Questo argomento si trova nel
libro di Analisi II.

Le Serie

Fino a questo punto abbiamo studiato le Serie Numeriche, ovvero successioni del tipo:

Numeriche

$$(a_n)_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \leftarrow$$ Questo tipo di serie somma termini interi.

Cosa sono le **Serie di funzioni**?
Si considera una successione di funzioni:

$$\boxed{(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}$$

ES: $f_n(x) = x^n$ considerata in tutto $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f_0(x) = 1 \\ f_1(x) = x \\ f_2(x) = x^2 \\ f_3(x) = x^3 \\ \dots \end{array}\right\} f_n(x) = x^n$$

ES: $\log(nx) \Rightarrow f_n(x) = \log x,\ \log 2x,\ \log 3x \dots$

Quindi una successione di funzioni e' una successione dipendente da $n \in \mathbb{N}$, ed in cui ogni elemento e' una funzione.
Inoltre fissato $n \in \mathbb{N}$, l'elemento $f_n(x)$ e' una funzione del tipo:

$$\boxed{f_n(x): \underset{\text{Intervallo}}{x \in I} \rightarrow f_n(x) \in \mathbb{R}}$$

Serie di funzioni

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}$$

Abbiamo una Somma infinita di funzioni.

ES: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \leftarrow$ Serie geometrica

Quando abbiamo una serie di funzioni, non dobbiamo solo dire se converge o diverge, ma anche per quali valori di x lo fa.

Problema: Per quali valori di x la serie di funz. Converge, diverge o e' indeterminata?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \text{Converge a } \frac{1}{1-x} & \text{se } x \in (-1,1) \\ \text{Diverge} & \text{se } x \in [1,+\infty] \\ \text{Indet} & \text{se } x \in (-\infty,-1] \end{cases}$$

La Serie geometrica e' una particolare serie di funzione; In questo caso il termine generale e' del tipo $f_n(x) = x^n \Rightarrow$ Potenza

Osserviamo che nel caso in cui una serie num converge, essa converge ad un certo numero. Nel caso in cui la serie geometrica converge, essa converge proprio a: $\frac{1}{1-x}$; Possiamo dire che

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in I(-1,1)}$$

Serie di potenze

Le S. di potenze sono particolari serie di funzioni.

ES: $\sum\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ converge a $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

↑ con le serie geometriche non compare mai una x.

Definizione generale

Una serie di potenze è una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ in cui $f_n(x)$ ha la seguente forma particolare:

$$f_n(x) = a_n x^n$$ Dove a_n è una successione numerica.

Siccome una serie geometrica è del tipo $\sum_n \underset{\uparrow a_n}{1}\, x^n$, avremmo che a_n è sempre 1

Es $\sum_n \underbrace{n!}\,\underbrace{x^n}$, $\sum \underbrace{\frac{1}{n^n}}\cdot\underbrace{x^n}$, $\sum \underbrace{\frac{1}{(n+1)2^n}}\cdot\underbrace{x^n}$

Per studiare il carattere della serie, fissiamo x. Facciamo un esempio.

ES: $\sum_n \frac{1}{n!}x^n$ se fissiamo $x = 2$, otteniamo $\sum_n \frac{2^n}{n!}$ ← Sappiamo studiarla $\Rightarrow$

Criterio del rapporto. $\sum_n \frac{2^{\cancel{(n+1)}}}{(n+1)\cancel{!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1$, per il criterio del rapp la serie Converge

Il concetto: Variando x possiamo avere dei sottoinsiemi dove converge e sottoins. dove diverge. Così come può convergere sempre o mai.
Quando fisso x, ottengo una serie Numerica, a cui possiamo applicare i criteri di convergenza già visti nelle serie Numeriche.

🚩 00:45

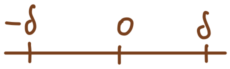
Definizione

La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ si dice serie di potenze di centro l'origine.
Osserviamo che una S. di potenze converge sempre in $x=0$: Se prendo $x=0$ allora $\sum a_n x^n = 0$; si dice che la convergenza banale si ha in $x=0$.

Problema: Calcolare l'insieme di convergenza di una serie di potenze, che indichiamo con I.
Vale il seguente **Teorema:** Consideriamo $\sum_n a_n x^n$, allora si verifica una sola delle seguenti circostanze:

1) la serie converge solo in $x=0 \Rightarrow$ la serie non converge mai.
2) la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$
3) $\exists$ un numero reale $\delta > 0$ / la serie converge per $|x| < \delta$ e non converge per $x > \delta$.

Osservazione L'intervallo (insieme) di convergenza di una serie di potenze è sempre un Intervallo del tipo $I_\delta = (-\delta, \delta)$, quindi centrato nell'origine:

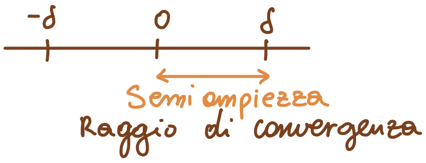


Nei casi del Teorema precedente abbiamo:

1) Si ha che $\delta = \emptyset \Rightarrow I_\delta = \{\emptyset\}$ (c'è solo il pto $\emptyset$)
2) Si ha che $\delta = +\infty \Rightarrow I_\delta = (-\infty, +\infty) \Rightarrow$ Tutto $\mathbb{R}$.
3) Si ha che δ è finito e $\neq 0$, quindi $I_\delta = (-\delta, \delta)$.

Quindi l'insieme di convergenza non potrà mai essere del tipo $I_\delta = (-4, 2)$, ma sarà sempre di centro $\emptyset$, quindi ad esempio $I_\delta = (-4, 4)$, $(-2, 2)$ ...

Definizione Si dice raggio di convergenza della serie di potenze il numero δ del Teorema precedente; quindi esso è il numero $\delta \in \mathbb{R}$ / la serie $\sum_n a_n x^n$ converge in $(-\delta, \delta)$ e diverge in $\mathbb{R} - \{(-\delta, \delta)\}$.



Osservazione se $|x| = \delta$, cioè $x = \pm\delta$ cosa accade?
Il Teorema non ci dice nulla in questo caso; In $x = \pm\delta$ bisogna studiare la serie in questi punti.

1:21

Teorema di D'Alembert → Criterio del Rapporto

Se abbiamo la serie di convergenza $\sum_n a_n x^n$, allora se esiste $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ (Termini positivi)
allora il raggio di convergenza δ sarà:

$$\delta = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{se } 0<\ell<+\infty \longrightarrow \text{Converge in } I=(-\delta,\delta) \\ +\infty & \text{se } \ell=0 \longrightarrow \text{Converge Sempre} \\ 0 & \text{se } \ell=+\infty \longrightarrow \text{Diverge Sempre} \end{cases}$$

è sempre uguale ad $1/\ell$, ma con 0 o $+\infty$ abbiamo $\frac{1}{0}=+\infty$ e $\frac{1}{\infty}=0$.

Dimostrazione a 1:23

ES 1) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ Calcoliamo il raggio di convergenza ⇒ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cancel{!}}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} n+1 \to +\infty$

⇒ $\ell=+\infty$ ⇒ $\delta=0$ ⇒ La serie Diverge sempre (Tranne in $x=0$)

Quindi cosa si fa in questo criterio del rapporto?
1) fisso x ed ottengo una serie numerica
2) Applico il classico criterio del rapporto
3) Calcolo il limite
4) Ricavo la condizione, imponendo che deve essere <1.

D'ora in poi come calcoliamo il raggio di convergenza?
- La "parte" x^n la "dimentichiamo".

⇒ Applichiamo il criterio solo ad a_n; ho una serie di potenze $\sum_n a_n x^n$, ci "dimentichiamo" di x^n e applichiamo il criterio solo ad a_n.

ES 2) $\sum \frac{1}{n!} x^n$ Calcoliamo $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\cancel{!}}\cdot\cancel{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)} = 0$

Se $\ell=0$ ⇒ $\delta=+\infty$ ⇒ La serie converge sempre, ovvero in $I=(-\infty,+\infty)$

ES 3) $\sum_n \frac{1}{(n+1)2^n} x^n$ Calcolo $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+2)2^{n+1}}}{\frac{1}{(n+1)2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)2^{\cancel{n+1}}}(n+1)\cancel{2^n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\ell}$ ⇒ $\delta = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ quindi la serie converge in $I=(-2,2)$

Cosa accade in $x=\pm\delta=\pm2$? Come già detto il Teorema non ce lo dice, e dobbiamo quindi calcolare la serie in $x=\pm2$.

Calcoliamo il comportamento della serie in $x=\pm2$

$\sum_n \frac{1}{(n+1)2^n}\cdot(-2)^n$ = Appena fissiamo x abbiamo una serie numerica. $= \sum_n \frac{1}{(n+1)\cancel{2^n}}(-1)^n\cancel{2^n}$

⇒ abbiamo una serie a segni alterni: $\sum_n (-1)^n \frac{1}{(n+1)} \to 0$ per il criterio di Leibnitz, la serie converge.

⇒ in $x=-2$ la serie converge.
Si calcola che in $x=2$ la serie diverge ⇒ in $x=2$ la serie non converge.
⇒ la serie $\sum\cdots$ Converge in $I=[-2,2)$

Criterio della radice : Cauchy-Hadamard

Se esiste il $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, allora il raggio di convergenza δ sarà:

Termini non negativi

$$\delta = \begin{cases} 1/\ell & \text{se } 0<\ell<+\infty \longrightarrow \text{Converge in } I=(-\delta,\delta) \\ 0 & \text{se } \ell=+\infty \longrightarrow \text{Converge Sempre} \\ +\infty & \text{se } \ell = 0 \longrightarrow \text{Diverge Sempre} \end{cases}$$

Dimostrazione a 1:44

ES: $\sum \frac{n}{n+1} x^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n+1}^{\,1}}{\cancel{n+2}} \cdot \frac{\cancel{n+1}^{\,1}}{\cancel{n}} = 1 = \ell \Rightarrow \delta = 1 \Rightarrow$ la serie converge in $I=(-1,1)$

Controlliamo gli estremi:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\cdot 1^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}^{\,1}}{\cancel{n+1}} = 1 \Rightarrow$ in $x=1$ $\neq 0$ la serie diverge

$\lim_{n\to+\infty} \cancel{\frac{n}{n+1}}_{\to 0} \cdot (-1)^n =$ Non possiamo dire niente

$\Rightarrow$ La serie converge in $I=(-1,1)$

2:03

ES: $\sum_n \underbrace{\frac{x^n}{(3+\frac{1}{n})^n}}_{a_n}$ Applico il teorema della radice $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(3+\frac{1}{n})^n}$ 1 $= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} = \ell$

$\Rightarrow \delta = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

Controllo gli estremi

$x=-3 \Rightarrow \sum_n \frac{-3^n}{(3+\frac{1}{n})^n} = (-1)^n \cdot \frac{3^n}{(3+\frac{1}{n})^n} \to 0 =$ Non possiamo dire nulla

$x=3 \Rightarrow \sum_n \frac{3^n}{(3+\frac{1}{n})^n} = 1 \Rightarrow$ la serie diverge in $x=3$

$\Rightarrow$ la serie converge in $I=(-3,3)$

Perché diciamo che la serie $\sum_n a_n x^n$ è una serie di potenze centrata in $x=0$?

Abbiamo la seguente generalizzazione: $\sum_n a_n (x-x_0)^n$; questa si dice serie di potenze di centro x_0; Se $x_0=0$, il centro sarà zero, ed avremo la serie considerata finora.
Per questo tipo di serie vale la stessa teoria vista finora, ma con un piccolo cambiamento: poniamo $y = x - x_0$; la serie diventerà:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$$, che è una serie di potenze di centro $y=0$.

Calcolo l'insieme di convergenza di tale serie (con i criteri visti finora). La serie $\sum a_n y^n$ converge $\forall y \in I = (-\rho, \rho)$.

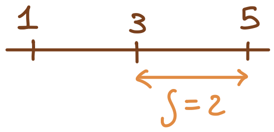
Siccome $y = x - x_0$, $\in (-\rho,\rho) \Leftrightarrow x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$, perché dire che $x - x_0 \in (-\rho,\rho)$ significa dire che $-\rho < x - x_0 < \rho \Rightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$.

Quindi detto ρ il raggio di conv. della serie $\sum a_n (x-x_0)^n$, essa converge in un intervallo centrato in x_0, e semiampiezza ρ, cioè $I = (x_0-\rho, x_0+\rho)$.

ES: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-3)^n$ $x_0 = 3$, pongo $y = x-3 \Rightarrow \sum_n \frac{n}{2^n} y^n \Rightarrow$ Teorema D'Alembert

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n} = \frac{\cancel{n+1}^{\,1}}{\cancel{n}} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = \ell \Rightarrow \rho = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Allora la serie converge $x \in (\underset{x_0\ -\rho}{3-2}, \underset{x_0\ \rho}{3+2}) \Rightarrow I = (1,5)$ la semiampiezza è sempre 2, ma il centro è 3.



ES: $\sum_n \frac{(x+4)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$ $x_0 = -4$ → perché -4 e non $+4$? **Importante**

Perché la formula è $x - x_0 \Rightarrow x - (-4)$ → x_0

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{2^{n+1}}\sqrt{n+2}} \cdot \cancel{2^n} \cdot \sqrt{n+1} = \lim_n \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\cancel{n+1}}}{\sqrt{\cancel{n+2}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

1

$\Rightarrow I\,(-4-2\ ,-4+2) = (-6, 2)$ Il centro è sempre -4.

ES: $\sum_n \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{5}\right)^n$ Possiamo dire: pongo $y = \frac{x}{5} \Rightarrow \sum \frac{n}{n+1} y^n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n+1}^{\,1}}{n+2} \cdot \frac{\cancel{n+1}^{\,1}}{n} = 1 \Rightarrow$ la serie converge $\forall y \in (-1,1)$, ma $y = \frac{x}{5}$ quindi

$\Leftrightarrow x \in (-5, 5)$