

Lezione 22

Teoremi e studio grafico di una
funzione



Condizioni necessarie per i punti di Max/min relativi

Teorema di Fermat

Supponiamo di avere una f derivabile in $[a, b]$, e sia $x_0 \in [a, b]$;
Se x_0 è un estremo relativo (Max/min relativo)

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x_0) = 0$$

Condizione necessaria

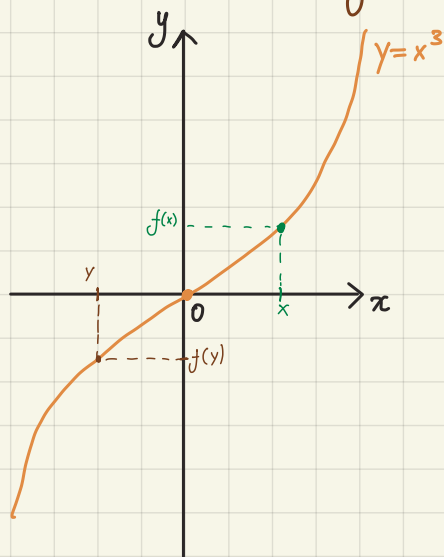
OSS. Geometricamente in x_0 avremo che $f'(x_0) = 0$, ovvero il coeff. ang. della retta tangente sarà 0, quindi parallela all'asse x . Infatti, in tutti i pti di Max/min, la tangente è parallela ad x .

Dim a 00:04:30

ES: $f(x) = x^3$ ha Max o min relativi?

$$f'(x) = 3x^2$$

Cerchiamo un punto in cui $f'(x) = 0$; $3x^2 = 0$, $x = 0$
 $\Rightarrow f'(0) = 0$ possiamo dire che 0 è Max/min relativo? **NO!**
la cond. è solo Necessaria



Graficamente notiamo che la funzione non ha punti di Max/min relativi, anche perché è strettamente crescente.

Quindi $f = x^3$ ci mostra che $f'(x_0) = 0$ è una condizione solo Necessaria, ma non Sufficiente.

Osservazione:

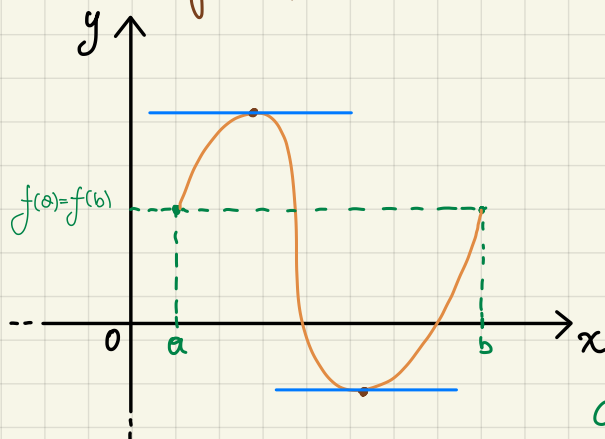
Il Teorema di Fermat ci dice che nei punti x_0 / $f'(x_0) = 0$ sono possibili estremi relativi. La deduzione più utile che ricaviamo, però, è che in qualsiasi punto in cui la derivata non si annulla, ovvero x / $f'(x) \neq 0$, sicuramente non sarà un estremo relativo.

Teorema di Rolle

Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora, se $f(a) = f(b)$, ovvero se agli estremi il valore della funzione è uguale,

$$\exists \xi \in (a, b) / f'(\xi) = 0$$

ξ XI, ovvero "Almeno un punto"



Coefficiente Ang.
di una retta
2 pti

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

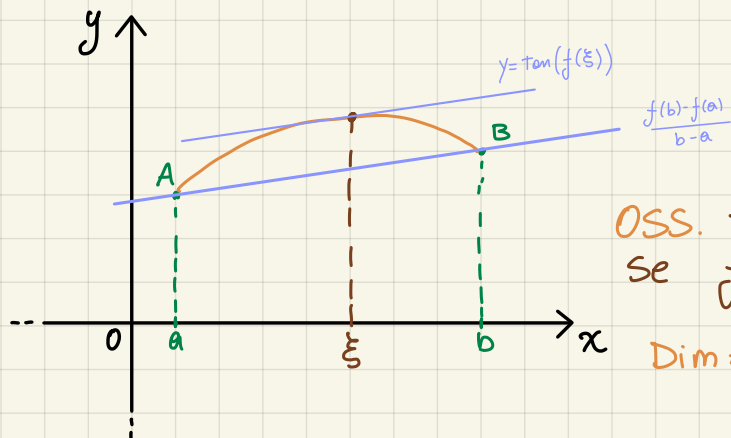
Quindi, se $f(a) = f(b)$, all'interno dell'intervallo DEVE per forza esserci un punto in cui la derivata si annulla.

Dimostrazione 00:34

Teorema di Lagrange

f è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) ; allora $\exists \xi \in (a, b) /$
Questo Teorema è una generalizzazione del teorema di Rolle, perché in questo caso non abbiamo più l'hp. che gli estremi siano uguali.

Il coefficiente angolare della tangente in ξ è uguale a quello della retta passante per A e B.

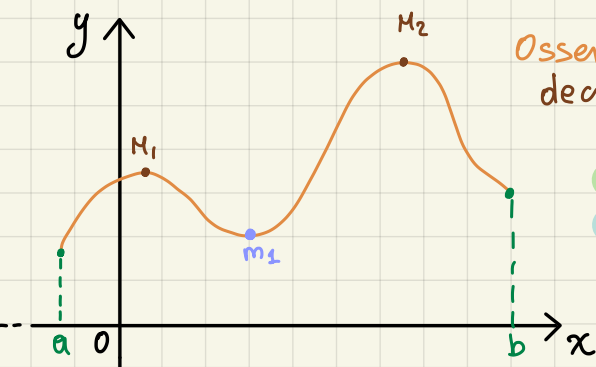


OSS. Il Teorema di Rolle è un caso particolare; se $f(a) = f(b) = 0$ $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$

Dim: 1:05

Problema

Quali condizioni possiamo aggiungere ad $f'(x_0) = 0$ affinché x_0 sia un Max o min relativo? (Il Teorema di Fermat non basta)



Osserviamo che prima di M_1 , la funzione cresce, e dopo decresce. Nel caso di M_2 , la f prima decresce e poi cresce.

Criterio di Monotonia

f continua in $[a, b]$ e deriv in (a, b) . La funzione f è CRESCENTE in $[a, b]$ se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

E' Decrescente in $[a, b]$ se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Dim: per hp, f è crescente in $[a, b]$; Sia $x_0 \in [a, b]$ e consideriamo anche $x_0 + h$ / $h > 0$ e $x_0 + h \in [a, b]$.

Dal rapp. incr abbiamo che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Poiché $h > 0$ e f è crescente, e $f(x_0 + h) > f(x_0) \Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 = f'(x_0)$$

(NECESSARIETA')

Dim (sufficienza): Dimostriamo che f è crescente in $[a, b]$, cioè se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Siano x_1 e $x_2 \in [a, b]$ / $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$. Inoltre per il teorema di Lagrange in $\mathcal{I}(x_1, x_2)$, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ / $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Stanno dicendo che \exists un punto interno ad (a, b) in cui la derivata è uguale al coeff. ang. della retta passante per gli estremi relativi a e b .

moltiplichiamo ambo i membri per $(x_2 - x_1)$

$$= f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{per H.P.}}} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0}$$

$= 0 \geq 0$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ cioè f è crescente C.V.D.

■ 1:28

Corollario (Condizioni necessarie e sufficienti)

Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) ; Sia $x_0 \in (a, b)$, allora si ha che x_0 è un Max relativo per f

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) f'(x_0) = 0 & \text{Cond. Necessaria} \\ 2) f'(x_0) \geq 0 & \text{con } x < x_0 \\ 3) f'(x_0) \leq 0 & \text{con } x > x_0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Prima cresce} \\ \text{e poi decresce} \end{array} \right\}$$

MASSIMO

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) f'(x_0) = 0 \\ 2) f'(x_0) \leq 0 & \text{con } x < x_0 \\ 3) f'(x_0) \geq 0 & \text{con } x > x_0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Prima decresce} \\ \text{e poi cresce} \end{array} \right\}$$

MINIMO

Punti Stazionari

Def Un punto x_0 si dice PTO STAZIONARIO o critico se $x_0 / f'(x_0) = 0$

Ricapitoliamo: Ricerca estremi relativi

Per la ricerca degli estremi relativi:

- 1) Calcolare la derivata I^a di $f(x)$.
- 2) Cercare gli eventuali punti x_0 / $f'(x_0)=0 \Rightarrow$ punti Stazionari.
A tal fine, risolvere l'equazione $f'(x)=0$; le sue soluzioni sono i POSSIBILI estremi.
- 3) Per verificare quali siano effettivamente Max e min relativi, basta studiare la disuguaglianza $f'(x) \geq 0$; le soluzioni della disuguaglianza ci diranno l'intervallo in cui la f cresce. Sapendo dove cresce sapremo anche dove decresce.

Teorema Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo.

Una f è costante in $[a, b]$ \Leftrightarrow

1) f è derivabile in $[a, b]$

2) $f'(x)=0 \quad \forall x \in [a, b]$

Dim: Se f è costante, f' è 0; Es: $f=3$, $f'(x)=0$
Pero' non tutte le f con derivata Nulla sono costanti; esistono f con deriv nulla ma non costanti.

■ 1:55

Studio grafico di una funzione

Lo studio di funzione ha vari passaggi:

1) Dominio

Dobbiamo sapere dove la funzione esiste.

2) Simmetrie

f è simmetrica all'asse $y \Leftrightarrow f(x) = f(-x)$
 f è simmetrica ad $O \Leftrightarrow f(x) = -f(x)$

2' Intersezioni con assi

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

3) Segno della funzione

Risolvere la disequazione $f(x) > 0$

- Per sapere dove la f è positiva.

○ Se il segno è troppo complicato da risolvere, conviene NON FARLO.

4) ASINTOTI

- a) Orizzontali $y = k$
- b) Verticali $x = c$
- c) Obliqui $y = mx + q$

5) STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA - per il calcolo dei max/min relativi

- a) Risolvere $f'(x) = 0$ per gli eventuali punti stazionari
- b) Risolvere $f'(x) > 0$ per la crescenza della funzione

6) STUDIO DELLA DERIVATA Seconda - per gli eventuali punti di flesso

- a) $f''(x) = 0$ punti di flesso
- b) $f''(x) > 0$ per la concavità o convessità

ES: $y = x e^{1/x}$

1) Dominio $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

2) Simmetrie

$f(x) = x e^{1/x}$, $f(-x) = -x e^{-1/x} \neq f(x)$
 $\neq -f(-x)$

3) Segno di f.

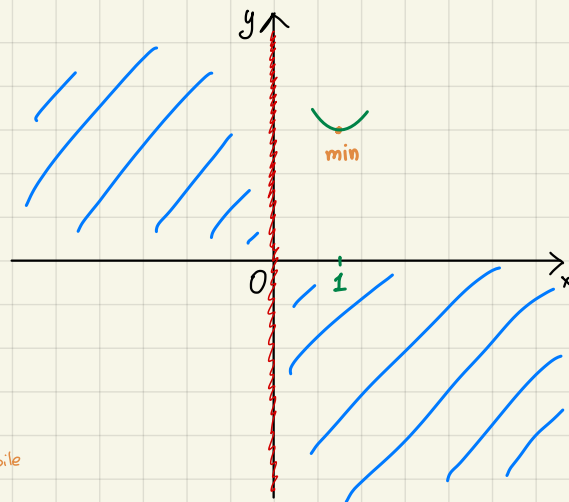
$f(x) > 0 \Rightarrow x e^{1/x} > 0 \quad \forall x > 0$
 \Rightarrow parte superiore per $x > 0$
 e inf. per $x < 0$

3) Asintoti

2') Int. con Assi

$\begin{cases} y = x e^{1/x} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x e^{1/x} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$
 Non accettabile

$\begin{cases} y = x e^{1/x} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x e^{1/x} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$
 Non Accettabile



4) Derivata I^a

$f(x) = x e^{1/x} \Rightarrow f'(x) = e^{1/x} + x e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x} \left(1 + x \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = e^{1/x} \left(1 - \frac{x}{x^2}\right) = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$
 $= e^{1/x} \left[\frac{x-1}{x}\right]$

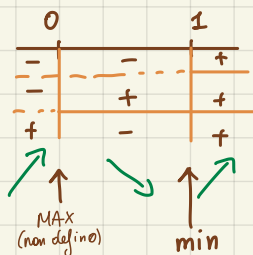
Pti Stazionari a)

$f'(x) = 0$ per $e^{1/x} \left[\frac{x-1}{x}\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0$ per $x=1$ possibile estremo relativo

b) $f'(x) > 0$, $e^{1/x} \left[\frac{x-1}{x}\right] = 0 \Leftrightarrow e^{1/x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \left[\frac{x-1}{x}\right] > 0$ per $x-1 > 0$; $x > 1$
 $\Rightarrow x > 0$

$f(1) = x e^{1/x} = e \Rightarrow (1, e) \text{ min}$



$\Rightarrow f'(x) > 0$ per