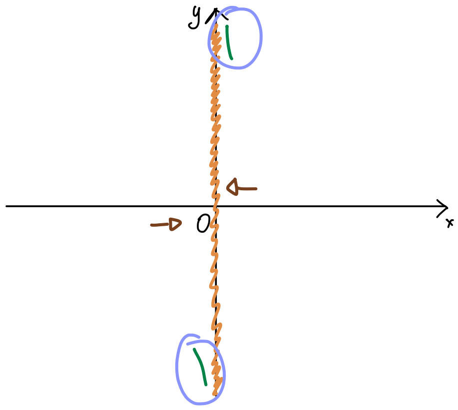
Lezione 23

Asintoti

A. Verticali

$x = c$ è asintoto verticale Dx o Sx $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) = \infty}$



Dove cercare gli Asintoti?

Solitamente essi si trovano dove la f NON E' DEFINITA

ES: $y = \frac{1}{x}$ $\quad D = \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

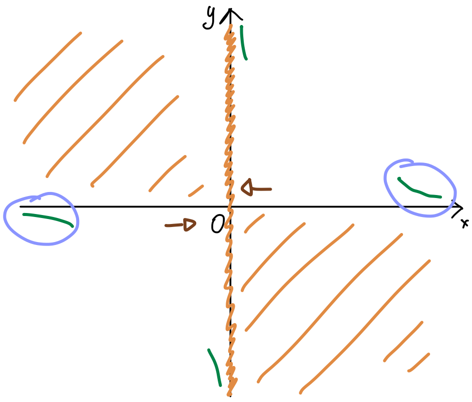
$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

A. Orizzontali

$y = k$ è Asintoto Orizzontale Dx o Sx $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k}$

- In questo caso non dobbiamo cercare un punto in cui calcolare il lim, ma calcoliamo il lim in $\pm\infty$.

ES: $y = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{\pm\infty} = 0$ $\Rightarrow$ $y = 0$ è A. Orizz Dx e Sx.



Attenzione! E' vitale studiare il segno della funzione per capire dove "posizionare" gli Asintoti, infatti:

$f(x) > 0$ per $\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \underline{x > 0} \Rightarrow f(x) < 0$ per $\underline{x < 0}$

A. Obliquo

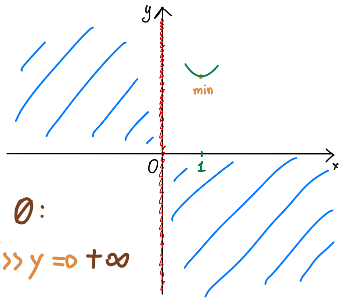
$y = mx + q$ è un A. Ob. per f se:

1) $\exists$ finito e $\neq 0$ il $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \underline{m}$ $\leftarrow$ Trovo il coefficiente Angolare

se $m = 0$ Allora $y = mx + q$ diventa $y = q$, ovvero A orizzontale

2) $\exists$ finito $\lim_{x \to +\infty} f(x) - \underline{m}x = q$

Studio di funzione - Continuo $\quad y = x e^{1/x}$



Nella lez. 21 siamo arrivati a questo punto:

Studio gli Asintoti:

1) A. Vert: siccome $\mathcal{D} = \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, facciamo il lim in 0:

$\lim_{x\to 0^\pm} x e^{1/x} = 0^+ e^{1/0^\pm} = \dfrac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}$ poniamo $y = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^y}{y}$ $\quad e^y >> y \Rightarrow +\infty$

$\frac{1}{x} << e^{\frac{1}{x}}$ $\quad$ quando $x \to 0^+$, $y \to +\infty$

$\Rightarrow \boxed{x=0 \text{ A.V. Dx}}$

A.V. Sx: $\lim_{x\to 0^-} \underset{\downarrow 0}{x}\, \underset{\to 0}{e^{\overset{\to -\infty}{1/x}}} = 0 \cdot 0 = 0$ $\quad$ $x=0$ non è A.V. Sx

sappiamo che f tende a 0 da Sx

A. Orizzontale

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \underset{\downarrow \pm\infty}{x}\, \underset{\to 1}{e^{\overset{\to 0}{1/x}}} = \pm\infty \Rightarrow$ No A. Orizz.

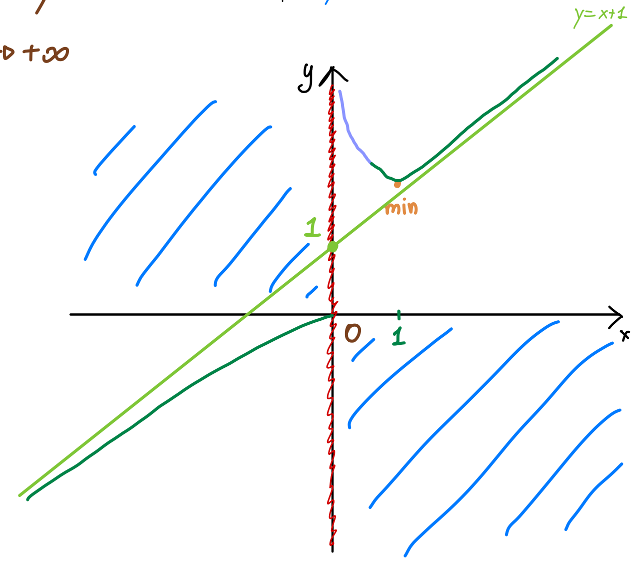
A. Obliquo

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\cancel{x} e^{1/x}}{\cancel{x}} = \underset{\to 1}{e^{\overset{\to 0}{1/x}}} = 1 = m$

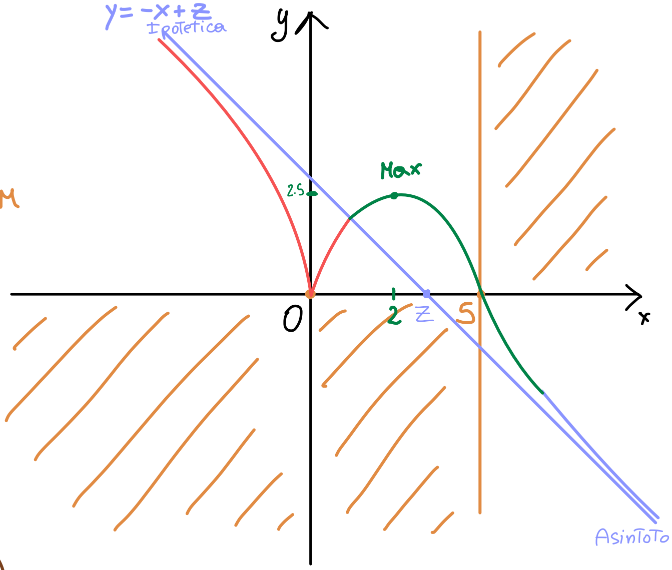
$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = x e^{1/x} - x = \infty - \infty \Rightarrow \underset{\downarrow +\infty}{x}\underbrace{(e^{\overset{\to 0}{1/x}} - 1)}_{\to 0} = \infty \cdot 0$

$\Rightarrow \dfrac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \dfrac{0}{0}$ pongo $t = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} =$ lim notevole $= 1 = q$

$\Rightarrow$ A. Ob. $=$ $y = mx + q = x + 1$



ES: $y=\sqrt[5]{x^2(5-x)^3}$



1) $\mathbb{D}$: siccome la rad non e' pari $\Rightarrow$ $\mathbb{D}$: $\forall x\in\mathbb{R}$

2) Simmetrie $f(-x)=\sqrt[5]{x^2(5+x)^3} \neq -f(-x) \Rightarrow$ NO SIMM

$\neq f(x)$

21) Intersezioni

$\begin{cases} y=f(x) \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[5]{0^2(5-0)^3} = 0$

$\begin{cases} f(x)=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt[5]{x^2(5-x)^3}=0 \\ \text{per } x^2(5-x)^3=0 \\ \text{quindi } x^2=0 \Rightarrow \underline{x=0} \\ (5-x)^3=0 \Rightarrow 5-x=0 \Rightarrow \underline{x=5} \end{cases}$ (5,0)

3) Segno $f(x)>0$ $\sqrt[5]{x^2(5-x)^3}>0$ per $x^2(5-x)^3>0 \Rightarrow 5-x>0$ per $\underline{x<5}$

sempre >0

4) Asintoti i) la f e' definita in tutto $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ NO Asintoti Vert.

ii) A. Or.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt[5]{x^2(5-x)^3}=\sqrt[5]{+\infty\cdot(-\infty)}=-\infty$ Nessun A. Or.

iii) A. Obl. $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt[5]{x^2(5-x)^3}}{x}=\frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow \sqrt[5]{\frac{\cancel{x^2}(5-x)^3}{x^{\cancel{5}\,3}}}=\frac{(5-x)^3}{x^3}\sim\frac{-x^3}{x^3}\to \underline{-1}$

$\Rightarrow m=-1$

Porto x sotto radice

$q=\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx = \sqrt[5]{x^2(5-x)^3}+x = -\infty+\infty \Rightarrow \sqrt[5]{x^2[5^3-3\cdot 25x+3\cdot 5x^2-x^3]}+x$

$=\sqrt[5]{125x^2-75x^3+15x^4-x^5}+x = \sqrt[5]{x^5\left(\frac{125}{x^3}-\frac{75}{x^2}+\frac{15}{x}-1\right)}+\sqrt[5]{x^5} = \infty\cdot 0$

Come risolvere? (una sorta di razionalizzazione)

$\lim \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,(\sqrt{\sim}+\sqrt{\sim})}{(\sqrt{\sim}+\sqrt{\sim})} = \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\sqrt{\sim}+\sqrt{\sim}} = 0$ ...

Siccome il lim non e' facile da calcolare, tralasciamo il calcolo completo.
Sappiamo pero' che $\underline{y=-x+2}$ e' A. Obliquo.

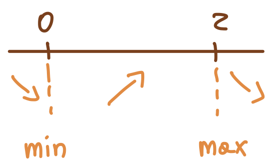
5) Derivata I^a

$f(x)=[x^2(5-x)^3]^{1/5} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{5}\left\{D[x^2(5-x)^3]^{\frac{1}{5}-1}\right\} = \frac{1}{5}[\cdots]^{-\frac{4}{5}}\cdot[2x(5-x)^3+x^2\cdot 3(5-x)^2(-1)]$

$=\frac{(5-x)^2x[2(5-x)-3x]}{5\sqrt[5]{[x^2(5-x)^3]^4}} = \frac{(5-x)^2x[10-2x-3x]}{5\sqrt[5]{[x^2(5-x)^3]^4}} = \frac{\cancel{5}(5-x)^2x[2-x]}{\cancel{5}\sqrt[5]{[\ \text{"}\ ]}}$

a) $f'(x)=0$ per $\underset{1}{(5-x)^2}\,\underset{2}{x}\,\underset{3}{[2-x]}=0 \Rightarrow$
2) $x=0$
3) $2-x=0$, $x=2$
1) $5-x=0$, $x=5$

b) $f'(x)>0$ per $2x-x^2>0$; $x^2-2x<0$ Valori interni, $0<x<2$



$f(2)=\sqrt[5]{4(5-2)^3}=\sqrt[5]{108}=2.5$

C.D.E della deriv: $x^2(5-x)^3 \neq 0$ per $\begin{matrix} x\neq 0 \\ x \neq 5 \end{matrix}$ } punti di non derivabilità

facciamo il lim per trovare cuspidi, Tg vert...

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{(5-x)^2 \cdot \cancel{x[2-x]} \to 0}{\sqrt[5]{\cancel{[x^2(5-x)^3]^4}} \to 0} = \frac{0}{0}$$

Princ. SosT degli infinitesimi

$$= \frac{\overset{25}{(5-x)^2} \cdot \overset{\sim 2x}{[2x-x^2]}}{\underset{x^{\frac{8}{5}} \sim}{x^{\frac{8}{5}}}\ \cancel{(5-x)^{\frac{12}{5}}} \to n} \qquad 2x < x^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^{\frac{8}{5}}} \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt[5]{x^5 \cdot x^3}} = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt[5]{x^3}} = \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} = \text{Dx e Sx}$$

Si cancellano i Termini di ordine Superiore → lasciamo la x di ordine inf

$$\left.\begin{matrix} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{matrix}\right\}$$ $x=0$ è una Cuspide

$$\lim_{x\to 5} f'(x) \sim \frac{(5-x)^2}{(5-x)^{\frac{12}{5}>2}} \Rightarrow \frac{(5-x)^2}{\sqrt[5]{(5-x)^{10}(5-x)^2}} = \frac{\cancel{(5-x)^2}}{\cancel{(5-x)^2}\sqrt[5]{(5-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\underbrace{(5-x)^2}_{pos}}} \xrightarrow{x\to 5^{\pm}} -\infty$$

⇒ Punto a tg verticale

6) Derivata II^a Non conviene fare la $f''(x)$.