

Lezione 13

Numeri complessi ed operazioni

Numeri complessi - Forma algebrica

Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $x^2 + 1 = 0$? Ovvero $x^2 = -1$?

Non esiste alcun numero reale x / $x^2 = -1$.

Si dice **unità immaginaria** e si denota con la lettera i la soluzione z dell'eq. $z^2 = -1$.
Quindi i / $i^2 = -1$, i è un **Simbolo**; non ha un valore numerico.

Importante

Def: Si dice insieme dei numeri complessi/immaginari l'insieme $\mathbb{C} = \{a+ib / a, b \in \mathbb{R}\}$.
Il generico numero complesso si indica con z (equivalente a x per \mathbb{R}).

Se $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} / z = a+ib$.

ES: $z_1 = 1-i$
 $z_2 = 3+2i$
 $z_3 = 5i$

ES: $z = 3-2i$
 $\text{Re}(z) = 3$
 $\text{Im}(z) = -2$

Visto che $z \in \mathbb{C}$, $z = a+ib \Rightarrow$ "a" si dice **parte reale** di z ;
 b , si dice **parte immaginaria** di z .

Differenziamo quindi le due parti; sia a che b sono reali, ma b moltiplica la parte immaginaria (i).

$$a = \text{Re}(z) \quad b = \text{Im}(z)$$

Come Rappresentare i numeri complessi?

Per identificare un num complesso $z = a+ib$ basta conoscere a e b ; Posso riferirmi a $z = 5+2i$ come la coppia ordinata $(5, 2)$, dove 5 è la parte reale e 2 è la parte complessa.

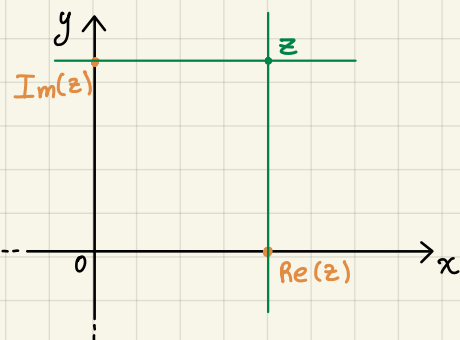
$$z = a+ib \quad \Leftrightarrow \quad z = (a, b)$$

Rappresentiamo $z = a+ib = (a, b)$ come punto sul piano cartesiano ed avremo che

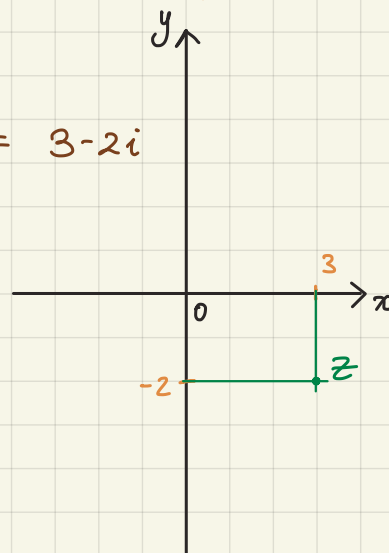
$$a = \text{Re}(z) = \text{Ascissa } x$$

$$b = \text{Im}(z) = \text{Ordinata } y$$

PIANO COMPLESSO



ES: $z = 3-2i$



Operazioni in \mathbb{C}

Somma e differenza

Non sono altro che la somma algebrica che vale nell'insieme dei polinomi:

ES:
$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1 \\ z_2 &= a_2 + ib_2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1 \\ z_2 &= a_2 + ib_2 \end{aligned}} \right\} z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + (a_2 + ib_2) \quad \text{usiamo il calcolo letterale usato nei polinomi:}$$

basta radunare parte reale e p. imm.

$$\begin{aligned} &= a_1 + a_2 + ib_1 + ib_2 \\ &= a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) \end{aligned}$$

ES: $(3-2i) + (5+4i) = 3+5 -2i+4i = 8+i(-2+4) = 8+2i$

Prodotto

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1 ib_2 + ib_1 a_2 + \overset{-1}{i^2} b_1 b_2 = (a_1 a_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) - (b_1 b_2)$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

ES: $(2-i)(3+2i) = 6 + 4i - 3i - 2i^2 = 6 + i + 2 = 8 + i$

ES: $(3+2i)^2 = 3^2 + 4i^2 + 12i = 9 - 4 + 12i = 5 + 12i$

Potenze di i

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1 \\ i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ &\dots \end{aligned}$$

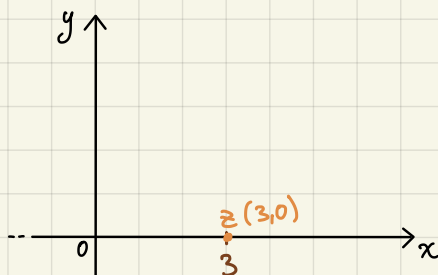
Quindi... i viene trattata come una lettera (regole dei polinomi) ma appena incontriamo un i^2 lo riscriviamo come -1 .

ES: $(2-3i)(2+3i) \overset{\text{Somma}}{\underset{\text{x differ.}}{=}} 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$
 $13 = 13 + 0i$

Oss: Ogni numero reale deve essere un particolare numero complesso, cioè un numero complesso la cui parte immaginaria è nulla:

ES: $z = 3$ $\begin{matrix} \text{Re}(z) = 3 \\ \text{Im}(z) = 0 \end{matrix} \leftarrow \text{Nulla}$

$z = (3, 0)$
 $z = 3 + 0i$



\Rightarrow Tutti punti delle Ascisse (x) hanno parte immaginaria pari a zero (nulla).

Def: se $z = a + ib$, si dice **Coniugato di z** il numero complesso $\bar{z} = a - ib$.
 È lo stesso numero complesso, ma al posto del segno '+' c'è il '-';
 cioè la parte immaginaria è di segno opposto.

ES: $z_1 = 3 + 2i \Rightarrow \bar{z}_1 = 3 - 2i$
 $z_2 = 5 - 3i \Rightarrow \bar{z}_2 = 5 + 3i$

Oss: $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) \overset{\text{Somma per diff}}{=} a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$ Somma dei quadrati

ES: Se ho: $\frac{3-2i}{2-5i}$ = Chi sono $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$?

Per poterlo scrivere nella forma $z = a + ib$, dobbiamo **razionalizzare**. Moltiplichiamo e Dividiamo per $(2+5i)$:

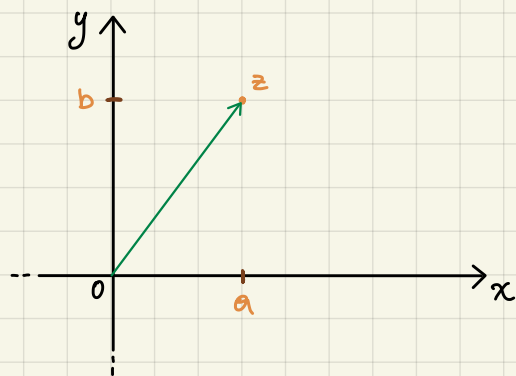
$$\frac{3-2i}{2-5i} \cdot \frac{2+5i}{2+5i} = \frac{6 + 15i - 4i - 10i^2}{4 + 10i - 10i - 25i^2} = \frac{16 + 11i}{29} = \frac{16}{29} + \frac{11i}{29}$$

$\rightarrow \text{Re}(z) = \frac{16}{29}$
 $\rightarrow \text{Im}(z) = \frac{11}{29}$

☆ Con i n. complessi dobbiamo sempre ricondurci alla forma $z = a + ib$

1:00 Forma Trigonometrica dei numeri complessi

Prendo $z = a + ib$ e lo rappresento nel piano complesso:

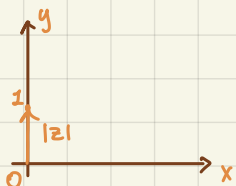


Ogni punto del piano può essere visto come il punto Terminale di un vettore; Posso pensare a $z \in \mathbb{C}$ come il vettore OP , dove p è il punto di coordinate (a, b) che ha come componenti proprio a e b .

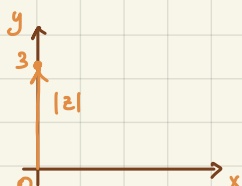
$z = \vec{OP}$ che ha $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{Modulo di } z$$

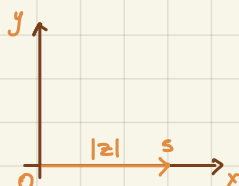
ES: $z = i$



ES: $z = 3i$



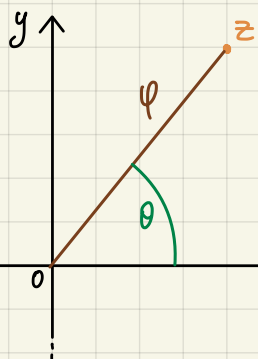
ES: $z = 5$



L'asse delle Ascisse (y) è anche dello asse Immaginario, perché in questo asse risiedono tutti i numeri privi di parte reale.

OSS. Continuo:

Quando moltiplico $z \cdot \bar{z}$, ottengo $a^2 + b^2 = |z|^2$

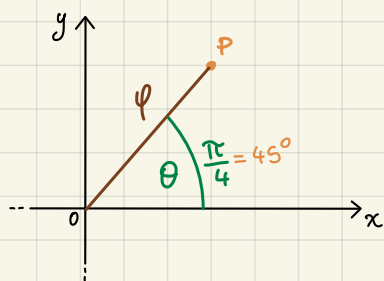


Posso identificare un punto P nel piano, quindi uno $z \in \mathbb{C}$ tramite le coordinate cartesiane (a, b) ;

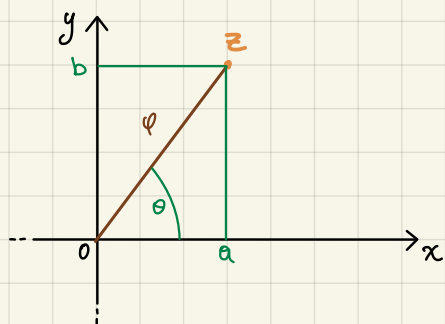
Un altro modo è quello di usare le coordinate Polari usate in fisica

ρ e θ , dove ρ è la distanza di $P(oz)$ dall'origine, e θ è l'angolo compreso tra x e OP

ES: $P(1, \frac{\pi}{4})$



Passare da Coord. Cartesiane a Polari



$$\begin{cases} Ox = Oz \cdot \cos(\theta) \\ x = \varphi \cdot \cos(\theta) \\ a = Oz \cdot \cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Oy = Oz \cdot \sin(\theta) \\ y = \varphi \cdot \sin(\theta) \\ b = Oz \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^b = \varphi \sin \theta \\ y^a = \varphi \cos \theta \end{cases}$$

Abbiamo $\text{Re}(z) = x$ e $\text{Im}(z) = y$, dove $z = x + iy$; Come calcolo φ e θ ?
Calcoliamo φ e θ di $z = x + iy$ le ricaviamo dalle eq $\textcircled{1}$:

• Conosciamo da l.a che: $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$

• Per calcolare θ , che si dice **Argomento** di z , basta usare le eq $\textcircled{1}$:
da l.b ricaviamo $\cos \theta = y/\varphi$ e da l.a $\sin \theta = x/\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = x/\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \theta = y/\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Quindi per trovare modulo ed argomento di un numero complesso $z = x + iy$ basta:

$$\varphi = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e calcoliamo } \theta \in [0, 2\pi] / \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$

ES: $z = 1 + i$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ Calcoliamo Argomento e modulo
 θ φ

• $|z| = \varphi = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

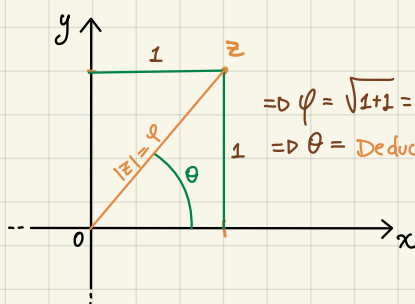
• $\theta \in [0, 2\pi] / \cos(\theta) = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\cos(\theta) = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Se $z = x + iy$, calcolo φ e θ Sostituiamo le $\textcircled{1}$ nell'espressione di z :

$$\Rightarrow z = \varphi \cos \theta + i(\varphi \sin \theta) = \varphi (\cos \theta + i \sin \theta) = |z| e^{i\theta} = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Forma trigonometrica di $z \in \mathbb{C}$

Tornando all'es... $\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$
 $z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$



$$\Rightarrow \varphi = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$1 \Rightarrow \theta = \text{Deduco graficamente} = 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

