



# Funzioni



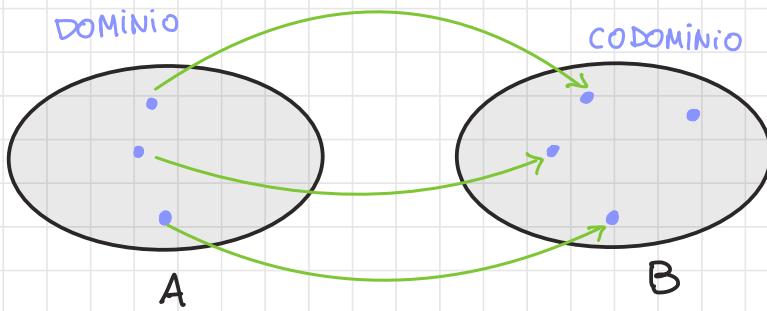
# F. Iniettive, Suriettive e Bigettive

## F INIETTIVA

Dati 2 insiemi  $A$  e  $B$ , una funzione  $f: A \rightarrow B$  si dice iniettiva se

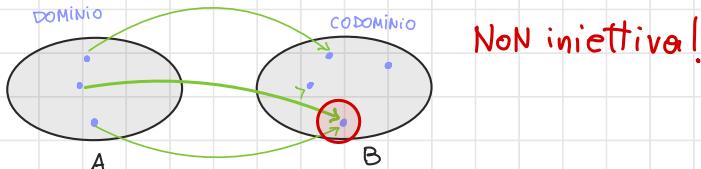
$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

In poche parole, se ad elementi diversi del dominio, la funzione associa elementi diversi del codominio.



- Ogni elemento del codominio ( $B$ ) è "colpito" AL MASSIMO da una freccia

- NON E' IMPORTANTE che tutti gli elementi di  $B$  abbiano siano "colpiti".



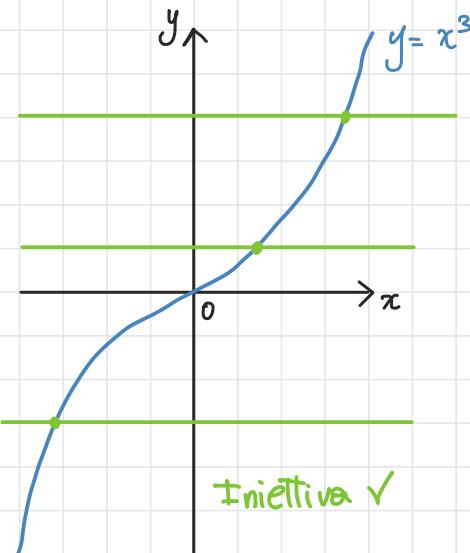
## ESEMPIO

$$f(x) = x^3$$

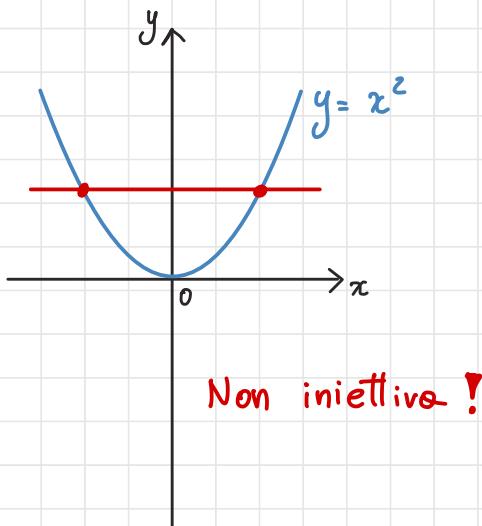
$$\text{con } x_1 \neq x_2 \rightarrow (x_1)^3 \neq (x_2)^3$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e' iniettivo!}$$

# Come riconoscere le $f$ iniettive?

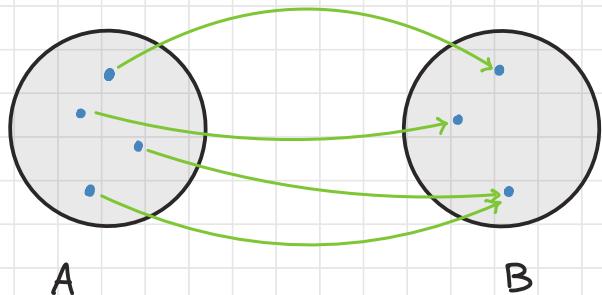


Possiamo dire graficamente che una  $f$  è iniettiva se la retta orizzontale  $y = x$ , questa interseca la funzione una sola volta.



# Funzione Suriettiva

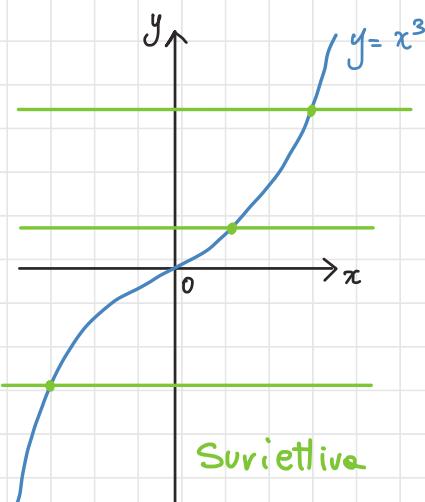
$$\forall b \in B \exists a \in A / b = f(a)$$



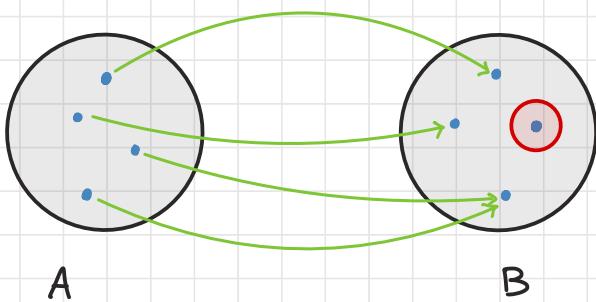
Suriettiva ✓

## ESEMPIO

$$f(x) = x^3$$



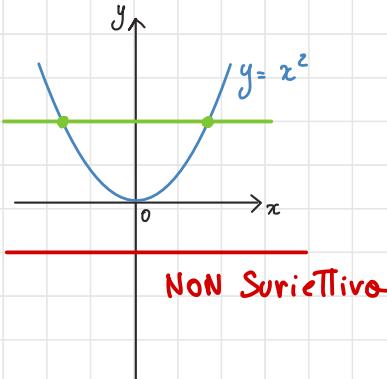
Tutti gli elementi del codominio sono immagine di almeno un elemento del Dominio.



NON Suriettiva ✗

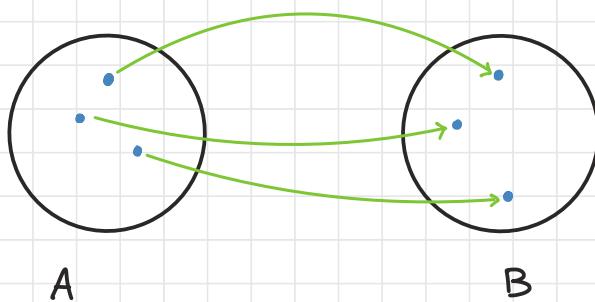
Graficamente...

Una  $f$  è suriettiva se, con una qualunque retta orizzontale, intersechiamo il grafico ALMENO una volta.



## Biiettiva

Una funzione si dice Biiettiva quando e' sia iniettiva che suriettiva.



Ad ogni elemento di B corrisponde uno di A e viceversa.

In questi casi e' possibile calcolare la **funzione inversa**

## Esempio

La funzione  $x^3$  e' Biiettiva. Inoltre una  $f$  e' Biiettiva se e solo se il suo grafico viene intersecato da una qualsiasi retta orizzontale esattamente uno volto.

# Dominio di funzione

Quando ci viene chiesto di trovare il Dominio di una funzione, dobbiamo trovare il più grande sottoinsieme entro il quale la funzione NON PERDE DI SIGNIFICATO.

## FATTORI DI INTERESSE

### 1) DENOMINATORI

Se ci sono, questi vanno posti  $\neq 0$ , questo perché le funzioni non sono definite dove i loro denominatori si annullano. (non possiamo dividere per 0)

ESEMPIO:  $f = \frac{x}{x^2 - 4}$   $\mathbb{D} = x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$   
 $\Rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm 2\}$

### 2) RADICI CON INDICI PARI

Le radici pari sono definite solo quando il loro argomento è  $\geq 0$ .

ESEMPIO:  $y = \sqrt[4]{3-x}$   $\mathbb{D} = 3-x \geq 0 \text{ per } x \leq 3$   
 $\Rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\}$

### 3) LOGARITMI

Gli argomenti dei logaritmi vanno posti  $> 0$

ESEMPIO  $f = \log_7(3-x)$   $\mathbb{D} = 3-x > 0 \text{ per } x < 3$   
 $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$

#### 4) Funzioni elevate a funzioni

$f(x)$        $g(x)$   
La funzione più interna va posta  
Esempio:  $(x-1)^{\sin x}$        $> 0$

$$\mathbb{D} = x-1 > 0 \text{ per } x > 1$$

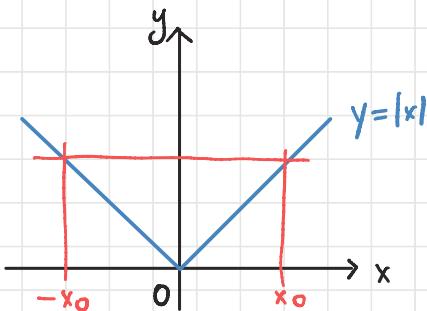
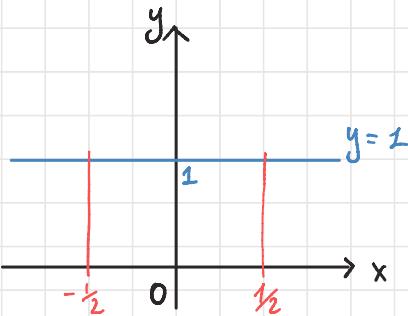
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

# Simmetrie e periodicità

Funzioni pari  $\forall x \in \mathbb{D}$ ,  $f(-x) = f(x)$

Se calcoliamo la funzione in (4), il valore ottenuto è lo stesso che si ottiene in (-4).

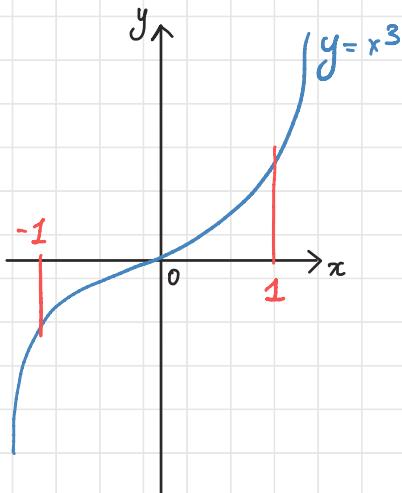
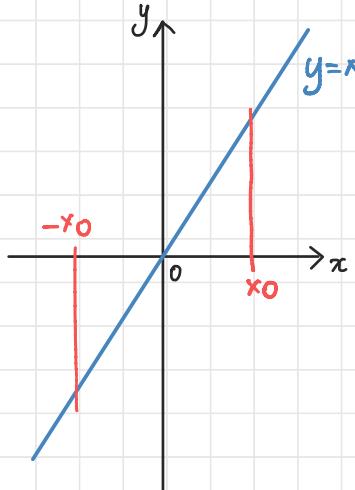
Inoltre queste funzioni sono simmetriche ad y.



## Funzioni Dispari

Se  $\forall x \in \mathbb{D}$ ,  $f(-x) = -f(x)$

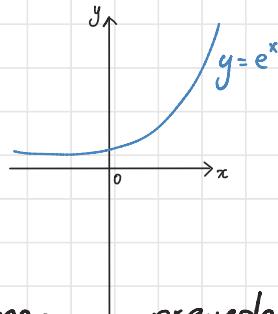
Se ad esempio in  $f(4) = 7$ , allora in  $f(-4) = -7$



# Ricapitolando

$f(-x) = f(x)$  PARI  $\rightarrow$  Simmetrica ad y  
 $f(-x) = -f(x)$  DISPARI  $\rightarrow$  Simmetrica ad O

Nessuna delle due  
 $\rightarrow$  potrebbe essere simm  
ad un'altra retta.



## A che ci serve?

Possiamo usare queste informazioni per procedere e verificare lo studio di funzione.  
Ad esempio se abbiamo una  $f$  pari, se troviamo un max in  $f(x)$ , avremo un altro max in  $f(-x)$ .

## ATTENZIONE!

Dobbiamo cercare simmetrie pari o dispari SOLO SE il dominio dello  $f$  è simmetrico a  $x=0$ .

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm 2\} \quad \checkmark$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 3\} \quad \times$$

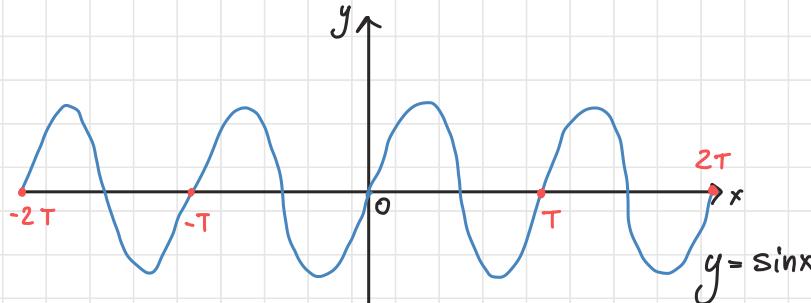
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} / x < -1 \vee x > 1\} \quad \checkmark$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} / x > 5\} \quad \times$$

## Funzioni PERIODICHE

Una  $f$  è periodica se  $f(x+T) = f(x)$

In altre parole, essa si ripete dopo ogni periodo:



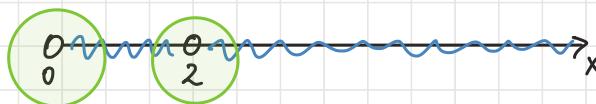
## Asintoti

La retta  $x=a$  è un asintoto verticale per la funzione  $f(x)$  se accade almeno uno di questi casi:

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

### ESEMPIO

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x-2}$$
$$\mathbb{D} = \begin{cases} x > 0 \\ x-2 \neq 0 \text{ per } x \neq 2 \end{cases}$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus x > 0 \wedge x \neq 2\}$$



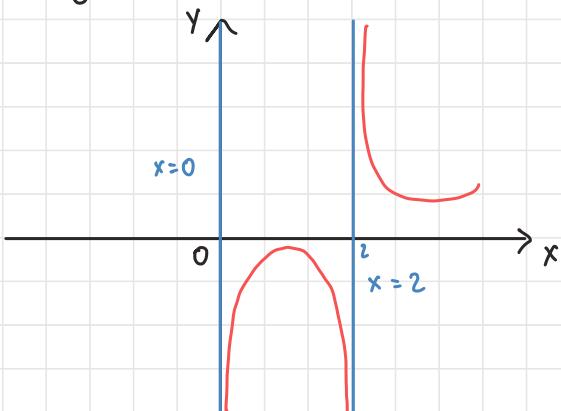
Le rette  $x=0$  e  $x=2$  POTREBBERO essere degli asintoti vert.  
Calcoliamo quindi i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \ln 2^- + \frac{1}{2^- - 2} = \ln 2 + \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \ln 2^+ + \frac{1}{2^+ - 2} = \ln 2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln 0 + \frac{1}{0 - 2} = -\infty - \frac{1}{2} = -\infty$$

Possiamo concludere che le rette  $x=2$  e  $x=0$  sono degli asintoti verticali.



## ESEMPIO

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{0^-} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{0^+} = 1$$

Nessun Asintoto!

