Esercizi eq differenziali

ES:

$$y' - \frac{y}{\mathrm{tg}x} = \underbrace{\sin x}_{b(x)}$$ eq completa

• Di che tipo è questa eq diff?
È un'eq lineare del I° ordine

$$y' - \underbrace{\frac{1}{\mathrm{Tg}x}}_{a(x)} \cdot y = \sin x$$

$\Rightarrow$ Abbiamo infatti la forma: $y' - a(x) \cdot y = b(x)$

coeff. che dipende da x ($a(x)$)

quantità che dip. da x ($b(x)$)

1) Calcolare l'integrale generale dell'omogenea associata:

$$y' - \frac{1}{\mathrm{tg}x} y = 0$$ ← eliminiamo $b(x)$ $\Rightarrow$ è un'eq a variabili separabili

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{\mathrm{Tg}x}$$ ← integriamo $\rightarrow$ $$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int \frac{1}{\mathrm{Tg}x}\,dx \Rightarrow \ln|y| = \int \frac{\overset{f'(x)}{\cos x}}{\underset{f(x)}{\sin x}}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|\sin x| + c \Rightarrow y_0(x) = \overset{e^{c_1}}{c}\, e^{\sin x} = c \sin x$$

y_0 è l'integrale generale

2) Calcolare un integrale particolare y_p dell'eq completa: Metodo separazione variabili

Facciamo variare la c

$y_p(x) = c(x) \cdot \sin x$ Imponiamo che sia soluzione dell'eq completa

Sostituiamo nella eq completa:

Siccome nella eq completa appare anche y' dobbiamo conoscere la derivata di $y_p(x)$:

$$y' = c'(x) \sin x + c(x) \cos x \rightarrow \text{Sostituiamo} \rightarrow c' \sin x + c \cos x - \frac{1}{\mathrm{Tg}x} \cdot c \sin x = \sin x$$

$$c' \sin x + c\cos x - \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} \cdot c \cdot \cancel{\sin x} = \sin x \Rightarrow c' \sin x + \cancel{c\cos x} - \cancel{c \cos x} = \sin x$$

$$\Rightarrow c' \cancel{\sin x} = \cancel{\sin x} \Rightarrow c' = 1$$ integriamo $$\int c'\,dx = \int dx \Rightarrow c = x$$

Quindi $y_p(x) = c(x) \sin x = x \sin x$

Integrale generale dell'eq completa = $y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c \sin x + x \sin x$

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x} y = x^3 \\ y(1) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

y_0, x_0

Quando l'eq è del primo ordine abbiamo bisogno di una condizione

In generale

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

← eq differenziale qualunque

numero

cond. iniziale

Come si risolve il prob. di cauchy?

Inizialmente si tralascia la condizione iniziale, risolvendo solo l'eq differenziale:

$$y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)} y = \underbrace{x^3}_{b(x)}$$

eq diff I° ordine

I) Omogenea Associata: $y' + \frac{1}{x} y = 0$; $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = -\int \frac{1}{x} dx$

$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + c_1 \Rightarrow y_0(x) = \frac{1}{x} + c$ Integrale generale omogenea Associata

II) Calcoliamo l'integrale particolare y_p → Metodo Variazione costanti

Imponiamo $y(x) = c(x) \cdot \frac{1}{x}$ sia soluzione dell'eq completa:

$$D\left(c(x) \cdot \frac{1}{x}\right) = c' \cdot \frac{1}{x} + c(-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{c'}{x} - \frac{c}{x^2}$$

Sostituiamo

$$\frac{c'}{x} - \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x}\left(c\frac{1}{x}\right) = x^3 \Rightarrow \frac{c'}{x} - \cancel{\frac{c}{x^2}} + \cancel{\frac{c}{x^2}} = x^3 \Rightarrow \frac{c'}{x} = x^3 \Rightarrow c' = x^4$$

Integriamo: $\int c' dx = \int x^4 dx \Rightarrow C(x) = \frac{x^5}{5} \Rightarrow$ L'integrale particolare $y_p(x)$

Sarà: $y_p(x) = \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^4}{5}$ Allora L'integrale generale dell'eq completa sarà:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = \frac{c}{x} + \frac{x^4}{5} = \frac{cx + 5x^4}{5x}$$

INTEGRALE GENERALE → Famiglia di soluzioni → Dipende da $c \in \mathbb{R}$.

III) Dopo aver risolto l'integrale generale, vogliamo trovare un'unica soluzione in modo da soddisfare il problema di Cauchy: $y(x_0) = \frac{1}{5}$

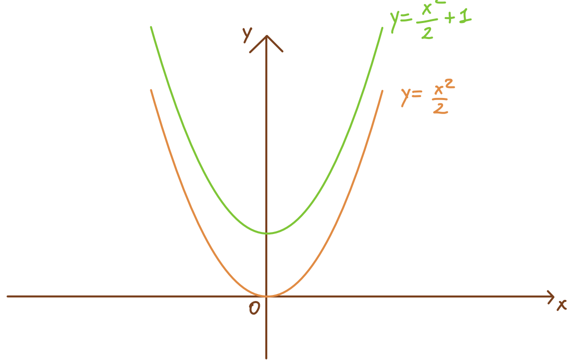
Imponiamo la condizione iniziale $y(1) = \frac{1}{5}$ → Sostituiamo ad x, 1

$$\frac{c}{1} + \frac{1^4}{5} = \frac{1}{5} \; ; \; c + \cancel{\frac{1}{5}} = \cancel{\frac{1}{5}} \Rightarrow c = 0$$

Allora L'integrale particolare (unica soluzione) è: $y(x) = \cancel{\frac{c}{x}}^{\,0} + \frac{x^4}{5} \Rightarrow y(x) = \frac{x^4}{5}$

Integrale particolare

ES: $\begin{cases} y' = x \\ y(1) = 5 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + c \leftarrow$ integrando



Cambiando la c, la funzione cambia. Quando impongo la condizione iniziale $y(1)=5$ otteniamo

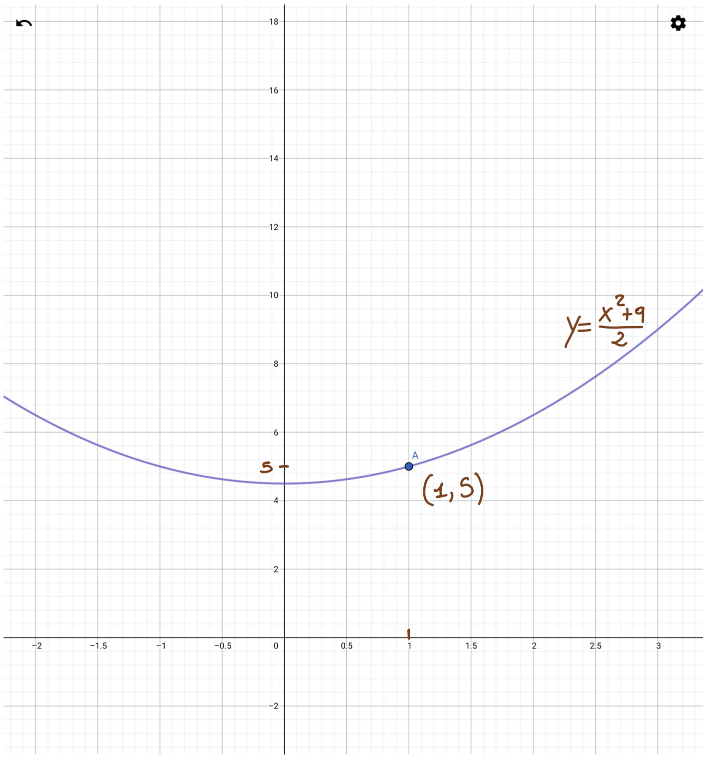
$$y(1)=5 \Rightarrow \frac{1^2}{2} + c = 5 \Rightarrow c = 5 - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{9}{2}$$

Quindi Qual è la soluzione al prob. di Cauchy?

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c \rightarrow c = \frac{9}{2} \rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} = \frac{x^2+9}{2}$$

Quando facciamo questi calcoli, in realtà cosa stiamo cercando? Quando imponiamo che $y(1) = 5$, significa dire "Tra tutte le parabole che ho al variare di c, voglio la parabola che passa per il punto $(1,5)$"

$$y(\underset{x}{1}) = \underset{y}{5} \Rightarrow (x,y) = (1,5)$$



Eq del tipo (diverse dalle eq del tipo $y' + a(x)y = 0$!)

Sono del tipo: $\boxed{y' = g(ax+by)}$ (1)

Tutte le eq che vedremo d'ora in poi sono TUTTE eq NON LINEARI del I ordine.

Supponiamo che g dipenda da un argomento $(ax+by)$, dove a e b sono DUE NUMERI.

Come si risolve questo tipo di equazione?

Poniamo $z = ax + by$

Sempre dipendente da x

Prima di sostituire z, dobbiamo esprimere y' in funzione di z: Deriviamo $z = ax + by(x)$

$\Rightarrow D(z = ax + by(x)) = z' = a + b \cdot y'(x) \Rightarrow$ Ricaviamo $y' \Rightarrow y'(x) = \frac{z' - a}{b}$

Sostituiamo nella (1)

$\frac{z'-a}{b} = g(z) \Rightarrow$ Ricaviamo $z' \Rightarrow z' = a + bg(z) \leftarrow$ Equazione a variabili separabili

pto (A)

Per risolvere l'eq continuiamo con il procedimento per le eq a var. sep.

ES: $y' = 1 + \underbrace{x^2 - 2xy + y^2}_{\text{quadrato}} \Rightarrow y' = 1 + (\underbrace{x-y}_{ax+by})^2 \Rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = -1 \end{matrix} \quad g(x) = (x-y)^2$

pongo $z = x - y$ Deriviamo $\Rightarrow z' = 1 - y'$ Ricavo $y' \Rightarrow y' = 1 - z'$

Sostituiamo a $y' = 1 + (x-y)^2 \Rightarrow \cancel{1} - z' = \cancel{1} + (z)^2 \Rightarrow z' = -z^2 \leftarrow$ questa è un'eq a variabili separabili

Siamo al punto (A)

Risolvo l'eq a var sep: $\frac{z'}{z^2} = -1$ integriamo $\Rightarrow \int \frac{z'}{z^2}\,dx = -\int dx$

$\Rightarrow \frac{z^{-1}}{-1} = -x + C \Rightarrow \frac{1}{z} = x - C \Rightarrow z = \frac{1}{x-C}$ ma $z = x - y$

Torniamo a $x-y \Rightarrow x - y = \frac{1}{x-C} \Rightarrow y = -\frac{1}{x-C} + x \Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2 - Cx - 1}{x - C}}$

Equazioni omogenee

Sono eq del tipo: $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ y è quindi dipendente da $\left(\frac{y}{x}\right)$

Come la risolviamo? Poniamo $z = \frac{y}{x}$ e ci ricaviamo $y \to y(x) = z \cdot x$

$\Rightarrow y' = z'x + z$ Sostituiamo $\to$ $\underline{z'x + z = g(z)}$ eq a variabili separabili

ES: $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ Non è lineare del I ordine perchè non è presente un coefficiente che dipende da $x \cdot y$; abbiamo al denominatore $x^2 + y^2$, di conseguenza non abbiamo una dipendenza lineare da xy.

Una combinazione lineare di x y è della forma $ax + by$.

Quindi come facciamo? Mettiamo x^2 in evidenza:

$$y' = \frac{2\cancel{x}y}{x^{\cancel{2}}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} = \frac{2\, y/x}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow \text{poniamo } z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{2z}{1+z^2} \; ; \quad z'x = \frac{2z - (1+z^2)\cdot(z)}{1+z^2} = z'x = \frac{z - z^3}{1+z^2}$$

tutto dipendente da z

x

$$\Rightarrow \frac{z'}{\frac{z-z^3}{1+z^2}} = \frac{1}{x} \Rightarrow z' \cdot \frac{1+z^2}{z-z^3} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int z' \cdot \frac{1+z^2}{z-z^3} = \int \frac{1}{x}\, dx$$

(A)

$$\int \frac{z^2+1}{z(1-z^2)}\, dx = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{1+z} = \frac{A(1-z)(1+z) + B(z)(1+z) + C(z)(1-z)}{z(1-z)(1+z)}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1}{z} \cdot z'\, dx + \int \frac{1\, z'}{1-z}\, dx - \int \frac{1}{1+z} z'\, dx = \ln|z| + \ln|1-z| - \ln|1+z| + c_1$$

$$= \ln\left|\frac{z(1-z)}{1+z}\right| + c_1$$

Allora

Riprendo (A)

$$\ln\left|\frac{z(1-z)}{1+z}\right| = \ln|x| + c_1 \Rightarrow \frac{z(1-z)}{1+z} = Cx \qquad C \to e^{c_1}$$

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\frac{y}{x}\left(1 - \frac{y}{x}\right)}{1 + \frac{y}{x}} = cx$$

1:07

Equazione di BERNOULLI

E' un'eq del tipo: $y' = a(x)\,y + b(x)\,y^{\alpha}$ novita' Non piu' lineare

Come procediamo?

Dividiamo per y^{α} $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{y'}{y^{\alpha}}} = a(x)\underbrace{y^{1-\alpha}}_{z(x)} + b(x)$

Poniamo $z(x) = y^{1-\alpha}$ $\rightarrow$ Deriviamo $\Rightarrow$ $z'(x) = (1-\alpha)\,y(x)^{\cancel{1}-\alpha-\cancel{1}} \cdot \underbrace{y'(x)}_{y \text{ dip. da } x}$

$\Rightarrow$ $z'(x) = \underline{(1-\alpha)}\,\boxed{y^{-\alpha}\cdot y'} = \dfrac{y'}{y^{\alpha}}$

Ci manca $(1-\alpha)$, quindi: $\dfrac{z'}{\underbrace{1-\alpha}_{\text{costante}}} = a(x)\,z(x) + b(x)$ Eq lineare del I° ordine

ES: $xy' = -y^2 \ln x - 2y$ Dividiamo per x: $y' = -y^2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} - 2y\cdot\dfrac{1}{x}$ Funzione $a(x)\cdot y$

$\Rightarrow$ $y' = \underbrace{-\dfrac{2}{x}}_{a(x)} \cdot \underbrace{y}_{y} - \underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{b(x)} \cdot \underbrace{y^2}_{y^{\alpha}}$ ← Abbiamo tutti → eq di Bernoulli

$\Rightarrow$ Dividiamo per y^2 $\Rightarrow$ $\dfrac{y'}{y^2} = -\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{\cancel{y}}{y^2} - \dfrac{\ln x}{x}$ $\Rightarrow$ pongo $z(x) = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = \dfrac{1}{y}$

Deriviamo $\Rightarrow$ $z' = -1\dfrac{1}{y^2}\cdot y'$ $\Rightarrow$ $\dfrac{y'}{y^2} = -z'$ eq completa

Sostituendo: $-z' = -\dfrac{2}{x}z - \dfrac{\ln x}{x}$ $\Rightarrow$ $z' = \dfrac{2}{x}z + \dfrac{\ln x}{x}$ (1) eq lineare I ordine ↘ Variabili separabili

$\Rightarrow$ eq omogenea: $z' = \dfrac{2}{x}z$ $\rightarrow$ $\displaystyle\int\frac{z'}{z} = \int\frac{2}{x}\,dx = \ln|z| = 2\ln|x| + c_1 \Rightarrow \underbrace{z_0 = x^2 + c}$

Metodo sep variabili

Integrale generale Associata omogenea

$z_p(x) = C(x)\cdot x^2$ $\Rightarrow$ $z' = c'x^2 + c\,2x$

La costante varia

Sostituiamo alla (1) $\Rightarrow$ $c'x^2 + \cancel{c2x} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{x}}\,\cancel{cx^2} + \dfrac{\ln x}{x}$ $\Rightarrow$ $c'x^2 = \dfrac{\ln x}{x}$ $\Rightarrow$ $c' = \dfrac{\ln x}{x^3}$

Integriamo: $\displaystyle\int c'\,dx = \int\frac{\ln x}{x^3}\,dx$ pongo $t = \ln x$ $\Rightarrow$ $dt = d\ln x = \dfrac{1}{x}\,dx$

$\Rightarrow$ $x = e^t$

$\Rightarrow$ $\displaystyle c = \int \frac{1}{x^2}\cdot\ln x\cdot\underbrace{\frac{1}{x}\,dx}_{dt}$ $\Rightarrow$ $\displaystyle c(x) = \int e^{-2t}\cdot t\,dt$

Integriamo per parti

1:43

Le eq precedenti erano tutte del tipo NON LINEARI DEL I° ORDINE

Equazioni lineari del II ordine

(finora abbiamo visto quelle lineari del I° ordine)

Sono del tipo: $\underbrace{1y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y}$ $= f(x)$ ①

Il primo membro è una combinaz. lineare di y'', y' e y

$b_1 y'' + b_2 y' + b_3 y = g(x)$ Dividiamo per b_1 $\Rightarrow$ $1y'' + \underbrace{\frac{b_2}{b_1}}_{a_1} y' + \underbrace{\frac{b_3}{b_1}}_{a_2} y = \underbrace{\frac{g(x)}{b_1}}_{f(x)}$

Teorema (analogo al 1° teorema visto prima)
Anche in questo caso siamo interessati all'integrale generale dell'eq. Quindi l'int. gen. dell'eq completa ① è dato dalla somma dell'integrale generale dell'eq omogenea associata e di un integrale particolare $y_p(x)$ dell'eq completa; quindi

$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$ $\leftarrow$ Stesso Teorema delle eq lin 1° ordine

1° Problema: risolvere l'eq omogenea associata

Nel caso delle equazioni del primo ordine era una equazione a variabili separabili, in questo caso non è così.

$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ $\leftarrow$ Termine noto $= 0 \Rightarrow$ eq omogenea associata

Proposizione: Sia Y_0 l'insieme delle soluzioni dell'eq omogenea associata, cioè l'integrale generale. Allora

1) Y_0 è uno Spazio Vettoriale cioè se y_1 e $y_2 \in Y_0$ (sono entrambe soluzioni dell'eq diff.) allora anche $y_1 + y_2 \in Y_0$ $\leftarrow$ Anche la somma è soluzione.

2) Se $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $y \in Y_0$ allora $\alpha \cdot y \in Y_0$.

Quindi lo spazio $(Y_0, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale. Come in tutti gli spazi vettoriali, è doveroso parlare di vettori linearmente dip. o indip.:
In questo caso non consideriamo uno spazio di vettori numerici, ma uno spazio vettoriale i cui elementi non sono vettori numerici, ma sono funzioni.

Definizione: Supponiamo che $y_1, y_2 \in Y_0$ (due soluzioni [funzioni]) e che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono indipendenti se l'unica combinazione lineare nulla di y_1 e y_2 è quella a coefficienti <u>tutti nulli</u>, cioè se:

$C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

In ogni spazio vettoriale, tutte le basi sono costituite dallo stesso numero di elementi.
L'ordine di una base (da quanti elementi è costituita la base) si dice dimensione dello spazio.

R^n è uno spazio di dimensione n, ovvero costituita da n vettori.

Proposizione La dimensione dello spazio Y_0 è 2; questo perchè stiamo considerando equazioni del II ordine.
Cioè tutte le basi in Y_0 sono costituite da 2 FUNZIONI

Ma quindi perché siamo interessati alle basi di questo spazio vettoriale?
Siamo interessati a calcolare l'integrale generale dell'eq differenziale omogenea del II ordine; se conosciamo una base di Y_0 (ovvero l'insieme delle soluz. di questa equazione) e cioè 2 integrali indipendenti, allora

y_1 e y_2 ($\{y_1, y_2\}$ è una base di Y_0) allora l'integrale generale $y(x)$ è dato da una combinazione lineare di questi due integrali indipendenti.

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Il mio obbiettivo è calcolare al meno 2 integrali indipendenti; se queste due soluzioni dell'eq. diff. sono indipendenti, questi due costituiscono una base!

Se ho una base, mi basta fare una combinazione lineare per ottenere tutte le soluzioni dell'equazione! "Tutte le soluzioni" corrisponde proprio all'integrale generale che noi vogliamo calcolare.