10.1 Applicando le regole di derivazione, dimostrare che

$D(\sqrt[4]{x}+x) = 1/4\sqrt[4]{x^3}+1$

$D(3x^2+5x+4) = 6x+5$

$D(x^3-2x+\cos x) = 3x^2-2-\operatorname{sen} x$

$D(x\cos x+\operatorname{sen} x) = 2\cos x - x\operatorname{sen} x$

a) $D(\sqrt[4]{x}+x)$ $\quad D(f+g)=f'+g'$

$= D(\sqrt[4]{x}) + D(x)$

$D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $\quad D(x^n) = n x^{n-1}$

$= \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} + 1$

b) $D(3x^2)+D(5x)+4 = 6x+5+0$

$D(c)=0$

c) $D(x^3)-D(2x)+D(\cos x) = 3x^2-2-\sin x$

d) $D(x\cos x+\sin x) = D(x\cos x)+D(\sin x)$

$= \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$

$D(x\operatorname{sen} x+\cos x) = x\cos x$

$D(\operatorname{sen} x\cos x + x) = 2\cos^2 x$

$D\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}; \qquad D\frac{x^3}{1-x} = \frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$

$D\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} 2x; \qquad D\operatorname{tg}^2 x = 2\operatorname{tg} x/\cos^2 x$

a) $D(x\sin x+\cos x) = -\sin x + \sin x + x\cos x = x\cos x$

b) $D(\sin x\cos x + x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x + 1$

$= \cos^2 x - \sin^2 x + 1$ $\quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1-\cos^2 x$

$\overset{!}{=} \cos^2 x - [1-\cos^2 x] + 1 =$

$\overset{!}{=} \cos^2 x \cancel{-1} + \cos^2 x \cancel{+1} =$

$= 2\cos^2 x$

c) $D\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{2x^3}+2x-[\cancel{2x^3}-2x]}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

d) $\frac{x^3}{1-x} = \frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^2-3x^3+x^3}{(1-x)^2} = \frac{-2x^3+3x^2}{(1-x)^2}$

e) $D(\sin^2 x) = D(\sin x\cdot\sin x) = \cos x\sin x + \sin x\cos x = 2\sin x\cos x \overset{\text{BOH?}}{=} \sin(2x)$

f) $D\,tg^2 x = tg x\cdot tg x = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot tg x + tg x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = 2\left(\frac{tg x}{\cos^2 x}\right)$

$D(x\log x - x) = \log x; \qquad D(1/x^2) = -2/x^3$

$D(x^2 2^x) = x2^x(2+x\log 2)$

$D(2^x\log_2 x) = 2^x(\log 2\log_2 x + 1/x\log 2)$

$D(1/\operatorname{sen} x) = -\cos x/\operatorname{sen}^2 x$

a) $D(x\ln x - x) = -1 + \ln x + 1 = \ln x$

b) $D\left(\frac{1}{x^2}\right) = x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

c) $D(x^2 2^x) = 2x\,2^x + x^2 2^x\ln 2 = x2^x(2+x\ln 2)$

d) $D(2^x\ln_2 x) = 2^x\ln 2\ln_2 x + 2^x\frac{1}{x\ln 2}$

$= 2^x\left(\ln 2\ln_2 x + \frac{1}{x\ln 2}\right)$

e) $D\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \sin x^{-1} \overset{?}{=} D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Alternativamente.. $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

$D(x-\operatorname{sen} x\cos x)/2 = \operatorname{sen}^2 x$

$D(x+\operatorname{sen} x\cos x)/2 = \cos^2 x$

$D(e^x\cos x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$

$D(\cos x/e^x) = -(\operatorname{sen} x+\cos x)/e^x$

a) $\frac{x-\sin x\cos x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{\sin x\cos x}{2}$

$= D\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}[\cos x\cos x - \sin x\sin x]$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[\cos^2 x - \sin^2 x] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

BOH

b) $\frac{x+\sin x\cos x}{2} = \frac{1}{2}D(x+\sin x\cos x) = \frac{1}{2}[D(x)+D(\sin x\cos x)]$

$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{1+\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cos^2 x}\right) = \cancel{\frac{1}{2}}\left(2\cos^2 x\right) = \cos^2 x$

c) $D(e^x\cos x) = e^x\cos x - e^x\sin x = e^x(\cos x - \sin x)$

d) $D\left(\frac{\cos x}{e^x}\right) = -\sin x\,e^x - \cos x\,e^x\cdot\frac{1}{e^{2x}} = -\frac{e^x}{e^{2x}}(\sin x+\cos x) = -\frac{1}{e^x}(\sin x+\cos x)$

$$D(x\cos x\log x) = \log x(\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x) + \cos x$$

$$D[(1+\sqrt{x})/(1-\sqrt{x})] = 1/[\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2]$$

$$D[(1+\cos x)/\cos x] = \mathrm{sen}\,x/\cos^2 x$$

a) $D(\underbrace{x\cos x}\ \underbrace{\ln x})$ $\quad D(x\cos x) = \cos x - x\sin x$

$= (\cos x - x\sin x)\ln(x) + \frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}\cos x$

b) $D\left[\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = // + \frac{\sqrt{x}+x}{1-x} = // + \frac{\sqrt{x}}{1-x} + \frac{x}{1-x}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1-\sqrt{x}} + \left\{\left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)\right] + \sqrt{x}\right\} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}$

10.2 Calcolare, in base alla definizione, la derivata $D(1/x)$.

Definizione: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{h} = \left(\frac{\cancel{x}-\cancel{x}-\cancel{h}}{x(x+h)}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{h}}$

$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x^2+hx} \to -\frac{1}{x^2}$

10.3 Calcolare, in base alla definizione, la derivata $D\sqrt{x}$.

$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\ \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{\cancel{x}+h-(\cancel{\sqrt{x}\sqrt{x+h}})+(\cancel{\sqrt{x}\sqrt{x+h}})-\cancel{x}}{h\sqrt{x+h}+h\sqrt{x}} = \frac{h}{h\sqrt{x+h}+h\sqrt{x}}$

$= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10.4 Calcolare, in base alla definizione, la derivata $D\mathrm{tg}\,x$.

$= \lim_{h\to 0} \mathrm{tg}(x+h) - \mathrm{tg}(x) \cdot \frac{1}{h} = \left[\left(\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}\right) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]\cdot\frac{1}{h} =$

10.9 Utilizzando la regola (4) di derivazione delle funzioni composte, verificare che

$$D\mathrm{sen}\,\alpha x = \alpha\cos\alpha x; \qquad D\cos\alpha x = -\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha x$$

$$D\log\log x = 1/x\log x$$

$$D\log\log\log x = 1/[x\log x\log\log x]$$

a) $D(\sin(\alpha x)) = \alpha\cos(\alpha x)$
b) $D(\cos(\alpha x)) = -\alpha\sin(\alpha x)$
c) $D(\ln(\ln x)) = \frac{1}{x\ln x}$
d) $D(\ln(\ln(\ln x))) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{\ln(\ln x)}$

$$D3^{\mathrm{sen}\,x} = 3^{\mathrm{sen}\,x}\log 3\cos x$$

$$D9^{\mathrm{arctg}\,x} = 9^{\mathrm{arctg}\,x}\log 9/(1+x^2)$$

$$De^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}/2\sqrt{x}$$

$$D\cos 3^x = -\mathrm{sen}\,3^x\cdot 3^x\log 3$$

$$D\log\cos x = -\mathrm{tg}\,x$$

a) $3^{\sin x} = 3^{\sin x}\ln 3\cos x$
b) $9^{\mathrm{arcTg}\,x} = 9^{\mathrm{arcTg}}\ln 9\ \frac{1}{1+x^2}$
c) $e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $\cos(3^x) = -\sin(3^x)\cdot 3^x\ln 3$ | e) $\ln(\cos x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\mathrm{tg}\,x$

~~$D\log\cos x = -\operatorname{tg} x$~~ Fatto Sopra ↑

$D(x\operatorname{tg} x + \log\cos x - x^2/2) = x\operatorname{tg}^2 x$

$D\sqrt{x^2+x+1} = (2x+1)/2\sqrt{x^2+x+1}$

$D\operatorname{arcsen}^5 x = (5\operatorname{arcsen}^4 x)/\sqrt{1-x^2}$

$D(\log_2 x)^3 = 3(\log_2 x)^2/(x\log 2)$

$D5^{x^3+x+1} = 5^{x^3+x+1}\log 5(3x^2+1)$

a) $x\operatorname{tg}x + \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2} =$

$= \operatorname{tg}x + x\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - x$

$= \frac{\cos^2 x\operatorname{tg}x + x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x}$

$= \frac{\cancel{\cos^2} x\operatorname{tg}x}{\cancel{\cos^2 x}} + \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{x\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}$

$= x\operatorname{tg}x + x + \frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}x$

$= \operatorname{tg}x(x-1) + x\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)$ Boh

b) $D\left(\sqrt{x^2+x+1}\right) = (x^2+x+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

c) $\arcsin^5 x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 5\arcsin^4(x)$

d) $(\log_2 x)^3 = 3\log_2^2 x \cdot \frac{1}{x\log 2}$

d) $5^{x^3+x+1} = 5^{x^3+x+1} \cdot \ln(5) \cdot 3x+1$

$D\operatorname{arcsen}[(x^2-1)/x^2] = 2/(x\sqrt{2x^2-1})$

$D\operatorname{arcsen}(x/\sqrt{1+x^2}) = 1/(1+x^2)$

a) $\arcsin\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right] =$

$= \frac{1}{\sqrt{1-\left[\frac{x^2-1}{x}\right]^2}} \cdot \left[\frac{2x\cdot x^2-(x^2-1)\cdot 2x}{x^4}\right]$

$= \frac{\cancel{x}(2x^2-2(x^2-1))}{\sqrt{1-\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]^2}} \frac{1}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{\cancel{2x^2}-\cancel{2x^2}+2}{\sqrt{1-\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]^2}}$

$$D[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)} \cdot [g'(x) \log\, f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}]\ ]$$

10.15 Utilizzando l'esercizio precedente, provare che:

$Dx^x = x^x(1 + \log\, x)$

$D(x^x) \Rightarrow \boxed{f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}} \Rightarrow x^x = e^{x\ln(x)} \Rightarrow D\,\alpha^{f(x)} = \alpha^{f(x)} \cdot \ln(\alpha) \cdot f'(x)$,

$D[f(x) \cdot g(h(x))] = f'(x) \cdot [g(h(x))] + f(x) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) \Rightarrow e^{x\ln(x)} = x^x \cdot \ln(e) \cdot [\ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}] =$

$= x^x \cdot (\ln x + 1)$

$D(\sqrt{x}) = D(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$D(\sqrt{x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}[(\log\, x)/4\sqrt{x} + 1/2\sqrt{x}]$$

$D(\sqrt{x})^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})} = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}\left\{\ln(e) \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\sqrt{x}) + \sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]\right\}$

$= \sqrt{x}^{\sqrt{x}}\left[\frac{\ln(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\left(\frac{1}{2x}\right)\right] = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}\left[\frac{2x\ln(\sqrt{x}) + 2x}{2\sqrt{x}\,x}\right] = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}\left[\frac{\cancel{2}\ln\sqrt{x}}{\underset{2}{\cancel{4}}\sqrt{x}\,x} + \frac{\cancel{2x}}{\underset{2}{\cancel{4}}\sqrt{x}\,\cancel{x}}\right] =$

$= \sqrt{x}^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2}\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right] \ldots$

10.29 Determinare gli insiemi in cui le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti:

(a) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$ (b) $f_2(x) = x^3 - 3x - 4$

(c) $f_3(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$ (d) $f_4(x) = x + 1/x$ per $x > 0$

(e) $f_5(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$

a) $x^2 - 3x + 5$ $f'(x) = 2x - 3$ $f''(x) = 2$

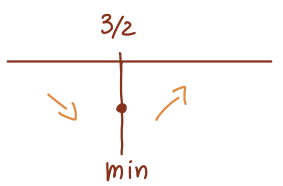
1) Cerco i punti in cui la $f'(x) = 0$ per trovare i pti in cui POTREBBE esserci un max/min

$\Rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 3 = 0$ per $x = \frac{3}{2}$

2) Vedo (in $x_0 = \frac{3}{2}$) che valore ha la $f''(x)$:

$\Rightarrow f''(x_0) = e \rightarrow f''(\frac{3}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow \frac{3}{2}$ punto di min

3) Conclusioni:



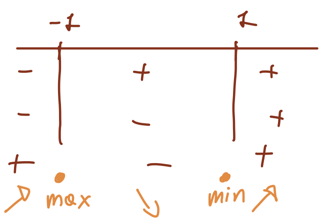
infatti $f'(x) > 0$ per $2x - 3 > 0 \rightarrow x > \frac{3}{2}$

b) $x^3 - 3x - 4$ $f'(x) = 3x^2 - 3$ $f'(x) = 0$ per $x = \pm 1$

$f''(x) = 6x \rightarrow f''(1) = 6 > 0 \rightarrow$ min
$f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ Max

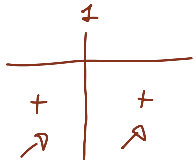
oppure studio il segno di $f'(x)$

$f'(x) > 0$ per $3x^2 - 3 > 0$
per $x > \pm 1$
$a > 0$, eq $> 0 \Rightarrow$ Valori esterni



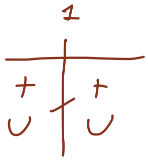
c) $x^3 - 3x^2 + 3x + 4$ $\quad f' = 3x^2 - 6x + 3 > 0$ per $\quad \Delta = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0 \Rightarrow 1$ soluz.

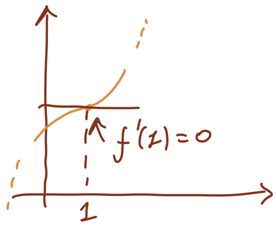
$\Rightarrow x = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow a > 0,\ eq > 0 \rightarrow$ valori esterni $\Rightarrow$



$f(x)$ è crescente in $\mathbb{R}$

Studio la deriv II: $6x - 6 > 0$ per $x > \pm 1$

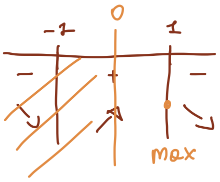




d) $x + \frac{1}{x}$ per $x > 0$ $\quad f'(x) = 1 - 1 \cdot \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

$f'(x) > 0$ per $1 - \frac{1}{x^2} > 0$ $\quad \frac{1}{x^2} < 1,\ x^2 < 1 \quad x < \pm 1 \quad a > 0,\ eq < 0 \rightarrow$ valori interni

$f(x)$ crescente

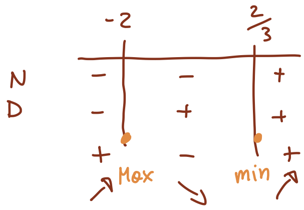


$f'(x) > 0$ per $0 \leq x < 1$
$f''(x) <$ per $x > 1$

e) $\sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} > 0$ per $\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} > 0$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{\sqrt{x+2}}{x+2} > 0 \rightarrow \frac{(x+2)\sqrt{x} - 2x\sqrt{x+2}}{(2x)(x+2)} > 0 \rightarrow \frac{\cancel{x}\sqrt{x} + 2\sqrt{x}}{(\cancel{2x})(x+2)} - \frac{\cancel{2x}\sqrt{x+2}}{(\cancel{2x})(x+2)} > 0$

$\rightarrow \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}{(x+2)} > 0$ per $\quad N: 2\sqrt{x} - \sqrt{x+2} \rightarrow 2\sqrt{x} > \sqrt{x+2} \rightarrow 4x > x+2 \rightarrow x > \frac{2}{3}$
$D: x+2 > 0 \rightarrow x > -2$



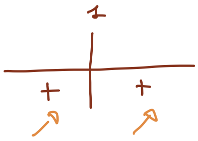
$f(x)$ cresc in $x < -2 \cup x > \frac{2}{3}$
Decresc in $-2 < x < \frac{2}{3}$

10.30 Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare i punti di massimo o di minimo relativo:

(a) $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ per $x \in [0, 2]$
(b) $f_2(x) = 3x + 1/x$ per $x \in (0, 3]$
(c) $f_3(x) = x^{2/3}(x - 5)$ per $x \in [0, 4]$
(d) $f_4(x) = x^2/\sqrt{x^2+1}$ per $x \in [-4, 3]$
(e) $f_5(x) = x^2/\sqrt{x^2+a^2}$ per $x \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$

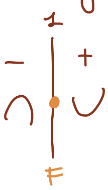
a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 > 0$ per $\Delta = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0 \rightarrow 2$ radici coincidenti

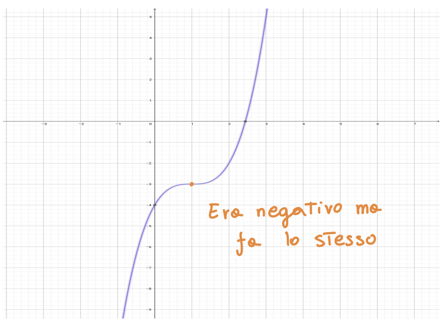
$x = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow f'(x) > 0$ per $x_{1,2} > 1 \Rightarrow eq > 0,\ a > 0 \rightarrow$ val est $\rightarrow$

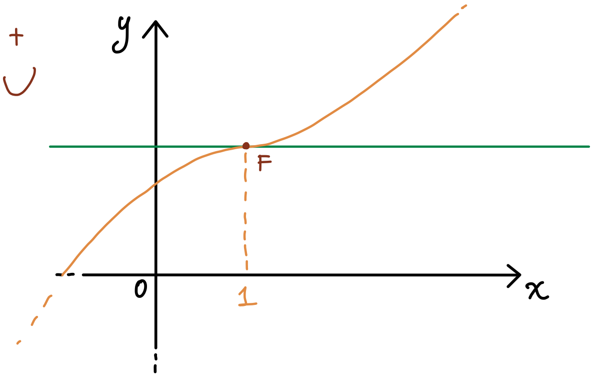


$f'(1) = 3 - 6 + 3 = 0 \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \rightarrow f''(1) = 6 - 6 = 0 \Rightarrow$ NO max/min

$f''(x) > 0$ per $6x - 6 > 0$; $x > 1$



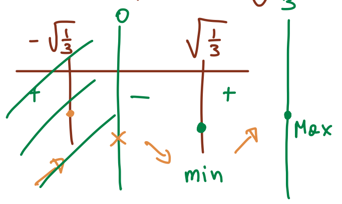




b) per $x \in (0,3]$

$3x + \frac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$ $\qquad f'(x) > 0$ per $\frac{1}{x^2} < 3$; $x^2 < \frac{1}{3}$; $x < \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

eq <0 , $a>0$ → val est



c) $x^{\frac{2}{3}}(x-5)$ per $x \in [0,4]$ $\qquad f'(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}(x-5) + \sqrt[3]{x^2} = \frac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x^2} > 0$

$\frac{2(x-5)(\sqrt[3]{x})^2}{3x} + \sqrt[3]{x^2} > 0$ $\qquad \frac{2(x-5)(\sqrt[3]{x})^2 + 3x\sqrt[3]{x^2}}{3x} > 0$

N: $2(x-5) + 3x\sqrt[3]{x} > 0$

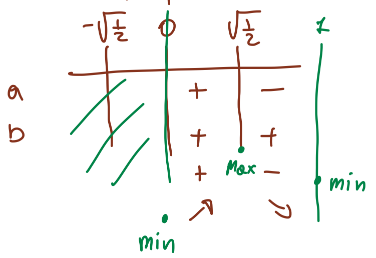
D: $3x > 0$ per $\underline{x > 0}$ $\qquad$ Troppo lungo

10.31 Determinare i punti di massimo o di minimo relativo in $[0, 1]$ per la funzione ivi definita da $f(x) = x^2 - x^4$.

$f(x) = x^2 - x^4$ in $[0,1]$ $\qquad f'(x) = 2x - 4x^3 > 0$ per $x(2-4x^2) > 0$

→ $\underline{x > 0}$, $\underline{x < \pm\sqrt{\frac{1}{2}}}$

$a<0$, eq >0 val int



Derivate per il calcolo dei limiti

11.1 La regola di L'Hôpital può non valere se applicata ad un rapporto $f(x)/g(x)$ della formula l_1/l_2, con l_1, l_2 numeri reali non nulli. Verificare ciò ponendo $f(x) = x$, $g(x) = x - 1$ ed x_0 generico in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$\frac{x}{x-1}$ $\quad D = \mathbb{R} - \{1\}$ ma $\lim_{x \to 1^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{1^\pm - 1} = \frac{1}{0^\pm} \to \pm\infty$

$\Rightarrow$ Nel caso $x_0 = 1$ non abbiamo una forma indeterminata $\Rightarrow$ il teorema non vale

pongo $x_0 = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$ il Teorema vale

11.2 Verificare che $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, nel caso in cui $f(x) = \log x$ e $g(x) = x$. Spiegarne il motivo.

a)

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} \overset{?}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$

$\left[\frac{-\infty}{0^+}\right] = \frac{1}{0^+} \to +\infty$

NON E' una forma indeterminata!

a) $\lim_{x \to 0^+} \underbrace{\ln x}_{-\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} \to -\infty$

~~11.5~~ Per mezzo della formula di L'Hôpital calcolare i limiti ($b > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$):

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^b}$ $\qquad$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$

con $b>0$

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^b} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$ (I) soddisfatta

$g'(x) = b x^{b-1}$ (II) Controllo dove $g'(x)$ vale 0: $g'(x) = 0$ per $b x^{b-1} = 0$; $b>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x) = 0$ per $x = 0$

(III) il $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = e \in \mathbb{R} \vee \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\underbrace{b x^{b-1}}_{+\infty}} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{1}{b x^{b-1}}}_{0} \to 0$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ $\quad$ (I) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+0)^\alpha - 1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$ ✓

(II) $g'(x) = 1 \neq 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$ ✓

(III) $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha (1+x)^{\alpha-1} = \alpha (1+0)^{\alpha-1} = \alpha$

11.6 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ $\qquad$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^3}{x}$

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = +\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (I)

$f'(x) = 1 \neq 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$ (II)

$\lim_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \to \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} >> 2\sqrt{x} \Rightarrow +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^3}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ (I) ✓

II $f'(x) = 1 \neq 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$ (II) ✓ $\qquad$ III $\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x}}{1} = \frac{3}{x} \to 0$

11.7 Con il teorema di L'Hôpital calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(2x+1)}{\log x}\qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\log x}$$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{\ln(x)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ (I) ✓ II $g'(x)=\dfrac{1}{x}=0 \ \nexists x\in\mathbb{R}$ (II) ✓

III) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{2x+1}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{2x}{2x+1} = \dfrac{2x}{2x(1)} \to 1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\ln x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ (I) ✓ (II) $g'x = \dfrac{1}{x}\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ ✓ III $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{2}$

11.8 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{\log x}\qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^5)}{\log(2+x^3)}$$

a) $\lim \dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln x} = +\dfrac{\infty}{\infty}$ (I) ✓

(II) $g'(x)=\dfrac{1}{x}\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ ✓

(III) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{2x^2}{1+x^2}\right) = \dfrac{\cancel{x^2}(2)}{\cancel{x^2}(1)} = 2$

b) $\lim$ $\dfrac{//}{/} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (I) ✓ (II) $g'(x) = \dfrac{3x^2}{2+x^3} = 0$ per N $x=0$

D $x^3=-2 \to x=\sqrt[3]{-2}$

(III) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{5x^4}{1+x^5}}{\frac{3x^2}{2+x^3}} = \dfrac{5x^{\cancel{4}\,2}}{1+x^5}\cdot\dfrac{2+x^3}{3\cancel{x^2}} = \dfrac{10x^2+5x^5}{3+3x^5} = \dfrac{x^5(5)}{x^5(3)} = \dfrac{5}{3}$

11.11 Calcolare i limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x}\qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}$$

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ (I) ✓

II) $g'(x) = -\sin x = 2k\pi$, con $k=0,1\dots+\infty$

(III) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\cos x}{-\sin x} \to \dfrac{0}{1} \to 0$

$D(\cos^2 x) = D(\cos x\cdot\cos x) = -\sin x\cos x - \sin x\cos x$

$= -2\sin x\cos x = -\sin(2x)$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ (I) ✓ (III) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\cos x}{-\sin(2x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

Riapplico $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{-\cos(2x)\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$

11.23 Calcolare i limiti seguenti, che si presentano nella forma indeterminata $\infty-\infty$.

$$(a)\quad \lim_{x\to+\infty}(x-\log x)\qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\log x\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-\log x = +\infty-\infty$ (I) ✗

$\to \lim\ x\left(1-\dfrac{\log x}{x}\right) \to +\infty$ $\quad \dfrac{\log x}{x}\to 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}+\ln x = +\infty-\infty \Rightarrow \dfrac{1+x\ln x}{x} = \dfrac{1}{x}+\dfrac{x\ln x}{x} =$ BOH

Applicazione delle derivate: Funzioni crescenti e decrescenti

1.1 Verificare che la funzione $f(x) = x(x^2+1)$, è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

• $f(x)$ è crescente se $f'(x)>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 + x \Rightarrow f'(x) = 3x^2+1$ Controllo $f'(x)>0$ per $3x^2+1>0 \ \forall x \in \mathbb{R} \to$ crescente

1.2 Verificare che la funzione $f(x) = x^4$, è strettamente crescente per $x \geq 0$, ed è strettamente decrescente per $x \leq 0$.

$f(x) = x^4$ in $x \geq 0$

$f'(x) = 4x^3$ $\quad f'(x)>0$ per $4x^3>0 \to x>0$

0: $-$ | $+$; $\searrow$ min $\nearrow$

1.3 Verificare che, per $n = 1, 2, 3, \ldots$, la funzione $f(x) = x^n$, è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ se n è dispari, mentre è strettamente crescente solo per $x \geq 0$ se n è pari.

$f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ $\quad f'(x) = n x^{n-1} > 0$ per

se n è pari, $n-1$ è dispari $\to \forall x \in \mathbb{R}$

Se n è dispari, $n-1$ pari $\to$ per $x>0$

1.5 Determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti o decrescenti:

(a) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$

a) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad \mathbb{D} = x>0$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} > 0$ per $\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}} > 0$

N: $x-1>0$ per $x>1$

D: $2x\sqrt{x}>0$ per $x>0$

0, 1: $-$ $-$ $+$; $-$ $+$ $+$; $+$ $-$ min $+$; $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$ $\quad \mathbb{D} = x>0$ $\quad f'(x) = D\left[(x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{1}{x}\right] = \dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}} - \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2}$

$\to \dfrac{x - 2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}}{2x^2\sqrt{x-1}} = \dfrac{x-2(x-1)}{2x^2\sqrt{x-1}}$

N: $x-2x+2>0$ per $-x+2>0 \to x<2$

D: $\mathbb{D} = \begin{cases} x-1>0 \to x>1 \\ 2x^2\sqrt{x-1} \neq 0 \to x=1 \end{cases}$

0, 1, 2: $-$ $+$ $+$; $+$ $+$ $-$; $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$

$f(x)$ è cresc in $1 \leq x \leq 2$

1.6 Determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti o decrescenti:

(a) $f(x) = x^3(x-2)$ $\qquad$ (b) $f(x) = (x^2+2x+3)^7$

a) $x^4 - 2x^3$ $\quad f'(x) = 4x^3 - 6x^2 > 0$ per $x^2(4x-6)>0$

$\to x \neq 0$

$\to x > \dfrac{6}{4} \to x > \dfrac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$: $-$ | $+$; $\searrow$ $\nearrow$

b) $(x^2+2x+3)^7$ $\quad f'(x) = 7\underbrace{(x^2+2x+3)^6}_{>0 \ \forall x \in \mathbb{R}} \cdot 2x+2 > 0$

$\to 2x+2>0$ per $x \geq -1$

-1: $-$ | $+$; $\searrow$ $\nearrow$

$f(x)$ cresce in $x \geq -1$

1.7 Determinare gli intervalli di monotonia delle funzioni

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ $\qquad$ (b) $f(x) = \dfrac{2+x}{4+x^2}$

$f'(x) = \dfrac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2}$

$\mathbb{D}$: $1-x^2 \neq 0$, $x \neq \pm 1$

N: $1-x^2+2x^2 \to 1+x^2>0$ per $x>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

D: $\neq 0$ per $x \neq \pm 1$

$>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

-1, 1: $+$ 0 $+$ 0 $+$

f cresc $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

1.8 Determinare gli intervalli di monotonia delle funzioni

(a) $f(x) = e^{x^2}$ (b) $f(x) = e^{-x^2}$

(c) $f(x) = e^x/x$ (d) $f(x) = xe^{-x}$

[(a) $f(x)$ è decrescente in $(-\infty, 0]$, crescente in $[0, +\infty)$;
(b) $f(x)$ è crescente in $(-\infty, 0]$, decrescente in $[0, +\infty)$;
(c) $f(x)$ è decrescente in $(-\infty, 0)$ e $(0, 1]$, crescente in $[1, +\infty)$;
(d) $f(x)$ è crescente in $(-\infty, 1])$, decrescente in $[1, +\infty)$]

a) $e^{x^2} \to f'(x) = 2x\,e^{x^2} > 0$ per $x > 0$
$\neq 0$ per $x \neq 0$

0: $-$ ↘ | $+$ ↗

b) $e^{-x^2} \to f'(x) = -2x\left(e^{-x^2}\right) > 0$ per $x < 0$
$\neq 0$ per $x \neq 0$

c) $f = e^x \cdot \frac{1}{x} > 0$ D: $x \neq 0$, $f'(x) = \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x^2}$ >0 $\forall x \in \mathbb{R}$ N: $\frac{xe^x - e^x}{x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}} > 0$

0, 1: $-$ ↘ | $-$ ↘ | $+$ ↗

f cresc $x < 1 - \{0\}$

N: $xe^x - e^x > 0$, $e^x(x-1)$ $x - 1 \geq 0$ per $x > 1$
$\hookrightarrow > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

d) $xe^{-x} \to f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} \to e^{-x}(1-x) \geq 0$ $1 - x > 0$ per $x - 1 < 0 \to x < 1$
$\hookrightarrow > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

1: $+$ ↗ | $-$ ↘

$\ln x - x \to$ D $\underline{x > 0}$ $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 > 0$ per

$\frac{1-x}{x} > 0$ N: $1 - x > 0$, $x < 1$
D: $x > 0$

0, 1: $+$ ↗ | $-$ ↘

1.9 Determinare gli intervalli di monotonia delle funzioni

(a) $f(x) = \log x - x$ (b) $f(x) = (\log x)/x$

b) $\ln x \cdot \frac{1}{x}$ D: $x > 0$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} + \ln x}{x} \to \ln x + \frac{1}{x^2} > 0$ per $\frac{x^2 \ln x + x^2}{x^2} \to x^2(\ln x + 1) \to \ln x > -1$
$\hookrightarrow x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

? $x > e^{-1}$

0, e^{-1}: $+$ | $-$

NON mi trovo

Max e min

1.16 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo della funzione $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ nell'insieme dei numeri reali.

$f'(x) = 12x^2 - 10x + 2 > 0 \rightarrow 2(6x^2 - 5x + 1) > 0$ $\qquad \Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 1$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}$ ⟨ $\frac{6}{12} \rightarrow \frac{1}{2}$, $\frac{4}{12} \rightarrow \frac{1}{3}$ $\qquad a > 0$ eq $> 0 \rightarrow$ val esterni

$\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{1}{2}$

$+ \quad | \quad - \quad | \quad +$

$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$

max $\qquad$ min

Oppure $6x^2 - 5x + 1 = 0$ per $x = \frac{1}{2} \cup x = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow f''(x) = 24x - 10 \qquad f''(\frac{1}{2}) = \frac{24}{2} - 10 = 2 > 0$ min

$f''(\frac{1}{3}) = \frac{24}{3} - 10 = -2 < 0$ Max

1.17 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo della funzione $f(x) = x(x^2 - 3x + 3)$.

$x^3 - 3x^2 + 3x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 > 0$

$x_1 = \frac{6}{6} = 1 \qquad$ eq>0 $\quad a > 0 \rightarrow$ val est $\qquad \Delta = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0 \rightarrow$ 2 rad eq.

1

$+ \quad | \quad +$

$\nearrow \quad \nearrow$

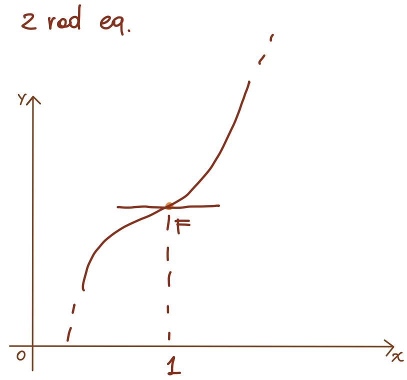
Potrebbe esserci un flesso $\qquad f''(x) = 6x - 6 > 0$ per $x > 1$

1

$- \quad | \quad +$

$\cap \quad \cup$

F



1.21 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto delle seguenti funzioni

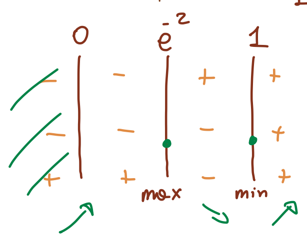
(a) $f(x) = x \log^2 x$ $\qquad$ (b) $f(x) = log(\sqrt{x} - x)$

a) $x \ln^2(x) \qquad f'(x) = \ln^2(x) + \cancel{x}\left(\frac{2 \ln x}{\cancel{x}}\right)$

$= \ln^2(x) + 2\ln x = \ln(x)(\ln x + 2) > 0$ per $\ln x > -2 \rightarrow e^{\ln x} > e^{-2}$

$\hookrightarrow \ln x > 0$ per $x > 1$

$\mathbb{D}: x > 0$



b) $\ln(\sqrt{x} - x) \qquad \mathbb{D}: \sqrt{x} - x > 0, \; x - x^2 > 0, \; x(1-x) > 0, \; 1 - x > 0$ per $x < 1$

$\hookrightarrow x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - x} \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right] = \frac{1}{2x \cdot \sqrt{x} - x 2\sqrt{x} + x} = \_\_\_\_$

$0 \qquad 1$

$+ \quad | \quad + \quad | \quad -$

$- \quad | \quad + \quad | \quad +$

$\oplus$

f def $0 < x < 1$

1.22 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto della funzione $f(x) = \log \operatorname{sen} x$, nel suo insieme di definizione.

$f(x) = \ln(\sin x) \qquad \mathbb{D}: \sin x > 0$

$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} > 0 \rightarrow \text{cotg} > 0$

1.24 Determinare su $\mathbb{R}$ i punti di massimo e di minimo relativo della funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \operatorname{sen} x + x\cos x.$$

$$f'(x) = \frac{9x^2}{9} - \cos x + [\cos x - x\sin x]$$

$$= x^2 - \cos x + \cos x - x\sin x \rightarrow x(x - \sin x) = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \; , \; x - \sin x = 0 \rightarrow |\sin x| < |x| \; \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$f'(x)$ si annulla in $x = 0$

$$f''(x) = 2x - [\sin x + x\sin x] = 2x - \sin x - x\sin x = 2x + \sin x(-1 - x) \qquad f''(0) = 0 + \sin(0)(-1 - 0) = 0$$

$$f'''(x) = 2 + \cos x(-1 - x) - \sin x \qquad f'''(0) = 2 + 1(-1) = 2 - 1 = 1 > 0$$

Flesso