

Disequazioni

Disequazioni di I e II grado

dal libro Marcellini - Sbordone

3.1)

a) $x+1 > 0$ per $x > -1$

c) $4x+8 > 0$ per $x > -2$

3.4)

a) $3x+4-x+1 < x+6$; $3x+4-x+1-x-6 < 0$; $x-1 < 0$ per $x < 1$

b) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}x \geq \frac{5}{4}x + 2$; moltiplico per 4: $2x + \frac{4}{3} + 3x \geq 5x + 8$; $0x + \frac{4}{3} - 8 \geq 0$ \emptyset

c) $x-7-2x < 7-x$

piccolo recap



Diseq di II grado

- Con le diseq di II grado consideriamo il Discriminante Δ :

1° Caso: Se il Δ è positivo, l'eq $ax^2+bx+c=0$ ammette due soluzioni distanti.
Calcoliamo le due radici ($x_1 \neq x_2$) con:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Inoltre se $ax^2+bx+c > 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2) > 0$

↳ Scomposizione

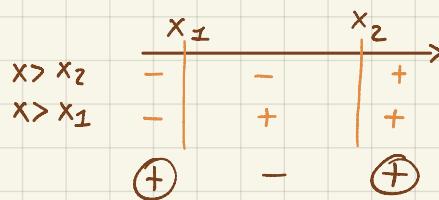
Capiamo quindi che

Caso $ax^2+bx+c > 0$ con $a > 0$

Se $a > 0$, affinché la disequazione sia positiva, $(x-x_1)(x-x_2) > 0$. Per far sì che questo valore sia positivo, i due termini devono avere lo stesso segno, quindi:

$$\begin{cases} (x-x_1) > 0 \\ (x-x_2) > 0 \end{cases} \quad \text{OR} \quad \begin{cases} (x-x_1) < 0 \\ (x-x_2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > x_1 \\ x > x_2 \end{cases} \quad \text{ma sappiamo che } x_1 < x_2 \Rightarrow$$



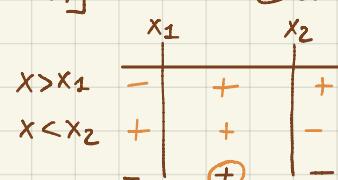
Valori ESTERNI

Caso $ax^2+bx+c > 0$ con $a < 0$

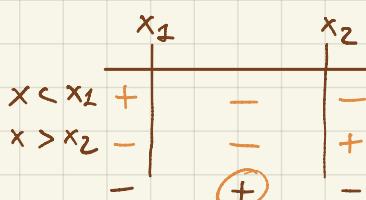
Se $a < 0$, affinché $(x-x_1)(x-x_2) < 0 \Rightarrow$ Devono avere segni opposti:

$$\begin{cases} x-x_1 > 0 \text{ per } \\ x-x_2 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > x_1 \\ x < x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-x_1 < 0 \text{ per } \\ x-x_2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases}$$



Valori INTERNI



Caso $ax^2 + bx + c < 0$ con $a > 0$

Se $a > 0$, affinché la disequazione sia negativa, $[(x-x_1)(x-x_2)] > 0$

Per la dimostrazione precedente, $x_1 < x < x_2$ Valori Interni

Caso $ax^2 + bx + c < 0$ con $a < 0$

Se $a < 0$, affinché la disequazione sia negativa, $[(x-x_1)(x-x_2)] < 0$

Per la dimostrazione precedente, $x < x_1 \cup x > x_2$ Valori esterni

Riassunto

$$\left. \begin{array}{l} ax^2 + bx + c > 0 \\ a > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x < x_1 \cup x > x_2$$

$$\left. \begin{array}{l} ax^2 + bx + c > 0 \\ a < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 < x < x_2$$

$$\left. \begin{array}{l} ax^2 + bx + c < 0 \\ a > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 < x < x_2$$

$$\left. \begin{array}{l} ax^2 + bx + c < 0 \\ a < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x < x_1 \cup x > x_2$$

2° Caso: $\Delta = 0$

In questo caso l'eq. $ax^2 + bx + c$ ammette una sola soluzione:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Se } x_1 = x_2 \Rightarrow a(x - x_1)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Deduciamo che se $a > 0$, l'eq è $> 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$
 questo perché: data la disequazione $a(x - x_1)^2 > 0$ pongo $x = x_1 \Rightarrow a(x_1 - x_1)^2 = 0$

Riassumendo:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq x_1$$

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Nessuna Soluzione} \quad \text{es: } -2 \cdot (-2)^2 > 0, \quad -2 \cdot 4 > 0 ? \quad \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Nessuna Soluzione}$$

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq x_1$$

3 Caso: $\Delta < 0$

Se il discriminante è < 0 , l'eq $ax^2 + bx + c = 0$ NON AMMETTE soluzioni reali. Possiamo però scomporre nel seguente modo:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4ac} [4a^2x^2 + 4abx + 4ac] = \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)]$$

Se $b^2 - 4ac < 0$, allora la parentesi quadra è sicuramente > 0 . Di conseguenza il segno di $ax^2 + bx + c$ è identico a quello di a .

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \\ a > 0, \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{unica soluzione}$$

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ a < 0, \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{no soluzioni}$$

\Rightarrow Per avere soluzione, il segno della diseq e quello di a devono essere uguali.

ES 3.5)

$$\text{a)} x^2 - 3x + 2 < 0 \quad \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \begin{array}{c|cc} & x_1 = 2 & x_2 = 1 \\ \hline -3 & + & + \\ + & + & - \end{array}$$

$a > 0 \Rightarrow$ Valori interni
 $\Rightarrow 1 < x < 2$

$$\begin{cases} x+3 < 0 \quad \text{per } x < -3 \\ x-2 > 0 \quad \text{per } x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & -3 & 2 \\ \hline + & - & - \\ - & - & + \end{array}$$

$$-3 < x < 2$$

* Non so perché esce 3 e non 1

$$b) 1-x^2 \leq 0 \quad a < 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq \pm 1$$

$$\Delta = -4 \cdot (-1) \cdot 1 = 4 > 0 \quad 2 \text{ radici coincidenti} \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$$

$$c) 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \quad \Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a > 0 \Rightarrow \text{Valori esterni} \Rightarrow x < \frac{1}{2} \vee x > 1$$

$$d) x^2 + 5x > 0 \quad \Delta = 25 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm 5}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

$$a > 0 \Rightarrow \text{Valori esterni} \quad x < -5 \vee x > 0$$

ES 3.6)

$$a) 16x^2 + 8x + 1 > 0 \quad \Delta = 64 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 \text{ soluzione} \\ 2 \text{ coincidenti} \end{cases} \quad x = \frac{-8 \pm 0}{32} = -\frac{1}{4}$$

$$a > 0 \Rightarrow \text{Valori esterni} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

$$b) 16x^2 + 8x + 1 < 0 \quad x = -\frac{1}{4} \quad a > 0, \text{ segno} < 0 \Rightarrow a \neq \text{diseg} \Rightarrow \text{No Sol}$$

$$c) x^2 \leq 0 \quad \text{per } x=0$$

$$d) -9x^2 + 12x - 4 \geq 0 \quad \Delta = 144 - 4 \cdot (-9) \cdot (-4) = 0 \Rightarrow 1 \text{ soluzione}$$

$$a < 0 \Rightarrow \text{soluz interne} \quad x = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3} \Rightarrow f(x) \geq 0 \text{ solo per } x = \frac{2}{3}$$

$$3.7) a) x^2 - x + 1 < 0 \quad \Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow a > 0, \text{ eq} < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$b) -2x^2 + 3x - 2 < 0 \quad \Delta = 9 - 4(-2)(-2) = -7 < 0 \Rightarrow a < 0, \text{ eq} < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$c) 3x^2 - 7x + 5 \geq 0 \quad \Delta = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 1 > 0 \Rightarrow a > 0, \text{ eq} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$d) -7x^2 + 5x - 1 \geq 0 \quad \Delta = 25 - 4(-7)(-1) = 25 - 28 < 0 \Rightarrow a < 0, \text{ eq} > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

• Quando $\Delta < 0$, l'eq ha ∞ soluz. solo se i segni di a e diseg sono uguali.

3.8)

$$a) 16x^2 + 24x + 9 \leq 0 \quad \Delta = 24^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 576 - 576 = 0 \Rightarrow 1 \text{ soluz.}$$

$$x = \frac{-24}{32} = -\frac{3}{4} \quad a > 0, \text{ eq} = 0 \Rightarrow \text{soluzioni interne} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

$$b) 5 + 4x - 3x^2 > 0 \quad \Delta = 16 - 4 \cdot 5 \cdot (-3) = 16 + 60 = 76 \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{-6} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{4 + \sqrt{76}}{6} \\ x_2 = \frac{4 - \sqrt{76}}{6} \end{cases}$$

$$a < 0, \text{ eq} > 0 \Rightarrow \text{valori interni} \quad \frac{4 - \sqrt{76}}{6} < x < \frac{4 + \sqrt{76}}{6}$$

Disequazioni di grado superiore al secondo

Una disequazione del tipo $ax^4 + bx^2 + c > 0$ si dice Biquadratica. Per risolvere questo tipo di equazione si usa la sostituzione $t = x^2$:

Otteniamo la disequazione: $at^2 + bt + c > 0$

Supponiamo di ottenere $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, con $a > 0$, e per cui si trovano limitazioni del tipo $t < t_1$, $t > t_2$. Di conseguenza possiamo studiare le due disequazioni di secondo grado $x^2 < t_1$, $x^2 > t_2$.

ES 3.10: $f(x) = 4x^4 - 17x^2 + 4 \geq 0$ pongo $t = x^2 \Rightarrow 4t^2 - 17t + 4 \geq 0$

$$\Delta = 17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 289 - 64 = 225 > 0 \quad t_{1,2} = \frac{-17 \pm 15}{8} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4} \\ x_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow a > 0, eq > 0 \Rightarrow \text{Valori esterni}$$

Siccome $t = x^2 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{4} \cup x^2 > 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t < \frac{1}{4} \cup t > 4$$

① $x^2 < \frac{1}{4}$ per $x < \sqrt{\frac{1}{4}} = x < \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x < -\frac{1}{2} \cup x > \frac{1}{2}$

② $x^2 > 4$ per $x > \pm 2$

$$\begin{cases} x < -2 \cup x > 2 \end{cases}$$

-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
+	+	-	+
+	-	-	+
+	-	+	+

\Rightarrow la diseq ha soluzioni in

$$x < -2 \cup -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \cup x > 2$$

3.11) $f(x) = 9x^4 + 4x^2 - 5 > 0$ pongo $t = x^2$ $f(t) = 9t^2 + 4t - 5 > 0$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 9 \cdot (-5) = 16 + 180 = 196 > 0 \quad t_{1,2} = \frac{-4 \pm 14}{18} \quad \begin{cases} t_1 = \frac{5}{9} \\ t_2 = -1 \end{cases} \quad a > 0, eq > 0 \Rightarrow \text{Valori esterni}$$

Siccome $t = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 < -1 \quad \text{falso} \\ x^2 > \frac{5}{9} \quad x > \sqrt{\frac{5}{9}} \end{cases} \Rightarrow x < -\sqrt{\frac{5}{9}} \cup x > \sqrt{\frac{5}{9}}$

3.12) $x^4 - 2x^2 - 8 \leq 0$ pongo $t = x^2 \Rightarrow f(t) = t^2 - 2t - 8 \leq 0 \quad \Delta = 4 + 32 = 36$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} \quad \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = -2 \end{cases} \quad a > 0, eq < 0 \Rightarrow \text{Soluzioni interne} \quad -2 \leq t \leq 4$$

Siccome $t = x^2 \Rightarrow -2 \leq x^2 \leq 4$

$$\begin{cases} x^2 \geq -2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 \leq 4 \quad \text{per } x \leq \pm 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

3.13) a) $x^4 - 3x^2 > 0$ $x^2 = t \Rightarrow t^2 - 3t > 0$ per $\Delta = 9$ $t_{1,2} = \frac{3 \pm 3}{2} \quad \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$

$$a > 0, eq > 0 \Rightarrow \text{Valori esterni} \quad t \leq 0 \cup t \geq 3$$

Siccome $t = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 0 \quad \text{per } x = 0 \\ x^2 \geq 3 \quad \text{per } x \leq -\sqrt{3} \cup x \geq \sqrt{3} \end{cases}$

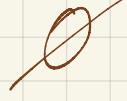
$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$f(x) > 0$ per
+	-	-	$x \leq -\sqrt{3} \cup x \geq \sqrt{3}$
-	-	+	$\cup x = 0$
-	-	-	
+	-	+	

b) $x^4 + 8x^2 + 15 \leq 0$ pongo $t = x^2 \Rightarrow f(t) = t^2 + 8t + 15 \leq 0$ $\Delta = 64 - 4 \cdot 15 = 4$

 $t_{1,2} = \frac{-8 \pm 2}{2} \quad t_1 = -2 \quad t_2 = -5$

Siccome $t = x^2 \Rightarrow -5 \leq x^2 \leq -2$

$a > 0$, eq $\leq 0 \Rightarrow$ Valori Interni $-5 \leq t \leq -2$

$$\begin{cases} x^2 \leq -2 & \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 \geq -5 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$


Altro tipo di disequazioni: Reciproche

- $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ polinomio di I^a specie
- $p(x) = ax^4 + bx^3 - bx - e$ polinomio di II^a specie

3.15) Sia un polinomio di I^a o II^a sp. Sia x_0 una radice del polinomio, cioè $p(x_0) = 0$, con $x_0 \neq 0$. Verificare che anche $\frac{1}{x_0}$ lo è.

//

Metodo di risoluzione

Dividiamo entrambi i membri per x^2 :

$$\frac{ax^4}{x^2} + \frac{bx^3}{x^2} + \frac{cx^2}{x^2} + \frac{dx}{x^2} + \frac{e}{x^2} > 0 ; \quad a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c > 0$$

Poniamo $t = x + \frac{1}{x}$ Siccome $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

otteniamo $f(t) = a(t^2 - 2) + bt + c > 0$

$$= at^2 + bt + c - 2a > 0$$

Eq di 2 grado ↑

Infine ci basta ricordare che $t = x - \frac{1}{x}$ ed effettuare le sostituzioni

ES: $f(x) = \frac{2x^4}{x^2} - \frac{3x^3}{x^2} + \frac{4x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2} > 0$ ottengo $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 > 0$

$$\Rightarrow \text{pongo } t = \left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$\Rightarrow 2(t^2 - 2) - 3t + 4 > 0 ; \quad 2t^2 - 3t > 0 \quad \Delta = 9 \quad t_{1,2} = \frac{3 \pm 3}{2} \quad t_1 = 0 \quad t_2 = 3$$

$a > 0$, eq $> 0 \Rightarrow$ Valori esterni $\Rightarrow f(x) > 0$ per $t < 0 \cup t > \frac{3}{2}$

Siccome $t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow x - \frac{1}{x} < 0 \cup x - \frac{1}{x} > \frac{3}{2}$ moltiplico per x

