Continuo lez. 38; ci siamo lasciati dicendo che:

Proposizione
f differenziabile in P_0 $\Rightarrow$ la funz. è continua in P_0.   **Importante!**

se la $f(x,y)$ è Derivabile <u>NON E' DETTO</u> che essa sia continua in P_0.

Per essere sicuri che una $f(x,y)$ sia continua in P_0, allora essa deve essere DIFFERENZIABILE.

ES:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funz è derivabile parzialmente in $O \Rightarrow$ le derivate parziali esistono;

Infatti: $f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$

$f_y(0,0) = 0$

MA f non è continua in O. $\to$ calcoliamo il limite

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{Th}{=} f(0,0)$ Se calcoliamo il lim sulla retta $y=x$ dobbiamo calcolare

$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$ Su $y=x$ il lim è $\frac{1}{2} \neq 0$ ($f(0,0)=0$) quindi la f non è continua. Dovrebbe venire, affinché continua, $f(0,0)$ (in questo caso $f(0,0) = 0 \neq \frac{1}{2}$).

Inoltre si vede anche che f NON è differenziabile; f non essendo continua, non è Differenziabile.

Come verifichiamo che una f è DIFFERENZIABILE?
Tecnicamente possiamo svolgere il limite visto nella lezione 38, ma esiste un modo più veloce?

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE

Se f è derivabile parzialmente in A aperto di $\mathbb{R}^2$, se le derivate parz. f_x e f_y sono continue in A, allora f è differenziabile in A.

In altre parole per essere sicuri che f sia differenziabile basta che le derivate prime siano continue.

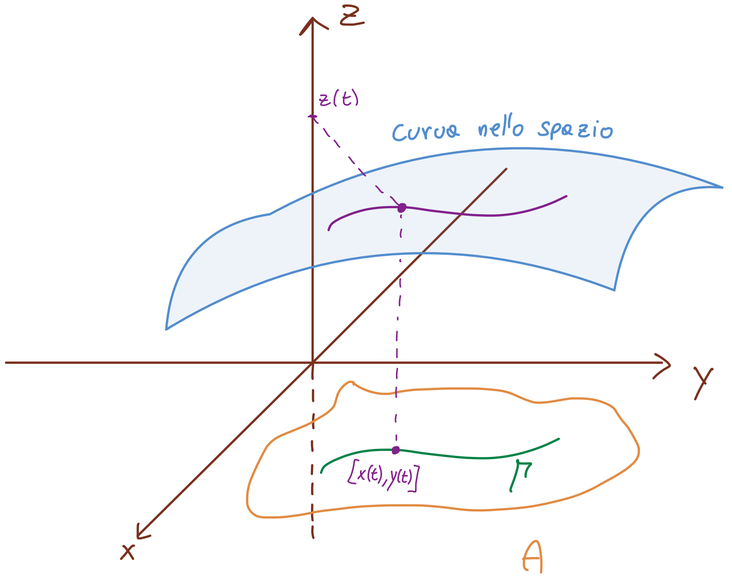
Funzioni Composte

Sia A aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia Γ una curva di eq parametriche:

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ con } t \in [a,b] \quad \text{Tale che} \quad \text{la curva } \Gamma \overset{\text{contenuta}}{\subset} A$$

Supponiamo di avere una funzione di 2 variabili definita in A: $f(x,y)$ def in A.

Cosa accade?



Calcoliamo ora $f(x,y)$ sui punti di Γ, ovvero consideriamo f solo sui punti di Γ.

$\to z(t) = f[x(t), y(t)] = g(t)$

Geometricamente significa prendere un pto sulla curva e calcolare z (Altezza).

Esegui queste op. per ogni t, ovvero per ogni punto della curva, ottenendo una seconda curva sulla superficie.

Allora otteniamo la funzione composta $F(t) = f[x(t), y(t)]$ con $t \in [a,b]$. Nel caso di f di una variabile avevamo $y = f(x)$, e prendevamo $x = g(t)$, quindi la f composta era: $F(t) = f(g(t))$

Caso F comp. 1 Var: $F'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$ ← nulla di nuovo

Teorema di deriv. delle funzioni composte (f di 2var)

Se $x(t), y(t)$ sono derivabili in $t \in I$ e $f(x,y)$ è differenziabile nel pto corrispondente $(x(t), y(t)) \in A \in \mathbb{R}^2$

Allora la funz. composta $F(t) = f(x(t), y(t))$ è derivabile in $t \in I$ e si ha:

$$F'(t) = f_x[x(t), y(t)]\, x'(t) + f_y[x(t), y(t)]\, y'(t) \quad (1)$$

ES: $f(x,y) = x^2 + y^2 \to$ parametrica $\to \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

Senza la formula (1)

Sostituisco in $f(x,y)$: $f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow F'(t) = 0$

Uso la (1): $F'(t) = 2x\big|_{x=\cos t} \cdot (-\sin t) + 2y\big|_{y=\sin t} \cdot \cos t = \cancel{-2\cos t \sin t} + \cancel{2 \sin t \cos t} = 0 = F'(t)$

Notazione Vettoriale

Se indichiamo $\underbrace{\varphi(t) = [x(t), y(t)]}_{\text{vettore}} \longrightarrow \underbrace{\varphi'(t) = [x'(t), y'(t)]}_{\text{Derivata delle componenti}}$.

vettore velocità

Indichiamo il gradiente con $Df = (f_x, f_y) = \nabla f$.

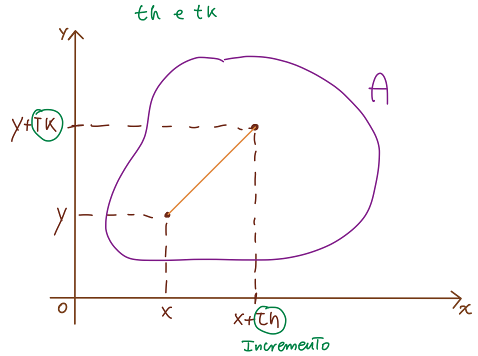
La formula ① può quindi essere scritta come: $F'(t) = \langle Df, \varphi' \rangle$ ottenendo:

Prodotto scalare

$$\underbrace{F'(t) = \langle Df, \varphi' \rangle}_{\text{Notazione Vettoriale}} = \underbrace{f_x[\varphi(t)] \cdot x'(t) + f_y[\varphi(t)] \cdot y'(t)}_{\text{Formula ①}}$$

Formula Di Taylor

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, e sia f definita in A. Sia $(x,y) \in A$ e consideriamo un incremento $(h,k) / \underbrace{(x+th, y+tk)}_{\text{Punto con incremento } th \text{ e } tk} \in A, \ \forall t \in [0,1]$



Consideriamo la f composta: $F(t) = f(x+th, y+tk)$

Supponiamo che f sia differenziabile in A. Allora per il Teorema di deriv. delle f composte, la f $F(t)$ è derivabile.

$$\Rightarrow F'(t) = f_x(x+th, y+tk) \cdot \underset{x'(t)}{h} + f_y(x+th, y+tk) \cdot \underset{y'(t)}{k}$$

Se anche in questo caso, le deriv parz. f_x e f_y sono derivabili con derivate continue (la f è deriv. 2 volte)

allora $F(t)$ è derivabile 2 volte: dobbiamo derivare $F'(t)$:

$$F''(t) = \underbrace{\frac{d}{dt} f_x(x+th, y+tk)}_{f \text{ composta}} h + \underbrace{\frac{d}{dt} f_y(x+th, y+tk)}_{f \text{ composta}} k$$

$$\Rightarrow F''(t) = f_{xx}(-)h^2 + f_{xy}(-)h \cdot k + f_{yy}(-)k^2 + f_{yx}(-)kh$$

Se f_{xy} e f_{yx} sono continue, per il Teorema di Schwarz, $f_{xy} = f_{yx}$, quindi otteniamo:

$$F \text{ cont} \rightarrow f_{xy} = f_{yx} \rightarrow \underset{②}{F''(t)} = f_{xx}(-)h^2 + f_{yy}(-)k^2 + 2 f_{xy}(-)hk$$

Siccome uguali, si sommano.

Essendo $F(t)$ una funz. di una variabile, scriviamo la formula di Taylor (maclaurin) per $F(t)$ arrestata al II ordine.

$$F(t) = F(\overset{\text{Punto } t=0}{0}) + F'(0) \cdot t - 0 + \frac{F''(\xi)t^2}{2} \quad \text{dove } \xi \in (0,t)$$

Formula di taylor con resto nella forma di Lagrange

Se prendo $t = 1 \rightarrow F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\xi)$ <u>Calcoliamo le quantità</u>

$F(\overset{t=1}{1}) = f(x + \overset{th}{h}, y + \overset{tk}{k})$, $F(0) = f(x,y)$, $F'(0) = f_x(x,y)h + f_y(x,y)k$,

$F''(\xi) =$ Sostituisco $t = \xi$ nella ② $= f_{xx}(x+\xi h, y+\xi k)h^2 + 2f_{xy}(-)hk + f_{yy}(-)k^2$

Abbiamo quindi dimostrato la formula di Taylor al II ordine con il resto di Lagrange;

Enunciando: sia f deriv. 2 volte con derivate II continue in $A \subseteq \mathbb{R}^2$; sia $(x,y) \in A$ e (h,k) sia VICINO ALL'ORIGINE ($\Rightarrow$ h e k sono incrementi molto piccoli).

Allora $\exists\, \xi \in (0,1)$ /

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x+\xi h, y+\xi k)h^2 + 2f_{xy}(-)hk + f_{yy}(-)k^2\right]$$

- Forma vettoriale a 1:48

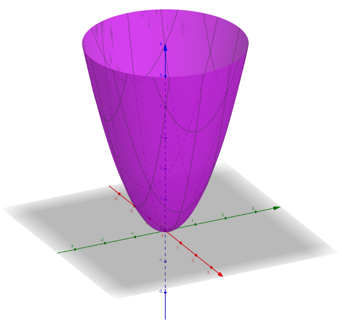
Massimi e minimi relativi

f è definita in A aperto di $\mathbb{R}^2$, abbiamo $P_0 = (x_0, y_0) \in A$.

Definizione: P_0 è un minimo relativo per f $\Leftrightarrow$ $\exists\, I_\delta(P_0) \,/\, f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \;\; \forall (x,y) \in I_\delta(P_0)$

P_0 è un max rel se $\exists\, I_\delta(P_0) \,/\, f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \;\; \forall (x,y) \in I_\delta(P_0)$

ES: $z = x^2 + y^2$ paraboloide $O = (0,0)$ minimo relativo



Quali sono le condiz. nec e suff. affinché ci sia un max/min rel?

Teorema Di Fermat

f definita in A aperto di $\mathbb{R}^2$, f deriv. in $P_0(x_0,y_0) \in A$. Se P_0 è un max o min relativo, allora il gradiente della funzione calcolato nel punto P_0, sarà ZERO, ovvero avremo il vettore nullo $\Rightarrow$ il gradiente è un vettore.

Il gradiente è nullo $\Leftrightarrow$ ognuna delle sue componenti è nulla $\Rightarrow$ $\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = 0 \\ f_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$ Condizione NECESSARIA

Definizione: Un punto che annulla il gradiente di f si dice punto stazionario o critico.

$\Rightarrow$ Riscriviamo il teorema $\Rightarrow$ Condizione necessaria affinché P_0 sia un estremo relativo è che P_0 sia un punto STAZIONARIO per f.

Dim a 2:06