Definizione WRONSKIANA Siano y_1 e y_2 due funzioni derivabili; si dice matrice WRONSKIANA di y_1 e y_2 la matrice:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^n & y_2^n & \dots & y_n^n \end{pmatrix}$$

Si dice WRONSKIANO di y_1 e y_2 il Determinante.

Nel caso di una matrice 2×2 il determinante si calcola esplicitamente nel seg. modo:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x)\, y_1'(x)$$

A cosa serve conoscere il determinante? Come per il caso dei vettori, anche in questo caso il determinante ci dice se c'è una dipendenza lineare.

Teorema Siano y_1 e y_2 integrali particolari dell'eq omogenea associata. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) y_1 e y_2 Sono Indipendenti in $[a,b]$

(ii) $\exists x_0 \in [a,b] \;/\; W(x_0) \neq 0$

(iii) $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Osservazione $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ Un'affermazione implica l'altra Dim 11:00

Se abbiamo due funzioni, un modo per capire se queste sono linearmente indipendenti è calcolare il determinante. Se il determinante wronskiano è $\neq 0$ allora sono sicuramente indipendenti.

→ Basta dimostrare che in un punto il det $\neq 0$, allora le funzioni sono indipendenti in TUTTO l'intervallo.

Eq. diff. lineari del II ordine a coefficienti costanti

Parte Teorica:

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ (1) dove a_1 e $a_2 \in \mathbb{R}$

Nei casi precedenti a_1 e a_2 erano funzioni, ora sono NUMERI.

Consideriamo l'eq caratteristica della (1) $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 \cdot \lambda^0$ eq di II grado
che è un'eq algebrica nell'incognita λ,
che è una variabile reale. L'ordine di derivazione diventa l'esponente.

Tale eq è di II grado ed ammette soluzioni reali $\forall$ a patto che il $\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_2 \geq 0$

Se $\Delta > 0$, l'eq caratteristica ammette 2 soluzioni reali e distinte:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

Se $\Delta = 0$ abbiamo 2 radici reali e coincidenti:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a_1}{2}$$

Se $\Delta < 0$ abbiamo 2 radici complesse coniugate:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{-(-\Delta)}}{2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{-1}\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{-a_1 \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} \text{ positivo} = \underbrace{\frac{-a_1}{2}}_{\alpha} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{\beta}$$

Reale (α), immaginaria (β)

Teorema → Serve per risolvere gli esercizi!

L'eq. diff. lin. omogenea del II ordine ammette i seguenti integrali indipendenti:

Se $\Delta > 0$: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ sono indipendenti.

Quindi l'integrale generale dell'eq. omogenea è:

Soluzione → $y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ ← Combinazione lineare

Se $\Delta = 0$: gli integrali indipendenti sono:

$y_1 = e^{\lambda x}$ e $y_2 = x e^{\lambda x}$ Di conseguenza l'integrale generale sarà:

Soluzione → $y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

Se $\Delta < 0$: gli integrali indipendenti sono:

$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$ In genere non si vuole usare la notazione con i numeri complessi, quindi:

Si considerano combinazioni lineari di y_1 e y_2 che sono ancora soluzione dell'eq lin.:

$\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ e $\frac{1}{2i}(y_1 - y_2)$ queste sono ancora soluzione dell'eq diff (perché comb lin)

Se le calcoliamo la i "scompare":

$$\frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}\right) = e^{\alpha x}\frac{1}{2}\left[\cos\beta x + \cancel{i\sin\beta x} + \cos\beta x - \cancel{i\sin\beta x}\right]$$

$$= e^{\alpha x} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\left[\cancel{2}\cos\beta x\right] = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

Allo stesso modo si ottiene $e^{\alpha x}\sin\beta x$

Quindi integrali indipendenti sono $\bar{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $\bar{y}_2\ e^{\alpha x} \sin \beta x$.

$\Rightarrow$ $y_0(x) = e^{\alpha x}[c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$ (2)

Quando abbiamo le due radici complesse coniugate e quindi la parte coniugata α e parte immaginaria β, l'integrale generale sarà uguale alla (2)
$\Rightarrow$ La i NON COMPARE.

Esercizi - Caso omogeneo

ES: $y'' - 2y = 0$ $\Delta > 0$

Scrivo l'eq caratteristica $\lambda^2 - 2 = 0$ $\leftarrow$ Eq del II ordine $\rightarrow$ Sol: $\lambda = \pm\sqrt{2}$

Allora $y_0(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}$

ES: $y'' + 2y' = 0$ $\Delta>0$ $\Rightarrow$ $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ $\lambda(\lambda+2) = 0$ $\lambda = 0$, $\lambda = -2$

$\Rightarrow$ $y_0(x) = c_1 e^{0} + c_2 e^{-2x} = c_1 + c_2 e^{-2x}$

ES: $y'' + 2y' + y = 0$ $\Delta = 0$ eq car: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ $\Delta = 4 - 4 = 0$

Quando $\Delta = 0$, abbiamo un'unica radice $\lambda = -1$

$\Rightarrow$ $y_0(x) = c_1 e^{-x} + x c_2 e^{-x}$

ES: $y'' + 2y = 0$ $\Delta<0$ eq car: $\lambda^2 + 2 = 0$ $\rightarrow$ $\lambda = \sqrt{-2}$ 2 radici complesse e coniugate

$\lambda = \sqrt{-1}\sqrt{2} = \pm i\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\alpha = 0$ $\leftarrow$ Parte reale

$\beta = \sqrt{2}$ $\leftarrow$ Parte complessa

$\Rightarrow$ $y_0(x) = e^{0}[c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x]$

ES: $my'' = -ky$ Pto materiale di massa m, K costante di elasticità

$\Rightarrow$ $my'' + ky = 0$, $y'' + \frac{K}{m} y = 0$ $\leftarrow$ Si pone $\omega^2 = \frac{K}{m}$ (quantità sicuramente positiva) $\rightarrow$ $y'' + \omega^2 y$ Eq Oscillatore Armonico

Eq. diff. lineare del II ordine a coeff costanti omogenea; Se sul pto materiale agisce una forza esterna dipendente solo dal Tempo avremo:

$y'' + \omega^2 y = f(t)$ $\leftarrow$ diventa completa

Tornando all'eq omogenea:
$y'' + \omega^2 y = 0$ $\rightarrow$ $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ $\lambda^2 = -\omega^2$ $\Rightarrow$ $\underline{\lambda = \pm i\omega}$ Caso $\Delta<0$ $\rightarrow$ complesso

$\alpha = 0$
$\beta = \omega$

Allora $y_0(t) = e^{0}[c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t]$

$\uparrow$ Eq del moto armonico

1:28

Eq. Diff. II° ordine lineare completa

L'obbiettivo è calcolare un integrale particolare y_p dell'eq completa:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad \text{Termine noto}$$

Si osserva la forma del T.n. $f(x)$

I) Supponiamo che $f(x) = e^{\gamma x} P_m(x)$ Dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n

Allora:

(i) $P(\gamma) \neq 0$, dove $P(\lambda)$ è il polinomio caratteristico $\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$

quindi $P(\gamma) \neq 0$ significa che γ NON E' RADICE dell'eq caratteristica.

Ricapitolando:

1) Se il termine noto è del tipo $f(x) = e^{\gamma x} P(x)$ procediamo:
2) Prendo γ e vedo se è radice dell'eq caratteristica dell'omogenea associata.
3) Se $P(\gamma) \neq 0$, ovvero γ NON è radice, Allora Un integrale dell'eq completa è del tipo:

$\longrightarrow$ $y_p(x) = e^{\gamma x} \cdot q_n(x)$ con $q_n(x)$ polinomio generico di grado n da determinare.

ES: $y'' - 4y' = xe^x$

1) eq omogenea: $y'' - 4y' = 0$ eq caratt. $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ $\quad \lambda(\lambda - 4) = 0$, $\lambda = 0$, $\lambda = 4$

$\Rightarrow$ int. gen. omog. ass: $y_0(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{4x} = c_1 + c_2 e^{4x}$

2) Eq completa: $f(x) = x e^{\gamma x}$, $\gamma \to 1$ $\rightarrow$ $\gamma = 1$ siccome $\gamma = 1 \neq 4 \neq 0$, NON è RADICE!

$\Rightarrow y_p(x) = e^x \cdot$ (polinomio generico dello stesso grado di x che compare qui) =

Primo grado

$= e^x(\underbrace{Ax + B}_{q_1 x})$

$\rightarrow$ Determiniamo $q_1(x)$, e cioè A e B in modo che y_p sia soluzione dell'eq completa, cioè sostituiamo y_p nell'eq completa e imponiamo che y_p sia soluz.

Calcoliamo quindi le derivate:

$$y' = D(e^x[Ax+B]) = e^x(Ax+B) + e^x A$$

$$y'' = D([e^x(Ax+B) + e^x A] = [e^x(Ax+B) + e^x A] + [e^x A] = e^x(Ax + B + A + A)$$

Sostituiamo:

$$\cancel{e^x}(Ax+B+2A) - 4[\cancel{e^x}(Ax+B+A)] = \text{Soluzione dell'eq completa} = x\cancel{e^x}$$

Risolviamo tale eq:

$\Rightarrow Ax + B + 2A - [4Ax + 4B + 4A] = x \Rightarrow \underbrace{-3Ax - 3B - 2A}_{\text{Polinomio a Sx}} = \underbrace{x}_{\text{Polinomio a dx}}$

Per il principio di identità dei polinomi i due saranno uguali $\Leftrightarrow$ i coeff dei termini dello stesso grado sono uguali

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A = 1 \\ -3B - 2A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ -3B + \frac{2}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{2}{9} \\ A = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p(x) = e^x\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right) \leftarrow$ Integrale particolare dell'eq completa

3) L'integrale generale dell'eq completa sarà: $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

$\Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 e^{4x} + e^{x}\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right)$ ← Integrale generale che dipende da c_1 e c_2

II) Supponiamo che $P(\gamma) = 0$, ovvero che γ è radice dell'eq caratteristica.
Se è radice, supponiamo che abbia molteplicità h. Allora un integrale part. è del tipo:

$$\boxed{y_p(x) = x^h \cdot e^{\gamma x} \cdot q_n(x)}$$

ES: Supponiamo che $f(x) = x^2+1$ (considerando l'esercizio precedente)

$\Rightarrow$ radici: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ → Esponenziale assente $\Rightarrow \gamma = 0$ è radice di molteplicità $h = 1$

Perchè $h=1$

L'eq caratteristica era $\lambda^2 - 4\lambda = 0$; $\lambda(\lambda-4) = 0$ rad. 0, 4 ← 0 è soluzione una sola volta $\Rightarrow h=1$

Se avessimo avuto una eq car. con $\Delta = 0$, quindi due eq reali e coincidenti $= 0$, allora 0 sarebbe stato soluzione due volte $\Rightarrow h = 2$

Tornando all'esercizio: $y_p(x) = x^h \cdot e^{\gamma x} \cdot q_n(x) = x^1 \cdot 1 \cdot (Ax^2 + Bx + C)$

$\Rightarrow y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ = Per ricavare A, B, C sostituiamo nella equazione → Derivo

$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y'' = 6Ax + 2B$ → $y'' - 4y' = \underbrace{x^2+1}_{\text{Termine noto}}$ → $f(x)$

$\Rightarrow (6Ax+2B) - 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = 6Ax + 2B - [12Ax^2 + 8Bx + 4C] = x^2 + 1$

$= -12Ax^2 + x(6A - 8B) + 2B - 4C = x^2 + 1 + 0x$ I coefficienti dello stesso grado devono essere UGUALI

$$\Rightarrow \begin{cases} -12A = 1 \\ 6A - 8B = 0 \\ 2B - 4C = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} - 8B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} - 4C = 1 \Rightarrow C = -\frac{9}{32} \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p(x) = x\left(-\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{9}{32}\right)$

L'integrale generale $y(x) = y_p(x) + y_0 = c_1 + c_2 e^{4x} + x\left(-\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{9}{32}\right)$

III) Supponiamo che $f(x) = e^{\gamma x} \cdot [P_n(x) \cdot \cos \mu x + q_K(x) \sin \mu x]$

esponenziale

Polinomi di grado m e K

$\gamma e \mu \in \mathbb{R}$

i) Se $P(\gamma \pm i\mu) \neq 0$

cioè $\gamma \pm i\mu$ NON è radice dell'eq caratteristica. Questo accade quando sin e cos NON sono presenti.

In questo caso dobbiamo trovare il numero complesso $\gamma \pm i\mu$. Trovato il numero complesso, si vede se è soluzione dell'eq caratteristica. (come prima)

Allora un integrale particolare $y_p(x)$ è:

$$y_p(x) = e^{\gamma x}\left[r_j(x) \cdot \cos \mu x + s_j(x) \sin \mu x\right]$$

dove $r_j(x)$ e $s_j(x)$ sono polinomi generici da calcolare di grado $j = \max\{m, K\}$

massimo grado

dal termine noto

ES: $y'' - 2y' - 3y = \cos(2x)$

• eq omog: $y'' - 2y' - 3y = 0$ $\rightarrow$ Eq caratt: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ $\quad \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2}$ $\quad \dfrac{2+4}{2}$ $\quad \dfrac{2-4}{2}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ $\quad \Rightarrow y_0(x)\ c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$ $\leftarrow$ Abbiamo l'eq omog assoc.

• $f(x) = \cos(2x)$ $\Rightarrow$ $\gamma \pm i\mu$ è $\pm 2i$ perché $\begin{cases} \gamma = 0 \\ \mu = 2 \end{cases}$

$\gamma \pm i\mu \neq 3 \neq -1$ $\Rightarrow$ Non è radice $\rightarrow$ Siamo nel caso precedente

$$\Rightarrow y_p(x) = \cancel{e^{\gamma x}}^{\,1}\left[A\cos(2x) + B\sin(2x)\right]$$

y

• A e B sono due polinomi DIVERSI di grado 1
• Non solo perché nell'eq compl è presente solo cos vuol dire che in y_p sarà presente solo il cos. Saranno presenti sia sin che cos.

Sostituiamo $\rightarrow$ Derivate

$y' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$; $y'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$

$\Rightarrow y'' - 2y' - 3y = \cos(2x) \Rightarrow \left[-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)\right] - 2\left[-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)\right] - 3A\cos(2x) - 3B\sin(2x) = \cos(2x)$

$\Rightarrow (-4A - 7B)\sin(2x) + (-7A - 4B)\cos(2x) = 1\cos(2x)\ \ 0 \cdot \sin x$

$\begin{cases} -4A - 7B = 0 \\ -7A - 4B = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} A = -\dfrac{7B}{4} \\ \dfrac{49B}{4} - 4B = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dfrac{49B - 16B}{4} = 1 \\ \dfrac{65B}{4} = 1 \Rightarrow B = -\dfrac{4}{65} \end{cases}$ $\quad \Rightarrow A = -\dfrac{7}{65}$

$\Rightarrow y_p(x) = -\dfrac{7}{65}\cos(2x) - \dfrac{4}{65}\sin(2x)$ $\quad \xrightarrow[\text{gener}]{\text{integ}}$ $\quad c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \dfrac{7}{65}\cos(2x) - \dfrac{4}{65}\sin(2x)$