

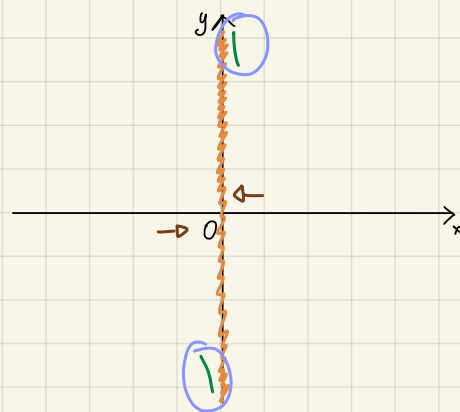


Lezione 23

Asintoti

A. Verticali

$x=c$ è asintoto verticale $Dx \text{ o } Sx \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \infty$



Dove cercare gli Asintoti?

Solitamente essi si trovano dove la f NON È DEFINITA

ES: $y = \frac{1}{x}$ $D = \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A. Orizzontali

$Dx \text{ o } Sx$

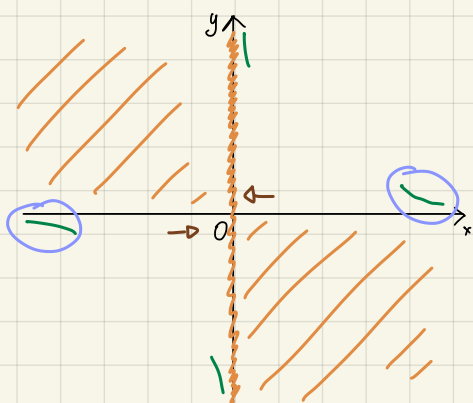
$y=k$ è Asintoto Orizzontale \Leftrightarrow

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$$

• In questo caso non dobbiamo cercare

un punto in cui calcolare il \lim , ma calcoliamo il \lim in $\pm\infty$.

ES: $y = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{\pm\infty} = 0 \Rightarrow y=0$ è A. Orizz Dx e Sx .



Attenzione! È vitale studiare il segno della funzione per capire dove "posizionare" gli Asintoti, infatti:

$$f(x) > 0 \text{ per } \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \underline{x > 0} \Rightarrow f(x) < 0 \text{ per } \underline{x < 0}$$

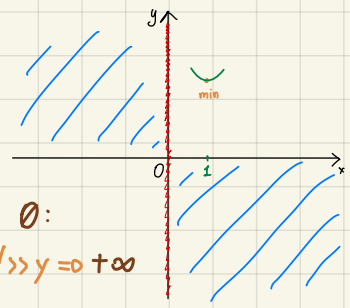
A. Obliquo

$y = mx + q$ è un A. Ob. per f se:

1) \exists finito e $\neq 0$ il $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \underline{m}$ \leftarrow Trovo il coefficiente Angolare
Se $m=0$ Allora $y = mx + q$ diventa $y = q$, ovvero A orizzontale

2) \exists finito $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \underline{m}x = q$

Studio di funzione - Continuo $y = x e^{1/x}$



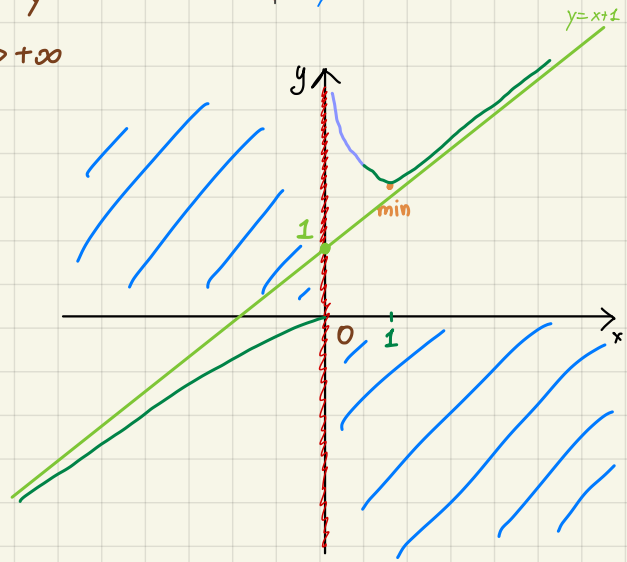
Nella lez. 21 siamo arrivati a questo punto:

Studio gli Asintoti:

1) A. Vert: siccome $\mathbb{D} = \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, facciamo il lim in 0:
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = 0^+ e^{+\infty} = \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}$ poniamo $y = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^y}{y}$ $e^y \gg y \Rightarrow +\infty$
 $\frac{1}{x} \ll e^x$ quando $x \rightarrow 0^+$, $y \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow x=0$ A.V. Dx

A.V. Sx: $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x} = 0 \cdot 0 = 0$ $x=0$ non è A.V. Sx
sappiamo che f tende a 0 da Sx



A. Orizzontale
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = x e^{1/x} = \pm\infty \Rightarrow$ No A. Orizz.

A. Obliquo
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x e^{1/x}}{x} = e^{1/x} = 1 = m$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = x e^{1/x} - x = \infty - \infty \Rightarrow x(e^{1/x} - 1) = \infty \cdot 0$

$\Rightarrow \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$ pongo $t = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \lim_{\text{notale}} = 1 = q$

\Rightarrow A. Ob. = $y = mx + q = x + 1$

$$ES: y = \sqrt[5]{x^2(5-x)^3}$$

1) \mathbb{D} : siccome la rad non e' pari $\Rightarrow \mathbb{D}: \forall x \in \mathbb{R}$

2) Simmetrie $f(-x) = \sqrt[5]{x^2(5+x)^3} \neq -f(x) \neq f(x) \Rightarrow$ NO SIMM

2) Intersezioni

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[5]{0^2(5-0)^3} = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{x^2(5-x)^3} = 0 \\ \text{per } x^2(5-x)^3 = 0 \\ \text{quindi } x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ (5-x)^3 = 0 \Rightarrow 5-x = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

3) Segno $f(x) > 0 \Rightarrow \sqrt[5]{x^2(5-x)^3} > 0$ per $x^2(5-x)^3 > 0 \Rightarrow 5-x > 0$ per $x < 5$

4) Asintoti: i) la f e' definita in tutto $\mathbb{R} \Rightarrow$ No Asintoti Vert.

ii) A. Or.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt[5]{x^2(5-x)^3} = \sqrt[5]{+\infty \cdot (-\infty)} = -\infty \quad \text{Nessun A. Or.}$$

iii) A. Obl. $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[5]{x^2(5-x)^3}}{x} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow \sqrt[5]{\frac{x^2(5-x)^3}{x^5}} = \frac{(5-x)^3}{x^3} \sim \frac{-x^3}{x^3} \rightarrow -1$
 $\Rightarrow m = -1$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \sqrt[5]{x^2(5-x)^3} + x = -\infty + \infty \Rightarrow \sqrt[5]{x^2[5^3 - 3 \cdot 25x + 3 \cdot 5x^2 - x^3]} + x$$

$$= \sqrt[5]{125x^2 - 75x^3 + 15x^4 - x^5} + x = \sqrt[5]{x^5 \left(\frac{125}{x^3} - \frac{75}{x^2} + \frac{15}{x} - 1 \right)} + \sqrt[5]{x^5} = \infty \cdot 0$$

Come risolvere? (una sorta di razionalizzazione)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x})} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = 0 \dots$$

Siccome il lim non e' facile da calcolare, tralasciamo il calcolo completo.

Sappiamo pero' che $y = -x + z$ e' A. Obliquo.

5) Derivata I^a

$$f(x) = [x^2(5-x)^3]^{\frac{1}{5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5} \left\{ D[x^2(5-x)^3]^{\frac{1}{5}-1} \right\} = \frac{1}{5} [\dots]^{\frac{4}{5}} \cdot [2x(5-x)^3 + x^2 \cdot 3(5-x)^2 \cdot (-1)]$$

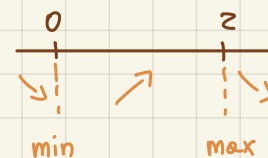
$$= \frac{(5-x)^2 x [2(5-x) - 3x]}{\sqrt[5]{[x^2(5-x)^3]^4}} = \frac{(5-x)^2 x [10 - 2x - 3x]}{\sqrt[5]{[x^2(5-x)^3]^4}} = \frac{8(5-x)^2 x [2-x]}{\sqrt[5]{[x^2(5-x)^3]^4}}$$

a) $f'(x) = 0$ per $(5-x)^2 x [2-x] = 0 \Rightarrow$

- 1) $5-x = 0, x = 5$
- 2) $x = 0$
- 3) $2-x = 0, x = 2$

b) $f'(x) > 0$ per $2x - x^2 > 0; x^2 - 2x < 0$ Valori interni, $0 < x < 2$

$$f(2) = \sqrt[5]{4(5-2)^3} = \sqrt[5]{108} = 2.5$$



C.D.E della deriv: $x^2(5-x)^3 \neq 0$ per $\frac{x \neq 0}{x \neq 5}$ } punti di non derivabilit 

facciamo il lim per trovare cuspidi, Tg vert... $x \neq 5$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{(5-x)^2 \cdot x [2-x]}{\sqrt[5]{x^2(5-x)^3}} \xrightarrow{0/0} = \frac{0}{0}$$

Princ. sost degli infinitesimi

$$= \frac{(5-x)^2 \cdot [2x-x^2]}{\sqrt[5]{x^2(5-x)^3}} \quad \begin{matrix} 2x \sim x^2 \\ 2x < x^2 \end{matrix}$$

$\frac{2}{x^{\frac{2}{5}}} \sim x^{\frac{8}{5}} (5-x)^{\frac{12}{5}} \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^{\frac{8}{5}}} \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt[5]{x^8 \cdot x^3}} = \frac{2x}{x \sqrt[5]{x^3}} = \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} = \pm \infty$$

Si cancellano i termini di ordine superiore \rightarrow lasciamo la x di ordine inf

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$x=0$   una Cuspide

$$\lim_{x \rightarrow 5} f'(x) \sim \frac{(5-x)^2}{(5-x)^{\frac{12}{5}}} \Rightarrow \frac{(5-x)^2}{\sqrt[5]{(5-x)^{10}(5-x)^2}} = \frac{(5-x)^2}{(5-x)^2 \sqrt[5]{(5-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(5-x)^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 5^\pm} -\infty$$

\Rightarrow punto a tg verticale

6) Derivata II  Non conviene fare la $f''(x)$.