Lezione 25

Esempi formula di Taylor

Esempio: Continuo formula di taylor

Scriviamo la formula di MacLaurin di arcTg x

$f' = \frac{1}{1+x^2} \to 1$, $f' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \to 0$; $f'' = \frac{2[(1+x^2)^2] - 2x[2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}$

$= \frac{-2[1+x^2-4x^2]}{(1+x^2)^3} \to 2$

$f(x) = \text{arcTg}\, x \implies$

$$= \text{arcTg}(0) + \frac{f'(x)\cdot x}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} + \frac{f'''(x)}{3!}x^3 + \dots$$

$$= 0 + (x) - \left(\frac{\cancel{2}}{3\cancel{2}}\cdot x^3\right) + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$= (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Proposizione

Supponiamo che esistono le derivate di f in x_0 seguenti, allora vale il seguente schema:

1. $f'(x_0) = 0 \implies$ Possiamo avere 3 casi:

Vado a calcolare (2) f'':
- $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ min Rel
- $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ max Rel
- $f''(x_0) = 0 \implies$ facciamo la derivata 3 $\implies$ (3)
  - $f'''(x_0) \neq 0 \implies$
    $\implies$ Ne Max Ne min
  - $f'''(x_0) = 0 \implies$
    $\implies$ Si ricomincia come nel caso $f'(x_0) = 0$.

Facciamo la Deriv IV^a (4)
- $f^{IV}(x_0) > 0 \implies$ min
- $f^{IV}(x_0) < 0 \implies$ Max
- $f^{IV}(x_0) = 0 \implies$ Deriv V^a ...

Quando ci conviene questo giochetto?

Quando non riesco a studiare la disequazione (quindi la crescenza della funzione), può essere più semplice calcolare la derivata seconda; se questa calcolata in x0 = 0, andiamo a calcolare la derivata 3. Continuiamo in questo modo finché non troviamo una soluzione o le derivate sono troppo difficili da calcolare.

Studio di funzione Esempio

$f(x) = \ln x - \ln^2 x$

1) Dominio arg. log > 0 : $x > 0 \Rightarrow D = x > 0$

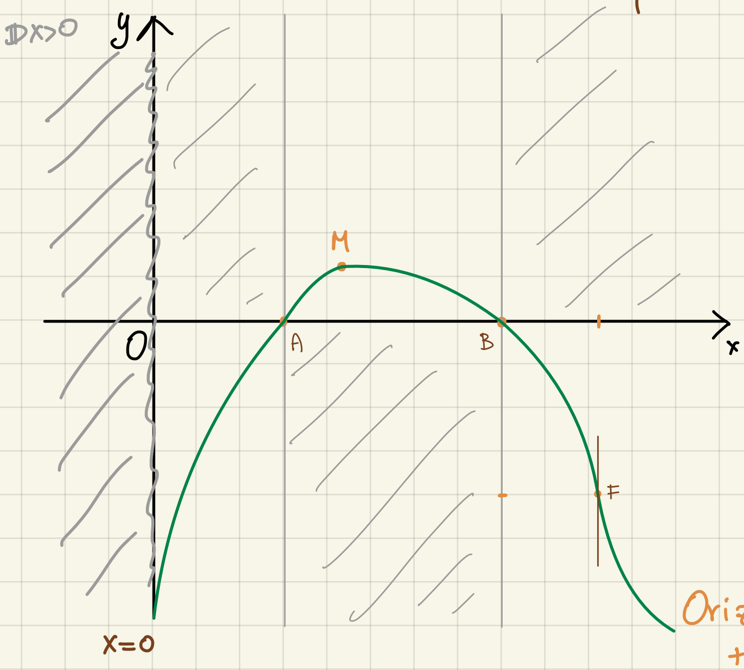
2) Intersezioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \ln 0 - \ln^2 0 \Rightarrow \text{Non def in } 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \ln x - \ln^2 x = 0 \end{cases}$$

Per $\underbrace{\ln x}_{\to\, x = 1}\underbrace{(1 - \ln x)}_{\to\, \ln x = 1 \Rightarrow x = e} = 0$

A(1,0) B(e,0)



3) Segno $f(x) > 0$

$\ln x - \ln^2 x > 0$ per $1 < x < e$

4) Limiti : Asintoti

$x = 0$ Non definita $\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x - \ln^2 x = \underset{-\infty}{\ln 0^+} - \underset{+\infty}{\ln^2 0^+} = -\infty$$

$\Rightarrow x = 0$ è A.V. Dx

Orizzontale. $\lim_{x \to \infty} \ln x - \ln^2 x = \underset{+\infty}{\ln \infty} - \underset{+\infty}{\ln^2 \infty}$

$$= \underset{+\infty}{\ln^2 x}\left(\underset{0}{\frac{1}{\ln x}} - 1\right) = -\infty \Rightarrow \text{NO A. Oriz}$$

A. Ob.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x - \ln^2 x}{x} = \frac{\ln^2 x(-1)}{x} = \frac{-\ln}{x}$$ $\ln << x \to 0 \Rightarrow$ NO A. Ob.

5) Deriv I^a $f' = \frac{1}{x} - 2\ln x\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}(1 - 2\ln x)$

1.a) Condiz. necessaria: $f'(x) = 0$; $\frac{1}{\cancel{x}}(1 - 2\ln x) \Leftrightarrow 1 - 2\ln x = 0$ per $\ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{1/2}$ possibile estremo rel.

$\not\exists x$

$f' > 0 \Leftrightarrow x < e^{1/2}$

$e^{1/2}$ 1,6

$-$ | $+$

$\nearrow$ $\searrow$

max

Calcolo le coord.

$$f(e^{1/2}) = \ln e^{1/2} - (\ln e^{1/2})^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \left(e^{1/2}, \frac{1}{4}\right)$ max

Troviamo il max con il metodo della deriv II:

$$f'' = -\frac{1}{x^2}(1 - 2\ln x) + \frac{1}{x}\left(-\frac{2}{x}\right) = -\frac{1 - 2\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\left[3 - 2\ln x\right] \geq 0$$

Per trovare il max con la deriv II dobbiamo calcolare $f''(e^{1/2})$:

$$f''(e^{1/2}) = -\frac{1}{(e^{1/2})^2}\left[3 - 2\ln e^{1/2}\right] = -\frac{1}{e}\left[3 - 2\ln e^{1/2}\right] = -\frac{2}{e} < 0 \Rightarrow e^{1/2} \text{ Max}$$

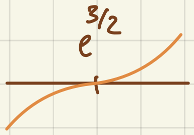
6) Concavità e convessità: $f''(x) \geq 0$

$-\frac{1}{x^2}\left[3-2\ln x\right] \geq 0$ per $3-2\ln x \leq 0$; $\ln x \geq \frac{3}{2}$; $x \geq e^{3/2}$

Possibile flesso

Calcolo l'ordinata

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{e^{3/2}} \\ - & + \\ \cap & \cup \end{array} \Rightarrow$$



$f(e^{3/2}) = \ln e^{3/2} - \ln^2 e^{3/2} = \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{6-9}{4} = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \left(e^{3/2}, -\frac{3}{4}\right)$ F