



Lezione 25

Esempi formula di Taylor

Esempio: continuo formula di Taylor

Scriviamo la formula di MacLaurin di $\arctg x$

$$f(x) = \arctg x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}; \quad f'''(x) = \frac{2[(1+x^2)^2] - 2x[2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4}$$

$$= \arctg(0) + \frac{f'(x) \cdot x}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} + \frac{f'''(x)}{3!} x^3 + \dots$$

$$= \frac{-2[1+x^2-4x^2]}{(1+x^2)^3} \rightarrow 2$$

$$= 0 + (x) - \left(\frac{2}{3} \cdot x^3 \right) + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$= (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Proposizione

Supponiamo che esistano le derivate di f in x_0 sequenti, allora vale il seguente schema:

① $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ Possiamo avere 3 casi:

Vado a calcolare f'' :

- ② $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ min Rel
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ max Rel
- $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ facciamo la derivata 3 \Rightarrow

③ $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$
 \Rightarrow Ne Max Ne min

$f'''(x_0) = 0 \Rightarrow$
 \Rightarrow Si ricomincia come nel caso $f'(x_0) = 0$.

Facciamo la Deriv IV^a

④

- $f^{(4)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ min
- $f^{(4)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ Max
- $f^{(4)}(x_0) = 0 \Rightarrow$ Deriv V^a...

Quando ci conviene questo giochetto?

Quando non riesco a studiare la disequazione (quindi la crescita della funzione), può essere più semplice calcolare la derivata seconda; se questa calcolata in $x_0 = 0$, andiamo a calcolare la derivata 3. Continuiamo in questo modo finché non troviamo una soluzione o le derivate sono troppo difficili da calcolare.

Studio di funzione Esempio

$$f(x) = \ln x - \ln^2 x$$

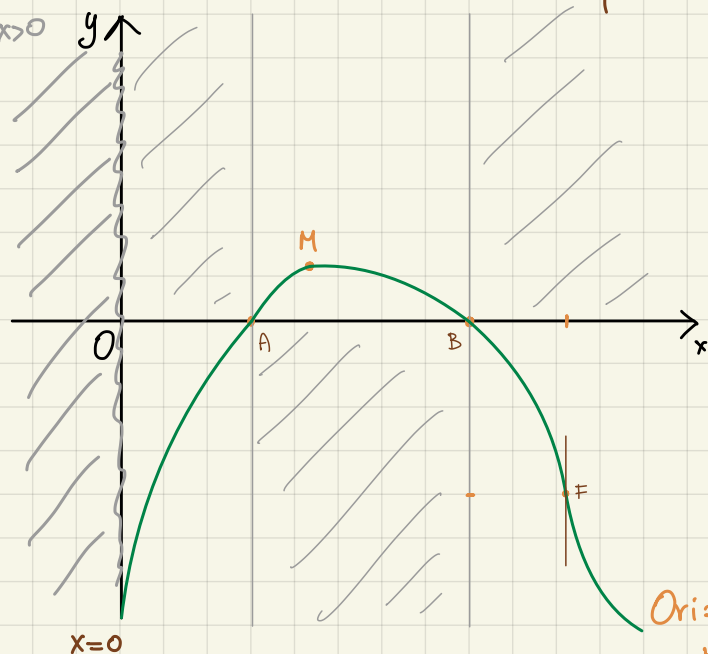
1) Dominio arg. log > 0 : $x > 0 \Rightarrow \mathbb{D} = x > 0$

2) Intersezioni

$$\begin{cases} x=0 \\ y = \ln 0 - \ln^2 0 \Rightarrow \text{Non def in } 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ \ln x - \ln^2 x = 0 \end{cases} \quad \text{per } \ln x(1 - \ln x) = 0$$

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow x=1 \quad \hookrightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \\ &A(1, 0) \quad B(e, 0) \end{aligned}$$



3) Segno $f(x) > 0$

$$\ln x - \ln^2 x > 0 \quad \text{per } 1 < x < e$$

4) Limiti: Asintoti

$$x=0 \quad \text{Non definita} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - \ln^2 x = \ln 0^+ - \ln^2 0^+ = -\infty$$

$$\begin{aligned} &\downarrow -\infty \quad \downarrow +\infty \\ &\Rightarrow x=0 \text{ e A.V. D.x} \end{aligned}$$

Orizzontale. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x - \ln^2 x = \ln \infty - \ln^2 \infty$

$$= \ln^2 x \left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right) = -\infty \Rightarrow \text{NO A. Oriz}$$

A. Ob.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x - \ln^2 x}{x} = \frac{\ln^2 x (-1)}{x} = -\frac{\ln}{x} \quad \ln \ll x \rightarrow 0 \Rightarrow \text{NO A. Ob.}$$

5) Deriv $f' = \frac{1}{x} - 2 \ln x \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} (1 - 2 \ln x)$

1.a) Condiz. necessaria: $f'(x) = 0$; $\frac{1}{x} (1 - 2 \ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln x = 0$ per $\ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{1/2}$ possibile estremo rel.

$f' > 0 \Leftrightarrow x < e^{1/2}$

Calcolo le coord.

$$f(e^{1/2}) = \ln e^{1/2} - (\ln e^{1/2})^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow (e^{1/2}, \frac{1}{4}) \text{ max}$

Troviamo il max con il metodo della deriv II.

$$f'' = -\frac{1}{x^2} (1 - 2 \ln x) + \frac{1}{x} \left(-\frac{2}{x} \right) = -\frac{1 - 2 \ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = -\frac{1}{x^2} [3 - 2 \ln x] \geq 0$$

Per trovare il max con la deriv II dobbiamo calcolare $f''(e^{1/2})$:

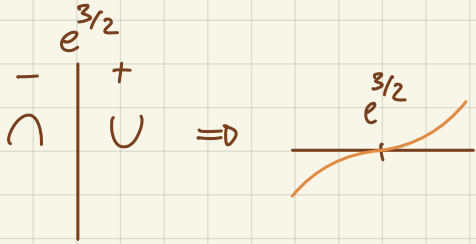
$$f''(e^{1/2}) = -\frac{1}{(e^{1/2})^2} [3 - 2 \ln e^{1/2}] = -\frac{1}{e} [3 - 2 \ln e^{1/2}] = -\frac{2}{e} < 0 \Rightarrow e^{1/2} \text{ Max}$$

6) Concavità e convessità: $f''(x) \geq 0$

$$-\frac{1}{x^2} [3 - 2 \ln x] \geq 0 \quad \text{per } 3 - 2 \ln x \leq 0 ; \quad \ln x \geq \frac{3}{2} ; \quad x \geq e^{\frac{3}{2}}$$

Calcolo l'ordinata

possibile flesso



$$f(e^{3/2}) = \ln e^{3/2} - \ln^2 e^{3/2} = \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{6-9}{4} = -\frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow (e^{3/2}, -\frac{3}{4}) \neq$$