



Equazioni differenziali

Problema: Considerata la funzione $f(x) = x$, qual è la funzione $F(x)$ derivabile / $F'(x) = x$?

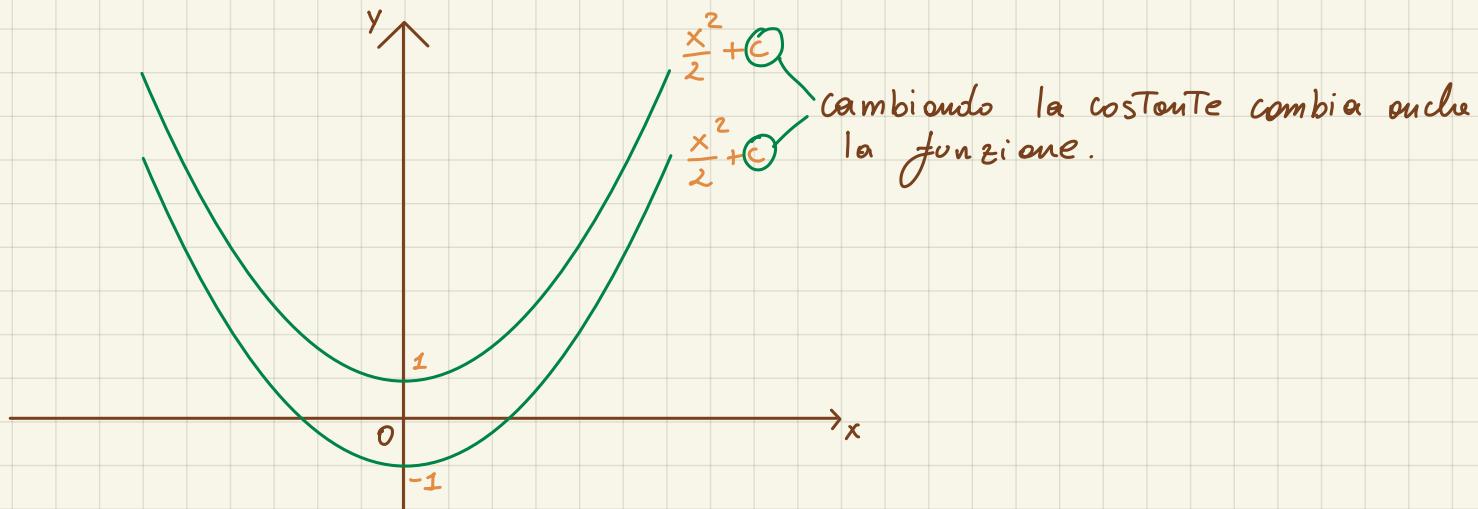
$$F'(x) = x \Leftrightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

La guardiamo come un'equazione in cui l'incognita è una funzione $F(x)$ la cui derivata è uguale ad x . Finora abbiamo sempre considerato equazioni la cui incognita era una certa x (lettera) che rappresentava dei numeri reali.

ES: $x^2 = 1$, $x = \pm 1$... L'incognita rappresenta numeri REALI o COMPLESSI.

Nel caso delle eq diff., l'incognita non è più un numero, ma una FUNZIONE.

Osservazione: la soluzione, o famiglia di soluzioni è $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$



In questo ambito, l'incognita si indica con $y(x)$; quindi il "problema" precedente si indica con:

$$y'(x) = x \Leftrightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{perché } D\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = x$$

Definizione Si dice Equazione Differenziale d'ordine n un'espressione del tipo :

$$G(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Dove $y(x)$ è la funzione incognita derivabile n volte in $[a, b]$.

$$\text{ES: } x^2 y^{(5)}(x) + y^{(3)}(x) - 2y'' + \log x \cdot y(x) = 0 \quad \text{Ordine 5}$$

Ordine di una eq diff: l'ordine è il massimo ordine di derivazione che appare nell'equazione

Definizione: una eq diff. si dice di Forma normale se la derivata di $y(x)$ di ordine massimo si può esprimere in funzione di tutto il resto, ovvero se è del tipo:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \begin{array}{l} \text{Se posso prendere la derivata massima } y^{(n)}, \\ \text{la porto a sx dell'uguale e porto tutto il resto} \\ \text{a Dx; ovvero se posso esprimere } y^{(n)}(x) \text{ in funzione degli altri termini.} \end{array}$$

N.B. Potrebbe essere sostituita la notazione " $y(x)$ " con " y ", ma con y si indica sempre y come Funzione della x .

→ Mentre la x continua ad assumere valori REALI, la y è funzione della x .

Definizione: Una soluzione di un'eq. diff. di ordine n , è una funzione $y(x)$ derivabile n volte, e prende il nome di integrale particolare dell'eq. diff.
Quindi invece di parlare di soluzioni, la soluzione dell'eq. diff. è proprio l'integ. part.

ES: $y' = x$, $y = \frac{x^2}{2}$ è un integrale particolare, come lo è $y = \frac{x^2}{2} + C$

Come troviamo y da y' ?

Integro entrambi i membri: $\int y' dx = \int x dx \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + C$

L'integrale di una derivata è proprio $f(x)$.

Perché si usa la parola "particolare"?

Perché è una particolare soluzione, infatti per $C=1$ abbiamo una soluzione, per $C=2$ ne abbiamo un'altra ecc.

La soluzione di una eq differenziale del I° ordine come $y' = x$, è in realtà una Famiglia di soluzioni particolari, ed $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.
o integrali

Tale famiglia di soluzioni prende il nome di integrale generale dell'eq differenziale.
Insieme di tutte le sue
soluzioni
ordine I

In generale, data un'eq diff di ordine n in forma normale, (le consideriamo sempre in f. norm.)

$y' = f(x, y)$ ← è una f a 2 variabili, ma per il momento la vediamo solo come un'espressione

L'insieme delle sue soluzioni sarà l'integrale generale: $y = y(x, C)$ con $C \in \mathbb{R}$
 y dipende da x e C

A cosa servono le eq differenziali?

Questo tipo di eq Trovano applicazione in molti compi della vita, in questo corso vedremo diverse applicazioni nella fisica.

Ad esempio, dire che l'epidemia di coronavirus segue un andamento esponenziale, è possibile risolvendo una eq diff.

ES: $x = x(t)$ $t \in [t_0, t_1]$ supponiamo che f sia derivabile in $[t_0, t_1]$.
Il moto rettilineo uniforme ci dice che la velocità è costante

$v(t) = \text{cost}$ \Rightarrow la velocità non c'è altro che la derivata 1° della funzione spostamento.

$$\Rightarrow x'(t) = c \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{costante} \end{matrix} \quad \text{e' un'eq diff del I° ordine!}$$

Per risolvere integriamo ambo i membri: $\int_{t_0}^t x'(t) dt = \int_{t_0}^t c dt \Leftrightarrow x(t) - x(t_0) = c(t - t_0)$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + ct - ct_0 \Rightarrow x(t_0) = x_0 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Posizione iniziale} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \text{Si indica con } x_0 \end{matrix}$$

Riscriviamo $x(t) = c(t - t_0) + x_0$ Indichiamo $c = v_0$

$$\Rightarrow x(t) = v_0(t - t_0) + x_0 = v_0 t - v_0 t_0 + x_0$$

$$\begin{cases} x'(t) = v_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{Supponendo che la vel = cost, dopo un certo periodo di tempo, dove arrivo?}$$

ES 2: Moto uniformemente accelerato

In questo caso la vel non è più costante, ma lo è l'accelerazione:

$$x''(t) = a_0 \quad \text{costante} \quad \leftarrow \text{eq diff del II ordine}$$

Integriamo: $\int x''(t) dt = \int a_0 dt \Rightarrow x'(t) = a_0 t + c_1$

Se vogliamo $x(t)$, dobbiamo integrare una seconda volta:

$$\int x'(t) dt = \int a_0 t + c_1 dt \Rightarrow x(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

$$S(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0$$

Ottengono l'integrale generale dell'eq $x^{(II)}(t) = a_0$: eq diff del II ordine

Nel moto unif. accelerato, il moto dipende da 2 costanti, mentre l'eq del moto rett unif., che era del I° ordine, dipendeva da un'unica costante.

■ 1:07

Nel Moto uniformemente Accelerato ci poniamo il seguente problema:

$$x''(t) = a \quad \text{Ma dobbiamo sapere all'istante } t_0 \text{ dove ci si trova: } x(t_0) = x_0$$

Per fare ciò abbiamo bisogno di posizione iniziale e velocità iniziale. Questo è noto come problema di Cauchy per le equazioni differenziali di II ordine.

$$\begin{cases} x''(t) = a_0 \\ x(t) = x_0 \\ x'(t_0) = v_0 \end{cases} > \text{due condizioni}$$

$$x'(t) = 2t \cdot \frac{a_0}{2} + v_0 \quad \text{Imponiamo le condizioni iniziali}$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{\frac{a_0}{2} \cdot t_0^2 + v_0 t_0 + c_2}_{x(t_0)} = x_0 \\ \underbrace{t_0 a_0 + c_1}_{x'(t_0)} = v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a_0}{2} t_0^2 + v_0 t_0 - a_0 t_0^2 + c_2 = x_0 \\ c_1 = v_0 - t_0 a_0 \end{cases} \quad \text{SOSTITUISCO} \uparrow$$

$$\begin{cases} -\frac{a_0}{2} t_0^2 + v_0 t_0 + c_2 = x_0 \\ // \\ c_2 = \frac{a_0}{2} t_0^2 - v_0 t_0 + x_0 \\ c_1 = v_0 - a_0 t_0 \end{cases}$$

SOSTITUISSIMO nell'integrale generale

$$x(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \Rightarrow x(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + \underbrace{(v_0 - a_0 t_0)}_{\uparrow} \cdot t + \underbrace{\left(\frac{a_0}{2} t_0^2 - v_0 t_0 + x_0 \right)}_{\uparrow}$$

$$\text{Fattore comune} = \frac{a_0}{2} (t^2 - t_0^2) + t (v_0 - a_0 t) + x_0 - v_0 t_0$$

1:33

Esempi dal punto di vista prettamente matematico

Sul libro sono presenti molti esempi fisici; TUTTI i fenomeni fisici provengono da equazioni differenziali.

Equazioni a variabili separabili

Sono eq del tipo:

$$y' = f(x) g(y)$$

Ovvero equazioni del I ordine in cui il II membro si puo' esprimere come il prodotto di due quantita' dipendenti "separatamente" da x e y .

Per risolvere l'eq. basta separare le variabili, cioè si portano tutte le y da una parte e tutte le x dall'altra (dell'uguale).

Quindi se ho $y' = f(x) g(y)$ mi bastera' dividere tutto per la quantita' che dipende da y :

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \Rightarrow \frac{y'}{g(y)} = f(x) \quad \text{A questo punto integriamo entrambi i membri:}$$

ES: $y' = x y^2$ ← Forma Normale: max ordine di derivazione a sx e tutto il resto a dx

Possiamo vedere il secondo membro come due quantita' che si sono separate tra di loro; Dividiamo per y^2 :

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^2} = x \quad \text{Integrando: } \int \frac{y'}{y^2} dx = \int x dx \quad y = y(x) \quad y \text{ dipende da } x!$$

Integrando per x !

Quando integrano il I°membro è importante che ci sia la derivata I^a y' .

$$\Rightarrow \int y^{-2} \cdot y' dx = \int x dx = \frac{\bar{y}(x)}{-1} = \frac{x^2}{2} + C = -\frac{1}{y(x)} = \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{y(x)} = -\frac{x^2}{2} - C$$

ottenendo quindi:

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + C}$$

Integrale generale dell' eq a variabili separate

ES: $y' = \operatorname{tg} x \cdot y \rightarrow$ Forma Normale ✓ $\rightarrow \frac{y'}{y} = \operatorname{tg} x \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int \operatorname{tg} x dx$

$$= \ln|y| = \ln|\cos x|^{-1} + C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln|\cos x|^{-1} + C_1 \Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{\ln|\cos x|^{-1} + C_1}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{\ln|\cos x|^{-1}} \cdot e^{C_1} = e^{\ln|\cos x|^{-1}} \cdot \text{nuova costante} = e^{\ln|\cos x|^{-1}} \cdot C \quad \text{Integrale generale}$$

Eq. Diff. Lineare del I° ordine

E' un'eq del tipo: $y' + a(x)y = b(x)$

Si dice Lineare perché abbiamo una combinazione lineare di y' e y .

In questo caso, però, non la abbiamo! Una comb. lineare sarebbe del tipo:

$a_1 y' + a_2 y = d(x)$ Dividiamo per a_1 ottenendo:

$$y' + \frac{a_2(x)}{a_1(x)} y = \frac{d(x)}{a_1(x)} \Rightarrow \text{otteniamo: } y' + a(x)y = b(x) \quad (1)$$

Eq. Lineare del I° ordine completa (con termine noto)

Si considera l'eq differenziale OMogenea: $b(x) = 0$ ottenendo:

$$y' + a(x)y = 0$$

Teorema L'integrale generale dell'eq (1) è dato dalla somma dell'integrale generale $y_0(x)$ dell'eq omogenea associata e di un integrale particolare $y_p(x)$ dell'eq. completa; quindi:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) \quad \text{Come risolviamo l'eq?}$$

I) Calcolo integrale generale dell'omogenea associata:

$y' + a(x)y = 0$ Tale equazione è a variabili separabili (vista prima):
Dividiamo per y :

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -a(x) \rightarrow \text{Integriamo} \rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = - \int a(x) dx + C_1 = \ln|y| = - \int a(x) dx + C_1$$

esponenziale: $y(x) = e^{\int a(x) dx} \cdot C_1 = y(x) = e^{\int a(x) dx} \cdot C$

II) Calcolo di un integrale particolare dell'eq completa $y' + a(x)y = b(x)$
Per farlo ci sono molti modi, useremo il **Metodo di variazione delle costanti**

→ Un integrale particolare dell'eq completa è del tipo:

$$\textcircled{2} \quad y_p(x) = C(x) e^{-\int a(x) dx}$$

Cioè è l'integrale generale dell'omogenea associata
in cui facciamo variare la costante C ; che infatti
Viene considerata come funzione della x . Funzione da determinare in modo che
 y_p sia soluzione dell'equazione completa.

Cioè il metodo ci dice che una soluzione dell'eq completa è fatta come la
 $\textcircled{2}$ con $C(x)$ funzione che deve però essere determinata; **Come** la determiniamo?
Imponendo che y_p sia SOLUZIONE dell'eq completa.

Imponiamo che y_p sia soluzione, e ricaviamo $C(x) \Rightarrow$ Sostituendo y_p nell'eq compl.

Calcoliamo $D'(y_p) = y_p' = C'(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} + C(x) \cdot \left[e^{-\int a(x) dx} \cdot D(-\int a(x) dx) \right]$

$$\Rightarrow y_p' = C'(x) e^{-\int a(x) dx} + C(x) e^{-\int a(x) dx} \cdot C(x) (-a(x))$$

Sostituendo nella eq completa

$$C'(x) e^{-\int a(x) dx} - a(x)C(x)e^{-\int a(x) dx} + a(x)C(x)e^{-\int a(x) dx} = b(x)$$

*Sempre opposti **

Ricaviamo la $C(x) \Rightarrow C'(x) e^{-\int a(x) dx} = b(x)$

$$\Rightarrow C'(x) = b(x) \cdot e^{\int a(t) dt} \Rightarrow \int C'(x) dx = \int b(x) e^{\int a(t) dt} dx$$

Allora $y_p(x) = \int b(x) e^{\int a(t) dt} dx \cdot e^{-\int a(t) dt}$

Quindi l'integrale generale dell'eq completa è $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

$$\Rightarrow \boxed{y_0(x)} + \boxed{\int b(x) e^{\int a(t) dt} dx \cdot e^{-\int a(t) dt}}$$

Raccolgo $e^{-\int a(x) dx}$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[C + \int b(x) e^{\int a(t) dt} dx \right]}$$

Formula magica

Tiriamo le somme Il libro riporta solo l'ultima formula; solitamente nessuno se la ricorda, di conseguenza è bene ricaversela.

■ Esercizi nella prossima lezione