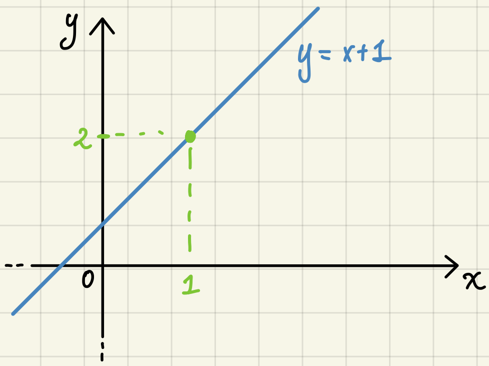
Limiti

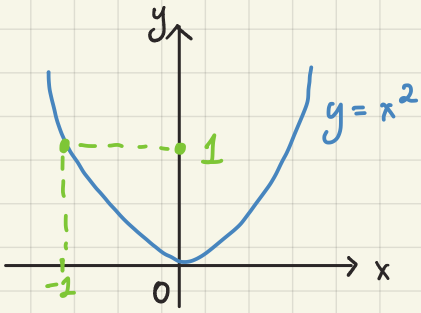
Introduzione



Supponiamo di dover calcolare:

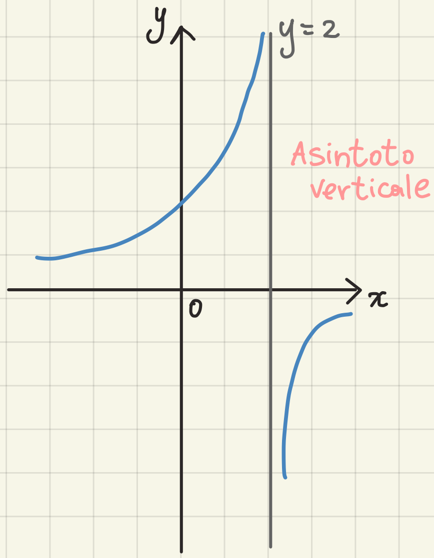
$$\lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

Cosa succede ad $x+1$ (sulla y) quando x si avvicina ad $x=1$?



$$\lim_{x \to -1} x^2 = 1$$

In questi casi banali ha senso sostituire il valore nella funzione.



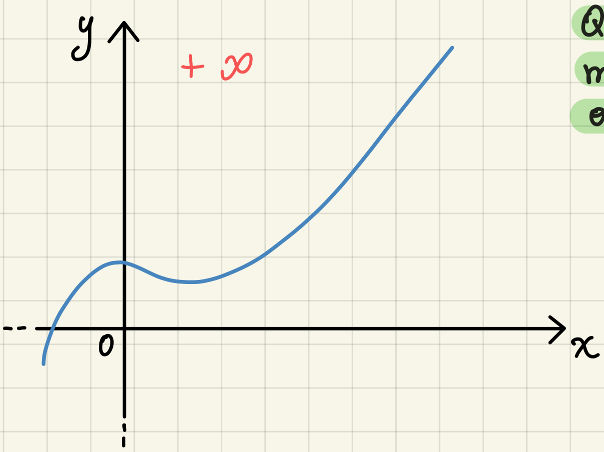
$$y = \frac{-3x-2}{x-2} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{-3x-2}{x-2} \xrightarrow{\text{sostituz.}} \frac{-8}{0}$$

Non si può fare

$$D = x-2 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 2\}$$

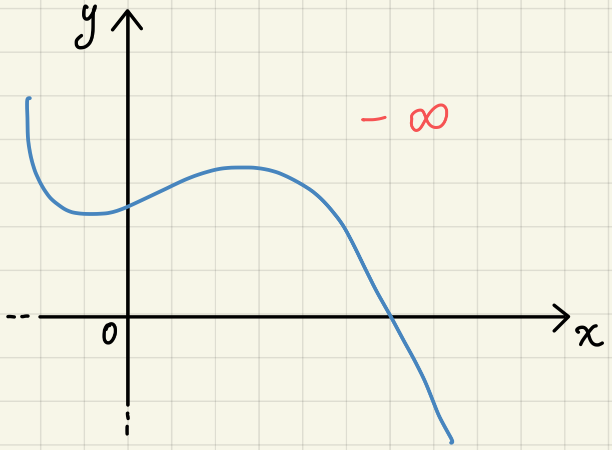
Limiti All'infinito

Che significa $\lim_{x \to +\infty} f(x)$? $\Rightarrow$ Che fa la funzione quando la x diventa sempre più grande



Quando ad x molto grandi corrispondono y molto grandi, si dice che il limite tende all'infinito.

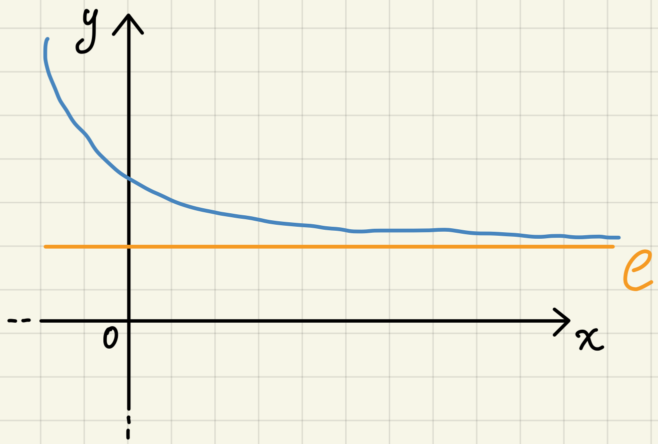
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ Questo caso è analogo al precedente.

lim = ℓ

Quando facciamo tendere il limite a $+\infty$ ma otteniamo come risultato ℓ, le y tendono ad avvicinarsi proprio ad ℓ:

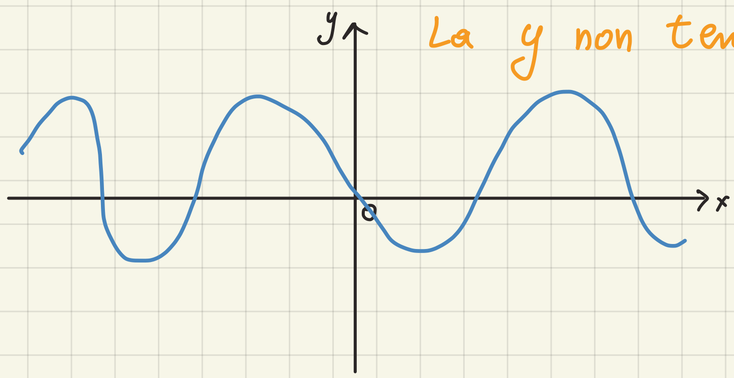


Limiti indefiniti

Il risultato del limite potrebbe essere non determinato:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = N.E.$

La y non tende a nulla



Definizioni

Intorno

Chiamiamo Intorno di x_0 e di raggio $\delta > 0$ (Delta) Un intervallo APERTO:

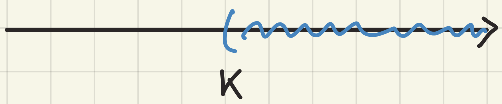
$$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Possiamo anche definire Intorno di $-\infty$ un Intervallo APERTO del tipo:

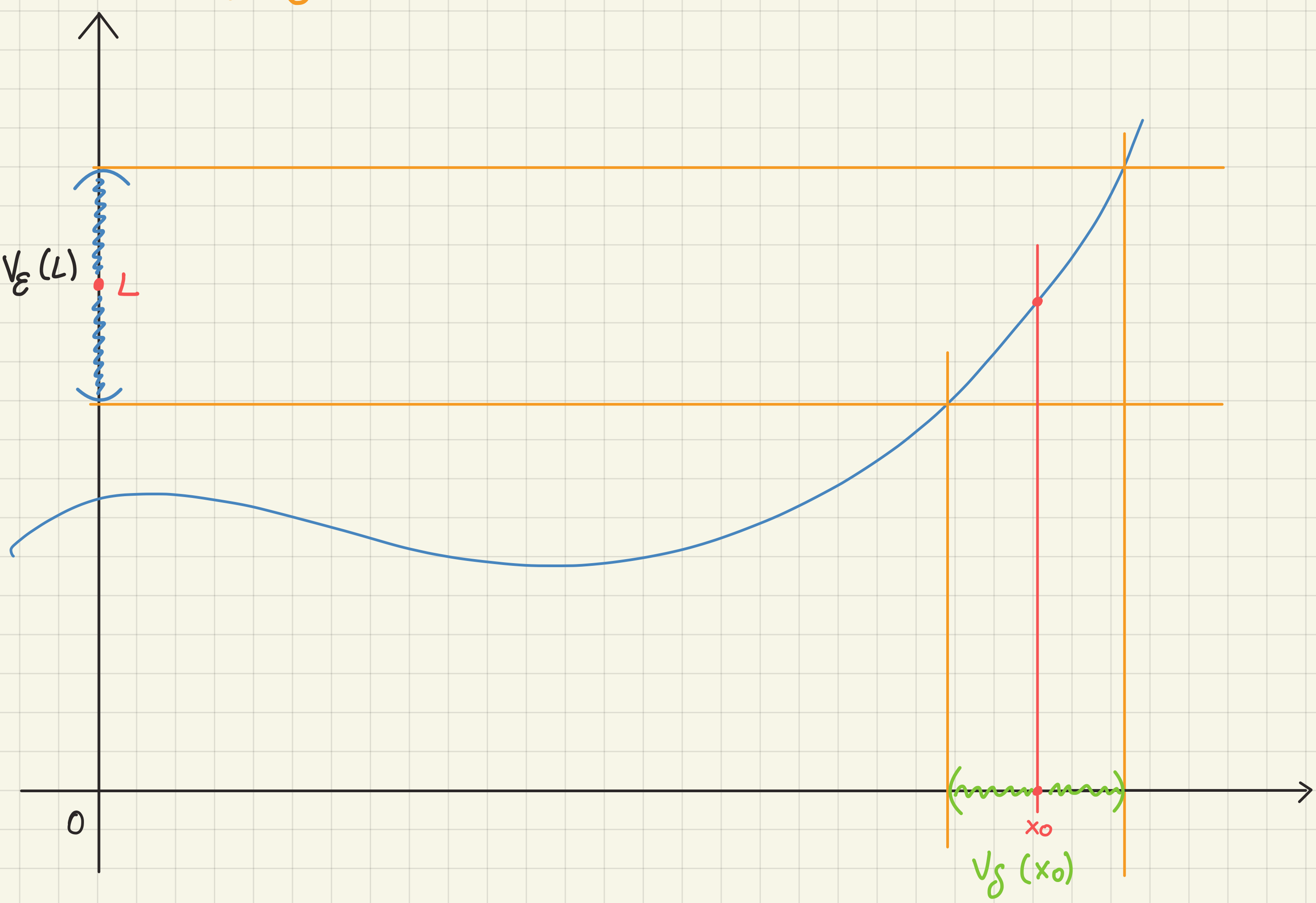
$$(-\infty, K) = \{x \in \mathbb{R} : x < K\}$$

Possiamo dire lo stesso per L' Intorno di $+\infty$:

$$(K, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > K\}$$



Cosa significa quindi calcolare il lim di una funzione?

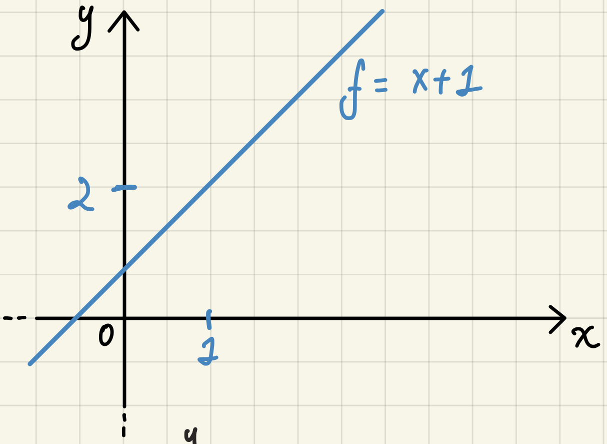


Per ogni intorno di L che consideriamo (BLU) riusciamo a trovare un intorno di x_0 (Verde); Se calcoliamo quanto vale la funzione quando $\{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} - x_0$, otteniamo un numero reale che sarà compreso nell'intervallo $\{L - \delta < y < L + \delta\} - L$

$\{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} - x_0 \longrightarrow$ Intorno di x_0

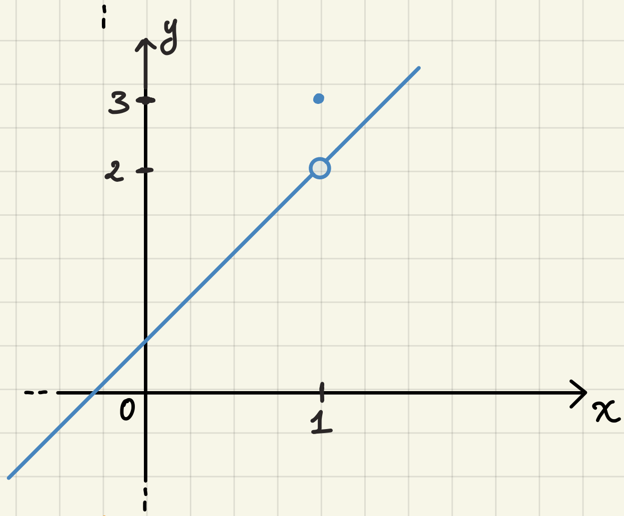
$\{L - \delta < y < L + \delta\} - L \longrightarrow$ Intorno Di L

Funzioni continue elementari



$\lim_{x \to 1} x+1 = 2$; 2 e' proprio il valore che f assume quando la calcoliamo in $x = 1$.

$f(1)\ x+1 = 2$



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Se calcoliamo

$$f(1) = 1 \neq \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Quindi ...

E' chiaro che il primo caso e' quello piu' comune, mentre il secondo e' "piu' strano".
Nel primo caso la funzione e' CONTINUA nel punto che ci interessa, owero in $x = 1$, perche' il $\lim_{x \to 1} f = f(1)$.

Funzioni CONTINUE

Si dice che f e' continua in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se la f e' continua non solo in x_0 ma in OGNI PUNTO di un intervallo, allora f e' continua sull'intervallo.
In questo caso, la funzione si puo' tracciare "senza staccare la penna dal foglio". (nell'intervallo)

Funzioni elementari continue

- Potenze: $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{2}}$
- Funz. esponenziali: $y = 2^x$, $y = e^x$
- Funz. logaritmiche: $y = \log_3 x$, $y = \ln x$
- Funz. goniometriche: $y = \sin x$, $y = \cos x$

} Sono continue nel loro insieme di definizione.

Esempio

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} e^x = 1$$

Quindi
Se la funzione in esame è continua, il limite della f per quel valore specifico, è uguale proprio al valore che la f assume in quel punto.

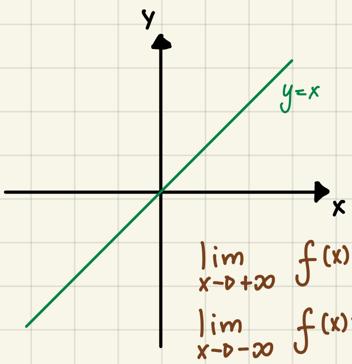
Inoltre tutte le funz che si possono ottenere come somma, prodotto, quoziente e composizione da funzioni elementari, sono continue nel loro dominio naturale.

Esempi:

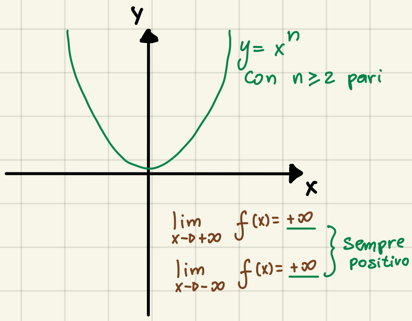
$y = e^{x^2}$ composizione di f potenza ed esponenziale

$y = 3x^2 - x - 1$ sottrazione

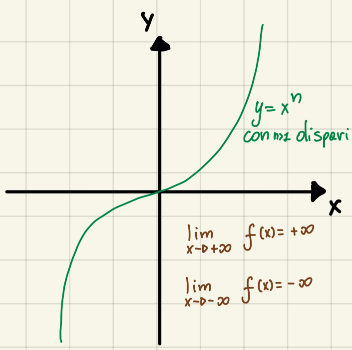
Funzioni elementari - grafici



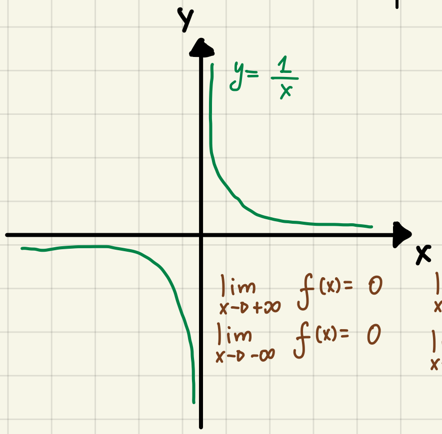
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{sempre positivo}$$



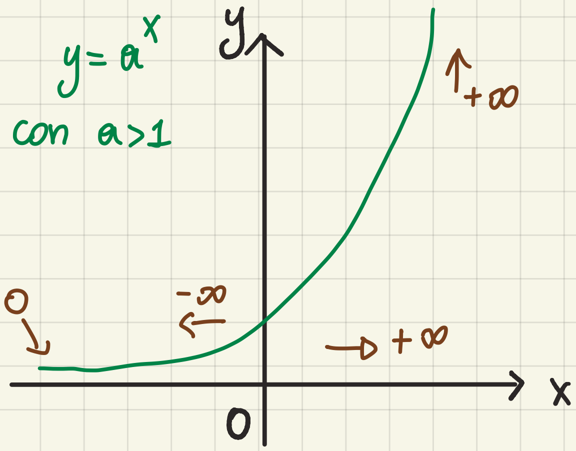
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Funzioni esponenziali e logaritmi

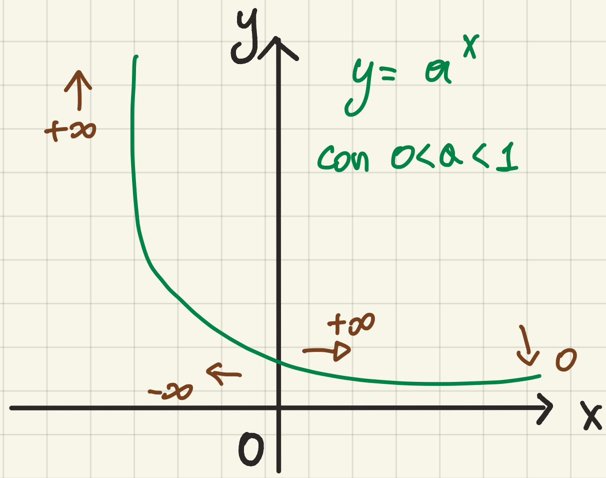
$y = a^x$ con $a > 1$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

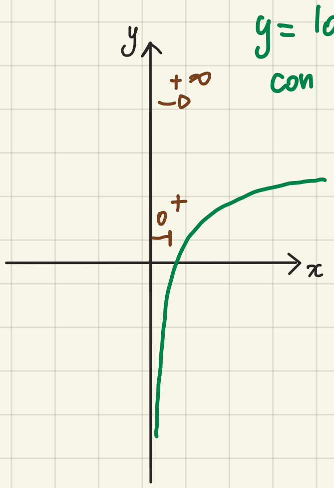
$y = a^x$ con $0 < a < 1$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

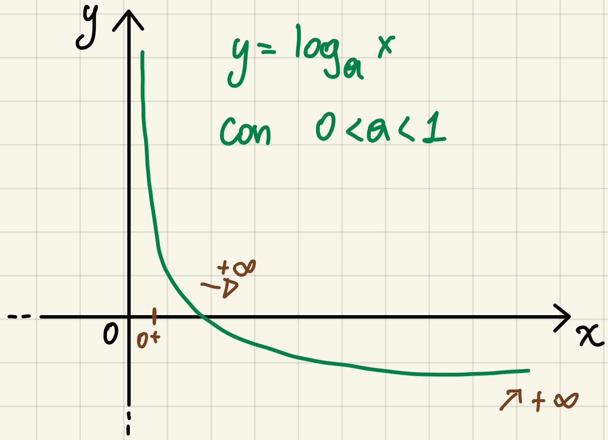
$y = \log_a x$ con $a > 1$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$y = \log_a x$ con $0 < a < 1$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

* Anche se non sembra, i logaritmi crescono (o decrescono) all'infinito, anche se molto lentamente.

Limiti di f razionali per $x \to x_0$

Caso 1: Quando sostituisco x_0 NON si annulla ne' numeratore ne denominatore:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{1} = 3$$ Non si annulla ✓

Caso 2: Quando provo a sostituire x_0 si annulla il numeratore ma non il denominatore.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{1^2-1}{1+3} = 0$$

Sia nel caso 1 che 2, possiamo dare il risultato immediatamente perche' le funzioni sono continue.

Caso 3:

a) Si annulla il denominatore ma non il numeratore

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0} \longrightarrow$$

Metodo di risoluzione

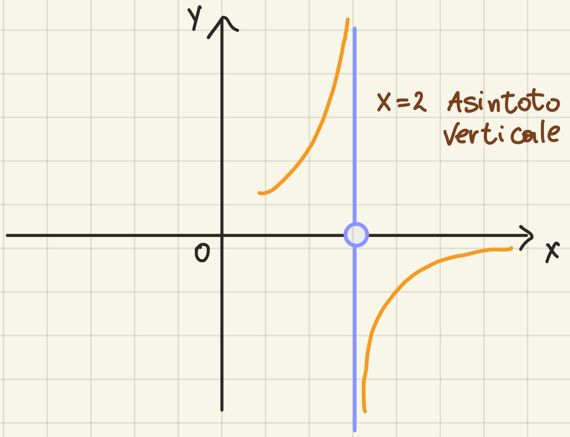
In questo caso dobbiamo separare il limite in limite destro e sinistro.

Destro $\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

Sinistro $\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

Se il lim dx e Sx sono diversi, il $\lim_{x\to 2}$ NON ESISTE

$\Downarrow$

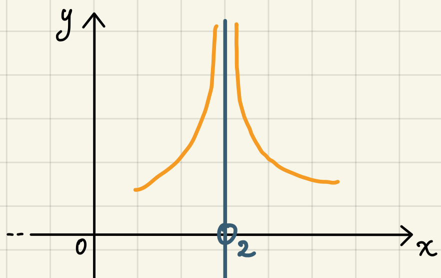


Questo risultato ci dice che la funz quando si avvicina a 2 da Sx tende a $+\infty$, mentre quando vi si avvicina da Dx tende a $-\infty$

$\Rightarrow$ Abbiamo un asintoto

Proviamo a calcolare $f = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{(2-x)^2} = \begin{cases} \lim_{x\to 2^+} \frac{3}{(0^-)^2} = +\infty \\ \lim_{x\to 2^-} \frac{3}{(0^+)^2} = +\infty \end{cases}$

Siccome I limiti dx e Sx hanno lo stesso risultato, anche il limite di partenza fa $+\infty$.

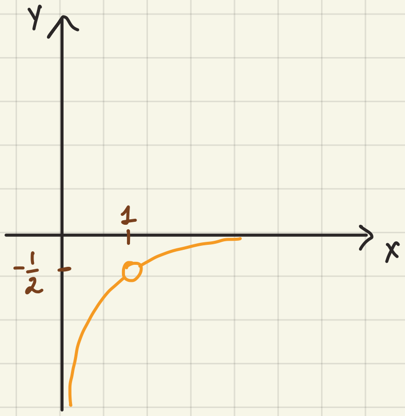


b) Quando, sostituendo, si annullano sia numeratore che denominatore:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$ Forma indeterminata.

Metodo di risoluzione: Scomporre e semplificare:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$



Limiti di funzioni razionali per $x \to \infty$

ES: $\lim_{x \to +\infty} \overset{+\infty}{x^3} - \overset{+\infty}{5x^2} + 1 = [+\infty - \infty] \leftarrow$ Forma indeterminata

In questo caso e' evidente che la x elevata alla 3ª cresca più velocemente di quelle elevate alla 2ª, ma come possiamo dimostrarlo?

Mettiamo in evidenza il termine di grado >

$$= \lim_{x \to +\infty} \underset{+\infty}{x^3}\left(1 - \underset{0}{\cancel{\frac{5}{x}}} + \underset{0}{\cancel{\frac{1}{x^3}}}\right) = +\infty$$

ES: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x - 3}{2x^2 + 5} = \frac{x^{\cancel{3}}\left(1 - \overset{0}{\cancel{\frac{4}{x^2}}} - \overset{0}{\cancel{\frac{3}{x^3}}}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \underset{0}{\cancel{\frac{5}{x^2}}}\right)} = +\infty$

ES: $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x}{5x^6 - 1} = \frac{\cancel{x^3}\left(1 - \cancel{\frac{4}{x^2}} \to 0\right)}{x^{\cancel{6}\,3}\left(5 - \cancel{\frac{1}{x^6}} \to 0\right)} = \frac{1}{-\infty} = 0$

ES: $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} = \frac{\cancel{x^2}\left(2 - \cancel{\frac{1}{x}} \to 0\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \cancel{\frac{1}{x^2}} \to 0\right)} = 2$

Metodo di risoluzione - pattern

1) Raccogliere il termine di grado massimo sia al num che denom
2) Semplificare
3) A cosa tendono i termini rimanenti?
4) fare i conti

Cosa potrebbe verificarsi?

Quando si risolvono questi limiti possono succedere 3 cose:

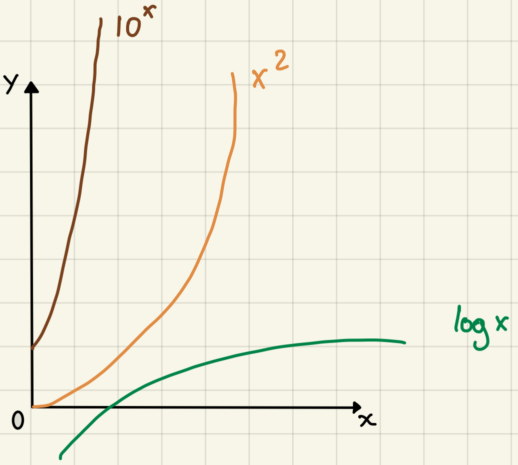
1) funz. razionale avente al num un polinomio di grado > polin. al denom:
   Il risultato sarà $+\infty$ o $-\infty$.

2) deg(Denom) > deg(Num) $\to$ Il risultato sarà 0.

3) deg(Denom) = deg(Num) $\to$ Il risultato sarà un numero ℓ.

Limiti con esponenziali

Si procede in maniera simile ai limiti visti prima, ma dobbiamo capire quale elemento tende ad ∞ più velocemente.



Scala di crescita:

$$\log_a x << x^b << c^x << x^x$$

ES:

	x = 10	x = 100	x = 1000
$y = \log_{10} x =$	1	2	3
$y = x^2 =$	10^2	10^4	10^6
$y = 10^x =$	10^{10}	100^{100}	10^{1000}

ES:

$$\lim_{x\to+\infty} x^6 - 6^x = 6^x >> x^6 = \lim_{x\to+\infty} 6^x\left(\frac{x^6}{6^x}\underset{\to 0}{} - 1\right) = \infty[-1] = -\infty$$

ES:

$$\frac{e^x - x^2}{3x + \ln x} = \frac{e^x\left(1 - \cancel{\frac{x^2}{e^x}}^{\to 0}\right)}{x\left(3 + \cancel{\frac{\ln x}{x}}^{\to 0}\right)} = \frac{e^x}{x} = +\infty$$

! quando portiamo x^2 fuori dalla radice dobbiamo stare attenti a scrivere $|x|$ e non solo x; questo perché il valore di x sotto radice è sempre >0. Se avessimo avuto $x\to-\infty$ $|x|$ sarebbe stato $(-x) \Rightarrow +\infty$.

ES:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{e\log_2 x - 2x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\cancel{\frac{3}{x}}^{\to 0}\right)}}{x\left(\cancel{\frac{e\log x}{x}}^{\to 0} - 2\right)} = \frac{\cancel{|x|}\sqrt{1+0}}{\cancel{x}(0-2)} = \frac{\sqrt{1}}{-2} = -1/2$$

Limiti di funzioni composte

ES:

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{3}{e^x}\right)$$

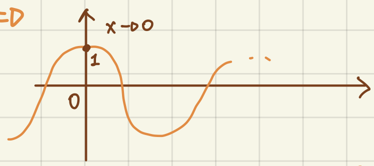
Metodo di risoluzione:

Bisogna innanzitutto capire cosa succede alla funzione più interna

1) A cosa tende $\frac{3}{e^x}$ quando $x\to+\infty$ $\Rightarrow$ tende a 0.

2) Cosa succede a $\cos(x)$ quando $x\to 0$?

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{3}{e^x}\right) = 1$$

ES:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x^2+1}{2x^2-x}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = \frac{x^2+1}{2x^2-x} = \frac{\cancel{x^2}\left(1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\cancel{\frac{1}{x}}\right)^{\to 0}} = 1/2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^y = \lim_{x\to+\infty} e^{1/2} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Strumenti per il Calcolo dei limiti

Teorema dei Carabinieri

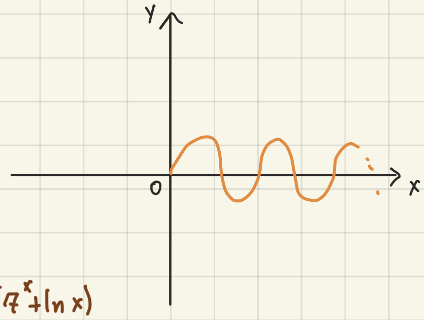
ES:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\cancel{7^x+\ln x} \to +\infty)}{\cancel{5x^2+1} \to +\infty}$$

Il problema: non sappiamo a che tende il seno quando $x\to+\infty$

$\Downarrow$

Se avessimo avuto solo $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(7^x+\ln x)$ avremmo dovuto dire che quel limite NON esiste!



Ad ogni modo, siccome il seno oscilla tra +1 e -1, e' sempre una quantita' finita! Di conseguenza, se dividiamo $\ell/+\infty$, il risultato del limite e' zero.

Perche'? $-1 \le \sin(7^x+\ln x) \le 1$, possiamo dividere ciascun membro per $5x^2+1$:

$$\frac{-1}{5x^2+1} \le \frac{\sin(7^x+\ln x)}{5x^2+1} \le \frac{1}{5x^2+1}$$

! Siccome quando $x\to+\infty$, $5x^2+1$ tende a $+\infty$ (positiva) lasciamo i versi invariati. Se avessimo avuto una quantita' negativa, avremmo dovuto invertire i versi.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{5x^2+1}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5x^2+1}=0$$

teorema dei Carabinieri o confronto

$\Rightarrow$ Siccome $0 \le \dfrac{\sin(7^x+\ln x)}{5x^2+1} \le 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sin(7^x+\ln x)}{5x^2+1} = 0$$

Utilizzo dei prodotti notevoli

ES:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{3x-12} = \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{3(x-4)}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\cancel{x-4}}{3(\cancel{x-4})(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{12}$$

$\sqrt{x}^2-2^2$

Limiti Notevoli

Sono delle forme indeterminate ricorrenti di cui ricordiamo il risultato, in modo da poter risolvere limiti piu' complessi.

Limiti fondamentali – Da imparare!

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

② $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Limiti risolvibili con ①

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1^2-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1^2=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to 1/2} = \frac{1}{2}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\Rightarrow 1 - \cos x^2 = \sin^2$

Da imparare!

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + 4 tg x}{x\cos x + 2\sin x} = \frac{\cancel{x}\left(2\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} + 4\underbrace{\frac{tg x}{x}}_{\to 1}\right)}{\cancel{x}\left(\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\to 1} + 2\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\right)}$ lim notevole $= \frac{6}{3} = 2$

ES: $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\cos x - \cos^2 x}{2x^2}} = \sqrt{\frac{\cos x(1-\cos x)}{2x^2}} = \sqrt{\underbrace{\frac{\cos x}{2}}_{\to 1/2} \cdot \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to 1/2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Limiti risolvibili con ②

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x} =$ pongo $1/x = y$ $= \ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} \to e$ $= \ln(e) = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} =$ pongo $e^x - 1 = y$ quindi $e^x = 1+y \Rightarrow x = \ln(1+y)$ Inoltre se $x \to 0$, allora anche $y\to 0$ $\Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)}$

Otteniamo esattamente il limite precedente ma il num e denom sono invertiti ⟸ possiamo quindi dire che il limite tende al reciproco del risultato precedente ⟸ $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{1} = 1$

In breve

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- → $\lim_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = 1$
- → $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$

② $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
- → $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- → $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

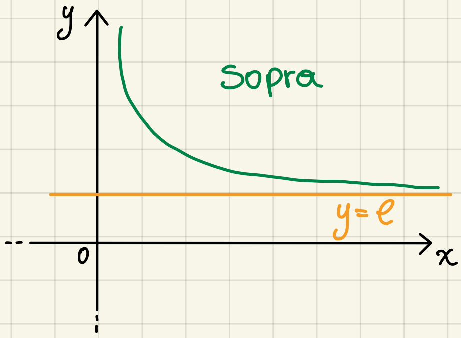
} $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$; $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

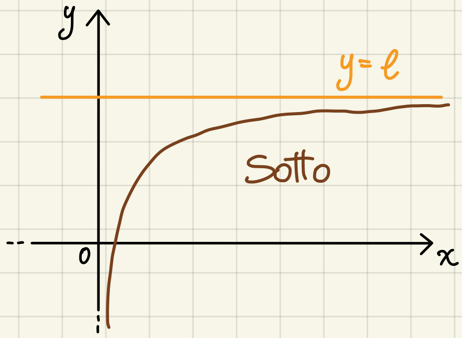
Asintoti orizzontali

Abbiamo un Asintoto orizzontale quando, nel momento in cui la x cresce, la y si avvicina ad un valore preciso (ℓ), quindi:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \Rightarrow \text{la retta avrà equazione } y = \ell$$

Potrebbe interessarci anche sapere se la funzione si trova SOPRA o SOTTO l'asintoto (retta)





Per capirlo ci basta sostituire al numero dell'asintoto (ℓ) un numero più piccolo o più grande e vedendo se l'orizzontale relativa interseca o meno la funzione.

Questa pratica potrebbe essere utile ma non è molto usata nello studio di funzione.

ES:

$$f = \frac{3x}{x-1} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(3)}{\cancel{x}(1 - \frac{1}{x})} = 3 \Rightarrow y = 3 \quad \text{A. O.}$$

$\frac{1}{x} \searrow 0$

Asintoti Verticali

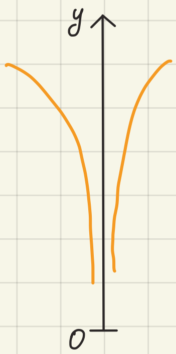
Abbiamo un Asintoto verticale quando, nel momento in cui la $x \to \ell$, la y cresce ad infinito. Siccome l'asintoto non viene mai intersecato dalla funzione, la funzione non è definita nel punto ℓ.

Quindi: se $\lim_{x \to \ell} f(x) = \pm\infty$, $x = \ell$ è Asintoto Verticale

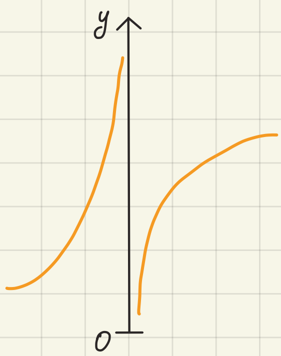
Che tipo di Asintoto?

A differenza degli A.O., i Verticali possono essere di 4 tipi:

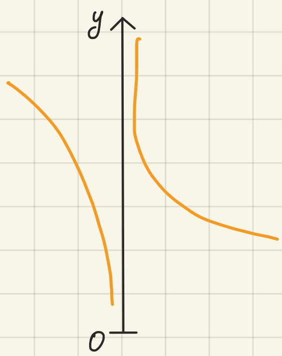
$$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to \ell^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to \ell^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to \ell^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to \ell^+} f(x) = +\infty$$

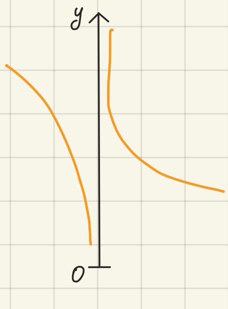
ES:

$$f = \frac{3x}{x-1} \qquad \mathbb{D} = x - 1 \neq 0 \text{ per } x \neq 1$$

cerco in $1^\pm$:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{3x}{x-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

Il limite è del tipo:



Equivalenze Asintotiche

Date due f $f(x)$ e $g(x)$, si dicono Asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$, se il $\lim_{x \to x_0}$ del loro rapporto è uguale ad 1. Il simbolo usato è $\sim$ (tilde): $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$.

Possiamo riscrivere tutti i limiti notevoli sotto forma di E.A.:

- $\sin x \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
- $tg\, x \sim x$
- $e^x - 1 \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Inoltre, possiamo sostituire x con una generica $\varepsilon(x)$ che tenda a 0:

- $\sin(5x) \sim 5x$ ($5x \to 0$) per $x \to 0$
- $e^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x}$ ($\frac{1}{x} \to 0$) per $x \to \infty$

Proprieta' delle eq. Asint.

1) Se per $x \to x_0$ $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$, possiamo dire che $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$ ed in particolare, se i limiti dei prodotti esistono, sono uguali.
Questo ci "autorizza", quando dobbiamo calcolare il lim di un prodotto a sostituire uno o entrambi i fattori con degli altri fattori ad essi Asintoticamente Equivalenti.

2) La stessa cosa di prima vale per i rapporti: se per $x \to x_0$ $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$
$\Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ Anche in questo caso i rapporti sono uguali.

3) Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ $\Rightarrow [f(x)]^\alpha \sim [g(x)]^\alpha$ per $x \to x_0$.

ES $\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{(e^{3x}-1)} \cdot \cancel{\sin(4x)}}{\cancel{tg(2x^2)}}$ ($\to 3x$, $\to \sim 4x$, $\to 2x^2$) $\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{3\cancel{x} \cdot 4\cancel{x}}{2\cancel{x^2}} = 6$ Il risultato è accettabile perchè

$$\frac{(e^{3x}-1) \cdot \sin(4x)}{tg(2x^2)} \sim \frac{3x \cdot 4x}{2x^2}$$
$$\lim f(x) = \lim g(x)$$

ES $\lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{\sqrt{1-\cos x^2}}}{\cancel{\ln(1+2x)}}$ ($\to \sim \sqrt{\frac{1}{2}x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$, $\to \sim 2x$) $\sim \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x^2}{2x} = \frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}\sqrt{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{0}{e} = 0$

O piccolo

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice che $f(x)$ e' o piccolo di $g(x)$ se:

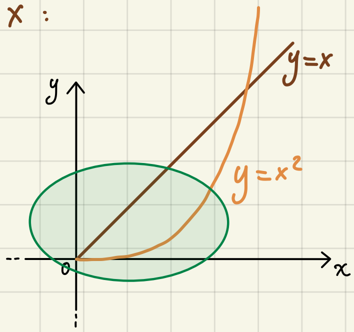
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si scrive quindi: $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

Inoltre, dire che $f(x)$ e' o piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$ equivale a dire che <u>$f(x)$ e' infinitamente piccola</u>, rispetto a $g(x)$

ES: $f = x^2 = o(x)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$

Non sembra, ma per valori piccoli $x^2 < x$:



ES: $x^3 = o(x)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}} = 0$

Attenzione!
La notazione $o(x) = o(f)$ indica semplicemente una funzione il cui limite del rapporto con f $(o(f))$, fa 0 nel punto in esame.

Proprieta'

- $o(x) \pm o(x) = o(x)$ NON ZERO! e' un po' come fare $-\infty - \infty$.
- $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x)$
- $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $x^n \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $x^n = o(x^m)$. quando $x \to 0$, x^n e' un o piccolo di x^m, se $n > m$
  $\hookrightarrow$ Questo vuol dire che le potenze con esponente maggiore sono degli o piccoli delle potenze con gli esponenti piu' piccoli:

  ES: $x^3 = o(x) \Rightarrow x^3 << x$ in $x \to 0$
  $x^2 = o(x) \Rightarrow x^2 << x$ in $x \to 0$

- Deduciamo quindi che $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^n)$ se $n < m$
  $\hookrightarrow$ "Sopravvive" il termine con esponente minore!

Eq. Asintotiche ed o piccolo

Per $x \to x_0$ $\quad f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$

Questo significa che le due funzioni sono A. equivalenti se e solo se differiscono per un termine che diventa trascurabile nel momento in cui facciamo il limite per $x \to x_0$.

Possiamo quindi dire che:

- $\sin x \sim x \to \sin x = x + o(x)$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x \to 1 - \cos x = \frac{1}{2}x + o\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ Si puo' omettere
- $\operatorname{tg} x \sim x \to \operatorname{tg} x = x + o(x)$
- $e^x - 1 \sim x \to e^x - 1 = x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \to (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(\cancel{\alpha} x)$
- $\ln(1+x) \sim x \to \ln(1+x) = x + o(x)$

ES: $\sin x^3 + 3x^4 + \ln(1+2x^5) = \underbrace{x^3 + o(x^3) + \cancel{3x^4} + \cancel{2x^5} + o(x^5)}_{\text{Rimane solo il più piccolo}} = x^3 + o(x^3)$

$<< x^3 \quad << x^3$

Formula di Taylor con resto di Peano

Questa formula ci consente di approssimare tutte le funzioni sufficientemente regolari con dei Polinomi.

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $(\underbrace{-\delta,\delta}_{\text{Delta}})$ per qualche $\delta>0$ e supponiamo che:

- $f(x)$ sia derivabile $n-1$ volte nell'intervallo
- Esista la derivata n-esima perlomeno in $x=0$

Se soddisfiamo i requisiti

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + o(x^n)} \quad \text{per } x \to 0$$

$T_n(x)$ è il polinomio di grado $\leq n$ dato dalla formula:

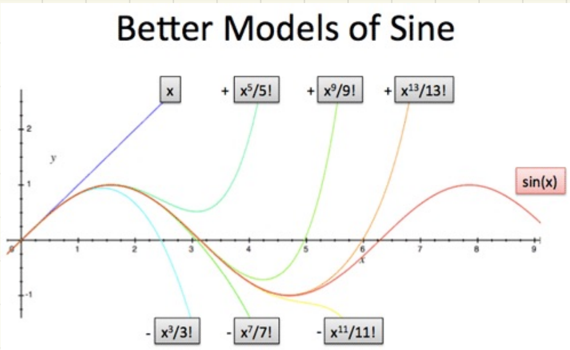
$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k}$$

In poche parole...

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Funzione da approssimare}} = \underbrace{T_n(x)}_{\text{Polinomio Approssimante}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{ERRORE di Approssimazione}}$$

Capiamo che l'err di appr. è PICCOLO, essendo un o piccolo di x^n; queste quantità diventa sempre più trascurabile al crescere di n.



La formula di taylor non fa altro che approssimare, cioè "emulare" una funzione tramite dei polinomi.

Quando usiamo un n troppo piccolo, l'errore è Alto, ovvero non abbiamo una buona approssimazione.
In questo esempio si approssima $\sin x$, e come si può vedere, x ha una cattiva approx, mentre $\frac{x^{13}}{13!}$ ha una approx migliore.

Approssimare $f(x) = \sin x$

siccome $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$

Usando $f(x) = \sin x$, $a = 0 \Rightarrow \sin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$

Tabella delle derivate:

$f(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\sin x$
$f'''(x) = -\cos x$
$f''''(x) = \sin x$

Si ripetono uguali

Riscrivo la serie:

$$\Rightarrow \sin x = \underbrace{\sin(0)}_{0} + \frac{\cos 0}{1}\,x + \frac{-\sin 0}{2}x^2 + \frac{-\cos 0}{6}x^3$$

$$\sin x = 1\cdot x + 0\cdot x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

$$= 0 + \frac{1}{1}x + 0 - \frac{1}{6}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 - \frac{1}{7!}x^7 \dots$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1}}_{\text{Alterna il segno}} \cdot \frac{x^{\overbrace{2n-1}^{\text{Potenze dispari}}}}{\underbrace{(2n-1)!}_{\text{Fattoriale dispari}}}$$

Usare taylor per risolvere i limiti

ES:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + 2x^5}{3x^3}$$
Il sin da problemi $\to$ taylor

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$
per $n=3$
$$\sin x = 0 + (-1)^2 \cdot \frac{x}{1} + (-1)^3 \cdot \frac{x^3}{3!} = \underline{x - \frac{x^3}{6}}$$

Per riscrivere sin x dobbiamo aggiungere anche l'errore:
$$\ldots = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \underbrace{o(x^3)}_{\text{ERRORE}} - \cancel{x} + \underbrace{\cancel{2x^5}}_{\text{mangiato da } o(x^3)}}{3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{3x^3} = -\frac{1}{18} + \cancel{\frac{o(x^3)}{3x^3}}^{\to 0} = -\frac{1}{18}$$

Approssimare $f(x) = 3\sin x + \cos x$ per $n=4$

Sostituiamo direttamente gli sviluppi di IV ordine di sin x e cos x
$$= 3\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right] + \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right] = 1 + 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Limiti con taylor

ES:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{e^x - 1 + \ln(1-x)}$$

Sviluppo per tg x:
$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \underbrace{\frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9}_{\text{trascurabili per } x\to 0} + o(x^{10})$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg} x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Inoltre (denom)
$$[e^x - 1] + [\ln(1-x)] = \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] + \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] = \left[-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]$$

Quindi:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{3} + \cancel{\frac{o(x^3)}{x^3}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{6} + \cancel{\frac{o(x^3)}{x^3}}^{\to 0}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} \cdot (-6) = -2$$

ES:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 (e^{\sin x} - 1 - x)}{\sin^2 x - x^2}$$

- $\sin x = (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ quindi $\sin x^2 = x^2 + o(x^2)$
- $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ Sostituiamo $x \to \sin x$: $\underset{n=2}{e^{\sin x}} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + o(\sin^2 x)$

Siccome $\sin x = x + o(x^2) \to e^{\sin x} = 1 + (x + o(x^2)) + \frac{1}{2}(x + o(x^2))^2 + o((x + o(x^2))^2)$
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

- $\sin^2 x - x^2 = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$

Quindi: $e^{\sin x} - 1 - x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Otteniamo quindi:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 (e^{\sin x} - 1 - x)}{\sin^2 x - x^2} = \frac{x^2 + o(x^2) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{\cancel{x^4}\left[\left(1 + \cancel{\frac{o(x^2)}{x^2}}^{\to 0}\right)\left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{o(x^2)}{x^2}}^{\to 0}\right)\right]}{\cancel{x^4}\left(-\frac{1}{3} + \cancel{\frac{o(x^4)}{x^4}}^{\to 0}\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{3}{2}$$