Analisi formule

Giuliano Ranauro

July 2022

1 Integrali

1.0.1 Integrali fondamentali

1. $\int sin(x)dx = -cos(x) + c$
2. $\int cos(x)dx = sin(x) + c$
3. $\int(1 + tan^2(x))dx = \int \frac{1}{cos^2}dx = tan(x) + c$
4. $\int(1 + cot^2(x))dx = \int \frac{1}{sin^2}dx = -cot(x) + c$
5. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctan(x) + c$

1.1 Formule di integrazione

1.2 Sostituzione

1. Pongo $t = f(x)$
2. Ricavo dx con: $dx = \frac{1}{f'(x)}dt$
3. Sostituisco $f(x)$ con t e dx con dt
4. Continuo l'integrazione

1.3 Per parti

1. $\int f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$

Si usa la formula di integrazione per parti per funzioni del tipo:

1. $P(x) \cdot e^x$
2. $P(x) \cdot sin(x),\ cos(x),\ e^{\alpha x},\ sin(\beta x)$

1.4 Formula iterativa

1. $I_n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[(2n-3)I_{n-1} + \frac{x}{(1-x^2)^{n-1}}\right]$

2. Dove I_n è l'integrale corrente, e I_{n-1} è quello dell'iterazione precedente

1.5 Razionali fratte

1.5.1 Denominatore del tipo: $(x+1)(x-1)$

1. Scriviamo la frazione com $\frac{P(x)}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

2. Successivamente Troviamo A e B tramite un sistema

3. Scriviamo l'integrale come: $\int \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}dx$

1.5.2 Denominatore del tipo: $(x+1)(x^2-1)$

1. Scriviamo la frazione come $\frac{P(x)}{(x+1)(x^2-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+c}{x^2-1}$

2. Successivamente troviamo A e B tramite un sistema

3. Scriviamo l'integrale come: $\int \frac{A(x^2-1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-1)}dx$

1.5.3 Denominatore del tipo: $x(x-1)?2$

1. Scriviamo la frazione come $\frac{P(x)}{(x+1)(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{c}{(x-1}^2$

2. Successivamente troviamo A e B tramite un sistema

3. Scriviamo l'integrale come: $\int \frac{A(x-1)^2+Bx\cdot(x-1)+C}{x(x-1)^2}dx$

1.5.4 Se avessimo qualcosa del tipo $\frac{1}{x(x-3)^3}$?

1. Scriviamo: $\frac{1}{x(x-3)^3} = \frac{A}{x} + \frac{b}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3} \cdots$

1.6 Funzioni irrazionali

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}dx \Rightarrow$ Pongo $t = \sqrt{x+4}$

2. $\int x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ Pongo $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

3. $\int \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$ Pongo $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot (t-x)$, in questo caso $a = 1 \Rightarrow$ $t = x + \sqrt{1+x^2}$

2 Equazioni a due variabili

2.1 Equazioni del cerchio

Equazione della circonferenza:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

Possiamo anche scriverla come:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Possiamo ricavare raggio e centro della circonferenza con le formule:

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$c = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

3 Equazioni Differenziali

3.1 Equazioni lineari del primo ordine

3.1.1 Integrale generale

1. Ho un'equazione del tipo: $y' = a(x)y + b(x)$ con integrali $a(x)$ e $b(x)$
2. Trovo la primitiva $A(x)$ con $\int a(x)dx$
3. Per trovare l'integrale generale uso la formula: $e^{A(x)} \int e^{-A(x)} \cdot b(x)dx$

3.2 Equazione di Bernoulli

1. $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$
2. Dividiamo entrambi i membri per y^{α} ottenendo: $y' \cdot y^{-\alpha} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$
3. Pongo $z(x) = (y(x))^{-\alpha+1}$ in modo da sostituire il primo membro con z'
4. A questo punto ho un'equazione lineare del primo ordine.

4 Integrali doppi

4.1 Formula di riduzione

Se possiamo rappresentare L'insieme H rispetto ad x nel seguente modo:

$$H = \{(x, y) \,\epsilon\, R^2 : \, a \leq x \leq b, \; \alpha(x) \leq y \leq \beta\}$$

Vale la seguente formula di riduzione:

$$\iint_H f(x, y)\, dx\, dy \; = \int_a^t dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy$$

4.2 Cambiamento in coordinate polari

Sostituiamo x ed y con i seguenti valori:

$$\begin{cases} a + \delta\, cos(\theta) \\ b + \delta\, sin(\theta) \end{cases}$$

dove a e b sono le coordinate del centro; ad esempio qualora avessimo un cerchio di $r = 1$ e centro in $c = (1, 0)$, le coordinate sarebbero:

$$\begin{cases} 1 + \delta\, cos(\theta) \\ \delta\, sin(\theta) \end{cases}$$

Dopo aver sostituito, si calcola l'integrale:

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} d\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\delta, \theta) \; \cdot \delta\, d\theta$$

Potrebbe essere utile calcolare la distanza tra due punti:

$$dist = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$$