Serie Di funzioni - Analisi II

Consideriamo le seguenti funzioni di variabile reale: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$

$e^x \quad e^{2x} \quad e^{nx}$

Inoltre consideriamo $S_1(x) \equiv f_1(x)$, $S_2(x) \equiv f_1(x) + f_2(x), \dots,$ $\boxed{S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}$

Serie Numerica associata alla succ. di funz

Per scriverla in forma compatta scriveremo: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}$

Se questa SERIE converge, convergerà ad una FUNZIONE $F(x)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = F(x)}$

In che senso?

Fissato un valore numerico di x, si viene a formare una SERIE NUMERICA:

ES: Sostituisco $x = 8$, si forma una serie numerica (la x scompare); Se la serie NUMERICA, allora la serie di funzioni NEL PUNTO $x = 8$ CONVERGE. Potrebbe però anche divergere ad oscillare.

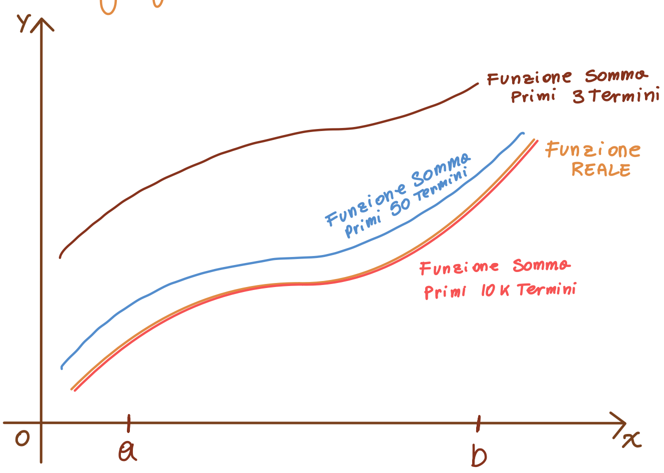
L'insieme dei valori di x può essere battezzato "A" che è un sottoinsieme dei numeri reali $\rightarrow$ $A \subseteq \mathbb{R}$. L'insieme dei valori di A che rendono questa serie convergente, viene detto INSIEME DI CONVERGENZA.

Diremo che la serie $f_n(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE in tutti i punti dell'insieme A ad una funzione $F(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[A]{\text{"Converge Puntualmente"}} F(x)$$

Esempio grafico:

Supponiamo che l'insieme di convergenza sia un intervallo (a,b):



Si dice che una serie di funzioni CONVERGE ad una certa $F(x)$ perché più termini si sommano, più la $F_n(x)$ ottenuta coincide con la $F_\infty(x)$.

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$

1. Trovare l'insieme di convergenza PUNTUALE.
2. Se possibile trovare la funzione somma.

Studiamo la serie con i criteri già visti nelle serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^x)^n$$

Ragione

$e^x > 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$e^x < 1 \rightarrow \ln e^x < \ln(1) \rightarrow x < 0$ $\Rightarrow$ $\cap$

0

$\oplus$

2) Funz. Somma: siccome abbiamo una serie geom. essa converge $\Rightarrow A = \,]-\infty, 0[$

converge

$$F(x) = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-e^x}$$

Convergenza uniforme

Considieriamo $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[A]{} F(x)$, sia $\overset{\text{un punto in cui } f_n \text{ converge.}}{x_0} \in A$

Esplicitiamo la somma: $\underbrace{f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0)}_{\text{Ridotta n-ESIMA } S_n(x_0)} + \overbrace{\underbrace{f_{n+1}(x_0) + \ldots + f_{n+m}(x_0)}_{\text{Somma del resto n-esimo calcolata in } x_0.}}^{\tau_n(x_0)} = F(x_0)$

Quindi $\tau_n(x_0) = |F(x_0) - S_n(x_0)|$

Inoltre, se una serie è convergente, allora τ_n è infinitesima, ovvero:

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n(x_0) = 0$$

Ma tutto questo che vuol dire? Facciamo finta di fissare un ε molto piccolo. Se facendo la differenza $|F(x_0) - S_{100}(x_0)|$ ottengo un valore $K > \varepsilon$, allora aumento n e calcolo $|F(x_0) - S_{200}(x_0)|$. Se la differenza $K < \varepsilon$, scelgo un $\varepsilon_1 < \varepsilon$, affinché $|F(x_0) - S_n(x_0)| < \varepsilon_1$, dovrò aumentare il numero di funzioni da sommare, e quindi n.

Cosa capiamo? Più si sceglie ε piccolo, più dobbiamo aumentare n.

Inoltre, prendiamo in considerazione un indice $P_0 \in \mathbb{N}$, con $n > P$. Quando calcoliamo $|F(x_0) - S_n(x_0)|$ il risultato potrebbe dipendere dal punto x_0 in cui si calcola:
Ad esempio $x_0, x_1 \in A$, $x_0 \neq x_1 \Rightarrow |F(x_0) - S_n(x_0)| \neq |F(x_1) - S_n(x_1)|$.

Quando $|F(x_0) - S_n(x_0)|$ con $n > P$ dipende SOLO DA ε e non da x, allora abbiamo una CONVERGENZA UNIFORME:

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} F(x)$$

ES: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1$ in $\overset{\text{intervallo a caso}}{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}$, dove la serie di f è puntualmente convergente, è anche uniformemente convergente?

$F(x) = \frac{1}{1-x}$, $S_n = \frac{1-x^n}{1-x}$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathbb{N} \ / \ n > p \quad \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \rightarrow n = p \rightarrow \frac{1}{2^{p-1}} < \varepsilon$, p dipende solo da ε