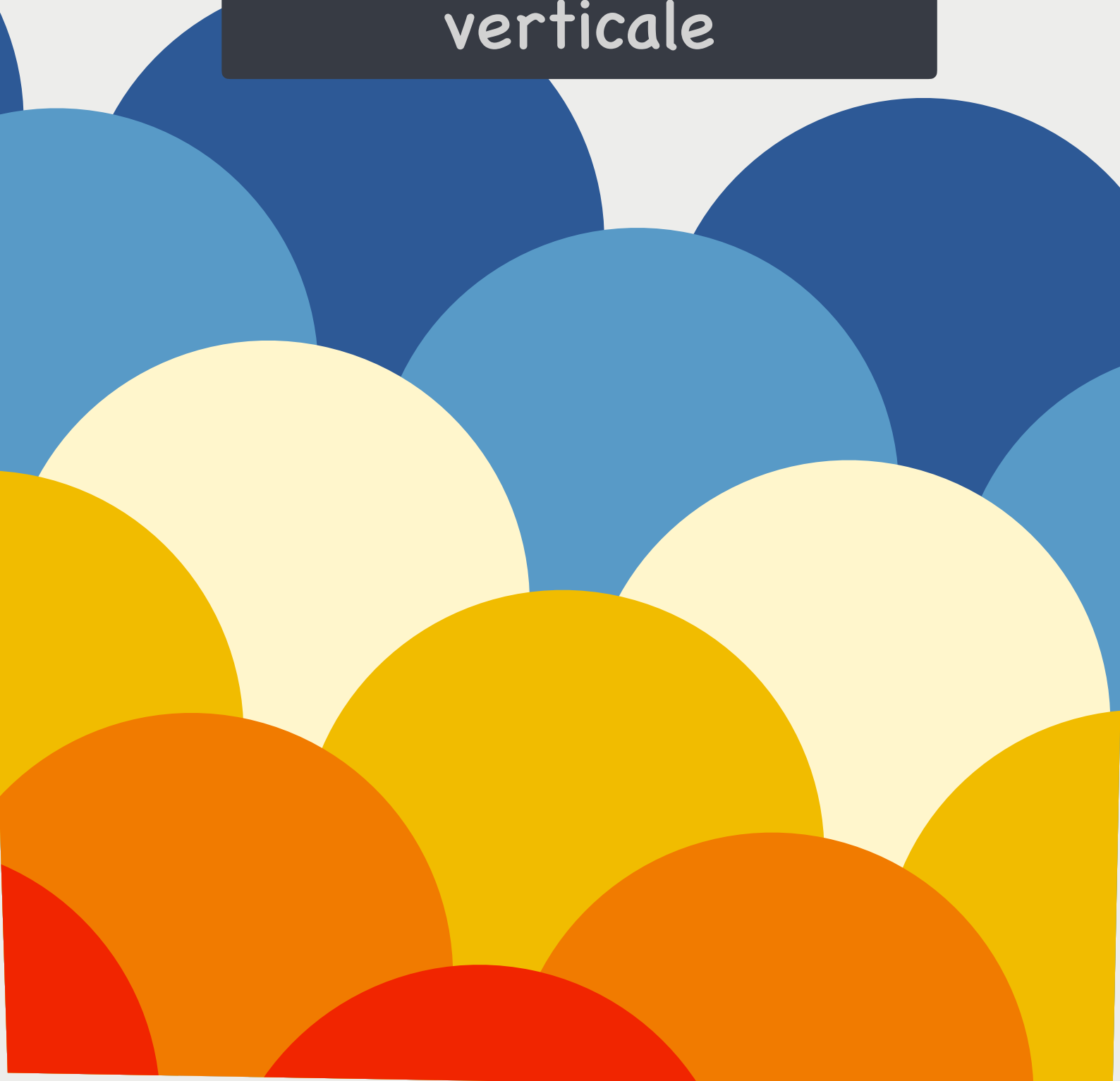


Lezione 21

Punti a tenerne
verticale



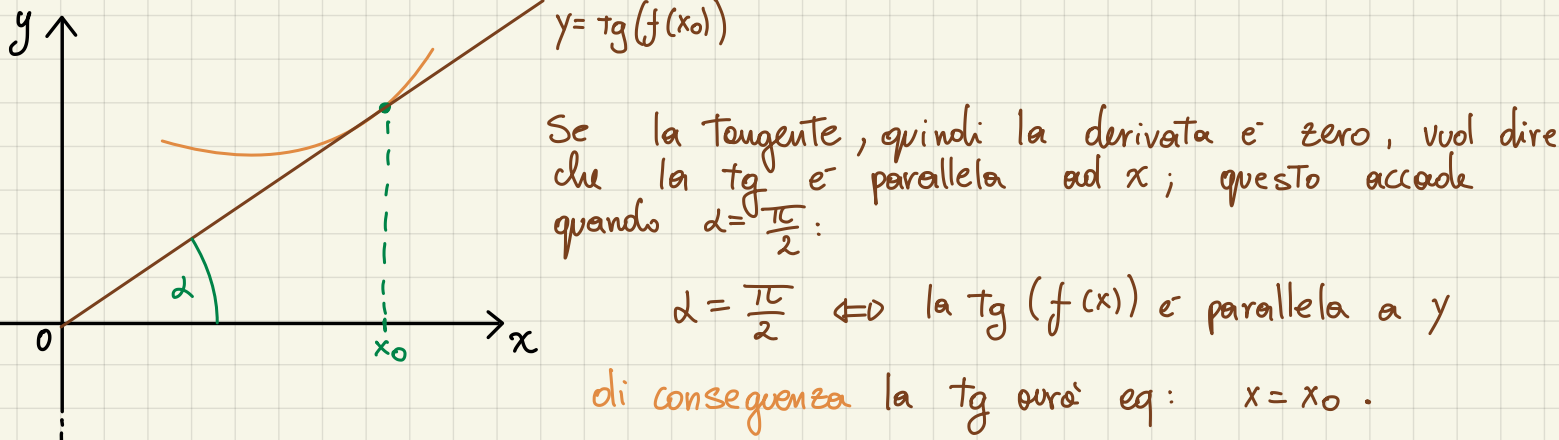
Punti a tangente Verticale

Definizione Si dice che f ha in x_0 un pt a Tg verticale se in x_0 il limite del rapp incrementale e' $\pm \infty$, ovvero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \begin{matrix} +\infty \\ \text{oppure} \\ -\infty \end{matrix}$$

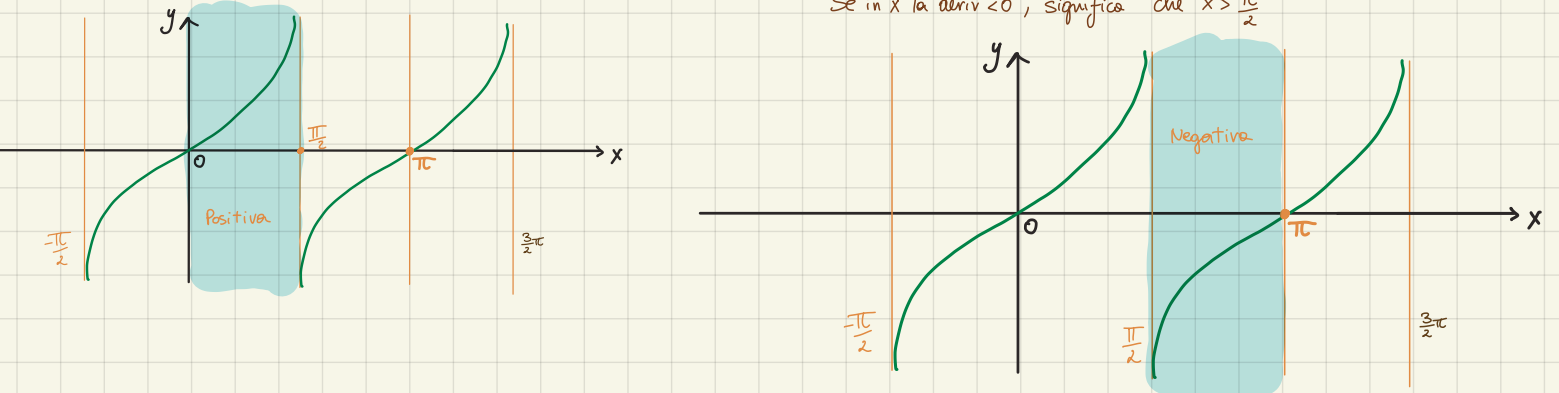
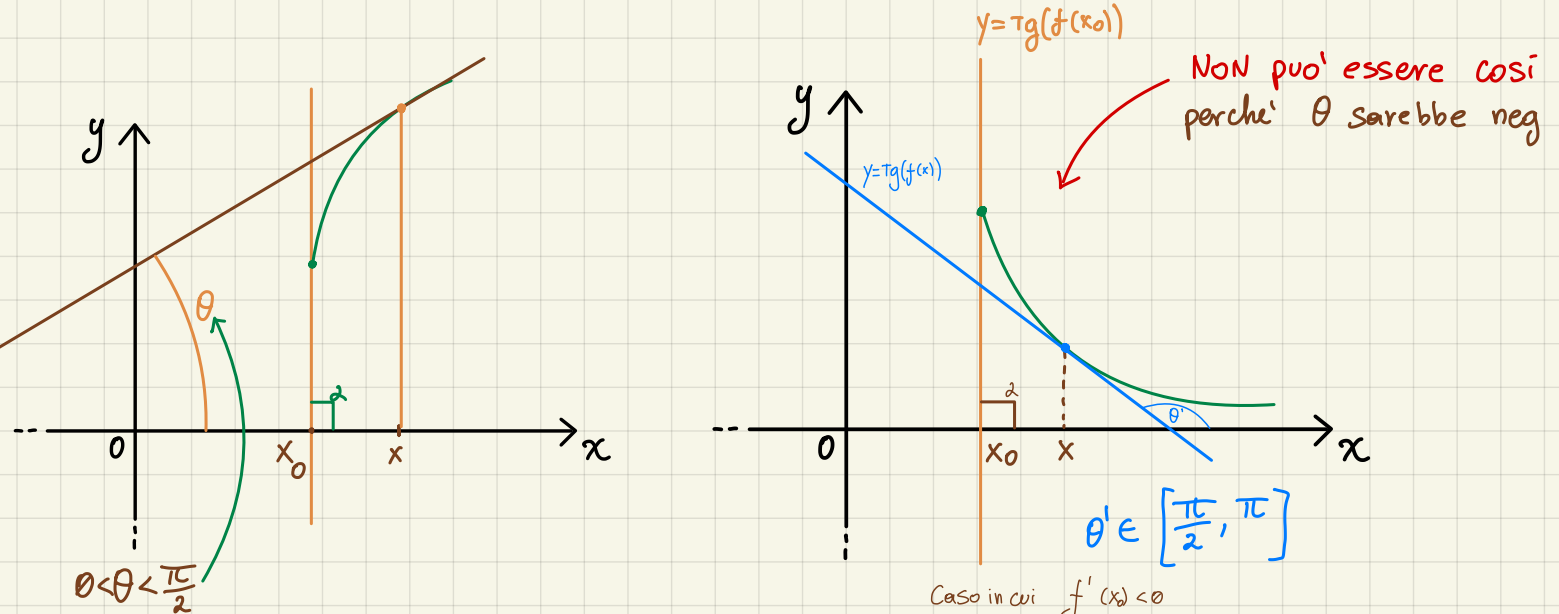
Quindi $\frac{d}{dx} f(x) = \pm \infty$

Osservazione Se $f'(x_0) = +\infty$, poiche' $f'(x_0) = \text{tg } \alpha$ dove α e' l'angolo formato dalla tg alla curva vispetto all'asse x.



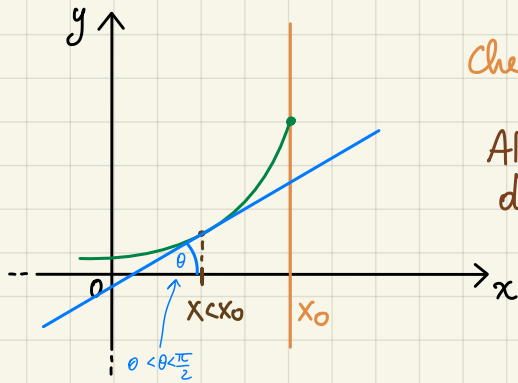
In questo punto non sappiamo come si comporta la funzione, ma sappiamo che e' un punto di non derivabilita'; infatti, per essere derivabile in x_0 , $f(x)$ deve avere il $\lim_{h \rightarrow 0} \text{Rapp incr}$ esistente e FINITO.

Se $\frac{d}{dx} f(x_0) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} f'_+(x_0) = +\infty \\ f'_-(x_0) = +\infty \end{cases} \rightarrow$ Se considero un punto $x > x_0$ (o $x < x_0$) si ha che $f'(x)$ e' positiva \Leftrightarrow l'angolo formato dalla tg in x alla curva forma angolo compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$.



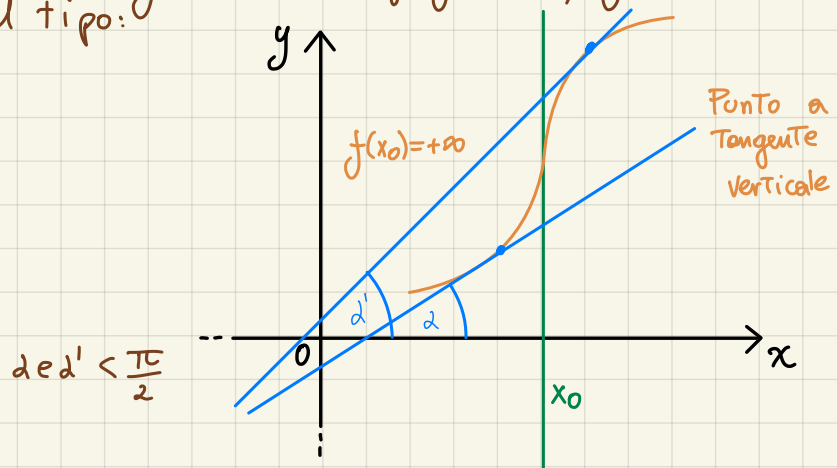
Inoltre $f'_-(x_0) = +\infty \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = +\infty \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

Se considero $x < x_0$ si ha che $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

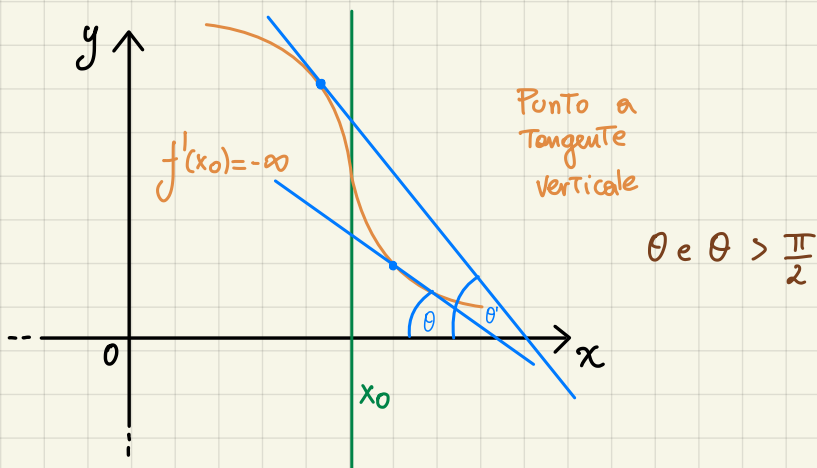


Che vuol dire? Anche da S_x la tg deve essere $0 < \operatorname{tg} < \frac{\pi}{2}$

Allora se $f'(x_0) = +\infty$ il grafico di $y = f(x)$ vicino a x_0 , sarà del tipo:



Se $f'(x_0) = -\infty$, il comportamento di f vicino a x_0 sarà del tipo:



ES: $y = \sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (x^{1/3}) = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

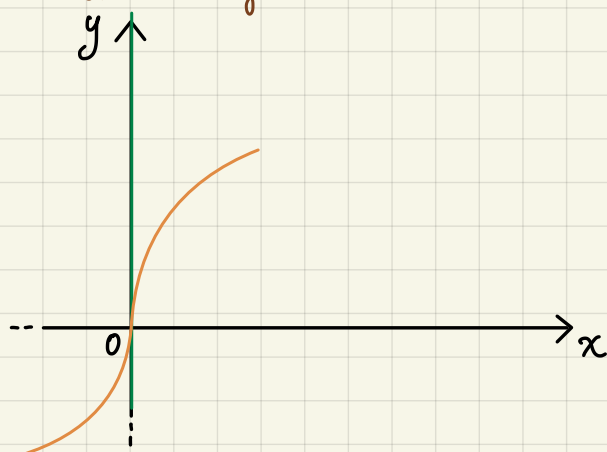
Dove Non è def la $f'(x)$?
 $\mathbb{D} = \forall x \in \mathbb{R} - \{x=0\}$

Calcoliamo il \lim in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Il punto della funzione $y = \sqrt[3]{x}$ in corrispondenza di $x=0$ è $O(0,0)$

Punto a Tangente Verticale

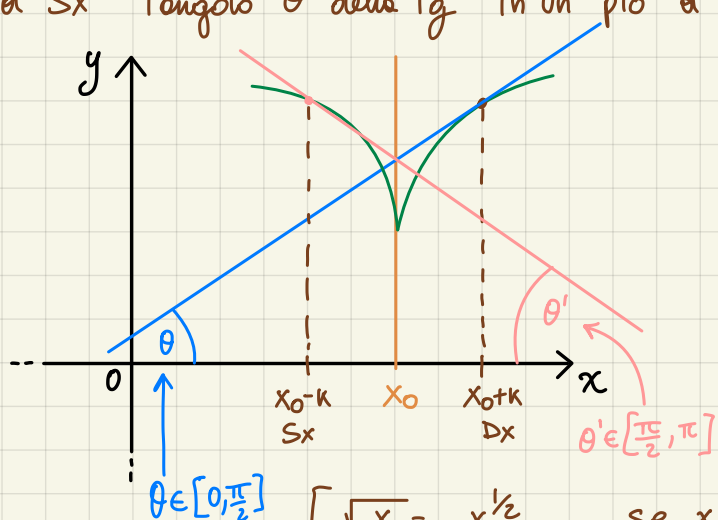


Cuspidi

f ha in x_0 una cuspide se $f'_+(x_0) = \pm\infty$ e $f'_-(x_0) = \mp\infty$

Segno opposto

Ad esempio, se $f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty \Rightarrow$ l'angolo formato dalla tangente (verticale) in un punto a Dx di x_0 è tale che $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$; in questo caso a Sx l'angolo θ della Tg in un pto a Sx di x_0 è tale che $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$:

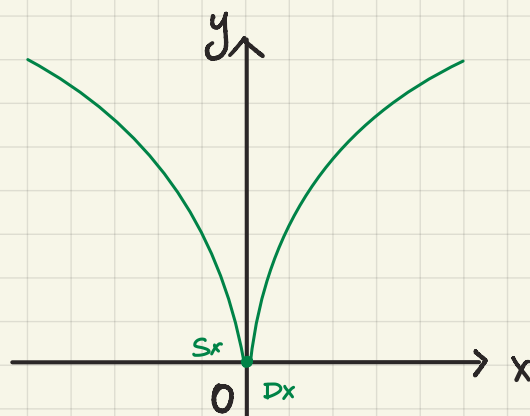


! Le cuspidi sono molto frequenti quando abbiamo i valori assoluti o radici.

ES: $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} = x^{1/2} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} = -x^{1/2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$f'(x^{1/2}) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

$$f'(-x^{1/2}) = -\frac{1}{2} x^{-1/2} = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$$



Come disegniamo il grafico?

1) Calcoliamo l'ordinata nel punto 0:

Se $x=0$, quanto vale $f(0)$? $\Rightarrow f(0) = \sqrt{|0|} = 0$ $P = (0, 0)$

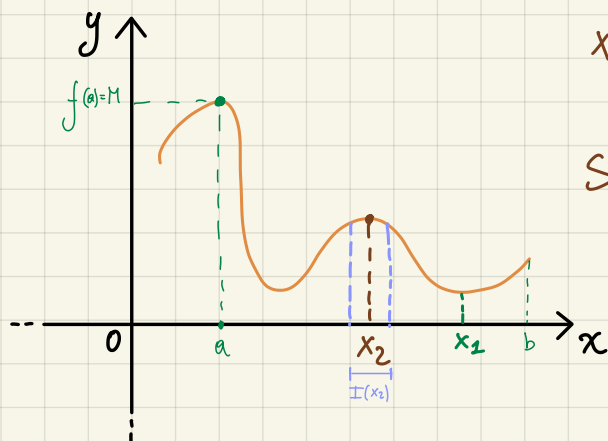
00:50

ESTREMI Relativi

f è definita in un intervallo I
 x_0 è un pto di massimo assoluto \Leftrightarrow

Max e min Relativi

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I$$



$x=a$ è un punto di Max Assoluto perché
 $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in [a, b] \quad (I)$

Stessa cosa per il minimo assoluto.
 $f(x) \geq f(x_1) \quad \forall x \in [a, b]$

Possiamo avere un Massimo/min Relativo, se in x_0 abbiamo un punto di Max/min relativa al suo intorno. Ad esempio, in $x=x_2$ abbiamo un Max relativo.

Def Si dice che x_0 è un pto di Max/min relativo per $f \Leftrightarrow \exists I(x_0) / f(x) \leq (x_0), \forall x \in I(x_0)$

Osservazione I Max e min Assoluti sono da ricercare tra i punti di max o min relativo, ed agli estremi dell'intervallo, che non possono essere estremi relativi.

Quindi non possiamo avere Max/min relativi agli estremi perché dobbiamo avere un INTORNO, e non solo dx o Sx .