## Teorema di Weierstrass

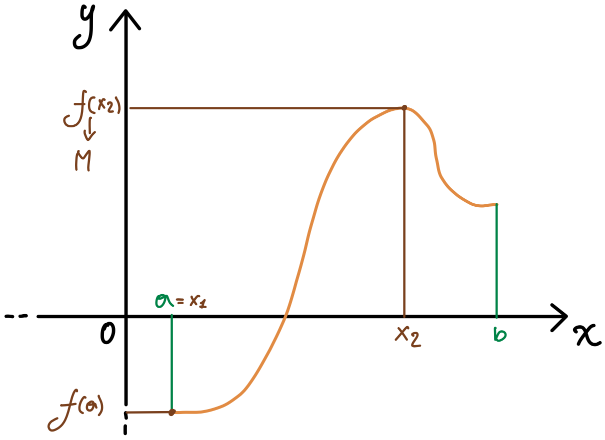
Molto importante

Esistono

Se abbiamo una funzione $f$ continua in $[a,b]$ (ovv. chiuso e limitato) allora $f$ assume massimo e minimo assoluti, ovvero:

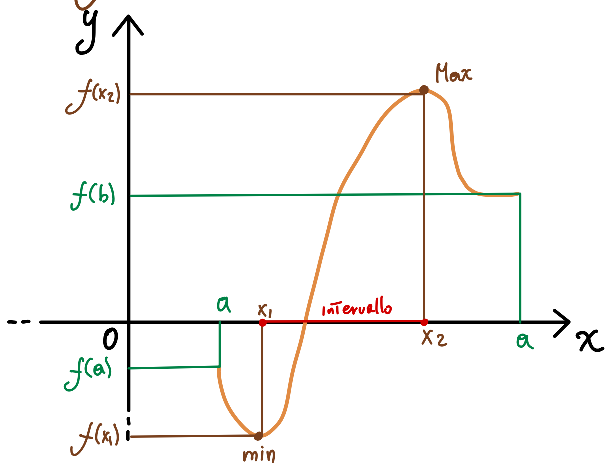
$$\boxed{\exists\, x_1, x_2 \in [a,b] \;/\; \underset{\text{minimo}}{f(x_1)} \leq f(x) \leq \underset{\text{massimo}}{f(x_2)}} \qquad \forall x \in [a,b]$$

Ovvero c'è sempre un valore più piccolo di $f(x)$ ed uno più grande di $f(x)$ in $[a,b]$.




## II° Teorema dei valori intermedi

Una $f$ continua in $[a,b]$ assume tutti i valori compresi tra il min e max assoluto




* Questo teorema è diverso dal I° perché il I° diceva che $f$ assume tutti i valori tra $a$ e $b$.

Dim: Hp. ci dice che $f$ è continua in $[a,b]$ per il teorema di prima $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in [a,b] \;/\; f(x_1) = \min = m$ e $f(x_2) = \text{Max} = M$.

Tesi: $\forall \bar{y} \in [m, M]$, $\exists\, \bar{x} \in [a,b] \;/\; f(\bar{x}) = \bar{y}$

ovvero ogni volta che fisso un $\underset{\in[m,M]}{\bar{y}}$, questo dovrà provenire da un certo $\bar{x} \in [a,b]$.

Consideriamo la funzione ausiliare (ovvero che serve solo per la dimostrazione) $\underline{g(x) = f(x) - \bar{y}}$

osserviamo che:

1) $g$ è continua in $[a,b]$ perché $f$ lo è.

2) $g(x_1) = \underbrace{f(x_1)}_{m} - \bar{y} \Rightarrow g(x_1) = m - \bar{y}$ siccome $m < \bar{y} \Rightarrow \boxed{g(x_1) = m - \bar{y} < 0}$

$g(x_2) = \underbrace{f(x_2)}_{M} - \bar{y} \Rightarrow g(x_2) = M - \bar{y}$ siccome $M > \bar{y} \Rightarrow \boxed{g(x_2) = M - \bar{y} > 0}$

Allora siamo nelle Hp del Teorema degli zeri, nell'intervallo $[x_1, x_2]$; visto che gli estremi hanno segno opposto. Quindi $\exists$ almeno uno zero della funz. nell'int $[x_1, x_2]$

$\Rightarrow \exists\, \underset{\text{zero}}{\bar{x}} \in [x_1, x_2] \in [a,b] \;/\; g(\bar{x}) = 0 = f(\bar{x}) - \bar{y} \Rightarrow f(\bar{x}) = \bar{y}$ C.V.D.

## Criterio di Invertibilità

Se $f$ è continua e monotona in $[a,b]$ allora $f$ è invertibile in $[a,b]$.

Dim 00:25

## Teorema di continuità delle funzioni inverse

Supponiamo che $f$ sia monotona in un certo $[a,b]$ $\Rightarrow$ Se $f$ è continua in $[a,b]$ allora anche $f^{-1}$ lo sarà.