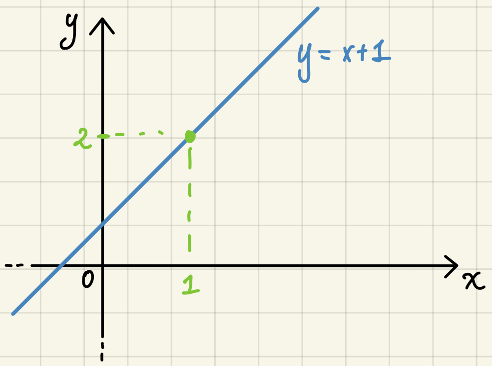
Limiti

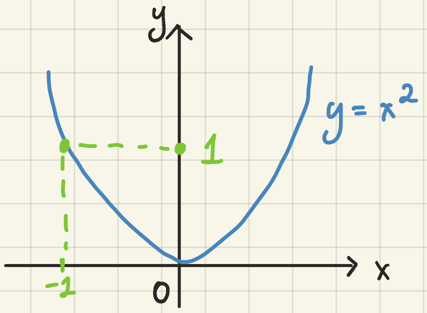
Introduzione



Supponiamo di dover calcolare:

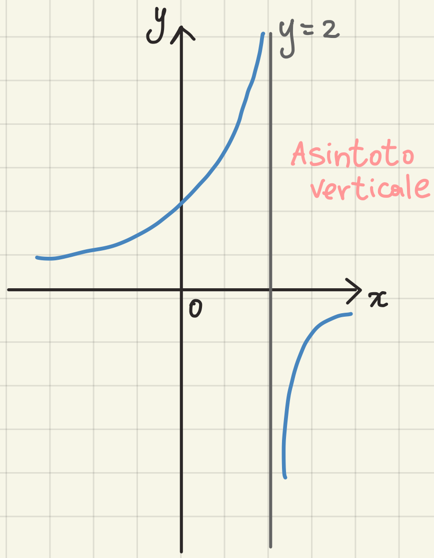
$$\lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

Cosa succede ad $x+1$ (sulla y) quando x si avvicina ad $x=1$?



$$\lim_{x \to -1} x^2 = 1$$

In questi casi banali ha senso sostituire il valore nella funzione.



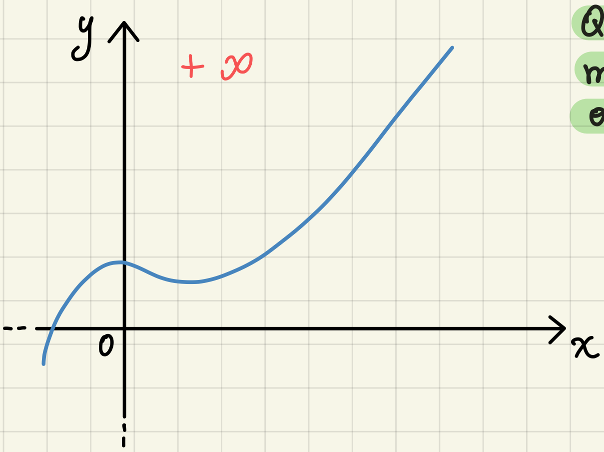
$$y = \frac{-3x-2}{x-2} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{-3x-2}{x-2} \xrightarrow{\text{sostituz.}} \frac{-8}{0}$$

Non si può fare

$$\mathbb{D} = x-2 \Rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 2\}$$

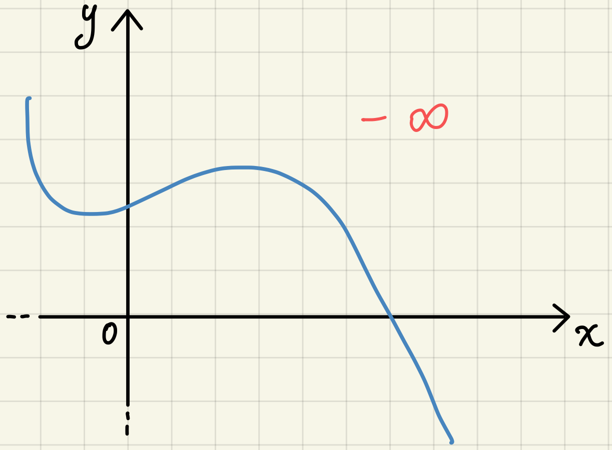
Limiti All'infinito

Che significa $\lim_{x \to +\infty} f(x)$? $\Rightarrow$ Che fa la funzione quando la x diventa sempre più grande



Quando ad x molto grandi corrispondono y molto grandi, si dice che il limite tende all'infinito.

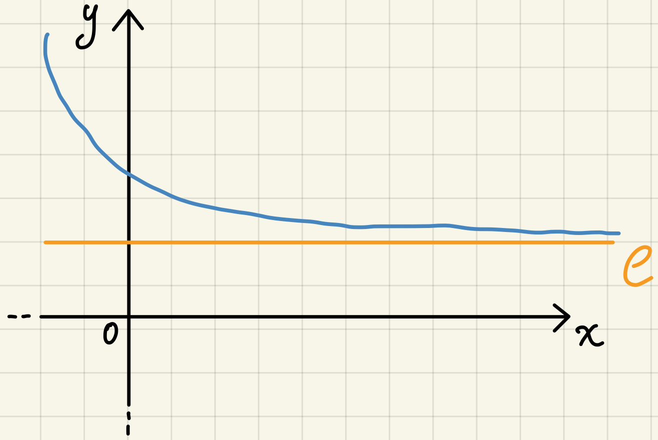
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ Questo caso è analogo al precedente.

lim = ℓ

Quando facciamo tendere il limite a $+\infty$ ma otteniamo come risultato ℓ, le y tendono ad avvicinarsi proprio ad ℓ:

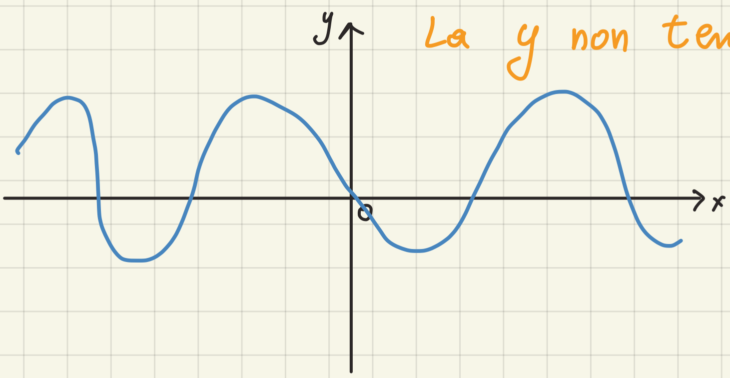


Limiti indefiniti

Il risultato del limite potrebbe essere non determinato:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{N. E.}$

La y non tende a nulla



Definizioni

Intorno

Chiamiamo Intorno di x_0 e di raggio $\delta > 0$ (Delta) Un intervallo APERTO:

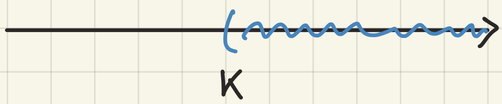
$$V_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

Possiamo anche definire Intorno di $-\infty$ un Intervallo APERTO del tipo:

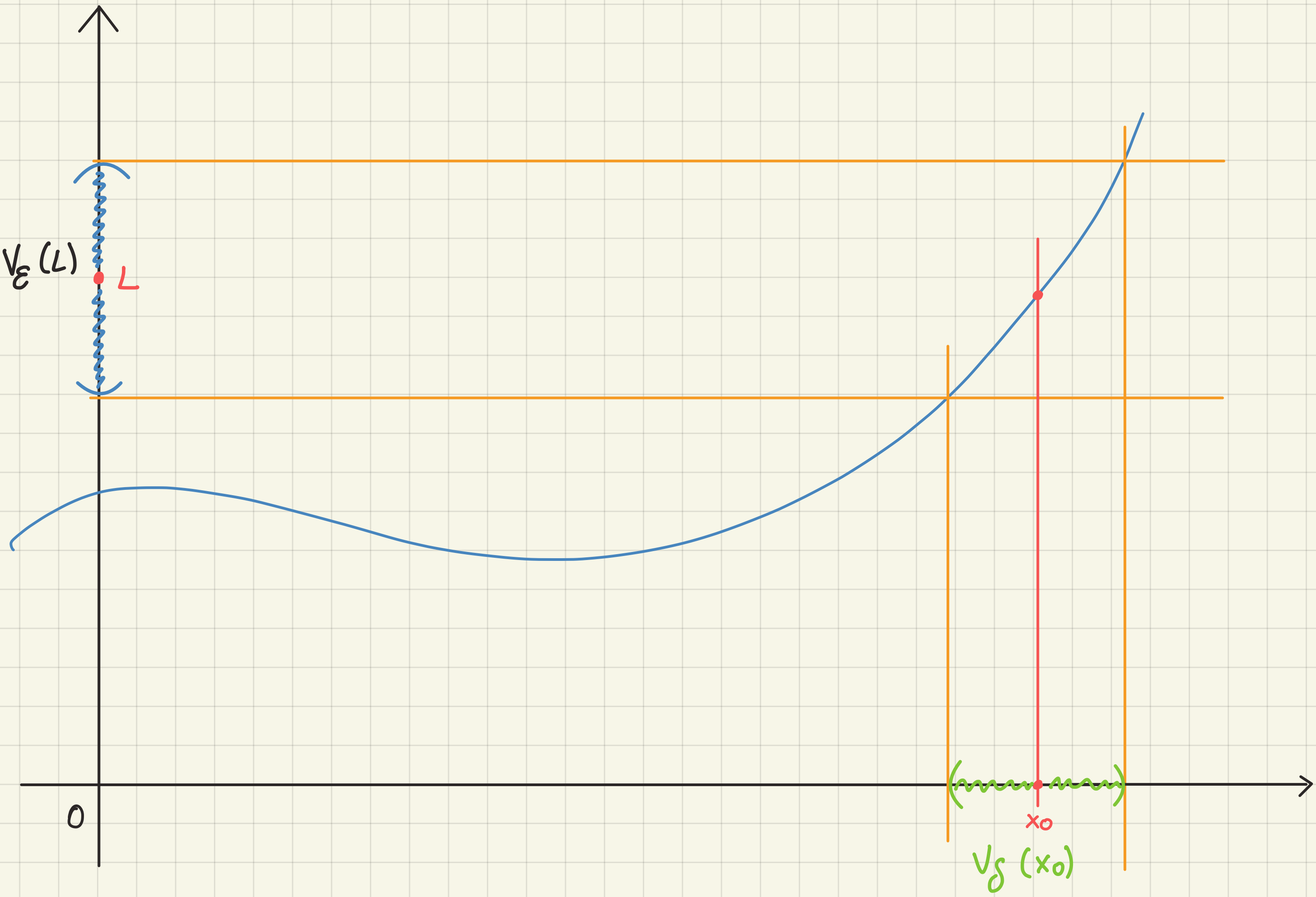
$$(-\infty, K) = \{x \in \mathbb{R} : x < K\}$$

Possiamo dire lo stesso per L' Intorno di $+\infty$:

$$(K, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > K\}$$



Cosa significa quindi calcolare il lim di una funzione?

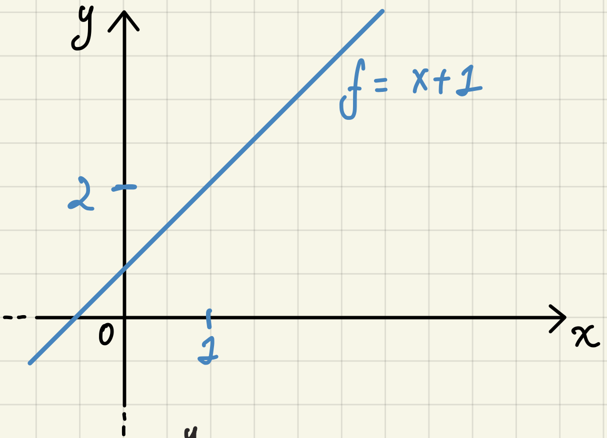


Per ogni intorno di L che consideriamo (BLU) riusciamo a trovare un intorno di x_0 (verde); Se calcoliamo quanto vale la funzione quando $\{x_0-\delta < x < x_0+\delta\} - x_0$, otteniamo un numero reale che sara' compreso nell'intervallo $\{L-\delta < y < L+\delta\} - L$

$\{x_0-\delta < x < x_0+\delta\} - x_0 \longrightarrow$ Intorno di x_0

$\{L-\delta < y < L+\delta\} - L \longrightarrow$ Intorno Di L

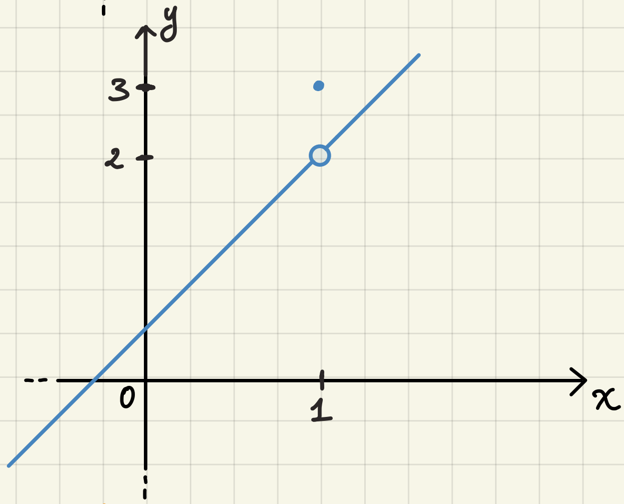
Funzioni continue elementari



$\lim_{x \to 1} x+1 = 2$; 2 e' proprio il valore che f assume quando la calcoliamo in $x = 1$.

$\updownarrow$

$f(1)\ x+1 = 2$



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Se calcoliamo

$$f(1) = 1 \neq \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Quindi...

E' chiaro che il primo caso e' quello piu' comune, mentre il secondo e' "piu' strano".
Nel primo caso la funzione e' CONTINUA nel punto che ci interessa, ovvero in $x = 1$, perche' il $\lim_{x \to 1} f = f(1)$.

Funzioni CONTINUE

Si dice che f e' <u>continua in x_0</u> se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se la f e' continua non solo in x_0 ma in OGNI PUNTO di un intervallo, allora f e' continua sull'intervallo.
In questo caso, la funzione si puo' tracciare "senza staccare la penna dal foglio". (nell'intervallo)

Funzioni elementari continue

- **Potenze:** $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{2}}$
- **Funz. esponenziali:** $y = 2^x$, $y = e^x$
- **Funz. logaritmiche:** $y = \log_3 x$, $y = \ln x$
- **Funz. goniometriche:** $y = \sin x$, $y = \cos x$

} Sono continue nel loro insieme di definizione.

Esempio

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} e^x = 1$$

Quindi
Se la funzione in esame e' continua, il limite della f per quel valore specifico, e' uguale proprio al valore che la f assume in quel punto.

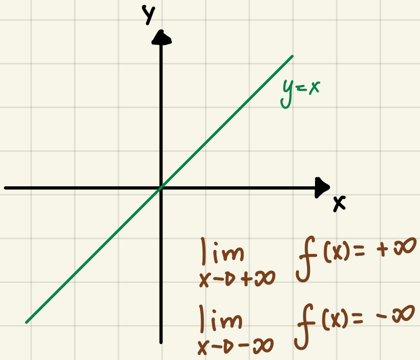
Inoltre tutte le funz che si possono ottenere come somma, prodotto, quoziente e composizione da funzioni elementari, sono continue nel loro dominio naturale.

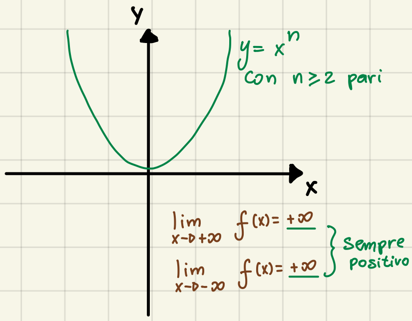
Esempi:

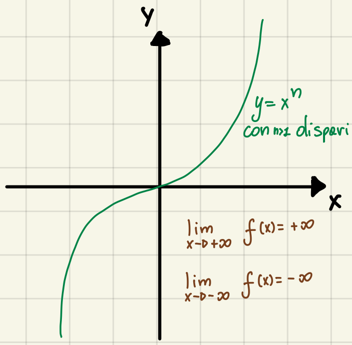
$y = e^{x^2}$ composizione di f potenza ed esponenziale

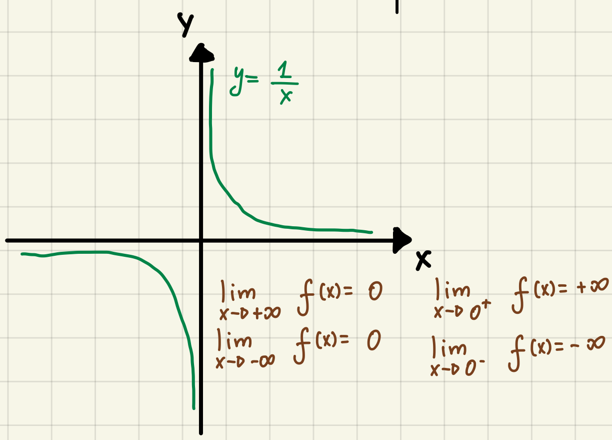
$y = 3x^2 - x - 1$ sottrazione

Funzioni elementari - grafici



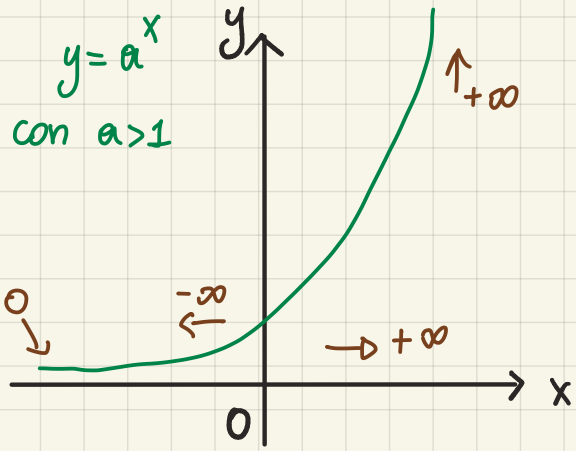






Funzioni esponenziali e logaritmi

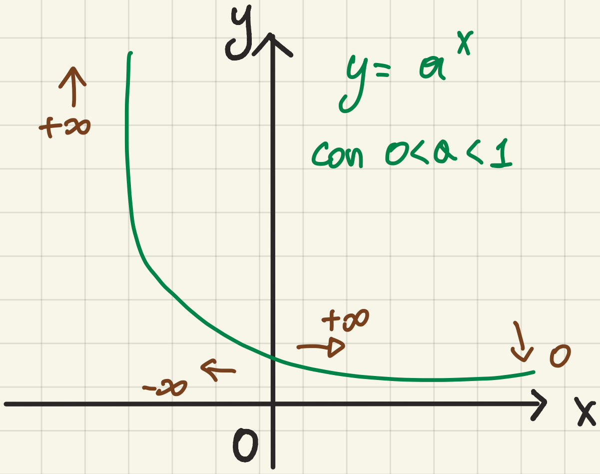
$y = a^x$ con $a>1$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

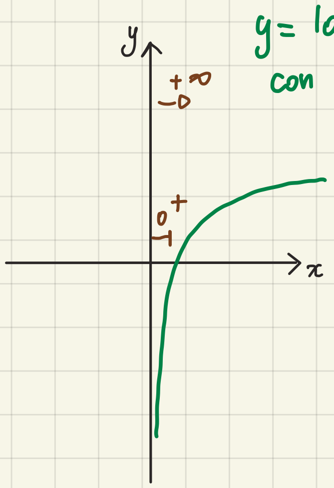
$y = a^x$ con $0<a<1$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

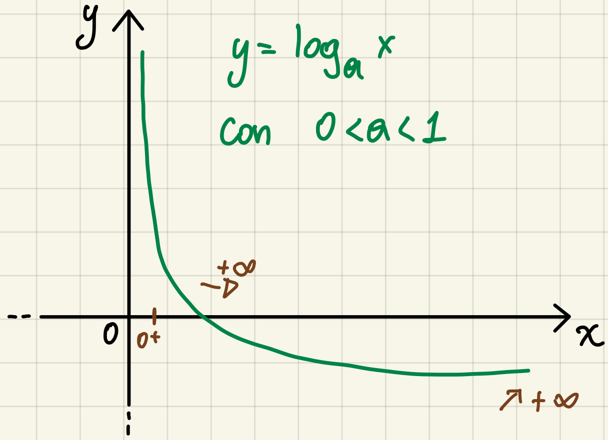
$y = \log_a x$ con $a>1$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$y = \log_a x$ con $0<a<1$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

* Anche se non sembra, i logaritmi crescono (o decrescono) all'infinito, anche se molto lentamente.

Limiti di f razionali per $x \to x_0$

Caso 1: Quando sostituisco x_0 NON si annulla ne' numeratore ne denominatore:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{1} = 3$$ Non si annulla ✓

Caso 2: Quando provo a sostituire x_0 si annulla il numeratore ma non il denominatore.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{1^2-1}{1+3} = 0$$

Sia nel caso 1 che 2, possiamo dare il risultato immediatamente perche' le funzioni sono continue.

Caso 3:

a) Si annulla il denominatore ma non il numeratore

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0} \longrightarrow$$

Metodo di risoluzione

In questo caso dobbiamo separare il limite in limite destro e sinistro.

Destro $\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

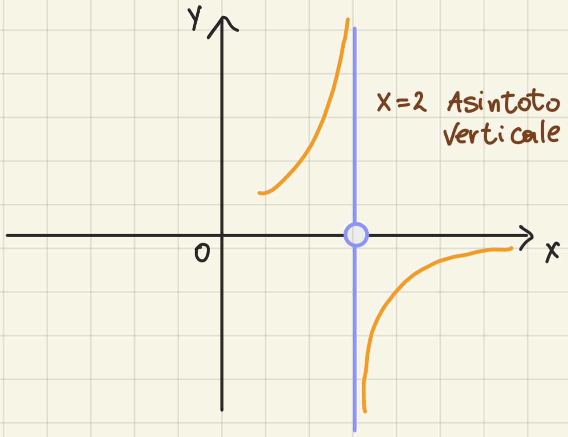
Sinistro $\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

Se il lim dx e Sx sono diversi, il $\lim_{x\to 2}$ NON ESISTE

$\Downarrow$

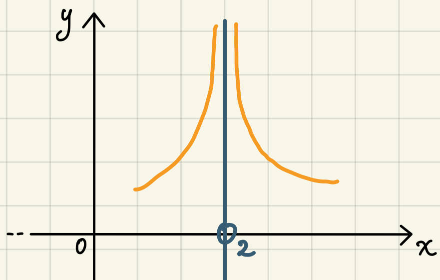
Questo risultato ci dice che la funz quando si avvicina a 2 da Sx tende a $+\infty$, mentre quando vi si avvicina da Dx tende a $-\infty$

$\Rightarrow$ Abbiamo un asintoto



Proviamo a calcolare $f = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{(2-x)^2} = \begin{cases} \lim_{x\to 2^+} \frac{3}{(0^-)^2} = +\infty \\ \lim_{x\to 2^-} \frac{3}{(0^+)^2} = +\infty \end{cases}$

Siccome I limiti dx e Sx hanno lo stesso risultato, anche il limite di partenza fa $+\infty$.

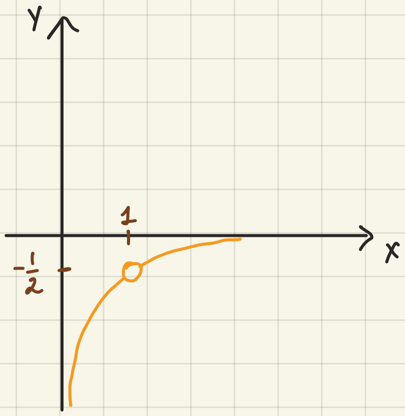


b) Quando, sostituendo, si annullano sia numeratore che denominatore:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$ Forma indeterminata.

Metodo di risoluzione: Scomporre e semplificare:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$



Limiti di funzioni razionali per $x \to \infty$

ES: $\lim_{x \to +\infty} \cancel{x^3} - \cancel{5x^2} + 1 = [+\infty - \infty]$ ← Forma indeterminata

In questo caso è evidente che la x elevata alla 3ª cresca più velocemente di quella elevata alla 2ª, ma come possiamo dimostrarlo?

Mettiamo in evidenza il termine di grado >

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^3}_{+\infty}\left(1 - \underbrace{\cancel{\frac{5}{x}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{x^3}}}_{0}\right) = +\infty$$

ES: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x - 3}{2x^2 + 5} = \frac{x^{\cancel{3}}\left(1 - \cancel{\frac{4}{x^2}} - \cancel{\frac{3}{x^3}}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \cancel{\frac{5}{x^2}}\right)} = +\infty$$

ES: $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x}{5x^6 - 1} = \frac{\cancel{x^3}\left(1 - \cancel{\frac{4}{x^2}}\right)}{x^{\cancel{6}\,3}\left(5 - \cancel{\frac{1}{x^6}}\right)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

ES: $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} = \frac{\cancel{x^2}\left(2 - \cancel{\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \cancel{\frac{1}{x^2}}\right)} = 2$$

Metodo di risoluzione - pattern

1) Raccogliere il termine di grado massimo sia al num che denom
2) Semplificare
3) A cosa tendono i termini rimanenti?
4) fare i conti

Cosa potrebbe verificarsi?

Quando si risolvono questi limiti possono succedere 3 cose:

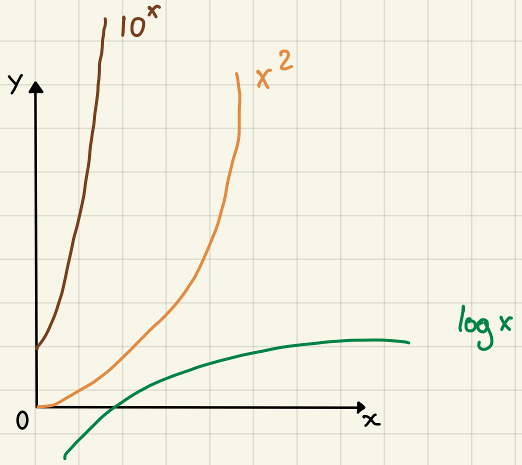
1) funz. razionale avente al num un polinomio di grado > polin. al denom: Il risultato sarà $+\infty$ o $-\infty$.

2) deg(Denom) > deg(Num) → Il risultato sarà 0.

3) deg(Denom) = deg(Num) → Il risultato sarà un numero ℓ.

Limiti con esponenziali

Si procede in maniera simile ai limiti visti prima, ma dobbiamo capire quale elemento tende ad ∞ piu' velocemente.



Scala di crescita:

$$\log_a x << x^b << c^x << x^x$$

ES:

	$x=10$	$x=100$	$x=1000$
$y=\log_{10} x =$	1	2	3
$y=x^2=$	10^2	10^4	10^6
$y=10^x=$	10^{10}	100^{100}	10^{1000}

ES:

$$\lim_{x\to+\infty} x^6-6^x = 6^x >> x^6 = \lim_{x\to+\infty} 6^x\Big(\underbrace{\frac{x^6}{6^x}}_{\to 0}-1\Big) = \infty[-1] = -\infty$$

ES: $$\frac{e^x-x^2}{3x+\ln x} = \frac{e^x\Big(1-\underbrace{\frac{x^2}{e^x}}_{\to 0}\Big)}{x\Big(3+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\Big)} = \frac{e^x}{x} = +\infty$$

! quando portiamo x^2 fuori dalla radice dobbiamo stare attenti a scrivere $|x|$ e non solo x; questo perche' il valore di x sotto radice e' sempre >0. Se avessimo avuto $x\to-\infty$ $|x|$ sarebbe stato $(-x) \Rightarrow +\infty$.

ES: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{e\log_2 x-2x} = \frac{\sqrt{x^2\Big(1+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}\Big)}}{x\Big(\underbrace{\frac{e\log x}{x}}_{\to 0}-2\Big)} = \frac{\cancel{|x|}\sqrt{1+0}}{\cancel{x}(0-2)} = \frac{\sqrt{1}}{-2} = -1/2$$

Limiti di funzioni composte

ES:

$$\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{3}{e^x}\right)$$

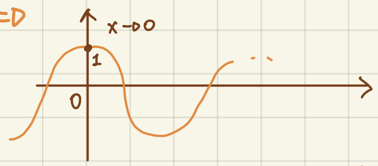
Metodo di risoluzione:

Bisogna innanzitutto capire cosa succede alla funzione più interna

1) A cosa tende $\frac{3}{e^x}$ quando $x\to+\infty$ $\Rightarrow$ tende a 0.

2) Cosa succede a $\cos(x)$ quando $x\to 0$?

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{3}{e^x}\right)=1$$

ES:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x^2+1}{2x^2-x}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = \frac{x^2+1}{2x^2-x} = \frac{\cancel{x^2}\Big(1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\Big)}{\cancel{x^2}\Big(2-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\Big)} = 1/2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^y = \lim_{x\to+\infty} e^{1/2} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

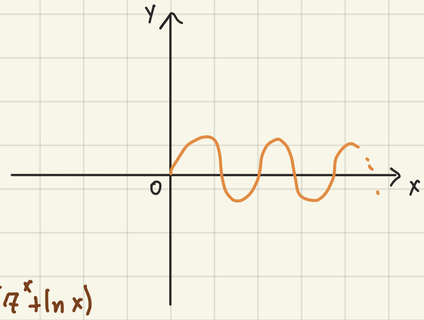
Strumenti per il Calcolo dei limiti

Teorema dei Carabinieri

ES:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\cancel{7^x+\ln x})}{\cancel{5x^2+1}}$$ ($\to +\infty$, $\to +\infty$)

Il problema: non sappiamo a che tende il seno quando $x \to +\infty$



$\Downarrow$

Se avessimo avuto solo $\lim_{x\to+\infty} \sin(7^x+\ln x)$ avremmo dovuto dire che quel limite NON esiste!

Ad ogni modo, siccome il seno oscilla tra +1 e -1, e' sempre una quantita' finita! Di conseguenza, se dividiamo $\ell/+\infty$, il risultato del limite e' zero.

Perche'? $-1 \leq \sin(7^x+\ln x) \leq 1$, possiamo dividere ciascun membro per $5x^2+1$:

$$\frac{-1}{5x^2+1} \leq \frac{\sin(7^x+\ln x)}{5x^2+1} \leq \frac{1}{5x^2+1}$$

! Siccome quando $x \to +\infty$, $5x^2+1$ tende a $+\infty$ (positiva) lasciamo i versi invariati. Se avessimo avuto una quantita' negativa, avremmo dovuto invertire i versi.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{5x^2+1} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5x^2+1} = 0$$

teorema dei Carabinieri o confronto

$\Rightarrow$ Siccome $0 \leq \frac{\sin(7^x+\ln x)}{5x^2+1} \leq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sin(7^x+\ln x)}{5x^2+1} = 0$$

Utilizzo dei prodotti notevoli

ES:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{3x-12} = \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{3(x-4)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\cancel{x-4}}{3(\cancel{x-4})(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{12}$$

$\to \sqrt{x}^2 - 2^2$

Limiti Notevoli

Sono delle forme indeterminate ricorrenti di cui ricordiamo il risultato, in modo da poter risolvere limiti piu' complessi.

Limiti fondamentali – Da imparare!

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ② $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Limiti risolubili con ①

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1^2-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1^2=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to 1/2} = \frac{1}{2}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Rightarrow 1-\cos x^2 = \sin^2$

Da imparare!

ES: $$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + 4\, tg x}{x\cos x + 2\sin x} = \frac{\cancel{x}\left(2\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} + 4\underbrace{\frac{tg x}{x}}_{\to 1}\right)}{\cancel{x}\left(\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\to 1} + 2\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\right)}$$ lim notevole $= \frac{6}{3} = 2$

ES: $$\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\cos x - \cos^2 x}{2x^2}} = \sqrt{\frac{\cos x(1-\cos x)}{2x^2}} = \sqrt{\underbrace{\frac{\cos x}{2}}_{\to 1/2} \cdot \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to 1/2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Limiti risolubili con ② $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x} =$ pongo $1/x = y$ $= \ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \ln(e) = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} =$ pongo $e^x - 1 = y$ quindi $e^x = 1+y \Rightarrow x = \ln(1+y)$ Inoltre se $x\to 0$, allora anche $y\to 0$ $\Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)}$

Otteniamo esattamente il limite precedente ma il num e denom sono invertiti

possiamo quindi dire che il limite tende al reciproco del risultato precedente

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{1} = 1$$

In breve

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

② $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$

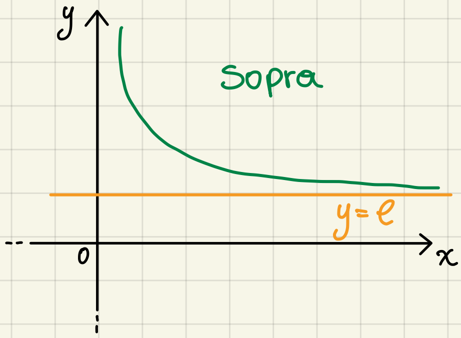
$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

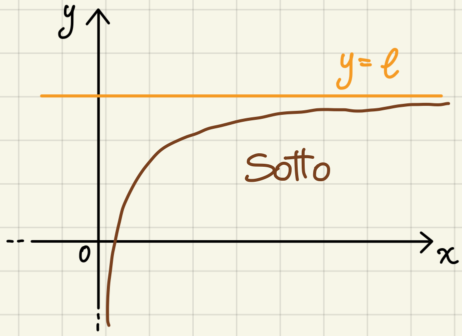
Asintoti orizzontali

Abbiamo un Asintoto orizzontale quando, nel momento in cui la x cresce, la y si avvicina ad un valore preciso (ℓ), quindi:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \Rightarrow \text{la retta avrà equazione } y = \ell$$

Potrebbe interessarci anche sapere se la funzione si trova SOPRA o SOTTO l'asintoto (retta)





Per capirlo ci basta sostituire al numero dell'asintoto (ℓ) un numero più piccolo o più grande e vedendo se l'orizzontale relativa interseca o meno la funzione.

Questa pratica potrebbe essere utile ma non è molto usata nello studio di funzione.

ES:

$$f = \frac{3x}{x-1} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(3)}{\cancel{x}(1-\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0})} = 3 \Rightarrow y = 3 \quad \text{A. O.}$$

Asintoti Verticali

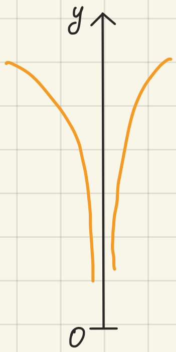
Abbiamo un Asintoto verticale quando, nel momento in cui la $x \to \ell$, la y cresce ad infinito. Siccome l'asintoto non viene mai intersecato dalla funzione, la funzione non è definita nel punto ℓ.

Quindi: se $\lim_{x \to \ell} f(x) = \pm\infty$, $x = \ell$ è Asintoto Verticale

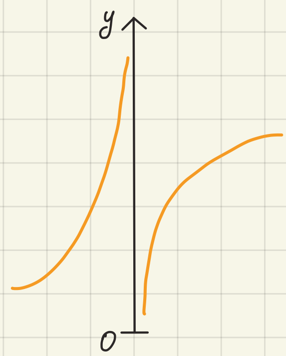
Che tipo di Asintoto?

A differenza degli A.O., i Verticali possono essere di 4 tipi:

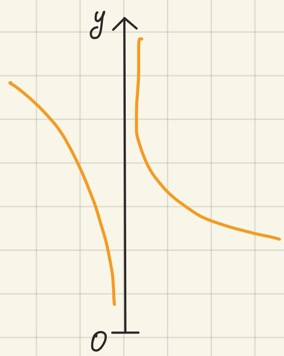
$$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to \ell^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \ell^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to \ell^+} f(x) = -\infty$$



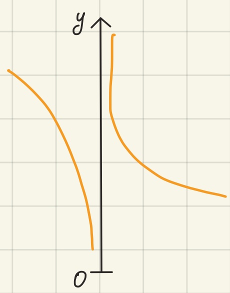
$$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \ell^+} f(x) = +\infty$$

ES:

$$f = \frac{3x}{x-1} \qquad \mathbb{D} = x - 1 \neq 0 \text{ per } x \neq 1$$

cerco in $1^{\pm}$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} \frac{3x}{x-1} &= \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \to 1^-} \frac{3x}{x-1} &= \frac{3}{0^-} = -\infty \end{aligned}\right\} \text{Il limite è del tipo:}$$



Equivalenze Asintotiche

Date due f $f(x)$ e $g(x)$, si dicono Asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$, se il lim $x \to x_0$ del loro rapporto è uguale ad 1. Il simbolo usato è $\sim$ (tilde): $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$.

Possiamo riscrivere tutti i limiti notevoli sotto forma di E.A.:

- $\sin x \sim x$ • $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ • $tg\, x \sim x$ • $e^x - 1 \sim x$ • $\ln(1+x) \sim x$ • $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Inoltre, possiamo sostituire x con una generica $\varepsilon(x)$ che tenda a 0:

- $\sin(5x) \sim 5x$ $\to 0$ per $x \to 0$
- $e^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x}$ $\to 0$ per $x \to \infty$

Proprieta' delle eq. Asint.

1) Se per $x \to x_0$ $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$, possiamo dire che $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$ ed in particolare, se i limiti dei prodotti esistono, sono uguali.
Questo ci "autorizza", quando dobbiamo calcolare il lim di un prodotto a sostituire uno o entrambi i fattori con degli altri fattori ad essi Asintoticamente Equivalenti.

2) La stessa cosa di prima vale per i rapporti: se per $x \to x_0$ $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$
$\Rightarrow$ $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ Anche in questo caso i rapporti sono uguali.

3) Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ $\Rightarrow$ $[f(x)]^\alpha \sim [g(x)]^\alpha$ per $x \to x_0$.

ES $\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{(e^{3x}-1)}^{\sim 3x} \cdot \cancel{\sin(4x)}^{\sim 4x}}{\cancel{tg(2x^2)} \to 2x^2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{3\cancel{x} \cdot 4\cancel{x}}{2\cancel{x^2}} = 6$ Il risultato è accettabile perché

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \frac{(e^{3x}-1)\cdot \sin(4x)}{tg(2x^2)} & \sim & \frac{3x \cdot 4x}{2x^2} \\ \lim f(x) & = & \lim g(x) \end{array}}$$

ES $\lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{\sqrt{1-\cos x^2}} \to \sim \sqrt{\frac{1}{2}x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2}{\cancel{\ln(1+2x)} \to \sim 2x} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x^2}{2x} = \frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}\sqrt{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{0}{e} = 0$

O piccolo

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice che $f(x)$ e' o piccolo di $g(x)$ se:

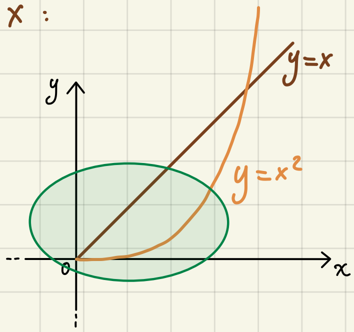
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si scrive quindi: $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

Inoltre, dire che $f(x)$ e' o piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$ equivale a dire che $f(x)$ e' infinitamente piccola, rispetto a $g(x)$

ES: $f = x^2 = o(x)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$

Non sembra, ma per valori piccoli $x^2 < x$:



ES: $x^3 = o(x)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}} = 0$

Attenzione!
La notazione $o(x) = o(f)$ indica semplicemente una funzione il cui limite del rapporto con f $(o(f))$, fa 0 nel punto in esame.

Proprieta'

- $o(x) \pm o(x) = o(x)$ NON ZERO! e' un po' come fare $-\infty - \infty$.
- $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x)$
- $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $x^n \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $x^n = o(x^m)$. quando $x \to 0$, x^n e' un o piccolo di x^m, se $n > m$
  $\hookrightarrow$ Questo vuol dire che le potenze con esponente maggiore sono degli o piccoli delle potenze con gli esponenti piu' piccoli:

  ES: $x^3 = o(x) \Rightarrow x^3 \ll x$ in $x \to 0$
  $x^2 = o(x) \Rightarrow x^2 \ll x$ in $x \to 0$

- Deduciamo quindi che $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^n)$ se $n < m$
  $\hookrightarrow$ "Sopravvive" il termine con esponente minore!

Eq. Asintotiche ed o piccolo

Per $x \to x_0$ $\quad f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$

Questo significa che le due funzioni sono A. equivalenti se e solo se differiscono per un termine che diventa trascurabile nel momento in cui facciamo il limite per $x \to x_0$.

Possiamo quindi dire che:

- $\sin x \sim x \to \sin x = x + o(x)$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x \to 1 - \cos x = \frac{1}{2}x + o(\frac{1}{2}x^2)$ si puo' omettere
- $tg\, x \sim x \to tg\, x = x + o(x)$
- $e^x - 1 \sim x \to e^x - 1 = x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \to (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(\cancel{\alpha} x)$
- $\ln(1+x) \sim x \to \ln(1+x) = x + o(x)$

ES: $\sin x^3 + 3x^4 + \ln(1+2x^5) = \underbrace{x^3 + o(x^3) + \cancel{3x^4}^{\ll x^3} + \cancel{2x^5}^{\ll x^3} + o(x^5)}_{\text{Rimane solo il più piccolo}} = x^3 + o(x^3)$

Formula di Taylor con resto di Peano

Questa formula ci consente di approssimare tutte le funzioni sufficientemente regolari con dei Polinomi.

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$ e supponiamo che:

Delta

- $f(x)$ sia derivabile $n-1$ volte nell'intervallo
- Esista la derivata n-esima perlomeno in $x=0$

Se soddisfiamo i requisiti

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + o(x^n)} \quad \text{per } x \to 0$$

$T_n(x)$ è il polinomio di grado $\leq n$ dato dalla formula:

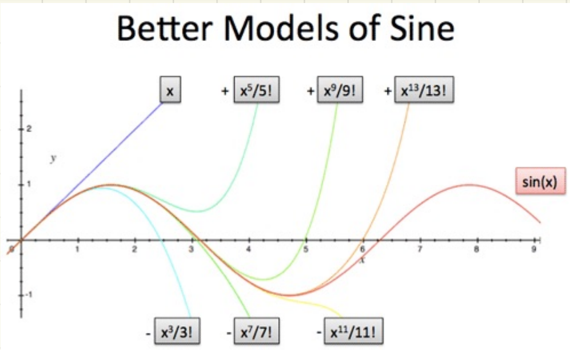
$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$T_n(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} \cdot x^k}$$

In poche parole...

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Funzione da approssimare}} = \underbrace{T_n(x)}_{\text{Polinomio Approssimante}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{ERRORE di Approssimazione}}$$

Capiamo che l'err di appr. è PICCOLO, essendo un o piccolo di x^n; queste quantità divente sempre più trascurabile al crescere di n.



La formula di taylor non fa altro che approssimare, cioè "emulare" una funzione tramite dei polinomi.

Quando usiamo un n troppo piccolo, l'errore è Alto, ovvero non abbiamo una buona approssimazione.
In questo esempio si approssima $\sin x$, e come si può vedere, x ha una cattiva approx, mentre $\frac{x^{13}}{13!}$ ha una approx migliore.

Approssimare $f(x) = \sin x$

siccome $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$

Usando $f(x) = \sin x$, $a = 0$ $\Rightarrow$ $\sin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$

Tabella delle derivate:

$f(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\sin x$
$f'''(x) = -\cos x$
$f''''(x) = \sin x$

Si ripetono uguali

Riscrivo la serie:

$$\Rightarrow \sin x = \underbrace{\sin(0)}_{0} + \frac{\cancel{\cos 0}^{\,1}}{\cancel{1}} x + \frac{\cancel{-\sin 0}^{\,0}}{\cancel{2}} x^2 + \frac{\cancel{-\cos 0}^{\,-\frac{1}{6}x^3}}{\cancel{6}} x^3$$

$$= 0 + \frac{1}{1}x + 0 - \frac{1}{6}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 - \frac{1}{7!}x^7 \dots$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1}}_{\text{Alterna il segno}} \cdot \frac{x^{\overbrace{2n-1}^{\text{Potenze dispari}}}}{\underbrace{(2n-1)!}_{\text{Fattoriale dispari}}}$$

Usare taylor per risolvere i limiti

ES:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + 2x^5}{3x^3}$$

Il sin da problemi → taylor

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

per $n=3$

$$\sin x = 0 + (-1)^2 \cdot \frac{x}{1} + (-1)^3 \cdot \frac{x^3}{3!} = \underline{x - \frac{x^3}{6}}$$

Per riscrivere sin x dobbiamo aggiungere anche l'errore:

$$\ldots = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \underbrace{o(x^3)}_{\text{ERRORE}} - \cancel{x} + \underbrace{\cancel{2x^5}}_{\text{mangiato da } o(x^3)}}{3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{3x^3} = -\frac{1}{18} + \cancel{\frac{o(x^3)}{3x^3}} \to 0 = -\frac{1}{18}$$

Approssimare $f(x) = 3\sin x + \cos x$ per $n=4$

Sostituiamo direttamente gli sviluppi di IV ordine di sin x e cos x

$$= 3\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right] + \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right] = 1 + 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Limiti con taylor

ES:
$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x - x}{e^x - 1 + \ln(1-x)}$$

Sviluppo per tg x:

$$tg\, x = x + \frac{x^3}{3} + \underbrace{\frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9}_{\text{trascurabili per } x\to 0} + o(x^{10})$$

$$\Rightarrow tg\, x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Inoltre (denom)

$$[e^x - 1] + [\ln(1-x)] = \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] + \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] = \left[-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{3} + \cancel{\frac{o(x^3)}{x^3}}\right)}{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{6} + \cancel{\frac{o(x^3)}{x^3}}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} \cdot (-6) = -2$$

ES:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 \left(e^{\sin x} - 1 - x\right)}{\sin^2 x - x^2}$$

- $\sin x = (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ quindi $\sin x^2 = x^2 + o(x^2)$
- $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ Sostituiamo: $x \to \sin x$ $\quad e^{\sin x}_{n=2} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + o(\sin^2 x)$

Siccome $\sin x = x + o(x^2) \to e^{\sin x} = 1 + (x + o(x^2)) + \frac{1}{2}(x + o(x^2))^2 + o((x + o(x^2))^2)$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

- $\sin^2 x - x^2 = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$

Quindi: $e^{\sin x} - 1 - x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Otteniamo quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 \left(e^{\sin x} - 1 - x\right)}{\sin^2 x - x^2} = \frac{x^2 + o(x^2) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{\cancel{x^4}\left[\left(1 + \cancel{\frac{o(x^2)}{x^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{o(x^2)}{x^2}}\right)\right]}{\cancel{x^4}\left(-\frac{1}{3} + \cancel{\frac{o(x^4)}{x^4}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{3}{2}$$

Ordine di infinitesimo e parte principale

Se, per $x \to 0$, $f(x) \sim Kx^\alpha$ (con $\alpha > 0$)

In questo caso, $f(x)$ e' un infinitesimo di ordine α, e Kx^α e' la sua parte principale

ES: $f(x) = \sin x$ per $x \to 0$, $\sin x \sim x \Rightarrow f(x)$ e' un infinitesimo di ordine 1, con p. principale x

ES: $f(x) = \cos x - 1$ per $x \to 0$, $\cos x - 1 \sim \underbrace{-\frac{1}{2}x^{2}}_{Kx^\alpha} \Rightarrow f(x)$ e' un inf. di ordine 2, con p.p. $-\frac{1}{2}x^2$

Come risolviamo quando non abbiamo l'eq. As. gia' pronta?

$$f(x) \sim Kx^\alpha \Leftrightarrow f(x) = Kx^\alpha + o(x^\alpha)$$

- Due f sono A.Eq. (si comportano allo stesso modo) se differiscono solo per un termine che diventa trascurabile

$\Rightarrow$ Possiamo usare gli sviluppi di taylor per determinare la parte principale, e quindi l'ordine.

ES: $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x$

* Se vogliamo sapere come si comporta $f(x)$ in prossimita' di $x=0$, dobbiamo usare gli sviluppi di Taylor.

$$T_n(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} \cdot x^k}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

quindi $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

per $x \to 0$, $f(x) = \left[\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}x} - \cancel{\frac{1}{8}x^2} + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right] - \left[\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}x} - \cancel{\frac{1}{8}x^2} - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right] \cancel{-x} = \underline{\frac{x^3}{8} + o(x^3)}$

Quindi possiamo dire che $f(x)$ e' un infinitesimo di ordine 3 avente come parte principale $\frac{1}{8}x^3$.

Osservazioni

1) Il limite di un rapporto tra quantita' infinitesime NON CAMBIA aggiungendo o togliendo agli infinitesimi Dati, degli infinitesimi di ordine superiore.

ES: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x^2 + 2x^5}{x + \sin(x^2)}$

Numeratore: $\sin x \sim x$, quindi e' un infin. di ordine 1; per questo motivo x^2 e $2x^5$, di ordine $2, 5 > 1$, sono trascurabili.
Denominatore: $\sin(x^2) \sim x^2$, e' di ordine 2; siccome $2 > 1$, $\sin(x^2)$ e' trascurabile rispetto ad x.

Possiamo quindi dire che: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x^2 + 2x^5}{x + \sin(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) Conoscere la parte principale puo' essere utile per tracciare il grafico di una funzione nell'intorno di $x=0$

ES: $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} - 1$ in prossimita' di $x=0$ $= e^x \cdot (x+1)^{-1/2} - 1 = [\cancel{1} + x + o(x)] \cdot [\cancel{1} - \frac{x}{2} + o(x)] - 1 = \frac{x}{2} + o(x) \sim \frac{x}{2}$

Per cui, possiamo dire che il grafico di $\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ in prox di 0, sara' molto simile a quello di $f(x) = \frac{x}{2}$

Dalle lezioni del Prof

Criterio del rapporto per successioni

Lez 8, 00:47

Sia a_n una succ a termini positivi, ovvero che $/\ a_n > 0\ \forall n$.

posto $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow$ se $\lim_n b_n = b < 1$, allora il $\lim_n a_n = 0$

Questo criterio ci dice che se consideriamo il rapporto b_n (ottenuto da a_n), ed il suo limite tende ad un numero minore di 1, la successione tende a 0.

Il criterio ci serve per dimostrare i seguenti casi:

Prop: valgono i limiti:

Con $\alpha > 0$, $a > 1$

Tutti uguali a zero!

$$\lim_n \frac{\log n}{n^\alpha} = \lim_n \frac{n^\alpha}{a^n} = \lim_n \frac{a^n}{n!} = \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$$

Che vuol dire?

Dire che $\lim_n \dfrac{\log n}{n^\alpha} = 0$, significa dire: Il denominatore tende ad infinito più velocemente del logaritmo.

cresce lentamente

Possiamo quindi dire: $\log n < n^\alpha < a^n < n! < n^n \leftarrow$ cresce velocemente

Dimostriamo che $\lim_n \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ per il criterio visto prima, calcoliamo $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\Rightarrow b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

Nel nostro caso $\dfrac{n^\alpha}{a^n}$ è a_n stesso $\Rightarrow$

$$\frac{\dfrac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}}}{\dfrac{n^\alpha}{a^n}} = \frac{(n+1)^\alpha}{\cancel{a^{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{a^n}}{n^\alpha}$$

a_{n+1} — succ a_n — si capovolge

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^\alpha}{a \cdot n^\alpha} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{a} \left(\frac{\cancel{n}+1}{\cancel{n}}\right)^\alpha = \frac{1}{a}$$

rapporto di polinomio dello stesso ordine $\Rightarrow$ Tende al grado max $\Rightarrow 1$

$a > 1$

nel criterio di prima dicevamo che se $\lim_n b_n = \ell < 1$ quindi

$$\lim_n \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

Dimostriamo $\lim_n \dfrac{a^n}{n!} = 0$ (a_n)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \frac{a^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{a^n}} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow \lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$$

perché?

Perché? $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Dimostriamo $\lim_n \dfrac{n!}{n^n} \Rightarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cancel{!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{\cancel{(n+1)}\ n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right)^n =$$

Ci ricorda un lim notevole $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^n} = \frac{1}{e}_{>1} \Rightarrow \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$$

Es: $\lim_{n \to \infty} e^n - 2^n = +\infty - \infty =$ nei polinomi si metteva in evidenza il grado max → la stessa cosa vale in questo caso → Siccome sono due esponenziali, "vince" quello con la base maggiore.

⇒ Mettiamo in evidenza e^n: $\lim_{n} e^n \left(1 - \frac{2^n}{e^n}\right) \sim e^n = +\infty$ ($\frac{2^n}{e^n} \to 0$; $\sim$ è asintotica)

Es: $\lim_{n} 2^n - n! = \lim_{n} n! \left(\frac{2^n}{n!} - 1\right) \sim n! = -\infty$ ($\frac{2^n}{n!} \to 0$)

ES: $\lim_{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

- Ricorda il limite notevole $\left(\frac{1}{x}+1\right)^x$

ma per usare un lim notevole, dobbiamo ricondurci esattamente a quello $= \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^n$ Dobbiamo avere lo stesso valore sia al denom che all'esponente!

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{(-1)(-n)} = \left[\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = [e]^{-1} = e^{-1}$$

((-1): deve sparire)

ES: $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e^{-1}} = e$

($\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$, $\frac{1}{n} \to 0$; stesse basi → somma)

ES: $\lim_{n} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n$ $\qquad \frac{n^2+n}{n^2-n+2} = 1 + \frac{1}{a_n} \to e$

⇒ Consideriamo a_n una incognita e la ricaviamo: $\frac{1}{a_n} = \frac{n^2+n}{n^2-n+2} - 1 = \frac{1}{a_n} = \frac{\cancel{n^2}+n \cancel{-n^2}+n-2}{n^2-n+2}$

$= \frac{1}{a_n} = \frac{2n-2}{n^2-n+2} \Rightarrow a_n = \frac{n^2-n+2}{2n-2}$ Di conseguenza $\lim_{n} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n = \lim_{n} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-n+2}{2n-2}}\right)^n$

Quindi? Possiamo applicare $1 + \frac{1}{a_n} \to e$ Solo se $a_n \to \infty$ ⇒ possiamo applicare il limite, però, a_n deve comparire anche all'esponente.

$$\Rightarrow \lim_{n} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{n \cdot \frac{a_n}{a_n}} = \left[\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{\frac{n}{a_n}} = e^{\frac{n \cdot 2n - 2}{n^2-n+2}} = e^{\frac{2n^2-2}{n^2-n+2}} \longrightarrow e^2$$

($\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$; $\frac{2n^2-2}{n^2-n+2} \sim \frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} = 2$)

Altro limite notevole $\lim\limits_{x\to} \dfrac{\sin a_n}{a_n} = 1$ dove $a_n \to 0$

ES: $\lim\limits_{n} \underbrace{n}_{\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)^{\to 0}}{\frac{1}{n}\to 0} = 1$

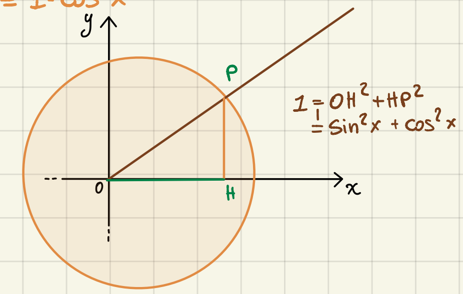
ES: $\lim\limits_{n} n\, tg\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad tg = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow n\,\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \dfrac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$ $\quad \cos(0) = 1$

ES: $\lim\limits_{n} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \cdot \dfrac{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)} = n^2\Big(\underbrace{1-\cos^2\frac{1}{n}}_{\sin^2 x}\Big) \cdot \dfrac{1}{1+\cos\frac{1}{n}} = n^2\left(\sin^2\frac{1}{n}\right) \cdot \dfrac{1}{1+\cos\frac{1}{n}}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\Rightarrow \sin^2 = 1 - \cos^2 x$

$\Rightarrow \dfrac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \cdot \dfrac{1}{1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{2}$

$\left(\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)^2$



ES: $\lim\limits_{n} n\Big(\underbrace{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}_{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}\Big) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

ES: $\dfrac{tg^2\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{\dfrac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}}{\underbrace{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}_{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}} = \dfrac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \dfrac{\cancel{\left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]}\cdot\left[1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\cancel{\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} = \dfrac{1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}$

$= \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} + \dfrac{\cancel{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} + \dfrac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + 1 = 2$

Lezione 9

Proposizione: Se $(a_n)_n$ è una succ. limitata e $(b_n)_n$ è una succ. infinitesima, allora $a_n \cdot b_n \to 0$

ES: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sin(n)$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\sin(n)}_{\text{è limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{è infinitesima}} \Rightarrow (\text{oscillante } {+1,-1}) \cdot 0 = 0$

$\frac{1}{n} \to 0$; $\sin(n) \to ?\ \to +1,-1,+1 \dots$ Indet

(oscillante +1,−1) → numero

ES: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{3n^2+1} \sim \frac{n(1+0)}{n^2(3+0)} = 0$ $\Rightarrow (\text{oscillante } {+1,-1}) \cdot \text{Infinitesimo} = 0$

$(-1)^n \to$ Oscillante limitata

Successioni crescenti

a_n è crescente se e solo se $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n$.

Se con le funzioni dicevamo che una f. è crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, lo stesso vale anche per le successioni; $n < n+1 \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$

a_n è decrescente se $n < n+1 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$

Teorema sul limite delle successioni monotone

Ogni succ. monotona è regolare, ammette limite → finito o infinito. ⇒ Non può capitare che una succ monotona sia indeterminata!

Se la succ è monotona limitata, essa converge.

Dim 00:11 Lez 9

ES: $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ è conseguenza di due risultati:

1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente ⇒ il suo limite esiste (può essere sia finito che infinito)
2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è limitata ⇒ $2 < a_n < 4\ \ \forall n$ si dimostra

Per il teorema delle succ monotone, la succ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge (perché essendo limitata non può divergere) poiché converge, convergerà ad un limite compreso tra $\underbrace{2 \text{ e } 4}_{}$ (per il teorema dei carabinieri)

anche il num di nepero e è compreso tra 2 e 4

∼ 45:00

Serie numeriche

Problema: Sommare un numero infinito di termini $\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_n + \dots = ?$

Caso in cui abbiamo termini finiti: $a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = ?$

finché abbiamo dei termini finiti, possiamo computare la somma.

2 termini $= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

3 termini $= 1 + 1/4 + 1/9 = \frac{36+9+4}{36} = \frac{49}{36}$

...

Però, la serie $a_n = \frac{1}{n^2}$ è finita!

00:48

Def: Sia $(a_n)_m$ una succ num.; Consideriamo la succ: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ...
Questa succ è detta succ delle somme parziali di a_n. Questo perché il termine S_n è composto da somme parziali di a_n.
Ogni termine di S_n è ben determinato, poiché sono tutte somme finite.

Def: Si dice che la serie numerica, ovvero $a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è:

Punto di arrivo

Si somma l'argomento

Punto di partenza, indice che cambia

è Convergente / Divergente / Indeterminata $\overset{\text{Se e solo se}}{\Leftrightarrow}$ La succ S_n (somme parziali) è Convergente / Divergente / Indeterminata

In parole povere, dirò che la serie Converge, se la Successione S_n convergerà.

⋮

$\rightarrow$ Se $\lim_{n\to\infty} S_n = \ell$ (numero) finito, allora ℓ si dirà Somma della serie, e si scrive:

$$\boxed{\sum_n a_n = S} \longleftarrow \text{Converge}$$

Se $\lim_{n\to\infty} = \pm\infty$, la serie Diverge, e si scrive:

$$\boxed{\sum_n a_n = \pm\infty}$$

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$

1) Dobbiamo scrivere la successione delle somme parziali:
Si usa anche nel caso finito

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Si dimostra essere questa somma.

2) Per la definizione, dobbiamo calcolare il limite di S_n:

$$\rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ Converge!}$$

1:05

Serie Telescopiche

Sono quelle serie il cui termine generale può essere scritto nella forma $\sum_n (a_n - a_{n-1})$.
Si dimostra che questo tipo di serie converge $\Leftrightarrow$ a_n converge.

Calcoliamo

$$S_1 = a_1 - a_0 = a_1 - a_0$$
$$S_2 = (\cancel{a_1} - a_0) + (a_2 - \cancel{a_1}) = a_2 - a_0$$
$$S_3 = (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (a_3 - \cancel{a_2}) = a_3 - a_0$$
...
$$S_n = (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + \dots + (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}}) + (a_n - \cancel{a_{n-1}}) = a_n - a_0$$

con succ

con prec

Troviamo che la serie $\sum_n a_n - a_{n-1}$ Converge $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ S_n converge $\overset{\text{Se e solo se}}{\Leftrightarrow}$ $a_n - a_0$ converge;
e si ha che $\sum_n a_n - a_{n-1} = \lim_n a_n - a_0$

Es: $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ Può essere vista come una serie telescopica? → Si può scrivere come una serie il cui termine generale è fatto da $a_n - a_{n-1}$?

$$= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \overset{mcm}{=} \frac{(\cancel{n}+1) - \cancel{n}}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

possiamo quindi scriverla come: $\underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} - \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \text{Converge ad } \quad a_1 - \lim a_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1$$

Es: $\sum_n \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \overset{mcm}{=} \frac{\cancel{2n}+1 - \cancel{2n}+1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ → non troviamo il termine generale ma quasi

Possiamo dire che la serie è uguale a $:= \sum_n \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_n \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$

Per togliere il 2 al num.

$a_n = \frac{1}{2n-1}$

$$= \frac{1}{2}\left[a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5} - \lim \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{1}{10}$$

Fine lez 9.

Non so quanto questo Es sia giusto il prof ha fatto un bordello (?)

Definizioni utili — Depre cated! Vedi pg successive!

Def generale: Sia q un numero reale. Si dice Serie Geometrica di ragione q la serie:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}$$

Grazie a q possiamo dedurre molte informazioni:

- Se il modulo della ragione q è <1, ovvero se $-1 < q < 1$, la serie converge ed ha per somma: $\frac{1}{1-q}$
- Se la ragione q è ≤ -1, la serie è irregolare
- Se la ragione q è ≥ 1, la serie diverge positivamente

Somma tra serie

Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie numeriche, la loro somma è la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$

i) Se le due serie convergono, anche $\sum a_n + b_n$ converge.

ii) Se a_n converge e b_n diverge (oviceversa) allora $\sum a_n + b_n$ Diverge.

ES: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n n^3 + n^2 + 1}{n^5} \right)$ ← In questo caso è molto difficile studiare la serie così com'è

$$= \frac{(-1)^n n^3 + n^2 + 1}{n^5} = \frac{(-1)^n n^3}{n^5} + \frac{n^2+1}{n^5} \Rightarrow \sum \left[(-1)^n \frac{1}{n^2} \right] + \sum \left[\frac{n^2+1}{n^5} \right]$$

- $\sum \left[(-1)^n \frac{1}{n^2} \right]$ è una serie Armonica (pg succ) con $\alpha = 2 > 0 \Rightarrow$ Converge

- $\sum \frac{n^2+1}{n^5}$ è una serie a termini pos

Prodotto di a_n con un numero c:

Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente, e $c \neq 0$ allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ Sarà divergente.

~~6.6~~ Verificare che la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

è divergente.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

Questa serie è di tipo Armonico, quindi Converge per $\alpha > 1$, siccome n^{1} $1 \leq 1$ la serie diverge.

In questo esempio abbiamo la serie armonica che vale $\frac{1}{n}$; per il principio appena visto, se $1/n$ diverge, anche $\underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{c \neq 0}$ diverge.

Serie Mengoli

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Quindi $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \overset{\text{Si dimostra}}{=} \frac{n}{n+1}$

Calcoliamo la somma:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} \quad \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{0})} = 1 \text{ Converge}$$

Consideriamo $a_n = (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 \dots + (-1)^n$ Siccome $\lim_{n \to +\infty} (-1)^n = \nexists$ ∄ lim per $+\infty$ di a^x con $a \leq -1$ ∄

Siccome il suo lim ∄, allora S_n è indeterminata.

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Se la serie $\sum_{k=1} a_k$ è convergente, allora la successione a_n tende a zero per $n \to +\infty$

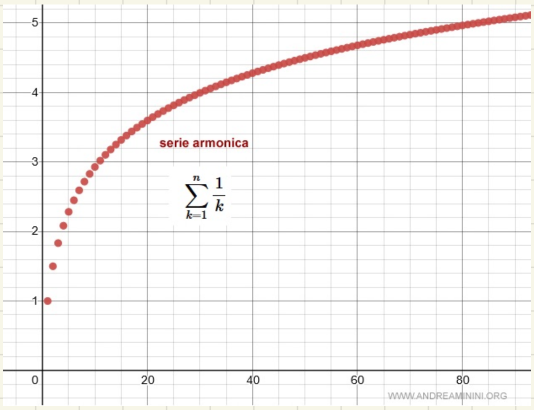
Deprecated! Guarda le pg succ.

Serie Armoniche

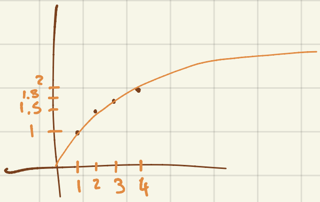
La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è detta serie armonica

Forma generalizzata

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ Converge se $\alpha > 1$; Diverge pos se $\alpha \leq 1$ } per $\alpha = 1$ abbiamo la serie armonica



1) $1 = 1$
2) $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \sim 1.5$
3) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \sim 1.8$
4) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \sim 2$



Serie Armonica a segni alterni

Sia α un $\mathbb{R} > 0$

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^\alpha}$ Converge per $\alpha > 0$

Serie Geometrica di ragione h ← base esponenziale. lez 10

Calcolare il comportamento di una serie non è semplice; non c'è un criterio che vale in ogni caso, ma ci sono TIPOLOGIE di serie (ad esempio la telescopica). A seconda dei casi si applicano diversi metodi di risoluzione.

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n = 1 + h + h^2 + h^n \qquad \text{dove } h \in \mathbb{R}$$

↑ Forma generale

- Le serie geometriche partono sempre da 0!

ES: $h = 2 \Rightarrow \sum 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$

ES: $h = -3 \Rightarrow \sum -3^n = 1 - 3 + 9 - 27 + \dots$

Problema: per quali valori la serie $\begin{cases} \text{Diverge} \\ \text{Converge} \\ \text{indet} \end{cases}$?

Per discutere la convergenza di una serie, per definizione, dobbiamo studiare la successione delle somme parziali; se possibile, scriverla.

$S_n = 1 + h + \dots + h^n$ Da $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ deduciamo che:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b^1 + a^{n-2}b^2 + \dots + a^2 b^{n-2} + a b^{n-1} + b^n)$$

diminuisce l'esp di a, ed aumenta quello di b

diminuisce l'esp di b, ed aumenta quello di a

Prendiamo $a = 1$, $b = h$

$$1 - h^{n+1} = (1-h)\underbrace{(1 + h + h^2 + \dots + h^n)}_{S_n}$$

Ci accorgiamo che è esattamente il termine generale delle succ. parz. S_n. Di conseguenza:

$$\boxed{S_n = \frac{1 - h^{n+1}}{1 - h}}$$

Per il carattere della serie, ci basta calcolare il lim di S_n:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - h^{n+1}}{1 - h} = \text{Dipende da } h:$$

i) $h > 1$

$$\lim_{n} \frac{1 - h^{n+1}}{\underbrace{1 - h}_{\text{è negativo per } h>1}} = \frac{-\infty}{-x} = +\infty$$

($h^{n+1} \to +\infty$, $1 - h^{n+1} \to -\infty$; x: numero generico negativo)

per $h > 1$ la serie diverge.

ii) $h = 1$ In particolare facciamo riferimento solo al termine $\dfrac{1 - \boxed{h^{n+1}}}{1 - h}$ In quanto è l'unico che dipende da n

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} 1^{n+1} = +\infty \text{ Diverge}$$

iii) $-1 < h < 1$

$h = \frac{1}{2}$ $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ Converge

$-1 < h < 1$

$h = -\frac{1}{3}$ $\lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

($(-1)^{n+1}$: oscillante limitata $\to x$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \to 0$)

Allora $\lim_{n} S_n = \frac{1 - 0}{1 - h} \Rightarrow \sum_{n} h^n$ converge a $\frac{1}{1 - h}$ se $-1 < h < 1$

iiii) Se $h < -1$

$h = -2 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (-2)^{n+1} = (-1)^{n+1} (2)^{n+1} \to +\infty \Rightarrow$ Non Esiste!

($(-1)^{n+1}$: oscillante limitata)

ES: $\sum_n 5^n$ ragione $= 5 > 1 \Rightarrow$ Diverge perchè?

$$\sum_n 5^n = \frac{1-5^{n+1}}{\cancel{1-5}} = \frac{-\infty}{-4} = +\infty$$ positivamente.

ES: $\sum \left(\frac{1}{5}\right)^n \Rightarrow$ ragione $-1<\frac{1}{5}<1 \Rightarrow$ Converge ad $\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$ Perchè?

$$\sum_n \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = \lim_n \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

00:48

Serie Armonica

E' detta Armonica perchè rappresenta le armoniche di quando si pizzica una corda.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} = +\infty \text{ Diverge}$$

I termini che sommiamo diventano sempre più piccoli.
La serie cresce, anche se non velocemente quanto la geometrica.

Serie Armonica Generalizzata

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}}$$

! Non varia l'esponente (come nella serie geometrica) ma esso viene fissato; Varia però la base n.

$$S = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots+\frac{1}{n^p}$$

Pongo $p=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\dots$

Problema: Studiare il comportamento della serie al variare di p.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{Converge se } p>1 \\ \text{diverge se } p \leq 1 \end{cases}$$

ES: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ $p=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ Diverge

Perchè? Più velocemente cresce il denominatore (e quindi aumenta il valore della frazione), "più la serie converge". Di conseguenza $\frac{1}{n^2}$ decresce più velocemente di $\frac{1}{\sqrt{n}}$, e quindi i termini che sommiamo (nel caso $\frac{1}{n^2}$) diventano più piccoli più velocemente, e quindi possiamo quantificarli.
Nel caso di $\frac{1}{\sqrt{n}}$, i termini decrescono meno velocemente, e quando li sommiamo all'infinito la serie diverge.
Il "punto di rottura" è proprio $p=1$; infatti, per $p=1$, abbiamo la S. Armonica, che infatti diverge sempre.

1:03

Qualche considerazione

Spesso calcolare la somma di una serie è molto difficile, per questo motivo, è solito capire solo se la serie Converge o Diverge, senza preoccuparsi di capire la somma.

Condizione Necessaria per la convergenza

Se una serie a_n converge $\Rightarrow \lim a_n = 0$

Per studiare se una serie converge o meno, calcoliamo la successione (limite) delle somme parziale S_n;
Questo concetto è importante perché a_n lo abbiamo fin da subito (non dobbiamo Trovare la ridotta)

ES: $\sum_n \frac{n}{n^2+1}$ a_n Possiamo dire se la serie converge fin da subito.

Di conseguenza, il termine generale è infinitesimo. Si deve notare che questa è una condizione Necessaria, e non Sufficiente! Di conseguenza non possiamo dire che una serie a_n il cui $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, convergerà sicuramente.
Possiamo però affermare con sicurezza che se $\lim a_n \neq 0$, a_n Non converge.

Osservazione: Se $\lim a_n = 0 \Rightarrow$ Non possiamo affermare nulla di certo.

Se $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow$ La serie Diverge.

Capiamo quindi che questa condizione necessaria viene usata per dimostrare che una serie a_n NON converge.

TIP ESAME: all'esame ci saranno sicuramente serie $\to 0$, ma meglio controllare sempre.

Dimostrazione

$S_{n+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{S_n} + a_{n+1} \leftarrow$ La somma dei primi n termini, è proprio S_n

$\Rightarrow a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

Passiamo al $\lim_{n\to+\infty}$: Per Hp. $\sum a_n$ Converge $\Rightarrow \lim S_n = S$

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 0$

$\quad\quad\quad\;\; S \;\; - \;\; S$

$\Rightarrow \lim a_{n+1} = 0$

ES: Studiare il carattere della serie: $\sum_n \log(n)$

1) Vedo se diverge: $\lim_{n\to\infty} \log(n) = +\infty \to$ Diverge

ES: $\sum \frac{n!}{n^n}$ 1) $\lim \frac{n!}{n^n} = 0 \Rightarrow$ Non possiamo affermare nulla.

$n^n \gg n!$

1:40

Nota: Considereremo solo Serie a termini Non negativi pg 263

$\sum a_n \ / \ a_n \geq 0 \quad \forall n.$

Vale il seguente teorema: Una serie a termini non negativi Non può essere indeterminata. Essa può convergere o divergere.

Dimostrazione

Hp: $\sum a_n \ / \ a_n \geq 0 \ \forall n.$

Consideriamo S_n: $S_{n+1} = \underbrace{S_n}_{\text{Somma dei Primi } n} + \underbrace{a_{n+1}}_{\text{Un Termine}}$

poiché, per Hp., a_{n+1} è sicuramente $\geq 0 \Rightarrow a_{n+1} \geq S_n$

$\Rightarrow S_{n+1} \geq S_n \ \forall n \Rightarrow S_n$ è una Succ. monotona cresc.

$\Rightarrow$ Per il teorema delle succ monotone, S_n è succ regolare

1:48

$\Rightarrow$ Converge o Diverge, ma non può essere indet.

Criterio del confronto

Supponiamo di avere 2 serie $\sum_n a_n$ e $\sum b_n \ / \ 0 \leq \underbrace{a_n \leq b_n}_{\text{Serie a Termini non neg.}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Se $\sum b_n$ Converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

2) Se $\sum a_n$ Diverge $\Rightarrow \sum b_n$ Diverge.

Criterio del rapporto

pg 271

$\sum_n a_n$ è una serie a Termini Non Neg. Supponiamo $\exists \lim\limits_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

Allora
1) Se $\ell < 1$, la serie converge
2) Se $\ell > 1$, la serie Diverge
3) Se $\ell = 1$, non possiamo affermare nulla.

ES: $\sum \frac{1}{n!}$

1) Cond necessaria: $\lim \frac{1}{n!} = 0 \Rightarrow$ Non possiamo dire niente

2) Oss che è una serie a termini non negativi $\Rightarrow$ possiamo applicare il crit. del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{!}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow \lim_{n} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Converge}$$

Criterio della radice

pg 272

Sia $\sum a_n \ / \ a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che $\nexists \lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$ allora se:

1) $\ell < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
2) $\ell > 1 \Rightarrow \sum a_n$ Diverge
3) $\ell = 1 \Rightarrow$ Boh!

7:00 lez 11

Dimostrazione Supponiamo che $\ell < 1$, per Hp. Sappiamo che $\lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

Per Def $\Leftarrow\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu > 0 \ / \ \forall n > \nu, \ \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$

Dim non completa.

ES $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 1) Cond Necess. : $\lim \frac{1}{n^n} = 0 \Rightarrow$ Potrebbe convergere

2) Usiamo il criterio della radice: $\lim \sqrt[\cancel{n}]{\frac{1}{n^{\cancel{n}}}} = \lim \frac{1}{n} = 0 < 1 \Rightarrow$ Converge

2) Criterio del rapporto:

$$\lim_{n} \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \frac{1}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

reciproco

$$= \cancel{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}} \cdot \cancel{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \lim \sim = 0 < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^n} \text{ converge}$$

$\frac{1}{n}$ $\quad \searrow 0$

ES $\frac{2^n}{n!}$ 1) $\lim_{n} \frac{2^n}{n!} = 0$ Boh!

$n! >> 2^n$

2) Criterio della radice: $\sqrt[\cancel{n}]{\frac{2^{\cancel{n}}}{n!}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n!}}$ Boh!

2) proviamo criterio del rapporto

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{\cancel{n+1}}}{(n+1)!} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{Converge}$$

ES: $\sum_{n} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$ 1) $\lim \left[\frac{n+1}{3n-1}\right]^n$ $\quad \frac{\cancel{n}(1+0)}{\cancel{n}(3+0)} = \left[\frac{1}{3}\right]^n = \frac{1}{\infty} = 0$

2) Criterio radice: $\cancel{\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^{n}}} = \frac{n+1}{3n-1} \rightarrow \frac{1}{3}$ converge

ES: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ = Criterio del rapporto = $\frac{[\cancel{2}(n+1)]!}{\cancel{2^{n+1}} \cdot (n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{2^n} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{2^{\cancel{n+1}} (n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{2^n} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)}$ $\nearrow +\infty$

$2n! = \cancel{2n \cdot (2(n-1))} \ldots$

$2(n+1) = \underbrace{2n+1}_{\substack{\parallel \\ 2n+2}}, \ 2n \cdot (2(n-1)) \Rightarrow \underbrace{2n+2 \cdot 2n+1}, \cancel{2n \cdot (2(n-1))}$

$2n+2 \longrightarrow$

Criterio degli infinitesimi

$\sum a_n \;/\; a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che per un certo $p \in \mathbb{R} \to \exists \lim_n n^p a_n = \ell$

1) Se $\ell \neq +\infty$, $p > 1 \to \sum a_n$ Converge
2) Se $\ell \neq 0$, $p \leq 1 \to \sum a_n$ Diverge

Se il $\lim n^p a_n$ = Finito, allora dirò che a_n è di ordine p. In entrambi i casi dobbiamo soddisfare entrambe le condizioni; se ad esempio $\lim n^p \cdot a_n = \infty$, p deve essere ≤ 1 per applicare il criterio e dire che a_n Diverge.

1) Se $\ell \in (0, +\infty)$, cioè a_n è infinitesimo di ordine p, allora • se p è >1, la serie converge, • se $p \leq 1$, allora la serie diverge.
2) Se $\ell = 0$ e $p > 1$, allora a_n converge.
3) Se $\ell = +\infty$ e $p \leq 1$, allora a_n Diverge.

ESPLICITATO

Dimostrazione lez 11, 52:00

2) Cr. infinitesimi Dobbiamo capire di che ordine di infinitesimo è?

Definizione: Siano a_n e b_n due infinitesimi, diremo che a_n e b_n sono infinitesimi dello stesso ordine, se il $\lim \frac{a_n}{b_n}$ è finito e $\neq 0$

- Diremo inoltre che a_n è infinitesimo di ordine sup. a b_n se il $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ come se fosse $\frac{0^+}{x>0} = 0$
- Diremo inoltre che a_n è infinitesimo di ordine inferiore se $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ come se fosse $\frac{x>0}{0^+} = \infty$

Osservazione: Supponiamo che $\begin{cases} \lim a_n = 0 \\ \lim \frac{1}{n^p} = 0 \end{cases}$ se) $p > 0$ $\lim a_n = 0$

Supponiamo che $\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}} = \lim n^p a_n$ Sia finito, significa che a_n e $\frac{1}{n^p}$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

Si dice anche che a_n è un infinitesimo di ordine p. Quindi, confrontiamo una succ a_n con una fissa, (non due succ a_n e b_n qualsiasi) ovvero $\frac{1}{n^p}$, che diventa l'infinitesimo Campione.

ES $\sum \frac{2n+1}{n^5+4n+3}$ 1) $\lim a_n = 0$

2) Per quale p il $\lim n^p \cdot \underbrace{\frac{2n+1}{n^5+4n+3}}_{a_n}$ è finito e $\neq 0$?

Cioè a_n è un infinitesimo di quale ordine? $\to$ l'ordine dipende da p

$$\lim n^p \cdot \frac{2n+1}{n^5+4n+3} = n^p \cdot \frac{n(2+0)}{n^5(1+0+0)} \overset{p=4}{\Rightarrow} \cancel{n^4} \cdot \frac{2}{\cancel{n^4}} = 2$$

P deve essere 4

Quindi a_n è infinitesima d'ordine $4 > 1 \Rightarrow$ Converge.

ES: $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ $\quad \lim \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = 0$ potrebbe convergere.

Dal lim notevole $\lim_n [1 - \cos(n)]\, n^2 = \frac{1}{2}$

Quindi nel nostro caso: $\lim_n \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n$ è un infinitesimo di ordine $2 > 1$ conv

1) $\lim \frac{\log(n)}{n} =$ $\log n << n \Rightarrow \longrightarrow 0$

$\lim n^p a_n = \ell \Rightarrow \lim \cancel{n} \frac{\log(n)}{\cancel{n}} = \underline{+\infty}$ $\quad p=1 \ (p\leq 1) \quad \ell = +\infty$ $\Rightarrow$ a_n è un infinitesimo di ordine inferiore a $1/n$ perché?

Siccome $\lim n^p a_n = +\infty$ e $p \leq 1$, allora la serie Diverge.

$$\frac{n \log n}{n} = \frac{\frac{\log n}{n}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow +\infty$$

Confronto

Vuol dire che $1/n$ Tende a 0 più vel. di $\frac{\log n}{n}$

ES: $\sum \frac{5n-1}{3n^2+2}$

Ci poniamo 2 possibili domande:

a) Per quale n^p devo moltiplicare affinché il $\lim\limits_{n} n^p \cdot a_n = \ell$ (finito)? Cioè qual è l'ordine di infinitesimo di a_n?

Risposta: $p=1$

$\Rightarrow \lim n^1 \frac{5n-1}{3n^2+2} \sim \frac{\cancel{n} \cdot 5\cancel{n}}{3\cancel{n^2}} = \frac{5}{3} > 1 \Rightarrow$ a_n è infinitesimo di ordine $p=1$, il lim è finito e $p \leq 1 \Rightarrow$ la serie Diverge

b) Criterio del rapporto: Calcoliamo $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5(n+1)-1}{3(n+1)^2+2} \cdot \frac{3n^2+2}{5n-1} = \frac{5(n+1)-1}{5n-1} \cdot \frac{3n^2+2}{3(n+1)^2+2} = 1$$

ord 1, ord 1, ord 2, ord 2

$\frac{5}{5} = 1$ $\quad \frac{3}{3} = 1$

Con il criterio del rapp, quando il lim Tende a 1, non possiamo dire se diverge o converge. Proviamo quindi un altro Criterio.

TIP ESAME: Quando non ci troviamo con un criterio, è bene provarli <u>TUTTI</u>

ES: $\sum \frac{\log n}{n^2}$ $\quad$ 1) Criterio degli infinitesimi $\lim\limits_{n} n^p a_n = \ell$ / ℓ è finito

$\Rightarrow$ proviamo $p = \frac{3}{2}$: $= \lim n^{1+\frac{1}{2}} \frac{\log n}{n^2} = n \cdot n^{\frac{1}{2}} \frac{\log n}{n^2} = \cancel{n} \sqrt{n} \frac{\log n}{\cancel{n^2}} = n \cancel{\sqrt{n}} \frac{\log n}{\cancel{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}} =$

$= \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$ $\quad \left.\begin{matrix} \ell = 0 \\ p > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Converge

$\sqrt{n} >> \log n$

Serie Alternate

① $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ / $a_n \geq 0$ la nostra serie è sempre a termini positivi, ma è moltiplicata per un valore alternante $(-1)^n$

Il segno alterna ⇒ $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_n$

Attenzione! A questo tipo di serie, NON si applicano i precedenti criteri.

Come si trattano?

Criterio di Leibnitz (unico criterio!)

Supponiamo di avere $\sum (-1)^n a_n$ / $a_n \geq 0$.

Se $(a_n)_n$ è decrescente ed infinitesima $(a_n \to 0)$, allora la serie converge.

Inoltre, se S_n è la successione delle somme parziali della ① e S è la sua somma, allora, si ha che la differenza tra S_n e S è $\leq a_{n+1}$:

$$|S_n - S| \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

In poche parole... Se la succ a_n tende a 0 ed è decrescente ⇒ Converge.
Inoltre, non conosciamo la somma della serie, ma sappiamo che la distanza tra S_n ed S è più piccola dell' n+1 esimo termine. Quindi, se calcoliamo la somma dei primi 100 elementi, so che la distanza della somma dei primi 100 termini, dalla somma vera e propria S, è $\leq a_{n+1}$.

Somma dei primi n termini Calcolabile!

Non conosciamo S!

Osservazione: la quantità $|S_n - S| \doteq R_n$ (si può chiamare Resto ennesimo della Serie), ed esprime l'errore che commetto nell'approssimare S con S_n.

Se R_n è piccolo, posso approssimare S con S_n (che so calcolare). Siccome il criterio ci dice che $R_n \leq a_{n+1}$, possiamo dire che l'errore che commetto è trascurabile. Questo perché con $a_n \to 0$, a_{n+1} è molto piccolo.

Esercizi Prima parte del criterio

ES: $\sum \frac{1}{n}$ (Serie Armonica) ⟶ Diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Con i segni alternati, diverge sempre?

$a_n = \frac{1}{n}$, $\lim a_n = 0$, ed è decrescente $(\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \dots)$ ⇒ la serie converge per il criterio di Leibnitz.

ES: $\sum_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{1}{\log(n+1)} = \frac{1}{\log(-)} - \frac{1}{\log(-)} + \frac{1}{\log \dots} \dots$

$\lim_{n} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$ ⇒ Converge.

ES: $\sum (-1)^n \sin(\frac{1}{n}) = -\sin(\frac{1}{n}) + \sin(\frac{1}{n}) \dots$

$\lim_{n} \sin(\frac{1}{n}) = 0$ ⇒ Converge

Esercizi seconda parte del criterio

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots$ Calcoliamo la somma "a meno di un errore di 10^{-1}":

$|S_n - S| \leq a_{n+1} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_{n+1}} \leq \underbrace{\frac{1}{10}}_{\text{errore}} \Rightarrow n+1=10,\ \underline{n=9}$ Quindi ci basta calcolare $\sum_{n=1}^{9} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{9} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9} = \boxed{0,7}456$

Siccome l'errore è pari a $R_n \leq \frac{1}{10}$, prendo come risultato fino ai decimi (prima cifra decimale), ovvero $\sum_{n=1}^{9} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 0,7$

ES: $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ Calcolare S con un $R_n \leq \frac{1}{10}$ R_n

1) Converge? $\lim a_n = 0$ per il criterio di Lib. Converge.

$|S_n - S| \leq a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)-1} \geq R_n \Rightarrow \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{10} \Rightarrow 2n+1 \geq 10,\quad n \geq \frac{9}{2} \overset{4.5}{\sim} 5$

Se prendo $n=5 > \frac{9}{2}$ sono sicuro di ottenere $R_n \leq \frac{1}{10}$

$S_5 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9} \sim \underset{1/10}{\boxed{0.8}}35$

Considerazioni finali

Solo in alcuni casi possiamo calcolare la somma di una serie, ma a volte cerchiamo di capire solo se la serie converge o diverge.
Durante la somma di infiniti termini (serie) che non so calcolare, come nelle serie Alternate, vale però il risultato riportato alla 2.