Esercizi limiti

8.4 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$(a)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+|x|}{x} = 2 \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x+|x|}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+|x|}{x} = \begin{cases} \text{se } x>0 : & \frac{x^2+x+x}{x} = \frac{x^2+2x}{x} = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 0^+ + 2 = 2 \\ \cancel{\text{se } x<0} : & \frac{x^2+x-x}{x} = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0 \end{cases}$$

$0^+ > 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x+|x|}{x} = \begin{cases} \text{se } x>0 & 0^- < 0 \\ \text{se } x<0 \Rightarrow & \frac{x^2+x-x}{x} = 0 \end{cases}$$

8.5 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to+\infty} (x - 2\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x-2\sqrt{x}) = x - 2x^{\frac{1}{2}} = x\left(1-2(1)^{\frac{1}{2}}\right) = +\infty$$

8.7 Utilizzare la proprietà (11) del paragrafo 7D per dedurre che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Dal limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Verificare che il lim non esiste

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \underset{f(x)}{\sin}\left(\underset{g(x)}{\frac{2\pi}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\pi}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(g(x)) = \lim_{x\to 0^+} \sin(+\infty) = \nexists$$

Limiti Notevoli

8.15 Verificare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{a^x} = 0 \ (a>1)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{a^x} = \log x << a^x \Rightarrow 0$$

8.16 Verificare che, qualunque sia il numero reale b, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b$$

Limite Notevole : $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

se $b=0$: $(1+0)^x = 1^x = 1$

8.18 Verificare che valgono le relazioni di limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{e}\Big] \Rightarrow \log(e) = 1$$

e' un lim notevole

Pongo $\frac{1}{x} = y$

8.19 Verificare la relazione di limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 =$$

$$\Rightarrow \lim y\log(1+x) = \lim_{x\to 0} \log(1+x)^y = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \log(1+x)^{x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \log\left[(1+x)^{x}\right]^{-1} = 1$$

1^{-1} ?

8.20 Verificare la validità della relazione

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \text{Limite Notevole} \Rightarrow 1$$

ESERCIZI NUOVI

Funz. Continue $\to$ f cont in x_0 se $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

9.1 Dire se la funzione $f : x \in \mathbb{R} - \{2\} \to \frac{1}{x-2}$ è continua in $x_0 = 2$.

$D = x-2 \neq 0$ per $x \neq 2 \Rightarrow$ NO CONTINUA in $x_0 = 2$

9.2 Sia $f(x)$ la funzione definita in $(0,2)$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Determinare l'insieme X dei punti di discontinuità di $f(x)$.

pti di disc $= \emptyset$

9.3 Sia $f(x)$ la funzione definita in $(0,2)$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Determinare l'insieme X dei punti di discontinuità di $f(x)$.

Lim notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Riscriviamolo: $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin[f(x)]}{f(x)} = 1$

- $f(x)$ deve essere sia al num che al denom
- $f(x_0)$ deve essere infinitesima $\to 0$

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{2x}$ 1) $\lim_{x\to x_0} 5x \to 0$? SI $\Rightarrow$ Riscrivo il num: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\dots}$

$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin(5x)}{5x}}_{\to 1} \cdot \frac{5}{2} \to \frac{5}{2}$

ES: $\lim_{x\to+\infty} x^3 \sin\frac{1}{x}$ 1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \to 0$ ✓ 2) $\lim_{x\to+\infty} x^{\cancel{3}\,2} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}_{\to 1} \cancel{\frac{1}{x}} = x^2 \cdot 1 \to +\infty$

ES: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin 5^x}{2^x}$ 1) $\lim_{x\to-\infty} 5^x \to 0$ ✓ 2) $\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{\sin 5^x}{5^x}}_{\to 1} \cdot \frac{5^x}{2^x} = \lim \left(\frac{5}{2}\right)^x \to \emptyset$

Limite NoTevole $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Riscriviamo $\lim_{x\to x_0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)}$

- $f(x)$ deve essere sia al num che al denom
- $f(x_0)$ deve essere infinitesima $\to 0$

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{2x}$ 1) $\sin x \to 0$? SI $\to$ 2) $\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}}_{\ln e} \cdot \frac{\sin x}{2x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot [\ln e]$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} \ln e^{\,1} = \frac{1}{2}$

ES: $\lim_{x\to 3} \frac{5^{3-x} - 1}{\sin(x-3)}$ 1) $\lim_{x\to 3} 3-x \to 0$? SI $\to$ 2) $\lim_{x\to 3} \underbrace{\frac{5^{3-x} - 1}{3-x}}_{\ln 5} \cdot \frac{3-x}{\sin(x-3)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3} [\ln 5] \cdot \frac{3-x}{\sin(x-3)}$ $\to$ 1) il lim notevole è capovolto
2) gli argomenti $x-3$ e $3-x$ sono OPPOSTI $\Rightarrow$ il lim notevole è Negativo

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(-x)}{\sin(f(x))} = \frac{\sin[f(x)]}{f(-x)} = -1$

Quindi $\lim_{x\to 3} f(x) = -\ln 5$

Limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad (x \to 0)$$

Riscriviamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\log_a(1+f(x))}{f(x)} = \log_a e$$

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{5x^3}$ 1) $\lim_{x\to 0} 3x \to 0$ ✓

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}_{\to \ln e} \cdot \frac{3}{5x^2} = \lim_{x\to 0} [1]\cdot \frac{3}{5x^2} \to +\infty \to +\infty$$

ES: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x+1}}$ 1) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \to 0$ ✓ $\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \underbrace{\frac{\ln_{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}}_{\to \ln_{\frac{1}{2}} e} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}}$ $\frac{x+1}{x} \to 1 \Rightarrow \ln_{\frac{1}{2}} e$

Limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (x \to 0)$$

Riscriviamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(1+f(x))^\alpha - 1}{f(x)} = \alpha$$

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{(1+\sin 5x)^3 - 1}{2x}$ 1) $\lim_{x\to 0} 5x \to 0$? SI ✓ $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{(1+\sin(5x))^3 - 1}{\sin 5x}}_{\to 3} \cdot \frac{\sin 5x}{2x} \to$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{\sin(5x)}{5x}\cdot\frac{5}{2} \to \frac{5}{2} \Rightarrow \lim f x = \frac{15}{2}$$

ES: $\lim_{x\to -\infty} \frac{(1+3^x)^{\frac{1}{2}} - 1}{2^x}$ 1) $\lim_{x\to -\infty} 3^x \to 0$? Si $\Rightarrow \underbrace{\frac{(1+3^x)^{\frac{1}{2}} - 1}{3^x}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \frac{3^x}{2^x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x \to 0 \Rightarrow 0$

Limite Notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Riscriviamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos[f(x)]}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2} \text{ !}$$

ES: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos[\sqrt{x}]}{x^3}$ 1) $\lim \sqrt{x} \to 0$? SI

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1-\cos(\sqrt{x})}{x}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{+\infty} \Rightarrow \lim f(x) \to +\infty$$

Perche' 0^+

ES: $\lim_{x\to 3} \frac{1-\cos(x^2-9)}{\sin(x-3)}$ 1) $\lim x^2-9 \to 0$? SI $\Rightarrow \underbrace{\frac{1-\cos(x^2-9)}{x^4-18x^2+81}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \frac{x^4-18x^2+81}{\sin(x-3)}$ $(x^2-9)^2 = x^4-18x^2+81$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x^2-9)^2}{\sin(x-3)} = \frac{[(x-3)(x+3)]^2}{\sin(x-3)} = \underbrace{\frac{(x-3)}{\sin(x-3)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(x-3)}_{\to 0}(x+3)^2 \longrightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = 0$$

Altri limiti notevoli

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\log f(x)}{f(x)} \to 0$ (con $f(x) \to +\infty$)

- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{b}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^b$ (con $f(x) \to \pm\infty$)

- $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \to 1$ pongo $t = \frac{1}{x} \Rightarrow$ se $x \to 0$, $t \to +\infty \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{t}+1\right)}{\frac{1}{t}} = \frac{\cancel{t}\log\left(\frac{1}{t}+1\right)}{\frac{1}{t}+1} \cdot \frac{\frac{1}{t}+1}{\cancel{t}}$, $\frac{1}{t}+1 \to 0$

  $x = \frac{1}{t}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} \to 1 \quad (f(x) \to 0)$$

Forma generalizzata

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ pongo $t = e^x - 1 \Rightarrow t \to 0 \Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{\ln(1+t)}{t} \to 1$ per $x \to 0$

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{2x} = \underbrace{\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}}_{1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{2x}$ $x >> \sqrt{x} \Rightarrow 1 \cdot +\infty = +\infty$

ES: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$ 1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x \to 0$ $\Rightarrow$ Pongo $t = x - \frac{\pi}{2} \to x = t + \frac{\pi}{2}$ $\ell = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ $\Rightarrow t \to 0$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t+\frac{\pi}{2})}{\pi - 2t - \pi} = \frac{-\sin(t)}{-2t} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1} = \frac{1}{2}$

ES Sostituzione

$\lim_{x\to 7} \frac{\sin(x-7)^3}{x-7}$ pongo $t = x-7 \Rightarrow t \to 0$ $x = t+7 \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)^3}{t} \cdot \frac{t^2}{t^2} = \underbrace{\frac{\sin t^3}{t^3}}_{1} \cdot \underbrace{t^2}_{0}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

ES: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{6x} = 1^{\infty} \Rightarrow \left(\frac{2x}{2x} + \frac{1}{2x}\right)^{6x} = \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}}_{e}\right]^3 = e^3$

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 4x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{4x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \to 1$; $\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{4x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} \to \alpha \Rightarrow \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}}_{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \to \frac{1}{8}$

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos^2 x - 2x\cos x + x}{3\sin^3 x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \frac{x(\cos^2 x - 2\cos x + 1)}{3\sin^3 x} \Rightarrow \frac{x}{3} \frac{(\cos x - 1)^2}{\sin^3 x}$

$\Rightarrow x \cdot \frac{x}{3} \frac{(\cos x-1)^2}{x^4} \cdot \frac{x^4}{\sin^3 x} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x^2}{3} \cdot \left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{\sin^3 x} = \frac{x^2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3}_{1}$

$\Rightarrow \lim f(x) \to \frac{1}{12} x^2 \to 0$

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\ln^2(x+1)}$ $\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos f(x)}{f(x)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\ln^2(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{\cos x}+1}{\sqrt{\cos x}+1} = \frac{\cos x + \sqrt{\cos x} - \sqrt{\cdots} - 1}{\ln^2(x+1)[\sqrt{\cos x}+1]}$

$= \frac{\cos x - 1}{\ln^2(x+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}+1} = \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^2}{\ln^2(x+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}+1} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{\ln(x+1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}$

$\frac{\ln(1+x)}{x} \to \ln e \to 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\cos x}}_{1}+1} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

ES $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\ln(1+3x^2)}}{x} = \frac{\sqrt{\ln(1+3x^2)}}{-|x|} = -\sqrt{\underbrace{\frac{\ln(1+3x^2)}{3x^2}}_{1} \cdot 3} = -\sqrt{3}$

ES $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x)}{\sin^2(3x)} = $ In I_0 $\begin{cases}\sin(2x)\sim 2x\\ \sin(3x)\sim 3x\end{cases} \Rightarrow \frac{x\sin(2x)}{\sin^2(3x)} \sim \frac{2x^2}{9x^2} \to \frac{2}{9}$

ES: $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin x \cos x}{x^2} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{0^\pm}\cdot 1 \to \pm\infty$

Alternativo: $\frac{\sin x\cos x}{x^2} \sim \frac{x\cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x} = \pm\infty$

ES: $\lim_{x\to\pm\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{x}\right) \sim x\cdot\frac{2}{x}\cdot 1 = 2$

8.28 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim_{x\to+\infty} 2^x - x^2$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \log x - \sqrt{x}$

$\lim_{x\to+\infty} 2^x - x^2 \to 2^x\left(1-\underbrace{\frac{x^2}{2^x}}_{0}\right) \to +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \log x - \sqrt{x} \to \sqrt{x}\left(\frac{\log}{\sqrt{x}} - 1\right) \to -\infty$

8.29 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\sqrt{x+1}}{x}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3+1)}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\sqrt{x+1}}{x}$ $\quad \sqrt{x+1}$ per $x\to+\infty \sim x \Rightarrow \frac{\log x}{x} \to \emptyset$

oppure $\frac{\log(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{1}{2}\frac{\log(x+1)}{x} = \frac{1}{2}\frac{\log(x+1)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x} \Rightarrow \to \emptyset$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3+1)}{x} = \underbrace{\frac{\log(x^3+1)}{x^3+1}}_{\to\emptyset}\cdot\frac{x^3+1}{x} \to \emptyset$

8.30 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log\sqrt{x+1}}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^3+1)}{x}$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log\sqrt{x+1}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \dots$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log 1+x}{x}$ pongo $t=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ se $x\to 0$, $t\to+\infty$ $\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{t}+1\right)}{\frac{1}{t}} = t\cdot\ln\left(\frac{1}{t}+1\right) = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \ln(e) = 1$

$x = \frac{1}{t}$

Riprendo l'esercizio (b):

dal $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \to 1 \Rightarrow \frac{\log\sqrt{x+1}}{x} = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x} \to \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to\emptyset} \frac{\log(x^3+1)}{x}$ pongo $t=\frac{1}{x} \to x=\frac{1}{t}$ e $t\to+\infty \Rightarrow \frac{\log\left(\frac{1}{t^3}+1\right)}{\frac{1}{t}} = t\log\left(\frac{1}{t^3}+1\right)$

$\to t\,\underbrace{\log\left(\frac{1}{t^3}+1\right)\cdot\frac{2\frac{1}{t^3}+1}{\frac{1}{t^3}+1}}_{\emptyset} \to \emptyset$

8.31 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{2^x}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-e^{2x}}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{2^x} = \underbrace{\frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}}_{\to 0}\cdot\frac{x^2+1}{2^x} = 0\cdot\frac{x^2(1)}{2^x}$

$2^x \gg x^2$

$\to\emptyset$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-e^{2x}} = \frac{x}{e^{2x}\left(\underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{0}-1\right)}$ $\quad e^{2x}\gg x \Rightarrow \underbrace{\frac{x}{e^{2x}}}_{\to 0}\cdot(-1) \to \emptyset$

8.32 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2+1)}{2^x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{2x}}$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2+1)}{2^x} = \frac{\emptyset}{1} = \emptyset$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{2x}} = \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\overbrace{2x}^{\to 0}}{1-e^{2x}} \Rightarrow -2\ln e = -\frac{1}{2}$

8.33 Calcolare i limiti di funzione

$(a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{1-x}$

Seguendo il limite: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \Rightarrow \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}=\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=e^{-2}$

b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{1-x}=\left(\frac{2x}{2x}+\frac{3}{2x}\right)^{1-x}=\left[\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1-x}{2x}}$

$=\left[e^{3}\right]^{\frac{1-x}{2x}} \to \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{2x}=\frac{\cancel{x}(-1)}{2\cancel{x}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow e^{-\frac{3}{2}}$

8.34 Calcolare i limiti di funzione

$(a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to1}x^{\frac{2}{x-1}}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x}=\left(\frac{x(1)}{x(1)}\right)^{x}=\left[1^{x}\right]\Rightarrow$

Trasformo $\frac{x+2}{x+1}$ in $1+\frac{1}{x+1}$ $\Rightarrow \frac{x+2}{x+1}=\frac{x+1+1}{x+1}=\left(\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)^{x}$

$\Rightarrow\left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{x}{x+1}}=e^{\frac{x}{x+1}}\Rightarrow \boxed{e}$

$\frac{x}{x+1}\to 1$

$\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\to e$

b) $\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{x-1}}\Rightarrow \quad f(x)^{g(x)}=e^{\ln(f(x))^{g(x)}}=e^{g(x)\ln[f(x)]}=e^{\frac{2}{x-1}\cdot\ln(x)}$

8.35 Calcolare i limiti di funzione

$(a)\ \lim_{x\to0^+}x^{x}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to0^+}x^{\log x}$

a) $\lim_{x\to0^+}x^{x}=\left[0^{0}\right]$ = uso la relazione

$f(x)^{g(x)}=e^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=e^{g(x)\ln[f(x)]}$

$\Rightarrow\lim_{x\to0^+}x^{x}=e^{x\ln(x)} \to \lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0}x^{2}\cdot\frac{\ln(x)}{x}$ $\to 0 \neq +\infty$

pongo $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}\Rightarrow t\to+\infty\Rightarrow\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\cdot\ln\left(\frac{1}{t}\right)\to 0$ $\quad 0$

Quindi $\lim_{x\to0^+}x^{x}=e^{x\ln x}=1$ $\qquad x\ln x\to0$

b) $\lim_{x\to0^+}x^{\ln x}=e^{x\ln[\ln(x)]}\to\lim_{x\to0^+}x\ln[\ln(x)]=$ pongo $t=\frac{1}{\ln x}\Rightarrow x=\ln x=\frac{1}{t};\ x=e^{\frac{1}{t}}$

$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{t}}\cdot\ln(t)$

8.36 Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty}x\log\left(1-\frac{1}{x}\right)$.

$\lim_{x\to+\infty}x\log\left(1-\frac{1}{x}\right)=\log\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}\right]=\ln(0)=1$

8.37 Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to+\infty} x^2[\log(x^2+2) - 2\log x]$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2[\ln(x^2+2) - 2\ln x] = x^2\ln(x^2+2) - x^2 2\ln x$$

$$\Rightarrow \ln a + \ln b = \ln(a\cdot b) \Rightarrow x^2\left[\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)\right] = x^2\left[\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\right] = \ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{x^2} = \ln(e^2) = 2$$

8.38 Calcolare i limiti di funzione

$$(a)\quad \lim_{x\to0}\frac{2^{3x}-1}{x} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to+\infty} x\log_{10}\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{3x}-1}{x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$= \text{pongo } t = 2^{3x}-1 \Rightarrow 2^{3x} = t+1 ;\quad \ln(2)^{3x} = t+1 ;\quad 3x = \frac{t+1}{\ln(2)} ;\quad x = \frac{t+1}{3\ln(2)}$$

$$\text{Se } x\to0,\ t\to0 \Rightarrow \lim_{t\to0}\frac{\overset{a}{2}^{3\cdot\overset{b}{\left(\frac{t+1}{3\ln(2)}\right)}}-1}{\frac{t+1}{3\ln(2)}} = \lim_{x\to0}\frac{a^b-1}{b} = b\ln(a) \Rightarrow 3\ln(2)$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}\,\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \to 1 \to 1\cdot2 \to 2$$

$$(a)\quad \lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to1^+}\frac{\log(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1} \qquad \text{pongo } t = x-1 \Rightarrow x = t+1,\ t\to0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to0}\underbrace{\frac{\ln(t+1)}{t}}_{\text{lim not}} = 1$$

$$b)\ \lim_{x\to1^+}\frac{\ln(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\ln(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{(x+1)}\sqrt{(x-1)}} \to 1 = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$$

8.40 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)+\log(1-x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2} = \frac{\ln[(1+x)(1-x)]}{x^2} = \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \to -1$$

8.41 Calcolare i limiti di funzioni trigonometriche

$$(a)\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}4x}{\operatorname{tg}x}$$

$$a)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \underbrace{\frac{\sin 3x}{x}}_{2}\cdot\frac{3}{2}\underbrace{\frac{x}{\cos 2x}}_{1} \to \frac{3}{2}$$

$$b)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg}x} = \frac{\sin 4x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \cos x\ \frac{1}{4}\underbrace{\frac{\sin 4x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}}_{1} \to \frac{1}{4}$$

8.42 Calcolare i limiti di funzione

$(a)\quad \lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \qquad (b)\quad \lim_{x\to-\infty} (2-x)\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pongo $t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t}$ e $t\to 0$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\sin(t) \to 1$

b) $\lim_{x\to-\infty} (2-x)\sin\frac{1}{x}$ pongo $t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t}$ e $t\to 0$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \left(2-\frac{1}{t}\right)\sin t = 2\sin t - \frac{\sin t}{t}\ 1 \to -1$

8.43 Calcolare i limiti di funzioni trigonometriche

$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x} = 1\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}_{1} \to \frac{1}{2}$

$\frac{1-\cos[f(x)]}{f(x)^2}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1-\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{1-\cos x}$

$= \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot(1-\cos x)} \to \frac{(1+\cos x)\cancel{(1-\cos x)}}{\cos^2 x\ \cancel{1-\cos x}} = \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1+1}{1} = 2$

8.44 Calcolare i limiti

$(a)\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log 2x}{\log 3x} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x+x^2)}{\log x}$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log 2x}{\log 3x} = \frac{\ln(2)+\ln(x)}{\ln(3)+\ln(x)} = \frac{\ln 2}{\ln 3+\ln x}+1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\ln 2}{\ln 3+\ln x}}_{0}+1 = 1$

b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+x^2)}{\ln x} =$ Siccome $\ln(a\cdot b) = \ln(a)+\ln(b) \Rightarrow (x+x^2) = x\cdot(1+x)$

$\Rightarrow \frac{\ln(x+x^2)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x)+\ln(1+x)}{\ln x} = \underbrace{\frac{\ln(x)}{\ln(x)}}_{1}+\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{\ln(x)} = \frac{0^+}{-\infty} \to 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1+0 \to 1$

$\underbrace{\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}}_{1}$

8.45 Calcolare i limiti

$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x+x^2)}{x} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2}$

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x+x^2)}{x}$ $f(x)\to 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{\ln(1-x+x^2)}{-x+x^2}}_{1}\cdot\frac{-x+x^2}{x} \Rightarrow x-1 = -1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{\ln(+1-1+\cos x)}{x^2} = \underbrace{\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\cos x-1}}_{1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} \to -\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2}$

8.46 Calcolare i limiti

$(a)\quad \lim_{x\to 0^+} (1+|\operatorname{sen} x|)^{\frac{1}{x}} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^-} (1+|\operatorname{sen} x|)^{\frac{1}{x}}$

a) $\lim_{x\to 0^+} (1+|\sin x|)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\frac{1}{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \left[\left(1+\frac{1}{1/\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x} \to 1} \sim \underbrace{\left(1+\frac{1}{1/\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}}_{\to e}$

8.47 Calcolare i limiti

$(a)\quad \lim_{x\to 0^+} (1+|\operatorname{sen} x|)^{-\frac{1}{|x|}} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^-} (1+\operatorname{sen} 2x)^{-\frac{1}{|x|}}$

a) $\lim_{x\to 0^+} (1+|\sin x|)^{-\frac{1}{|x|}} = \left(1+\frac{1}{1/\sin x}\right)^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{1/\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{1/\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}}_{\to e}\right]^{\frac{\sin x}{x} \to 1}}$

$\Rightarrow \frac{1}{e} = e^{-1}$

b) $\lim_{x\to 0^-} (1+\sin(2x))^{-\frac{1}{x}} = \left\{\frac{1}{\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{1/\sin 2x}\right)^{\frac{1}{\sin 2x}}}_{\to e}\right]^{\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1}}}\right\}^{2} \sim \frac{1}{e^2} = e^{-2}$

8.48 Calcolare i limiti

$(a)\quad \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{\log x}\right)^{x} \qquad (b)\quad \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{\log |x|}\right)^{x}$

$\lim_{x\to +\infty} \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}}_{\to e}\right]^{\frac{x}{\ln x}} = e^{\frac{x}{\ln x}} \quad x >> \ln x \quad = e^{+\infty} \to +\infty$

b) $\lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{\ln|x|}\right)^{x} \sim e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} \to \emptyset$

8.49 Calcolare i limiti di funzioni esponenziali

$(a)\quad \lim_{x\to -\infty} (1+e^x)^x \qquad (b)\quad \lim_{x\to +\infty} (1+e^x)^{-x}$

a) $\lim_{x\to -\infty} (1+e^x)^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} \to 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to -\infty} \left(\underbrace{\frac{1+e^x}{x}}_{\to 1} \cdot x\right)^{x} \sim \lim_{x\to -\infty} x^{x}$

$\Rightarrow \quad f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))} \Rightarrow x^x = e^{x \ln(x)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to -\infty} x\ln(x) = x^2 \frac{\ln(x)}{x} \to \emptyset$

8.54 Utilizzando i *teoremi di confronto* per i limiti di funzione, calcolare:

$$(a)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2\cos x}{3x}$$

$$-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} \to 0 \qquad \frac{\sin x}{x} \to 0 \qquad \frac{1}{x} \to 0$$

b) $-1 \ge \cos x \ge 1 \Rightarrow \frac{x}{3x} + \frac{2\cos x}{3x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{\cos x}{x}$ $\quad\frac{\text{limitata}}{+\infty} \to 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{3}$

8.55 Facendo uso dei teoremi di confronto per i limiti di funzione, calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x[\log(\sqrt{x}+1) - \log\sqrt{x+1}]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x\left[\ln(\sqrt{x}+1) - \ln\sqrt{x+1}\right] = \underset{\text{limitata}}{\sin x}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}}\right)\right] = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \to 1 \Rightarrow \ln(1) = 0$$

$\Rightarrow$ limitata $\cdot\, 0 = 0$

8.56 Calcolare: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\sqrt{x}-1) - [\log(x-1)]/2}{5-2\cos x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x}-1) - [\ln(x-1)]/2}{5-2\cos x}$$

$$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 5+2 \le 5-2\cos x \le 5-2 \Rightarrow 7 \le 5-2\cos x \le 3$$

$$\Rightarrow \ln(\sqrt{x}-1) - \frac{\ln(x-1)}{2} = 2\ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1) = \ln(\sqrt{x}-1)^2 - \ln(x-1) = \ln\left(\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x-1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1}\right) = \frac{\cancel{x}(1-0+0)}{\cancel{x}(1-0)} = 1 \Rightarrow \frac{\ln(1)}{3 \le 5-2\cos x \le 7} = \frac{0}{e} = 0$$

8.57 Utilizzando i teoremi di confronto per i limiti di funzione, calcolare:

$$(a)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x+\cos x}} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\cos x + \sqrt{1+x^2}}$$

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x+\cos x}}$ $\qquad -1 \le \sin x \le 1$ e $-1 \le \cos x \le 1$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{x-1}} \le \frac{\sin x}{\sqrt{x+\cos x}} \le \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} \to 0 \qquad \frac{\sin x}{\sqrt{x+\cos x}} \to 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{x+1}} \to 0$$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x - x}{\cos x + \sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \frac{-1-x}{-1+\sqrt{1+x^2}} \le \frac{\sin x - x}{\cos x + \sqrt{1+x^2}} \le \frac{1-x}{1+\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \lim f(x) \to -1$

$$\downarrow\sim\quad -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2(0+1)}} = -\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1}} \to -1$$

$$(a)\quad \lim_{x\to0} \frac{x^3 \operatorname{sen}(1/x)}{e^{x^2}-1} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to3} \frac{\log(x/3)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

a) $\lim_{x\to0} \frac{x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{x^2}-1}$ $\qquad$ 1) $\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} \to 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{e^{x^2}-1} \to 1 \quad x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \qquad -1 \le \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow -x \le x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \le x \Rightarrow \lim f(x) \to 0$$

$$x \to 0 \qquad x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \to 0 \qquad x \to 0$$

b) $\lim_{x\to3} \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x}\ln\left(\frac{x}{3}\right) + \sqrt{3}\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{x-3} \qquad \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{x-3}\sqrt{x} + \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x-3}{\sqrt{3}}}$

$$\Rightarrow \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{x-3}\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right) \qquad \lim_{x\to3} \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{x-3} \sim \frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}-1\right)}{x-3} = \text{BOH}$$

Controllo infinitesimo

ESERCIZI Funzioni Continue

9.3 Sia $f(x)$ la funzione definita in $(0, 2)$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2 & \text{se} \quad 1 \le x < 2 \end{cases}$$

Punti di disc.

$\mathbb{D}(f(x)) = \forall x \in \mathbb{R} \implies \emptyset$

9.3 Sia $f(x)$ la funzione definita in $(0, 2)$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2 & \text{se} \quad 1 \le x < 2 \end{cases}$$

$\mathbb{D} = \forall x \in I = (0,2)$

9.4 Sia x_0 un numero reale e sia $f(x)$ la funzione definita in $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se} \quad x \le x_0 \\ c & \text{se} \quad x > x_0 \end{cases}$$

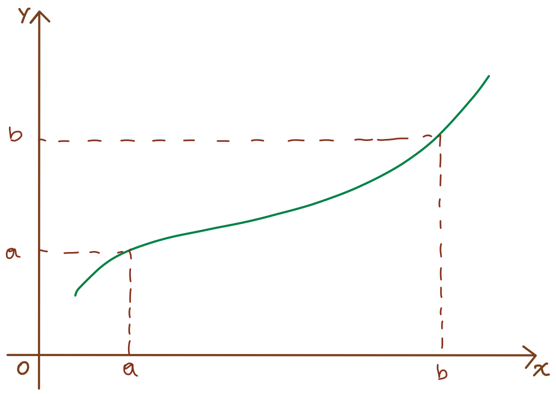
Sotto quali condizioni su a, b e c la funzione $f(x)$ è continua?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{se} \quad x \le x_0 \\ c & \text{se} \quad x > x_0 \end{cases}$$

9.21 Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ un polinomio a coefficienti reali, avente grado dispari. Verificare che esso ammette almeno una radice reale, ossia che $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $P(x_0) = 0$.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = x^k\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x}\right)$$

9.23 Sia $f : [a, b] \to [a, b]$ una funzione continua. Verificare che esiste almeno un punto unito, cioè un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = x_0$.



Se f e' continua in $I=[a,b]$ allora il teorema dei VALORI INTERMEDI ci assicura che TUTTI i valori tra a e b vengono assunti dalla funzione.

9.26 Calcolare gli estremi inferiore e superiore della funzione definita in $\mathbb{R}$ da $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{0-1}{0+1} \to -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x(1)}{e^x(1)} \to 1$$

$\implies \quad -1 \le \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \le 1 \implies$ Limitata