Curve in $\mathbb{R}^2$

Si dice curva in $\mathbb{R}^2$ un'applicazione del tipo: $\varphi \overset{\text{"che"}}{:} t \in I = [a, b] \xrightarrow{\text{Associa}} \varphi(t) \in \mathbb{R}^2$

Questo tipo di funz. è diversa dalle funz del tipo $\underset{1\text{ var.}}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ e $\underset{2\text{ var}}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$, infatti abbiamo:

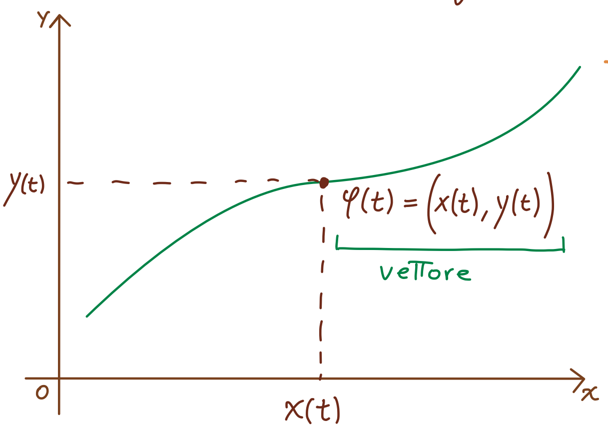
$$\underset{\text{una funz } \varphi}{\varphi} : \underset{\text{def in un intervallo } \mathbb{R}}{\mathbb{R}} \to \underset{\text{ha valori in } \mathbb{R}^2}{\mathbb{R}^2}$$

La variabile indipendente verrà chiamata t e non più x.

Come agisce una funz di questo tipo?

$$\varphi : t \in I \xrightarrow{\text{Associa}} \underset{\varphi(t) \text{ è un vettore di } \mathbb{R}^2 \to \text{ ha 2 componenti}}{\varphi(t) \in \mathbb{R}^2} \Rightarrow \varphi(t) = \underbrace{\big(x(t), y(t)\big)}_{\text{componenti}} \in \mathbb{R}^2$$

⇒ Al variare di t (che in fisica è il "Tempo") abbiamo, ad esempio.



→ Le equazioni $\varphi = \varphi(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [a, b]$

Sono dette eq orarie del moto e descrivono, al variare di $t \in [a, b]$ la curva oraria del moto.

Definizione: Si dice sostegno della curva $\varphi = \varphi(t)$ il suo codominio: $\overset{\text{gamma maiuscolo}}{\Gamma} = \varphi(I)$

Di conseguenza $\varphi(I) = \varphi([a, b]) = \{\underset{\text{Tutti i punti}}{[x(t), y(t)]} \underset{\text{Tale che}}{/} \underset{t \text{ appartiene all'intervallo}}{t \in I}\}$

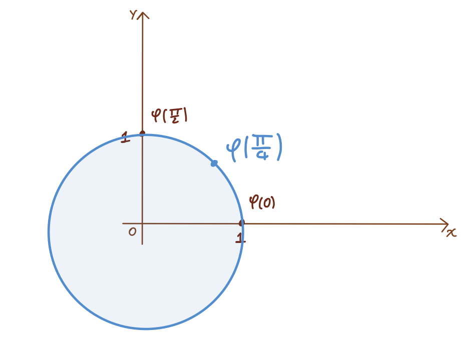
Si dice che la curva Γ geometrica del piano ha equazioni parametriche $\varphi = \varphi(t)$ che è la stessa cosa di dire:

$$\varphi = \varphi(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y \end{cases} \text{ quando } t \in [a, b]$$

ES: Prendiamo la curva che a $\varphi : t \in [0, 2\pi] \to \varphi(t) = (\cos t, \sin t)$

→ possiamo anche scrivere che "il $\underset{\text{immagine}}{\text{sostegno}}$ di φ è Γ di eq parametriche": $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

quindi chi è Γ geometricamente?



$t = 0 \to \varphi(0) = \begin{cases} x = \cos(t) = 1 \\ y = \sin(t) = 0 \end{cases}$

$t = \frac{\pi}{2} \to \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

$t = \frac{\pi}{4} \to \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\vdots$

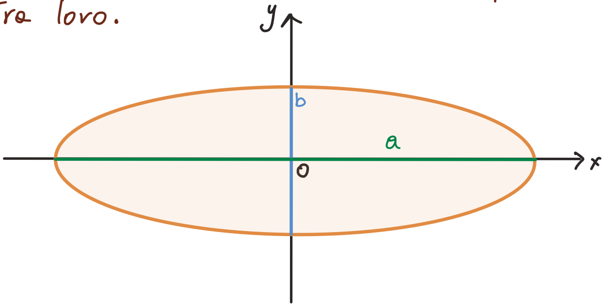
Quindi Γ è la circonferenza con centro in 0 e raggio unitario. ha eq parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \text{ al variare di } t \in [0, 2\pi]$$

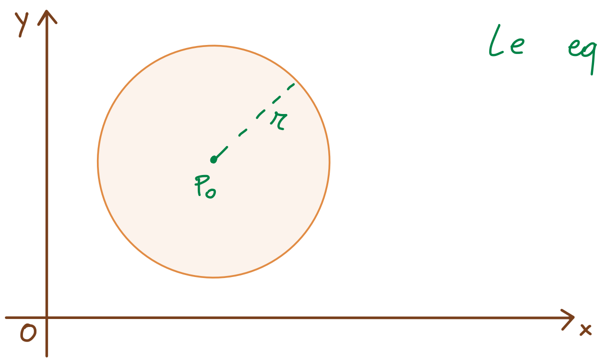
ha anche eq cartesiana: $x^2 + y^2 = 1$ Eq circonf di $r = 1$

ES: $\varphi : t \in [0, 2\pi] \to \varphi(t) = (a\cos t, b\sin t)$ se $a = b = 1$ abbiamo la circonf vista prima.

Nel caso generale abbiamo l'eq dell'ellisse, infatti essa è una circonferenza con semiassi diversi tra loro.



ES: ho la circonf con centro in P_0: $C_r(P_0)$



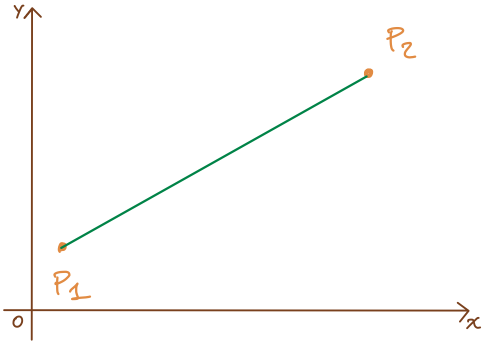
Le eq parametriche della circonferenza sono in generale:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

$r = 1 \to$ raggio unitario

$y_0 = x_0 = 0 \to$ centro in O

ES: Segmento di estremi P_1 e P_2: $P_1 = (x_1, y_1)$ $P_2 = (x_2, y_2)$



Quali sono le eq parametriche del segmento?

$$\begin{cases} x = t x_1 + (1-t) x_2 \\ y = t y_1 + (1-t) y_2 \end{cases} \quad \text{quando } t \text{ varia da } [0,1]$$

Infatti se $t = 0 \to \begin{cases} x = x_2 \\ y = y_2 \end{cases} \to$ ovvero P_2

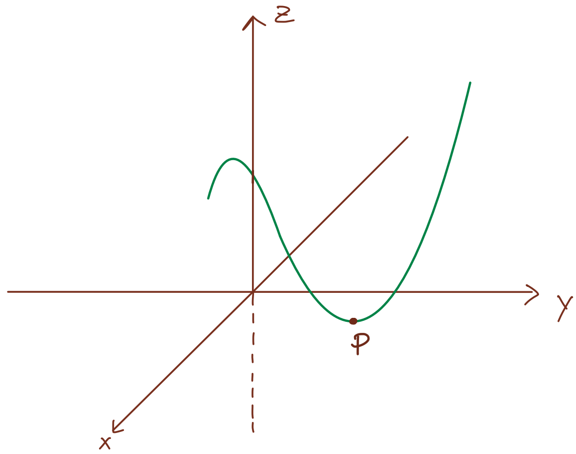
Se $t = 1 \to \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases} \to$ ovvero P_1

$\to$ Per i valori intermedi tra 0 e 1 ho gli altri punti tra P_1 e P_2, quindi tutti i punti del segmento.

Curve in $\mathbb{R}^3$

Quando abbiamo delle curve in $\mathbb{R}^3$ il concetto rimane lo stesso, ma il punto "P" (punto materiale) non si muove più nel piano ma si muove nello spazio, quindi avremo che il vettore P sarà composto non più da 2 componenti, ma da 3!

$$\varphi : t \in I \to \varphi(t) = [x(t), y(t), z(t)] \in \mathbb{R}^3$$



51:07