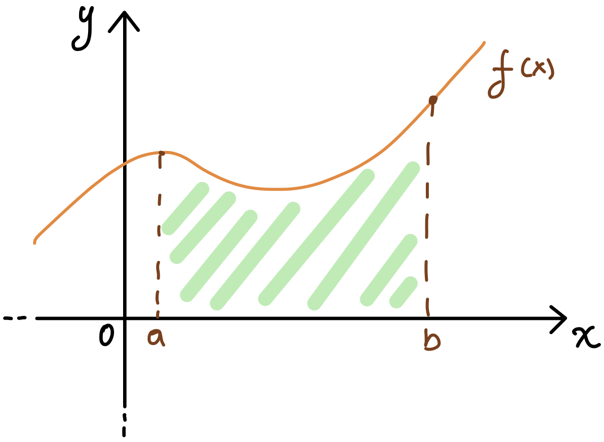
Integrali Definiti

Integrali Definiti

Anche se usano lo stesso nome degli I. Indefiniti, gli I. definiti appartengono ad un "problema" completamente diverso.

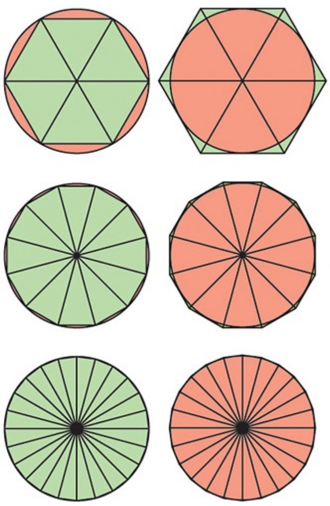
Problema: sia f continua in $[a,b]$, ed $f(x) \geq 0$ in $[a,b]$.



Come calcoliamo l'area compresa tra il grafico della funzione f e l'asse x?

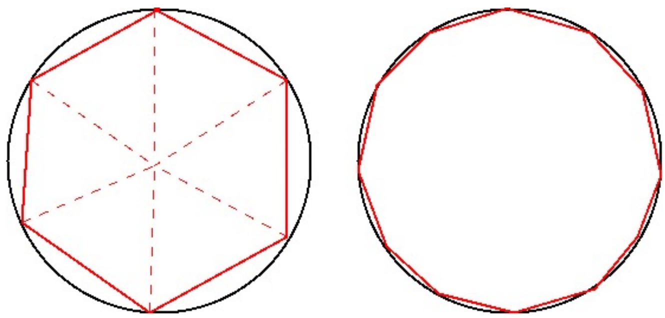
O più in generale: come calcoliamo l'area di una figura CURVILINEA, o quantomeno approssimarne l'area?

Per approssimare l'area di un cerchio possiamo usare un poligono regolare inscritto o circoscritto al cerchio.



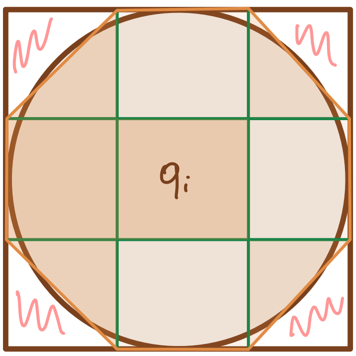
Infatti: $\lim_{n \to +\infty} \text{area}(P_n) = \text{area cerchio}$

$\lim_{n \to +\infty} \text{Perimetro}(P_n) = \text{lunghezza cerchio}.$



Man mano che il numero dei lati di P_n aumenta, il perimetro o area di P_n tende ad essere proprio uguale a quello del cerchio.

Metodo degli Egizi:



L'area del quadrato è molto diversa da quella del cerchio; ma se consideriamo l'area dell'ottagono che si crea andando a togliere gli spigoli al quadrato stesso, otteniamo:

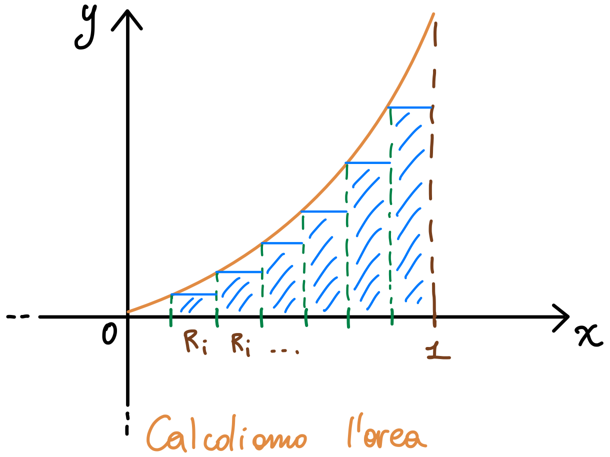
$$\text{area } O_8 = \text{area } Q - 2q_i$$

quadrato grande

quadrati piccoli

Metodo di Esaustione

Tramite questo metodo possiamo calcolare l'area del segmento Parabolico:



Prendiamo $y = x^2$ in $I = [0, 1]$

Dividiamo $[0,1]$ in n intervalli più piccoli che chiamiamo: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ con $x_0 \to 0$, $x_n \to 1$

La somma dei vari rettangoli in BLU è un'approssimaz. dell'area sottesa alla curva.

Calcoliamo l'area

$[a,b] \to b-a$ $\qquad$ $y = x^2 \to f(x_i) = x_i^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} \text{area } R_i = \sum_{i=1}^{n} b \times h = \sum_{i=1}^{n} \overset{b}{(x_{i+1}-x_i)} \overset{\times}{\cdot} \overset{h}{f(x_i)} = \underset{\text{n rettangoli}}{\frac{1}{n}} \cdot x_i^2$$

$$\text{area } P_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i^2}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2$$

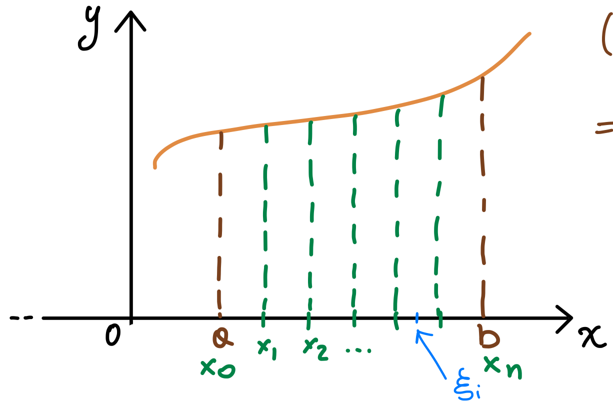
indipend da i

$$x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \quad x_3 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \quad \dots \Rightarrow x_i = \frac{i}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

Integrale secondo Riemann

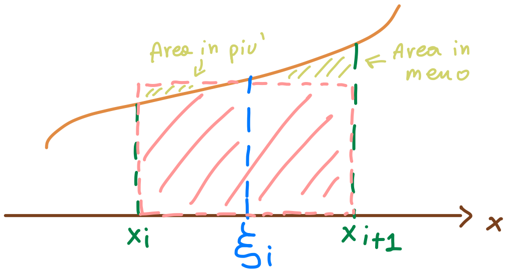
Sia f continua in $[a,b]$; dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n parti tramite i punti $x_0 \equiv a,\ x_1, x_2, \dots, x_n \equiv b$.



$(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n}$ ← ogni intervallo e' lungo $\frac{b-a}{n}$

$\Rightarrow$ Consideriamo la seguente quantita' :

$$S_n = \sum (x_{i+1} + x_i) - f(\xi_i)$$



Prendo un generico punto ξ_i compreso nell'intervallo (x_i, x_{i+1}) , quindi faccio questo per ogni intervallo $\in (a,b)$.

Quindi, con $S_n = \sum (x_{i+1} + x_i) \cdot f(\xi_i)$ Stiamo prendendo la "base" di un ipotetico rettangolo, e la stiamo moltiplicando per l' "altezza" $f(\xi_i)$.

facendo questo, andiamo a calcolare l'area dell' n-esimo rettangolo, andando a calcolare "un po' di area in piu'" a sx ed "un po' di area in meno" a Dx (per una f crescente). In questo modo, la somma di tutti i rettangoli n-esimi , Approssima l'area sottesa alla curva:

$$S_n = \sum_{n=i}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f(\xi_i) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)}$$

Le S_n si dicono somme di CAUCHY - RIEMANN

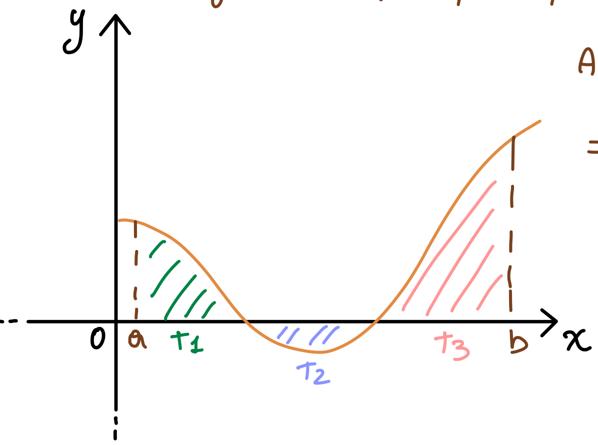
Definizione: Si dice che f e' integrabile secondo Riemann se esiste finito il :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \ell}$$ per definizione si indica $$\int_a^b f(x)\,dx$$

Osservazione: Se $f(x) \geq 0$, allora:

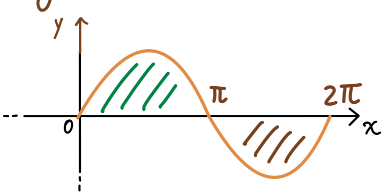
$\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta la misura dell'area sottesa dalla curva $y = f(x)$ in $[a,b]$

Se invece f ha segno qualunque :



Abbiamo che $\int_a^b f(x)\,dx = At_1 - At_2 + At_3$

$\Rightarrow$ l'area dove $f(x) < 0$ viene sottratta a quella dove $f(x) > 0$.



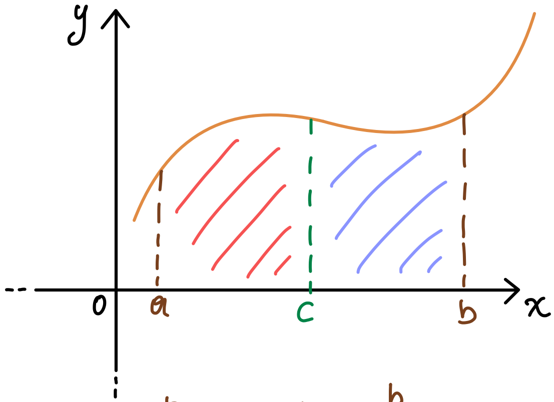
$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

Proprietà degli integrali

Linearità: $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$

II) $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)\, dx$ quando si invertono gli estremi si cambia anche il segno, perché l'area è sempre la stessa, ma con segno opposto.

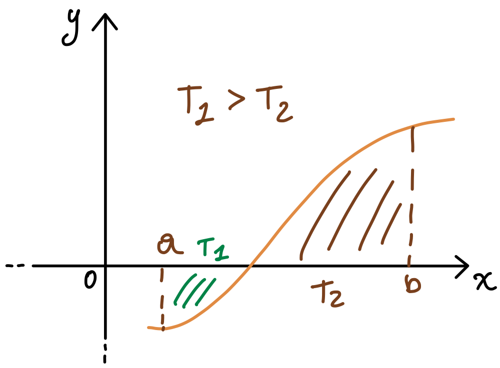
III) se $c \in (a,b)$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$



- Si sommano le aree.

IV) $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

$\int_a^b f(x)\, dx = A(t_2) - A(t_1)$



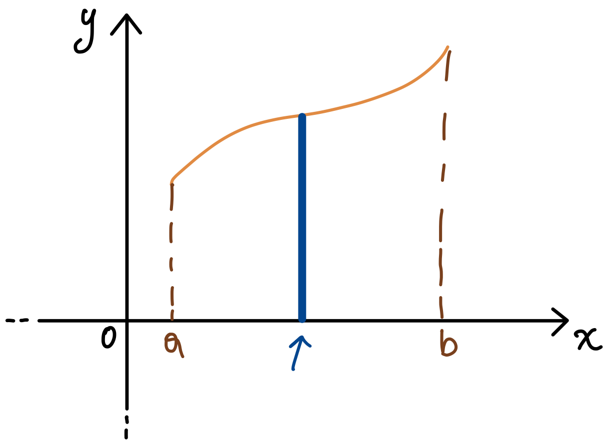
Quando facciamo il valore assoluto di $T_2 - T_1$, otteniamo un valore sempre positivo, anche se $T_1 < T_2$, ma se $T_2 > T_1 \Rightarrow |T_2 + (-T_1)| \leq |T_2| + |T_1|$, la stessa cosa vale per l'integrale.

Teorema della media integrale

Supponiamo che f sia continua in $[a,b]$, allora $\exists\ \xi \in (a,b)$ /

$$\boxed{f(\xi) = \underbrace{\frac{1}{b-a}}_{①} \int_a^b f(x)\,dx}$$

Osservazione La quantita' ① e' la media integrale di f su $[a,b]$;
L'integrale tra a e b e' semplicemente un limite delle sommatorie viste prima;

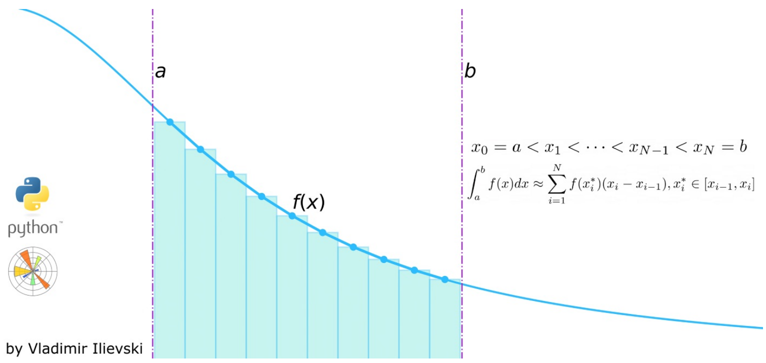


Quando passo al limite, ogni intervallo, tendendo a zero, tende a diventare un punto.
Quelli che prima erano dei rettangoli, tendono a diventare dei "segmenti".

$\Rightarrow \int_a^b f$ e' la "somma infinita" di tali segmenti.

Questa somma e' l'area sottesa alla curva.

Quindi quando parliamo di integrale definito, stiamo parlando di una somma infinita di $f(x)$, quando $x \in (a,b)$.



Tornando alla media integrale...

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ faccio una sommatoria (integrale) e lo dividiamo per il "numero di elementi", ovvero l'intervallo stesso : b-a

E' come se facessimo la media dei voti presi:

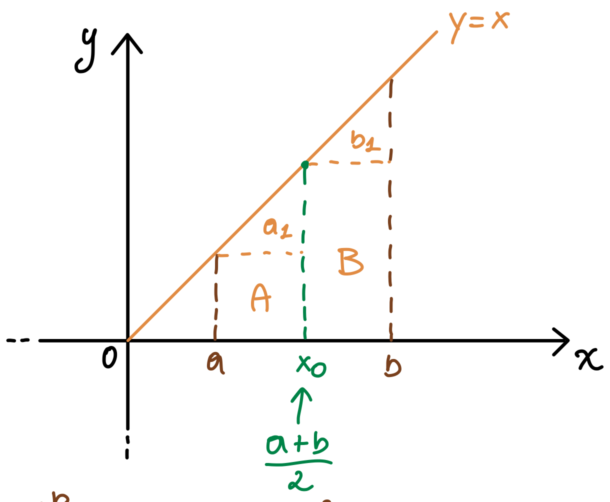
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Somma dei voti presi

diviso il numero dei voti

Quindi la media integrale ci da il valore che i segmenti assumono mediamente; il teorema ci dice che all'interno dell'intervallo ESISTE ALMENO un punto x_0 in cui $f(x_0)$ e' proprio uguale al valore medio.

Provo a dimostrarlo



uso la funzione $f(x)=x$ in $I=(a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x\,dx =$$

$A=(x_0-a)^2 \Rightarrow x_0^2+2ax_0+a^2$

$B=2\cdot A \Rightarrow 2x_0^2+4ax_0+2a^2$ oppure $2(x_0-a)^2$

$a_1=b_1=\frac{(x_0-a)^2}{2}$

$$\Rightarrow \int_a^b x\,dx = (x_0-a)^2+2(x_0-a)^2+\frac{(x_0-a)}{2} = \frac{2(x_0-a)^2+(x_0-a)^2+(x_0-a)^2}{2}$$

$$= \frac{\cancel{4}^{2}(x_0-a)^2}{\cancel{2}} = \underline{2(x_0-a)^2}$$

Il Teorema dice che $\exists$ un pto $x_0 \,/\, x_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

$\Rightarrow$ Calcolo l'integrale: pongo $a=1$, $b=1$, $f(x)=x$

$$\Rightarrow f(\xi_{med}) = \frac{1}{b-a}\cdot 2(\underset{\frac{b-a}{2}}{x_0}-a)^2 \Rightarrow \frac{1}{2-1}\cdot 2\left(\frac{2-1}{2}-1\right)^2 = 1\cdot 2\left(\frac{1-2}{2}\right)^2 = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2} = \frac{1}{2}$$ Valore medio in (a,b)

Domanda esiste un pto x_0 in (a,b) $/ f(x_0)=\frac{1}{2}$?

$f(x_0)=\frac{1}{2}$ per $\underline{x=\frac{1}{2}}$ $\underline{C.V.D}$