Lezione 22

Teoremi e studio grafico di una funzione

Condizioni necessarie per i punti di Max/min relativi

Teorema di Fermat

Supponiamo di avere una f derivabile in $[a, b]$, e sia $x_0 \in [a, b]$;
Se x_0 è un estremo relativo (Max/min relativo)

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x_0) = 0}$$

Condizione necessaria

OSS. Geometricamente in x_0 avremo che $f'(x_0)=0$, ovvero il coeff. ang. della retta tangente sarà $\emptyset$, quindi parallela all'asse x. Infatti, in tutti i pti di Max/min, la tangente è parallela ad x.

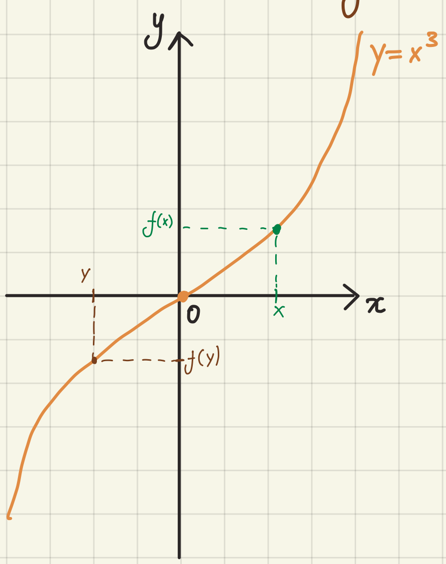
Dim a 00:04:30

ES: $f(x) = x^3$ ha Max o min relativi?

$f'(x) = 3x^2$ Cerchiamo un punto in cui $f'(x) = 0$; $3x^2 = 0$, $\underline{x=0}$

$\Rightarrow f'(0) = \emptyset$ possiamo dire che $\emptyset$ è Max/min relativo? NO!

la cond è solo <u>Necessaria</u>



Graficamente notiamo che la funzione non ha punti di Max/min relativi, anche perché è strettamente crescente.

Quindi $f = x^3$ ci mostra che $f'(x_0) = 0$ è una condizione solo <u>Necessaria</u>, ma non sufficiente.

Osservazione:

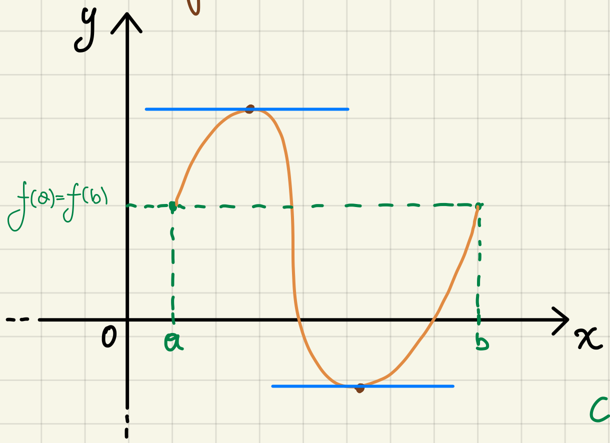
Il Teorema di Fermat ci dice che nei punti $x_0 \,/\, f'(x_0)=0$ sono possibili estremi relativi. La deduzione più utile che ricaviamo, però, è che in qualsiasi punto in cui la derivata non si annulla, ovvero $x \,/\, f'(x) \neq 0$, sicuramente non sarà un estremo relativo.

Teorema di Rolle

Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora, se $f(a)=f(b)$, ovvero se agli estremi il valore della funzione e' uguale,

$$\boxed{\exists\, \xi \in (a,b) \;/\; f'(\xi)=0}$$

ξ XI, ovvero "Almeno un punto"



Quindi, se $f(a)=f(b)$, all'interno dell'intervallo DEVE per forza esserci un punto in cui la derivata si annulla.

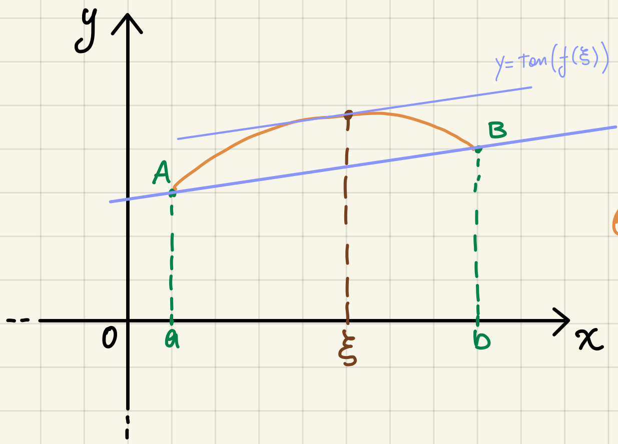
Dimostrazione 00:34

Teorema di Lagrange

f e' continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b); allora $\exists\, \xi \in (a,b) \;/\; \boxed{f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

Coefficiente Ang di una retta 2 pti

Questo Teorema e' una generalizzazione del teorema di Rolle, perche' in questo caso non abbiamo piu' l'Hp. che gli estremi siano uguali.



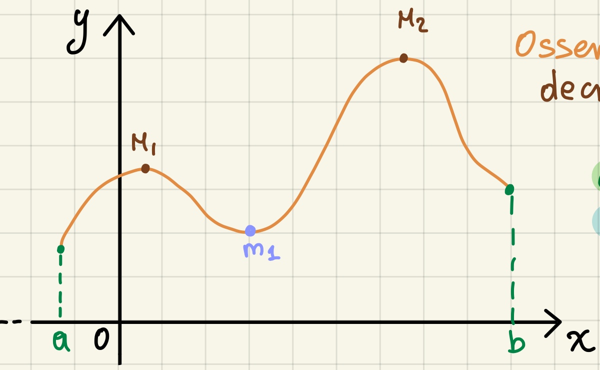
Il coefficiente angolare della Tangente in ξ e' uguale a quello della retta passante per A e B.

OSS. Il Teorema di Rolle e' un caso particolare; se $f(a)=f(b) \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(\xi)=0$

Dim: 1:05

Problema

Quali condizioni possiamo aggiungere ad $f'(x_0)=0$ affinche' x_0 sia un Max o min relativo? (Il Teorema di Fermat non basta)



Osserviamo che prima di M_1, la funzione cresce, e dopo decresce. Nel caso di m_1, la f prima decresce e poi cresce.

Criterio di Monotonia

f continua in $[a,b]$ e deriv in (a,b). La funzione f e' CRESCENTE in $[a,b]$ se $f'(x)\geq 0 \;\forall x \in [a,b]$.

E' Decrescente in $[a,b]$ se $f'(x)\leq 0 \;\forall x\in[a,b]$.

Dim: per Hp, f e' crescente in $[a,b]$; Sia $x_0 \in [a,b]$ e consideriamo anche x_0+h / $h>0$ e $x_0+h \in [a,b]$.

Dal rapp incr abbiamo che: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$

Poiche' $h>0$ e f e' crescente, e $f(x_0+h)>f(x_0) \Rightarrow f(x_0+h)-f(x_0)\geq 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 = f'(x_0)$$

C.V.D.

(NECESSARIETA')

Dim (sufficienza): Dimostriamo che f è crescente in $[a,b]$, cioè se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Siano x_1 e $x_2 \in [a,b]$ / $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$. Inoltre per il teorema di Lagrange in $I(x_1, x_2)$, $\exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ / $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Stiamo dicendo che $\exists$ un punto interno ad (a,b) in cui la derivata è uguale al coeff. ang. della retta passante per gli estremi relativi a e b.

moltiplichiamo ambo i membri per $(x_2 - x_1)$

$$= f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{\underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0 \text{ per Hp.}} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}}_{\Rightarrow\, \geq 0}$$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ cioè f è crescente

C.V.D.

1:28

Corollario (Condizioni necessarie e sufficienti)

Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b); sia $x_0 \in (a,b)$, allora si ha che x_0 è un Max relativo per f

$\Leftrightarrow$
1) $f'(x_0) = 0$ Cond. Necessaria
2) $f'(x_0) \geq 0$ con $x < x_0$
3) $f'(x_0) \leq 0$ con $x > x_0$

Prima cresce e poi decresce

MASSIMO

$\Leftrightarrow$
1) $f'(x_0) = 0$
2) $f'(x_0) \leq 0$ con $x < x_0$
3) $f'(x_0) \geq 0$ con $x > x_0$

Prima decresce e poi cresce

MINIMO

Punti Stazionari

Def Un punto x_0 si dice PTO STAZIONARIO o critico se x_0 / $f'(x_0) = 0$

Ricapitoliamo: Ricerca estremi relativi

Per la ricerca degli estremi relativi:

1) Calcolare la Derivata I^a di $f(x)$.
2) Cercare gli eventuali punti $x_0 \,/\, f'(x_0)=0 \Rightarrow$ punti Stazionari.
   A tal fine, risolvere l'equazione $f'(x)=0$; le sue soluzioni sono i POSSIBILI estremi.

3) Per verificare quali siano effettivamente Max e min relativi, basta studiare la disequazione $f'(x)\geq 0$; le soluzioni della disequazione ci diranno l'intervallo in cui la f cresce. Sapendo dove cresce sapremo anche dove decresce.

Teorema Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo.

Una f e' costante in $[a,b] \Leftrightarrow$

1) f e' derivabile in $[a,b]$
2) $f'(x)=0 \quad \forall x \in [a,b]$

Dim: Se f e' costante, f' e' 0; Es: $f=3$, $f'(x)=0$

Pero' non tutte le f con derivata Nulla sono costanti; esistono f con deriv nulla ma non costanti.

1:55

Studio grafico di una funzione

Lo Studio di funzione ha vari passaggi:

1) Dominio

Dobbiamo sapere dove la funzione esiste.

2) Simmetrie

f è simmetrica all'asse $y \iff f(x) = f(-x)$

f è simmetrica ad $O \iff f(x) = -f(x)$

2' Intersezioni con assi

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = f(x) \\ x = \emptyset \end{cases}$

3) Segno della funzione

– Per sapere dove la f è positiva.

Risolvere la disequazione $f(x) > 0$

- Se il segno è troppo complicato da risolvere, conviene NON FARLO.

4) ASINTOTI

a) Orizzontali $y = k$

b) Verticali $x = c$

c) Obliqui $y = mx + q$

5) STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA

- per il calcolo dei max/min relativi

a) Risolvere $f'(x) = 0$ per gli eventuali punti stazionari

b) Risolvere $f'(x) > 0$ per la crescenza della funzione

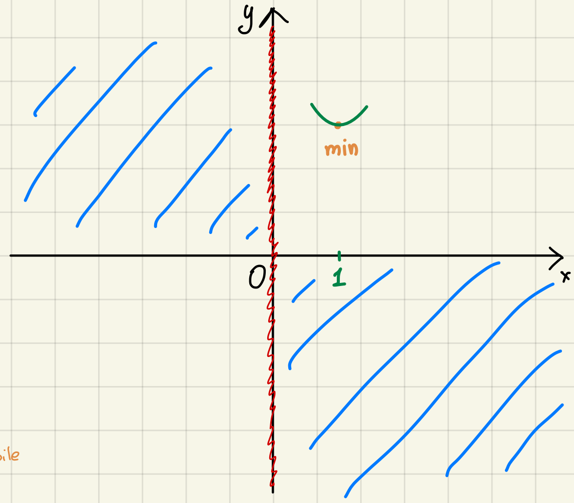
6) STUDIO DELLA DERIVATA Seconda

- per gli eventuali punti di flesso

a) $f''(x) = 0$ punti di flesso

b) $f''(x) > 0$ per la concavità o convessità

ES: $y = x e^{1/x}$



1) Dominio $\quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

2) Simmetrie

$f(x) = x e^{1/x}, \quad f(-x) = -x e^{-\frac{1}{x}} \neq f(x)$
$\neq -f(-x)$

3) Segno di f.

$f(x) > 0 \Rightarrow x e^{1/x} > \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow$ parte superiore per $x > 0$

pt inf. per $x < 0$

2') Int. con Assi

$\begin{cases} y = x e^{-\frac{1}{x}} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ Non accettabile

$\begin{cases} y = x e^{\frac{1}{x}} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ Non Accettabile

3) Asintoti

$D\ x^{-1} = -\frac{1}{x^2}$

4) Derivata I^a

$f(x) = x e^{1/x} \Rightarrow f'(x) = e^{1/x} + x e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x}\left(1 + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = e^{1/x}\left(1 - \frac{x}{x^2}\right) = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

$= e^{\frac{1}{x}}\left[\frac{x-1}{x}\right]$

Pti Stazionari a)

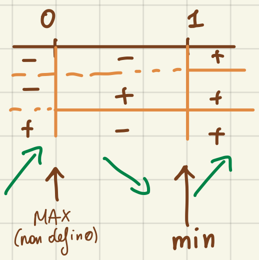
$f'(x) = 0$ per $e^{1/x}\left[\frac{x-1}{x}\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0$ per $x = 1$ possibile estremo relativo

$e^{1/x} = 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$

b) $f'(x) > 0, \quad e^{1/x}\left[\frac{x-1}{x}\right] = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \left[\frac{x-1}{x}\right] > 0$ per N $x - 1 > 0;\ x > 1$

D $x > 0$



$\Rightarrow f'(x) > 0$ per

$f(1) = x\ e^{1/x} = e \Rightarrow (1, e)$ min