Lezione 21

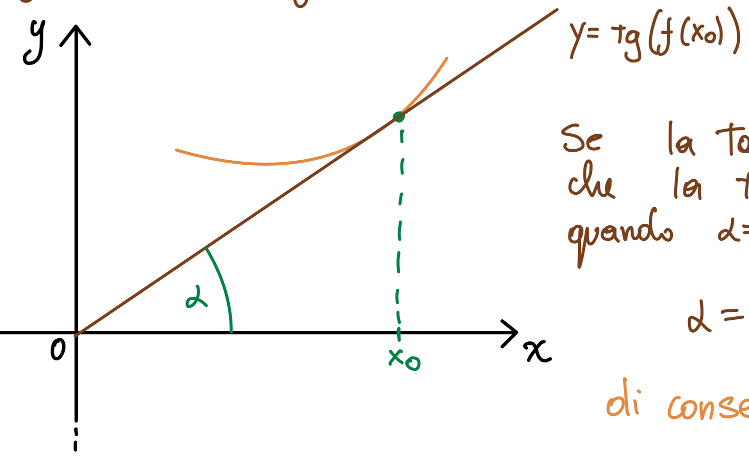
Punti a tenerne verticale

Punti a tangente verticale

Definizione Si dice che f ha in x_0 un pt a tg verticale se in x_0 il limite del rapp incrementale è $\pm\infty$, ovvero:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \begin{matrix} +\infty \\ \text{oppure} \\ -\infty \end{matrix}} \quad \text{Quindi} \quad \boxed{\frac{d}{dx} f(x) = \pm\infty}$$

Osservazione Se $f'(x_0) = +\infty$, poichè $f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha$ dove α è l'angolo formato dalla tg alla curva rispetto all'asse x.



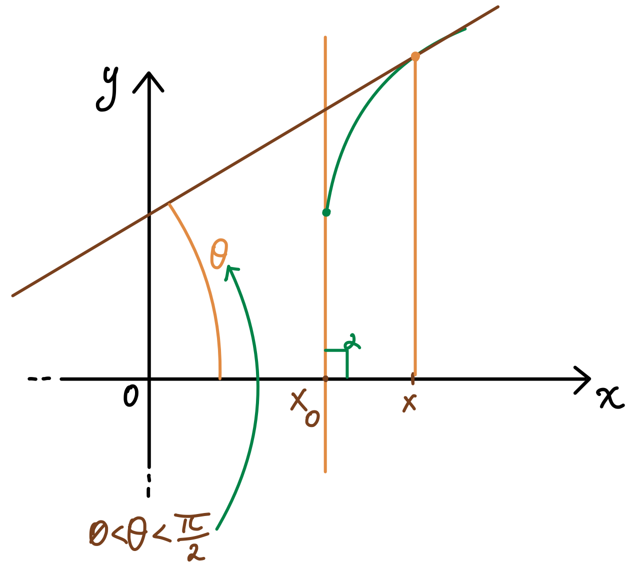
Se la tangente, quindi la derivata è zero, vuol dire che la tg è parallela ad x; questo accade quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

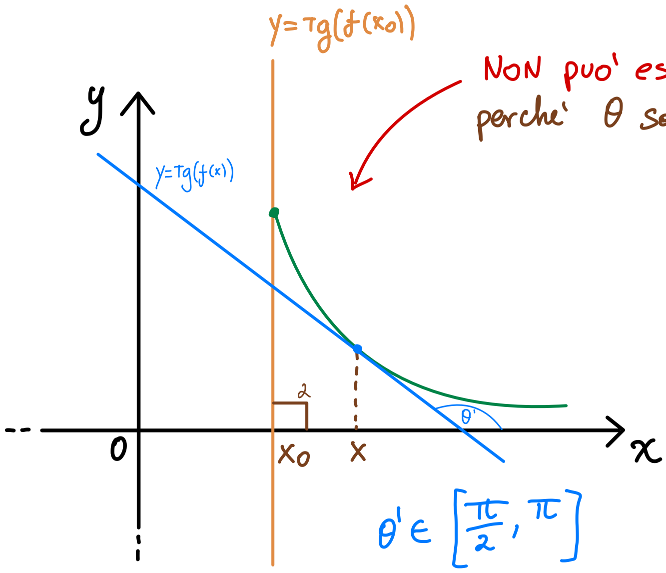
$$\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \text{la tg } (f(x)) \text{ è parallela a } y$$

di conseguenza la tg avrà eq: $x = x_0$.

In questo punto non sappiamo come si comporta la funzione, ma sappiamo che è un punto di non derivabilità; infatti, per essere derivabile in x_0, $f(x)$ deve avere il $\lim_{h\to 0}$ Rapp incr esistente e FINITO.

Se $\frac{d}{dx} f(x_0) = +\infty \iff \begin{cases} f'_+(x_0) = +\infty \\ f'_-(x_0) = +\infty \end{cases}$ → se considero un punto $x > x_0$ (a dx di x_0) si ha che $f'(x)$ è positiva $\iff$ l'angolo formato dalla tg in x alla curva forma angolo compreso tra 0 e $\pi/2$.

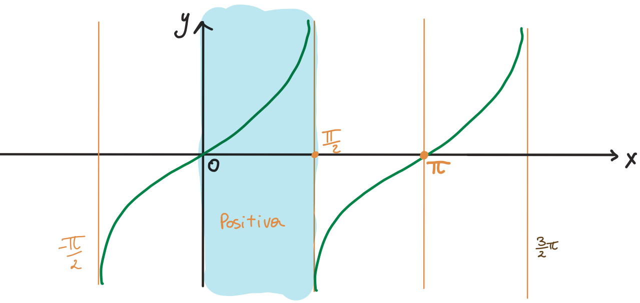


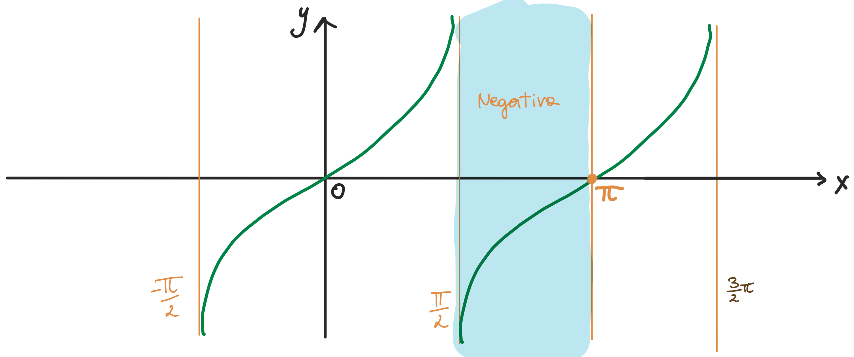


NON può essere così perchè θ sarebbe neg

Caso in cui $f'(x) < 0$

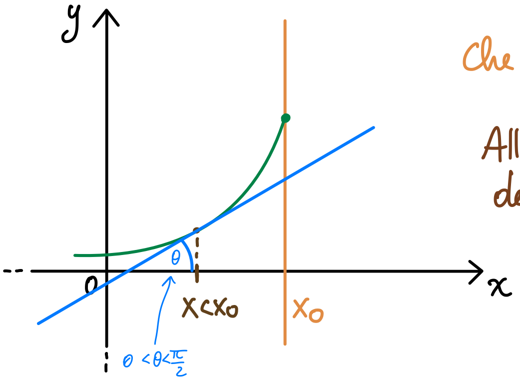
Se in x la deriv < 0, significa che $x > \frac{\pi}{2}$





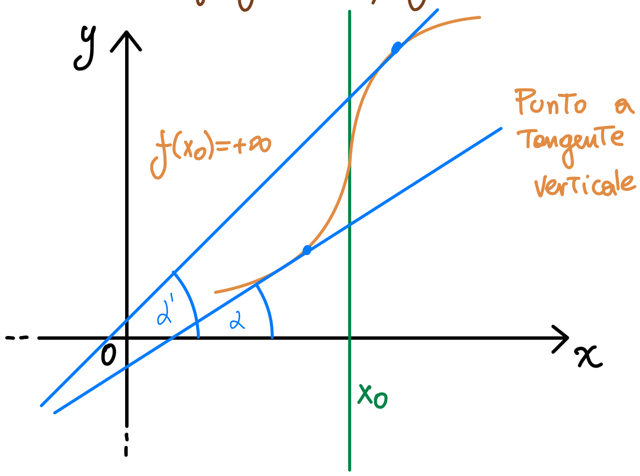
Inoltre $f'(x_0) = +\infty \Leftrightarrow tg(\alpha) = +\infty \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

Se considero $x < x_0$ si ha che $f'(x) > 0 \Leftrightarrow tg(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$



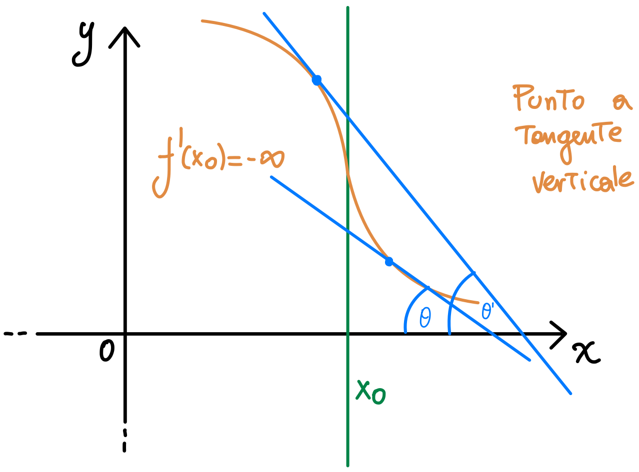
Che vuol dire? Anche da Sx la tg deve essere $0 < tg < \frac{\pi}{2}$

Allora se $f'(x_0) = +\infty$ il grafico di $y = f(x)$ vicino a x_0, sarà del tipo:



α e $\alpha' < \frac{\pi}{2}$

Se $f'(x_0) = -\infty$, il comportamento di f vicino a x_0 sarà del tipo:



θ e $\theta > \frac{\pi}{2}$

ES: $y = \sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 0$

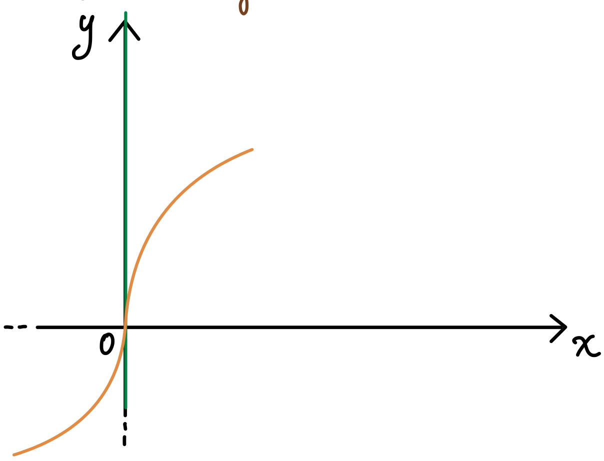
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Dove Non è def la $f'(x)$? $D = \forall x \in \mathbb{R} - \{x = 0\}$

Calcoliamo il lim in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Punto a tangente Verticale



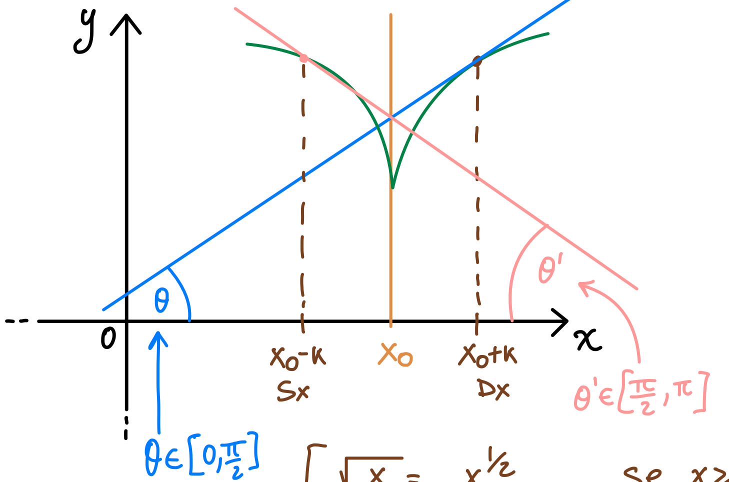
Il punto della funzione $y = \sqrt[3]{x}$ in corrispondenza di $x = 0$ è $O(0,0)$

🚩 00:31

Cuspidi

f ha in x_0 una cuspide se $f'_+(x_0) = \pm\infty$ e $f'_-(x_0) = \mp\infty$ ← Segno opposto

Ad esempio, se $f'_+(x_0)=+\infty$ e $f'_-(x_0)=-\infty \Rightarrow$ l'angolo formato dalla tangente (verticale) in un punto a Dx di x_0 è tale che $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$; in questo caso a Sx l'angolo θ della tg in un pto a Sx di x_0 e tale che $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$:

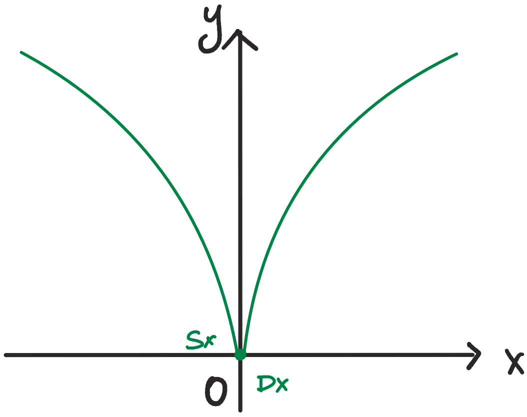


❗ Le cuspidi sono molto frequenti quando abbiamo i valori assoluti o radici.

ES: $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} = x^{1/2} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} = -x^{1/2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$f'(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$ A Dx

$f'(-x^{1/2}) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}$ A Sx $\lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty$



Come disegnamo il grafico?

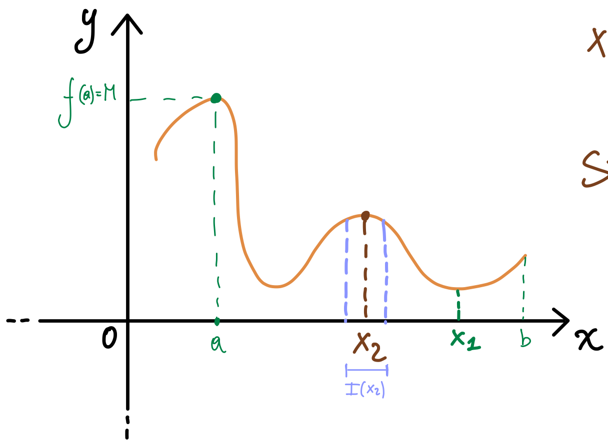
1) Calcoliamo l'ordinata nel punto 0:

Se $x=0$, quanto vale $f(0)$? $\Rightarrow f(0) = \sqrt{|0|} = 0$ $\quad P=(0,0)$

🚩 00:50

EStremi Relativi   Max e min RelaTivi

f e' definita in un Intervallo I
X_0 e' un pTo di massimo assoluto $\iff f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I$



$X = a$ e' un punto di Max Assoluto perche' $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in [a,b] \ (I)$

Stessa cosa per il minimo assoluto. $f(x) \geq f(x_1) \quad \forall x \in [a,b]$

Possiamo avere un Massimo/min Relativo, se in X_0 abbiamo un punto di Max/min relativo al suo inTorno. Ad esempio, in $x = x_2$ abbiamo un Max relativo.

Def Si dice che X_0 e' un pTo di Max/min relativo per $f \iff \exists \ I(x_0) \ / \ f(x) \underset{\geq}{\leq} (x_0), \forall x \in I(x_0)$

Osservazione I Max e min Assoluti sono da ricercare tra i punti di max o min relativo, ed agli estremi dell'intervallo, che non possono essere estremi relativi.

Quindi non possiamo avere Max/min relativi agli esTremi perchè dobbiamo avere un INTORNO, e non solo Dx o Sx.