Disequazioni

Disequazioni di I e II grado dal libro Marcellini - Sbordone

piccolo recap

3.1)

a) $x+1>0$ per $x>-1$

c) $4x+8>0$ per $x>-2$

3.4)

a) $3x+4-x+1<x+6$; $3x+4-x+1-x-6<0$; $x-1<0$ per $x<1$

b) $\frac{x}{2}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}x \geq \frac{5}{4}x+2$; moltiplico per 4: $2x+\frac{4}{3}+3x \geq 5x+8$; $0x+\frac{4}{3}-8 \geq 0$ $\emptyset$

c) $x-7-2x<7-x$ $\emptyset$

Diseq di II grado

- Con le diseq di II grado consideriamo il Discriminante Δ:

1° Caso: Se il Δ è positivo, l'eq $ax^2+bx+c=0$ ammette Due soluzioni distinte. Calcoliamo le due radici (x_1 e x_2) con:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Inoltre se $ax^2+bx+c>0 \iff a(x-x_1)(x-x_2)>0$

Scomposizione

Capiamo quindi che

Caso $ax^2+bx+c>0$ con $a>0$

Se $a>0$, affinché la disequazione sia positiva, $[(x-x_1)(x-x_2)]>0$. Per far sì che questo valore sia positivo, i due termini devono avere lo stesso segno, quindi:

$$\begin{cases}(x-x_1)>0\\(x-x_2)>0\end{cases} \quad \text{OR} \quad \begin{cases}(x-x_1)<0\\(x-x_2)<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>x_1\\x>x_2\end{cases}$$ ma sappiamo che $x_1<x_2$ ⇒

		x_1		x_2	
$x>x_2$	$-$		$-$		$+$
$x>x_1$	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

Valori Esterni

Caso $ax^2+bx+c>0$ con $a<0$

Se $a<0$, affinché $[(x-x_1)(x-x_2)]<0$ ⇒ Devono avere segni opposti:

$$\begin{cases}x-x_1>0\\x-x_2<0\end{cases} \text{per} \begin{cases}x>x_1\\x<x_2\end{cases}$$

		x_1		x_2	
$x>x_1$	$-$		$+$		$+$
$x<x_2$	$+$		$+$		$-$
	$-$		$+$		$-$

$$\begin{cases}x-x_1<0\\x-x_2>0\end{cases} \text{per} \begin{cases}x<x_1\\x>x_2\end{cases}$$

		x_1		x_2	
$x<x_1$	$+$		$-$		$-$
$x>x_2$	$-$		$-$		$+$
	$-$		$+$		$-$

Valori Interni

Caso $ax^2+bx+c<0$ con $a>0$

Se $a>0$, affinché la disequazione sia negativa, $[(x-x_1)(x-x_2)]>0$

Per la dimostrazione precedente, $x_1<x<x_2$ Valori Interni

Caso $ax^2+bx+c<0$ con $a<0$

Se $a<0$, affinché la disequazione sia negativa, $[(x-x_1)(x-x_2)]<0$

Per la dimostrazione precedente, $x<x_1 \cup x>x_2$ Valori esterni

Riassumendo

$$\left.\begin{matrix} ax^2+bx+c>0 \\ a>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x<x_1 \cup x>x_2$$

$$\left.\begin{matrix} ax^2+bx+c>0 \\ a<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1<x<x_2$$

$$\left.\begin{matrix} ax^2+bx+c<0 \\ a>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1<x<x_2$$

$$\left.\begin{matrix} ax^2+bx+c<0 \\ a<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x<x_1 \cup x>x_2$$

2° Caso: $\Delta = 0$

In questo caso l'eq: ax^2+bx+c ammette una sola soluzione:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \quad \text{Se } x_1 = x_2 \Rightarrow = a\underbrace{(x-x_1)^2}_{>0\ \forall x \in \mathbb{R}}.$$

Deduciamo che se $a>0$, l'eq è >0 $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$

questo perchè: data la disequazione $a(x-x_1)^2>0$ pongo $x = x_1 \Rightarrow a(x_1-x_1)^2 = 0 \not> 0$

Riassumendo:

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c>0 \\ a>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \neq x_1$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c>0 \\ a<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Nessuna Soluzione}$$

ES: $-2\cdot(-2)^2>0$, $-2\cdot 4>0$? $\nexists x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c<0 \\ a>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Nessuna Soluzione}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c<0 \\ a<0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \neq x_1$$

3 Caso: $\Delta < 0$

Se il discriminante è <0, l'eq $ax^2+bx+c=0$ NON AMMETTE soluzioni reali. Possiamo però scomporre nel seguente modo:

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left[4a^2x^2+4abx+4ac\right] = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2 - \underbrace{(b^2-4ac)}_{\Delta<0}\right]$$

Se $b^2-4ac<0$, allora la parentesi quadra è sicuramente >0. Di conseguenza il segno di ax^2+bx+c è identico a quello di a.

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c>0 \\ a>0,\ \Delta<0 \end{array}\right\} \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{unica soluzione}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c<0 \\ a<0,\ \Delta<0 \end{array}\right\} \forall x \in \mathbb{R}$$

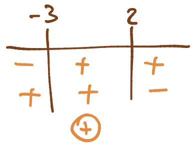
$\Rightarrow$ Per avere soluzione, il segno della diseq e quello di a devono essere uguali.

ES 3.5)

a) $x^2-3x+2<0$ $\quad \Delta = (-3)^2-4\cdot 2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3\pm 1}{2}$ $\quad x_1 = 2$, $x_2 = 1$ $\quad a>0 \Rightarrow$ Valori interni $\Rightarrow$ $1<x<2$

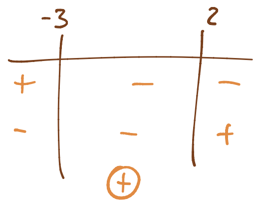
$\overset{>0}{a}\,\underbrace{(x+3)\,(x-2)}_{\text{Segni opposti}}<0$

$$\left\{\begin{array}{l} x+3>0 \\ x-2<0 \end{array}\right. \text{per} \begin{array}{l} x>-3 \\ x<2 \end{array}$$



$-3<x<2$

$$\left\{\begin{array}{l} x+3<0 \\ x-2>0 \end{array}\right. \text{per} \begin{array}{l} x<-3 \\ x>2 \end{array}$$



$-3<x<2$

* Non so perchè esce 3 e non 1

b) $1 - x^2 \leq 0$ $\quad a<0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq \pm 1$

$\Delta = -4 \cdot (-1) \cdot 1 = 4 > 0$ 2 radici coincidenti $\Rightarrow$ $x \leq -1 \cup x \geq 1$

c) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ $\quad \Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{4}$ $\quad x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$

$a > 0 \Rightarrow$ Valori esterni $\Rightarrow$ $x < \frac{1}{2} \cup x > 1$

d) $x^2 + 5x > 0$ $\quad \Delta = 25 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 5}{2}$ $\quad x_1 = 0$, $x_2 = -5$

$a > 0 \Rightarrow$ Valori esterni $x < -5 \cup x > 0$

ES 3.6)

a) $16x^2 + 8x + 1 > 0$ $\quad \Delta = 64 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = \emptyset \Rightarrow$ 1 Soluzione o 2 coincidenti $\quad x = \dfrac{-8 \pm 0}{32} = -\dfrac{1}{4}$

$a > 0 \Rightarrow$ Valori esterni $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{4}\}$

b) $16x^2 + 8x + 1 < 0$ $\quad x = -\frac{1}{4}$ $\quad a > 0$, segno $< 0 \Rightarrow a \neq$ diseq $\Rightarrow$ No Sol

c) $x^2 \leq 0$ per $x = 0$

d) $-9x^2 + 12x - 4 \geq 0$ $\quad \Delta = 144 - 4 \cdot (-9) \cdot (-4) = \emptyset \Rightarrow$ 1 Soluzione

$a < 0 \Rightarrow$ Soluz interne $\quad x = \dfrac{-12}{-18} = 2/3 \Rightarrow f(x) \geq 0$ solo $\forall\, x = \frac{2}{3}$

3.7) a) $x^2 - x + 1 < 0$ $\quad \Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow$ $a > 0$, eq $< 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

b) $-2x^2 + 3x - 2 < 0$ $\quad \Delta = 9 - 4(-2)(-2) = -n < 0 \Rightarrow$ $a < 0$, eq $< 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

c) $3x^2 - 7x + 5 \geq 0$ $\quad \Delta = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = n < 0 \Rightarrow$ $a > 0$, eq $\geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

d) $-7x^2 + 5x - 1 \geq 0$ $\quad \Delta = 25 - 4(-7)(-1) = 25 - 28 < 0 \Rightarrow$ $a < 0$, eq $\geq 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

- Quando $\Delta < 0$, l'eq ha ∞ soluz. solo se i segni di a e diseq sono uguali.

3.8)

a) $16x^2 + 24x + 9 \leq 0$ $\quad \Delta = 24^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 576 - 576 = 0 \Rightarrow$ 1 Soluz.

$x = \dfrac{-24}{32} = -\dfrac{3}{4}$ $\quad a > 0$, eq $\leq 0 \Rightarrow$ Soluzioni interne $\Rightarrow$ $x = -\dfrac{3}{4}$

b) $5 + 4x - 3x^2 > 0$ $\quad \Delta = 16 - 4 \cdot 5 \cdot (-3) = 16 + 60 = 76$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{76}}{-6}$ $\quad x_1 = \dfrac{4 + \sqrt{76}}{6}$, $x_2 = \dfrac{4 - \sqrt{76}}{6}$

$a < 0$, eq $> 0 \Rightarrow$ Valori interni $\dfrac{4 - \sqrt{76}}{6} < x < \dfrac{4 + \sqrt{76}}{6}$

Disequazioni di grado superiore al secondo

Una disequazione del tipo $ax^4+bx^2+c>0$ si dice Biquadratica. Per risolvere questo tipo di equazione si usa la sostituzione $t=x^2$:

ottemiamo la disequazione: $at^2+bt+c>0$

Supponiamo di ottenere $\Delta=b^2-4ac>0$, con $a>0$, e per cui si trovano limitazioni del tipo $t<t_1$, $t>t_2$. Di conseguenza possiamo studiare le due disequazioni di secondo grado $x^2<t_1$, $x^2>t_2$

ES 3.10: $f(x)=4x^4-17x^2+4\geq 0$ pongo $t=x^2 \Rightarrow 4t^2-17t+4\geq 0$

$\Delta=17^2-4\cdot 4\cdot 4=289-64=225>0$ $t_{1,2}=\frac{-17\pm 15}{8}$ $x_1=-\frac{1}{4}$, $x_2=-4$ $\Rightarrow$ $a>0$, $eq>0$ $\Rightarrow$ Valori esterni

$\Rightarrow t<\frac{1}{4} \cup t>4$

Siccome $t=x^2 \Rightarrow$ $\underset{a}{x^2<\frac{1}{4}} \cup \underset{b}{x^2>4} \Rightarrow$

a) $x^2<\frac{1}{4}$ per $x<\sqrt{\frac{1}{4}}=x<\pm\frac{1}{2} \rightarrow$ $x<-\frac{1}{2} \cup x>\frac{1}{2}$

b) $x^2>4$ per $x>\pm 2$ $\rightarrow$ $x<-2 \cup x>2$

	-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		2	
+		+		−		+		+
+		−		−		−		+
+		−		+		−		+

$\Rightarrow$ la diseq ha soluzioni in

$x<-2 \cup -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \cup x>2$

3.11) $f(x)$ $9x^4+4x^2-5>0$ pongo $t=x^2$ $f(t)=9t^2+4t-5>0$

$\Delta=16-4\cdot 9\cdot(-5)=16+180=196>0$ $t_{1,2}=\frac{-4\pm 14}{18}$ $t_1=\frac{5}{9}$, $t_2=-1$ $a>0$, $eq>0$ $\Rightarrow$ Valori esterni

Siccome $t=x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2<-1 & \nexists x\in\mathbb{R} \\ x^2>5/9 & x>\sqrt{5/9} \Rightarrow x<-\sqrt{5/9} \cup x>\sqrt{\frac{5}{9}} \end{cases}$ $t<-1 \cup t>\frac{5}{9}$

3.12) $x^4-2x^2-8\leq 0$ pongo $t=x^2 \Rightarrow f(t)=t^2-2t-8\leq 0$ $\Delta=4+32=36$

$t_{1,2}=\frac{2\pm 6}{2}$ $t_1=4$, $t_2=-2$ $a>0$, $eq<0 \Rightarrow$ Soluzioni Interne $-2\leq t\leq 4$

Siccome $t=x^2 \Rightarrow$ $-2\leq x^2<4$ $x^2\geq -2$ $\exists x\in\mathbb{R}$
$x^2<4$ per $x<\pm 2$

$\Rightarrow$ $-2\leq x\leq 2$

3.13) a) $x^4-3x^2\geq 0$ $x^2=t \Rightarrow$ $t^2-3t\geq 0$ per $\Delta=9$ $t_{1,2}=\frac{3\pm 3}{2}$ 0, 3

$a>0$, $eq\geq 0 \Rightarrow$ Valori esterni $t\leq 0 \cup t\geq 3$

Siccome $t=x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2\leq 0 & \text{per } x=0 \\ x^2\geq 3 & \text{per } x\leq-\sqrt{3} \cup x\geq\sqrt{3} \end{cases}$ $\Rightarrow$

	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
+	•	−		−		−
−		−		−	•	+
−		−	•	−		−
+		−	•	−		+

$f(x)\geq 0$ per

$x\leq\sqrt{3} \cup x\geq\sqrt{3} \cup x=0$

b) $x^4+8x^2+15\leq 0$ pongo $t=x^2 \Rightarrow f(t)=t^2+8t+15\leq 0$ $\Delta = 64-4\cdot 15 = 4$

$t_{1,2}=\frac{-8\pm 2}{2}$ $t_2=-2$, $t_2=-5$

$a>0$, eq $\leq 0 \Rightarrow$ Valori Interni $-5\leq t\leq -2$

Siccome $t=x^2 \Rightarrow$ $-5\leq x^2\leq -2$ $\begin{cases} x^2\leq -2 & \nexists x\in\mathbb{R} \\ x^2\geq -5 & \nexists x\in\mathbb{R}\end{cases}$ $\varnothing$

Altro tipo di disequazioni: Reciproche

- $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ polinomio di I^a specie
- $p(x)=ax^4+bx^3-bx-a$ polinomio di II^a specie

3.15) Sia un polinomio di I^a o II^a sp. Sia x_0 una radice del polinomio, cioe' $p(x_0)=0$, con $x_0\neq 0$. Verificare che anche $1/x_0$ lo e'.

//

Metodo di risoluzion

Dividiamo entrambi i membri per x^2:

$$\frac{ax^4}{x^2}+\frac{bx^3}{x^2}+\frac{cx^2}{x^2}+\frac{bx}{x^2}+\frac{a}{x^2}>\frac{0}{x^2}\ ;\quad a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c>0$$

Poniamo $t=x+\frac{1}{x}$ Siccome $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

$x^2+\cancel{2}\cancel{*}+\frac{1}{x^2}\cancel{-2}$

Otteniamo $f(t)=a(t^2-2)+bt+c>0$

$=$ $at^2+bt+c-2a>0$ Eq di 2 grado

Infine ci basta ricordare che $t=x-\frac{1}{x}$ ed effettuare le dovute sostituzioni

ES: $f(x)=\frac{2x^4}{x^2}-\frac{3x^3}{x^2}+\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}>\frac{0}{x^2}$ ottengo $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4>0$

$\Rightarrow$ pongo $t=\left(x+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=t^2-2$

$\Rightarrow 2(t^2-2)-3t+4>0$; $2t^2-3t>0$ $\Delta=9$ $t_{1,2}=\frac{3\pm 3}{2}$ $t_1=0$, $t_2=3$

$a>0$, eq $>0 \Rightarrow$ Valori esterni $\Rightarrow f(x)>0$ per $t<0 \cup t>\frac{3}{2}$

Siccome $t=x-\frac{1}{x} \Rightarrow$ $\overset{a}{x-\frac{1}{x}<0} \cup \overset{b}{x-\frac{1}{x}>\frac{3}{2}}$ moltiplico per x