Lezione 17

Infiniti e funzioni continue

Infiniti

f è un infinito in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Siano f e g infiniti in x_0, essi sono:

- Stesso ordine se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$, $\ell \neq 0$ e finito
- f è di ordine sup se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
- f è di ordine inferiore se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Infiniti di ordine crescente

$$\log x \ll x^{\alpha} \ll a^{x} \qquad \text{con } a > 1 \text{ e } \alpha > 0$$

Quindi: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{a^{x}} = 0$

Principio di sostituzione degli infiniti (vedi lez precedente)

Supponiamo che $f_1 \gg f_2$ e $g_1 \gg g_2$

Si trascurano gli infiniti di ordine inferiore.

Quindi: $\lim \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \frac{f_1}{g_1}$

ES: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{6}{x^6} + \overset{4}{x^4}(\overset{1}{2+\sin x}) + \overset{\varepsilon}{\log x}}{\underbrace{1 + 3x + 6x^6}_{6} + \underbrace{e^x}_{\text{grande}}} = \frac{x^6}{e^x} = 0$$

Piccolo

ES: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x \log x - x^2 \log x + \cos x}{\sqrt{1 + x^4 \log^4 x}} = \frac{2x \log x - x^2 \log x + \cos x}{(1 + x^4 \log^4 x)^{1/2}} = \frac{-\cancel{x^2 \log^2 x}}{\cancel{x^2 \log^2 x}} = -1$$

$\sim \sqrt{x^4 \log^4 x} \sim x^2 \log^2 x$

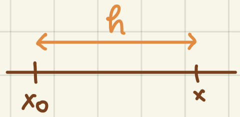
Funzioni continue

Def: Sia f una funz. definita in un intervallo I, e che $x_0 \in I$
La f è continua in x_0 se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Prop. tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio.

ES: $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \iff \lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0$, dove



$\Rightarrow |x - x_0| = h \leftarrow$ Distanza tra x e x_0
$\Rightarrow x = x_0 + h$

Quindi: $\sin(x_0 + h) = \sin(x_0)\underbrace{\cos h}_{1} + \cos(x_0)\underbrace{\sin h}_{0} = \sin(x_0)$

A che serve? Questo teorema è molto utile per calcolare limiti del tipo:
ES: $\lim_{x \to 3} \operatorname{arcTg} x = \operatorname{arcTg} 3$.

Proposizione tutte le operazioni elementari $(+, -, \times, /)$ applicate a funzioni elementari, producono funzioni continue in $D(f(x))$.

Osservazione: f continua in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Se:
i) $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$
ii) $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$
iii) I due prec. coincidono.

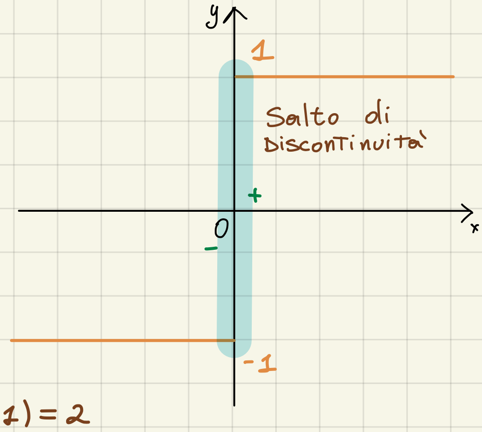
Discontinuità

Def: f ha in x_0 un punto di discontinuità di I^a specie se:

1) $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ sono finiti

2) Essi sono diversi

ES: $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \underbrace{-\frac{x}{x}}_{\to -1} & \text{per } x<0 \\ \underbrace{\frac{x}{x}}_{\to 1} & \text{per } x>0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \begin{cases} \to +1 \\ \to -1 \end{cases}$



Def Si dice SALTO DI DISCONTINUITA' di f in x_0:

$$\boxed{S_f(x_0) = \left| \lim_{x\to x_0^+} f - \lim_{x\to x_0^-} f \right|}$$

Nel caso di $f = \frac{|x|}{x}$ $= 1-(-1) = 2$

Def: Si dice discontinuità di II^a specie se:

$\exists$ i limiti: $\lim_{x\to x_0^+} f \neq \lim_{x\to x_0^-}$, uno dei quali è ∞.

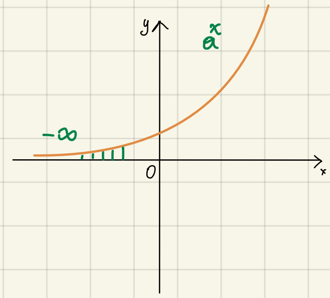
ES: $f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot 2^{1/x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\sin x}_{0} \underbrace{(2^{1/x})}_{\to +\infty} = 0\cdot\infty\ ?$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \underbrace{\left(2^{1/x}\, x\right)}_{\to ?} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{2^{1/x}}{\frac{1}{x}}}_{\to +\infty} = \underline{+\infty}$

$2^{1/x} << 1/x$

$\lim_{x\to 0^-} \underbrace{\sin x}_{\to 0} \cdot \underbrace{2^{\overbrace{1/x}^{\to -\infty}}}_{\to 0} = \underline{0}$

Importante $a^{-\infty} = 0$



Quindi $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow$ Disc. II specie.