STUDIO DI FUNZIONI

Esercizi proposti

1. Determinare dominio, asintoti, intervalli di monotonia, massimi e minimi, e disegnare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni:

$$a)\ f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} \qquad b)\ f(x) = \frac{\log x}{x} \qquad c)\ f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

2. Discutere dominio, asintoti, monotonia e tracciare un grafico qualitativo di

$$a)\ f(x) = (x^2 - 4)e^{-|x|} \qquad b)\ f(x) = \frac{3x+1}{x+1} - 2\mathrm{arctg}x \qquad c)\ f(x) = x\frac{2\log x - 3}{\log x - 2}.$$

Soluzioni

1. a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = I\!R \setminus \{\pm 2\}$, la funzione è dispari. Le rette $x = \pm 2$ sono asintoti verticali, la retta $y = x$ è asintoto obliquo completo. I punti $x = -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$ sono punti di massimo relativo e i punti $x = -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_1}$ sono punti di minimo relativo, dove $t_1 = \frac{11+\sqrt{105}}{2}$, $t_2 = \frac{11-\sqrt{105}}{2}$. La funzione è crescente sugli intervalli

$$(-\infty, -\sqrt{t_1}), \quad (-\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}), \quad (\sqrt{t_1}, +\infty),$$

decrescente sugli intervalli

$$(-\sqrt{t_1}, -2), \quad (-2, -\sqrt{t_2}), \quad (\sqrt{t_2}, 2), \quad (2, \sqrt{t_1}).$$

Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 1.

b) Si ha $\mathrm{dom}(f) = (0, +\infty)$. La retta $x = 0$ è asintoto verticale, la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale. La funzione ha un massimo relativo e assoluto nel punto $x = e$. La funzione è crescente sull'intervallo $(0, e)$, ed è decrescente sull'intervallo $(e, +\infty)$.
Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 2.

c) Si ha $\mathrm{dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. La retta $y = 3x$ è asintoto obliquo destro, la retta $y = x$ è asintoto obliquo sinistro. Il punto $x = -\sqrt{4/3}$ è un punto di massimo relativo; i punti $x = \pm 1$ sono punti di minimo relativo. La funzione è crescente su $(-\infty, -\sqrt{4/3})$ e su $(1, +\infty)$, decrescente su $(-\sqrt{4/3}, -1)$.
Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 3.

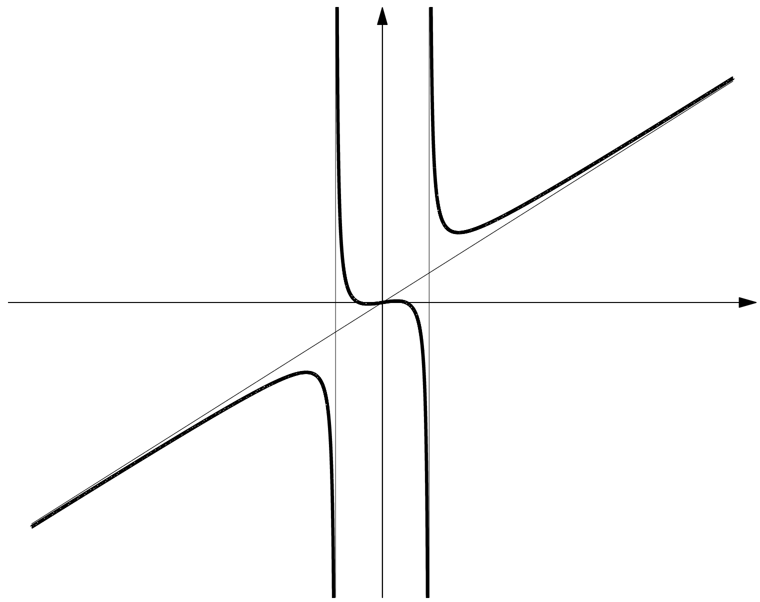

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2-4}$

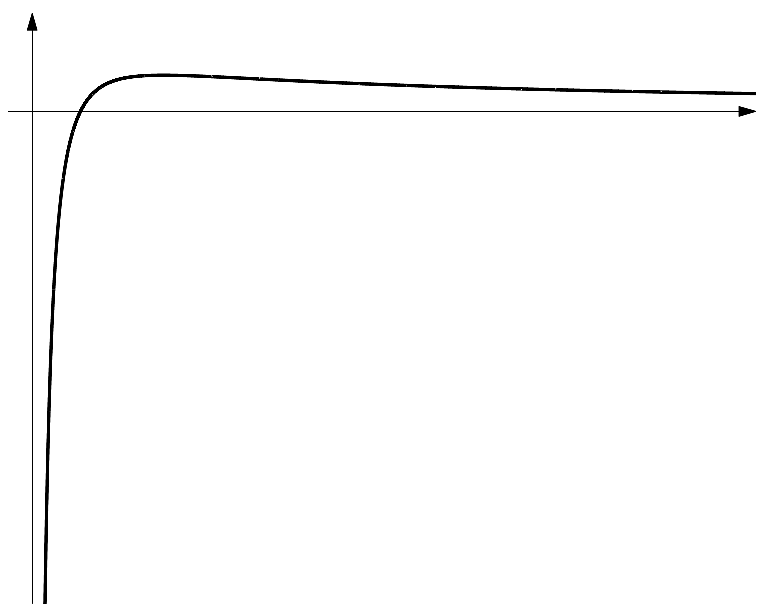

Figura 2: Grafico della funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$

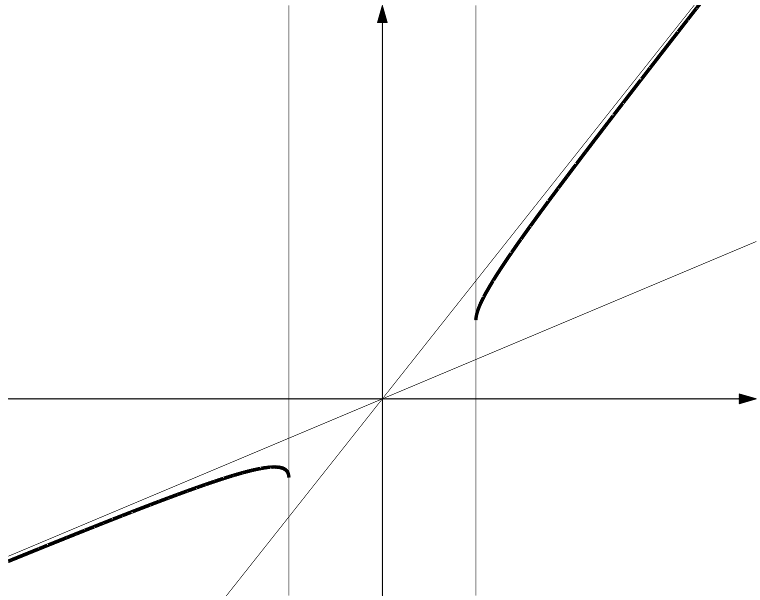

Figura 3: Grafico della funzione $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$

2. a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, la funzione è pari. La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale. I punti $x = \pm(1+\sqrt{5})$ sono punti di massimo relativo e assoluto, il punto $x = 0$ è un punto angoloso di minimo relativo e assoluto. La funzione è crescente sugli intervalli
$$(-\infty, -1-\sqrt{5}), \quad (0, 1+\sqrt{5}),$$
decrescente sugli intervalli
$$(-1-\sqrt{5}, 0), \quad (1+\sqrt{5}, +\infty).$$
Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 4.

   b) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. La retta $x = -1$ è asintoto verticale, la retta $y = 3 - \pi$ è asintoto orizzontale destro, la retta $y = 3 + \pi$ è asintoto orizzontale sinistro. Il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo. La funzione è decrescente sull'intervallo $(0, +\infty)$, crescente sugli intervalli
$$(-\infty, -1), \quad (-1, 0).$$
Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 5.

   c) Si ha $\mathrm{dom}(f) = (0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, quindi f si può prolungare per continuità nello zero ponendo $f(0) = 0$. La retta $x = e^2$ è asintoto verticale. Si ha inoltre
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = +\infty,$$
quindi non c'è asintoto obliquo. Il punto $x = e$ è un punto di massimo relativo, i punti $x = 0$ e $x = e^{5/2}$ sono punti di minimo relativo. La funzione è crescente su $(0, e)$ e su $(e^{5/2}, +\infty)$, decrescente su (e, e^2) e su $(e^2, e^{5/2})$. Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 6.

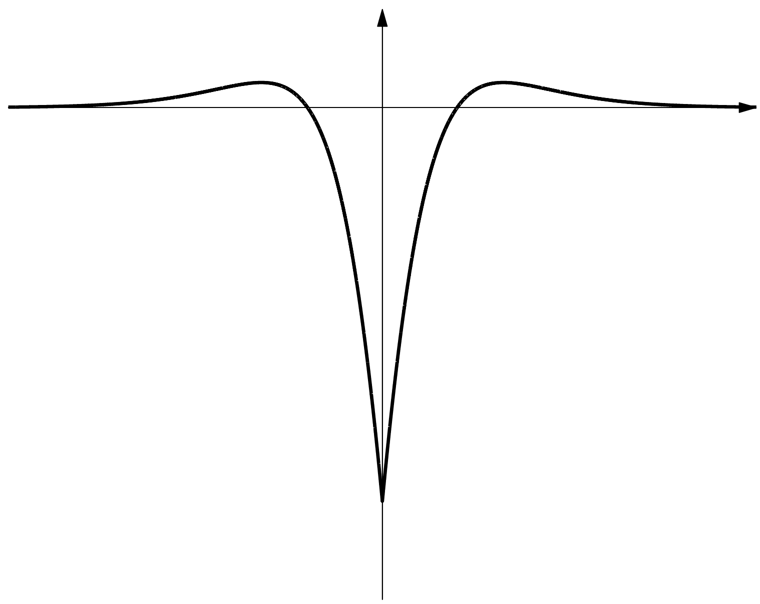

Figura 4: Grafico della funzione $f(x) = (x^2 - 4)e^{-|x|}$

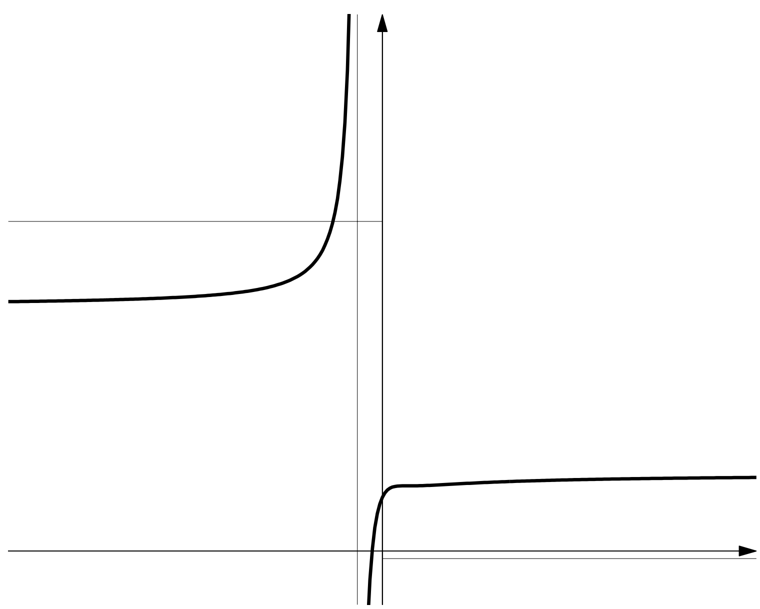

Figura 5: Grafico della funzione $f(x) = \frac{3x+1}{x+1} - 2\mathrm{arctg}x$ (si noti che il grafico di f incontra l'asse delle x per x grande e questo non è evidenziato nella figura)

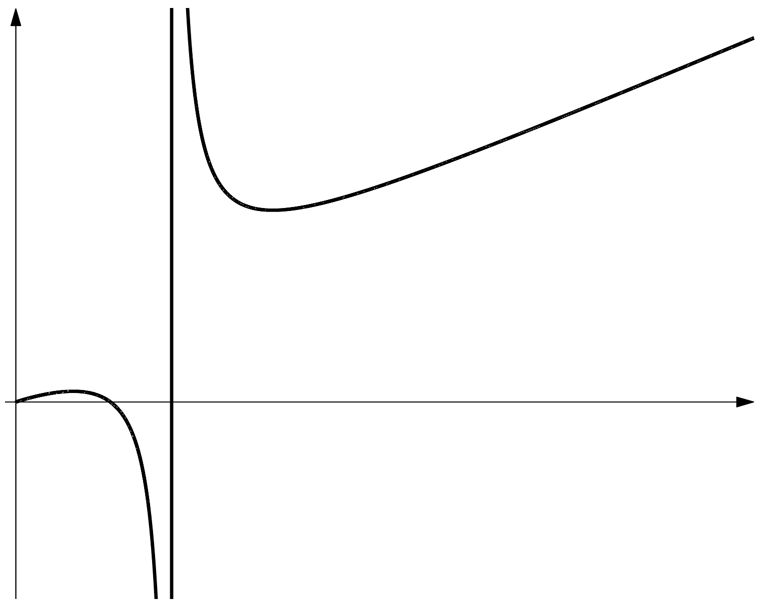

Figura 6: Grafico della funzione $f(x) = x\frac{2\log x-3}{\log x-2}$