

Problema:

In I_g , a chi converge la serie di potenze?

Consideriamo come esempio la serie geometrica di ragione x :

ES: $\sum_n x^n$

sappiamo che converge in $I(-1, 1)$, quando $x \in (-1, 1) \Rightarrow S=1$
In questo intervallo, la serie converge a $\frac{1}{1-x}$

Di conseguenza, $\sum_n x^n$ converge, in $I=(-1, 1)$ ad una funzione di x :
 \Rightarrow Al variare di x in $I=(-1, 1)$, ovviamente varia la somma $\rightarrow \frac{1}{1-x}$.

E con le serie di potenze generalizzate?

$\sum_n a_n x^n$ converge in I_g , per ogni x fissato in I_g , la serie converge ad una certa somma numerica (numero) chiamata S_x . Lo chiamo in questo modo perché fisso $x \in I_g \xrightarrow{\text{associo}} S_x / \sum_n a_n x^n = S_x \leftarrow S_x$ e' la somma a cui la serie converge.

ES: Serie geometrica $\Rightarrow x \in I_g = (-1, 1) \Rightarrow S_x = \frac{1}{1-x} / \sum_n x^n = \frac{1}{1-x}$

$\stackrel{ES}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

Osservazione ad ogni $x \in I_g$ corrisponde un'unica somma S_x . Quindi la corrispondenza e' univoca, allora essa e' una funzione della x :

$$f: x \in I_g \rightarrow f(x) = S_x \in \mathbb{R}$$

In generale una serie di funzioni, e quindi nel nostro caso, una serie di potenze, converge ad una funzione, detta funzione somma.

$\Rightarrow \sum_n a_n x^n \underset{\text{converge}}{=} f(x) \quad \forall x \in I_g$

Soltanente non e' semplice trovare la somma, e ci si accontenta solo di vedere dove converge, ovvero solo il suo intervallo di convergenza.

In alcuni casi si puo' pero' calcolare la funz. di convergenza; quando?

Questo succede quando siamo nel caso delle Serie di Taylor

Serie Di Taylor

Teorema Sia $\sum a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e di raggio di convergenza δ . Sia $f(x)$ la sua funzione somma in $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Allora:

1) La funzione f è infinitamente derivabile in I_δ , ovvero possiamo calcolarne la derivata infinite volte $\Rightarrow f$ è una funzione molto regolare. (n) a_n

2) $f(x)$ è proprio la somma di questa serie: $\sum_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ in I_δ (1)

In altri termini, i coefficienti a_n della serie di potenze, coincidono con i coefficienti di Taylor della sua somma $f(x)$

$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ che non sono altro che i coefficienti di Taylor (vedi formula di Taylor) ^{Lez 24}

La serie (1) prende il nome di Serie di Taylor di punto iniziale x_0 .

Quindi se ho una serie di potenze, nel suo I_δ essa converge ad una certa funzione $f(x)$. Questa funzione somma f , è derivabile, continua, ecc.?

Il Teorema ci dice che la funzione f è infinitamente derivabile; inoltre la serie di potenze coincide con la Serie di Taylor della sua somma ($f(x)$): Quegli a_n non sono a_n generici, ma li calcoliamo calcolando la derivata n-esima della funzione somma in x_0 , e dividendo per $n!$: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

00:22

Problema

Consideriamo una funzione f infinitamente derivabile in un intorno $I(x_0)$ con raggio δ , quindi $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Sappiamo per la formula di Taylor che:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x_0)$$

Cosa accade se $n \rightarrow +\infty$?

Se $n \rightarrow +\infty$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x-x_0)^n$ converge ad $f(x)$? NO!

ES: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$ Si nota che:

1) f è infinitamente derivabile in \mathbb{R} , ed in particolare in $x=0$

\Rightarrow Andiamo a calcolare le sue derivate: $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}$ se $x \neq 0$

In $x=0$, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = e^y \gg \infty = 0$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(n)}(0) = 0$ Quindi la sua serie di Taylor in $x_0=0$ sarà:

$\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ perché le derivate sono tutte 0 la funzione (1) non è identicamente nulla (siccome $f(x)=0$ solo per $x=0$)

Definizione: Sia $f(x)$ una funz. infinitamente deriv. in $I_j(x_0)$, allora si dice Serie di Taylor di f di punto iniziale x_0 la serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \text{Se } x_0=0, \text{ essa prende il nome di Serie di MacLaurin}$$

Si dice che f è sviluppabile in serie di Taylor se essa coincide con la somma della sua serie di Taylor, cioè $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

■ 00:40

In parole semplici:

Abbiamo una funzione infinitamente derivabile; da essa costruiamo la serie di Taylor (con le derivate). Ottieniamo quindi una serie di potenze; questa serie converge a qualcosa?

⇒ Si, proprio nell'intervallo di convergenza. Converge proprio ad $f(x)$? NO
Se per caso essa è la somma della sua serie di potenze (può succedere), allora essa si dice sviluppabile in serie di Taylor.

Quindi una funzione si dice sviluppabile in serie di Taylor se essa è proprio la somma della sua serie di Taylor; cioè prendo la sua serie di T., Se essa converge a $f(x)$, essa è sviluppabile in S. di T.

Siccome non sempre le f sono sviluppabili in S. di Taylor, visiono il seguente Teorema:

Teorema: Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor

Sia f inf. der. in (a, b) / $\exists M > 0$ / $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $\forall x \in (a, b)$ e $\forall n \in \mathbb{N}$

Non possono tendere a $\pm\infty$

Cioè le derivate di f sono equilimate, ovvero sono limitate tutte dalla stessa costante.
Allora

$\forall x_0 \in (a, b)$ f è sviluppabile in serie di Taylor, di pto iniziale x_0 in (a, b) .

Dim a 00:48

■ 1:18

Nota: D'ora in poi parleremo di Serie di MacLaurin, ovvero prendiamo $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \quad] \text{ questa forma è una generalizzazione della F. di Taylor}$$

Quando abbiamo visto la formula di Taylor abbiamo visto le F. "notevoli"; ci basterà quindi prendere una f. di T. notevole dalla Tabella, fare il $\lim_{n \rightarrow \infty}$ e troveremo quindi lo Sviluppo in serie Di Taylor o MacLaurin.

ES: sappiamo che $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Problema possiamo dire che e^x è proprio la sommatoria: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$? Per dire questo, dobbiamo vedere se le derivate dell'esponenziale sono equilimate.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = f''(x) = f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow E' infinitamente derivabile.$$

Si osserva che le derivate di e^x sono limitate in ogni intervallo $I = (-\alpha, \alpha)$; perché?
Se $|x| < \alpha \Rightarrow e^x < e^\alpha$ per l'arbitrarietà di α , le derivate sono limitate e quindi e^x soddisfa il criterio di sviluppabilità in serie di Taylor.

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad J = +\infty, I_g = \mathbb{R}$$

1:25

ES: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(0)$ ci chiediamo:
Se $n \rightarrow \infty$ cosa abbiamo?

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x, \dots \Rightarrow |D^n \sin x| \leq 1 \text{ in } \mathbb{R}$$

$\sin x$ è sviluppabile in serie di Taylor (MacLaurin) e $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

ES: $\cos x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Teorema Derivabile
 Se f è infinitamente derivabile in (a, b) e $x_0 \in (a, b)$, allora se risulta $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x-x_0)^{k-1}$ converge proprio alla derivata di f (f'), allora f è sviluppabile in serie di Taylor.

Osservazione: (Dimostrazione) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$; Deriviamo il Termine generale:

$$\mathcal{D} \left[f \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \right] = \underbrace{n f^{(n)}(x_0)}_{\text{costante}} \underbrace{(x-x_0)^{n-1}}_{\text{Derivata}} = n \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{\text{costante}} (x-x_0)^{n-1}$$

Quindi: Se prendo la serie di T , e derivo 1 volta il Termine generale, otteniamo proprio la ①; questa prende il nome di Serie derivata prima, e non è detto che converga alla derivata I^a di $f(x)$.

Se però essa converge proprio a f , allora la funzione di f è sviluppabile in serie di Taylor.

1:35

ES: Vogliamo calcolare lo sviluppo di MacLaurin di: $f(x) = \log(1+x)$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x) \quad \text{La serie di Taylor di } \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Converge a $\log(1+x)$? Calcoliamo la serie derivata di ②

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n$$

Se consideriamo la s. geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ e sostituendo $x = -x$, abbiamo:

$$x = -x \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{in } (-1, 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \quad \text{in } (-1, 1)$$

La serie derivata del log è proprio questa. Essa converge in $(-1, 1)$ a $\frac{1}{1+x}$, quindi siamo nelle ip. del Teorema; Infatti, $\frac{1}{1+x}$ è proprio

la derivata di $\log(1+x)$: $\log(1+x) = \frac{1}{1+x} \cdot 1$.

$\Rightarrow \log(1+x)$ è sviluppabile in serie di MacLaurin in $I = (-1, 1)$, e si ha che:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{in } (-1, 1)$$

ES: Studiare il carattere e calcolare la somma della seguente serie:

$$\frac{\log^5 x}{5} - \frac{\log^7 x}{7} + \frac{\log^9 x}{9} + \dots$$

Quando viene chiesto di calcolare la somma di una serie, in qualche modo dobbiamo pensare alle serie di Taylor.

Lo step più importante è riconoscere la serie come sviluppo notevole; ci conviene scrivere:

Pongo $t = \log x \Rightarrow \frac{t - \frac{t^3}{3} + \dots}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + \dots$ Ci accorgiamo di avere tutte potenze dispari e nessun fattoriale al denominatore.

Pensiamo quindi allo sviluppo notevole della Tangente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad \text{La nostra serie, però, inizia da } \frac{t^5}{5}$$

Possiamo scrivere la serie come: $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} = \arctg(t)$

Siccome i primi due membri non compaiono, è come se venissero portati al secondo membro:

$$= \arctg t - t + \frac{t^3}{3} = \arctg(\log x) - \log x + \frac{\log^3 x}{3} \quad \text{con } -1 < \log x < 1 \\ \Downarrow \quad \forall x \in [-1, 1] \quad \Leftrightarrow \underline{e^{-1} \leq x \leq e}$$

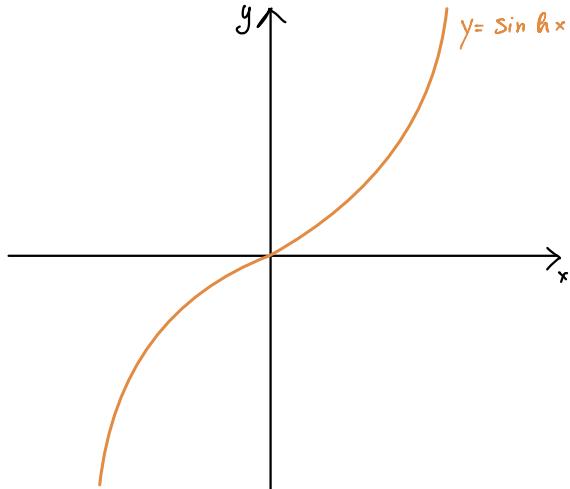
La serie converge in $e^{-1} \leq x \leq e$ e la sua somma è $\arctg(\log x) - \log x + \frac{\log^3 x}{3}$

2:04

Funzioni Iperboliche

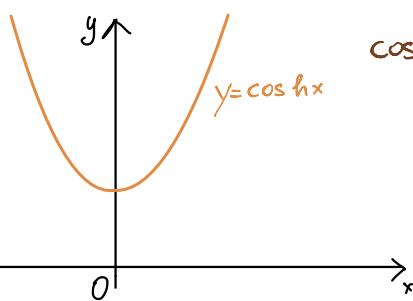
Si definisce il Seno iperbolico, e si scrive $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Capiamo subito che stiamo parlando di esponenziali, inoltre $\sin, \cos, \text{ecc.}$ iperbolici non hanno nulla a che fare con i $\sin, \cos, \text{ecc.}$ trigonometrici.

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad D = \mathbb{R} \Rightarrow \sinh x : x \in \mathbb{R} \rightarrow \sinh x \in \mathbb{R}$$



$\sinh x$ è una funzione crescente ed invertibile in \mathbb{R} .

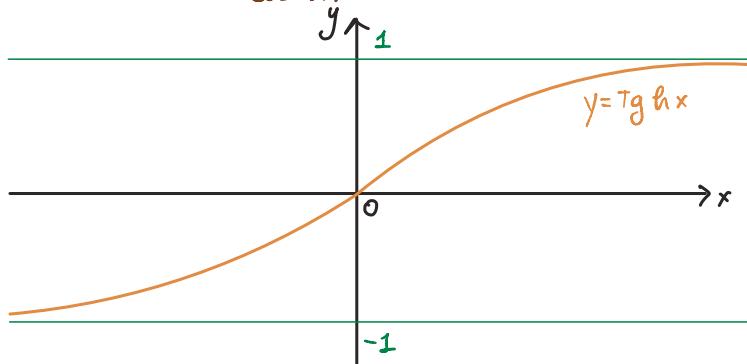
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ Il coseno iperbolico di x è definito in Tutto \mathbb{R} :



$$\cosh x : x \in \mathbb{R} \rightarrow \cosh x \in [1, +\infty)$$

Il grafico di $y = \cosh x$, si chiama **CATENARIA**, perché sembra una parabola.

- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ $\tanh x : x \in \mathbb{R} \rightarrow \tanh x \in (-1, 1)$



Proprietà delle f. iperboliche

Se con le funzioni iperboliche valeva la relazione fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, in questo caso abbiamo che: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, inoltre valgono una serie di formule di addizione:

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

