x \in \mathbb{R} \rightarrow Tg\, h x \in (-1, 1)$



Proprietà delle f Iperboliche

Se con le funzioni iperboliche valeva la relazione fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, in questo caso abbiamo che: $\cos^2 hx - \sin^2 hx = 1$, inoltre valgono una serie di formule di addizione:

$$\sin h (x+y) = \sin h x \cdot \cos h y + \cos h x \sin h y$$

$$\cos h (x+y) = \cos h x \cos h y + \sin h x \sin h y$$

$$\sin h (2x) = 2 \sin h x \cos h x$$

$$\cos h (2x) = \cos^2 h x + \sin^2 h x$$