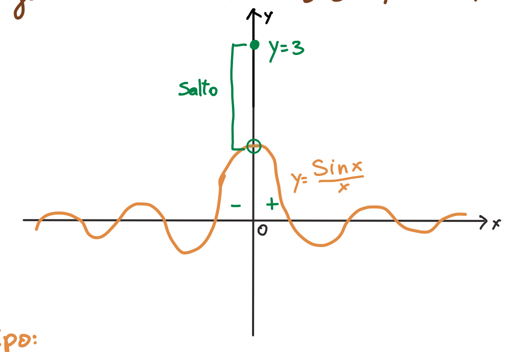
Discontinuità di III^a Specie

Si dice che x_0 è un punto di discontinuità di III^a specie o eliminabile se:

1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$
2) $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Quindi lim dx e sx sono uguali $\Rightarrow$ il lim esiste, ma non coincide con x_0



ES: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$: $D = \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Dal limite notevole sappiamo che:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

In questo caso consideriamo funzioni del tipo:
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 3 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ g ha una discontinuità eliminabile in $x=0$ perché $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ma quanto vale $g(x_0) = g(0)$?

$$\boxed{g(0) = 3 \neq \lim_{x \to 0} g(x) = 1}$$

Perché è detto "eliminabile"?

Possiamo eliminare la discontinuità in 0, considerando un'altra funzione detta prolungamento continuo di f.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = h(0)$$

Nuova funzione

Quindi in generale:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{per } x = x_0 \end{cases} \Rightarrow g(x) \text{ è ora continua in } x_0$$

Nuova funzione

ES: Prolungare per continuità la funzione: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e^{1/x^2}}$ def in $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = 0 \qquad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

ES: $f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$ def per $\begin{cases} x+1>0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \{-1, +\infty\} - \{0\}$

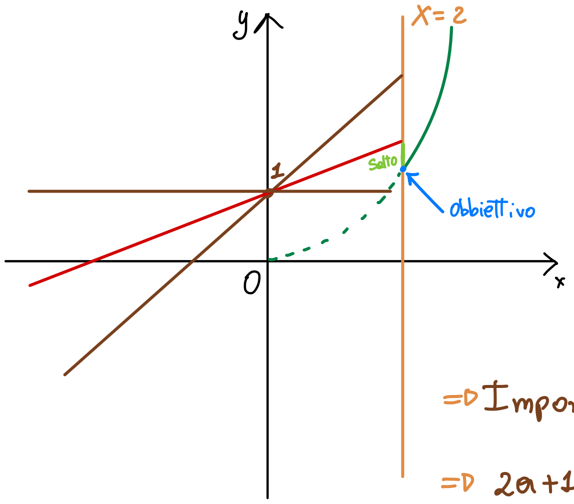
limite notevole

* prolungare $f(x)$ in 0

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq 0 \\ \lim_{x \to 0} f(x) = 1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) \text{ è continua in } \{-1, +\infty\}$$

Calcolare il valore $a \in \mathbb{R}$ / $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{per } x \le 2 \\ x^2 & \text{per } x > 2 \end{cases}$

Al variare di a, varia la retta.



Affinche' la f diventi continua, dobbiamo trovare il valore della funzione (retta) in modo che la retta vada a finire proprio dove inizia x^2 in $x = 2$.

f sara' continua in $x=2$ se $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$

per definizione

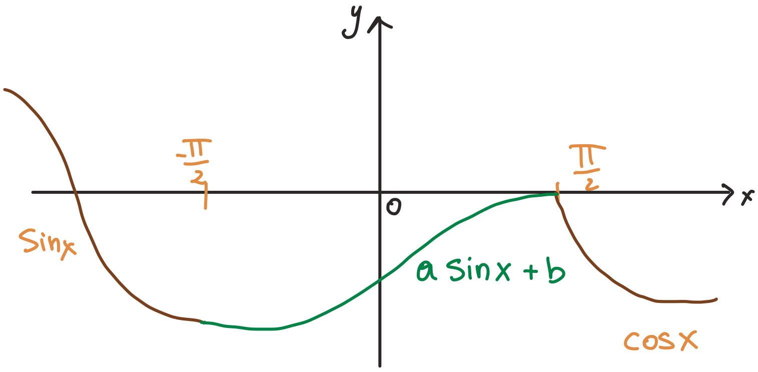
$\Rightarrow$ Imponiamo l'uguaglianza: $\underbrace{\lim_{x \to 2^-} ax+1}_{=2a+1} = \underbrace{\lim_{x \to 2^+} x^2}_{=4}$

$\Rightarrow 2a+1 = 4 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

La $f(x) = \begin{cases} 3/2\, x+1 & \text{per } x \le 2 \\ x^2 & \text{per } x > 2 \end{cases}$ e' continua in tutto $\mathbb{R}$.

00:41

ES: Calcolare $a, b \in \mathbb{R}$ / la funzione $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \le -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Sia continua



Imponiamo che

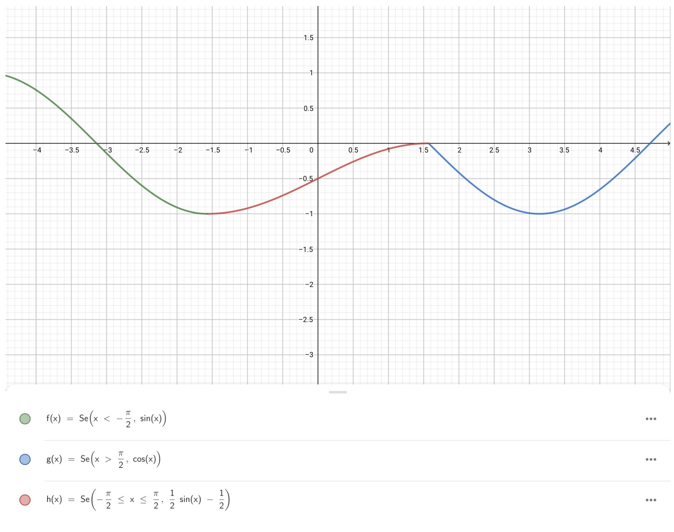
$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x)$

Sinx   a Sinx+b   cosx

$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \sin x}_{-1} = \underbrace{\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} a \sin x + b}_{-a+b} = \underbrace{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} a \sin x + b}_{a+b} = \underbrace{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos x}_{0}$

$\Rightarrow \begin{cases} -a+b = -1 \\ a+b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -(-b)+b = -1 \Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \\ a = -b \end{cases}$

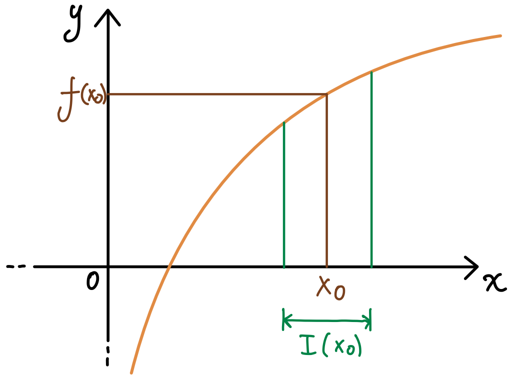
$\hookrightarrow a - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$



Teorema della permanenza del Segno

Sia f continua in x_0. Se $f(x_0)>0$ allora $\exists\, \delta>0 \,/\, f(x)>0 \quad \forall x \in I(x_0)$

$I(x_0) \equiv (x_0-\delta, x_0+\delta)$



Gli "zeri"

x_0 è uno zero per una funzione $f(x) \Leftrightarrow f(x_0)=0$, ovvero un punto in cui la funzione si annulla, ovvero $\Leftrightarrow$ x_0 è soluzione del sistema:

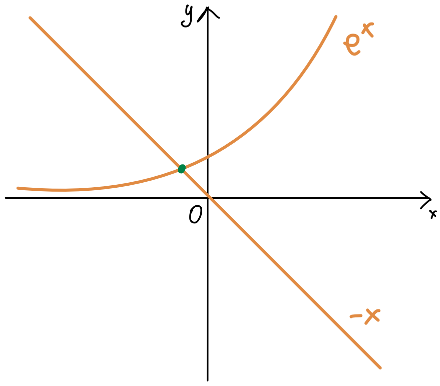
$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$$

ovvero quando faccio l'intersezione tra una funzione e l'asse x $(y=0)$.

quindi uno zero di f è soluzione dell'eq $f(x)=0$

ES: $f(x)=-x-e^x$ $\qquad \begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=0$ per $x-e^x=0$, $-x=e^x$? Difficile da risolvere

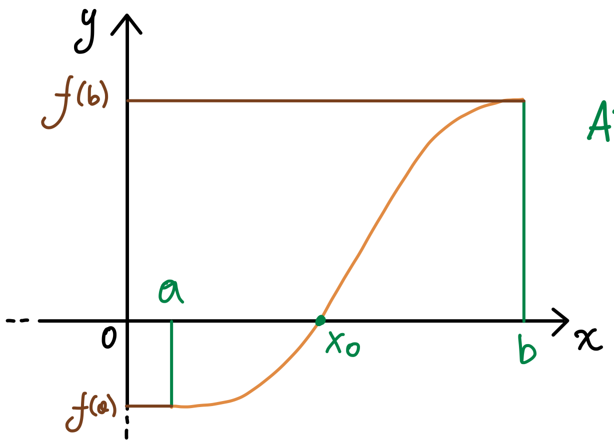
Per trovare la soluzione andiamo a vedere graficamente dove si intersecano:



Teorema degli Zeri

Se f è una funzione continua in un intervallo $a\ b$, se $f(a)\cdot f(b)<0$, $\Rightarrow \exists$ almeno un $x_0 \in (a,b) \,/\, f(x_0)=0$

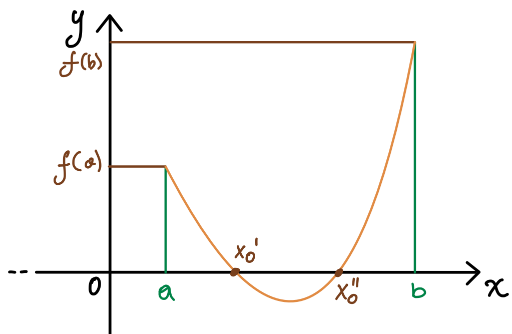
Assume valore opposto agli estremi



Quindi questa è una condizione sufficiente

ATTENZIONE!

Se una funzione ha $f(a)>0$ e $f(b)>0$, non vuol dire che essa non abbia uno zero, ma POTREBBE averlo:



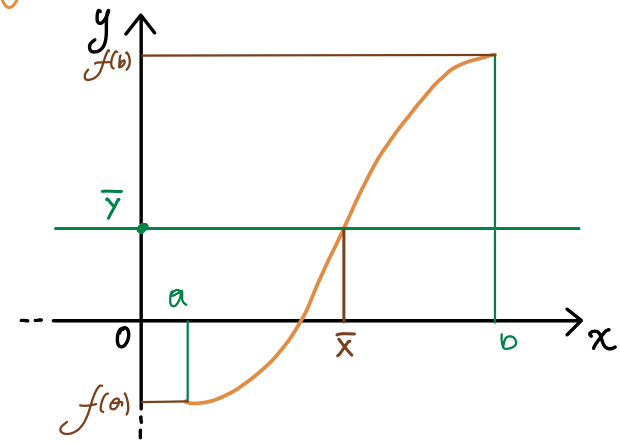
I° Teorema di esistenza dei valori intermedi

Se f è continua in (a, b) allora $\forall \bar{y} \in \underbrace{[f(a), f(b)]}$, $\exists \bar{x} \in \underbrace{[a, b]} / f(\bar{x}) = \bar{y}$

Intervalli

ovvero f assume i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.
* per $\bar{y}$ e $\bar{x}$ intendiamo un valore particolare.

Geometricamente



Per ogni $\bar{y}$ che prendo tra $f(a)$ e $f(b)$, esiste <u>Almeno</u> un $\bar{x}$ da cui y proviene.

$\Rightarrow$ f assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$

Dimostrazione

Sia $\bar{y} \in [f(a), f(b)]$ e prendiamo un punto tra questi due e consideriamo la funzione
$g(x) = f(x) - \bar{y}$ (funzione Ausiliaria)

Osserviamo:

1) g è continua in (a, b) perché f lo è.
2) a) Calcoliamo $g(a) = f(a) - \bar{y}$ Siccome $\bar{y} \in [f(a), f(b)] \Rightarrow \bar{y} > f(a) \Rightarrow \underline{f(a) - \bar{y} < 0}$

b) $g(b) = \underline{f(b) - \bar{y} > 0}$

$f(a) < \bar{y} < f(b)$

Quindi siamo nelle Hp. del Teorema degli zeri (estremi a segno opposto)
$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a, b) / g(\bar{x}) = 0 = f(\bar{x}) - \bar{y} \Leftrightarrow \underline{f(\bar{x}) = \bar{y}}$ C.V.D.