Lezione 13
Numeri complessi ed operazioni

Numeri complessi - Forma algebrica

Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $x^2+1=0$? Ovvero $x^2=-1$?
Non esiste alcun numero reale $x \,/\, x^2=-1$.

Si dice unità immaginaria e si denota con la lettera i la soluzione z dell'eq. $z^2=-1$
Quindi $i \,/\, \boxed{i^2=-1}$, i è un Simbolo; non ha un valore numerico.
Importante

Def: Si dice insieme dei numeri complessi / immaginari l'insieme $\mathbb{C}=\{a+ib \,/\, a,b \in \mathbb{R}\}$
Il generico numero complesso si indica con z (equivalente a x per $\mathbb{R}$).

Se $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists\, a,b \in \mathbb{R} \,/\, z=a+ib$.

ES: $z_1 = 1-i$
$z_2 = 3+2i$
$z_3 = 5i$

ES: $z=3-2i$
$Re(z)=3$
$Im(z)=-2$

Visto che $z \in \mathbb{C}$, $z=a+ib \Rightarrow$ "a" si dice parte reale di z;
b, si dice parte immaginaria di z.
Differenziamo quindi le due parti; sia a che b sono reali, ma b moltiplica la parte immaginaria (i).

$a = Re(z)$ $\qquad$ $b = Im(z)$

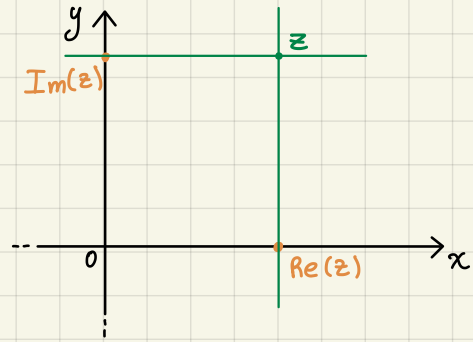
Come Rappresentare i numeri complessi?

Per identificare un num complesso $z=a+ib$ basta conoscere a e b; Posso riferirmi a $z=5+2i$ come la coppia ordinata $(5,2)$, dove 5 è la parte reale e 2 è la parte complessa.

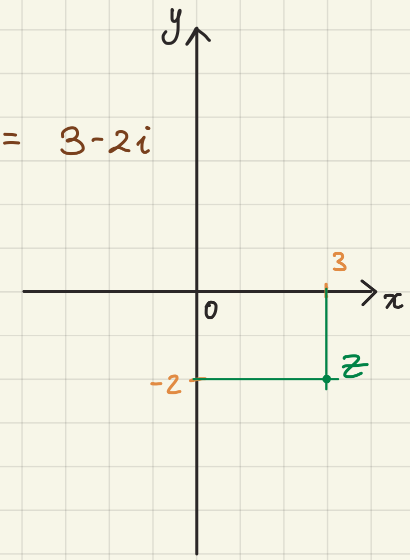
$$z = a+ib \iff z=(a,b)$$

Rappresentiamo $z=a+ib=(a,b)$ come punto sul piano cartesiano ed avremo che
$a = Re(z) =$ Ascissa x
$b = Im(z) =$ Ordinata y

PIANO COMPLESSO



ES: $z = 3-2i$



00:18

Operazioni in $\mathbb{C}$

Somma e differenza

Non sono altro che la somma algebrica che vale nell'insieme dei polinomi:

ES: $\left.\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1 \\ z_2 &= a_2 + ib_2 \end{aligned}\right\} z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 \pm (a_2 + ib_2)$ Usiamo il calcolo letterale usato nei polinomi: basta radunare parte reale e p. imm.

$$= a_1 \pm a_2 + ib_1 \pm ib_2$$
$$= a_1 \pm a_2 \pm i(b_1 + b_2)$$

ES: $(3-2i) + (5+4i) = 3+5-2i+4i = 8+i(-2+4) = 8+2i$

Prodotto

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2) = a_1a_2 + a_1ib_2 + ib_1a_2 + \underbrace{\overset{-1}{i^2}}_{\text{Reale}} b_1b_2 = (a_1a_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2) - (b_1b_2)$$

$$= \boxed{(a_1a_2 - b_1b_2)\; i(a_1b_2 + a_2b_1)}$$

ES: $(2-i)(3+2i) = 6+4i-3i-2\overset{-1}{i^2} = 6+i+2 = 8+i$

ES: $(3+2i)^2 = 3^2 + 4i^2 + 12i = 9-4+12i = 5+12i$

Potenze di i

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

...

Quindi... i viene trattata come una lettera (regole dei polinomi) ma appena incontriamo un i^2 lo riscriviamo come -1.

ES: $(2-3i)(2+3i) \underset{\times \text{ differ.}}{\overset{\text{Somma}}{=}} 4 - 9i^2 = 4+9 = 13$

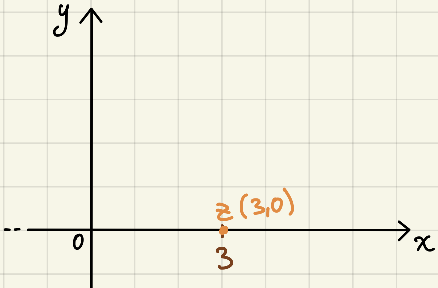
$13 = 13 + 0i$

Oss: Ogni numero reale deve essere un particolare numero complesso, cioè un numero complesso la cui parte immaginaria è nulla:

ES: $z = 3$ $\quad \mathrm{Re}(z) = 3$, $\mathrm{Im}(z) = 0 \leftarrow$ Nulla

$z = 3+0i$

$\hookrightarrow z = (3,0)$



$\Rightarrow$ Tutti punti delle Ascisse (x) hanno parte immaginaria pari a zero (nulla).

Def Se $z = a+ib$, si dice Coniugato di z il numero complesso $\bar{z} = a - ib$.
E' lo stesso numero complesso, ma al posto del segno '+' c'e' il '-';
cioe' la parte immaginaria e' di segno opposto.

ES: $z_1 = 3+2i \Rightarrow \bar{z}_1 = 3-2i$

$z_2 = 5-3i \Rightarrow \bar{z}_2 = 5+3i$

Oss: $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib)$ Somma per diff $\Rightarrow a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$ Somma dei quadrati

ES: Se ho: $\dfrac{3-2i}{2-5i}$ = Chi sono $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$?

Per poterlo scrivere nella forma $z = a+ib$, dobbiamo razionalizzare. Moltiplichiamo e Dividiamo per $(2+5i)$:

$$\frac{3-2i}{2-5i} \cdot \frac{2+5i}{2+5i} = \frac{6+15i-4i-10i^2}{4+\cancel{10i}-\cancel{10i}-25i^2} = \frac{16+11i}{29} = \frac{16}{29} + \frac{11i}{29}$$

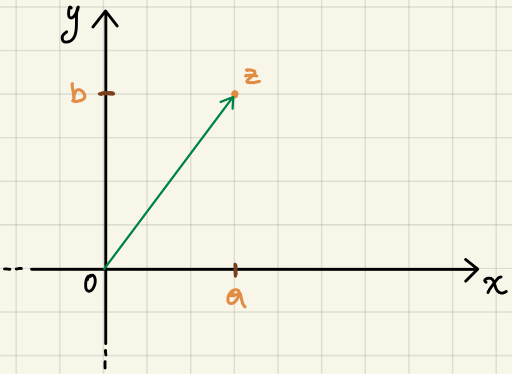
$\to \mathrm{Re}(z) = \dfrac{16}{29}$

$\to \mathrm{Im}(z) = \dfrac{11i}{29}$

☆ Con i n. complessi dobbiamo sempre ricondurci alla forma $z = a+ib$

🚩 1:00 Forma Trigonometrica dei numeri complessi

Prendo $z = a+ib$ e lo rappresento nel piano complesso:

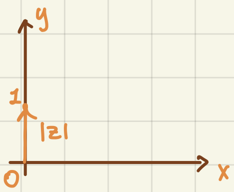


Ogni punto del piano puo' essere visto come il punto Terminale di un vettore; Posso pensare a $z \in \mathbb{C}$ come il vettore OP, dove p e' il punto di coordinate (a,b) che ha come componenti proprio a e b.

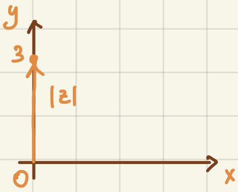
$z = \vec{OP}$ che ha $(Re(z), Im(z))$

$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{Modulo di } z}$

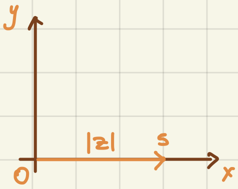
ES: $z = i$



ES: $z = 3i$

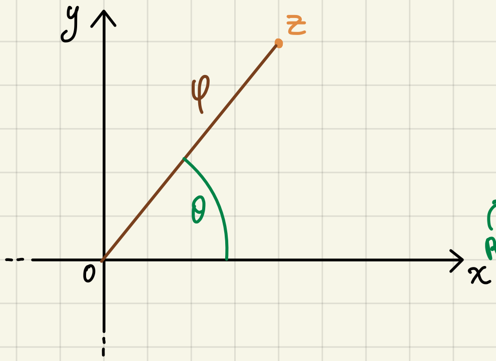


ES: $z = 5$



L'asse delle Ascisse (y) e' anche dello asse Immaginario, perche' in questo asse risiedono tutti i numeri privi di parte reale.

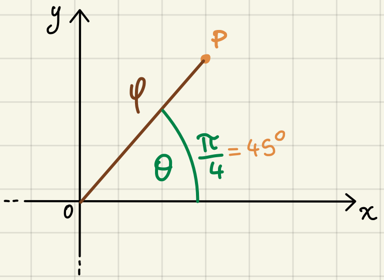
OSS. Continuo: Quando moltiplico $z \cdot \bar{z}$, ottengo $\boxed{a^2+b^2 = |z|^2}$



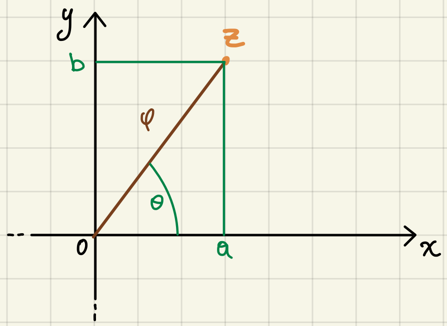
Posso identificare un punto P nel piano, quindi uno $z \in \mathbb{C}$ Tramite le ordinate cartesiane (a, b);
Un altro modo e' quello di usare le coordinate Polari usate in fisica

φ e θ, dove φ e' la distanza di P (o z) dall'origine, e θ e' l'angolo compreso tra x e $\overline{OP}$
Rho Theta

ES: $P(1, \frac{\pi}{4})$



Passare da Coord. Cartesiane a Polari



$$\begin{cases} Ox = Oz \cdot \cos(\theta) \\ x = \varphi \cdot \cos(\theta) \\ a = Oz \cdot \cos(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} Oy = Oz \cdot \sin(\theta) \\ x = \varphi \cdot \sin(\theta) \\ b = Oz \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

$$① \begin{cases} x^{b} = \varphi \sin\theta \\ y^{a} = \varphi \cos\theta \end{cases}$$

Abbiamo $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$, dove $z = x + iy$; Come calcolo φ e θ?
Calcoliamo φ e θ di $z = x+iy$ le ricaviamo dalle eq ①:

- Conosciamo da 1.a che: $\varphi \overset{=|z|}{=} \sqrt{x^2+y^2}$
- Per calcolare θ, che si dice Argomento di z, basta usare le eq ①:
  da 1.b ricaviamo $\cos\theta = y/\varphi$ e da 1.a = $\sin\theta = x/\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = x/\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = y/\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Quindi per trovare modulo ed argomento di un numero complesso $z = x+iy$ basta:

$$\boxed{\varphi = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \text{ e calcoliamo } \theta \in [0, 2\pi] \;/\; \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}}$$

ES: $z = 1+i$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ Calcoliamo Argomento e modulo
$\theta \qquad \varphi$

- $|z| = \varphi = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\theta \in [0, 2\pi] \;/\; \cos(\theta) = \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

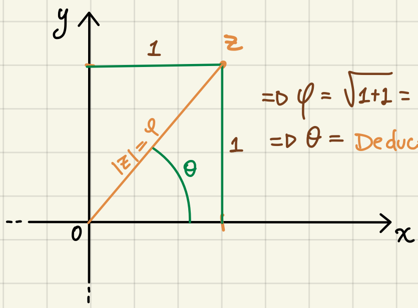
Se $z = x+iy$, calcolo φ e θ Sostituiamo le ① nell'espressione di z:

$$\Rightarrow z = \varphi\cos\theta + i(\varphi\sin\theta) = \varphi(\cos\theta + i\sin\theta) = |z| = z(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Forma Trigonometrica di $z \in \mathbb{C}$

Tornando all'es....

$$z = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\underbrace{\frac{\pi}{4}}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}=45^\circ} + \sin\frac{\pi}{4}\right)$$



$\Rightarrow \varphi = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \theta =$ Deduco graficamente $= 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$