Integrazione per parti e per sostituzione

Problema:

$\int x \sin x \, dx$ Come si risolve il prodotto di due funzioni? (Una della quale NON E' la deriv dell'altra)

Integrazione per parti

Se abbiamo due funz. f e g deriv. in $[a,b]$, con derivata continua, allora l'integrale:

$$\boxed{\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx}$$

Quindi Di uno dei due fattori dobbiamo conoscere la primitiva. Con questo metodo, l'integrale di partenza si trasforma in un nuovo integrale; ma a che pro?

Potrebbe succedere che il primo non lo sappiamo calcolare, mentre il secondo sì.

Dim a 00:18

Torniamo ad $f(x) = \int x \sin x \, dx$ Dobbiamo scegliere tra x e $\sin x$ chi "farà la parte" di $f'(x)$.

Scegliamo: $f'(x) = \sin x$ e $g(x) = x$; Applichiamo la formula:

$$\int x \sin x \, dx = -\cos x \cdot x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

Alternativa: $f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = -\cos x$

$\Rightarrow \int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \cos x \, dx \Rightarrow$ In questo caso, la situazione si è addirittura peggiorata!

ES: $\int x^2 \cos x \, dx$ $f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$

$$\Rightarrow \int x^2 \cos x \, dx = \sin x \cdot x^2 - \int \cos x \cdot 2x \, dx = x^2 \sin x - 2 \underbrace{\int x \cos x \, dx}$$

Applico di nuovo $\Rightarrow x^2 \sin x - 2 \cdot \left[-\sin x \cdot x - \int \cos x \, dx \right]$

$$= x^2 \sin x - 2 \left[-x \sin x + \sin x \right] + c$$

ES: $\int \ln x \, dx$ quando non sappiamo procedere possiamo applicare la formula di derivazione per parti vedendo la funzione come $\int \underset{g(x)}{f(x)} \cdot \underset{f'(x)}{1} \, dx$

$\Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$, $g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \underline{x \cdot \ln x - x + c}$$

ES: $\int \underset{g}{x} \cdot \underset{f'}{e^x}\, dx$ = Ci conviene prendere sempre x come f', perché poi nell'integrale risultante sarà 1:

$$\Rightarrow e^x x - \int e^x\, dx = e^x x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

ES: $\int \underset{g}{e^x} \underset{f'}{\sin x}\, dx \Rightarrow -\cos x\, e^x - \int -\cos x\, e^x\, dx = -e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cos x\, dx}_{\text{Simile}}$

Riapplichiamo

$$\Rightarrow -e^x \cos x + e^x \sin x - \overbrace{\int e^x \sin x\, dx}^{\text{Sempre uguale}}$$

Ma siccome abbiamo il "−" davanti l'integrale, possiamo "ricavarci" l'integrale stesso:

$$2\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}$$

ES: $\int \cos^2 x\, dx = \int \cos x \cdot \cos x\, dx = \sin x \cos x - \int \sin x(-\sin x)\, dx$

$= \sin x \cos x + \int \sin^2 x\, dx$ Rel fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin x \cos x + \int 1 - \cos^2 x\, dx$

$= \sin x \cos x + \underset{x}{\int 1\, dx} - \underline{\int \cos x\, dx}$ porto a primo membro $\Rightarrow 2\int \cos x\, dx = \dfrac{\sin x \cos x + x}{2}$

Il "2" viene posto davanti perché spostiamo l'integrale dall'altra parte dell'uguale.

00:38

ES: $\int \sin \alpha x \cos \alpha x\, dx$ Questo integrale si tratta con la formula di duplicazione $\Rightarrow \sin(2\alpha x) = 2\sin \alpha x \cos \alpha x$

$$= \frac{1}{2}\int 2 \sin \alpha x \cos \alpha x\, dx = \frac{\sin(2\alpha x)}{2} + c$$

Se però i coefficienti sono diversi: $\int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx$

si applicano le formule di prostaferesi $\Rightarrow$

- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$\Downarrow$

- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Queste formule si ottengono dalle formule di addizione e sottrazione

Siccome in questo problema specifico siamo interessati alle formule di moltiplicazione e non di addizione, ci servono le formule di Werner, che sono ricavabili da quelle di prostaferesi, ma che esplicitamente sono:

I) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$

II) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

II) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

Quindi: $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$ = Applichiamo la I $\frac{1}{2}\int \sin(2+3)x + \sin(2-3)x \, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(5x)\,dx + \frac{1}{2}\int \sin(-x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\frac{1}{5}\int \sin(5x)}_{\frac{1}{5}\cdot f'(x)}dx - \frac{1}{2}\int \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{10}(-\cos(5x)) + \frac{1}{2}\cos x + c$$

🚩 00:57

ES: $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$ Applichiamo la II^a $\Rightarrow \frac{1}{2}\int \cos(3+2) + \cos(3-2) \, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(5x) + \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos(5x) + \int \cos x \, dx = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int 5\cos(5x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\cos(5x) + c$$

ES $\int \sin^3 x \, dx$ possiamo scriverlo come $\int \sin x \cdot \sin^2 x \, dx$

$$= \underset{\substack{\sin^2+\cos^2=1 \\ \Rightarrow \sin^2 = 1-\cos^2}}{\text{Rel fondamentale}} = \int \sin x \cdot (1-\cos^2 x)\,dx = \int \sin x - \int \underset{\substack{f'(x) \\ \text{Deriv}}}{\sin x}\, \underset{f^2(x)}{\cos^2 x}$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$$

ES: $\int \arcsin x \, dx = \int \overset{f'}{1}\cdot \underset{g}{\arcsin x} = x\cdot \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

Formule Iterative

$\forall n \in \mathbb{N}$ pongo $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$

$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

$I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \underline{BOH}$ Già alla II^a iterazione non sappiamo più calcolare l'integrale.

Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ vale la seguente **Formula di iterazione**:

$$\boxed{I_n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left[(2n-3)\, I_{n-1} + \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right]}$$

Che cosa ci dice? Sostanzialmente possiamo calcolare I_n (ad es $I = 3, 4 \ldots$) in funzione dell'integrale precedente, che potremmo saper fare.

ES: $I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^2}$ secondo la formula precedente $= \frac{1}{2(2-1)} \cdot \left[(2 \cdot 2 - 3) \cdot \boxed{\int \frac{1}{1+x^2} dx} + \frac{x}{(1+x^2)^{2-1}}\right]$

$I_1 = \arctan x$

Quindi $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{\,2} \arctan x + \frac{x}{1+x^2} + c$

Di conseguenza $I_3 = \int \frac{1}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2 \cdot (3-1)} \cdot \left[(2 \cdot 3 - 3)\, I_2 + \frac{x}{(1+x^2)^2}\right]$

$2 \arctan x + \frac{x}{1+x^2} + c$

In generale $I_n = \int x^n \cdot e^{\alpha x} dx \rightarrow$ risolviamo applicando più volte l'integrazione per parti

$I_n = \frac{1}{\alpha} x^n - \frac{n}{\alpha} I_{n-1} - \ldots$

Considerazioni sulle Formule Iterative

Ricordare un grande numero di formule non è semplice, ma questa formula esiste e siccome vale $\forall n \in \mathbb{N}$, può risultare utile.

Integrazione Per Sostituzione

Se f è continua in un $I=(a,b)$, e la sua derivata f' è continua anch'essa, allora, quando calcoliamo l'integrale di $f(x)$ in dx, e sostituiamo $f(x)$ con $x=g(t)$:

$$\int f(x)\,dx \Big|_{x=g(t)} \quad \text{Cambiamo Variabile di integrazione} \Rightarrow \int f(g(t)) \cdot \underbrace{g'(t)\,dt}$$

ES: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}\,dx$ poniamo $x=\underbrace{t^2}_{g(t)}$ $\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{\underbrace{t}_{\sqrt{t^2}}-3} \cdot \overset{g'(t)}{2t}\,dt$

$$= 2\int \frac{t-3+3}{t-3}\,dt = 2\int \frac{\cancel{t-3}}{\cancel{t-3}} + 6\int\frac{1}{t-3}\,dt = 2t + 6\ln|t-3| + C$$

$\int 1\,dt = t$

Torniamo ad x: $x=t^2$

$$= \underline{2\sqrt{x} + 6\ln|\sqrt{x}-3| + C}$$

Quindi $\displaystyle\int f(x)\,dx \Big|_{x=g(t)} = \int f(g(t))\,\underbrace{g'(t)\,dt}_{dx}$

$$dx = d(g(t)) = g'(t)\,dt$$

Differenziale di una funzione

Si definisce come:

$$\boxed{d(g(t)) = g'(t)\,dt} \quad (1)$$

Formalmente è la stessa cosa di scrivere

$$\frac{d\,g(t)}{dt} = g'(t)$$

Cosa indica il differenziale?

In generale per una funzione $y=f(x)$, definiamo la derivata come:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0$$

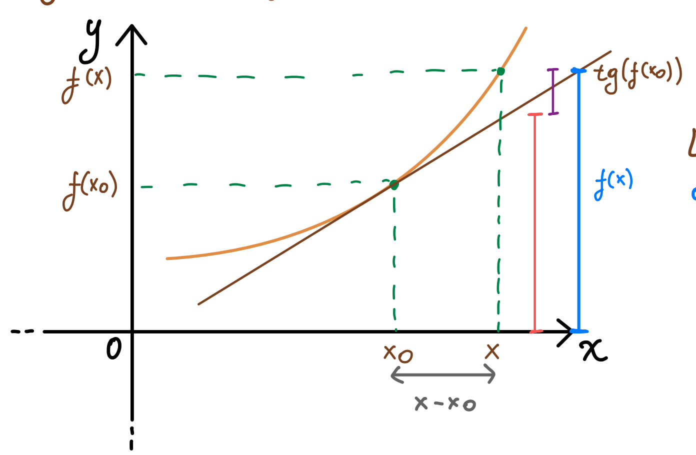
lim rapp. Incrementale

$$\overset{m.c.m}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)}{x-x_0} = 0$$

Per il confronto tra infinitesimi $= \dfrac{0}{0} = \dfrac{N}{D} \Rightarrow D >> N$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = \overset{\text{o piccolo}}{o}(x-x_0) \Rightarrow \underbrace{f(x)} - \underbrace{[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)]} = o(x-x_0)$$

pongo $y =$ eq retta tg a $f(x_0)$



La Differenza è l'ordinata calcolata a partire dalla funzione meno l'ordinata calcolata a partire dalla retta Tangente

Abbiamo detto che questa differenza è un O piccolo di $x - x_0$; quando $x \to x_0 \Rightarrow x - x_0$ è molto piccolo ($\to 0$), ma anche la distanza tra curva e tangente tende ad essere molto piccola.
Dicendo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0)}^{\text{Distanza tra Tg e curva}}}{x - x_0} = 0$$

Diciamo che quello che tende più velocemente a 0 è il Numeratore, ovvero $f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ Questo vuol dire che l'approssimazione della funzione con la tangente è buona ovvero, l'errore commesso con questa approssimazione è molto piccolo.

$\Rightarrow$ Questo concetto è stato ripetuto più volte durante il corso, ma in questa occasione è stato dimostrato graficamente e matematicamente.

Tornando al discorso di dx:

Solitamente $x - x_0$ viene indicato con dx :

Variazione dell'ascissa

$$\boxed{x - x_0 = dx = \Delta x}$$

La variazione della funzione viene indicata come:

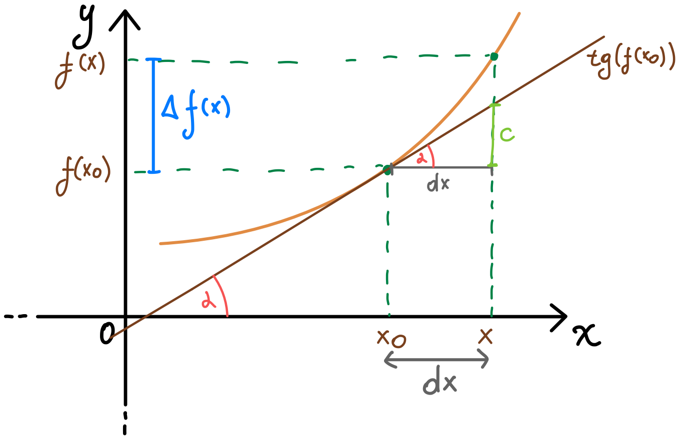
$$\boxed{f(x) - f(x_0) = df(x) = \Delta f(x)}$$

Variazione dell'ordinata

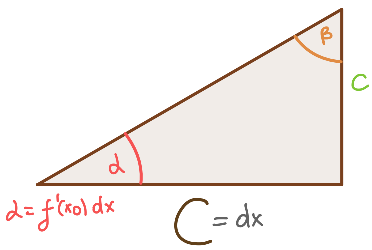
Usando questa notazione, riscriviamo

$$\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{d f(x)} - f'(x_0) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{dx} = o\underbrace{(x - x_0)}_{dx} \Rightarrow \Delta f(x) - f'(x)\, dx = o(dx)$$

coefficiente angolare della tangente
$d f(x)$



Quando scriviamo $f'(x_0)\, dx = \tan\alpha \cdot dx$
ovvero cateto • tangente (angolo opposto)



$$\underline{c = C\, tg(\alpha)}$$

$$c = C \cot g(\beta)$$

Tutti questi calcoli servivano proprio a calcolare "c", ovvero proprio il Differenziale in x

Quindi $\boxed{c = \text{Differenziale} = d(f(x)) = f'(x_0)\, dx}$ Come al punto ① ↑

Il differenziale di f in x_0 rappresenta geometricamente il segmento c. Abbiamo che:

$$\Delta f(x) - df = o(dx)$$

La diff. tra la variazione della funzione, ed il differenziale, è un $o(dx)$, ovvero l'errore che si commette nell'approssimare la variazione della funzione con il differenziale $df = f'(x_0)\, dx$ è molto piccolo rispetto a $x - x_0$.

Tornando agli integrali

Tutta questa dimostrazione geometrica non è molto importante per gli integrali; ci interessa solo che quando effettuiamo la sostituzione, il differenziale si trasforma come detto.

ES: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ pongo $x=\sin t \Rightarrow dx = d(\sin t) = \overbrace{\cos t}^{\text{deriv sinT}}\,dt$

Importante: Ogni volta che si deve fare una sostituzione, pensiamo alla sostituzione da fare, anche di dx.

$\cos^2+\sin^2=1 \Rightarrow \sin^2=1-\cos^2$

$$x=\sin t \Rightarrow \int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt \Rightarrow \int\sqrt{1-1-\cos^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int\cos t\cdot\cos t\,dt$$

$$= \sin t\cdot\cos t - \int\sin t\cdot\sin t\,dt \Rightarrow \cancel{2}\int\sin^2 t = \frac{\sin t\cos t + t}{2}+c$$

Torniamo ad x: $x=\sin t \Rightarrow t=\arcsin x \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\arcsin x+\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x)\right)+c$

ES: $\int\sqrt{2^x-1}\,dx$ pongo $t=\sqrt{2^x-1} \Rightarrow t^2=2^x-1,\ 2^x=1+t^2 \Rightarrow x=\log_2(1+t^2)$

$$\Rightarrow dx = \underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{\text{derivo } \log_2(1+t^2)}\cdot\underbrace{\frac{1}{\ln 2}}_{D(\ln_2(\dots))} = \frac{2}{\ln 2}\cdot\frac{t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \int\sqrt{2^x-1}\,dx = \int t\cdot\frac{2}{\ln 2}\frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{2}{\ln 2}\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = \frac{2}{\ln 2}\cdot\int\overbrace{\frac{\cancel{t^2+1}}{\cancel{t^2+1}}}^{1\,dt}-\int\underbrace{\frac{1}{t^2+1}}_{\text{arcTg}\,t}\,dt$$

$$= \frac{2}{\ln 2}\cdot t-\operatorname{arcTg} t+c \xrightarrow[x=\sqrt{2^2-1}]{\text{ritorno a x}} \frac{2}{\ln 2}\cdot\sqrt{2^x-1}-\operatorname{arcTg}\sqrt{2^x-1}+c$$

ES: $\int\cos(\ln x)\,dx$ pongo $x=\ln x \Rightarrow x=e^t \Rightarrow dx=e^t\,dt$

$\xrightarrow{\text{Sostituisco}}$ $\int\cos(e^t)\,e^t\,dt =$ Si applicano i diversi metodi, svolgimento visto prima