



# Esercizi limiti

8.4 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x + |x|}{x} = 2 \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + |x|}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x + |x|}{x} = \begin{cases} \text{Se } x > 0 : \frac{x^2 + x + x}{x} = \frac{x^2 + 2x}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} = \underline{0^+ + 2 = 2} \\ \text{Se } x < 0 : \frac{x^2 + x - x}{x} = \frac{x^2}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + |x|}{x} = \begin{cases} \text{Se } x > 0 : 0^+ < 0 \\ \text{Se } x < 0 : \frac{x^2 + x - x}{x} = 0 \end{cases}$$

8.5 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x}) = x - 2x^{\frac{1}{2}} = x(1 - 2(1)^{\frac{1}{2}}) = +\infty$$

8.7 Utilizzare la proprietà (11) del paragrafo 7D per dedurre che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dal limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Verificare che il lim non esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{2\pi}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \left( \frac{2\pi}{x} \right)$$

$\uparrow$   $f(x)$       $\uparrow$   $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\pi}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(+\infty) = \text{non esiste}$$

Limiti Notevoli

8.15 Verificare che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{a^x} = 0$  ( $a > 1$ ).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{a^x} = \log x \ll a^x \Rightarrow 0$$

8.16 Verificare che, qualunque sia il numero reale  $b$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{b}{x} \right)^x = e^b.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{b}{x} \right)^x = e^b \quad \text{Limite Notevole : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\text{Se } b=0 : (1+0)^x = 1^x = 1$$

8.18 Verificare che valgono le relazioni di limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \log \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] \Rightarrow \log(e) = 1$$

$\downarrow$   
 $e$

$e$  è un lim notevole

Pongo  $\frac{1}{x} = y$

8.19 Verificare la relazione di limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 =$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y \log(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^y = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \log \left( (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \log \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] = 1$$

$\left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \rightarrow e$

**8.20** Verificare la validità della relazione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \text{Limite Notevole} = 1$$