Funzioni continue

Affinché una f sia continua in un punto devono verificarsi 3 condizioni contemporaneamente.

1) $f(x_0)$ deve esistere $\Rightarrow$ $x_0 \in D$
2) $\exists$ FINITO $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
3) $\boxed{f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = l}$ $\Rightarrow$ $f(x_0) = l$

RIASSUMENDO

ES: $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ continua in $x = -1$?

① Dominio: $x+1 \neq 0$ per $x \neq -1$

$\Rightarrow f(-1) \nexists$, $x = -1 \notin D$ $\Rightarrow$ NO CONT.

ES: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

① $\exists f(0)$? $\rightarrow$ $f(0) = 1$ ✓

② $\exists$ finito $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\rightarrow$ lim notevole $\rightarrow$ 1 ✓

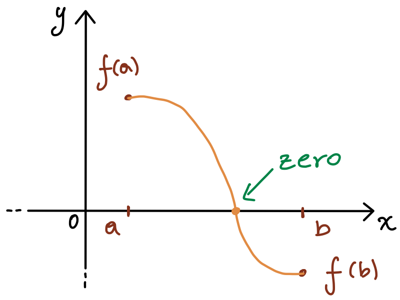
③ $f(x_0) = 1$? $f(0) = 1$ ✓

$\Rightarrow$ La funz. è continua in $\mathbb{R}$

Teorema esistenza degli zeri

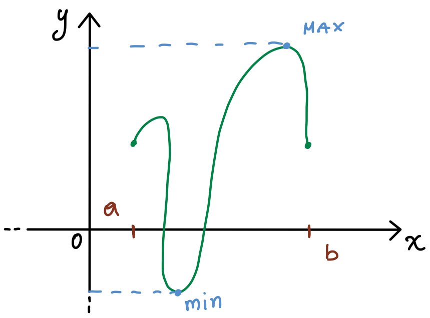
- Gli "zeri" sono i punti in cui la f interseca l'asse x, ovvero se $f(x_0) = 0$, x_0 è uno z

Se abbiamo una f continua in $I\,[a, b]$, presi due punti c, d dell'intervallo, se $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ (e viceversa), allora il teorema ci garantisce l'esistenza di almeno uno zero.



Teorema di Weierstrass

ESISTENZA DI MAX / min ASSOLUTI



Se f è continua nell'intervallo (o insieme) LIMITATO $I = [a, b]$

Allora il teorema di W. assicura l'esistenza di un Max e min Assoluto.

Punti di Discontinuità

I Specie → lim dx e sx NON coincidono

ES: $\frac{2}{1+3^{\frac{1}{x}}}$ $x_0 = 0$ è un pto di disc. Perché: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{2}{1+3^{+\infty}} \to 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{1} = 2$

II Specie → Almeno uno dei lim dx e sx fa $\pm\infty$

ES: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$ $x \neq 0$ → $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{e^0 - 1}{0^+} \to \frac{0}{0^+} \Rightarrow$ De L'Hôpital $\lim \frac{D(e^x - 1)}{D(x^2)} = \frac{e^x}{2x}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \underset{\downarrow 1}{e^x} \cdot \frac{1}{2x} \to 0$ → $\frac{1}{0^+} = \underline{+\infty}$; $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2} =$ De L'Hôpital → $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{0^-} = \underline{-\infty}$

Quindi oltre ad essere diversi, almeno uno dei due lim → $\pm\infty$

III Specie

→ $\exists \lim_{x \to x_0} = \ell$ Ma $f(x_0) \nexists$ / $\exists f(x_0)$ MA $\neq \ell$

ES: $f(x) = \frac{(1+x)^5 - 1}{x}$ D: $x \neq 0$ → $\underline{f(0) = \nexists}$ $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = 5(1+x)^4 \to \underline{5}$

Quindi il lim dx e Sx $\exists$ e finito ma non esiste $f(x_0)$

Cambiamento di variabile nei limiti

ES: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1}{13x}$ vogliamo ricondurci a $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

pongo $t = 4x \Rightarrow$ Se $x \to 0$, allora $t = 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow t \to 0$. Inoltre se $t = 4x \Rightarrow x = \frac{t}{4}$

Riscrivendo: $\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{13\frac{t}{4}} = \underbrace{\frac{e^t - 1}{t}}_{1} \cdot \frac{4}{13} \to \frac{4}{13}$

Infinitesimi

Se la funz. $f(x)$ tende a 0 per $x \to x_0$, $f(x)$ è un infinitesimo.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ è un infinitesimo

Confronto di infinitesimi Siano α_1 e β_1 due infinitesimi:

ES: $\alpha_1 = x$, $\beta_1 = 1 - \cos x$. Qual è l'inf. di ordine maggiore?

→ $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \cos x} = \infty \Rightarrow x$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $f = 1 - \cos x$

ES: $f(x) = \sin x$ $g(x) = 2x$ → $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \neq 0 \Rightarrow$ Stesso ordine