Introduzione

Consideriamo una successione di numeri reali: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Cosa vuol dire fare la somma di questi infiniti numeri?

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n}_{\text{Termine generale}}$$

La somma ha poco senso perché sommiamo un numero infinito di numeri.

Come risolviamo?

Pongo
$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$\vdots$
$S_n =$ Somma dei primi n termini $= a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Per ottenere la somma $\rightarrow$ $\boxed{S = \lim_{n \to +\infty} S_n}$ Il limite potrebbe essere finito

Se il limite è finito, la serie CONVERGE. Se il lim tende a $\pm\infty$, la sere DIVERGE.
Se il lim è indeterminato, la serie né conv. né div

ES: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = +1, -1, +1 \dots$

Serie geometrica

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ dove $q \in \mathbb{R}$
RAGIONE

Come riconoscerla? Alla base deve esserci una quantità INDIPENDENTE da n.

Perché è detta geometrica?
Supponiamo $q = 2$ $\rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \underbrace{1 + 2 + 4 + 8 + \dots}$

Tutti i valori prodotti dalla serie costituiscono una PROGRESSIONE GEOMETRICA.

Il valore corrente diviso per il valore precedente ha come risultato un valore costante (in questo caso di ragione 2)

Quindi se abbiamo una serie geometrica, possiamo calcolare la SOMMA dei primi n termini:

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Somma dei primi n termini

Capiamo quindi che a seconda della base q (RAGIONE) la serie può convergere o divergere:

se facciamo il limite di S_n, possiamo calcolare la somma S_n:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = S$$

$\rightarrow$ $-1 < q < 1$ $\rightarrow$ $\frac{1 - 0}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1-q}$ Converge

$\rightarrow$ $q = 1$ Diverge a $+\infty$

$\rightarrow$ $q > 1$ Diverge a $+\infty$

$\rightarrow$ $q < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n = 1 - 2 + 4 - 8 + \dots$

oscilla

Irregolare

ES: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ Si riconduce ad una serie geometrica?

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)}_{\text{indipend.}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

ragione

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ Converge

$$\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}\to 0}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$$

ES: $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ La somma parte da 2, non zero!

- Il carattere non cambia, anche se togliamo uno o più membri; ovviamente la Somma cambia!

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}$

Criterio del rapporto

Solo per serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

Considero il limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$$

$\ell < 1 \Rightarrow$ CONVERGE

$\ell > 1 \Rightarrow$ DIVERGE

$\ell = 1$ Il criterio non ci può aiutare

ES: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)+1}{5^{n+1}}\right] \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{5^n}} = \frac{n+1+1}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n+1} = \frac{n+2}{\cancel{5^n}\cdot 5} \cdot \frac{\cancel{5^n}}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+2}{\cancel{n}+1} \cdot \frac{1}{5} \to \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \text{converge positivamente}$$

il criterio non ci da la somma!

ES: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \to \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{(n+1)\cdot \cancel{n!}} \cdot \cancel{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$ converge

Criterio della radice

Solo per serie a termini positivi

Anche in questo caso si calcola un limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

$\ell < 1$ CONVERGE

$\ell > 1$ DIVERGE

$\ell = 1$ Il criterio non ci può aiutare

ES: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3}\right)^n \to \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n+3}\right)^n} = \left[\left(\frac{1}{n+3}\right)^{\cancel{n}}\right]^{\cancel{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} \to 0 < 1$ CONVERGE

ES: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ C. radice $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^{\cancel{2}}}\right]^{\cancel{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Limite notevole $\to e > 1$ Diverge

Serie Armonica

Molto importante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Quale sara' il suo carattere? La S. Armonica e' una Serie **DIVERGENTE**

Teorema

Esplicitiamo la serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$$

$$\underbrace{a_1+a_2+\dots+a_n}_{\substack{S_n \\ \text{Somma}}} + \underbrace{a_{n+1}+a_{n+2}+\dots}_{\substack{r_n \\ \text{Resto}}}$$

Possiamo decidere di arrestare la somma del resto ad un determinato indice K.

$$\underbrace{a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+K}}_{\text{Ridotta } K\text{-esima del resto di ordine } n}$$

ES: $n=3$ e $K=4$

$$\to 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$$

$$\underbrace{a_1+a_2+a_3}_{S_n} + \underbrace{a_{3+1}+a_{3+2}+a_{3+3}+a_{3+4}}_{\substack{\text{Resto} \\ K\text{-esimo}}}$$

Il Teorema ci dice che affinche' una serie converga, dobbiamo poter scegliere un numero ε piccolo a piacere Tale che:

$$\boxed{\forall \varepsilon>0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \ | \ \forall n>p \quad |r_{n,K}|<\varepsilon}$$

Ovvero che il resto (cioe' la somma $\sum_{n=n}^{K} a_n$) deve essere minore del nostro valore ε, cioe' Trascurabile.

Tornando alla serie armonica

Prendiamo $K=n$ ottenendo

$$a_n+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+K} \overset{n=K}{=} a_n+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} > \overbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n}}^{K=n \text{ volte}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} > \cancel{n}\frac{1}{2\cancel{n}} \Rightarrow |r_{n,n}|>\frac{1}{2} \quad \text{ovvero} \quad 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$$

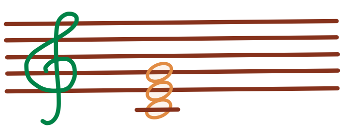
½ NON e' un numero molto piccolo, di conseguenza la serie NON converge; inoltre essendo una serie a termini positivi (queste non sono mai indeterminate), la serie armonica DIVERGE

Perche' "Armonica"?

Una serie si dice armonica se l'inverso di S_n costituisce una progressione Aritmetica, ovvero se $S_n = a_1, a_2, \dots, a_n \to S_n = \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}$ rispetta $a_n - a_{n-1} = q$

ragione costante

Detto questo, diamo un'occhiata all'accordo di Do maggiore.



Per ottenere un accordo di DO-MI-SOL, si devono avere 3 corde aventi la seguente lunghezza (in rapporto):

DO ——— 1

MI ——— 4/5

SOL ——— 2/3

Se facciamo l'inverso otteniamo $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$

Testiamo: $\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$

Ragione q costante

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^K} \qquad \text{con } K \in \mathbb{R}$$

Vari Casi
- Se $K > 1$ $\Rightarrow$ CONVERGE
- Se $K < 1$ $\Rightarrow$ DIVERGE
- Se $K = 1$ $\Rightarrow$ Serie armonica $\Rightarrow$ DIVERGE

Criterio di RAABE

Simile al c. del rapporto

Data $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = \ell$

T. positivi

- $\ell > 1$ $\Rightarrow$ CONVERGE
- $\ell < 1$ $\Rightarrow$ DIVERGE
- $\ell = 1$: Non possiamo dire nulla

Il contrario del criterio del rapp !

Limite notevole utile

$$\lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^{\alpha} - 1}{t} = \alpha$$

Dimostriamo la s. armonica generalizzata con RAABE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^K} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} n\left[\frac{\frac{1}{n^K}}{\frac{1}{(n+1)^K}} - 1\right] = n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^K - 1\right] = \lim_{n \to \infty} n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^K - 1\right] = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^K - 1}{\frac{1}{n}}$$

Se $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$

Usiamo il lim notevole $\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^K - 1}{\frac{1}{n}} \Rightarrow K$

Quindi, secondo RAABE, Se
- $K > 1$ C
- $K < 1$ D

Criterio del confronto DI GAUSS

Supponiamo di avere due serie a termini > 0

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

Supponiamo che ogni termine di a_n sia:

$a_n \leq b_n$ ovvero $a_1 \leq b_1, \ a_2 \leq b_2, \ \dots, \ a_n \leq b_n$

(a_1: minorante di... ; b_1: maggiorante di..)

I) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (maggiorante) Converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (minorante) Converge

II) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (minorante) Diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (maggiorante) Diverge

} Casi favorevoli

III) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Diverge $\Rightarrow$ BOH?

IV) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow$ BOH?

} casi dubbio

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ Sappiamo già che la s. armonica gen. Diverge. Ma seguiamo il criterio del conf.

$\Rightarrow$ $\sqrt{n} \leq n$? SI $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (maggiorante) $>$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (minorante)

Serie armonica $\Rightarrow$ DIVERGE

$\Rightarrow$ Se la minorante diverge, la maggiorante diverge.

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln|n|}$ $\quad n-\ln|n| < n \Rightarrow \frac{1}{n-\ln|n|} > \frac{1}{n} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln|n|}}_{\text{maggiorante}} > \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{minorante}}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serie armonica $\rightarrow$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln|n|}$ DIVERGE

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ $\quad 0 < \sin^2 n < 1$ possiamo maggiorare $\sin^2 n$ con $1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ s. armonica generalizz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ con $K = 2 > 1 \Rightarrow$ Converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ Converge

Criterio del confronto Asintotico

Consideriamo 2 serie a termini >0.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$ Le due serie hanno lo stesso carattere

Inoltre

I) Se $\ell = 0$ e b_n converge, anche a_n converge

II) Se $\ell = +\infty$ e b_n diverge, anche a_n diverge

casi simili al confronto di gauss

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}$ Carattere?

Scelgo una serie a noi conosciuta (ad es la serie armonica generalizzata):

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serie a.g. con $\alpha = 2 > 0 \rightarrow$ CONVERGE

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{2n+5}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{2n+5} \rightarrow +\infty \neq \ell$ $\quad a_n$ e b_n NON HANNO lo stesso carattere

Proviamo con un'altra serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+5}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{2n+5} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(2+0)} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2n+5}$ e $\frac{1}{n}$ hanno lo stesso carattere! $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}$ Diverge

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^3}$ carattere? $\quad b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}} =$ Deve essere $\neq 0$ e finito

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ $\quad \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{n^\alpha}{n^3} \rightarrow ?$ ci serve $\ell \neq 0$ e finito

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n^3} =$
- $\alpha = 3 \rightarrow 1$
- $\alpha < 3 \rightarrow 0$
- $\alpha > 3 \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow$ Scelgo $\alpha = 3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ con $\alpha = 3 > 0$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge

Criterio di Riemann o "Degli infinitesimi"

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a termini >0 ; Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \cdot a_n = \ell$ abbiamo 2 casi:

I) $\alpha > 1$, ℓ è finito (anche zero) $\in \mathbb{R}$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE

II) $0<\alpha\leq 1$, $\ell \neq 0 \vee \ell = \pm\infty$ $\underbrace{\{\ell / (-\infty, 0] \cup [0, +\infty]\}}_{\text{tutti i reali tranne } 0}$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGE

ES: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ i criteri visti prima "non funzionano" $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \cdot \frac{\ln(n)}{n^2} =$ mi serve $\longrightarrow$ 1) $\alpha>0 \wedge \ell \in \mathbb{R}$ finito

$\searrow$ 2) $0<\alpha\leq 1$ $\wedge$ $\ell \neq 0$ anche infinito

Poniamo $\alpha = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cancel{n^2} \frac{\ln(n)}{\cancel{n^2}}$ $\alpha > 1 \Rightarrow$ mi serve ℓ finito

$\lim_{n\to\infty} \ln(n) \to +\infty$ condiz. NON soddisfatte

Pongo $\alpha = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cancel{n} \cdot \frac{\ln(n)}{n^{\cancel{2}}} \to 0$ $0<\alpha\leq 1 \Rightarrow \ell \neq 0$ finito o infinito condiz. NON soddisfatte

Pongo un valore $\underline{\text{INTERMEDIO}}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{3/2} \cdot \frac{\ln(n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3} \cdot \frac{\ln(n)}{n^2} = \cancel{n}\sqrt{n}\, \frac{\ln n}{n^{\cancel{2}}}$

$\to \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, \frac{\ln(n)}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\cancel{n} \ln n}{\cancel{n}\sqrt{n}} \to 0$ $0<\alpha\leq 1$ $\wedge$ $\ell \to 0$

Quando non funziona?

$0<\alpha\leq 1$ ed abbiamo $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \cdot a_n = 0$ NON possiamo fare nulla

ad esempio

$a_n = \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$

Serie a Termini Alterni

I termini si alternano tra positivi e negativi: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Criterio di Leibniz

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \cdot a_n$ → oppure $n+1$

Converge se si verificano 2 condizioni:

I) $\lim_{n \to \infty} a_n \overset{\text{DEVE}}{=} 0$

II) $|a_1| > |a_2| > |a_n|$ La sequenza deve essere DECRESCENTE

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$ I) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \to 0$ ✓

II) $|a_{n+1}| < |a_n|$? Verifichiamo con la definizione

$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$? ; $n+1 \geq n$? ; $1 \geq 0$ ✓ $\forall n$

ES $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2n+3}$ I) $\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2} \neq 0$ NON CONVERGE

Assoluta Convergenza

Per serie a termini qualunque

$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - \dots$

Si dice che una serie è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE quando:

Se $\underbrace{|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|}_{\text{somma in valore assoluto}}$ è CONVERGENTE ⇒ anche la serie S_n è convergente.

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2+1}$ Segno alterno → Applico l'A.C.

Studio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to \alpha = 2 > 1$ converge ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2+1} \to$ Converge

ES: $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln(n)}$ Converge? È assolutamente convergente? ⇒ Studiamo solo $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

Usiamo il teorema del confronto

$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}}_{\substack{\text{maggiorante} \\ a_n}} \geq \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\substack{\text{minorante} \\ b_n}}$ → Diverge

Se b_n diverge anche a_n diverge

⇒ Non vale l'assoluta convergenza.

Non è A.C. ma potrebbe essere Parzialmente convergente → Applico Leibniz:

I) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n)} \to 0$? SI ✓ II) Decrescente? $\left|\frac{1}{\ln(n)}\right| \geq \left|\frac{1}{\ln(n+1)}\right|$? $\ln(n) \leq \ln(n+1)$; $n \leq n+1$ → $0 \leq 1$? SI ✓

⇒ Soddisfatte I e II, la serie converge