Semplificare l'espressione

ES: $(2-3i)(-2+i) = -4+2i+6i-3i^2 = 8i-1$ ✓

Tenere a mente che quando si ha la forma $(i^2) = -1$

Calcolare la potenza

ES $i^5 \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow -i \cdot (-i) \cdot i = i$

Tenere a mente che $i^2 = -1$ e che $i^4 = 1$

* dividere le potenze in multipli di 4 per semplificare con 1: $i^{63} = i^{60} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 \ldots$

E con numeri complessi completi?

→ Passiamo ad una rappr. esponenziale:

$$z^n = \underbrace{(\varphi e^{i\theta})^n}_{esp.} = \underbrace{\varphi^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]}_{polare}$$

TuTorial

ES: $z = (1+i)^5 \rightarrow$ calcolo $\varphi = \underbrace{\sqrt{1^2+1^2}}_{\text{non considero la pow.}} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Elevo alla pow originale $z^5 = (\sqrt{2})^5 e^{i\frac{5}{4}\pi} = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{5}{4}\pi}$

Trovare le radici

z e' una radice n-esima complessa di w se $z^n = w$. Se $w = 0 \Rightarrow$ allora abbiamo un'unica radice $z = 0$.

Come le trovo?

① Scriviamo z in forma esponenziale: $z = \varphi e^{i\theta}$ e $w = r e^{i\gamma}$

② Allora $z^n = w \rightarrow \varphi^n e^{in\theta} = r e^{i\gamma}$

$$\Rightarrow \varphi = \sqrt[n]{r} \quad e \quad \theta_k = \underbrace{\frac{\theta}{n}}_{\text{Radice di base}} + \underbrace{\frac{2k\pi}{n}}_{\text{offset}} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

TuTorial

ES: Radici cubiche complesse di -1

① $\varphi = 1$, $\begin{cases} \cos\theta = -1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \rightarrow \theta = \pi \quad \Rightarrow z = -1 = e^{i\pi}$

② $\varphi = \sqrt[n]{r} = \sqrt[3]{1} = 1 \quad \Rightarrow \theta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$

Esplicitando le radici

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad z_2 = e^{i\pi}$ $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi = \frac{\pi+2\pi}{3} = \pi\right)$ $\quad z_3 = e^{i\frac{5}{3}\pi}$

Attenzione!

Le radici complesse vengono indicate come le radici reali: $\sqrt[n]{z}$ o $z^{\frac{1}{n}}$, bisogna quindi capire bene il contesto

Radici - Alternativo

$$z_k = \sqrt[n]{\varphi} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

TuTorial

ES: radici cubiche $z - 1 \Rightarrow \varphi = 1$ $\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \emptyset$

$z_0 = \sqrt{1}[\cos(0) + i\sin(0)] = 1$

$z_1 = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = \left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right] = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Passare tra coordinate polari – cartesiane – esponenziali

- Polare $z = a + ib$
- Cartesiana $z = \varphi[\cos\theta + i\sin\theta]$
- esponenziale $z = \varphi e^{i\theta}$

Tenere presente che :

$$z = a + bi$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \sqrt{a^2+b^2}}$$

modulo → lunghezza da 0

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\varphi} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\varphi} \end{cases}$$

Da cartesiana a polare ed esp.

1. Troviamo φ
2. Troviamo $\theta \rightarrow \theta = \cos^{-1}\theta$ && $\sin^{-1}\theta$
3. Scriviamo z come : $z = \underbrace{a+ib}_{\text{cartesiana}} = \underbrace{\varphi[\cos\theta + i\sin\theta]}_{\text{polare}} = \underbrace{\varphi e^{i\theta}}_{\text{esponenziale}}$

Formula di De Moivre per calcolare potenze

- Porto il numero in notazione goniometrica :

$$z^n = \varphi^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$