



Definizione WRONSKIANA Sono y_1 e y_2 due funzioni derivabili; si dice matrice Wronskiana di y_1 e y_2 la matrice:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & & & \vdots \\ y^n_1 & y^n_2 & \dots & y^n_n \end{pmatrix}$$

Si dice Wronskiano di y_1 e y_2 il Determinante.

Nel caso di una matrice 2×2 il determinante si calcola esplicitamente nel seg. modo:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x)$$

A cosa serve conoscere il determinante? Come per il caso dei vettori, anche in questo caso il determinante ci dice se c'è una dipendenza lineare.

Teorema Sono y_1 e y_2 integrali particolari dell'eq omogenea associata. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- (i) y_1 e y_2 sono indipendenti in $[a, b]$
- (ii) $\exists x_0 \in [a, b] / W(x_0) \neq 0$
- (iii) $W(x) \neq 0 \ \forall x \in [a, b]$

Osservazione (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) Un'afferazione implica l'altra. Dim 11:00

Se abbiamo due funzioni, un modo per capire se queste sono linearmente indipendenti è calcolare il determinante. Se il determinante wronskiano è $\neq 0$ allora sono sicuramente indipendenti.

→ Basta dimostrare che in un punto il det $\neq 0$, allora le funzioni sono indipendenti in TUTTO l'intervallo.

Eq. diff. lineari del II ordine a coefficienti costanti Parte Teorica:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad \text{dove } a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}$$

Nei casi precedenti: a_1 e a_2 erano funzioni, ora sono numeri.

Consideriamo l'eq caratteristica della ① $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 \cdot 1^0$ eq di II grado che è un'eq algebrica nell'incognita λ , che è una variabile reale. L'ordine di derivazione diventa l'esponente.

Tale eq è di II grado ed ommette soluzioni \checkmark a patto che il $\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_2 \geq 0$

Se $\Delta > 0$, l'eq caratteristica ammette 2 soluzioni reali e distinte:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

Se $\Delta = 0$ abbiamo 2 radici reali e coincidenti:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$$

Se $\Delta < 0$ abbiamo 2 radici complesse coniugate:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{-(-\Delta)}}{2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{-1} \sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{-a_1 \pm i \sqrt{-\Delta} \text{ positivo}}{2} = \underbrace{\frac{-a_1}{2}}_d \underbrace{\pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{\beta \uparrow}$$

Teorema \rightarrow Serve per risolvere gli esercizi!

L'eq. diff. lin. omogenea del II ordine ammette i seguenti integrali indipendenti:

Se $\Delta > 0$: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ sono indipendenti.

Quindi l'integrale generale dell'eq. omogenea è:

Soluzione $\rightarrow y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ \leftarrow Combinazione lineare

Se $\Delta = 0$: Gli integrali indipendenti sono:

$y_1 = e^{\lambda x}$ e $y_2 = x e^{\lambda x}$ Di conseguenza l'integrale generale sarà:

Soluzione $\rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

Se $\Delta < 0$: Gli integrali indipendenti sono:

$y_1 = e^{(\lambda+i\beta)x}$ $y_2 = e^{(\lambda-i\beta)x}$ In genere non si vuole usare la notazione con i numeri complessi, quindi:

Si considerano combinazioni lineari di y_1 e y_2 che sono ancora soluzione dell'eq. lin.:

$\frac{1}{2}(y_1+y_2)$ e $\frac{1}{2i}(y_1-y_2)$ queste sono ancora soluzione dell'eq. diff (perché comb lin.)

Se le calcoliamo la i "scompare":

$$\frac{1}{2}(e^{(\lambda+i\beta)x} + e^{(\lambda-i\beta)x}) = e^{\lambda x} \frac{1}{2} [\cos \beta x + i \sin \beta x + \cos \beta x - i \sin \beta x]$$

$$= e^{\lambda x} \frac{1}{2} [2 \cos \beta x] = e^{\lambda x} \cos \beta x$$

Alllo stesso modo si ottiene $e^{\lambda x} \sin \beta x$

Quindi i integrali indipendenti sono $\bar{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $\bar{y}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.

$$\Rightarrow y_0(x) = e^{\alpha x} [c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x] \quad (2)$$

Quando abbiano le due radici complesse coniugate e quindi la parte coniugata α e parte immaginaria β , l'integrale generale sarà uguale alla (2)
 \Rightarrow La i NON COMPARA.

Esercizi - Caso omogeneo

$$ES: y'' - 2y = 0 \quad \Delta > 0$$

Scrivo l'eq caratteristica $\lambda^2 - 2 = 0 \leftarrow$ Eq del II ordine \Rightarrow Sol: $\lambda = \pm \sqrt{2}$

$$\text{Allora } y_0(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}$$

$$ES: y'' + 2y' = 0 \quad \Delta > 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda = 0 \quad \lambda(\lambda + 2) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = c_1 e^0 + c_2 e^{-2x} = c_1 + c_2 e^{-2x}$$

$$ES: y'' + 2y' + y = 0 \quad \Delta = 0 \quad \text{eq car: } \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Delta = 4 - 4 = 0$$

Quando $\Delta = 0$, abbiamo un'unica radice $\lambda = -1$

$$\Rightarrow y_0(x) = c_1 e^{-x} + x c_2 e^{-x}$$

$$ES: y'' + 2y = 0 \quad \Delta < 0 \quad \text{eq car: } \lambda^2 + 2 = 0 \quad \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-2} \quad 2 \text{ radici complesse e coniugate}$$

$$\lambda = \sqrt{-1} \sqrt{2} = \pm i\sqrt{2} \quad \Rightarrow \lambda = 0 \quad \leftarrow \text{parte reale} \\ \beta = \sqrt{2} \quad \leftarrow \text{parte complessa}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = e^0 [c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x]$$

$$ES: my'' = -ky \quad \text{pTo materiale di massa } m, K \text{ costante di elasticità}$$

$$\Rightarrow my'' + ky = 0, \quad y'' + \frac{k}{m} y = 0 \quad \leftarrow \text{Si pone } w^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow y'' + w^2 y \quad \begin{matrix} \text{quanto si sicuramente} \\ \text{positivo} \end{matrix} \quad \text{Eq Oscillatore Armonico}$$

Eq. diff. lineare del II ordine a coeff costanti omogenea; Se sul pTo materiale agisce una forza esterna dipendente solo dal tempo avremo:

$$y'' + w^2 y = f(t) \quad \leftarrow \text{diventa completa}$$

Tornando all'eq omogenea:

$$y'' + w^2 y = 0 \quad \Rightarrow \lambda^2 + w^2 = 0 \quad \lambda^2 = -w^2 \quad \Rightarrow \lambda = \pm iw \quad \text{caso } \Delta < 0 \rightarrow \text{complesso}$$

$$\text{Allora } y_0(t) = e^0 [c_1 \cos wt + c_2 \sin wt]$$

\uparrow
Eq del moto armonico

$$\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = w \end{matrix}$$

Eq. Diff. II° ordine lineare completa

L'obiettivo è calcolare un integrale particolare y_p dell'eq completa:

$$y'' + a_2 y' + a_2 y = f(x) \quad \text{Termine noto}$$

Si osserva la forma del T.m. $f(x)$

I) Supponiamo che $f(x) = e^{\gamma x} P_m(x)$ Dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n

Allora:

(i) $P(\gamma) \neq 0$, dove $P(\lambda)$ è il polinomio caratteristico $\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 + a_2 \lambda + a_2$
quindi $P(\gamma) \neq 0$ significa che γ NON È RADICE dell'eq caratteristica.

Ricapitolando:

1) Se il termine noto è del tipo $f(x) = e^{\gamma x} P(x)$ procediamo:

2) Prendo γ e vedo se è radice dell'eq caratteristica dell'omogenea associata.

3) Se $P(\gamma) \neq 0$, ovvero γ NON È radice, Allora Un integrale dell'eq completa è del tipo:

$$\rightarrow y_p(x) = e^{\gamma x} \cdot q_n(x) \quad \text{con } q_n(x) \text{ polinomio generico di grado } n \text{ da determinare.}$$

ES: $y'' - 4y' = xe^x$

1) eq omogenea: $y'' - 4y' = 0$ eq caract. $\lambda^2 - 4\lambda = 0 \quad \lambda(\lambda - 4) = 0, \lambda = 0, \lambda = 4$

\Rightarrow int. gen. omog. ass: $y_0(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}$

2) Eq completa: $f(x) = xe^x \rightarrow \gamma = 1$ Siccome $\gamma = 1 \neq 4 \neq 0$, NON È RADICE!

$\Rightarrow y_p(x) = e^x \cdot (\text{polinomio generico dello stesso grado di } x \text{ che compare qui}) =$

$$= e^x \underbrace{(Ax + B)}_{q_1 x} \quad \text{Primo grado}$$

\Rightarrow Determiniamo $q_1(x)$, e cioè A e B in modo che y_p sia soluzione dell'eq completa, cioè sostituendo y_p nell'eq completa e imponendo che y_p sia soluz. Calcoliamo quindi le derivate:

$$y' = D(e^x [Ax + B]) = e^x (Ax + B) + e^x A$$

$$y'' = D([e^x(Ax + B) + e^x A]) = [e^x(Ax + B) + e^x A] + [e^x A] = e^x (Ax + B + A + A)$$

Sostituiamo:

$$e^x (Ax + B + 2A) - 4 [e^x (Ax + B + A)] = \text{Soluzione dell'eq completa} = xe^x$$

Risolviamo tale eq:

$$\Rightarrow Ax + B + 2A - [4Ax + 4B + 4A] = x \Rightarrow \underbrace{-3Ax - 3B - 2A}_{\text{Polinomio Sx}} = \underbrace{x}_{\text{Polinomio a dx}}$$

Per il principio di identità dei polinomi i due saranno uguali

\Leftrightarrow i coeff dei termini dello stesso grado sono uguali

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A = 1 \\ -3B - 2A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ -3B + \frac{2}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{2}{9} \\ A = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = e^x \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \right) \leftarrow \text{Integrale particolare dell'eq completa}$$

3) L'integrale generale dell'eq completa sarà: $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 e^{4x} + e^x \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \right) \leftarrow \text{Integrale generale che dipende da } c_1 \text{ e } c_2$$

II) Supponiamo che $\gamma(\gamma) = 0$, ovvero che γ è radice dell'eq caratteristica.

Se è radice, supponiamo che abbia molteplicità h . Allora un integrale part. è del tipo:

$$y_p(x) = x^h \cdot e^{\gamma x} \cdot q_n(x)$$

ES: Supponiamo che $f(x) = \underline{x^2 + 1}$ (considerando l'esercizio precedente)

\Rightarrow radici: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$ \hookrightarrow Esponentiale assente $\Rightarrow \gamma = 0$ è radice di molteplicità $h = 1$

Perché $h = 1$

L'eq caratteristica era $\lambda^2 - 4\lambda = 0$; $\lambda(\lambda - 4) = 0$ $\begin{cases} \text{rad. } 0 \\ \text{rad. } 4 \end{cases} \leftarrow 0$ è soluzione una sola volta $\Rightarrow h = 1$

Se avessimo avuto una eq car. con $\Delta = 0$, quindi due eq reali e coincidenti = 0, allora 0 sarebbe stato soluzione due volte $\Rightarrow h = 2$

Tornando all'esercizio: $y_p(x) = x^h \cdot e^{\gamma x} \cdot q_n(x) = x^1 \cdot 1 \cdot (Ax^2 + Bx + C)$

$\Rightarrow y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx =$ Per ricavare A, B, C sostituiscono nella equazione \Rightarrow Derivo

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y'' = 6Ax + 2B \quad \hookrightarrow \quad y'' - 4y' = \underline{x^2 + 1} \quad \rightarrow f(x) \\ \text{Termine noto}$$

$$\Rightarrow (6Ax + 2B) - 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = 6Ax + 2B - [12Ax^2 + 8Bx + 4C] = x^2 + 1$$

$$= -12Ax^2 + x(6A - 8B) + 2B - 4C = x^2 + 1 + 0x \quad \text{I coefficienti dello stesso grado devono essere uguali}$$

$$\begin{cases} -12A = 1 \\ 6A - 8B = 0 \\ 2B - 4C = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} - 8B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} - 4C = 1 \Rightarrow C = -\frac{9}{32} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = x \left(-\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{9}{32} \right)$$

$$\text{L'integrale generale } y(x) = y_p(x) + y_0 = c_1 + c_2 e^{4x} + x \left(-\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{9}{32} \right)$$

$$\text{III) Supponiamo che } f(x) = e^{\delta x} \cdot [p_n(x) \cdot \cos \mu x + q_k(x) \sin \mu x]$$

esponenziale
 δx
 $x \in \mathbb{R}$
 polinomi di grado
 m, k

i) Se $\tau(\gamma \pm i\mu) \neq 0$

Cioè $\gamma \pm i\mu$ non è radice dell'eq caratteristica. Questo accade quando sin e cos non sono presenti.

In questo caso dobbiamo trovare il numero complesso $\gamma \pm i\mu$. Trovato il numero complesso, si vede se è soluzione dell'eq caratteristica. (come prima)

Allora un integrale particolare $y_p(x)$ è:

$$y_p(x) = e^{\delta x} [\tau_j(x) \cdot \cos \mu x + s_j(x) \sin \mu x]$$

dove $\tau_j(x)$ e $s_j(x)$ sono polinomi generici da calcolare di grado $j = \max \{m, k\}$
 massimo grado dal termine noto

ES: $y'' - 2y' - 3y = \cos(2x)$

• eq omog: $y'' - 2y' - 3y = 0 \rightarrow$ Eq caratt: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2}$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \quad \Rightarrow y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Abbiamo l'eq omog} \\ \text{Assoc.} \end{array}$$

$$\lambda_2 = -1$$

• $f(x) = \cos(2x) \Rightarrow \gamma \pm i\mu \text{ è } \pm 2i \text{ perciò } \begin{cases} \gamma = 0 \\ \mu = 2 \end{cases}$

$\gamma \pm i\mu \neq 3 \neq -1 \Rightarrow$ Non è radice \rightarrow Siamo nel caso precedente

$$\Rightarrow y_p(x) = e^{\delta x} [A \cos(2x) + B \sin(2x)]$$

• A e B sono due polinomi diversi di grado 1

• Non solo perciò nell'eq complessa presente solo cos vuol dire che in y_p saranno presenti solo il cos. Saranno presenti sia sin che cos.

SOSTITUIAMO \rightarrow Derivate

$$y' = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x); \quad y'' = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)$$

$$\Rightarrow y'' - 2y' - 3y = \cos(2x) \Rightarrow [-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)] - 2[-2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)] - 3A \cos(2x) - 3B \sin(2x) = \cos(2x)$$

$$\Rightarrow (-4A - 7B) \sin(2x) + (-7A - 4B) \cos(2x) = \cos(2x) \quad 0 \cdot \sin x$$

$$\begin{cases} -4A - 7B = 0 \\ -7A - 4B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{7B}{4} \\ \frac{49B}{4} - 4B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-49B - 16B}{4} = 1 \\ \frac{65B}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow B = \frac{4}{65} \quad \Rightarrow A = -\frac{7}{65}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{7}{65} \cos(2x) - \frac{4}{65} \sin(2x)$$

integ. generale $C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{7}{65} \cos(2x) - \frac{4}{65} \sin(2x)$

