Criterio del rapporto

Calcoliamo il $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ ← Finito

ℓ:
- $\ell < 1$ Converge
- $\ell > 1$ Diverge
- $\ell = 1$ Boh!

Criterio della radice

Calcoliamo il $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$
- $\ell > 1$ → Converge
- $\ell < 1$ → Diverge
- $\ell = 1$ → Boh!

Criterio degli infinitesimi

Calcoliamo: $\lim_{n\to+\infty} n^p \cdot a_n = \ell$ con $p \in \mathbb{R}$

ℓ:
- $\ell \neq +\infty$, $p > 1$ → Converge
- $\ell \neq 0$, $p \leq 1$ → Diverge

Criterio di Leibnitz

Per Serie Alternate $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$, $a_n \geq 0$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{\left(\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \dots\right)}_{\text{DECRESCE}}$ Allora la serie converge

Calcolare la somma

Solo un esempio

ES: ERRORE a meno di $10^{-1} = \frac{1}{10}$ ⟹ $|S_n - S| \leq a_{n+1}$ ⟹ $\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_{n+1}} \leq \underbrace{\frac{1}{10}}_{\text{errore}}$ → $n = 9$

Possiamo calcolare $\sum_{n=1}^{9} a_n$

ES ESAME:

Det la convergenza: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ Rapporto $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!}$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{(n+1)} \cdot n!} = \frac{(n+1)\cdot \cancel{n!}\, n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot \cancel{n!}} = \frac{\cancel{(n+1)} \cdot n^n}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \to \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

pongo $t = n+1$ ⟹ $n = t - 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{t-1} = \left(\frac{\cancel{t}}{\cancel{t}} - \frac{1}{t}\right)^{t-1} = \left(1 + \frac{1}{-t}\right)^{t-1}$$

Ricordo il lim not $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{\frac{t-1}{t}\cdot t} = \left[\left(1+\frac{-1}{t}\right)^t\right]^{\frac{t-1}{t}} = \left[e^{-1}\right]^{\lim \frac{t-1}{t}} = \lim \frac{t-1}{t} = 1 \Rightarrow e^{-1^{1}} = 0 < \frac{1}{e} < 1$$

⟹ la serie converge!

6.19 Verificare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

è convergente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \cancel{n!} \to \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \text{Converge}$$

6.20 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ è convergente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(n+1)^2}\, n^2 = \frac{1}{n^2+2n+1} \cdot n^2$$

$$= \frac{1}{\cancel{n^2}(1)} \cdot \cancel{n^2} \to 1 \quad \text{Converge}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{e^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{e^{2(n+1)}}}{\frac{2^n}{e^{2n}}} = \frac{2^{n+1}}{e^{2(n+1)}} \cdot \frac{e^{2n}}{2^n} = \frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{\cancel{e^{2n}}\cdot e^2} \cdot \frac{\cancel{e^{2n}}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{e^2} \to \text{converge}$$

Esercizi nuovi Serie

6.1 Verificare che la serie geometrica di primo termine 1 e ragione x

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

è convergente se e solo se $|x| < 1$ e che, in tal caso, risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b^{n-1}$ b non dip. da n $\to$ Serie geometrica

Se $-1 < b < 1$ Converge, Se $b \geq 1$ Diverge Se $b < 0$ Diverge oscillando

$\lim_{n\to\infty} \frac{1-b^n}{1-b} = \frac{1-x^n}{1-x}$ con $|x| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x}$ $x < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^n \to 0 \to \frac{1}{1-x}$

6.2 Sia a un numero reale diverso da zero. Verificare che la serie geometrica di primo termine a e ragione x.

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots$$

converge se e solo se $|x| < 1$. In tal caso risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\,x^{k-1} = \frac{a}{1-x}.$$

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1}$$

converge $\Leftrightarrow |x| < 1 \to \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n-1}}{1-x} \cdot a$ x è sempre $0 < x < 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{|b|}\right)^{n-1}}{1-x} \cdot a$ con $b>0$ $\to 0$ $\Rightarrow \frac{a}{1-x}$

6.7 Verificare che la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

è divergente.

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$

$\Rightarrow |r_{n,k}| < \varepsilon$ prendo $n = k \to \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots \frac{1}{4n} < \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \dots + \frac{1}{4n} = \cancel{n} \frac{1}{4\cancel{n}}$

$\Rightarrow |r_{n,k}| < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} >> \varepsilon$ DIVERGE

Alternativa

6.10 Calcolare la somma delle seguenti serie geometriche

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

$a_n / a_{n-1} = \text{cost} : \quad \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} \dots$

ragione cost

$\Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{2}^n}{1-\frac{1}{2}} \to \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{\frac{1}{2}} \to 2$ converge a 2

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \underbrace{\sum_{n=0}^{0} \frac{1}{2^n}}_{\text{un solo elemento}}\right] \Rightarrow \left[\lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right] - 1 = 2 - 1 = 1$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} -\frac{1-\overbrace{3^n}^{\to +\infty}}{2} = +\infty$ Diverge

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n \to 0}{1-\frac{4}{5}}$ $0<a<1 \Rightarrow 0$ $\sim \frac{1}{\frac{5-4}{5}} = 5$ converge

6.11 Verificare che, per ogni $x \in (-1, 1)$ vale la formula

$$\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x}$$

$\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x}$

$x^n = x^k + x^{k+1} + x^{k+3} + \dots x^{k+i}$

$\Rightarrow \frac{x^k}{x^{k-1}} = \frac{\cancel{x^k}}{\cancel{x^k}} \cdot x$ ragione cost

$\Rightarrow S = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{k-1} x^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\overbrace{x^n}^{\to 0}}{1-x} - \lim_{n\to k-1} \frac{1-x^n}{1-x}$

$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{k-1}}{1-x} =$ Non mi trovo

6.12 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è convergente ed ha per somma 1.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$

I) $a_n = \frac{1}{n^2+n}$ $\quad b_n = \frac{1}{n^2}$, $\quad a_n < b_n \Rightarrow b_n =$ serie a.g. di rag. $2 > 0 \Rightarrow$ converge

$\Rightarrow a_n$ converge.

II) $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{An+A+Bn}{n(n+1)} = \frac{n(A+B)+A}{//} = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \Rightarrow B=-1 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$

$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{0} = 0$ il libro dice che converge ad 1 ma non mi trovo

6.14 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ è convergente ed ha per somma 1/2.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{3\cdot 5}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{5\cdot 7}}_{3} + \underbrace{\frac{1}{7\cdot 9}}_{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots$

$\Rightarrow \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{2An+A+2Bn-B}{(2n-1)\;(2n+1)} = \frac{n(2A+2B)+A-B}{//} = \frac{1}{//}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2A+2B=0 \Rightarrow 2+2B+2B=0 \to B=\frac{1}{2} \\ A-B=1 \Rightarrow A=1+B \Rightarrow A=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3/2}{2n-1} + \frac{1/2}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2(2n-1)} + \frac{1}{2(2n+1)}\right)$

$= a_1 - \lim_{n\to\infty} (//) = \frac{1}{2}$ $\quad (\to 0)$

6.15 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$ è divergente, dopo aver calcolato la somma s_k dei primi k termini.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$= [\ln(2) - \ln(1)] + [\ln(3) - \ln(2)] + [\ln(4) - \ln(3)] + \dots$$

Uso Riemann $\lim_{n \to \infty} n^{\alpha} \cdot a_n = \ell$ pongo $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{2}} \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sqrt{n} \, \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 0$$

BOH

Serie a termini positivi

6.19 Verificare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

è convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \; (a_n) \quad < \quad b_n = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ convergente}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \\ b_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \end{aligned}\right\} a_n > b_n \;\; \forall n \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\frac{\cancel{2}\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \cdot \frac{1}{2}}{\cancel{2}\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n}} \to \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow b_n \text{ conv.}$$

Se b_n converge, anche a_n converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow S_n \leq 2$$

6.20 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ è convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \text{S. Ar. gen. con } \alpha = 2 > 1 \Rightarrow \text{Converge}$$

Dimostriamo con C. rapp

$$a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} \Rightarrow \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1+0+0)} \to 0 < 1 \Rightarrow \underline{\text{converge}}$$

Usiamo anche RAABE $\lim_{n \to \infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = \ell \begin{cases} > 1 & \text{CONV} \\ < 1 & \text{DIV} \\ = 1 & ? \end{cases}$

$$\to \lim_{n \to \infty} n\left[\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} - 1\right] = n\left[\frac{n^2+2n+1}{n^2} - 1\right] = n\left[\frac{\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2}}{n^2}\right] = \frac{2n^2+1}{n^2} = \frac{2\cancel{n^2}(1)}{\cancel{n^2}}$$

$$\to 2 > 1 \Rightarrow \underline{\text{converge}}$$

6.21 Stabilire il carattere delle seguenti serie

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

c rapp.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \to 1$ non ci aiuta

USO RAABE $\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}-1\right] = n\left[\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}-1\right] \to n\left[\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}-1\right]$

$= n\left[\frac{\cancel{n^2}+\cancel{2n}-\cancel{n^2}-\cancel{2n}-1}{n^2+2n+1}\right] = -\frac{n}{n^2+2n+1} \to 0 < 1 \to$ DIVERGE

OPPURE Logicamente... $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \to 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\underbrace{1+1+1+1+\dots}_{\text{Non convergerà MAI!}}\xrightarrow{+\infty}$

Se il lim di una serie non è zero non convergerà mai! $\to$ Diverge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \to 1$ Non converge

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \to 0$ $\frac{n}{n^3+1} < \frac{n}{n^3}$ minorante

studio $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ S.A.g. con $\alpha = 2 > 1 \to$ Converge $\Rightarrow a_n$ converge

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ $\lim_{n\to\infty} a_n \to 0 \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \to$ diverge $\Rightarrow \frac{n}{n^2}$ non va bene

Troviamo una maggiorante di a_n

$\frac{n}{2n^2} > \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} \to$ Diverge $\Rightarrow a_n$ diverge.

Studiare il carattere della serie

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots \qquad (p\in\mathbb{R})$$

detta serie *armonica generalizzata* (o *serie di Riemann*)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha\in\mathbb{R}$

Caso I: $\alpha = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^1}$ Serie armonica $\Rightarrow$ diverge

Caso II: $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ pongo $\alpha = 2 \Rightarrow 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\to 0$ Potrebbe convergere

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot n^2 = \frac{n^2}{n^2+2n+1} \to 1>0 \Rightarrow$ Converge

Caso III: $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ pongo $\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{n+1} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} \to 0 < 1 \Rightarrow$ diverge

6.23 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)/n^2$ è convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \to 0$ ✓

$b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^\alpha = \ell \neq 0$

$\alpha > 2 \to \infty$
$\alpha < 2 \to 0$
$\alpha = 2 \to \infty$

uso il rapp. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{\ln(n)} = \frac{\ln(n+1)}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n^2}{\ln n} = \frac{n^2(\ln(n+1))}{n^2(\ln n)} \sim \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$

conf gauss $\alpha > 1 \to 2$

$\sim \frac{\ln(n)}{\ln(n)} \to 1$ BOH

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^2 \to \infty$ non va bene $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\ln n}{\cancel{n^2}} \cancel{n}\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}\ln n}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\cancel{n}\ln n}{\cancel{n}\sqrt{n}} \to 0$ se $\ell = 0$ e b_n converge ($\alpha_{b_n} > 1$) $\Rightarrow a_n$ converge

6.24 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(3^n - n)$ è convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$ $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n - n} \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n - n} \cdot n^\alpha = \frac{n^\alpha}{3^n - n}$ pongo $\alpha = 2 \Rightarrow \frac{n^2}{3^n - n} = \frac{n^2}{3^n(1-0)}$

$\sim \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n}$ $3^n \gg n^2 \to 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ con $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow$ converge

se b_n converge e $\lim \frac{a_n}{b_n} \to 0 \Rightarrow a_n$ converge.

6.25 Applicando il criterio degli infinitesimi, studiare il carattere delle seguenti serie

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n^4+n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{3n^2+2}$

Criterio degli infinitesimi
data $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > 0$

$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot a_n = \ell$
- $\alpha > 1 \wedge \ell$ finito (comp. 0) $\to$ converge
- $0 < \alpha \leq 1 \wedge \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \to$ Diverge

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n^4+n+1} \to \lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot \frac{3n^2+1}{n^4+n+1} \to$ pongo $\alpha = 2 \Rightarrow \frac{3n^4+n^2}{n^4+n+1} \to 3$ finito

$\Rightarrow a_n$ converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{3n^2+2} \to \lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot \frac{5n-1}{3n^2+2}$ pongo $\alpha = 1 \Rightarrow \lim \frac{5n^2-n}{3n^2+2} \to \frac{5}{3} \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$ Diverge

6.26 Applicando il criterio degli infinitesimi, stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ $\lim n^\alpha \frac{\ln n}{n}$ $\alpha = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ln n \to +\infty \Rightarrow$ Diverge

6.27 Applicando il criterio degli infinitesimi, studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to \lim n^\alpha \left(\frac{2}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n} 2 - n^\alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n^\alpha - n \cdot n^\alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$ $\alpha = 1$ $\frac{2n - n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{\cancel{n}\left(2 - n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\cancel{n}}$

$\to 2 - \infty \cdot 0$?