Supponiamo di dover calcolare $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e che il limite sia una forma indeterminata del Tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Supponiamo inoltre che siano verificate le ipotesi:

- f e g sono derivabili in un $I(x_0)$
- $g'(x) \neq 0$ nell'intorno
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\exists$ Finito o infinito.

Tranne in x_0

Il Teorema ci garantisce che:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Il limite da lo stesso risultato se si effettua il limite delle derivate delle funzioni.

ES: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x^2+x} = \left[\frac{0}{0}\right]$ Controlliamo se possiamo usare il Teorema:

1) f e g devono essere continue e deriv in $I(x_0)$

2) $g'(x) \neq 0$ in $I(x_0)$ $\to$ $g'(x) = 2x+1 \neq 0$ in $I(0)$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\exists$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0} \frac{2\cos(2x)}{2x+1} = 2$ $\exists$ $\to$ Risultato del lim

ES: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{e^{1/x} - 1} = \left[\frac{0}{0}\right]$ Tentiamo l'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{e^{\frac{1}{x}} \cdot (-1) x^{-2}} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \frac{x^2}{1+x^2} \to \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1)} = 1 \longrightarrow -1$$

ATTENZIONE ! Battaglione

1) Usare il teorema quando NON si è in presenza di forma indeterminata del Tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to 0^+} = \frac{e^x}{1} \neq 1$$

$\uparrow \frac{d}{dx}(x)$

2) Usare il teorema quando il limite del rapporto delle derivate NON ESISTE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\cos x}{1} \to \nexists$$

$\longrightarrow$ Non possiamo dire che anche il limite di partenza non esiste!

$\downarrow$ Come risolvere?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$$

$\cancel{x} \to 1$, $\sin x \to$ limitata, $x \to +\infty$, $\frac{\sin x}{x} \to 0$

Applicazioni estese del problema

Es 1: $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = [0\cdot\infty]$ Non possiamo usare Hopital

→ Scriviamo il lim come rapporto: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{-\infty}{\ln x}}{\underset{+\infty}{\frac{1}{x}}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$ possiamo usare l'Hôpital

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{\cancel{x}}\cdot x^{\cancel{2}} = -x = 0$$

Forma generalizzata: I

Ogni volta che abbiamo un limite del Tipo:

$$\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$ Possiamo usare Hôpital

Es 2: $\lim_{x\to 0^+} x^x = [0^0]$ usiamo un "trucchetto": $e^{\ln(x^x)} = e^{\overset{0}{x}\,\overset{-\infty}{\ln(x)}}$ e è una funz. continua, quindi ci importa solo del suo esponente.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} \quad \text{ES 1} \quad \Rightarrow e^0 \to 1$$

Forma generalizzata II

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to c} e^{g(x)\cdot \ln|f(x)|}$$

possiamo poi risolvere con la forma generalizzata vista precedentemente.

Applicazione iterativa de l'Hôpital

ES 3: $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin(2x)}{x - \sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos(2x)}{1-\cos x} = \frac{2-2}{1-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$ Problema!

Soluzione: Applichiamo nuovamente Hôpital alla funzione derivata:

$$\lim_{x\to 0} = \frac{-2\sin x + 4\sin(2x)}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\overset{1}{\cancel{\cos}} x + 8\overset{1}{\cancel{\cos}}(2x)}{\underset{1}{\cos x}} = \frac{-2+8}{1} = 6$$

Verificare le condizioni

1) Non si può applicare ad una frazione del Tipo $\frac{\ell_1}{\ell_2}$, con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$
Verifichiamo ponendo $f(x)=x$, $g(x)=x-1$ e x_0 generico in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

ES 11.2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x} \to \frac{-\infty}{0^+}$ $\xrightarrow{\text{Hopital}}$ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \to +\infty$

il Teorema "funziona" solo con le forme indet del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Corretta risoluzione.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x} = -\frac{\infty}{0^+} = -\infty$$

2) L'ipotesi 2 garantisce che il rapporto $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ sia ben definito. Di conseguenza anche il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è ben definito. Questo è vero se $g \neq 0$ in $I(x_0)$

ES 11.3) $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

ES 11.5) a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^b} = \frac{\infty}{\infty}$ Uso Hopital $\to$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} \to 0}{b x^{b-1} \to +\infty} = \emptyset$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{1-1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] \xrightarrow{H.} \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(1+x)^{\cancel{\alpha-1}} \to \alpha}{1} = \alpha$

11.6 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^3}{x}$$

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}} \to +\infty}{x \to +\infty} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$ ($\sqrt{x} \to +\infty$)

$\xrightarrow{H} \lim_{x\to+\infty} \left[\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right) x - e^{\sqrt{x}}\right] \cdot \frac{1}{x^2} = [+\infty - \infty]\, 0$

($x \to +\infty$, $e^{\sqrt{x}} \to +\infty$, $\frac{1}{x^2} \to 0$, $e^{2} >> \sqrt{x}$, $\to +\infty$)

$\longrightarrow \frac{x e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} = \left[\frac{e^{\sqrt{x}} x - 2e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right] \cdot \frac{1}{x^2}$ Dovrei derivare ancora

Metodo lazy

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} \Rightarrow e^{2} >> x \longrightarrow \frac{+\infty}{n} \to +\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{[\log(x)]^3}{x}$ Lazy: $x >> \log(x) \to \emptyset$

Hopital $\to$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{3(\ln(x))^2 \to +\infty}{x \to +\infty}$ $\xrightarrow{\text{Hôp}}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{6\ln(x)}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\right) - \left(3\ln(x)^2\right)}{x^2} = \frac{6\ln(x) - 3\ln^2(x)}{x^2}$ ($\to +\infty$, $\to +\infty$, $x^2 \to +\infty$)

$\xrightarrow{\text{Hôp}} \frac{\left(\frac{6}{x} - \frac{3\ln x}{x}\right) 2x - \left(6\ln x - 3\ln^2 x\right) x^2}{x^4} = \frac{2(6 - 3\ln) - \ln x(6 - 3\ln x) x^2}{x^4}$ ($-\infty$, $-\infty$, $-\infty$, $x^2 \to +\infty$)

Boh

ES ESAME: $\lim_{x \to 0} \frac{(\arctan(e^{2x}-1))^2}{\cos(\sin x) - 1}$

$g(0) = \cos(0) - 1 = 0$, $\cos(\sin 0^{\pm}) - 1 \neq 0$

$D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$; $D(e^{2x}-1) = 2e^{2x}$

$D \arctan(e^{2x}-1) =$ Pongo $g = e^{2x}-1 \Rightarrow \frac{1}{1+g^2} \cdot 2e^{2x}$

$= \frac{1}{1-(e^{2x}-1)^2} \cdot 2e^{2x} = \frac{1}{1-e^{4x}+1-2e^{2x}} \cdot 2e^{2} = \frac{2e^{2x}}{1-e^{4x}+1-2e^{2x}}$

$= \frac{2e^{2x}}{-2e^{2x}-e^{4x}+2} = z(x)$

$\lim_{x \to 0}$ ______

$\Rightarrow D(z^2) = 2z \Rightarrow \frac{4e^{2x}}{-2e^{2x}-e^{4x}+2}$