



ES:  $z = \sqrt{3} + i$   $\Rightarrow |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$  Modulo

$\theta / \begin{cases} \cos \theta = x/|z| = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = y/|z| = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 30^\circ$

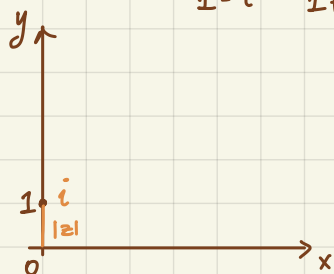
$\pi: 180 = x: 30$   
 $\frac{\pi}{180} = \frac{x}{30}$   
 $\frac{\pi}{180} \cdot 30 = x$   
 $\frac{\pi}{6}$

Da gradi a radianti

$\Rightarrow z = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$

Verifica:  $2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$

ES:  $z = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+i^2+2i}{2} = \frac{1-1+2i}{2} = i \Rightarrow z = 0+1i$



$|z| = \sqrt{0+1} = 1 = \varphi$

$\theta / \cos \theta = \frac{x}{\varphi} = 0$

$\sin \theta = \frac{y}{\varphi} = \frac{1}{1} = 1$

$90^\circ$

Verifica:  $z = 1 \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = (0+i) = i$

00:26

### Precisazione

$\theta$  (theta) Si dice anche "argomento principale di  $z$ "  $\Rightarrow$

$\theta = \text{Arg}(z)$

In generale, si dice Argomento l'angolo che si forma con l'asse delle  $x$ .  $\theta$  è l'angolo compreso tra  $\vec{OZ}$  e l'asse reale  $x$ , compreso tra  $0$  e  $2\pi$  (senza aggiungere  $2k\pi$ ).

Dall'argomento principale  $\text{Arg}(z)$  si ottengono tutti gli altri argomenti di  $z$ :

$\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

## Identità di Eulero

$$z = x + iy = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ con } z \in \mathbb{C}$$

L'Id. di Eulero dice che  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

\* Per il momento non viene spiegato cosa significa  $e^{i\theta}$ , ma viene visto come un SIMBOLO.

Possiamo scrivere il num complesso  $z$  come  $z = |z|e^{i\theta}$

**Prodotto e quoziente di numeri complessi in  $\mathbb{C}$**  quando  $z$  è in forma trigonometrica.

**Proposizione:** Supponiamo di avere  $z = \varphi \cdot \cos \theta + i \sin \theta = \varphi e^{i\theta}$  e  $z' = \varphi' \cdot \cos \theta' + i \sin \theta' = \varphi' e^{i\theta'}$

Allora:

$$1) z \cdot z' = \varphi e^{i\theta} \cdot \varphi' e^{i\theta'} = \varphi \cdot \varphi' \cdot [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')] = \varphi \cdot \varphi' \cdot e^{i(\theta + \theta')}$$

Il modulo del prodotto dei due num complessi è uguale al prodotto dei due moduli.

l'argomento di  $z \cdot z'$  non è uguale al prodotto degli argomenti, ma alla loro somma.

Quindi...

Modulo  $z \cdot z' =$  Prodotto dei moduli

Argomento  $z \cdot z' =$  Somma degli Argomenti

$$2) \frac{z}{z'} = \frac{\varphi}{\varphi'} [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')] \Rightarrow \frac{z}{z'} = \frac{\varphi}{\varphi'} e^{i(\theta - \theta')}$$

$$3) z^n = z \cdot z \cdot \dots \stackrel{n \text{ volte } z}{=} \varphi^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] = \varphi^n e^{in\theta}$$

$$\text{Dim punto ①: } z \cdot z' = [\varphi \cos(\theta) + i \sin(\theta)] \cdot [\varphi' \cos(\theta') + i \sin(\theta')] =$$

$$= \varphi \cdot \varphi' [\cos \theta \cdot \cos \theta' + \cos \theta \cdot i \sin \theta' + i \sin \theta \cdot \cos \theta' + i \sin \theta \cdot i \sin \theta']$$

$$= \varphi \cdot \varphi' [\cos \theta \cdot \cos \theta' + \cos \theta i \sin \theta' + i \sin \theta \cdot \cos \theta' + i^2 \sin \theta \sin \theta']$$

$$= \varphi \cdot \varphi' [(\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta + \theta'))]$$

Per la Dim ② si procede in modo simile usando le formule di sottrazione di sin e cos.

$$\text{Dim ③ } z^n = z \cdot z \cdot \dots \stackrel{n \text{ volte}}{=} \underbrace{\varphi \cdot \varphi \cdot \varphi \dots}_{n \text{ volte}} \cdot [\cos(\theta + \theta + \dots) + i \sin(\theta + \theta + \dots)] = \varphi^n \cdot [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

$$\text{ES: Calcolare } (1 + \sqrt{3}i)^6 = \varphi = 2 \Rightarrow z^n = \varphi^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta / \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 60^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ \cdot x \Rightarrow \frac{60\pi}{180} = \left(\frac{1}{3}\pi\right)$$

$$\begin{aligned} &= 2^6 \cdot (\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) \equiv 2^6 e^{i2\pi} \\ &= 64 \cdot (1 + 0i) = 64 \end{aligned}$$

ES:  $z = \sqrt{3} - i$ ,  $z' = 1 + i$

$$\varphi = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\varphi' = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \theta' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \theta' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Downarrow \theta = -30^\circ = -\frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

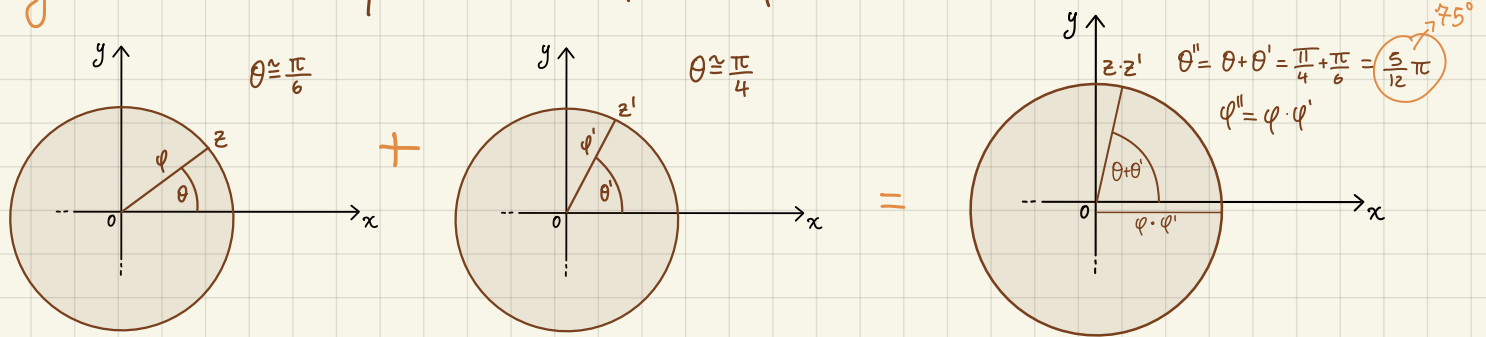
$$\theta' = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

Calcolare  $z \cdot z' = 2 \cdot \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \right]$

$$= 2\sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]$$

Calcolare  $\frac{z}{z'} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left[ \cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right) \right]$

Geometricamente quando ho  $z = \varphi e^{i\theta}$  e  $z' = \varphi' e^{i\theta'}$



# Radici n-esime di $z \in \mathbb{C}$

**Teorema:** Sia  $z = \varphi e^{i\theta}$ . Consideriamo l'eq  $w^n = z$  con  $w \in \mathbb{C}$ ; le soluzioni  $w$  di tale eq sono le radici n-esime di  $z$ .

**Avvero:** qual e' il numero compless  $w$  /  $w^n = z$ ?

**Proposizione:** le radici n-esime di un numero complesso  $z = \varphi e^{i\theta}$  Sono esattamente  $n$ , e sono date dalla formula:

$$w_k = \sqrt[n]{\varphi} \cdot e^{i \frac{(\theta + 2k\pi)}{n}}, \quad k = \underbrace{0, 1, \dots, n-1}_{\text{Esattamente } n \text{ distinte}}$$

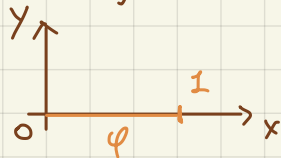
1:49 Dim.

**ES:**  $z^3 = 1$  e' un'eq in  $\mathbb{C}$ , cerchiamo le radici cubiche complesse di 1  
 $w^3 = 1$  In  $\mathbb{R}$ , l'eq corrispondente e'  $x^3 = 1, x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = 1$  unica radice  $\in \mathbb{R}$ .

Il teorema precedente ci dice che l'eq ha esattamente  $\textcircled{3}^{\text{da}}$  radici complesse.

**Calcoliamo:** 1) Scriviamo la forma trigonometrica di  $z = 1 \Rightarrow \varphi = 1$

geometricamente



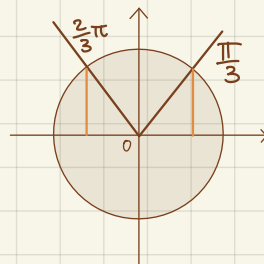
$$\theta / \begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = 1 \end{cases} > 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

2) le radici cubiche di 1 sono date da:  $z_k = \sqrt[3]{\varphi} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) \right]$  Con  $k = 0, 1, 2$

$$z_0 = 1 \left[ \cos(0) + i \sin(0) \right] = \textcircled{1}$$

Dobbiamo ritrovare la radice reale tra le radici complesse perche' una radice reale e' si un numero reale, ma anche un particolare numero complesso.

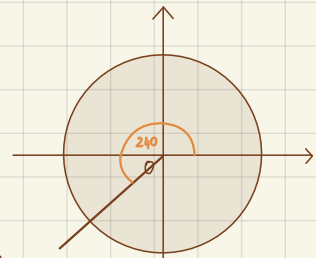
$$z_1 = 1 \cdot \left[ \cos\left(\frac{0+2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0+2\pi}{3}\right) \right] =$$



$$= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = 1 \cdot \left[ \cos\left(\frac{0+4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0+4\pi}{3}\right) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



**Osservazione:**  $z_1$  e  $z_2$  sono l'uno il coniugato dell'altro, Infatti il coniugato di un num imm. e' il numero stesso ma con la parte Imm. Combiata di segno.

**Osservazione:** Se  $z$  e' una radice n-esima di un num complesso, anche il suo coniugato  $\bar{z} = x - iy$  sara' una radice.

ES: Calcolare le radici quadrate di  $z = -1 - i\sqrt{3}$   $\varphi = \sqrt{1+3} = 2$

1) forma trigonometrica

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{1}{2} \\ \sin \theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad \nearrow 120$$

$$\begin{aligned} 180: \pi &= 120: x \\ \frac{180}{180} \pi &= \frac{120}{180} \pi \\ \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\frac{2}{3}\pi + 0}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{2}{3}\pi + 0}{2}\right) \right] = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \right] \\ &= \sqrt{2} \left[ -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \end{aligned}$$

$z_1 =$  Per l'oss prec sappiamo che  $z_2 = \sqrt{2} \left[ \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

2:19

Equazioni di II grado in  $\mathbb{C}$

$$z^2 + 4z + 5 = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ridotta  
(abbiamo 4 come coefficiente)

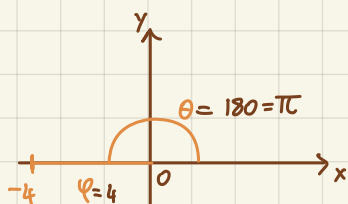
$$z = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

$$\Rightarrow z = -2 \pm \sqrt{4 - 5} = -2 \pm \sqrt{-1} \quad \text{Abbiamo due radici complesse e coniugate} = -2 \pm i$$

ES: Se avessimo avuto  $\sqrt{-4}$ ?

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = \pm 2i \quad \leftarrow \text{Versione "Veloce"}$$

Versione completa: Scriviamo la forma trigonometrica:



$$\Rightarrow z = 4 [\cos(\pi) + i \sin(\pi)]$$

$$z_0 = 2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = 2i$$

$$z_1 = 2 \left[ \cos\left(\frac{\pi + 2\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] = -2i$$