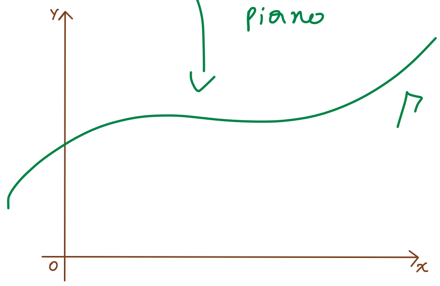
Curve nel Piano - o Spazio

Abbiamo detto che una curva e' un'appl. del tipo: $\varphi : t \in [a,b] \to \varphi(t) = [x(t), y(t)] \in \mathbb{R}^2$

Il sostegno di φ si indica con Γ ed e': $\Gamma = \varphi([a,b])$

curva nel piano

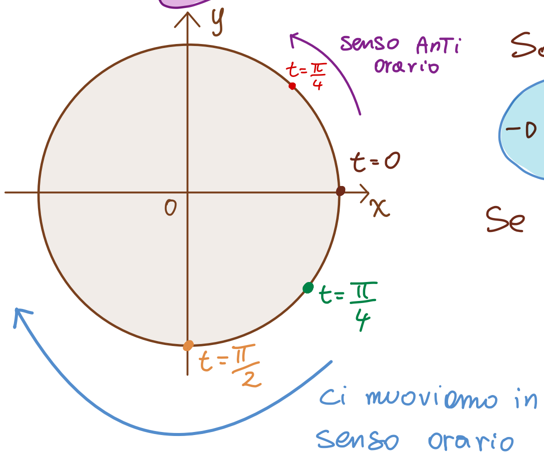
$\varphi = \varphi(t) \Rightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ con $t \in [a,b]$



Ogni curva ammette diverse rappresentazioni parametriche.

Prendiamo la circonf di centro $O(0,0)$ e $r=1$;
$C_1(0)$ ha eq parametriche:

$C_1(0) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi] \to$ Se $t = \frac{\pi}{4} \to \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



Sostituiamo $-t$ a t nell'eq prec

$\to \begin{cases} x = \cos(-t) \to x = \cos(t) \\ y = \sin(-t) \to y = -\sin(t) \end{cases}$

Se $t=0 \Rightarrow (1,0)$ otteniamo

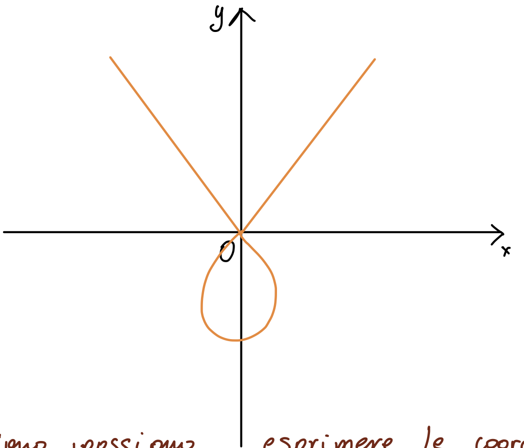
Se $t = \frac{\pi}{2} \to (0,-1)$ Se $t = \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Osservazione: Una curva geometrica ammette diverse rappresentazione parametrica.
$\Rightarrow$ ogni rappr. param. induce un verso di percorrenza.

✳ Altre info a 1:25

ES: STROFOIDE

$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$



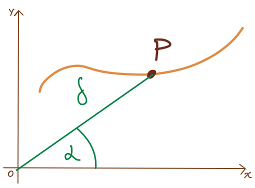
Eq. Polari di una curva

Quando ho una curva nel piano, possiamo esprimere le coordinate in maniera cartesiana. Da questa possiamo quindi ottenere la curva parametrica che ci dona la curva oraria del moto.

Eq cartesiana $y = f(x)$

Eq parametrica $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Possiamo inoltre esprimere la curva in maniera polare, ovvero sapendo la distanza del punto della curva dall'origine, e l'angolo che si forma tra $\overline{OP}$ ed asse x.



Quindi l'eq di una curva in forma polare e':

$$\rho = \rho(\alpha) \quad , \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$$

ES: Circonferenza $C_1(0)$ centro 0

Se ho l'eq cartesiana di $c_1(0) = x^2+y^2=1$, per ottenere l'eq polare, basta passare in coordinate Polari:

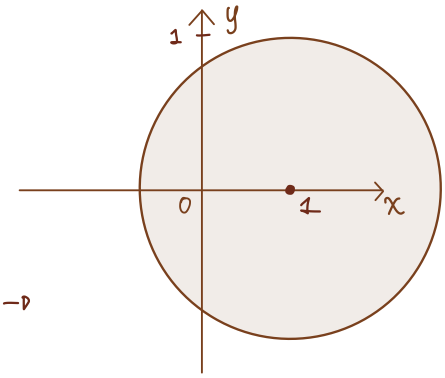
(A) $\begin{cases} x=\rho\cos\alpha \\ y=\rho\sin\alpha \end{cases}$ $\alpha\in[0,2\pi]$ $\Rightarrow$ sostituisco $\Rightarrow \rho^2\cos^2\alpha+\rho^2\sin^2\alpha = 1$

Distanza da (0,0)

$\Rightarrow \rho^2(\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{\text{Rel Fondam.}})=1 \to \rho^2=1 \Leftrightarrow \rho=\pm 1 \Rightarrow$ siccome ρ deve essere ≥ 0 (è la distanza)

otteniamo che Eq polare di $C_1(0) \Rightarrow \rho=1$

ES 2: se prendo la circonferenza: $C_{(1,0)}$ centro, (1) raggio



Eq cart $(x-1)^2+y^2=1 \to x^2-2x+\cancel{1}+y^2=\cancel{1}$

$\to x^2+y^2-2x=0$ (B) passo a coord polari:

prendo da (A) e sostituisco in (B):

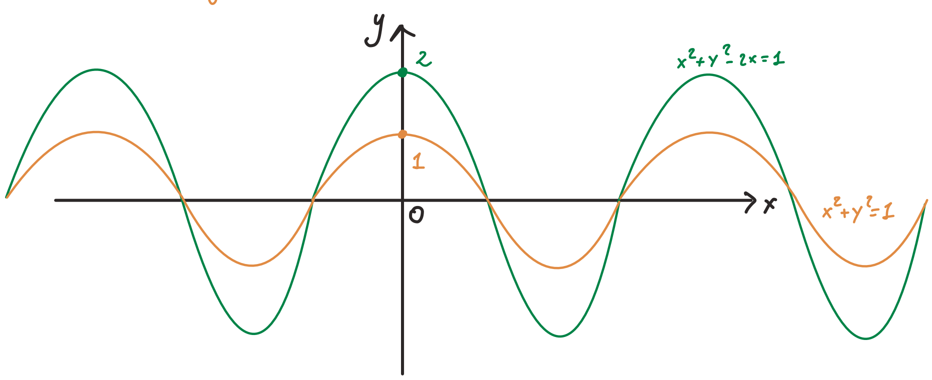
$\rho^2\cos^2\alpha+\rho^2\sin^2\alpha-2\rho\cos\alpha \to \rho^2(\overbrace{\cos^2\alpha+\sin\alpha^2}^{1}-2\cos\alpha^2)\to$

$\to \rho^2-2\cos\alpha=0 \to \rho(\rho-2\cos\alpha)=0$

$\to \cancel{\rho=0}$, $\rho=2\cos\alpha$

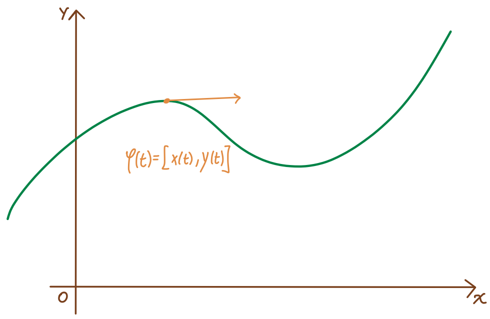
non acc (sarebbe un punto)

Quindi, con rif. Polare:



Torniamo alle eq parametriche

Sia Γ che ha eq param: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ con $t \in [a,b]$



Supponiamo che $\varphi = \varphi(t)$ sia derivabile in $[a,b]$; si definisce il vettore tangente in t_0:

$$\underbrace{\varphi'(t_0) = [x'(t_0), y'(t_0)]}_{\text{vettore Tangente}}$$

Il VERSORE sarà: $T(t_0) = \dfrac{\varphi'(t_0)}{||\varphi'(t_0)||}$ ← Norma

Curve regolari

Sia $\varphi = \varphi(t)$ una curva in $\mathbb{R}^2$, $t \in [a,b] = I$

φ è una curva regolare in I se:

1) φ è derivabile con derivata continua in I → Deriv. 2 volte
2) il vettore Tangente $\varphi'(t) \neq \emptyset$ (1) ↖ vettore nullo ⟺ Le sue componenti (2) non si annullano mai contemporaneamente

⇕

Il modulo del vett Tangente è STRETTAMENTE maggiore di 0: (3)

$$\boxed{||\varphi'(t)|| > 0}$$

⟺ (4) $||\varphi'(t)|| > 0 \iff x'(t)^2 + y'(t)^2 > 0$ ⟺

Quindi che sono le curve regolari?

Sono curve in cui è sempre ben definito il VERSORE Tangente in ogni punto.

Inoltre le curve regolari ci permettono di spiegare la:

Lunghezza di una curva

Definizione INTUITIVA

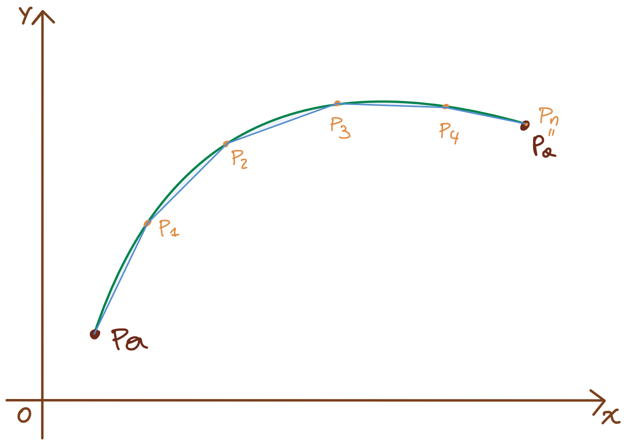
Sia $\varphi : I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$ curva regolare di estremi: $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$

$\varphi(a) = P_a$, $\varphi(b) = P_b$

L'idea è quella di approssimare la curva con delle POLIGONALI: Sia P una partizione di $[a,b]$ in N punti:

$$P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_N \equiv b\}$$

Dividiamo $[a,b]$ in N parti



Per ogni t_i abbiamo il punto corrispondente sulla curva $P_0 = \varphi(t_0)$, $P_1 = \varphi(t_1) \dots P_n$

Sia P_N la poligonale di vertici $P_0, P_1, \dots, P_N$. La lunghezza di questa poligonale sarà la somma di tutti i segmenti:

$$L(P_N) = \sum_{i=1}^{N} \text{dist}(P_{i-1}, P_i) = \sum_{i=1}^{N} ||P_{i-1} - P_i|| = \boxed{\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}}_{\text{Dist Tra 2 punti}}}$$

Definizione: Si dice lunghezza della curva $\varphi = \varphi(t)$, $t \in I = [a,b]$

→ il "valore massimo" tra tutte le lunghezze delle poligonali inscritte in φ al variare di tutte le possibili partizioni dell'intervallo $[a,b]$.

Si scrive dicendo: $L(\varphi) = \sup\{L(P_N) \,/\, N \to +\infty\}$ dove sup è l'estremo superiore, ovvero il "valore massimo" → in questo caso il val. max. di tutte le poligonali.

↑ Definizione molto intuitiva ↑

TEOREMA DI RETTIFICABILITÀ

Se φ è una curva regolare in $[a,b]$, di eq param: $\varphi = \varphi(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ → $t \in [a,b]$

⇒ Allora ⇒ $L(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt$

Lunghezza della curva — modulo vettore velocità (tangente)

Possiamo quindi esprimerla come: $L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$ Lunghezza della curva

ES: prendiamo la circonferenza $C_r(0)$

ha eq param: $\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sin(t) \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ Come calcoliamo il raggio della $C_r(0)$?

$$L(C_r(0)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\sin(t)]^2 + [r\cos(t)]^2} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} \, dt = r\int_0^{2\pi} dt = 2\pi r$$