Funzioni

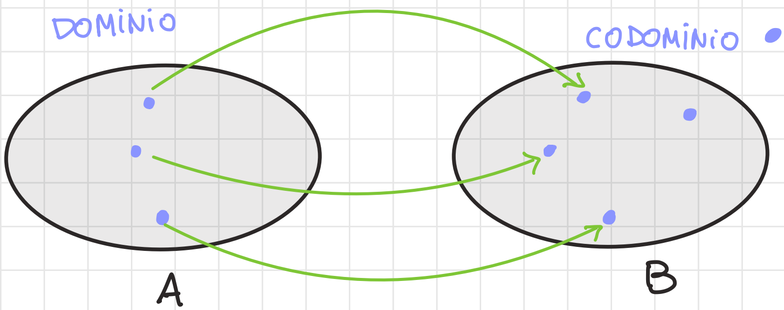
F. Iniettive, Suriettive e Biiettive

F INIETTIVA

Dati 2 insiemi A e B, una funzione $f: A \to B$ si dice iniettiva se

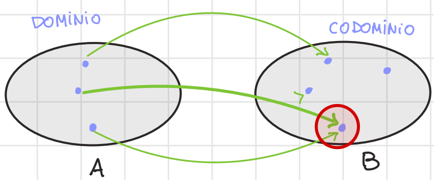
$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

In poche parole, se ad elementi diversi del dominio, la funzione associa elementi diversi del codominio.



- Ogni elemento del codominio (B) e' "colpito" AL MASSIMO DA una freccia

- NON E' IMPORTANTE che tutti gli elementi di B abbiano siano "colpiti".



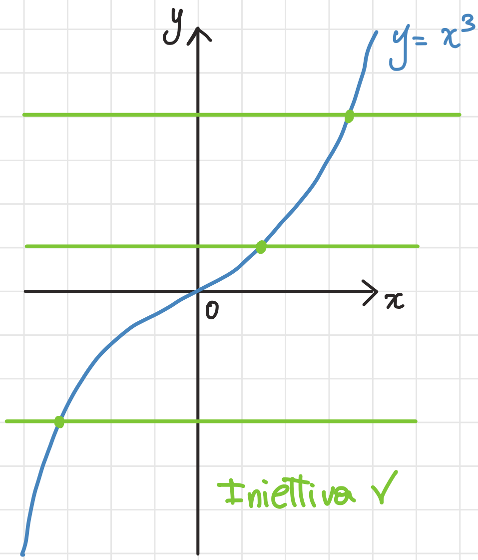
NON iniettiva!

ESEMPIO

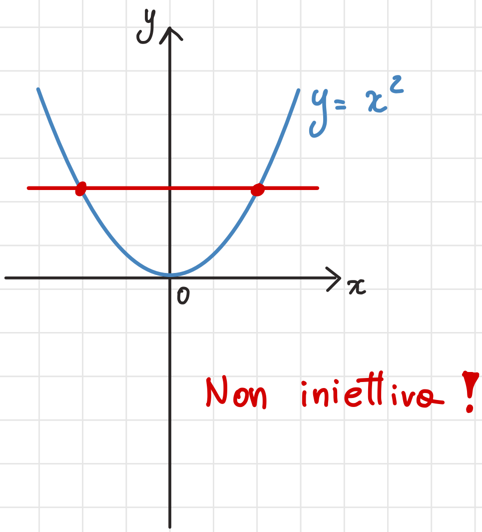
$f(x) = x^3$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e' iniettiva!

con $x_1 \neq x_2 \longrightarrow (x_1)^3 \neq (x_2)^3$

Come riconoscere le f iniettive?



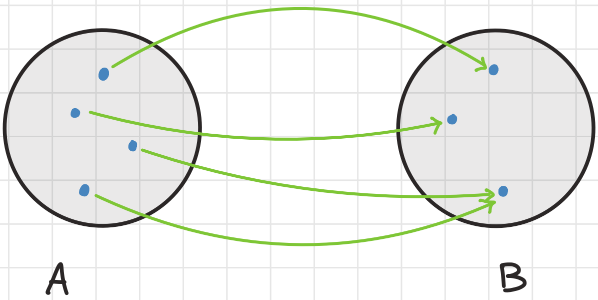
Possiamo dire graficamente che una f è iniettiva se $\forall$ retta orizzontale $y = x$, questa interseca la funzione una sola volta.



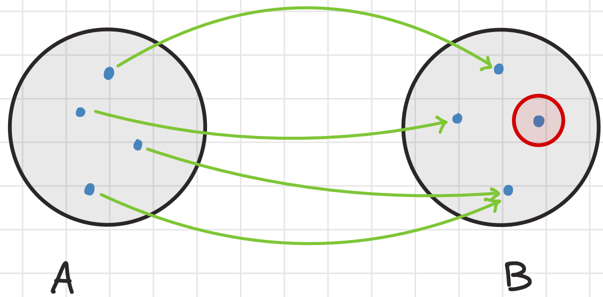
Funzione Suriettiva

$$\forall b \in B \ \exists a \in A \ / \ b = f(a)$$

Tutti gli elementi del codominio sono immagine di almeno un elemento del Dominio.



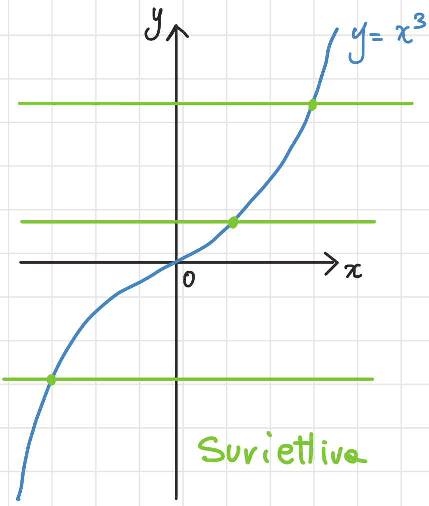
Suriettiva ✓



NON suriettiva ✗

ESEMPIO

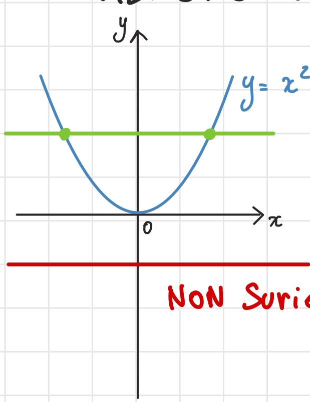
$$f(x) = x^3$$



Suriettiva

Graficamente...

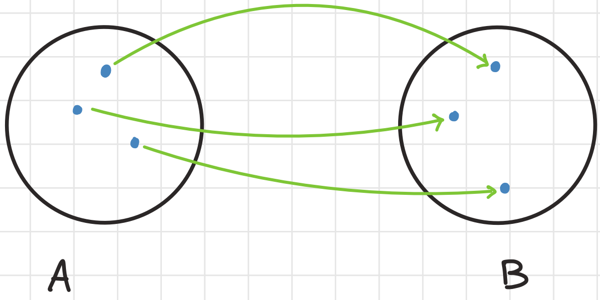
Una f è suriettiva se, con una qualunque retta orizzontale, intersechiamo il grafico ALMENO una volta.



NON Suriettiva

Biiettiva

Una funzione si dice Biiettiva quando e' sia iniettiva che Suriettiva.



Ad ogni elemento di B corrisponde uno di A e viceversa.

In questi casi e' possibile calcolare la funzione inversa

Esempio

La funzione x^3 e' Biiettiva. Inoltre una f e' Biiettiva se e solo se il suo grafico viene intersecato da una qualsiasi retta orizzontale esattamente una volta.

Dominio di funzione

Quando ci viene chiesto di trovare il Dominio di una funzione, dobbiamo trovare il più grande sottoinsieme entro il quale la funzione NON PERDE DI SIGNIFICATO.

FATTORI DI INTERESSE

1) DENOMINATORI

Se ci sono, questi vanno posti ≠ da 0, questo perche' le funzioni non sono definite dove i loro denom si annullano. (non possiamo dividere per 0)

ESEMPIO: $f = \frac{x}{x^2-4}$ $\qquad \mathbb{D} = x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$

$\Rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \pm 2\}$

2) RADICI CON INDICI PARI

Le radici pari sono definite solo quando il loro argomento e` ≥ 0.

ESEMPIO: $y = \sqrt[4]{3-x}$ $\qquad \mathbb{D} = 3-x \geq 0$ per $x \leq 3$

$\Rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 3\}$

3) LOGARITMI

Gli argomenti dei logaritmi vanno posti >0

ESEMPIO $f = \log_7(3-x)$ $\qquad \mathbb{D} = 3-x > 0$ per $x < 3$

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 3\}$

4) Funzioni elevate a funzioni

$f(x)^{g(x)}$ La funzione più interna va posta > 0

Esempio: $(x-1)^{\sin x}$

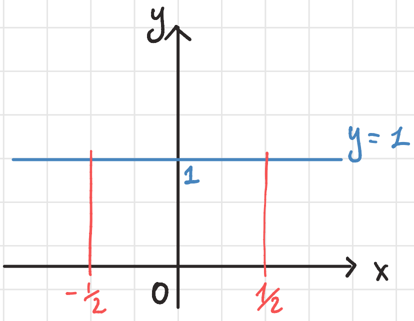
$\mathbb{D} = x-1 > 0$ per $x > 1$

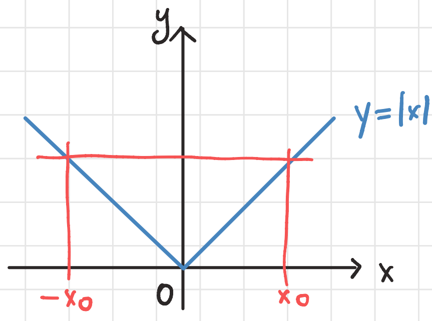
$\mathbb{D} = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x > 1 \}$

Simmetrie e periodicita'

Funzioni pari $\forall x \in \mathbb{D}, \ f(-x) = f(x)$

Se calcoliamo la funzione in (4), il valore ottenuto e' lo stesso che si ottiene in (-4).
Inoltre queste funzioni sono simmetriche ad y.

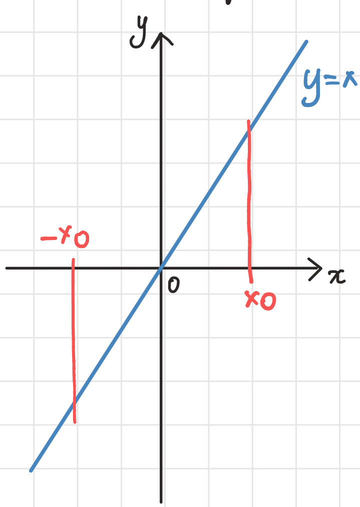


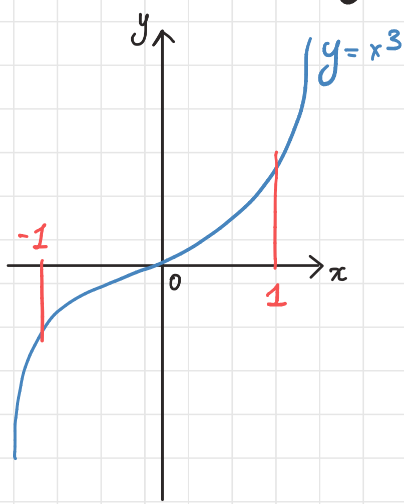


Funzioni Dispari

Se $\forall x \in \mathbb{D}, \ f(-x) = -f(x)$

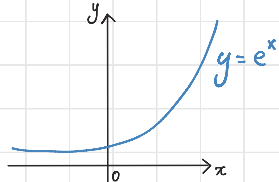
Se ad esempio in $f(4) = 7$, allora in $f(-4) = -7$





Ricapitolando

$f(-x) =$
- $f(x)$ **PARI** → Simmetrica ad y
- $-f(x)$ **DISPARI** → Simmetrica ad O
- Nessuna delle due → potrebbe essere simm ad un'altra retta.



A che ci serve?

Possiamo usare queste informazioni per prevedere e verificare lo studio di funzione.
Ad esempio se abbiamo una f pari, se troviamo un max in $f(x)$, avremo un altro max in $f(-x)$.

ATTENZIONE!

Dobbiamo cercare simmetrie pari o dispari SOLO SE il dominio della f e' simmetrico a $x=0$.

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \pm 2\}$ ✓

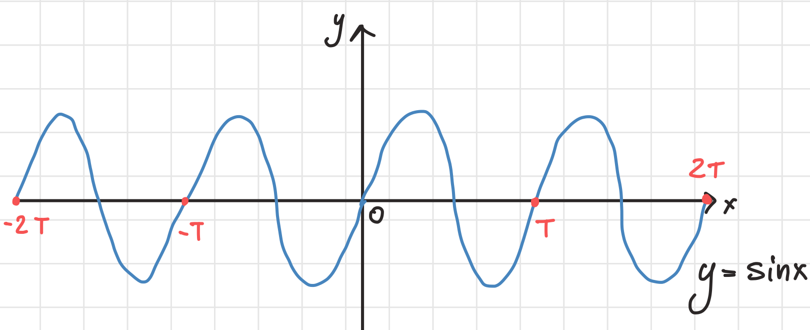
$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 3\}$ ✗

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < -1 \vee x > 1\}$ ✓

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 5\}$ ✗

Funzioni PERIODICHE

Una f e' periodica se $f(x+T) = f(x)$
In altre parole, essa si ripete dopo ogni periodo:



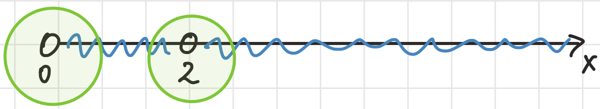
Asintoti

La retta $x = a$ è un asintoto verticale per la funzione $f(x)$ se accade almeno uno di questi casi:

- $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

ESEMPIO $f(x) = \ln x + \frac{1}{x-2}$ $\quad D = \begin{cases} x > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ per $x \neq +2$

$D = \{x \in \mathbb{R} \setminus x > 0 \land x \neq +2\}$



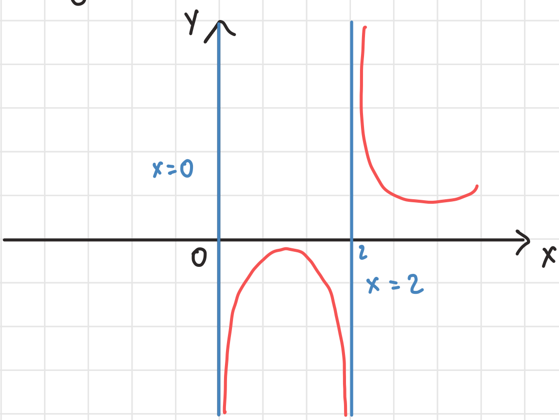
Le rette $x = 0$ e $x = 2$ POTREBBERO essere degli asintoti vert.
Calcoliamo quindi i limiti

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \ln 2^- + \frac{1}{2^- - 2} = \ln 2 + \frac{1}{0^-} = \underline{-\infty}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \ln 2^+ + \frac{1}{2^+ - 2} = \ln 2 + \frac{1}{0^+} = \underline{+\infty}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln 0 + \frac{1}{0-2} = -\infty - \frac{1}{2} = \underline{-\infty}$$

Possiamo concludere che le rette $x = 2$ e $x = 0$ sono degli asintoti verticali.



ESEMPIO

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 0\}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{0^-} &= 1 \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{0^+} &= 1 \end{aligned}\right\} \neq \pm\infty$$

Nessun Asintoto!