Lezione 15
Limiti di funzione

Limiti di funzioni

Questo argomento è molto simile ai limiti di successioni, ma se in quel caso i lim tendevano solo ad infinito, in questo caso tendono anche a $-\infty$ o n.

Vogliamo studiare il comportamento di una funzione f intorno ad un suo punto del suo dominio o a $\pm\infty$.

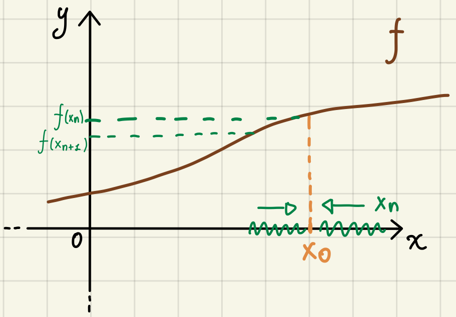
ES: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\mathbb{D}$: $x \neq 0 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} \equiv \mathbb{R} - \{0\}$

Quando mi avvicino a 0, cosa succede alla funzione?

Definizione: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall (x_n)_n \,/\, x_n \to x_0$ si ha che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$

Successione x_n contenuta nel $\mathbb{D}$ di f

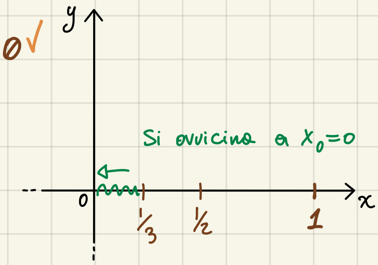
Che significa?



- In x_0 non so cosa faccia la funzione, quindi considero per ogni successione $x_n \to x_0$, quindi prendo una successione che pian piano si avvicina a x_0, o da Dx o da Sx

ES: $f = \dfrac{1}{x}$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow \forall$ succ $\to x_0 \Rightarrow \forall$ succ $\to 0$ (x_0)

Posso quindi considerare $x_n = \frac{1}{n} \to x_0 = 0$ ✓



$\Rightarrow$ Se calcolo f sui punti della succ $\frac{1}{n}$, quindi prendo x_n e calcolo $f(x_n)$;
Continuo calcolando f su TUTTI i punti della successione.
Dal calcolo capisco dove "va a finire" $f(x_n)$.

Quando considero $f(x_n) = \dfrac{1}{\frac{1}{n}} = n$ ($x = \frac{1}{n}$) $\leftarrow$ Questa è una successione! Visto che sappiamo calcolare i limiti delle successioni, possiamo calcolare il lim della succ; Per definizione, se il risultato del lim $= \ell$, allora il $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ Questa funzione tende a $+\infty$ da Destra

Quindi...

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

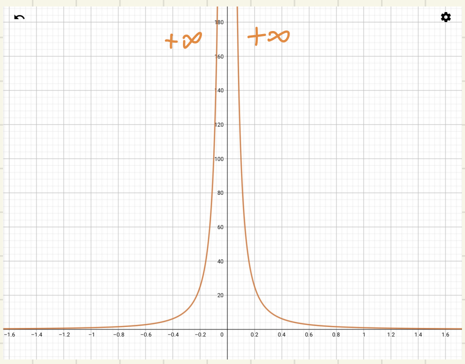
Siccome il lim Dx e Sx hanno due risultati diversi, si dice che il limite non esiste.

ES: $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ Perché?

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = +\infty$

Stesso risultato!



✱ Il metodo riportato sopra è un metodo puramente TEORICO usato per calcolare i limiti delle funzioni tramite i limiti di successioni.

Teorema Ponte

"fa da ponte tra limiti di successioni e funzioni".

Le seguenti affermazioni sono equivalenti ① ⟺ ②

Contenuta nel $\mathbb{D}$ di f

1) $\forall$ successione $(x_n)_n \subseteq \mathbb{D}_f - \{x_0\}$ / $x_n \to x_0$, $f(x_n) \to \ell$

x_0 potrebbe non essere nel dominio

Delta · Per cui · Risulta

2) $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$ / $\forall x \in \mathbb{D}_f$, $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

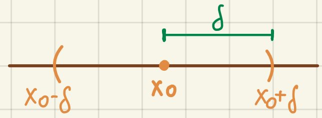
$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Cosa significa?

La ① è la def vista nella pg. precedente. La ② dice che quando fisso un ε piccolo a piacere esiste un numero δ tale che $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, calcolo $f(x)$ e $f(x_0) = \ell$, abbiamo che la distanza da $f(x)$ ad ℓ (calcolata tramite il valore assoluto della differenza), quindi $|f(x) - \ell|$ è più piccola del numero molto piccolo ε che avevo fissato inizialmente.

L'Intorno

Si dice intorno di x_0 di semiampiezza δ, un qualunque intervallo aperto contenente x_0, con centro in x_0 e semiamp. δ.



1:00