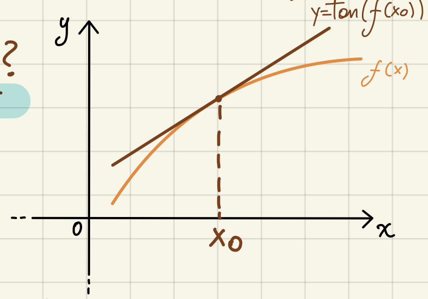
Formula di Taylor

Problema: Data una funzione f derivabile in un $I(x_0)$, qual è il polinomio di I° grado che meglio approssima f? In altre parole, ho una funzione che non so trattare, e quindi al posto di questa, considero una funzione ad essa vicina, che la approssima.

ES: $\log 2 = ?$ Boh! Posso approssimare questa f con un polinomio di I° grado?

Come troviamo una funzione che approssima bene una curva?
La retta che ben approssima una curva in un punto x_0 è proprio la tangente calcolata in x_0.



Sappiamo che f è deriv in $x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \text{ finito } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x-x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$ Portiamo f' a primo membro

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \overbrace{[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]}^{y = q + mx \quad (a)}}{(x-x_0)} = 0$$

La (a) è un polinomio di I° grado, che chiamiamo $P_1(x)$.

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-P_1(x)}{x-x_0} = 0$$ $\Rightarrow$ La distanza tra $f(x)$ ed il polinomio, fratto $x-x_0$, è zero.

Se però il rapporto tende a zero, significa che il Numeratore tende a zero, quindi esso, ovvero $f(x)-P_1(x)$, è un $o(x-x_0)$ (o piccolo del denominatore), ovvero è un Infinitesimo di ordine <u>superiore</u> a $(x-x_0)$.

Inoltre, $f(x)-P_1(x)$ viene detto **ERRORE**, o resto primo di f. Quindi l'errore che commetto nell'approssimare f con P_1, è dato proprio da $f(x)-P_1$.

Osservazione: Se f è derivabile in x_0, il miglior polinomio di I° grado che la approssima è $y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ e il resto $R_1(x) = f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]$ è un infinitesimo di ordine sup. a $(x-x_0)$, ovvero è una buona approssimazione.

1:47

Problema: Se f è derivabile n volte in $I(x_0)$ qual è il polinomio di grado n che approssima "meglio" f in $I(x_0)$?

Teorema sulla formula di Taylor.

Forma compatta

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0) + R_n}$$

Polinomio di Taylor

Sia f derivabile n volte in x_0, allora dove R_n si dice resto n-esimo e si ha:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0}$$

Cosa vuol dire?

Se ho una f deriv n volte (nel Teor. prec solo f) posso esprimere $f(x)$ come queste quantità:

Osserviamo che: $P_n(x) = [\ldots] = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$

Forma espansa

Il polinomio $f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ è un polinomio di grado n, detto polinomio di Taylor di punto iniziale x_0.

Questa formula ha resto R_n nella forma di Peano, ovvero $R_n = o((x-x_0)^n)$, cioè R_n tende a 0 più velocemente di $(x-x_0)^n$.

Di conseguenza se $x = 10^{-1}$, ovviamente esso è maggiore di $x^5 = 10^{-5} = \frac{1}{100000} < \frac{1}{10}$. Se ho quindi una quantità che tende a zero, se la elevo ad n, questa tenderà a zero ancora più velocemente.

$\Rightarrow$ Più l'ordine è grande, più l'errore sarà piccolo.

Se ho $x_0 = 0$, la formula di Taylor diventa:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x)}$$

che prende il nome di Mac-Laurin. (punto iniziale 0)

Es: $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$

1) Derivate $\quad f'e^x = e^x \;\ldots\; f^{(n)}(x) = e^x \;\forall n \quad \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \;\forall n$

$$e^x = \frac{1}{1!} + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{n=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

ES: $f(x) = \sin x$ in $x_0 = 0$ $\quad \underset{0}{f = \sin x} \quad \underset{1}{f' = \cos x} \quad \underset{0}{f'' = -\sin x} \quad \underset{-1}{f''' = -\cos} \quad \underset{0}{f'''' \sin x} \ldots$

$$\Rightarrow 0 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{n} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2+1)!} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{n} (-1)^n = \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^n)}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{x}$$