Metodo della var. delle costanti

Consideriamo l'eq: $\boxed{y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x)}$ (1)

Per risolverla ci serve trovare gli integrali y_1 e y_2 dell'omogenea associata, e di un integrale part y_p.

Quindi, l'integrale generale $y(x)$ è dato da: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \boxed{y_p(x)}$

Per determinare $y_p(x)$ ci sono diversi metodi, ma dipendono dalla sua forma. Per risolvere $y_p(x)$ con un metodo INDIPENDENTE dalla sua forma possiamo usare il teorema:

<u>Teorema</u> Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due integrali lin. indip. dell'omogenea associata alla (1).
Siano $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ due funzioni tali che le loro derivate prime risolvono il sistema:

$$\begin{cases} \gamma_1'(x)\,y_1(x) + \gamma_2'(x)\,y_2(x) = 0 \\ \gamma_1'(x)\,y_1'(x) + \gamma_2'(x)\,y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Se il sistema è soddisfatto allora $\boxed{y_p(x) = \gamma_1(x)\,y_1(x) + \gamma_2(x)\,y_2(x)}$ è un integrale particolare.

ES: $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ 1) Trovo y_1 e y_2 $\to$ $\lambda^2 + 1 = 0$ $\to$ $\lambda = \pm\sqrt{-1}$ $\to$ $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ $\quad \alpha = 0$, $\beta = 1$

$\Rightarrow$ $y_0(x)$ è del tipo: $e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$ $\to$ $\underbrace{C_1 \cos(x)}_{y_1}$, $\underbrace{C_2 \sin(x)}_{y_2}$

2) Applico il teorema: sappiamo che $y_p(x) = \gamma_1(x)\,y_1(x) + \gamma_2(x)\,y_2(x)$, con γ_1 e γ_2 soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 = 0 \\ \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' = \frac{1}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1' \cos x + \gamma_2' \sin x = 0 \\ -\gamma_1' \sin x + \gamma_2' \cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases} \to \gamma_1' = \frac{-\gamma_2' \sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma_2' \sin x}{\cos x} + \gamma_2 \cos x = \frac{1}{\cos x} \to \frac{\gamma_2' \sin x + \gamma_2' \cos^2 x}{\cancel{\cos x}} = \frac{1}{\cancel{\cos x}} \to \gamma_2'(\sin x + \cos^2 x) = 1$$

$$\Rightarrow \gamma_2' = \frac{1}{\sin x + \cos^2 x} \qquad \Rightarrow \gamma_1' = \frac{-\left(\frac{1}{\sin x + \cos^2 x}\right)\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sin x}{\sin x + \cos^2 x}}{\cos x} = -\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}$$

A questo punto integro per trovare γ_1 e γ_2.

4.47 Applicando il metodo della variazione delle costanti, risolvere l'equazione

$$y'' - y = 3x^2 - 1$$

I) Trovare y_1 e y_2 : $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\Rightarrow y_0 = c_1 \underbrace{e^{x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{e^{-x}}_{y_2}$ $\qquad y_1' = e^x \qquad y_2' = -e^{-x}$

II) Metodo var cost.

$$\begin{cases} \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 = 0 \\ \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' = 3x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \gamma_1' = -\frac{\gamma_2' y_2}{y_1} \Rightarrow \left(-\frac{\gamma_2' y_2}{y_1}\right) y_1' + \gamma_2' y_2' = 3x^2 - 1$$

Sostituisco

$$\left(\frac{-\gamma_2' e^{-x}}{e^x}\right) e^x + \gamma_2'(-e^{-x}) = 3x^2 - 1 \qquad \frac{-\gamma_2' \cancel{e^{-x}} \cdot \cancel{e^{x}}}{e^x} - \gamma_2' e^{-x} = 3x^2 - 1 \qquad \frac{-\gamma_2' - \gamma_2' \cancel{e^{-x}} \cancel{e^{x}}}{e^x} = 3x^2 - 1 = \frac{-2\gamma_2'}{e^x} = 3x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \gamma_2' = \frac{(3x^2 - 1)e^x}{2} \qquad \gamma_2 = \frac{1}{2}\int \underset{g'}{3e^x} \cdot \underset{f}{x^2} - \underbrace{\frac{1}{2}\int e^x\,dx}_{-\frac{1}{2}e^x + c}$$

$$\int f(x) \cdot g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$$

$$= 3e^x \cdot x^2 - \int 2x\, 3e^x\, dx = x^2 3e^x - 6\int \underset{g'}{e^x} \underset{f}{x}\, dx \Rightarrow 3x^2 e^x - 6\left[x e^x - \underbrace{\left(\int e^x\, dx\right)}_{e^x}\right] = 3x^2 e^x - 6xe^x - 6e^x + c$$

Provo con il metodo classico

$f(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow$ Cerco y del tipo: $y = Ax^2 + Bx + C$

$y' = 2Ax + B \qquad y'' = 2A$

$$\Rightarrow 2A - [Ax^2 + Bx + C] = 3x^2 - 1 \qquad \Rightarrow 2A - Ax^2 - Bx - C = 3x^2 - 1$$

$$\begin{cases} 2A - C = -1 \quad = -6 - C = -1 \Rightarrow C = -5 \\ B = 0 \\ A = -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p(x) = -3x^2 - 5$ ✓