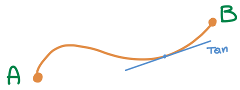
Le Curve

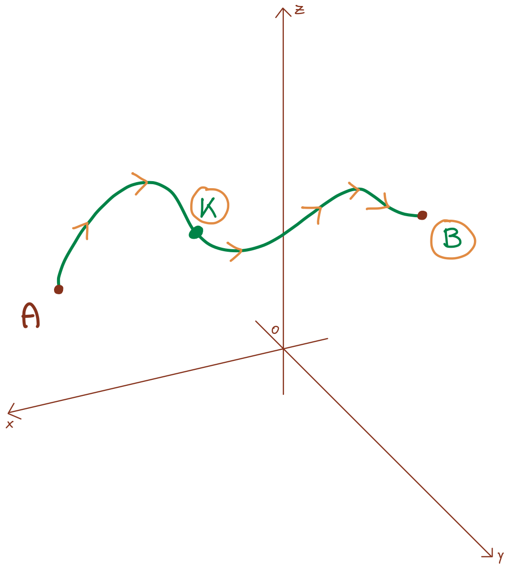
Una curva è un luogo geometrico di punti immerso in uno spazio; la geometria intrinseca della curva ① ci dice che questa curva è ad 1 sola dimensione. Questa curva è anche CONTINUA.



Il nostro compito potrebbe essere quello di studiare se esiste la retta Tangente ad una curva in un punto.
Quando è possibile definire la tangente in ogni punto di una curva, questa viene detta CURVA DIFFERENZIABILE o REGOLARE.

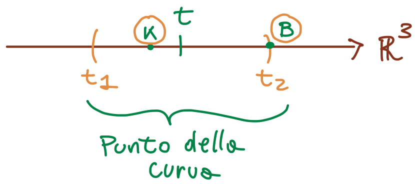
In ingegneria queste curve sono dette Lisce o Smooth, perché non presentano "Spigoli", ovvero punti in cui non è definita la derivata (non possiamo definire la derivata).

Per descrivere al meglio le curve dobbiamo definire un sistema di riferimento.



Si definisce Parametrizzazione della curva:

$$\underbrace{\alpha : \underbrace{(t_1, t_2)}_{\text{intervallo}} \longrightarrow \mathbb{R}^3}_{\text{Mappa}}$$



- Quindi t è un parametro che mappa la curva.
- Inoltre la mappa induce un verso di percorrenza della curva.

La parametrizzazione ha diverse notazioni:

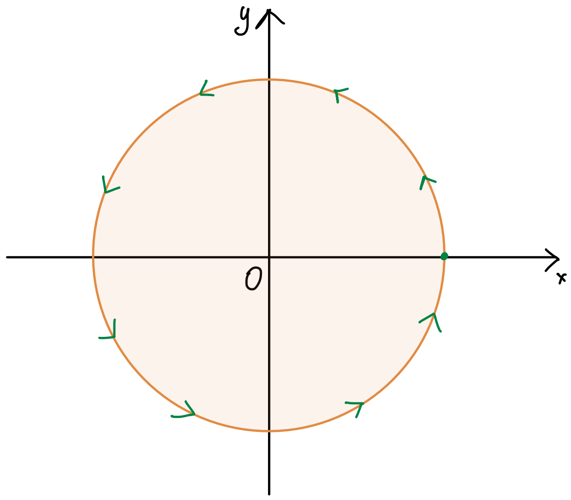
$\alpha(t)$ ← La funzione α dipende dal parametro t.

In alternativa

$$\alpha(t) \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \equiv \overbrace{\begin{pmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{pmatrix}}^{\text{Legge oraria}}$$

Con questa notazione il punto non è più fermo ma si muove, e quindi le coordinate dipendono dal tempo.

Qualche applicazione...
Consideriamo il piano $\mathbb{R}^2$:



Se volessi rappresentare tutti i punti equidistanti dal centro avrei una circonferenza di raggio r.
Come posso rappresentare con una legge oraria il moto di un punto che si muove lungo la circonferenza?

Siccome siamo su di un piano le variabili saranno 2:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \end{cases}$$

Intervallo di t: $0 < t < 2\pi$ — 1 giro

Cambiando ω cambia la parametrizzazione, ovvero cambia la VELOCITÀ con cui il punto si muove

Definizioni noiose (ma essenziali!)

Sottoinsieme pieno in insieme a più dimensioni

Si chiama curva in $\mathbb{R}^n$ una funzion φ di un intervallo chiuso $[a,b] \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$.
La curva φ si dice di classe C^K (con $K = 0,1,2\ldots$) se le sue componenti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sono funzioni di classe C^K e le RELAZIONI:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases}$$

con $t \in [a,b]$

COMPONENTI

Si dicono Equazioni Parametriche di φ.

L'INSIEME IMMAGINE $T = \varphi([a,b])$ si chiama SOSTEGNO della curva φ. I punti $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ si dicono ESTREMI della curva.

Teorema di Jordan condizione necessaria e sufficiente affinché la curva semplice (aperta o chiusa) φ sia RETTIFICABILE, è che le componenti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ siano a VARIAZIONE LIMITATA.

Differenza importante

Non si deve confondere La curva φ, che è una applicazione, con la sua immagine $\varphi(J)$ che prende il nome di <u>SOSTEGNO</u>, che non è altro che la Traiettoria del moto.

Esempio: Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a,b]$. L'applicazione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ avente come componenti:

$$\underbrace{\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}}_{\varphi}$$

E' una curva in $\mathbb{R}^2$. φ ha valori $[a,b]$ in $\mathbb{R}^2$.

Definizione Una curva $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ si dice REGOLARE se l'applicazione φ è di classe C^1 in J e se la sua derivata:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{d\varphi_1}{dt}, \frac{d\varphi_2}{dt}, \ldots, \frac{d\varphi_n}{dt}\right)$$

Non si annulla in nessun punto interno di J. Questo vuol dire che se le derivate $\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \ldots, \varphi_n'(t)$ NON si annullano mai CONTEMPORANEAMENTE in J°.

Definizione φ si dice Regolare a tratti se è continua in $[a,b]$ e se è possibile dividere J in un numero finito di intervalli chiusi $J_1, J_2, \ldots, J_n$ in ognuno dei quali φ è regolare.

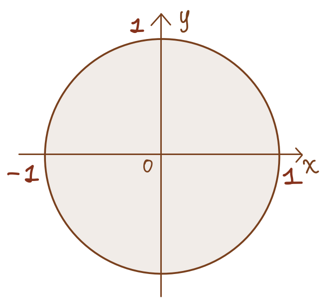
Esempio:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1(t) = \cos t \\ \varphi_2(t) = \sin t \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

E' una curva regolare

Infatti $\frac{d\varphi}{dt} = (\overset{\varphi_1'}{-\sin t}, \overset{\varphi_2'}{\cos t})$ Non si annulla mai in $0 \leq t \leq 2\pi$

Il sostegno della curva è la circonferenza di centro O e raggio 1.



Esempio:

$\varphi = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = |t| \end{cases}$ con $-1 \leq t \leq 1$ o semplicemente la curva $y = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$

φ è regolare a tratti, dato che φ non è di classe C^1 in $(-1,1)$