Prima parte da Elia Bombardelli

Integrali Impropri

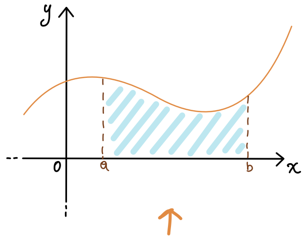
Per capire cosa sono gli integrali impropri capiamo prima cosa sono gli integrali propri:

Negli integrali propri:

- La zona di integrazione è limitata (a, b)
- La funzione integranda è limitata

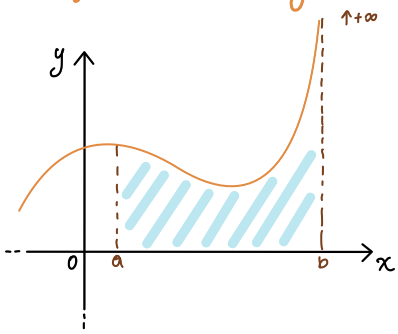
$\Downarrow$

Se una o entrambe queste proprietà non sono rispettate, parliamo proprio di integrale Improprio.



nell'intervallo (a,b) non ci sono punti in cui la funzione tende a $\pm\infty$

Integrazione di funzioni illimitate



Sia $f(x): [a,b]$ continua ed <u>ILLIMITATA</u> a sinistra di b, ovvero $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$;

In questo caso si definisce

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \boxed{\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}$$

N.B. L'integrale è di tipo PROPRIO, quindi si risolve allo stesso modo degli altri.

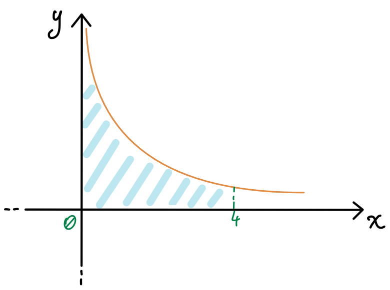
Se la funzione tende a $\pm\infty$ a sinistra, si risolve nel seguente modo:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

- Se, in entrambi i casi, il limite esiste ed è finito, allora si dice che la funzione è integrabile in (a,b) oppure che l'integrale tra a, b di $f(x)\,dx$ Converge.

- Se il risultato è $\pm\infty$ allora l'integrale improprio Diverge a $\pm\infty$
- Se il lim non esiste, allora l'integrale non esiste o è indeterminato.

ES: $\int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow I = [0,4]$; $Df(x) = x > 0$, $\Rightarrow I = (0, 4]$

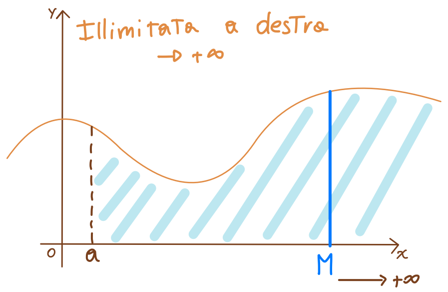


Applichiamo la Definizione

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{4} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{D(\sqrt{x})}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\sqrt{x}\right]_{\varepsilon}^{4} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\sqrt{4} - \cancel{\sqrt{\varepsilon}}^{\,0}\right] = 2$$

Converge

Integrali con zona di integrazione Illimitata



Sia $f:[a,+\infty] \to \mathbb{R}$ una funzione continua

In questo caso si definisce come

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \boxed{\int_a^M f(x)\,dx}}$$ Integrale proprio

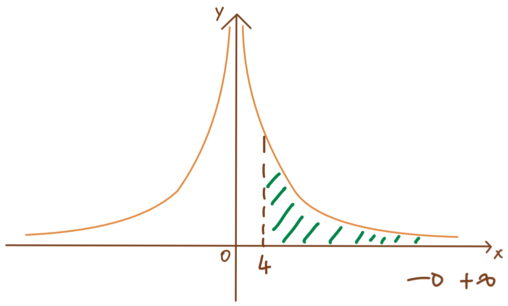
L'idea è quella di integrare $f(x)$ fino ad un valore M molto grande, e poi far tendere questo valore a $+\infty$.
Quando abbiamo $I = (-\infty, b]$, allora avremo:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty} \boxed{\int_M^b f(x)\,dx}}$$ Integrale proprio

Anche in questo caso parliamo di integrali propri, impropri ed indeterminati a seconda del risultato del limite.

ES: $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_4^M \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \Big[\underbrace{-\frac{1}{M}}_{0} + \frac{1}{4}\Big] = 1/4$ Converge

$\int x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x}$



Casi di integrazione impropria piu' complessi

ES:
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_2^M \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$$

Procediamo per sostituzione: pongo $t = \ln x$

$\Rightarrow 2 \to \ln 2$, $M \to \ln M$, inoltre $dt = D(t) = \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow x\,dt = dx$

Otteniamo
$$\lim_{M\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln M} \frac{1}{\cancel{x}\, t^2} \cdot \cancel{x}\, dt = \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln 2}^{\ln M} = \lim_{M\to\infty} \left[-\underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\to 0} + \frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}$$

ES 2: **Intervallo illimitato sia a Sx che a dx**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Risoluzione: possiamo riscrivere l'integrale come la somma di integrali di piu' semplice risoluzione

numero a caso

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_3^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{M\to-\infty} \int_M^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{M\to+\infty} \int_3^M \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{M\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_M^3 + \lim_{M\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_3^M$$

$$= \lim_{M\to-\infty} \left[\operatorname{arctg}(3) - \underbrace{\operatorname{arctg}(M)}_{\to -\frac{\pi}{2}}\right] + \lim_{M\to+\infty} \left[\underbrace{\operatorname{arctg}(M)}_{\to \frac{\pi}{2}} - \operatorname{arctg} 3\right] = \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

converge

Possibile scorciatoia

Controllo se prima f e' PARI: $f(-x) = \frac{1}{1+x^2} = f(x) \Rightarrow$ PARI

$$\boxed{\text{Se } f(x) \text{ e' pari, allora } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx}$$

ES 3: **Integrale improprio "celato"**

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Controlliamo l'estremo dx dell'integrale: $D = x^2 \neq 0$ per $x \neq 0$

$\Rightarrow f(x)$ non e' definita in 0!

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} \to +\infty \longrightarrow$ anche in questo caso abbiamo un intervallo illimitato sia a Dx che a Sx; dividiamo l'integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon \neq 0}^1 \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{x}}\,dx + \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 + \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^M$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-1 + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\to +\infty}\right] + \lim_{M\to+\infty} \left[-\underbrace{\frac{1}{M}}_{\to 0} + 1\right] = +\infty \leftarrow \text{Diverge}$$

Metodo risolutivo per integrali con "piu'" problemi

1. Spezzare l'integrale in una somma di piu' integrali aventi un "singolo problema".
2. Risolvere i diversi integrali
3. Dedurre il comportamento del singolo integrale sommando i diversi integrali

N.B. Se almeno uno dei "pezzettini" $\to \pm\infty$ allora l'integrale di partenza e' indeterminato.

• Dalla lezione del professo

Criterio del confronto

Se $f(x) \geq 0$ e $\leq g(x)$ in $I = [a,b)$, e f e g sono infinite in b (sono non limitate)

1) Se $\int_a^b g(x)\,dx$ è convergente, allora $\int_a^b f(x)$ è convergente

2) Se $\int_a^b f(x)\,dx$ è divergente, allora $\int_a^b g(x)$ è divergente

Dimostrazione:

$0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g \Rightarrow$ Se l'integrale superiore g è finito, per forza l'integrale f è finito a sua volta.

Se $|f(x)| << \frac{1}{|x-x_0|^p}$ ← Confrontiamo la funzione generica f con la funzione $\frac{1}{|x-x_0|^p}$

Abbiamo il seguente criterio del confronto Asintotico:

Se f è un infinito in x_0 d'ordine $p<1$, allora:

$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx \quad \text{è convergente.}$$

Se f è un infinito in x_0 d'ordine $p \geq 1$, allora:

$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx \quad \text{è divergente.}$$

Il concetto è il medesimo di quello adoperato per le serie.

Dim a 00:21

ES: $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$ Studiare il seguente integrale improprio

Possiamo dire se converge o meno anche senza calcolarlo.

1) Controllare se $f(x)$ è infinita in un punto dell'intervallo di integrazione $[1,2]$.
→ L'integrale è improprio perché la f non è definita in $x=2$.

2) Con il criterio del confronto Asintotico possiamo già dire qualcosa:
Sappiamo che $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ è un infinito in $x_0 = 2$ di ordine $\frac{1}{(x_0-x)^{\frac{1}{2}}}$ $\quad \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se $p<1$, allora $\int_1^2 f(x)\,dx$ Converge

ES: $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ → Prima di calcolare, studiare il carattere del seguente integrale

In $x=2$, $f(x)$ è un infinito di ordine $(4-x^2) = (2+x)(2-x) = \frac{1}{\sqrt{(2-x)(2+x)}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{[\underbrace{(2+x)}_{\text{Non da problemi}}\underbrace{(2-x)}_{=0 \text{ se } x=2}]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}\,(x-2)^{\frac{1}{2}}}$$ ← ordine

↓ Ci rende infinita la funzione

$\Rightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ Diverge

Calcoliamo $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \lim_{c\to 2^-} \int_1^c \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ calcolo l'integ. $= \int_1^c \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}}\,dx = \int_1^c \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\,dx$

$\Rightarrow \int_1^c \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx$ $D\left(\frac{x}{2}\right)$ $=$ $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow \lim_{c\to 2^-} \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_1^c = \left[\arcsin \cancel{\frac{c}{2}}^{1} - \arcsin \cancel{\frac{1}{2}}\right]$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

ES: $\int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln x}\,dx$ $\quad D.\ x\ln x \neq 0 \quad \cup \quad x>0 \to \underline{x>0} \to$ Diventa infinita in 0

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln x} = \frac{1}{0^+\cdot(-\infty)} \xrightarrow{\text{limite notevole}} \frac{1}{0} \to +\infty$

- Di che ordine di infinito è?

Abbiamo x^1 che è di ordine 1 e $\ln x$ che è di ordine molto piccolo; in genere si indica con ε, ovvero una quantità piccola.

Siccome abbiamo due funzioni, l'ordine si calcola nel seguente modo: $x^1 \ln x^{\varepsilon} \to$ ordine $= 1+\varepsilon \geq 1$

$\Rightarrow$ l'integrale <u>Diverge</u>

Calcoliamo l'integrale:

$\int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ calcolo l'integ. $\int_c^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \ln|\ln x|\Big|_c^{1/2} =$

$|-\infty| \to +\infty$

$= \lim_{c\to 0^+} \left[\ln|\ln\tfrac{1}{2}| - \cancel{\ln|\ln(c)|}\right] = -\infty$ Diverge

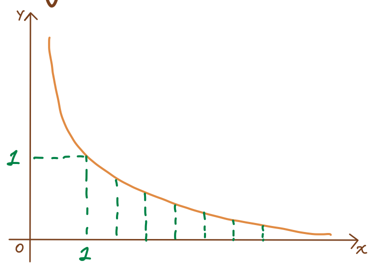
$+\infty$

Integrali di una funzione limitata per intervalli illimitati

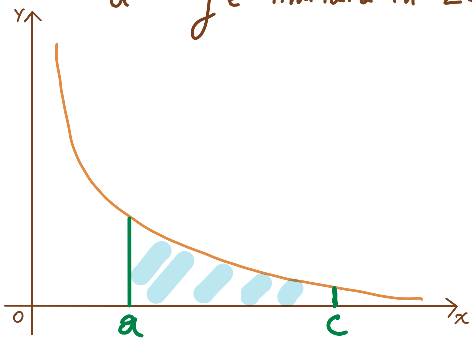
1:20
* questa parte è stata già vista all'inizio del file.

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ dove f è limitata (non tende a $\pm\infty$) in $[a, +\infty)$

ES: $f(x) = \frac{1}{x}$



Sia $c > a \Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx$ è ben definito perchè f è limitata in $[a, c]$



Definizione: si dice che f è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty)$ se

$$\exists \lim_{c\to+\infty} \int_0^c f(x)\,dx = (1)$$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è
- Convergente se (1) è finito
- Divergente se (1) è infinito
- Se (1) è indeterminato.

Infine l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ si calcola come $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$ se (1) esiste

ES: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[\ln|x|\right]_1^c = \left[\ln|c| - \ln|1|\right] = +\infty$ Diverge.

ES: Infinitesimo Campione:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^p}\,dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{c^{p-1}} - 1\right] = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p-1>0 \quad p>1 \\ +\infty & p-1<0 \quad p<1 \end{cases}$$

Dipende da p

$+\infty \leftarrow$ diverge

$$\int x^{-p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge se $p>1$
Diverge se $p\leq 1$

Criterio del confronto Asintotico

Supponiamo che f sia un infinitesimo all'infinito d'ordine p. Allora:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \begin{cases} \text{Converge} & \text{se } p>1 \\ \text{Diverge} & \text{se } p\leq 1 \end{cases}$$

(il contrario di $\int_0^a f(x)\,dx$)

ES:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+5}{x^3-x^2+5x-5}\,dx$$

Per il criterio prec. $\Rightarrow$ $p=2>1$ $\Rightarrow$ l'integrale converge.

Calcoliamolo esplicitamente

$$\lim_{M\to+\infty} \int_2^M \frac{x+5}{x^3-x^2+5x-5}\,dx = \int_2^M \frac{x+5}{x^2(x-1)+5(x-1)}\,dx = \int_2^M \frac{x+5}{(x-1)(x^2+5)}\,dx = \frac{A}{(x-1)} + \frac{bx+c}{x^2+5}$$

$$\frac{A(x^2+5)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+5)} = \frac{Ax^2+5A+Bx^2-Bx+Cx-C}{//} = \frac{x^2(A+B)+x(C-B)-C}{//} = \frac{x+5}{//}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \Rightarrow A=6 \\ C-B=1 \Rightarrow B=C-1 \Rightarrow B=-5-1=-6 \\ -C=5 \Rightarrow C=-5 \end{cases} \Rightarrow \int_2^M \frac{6}{(x-1)} + \int_2^M \frac{-6x-5}{x^2+5}\,dx$$

$$= 6\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{6x-5}{x^2+5}\,dx = 6\ln|x-1| - \int \frac{6x-5}{x^2+5}\,dx \ \ldots$$

Altri es a 1:40 c.a.