Paolo Marcellini Carlo Sbordone

Esercitazioni di Analisi Matematica Due

Prima parte

Copertina:
– *Progetto grafico*: Miguel Sal & C., Bologna
– *Immagine di copertina*: elaborazione grafica di Francesca Ponti

Prima edizione Zanichelli: novembre 2017

Ristampa

5 4 3 2 1 2018 2019 2020 2021 2022

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi.
L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.
Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro l'indirizzo a cui rivolgersi è:

Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34
40126 Bologna
fax 051293322
e-mail: linea_universitaria@zanichelli.it
sito web: www.zanichelli.it

Prima di effettuare una segnalazione è possibile verificare se questa sia già stata inviata in precedenza, identificando il libro interessato all'interno del nostro catalogo on line (www.zanichelli.it/f_catalog.html) e selezionando il link ERRATA CORRIGE, dove sono disponibili le eventuali correzioni in formato PDF.

Per comunicazioni di tipo commerciale: universita@zanichelli.it

Stampa: Grafica Ragno
Via Lombardia 25, 40064 Tolara di Sotto, Ozzano Emilia (Bologna)
per conto di Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

Paolo Marcellini   Carlo Sbordone

Esercitazioni di Analisi Matematica Due

Prima parte

ZANICHELLI

Indice

Capitolo 1

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

1A. Successioni di funzioni: convergenza puntuale ed uniforme

Sia (f_n) una successione di funzioni reali definite nell'intervallo I di $\mathbb{R}$.

Si dice che (f_n) *converge puntualmente* in I verso la funzione $f : I \to \mathbb{R}$, se risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)\,, \qquad \forall\, x \in I\,,$$

cioè se: $\forall\, \varepsilon > 0$ e $\forall\, x \in I$, esiste $\nu_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che per $n > \nu_{\varepsilon,x}$ si ha $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

In generale, il numero $\nu_{\varepsilon,x}$ dipende anche da x; se invece, $\forall \varepsilon > 0$, tale numero è indipendente da x, si parla di convergenza uniforme.

Precisamente, si dice che (f_n) *converge uniformemente* in I verso f, se $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n > \nu_\varepsilon$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in I.$$

Dunque, la convergenza uniforme implica quella puntuale.

Se le funzioni f_n, f sono limitate in I, allora (f_n) converge uniformemente verso f in I se e solo se, posto $M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \,:\, x \in I\}$, risulta $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$.

La successione (f_n) si dice *equilimitata* in I, se esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|f_n(x)| \le M \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad \forall\, x \in I\,;$$

si dice *equicontinua* in I, se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|x-y|<\delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon\,, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Sussistono i seguenti notevoli teoremi.

TEOREMA 1 (di Ascoli - Arzelà). *Se (f_n) è una successione di funzioni equilimitate ed equicontinue nell'intervallo chiuso e limitato $I=[a,b]$, allora essa ammette un'estratta convergente uniformemente in I.*

TEOREMA 2 (Condizione di Cauchy uniforme). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la successione (f_n) converga uniformemente verso una funzione definita in I è che: $\forall\varepsilon>0$ esista ν_ε tale che $\forall\, p,q>\nu_\varepsilon$ sia $|f_p(x)-f_q(x)|<\varepsilon$, $\forall\, x\in I$.*

TEOREMA 3 (Continuità del limite uniforme di funzioni continue). *Se (f_n) converge uniformemente verso f e tutte le f_n sono continue, allora anche f lo è.*

TEOREMA 4 (Passaggio al limite sotto il segno di integrale). *Sia (f_n) una successione di funzioni continue in $I=[a,b]$ ed ivi convergente uniformemente verso f. Allora si ha*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

TEOREMA 5 (Passaggio al limite sotto il segno di derivata). *Sia (f_n) una successione di funzioni derivabili in $I=(a,b)$ ed ivi convergente puntualmente verso f. Se la successione (f_n') converge uniformemente in I, allora f è derivabile in I e si ha:*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)=f'(x) \qquad\qquad \forall\, x\in I\,.$$

1.1 Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x)$ definita nell'intervallo $[-1,1]$ da

$$f_n(x)=x^n\,, \qquad\qquad n\in\mathbb{N}\,,\quad x\in[-1,1]\,.$$

Stabilire per quali $x\in[-1,1]$ la successione converge puntualmente e calcolare il limite. Determinare inoltre gli intervalli $I\subset[a,b]$ su cui $f_n(x)$ converge uniformemente.

[La successione $f_n(x)=x^n$, per $n\to+\infty$ converge a $f(x)=0$ per ogni $x\in(-1,1)$. Inoltre, per $x=1$, $f_n(1)=1$ è una successione costante che evidentemente ha limite uguale ad 1. Infine, se $x=-1$ risulta $f_n(x)=(-1)^n$, che è una successione che non ammette limite. Pertanto, per $n\to+\infty$, la successione $f_n(x)$ converge puntualmente per ogni $x\in(-1,1]$ e il limite è la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \in (-1,1) \\ 1, & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

La convergenza non è uniforme su tutto l'intervallo $I = (-1,1]$, perchè se lo fosse anche $f(x)$ dovrebbe essere una funzione continua in $(-1,1]$ come le $f_n(x)$ per ogni n. La convergenza di $f_n(x)$ ad $f(x)$ non è uniforme neanche nell'intervallo aperto $(-1,1)$, infatti

$$\begin{aligned} &\sup\{|f_n(x) - f(x)| \,:\, x \in (-1,1)\} = \sup\{|f_n(x)| \,:\, x \in (-1,1)\} = \\ &= \sup\{|x^n| \,:\, x \in (-1,1)\} = 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

e tale quantità non converge a zero per $n \to +\infty$.

Invece la convergenza è uniforme in ogni intervallo I della forma $I = (a,b)$, oppure $I = [a,b]$ (od anche chiuso o aperto solo a destra o sinistra) con $-1 < a < b < 1$. Infatti in tal caso risulta

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \,:\, x \in I\} = \sup\{|x^n| \,:\, x \in I\} = \max\{|a|^n,\ |b|^n\}$$

e tale quantità converge a zero per $n \to +\infty$ dato che $|a|$ e $|b|$ sono minori di 1]

1.2 Sia $f_n(x)$ la successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$. Stabilire per quali $x \in (0,+\infty)$ la successione converge puntualmente per $n \to +\infty$. Determinare inoltre almeno un intervallo dove la successione converge uniformemente.

[Risulta

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{per} \quad x > 1 \\ 1, & \text{per} \quad x = 1 \\ +\infty, & \text{per} \quad x \in (0,1) \end{cases} .$$

Pertanto la successione $f_n(x)$ converge puntualmente nell'intervallo $[1,+\infty)$ alla funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{per} \quad x > 1 \\ 1, & \text{per} \quad x = 1 \end{cases} .$$

La convergenza non è uniforme nell'intervallo $[1,+\infty)$, perchè se lo fosse la funzione $f(x)$ dovrebbe essere continua in tutto l'intervallo (e non lo è nel punto $x_0 = 1$), dato che tutte le funzioni $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, sono continue. Invece nell'intervallo $I = (a,+\infty)$, oppure se $I = [a,+\infty)$, con $a > 1$, la convergenza di $f_n(x)$ ad $f(x)$ è uniforme. Infatti

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \,:\, x \in I\} = \sup\{|f_n(x)| \,:\, x \in I\} = \sup\{\frac{1}{x^n} \,:\, x \in I\} = \frac{1}{a^n}$$

e tale estremo superiore $1/a^n$ converge a zero per $n \to +\infty$]

1.3 Siano α, β due numeri reali e sia (f_n) la successione definita in $(0,1)$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in (0, 1/n] \\ \\ \beta & \text{se } x \in (1/n, 1)\,. \end{cases}$$

Determinare il limite puntuale di (f_n) e stabilire sotto quali condizioni la convergenza è anche uniforme.

[Il limite puntuale è la funzione identicamente uguale a β. Inoltre, essendo

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x)-\beta| = |\alpha-\beta|$$

si ha convergenza uniforme se e solo se è $\alpha=\beta$]

1.4 Studiare la convergenza delle successioni di funzioni (f_n), (g_n) definite per $x \in \mathbb{R}$ da

$$f_n(x) = \operatorname{sen} nx \quad , \quad g_n(x) = \cos nx.$$

[Si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ solo per $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ e $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 1$ solo per $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ (si veda il paragrafo 12D del vol. I, parte prima)]

1.5 Verificare che la successione (f_n) definita da $f_n(x) = x^n$ per $x \in (-1,1)$ converge verso la funzione $f(x) = 0$ puntualmente, ma non uniformemente.

[Si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = 0$, $\forall x \in (-1,1)$.
Essendo poi

$$\sup_{x\in(-1,1)} |x^n - 0| = \sup_{x\in(-1,1)} |x^n| = 1,$$

la successione non converge uniformemente]

1.6 Verificare che la successione (f_n) definita da $f_n(x) = x^n$ per $x \in (-1,1)$ converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $(-a,a)$ con $0 < a < 1$.

[Si ha $\sup\{|x^n - 0| : x \in (-a,a)\} = a^n$. Essendo $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$, si ha l'asserto. Si vedano i dettagli nell'esercizio 1.1]

1.7 Studiare la convergenza della successione di funzioni $f_n(x) = x^{-n}$ negli intervalli

(a) $I = (1,+\infty)$ (b) $J = (2,+\infty)$

[Si vedano i dettagli anche nell'esercizio 1.2. La successione (f_n) converge puntualmente verso zero per $x \geq 1$. (a) Essendo $M_n = \sup\{x^{-n} : x \in I\} = 1$, la successione (M_n) non converge a zero e dunque (f_n) non converge uniformemente in I. (b) Essendo $M_n' = \sup\{x^{-n} : x \in J\} = 2^{-n}$ si ha $\lim_{n\to+\infty} M_n' = 0$ e perciò la successione (f_n) converge uniformemente a zero in J]

1.8 Il teorema 4 stabilisce che la convergenza uniforme è una condizione sufficiente per passare al limite sotto il segno di integrale. Non è però condizione necessaria. Per mostrare ciò si consideri la successione di funzioni (un altro esempio è proposto nell'esercizio 1.27):

$$f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

e si verifichi che
(a) $f_n(x)$ converge a $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
(b) (f_n) non converge uniformemente in $[0,1]$.
(c) L'integrale definito di $f_n(x)$ nell'intervallo $[0,1]$ converge a zero.
(d) Si determinino tutti e soli i numeri reali a, b $(a < b)$ con la proprietà che (f_n) converga uniformemente in $[a,b]$.

[(b) Consideriamo $M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \max\{f_n(x) : x \in [0,1]\}$. Fissato n, il massimo assoluto di $f_n(x)$ nell'intervallo $[0,1]$ si determina scegliendo il valore più grande tra $f_n(0)$, $f_n(1)$ e $f_n(x)$ per x tale che $f_n'(x) = 0$. La derivata prima vale

$$f_n'(x) = ne^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2)$$

e si annulla in $[0,1]$ per $x = \sqrt{1/(2n^2)}$. Essendo $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = ne^{-n^2} \to 0$, per n sufficientemente grande risulta

$$M_n = f_n\left(\sqrt{\frac{1}{2n^2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2e}.$$

La successione (M_n) è definitivamente costante (> 0) e non converge a zero. Perciò (f_n) non converge uniformemente in $[0,1]$.
(c) Per $n \to +\infty$ l'integrale definito di $f_n(x)$ in $[0,1]$ converge a zero (e zero è il valore dell'integrale definito di $f(x)$ in $[0,1]$); infatti:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 xe^{-n^2x^2}\,dx = n\left[\frac{-1}{2n^2}e^{-n^2x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2n}(1 - e^{-n^2}) \to 0.$$

(d) La successione converge uniformemente in $[a,b]$ se a, b hanno lo stesso segno, mentre non converge uniformemente se a, b hanno segni discordi o se uno di essi è nullo. Infatti, ad esempio se $0 < a < b$, definitivamente si ha $\sqrt{1/(2n^2)} < a$ e quindi

$$M_n = \max\{f_n(x) : x \in [a,b]\} = f_n(a) \to 0]$$

1.9 Sia (f_n) una successione di funzioni continue nell'intervallo I di $\mathbb{R}$, convergente uniformemente in I verso f. Verificare che, se x_n, $x \in I$ e $x_n \to x$, allora si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

[Sia $\varepsilon > 0$ e sia ν_ε tale che $\forall n > \nu_\varepsilon$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$, $\forall\, x \in I$. Allora per $n > \nu_\varepsilon$ si ha

$$|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon/2 + |f(x_n) - f(x)|.$$

Poichè f è continua e $x_n \to x \in I$, si ha anche $f(x_n) \to f(x)$, per cui $\exists\, \nu'_\varepsilon > \nu_\varepsilon$ tale che $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon/2$, $\forall\, n > \nu'_\varepsilon$. Ne segue facilmente l'asserto]

1.10 Sia α un parametro reale e sia (f_n) la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-n^2x^2}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(a) Verificare che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ converge a $f(x) = 0$ puntualmente su $\mathbb{R}$.
(b) Utilizzando la proprietà enunciata nell'esercizio precedente con $x_n = 1/n$, verificare che (f_n) non converge uniformemente su $\mathbb{R}$ se $\alpha \geq 1$.
(c) Verificare che (f_n) converge uniformemenre su $\mathbb{R}$ se $\alpha < 1$.
(d) Mostrare che, se $\alpha < 0$, la successione delle derivate (f'_n) converge a zero uniformemente su $\mathbb{R}$.
(e) Verificare che, per $\alpha = 0$, la successione (f'_n) converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ ad una funzione $g(x) \neq f'(x)$ (questo esempio mostra che il teorema 4, di passaggio al limite sotto il segno di derivata, non vale in generale supponendo che la successione delle derivate (f'_n) converga soltanto puntualmente, invece che uniformemente).

[(b) Essendo $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in base alla proprietà enunciata nell'esercizio 1.9, se (f_n) convergesse a $f(x)$ uniformemente su $\mathbb{R}$, dovrebbe risultare

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x) = 0,$$

per ogni successione (x_n) convergente ad x. Invece, se $\alpha \geq 1$, posto $x_n = 1/n$ si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}e^{-1} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha > 1 \\ e^{-1} & \text{se} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

(c) Come nell'esercizio 1.8 (b), si verifica che

$$M_n = \max\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \frac{\sqrt{2}n^{\alpha-1}}{2e}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se ne deduce che (f_n) converge uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha < 1$.
(d) La successione delle derivate vale $f'_n(x) = n^\alpha e^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2)$ e, se $\alpha < 0$, converge a zero per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre si verifica che il massimo assoluto di $|f'_n(x)|$ su $\mathbb{R}$ è raggiunto per $x = 0$ ($|f'_n(x)|$ presenta massimi relativi anche se $x^2 = 3/(2n^2)$) ed il valore di massimo vale

$$\max\{|f'_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \max\{\, |f'_n(0)|;\ |f'_n(\sqrt{3/(2n^2)})|\,\} = n^\alpha \max\{1; \frac{2}{e^{3/2}}\} = n^\alpha;$$

se $\alpha < 0$ tale valore converge a zero per $n \to +\infty$.
(e) Se $\alpha = 0$ la successione $f'_n(x) = e^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2)$ converge a

$$\lim_{n\to+\infty} f'_n(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Essendo $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta $f'(x) = 0 \neq g(x)$ nel punto $x = 0$]

1.11 Studiare la convergenza in $I = [0, 1]$ delle successioni di funzioni

(a) $f_n(x) = x/(1 + nx)$ (b) $g_n(x) = nx/(1 + nx)$

[(a) Si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in I$. La convergenza è uniforme; infatti, fissato $\varepsilon > 0$ per $n > \nu = 1/\varepsilon$ si ha $f_n(0) = 0 < \varepsilon$ e, per $x \in (0, 1]$ risulta $0 \leq f_n(x) = 1/[(1/x)+n] < 1/n < \varepsilon$.
(b) Posto $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$, si ha $g(0) = 0$ e $g(x) = 1$ per ogni $x \in (0, 1]$. Poichè le g_n sono continue e g è discontinua, la convergenza non è uniforme, grazie al teorema 3. Il grafico della funzione g_n è rappresentato in fig. 1.1 per $n = 1, 2, 10, 30$]

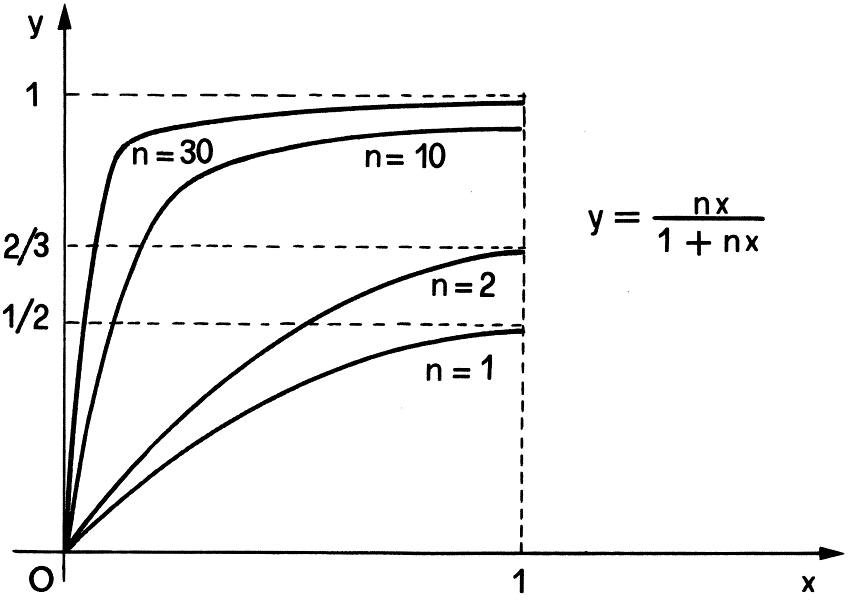

figura 1.1

1.12 Studiare la convergenza in $(0, 1)$ delle successioni di funzioni

(a) $f_n(x) = 1/(1 + nx)$ (b) $g_n(x) = 1/(n + x)$

[Le due successioni convergono puntualmente verso la funzione identicamente nulla, ma la convergenza non è uniforme, perché le f_n e le g_n non sono funzioni equilimitate in $(0, 1)$]

1.13 Studiare la convergenza in $I = [-1, 1]$ delle successioni di funzioni

(a) $f_n(x) = x/(1 + n^2x^2)$ (b) $g_n(x) = nx/(1 + n^2x^2)$

[(a) Si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Essendo $f_n(x) = (1/n)nx/[1+(nx)^2]$, la convergenza è uniforme in quanto $t/(1+t^2) \le 1/2$ per ogni $t \ge 0$.
(b) Si ha $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Essendo $g_n(1/n) = 1/2$ ($x = 1/n$ è punto di massimo per g_n), la convergenza non è uniforme, grazie all'esercizio 1.9. Il grafico di g_n è rappresentato in figura 1.2 per $n = 1, 2, 10$]

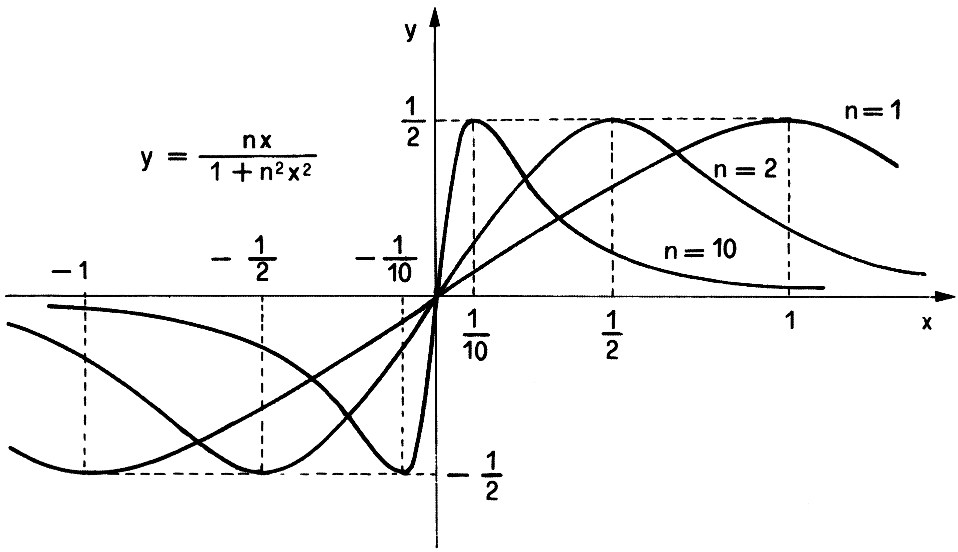

figura 1.2

1.14 Studiare la convergenza in $I = (0, 1]$ della successione di funzioni $f_n(x) = n^2/(1+n^2x^2)$.

[Si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1/x^2 = f(x)$ per ogni $x \in I$. Essendo $|f_n(x) - f(x)| = 1/x^2(1+nx^2)$, la convergenza non è uniforme, perchè nessuna delle fuzioni $f_n - f$ è limitata in I]

1.15 Studiare la convergenza in $I = [0, 1]$ della successione di funzioni $f_n(x) = n^2x^2/(1+n^2x^2)$.

[Si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ per ogni $x \in I$. Essendo $f_n(1/n) = 1/2$, la convergenza non è uniforme, grazie all'esercizio 1.9]

1.16 Stabilire se la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^2x^2}$$

converge uniformemente nell'intervallo $I = [1, +\infty)$.

[Il limite puntuale, per $n \to +\infty$, di $f_n(x)$ nell'intervallo $I = [1, +\infty)$ è la funzione $f(x) = 1/x$. Occorre calcolare

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \, : \, x \in [1, +\infty)\}.$$

Si ottiene

$$f_n(x) - f(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2} - \frac{1}{x} = \frac{n^2 x^2 - 1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)x} = \frac{-1}{(1 + n^2 x^2)x},$$

da cui, essendo $x \geq 1$ in I, il denominatore assume minimo per $x = 1$ e quindi

$$\sup_{x \geq 1}\{|f_n(x) - f(x)|\} = \frac{1}{1 + n^2}$$

e tale quantità converge a zero per $n \to +\infty$. La successione $f_n(x)$ converge quindi uniformemente ad $f(x) = 1/x$ nell'intervallo $I = [1, +\infty)$]

1.17 Stabilire, per quali valori del parametro reale $\alpha < 2$, la successione

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1 + n^2 x^2}$$

converge uniformemente nell'intervallo $I = [-1, 1]$.

[Il limite puntuale, per $n \to +\infty$, della successione di funzioni $f_n(x)$ è la funzione $f(x)$ identicamente uguale a zero su tutto $\mathbb{R}$. Ai fini della convergenza uniforme, occorre valutare la quantità

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in [-1, 1]\}.$$

La derivata di $f_n(x)$ vale

$$f_n'(x) = \frac{n^\alpha}{(1 + n^2 x^2)^2}[1 + n^2 x^2 - x(2n^2 x)] = \frac{n^\alpha}{(1 + n^2 x^2)^2}[1 - n^2 x^2]$$

e si annulla per $x = 1/n^2$, cioè nei punti $x_n = 1/n$ e $-x_n = -1/n$. Tali punti fanno parte dell'intervallo $[-1, 1]$. In corrispondenza $f_n(x)$ assume massimo e minimo assoluti in $[-1, 1]$ (ed anche in $\mathbb{R}$) ed i valori di massimo e minimo valgono

$$f_n(\pm x_n) = \pm n^\alpha \frac{1/n}{1 + 1} = \pm n^{\alpha - 1}.$$

Risulta quindi che l'estremo superiore di $|f_n(x)|$ nell'intervallo $[-1, 1]$ (ed anche in $\mathbb{R}$) è un massimo che vale

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in [-1, 1]\} = |f_n(x_n)| = n^{\alpha - 1},$$

che converge a zero solo se $\alpha < 1$. Pertanto la successione di funzioni $f_n(x)$ converge a $f(x) = 0$ uniformemente in $[-1, 1]$ se $\alpha < 1$, mentre converge sempre a $f(x) = 0$ soltanto puntualmente in $[-1, 1]$ se $\alpha \in (1, 2)$. La stessa conclusione si ottiene per $I = \mathbb{R}$]

1.18 Sia (f_n) una successione di funzioni derivabili in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ con derivata continua. Dimostrare che:

(a) Se (f_n) converge per qualche $x_0 \in [a,b]$ e se la successione delle derivate (f'_n) converge uniformemente in $[a,b]$, allora anche (f_n) converge uniformemente in $[a,b]$.

(b) Se (f_n) converge puntualmente e se esiste una costante M tale che $|f'_n(x)| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in [a,b]$, allora (f_n) converge uniformemente in $[a,b]$.

[(a) In base alla formula fondamentale del calcolo integrale possiamo scrivere

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt\,, \qquad \forall x \in [a,b], \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Indichiamo con $g(x)$ il limite per $n \to +\infty$ di f'_n e con l il limite della successione di numeri reali $f_n(x_0)$. Definiamo poi

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\,, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Con lo scopo di provare che (f_n) converge ad f uniformemente in $[a,b]$, consideriamo:

$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - l| + \int_a^b |f'_n(t) - g(t)|\,dt \leq |f_n(x_0) - l| + (b-a)\max\{|f'_n(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$.

Si giunge facilmente alla conclusione utilizzando le ipotesi di convergenza fatte su $f_n(x_0)$ e $f'_n(x)$.

(b) Basta dimostrare che vale la condizione di Cauchy uniforme (teorema 2). Per ipotesi e per il teorema di Lagrange si ha, $\forall n$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x-y|, \qquad \forall x, y \in [a,b].$$

Sia $\varepsilon > 0$ e sia $\delta = \varepsilon/3M$. Sia $\{I_1, \ldots, I_r\}$ una partizione di $[a,b]$ costituita da intervalli di ampiezza minore di δ e siano $y_i \in I_i$. Per ogni p, $q \in \mathbb{N}$ e per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$ si ha, per $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}|f_p(x) - f_q(x)| &\leq |f_p(x) - f_p(y_i)| + |f_p(y_i) - f_q(y_i)| + |f_q(y_i) - f_q(x)| \leq \\ &\leq M|x - y_i| + |f_p(y_i) - f_q(y_i)| + M|x - y_i|\end{aligned}$$

Sia ν tale che $\forall\, p$, $q > \nu$ e $\forall\, i \in \{1, \ldots, r\}$ risulti

$$|f_p(y_i) - f_q(y_i)| < \varepsilon/3\,.$$

Allora, poichè $\forall\, x \in [a,b]$, $\exists\, i \in \{1, \ldots, r\}$ tale che $|x - y_i| < \delta = \varepsilon/3M$, si ha

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon\,, \qquad \forall p, q > \nu \quad \text{e} \quad \forall x \in [a,b]\,]$$

1.19 Verificare che la successione (f_n) definita da

$$(f_n) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \qquad \forall\, x \in [0, 2\pi]$$

converge uniformemente verso la funzione identicamente nulla.

[La successione (f_n) converge puntualmente verso zero. Essendo $|f_n'(x)| = |\cos nx| \leq 1$, basta invocare il risultato dell'esercizio precedente. Si conclude anche osservando che $|f_n(x)| \leq 1/n$]

1.20 Dimostrare che, se (g_n) è una successione di funzioni continue ed equilimitate in $[a, b]$, allora la successione (f_n) definita da

$$f_n(x) = \int_a^x g_n(t)\, dt$$

ha un'estratta convergente uniformemente.

[Sia $M > 0$ tale che $|g_n(t)| \leq M$ per ogni n e per ogni t. Essendo $f_n'(x) = g_n(x)$, si ha $|f_n'(x)| \leq M$ e

$$|f_n(x)| \leq \int_a^x |g_n(t)|\, dt \leq \int_a^x M\, dt \leq M(b-a)$$

per ogni n e per ogni x. Dal teorema di Ascoli-Arzelà segue la tesi]

1.21 Si dimostri il seguente *teorema del Dini*. Sia (f_n) una successione di funzioni continue convergente puntualmente verso una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se (f_n) è monotòna rispetto ad n, allora converge uniformemente in $[a, b]$.

[Pur di cambiare f_n con $-f_n$, possiamo limitarci a considerare il caso in cui $f_n(x)$ è decrescente rispetto ad n. Indichiamo con $f(x)$ il limite puntuale di (f_n). Posto $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, si ha $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ e (g_n) converge a zero puntualmente. Dimostriamo che g_n converge uniformemente. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $x \in [a, b]$ esiste $\nu_x \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq g_{\nu_x}(x) < \varepsilon/2$. Grazie alla continuità delle funzioni g_n e per la decrescenza della successione (g_n) esiste un'aperto A_x contenente x tale che $0 \leq g_n(y) < \varepsilon$, $\forall y \in A_x$ e $\forall n \geq \nu_x$. Siano $x_1, \ldots, x_r$ tale che $[a, b] \subseteq A_{x_1} \cup \ldots \cup A_{x_r}$ e poniamo $\nu = \max\{\nu_{x_1}, \ldots, \nu_{x_r}\}$. Allora si ha $0 \leq g_n(y) < \varepsilon$ per ogni y e per ogni $n \geq \nu$.

Proponiamo anche una seconda dimostrazione, per assurdo: se la successione (f_n) non converge uniformemente ad f in $[a, b]$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\nu \in \mathbb{N}$, esiste $n > \nu$ per cui la relazione $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ è verificata da qualche $x \in [a, b]$. Consideriamo il caso in cui (f_n) è decrescente rispetto ad n. Essendo $f_n(x) \geq f(x)$, risulta quindi $f_n(x) - f(x) \geq \varepsilon$ per qualche $x \in [a, b]$. Ponendo $\nu = k$, con k arbitrario in $\mathbb{N}$, si ottiene:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k > k, \quad \exists x_k \in [a, b]: \quad f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \geq \varepsilon.$$

Per l'ipotesi di monotonia, se $m \leq k$, si ha

$$f_m(x) \geq f_k(x) \geq f_{n_k}(x), \qquad \forall x \in [a, b], \quad k \geq m.$$

Perciò risulta anche

$$f_m(x_k) \geq f_k(x_k) \geq \varepsilon, \qquad \forall m, k \in \mathbb{N}, \quad \text{con } k \geq m.$$

La successione (x_k) è limitata in $[a, b]$. È perciò possibile estrarre da essa una sottosuccessione x_{k_h} convergente ad un numero reale $x_0 \in [a, b]$. Per la continuità di $f_m(x)$ e di $f(x)$, al limite per $h \to +\infty$ otteniamo

$$f_m(x_0) - f(x_0) \geq \varepsilon, \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ancora al limite, stavolta per $m \to +\infty$, troviamo l'assurdo $0 \geq \varepsilon$]

1.22 Dimostrare con un esempio che il risultato dell'esercizio precedente non sussiste se si sostituisce l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ rispettivamente con:

(a) l'intervallo aperto (a, b);

(b) un intervallo chiuso, ma illimitato.

[(a) La successione $f_n(x) = x^n$ converge decrescendo alla funzione continua $f(x) = 0$ per ogni $x \in (0, 1)$, ma la convergenza non è uniforme in $(0, 1)$ (si veda l'esercizio 1.5); la stessa successione converge decrescendo anche nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 1]$, ma in tal caso la funzione limite non è continua.

Anche le successioni (f_n), (g_n) dell'esercizio 1.12 sono continue rispetto ad $x \in (0, 1)$, sono decrescenti rispetto ad n e convergono puntualmente in $(0, 1)$ alla funzione identicamente nulla, ma la convergenza non è uniforme.

(b) La successione (f_n), definita da $f_n(x) = x/n$, converge decrescendo a $f(x) = 0$ nell'intervallo $[0, +\infty)$, ma non uniformemente.

Le successioni $f_n(x) = e^{x-n}$, $g_n(x) = e^{(x+1/n)}$ convergono decrescendo rispettivamente a $f(x) = 0$ e $g(x) = e^x$, ma la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$]

1.23 Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni convesse in $[a, b]$ che converga puntualmente, per $n \to +\infty$, ad una funzione $f(x)$. Dimostrare che $f(x)$ è convessa in $[a, b]$.

[Per ipotesi, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ verifica la relazione

$$f_n(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f_n(x_1) + (1-\lambda) f_n(x_2), \qquad \forall\, \lambda \in [0, 1], \quad \forall\, x_1, x_2 \in [a, b].$$

Al limite per $n \to +\infty$ si ottiene la disuguaglianza di convessità per $f(x)$]

1.24 Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni convesse in $[a, b]$ che converga puntualmente, per $n \to +\infty$, ad una funzione $f(x)$. Sia $x_0 \in (a, b)$. Se $f_n(x)$ e $f(x)$ sono derivabili in x_0 e se $f'_n(x_0)$ converge ad l, allora $l = f'(x_0)$.

[Dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ è derivabile in x_0 e convessa in $[a, b]$, risulta

$$f_n(x) \geq f_n(x_0) + f'_n(x_0)(x - x_0), \qquad \forall x \in [a, b]\,.$$

Al limite per $n \to +\infty$ otteniamo

$$f(x) \geq f(x_0) + l(x - x_0), \qquad \forall x \in [a, b]\,.$$

Dividiamo entrambi i membri per $(x - x_0)$, distinguendo se $(x - x_0)$ è positivo o negativo:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq l \quad \text{se } x > x_0\,, \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq l \quad \text{se } x < x_0\,.$$

Al limite per $x \to x_0$ si ottiene la tesi $f'(x_0) = l$]

1.25 La proprietà di convergenza delle derivate, proposta nell'esercizio precedente, vale in ogni punto x_0 interno all'intervallo $[a,b]$, ma in generale non vale agli estremi dell'intervallo. Mostrare ciò discutendo il caso in cui $f_n(x)$ sia definita nell'intervallo $[0,1]$ da:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}, \qquad\qquad \forall\, x \in [0,1].$$

[$f_n(x)$ è una successione di funzioni convesse che, per $n \to +\infty$, converge a $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$. La successione delle derivate $f_n'(x) = x^{n-1}$, per $x = 1$ è costante ($f_n'(1) = 1$) e quindi converge al valore $l = 1$, che è diverso dalla derivata $f'(1) = 0$]

1.26 Dimostrare il teorema 4 sul passaggio al limite sotto il segno di integrale.

[Sia $\varepsilon > 0$; allora $\exists\, \nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b-a), \qquad\qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Ne segue che per $n \geq \nu$

$$\left| \int_a^b f_n(x) - \int_a^b f(x) \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx < \int_a^b \varepsilon/(b-a)\, dx = \varepsilon \;]$$

1.27 Sia (f_n) una successione di funzioni continue in $[a,b]$, convergente uniformemente verso f. Dimostrare che, per ogni $p \geq 1$, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n - f|^p\, dx = 0.$$

[Dal teorema della media segue che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |f_n - f|^p\, dx \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n - f|^p$$

da cui la tesi]

1.28 Data la successione (f_n) definita in $\mathbb{R}$ da (fig. 1.3):

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n \leq x < n+1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

verificare che $f_n(x) \to f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Verificare inoltre che essa converge uniformemente in ogni intervallo limitato, ma non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$.

[Per ogni intervallo $[a, b]$, se $n > b$ si ha $\sup\{f_n(x) : a \le x \le b\} = 0$. Da ciò segue in particolare che $f_n(x) \to f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Invece si ha $\sup\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}\} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$]

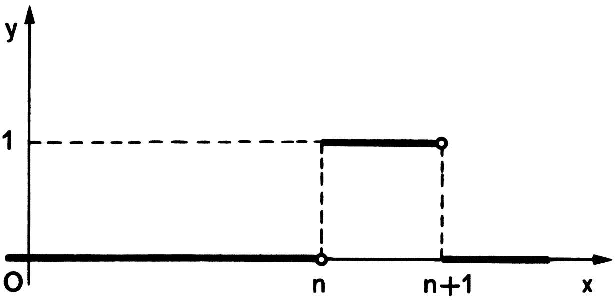

figura 1.3

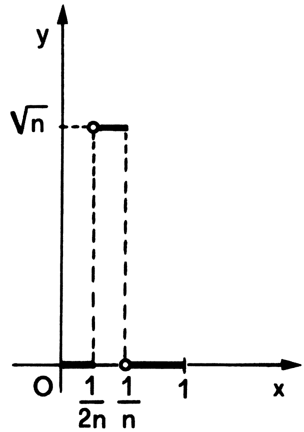

figura 1.4

1.29 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri la funzione $f_n(x)$ rappresentata in figura 1.4 e definita in $[0, 1]$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se} \quad 1/(2n) < x \le 1/n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Mostrare che:

(a) La successione (f_n) converge verso la funzione $f(x) = 0$ puntualmente, ma non uniformemente in $[0, 1]$.

(b) Per $n \to +\infty$ l'integrale definito di $f_n(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$ converge a zero.

[(a) Si ha $f_n(0) = 0$ per ogni n. Se poi $x \in (0, 1]$, per ogni $n > 1/x$ si ha $x > 1/n$ e perciò $f_n(x) = 0$. Ne segue la convergenza puntuale di f_n verso f. La convergenza non è uniforme, in quanto $\sup\{f_n(x) : x \in [0, 1]\} = \sqrt{n}$ non converge a zero.

(b) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_{1/(2n)}^{1/n} \sqrt{n}\, dx = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) \to 0$

Si noti che 0 è il valore dell'integrale definito di $f(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$]

1.30 Siano $a > 0$, $b > 1$. Studiare la convergenza in $I = [0, b]$ della successione di funzioni (f_n) definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} an^2x & 0 \leq x < 1/n \\ \\ \dfrac{a}{1-b}n^2x + \dfrac{ab}{b-1}n & 1/n \leq x < b/n \\ \\ 0 & b/n \leq x \leq b \end{cases}$$

In particolare, studiare la convergenza per $n \to +\infty$ dell'integrale di f_n su I.

[Se vede subito che (f_n) converge puntualmente alla funzione $f(x) = 0$, $\forall x \in I$. Essendo $\int_0^b f_n(x)\,dx = ab/2$, $\int_0^b f(x)\,dx = 0$, non può esservi convergenza uniforme, grazie al teorema 4]

1.31 Data la successione di funzioni $f_n(x) = n(x^{(n+1)/n} - x)$, calcolare, per $x > 0$, le funzioni g_0, g_1, g_2, ... tali che

$$g_0(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \quad g_1(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x), \quad g_2(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n''(x), \quad \ldots$$

Trovare inoltre il legame tra g_0, g_1, g_2, ...

[Si trova in particolare $g_0(x) = x \log x$. Si verifica anche che g_n è la derivata n-sima di g_0]

1.32 Verificare che la successione di funzioni $f_n(x) = (x^2 - x)^n$ converge a zero uniformemente nell'intervallo $[0, 1]$.

[Si verifica facilmente che $-1 < x^2 - x \leq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$. Perciò $f_n(x)$ converge a zero per ogni $x \in [0, 1]$. Calcoliamo

$$M_n = \max\{|(x^2 - x)|^n : x \in [0, 1]\} = \max\{(x - x^2)^n : x \in [0, 1]\};$$

la funzione $g_n(x) = (x - x^2)^n$ è non negativa in $[0, 1]$ e si annulla agli estremi dell'intervallo. Perciò assume massimo in un punto interno all'intervallo $[0, 1]$, che si può determinare annullando la derivata prima.
Risulta $g_n'(x) = n(x - x^2)^{n-1}(1 - 2x) = 0$ per $x = 0$, $x = 1$ e $x = 1/2$. Il punto $x = 1/2$ è di massimo per $g_n(x)$ ed il valore massimo vale $M_n = g_n(1/2) = (1/4)^n$. Dato che per $n \to +\infty$, M_n converge a zero, la successione $f_n(x)$ converge uniformemente in $[0, 1]$. In figura 1.5 abbiamo segnato il grafico di $f_n(x)$ per alcuni valori di n (con due diverse unità di misura sugli assi)]

1.33 Verificare che la successione di funzioni $f_n(x) = (x - 1)x^{-n}$ converge a zero uniformemente nell'intervallo $[1, +\infty)$.

[Poniamo $M_n = \sup\{(x - 1)x^{-n} : x \geq 1\}$. Per determinare M_n consideriamo la derivata

$$f_n'(x) = x^{-n-1}[n - (n - 1)x].$$

Per $n = 1$ risulta $f_n'(x) > 0$ per ogni $x \geq 1$; mentre per $n \geq 2$, $f_n'(x)$ si annulla per $x = n/(n-1)$, che è un punto di massimo (assoluto) per $f(x)$ nell'intervallo $[1, +\infty)$. In corrispondenza otteniamo $M_1 = 1$ e

$$M_n = f_n\left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\frac{n}{n-1} - 1\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n .$$

Per $n \to +\infty$, M_n converge a zero. Perciò $f_n(x)$ converge uniformemente in $[1, +\infty)$. In figura 1.6 abbiamo disegnato il grafico di $f_n(x)$ per alcuni valori di n]

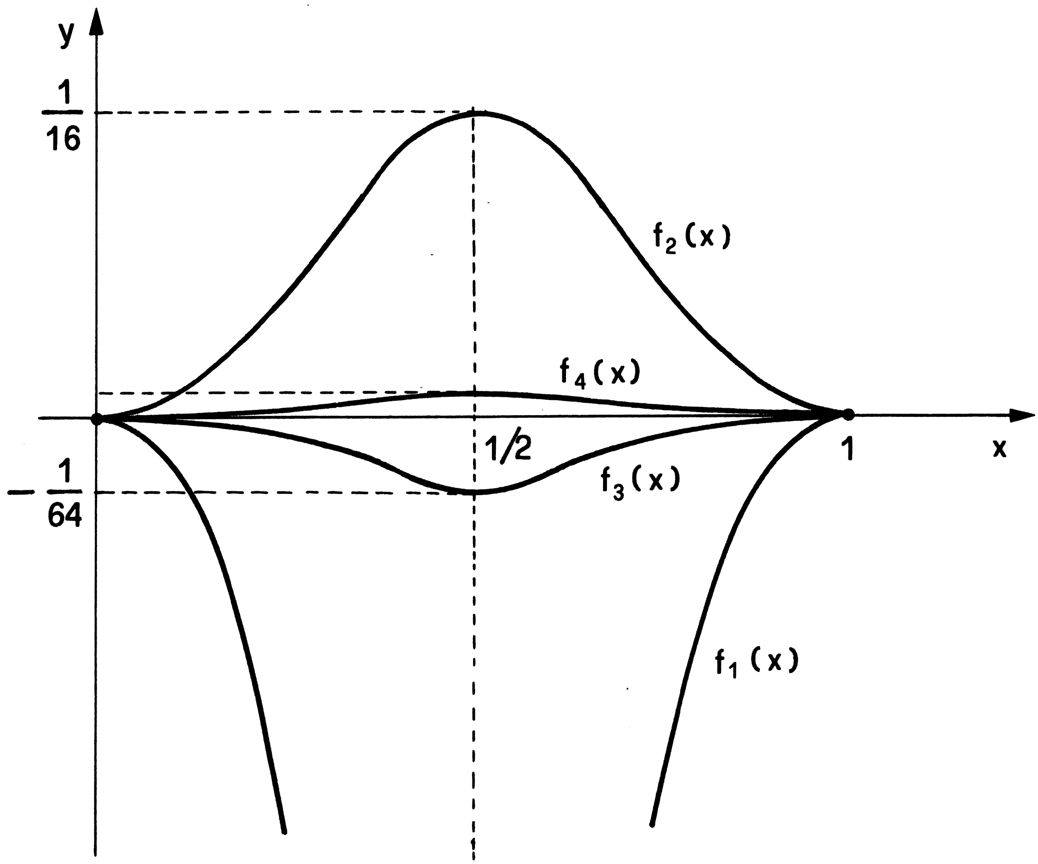

figura 1.5

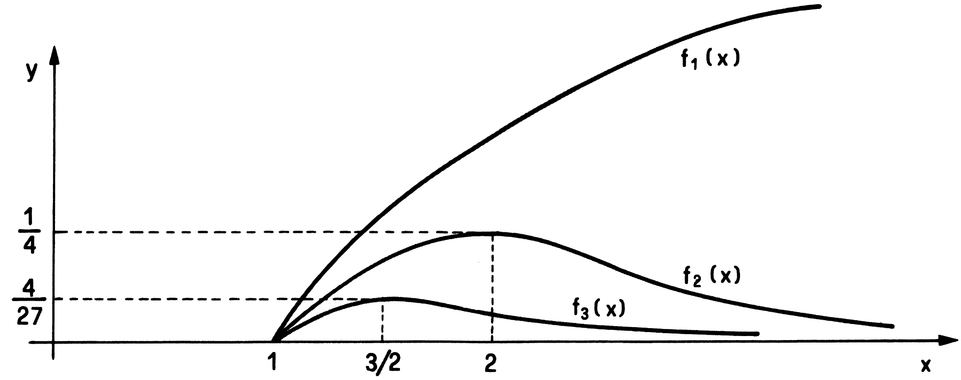

figura 1.6

1.34 Posto $f_n(x) = n(x-1)x^{-n}$ verificare che:

(a) $f_n(x)$ converge a zero per ogni $x \geq 1$.

(b) $f_n(x)$ non converge uniformemente nell'intervallo $[1, +\infty)$.

(c) $f_n(x)$ non converge uniformemente nell'intervallo $[1, 2]$.

(d) $f_n(x)$ converge uniformemente nell'intervallo $[2, +\infty)$.

[Si può procedere come nell'esercizio precedente. In particolare in (b) e (c) per ogni $n \geq 2$ risulta

$$M_n = f_n\left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \quad \to e^{-1};$$

perciò M_n non tende a zero e quindi la convergenza non è uniforme. Invece, nel caso (d), per ogni $n \geq 2$, si ha:

$$M_n = f_n(2) = n2^{-n} \to 0$$

]

1.35 Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ risulta convergente la successione $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$ e determinare il limite. Determinare inoltre un intervallo in cui la successione converge uniformemente.

[Per ogni n pari $f_n(x)$ è definita per $x \geq 0$. La successione diverge a $-\infty$ per $x = 0$ e converge per $x > 0$ a $f(x) = \log x$ in base al limite

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{1/n}-1}{1/n} = \lim_{t\to0^+} \frac{x^t-1}{t} = \lim_{t\to0^+} x^t \log x = \log x.$$

Per determinare un intervallo in cui la convergenza è uniforme studiamo per $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ la funzione $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1) - \log x$.

La derivata

$$g_n'(x) = x^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(x^{\frac{1}{n}} - 1)$$

si annulla per $x = 1$, è positiva per $x > 1$ ed è negativa in $(0, 1)$. Il punto $x = 1$ è di minimo per $g_n(x)$ ed il valore minimo è $g_n(1) = 0$.

Perciò $g_n(x) \geq 0$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. Se ne deduce inoltre che $f_n(x)$ converge a $f(x)$ uniformemente in ogni intervallo $[a, b]$, con $0 < a < b$; infatti, ad esempio, se $a = 1$ risulta:

$$M_n = \max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [1, b]\} = \max\{|g_n(x)| : x \in [1, b]\} =$$
$$= \max\{g_n(x) : x \in [1, b]\} = g_n(b) \to 0]$$

1.36 Date le successioni di funzioni

(a) $f_n(x) = (e^{-1/n^2x^2})/nx$ (b) $g_n(x) = e^{-1/(x^2+n)}$

stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono e calcolarne il limite. Determinare almeno un intervallo non degenere in cui la convergenza sia uniforme.

[(a) Si ha $f_n(x) \to f(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$. La convergenza è uniforme in ogni intervallo che non contenga un intorno di zero. (b) Si ha $g_n(x) \to g(x) = 0$ uniformemente in $\mathbb{R}$]

1.37 Date le successioni di funzioni

(a) $f_n(x) = \dfrac{(n^2 - x^2)^2}{(n^2 - x^2)^2 + 1}$ (b) $g_n(x) = \log \dfrac{3(x+n)^2 + 2}{(x+n)^2 + 1}$

stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono e calcolarne il limite. Determinare almeno un intervallo non degenere in cui la convergenza sia uniforme.

[(a) Si ha $f_n(x) \to f(x) = 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. La convergenza è uniforme in ogni intervallo limitato. (b) Si ha $g_n(x) \to g(x) = \log 3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La convergenza è uniforme in ogni intervallo $[a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$]

1.38 Verificare che nell'intervallo $[1, +\infty)$

$f_n(x) = (x^{n-1} + \log x^n)/x^n \to 1/x$ non uniformemente

$g_n(x) = (\log x - x^{n+2})/x^n \to -x^2$ uniformemente

1.39 Verificare che nell'intervallo $[0, +\infty)$

$f_n(x) = (x + e^{(n+1)x})e^{nx} \to e^x$ uniformemente

$g_n(x) = (e^{(n-1)x} + nx)/e^{nx} \to e^{-x}$ non uniformemente

1.40 Verificare che nell'insieme $\mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{n\,\mathrm{sen}\,(x^2+1)+n^2x}{n^2(x^2+1)} \to \frac{x}{x^2+1} \qquad \text{uniformemente}$$

$$g_n(x) = \frac{nx^3+(n+1)^2\mathrm{sen}\,x}{n^2+1} \to \mathrm{sen}\,x \qquad \text{non uniformemente}$$

1.41 Verificare che

$$f_n(x) = \mathrm{sen}\,(x^2/n) + (1-\sqrt{1-x^2})/n \to 0$$

in $[-1,1]$ uniformemente.

1.42 Verificare che

$$f_n(x) = (\cos x)/n - \cos(x/n) \to f(x) = -1$$

in $\mathbb{R}$ non uniformemente.

[Si ha $f_n(n) - f(n) \to 1 - \cos 1$]

1.43 Sia (x_n) la successione dei numeri razionali dell'intervallo $[0,1]$. Studiare la convergenza della successione f_n definita in $[0,1]$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{x_1,\dots,x_n\} \\ 0 & x \in [0,1]-\{x_1,\dots,x_n\} \end{cases}$$

[La successione (f_n) converge puntualmente verso la funzione f definita da $f(x) = 1$ se x è razionale, $f(x) = 0$ se x è irrazionale. Infatti se x è razionale, allora esiste ν tale che $x \in \{x_1,\dots,x_n\}$ per ogni $n > \nu$ e perciò risulta $f_n(x) = 1$ per ogni $n > \nu$. Se x è irrazionale si ha $f_n(x) = 0$ per ogni n. Poichè per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $f_n(x_{n+1}) = 0$ e $f(x_{n+1}) = 1$, allora $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = 1$ e perciò non vi può essere convergenza uniforme]

1.44 Stabilire se la seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \mathrm{arctg}\,nx$$

converge uniformemente in questi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

(a) $\mathbb{R}$; (b) $\mathbb{R}-\{0\}$, (c) $(0,1)$, (d) $(1,+\infty)$

[Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se} \quad x>0 \\ 0 & \text{se} \quad x=0 \\ -\pi/2 & \text{se} \quad x<0 \end{cases}.$$

Dato che $f(x)$ non è una funzione continua su $\mathbb{R}$, la successione $f_n(x)$ converge puntualmente ad $f(x)$ su $\mathbb{R}$, ma non uniformemente su $\mathbb{R}$. Poniamo, per $x > 0$,

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\,.$$

La funzione $g_n(x)$ è decrescente in $(1, +\infty)$ dato che la derivata è negativa in tale intervallo:

$$g_n'(x) = -\frac{n}{1+(nx)^2}\,.$$

Inoltre valgono i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = \frac{\pi}{2} \qquad , \qquad \lim_{x\to +\infty} g_n(x) = 0\,.$$

Risulta quindi

$$\sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} g_n(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

e la successione $f_n(x)$ non converge uniformemente a $f(x)$ in $(0, +\infty)$, tantomeno in $\mathbb{R} - \{0\}$. Analogamente $f_n(x)$ non converge uniformemente a $f(x)$ in $(0,1)$, mentre converge a $f(x)$ uniformemente in $(1, +\infty)$ perchè

$$\sup_{x>1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>1} g_n(x) = g_n(1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n \to 0 \qquad \text{per} \quad n \to +\infty]$$

1.45 Stabilire se la seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{n}{x}$$

converge uniformemente in questi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

(a) $\mathbb{R} - \{0\}$, (b) $(0,1)$, (c) $(1, +\infty)$

[La successione $f_n(x)$ è ben definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ se $x \neq 0$. In $\mathbb{R} - \{0\}$ $f_n(x)$ converge puntualmente ed il limite vale

$$\lim_{n\to +\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se} \quad x > 0 \\ -\pi/2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}\,.$$

Da notare che $f(x)$ è una funzione continua su $\mathbb{R} - \{0\}$. Tuttavia $f_n(x)$ non converge puntualmente ad $f(x)$ in $\mathbb{R} - \{0\}$ e la convergenza non è uniforme neanche in $(0, +\infty)$. Infatti, posto per $x > 0$

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{n}{x}\,,$$

si verifica che $g_n(x)$ è crescente in $(0, +\infty)$ dato che

$$g_n'(x) = -\frac{1}{1+(n/x)^2} \cdot \left(-\frac{n}{x^2}\right) > 0$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = 0 \qquad , \qquad \lim_{x\to +\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}\,.$$

La convergenza di $f_n(x)$ a $f(x)$ non è uniforme neanche in $(1, +\infty)$, dato che

$$\sup_{x>1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>1} g_n(x) = \frac{\pi}{2} \qquad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e non converge a zero per $n \to +\infty$. Infine la convergenza è uniforme in $(0,1)$, infatti

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = g_n(1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n$$

che converge a zero quando n tende a $+\infty$]

1B. Serie di funzioni

Sia (f_n) una successione di funzioni reali definite nell'intervallo I di $\mathbb{R}$. Se per ogni $x \in I$ la serie

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

è convergente, cioè, se la successione (s_n) delle somme parziali

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

converge puntualmente in I, allora si dice che la *serie di funzioni*

$$(1) \qquad f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

è *convergente* in I.

Se la successione (s_n) converge uniformemente in I verso f, allora si dice che la serie (1) *converge uniformemente* in I verso f.

Se esistono dei numeri reali $M_n \geq 0$ tali che $|f_n(x)| \leq M_n$ per $x \in I$ e per $n \in \mathbb{N}$ e se la serie numerica $M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$ è convergente, allora si dice che la serie (1) è *totalmente convergente* in I.

Si verifica facilmente che una serie totalmente convergente è anche uniformemente convergente.

I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale o di derivata per le successioni di funzioni (ved. paragrafo 1A) implicano i seguenti, relativi all'integrazione o alla derivazione per serie, rispettivamente.

TEOREMA (*di integrazione per serie*). *Se la serie (1) di funzioni continue in* $I = [a,b]$ *converge uniformemente verso* f*, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

TEOREMA (*di derivazione per serie*). *Se la serie (1) di funzioni derivabili in* $I = (a,b)$ *converge in* I *verso* f *e se la serie derivata*

$$f_1' + f_2' + \ldots + f_n' + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

converge uniformemente in I, allora f è derivabile in I e risulta

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \qquad \forall\, x \in I.$$

1.46 Dire se la serie geometrica

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

è convergente totalmente per $x \in I = [-a, a]$, con $0 < a < 1$.

[Essendo

$$|x^{n-1}| \leq a^{n-1} \qquad \forall\, x \in I$$

ed essendo $0 < a < 1$ la serie data è maggiorata da una serie numerica convergente e perciò essa converge totalmente in I]

1.47 Dire se la serie

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 4x + \ldots$$

è convergente per $x \in (0, \pi)$.

[La serie non converge in alcun punto $x \in (0, \pi)$, perchè il suo termine generale $(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx$ non converge]

1.48 Studiare per $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

[La serie è totalmente convergente in $\mathbb{R}$. Infatti si ha $|(\cos nx)/n^2| \leq 1/n^2$ e la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ è convergente (ved. es. 6.22 del vol. I, parte seconda (nuova edizione))]

1.49 Stabilire per quali $x > 0$ convergono le serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^n}$

[(a) $x > 1$; (b) $x \geq 1$]

1.50 Verificare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 x^n}$$

converge totalmente in $[1, +\infty)$.

[Per ogni $x \geq 1$, risulta $1/(n^4 x^n) \leq 1/n^4$]

1.51 Studiare la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^{nx}}$

[(a) La serie converge puntualmente se e solo se $x \geq 0$. Infatti, se $x < 0$ il termine generale $f_n(x) = e^{-nx}x/n$ non è infinitesimo per $n \to +\infty$. Se $x = 0$ risulta $f_n(0) = 0$ e la serie ha somma zero. Se infine è $x > 0$, essendo $0 < e^{-x} < 1$, la serie

$$x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-x})^n}{n}$$

converge in base al criterio della radice o del rapporto; (b) la serie converge puntualmente se e solo se $x > 1$]

1.52 Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)}$ essendo p un parametro reale. Verificare che essa:

(a) converge puntualmente su $\mathbb{R}$ se $p > 0$;

(b) converge uniformemente su $\mathbb{R}$ se $p > 1/2$.

[(a) Se $x = 0$ la serie ha somma zero. Se $x \neq 0$, per il criterio degli infinitesimi (paragrafo 6B del volume 1°, parte seconda) la serie data ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$$

ed è quindi convergente se (e solo se) $p + 1 > 1$, cioè se $p > 0$.
(b) Poichè la funzione dispari $f_n(x) = x/(1 + nx^2)$ assume il valore massimo su $\mathbb{R}$ per $x = 1/\sqrt{n}$, risulta

$$\left| \frac{x}{n^p(1+nx^2)} \right| = \frac{1}{n^p} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^p} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{(p+1/2)}} .$$

La serie numerica di termine generale $1/n^{(p+1/2)}$ è convergente se $p + 1/2 > 1$. Dunque la serie data è totalmente e perciò uniformemente (e assolutamente) convergente se $p > 1/2$]

1.53 Verificare che la serie

$$x - (x^2/2) + (x^3/3) - (x^4/4) + \ldots$$

è uniformemente convergente in $[0, 1]$, ma non è ivi totalmente convergente.

[Si ha $\sup\limits_{0\leq x\leq 1}|x^n/n| = 1/n$ ed essendo divergente la serie di termme generale $1/n$, allora la serie data non è totalmente convergente.

Per ogni $x \in [0,1]$ la serie data è una serie numerica alternata con termine generale infinitesimo e decrescente in valore assoluto.

Per il teorema sulle serie alternate (ved. paragrafo 6C del vol.I, parte seconda) la serie è convergente puntualmente in $[0,1]$ verso una funzione $f(x)$; inoltre, detta $(s_n(x))$ la successione delle ridotte, risulta

$$|f(x) - s_n(x)| \leq x^{n+1}/(n+1) \leq 1/(n+1)$$

e perciò la convergenza di s_n a f è uniforme]

1.54 Utilizzando il teorema di derivazione per serie calcolare la somma della serie

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

nell'intervallo $I = [-a, a]$, con $0 < a < 1$.

[Osserviamo in primo luogo che per $x \in I$ la serie data è convergente. Infatti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n|x|^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x|^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x|^{n-1}} = |x| \leq a < 1$$

(si veda la (4) del paragrafo 7D del vol. I, parte prima) ed allora la serie converge assolutamente grazie al criterio della radice (ved. il cap. 6 del vol. I parte seconda). Essendo $n|x|^{n-1} \leq na^{n-1}$ per $x \in I$, la serie è totalmente e perciò uniformemente convergente.

La serie data si ottiene derivando termine a termine la serie geometrica

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

che converge totalmente e perciò uniformemente in I verso la funzione $f(x) = 1/(1-x)$. Pertanto, dal teorema di derivazione per serie, segue che

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = D(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) = D\frac{1}{1-x} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \;]$$

1.55 Verificare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$$

converge totalmente in $I = [0, \infty)$.

[La serie converge puntualmente in I (ved. l'esercizio 1.51). Per stabilire se essa converge totalmente in I, calcoliamo l'estremo superiore:

$$M_n = \sup\{\frac{x}{n}\, e^{-nx} \; : \; x \geq 0\}\,.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n(x) = xe^{-nx}/n$ è derivabile e risulta $f_n'(x) = e^{-nx}(1-nx)/n$. La derivata f_n' si annulla per $x = 1/n$, che è punto di massimo per f_n. Si verifica facilmente che $M_n = f_n(1/n) = 1/(en^2)$. Poichè la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

è convergente (ved. es. 6.22 del vol. I, parte seconda) allora la serie di funzioni considerata è totalmente convergente in I e quindi anche uniformemente ed assolutamente convergente in tale insieme]

1.56 Stabilire se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ converge totalmente in $I = [0,+\infty)$.

[Posto $M_n = \sup\{xe^{-nx} : x \geq 0\}$ si vede che $M_n = 1/(en)$. Perciò la serie data non converge totalmente]

1.57 Stabilire se la serie considerata nell'esercizio precedente converge totalmente in $I = [1,+\infty)$.

[Posto $M_n = \sup\{xe^{-nx} : x \geq 1\}$, si vede che $M_n = e^{-n}$. Perciò la serie converge totalmente per $x \geq 1$]

1.58 Determinare i valori reali x nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ per cui risulta convergente la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2}\operatorname{sen}\frac{1}{k}(\operatorname{sen} x)^k\,.$$

Stabilire inoltre se la serie converge totalmente nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$.

[Si può scrivere la serie nella forma equivalente

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{k}(\sqrt{2}\operatorname{sen} x)^k\,.$$

Risulta $-1 < \sqrt{2}\operatorname{sen} x < 1$ se e solo se

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e ciò, per $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, equivale a richiedere che x sia nel sottointervallo aperto $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$, dove la serie data converge. Agli estremi risulta che per $x = \frac{\pi}{4}$ la serie vale

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{k}$$

ed è divergente in base al criterio degli infinitesimi (confrontando con la serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$), mentre per $x = -\frac{\pi}{4}$ la serie data vale

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sen} \frac{1}{k}$$

ed è convergente in base al teorema sulle serie a termini di segno alterno. Riassumendo, la serie data nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ risulta convergente in $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$; è inoltre convergente totalmente in ogni sottointervallo compattamente contenuto, in particolare in $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$]

1.59 Stabilire per quali $x \geq 0$ converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3 + (x^2+2)n^2 + 4} - \sqrt{n^3 + 3xn^2 + 1}\right)$.

[La serie converge solo per $x = 1$ e $x = 2$; essa è invece divergente in ogni altro $x \geq 0$. Infatti si ha

$$\sqrt{n^3 + (x^2+2)n^2 + 4} - \sqrt{n^3 + 3xn^2 + 1} = \frac{(x^2 - 3x + 2)n^2 + 3}{\sqrt{n^3 + (x^2+2)n^2 + 4} + \sqrt{n^3 + 3xn^2 + 1}} \,.$$

Ne segue che: se $x^2 - 3x + 2 = 0$ (cioè se $x = 1$ oppure $x = 2$), allora il termine generale della serie è infinitesimo dello stesso ordine di $n^{-3/2}$ e quindi la serie è convergente (ved. il paragrafo 6B del vol. I, parte seconda). Altrimenti il termine generale non è infinitesimo per $n \to +\infty$]

1.60 Determinare l'insieme dei numeri reali x in cui la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^3 x + n^2}$$

converge e stabilire se in tale insieme la convergenza è totale.

[La serie converge puntualmente e totalmente per $x \geq 0$. Si osservi che dalla disuguaglianza $\log(1+y) \leq y$, $\forall y > -1$ (ved. l'esercizio 1.55 del vol. I, parte seconda) segue che il termine generale della serie data si può maggiorare con $1/n^2$]

1.61 Studiare la convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log(1 + x/n)}{(x+n)^2}$$

[La serie converge puntualmente per $x > -1$]

1.62 Verificare che la serie dell'esercizio precedente converge totalmente nell'insieme $[0, +\infty)$.

1.63 Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ risulta convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ con

$$\text{(a)} \quad f_n(x) = \begin{cases} (nx)^n/n! & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \sqrt{(nx)^4+1} - n^2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad f_n(x) = \begin{cases} 3^{x/n} - 2^{1/n} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ n!/(nx)^n & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

[(a) $0 \leq x < 1/e$, $x = -1$; (b) $x = \log 2/\log 3$, $x < -1/e$]

1.64 Studiare per $x > 0$ la convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{-\log n}$$

[La serie si può rappresentare sotto la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\log n)(\log x)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\log x}$$

ed è quindi convergente se $\log x > 1$, cioè se $x > e$ (ved. es. 6.22 del vol. I, parte seconda)]

1.65 Studiare la convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(x/2)^n + 1/x^n\right].$$

[È opportuno eseguire la scomposizione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(x/2)^n + 1/x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (x/2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 1/x^n .$$

La serie risulta convergente per ogni x tale che $1 < |x| < 2$]

1C. Serie di potenze

Sia a_0, a_1, ..., a_n, ... una successione di numeri reali. La serie di funzioni

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

si chiama *serie di potenze* (di punto iniziale zero), di coefficienti a_0, a_1, ..., a_n, ...

Si chiama *raggio di convergenza* della serie di potenze (1) l'estremo superiore $r \in [0, +\infty]$ dell'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ nei quali essa converge.

Si possono verificare tre casi:

1) $r = 0$. *Allora la serie (1) converge solo per* $x = 0$.

2) $0 < r < +\infty$. *Allora la serie (1) converge assolutamente per* $x \in (-r, r)$ *e totalmente in ogni intervallo chiuso contenuto in* $(-r, r)$, *mentre non converge in alcun punto* x *tale che* $|x| > r$.

3) $r = +\infty$. *Allora la serie (1) converge assolutamente in ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato di* $\mathbb{R}$.

Osserviamo che, nel caso 2), nulla si può dire in generale sulla convergenza della serie di potenze nei punti $-r$, r.

Per il calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze, sussistono i seguenti teoremi

TEOREMA DI CAUCHY. *Se esiste il limite*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in \overline{\mathbb{R}},$$

allora il raggio di convergenza r *della serie di potenze (1) è dato da*

$$r = 1/l,$$

pur di porre $1/0 = +\infty$.

TEOREMA DI D'ALEMBERT. *Se risulta* $a_n \neq 0$ *per ogni* n *ed esiste il limite*

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in \overline{\mathbb{R}},$$

allora il raggio di convergenza r *della (1) è dato da*

$$r = 1/l,$$

pur di porre $1/0 = +\infty$.

Più in generale, una serie di funzioni del tipo

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

ove $x_0 \in \mathbb{R}$, si chiama *serie di potenze di punto iniziale* x_0.

Si dimostra che l'insieme X dei numeri reali per cui essa converge è sempre un intervallo, detto *intervallo di convergenza*. Precisamente, se r è il raggio di convergenza della serie (1) avente gli stessi coefficienti e punto iniziale 0, allora l'intervallo di convergenza X è:

i) $[x_0, x_0] = \{x_0\}$, se $r = 0$;

ii) uno degli intervalli di estremi $x_0 - r$, $x_0 + r$, se $0 < r < +\infty$;

iii) $\mathbb{R}$, se $r = +\infty$.

Il numero r si chiama raggio di convergenza anche della serie (2).

Si dimostra che se la serie di potenze (2) ha raggio di convergenza $r > 0$, la sua somma $f(x)$ definita per $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ da

(3) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

è continua e derivabile in $(x_0 - r, x_0 + r)$. Inoltre risulta

(4) $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

(5) $$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} ,$$

le serie a secondo membro delle (4) e (5) avendo anch'esse raggio di convergenza uguale a r.

Si dimostra inoltre che, se la serie (3) ha raggio di convergenza $r > 0$, allora f è dotata di derivate di ogni ordine in $(x_0 - r, x_0 + r)$ e risulta

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

per cui la (3) può esser riscritta sotto la forma

(6) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n .$$

Enunciamo infine il seguente

TEOREMA DI ABEL. *Se la serie di potenze (2) ha raggio di convergenza $r \in (0, +\infty)$ e converge in $x_0 + r$ (rispettivamente in $x_0 - r$), allora essa converge uniformemente in $[s, x_0 + r]$ (rispettivamente in $[x_0 - r, s]$) per ogni $s \in (x_0 - r, x_0 + r)$. In particolare la somma $f(x)$ è continua in $[s, x_0 + r]$ (risp. in $[x_0 - r, s]$).*

1.66 Verificare che le seguenti serie di potenze hanno raggio di convergenza $r = 1$

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Studiarne il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza.

[(a) Si tratta della serie geometrica di ragione x che converge solo se $|x| < 1$. (b) Si ha $a_{n+1}/a_n = n/n+1$ e perciò $r = 1$, grazie al teorema di D'Alembert. La serie converge per $x = -1$ (ved. l'esercizio 6.44 del vol. I, parte seconda), non converge per $x = 1$ (ved. l'esercizio 6.5 del vol. I, parte seconda). (c) Si ha $a_{n+1}/a_n = n^2/(n+1)^2$ e perciò $r = 1$, grazie al teorema di D'Alembert. La serie converge per $x = -1$ (ved. l'esercizio 6.39 del vol. I, parte seconda), e per $x = 1$ (ved. l'esercizio 6.21 del vol. I, parte seconda)]

1.67 Verificare che la serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$ ha raggio di convergenza $r = 0$.

[Si ha $a_{n+1}/a_n = (n+1)!/n! = n+1$ ed allora basta invocare il teorema di D'Alembert]

1.68 Determinare il raggio di convergenza r delle serie di potenze

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1} x^n$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(3+1/n)^n}$

[(a) Essendo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/(n+2)}{n/(n+1)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

si ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ e perciò $r = 1$, a norma del teorema di D'Alembert. (b) Si ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/[3+(1/n)]^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1/[3+(1/n)] = 1/3$ e perciò $r = 3$, a norma del teorema di Cauchy]

1.69 Determinare il raggio di convergenza r delle seguenti serie di potenze

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x/2)^n$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{5^n}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^n}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!} x^n$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} x^n$

[(a) Essendo $a_n/a_{n+1} = (n+1)!/n! = n+1$, si ha $r = +\infty$, a norma del teorema di D'Alembert. (b) $r = 0$. (c) Essendo $\sqrt[n]{a_n} = 1/5$, si ha $r = 5$, a norma del teorema di Cauchy. (d) Essendo $\sqrt[n]{a_n} = 1/n$, si ha $r = +\infty$. (e) Essendo $\sqrt[n]{a_n} = n/\sqrt[n]{n!}$, risulta $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e$ (ved. l'esercizio 7.58 del vol. I parte prima) e perciò si ha $r = 1/e$. (f) $r = e$]

1.70 Determinare l'intervallo I di convergenza delle serie

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n^2}}{n!}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$

[(a) Per $|x| \le 1$ si ha $|x|^{n^2}/n! \le 1/n!$ e perciò la serie converge. Per $|x| > 1$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} (|x|^{n^2}/n!) \ge \lim\limits_{n\to\infty} (|x|^{n^2}/n^n) = \lim\limits_{n\to\infty} (|x|^n/n)^n = +\infty$, perciò la serie non converge. Pertanto $I = [-1, 1]$.

(b) Posto $t = 2x$, studiamo la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} t^n/\sqrt{n}$. Essendo $(1/\sqrt{n+1})/(1/\sqrt{n}) = \sqrt{n/(n+1)} \to 1$, per il teorema di D'Alembert questa serie converge per $|t| < 1$ e diverge per $|t| > 1$. Per $t = 1$ essa si riduce alla serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ e per $t = -1$ alla serie alternata $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/\sqrt{n}$ che converge. In definitiva la serie data converge per $x \in I = [-1/2, 1/2)$]

1.71 Determinare l'intervallo di convergenza I della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$.

[Essendo $a_{n+1}/a_n = (n+1)2^n/[(n+2)2^{n+1}] = (n+1)/2(n+2)$, dal teorema di D'Alembert segue che il raggio di convergenza della serie data vale $r = 2$. Pertanto la serie converge per $|x| < 2$. Per $x = -2$ essa si riduce alla serie armonica alternata che converge, mentre, per $x = 2$ essa si riduce alla serie armonica che diverge. Dunque è $I = [-2, 2)$]

1.72 Determinare l'intervallo di convergenza I della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n2^n} x^n$.

[Essendo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{\log n} = \frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\frac{\log(n+1)}{\log n},$$

dal teorema di D'Alembert segue che il raggio di convergenza della serie data vale $r = 2$. Pertanto la serie converge per $|x| < 2$. Per $x = -2$ essa si riduce alla serie alternata

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$$

che converge, mentre per $x = 2$ essa si riduce alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

che diverge in quanto maggiorante della serie armonica]

1.73 Calcolare, per ogni valore del parametro reale α, il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n .$$

[Essendo $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|\alpha - n - 1|}{n+1}$, per il teorema di D'Alembert si ha $r = 1$ se $a \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ Altrimenti il termine generico della serie data è definitivamente nullo e perciò essa ha raggio di convergenza $r = +\infty$]

1.74 Studiare la convergenza delle serie di potenze

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+3}} x^n$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n+9^n}$

[(a) Essendo $a_{n+1}/a_n = 2\sqrt{n+3}/\sqrt{n+4}$, per il teorema di D'Alembert il raggio di convergenza è $r = 1/2$. Per $x = -1/2$ si ottiene una serie alternata convergente, mentre per $x = 1/2$ la serie diverge (ved. es. 6.22 del vol. I, parte seconda). (b) Si verifica facilmente che $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1/9$. Perciò il raggio di convergenza vale $r = 9$. La serie non converge per $x = \pm 9$, perchè il suo termine generale non è un infinitesimo]

1.75 Calcolare il raggio di convergenza r di ciascuna delle seguenti serie di potenze

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2^n} x^n$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^7}{(n+1)!} x^n$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (\frac{x}{5})^n$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^{n+1}\log(n+1)}$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n^2}{(1+n)^5} x^n$

[(a) $r = 2$; (b) $r = +\infty$; (c) $r = 1$; (d) $r = 5$; (e) $r = 5$; (f) $r = 1$]

1.76 Determinare l'intervallo di convergenza di ciascuna delle seguenti serie di potenze

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{2^n}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n(x+7)^n$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n n^3}$ (f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(x+9)^{n-1}}{(n-1)^2}$

[(a) $(-5,-1)$; (b) $[-6,-2)$; (c) $[-3,-1)$; (d) $\{-7\}$; (e) $[-5,-1]$; (f) $[-10,-8]$]

1D. Serie di Taylor

Sia $f(x)$ una funzione reale dotata di derivate di ogni ordine nell'intervallo (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. La serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{1}$$

prende il nome di *serie di Taylor* di $f(x)$, di punto iniziale x_0.

Se la serie (1) è convergente in (a,b) verso $f(x)$, cioè se risulta, $\forall\, x \in (a,b)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,,$$

allora si dice che $f(x)$ è *sviluppabile in serie di Taylor* di punto iniziale x_0, nell'intervallo (a,b).

Dalla definizione del resto n-simo $R_n(x)$ della formula di Taylor

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

si ricava che: *condizione necessaria e sufficiente affinchè $f(x)$ sia sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0, in (a,b) è che*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \forall x \in (a,b)\,. \tag{2}$$

Da tale condizione, ricordando l'espressione di Lagrange per il resto $R_n(x)$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3}$$

(con ξ opportuno valore compreso fra x_0 e x) e la con seguente stima del resto

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \tag{4}$$

nell'ipotesi $M_{n+1} = \sup\{|f^{(n+1)}(x)| : x \in (a,b)\} < \infty$, si deduce il seguente

TEOREMA 1. *Se $f(x)$ è dotata di derivate di ogni ordine in (a,b) ed esistono $M,\ L \ge 0$ tali che*

$$|f^{(n)}(x)| \le ML^n \qquad \forall\, x \in (a,b)$$

(in particolare se le derivate di f sono equilimitate in (a,b)) allora, $\forall\, x_0 \in (a,b)$, $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 nell'intervallo (a,b) e si ha:

$$|R_n(x)| \le \frac{[L(b-a)]^{n+1}}{(n+1)!}M, \qquad \forall\, x \in (a,b)\,. \tag{5}$$

Le stime del resto (4) e (5) hanno notevoli applicazioni al calcolo numerico dei valori delle funzioni.

Utile è inoltre il seguente

TEOREMA 2. *Sia $f(x)$ dotata di derivate di ogni ordine in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. Se risulta*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \qquad \forall\, x \in (a,b)\,,$$

cioè, se la serie derivata della serie di Taylor di f ha per somma f', allora f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 nell'intervallo (a,b).

Nel caso $x_0 = 0$, la serie (1) prende anche il nome di *serie di Mac Laurin* di $f(x)$.

Sussiste infine il seguente

TEOREMA 3. *Se $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 nell'intervallo $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ e se $g : X \to I$ è una funzione definita nell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ tale che $g(X)$ è chiuso, allora si ha, uniformemente in X*

$$f(g(x)) = f(x_0) + f'(x_0)(g(x) - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(g(x) - x_0)^n + \ldots$$

1.77 Sia $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ per $|x| < r$ e sia $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ per $|x| < s$. Posto $t = \min\{r, s\}$, verificare che

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n \qquad \text{per} \quad |x| < t\,.$$

[Basta osservare che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{n=0}^{k} (a_n + b_n)x^n - (f(x) + g(x))\right| \le \left|\sum_{n=0}^{k} a_n x^n - f(x)\right| + \left|\sum_{n=0}^{k} b_n x^n - g(x)\right|]$$

1.78 Calcolare i primi quattro coefficienti della serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 1$ di $f(x) = 1/(1 + x^2)$.

[$a_0 = f(1) = 1/2$; essendo $f'(x) = -2x/(1 + x^2)^2$, si ha $a_1 = f'(1) = -1/2$; essendo $f''(x) = (6x^2 - 2)/(1 + x^2)^3$; si ha $a_2 = f''(1)/2! = 1/4$; essendo $f'''(x) = 24(x - x^3)/(1 + x^2)^4$, si ha $a_3 = f^{(3)}(1)/3! = 0$]

1.79 Scrivere la serie di Mac Laurin della funzione $f(x) = \cos hx = (e^x + e^{-x})/2$.

[Si ha $f^{(n)}(x) = \cos hx$ se n è pari, $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen} hx$ se n è dispari. Pertanto è $f^{(n)}(0) = 1$ se n è pari, $f^{(n)}(0) = 0$ se n è dispari. La serie di Mac Laurin di cos hx è perciò $1 + (x^2/2!) + (x^4/4!) + \ldots + [x^{2n}/(2n)!] + \ldots$]

1.80 Scrivere la serie di Mac Laurin della funzione $f(x) = e^{-2x}$

[Si ha $f'(x) = -2e^{-2x}$; $f''(x) = 2^2e^{-2x}$; $f^{(3)}(x) = -2^3e^{-2x}$; $f^{(n)}(x) = (-1)^n 2^n e^{-2x}$. Ne segue che la serie cercata è $1 - 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^n \frac{2^n}{n!}x^n + \ldots$]

1.81 Scrivere la serie di Mac Laurin della funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ per $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

[Si ha $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$; $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$;... $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Perciò $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)$ e la serie cercata è

$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n$]

1.82 Scrivere la serie di Mac Laurin della funzione $y = \operatorname{arcsen} x$.

[Si ha $y' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $y'' = x/\sqrt{(1-x^2)^3} = xy'/(1-x^2), \ldots$ da cui

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0\,. \tag{6}$$

Dalla (6) si deduce una formula di ricorrenza assai utilie per il calcolo delle derivate successive di $y = \operatorname{arcsen} x$. Calcolando la derivata n-sima del primo membro della (6) si ha

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0$$

da cui, semplificando

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$$

ed ancora

$$y^{(n+2)} = [(2n+1)xy^{(n+1)} + n^2y^{(n)}]/(1-x^2)\,.$$

Ponendo $x = 0$ si ha $y^{(n+2)}(0) = n^2y^{(n)}(0)$, da cui, essendo $y^0(0) = y(0) = 0$ segue

$$y^{(2k)}(0) = 0; \quad y^{(2k+1)}(0) = 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\ldots(2k-1)^2\,.$$

Se ora, indichiamo, $\forall m \in \mathbb{N}$, con $m!!$ il prodotto di tutti i numeri naturali non maggiori di m ed aventi la stessa parità di m (ad esempio $6!! = 2\cdot 4\cdot 6$; $7!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7$), dalle precedenti relazioni segue

$$y^{(2k+1)}(0) = [(2k-1)!!]^2$$

Perciò la serie di Mac Laurin di $y = \operatorname{arcsen} x$ è

$$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ ]$$

1.83 Scrivere la serie di Mac Laurin della funzione $f(x) = \log(1+x)$.

[Si verifica per induzione che $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/(1+x)^n$ e perciò la serie cercata è

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$]

1.84 Verificare che sussistono i seguenti sviluppi in serie di Taylor

(a) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots \qquad x \in \mathbb{R}$

(b) $1/x = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - \ldots + (-1)^{n+1}(x-1)^{n-1} + \ldots \qquad x \in (0,2)$

(c) $\log x = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^n}{n} + \ldots$
$x \in (0,2)$

[(a) Le derivate di $f(x) = e^x$ essendo equilimitate in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$, basta applicare il teorema 1. (b) Per $x \in (0,2)$ si ha $1 - x \in (-1,1)$, perciò la serie geometrica di primo termine 1 e ragione $1 - x$ è convergente e si ha

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + \ldots + (1-x)^{n-1} + \ldots$$

(c) La serie derivata della serie a secondo membro di (c), coincide con quella considerata in (b) che converge verso $D\log x = 1/x$. Si può perciò applicare il teorema 2]

1.85 Verificare che sussistono i seguenti sviluppi in serie di Mac Laurin.

(a) $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n\dfrac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (x \in \mathbb{R})$

(b) $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (x \in \mathbb{R})$

(c) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (x \in \mathbb{R})$

(d) $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (x \in [-1,1])$

(e) $\operatorname{sen} hx = x + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (x \in \mathbb{R})$

(f) $\cos hx = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (x \in \mathbb{R})$

[(a) Segue dall'esercizio precedente. (b) Le derivate di $f(x) = \operatorname{sen} x$ essendo equilimitate in $\mathbb{R}$, basta invocare il teorema 1. (c) Le derivate di $f(x) = \cos x$ essendo equilimitate in $\mathbb{R}$, basta invocare il teorema 1. (d) La serie derivata della serie a secondo membro è $1 - x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{2(n-1)} + \ldots$ cioè è la serie geometrica di primo termine 1 e di ragione $-x^2$, che nell'intervallo $(-1,1)$ ha per somma $1/(x^2+1)$; allora, invocando il teorema 2 si ha lo sviluppo indicato per $x \in (-1,1)$. Che lo sviluppo sussista anche per $x = \pm 1$ segue dal teorema di Abel. (e) Essendo $\operatorname{sen} hx = (e^x - e^{-x})/2$, si può invocare, il risultato dell'esercizio 1.73 e gli sviluppi (a) del presente esercizio e di quello precedente. (f) Si sfrutti come in (e) l'uguaglianza $\cos hx = (e^x + e^{-x})/2$]

1.86 Verificare che per $x \in (-1,1)$ sussistono i seguenti sviluppi in serie di Mac Laurin

(a) $\quad \log(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

(b) $\quad \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

(c) $\quad \dfrac{1}{1-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

(d) $\quad \log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

[(a) Ved. la (c) dell'esercizio 1.80. (b) È la serie geometrica di primo termine 1 e ragione $-x^2$. (c) È la serie geometrica di primo termine 1 e ragione x^2. (d) La serie derivata della serie a secondo membro di (d) coincide con quella considerata in (c) che converge verso $1/(1-x^2) = D\log\sqrt{(1+x)/(1-x)}$. Si può perciò applicare il teorema 2. Si può procedere anche per altra via. Precisamente, osservando che $\log\sqrt{(1+x)/(1-x)} = [\log(1+x) - \log(1-x)]/2$ ed allora dalla (a) e dalla (a) stessa, nella quale si cambi x in $-x$, si ottiene per sottrazione lo sviluppo desiderato]

1.87 Dimostrare la relazione

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

[Poichè la serie a secondo membro converge (ved. l'esercizio 6.44 del vol. I, parte seconda), possiamo applicare alla serie (a) dell'esercizio precedente il teorema di Abel. Pertanto la (a) sussiste anche per $x = 1$]

1.88 Calcolare la derivata sesta $f^{(6)}(0)$ della funzione $f(x) = 1/(1+x^2)$, utilizzando il suo sviluppo in serie di Mac Laurin.

[Dalla (b) dell'esercizio 1.82 segue che $f^{(6)}(0)/6!$, cioè il coefficiente di x^6, è uguale a -1. Pertanto $f^{(6)}(0) = -6!$]

1.89 Senza effettuare il calcolo delle derivate successive della funzione $f(x) = \log(1+x)$, verificare che $f^{(7)}(0) = 6!$

[Dalla (a) dell'esercizio 1.82 segue che $f^{(7)}(0)/7!$, cioè il coefficente di x^7, è uguale a $1/7$]

1.90 Dare un esempio di funzione indefinitamente derivabile in tutto $\mathbb{R}$, la cui serie di Mac Laurin non converge in tutto $\mathbb{R}$.

[Ad esempio $f(x) = 1/(1+x^2)$ la cui serie di Mac Laurin, indicata nell'esercizio 1.86 (b), converge nell'intervallo $[-1,1]$]

1.91 Sia $f(x)$ una funzione derivabile $n+1$ volte in $[a,b]$ con derivata $f^{(n+1)}(x)$ continua.

(a) Dimostrare per induzione la formula

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt\,, \qquad \forall\, x \in [a,b],$$

che esprime, in forma integrale, il resto della formula di Taylor di f di punto iniziale $x_0 \in [a,b]$.

(b) Dedurre dalla rappresentazione del resto in forma integrale la sua espressione secondo Lagrange: esiste un punto ξ nell'intervallo di estremi x ed x_0 per cui

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

[Ricordiamo che, per definizione, è

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\,.$$

(a) Per $n=0$, dalla formula fondamentale del calcolo integrale otteniamo

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = [f(t)]_{x_0}^{x} = f(x) - f(x_0) = R_0(x)\,.$$

Supponiamo per induzione che per qualche n risulti

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt\,.$$

Supponiamo anche che $f(x)$ ammetta derivata $(n+2)$-esima continua in $[a,b]$. Integrando per parti otteniamo

$$f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{1}{n!}\left\{\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t)\right]_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt\right\} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt$$

che è quanto si voleva dimostrare.

(b) Supponiamo $x > x_0$ (le differenze con il caso $x < x_0$ sono soltanto formali). Indichiamo con m, M rispettivamente il minimo ed il massimo di $f^{(n+1)}(t)$ nell'intervallo $[x_0, x]$, certo esistenti essendo $f^{(n+1)}$ continua. Dalle disuguaglianze $m \le f^{(n+1)}(t) \le M$, $\forall\, t \in [x_0, x]$, e dall'espressione integrale del resto $R_n(x)$ ne deduciamo che

$$m\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \le R_n(x) \le M\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt\,.$$

L'integrale è calcolabile elementarmente e vale

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt = \frac{1}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{t=x_0}^{t=x} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Perciò

$$m \le R_n(x)\cdot\frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}} \le M\,.$$

Per il teorema dell'esistenza dei valori intermedi applicato alla funzione $f^{(n+1)}(t)$ (tale funzione assume tutti i valori compresi tra il minimo m ed il massimo M); esiste $\xi \in [x_0, x]$ tale che $f^{(n+1)}(\xi) = R_n(x)\cdot(n+1)!/(x-x_0)^{n+1}$]

1.92 Dimostrare che $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin nell'intervallo $(-1,1)$ e risulta

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \tag{8}$$

ove $\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)/n!$. La serie a secondo membro della (8) si chiama serie binomiale (ved. esercizio 1.81).

[Essendo $f^{(n+1)}(t) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}$ (ved. l'esercizio 1.81), il resto $R_n(x)$ della formula di Mac Laurin è

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n(1+t)^{\alpha-1}\,dt$$

(ved. l'esercizio 1.87 (a)). Essendo, per $0<|t|<|x|<1$, $|x-t|/|1+t|<|x|$, si ha

$$|R_n(x)| \le \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!}|x|^n\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\,dt$$

e perciò $R_n(x)\to 0$ grazie al risultato dell'esercizio 1.73]

1.93 Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

[Ponendo nella serie binomiale (ved. l'esercizio 1.88) $\alpha = 1/2$ e x^2 al posto di x, si ha per $|x|<1$

$$\sqrt{1+x^2} = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{2}x^4+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^6+\ldots = 1+x^2/2-x^4/8+x^6/16+\ldots]$$

1.94 Dimostrare la relazione

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)} \tag{9}$$

[Ponendo nella serie binomiale (ved. l'esercizio 1.92) $\alpha = -1/2$, si ha per $|x| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^2 - \ldots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} x^n + \ldots$$

Poichè la serie a secondo membro della (9) converge in quanto essa è una serie alternata e la successione $([1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)]/[2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)])$ è decrescente e infinitesima, allora possiamo applicare il teorema di Abel allo sviluppo di $1/\sqrt{1+x}$]

1.95 Sviluppare in serie di Mac Laurin nell'intervallo $(-1, 1)$ la funzione $f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$

[Lo sviluppo in serie di $g(x) = (1+x)^{-1/2}$ per $x \in (-1, 1)$ è dato da (ved. l'esercizio 1.92)

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \ldots$$

Sostituendo $-x^2$ al posto di x si ha

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \ldots]$$

1.96 Verificare che lo sviluppo in serie di Mac Laurin in $(-1, 1)$ della funzione $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ è dato da (ved. l'esercizio 1.82):

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

[Poichè la serie derivata della serie al secondo membro converge per $x \in (-1, 1)$ verso $f'(x)$, allora a norma del teorema 2, si ha lo sviluppo indicato]

1.97 Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione

$$f(x) = \frac{4}{(1-x)(1+3x)}$$

dopo averla rappresentata come somma di due frazioni aventi a denominatore un polinomio di primo grado.

[Vale la scomposizione

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)} + \frac{3}{(1+3x)}.$$

La formula per la somma della serie geometrica fornisce gli sviluppi

$$\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1+3x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n x^n,$$

validi rispettivamente per $|x| < 1$ e per $|x| < 1/3$.
Pertanto risulta $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n 3^{n+1}] x^n$ per $|x| < 1/3$]

1.98 Verificare che sussistono i seguenti sviluppi in serie

(a) $\quad \operatorname{sen} 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{80}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$

(b) $\quad \cos\frac{x}{2} = 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!} + \ldots$

(c) $\quad e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$

(d) $\quad e^{1+x} = e + ex + \frac{ex^2}{2!} + \frac{ex^3}{3!} + \ldots + \frac{ex^n}{n!} + \ldots$

uniformemente in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$.

[Basta applicare il teorema 3]

Sia $f(x)$ una funzione sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 nell'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$. La ridotta n-sima della serie di Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

è un polinomio di grado n che si chiama *polinomio di Taylor* (*di Mac Laurin* se $x_0 = 0$), di ordine n e centro x_0, della funzione $f(x)$.

1.99 Rappresentare graficamente la funzione $y = \operatorname{sen} x$ ed i suoi polinomi di Mac Laurin di ordine 1 e 3.

[I polinomi di Mac Laurin di $y = \operatorname{sen} x$ di ordine 1 e 3 sono rispettivamente $p_1(x) = x$ e $p_3(x) = x - x^3/6$ (fig. 1.7).

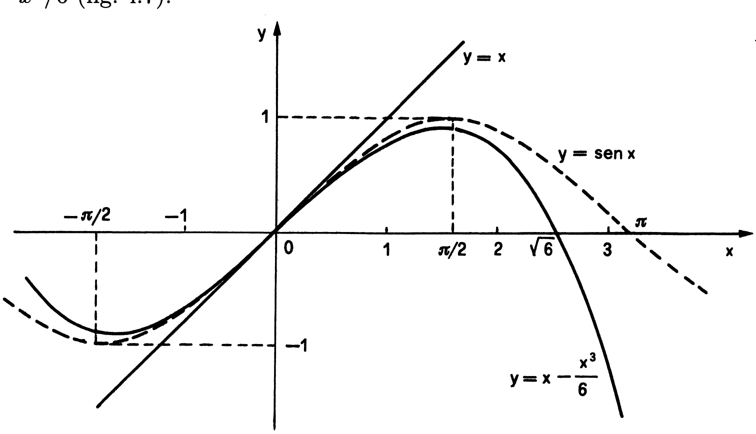

figura 1.7

In fig. 1.8 sono poi rappresentati i polinomi di Mac Laurin fino all'ordine 19]

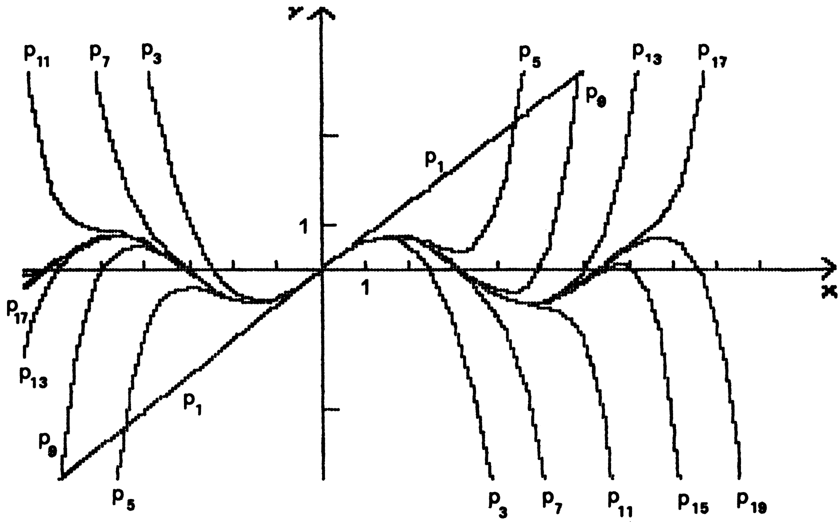

figura 1.8

1.100 Per quali valori di x possiamo sostituire sen x con x, commettendo un errore non maggiore di $\varepsilon = 0.0005$?

[Essendo sen $x = x - x^3/3! + \ldots$ una serie alternata, l'errore $|\text{sen}\, x - x|$ si maggiora con $|x^3|/3!$ (vedi il paragrafo 6C del vol. I, parte seconda). Allora risulta $|x^3|/3! \leq \varepsilon$ se $|x^3| \leq 0.003$, cioè se $|x| \leq \sqrt[3]{0.003}$]

1.101 Nel 1706 il matematico J. Machin scoprì un metodo per calcolare le prime 100 cifre decimali di π, basandosi sull'identità

$$\pi = 16\,\text{arctg}\,(1/5) - 4\,\text{arctg}\,(1/239) \tag{10}$$

e sullo sviluppo in serie di Mac Laurin per l'arcotangente. Dimostrare tale identità.

[Per dimostrare la (10), poniamo $\alpha = \text{arctg}\,(1/5)$; allora tg $2\alpha = 2\text{tg}\,\alpha/(1 - \text{tg}^2\,\alpha) = 5/12$ e $\text{tg}\,4\alpha = 2\text{tg}\,2\alpha/(1 - \text{tg}^2\,2\alpha) = 120/119$. Posto $\beta = 4\alpha - \pi/4$, dalle formule di addizione per la tangente si ricava $\text{tg}\,\beta = (\text{tg}\,4\alpha - 1)/(1 + \text{tg}\,4\alpha) = 1/239$. Essendo $0 < \beta < \pi/2$, si ha $\beta = \text{arctg}\,(1/239) = 4\alpha - \pi/4$ e cioè la (10). Nel 1973 J. Guilloud e M. Bouyer arrivarono a calcolare un milione di cifre di π, basandosi sull'analoga identità:

$$\pi = 48\text{arctg}\,(1/18) + 32\text{arctg}\,(1/57) - 20\text{arctg}\,(1/239).$$

Nel 1983 sono state calcolate oltre 16 milioni di cifre di π, con un metodo un pò diverso. L'uso della (10) per il calcolo approssimato di π è assai più vantaggioso di quello dell'identità $\pi = 4\text{arctg}\,1$, che fornisce l'espressione

$$(11) \qquad \pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots),$$

in quanto quest'ultima serie converge "lentamente". Applicando i noti risultati sulle serie alternate (ved. il paragrafo 6C del vol. I, parte seconda) si deduce la disuguaglianza

$$|\pi - (4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{4}{2n-1})| < \frac{4}{2n+1}\,.$$

Per $n = 500$, questa stima implica che l'errore che si commette approssimando π con la somma dei primi 500 termini della serie (11) è minore di $4/1001 < 0.004 < 0.005$. Invece, lo sviluppo di arctg x applicato alla (10) fornisce l'espressione

$$\pi = \frac{16}{5}(1 - \frac{1}{3 \cdot 25} + \frac{1}{5 \cdot 25^2} - \frac{1}{7 \cdot 25^3} + \ldots) - \frac{4}{239}(1 - \frac{1}{3 \cdot 57121} + \frac{1}{5 \cdot 57121^2} - \ldots)$$

Si noti che, ad esempio, risulta

$$\frac{16}{5}(1 - \frac{1}{3 \cdot 25} + \frac{1}{5 \cdot 25^2}) - \frac{4}{239} = 3.1415\ldots$$

cioè, prendendo la somma di tre termini della prima serie e solo il primo termine della seconda, si ottengono già quattro cifre decimali esatte di π. La convergenza in questo caso è molto veloce. Considerando un numero maggiore di addendi si trovano ad esempio le prime trenta cifre decimali:

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279\ldots\ ]$$

Negli esercizi che seguono vogliamo mostrare come si possa ricorrere all'*integrazione per serie*, allo scopo di calcolare gli integrali definiti di funzioni non integrabili elementarmente.

1.102 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.

[Lo sviluppo $e^x = 1+x+(x^2/2!)+\ldots+(x^n/n!)+\ldots$ sussiste uniformemente in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Sostituendovi x^2 al posto di x si ha

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

uniformemente per $x \in [0,1]$. Perciò si ha

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}\,]$$

1.103 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con errore inferiore a 0.001.

[Sostituendo $-x^2$ al posto di x nello sviluppo di Mac Laurin di e^x si ha

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + (x^4/2!) - (x^6/3!) + (x^8/4!) - \ldots$$

uniformemente per $x \in [0,1]$. Perciò si ha

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2!}\,dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3!} + \ldots =$$

$$= [x]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^5}{10}\right]_0^1 - \left[\frac{x^7}{42}\right]_0^1 + \ldots = 1-(1/3)+(1/10)-(1/42)+(1/216)-(1/1320)+\ldots$$

All'ultimo membro abbiamo una serie alternata e perciò (ved. il paragrafo 6C del vol. I, parte seconda) l'errore si maggiora con il valore assoluto del primo termine trascurato. Per avere un errore inferiore a 0.001 dovremo sommare fino al termine 1/216 incluso. Perciò, a meno di 0.001 si ha

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \cong 1-(1/3)+(1/10)-(1/42)+(1/216) \cong 0.747]$$

1.104 Calcolare, con sei cifre decimali esatte, il valore dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,.$$

[Si ha $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ per $x \in \mathbb{R}$ e perciò

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots$$

uniformemente nell'intervallo $(0,1)$. Infatti la serie a secondo membro è maggiorata dalla serie numerica di termine generale $1/(2n+1)!$ nell'intervallo $(0,1)$. Quest'ultima converge, come si verifica facilmente mediante il criterio del rapporto. Integrando per serie si ha perciò

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^1 (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots)\,dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \frac{1}{9\cdot 9!} - \ldots$$

Per un teorema sulle serie alternate (ved. il paragrafo 6C del vol. I, parte seconda) l'errore che si commette arrestando lo sviluppo si maggiora con il valore assoluto del primo termine trascurato. Sommando, perciò, solo i primi quattro termini, l'errore sarà minore di $1/9\cdot 9! = 0.0000003$. Il valore approssimato richiesto è dunque

$$1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} = 0.946083]$$

1.105 Calcolare per serie gli integrali

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx$ (*b*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x+1}\,dx$

[(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^2$; (b) Integrando per parti si è ricondotti all'integrale in (a)]

1.106 Calcolare per serie gli integrali ($x \in \mathbb{R}$):

(a) $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$ (*b*) $\displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\,dt$

[(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+3}/[(2n+1)!(4n+3)]$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+1}/[(2n)!(4n+1)]$]

Riepilogo di sviluppi in serie notevoli

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$ $(x \in \mathbb{R})$

2. $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ $(x \in \mathbb{R})$

3. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ $(x \in \mathbb{R})$

4. $(b+x)^\alpha = b^\alpha + \alpha b^{\alpha-1}x + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} b^{\alpha-n}x^n + \ldots$ $(|x| < |b|)$

5. $a^x = 1 + x\log a + \dfrac{(x\log a)^2}{2!} + \ldots + \dfrac{(x\log a)^n}{n!} + \ldots$ $(x \in \mathbb{R})$

6. $\operatorname{arcsen} x = x + \dfrac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots +$
$\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n(2n+1)} + \ldots$ $(|x| < 1)$

7. $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ $(|x| \le 1)$

8. $\operatorname{sen} hx = x + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ $(x \in \mathbb{R})$

9. $\cos hx = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ $(x \in \mathbb{R})$

10. $\operatorname{sett\,sen} hx = x - \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots +$
$(-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n(2n+1)}$ $(|x| \le 1)$

11. $\operatorname{sett\,tg} hx = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ $(|x| < 1)$

12. $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \ldots$ $-1 < x \le 1$

13. $\log\dfrac{1+x}{1-x} = 2(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots)$ $(|x| < 1)$

14. $\log x = 2\left[\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3 + \ldots + \dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} + \ldots\right]$ $(x > 0)$

15. $\operatorname{sen} hx + \operatorname{sen} x = 2(x + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^9}{9!} + \ldots)$ $(x \in \mathbb{R})$

16. $\cos hx + \cos x = 2(1 + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^8}{8!} + \ldots)$ $(x \in \mathbb{R})$

Capitolo 2

SPAZI METRICI E SPAZI NORMATI

2A. Spazi metrici

Sia X un insieme e $d : X \times X \to [0, +\infty)$ una funzione. Si dice che d è una *distanza* o *metrica* su X, se sono verificate le condizioni:

i) $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ per ogni x, $y \in X$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ per ogni x, y, $z \in X$.
(*disuguaglianza triangolare*)

Se d è una distanza su X si dice che (X, d) è uno *spazio metrico*, o anche che X è uno spazio metrico, quando non vi sarà possibilità di equivoco.

Per ogni $r > 0$, $x_0 \in X$, si chiama *cerchio aperto* (o *intorno sferico* o *sfera aperta*) di centro x_0 e raggio r, l'insieme

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\};$$

si chiama *cerchio chiuso* di centro x_0 e raggio r l'insieme

$$C(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}.$$

Un insieme $A \subseteq X$ si dice *aperto*, se $\forall\, x \in A$ esiste un cerchio aperto $B(x,r)$ contenuto in A. Un insieme $C \subseteq X$ si dice *chiuso*, se $X - C$ è aperto.

Se $x \in X$, $I \subseteq X$, si dice che I è un *intorno* di x, se esiste un cerchio aperto $B(x,r)$ contenuto in I.

Sia $Y \subseteq X$. Un punto $x \in X$ di dice di *accumulazione* per Y se, per ogni intorno I di x, si ha $I \cap (Y - \{x\}) \neq \emptyset$.

L'insieme (eventualmente vuoto) dei punti di accumulazione di Y si indica con $D(Y)$.

La *chiusura* dell'insieme $Y \subseteq X$ è l'insieme $\overline{Y} \subseteq X$ definito da $\overline{Y} = Y \cup D(Y)$. Un insieme C è chiuso se e solo se $C = \overline{C}$, cioè se e solo se $C \supseteq D(C)$.

Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sono punti di $\mathbb{R}^n$, posto

$$(1) \qquad d_n(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

la coppia $(\mathbb{R}^n, d_n)$ è uno spazio metrico (ved. es. 2.3) che si chiama *spazio euclideo a n dimensioni* e che indicheremo semplicemente con $\mathbb{R}^n$.

Per $n = 1$ la (1) si riduce a

$$d_1(x,y) = |x - y| \qquad\qquad (x, y \in R)\,.$$

Se (X,d) è uno spazio metrico e Y è un sottoinsieme di X, allora, la restrizione della funzione d a $Y \times Y$ è una metrica su Y, che si chiama *metrica indotta* da d su Y.

Un sottoinsieme Y dello spazio metrico (X,d) si dice *limitato*, se esiste un cerchio (chiuso) C che contiene Y, ovvero se esiste $r > 0$ tale che $d(x,y) \leq r$, per ogni x, $y \in Y$.

2.1 Sia X un insieme e sia, per x, $y \in X$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = y \\ \\ 1 & \text{se} \quad x \neq y \end{cases}$$

Verificare che (X,d) è uno spazio metrico nel quale ogni insieme è aperto e chiuso.

2.2 Siano $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$ punti di $\mathbb{R}^n$. Verificare che sussiste la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

[Si ha, per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i + tb_i)^2 = (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)t^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)t + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma\,.$$

Si noti che $\alpha, \gamma \geq 0$; inoltre se $\alpha = 0$ (ed analogamente γ) i b_i sono tutti nulli ed in tal caso la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è ovviamente verificata. Supponiamo quindi $\alpha > 0$; il polinomio di secondo grado in t: $\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma$ è non negativo per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Quindi l'equazione di secondo grado ad esso associata non ha due radici reali (altrimenti il polinomio sarebbe negativo all'interno dell'intervallo delle radici). Ciò equivale a dire che $\Delta/4 = \beta^2 - \alpha\gamma \leq 0$, cioè $\beta^2 \leq \alpha\gamma$ che, ricordando il significato dei simboli α, β, γ, corrisponde alla tesi]

2.3 Tenendo presente l'esercizio precedente, dimostrare che la funzione d_n definita dalla (1) è una metrica (detta *metrica euclidea*).

[La (i) e la (ii) valgono banalmente. Dimostriamo che $d_n(x,y) \leq d_n(x,z) + d_n(z,y)$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, cioè che si ha

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^2\right)^{1/2} .$$

Posto $a_i = x_i - z_i$ e $b_i = z_i - y_i$, basta dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}\right]^2$$

o, ciò che è lo stesso, che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

relazione vera, grazie all'es. precedente]

2.4 Per $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, poniamo

$$d'(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \qquad d''(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} .$$

Verificare che d' e d'' sono metriche in $\mathbb{R}^2$. Rappresentare graficamente in un riferimento cartesiano il cerchio di centro $O = (0,0)$ e raggio 1, relativo ai tre spazi metrici $(\mathbb{R}^2, d_2)$, $(\mathbb{R}^2, d')$, $(\mathbb{R}^2, d'')$ (ove d_2 è la metrica euclidea).

[Ved. fig. 2.1 ove sono rappresentati i cerchi

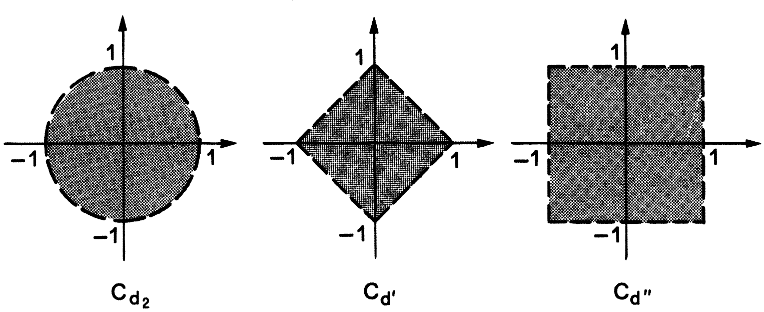

figura 2.1

di centro O e raggio 1, rispettivamente C_{d_2} (nella metrica d_2), $C_{d'}$,(nella metrica d') e $C_{d''}$ (nella metrica d'')]

2.5 Verificare che tra la metrica euclidea d_n in $\mathbb{R}^n$ e le metriche

$$d'_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d''_n(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \, : i = 1, \ldots, n\}$$

sussistono le relazioni

$$d''_n(x,y) \le d_n(x,y) \le d'_n(x,y) \le n\, d''_n(x,y),$$

che si esprimono anche dicendo che esse sono *metriche equivalenti.*

[Basta osservare che, se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri reali non negativi, si ha

$$\max\{a_1, \ldots, a_n\} \le \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \le \sum_{i=1}^{n} \le n \max\{a_1, \ldots, a_n\}$$

la seconda disuguaglianza essendo equivalente all'altra: $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$, di semplice verifica]

2.6 Sia $(x^{(k)})$ una successione di punti di $\mathbb{R}^n$. Se $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, verificare che per $x = (x_1, \ldots, x_n)$, si ha $d_n(x^{(k)}, x) \to 0$ per $k \to \infty$ se e solo se risulta $x_i^{(k)} \to x_i$ (per $k \to \infty$) per ogni $i = 1, \ldots, n$.

[Dall'esercizio precedente segue che per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, si ha

$$|x_i^{(k)} - x_i| \le d_n(x^{(k)}, x) \le n \max_{1 \le j \le n} |x_j^{(k)} - x_j|$$

]

2.7 Posto per $x,\ y \in \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

verificare che d è una metrica (limitata) su $\mathbb{R}$.

[Dimostriamo che d soddisfa alla disuguaglianza triangolare (iii). Se $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$, tenendo conto dell'esercizio 1.63 del vol. I, parte seconda, si ha

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|(x-z)+(z-y)|}{1+|(x-z)+(z-y)|} \le \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|} =$$
$$= d(x,z) + d(z,y)\,.$$

Evidentemente, risulta $d(x,y) \le 1$ per ogni $x,\ y \in \mathbb{R}$ e perciò d è una funzione limitata]

2.8 Sia (S, d) uno spazio metrico e siano $B_1 = B(x_1, r_1)$ e $B_2 = B(x_2, r_2)$ due cerchi aperti. Verificare che, se $y \in B_1 \cap B_2$, allora esiste $r > 0$ tale che $B(y, r) \subseteq B_1 \cap B_2$.

[Posto $r = \min\{r_1 - d(x_1, y),\ r_2 - d(x_2, y)\}$ sia $x \in B(y, r)$. Allora si ha $d(x, x_i) \leq d(x, y) + d(y, x_i) < r + d(y, x_i) < r_i$ per $i = 1, 2$. Ne segue $x \in B_1 \cap B_2$]

2.9 Verificare che ogni intervallo aperto I di $\mathbb{R}^n$ contiene un cerchio aperto concentrico, e che ogni cerchio aperto B di $\mathbb{R}^n$ contiene un intervallo aperto concentrico.

[Sia $I = (c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1) \times \ldots \times (c_n - \delta_n, c_n + \delta_n)$ un intervallo aperto di $\mathbb{R}^n$ di centro $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ e sia $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Detto B il cerchio aperto di centro c e raggio δ, se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B$, si ha, $\forall j = 1, \ldots, n$

$$|x_j - c_j| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - c_i|^2\right)^{1/2} < \delta \leq \delta_j$$

e dunque $x \in I$.

Siano $c = (c_1, \ldots, c_n)$ e r il centro ed il raggio del cerchio aperto B e sia

$$I = (c_1 - r\sqrt{n}, c_1 + r/\sqrt{n}) \times \ldots \times (c_n - r/\sqrt{n}, c_n + r/\sqrt{n})\,.$$

Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in I$ si ha, $\forall i$, $|x_i - ci| < r/\sqrt{n}$ ed anche, sommando membro a membro, $d_n(x, c) < r$, cioè $x \in B$]

2.10 Indichiamo con l_∞ l'insieme di tutte le successioni limitate (x_n) di numeri reali. Posto, per $\underline{x} = (x_n)$, $\underline{y} = (y_n) \in l_\infty$:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sup_n |x_n - y_n|$$

verificare che (l_∞, d) è uno spazio metrico.

[Limitiamoci a dimostrare la disuguaglianza triangolare. Siano $\underline{x} = (x_n)$, $\underline{y} = (y_n)$, $\underline{z} = (z_n)$ elementi di l_∞. Si ha

$$|x_n - y_n| \leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n| \leq \sup_n |x_n - z_n| + \sup_n |z_n - y_n| = d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$$

Prendendo l'estremo superiore su n del primo membro, si ha l'asserto]

2.11 Sia $X = L^\infty([0,1])$ l'insieme delle funzioni reali limitate in $[0,1]$ e poniamo per u, $v \in X$

$$d(u, v) = \sup\{|u(x) - v(x)| : \ x \in [0, 1]\}\,.$$

Verificare che d è una metrica su X (ved la fig. 2.2).

[La (i) e la (ii) sono ovvie. Per dimostrare la disuguaglianza triangolare, siano u, v, $w \in X$.

Allora

$$d(u,v) = \sup\{|(u(x) - w(x)) + (w(x) - v(x))| : x \in [0,1]\} \leq$$
$$\leq \sup\{|u(x) - w(x)| + |w(x) - v(x)| : x \in [0,1]\} \leq$$
$$\leq \sup\{|u(x) - w(x)| : x \in [0,1]\} + \sup\{|w(x) - v(x)| : x \in [0,1]\} = d(u,w) + d(w,v) \;]$$

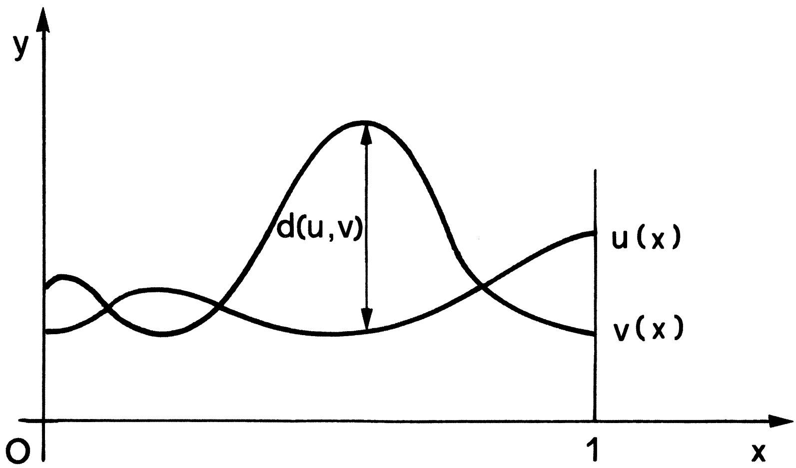

figura 2.2

2.12 Sia $X = C([0,1])$ l'insieme delle funzioni reali continue su $[0,1]$. Per u, $v \in X$ poniamo

$$d(u,v) = \int_0^1 |u(x) - v(x)|\,dx\,.$$

Verificare che d è una metrica su X (la distanza $d(u,v)$ è rappresentata dall'area della regione tratteggiata in figura 2.3).

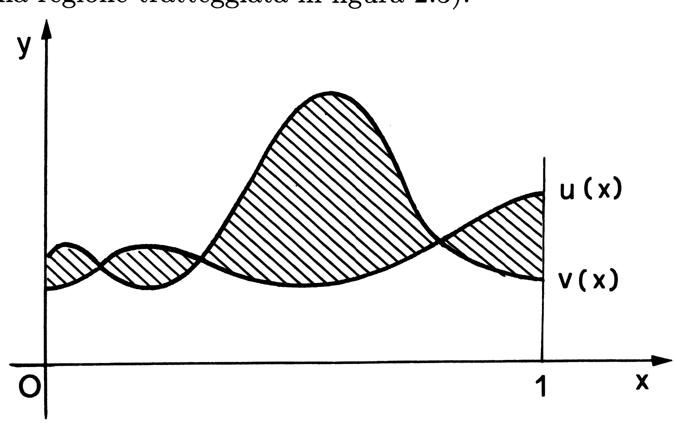

figura 2.3

[La disuguaglianza triangolare si ottiene integrando su $[0,1]$ membro a membro la relazione

$$|u(x)-v(x)| \leq |u(x)-w(x)| + |w(x)-v(x)|, \qquad \forall x \in [0,1]$$

È ovvio che $d(u,v) = d(v,u)$. Infine, in base alla continuità di u, v, come nell'esercizio 5.4 del volume I, parte seconda, si prova che, se $d(u,v) = 0$ allora risulta $|u(x)-v(x)| = 0$ per ogni $x \in [0,1]$ e quindi $u = v$]

2.13 Dimostrare che l'unione di due sottoinsiemi Y_1, Y_2 limitati dello spazio metrico (X,d) è un insieme limitato.

[Sia $C_i = C_i(x_i, r_i)$ un cerchio chiuso contenente Y_i, per $i = 1,2$. Allora il cerchio chiuso $C = C(x_1, r)$ di centro x_1 e raggio $r = \max\{r_1, r_2\} + d(x_1, x_2)$ contiene $C_1 \cup C_2$ e perciò $Y_1 \cup Y_2$. Infatti C contiene ovviamente C_1 ed inoltre risulta

$$d(x, x_1) \leq d(x, x_2) + d(x_2, x_1) \leq r$$

per ogni $x \in C_2$]

2B. Condizione di Cauchy. Completezza

Sia (X,d) uno spazio metrico e sia x_n una successione di punti di X. Si dice che x_n *converge* verso un punto $x \in X$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x) < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$, cioè, se risulta $d(x_n, x) \to 0$ per $n \to \infty$.

Sia C un sottoinsieme di X, allora si verifica che C è chiuso se e solo se C contiene il limite di ogni successione convergente x_n con $x_n \in C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si dice che x_n è una *successione di Cauchy* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_p, x_q) < \varepsilon$, per ogni p, $q > \nu$.

Una successione convergente è anche di Cauchy, ma, in un generico spazio metrico, una successione di Cauchy non sempre è convergente (ved. l'eserc. 2.15).

Lo spazio metrico (X,d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente.

Poichè ogni successione di Cauchy di numeri reali è convergente, lo spazio euclideo $\mathbb{R}$ è completo (ved. l'eserc. 2.20).

Relativamente agli spazi metrici completi è importante il seguente:

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI. - *Sia (X,d) uno spazio metrico completo e f una contrazione su X con costante L, cioè una funzione definita su X a valori in X tale che*

$$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y)$$

per ogni x, $y \in X$, con L numero reale positivo e minore di 1. In tali ipotesi esiste uno ed un solo $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = x_0$ (x_0 si dice punto unito o punto fisso per $f(x)$).

Rimandiamo al paragrafo 12C del volume I (parte prima) per una discussione e per la dimostrazione del teorema delle contrazioni nel caso in cui X sia un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ e d l'usuale distanza euclidea $d(x, y) = |x - y|$.

2.14 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = mx + q$, con m, $q \in \mathbb{R}$. Verificare che:

(a) $f(x)$ è una contrazione su $\mathbb{R}$ se e solo se $|m| < 1$.

(b) Se $m = 1$ la funzione $f(x)$ o non ha punti fissi, oppure, se esiste un punto fisso su $\mathbb{R}$, esso non è unico.

[(a) Vale l'identità

$$|f(x) - f(y)| = |m(x - y)| = |m| \cdot |x - y|, \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Perciò $f(x)$ è una contrazione con costante $L = |m|$ se e, solo se $|m| < 1$; (b) se $m = 1$ risulta $f(x) = x + q$. L'equazione $x_0 + q = x_0$ o non ha soluzioni (se $q \neq 0$), oppure ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione (se $q = 0$)]

2.15 Con le notazioni dell'esercizio precedente sia ancora $f(x) = mx + q$, con m, $q \in \mathbb{R}$. Verificare che $f(x)$ ha uno ed un solo punto fisso su $\mathbb{R}$ se e solo se $m \neq 1$. Stabilire se ciò è in contrasto con l'enunciato del Teorema delle Contrazioni.

[Un punto fisso $x_0 \in \mathbb{R}$ per $f(x)$ è un punto di $\mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0) = x_0\,, \qquad \text{cioè} \quad mx_0 + q = x_0\,.$$

Risolvendo l'equazione otteniamo $(m - 1)x_0 + q = 0$, cioè se $m \neq 1$

$$x_0 = -\frac{q}{m - 1}$$

che è l'unico punto fisso per $f(x)$ su $\mathbb{R}$, mentre se $m = 1$ l'equazione si riduce a $q = 0$, che non ha soluzione se $q \neq 0$, ed ha ogni numero reale x come soluzione se $q = 0$.

Ad un confronto con il Teorema delle Contrazioni, si nota che tale teorema fornisce solo una condizione sufficiente per l'esistenza e l'unicità del punto unito (o punto fisso). Tale condizione sufficiente è $m \in (-1, 1)$, che evidentemente è più restrittiva della condizione trovata in questo semplice caso specifico $m \neq 1$. Il Teorema delle Contrazioni non è comunque contraddetto da questo esempio]

2.16 Verificare che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, munito della metrica usuale $d(x, y) = |x - y|$ non è completo.

[La successione di numeri razionali $x_n = (1 + 1/n)^n$ è di Cauchy (in quanto convergente in $\mathbb{R}$) ma non è convergente in $\mathbb{Q}$, in quanto $\lim_{n\to\infty} x_n = e \notin \mathbb{Q}$]

2.17 Sia X un insieme e sia d la metrica definita da

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x=y \\ 1 & \text{se} \quad x\neq y \end{cases}$$

Verificare che una successione x_n di punti di X è convergente verso x, se e solo se essa è definitivamente costante, cioè se e solo se esiste $\nu \in \mathbb{N}$, tale che $x_n = x$, per ogni $n > \nu$.

[Poichè la relazione $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ implica che esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x) < 1/2$ per $n > \nu$, si ha l'asserto]

2.18 Verificare che lo spazio metrico (X, d) definito nell'esercizio precedente è uno spazio metrico completo.

[Se x_n è una successione di Cauchy, allora esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_p, x_q) < 1/2$ per p, $q > \nu$. Ne segue $d(x_p, x_q) = 0$ e perciò $x_p = x_q$ per ogni p, $q > \nu$. Dunque x_n è una successione definitivamente costante e perciò convergente]

2.19 Verificare che una successione x_n di Cauchy nello spazio metrico (X, d) è limitata.

[Poichè x_n è di Cauchy, esiste $\nu \in \mathbb{N}$, tale che $d(x_p, x_q) \leq 1$ per ogni p, $q > \nu$. Perciò l'insieme degli elementi della successione aventi indice maggiore di ν è limitato. Poichè l'insieme degli elementi della successione aventi indice minore o uguale a ν, essendo finito, è limitato, l'asserto segue dall'esercizio 2.13]

2.20 Sia (X, d) uno spazio metrico e sia x_n una successione di Cauchy dotata di un'estratta x_{n_k} convergente verso x_0. Allora anche x_n è convergente verso x_0.

[Fissato $\varepsilon > 0$, sia ν tale che

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon/2 \qquad \text{per } p,\ q > \nu$$
$$d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon/2 \qquad \text{per } k > \nu\,.$$

Allora, per $k > \nu$ risulta

$$d(x_k, x_0) \leq d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$$

in quanto $n_k \geq k > \nu$]

2.21 Dimostrare che una successione di Cauchy di numeri reali è convergente.

[Se x_n è di Cauchy, essa è limitata (ved. l'eserc. 2.19) ed allora, a norma del teorema di Bolzano-Weierstrass (ved. il paragrafo 7H del vol. I, parte prima) essa ammette un'estratta x_{n_k} convergente. Dall'esercizio 2.19 segue l'asserto]

2.22 Dimostrare che $\mathbb{R}^n$, con la metrica euclidea d_n è uno spazio metrico completo.

[Sia $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})$ una successione di Cauchy in $(\mathbb{R}^n, d_n)$. Essendo per $i = 1, \dots, n$

$$|x_{ip} - x_{iq}| \leq d_n(x_p, x_q)\,,$$

le successioni x_{ik} sono di Cauchy in $\mathbb{R}$ perciò convergenti. Posto $x_i = \lim\limits_{k\to\infty} x_{ik}$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$ si ha (ved. l'esercizio 2.5)

$$d_n(x_k, x) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{ik} - x_i|\,,$$

per cui risulta $d_n(x_k, x) \to 0$, cioè x_k converge verso x in $\mathbb{R}^n$]

2.23 Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $L(I)$ lo spazio delle funzioni reali limitate su I. Posto per u, $v \in L(I)$

$$d(u,v) = \sup : \{|u(x) - v(x)| : x \in I\};$$

verificare che la successione $u_n \in L(I)$ converge verso $u \in L(I)$ nella metrica d, se e solo se $u_n \to u$ uniformemente in I.

[Ved. il paragrafo 1A]

2.24 Verificare che lo spazio $L([0,1])$ delle funzioni limitate in $[0,1]$, munito della distanza

$$(*) \qquad d(u,v) = \sup\{|u(x) - v(x)| : x \in [0,1]\}$$

è uno spazio metrico completo.

[Sia (u_n) una successione di Cauchy in $L([0,1])$; allora (u_n) verifica la condizione di Cauchy uniforme e perciò, per il teorema 2 del par. 1A, essa converge uniformemente verso una funzione $u \in L([0,1])$]

2.25 Verificare che lo spazio $C([0,1])$ munito della metrica (*) è uno spazio metrico completo.

[Basta tener presente l'esercizio precedente e ricordare che il limite uniforme di funzioni continue è continuo (teorema 3 del par. 1A)]

2.26 Sia $C^1([a,b])$ l'insieme delle funzioni continue, con derivata prima continua in $[a,b]$. Posto

$$d'(u,v) = \sup_{x\in[a,b]} |u(x) - v(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |u'(x) - v'(x)|$$

verificare che $(C^1([a,b]),d')$ è uno spazio metrico completo.

[Che d sia una metrica, si prova come nell'esercizio 2.11. Sia u_n una successione di Cauchy rispetto a d'; allora u_n e u_n' sono entrambe di Cauchy in $(C^0([a,b]),d)$ ove d è l'usuale metrica su $C^0([a,b])$ considerata nell'esercizio 2.24. Poichè $C^0([a,b])$ è completo, esistono due funzioni continue u e v tali che $d(u_n,u)\to 0$ e $d(u_n',v)\to 0$. Dimostriamo che $v(x)=u'(x)$ per ogni $x\in[a,b]$. Essendo

$$u_n(x)-u_n(a)=\int_a^x u_n'(t)\,dt$$

$u_n(x)\to u(x)$, $u_n(a)\to u(a)$, applicando il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale (ved. il paragrafo 1A del cap. 1), come è lecito in quanto $u_n'\to v$ uniformemente, si ha

$$u(x)-u(a)=\int_a^x v(t)\,dt\,.$$

Da quest'ultima uguaglianza segue $u'=v$]

2.27 Sia (X,d) uno spazio metrico completo, e sia $Y\subset X$. Dimostrare che Y, munito della metrica indotta da d, è uno spazio metrico completo se e solo se Y è un sottoinsieme chiuso di X.

[Se Y è completo rispetto a d, sia y_n una successione di punti di Y convergente verso $x\in X$. Poichè y_n è una successione di Cauchy in Y, essa converge verso un punto $y\in Y$. Dunque risulta $x=y\in Y$ e perciò Y è chiuso, in quanto contiene il limite di una sua qualunque successione convergente.

Viceversa, sia Y chiuso in X e sia $x_n\in Y$ una successione di Cauchy. Poichè (X,d) è completo, esiste $x\in X$ tale che $x_n\to x$. Poichè Y è chiuso e $x_n\in Y$, allora anche $x\in Y$. Pertanto Y è uno spazio metrico completo]

2.28 Considerata la successione $u_n(x)=\sqrt{1+n^2x^2}/n$, per $x\in[-1,1]$, verificare che $u_n(x)\to|x|$ uniformemente. Dedurne che lo spazio $C^1([-1,1])$ delle funzioni continue con la loro derivata prima in $[-1,1]$, munito della metrica della convergenza uniforme

$$d(u,v)=\sup\{|u(x)-v(x)|:\quad x\in[a,b]\}\,,$$

non è completo.

[Si ha

$$|u_n(x)-|x||=\left|\frac{\sqrt{1+n^2x^2}-n|x|}{n}\right|=\frac{1}{n[\sqrt{1+n^2x^2}+n|x|]}\leq\frac{1}{n}$$

per cui $u_n(x)\to|x|$ uniformemente. Allora il sottoisieme $C^1([-1,1])$ di $C^0([-1,1])$ non è chiuso rispetto alla metrica d. Tenendo conto dell'esercizio 2.27, si ha l'asserto]

2C. Lo spazio metrico dei numeri reali come completamento di $\mathbb{Q}$

Com'è ben noto, il *campo* ordinato $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali *non è completo*, nel senso che esistono coppie di insiemi separati A e B di numeri razionali, prive di elemento di separazione razionale.

È anche noto che esistono successioni di Cauchy di numeri razionali che non sono dotate di limite in $\mathbb{Q}$ (ad es. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$). Con il linguaggio degli spazi metrici si può affermare che $(\mathbb{Q}, d_1)$, ove $d_1(x,y) = |x-y|$ rappresenta la metrica euclidea, *non è spazio metrico completo.*

Allo scopo di evitare tali inconvenienti, si costruisce un *campo ordinato completo*, in cui vale l'assioma di completezza e contenente un sottocampo "isomorfo" a $\mathbb{Q}$. *Il sostegno di tale campo è l'insieme dei numeri reali* $\mathbb{R}$. Parallelamente, si può costruire *uno spazio metrico completo* $(\mathbb{R}, d_1)$, a partire da $(\mathbb{Q}, d_1)$, con il metodo delle successioni di Cauchy di numeri razionali. Precisamente $(\mathbb{R}, d_1)$ sarà *completamento* dello spazio metrico incompleto $(\mathbb{Q}, d_1)$.

DEFINIZIONE 1. *Una successione di numeri razionali* (x_n) *si dice di Cauchy se, per ogni numero razionale positivo* $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ *esiste un numero naturale* $m \in \mathbb{N}$, *tale che risulti* $|x_p - x_q| < \varepsilon$ *per ogni* $p \geq m$ *e per ogni* $q \geq m$.

PROPOSIZIONE 1. *Una successione* (x_n) *di Cauchy di numeri razionali è limitata.*

DIM. Sia $m \in \mathbb{N}$ tali che $|x_p - x_q| < 1$ per $p, q \geq m$. Allora per $p \geq m$, $q = m$

$$x_m - 1 < x_p < x_m + 1\,.$$

Posto $a = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}\}$ e $b = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}\}$ si ha $a \leq x_p \leq b$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, da cui l'asserto.

Si ha la seguente

PROPOSIZIONE 2. *Una successione* (x_n) *monotòna e limitata di numeri razionali è di Cauchy.*

DIM. Siano a, $b \in \mathbb{Q}$ tali che

$$a \leq x_n \leq b \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e supponiamo che (x_n) sia *crescente.* Consideriamo una partizione di

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, a \leq x \leq b\}$$

mediante i punti razionali $a_i \in \mathbb{Q}$:

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$$

in modo che $|a_j - a_{j-1}| < \varepsilon$ per ogni $j = 1, \ldots, r$. Supposto che $[a_{r-1}, a_r]$ contenga qualche elemento di (x_n), allora l'insieme

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,:\, x_n \in [a_{r-1}, a_r]\}$$

è infinito. Posto

$$m = \min A$$

all'intervallo $[a_{r-1}, a_r]$ appartiene ogni èlemento x_n con $n \geq m$. Pertanto per $p \geq m$ e $q \geq m$ risulterà

$$x_p,\ x_q \in [a_{r-1}, a_r]$$

e cioè $|x_p - x_q| < \varepsilon$. Da cui l'asserto.

Diamo nel seguito le definizioni di successione di Cauchy *nulla*, *positiva* o *negativa.*

DEFINIZIONE 2. (di successione *nulla*) *Una successione di Cauchy* (x_n) *di numeri razionali si dice nulla, se per ogni* $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ *esiste* $m \in \mathbb{N}$ *tale che risulti*

$$|x_n| < \varepsilon\,, \qquad \forall\, n \geq m\,.$$

Utile è anche la seguente

DEFINIZIONE 3. (di successione *positiva* (o *negativa*)) *Una successione di Cauchy* (x_n) *si dice positiva (risp. negativa) se* $\exists\, r \in \mathbb{Q}^+$ *e* $\exists\, m \in \mathbb{N}$ *tali che risulti*

$$x_n > r \qquad (\text{risp.}\quad x_n < -r) \qquad \forall\, n \geq m\,.$$

PROPOSIZIONE 2. *Una successione di Cauchy* (x_n) *o è nulla, o è positiva, o è negativa.*

DIM. Se (x_n) non è nulla, allora $\exists\, \varepsilon_0 \in \mathbb{Q}^+$ ed esiste un'estratta (x_{m_k}) da (x_n), tale che

$$(1) \qquad |x_{m_k}| \geq \varepsilon_0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Infatti, se (x_n) non è nulla, esiste $\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}^+$ tale che $\forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq m$ tale che $|x_n| > \varepsilon_0$. Pertanto posto

$$m_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \,:\, |x_n| \geq \varepsilon_0\}$$

è non vuoto l'insieme

$$\{n \in \mathbb{N} \,:\, n > m_1 \text{ e } |x_n| \geq \varepsilon_0\}$$

per cui porremo

$$m_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \,:\, n > m_1 \text{ e } |x_n| \geq \varepsilon_0\}$$

analogamente definiremo $m_2, \ldots, m_k$ con

$$m_k = \min\{n \in \mathbb{N} \,:\, n > m_{k-1} \text{ e } |x_n| \geq \varepsilon_0\}\,.$$

Essendo strettamente crescente la successione di numeri naturali (m_k), si ha che (x_{m_k}) è estratta da x_n e sussiste la (1) ed allora si deve verificare *uno* dei seguenti due casi:

(i) $\exists$ un'estratta (x_{n_k}) da (x_n) tale che

$$x_{n_k} > \varepsilon_0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

(ii) $\exists$ un'estratta (x_{n_k}) da (x_n) tale che

$$x_{n_k} < -\varepsilon_0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Infatti, uno dei due insiemi

$$I_1 = \{k \in \mathbb{N} \,:\, x_{m_k} > \varepsilon_0\} \qquad I_2 = \{k \in \mathbb{N} \,:\, x_{m_k} < -\varepsilon_0\}$$

la cui unione è uguale a $\mathbb{N}$, deve essere infinito.

Supposta vera la (i), abbiamo trovato un'estratta x_{n_k} da x_n che sia una successione positiva.

Sfruttando la condizione di Cauchy verifichiamo che l'*intera successione* (x_n) *è positiva.*

Il fatto che (x_n) è di Cauchy, implica che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad \forall\, p,\, q \geq m\,.$$

Sia ora $k' \geq m$; allora $m_{k'} \geq k' \geq m$ per cui

$$x_{n_{k'}} - x_n < \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad \forall\, n \geq m$$

e ciò implica

$$x_n > x_{n_{k'}} - \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad \forall\, n \geq m\,;$$

dalla (2) segue allora

$$x_n > x_{n_{k'}} - \frac{\varepsilon_0}{2} > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}$$

$\forall\, n \geq m$ e cioè (x_n) è *positiva.*

2.29 Se (x_n) è una successione di Cauchy di numeri razionali, verificare che sono anche di Cauchy: la successione $(-x_n)$ e, se $x_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, la successione $(1/x_n)$.

2.30 Se (x_n) e (y_n) sono due successioni di Cauchy, verificare che sono di Cauchy anche $(x_n + y_n)$ e $(x_n y_n)$

[Dalla disuguaglianza

$$|(x_p + y_p) - (x_q + y_q)| \leq |x_p - x_q| + |y_p - y_q|$$

segue subito che $(x_n + y_n)$ è di Cauchy. Utilizzando la proprietà di limitatezza delle successioni di Cauchy e le disuguaglianze

$$|x_p y_p - x_q y_q| \leq |x_p y_p - x_p y_q| + |x_p y_q - x_q y_q| = |x_p||y_p - y_q| + |y_q||x_p - x_q|$$

si ricava che $(x_n y_n)$ è di Cauchy]

DEFINIZIONE 4. *Le due successioni di Cauchy (x_n) e (y_n) si dicono equivalenti se la successione $(x_n - y_n)$ è nulla, cioè se*

$$\lim_n |x_n - y_n| = 0\,.$$

2.31 Verificare che la relazione sopra definita è una relazione di equivalenza $\sim$ nell'insieme $\mathcal{C}$ delle successioni di Cauchy di numeri razionali, il cui insieme quoziente si indicherà con $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\sim$.

DEFINIZIONE 5. *Siano $x,\ y \in \mathbb{R} = \mathcal{C}/\sim$, allora diremo che x è minore o uguale a y, e scriveremo $x \leq y$ se esistono un rappresentante (x_n) di x ed uno (y_n) di y tali che la successione $(x_n - y_n)$ sia negativa o nulla.*

2.32 Dimostrare che, se $x,\ y \in \mathbb{R} = \mathcal{C}/\sim$ verificano $x \leq y$, la successione $(x_n - y_n)$ è negativa o nulla, qualunque sia il rappresentante (x_n) di x e il rappresentante (y_n) di y.

DEFINIZIONE 6. *Siano $x,\ y \in \mathbb{R} = \mathcal{C}/\sim$. Si chiama somma (risp. prodotto) di x e y e si indica con $x + y$ (risp. $x \cdot y$) l'elemento di $\mathbb{R}$ rappresentato dalla successione $(x_n + y_n)$ (risp. $(x_n \cdot y_n)$) ove $(x_n) \in x$ e $(y_n) \in y$.*

2.33 Con le notazioni degli esercizi precedenti, se $x,\ y \in \mathbb{R} = \mathcal{C}/\sim$, verificare che, se (x_n) e $(x'_n) \in x$ e se (y_n) e $(y'_n) \in y$ allora le successioni $(x_n + y_n)$ e $(x'_n + y'_n)$ sono equivalenti. Analogo risultato vale per il prodotto.

Si dimostra che la struttura algebrica ordinata $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è un campo ordinato *completo*. In essa lo zero è l'elemento di $\mathbb{R}$ costituito dalle successioni nulle, l'unità è l'elemento di $\mathbb{R}$ rappresentato dalla successione $(1, 1, 1, \ldots)$ i cui elementi sono tutti uguali ad 1. Qui *completo* vuol dire che ogni parte superiormente limitata è dotata di estremo superiore.

2.34 Indicato con Q' l'insieme degli elementi di $\mathbb{R}$ rappresentati da successioni costanti, verificare che esso è stabile rispetto all'addizione e alla moltiplicazione.

2.35 Sia i l'applicazione dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali nell'insieme $\mathbb{Q}'$

$$i \,:\, r \in \mathbb{Q} \to (r, r, r, \ldots)$$

che ad ogni numero razionale $r \in \mathbb{Q}$ associa la successione costante i cui elementi coincidono con r.

Verificare che i è un isomorfismo tra il campo ordinato dei numeri razionali e il campo ordinato $(\mathbb{Q}', +, \cdot, \leq)$ che prende il nome di *sottocampo razionale* del campo $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$.

Tenendo conto di quanto espresso dall'esercizio 2.34 si dice anche $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è il completamento *del campo* non completo $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$. Faremo vedere che si può parlare anche di completamento *dello spazio metrico* non completo $(\mathbb{Q}, d_1)$ ove $d_1(x, y) = |x - y|$ per x, $y \in \mathbb{Q}$.

2.36 Per x, $y \in \mathbb{R}$, se $(x_n) \in x$ e $(y_n) \in y$ definiamo

$$d(x, y) = \lim_n |x_n - y_n| \tag{3}$$

si verifichi che d è una *metrica* su $\mathbb{R}$.

2.37 Mostrare che per ogni coppia di successioni di Cauchy (x_n) e (y_n) di numeri razionali esiste il limite al secondo membro di (3).

[Si ha subito per p, $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n - y_n| \leq |x_n - x_p| + |x_p - y_p| + |y_p - y_n|$$

da cui

$$|x_n - y_n| - |x_p - y_p| \leq |x_n - x_p| + |y_p - y_n|$$

e permutando gli indici n e p

$$||x_p - y_p| - |x_n - y_n|| \leq |x_n - x_p| + |y_p - y_n| \,. \tag{4}$$

Essendo di Cauchy le successioni (x_n) e (y_n), dalla (4) segue che per ogni $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x_n - x_p| + |y_p - y_n| < \varepsilon$$

per ogni $p \geq m$ e per ogni $n \geq m$ da cui la successione di numeri reali

$$a_n = |x_n - y_n|$$

verifica

$$|a_p - a_n| < \varepsilon$$

per p, $n \geq m$. Pertanto (a_n) è di Cauchy e dunque converge]

Si può dimostrare che la def. (3) è indipendente dalla scelta delle successioni (x_n) e (y_n) nelle corrispondenti classi di equivalenza. Si dimostra che la funzione d in (3) definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e a valori in $[0, +\infty[$ soddisfa gli assiomi della metrica e $(\mathbb{R}, d)$ è completo come spazio metrico.

2D. Spazi metrici compatti

Uno spazio metrico (X, d) si dice *compatto* se da ogni successione di punti di X se ne può estrarre una convergente verso un punto di X.

Poichè da ogni successione limitata di numeri reali se ne può estrarre una convergente, allora un sottoinsieme chiuso e limitato Y di $\mathbb{R}$, munito della metrica indotta da quella euclidea, è uno spazio metrico compatto.

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in X.

Si dice che f è *continua* in $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ con $d(x, x_0) < \delta$, risulti $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si dice che f è *continua in* X se f è continua in ogni punto $x_0 \in X$.

Si dice che f *è uniformemente continua* in X se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Sussistono i seguenti notevoli teoremi.

TEOREMA 1. *Se (X, d) è uno spazio metrico compatto, allora esso è completo.*

TEOREMA 2 (di Weierstrass). *Se (X, d) è uno spazio metrico compatto e $f : X \to \mathbb{R}$ è continua, allora f ha massimo e minimo in X.*

TEOREMA 3 (di Cantor). *Se (X, d) è uno spazio metrico compatto e $f : X \to \mathbb{R}$ è continua, allora f è uniformemente continua.*

Uno spazio metrico (X, d) risulta *separato (o di Hausdorff)*, cioè, due punti distinti di X ammettono sempre almeno due intorni disgiunti.

Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme Y di X si dice *compatto* se, munito della topologia indotta da d, esso risulta uno spazio metrico compatto.

Un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.

Si dimostra, infine, che *un sottoinsieme Y dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se Y è chiuso e limitato.*

2.38 Verificare che, se (X, d) è uno spazio metrico e $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione reale, allora f è continua in X se e solo se $x_n \to x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x)$.

2.39 Verificare che, se (X, d) è uno spazio metrico e $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione reale, allora f è uniformemente continua se e solo se, per ogni coppia x_n, y_n di successioni di punti di X tali che $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$, si ha $\lim_n |f(x_n) - f(y_n)| = 0$.

[Ved. l'esercizio 9.31 del vol. I, parte prima]

2.40 Sia (X, d) uno spazio metrico. Fissato $x_0 \in X$, verificare che la funzione $x \in X \to d(x, x_0)$ è uniformemente continua su X.

[Proviamo preliminarmente la disuguaglianza

$$|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \le d(x, y)\,, \qquad \forall\, x,\, y \in X.$$

Dalla disuguaglianza triangolare deduciamo che

$$d(x, x_0) \le d(x, y) + d(y, x_0) \quad \Rightarrow \quad d(x, x_0) - d(y, x_0) \le d(x, y)\,;$$

$$d(y, x_0) \le d(y, x) + d(x, x_0) \quad \Rightarrow \quad d(y, x_0) - d(x, x_0) \le d(y, x)\,.$$

La disuguaglianza iniziale segue dalla definizione di valore assoluto e dalla proprietà della distanza $d(x, y) = d(y, x)$. La verifica della continuità uniforme la si fà con $\delta = \varepsilon$]

2.41 Dimostrare che uno spazio metrico compatto (X, d) è anche completo (teorema 1).

[Sia x_n una successione di Cauchy. Poichè X è compatto, esiste un'estratta da x_n convergente verso un punto di X. L'asserto segue allora dall'esercizio 2.19]

2.42 Dimostrare che un sottoinsieme Y compatto di uno spazio metrico (X, d) è limitato.

[Se Y non fosse limitato, esisterebbero due successioni x_n, y_n di punti di Y tali che $\lim_n d(x_n, y_n) = +\infty$. Poichè Y è compatto, da tali successioni se ne potrebbero estrarre due x_{n_k} e y_{n_k}, convergenti rispettivamente verso i punti x, $y \in Y$. Essendo, come si verifica facilmente,

$$|d(x, y) - d(x_{n_k}, y_{n_k})| \le d(x, x_{n_k}) + d(y, y_{n_k}),$$

si avrebbe $\lim_k d(x_{n_k}, y_{n_k}) = d(x, y)$, il che è assurdo]

2.43 Sia Y il sottoinsieme dello spazio l_∞ definito da $Y = \{x \in l_\infty : d(x, 0) \leq 1\}$ ove $d(x, y)$ è definita come nell'eserc. 2.10 e $0 = (0, 0, 0, \ldots)$. Verificare che Y non è compatto.

[La successione di punti di Y

$$x_1 = (1, 0, 0, \ldots), \qquad x_2 = (0, 1, 0, \ldots), \qquad x_3 = (0, 0, 1, \ldots),$$

cioè la successione $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots)$ definita da $x_{ki} = \delta_{ki}$, non ammette estratte convergenti, in quanto per $k \neq h$ si ha

$$d(x_h, x_k) = \sup_n |x_{hn} - x_{kn}| = 1]$$

2.44 Dimostrare che lo spazio $C([0, 1])$ non è compatto rispetto alla convergenza uniforme.

[La successione $u_n(x) = x^n$ per $x \in [0, 1]$ non ammette alcuna estratta convergente uniformemente, in quanto una qualsiasi estratta puntualmente convergente, converge necessariamente verso la funzione discontinua $u(x) = 0$ per $x \in [0, 1)$, $u(1) = 1$]

2.45 Una famiglia Y di funzioni appartenenti a $C^0([a, b])$ si dice *equicontinua* se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tale che per x, $y \in [a, b]$

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |u(x) - u(y)| < \varepsilon \qquad\qquad \forall\, u \in Y.$$

Dimostrare che una famiglia $Y \subset C^0([a, b])$ equicontinua ed equilimitata è compatta in $C^0([a, b])$.

[Basta invocare il teorema di Ascoli-Arzelà]

2.46 Sia (X, d) uno spazio metrico compatto, sia $x_0 \in X$ e sia x_n una successione di punti di X. Se ogni estratta da x_n convergente, converge verso x_0, allora $x_n \to x_0$.

[Se x_n non convergesse verso x_0, esisterebbe $\varepsilon > 0$ ed un'estratta x_{n_k} da x_n tale che $d(x_0, x_{n_k}) \geq \varepsilon$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Poichè X è compatto, x_{n_k} ha un'estratta $x_{n_{k_h}}$ convergente verso un punto x. Dall'ipotesi, segue che necessariamente $x_0 = x$ e cioè $x_{n_{k_h}} \to x_0$. Il che è assurdo, in quanto $d(x_0, x_{n_{k_h}}) \geq \varepsilon$, per ogni $h \in \mathbb{N}$]

2.47 Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Verificare che se x_n è una successione di Cauchy di punti di X, allora $f(x_n)$ è una successione di Cauchy di numeri reali.

[Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Poichè x_n è di Cauchy, in corrispondenza di δ, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per p, $q > \nu$, si ha $d(x_p, x_q) < \delta$ ed anche $|f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon$]

2E. Spazi normati

Sia X uno spazio vettoriale. Una funzione che ad ogni $x \in X$ associa il numero reale $||x||$ si chiama *norma* su X se ha le seguenti proprietà:

(j) $\quad \|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \quad$ se e solo se $x = 0$

(jj) $\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in X$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(jjj) $\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Se $\| \ \|$ è una norma su X, si dice che $(X, \| \ \|)$ è uno *spazio normato*, o anche che X è uno spazio normato, quando non vi sarà possibilità di equivoco. Dato uno spazio normato $(X, \| \ \|)$, ponendo $d(x, y) = \|x - y\|$ si ha una distanza su X, per cui ogni spazio normato è anche metrico. Se (X, d) è completo, si dice che X è uno *spazio di Banach.*

Due norme $\| \ \|_1$ e $\| \ \|_2$ sullo spazio vettoriale X si dicono *equivalenti* se esistono due costanti c_1, $c_2 > 0$ tali che

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \qquad \forall x \in X.$$

Per indicare che la successione x_n di punti dello spazio normato $(X, \| \ \|)$ converge verso il punto $x \in X$, cioè per indicare che $\|x_n - x\| \to 0$, scriveremo $x_n \to x$.

Evidentemente, se due norme sono equivalenti, esse determinano le stesse successioni convergenti.

Nello spazio $\mathbb{R}^n$ la norma

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \tag{1}$$

prende il nome di *norma euclidea.*

Se X è uno spazio normato, una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ verificante le proprietà

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in X$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in X, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

prende il nome di *funzionale lineare* su X.

2.48 Sia X uno spazio normato e siano λ_n, $\lambda \in \mathbb{R}$; x_n, y_n, x, $y \in X$. Dimostrare che se $\lambda_n \to \lambda$, $x_n \to x$, $y_n \to y$, allora si ha: $x_n + y_n \to x + y$, $\lambda x_n \to \lambda x$, $\lambda_n x \to \lambda x$.

[Dagli assiomi della norma, segue $\|(x+y) - (x_n + y_n)\| \leq \|x - x_n\| + \|y - y_n\|$; $\|\lambda x - \lambda x_n\| = |\lambda| \ \|x - x_n\|$; $\|\lambda_n x - \lambda x\| = |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\|$]

2.49 Sia X uno spazio normato. Dimostrare che, per x, $y \in X$, risulta $|\,\|x\| - \|y\|\,| \le \|x-y\|$. Dedurne che, se $x_n \to x$, allora $\|x_n\| \to \|x\|$.

[Dalla disuguaglianza (jjj) segue $\|x\| = \|(x-y)+y\| \le \|x-y\| + \|y\|$ scambiando x con y si ottiene la disuguaglianza richiesta]

2.50 Sia $C^0([a,b])$ l'insieme delle funzioni reali continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.
Posto, per $u \in C^0([a,b])$

$$\|u\|_\infty = \sup\{|u(x)| : \ x \in [a,b]\}$$

verificare che $\| \ \|_\infty$ è una norma, rispetto alla quale $C^0([a,b])$ è uno spazio di Banach.

[La (jj) è evidente. Si veda l'esercizio 2.11 per la (j) e la (jjj). Che lo spazio sia di Banach segue dal teorema 2 del paragrafo 1A e dell'eser. 2.22]

2.51 Sia X uno spazio normato e sia $f : X \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare su X. Dimostrare che f è continua se e solo se $\exists\, k \ge 0$ tale che

$$(*) \qquad |f(x)| \le k\|x\| \qquad \forall\, x \in X.$$

[Se vale la (*), allora per la linearità di f, si ha $|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \le k\|x_n - x\|$, per cui, se $x_n \to x$, allora è $f(x_n) \to f(x)$.

Viceversa sia f continua e supponiamo per assurdo che non valga la (*). Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in X - \{0\}$ tale che $|f(x_n)| \ge n\|x_n\|$. Posto $y_n = x_n/(n \cdot \|x_n\|)$, si ha $\|y_n\| = 1/n \to 0$ e perciò $y_n \to 0$. Poichè f è continua, dovrebbe essere $f(y_n) \to f(0) = 0$ il che contrasta con la disuguaglianza

$$f(y_n) = f\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right) = \frac{1}{n\|x_n\|} f(x_n) \ge 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ ]$$

2.52 Sia $a \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo il funzionale $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i$ ove $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Verificare che esso è un funzionale lineare continuo sullo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

[Tenendo presente la definizione (1) della norma euclidea su $\mathbb{R}$ e l'esercizio 2.2 si ha

$$|f(x)| \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Applicando l'esercizio precedente, si ha l'asserto]

2.53 Per $u \in C^0([a,b])$ poniamo

$$I(u) = \int_a^b u(x)\, dx \ ;$$

verificare che I è un funzionale lineare continuo su $C^0([a,b])$ munito della norma $\|u\| = \max\{|u(x)| : \ a \le x \le b\}$

[Tenendo presente l'esercizio 2.41, basta osservare che, per il teorema della media, $\forall u \in C^0([a,b])$ si ha $|I(u)| = \left|\int_a^b u(x)\, dx\right| \le (b-a)\cdot \|u\|$]

2.54 Consideriamo l'insieme $C^0([a,b])$ delle funzioni continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Posto per $p \ge 1$, $u \in C^0([a,b])$

$$\|u\|_p = \left(\int_a^b |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p},$$

verificare che è $\| \ \|_p$ è una norma.

[Per verificare che $\|u\|_p = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$, si tenga presente l'esercizio 5.4 del vol. I, parte seconda. La condizione (jj) è evidente. La condizione (jjj) diviene

$$\left(\int_a^b |u(x)+v(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |v(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

e prende il nome di *disuguaglianza di Minkowski.* Dimostriamola. Si ha

$$\int_a^b |u(x)+v(x)|^p\, dx = \int_a^b |u(x)+v(x)|^{p-1}|u(x)+v(x)|\, dx \le$$

$$\le \int_a^b |u(x)+v(x)|^{p-1}|u(x)|\, dx + \int_a^b |u(x)+v(x)|^{p-1}|v(x)|\, dx.$$

Dalla disuguaglianza di Hölder (ved. l'eserc. 5.97 del vol. I, parte seconda, con $g(x) = |u(x)+v(x)|^{p-1}$ e $f(x) = u(x)$, oppure $f(x) = v(x)$, $(1/p) + (1/q) = 1$) si deduce

$$\int_a^b |u(x)+v(x)|^{p-1}|u(x)|\, dx \le \left[\int_a^b (|u(x)+v(x)|^{p-1})^q\, dx\right]^{1/q} \left[\int_a^b |u(x)|^p\, dx\right]^{1/p}$$

ed anche

$$\int_a^b |u(x)+v(x)|^{p-1}|v(x)|\, dx \le \left[\int_a^b (|u(x)+v(x)|^{p-1})^q\, dx\right]^{1/q} \left[\int_a^b |v(x)|^p\, dx\right]^{1/p}$$

Dalle precedenti disuguaglianze, osservando che $(p-1)q = p$, segue

$$\int_a^b |u(x)+v(x)|^p\, dx \le$$

$$\left[\int_a^b |u(x)+v(x)|^p\, dx\right]^{1/q} \left[\left(\int_a^b |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |v(x)|^p\, dx\right)^{1/p}\right]$$

Dividendo ambo i membri per il primo fattore a secondo membro ed osservando che $1 - (1/q) = 1/p$, segue l'asserto]

2.55 Verificare che per $0 < \alpha < 1$ se $u,\ v \in C^0([a,b])$, si ha

$$\left(\int_a^b |u|^\alpha\,dx\right)^{1/\alpha} + \left(\int_a^b |v|^\alpha\,dx\right)^{1/\alpha} \le \left(\int_a^b |u+v|^\alpha\,dx\right)^{1/\alpha}$$

[Posto $f = |u|^\alpha$, $g = |v|^\alpha$, $p = \dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$, verifichiamo che

$$\left(\int_a^b f\,dx\right)^p + \left(\int_a^b g\,dx\right)^p \le \left[\int_a^b (f^p+g^p)^{1/p}\,dx\right]^p .$$

Posto $\lambda = \displaystyle\int_a^b f\,dx$, $\mu = \displaystyle\int_a^b g\,dx$, si ha

$$\lambda^p + \mu^p = \int_a^b (\lambda^{p-1}f + \mu^{p-1}g)\,dx \le \int_a^b (\lambda^p+\mu^p)^{1/p'}(f^p+g^p)^{1/p}\,dx =$$

$$= (\lambda^p+\mu^p)^{1/p'}\int_a^b (f^p+g^p)^{1/p}\,dx .$$

Ne segue che $(\lambda^p+\mu^p)^{1/p} \le \displaystyle\int_a^b (f^p+g^p)^{1/p}\,dx$, cioè la tesi]

2.56 Lo spazio $C^0([a,b])$, munito della norma $\|\ \|_p$ definita nell'esercizio precedente, non è uno spazio di Banach. Verificare ciò per $p = 1$, facendo vedere che la successione $u_k(x) = x^{1/(2k-1)}$ è di Cauchy in $C^0([-1,1])$, ma non converge, rispetto alla norma $\|\ \|_1$, verso una funzione di $C^0([-1,1])$.

[Per $h,\ k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\|u_h - u_k\|_1 = \int_{-1}^1 |u_h(x)-u_k(x)|\,dx = \int_{-1}^0 |u_h(x)-u_k(x)|\,dx + \int_0^1 |u_h(x)-u_k(x)|\,dx .$$

Con la sostituzione $x = -y$ si ha

$$\int_{-1}^0 |u_h(x)-u_k(x)|\,dx = \int_0^1 |u_h(y)-u_k(y)|\,dy$$

e perciò

$$\|u_h - u_k\| = 2\int_0^1 |u_h-u_k|\,dx = 2\int_0^1 |(u_h-1)-(1-u_k)|\,dx \le$$

$$\le 2\left[\int_0^1 |u_h-1|\,dx + \int_0^1 |u_k-1|\,dx\right] .$$

Essendo per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 |u_m(x) - 1|\, dx = \int_0^1 [1 - x^{1/(2m-1)}]\, dx = \frac{1}{2m}$$

dalle precedenti disuguaglianze segue

$$\|u_h - u_k\|_1 \leq 2(\frac{1}{2h} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{h} + \frac{1}{k}$$

e perciò la successione u_k è di Cauchy. Supponiamo ora, per assurdo, che u_k converga ad una funzione $u \in C^0([-1,1])$ rispetto alla nonna $\|\cdot\|_1$. Tenendo presente il risultato dell'integrale precedente abbiamo

$$\int_0^1 |u(x) - 1|\, dx \leq \int_0^1 (|u - u_k| + |u_k - 1|)\, dx \leq \frac{1}{2k}) + \|u_k - u\|_1 \,.$$

Per $k \to +\infty$ otteniamo $\int_0^1 |u(x) - 1|\, dx = 0$; per l'ipotesi di continuità di u, risulta $u(x) = 1$ per ogni $x \in [0,1]$ (si veda l'esercizio 5.4 del volume I, parte seconda). Per motivi analoghi si vede che deve essere $u(x) = -1$ per ogni $x < 0$. Ciò contrasta con l'ipotesi di continuità di $u(x)$ in $[-1,1]$]

2.57 Sia $\| \; \|_p$ la norma definita su $C^0([a,b])$ nell'esercizio 2.44. Posto

$$\|u\| = \lim_{p \to +\infty} \|u\|_p$$

verificare che $\|u\| = \max\{|u(x)| : \ x \in [a,b]\}$.

[Si tenga presente l'es. 5.99 del vol. I, parte seconda]

2.58 Posto per $u \in C^0([0,2])$

$$\|u\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| + \int_1^2 |u(x)|\, dx$$

dire se $\| \; \|$ è una norma in $C^0([0,2])$

[Se $\|u\| = 0$, allora $\sup\{|u(x)| : \ 0 \leq x \leq 1\} = 0$ e $\int_1^2 |u(x)|\, dx = 0$, perciò risulta $u(x) = 0$ per $x \in [0,2]$. La condizione (jj) è di facile verifica. Per dimostrare la (jjj) si osservi che

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) + v(x)| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |v(x)|$$

(ved. l'eserc. 1.48 del vol. I, parte prima) e che

$$\int_1^2 |u(x) + v(x)|\, dx \leq \int_1^2 [|u(x)| + |v(x)|]\, dx$$

]

2.59 Si consideri su $C^0([0,1])$ la norma $\|u\|_p$ definita per ogni $p \geq 1$ nell'esercizio 2.44. Si consideri anche la successione di $C^0([0,1])$:

$$u_n(x) = \sqrt{n}\, x^n, \qquad \forall\, x \in [0,1],\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(a) Verificare che u_n converge verso la funzione identicamente nulla $u = 0 \in C^0([0,1])$ rispetto alla norma $\|u\|_1$.

(b) Verificare che u_n non converge verso $u = 0$ rispetto alla norma $\|u\|_2$.

[(a) $\|u_n - u\|_1 = \int_0^1 |\sqrt{n}x^n|\, dx = \sqrt{n}\int_0^1 x^n\, dx = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$; perciò

$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$;
(b) invece si ha:

$$\|u_n - u\|_2 = \{\int_0^1 |\sqrt{n}x^n|^2\, dx\}^{1/2} = \{n\int_0^1 x^{2n}\, dx\}^{1/2} = \frac{n}{2n+1}$$

e tale quantità non converge a zero per $n \to +\infty$]

2.60 Generalizzando l'esercizio precedente, verificare che la successione u_n in $C^0([0,1])$ definita da

$$u_n(x) = n^{1/q} x^n$$

(con $q > 1$) converge per $n \to +\infty$ verso la funzione $u = 0$ rispetto alla norma $\|u\|_p$ se e solo se $p < q$.

[$\|u_n\|_p = \{\int_0^1 |n^{1/q}x^n|^p\, dx\}^{1/p} = n^{1/q}\{\int_0^1 x^{np}\, dx\}^{1/p} = n^{(1/q)-(1/p)}\{\frac{1}{p+(1/n)}\}^{1/p}$

e tale quantità converge verso zero se e solo se risulta $(1/q) - (1/p) < 0$ cioè, se e solo se $p < q$]

Capitolo 3

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

3A. Rappresentazione grafica

In questo capitolo prendiamo in considerazione funzioni reali di n variabili reali, che denotiamo con il simbolo

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

In particolare consideriamo $n = 2$; in tal caso diremo che f è una funzione reale di due variabili reali e useremo indifferentemente le notazioni

$$f(x_1, x_2) \qquad\qquad \text{oppure} \qquad\qquad f(x, y)\,;$$

naturalmente nel primo caso le due variabili indipendenti sono x_1, x_2, mentre nel secondo caso sono x, y.

Rimandiamo invece la trattazione delle funzioni di tre o più variabili all'ultimo paragrafo di questo capitolo.

Per rappresentare graficamente una funzione di due variabili si può procedere in due modi. Un primo metodo consiste nel rappresentare i punti di coordinate $(x,\ y,\ f(x,y))$ in un riferimento cartesiano ortogonale di assi x, y, z, ottenendo una superficie in $\mathbb{R}^3$ detta *grafico della funzione* $f(x,y)$.

Un secondo metodo consiste nel disegnare nel piano x, y le *linee di livello* della funzione $f(x,y)$, cioè il luogo dei punti di coordinate (x,y) tali che

$$f(x,y) = z\text{=costante},$$

per diversi valori della costante. Questo metodo si utilizza usualmente per rappresentare una zona geografica su di una carta topografica; in tal caso la linea di livello $z = 0$ (livello del mare) rappresenta la costa, le linee di livello

z =costante > 0 rappresentano i punti al di sopra del livello del mare ad altezza fissata, mentre le linee di livello z =costante < 0 danno una rappresentazione del fondo del mare.

Di seguito proponiamo alcuni esempi.

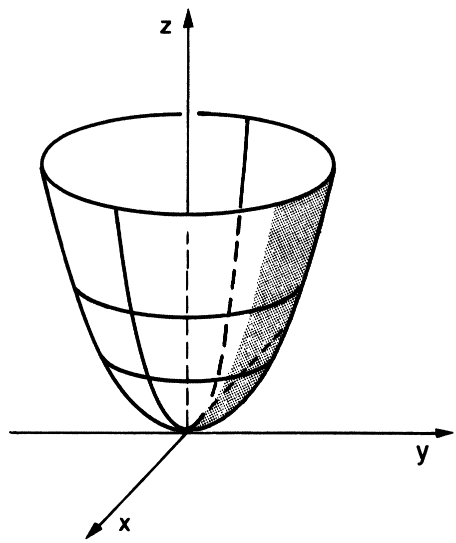

figura 3.1

3.1 Si consideri la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$. Verificare che il grafico di f è un paraboloide come in figura 3.1 e che le linee di livello di f si rappresentano in un riferimento cartesiano ortogonale di assi x, y come nelle figure 3.2(a) e 3.2(b).

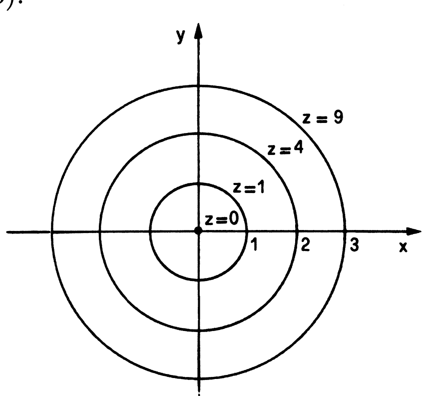

figura 3.2 (a)

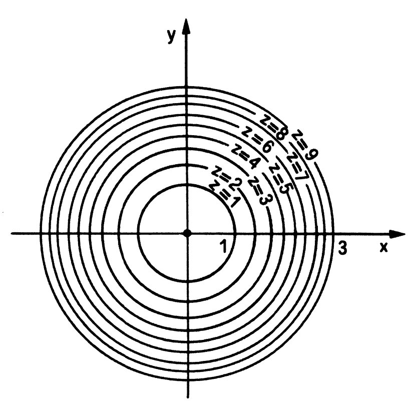

figura 3.2 (b)

3.2 Disegnare il grafico e le linee di livello della funzione di due variabili $f(x,y) = y^2 - x^2$.

[Il grafico è in figura 3.3. Le linee di livello $y^2 - x^2 = z$ costante sono iperboli equilatere, se $z \neq 0$. Mentre, se $z = 0$, il luogo dei punti di coordinate (x, y) tali che $y^2 - x^2 = 0$ è costituito dalle due rette di equazione $y = \pm x$. Si veda la figura 3.4]

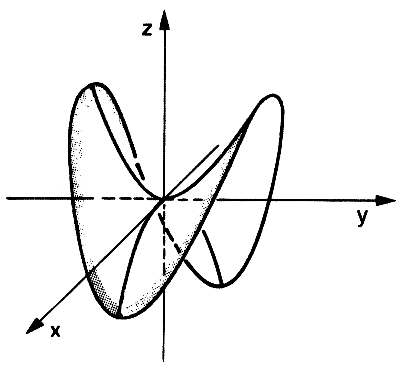

figura 3.3

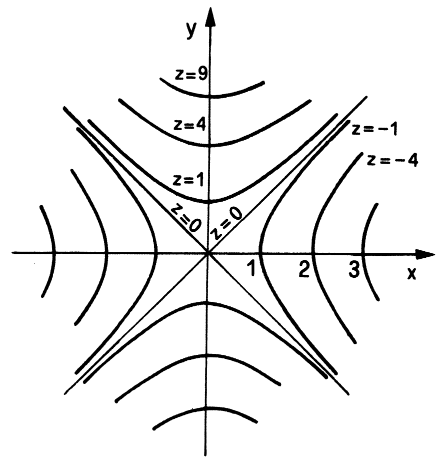

figura 3.4

3.3 Disegnare approssimativamente e, limitatamente alle coppie (x, y) per cui $f(x, y) \geq 0$, il grafico delle funzioni

(a) $\quad f(x,y) = y^2 - x^2$ $\qquad\qquad$ (*b*) $\quad f(x,y) = x^2 - y^2$

[(a) Il grafico di $f(x, y)$ in un intorno dell'origine è disegnato in figura 3.3 e, limitatamente alle coppie (x, y) per cui $f(x, y) \geq 0$, in figura 3.5; (b) figura 3.6]

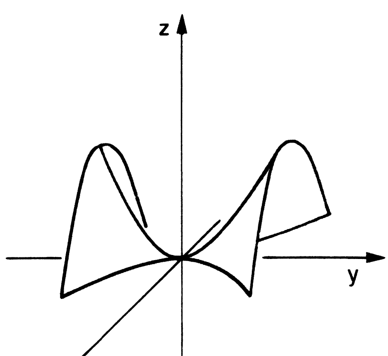

figura 3.5

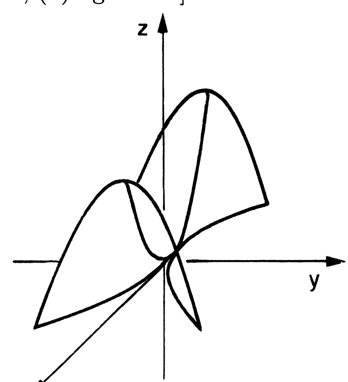

figura 3.6

3.4 Disegnare approssimativamente e limitatamente alle coppie (x, y) per cui $f(x, y) \geq 0$ il grafico della funzione $f(x, y) = \operatorname{sen} x$. Determinare inoltre le linee di livello.

[La funzione $f(x, y)$ dipende esplicitamente dalla sola variabile x. Come tutte le funzioni costanti rispetto ad y (e definite per ogni $x \in \mathbb{R}$), le linee di livello sono rette parallele all'asse y. Il grafico della parte positiva di $f(x, y)$ è disegnato in figura 3.7]

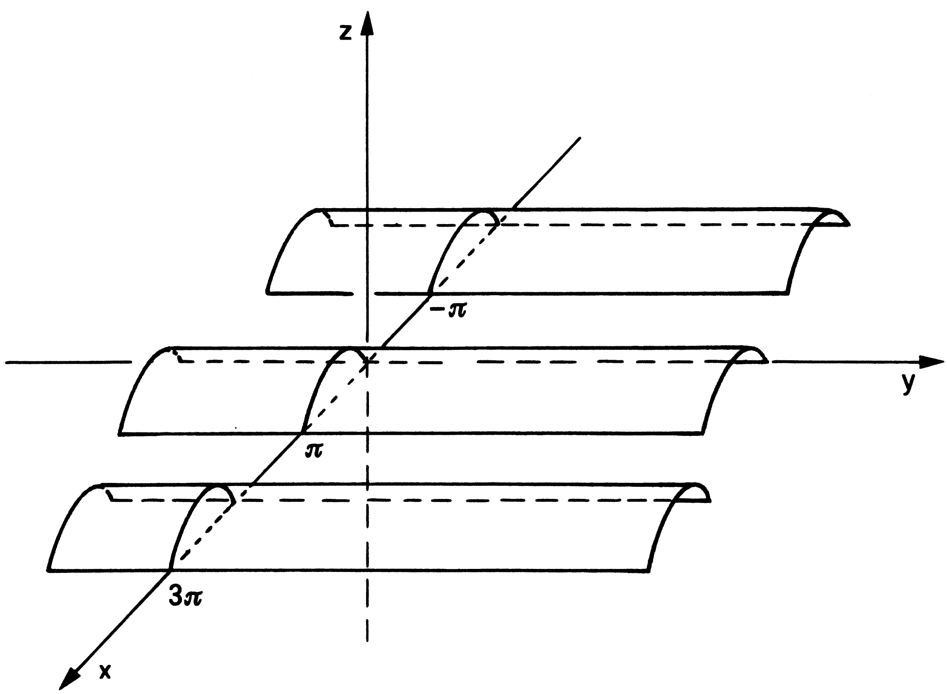

figura 3.7

3.5 Disegnare il grafico della funzione $f(x, y) = x^2 - x^3$

[Figura 3.8]

3.6 Disegnare il grafico della funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

[Per $y = 0$ risulta $f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$. Analogamente, per $x = 0$, risulta $f(0, y) = |y|$. Il grafico di $f(x, y)$ si ottiene facendo ruotare intorno all'asse z il grafico della funzione di una variabile reale $x \to |x|$. Si ottiene un cono circolare retto (con $z \geq 0$), come in figura 3.9]

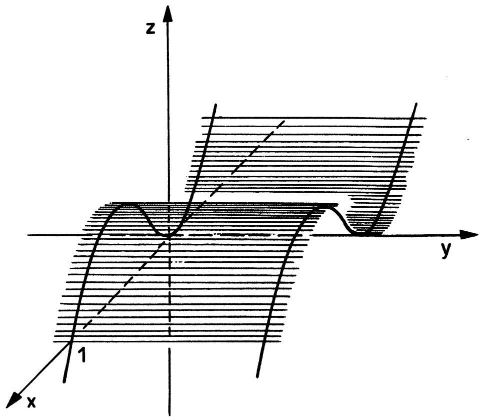

figura 3.8

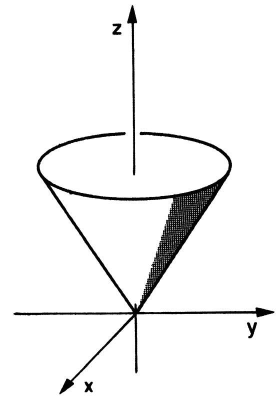

figura 3.9

3.7 Determinare le linee di livello e disegnare per $x \geq 0$, $y \geq 0$ i grafici delle funzioni

$$\text{(a)} \quad z = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \qquad\qquad (b) \quad z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

[Le funzioni date non sono definite nell'origine degli assi. Le linee di livello sono costituite dalle semirette passanti per l'origine. La funzione in (a) è maggiore od uguale a zero per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$. Il minimo di $f(x, y)$ si ottiene per $y = 0$ e vale 0; il massimo si ottiene per $x = 0$ e vale 1. Il grafico della funzione in (a) è in figura 3.10; in particolare per $x = y$ la funzione vale $1/2$. La funzione in (b) assume il valore 0 in corrispondenza dei punti (x, y) tali che $x = 0$ (e $y \neq 0$), oppure tali che $y = 0$ (e $x \neq 0$). Il massimo di $f(x, y)$ si ottiene in corrispondenza della retta di equazione $y = x$ e vale $z = 1/2$ (il minimo di $f(x, y)$ vale $-1/2$ ed è assunto sulla retta di equazione $y = -x$). Il grafico è in figura 3.11]

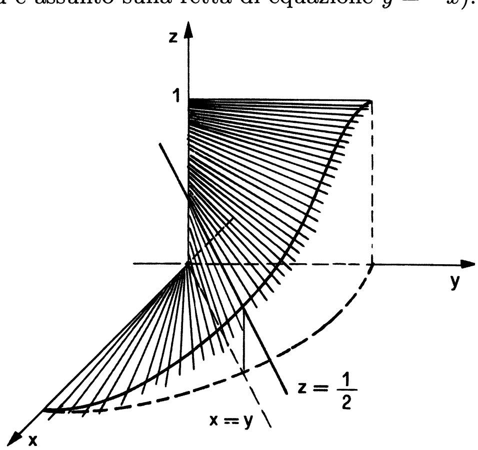

figura 3.10

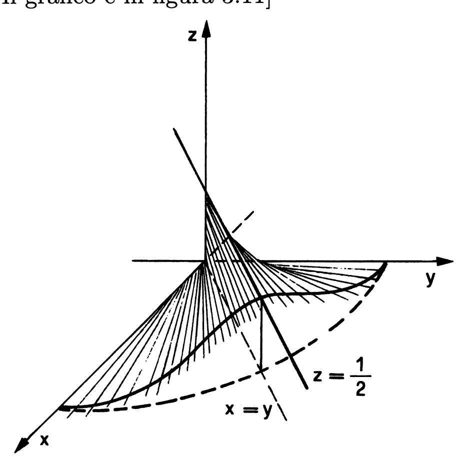

figura 3.11

3.8 Disegnare il grafico della funzione $z = e^{-(x^2+y^2)}$.

[La funzione è definita e positiva per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il massimo su $\mathbb{R}^2$ è assunto per $(x, y) = (0, 0)$ e vale $z = 1$. Il grafico è in figura 3.12]

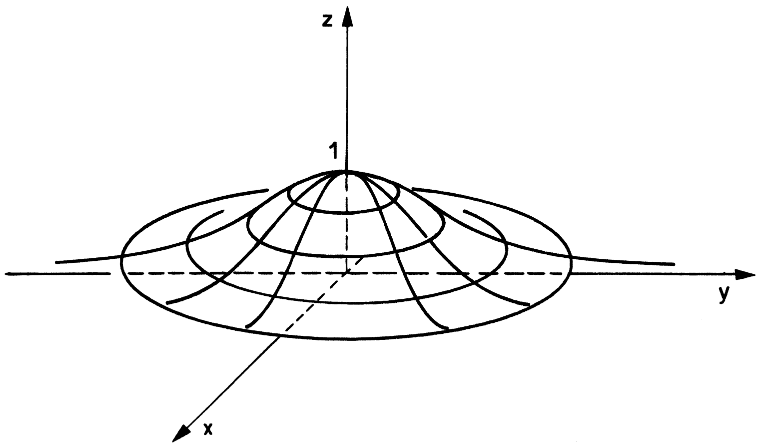

figura 3.12

3B. Insiemi di definizione

Di seguito proponiamo la determinazione dell'*insieme di definizione*, o *campo di esistenza*, o *dominio*, di una assegnata funzione di due variabili reali.

3.9 Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni

(a) $z = \log(1 - x^2 - y^2)$ $\quad$ (*b*) $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

(c) $z = \log(x^2 + y^2 - 1)$ $\quad$ (*d*) $z = \sqrt{-|x^2 + y^2 - 2|}$

(e) $z = \log(x^2 + y^2)$ $\quad$ (*f*) $z = (x^2 + y^2)^{-1}$

[(a) La funzione è definita se $1 - x^2 - y^2 > 0$, cioè se $x^2 + y^2 < 1$, che è il luogo geometrico dei punti del piano x, y interni al cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1 (circonferenza esclusa); (b) la funzione è definita nei punti del cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$ (circonferenza inclusa); (c) la funzione è definita all'esterno del cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1 (circonferenza esclusa); (d) la funzione è definita solo se $x^2 + y^2 - 2 = 0$, cioè sulla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$; (e), (f) definite se $(x, y) \neq (0, 0)$]

3.10 Rappresentare graficamente in un piano cartesiano x, y gli insiemi di definizione delle funzioni

(a) $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4}$ $\quad$ (*b*) $f(x, y) = \sqrt{x^4 - y^2}$

[(a) La funzione è definita per ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per cui $y^2 - x^4 \geq 0$ cioè $y^2 \geq x^4$, cioè ancora $y \geq x^2$ oppure $y \leq -x^2$. Si ottiene l'insieme dei punti del piano x, y al di sopra della parabola di equazione $y = x^2$ e al di sotto della parabola di equazione $y = -x^2$, tratteggiato in figura 3.13. Ad esempio, si verifichi come riprova, ponendo $x = 0$, che la funzione è definita su tutti i punti dell'asse y. (b) Il dominio è costituito dall'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -x^2 \leq y \leq x^2\},$$

rappresentato con tratteggio in figura 3.14]

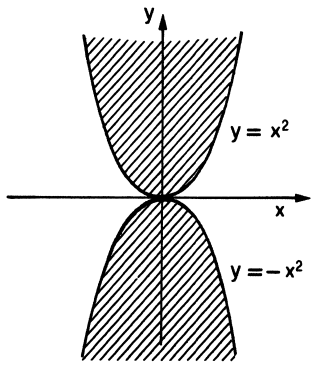

figura 3.13

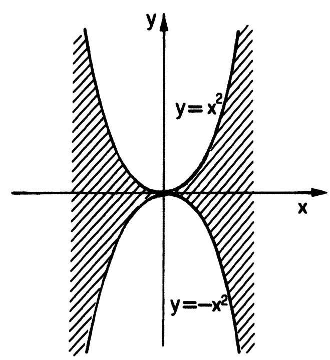

figura 3.14

3.11 Rappresentare graficamente l'insieme di definizione delle funzioni

(a) $\quad z = \log(1 - x^2) + \log(1 - y^2)$ $\qquad$ (*b*) $\quad z = \log \dfrac{1 - x^2}{1 - y^2}$

(c) $\quad z = \log(x^2 - 1) + \log(1 - y^2)$ $\qquad$ (*d*) $\quad z = \log \dfrac{x^2 - 1}{1 - y^2}$

[(a) La funzione è definita nel quadrato (lati esclusi) definito da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x < 1; \quad -1 < y < 1\}$$

tratteggiato in figura 3.15; (b) figura 3.16; (c) figura 3.17; (d) figura 3.18]

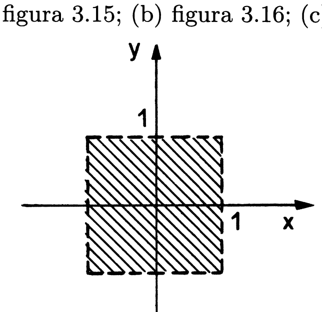

figura 3.15

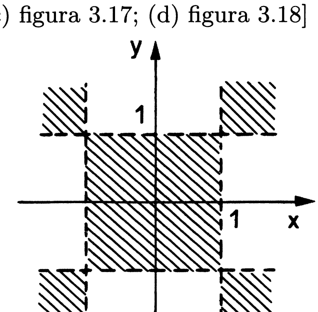

figura 3.16

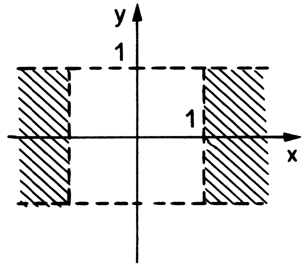

figura 3.17

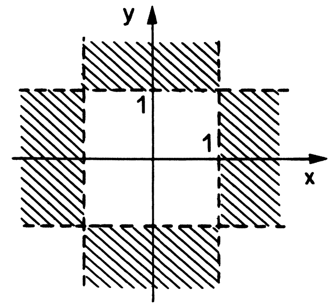

figura 3.18

3.12 Determinare l'insieme di definizione delle funzioni

(a) $\quad z = \sqrt{\operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}} \qquad\qquad$ (*b*) $\quad z = \sqrt{x \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}}$

[(a) La funzione è definita quando sen $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, cioè per $2k\pi \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq (2k+1)\pi$, per $k = 0, 1, 2, \ldots$. L'insieme di definizione è tratteggiato in figura 3.19; (b) l'insieme di definizione è tratteggiato in figura 3.20]

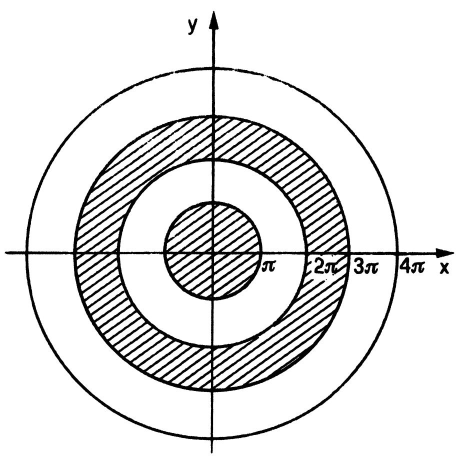

figura 3.19

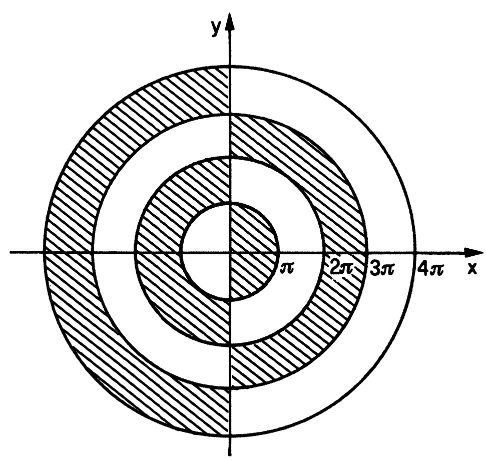

figura 3.20

3.13 Determinare l'insieme di definizione delle funzioni

(a) $\quad z = \operatorname{arcsen} \dfrac{x + y - 1}{x - y + 1} \qquad\qquad$ (*b*) $\quad z = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$

[(a) La funzione è definita sotto le condizioni

$$-1 \leq \frac{x + y - 1}{x - y + 1} \leq 1 \quad , \qquad x - y + 1 \neq 0.$$

Si è così ricondotti a risolvere i due sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ -(x - y + 1) \le x + y - 1 \le x - y + 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ x - y + 1 \le x + y - 1 \le -(x - y + 1) \end{cases}$$

Il primo sistema ha per soluzioni le coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x \ge 0$, $y \le 1$ (la condizione $x - y + 1 > 0$ è soddisfatta di conseguenza purchè sia $(x, y) \ne (0, 1)$). Il secondo sistema ha per soluzioni le coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x \le 0$, $y \ge 1$, purchè sia $(x, y) \ne (0, 1)$. L'insieme di tali punti costituisce il campo di esistenza della funzione ed è rappresentato con tratteggio in figura 3.21; (b) la funzione è definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$]

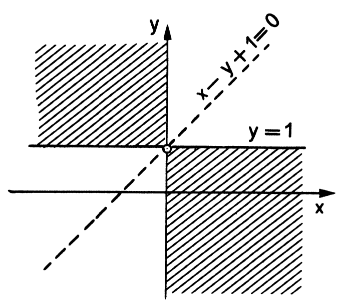

figura 3.21

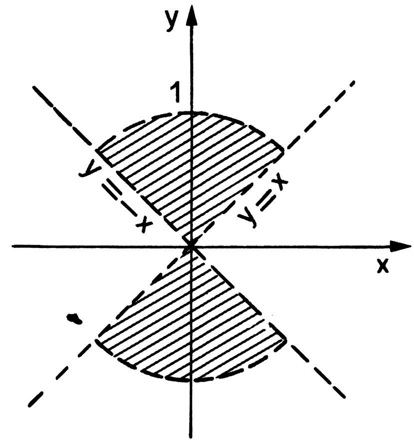

figura 3.22

3.14 Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2} + \log(1 - x^2 - y^2)$$

[La funzione è definita solo per le coppie (x, y) verificanti le condizioni

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \ge 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono rappresentate graficamente in figura 3.22]

3.15 Determinare l'insieme di definizione delle funzioni di due variabili

(a) $\quad z = \log\log \dfrac{(x-1)^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ $\qquad$ (b) $\quad z = \log(x \log \dfrac{1}{x + y})$

[(a) La funzione è definita per tutte le coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x < 1/2$ con l'esclusione del punto $(0, 0)$; (b) l'insieme di definizione è tratteggiato in figura 3.23]

3.16 Rappresentare graficamente in un piano cartesiano x, y l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{2x-(x^2+y^2)}{x^2+y^2-x}}$$

[La funzione è definita per tutte le coppie $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ soddisfacenti le limitazioni $x<x^2+y^2\le 2x$. Geometricamente (si veda il paragrafo 6D del volume 1°, parte prima) tale insieme è costituito dai punti cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1, privato dei punti del cerchio di centro $(1/2,0)$ e raggio $1/2$, tratteggiato in figura 3.24]

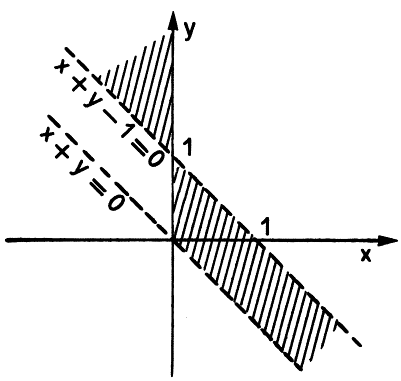

figura 3.23

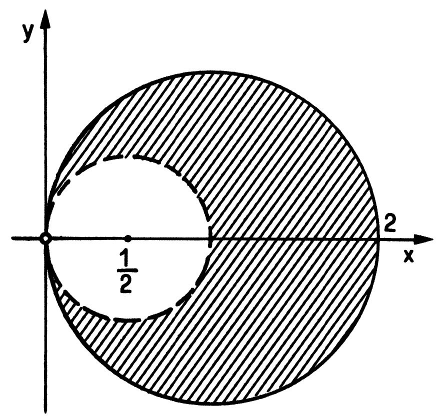

figura 3.24

3.17 Determinare l'insieme di definizione delle funzioni di due variabili

(a) $\quad f(x,y)=\sqrt{\dfrac{4-x^2-y^2}{x-y}}$

(b) $\quad f(x,y)=\sqrt{\dfrac{(|x|-1)(|y|-1)}{|x|+|y|-1}}$

(c) $\quad f(x,y)=\log\dfrac{\operatorname{arcsen}(x^2+y^2-1)}{xy}$

(d) $\quad f(x,y)=\dfrac{\operatorname{arcsen}(x+y-2)+\operatorname{arcsen}(x-y)}{(x^2-4x+y-3)^\pi}$

[(a) L'insieme di definizione, rappresentato in figura 3.25, è dato dall'unione:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 4;\ x>y\}\bigcup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\ge 4;\ x<y\}.$$

(b) Si noti in particolare che l'insieme $\{(x,y)\in R^2:\ |x|+|y|<1\}$ è il quadrato (lati esclusi) di vertici $(\pm1,0)$ e $(0,\pm1)$. La funzione data è definita nell'insieme tratteggiato in figura 3.26; (c) figura 3.27; (d) figura 3.28]

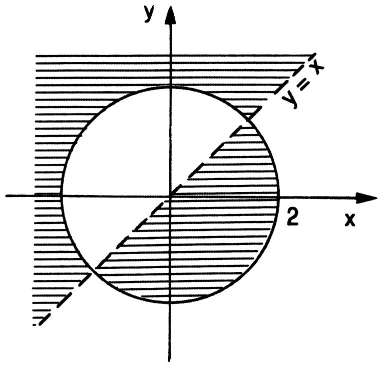

figura 3.25

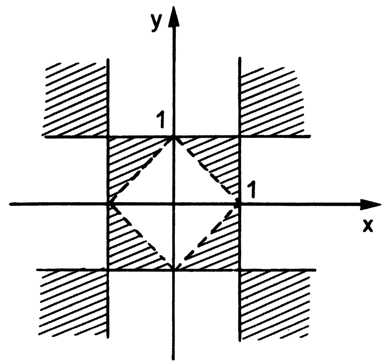

figura 3.26

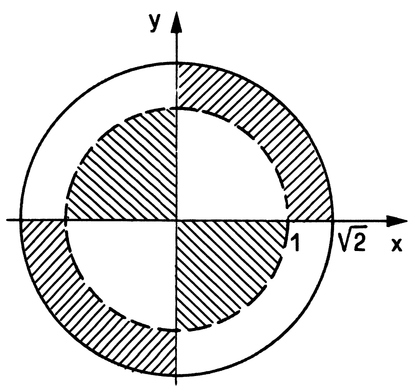

figura 3.27

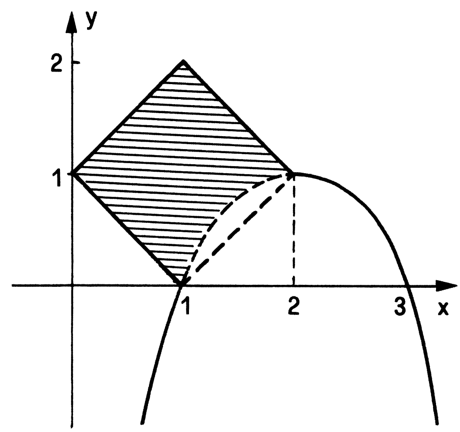

figura 3.28

3.18 Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \arccos\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 2\right)$$

[La funzione è definita nell'insieme tratteggiato in figura 3.29, costituito dall'ellisse di equazione $(x^2/4) + y^2 \leq 3$, privato dei punti interni all'ellisse di equazione $(x^2/4) + y^2 < 1$]

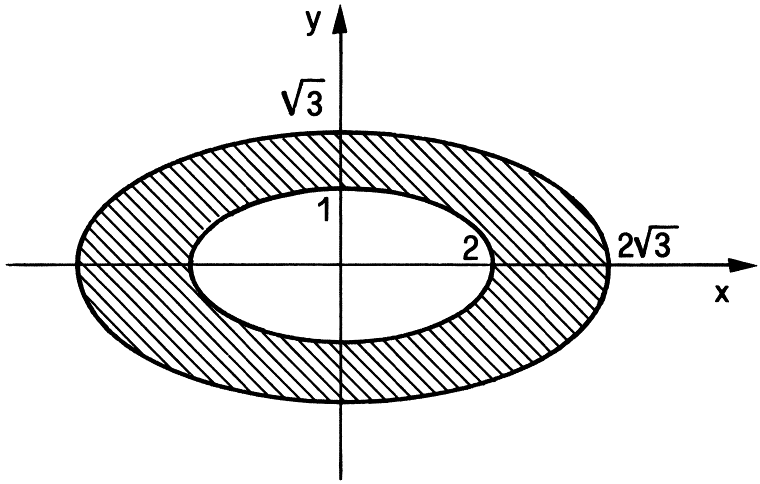

figura 3.29

3C. Limiti e continuità

Ricordiamo la definizione di limite per una funzione di n variabili reali. Se indichiamo con x un generico punto di $\mathbb{R}^n$ e con $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le sue componenti, useremo la notazione

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

per indicare una funzione di n variabili reali. Ionltre, denoteremo con $|x|$ il *modulo* (o *norma*) di x, dato da

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} .$$

Sia D l'insieme di definizione della funzione $f(x)$ e sia x_0 un punto di accumulazione per D; $f(x)$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ per x che tende ad x_0 se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in D$ tale che $0 \neq |x - x_0| < \delta$. In simboli ciò si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D - \{x_0\} \\ |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon \end{cases}$$

Il lettore noti l'analogia con la definizione di limite (finito) per le funzioni di una variabile reale. Faccia però attenzione che in questo caso il simbolo $|x - x_0|$ denota il *modulo* della differenza $x - x_0$, cioè la distanza (euclidea) di

x da x_0; invece $|f(x) - l|$ è il *valore assoluto* di $f(x) - l$. Si ricordi anche che $x - x_0$ è un vettore di $\mathbb{R}^n$ mentre $f(x) - l$ è una quantità reale (scalare).

Se $f(x)$ è definita in x_0 e se il limite per $x \to x_0$ di $f(x)$ è uguale a $f(x_0)$, si dice che $f(x)$ è *continua* in x_0.

Anche in questo paragrafo prenderemo in considerazione le funzioni di due variabili e rimandiamo i limiti e lo studio dell continuità di funzioni di tre o più variabili alla fine del capitolo. Per $n = 2$, ponendo come d'uso $(x_1, x_2) = (x, y)$, abbiamo la seguente definizione di limite:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 : \forall\,(x,y) \in D - \{(x_0,y_0)\} \\ \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon \end{cases}$$

3.19 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0\,.$$

[Per mezzo della disuguaglianza $x^4 = x^2 \cdot x^2 \le x^2(x^2+y^2)$ otteniamo

$$\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^4}{x^2+y^2} \le \frac{x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = x^2 \le x^2 + y^2\,.$$

Perciò, per ogni $\varepsilon > 0$, posto $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, si ha

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^4}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon]$$

3.20 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = 0\,.$$

[Essendo $\left|\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{y^4}{x^2+y^2}$, si può procedere come nell'esercizio precedente]

3.21 Verificare che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \cos\frac{1}{xy} = 0.$

[La funzione è definita al di fuori degli assi coordinati. Dalla relazione

$$\left|y^2\cos\frac{1}{xy}\right| = y^2\left|\cos\frac{1}{xy}\right| \le y^2$$

si deduce che nella definizione di limite si può scegliere $\delta = \sqrt{\varepsilon}$]

3.22 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\text{(a)} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} = 2$$

$$\text{(b)} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)} = 0$$

[(a) In base alla relazione $|x^3| = |x| \cdot x^2 \le |x|(x^2+y^2)$ si ottiene

$$\left|\frac{3x^3+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} - 2\right| = \left|\frac{3x^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{3|x^3|}{x^2+y^2} \le \frac{3|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 3|x|\,.$$

Dato che $|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$, per ogni $\varepsilon > 0$, posto $\delta = \varepsilon/3$, si ottiene

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{3x^3+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} - 2\right| < \varepsilon\,;$$

(b) il denominatore si può rappresentare nella forma $x^2+y^2+2(1-x-y) = (x-1)^2+(y-1)^2$. Si verifica la definizione di limite con la relazione

$$\left|\frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)}\right| = \frac{(y-1)^4}{(x-1)^2+(y-1)^2} \le \frac{(y-1)^2[(x-1)^2+(y-1)^2]}{(x-1)^2+(y-1)^2} = (y-1)^2]$$

3.23 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\text{(a)} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^5-(x-1)^2-3(y-1)^2}{x^2+3y^2-2(x+3y-2)} = -1$$

$$\text{(b)} \qquad \lim_{(x,y)\to(4,-1)} \frac{xy+y^2+x+y}{y+1} = 3$$

[(a) Il denominatore si può rappresentare nella forma

$$x^2+3y^2-2(x+3y-2) = (x-1)^2+3(y-1)^2\,.$$

Si può procedere come nella parte (b) dell'esercizio precedente; (b) la funzione data è definita nell'insieme $\{(x,y) \in R^2 : y \neq -1\}$. In tale insieme vale la scomposizione

$$\frac{xy+y^2+x+y}{y+1} = \frac{y(x+y)+(x+y)}{y+1} = \frac{(x+y)(y+1)}{y+1} = x+y\,.$$

Occorre perciò stimare $|(x+y)-3|$. Risulta

$$|(x+y)-3| = |(x-4)+(y+1)| \le |x-4|+|y+1| = \sqrt{(x-4)^2}+\sqrt{(y+1)^2};$$

dato che $\sqrt{(x-4)^2} \le \sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}$ (ed analogamente per $\sqrt{(y+1)^2}$) si conclude ponendo $\delta = \varepsilon/2$]

3.24 Utilizzando la definizione, verificare che la funzione $f(x,y) = xy$ è continua nel punto $(0,0)$.

[Occorre verificare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$. A tale scopo è utile la disuguaglianza $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ che, come facilmente si verifica, si riconduce a $x^2+y^2 \pm 2xy \geq 0$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. In base a tale disuguaglianza, per ogni $\varepsilon > 0$ risulta $|xy| < \varepsilon$ se $x^2+y^2 < 2\varepsilon$. Perciò nella definizione di limite si può scegliere $\delta = \sqrt{\varepsilon/2}$]

3.25 Verificare che la funzione $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$ è continua nel punto $(0,0)$.

[Si può procedere come nell'esercizio precedente utilizzando la disuguaglianza $|\operatorname{sen} t| \leq |t|$ (valida per ogni $t \in \mathbb{R}$) con $t = xy$]

3.26 Le seguenti funzioni

(a) $\quad f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2/3)}{x^2+y^2/3}$

(b) $\quad g(x,y) = \dfrac{1-\cos xy}{x^2y^2}$

non sono continue in $(0,0)$, non essendo ivi definite. Estenderle a $(0,0)$ in modo da renderle, se possibile, continue in tale punto.

[(a) La funzione $f(x,y)$ può essere definita in $(0,0)$ con il valore $f(0,0) = 1$ ed in tal modo l'estensione risulta continua in $(0,0)$ (e su tutto $\mathbb{R}^2$) dato che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2/3)}{x^2+y^2/3} = 1;$$

ciò segue dal limite di funzione di una variabile $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ per cui $|(\operatorname{sen} t)/t - 1| < \varepsilon$ se $0 \neq |t| < \delta$. Perciò, posto $t = x^2+y^2/3$, risulta

$$0 \neq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2/3} < \sqrt{3\delta} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2/3)}{x^2+y^2/3} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

(b) Si può procedere come nella parte (a) ponendo $g(0,0) = 1/2$ e utilizzando il limite di funzioni di una variabile

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}\,]$$

3.27 Estendere con continuità a tutto $\mathbb{R}^2$, se possibile, le seguenti funzioni di due variabili reali

(a) $\quad f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x-2y)}{x-y}$ $\qquad$ (*b*) $\quad f(x,y) = \dfrac{xy}{|xy|}$

(c) $\quad f(x,y) = xy \log|xy|$ $\qquad$ (*d*) $\quad f(x,y) = xy \log(x^2+y^2)$

(e) $\quad f(x,y) = \dfrac{e^{x+y}-1}{3x+3y}$ $\qquad$ (*f*) $\quad f(x,y) = \left(\dfrac{1+y+x^2}{y}\right)^y$

[(a) La funzione è definita nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$. In base al limite di funzione di una variabile $t(= x - y)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2t}{t} = 2$$

è possibile estendere con continuità $f(x,y)$ a tutto $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(x,y) = 2$ se $x = y$. (b) La funzione non è definita in corrispondenza degli assi coordinati. Dato che non esiste il limite per $t \to 0$ della funzione $t \to t/|t|$, non è possibile estendere con continuità $f(x,y)$ a tutto $\mathbb{R}^2$. Si noti che la funzione data vale 1 se $xy > 0$ (cioè nel primo e nel terzo quadrante) e vale -1 se $xy < 0$. (c) La funzione converge a zero se il prodotto xy tende a zero, in base al limite

$$\lim_{t\to 0^+} t \log t = 0\,;$$

perciò è possibile estendere con continuità, con il valore 0, la funzione $f(x,y)$ anche in corrispondenza degli assi coordinati. (d) La funzione non è definita nell'origine. Dato che $|xy| \leq (x^2+y^2)/2$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (infatti ciò corrisponde a $x^2+y^2 \pm 2xy \geq 0$), risulta anche

$$|f(x,y) = |xy||\log(x^2+y^2)| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)\log(x^2+y^2)\,;$$

ponendo $t = x^2+y^2$, si verifica come in (c) che $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$; perciò la funzione si estende con continuità all'origine degli assi ponendo $f(0,0) = 0$. (e) La funzione si estende con continuità all'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ con il valore $1/3$. (f) La funzione si estende con continuità all'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ con il valore e^{1+x^2}]

Ricordiamo che una *condizione necessaria* affinchè una funzione $f(x,y)$ abbia limite l per $(x,y) \to (x_0,y_0)$ è che, per ogni curva regolare di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$ passanti per (x_0,y_0) in corrispondenza ad un valore t_0 (cioè tali che $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$), risulti

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t),y(t)) = l\,.$$

Notiamo esplicitamente che, per l'esistenza del limite della funzione di due variabili, il valore l deve essere indipendente dalla curva $(x(t),y(t))$ scelta.

In pratica spesso si prende in considerazione il fascio di rette passanti per (x_0,y_0), di equazioni parametriche

$$x(t) = x_0 + lt \quad , \qquad\qquad y(t) = y_0 + mt\,,$$

con l, m parametri direttori della generica retta (in questo caso è $t_0 = 0$). Oppure, escludendo le rette parallele all'asse y, si considera la famiglia di rette di equazione cartesiana

$$y(x) = y_0 + m(x - x_0)\,,$$

dove il parametro m è il coefficiente angolare della retta. In questo tecondo caso la variabile indipendente è $t = x$ e risulta $t_0 = x_0$.

Ricordiamo che l'applicazione del criterio sopra esposto con una particolare scelta delle curve passanti per (x_0, y_0) (ad esempio con una famiglia di rette) fornisce una condizione solo necessaria, ma non sufficiente, per l'esistenza del limite. Di seguito diamo alcuni esempi.

3.28 Verificare che non esiste il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

[Consideriamo una generica retta passante per l'origine, di equazioni parametriche $x(t) = lt$, $y(t) = mt$, con l, $m \in \mathbb{R}$ $(l^2 + m^2 \neq 0)$. La funzione composta (di una variabile reale) vale

$$f(x(t), y(t)) = f(lt, mt) = \frac{lt \cdot mt}{(lt)^2 + (mt)^2} = \frac{lm}{l^2 + m^2}, \qquad \forall\, t \neq 0.$$

Perciò, fissati l, $m \in \mathbb{R}$, la funzione composta è costante rispetto a t e quindi, per $t \to 0$, converge al valore $lm/(l^2 + m^2)$. Tale valore dipende, evidentemente, dalla particolare retta scelta; perciò la funzione di due variabili non ammette limite per $(x, y) \to (0, 0)$.

Si giunge allo stesso risultato considerando la famiglia di rette di equazione cartesiana $y(x) = mx$. In tal caso la funzione composta (della variabile x) vale

$$f(x, y(x)) = f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1 + m^2}, \qquad \forall\, x \neq 0.$$

Anche in questo caso il valore limite (per $x \to 0$) dipende dal parametro m che individua la retta]

3.29 Verificare che non esiste il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^3 - 2xy + y^3}{x^2 + y^2}.$$

[Come nell'esercizio precedente si verifica ad esempio che

$$\lim_{t \to 0} f(lt, mt) = \frac{-2lm}{l^2 + m^2}\ ]$$

3.30 Si consideri la funzione f definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ da:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad \text{se} \qquad (x, y) \neq (0, 0)\,; \qquad f(0, 0) = 0\,.$$

Si verifichi che $f(x, y)$ è continua separatamente rispetto alle variabili x e y, ma che essa non è continua in $(0, 0)$ come funzione di due variabili.

[Per $y = 0$ la funzione vale identicamente zero. Perciò

$$\lim_{x \to x_0} f(x, 0) = \lim_{x \to x_0} 0 = 0 = f(x_0, 0)\,.$$

La funzione $f(x, 0)$ della variabile x è quindi continua su $\mathbb{R}$. Se $y = y_0 \neq 0$ la funzione $f(x, y)$ è continua perchè rapporto tra due polinomi con denominatore che non si annulla. Analogamente la funzione della variabile y, $f(x_0, y)$ è continua su $\mathbb{R}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Però la funzione di due variabili non è continua in $(0, 0)$ perchè, come mostrato nell'esercizio 3.28, non esiste il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ di $f(x, y)$.

Il grafico di $f(x, y)$ è rappresentato in figura 3.11; si noti in particolare che la funzione $z = f(x, y)$ è nulla in corrispondenza agli assi x, y. La discontinuità in $(0, 0)$ è evidenziata in figura 3.11 dal fatto che, avvicinandosi al punto $(0, 0)$ percorrendo una generica retta per l'origine, si rimane ad una quota (valore di z) dipendente dalla retta stessa; in particolare, per $x = y$, si ottine la quota $z = 1/2$, mentre per $y = 0$ (asse x) si ottiene la quota $z = 0$]

3.31 Utilizzando le rette per l'origine, verificare che le seguenti funzioni non ammettono limite per $(x, y) \to (0, 0)$

(a) $\quad z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ $\qquad\qquad$ (b) $\quad z = \dfrac{\operatorname{sen}(x - 2y)}{x - y}$

[(a) La funzione è costante sulle rette di equazione $y = mx$ e la costante (=arctg m) dipende dalla retta; (b) ponendo $y = mx$ risulta

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x - 2mx)}{x - mx} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}[(1 - 2m)x]}{(1 - 2m)x} \cdot \frac{1 - 2m}{1 - m} = \frac{1 - 2m}{1 - m}.$$

Dato che il risultato del limite per $x \to 0$ dipende dal parametro m, la funzione di due variabili non ammette limite per $(x, y) \to (0, 0)$]

3.32 Si confrontino gli esercizi 3.31(b) e 3.27(a). Si verifichi in particolare che il metodo proposto per lo studio del primo limite non si adatta per l'altro.

3.33 Si consideri la funzione $f(x, y) = \dfrac{y^4}{x^2 + y^4}$. Verificare che:

(a) Esiste il limite per $x \to 0$ della funzione composta $f(x, mx)$ su ogni retta per l'origine di equazione cartesiana $y = mx$ ed il valore limite è indipendente da m.

(b) Non esiste il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \to (0, 0)$, dato che il limite per $t \to 0$ della funzione composta $f(lt, mt)$ sulle rette di equazione parametrica $x = lt$, $y = mt$ dipende dalla retta scelta.

[(a) Per ogni $x \neq 0$ risulta $f(x, mx) = \dfrac{m^4 x^4}{x^2 + m^4 x^4} = \dfrac{m^4 x^2}{1 + m^4 x^2}$.

Perciò $\lim_{x \to 0} f(x, mx) = 0$. Si ricordi che la famiglia di rette di equazione $y = mx$ non costituisce l'insieme di tutte le rette per l'origine, ma rimane escluso l'asse y, di equazione $x = 0$. Per $x = 0$ risulta $f(0, y) = 1$ per ogni $y \neq 0$. Quindi la funzione $f(x, y)$ ristretta agli

assi x, y converge a valori fra loro distinti $(\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0; \lim_{y\to 0} f(0,y) = 1)$. Ciò è sufficiente ad affermare che la funzione di due variabili non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$.
(b) Per ogni $t \neq 0$ risulta $f(lt,mt) = \dfrac{m^4t^4}{l^2t^2+m^4t^4} = \dfrac{m^4t^2}{l^2+m^4t^2}$.
Si verifica facilmente che

$$\lim_{t\to 0} f(lt,mt) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad l \neq 0 \\ 1, & \text{se} \quad l = 0 \quad (\text{ed} \quad m \neq 0) \end{cases} \quad]$$

3.34 Si consideri la funzione $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. Verificare che:

(a) Esiste il limite per $t \to 0$ della funzione composta $f(lt,mt)$ su ogni retta per l'origine di equazione parametrica $x = lt$, $y = mt$ ed il valore limite è indipendente dai parametri l, m.

(b) È possibile determinare due curve regolari passanti per l'origine sulle quali la funzione assume limiti distinti; perciò la funzione $f(x,y)$ non assume limite per $(x,y) \to (0,0)$.

[(a) Per ogni $t \neq 0$ risulta $f(lt,mt) = \dfrac{l^2mt^3}{(lt)^4+(mt)^2} = \dfrac{l^2mt}{l^4t^2+m^2}$.
Tale quantità converge a zero per $t \to 0$ qualunque siano l, $m \in \mathbb{R}$ (con $l^2+m^2 \neq 0$) (in particolare $f(lt,mt)$ è identicamente nulla se $m = 0$).
(b) Si considerino le parabole di equazione cartesiana $y = mx^2$, con m parametro reale (tale scelta è suggerita dalla struttura del denominatore, quadratico rispetto ad y e di quarto grado rispetto ad x; la scelta è suggerita anche dal fatto che tali parabole sono linee di livello della funzione). Risulta

$$f(x,mx) = \frac{mx^4}{(1+m^2)x^4} = \frac{m}{1+m^2}, \qquad \forall x \neq 0.$$

Perciò la funzione è costante sulle parabole scelte ed il valore della costante dipende da m. Ad esempio, per $y = \pm x^2$ risulta $f(x, \pm x^2) = \pm 1/2$ e tale è anche il limite per $x \to 0$ di $f(x, \pm x^2)$]

3.35 Stabilire per qiali valori del parametro reale α risulta continua per $(x,y) = (0,0)$ la funzione $f(x,y)$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

[La disuguaglianza elementare $(x \pm y)^2 \geq 0$ sviluppando il quadrato si scrive equivalentemente $x^2+y^2 \pm 2xy \geq 0$, cioè anche

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Per $(x,y) \neq (0,0)$ vale quindi la stima

$$0 \leq \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2^\alpha}\frac{(x^2+y^2)^\alpha}{x^2+y^2} = \frac{1}{2^\alpha}(x^2+y^2)^{\alpha-1}.$$

Se $\alpha > 1$, quando $(x,y) \to (0,0)$ l'ultimo membro della precedente disuguaglianza converge a zero. In tal caso, per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

e la funzione $f(x,y)$ è continua (anche) in $(0,0)$. Se invece $\alpha = 1$ si può calcolare $f(x,y)$ lungo la famiglia di rette per l'origine di equazione $y = mx$, ottenendo per $x \neq 0$

$$\frac{|xy|}{x^2+y^2} \underset{y=mx}{=} \frac{|m|x^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{|m|}{1+m^2}$$

e tale valore dipende da m. Ne segue che $f(x,y)$ non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$ nel caso $\alpha = 1$; quindi $f(x,y)$ non continua in $(0,0)$ se $\alpha = 1$. Analogamente si verifica che $f(x,y)$ non è continua in $(0,0)$ se $\alpha < 1$]

3.36 Si chiede di stabilire per quali valori del parametro reale α risulta continua la funzione $f(x,y)$ definita in $(0,0)$ dal valore $f(0,0) = 1$ e per $(x,y) \neq (0,0)$ da

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 2|xy|^\alpha + y^2}{x^2+y^2}.$$

[La funzione $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 1$. Si può procedere come nell'esercizio precedente osservando che, per ogni $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = 1 - 2\frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}\ ]$$

3.37 Siano α, β parametri reali non negativi. Verificare che la funzione

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2}$$

ammette limite finito (uguale a zero) per $(x,y) \to (0,0)$ se e soltanto se $\alpha+\beta > 2$.

[Lungo le rette $y = mx$ per l'origine la funzione vale

$$f(x,mx) = \frac{|m|^\beta |x|^{\alpha+\beta}}{(1+m^2)x^2} = \frac{|m|^\beta}{1+m^2}|x|^{\alpha+\beta-2}.$$

Se $\alpha + \beta - 2 < 0$ allora $f(x,mx) \to +\infty$ per $x \to 0$. Se $\alpha + \beta - 2 = 0$ la funzione è costante sulle rette per l'origine (che risultano quindi linee di livello) e la costante $(= |m|^\beta/(1+m^2))$ dipende da m. Perciò, se $\alpha + \beta \leq 2$, la funzione $f(x,y)$ non ammette limite finito per $(x,y) \to (0,0)$.

Viceversa verifichiamo che, se $\alpha+\beta > 2$, allora $f(x,y)$ converge a zero per $(x,y) \to (0,0)$. A tale scopo osserviamo che

$$|x|^\alpha = (\sqrt{x^2})^\alpha \leq (\sqrt{x^2+y^2})^\alpha = (x^2+y^2)^{\alpha/2}$$

ed analogamente $|y|^\beta \leq (x^2+y^2)^{\beta/2}$. Perciò

$$0 \leq \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^{\alpha/2+\beta/2}}{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{\alpha/2+\beta/2-1}.$$

Se $\alpha+\beta > 2$ allora $\alpha/2+\beta/2-1>0$. Perciò $(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-1} \to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$. In base al teorema di confronto dei carabinieri la funzione data converge a zero]

3.38 Siano α, β, γ parametri reali non negativi. Determinare i valori dei parametri in modo che le seguenti funzioni ammettano limite finito per $(x,y)\to(0,0)$.

(a) $\displaystyle f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(3x^2+5y^2)^\gamma}$ (b) $\displaystyle f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^4+y^2)^\gamma}$

[(a) Come nell'esercizio precedente, la funzione converge a zero se e soltanto se $\alpha+\beta>2\gamma$; (b) utilizzando le parabole di equazione $y=mx^2$, si verifica che la funzione non ha limite finito se $\alpha+2\beta-4\gamma \leq 0$. Viceversa, se tale condizione non vale, la funzione $f(x,y)$ converge a zero per $(x,y)\to(0,0)$; ciò si dimostra con il teorema di confronto (come nell'esercizio precedente), utilizzando le disuguaglianze

$$|x|^\alpha = (x^4)^{\alpha/4} \leq (x^4+y^2)^{\alpha/4}; \qquad |y|^\beta \leq (x^4+y^2)^{\beta/2}.$$

In definitiva la funzione risulta convergente in $(0,0)$ se e soltanto se $\alpha+2\beta-4\gamma>0$. Si noti che la funzione dell'esercizio 3.34 è un caso particolare (a parte i valori assoluti a numeratore) con $\alpha=2$, $\beta=1$ e $\gamma=1$; risultando in tal caso $\alpha+2\beta-4\gamma=0$, la funzione non ammette limite (finito), in accordo con quanto stabilito nell'esercizio 3.34]

3.39 Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^6}$ (b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^4+y^4}$

(c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^6}$ (d) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+xy)}{x^2+y^2}$

(e) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^3y^2)}{x^6+y^2}$ (f) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{x^3y^2}}{x^6+y^4}$

[(a) Essendo $x^2 \leq x^2+y^6$, risulta anche $0 \leq \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^6} \leq y^2 \leq x^2+y^2$. Ne segue che il limite per $(x,y)\to(0,0)$ vale 0; (b) sulle rette di equazione $y=mx$ la funzione vale

$$\frac{1-\cos(mx^2)}{x^4+m^4x^4} = \frac{1-\cos(mx^2)}{(mx^2)^2}\cdot\frac{m^2}{1+m^4}, \qquad \forall\, x\neq 0,$$

e per $x \to 0$ converge al limite $\dfrac{m^2}{2(1+m^4)}$. Dato che tale valore dipende dal parametro m, il limite in (b) non esiste; (c) il limite vale zero e si può ottenere come prodotto dei limiti 3.39(a) e 3.26(b); (d) considerando la funzione sulle rette per l'origine, si verifica che il limite non esiste; (e) si può calcolare il limite con il prodotto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^3y^2)}{x^3y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^2}.$$

Il primo fattore vale uno in base al limite di funzione di una variabile reale $\lim_{t\to 0} \log(1+t)/t = 1$; il secondo limite vale zero e lo si può verificare in modo simile a come indicato nella parte (a) del presente esercizio; (f) lungo le curve di equazione $y = mx^{3/2}$ con $x > 0$, la funzione vale

$$\frac{1-e^{m^2x^6}}{x^6+m^4x^6} = \frac{1-e^{m^2x^6}}{m^2x^6} \cdot \frac{m^2}{1+m^4}.$$

In base al limite di funzione di una variabile $\lim_{t\to 0}(1-e^t)/t = -1$, per $x \to 0^+$ l'espressione precedente converge a $-m^2/(1+m^4)$. Dato che tale valore dipende da m, cioè dalla curva scelta, il limite in (f) non esiste]

3.40 Quali delle funzioni considerate nell'esercizio precedente si possono estendere con continuità nel punto $(0,0)$?

[È possibile estendere con continuità le funzioni in (a), (c), (e) definendole zero per $(x,y) = (0,0)$. Non è invece possibile estendere in $(0,0)$ le funzioni in (b), (d), (f)]

3D. Derivate parziali

Una funzione f definita in un intorno del punto di coordinate (x,y) ammette derivate parziali in tale punto se esistono finiti i limiti (di una variabile reale):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\,; \qquad \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}.$$

Il primo dei due limiti si chiama *derivata parziale di f rispetto ad x* e si denota con uno dei simboli, fra loro equivalenti,

$$f_x \quad ; \quad f_x(x,y) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad D_x f.$$

Analogamente, il secondo limite si chiama *derivata parziale di f rispetto ad y* e si denota con uno dei simboli

$$f_y \quad ; \quad f_y(x,y) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad ; \quad D_y f.$$

Se f ammette derivate parziali in un punto (x, y) si dice anche che f è *derivabile* in tale punto (il lettore faccia attenzione a non confondere il concetto di derivabilità con quello di differenziabilità, che prenderemo in considerazione nel paragrafo successivo).

Diretta conseguenza della definizione è che le derivate parziali f_x, f_y di una assegnata funzione di due variabili $f(x, y)$ si calcolano con le usuali regole di derivazione delle funzioni di una sola variabile reale, considerando l'altra variabile costante con il ruolo di parametro.

3.41 Calcolare, nel punto $(x, y) = (4, 7)$, le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - xy$$

[Per determinare la derivata parziale di f rispetto ad x nel punto (4,7) si fissa $y = 7$ e si calcola la derivata della funzione della sola variabile x:

$$f(x, 7) = x^3 + (7)^2 - 7x\,;$$

si ottiene $3x^2 - 7$; ponendo $x = 4$ si determina il valore di f_x nel punto $(4, 7)$: $f_x(4, 7) = 3 \cdot (4)^2 - 7 = 41$. Per determinare la derivata parziale di f rispetto ad y nel punto $(4, 7)$ si fissa $x = 4$ e si calcola la derivata della funzione di una variabile $(4)^3 + y^2 - 4y$, che vale $2y - 4$; ponendo $y = 7$ si ottiene il valore di f_y nel punto $(4, 7)$: $f_y(4, 7) = 2 \cdot 7 - 4 = 10$. In un punto (x, y) generico di $\mathbb{R}^2$ le derivate parziali valgono $f_x(x, y) = 3x^2 - y$; $f_y(x, y) = 2y - x$]

3.42 Calcolare le derivate parziali f_x, f_y delle seguenti funzioni nei punti interni ai rispettivi insiemi di definizione.

$f = x^2 + 2y$ $\qquad$ [$f_x = 2x$; $\quad f_y = 2$]

$f = xy$ $\qquad$ [$f_x = y$; $\quad f_y = x$]

$f = (x + y)(x - y)$ $\qquad$ [$f_x = 2x$; $\quad f_y = -2y$]

$f = \dfrac{x}{y}$ $\qquad$ [$f_x = \dfrac{1}{y}$; $\quad f_y = -\dfrac{x}{y^2}$]

$f = \dfrac{x - y}{x + y}$ $\qquad$ [$f_x = \dfrac{2y}{(x + y)^2}$; $\quad f_y = -\dfrac{2x}{(x + y)^2}$]

$f = \dfrac{x + y}{1 - xy}$ $\qquad$ [$f_x = \dfrac{(1 + y)^2}{(1 - xy)^2}$; $\quad f_y = \dfrac{1 + x^2}{(1 - xy)^2}$]

$f = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ $\qquad$ [$f_x = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $\quad f_y = \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$]

$$f = \frac{x^2}{x^2+y^2} \qquad \left[f_x = \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad f_y = \frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$f = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \left[f_x = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad f_y = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$f = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \left[f_x = \frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^3}; \quad f_y = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^3}\right]$$

$$f = |x-y| \qquad \left[f_x = \frac{x-y}{|x-y|}; \quad f_y = \frac{y-x}{|x-y|}\right]$$

$$f = \sqrt{x+2y} \qquad \left[f_x = \frac{1}{2\sqrt{x+2y}}; \quad f_y = \frac{1}{\sqrt{x+2y}}\right]$$

$$f = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \left[f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$f = \sqrt{1+x^2} \qquad \left[f_x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad f_y = 0\right]$$

$$f = 2\sqrt{xy} \qquad \left[f_x = \sqrt{\frac{y}{x}}; \quad f_y = \sqrt{\frac{x}{y}}\right]$$

$$f = \sqrt[3]{x^3+y^3} \qquad \left[f_x = \frac{x^2}{(x^3+y^3)^{2/3}}; \quad f_y = \frac{y^2}{(x^3+y^3)^{2/3}}\right]$$

$$f = \operatorname{sen}(xy) \qquad [f_x = y\cos(xy); \quad f_y = x\cos(xy)]$$

$$f = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y^2 \qquad [f_x = \cos x \operatorname{sen} y^2; \quad f_y = 2y \operatorname{sen} x \cos y^2]$$

$$f = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 y \qquad \left[f_x = \frac{2}{3}\operatorname{sen} x \cos x; \quad f_y = -\operatorname{sen} y \cos y\right]$$

$$f = xy - \operatorname{sen}(xy)\cos(xy) \qquad [f_x = 2y\operatorname{sen}^2(xy); \quad f_y = 2x\operatorname{sen}^2(xy)]$$

$$f = xy\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy) \qquad [f_x = xy^2\cos(xy); \quad f_y = x^2y\cos(xy)]$$

$$f = x^2 + \operatorname{sen}(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)$$

$$[f_x = 4x\cos^2(x^2+y^2); \quad f_y = 2y\cos 2(x^2+y^2)]$$

$f = \dfrac{y}{\operatorname{sen} x}$ $\quad [f_x = -\dfrac{y\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}; \quad f_y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}]$

$f = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3y$ $\quad [f_x = \dfrac{\operatorname{tg} 3y}{\cos^2 x}; \quad f_y = \dfrac{3\operatorname{tg} x}{\cos^2 3y}]$

$f = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}$ $\quad [f_x = \dfrac{1}{\cos^2 x \operatorname{tg} y}; \quad f_y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^2 y}]$

$f = \dfrac{1 - \operatorname{tg}(xy)}{1 + \operatorname{tg}(xy)}$

$[f_x = \dfrac{-2y}{[\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)]^2}; f_y = \dfrac{-2x}{[\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)]^2}]$

$f = \operatorname{arctg}(xy)$ $\quad [f_x = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}; \quad f_y = \dfrac{x}{1 + x^2y^2}]$

$f = \operatorname{arctg}(5x - 7y)$ $\quad [f_x = \dfrac{5}{1 + (5x - 7y)^2}; \quad f_y = \dfrac{-7}{1 + (5x - 7y)^2}]$

$f = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$ $\quad [f_x = \dfrac{y}{x^2 + y^2}; \quad f_y = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}]$

$f = 1 + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ $\quad [f_x = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}; \quad f_y = \dfrac{x}{x^2 + y^2}]$

$f = \left(\operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}\right)^2$ $\quad [f_x = \dfrac{2y \operatorname{arctg}(x/y)}{x^2 + y^2}; \quad f_y = \dfrac{-2x \operatorname{arctg}(x/y)}{x^2 + y^2}]$

$f = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{x - y}$ $\quad [f_x = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}; \quad f_y = \dfrac{x}{x^2 + y^2}]$

$f = \operatorname{arctg} \dfrac{x - y}{x + y}$ $\quad [f_x = \dfrac{y}{x^2 + y^2}; \quad f_y = \dfrac{-x}{x^2 + y^2}]$

$f = \operatorname{arctg} \dfrac{x - y}{1 + xy}$ $\quad [f_x = \dfrac{1}{1 + x^2}; \quad f_y = \dfrac{-1}{1 + y^2}]$

$f = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy}$ $\quad [f_x = \dfrac{1}{1 + x^2}; \quad f_y = \dfrac{1}{1 + y^2}]$

$f = \text{arcsen}\,\dfrac{y}{x}$ $\quad [f_x = \dfrac{-y}{|x|\sqrt{x^2-y^2}}; \quad f_y = \dfrac{|x|}{x\sqrt{x^2-y^2}}]$

$f = \text{arcsen}\,\dfrac{x-y}{x+y}$ $\quad [f_x = \dfrac{y}{|x+y|\sqrt{xy}}; \quad f_y = \dfrac{-x}{|x+y|\sqrt{xy}}]$

$f = \log(2x+2y)$ $\quad [f_x = f_y = \dfrac{1}{x+y}]$

$f = \log|x-y|$ $\quad [f_x = \dfrac{1}{x-y}; \quad f_y = \dfrac{1}{y-x}]$

$f = \log(xy)$ $\quad [f_x = \dfrac{1}{x}; \quad f_y = \dfrac{1}{y}]$

$f = \log\dfrac{x}{y}$ $\quad [f_x = \dfrac{1}{x}; \quad f_y = -\dfrac{1}{y}]$

$f = \log\dfrac{x-y}{x+y}$ $\quad [f_x = \dfrac{2y}{x^2-y^2}; \quad f_y = \dfrac{2x}{y^2-x^2}]$

$f = \log(x^2-y^2)$ $\quad [f_x = \dfrac{2x}{x^2-y^2}; \quad f_y = \dfrac{2y}{y^2-x^2}]$

$f = \log\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad [f_x = \dfrac{x}{x^2+y^2}; \quad f_y = \dfrac{y}{y^2+x^2}]$

$f = \log\,\text{sen}\,(x^2+y^2)$ $\quad [f_x = \dfrac{2x\cos(x^2+y^2)}{\text{sen}\,(x^2+y^2)}; \quad f_y = \dfrac{2y\cos(x^2+y^2)}{\text{sen}\,(x^2+y^2)}]$

$f = xy[1-\log(xy)]$ $\quad [f_x = -y\log(xy); \quad f_y = -x\log(xy)]$

$f = \log\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}$ $\quad [f_x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad f_y = \dfrac{-1}{\sqrt{1+y^2}}]$

$f = \log\dfrac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2}}$

$[f_x = \dfrac{2x}{(1-x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}; \quad f_y = \dfrac{2y}{(1-x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}]$

$f = e^{x/y}$ $\quad [f_x = \dfrac{e^{x/y}}{y}; \quad f_y = \dfrac{-xe^{x/y}}{y^2}]$

$f = e^x/e^y$ $\qquad$ $[f_x = e^{x-y}; \quad f_y = -e^{x-y}]$

$f = 2^{y/x}$ $\qquad$ $[f_x = \dfrac{-y2^{y/x}\log 2}{x^2}; \quad f_y = \dfrac{2^{y/x}\log 2}{x}]$

$f = \pi^{xy}$ $\qquad$ $[f_x = \pi^{xy} y \log \pi; \quad f_y = \pi^{xy} x \log \pi]$

$f = xe^{x+3y}$ $\qquad$ $[f_x = (1+x)e^{x+3y}; \quad f_y = 3xe^{x+3y}]$

$f = \left(x - \dfrac{1}{y}\right) e^{xy}$ $\qquad$ $[f_x = xye^{xy}; \quad f_y = \left(\frac{1}{y^2} + x^2 - \dfrac{x}{y}\right) e^{xy}]$

$f = e^x(\operatorname{sen} y + \cos y)$ $\qquad$ $[f_x = f; \quad f_y = e^x(\cos y - \operatorname{sen} y)]$

$f = e^x(\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y)$ $\qquad$ $[f_x = e^x; \quad f_y = 0]$

$f = x^y$ $\qquad$ $[f_x = yx^{y-1}; \quad f_y = x^y \log x]$

$f = x^x$ $\qquad$ $[f_x = x^x(1 + \log x); \quad f_y = 0]$

$f = \sqrt{y^x}$ $\qquad$ [Si noti che $f(x,y) = y^{x/2}$]

$f = \left(\dfrac{xy}{e}\right)^{xy}$ $\qquad$ $[f_x = y \log(xy) \left(\frac{xy}{e}\right)^{xy}; \quad f_y = x \log(xy) \left(\frac{xy}{e}\right)^{xy}]$

$f = y^{\log x}$ $\qquad$ $[f_x = y^{\log x} \dfrac{\log y}{x}; \quad f_y = y^{\log x} \dfrac{\log x}{y}]$

$f = (\operatorname{sen} x)^{\cos y}$

$[f_x = \cos x \cos y (\operatorname{sen} x)^{\cos y - 1}; \quad f_y = -(\operatorname{sen} x)^{\cos y} \operatorname{sen} y \log \operatorname{sen} x]$

$f = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^y$ $\qquad$ $[f_x = \dfrac{-y}{x^2}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{y-1}; \quad f_y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^y \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)]$

$f = x^{y^x}$ $\qquad$ $[f_x = y^x x^{y^x}(\log y \log x + \dfrac{1}{x}); \quad f_y = xy^{x-1}x^{y^x} \log x]$

$f = x^{x^y}$ $\qquad$ $[f_x = x^{x^y} x^{y-1}(1 + y \log x); \quad f_y = x^{x^y} x^y (\log x)^2]$

$f = x^{y^y}$ $\qquad$ $[f_x = x^{(y^y - 1)}; \quad f_y = x^{y^y} y^y \log x(1 + \log y)]$

3.43 Verificare che la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ non ammette derivate parziali nel punto $(0,0)$.

[Per $y = 0$ risulta $f(x,0) = \sqrt{x^2} = |x|$ e, come ben noto, tale funzione (di una variabile reale) non è derivabile per $x = 0$; perciò non esiste $f_x(0,0)$. Si può anche procedere in base alla definizione, mostrando che sono diversi i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{|h|}{h} = \pm 1\,.$$

In modo analogo si verifica che non esiste $f_y(0,0)$]

3.44 In quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esistono le derivate parziali della funzione $f(x,y) = |xy|$?

[Fissato $y_0 \in \mathbb{R}$, la funzione $f(x,y_0) = |x| \cdot |y_0|$ è derivabile (rispetto ad x) per ogni $x \neq 0$ se $y_0 \neq 0$; mentre, se $y_0 = 0$, la funzione $f(x,y_0)$ è identicamente nulla e quindi è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che la funzione $f(x,y)$ ammette derivata parziale rispetto ad x in tutti i punti dell'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0,0)\},$$

cioè in tutti i punti del piano xy, escluso l'asse y ma inclusa l'origine degli assi. Analogamente f_y esiste nell'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\} \cup \{(0,0)\}]$$

3.45 Stabilire se la funzione $f(x,y) = |x-y|(x+y)$ ammette derivate parziali nei punti di coordinate $(1,1)$, $(0,0)$, $(3,2)$ e $(2,3)$.

[La funzione non ammette derivate parziali nel punto $(1,1)$; infatti ad esempio, per il limite del rapporto incrementale relativo ad $f_x(1,1)$, risulta

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{|h|(2+h)}{h} = \pm 2\,.$$

Viceversa la funzione ammette derivate parziali nel punto $(0,0)$ ed esse valgono zero; infatti ad esempio per f_x

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|h}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0\,.$$

La funzione è derivabile in $(3,2)$ e $(2,3)$ e con le usuali regole di derivazione si trova $f_x(3,2) = 6$, $f_y(3,2) = -4$, $f_x(2,3) = -4$, $f_y(2,3) = 6$]

Supponiamo che una funzione $f(x,y)$ ammetta derivate parziali $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ in un insieme aperto. Se le funzioni f_x, f_y ammettono a loro volta derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_x, \quad \frac{\partial}{\partial x} f_y, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_y,$$

esse vengono chiamate derivate parziali seconde della funzione f e si indicano anche con i simboli

$$f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yx}, \quad f_{yy}$$

oppure con i simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Le derivate f_{xy}, f_{yx} si chiamano *derivate seconde miste*. Per esse sussiste il seguente importante teorema di Schwarz: *Le derivate seconde miste f_{xy}, f_{yx} sono uguali in tutti i punti in cui sono continue.*

3.46 Calcolare le derivate seconde delle seguenti funzioni all'interno dei rispettivi insiemi di definizione e verificare che le derivate seconde miste sono uguali fra loro.

$(a)\quad f(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2}$ $\qquad$ $(b)\quad f(x,y) = e^x \cos y$

$(c)\quad f(x,y) = y^x$ $\qquad$ $(d)\quad f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}$

$(e)\quad f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{x-y}$ $\qquad$ $(f)\quad f(x,y) = \log \sqrt{x^2+y^2}$

$(g)\quad f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2(x^2+y^2)}$ $\qquad$ $(h)\quad f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$

[(a) $f_{xx} = \dfrac{3y^2}{(x^2+3y^2)^{3/2}}$; $\quad f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{-3xy}{(x^2+3y^2)^{3/2}}$; $\quad f_{yy} = \dfrac{3x^2}{(x^2+3y^2)^{3/2}}$.

(b) $f_{xx} = e^x \cos y$; $\quad f_{xy} = f_{yx} = -e^x \operatorname{sen} y$; $\quad f_{yy} = -e^x \cos y$.

(c) $f_{xx} = y^x (\log y)^2$; $\quad f_{xy} = f_{yx} = y^{x-1}(1 + x\log y)$; $\quad f_{yy} = x(x-1)y^{x-2}$.

(d) $f_{xx} = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$; $\quad f_{xy} = f_{yx} = 0$; $\quad f_{yy} = \dfrac{2y}{(1+y^2)^2}$.

(e) $f_{xx} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\quad f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\quad f_{yy} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

(f) $f_{xx} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\quad f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\quad f_{yy} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

(g) $f_{xx} = \dfrac{y^8 - 2x^2y^6 - 3x^4y^4}{(x^2+y^2)^4}$; $\quad f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{4x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$; $\quad f_{yy} = \dfrac{x^8 - 2x^6y^2 - 3x^4y^4}{(x^2+y^2)^4}$.

(h) $f_{xx} = \dfrac{-2xy^3(x^4+2x^2y^2+3y^4)}{(x^2+y^2)^4}$; $\quad f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{x^2(x^6+7x^4y^2+3x^2y^4-3y^6)}{(x^2+y^2)^4}$;
$f_{yy} = \dfrac{-2x^3y(3x^4+2x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^4}$.]

3.47 Verificare che la funzione $f(x,y)$ definita da

$$f(0,0)=0 \qquad \text{e} \qquad f(x,y)=\frac{x^3y}{x^2+y^2} \qquad \text{se} \qquad (x,y)\neq(0,0)\,,$$

ammette derivate seconde miste f_{xy}, f_{yx} fra loro distinte nel punto $(x,y)=(0,0)$. Verificare inoltre che le derivate seconde miste non sono continue in $(0,0)$, in accordo con il teorema di Schwarz.

[(a) Si noti che, essendo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ (esercizio 3.37) ed, essendo anche $f(0,0)=0$, la funzione è continua in $(0,0)$ (ed anche in tutto $\mathbb{R}^2$).
Le derivate parziali prime, per ogni $(x,y)\neq(0,0)$, valgono

$$f_x(x,y)=\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y(x,y)=\frac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Come nell'esercizio 3.38 (a) si verifica che sia $f_x(x,y)$ che $f_y(x,y)$ convergono a zero per $(x,y)\to(0,0)$. Ciò implica che f_x, f_y sono continue (anche) in $(0,0)$, essendo $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$; infatti, ad esempio per $f_x(0,0)$:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}0=0\,.$$

Calcoliamo le derivate seconde miste in $(0,0)$:

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}0=0\,;$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^5/h^4}{h}=1\,;$$

Perciò le derivate seconde miste sono fra loro distinte in $(0,0)$. Al contrario, in base al teorema di Schwarz, esse sono tra loro uguali per ogni $(x,y)\neq(0,0)$. Con le usuali regole di derivazione si trova

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\frac{x^8+7x^6y^2+3x^4y^4-3x^2y^6}{(x^2+y^2)^4}\,,\quad \forall\,(x,y)\neq(0,0)\,.$$

Essendo $f_{xy}=f_{yx}$ per $(x,y)\neq(0,0)$ e $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ ne segue che almeno una delle due derivate seconde miste non è continua in $(0,0)$.

Comunque, con verifica diretta, si prova che $f_{xy}(x,y)$ e $f_{yx}(x,y)$ non ammettono limite per $(x,y)\to(0,0)$; infatti, sulle rette $y=0$ e $x=0$ si ottengono i limiti fra loro distinti

$$\lim_{x\to0}f_{xy}(x,0)=\lim_{x\to0}f_{yx}(x,0)=\lim_{x\to0}\frac{x^8}{x^8}=1\,;$$

$$\lim_{y\to0}f_{xy}(0,y)=\lim_{y\to0}f_{yx}(0,y)=\lim_{y\to0}0=0\,]$$

3.48 Siano a, b parametri reali e sia $f(x,y)$ la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(0,0)=0 \qquad \text{e} \qquad f(x,y)=\frac{ax^3y+bxy^3}{x^2+y^2} \qquad \text{se} \qquad (x,y)\neq(0,0)\,.$$

Verificare che $f_{xy}(0,0)=b$ e che $f_{yx}(0,0)=a$.

[Si può procedere come nell'esercizio precedente oppure, più rapidamente, nel modo seguente: si pone $f(x,y)=ag(x,y)+bh(x,y)$, dove g, h sono definite da

$$g(0,0)=h(0,0)=0 \quad \text{e} \quad g(x,y)=\frac{x^3y}{x^2+y^2}\,, \quad h(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^2} \quad \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\,.$$

Per la linearità delle derivate risulta

$$f_{xy}=ag_{xy}+bh_{xy}\,; \qquad\qquad f_{yx}=ag_{yx}+bh_{yx}\,.$$

Le derivate seconde miste in $(0,0)$ della funzione g, calcolate nell'esercizio precedente, valgono $g_{xy}(0,0)=0$, $g_{yx}(0,0)=1$. Per simmetria, scambiando il ruolo di x, y, risulta anche $h_{xy}(0,0)=1$, $h_{yx}(0,0)=0$. Perciò $f_{xy}(0,0)=b$ e $f_{yx}(0,0)=a$]

3.49 Si considerino le funzioni definite per $x=0$ da $f(0,y)=0$ e per $x\neq0$ rispettivamente da

(a) $\quad f(x,y)=x^2\text{sen}\,\dfrac{y}{x}$ $\qquad\qquad$ (b) $\quad f(x,y)=x^2\text{arctg}\,\dfrac{y}{x}$

Verificare che $f_{xy}(0,0)=0$ e che $f_{yx}(0,0)=1$.

[(a) Essendo $f(0,y)=0$ risulta

$$f_x(0,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to0}h\,\text{sen}\frac{y}{x}=0\,;$$

perciò $f_{xy}(0,0)=\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}0=0\,.$

Con le usuali regole di derivazione si ottiene $f_y(x,y)=x\cos(y/x)$ per ogni $x\neq0$; inoltre, dato che $f(0,y)$ è costante ($=0$), risulta $f_y(0,0)=0$. Quindi

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1\,;$$

(b) si verifica in modo analogo]

3.50 Generalizzando l'esercizio precedente, sia $g(t)$ una funzione di una variabile reale, limitata su $\mathbb{R}$ e derivabile per $t=0$, e sia $f(x,y)$ la funzione di due variabili definita da

$$f(x,y)=0 \qquad \text{se} \qquad x=0 \quad \text{e} \quad f(x,y)=x^2g(\frac{y}{x}) \qquad \text{se} \qquad x\neq0\,.$$

Verificare che $f_{xy}(0,0)=0$ e che $f_{yx}(0,0)=g'(0)$.

[Si giunge alla conclusione con lo stesso metodo dell'esercizio precedente. Si noti che anche la funzione dell'esercizio 3.47 è del tipo qui considerato, con $g(t) = t/(1+t^2)$]

3.51 Mostrare con un esempio che la tesi dell'esercizio precedente non vale se $g(t)$ non è una funzione limitata su $\mathbb{R}$.

[Ad esempio la tesi non vale se $g(t) = t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$]

3.52 Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{3/4}$$

risulta continua in $(0,0)$ e se in tale punto sia derivabile, differenziabile, derivabile due volte.

[Naturalmente $f(x,y)$ è continua nel punto $(x,y) = (0,0)$. La derivata parziale $f_x(x,y)$ per $(x,y) \neq (0,0)$ vale

$$f_x = \frac{3}{4}(x^2+y^2)^{-1/4} \cdot 2x = \frac{3}{2}\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/4}}$$

e inoltre per $(x,y) = (0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{3/2}-0}{h} = 0\,.$$

Risulta che $f_x(x,y)$ è continua (anche) per $(x,y) = (0,0)$. Analogamente $f_y(x,y)$ è una funzione continua in $(0,0)$. Pertanto $f(x,y)$ è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ ed è differenziabile (anche) in $(0,0)$. Infine si verifica che le derivate seconde non esistono per $(x,y) = (0,0)$]

3.53 Una funzione di due variabili $u(x,y)$ si dice *armonica* in un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ se essa ammette derivate seconde u_{xx}, u_{yy} per ogni $(x,y) \in A$ e se esse soddisfano l'equazione differenziale (alle derivate parziali, detta *equazione di Laplace*)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0\,.$$

Verificare che le seguenti funzioni sono armoniche nel loro insieme di definizione

(a) $u = 3x+2y$ $\qquad$ (b) $u = e^x \operatorname{sen} y$

(c) $u = x^2-y^2$ $\qquad$ (d) $u = x^4-6x^2y^2+y^4$

(e) $u = \log(x^2+y^2)$ $\qquad$ (f) $u = \operatorname{arctg}(y/x)$

(g) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{x+y}$ $\qquad$ (h) $u = x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6$

(i) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ $\qquad$ (l) $u = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

(m) $u = \dfrac{xy}{(x^2-y^2)^2}$ $\qquad$ (n) $u = \dfrac{y^3-yx^2}{(x^2+y^2)^3}$

[(d) $u_{xx} = -u_{yy} = 12(x^2 - y^2)$; (e) $u_{xx} = -u_{yy} = \dfrac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$;
(f), (g) $u_{xx} = -u_{yy} = \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$; (h) $u_{xx} = -u_{yy} = 30x^4 - 180x^2y^2 + 30y^4$;
(i) $u_{xx} = -u_{yy} = \dfrac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$; (l) $u_{xx} = -u_{yy} = \dfrac{6(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^4}$]

3E. Differenziabilità

Al contrario di quanto accade per le funzioni di una variabile reale, per le funzioni di due o più variabili l'esistenza delle derivate parziali in un punto non implica la continuità nel punto stesso. Un esempio in tal senso è proposto nell'esercizio 3.53 (si veda anche l'esercizio 3.82). La nozione naturale per le funzioni di più variabili, che estende il concetto di derivabilità per le funzioni di una variabile reale, è quella di differenziabilità.

Siano x, $h \in \mathbb{R}^n$ e sia $f(x)$ una funzione della variabile (vettoriale) x. Si dice che la funzione f è *differenziabile* in x se esiste una funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{|h|} = 0\,;$$
in tal caso L si chiama *differenziale* della funzione f nel punto x e si verifica che
$$L(h) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) h_i\,,$$
dove h_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sono le componenti del vettore h e f_{x_i} sono le derivate parziali della funzione f. Si dice anche che f è differenziabile in un insieme A se essa è differenziabile in ogni punto $x \in A$.

In particolare si osservi che se f è differenziabile in x allora f è anche *derivabile* in x cioè ammette derivate parziali $\partial f / \partial x_i$ per $i = 1, 2, \ldots, n$. Viceversa, un importante teorema (detto teorema del differenziale) afferma che *se f ammette derivate parziali in un intorno di x e se tali derivate sono continue in x, allora f è differenziabile in x.*

Diretta conseguenza della definizione è che, se f è differenziabile in x, allora f è anche continua in tale punto.

Una applicazione geometrica del concetto di differenziabilità è la seguente: se la funzione $f(x)$ è differenziabile in x_0, allora esiste il piano tangente in $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ al grafico della funzione $f(x)$ ed ha equazione
$$z = f(x_0) + L(x - x_0) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0)(x - x_0)_i\,,$$

dove $(x-x_0)_i$ indica la componente i-esima del vettore $x-x_0$.

Spesso si utilizzano le seguenti notazioni. Sia A un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Se f è una funzione continua in A si dice che f è di *classe* C^0 *in* A e si scrive $f \in C^0(A)$. Se f ammette derivate parziali prime e se queste sono continue nell'aperto A, si dice che f è *di classe* C^1 in A e si scrive $f \in C^1(A)$. Più generalmente $f \in C^k(A)$, $k \in \mathbb{N}$, significa che f ammette derivate parziali in A fino all'ordine k e che queste sono funzioni continue. Se $f \in C^k(A)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ si dice che $f \in C^\infty(A)$.

Con i simboli introdotti valgono le implicazioni

$$f \in C^1(A) \quad \Rightarrow \quad f \text{ è differenziabile in } A \quad \Rightarrow \quad f \in C^0(A).$$

Nella pratica, per decidere se una data funzione è differenziabile, si studia la continuità delle derivate parziali prime e si applica, se possibile, il criterio enunciato nel teorema del differenziale. Così, in base a tale criterio, le funzioni elementari (composizioni razionali di polinomi, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche, ecc.) risultano differenziabili all'interno del rispettivo insieme di definizione.

Negli esercizi che seguono proponiamo lo studio, fra l'altro, della differenziabilità di funzioni in situazioni tali da non poter applicare il criterio enunciato nel teorema del differenziale. Ricordiamo che, per verificare direttamente con la definizione se una data funzione f è differenziabile in un punto x, è opportuno calcolare preliminarmente le derivate parziali e successivamente verificare che è nullo il limite (h è un vettore di componenti (h_i))

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-\sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)h_i}{|h|}.$$

In particolare, per $n=2$, una funzione di due variabili $f(x,y)$ è differenziabile in un punto (x,y) se essa ammette derivate parziali f_x, f_y in tale punto e se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-f_x(x,y)h-f_y(x,y)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Se $f(x,y)$ è differenziabile in (x_0,y_0), il piano tangente al grafico della funzione in corrispondenza ad (x_0,y_0), cioè tangente nel punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, ha equazione

$$z = f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

3.54 Mostrare che la funzione $f(x,y)=|xy|$ è differenziabile nel punto $(x,y)=(0,0)$, ma non è differenziabile nel punto $(x,y)=(1,0)$.

[La funzione è identicamente nulla in corrispondenza degli assi coordinati. Perciò le derivate parziali in $(0,0)$ valgono zero; risulta quindi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,;$$

il limite vale zero perchè, essendo $|hk| \le \frac{1}{2}(h^2+k^2)$, risulta $0 \le \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{1}{2}\sqrt{h^2+k^2}$. In base alla definizione, la funzione è differenziabile in $(0,0)$. Ponendo $x=1$, la funzione $f(1,y)=|y|$ non è derivabile per $y=0$; perciò la funzione $f(x,y)$, non ammettendo derivata parziale $f_y(1,0)$, non è differenziabile in $(1,0)$]]

3.55 Si consideri la funzione definita da

$$f(0,0)=0 \qquad \text{e} \qquad f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \text{se} \qquad (x,y)\neq(0,0)\,.$$

Verificare che:

(a) $f(x,y)$ non è continua in $(0,0)$.

(b) $f(x,y)$ è derivabile in $(0,0)$.

(c) $f(x,y)$ non è differenziabile in $(0,0)$.

[(a) Si vedano gli esercizi 3.28 e 3.30; (b) la funzione è costante (=0) sugli assi coordinati; perciò $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$; (c) essendo f discontinua in $(0,0)$ ne segue che essa non è differenziabile in tale punto. In ogni caso la verifica diretta, in base alla definizione, è molto semplice: essendo $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)$, f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se è nullo il limite seguente

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

Si verifica invece, con le rette per l'origine, che il limite non esiste]

3.56 La continuità di una funzione $f(x,y)$ in un punto non implica la sua differenziabilità in tale punto. Dimostrare l'affermazione fatta studiando nel punto $(0,0)$, le funzioni

(a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$

(c) $f(0,0)=0 \qquad$ e $\qquad f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad$ se $\qquad (x,y)\neq(0,0)$

[(a) La funzione è continua in $(0,0)$ ma, non essendo derivabile in tale punto (esercizio 3.41), non è nemmeno differenziabile in $(0,0)$; (b) la funzione è continua in $(0,0)$ (si può procedere come nell'esercizio 3.24) ed è derivabile con derivate $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Non è però differenziabile in $(0,0)$ perchè non esiste il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{\frac{|hk|}{h^2+k^2}};$$

(c) utilizzando la disuguaglianza $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ si verifica che la funzione è continua in $(0,0)$. È anche derivabile nell'origine e le derivate parziali valgono zero. Però non è differenziabile in $(0,0)$ perchè non esiste il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2}]$$

3.57 La continuità delle derivate parziali prime implica la differenziabilità. Mostrare che non vale il viceversa studiando, nel punto $(0,0)$, la funzione definita da

$$f(x,0)=0 \qquad \text{e} \qquad f(x,y)=y^2\cos\frac{1}{y} \qquad \text{se} \qquad y\neq 0\,.$$

[La funzione $f(x,y)$ è costante rispetto ad x; perciò $f_x(x,y)=0$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. La funzione è derivabile anche rispetto ad y e risulta

$$f_y(x,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} k\cos\frac{1}{k} = 0\,;$$

$$f_y(x,y) = 2y\cos\frac{1}{y} + \operatorname{sen}\frac{1}{y}\,, \qquad \text{se} \qquad y\neq 0\,.$$

La derivata parziale $f_y(x,y)$ non è continua in $(x,0)$ perchè non esiste il limite per $y\to 0$ di $f_y(x,y)$. Però la funzione risulta differenziabile in $(x,0)$ perchè

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^2\cos(1/k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

essendo $|k^2\cos(1/k)/\sqrt{h^2+k^2}| \le k^2/\sqrt{h^2+k^2} \le |k|$]

3.58 Traendo spunto dall'esercizio precedente, si consideri una funzione costante rispetto ad x, della forma $f(x,y)=g(y)$. Mostrare che f è differenziabile in (x,y) se e solo se g è derivabile in y.

[Se f è differenziabile in (x,y), esistono le derivate parziali f_x, f_y. Essendo $f_y(x,y) = \lim_{k\to 0}[g(y+k)-g(y)]/k$, la funzione g è derivabile in y e $g'(y)=f_y(x,y)$. Viceversa, se g è derivabile in y, risulta

$$g(y+k) = g(y) + g'(y)k + o(k)$$

(infatti $\frac{o(k)}{k} = \frac{g(y+k)-g(y)}{k} - g'(y)$ converge a zero per $k\to 0$).
Essendo $k/\sqrt{h^2+k^2}\le 1$, si ottiene

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-f_xh-f_yk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(k)}{k}\cdot\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0]$$

3.59 Sia α un parametro positivo. Mostrare che la funzione

$$f(x,y) = |xy|^{\alpha}$$

è differenziabile in $(0,0)$ se e soltanto se $\alpha > 1/2$.

[La funzione è identicamente nulla sugli assi coordinati. Perciò $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. La funzione risulta differenziabile in $(0,0)$ se e solo se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk|^{\alpha}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,.$$

Con il metodo dell'esercizio 3.37 si verifica che il limite vale zero se e solo se $\alpha > 1/2$]

3.60 Si consideri la funzione $f(x,y)$ definita per $(x,y) \neq (0,0)$ da

$$f(x,y) = \frac{|xy|^{\alpha}}{x^2+y^2}$$

e da $f(0,0) = 0$, con α parametro reale. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y)$ risulta differenziabile nell'origine degli assi.

[La funzione $f(x,y)$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3/2$. Si può seguire il metodo dell'esercizio precedente. Per stabilire la differenziabilità in $(0,0)$ è utile la disuguaglianza

$$0 \leq \frac{|xy|^{\alpha}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2^{\alpha}} \frac{(x^2+y^2)^{\alpha}}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2^{\alpha}}(x^2+y^2)^{\alpha-3/2}$$

nel caso $\alpha > 3/2$, mentre si può calcolare il limite lungo le rette per l'origine $y = mx$ se $\alpha = 3/2$ ed anche se $\alpha < 3/2$]

3.61 Sia $f(x,y)$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2} + y\,, \qquad\qquad (x,y) \neq (0,0)$$

e $f(0,0) = 0$. Stabilire se $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$ e se è differenziabile in tale punto.

[Circa la continuità in $(0,0)$, è utile la stima, valida per $(x,y) \neq (0,0)$,

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{|x^3y|}{x^4+y^2} + |y| = |x|\frac{|x^2y|}{x^4+y^2} + |y| \leq |x|\frac{1}{2}\frac{x^4+y^2}{x^4+y^2} + |y| = \frac{1}{2}|x| + |y|\,,$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza $2|x^2y| \leq x^4 + y^2$ (equivalente a $(x^2 \pm y^2) \geq 0$). Ne segue che $f(x,y) \to (0,0)$ per ogni $(x,y) \to (0,0)$; pertanto $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$.

Per stabilire la differenziabilità in $(0,0)$ sono utili i valori delle derivate parziali

$$f_x(0,0) = 0\,, \qquad\qquad f_y(0,0) = 1\,.$$

La differenzaibilità di $f(x,y)$ nel punto $(0,0)$ è quindi ricondotta al calcolo del limite e alla verifica che tale limite è uguale a zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Sulle rette per l'origine, di equazione $y = mx$, si trova sempre il limite uguale a zero, ma tale risultato non è decisivo. È invece risolutivo il limite sulla parabola, per l'origine, di equazione $y = mx^2$. Il precedente quoziente prende la forma

$$\frac{x^3mx^2}{(x^4+m^2x^4)(x^2+m^2x^4)^{1/2}} = \frac{mx^5}{(1+m^2)x^4(1+m^2x^2)^{1/2}|x|}$$

che, per $x > 0$, è uguale a

$$\frac{m}{(1+m^2)(1+m^2x^2)^{1/2}}$$

che converge a $m/(1+m^2)$ per $x \to 0^+$. Quindi il risultato del limite dipende dalla parabola scelta ($y = mx^2$) e quindi il limite scritto sopra non esiste. La funzione $f(x,y)$ non è differenziabile nell'origine degli assi]

3.62 Stabilire per quali valori dei parametri α, $\beta \geq 0$ risulta differenziabile in $(0,0)$ la funzione definita da

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} \qquad \text{se} \qquad (x,y) \neq (0,0)\,.$$

[Con il metodo dell'esercizio 3.35 si verifica che la funzione è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha+\beta > 3$]

3.63 Sia p un parametro reale positivo ed f la potenza p-esima del modulo di (x,y), cioè la funzione definita da

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{p/2}\,.$$

Se p è un numero naturale pari, allora $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Se invece p è un numero naturale dispari, allora $f \in C^{p-1}(\mathbb{R}^2) - C^p(\mathbb{R}^2)$. Se infine p non è un numero naturale, allora $f \in C^{[p]}(\mathbb{R}^2) - C^{[p]+1}(\mathbb{R}^2)$, dove il simbolo $[p]$ indica, come al solito, la parte intera di p.

Si verifichi la proprietà enunciata per alcuni valori di p; ad esempio per $p = 2, 4$, per $p = 1$ e per $p = 1/2, 3/2$.

[Per $p = 2,4$, o in generale se p è un naturale pari, la funzione $f(x,y)$ è un polinomio di grado 2p e perciò è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Se $p = 1$ (ed anche se $p = 1/2$) la funzione è continua, ma non derivabile in $(0,0)$; perciò in tal caso $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$, ma $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$. Se $p = 3/2$ le derivate parziali in $(0,0)$ sono nulle e per $(x,y) \neq (0,0)$ esse valgono

$$f_x(x,y) = \frac{3}{4}\frac{x}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} \qquad ; \qquad f_y(x,y) = \frac{3}{4}\frac{y}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\,.$$

Con il metodo dell'esercizio 3.35 si verifica che $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ sono continue (anche) in $(0,0)$. Inoltre la funzione non ammette derivate seconde $f_{xx}(0,0)$, $f_{yy}(0,0)$ (mentre le derivate seconde miste in $(0,0)$ sono nulle). Perciò, se $p = 3/2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ma $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$]

3.64 Si consideri la funzione definita da $f(0,0) = 0$ e

$$f(x,y) = \frac{x^3 + x^2y(y-1) + xy^2 - y^3}{x^2+y^2} \qquad \forall\,(x,y) \neq (0,0)\,.$$

Stabilire se è differenziabile in $(0,0)$ ed in caso affermativo calcolarne il differenziale.

[Risulta $f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k = \dfrac{h^2k^2}{h^2+k^2}$ e per $(h,k) \to (0,0)$ tale espressione, divisa per $\sqrt{h^2+k^2}$, converge a zero. Perciò la funzione è differenziablle in $(0,0)$ ed il differenziale vale $L(h,k) = f_x(0,0)h + f_y(0,0)k = h - k$]

3.65 Nel caso siano differenziabili in $(0,0)$, determinare il differenziale delle seguenti funzioni:

(a) $f = x^2 + x(|y|-1) + 2y$ (b) $f = (|x|-x)|y| - 3y + 1$

(c) $f = x(1+\sqrt{|\operatorname{sen} y|})$ (d) $f = (\sqrt{|x|}-x)\sqrt{|\operatorname{sen} y|} + 4y$

[(a) Risulta $f(h,k) - [f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k] = h^2 + h|k|$. Si verifica (con il metodo dell'esercizio 3.35) che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 + h|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,.$$

Perciò la funzione è differenziabile ed il differenziale vale $L(h,k) = -h + 2k$; (b) la funzione è differenziabile in $(0,0)$ ed il differenziale vale $L(h,k) = -3k$; (c) la funzione è differenziabile in $(0,0)$ ed il differenziale vale $L(h,k) = h$; (d) la funzione, pur ammettendo derivate parziali $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 4$, non è differenziabile in $(0,0)$ perchè non esiste il limite (si considerino le rette per l'origine $h = mk$):

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(\sqrt{|h|}-h)\sqrt{|\operatorname{sen} k|}}{\sqrt{h^2+k^2}}]$$

3.66 Stabilire se è differenziabile in $(0,0)$ la funzione definita da

$$f(0,0) = 1 \qquad \text{e} \qquad f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{se} \qquad (x,y) \neq (0,0)\,.$$

[La funzione ammette derivate parziali in $(0,0)$ e queste valgono zero. Infatti, ad esempio per $f_x(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(|h|) - |h|}{h|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{o(h^2)}{h|h|} = 0\,.$$

La funzione è anche differenziabile in $(0,0)$. Infatti, ponendo $t = \sqrt{h^2+k^2}$, si ottiene

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{h^2+k^2} - \sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2} = \lim_{t\to 0+} \frac{\operatorname{sen} t - t}{t^2} = 0]$$

3.67 Stabilire se in $(0,0)$ risulta continua, derivabile o differenziabile la funzione f definita da $f(0,0)=0$ e, se $(x,y)\neq(0,0)$, rispettivamente da

(a) $f=\dfrac{1-\cos xy}{x^4+y^4}$ (b) $f=\dfrac{1-\cos xy}{x^2+y^2}$

(c) $f=\dfrac{\operatorname{sen} xy}{x^2+y^2}$ (d) $f=x^2\log\dfrac{x^4+3y^4}{x^4+y^4}$

(e) $f=x\log\dfrac{x^2+3y^2}{x^2+y^2}$ (f) $f=\dfrac{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

[(a) Con le rette per l'origine (si veda anche l'esercizio 3.39(b)) si verifica che f non è continua in $(0,0)$ e quindi neanche differenziabile. È però derivabile e le derivate parziali in $(0,0)$ sono nulle; (b) è continua, derivabile e differenziabile in $(0,0)$; (c) non è continua, nè differenziabile, ma è derivabile in $(0,0)$; (d) utilizzando le disuguaglianze, valide per ogni $(x,y)\neq(0,0)$

$$0=\log\frac{x^4+y^4}{x^4+y^4}\leq\log\frac{x^4+3y^4}{x^4+y^4}\leq\log\frac{3x^4+3y^4}{x^4+y^4}=\log 3\,,$$

si verifica che la funzione è differenziabile in $(0,0)$; (e) funzione continua e derivabile, ma non differenziabile in $(0,0)$; (f) continua, ma non derivabile né differenziabile in $(0,0)$]

3.68 Determinare l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni, in corrispondenza del punto indicato.

(a) $f(x,y)=x^3-2x^2y+5xy^2+y^3$ $(x,y)=(0,1)$

(b) $f(x,y)=x^3-2x^2y+5xy^2+y^3$ $(x,y)=(1,0)$

(c) $f(x,y)=\operatorname{arctg}(x+2y)$ $(x,y)=(1,0)$

(d) $f(x,y)=\operatorname{arctg}(x+2y)$ $(x,y)=(0,0)$

(e) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{-2}$ $(x,y)=(1,1)$

(f) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{-2}$ $(x,y)=(\sqrt{2},0)$

[(a) $z=5x+3y-2$; (b) $z=3x-2y-2$; (c) $z=x/2+y+\pi/4-1$; (d) $z=x+2y$; (e) $z=5/4-(x+y)/2$; (f) $z=5/4-x/\sqrt{2}$]

3.69 Determinare l'equazione del piano tangente al grafico della funzione dell'esercizio 3.60 per $(x,y)=(0,0)$.

[$z=x-y$]

3.70 Determinare, in un punto generico di coordinate (x_0,y_0), l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y)=x^2+y^2$.

[$z = 2(xx_0 + y_0y) - (x_0^2 + y_0^2)$]

3.71 Determinare l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

in un punto generico di coordinate $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

[$z = (x_0x + y_0y)/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$]

3.72 Due funzioni differenziabili in un aperto connesso, con derivate parziali fra loro uguali, differiscono per una costante. Utilizzare tale proprietà per discutere le identità (cioè per determinare se e in quale insieme esse valgano):

(a) $\quad \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = \dfrac{\pi}{2} \qquad$ (b) $\quad \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = -\dfrac{\pi}{2}$

[La funzione $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x) + \operatorname{arctg}(x/y)$ è derivabile al di fuori degli assi coordinati e le derivate parziali sono nulle (perciò la funzione è differenziabile al di fuori degli assi, perchè le derivate parziali sono costanti e quindi continue). La funzione $f(x, y)$ è costante in ogni componente connessa del suo insieme di definizione, cioè in ognuno dei quattro quadranti. Le costanti si determinano scegliendo (x, y) ad esempio uguale a $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$. Risulta che l'identita' (a) vale nel primo e nel terzo quadrante (cioè per $xy > 0$), mentre l'identità (b) vale nel secondo e nel quarto quadrante]

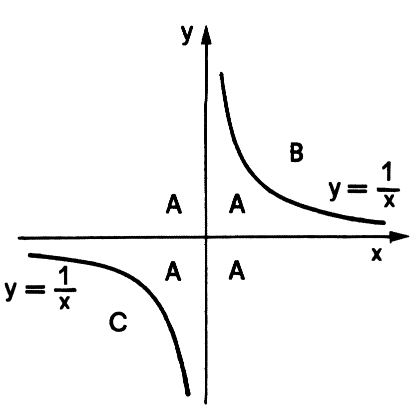

figura 3.30

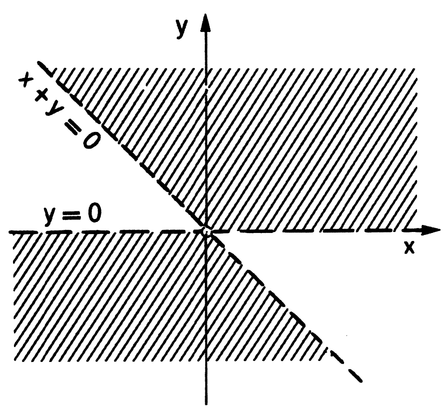

figura 3.31

3.73 Discutere le identità

(a) $\quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y}{1 - xy}$

(b) $\quad \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x - y}{1 + xy}$

(c) $\quad \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{x+y}$

[(a) Calcolando le derivate parziali prime, si verifica che la funzione

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$$

è costante in ognuno dei tre insiemi connessi A, B, C rappresentati in figura 3.30 e definiti da

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}; \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > \frac{1}{x}\};$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ y < 1/x\}.$$

Ponendo $(x,y) = (0,0)$ si verifica che $f(x,y)$ è nulla in A. Ponendo $y = x$ e calcolando il limite

$$\lim_{x \to 1^+} f(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2},$$

si verifica che $f(x,y)$ vale π in B. Analogamente $f(x,y)$ vale $-\pi$ in C. Perciò l'identità (a) vale nell'insieme A, cioè per $xy < 1$; (b) l'identità vale nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$. Si noti che l'identità (b) si ottiene dall'identità (a) scambiando y con $-y$; (c) l'identità vale nell'insieme tratteggiato in figura 3.31]

3F. Derivate delle funzioni composte

Siano $x(t)$, $y(t)$ due funzioni reali definite nell'intorno di un punto t e sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili definita in un intorno del punto $(x(t), y(t))$. Se le funzioni di una variabile $x(t)$, $y(t)$ sono derivabili in t e se la funzione di due variabili $f(x,y)$ è differenziabile in $(x(t), y(t))$, allora risulta derivabile rispetto a t la funzione composta (di una variabile reale) $t \to f(x(t), y(t))$ e la derivata vale

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

Geometricamente $x = x(t)$, $y = y(t)$ sono le equazioni parametriche di una curva in $\mathbb{R}^2$ (nel piano x, y), mentre

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad z = f(x(t), y(t))$$

sono le equazioni parametriche di una curva in $\mathbb{R}^3$ (nello spazio di assi x, y, z) che giace sulla superficie di equazione cartesiana $z = f(x,y)$, come nelle figure 3.32, 3.33, 3.34, 3.35. In particolare, in figura 3.32 abbiamo scelto $x(t) = x_0$, $y(t) = t$, che sono le equazioni parametriche di una retta passante per $(x_0, 0)$ e parallela all'asse y. In fig. 3.33 consideriamo una retta parallela all'asse x, di equazioni $x(t) = t$, $y(t) = y_0$.

La derivata della funzione di una variabile reale $t \to f(x(t), y(t))$ fornisce una misura della pendenza del cammino scelto, quando si pensi al grafico della funzione $z = f(x, y)$ come alla superficie di una zona geografica, ad esempio una collina, e alla curva $(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ come ad un sentiero tracciato su tale superficie. Con questa analogia di tipo geografico, la curva di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$ è la rappresentazione topografica bidimensionale (nel piano x, y, che costituisce la carta topografica) del sentiero sulla superficie della collina.

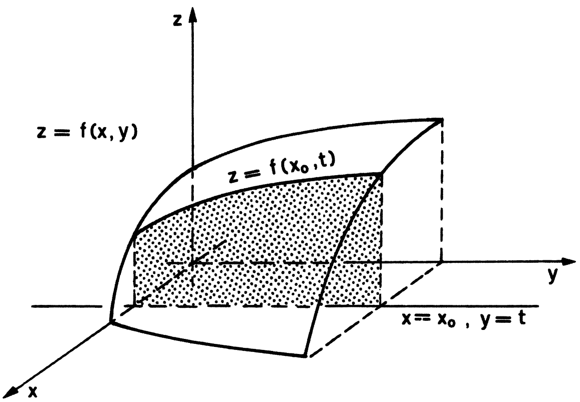

figura 3.32

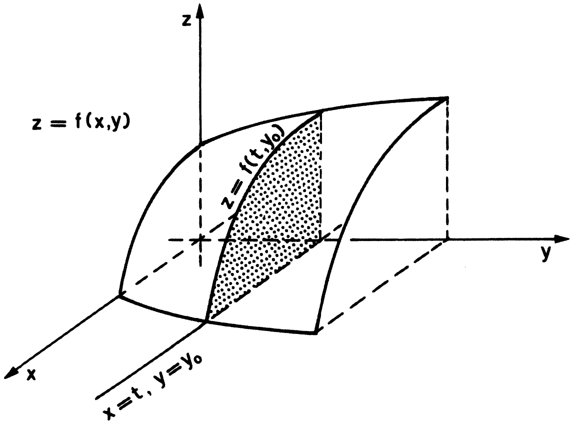

figura 3.33

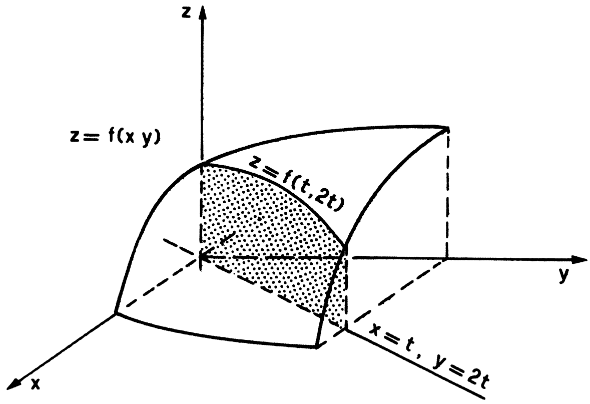

figura 3.34

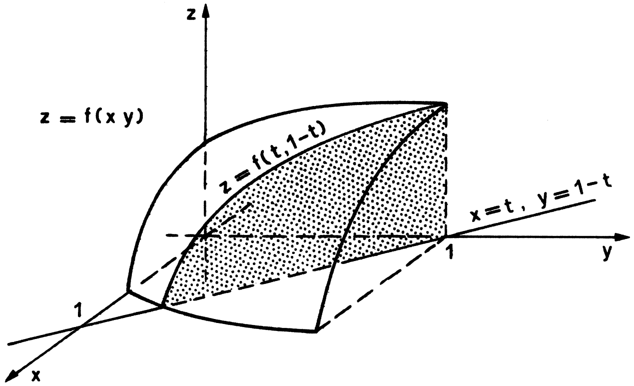

figura 3.35

3.74 Determinare la derivata, rispetto alla variabile reale t, delle funzioni composte come indicato di seguito

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ con $x(t) = 1 + t,\quad y(t) = 1 - t$

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ con $x(t) = \cos t,\quad y(t) = \operatorname{sen} t$

(c) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ con $x(t) = y(t) = t \quad (t \neq 0)$

(d) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ con $x(t) = 3t^2,\quad y(t) = 2t \quad (t \neq 0)$

(e) $f(x,y) = \log(x^2 - y^2)$ con $x(t) = \cos t,\quad y(t) = \operatorname{sen} t \quad (0 < t < \frac{\pi}{4})$

(f) $\quad f(x,y) = \log(x^2 - y^2) \qquad \text{con } x(t) = \sqrt{1+t^2}, \quad y(t) = t$

[(a) $\frac{d}{dt} f(x(t),y(t)) = f_x(x(t),y(t))x'(t) + f_y(x(t),y(t))y'(t) = 2(1+t) - 2(1-t) = 4t.$
(b) $f_x(x(t),y(t))x'(t) + f_y(x(t),y(t))y'(t) = -2\text{sen}\,t\cos t + 2\text{sen}t\cos t = 0.$

La derivata rispetto a t è identicamente nulla. Ciò significa che la funzione $f(x,y)$ è costante lungo la curva di equazioni parametriche $x(t) = \cos t$, $y(t) = \text{sen}\,t$. Infatti tale curva è la circonferenza di centro $(0,0)$, e raggio 1 ed è una delle linee di livello di $f(x,y)$ (si veda l'esercizio 3.1 e la figura 3.2). Infine osserviamo che, con una semplice verifica per sostituzione, risulta $f(\cos t, \text{sen}\,t)$ costante, uguale ad uno. (c) Le derivate parziali di $f(x,y)$, per $(x,y) \neq (0,0)$, valgono

$$f_x = \frac{y^2(y^4 - x^2)}{(x^2+y^4)^2}, \qquad f_y = \frac{2xy(x^2 - y^4)}{(x^2+y^4)^2}$$

e la derivata della funzione composta è uguale a $(1-t^2)/(1+t^2)^2$. (d) La derivata rispetto a t della funzione composta $f(3t^2, 2t)$ è nulla; infatti la parabola di equazioni parametriche $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 2t$ (e di equazione cartesiana $x = (3/4)y^2$) per $t \neq 0$ è una linea di livello di $f(x,y)$. (e) La derivata della funzione composta vale $-2\text{sen}\,(2t)/\cos(2t)$. (f) La derivata della funzione composta è nulla; la funzione è costante lungo il ramo di iperbole di equazioni parametriche $x(t) = \sqrt{1+t^2}$, $y(t) = t$ (e di equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$)]

3.75 Sia A un unsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ con la proprietà che, se $(x,y) \in A$, allora $(tx,ty) \in A$ per ogni $t > 0$ (un insieme siffatto si dice un *cono* di $\mathbb{R}^2$). Una funzione di due variabili $f(x,y)$ si dice *omogenea* di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ in A se, per ogni $(x,y) \in A$, risulta

$$(*) \qquad f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y), \qquad \forall t > 0.$$

Ad esempio le funzioni dell'esercizio 3.3 sono omogenee di grado 2 in $\mathbb{R}^2$; quella dell'esercizio 3.6 è omogenea di grado 1 in $\mathbb{R}^2$; quelle dell' esercizio 3.7 sono omogenee di grado zero in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Sia $f(x,y)$ una funzione differenziabile e omogenea di grado α. Verificare che:

(a) le derivate parziali sono omogenee di grado $\alpha - 1$;

(b) vale l'*identità di Eulero* $xf_x + yf_y = \alpha f$.

[Si inizi derivando la relazione di omogeneità (*).
(a) Derivando rispetto ad x la (*) membro a membro, si ha

$$tf_x(tx,ty) = t^\alpha f_x(x,y).$$

Dividendo entrambi i membri per t, si vede che f_x è omogenea di grado $\alpha - 1$. Analogamente per f_y.
(b) Derivando membro a membro rispetto a t la relazione di omogeneità (*), in base alla formula di derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$xf_x(tx,ty) + yf_y(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)\,.$$

Si ottiene la conclusione per $t = 1$]

Dato che una derivata parziale si calcola rispetto ad una variabile reale considerando l'altra variabile costante (o le altre variabili costanti) con il ruolo di parametro, vale la formula di derivazione della funzione composta $f(x, y)$ anche quando x, y sono a loro volta funzioni di due (o più) variabili reali. Così, se $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ sono funzioni derivabili e se $f(x, y)$ è differenziabile, risulta

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = f_x x_\xi + f_y y_\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = f_x x_\eta + f_y y_\eta\,.$$

3.76 Il legame tra le coordinate cartesiane (x, y) e le *coordinate polari* (ρ, ϑ) si esprime con le relazioni

$$x = \rho\cos\vartheta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\vartheta\,.$$

Assegnata una funzione differenziabile $f(x, y)$, verificare che le derivate parziali della funzione composta $f(\rho\cos\vartheta, \rho\operatorname{sen}\vartheta)$ rispetto alle variabili ρ, ϑ sono date da

$$f_\rho = f_x \cos\vartheta + f_y \operatorname{sen}\vartheta \qquad f_\vartheta = -f_x \rho\operatorname{sen}\vartheta + f_y \rho\cos\vartheta\,.$$

3.77 Verificare la seguente identità, che esprime in coordinate polari il quadrato del modulo del gradiente di una funzione differenziabile $f(x, y)$ (per il gradiente si veda anche il paragrafo che segue):

$$f_x^2 + f_y^2 = f_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} f_\vartheta^2\,.$$

[Utilizzando le espressioni f_ρ, f_ϑ dell'esercizio precedente, si ottiene

$$f_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} f_\vartheta^2 = f_x^2 \cos^2\vartheta + 2 f_x f_y \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + f_y^2 \operatorname{sen}^2\vartheta + f_x^2 \operatorname{sen}^2\vartheta - 2 f_x f_y \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + f_y^2\cos^2\vartheta =$$
$$= f_x^2 + f_y^2]$$

3.78 Sia $f(x, y)$ una funzione di classe C^2. Calcolare le derivate parziali seconde $f_{\rho\rho}$, $f_{\rho\vartheta}$, $f_{\vartheta\vartheta}$ della funzione composta $f(\rho\cos\vartheta, \rho\operatorname{sen}\vartheta)$.

[Utilizzando le formule dell'esercizio 3.72 si ha:

$$f_{\rho\rho} = \frac{\partial}{\partial\rho}[f_x(\rho\cos\vartheta,\ \rho\operatorname{sen}\vartheta)\cos\vartheta + f_y(\rho\cos\vartheta,\ \rho\operatorname{sen}\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta] =$$

$$= f_{xx}\cos^2\vartheta + 2f_{xy}\text{sen}\,\vartheta\cos\vartheta + f_{yy}\text{sen}^2\vartheta\,;$$

$$f_{\rho\vartheta} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}[f_x(\rho\cos\vartheta,\ \rho\text{sen}\,\vartheta)\cos\vartheta + f_y(\rho\cos\vartheta,\ \rho\text{sen}\,\vartheta)\text{sen}\,\vartheta] =$$
$$= -f_{xx}\rho\text{sen}\,\vartheta\cos\vartheta + f_{xy}\rho\cos^2\vartheta - f_x\text{sen}\,\vartheta - f_{yx}\rho\text{sen}^2\vartheta + f_{yy}\rho\text{sen}\,\vartheta\cos\vartheta + f_y\cos\vartheta =$$
$$= \rho[(f_{yy} - f_{xx})\text{sen}\,\vartheta\cos\vartheta + f_{xy}(\cos^2\vartheta - \text{sen}^2\vartheta) + f_y\cos\vartheta - f_x\text{sen}\,\vartheta]\,;$$

$$f_{\vartheta\vartheta} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}[-f_x(\rho\cos\vartheta, \rho\text{sen}\,\vartheta)\rho\text{sen}\,\vartheta + f_y(\rho\cos\vartheta, \rho\text{sen}\,\vartheta)\rho\cos\vartheta] =$$
$$= f_{xx}\rho^2\text{sen}^2\vartheta - f_{xy}\rho^2\text{sen}\,\vartheta\cos\vartheta - f_x\rho\cos\vartheta - f_{xy}\rho^2\text{sen}\,\vartheta\cos\vartheta + f_{yy}\rho^2\cos^2\vartheta - f_y\rho\text{sen}\,\vartheta =$$
$$= \rho^2(f_{xx}\text{sen}^2\vartheta - 2f_{xy}\text{sen}\,\vartheta\cos\vartheta + f_{yy}\cos^2\vartheta) - \rho(f_x\cos\vartheta + f_y\text{sen}\,\vartheta)]$$

3.79 Verificare la seguente identità differenziale, che è utile nello studio di alcune proprietà delle funzioni armoniche (esercizio 3.53):

$$f_{xx} + f_{yy} = f_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}f_\rho + \frac{1}{\rho^2}f_{\vartheta\vartheta}$$

[Utilizzando le espressioni di $f_{\rho\rho}$, $f_{\vartheta\vartheta}$ dell' esercizio precedente e l'espressione di f_ρ data nell'esercizio 3.72, otteniamo

$$f_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}f_{\vartheta\vartheta} + \frac{1}{\rho}f_\rho = f_{xx}\cos^2\vartheta + 2f_{xy}\text{sen}\,\vartheta\cos\vartheta + f_{yy}\text{sen}^2\vartheta + f_{xx}\text{sen}^2\vartheta - 2f_{xy}\text{sen}\,\vartheta\cos\vartheta +$$
$$+ f_{yy}\cos^2\vartheta - \frac{1}{\rho}(f_x\cos\vartheta + f_y\text{sen}\,\vartheta) + \frac{1}{\rho}(f_x\cos\vartheta + f_y\text{sen}\,\vartheta) = f_{xx} + f_{yy}]$$

3.80 Verificare che le seguenti funzioni, espresse in coordinate polari ρ, ϑ, sono armoniche per $\rho \neq 0$ (qualunque sia il valore del parametro reale α)

(a) $\quad f(\rho,\vartheta) = \rho^\alpha\cos(\alpha\vartheta) \qquad$ (b) $\quad f(\rho,\vartheta) = \rho^\alpha\text{sen}(\alpha\vartheta)$

[(a) Essendo $f_\rho = \alpha\rho^{\alpha-1}\cos(\alpha\vartheta)$, $f_{\rho\rho} = \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}\cos(\alpha\vartheta)$, $f_{\vartheta\vartheta} = -\alpha^2\rho^\alpha\cos(\alpha\vartheta)$, si ha $f_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}f_\rho + \frac{1}{\rho^2}f_{\vartheta\vartheta} = \alpha\rho^{\alpha-2}\cos(\alpha\vartheta)[(\alpha-1) + 1 - \alpha] = 0\,.$

In base all'identità differenziale dell'esercizio precedente, la funzione f è armonica. In (b) si procede analogamente]

3.81 Si consideri la trasformazione di coordinate

$$x = \xi + \eta, \qquad y = \xi - \eta\,.$$

Verificare che, per ogni funzione $f(x,y)$ di classe C^2, vale l'identità differenziale

$$f_{xx} - f_{yy} = f_{\xi\eta}\,.$$

[$f_\xi = \frac{\partial}{\partial\xi}(f(\xi+\eta, \xi-\eta)) = f_x + f_y$, da cui

$$f_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}(f_x(\xi+\eta,\xi-\eta) + f_y(\xi+\eta,\xi-\eta)) = f_{xx} - f_{xy} + f_{yx} - f_{yy}]$$

3G. Gradiente. Derivate direzionali

Se $f(x,y)$ è una funzione derivabile in un punto (x,y), in tale punto è possibile definire il *gradiente* di f, indicato con Df o ∇f oppure con grad f, che per definizione è il vettore di $\mathbb{R}^2$ avente per componenti le derivate parziali di f; quindi

$$Df(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$$

o, più concisamente, $Df = (f_x, f_y)$.

Per capire il significato geometrico del gradiente è opportuno considerare anche le derivate direzionali di f. A tale scopo consideriamo un vettore di modulo unitario $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, cioè tale che $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$. Un tale vettore si chiama anche una *direzione* in $\mathbb{R}^2$. La *derivata direzionale* di $f(x,y)$ in un punto (x,y) nella direzione (λ_1, λ_2) è il limite (se esiste ed è finito)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\lambda_1, , y+t\lambda_2) - f(x,y)}{t}$$

e si indica con il simbolo $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$, con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

In particolare, se $\lambda = (1,0)$, la direzione considerata è quella parallela all'asse x (ed il verso è quello delle x positive) e la derivata direzionale coincide con la derivata parziale rispetto ad x; mentre, se $\lambda = (0,1)$, si ottiene la derivata parziale rispetto ad y.

3.82 Si calcoli in base alla definizione la derivata direzionale della funzione $f(x,y) = (x+y)^2$ nel punto $(x,y) = (1,2)$ nelle direzioni di seguito indicate:

(a) $\lambda = (1,0)$ (b) $\lambda = (0,-1)$ (c) $\lambda = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$

[In generale, se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(1,2) = \lim_{t\to 0} \frac{[3+t(\lambda_1+\lambda_2)]^2 - 9}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{6t(\lambda_1+\lambda_2) + t^2(\lambda_1+\lambda_2)^2}{t} = 6(\lambda_1+\lambda_2)\,.$$

Quindi nel caso (a), se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (1,0)$, si ha $\partial f/\partial\lambda = 6$; (b) $\partial f/\partial\lambda = -6$; (c) se $\lambda = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ allora $\partial f/\partial\lambda = 6\sqrt{2}$; se invece $\lambda = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ allora $\partial f/\partial\lambda = 0$]

Seguendo la definizione, la derivata direzionale $\partial f/\partial\lambda =$, con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, è la derivata della funzione di una variabile reale $t \to f(x+t\lambda_1, y+t\lambda_2)$, calcolata per $t = 0$. Se $f(x,y)$ è differenziabile in (x,y), per la regola di derivazione delle funzioni composte, la derivata direzionale è data da

$$\partial f/\partial\lambda = f_x(x,y)\lambda_1 + f_y(x,y)\lambda_2\,.$$

Con i simboli vettoriali $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ e $Df = (f_x, f_y)$, in ogni punto dove f è differenziabile la derivata direzionale risulta uguale al prodotto scalare tra il gradiente Df e la direzione λ (si ricordi che il prodotto scalare tra due vettori $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ è uguale a $v_1w_1 + v_2w_2$). Utilizzando il simbolo $(,)$ per il prodotto scalare, si ha

$$\partial f/\partial\lambda = (Df, \lambda).$$

Il prodotto scalare tra due vettori non nulli di modulo fissato è *massimo* quando i due vettori sono fra loro paralleli e orientati nello stesso verso (il prodotto scalare è minimo se i due vettori sono paralleli e con versi discordi, mentre il prodotto scalare vale zero se i due vettori sono ortogonali). Quindi nel nostro caso la derivata direzionale risulta massima se λ è la direzione del gradiente.

Dato che la derivata è una misura della pendenza della funzione considerata, ne risulta che *il vettore gradiente, se non è nullo, indica la direzione di massima pendenza.* In altre parole, fissato un punto (x, y), la funzione di una variabile reale

$$t \to f(f(x + t\lambda_1, y + t\lambda_2)$$

(che, come già detto nel paragrafo precedente, geometricamente corrisponde ad un cammino sulla superficie $z = f(x, y)$) ha derivata massima per $t = 0$ (il sentiero ha la massima pendenza) se λ ha la stessa direzione e lo stesso verso del gradiente Df.

3.83 Si consideri la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(a) Calcolare il gradiente di f in un punto generico di coordinate (x, y).

(b) Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1, 1)$, nella direzione della retta $y = x$ nel verso delle x crescenti.

(c) Si verifichi che, in ogni punto $(x, y) \neq (0, 0)$, il gradiente è ortogonale alle linee di livello (rappresentate nelle figure 3.2(a) e 3.2(b)) della funzione f.

[(a) $Df = (2x, 2y)$; (b) Si richiede di calcolare la derivata nel punto $(1, 1)$ nella direzione $\lambda = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ (si ricordi che la direzione λ ha modulo unitario). La derivata direzionale vale

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 2x\frac{\sqrt{2}}{2} + 2y\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(x + y)$$

e nel punto $(1, 1)$ essa risulta uguale a $2\sqrt{2}$. (c) Le linee di livello di equazione $f(x, y) = z$, con z costante positiva, sono le circonferenze rappresentate nelle figure 3.2(a) e 3.2(b) di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{z}$.

Consideriamo un punto di coordinate (x, y) sulla linea di livello $x^2+y^2 = z$; il vettore r di componenti (x, y), applicato all'origine, è un raggio del cerchio in figura 3.36 e, naturalmente, è ortogonale alla circonferenza $x^2 + y^2 = z$; il gradiente $Df = (2x, 2y)$ è uguale a $2r$ ed è quindi anch'esso ortogonale in (x, y) alla circonferenza.

Si può anche procedere analiticamente nel modo seguente: consideriamo una generica circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = z$, con $z > 0$. In forma parametrica tale circonferenza può essere rappresentata con le equazioni

$$x(t) = \sqrt{z}\cos t, \qquad y(t) = \sqrt{z}\,\mathrm{sen}\, t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

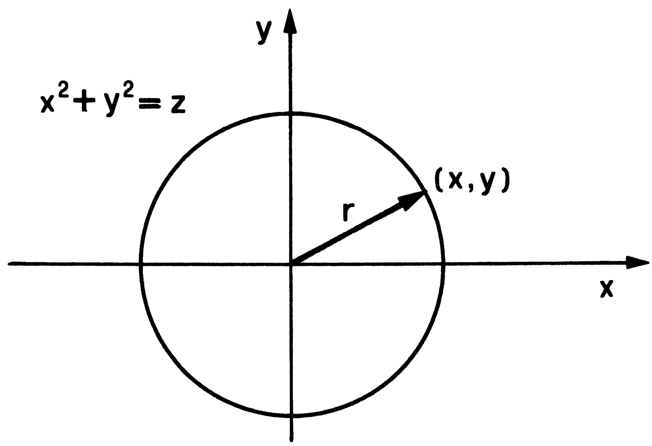

figura 3.36

La retta tangente alla circonferenza in $(x(t), y(t))$ ha coseni direttori proporzionali alle derivate $x'(t)$, $y'(t)$, cioè ha la direzione del vettore $v = (x'(t), y'(t)) = (-\sqrt{z}\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{z}\cos t)$. Il gradiente vale $Df = (2x, 2y)$ e, per $(x, y) = (x(t), y(t))$, risulta nullo il prodotto scalare tra i due vettori v e Df; infatti

$$(v, Df) = x'(t)x(t) + y'(t)y(t) = -\sqrt{z}\,\mathrm{sen}\, t\cos t + \sqrt{z}\cos t\,\mathrm{sen}\, t = 0]$$

3.84 Si verifichi che il gradiente, quando non è nullo, è ortogonale alle rispettive linee di livello nei casi in cui la funzione $f(x, y)$ sia definita da

(a) $f(x, y) = y - x$ (b) $f(x, y) = y^2 - x^2$

(c) $f(x, y) = e^x$ (d) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

[(a) L'insieme delle linee di livello è costitulto dalle rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Il gradiente è costante e vale $Df = (-1, 1)$; il vettore di componenti $(-1, 1)$ ha la direzione della bisettrice del secondo quadrante ed è quindi ortogonale alla famiglia di rette parallele anzidette. (b) Le linee di livello, di equazione $y^2 - x^2 = z$, sono iperboli per ogni $z \ne 0$, mentre sono le due rette di equazione $y = \pm x$ se $z = 0$ (si veda la figura 3.4). Se $z \ne 0$ tali iperboli si rappresentano in forma parametrica per mezzo delle funzioni iperboli che (il lettore segua, in dettaglio, anche questa strada) oppure, se $z > 0$ e $y > 0$, ad esempio con le equazioni

$$x(t) = t\,, \qquad y(t) = \sqrt{z + t^2}, \qquad\qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

La direzione del vettore tangente è data da

$$(x'(t), y'(t)) = (1, t/\sqrt{z + t^2})$$

e si vede immediatamente (verificando che $x' f_x + y' f_y = 0$) che tale vettore è ortogonale a

$$Df = (-2x, 2y) = (-2t, 2\sqrt{z + t^2}).$$

Se $z = 0$ e se consideriamo ad esempio la linea di livello $y = x\,(\neq 0)$, essa ha la direzione del vettore $(1, 1)$; il gradiente $Df = (-2x, 2y)$, se non è nullo, per $x = y$ ha la direzione del vettore $(-1, 1)$ ed i due vettori sono tra loro ortogonali.
(c) Le linee di livello hanno equazione $e^x = z$ con z costante positiva , cioè $x = \log z =$ costante. Perciò le linee di livello sono rette parallele all'asse y. La direzione del gradiente $Df = (e^x, 0)$ è costante ed è la stessa del vettore $(1, 0)$, che è ortogonale alle linee di livello.
(d) La funzione è rappresentata in figura 3.11. Le linee di livello sono semirette per l'origine di equazioni parametriche $x(t) = lt$, $y(t) = mt$, con $t > 0$ ed $l^2 + m^2 = 1$ (il vettore (l, m) è la direzione della semiretta). Il gradiente vale

$$Df = \left(\frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \,,\, \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

e si verifica che $x'(t) f_x + y'(t) f_y = l f_x + m f_y = 0$; infatti:

$$l f_x + m f_y = l \frac{m(m^2 - l^2)}{t(l^2 + m^2)^2} + m \frac{l(l^2 - m^2)}{t(l^2 + m^2)^2} = 0]$$

3.85 Si consideri la funzione dell'esercizio 3.80(d):

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}\,.$$

Calcolare ove possibile:

(a) il modulo del gradiente $|Df|$;

(b) il vettore (di modulo unitario) $Df/|Df|$ e rappresentare graficamente il corrispondente campo vettoriale (cioè disegnare la direzione ed il verso di $Df/|Df|$ (o equivalentemente di Df) in corrispondenza ad ogni punto (x, y)).

[(a) $|Df| = \dfrac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.
(b) Df non è definito in $(0, 0)$ e, altrimenti, è nullo se $y = \pm x$. Tolti questi casi, il vettore $Df/|Df|$ è uguale a

$$\frac{Df}{|Df|} = \left(\frac{y^2 - x^2}{|x^2 - y^2|} \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \quad , \quad \frac{x^2 - y^2}{|x^2 - y^2|} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right).$$

Distinguendo i casi $y^2 \gtrless x^2$, si ottiene

$$\frac{Df}{|Df|} = \pm\left(\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \quad \frac{-x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right), \qquad \text{se} \quad |y| \gtrless |x|\,.$$

$Df/|Df|$ è il vettore unitario tangente alla circonferenza di centro l'origine e passante per il punto (x, y), orientato in verso orario se $|y| > |x|$ (figura 3.37(a)) ed in verso antiorario se $|y| < |x|$ (figura 3.37 (b)).

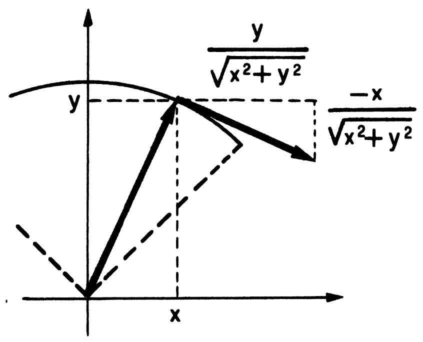

figura 3.37(a)

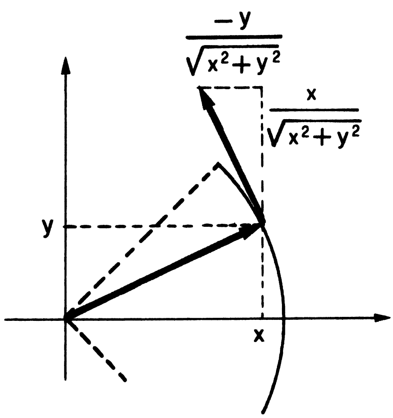

figura 3.37(b)

Sia per $|y| > |x|$ che per $|y| < |x|$ il versore $Df/|Df|$ indica la direzione ed il verso da prendere per "avvicinarsi" alla retta di equazione $y = x$ $(x \neq 0)$. Dato che il gradiente (e quindi anche $Df/|Df|$) indica la direzione di massima pendenza, ciò significa che, avvicinandosi a tale retta lungo le circonferenze per l'origine, la funzione f cresce. Ciò è visibile anche dal grafico di f in figura 3.11: in corrispondenza della retta $y = x$ $(x \neq 0)$ la funzione assume il suo massimo $(z = 1/2)$, mentre assume valori inferiori in corrispondenza alle altre rette per l'origine. In particolare $f(x, y)$ è nulla lungo gli assi coordinati (origine esclusa) ed è minima in corrispondenza alla retta $y = -x$ $(x \neq 0)$. Il campo del gradiente è schematizzato in figura 3.38]

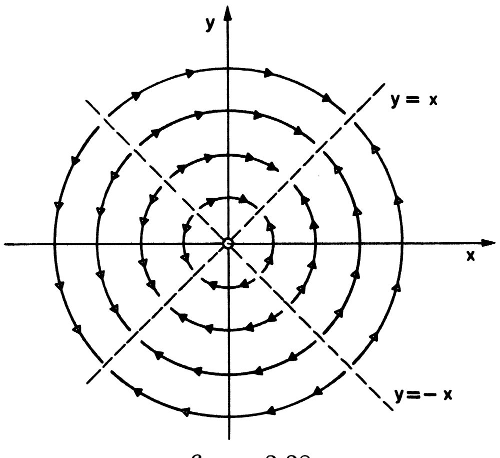

figura 3.38

3.86 Sia $g(t)$ una funzione derivabile per $t > 0$ e sia

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Verificare che $|Df| = |g'|$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$.

[Si osservi che, essendo $g(t)$ derivabile per $t > 0$, con il metodo dell'esercizio 3.59 si può provare che $f(x, y)$ è differenziabile per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$. Il metodo più elegante per calcolare il modulo del gradiente di f è quello di scrivere f in coordinate polari, mediante la trasformazione $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \operatorname{sen} \vartheta$, e di utilizzare l'espressione del modulo del gradiente (si veda l'esercizio 3.73):

$$|Df| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{f_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} f_\vartheta^2}.$$

Essendo nel nostro caso $f = g(\rho)$, risulta $f_\vartheta = 0$ e quindi

$$|Df| = \sqrt{f_\rho^2} = |f_\rho| = |g'|.$$

Si può anche procedere in base alla formula di derivazione delle funzioni composte:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} g(\sqrt{x^2 + y^2}) = g'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad f_y = g'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

da cui $|Df| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = |g'| \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}} = |g'|$]

3.87 Utilizzando la definizione, verificare che la funzione $f(x, y)$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \qquad \text{se} \qquad (x, y) \neq (0, 0) \qquad \text{e} \qquad f(0, 0) = 0$$

ammette in $(0, 0)$ derivata direzionale in ogni direzione $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, pur non essendo ivi continua. Verificare inoltre che in $(0, 0)$ non vale la formula $\partial f / \partial \lambda = f_x \lambda_1 + f_y \lambda_2$.

[Sia $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ un vettore di modulo unitario. In base alla definizione, la derivata di f, nel punto $(0, 0)$, nella direzione λ è data da

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\lambda_1, t\lambda_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{\lambda_1^4 t^2 + \lambda_2^2} = \begin{cases} \lambda_1^2 / \lambda_2 & \text{se} \quad \lambda_2 \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Perciò la funzione f è derivabile in $(0, 0)$ in ogni direzione. Però essa non è continua in tale punto perchè non esiste il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \to (0, 0)$; si verifica ciò considerando le parabole per l'origine di equazione $y = mx^2$, con $m \in \mathbb{R}$, come indicato nell'esercizio 3.34(b).

Da verifica diretta in base alla definizione, oppure dal limite precedente ponendo rispettivamente $\lambda = (1, 0)$ e $\lambda = (0, 1)$, si vede che in $(0, 0)$ le derivate parziali valgono $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

Se invece $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ rappresenta una direzione diversa dalle direzioni degli assi coordinati (ciò corrisponde al caso in cui sia λ_1 che λ_2 sono non nulli) allora $\partial f / \partial \lambda = \lambda_1^2 / \lambda_2 \neq 0$. Perciò in $(0, 0)$ la derivata direzionale non è combinazione lineare delle due derivate parziali]

3.88 Sia $f(x,y)$ la funzione dell'esercizio precedente e sia $g(x,y) = [f(x,y)]^2$. Verificare che $g(x,y)$ non è continua in $(0,0)$ nonostante che la derivata direzionale esista e valga zero, qualunque sia la direzione.

[Come nell'esercizio precedente (si veda anche 3.34(b)) si verifica che $g(x,y)$ non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$. Circa la derivata direzionale, risulta

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}[f(x,y)]^2 = 2f(x,y)\frac{\partial f}{\partial \lambda}.$$

Essendo $f(0,0) = 0$, risulta $\partial g/\partial \lambda = 0$ nel punto $(0,0)$ qualunque sia λ]

3.89 Si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ in un intorno del punto $(2,1)$. Determinare in quale direzione λ la derivata $\partial f/\partial \lambda$, calcolata per $(x,y) = (2,1)$, è massima ed in quale direzione è minima.

[Il gradiente indica la direzione di massima pendenza. Perciò il massimo della derivata direzionale si ottiene per $\lambda = Df|Df|$ ed il valore massimo è

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = f_x\lambda_1 + f_y\lambda_2 = f_x\frac{f_x}{|Df|} + f_y\frac{f_y}{|Df|} = \frac{f_x^2 + f_y^2}{|Df|} = |Df|.$$

Analogamente, la derivata direzionale è minima nella direzione e nel verso opposto al gradiente, cioè per $\lambda = -Df/|Df|$ ed in tal caso la derivata vale a $\partial f/\partial \lambda = -|Df|$.

Per la funzione presa in considerazione otteniamo i valori $Df = (2x + 2y, 2x + 4y)$ ed in particolare $Df(2,1) = (6,8)$. In $(2,1)$ risulta quindi $Df(2,1)| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ e $Df/|Df| = (3/5, 4/5)$. Perciò, nel punto $(2,1)$, la derivata direzionale $\partial f/\partial \lambda$ è massima se $\lambda = (3/5, 4/5)$ ed in tal caso $\partial f/\partial \lambda = 10$. La derivata direzionale è minima (e vale -10) nella direzione $\lambda = (-3/5, -4/5)$]

3.90 Come nell'esercizio precedente, si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ in un intorno del punto $(2,1)$. Determinare una direzione λ in cui la derivata direzionale $\partial f/\partial \lambda$ nel punto $(2,1)$ sia nulla.

[La direzione λ deve essere ortogonale al gradiente. Essendo in $(2,1)$ $Df/|Df| = (3/5, 4/5)$, si può scegliere $\lambda = (4/5, -3/5)$ oppure $\lambda = (-4/5, 3/5)$]

3.91 Sia $f(x,y)$ un funzione con derivate seconde continue. Verificare che la derivata seconda di f nella direzione $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ vale

$$\frac{d^2}{dt^2}f(x + t\lambda_1, y + t\lambda_2) = f_{xx}\lambda_1^2 + 2f_{xy}\lambda_1\lambda_2 + f_{yy}\lambda_2^2.$$

[Nell'ipotesi che la funzione sia di classe C^2, si può applicare due volte la formula di derivazione delle funzioni composte, ottenendo

$$\frac{d^2}{dt^2}f(x + t\lambda_1, y + t\lambda_2) = \frac{d}{dt^2}[f_x(x + t\lambda_1, y + t\lambda_2)\lambda_1 + f_y(x + t\lambda_1, y + t\lambda_2)\lambda_2)] =$$

$= f_{xx}\lambda_1^2 + f_{xy}\lambda_1\lambda_2 + f_{yx}\lambda_2\lambda_1 + f_{yy}\lambda_2^2]$

3.92 Dimostrare la seguente *formula di Taylor con il resto di Lagrange* del secondo ordine: nell'ipotesi che $f(x,y)$ sia una funzione di classe C^2 in un insieme aperto A, se (x,y) e $(x+h,y+k)$ sono punti di A con la proprietà che il segmento di estremi (x,y) e $(x+h,y+k)$ è contenuto in A, allora esiste un numero reale $\vartheta \in (0,1)$ tale che

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k + \frac{1}{2}[f_{xx}(x+\vartheta h, y+\vartheta k)h^2 + 2f_{xy}(x+\vartheta h, y+\vartheta k)hk + f_{yy}(x+\vartheta h, y+\vartheta k)k^2]$$

[La funzione di una variabile reale $g(t) = f(x+th, y+tk)$ è derivabile due volte, con derivata seconda continua. Possiamo perciò scrivere la formula di Taylor di $g(t)$, con centro $t_0 = 0$, con $t = 1$ e con il resto di Lagrange al secondo ordine: esiste un numero $\vartheta \in (0,1)$ tale che

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\vartheta).$$

La tesi segue ponendo rispettivamente $t = 0$ e $t = \vartheta$ nelle due relazioni

$$g'(t) = f_x(x+th, y+tk)h + f_y(x+th, y+tk)k$$
$$g''(t) = f_{xx}(x+th, y+tk)h^2 + 2f_{xy}(x+th, y+tk)hk + f_{yy}(x+th, y+tk)k^2]$$

3H. Funzioni di tre o più variabili reali

Proponiamo in questo paragrafo esercizi relativi a funzioni di tre variabili reali

$$f = f(x,y,z)\,, \qquad \text{con} \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,$$

ed anche, soprattutto, relativi a funzioni di n variabili reali $(n \geq 1)$

$$f = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \qquad \text{con} \qquad x = (x_i) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Nei paragrafi precedenti abbiamo già enunciato, nel caso generale delle funzioni di n variabili, le principali definizioni e proprietà, come ad esempio la definizione di limite ed i concetti di continuità, derivabilità e differenziabilità. Ricordiamo qui che usiamo la notazione

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n}\right)^{1/2} \qquad \text{con} \qquad x = (x_i) \in \mathbb{R}^n\,,$$

per indicare il modulo (o norma) del vettore x. Denotiamo inoltre con

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (x = (x_i), \quad y = (y_i) \in \mathbb{R}^n)$$

il *prodotto scalare* tra i vettori x e y.

3.93 Verificare che il prodotto scalare fra vettori di $\mathbb{R}^n$ verifica le seguenti proprietà ($x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$):

(a) $\quad (x,y) = (y,x)$

(b) $\quad (x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

(c) $\quad (\lambda x, y) = \lambda(x,y)$

(d) $\quad (x,x) \geq 0 \quad$ e $\quad (x,x) = 0 \quad$ se e solo se $\quad x = 0$

(e) $\quad |(x,y)| \leq |x| \cdot |y| \quad$ (*disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*)

[(a), (b), (c), (d) sono diretta conseguenza della definizione $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (e) è conseguenza delle proprietà precedenti ed è provata nell'esercizio 2.2]

3.94 Dedurre dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e dalla relazione $(x,x) = |x|^2$ la *disuguaglianza triangolare*:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad , \qquad\qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^n\,.$$

[$|x+y|^2 = (x+y,x+y) = (x,x)+2(x,y)+(y,y) = |x|^2+2(x,y)+|y|^2 \leq |x|^2+2|x||y|+|y|^2 = (|x|+|y|)^2$]

3.95 Verificare che le seguenti funzioni sono continue su $\mathbb{R}^n$:

(a) $\quad f(x) = |x| \qquad$ (norma di x)

(b) $\quad g(x) = (x,y) \qquad$ (prodotto scalare con y fissato)

[(a) Procediamo come nell'esercizio 2.39. Dalla disuguaglianza triangolare si deduce che

$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$$

da cui $|x| - |y| \leq |x-y|$. Scambiando il ruolo di x, y otteniamo $||x|-|y|| \leq |x-y|$. Quindi

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|\,;$$

ciò implica che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(b) La tesi segue dalla disuguaglianza seguente, conseguenza delle proprietà (b), (c) con $\lambda = -1$, (e) dell'esercizio 3.89:

$$|g(x) - g(x_0)| = |(x,y) - (x_0,y)| = |(x-x_0,y)| \leq |x-x_0||y|\,]$$

3.96 Verificare che la funzione $f(x) = |x|$, con $x \in \mathbb{R}^n$, non è derivabile per $x = 0$, mentre se $x \neq 0$ le derivate parziali valgono $f_{x_i} = x_i/|x|$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$.

[Ad esempio f non ammette per $x = 0$ derivata parziale rispetto ad x_1; infatti

$$f_{x_1}(0) = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(h,0,\ldots,0) - f(0,0,\ldots,0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \pm 1\,.$$

Se $x \neq 0$, le derivate parziali, per $i = 1, 2, \ldots, n$, valgono

$$f_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_1}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{|x|}]$$

3.97 Sia λ una direzione di $\mathbb{R}^n$ (cioè $\lambda \in \mathbb{R}^n$ con $|\lambda| = 1$) e sia $f(x) = |x|$. Verificare che, per ogni $x \neq 0$, $f(x)$ è differenziabile e che il gradiente Df e la derivata direzionale $\partial f/\partial\lambda$ valgono

$$Df = \frac{x}{|x|}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{(x,\lambda)}{|x|}, \qquad \forall x \neq 0\,.$$

[Per $x \neq 0$ le derivate parziali di f valgono $f_{x_i} = x_i/|x|$, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Tali derivate, come rapporto tra funzioni continue (con denominatore non nullo), sono continue. Perciò f è di classe C^1 in $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e quindi è anche differenziabile. Il gradiente vale

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = (f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n}) = \left(\frac{x_1}{|x|}, \frac{x_2}{|x|}, \ldots, \frac{x_n}{|x|}\right) = \frac{x}{|x|}\,.$$

La derivata direzionale, per $x \neq 0$, vale

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|}\lambda_i = \frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i = \frac{1}{|x|}(x,\lambda)]$$

3.98 Verificare che l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x) = |x|$ in corrispondenza di un punto generico $x_0 \neq 0$ è

$$y = \frac{(x, x_0)}{|x_0|}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,.$$

[$y = f(x_0) + (Df(x_0), x - x_0) = |x_0| + \left(\frac{x_0}{|x_0|}, x - x_0\right) = |x_0| + \frac{1}{|x_0|}[(x_0, x) - |x_0|^2] =$
$= \frac{(x_0, x)}{|x_0|}$]

3.99 Verificare che l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x) = |x|^2$ in un punto generico $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è data da

$$y = 2(x, x_0) - |x_0|^2, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,.$$

3.100 Sia $g(t)$ una funzione derivabile per $t \geq 0$ e sia $f(x) = g(|x|)$.

(a) Calcolare le derivate parziali di f per $x \neq 0$

(b) Verificare che f è derivabile per $x = 0$ se e solo se $g'(0) = 0$.

(c) Verificare che f è differenziabile per $x = 0$ se e solo se $g'(0) = 0$.

[(a) $f_{x_i} = g'(|x|) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}|x| = g'(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|}$, $\forall\, x \neq 0$, $\forall\, i = 1, 2, \dots, n$.
(b) Per $i = 1, 2, \dots, n$ e per $h \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{h \to 0^\pm} \frac{g(|h|) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^\pm} \frac{g(|h|) - g(0)}{|h|} \cdot \frac{|h|}{h} = \pm g'(0)$$

e quindi esiste il limite per $h \to 0$ $(= 0 = f_{x_i}(0))$ se e solo se $g'(0) = 0$.
(c) Se f è differenziabile in 0, deve essere anche derivabile in tale punto e perciò è necessario che $g'(0) = 0$. Viceversa, se $g'(0) = 0$, risulta $f_{x_i}(0) = 0$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$; quindi, se $h = (h_i) \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0) - \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(0) h_i}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{g(|h|) - g(0)}{|h|} = g'(0) = 0$$

e quindi f è differenziabile in 0]

3.101 Sia $f(x) = |x|^p$ con p parametro positivo. Verificare che f è differenziabile per $x = 0$ se e solo se $p > 1$. Si verifichi inoltre che se p è un intero pari allora f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, mentre se, ad esempio, $p = 3/2$ allora f è di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ ma non di classe $C^2(\mathbb{R}^n)$.

[Per quanto riguarda la differenziabilità in $x = 0$, si può applicare il criterio dell'esercizio precedente con $g(t) = t^p$. Per il resto si proceda come nell'esercizio 3.59]

3.102 Sia $f(x, y, z)$ la funzione di tre variabili reali definita da

$$f(x, y, z) = |xyz|^\alpha \qquad \forall\, (x, y, z)\mathbb{R}^3,$$

con α parametro positivo. Verificare che nel punto $(0, 0, 0)$ la funzione f è:

(a) derivabile per ogni $\alpha > 0$;

(b) differenziabile se e solo se $\alpha > 1/3$.

[(a) Essendo $f = 0$ lungo gli assi coordinati, in $(0, 0, 0)$ le derivate f_x, f_y, f_z sono nulle.
(b) La funzione è differenziabile in $(0, 0, 0)$ se e solo se è nullo il limite

$$(*) \qquad \lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{|xyz|^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Utilizzando la disuguaglianza

$$|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

e le analoghe disuguaglianze per $|y|$, $|z|$, otteniamo $|xyz|^\alpha \leq (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, da cui, se $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

$$0 \leq \frac{|xyz|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3\alpha-1}{2}}.$$

Perciò, se $\alpha > 1/3$, il limite (*) vale zero. Se invece $\alpha \leq 1/3$, lungo le rette per l'origine di equazioni parametriche

$$x(t) = lt, \qquad y(t) = mt, \qquad z(t) = nt$$

$(l^2+m^2+n^2=1)$, il rapporto in (*) vale

$$\frac{|xyz|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{|lmn|^\alpha |t|^{3\alpha}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}|t|} = |lmn|^\alpha |t|^{3\alpha-1}$$

e, se $\alpha < 1/3$, diverge all'infinito (per $lmn \neq 0$) mentre, se $\alpha = 1/3$, dipende dalla retta scelta; ciò prova che, se $\alpha \leq 1/3$, non esiste il limite (*)]

3.103 Generalizzando l'esercizio precedente (ed anche l'esercizio 3.57), verificare che la funzione

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n|^\alpha$$

è differenziabile nell'origine degli assi se e solo se $\alpha > 1/n$.

[Utilizzare la disuguaglianza $|x_i| \leq |x|$, valida per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ e per ogni $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ (si faccia attenzione che a primo membro della disuguaglianza c'è un valore assoluto, mentre a secondo membro c'è un modulo)]

3.104 Calcolare, all'interno dei rispettivi insiemi di definizione, le derivate parziali delle seguenti funzioni di tre variabili reali

(a) $\quad f = xyz \qquad$ (b) $\quad f = \log(xyz)$

(c) $\quad f = x^{yz} \qquad$ (d) $\quad f = x^{y^z}$

[(a) $f_x = yz$, $f_y = xz$, $f_z = xy$; (b) $f_x = 1/x$, $f_y = 1/y$, $f_z = 1/z$; (c) $f_x = yzx^{yz-1}$, $f_y = x^{yz} z \log x$, $f_z = x^{yz} y \log x$; (d) $f_x = y^z x^{y^z - 1}$, $f_y = x^{y^z} y^{z-1} z \log x$, $f_z = x^{y^z} y^z \log x \log y$]

3.105 Verificare che le seguenti funzioni di tre variabili reali

(a) $\quad f = \log \dfrac{xy}{z} \qquad$ (b) $\quad f = x \operatorname{arctg}(yz)$

soddisfano la tesi del teorema di Schwarz relativa alle derivate seconde miste:

$$f_{xy} = f_{yx}, \qquad f_{xz} = f_{zx}, \qquad f_{yz} = f_{zy}.$$

3.106 Calcolare le derivate parziali f_{x_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ delle seguenti funzioni di n variabili reali $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$:

(a) $f = \log(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)$ (b) $f = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i x_j$

(c) $f = \operatorname{arcsen} \dfrac{|x|}{\sqrt{|x|^2+1}}$ (d) $f = \log \sqrt{\dfrac{1-|x|}{1+|x|}}$

[(a) $f_{x_i} = 1/x_i$; (b) $f_{x_i} = 2x_i$ (il lettore in difficoltà provi a considerare preliminarmente il caso $n = 2$);

(c) $f_{x_i} = \dfrac{x_i}{|x|(|x|^2+1)}$; (d) $f_{x_i} = \dfrac{x_i}{|x|(|x|^2-1)}$]

3.107 Calcolare la derivata direzionale delle funzioni considerate nell'esercizio precedente, nella direzione della retta di equazione $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, nel verso delle x_i crescenti.

[Si chiede di calcolare la derivata direzionale $\partial f/\partial\lambda$, dove λ è il vettore unitario

$$\lambda = (\lambda_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Nei punti in cui f è differenziabile, la derivata direzionale vale

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \lambda_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}.$$

Ad esempio, nel caso (a), nell'insieme di definizione di f risulta $\partial f/\partial\lambda = (1/\sqrt{n}) \sum\limits_{i=1}^{n} 1/x_i$

3.108 Sia $f(t)$ una funzione definita in $[0, +\infty)$ e derivabile due volte per $t > 0$. Poniamo

$$u(x) = f(|x|), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Verificare che, per ogni $x \neq 0$, le derivate seconde $u_{x_i x_i}$ soddisfano la relazione

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x) = f''(|x|) + (n-1) \frac{f'(|x|)}{|x|}$$

[$u_{x_i} = f'(|x|) \dfrac{x_i}{|x|}$; $u_{x_i x_i} = f''(|x|) \dfrac{x_i^2}{|x|^2} + f'(|x|) \left(\dfrac{1}{|x|} - \dfrac{x_i^2}{|x|^3}\right)$.

Nel sommare rispetto ad $i = 1, 2, \ldots, n$ occorre tener presente che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1; \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|x|} = \frac{n}{|x|}; \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{|x|^3} = \frac{1}{|x|}]$$

3.109 Sia $g(t)$ una funzione derivabile due volte per $t \geq 0$ e sia

$$u(x) = g(|x|^2)\,, \qquad\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Verificare che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x) = 4[g''(|x|^2)|x|^2 + \frac{n}{2} g'(|x|^2)]\,.$$

3.110 Sia $u(x) = f(|x|)$, con $f(t)$ derivabile due volte per $t > 0$. Verificare che, per ogni $x \neq 0$, risulta

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}} + \frac{n-1}{|x|} \cdot \frac{f'}{(1+f'^2)^{1/2}}\,.$$

3.111 Una funzione di n variabili reali $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si dice *armonica* in un insieme aperto A se essa ammette in A derivate seconde $u_{x_i x_i}$ e se esse soddisfano l'equazione differenziale (*equazione di Laplace*)

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0, \qquad\qquad \forall\, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A\,.$$

Verificare che, se $n \geq 3$, la funzione $u(x) = |x|^{2-n}$ è armonica in $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

[Si può utilizzare la formula dell'esercizio 3.108 con $f(t) = t^{2-n}$, oppure quella dell'esercizio 3.109 con $g(t) = t^{(2-n)/2}$. Ad esempio, per $f(t)$ risulta

$$f''(t) + (n-1)\frac{f'(t)}{t} = t^{-n}[(2-n)(1-n) + (n-1)(2-n)] = 0, \qquad \forall\, t \neq 0]$$

3.112 Verificare che la funzione $u(x) = \sqrt{1-|x|^2}$ (che ha per grafico una semisfera in $\mathbb{R}^n$) verifica l'equazione differenziale alle derivate parziali (detta equazione delle superfici con curvatura media costante)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = -n, \qquad\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\,.$$

[Si utilizzi la formula dell'esercizio 3.106 con $f(t) = \sqrt{1-t^2}$]

3.113 Una funzione f definita in $\mathbb{R}^n - \{0, 1\}$ si dice *omogenea di grado* α se

$$f(tx) = t^{\alpha} f(x) \qquad\qquad \forall\, t > 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n - \{0\}\,.$$

Sotto tale ipotesi, verificare che:

(a) se $f(x)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^n - \{0\}$ le derivate parziali sono omogenee di grado $\alpha - 1$ e vale l'*identità di Eulero*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i} = \alpha f\;;$$

(b) se $\alpha < 0$, non è finito il limite per $x \to 0$ di $f(x)$, a meno che f non sia identicamente nulla;

(c) se $\alpha = 0$,non esiste il limite per $x \to 0$ di $f(x)$ a meno che f non sia costante;

(d) se $\alpha > 0$ e se $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}^n - \{0\}$, essa può essere estesa per continuità in $x = 0$ (con il valore $f(0) = 0$).

[(a) Si veda l'esercizio 3.75; (b) consideriamo la semiretta per l'origine di direzione λ e di equazioni parametriche $x(t) = \lambda t$ $(t > 0)$. Lungo tale retta la funzione vale $f(x) = f(t\lambda) = t^\alpha f(\lambda)$; se $f(\lambda) \neq 0$, per $t \to +\infty$ tale espressione diverge all'infinito; (c) se $\alpha = 0$, con le notazioni precedenti si ha $f(x) = t^0 f(\lambda) = f(\lambda)$. Perciò, se f non è costante, su ogni semiretta per l'origine di direzione λ, $f(x)$ assume valore costante rispetto a x, ma dipendente da λ. Ciò implica che non esiste il limite di $f(x)$ per $x \to 0$; (d) per il teorema di Weierstrass, la funzione $f(x)$ assume massimo e minimo (ed è quindi limitata) nell'insieme chiuso e limitato $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Sia $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, con $|x| = 1$. Essendo $x/|x|$ un vettore di modulo 1, per ogni $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, otteniamo

$$|f(x)| = \left|f(|x| \cdot \frac{x}{|x|})\right| = |x|^\alpha \left|f(\frac{x}{|x|})\right| \leq M|x|^\alpha, \qquad \forall\, x \neq 0\,.$$

Dall'ipotesi $\alpha > 0$ segue che $f(x) \to 0$ per $x \to 0$]

3.114 Dimostrare la *formula di Taylor con il resto di Lagrange al secondo ordine*: se $f(x)$ è una funzione di classe C^2 in un insieme convesso A, se x, $x + h$ sono punti di A, allora esiste un numero reale $\vartheta \in (0,1)$ tale che

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x + \vartheta h) h_i h_j$$

In simboli più compatti, si può scrivere tale formula in modo equivalente (dove (Df, h) è il prodotto scalare tra il gradiente Df ed il vettore h, $D^2 f$ è la matrice $n \times n$ delle derivate seconde, $D^2 f \cdot h$ è un prodotto tra matrici con h pensato matrice riga o colonna, infine $(D^2 f \cdot h, h)$ è un prodotto scalare tra vettori di $\mathbb{R}^n$):

$$f(x+h) = f(x) + (Df(x), h) + \frac{1}{2}(D^2 f(x + \vartheta h) \cdot h, h)$$

[Applichiamo il metodo proposto nell'esercizio 3.92 per il caso $n = 2$. Posto $g(t) = f(x + th)$ per $t \in [0,1]$, in base alla formula di Taylor (per le funzioni di una variabile) con il resto di Lagrange al secondo ordine, con centro $t_0 = 0$ e con $t = 1$, esiste $\vartheta \in (t_0, t_1)$ per cui

$$g(t) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\vartheta)\,.$$

Si ottiene la tesi esplicitando le derivate g', g'' con la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x+th)h_i;$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+th)h_j]h_i = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+th)h_i h_j]$$

Capitolo 4

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

4A. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione del tipo

(1) $$g(x, y, y') = 0\,,$$

ove $y = y(x)$ è una funzione incognita e y' la sua derivata prima ed ove g è un'assegnata funzione reale di tre variabili reali, prende il nome di *equazione differenziale (ordinaria) del primo ordine.* Per *soluzione* (o *integrale particolare*) della (1), si intende una funzione $y = y(x)$ definita in un intervallo I di $\mathbb{R}$ ed ivi derivabile, che soddisfi la (1), cioè tale che risulti

(1) $$g(x, y(x), y'(x)) = 0, \qquad \forall\, x \in I\,.$$

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice di *forma normale* se è del tipo

(2) $$y' = f(x, y)\,.$$

Un'equazione del primo ordine del tipo

(3) $$y' = a(x)y + b(x)\,,$$

ove $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue nell'intervallo I, si dice *lineare.* Se è $b(x) = 0$, l'equazione (3) si dice *omogenea.* Le funzioni $a(x)$, $b(x)$ si chiamano, rispettivamente, *coefficienti e termine noto* dell'equazione (3).

Esempi di equazioni lineari del primo ordine sono le equazioni

$$y' = b(x) \tag{4}$$

$$y' = y\,. \tag{5}$$

Com'è noto dal calcolo integrale, le soluzioni della (4) sono date dalla formula

$$y = B(x) + c \tag{6}$$

ove $B(x)$ è una primitiva di $b(x)$ e $c \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda la (5), osserviamo che le funzioni

$$y = ce^x \qquad\qquad (c \in \mathbb{R})$$

sono sue soluzioni. Viceversa, se $y(x)$ è una soluzione della (5), cioè se risulta

$$y'(x) - y(x) = 0, \qquad\qquad \forall\, x \in I\,,$$

moltiplicando ambo i membri per e^{-x}, si ha

$$e^{-x}y'(x) - e^{-x}y(x) = 0$$

e cioè

$$\frac{d}{dx}[e^{-x}y(x)] = 0\,, \qquad\qquad \forall\, x \in I\,.$$

Ne segue

$$e^{-x}y(x) = c$$

con c costante opportuna e perciò

$$y(x) = c\,e^x\,. \tag{7}$$

Abbiamo così verificato che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (5) sono date dalla (7).

Le equazioni differenziali (4) e (5), che sono casi particolari della (3), ammettono infinite soluzioni, dipendenti da una costante arbitraria c. È perciò naturale aspettarsi che, anche in generale, l'equazione differenziale (3) ammetta infinite soluzioni, dipendenti da una costante scelta arbitrariamente.

Sussiste in proposito il seguente

TEOREMA. *Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (3) sono espresse da*

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int e^{-A(x)} b(x)\, dx \right) \tag{8}$$

ove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$.

Si noti che l'integrale indefinito che figura nella (8), dipende, al solito, da una costante arbitraria. Volendo mettere bene in evidenza la dipendenza dalla costante, possiamo riscrivere la (8) nel modo seguente:

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int e^{-A(x)} b(x)\, dx + c \right) . \tag{8'}$$

La dimostrazione del teorema fornisce anche il procedimento che conviene seguire nella pratica per risolvere equazioni particolari e perciò la richiamiamo. Moltiplichiamo ambo i membri della (3) per $e^{-A(x)}$ detto *fattore integrante*, ottenendo

$$e^{-A(x)} y'(x) = e^{-A(x)} a(x) y(x) + e^{-A(x)} b(x) ; \tag{9}$$

cioè, essendo $A'(x) = a(x)$:

$$e^{-A(x)} y'(x) - e^{-A(x)} A'(x) y(x) = e^{-A(x)} b(x) ,$$

relazione che può esser riscritta nel modo seguente:

$$\frac{d}{dx}[e^{-A(x)} y(x)] = e^{-A(x)} b(x) .$$

Integrando ambo i membri, si ha

$$e^{-A(x)} y(x) = \int e^{-A(x)} b(x)\, dx ,$$

cioè la (8). Viceversa, se $y(x)$ è data dalla (8), si verifica facilmente che essa soddisfa l'equazione (3).

La (8) prende il nome di *integrale generale* dell'equazione differenziale (3).

In particolare, le soluzioni dell'equazione omogenea

$$y' = a(x) y \tag{10}$$

sono espresse da

$$y(x) = c e^{A(x)} \qquad (c \in \mathbb{R}) \tag{11}$$

con $A(x)$ primitiva di $a(x)$.

Sussiste inoltre il

TEOREMA DI CAUCHY (PER LE EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE). *Siano $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue nell'intervallo chiuso e limitato I, e sia $x_0 \in I$. Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste una ed una sola funzione $y(x)$, derivabile in I, soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{12}$$

Dalla formula (8) si ricava l'espressione della soluzione $y(x)$ di (12):

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds} b(t)\,dt\right) \tag{13}$$

che, per $b(x) = 0$ si riduce a

$$y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\,. \tag{14}$$

4.1 Dimostrare che la funzione identicamente nulla è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

ove $a(x)$ è continua in I e $x_0 \in I$.

[Che la funzione $y(x) \equiv 0$ sia soluzione del dato problema di Cauchy è evidente. Che sia l'unica segue dal teorema di esistenza ed unicità]

4.2 Dimostrare che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y \\ y(x_0) = 1 \end{cases}$$

con $a(x)$ continua in $[a,b]$ e $x_0 \in [a,b]$, non si annulla in alcun punto di $[a,b]$.

[Se esistesse $\overline{x} \in [a,b]$ tale che $y(\overline{x}) = 0$, la funzione $y(x)$ sarebbe anche soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y \\ y(\overline{x}) = 0 \end{cases}$$

e cioè, per l'esercizio precedente, dovrebbe essere $y(x)$ identicamente nulla, contro il fatto che $y(x_0) = 1$]

4.3 Sia $y_0(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y \\ y(x_0) = 1 \end{cases}$$

con $a(x)$ funzione continua in $[a,b]$ e $x_0 \in [a,b]$. Dimostrare che l'integrale generale dell'equazione $y' = a(x)y$ è dato da

$$y = cy_0(x)\,.$$

[Si deve dimostrare che la generica soluzione y dell'equazione $y' = a(x)y$, è data da $y(x) = cy_0(x)$, con c costante opportuna. Posto $c = y(x_0)$, le funzioni $y(x)$ e $cy_0(x)$ sono entrambe soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y \\ y(x_0) = c \end{cases}$$

e perciò, per il teorema di unicità di Cauchy, risulta $y(x) = cy_0(x)$ per ogni $x \in [a,b]$]

4.4 Risolvere l'equazione differenziale lineare omogenea $y' = 8xy$.

[Una primitiva di $a(x) = 8x$ è $A(x) = 4x^2$. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione data per $e^{-A(x)} = e^{-4x^2}$, si ha $y'e^{-4x^2} = 8xe^{-4x^2}y$, cioè $y'e^{-4x^2} - 8xe^{-4x^2}y = 0$, da cui

$$\frac{d}{dx}(e^{-4x^2}y) = 0\,.$$

Ne segue $e^{-4x^2}y = c$, cioè $y = ce^{4x^2}$]

4.5 Risolvere l'equazione differenziale lineare omogenea

$$y' = \frac{x}{x^2+1}y$$

[Una primitiva di $a(x) = x/(x^2+1)$ è $A(x) = \log\sqrt{x^2+1}$. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione data per $e^{-A(x)} = 1/\sqrt{x^2+1}$, si ha $[y'/\sqrt{x^2+1}] - [yx/(x^2+1)^{3/2}] = 0$ da cui

$$\frac{d}{dx}(y/\sqrt{x^2+1}) = 0\,.$$

Ne segue $y/\sqrt{x^2+1} = c$, cioè $y = c\sqrt{x^2+1}$]

4.6 Risolvere nell'intervallo $(0,\pi)$ l'equazione differenziale omogenea

$$y' = (\operatorname{cotg} x)y\,.$$

[Una primitiva della funzione $a(x) = \operatorname{cotg} x$ è $A(x) = \log|\operatorname{sen} x|$. Nell'intervallo $(0,\pi)$, la funzione sen x è positiva; quindi in tale intervallo, $A(x) = \log \operatorname{sen} x$. Dalla formula risolutiva (11), si ricava

$$y(x) = ce^{A(x)} = ce^{\log\,\operatorname{sen} x} = c\operatorname{sen} x\,.$$

Si poteva procedere anche tenendo conto dell'esercizio 4.3. Infatti, detta $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\operatorname{cotg} x)y \\ y(x_0) = 1 \end{cases}$$

si ha $y(x) > 0$ per $x \in (0, \pi)$, grazie all'esercizio 4.2, e perciò, $y'/y = \operatorname{cotg} x$.
Integrando ambo i membri fra x_0 e x, si ha

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt = \int_{x_0}^{x} \operatorname{cotg} t\, dt$$

da cui, essendo $\log y(x_0) = \log 1 = 0$

$$\log y(x) = \log \operatorname{sen} x - \log \operatorname{sen} x_0 .$$

Scegliendo $x_0 = \pi/2$ si ha $\log y(x) = \log \operatorname{sen} x$ e infne $y(x) = \operatorname{sen} x$. Dall'esercizio 4.3 segue che la generica soluzione dell'equazione data è $y = c\operatorname{sen} x$. In generale, per $x \neq k\pi$, si trova la soluzione $y = c'|\operatorname{sen} x|$ che è equivalente a $y = c\operatorname{sen} x$ pur di cambiare il segno alla costante]

4.7 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari *omogenee*

$y' = 3y$	$[y = ce^{3x}]$
$y' = 2xy$	$[y = ce^{x^2}]$
$y' = (x-1)y/x$	$[y = ce^{x}/x]$
$y' = (\cos x)y$	$[y = ce^{\operatorname{sen} x}]$
$y' = -e^{x}y$	$[y = ce^{-e^{x}}]$
$y' = 2xe^{x^2}y$	$[y = ce^{e^{x^2}}]$
$y' = (\operatorname{tg} x)y$	$[y = c/\cos x]$
$y' = -y/2x$	$[y = c/\sqrt{x}]$
$y' = 2y/x$	$[y = cx^2]$
$y' = -(\operatorname{cotg} x)$	$[y = c/\operatorname{sen} x]$
$y' = (\sqrt{x})y$	$[y = ce^{2/(3\sqrt{x^3})}]$
$y' = y/\sqrt{x+5}$	$[y = ce^{2\sqrt{x+5}}]$
$y' = (\log x)y/x$	$[y = ce^{(\log^2 x)/2}]$
$y' = xy/(x^2-1)$	$[y = c\lvert x^2-1\rvert^{1/2}]$
$y' = (1+\log x)y$	$[y = cx^{x}]$
$y' = y/(x\log x)$	$[y = c\log x]$
$y' = y/\operatorname{sen}(x+1)$	$[y = c\operatorname{tg}[(x+1)/2]]$
$y' = xy\operatorname{sen} x$	$[y = ce^{(\operatorname{sen} x - x\cos x)}]$
$y' = -(\operatorname{sen} 2x)y$	$[y = ce^{\cos^2 x}]$
$y' = (\operatorname{arctg} x)y$	$[y = ce^{x\operatorname{arctg} x}/\sqrt{1+x^2}]$
$y' = (\operatorname{arcsen} x)y$	$[y = ce^{x\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}}]$
$y' = g'(x)y$	$[y = ce^{g(x)}]$

4.8 Risolvere l'equazione differenziale non omogenea

$$y' = -\frac{2}{x}y + \frac{\operatorname{sen} 4x}{x^2}$$

[Una primitiva $A(x)$ di $a(x) = -2/x$ è $A(x) = -2\log|x| = -\log x^2$, per cui il fattore integrante è $e^{-A(x)} = x^2$. Si ha, moltiplicando per x^2 ambo i membri dell'equazione, $x^2y' = -2xy + \operatorname{sen} 4x$, cioè $x^2y' + 2xy = \operatorname{sen} 4x$ e ancora $D(x^2y) = \operatorname{sen} 4x$. Integrando ambo i membri di quest'ultima relazione, si ha $x^2y = \int \operatorname{sen} 4x\, dx = -(\cos 4x)/4 + c$ e perciò $y = (-\cos 4x/4 + c)/x^2$]

4.9 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari *non omogenee*

$y' = 3y + 1$	$[y = ce^{3x} - (1/3)]$
$y' = ay + b, \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$	$[y = ce^{ax} - (b/a)]$
$y' = y + x$	$[y = ce^{x} - x - 1]$
$y' = -y + e^{-x}$	$[y = e^{-x}(x + c)]$
$y' + y/x = 1/x$	$[y = 1 + c/x]$
$y' = (y/x) + xe^{x}$	$[y = xe^{x} + cx]$
$y' = y + e^{x}$	$[y = (c + x)e^{x}]$
$y' = 4y - e^{2x}$	$[y = ce^{4x} + e^{2x}/2]$
$y' = ay + e^{bx} \qquad (a \neq b)$	$[y = [e^{bx}/(b - a)] + c]$
$y' = -2xy + xe^{-x^2}$	$[y = e^{-x^2}(c + x^2/2)]$
$y' = (2y/x) + (x + 1)/x$	$[y = cx^2 - x - (1/2)]$
$y' = y + x^2 - 1$	$[y = ce^{x} - (x + 1)^2]$
$y' = e^{x} - (y/x)$	$[y = [c + (x - 1)e^{x}]/x]$
$y' = 2xy + e^{x^2}\cos x$	$[y = e^{x^2}(\operatorname{sen} x + c)]$
$y' = -y + e^{-x}\cos x$	$[y = e^{-x}(\operatorname{sen} x + c]$
$y' = -(y + e^{-x}/x^2)$	$[y = e^{-x}(c + 1/x)]$
$y' + y = 2xe^{-x}$	$[y = e^{-x}(x^2 + c)]$
$y' + y = 3x^2e^{-x}$	$[y = e^{-x}(x^3 + c)]$
$y' + y = e^{-x}/2\sqrt{x}$	$[y = e^{-x}(\sqrt{x} + c)]$
$y' = (\cos x)y + e^{\operatorname{sen} x}\log x$	$[y = e^{\operatorname{sen} x}(x\log x - x + c)]$
$y' = (3y/x) + x^3e^{x}$	$[y = x^3(e^{x} + c)]$
$y' = (\operatorname{tg} x)y + \cos x$	$[y = [(x/2) + (\operatorname{sen} 2x)/4 + c]/\cos x]$
$y' = (y + 1)/\sqrt{x}$	$[y = ce^{2\sqrt{x}} - 1]$
$y' = (y + 1)\cos x$	$[y = ce^{\operatorname{sen} x} - 1]$

4.10 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3xe^{x^2}y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

[Una primitiva di $a(x) = 3xe^{x^2}$ è $A(x) = 3e^{x^2}/2$, perciò l'integrale generale dell'equazione data è $y(x) = ce^{3e^{x^2}/2}$. Imponendo la condizione $y(0) = 1$, si trova $y(0) = ce^{3/2} = 1$, da cui $c = e^{-3/2}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = e^{3(e^{x^2}-1)/2}$]

4.11 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1-y)/x \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad [y = (x-1)/x]$$

$$\begin{cases} y' = 2y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad [y = (3e^{2x} - 1)/2]$$

$$\begin{cases} y' = ay + b \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0) \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad [y = (e^{ax} - 1)b/a]$$

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x}y = x^3 \\ y(1) = 1/5 \end{cases} \qquad [y = x^4/5]$$

$$\begin{cases} y' = (\operatorname{tg} x)y + 1 \\ y(\pi) = 1 \end{cases} \qquad [y = \operatorname{tg} x - (1/\cos x)]$$

$$\begin{cases} y' = [(x+1)y/x] + x(1-x) \\ y(1) = e \end{cases} \qquad [y = (e-1)xe^{x-1} + x^2]$$

$$\begin{cases} y' = [-y/(\operatorname{sen}^2 x \operatorname{cotg} x)] + \operatorname{cotg}^2 x \\ y(\pi/4) = \log(\sqrt{2}/2) \end{cases} \qquad [y = (\operatorname{cotg} x)(\log \operatorname{sen} x)]$$

$$\begin{cases} y' = 2y/x + 3x^2 \cos x \\ y(\pi) = 3\pi^3 \end{cases} \qquad [y = 3x^2(\operatorname{sen} x + \pi)]$$

$$\begin{cases} y' = -(\cos x)y + \operatorname{sen} x \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad [y = \operatorname{sen} x + e^{-\operatorname{sen} x} - 1]$$

$$\begin{cases} y' = (\operatorname{cotg} x)y + x^5 \operatorname{sen} x \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad [y = \operatorname{sen} x(c + x^6/6)]$$

$$\begin{cases} y' = 2xy/(1+x^2) + (x+x^3)\operatorname{sen} x \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad [y = (1+x^2)(\operatorname{sen} x - x\cos x)]$$

4.12 Siano $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue nell'intervallo chiuso e limitato $[\alpha,\beta]$ e siano $x_0 \in [\alpha,\beta]$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Detta $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ed indicata con $\| \quad \|$ la norma del sup in $C^0([\alpha,\beta])$, dimostrare che esiste una costante $c > 0$, dipendente da α, β e $\|a\|$, ma indipendente da $y(x)$, tale che

$$\|y\| + \|y'\| \le c(|y_0| + \|b\|)\,.$$

[Dalla formula risolutiva (13), tenendo presente che ($x_0 \le x$)

$$e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \le e^{\int_{x_0}^{x} |a(t)|\,dt} \le e^{\int_{\alpha}^{\beta} |a(t)|\,dt} \le e^{(\beta-\alpha)\|a\|} = K$$

e che

$$e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds} \le e^{\left|\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds\right|} \le K$$

e ricordando le proprietà degli integrali definiti, si ha

$$|y(x)| \le K(|y_0| + \left|\int_{x_0}^{x} Kb(t)\,dt\right|) \le K(|y_0| + K\int_{\alpha}^{\beta} |b(t)|\,dt) \le$$
$$\le K(|y_0| + K(\beta-\alpha)\|b\|) \le K'(|y_0| + \|b\|)$$

ove si è posto $K' = \max\{K,\, K^2(\beta-\alpha)\}$.

Passando al sup per $x \in [\alpha,\beta]$, ne segue

$$(*) \qquad \|y\| \le K'(|y_0| + \|b\|)$$

con K' costante dipendente solo da α, β, $a(x)$ e non da $y(x)$.

Essendo per ipotesi $y' = ay + b$, si ha

$$\|y'\| \le \|a\| \cdot \|y\| + \|b\|\,;$$

dalla (*) segue allora

$$\|y\| + \|y'\| \le (\|a\|+1)\|y\| + \|b\| \le (\|a\|+1)K'(|y_0| + \|b\|) + \|b\| \le c(|y_0| + \|b\|)$$

ove si è posto $c = (\|a\|+1)K' + 1$]

4.13 Siano $a(x)$ e $b_n(x)$ funzioni continue nell'intervallo $[\alpha,\beta]$ e sia $y_{0,n}$ una successione di numeri reali. Supposto che $b_n(x) \to b(x)$ uniformemente in $[\alpha,\beta]$ e che $y_{0,n} \to y_0$, dimostrare che la successione $y_n(x)$ delle soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'_n = a(x)y_n + b_n(x) \\ y_n(x_0) = y_{0,n} \end{cases}$$

converge in $C^1([\alpha,\beta])$ verso la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

[Sottraendo membro a membro, si ottiene

$$(y_n - y)' = a(x)(y_n - y) + b_n(x) - b(x)$$
$$(y_n - y)(x_0) = y_{0,n} - y_0 \,.$$

Applicando il risultato dell'esercizio precedente, si ha

$$\|y_n - y\| + \|y'_n - y'\| \le c(|y_{0,n} - y_0| + \|b_n - b\|)$$

da cui segue l'asserto, ricordando la definizione della norma su C^1 (ved. esercizio 2.25)]

4B. Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

Un'equazione differenziale del tipo

(1) $$y'' + ay' + by = f(x)$$

con a, $b \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ funzione continua in un intervallo I di $\mathbb{R}$, prende il nome di *equazione differenziale lineare del secondo ordine* a coefficienti costanti, di termine noto $f(x)$. L'equazione (1) si dice *omogenea* se $f(x) \equiv 0$, altrimenti si dice *non omogenea.*

Per *soluzione* (o *integrale particolare*) dell'equazione (1), si intende una funzione $y = y(x)$, derivabile due volte in I, che soddisfi la (1), cioè tale che

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \qquad \forall x \in I\,.$$

L'equazione differenziale omogenea

(2) $$y'' + ay' + by = 0$$

prende il nome di equazione *omogenea associata* all'equazione (1).

Nel presente paragrafo ci limitiamo a studiare l'equazione omogenea (2), rimandando al paragrafo successivo lo studio della (1).

Per determinare l'integrale generale dell'equazione (2) e cioè l'insieme di tutte le sue soluzioni particolari $y(x)$, assai utili sono i seguenti teoremi.

TEOREMA 1. *Se y_1 e y_2 sono due soluzioni particolari della (2), allora anche la funzione*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

con c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, *è una soluzione particolare della (2).*

TEOREMA 2. *Se* y_1 *e* y_2 *sono due soluzioni particolari della (2), tali che*

$$y_1(0)y'_2(0) - y_2(0)y'_1(0) \neq 0\,, \tag{3}$$

allora tutte le soluzioni della (2) sono del tipo $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, *al variare dei parametri* c_1, c_2.

Si dimostra che la condizione (3) equivale a dire che le funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ sono *linearmente indipendenti*, cioè che le uniche costanti c_1, c_2 per cui si ha

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \qquad\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

sono le costanti $c_1 = c_2 = 0$.

Dal teorema 2 segue, perciò che: *per determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea*

$$L(y) = y'' + ay' + by = 0 \tag{4}$$

basta conoscere due suoi integrali particolari linearmente indipendenti, y_1 e y_2.

Per determinare esplicitamente due integrali particolari y_1 e y_2 della (4), si considera la sua *equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0\,, \tag{5}$$

che è un'equazione algebrica di secondo grado, le cui radici (complesse) sono

$$\lambda_1 = (-a - \sqrt{\Delta})/2\,; \qquad\qquad \lambda_2 = (-a + \sqrt{\Delta})/2\,, \tag{6}$$

ove $\Delta = a^2 - 4b$.
Se $\Delta < 0$, allora porremo

$$\alpha = -a/2\,, \qquad\qquad \beta = \sqrt{-\Delta}/2 \tag{7}$$

in modo che α e $\pm\beta$ saranno, rispettivamente, la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria dei numeri complessi λ_1 e λ_2.

Si dimostra il seguente

TEOREMA 3 (SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE OMOGENEA). *Tutte le soluzioni dell'equazione (4) sono date da*

$$
\begin{array}{llll}
(i) & y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, & se & \Delta > 0 \\
(ii) & y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}, & se & \Delta = 0 \\
(iii) & y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, & se & \Delta < 0\,,
\end{array}
$$

ove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie, ed ove λ_1, λ_2, α, β sono definite dalle (6), (7).

4.14 Risolvere le equazioni differenziali omogenee

(a) $y'' - 6y' + 5y = 0$ (b) $y'' - 2y' + 2y = 0$

[(a) L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ ha discriminante $\Delta = 16 > 0$ e perciò ammette due radici reali e distinte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Perciò l'integrale generale è $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$. (b) L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ ha discriminante $\Delta = -4 < 0$ ed ammette come radici numeri complessi coniugati $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = 1 + i$. Perciò l'integrale generale è $y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x$]

4.15 Risolvere l'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 0$.

[L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, ossia $(\lambda - 1)^2 = 0$ ed ammette $\lambda_1 = 1$ come radice doppia. Perciò l'integrale generale è $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$]

4.16 Risolvere le equazioni differenziali lineari omogenee

(a) $y'' - 2y' = 0$ (b) $y'' + 4y = 0$

[(a) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, cioè $\lambda(\lambda - 2) = 0$, ed ammette le due radici reali 0 e 2. Perciò, l'integrale generale è $y = c_1 + c_2 e^{2x}$. (b) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4 = 0$, ed ammette le due radici complesse coniugate $\pm 2i$. Perciò l'integrale generale è $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$]

4.17 Risolvere l'equazione $y'' + 2y' + y = 0$.

[L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, cioè $(\lambda + 1)^2 = 0$. Perciò -1 è radice doppia e l'integrale generale è $y = (c_1 + c_2 x) e^{-x}$]

4.18 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni lineari omogenee

$y'' - 3y' + 2y = 0$	$[y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}]$
$y'' - 10y' + 21y = 0$	$[y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{7x}]$
$y'' - 2y' + y = 0$	$[y = (c_1 + c_2 x) e^x]$
$y'' - 10y' + 25y = 0$	$[y = (c_1 + c_2 x) e^{5x}]$

$y'' + y = 0$	$[y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x]$
$y'' + 3y = 0$	$[y = c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)]$
$y'' - 2y' - 15y = 0$	$[y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{5x}]$
$y'' - y = 0$	$[y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}]$
$y'' - 4y' + 4y = 0$	$[y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}]$
$y'' - 2y' + 5y = 0$	$[y = e^{x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)]$
$y'' + y' + y = 0$	$[y = e^{-x/2}[c_1 \cos(\sqrt{3}x/2) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}x/2)]]$
$y'' - 4y' + 20y = 0$	$[y = e^{2x}(c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x)]$
$y'' + 9y = 0$	$[y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x]$
$y'' - 6y' + 10y = 0$	$[y = e^{3x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)]$
$y'' + \sqrt{2}y' = 0$	$[y = c_1 + c_2 e^{-\sqrt{2}x}]$
$y'' - 8y' + 16y = 0$	$[y = (c_1 + c_2 x)e^{4x}]$
$y'' - y'/2 + y/16 = 0$	$[y = (c_1 + c_2 x)e^{x/4}]$

Passiamo ora a studiare l'equazione differenziale *lineare omogenea* di ordine n:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0\,. \tag{8}$$

a coefficienti costanti a_1, ... ,a_{n-1}, $a_n \in \mathbb{R}$.

La (8) è un caso particolare della più generale *equazione differenziale lineare di ordine n*

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x)\,. \tag{9}$$

Per l'equazione (9) si dimostra il seguente *teorema di Cauchy*:

TEOREMA 4. (DI ESISTENZA ED UNICITA'). *Se i coefficienti $a_i(x)$ ed il termine noto $f(x)$ dell'equazione (9) sono continui nell'intervallo limitato $[a,b]$, allora, per ogni $x_0 \in [a,b]$ e per ogni $(y_0, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$, esiste una ed una sola soluzione y in $[a,b]$ della (9), tale che*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}\,. \tag{10}$$

La soluzione y, di cui al teorema di Cauchy, si chiama soluzione del *problema di Cauchy* relativo alla equazione (9) ed alle *condizioni iniziali* (10). L'equazione (9) si dice *omogenea* se risulta $f(x) \equiv 0$, altrimenti si dice *non omogenea.*

Analogamente a quanto già visto nel caso $n = 2$, si dimostra che se $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... ,$y_k(x)$ sono k integrali particolari dell'equazione (8), allora anche una loro combinazione lineare del tipo

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x)$$

è un integrale particolare della (8).

Se ora $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... ,$y_n(x)$ sono n integrali particolari dell'equazione (8) il loro *Wronskiano* è, per definizione, il seguente determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

che si dimostra essere o identicamente nullo o sempre diverso da zero nell'intervallo $[a, b]$. Si ha $W(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ se e solo se le funzioni $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ sono *linearmente indipendenti*, cioè se

$$c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad c_1 = \ldots = c_n = 0\,.$$

Sussiste il seguente

TEOREMA 5. *Se $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ sono n soluzioni particolari linearmente indipendenti dell'equazione (8), allora una qualsiasi soluzione della (8) è del tipo*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)\,, \tag{11}$$

cioè, la (11) è l'integrale generale dell'equazione (8).

Per determinare n integrali linearmente indipendenti dell'equazione (8), basta conoscere le radici dell'equazione algebrica di grado n

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,,$$

che prende il nome di *equazione caratteristica* della (8) in modo analogo a come abbiamo già visto nel caso $n = 2$.

Si dimostra infatti che

1. *Se le n radici (reali o complesse) λ_1, λ_2, ... , λ_n dell'equazione caratteristica sono tutte distinte, allora le funzioni (rispett. reali o complesse)*

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

sono n soluzioni linearmente indipendenti della (8).

2. *Se λ è una radice (reale o complessa) multipla di ordine r dell'equazione caratteristica, allora le funzioni (rispett. reali o complesse)*

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{r-1}e^{\lambda x}$$

sono r soluzioni linearmente indipendenti della (8).

Poichè per ogni radice λ si trova un numero di soluzioni linearmente indipendenti della (8) pari alla molteplicità di λ, in tal modo si determinano n soluzioni linearmente indipendenti della (8).

OSSERVAZIONE 1. Se l'equazione caratteristica ha una radice complessa $\lambda = \alpha + i\beta$, essa avrà anche la radice coniugata $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ ed alle due soluzioni complesse

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)$$
$$e^{\overline{\lambda} x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x)$$

si potranno sostituire le due soluzioni reali

$$e^{\alpha x}\cos \beta x = (e^{\lambda x} + e^{\overline{\lambda} x})/2$$
$$e^{\alpha x}\operatorname{sen} \beta x = (e^{\lambda x} - e^{\overline{\lambda} x})/2i\,,$$

risultando, il nuovo sistema di integrali particolari che si ottiene, ancora di n integrali linearmente indipendenti.

4.19 Risolvere l'equazione $y''' + y = 0$.

[L'equazione caratteristica $\lambda^3 + 1 = 0$ ammette le radici -1, $(1/2) \pm i\sqrt{3/2}$ e perciò l'integrale generale è dato da $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{[(1/2)+i\sqrt{3/2}x]} + c_3 e^{[(1/2)-i\sqrt{3/2}x]}$, ovvero, tenendo conto dell'osservazione 1, da $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} \cos \sqrt{3/2}x + c_3 e^{x/2} \operatorname{sen} \sqrt{3/2}x$]

4.20 Risolvere l'equazione $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

[L'equazione caratteristica $(\lambda - 1)^3 = 0$ ammette la radice tripla $\lambda = 1$. Perciò l'integrale generale è dato da $y(x) = e^x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$]

4.21 Risolvere l'equazione $y''' - 5y'' = 0$.

[L'equazione carattetistica è $\lambda^3 - 5\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 5) = 0$ ed ammette la radice $\lambda = 5$ e la radice doppia $\lambda = 0$. Perciò l'integrale generale è dato da $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{5x}$. Si poteva procedere anche diversamente: posto $u = y'$, l'equazione data diviene $u'' - 5u' = 0$. L'integrale generale di quest'ultima equazione è $u(x) = c_1 + c_2 e^{5x}$. Risolvendo l'equazione

$y' = u(x) = c_1 + c_2 e^{5x}$, si trova $y(x) = c_1 x + 5c_2 e^{5x} + c_3$, integrale generale che coincide con quello già determinato, per l'arbitrarietà delle costanti]

4.22 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni omogenee del terzo ordine

$y''' = 0$	$[y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2]$
$y''' - 4y' = 0$	$[y = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x}]$
$y''' - y'' = 0$	$[y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x}]$
$y''' - 4y'' + 4y' = 0$	$[y = c_1 + (c_2 + c_3 x) e^{2x}]$
$y''' - 2y'' + 5y' = 0$	$[y = c_1 + e^{x}(c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x)]$
$y''' - y'' - y' + y = 0$	$[y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^{x}]$
$y'''' + y'' - y' - y = 0$	$[y = c_1 e^{x} + (c_2 + c_3 x) e^{-x}]$
$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$	$[y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-2x}]$
$y''' + 2y'' - 11y' - 12y = 0$	$[y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-4x}]$
$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$	$[y = (c_1 + c_2 x) e^{x} + c_3 e^{2x}]$

4.23 Risolvere l'equazione $y^{(4)} - y^{(3)} - 6y'' = 0$.

[L'equazione caratteristica è $\lambda^4 - \lambda^3 - 6\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$, quindi -2 e 3 sono radici semplici e 0 è radice doppia. L'integrale generale è dato da $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{3x}$]

4.23 Risolvere l'equazione $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$.

[L'equazione caratteristica $\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4 = 0$ è biquadratica e le sue radici sono ± 1 e $\pm 2i$. Perciò l'integrale generale è dato da $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-2ix} + c_4 e^{2ix}$, ovvero, tenendo conto dell'osservazione 1, da $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x$]

4.25 Risolvere l'equazione $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + y = 0$.

[L'equazione caratteristica può essere scritta sotto la forma $(\lambda^2 + \lambda + 1)^2 = 0$. Perciò l'integrale generale è $y(x) = e^{-x/2}[(c_1 + c_2 x)\cos(\sqrt{3}/2)x + (c_3 + c_4 x)\operatorname{sen}(\sqrt{3}/2)x]$]

4.26 Risolvere l'equazione $y^{(4)} + y'' = 0$.

[L'equazione caratteristica $\lambda^4 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0$; essa ammette la radice doppia $\lambda = 0$ e le radici $\pm i$. Perciò l'integrale generale è dato da $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$]

4.27 Risolvere l'equazione $y^{(4)} + y = 0$.

[L'equazione caratteristica $\lambda^4 + 1 = 0$; le sue soluzioni sono le radici complesse quarte di -1, cioè $e^{\pi i/4} = (1 + i)/\sqrt{2}$, $e^{3\pi i/4} = (i - 1)/\sqrt{2}$, $e^{5\pi i/4} = -(i + 1)/\sqrt{2}$, $e^{7\pi i/4} =$

$(1-i)/\sqrt{2}$. Perciò, l'integrale generale è $y(x) = c_1 e^{x/\sqrt{2}} \cos(x/\sqrt{2}) + c_2 e^{x/\sqrt{2}} \operatorname{sen}(x/\sqrt{2}) + c_3 e^{-x/\sqrt{2}} \cos(x/\sqrt{2}) + c_4 e^{-x/\sqrt{2}} \operatorname{sen}(x/\sqrt{2})$]

4.28 Risolvere l'equazione $y^{(4)} + y' = 0$.

[L'equazione caratteristica $\lambda^4 + \lambda = \lambda(\lambda^3 + 1) = 0$; le sue soluzioni sono 0 e le radici complesse terze di -1, cioè -1, $e^{\pi i/3} = (1 + i\sqrt{3})/2$, $e^{2\pi i/3} = (1 - i\sqrt{3})/2$. Perciò l'integrale generale è $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x/2} \cos(\sqrt{3}x/2) + c_4 e^{x/2} \operatorname{sen}(\sqrt{3}x/2)$]

4.29 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni omogenee del quarto ordine

$y^{(4)} = 0$ [$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$]

$y^{(4)} + 3y''' - 4y'' = 0$ [$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-4x} + c_4 e^{x}$]

$y^{(4)} - 3y''' + 2y'' = 0$ [$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x} + c_4 e^{2x}$]

$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' = 0$ [$y = c_1 + c_2 x + e^{x}(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)$]

$y^{(4)} - 6y'' + 8y = 0$ [$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-\sqrt{2}x} + c_4 e^{\sqrt{2}x}$]

$y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0$ [$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$]

$y^{(4)} - y''' - y'' + y' = 0$ [$y = c_1 + (c_2 + c_3 x) e^{x} + c_4 e^{-x}$]

$y^{(4)} - 4y'' = 0$ [$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$]

$y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$ [$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x) e^{x}$]

$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ [$y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x) \operatorname{sen} x$]

$y^{(4)} - a^4 y = 0$ [$y = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax} + c_3 \cos ax + c_4 \operatorname{sen} ax$]

$y^{(4)} + a^2 y'' = 0$ [$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos ax + c_4 \operatorname{sen} ax$]

4.30 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni omogenee di ordine superiore al quarto.

$y^{(5)} = 0$ [$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4$]

$y^{(6)} - y'' = 0$ [$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 e^{x} + c_5 \cos x + c_6 \operatorname{sen} x$]

$y^{(6)} - 16y'' = 0$ [$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{2x} + c_5 \cos 2x + c_6 \operatorname{sen} 2x$]

$y^{(6)} - y^{(4)} = 0$ [$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 e^{-x} + c_6 e^{x}$]

$y^{(5)} - 4y''' = 0$ [$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-2x} + c_5 e^{2x}$]

4.31 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

[L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ ammette le due radici reali $1 \pm \sqrt{2}$. Perciò l'integrale generale dell'equazione data è $y(x) = c_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$. La condizione $y(0) = 0$ implica $c_2 = -c_1$. Essendo $y'(x) = c_1(1+\sqrt{2})e^{(1+\sqrt{2})x} - c_1(1-\sqrt{2})e^{(1-\sqrt{2})x}$, si ha $y'(0) = 2c_1\sqrt{2}$. La condizione $y'(0) = 2\sqrt{2}$ implica perciò $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$. La soluzione è $y = e^{(1+\sqrt{2})x} - e^{(1-\sqrt{2})x}$]

4.32 Determinare la soluzione di ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' - 6y' + 10y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' - 10y' + 25y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

[(a) $y = e^{2x} - e^{-x}$; (b) $y = e^{3x}(\cos x - 3\operatorname{sen} x)$; (c) $y = xe^{5x}$; (d) $y = e^x \cos 2x$]

4.33 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + 5y' = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0 \end{cases}$$

[$y = -2/5 + e^x[(2/5)\cos 2x + (3/10)\operatorname{sen} 2x]$]

4C. Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti

Sia

$$(1) \qquad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

un'equazione differenziale lineare di ordine n, a coefficienti $a_i(x)$ e termine noto $f(x)$ continui in un intervallo limitato $[a, b]$. Per determinare l'*integrale generale* della (1), assai utile è il seguente

TEOREMA 1. *Sia v_0 un integrale particolare della (1) e siano $y_1, \ldots, y_n$, n integrali particolari linearmente indipendenti dell'omogenea associata*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0\,.$$

Allora, l'integrale generale della (1) è dato da

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) + v_0(x)\,.$$

In questo paragrafo ci limitiamo a studiare le equazioni del tipo (1) a coefficienti costanti, cioè le equazioni

$$(2) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)\,,$$

in cui $f(x)$ è un termine noto di *tipo particolare.*
Sia

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

l'equazione caratteristica dell'equazione

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

omogenea associata alla (2). Si dimostra che, nel caso

$$\boxed{f(x) = e^{\lambda x}p_m(x)}$$

con $p_m(x)$ polinomio di grado m,

(i) *se* $P(\lambda) \neq 0$, *allora la (2) ammette un integrale particolare del tipo*

$$e^{\lambda x}q_m(x)$$

con $q_m(x)$ *polinomio di grado* m.
(ii) *se* $P(\lambda) = 0$ *e* λ *ha molteplicità* h, *allora la (2) ammette un integrale particolare del tipo*

$$x^h e^{\lambda x}q_m(x)\,.$$

Si dimostra inoltre che, nel caso

$$\boxed{f(x) = e^{\lambda x}[p_m(x)\cos\mu x + r_k(x)\mathrm{sen}\,\mu x]}$$

con $p_m(x)$ polinomio di grado m e $r_k(x)$ polinomio di grado k:

j) *se* $P(\lambda \pm i\mu) \neq 0$, *allora la (2) ammette un integrale particolare del tipo*

$$e^{\lambda x}[q_{\overline{m}}(x)\cos\mu x + s_{\overline{m}}(x)\mathrm{sen}\,\mu x]$$

con $q_{\overline{m}}(x)$, $s_{\overline{m}}(x)$ *polinomi di grado* $\overline{m} = \max\{m,k\}$

jj) *se* $P(\lambda \pm i\mu) = 0$ *e* $\lambda \pm i\mu$ *ha molteplicità* h, *allora la (2) ammette un integrale particolare del tipo*

$$x^h e^{\lambda x}[q_{\overline{m}}(x)\cos\mu x + s_{\overline{m}}(x)\mathrm{sen}\,\mu x]$$

In particolare: se $f(x)$ è un polinomio di grado m e risulta, nell'equazione (2), $a_0 \neq 0$, allora la (2) ha per integrale particolare un polinomio dello stesso grado; se invece $a_0 = 0$ e perciò $\lambda = 0$ è una radice di $P(\lambda) = 0$, allora la (2) ha per integrale particolare un polinomio di grado $m+h$ del tipo $x^h(b_1 + b_2 x + \ldots + b_m x^m)$ ove h è la molteplicità della radice $\lambda = 0$.

4.34 Risolvere l'equazione differenziale non omogenea $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1$.

[L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ed ammette le radici 1, 2; perciò l'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Poichè il termine noto dell'equazione differenziale data è un polinomio di terzo grado, e $\lambda = 0$ non è radice dell'equazione caratteristica, allora l'equazione data ammette un integrale particolare del tipo $v_0(x) = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$. Sostituendo v_0 nell'equazione, si ricava $v_0''(x) - 3v_0'(x) + 2v_0(x) = 2x^3 - x^2 + 1$, cioè:

$$(6b_0 x + 2b_1) - 3(3b_0 x^2 + 2b_1 x + b_2) + 2b_0 x^3 + 2b_1 x^2 + 2b_2 x + 2b_3 = 2x^3 - x^2 + 1\,,$$

da cui, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$2b_0 x^3 + (2b_1 - 9b_0)x^2 + (6b_0 - 6b_1 + 2b_2)x + 2b_1 - 3b_2 + 2b_3 = 2x^3 - x^2 + 1\,.$$

Da tale relazione, per il principio di identità dei polinomi, segue:

$$b_0 = 1, \quad 2b_1 - 9b_0 = -1, \quad 6b_0 - 6b_1 + 2b_2 = 0, \quad 2b_1 - 3b_2 + 2b_3 = 1$$

e cioè $b_0 = 1$, $b_1 = 4$, $b_2 = 9$, $b_3 = 10$. Pertanto, l'integrale generale è $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^3 + 4x^2 + 9x + 10$]

4.35 Risolvere l'equazione differenziale non omogenea $y'' - 4y' = x^2 + 1$.

[L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ ed ammette le radici 0, 4; perciò l'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1 + c_2 e^{4x}$.

Poichè il termine noto dell'equazione data è un polinomio di secondo grado e $\lambda = 0$ è radice semplice dell'equazione caratteristica, allora l'equazione data ammette un integrale particolare del tipo $v_0(x) = x(b_0 x^2 + b_1 x + b_2)$. Sostituendo $v_0(x)$ nell'equazione, si ricava

$$(6b_0 x + 2b_1) - 4(3b_0 x^2 + 2b_1 x + b_2) = x^2 + 1\,,$$

da cui, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$-12b_0 x^2 + (6b_0 - 8b_1)x + 2b_1 - 4b_2 = x^2 + 1\,.$$

Da tale relazione, per il principio di identità dei polinomi segue

$$-12b_0 = 1; \quad 6b_0 - 8b_1 = 0; \quad 2b_1 - 4b_2 = 1$$

e cioè $b_0 = -1/12$, $b_1 = -1/16$, $b_2 = -9/32$.

Pertanto,l'integrale generale è $y(x) = c_1 + c_2 e^{4x} - x[(x^2/12) + (x/16) + (9/32)]$]

4.36 Risolvere l'equazione differenziale non omogenea $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$.

[L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ ed ammette le radici -1 e 3; perciò l'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$. Poichè $\lambda = 3$ è radice dell'equazione caratteristica (per la ii)) l'equazione data ammette un integrale particolare del tipo $v_0(x) = bxe^{3x}$. Sostituendo $v_0(x)$ nell'equazione data, si trova:

$$(6be^{3x} + 9bxe^{3x}) - 2(be^{3x} + 3bxe^{3x}) - 3bxe^{3x} = 8e^{3x}$$

da cui, dividendo ambo i membri per e^{3x}, segue $b = 2$. Pertanto, l'integrale generale è $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + 2xe^{3x}$]

4.37 Dimostrare che se il termine noto dell'equazione

$$(*) \qquad y'' + ay' + by = f(x)$$

è del tipo $f(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)$ e se $y_i(x)$ verifica l'equazione

$$y_i'' + ay_i' + by_i = f_i(x)\,,$$

allora $y(x) = \sum_{i=1}^{k} y_i(x)$ verifica l'equazione (*).

4.38 Tenendo presente l'esercizio precedente, determinare l'integrale generale dell'equazione $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 + 1 - x^2 + e^{3x}$

[$y(x) = x^3 + 4x^2 + 9x + 10 + (e^{3x}/2) + c_1 e^x + c_2 e^{2x}$]

4.39 Risolvere l'equazione differenziale non omogenea $y'' - 2y' - 3y = \cos 2x$.

[L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ ed ammette come radici -1 e 3; perciò l'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$. Poichè $0 \pm 2i$ non è radice dell'equazione caratteristica, allora per la j), l'equazione data ammette un integrale particolare del tipo $v_0(x) = b\cos 2x + c\,\mathrm{sen}\, 2x$. Si ha $v_0'(x) = -2b\,\mathrm{sen}\, 2x + 2c\cos 2x$, $v_0''(x) = -4b\cos 2x - 4c\,\mathrm{sen}\, 2x$. Sostituendo nell'equazione data si trova

$$(-7b - 4c)\cos 2x + (4b - 7c)\mathrm{sen}\, 2x = \cos 2x\,,$$

da cui segue $-7b - 4c = 1$ e $4b - 7c = 0$ e quindi $b = -7/65$, $c = -4/65$. Pertanto l'integrale generale è $y(x) = -(7/65)\cos 2x - (4/65)\mathrm{sen}\, 2x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$]

4.40 Risolvere l'equazione differenziale non omogenea $y'' - 2y' + y = xe^x$.

[L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ ed ammette la radice doppia $\lambda = 1$. Perciò l'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1 e^x + c_2 x e^x$. Poichè $\lambda = 1$ è radice doppia dell'equazione caratteristica, per la ii) l'equazione data ammette un integrale particolare del tipo $v_0(x) = x^2 e^x (bx + c)$. Si ha

$$\begin{aligned} v_0'(x) &= 2xe^x(bx + c) + x^2 e^x (bx + c) + bx^2 e^x = e^x[bx^3 + (3b + c)x^2 + 2cx] \\ v_0''(x) &= e^x[bx^3 + (3b + c)x^2 + 2cx] + e^x[3bx^2 + 2(3b + c)x + 2c] = \\ &= e^x[bx^3 + (6b + c)x^2 + (6b + 4c)x + 2c] \end{aligned}$$

da cui, sostituendo v_0 nell'equazione data, si ha

$$e^x[bx^3+(6b+c)x^2+(6b+4c)x+2c]-2e^x[bx^3+(3b+c)x^2+2cx]+x^2e^x(bx+c)=xe^x$$

ed anche, semplificando

$$e^x(6bx+2c)=xe^x\,.$$

Dividendo per e^x ed applicando il principio di identità dei polinomi, si ha $b=1/6$, $c=0$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione data è $y(x)=ce^x+cxe^x+x^3e^x/6$]

4.41 Risolvere le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine lineari, non omogenee:

$y''+y=x+1$ $\quad[y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+x+1]$

$y''-2y'+y=x^2+x$ $\quad[y=(c_1+c_2x)e^x+x^2+5x+8]$

$y''-2y'+y=e^x$ $\quad[y=(c_1+c_2x)e^x+x^2e^x/2]$

$y''-5y'+6y=e^x$ $\quad[y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+e^x/2]$

$y''-2y'-3y=(2x+1)e^x$ $\quad[y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-(2x+1)e^x/4]$

$y''-y=xe^x$ $\quad[y=c_1e^{-x}+c_2e^x+(x^2-x)e^x/4]$

$y''-2y'+2y=e^{2x}$ $\quad[y=e^x(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)+e^{2x}/2]$

$y''-y'-2y=2\operatorname{sen}x$ $\quad[y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+(\cos x-3\operatorname{sen}x)/5]$

$y''+y=\cos x$ $\quad[y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+(x\operatorname{sen}x)/2]$

$y''+4y=\operatorname{sen}2x$ $\quad[y=c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen}2x-(x\cos 2x)/4]$

$y''-2y'+2y=\operatorname{sen}x$ $\quad[y=e^x(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)+(2\cos x+\operatorname{sen}x)/5]$

$y''-2y'+y=e^{2x}$ $\quad[y=(c_1+c_2x)e^x+e^{2x}]$

$y''-4y'+4y=e^{2x}$ $\quad[y=(c_1+c_2x)e^{2x}+x^2e^{2x}/2]$

$y''-y'=\cos x$ $\quad[y=c_1+c_2e^x-(\cos x+\operatorname{sen}x)/2]$

$y''+y'=\cos x+\operatorname{sen}x$ $\quad[y=c_1+c_2e^{-x}-\cos x]$

$y''-y=2x\operatorname{sen}x$ $\quad[y=c_1e^{-x}+c_2e^x-x\operatorname{sen}x-\cos x]$

$y''-3y'+2y=2e^{3x}$ $\quad[y=c_1e^x+c_2e^{2x}+e^{3x}]$

$y''+y'=e^x(3\cos x+\operatorname{sen}x)$ $\quad[y=c_1+c_2e^{-x}+e^x\operatorname{sen}x]$

$y''+y'=5x+2e^x$ $\quad[y=c_1+c_2e^{-x}+(5/2)x^2-5x+e^x]$

$y''-2y'+2y=e^x\operatorname{sen}x$ $\quad[y=e^x(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)-xe^x\cos x/2]$

$y''+9y=\operatorname{sen}x+e^{2x}$ $\quad[y=c_1\cos 3x+c_2\operatorname{sen}3x+(\operatorname{sen}x)/8+e^{2x}/13]$

$y''-4y=e^{2x}\operatorname{sen}2x$ $\quad[y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}-e^{2x}(\operatorname{sen}2x+2\cos 2x)/20]$

$y''-y=xe^{-x}$ $\quad[y=c_1e^x+c_2e^{-x}-(x^2+x)e^{-x}/4]$

$y''+2y'+3y=e^{-x}\cos x$ $\quad[y=e^{-x}(c_1\cos(\sqrt{2}x)+c_2\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)+\cos x)]$

$y''+y=x\operatorname{sen}2x$

$[y=c_1\operatorname{sen}x+c_2\cos x-x(\operatorname{sen}2x)/3-4(\cos 2x)/9]$

$y''+y=xe^x\operatorname{sen}x$

$[y=c_1\operatorname{sen}x+c_2\cos x+e^x[(14-10x)\cos x+(5x-2)\operatorname{sen}x]/25]$

$y'' + y = x + e^x \operatorname{sen} x$
$[y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x + (e^x \operatorname{sen} x - 2e^x \cos x)/5]$

4.42 Risolvere l'equazione $y''' - y'' = \operatorname{sen} x$.

[L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1) = 0$ ed ammette la radice semplice $\lambda = 1$ e la radice doppia $\lambda = 0$. Perciò l'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1 e^x + c_2 x + c_3$. Per la j) dell'introduzione, esistono due numeri reali q, s tali che $v_0(x) = q\cos x + s\operatorname{sen} x$ è un'integrale particolare dell'equazione data. Sostituendo v_0 nell'equazione, si ricava $q = s = 1/2$, pertanto l'integrale generale della data equazione è $y(x) = c_1 e^x + c_2 x + c_3 + (\cos x + \operatorname{sen} x)/2$]

4.43 Risolvere l'equazione differenziale $y^{(4)} - y = x^3$.

[L'integrale generale dell'omogenea associata è $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$. Cerchiamo un integrale particolare sotto la forma $v_0(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Imponendo a v_0 di risolvere l'equazione data, si trova $v_0(x) = -x^3$. Perciò l'integrale generale è $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x - x^3$]

4.44 Risolvere l'equazione $y^{(4)} + 2y'' + y = xe^x$.

[L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ ed ammette le due radici doppie $i, -i$. Pertanto l'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)$. Poichè $\lambda = 1$ non è radice dell'equazione caratteristica, l'equazione data ammette un integrale particolare del tipo $v_0(x) = e^x(b_1 x + b_2)$. Sostituendo v_0 nell'equazione, si ricava $b_1 = 1/4$, $b_2 = -1/2$; pertanto l'integrale generale della data equazione è $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x) + e^x[(1/4)x - (1/2)]$]

4.45 Risolvere le seguenti equazioni lineari non omogenee di ordine superiore al secondo

$y''' - 3y'' + 3y' - y = \cos x$ $\quad [y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + (\operatorname{sen} x + \cos x)/4]$
$y''' + y'' - y' - y = e^{2x}$ $\quad [y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + e^{2x}/9]$
$2y''' + 7y'' + 7y' + 2y = x^2$
$[y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x/2} + c_3 e^{-x} + (1/2)x^2 - (7/2)x + 35/4]$
$y''' - 2y'' + 2y' = e^{2x}$ $\quad [y = c_1 + e^x(c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x) + e^{2x}/4]$
$y''' - 2y'' + 2y' = \cos x$ $\quad [y = c_1 + e^x(c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x) + (\operatorname{sen} x + 2\cos x)/5]$
$y''' - y'' = 3x^2 + x$ $\quad [y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x - (1/4)x^4 - (7/6)x^3 - (7/2)x^2]$
$y^{(4)} + y = 2\operatorname{sen} x \cos x$
$[y = e^{x/\sqrt{2}}[c_1 \cos(x/\sqrt{2}) + c_2 \operatorname{sen}(x/\sqrt{2})] + e^{-x/\sqrt{2}}[c_3 \cos(x/\sqrt{2}) + c_4 \operatorname{sen}(x/\sqrt{2})] + (\operatorname{sen} 2x)/17]$
$y^{(4)} - 3y''' + 2y'' = \cos x$ $\quad [y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{2x} + (3\operatorname{sen} x - \cos x)/10]$

4D. Il metodo della variazione delle costanti

Consideriamo l'equazione lineare del secondo ordine

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{1}$$

a coefficienti e termine noto continui. Nel paragrafo 4C abbiamo visto che, per determinare il suo integrale generale, è sufficiente conoscere due integrali $y_1(x)$, $y_2(x)$ linearmente indipendenti dell'omogenea associata ed un suo integrale particolare $v_0(x)$.

In tal modo, l'integrale generale è dato da

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + v_0(x) .$$

Per determinare $v_0(x)$ si può ricorrere al *metodo della variazione delle costanti*, dovuto a Lagrange, descritto dal seguente

TEOREMA. *Siano $y_1(x)$, $y_2(x)$ due integrali linearmente indipendenti dell'omogenea associata alla (1). Siano $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$ due funzioni tali che le loro derivate prime risolvano il sistema*

$$\begin{cases} \gamma_1'(x)y_1(x) + \gamma_2'(x)y_2(x) = 0 \\[2ex] \gamma_1'(x)y'_1(x) + \gamma_2'(x)y_2'(x) = f(x) . \end{cases}$$

Allora la funzione $v_0(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)$ è un integrale particolare dell'equazione (1).

4.46 Determinare l'integrale generale dell'equazione $y'' + y = 1/\cos x$.

[Le due funzioni $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ sono integrali particolari linearmente indipendenti dell'omogenea associata. Per determinare un integrale particolare dell'equazione data con il metodo della variazione delle costanti, cerchiamo una soluzione della data equazione sotto la forma

$$v_0(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)$$

con $\gamma_1'(x)$, $\gamma_2'(x)$ soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \gamma_1'(x)\cos x + \gamma_2'(x)\operatorname{sen} x = 0 \\[2ex] -\gamma_1'(x)\operatorname{sen} x + \gamma_2'(x)\cos x = 1/\cos x . \end{cases}$$

Si trova $\gamma_1'(x) = -\operatorname{tg} x$ e $\gamma_2'(x) = 1$. Una primitiva di tali funzioni è data da

$$\gamma_1(x) = \log |\cos x|, \qquad \gamma_2(x) = x .$$

Perciò risulta $v_0(x) = (\log|\cos x|)\cos x + x\operatorname{sen} x$. L'integrale generale dell'equazione data è $y(x) = (\log |\cos x|)\cos x + x\operatorname{sen} x + c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x$]

4.47 Applicando il metodo della variazione delle costanti, risolvere l'equazione

$$y'' - y = 3x^2 - 1$$

[L'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1e^x + c_2e^{-x}$. Cerchiamo una soluzione della forma $v_0(x) = \gamma_1(x)e^x + \gamma_2(x)e^{-x}$ con $\gamma_1'(x)$, $\gamma_2'(x)$ soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \gamma_1'(x)e^x + \gamma_2'(x)e^{-x} = 0 \\ \\ \gamma_1'(x)e^x - \gamma_2'(x)e^{-x} = 3x^2 - 1\,. \end{cases}$$

Si trova

$$\gamma_1'(x) = e^{-x}(3x^2 - 1)/2$$
$$\gamma_2'(x) = -e^{x}(3x^2 - 1)/2\,.$$

Una primitiva di tali funzioni è data da

$$\gamma_1(x) = -3e^{-x}[x^2 + 2(x+1) - (1/3)]/2$$
$$\gamma_2(x) = -3e^{x}[x^2 - 2(x-1) - (1/3)]/2\,.$$

In definitiva, l'integrale generale è $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} - 3x^2 - 5$]

4.48 Applicando il metodo della variazione delle costanti, risolvere le equazioni differenziali

(a) $\quad y'' + y = \operatorname{tg} x$ $\qquad\qquad$ (b) $\quad y'' + y = \operatorname{cotg} x$

[(a) $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + \cos x \cdot \log \left|\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.
(b) $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cdot \log |\operatorname{tg}(x/2)|$]

4.49 Applicando il metodo della variazione delle costanti, risolvere le seguenti equazioni differenziali

(a) $\quad y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x}$

(b) $\quad y'' + 4y = 5\operatorname{sen} 2x$

(c) $\quad y'' + 4y = 5\operatorname{sen} 3x - 7\cos 3x$

(d) $\quad y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}$

(e) $\quad y'' + 2y' + y = (\log x)/e^x$

[(a) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2xe^{2x}$. (b) $y = c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x - 5(x\cos 2x)/4$. (c) $y = c_1\operatorname{sen} 2x + c_2\cos 2x - \operatorname{sen} 3x + 7(\cos 3x)/5$; (d) $y = c_1e^{2x} + c_2e^x + [(x/2) - (3/4)]e^{3x}$; (e) $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + x^2e^{-x}(2\log x - 3)/4$]

4.50 Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + k^2y = f(x)$, ove $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo limitato $[a, b]$ e $k \neq 0$.

[I due integrali dell'omogenea associata $y_1(x) = \operatorname{sen} kx$, $y_2(x) = \cos kx$ sono linearmente indipendenti, in quanto il loro Wronskiano è uguale a $-k$. Cerchiamo un integrale particolare dell'equazione data sotto la forma

$$v_0(x) = \gamma_1(x)\operatorname{sen} kx + \gamma_2(x)\cos kx$$

con $\gamma_1'(x)$, $\gamma_2'(x)$ soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \gamma_1'(x)\operatorname{sen} kx + \gamma_2'(x)\cos kx = 0 \\ \gamma_1'(x)k\cos kx - \gamma_2'(x)k\operatorname{sen} kx = f(x)\,. \end{cases}$$

Si trova $\gamma_1(x) = \frac{1}{k}\int_a^x f(t)\cos kt\,dt$, $\gamma_2(x) = -\frac{1}{k}\int_a^x f(t)\operatorname{sen} kt\,dt$ e pertanto risulta $v_0(x) = \frac{1}{k}\int_a^x f(t)[\operatorname{sen} kx\cos kt - \cos kx\operatorname{sen} kt]\,dt = \frac{1}{k}\int_a^x f(t)\operatorname{sen} k(x-t)\,dt$. L'integrale generale è $y = \frac{1}{k}\int_a^x f(t)\operatorname{sen} k(x-t)\,dt + c_1\operatorname{sen} kx + c_2\cos kx$]

4.51 Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' - k^2y = f(x)$ ove $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$ e $k \neq 0$.

[Applicando il metodo della variazione delle costanti, in modo analogo a quanto fatto nell'esercizio precedente, si trova $y(x) = c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}+[e^{kx}\int_a^x f(t)e^{-kt}\,dt - e^{-kx}\int_a^x f(t)e^{kt}\,dt]/2k$]

4.52 Risolvere l'equazione lineare del primo ordine $y' = a(x)y + b(x)$, ricorrendo al metodo della variazione delle costanti.

[Sia $y_1(x) \neq 0$ un integrale particolare dell'omogenea associata; allora si ha $y_1' = a(x)y_1$. Cerchiamo un integrale particolare del tipo $v_0(x) = \gamma(x)y_1(x)$. Imponendo che v_0 verifichi l'equazione data si trova $\gamma' y_1 + \gamma y_1' = a(x)\gamma y_1 + b(x)$, da cui, per l'ipotesi su y_1, $\gamma' y_1 = b(x)$. Ne segue $\gamma(x) = \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{y_1(t)}\,dt$, con $y_1(x) = e^{\int_{x_0}^x a(t)\,dt}$; si ritrova così la formula (13) del paragrafo 4A]

4.53 Applicando il metodo della variazione delle costanti, risolvere l'equazione $y'' - 3y' + 2y = e^x/(e^x+1)$.

[$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + (e^x + e^{2x})\log(1+e^{-x})$]

4E. Problemi ai limiti

Come sappiamo dal teorema 1 del paragrafo 4C, l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine è dato da

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + v_0(x) \tag{1}$$

ove y_1, y_2 sono due integrali particolari, linearmente indipendenti, dell'omogenea associata e v_0 è un integrale particolare dell'equazione data, definiti in un intervallo $[a, b]$.

Dal teorema di Cauchy enunciato nel paragrafo 4B sappiamo che è sempre possibile determinare univocamente le costanti c_1 e c_2 in modo da ottenere un integrale particolare verificante le condizioni iniziali

$$y(x_0) = y_0\,, \qquad\qquad y'(x) = y_0^{(1)}\,.$$

Se invece si impongono alla y le cosiddette *condizioni ai limiti* $y(a) = A$, $y(b) = B$, o, più in generale: $hy(a) + h'y'(a) = A$, $ky(b) + k'y'(b) = B$ con h e h' non entrambe nulle e k, k' non entrambe nulle, si possono avere una sola soluzione o nessuna soluzione o infinite soluzioni.

Ad esempio, nel caso più semplice delle condizioni ai limiti $y(a) = A$, $y(b) = B$, si ottiene il sistema di due equazioni lineari nelle due incognite c_1, c_2

$$\begin{cases} y_1(a)c_1 + y_2(a)c_2 = -v_0(a) + A \\ y_1(b)c_1 + y_2(b)c_2 = -v_0(b) + B \end{cases} \tag{2}$$

il cui determinante dei coefficienti

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}$$

può essere diverso da zero o uguale a zero.

Il sistema omogeneo associato al sistema (2) è quello relativo all'equazione differenziale omogenea associata alla data, con le condizioni ai limiti omogenee, cioè nelle quali risulti $A = 0$, $B = 0$. Perciò, se questo problema omogeneo ha come unica soluzione la funzione identicamente nulla, il problema non omogeneo avrà un'unica soluzione. Se il problema omogeneo ha invece una soluzione non nulla, il problema non omogeneo avrà infinite soluzioni, o sarà impossibile a seconda che il termine noto $f(x)$ e le costanti A, B verifichino, o meno, certe condizioni.

Ad esempio, studiamo i problemi ai limiti per l'equazione differenziale $y'' + y = 0$, con le condizioni

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(\pi/2) = -1 \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(\pi) = 1 \end{cases} \qquad \text{(c)} \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale è $y(x) = c_1\cos x + c_2\text{sen}\, x$; imponendo le condizioni (a), si ottiene il sistema lineare nelle incognite c_1, c_2

$$\begin{cases} c_1\cos 0 + c_2\text{sen}\, 0 = 1 \\ c_1\cos(\pi/2) + c_2\text{sen}\,(\pi/2) = -1 \end{cases}$$

cioè $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, per cui il problema ammette l'unica soluzione $y = \cos x - \text{sen}\, x$.

Imponendo le condizioni (b), si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_1\cos 0 + c_2\text{sen}\, 0 = c_1 = 1 \\ c_1\cos(\pi) + c_2\text{sen}\,(\pi) = -c_1 = 1 \end{cases}$$

che è impossibile, per cui il problema non ha soluzione. Infine, nel caso (c) si ottengono le infinite soluzioni $y = c_2\text{sen}\, x$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

4.54 Determinare tutti i valori reali del parametro k, per cui esiste l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + ky = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

[L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + k = 0$. Distinguiamo tre casi:
(a) $k > 0$, (b) $k = 0$, (c) $k < 0$.
(a) Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\pm i\sqrt{k}$, perciò l'integrale generale è $y(x) = c_1\cos(\sqrt{k}x) + c_2\text{sen}\,(\sqrt{k}x)$. Affinchè risulti $y(0) = y(\pi) = 0$, dovrà essere

$$\begin{cases} c_1\cos 0 + c_2\text{sen}\, 0 = 0 \\ c_1\cos(\sqrt{k}\pi) + c_2\text{sen}\,(\sqrt{k}\pi) = 0 \end{cases}$$

ovvero $c_1 = 0$, $c_2 = \text{sen}\,(\sqrt{k}\pi) = 0$.

Se $\sqrt{k}$ è intero, allora si ha $\text{sen}\,(\sqrt{k}\pi) = 0$ per cui il sistema precedente è soddisfatto da $c_1 = 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Se $\sqrt{k}$ non è intero, allora $\text{sen}\,(\sqrt{k}\pi) \neq 0$ perciò dev'essere $c_1 = c_2 = 0$.

In definitiva, se $k > 0$, il problema considerato ha una ed una sola soluzione (identicamente nulla) se e solo se $\sqrt{k}$ non è intero.
(b) L'equazione caratteristica $\lambda^2 = 0$ ammette lo zero come radice doppia, per cui l'integrale generale è $y(x) = c_1 + c_2x$. Affinchè risulti $y(0) = y(\pi) = 0$, dovrà essere $c_1 = c_2 = 0$ e cioè $y(x) = 0$ per ogni x. Pertanto in questo caso il problema ha unica soluzione.
(c) L'equazione caratteristica $\lambda^2 - (-k) = 0$ ammette le due soluzioni $\pm\sqrt{-k}$, perciò l'integrale generale è $y(x) = c_1e^{\sqrt{-k}x} + c_2e^{-\sqrt{-k}x}$.

Affinchè risulti $y(0) = y(\pi) = 0$, dev'essere

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ e^{\sqrt{-k}\pi}c_1 + e^{-\sqrt{-k}\pi}c_2 = 0 \end{cases}$$

ovvero $c_1 = c_2 = 0$. Pertanto in questo caso il problema ha unica soluzione]

4.55 Determinare i valori del parametro k per cui esiste una ed una sola soluzione del problema ai limiti

$$\begin{cases} y'' + 4y' + ky = xe^x \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

[Per $k \neq -5$ l'equazione differenziale ammette l'integrale particolare

$$v_0(x) = \left[\frac{x}{k+5} - \frac{6}{(k+5)^2}\right] e^x$$

Per $k < 4$ ($k \neq -5$) l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + v_0(x)$$

con $\lambda_i = -2 \pm \sqrt{4-k}$. Le condizioni ai limiti implicano

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 6/(k+5)^2 \\ c_1 e^{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2} = -v_0(1) \end{cases}$$

e perciò il problema ai limiti ha unica soluzione. Per $k = 4$, l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + v_0(x).$$

Le condizioni ai limiti implicano

$$\begin{cases} c_1 = 2e/27 \\ c_1 e^{-2} + c_2 e^{-2} = -v_0(1) \end{cases}$$

e perciò il problema ai limiti ha unica soluzione.

Per $k > 4$, l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{-2x} \cos(x\sqrt{k-4}) + c_2 e^{-2x} \operatorname{sen}(x\sqrt{k-4}) + v_0(x)$$

e le condizioni ai limiti implicano

$$\begin{cases} c_1 = 6/(k+5)^2 \\ c_1 e^{-2} \cos\sqrt{k-4} + c_2 e^{-2} \operatorname{sen}\sqrt{k-4} = -v_0(1) \end{cases}$$

Il determinante di questo sistema nelle incognite c_1, c_2 è $\Delta = e^{-2} \operatorname{sen}\sqrt{k-4}$, perciò il sistema ammette unica soluzione se $k \neq 4 + h^2\pi^2$ con h intero.

Nel caso $k = -5$, si verifica che il problema ha unica soluzione]

4.56 Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali esiste almeno una soluzione del problema ai limiti

$$\begin{cases} y'' + y = \alpha \operatorname{sen} kx + \beta \cos kx \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

[L'integrale generale dell'equazione è dato da

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{\alpha \operatorname{sen} kx}{1-k^2} + \frac{\beta \cos kx}{1-k^2}$$

se $k \neq \pm 1$; è dato da

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + (\beta \operatorname{sen} x - \alpha \cos x)x/2$$

se $k = 1$; è dato da

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + (\beta \operatorname{sen} x + \alpha \cos x)x/2$$

se $k = -1$. Nel caso $k \neq \pm 1$, le condizioni ai limiti implicano

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + \beta/(1-k^2) = 0 \\ y(\pi) = -c_1 + \beta \cos k\pi/(1-k^2) = 0 \end{cases}$$

e questo sistema è compatibile se e solo se $\cos k\pi = -1$, cioè se e solo se $k\pi = (2m \pm 1)\pi$ con m intero. Per $k = \pm 1$, il sistema è compatibile solo se $\alpha = 0$]

4.57 Determinare i valori del parametro $k \neq 0$ per i quali il problema ai limiti

$$\begin{cases} y'' + k^2 y = f(x) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

con f continua in $[0, \pi]$, ammette una ed una sola soluzione.

[Dall'esercizio 4.50 segue che l'integrale generale dell'equazione è dato da

$$y(x) = \frac{1}{k} \int_0^x f(t) \operatorname{sen} k(x-t)\, dt + c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \cos kx \,.$$

Imponendo le condizioni ai limiti, si ricava il sistema nelle incognite c_1, c_2.

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_0^\pi f(t) \operatorname{sen} k(\pi - t)\, dt + c_1 \operatorname{sen} k\pi = 0 \,. \end{cases}$$

Se $\operatorname{sen} k\pi \neq 0$, cioè se k non è intero, la costante c_1 è individuata univocamente, al pari di c_2, e perciò il problema ai limiti ammette soluzione unica.

Se k è intero, la seconda equazione del sistema è impossibile (e perciò il problema ai limiti non ha soluzione) a meno che non risulti

$$\int_0^\pi f(t) \operatorname{sen} k(\pi - t)\, dt = 0 \,,$$

nel qual caso c_1 è indeterminata (e perciò il problema ai limiti ha infinite soluzioni)]

4F. Equazioni lineari di Eulero

Si chiama *equazione di Eulero* un'equazione differenziale lineare del tipo

$$y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} y' + \frac{a_n}{x^n} y = g(x)$$

con a_1, a_2, ..., $a_n \in \mathbb{R}$. Per $x \neq 0$ l'equazione può scriversi nella forma equivalente

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \,,$$

dove si è posto $f(x) = x^n g(x)$. Tale equazione, pur essendo a coefficienti variabili, mediante la sostituzione $t = \log |x|$ si riduce ad un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

Considereremo nel seguito equazioni di Eulero del secondo ordine:

$$x^2 y'' + pxy' + qy = f(x) \tag{1}$$

ove p, $q \in \mathbb{R}$ e $x > 0$. Effettuando per $x > 0$ la sostituzione $t = \log x$ (cioè $x = e^t$) si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Perciò la (1) si trasforma nell'equazione a coefficienti costanti

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = f(e^t). \tag{2}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata alla (2) è

$$\lambda^2 + (p-1)\lambda + q = 0. \tag{3}$$

Se λ è una radice semplice della (3) allora l'equazione omogenea

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0 \tag{4}$$

ammette l'integrale particolare $e^{\lambda t}$, cui corrisponde, come integrale della (4), la funzione x^λ. Se λ è una radice doppia della (3), allora la (4) ammette l'integrale particolare $te^{\lambda t}$, cui corrisponde, come integrale della (4), la funzione $x^\lambda \log x$.

Il fatto che la (4) ammetta integrali particolari del tipo

$$x^\lambda, \quad x^\lambda \log x$$

può essere anche dedotto direttamente dalla (4) stessa. Ad esempio, posto, nella (4), $y = x^\lambda$, con λ da determinarsi, si ha

$$y' = \lambda x^{\lambda-1} \qquad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}.$$

Sostituendo nella (4), si ottiene

$$\lambda(\lambda-1)x^\lambda + px^\lambda + qx^\lambda = 0,$$

ovvero

$$\lambda(\lambda-1) + p\lambda + q = 0$$

cioè, l'equazione caratteristica (3).

Per determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea (4), una volta che sia noto un suo integrale particolare $y_1(x)$, può essere utile applicare il procedimento di *abbassamento dell'ordine* di una equazione omogenea.

Tale procedimento consiste nell'effettuare nella (4) il cambiamento di funzione incognita

$$y = v(x)y_1(x)\,.$$

In tal modo la (4) diviene, con semplici passaggi

$$x^2y_1v'' + (2x^2y_1' + pxy_1)v' = 0\,.$$

Posto $u = v'$ si perviene così all'equazione del primo ordine

$$u' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + \frac{p}{x}\right)u = 0$$

di facile risoluzione.

4.58 Verificare che se l'equazione (3) ammette due radici reali e distinte λ_1, λ_2, allora le funzioni x^{λ_1}, x^{λ_2} sono integrali particolari linearmente indipendenti dell'equazione di Eulero omogenea $x^2y'' + pxy' + qy = 0$.

[Si vede subito che il Wronskiano delle funzioni x^{λ_1}, x^{λ_2} è uguale a $(\lambda_2 - \lambda_1)x^{\lambda_1+\lambda_2-1} \neq 0$ per $x > 0$]

4.59 Verificare che se l'equazione (3) ammette una radice doppia λ, allora le funzioni x^λ, $x^\lambda \log x$ sono integrali particolari linearmente indipendenti dell'equazione (4).

[Supponiamo che risulti $c_1x^\lambda + c_2x^\lambda \log x = 0$ per $x > 0$. Scegliendo $x = 1$, ne segue $c_1 = 0$, e perciò anche $c_2x^\lambda \log x = 0$ per ogni $x > 0$. Ma allora dev'essere anche $c_2 = 0$]

4.60 Verificare che se l'equazione (3) ammette due radici reali complesse $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, allora le funzioni , $x^{\alpha+i\beta}$, $x^{\alpha-i\beta}$ sono due integrali particolari linearmente indipendenti dell'equazione (4).

[Si vede subito che il Wronskiano è uguale a $-2i\beta x^{2\alpha-1} \neq 0$ perchè $\beta \neq 0$. Due integrali reali linearmente indipendenti sono $x^\alpha \cos(\beta \log x)$, $x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \log x)$ in quanto

$$x^{\alpha\pm i\beta} = x^\alpha x^{\pm i\beta} = x^\alpha e^{\pm i\beta \log x} = x^\alpha[\cos(\beta \log x) \pm i\operatorname{sen}(\beta \log x)]\ ]$$

4.61 Risolvere l'equazione di Eulero omogenea $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

[Cerchiamo un integrale particolare della forma $y = x^\lambda$. Si ha $y' = \lambda x^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2}$. Sostituendo nell'equazione, si ha

$$\lambda(\lambda-1)x^\lambda - 4\lambda x^\lambda + 4x^\lambda = 0$$

ossia, dividendo per x^λ, $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$. Le radici di questa equazione sono $\lambda = 4$ e $\lambda = 1$. Perciò l'integrale generale è $y = c_1 x^4 + c_2 x$]

4.62 Risolvere l'equazione di Eulero $x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2$.

[Ponendo $x = e^t$, si ottiene l'equazione

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 2y = (e^t)^2 = e^{2t},$$

cioè

$$(*) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = e^{2t}.$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ ed ammette le radici $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Perciò l'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1e^{-2t} + c_2e^t$. Un integrale particolare dell'equazione (*) è $v_0(t) = be^{2t}$. Imponendo che $v_0(t)$ risolva (*) si trova $b = 1/4$. Perciò l'integrale generale di (*) è $y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^t + e^{2t}/4$. Ponendo nuovamente $x = e^t$, si trova che l'integrale generale dell'equazione data è $c_1e^{-2\log x} + c_2e^{\log x} + e^{2\log x}/4 = c_1x^{-2} + c_2x + x^2/4$]

4.63 Risolvere l'equazione differenziale di Eulero $x^2y'' + 2xy' - y = x(\log x + 2)$.

[Ponendo $x = e^t$, si ottiene l'equazione

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - y = (t+2)e^t,$$

cioè

$$(*) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - y = (t+2)e^t.$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ ed ammette le radici $(-1 \pm \sqrt{5})/2$. Perciò l'integrale generale dell'omogenea associata alla (*) è $c_1e^{(-1-\sqrt{5})t/2} + c_2e^{(-1+\sqrt{5})t/2}$. Un integrale particolare della (*) è $v_0(t) = (bt+c)e^t$. Imponendo la condizione che $v_0(t)$ risolva (*), si trova $b = 1$, $c = -1$. Perciò l'integrale generale di (*) è $y(t) = c_1e^{(-1-\sqrt{5})t/2} + c_2e^{(-1+\sqrt{5})t/2} + (t-1)e^t$. Ponendo nuovamente $x = e^t$, si trova che l'integrale generale dell'equazione data è $c_1x^{(-1-\sqrt{5})/2} + c_2x^{(-1+\sqrt{5})/2} + x(\log x - 1)$]

4.64 Determinare per $x > 0$ l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ $\qquad$ [$y = c_1x^{-3} + c_2x^2$]
$x^2y'' + xy' - 4y = 0$ $\qquad$ [$y = c_1x^{-2} + c_2x^2$]
$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ $\qquad$ [$y = c_1x^3 + c_2x^3\log x$]

$x^2y'' + xy' + 4y = 0$	$[y = c_1\cos(2\log x) + c_2\text{sen}(2\log x)]$
$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$	$[y = c_1x^2 + c_2x^3]$
$x^2y'' - 5xy' + 13y = 0$	$[y = c_1x^3\cos(2\log x) + c_2x^3\text{sen}(2\log x)]$
$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$	$[y = c_1x + c_2x^2 + x^2\log x + 1]$
$x^2y'' - 5xy' + 9y = x^3$	$[y = c_1x^3 + c_2x^3\log x + (x^3/2)\log^2 x]$
$x^2y'' - 5xy' + 10y = 0$	$[y = c_1x^3\cos(\log x) + c_2x^3\text{sen}(\log x)]$
$x^2y'' + xy' + y = 0$	$[y = c_1\text{sen}(\log x) + c_2\cos(\log x)]$
$x^2y'' + 3xy' + y = 0$	$[y = c_1x^{-1} + c_2x^{-1}\log x]$
$x^2y'' + 2xy' + y = 0$	$[y = c_1\cos(\sqrt{3}/2\log x) + c_2\text{sen}(\sqrt{3}/2\log x)]/\sqrt{x}$
$x^2y'' - xy' - 3y = x^2\log x$	$[y = c_1x^{-1} + c_2x^3 - (2/9)x^2 - (x^2\log x)/3]$
$x^3y'' + x^2y' + xy + 1 = 0$	$[y = c_1\cos(\log x) + c_2\text{sen}(\log x) - 1/(2x)]$
$x^3y'' - x^2y' + 5xy - 10 = 0$	$[y = c_1x\cos(\log(x^2)) + c_2x\text{sen}(\log(x^2)) + 5/(4x)]$
$x^3y'' + 2x^2y' - 2xy + 4 = 0$	$[y = c_1x + (c_2/x^2) + 2/x]$
$x^2y'' + xy' + k^2y = 0$	$[y = c_1\cos(k\log x) + c_2\text{sen}(k\log x)]$
$x^2y'' + xy' - k^2y = 0$	$[y = c_1x^k + (c_2/x^k)]$

4.65 Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $x^2y'' + xy' - 4y = x^{-3} - x$ che soddisfano la condizione $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{1}{3}$.

[Ponendo $x = e^t$, si ottiene l'equazione

$$(*) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 4y = e^{-3t} - e^t\,.$$

L'omogenea associata ha come integrale generale $y_0(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t}$. Un integrale particolare di $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4y = e^{-3t}$ è $e^{-3t}/5$; un integrale particolare di $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4y = e^t$ è $-e^t/3$; perciò un integrale particolare di (*) è $v_0 = (e^{-3t}/5) + e^t/3$. Allora l'integrale generale di (*) è $y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t} + (e^{-3t}/5) + e^t/3$. Posto di nuovo $x = e^t$, l'equazione data ammette l'integrale generale $y(x) = (c_1/x^2) + c_2x^2 + 1/(5x^3) + x/3$. Imponendo la condizione $\lim_{x\to+\infty} y(x)/x = 1/3$ si ha $c_2 = 0$. Perciò le soluzioni richieste sono $y(x) = (c/x^2) + (1/(5x^3)) + (x/3)$ con $c \in \mathbb{R}$]

4.66 Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $x^2y'' + 4xy' + 2y = x^3 - x^{-1}$ che soddisfano la condizione $\lim_{x\to 0} x^2y(x) = 0$

$[y(x) = (c/x) + (x^3/20) - (\log x)/x$, con $c \in \mathbb{R}]$

4.67 Considerata l'equazione differenziale

$$(x-a)2y'' + p(x-a)y' + qy = 0\,,$$

detta anche essa *equazione di Eulero*, verificare che, se l'equazione caratteristica

$$\lambda(\lambda-1)+p\lambda+q=0$$

ha due radici reali distinte λ_1, λ_2, il suo integrale generale è dato da

$$y=c_1(x-a)^{\lambda_1}+c_2(x-a)^{\lambda_2}$$

mentre se λ è una radice doppia, l'integrale generale è dato da

$$y=[c_1+c_2\log(x-a)](x-a)^{\lambda}\,.$$

4.68 Determinare i valori del parametro $k\neq 0$ per i quali il problema ai limiti

$$\begin{cases} xy''+xy'+4k^2y=0 \\ y(1)=y(2)=0 \end{cases}$$

ammette una soluzione diversa da quella identicamente nulla.

[Essendo l'equazione differenziale un'equazione di Eulero omogenea, cerchiamo le sue soluzioni sotto la forma $y=x^{\lambda}$. Si trova l'equazione $\lambda^2+4k^2=0$ le cui radici sono date da $\lambda=\pm 2ki$.

Essendo $k\neq 0$, l'integrale generale è $y(x)=c_1\mathrm{sen}\,(2k\log x)+c_2\cos(2k\log x)$. La condizione $y(1)=0$ implica $c_2=0$. La condizione $y(2)=0$ implica $c_1\mathrm{sen}\,(2k\log 2)=0$.

Pertanto, se $k\neq h\pi/(2\log 2)$ con h intero, allora si ha $c_1=0$ e perciò l'unica soluzione del problema ai limiti è quella identicamente nulla. Se invece esiste un intero $h\neq 0$ tale che $k=h\pi/(2\log 2)$, allora la funzione $y(x)=c_1\mathrm{sen}\,[(h\pi\log x)/\log 2]$ è soluzione non nulla (se $c_1\neq 0$) del problema dato]

4G. Integrazione per serie

Non sempre è possibile integrare un'equazione differenziale mediante funzioni elementari, cioè funzioni polinomiali, esponenziali, trigonometriche e loro inverse. Talvolta, la soluzione va cercata sotto la forma di una serie di potenze

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n\,, \tag{1}$$

i cui coefficienti possono essere identificati, imponendo che la (1) sia soluzione della data equazione. Il punto x_0 che figura nella (1) potrà essere il punto nel quale sono assegnate le condizioni iniziali $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0^{(1)}$, ecc.

Ad esempio, si voglia risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=xy \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Cerchiamo la soluzione sotto la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,.$$

Derivando si ha

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

e, sostituendo nell'equazione differenziale, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \,,$$

ovvero

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots .$$

Uguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x si ottengono le seguenti relazioni tra i coefficienti incogniti

$$a_1 = 0, \quad 2a_2 = a_0, \quad 3a_3 = a_1, \quad 4a_4 = a_2, \quad 5a_5 = a_3, \quad \ldots$$

e, in generale $n a_n = a_{n-2}$ per $n \geq 2$.

Ne segue $a_{2n+1} = 0$ per ogni n, ed inoltre $a_{2n} = a_{2n-2}/2n$. Dalle relazioni

$$a_2 = a_0/2, \quad a_4 = a_2/4, \quad a_6 = a_4/6, \quad \ldots$$

segue

$$a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4}, \quad a_6 = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad \ldots, \quad a_{2n} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}$$

cioè

$$a_{2n} = a_0/(2^n n!) \,.$$

Si ottiene così l'espressione di y(x)

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \,.$$

Essendo $y(0) = 1$, si ricava $a_0 = 1$ e perciò

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \,.$$

La serie di potenze a secondo membro essendo lo sviluppo di MacLaurin della funzione $e^{x^2/2}$, ritroviamo così la soluzione $y(x) = e^{x^2/2}$ che avremmo determinato procedendo direttamente all'integrazione, con i metodi del paragrafo 4A.

Osserviamo che non sempre la soluzione ottenuta mediante integrazione per serie sarà rappresentata da una serie convergente verso una funzione elementare.

4.69 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

[Cerchiamo una soluzione sotto la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Essendo

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

si ha

$$y'' + 2xy' + 2y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n$$

Perciò dev'essere, per ogni x

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n]x^n = 0$$

e quindi i coefficienti a_n devono soddisfare le relazioni di ricorrenza

$$(*) \qquad a_{n+2} = -2a_n/(n+2) \qquad n \geq 0 .$$

Essendo $y'(0) = a_1 = 0$, dalla (*) segue che $a_{2k+1} = 0$ per ogni k. Se invece $n = 2k$, la (*) implica

$$a_{2(k+1)} = -a_{2k}/(k+1)$$

Essendo $y(0) = a_0 = 1$, ne segue

$$a_2 = -a_0 = -1, \quad a_4 = -a_2/2 = 1/2, \quad a_6 = -a_4/3 = -1/(2\cdot 3), \quad a_8 = -a_6/4 = 1/(2\cdot 3\cdot 4)$$

e così via. Pertanto risulta $a_{2(k+1)} = (-1)^{k+1}/(k+1)!$ e così si ottiene l'espressione di $y(x)$:

$$(**) \qquad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}/k!$$

Abbiamo perciò dimostrato che se la soluzione del problema di Cauchy si può rappresentare mediante una serie di potenze, allora la serie è necessariamente quella che figura al secondo membro della (**). Poichè tutti i passaggi eseguiti sono invertibili, per dimostrare che la serie rappresenta effettivamente la soluzione, basterà dimostrare che essa converge. Ciò segue subito dal criterio del rapporto. Osserviamo che (**) è lo sviluppo di MacLaurin della funzione $y(x) = e^{-x^2}$ tale è la soluzione del dato problema di Cauchy]

4.70 Risolvere, mediante integrazione per serie, la equazione differenziale $y'' + xy' + y = 0$

$[y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}]$

4.71 Risolvere, mediante integrazione per serie, la equazione differenziale $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

$[y(x) = a_0 x + a_1[1 - x^2 - (x^4/3) - (x^6/5) - (x^8/7) - \ldots]]$

4.72 Risolvere, mediante integrazione per serie, le seguenti equazioni

(a) $y'' + 5xy = 0$ (*b*) $y'' + xy' + 3y = 0$

(c) $y'' + xy' + 7y = 0$ (*d*) $y'' + x^2 y' + xy = 0$

[Si ha $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con a_0 e a_1 costanti arbitrarie e (a) $a_2 = 0$, $a_{n+2} - 5a_{n-1}/[(n+1)(n+2)]$, per $n \geq 1$; (b) $a_{n+2} = -(n+3)a_n/[(n+1)(n+2)]$, per $n \geq 0$; (c) $a_{n+2} = -(n+7)a_n/[(n+1)(n+2)]$, per $n \geq 0$; (d) $a_2 = 0$, $a_{n+3} = -(n+1)a_n/[(n+3)(n+2)]$ per $n \geq 0$]

4.73 Per ogni $c \in \mathbb{R}$ risolvere mediante integrazione per serie l'equazione differenziale di Hermite $y'' - 2xy' + 2cy = 0$.

$[y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $a_{n+2} = -2(c-n)a_n/[(n+1)(n+2)]$ e a_0, a_1 costanti arbitrarie$]$

4H. Sistemi di equazioni differenziali lineari

Un sistema di n equazioni differenziali del tipo

$$(1) \qquad \begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}$$

si chiama *sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine.* Per soluzione di tale sistema si intende una n-pla di funzioni derivabili $y_1 =$

$y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ che soddisfano simultaneamente le n equazioni per x appartenente ad un intervallo I di $\mathbb{R}$. Sussiste il seguente teorema di Cauchy.

TEOREMA (DI ESISTENZA ED UNICITÀ). *Se i coefficienti $a_{ij}(x)$ ed i termini noti $f_i(x)$ sono funzioni continue nell'intervallo limitato $[a, b]$, allora, per ogni $x_0 \in [a, b]$, e per ogni $(y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_n^\circ) \in \mathbb{R}^n$ esiste una ed una sola soluzione del sistema (1) verificante le condizioni iniziali:*

$$y_1(x_0) = y_1^\circ, \quad y_2(x_0) = y_2^\circ, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_n^\circ.$$

Il sistema (1) si dice *omogeneo* se tutti i termini noti $f_i(x)$ sono identicamente nulli in $[a, b]$; altrimenti si dice *non omogeneo.*

Per risolvere il sistema omogeneo a coefficienti costanti

$$(2) \qquad \begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

cerchiamo di soddisfarlo ponendo

$$(3) \qquad y_1 = \lambda_1 e^{\alpha x}, \quad y_2 = \lambda_2 e^{\alpha x}, \quad \ldots, \quad y_n = \lambda_n e^{\alpha x}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \alpha$ costanti da determinarsi.

Imponendo che le funzioni $y_1, \ldots, y_n$ soddisfino il sistema (2), si perviene al sistema di equazioni lineari nelle incognite $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$(4) \qquad \begin{cases} (a_{11} - \alpha)\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + (a_{22} - \alpha)\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \ldots + (a_{nn} - \alpha)\lambda_n = 0 \end{cases}$$

che ammette una soluzione diversa dal vettore $(0, \ldots\ldots, 0)$ se e solo se risulta

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \alpha & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \alpha & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

cioè (ved. il paragrafo 5G del vol. I, parte prima) se e solo se α è autovalore della matrice a_{ij}. La (5) è un'equazione algebrica di grado n che prende il nome di *equazione caratteristica* del sistema (2).

Si dimostra che, se l'equazione caratteristica (5) ha n radici *distinte*

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, cioè, se la matrice a_{ij} ha n autovalori distinti, allora, detta $(\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)})$ la soluzione del sistema (4) per $\alpha = \alpha_k$, le funzioni

$$y_1^{(k)} = \lambda_1^{(k)} e^{\alpha_k x}, \quad y_2^{(k)} = \lambda_2^{(k)} e^{\alpha_k x}, \quad \ldots, \quad y_n^{(k)} = \lambda_n^{(k)} e^{\alpha_k x}$$

costituiscono una soluzione del sistema (2), e che le soluzioni $(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)})$, al variare di $k = 1, \ldots, n$, costituiscono un insieme di soluzioni linearmente indipendenti. Pertanto, l'integrale generale del sistema (2) è dato da $(y_1, \ldots, y_n)$ con

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \lambda_1^{(1)} e^{\alpha_1 x} + c_2 \lambda_1^{(2)} e^{\alpha_2 x} + \ldots + c_n \lambda_1^{(n)} e^{\alpha_n x} \\ y_2 = c_1 \lambda_2^{(1)} e^{\alpha_1 x} + c_2 \lambda_2^{(2)} e^{\alpha_2 x} + \ldots + c_n \lambda_2^{(n)} e^{\alpha_n x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = c_1 \lambda_n^{(1)} e^{\alpha_1 x} + c_2 \lambda_n^{(2)} e^{\alpha_2 x} + \ldots + c_n \lambda_n^{(n)} e^{\alpha_n x} \end{cases}$$

ove $c_1, \ldots, c_n$ sono costanti arbitrarie e $\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)}$ sono autovettori della matrice $A = (a_{ij})$ corrispondenti all'autovalore α_k.

Consideriamo ora il sistema non omogeneo a coefficienti costanti

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} y'_1 = ay_1(x) + by_2(x) + f(x) \\ y'_2 = cy_1(x) + dy_2(x) + g(x) \end{cases}$$

e supponiamo che i termini noti $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili nell'intervallo $[\alpha, \beta]$.

Per risolverlo, possiamo procedere nel modo seguente. Deriviamo rispetto a x la prima equazione, ottenendo

$$y''_1 = ay'_1 + by'_2 + f'.$$

Sostituendo il valore di y ricavato dalla seconda equazione, otteniamo

$$y''_1 = ay'_1 + b(cy_1 + dy_2 + g) + f' = ay'_1 + bcy_1 + dby_2 + bg + f'.$$

Il valore by_2 può essere ricavato dalla prima equazione: $by_2 = y'_1 - ay_1 - f$. Sostituendo, si ottiene

$$y''_1 = ay'_1 + bcy_1 + d(y'_1 - ay_1 - f) + bg + f'$$

ovvero l'equazione del secondo ordine nell'incognita y_1

$$y''_1 - (a + d)y'_1 + (ad - bc)y_1 = bg - df + f'.$$

Dopo aver determinato y_1, si ricava y_2 dal sistema (6).

4.74 Risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 4y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

[La matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

L'equazione caratteristica è

$$\begin{vmatrix} 5-\alpha & 4 \\ 1 & 2-\alpha \end{vmatrix} = (5-\alpha)(2-\alpha) - 4 = \alpha^2 - 7\alpha + 6 = 0\,.$$

Quindi la matrice A ha i due autovalori semplici 6 e 1. Per determinare un autovettore di A corrispondente all'autovalore a $\alpha = 6$, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

da cui segue $\lambda_1 = 4\lambda_2$; ad esempio $(4, 1)$ è un autovettore. Analogamente si vede che $(1, -1)$ è un autovettore corrispondente all'autovalore $\alpha = 1$. Allora l'integrale generale del sistema dato è

$$\begin{cases} y_1 = 4c_1e^{6x} + c_2e^x \\ y_2 = c_1e^{6x} - c_2e^x \;] \end{cases}$$

4.75 Risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

[$y_1 = c_1e^x + c_2e^{3x}$, $y_2 = -c_1e^x + c_2e^{3x}$]

4.76 Determinare la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$$

che verifica le condizioni iniziali $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$.

[$y_1 = (e^x + e^{-x})/2$, $y_2 = (e^x - e^{-x})/2$]

4.77 Determinare la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

che verifica le condizioni iniziali $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.

[$y_1 = \operatorname{sen} x$, $y_2 = \cos x$]

4.78 Risolvere i seguenti sistemi omogenei

(a) $\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + 3y_2 \\ 3y'_2 = y_1 + 6y_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2y'_1 = y_1 + y_2 \\ 2y'_2 = -3y_1 + 5y_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'_1 = y_1 + 2y_2 \\ y'_2 = 2y_1 + y_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y'_1 = y_1 + y_2 \\ y'_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$

[(a) $y_1 = 3c_1e^{3x} - 3c_2e^x$, $y_2 = c_1e^{3x} + c_2e^x$; (b) $y_1 = c_1e^x + c_2e^{2x}$, $y_2 = c_1e^x + 3c_2e^{2x}$; (c) $y_1 = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$, $y_2 = -c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$; (d) $y_1 = c_1e^{\sqrt{2}x} + c_2e^{-\sqrt{2}x}$, $y_2 = c_1(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}x} - c_2(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}x}$]

4.79 Risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{cases} y'_1 = y_3 \\ y'_2 = 3y_1 + 7y_2 - 9y_3 \\ y'_3 = 2y_2 - 3y_3 \end{cases}$$

[La matrice del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -9 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione caratteristica è

$$\begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 3 & 7-\alpha & -9 \\ 0 & 2 & -1-\alpha \end{vmatrix} = -\alpha \begin{vmatrix} 7-\alpha & -9 \\ 2 & -1-\alpha \end{vmatrix} + 6 = -\alpha^3 + 6\alpha^2 - 11\alpha + 6 = 0$$

ossia $(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) = 0$. Per determinare un autovettore corrispondente all'autovalore $\alpha = 1$, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 - 9\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0\,. \end{cases}$$

La soluzione è del tipo (k, k, k) con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ e perciò un autovettore di A è $(1, 1, 1)$. Per determinare un autovettore della matrice A corrispondente all'autovalore $\alpha = 2$, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 - 9\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0\,. \end{cases}$$

La soluzione è del tipo $(k, 3k, 2k)$ con $k \neq 0$ e perciò un autovettore di A è $(1, 3, 2)$. Per determinare un autovettore corrispondente all'autovalore $\alpha = 3$, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -3\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 9\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0\,. \end{cases}$$

La soluzione è del tipo $(k, 6k, 3k)$ con $k \neq 0$ e perciò un autovettore di A è $(1, 6, 3)$. Allora, l'integrale generale del sistema dato è

$$\begin{cases} y_1 = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} \\ y_2 = c_1e^x + 3c_2e^{2x} + 6c_3e^{3x} \\ y_3 = c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 3c_3e^{3x} \end{cases}$$

con c_1, c_2, c_3 costanti arbitrarie]

4.80 Risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{cases} y'_1 = y_3 \\ y'_2 = y_1 \\ y'_3 = y_1 - 3y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

[Gli autovalori della matrice del sistema sono $-1, 1, 3$. Corrispondenti autovettori sono, rispettivamente $(1, -1, -1)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 3, 1/3)$. Perciò l'integrale generale è $y_1 = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3e^{3x}$, $y_2 = -c_1e^{-x} + c_2e^x + 3c_3e^{3x}$, $y_3 = -c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3e^{3x}/3$]

4.81 Risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{cases} y'_1 = 6y_1 - 2y_2 + 2y_3 \\ y'_2 = -2y_1 + 5y_2 \\ y'_3 = 2y_1 + 7y_3 \end{cases}$$

[$y_1 = 2c_1e^{3x} - c_2e^{6x} + 2c_3e^{9x}$, $y_2 = 2c_1e^{3x} + 2c_2e^{6x} - c_3e^{9x}$, $y_3 = -c_1e^{3x} + 2c_2e^{6x} + 2c_3e^{9x}$]

4.82 Risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 - y_2 + e^x \\ y'_2 = 2y_1 - y_2 + 1 \end{cases}$$

[Derivando la prima equazione, si ha $y''_1 = y'_1 - y'_2 + e^x$. Sostituendo l'espressione di y'_2 dedotta dalla seconda equazione si ha $y''_1 = y'_1 - (2y_1 - y_2 + 1) + e^x = y'_1 - 2y_1 + y_2 - 1 + e^x$. Poichè dalla prima equazione segue $y_2 = y_1 - y'_1 + e^x$, sostituendo, si ottiene l'equazione lineare in $y_1 : y''_1 = -y_1 + 2e^x - 1$, cioè $y''_1 + y_1 = 2e^x - 1$. L'integrale generale di tale equazione è $y_1 = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + e^x - 1$, come si verifica facilmente. Dalla prima equazione segue poi $y_2 = y_1 - y'_1 + e^x = c_1(\cos x - \operatorname{sen} x) + c_2(\operatorname{sen} x - \cos x) - 1 + e^x$. La coppia di funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ così ottenute fornisce l'integrale generale del sistema dato]

4.83 Risolvere il sistema non omogeneo

$$\begin{cases} y'_1 = 5y_1 - 2y_2 + \cos x \\ y'_2 = 2y_1 - y_2 + \operatorname{sen} x \end{cases}$$

[$y_1 = c_1e^{(2-\sqrt{5})x} + c_2e^{(2+\sqrt{5})x} - (7\cos x - \operatorname{sen} x)/10$; $y_2 = c_1(3 + \sqrt{5})e^{(2-\sqrt{5})x} + c_2(3 - \sqrt{5})e^{(2+\sqrt{5})x} - (26\cos x + 2\operatorname{sen} x)/10$]

4.84 Risolvere il sistema non omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 \\ y_2' = -4y_1 + 3y_2 + 10\cos x \end{cases}$$

$[y_1(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - 3\cos x - \operatorname{sen} x;\ y_2(x) = c_1e^{-x} + 4c_2e^{2x} - 7\cos x + \operatorname{sen} x]$

4.85 Risolvere il sistema non omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + \cos x - \operatorname{sen} x \\ y_2' = -y_1 + \cos x + \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$[y_1(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + \cos x + \operatorname{sen} x;\ y_2(x) = -c_1e^{x} + c_2e^{-x}]$

Capitolo 5

EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON LINEARI DEL PRIMO ORDINE

Preliminarmente esponiamo i metodi di risoluzione per alcune equazioni differenziali non lineari del primo ordine. Successivamente, nel paragrafo 5I, discutiamo del teorema di Cauchy di esistenza ed unicità.

5A. Equazioni a variabili separabili

Si dice a *variabili separabili* un'equazione differenziale del primo ordine del tipo

$$y' = f(x) \cdot g(y) \,, \tag{*}$$

con f e g funzioni continue. Ad esempio, sono a variabili separabili le equazioni differenziali

$$y' = \frac{x}{y} \,; \qquad\qquad y' = 1 + y^2 \,.$$

b

Nel primo caso è $f(x) = x$ e $g(y) = 1/y$, mentre, nel secondo caso, si può porre $f(x) = 1$ e $g(y) = 1 + y^2$.

Per determinare le soluzioni dell'equazione differenziale (*), si scrive la derivata y' come rapporto tra differenziali $y' = dy/dx$; si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \,;$$

poi si separano le variabili (supponendo $g(y) \neq 0$)

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)\,dx$$

e si integra membro a membro

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)\,dx\,.$$

Si ottiene una relazione del tipo $G(y) = F(x) + c$ che esprime il legame (in forma implicita) tra x e y.

5.1 Risolvere le equazioni differenziali a variabili separabili

(a) $\quad y' = \dfrac{x}{y}$ $\qquad$ (b) $\quad y' = 1 + y^2$

[(a) Si scrive l'equazione differenziale nella forma equivalente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \qquad \text{da cui} \qquad y\,dy = x\,dx\,.$$

Integrando membro a membro, otteniamo

$$\int y\,dy = x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c\,,$$

cioè ancora $y^2 = x^2 + 2c$ (si noti che, pur di cambiare la costante, si può scrivere equivalentemente $y^2 = x^2 + c'$). L'insieme delle soluzioni è quindi costituito dalla famiglia di iperboli equilatere $y^2 - x^2 = c'$, se $c' \neq 0$, e dalle rette di equazione $y = \pm x$, se $c' = 0$.

Si può controllare l'esattezza del risultato ottenuto calcolando la derivata y' e verificando che $y' = y/x$. A tale scopo ricaviamo la y in funzione di x dalla relazione $y^2 = x^2 + 2c$:

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 2c}$$

(si noti che, globalmente, y non è funzione di x; infatti $y = \sqrt{x^2 + 2c}$ è una funzione di x e $y = -\sqrt{x^2 + 2c}$ è un'altra funzione). Derivando otteniamo

$$y' = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2c}} \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{x}{y} = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + 2c}} = y'\,.$$

(b) Scriviamo l'equazione differenziale nella forma equivalente

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{1 + y^2} = dx$$

ed integrando membro a membro

$$\operatorname{arctg} y = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx = x + c\,.$$

Quindi, in forma implicita, le soluzioni sono rappresentate dalla relazione $\operatorname{arctg} y = x + c$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$. Ricavando la y si può scrivere anche $y = \operatorname{tg}(x + c)$.

Verifichiamo il risultato controllando che $y' = 1 + y^2$:

$$y' = D\operatorname{tg}(x + c) = 1/\cos^2(x + c);$$

$$1+y^2 = 1+\mathrm{tg}^2\,(x+c) = 1+\frac{\mathrm{sen}^2\,(x+c)}{\cos^2\,(x+c)} = \frac{1}{\cos^2\,(x+c)}\ ]$$

5.2 Risolvere le equazioni differenziali a variabili separabili

(a) $y\,' = \cos^2 y$ (b) $y\,' = 2x\cos^2 y$

[(a) Dividendo per $\cos^2 y$ (se $\cos^2 y \neq 0$) e integrando, otteniamo

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = dx \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\, y = \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int dx = x + c\,.$$

Quindi le soluzioni trovate sono rappresentate analiticamente dalla relazione $\mathrm{tg}\, y = x + c$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Limitatamente alle funzioni $y(x)$ per cui $-\pi/2 < y(x) < \pi/2$ si può scrivere $y(x) = \mathrm{arctg}\,(x+c)$.

Oltre a ciò, occorre verificare che, separando le variabili, non si siano perse alcune soluzioni corrispondenti al caso $\cos^2 y = 0$; infatti, ad esempio, per la funzione costante $y(x) = \pi/2$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $y\,'(x) = 0$ e quindi $y\,' = \cos^2 y = 0$. Analogamente ogni altra funzione costante $y(x) = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) è soluzione. Riassumendo, le soluzioni sono rappresentate da

$$\mathrm{tg}\, y = x + c\,, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

(b) Come in precedenza si determinano le soluzioni

$$\mathrm{tg}\, y = x^2 + c\,, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,]$$

5.3 Risolvere le equazioni a variabili separabili

(a) $y\,' = 2xy$ (b) $y\,' = \dfrac{y}{x}$ (c) $y\,' = -\dfrac{x}{y}$

[(a) Oltre che a variabili separabili, l'equazione differenziale è anche lineare omogenea. Notiamo subito che la funzione identicamente nulla è una soluzione; inoltre, separando le variabili, abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = 2xy\,, \quad \int \frac{dy}{y} = 2x\, dx\,, \quad \log\,|y| = x^2 + c\,;$$

da cui $|y| = e^{x^2+c} = e^{x^2} \cdot e^c$. Al variare di c in $\mathbb{R}$, e^c descrive tutti i numeri reali positivi; perciò e^c rappresenta una generica costante positiva. Si noti che il secondo membro e^{x^2+c} non si annulla; perciò $y(x)$ non si annulla per alcun valore della x. Distinguendo i casi $y \gtrless 0$ si giunge alla rappresentazione $y = \pm e^{x^2} \cdot e^c$. Tenendo conto che anche $y = 0$ è soluzione e ponendo $c' = \pm\, e^c$ se $y(x) \neq 0$ e $c' = 0$ se $y(x) = 0$, si giunge alla rappresentazione di tutte le soluzioni nella forma $y(x) = c'\, e^{x^2}$.

(b) $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$) è soluzione. Separando le variabili si ottiene

$$\log\,|y| = \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} = \log\,|x| + c = \log\,(e^c|x|)\,,$$

da cui $|y| = e^c|x|$. Come in (a), posto $c' = \pm\, e^c$ se $y(x) \neq 0$ e $c' = 0$ se $y(x) = 0$, si trovano le soluzioni nella forma $y(x) = c'x$, $\forall\, c' \in \mathbb{R}$.

(c) Le soluzioni (in forma implicita) sono date dall'equazione $x^2 + y^2 = c$ che, geometricamente, corrisponde alla famiglia di circonferenze con centro l'origine degli assi (per ogni scelta della costante $c > 0$)]

5.4 Risolvere le equazioni a variabili separabili

(a) $\qquad xy' = \operatorname{tg} y \qquad\qquad$ (b) $\qquad y'\operatorname{tg} x = y$

[(a) Per applicare il metodo della separazione delle variabili, occorre dividere entrambi i membri per $x \operatorname{tg} y$. Essendo $\operatorname{tg} y = 0$ per $y = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, tutte le funzioni costanti $y(x) = k\pi$ sono soluzioni. Inoltre, supponendo $\operatorname{tg} y \neq 0$ (e anche $x \neq 0$), separando le variabili otteniamo

$$\log |\operatorname{sen} y| = \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\, dy = \int \frac{dx}{x} = \log |x| + c = \log (e^c |x|) \,.$$

Ponendo $c' = \pm\, e^c$, come nell'esercizio 5.3 si ottiene $\operatorname{sen} y = c'x$. Notiamo che, per $c' = 0$, si riottengono le soluzioni costanti $y(x) = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Perciò tutte le soluzioni si possono rappresentare nella forma $\operatorname{sen} y = c'\, x$. (b) $y(x) = c \operatorname{sen} x$, con $c \in \mathbb{R}$]

5.5 Disegnare in un riferimento cartesiano ortogonale il grafico delle soluzioni dell'equazione considerata nell'esercizio 5.3 (a).

[Si veda la figura 5.1]

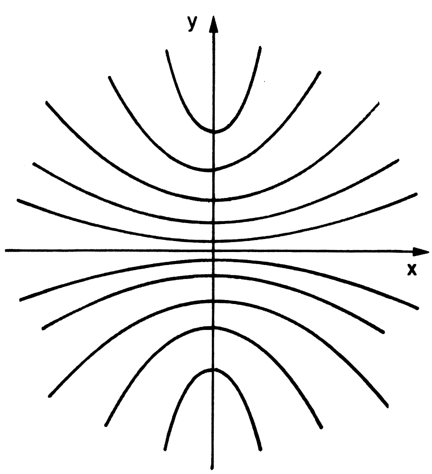

figura 5.1

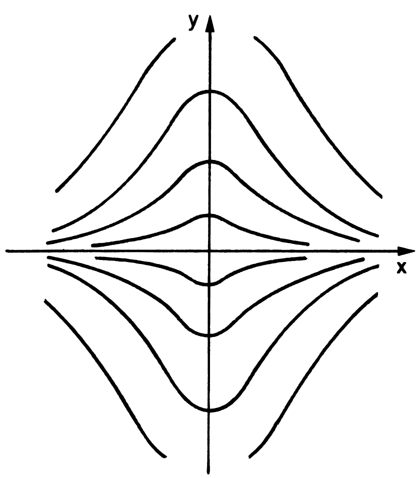

figura 5.2

5.6 Risolvere l'equazione differenziale $y' = -2xy$ e disegnare in un riferimento cartesiano ortogonale il grafico delle soluzioni trovate.

[$y(x) = c\, e^{-x^2}$, rappresentate in figura 5.2]

5.7 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = 2x\sqrt{1-y^2}$$

[$y(x) = \operatorname{sen}(x^2+c)$, con $c \in \mathbb{R}$, oltre alle due funzioni costanti $y(x) = \pm 1$]

5.8 Risolvere l'equazione differenziale $y' = e^{x-y}\cos x$.

[Separando le variabili si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cos x}{e^y} \quad \Rightarrow \quad \int e^y\, dy = \int e^x \cos x\, dx\,.$$

Si può calcolare l'integrale a secondo membro utilizzando due volte la formula di integrazione per parti

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) - \int e^x \cos x\, dx$$

da cui $\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + c$.
Perciò l'integrale generale dell'equazione differenziale è data da $e^y = (1/2)e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + c$, cioè $e^{y-x} = (1/2)(\operatorname{sen} x + \cos x) + c$, da cui

$y = x + \log\left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2} + c\right)$]

5.9 Siano a, b costanti reali non nulle. Risolvere, con il metodo della separazione delle variabili, l'equazione lineare

$$y' = ay + b$$

[Separando le variabili abbiamo

$$\frac{1}{a}\log|ay+b| = \int \frac{dy}{ay+b} = \int dx = x + c$$

da cui $y(x) = [e^{a(x+c)} - b]/a = c'e^{ax} - b/a$, avendo posto $c' = e^{ac}/a$. Il lettore controlli che si ottiene lo stesso risultato utilizzando la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine, già considerata nel capitolo 4]

5.10 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} xy' = 1 + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} xy' = 1 + y^2 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

[L'equazione differenziale si risolve separando le variabili ed ha le soluzioni $y(x) = \operatorname{tg}(c + \log|x|)$.
(a) Le soluzioni $y(x)$ sono definite per $x \neq 0$ (e per $c + \log|x| \neq \pi/2 + k\pi$); è quindi opportuno considerare separatamente gli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Dato che cerchiamo la soluzione $y(x)$ che soddisfa la condizione iniziale $y = 1$ per $x = 1 > 0$, ci poniamo nell'intervallo

$(0, +\infty)$. In tal caso risulta $y(x) = \mathrm{tg}\,(c + \log x)$ e $y(1) = \mathrm{tg}\,c$. Perciò la condizione $y(1) = 1$ equivale a $\mathrm{tg}\,c = 1$, cioè $c = \pi/4 + k\pi$. Dato che la funzione tangente è periodica di periodo π, basta scegliere ad esempio $c = \pi/4$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi $y(x) = \mathrm{tg}\,(\pi/4 + \log x)$. (b) $y(x) = \mathrm{tg}\,(\pi/4 + \log(-x))$]

5.11 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} y' + 3x^2y^4 = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} y' + 3x^2y^4 = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

[(a) La funzione identicamente nulla soddisfa sia l'equazione differenziale che il dato iniziale ed è quindi soluzione (unica) del problema di Cauchy. Si noti che, separando le variabili, si perde proprio la soluzione $y(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; (b) dopo aver separato le variabili otteniamo

$$-\frac{1}{3}y^{-3} = \int y^{-4}\,dy = \int -3x^2\,dx = -x^3 + c$$

da cui $y^{-3} = 3x^3 - 3c$. Imponendo la condizione $y(1) = 1$ si trova $1 = 3 - 3c$ da cui $3c = 2$. Perciò la soluzione del problema di Cauchy è data da $y(x) = 1/(3x^3 - 2)^{1/3}$]

5.12 Risolvere le equazioni a variabili separabili

$$\text{(a)} \quad y' = y\,\mathrm{cotg}\,x \qquad\qquad \text{(b)} \quad y' = (y-3)\,\mathrm{cotg}\,x$$

[(a) $\log|y| = \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}\,dx = \log|\mathrm{sen}\,x| + c$, da cui $\log|y| = \log e^c|\mathrm{sen}\,x|$ e quindi $y = \pm e^c|\mathrm{sen}\,x|$.

Cambiando la costante, le soluzioni si possono anche scrivere nella forma $y(x) = c'\,\mathrm{sen}\,x$ (si noti che anche $y(x) = 0$ è soluzione e si ottiene per $c' = 0$); (b) $y(x) = 3 + c\,\mathrm{sen}\,x$]

5.13 Risolvere l'equazione $2x^2yy' = 1 + y^2$.

[Separando le variabili otteniamo

$$\log(1 + y^2) = \int \frac{2y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{dx}{x^2}\,dx = -x^{-1} + c\,,$$

da cui $y(x) = \pm(e^{c-1/x} - 1)^{1/2}$]

5.14 Risolvere l'equazione $xy' = y\log y$.

[La funzione costante $y = 1$, che annulla il secondo membro, è soluzione dell'equazione differenziale (mentre $y = 0$ è da scartare). Separando le variabili, otteniamo $y(x) = e^{cx}$; in particolare, la soluzione costante $y = 1$ corrisponde a $c = 0$]

5.15 Risolvere l'equazione $4\sqrt{x^3}\,yy' = 1 - y^2$.

[$y(x) = \pm\sqrt{1 + ce^{1/\sqrt{x}}}$]

5.16 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-1}{x^2-1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-1}{x^2-1} \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1} \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}$

[(a) $y(x) = x$; (b) $y(x) = x$; (c) $y(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$; (d) $y(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{arctg} x\right)$]

5.17 Risolvere l'equazione differenziale

$$\sqrt{x}\, y' + \sqrt{y} \operatorname{sen} \sqrt{x} = 0$$

[La funzione costante $y = 0$ è soluzione. Inoltre, se $y \neq 0$,

$$2\sqrt{y} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx\,;$$

l'integrale a secondo membro si può calcolare per sostituzione, ponendo $\sqrt{x} = t$. Si ottiene l'insieme di soluzioni $y(x) = (c + \cos\sqrt{x})^2$ oltre, naturalmente, alla funzione identicamente nulla]

5.18 Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$4xe^y(y')^2 + (4xe^x + ye^y)y' + ye^x = 0$$

[L'equazione data non è in forma normale. È possibile ricavare la y' in funzione di x e y mediante la formula risolutiva delle equazioni algebriche di secondo grado:

$y' = \dfrac{1}{8xe^y}[-(4xe^x + ye^y) \pm \sqrt{(4xe^x + ye^y)^2 - 16xye^xe^y}] = \dfrac{1}{8xe^y}[-(4xe^x + ye^y) \pm \sqrt{(4xe^x - ye^y)^2}] =$

$$= \frac{-(4xe^x + ye^y) \pm (4xe^x + ye^y)}{8xe^y} = \begin{cases} -y/4x \\ -e^x/e^y \end{cases}$$

Perciò l'equazione data è equivalente alle due equazioni differenziali in forma normale

$$y' = -\frac{y}{4x}\,; \qquad y' = -\frac{e^x}{e^y}\,.$$

Entrambe le equazioni sono a variabili separabili e si vede facilmente che l'integrale generale della prima è $y(x) = c|x|^{-1/4}$, mentre l'integrale generale della seconda è $y(x) = \log(c - e^x)$]

5.19 Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \log\left[(x + \sqrt{1+x^2})^y\right]$$

[La funzione costante $y = 0$ è una soluzione. Separando le variabili e risolvendo per parti l'integrale in dx, otteniamo

$$\log|y| = x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c\,,$$

cioè anche $y(x) = c'(x+\sqrt{1+x^2})^x e^{-\sqrt{1+x^2}}$. Si noti che la funzione identicamente nulla rientra in tale rappresentazione, in corrispondenza di $c' = 0$]

5.20 Determinare le curve $y = y(x)$ la cui retta tangente nel punto $(x, y(x))$ incontra l'asse delle x nel punto $(-x, 0)$, come in figura 5.3.

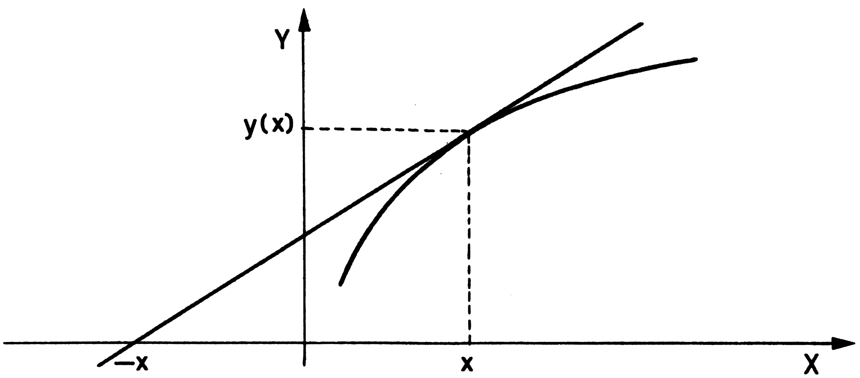

figura 5.3

[Le curve incognite, di equazione $y = y(x)$, hanno retta tangente in (x, y) di equazione (nel piano di assi X, Y):

$$Y = y(x) + y'(x)(X - x)\,.$$

La retta tangente incontra l'asse delle X nel punto $(-x, 0)$ se e solo se $0 = y(x) + y'(x)(-x - x)$, cioè se e solo se

$$y - 2xy' = 0\,.$$

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili che, integrata, fornisce le soluzioni $y(x) = c\sqrt{|x|}$. Si tratta di archi di parabola aventi l'asse coincidente con l'asse delle ascisse e vertice in $(0, 0)$]

5.21 Determinare le curve $y = y(x)$ la cui retta normale nel punto $(x, y(x))$ incontra l'asse delle ascisse in un punto $C = C(x)$ a distanza uguale ad 1 da $(x, y(x))$, come in figura 5.4.

[Nel piano X, Y l'equazione della normale al grafico di una funzione derivabile $y = y(x)$ (con derivata non nulla), passante per $(x, y(x))$, è data da

$$Y = y(x) - \frac{1}{y'(x)}(X - x)\,.$$

Tale retta incontra l'asse delle ascisse nel punto C di coordinate $(X, 0)$, con X soddisfacente l'equazione $0 = y(x) - (X - x)/y'(x)$, cioè $yy' = X - x$, da cui $X = x + yy'$. La distanza del punto $P \equiv (x, y(x))$ dal punto $C \equiv (x + yy', 0)$ è data da

$$\overline{CP} = \sqrt{[(x + yy') - x]^2 + [-y]^2} = \sqrt{(yy')^2 + y^2}.$$

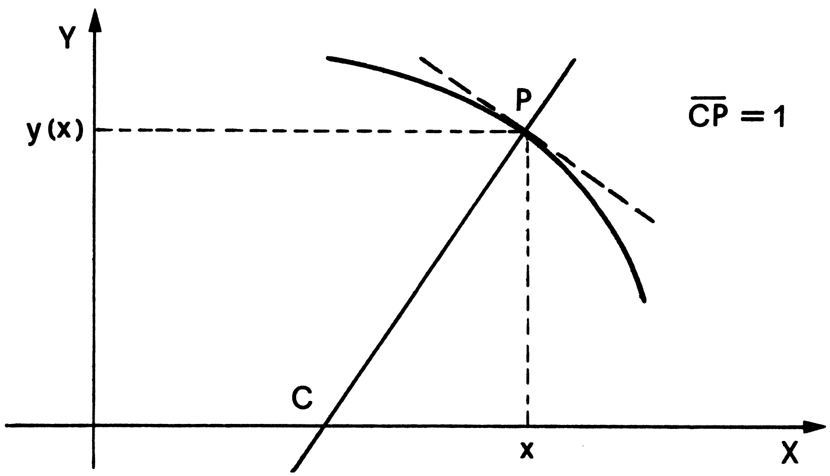

figura 5.4

Imponendo la condizione $\overline{CP} = 1$ si ottiene l'equazione differenziale in forma non normale

$$(yy')^2 = 1 - y^2$$

che, evidentemente, può avere soluzioni solo se $1 - y^2 \geq 0$, cioè se $-1 \leq y \leq 1$. Si riconosce che le funzioni costanti $y = \pm 1$ sono due soluzioni. Inoltre l'equazione data è equivalente alle due equazioni differenziali a variabili separabili

$$yy' = \sqrt{1 - y^2}, \qquad yy' = -\sqrt{1 - y^2},$$

che, risolte, danno le soluzioni $(x + c)^2 + y^2 = 1$; si tratta della famiglia di circonferenza di centro $(-c, 0)$ e raggio 1. Come già detto, a questa famiglia di circonferenze vanno aggiunte le due rette di equazione $y = \pm 1$]

5.22 Siano A e B i punti di intersezione degli assi coordinati con la retta tangente al grafico della funzione $y = y(x)$ nel punto generico $(x, y(x))$ come in figura 5.5. Determinare le curve $y(x)$ tali che:

(a) l'ascissa di A sia uguale a $2x$;
(b) l'ordinata di B sia uguale a $2y$;
(c) l'ascissa di A sia uguale a kx $(k > 0)$;
(d) l'ordinata di B sia uguale a ky $(k > 0)$.

[La retta tangente di equazione $Y = y(x) + y'(x)(X - x)$ incontra gli assi X, Y nei punti A e B le cui coordinate si determinano imponendo rispettivamente $Y = 0$ e $X = 0$ e calcolando in corrispondenza l'altra coordinata. Ad esempio, posto $Y = 0$, risulta $y + y'(X - x) = 0$ da cui, se $y' \neq 0$, $X = x - y/y'$. In modo analogo si determina B.

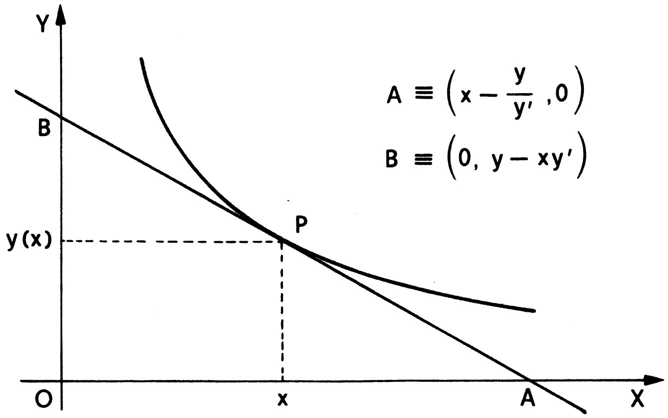

figura 5.5

Con riferimento alla figura 5.5 si ha:

Intersezione con l'asse X:	A≡ $(x - y/y', 0)$
Intersezione con l'asse Y:	B≡ $(0, y - x/y')$

(a) la condizione richiesta è $x - y/y' = 2x$ che, se $y' \neq 0$, equivale all'equazione differenziale a variabili separabili $y' = -y/x$. Tale equazione ha per soluzioni le iperboli $y(x) = c/x$, con $c \in \mathbb{R}$ ($c = 0$ è da scartare); (b) $y(x) = c/x$ con $c \in \mathbb{R}$; (c) $y(x) = c|x|^{1/(1-k)}$ con $c \neq 0$ se $k \neq 1$; altrimenti, se $k = 1$, non esistono funzioni $y = y(x)$ che soddisfano la condizione posta; (d) $y = c|x|^{1-k}$, con $c \in \mathbb{R}$]

5B. Equazioni di Bernoulli

Si dice *di Bernoulli* un'equazione differenziale del primo ordine del tipo

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$$

con $a(x)$, $b(x)$ funzioni continue in un intervallo prefissato e con α parametro reale diverso da 0 e da 1 (altrimenti l'equazione è lineare).

Il metodo di risoluzione è il seguente: preliminarmente si dividono entrambi i membri dell'equazione per y^{α} (così facendo si trascura la soluzione identicamente nulla, nel caso in cui α sia positivo); si ottiene

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)\,.$$

Si pone poi $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$. La derivata della nuova funzione incognita $z(x)$, per la regola di derivazione delle funzioni composte, vale

$$z'(x) = \frac{d}{dx}(y(x))^{1-\alpha} = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha}.$$

L'equazione differenziale, nell'incognita z, diviene

$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x);$$

è lineare del primo ordine e quindi si risolve con i metodi descritti nel capitolo 4. Vediamo alcuni esempi.

5.23 Risolvere l'equazione differenziale di Bernoulli

$$y' = 2y - e^x y^2$$

[Cominciamo con l'osservare che, essendo $\alpha = 2 > 0$, la funzione costante $y = 0$ è una soluzione. Per determinare le altre soluzioni dividiamo entrambi i membri per y^2:

$$y'y^{-2} = 2y^{-1} - e^x.$$

Poniamo $z(x) = (y(x))^{-1}$, da cui $z' = -y^{-2}y'$. Rispetto a z l'equazione diventa

$$z' = -2z + e^x$$

ed è quindi un'equazione lineare del primo ordine, cioè del tipo $z' = a(x)z + b(x)$, con $a(x) = -2$ e $b(x) = e^x$. Scegliendo $A(x) = -2x$ come primitiva di $a(x)$, si trova l'integrale generale

$$z(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} \cdot b(x)\,dx = e^{-2x} \int e^{2x} \cdot e^x\,dx = e^{-2x}\left(\frac{1}{3}e^{3x} + c\right) = \frac{1}{3}e^x + ce^{-2x}.$$

Ricordando che $z = y^{-1}$, risulta quindi $y(x) = z^{-1} = (e^x/3 + ce^{-2x})^{-1}$.
Tali funzioni, unitamente alla funzione identicamente nulla, sono tutte le soluzioni dell'equazione data]

5.24 Risolvere le seguenti equazioni di Bernoulli

(a) $y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{y}$ (b) $2y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{y}$

[(a) Si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli con esponente $\alpha = -1$. Dividendo entrambi i memtri per y^{-1} (cioè moltiplicando per y) otteniamo l'equazione

$$yy' = \frac{1}{x}y^2 - 1.$$

Nell'incognita $z = y^2$, essendo $z' = 2yy'$, si ha l'equazione lineare

$$z' = \frac{2}{x}z - 2.$$

Una primitiva di $a(x) = 2/x$ è $A(x) = 2\log|x| = \log x^2$. Perciò, posto $b(x) = -2$, si ha

$$z' = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} \cdot b(x)\,dx = x^2 \int \frac{-2}{x^2}\,dx = x^2\left(\frac{2}{x} + c\right) = 2x + cx^2.$$

In definitiva, essendo $y = \pm\sqrt{z}$, l'equazione data ha come soluzioni le funzioni $y(x) = \pm\sqrt{2x+cx^2}$, con $c \in \mathbb{R}$. (b) $y(x) = \pm\sqrt{|x|(c-\log|x|)}$]

5.25 Calcolare il perimetro dell'asteroide di equazione

$$x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\,.$$

[Il perimetro dell'insieme del piano $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ delimitato dalla condizione $x^{2/3}+y^{2/3} \leq 1$ è la misura della sua frontiera, di equazione

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1\,,$$

che ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ \\ y(t) = \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi],$$

o anche, limitatamente all'arco di curva del primo quadrante, $t \in [0, \pi/2]$. Si può quindi procedere come nell'esercizio precedente. La lunghezza dell'arco contenuto nel primo quadrante è $1/4$ del perimetro richiesto. Pertanto

$$\text{Perimetro} = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt = 12\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\,(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}\,dt =$$

$$= 12\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\cos t\,dt = 12\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = 6\,.$$

Si può anche calcolare il perimetro in coordinate cartesiane, scrivendo l'equazione cartesiana dell'arco di asteroide contenuta, ad esempio, nel semipiano delle $y \geq 0$, calcolandone la lunghezza e moltiplicando il risultato per 2. Si ottiene

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x) = \pm\,(1-x^{2/3})^{3/2}$$

da cui, scegliendo il segno positivo,

$$y'(x) = \frac{d}{dx}(1-x^{2/3})^{3/2} = \frac{3}{2}(1-x^{2/3})^{1/2}\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = -(1-x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}$$

e quindi

$$[y'(x)]^2 = (1-x^{2/3})x^{-2/3} = x^{-2/3}-1\,, \qquad 1+[y'(x)]^2 = x^{-2/3}\,.$$

Pertanto

$$\text{Perimetro} = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{x^{-2/3}}\,dx = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{(x^2)^{-1/3}}\,dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1}|x|^{-1/3}\,dx = 4\int_0^1 x^{-1/3}\,dx = 4\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_{x=0}^{x=1} = 6]$$

5.26 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} 2y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x} \\ y(1) = 1/2 \end{cases}$$

[(a) L'equazione è di Bernoulli con esponente $\alpha = -1$. Dividendo entrambi i membri per y^{-1} e ponendo $z = y^2$, otteniamo successivamente

$$2yy' = \frac{y^2}{x} - x\,; \qquad\qquad z' = \frac{1}{x}z - x\,.$$

Notiamo che il coefficiente $a(x) = 1/x$ non è definito per $x = 0$. Dato che la condizione iniziale è posta nel punto $x_0 = 1$, ci limitiamo a considerare il caso $x > 0$ in cui $A(x) = \log x$ (invece che, più generalmente, $\log |x|$) è una primitiva di $a(x)$. La funzione $z(x)$ risulta uguale a

$$z(x) = x\int \frac{1}{x}\cdot(-x)\,dx = x(-x+c) = -x^2 + cx$$

da cui $y(x) = \pm\sqrt{cx - x^2}$. Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 1$ si trova $1 = \pm\sqrt{c-1}$; si deve quindi scegliere il segno $+$ e $c = 2$. Perciò la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \sqrt{2x - x^2}$. Si noti che tale funzione, definita per $0 \le x \le 2$, è derivabile solo per $0 < x < 2$ e perciò è soluzione solo nell'intervallo aperto $(0,2)$. Per $y > 0$ si può scrivere nelle forme equivalenti

$$y = \sqrt{2x - x^2}\,; \qquad x^2 - 2x + y^2 = 0\,; \qquad (x-1)^2 + y^2 = 1\,;$$

in particolare, dall'ultima espressione, si riconosce facilmente che $y(x)$ ha per grafico la semicirconferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1, con $y > 0$.
(b) L'equazione differenziale è di Bernoulli con esponente $\alpha = 2$, ma anche a variabili separabili. La soluzione è $y(x) = x/(x+1)$]

5.27 Risolvere le equazioni differenziali di Bernoulli

$$\text{(a)}\quad y' = \frac{2y}{x} + 2x\sqrt{y} \qquad\qquad \text{(b)}\quad y' = \frac{4y}{x} + 2x\sqrt{y}$$

[(a) È un'equazione di Bernoulli con esponente $\alpha = 1/2$. La funzione costante $y = 0$ è una soluzione. Se $y \neq 0$ dividiamo entrambi i membri per $\sqrt{y}$ e poniamo $\sqrt{y} = z$, da cui $z' = x + z/x$. Una primitiva di $a(x) = 1/x$ è $A(x) = \log |x|$. In base alla formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari del primo ordine otteniamo (separatamente per $x > 0$ e $x < 0$)

$$z(x) = e^{A(x)}\int e^{-A(x)}\,x\,dx = |x|\int \frac{x}{|x|}\,dx = \pm x\int \pm\,dx = x\int dx = x(x+c) \quad (\forall\, x \neq 0)\,.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale iniziale sono $y(x) = (x^2 + cx)^2$, oltre a $y = 0$; (b) $y(x) = x^4(c + \log |x|)^2$ e $y = 0$]

5.28 Risolvere l'equazione differenziale $y' = x(y^3 - y)$.

[È un'equazione di Bernoulli con esponente $\alpha = 3$. Oltre a $y(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, le soluzioni sono espresse da $y(x) = \pm\, 1/\sqrt{1 + ce^{-x^2}}$]

5.29 Risolvere con il metodo di Bernoulli l'equazione differenziale proposta nell'esercizio 5.15.

5.30 Risolvere il problema di Cauchy:

$$y(1) = 1\,; \qquad\qquad 2xyy\,' = y^2 - x^2 + 1$$

[L'equazione differenziale è di Bernoulli con esponente $\alpha = -1$. La soluzione, espressa analiticamente dalla funzione $y(x) = \sqrt{1 + 3x - x^2}$, corrisponde geometricamente alla semicirconferenza di centro $(3/2, 0)$ e raggio $\sqrt{5}/2$, con $y > 0$]

5.31 Risolvere le equazioni di Bernoulli

(a) $\quad 4y\,' = y \operatorname{tg} x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{y^3}$ $\qquad\qquad$ (b) $\quad y\,' = \dfrac{xy}{2} - xy^2$

[(a) $y(x) = \sqrt[4]{\dfrac{c + \cos^2 x}{\cos x}}$; (b) $y(x) = \dfrac{1}{2 + ce^{-x^2/4}}$ e $y = 0$]

5.32 Risolvere i problemi di Cauchy

(a) $\quad \begin{cases} y\,' = xy + xy^3 \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$ $\qquad\qquad$ (b) $\quad \begin{cases} y\,' = xy + xy^3 \\ y(1/2) = 0 \end{cases}$

[L'equazione differenziale, oltre ad essere del tipo di Bernoulli, è anche a variabili separabili. (a) $y(x) = (1 + 3e^{-x^2})^{-1/2}$; (b) $y(x) = 0$]

5.33 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

(a) $\quad xy\,' + 2y = 2y^3/2 \log x$

(b) $\quad y\,' = y \cos x(1 - y \operatorname{sen} x)$

(c) $\quad y\,' + 2y = \sqrt{y} \operatorname{sen} x$

(d) $\quad y\,' = \dfrac{2x}{3}\left(\dfrac{y}{x^2 - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)$

(e) $\quad 2x^3 y\,' + x^2 y + y^{-5} \operatorname{tg} x = 0$

(f) $\quad y\,' = 2x\sqrt{y}\,(x^2 + \sqrt{y})$

[(a) $y(x) = 0$ e $y(x) = (cx + \log x + 1)^{-2}$;

(b) $y(x) = 0$ e $y(x) = (ce^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1)^{-1}$;

(c) $y(x) = 0$ e $y(x) = (\operatorname{sen} x - \cos x + ce^{-x})^2/16$;

(d) $y(x) = (x^2 - 1 + c\sqrt{x^2 - 1})^{2/3}$;

(e) $y(x) = x^{-1/2}(c + \log |\cos x|^3)^{1/6}$;

(f) $y(x) = 0$ e $y(x) = (x^2 + 2 + ce^{x^2/2})^2$]

5.34 Determinare una funzione $y(x)$ che diverge a $+\infty$ per $x \to 1^+$ e che è soluzione nell'intervallo $(1, +\infty)$ rispettivamente delle equazioni differenziali:

(a) $\quad y' = xy[\sqrt{y} + 1/(x^2-1)]$ (b) $\quad y' = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{xy}{x^2-1} + xy^{3/2}\right)$

[(a) $y(x) = \dfrac{25}{(1-x^2)^2}$; (b) $y(x) = \dfrac{121}{9(1-x^2)^2}$]

5.35 Sia $a(x)$ una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata $a'(x)$ continua. Determinare, per ogni valore del parametro reale $\alpha \neq 1$, l'integrale generale delle equazioni differenziali

(a) $\quad (1-\alpha)y' = a'(x)[y + a(x)y^\alpha]$ (b) $\quad (1-\alpha)y' = a'(x)[y + y^\alpha]$

[(a) Se $\alpha > 0$, una soluzione è $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dividendo entrambi i membri per y^α e ponendo $z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$, otteniamo $z' = a'(x)[z + a(x)]$. Si tratta di un'equazione lineare nell'incognita z che ha per soluzioni:

$$z(x) = e^{a(x)} \int e^{-a(x)} \cdot a'(x)a(x)\, dx\,.$$

Calcoliamo per parti l'integrale a secondo membro:

$$\int e^{-a(x)} \cdot a'(x)a(x)\, dx = \int \frac{d}{dx}[-e^{-a(x)}]a(x)\, dx =$$

$$= -e^{-a(x)}a(x) + \int e^{-a(x)}a'(x)\, dx = -e^{-a(x)}a(x) - e^{-a(x)} + c\,.$$

In definitiva, per ogni $\alpha \neq 1$, si ottiene $y(x) = (ce^{a(x)} - a(x) - 1)^{1/(1-\alpha)}$, oltre naturalmente alla soluzione nulla se $\alpha > 0$. (b) $y(x) = (ce^{a(x)} - 1)^{1/(1-\alpha)}$ e $y(x) = 0$ se $\alpha > 0$]

5.36 Siano $a(x)$, $b(x)$ funzioni derivabili su $\mathbb{R}$ con derivata continua e con $a(x)$ non identicamente nulla. Determinare tutte le soluzioni delle equazioni differenziali

(a) $\quad a(x)y' = a'(x)(y + y^2)$ (b) $\quad a(x)y' = a'(x)y + b'(x)y^2$

[L'equazione in (a) è un caso particolare di quella in (b) e si ottiene ponendo $b(x) = a(x)$. Perciò discutiamo il caso più generale (b). Cominciamo con l'osservare che la funzione costante $y = 0$ è soluzione. Dividendo entrambi i membri per y^2, otteniamo

$$\frac{a(x)y' - a'(x)y}{y^2} = b'(x)\,.$$

Poi si può procedere oltre con il metodo di Bernoulli, con la sostituzione $y^{-1} = z$. Proponiamo un altro metodo di risoluzione: a primo membro, a meno del segno, compare la derivata rispetto ad x del quoziente $a(x)/y$; perciò l'equazione si può scrivere nella forma equivalente

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{a(x)}{y}+b(x)\right]=0\,.$$

Risulta quindi (se $y \neq 0$) $a(x)/y+b(x)=$ costante $=c$, da cui $y(x)=a(x)/[c-b(x)]$. Nel caso particolare dell'equazione in (a) l'insieme di tutte le soluzioni è dato da $y(x)=a(x)/[c-a(x)]$, oltre a $y(x)=0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$]

5.37 Sia $y=y(x)$ una funzione definita per $x>0$ e non negativa. Indichiamo con B il punto di intersezione dell'asse delle ordinate con la retta tangente al grafico della funzione in un punto generico $(x, y(x))$, come in figura 5.5. Determinare:

(a) le curve $y(x)$ tali che l'ordinata di B sia proporzionale a y^{α}, con $\alpha>0$;

(b) la curva $y(x)$ soddisfacente la condizione $y(2)=2$ e tale che l'ordinata di B sia uguale a y^2.

[(a) Come già mostrato nell'esercizio 5.22, l'ordinata del punto B, intersezione della retta tangente con l'asse delle ordinate, vale $y-xy'$. Indicando con k il fattore di proporzionalità, la condizione viene $y-xy'=ky^{\alpha}$. Si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli che, oltre a $y(x)=0$, ha come soluzioni $y(x)=(k+c\,x^{1-\alpha})^{1/(1-\alpha)}$ per $x>0$.
(b) Ponendo $k=1$ e $\alpha=2$ nell'espressione determinata in (a), si ottiene

$$y(x)=\left(1+\frac{c}{x}\right)^{-1}=\frac{x}{x+c}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(2)=2$, si trova $c=-1$. Perciò la funzione cercata è $y(x)=x/(x-1)$]

5.38 Determinare le curve tali che il punto di mezzo del segmento sulla retta normale, con estremi sulla curva e sull'asse delle x, sia situato sulla parabola $x=y^2$.

[Si fa riferimento alla figura 5.6. Se P ha coordinate $(x, y(x))$, allora, come mostrato nell'esercizio 5.21, C ha coordinate $(x+yy', 0)$. Perciò il punto medio M ha coordinate $(x+(yy')/2, y/2)$; tale punto giace sulla parabola di equazione $x=y^2$ se e solo se (per $y \neq 0$)

$$x+\frac{yy'}{2}=\left(\frac{y}{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{y}{2}-\frac{2x}{y}\,.$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli che ha per soluzioni $y(x)=\pm(4x+4+ce^{x})^{1/2}$. In particolare, per $c=0$, si ottiene la parabola di equazione $x=(y^2/4)-1$. Il lettore disegni in uno stesso sistema di riferimento tale parabola e la parabola iniziale $x=y^2$ e verifichi dal disegno la proprietà enunciata nel testo]

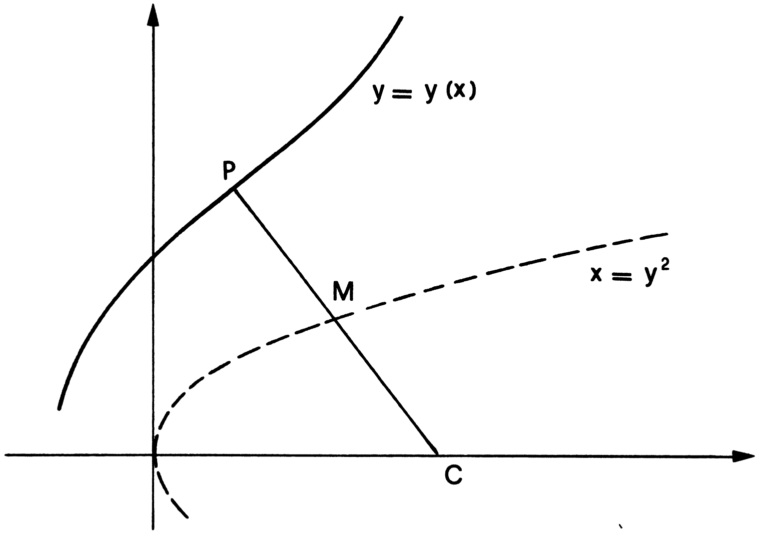

figura 5.6

5C. Equazioni della forma $y' = g(y/x)$

Si dicono brevemente omogenee le equazioni differenziali ordinarie che si pongono nella forma

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

con g funzione continua. Il metodo di risoluzione consiste nel porre

$$z = \frac{y}{x}, \text{ cioè } y(x) = xz(x), \text{ da cui } y' = z + xz'.$$

L'equazione, rispetto all'incognita z, diviene

$$xz' = g(z) - z$$

ed è a variabili separabili. Vediamo alcuni esempi:

5.39 Risolvere l'equazione differenziale di tipo omogeneo

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

[È un'equazione del tipo $y' = g(y/x)$, con $g(t) = 1 + t$. Poniamo $y/x = z$, da cui $y = xz$ e $y' = z + xz'$. Otteniamo l'equazione equivalente

$$z + xz' = 1 + z, \quad \text{cioè} \quad xz' = 1,$$

che si risolve separando le variabili:

$$z=\int dz=\int \frac{1}{x}\,dx=\log|x|+c=\log\left(e^{c}|x|\right)=\log\left(c'x\right)$$

dove si è posto $c'=\pm e^{c}$. Ricordando che $y=xz$, si ottengono le soluzioni $y(x)=x\log\left(c'x\right)$]

5.40 Le seguenti equazioni sono nello stesso tempo di tipo omogeneo e a variabili separabili (la prima è anche lineare):

$$\text{(a)}\quad y'=\frac{y}{x}\qquad \text{(b)}\quad y'=-\frac{x}{y}\qquad \text{(c)}\quad y'=-\frac{x}{y}$$

Risolverle con entrambi i metodi.

[(a) Rette per l'origine $y(x)=cx$; (b) iperboli equilatere di equazione $x^2-y^2=c$ $(y\neq 0)$; (c) circonferenze concentriche con centro nell'origine di equazione $x^2+y^2=c$ $(y\neq 0)$]

5.41 Integrare l'equazione differenziale $y'=2-\dfrac{x}{y}$.

[Posto $z=y/x$ (da cui $y'=z+xz'$) otteniamo l'equazione equivalente $xz'=(2z-1-z^2)/z$; separando le variabili si ha (se $z\neq 1$, cioè se $y\neq x$)

$$-\int \frac{z}{(z-1)^2}\,dz=\int\frac{dx}{x}=\log(cx)\,.$$

Inoltre, sommando algebricamente -1 e $+1$ a numeratore dell'integrando a primo membro, otteniamo

$$\int\frac{z}{(z-1)^2}\,dz=\int\frac{z-1}{(z-1)^2}\,dz+\int\frac{1}{(z-1)^2}\,dz=\log|z-1|-\frac{1}{z-1}+\text{cost}\,;$$

perciò l'equazione differenziale data, oltre a $y(x)=x$, ha come soluzioni le funzioni definite implicitamente dalla relazione

$$\left(\frac{y}{x}-1\right)^{-1}-\log\left|\frac{y}{x}-1\right|=\log(cx)]$$

5.42 Risolvere l'equazione differenziale omogenea

$$y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

e verificare che l'integrale generale è costituito dalla famiglia di funzioni

$$u(x)=\frac{c}{2}x^2-\frac{1}{2c}\qquad \left(\text{con } cx-\frac{y}{x}\geq 0\right)$$

[Con la sostituzione $z=y/x$ si giunge all'equazione $xz'=\sqrt{1+z^2}$; da cui, separando le variabili

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\,dz=\int\frac{dx}{x}=\log\left(c'x\right).$$

Come indicato nel paragrafo 4G della parte seconda del 1° volume, l'integrale a primo membro si determina con la sostituzione $\sqrt{1+z^2} = t - z$. Si ottiene (si veda anche l'esercizio 4.119, volume 1°, parte seconda):

$$\log|2z + 2\sqrt{1+z^2}| = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \log(c'x)\,.$$

Pur di cambiare la costante c', ciò equivale a $z + \sqrt{1+z^2} = cx$. Ricordando che $z = y/x$, si giunge alla rappresentazione delle soluzioni nella forma

$$\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = cx - \frac{y}{x}\,.$$

Dopo aver posto la condizione $cx - (y/x) \geq 0$ ed elevando entrambi i membri al quadrato si giunge alla conclusione]

5.43 Risolvere per $x > 0$ il problema di Cauchy:

$$y(1) = 0\,, \qquad\qquad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}\,.$$

[L'equazione differenziale ammette come soluzioni $y(x) = x \operatorname{sen} \log(cx)$, con $c \neq 0$, oltre a $y(x) = \pm x$. Tra tali soluzioni, quella che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 0$ è $y(x) = x \operatorname{sen} \log x$]

5.44 Risolvere per $x > 0$ i problemi di Cauchy

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x} \\ y(2) = \pi/3 \end{cases} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x} \\ y(1) = \pi \end{cases}$$

[L'integrale generale dell'equazione differenziale è della forma $\operatorname{sen}(y/x) = cx$, con $c \in \mathbb{R}$. (a) La soluzione è $\operatorname{sen}(y/x) = x/4$; esplicitando la y si ottiene $y(x) = x \arcsen(x/4)$. Si noti che $y(x)$ è derivabile nell'intorno di $x = 2$ individuato dalle limitazioni $-1 < x/4 < 1$, cioè nell'intervallo $(-4, 4)$; inoltre, formalmente, il secondo membro dell'equazione differenziale non è definito per $x = 0$; perciò $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy nell'intervallo $(0, 4)$. (b) $y(x) = \pi x$]

5.45 Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee

(a) $\quad x^2 y' = y^2 + xy + 4x^2$

(b) $\quad y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$

(c) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

(d) $\quad y' + \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x}$

(e) $\quad y' = \dfrac{y-x}{y+x}$

(f) $\quad xy' = y(1 - \log y + \log x)$

[(a) $y(x)2x\text{tg} \log (cx)^2$; (b) $y(x) = \pm\sqrt{x^2 + cx}$;
(c) $y(x) = \pm x\sqrt{\log (cx)^2}$; (d) $y(x) = \pm x\sqrt{\log (c/x)^2}$;
(e) $\text{arctg}\,\dfrac{y}{x} + \log\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \log \left|\left(\dfrac{c}{x}\right)\right|$ od anche, trasferendo i logaritmi a secondo membro, $\text{arctg}\,\dfrac{y}{x} = \log\dfrac{c}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (f) $y(x) = xe^{c/x}$]

5.46 Determinare, per ogni valore reale del parametro $\alpha \neq 0, 1$, le soluzioni dell'equazione dlfferenziale

$$\alpha xyy' = x^2 + y^2\,.$$

[$y(x) = \pm x\left(\dfrac{|cx|^{2(1-\alpha)/\alpha} - 1}{1-\alpha}\right)^{1/2}$]

5.47 Verificare che la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{x+y}{x-y}\,, \qquad\qquad y(1) = 0$$

è la *spirale logaritmica* che, in coordinate polari (ρ, ϑ), si esprime con l'equazione $\rho = e^{\vartheta}$.

[Posto $z = y/x$, ed essendo $z(1) = 0$, si trova la soluzione $\text{arctg}\, z - \log\sqrt{1+z^2} = \log x$, cioè $\text{arctg}\,(y/x) = \log\sqrt{x^2+y^2}$. Rimane da osservare che $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e che $\vartheta = \text{arctg}\,(y/x)$]

La *sottotangente* relativa ad un punto generico di una curva di equazione $y = y(x)$ è per definizione la lunghezza (con il segno) del segmento orientato HA in figura 5.7, cioè del segmento di estremi H$\equiv$ $(x, 0)$ e A, punto di incontro dell'asse delle ascisse con la retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x, y(x))$. Ricordando (si veda l'esercizio 5.22) che A ha coordinate $(x - y/y', 0)$, per definizione risulta

$$\textit{sottotangente}{=}HA = -\frac{y}{y'}\,.$$

Analogamente la *sottonormale* è la lunghezza (con il segno) del segmento orientato HC in figura 5.7, cioè del segmento di estremi $H \equiv (x, 0)$ e C, punto di intersezione dell'asse delle ascisse con la rettanormale al grafico della funzione nel punto $(x, y(x))$. Ricordando (si veda l'esercizio 5.21) che C ha coordinate $(x + yy', 0)$, risulta

$$\textit{sottonormale}{=}HC = yy'\,.$$

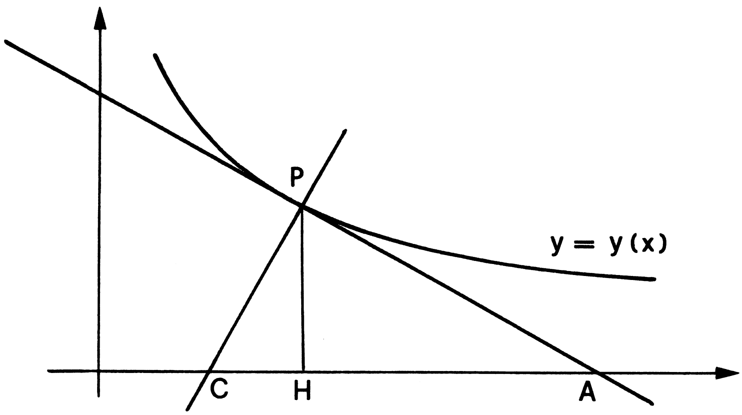

figura 5.7

5.48 Determinare le curve $y = y(x)$ aventi la sottotangente uguale alla media aritmetica delle coordinate del punto di tangenza.

[La condizione è: sottotangente $=(x + y)/2$, cioè

$$-\frac{y}{y'} = \frac{x+y}{2}, \text{ da cui } y' = \frac{-2y}{x+y} = \frac{-2(y/x)}{1+(y/x)}.$$

Notiamo che la funzione costante $y = 0$ non è accettabile come soluzione del problema geometrico proposto, perchè per essa non è definita la sottotangente. Con la sostituzione $z = y/x$, essendo $y' = z + xz'$, otteniamo $xz' = -(3z + z^2)/(1 + z)$. Da cui, separando le variabili, si è ricondotti a calcolare l'integrale indefinito della funzione razionale $(1 + z)/(3z + z^2)$; a tale scopo è utile la scomposizione

$$\frac{1+z}{z^2+3z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+3} = \frac{(A+B)z+3A}{z(z+3)}$$

con $A + B = 1$ e $3A = 1$. Si trovano i valori $A = 1/3$ e $B = 2/3$; perciò si determinano le soluzioni nella forma:

$$\log\frac{c}{x} = -\int\frac{dx}{x} = \int\frac{1+z}{z^2+3z}\,dz = \frac{1}{3}\int\frac{dz}{z} + \frac{2}{3}\int\frac{dz}{z+3} = \frac{1}{3}\log|z| + \frac{2}{3}\log|z+3|,$$

che, in base alle proprietà dei logaritmi, si possono anche scrivere nella forma $z(z + 3)^2 = (c/x)^3$, con $z = y/x$]

5.49 Determinare le curve $y = y(x)$ aventi la sottonormale uguale all'ascissa del punto di tangenza.

[Dato che la sottonormale vale yy', le curve $y(x)$ devono soddisfare l'equazione differenziale del primo ordine $yy' = x$. Si tratta di un'equazione omogenea, ma anche a variabili separabili. Il suo integrale generale è dato dalla famiglia di iperboli di equazione $y(x) = \pm\sqrt{x^2 + c}$]

5.50 Determinare le curve piane tali che l'ordinata del punto di intersezione dell'asse delle ordinate con la retta tangente al grafico in (x, y) sia uguale alla distanza di (x, y) dall'origine.

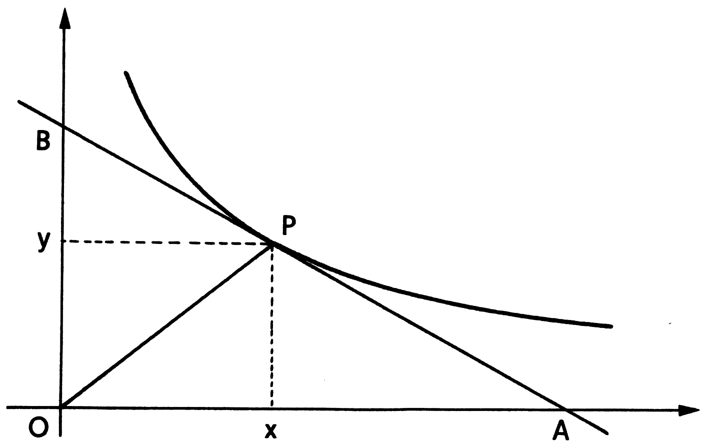

figura 5.8

[Con le notazioni della figura 5.8 la condizione da imporre è $OB = \overline{OP}$. Dato che $OB = y - xy'$ (si veda l'esercizio 5.22), si ottiene l'equazione differenziale $y - xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$, cioè anche $y' = (y/x) - \sqrt{1 + (y/x)^2}$. Posto $z = y/x$, con lo stesso metodo dell'esercizio 5.42 si trova la soluzione $z + \sqrt{z^2 + 1}$ che, per $x \gtrless 0$, equivale a $y \pm \sqrt{y^2 + x^2} = c$]

5.51 Determinare le curve piane tali che, indicato con P un punto generico della curva (come in figura 5.8), con A l'intersezione della retta tangente con l'asse delle ascisse e con O l'origine degli assi, il triangolo AOP risulti isoscele di base OP.

[La condizone da imporre è $\overline{OA} = \overline{AP}$. Ricordando che $A \equiv (x - y/y', 0)$ (si veda l'esercizio 5.22), risulta $|x - y/y'| = \sqrt{(-y/y')^2 + y^2}$, da cui, semplificando, si giunge all'equazione differenziale omogenea $y' = (2xy)/(x^2 - y^2)$ che ha per soluzioni le circonferenze $x^2 + y^2 + cy = 0$]

5.52 Determinare le curve piane tali che il prodotto del quadrato della distanza dall'origine dagli assi di un punto generico $P \equiv (x, y)$ della curva per l'ordinata del punto di intersezione dell'asse y con la retta normale alla curva in P sia uguale a:

(a) y^3 (b) $-2y^3$

[Per l'equazione cartesiana della retta normale si veda l' esercizio 5.21. (a) L'equazione differenziale è $xyy' = -(x^2 + y^2)$ che ha per soluzioni le funzioni $y(x) = \pm\sqrt{(c - x^4)/(2x^2)}$;

(b) l'equazione differenziale è $y' = -(x^3 + xy^2)/(x^2y + 3y^3)$ che ha per soluzioni le curve di equazione implicita $x^4 + 2x^2y^2 + 3y^4 = c$]

5D. Equazioni della forma $y' = g(ax + by)$

Un'equazione differenziale del primo ordine del tipo

$$y' = g(ax + by)$$

con g funzione continua e $a, b \in \mathbb{R}$ (con a, b non nulli, altrimenti l'equazione è già a variabili separabili) si riconduce ad un'equazione a variabili separabili con la sostituzione

$$z(x) = ax + by(x)\,;$$

infatti, essendo $z' = a + by'$, si ottiene l'equazione equivalente nell'incognita z: $z' = a + bg(z)$.

5.53 Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2\,.$$

[L'equazione si può porre nella forma $y' = 1 + (x - y)^2$. Con la sostituzione $z = x - y$ (il lettore svolga l'esercizio anche con l'altra sostituzione $z = y - x$), essendo $z' = 1 - y'$, si ottiene l'equazione equivalente

$$z' = 1 - y' = 1 - [1 + (x - y)^2] = -z^2\,;$$

da cui, separando le variabili (se $z \neq 0$)

$$\frac{1}{z} = \int -\frac{dz}{z^2} = \int dx = x + c\,.$$

Perciò $z(x) = 1/(x + c)$ (oltre a $z \equiv 0$), da cui, essendo $y(x) = x - z(x)$, risulta $y(x) = x - 1/(x + c)$ oppure $y(x) = x$]

5.54 Risolvere l'equazione $y' = (x + y)^2$.

[Posto $z = x + y$ si ha $z' = 1 + y' = 1 + (x + y)^2 = 1 + z^2$; da cui, separando le variabili, $\operatorname{arctg} z = x + c$. Perciò $z(x) = \operatorname{tg}(x + c)$ e quindi $y(x) = z(x) - x = \operatorname{tg}(x + c) - x$]

5.55 Risolvere l'equazione $y' = e^{x+y}$.

[Posto $z = x + y$, si trova l'equazione equivalente $z' = 1 + e^z$, cioè

$$\int \frac{dz}{1 + e^z} = \int dx = x + c\,.$$

Si risolve l'integrale a primo membro con la sostituzione $e^z = t$:

$$\int \frac{dz}{1+e^z} \overset{[e^z=t]}{=} \int \frac{dt}{t(1+t)} = \log\left|\frac{t}{t+1}\right| + c' \overset{[t=e^z]}{=} \log \frac{e^z}{e^z+1} + c' .$$

Perciò l'integrale generale si scrive nella forma implicita $e^z/(e^z+1) = e^{x+c}$ e, con semplici passaggi algebrici, nella forma esplicita

$$z(x) = \log \frac{e^{x+c}}{1-e^{x+c}} = \log \frac{e^x}{e^{-c}-e^x} = x - \log\left(e^{-c}-e^x\right);$$

da cui $y(x) = z(x) - x = -\log\left(e^{-c}-e^x\right)$. Si osservi che l'equazione iniziale è anche del tipo a variabili separabili e si può risolvere per mezzo degli integrali indefiniti

$$-e^{-y} = \int e^{-y}\, dy = \int e^x\, dx = e^x + c'' .$$

Risulta $y(x) = -\log\left(-c''-e^x\right)$ come nel caso precedente, pur di porre $-c'' = e^{-c}$]

5.56 Risolvere le equazioni differenziali

(a) $e^x y' = e^x + e^y$ (b) $e^y y' = e^x + e^y$

[(a) Dividendo entrambi i membri per e^x, si ottiene l'equazione differenziale equivalente $y' = 1 + e^{y-x}$, che si risolve con la sostituzione $z = y - x$. Rispetto a z si ha $z' = e^z$, da cui, separando le variabili, $z(x) = -\log\left[-(x+c)\right]$, cioè $y(x) = x - \log\left[-(x+c)\right]$. (b) Si può procedere come nella parte (a) ottenendo la soluzione $y(x) = x + z(x) = x - \log\left[-(x+c)\right]$. Si può anche procedere nel modo seguente: dato che $e^y y'$ è la derivata della funzione $w(x) = e^{y(x)}$, con tale sostituzione otteniamo l'equazione differenziale lineare $w' = e^x + w$, il cui integrale generale è espresso da

$$w(x) = e^x \int e^{-x} \cdot e^x\, dx = e^x \int dx = e^x (x+c) .$$

Perciò $y(x) = \log w(x) = \log\left[e^x(x+c)\right] = x + \log(x+c)$]

5.57 Risolvere le equazioni differenziali

(a) $y' = \dfrac{4y-x+1}{4y-x+4}$ (b) $y' = \dfrac{x+y-1}{2-x-y}$

[(a) $4y + \log(4y-x)^4 = c + 2x$; (b) $y(x) = 2 - x \pm \sqrt{c-2x}$]

5.58 Determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} y' = (x+y-5)^2 \\ y(0) = 6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = \dfrac{2x+y+4}{(2x+y+3)^2} - 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$

[(a) $y(x) = 5 - x + \operatorname{tg}(x + \pi/4)$; (b) $(2x+y+2)^2/2 + \log|2x+y+4| = x + \log 2$]

5.59 Risolvere l'equazione differenziale lineare

$$y' = ax + by$$

con a, b costanti reali non nulle.

[Si può determinare l'integrale generale con la formula risolutiva

$$y(x) = e^{bx}\int axe^{-bx}\,dx\,,$$

oppure mediante la sostituzione $z = ax + by$, ottenendo l'equazione (lineare) a variabili separabili $z' = a + by' = a + bz$. Si ottengono le soluzioni $z(x) = (\pm\, e^{b(x+c)} - a)/b$; perciò, posto $\pm\, e^{bc}/b^2 = c'$, si ha

$$y(x) = \frac{z(x) - ax}{b} = c'e^{bx} - \frac{a}{b^2} - \frac{a}{b}x]$$

5.60 Determinare, per ogni valore del parametro reale λ, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \lambda\cos(\lambda x + y)\,.$$

[Posto $z = \lambda x + y$, si ottiene l'equazione equivalente $z' = \lambda(1 + \cos z)$. Il secondo membro si annulla per $\lambda = 0$ e per $z = \pi + 2k\pi$; se $\lambda = 0$ $y = z =$ costante è soluzione. Invece, in corrispondenza di $z = \pi + 2k\pi$ si trovano le soluzioni $y(x) = z - \lambda x = \pi + 2k\pi - \lambda x$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Per $\lambda \neq 0$ e $\cos z \neq -1$, separando le variabili, otteniamo

$$\frac{1}{\lambda}\int\frac{dz}{1+\cos z} = \int dx = x + c\,.$$

In base all'identità $1 + \cos z = 2\cos^2 2(z/2)$, si ha

$$\frac{dz}{1+\cos z} = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{\cos^2(z/2)} = \int\frac{d(z/2)}{\cos^2(z/2)} = \operatorname{tg}\frac{z}{2} + c'\,.$$

Perciò, se $\lambda \neq 0$ e $z \neq \pi + 2k\pi$, si trovano le soluzioni nella forma implicita $\operatorname{tg}(z/2) = \lambda(x+c)$, cioè $\operatorname{tg}[(\lambda x + y)/2] = \lambda(x + c)$. Infine, per $|z| < \pi$, tali soluzioni si possono rappresentare nella forma $y(x) = -\lambda x + 2\operatorname{arctg}[\lambda(x + c)]$.

Si noti che, per $\lambda = 0$, si è ritrovata la soluzione identicamente nulla, mentre, come verificato in precedenza, anche ogni altra soluzione costante è soluzione. Infine osserviamo che, per $\lambda \neq 0$, ci si può ricondurre ad un'equazione differenziale indipendente dal parametro λ con il cambiamento di variabile $x' = \lambda x$. In tal caso infatti, posto $w(x') = y(x) = y(x'/\lambda)$, risulta $w' = dw/dx' = y'/\lambda$ e l'equazione diventa $w' = \cos(x + w)$]

5E. Equazioni della forma $y' = g\left(\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+'c'}\right)$

Consideriamo un'equazione differenziale del tipo

$$y' = g\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right),$$

con g funzione continua e $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. Se le costanti a, b, a', b' sono tutte nulle, il secondo membro dell'equazione differenziale si riduce ad una costante e quindi $y(x)$ è una funzione lineare. Se a, b, a', b' non sono contemporaneamente nulle e se a', b' sono proporzionali rispettivamente ad a, b ($a' = ka$, $b' = kb$), allora il secondo membro dell'equazione è funzione solo di $ax+by$ e si ritrova il caso già considerato nel paragrafo precedente, che si risolve con la sostituzione $z = ax + by$.

Rimane il caso in cui a', b' non sono proporzionali ad a, b, o, più precisamente, il caso in cui $ab' - a'b \neq 0$. Geometricamente, ciò corrisponde a due rette di equazione $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ che si incontrano in uno ed in un solo punto.

Indichiamo con (x_0, y_0) le coordinate del punto di intersezione delle due rette; per risolvere l'equazione differenziale è utile la trasformazione di coordinate da (x, y) in (ξ, η) definita da

$$\xi = x - x_0\,, \qquad\qquad \eta = y - y_0\,.$$

Essendo $ax_0 + by_0 + c = 0$, risulta

$$ax + by + c = a(\xi + x_0) + b(\eta + y_0) + c = a\xi + b\eta$$

ed analogamente $a'x + b'y + c' = a'\xi + b'\eta$.

Infine, dato che $\eta' = d\eta/d\xi = dy/dx$, si giunge all'equazione differenziale

$$\eta' = g\left(\frac{a\xi + b\eta}{a'\xi + b'\eta}\right) = g\left(\frac{a + b(\eta/\xi)}{a' + b'(\eta/\xi)}\right)\,;$$

si tratta di un'equazione differenziale omogenea (di grado 0), del tipo già considerato nel paragrafo 5C; che si risolve con la sostituzione $z = \eta/\xi$.

5.61 Risolvere l'equazione $y' = \dfrac{y - x - 2}{y + x}$.

[Occorre determinare preliminarmente il punto di incontro delle due rette di equazione $y - x - 2 = 0$ e $y + x = 0$. A tal fine risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y + x = 0 \\ y - x - 2 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y = -x \\ -2x - 2 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1\,. \end{cases}$$

Le rette si incontrano nel punto $(x_0, y_0) = (-1, 1)$. È quindi utile la trasformazione di coordinate $\xi = x + 1$, $\eta = y - 1$ (cioè $x = \xi - 1$, $y = \eta + 1$); si ottiene l'equazione differenziale

$$\eta' = \frac{(\eta + 1) - (\xi - 1) - 2}{(\eta + 1) + (\xi - 1)} = \frac{\eta - \xi}{\eta + \xi} = \frac{(\eta/\xi) - 1}{(\eta/\xi) + 1}\,.$$

Applichiamo il metodo proposto nel paragrafo 5C: con la sostituzione $z = \eta/\xi$ (da cui $\eta' = (z\xi)' = z'\xi + z$) otteniamo

$$z'\xi + z = \frac{z-1}{z+1} \quad \Rightarrow \quad z'\xi = -\frac{1+z^2}{z+1}$$

e, separando le variabili,

$$\int \frac{z+1}{1+z^2}\,dz = -\int \frac{1}{\xi}\,d\xi = -\log(c\xi)\,.$$

Per l'integrale a primo membro si ha

$$\int \frac{z+1}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{2z}{1+z^2}\,dz + \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\log(1+z^2) + \operatorname{arctg} z + c'\,.$$

Ricordando che $z = \eta/\xi = (y-1)/(x+1)$ si ottiene infine l'integrale generale nella forma implicita

$$\frac{1}{2}\log\left(1 + \left(\frac{y-1}{x+1}\right)^2\right) + \operatorname{arctg}\frac{y-1}{x+1} = -\log(c(x+1))\,,$$

che, equivalentemente, si può anche scrivere nella forma

$$\log\left(c\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}\right) + \operatorname{arctg}\frac{y-1}{x+1} = 0]$$

5.62 Risolvere l'equazione $y' = \dfrac{y+5}{x+y-16}$.

[Le rette di equazione $y+5=0$, $x+y-16=0$ si incontrano nel punto $(x_0, y_0) = (21, -5)$. Con la trasformazione di coordinate $\xi = x-21$, $\eta = y+5$ si ottiene l'equazione differenziale

$$\eta' = \frac{\eta}{\xi+\eta} = \frac{\eta/\xi}{1+\eta/\xi}\,,$$

da cui, posto $z = \eta/\xi$,

$$\xi z' = \frac{z}{1+z} - z = \frac{-z^2}{1+z}\,.$$

Si noti che $z \equiv 0$ è una soluzione (ciò corrisponde a $\eta = y+5 = 0$, cioè $y \equiv -5$). Separando le variabili abbiamo $1/z = \log(c\xi z) = \log(c\eta)$. Quindi $\xi = \eta\log(c\eta)$, cioè $x - 21 = (y+5)\log[c(y+5)]$. A tali soluzioni occorre aggiungere la soluzione costante $y(x) = -5$]

5.63 Risolvere l'equazione $y' = 2 + \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x}$.

[Si può scrivere l'equazione nella forma $y' = (2x+y-1)/x$, seguendo la trasformazione di coordinate $\xi = x$, $\eta = y-1$, da cui $\eta' = 2 + (\eta/\xi)$. Posto $z = \eta/\xi$, si ottiene $\xi z' = 2$, le cui soluzioni sono $z(\xi) = 2\log(c\xi)$. Perciò l'integrale generale è $y(x) = 1 + x\log(cx)^2$. Si noti che l'equazione data è lineare]

5.64 Risolvere i problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} y' + 2\left(\dfrac{y-4}{y-x}\right)^2 = 0 \\ y(3) = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' + 2\left(\dfrac{y-4}{y-x}\right)^2 = 0 \\ y(3) = 4 \end{cases}$

[(a) La soluzione è definita implicitamente dall'equazione

$$2\text{arctg}\,\frac{y-4}{4-x} + \log cy = 0 \qquad \text{con} \qquad c = \frac{1}{5}e^{-\pi/2};$$

(b) $y(x)$ costante uguale a 4]

5F. Equazioni non normali della forma $x = g(y')$

Nei paragrafi precedenti abbiamo preso in consierazione equazioni differenziali del primo ordine in *forma normale*, cioè del tipo $y' = f(x, y)$. Da questo paragrafo consideriamo anche equazioni non in forma normale. Cominciamo con equazioni della forma

$$x = g(y'),$$

essendo g una funzione derivabile con derivata continua. Come al solito, per le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, l'insieme delle soluzioni dipende da una costante arbitraria c che, in questo caso, è sempre additiva rispetto alla y; infatti si vede immediatamente dalla struttura dell'equazione che, se $y(x)$ è una soluzione, anche $y(x) + c$ è tale.

Osserviamo anche che, se g è invertibile, allora l'equazione differenziale nella forma equivalente $y' = g^{-1}(x)$ è a variabili separabili ed è risolubile mediante una sola integrazione (y è l'integrale indefinito di $g^{-1}(x)$).

Nel caso generale si cerca una soluzione in forma parametrica $x = x(t)$, $y = y(t)$. Il metodo di risoluzione consiste nell'assumere come parametro $t = y'$. Dall'equazione differenziale si ricava subito $x = g(t)$; inoltre risulta anche

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y' \cdot g'(t) = tg'(t)$$

ed integrando per parti

$$y(t) = \int \frac{dy}{dt} = \int tg'(t)\,dt = tg(t) - \int g(t)\,dt.$$

Indicando con $G(t)$ una primitiva di $g(t)$, le soluzioni sono quindi espresse in forma parametrica $(x(t), y(t))$ da

$$x(t) = g(t), \qquad y(t) = tg(t) - G(t) + c.$$

5.65 Risolvere l'equazione $x = y'(1 + 2\log y')$.

[L'equazione differenziale è della forma $x = g(y')$, con $g(t) = t(1 + 2\log t)$. Una primitiva $G(t)$ di $g(t)$ si determina con un'integrazione per parti:

$$G(t) = \int g(t)\,dt = \int (t + 2t\log\,t)\,dt = \frac{t^2}{2} + 2\left(\frac{t^2}{2}\log\,t - \int \frac{t}{2}\,dt\right) = t^2\log\,t + \text{costante}.$$

Quindi, in forma parametrica, le soluzioni sono date da

$$x(t) = g(t) = t(1 + 2\log\,t);$$
$$y(t) = tg(t) - G(t) + c = t^2(1 + \log\,t) + c]$$

5.66 Risolvere l'equazione differenziale $(y')^2 = x - 2$.

[Si tratta di un'equazione del tipo $x = g(y')$, con $g(t) = 2 + t^2$. Una primitiva di $g(t)$ è $G(t) = 2t + t^3/3$. Perciò le soluzioni sono espresse in forma parametrica da

$$x(t) = g(t) = 2 + t^2\,; \quad y(t) = tg(t) - G(t) = \frac{2}{3}t^3 + c\,.$$

In questo caso è semplice rappresentare in forma cartesiana le soluzioni; a tale scopo si può ricavare t dalla prima equazione e sostituire il valore trovato nella seconda: $t = \pm(x-2)^{1/2}$, da cui $y(x) = \pm(2/3)(x-2)^{3/2} + c$. Notiamo che l'equazione data è equivalente alle due equazioni differenziali in forma normale: $y' = \sqrt{x-2}$, $y' = -\sqrt{x-2}$ le quali, risolte per semplice integrazione, ridanno le stesse soluzioni]

5.67 Traendo spunto dall'esercizio precedente, si consideri un'equazione differenziale del tipo $x = g(y')$, con g invertibile su $\mathbb{R}$, e siano G, F primitive rispettivamente di g e g^{-1}. Verificare che tutte le soluzioni in forma parametrica

$$x(t) = g(t)\,, \qquad y(t) = tg(t) - G(t) + c$$

sono anche esprimibili nella forma cartesiana

$$y(x) = F(x) + c\,.$$

[Dato che g è invertibile, la relazione $x = g(t)$ equivale a $t = g^{-1}(x)$. Perciò nella rappresentazione parametrica delle soluzioni si può assumere x come parametro ottenendo $y(x) = g^{-1}(x)x - G(g^{-1}(x)) + c$. Rimane da provare che $y(x)$ è una primitiva di g^{-1}; infatti (essendo $g(g^{-1}(x)) = x$):

$$\frac{d}{dx}[g^{-1}(x)x - G(g^{-1}(x)) + c] = (g^{-1})'x + g^{-1} - G'(g^{-1})(g^{-1})' =$$
$$= (g^{-1})'x + g^{-1} - g(g^{-1})(g^{-1})' = (g^{-1})'x + g^{-1} - x(g^{-1})' = g^{-1}]$$

5.68 Risolvere le seguenti equazioni differenziali

(a)	$x\sqrt{y'} = \text{sen}\sqrt{y'}$	(b)	$x(1 + \text{sen}^2\,y') = \cos y'$
(c)	$8x = (y')^3$	(d)	$x(1 - y') = y'$
(e)	$x(y')^2 = 1 - (y')^3$	(b)	$x = e^{y'}(\text{sen}\,y' + \cos y')$

[(a) $x(t) = (\operatorname{sen}\sqrt{t})/\sqrt{t}$, $y(t) = \sqrt{t}\operatorname{sen}\sqrt{t} + 2\cos\sqrt{t} + c$, che, pur di porre $s = \sqrt{t} > 0$, si può scrivere più semplicemente $x(s) = (\operatorname{sen} s)/s$, $y(s) = s\operatorname{sen} s + 2\cos s + c$.

(b) $x(t) = \dfrac{\cos t}{1+\operatorname{sen}^2 t}$, $\quad y(t) = \dfrac{t\cos t}{1+\operatorname{sen}^2 t} - \operatorname{arctg}\operatorname{sen} t + c$.

(c) $y(x) = (3/2)x^{4/3} + c$. (d) $y(x) = x - \log|x+1| + c$.
(e) $x(t) = -t + 1/t^2$, $y(t) = -t^2/2 + 2/t + c$.
(f) $x(t) = e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)$, $y(t) = te^t(\operatorname{sen} t + \cos t) - e^t\operatorname{sen} t + c$]

5G. Equazioni non normali della forma $y = g(y')$

Consideriamo un'equazione differenziale del primo ordine non normale del tipo

$$y = g(y')$$

con g funzione derivabile con derivata continua. Come nel paragrafo precedente, cerchiamo soluzioni in forma parametrica $(x(t), y(t))$ scegliendo come parametro $t = y'$. Si ricava subito $y = g(t)$; inoltre, se $y' \neq 0$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y'}g'(t) = \frac{g'(t)}{t}\,.$$

Perciò $x(t)$ si ricava integrando $g'(t)/t$. Indicata con $G(t)$ una primitiva di $g'(t)/t$, si ha quindi

$$x(t) = G(t) + c\,, \qquad y(t) = g(t)\,.$$

Come verifica notiamo, direttamente dall'equazione differenziale $y(x) = g(y'(x))$, cambiando x con $x+c$, che se $(x(t), y(t))$ è una soluzione allora anche $(x(t)+c, y(t))$ è tale.

Notiamo anche che, avendo posto $y' \neq 0$, potremmo aver perso soluzioni per cui $y' = 0$ in un intervallo. In tal caso $y(x) = \text{costante} = c$ è soluzione dell'equazione differenziale $y = g(y')$ se e solo se $c = g(0)$. Perciò alle soluzioni espresse precedentemente in forma parametrica va (eventualmente, se $g(t)$ è definita per $t = 0$) aggiunta la soluzione particolare $y(x) = g(0)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

5.69 Risolvere l'equazione $y = y'\operatorname{sen} y' + \cos y'$.

[Per $y' \equiv 0$ si ottiene la soluzione costante $y = \cos 0 = 1$. Posto $g(t) = t\operatorname{sen} t + \cos t$, risulta $g'(t) = t\cos t$. Una primitiva di $g'(t)/t$ è $G(t) = \operatorname{sen} t$. Quindi le soluzioni, in forma parametrica, sono espresse da

$$x(t) = c + \operatorname{sen} t\,, \qquad y(t) = t\operatorname{sen} t + \cos t\,,$$

oltre, naturalmente, alla funzione costante $y = 1$]

5.70 Risolvere l'equazione $y = \log\sqrt{1+(y')^2}$.

[L'equazione si può scrivere equivalentemente $y' = \pm\sqrt{e^{2y}-1}$ e si può risolvere separando le variabili. Con il metodo esposto in questo paragrafo si nota preliminarmente che $y \equiv 0$ è una soluzione; inoltre, posto $g(t) = \log\sqrt{1+t^2}$ risulta $g'(t) = t/(1+t^2)$ e una primitiva di $g(t)/t$ è $G(t) = \operatorname{arctg} t$. Si ottengono le soluzioni in forma parametrica: $x(t) = c + \operatorname{arctg} t$, $y(t) = \log\sqrt{1+t^2}$. Ricavando il parametro t dalla prima equazione si determina la forma cartesiana delle soluzioni:

$$y(x) = \log\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(x-c)}\,,$$

oltre alla funzione costante $y = 0$]

5.71 Risolvere le equazioni differenziali

(a) $y = (y')^2(1-2\log y')$

(b) $y = [(y'-1)^2+1]e^{y'}$

(c) $y + \sqrt{1-(y')^2} = 0$

[(a) $x(t) = 4(1-t\log t)+c$, $y(t) = t^2(1-2\log t)$.
(b) $x(t) = (t-1)e^t + c$, $y(t) = (t^2-2t+2)e^t$, oltre alla funzione costante $y = 2$.
(c) $y(x) = -|\cos(x+c)|$ per $x + c \neq (\pi/2)+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oltre a $y(x) = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$]

5.72 Determinare, con il metodo proposto in questo paragrafo, le soluzioni dell'equazione lineare a coefficienti costanti $y' = ay + b$, essendo $a \neq 0$.

[Scrivendo l'equazione differenziale nella forma $y = g(y')$, con $g(t) = (t-b)/a$, si trovano (oltre alla soluzione costante $y = -b/a$) le soluzioni in forma parametrica

$$x(t) = c + \frac{1}{a}\log|t|\,, \qquad y(t) = \frac{t-b}{a}\,.$$

Eliminando il parametro (e cambiando opportunamente la costante) si giunge a $y(x) = (c'e^{ax}-b)/a$]

5H. Equazioni di Clairaut

Si dice *di Clairaut* un'equazione differenziale del primo ordine non normale del tipo

$$y = xy' + g(y')\,,$$

con g funzione derivabile. Come nei due paragrafi che precedono, si cercano soluzioni in forma parametrica $(x(t), y(t))$, scegliendo come parametro $t = y'$.

Però, a differenza delle equazioni non normali considerate nei paragrafi precedenti, in questo caso la relazione $y = xt + g(t)$ non definisce y in funzione della sola t; per eliminare la dipendenza esplicita da x, è opportuno preliminarmente derivare entrambi i membri dell'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}[xy'(x) + g(y'(x))]$$

ottenendo (nell'ipotesi che $y(x)$ sia derivabile due volte) $y' = y' + xy'' + g'(y')y''$, da cui

$$y''[x + g'(y')] = 0\,.$$

Si hanno due possibilità: (a) $y'' = 0$; (b) $x + g'(y') = 0$. Nel primo caso, se $y'' = 0$ in un intervallo, y' è costante ($= c$) e, dall'equazione differenziale iniziale, si ottengono le soluzioni $y(x) = xc + g(c)$. Tali soluzioni sono polinomi di primo grado (geometricamente corrispondono a rette) per ogni valore della costante c.

Nel secondo caso, se $x + g'(y') = 0$, posto $t = y'$, si hanno le equazioni parametriche $x(t) = -g'(t)$, $y(t) = -tg'(t) + g(t)$. La curva così ottenuta si dice *integrale singolare* dell'equazione di Clairaut.

Riassumendo, le soluzioni dell'equazione di Clairaut sono date dalla *famiglia di rette* di equazione

$$y = cx + g(c)$$

e dall'*integrale singolare* di equazioni parametriche

$$x(t) = -g'(t)\,, \qquad\qquad y(t) = -tg'(t) + g(t)\,.$$

5.73 Risolvere l'equazione $y = xy' - \dfrac{1}{4}(y')^2$.

[Si tratta di un'equazione di Clairaut con $g(t) = -t^2/4$. L'insieme delle soluzioni è costituito dalla famiglia di rette $y = cx - (c^2/4)$, al variare di c in $\mathbb{R}$, e dall'integrale singolare di equazioni parametriche

$$x(t) = -g'(t) = \frac{1}{2}t\,, \qquad\qquad y(t) = -tg'(t) + g(t) = \frac{1}{4}t^2\,;$$

essendo $t = 2x$, risulta anche $y = \dfrac{1}{4}(2x)^2 = x^2$, che è l'equazione cartesiana dell'integrale singolare]

5.74 Si rappresentino in uno stesso sistema di riferimento i grafici delle soluzioni dell'equazione di Clairaut dell'esercizio precedente:

$$y = cx - \frac{1}{4}c^2 \qquad\qquad (c \in \mathbb{R})\,, \qquad\qquad y = x^2\,.$$

[Si disegnino le rette $y = cx - (c^2/4)$ per alcuni valori di $c \in \mathbb{R}$; ad esempio per $c = \pm 1$, ± 2, come in figura 5.9. La famiglia di rette completa è rappresentata in figura 5.10]

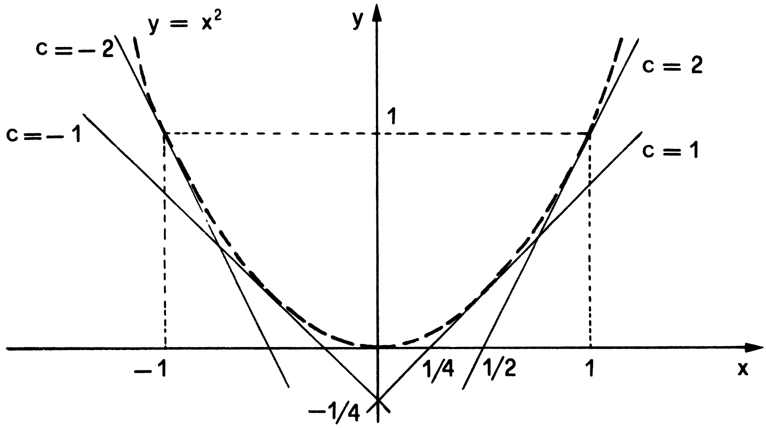

figura 5.9

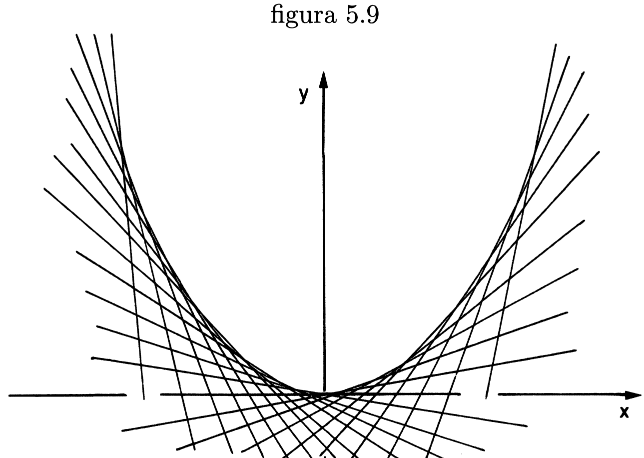

figura 5.10

5.75 Si considerino la parabola di equazione $y = x^2$ e la famiglia di rette $y = cx - c^2/4$ (figura 5.10). Esse hanno la seguente proprietà: *Ogni retta è tangente alla parabola in almeno un punto e viceversa, ogni punto della parabola è di tangenza per una retta della famiglia.* Sotto queste condizioni si dice che la parabola è una *curva inviluppo* della famiglia di rette.

Verificare analiticamente la proprietà enunciata.

[Cominciamo con il determinare le intersezioni della parabola $y = x^2$ con la retta $y = cx - c^2/4$. Deve risultare $x^2 = cx - c^2/4$, cioè $x^2 - cx + c^2/4 = 0$, cioè ancora $(x - c/2)^2 = 0$.

Ciò significa che, per ogni $c \in \mathbb{R}$, $x = c/2$ è l'ascissa dell'unico punto di intersezione. La retta tangente alla parabola $y = x^2$ per $x_0 = c/2$ ha equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ con $f(x) = x^2$; quindi:

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0 x x_0^2 = cx - c^2/4$$

come si voleva dimostrare]

5.76 Si considerino le soluzioni dell'equazione di Clairaut $y = xy' + g(y')$, supponendo che $g'' \neq 0$. Generalizzando l'esercizio precedente, verificare che la curva di equazioni parametriche

$$x(t) = -g'(t) \qquad\qquad y(t) = -tg'(t) + g(t)$$

è inviluppo della famiglia di rette $y = cx + g(c)$.

[Le interseziani della curva con le rette si determinano con la condizione $y(t) = cx(t) + g(c)$, cioè

$$-tg'(t) + g(t) = -cg'(t) + g(c)\,.$$

Si vede che $t = c$ è una soluzione; in corrispondenza il punto di intersezione ha coordinate $(x_0, y_0) = (-g'(c), -cg'(c) + g(c))$. La retta, tangente alla curva $(x(t), y(t))$ ha la direzione del vettore $(x'(t), y'(t)) = (-g''(t), -tg''(t))$ che, se $g''(t) \neq 0$, è la stessa direzione del vettore $(1, c)$ (per $t = c$). Perciò l'equazione della retta tangente per $t = c$, è $y = y_0 + c(x - x_0) = -cg' + g + c(x + g') = cx + g$]

5.77 Si consideri l'equazione differenziale $y = (x-1)y'$, che è allo stesso tempo lineare e di Clairaut con $g(t) = -t$ (con riferimento all'esercizio precedente si noti che $g'' = 0$ identicamente). Verificare che l'equazione ha per soluzioni una famiglia di rette, ma non ammette integrali singolari.

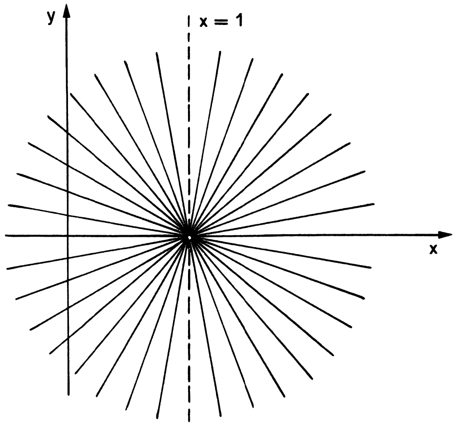

figura 5.11

[L'integrale generale $y = c(x-1)$ è rappresentato in figura 5.11 e si determina con il metodo delle equazioni di Clairaut, ma anche con il metodo delle equazioni lineari. Formalmente l'integrale singolare avrebbe espressione analitica $x(t) = 1$, $y(t) = 0$; però $(1,0)$ è solo un punto di $\mathbb{R}^2$ e non è una curva regolare. Si noti comunque che $(1,0)$ è proprio il centro del fascio di rette $y = c(x-1)$]

5.78 Risolvere le seguenti equazioni di Clairaut

(a) $y = xy' + e^{y'}$ (b) $y = xy' + \sqrt{y'}$

(c) $y = [x(y')^3 - 1]/(y')^2$ (d) $y = -xy' - \operatorname{sen} y'$

[(a) $y(x) = cx + e^c$; $y(x) = x - x\log x$. (b) $y(x) = cx + \sqrt{c}$; $y(x) = -1/(4x)$. (c) $y(x) = cx - (1/c^2)$; $y(x) = -3(x^2/4)^{1/3}$. (d) $y(x) = cx - \operatorname{sen} c$; $x(t) = \cos t$, $y(t) = t\cos t - \operatorname{sen} t$]

5.79 Determinare una soluzione del problema di Cauchy

$$y = xy' - \operatorname{sen} y', \qquad y(1) = \pi .$$

[Dato che l'equazione differenziale non è in forma normale, non è possibile applicare il teorema di Cauchy di esistenza ed unicità. Le soluzioni dell'equazione sono indicate nella risposta dell'esercizio 5.78 (d). L'unica retta della famiglia $y(x) = cx - \operatorname{sen} c$ che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = \pi$ (cioè $\pi = c - \operatorname{sen} c$) si ottiene (soltanto) per $c = \pi$ ed è quindi la retta $y = \pi x$ (infatti, dal segno della derivata prima si vede che la funzione $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$; dato che $f(\pi) = \pi$, risulta $f(x) \neq \pi$ per ogni $x \neq \pi$). Per stabilire se la curva singolare $(x(t), y(t))$ passa per il punto $(1, \pi)$, studiamo il sistema

$$\begin{cases} \cos t = 1 \\ t\cos t - \operatorname{sen} t = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = 1 \\ t - \operatorname{sen} t = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2k\pi \\ t = \pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Il sistema non ha soluzioni e l'unica soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \pi x$]

5.80 Studiare i problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} y = xy' - (y')^2/4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y = xy' - (y')^2/4 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

[L'equazione differenziale è risolta nell'esercizio 5.73. Come si vede dalle figure 5.9 e 5.10, nessuna soluzione passa per il punto di coordinate $(0,1)$. Quindi il problema di Cauchy (a) non ha soluzioni. Invece per il punto $(1,1)$ passano le due curve $y(x) = x^2$ e $y(x) = 2x - 1$, che sono entrambe soluzioni del problema di Cauchy (b). Il lettore ritrovi per via analitica i risultati indicati]

5.81 Per ogni valore del parametro reale $\alpha \neq 0, 1$ determinare le soluzioni dell'equazione differenziale di Clairaut

$$y = xy' - (y')^\alpha .$$

[L'integrale generale è dato dalla famiglia di rette $y = cx - c^{\alpha}$. L'integrale singolare in forma parametrica ha equazioni $x(t) = \alpha t^{\alpha-1}$; $y(t) = (\alpha - 1)t^{\alpha}$ ed in forma cartesiana $y(x) = (\alpha - 1)(x/\alpha)^{\alpha/(\alpha-1)}$]

5.82 Determinare la curva piana tale che il prodotto delle lunghezze (con il segno) dei segmenti rientati intercettati sugli assi coordinati dalla retta tangente in un punto generico sia costante uguale a 4.

[Con riferimento alla figura 5.5, la condizione da imporre è $OA \cdot OB = 4$. Ciò equivale a

$$(x - \frac{y}{y'})(y - xy') = 4 .$$

L'equazione si può scrivere nella forma equivalente (se $y' \neq 0$):

$$(y - xy')^2 = -4y' , \qquad \text{cioè} \qquad y = xy' \pm 2\sqrt{-y'} .$$

Naturalmente deve essere $y' \leq 0$ (ciò è evidente anche dal fatto che $OA \cdot OB > 0$). Abbiamo due equazioni di Clairaut che hanno come soluzioni le famiglie di rette $y = cx \pm 2\sqrt{-c}$ e gli integrali singolari di equazioni parametriche $x(t) = \pm 1\sqrt{-t}$, $y(t) = \pm\sqrt{-t}$; eliminando il parametro si trova l'iperbole equilatera di equazione $y = 1/x$. Il lettore verifichi che le soluzioni trovate soddisfano effettivamente la condizione $OA \cdot OB = 4$; ad esempio verifichi che la retta tangente all'iperbole $y = 1/x$ in un punto generico $(x_0, 1/x_0)$, con$x_0 \neq 0$, ha equazione $y = cx \pm 2\sqrt{-c}$ con $c = y'(x_0) = -1/x_0^2$ e che le intersezioni con gli assi coordinati valgono $A \equiv (\pm 2/\sqrt{-c}, 0)$ e $B \equiv (0, \pm 2\sqrt{-c})$, per cui $OA \cdot OB = 4$]

5.83 Determinare le curve del piano tali che il segmento della retta tangente in un punto generico delimitato dalle intersezioni con gli assi coordinati, abbia lunghezza uguale ad 8.

[L'equazione differenziale è

$$y^2(1 + (y')^2) - 2xy'(1 + (y')^2)y + (x^2 + x^2(y')^2 - 64)(y')^2 = 0$$

che, esplicitata rispetto ad y, dà le equazioni di Clairaut

$$y = xy' \pm 8\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

che ammettono per soluzioni la famiglia di rette $y = cx \pm (8c)/\sqrt{1 + c^2}$ e l'"asteroide" di equazione $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$]

5I. Il Teorema di Cauchy

Richiamiamo il teorema di Cauchy, di esistenza ed unicità locale per un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale. A tale scopo consideriamo una funzione di due variabili $f(x, y)$ definita nell'intorno rettangolare $I \times J$ del punto (x_0, y_0) definito da $(a,\, b > 0)$:

$$I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_0 - a \le x \le x_0 + a\,,\, y_0 - b \le y \le y_0 + b\}\,.$$

Supponiamo che:

(1) $f(x, y)$ è continua nel rettangolo $I \times J$;

(2) $f(x, y)$ è *Lipschitziana* rispetto a y, nel senso che esiste una costante L tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

per ogni (x, y_1), (x, y_2) e $I \times J$ (alcune proprietà delle funzioni Lipschitziane sono discusse nei paragrafi 9C e 12C del 1° volume, parte prima).

Usiamo le notazioni:

$$M = \max\{|f(x, y)| \,:\, (x, y) \in I \times J\}; \qquad \delta = \min\{a; \frac{b}{M}\}\,.$$

TEOREMA DI CAUCHY. - *Nelle ipotesi (1) e (2) esiste una ed una sola funzione $y = y(x)$ definita e derivabile nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ che verifica il problema differenziale, detto di Cauchy*

$$(*) \qquad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x))\,, & \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Notiamo che, talvolta, nella tesi del teorema di Cauchy si afferma l'esistenza della soluzione $y(x)$ nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con δ definito, invece che da $\delta = \min\{a; b/M\}$, da $\delta < \min\{a; b/M; 1/L\}$. La formulazione dipende dalla dimostrazione adottata e comunque non cambia la sostanza del teorema, che afferma l'esistenza (e unicità) di una soluzione "in piccolo", cioè definita in un intorno di x_0, intorno contenuto nell'intervallo $I = [x_0 - a, x_0 + a]$. La ulteriore limitazione $\delta < 1/L$ è utile in una dimostrazione di tipo funzionale, basata sul teorema delle contrazioni negli spazi metrici (si veda il paragrafo 2B), e si può evitare con uua dimostrazione di analisi reale, basata sulle proprietà degli integrali definiti e sulla convergenza uniforme di successioni di funzioni.

Molto importante è la seguente formulazione del teorema di Cauchy:

COROLLARIO. *Sia $f(x, y)$ una funzione definita in un intorno rettangolare $I \times J$ del punto (x_0, y_0). Se $f(x, y)$ e la sua derivata parziale $f_y(x, y)$ sono continue in $I \times J$, allora esistono $\delta > 0$ ed una (unica) funzione $y = y(x)$ definita e derivabile in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$, soluzione del problema di Cauchy (*).*

Dimostrazione - Le funzioni di due variabili $|f(x, y)|$ e $|f_y(x, y)|$ sono continue in $I \times J$. Consideriamo un rettangolo chiuso e limitato $I' \times J'$, di centro (x_0, y_0), contenuto in $I \times J$.

Per il teorema di Weierstrass $|f|$ e $|f_y|$ assumono massimo su $I' \times J$. Se indichiamo con M, L i rispettivi valori di massimo, abbiamo

$$|f(x,y)| \leq M\,, \qquad |f_y(x,y)| \leq L\,, \qquad \forall\,(x,y) \in I' \times J'\,.$$

In base al teorema di Lagrange (per le funzioni di una variabile reale), per ogni $y_1, y_2 \in J'$ esiste $\xi \in J'$ tale che

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |f_y(x,\xi)(y_1 - y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Quindi, in $I' \times J'$, $f(x,y)$ è Lipschttziana in y uniformemente rispetto a x. Perciò, essendo soddisfatte le ipotesi, vale la tesi del teorema di Cauchy.

Le ipotesi del teorema di Cauchy sono sufficienti per l'*esistenza* di una soluzione del problema di Cauchy definita localmente *in un intorno* di x_0, e per l'*unicità* della soluzione in tale intorno. Nel seguito discutiamo di queste questioni e della necessità delle ipotesi, cominciando dal problema dell'unicità.

5.84 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si verifichi che non sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di Cauchy. Si verifichi inoltre che il problema ammette più di una soluzione.

[L'equazione differenziale è della forma $y' = f(x,y)$, con $f(x,y) = y^{2/3}$ (f è costante rispetto ad x). La funzione $f(x,y)$ è continua su $\mathbb{R}^2$ (dato che $y^{2/3}$ è continua su $\mathbb{R}$), ma f_y non è continua in un intorno di $(0,0)$; anzi, $f_y = (2/3)y^{-1/3}$ non è definita per $y = 0$ e diverge a $\pm\infty$ per $y \to 0^{\pm}$. Ciò implica che $y^{2/3}$ non è una funzione Lipschitziana in un intorno di $y = 0$ (si veda il paragrafo 12C del 1° volume, parte prima).

Si vede subito che il problema di Cauchy ammette la soluzione identicamente nulla. Per determinare eventuali altre soluzioni usiamo il metodo delle equazioni a variabili separabili. Se $y \neq 0$ abbiamo

$$3y^{1/3} = \int y^{-2/3}\,dy = \int dx = x + c\,,$$

da cui $y(x) = (x+c)^3/27$. Deve essere $y(0) = 0$, cioè $0 = c^3/27$, cioè ancora $c = 0$. La funzione $y(x) = x^3/27$ è un'altra soluzione del problema di Cauchy]

5.85 Si verifichi che il problema di Cauchy dell'esercizio precedente ha infinite soluzioni. In particolare sì verifichi che, per ogni $k > 0$, è soluzione su $\mathbb{R}$ la funzione $y_k(x)$ definita da

$$y_k(x) = \begin{cases} (x-k)^3/27 & \text{se} \quad x > k \\ 0 & \text{se} \quad |x| \leq k \\ (x+k)^3/27 & \text{se} \quad x < -k \end{cases}$$

[Si noti in particolare che $y_k(x)$ è derivabile anche per $x = \pm k$]

5.86 Verificare che il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'\cos x = 4y\operatorname{sen} x + 4\sqrt[4]{y^3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette nell'intervallo $[0, \pi/2)$ più di una soluzione.

[La funzione identicamente nulla è una soluzione. Con il metodo delle equazioni di Bernoulli (dividendo entrambi i membri per $y^{3/4}$, sostituendo la funzione incognita y con $z = y^{1/4}$ e ponendo $z(0) = 0$) si trova anche la soluzione $y(x) = (x/\cos x)^4$]

5.87 Verificare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

ammette, in un intorno sinistro di $x_0 = 1$, più di una soluzione.

[Si tratta di un'equazione differenziale omogenea del tipo $y' = g(y/x)$. Con la sostituzione $z = y/x$ ci si riconduce all'equazione a variabili separabili $xz' = \sqrt{1 - z^2}$. Per procedere oltre, prima di separare le variabili, è opportuno discutere il caso $\sqrt{1 - z^2} = 0$. Notiamo che la condizione iniziale $y(1) = 1$ corrisponde a $z(1) = y(1)/1 = 1$. Siamo quindi proprio nel caso $\sqrt{1 - z^2(x)} = 0$, per $x = 1$. Si vede facilmente che la funzione costante $z = 1$ è una soluzione (e ciò corrisponde a $y(x) = xz(x) = x$). Un'altra soluzione si ottiene separando le variabili e supponendo che $z^2(x) < 1$ per $x \neq 1$; per $x > 0$ si ottiene

$$\operatorname{arcsen} z = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{dx}{x} = c + \log x\,.$$

Imponendo la condizione $z(1) = 1$ si trova $c = \operatorname{arcsen} 1 = \pi/2$. Se $|\pi/2 + \log x| \leq \pi/2$ (e ciò accade in un intorno sinistro di $x_0 = 1$) risulta $z(x) = \operatorname{sen}(\pi/2 + \log x) = \cos(\log x)$. In termini di $y(x) = xz(x)$; il problema di Cauchy ha quindi almeno le due soluzioni (in un intorno sinistro di $x_0 = 1$)

$$y(x) = x\,; \qquad\qquad y(x) = x\cos(\log x)]$$

Negli esercizi che seguono discutiamo della esistenza locale delle soluzioni (cioè, come talvolta si dice, delle soluzioni in "piccolo", per distinguerle dalle soluzioni in "grande", che risultano definite in un intervallo fissato a priori) ed in particolare della stima fornita dal teorema di Cauchy della semiampiezza δ dell'intervallo di definizione della soluzione.

5.88 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $y_0 > 0$. Si noti che la funzione a secondo membro dell'equazione differenziale $f(x, y) = y^2$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$. Ciononostante, si verifichi che:

(a) la soluzione $y(x)$ è definita nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $\delta = 1/y_0$;

(b) il più grande valore di δ, stimato in base all'enunciato del teorema di Cauchy ($\delta = \min\{a; b/M\}$), è $\delta = 1/(4y_0)$.

[(a) Con il metodo delle equazioni a variabili separabili, oltre a $y \equiv 0$, si ottengono le soluzioni dell'equazione differenziale $y(x) = -1/(x + c)$. La condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ vale se $c = -x - (1/y_0)$. Perciò la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}\,.$$

La funzione $y(x)$ è definita per $x \neq x_0 + (1/y_0)$. Limitatamente all'intervallo contenente x_0, la funzione è definita in $(-\infty, x + (1/y_0))$. Il più grande intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ in cui la funzione $y(x)$ è definita si ha per $\delta = 1/y_0$.
(b) Le funzioni $f(x, y) = y^2$ e $f_y(x, y) = 2y$ sono continue su $\mathbb{R}^2$ (quindi il problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione $y(x)$ definita in un intorno di x_0). In particolare $f(x, y)$ è continua in ogni rettangolo $I \times J$ del tipo

$$I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a\,,\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

con a, $b > 0$. Il massimo M di $f(x, y)$ in $I \times J$ vale

$$M = \max\{f(x, y) : (x, y) \in I \times J\} = \max\{y^2 : y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\} = (y_0 + b)^2\,.$$

Il teorema di Cauchy stabilisce per δ la stima $\delta = \min\{a; b/M\}$. Potendo scegliere $a, b \in \mathbb{R}^+$ ed essendo $b/M = b/(y_0 + b)^2$ indipendente da a, è conveniente scegliere a in modo che $a \geq b/M$; in tal caso risulta

$$\delta = \min\{a; b/M\} = b/(y_0 + b)^2\,.$$

Ora scegliamo b in modo da ottenere per δ il massimo possibile; cioè calcoliamo il massimo (assoluto) di $\delta = \delta(b)$. Risulta $\delta(0) = 0$ e $\delta(b) \to 0$ per $b \to +\infty$; quindi il massimo assoluto di $\delta(b)$ si ottiene in corrispondenza ad un valore $b > 0$ per cui la derivata $\delta'(b)$ si annulla. Risulta

$$\delta'(b) = \frac{(y_0 + b)^2 - 2(y_0 + b)b}{(y_0 + b)^4} = \frac{y_0 - b}{(y_0 + b)^3}\,,$$

perciò $\delta'(b) = 0$ per $b = y_0$ e quindi $\max\{\delta(b) : b > 0\} = \delta(y_0) = 1/(4y_0)$. Il teorema di Cauchy, nelle ipotesi ottimali $b = y_0$ e $a \geq b/M$, stabilisce l'esistenza di una ed una sola soluzione del problema differenziale nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $\delta = 1/(4y_0)$; come si vede confrontando con (a), la soluzione è di fatto definita in $(-\infty, x_0 + (1/y_0))$ che è un intervallo contenente $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Infine osserviamo che la funzione $f(x, y) = y^2$ è Lipschitziana rispetto ad $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$ con costante L data da (si veda il paragrafo 12C del 1° volume, parte prima):

$$L = \max\{|f_y| : y \in [y_0 - b, y_0 + b]\} = 2(y_0 + b).$$

In particolare, per il valore ottimale $b = y_0$ sopra scelto, risulta $L = 4y_0$; perciò $\delta = 1/(4y_0)$ è uguale a $1/L$ e risulta anche $\delta = \min\{a; b/M; 1/L\}$]

5.89 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (x+y)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si verifichi che:
(a) la soluzione è definita per $|x| < \pi/2$ e non è definita per $x = \pm\pi/2$;
(b) il più grande valore di δ, stimato in base all'enunciato del teorema di Cauchy ($\delta = \min\{a; b/M\}$) è $\delta = 1/2$.

[(a) L'equazione differenziale è del tipo $y' = g(ax + by)$ e si risolve con la sostituzione $z(x) = x + y$. Si trova la soluzione $y(x) = \operatorname{tg} x - x$.
(b) Sia $f(x, y) = (x+y)^2$; come nell'esercizio precedente, si pone (si noti che $(x_0, y_0) = (0, 0)$):

$$M = \max\{f(x, y) : |x| \le a,\ |y| \le b\} = (a + b)^2,$$

essendo $a, b > 0$. Per determinare il massimo rispetto ad $a, b \in \mathbb{R}^+$ di $\delta = \min\{a; b/M\} = \min\{a; b/(a + b)^2\}$, è opportuno calcolare, per ogni $a > 0$, il massimo assoluto della funzione $b \to b/(a + b)^2$. Tale funzione vale zero per $b = 0$ e converge a zero per $b \to +\infty$; il massimo assoluto si ottiene quindi quando la derivata

$$\frac{d}{db}\frac{b}{(a+b)^2} = \frac{a-b}{(a+b)^3}$$

si annulla e ciò accade per $b = a$. Posto $b = a$, risulta $\delta = \min\{a; 1/(4a)\}$. Come si vede dalla figura 5.12, il massimo di $\delta = \delta(a)$ si ottiene quando $\delta = a = 1/(4a)$ e ciò accade per $a = 1/2$. Il valore massimo è $\delta_{\max} = \delta(1/2) = 1/2$]

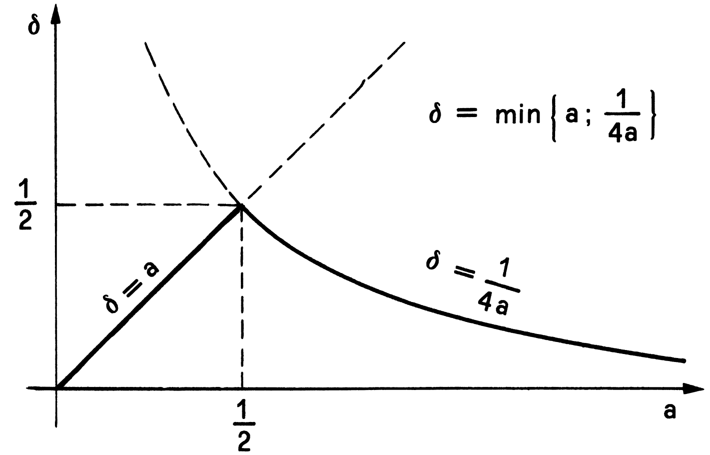

figura 5.12

Il teorema di Cauchy vale per equazioni differenziali *in forma normale*, cioè del tipo $y' = f(x, y)$, e non vale in genere per equazioni non normali. Di seguito proponiamo alcuni esercizi relativi ad equazioni differenziali non in forma normale. In particolare gli esercizi 5.90 e 5.91 sono esempi di non unicità, mentre l'esercizio 5.91 è un esempio di non esistenza.

5.90 Verificare che $y = \pi - x$, $y = x + \pi$ sono due soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x = 0 \\ y(0) = \pi \end{cases}$$

5.91 Il seguente problema differenziale non ha unicità. Una soluzione è data da $y(x) = x + 2\pi$. Trovarne un'altra.

$$\begin{cases} y'\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x \\ y(0) = 2\pi \end{cases}$$

[Ad esempio $y(x) = 2\pi - x$]

5.92 Verificare che non esistono, in un intorno destro di $x_0 = 0$, soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'\cos y = \cos x \\ y(0) = \pi/2 \end{cases}$$

[Già dall'equazione differenziale, ponendo $x = 0$ e $y = \pi/2$, si trova l'assurdo $0 = 1$ (purchè $y'(0) \in \mathbb{R}$; si noti che, dall'espressione analitica che determiniamo di seguito, la derivata $y'(x)$ diverge per $x \to 0^-$). Essendo $D(\operatorname{sen} y(x)) = y'\cos y(x)$, dall'equazione differenziale si ottiene

$$\operatorname{sen} y(x) = \int D(\operatorname{sen} y(x))\, dx = \int y'\cos y\, dx = \int \cos x\, dx = c + \operatorname{sen} x.$$

Dovendo risultare $y(0) = \pi/2$, si ha

$$1 = \operatorname{sen}(\pi/2) = c + \operatorname{sen} 0 = c\,,$$

da cui $\operatorname{sen} y = 1 + \operatorname{sen} x$. Tale relazione non definisce una funzione $y(x)$ nell'intervallo $(0, \pi)$, perchè in tal caso $\operatorname{sen} y = 1 + \operatorname{sen} x > 1$ è assurdo. Quindi il problema di Cauchy non ha soluzione in un intorno destra di $x_0 = 0$. Per $x \in [-\pi, 0]$ risulta $y(x) = \operatorname{arcsen}(1 + \operatorname{sen} x)$. Si noti che tale funzione non è derivabile per $x = 0$ e quindi $y(x)$ non è soluzione del problema di Cauchy (in senso classico) nemmeno in un intorno sinistro di $x_0 = 0$]

5.93 Si consideri un'equazione differenziale del tipo

$$x = g(y')$$

con g funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$. Verificare che se $g(t)$ non è invertibile (localmente) in un intorno di un punto t_0, allora in corrispondenza la rappresentazione parametrica delle soluzioni

$$x(t) = g(t)\,, \qquad\qquad y(t) = tg(t) - G(t) + c\,,$$

(con $G'(t) = g(t)$) ottenuta nel paragrafo 5F, è non regolare, nel senso che $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$.

[Se g non è invertibile in un intorno di t_0 allora necessariamente $g'(t_0) = 0$ (infatti, se fosse $g'(t_0) \neq 0$, g sarebbe strettamente monotòna in un intorno di t_0). Ne segue che $x'(t) = g'(t)$ e $y'(t) = tg'(t)$ si annullano entrambe per $t = t_0$]

Concludiamo il paragrafo con il seguente

TEOREMA DI PEANO. - *Se $f(x, y)$ è una funzione continua in un intorno di (x_0, y_0), esiste una funzione $y(x)$, derivabile in un intorno di x_0, che soddisfa il problema di Cauchy*

$$y' = f(x, y)\,, \qquad\qquad y(x_0) = y_0\,.$$

Notiamo che il teorema di Peano è un risultato esistenza, ma non di unicità. Ad esempio i problemi di Cauchy degli esercizi 5.84, 5.86 e 5.87 sono del tipo $y' = f(x, y)$, con f continua, ma non Lipschitziana in y (la funzione $t \to \sqrt{t}$ è continua in un intorno destro di $t = 0$, ma non è Lipschitziana) e non hanno unicità.

La dimostrazione del teorema di Peano, simile sotto certi aspetti a quella del teorema di Cauchy, è basata sul teorema di Ascoli-Arzelà (paragrafo 1A).

Osserviamo che, nel caso particolare $f(x, y) = f(y)$ con f *positiva* e continua, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ per il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

si ha unicità della soluzione, come osservato già da Peano nel 1890.

Infatti, se si ha $y'(x) = f(y(x)) > 0$ per ogni $x \in I = [x_0 - a, x_0 + a]$, sia $F(t)$ la primitiva di $t \to 1/f(t)$ tale che $F(y_0) = x_0$. Evidentemente si ha

$$F'(y(x))y'(x) = \frac{y'(x)}{f(y(x))} = 1 \qquad\qquad \forall x \in I$$

per cui la funzione $x \in I \to F(y(x)) - x$ è costante. Essendo $F(y_0) = x_0$ e $y(x_0) = y_0$, la costante è nulla.

Poichè F è strettamente crescente, si ha

$$y(x) = F^{-1}(x) \qquad\qquad \forall\, x \in I.$$

Più in generale, sussiste il seguente

TEOREMA DI UNICITÁ. - *Sia* $f : I \times J \to \mathbb{R}$ *continua con* $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ *e* $J = [y_0 - b, y_0 + b]$. *Supponiamo inoltre che* $f(\cdot, y)$ *sia Lipschitziana* $\forall\, y \in J$, *cioè*

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \le M|x_1 - x_2|$$

per $(x_1, y), (x_2, y) \in I \times J$, *per un* $M > 0$ *e che*

$$0 < \alpha < f(x, y) < \beta \qquad \forall\, (x, y) \in I \times J \tag{2}$$

per α *e* β *positivi. Allora il problema di Cauchy*

$$y' = f(x, y) \qquad\qquad y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

ha soluzione unica definita in un certo intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Dimostrazione. Definiamo la funzione $g : J \times I \to \mathbb{R}$

$$g(y, x) = \frac{1}{f(x, y)} \tag{4}$$

e applichiamo il Teorema di Cauchy enunciato ad inizio paragrafo al problema

$$\begin{cases} x' = g(y, x) \\ x(y_0) = x_0 \,. \end{cases} \tag{5}$$

Ciò è lecito, in quanto $g(y, \cdot)$ è Lipschitziana

$$|g(y, x_1) - g(y, x_2)| = \frac{|f(x_1, y) - f(x_2, y)|}{f(x_1, y) f(x_2, y)} \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha^2}|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \le \frac{M}{\alpha^2}|x_1 - x_2|.$$

Ne segue che (5) ha unica soluzione $x = x(y)$ strettamente crescente in quanto $x'(y) = g(y, x(y)) > 1/\beta$ in un intervallo $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. La sua inversa $y = y(x)$ sarà definita in un intervallo nel quale si avrà, per la (5)

$$y'(t) = D\, x^{-1}(t) = \frac{1}{x'(x^{-1}(t))} = \frac{1}{g(x^{-1}(t), t)} = f(t, y(t)).$$

Essendo $y(x_0) = y_0$, l'asserto è dimostrato.

5L. Integrazione grafica

Talvolta è possibile determinare alcune proprietà del grafico di soluzioni di una equazione differenziale ordinaria

$$y' = f(x, y)$$

a priori, senza risolvere l'equazione analiticamente. In particolare può essere possibile determinare gli intervalli di monotonia delle soluzioni, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo, gli intervalli di convessità e concavità, i punti di flesso egli asintoti orizzontali.

Intervalli di monotonia: Si determinano stabilendo il segno di $y'(x)$. In base all'equazione differenziale $y' = f(x, y)$, risulta $y' \gtrless 0$ in corrispondenza ai punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per cui $f(x, y) \gtrless 0$.

Intervalli di convessità: Si determinano in base al segno di $y''(x)$. A tale scopo è opportuno derivare entrambi i membri dell'equazione differenziale $y'(x) = f(x, y(x))$:

$$y'' = f_x(x, y) + f_y(x, y)y' = f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y)$$

(occorre supporre che f sia una funzione differenziabile; nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che $y' = f(x, y)$). Risulta quindi $y'' \gtrless 0$ in corrispondenza ai punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per cui $f_x + f_y f \gtrless 0$.

Asintoti orizzontali: Consideriamo per semplicità solo il caso $y' = f(y)$, con f funzione continua indipendente da x, anche se il metodo che esponiamo si applica talvolta anche al caso generale. Consideriamo gli asintoti orizzontali per $x \to +\infty$; il caso $x \to -\infty$ è analogo.

È opportuno stabilire innanzitutto il segno di y'; se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui $y'(x)$ ha segno costante per $x > x_0$, allora $y(x)$ è monotòna per $x \geq x_0$. Indichiamo con $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ il limite per $x + \infty$ di $y(x)$. In base al teorema di L'Hôpital, se $l \in \mathbb{R}$ anche $y'(x)$ ha limite per $x \to +\infty$ e tale limite vale zero; infatti:

$$0 = \left(\frac{l}{\infty} = \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to +\infty} y'(x) .$$

Notiamo che, per applicare il teorema di L'Hôpital, è necessario verificare a priori che esiste il limite a secondo membro; ciò si ottiene direttamente dall'equazione differenziale $y'(x) = f(y(x))$; infatti, per la continuità di f, $y'(x)$ converge a $f(l)$ per $x \to +\infty$. Ricordiamo anche che il teorema di L'Hôpital si applica alle forme indeterminate $0/0$ e ∞/∞, ma anche al caso l/∞, con $l \in \mathbb{R}$.

Al limite per $x \to +\infty$ nell'equazione differenziale $y'(x) = f(y(x))$, otteniamo $0 = f(l)$, che è un'equazione (algebrica o trascendente) nell'incognita $l \in \mathbb{R}$. Spesso dall'equazione $f(l) = 0$ e dalle proprietà di monotonia di $y(x)$ è possibile determinare l.

5.94 Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità e gli eventuali asintoti orizzontali delle soluzioni dei problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} y' = (y^2 - 4y + 3)^3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = (y^2 - 4y + 3)^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

[(a) L'equazione differenziale è a variabili separabili, ma non è agevole risolverla analiticamente e determinare l'espressione cartesiana della soluzione. Applichiamo il metodo di integrazione grafica descritto precedentemente. La derivata y' è positiva se

$$y' = (y^2 - 4y + 3)^3 = (y-1)^3(y-3)^3 > 0\,;$$

ciò si verifica se y è esterno all'intervallo $[1,3]$. Inoltre $y' < 0$ se $y \in (1,3)$ e $y' = 0$ se $y = 1$ oppure se $y = 3$. Si noti che le funzioni costanti $y = 1$ e $y = 3$ sono due soluzioni dell'equazione differenziale.

Dato che la condizione iniziale è $y(0) = 2$, per la continuità di $y(x)$ (notiamo che, in base al teorema di Cauchy, esiste una (unica) funzione derivabile $y = y(x)$ che risolve il problema (a) in un intorno di $x_0 = 0$) risulta $y(x) \in [1,3]$ in un intorno di $x_0 = 0$ e quindi $y'(x) < 0$ in tale intorno ($y(x)$ è perciò strettamente decrescente). È possibile che $y(x)$ sia illimitata nel suo insieme di definizione? È possibile che $y(x)$ diventi negativa per qualche valore di $x > 0$? Se ciò accadesse, per il teorema dell'esistenza degli zeri esisterebbe $x_1 > 0$ per cui $y(x_1) = 1$; avremmo quindi due funzioni (la soluzione $y(x)$ che stiamo studiando e la funzione costante uguale ad 1) che soddisfano entrambe il problema di Cauchy

$$y' = (y^2 - 4y + 3)^3, \qquad y(x_1) = 1\,.$$

Per il teorema di unicità dovrebbe risultare $y(x)$ identicamente uguale ad 1, in contrasto con il fatto che $y(0) = 2$. Perciò $y(x)$ non assume mai il valore 1 e quindi è tale che $y(x) > 1$ per ogni x. Analogamente $y(x) < 3$ per ogni x dell'insieme di definizione. Ne segue, tenendo conto anche della monotonia, che $y(x)$ è definita in (più precisamente, può essere estesa a) tutto $\mathbb{R}$ ed è limitata su $\mathbb{R}$ ($1 < y(x) < 3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Indichiamo con $l \in [1,2]$ il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$. Dalle condizioni

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = l\,, \quad \lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0\,, \quad y' = (y^2 - 4y + 3)^3$$

otteniamo $(l^2 - 4l + 3)^3 = 0$, cioè $l = 1$ oppure $l = 3$. Dato che $y(0) = 2$ e che $y(x)$ è decrescente, $y(x)$ converge ad 1 per $x \to +\infty$. Analogamente $y(x) \to 3$ per $x \to -\infty$.

Per determinare gli intervalli di convessità e concavità, calcoliamo

$$y'' = 3(y^2 - 4y + 3)^2(2y - 4)y'\,.$$

Abbiamo già stabilito che la nostra soluzione $y(x)$ è decrescente con $y'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. È allora facile verificare che $y'' > 0$ se e solo se $y < 2$. La soluzione $y(x)$ è convessa se $y(x) < 2$ ed è concava se $y(x) > 2$; dato che $y(0) = 2$ e che $y(x)$ è decrescente, ciò significa che $y(x)$ è convessa nell'intervallo $[0, +\infty)$ ed è concava in $(-\infty, 0]$ il punto $x_0 = 0$ è di flesso. Il grafico di $y(x)$ è disegnato in figura 5.13.

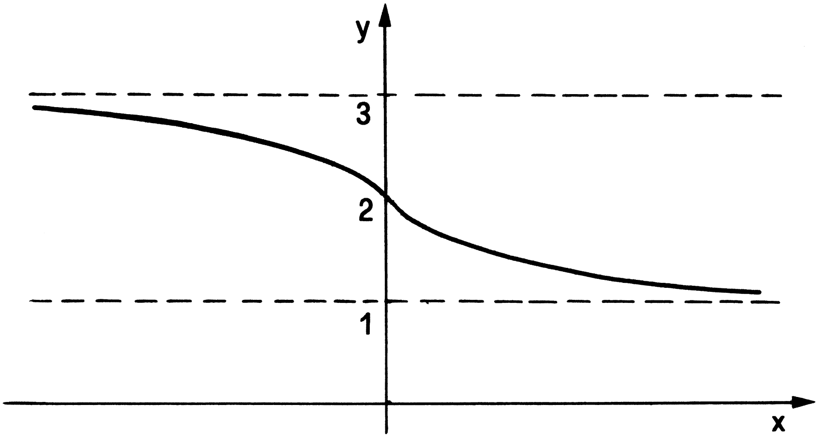

figura 5.13

(b) La soluzione $y(x)$ è strettamente crescente e concava su $\mathbb{R}$. La retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, mentre $y(x)$ diverge a $-\infty$ per $x \to -\infty$ (infatti $y(x)$, essendo monotòna, ha limite per $x \to +\infty$. Se convergesse ad un limite $l \in \mathbb{R}$, l dovrebbe essere una soluzione dell'equazione $(l^2 - 4l + 3)^3 = 0$, da cui $l = 1$ oppure $l = 3$. Ciò contrasta con il fatto che, essendo $y(x)$ una funzione strettamente crescente con $y(0) = 0$, essa è negativa per $x < 0$)]

5.95 Determinare per $x \geq 0$ gli intervalli di monotonia e di convessità e gli eventuali asintoti orizzontali delle soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} y' = x - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} y' = x - y^2 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

[(a) Risulta $y' > 0$ per $x > y^2$, che è l'insieme piano tratteggiato in figura 5.14, delimitato dalla parabola di equazione $x = y^2$. La derivata seconda vale $y'' = 1-2yy' = 1-2y(x-y^2) = 1 - 2xy + 2y^3$.
Risulta $y'' = 0$ se $1 - 2xy + 2y^3 = 0$, da cui

$$x = \frac{2y^3 + 1}{2y} = y^2 + \frac{1}{2y}\,.$$

Per $y > 0$ risulta $y'' < 0$ purchè $x > y^2 + 1/(2y)$ (insieme tratteggiato in figura 5.15). La soluzione $y(x)$, esistente in un intorno di $x_0 = 0$ per il teorema di Cauchy, è strettamente crescente e convessa nelle vicinanze di $x_0 = 0$; essendo $y(0) = 0$, dall'equazione differenziale segue che $y'(0) = 0$; quindi $y(x)$ ha tangente orizzontale in corrispondenza di $x_0 = 0$. Risulta inoltre $y(x) < \sqrt{x}$ per ogni $x > 0$; infatti, se fosse $y(x_1) = \sqrt{x_1}$ per qualche $x_1 > 0$ e $y(x) < \sqrt{x}$ per ogni $x \in (0, x_1)$, dovrebbe risultare (si noti che $x - x_1$ è negativo):

$$y'(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} \geq \lim_{x \to x_1^-} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_1}}{x - x_1} = \left[\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right]_{x=x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} > 0\,,$$

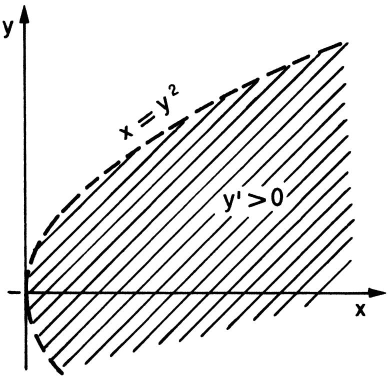

figura 5.14

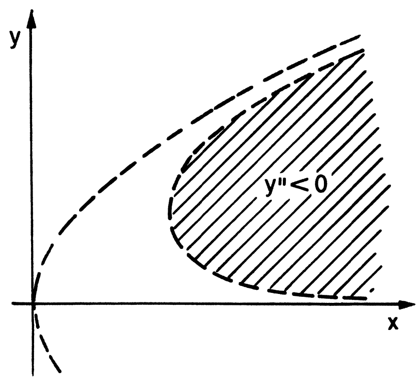

figura 5.15

$$y'(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} \geq \lim_{x \to x_1^-} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_1}}{x - x_1} = \left[\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right]_{x=x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} > 0\,,$$

in contrasto con il fatto che $y'(x_1) = x_1 - (y(x_1))^2 = x_1 - (\sqrt{x_1})^2 = 0$. Perciò è provato che $0 < y(x) < \sqrt{x}$ per ogni $x > 0$. Per $x \to +\infty$ $y(x)$ non ha asintoti obliqui (perchè è limitata superiormente da $\sqrt{x}$), nè asintoti orizzontali; infatti, se $y(x)$ convergesse per $x \to +\infty$ ad un numero reale l, risulterebbe $y'(x) \to 0$ per $x \to +\infty$ e quindi, dall'equazione differenziale, otterremmo l'assurdo $0 = +\infty - l^2 = +\infty$. Il grafico della soluzione $y(x)$, per $x \geq 0$, è schematizzato in figura 5.16. (b) figura 5.17]

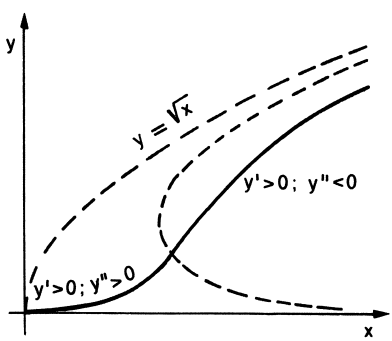

figura 5.16

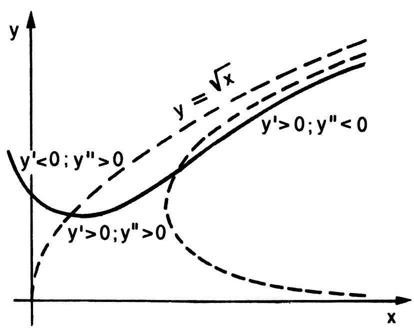

figura 5.17

5.96 In dinamica delle popolazioni, un modello di crescita di una popolazione isolata è descritto mediante l'equazione differenziale

$$y' = qy - my^2\,,$$

con q, m costanti positive. La condizione iniziale è $y(x_0) = y_0$, con $0 < y_0 < q/m$. Determinare le proprietà grafiche della soluzione.

[Notiamo preliminarmente che l'equazione data è a variabili separabili ed anche del tipo di Bernoulli ed è quindi integrabile esplicitamente (oltre a $y \equiv 0$, l'equazione differenziale ammette le soluzioni $y(x) = 1/[(m/q) + ce^{-qt}]$, con $c \in \mathbb{R}$). Comunque, per ottenere rapidamente un grafico approssimativo della soluzione del problema di Cauchy, si può osservare che la derivata $y' = y(q - my)$ è positiva se $0 < y < q/m$ (come nello schema in figura 5.18).

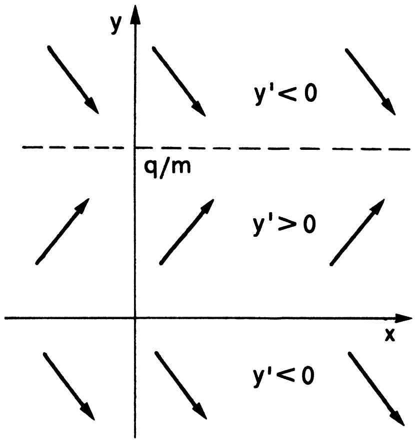

figura 5.18

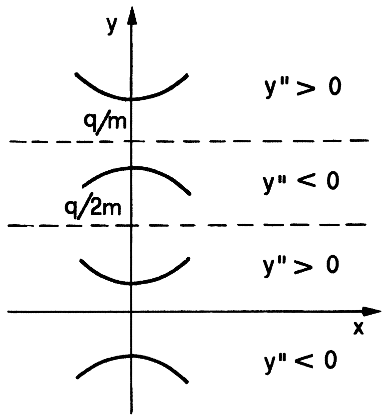

figura 5.19

Dato che $y \equiv 0$ e $y \equiv q/m$ sono soluzioni dell'equazione differenziale, per il teorema di unicità ogni altra soluzione non può assumere i valori 0 e q/m; quindi se, come nel nostro caso, $y(x_0) = y_0$ è interno all'intervallo $[0, q/m]$, $y(x)$ rimane interno per ogni altro $x \in \mathbb{R}$. In particolare la nostra soluzione verifica le limitazioni $0 < y(x) < q/m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Circa la derivata seconda, abbiamo $y''(q - 2my)y'$; ad esempio, nella zona $0 < y < q/m$ risulta $y' > 0$ e quindi $y'' > 0$ per $q - 2my > 0$, cioè per $y < q/(2m)$. In figura 5.19 è rappresentato uno schema di convessità e concavità delle soluzioni. Circa gli asintoti orizzontali $y \equiv l$ deve risultare $ql - ml^2 = 0$ cioè $l = 0$ oppure $l = q/m$.
In base alle proprietà di monotonia, si ottengono i grafici in figura 5.20. Il grafico di una particolare soluzione $y(x)$ tale che $0 < y(x_0) < q/m$ è rappresentato in figura 5.21]

5.97 Prescindendo (eventualmente) dallo studio del segno della derivata seconda, disegnare approssimativamente i grafici delle soluzioni delle equazioni differenziali del tipo $y' = f(y)$:

(a) $y' = (y^2 - 6y + 8)(y - 10)^{20}$ (b) $y' = y \operatorname{sen} y$

(c) $y' = e^y \log(y^2 - 6y - 6)$ (d) $y' = ye^y \log y$

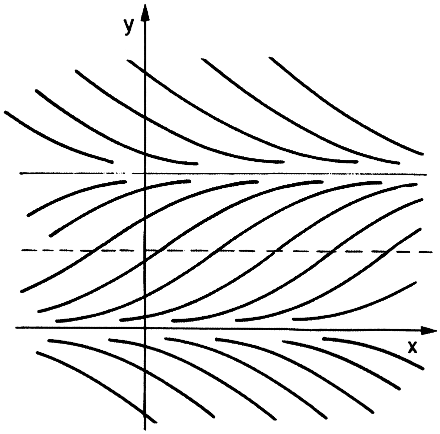

figura 5.20

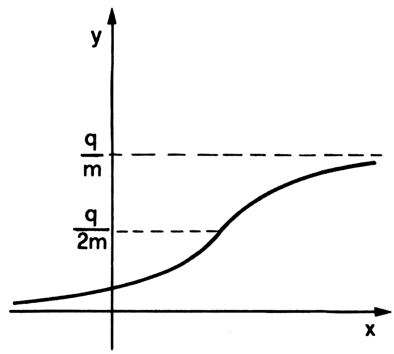

figura 5.21

5.98 Disegnare approssimativamente i grafici delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = -2xy$.

[Il segno della derivata prima, schematizzato in figura 5.22, è positivo nel secondo e nel quarto quadrante. In particolare la funzione costante $y = 0$ è una soluzione e nessun'altra soluzione tocca l'asse x. Inoltre $y(x)$ ha un punto di massimo per $x = 0$ se $y > 0$, mentre ha un punto di minimo se $y < 0$.

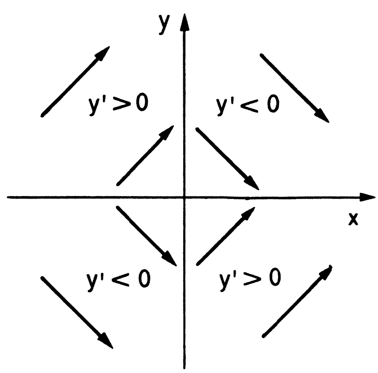

figura 5.22

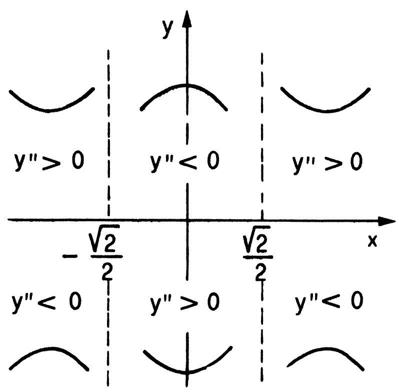

figura 5.23

La derivata seconda vale $y'' = -2y - 2xy' = -2y - 2x(-2xy) = 2y(2x^2 - 1)$. Se $y > 0$ risulta $y'' < 0$ all'interno dell'intervallo $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$; in figura 5.23 è rappresentato uno schema di convessità e concavità. Dalle proprietà di monotonia e limitatezza di $y(x)$ si deduce che essa ha certamente asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$ e, dall'equazione differenziale, si ottiene che l'asintoto ha equazione $y = 0$. Il grafico delle soluzioni è in figura 5.2; come indicato nell'esercizio 5.6, le soluzioni sono $y(x) = ce^{-x^2}$, con $c \in \mathbb{R}$. Il lettore verifichi da tale espressione analitica che, ad esempio, $x = \pm\sqrt{2}/2$ sono punti di flesso per $y(x)$]

5.99 Disegnare approssimativamente per $x \geq 1$ il grafico della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

[La soluzione è strettamente crescente e concava per $x \geq 1$ e diverge a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Il grafico è rappresentato in figura 5.24]

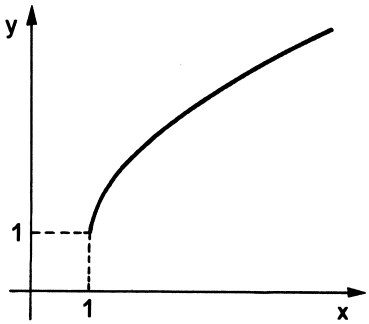

figura 5.24

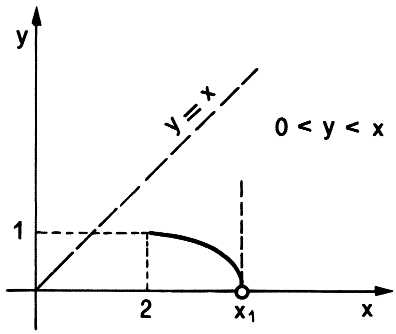

figura 5.25

5.100 Disegnare approssimativamente per $x \geq 2$ il grafico della soluzione del problema dì Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

[In un intorno destro di $x_0 = 2$, $y(x)$ è strettamente decrescente e concava. Tali proprietà sono comunque verificate se $0 < y < x$. Ne segue che $y(x)$ non è definita su tutto l'intervallo $[2, +\infty)$ perchè, se lo fosse, dovrebbe incontrare l'asse delle x in un punto x_1 dove, essendo $y(x_1) = 0$, il secondo membro dell'equazione differenziale non è definito. Quindi, per $x \geq 2$, $y(x)$ è definita in un intervallo massimale $[2, x_1)$ e, per $x \to x_1^-$, $y(x)$ converge a zero e $y'(x)$ (dall'equazione differenziale) diverge a $-\infty$ cioè la soluzione si avvicina all'asse x con tangente verticale. Il grafico è schematizzato in figura 5.25]

5M. Equazioni di Riccati

Si chiama *di Riccati* l'equazione differenziale del 1^0 ordine (non lineare):

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x) \tag{1}$$

ove $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sono funzioni continue nell'intervallo I di $\mathbb{R}$. Se è $c(x) = 0$ per ogni $x \in I$, si ottiene l'equazione *di Bernoulli*

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 .$$

Se è $b(x) = 0$ per ogni $x \in I$, si ottiene l'equazione *lineare*

$$y' = a(x)y + c(x) .$$

Sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 1. *Se $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione positiva con derivata prima continua in I, allora l'equazione (1) ammette una soluzione della forma*

$$y = -\frac{z'}{b(x)z} \tag{2}$$

con $z = z(x)$ soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea del 2^0 ordine

$$z'' = (\frac{b'(x)}{b(x)} + a(x))z' - b(x)c(x)z . \tag{3}$$

DIM. Cerchiamo una soluzione della (1) sotto la forma (2) con $z = z(x)$ da determinarsi. Derivando la (2), si ha

$$y' = \frac{-b(x)zz'' + z'(b'(x)z + b(x)z')}{b(x)^2z^2} \tag{4}$$

e quindi, affinchè sia soddisfatta la (1) dovrá risultare:

$$\frac{-b(x)zz'' + b'(x)zz' + b(x)z'^2}{b(x)^2z^2} = -\frac{a(x)}{b(x)} fracz'z + b(x)\left(\frac{z'}{b(x)z}\right)^2 + c(x)$$

ovvero, moltiplicando ambo i membri per $b(x)z$,

$$-z'' + \frac{b'(x)zz'}{b(x)z} + \frac{b(x)z'^2}{b(x)z} = -a(x)z' + \frac{b(x)z'^2}{b(x)z} + c(x)b(x)z$$

e, semplificando ulteriormente, si ha

$$-z'' + \frac{b'(x)}{b(x)}z' = -a(x)z' + c(x)b(x)z$$

da cui, in definitiva, z risolve l'equazione differenziale lineare omogenea del 2^0 ordine

$$z'' = \left(\frac{b'(x)}{b(x)} + a(x)\right) z' - b(x)c(x)z.$$

5.101 Integrare l'equazione differenziale di Riccati

$$y' = -\frac{3}{x}y + x^3y^2 + \frac{1}{x^3}$$

per $x > 0$.

[Dalla Proposizione 1 sappiamo che l'equazione ha una soluzione della forma

$$y(x) = -\frac{z'(x)}{x^3 z(x)}.$$

Imponiamo che tale equazione soddisfi l'equazione data. Essendo

$$y' = \frac{-z''x^3z + z'(3x^2z + x^3z')}{x^6z^2}$$

e imponendo

$$y' = \frac{3z'}{x^4z} + x^3\frac{z'^2}{x^6z} + \frac{1}{x^3}$$

si ricava facilmente

$$z'' + z = 0.$$

Poichè l'integrale generale di tale equazione omogenea del 2^0 ordine a coefficienti costanti è

$$z(x, c_1, c_2) = c_1\cos x + c_2\mathrm{sen}\, x$$

da cui

$$z'(x, c_1, c_2) = -c_1\mathrm{sen}\, x + c_2\cos x$$

si ha che (per $c = c_2/c_1$)

$$y(x, c) = -\frac{1}{x^3}\frac{-\mathrm{sen}\, x + c\cos x}{\cos x + c\,\mathrm{sen}\, x}$$

risolve l'equazione]

5.102 Considerata l'equazione di Riccati

$$(5) \qquad y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$$

a coefficienti continui nell'intervallo I di $\mathbb{R}$, verificare che, se $u(x)$ é una sua soluzione, allora ogni sua soluzione é della forma

$$y = u(x) + v(x)$$

con $v(x)$ soluzione dell'equazione di Bernoulli

$$v' = [a(x) + 2b(x)u(x)]v + b(x)v^2$$

[Sostituendo nella (1) $y = u + v$ si ha

$$u' + v' = a(x)(u + v) + b(x)(u + v)^2 + c(x) =$$

$$= [a(x)(u) + b(x)(u)^2 + c(x)] + a(x)v + 2b(x)uv + b(x)v^2$$

da cui segue subito l'asserto per l'ipotesi su u.]

5.103 Verificare che l'integrale generale dell'equazione di Riccati ($x > 0$)

$$y' = -\frac{4}{x}y + x^4y^2 + \frac{1}{x^4}$$

è dato da

$$y(x, c) = v(x, c) + \frac{\operatorname{tg} x}{x^4}$$

con $v = v(x, c)$ integrale generale dell'equazione di Bernoulli

$$v' = \left[-\frac{4}{x} + 2\operatorname{tg} x\right] v + x^4v^2.$$

[Basta verificare che la funzione $u(x) = \dfrac{tgx}{x^4}$ è soluzione particolare dell'equazione data ed applicare il risultato dell'esercizio 5.102]

5.104 Integrare l'equazione differenziale di Riccati

$$y' = \frac{1}{x}y + y^2 - 9x^2$$

sapendo che $u(x) = 3x$ è un suo integrale particolare.

[Cerchiamo una soluzione della forma

$$y = u(x) + v(x) = 3x + v(x)$$

con v non identicamente nulla. Si ha, sostituendo nell'equazione data:

$$y' = 3 + v' = \frac{1}{x}(3x + v) + (3x + v)^2 - 9x^2 =$$

$$= 3 + \frac{v}{x} + 9x^2 + 6xv + v^2 - 9x^2$$

$$= 3 + (\frac{1}{x} + 6x)v + v^2,$$

pertanto v è soluzione dell'equazione di Bernoulli

$$v' = (\frac{1}{x} + 6x)v + v^2$$

Eseguendo la sostituzione $z = \dfrac{1}{v}$ nell'equazione equivalente

$$\frac{v'}{v^2} = (\frac{1}{x} + 6x)v^{-1} + 1$$

si ha che z risolve l'equazione lineare

$$z' = -\frac{v'}{v^2} = -(\frac{1}{x} + 6x)z - 1 \tag{6}$$

Una primitiva di $-(\dfrac{1}{x} + 6x)$ è $A(x) = -\log x - 3x^2$, pertanto le soluzioni di (6) sono date da

$$z(x) = e^{A(x)}\left(c - \int e^{-A(x)}\, dx\right) = e^{-\log x}e^{-3x^2}\left(c - \int e^{\log x}e^{3x^2}\, dx\right)$$

$$= \frac{e^{-3x^2}}{x}\left(c - \int xe^{3x^2}\, dx\right) = \frac{e^{-3x^2}}{x}\left(c - \frac{e^{3x^2}}{6}\right) = \frac{-1 + 6ce^{-3x^2}}{6x}]$$

5.105 Verificare che le soluzioni non nulle dell'equazione differenziale di Bernoulli

$$y' = a(x)y + b(x)y^2$$

sono espresse da

$$y(x) = e^{A(x)}\left(c - \textstyle\int e^{A(t)}b(t)\, dt\right)^{-1}$$

con $c \in \mathbb{R}$ e $A(x)$ primitiva di $a(x)$.

[Ricordiamo dal paragrafo 5B che per risolvere l'equazione data, conviene dividere ambo i membri per y^2 (che è positivo), ottenendo

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{a(x)}{y} + b(x)$$

Posto $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$, si ottiene l'equazione lineare non omogenea

$$z' = -a(x)z - b(x)\,.$$

Se $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$, ricordando dal paragrafo 4A che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$z' = -a(x)z - b(x)$$

sono espresse da

$$z(x) = e^{-A(x)}\left(c - \textstyle\int e^{A(t)}b(t)\,dt\right) \tag{7}$$

essendo $y = \dfrac{1}{z}$ si ha la tesi]

5.106 Risolvere l'equazione differenziale di Bernoulli

$$y' = a(x)y + b(x)y^2$$

con il metodo di Riccati, cioè cercando una soluzione sotto la forma

$$y = -\frac{z'}{b(x)z} \tag{8}$$

e supponendo che b sia dotata di derivata prima continua.

[Imponendo che la funzione y data dall'espressione (**??**) risolva l'equazione differenziale assegnata, si trova

$$y' = -\frac{b(x)z''z - b'(x)zz' - b(x)z'^2}{b(x)^2z^2}$$

$$= a(x)\left(-\frac{b(x)zz'}{b(x)^2z^2}\right) + b(x)\frac{z'^2}{b(x)^2z^2}$$

da cui, semplificando, si ricava che z risolve l'equazione del secondo ordine

$$z'' = \left(\frac{b'}{b} + a\right)z'$$

Posto $w = z'$, la funzione w risolve l'equazione del primo ordine

$$w' = \left(\frac{b'(x)}{b(x)} + a(x)\right)w$$

ed è perciò

$$z' = w(x) = c\,e^{\displaystyle\int\left(\frac{b'}{b} + a\right)dt}$$

$$= c\,e^{\int\frac{b'}{b}\,dt}\,e^{\displaystyle\int a\,dt} = c\,b(x)e^{\displaystyle\int a\,dt}$$

Da cui

$$z(x) = c\textstyle\int b(x)e^{\displaystyle\int a\,dt}\,dx + c'.$$

Dalle precedenti uguaglianze e da (8) segue, indicando con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$

$$y(x) = -\frac{z'}{b(x)z} = -\frac{cb(x)e^{A(x)}}{b(x)[c\int b(t)e^{A(t)}\,dt + c']} =$$

$$= \frac{e^{A(x)}}{d - \int b(t)e^{A(t)}\,dt}$$

con d costante arbitraria, relazione da confrontare con la (7) dell'esercizio precedente.]

5.107 Risolvere l'equazione di Bernoulli

$$y' = 2y - e^x y^2$$

cercando una soluzione sotto la forma

$$y = \frac{z'}{e^x z} \tag{9}$$

[Si ha

$$y' = \frac{zz''e^x - z'(e^x z + e^x z')}{z^2 e^{2x}} = \frac{z''z - z'(z+z')}{z^2 e^x}$$

pertanto y è soluzione dell'equazione data se

$$\frac{z''z - z'(z+z')}{z^2 e^x} = \frac{2z'}{ze^x} - e^x \frac{z'^2}{z^2 e^{2x}}.$$

Semplificando, si ha

$$z'' = 3z$$

da cui l'integrale generale è

$$z(x) = c_1 + c_2 e^{3x}$$

ed anche si ha

$$z'(x) = 3c_2 e^{3x}$$

cioè, per la posizione (9), l'integrale generale dell'equazione data è

$$y = y(x, c) = \frac{3e^{3x}}{e^{4x} + ce^x} = \frac{1}{\dfrac{e^x}{3} + \dfrac{c'}{e^{2x}}}$$

(si veda anche l'esercizio 5.23)]

OSSERVAZIONE 1. Un altro metodo per risolvere un'equazione di Riccati

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$$

conoscendo a priori un suo integrale particolare $u(x)$, consiste nel verificare che ogni sua soluzione sia della forma

$$y = u(x) + \frac{1}{z(x)}$$

con z da determinare. Si verifica che z soddisfa un'equazione di Bernoulli e non un'equazione lineare come visto nell'esercizio 5.102. tale metodo può rivelarsi più efficiente dell'altro.
Imponendo che la $y = u + \frac{1}{z}$ risolva l'equazione assegnata, tenendo conto che

$$y' = u' - \frac{z'}{z^2}$$

l'equazione sarà soddisfatta da y se

$$u' - \frac{z'}{z^2} = a(u + \frac{1}{z}) + b(u + \frac{1}{z})^2 + c$$

$$= au + \frac{a}{z} + bu^2 + b(\frac{2u}{z} + \frac{1}{z^2}) + c$$

$$= u' + \frac{a + 2bu}{z} + \frac{b}{z^2}$$

Semplificando si ricava l'equazione per z

$$z' = -(a + bu)z - b.$$

5.108 Integrare l'equazione differenziale di Riccati

$$y' = y^2 + \frac{1}{x}y - c^2x^2 \tag{10}$$

sapendo che $u = ax$ è un suo integrale particolare.

[Cerchiamo una soluzione della forma

$$y = u(x) + \frac{1}{z(x)} = ax + \frac{1}{z(x)}$$

con $z(x)$ da determinarsi.
Si ha, da un lato

$$y' = a - \frac{z'}{z^2}$$

e dall'altro, imponendo la (10), si ha

$$a - \frac{z'}{z^2} = (ax + \frac{1}{z(x)})^2 + \frac{1}{x}(ax + \frac{1}{z(x)}) - a^2x^2 = 2\frac{ax}{z} + \frac{1}{z^2} + a + \frac{1}{xz}.$$

Risolvendo rispetto a z', si trova l'equazione differenziale lineare in z

$$z' = -2axz - 1 - \frac{z}{x} = -[2ax + \frac{1}{x}]z - 1;$$

il cui integrale generale è

$$z(x) = \frac{e^{-\frac{a}{2}x^2}}{x}\{-\frac{e^{\frac{a}{2}x^2}}{x} + c\}]$$

5.109 Determinare l'integrale generale dell'equazione di Riccati

$$y' = -2xy + y^2 + x^2 + 1$$

sapendo che $u(x) = x$ è una sua soluzione particolare.

[Imponendo che $y = x + \frac{1}{z}$ sia soluzione, si deduce l'equazione $z' = -1$ e quindi l'espressione dell'integrale generale $y = x + \frac{1}{c - x}$]

PROPOSIZIONE 2. *Se $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione positiva con derivata prima continua, allora l'equazione (1) ammette una soluzione della forma*

$$y = c(x)\frac{w}{w'} \tag{11}$$

con $w = w(x)$ soluzione dell'equazione lineare omogenea del 2^0 ordine

$$w'' = \left(\frac{c'(x)}{c(x)} - a(x)\right) w' - b(x)c(x)w \tag{12}$$

DIM. Cerchiamo una soluzione della (1) sotto la forma (11), con $w = w(x)$ da determinarsi. Derivando la (11), si ha

$$y' = \frac{c'(x)w + c(x)w' - c(x)ww''}{w'^2} \tag{13}$$

e quindi, affinchè sia soddisfatta la (1), dovrà risultare

$$\frac{c'(x)ww' + c(x)w'^2 - c(x)ww''}{w'^2} = a(x)c(x)\frac{w}{w'} + b(x)c(x)^2\frac{w^2}{w'^2} + c(x)$$

Essendo necessariamente $w' \neq 0$, dividendo per $c(x)$, si ha

$$\frac{c'(x)}{c(x)}ww' + w'^2 - ww'' = a(x)ww' + b(x)c(x)w^2 + w'^2$$

da cui, semplificando ulteriormente

$$\frac{c'(x)}{c(x)}ww' - ww'' = a(x)ww' + b(x)c(x)w''.$$

Pertanto, in definitiva, w risolve l'equazione differenziale lineare omogenea del 2^0 ordine

$$w'' = \left(\frac{c'(x)}{c(x)} - a(x)\right)w' - b(x)c(x)w$$

la cui equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + c = 0$$

con soluzioni $\lambda = \pm\, i\, c_0$. Pertanto l'integrale generale della (12) è

$$w = c_1 \operatorname{sen}(c_0 \log x) + c_2 \cos(c_0 \log x)$$

al variare di c_1 e c_2.

Allora, scegliendo

$$w = \operatorname{sen}(c_0 \log x)$$

si ha

$$w' = \cos(c_0 \log x)\frac{c_0}{x}.$$

Da cui

$$y = c_0\,\frac{w}{w'} = x\,\frac{\operatorname{sen}(c_0 \log x)}{\cos(c_0 \log x)} = x \operatorname{tg}(c_0 \log x).]$$

5.110 Risolvere l'equazione di Riccati ($x > 0$)

$$y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}y^2 + c_0$$

ove $c_0 \in \mathbb{R}$.

[Cerchiamo, a norma della Proposizione 2, una soluzione della forma

$$y = c_0\,\frac{w}{w'}$$

Ne segue che w soddisfa l'equazione lineare di Eulero (si veda il paragrafo 4F)

$$x^2w'' + xw' + cw = 0$$

che si risolve ponendo $x = e^t$. Si ottiene così l'equazione lineare a coefficienti costanti

$$\frac{d^2v}{dt^2} + c_0 v = 0$$

5N. Esercizi di riepilogo

In questo paragrafo proponiamo, in ordine sparso, la risoluzione di alcune equazioni differenziali (o problemi di Cauchy) del primo ordine dei tipi considerati nei paragrafi precedenti, ivi comprese le equazioni lineari.

5.111 $y' = 4x + xy^2$ $[y(x) = 2\text{tg}\,(x^2 + c)]$

5.112 $y' = 4x + xy$ $[y(x) = ce^{x^2/2} - 4]$

5.113 $y' = y - xy^2$ $[y(x) = 1/(x - 1 + ce^{-x});\ y(x) = 0]$

5.114 $y' = y/(x + y)$ $[y(x) = 0;\ x = y \log cy]$

5.115 $y' = 2xy - (x^2 + y^2)$ $[y(x) = x - \text{tg}\,(x + c)]$

5.116 $y' = 2\left(\dfrac{y+4}{x+y}\right)^2$ $\left[2\text{arctg}\,\dfrac{y+4}{x-4} + \log cy = 0\right]$

5.117 $y' = \dfrac{3xy}{x^2 - x - 2}$ $[y(x) = c(x+1)(x-2)^2]$

5.118 $y' = \dfrac{x^5 + 4y}{x}$ $[y(x) = x^5 + cx^4]$

5.119 $y' = \dfrac{2y}{x + y}$ $[y(x) = 0;\ (x - y)^2 + cy = 0]$

5.120 $y' = \dfrac{y^2}{x^2 + xy}$ $[y(x) = 0;\ y + x \log +cy = 0]$

5.121 $y' = \dfrac{x + 3y - 1}{3 - x - 3y}$ $[\log|3y + x| = x + y + c]$

5.122 $y' = \dfrac{3(y+1) - 2x}{4(y+1) - 3x}$ $[x^2 + 2y^2 - 3xy - 3x + 4y = c]$

5.123 $y' = \dfrac{2(2x-y)^2 + 11(y - 2x) + 14}{(y - 2x + 3)^2}$

$[(y - 2x + 2)^2/2 + \log|y - 2x + 4| = c - x]$

5.124 $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x} - 1$ $\quad [y(x) = 1 - x\log(cx)]$

5.125 $x = \operatorname{sen} y' + y'\cos y'$ $\quad [x(t) = \operatorname{sen} t + t\cos t, y(t) = t^2\cos t + c]$

5.126 $y = 2(y')^3 - 3(y')^2$ $\quad [x(t) = 3(t-1)^2 + c,\ y(t) = 2t^3 - 3t^2;\ y(x) = 0]$

5.127 $y = xy' - y^2$ $\quad [y(x) = cx/(1 - cx);\ y(x) = -1]$

5.128 $y = xy' - (y')^2$ $\quad [y(x) = cx - c^2;\ y(x) = x^2/4]$

5.129 $x = y + (y' - 1)^2$ $\quad [y(x) = x - (x-c)^2/4; y(x) = x]$

5.130 $y = x^2y' - y^2$ $\quad [y(x) = c/(c - e^{1/x});\ y(x) = -1]$

5.131 $y = xy' - \log y'$ $\quad [y(x) = 1 + \log x\ \ y(x) = cx - \log c]$

5.132 $y = (y')^2 - \log y'$ $\quad [x(t) = 2t + (1/t) + c,\ y(t) = t^2 - \log t]$

5.133 $x + yy' = 0$ $\quad [y^2 + x^2 = c^2]$

5.134 $yy' = \sqrt{1 - y^2}$ $\quad [(x+c)^2 + y^2 = 1$, con la condizione $yy' \geq 0]$

5.135 $2y + (x^2 - 1)y' = 0$ $\quad [y(x) = c(x+1)/(x-1)]$

5.136 $2y' + (x^2 - 1)y = 0$ $\quad [y(x) = ce^{-(x^3/6)+(x/2)}]$

5.137 $2xyy' - x^2 - y^2 = 0$ $\quad [y^2 = x^2 + cx]$

5.138 $(x + y + 2)y' + x + y + 1 = 0$ $\quad [(x+y+2)^2 = 2x + c]$

5.139 $ye^{y'} = 1 - y'$ $\quad [y(x) = 1;\ y(x) = (x+c)(1 - \log(x+c))]$

5.140 $y' = e^y(1 - x);\ \ y(0) = \log 2$ $\quad [y(x) = -\log((x-1)^2/2)]$

5.141 $xy' + y = e^{-x};\ \ y(-1) = 0$ $\quad [y(x) = (e - e^{-x})/x]$

5.142 $y' = y + e^x;\ y(0) = 0$ $\quad[y(x) = xe^x]$

5.143 $xy' + y = 2\sqrt{x^3 y};\ y(1) = 1$ $\quad[y(x) = (x^2+1)^2/4x]$

5.144 $1 - y' = \sqrt{1-(x-y)^2};\ y(0) = 0$ $\quad[y(x) = x - \operatorname{sen} x]$

5.145 $y' = \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}};\ y(0) = -1$ $\quad[y(x) = -\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 1}]$

5.146 $y' = x - \frac{2y}{x^2-1};\ y(0) = 0$ $\quad[y(x) = \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + \log\left[(x+1)^2\right]\right)]$

5.147 $y' = \cos(x+y-1);\ y(0) = 1$ $\quad[y(x) = 1 - x + 2\operatorname{arctg} x]$

5.148 $y' = \cos^2 y;\ y(0) = \pi$ $\quad[y(x) = \pi + \operatorname{arctg} x]$

5.149 $y' = y\operatorname{tg} x;\ y(0) = 2$ $\quad[y(x) = 2/\cos x]$

5.150 $x = \cos^2 y'$ $\quad[x(t) = \cos^2 t,\ y(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t) + c]$

5.151 $y = y'(x - \operatorname{sen} y')$ $\quad[y(x) = c(x - \operatorname{sen} c);\ x(t) = \operatorname{sen} t + t\cos t,$
$y(t) = t^2 \cos t]$

5.152 $y'\operatorname{sen} x + y(\cos x - \operatorname{sen} x) - x = 0$ $\quad[y(x) = (ce^x - 1 - x)/\operatorname{sen} x]$

5.153 $y'\operatorname{sen} x - (xy + \operatorname{sen} x + \cos x)y = 0$ $\quad[y(x) = 0;\ y(x) = \operatorname{sen} x/(1 - x + ce^{-x})]$

5.154 $x^2 y' = \cos^2 \sqrt{y'}$ $\quad[x(t) = (\cos t)/t, y(t) = t\cos t - 2\operatorname{sen} t + c,$
con $t = \sqrt{y'}]$

5.155 $x = \frac{2(y')^2}{1+(y')^2} - \operatorname{arctg} y'$ $\quad[x(t) = \frac{2t^2}{1+t^2} - \operatorname{arctg} t,\ y(t) = \frac{2t^3}{1+t^2} + c]$

5.156 $x(y')^{3/2} = 1 + y(y')^{1/2}$ $\quad[y(x) = cx - 1/\sqrt{c};\ y(x) = (3/2)(2x)^{1/3}]$

5.157 $(\frac{1}{y'})^2 + 1 = \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{y'}\right)^2$ $\quad[x^2 + y^2 = cy]$

5.158 $x = \dfrac{y'}{y'+1} + \log(y'+1)$ $\quad\left[x(t) = \dfrac{t}{t+1} + \log(t+1),\right.$ $\left. y(t) = \dfrac{t^2}{t+1} + c\right]$

5.159 $y' + \dfrac{2x+y}{x+2y+1} = 0$ $\quad[x^2 + y^2 + xy + y = c]$

5.160 $x^2(y'-1) - y(1+2x) = 0$ $\quad[y(x) = x^2(ce^{-1/x} - 1)]$

5.161 $x^2 + 4y = (x+2y')^2$ $\quad[y(x) = cx + c^2;\ y(x) = -x^2/4]$

Capitolo 6

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

6A. Generalità

Una relazione del tipo

$$g(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0\,,$$

con x variabile indipendente, $y = y(x)$ funzione incognita e $y^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ derivata i-esima di $y(x)$, prende il nome di equazione differenziale (ordinaria) di ordine n.

Una *soluzione* (o *integrale particolare*) è una funzione $y = y(x)$ definita in un intervallo I (con interno non vuoto) di $\mathbb{R}$, derivabile n volte in I e tale che $g(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ per ogni $x \in I$.

Un'equazione differenziale di ordine n si dice in *forma normale* se può essere rappresentata da

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\,,$$

con f funzione reale di $n + 1$ variabili reali. Per le equazioni differenziali di tipo normale vale il seguente teorema di Cauchy di esistenza ed unicità:

TEOREMA DI CAUCHY. - *Sia $n \geq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $(y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$. Sia f una funzione reale di $n + 1$ variabili reali, di classe C^1 in un intorno di $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$. Allora esiste una funzione reale di una variabile reale $y = y(x)$, di classe C^n in un intorno di x_0, soddisfacente il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0\,; \quad y'(x_0) = y_0'\,; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

6.1 Nelle ipotesi del teorema di Cauchy sopra enunciato, provare che:

(a) la soluzione $y(x)$ è di classe C^{n+1};

(b) se f è di classe C^k, per qualche $k \geq 1$, allora $y(x)$ è di classe C^{n+k}.

(c) se f è di classe C^∞ allora anche $y(x)$ è di classe C^∞.

[(a) Secondo il teorema di Cauchy $y(x)$ è una funzione di classe C^n che verifica in un intorno di x_0 l'equazione differenziale

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)).$$

Per ipotesi la funzione di $n+1$ variabili f è di classe C^1; è perciò anche differenziabile. In base alla regola di derivazione delle funzioni composte, il secondo membro dell'equazione differenziale è derivabile. Perciò anche $y^{(n)}(x)$ è derivabile e si ha

$$y^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} y^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) = f_x + f_y y' + f_{y'} y'' + \ldots + f_{y^{(n-1)}} y^{(n)}.$$

Dato che y è di classe C^n, dalla rappresentazione trovata si deduce che $y^{(n+1)}(x)$ è una funzione continua; perciò y è di classe C^{n+1}.
(b) Con $k > 1$ si può procedere per induzione in modo analogo al caso $k = 1$ già considerato in (a).
(c) Diretta conseguenza di (b)]

Nei paragrafi seguenti prendiamo in considerazione equazioni differenziali di ordine superiore primo, che si risolvono con opportune sostituzioni della funzione incognita, allo scopo di abbassare l'ordine dell'equazione. In particolare prendiamo in considerazione alcuni tipi di equazioni del secondo ordine la cui risoluzione può essere ricondotta a quella di equazioni del primo ordine. Le equazioni possono essere non lineari, ma i metodi di risoluzione si applicano anche alle equazioni differenziali lineari.

6B. Equazioni della forma $g(x, y', y'') = 0$

Se un'equazione differenziale del secondo ordine è della forma

$$g(x, y', y'') = 0,$$

cioè se la funzione g non dipende esplicitamente da y, allora si può abbassare l'ordine con la sostituzione $z(x) = y'(x)$. Infatti, essendo $z'(x) = y''(x)$, l'equazione nell'incognita z diviene

$$g(x, z, z') = 0.$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine che, se possibile, si risolve con uno dei metodi indicati nei capitoli 4 e 5. Dopo aver calcolato $z(x)$, si determinano le soluzioni $y(x)$ come primitive di $z(x)$.

Si noti che in generale z, soluzione di un'equazione differenziale del primo ordine, dipende da una costante arbitraria $z = z(x, c_1)$; perciò y, primitiva di z, dipende da due costanti arbitrarie: $y(x) = Z(x, c_1) + c_2$, con $Z' = z$.

6.2 Risolvere le equazioni differenziali

(a) $y'' - (y')^2 = 1$ (b) $y'' + (y')^2 = 0$

[(a) Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine mancante della y (oltre che della x). Con la sostituzione $z(x) = y'(x)$, essendo $z' = y''$, si ottiene l'equazione del primo ordine

$$z' - z^2 = 1$$

che è del tipo a variabili separabili. Risulta $dz/dx = 1 + z^2$, da cui

$$\operatorname{arctg} z = \int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx = x + c_1\,.$$

Perciò $z(x) = \operatorname{tg}(x + c_1)$ e quindi

$$y(x) = \int z(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x+c_1)}{\cos(x+c_1)}\,dx = c_2 - \log|\cos(x+c_1)|\,.$$

(b) Con la sostituzione $z(x) = y'(x)$ otteniamo l'equazione $z' + z^2 = 0$ che si risolve con il metodo delle equazioni a variabili separabili. Oltre a $z = 0$ (che annulla il denominatore e che corrisponde a $y(x) =$ costante) si ottengono le soluzioni

$$\frac{1}{z} = \int -\frac{dz}{z^2} = \int dx = x + c_1\,,$$

da cui $z(x) = 1/(x + c_1)$ e quindi

$$y(x) = \int z(x)\,dx = \int \frac{dx}{x+c_1} = \log|x+c_1| + c_2\,.$$

Si noti che, ponendo $c_3 = \pm e^{c_2}$, $c_4 = \pm c_1 c_3$, è possibile esprimere le soluzioni nella forma $y(x) = \log(c_3 x + c_4)$. In questo modo si rappresentano anche le soluzioni costanti (per $c_3 = 0$)]

6.3 Risolvere l'equazione differenziale

$$2xy'y'' - (y')^2 + 3 = 0$$

[Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine mancante della y. Con la sostituzione $z(x) = y'(x)$, essendo $z' = y''$, si giunge a

$$2xzz' - z^2 + 3 = 0\,.$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine del tipo di Bernoulli (paragrafo 5B), che si risolve con la sostituzione $w(x) = z^2(x)$. Dato che $w' = 2zz'$, rispetto all'incognita w si ottiene l'equazione differenziale lineare

$$w' = \frac{1}{x}w - \frac{3}{x}$$

le cui soluzioni sono $w(x) = c_1 x + 3$. In corrispondenza risulta $z(x) = \pm\sqrt{c_1 x + 3}$, da cui

$$y(x) = \int z(x)\,dx = \pm \int \sqrt{c_1 x + 3}\,dx = \frac{\pm 2}{3c_1}(c_1 x + 3)^{3/2} + c_2\,.$$

Tali funzioni $y(x)$ sono definite per ogni valore della costante $c_1 \in \mathbb{R}$, con $c_1 \neq 0$; invece, se $c_1 = 0$, risulta

$$y(x) = \int z(x)\,dx = \pm \int \sqrt{3}\,dx = \pm\sqrt{3}x + c_2\,.$$

Riassumendo, le soluzioni sono date da $y(x) = c_2 \pm (2/3c_1)(c_1 x + 3)^{3/2}$, $\forall c_1 \neq 0$, $\forall c_2 \in \mathbb{R}$ e da $y(x) = c_2 \pm \sqrt{3}x$]

6.4 Risolvere l'equazione differenziale

$$y = x(2 - y'')$$

[Si tratta di un'equazione differenztale del secondo ordine mancante della y. Posto $z(x) = y'(x)$ (da cui $z' = y''$) si ottiene $z = x(2 - z')$ che è un'equazione lineare del primo ordine. Le soluzioni sono date da $z(x) = (c_1/x) + x$, da cui

$$y(x) = \int z(x)\,dx = \int \left(\frac{c_1}{x} + x\right)\,dx = c_1 \log|x| + \frac{x^2}{2} + c_2]$$

6.5 Risolvere le equazioni differenziali

(a) $\quad y' = xy'' - (y'')^2$ $\qquad$ (b) $\quad y' = xy'' - (y'')^{-1/2}$

[(a) L'incognita $z(x) = y'(x)$ soddisfa l'equazione di Clairaut $z = xz' - (z')^2$. Come indicato nel paragrafo 5H, l'equazione ammette come soluzioni la famiglia di rette

$$z(x) = c_1 x - c_1^2 \qquad\qquad (c_1 \in \mathbb{R})$$

e l'integrale singolare di equazioni parametriche

$$x(t) = -2t, \qquad\qquad z(t) = t^2$$

il quale, posto $t = -x/2$, si può anche scrivere nella forma cartesiana $z = x^2/4$. In corrispondenza si ottengono le soluzioni dell'equazione iniziale

$$y(x) = \int z(x)\,dx = \int (c_1 x - c_1^2)\,dx = \frac{c_1}{2}x^2 - c_1^2 x + c_2\,;$$

$$y(x) = \int z(x)\,dx = \int \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{x^3}{12} + c$$

(b) $y(x) = \dfrac{c_1}{2}x^2 - \dfrac{x}{\sqrt{c_1}}; \quad y(x) = \dfrac{9}{8}\sqrt[3]{2}x^{4/3} + c$]

6.6 Risolvere le equazioni differenziali

$$y' = xy'' - (y')^2$$

[Con la sostituzione $z(x) = y'(x)$ si ottiene l'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili $z' = (z^2 + z)/x$, che ammette come soluzioni

$$z(x) = \frac{c_1 x}{1 - c_1 x} \qquad (c_1 \in \mathbb{R}); \qquad z(x) \equiv -1 .$$

In corrispondenza alla funzione costante $z(x) = -1$ si ha $y(x) = c - x$, mentre le altre soluzioni sono espresse da

$$y(x) = \int z(x)\, dx = \int \frac{c_1 x}{1 - c_1 x}\, dx = \int (-1 + \frac{1}{1 - c_1 x})\, dx = -x - \frac{1}{c_1} \log |1 - c_1 x| + c_2$$

se $c_1 \neq 0$, altrimenti $y(x)$ =costante]

6.7 Integrare l'equazione differenziale

$$xy'' + y' \log x - y' \log y' = 0$$

[Con la sostituzione $z(x) = y'(x)$ si ottiene l'equazione differenziale equivalente $z' = (z/x) \log (z/x)$, che è del tipo $z' = g(z/x)$ e che si integra (si veda il paragrafo 5C) ponendo $w = z/x$ (da cui $z = xw$, $z' = w + xw'$). Ne risulta l'equazione del primo ordine $w + xw' = w \log w$ che si risolve separando le variabili

$$\log | \log w - 1| = \int \frac{dw}{w(\log w - 1)} = \int \frac{dx}{x} = \log (c_1 x) ,$$

oltre alla funzione costante $w = e$, che annulla il denominatore ($w = 0$ è da scartare). Pur di cambiare il segno di c_1, risulta $\log w - 1 = c_1 x$, da cui, ricordando che $z(x) = xw(x)$ e che $y'(x) = z(x)$,

$$\begin{aligned} y(x) &= \int z(x)\, dx = \int xw(x)\, dx = \int xe^{1+c_1 x}\, dx = \\ &= \frac{x}{c_1} e^{1+c_1 x} - \frac{1}{c_1} \int e^{1+c_1 x}\, dx = \left(\frac{x}{c_1} - \frac{1}{c_1^2} \right) e^{1+c_1 x} + c_2 . \end{aligned}$$

A tali soluzioni va aggiunta quella corrispondente a $w = e$, cioè ($z = xw$) $z = ex$, cioè ancora ($y' = z$) $y(x) = (e/2)x^2 + c$]

6.8 Determinare le soluzioni delle equazioni lineari

(a) $y'' + y' = e^{-x} \cos x$ (b) $xy'' = 2y' + x + 1$

(c) $xy'' = 3y' + x^4 e^x$ (d) $y'' + y' \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x \cos x = 0$

[(a) Con la sostituzione $z(x) = y'(x)$ si ottiene l'equazione differenziale lineare del primo ordine $z' + z = e^{-x} \cos x$, che ha per soluzioni

$$z(x) = e^{-x} (\operatorname{sen} x + c_1) .$$

Calcoliamo per parti l'integrale indefinito:

$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{-x} \operatorname{sen} x + \int e^{-x} \cos x \, dx = -e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx ,$$

da cui $\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{-x} (\operatorname{sen} x + \cos x)/2$. Perciò le soluzioni sono espresse da

$$y(x) = \int e^{-x} (\operatorname{sen} x + c_1) \, dx = -e^{-x} \left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2} + c_1 \right) + c_2 .$$

(b) $y(x) = c_1 x^3 - (x^2 + x)/2 + c_2$.
(c) $y(x) = c_1 x^4 + e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c_2$.
(d) $y(x) = (x + \operatorname{sen} x \cos x)/2 + c_1 \operatorname{sen} x + c_2$]

6.9 Risolvere le equazioni differenziali lineari

(a) $y'' - \dfrac{4}{x} y' = x^4$

(b) $y'' - \dfrac{1}{x} y' = 1 - \dfrac{1}{x}$

(c) $y'' + \dfrac{2}{x^2 - 1} y' = 0$

[(a) $y(x) = x^6/6 + c_1 x^5 + c_2$; (b) $y(x) = x + (x^2/2) \log (c_1 x) - (x^2/4) + c_2$; (c) $y(x) = c_1 (x + 2 \log |x - 1| + c_2)$]

6.10 Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + (y' - x)^2 = 0$$

[Con la sostituzione $y'(x) = z(x)$ si perviene a $z' + (z - x)^2 = 0$, che è un'equazione del tipo $z' = g(ax + bz)$ (si veda il paragrafo 5D) che si risolve con la sostituzione $w(x) = z(x) - x$. Essendo $w' = z' - 1$, si ha $w' + 1 + w^2 = 0$, da cui, separando le variabili

$$\operatorname{arctg} w = \int \frac{dw}{1 + w^2} = - \int dx = -(x + c_1) .$$

Perciò $w = \operatorname{tg} [-(x + c_1)] = -\operatorname{tg} (x + c_1)$, cioè $y'(x) = z(x) = x + w(x) = x - \operatorname{tg} (x + c_1)$. Infine

$$y(x) = \int z(x) \, dx = \frac{x^2}{2} + \log |\cos (x + c_1)| + c_2]$$

6.11 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$xy'' + y' + (xy')^2 = 0$$

[Con la sostituzione $z(x) = y'(x)$ si perviene ad un'equazione di Bernoulli che ammette le soluzioni $z(x) = 1/(x^2 + c_1 x)$, oltre alla funzione costante $z(x) = 0$. Quindi, oltre a $y(x) = c$, l'equazione data ammette le soluzioni

$$y(x) = \int \frac{dx}{x^2 + c_1 x} = \int \frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + c_1}\right) dx = \frac{1}{c_1}\log\left|\frac{x}{x + c_1}\right| + c_2$$

se $c_1 \neq 0$; altrimenti, per $c_1 = 0$, si ottengono le ulteriori soluzioni $y(x) = -(1/x) + c$]

6.12 Risolvere le equazioni differenziali

(a) $(1 - y'')^2 + y' = x$

(b) $xy'' - y' + e^{2y''} = 0$

[(a) $y(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{12}(x - c_1)^3 + c_2$; $y(x) = \dfrac{x^2}{2}$.
(b) $y(x) = \dfrac{c_1}{2}x^2 + xe^{2c_1} + c_2$; $y(x) = \dfrac{x^2}{4}\log\left(\dfrac{-x}{2}\right) - \dfrac{3}{8}x^2 + c$]

6.11 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'y'' = (y')^2 - x \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

[Con la sostituzione $z(x) = y'(x)$ si giunge all'equazione del primo ordine del tipo di Bernoulli $2zz' = z^2 - x$, che ha come soluzioni $z(x) = \pm\sqrt{c_1 e^x + 1 + x}$. Dalla condizione iniziale $z(0) = y'(0) = 1$ si deduce che $c_1 = 0$ e che $z(x) = +\sqrt{1 + x}$. Integrando $z(x)$ si trova $y(x) = c_2 + (2/3)(1 + x)^{3/2}$; imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ si determina $c_2 = 1/3$. Perciò la soluzione del problema di Cauchy (per $x > -1$) è $y(x) = [1 + 2(1 + x)^{3/2}]/3$]

6.14 Risolvere i problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} y'' + (y')^3 = 0 \\ y(2) = 2; \quad y'(2) = 1/2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} xy'' + y' = 1 \\ y(1) = 1; \quad y'(1) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (1 + x^2)y'' + 1 + (y')^2 = 0 \\ y(1) = 1/2; \quad y'(1) = -1 \end{cases}$

[(a) $y(x) = \sqrt{2x}$; (b) $y(x) = x - \log x$; (c) $y(x) = 1 - (x^2/2)$]

6.15 Determinare, per ogni $b \in \mathbb{R}$ e per ogni $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''\cos x - y'\operatorname{sen} x + b\cos x = 0 \\ y(0) = y_0; \quad y'(0) = y_0' \end{cases}$$

[Con la sostituzione $z(x) = y'(x)$ si giunge all'equazione lineare del primo ordine $z' = z\operatorname{tg} x - b$, le cui soluzioni sono espresse da $z(x) = (c_1/\cos x) - b\operatorname{tg} x$. In base alla condizione iniziale $z(0) = y'(0) = y_0'$ risulta $c_1 = y_0'$; quindi

$$y(x) = \int z(x)\,dx = y_0' \int \frac{dx}{\cos x} - b \int \operatorname{tg} x\,dx = c_1 + y_0' \log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + b \log|\cos x|$$

(per il calcolo delle primitive di $1/\cos x$ si vedano gli esercizi 4.21, 4.22 del 1° volume, parte seconda). Infine, imponendo la condizione $y(0) = y_0$ si trova $c_1 = y_0$]

6.16 La legge del moto ($s = s(t)$, spazio in funzione del tempo) relativa ad un punto materiale soggetto all'accelerazione di gravità che, partendo da una posizione di equilibrio per $t = 0$, cade attraverso un mezzo resistente, soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} s'' = g - ks' \\ s(0) = 0; \quad s'(0) = 0\,, \end{cases}$$

dove g è l'accelerazione di gravità e $k(> 0)$ una costante di attrito (che è inversamente proporzionale alla massa del corpo). Determinare la velocità asintotica (circa uguale alla velocità che ha il corpo al momento di toccare il terreno, se cade da una grande altezza), cioè il limite per $t \to +\infty$ di $v(t) = s'(t)$.

[L'equazione differenziale (lineare) non dipende esplicitamente da s. Con la sostituzione $v(t) = s'(t)$ otteniamo il problema di Cauchy

$$v' = g - kv\,; \qquad v(0) = 0\,.$$

Si può determinare il limite per $t \to +\infty$ di $v(t)$ con il metodo (di integrazione grafica) proposto nel paragrafo 5L. A tale scopo si osservi preliminarmente che $v'(t) > 0$ nella zona $g - kv > 0$, cioè per $v < g/k$. Essendo $v(0) = 0$, risulta $v(t) < g/k$ per ogni $t \geq 0$ (infatti, per il teorema di unicità, $v(t)$ non può assumere il valore g/k, essendo tale valore costante soluzione, al pari di $v(t)$, dell'equazione differenziale). Indicando con $l \in (0, g/k]$ il limite per $t \to +\infty$ di $v(t)$, dato che $v'(t) \to 0$, dall'equazione differenziale si ottiene $0 = g - kl$, cioè $l = g/k$. Perciò la velocità asintotica per $t \to +\infty$ è g/k.

Osserviamo che è semplice risolvere il problema di Cauchy e che si trova

$$v(t) = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})\,; \qquad s(t) = \frac{g}{k}[t + \frac{1}{k}(e^{-kt} - 1)]\,.$$

Il modello proposto descrive, ad esempio, il moto di una goccia di pioggia che si origina nell'atmosfera, diciamo a 1000 metri di altezza e che cade verso il suolo. La sua accelerazione s'' è il risultato della somma algebrica dell'accelerazione di gravità g e dell'accelerazione, contraria al moto, dovuta all'attrito con l'aria e proporzionale alla velocità s'. Con tale modello la velocità asintotica per $t \to +\infty$ risulta finita. Viceversa, se assumessimo come modello quello della caduta libera nel vuoto (quindi senza attrito) avremmo il moto uniformemente accelerato (soluzione del problema di Cauchy $s'' = g$; $s(0) = s_0 = 0$; $s'(0) = v_0 = 0$):

$$v(t) = v_0 + gt = gt\,, \qquad s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2;$$

in tal caso, se lo spazio percorso per raggiungere il suolo è di 1000 metri, il tempo impiegato sarebbe

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \cong \sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{9.8}} \cong -14.2 \text{ secondi}$$

e la velocità corrispondente

$$v = gt \cong 9.8 \cdot 14.2 = 139.16 \text{m/s}.$$

La velocità di 139 metri al secondo circa uguale alla velocità di 500 km all'ora (si moltiplica per 3600 (secondi) e si divide per 1000 (metri)). Se una goccia d'acqua arrivasse al suolo a tale velocità avrebbe un effetto devastante. Invece, nella realtà, ciò non avviene; significa, che il modello matematico descritto all'inizio è più realistico del modello (di caduta nel vuoto) del moto uniformemente accelerato]

6C. Equazioni della forma $g(y, y', y'') = 0$

Nel caso in cui un'equazione differenziale del secondo ordine non dipenda esplicitamente dalla variabile indipendente x, cioè sia del tipo

$$g(y, y', y'') = 0\,,$$

allora è opportuno, come nel paragrafo precedente, eseguire la sostituzione $z = y'$, considerando però, in questo caso, y come variabile indipendente.

Cioè, più precisamente, si pone $z(y) = y'$ e risulta

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'y' = z'z\,.$$

Si ottiene quindi un'equazione differenziale del primo ordine nella forma $g(y, z, z'z) = 0$ che, se possibile, si risolve con uno dei metodi indicati nei capitoli 4 e 5, pervenendo ad un insieme di funzioni della forma $z = z(y, c_1)$, con c_1 costante arbitraria. Ricordando che $z = y'$, si ottiene la nuova equazione differenziale del primo ordine (con c_1 parametro)

$$y' = z(y, c_1)$$

che, non dipendendo esplicitamente da x, è a variabili separabili.

6.17 Risolvere l'equazione $y'' + (y')^2 = 0$.

[Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine mancante della x (oltre che della y). Con la sostituzione $z(y) = y'$, essendo $y'' = z'z$, si ottiene l'equazione del primo ordine

$$z'z + z^2 = 0,$$

cioè $z(z' + z) = 0$. Si presentano due possibilità: o $z = 0$ (e quindi $y' = 0$ da cui $y =$ costante), oppure $z' + z = 0$, da cui $z(y) = c_1 e^{-y}$. Ricordando che $y' = z$, abbiamo l'equazione differenziale del primo ordine in y:

$$y' = c_1 e^{-y}$$

che, risolta con il metodo della separazione delle variabili, fornisce le soluzioni

$$e^y = \int e^y\, dy = \int c_1\, dx = c_1 x + c_2\,.$$

Tutte le soluzioni sono quindi espresse da $y(x) = \log(c_1x+c_2)$. In particolare le soluzioni costanti si ottengono per $c_1 = 0$. Si confronti il metodo qui proposto con quello dell'esercizio 6.2 (b)]

6.17 Risolvere le equazioni del secondo ordine

(a) $2yy'' = 1 + (y')^2$ (b) $2yy'' = (y')^2$

(c) $yy'' = (y')^2$ (d) $yy'' + (y')^2 = 0$

[(a) Poniamo $z(y) = y'$, da cui $y'' = zz'$. Si ottiene l'equazione del primo ordine $2yzz' = 1 + z^2$. Separando le variabili abbiamo (si noti che $y \equiv 0$ non è soluzione):

$$\log(1+z^2) = \int \frac{2z\, dz}{1+z^2} = \int \frac{dy}{y} = \log c_1 y\,,$$

cioè $1 + z^2 = c_1 y$, cioè ancora $z = \pm\sqrt{c_1y-1}$.
Ricordando che $y' = z$, risolviamo le equazioni $y' = \pm\sqrt{c_1y-1}$ separando le variabili

$$\frac{2}{c_1}\sqrt{c_1y-1} = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1y-1}} = \pm\int dx = \pm(x+c_2)\,.$$

In forma cartesiana si ha infine

$$y(x) = \frac{c_1}{4}(x+c_2)^2 + \frac{1}{c_1}\,.$$

(b) $y(x) = c_1(x+c_2)^2$; $y(x) = c\,.$

(c) $y(x) = c_2e^{c_1x}$. (d) $y(x) = \pm\sqrt{c_1x+c_2}$]

6.19 Determinare, per ogni valore dei parametri reali a, b, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - \frac{b}{y-a}(y')^2 = 0$$

[Poniamo $z(y) = y'$, da cui $y'' = zz'$. L'equazione diviene

$$z\left(z' - \frac{b}{y-a}z\right) = 0\,.$$

In corrispondenza a $z = 0$ otteniamo le soluzioni costanti.

Altrimenti l'equazione $z' - bz/(y-a) = 0$ si risolve separando le variabili

$$\log|z| = \int \frac{dz}{z} = \int \frac{b\, dy}{y-a} = \log(c_1|y-a|^b)$$

da cui, pur di cambiare il segno di c_1, $z(y) = c_1|y-a|^b$. Essendo $y' = z(y)$, risolviamo l'equazione differenziale $y' = c_1(y-a)^b$ (limitandoci al caso $y > a$ e supponendo $b \neq 1$) separando le variabili

$$\frac{(y-a)^{1-b}}{1-b} = \int \frac{dy}{(y-a)^b} = \int c_1\, dx = c_1 x + c_2\,.$$

Conglobando il fattore $1-b$ nelle costanti c_1, c_2, otteniamo la rappresentazione

$$y(x) = a + (c_1 x + c_2)^{1/(1-b)}\,.$$

Se invece $b = 1$ risulta $y(x) = a + e^{c_1 x + c_2}$]

6.20 Risolvere le equazioni differenziali del secondo ordine

(a) $\quad yy'' + (y')^2 - (y')^3 = 0$

(b) $\quad yy'' - (y')^2 - (y')^3 = 0$

(c) $\quad yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$

(d) $\quad yy'' - (y')^2 - y^2 y' = 0$

(e) $\quad yy'' + (y')^2 + y(y')^3 = 0$

[(a) $y = c$; $c_1 y^2 + y = x + c_2$. (b) $y = c$; $y - (1/c_1) \log c_1 y = c_2 - x$. (c) $y = c$; $y - (1/c_1) \log c_1 y = x - c_2$. (d) $y = c_1 e^{(x+c_2)/c_1} / [1 - e^{(x+c_2)/c_1}]$; $y(x) = -1/(x+c)$. (e) $y = c$; $c_1 y^2 + (y^2/2) \log y = x + c_2$]

6.21 Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{y''}{(y')^2} = \frac{y^2 - 1}{y(1+y^2)}$$

[L'incognita $z(y) = y'$ soddisfa l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{z'}{z} = \frac{y^2 - 1}{y(1+y^2)}$$

che si risolve separando le variabili

$$\log|z| = \int \left(\frac{2y}{1+y^2} - \frac{1}{y} \right) dy = \log \left(c_1 \frac{1+y^2}{y} \right),$$

da cui, pur di cambiare il segno di c_1, $z = c_1 (1+y^2)/y$. Ricordando che $y' = z$, separando di nuovo le variabili, otteniamo

$$\log(1+y^2) = \int \frac{2y}{1+y^2}\, dy = \int 2c_1\, dx = 2c_1 x + c_2\,,$$

da cui $y(x) = \pm (e^{2c_1 x + c_2} - 1)^{1/2}$]

6.22 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'' + y' + (y')^2 = 0 \\ y(0) = 0; \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

[Si effettua la sostituzione $z(y) = y'$, da cui $y'' = z'y' = z'z$. Si ottiene l'equazione di Bernoulli

$$zz' + y\frac{1}{z} + z = 0$$

che si risolve con la sostituzione

$$z^2 = w(y)\,, \qquad w' = 2zz'$$

riconducendosi all'equazione lineare del primo ordine

$$w' = -w - y$$

che risolta dà

$$w(y) = e^{-y}[-y\,e^y + e^y + c]\,.$$

È ora opportuno tener conto delle condizioni iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y'_0 = -1$, che si riassumono nella tabella

x	y	y'	z	w
0	0	-1	-1	$+1$

In particolare $w(0) = 1$, da cui $c = 0$. Si ottiene quindi

$$w(y) = e^{-y}[-y\,e^y + e^y] = 1 - y$$

e $y' = \pm\sqrt{1-y}$. Dalle condizioni iniziali si deduce che per $y = 0$ deve risultare $y' = -1$. Pertanto nella relazione precedente occorre scegliere il segno $-$, da cui $y' = -\sqrt{1-y}$. In definitiva la soluzione è $y(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 = -x - \frac{x^2}{4}$]

6.23 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2\operatorname{sen} y \cos^3 y = 0 \\ y(1) = 0\,; \quad y'(1) = 1 \end{cases}$$

[Con la sostituzione $z(y) = y'$ ($y'' = zz'$) otteniamo $zz' + 2\operatorname{sen} y\cos^3 y = 0$, da cui, separando le variabili,

$$\frac{z^2}{2} = \int z\,dz = \int -2\operatorname{sen} y \cos^3 y\,dy = \frac{1}{2}(\cos^4 y + c_1)\,.$$

Quindi $z^2 = c_1 + \cos^4 y$. Nel determinare la costante c_1 è opportuno ricordare che z è funzione di y; più esplicitamente, $z = z(y(x))$. Per $x = 1$ risulta $y = 0$ e $y' = z = 1$. Perciò, sostituendo i valori $y = 0$ e $z = 1$ otteniamo $1^2 = c_1 + 1^4$, da cui $c_1 = 0$. Quindi $z^2 = \cos^4 y$, cioè $z = \pm\cos^2 y$. Affinchè risulti $z = 1$ per $y = 0$ occorre scegliere il segno positivo; perciò $z = \cos^2 y$.

Essendo $y' = z$, si perviene all'equazione differenziale $y' = \cos^2 y$, che ha come soluzioni

$$\operatorname{tg} y = \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int dx = x + c_2\,.$$

Ricordando che $y = 0$ per $x = 1$, si ottiene $\operatorname{tg} 0 = 1 + c_2$, da cui $c_2 = -1$. In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \operatorname{arctg}(x-1)$]

6.24 Risolvere i problemi di Cauchy

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} y'' + \operatorname{sen} y \cos y = 0 \\ y(1) = 0\,; \quad y'(1) = -1 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} y''\cos y + (y')^2 \operatorname{sen} y = y' \\ y(0) = -\pi/6\,; \quad y'(0) = -1/2 \end{cases}$$

[(a) $y(x) = 2\operatorname{arctg} \dfrac{e^{1-x} - 1}{e^{1-x} - 1} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg} e^{1-x}$
(vale l'identità perché le due funzioni sono uguali per $x = 1$ ed hanno le derivate identicamente uguali fra loro).
(b) $y(x) = 2\operatorname{arctg}(-e^x \operatorname{tg}(\pi/12))$]

6.25 Risolvere i problemi di Cauchy

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} y'' = 3y^5 \\ y(2) = -1\,; \quad y'(2) = -1 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} y'' = y^5 + 1 \\ y(2) = -1\,; \quad y'(2) = 0 \end{cases}$$

[(a) $y(x) = -1\sqrt{5 - 2x}$; (b) la soluzione è immediata! È la funzione costante $y = \ldots$]

6.26 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1 + y^2)y'' = y(y')^2 \\ y(4) = 0\,; \quad y'(4) = 1 \end{cases}$$

[Con la sostituzione $z(y) = y'$, essendo $y' = zz'$, l'equazione differenziale si trasforma in $(1 + y^2)zz' = yz^2$. In corrispondenza a $z = 0$ si hanno le funzioni $y =$ costante, che però non verificano la condizione iniziale $y'(4) = 1$ e quindi non sono soluzioni del problema di Cauchy. Per $z \neq 0$ otteniamo $(1 + y^2)z' = yz$ cioè, separando le variabili

$$\log|z| = \int \frac{dz}{z} = \int \frac{y}{1 + y^2}\, dy = \frac{1}{2} \log(1 + y^2) + c_1\,.$$

Per $x = 4$ risulta $y = 0$ e $y' = z = 1$; ponendo $y = 0$ e $z = 1$ si determina $c_1 = 0$. Perciò $|z| = \sqrt{1 + y^2}$ ed ancora, essendo $z = y' = 1 > 0$ in corrispondenza di $x = 4$, abbiamo $z = \sqrt{1 + y^2}$. Per separazione delle variabili si ha ($z = y' = dy/dx$)

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \int dx = x + c_2\,.$$

L'integrale a primo membro si calcola per sostituzione, ponendo $t = y + \sqrt{1 + y^2}$ (si veda l'esercizio 4.119 del 1° volume, parte seconda). Una primitiva di $1/\sqrt{1 + y^2}$ è $\log|y + \sqrt{1 + y^2}$. L'equazione in forma implicita che definisce $y(x)$ è quindi $\log|y + \sqrt{1 + y^2}| = x + c_2$. In base alla condizione iniziale $y(4) = 0$ si ottiene $c_2 = -4$ e $\log(y + \sqrt{1 + y^2}) = x - 4$, dato che l'argomento del logaritmo è positivo in un intorno di $y = 0$. Con semplici calcoli si ricava $y(x)$:

$$\sqrt{1+y^2} = e^{x-4} - y \quad \Rightarrow \quad 2ye^{x-4} = (e^{x-4})^2 - 1$$

ed infine $y(x) = (e^{x-4} - e^{-(x-4)})/2 = \operatorname{sen} h\,(x-4)$. Si arriva al risultato finale più rapidamente ricordando che una primitiva della funzione $y \to 1/\sqrt{1+y^2}$ è il settore seno iperbolico di y]

6.27 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0; \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

(a) Verificare che il problema ha più di una soluzione.
(b) Spiegare perchè non vale il teorema di Cauchy di (esistenza e) unicità.

[(a) Si vede subito che la funzione $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è una soluzione. Con il metodo basato sulla sostituzione $z(y) = y'$ si trova, ad esempio, anche la soluzione $y(x) = x^4/144$. (b)L'equazione differenziale è nella forma normale $y'' = f(y)$, con f funzione continua, ma non di classe C^1 (e nemmeno Lipschitztana). Perciò non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy]

6.28 Sia $y = y(x)$ una funzione derivabile due volte in un intervallo di $\mathbb{R}$. La curvatura del grafico di $y(x)$ nel punto x è data dal rapporto

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}\,.$$

Determinare le funzioni $y(x)$ il cui grafico ha curvatura costante, uguale a k.

[Si deve risolvere l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = k\,.$$

Se $k = 0$ risulta $y'' = 0$, da cui $y(x) = c_1x + c_2$; perciò, secondo la definizione data, le rette (e soltanto le rette) hanno curvatura identicamente uguale a zero.

Se $k \neq 0$, posto $z(y) = y'$ ed essendo $y'' = zz'$ si ottiene $zz'/[1+z^2]^{3/2} = k$, da cui, separando le variabili

$$-[1+z^2]^{-1/2} = \int \frac{z\,dz}{[1+z^2]^{3/2}} = k \int dy = k(y+c_1)$$

ed elevando entrambi i membri al quadrato (tenendo presente che $k(y+c_1) < 0$)

$$\frac{1}{1+z^2} = k^2(y+c_1)^2 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \frac{1-k^2(y-c_1)^2}{k^2(y+c_1)^2}\,.$$

Ricordando che $z = y'$ abbiamo

$$\pm\frac{1}{k}\sqrt{1-k^2(y+c_1)^2} = \mp\int \frac{k(y+c_1)}{\sqrt{1-k^2(y+c_1)^2}}\,dy = x + c_2\,.$$

Risulta infine $1-k^2(y+c_1)^2 = k^2(x+c_2)^2$, cioè anche $(x+c_2)^2+(y+c_1)^2 = 1/k^2$. Si tratta della famiglia di circonferenze di raggio $1/|k|$ e centro in un generico punto di coordinate $(-c_2, -c_1)$. Notiamo che, anche in generale, la quantità

$$\left(\frac{1}{|k|}\right) = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{|y''|}$$

è chiamata *raggio di curvatura.*

Relativamente alla nostra equazione differenziale, ricordando che deve essere $k(y+c_1) < 0$, otteniamo per $k \neq 0$ le soluzioni (si vedano le figure 6.1, 6.2):

$$y(x) = -c_1 - \sqrt{1/k^2 - (x+c_2)^2} \qquad \text{(se } k > 0\text{)}$$

$$y(x) = -c_1 + \sqrt{1/k^2 - (x+c_2)^2} \qquad \text{(se } k < 0\text{)]}$$

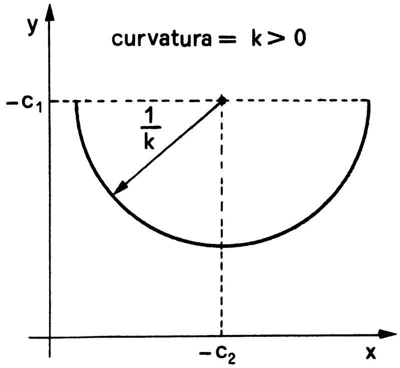

figura 6.1

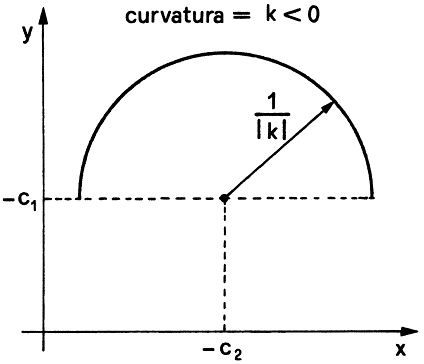

figura 6.2

6.29 Trovare le curve piane il cui raggio di curvatura

$$r = [1+(y')^2]^{3/2}/|y''|$$

è uguale alla lunghezza del segmento di normale compreso tra la curva e l'asse delle ascisse.

[Il segmento di normale compreso tra la curva e l'asse delle ascisse è rappresentato in figura 5.4. La sua lunghezza vale (si veda l'esercizio 5.21) $\sqrt{(yy')^2+y^2}$. Occorre perciò risolvere l'equazione differenziale

$$[1+(y')^2]^{3/2}/|y''| = \sqrt{(yy')^2+y^2}\,.$$

Posto $z(y) = y'$ risulta $y'' = zz'$, da cui, elevando al quadrato e semplificando, si ottiene

$$\frac{zz'}{1+z^2} = \pm\frac{1}{y}\,.$$

Consideriamo separatamente il segno $+$ ed il segno $-$. Nel primo caso abbiamo

$$\frac{1}{2}\log(1+z^2)=\int\frac{z\,dz}{1+z^2}=\int\frac{1}{y}\,dy=\log(c_1y)$$

con $c_1\neq 0$, da cui $1+z^2=c_1^2y^2$ ed ancora $z=\pm\sqrt{c_1^2y^2-1}$. Ricordando che $z=y'=dy/dx$, abbiamo

$$\int\frac{dy}{\sqrt{c_1^2y^2-1}}=\pm\int dx=\pm(x+c_2)\,.$$

L'integrale a primo membro si risolve tramite la funzione inversa del coseno iperbolico; oppure, ad esempio, con la sostituzione $\sqrt{c_1^2y^2-1}=t-c_1y$ (si veda il paragrafo 4G del 1° volume, parte seconda), per cui, elevando al quadrato, si ha $y=(t+1/t)/(2c_1)$, da cui

$$dy=\frac{1}{2c_1}\left(1-\frac{1}{t^2}\right),\qquad t-c_1y=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right).$$

Perciò l'integrale diviene

$$\int\frac{dy}{\sqrt{c_1^2y^2-1}}=\frac{1}{c_1}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{c_1}\log|c_1y+\sqrt{c_1^2y^2-1}|+c_1$$

Dalla relazione implicita $\frac{1}{c_1}\log|c_1y+\sqrt{c_1^2y^2-1}|=\pm(x+c_2)$ si ricava la y:

$$y(x)=\frac{1}{2c_1}[e^{\pm c_1(x+c_2)}+e^{\mp c_1(x+c_2)}]=\frac{1}{c_1}\cosh(c_1x+c_1c_2)$$

(si noti che $\cosh(t)=\cosh(-t)$). Nel caso del segno $-$ abbiamo $\log\sqrt{1+z^2}=-\log(c_1y)$ ($c_1\neq 0$), da cui $\sqrt{1+z^2}\equiv 1/(c_1y)$ ed ancora $z=\pm\sqrt{(1-c_1^2y^2)/(c_1^2y^2)}$. Ponendo $z=y'=dy/dx$ e separando le variabili otteniamo

$$-\frac{1}{c_1}\sqrt{1-c_1^2y^2}=\int\frac{c_1y\,dy}{\sqrt{1-c_1^2y^2}}=\pm\int dx=\pm(x+c_2)\,.$$

Si tratta della famiglia di circonferenze di equazione $y^2+(x+c_2)^2=1/c_1^2$]

6D. Equazioni di ordine superiore al secondo

Per risolvere un'equazione differenziale di ordine superiore al secondo, ammesso che sia possibile per via analitica, può essere utile sostituire la funzione incognita $y(x)$ con una sua derivata ($z=y'$, oppure $z=y''$, oppure ...) in modo da abbassare l'ordine dell'equazione; però è necessario che l'equazione differenziale non dipenda esplicitamente da x, oppure da y, oppure da y,y', oppure da .... Vediamo alcuni esempi.

6.30 Risolvere, per $x>0$, le equazioni differenziali del terzo ordine

(a) $\quad yy'''=2\dfrac{y''}{x}-\sqrt{\dfrac{y''}{x}}$

(b) $\quad yy'''=2\dfrac{y''}{x}+2x\sqrt{y''}$

(c) $\quad yy''' = \dfrac{1-y''}{x}$

[(a) Dato che nell'equazione differenziale non compaiono esplicitamente y e y', è opportuno porre $z(x) = y''(x)$. Essendo $z' = y'''$, otteniamo, l'equazione del primo ordine in z:

$$z' = 2\frac{z}{x} - \sqrt{\frac{z}{x}},$$

che è del tipo di Bernoulli (ed anche del tipo $z' = g(z/x)$, con $g(t) = 2t - \sqrt{t}$). In base al metodo di Bernoulli (paragrafo 5B), dividiamo entrambi i membri dell'equazione differenziale per $\sqrt{z}$ (nel caso in cui $z(x) > 0$; notiamo anche che $z \equiv 0$ è una soluzione ed in corrispondenza ($y'' = z = 0$) $y(x) = c_1x + c_2$ è soluzione dell'equazione del terzo ordine) e poniamo $w = \sqrt{z}$. Essendo $w' = z'/(2\sqrt{z})$, otteniamo l'equazione differenziale lineare

$$w' = \frac{1}{x}w - \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

Una primitiva di $a(x) = 1/x$ è, per $x > 0$, $A(x) = \log x$. Perciò, per $x > 0$:

$$w(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = x \int -\frac{1}{2}x^{-3/2}\, dx = x(x^{-1/2} + c_1).$$

Ne risulta $z = w^2 = (\sqrt{x} + c_1x)^2 = x + 2c_1x^{3/2} + c_1^2x^2$. Ricordando che $y''(x) = z(x)$, integrando due volte, otteniamo infine

$$y'(x) = \int z(x)\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{5}c_1x^{5/2} + \frac{1}{3}c_1^2x^3 + c_2;$$

$$y(x) = \int y'(x)\, dx = \frac{x^3}{6} + \frac{8}{35}c_1x^{7/2} + \frac{1}{12}c_1^2x^4 + c_2x + c_3.$$

(b) $y(x) = \dfrac{1}{30}x^6 + \dfrac{1}{10}c_1x^5 + \dfrac{1}{12}c_1^2x^4 + c_2x + c_3$, oltre a $y(x) = c_1x + c_2$.

(c) $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + c_1x(1 - \log x) + c_2x + c_3$]

6.31 Risolvere le equazioni differenziali del terzo ordine

(a) $\quad y'y''' - (y'')^2 = 0$

(b) $\quad y'y''' + (y'')^2 = 0$

[(a) Nell'equazione differenziale non compare esplicitamente la y (oltre che la x); è perciò opportuno porre $z(x) = y'(x)$; essendo $z' = y''$, $z'' = y'''$, otteniamo l'equazione del secondo ordine

$$zz'' - (z')^2 = 0$$

che è del tipo $g(z, z', z'') = 0$ (considerato nel paragrafo precedente) e che si risolve con la sostituzione $w(z) = z'$. Essendo

$$z'' = \frac{dz'}{dx} = \frac{dw(z)}{dx} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = w'z' = w'w,$$

otteniamo l'eqttazione di primo ordine nella variabile w:

$$zw'w - w^2 = 0$$

che si scompone in $w \equiv 0$ (cioè $z' = 0$, cioè ancora $z = c_1$ e quindi $y(x) = c_1x + c_2$) ed in $zw' - w = 0$. Ricordando che $w' = dw/dz$, separando le variabili otteniamo

$$\log |w| = \int \frac{dw}{w} = \int \frac{dz}{z} = \log |c_1 z|\,.$$

da cui, pur di cambiare il segno di c_1, $w = c_1 z$, cioè $z' = c_1 z$. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine che ha per soluzioni

$$z(x) = c_2 e^{c_1 x}\,.$$

Infine, essendo $y'(x) = z(x)$, abbiamo $y(x) = (c_2/c_1)e^{c_1 x} + c_3$, se $c_1 \neq 0$, altrimenti $y(x) = c_2 x + c_3$ (soluzioni che avevamo già trovato in precedenza).
(b) Come in (a) si pone $z(x) = y'(x)$ e $w(z) = z'$; si trovano le condizioni $w = 0$ oppure $zw' + w = 0$. In corrispondenza risulta $z(x) = c_1 (y(x) = c_1 x + c_2)$ oppure

$$\log |w| = \int \frac{dw}{w} = -\int \frac{dz}{z} = \log \left|\frac{c_1}{z}\right|,$$

da cui, pur di cambiare il segno di c_1, $w = c_1/z$. Essendo $z' = w = c_1/z$, separando le variabili si trova $z(x) = \pm\sqrt{c_1 x + c_2}$ (pur di cambiare $2c_1$ con c_1). Infine

$$y(x) = \int z(x)dx = \pm \int \sqrt{c_1 x + c_2}\, dx = \frac{\pm 2}{3c_1}(c_1 x + c_2)^{3/2} + c_3$$

con $c_1 \neq 0$, oltre a $y(x) = c_1 x + c_2$]

6.32 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' = [(x-1)y'']^2 - y'' \\ y(0) = 3\,; \quad y'(0) = 2\,; \quad y''(0) = 1 \end{cases}$$

[La funzione $z(x) = y'''(x)$ soddisfa l'equazione differenziale del primo ordine

$$z' = [(x-1)z]^2 - z\,,$$

che è del tipo di Bernoulli; con la sostituzione $w(x) = 1/z(x)$ (si noti che $z \equiv 0$ non soddisfa la condizione iniziale $z(0) = y''(0) = 1$) si giunge all'equazione lineare del primo ordine

$$w' = w - (x-1)^2,$$

che ammette l'integrale generale $w(x) = c_1 e^x + x^2 + 1$. La condizione iniziale $z(0) = y''(0) = 1$ permette di determinare c_1; infatti, dato che $w(0) = 1/z(0) = 1$, è $c_1 = 0$. Perciò $z(x) = 1/(x^2+1)$ e

$$y'(x) = \int z(x)dx = \operatorname{arctg} x + c_2\,.$$

Dovendo essere $y'(0) = 2$, si trova $c_2 = 2$; infine, tenendo conto della condizione iniziale $y(0) = 3$, risulta

$$y(x) = 3 + 2x + x\operatorname{arctg} x - \log \sqrt{1+x^2}]$$

6.33 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale del quarto ordine

$$x^2 y^{(IV)} + (y''')^2 = 0 .$$

[La funzione $z(x) = y'''$ soddisfa l'equazione differenziale del primo ordine $x^2 z' + z^2 = 0$ che, risolta per separazione delle variabili, dà il risultato

$$z(x) \equiv 0 \qquad \text{e} \qquad z(x) = \frac{-x}{1 + c_1 x} .$$

In corrispondenza a $z = y''' = 0$ si ha $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$. Nel caso particolare $z = -x/(1 + c_1 x)$ con $c_1 = 0$ risulta $y''' = z = -x$, da cui

$$y(x) = -\frac{x^4}{24} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 .$$

Infine, se $z = -x/(1 + c_1 x)$ con $c_1 \neq 0$, abbiamo

$$y''(x) = \int z(x)\, dx = \int \frac{-x}{1 + c_1 x}\, dx = -\frac{x}{c_1} + \frac{1}{c_1^2} \log |1 + c_1 x| + c_2;$$

poi $y(x)$ si ottiene integrando due volte $y''(x)$]

6.34 Sia $n \geq 1$, $f(x)$ una funzione continua in un intervallo I e sia $x_0 \in I$. Verificare che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x) \\ y(x_0) = y_0^{(0)}; \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}; \ldots ; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} , \end{cases}$$

con $(y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \ldots , y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$, può essere rappresentata, per $x \in I$, nella forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^k}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} f(t) \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!}\, dt .$$

[In base al teorema di Cauchy (per le equazioni lineari) il problema ha una sola soluzione $y(x)$ definita in I. La formula di Taylor (valida per ogni funzione derivabile n volte con derivata n-sima continua) di $y(x)$, di punto iniziale x_0 e con il resto in forma integrale (si veda l'esercizio 1.85(a)), fornisce la rappresentazione

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} y^{(n)}(t) \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!}\, dt ;$$

si noti che $y(x)$ ha derivata n-sima continua, essendo $y^{(n)}(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Tenendo anche presente che $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$ per ogni $k = 0, 1, \ldots , n - 1$, $y(x)$ si rappresenta come indicato nell'enunciato]