



# Esercizi eq differenziali

ES:

$$y' - \frac{y}{\tan x} = \sin x$$

• Di che tipo è questa eq diff?  
E' un'eq lineare del I° ordine

$$y' - \frac{1}{\tan x} \cdot y = \sin x$$

$\Rightarrow$  Abbiamo infatti la forma:  $y' - a(x) \cdot y = b(x)$

coeff. dipende da  $x$   
quanti<sup>ta</sup> da dip.  
 $\downarrow$   
 $\uparrow$

1) Calcolare l'integrale generale dell'omogeneo associato:

$$y' - \frac{1}{\tan x} y = 0 \quad \leftarrow \text{eliminiamo } b(x) \Rightarrow \text{e' un'eq a variabili separabili}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{\tan x} \quad \leftarrow \text{integriamo} \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{1}{\tan x} dx = \ln |y| = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\Rightarrow \ln |y| = \ln |\sin x| + C \Rightarrow y_0(x) = C e^{\sin x} = C \sin x \quad \text{y0 e' l'integrale generale}$$

2) Calcolare un integrale particolare  $y_p$  dell'eq completa: Metodo separazione Variabili

Facciamo uscire la c

$$y_p(x) = C(x) \cdot \sin x \quad \text{Imponiamo che sia soluzione dell'eq completa}$$

SOSTITUIAMO NELLA:  
eq completa

Siccome nella eq completa appare anche  $y'$  dobbiamo conoscere la derivata di  $y_p(x)$ :

$$y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x \quad \Rightarrow \text{SOSTITUIAMO} \Rightarrow C' \sin x + C \cos x - \frac{1}{\tan x} \cdot C \sin x = \sin x$$

$$C' \sin x + C \cos x - \frac{\cos x}{\sin x} \cdot C \sin x = \sin x \Rightarrow C' \sin x + C \cos x - C \cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow C \sin x = \sin x \Rightarrow C' = 1 \quad \text{integriamo} \quad \int C' dx = \int dx \Rightarrow C = x$$

Quindi  $y_p(x) = C(x) \sin x = x \sin x$

Integrale generale dell'eq completa =  $y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C \sin x + x \sin x$

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x} y = x^3 \\ y(1) = \frac{1}{5} y_0 \end{cases}$$

Quando l'eq è del primo ordine abbiamo bisogno di una condizione

In generale

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & \leftarrow \text{eq differenziale qualunque} \\ y(x_0) = y_0 & \text{numero} \\ & \text{cond. iniziale} \end{cases}$$

Come si risolve il prob. di Cauchy?

Inizialmente si tralascia la condizione iniziale, risolvendo solo l'eq differenziale:

$$y' + \frac{1}{x} y = \underbrace{x^3}_{b(x)} \quad \text{eq diff I° ordine}$$

I) Omogenea Associate:  $y' + \frac{1}{x} y = 0$ ;  $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = -\int \frac{1}{x} dx$   
 $\Rightarrow \ln|y| \ominus \ln|x| + C_1 \Rightarrow y_0(x) = \frac{1}{x} + C$  Integrale generale omogeneo Associate

II) Calcoliamo l'integrale particolare  $y_p \rightarrow$  Metodo sep. var.

Imponiamo  $y(x) = c(x) \cdot \frac{1}{x}$  sia soluzione dell'eq completa:

$$D(c(x) \cdot \frac{1}{x}) = c' \cdot \frac{1}{x} + c(-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{c'}{x} - \frac{c}{x^2} \quad \text{sostituiamo}$$

$$\frac{c'}{x} - \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x} \left( c \frac{1}{x} \right) = x^3 \Rightarrow \frac{c'}{x} - \cancel{\frac{c}{x^2}} + \cancel{\frac{c}{x^2}} = x^3 \Rightarrow \frac{c'}{x} = x^3 \Rightarrow \underline{c' = x^4}$$

Integriamo:  $\int c' dx = \int x^4 dx \Rightarrow c(x) = \frac{x^5}{5} \Rightarrow$  L'integrale particolare  $y_p(x)$

Sarà:  $y_p(x) = \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^4}{5}$  Allora l'integrale generale dell'eq completa sarà:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = \underline{\frac{c}{x} + \frac{x^4}{5}} = \frac{cx + 5x^4}{5x}$$

INTEGRALE GENERALE

$\rightarrow$  Famiglia di  $\rightarrow$  Dipende da  $c \in \mathbb{R}$ . Soluzioni

III) Dopo aver risolto l'integrale generale, vogliamo trovare un'unica soluzione in modo da soddisfare il problema di Cauchy:  $y(x_0) = \frac{1}{5}$

Imponiamo la condizione iniziale

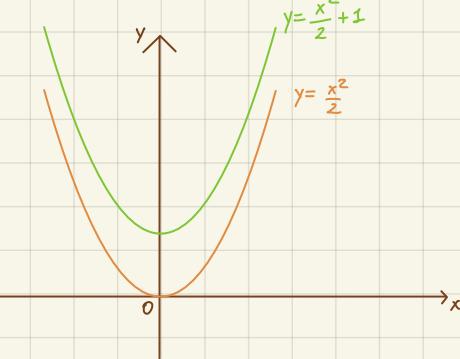
$$y(1) = \frac{1}{5} \rightarrow \text{sostituiamo ad } x, 1$$

$$\frac{c}{1} + \frac{1^4}{5} = \frac{1}{5}; c + \cancel{\frac{1}{5}} = \cancel{\frac{1}{5}} \Rightarrow c = 0$$

Allora l'integrale particolare (unica soluzione) è:  $y(x) = \cancel{\frac{c}{x}} + \frac{x^4}{5} \Rightarrow y(x) = \frac{x^4}{5}$

Integrale particolare

ES:  $\begin{cases} y' = x \\ y(1) = 5 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + c \quad \leftarrow \text{integrandi}$



Cambiando la  $c$ , la funzione cambia. Quando impongo la condizione iniziale  $y(1)=5$  ottieniamo

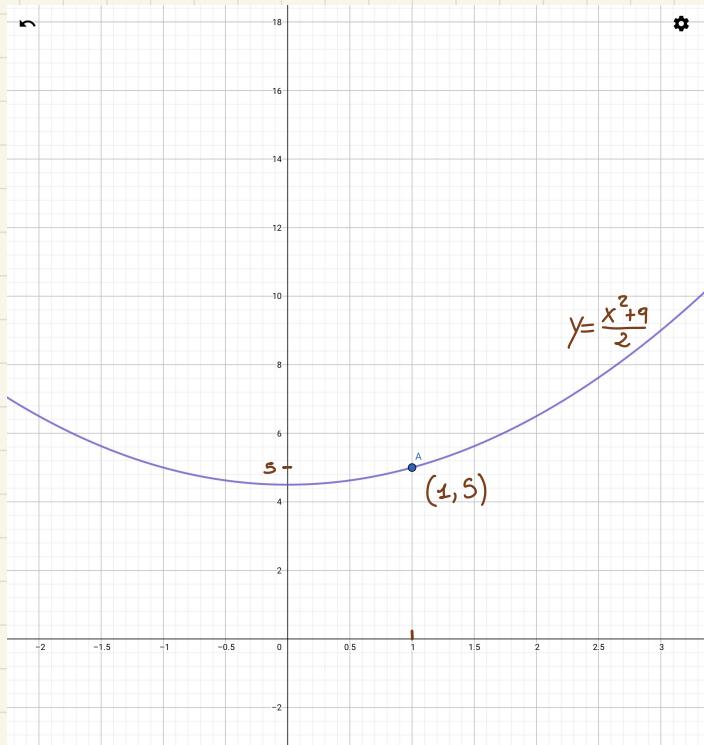
$$y(1)=5 \Rightarrow \frac{1^2}{2} + c = 5 \Rightarrow c = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Quindi Qual è la soluzione al prob. di Cauchy?

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow c = \frac{9}{2} \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} = \frac{x^2+9}{2}$$

Quando facciamo questi calcoli, in realtà cosa stiamo cercando? Quando imponiamo che  $y(1)=5$ , significa dire "Tra tutte le parabole che ho ad variare di  $c$ , voglio la parabola che passa per il punto  $(1, 5)$ "

$$y(1) = 5 \quad \downarrow y \quad \Rightarrow (x, y) = (1, 5)$$



Eq del tipo

(diverse dalle eq del tipo  $y' + \alpha(x)y = 0$  !)

Sono del tipo:

$$y' = g(ax+by) \quad \textcircled{1}$$

Tutte le eq che vedremo d'ora in poi sono tutte eq NON LINEARI del I° ordine.

Supponiamo che  $g$  dipenda da un argomento  $(ax+by)$ , dove  $a$  e  $b$  sono DUE NUMERI.

Come si risolve questo tipo di equazione?

Poniamo  $z = ax+by$

Sempre dipendente  
da  $x$

Prima di sostituire  $z$ , dobbiamo esprimere  $y'$  in funzione di  $z$ : Deriviamo  $z = ax+by(x)$

$$\Rightarrow D(z = ax+by(x)) = z' = a+b \cdot y'(x) \Rightarrow \text{Ricaviamo } y' = 0 \quad y'(x) = \frac{z' - a}{b}$$

Sostituiamo nella  $\textcircled{1}$

$$\frac{z' - a}{b} = g(z) \Rightarrow \text{Ricaviamo } z' \Rightarrow z' = a + bg(z) \leftarrow \begin{array}{l} \text{Equazione a variabili separabili} \\ \text{pto A} \end{array}$$

Per risolvere l'eq continuano con il procedimento per le eq a var. sep.

$$\text{es: } y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow y' = 1 + \underbrace{(x-y)^2}_{\text{quadrato}} \Rightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \end{array} \quad g(x) = (x-y)^2$$

$$\text{Pongo } z = x-y \quad \text{Deriviamo} \Rightarrow z' = 1 - y' \quad \text{Ricavo } y' \Rightarrow y' = 1 - z'$$

$$\text{Sostituiamo a } y' = 1 + (x-y)^2 \Rightarrow 1 - z' = 1 + (z)^2 \Rightarrow z' = -z^2 \leftarrow \begin{array}{l} \text{questa e' un'eq a} \\ \text{variabili separabili} \end{array}$$

Siamo al punto A

$$\begin{aligned} &\text{Risoluo l'eq a var sep: } \frac{z'}{z^2} = -1 \quad \text{integriamo} \Rightarrow \int \frac{z'}{z^2} dx = - \int dx \\ &\Rightarrow \frac{z^{-1}}{-1} = -x + C \Rightarrow \frac{1}{z} = x - C \Rightarrow z = \frac{1}{x-C} \quad \text{ma } z = x-y \end{aligned}$$

$$\text{Torniamo a } x-y \Rightarrow x-y = \frac{1}{x-C} \Rightarrow y = -\frac{1}{x-C} + x \Rightarrow y = \frac{x^2 - Cx - 1}{x-C}$$

## Equazioni omogenee

Sono eq del tipo:  $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$  e quindi dipendente da  $\left(\frac{y}{x}\right)$

Come la risolviamo? Poniamo  $z = \frac{y}{x}$  e ci riceviamo  $y \rightarrow y(x) = z \cdot x$

$\Rightarrow y' = z'x + z$  Sostituendo  $\Rightarrow z'x + z = g(z)$  eq a variabili separabili

ES:  $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$  Non è lineare del I ordine perché non è presente un coefficiente che dipende da  $x$  o  $y$ ; abbiamo al denominatore  $x^2+y^2$ , di conseguenza non abbiamo una dipendenza lineare da  $xy$ .

Una combinazione lineare di  $x$  e  $y$  è della forma  $ax+by$ .

Quindi come facciamo? Mettiamo  $x^2$  in evidenza:

$$y' = \frac{2xy}{x^2(1+\frac{y^2}{x^2})} = \frac{2\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} \Rightarrow \text{poniamo } z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{2z}{1+z^2}; \quad z'x = \frac{2z - (1+z^2) \cdot (z)}{1+z^2} = \underbrace{z'x}_{\substack{\uparrow \\ x}} = \frac{z-z^3}{1+z^2} \quad \text{tutto dipende da } z$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{\frac{z-z^3}{1+z^2}} = \frac{1}{x} \Rightarrow z' \cdot \frac{1+z^2}{z-z^3} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int z' \cdot \frac{1+z^2}{z-z^3} dx = \int \frac{1}{x} dx \quad \textcircled{A}$$

$$\int \frac{z^2+1}{z(1-z^2)} dx = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{1+z} = \frac{A(z-z)(1+z) + B(z)(1+z) + C(z)(1-z)}{z(1-z)(1+z)}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-1 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1}{z} \cdot z' dx + \int \frac{1}{1-z} z' dx - \int \frac{1}{1+z} z' dx = \ln|z| + \ln|1-z| - \ln|1+z| + c_1$$

$$= \ln \left| \frac{z(1-z)}{1+z} \right| + c_1 \quad \text{Allora } \ln \left| \frac{z(1-z)}{1+z} \right| = \ln |x| + c_1 \Rightarrow \frac{z(1-z)}{1+z} = e^{c_1} x$$

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} \left(1 - \frac{y}{x}\right) = cx$$

## Equazione di BERNOULLI

E' un'eq del tipo:

$$y' = a(x)y + b(x) \quad \text{y}^2 \quad \text{Non più lineare}$$

novità

Come procediamo?

$$\frac{y'}{y^2} = a(x) \underbrace{\frac{y}{z}}_{z(x)}^{1-2} + b(x)$$

$$\text{Poniamo } z(x) = \underbrace{y^{1-d}}_{=y^d} \Rightarrow \text{Deriviamo} \Rightarrow z'(x) = (1-d)y(x) \cdot \underbrace{\frac{y'(x)}{y^d}}_{y \text{ dip. da } x}^{1-d-1}$$

$$\text{Ci manca } (1-d), \text{ quindi: } \frac{z'}{1-d} = a(x)z(x) + b(x) \quad \text{Eq lineare del I° ordine}$$

$$\text{ES: } xy' = -y^2 \ln x - 2y \quad \text{Dividiamo per } x: \quad y' = -y^2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \underbrace{2y \cdot \frac{1}{x}}_{a(x) \cdot y}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{2}{x} \cdot y - \frac{\ln x}{x} \cdot y^2 \quad \leftarrow \text{Abbiamo tutti } \rightarrow \text{eq di Bernoulli}$$

$$\Rightarrow \text{Dividiamo per } y^2 \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = -\frac{2}{x} \cdot \frac{y}{y^2} - \frac{\ln x}{x} = \Rightarrow \text{pongo } z(x) = y^{1-2} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y}$$

$$\text{Deriviamo} \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y' \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = -z' \quad \text{eq completa}$$

$$\text{Sostituendo: } -z' = -\frac{2}{x}z - \frac{\ln x}{x} \Rightarrow z' = \frac{2}{x}z + \frac{\ln x}{x} \quad \text{eq lineare I ordine} \Rightarrow \text{Variabili separabili}$$

$$\Rightarrow \text{eq omogenea: } z' = \frac{2}{x}z \Rightarrow \int \frac{z'}{z} = \int \frac{2}{x} dx = \ln|z| = 2 \ln|x| + C_1 \Rightarrow z_0 = x^2 + c$$

Metodo sep variabili

Integrale generale omogenea  
associata

$$z_p(x) = C(x) \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad z' = C'x^2 + C2x$$

$\uparrow$  La costante varia

$$\text{SOSTITUONO alla } \textcircled{1} \Rightarrow C'x^2 + C2x = \frac{-2}{x}Cx^2 + \frac{\ln x}{x} \Rightarrow C'x^2 = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow C' = \frac{\ln x}{x^3}$$

$$\text{INTEGRIONO: } \int C' dx = \int \frac{\ln x}{x^3} dx \quad \text{pongo } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx \Rightarrow x = e^t$$

$$\Rightarrow C = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow C(x) = \int e^{-2t} \cdot t dt$$

INTEGRIONO per parti



1:43

Le eq precedenti erano tutte del tipo

NON LINEARI DEL I° ORDINE

## Equazioni lineari del II ordine

(finora abbiamo visto quelle lineari del I<sup>o</sup> ordine)

Sono del tipo:  $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$  ①

Il primo membro è una combinaz. lineare  
di  $y'', y'$  e  $y$

$$b_1 y'' + b_2 y' + b_3 y = g(x) \quad \text{Dividiamo per } b_1 \rightarrow y'' + \frac{b_2}{b_1} y' + \frac{b_3}{b_1} y = \frac{g(x)}{b_1}$$

**Teorema** (analogo al 1<sup>o</sup> Teorema visto prima)

Anche in questo caso siamo interessati all'integrale generale dell'eq. Quindi l'int. gen. dell'eq completa ① è dato dalla somma dell'integrale generale dell'eq omogenea associata e di un integrale particolare  $y_p(x)$  dell'eq completa; quindi

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) \quad \leftarrow \text{Stesso Teorema delle eq lin. 1<sup>o</sup> ordine}$$

1<sup>o</sup> Problema: risolvere l'eq omogenea associata

Nel caso delle equazioni del primo ordine era una equazione a variabili separabili, in questo caso non è così.

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \leftarrow \text{Termine noto} = 0 \Rightarrow \text{eq omogenea associata}$$

**Proposizione:** Sia  $Y_0$  l'insieme delle soluzioni dell'eq omogenea associata, cioè l'integrale generale. Allora

1)  $Y_0$  è uno spazio vettoriale cioè se  $y_1, y_2 \in Y_0$  (sono entrambe soluzioni dell'eq diff.) allora anche  $y_1 + y_2 \in Y_0$  ← Anche la somma è soluzione.

2) Se  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $y \in Y_0$  allora  $\alpha \cdot y \in Y_0$ .

Quindi lo spazio  $(Y_0, +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale. Come in tutti gli spazi vettoriali, è doveroso parlare di vettori linea rmente dip. o indip. In questo caso non consideriamo uno spazio di vettori numerici, ma uno spazio vettoriale i cui elementi non sono vettori numerici, ma sono funzioni.

**Definizione:** Supponiamo che  $y_1, y_2 \in Y_0$  (due soluzioni [funzioni]) e che  $y_1(x), y_2(x)$  sono indipendenti se l'unica combinazione lineare nulla di  $y_1$  e  $y_2$  è quella a coefficienti tutti nulli, cioè se:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \quad \text{In ogni spazio vettoriale, tutte le basi sono costituite dallo stesso numero di elementi.}$$

L'ordine di una base (da quanti elementi è costituita la base) si dice dimensione dello spazio.

$\mathbb{R}^n$  è uno spazio di dimensione  $n$ , ovvero costituito da  $n$  vettori.

**Proposizione** La dimensione dello spazio  $Y_0$  è 2; questo perché stiamo considerando equazioni del II ordine.

Cioè tutte le basi in  $Y_0$  sono costituite da 2 FUNZIONI

Ma quindi perché siamo interessati alle basi di questo spazio vettoriale?  
Siamo interessati a calcolare l'integrale generale dell'eq differenziale omogenea del II ordine; se conosciamo una base di  $\mathcal{Y}_0$  (ovvero l'insieme delle soluz. di questa equazione) e cioè 2 integrali indipendenti, allora

$y_1 \in \mathcal{Y}_0$  ( $\{y_1, y_2\}$  è una base di  $\mathcal{Y}_0$ ) allora l'integrale generale  $y(x)$  è dato da una combinazione lineare di questi due integrali indipendenti.

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Il mio obiettivo è calcolare almeno 2 integrali indipendenti; se queste due soluzioni dell'eq. diff. sono indipendenti, queste due costituiscono una base!

Se ho una base, mi basta fare una combinazione lineare per ottenere tutte le soluzioni dell'equazione! "Tutte le soluzioni" corrisponde proprio all'integrale generale che noi vogliamo calcolare.