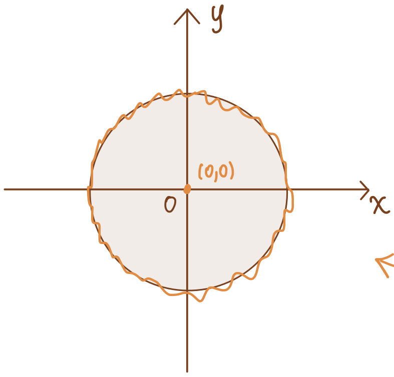
3B. Insiemi di definizione

(a) $z = \log(1 - x^2 - y^2)$

$\log(\text{arg}) \to \text{arg} > 0 \qquad 1 - x^2 - y^2 > 0 \to x^2 + y^2 < 1$

Prendo $\overset{x\ y}{(0,0)} \to 1 - 0 - 0 > 0$? SI

$\Rightarrow$ Soluzione:

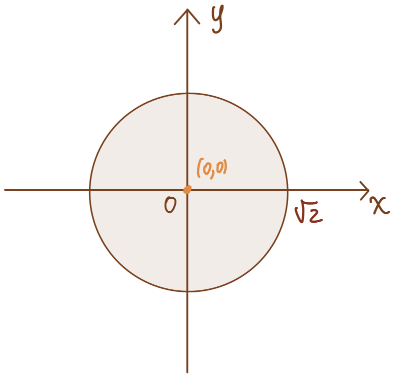


(b) $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

$2 - x^2 - y^2 \geq 0 \to x^2 + y^2 = 2$

$\Rightarrow$ Scelgo $\overset{x\ y}{(0,0)} \to 2 - 0 - 0 \geq 0 \to 2 \geq 0$ SI

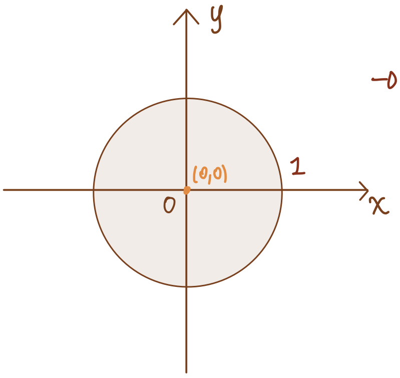
Cerchio compresa circonferenza



(c) $z = \log(x^2 + y^2 - 1)$

$x^2 + y^2 - 1 > 0 \to x^2 + y^2 = 1$

$\to 0 + 0 - 1 > 0$ NO $\to$ f definita per valori esterni al cerchio, circ esclusa



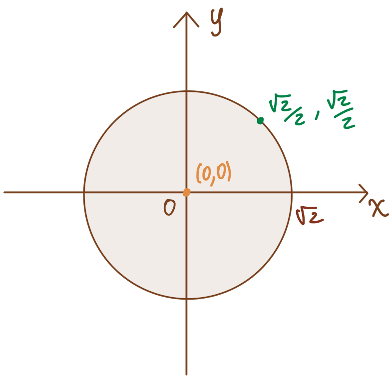
(d) $z = \sqrt{-|x^2 + y^2 - 2|}$

$x^2 + y^2 - 2 \leq 0 \to x^2 + y^2 = 2 \to$ Circ $\Rightarrow x^2 + y^2 = c^2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{2}$

mai < 0 $\Rightarrow$ def per $x^2 + y^2 = 2$

Prendo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \to \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$ SI

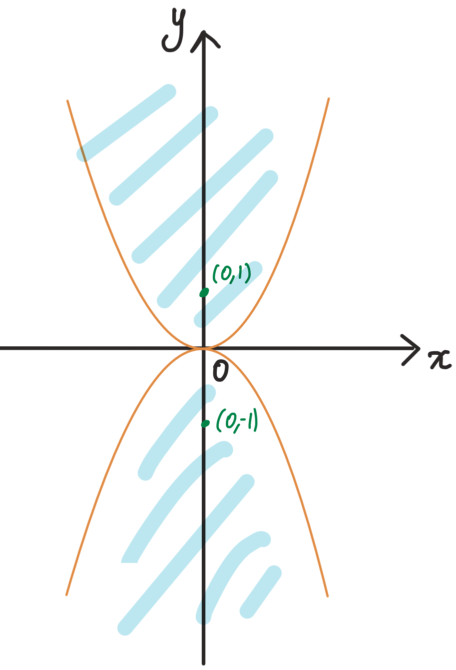
f definita sulla circonferenza di $c = (0,0)$ e $r = \sqrt{2}$



3.10 Rappresentare graficamente in un piano cartesiano x, y gli insiemi di definizione delle funzioni

(a) $\quad f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4}$ $\qquad$ (b) $\quad f(x, y) = \sqrt{x^4 - y^2}$

a) $y^2 - x^4 \geq 0 \rightarrow y = \pm x^2$

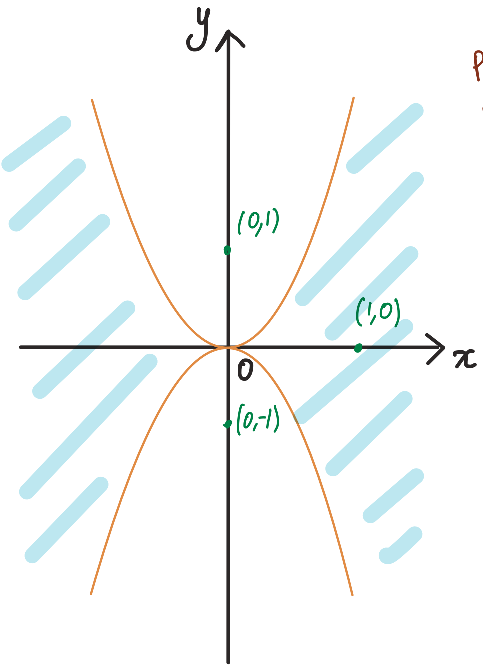


per $y = x^2$, prendo $(0,1) \rightarrow 1 \geq 0$? SI

Per $y = -x^2$, prendo $(0,-1) \rightarrow 1 \geq 0$? SI

$\cup$

b) $x^4 - y^2 \geq 0$ per $-y^2 = -x^4 \rightarrow y^2 = x^4 \rightarrow y = \pm x^2$



Per $y = x^2$ prendo $(0,1) \rightarrow -1 \geq 0$? NO

prendo $(1,0) \rightarrow 1 \geq 0$? SI

Per $y = -x^2$ prendo $(1,0) \rightarrow 1 \geq 0$? SI

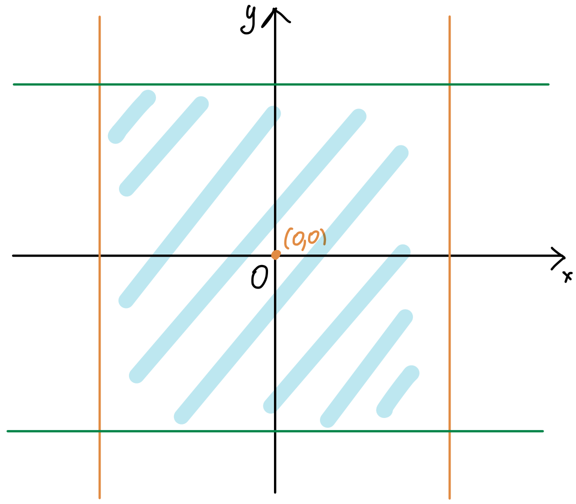
3.11 Rappresentare graficamente l'insieme di definizione delle funzioni

(a) $z = \log(1 - x^2) + \log(1 - y^2)$ (b) $z = \log \dfrac{1 - x^2}{1 - y^2}$

(c) $z = \log(x^2 - 1) + \log(1 - y^2)$ (d) $z = \log \dfrac{x^2 - 1}{1 - y^2}$

a) $\underbrace{1 - x^2 > 0}_{a} \cup \underbrace{1 - y^2 > 0}_{b}$

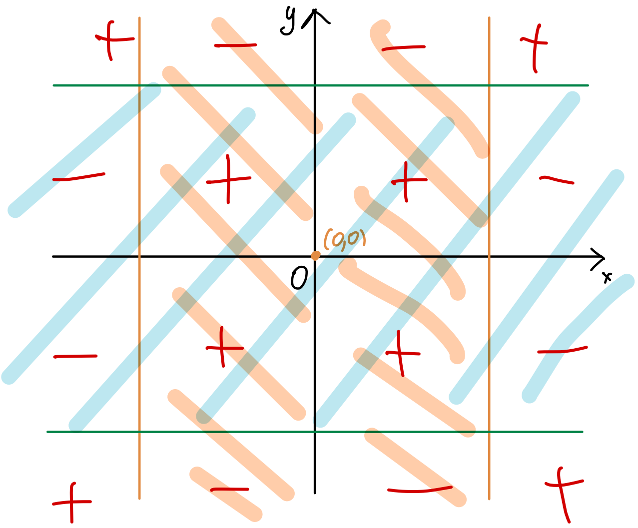
a) $x^2 = 1$ $\rightarrow x = \pm 1$ b) $y^2 = 1$ $\rightarrow y = \pm 1$



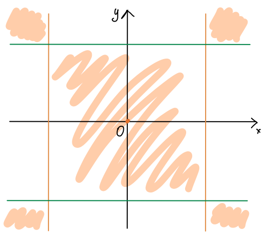
a) $1 - 0 > 0$? Si

b) $1 - y > 0$? Si

B) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ 1 - y^2 > 0 \rightarrow y = \pm 1 \end{cases}$ stesso disegno ↑



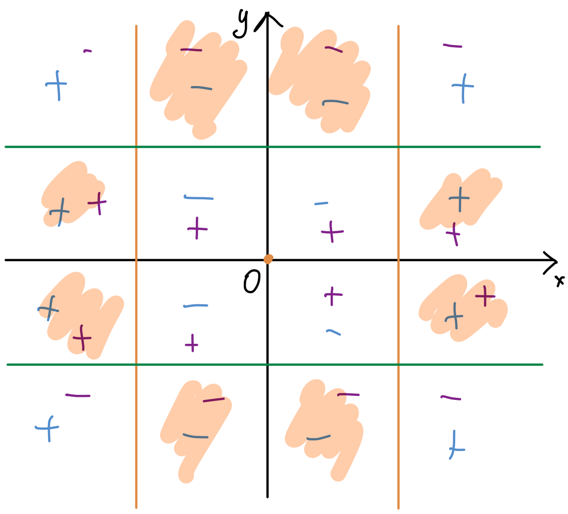
Prendo $O(0,0)$ → $\begin{cases} 0 - 1 > 0 ? \text{ NO} \\ 1 - 0 > 0 ? \text{ Si} \end{cases}$



Soluz

C) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ 1 - y^2 > 0 \rightarrow y = \pm 1 \end{cases}$

Prendo $(0,0)$ → $\begin{cases} 0 - 1 > 0 ? \text{ NO} \\ 1 - 0 > 0 ? \text{ Si} \end{cases}$



3.16 Rappresentare graficamente in un piano cartesiano x, y l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{2x-(x^2+y^2)}{x^2+y^2-x}}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-x > 0 \\ 2x-(x^2+y^2) \geq 0 \end{cases} \to \quad y^2 = x - x^2 \to \quad y = \sqrt{x-x^2}$$

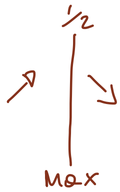
$y = \sqrt{x-x^2}$ $\quad D = \; x - x^2 \geq 0$ per $x(1-x) \geq 0$

$\hookrightarrow x \geq 0, \; x \leq 1 \Big\} \quad 0 \leq x \leq 1$

Radici: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x(1-x)=0 \end{cases}$ $\hookrightarrow x=0$, $\hookrightarrow x=1$

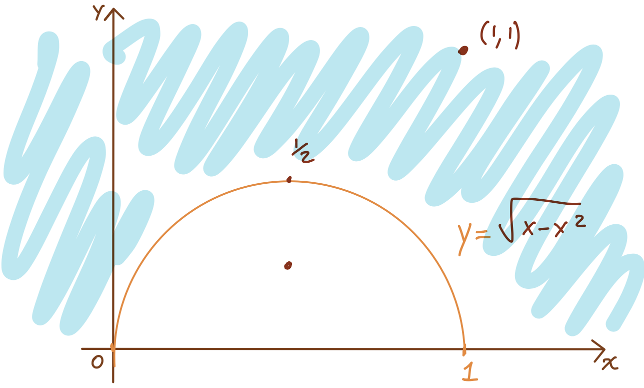
Deriv. $f'(x) = (x-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1-2x = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$

$f'(x) \geq 0$ per $1-2x > 0 \to x < \frac{1}{2}$



$D'' = 2(2\sqrt{x-x^2}) - (1-2x)\left(\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\right) \cdot 1-2x$

$= 4\sqrt{x-x^2} - \left[\frac{(1-2x)^2}{\sqrt{x-x^2}}\right]$



Prendo $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \to \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} > 0$?

Prendo $(1,1) \to 1+1-1 > 0$? SI $\quad \to \frac{1+1-2}{9} > 0$? NO

prendo $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} > 0$? $\frac{1+2-2}{4} = 0$

$\hookrightarrow$ Circonf. escluso

$2x - (x^2+y^2) \geq 0$ per $2x - x^2 - y^2 \geq 0$; $y^2 < -x^2 + 2x \to y < \sqrt{2x - x^2}$

$\to$ riscrivo $\quad y^2 + x^2 = 2x$ $\quad$ cerchio di $c = 1$, e $r = 2$

Equazioni Circonferenza

F. ESPLICITA

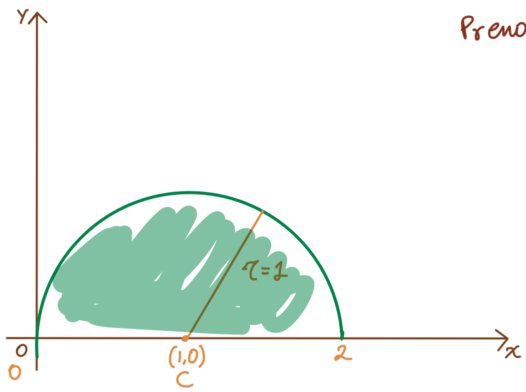
$Eq = \quad y^2 + x^2 = r^2 \to (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2 \to x^2+y^2+ax+by+c=0$

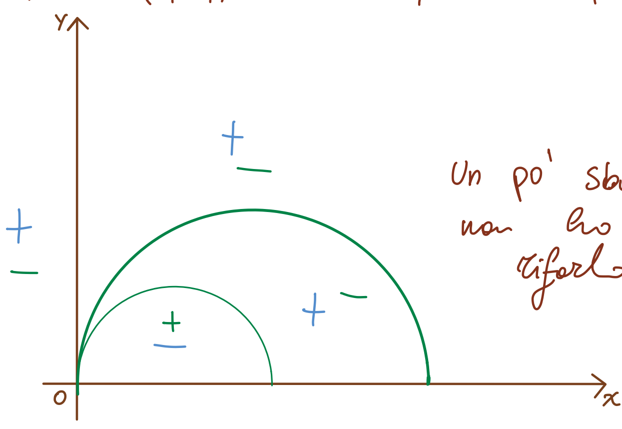
Raggio: $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ $\qquad$ Centro $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

ES: $y^2+x^2 = 2x \to y^2 + x^2 + 0y - 2x + 0 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\left(-\frac{2}{2}\right)^2 - c} = 1$

$C = \left(\frac{-2}{2}, 0\right) \to C = (1,0)$, Siccome $2x - (x^2+y^2) \geq 0$ scriviamo:

Prendo $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) > 0$? $1 - \frac{2}{4} > 0$? $\frac{4-2}{4} > 0 \Rightarrow$ SI





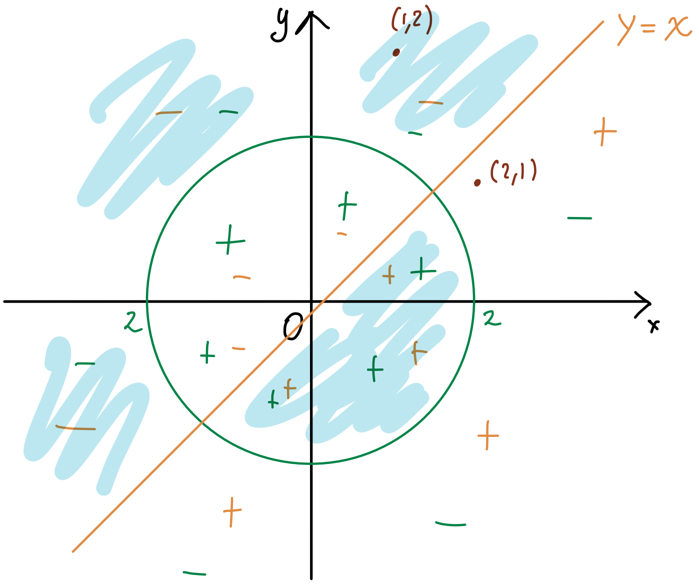
Un po' sbagliato non ho voglia di rifarlo.

3.17 Determinare l'insieme di definizione delle funzioni di due variabili

(a) $\quad f(x,y) = \sqrt{\dfrac{4-x^2-y^2}{x-y}}$

$$\begin{cases} x - y > 0 & \rightarrow \quad y = x \\ 4 - x^2 - y^2 \geq 0 & \rightarrow \quad y^2 - x^2 = 4 \quad r = 2 \quad c = (0,0) \end{cases}$$

(the two lines of the system are labelled a and b)

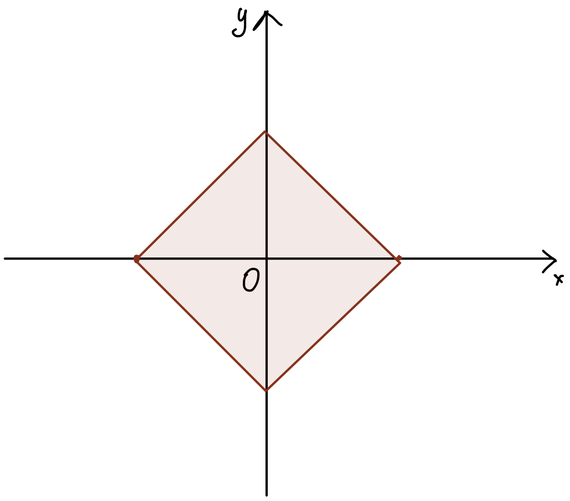


a) $(1,2) \rightarrow 1-2>0?$ NO
$(2,1) \rightarrow 2-1>0?$ Si circ esclusa

b) $(0,0) \rightarrow 4 \geq 0?$ Si Circ inclusa

(b) $\quad f(x,y) = \sqrt{\dfrac{(|x|-1)(|y|-1)}{|x|+|y|-1}}$

$$\begin{cases} (|x|-1)(|y|-1) \geq 0 \\ |x| + |y| - 1 \quad \rightarrow \quad |x| + |y| = 1 \end{cases}$$



Derivate parziali

$f_x = 3x^2 - 1y \quad , \quad f_y = 2y - x$

3.41 Calcolare, nel punto $(x, y) = (4, 7)$, le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - xy$$

nei punti $(4,7) \rightarrow f_x(4,7) = 3 \cdot 16 - 7 = 41 \qquad f_y(4,7) = 2 \cdot 7 - 4 = 10$

3.42 Calcolare le derivate parziali f_x, f_y delle seguenti funzioni nei punti interni ai rispettivi insiemi di definizione.

$f = x^2 + 2y \qquad [f_x = 2x; \quad f_y = 2]$

$f_x = 2x \qquad f_y = 2$

$f = xy$

$f_x = y \qquad f_y = x$

$f = (x + y)(x - y)$

$f_x = [1][x-y] + [x+y][1] = x - y + x + y = 2x$

$f_y = [1][x-y] + [x+y][-1] = -2y$

$f = \dfrac{x}{y}$

$f = x \cdot y^{-1} \rightarrow f_x = \dfrac{1}{y} \qquad f_y = -\dfrac{1}{y^2}$

$f = \dfrac{x - y}{x + y}$

$f_x = \dfrac{(\cancel{x}+y) - (\cancel{x}-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{2y}{(x+y)^2} \qquad f_y = \dfrac{-(x+\cancel{y}) - (x-\cancel{y})}{(x+y)^2} = \dfrac{-2x}{(x+y)^2}$

$f = \dfrac{x + y}{1 - xy}$

$f = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

$f_x = \dfrac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\cancel{x^2} - \cancel{2}x^2 + y^2}{//} = -\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$f_y = \dfrac{-x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$f = \dfrac{y}{\operatorname{sen} x} \qquad f_x = \dfrac{-y(\cos x)}{\sin^2 x} = \dfrac{-y \cos x}{\sin^2 x} \qquad f_y = \dfrac{\sin x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin x}$

$f = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} \qquad f_x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot (\cancel{\operatorname{tg} y}) \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg}^{\cancel{2}} y} = \dfrac{1}{\cos^2 x \operatorname{tg} y} \qquad f_y = -\operatorname{tg} x \left(\dfrac{1}{\cos^2 y}\right) \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 y} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 y}$

Massimi e minimi

1) Calcoliamo le Derivate II parziali
2) Calcoliamo l'Hessiano
3) Se Hf è $>0 \to$ probabile Max/min
   Se Hf è $<0 \to$ NO min/Max.

1.3 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle seguenti funzioni

(a) $f(x,y) = x^3+y^3+xy$

1) $f_x = 3x^2+y$ $\quad f_y = 3y^2+x$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_{yy} = 6y$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = 1$

2) Calcolo Hessiano $\begin{vmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 1$

3) Ricerca punti Stazionari Sistema 2 eq 2 inc.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2+y=0 \to y = -3x^2 \quad (1) \\ 3y^2+x=0 \to 3\cdot(-3x^2)^2+x=0 \quad (2) \end{cases}$$

$\to 3\cdot 9x^4+x=0 \to 27x^4+x=0$

per $x(27x^3+1)=0$

$\to x=0$

$\to 27x^3=-1$ per $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$

Sostituiamo nella (1)

Se $x=0 \to y=-3\cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$ Pto. ST.

Se $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3} \to y = -3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -3\cdot\frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ Pto. ST

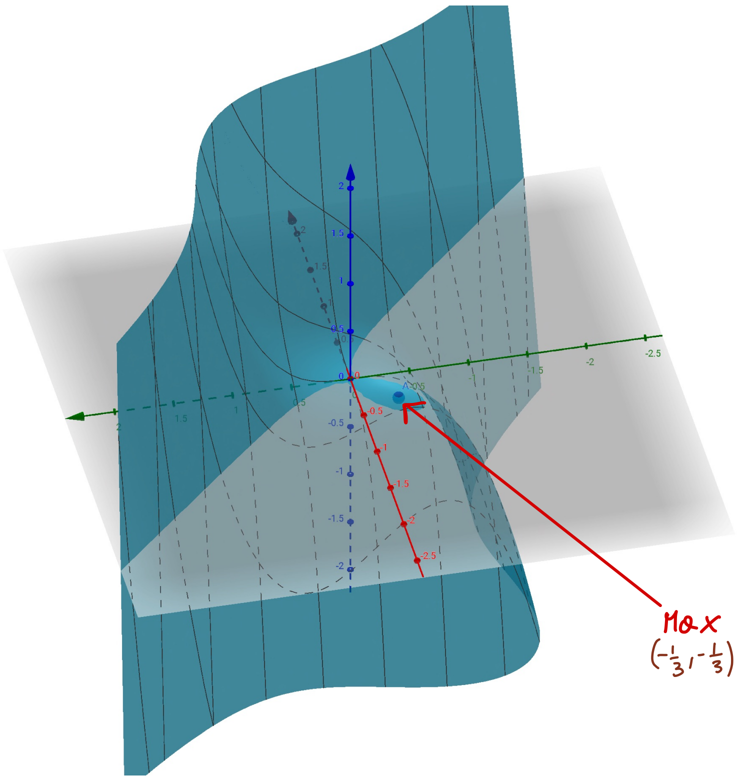
4) Sostituisco a Hf e valuto

$Hf(0,0) = 36(0\cdot 0)-1 = -1 < 0$ Ne Max Ne min

$Hf\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = 36\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot-\frac{1}{3}\right)-1 = \frac{36}{9}-1 = 3 > 0$ Sicuro Max/min

Per capire se $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ è max o min sostituiamo a f_{xx} o f_{yy}

$f_{xx} = 6x \to f_{xx}\left(-\frac{1}{3}\right) = 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{6}{3} = -2 < 0 \to$ Massimo



(b) $f(x,y) = x^3-y^3+xy$ $\quad f_x = 3x^2+y \quad f_y = -3y^2+x \quad f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = -6y \quad f_{xy} = f_{yx} = 1$

$$Hf = 6x\cdot(-6y)-1 = -36xy-1$$

Cerco pti ST:

$$\begin{cases} 3x^2+y=0 \to 27y^4+y=0 \to y(27y^3+1)=0 \\ -3y^2+x=0 \to x=3y^2 \end{cases}$$

$\hookrightarrow y=0$

$\hookrightarrow y=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x=3y^2 \to x = 0$ (per $y = 0$) $\qquad x = 3\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$ (per $y = -\frac{1}{3}$)

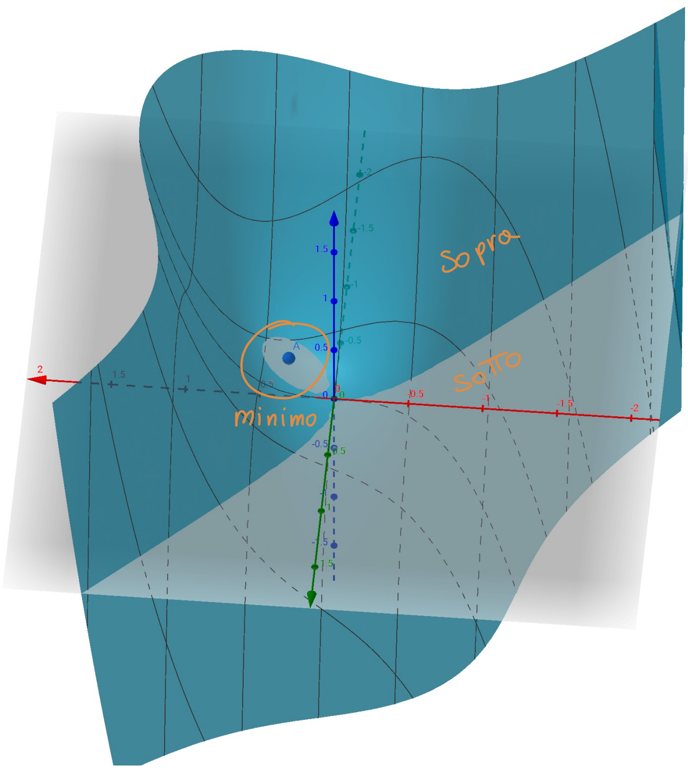
$\left.\begin{matrix}(0,0)\\ (\frac{1}{3},-\frac{1}{3})\end{matrix}\right\}$ pti stazionari

Sostituisco a Hessiano

$Hf(0,0) = -1 < 0 \to$ No max/min

$Hf(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}) = -36\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)-1 = \frac{36}{9}-1 = 3 > 0$ $\qquad$ Sicuro max/min

$f_{xx} = 6x\Big|_{\frac{1}{3}} = \frac{6}{3} = 2 > 0$ $\qquad (\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ punto di minimo



1.1 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo della funzione

$$f(x,y) = 4y^4-16x^2y + x$$

1) $f_x = -32xy + 1 \quad f_y = 16y^3 - 16x^2$

$f_{xx} = -32y \quad f_{yy} = 48y^2 \quad f_{xy} = f_{yx} = -32x$

2) Punti Staz

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -32xy + 1 = 0 \\ 16y^3 - 16x^2 = 0 \end{cases} \quad x = \frac{1}{32y} \to 16y^3 - 16\left(\frac{1}{32y}\right)^2 = 0 \to 16y^3 - \frac{16}{1024y^2} = 0 \to 16y^3 - \frac{1}{64y} = 0$$

$$\to 16y^3 = \frac{1}{64y}\ ; \quad y^4 = \frac{1}{64\cdot 16} \Rightarrow y = \sqrt[4]{\frac{1}{1024}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1024}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16\cdot 64}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^2\cdot 2^8}} = \frac{1}{2^2\sqrt[4]{2^2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\to y = \pm\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{32y}\Big|_{+\frac{\sqrt{2}}{8}} = \frac{1}{\cancel{32}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{8}}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \to \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{8}\right) \ 1° \text{ pto Staz.}$$

$$x = \frac{1}{32y}\Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{8}} = \frac{1}{32\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \to \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{8}\right) \ 2° \text{ pto Staz}$$

3) Sostituisco ad $Hf = (-32y)\cdot(48y^2) - (-32x)^2 = -1536y^3 - 1024x^2$

$$Hf\left(\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{8}\right) = -1536\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^3 - 1024\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 = -1536\left(\frac{4}{512}\right) - 1024\left(\frac{2}{64}\right) = n < 0$$

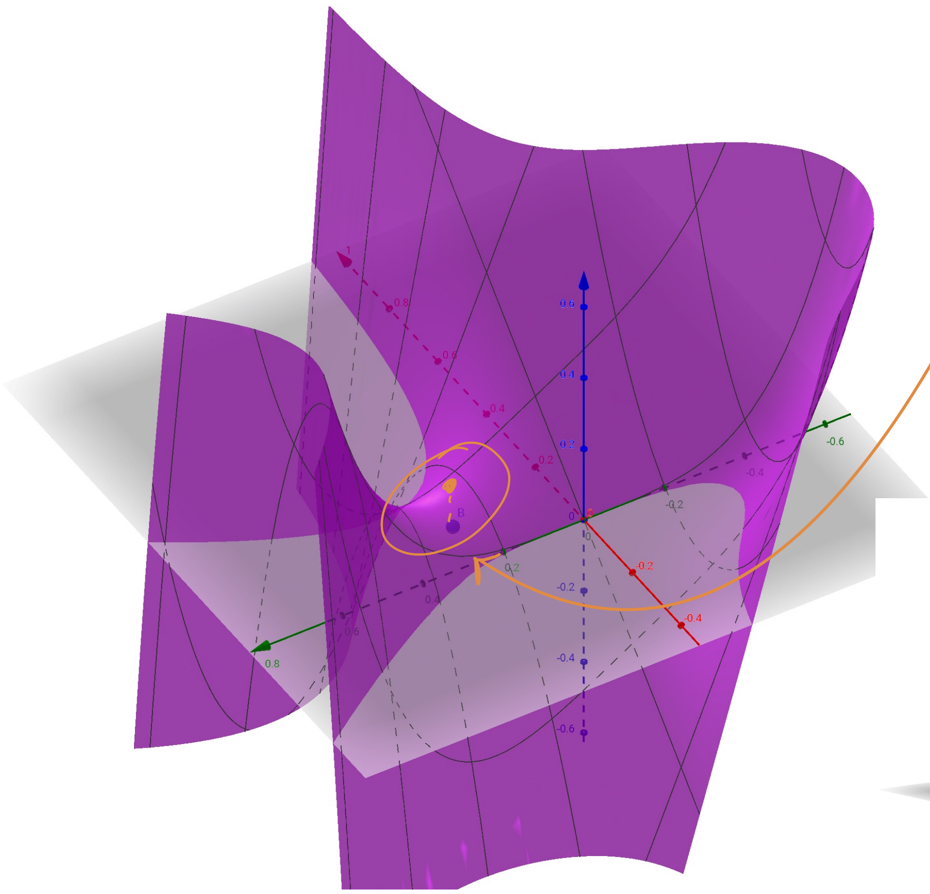
Ne Max ne min

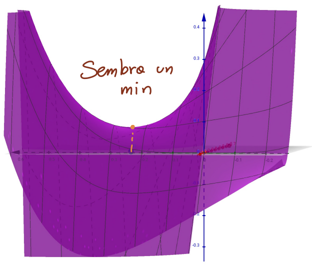
$$Hf\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{8}\right) = -1536\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^3 - 1024\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 < 0$$

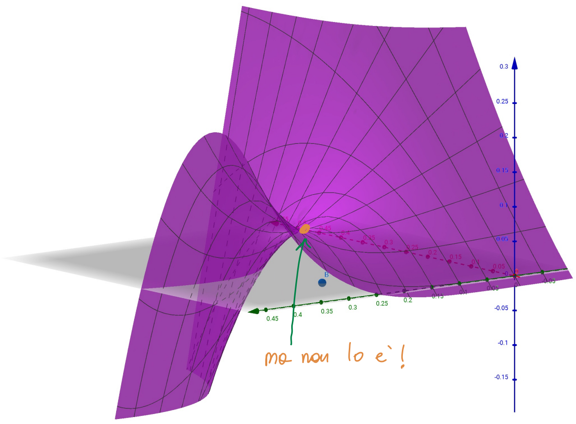
Ne max ne min

* i calcoli potrebbero essere sbagliati ma Hf_1 e $Hf_2 < 0$

Punto sella







(a) $f(x,y) = 2(x^2+y^2+1) - (x^4+y^4)$

$2x^2+2y^2+2-x^4-y^4$

$\Rightarrow f_x = 4x-4x^3 \quad f_y = 4y-4y^3$

$f_{xx} = 4-12x^2 \quad f_{yy} = 4+12y^2 \quad f_{xy} = f_{yx} = \varnothing$

$\Rightarrow Hf = (4-12x^2)(4-12y^2) - 0 = 16-48y^2-48x^2+144x^2y^2$

2) Cerco p.ti St.

$\begin{cases} 4x-4x^3=0 \\ 4y+4y^3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x = 4x^3 \\ \to \dfrac{x}{x^3} = 1 \end{cases} \to \dfrac{1}{x^2} = 1 \to x = \pm 1$

$x = 0$

* sistema sbagliato ma $x <^{\pm 1}_{0}$ $\quad y <^{\pm 1}_{0}$

$\begin{cases} 4y = -4y^3 \\ \to y = \varnothing \end{cases}$

$4y = (1+y^2) = 0$

$\to y = 0$

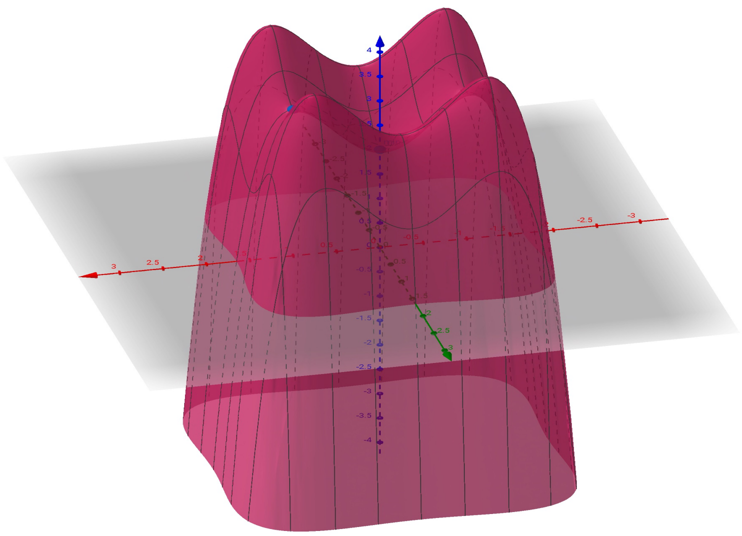
$\to y = \pm 1$

Testo Hf

$Hf|_{\substack{x=0\\y=0}} = 16 > 0$ max/min $\to f_{xx}|_{\substack{x=0\\y=0}} = 4 > 0 \Rightarrow$ minimo $\quad (0,0)$ minimo

$Hf|_{\substack{x=\pm1\\y=\pm1}} = 16-48-48+144 = 64 > 0$ max/min $\Rightarrow f_{xx}|_{\substack{x=\pm1\\y=\pm1}} = 4-12 < 0 \quad \Rightarrow (\pm1, \pm1)$ massimi

$Hf|_{\substack{x=\pm1\\y=0}} = 16-48 < 0$ NO max/min $\quad Hf|_{\substack{x=0\\y=\pm1}} = 16-48 < 0$ NO max/min



(b) $f(x,y) = 2(x^4+y^4+1) - (x+y)^2$ $\quad 2x^4+2y^4+2-x^2-2xy-y^2$

$f_x = 8x^3-2x-2y \quad f_y = 8y^3-2x-2y \quad f_{xx} = 24x^2-2 \quad f_{yy} = 24y-2 \quad f_{xy} = f_{yx} = -2$

2) Trovo pti Staz.

$$\begin{cases} 8x^3-2x-2y=0 \\ 8y^3-2x-2y=0 \end{cases} \rightarrow y = 2x-8x^3$$

$\Rightarrow 8(2x-8x^3)^3 - 2x - 2(2x-8x^3) = 0 ; \quad 8[(4x^2-32x^4+64x^9)(2x-8x^3)] - 2x - 4x + 16x^3)$

$= 8[8x^3-32x^5-64x^5+256x^7+128x^{10}-512x^{12}] - 6x+16x^3 = 0$

$= 8[-512x^{12}+128x^{10}+256x^7-96x^5+8x^3] - 6x+16x^3 = 0$

$\rightarrow -512x^{12}+128x^{10}+256x^7-96x^5+10x^3 - \frac{3}{4}x = 0$

$x\left(-512x^{11}+128x^9+256x^6-96x^4+10x^2-\frac{3}{4}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0$

$x^2(-512x^9+128x^7+256x^4-96x^2+10)+\frac{3}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = -\frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$

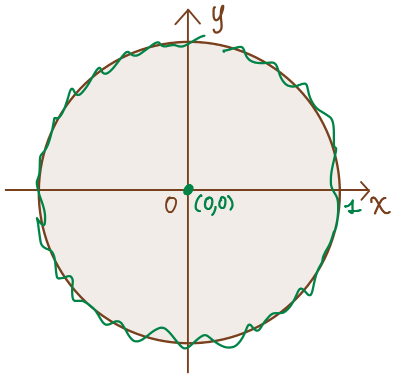
$x^2(-512x^7+128x^5+256x^2-96)+10 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = -10 \quad \Rightarrow \quad x = \cancel{\sqrt{-10}}$

Nuovi esercizi

3.9 Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni

(a)	$z = \log(1 - x^2 - y^2)$	(b)	$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$
(c)	$z = \log(x^2 + y^2 - 1)$	(d)	$z = \sqrt{-\lvert x^2 + y^2 - 2\rvert}$
(e)	$z = \log(x^2 + y^2)$	(f)	$z = (x^2 + y^2)^{-1}$

a) $\ln(1 - x^2 - y^2) \to 1 - x^2 - y^2 > 0$ per $x^2 + y^2 < 1$

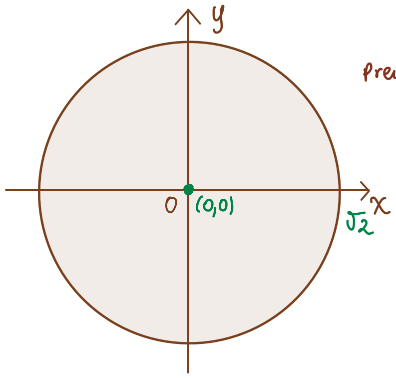


prendo $(x,y) = (0,0)$

$\to 0 + 0 < 1$? SI

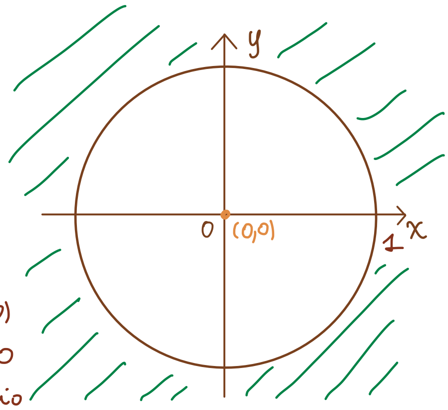
Circ esclusa

b) $\sqrt{2 - x^2 - y^2} \to D: 2 - x^2 - y^2 \geq 0$ per $x^2 + y^2 \leq 2$



prendo $(x,y) = (0,0)$

$0 + 0 \leq 2$? SI



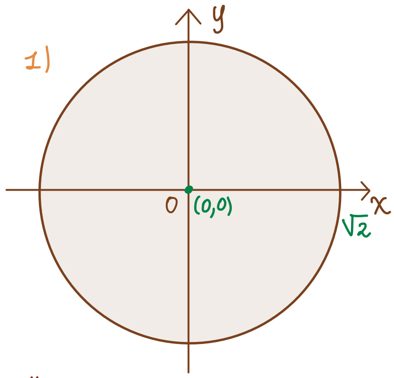
c) $\ln(x^2 + y^2 - 1) \to x^2 + y^2 > 1$

prendo $(x,y) = (0,0)$

$0 + 0 > 1$? NO

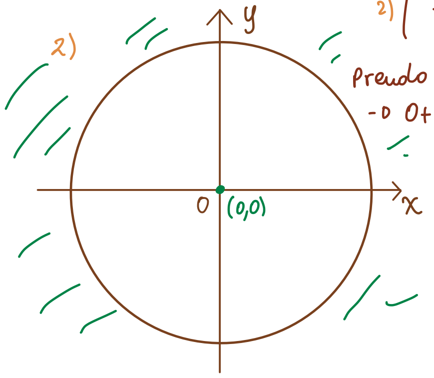
$\to$ val esterni al cerchio

1)



d) $\sqrt{-\lvert x^2 + y^2 - 2\rvert} \to \begin{cases} 1) & x^2 + y^2 - 2 \quad \text{se} \quad x^2 + y^2 \leq 2 \to \\ 2) & -x^2 - y^2 + 2 \quad \text{se} \quad x^2 + y^2 > 2 \end{cases}$

2)



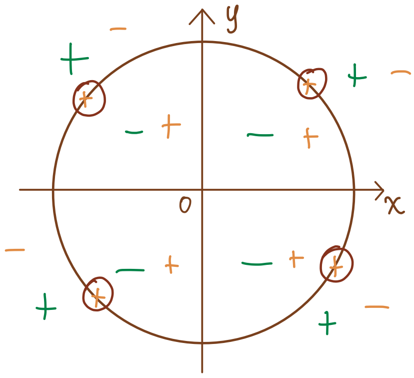
Prendo $(x,y) = (0,0)$

$\to 0 + 0 > 2$? NO

prendo $(x,y) = (0,0)$

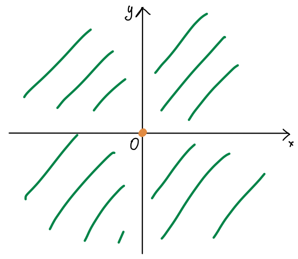
$\to 0 + 0 < 2$? <u>SI</u>

$\to$ Def per val interni alla circ.



Quindi f è definita per valori <u>SULLA</u> circonferenza

e) $\ln(x^2+y^2) \to x^2+y^2>0 \quad r=\emptyset$



prendo $(x,y)=(0,0)$
$\to 0+0>0$? NO

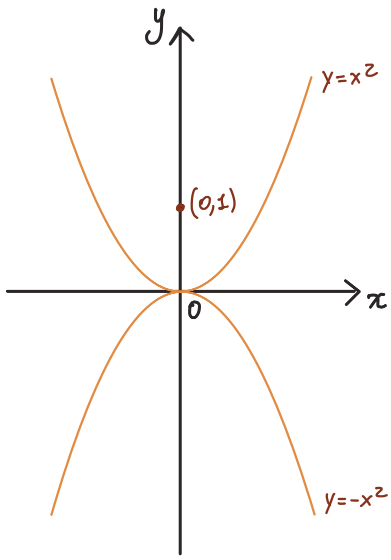
f def $\forall x - \{(0,0)\}$

f) $z=(x^2+y^2)^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2} \to x^2+y^2 \neq 0$ $\quad f$ def per ogni $x,y - \{(0,0)\}$

3.10 Rappresentare graficamente in un piano cartesiano x, y gli insiemi di definizione delle funzioni

(a) $f(x,y)=\sqrt{y^2-x^4}$ (b) $f(x,y)=\sqrt{x^4-y^2}$

a) $f(x,y)=\sqrt{y^2-x^4}$ $\quad D: \; y^2-x^4>0 \to y>\pm x^2$



per $y=x^2$ prendo $(x,y)=(0,1)$
$\to 1>0^2$? SI

per $y=-x^2$ prendo $(x,y)=(0,-1)$
$\to -1>-0^2$

Esercizi da Marco Bramanti

Si considerino le seguenti funzioni reali di due variabili. (Sono funzioni molto semplici che lo studente ha già -o potrebbe avere già- incontrato). Ragionando sull'espressione analitica, ed eventualmente tracciando alcune linee di livello, immaginare e cercare di tracciare il grafico della funzione. Controllare quindi la soluzione, cercando di capire perché il grafico è quello che è.

3.1. $f(x,y) = x^2 + y^2$

3.2. $f(x,y) = x^2 - y^2$

3.3. $f(x,y) = 2 + 3y - x$

3.4. $f(x,y) = xy$

3.5. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

3.6. $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

3.7. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

3.8. $f(x,y) = x^4 + y^4$

3.9. $f(x,y) = \sin x$

3.10. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

3.11. $f(x,y) = e^x \sin y$

Equazione del cerchio

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$$

Coordinate del centro

Se poniamo il centro in $x,y = (0,0)$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2$

Equazione CANONICA

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$\Rightarrow \quad C = \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \qquad r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} - \gamma}$

3.1) $x^2 + y^2 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma \qquad \alpha, \beta, \gamma = \emptyset$

$\Rightarrow C = \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \left(-\frac{0}{2}, -\frac{0}{2}\right) = (0,0)$ centro in O

$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma} = \sqrt{0} = \emptyset$ Raggio $\emptyset$

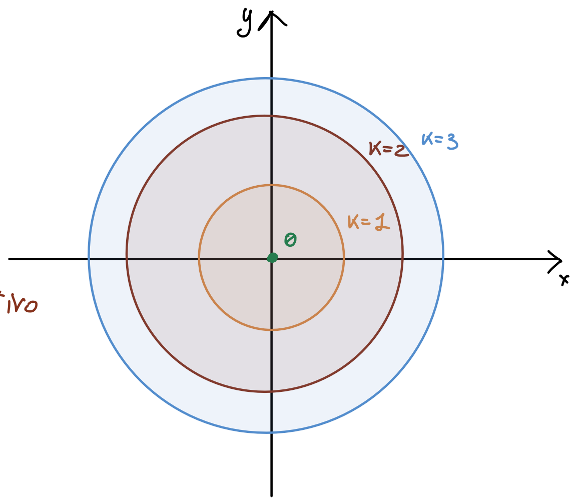
Se pongo $x^2 + y^2 = K$ con $K = 0, 1, \dots$

$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \gamma = 1 \Rightarrow r = \sqrt{1} = 1$

$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \gamma = 4 \Rightarrow r = 2$

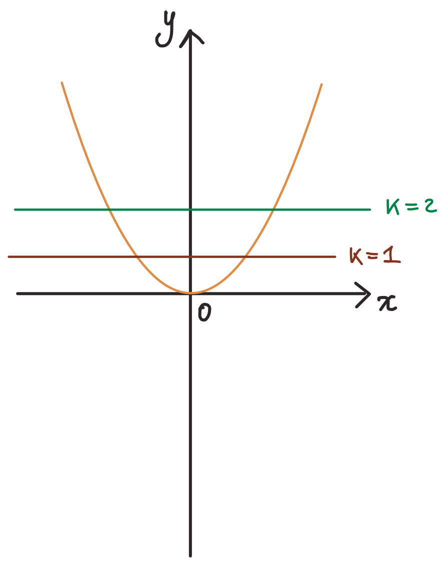
...



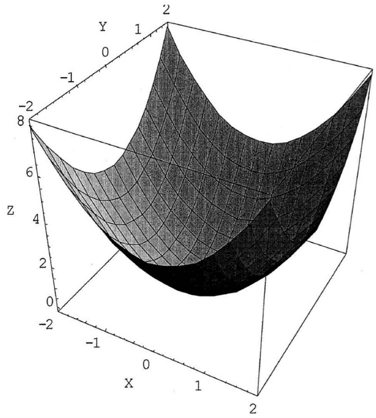
Per quanto riguarda z?

L'asse z in questo caso NON puo' essere negativo perche' abbiamo che $z = x^2 + y^2$

$\Rightarrow z > 0$



3.1. $x^2 + y^2$



$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ fissiamo una quota generica $z = k$.
Per trovare le curve di livello ci basta trovare le intersezioni tra il PIANO $z = k$ e la funzione $f(x,y)$

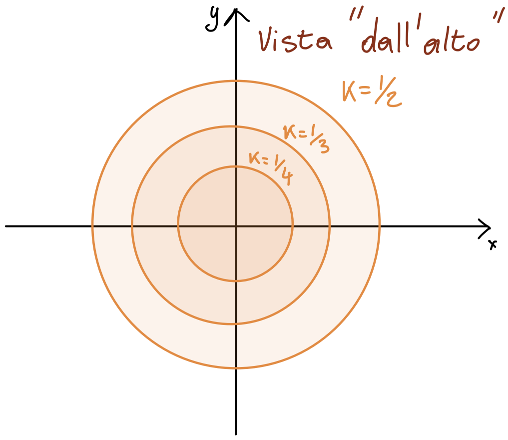
$$1 - x^2 - y^2 = k \Rightarrow -x^2 - y^2 = k - 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - k$$

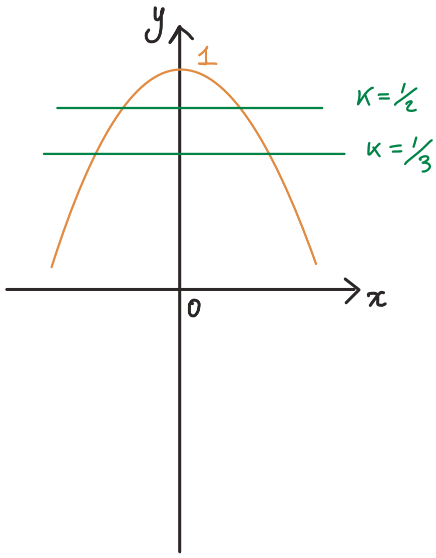
Se $1 - k > 0 \Rightarrow k < 1$ allora l'eq individua un fascio di circonferenze di centro O e raggio $\sqrt{1-k}$.

Se $1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$ allora l'eq è soddisfatta solo nel punto $(0,0)$

Se $1 - k < 0 \Rightarrow k > 1$ allora l'eq non ammette soluzioni
Perché? $r = \sqrt{1-k}$, $k > 1 \Rightarrow \sqrt{-(n)}$
non è possibile

Quindi se $k < 1$
$x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{2}$
$x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{3}$
$x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{4}$

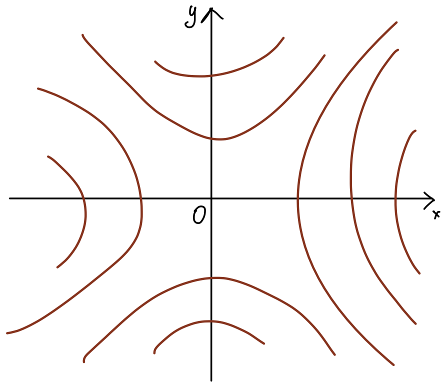




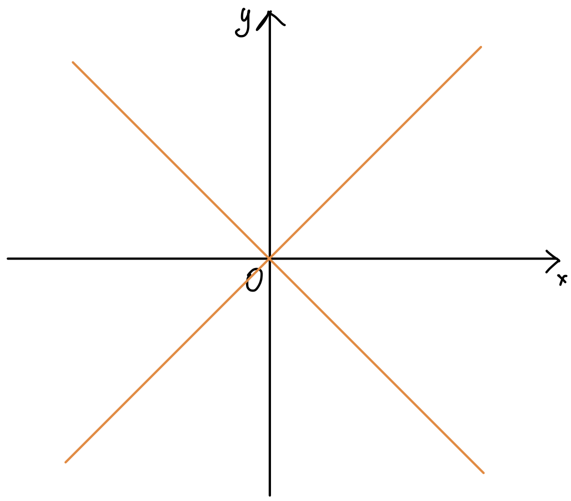
3.2 Disegnare il grafico e le linee di livello della funzione di due variabili $f(x,y) = y^2 - x^2$.

$y^2 - x^2 = k$

Se $k \neq 0$ abbiamo delle iperboli equilatere

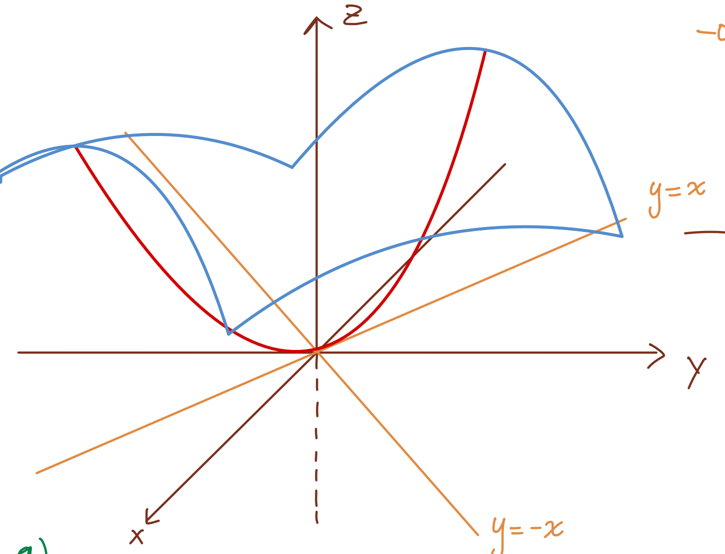


Se invece $k = 0$ allora
$y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x \leftarrow$ eq rette



Come disegnare una funzione di due variabili

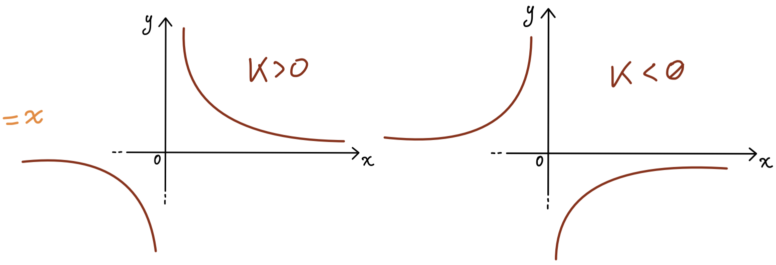
$f(x,y) = xy$



1) Insiemi di livello $\rightarrow$ fissiamo K costante

$$f(x,y) = xy = K \Rightarrow y = \frac{K}{x}$$

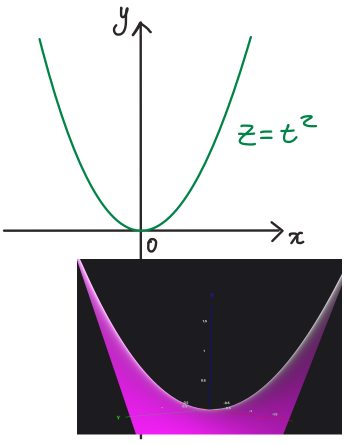
$\rightarrow$ a seconda di K abbiamo:



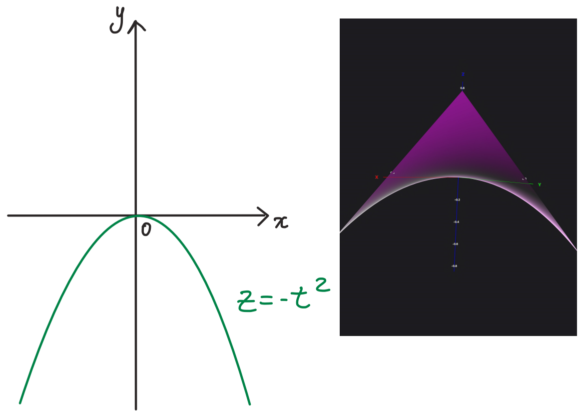
2) Vediamo come si comporta la funzione lungo una specifica retta. Scegliamo le bisettrici del 1-3 e 2-4 quadrante

a)
$$\begin{cases} z = f(x,y) = x \cdot y \\ \underbrace{x = y}_{\text{Bisettrice}} = \underset{\uparrow}{t} \end{cases} \Rightarrow z = t^2$$

costante



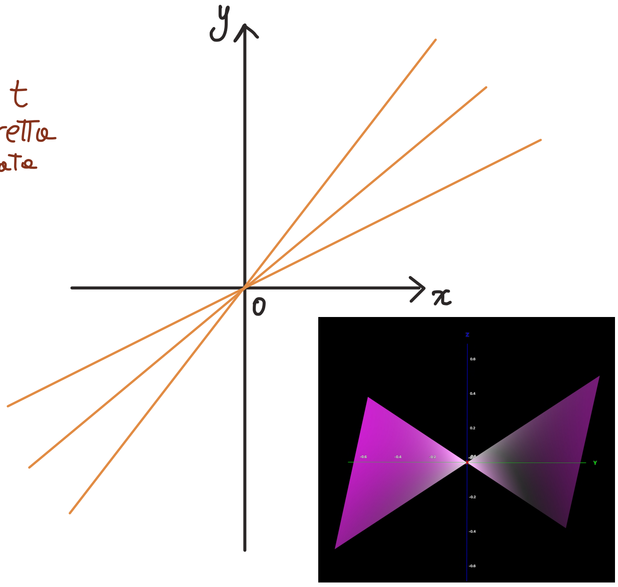
b)
$$\begin{cases} z = f(x,y) = x \cdot y \\ y = -x = t \end{cases} \Rightarrow z = -t^2$$



Che succede ad esempio su una retta parallela ad x?

$$\begin{cases} z = f(x,y) = x \cdot y \\ y = t \end{cases} \Rightarrow z = tx$$

Al variare di t otteniamo una retta più o meno inclinata



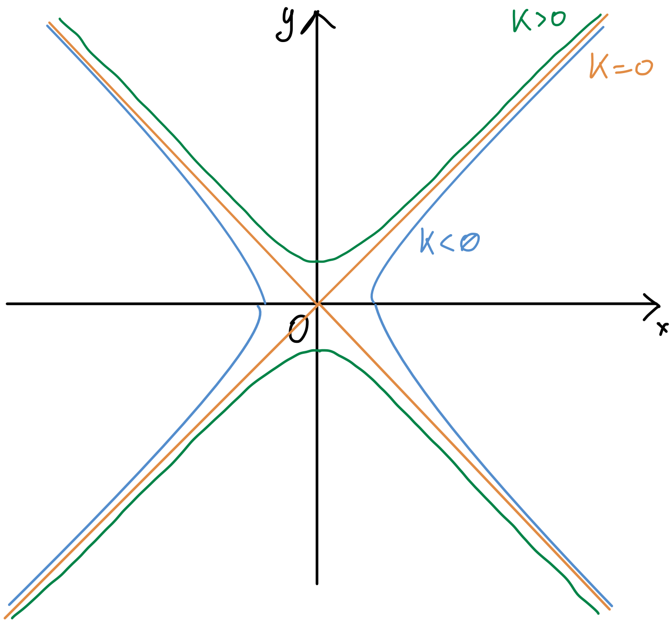
3.3 Disegnare approssimativamente e, limitatamente alle coppie (x, y) per cui $f(x, y) \geq 0$, il grafico delle funzioni

(a) $f(x, y) = y^2 - x^2$ (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

a) $f(x,y) = z = y^2 - x^2$

1) Fisso K costante : $z = y^2 - x^2 = K \rightarrow y^2 = K + x^2 \rightarrow y = \sqrt{x^2 + K}$

A seconda di K abbiamo il grafico :

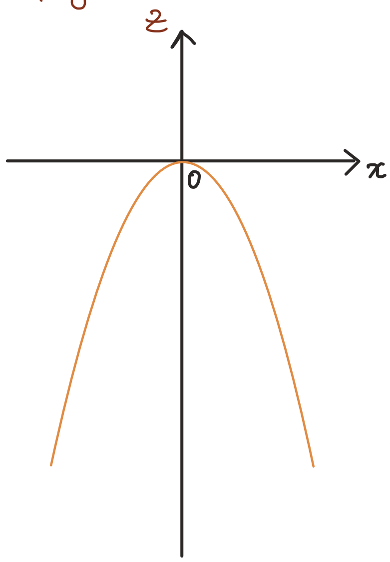


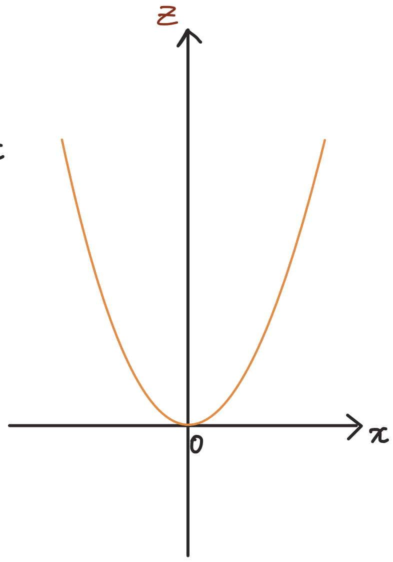
Mi posiziono lungo y :

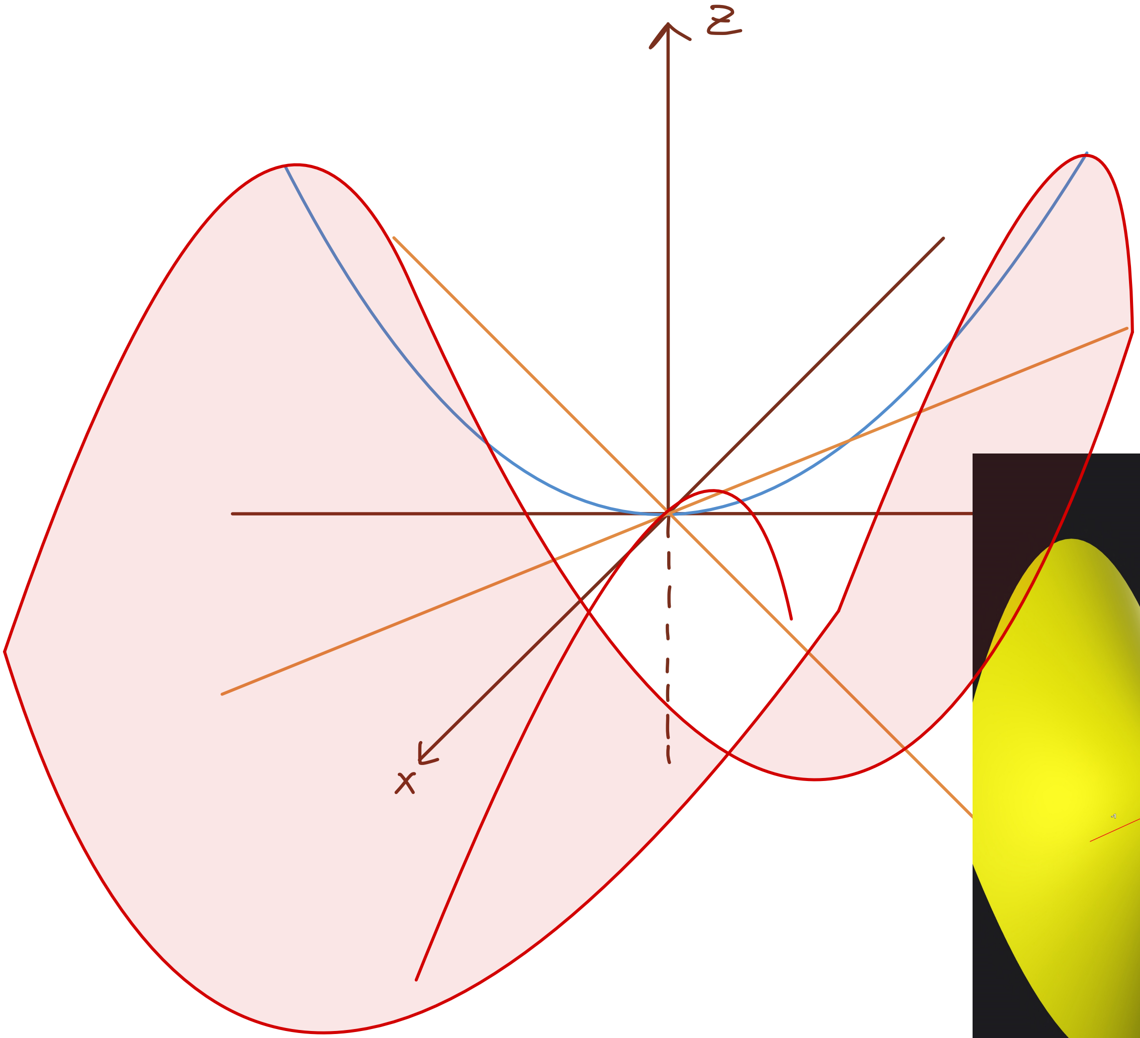
$\begin{cases} f(x,y) = z = y^2 - x^2 \\ x = t \end{cases} \rightarrow z = y^2 - t^2$

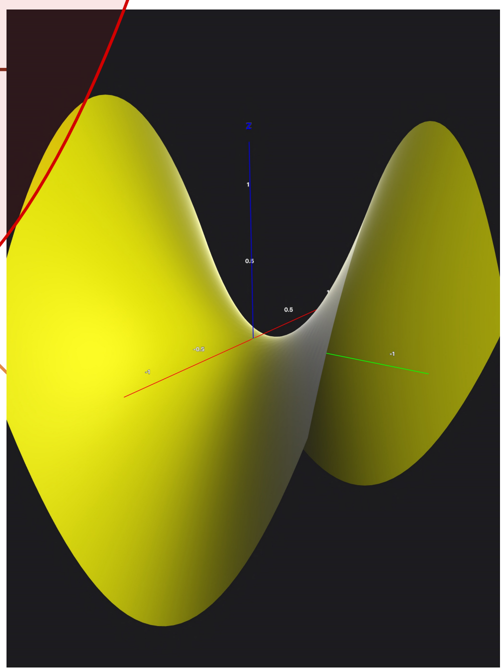
Mi posiziono lungo x

$\begin{cases} f(x,y) = z = y^2 - x^2 \\ y = t \end{cases} \rightarrow \underline{z = t^2 - x^2}$



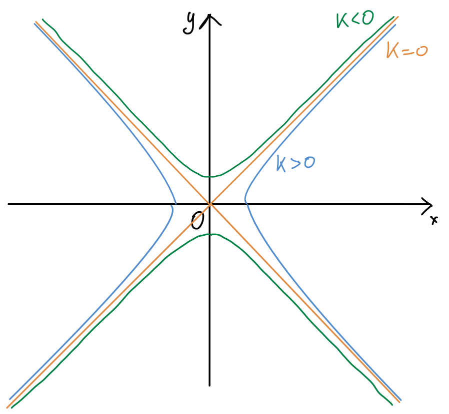






$f(x,y) = x^2 - y^2$ Fisso K costante → $z = x^2 - y^2 = K$

→ $-y^2 = K - x^2$ → $y = \sqrt{x^2 - K}$ → Stessa situazione di prima

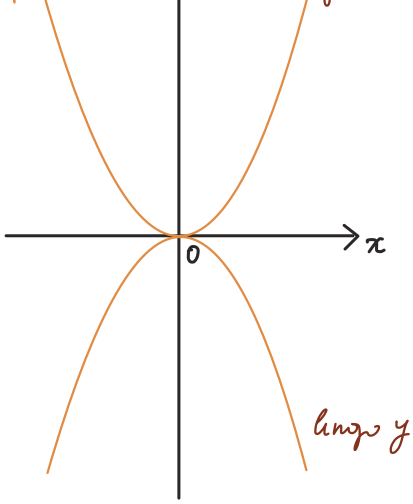


Lungo x

$$\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ y = K \end{cases} \to z = x^2 - K$$

Lungo y

$$\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ x = K \end{cases} \Rightarrow z = K - y^2$$

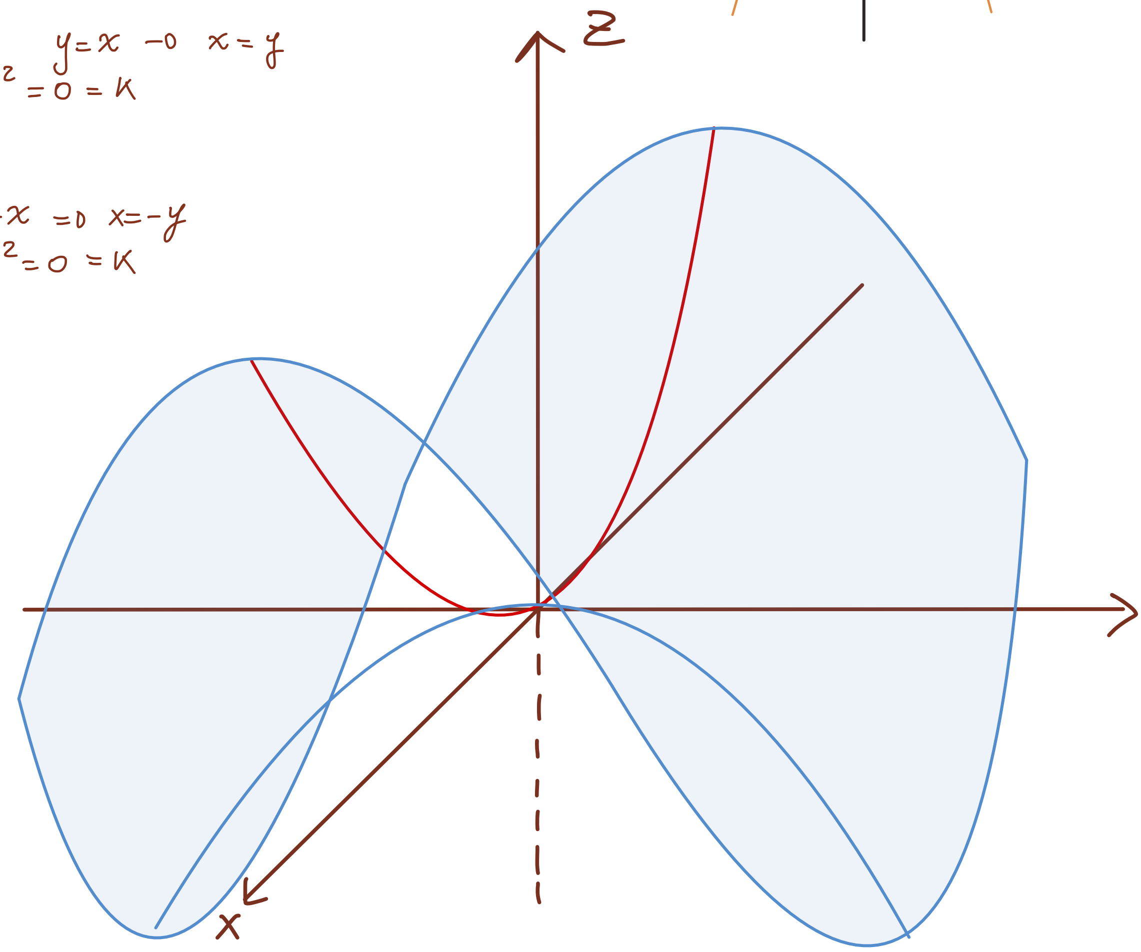


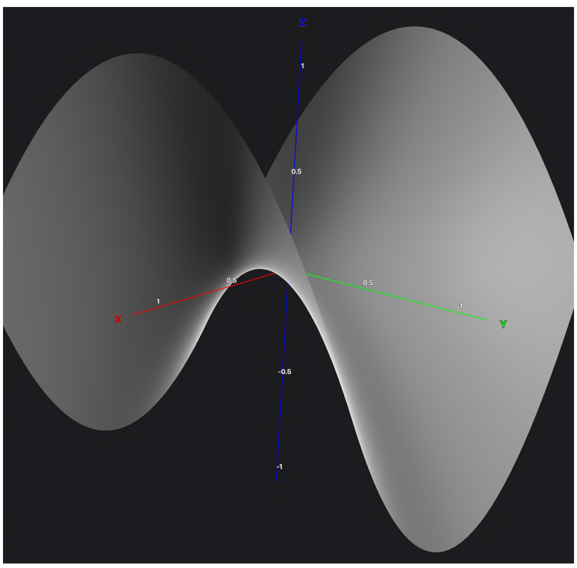
Lungo bisettrice 1-3 → $y = x$ → $x = y$

$$\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ x = y \end{cases} \to z = y^2 - y^2 = 0 = K$$

Bisettrice 2-4 → $y = -x \Rightarrow x = -y$

$$\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow z = y^2 - y^2 = 0 = K$$





3.4 Disegnare approssimativamente e limitatamente alle coppie (x, y) per cui $f(x, y) \geq 0$ il grafico della funzione $f(x, y) = \cancel{\operatorname{sen} x}$ $\cos x$. Determinare inoltre le linee di livello.

$z = \sin x$

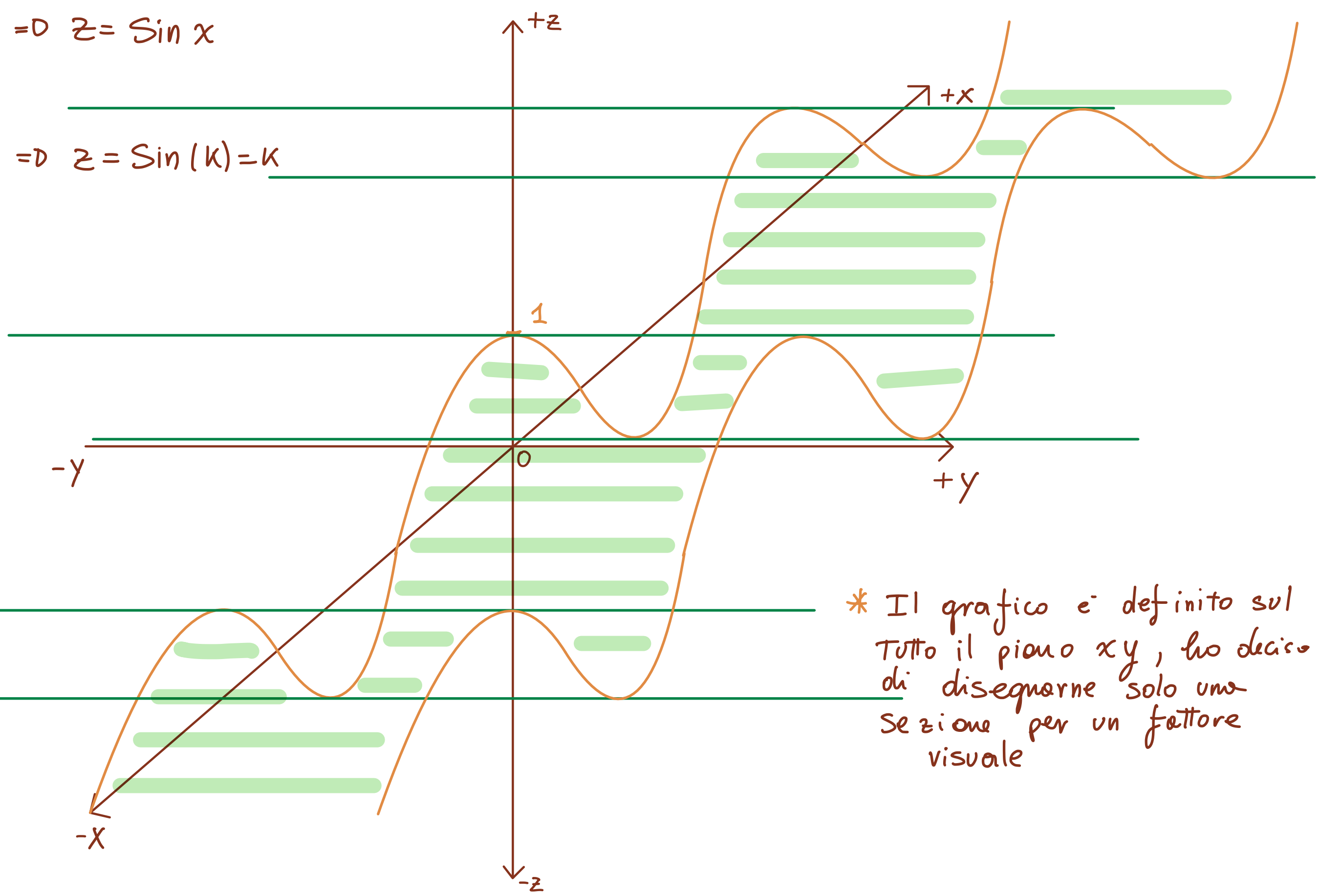
Fisso k costante $\Rightarrow$ $\cos x = k$ $\Rightarrow$?

Lungo x

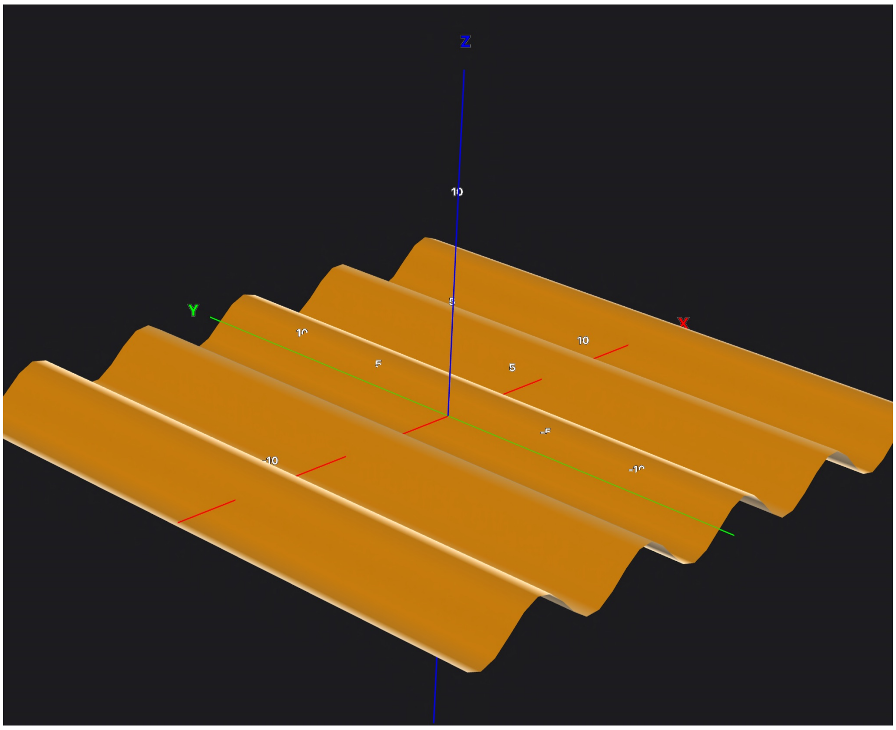
$\begin{cases} z = \sin x \Rightarrow z = \sin x \\ y = k \end{cases}$

Lungo y

$\begin{cases} z = \sin(x) \Rightarrow z = \sin(k) = k \\ x = k \end{cases}$



* Il grafico è definito sul tutto il piano xy, ho deciso di disegnarne solo una sezione per un fattore visuale



3.5 Disegnare il grafico della funzione $f(x, y) = x^2 - x^3$

$z = x^2 - x^3$

[Figura 3.8]

guardo lungo x

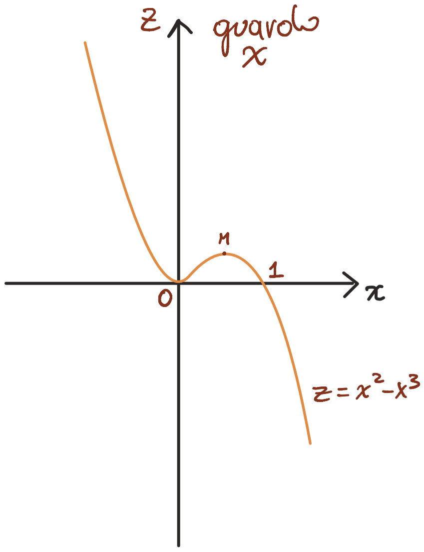
$$\begin{cases} z = x^2 - x^3 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow z = x^2 - x^3$$

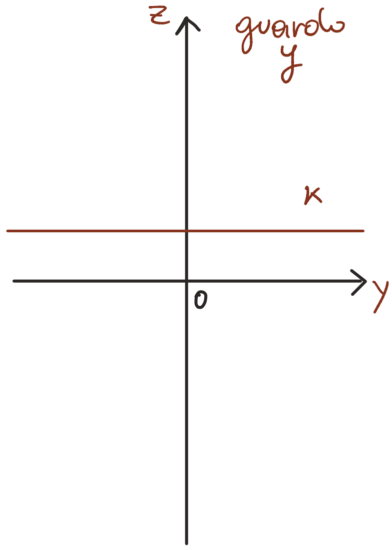
guardo lungo y

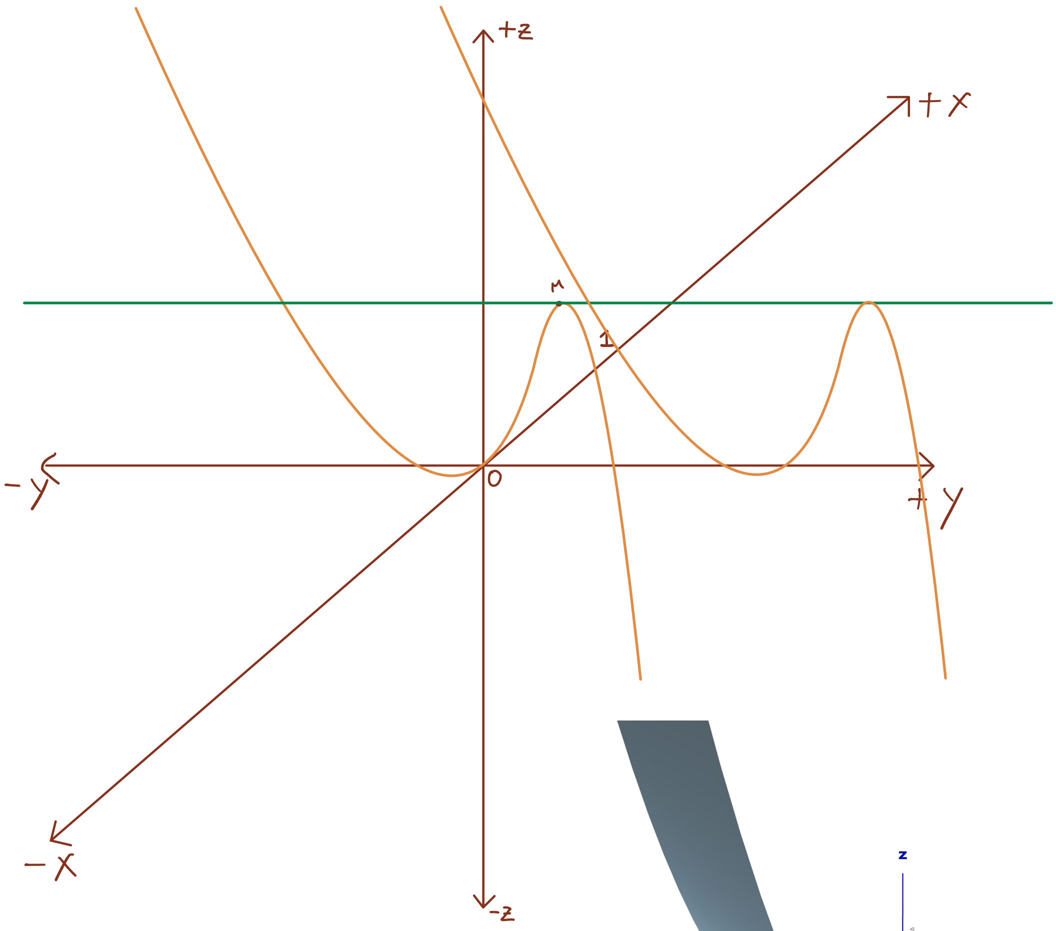
$$\begin{cases} z = x^2 - x^3 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow z = k$$

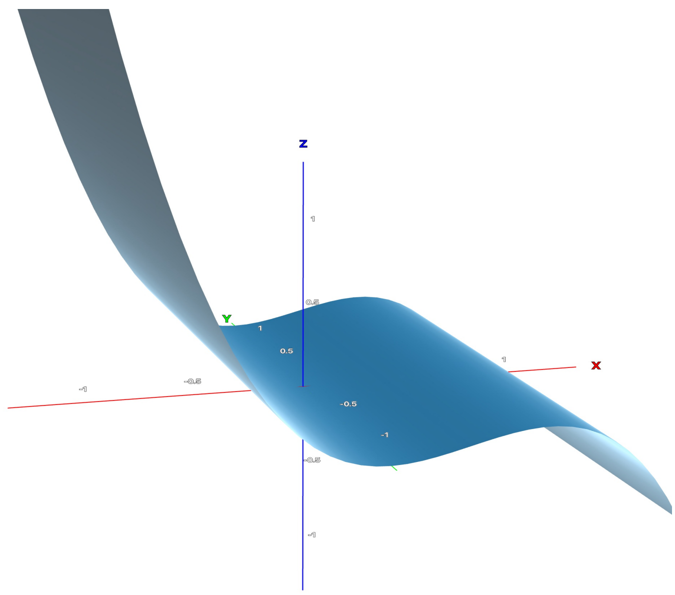
guardo lungo bisett 1-3 Q

$$\begin{cases} z = x^2 - x^3 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow z = k$$







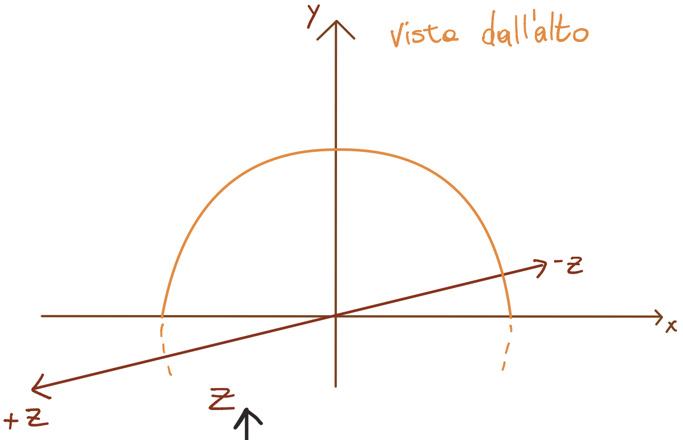


3.6 Disegnare il grafico della funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad K$ cost $\rightarrow$ $\sqrt{x^2+y^2} = K$ $\rightarrow$ $x^2+y^2 = K$ $\rightarrow$ $y = \sqrt{K - x^2}$

Eq semicerchio

Vista dall'alto

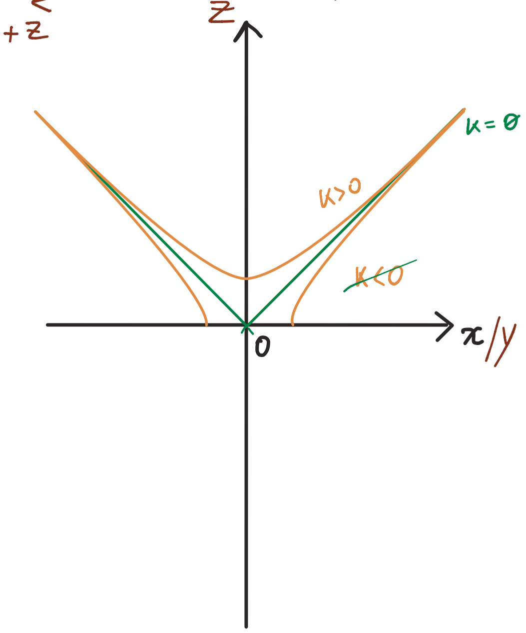


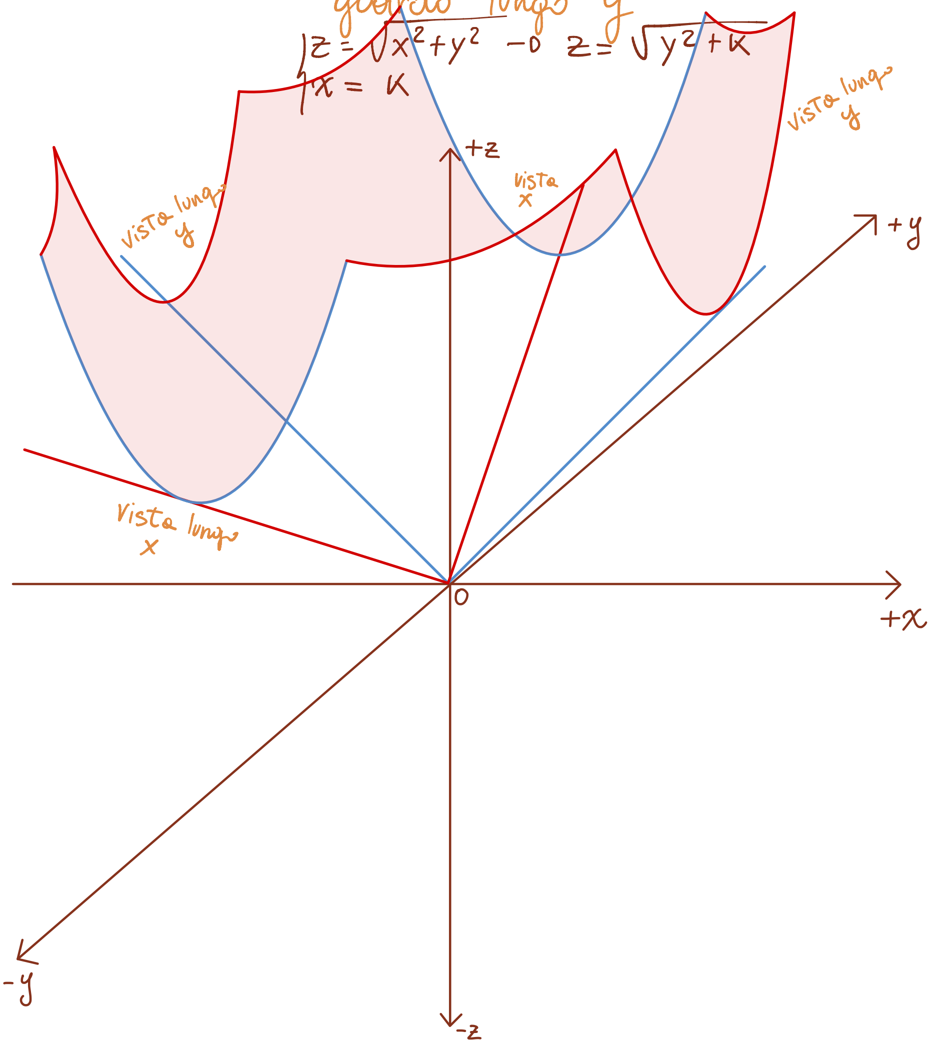
guardo lungo x

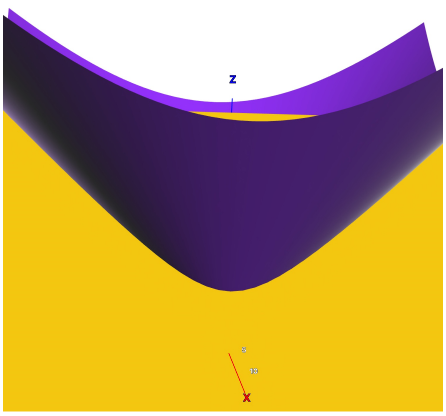
$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+K} \\ y = q \end{cases}$

guardo lungo y

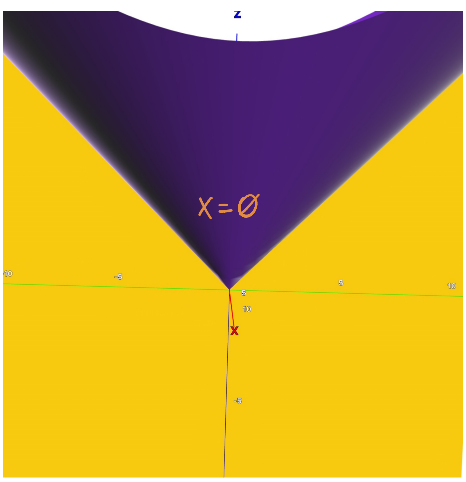
$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow z = \sqrt{y^2+K} \\ x = K \end{cases}$







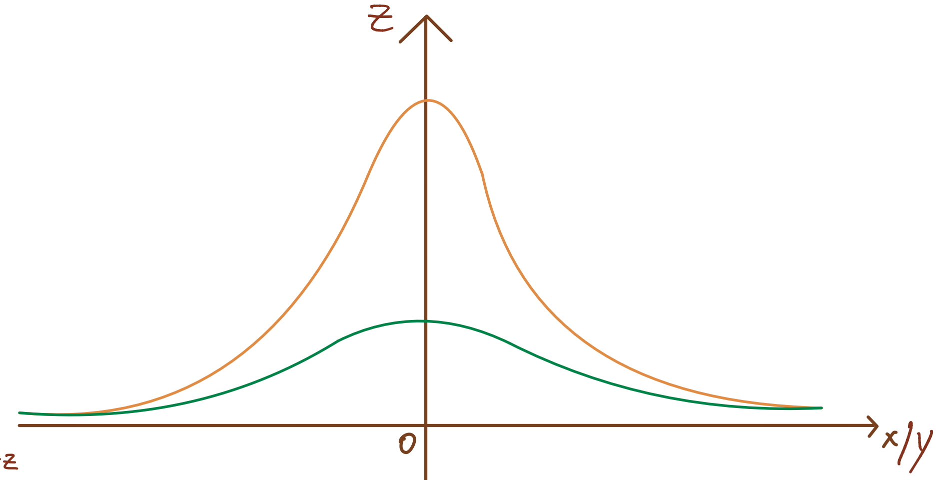
X=3



3.8 Disegnare il grafico della funzione $z = e^{-(x^2+y^2)}$. $z = e^{-(x^2+y^2)}$

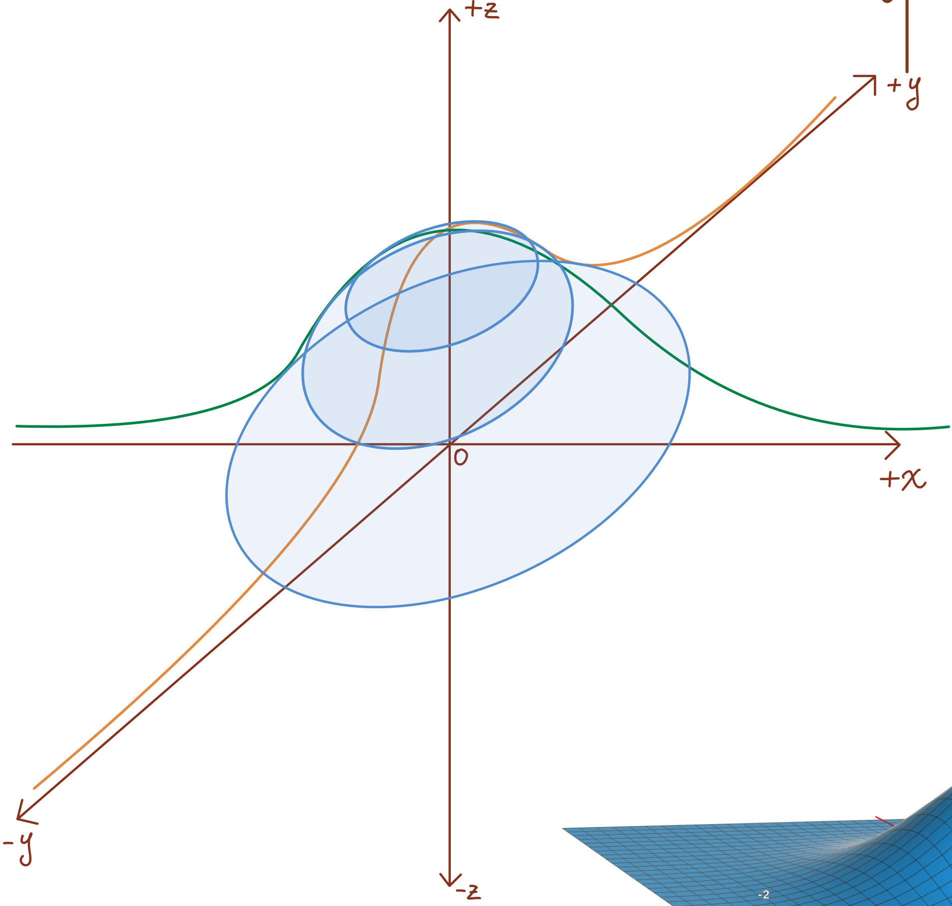
Pongo $z = K$ cost $\to$ $z = e^{-(x^2+y^2)} = K \to -x^2+y^2 = \cancel{\ln(K)}^{K} \Rightarrow -x^2+y^2 = K$

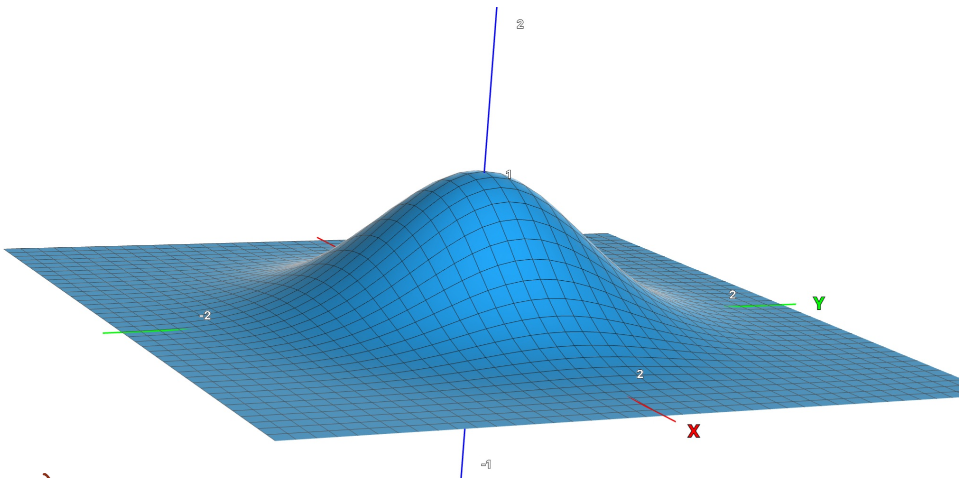
$\to y^2 = K + x^2 \to y = \sqrt{x^2+K}$ semicerchio



Guardo lungo x

$\begin{cases} z = e^{-(x^2+y^2)} \\ y = K \end{cases} \to z = e^{-(x^2+K)}$





Dov'e' il max?

Prendo l'eq lungo $x \to z = e^{-(x^2+K)}$ CDE: $\forall x \in \mathbb{R}$

Insiemi di Definizione

3.9 Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni

(a) $z = \log(1 - x^2 - y^2)$ (b) $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

(c) $z = \log(x^2 + y^2 - 1)$

(e) $z = \log(x^2 + y^2)$

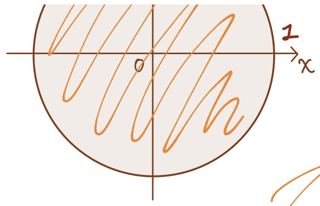
3.10 Rappresentare graficamente in un piano cartesiano x, y gli insiemi di definizione delle funzioni

(a) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^4}$ (b) $f(x,y) = \sqrt{x^4 - y^2}$

$z = \log(1 - x^2 - y^2)$

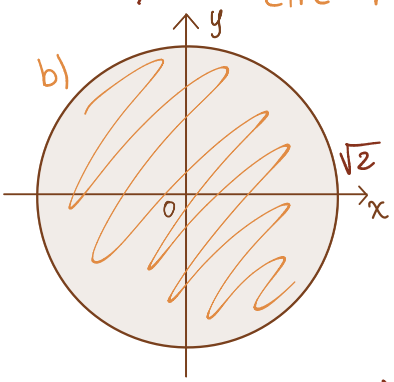
$1 - x^2 - y^2 > 0 \to x^2 + y^2 < 1$

circonf di $r = 1$

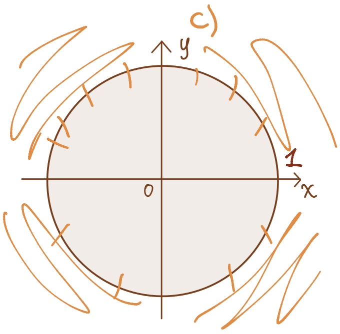


b) $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \to$

$\to x^2 + y^2 \leq 2$ circ $r = \sqrt{2}$



c) $\ln(x^2+y^2-1) \to x^2+y^2 > 1$

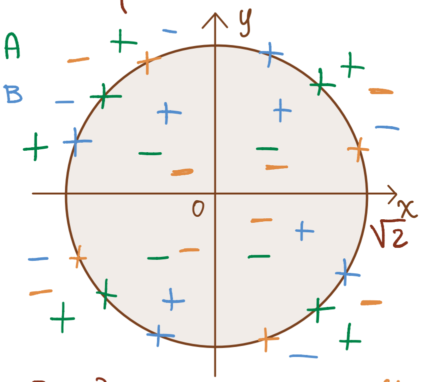


d) $z = \sqrt{-|x^2+y^2-2|}$

$$\begin{cases} x^2+y^2-2 < 0 \to z = \sqrt{+x^2+y^2-2} \\ x^2+y^2-2 > 0 \to z = \sqrt{-x^2-y^2+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \geq 2 & A \\ x^2+y^2 \leq 2 & B \end{cases}$$

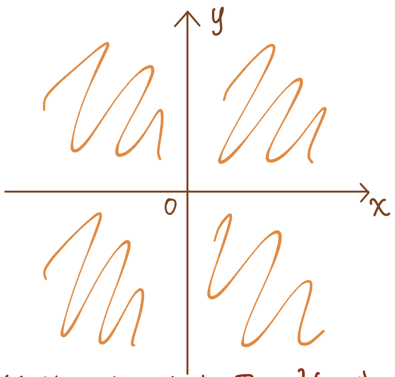
$A \cap B$



f definita per $x^2+y^2 = 2$

ovvero solo la circonferenza di $C(0,0)$ e $r = \sqrt{2}$

e) $\ln(x^2+y^2) \to x^2+y^2 > 0$



Definita per tutto $\mathbb{R} - \{(x,y) = (0,0)\}$

f) $z = (x^2+y^2)^{-1} \to \dfrac{1}{x^2+y^2}$

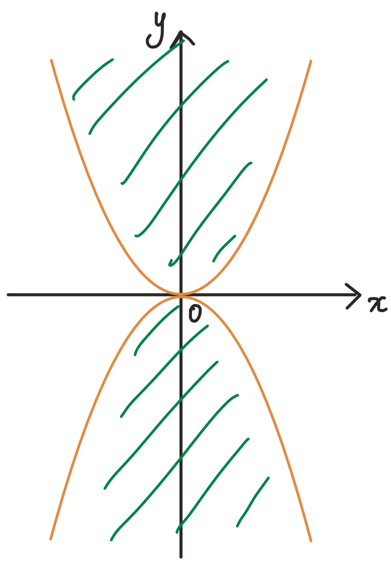
$\Rightarrow x^2+y^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R} - \{(x,y) \mid x = 0, y = 0\}$

3.10 Rappresentare graficamente in un piano cartesiano x, y gli insiemi di definizione delle funzioni

(a) $\quad f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^4}$ $\qquad$ (b) $\quad f(x,y) = \sqrt{x^4 - y^2}$

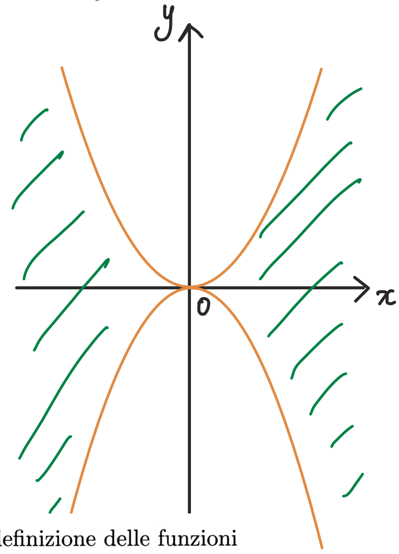
a) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^4}$ $\qquad$ Insieme di def

$y^2 - x^2 \geq 0 \rightarrow y \geq \pm x^2$



b) $\sqrt{x^4 - y^2} \rightarrow x^4 - y^2 \geq 0 \rightarrow -y^2 \geq -x^4 \rightarrow y^2 \leq x^4$

$\rightarrow y \leq \pm x^2$



3.11 Rappresentare graficamente l'insieme di definizione delle funzioni

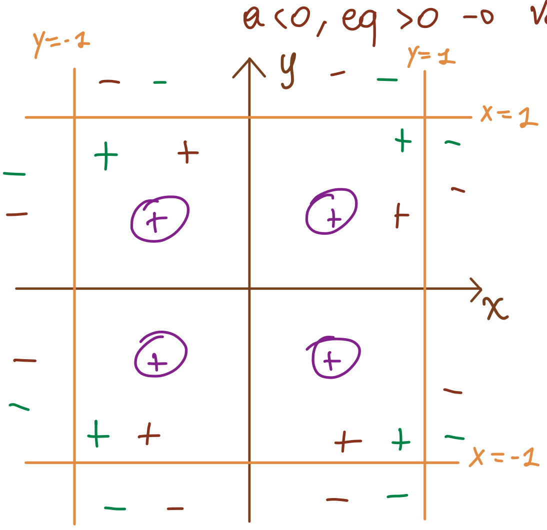
(a) $\quad z = \log(1 - x^2) + \log(1 - y^2)$ $\qquad$ (b) $\quad z = \log \dfrac{1 - x^2}{1 - y^2}$

(c) $\quad z = \log(x^2 - 1) + \log(1 - y^2)$ $\qquad$ (d) $\quad z = \log \dfrac{x^2 - 1}{1 - y^2}$

a) $z = \underset{1.}{\ln(1 - x^2)} + \underset{2.}{\ln(1 - y^2)}$

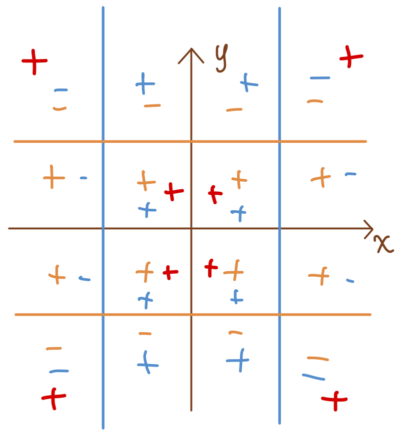
1. $1 - x^2 > 0 \rightarrow x < \pm 1$
   $a < 0$, $eq > 0 \rightarrow$ valori interni

2. $1 - y^2 > 0 \rightarrow y < \pm 1$
   $a < 0$, $eq > 0 \rightarrow$ valori interni



b) $\ln\left(\dfrac{1 - x^2}{1 - y^2}\right) = \underset{1.}{\ln(1 - x^2)} - \underset{2.}{\ln(1 - y^2)}$

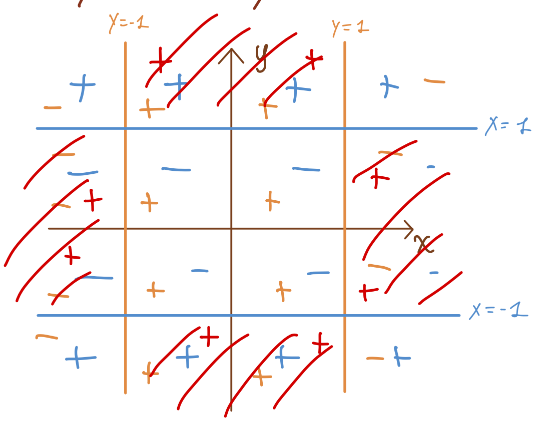
1. $1 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 1 \rightarrow x < \pm 1$
2. $1 - y^2 > 0 \rightarrow y < \pm 1$



c) $\ln(x^2 - 1) + \ln(1 - y^2) = \ln\left[(x^2 - 1)(1 - y)^2\right]$

$x^2 - 1 > 0 \rightarrow x > \pm 1$ $\quad$ Val est

$1 - y^2 > 0 \rightarrow y < \pm 1$ $\quad$ Val int



3.12 Determinare l'insieme di definizione delle funzioni

(a) $z = \sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}$ (b) $z = \sqrt{x \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}$

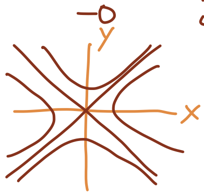
$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 \\ x^2+y^2 \geq 0 \end{cases}$

a) $z = \sqrt{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\sqrt{x^2+y^2}) \geq 0 \\ x^2+y^2 \geq 0 \end{cases} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

3.2. $f(x,y) = x^2 - y^2$

$f(x,y) = x^2 - y^2 \rightarrow \mathbb{D}: \mathbb{R}^2$

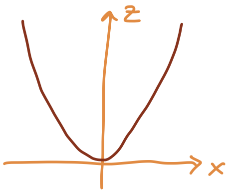


$x^2 - y^2 = k \rightarrow y^2 = x^2 - k \rightarrow y = \sqrt{x^2-k}$

Lungo x

$y = k$

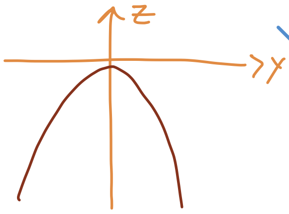
$\rightarrow z = x^2 - k$

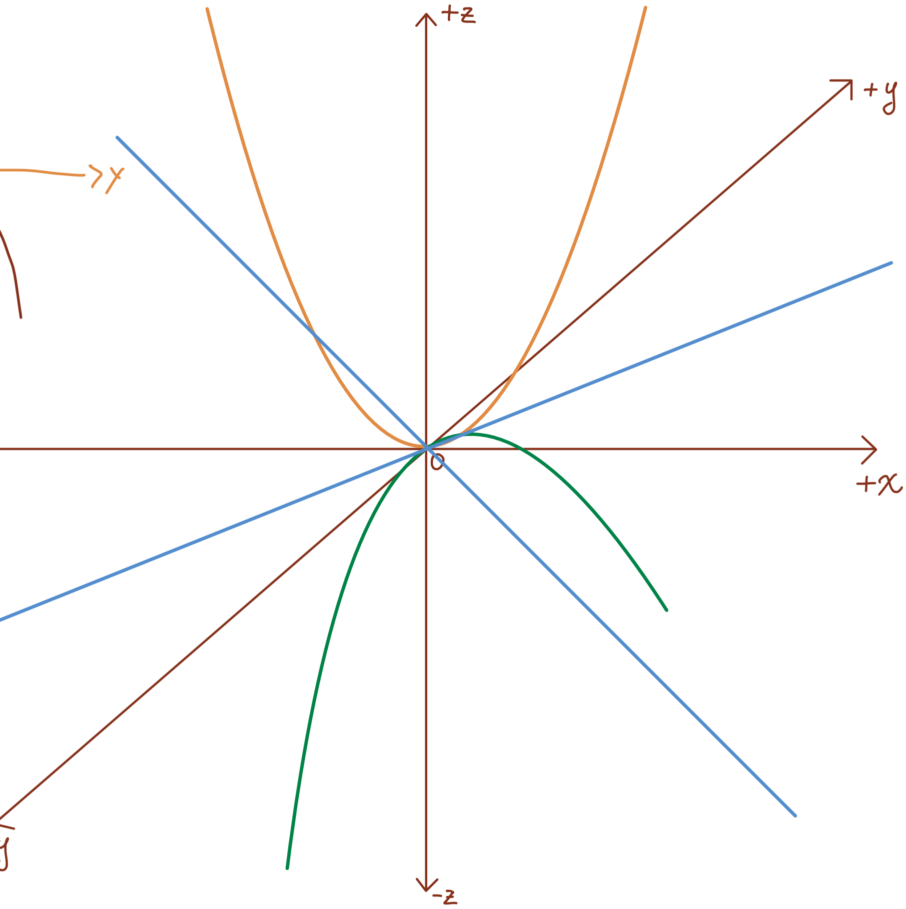


Lungo y

$x = k$

$\rightarrow z = k - y^2 \Rightarrow$





$$f(x,y) = \sqrt{\frac{2x - (x^2+y^2)}{x^2+y^2-x}}$$

Dominio:

a) $\dfrac{2x-(x^2+y^2)}{x^2+y^2-x} \geq 0$

b) $x^2+y^2-x \neq 0$

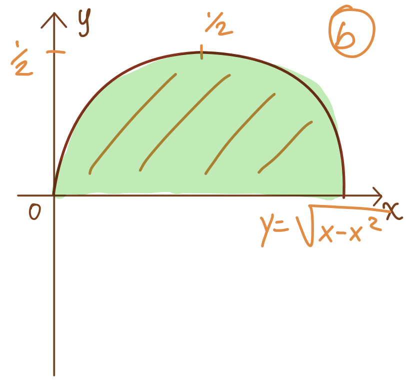
b) D^2 $x^2+y^2-x \neq 0 \rightarrow y^2 = x - x^2 \rightarrow y = \sqrt{x-x^2}$

D: $\sqrt{x-x^2} \rightarrow x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(1-x) \geq 0$

$\hookrightarrow x \geq 0$

$\hookrightarrow x \leq 1$ $\Rightarrow$ $0 \leq x \leq 1$

Eq semicerchio $r=1$ $C=\frac{1}{2}$

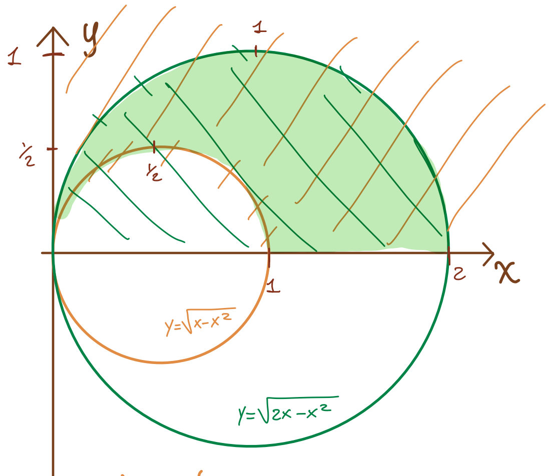


a) $\dfrac{2x-(x^2+y^2) \geq 0}{x^2+y^2-x} \geq 0$ N $2x-(x^2+y^2) \geq 0$

D $x^2+y^2-x > 0$

D: $y^2 > x - x^2 \rightarrow y > \sqrt{x-x^2}$

N: $2x-(x^2+y^2) \geq 0 \rightarrow 2x - x^2 - y^2 \geq 0 \rightarrow -y^2 \geq x^2 - 2x \rightarrow y^2 \leq 2x - x^2 \rightarrow y \leq \sqrt{2x-x^2}$

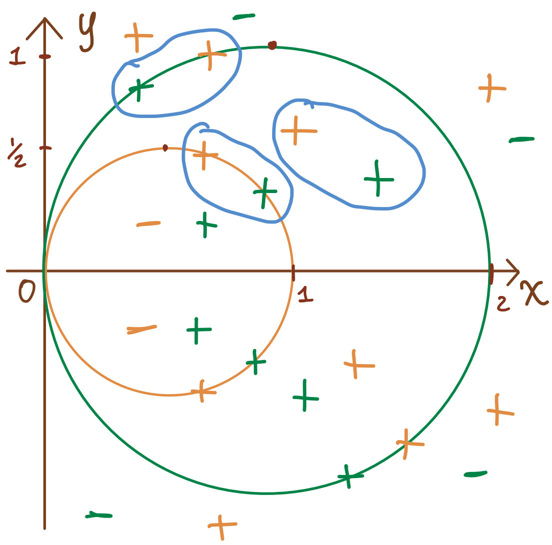


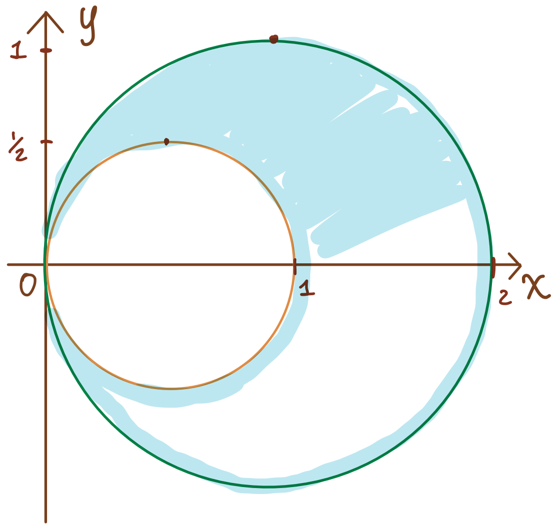
Risolvendo diversamente

$\dfrac{2x-(x^2-y^2)}{x^2+y^2-x} \geq 0 \rightarrow$ N: $2x-(x^2 y^2) \geq 0 \rightarrow 2x - x^2 - y^2 \geq 0 \rightarrow x^2+y^2 \leq 2x$

D: $x^2+y^2-x > 0 \rightarrow x^2+y^2 > x$

$\Rightarrow x < x^2+y^2 \leq 2x$ 2 eq del cerchio





Limiti di funzioni a 2 Variabili

Introduzione

Esempio 3.1. Si considerino i limiti:

$$(a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{y+1}\cos x}{x^2+4}; \quad (b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2};$$

a) $\lim_{x,y\to(0,0)} \frac{2^{y+1}\cdot\cos(x)}{x^2+4}$

1) Continua? $x^2+4\neq 0 \to \forall x,y\in\mathbb{R}^2 \to$ Il limite si calcola sostituendo

$\to \frac{2^{0+1}\cdot\cos(0)}{0+4} = \frac{2\cdot 1}{4} = \frac{1}{2}$

* Abbiamo problemi (anche con una sola var) Solo quando abbiamo forme indet.

b) $\lim_{x,y\to 0,0} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$ 1) D: $x^4+y^2\neq 0 \to y^2\neq -x^4 \to y\neq\pm\sqrt{-x^4}$

Sostituendo $\to \left[\frac{0}{0}\right] \to$ Proviamo a far tendere a zero prima la x e poi y

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2} = \frac{y^4}{y^2} \to y^2$

$\lim_{y\to 0} y^2 \to 0$ $\to$ facciamo tendere a 0 prima y e poi x

$\Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2} = \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \to +\infty$ Il limite Non esiste!

Importante! Non è lecito calcolare il limite in modo separato. Inoltre non c'è nessuna correlazione tra x e y, quindi non è lecito nemmeno fare stime Asintotiche.

Esempio 3.2. Si considerino i limiti:

$$(a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}; \quad (b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2};$$

a) $\lim_{\to 0,0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$\to$ Proviamo a vedere che succede quando f tende a 0 lungo una retta qualsiasi:

$f(x, \overset{y=mx}{mx}) = \frac{x\cdot(mx)^2}{x^2+(mx)^4}$ $\lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \frac{m^2\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}(1+m^4x^2)} = \frac{m^2x}{1+m^4x^2} \sim \frac{x}{x^2} \to x^2 \gg x \to 0$

Sembrerebbe quindi che il limite tenda a zero; ciò però non è vero: controlliamo $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ lungo la curva $x=y^2$

$\to f(y^2,y) = \frac{y^2\cdot y^2}{y^4+y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$

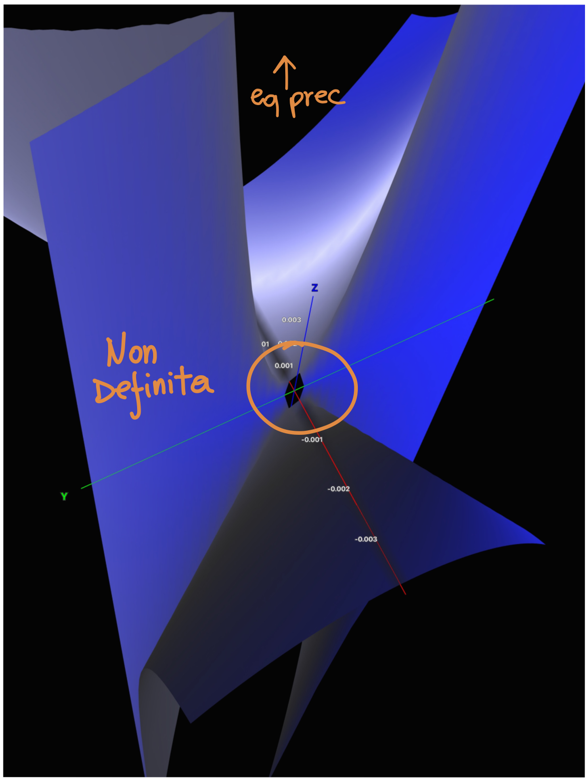
Altro esempio

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$ lim lungo $y = mx$

$$\lim_{x \to 0} f(x,y)\Big|_{y=mx} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2}$$

$$\to \frac{\cancel{x^2}(-m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} \to -\frac{m^2}{1+m^2}$$ Dipende da m

$\Rightarrow$ il lim Non esiste



Derivazione Parziale

Esempio 3.8. Calcolare le derivate parziali della seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{xe^y}{x^2+y^2} \text{ per } (x,y) \neq (0,0).$$

Con le derivate parziali si considera la variabile non integranda come costante.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{xe^y}{x^2+y^2} \to y = \text{cost} \to \frac{e^y(x^2+y^2) - 2x\,xe^y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{xe^y}{x^2+y^2} \to x = \text{cost} \to \frac{xe^y(x^2+y^2) - 2xye^y}{(x^2+y^2)^2}$$

Esempio 3.9. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \sin(x\log y)$ nel punto $(x_0,y_0) = (\pi, e)$.

$f = \sin(x \ln y)$ in $(x_0,y_0) = (\pi, e)$

Deriv. $\frac{\partial}{\partial x} f = \ln y \cos(x \ln y)$ $\qquad \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{x}{y}\cos(x \ln y)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(\pi,e) = \underbrace{\ln e}_{1} \underbrace{\cos(\pi \cdot \ln e)}_{-1} = -1$
- $f(\pi,e) = \underbrace{\sin(\pi \cdot \ln e)}_{0} = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(\pi,e) = \frac{\pi}{e}\underbrace{\cos(\pi \ln e)}_{-1} = -\frac{\pi}{e}$

otteniamo l'eq del piano tangente

$$\boxed{z = f(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)(y-y_0)}$$

$$\Rightarrow z = 0 - 1(x-\pi) - \frac{\pi}{e}(y-e) = \pi - x + \pi - \frac{\pi}{e}y = 2\pi - x - \frac{\pi}{e}y$$

Esempio 3.10. Calcolare, se esistono, le derivate parziali indicate, nel solo punto richiesto.

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\cos(xy)\right) \text{ in } (0,1).$$

$f(x,y) = \cos(xy)\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x} f = -y\sin(xy)\sqrt{x^2+y^2} + \cos(xy)\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} = -y\sin(xy)\sqrt{x^2+y^2} + \frac{\cos(xy)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = -x\sin(xy)\sqrt{x^2+y^2} + \cos(xy)\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} = -x\sin(xy)\sqrt{x^2+y^2} + \frac{\cos(xy)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Calcolo il valore nei punti x_0, y_0

$$\frac{\partial}{\partial x} f \Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -1\cdot\underbrace{\sin(0)}_{0}\sqrt{1} + \underbrace{\cos(0)}_{1} \Rightarrow 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f \Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 0 + \frac{\cos(0)\cdot 1}{\sqrt{1}} = 1$$

Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni, nei punti indicati, semplificando le espressioni trovate.

Ulteriori esercizi sul calcolo di derivate parziali e piano tangente si trovano nel §3.6.

3.82. $3x^2y^3 - 5xy^2 + 2x^3 - 2xy$ per ogni (x, y)

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6y^3x - 5y^2 + 6x^2 - 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2 - 10xy - 2x$

3.83.★ $\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ per $(x, y) \neq (0, 0)$;

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^4) - xy^2(2x)}{(x^2+y^4)^2}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy(x^2+y^4) - xy^2(4y)}{(x^2+y^4)^2}$

3.84.★ $\log(xy)$ per $xy > 0$;

$\ln(xy) - 0$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$

3.85.★ $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ per $y \neq 0$;

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y + \frac{x^2}{\cancel{y^2}} \cdot \cancel{y}} = \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y}} = \frac{y}{y^2+x^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) = - \frac{x}{y^2 + \frac{x^2}{y^2} \cdot y^2} = - \frac{x}{y^2 + x^2}$

3.86.★ $\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$ per $(x, y) \neq (1, -2)$

$\left[(x-1)^2 + (y+2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}}\left[(x-1)^2 + (y+2)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}(x-1) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left[(x-1)^2 + (y+2)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + 4y + 4\right) = \frac{y+2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}$

$2y + 4 = 2(y+2) =$
$= \frac{d}{dy}\left[(y+a)^2\right]$

3.87. x^y per $x > 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1} = y \frac{x^y}{x}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln y \cdot x^y$

$e^{-\frac{x^2}{y}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}$

3.88. $\frac{e^{-x^2/y}}{\sqrt{y}}$ per $y > 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-\frac{x^2}{y}} \cdot \frac{2}{y} x \cdot y^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y} =$

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $z = f(x,y)$ nel punto (x_0, y_0) assegnato:

$z = e^{2x} \cdot \sin(y)$

Piano $z = f(x_0,y_0) + \frac{d}{dx}(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) + \frac{d}{dy}(x_0+y_0) \cdot (y-y_0)$

3.91.★ $e^{2x}\sin y$ in $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

$f(0,\frac{\pi}{6}) = e^{0} \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{6}) \to \frac{1}{2}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{x}\sin(y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(0,\frac{\pi}{6}) = 2e^{0}\sin(\frac{\pi}{6}) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x}\cos(y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,\frac{\pi}{6}) = e^{0} \cdot \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow z = \frac{1}{2} + 1 \cdot (x-0) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (y - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} + x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} = x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{6-\pi\sqrt{3}}{12}$

3.92.★ $\log(x^2 + y^4)$ in $(1, -1)$;

$f(1,-1) = \ln(1+1) = \ln(2)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^4} \to \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \frac{2}{1+1} = 1$

$\Rightarrow z = \ln(2) + 1 + x - 2y + 2 = x - 2y + \ln(2) + 3$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y^3}{x^2+y^4} \to \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -\frac{4}{1+1} = -2$

3.93.★ $\frac{xy}{x^2 + y^4}$ in $(2, 1)$;

$f(2,1) = \frac{2}{4+1} = \frac{2}{5}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^4) - xy(2x)}{(x^2+y^4)^2} \to \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{4+1-8}{(4+1)^2} = -\frac{3}{25}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^2) - xy(4y^3)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{2\cdot(4+1) - 2(4\cdot 1)}{(4+1)^2} = \frac{10-8}{25} = \frac{2}{25}$

$\Rightarrow z = \frac{2}{5} - \frac{3}{25}x + \frac{6}{25} - \frac{2}{25}y + \frac{2}{25} = -\frac{3}{25}x - \frac{2}{25}y + \frac{10+6-2}{25} = -\frac{3}{25}x - \frac{2}{25}y + \frac{14}{25}$

3.94.★ $x^2 3^{-y}$ in (x_0, y_0) (punto generico)

$x^2 \cdot 3^{-y} \to \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot 3^{-y} \cdot x$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \ln(3) 3^{-y}$ Piano Tangente $f(x_0,y_0) = x_0^2 \cdot 3^{-y_0}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2 \cdot 3^{-y_0} \cdot x_0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -x_0^2 \ln(3) \cdot 3^{-y_0}$

$\Rightarrow z = x_0^2 3^{-y_0} + 2x 3^{-y_0} x_0 - 2 \cdot 3^{-y_0} x_0^2 - x_0^2 \ln(3) 3^{-y_0} y + - x_0^2 y_0 \ln 3 \cdot 3^{-y_0}$

Differenziabilità

Il concetto di differenziabilità è abbastanza ampio, ma ci limitiamo a vedere solo i concetti utili al fine di completare gli esercizi.

Concetto fondale: $f(x,y)$ DIFFERENZIABILE in P_0 $\Rightarrow$ $f(x,y)$ continua in P_0

Come sapere se f è differenziabile?

Se $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e f_x, f_y sono continue $\Rightarrow$ f è differenziabile.

$$f = \frac{x^{3/5} \cdot y^3}{x^2+y^2}$$

Esempio 3.11. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{3/5}y^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$f_x = \frac{\frac{3}{5}y^3 x^{8/5}(x^2+y^2) - (x^{3/5} \cdot y^3) \cdot (2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{(3y^2 x^{3/5}) \cdot (x^2+y^2) - (x^{3/5} y^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

Controllo la continuità $\rightarrow$ come farlo?

una f $R \rightarrow R$ è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Lo stesso concetto è applicabile per le funzioni di due variabili

f $R^2 \rightarrow R$ continua in (x_0,y_0) se

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Tornando all'esercizio

3.111.★ Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-3y^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Calcolare le derivate parziali di f per $(x,y) \neq (0,0)$ (semplificando le espressioni ottenute).

b. Calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$ e stabilire se f è differenziabile nell'origine.

c. Determinare il più grande insieme aperto A del piano in cui f è C^1.

$$f = \frac{x^2y - 3y^3}{x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{2yx(x^2+y^2) - (x^2y-3y^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow f_x = \frac{\cancel{2yx^3} + 2xy^3 - \cancel{2x^3y} + 6xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{(x^2-9y^2)(x^2+y^2) - (x^2y-3y^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+x^2y^2-9x^2y^2-9y^4-2x^2y^2+6y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 10x^2y^2 - 3y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f(x,0) = \frac{0-0}{x^2+0} = \emptyset \qquad f(0,y) = \frac{0-3y^3}{y^2} = -3y$$

$$f_x(x,0) = \frac{0}{y^4} = \emptyset \quad , \quad f_y(0,y) = \frac{0-0-3y^4}{y^4} = -3$$

Derivate funzioni composte

3.150. Sia

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2}\sin y}{1+x^2+y^2}.$$

a. Calcolare le derivate parziali di f nel generico punto (x,y) e semplificare le espressioni ottenute.

b. Detta $\underline{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, \underline{r}(t)=(a(t),b(t))$ un generico arco di curva regolare nel piano e f la funzione considerata al punto a, calcolare la derivata della funzione composta:

$$\frac{d}{dt}[f(\underline{r}(t))].$$

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2}\sin y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{2xe^{x^2}\sin y\,(1+x^2+y^2)-(e^{x^2}\sin y)\cdot(2x)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2xe^{x^2}\sin y + 2x^3e^{x^2}\sin y + 2xy^2e^{x^2}\sin y - 2xe^{x^2}\sin y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= e^{x^2}\sin y\,(\cancel{2x}+2x^3+2xy^2-\cancel{2x}) = \frac{2xe^{x^2}\sin y\,(x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{-\cos y\, e^{x^2}(1+x^2+y^2)-(e^{x^2}\sin y)(2y)}{(1+x^2+y^2)} = \frac{-\cos y\, e^{x^2} - x^2\cos y\, e^{x^2} - y^2\cos y\, e^{x^2} - 2ye^{x^2}\sin y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{\cos y\, e^{x^2}(-1-x^2-y^2)-2ye^{x^2}\sin y}{(1+x^2+y^2)} = \frac{e^{x^2}\left[\cos y(-1-x^2-y^2)-2y\right]}{(1+x^2+y^2)^2}$$

b) $$\frac{d}{dt}\left[f(r(t))\right] = f_x\left[a(t),b(t)\right]\cdot a'(t) + f_y\left[a(t),b(t)\right]\cdot b'(t)$$

$$\to \frac{e^{a(t)^2}\cdot 2a(t)\sin(b(t))\left[a(t)^2+b(t)^2\right]}{(1+a(t)^2+b(t)^2)^2}\cdot a'(t) +$$

Troppo sbatti
Non dovrebbe uscire (speriamo)

Massimi e minimi

Massimo Relativo: Un punto $P=(x_0,y_0)$ è un Max relativo per $f(x,y)$ se

$$\boxed{f(x_0,y_0) \geq f(x,y)} \qquad \forall (x,y) \in U \cap A$$

Gradiente di una funzione

- $f(x,y) = x^2+y^2$ nel $P=(1,0)$

$f_x = 2x \Rightarrow f_x(1,0) = 2$, $f_y = 2y \rightarrow f_y(1,0) = 0$

$\rightarrow$ Gradiente $= \Delta = (2,0)$

Vettore

$\Rightarrow$ Il gradiente di una funzione è un vettore del tipo $\Delta = [f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)]$

- Nel caso di funzioni più particolari:

Calcolare il Δ in $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dovremo usare la definizione di Derivata Parziale

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

$\Rightarrow \Delta f(0,0) = [0,0]$

Punto critico

Un punto $P=(x_0,y_0)$ si dice critico per $f(x_0,y_0)$ se ammette derivate parziali e queste si annullano in $P(x_0,y_0)$.
$\rightarrow$ P è critico se $\nabla f(x_0,y_0) = [0,0,\dots 0]$

A cosa servono i punti critici? Condizione Necessaria – NON sufficiente

- Se un punto $P(x_0,y_0)$ è Max/min esso è anche un punto Critico.

Inoltre... **Hessiano**

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} , & f_{xy} \\ f_{yx} , & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot d$$

Le deriv II MISTE sono uguali

Quindi oltre alle condizioni precedenti, affinché un punto sia di Max/min l'Hessiano Deve essere >0.

Se $H<0$ il punto non è Né Max né Min; è un pto. SELLA
Se $H=0$ Bisogna proseguire nello studio

Ricordando tutte le condizioni affinchè $P(x_0,y_0)$ sia estremo rel:

- $[f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)] = \nabla f(x_0,y_0) = \emptyset$
- $H f(x,y) > 0$

Come Capire se un estremo relativo è di Max o min?

- $f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \longrightarrow$ MASSIMO
- $f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \longrightarrow$ MINIMO

Dove Ricercare un estremo relativo?
Vanno ricercati nei punti di coordinate (x,y) che risolvono il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

1.2 Esempi tipici di funzioni di due variabili che hanno un punto critico in $(0,0)$ sono le seguenti:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ (b) $f(x,y) = -x^2 - y^2$

(c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (d) $f(x,y) = xy$

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad f_x = 2x \ , \ f_y = 2y$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow P(0,0) \text{ candidato punto critico}$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = [f_x(0,0), f_y(0,0)] = [0,0] \ \nabla$$

$\rightarrow f_{xx} = 2 \ , \ f_{yy} = 2 \ , \ f_{\substack{xy \\ yx}} = 0$

Hessiano $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 = 4 \ \rightarrow \ H = 4 > 0 \ , \ f_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow P(0,0)$ min

b) $z = -x^2 - y^2$ $\qquad f_x = -2x \ , \ f_y = -2y$ $\qquad \begin{cases} -2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ -2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$ $\qquad P(0,0)$ candidato

$\nabla f(0,0) = [0,\ 0] \Rightarrow P(0,0)$ punto critico

$f_{xx} = -2 \ , \ f_{yy} = -2 \ , \ f_{\substack{xy \\ yx}} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad H = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$f_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow P(0,0)$ Max

c) $z = x^2 - y^2$ $\qquad f_x = 2x \quad f_y = -2y \qquad f_{xx} = 2 \ , \ f_{yy} = -2 \ , \ f_{\substack{xy \\ yx}} = \emptyset$

$\rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ -2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow P(0,0)$ candidato p. critico

$\Rightarrow \nabla f(0,0) = [0,0] \Rightarrow P(0,0)$ Pto critico

$\rightarrow H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow H < 0 \rightarrow$ Ne max Ne min $\rightarrow$ Sella.

d) $z = xy \qquad f_x = y \quad f_y = x \quad , \quad f_{xx} = f_{yy} = f_{\substack{xy \\ yx}} = \emptyset$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P(0,0)$ candidato $\rightarrow \quad \nabla f(0,0) = [0,0] \rightarrow P(0,0)$ Pto critico

$H = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Necessitiamo di altri esami

1.3 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle seguenti funzioni

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$ (b) $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$ (d) $f(x,y) = x^3 - y^3 - xy$

a) $z = x^3 + y^3 + xy \qquad f_x = 3x^2 + y$

$f_y = 3y^2 + x$

$f_{xx} = 6x \qquad f_{yy} = 6y \qquad f_{\substack{xy \\ yx}} = 1 \qquad \rightarrow \begin{cases} 3x^2 + y = 0 \rightarrow y = -3x^2 \\ 3y^2 + x = 0 \rightarrow 27x^4 + x = 0 \rightarrow x(27x^3 + 1) = 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow x = 0$

$\hookrightarrow x^3 = -\frac{1}{27} \rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$

$\rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$\rightarrow y = -3x^2 \begin{cases} \nearrow y = 0 \\ \searrow y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P_1(0,0), P_2(0,-\frac{1}{3}), P_3(-\frac{1}{3},0) \quad P_4(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$

$H = \begin{vmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 1$ Controllo tutti i punti

$H(0,0) = -1 < 0 \rightarrow$ Sella

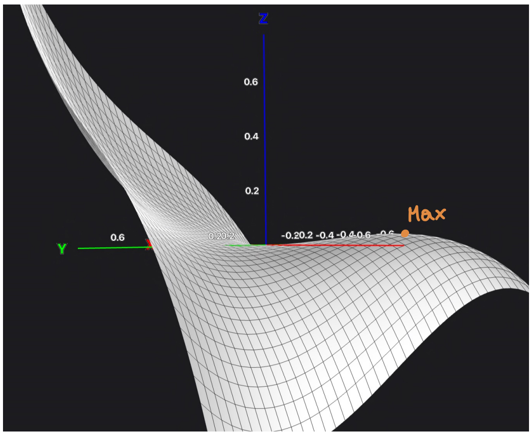
$H(0,-\frac{1}{3}) = -1 < 0 \rightarrow$ Sella

$H(-\frac{1}{3},0) = -1 < 0 \rightarrow$ Sella

$H(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}) = 36 \cdot \frac{1}{9} = 4 > 0 \rightarrow f_{xx} = 6x \rightarrow$

$\rightarrow f_{xx}(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}) = -6 \cdot \frac{1}{3} = -2 < 0$ max

$\Rightarrow P_4(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ Massimo rel



b) $x^3-y^3+xy \to f_x = 3x^2+y \quad f_y = -3y^2+x \,, \quad f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = -6y \,, \quad f_{xy} = f_{yx} = 1$

$$\to \begin{cases} 3x^2+y=0 \to y=-3x^2 \to \\ 3y^2+x=0 \to 27x^4+x=0 \to x(27x^3+1)=0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{3} \quad y_2 = \emptyset$$

Esempio 3.15. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo o sella).

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + xy$$

$\Rightarrow P_0\left(0,-\frac{1}{3}\right), P_1(0,0), P_2\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right), P_3\left(\frac{1}{3},0\right)$

$$H = \begin{vmatrix} 6x & 1 \\ 1 & -6y \end{vmatrix} = -36xy-1$$

$Hf\left(0,-\frac{1}{3}\right) = Hf(0,0) = Hf\left(\frac{1}{3},0\right) = \emptyset$

$Hf\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = +36 \cdot \frac{1}{9} = 4 > 0$

$\to f_{xx}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} > 0 \to \underline{P\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \text{ min}}$

c) $z = x^3+y^3-xy \qquad f_x = 3x^2-y \quad f_y = 3y^2-x \,, \quad f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = 6y \quad f_{xy} = f_{yx} = -1$

$$\to \begin{cases} 3x^2-y \to y=3x^2 \\ 3y^2-x \to 27x^4-x=0 \to x(27x^3-1)=0 \end{cases} \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

$\hookrightarrow x_1 = 0$

$\Rightarrow y_1 = 0 \,, \quad y_2 = \frac{1}{3}$

$$H = \begin{vmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{vmatrix} = 36xy+1$$

$H(0,0) = H\left(0,\frac{1}{3}\right) = H\left(\frac{1}{3},0\right) = 0$

$H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 36 \cdot \frac{1}{9} + 1 = 5 > 0$

$f_{xx}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} > 0 \to P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \text{ min}$

d) $z = x^3-y^3-xy \qquad f_x = 3x^2-y \quad f_y = -3y^2-x \,, \quad f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = -6y \,, \quad f_{xy} = f_{yx} = -1$

$$\begin{cases} 3x^2-y=0 \to y=3x^2 \\ -3y^2-x=0 \to -27x^4-x=0 \to x(-27x^3-1)=0 \end{cases} \quad \underline{x_2 = -\frac{1}{3}}$$

$\hookrightarrow \underline{x_1 = \emptyset}$

$\to \underline{y_1 = \frac{1}{3}} \,, \quad \underline{y_2 = \emptyset}$

$$H = \begin{vmatrix} 6x & -1 \\ -1 & -6x \end{vmatrix} = -36x+1$$

$H(0,0) = H\left(0,\frac{1}{3}\right) = H\left(-\frac{1}{3},0\right) = 0$

$H\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = +36 \cdot \frac{1}{9} + 1 = 5 > 0$

$f_{xx}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = -6 \cdot \frac{1}{3} < 0 \to \underline{P\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \text{ Massimo}}$

Esempio 3.15. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo o sella).

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + xy$$

$$z = x^2y - xy^2 + xy$$

$$f_x = 2xy - y^2 + y \qquad f_y = x^2 - 2yx + x$$

$$f_{xx} = 2y \qquad f_{yy} = -2x \qquad f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y + 1$$

$$\begin{cases} 2xy - y^2 + y = 0 \rightarrow y(2x - y + 1) = 0 \\ -2yx + x^2 + x = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \underline{y_1 = 0} \qquad y_2 \Rightarrow y_2 = 2x + 1$$

$$\rightarrow x(-2y + x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \underline{x_1 = 0}, \quad x_2 = \Big|_{y=2x+1} -2(2x+1) + x + 1 = 0 \rightarrow \underbrace{\cancel{-4x}}_{} \overbrace{\cancel{-2} + \cancel{1}}^{-1} + \cancel{x} = 0 \;(-3x) \rightarrow -3x - 1 = 0 \rightarrow \underline{x_2 = -\frac{1}{3}}$$

$$y_2 = \Big|_{x_2 = -\frac{1}{3}} 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{y_2 = \frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow P_0(0,0),\ P_1\left(0,\frac{1}{3}\right),\ P_2\left(-\frac{1}{3},0\right),\ P_3\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$H = \begin{vmatrix} 2y & 2x-2y+1 \\ 2x-2y+1 & -2x \end{vmatrix} = -4xy - (2x - 2y + 1)^2$$

$$H(P_0) = -(1)^2 = -1 < 0$$

$$H(P_1) = -\left(-2\frac{1}{3} + 1\right)^2 = -\left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9} < 0$$

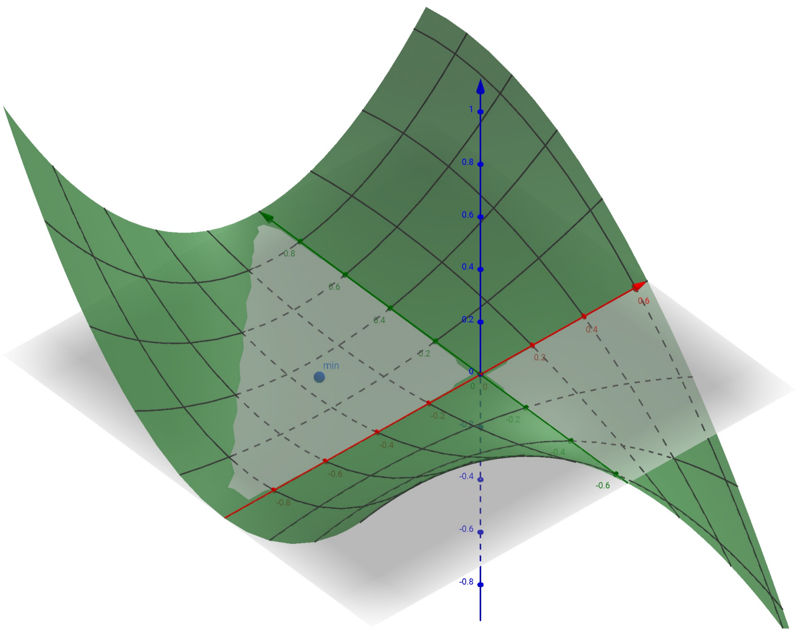
$$H(P_2) = -\left(-\frac{2}{3} + 1\right)^2 = -\frac{1}{9} < 0$$

$$H(P_3) = +4 \cdot \frac{1}{9} - \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 1\right)^2 = \frac{4}{9} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} > 0$$

$P_0, P_1, P_2 \rightarrow$ Punti Sella

$f_{xx}(P_3) = 2 \cdot \frac{1}{3} > 0 \rightarrow$ $\underline{P_3\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \text{ minimo}}$

$$z\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3} = -\frac{1}{27} + \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = -\frac{1}{27}$$



Esempio 3.16. Determinare tutti i punti critici della seguente funzione, e studiarne la natura, determinando gli eventuali punti di massimo relativo, minimo relativo, o sella. (Nel caso si trovi qualche caso dubbio, stabilirne la natura con i metodi studiati).

$$z=\frac{1}{2}x^2y^2-2y^2+\frac{1}{3}x^3$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2-2y^2+\frac{1}{3}x^3.$$

$f_x = y^2x+x^2 \quad f_y = x^2y-4y \quad f_{xx} = y^2+2x \quad f_{yy} = x^2-4 \quad f_{xy} = 2xy \quad f_{yx} = 2xy$

$$\begin{cases} x^2+y^2x=0 \to x(x+y^2)=0 \to x=-y^2 \\ x^2y-4y=0 \to \hookrightarrow \underline{x=0} \end{cases}$$

$\Rightarrow y^5-4y=0 \to y(y^4-4)=0 \to y^4=4 \to y=\sqrt[4]{4} \to \underline{y=\pm\sqrt{2}}$

$\hookrightarrow \underline{y=0}$

$x=-y^2\big|_{y=\pm\sqrt{2}} = -(\pm\sqrt{2})^2 \Rightarrow \underline{x=-2}$ $\Rightarrow$ Punti critici: $P_0(0,0)$, $P_1(-2,\sqrt{2})$, $P_2(-2,-\sqrt{2})$

$$H=\begin{vmatrix} y^2+2x & 2yx \\ 2xy & x^2-4 \end{vmatrix} = (y^2+2x)(x^2-4)-4x^2y^2 = \cancel{x^2y^2}-4y^2+2x^3-6x-\cancel{4x^2y^2}$$

$-3x^2y^2$

$= x(2x^2-3xy^2-6)-4y^2$

$$H(P_1,P_2)=\begin{vmatrix} -2 & \pm4\sqrt{2} \\ \pm4\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 0-(\pm4\sqrt{2})^2 = 0-16\cdot2 = 0-32<0 \to \underline{\text{SELLA}}$$

$H(P_0)=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=0 \to$ BOH? Come studiarlo

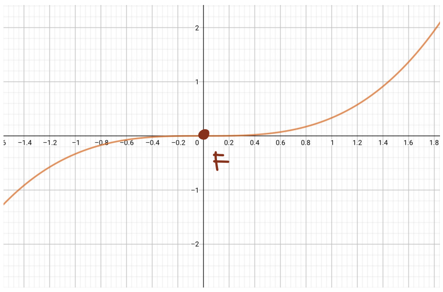
consideriamo la restrizione: $f(x,0)=0-0+\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}x^3$

$\to$ Studiamo max min e flessi per $y=\frac{1}{3}x^3$

$f'=x^2 \quad f''=2x \qquad f''>0 \to 2x>0$ per $x>0$

$\to$ $\cap$ 0 $\cup$, F

La $f=\frac{1}{3}x^3$ ha un flesso in $x=0$



$\Rightarrow$ La $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2-2y^2+\frac{1}{3}x^3$ ha punto di sella in P_1, P_2, P_3

Esempio 3.17. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo o sella).

$$f(x,y) = (x-1)^2(x^2-y^2)$$

$z = (x-1)^2(x^2-y^2)$

$(x^2-2x+1)(x^2-y^2) \to x^4 - x^2y^2 - 2x^3 + 2y^2x + x^2 - y^2$

$f_x = 4x^3 - 2y^2x - 6x^2 + 2y^2 + 2x = 2(2x^3 - y^2x - 3x^2 + y^2 + x)$

$f_y = -2x^2y - 4xy - 2y = 2y(-x^2-2x-1) = -2y(x+1)^2$

$\begin{cases} ① \; 2x(2x^2 - y^2x - 3x + 1) + 2y^2 = 0 \\ ② \; -2y(x+1)^2 = 0 \to -2y = 0 \to y = 0 \end{cases}$ $\quad / \; (x+1)^2 = 0 \to x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4\cdot 1 = 0$

$\to \dfrac{-2}{2} = 1$

$y_1 = 0 \quad , \quad x_1 = 0$

$①|_{y=0} \quad 2x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \;\begin{cases} \to 2x = 0 \to \cancel{x=0} \\ \to 2x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}$ $\quad \Delta = 9 - 4\cdot 2 = 1$

$\to x_{2,3} = \dfrac{3 \pm 1}{4} \;\begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

$\to x_2 = 1 \; , \; x_3 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P_0(0,0) \; , P_1(1,0) \; , P_3(\frac{1}{2}, 0)$

$f_{xx} = 12x^2 - 2y^2 - 12x + 2 = 2(6x^2 - y^2 - 6x + 1)$ $\qquad f_{yy} = -2x^2 - 4x - 2 = -2(x^2 + 2x + 1) = -2(x+1)^2$

$f_{xy} = f_{yx} = -4x - 4 \quad \to \quad H = \begin{vmatrix} 2(6x^2 - 2y - 6x + 1) & -4y(x+1) \\ -4y(x+1) & -2(x+1)^2 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \to -4 < 0 \to$ Sella

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} \to -16 < 0$

$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \to \frac{1}{2} > 0 \; , f_{xx} < 0 \to$ Max

3.176.★

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{3} - x^2 - 4xy.$$

b. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(1,1)$.

$z = \frac{1}{3}xy^3 - x^2 - 4xy$

$f_x = \frac{1}{3}y^3 - 2x - 4y$

$f_y = xy^2 - 4x \quad f_{xx} = -2 \quad f_{yy} = 2xy$

$f_{xy} = y^2 - 4$

$\begin{cases} \frac{1}{3}y^3 - 2x - 4y = 0 \\ xy^2 - 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \quad -2x = 4y - \frac{1}{3}y^3 \Rightarrow x = \frac{1}{6}y^3 - 2y$

$\rightarrow \left(\frac{1}{6}y^3 - 2y\right)y^2 - 4\left(\frac{1}{6}y^3 - 2y\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{6}y^5 - \cancel{2y^3} - \cancel{\frac{2}{3}}y^3 + 8y = 0 \rightarrow \frac{1}{6}y^5 - \frac{8}{3}y^3 + 8y = 0$

$-\frac{8}{3}y^3$

$y\left(\frac{1}{6}y^4 - \frac{8}{3}y^2 + 8\right) = 0$

$\hookrightarrow y_1 = 0$

$\frac{1}{6}y^4 - \frac{8}{3}y^2 = -8 \rightarrow$ pongo $t = y^2 \rightarrow \frac{1}{6}t^2 - \frac{8}{3}t + 8 = 0$

$\Delta = \frac{64}{9} - \frac{32}{6} = \frac{16}{9} > 0 \rightarrow \dfrac{\frac{8}{3} \pm \frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = \begin{cases} 12 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow t = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{t}$

$\rightarrow y_1 = \pm 2\sqrt{3}$

$y_2 = \pm 2$

$x = \frac{1}{6}y^3 - 2y \Big|_{y=0} = x_1 = 0 \qquad = \frac{1}{6}(2\sqrt{3})^3 - 2\,2\sqrt{3}\Big|_{y=+2\sqrt{3}} = \frac{1}{6}24\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 0$

$= -4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \emptyset \Big|_{y=-2\sqrt{3}} \qquad = \frac{4}{3} - 4 = \frac{4-12}{3} = -\frac{8}{3}\Big|_{y=2} \; x_2 \qquad = \frac{8}{3}\Big|_{y=-2} \; x_3$

a $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$, b $\left(\frac{8}{3}, -2\right)$

c $\left(-\frac{8}{3}, 2\right)$, d $\left(-\frac{8}{3}, -2\right)$

✓ $P_0(0,0)$ ✓ $P_1(0, \pm 2\sqrt{3})$ ✗ $P_2(0, \pm 2)$ ✗ $P_3\left(\pm\frac{8}{3}, \pm 2\sqrt{3}\right)$ $P_4\left(\pm\frac{8}{3}, \pm 2\right)$

$\nabla P_0 = [0, 0] \qquad \nabla P_1 = \pm\frac{1}{3}24\sqrt{3} \pm 8\sqrt{3} \pm 16 = \emptyset \qquad \nabla P_2 = \pm\frac{8}{3} \pm 8 \neq 0 \qquad \nabla P_3 = \pm\cancel{\frac{1}{3}24\sqrt{3}} - \cancel{8\sqrt{3}} \pm \frac{16}{3} \neq 0$

∇ a) $\frac{8}{3} - \frac{16}{3} - 8 \neq 0$

b) $-\frac{8}{3} - \frac{16}{3} - 8 \neq 0$

c) $-\frac{8}{3} - \frac{16}{3} + 8 = 0$ ✓ $\left(\frac{8}{3}, -2\right)$

d) $+\frac{16}{3} + \frac{8}{3} - 8 = 0$ ✓ $\left(-\frac{8}{3}, 2\right)$

$\Rightarrow$ candidati: $P_0(0,0)$, $P_1(0, \pm 2\sqrt{3})$, $P_2\left(\frac{8}{3}, -2\right)$, $P_3\left(-\frac{8}{3}, 2\right)$

$H = \begin{vmatrix} -2 & y^2-4 \\ y^2-4 & 2xy \end{vmatrix} = -4xy - (y^2-4)^2 = -4xy - y^4 + 8y^2 - 16$

$y(-4x + 7y - 16)$

$H(P_0) = -16 < 0 \rightarrow$ sella

$H(P_1) = \pm 2\sqrt{3}\left(14\sqrt{3} - 16\right) = \begin{cases} + = -64 < 0 \rightarrow (0, 2\sqrt{3}) \text{ sella} \\ - < 0 \rightarrow (0, -2\sqrt{3}) \text{ sella} \end{cases}$

$H(P_2) = -2\left(-\frac{32}{3} - 14 - 16\right) > 0 \qquad f_{xx}\left(\frac{8}{3}, -2\right) = -2 < 0$ massimo

$H(P_3) = 2\left(\frac{32}{3} + 16 - 16\right) > 0 \qquad f_{xx}\left(-\frac{8}{3}, -2\right) = -2 < 0$ massimo

non necessario ovvero calcolato male, ma giusto

$P_0(0,0) \rightarrow f(x,0) = -x^2 \qquad f' = -2x \quad f'' = -2 \qquad f'' > 0 \; \nexists x \in \mathbb{R} \rightarrow$ sella

$P_0(0,0)$, $P_1(0, +2\sqrt{3})$, $P_2\left(\frac{8}{3}, -2\right)$, $P_3\left(-\frac{8}{3}, 2\right)$, $P_4(0, -2\sqrt{3})$

sella, sella, max, max, sella

Reminders da scrivere:

- Isolare sempre una variabile in funzione dell'altra e poi sostituirla a sistema. Mai trovare una radice alla volta. Se si trova una eq di ordine >2 usare sostituzioni $t = x^2$ o messe in evidenza
- Quando si calcola l'Hessiano conviene lasciarlo nella forma $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ e sostituire direttamente nella matrice.

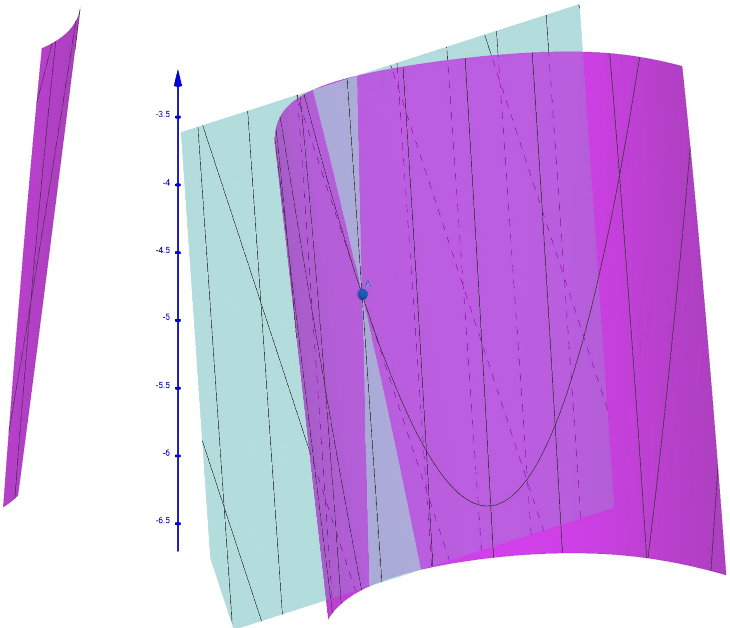
b) Piano tangente a z nel punto $(1,1)$ $\to$ Piano $= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$$f(x,y) = \frac{1}{3}xy^3 - x^2 - 4xy$$
$$f_x = \frac{1}{3}y^3 - 2x - 4y$$
$$f_y = xy^2 - 4x$$

$$f(1,1) = \frac{1}{3} - 1 - 4 = \frac{1-3-12}{3} = -\frac{14}{3}$$
$$f_x(1,1) = \frac{1}{3} - 2 - 4 = \frac{1-6-12}{3} = -\frac{17}{3}$$
$$f_y(1,1) = 1 - 4 = -3$$

$$\Rightarrow -\frac{14}{3} - \left(\frac{17}{3}\right)\cdot(x-1) - 3(y-1) = -\frac{14}{3} - \frac{17}{3}x + \frac{17}{3} - 3y + 3 \to -\frac{17}{3}x - 3y + \frac{-14+17+9}{3}$$

$\to -\frac{17}{3}x - 3y + 4 = 0$ Piano tangente in $(1,1)$



3.177.★

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{3} + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2.$$

(Suggerimento. Uno dei punti critici presenta un "caso dubbio": per studiarlo, ragionate opportunamente sul *segno* della funzione in un intorno di quel punto).

b. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(1,0)$.

c. Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y)$ nel punto $(1,1)$ rispetto al versore $\underline{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$$z = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2$$

$$f_x = yx^2 + yx \qquad f_y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + y$$

$$f_{xx} = 2yx + y \qquad f_{yy} = 1$$

$$f_{xy} = x^2 + x$$

$$\begin{cases} yx^2 + yx = 0 \longrightarrow xy(x-1) = 0 \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \longrightarrow y = x^2\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\underbrace{xy(x-1)}_{y = x^2(\dots)} = x\left[x^2\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)\right](x-1) = x^3\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)(x-1) = x^4\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) - x^3\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\longrightarrow x^3\left[x\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right] = 0 \longrightarrow x^3\left[-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$\longrightarrow x^3\left[\frac{1}{3}\left(-x^2 + x\right) + \frac{1}{2}\left(-x + 1\right)\right] = 0$$

$$\hookrightarrow x_{1,2,3} = 0$$

$$6 \cdot -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{2} = 0 \cdot 6 \longrightarrow -2x^2 - x + 3 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-2)(3) = 25 \Longrightarrow x_{4,5} = \frac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} -\frac{3}{2} & x_4 \\ 1 & x_5 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 = \quad \underbrace{y_1}_{x=0} = 0 \qquad \underbrace{y_2}_{x=-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-3+2}{6} = -\frac{1}{6} \qquad \underbrace{y_3}_{x=-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8} = -\frac{9}{8} + \frac{27}{24} = \frac{-27+27}{24} = \emptyset$$

Sol: $(x_1, y_2)\ (x_2, y_2)\ (x_3, y_3) \longrightarrow P_0(0,0),\ P_1\left(-1, -\frac{1}{6}\right),\ P_2\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 2yx + y & x^2 + x \\ x^2 + x & 1 \end{vmatrix}$$

$$H(P_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$H(P_1) = \begin{vmatrix} \frac{1}{6} & \emptyset \\ \emptyset & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} > 0 \longrightarrow f_{xx}\left(-1, -\tfrac{1}{6}\right) > 0 \longrightarrow \underline{\text{minimo}}$$

$$H(P_2)\ \begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix} = 0 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{9}{16} < 0 \quad \text{SELLA}$$

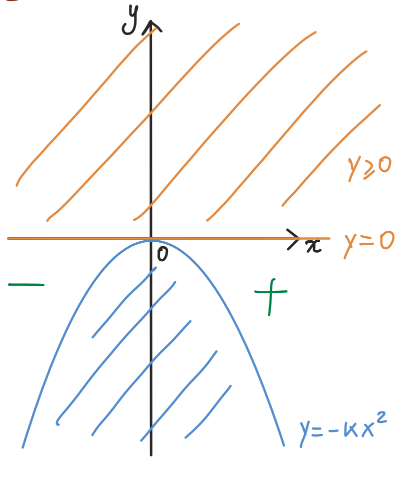
Studiamo il caso dubbio

Siccome $f(0,0) = 0$ è utile studiare il comportamento in un intorno del punto $(0,0)$.

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2 \longrightarrow y\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y\right) \geq 0 \qquad \longrightarrow \underline{y \geq 0}$$

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y \geq 0 \quad \text{per} \quad y \geq -\frac{2}{3}x^2 - x^2 \longrightarrow y \geq -\frac{5}{3}x^2$$

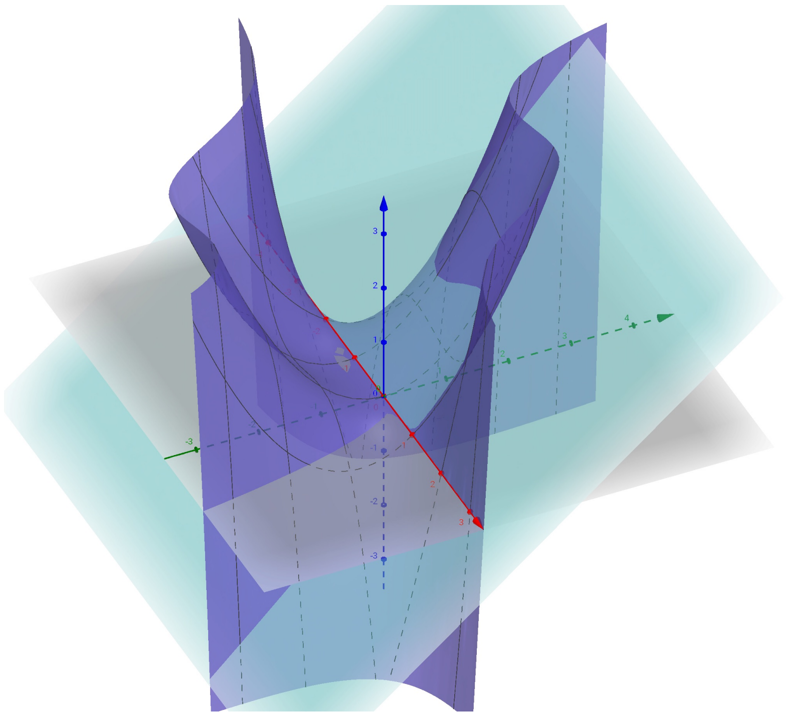
$$\sim -kx^2$$



In prossimità di $(0,0)$ la funzione cambia segno quindi è di SELLA.

b) Piano tangente in $(1,0)$ $\Rightarrow$ Piano $= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$f(1,0) = 0$ $\quad f_x(1,0) = 0$ $\quad f_y(1,0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ $\quad \Rightarrow$ $z = \frac{5}{6}y$



3.178.★
a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x,y) = e^x(x-1)(y-1) + (y-1)^2.$$

b. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(1,2)$.

$$f = e^x(xy - x - y + 2) + (y-1)^2$$

$$f_x = e^x(xy-x-y+1) + e^x(y-1) = xye^x - xe^x \cancel{-ye^x} \cancel{+e^x} + \cancel{ye^x} \cancel{-e^x} = xye^x - xe^x = xe^x(y-1)$$

$$f_y = e^x(x-1) + 2(y-1) = xe^x - e^x + 2y - 2$$

$$\begin{cases} xe^x(y-1) = 0 \\ xe^x - e^x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \; , \quad y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$y = 1 + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}xe^x \quad \Rightarrow \quad xe^x\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}xe^x \cancel{-1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}x^2e^{2x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}xe^{2x}(1-x) = 0 \qquad 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$\quad\Rightarrow x = 0$

$$y = 1 + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}xe^x \underset{x=0}{=} 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \qquad \underset{x=1}{=} 1 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{e} - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{e} = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \; y_1 = \frac{3}{2} \quad , \; x_1 = 1, \; y_1 = 1 \quad \Rightarrow P_0\left(0, \frac{3}{2}\right) \; , \; P_1(1,1)$$

$$f_{xx} = ye^x + xye^x - e^x - xe^x \qquad f_{yy} = 2 \qquad f_{xy} = f_{yx} = xe^x$$

$$H = \begin{vmatrix} e^x(y + xy - x - 1) & xe^x \\ xe^x & 2 \end{vmatrix} \qquad H(P_0) = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad f_{xx}(P_0) > 0 \quad \underline{\text{minimo}}$$

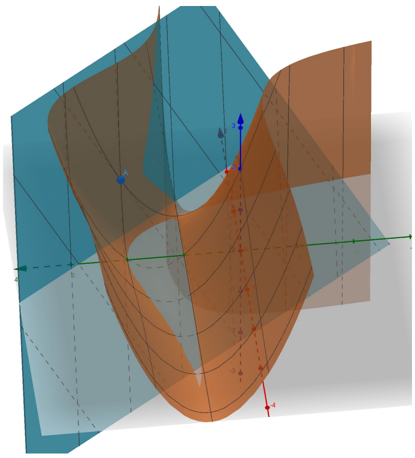
$$H(P_1) = \begin{vmatrix} e(\cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{1}) & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 1 < 0 \quad \underline{\text{Sella}}$$

b) Piano Tangente in $(1,2)$

$$f(1,2) = e(\cancel{2} \cancel{-1} \cancel{-2} \cancel{+1}) + (2-1)^2 = 1$$

$$f_x(1,2) = e(2-1) = e \qquad f_y = e - e + 4 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow z = 1 + (x-1)e + (y-2)2 = 1 + ex - e + 2y - 4 = ex + 2y - e - 3$$



3.179.★

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura (è sufficiente considerare $0 \le x < 2\pi$):

$$f(x,y) = \frac{y^2}{4} - (y+1)\cos x.$$

b. Calcolare la derivata direzionale $D_{\underline{v}} f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ con $\underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

$f_{xy} = \frac{1}{4}y^2 - (y+1)\cos x$

$\to \frac{1}{4}y^2 - y\cos x - \cos x$

$f_x = y\sin x + \sin x$ $\quad f_y = \frac{1}{2}y - \cos x$ $\quad f_{xx} = y\cos x + \cos x$ $\quad f_{yy} = \frac{1}{2}$

f_{xy}, f_{yx}: $\sin x$

$\cos x = \frac{1}{2}y \to x = \cos^{-1}(\frac{1}{2}y)$ (a)

$90 : \pi = 120 : x$

$\frac{120\pi}{90} =$

$\begin{cases} y\sin x + \sin x = 0 \\ \frac{1}{2}y - \cos x = 0 \to y = 2\cos x \end{cases}$ $\Rightarrow$ $2\cos x \sin x + \sin x = 0$

$\to \sin x(2\cos x) = 0$ $\to 2\cos x = 0$ $\Rightarrow \cos x = 0$ $\to x_2 = 90$

$\to \sin x = 0 \to x_1 = 0$

$y = 2\cos x \Rightarrow_{x=0} y_1 = 2$ $\qquad =_{x = 90/\pi}\ 2\cos(\pi) \Rightarrow y_2 = 0$

inoltre $\quad \sin x(y+1) = 0 \quad y+1 = 0$

$\hookrightarrow x = 0 \qquad \hookrightarrow y = -1$

(a) $\Rightarrow x = 120 = \frac{4}{3}\pi$

$\Rightarrow P_0(0,2)$, $P_1(\pi, 0)$, $P_2(\frac{4}{3}\pi, -1)$

$H = \begin{vmatrix} \cos x(y+1) & \sin x \\ \sin x & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \to H(P_0) = \begin{vmatrix} 3 & \sin 2 \\ \sin 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{2} - [\sin(2)]^2 > 0$ $\quad f_{xx} = 3 \to$ minimo

$H(P_2) = \begin{vmatrix} 0 & \sin(-1) \\ \sin(-1) & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 - (\sin(-1))^2 < 0 \to$ Sella

<0

1.4 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo della funzione

$$f(x,y) = 4y^4 - 16x^2y + x$$

$f_x = -32xy + 1 \qquad f_y = 16y^3 - 16x^2$

$f_{xx} = -32y \qquad f_{yy} = 48y^2$

$f_{xy} = -32x$

$\begin{cases} \text{a)}\ -32xy + 1 = 0 \\ \text{b)}\ 16y^3 - 16x^2 = 0 \end{cases}$

a) $-32xy = -1 \to x = \frac{1}{32y} \to 16y^3 - 16\left(\frac{1}{32y}\right)^2 = 0 \to 16y^3 - \frac{1}{64y} = 0$

$\to y^2 \cdot 16y^3 = \frac{1}{64y^2} \cdot y^2 \to 16y^5 = \frac{1}{64} \to y^5 = \frac{1}{1024} \to y = \frac{1}{4}$

in (a) $\quad -32x \cdot \frac{1}{4} + 1 = 0 \to -8x = -1 \to x = \frac{1}{8}$ $\qquad P(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$

b) $16y^3 - 16x^2 = 0 \to \cancel{16}y^3 = \cancel{16}x^2 \to y = x^{2/3}$

in (a) $\quad -32x \cdot x^{2/3} + 1 = 0 \to -32x + 1 = 0 \to x = \frac{1}{32} \to x = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$ $\qquad P(\frac{1}{64}, 2)$

$\to$ in (b) $\quad 16y^3 - 16 \cdot 2^{-5} = 0 \quad 16y^3 - \frac{1}{2} = 0 \to y^3 = 8 \to y = 2$

$H = \begin{vmatrix} -32y & -32x \\ -32x & 48y^2 \end{vmatrix} \qquad H(P_0) = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -24 - 16 < 0 \quad$ Sella

$H(P_1) = \begin{vmatrix} -64 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 192 \end{vmatrix} - 12288 - \frac{1}{4} < 0 \quad$ Sella

1.5 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle funzioni

~~(a)~~ $f(x,y) = 2(x^2+y^2+1)-(x^4+y^4)$

(b) $f(x,y) = 2(x^4+y^4+1)-(x+y)^2$

$z = 2x^2+2y^2+2-x^4-y^4$

$f_x = 4x-4x^3 \qquad f_y = 4y-4y^3 \qquad f_{xx} = -12x^2+4 \qquad f_{yy} = 12y^2-4 \qquad f_{xy} = 0$

f_{yx}

$$\begin{cases} 4x-4x^3=0 \rightarrow 4x(-x^2+1)=0 & x=\pm 1 \\ & \hookrightarrow x_1=0 \\ 4y-4y^3=0 \end{cases} \qquad y(\cancel{4}+\cancel{4}y^2)=0 \rightarrow y=\pm 1 \quad \hookrightarrow y=0$$

$$\rightarrow \underset{1,2}{(\pm1,0)} \quad \underset{3,4,5,6}{(\pm1,\pm1)} \quad \underset{7}{(0,0)} \quad \underset{8,9}{(0,\pm1)}$$

$$H = \begin{vmatrix} 4-12x^2 & 0 \\ 0 & 4-12y^2 \end{vmatrix} \qquad H_{1,2} = \begin{vmatrix} -12+4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = \sim < 0 \rightarrow \text{sella}$$

$$H_{3,4,5,6} \begin{vmatrix} 4-12 & 0 \\ 0 & 4-12 \end{vmatrix} = >0 \quad f_{xx}<0 \rightarrow \text{massimo}$$

$$H_7 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0 \quad f_{xx}(P_7)=4>0 \text{ minimo} \qquad H_{8,9} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4-12 \end{vmatrix} = <0 \rightarrow \text{sella}$$

b) $z = 2(x^4+y^4+1)-(x+y)^2 = 2x^4+2y^4+2-(x^2+2xy+y^2) = 2x^4+2y^4+2-x^2-2xy-y^2$

$f_x = 8x^3-2x-2y \qquad f_y = 8y^3-2x-2y \qquad f_{xx} = 24x^2-2 \qquad f_{yy} = 24y^2-2$

$f_{xy} = -2$

$$\begin{cases} a) & 8x^3-\cancel{2x}-\cancel{2y}=0 \rightarrow 2(4x^3-x-y)=0 \\ b) & 8y^3-\cancel{2x}-\cancel{2y}=0 \rightarrow 2(4y^3-x-y)=0 \end{cases}$$

Sottraggo membro a membro

$8x^3-8y^3=0 \rightarrow x=y$

Sostituisco in a) $8x^3-2x-2x=0 \rightarrow \overset{4}{\cancel{8}}x^3-\overset{2}{\cancel{4}}x=0$

$\rightarrow 2x(2x^2-1)=0 \rightarrow 2x^2=1 \rightarrow x^2=\frac{1}{2} \rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\hookrightarrow x=0$

Siccome $y=x \rightarrow$ $\overset{x=0}{y=0}$, $\underset{x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}{y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\Rightarrow P_0(0,0)$, $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$H = \begin{vmatrix} 24x^2-2 & -2 \\ -2 & 24y^2-2 \end{vmatrix} \Rightarrow H(P_0) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4-4=0 \quad \text{Dubbio}$$

$$\underset{\text{min}}{H(P_1)} = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 100-4 = 96>0 \qquad f_{xx}=10 \rightarrow \text{Minimo}$$

$H(P_2) = 96>0 \rightarrow$ Minimo

Caso Dubbio $\rightarrow$ funzione di una var $f(x,x) = 2(x^2+x^2+1)-(x^4+x^4)$

$\rightarrow 2(2x^2+1)-(2x^4) = 4x^2+2-2x^4 = 2(2x^2-x^4+1)=0$

$f' = 8x-8x^3 \qquad f'' = -24x^2-8 > 0$ per $24x^2<-8 \rightarrow x^2<-\frac{1}{3}$

1.6 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo delle funzioni

~~(a)~~ $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

(b) $f(x, y) = (x - y)e^{-(x^2+y^2)}$

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} e^{-y^2}$$

$$f_x = -2x\, e^{-(x^2+y^2)} \qquad f_y = -2y e^{-(x^2+y^2)} \qquad f_{xy} = -4xy\, e^{-(x^2+y^2)} \quad 3$$

$$\begin{cases} a & -2x\, e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ b & -2y\, e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases} \qquad a = b \to \cancel{-2}x\, \cancel{e^{-(x^2+y^2)}} = \cancel{-2}y\, \cancel{e^{-(x^2+y^2)}} \to x = y$$

$$\to -2x\, e^{-(x^2+x^2)} = -2x\, e^{-2x^2} = 0 \to \frac{-2x}{e^{2x^2}} = 0 \qquad x \to x = 0 \qquad 0 \neq e^{2x^2},\ 1$$

$$\to x = y \Rightarrow y = 0$$

$$f_{xx} = -2 e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2 e^{-(x^2+y^2)} \quad 1 \qquad f_{yy} = -2 e^{-(x^2+y^2)} + 2y^2 e^{-(x^2+y^2)} \quad 2$$

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \qquad f_{xx}(P_0) = -2 < 0 \to P(0,0) \text{ Massimo}$$

b) $z = (x-y)\, e^{-(x^2+y^2)}$ $\qquad f_x = e^{-(x^2+y^2)} - 2(x^2 - xy)\, e^{-(x^2+y^2)}$

$$\begin{cases} (x-y)\, e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ e^{-(x^2+y^2)}(-2x^2 + 2xy) e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \to \cancel{(x-y)}\, \cancel{e^{-(x^2+y^2)}} = -2x\cancel{(x-y)}\, \cancel{e^{-(x^2+y^2)}} \cdot e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\to x e^{-(x^2+y^2)} = -\frac{1}{2}$$

$$-2x^2 e^{-(x^2-y^2)} + 2xy\, e^{-(x^2-y^2)} = 0 \qquad -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2xy\, e^{-(x^2-y^2)} = 0$$

$$\Rightarrow 2xy\, \cancel{e^{-(x^2-y^2)}} = (x-y)\, \cancel{e^{-(x^2+y^2)}} \to 2xy = x - y \to 2xy - x = -y$$

$$\to x(2y-1) = -y \to x = -\frac{y}{2y-1}$$

Sostituisco →

$$-\frac{y}{2y-1} e^{-(t+y^2)} - y e^{-(t+y^2)} = 0 \to e^{-(t+y^2)}\left[-\frac{y}{2y-1} - y\right] = 0$$

↳ ∅

$$\frac{-y - 2y^2 + y}{2y-1} = 0 \qquad \frac{y(\cancel{-1} - 2y + \cancel{1})}{2y-1} = -\frac{2y}{\cancel{2y-1}} = 0 \to -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = -\frac{y}{2y-1} \underset{x=0}{=} -\frac{0}{20-1} = 1 \Rightarrow P_0(1,0)$$

1.7 Determinare i punti critici, cioè i punti in cui si annullano entrambe le derivate parziali delle funzioni

(a) $f(x,y) = (x^2 + xy + y^2)e^{x+2y}$

(b) $f(x,y) = (x^2 + xy + 2y^2)e^{x+y}$

$z = (x^2 + xy - y^2)\, e^{x+2y}$

$f_x = (2x+y)e^{x+2y} + (x^2+xy-y^2)e^{x+2y} = e^{x+2y}(x^2-y^2+xy+2x+y)$

$f_y = (x-2y)e^{x+2y} + 2(x^2+xy-y^2)e^{x+2y} = e^{x+2y}(x-2y+2x^2+2xy-2y^2)$

$\begin{cases} e^{x+2y}(x^2-y^2+xy+2x+y) = 0 \\ e^{x+2y}(2x^2-2y^2+2xy+x-2y) = 0 \end{cases} \to$

$-x^2-y^2-xy+x+3y=0 \to x(-x-y+1) = y^2-3y \to x = \dfrac{y^2-3y}{-x-y-1}$

$x^2-y^2+xy+2x+y = 0 \to x(y+x+2) = y^2-y \to x = \dfrac{y^2-y}{y+x+2}$

$\Rightarrow \dfrac{y^2-3y}{-x-y-1} = \dfrac{y^2-y}{y+x+2} \to \dfrac{y^2-y}{y+x+2} - \dfrac{y^2-3y}{-x-y-1} = 0 \quad \dfrac{(y^2-y)(-x-y-1)-(y^2-3y)(y+x+2)}{(y+x+2)(-x-y-1)}$

$-2y^2 \quad -2xy^2 \quad y^2 \quad 4xy \quad 7y$

$= \cancel{-xy^2}\cancel{-y^3}\cancel{-y^2}+\cancel{xy}+\cancel{y^2}\cancel{+y}\cancel{-y^3}-\cancel{xy^2}-\cancel{2y^2}+\cancel{3y^2}+3\cancel{xy}+\cancel{6y} \cdot \dfrac{1}{(//)(//)} = 0$

$\to \dfrac{-2y^2-2xy^2+y^2+4xy+7y}{(y+x+2)(-x-y-1)} = 0 \quad \to \dfrac{x(-2y^2+4y)-2y^2 7y^2+7y}{\cancel{-xy}-y^2\cancel{-y}-x^2\cancel{-xy}-x-2x\cancel{-2y}-2} = \dfrac{//}{-y^2-x^2-3x-2xy-3y}$

$-2xy \quad -3y$

BOH

3.180.★

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x,y) = (x\log x)(y-2) - \frac{y^2 e}{4}.$$

b. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(e,1)$.

$$z = (x\ln x)(y-2) - \frac{y^2 e}{4}$$

$$f_x = (\ln x + 1)(y-2) \qquad f_y = (x\ln x) - \frac{1}{2}ye \qquad f_{yy} = -\frac{1}{2}e$$

$$f_{xx} = \frac{1}{x}(y-2) \qquad f_{xy} = \ln x + 1$$

sempre positiva

$$\begin{cases} a) \ \overbrace{(\ln x + 1)}(y-2) = 0 \ \rightarrow \ y-2=0 \ \Rightarrow \ y=2 \\ b) \ x\ln x - \frac{1}{2}ye = 0 \end{cases}$$

$; \quad y\ln x + y - 2\ln x - 2 = 0$

$\ln x(y-2) = 2-y \; ; \; \ln x = \frac{2-y}{y-2}$

$\ln x = \frac{(2-y)(y+2)}{(y-2)(y+2)} = \frac{2y+4-y^2-2y}{y^2+2y-2y-4}$

$\rightarrow \ln x = \frac{-\cancel{(y^2+2y-2y-4)}}{\cancel{y^2+2y-2y-4}} \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1}$

$b = $ ($y=2$): $x\ln x - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}e = 0 \rightarrow x\ln x = e \rightarrow e^{x\ln x} = e^e \rightarrow x^x = e^e$

$\Rightarrow x = e$

$b = $ ($x = e^{-1}$): $\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2}ye = 0$

$\rightarrow -e^{-1} - \frac{1}{2}ye = 0 \rightarrow y = -\frac{2}{e^2}$

$\Rightarrow P_0\left(\frac{1}{e}, -\frac{2}{e^2}\right) \quad P_1(e,2)$

$$H = \begin{vmatrix} \frac{1}{x}(y-2) & \ln x + 1 \\ \ln x + 1 & -\frac{1}{2}e \end{vmatrix}$$

$$H(P_0) = \begin{vmatrix} e\left(-\frac{2}{e^2} - 2\right) & \cancel{\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1} \ 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}e \end{vmatrix} = \frac{-2-2e^2}{\cancel{e}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\cancel{e}\right) = 1 + 2e^2 > 0$$

$f_{xx}(P_0) < 0 \rightarrow$ <u>P_0 Massimo</u>

$$H(P_1) = \begin{vmatrix} \frac{1}{e}(0) & \cancel{\ln} e + 1 \\ \ln e + 1 & -\frac{1}{\cancel{2}}e \end{vmatrix} = -4 < 0$$

<u>Sella</u>

b) Piano tangente $z = f(x,y)$ in $P(e,1)$

$$f(e,1) = (e\ln e)(-1) - \frac{e}{4} = -e - \frac{e}{4} = \frac{-4e-e}{4} = -\frac{5}{4}e$$

$$f_{xx}(e,1) = \frac{1}{e}(1-2) = -\frac{1}{e} \qquad f_{yy}(e,1) = -\frac{1}{2}e$$

$$z_{tg} = -\frac{5}{4}e + (x-e)\left(-\frac{1}{e}\right) + (y-1)\left(-\frac{1}{2}e\right)$$

3.181.

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{2} - x^2 + xy - 2x - y^2.$$

b. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(1,0)$.

c. Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y)$ nel punto $(0,1)$ secondo il versore $\underline{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$f_x = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}xy - 2x + y - 2$

$f_y = \frac{1}{2}x^2 + x - 2y \qquad f_{yy} = -2$

$f_{xx} = y - 2 \qquad f_{xy} = x + 1$

$$\begin{cases} xy - 2x + y - 2 = 0 & (a) \\ \frac{1}{2}x^2 + x - 2y = 0 & (b) \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$$

in a: $x\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right) - 2x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0 \rightarrow \frac{1}{4}x^3 + \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \cancel{2x} + \cancel{\frac{1}{4}x^2} + \cancel{\frac{1}{2}x} = 2$

$\frac{3}{4}x^2 \quad -\frac{3}{2}x$

$\rightarrow \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = 0 \rightarrow \frac{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}{\cancel{4}} = 0 \rightarrow x^3 + 3x^2 - 6x = 8$

$\rightarrow x(x^2 + 3x - 6) = 8$