Esercizi limiti

8.4 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$(a)\quad \lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x+|x|}{x}=2 \qquad (b)\quad \lim_{x\to0^-}\frac{x^2+x+|x|}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x+|x|}{x}=\begin{cases}\text{se } x>0: & \dfrac{x^2+x+x}{x}=\dfrac{x^2+2x}{x}=\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}+\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=0^++2=2\\ \text{se } \cancel{x<0} \quad 0^+>0: & \dfrac{x^2+x-x}{x}=\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+x+|x|}{x}=\begin{cases}\text{se } x>0 \quad 0^-<0\\ \text{se } x<0 \Rightarrow \dfrac{x^2+x-x}{x}=0\end{cases}$$

8.5 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to+\infty}(x-2\sqrt{x})=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-2\sqrt{x})=x-2x^{\frac12}=x\left(1-2(1)^{\frac12}\right)=+\infty$$

8.7 Utilizzare la proprietà (11) del paragrafo 7D per dedurre che

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$$

Dal limite notevole $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Verificare che il lim non esiste

$$\lim_{x\to0^+}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}\underset{f(x)}{\sin}\Big(\underset{g(x)}{\frac{2\pi}{x}}\Big)$$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{2\pi}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}f(g(x))=\lim_{x\to0^+}\sin(+\infty)=\nexists$$

Limiti Notevoli

8.15 Verificare che $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{a^x}=0\ (a>1)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{a^x}=\log x \ll a^x \Rightarrow 0$$

8.16 Verificare che, qualunque sia il numero reale b, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^x=e^b.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^x=e^b$$

Limite Notevole: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Se $b=0$: $(1+0)^x=1^x=1$

8.18 Verificare che valgono le relazioni di limite

$$\lim_{x\to+\infty}x\log\left(1+\frac1x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\log\left(1+\frac1x\right)=1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\log\left(1+\frac1x\right)=\log\Big[\underbrace{\left(1+\frac1x\right)^x}_{e}\Big]\Rightarrow\log(e)=1$$

è un lim notevole

Pongo $\frac1x=y$

8.19 Verificare la relazione di limite

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim y\log(1+x)=\lim_{x\to0}\log(1+x)^y=\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to0}\log(1+x)^{x^{-1}}=\lim_{x\to0}\log\left[(1+x)^{x^{-1}}\right]=1$$

-1 ?

8.20 Verificare la validità della relazione

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \text{Limite Notevole} \Rightarrow 1$$