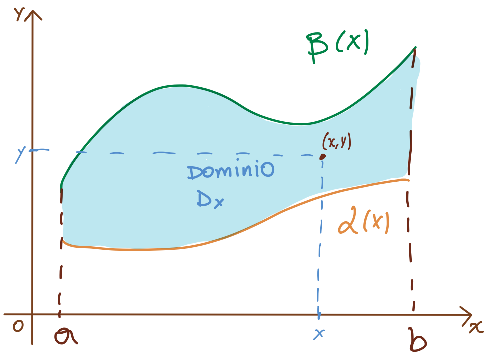
Integrali Doppi – Domini Normali

Siano $\alpha(x)$, $\beta(x)$ due funzioni definite in : $[a,b] \to \mathbb{R}$ (intervallo), e supponiamo siano continue.
Supponiamo inoltre che $\alpha(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in [a,b]$



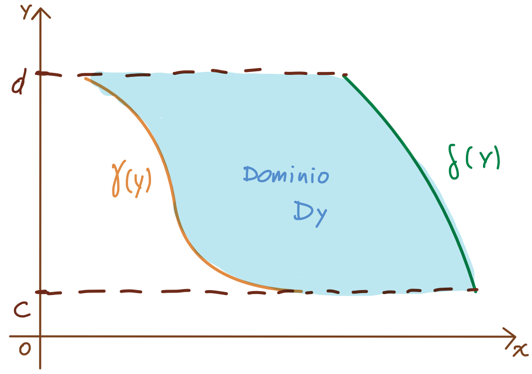
Si dice Dominio normale rispetto all'asse x, un insieme del tipo:

$$D_x = \{(x,y) \,/\, a \leq x \leq b, \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

Si dice Dominio normale rispetto all'asse y, un insieme del tipo:

$$D_y = \{(x,y) \,/\, c \leq y \leq d, \ \gamma(y) \leq y \leq \delta(y)\}$$

Dove $\gamma(y)$, $\delta(y) : [c,d] \to \mathbb{R}$ e continue



Area di Dx e Dy

(misura)

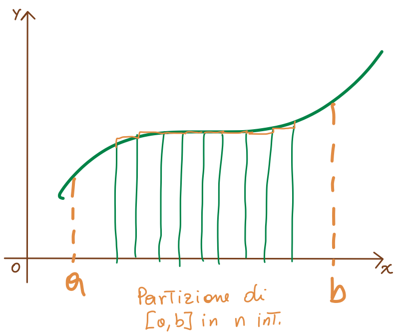
$$\text{area } D_x = \overset{\text{misura}}{m}(D_x) = \int_a^b \beta(x) - \alpha(x) \, dx$$

$$\text{area } D_y = m(D_y) = \int_c^d \delta(y) - \gamma(y) \, dy$$

} facili da calcolare

* Siccome vogliamo calcolare l'area di una f a due variabili, vogliamo calcolarlo su un certo insieme. In Analisi I, quando avevamo:

$y = f(x)$ in $[a,b]$ $\to$

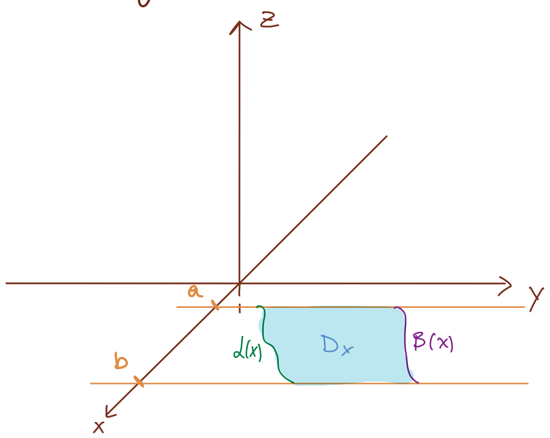


$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$ Area pluri-rettangolo

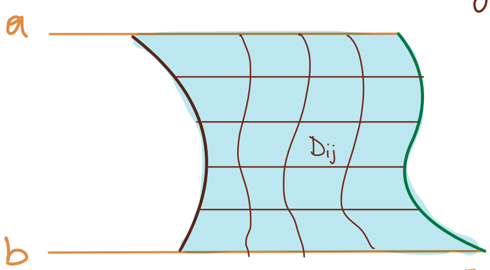
Con $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ intervallo

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

Sia $z = f(x,y)$ continua in D normale (rispetto a x). Si sceglie questo dominio perché più semplice.



Supponiamo di dividere il dominio D in un numero finito di domini normali D_{ij} con $i,j = 1 \dots n$



i e j costituiscono una partizione di D. Cioè:

$$D = \bigcup_{i,j=1}^{n} D_{ij}$$

$\overset{\circ}{}$ ← parte interna, senza Frontiera. Vedi lez 36

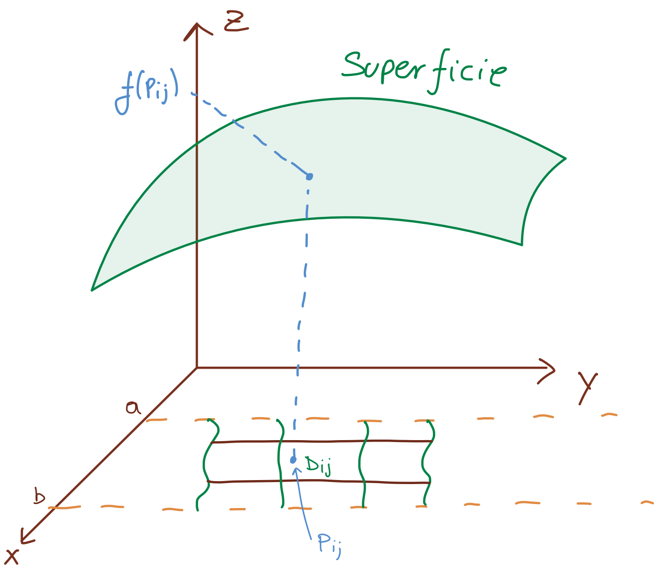
Inoltre $\overset{\circ}{D}_{ij}$ sono a 2 a 2 Disgiunti $\to$ non si sovrappongono

Scegliamo, $\forall\, i,j$, $\xi_{i,j} \in D_{ij}$. Consideriamo le somme di Cauchy Riemann.

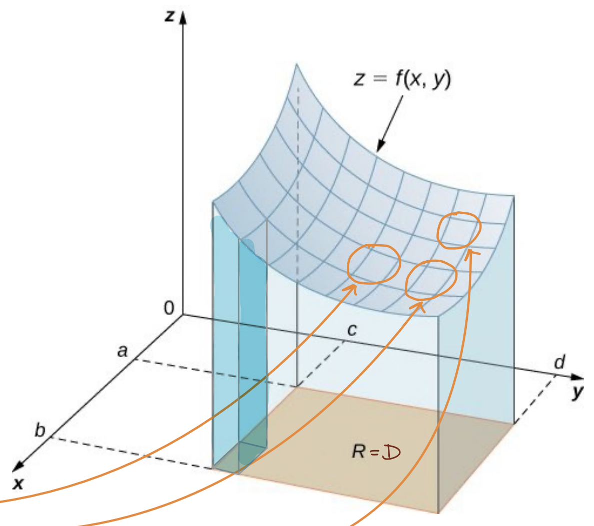
$$\boxed{S_n = \sum_{i,j}^{n} f(P_{i,j}) \cdot m(D_{ij})}$$

$m(D_{i,j})$ è l'area del dominio D_{ij}

$f(P_{i,j})$ è l'altezza di P_{ij} di $z = f(x,y)$



$$P_{ij} \in D_{ij} \Rightarrow \underbrace{f(P_{ij})}_{\text{Altezza}} \times \underbrace{\cdot\ \text{area}\,(D_{ij})}_{\text{Base}} = \text{Volume della figura Solida}$$



$\lim_{n \to \infty} \Rightarrow$ Parallelepipedi sempre più fitti

Definizione

La funzione è integrabile secondo Riemann su D se esiste finito il $\lim_{n \to +\infty} S_n$

E si scrive:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \lim_{n \to +\infty} S_n}$$

Integrale doppio di f esteso a D

Osservazione: Geometricamente, se $f(x,y) > 0 \to$ superficie positiva $\Rightarrow$ $\iint_D f\, dx\, dy$ rappresenta il volume del solido di base D.

Proprietà principali

I) $\iint_D \alpha f + \beta g\, dx\, dy = \alpha \iint_D f + \beta \iint_D g\, dx\, dy$

II) Se $f(x,y) \leq g(x,y) \Rightarrow \iint_D f \leq \iint_D g$

Stesse prop di prima

III) Se $D = D_1 \cup \dots \cup D_N \,/\, \mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \iint_D f\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_D f\, dx\, dy$$

Formule di Riduzione

Siano $\alpha, \beta(x)$ continue su $[a,b]$, sia D_x il dominio normale rispetto ad x. Supponiamo di avere f continua su D_x.

Allora: $$\iint_{D_x} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

Fissiamo $x \to$ è costante. Calcoliamo prima l'integrale tra parentesi quadre.

possiamo anche scrivere: $$\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$$

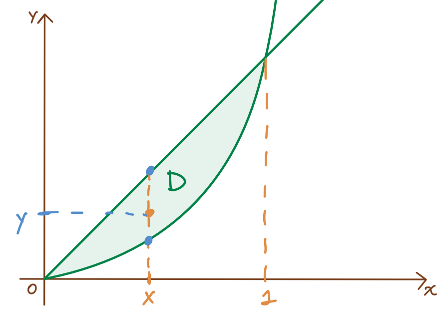
Calcolo prima lui

poi integro il risultato in dx

ESEMPI:

$$\iint_D \frac{x}{1+y}\,dx\,dy$$

Seguente dominio:
a) dato da disegno
b) dato "a parole" $\to$ D è il dominio compreso tra $y=x$ e $y=x^2$ nell'intervallo $[0,1]$



I) Dopo aver disegnato il dominio, dobbiamo chiederci: è un dominio Normale?

Verifichiamo se è normale rispetto ad $x \to$ "Preso un qualunque punto del dominio, vado a prendere la sua ascissa (x); questa, tra quali valori varia? $\to [0,1]$

Posso vedere D come: $D = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 1\}$

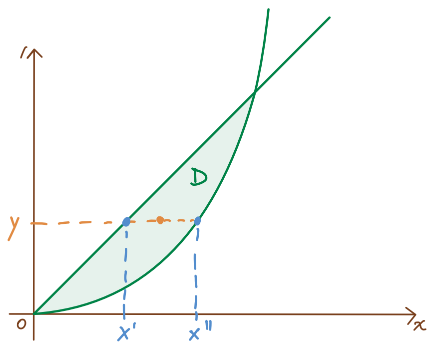
Dopo aver verificato x, verifichiamo y: Tra quali valori varia? La y non supera i due punti celesti. Questo significa che la y non può andare al di sotto della parabola e al di sopra della retta:

$\Rightarrow D = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 1,\ \underbrace{x^2}_{\alpha(x)} \leq y \leq \underbrace{x}_{\beta(x)}\}$ Dopo aver capito questo, applichiamo le formule di riduzione:

II) $$\iint_D \frac{x}{1+y}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \frac{x}{1+y}\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_{x^2}^{x} \frac{1}{1+y}\,dy = \int_0^1 x \left[\ln(1+y)\right]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot \left[\ln(1+x) - \ln(1+x^2)\right] dx = \int_0^1 x \ln(1+x) - \int_0^1 x \ln(1+x^2)\,dx$$ Continuiamo per parti

Potevamo però vederlo come dominio normale rispetto ad y:



$\Rightarrow D = \{(x,y) / 0 < y < 1,\ ? < x < ?\}$

Dobbiamo esplicitare le funzioni x e x^2 rispetto a y:

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = x \to x = y \\ y = x^2 \to x = \sqrt{y} \end{array}}$

$\Rightarrow D = \{(x,y) / 0 \leq y \leq 1,\ y < x < \sqrt{y}\}$

II) F. di riduzione: $\displaystyle\iint_D \frac{x}{1+y}\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{x}{1+y}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+y}\,dx \int_y^{\sqrt{y}} x\,dx =$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y}\left[(y-y^2)\right] dy = \frac{1}{2}\int \frac{y-y^2}{1+y}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y}{1+y} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^2}{1+y}\,dy$$

...