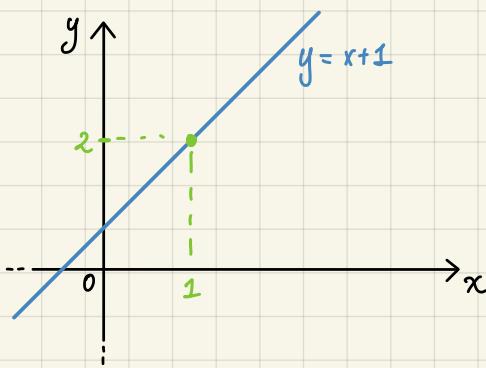


# Limiti

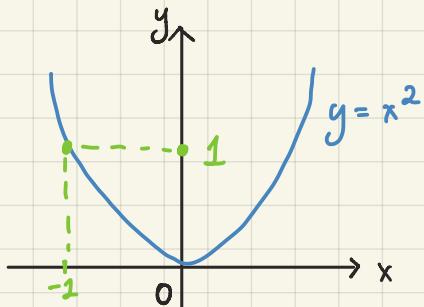
# Introduzione



Supponiamo di dover calcolare:

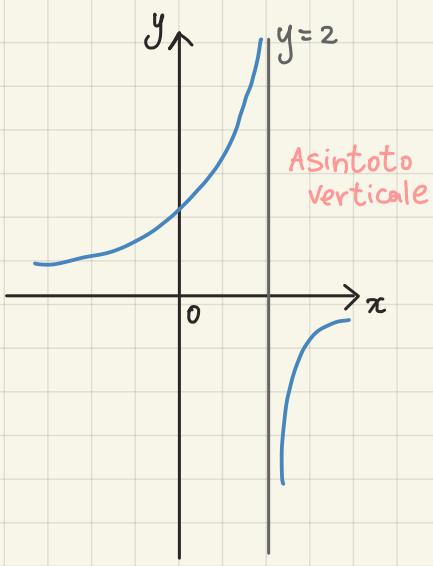
$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

Cosa succede ad  $x+1$  (sulla  $y$ ) quando  $x$  si avvicina ad  $x=1$ ?



$$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1$$

In questi casi banali ha senso sostituire il valore nella funzione.

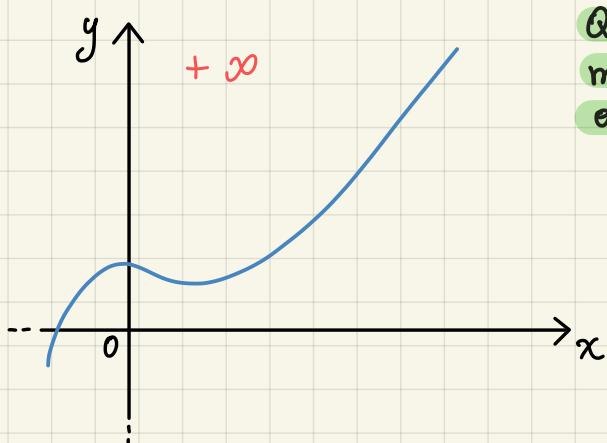


$$y = \frac{-3x-2}{x-2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x-2}{x-2} \xrightarrow{\text{Sostituz.}} \frac{-8}{0}$$

$\mathbb{D} = x-2 \Rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 2\}$  Non si puo' fare

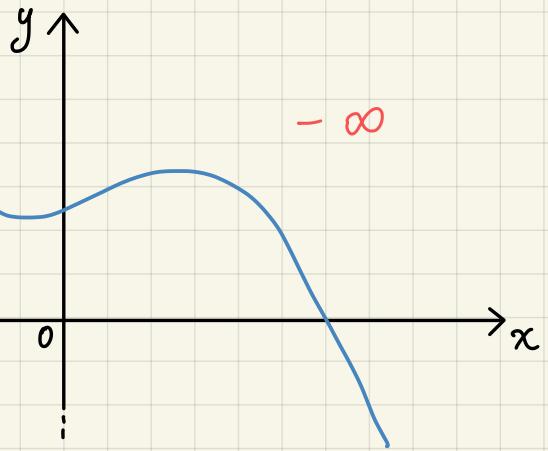
## Limiti all'infinito

Che significa  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ?  $\Rightarrow$  che la funzione quando la  $x$  diventa sempre piu' grande



Quando ad  $x$  molto grandi corrispondono  $y$  molto grandi, si dice che il limite tende all'infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

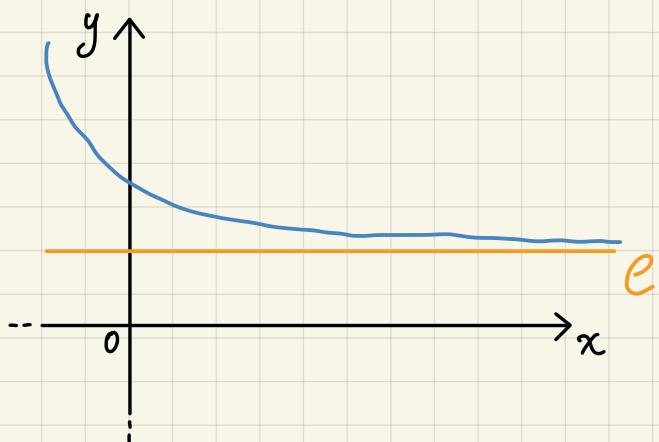


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Questo caso e' analogo al precedente.

$$\lim = e$$

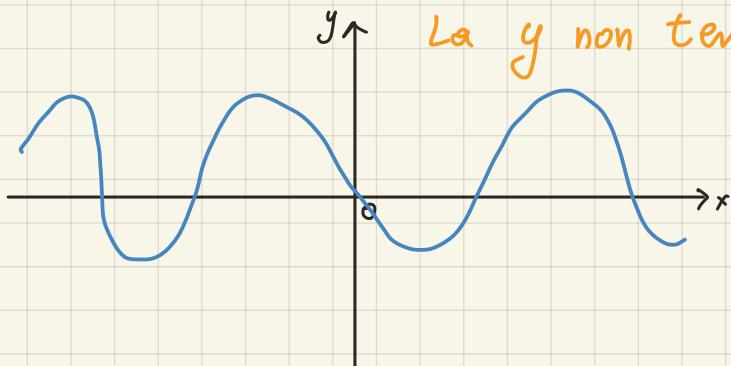
Quando facciamo tendere il limite a  $+\infty$  ma ottieniamo come risultato  $e$ , le  $y$  tendono ad avvicinarsi proprio ad  $e$ :



### Limiti indefiniti

Il risultato del limite potrebbe essere non determinato:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \text{N. E.}$$



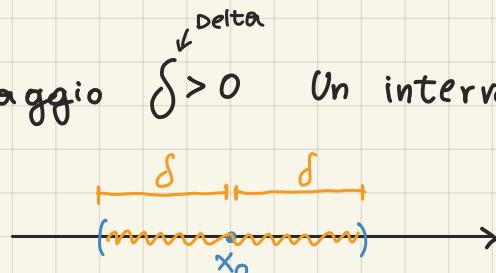
La  $y$  non tende a nulla

# Definizioni

## Intorno

Chiamiamo Intorno di  $x_0$  e di raggio  $\delta > 0$  un intervallo APERTO:

$$V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$



Possiamo anche definire Intorno di  $-\infty$  un Intervallo APERIO del tipo:

$$(-\infty, K) = \{x \in \mathbb{R} : x < K\}$$



Possiamo dire lo stesso per l' Intorno di  $+\infty$ :

$$(K, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > K\}$$



Cosa significa quindi calcolare il  $\lim$  di una funzione?

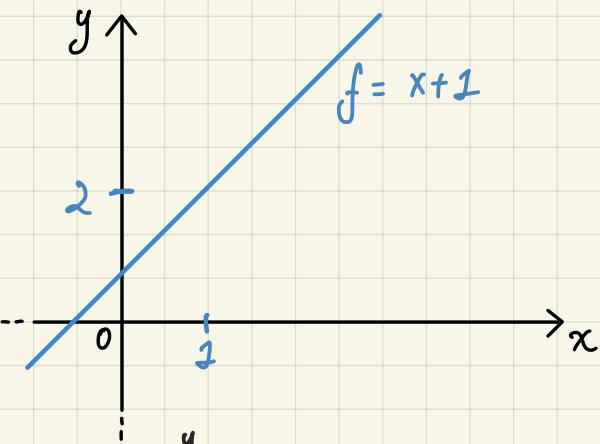


Per ogni intorno di  $L$  che consideriamo (Blu) riusciamo a trovare un intorno di  $x_0$  (Verde); Se calcoliamo quanto vale la funzione quando  $\{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} - x_0$ , otteniamo un numero reale che sara' compreso nell'intervalle  $\{L - \delta < y < L + \delta\} - L$

$$\{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} - x_0 \rightarrow \text{Intorno di } x_0$$

$$\{L - \delta < y < L + \delta\} - L \rightarrow \text{Intorno Di } L$$

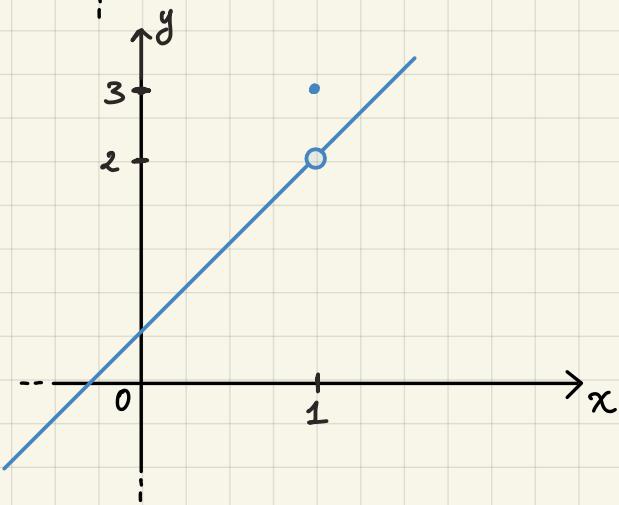
# Funzioni continue elementari



$$\lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2 ; 2 \text{ e' proprio il valore che } f \text{ assume quando la calcoliamo in } x=1.$$

$\uparrow \downarrow$

$$f(1) = x+1 = 2$$



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x=1 \end{cases}$$

Se calcoliamo

$$f(1) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Quindi ...

E' chiaro che il primo caso e' quello piu' comune, mentre il secondo e' "piu' strano".

Nel primo caso la funzione e' **CONTINUA** nel punto che ci interessa, ovvero in  $x=1$ , perch'e'  $\lim_{x \rightarrow 1} f = f(1)$ .

**Funzioni CONTINUE**

Si dice che  $f$  e' **continua in  $x_0$**  se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se la  $f$  e' continua non solo in  $x_0$  ma in OGNI PUNTO di un intervallo, allora  $f$  e' continua sull'intervallo.

In questo caso, la funzione si puo' tracciare "senza staccare la penna dal foglio". (nell'intervallo)

# Funzioni elementari continue

- Potenze:  $y = x^3$ ,  $y = x^{\frac{1}{2}}$
  - Funz. esponenziali:  $y = 2^x$ ,  $y = e^x$
  - Funz. logaritmiche:  $y = \log_3 x$ ,  $y = \ln x$
  - Funz. goniometriche:  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$
- Sono continue nel loro insieme di definizione.

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

Quindi

Se la funzione in esame è continua, il limite della  $f$  per quel valore specifico, è uguale proprio al valore che la  $f$  assume in quel punto.

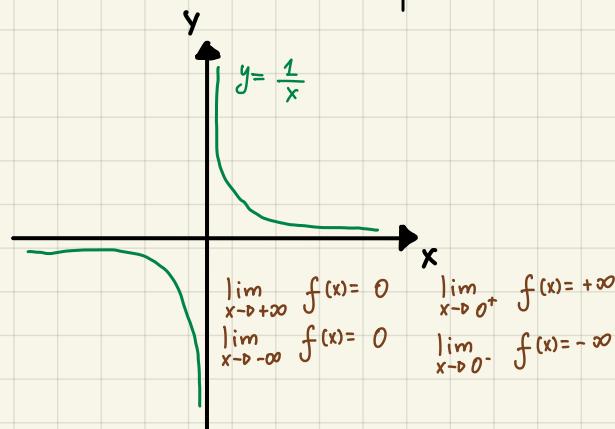
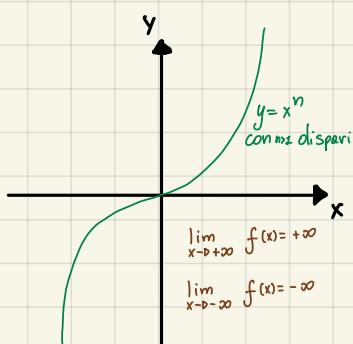
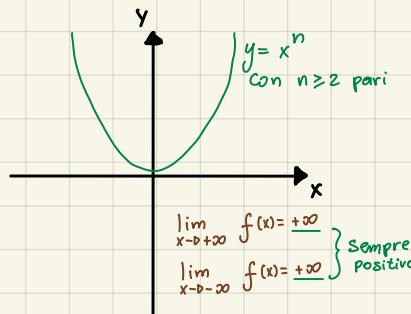
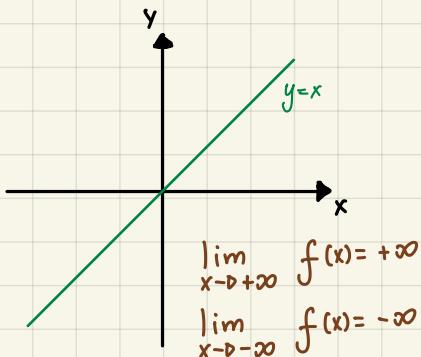
Inoltre tutte le funz che si possono ottenere come Somma, prodotto, Quoziente e composizione da funzioni elementari, sono Continue nel loro dominio naturale.

Esempi:

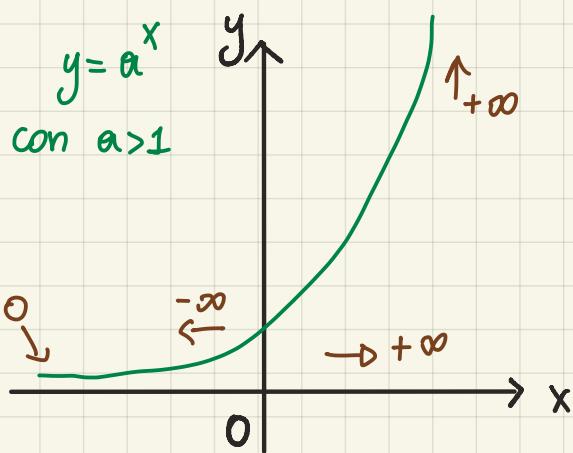
$y = e^{x^2}$  composizione di  $f$  potenza ed esponenziale

$y = 3x^2 - x - 1$  sottrazione

## Funzioni elementari - grafici

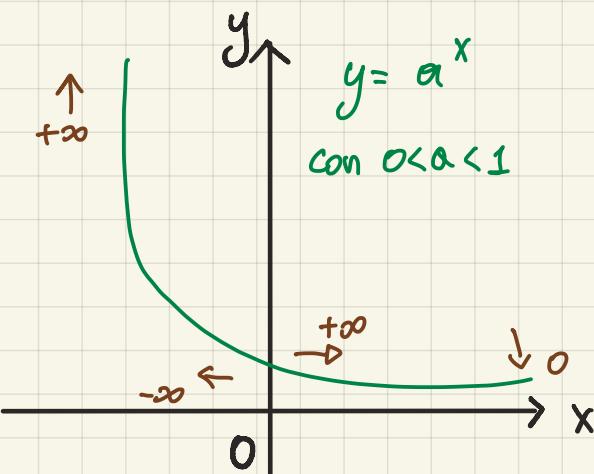


# Funzioni esponenziali e logaritmi



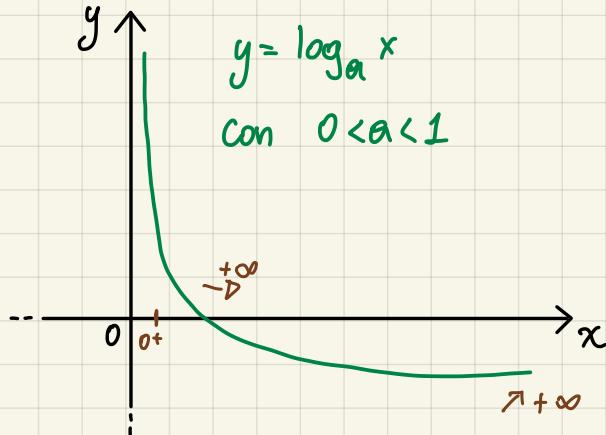
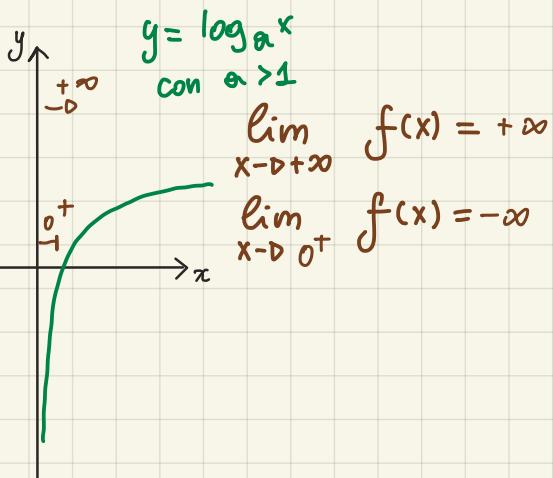
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

\* Anche se non sembra, i logaritmi crescono (o decrescono) all'infinito, anche se molto lentamente.

# Limiti di f razionali per $x \rightarrow x_0$

**Caso 1:** Quando sostituisco  $x_0$  NON si annulla né il numeratore né il denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{1} = 3 \quad \text{Non si annulla} \quad \checkmark$$

**Caso 2:** Quando provo a sostituire  $x_0$  si annulla il denominatore ma non il numeratore.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{1^2-1}{1+3} = 0$$

Sia nel caso 1 che 2, possiamo dare il risultato immediatamente perché le funzioni sono continue.

**Caso 3:**

a) Si annulla il denominatore ma non il numeratore

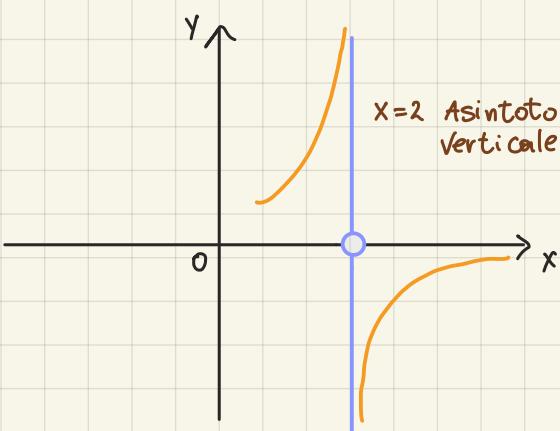
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0} \longrightarrow \text{Metodo di risoluzione}$$

In questo caso dobbiamo separare il limite in limite destro e sinistro.

Destro  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

Sinistro  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

} Se il  $\lim_{x \rightarrow 2^+}$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^-}$  sono diversi, il  $\lim_{x \rightarrow 2}$  NON ESISTE

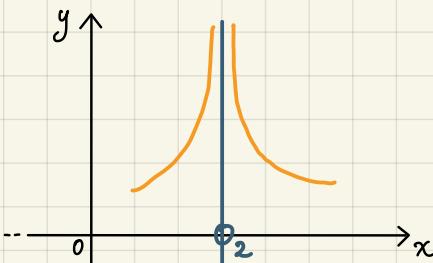


Questo risultato ci dice che la funzione quando si avvicina a 2 da dx tende a  $+\infty$ , mentre quando vi si avvicina da sx tende a  $-\infty$

$\Rightarrow$  Abbiamo un asintoto

Proviamo a calcolare  $f = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(2-x)^2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{(0^-)^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{(0^+)^2} = +\infty \end{cases}$

Siccome i limiti dx e sx hanno lo stesso risultato, anche il limite di partenza fa  $+\infty$ .



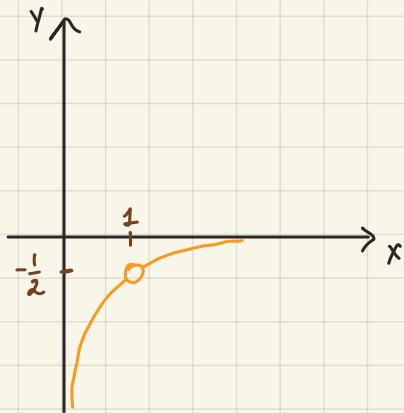
b) Quando, sostituendo, si annullano sia numeratore che denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

Forma  
indeterminata.

Metodo di risoluzione: Scomporre e semplificare:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$



# Limiti di funzioni razionali per $x \rightarrow \infty$

ES:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 5x^2 + 1 = [+\infty - \infty] \leftarrow$  Forma indeterminata

Mettiamo in evidenza il termine di grado >

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( 1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$$

ES:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x - 3}{2x^2 + 5} = \frac{x^3 \left( 1 - \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)}{x^2 \left( 2 + \frac{5}{x^2} \right)} = +\infty$

ES:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x}{5x^6 - 1} = \frac{x^3 \left( 1 - \frac{4}{x^2} \right)}{x^6 \left( 5 - \frac{1}{x^6} \right)} = \frac{1}{-\infty} = 0$

ES:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 \left( 2 - \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} = 2$

In questo caso e' evidente che la  $x$  elevata alla 3<sup>a</sup> cresce piu' velocemente di quella elevata alla 2<sup>a</sup>, ma come possiamo dimostrarlo?

Metodo di risoluzione - pattern

- 1) Raccogliere il termine di grado massimo sia al num che denom
- 2) Semplificare
- 3) A cosa tendono i termini rimanenti?
- 4) fare i conti

Cosa potrebbe verificarsi?

Quando si risolvono questi limiti possono succedere 3 cose:

- 1) funz. razionale avente al num un polinomio di grado > polin. al denom:  
Il risultato sara'  $+\infty$  o  $-\infty$ .

- 2)  $\deg(\text{Denom}) > \deg(\text{Num}) \rightarrow$  Il risultato sara' 0.

- 3)  $\deg(\text{Denom}) = \deg(\text{Num}) \rightarrow$  Il risultato sara' un numero  $\ell$ .

## Limiti con esponenziali

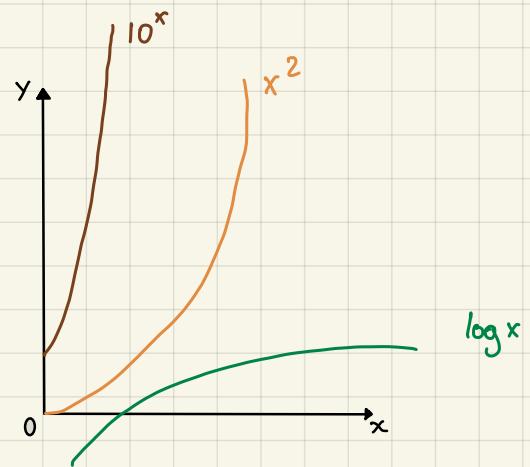
Si procede in maniera simile ai limiti visti prima, ma dobbiamo capire quale elemento tende ad  $\infty$  più velocemente.

**Scala di crescita:**

$$\log x \ll x^b \ll c^x \ll x^x$$

ES:

	$x=10$	$x=100$	$x=1000$
$y = \log_{10} x =$	1	2	3
$y = x^2 =$	$10^2$	$10^4$	$10^6$
$y = 10^x =$	$10^{10}$	$100^{100}$	$10^{1000}$



ES:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 - 6^x = 6^x \gg x^6 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 6^x \left( \frac{x^6}{6^x} - 1 \right) = \infty [-1] = -\infty$$

$$\text{ES: } \frac{e^x - x^2}{3x + \ln x} = \frac{e^x \left( 1 - \frac{x^2}{e^x} \right)^{\nearrow 0}}{x \left( 3 + \frac{\ln x}{x} \right)^{\nearrow 0}} = \frac{e^x}{x} = +\infty !$$

quando portiamo  $x^2$  fuori dalla radice dobbiamo stare attenti a scrivere  $|x|$  e non solo  $x$ ; questo perché il valore di  $x$  sotto radice è sempre  $> 0$ . Se avessimo avuto  $x \rightarrow -\infty$   $|x|$  sarebbe stato  $(-x) \Rightarrow +\infty$ .

$$\text{ES: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{e^{\log_2 x} - 2x} = \frac{\sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)^{\nearrow 0}}}{x \left( e^{\log x} - 2 \right)} = \frac{|x| \sqrt{1 + 0}}{x (0 - 2)} = \frac{\sqrt{1}}{-2} = -1/2$$

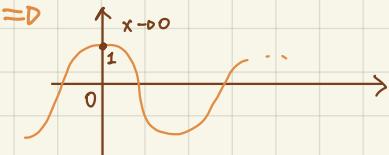
## Limiti di funzioni composte

ES: **Metodo di risoluzione:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{3}{e^x}\right)$$

Bisogna innanzitutto capire cosa succede alla funzione più interna  
1) A cosa tende  $\frac{3}{e^x}$  quando  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow$  tende a 0.

2) Cosa succede a  $\cos(x)$  quando  $x \rightarrow 0$ ?



$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{3}{e^x}\right) = 1$$

$$\text{ES: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2+1}{2x^2-x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{x^2+1}{2x^2-x} = \frac{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^{\nearrow 0}}{x^2 \left( 2 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^y = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

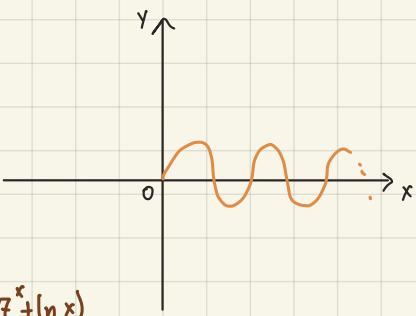
# Strumenti per il calcolo dei limiti

## Teorema dei Carabinieri

ES:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi x + \ln x)}{5x^2 + 1} \quad \begin{array}{l} \nearrow +\infty \\ \searrow +\infty \end{array}$$

Il problema:  
non sappiamo a che tende  
il seno quando  $x \rightarrow +\infty$



Se avessimo avuto solo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\pi x + \ln x)$   
avremmo dovuto dire che quel limite  
Non esiste!

Ad ogni modo, siccome il seno oscilla tra +1 e -1, è sempre una quantità finita!  
Di conseguenza, se dividiamo per  $5x^2 + 1$ , il risultato del limite è zero.

Perche' ?  $-1 \leq \sin(\pi x + \ln x) \leq 1$ , possono dividere ciascun membro per  $5x^2 + 1$ :

$$\frac{-1}{5x^2 + 1} \leq \frac{\sin(\pi x + \ln x)}{5x^2 + 1} \leq \frac{1}{5x^2 + 1}$$

! Siccome quando  $x \rightarrow 0^+$ ,  $5x^2 + 1$  tende a  $+\infty$  (positiva)  
lasciamo i versi invariati. Se avessimo avuto una quantità negativa,  
avremmo dovuto invertire i versi.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{5x^2 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{5x^2 + 1} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Siccome } 0 \leq \frac{\sin(\pi x + \ln x)}{5x^2 + 1} \leq 0 \Rightarrow \frac{\sin(\pi x + \ln x)}{5x^2 + 1} = 0$$

Teorema dei Carabinieri o confronto

## Utilizzo dei prodotti notevoli

ES:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{3x - 12} = \left[ \frac{0}{0} \right] \Rightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{3(x - 4)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\cancel{(x-4)}}{3(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{12}$$

## Limiti Notevoli

Sono delle forme indeterminate ricorrenti di cui ricordiamo il risultato, in modo da poter risolvere limiti più complessi.

## Limiti fondamentali - Da imparare!

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

## Limiti risolvibili con ①

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1^2 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1^2 = 1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1$   
 $\Rightarrow 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

Da imparare!

$$\text{ES: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x + 4\tan x}{x \cos x + 2\sin x} = \frac{x(2 \frac{\sin x}{x} + 4 \frac{\tan x}{x})}{x(\frac{\cos x}{x} + 2 \frac{\sin x}{x})} \xrightarrow{1 \atop 1} \text{lim notevole} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{ES: } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\cos x - \cos^2 x}{2x^2}} = \sqrt{\frac{\cos x(1 - \cos x)}{2x^2}} = \sqrt{\frac{\cos x \xrightarrow{1} \frac{1 - \cos x}{x^2} \xrightarrow{\frac{1}{2}}}{2 \xrightarrow{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

## Limiti risolvibili con ②

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x) \xrightarrow{1^x} \text{pongo } 1/x = y = \ln(1 + \frac{1}{y}) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \ln(e) = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{\text{quindi } e^x = 1+y \Rightarrow x = \ln(1+y)}$  Inoltre se  $x \rightarrow 0$ , allora anche  $y \rightarrow 0$   $\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)}$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{1} = 1$$

possiamo quindi dire che il limite tende al reciproco del risultato precedente

↑  
Otteniamo esattamente il limite precedente ma il num e denom sono invertiti

## In breve

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

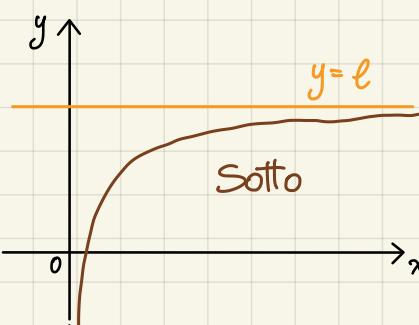
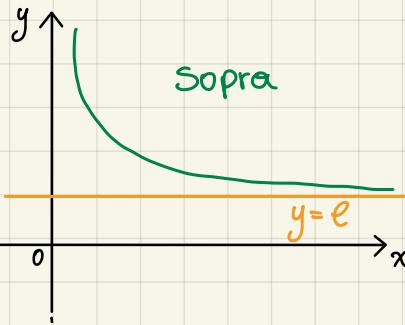
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} &= \ln \alpha \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \frac{1}{\ln a} \end{aligned} \right\}$$

## Asintoti orizzontali

Abbiamo un Asintoto orizzontale quando, nel momento in cui lo  $x$  cresce, la  $y$  si avvicina ad un valore preciso ( $\ell$ ), quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \Rightarrow \text{la retta aura equazione } y = \ell$$

Potrebbe interessarci anche sapere se la funzione si trova SOPRA o SOTTO l'asintoto (retta)



Per capirlo ci basta sostituire al numero dell'asintoto ( $\ell$ ) un numero più piccolo o più grande e vedendo se l'orizzontale relativa interseca o meno la funzione.

ES:

$$f = \frac{3x}{x-1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3)}{x(1-\frac{1}{x})} = 3 \Rightarrow y=3 \text{ A.O.}$$

Questa pratica potrebbe essere utile ma non è molto usata nello studio di funzione.

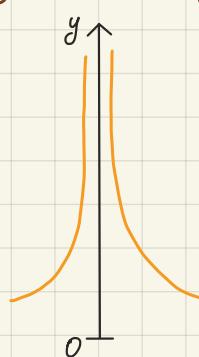
## Asintoti Vertici cali

Abbiamo un Asintoto verticale quando, nel momento in cui la  $x \rightarrow \ell$ , la  $y$  cresce ad infinito. Siccome l'asintoto non viene mai intersecato dalla funzione, la funzione non è definita nel punto  $\ell$ .

Quindi: se  $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = \pm\infty$ ,  $x=\ell$  è Asintoto Verticale

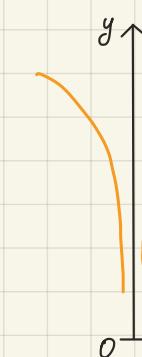
## Che tipo di Asintoto?

A differenza degli A.O., i Verticali possono essere di 4 tipi:



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$



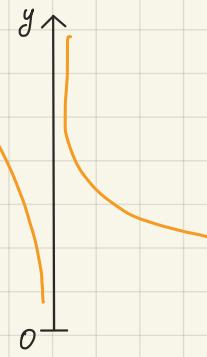
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

ES:

$$f = \frac{3x}{x-1} \quad \text{D} = x-1 \neq 0 \text{ per } x \neq 1$$

Cerco in  $x^\pm$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x}{x-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{array} \right\} \text{Il limite è del tipo:}$$



## Equivalenze Asintotiche

Date due  $f$  e  $g(x)$ , si dicono asintoticamente equivalenti per  $x \rightarrow x_0$ , se il  $\lim_{x \rightarrow x_0}$  del loro rapporto è uguale ad 1. Il simbolo usato è  $\sim$  (tilde):  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow x_0$ .

Possiamo riscrivere tutti i limiti notevoli sotto forma di E.A.:

$$\bullet \sin x \sim x \quad \bullet 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad \bullet \tan x \sim x \quad \bullet e^x - 1 \sim x \quad \bullet \ln(1+x) \sim x \quad \bullet (1+x)^a - 1 \sim ax$$

Inoltre, possiamo sostituire  $x$  con una generica  $\varepsilon(x)$  che tenda a 0:

- $\bullet \sin(5x) \sim 5x$  per  $x \rightarrow 0$
- $\bullet e^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x}$  per  $x \rightarrow \infty$

Proprietà delle eq. asint.

1) Se per  $x \rightarrow x_0$   $f_1(x) \sim g_1(x)$  e  $f_2(x) \sim g_2(x)$ , possiamo dire che  $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$  ed in particolare, se i limiti dei prodotti esistono, sono uguali. Questo ci "autorizza", quando dobbiamo calcolare il  $\lim$  di un prodotto a sostituire uno o entrambi i fattori con degli altri fattori ad essi asintoticamente equivalenti.

2) La stessa cosa di prima vale per i rapporti: Se per  $x \rightarrow x_0$   $f_1(x) \sim g_1(x)$  e  $f_2(x) \sim g_2(x)$   $\Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$  Anche in questo caso i rapporti sono uguali.

3) Se  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow [f(x)]^a \sim [g(x)]^a$  per  $x \rightarrow x_0$ .

ES  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x}-1) \cdot \sin(4x)}{\tan(2x^2)} \sim \frac{3x \cdot 4x}{2x^2} = 6$  Il risultato è accettabile perché

$\frac{(e^{3x}-1) \cdot \sin(4x)}{\tan(2x^2)} \sim \frac{3x \cdot 4x}{2x^2}$
$\lim f(x) = \lim g(x)$

ES  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2} \sim \sqrt{\frac{1}{2}x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2}{\ln(1+2x) \sim 2x} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x^2}{2x} = \frac{x^2}{2\sqrt{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{0}{2\sqrt{2}} = 0$

## O piccolo

Date due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  definite in un intorno di  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  si dice che  $f(x)$  è o piccolo di  $g(x)$  se:

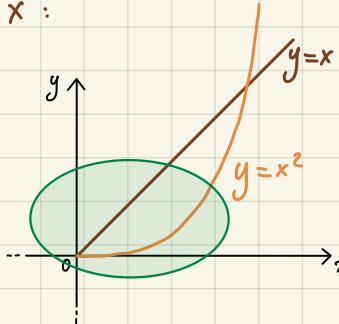
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si scrive quindi:  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$

Inoltre, dire che  $f(x)$  è o piccolo di  $g(x)$  per  $x \rightarrow x_0$  equivale a dire che  $f(x)$  è infinitamente piccola, rispetto a  $g(x)$

ES:  $f = x^2 = o(x)$  per  $x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

Non sembra, ma per valori piccoli  $x^2 < x$ :



ES:  $x^3 = o(x)$  per  $x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{3/2}}{x} = 0$

### Attenzione!

La notazione  $o(x) = o(f)$  indica semplicemente una funzione il cui limite del rapporto con  $f(o(f))$ , fa 0 nel punto in esame.

### Proprietà

- $o(x) \pm o(x) = o(x)$  NON ZERO! e' un po' come fare  $-\infty - \infty$ .
- $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x)$
- $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $x^n \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $x^n = o(x^m)$  . quando  $x \rightarrow 0$ ,  $x^n$  è un o piccolo di  $x^m$ , se  $n > m$   
 $\hookrightarrow$  Questo vuol dire che le potenze con esponente maggiore sono degli o piccoli delle potenze con gli esponenti più piccoli:

ES:  $x^3 = o(x) \Rightarrow x^3 \ll x$  in  $x \rightarrow 0$   
 $x^2 = o(x) \Rightarrow x^2 \ll x$  in  $x \rightarrow 0$

- Deduciamo quinoli che  $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^n)$  se  $n < m$   
 $\hookrightarrow$  "Sopravvive" il termine con esponente minore!

## Eq. Asintotiche ed o piccolo

Per  $x \rightarrow x_0$   $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$

Questo significa che le due funzioni sono A. equivalenti se e solo se differiscono per un termine che diventa trascurabile nel momento in cui facciamo il limite per  $x \rightarrow x_0$ .

Possiamo quindi dire che:

- $\sin x \sim x \rightarrow \sin x = x + o(x)$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x \rightarrow 1 - \cos x = \frac{1}{2}x + o\left(\frac{1}{2}x^2\right)$  Si puo' omettere
- $\tan x \sim x \rightarrow \tan x = x + o(x)$
- $e^x - 1 \sim x \rightarrow e^x - 1 = x + o(x)$
- $(1+x)^k - 1 \sim kx \rightarrow (1+x)^k - 1 = kx + o(kx)$
- $\ln(1+x) \sim x \rightarrow \ln(1+x) = x + o(x)$

ES:  $\sin x^3 + 3x^4 + \ln(1+2x^5) = x^3 + o(x^3) + 3x^4 + 2x^5 + o(x^5) = x^3 + o(x^3)$

$\cancel{3x^4}$   $\cancel{2x^5}$   $\cancel{o(x^5)}$   
Rimane solo il più piccolo

## Formula di Taylor con resto di Peano

Questa formula ci consente di approssimare tutte le funzioni sufficientemente regolari con dei polinomi.

Sia  $f(x)$  una funzione definita in un intervallo  $(-\delta, \delta)$  per qualche  $\delta > 0$  e supponiamo che:

- $f(x)$  sia derivabile  $n-1$  volte nell'intervallo
- Esista la derivata  $n$ -esima perlomeno in  $x=0$

Delta

Se soddisfiamo i requisiti

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$T_n(x)$  è il polinomio di grado  $\leq n$  dato dalla formula:

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

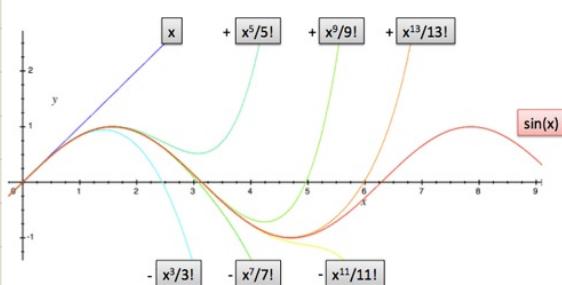
In poche parole...

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n)$$

Funzione da approssimare      Polinomio Approssimante      ERRORE di approssimazione

Ci piace che l'errore di appr. è piccolo, essendo un o piccolo di  $x^n$ ; queste quantità diventa sempre più trascurabile al crescere di  $n$ .

### Better Models of Sine



La formula di Taylor non fa altro che approssimare, cioè "emulare" una funzione tramite dei polinomi.

Quando usiamo un  $n$  troppo piccolo, l'errore è alto, ovvero non abbiamo una buona approssimazione.

In questo esempio si approssima  $\sin x$ , e come si può vedere,  $x$  ha una cattiva appr., mentre  $\frac{x^13}{13!}$  ha una appr. migliore.

Approssimare  $f(x) = \sin x$

Siccome  $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$

Usando  $f(x) = \sin x$ ,  $a=0 \Rightarrow \sin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$

tabella delle derivate:

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

Riscrivo la serie:

$$\Rightarrow \sin x = \sin(0) + \frac{\cos 0}{1} + \frac{-\sin 0}{2}x^2 + \frac{-\cos 0}{6}x^3 + \dots$$

$$= 0 + \frac{1}{1}x + 0 - \frac{1}{6}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 - \frac{1}{7!}x^7 \dots$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}$$

Alterni il segno

Potenze dispari

Fattoriale dispari

Si ripetono uguali

Usare Taylor per risolvere i limiti

ES:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + 2x^3}{3x^3}$$

Il sin da  $\rightarrow$  Taylor  
problemi

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Per  $n=3$

$$\sin x = 0 + (-1)^2 \cdot \frac{x^2}{1} + (-1)^3 \cdot \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$$

Per riscrivere  $\sin x$  dobbiamo aggiungere anche l'errore:

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + 2x^3}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{3x^3} = -\frac{1}{18} + \frac{o(x^3)}{3x^3} = -\frac{1}{18}$$

Approssimare  $f(x) = 3 \sin x + \cos x$  per  $n=4$

Sostituiamo direttamente gli sviluppi di IV ordine di  $\sin x$  e  $\cos x$

$$= 3 \left[ x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right] + \left[ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right] = 1 + 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

## Limiti con Taylor

ES:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{e^x - 1 + \ln(1-x)}$$

Sviluppo per  $\tan x$ :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$$

$$\Rightarrow \tan x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Inoltre (denom)

$$[e^x - 1] + [\ln(1-x)] = \left[ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] + \left[ -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right] = \left[ -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \right]$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{x^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)^{00}}{x^2 \left( -\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)^0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} \cdot (-6) = -2$$

ES:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 (e^{\sin x} - 1 - x)}{\sin^2 x - x^2}$

- $\sin x = (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$  quindi  $\sin x^2 = x^2 + o(x^2)$

- $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$  Sostituendo:  $e^{\sin x}_{n=2} = 1 + \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x + o(\sin^2 x)$

Siccome  $\sin x = x + o(x^2) \rightarrow e^{\sin x} = 1 + (x + o(x^2)) + \frac{1}{2}(x + o(x^2))^2 + o((x + o(x^2))^2)$   
 $= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

- $\sin^2 x - x^2 = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$

Quindi:  $e^{\sin x} - 1 - x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Otteniamo quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 (e^{\sin x} - 1 - x)}{\sin^2 x - x^2} = \frac{x^2 + o(x^2) \cdot \left( \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right)}{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{x^2 \left[ 1 + \frac{o(x^2)}{x^2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \right]}{x^4 \left( -\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4} \right)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{3}{2}$$

## Ordine di infinitesimo e parte principale

Se, per  $x \rightarrow 0$ ,  $f(x) \sim Kx^d$  (con  $d > 0$ )

In questo caso,  $f(x)$  è un infinitesimo di ordine  $d$ , e  $Kx^d$  è la sua parte principale

ES:  $f(x) = \sin x$  per  $x \rightarrow 0$ ,  $\sin x \sim x \Rightarrow f(x)$  è un infinitesimo di ordine 1, con p. principale  $x$

ES:  $f(x) = \cos x - 1$  per  $x \rightarrow 0$ ,  $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f(x)$  è un inf. di ordine 2, con p.p.  $-\frac{1}{2}x^2$

Come risolviamo quando non abbiamo l'eq. As. già pronta?

$$f(x) \sim Kx^d \Leftrightarrow f(x) = Kx^d + o(x^d)$$

- Due  $f$  sono A.Eq. (si comportano allo stesso modo)  
Se differiscono solo per un termine che diventa trascurabile

$\Rightarrow$  Possiamo usare gli sviluppi di Taylor per determinare la parte principale, e quindi l'ordine.

$$\text{ES: } f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x$$

\* Se vogliamo sapere come si comporta  $f(x)$  in prossimità di  $x=0$ , dobbiamo usare gli sviluppi di Taylor.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

$$(1+x)^d = 1 + dx + \frac{d(d-1)}{2}x^2 + \frac{d(d-1)(d-2)}{6}x^3 + \dots + \left(\frac{d}{n}\right)x^n + o(x^n)$$

$$\text{quindi } \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{per } x \rightarrow 0, f(x) = \left[ 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \right] - \left[ 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \right] - x = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

Quindi possiamo dire che  $f(x)$  è un infinitesimo di ordine 3 avente come parte principale  $\frac{1}{8}x^3$ .

## Osservazioni

1) Il limite di un rapporto tra quantità infinitesime NON CAMBIA aggiungendo o togliendo agli infinitesimi dati, degli infinitesimi di ordine superiore.

$$\text{ES: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 + 2x^5}{x + \sin(x^2)}$$

Numeratore:  $\sin x \sim x$ , quindi è un infin. di ordine 1; per questo motivo  $x^2$  e  $2x^5$ , di ordine  $2, 5 > 1$ , sono trascurabili.

Denominatore:  $\sin(x^2) \sim x^2$ , è di ordine 2; siccome  $2 > 1$ ,  $\sin(x^2)$  è trascurabile rispetto ad  $x$ .

Possiamo quindi dire che:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 + 2x^5}{x + \sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) Conoscere la parte principale può essere utile per tracciare il grafico di una funzione nell'intorno di  $x=0$

$$\text{ES: } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} - 1 \text{ in prossimità di } x=0 = e^x \cdot (x+1)^{-1/2} - 1 = [1+x+o(x)] \cdot [1-\frac{1}{2}x+o(x)] - 1 = \frac{x}{2} + o(x) \sim \frac{x}{2}$$

Per cui, possiamo dire che il grafico di  $\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$  in prox di 0, sarà molto simile a quello di  $f(x) = \frac{x}{2}$

# Dalle lezioni del Prof

Lez 8 , 00:47

## Criterio del rapporto per successioni

Sia  $a_n$  una succ a termini positivi, ovvero che  $\underline{a_n > 0 \ \forall n}$ .

Posto  $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow$  Se  $\lim_n b_n = b < 1$ , allora il  $\lim a_n = 0$

Questo criterio ci dice che se consideriamo il rapporto  $b_n$  (ottenuto da  $a_n$ ), ed il suo limite tende ad un numero minore di 1, la successione Tende a 0.

Il criterio ci serve per dimostrare i seguenti casi:

Prop: valgono i limiti:

$$\lim_n \frac{\log n}{n^d} = \lim_n \frac{n^d}{a^n} = \lim_n \frac{a^n}{n!} = \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0 \quad \text{Tutti uguali a zero!}$$

Con  $d > 0$   
 $a > 1$

Che vuol dire?

Dire che  $\lim_n \frac{\log n}{n^d} = 0$ , significa dire: Il denominatore tende ad infinito più velocemente del logaritmo.  
cresce lentamente

Possiamo quindi dire:  $\log n < n^d < a^n < n!$  cresce velocemente

Dimostriamo che  $\lim_n \frac{n^d}{a^n} = 0$  per il criterio visto prima, calcoliamo  $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \text{Nel nostro caso } \left( \frac{n^d}{a^n} \right) \text{ e' } a_n \text{ stessa} \Rightarrow \\ &= \frac{(n+1)^d}{a \cdot n^d} = \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{n+1}{n} \right)^d \end{aligned}$$

$$\frac{\left( \frac{(n+1)^d}{a^{n+1}} \right)^{n+1}}{\left( \frac{n^d}{a^n} \right)^n} = \frac{(n+1)^d}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{a^n} \quad \begin{matrix} \text{si capovolge} \\ \text{per } a > 1 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \left( \frac{n+1}{n} \right)^d$$

rapporto di polinomi dello stesso ordine  $\Rightarrow$  tende al grado max  $\Rightarrow 1$

$$= \frac{1}{a} \quad a > 1$$

nel criterio di prima dicavamo che se  $\lim_n b_n = l < 1$  quinoli

$$\lim_n \frac{n^d}{a^n} = 0$$

Dimostriamo  $\lim_n \left( \frac{a^n}{n!} \right)^{a_n} = 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \quad \text{perche'}$$

Perche'?  $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Dimostriamo  $\lim_n \frac{n!}{n^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \left( \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right)^n$

$$= \left( \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right)^n = \left( \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right)^n = \text{Ci ricorda un lim notevole } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$= \frac{1}{\left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n} = \frac{1}{e} > 1 \Rightarrow \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$$

ES:  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n - 2^n = +\infty - \infty$  = nei pdi nomi si metteva in evidenza il grado max  $\Rightarrow$  la stessa cosa Vale in questo Caso  $\Rightarrow$  Siccome sono due esponenziali, "vince" quello con la base maggiore.

$\Rightarrow$  Mettiamo in evidenza  $e^n$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n \left(1 - \frac{2^n}{e^n}\right) \sim e^n = +\infty$

ES:  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n - n! = \lim_{n \rightarrow \infty} n! \left(\frac{2^n}{n!} - 1\right) \sim n! = +\infty$

ES:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$  Ricorda il limite notevole  $(1 + \frac{1}{x})^x$  ma per usare un  $\lim$  notevole, dobbiamo ricondursi esattamente a quello sia al denominatore che all'esponente!  
 $\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}$  deve sparire  $= \left[\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = \left[e^{-1}\right] = e^{-1}$

ES:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e^{-1}} = e$

ES:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n = \frac{n^2+n}{n^2-n+2} = 1 + \frac{1}{a_n} \rightarrow e$

$\Rightarrow$  Consideriamo  $a_n$  una incognita e la ricaviamo:  $\frac{1}{a_n} = \frac{n^2+n}{n^2-n+2} - 1 = \frac{1}{a_n} = \frac{n^2+n - n^2+n-2}{n^2-n+2} = \frac{2n-2}{n^2-n+2} \Rightarrow a_n = \frac{n^2-n+2}{2n-2}$  Di conseguenza  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^n$

Quindi? Possiamo applicare  $1 + \frac{1}{a_n} \rightarrow e$  Solo se  $a_n \rightarrow \infty \Rightarrow$  Possiamo per applicare il limite, però,  $a_n$  deve comparire anche all'esponente.

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{n \cdot \frac{a_n}{a_n}} = \left[\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{\frac{n}{a_n}} = e^{\frac{n \cdot 2n-2}{n^2-n+2}} = e^{\frac{2n^2-2}{n^2-n+2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n^2-2=2} e^2$

Altro limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$  dove  $ax \rightarrow 0$

$$\text{ES: } \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[0]{\text{X}} 1$$

$$\text{ES: } \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan\left(\frac{1}{n}\right) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow n \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[0]{\text{X}} 1 \quad \cos(0) = 1$$

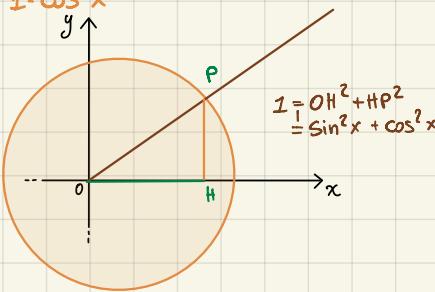
$$\text{ES: } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \frac{\left(1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\left(1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = n^2 \left(1 - \cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)} = n^2 \left(\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[1]{\text{X}} \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)^2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$



$$\text{ES: } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[0]{\text{X}} 1 \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[0]{\text{X}} 0$$

$$\text{ES: } \frac{\tan^2\left(\frac{1}{n}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}}{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right) \cdot (1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right))} = \frac{\left[1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] \cdot [1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)]}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right) \cdot (1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right))} = \frac{1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[0]{\text{X}} 1 + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[0]{\text{X}} 1 = 2$$

## Lezione 9

Proposizione: Se  $(a_n)_n$  è una succ. limitata e  $(b_n)_n$  è una succ. infinitesima, allora  $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$

$$\text{ES: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sin(n) \Rightarrow \underset{\text{e limitata}}{\sin(n)} \cdot \underset{\text{e infinitesima}}{\frac{1}{n}} = \underset{\text{numero}}{\underset{\substack{n \rightarrow +\infty, -\infty \\ \text{Indet}}}{(\text{oscillante})}} \cdot 0 = 0$$

$$\text{ES: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{3n^2 + 1} \sim \frac{n(1+0)}{n^2(3+0)} = 0 \Rightarrow (\text{oscillante}) \cdot \text{Infinitesimo} = 0$$

### Successioni crescenti

$a_n$  è crescente se e solo se  $a_m \leq a_{m+1} \forall m$ .

Se con le funzioni dicevamo che una  $f$  è crescente se  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ , lo stesso vale anche per le successioni;  $n < n+1 \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$

$a_n$  è decrescente se  $n < n+1 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$

### Teorema sul limite delle successioni monotone

Ogni succ. monotona è regolare, ammette limite  $\rightarrow$  finito o infinito.  $\Rightarrow$  Non può capitare che una succ monotona sia indeterminata!

Se la succ è monotona limitata, essa converge.

Dim 00:11 Let 9

ES:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  è conseguenza di due risultati:

- 1)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  è strettamente crescente  $\Rightarrow$  il suo limite esiste (può essere sia finito che infinito)
- 2)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  è limitata  $\Rightarrow$   $2 < a_n < 4 \quad \forall n$  si dimostra

Per il teorema delle succ monotone, la succ  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  converge (perché essendo limitata non può divergere) poiché converge, convergerà ad un limite compreso tra 2 e 4 (per il teorema dei carabinieri) anche il num di numero è compreso tra 2 e 4

## Serie numeriche

Problema: Sommare un numero infinito di termini  $\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots = ?$

Caso in cui abbiamo termini finiti:  $a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = ?$

finché abbiamo dei termini finiti,  
possiamo computare la somma.

$$\begin{aligned} 2 \text{ termini} &= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\ 3 \text{ termini} &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{36+9+4}{36} = \frac{49}{36} \\ &\dots \end{aligned}$$

Pero', la serie  $a_n = \frac{1}{n^2}$  e' finita!

00:48

Def: Sia  $(a_n)_m$  una succ num.; Consideriamo la succ:  $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots$   
Queste succ e' detta succ delle somme parziali di  $a_n$ . Questo perche' il termine  $S_n$  e'

composto da somme parziali di  $a_n$ .

Ogni termine di  $S_n$  e' ben determinato, poiché sono tutte somme finite.

Def: Si dice che la serie numerica, ovvero  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e' :

+∞ Punto di arrivo  
 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  si somma l'argomento  
 punto di partenza indice che cambia

e' Convergente      Divergente      Indeterminata } Se esiste se La succ  $S_n$  (somme parziali) e' Convergente      Divergente      Indeterminata

In parole povere, direi che la Serie Converge, se la Successione  $S_n$  convergerà.

:

→ Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ell$  finito, allora  $\ell$  si dirà Somma della serie, e si scrive:

$$\boxed{\sum_n a_n = S} \quad \leftarrow \text{Converge}$$

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} = \pm \infty$ , la serie Diverge, e si scrive:

$$\boxed{\sum_n a_n = \pm \infty}$$

ES:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$

1) Dobbiamo scrivere la successione delle somme parziali:  
Si usa anche nel caso finito

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \leftarrow \text{Si dimostra essere questa somma.}$$

1:05

2) Per la definizione, dobbiamo calcolare il limite di  $S_n$ :

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \textcircled{1} \text{ Converge!}$$

## Serie Telescopiche

Sono quelle serie il cui termine generale può essere scritto nella forma  $\sum_n (a_n - a_{n-1})$ . Si dimostra che questo tipo di serie converge  $\Leftrightarrow a_n$  converge.

Calcoliamo

$$S_1 = a_1 - a_0 = a_1 - a_0$$

$$S_2 = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) = a_2 - a_0$$

$$S_3 = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) = a_3 - a_0$$

...

$$S_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$$

Troviamo che la serie  $\sum_n a_n - a_{n-1}$  converge  $\Leftrightarrow S_n$  converge  $\Leftrightarrow a_n - a_0$  converge; e si ha che  $\sum_n a_n - a_{n-1} = \lim_n a_n - a_0$

ES:  $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$  Può essere vista come una serie telescopica?  $\rightarrow$  Si può scrivere come una serie il cui termine generale è fatto da  $a_n - a_{n-1}$ ?

$$= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \stackrel{\text{mcm}}{=} \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Possiamo quindi scrivere come:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$a_n$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ Converge ad } a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1$$

$$\text{ES: } \sum_n \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \stackrel{\text{mcm}}{=} \frac{2n+1 - 2n+1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

non troviamo il termine generale  
ma quasi

$$\text{Possiamo dire che la serie è uguale a: } = \sum_n \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

$$a_n = \frac{1}{2n-1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{5} - \lim_{2n+1} \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{1}{10}$$

Fine lez 9.

Non so quanto questo ES sia giusto  
il prof ha fatto un bordello (?)

Definizioni utili      Deprecated! Vedi pg successive!

Def generale: Sia  $q$  un numero reale. Si dice Serie Geometrica di ragione  $q$  la Serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

Grazie a  $q$  possiamo dedurre molte informazioni:

- Se il modulo della ragione  $q$  è  $< 1$ , ovvero se  $-1 < q < 1$ , la serie converge ed ha per somma:  $\frac{1}{1-q}$
- Se la ragione  $q$  è  $\leq -1$ , la serie è irregolare
- Se la ragione  $q$  è  $\geq 1$ , la serie diverge positivamente

## Somma tra serie

Siamo  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  due serie numeriche, la loro somma è la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$

i) Se le due serie convergono, anche  $\sum a_n + b_n$  converge.

ii) Se  $a_n$  converge e  $b_n$  diverge (oviceversa) allora  $\sum a_n + b_n$  Diverge.

ES:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^n n^3 + n^2 + 1}{n^5} \right)$  In questo caso è molto difficile studiare la serie così com'è

$$= \frac{(-1)^n n^3 + n^2 + 1}{n^5} = \frac{(-1)^n n^3}{n^5} + \frac{n^2 + 1}{n^5} \Rightarrow \sum \left[ (-1)^n \frac{1}{n^2} \right] + \sum \left[ \frac{n^2 + 1}{n^5} \right]$$

•  $\sum \left[ (-1)^n \frac{1}{n^2} \right]$  è una serie armonica con  $d=2>0 \Rightarrow$  Converge (pg succ)

•  $\sum \frac{n^2 + 1}{n^5}$  è una serie a termini pos

Prodotto di  $a_n$  con un numero  $c$ :

Se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è divergente, e  $c \neq 0$  allora anche la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$   
Sarà divergente.

~~Verificare che la serie~~  
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$   
 è divergente.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

Questa serie è di tipo armonico, quindi converge per  $d > 1$ , siccome  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, la serie diverge.

In questo esempio abbiamo la serie armonica che vale  $\frac{1}{n}$ ; per il principio appena visto, se  $\frac{1}{n}$  diverge, anche  $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$  diverge.  
 $a_n \quad c \neq 0$

## Serie Mengoli

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{Quindi } S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \stackrel{\text{Si dimostra}}{=} \frac{n}{n+1}$$

Calcoliamo la somma:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \stackrel{\text{v}}{=} \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = 1 \quad \text{Converge}$$

Consideriamo  $a_n = (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 \dots + (-1)^n$  Siccome  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  per  $n \rightarrow +\infty$  di   
Siccome il suo  $\lim \neq 0$ , allora  $S_n$  è indeterminata.

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Se la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  è convergente, allora la successione  $a_n$  tende a zero per  $n \rightarrow +\infty$

Serie Armoniche Deprecated! Guarda le pg succ.

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  è detta serie armonica

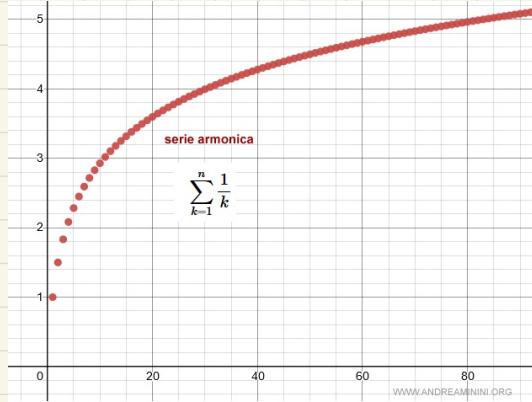
Forma generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

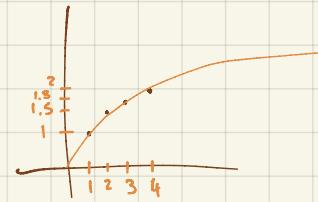
Converge se  $\alpha > 1$

Diverge per  $\alpha \leq 1$

} per  $\alpha = 1$  abbiamo la serie armonica



$$\begin{aligned} 1) \quad 1 &= 1 \\ 2) \quad 1 + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \approx 1.5 \\ 3) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{11}{6} \approx 1.8 \\ 4) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &= \frac{25}{12} \approx 2 \end{aligned}$$



Serie Armonica a segni alterni Sia  $\alpha$  un  $\mathbb{R} > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Converge per  $\alpha > 0$

# Serie Geometrica di ragione $h \leftarrow$ base esponenziale.

lez 10

Calcolare il comportamento di una serie non è semplice; non c'è un criterio che vale in Ogni caso, ma ci sono **TIPOLOGIE** di serie (ad esempio la telescopica). A seconda dei casi si applicano diversi metodi di risoluzione.

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n = 1 + h + h^2 + h^3 + \dots \quad \text{dove } h \in \mathbb{R}$$

forma generale

ES:  $h = 2 \Rightarrow \sum 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$

ES:  $h = -3 \Rightarrow \sum -3^n = 1 - 3 + 9 - 27 + \dots$

• Le serie geometriche partono sempre da  $\emptyset$ !

Problema: per quali valori la serie  $\sum h^n$  converge?

Per discutere la convergenza di una serie, per definizione, dobbiamo studiare la successione delle somme parziali; se possibile, scriverla.

$S_n = 1 + h + \dots + h^n$  Da  $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$  deduciamo che:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b^1 + a^{n-2}b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)$$

Prendiamo  $a = 1$ ,  $b = h$

$$1 - h^{n+1} = (1-h)(1 + h + h^2 + \dots + h^n)$$

$S_n$

diminuisce l'esp di  $a$ , ed aumenta quello di  $b$

diminuisce l'esp di  $b$ , ed aumenta quello di  $a$

Ci accorgiamo che c'è esattamente il termine generale delle succ. parz.  $S_n$ . Di conseguenza:

$$S_n = \frac{1 - h^{n+1}}{1 - h}$$

Per il carattere della serie, ci basta calcolare il  $\lim$  di  $S_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - h^{n+1}}{1 - h} = \text{Dipende da } h:$$

i)  $h > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - h^{n+1}}{1 - h} = \frac{-\infty}{-x} = +\infty \quad \text{per } h > 1 \text{ la serie diverge.}$$

e' negativo per  $n \geq 1$

numero generico negativo

ii)  $h = 1$

In particolare facciamo riferimento solo al termine  $\frac{1 - h^{n+1}}{1 - h}$  In quanto è l'unico che dipende da  $n$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 1^{n+1} = +\infty \quad \text{Diverge}$$

iii)  $-1 < h < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} = 0 \quad \text{Converge}$$

$-1 < h < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{3} \right)^{n+1} = \left( -\frac{1}{3} \right)^{n+1} = 0 \quad \text{oscillante limitata}$$

Allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1-0}{1-h} = \sum h^n$  converge a  $\frac{1}{1-h}$

Se  $-1 < h < 1$

iv) Se  $h < -1$

$$h = -2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^{n+1} = (-2)^{n+1}(-2)^{n+1} = 0 \quad \text{Non Esiste!}$$

oscillante limitata

ES:  $\sum_n 5^n$  ragione  $= 5 > 1 \Rightarrow$  Diverge perché?

$$\sum_n 5^n = \frac{1 - 5^{n+1}}{1 - 5} = \frac{-\infty}{-4} = +\infty \text{ positivamente.}$$

ES:  $\sum \left(\frac{1}{5}\right)^n \Rightarrow$  ragione  $-1 < \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow$  Converge ad  $\frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$  Perché?

$$\sum_n \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

00:48

Serie Armonica E' detta Armonica perché rappresenta le armoniche di quando si pizzica una corda.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = +\infty \text{ Diverge}$$

I termini che sommiamo diventano sempre più piccoli.  
La serie cresce, anche se non velocemente quanto la geometrica.

Serie Armonica Generalizzata

! Non varia l'esponente (come nella serie geometrica) ma esso viene fissato; varia però la base n.

$$S = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} \quad \text{Pongo } p=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$

Problema: Studiare il comportamento della serie al variare di p.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{Converge se } p > 1 \\ \text{diverge se } p \leq 1 \end{cases} \quad \text{ES: } \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}} \quad p=\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{Diverge}$$

Perche'? Più velocemente cresce il denominatore (e quindi aumenta il valore della frazione), "più la serie converge". Di conseguenza  $\frac{1}{n^2}$  decresce più velocemente di  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , e quindi i termini che sommiamo (nel caso  $\frac{1}{n^2}$ ) diventano più piccoli più velocemente, e quindi possono quantificarsi.

Nel caso di  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , i termini decrescono meno velocemente, e quando li sommiamo all'infinito la serie diverge.

Il "punto di rottura" è proprio  $p=1$ ; infatti, per  $p=1$ , abbiamo la S. Armonica, che infatti diverge sempre.

1:03

## Qualche considerazione

Spesso calcolare la somma di una serie è molto difficile, per questo motivo, è solito capire solo se la serie Converge o Diverge, senza preoccuparsi di capire la somma.

### Condizione Necessaria per la convergenza

Se una serie  $a_n$  converge  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

limite

Per studiare se una serie converge o meno, calcoliamo la successione delle somme parziali  $S_n$ ; Questo concetto è importante perché  $a_n$  lo abbiamo fin da subito (non dobbiamo trovare la ridotta)

ES:  $\sum_n \frac{n}{n^2+1} a_n$  Possiamo dire se la serie converge fin da subito.

Di conseguenza, il termine generale è infinitesimo. Si deve notare che questa è una condizione **Necessaria**, e non **Sufficiente**! Di conseguenza non possiamo dire che una serie  $a_n$  il cui  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , convergerà sicuramente. Possiamo però affermare con sicurezza che se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ,  $a_n$  Non converge.

Osservazione: Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow$  Non possiamo affermare nulla di certo.

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$  La serie Diverge.

Capiamo quindi che questa condizione necessaria viene usata per dimostrare che una serie  $a_n$  NON converge.

**TIP ESAME:** all'esame ci saranno sicuramente serie  $\rightarrow 0$ , ma meglio controllare sempre.

### Dimostrazione

$$S_{n+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}_{S_n} \leftarrow \text{La somma dei primi } n \text{ termini, è proprio } S_n$$
$$\Rightarrow a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

Possiamo al  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ : Per tip.  $\sum a_n$  Converge  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$$

ES: Studiare il carattere della serie:  $\sum_n \log(n)$

1) Vedo se diverge:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n) = +\infty \Rightarrow$  Diverge

ES:  $\sum_n \frac{n!}{n^n}$  1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \Rightarrow$  Non possiamo affermare nulla.  
 $n^n > n!$

Nota: Considereremo solo Serie a termini Non negativi

pg 263

$$\sum a_n \quad / \quad a_n \geq 0 \quad \forall n.$$

Vale il seguente teorema:

Una serie a termini non negativi Non puo' essere indeterminata.  
Essa puo' convergere o divergere.

Dimostrazione

$$\text{Hyp: } \sum a_n \quad / \quad a_n \geq 0 \quad \forall n.$$

Consideriamo  $S_n$ :  $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

$$\begin{array}{c} \text{Somma dei} \\ \text{primi } n \\ + \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{un termine} \\ a_{n+1} \end{array}$$

poiché, per Hyp.,  $a_{n+1}$  è sicuramente  $\geq 0 \Rightarrow a_{n+1} \geq S_n$

$\Rightarrow S_{n+1} \geq S_n \quad \forall n \Rightarrow S_n$  è una succ. monotonica cresc.

$\Rightarrow$  Per il teorema delle succ monotonie,  $S_n$  è succ regolare

$\Rightarrow$  Converge o Diverge, ma non puo' essere indet.

Serie a termini non neg.

### Criterio del confronto

Supponiamo di avere 2 serie  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  /  $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Se  $\sum b_n$  converge  $\Rightarrow \sum a_n$  converge

2) Se  $\sum a_n$  Diverge  $\Rightarrow \sum b_n$  Diverge.

### Criterio del rapporto

pg 271

$\sum a_n$  è una serie a termini non neg. Supponiamo  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

Allora 1) Se  $l < 1$ , la serie converge

2) Se  $l > 1$ , la serie Diverge

3) Se  $l = 1$ , non possiamo affermare nulla.

ES:  $\sum \frac{1}{n!}$

1) Cond necessaria:  $\lim \frac{1}{n!} = 0 \Rightarrow$  Non possiamo dire niente

2) Oss che è una serie a termini non negativi  $\Rightarrow$  possiamo applicare il crit. del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Converge}$$

## Criterio della radice

pg 272

Sia  $\sum a_n$  /  $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ Supponiamo che  $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$  allora se:

- 1)  $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$  converge
- 2)  $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$  Diverge
- 3)  $l = 1 \Rightarrow$  Boh!

7:00 lez 11

Dimostrazione Supponiamo che  $l < 1$ , per h.p. Sappiamo che  $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$ 

Per def

 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ / \ \forall n > N, l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$ 

Dim non completa.

ES  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  1) Cond Necess.:  $\lim \frac{1}{n^n} = 0 \Rightarrow$  potrebbe convergere2) Usiamo il criterio della radice:  $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim \frac{1}{n} = 0 < 1 \Rightarrow$  Converge

2) Criterio del rapporto:

$$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n}{\frac{1}{(n+1)^n} \cdot (n+1)} = \frac{\frac{1}{(n+1)^n} \cdot n^n}{(n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

~~$\frac{1}{n}$~~   ~~$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$~~   ~~$\frac{1}{n+1}$~~   $\Rightarrow \lim \sim = 0 < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^n}$  Converge

ES  $\frac{2^n}{n!}$  1)  $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$  Boh! $n! \gg 2^n$ 2) Criterio della radice:  $\sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n!}}$  Boh!

2) proviamo criterio del rapporto

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{Converge}$$

ES:  $\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$  1)  $\lim \left[\frac{n+1}{3n-1}\right]^n \frac{n(1+0)}{n(3+0)} = \left[\frac{1}{3}\right]^n = \frac{1}{\infty} = 0$ 2) Criterio radice:  $\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n} = \frac{n+1}{3n-1} \rightarrow \frac{1}{3}$  convergeES:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$  = Criterio del rapporto =  $\frac{[2(n+1)]!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)}$ 

$$2n! = 2n \cdot (2(n-1)) \dots$$

$$2(n+1) = \underbrace{2n+1}_{2n+2} \cdot 2n \cdot (2(n-1)) \Rightarrow \underbrace{2n+2 \cdot 2n+1}_{2n+2} \cdot \underbrace{2n \cdot (2n-1)}_{2n+2}$$

## Criterio degli infinitesimi

$$\sum a_n / a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Supponiamo che per un certo  $p \in \mathbb{R} \rightarrow \exists \lim_n n^p a_n = l$

- 1) Se  $l \neq +\infty$ ,  $p > 1 \rightarrow \sum a_n$  Converge
- 2) Se  $l \neq 0$ ,  $p \leq 1 \rightarrow \sum a_n$  Diverge

Se il  $\lim n^p a_n$  è finito, allora direi che  $a_n$  è di ordine  $p$ .  
 In entrambi i casi dobbiamo soddisfare entrambe le condizioni;  
 Se ad esempio  $\lim n^p a_n = \infty$ ,  $p$  deve essere  $\leq 1$  per applicare  
 il criterio e dire che  $a_n$  Diverge.

Dimostrazione lez 11, 52:00

- 1) Se  $l \in (0, +\infty)$ , cioè  $a_n$  è infinitesimo di ordine  $p$ , allora se  $p > 1$ , la serie converge;
- 2) Se  $l = 0$  e  $p > 1$ , allora  $a_n$  converge.
- 3) Se  $l = +\infty$  e  $p \leq 1$ , allora  $a_n$  Diverge.

ESPLICITATO

2) Cr. infinitesimi Dobbiamo capire di che ordine di infinitesimo è?

Definizione: Siano  $a_n$  e  $b_n$  due infinitesimi, diremo che  $a_n$  e  $b_n$  sono infinitesimi dello stesso ordine, se il  $\lim \frac{a_n}{b_n}$  è finito e  $\neq 0$ .

- Diremo inoltre che  $a_n$  è infinitesimo di ordine superiore a  $b_n$  se il  $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$  come se fosse  $\frac{0^+}{x^0} = 0$
- Diremo inoltre che  $a_n$  è infinitesimo di ordine inferiore se  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$  come se fosse  $\frac{x^0}{0^+} = \infty$

Osservazione: Supponiamo che

$$\begin{cases} \lim a_n = 0 \\ \lim \frac{1}{n^p} = 0 \text{ se } p \neq 0 \end{cases}$$

Supponiamo che  $\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}} =$

$$= \lim n^p a_n$$

Sia finito, significa che  $a_n$  e  $\frac{1}{n^p}$  sono infinitesimi dello stesso ordine.

Si dice anche che  $a_n$  è un infinitesimo di ordine  $p$ . Quindi, confrontiamo una succ  $a_n$  con una fissa, (non due succ  $a_n$  e  $b_n$  qualsiasi) ovvero  $\frac{1}{n^p}$ , che diventa l'infinitesimo Campione.

$$\text{ES } \sum \frac{2n+1}{n^5 + 4n + 3}$$

$$1) \lim a_n = 0$$

$$2) \text{ Per quale } p \text{ il } \lim n^p \cdot \frac{2n+1}{n^5 + 4n + 3} \text{ è finito e } \neq 0?$$

Cioè  $a_n$  è un infinitesimo di quale ordine?  $\rightarrow$  l'ordine dipende da p

$$\lim n^p \cdot \frac{2n+1}{n^5 + 4n + 3} = n^p \cdot \frac{n(2+0)}{n^5(1+0+0)} \stackrel{p=4}{=} n^4 \cdot \frac{2}{n^4} = 2$$

P deve essere 4

Quindi  $a_n$  è infinitesima d'ordine  $4 > 1 \Rightarrow$  Converge.

$$\text{ES: } \sum (1 - \cos(\frac{1}{n}))$$

Dal limite notevole  $\lim [1 - \cos(n)] n^2 = \frac{1}{2}$

$$\lim \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}} = 0$$

potrebbe convergere.

Quindi nel nostro caso:  $\lim_n \frac{1 - \cos(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n$  è un infinitesimo di ordine  $2 > 1$  conv

$$1) \lim \frac{\log(n)}{n} = \log n < n \Rightarrow \rightarrow 0$$

$\lim n^p a_n = e \Rightarrow \lim n^p \frac{\log(n)}{n} = +\infty$   $p=1$  ( $p \leq 1$ )  $e = +\infty \Rightarrow a_n$  è un infinitesimo di ordine inferiore a  $\frac{1}{n}$  perché?

Siccome  $\lim n^p a_n = +\infty$  e  $p \leq 1$ , allora la serie Diverge.

$$n \frac{\log n}{n} = \frac{\log n}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{Confronto}} +\infty$$

Vuol dire che  $\frac{1}{n}$  Tende a 0 più vel. di  $\frac{\log n}{n}$

$$\text{ES: } \sum \frac{s_{n-1}}{3n^2+2}$$

Ci poniamo 2 possibili domande:

- a) Per quale  $n^p$  devo moltiplicare affinché il  $\lim n^p a_n = e$  (finito)? cioè qual è l'ordine di infinitesimo di  $a_n$ ?  
Risposta:  $p=1$

$\Rightarrow \lim n^1 \frac{s_{n-1}}{3n^2+2} \sim \frac{n \cdot s_n}{3n^2} = \frac{5}{3} > 1 \Rightarrow a_n$  è infinitesimo di ordine  $p=1$ , il  $\lim$  è finito e  $p \leq 1 \Rightarrow$  la serie Diverge

b) Criterio del rapporto: Calcoliamo  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{s_{(n+1)-1}}{s_n} \cdot \frac{3n^2+2}{3(n+1)^2+2} = \frac{s_{(n+1)-1}}{s_n} \cdot \frac{3n^2+2}{3(n+1)^2+2} = \frac{3n^2+2}{3(n+1)^2+2} = \frac{3}{3} = 1$$

Con il criterio del rapp, quando il  $\lim$  Tende a 1, non possiamo dire se diverge o converge.  
Proviamo quindi un altro criterio.

ES:  $\sum \frac{\log n}{n^2}$  I) Criterio degli infinitesimi  $\lim n^p a_n = e / e$  è finito

$$\Rightarrow \text{proviamo } p=\frac{2}{3}: \lim n^{1+\frac{1}{2}} \frac{\log n}{n^2} = n \cdot n^{\frac{1}{2}} \frac{\log n}{n^2} = \sqrt{n} \frac{\log n}{n^2} = n \frac{\log n}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} e=0 \\ p>1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{converge}$$

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad / \quad a_n > 0$$

la nostra serie è sempre a termini positivi, ma è moltiplicata per un valore alternante  $(-1)^n$

Il segno alterna  $\Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_n$

Attenzione! A questo tipo di serie, NON si applicano i precedenti criteri.

Come si trattano?

Criterio di Leibnitz (unico criterio!)

Supponiamo di avere  $\sum (-1)^n a_n \quad / \quad a_n > 0$ .

Se  $(a_n)_n$  è decrescente ed infinitesima ( $a_n \rightarrow 0$ ), allora la serie converge.

Inoltre, Se  $S_n$  è la successione delle somme parziali della ① e  $S$  è la sua somma, allora, si ha che la differenza tra  $S_n$  e  $S$  è  $\leq a_{n+1}$ :

$$|S_n - S| \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

In poche parole... Se la succ  $a_n$  tende a 0 ed è decrescente  $\Rightarrow$  Converge.

Inoltre, non conosciamo la somma della serie, ma sappiamo che la distanza tra  $S_n$  ed  $S$  è più piccola dell'  $n+1$ -esimo termine. Quindi, se calcoliamo la somma dei primi 100 elementi, so che la distanza della somma dei primi 100 termini, dalla somma vera e propria  $S$ , è  $\leq a_{n+1}$ .

Osservazione

la quantità  $|S_n - S| \leq R_n$  Resto ennesimo della Serie, ed esprime l'errore che commetto nell'approssimare  $S$  con  $S_n$ .

Se  $R_n$  è piccolo, posso approssimare  $S$  con  $S_n$  (che so calcolare). Siccome il criterio ci dice che  $R_n \leq a_{n+1}$ , possiamo dire che l'errore che commetto è trascurabile. Questo perché con  $a_n \rightarrow 0$ ,  $a_{n+1}$  è molto piccolo.

## Esercizi Prima parte del criterio

Serie Armonica

ES:  $\sum \frac{1}{n} \rightarrow$  Diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad \text{Con i segni alternati, diverge sempre?}$$

$a_n = \frac{1}{n}$ ,  $\lim a_n = 0$ , ed è decrescente ( $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ )  $\Rightarrow$  la serie converge per il criterio di Leibnitz.

$$\text{ES: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\log(n+1)} = \frac{1}{\log(1)} - \frac{1}{\log(2)} + \frac{1}{\log(3)} - \dots$$

$$\lim_n \frac{1}{\log(n+1)} = 0 \Rightarrow \text{Converge.}$$

$$\text{ES: } \sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = -\sin\left(\frac{1}{1}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\right) - \dots$$

$$\lim_n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[0]{} 0 \Rightarrow \text{Converge}$$

## Esercizi seconda parte del criterio

$$\text{ES: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

$a_{n+1}$  errore

Calcoliamo la somma "a meno di un errore di  $\pm 0^2$ ":

$$|S_n - S| \leq a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow n+1 = 10, \underline{n=9}$$

Quindi ci basta calcolare

$$\sum_{n=1}^9 (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^9 (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} =$$

$$0,7456$$

Siccome l'errore è pari a  $R_n \leq \frac{1}{10}$ , prendo come risultato fino ai decimi (prima cifra decimale), ovvero  $\sum_{n=1}^9 (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 0,7$

$$\text{ES: } \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$$

Calcolare  $S$  con un  $R_n \leq \frac{1}{10} R_n$

1) Converge?  $\lim a_n = 0$  per il criterio di Lib. Converge.

$$|S_n - S| \leq a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)-1} \geq R_n \Rightarrow \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{10} \Rightarrow 2n+1 \geq 10, \quad n \geq \frac{9}{2}^{4,5} 5$$

Se prendo  $n=5 > \frac{9}{2}$  sono sicuro di ottenere  $R_n \leq \frac{1}{10}$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \sim \boxed{0.835}_{1/10}$$

## Considerazioni finali

Solo in alcuni casi possiamo calcolare la somma di una serie, ma a volte cerchiamo di capire solo se la serie converge o diverge.

Durante la somma di infiniti termini (serie) che non so calcolare, come nelle serie Alternate, vale però il risultato riportato alla ②.