



Teorema di Weierstrass

Molto importante

Esistono
↓

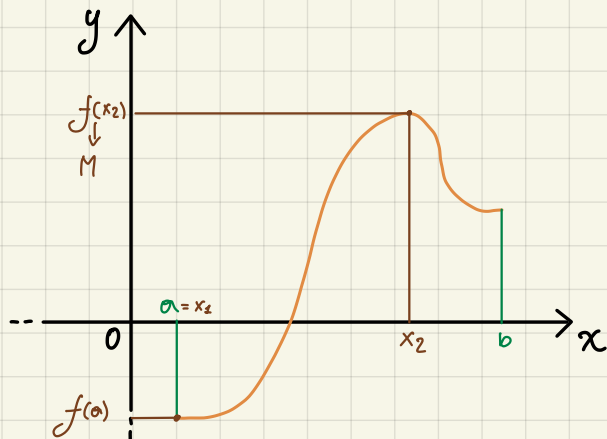
Se abbiamo una funzione f continua in $[a, b]$ (ovv. chiuso e limitato) allora f assume massimo e minimo Assoluti, ovvero:

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] / f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$$

minimo

massimo

Ovvero c'è sempre un valore più piccolo di $f(x)$ ed uno più grande di $f(x)$ in $[a, b]$.



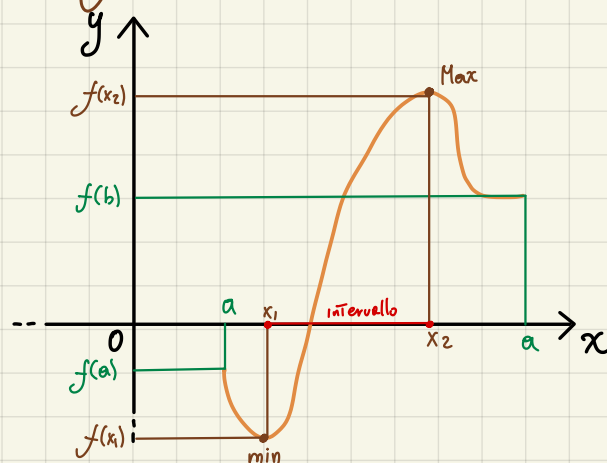
II° Teorema dei valori intermedi

Una f continua in $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il min e max Assoluto

* Questo Teorema è diverso dal I° perché il I° diceva che f assume tutti i valori tra a e b .

Dim: Hp. ci dice che f è continua in $[a, b]$ per il teorema di prima $\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a, b] / f(x_1) = \min = m$ e $f(x_2) = \max = M$.

Tesi: $\forall \bar{y} \in [m, M], \exists \bar{x} \in [a, b] / f(\bar{x}) = \bar{y}$
ovvero ogni volta che fisso un $\bar{y} \in [m, M]$, questo dovrà provenire da un certo $\bar{x} \in [a, b]$.



Consideriamo la funzione ausiliaria (ovvero che serve solo per la dimostrazione) $g(x) = f(x) - \bar{y}$
osserviamo che:

1) g è continua in $[a, b]$ perché f lo è.

$$2) g(x_1) = f(x_1) - \bar{y} \quad m \Rightarrow g(x_1) = m - \bar{y} \quad \text{siccome } m < \bar{y} \Rightarrow g(x_1) = m - \bar{y} < 0$$

$$g(x_2) = f(x_2) - \bar{y} \quad M \Rightarrow g(x_2) = M - \bar{y} \quad \text{siccome } M > \bar{y} \Rightarrow g(x_2) = M - \bar{y} > 0$$

Allora Siamo nelle Hp del Teorema degli zeri, Nell'intervallo $[x_1, x_2]$; visto che gli estremi hanno segno opposto. Quindi \exists almeno uno zero della funz. nell'int $[x_1, x_2]$
 $\Rightarrow \exists \bar{x} \in [x_1, x_2] \subset [a, b] / g(\bar{x}) = 0 = f(\bar{x}) - \bar{y} \Rightarrow f(\bar{x}) = \bar{y}$ C.V.D.
↑
zero

Criterio di Invertibilità

Se f è continua e monotona in $[a, b]$ allora f è invertibile in $[a, b]$.

Dim 00:25

Teorema di continuità delle funzioni inverse

Supponiamo che f sia monotona in un certo $[a, b] \Rightarrow$ Se f è continua in $[a, b]$ allora anche f^{-1} lo sarà.