Integrali indefiniti

Integrali Indefiniti

Problema: Data una funzione f continua in $I=(a,b)$, cerchiamo una funzione F /

$F'(x)=f(x)$ Una tale funzione F si dice **Primitiva** di f

ES: $f(x)=x \Rightarrow$ una primitiva $F(x)$ di $f(x)$ può essere $F(x)=\frac{x^2}{2}$ / $F'(x)=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=f(x)$

Definizione: Una funzione primitiva di una funzione $f(x)$, è una funzione $F(x)$, la cui derivata è $f(x)$.

ES: $f(x)=\cos x \Rightarrow F(x)=\sin x$ / $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$.

ES: $f(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow F(x)=\operatorname{arcTg} x$ / $D(\operatorname{arcTg} x)=\frac{1}{1+x^2}$

Problema: Data f continua in $[a,b]$, di quante primitive è dotata f?

Proposizione Se $F(x)$ è primitiva di f, allora anche $F(x)+c$, $\forall c\in\mathbb{R}$ è una primitiva di $f(x)$.

Dim: $F+c$ è Deriv di $f \Rightarrow D(F(x)+c)$, siccome c è un numero reale, fissiamo un numero reale $\Rightarrow$ $D(F(x)+c)=D(F(x)+D(c)=f(x)+0 \Rightarrow F$ è primitiva di f.

$\Rightarrow$ Abbiamo infinite primitive aggiungendo una generica costante; per questo motivo aggiungiamo "+c" alla funzione primitiva:

$f(x)=F(x)+c$

Problema: esistono altre primitive oltre a $\{F(x)+c \,/\, c\in\mathbb{R}\}$?

NO

A tal proposito vale la **proposizione:** Due primitive di $f(x)$, differiscono per una costante, cioè se $F(x)$, $G(x)$ sono due primitive di f, allora $G(x)-F(x)=c \Leftrightarrow G(x)=F(x)+c$

In altre parole supponiamo di avere due primitive diverse, si dimostra che la differenza tra le due prim. è la costante c.

Quindi G è sempre del tipo $F+C$.

Dim 00:14

Definizione

Sia f continua e derivabile in $[a,b]$. Si dice **Integrale Indefinito** di f l'insieme di tutte le sue primitive, e si denota con:

$$\int f(x)\,dx$$

Per quanto detto: $\boxed{\int f(x)\,dx = \{F(x)+c \mid F \text{ è una primitiva di } f(x), \forall c \in \mathbb{R}\}}$

ES: $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ = qual è la funzione, la cui derivata è $\frac{1}{\cos^2 x}$? $\Rightarrow$ $\tan x + c$

ES: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

00:23

ES: $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$

ES: $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \rightarrow \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$

ES: $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{2x^{3/2}}{3} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$

Proposizione

L'integrale indefinito è un'operatore LINEARE ; ovvero.

1) $\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2) $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$

ES: $\int \frac{x}{x+1}\,dx$ Ci conviene sommare e sottrarre 1 e poi spezzare la frazione: $= \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx$

$= \int \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+1}}^{\,1} - \frac{1}{x+1}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx = x - \ln|x+1| + c$

ES: $\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$ Ci ricordiamo della rel fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \tan x - x + c$

Tan x x

A1

ES: $\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx \overset{R.F}{=} \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x \cos x}\,dx = \int \frac{\sin^{\cancel{2}} x}{\cancel{\sin x}\cos x} + \int \frac{\cos^{\cancel{2}} x}{\sin x \cancel{\cos x}}$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} =$ 00:50 Soluzione da vedere successivamente

ES: $\int \sin^2 x\,dx$ $\quad \cos 2x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{1}{2}\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx$

$\downarrow$

Siccome $D(\sin(2x)) = \cos(2x)\cdot 2 \neq \cos(2x)$. Possiamo procedere così:

$$\int \frac{1}{2}\cdot 2\cos(2x) = \frac{1}{2}\int 2\cos(2x)\,dx = \underline{\frac{1}{2}\cdot \sin(2x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$$

1:00

ES: $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ — Come risolvere gli integrali?

Dobbiamo guardare la funzione integranda, e pensare se essa ci ricorda uno degli integrali immediati.
Siccome in questo caso abbiamo $\frac{1}{\text{qualcosa}}$ pensiamo al logaritmo; però, invece di $\frac{1}{x}$ abbiamo $\sin x$, infatti

$$\int \frac{1}{\sin x} \neq \ln|\sin x|, \text{ perché } D(\ln|\sin x|) = \underline{\frac{1}{\sin x}\cdot \cos x}$$

Potremmo inoltre pensare di aggiungere e togliere, o moltiplicare e dividere, ma questo "giochetto", visto prima, è possibile solo con le <u>COSTANTI</u>.

Capiamo quindi che l'integrale risulterebbe $\ln|\sin x|$ solo se avessimo anche il coseno all'interno dell'integrale nel seguente modo:

$$\int \frac{1}{\sin x}\cdot \cos x\,dx = \ln|\sin x|$$

Da questo deduciamo che:

$$\boxed{\int \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = \ln|f(x)|}$$

ES: $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{1/f(x)}\cdot \underbrace{\sin x}_{-f'(x)}\,dx \Rightarrow -1\int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\frac{1}{f(x)}}\cdot \underbrace{(-\sin x)}_{f'(x)} = -\ln|\cos x| + c$

Pf. $D(-\ln|\cos x|) = -\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = \operatorname{tg} x = f(x)$

Da questo deduciamo le seguenti "regole":

$$\int \cos(f(x))\cdot f'(x) = \sin(f(x)) + c$$

$$\int \sin(f(x))\cdot f'(x) = -\cos(f(x)) + c$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Rightarrow \int f(x)^{\alpha}\cdot f'(x) = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

↳ ES: $\int \underbrace{\sin^2 x}_{f(x)^2}\cdot \underbrace{\cos x}_{f'(x)}\,dx = \frac{\sin^3 x}{3}$ Infatti $D\left[\frac{\sin^3 x}{3}\right] = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}\sin^2 x\cdot\cos x$

ES: $\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,dx =$ Siccome arctg è al denom. ci riconduciamo al logaritmo $\Rightarrow \log|\operatorname{arctg} x|$ perché

$$D(\log|\operatorname{arctg} x|) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

ES: $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\,dx = \ln|\ln|x|| \overset{Pf.}{=} \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$

ES: $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} =$ $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow \int \frac{1}{x\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{D\left(-\frac{1}{x}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\,dx$

$= -\int \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{D\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)+C \overset{Pf.}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$

🚩 1:50

ES: $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ guardando la radice ci viene in mente l'arcosin ma $D(\arccos\sin) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ quindi quello che facciamo sarà:

$\int \frac{1}{\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}} = \int \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+C$ perchè ?

perchè $D\left(\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\cdot\frac{1}{3}$

Quindi ci basta mettere in evidenza la costante che ci da fastidio per poi poterla usare per trovare l'integrale.

ES: $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$ Sappiamo che $D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\sqrt{x}$

quindi $-\int \frac{-2x}{2\sqrt{3-x^2}}\,dx = \frac{1}{-2}\sqrt{3-x^2}+C$ $\overset{Pf.}{\Rightarrow} D\left(-\sqrt{3-x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\cdot x$

ES: $\int \frac{1}{5+x^2}\,dx$ ci ricorda $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{5\left(1+\frac{x^2}{5}\right)}\,dx = \int \frac{1}{5}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{1}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+C$

dobbiamo avere la forma $\left(\frac{x}{a}\right)^2$

Formula generale: $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$

quindi $\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$

Funzioni iperboliche

$D \sinh x = \cosh x \Rightarrow \int \cosh x \, dx = \sinh x + c$

$D \cosh x = \sinh x \Rightarrow \int \sinh x \, dx = \cosh x + c$

Funzioni iperboliche inverse

Abbiamo visto che:

1) $\sinh x$ è una f. crescente $\Rightarrow$ è invertibile.
la f. inversa di $\sinh x$ è quello che si chiama $\text{arcsin}h\,x$, anche noto come $\text{Sett}\sinh x$

settore

ES: $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2} \overset{mcm}{=} \frac{e^{2x}-1}{2e^x} \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{2e^x} - y = 0$

$= \frac{e^{2x}-1-2e^x y}{2e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x y - 1 = 0$ pongo $t = e^x \Rightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0$

$t \underset{\text{ridotta}}{=} \frac{y \pm \sqrt{y^2+1}}{1} \overset{e^x=t}{=} e^x = y + \sqrt{y^2+1} \overset{\log}{=} \log(e^x) = \log(y+\sqrt{y^2+1})$

x

Il sett sin iperbolico $\quad \text{sett}\sinh y : y \to \log(y+\sqrt{y^2+1})$

Quindi
- $\text{sett}\sinh x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$
- $\text{sett}\cosh x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$