T. unicità del limite

Sia a_n una successione, allora

- Se a_n converge ad ℓ, il limite è unico
- Se a_n diverge a $+\infty$ o $-\infty$ non può convergere

T. permanenza del segno

Se la succ. è def. POSITIVA allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \geq 0$

Questo vuol dire che il limite della successione non può essere negativo.

ES: $a_n = \sin\left(\frac{n+10}{n}\right)$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \sin\left[\frac{\cancel{n}\,(1+\frac{10}{n}\to 0)}{\cancel{n}}\right] \to \sin(1) > 0 \Rightarrow$ Da un certo indice in poi la serie è positiva.

T. Del Confronto

ES $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$ $\qquad \underbrace{-1 \leq \sin x \leq 1}_{\text{Limitata}} \xrightarrow[x]{\text{Divido per}} \underset{h(x)}{-\frac{1}{x}} \leq \underset{f(x)}{\frac{\sin x}{x}} \leq \underset{g(x)}{\frac{1}{x}}$

$\to$ calcolo i limiti $\to$ $\underset{h(x)}{-\frac{1}{x}} \leq \underset{f(x)}{\frac{\sin x}{x}} \leq \underset{g(x)}{\frac{1}{x}}$ con $-\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{\sin x}{x} \to ?$, $\frac{1}{x} \to 0$

Per il teorema del confronto anche $\frac{\sin x}{x} \to 0$.

ES: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3+\sin x}$ $\to$ il denom non ammette limite $\to$ osservo che $-1 \leq \sin x \leq 1$

$\Rightarrow \underset{h(x)}{\frac{2x}{3+1}} \leq \underset{f(x)}{\frac{2x}{3+\sin x}} \leq \underset{g(x)}{\frac{2x}{3-1}}$

($+1$: valore magg di $\sin x$; -1: val minimo del seno)

$\to$ Calcolo i limiti $\to$ $\underset{h(x)}{\frac{2x}{3+1}} \leq \underset{f(x)}{\frac{2x}{3+\sin x}} \leq \underset{g(x)}{\frac{2x}{3-1}}$ con $\frac{2x}{3+1} \to +\infty$, $\frac{2x}{3+\sin x} \to ?$, $\frac{2x}{3-1} \to +\infty$

$\Rightarrow$ per il t. del conf. anche $f(x) \to +\infty$

Principali limiti notevoli

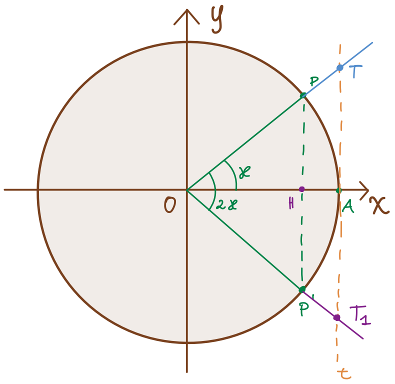
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \; 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \log_a e$

Lim. Not. più utile

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad$ Usiamo il Teorema Del CONFRONTO



$\underbrace{\overline{PP_1}}_{2\sin x} < \underbrace{\overset{\frown}{PP_1}}_{PP_1 = r\cdot 2x} < \underbrace{\overline{TT_1}}_{2\tan x} \equiv \frac{2\sin x}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{2\tan x}{2} \equiv \frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$

$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

reciproco $\Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \equiv \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ con $\cos x \to 1$, $\frac{\sin x}{x} \Downarrow 1$, $1 \to 1$