Nello lezione precedente abbiamo visto il caso i) Se $P(\gamma \pm i\mu) \neq 0$; Supponiamo che nell'equazione:

$$f(x) = e^{\gamma x} \cdot \left[p_n(x) \cdot \cos \mu x + q_K(x) \sin \mu x \right]$$

Esponenziale

Polinomi di grado m e K

γ e $\mu \in \mathbb{R}$

ii) $P(\gamma \pm i\mu) = 0$ e supponiamo che $\gamma \pm i\mu$ sia radice di molteplicità h dell'equazione caratteristica. Quindi un integrale particolare sarà del Tipo:

$$\boxed{y_p(x) = x^h e^{\gamma x} \left[r_j(x) \cos \mu x + s_j(x) \sin \mu x \right]}$$

La differenza con il caso precedente sta nel fatto che è presente x^h.
Cambia poco, ma diventa più difficile perché vengono fuori derivate "strane".

ES: $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 2(\cos x + \sin x) \\ y(0) = 0 \quad e \quad y'(0) = 0 \end{cases}$ Problema di Cauchy

1) Eq omogenea: $y'' - 2y' + y = 0$ eq car: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$, radice Doppia
$\Rightarrow$ Integrale generale omogenea associata: $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$

2) Studiare eq completa: $f(x) = 2\cos x + 2\sin x \Rightarrow$ Chi è $\gamma \pm i\mu$?
$\Rightarrow \gamma \pm i\mu \Rightarrow \pm i$ è soluzione dell'eq caratteristica? NO

e^x non è presente
$\gamma = 0$
$\mu = 1$ coeff della x di sin e cos

$\Rightarrow y_p = e^0 \cdot$ [chi è i polinomi che moltiplicano sin e cos? $\Rightarrow$ le costanti $\Rightarrow$ Polinomi di grado $0 \Rightarrow$ Costanti generiche]

$e^0 = 1$

$\Rightarrow y_p = A\cos x + B\sin x \qquad y_p' = -A\sin x + B\cos x \qquad y_p'' = -A\cos x - B\sin x$

$-A\cos x - B\sin x + 2A\sin x - 2B\cos x + A\cos x + B\sin x = 2\cos x + 2\sin x$
$\Rightarrow -2B\cos x + 2A\sin x = 2\cos x + 2\sin x$
$\Rightarrow \begin{cases} -2B = 2 \\ 2A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow y_p(x) = \cos x - \sin x$

3) Integrale generale $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \cos x - \sin x$

4) Prob. Cauchy $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0 \leftarrow$ Imponiamo le condizioni

- $0 = y(0) = c_1 + \underset{\cos 0}{1} - \underset{\sin 0}{0}$

Calcolo $y' = c_1 e^x + c_2 [e^x + x e^x] - \sin x - \cos x \Rightarrow 0 = y'(0) = c_1 + c_2 + \underset{\cos 0}{1}$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + 1 = 0 \\ c_1 + c_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ -1 + c_2 - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$

Allora la sol al prob di cauchy è: $y(x) = -e^x + 2xe^x + \cos x - \sin x$ Soluzione

00:19

Metodo di Variazione delle Costanti

Studiamo un metodo generale che si applichi sia ai casi precedenti che ad altri casi.

Teorema: Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ integrali indip. dell'eq omogenea assoc. a: $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$
SE $c_1(x)$ e $c_2(x)$ sono soluzioni del sistema:

Ⓐ $\begin{cases} c_1'(x)y_1+c_2'(x)y_2=0 \\ c_1'(x)y_1'+c_2'(x)y_2'=f(x) \end{cases}$

1) Consideriamo l'omogenea associata
2) Calcoliamo i due integrali indip. } cose già viste

3) Quando ho i 2 int indip. prendo due funzioni $c_1(x)$ e $c_2(x)$, che sono soluzioni del sistema Ⓐ Dove le incognite sono le derivate I di c_1 e c_2.

Allora Ⓑ $y_p(x)=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$ è un integ. particolare dell'eq completa.
Ci basta calcolare le soluzioni del sistema (c_1' e c_2') e sostituirle nella Ⓑ. Questo integrale particolare y_p è uguale a quello generale dell'omog. ass, ma in questo caso c_1 e c_2 sono delle funzioni.

ES: $y''-2y'-3y=\cos(2x)$ ① $\rightarrow \lambda^2-2\lambda-3=0$ $\quad \lambda=1\pm 2 < \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$ $\quad y_0(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$

② Metodo Var cost $\begin{cases} c_1'e^{-x}+c_2'e^{3x}=0 \\ -c_1'e^{-x}+c_2'3e^{3x}=\cos(2x) \end{cases}$ $\begin{cases} c_1'=c_2'e^{3x}\cdot e^{x}\cdot(-1) \\ +c_2'e^{4x}\cdot e^{-x}+c_2'3e^{3x}=\cos(2x) \end{cases}$ $\Rightarrow +c_2'e^{3x}+c_2'3e^{3x}=\cos(2x)$

$\Rightarrow 4e^{3x}c_2'=\cos(2x) \Rightarrow c_2'=\frac{1}{4}\cos(2x)\cdot e^{-3x}$ Trovo $c_1'=\frac{1}{4}\cos(2x)e^{-3x}\cdot e^{3x}\cdot e^{x}\cdot(-1)=-\frac{1}{4}\cos(2x)e^{x}$

2.1) Per trovare c_1 e c_2 integriamo (per parti)

$c_1=\frac{1}{4}\int\cos(2x)e^{-3x}dx \qquad c_2=-\frac{1}{4}\int\cos(2x)e^{x}$

ES: $y''+y=\cot g\, x$ $\quad$ 1) $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{-1}\rightarrow\lambda=\pm i$ $\quad \begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=1\end{matrix}$

$y_0(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)$

2) Var cost $\begin{cases} c_1'\cos x+c_2'\sin(x)=0 \\ -c_1'\sin x+c_2'\cos x=\cot g\, x \end{cases}$ $\Rightarrow c_1=-c_2'\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}$
$\Rightarrow +\frac{c_2'\sin x\cdot\sin x}{\cos x}+c_2'\cos x=\cot g\, x$

$\Rightarrow \frac{c_2'(\sin^2x+\cos^2x)}{\cos x}=\cot g\, x \rightarrow c_2'=\frac{\cot g\, x\,\cos x}{\sin^2x+\cos^2x}=\frac{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cos x}{\sin^2x+\cos^2x}=\frac{\frac{\cos^2x}{\sin x}}{\sin^2x+\cos^2x}$

$\Rightarrow c_1'=-\frac{\cancel{\cos^2x}}{\cancel{\sin x}}\cdot\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}} \Rightarrow c_2'=-\cos x \qquad c_1'=\frac{\cos^2x}{\sin x}$

integro $\begin{cases} c_2(x)=-\sin x \\ c_1(x)= \end{cases}$ $\qquad \int\frac{\cos^2x}{\sin x}dx=\int\frac{1-\sin^2x}{\sin x}=\int\frac{1}{\sin x}-\int\frac{\sin^{\cancel{2}}x}{\cancel{\sin x}}dx$

↑ Formule Parametriche

$\int\frac{1}{\sin x}\frac{\sin x}{\sin x}dx=\int\frac{\sin x}{\sin^2x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2x}dx$ pongo $t=\cos x\Rightarrow dx=-\frac{1}{\sin x}dt$

$\Rightarrow -\int\frac{\cancel{\sin x}}{1-t^2}\cdot\frac{1}{\cancel{\sin x}}=-\int\frac{1}{1-t^2}dt=\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \Rightarrow +\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$

$t=\cos x \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\sin x+1}\right| \Rightarrow c_1=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+\cos x+c$