

Lezione 16

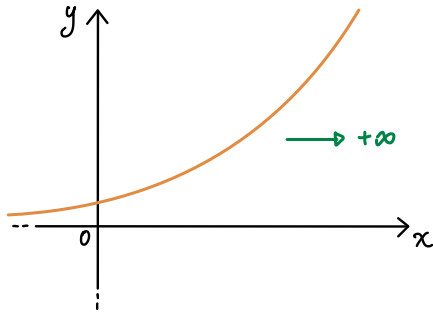
Calcolo limiti funzioni elementari

Tip: basta ricordare il grafico della funzione per capire il limite di essa:

ES: $y = 2^x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

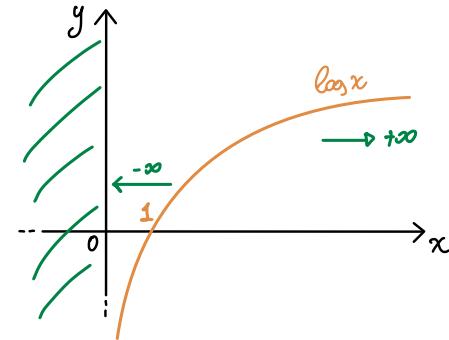
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$



ES: $y = \log x$

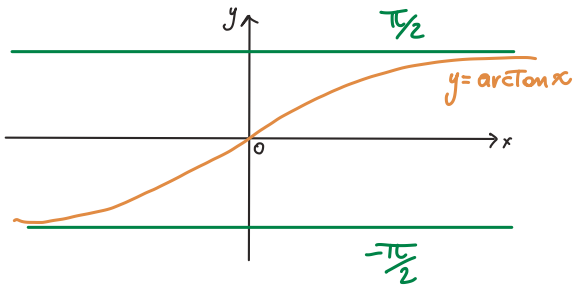
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$$



ES: $y = \arctan x$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}$$



Operazioni con i limiti

Il limite della somma, prodotto, quoziente di due funzioni è uguale alla somma, prodotto, quoziente dei limiti delle funzioni, **a meno** che non si presentino delle forme indeterminate.

Limiti Notevoli

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \log_a x \equiv \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^a}} = \frac{\log x \rightarrow -\infty}{\left(\frac{1}{x}\right)^a \rightarrow +\infty} \quad x^a \gg \log x \Rightarrow \rightarrow 0$

Da cui otteniamo..

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \frac{1 + \cos x - \cos x - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$
 $= \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \xrightarrow{\text{Lim notevole}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot x = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{1} \frac{1}{1} = 1$

Teoremi sui limiti di f. Composte

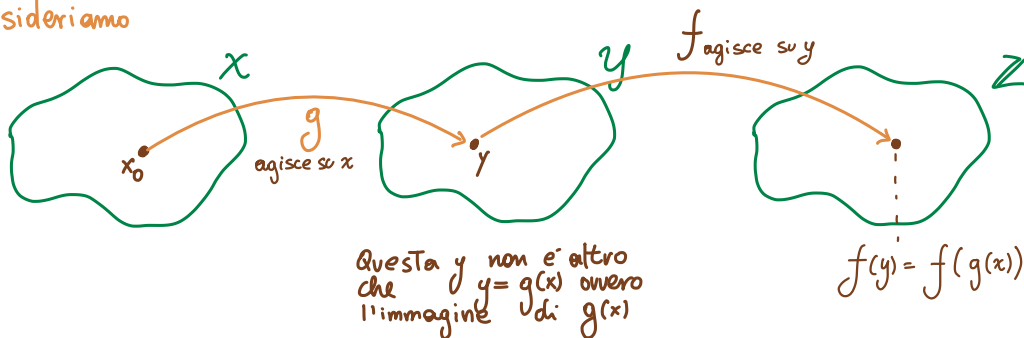
Usiamo due funzioni:

$g: x \rightarrow y$
 $f: y \rightarrow \mathbb{Z}$ / esistano i limiti
 ① Hp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = \ell$$

Consideriamo



Quindi se il Dominio di f è uguale o contenuto nel codominio di $g(x)$, si può considerare la funzione composta, che si denota come

$$f \circ g: x \in X \xrightarrow[\text{Associa l'immagine } g]{g} g(x) = y \in Y \xrightarrow{f} f(y) = f(g(x)) \in \mathbb{Z}$$

② Hp. $\exists \delta > 0$ / $g(x) \neq y_0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $x \neq x_0$

Esiste solo un punto dove $g(x) = y_0$ ovvero x_0 .

Praticamente

Overo: esiste un intorno di x_0 all'interno del quale, quando calcolo $g(x)$, l'immagine è diversa da y_0

00:27 Quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \ell$$

ES: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right): x \xrightarrow{g} \frac{1}{x} \xrightarrow{f} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Si calcola prima ↙
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
 \downarrow
 g

Poi calcoliamo
 $\lim_{y \rightarrow 0} \sin(y) = 0$
 $y = \frac{1}{x}$

In pratica
 $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$

ES: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\log\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)$

$x \rightarrow x^2-1 \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{x^2-1} \xrightarrow{\log} \log\left(\sqrt{x^2-1}\right) \xrightarrow{\arctg} \arctg\left(\log\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $+\infty \quad +\infty \quad +\infty \quad \frac{1}{2}$

ES: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

se $y = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ quindi: $x = \frac{1}{y} \Rightarrow x \rightarrow +\infty \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow 0$ Bott!

ES: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1$

ES: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ $y = e^x - 1$ $e^x = 1 + y$ $x = \log(1+y)$ $x \rightarrow 0 \Rightarrow y = 0$

riscriviamo: $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log(1+y)}{y}} = 1$

ES: $\frac{(1+x)^2 - 1}{x} = 2$

1:38

Infinitesimi

$f(x)$ è un infinitesimo in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Supponiamo che f e g siano due inf. in x_0 , diremo che f e g sono inf. dello stesso ordine se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$, con $\ell \neq 0$ e finito.

f è un inf di ordine superiore a g se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$$

$f \gg g$, $f = o(g)$ o piccolo

f è un inf di ordine inferiore a g se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \infty$$

$f \ll g$

ES: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x$ e x sono infin. dello stesso ordine.

ES: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \cos x$ e x^2 sono infin. dello stesso ordine.

ES: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \log()$ e x sono infin. dello stesso ordine.

Si dice che se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \Rightarrow f$ e g sono asintotiche: $f \sim g$

Se però $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$, "si può fare qualcosa di stesso":

ES: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ lo scriviamo come $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\left(\frac{1}{2}x^2\right)} = 1 \Rightarrow f \sim \left(\frac{1}{2}\right)g \Rightarrow 1 - \cos x \sim \left(\frac{1}{2}\right)x^2$
! non sono uguali!

ES $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^3)}{e^{\sin x} - 1}$
 1) $\log(1+x^3) \sim x^3$ ovvero $\frac{\log(1+x)}{x}$
 2) $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x$ ovvero $\frac{e^x - 1}{x} = 1$

quindi possiamo dire che:

$$\frac{\log(1+x^3)}{e^{\sin x} - 1} \sim \frac{x^3}{\sin x} \sim \frac{x^3}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0$$

ES: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$ 1) $\left(1 - \cos x \cdot \frac{1}{x^2}\right) x^2$ 2) $\tan^2 x \sim x^2$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ES: $(1+x)^2 - 1 \sim 2x$

Limiti notevoli

funzioni goniometriche	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1$

funzioni esponenziali e logaritmiche	
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$
$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad a > 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{a^x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{a^x} = 0 \quad a > 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$	$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln[f(x)]}$ l'uguaglianza a sinistra può essere utile per risolvere alcuni limiti che si presentano nelle forme indeterminate 0^0 $1^{\pm\infty}$ $+\infty^0$

ad ogni limite notevole si possono applicare le seguenti proprietà che lasciano invariato il risultato

limite iniziale	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito	se nel limite al posto di x c'è nx il risultato del limite resta lo stesso	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen} x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} nx}{nx} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{\text{sen} nx} = 1$

frazioni equivalenti			
per il calcolo dei limiti notevoli può essere utile ricordare alcune delle possibili operazioni con le frazioni:			
scomporre la frazione iniziale in due frazioni	dividere ogni monomio del numeratore e del denominatore per la stessa quantità n	moltiplicare e dividere la frazione per la stessa quantità n	moltiplicare e dividere il numeratore per n e/o moltiplicare e dividere il denominatore per m
$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$	$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}$	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$	$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{n} \cdot n}{\frac{b}{m} \cdot m}$
$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{\frac{a \cdot b}{n}}{\frac{c \cdot d}{n}}$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a \cdot b \cdot n}{c \cdot d \cdot n}$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{\frac{a \cdot b}{n}}{\frac{c \cdot d}{n}}$
$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c+d} + \frac{b}{c+d}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{\frac{a}{n} + \frac{b}{n}}{\frac{c}{n} + \frac{d}{n}}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{(a+b) \cdot n}{(c+d) \cdot n}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{\frac{a}{n} + \frac{b}{n}}{\frac{c}{n} + \frac{d}{n}}$
$\frac{a \cdot b}{c+d} = a \cdot \frac{b}{c+d}$	$\frac{a \cdot b}{c+d} = \frac{\frac{a \cdot b}{n}}{\frac{c}{n} + \frac{d}{n}}$	$\frac{a \cdot b}{c+d} = \frac{a \cdot b \cdot n}{(c+d) \cdot n}$	$\frac{a \cdot b}{c+d} = \frac{\frac{a \cdot b}{n}}{\frac{c}{n} + \frac{d}{n}}$

Teorema Principio di sostituzione degli infinitesimi

Siano f_1 ed f_2 infinitesimi in x_0 / $f_1 = o(f_2)$ (f_1 tende più velocemente a 0 di f_2)
Abbiamo anche g_1 e g_2 infinitesime in x_0 / $g_1 = o(g_2)$.

Allora
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g_2}$$

In poche parole: possiamo sostituire (eliminare) degli infinitesimi di ordine superiore.

Dim:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} \stackrel{\substack{\text{in evidenza} \\ \text{grado superiore}}}{=} \frac{f_2 \left(\frac{f_1}{f_2} + 1 \right)}{g_2 \left(\frac{g_1}{g_2} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g_2}$$
 stessa cosa dei limiti "normali"

ES:
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overset{3}{\text{tg}^3 x} + \overset{1}{\sin x} + \overset{2}{1 - \cos x}}{\underset{4}{\log^4(1+x)} - \underset{5}{(e^x - 1)}}$$

= Posso ignorare quelli di ordine superiore = $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\log^4(1+x)} \sim \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} \rightarrow \infty$

Ordine di un infinitesimo

Si confronta un infinitesimo con l'infinitesimo campione x^α in $x_0 = 0$ (ovvero una f che in x_0 tende a 0). Nei casi generali l'inf. campione è $(x - x_0)^\alpha$ in x_0

Definizione: f è un infinitesimo di ordine α se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = l$ con $l \neq 0$ e finito, ovvero se $f(x)$ ha lo stesso ordine di x^α

ES: $\text{tg}^3(x)$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}^3 x}{x^3} = 1$

ES: $(1 - \cos x)^8$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^8}{(x^2)^8} = \frac{1}{2^8}$ perché $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$