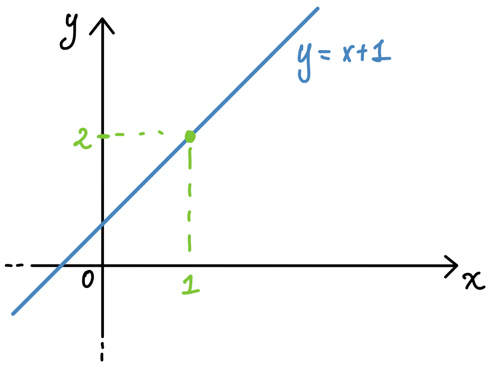
Limiti

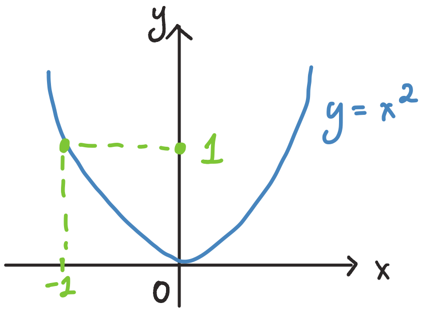
Introduzione



Supponiamo di dover calcolare:

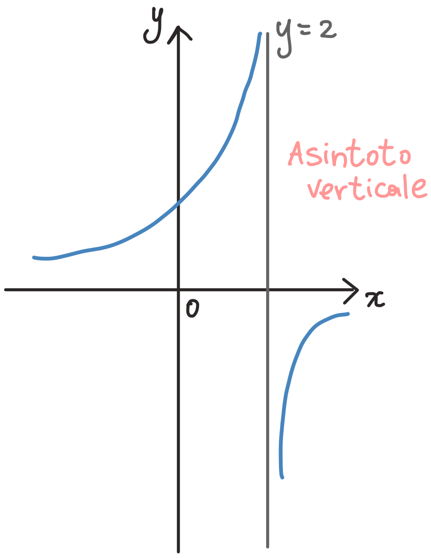
$$\lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

Cosa succede ad x+1 (sulla y) quando x si avvicina ad x=1 ?



$$\lim_{x \to -1} x^2 = 1$$

In questi casi banali ha senso sostituire il valore nella funzione.



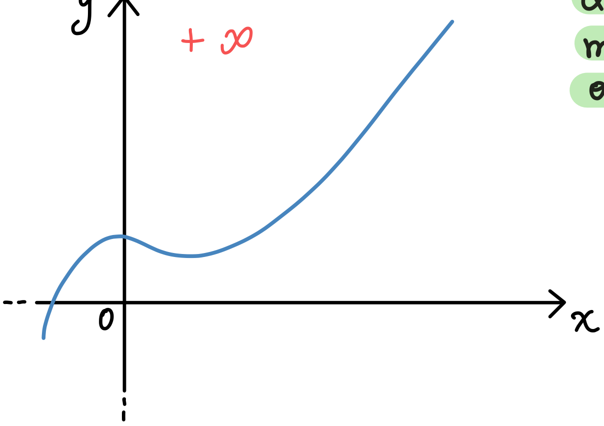
$$y = \frac{-3x-2}{x-2} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{-3x-2}{x-2} \xrightarrow{\text{sostituz.}} \frac{-8}{0}$$

Non si può fare

$$\mathbb{D} = x-2 \Rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 2\}$$

Limiti All'infinito

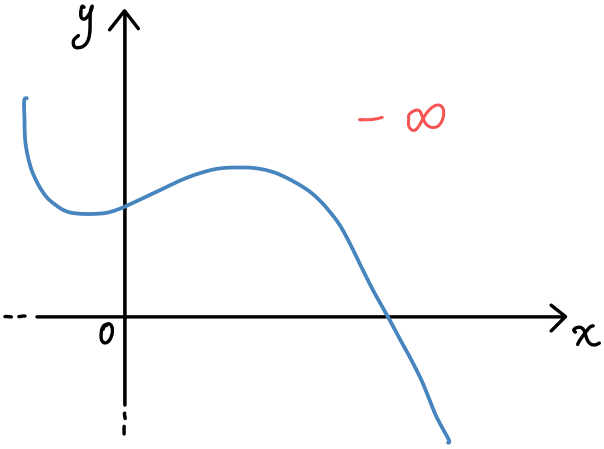
Che significa $\lim_{x \to +\infty} f(x)$? $\Rightarrow$ Che fa la funzione quando la x diventa sempre più grande



Quando ad x molto grandi corrispondono y molto grandi, si dice che il limite tende all'infinito.

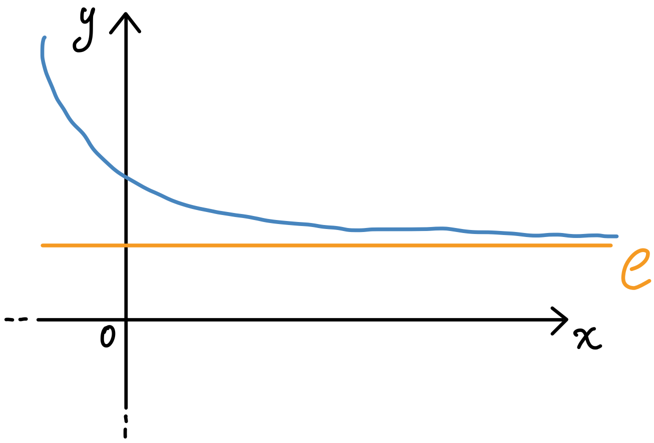
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ Questo caso è analogo al precedente.



$\lim = \ell$

Quando facciamo tendere il limite a $+\infty$ ma otteniamo come risultato ℓ, le y tendono ad avvicinarsi proprio ad ℓ:

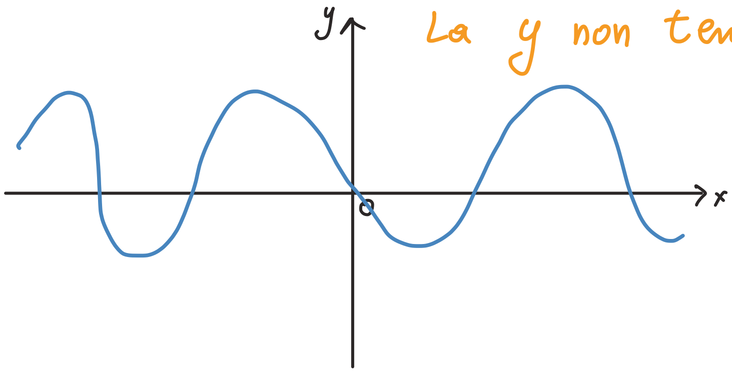


Limiti indefiniti

Il risultato del limite potrebbe essere non determinato:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = $ N. E.

La y non tende a nulla

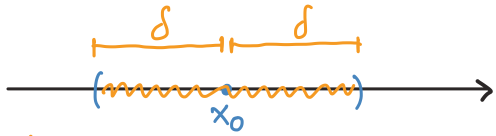


Definizioni

Intorno

Chiamiamo Intorno di x_0 e di raggio $\delta > 0$ (Delta) Un intervallo APERTO:

$$V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

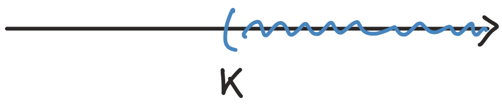


Possiamo anche definire Intorno di $-\infty$ un Intervallo APERTO del tipo:

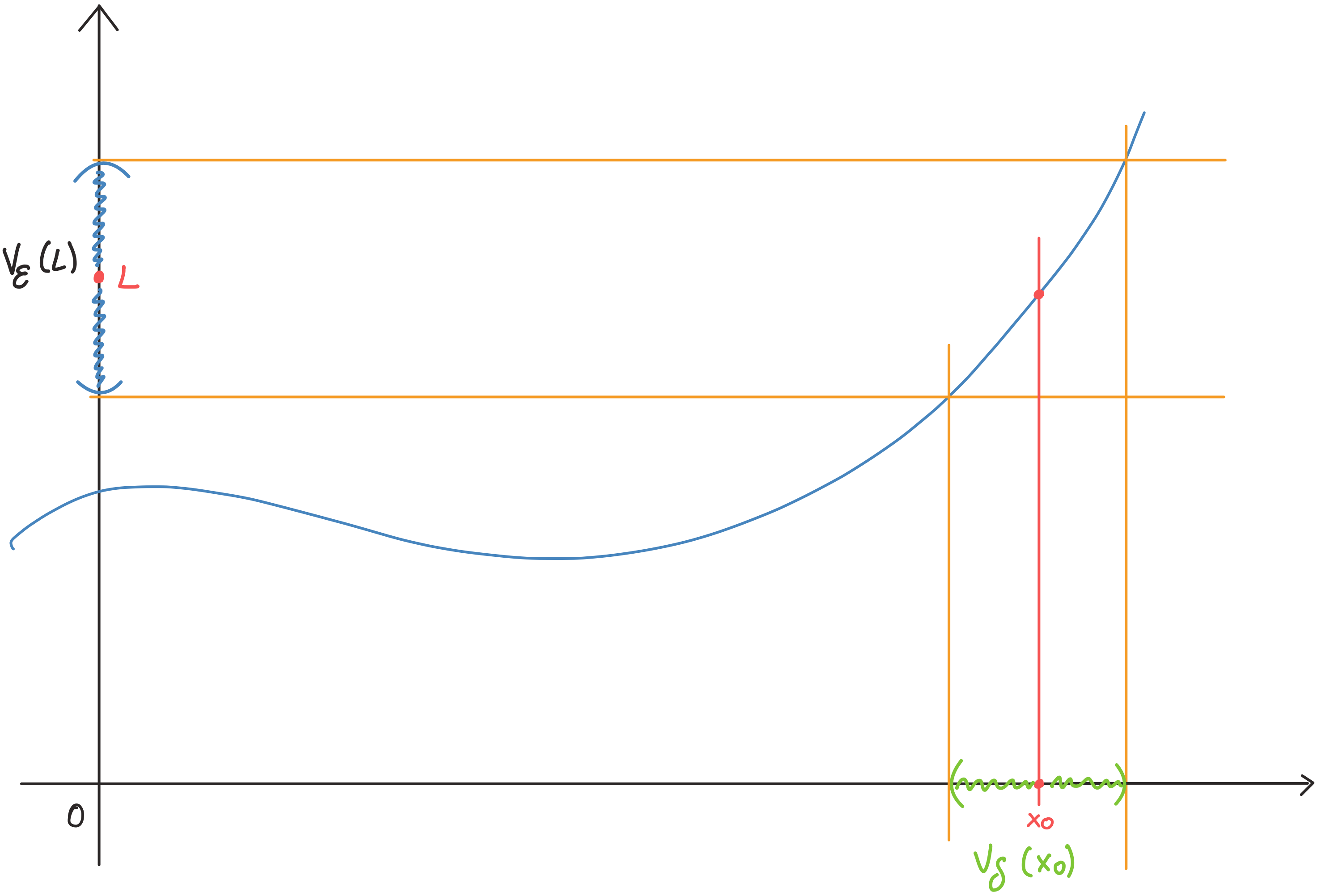
$$(-\infty, K) = \{x \in \mathbb{R} : x < K\}$$

Possiamo dire lo stesso per L' Intorno di $+\infty$:

$$(K, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > K\}$$



Cosa significa quindi calcolare il lim di una funzione?

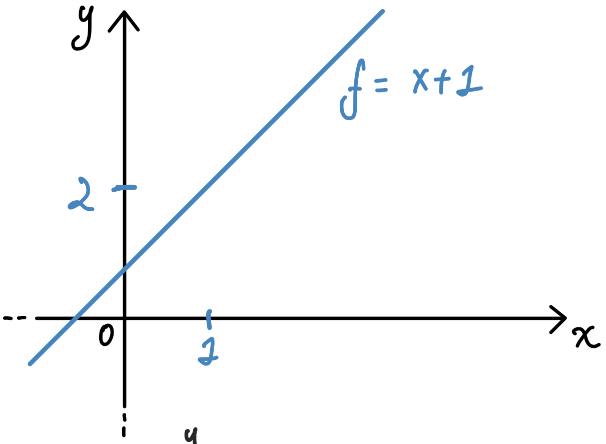


Per ogni intorno di L che consideriamo (BlU) riusciamo a trovare un intorno di x_0 (Verde); Se calcoliamo quanto vale la funzione quando $\{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} - x_0$, otteniamo un numero reale che sara' compreso nell'intervallo $\{L - \delta < y < L + \delta\} - L$

$\{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} - x_0 \longrightarrow$ Intorno di x_0

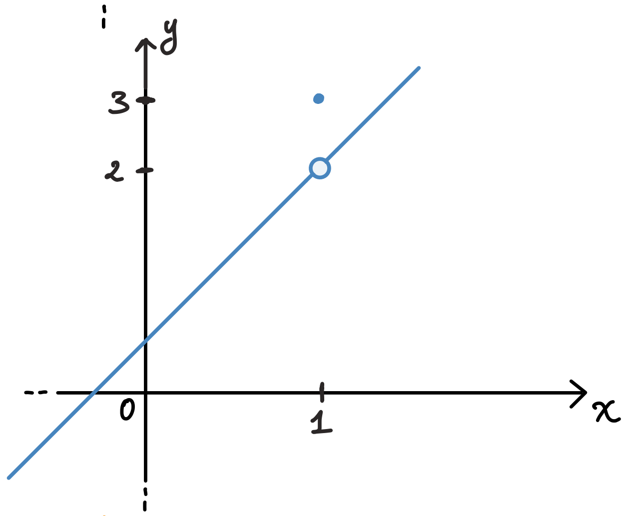
$\{L - \delta < y < L + \delta\} - L \longrightarrow$ Intorno Di L

Funzioni continue elementari



$\lim\limits_{x \to 1} x+1 = 2$; 2 e' proprio il valore che f assume quando la calcoliamo in $x = 1$.

$f(1)\ x+1 = 2$



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Se calcoliamo

$$f(1) = 1 \neq \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Quindi ...

E' chiaro che il primo caso e' quello piu' comune, mentre il secondo e' "piu' strano".
Nel primo caso la funzione e' CONTINUA nel punto che ci interessa, ovvero in $x = 1$, perche' il $\lim\limits_{x \to 1} f = f(1)$.

Funzioni CONTINUE

Si dice che f e' continua in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se la f e' continua non solo in x_0 ma in OGNI PUNTO di un intervallo, allora f e' continua sull'intervallo.
In questo caso, la funzione si puo' tracciare "senza staccare la penna dal foglio". (nell'intervallo)

Funzioni elementari continue

- Potenze: $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{2}}$
- Funz. esponenziali: $y = 2^x$, $y = e^x$
- Funz. logaritmiche: $y = \log_3 x$, $y = \ln x$
- Funz. goniometriche: $y = \sin x$, $y = \cos x$

Sono continue nel loro insieme di definizione.

Esempio

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} e^x = 1$$

Quindi
Se la funzione in esame è continua, il limite della f per quel valore specifico, è uguale proprio al valore che la f assume in quel punto.

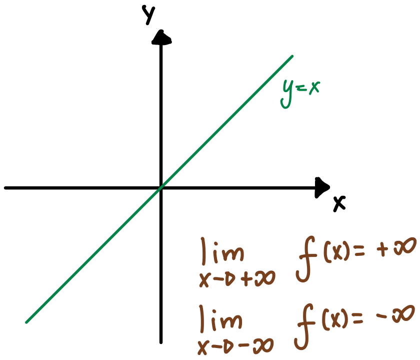
Inoltre tutte le funz che si possono ottenere come somma, prodotto, quoziente e composizione da funzioni elementari, sono continue nel loro dominio naturale.

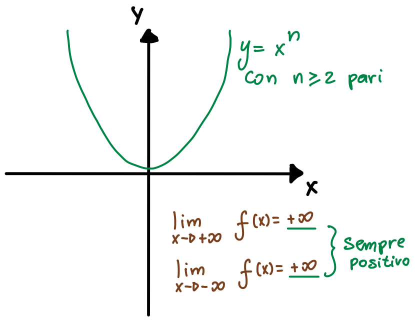
Esempi:

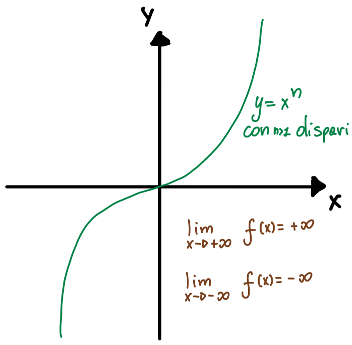
$y = e^{x^2}$ composizione di f potenza ed esponenziale

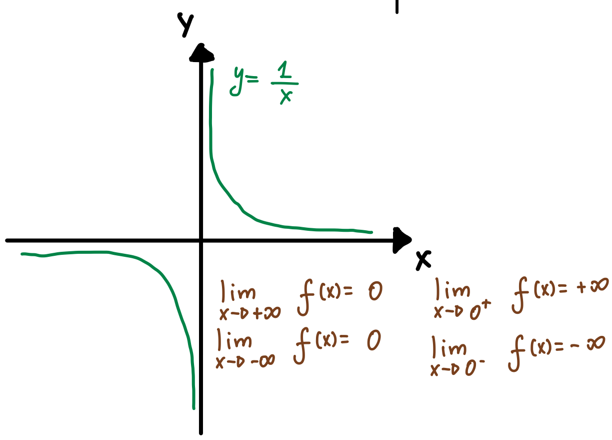
$y = 3x^2 - x - 1$ sottrazione

Funzioni elementari - grafici

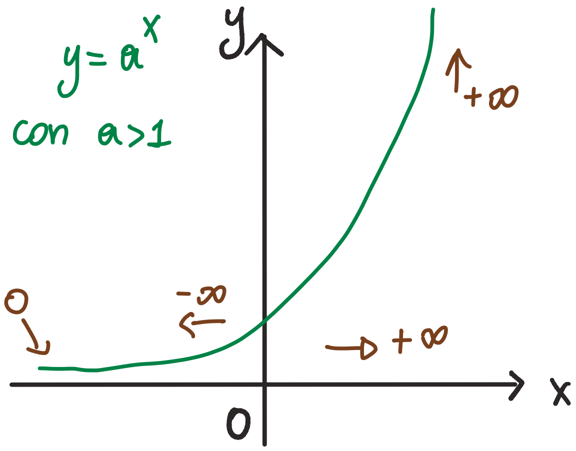






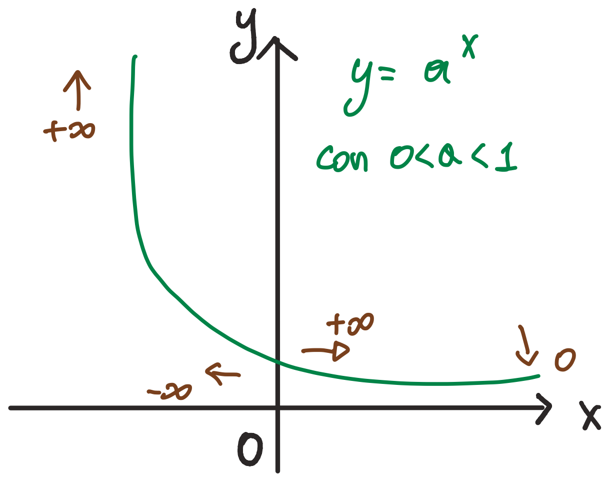


Funzioni esponenziali e logaritmi



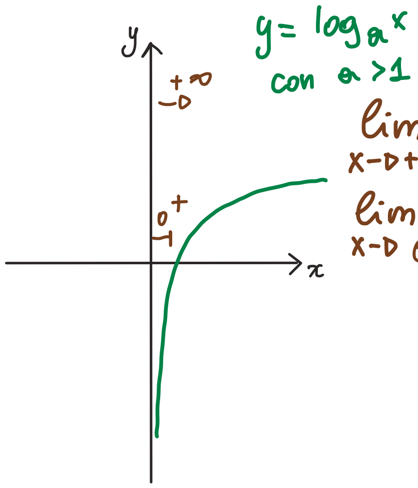
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$



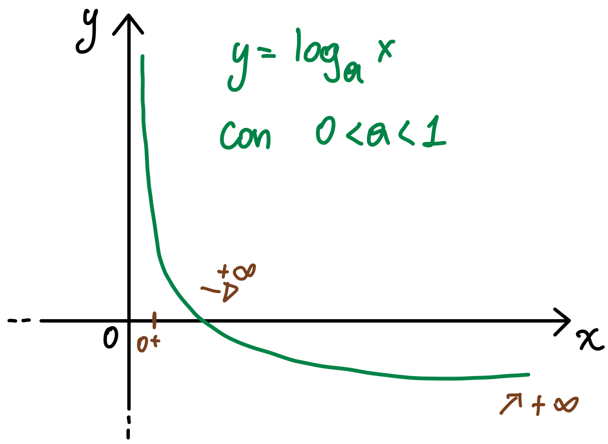
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

* Anche se non sembra, i logaritmi crescono (o decrescono) all'infinito, anche se molto lentamente.

Limiti di f razionali per $x \to x_0$

Caso 1: Quando sostituisco x_0 NON si annulla né numeratore né denominatore:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{1} = 3$$ Non si annulla ✓

Caso 2: Quando provo a sostituire x_0 si annulla il numeratore ma non il denominatore.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x+2} = \frac{1^2-1}{1+3} = 0$$

Sia nel caso 1 che 2, possiamo dare il risultato immediatamente perché le funzioni sono continue.

Caso 3:

a) Si annulla il denominatore ma non il numeratore

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0} \longrightarrow$$

Metodo di risoluzione

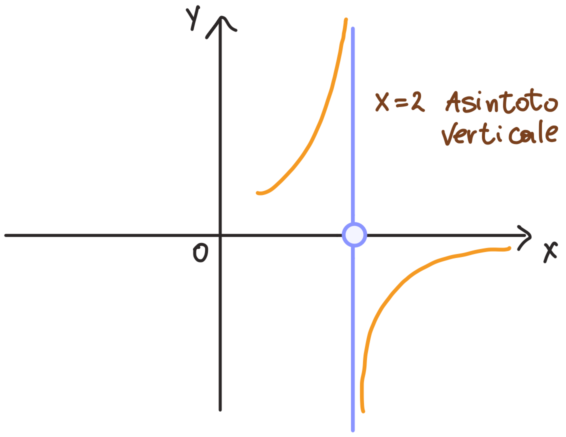
In questo caso dobbiamo separare il limite in limite destro e sinistro.

Destro $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

Sinistro $\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

Se il lim dx e Sx sono diversi, il $\lim_{x \to 2}$ NON ESISTE

$\Downarrow$

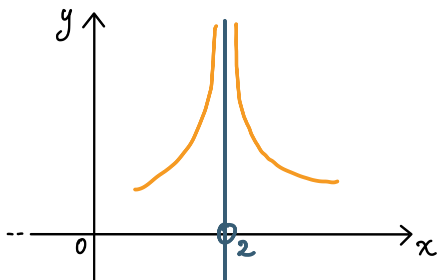


Questo risultato ci dice che la funz quando si avvicina a 2 da Sx tende a $+\infty$, mentre quando vi si avvicina da Dx tende a $-\infty$

$\Rightarrow$ Abbiamo un asintoto

Proviamo a calcolare $f = \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{(2-x)^2} =$ $\begin{cases} \lim_{x \to 2^+} \frac{3}{(0^-)^2} = +\infty \\ \lim_{x \to 2^-} \frac{3}{(0^+)^2} = +\infty \end{cases}$

Siccome i limiti dx e Sx hanno lo stesso risultato, anche il limite di partenza fa $+\infty$.



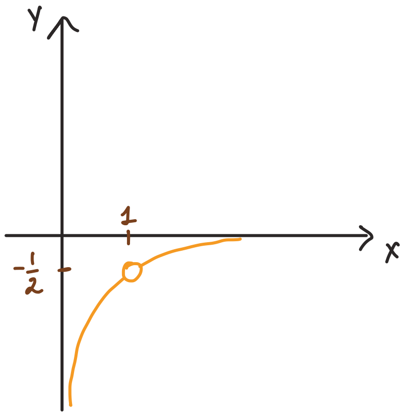
b) Quando, sostituendo, si annullano sia numeratore che denominatore:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

Forma indeterminata.

Metodo di risoluzione: Scomporre e semplificare:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$



Limiti di funzioni razionali per $x \to \infty$

ES: $\lim_{x \to +\infty} \cancel{x^3} - \cancel{5x^2} + 1 = [+\infty - \infty]$ ← Forma indeterminata

In questo caso e' evidente che la x elevata alla 3ª cresca piu' velocemente di quelle elevata alla 2ª, ma come possiamo dimostrarlo?

Mettiamo in evidenza il termine di grado >

$$= \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \cancel{\frac{5}{x}} + \cancel{\frac{1}{x^3}}\right) = +\infty$$

ES: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x - 3}{2x^2 + 5} = \frac{x^{\cancel{3}}\left(1 - \cancel{\frac{4}{x^2}} - \cancel{\frac{3}{x^3}}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \cancel{\frac{5}{x^2}}\right)} = +\infty$$

ES: $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x}{5x^6 - 1} = \frac{\cancel{x^3}\left(1 - \cancel{\frac{4}{x^2}}\right)}{x^{\cancel{6}\,3}\left(5 - \cancel{\frac{1}{x^6}}\right)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

ES: $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} = \frac{\cancel{x^2}\left(2 - \cancel{\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \cancel{\frac{1}{x^2}}\right)} = 2$$

Metodo di risoluzione - pattern

1) Raccogliere il termine di grado massimo sia al num che denom
2) Semplificare
3) A cosa tendono i termini rimanenti?
4) fare i conti

Cosa potrebbe verificarsi?

Quando si risolvono questi limiti possono succedere 3 cose:

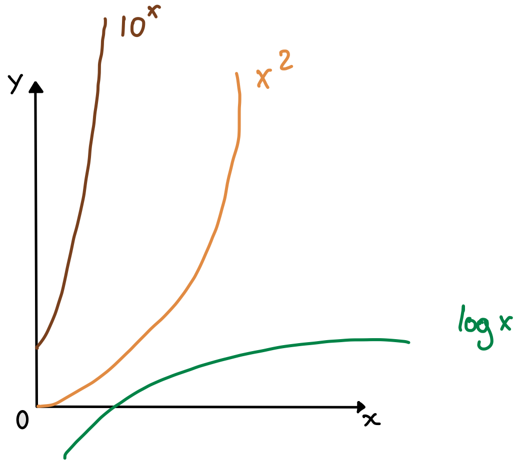
1) funz. razionale avente al num un polinomio di grado > polin. al denom:
   Il risultato sara' $+\infty$ o $-\infty$.

2) $\deg(\text{Denom}) > \deg(\text{Num}) \to$ Il risultato sara' 0.

3) $\deg(\text{Denom}) = \deg(\text{Num}) \to$ Il risultato sara' un numero ℓ.

Limiti con esponenziali

Si procede im maniera simile ai limiti visti prima, ma dobbiamo capire quale elemento tende ad ∞ piu' velocemente.



Scala di crescita:

$$\log_a x \ll x^b \ll c^x \ll x^x$$

ES:

	x = 10	x = 100	x = 1000
$y = \log_{10} x =$	1	2	3
$y = x^2 =$	10^2	10^4	10^6
$y = 10^x =$	10^{10}	100^{100}	10^{1000}

ES:

$$\lim_{x\to+\infty} x^6 - 6^x = 6^x \gg x^6 = \lim_{x\to+\infty} 6^x\left(\cancel{\frac{x^6}{6^x}}_{\to 0} - 1\right) = \infty[-1] = -\infty$$

ES: $$\frac{e^x - x^2}{3x + \ln x} = \frac{e^x\left(1 - \cancel{\frac{x^2}{e^x}}^{\to 0}\right)}{x\left(3 + \cancel{\frac{\ln x}{x}}^{\to 0}\right)} = \frac{e^x}{x} = +\infty$$

! quando portiamo x^2 fuori dalla radice dobbiamo stare attenti a scrivere $|x|$ e non solo x; questo perche' il valore di x sotto radice e' sempre >0. Se avessimo avuto $x\to-\infty$ $|x|$ sarebbe stato $(-x) \Rightarrow +\infty$.

ES: $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{e\log_2 x - 2x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\cancel{\frac{3}{x}}^{\to 0}\right)}}{x\left(e\cancel{\frac{\log x}{x}}_{\to 0} - 2\right)} = \frac{\cancel{|x|}\sqrt{1+0}}{\cancel{x}(0-2)} = \frac{\sqrt{1}}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Limiti di funzioni composte

ES:

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{3}{e^x}\right)$$

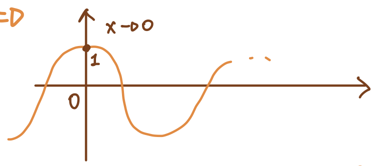
Metodo di risoluzione:

Bisogna innanzitutto capire cosa succede alla funzione piu' interna

1) A cosa tende $\frac{3}{e^x}$ quando $x \to +\infty$ $\Rightarrow$ tende a 0.

2) Cosa succede a $\cos(x)$ quando $x \to 0$?

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{3}{e^x}\right) = 1$$

ES:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x^2+1}{2x^2-x}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = \frac{x^2+1}{2x^2-x} = \frac{\cancel{x^2}\left(1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\cancel{\frac{1}{x}}\right)^{\to 0}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^y = \lim_{x\to+\infty} e^{1/2}$$

$$= e^{1/2} = \sqrt{e}$$

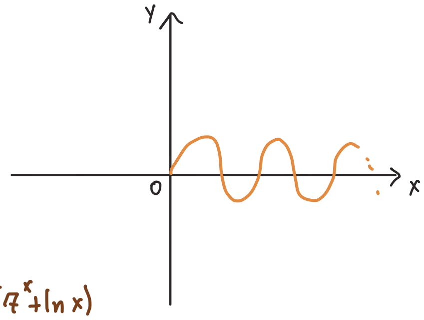
Strumenti per il Calcolo dei limiti

Teorema dei Carabinieri

ES:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\cancel{4^x+\ln x})}{\cancel{5x^2+1}} \quad \begin{matrix}\to +\infty \\ \to +\infty\end{matrix}$$

Il problema: non sappiamo a che tende il seno quando $x \to +\infty$



$\Downarrow$

Se avessimo avuto solo $\lim_{x\to+\infty} \sin(4^x+\ln x)$ avremmo dovuto dire che quel limite NON esiste!

Ad ogni modo, siccome il seno oscilla tra +1 e -1, e' sempre una quantita' finita! Di conseguenza, se dividiamo $\ell/+\infty$, il risultato del limite e' zero.

Perche'? $-1 \leq \sin(4^x+\ln x) \leq 1$, possiamo dividere ciascun membro per $5x^2+1$:

$$\frac{-1}{5x^2+1} \leq \frac{\sin(4^x+\ln x)}{5x^2+1} \leq \frac{1}{5x^2+1}$$

! Siccome quando $x \to +\infty$, $5x^2+1$ tende a $+\infty$ (positiva) lasciamo i versi invariati. Se avessimo avuto una quantita' negativa, avremmo dovuto invertire i versi.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{5x^2+1} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5x^2+1} = 0 \Rightarrow \text{Siccome } 0 \leq \frac{\sin(4^x+\ln x)}{5x^2+1} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(4^x+\ln x)}{5x^2+1} = 0$$

teorema dei Carabinieri o confronto

Utilizzo dei prodotti notevoli

ES:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{3x-12} = \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{3(x-4)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\cancel{x-4}}{3(\cancel{x-4})(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{12}$$

$\to \sqrt{x}^2-2^2$

Limiti Notevoli

Sono delle forme indeterminate ricorrenti di cui ricordiamo il risultato, in modo da poter risolvere limiti piu' complessi.

Limiti fondamentali - Da imparare!

① $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

② $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Limiti risolvibili con ①

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1^2 - \cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

$1^2 = 1$, $\frac{1}{1+\cos x} \to 1/2$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\Rightarrow 1 - \cos x^2 = \sin^2$

Da imparare!

ES: $$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + 4\, tg x}{x\cos x + 2\sin x} = \frac{\cancel{x}\left(2\frac{\sin x}{x} + 4\frac{tg x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{\cos x}{x} + 2\frac{\sin x}{x}\right)}$$ lim notevole $= \frac{6}{3} = 2$

ES: $$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\cos x - \cos^2 x}{2x^2}} = \sqrt{\frac{\cos x(1-\cos x)}{2x^2}} = \sqrt{\underbrace{\frac{\cos x}{2}}_{\to 1/2} \cdot \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to 1/2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Limiti risolvibili con ②

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x} =$ pongo $1/x = y$ $= \ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \ln(e) = 1$

- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} =$ pongo $e^x - 1 = y$ quindi $e^x = 1+y \Rightarrow x = \ln(1+y)$

Inoltre se $x \to 0$, allora anche $y \to 0$ $\Rightarrow \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}$

Otteniamo esattamente il limite precedente ma il num e denom sono invertiti

possiamo quindi dire che il limite tende al reciproco del risultato precedente

$\Leftarrow$ $\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{1} = 1$

In breve

① $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{tg x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$

② $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

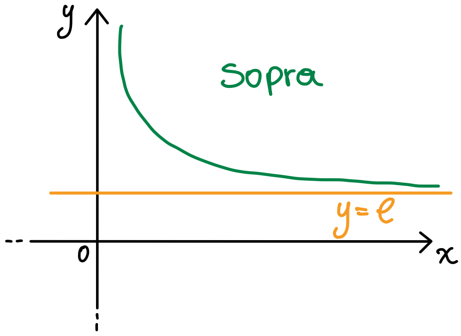
$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

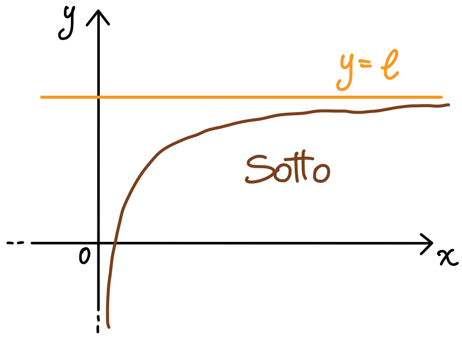
Asintoti orizzontali

Abbiamo un Asintoto orizzontale quando, nel momento in cui la x cresce, la y si avvicina ad un valore preciso (ℓ), quindi:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \implies \text{la retta avrà equazione } y = \ell$$

Potrebbe interessarci anche sapere se la funzione si trova SOPRA o SOTTO l'asintoto (retta).





Per capirlo ci basta sostituire al numero dell'asintoto (ℓ) un numero più piccolo o più grande e vedendo se l'orizzontale relativa interseca o meno la funzione.

Questa pratica potrebbe essere utile ma non è molto usata nello studio di funzione.

ES:

$$f = \frac{3x}{x-1} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(3)}{\cancel{x}(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0})} = 3 \implies y = 3 \quad \text{A. O.}$$

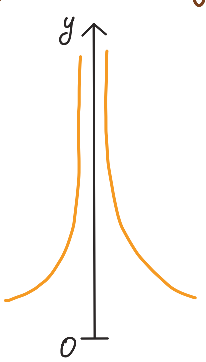
Asintoti Verticali

Abbiamo un Asintoto verticale quando, nel momento in cui la $x \to \ell$, la y cresce ad infinito. Siccome l'asintoto non viene mai intersecato dalla funzione, la funzione non è definita nel punto ℓ.

Quindi: se $\lim_{x \to \ell} f(x) = \pm\infty$, $x = \ell$ è Asintoto Verticale

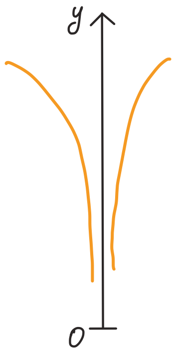
Che tipo di Asintoto?

A differenza degli A.O., i Verticali possono essere di 4 tipi:



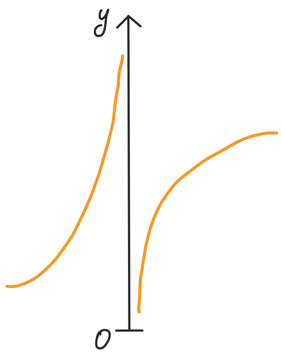
$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to \ell^+} f(x) = +\infty$



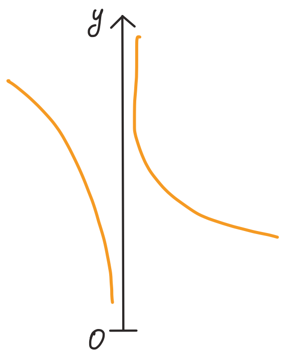
$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \ell^+} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to \ell^+} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to \ell^-} f(x) = -\infty$

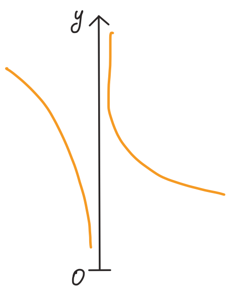
$\lim_{x \to \ell^+} f(x) = +\infty$

ES:

$$f = \frac{3x}{x-1} \qquad \mathbb{D} = x - 1 \neq 0 \text{ per } x \neq 1$$

cerco in $1^{\pm}$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} \frac{3x}{x-1} &= \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \to 1^-} \frac{3x}{x-1} &= \frac{3}{0^-} = -\infty \end{aligned}\right\} \text{Il limite è del tipo:}$$



Equivalenze Asintotiche

Date due f $f(x)$ e $g(x)$, si dicono Asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$, se il $\lim_{x \to x_0}$ del loro rapporto è uguale ad 1. Il simbolo usato è $\sim$ (tilde): $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$.

Possiamo riscrivere tutti i limiti notevoli sotto forma di E.A.:

- $\sin x \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
- $tg\, x \sim x$
- $e^x - 1 \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Inoltre, possiamo sostituire x con una generica $\varepsilon(x)$ che tenda a 0:

- $\sin(5x) \sim 5x \to 0$ per $x \to 0$
- $e^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x} \to 0$ per $x \to \infty$

Proprietà delle eq. Asint.

1) Se per $x \to x_0$ $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$, possiamo dire che $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$ ed in particolare, se i limiti dei prodotti esistono, sono uguali.
Questo ci "autorizza", quando dobbiamo calcolare il lim di un prodotto a sostituire uno o entrambi i fattori con degli altri fattori ad essi Asintoticamente Equivalenti.

2) La stessa cosa di prima vale per i rapporti: se per $x \to x_0$ $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$
$$\Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$$
Anche in questo caso i rapporti sono uguali.

3) Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0 \Rightarrow [f(x)]^\alpha \sim [g(x)]^\alpha$ per $x \to x_0$.

ES
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{(e^{3x}-1)}^{\,\sim 3x} \cdot \cancel{\sin(4x)}^{\,\sim 4x}}{\cancel{tg(2x^2)} \to 2x^2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{3\cancel{x} \cdot 4\cancel{x}}{2\cancel{x^2}} = 6$$
Il risultato è accettabile perché

$$\boxed{\begin{matrix} \dfrac{(e^{3x}-1)\cdot \sin(4x)}{tg(2x^2)} & \sim & \dfrac{3x \cdot 4x}{2x^2} \\ \lim f(x) & = & \lim g(x) \end{matrix}}$$

ES
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{\sqrt{1-\cos x^2}} \to \sim \sqrt{\frac{1}{2}x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2}{\cancel{\ln(1+2x)} \to \sim 2x} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x^2}{2x} = \frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}\sqrt{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{0}{e} = 0$$

O piccolo

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice che $f(x)$ e' o piccolo di $g(x)$ se:

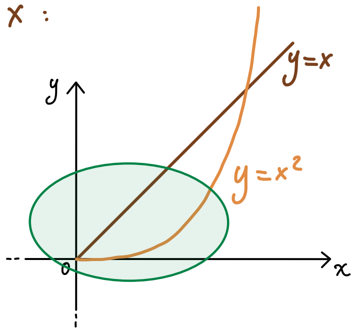
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si scrive quindi: $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

Inoltre, dire che $f(x)$ e' o piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$ equivale a dire che $f(x)$ e' infinitamente piccola, rispetto a $g(x)$

ES: $f = x^2 = o(x)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$

Non sembra, ma per valori piccoli $x^2 < x$:



ES: $x^3 = o(x)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}} = 0$

Attenzione!

La notazione $o(x) = o(f)$ indica semplicemente una funzione il cui limite del rapporto con f $(o(f))$, fa 0 nel punto in esame.

Proprieta'

- $o(x) \pm o(x) = o(x)$ NON ZERO! e' un po' come fare $-\infty - \infty$.
- $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x)$
- $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $x^n \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $x^n = o(x^m)$. quando $x \to 0$, x^n e' un o piccolo di x^m, se $n > m$

  $\hookrightarrow$ Questo vuol dire che le potenze con esponente maggiore sono degli o piccoli delle potenze con gli esponenti piu' piccoli:

  ES: $x^3 = o(x) \Rightarrow x^3 \ll x$ in $x \to 0$

  $x^2 = o(x) \Rightarrow x^2 \ll x$ in $x \to 0$

- Deduciamo quindi che $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^n)$ se $n < m$

  $\hookrightarrow$ "Sopravvive" il termine con esponente minore!

Eq. Asintotiche ed o piccolo

Per $x \to x_0$ $\quad f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$

Questo significa che le due funzioni sono A. equivalenti se e solo se differiscono per un termine che diventa trascurabile nel momento in cui facciamo il limite per $x \to x_0$.

Possiamo quindi dire che:

- $\sin x \sim x \to \sin x = x + o(x)$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x \to 1 - \cos x = \frac{1}{2}x + o\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ Si può omettere
- $tg\, x \sim x \to tg\, x = x + o(x)$
- $e^x - 1 \sim x \to e^x - 1 = x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \to (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(\cancel{\alpha} x)$
- $\ln(1+x) \sim x \to \ln(1+x) = x + o(x)$

ES: $\sin x^3 + 3x^4 + \ln(1+2x^5) = x^3 + \underbrace{o(x^3) + \cancel{3x^4} + \cancel{2x^5} + o(x^5)}_{\text{Rimane solo il più piccolo}} = x^3 + o(x^3)$

$\ll x^3 \quad \ll x^3$

Formula di Taylor con resto di Peano

Questa formula ci consente di approssimare tutte le funzioni sufficientemente regolari con dei Polinomi.

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $(-\delta, \delta)$ (Delta) per qualche $\delta > 0$ e supponiamo che:

- $f(x)$ sia derivabile $n-1$ volte nell' intervallo
- Esista la derivata n-esima perlomeno in $x = 0$

Se soddisfiamo i requisiti

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + o(x^n)} \quad \text{per } x \to 0$$

$T_n(x)$ e il polinomio di grado $\leq n$ dato dalla formula:

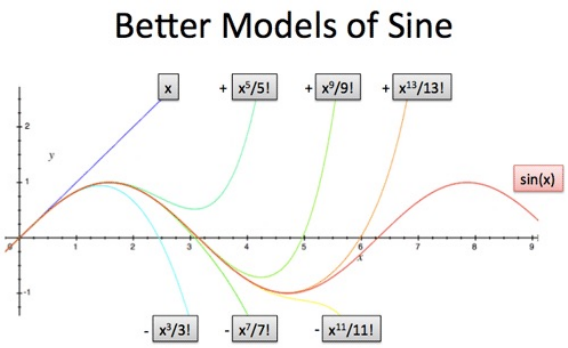
$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$T_n(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} \cdot x^k}$$

In poche parole...

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Funzione da approssimare}} = \underbrace{T_n(x)}_{\text{Polinomio Approssimante}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{ERRORE di Approssimazione}}$$

Capiamo che l'err di appr. e' PICCOLO, essendo un o piccolo di x^n; queste quantita' diventa sempre piu' trascurabile al crescere di n.



La formula di taylor non fa altro che approssimare, cioe' "emulare" una funzione tramite dei polinomi.

Quando usiamo un n troppo piccolo, l'errore e' Alto, ovvero non abbiamo una buona approssimazione. In questo esempio si approssima $\sin x$, e come si puo' vedere, x ha una cattiva approx, mentre $\frac{x^{13}}{13!}$ ha una approx migliore.

Approssimare $f(x) = \sin x$

siccome $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$

Usando $f(x) = \sin x$, $a = 0$ $\Rightarrow$ $\sin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3$

tabella delle derivate:

$f(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\sin x$
$f'''(x) = -\cos x$
$f''''(x) = \sin x$

Si ripetono uguali

Riscrivo la serie:

$$\Rightarrow \sin x = \sin(0) + \frac{\cos 0}{1} + \frac{-\sin 0}{2} x^2 + \frac{-\cos 0}{6} x^3$$

$$= 0 + \frac{1}{1} x + 0 - \frac{1}{6} x^3 + 0 + \frac{1}{5!} x^5 + 0 - \frac{1}{7!} x^7 \dots$$

Quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1}}_{\text{Alterna il segno}} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

Potenze dispari

Fattoriale dispari

Usare taylor per risolvere i limiti

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + 2x^5}{3x^3}$ Il sin da problemi $\to$ taylor

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

per $n=3$

$$\sin x = 0 + (-1)^2 \cdot \frac{x}{1} + (-1)^3 \cdot \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$$

Per riscrivere $\sin x$ dobbiamo aggiungere anche l'errore:

$$\ldots = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \underbrace{o(x^3)}_{\text{ERRORE}} - \cancel{x} + \cancel{2x^5}}{3x^3}$$

$2x^5$ mangiato da $o(x^3)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{3x^3} = -\frac{1}{18} + \cancel{\frac{o(x^3)}{3x^3}}^{\to 0} = -\frac{1}{18}$$

Approssimare $f(x) = 3\sin x + \cos x$ per $n=4$

Sostituiamo direttamente gli sviluppi di IV ordine di $\sin x$ e $\cos x$

$$= 3\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right] + \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right] = 1 + 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Limiti con taylor

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{tg\,x - x}{e^x - 1 + \ln(1-x)}$

Sviluppo per $tg\,x$:

$$tg\,x = x + \frac{x^3}{3} + \underbrace{\frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9}_{\text{trascurabili per } x\to 0} + o(x^{10})$$

$$\Rightarrow tg\,x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Inoltre (denom)

$$[e^x - 1] + [\ln(1-x)] = \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] + \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] = \left[-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{3} + \cancel{\frac{o(x^3)}{x^3}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{6} + \cancel{\frac{o(x^3)}{x^3}}^{\to 0}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} \cdot (-6) = -2$$

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 (e^{\sin x} - 1 - x)}{\sin^2 x - x^2}$

- $\sin x = (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ quindi $\sin x^2 = x^2 + o(x^2)$
- $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ Sostituiamo: $x \to \sin x$ $\underset{n=2}{e^{\sin x}} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + o(\sin^2 x)$

Siccome $\sin x = x + o(x^2) \to e^{\sin x} = 1 + (x + o(x^2)) + \frac{1}{2}(x + o(x^2))^2 + o((x + o(x^2))^2)$
$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

- $\sin^2 x - x^2 = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$

Quindi: $e^{\sin x} - 1 - x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Otteniamo quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 (e^{\sin x} - 1 - x)}{\sin^2 x - x^2} = \frac{x^2 + o(x^2) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{\cancel{x^4}\left[\left(1 + \cancel{\frac{o(x^2)}{x^2}}^{\to 0}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{o(x^2)}{x^2}}\right)\right]^{\to 0}}{\cancel{x^4}\left(-\frac{1}{3} + \cancel{\frac{o(x^4)}{x^4}}^{\to 0}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{3}{2}$$

Ordine di infinitesimo e parte principale

Se, per $x \to 0$, $f(x) \sim Kx^\alpha$ (con $\alpha > 0$)

In questo caso, $f(x)$ e' un infinitesimo di ordine α, e Kx^α e' la sua parte principale

ES: $f(x) = \sin x$ per $x \to 0$, $\sin x \sim x \Rightarrow f(x)$ e' un infinitesimo di ordine 1, con p. principale x

ES: $f(x) = \cos x - 1$ per $x \to 0$, $\cos x - 1 \sim \underbrace{-\frac{1}{2}x^{2}}_{Kx^\alpha,\ \alpha = 2} \Rightarrow f(x)$ e' un inf. di ordine 2, con p.p. $-\frac{1}{2}x^2$

Come risolviamo quando non abbiamo l'eq. As. gia' pronta?

$$f(x) \sim Kx^\alpha \iff f(x) = Kx^\alpha + o(x^\alpha)$$

- Due f sono A.Eq. (si comportano allo stesso modo) se differiscono solo per un termine che diventa trascurabile

$\Rightarrow$ Possiamo usare gli sviluppi di taylor per determinare la parte principale, e quindi l'ordine.

ES: $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x$

* Se vogliamo sapere come si comporta $f(x)$ in prossimita' di $x=0$, dobbiamo usare gli sviluppi di Taylor.

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} \cdot x^k}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

quindi $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

per $x \to 0$, $f(x) = \left[\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}x} - \cancel{\frac{1}{8}x^2} + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right] - \left[\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}x} - \cancel{\frac{1}{8}x^2} - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right] \cancel{-x} = \underline{\frac{x^3}{8} + o(x^3)}$

Quindi possiamo dire che $f(x)$ e' un infinitesimo di ordine 3 avente come parte principale $\frac{1}{8}x^3$.

Osservazioni

1) Il limite di un rapporto tra quantita' infinitesime NON CAMBIA aggiungendo o togliendo agli infinitesimi Dati, degli infinitesimi di ordine superiore.

ES: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x^2 + 2x^5}{x + \sin(x^2)}$

Numeratore: $\sin x \sim x$, quindi e' un infin. di ordine 1; per questo motivo x^2 e $2x^5$, di ordine $2, 5 > 1$, sono trascurabili.
Denominatore: $\sin(x^2) \sim x^2$, e' di ordine 2; siccome $2 > 1$, $\sin(x^2)$ e' trascurabile rispetto ad x.

Possiamo quindi dire che: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x^2 + 2x^5}{x + \sin(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) Conoscere la parte principale puo' essere utile per tracciare il grafico di una funzione nell'intorno di $x=0$

ES: $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} - 1$ in prossimita' di $x=0$ $= e^x \cdot (x+1)^{-1/2} - 1 = [\cancel{1} + x + o(x)] \cdot [\cancel{1} - \frac{x}{2} + o(x)] - 1 = \frac{x}{2} + o(x) \sim \frac{x}{2}$

Per cui, possiamo dire che il grafico di $\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ in prox di 0, sara' molto simile a quello di $f(x) = \frac{x}{2}$

Dalle lezioni del Prof

Criterio del rapporto per successioni

Lez 8, 00:47

Sia a_n una succ a termini positivi, ovvero che / $a_n > 0 \ \forall n$.

posto $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow$ se $\lim_n b_n = b < 1$, allora il $\lim_n a_n = 0$

Questo criterio ci dice che se consideriamo il rapporto b_n (ottenuto da a_n), ed il suo limite tende ad un numero minore di 1, la successione tende a 0.

Il criterio ci serve per dimostrare i seguenti casi:

Prop: valgono i limiti:

Con $d>0$, $a>1$

$$\lim_n \frac{\log n}{n^d} = \lim_n \frac{n^d}{a^n} = \lim_n \frac{a^n}{n!} = \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$$

Tutti uguali a zero!

Che vuol dire?

Dire che $\lim_n \frac{\log n}{n^d} = 0$, significa dire: Il denominatore tende ad infinito più velocemente del logaritmo.

Possiamo quindi dire: $\log n < n^d < a^n < n! < n^n$

cresce lentamente ($\log n$) — cresce velocemente (n^n)

Dimostriamo che $\lim_n \frac{n^d}{a^n} = 0$ per il criterio visto prima, calcoliamo $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\Rightarrow b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} =$ Nel nostro caso $\frac{n^d}{a^n}$ è a_n stesso $\Rightarrow \dfrac{\frac{(n+1)^d}{a^{n+1}}}{\frac{n^d}{a^n}}$ (a_{n+1}; succ a_n) $= \frac{(n+1)^d}{a^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{a^n}}{n^d}$ si capovolge

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^d}{a \cdot n^d} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^d$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{a} \left(\frac{n+1}{n}\right)^d = \frac{1}{a}$$

rapporto di polinomio dello stesso ordine $\Rightarrow$ Tende al grado max $\Rightarrow 1$

$a>1$

nel criterio di prima dicevamo che se $\lim_n b_n = \ell < 1$ quindi

$$\lim_n \frac{n^d}{a^n} = 0$$

Dimostriamo $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$ (a_n) $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \frac{a^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{a^n}}$ perché? $= \frac{a}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow \lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$

Perché? $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Dimostriamo $\lim_n \frac{n!}{n^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cancel{!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{\cancel{(n+1)} \ n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n$

$$= \left(\frac{1}{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right)^n =$$ Ci ricorda un lim notevole $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^n} = \frac{1}{e} \Rightarrow \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$$

$e > 1$

Es: $\lim_{n\to\infty} e^n - 2^n = +\infty - \infty =$ nei polinomi si metteva in evidenza il grado max $\to$ la stessa cosa vale in questo caso $\to$ Siccome sono due esponenziali, "vince" quello con la base maggiore.

$\Rightarrow$ Mettiamo in evidenza e^n: $\lim_{n} e^n\left(1-\underbrace{\frac{2^n}{e^n}}_{\to 0}\right) \sim e^n = +\infty$
↑ è asintotica

Es: $\lim_{n} 2^n - n! = \lim_{n} n!\left(\underbrace{\frac{2^n}{n!}}_{\to 0} - 1\right) \sim n! = -\infty$

ES: $\lim_{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ • Ricorda il limite notevole $\left(\frac{1}{x}+1\right)^x$ ma per usare un lim notevole, dobbiamo ricondurci esattamente a quello $= \left(1+\frac{1}{-n}\right)^n$ Dobbiamo avere lo stesso valore sia al denom che all'esponente!

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{-n}\right)^{(-1)(-n)}$ deve sparire $= \left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = [e]^{-1} = e^{-1}$

ES: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{e^{-1}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}} = \frac{1}{e^{-1}} = e$

Stesse basi $\to$ somma

ES: $\lim_{n} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n$ $\qquad \frac{n^2+n}{n^2-n+2} = 1+\frac{1}{a_n} \to e$

$\Rightarrow$ Consideriamo a_n una incognita e la ricaviamo: $\frac{1}{a_n} = \frac{n^2+n}{n^2-n+2} - 1 = \frac{1}{a_n} = \frac{\cancel{n^2}+n\ \cancel{-n^2}+n-2}{n^2-n+2}$

$= \frac{1}{a_n} = \frac{2n-2}{n^2-n+2} \Rightarrow a_n = \frac{n^2-n+2}{2n-2}$ Di conseguenza $\lim_{n} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n = \lim_{n}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+2}{2n-2}}\right)^n$

Quindi? Possiamo applicare $1+\frac{1}{a_n} \to e$ solo se $a_n \to \infty \Rightarrow$ possiamo per applicare il limite, però, a_n deve comparire anche all'esponente.

$\Rightarrow \lim_{n} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{n\cdot\frac{a_n}{a_n}} = \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}}_{\to e}\right]^{\frac{n}{a_n}} = e^{\frac{n\cdot 2n-2}{n^2-n+2}} = e^{\frac{2n^2-2}{n^2-n+2}}$ $\to \sim \frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} = 2$ $\longrightarrow e^2$

Altro limite notevole $\quad \lim_{x \to} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad$ dove $\quad a_n \to 0$

ES: $\lim_{n} \underset{\to \frac{1}{n}}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\left(\cancel{\frac{1}{n}}\right)^{\to 0}}{\cancel{\frac{1}{n}}_{\to 0}} = 1$

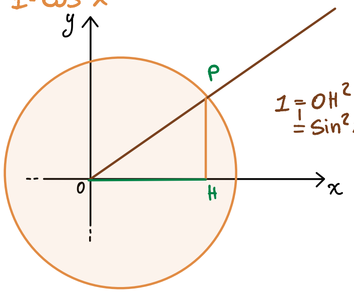
ES: $\lim_{n} n\, tg\left(\frac{1}{n}\right) \qquad tg = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow n \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}^{\to 1}_{\to 0} = 1 \qquad \cos(0) = 1$

ES: $\lim_{n} n^2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\left(1 + \cos\frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \cos\frac{1}{n}\right)} = n^2\left(\underbrace{1 - \cos^2\frac{1}{n}}_{\to \sin^2 x}\right) \cdot \frac{1}{1 + \cos\frac{1}{n}} = n^2\left(\sin^2\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{1 + \cos\frac{1}{n}}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\Rightarrow \sin^2 = 1 - \cos^2 x$

$\Rightarrow \cancel{\frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}}^{\to 1} \cdot \frac{1}{1 + \cancel{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}} = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)^2$



$1 = OH^2 + HP^2$
$= \sin^2 x + \cos^2 x$

ES: $\lim_{n} n\left(\underbrace{\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \cancel{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}^{\to 1} \cdot \cancel{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}^{\to 0} = 0$

ES: $\frac{tg^2\left(\frac{1}{n}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}}{\underbrace{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}_{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{\cancel{\left[1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]} \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\cancel{\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} = \frac{1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}$

$= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} + \frac{\cancel{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}{\cos^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\underset{\to 1}{\cos^2}\left(\cancel{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)} + \frac{1}{\underset{\to 1}{\cos}\left(\cancel{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)} = 1 + 1 = 2$

Lezione 9

Proposizione: Se $(a_n)_n$ è una succ. limitata e $(b_n)_n$ è una succ. infinitesima, allora $a_n \cdot b_n \to 0$

ES: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sin(n)$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\sin(n)}_{\text{è limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{è infinitesima}} \Rightarrow \underbrace{(\text{oscillante}_{+1,-1})}_{\text{numero}} \cdot 0 = 0$

$\frac{1}{n} \to 0$; $\sin(n) \to ? \to +1,-1,+1\ldots$ Indet

ES: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{3n^2+1} \sim \frac{\cancel{n}(1+0)}{n^{\cancel{2}}(3+0)} = 0 \Rightarrow (\text{oscillante}_{+1,-1}) \cdot \text{Infinitesimo} = 0$

$(-1)^n \to$ Oscillante limitata

Successioni crescenti

a_n è crescente se e solo se $a_m \leq a_{m+1} \;\forall m$.

Se con le funzioni dicevamo che una f. è crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, lo stesso vale anche per le successioni; $n < n+1 \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$

a_n è decrescente se $n < n+1 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$

Teorema sul limite delle successioni monotone

Ogni succ. monotona è regolare, ammette limite $\to$ finito o infinito. $\Rightarrow$ Non può capitare che una succ monotona sia indeterminata!

Se la succ è monotona limitata, essa converge.

Dim 00:11 Lez 9

ES: $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ è conseguenza di due risultati:

1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente $\Rightarrow$ il suo limite esiste (può essere sia finito che infinito)

2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è limitata $\Rightarrow$ $2 < a_n < 4 \quad \forall n$ si dimostra

Per il teorema delle succ monotone, la succ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge (perchè essendo limitata non può divergere) poichè converge, convergerà ad un limite compreso tra $\underbrace{2 \text{ e } 4}$, (per il teorema dei carabinieri)

anche il num di nepero e è compreso tra 2 e 4

~ 45:00

Serie numeriche

Problema: Sommare un numero infinito di termini $\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_n + \dots = ?$

Caso in cui abbiamo termini finiti: $a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = ?$

finché abbiamo dei termini finiti, possiamo computare la somma.

2 termini $= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

3 termini $= 1 + 1/4 + 1/9 = \frac{36+9+4}{36} = \frac{49}{36}$

...

Però, la serie $a_n = \frac{1}{n^2}$ è finita!

00:48

Def: Sia $(a_n)_m$ una succ num.; Consideriamo la succ: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ...
Questa succ è detta succ delle somme parziali di a_n. Questo perché il termine S_n è composto da somme parziali di a_n.
Ogni termine di S_n è ben determinato, poiché sono tutte somme finite.

Def: Si dice che la serie numerica, ovvero $a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è:

Punto di arrivo

si somma l'argomento

Punto di partenza indice che cambia

è $\left.\begin{array}{l}\text{Convergente} \\ \text{Divergente} \\ \text{Indeterminata}\end{array}\right\} \overset{\text{Se e solo se}}{\Longleftrightarrow}$ La succ S_n (Somme parziali) è $\left\{\begin{array}{l}\text{Convergente} \\ \text{Divergente} \\ \text{Indeterminata}\end{array}\right.$

In parole povere, dirò che la serie Converge, se la Successione S_n convergerà.

⋮

$\rightarrow$ Se $\lim_{n\to\infty} S_n = \overset{\text{numero}}{\ell}$ finito, allora ℓ si dirà Somma della serie, e si scrive:

$$\boxed{\sum_n a_n = S} \longleftarrow \text{Converge}$$

Se $\lim_{n\to\infty} = \pm\infty$, la serie Diverge, e si scrive:

$$\boxed{\sum_n a_n = \pm\infty}$$

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$

1) Dobbiamo Scrivere la Successione delle somme parziali:
Si usa anche nel caso finito

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ Si dimostra essere questa somma.

2) Per la definizione, dobbiamo calcolare il limite di S_n:

$\longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ Converge!

1:05

Serie Telescopiche

Sono quelle serie il cui termine generale può essere scritto nella forma $\sum_n (a_n - a_{n-1})$.
Si dimostra che questo tipo di serie converge $\Leftrightarrow$ a_n converge.

Calcoliamo

$$S_1 = a_1 - a_0 = a_1 - a_0$$
$$S_2 = (\cancel{a_1} - a_0) + (a_2 - \cancel{a_1}) = a_2 - a_0$$
$$S_3 = (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (a_3 - \cancel{a_2}) = a_3 - a_0$$
$$\dots$$
$$S_n = (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + \dots + (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}}) + (a_n - \cancel{a_{n-1}}) = a_n - a_0$$

con succ

con prec

Troviamo che la serie $\sum_n a_n - a_{n-1}$ Converge $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ S_n converge $\overset{\text{se e solo se}}{\Leftrightarrow}$ $a_n - a_0$ converge;
e si ha che $\sum_n a_n - a_{n-1} = \lim_n a_n - a_0$

Es: $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ Può essere vista come una serie telescopica? $\rightarrow$ Si può scrivere come una serie il cui termine generale è fatto da $a_n - a_{n-1}$?

$$= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \overset{mcm}{=} \frac{(\cancel{n}+1) - \cancel{n}}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

possiamo quindi scriverla come: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

a_n

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \text{Converge ad} \quad a_1 - \lim a_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1$$

Es: $\sum_n \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \overset{mcm}{=} \frac{\cancel{2n}+1 - \cancel{2n}+1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ $\rightarrow$ non troviamo il termine generale ma quasi

Possiamo dire che la serie è uguale a: $= \sum_n \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$

Per togliere il 2 al num.

$a_n = \frac{1}{2n-1}$ $\quad = \frac{1}{2}\left[a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5} - \lim \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{1}{10}$

Fine lez 9.

Non so quanto questo Es sia giusto il prof ha fatto un bordello (?)

Definizioni utili Deprecated! Vedi pg successive !

Def generale: Sia q un numero reale. Si dice Serie Geometrica di ragione q la Serie:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}$$

Grazie a q possiamo dedurre molte informazioni:

- Se il modulo della ragione q è <1, ovvero se $-1 < q < 1$, la serie converge ed ha per somma: $\frac{1}{1-q}$
- Se la ragione q è ≤ -1, la serie è irregolare
- Se la ragione q è ≥ 1, la serie diverge positivamente

Somma tra serie

Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie numeriche, la loro somma e' la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$

i) Se le due serie convergono, anche $\sum a_n + b_n$ converge.

ii) Se a_n converge e b_n diverge (oviceversa) allora $\sum a_n + b_n$ Diverge.

ES: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n n^3 + n^2 + 1}{n^5} \right) \leftarrow$ In questo caso e' molto difficile studiare la serie così com'e'

$$= \frac{(-1)^n n^3 + n^2 + 1}{n^5} = \frac{(-1)^n n^3}{n^5} + \frac{n^2+1}{n^5} \Rightarrow \sum \left[(-1)^n \frac{1}{n^2} \right] + \sum \left[\frac{n^2+1}{n^5} \right]$$

- $\sum \left[(-1)^n \frac{1}{n^2} \right]$ e' una serie Armonica (pg succ) con $\alpha = 2 > 0 \Rightarrow$ Converge

- $\sum \frac{n^2+1}{n^5}$ e' una serie a termini pos

Prodotto di a_n con un numero c:

Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e' divergente, e $c \neq 0$ allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ Sara' divergente.

6.6 Verificare che la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$$

è divergente.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

Questa serie e' di tipo Armonico, quindi Converge per $\alpha > 1$, siccome n^1 $1 \leq 1$ la serie diverge.

In questo esempio abbiamo la serie armonica che vale $\frac{1}{n}$; per il principio appena visto, se $1/n$ diverge, anche $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$ diverge.

a_n $\quad c \neq 0$

Serie Mengoli

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{Quindi} \quad S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \overset{\text{Si dimostra}}{=} \frac{n}{n+1}$$

Calcoliamo la somma:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} \quad \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{0})} = 1 \text{ Converge}$$

Consideriamo $a_n = (-1)^n = -1+1-1+1 \ldots + (-1)^n$ Siccome $\lim_{n \to +\infty} (-1)^n = \nexists$ Il lim per $+\infty$ di a^x con $a \leq -1$ $\nexists$

Siccome il suo lim $\nexists$, allora S_n e' indeterminata.

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e' convergente, allora la successione a_n tende a zero per $n \to +\infty$

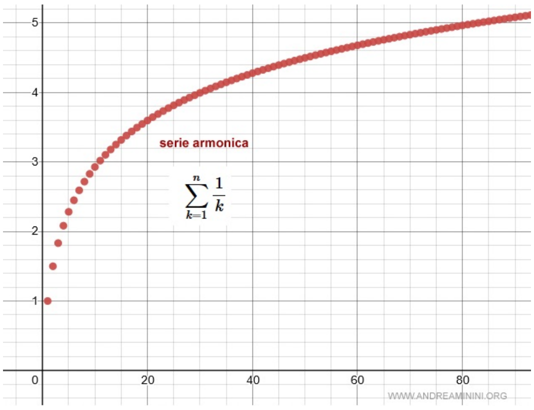
Deprecated! Guarda le pg succ.

Serie Armoniche

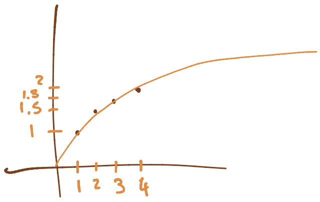
La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è detta serie armonica

Forma generalizzata

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ Converge se $\alpha > 1$; Diverge pos se $\alpha \leq 1$ $\Big\}$ per $\alpha = 1$ abbiamo la serie armonica



1) $1 = 1$
2) $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \sim 1.5$
3) $1 + 1/2 + 1/3 = 11/6 \sim 1.8$
4) $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = \frac{25}{12} \sim 2$



Serie Armonica a segni alterni

Sia α un $\mathbb{R} > 0$

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^\alpha}$ Converge per $\alpha > 0$

Serie Geometrica di ragione h ← base esponenziale.

lez 10

Calcolare il comportamento di una serie non è semplice; non c'è un criterio che vale in ogni caso, ma ci sono TIPOLOGIE di serie (ad esempio la telescopica). A seconda dei casi si applicano diversi metodi di risoluzione.

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n = 1+h+h^2+h^n \qquad \text{dove } h \in \mathbb{R}$$

Forma generale

- Le serie geometriche partono sempre da $\emptyset$!

ES: $h=2 \Rightarrow \sum 2^n = 1+2+4+8+\dots$

ES: $h=-3 \Rightarrow \sum -3^n = 1-3+9-27+\dots$

Problema: per quali valori la serie $\begin{cases} \text{Diverge} \\ \text{Converge} \\ \text{indet} \end{cases}$?

Per discutere la convergenza di una serie, per definizione, dobbiamo studiare la successione delle somme parziali; se possibile, scriverla.

$S_n = 1+h+\dots+h^n$ Da $(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ deduciamo che:

$$a^{n+1}-b^{n+1} = (a-b)(a^n+a^{n-1}b^1+a^{n-2}b^2+\dots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n)$$

diminuisce l'esp di a, ed aumenta quello di b

diminuisce l'esp di b, ed aumenta quello di a

Prendiamo $a=1$, $b=h$

$$1-h^{n+1} = (1-h)\underbrace{(1+_1h+_1h^2+\dots+h^n)}_{S_n}$$

Ci accorgiamo che è esattamente il termine generale delle succ. parz. S_n. Di conseguenza:

$$\boxed{S_n = \frac{1-h^{n+1}}{1-h}}$$

Per il carattere della serie, ci basta calcolare il lim di S_n:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-h^{n+1}}{1-h} = \text{Dipende da } h:$$

i) $h>1$

$$\lim \frac{1-h^{n+1}}{\underbrace{1-h}_{\text{e' negativo per } h>1}} \quad (h^{n+1}\to+\infty,\ 1-h^{n+1}\to-\infty) \quad = \frac{-\infty}{-x} = +\infty$$

numero generico negativo

per $h>1$ la serie diverge.

ii) $h=1$ In particolare facciamo riferimento solo al termine $\frac{1-\boxed{h^{n+1}}}{1-h}$ In quanto e' l'unico che dipende da n

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} 1^{n+1} = +\infty \text{ Diverge}$$

iii) $-1<h<1$

$h=\frac{1}{2}$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ Converge

$-1<h<1$

$h=-\frac{1}{3}$ $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ ($(-1)^{n+1}\to x$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\to 0$)

Oscillante limitata

Allora $\lim_n S_n = \frac{1-0}{1-h} \Rightarrow \sum_n h^n$ converge a $\frac{1}{1-h}$ se $-1<h<1$

iiii) Se $h\leq-1$

$h=-2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(-2)^{n+1} = (-1)^{n+1}(2)^{n+1}$ ($(2)^{n+1}\to+\infty$) $\Rightarrow$ Non Esiste!

Oscillante limitata

ES: $\sum_n 5^n$ ragione $= 5 > 1 \Rightarrow$ Diverge perché?

$$\sum_n 5^n = \frac{1-5^{n+1}}{\cancel{1-5}} = \frac{-\infty}{-4} = +\infty$$ positivamente.

ES: $\sum \left(\frac{1}{5}\right)^n \Rightarrow$ ragione $-1<\frac{1}{5}<1 \Rightarrow$ Converge ad $\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$ Perché?

$$\sum_n \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = \lim_n \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

00:48

Serie Armonica

È detta Armonica perché rappresenta le armoniche di quando si pizzica una corda.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} = +\infty$$ Diverge

I termini che sommiamo diventano sempre più piccoli.
La serie cresce, anche se non velocemente quanto la geometrica.

Serie Armonica Generalizzata

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}}$$

! Non varia l'esponente (come nella serie geometrica) ma esso viene fissato; varia però la base n.

$S = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots+\frac{1}{n^p}$ Pongo $p=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\dots$

Problema: Studiare il comportamento della serie al variare di p.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{Converge se } p>1 \\ \text{diverge se } p\leq 1 \end{cases}$$

ES: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ $p=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ Diverge

Perché? Più velocemente cresce il denominatore (e quindi aumenta il valore della frazione), "più la serie converge". Di conseguenza $\frac{1}{n^2}$ decresce più velocemente di $\frac{1}{\sqrt{n}}$, e quindi i termini che sommiamo (nel caso $\frac{1}{n^2}$) diventano più piccoli più velocemente, e quindi possiamo quantificarli.
Nel caso di $\frac{1}{\sqrt{n}}$, i termini decrescono meno velocemente, e quando li sommiamo all'infinito la serie diverge.
Il "punto di rottura" è proprio $p=1$; infatti, per $p=1$, abbiamo la S. Armonica, che infatti diverge sempre.

1:03

Qualche considerazione

Spesso calcolare la somma di una serie è molto difficile, per questo motivo, è solito capire solo se la serie Converge o Diverge, senza preoccuparsi di capire la somma.

Condizione Necessaria per la convergenza

Se una serie a_n converge $\Rightarrow \lim a_n = 0$

Per studiare se una serie converge o meno, calcoliamo la successione (limite) della somma parziale S_n;
Questo concetto è importante perchè a_n lo abbiamo fin da subito (non dobbiamo Trovare la ridotta)

ES: $\sum_n \frac{n}{n^2+1}$ a_n Possiamo dire se la serie converge fin da subito.

Di conseguenza, il termine generale è infinitesimo. Si deve notare che questa è una condizione Necessaria, e non Sufficiente! Di conseguenza non possiamo dire che una serie a_n il cui $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, convergerà sicuramente.
Possiamo però affermare con sicurezza che se $\lim a_n \neq 0$, a_n Non converge.

Osservazione: Se $\lim a_n = 0 \Rightarrow$ Non possiamo affermare nulla di certo.

Se $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow$ La serie Diverge.

Capiamo quindi che questa condizione necessaria viene usata per dimostrare che una serie a_n NON converge.

TIP ESAME: all'esame ci saranno sicuramente serie $\to 0$, ma meglio controllare sempre.

Dimostrazione

$$S_{n+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{S_n} + a_{n+1} \leftarrow \text{La somma dei primi n termini, è proprio } S_n$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

Passiamo al $\lim_{n \to +\infty}$: Per Hp. $\sum a_n$ Converge $\Rightarrow \lim S_n = S$

$$a_{n+1} = \underset{\downarrow S}{S_{n+1}} - \underset{\downarrow S}{S_n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim a_{n+1} = 0$$

ES: Studiare il carattere della serie: $\sum \log(n)$

1) Vedo se diverge: $\lim_{n \to \infty} \log(n) = +\infty \to$ Diverge

ES: $\sum \frac{n!}{n^n}$ 1) $\lim \frac{n!}{n^n} = 0 \Rightarrow$ Non possiamo affermare nulla.
$n^n >> n!$

🚩 1:40

Nota: Considereremo solo Serie a termini Non negativi   pg 263

$\sum a_n \;/\; a_n \geq 0 \quad \forall n.$

Vale il seguente teorema: Una serie a termini non negativi Non può essere indeterminata. Essa può convergere o divergere.

Dimostrazione

Hp: $\sum a_n \;/\; a_n \geq 0 \quad \forall n.$

Consideriamo S_n: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

Somma dei primi n + Un Termine

poiché, per Hp., a_{n+1} è sicuramente $\geq 0 \Rightarrow a_{n+1} \geq S_n$

$\Rightarrow S_{n+1} \geq S_n \quad \forall n \Rightarrow S_n$ è una Succ. monotona cresc.

$\Rightarrow$ Per il teorema delle succ monotone, S_n è succ regolare

$\Rightarrow$ Converge o Diverge, ma non può essere indet.

1:48

Criterio del confronto

Supponiamo di avere 2 serie $\sum_n a_n$ e $\sum b_n \;/\; 0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Serie a Termini non neg.

1) Se $\sum b_n$ Converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

2) Se $\sum a_n$ Diverge $\Rightarrow \sum b_n$ Diverge.

Criterio del rapporto

pg 271

$\sum_n a_n$ è una serie a Termini Non Neg. Supponiamo $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

Allora
1) Se $\ell < 1$, la serie converge
2) Se $\ell > 1$, la serie Diverge
3) Se $\ell = 1$, non possiamo affermare nulla.

ES: $\sum \frac{1}{n!}$

1) Cond necessaria: $\lim \frac{1}{n!} = 0 \Rightarrow$ Non possiamo dire niente

2) Oss che è una serie a termini non negativi $\Rightarrow$ possiamo applicare il crit. del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{!}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Converge}$$

Criterio della radice

pg 272

Sia $\sum a_n$ / $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che $\nexists$ $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$ allora se:

1) $\ell < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
2) $\ell > 1 \Rightarrow \sum a_n$ Diverge
3) $\ell = 1 \Rightarrow$ Boh!

7:00 lez 11

Dimostrazione Supponiamo che $\ell < 1$, per Hp. Sappiamo che $\lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

Per Def $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \nu > 0$ / $\forall n > \nu$, $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$

Dim non completa.

ES $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 1) Cond Necess. : $\lim \frac{1}{n^n} = 0 \Rightarrow$ Potrebbe convergere

2) Usiamo il criterio della radice: $\lim \sqrt[\cancel{n}]{\frac{1}{n^{\cancel{n}}}} = \lim \frac{1}{n} = 0 < 1 \Rightarrow$ Converge

2) Criterio del rapporto:

$$\lim_{n} \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \frac{1}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

reciproco

$$= \cancel{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}} \cdot \cancel{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \Rightarrow \lim \sim = 0 < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^n} \text{ converge}$$

$\frac{1}{n}$

ES $\frac{2^n}{n!}$ 1) $\lim_{n} \frac{2^n}{n!} = 0$ Boh!

$n! >> 2^n$

2) Criterio della radice: $\sqrt[n]{\frac{2^{\cancel{n}}}{n!}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n!}}$ Boh!

2) proviamo criterio del rapporto

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \to 0 \quad \text{Converge}$$

ES: $\sum_{n} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$ 1) $\lim \left[\frac{n+1}{3n-1}\right]^n$ $\frac{\cancel{n}(1+0)}{\cancel{n}(3+0)} = \left[\frac{1}{3}\right]^n = \frac{1}{\infty} = 0$

2) Criterio radice: $\cancel{\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^{\cancel{n}}}} = \frac{n+1}{3n-1} \to \frac{1}{3}$ converge

ES: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ = Criterio del rapporto =

$$\frac{[\cancel{2}(n+1)]!}{\cancel{2^{n+1}} \cdot (n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{2^n} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{2^{\cancel{n+1}}\ (n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{2^n} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(\cancel{n}+1)} \to +\infty$$

$2n! = \cancel{2n \cdot (2(n-1))} \ldots$

$2(n+1) = \underbrace{2n+1}_{= 2n+2}$, $2n \cdot (2(n-1)) \Rightarrow \underbrace{2n+2 \cdot 2n+1}$, $\cancel{2n \cdot (2(n-1))}$

Criterio degli infinitesimi

$\sum a_n \;/\; a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che per un certo $p \in \mathbb{R} \to \exists \lim_n n^p a_n = \ell$

1) Se $\ell \neq +\infty$, $p > 1 \to \sum a_n$ Converge
2) Se $\ell \neq 0$, $p \leq 1 \to \sum a_n$ Diverge

Se il $\lim n^p a_n$ = Finito, allora dirò che a_n è di ordine p. In entrambi i casi dobbiamo soddisfare entrambe le condizioni; Se ad esempio $\lim n^p \cdot a_n = \infty$, p deve essere ≤ 1 per applicare il criterio e dire che a_n Diverge.

Dimostrazione lez 11, 52:00

1) Se $\ell \in (0, +\infty)$, cioè a_n è infinitesimo di ordine p, allora • se p è > 1, la serie converge, • se $p \leq 1$, allora la serie diverge.
2) Se $\ell = 0$ e $p > 1$, allora a_n converge.
3) Se $\ell = +\infty$ e $p \leq 1$, allora a_n Diverge.

ESPLICITATO

2) Cr. infinitesimi Dobbiamo capire di che ordine di infinitesimo è?

Definizione: Siano a_n e b_n due infinitesimi, diremo che a_n e b_n sono infinitesimi dello stesso ordine, se il $\lim \frac{a_n}{b_n}$ è finito e $\neq 0$

- Diremo inoltre che a_n è infinitesimo di ordine sup. a b_n se il $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ come se fosse $\frac{0^+}{x>0} = 0$
- Diremo inoltre che a_n è infinitesimo di ordine inferiore se $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ come se fosse $\frac{x>0}{0^+} = \infty$

Osservazione: Supponiamo che $\begin{cases} \lim a_n = 0 \\ \lim \frac{1}{n^p} = 0 \quad \text{se) } p > \lim a_n = 0 \end{cases}$

Supponiamo che $\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}} = \lim n^p a_n$ sia finito, significa che a_n e $\frac{1}{n^p}$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

Si dice anche che a_n è un infinitesimo di ordine p. Quindi, confrontiamo una succ a_n con una fissa, (non due succ a_n e b_n qualsiasi) ovvero $\frac{1}{n^p}$, che diventa l'infinitesimo Campione.

ES $\sum \frac{2n+1}{n^5+4n+3}$ 1) $\lim a_n = 0$

2) Per quale p il $\lim n^p \cdot \overbrace{\frac{2n+1}{n^5+4n+3}}^{a_n}$ è finito e $\neq 0$?

Cioè a_n è un infinitesimo di quale ordine? $\to$ l'ordine dipende da p

$$\lim n^p \cdot \frac{2n+1}{n^5+4n+3} = n^p \cdot \frac{\cancel{n}(2+0)}{n^{\cancel{5}\,4}(1+0+0)} \overset{p=4}{\Rightarrow} \cancel{n^4} \cdot \frac{2}{\cancel{n^4}} = 2$$

P deve essere 4

Quindi a_n è infinitesima d'ordine $4 > 1 \Rightarrow$ Converge.

ES: $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ $\qquad \lim \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = 0$ potrebbe convergere.

Dal lim notevole $\lim_n [1 - \cos(n)]\, n^2 = \frac{1}{2}$

Quindi nel nostro caso: $\lim_n \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n$ è un infinitesimo di ordine $2 > 1$ conv

1) $\lim \frac{\log(n)}{n} = \quad \log n << n \Rightarrow \longrightarrow 0$

$\lim n^p a_n = \ell \Rightarrow \lim \cancel{n} \frac{\log(n)}{\cancel{n}} = +\infty \quad p=1 \ (p\leq 1) \quad \ell = +\infty \Rightarrow$ a_n è un infinitesimo di ordine inferiore a $1/n$ perché?

Siccome $\lim n^p a_n = +\infty$ e $p \leq 1$, allora la serie Diverge.

$$n \frac{\log n}{n} = \frac{\frac{\log n}{n}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow +\infty$$

Confronto

Vuol dire che $1/n$ Tende a 0 più vel. di $\frac{\log n}{n}$

ES: $\sum \frac{5n-1}{3n^2+2}$ Ci poniamo 2 possibili domande:

a) Per quale n^p devo moltiplicare affinché il $\lim n^p \cdot a_n = \ell$ (finito)? Cioè qual è l'ordine di infinitesimo di a_n?

Risposta: $p=1$

$\Rightarrow \lim n^1 \frac{5n-1}{3n^2+2} \sim \frac{\cancel{n} \cdot 5\cancel{n}}{3\cancel{n^2}} = \frac{5}{3} > 1 \Rightarrow$ a_n è infinitesimo di ordine $p=1$, il lim è finito e $p \leq 1 \Rightarrow$ la serie Diverge

b) Criterio del rapporto: Calcoliamo $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5(n+1)-1}{3(n+1)^2+2} \cdot \frac{3n^2+2}{5n-1} = \frac{5(n+1)-1}{5n-1} \cdot \frac{3n^2+2}{3(n+1)^2+2} = 1$$

ord 1, ord 1 $\rightarrow \frac{5}{5} = 1$; ord 2, ord 2 $\rightarrow \frac{3}{3} = 1$

Con il criterio del rapp, quando il lim Tende a 1, non possiamo dire se diverge o converge. Proviamo quindi un altro Criterio.

TIP ESAME: Quando non ci troviamo con un criterio, è bene provarli TUTTI

ES: $\sum \frac{\log n}{n^2}$ 1) Criterio degli infinitesimi $\lim n^p a_n = \ell$ / ℓ è finito

$\Rightarrow$ proviamo $p = \frac{3}{2}$: $= \lim n^{1+\frac{1}{2}} \frac{\log n}{n^2} = n \cdot n^{\frac{1}{2}} \frac{\log n}{n^2} = \cancel{n} \sqrt{n} \frac{\log n}{n^{\cancel{2}}} = n \frac{\cancel{\sqrt{n}} \log n}{\cancel{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}} =$

$= \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0 \quad \left.\begin{matrix} \ell = 0 \\ p > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Converge

$\sqrt{n} >> \log n$

Serie Alternate

1 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad / \; a_n \geq 0$ la nostra serie è sempre a termini positivi, ma è moltiplicata per un valore alternante $(-1)^n$

Il segno alterna $\Rightarrow$ $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_n$

Attenzione! A questo tipo di serie, NON si applicano i precedenti criteri.

Come si trattano?

Criterio di Leibnitz (unico criterio!)

Supponiamo di avere $\sum (-1)^n a_n \quad / \; a_n \geq 0$.

Se $(a_n)_n$ è decrescente ed infinitesima $(a_n \to 0)$, allora la serie converge.

Inoltre, se S_n è la successione delle somme parziali della 1 e S è la sua somma, allora, si ha che la differenza tra S_n e S è $\leq a_{n+1}$:

$$|S_n - S| \leq a_{n+1} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

In poche parole... Se la succ a_n tende a 0 ed è decrescente $\Rightarrow$ Converge.

Inoltre, non conosciamo la somma della serie, ma sappiamo che la distanza tra S_n ed S è più piccola dell' n+1 esimo termine. Quindi, se calcoliamo la somma dei primi 100 elementi, so che la distanza della somma dei primi 100 termini, dalla somma vera e propria S, è $\leq a_{n+1}$.

Somma dei primi n termini Calcolabile!

Non conosciamo S!

Osservazione la quantità $|S_n - S| \doteq R_n$ (Si può chiamare) Resto ennesimo della Serie, ed esprime l'errore che commetto nell'approssimare S con S_n.

Se R_n è piccolo, posso approssimare S con S_n (che so calcolare). Siccome il criterio ci dice che $R_n \leq a_{n+1}$, possiamo dire che l'errore che commetto è trascurabile. Questo perché con $a_n \to 0$, a_{n+1} è molto piccolo.

Esercizi Prima parte del criterio

ES: $\sum \frac{1}{n}$ (Serie Armonica) $\longrightarrow$ Diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Con i segni alternati, diverge sempre?

$a_n = \frac{1}{n}$, $\lim_n a_n = 0$, ed è decrescente $(\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \ldots)$ $\Rightarrow$ la serie converge per il criterio di Leibnitz.

ES: $\sum_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{1}{\log(n+1)} = \frac{1}{\log(\ldots)} - \frac{1}{\log(\ldots)} + \frac{1}{\log\ldots} \ldots$

$\lim_n \frac{1}{\log(n+1)} = 0 \Rightarrow$ Converge.

ES: $\sum (-1)^n \sin(\frac{1}{n}) = -\sin(\frac{1}{n}) + \sin(\frac{1}{n}) \ldots$

$\lim_n \sin(\frac{1}{n}) = 0 \Rightarrow$ Converge

Esercizi seconda parte del criterio

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots$ Calcoliamo la somma "a meno di un errore di 10^{-1}":

$$|S_n - S| \leq a_{n+1} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_{n+1}} \leq \underbrace{\frac{1}{10}}_{\text{errore}} \Rightarrow n+1 = 10,\ \underline{n = 9}$$

Quindi ci basta calcolare $\sum_{n=1}^{9} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{9} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \boxed{0,7}456$$

Siccome l'errore è pari a $R_n \leq \frac{1}{10}$, prendo come risultato fino ai decimi (prima cifra decimale), ovvero $\sum_{n=1}^{9} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 0,7$

ES: $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ Calcolare S con un $R_n \leq \frac{1}{10}$ R_n

1) Converge? $\lim a_n = 0$ per il criterio di Lib. Converge.

$$|S_n - S| \leq a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)-1} \geq R_n \Rightarrow \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{10} \Rightarrow 2n+1 \geq 10,\quad n \geq \frac{9}{2} \overset{4.5}{\sim} 5$$

Se prendo $n = 5 > \frac{9}{2}$ sono sicuro di ottenere $R_n \leq \frac{1}{10}$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \sim \underbrace{\boxed{0.8}}_{1/10}35$$

Considerazioni finali

Solo in alcuni casi possiamo calcolare la somma di una serie, ma a volte cerchiamo di capire solo se la serie converge o diverge.
Durante la somma di infiniti termini (serie) che non so calcolare, come nelle serie Alternate, vale però il risultato riportato alla 2.