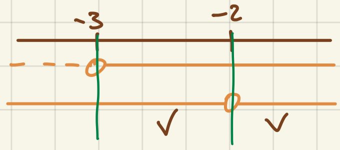
Esempi svolti

Esempio 2.1. Insieme di definizione. Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni (ossia il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui la funzione è ben definita):

(a) $\dfrac{\log_2(3+x)}{\sqrt[3]{x+2}}$; (b) $\sqrt{2^x-8}\cdot\log|x-4|$; (c) $\tan(\log x)$; (d) $\log(\tan x)$.

a) • $\sqrt[3]{x+2} \neq 0$; $(x+2)^{\frac{1}{3}} \neq 0$ per $x \neq -2$

• $3+x>0$; $x>-3$

$\Rightarrow$ 

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} / x>3 - x=2\}$

b) $2^x-8 \geq 0$ Per risolverlo, ci serve usare la definizione dei logaritmi: Il log e' l'esponente della potenza al quale bisogna elevare un numero (base) per ottenere un determinato numero;

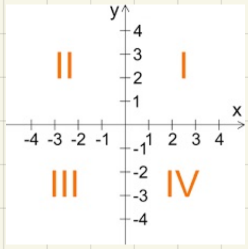
$\Rightarrow \log_b(a)=c \iff b^c=a$ quindi $\underset{b}{2}^{x^{c}} = 8^{a} \equiv \log_2(8)=x \Rightarrow x\geq 3$

• $\log|x-4|$; $|x-4|>0$, siccome e' sempre >0 (per il modulo), ci basta che non sia 0
$\Rightarrow$ $x-4\neq 0$ per $x\neq 4$

$\Rightarrow \mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R} \setminus x\geq 3 - x=4\}$

c) $\tan(\log x$

Pari: $f(-x)=f(x)$
Dispari: $f(-x)=-f(x)$



a) $\dfrac{x}{1+x^2}$; $f(-x)=\dfrac{-x}{1+(-x)^2} = -\dfrac{x}{1+x^2} = -f(x) \Rightarrow$ Dispari $\rightarrow$ I e III o II e IV

b) $x\tan^3 x$; $f(-x) = -x\tan^3(-x) = x\tan^3 x = f(x)$ pari $\rightarrow$ I e II o III e IV
$\hookrightarrow -\tan^3 x$

c) $x+2x^2$; $-x+2(-x)^2 = -x+2x^2$ Nessuna

d) 2^{-x^2} ; $f(-x) = 2^{-(-x)^2} = 2^{-x^2} = f(x) \rightarrow$ Pari $\rightarrow$ I e II o II e IV

e) $\sin(x^3)$; $f(-x) = \sin(-x^3) = -\sin(x^3) = -f(x) \rightarrow$ Dispari

f) 3^{x^3} ; $f(-x) = 3^{-x^3}$ Nessuna

Esempio 2.4. Monotonia di una funzione. Dire se la seguente funzione è monotona in tutto il suo insieme di definizione (specificando se crescente o decrescente) oppure no:

$$(a)\ 2^{3x+x^3};\quad (b)\ \log_{1/2}(1+4x);\quad (c)\ \arctan(1+2^{-x});$$

$$(d)\ \frac{1}{1+x^3};\quad (e)\ \frac{1}{1+x^2};\quad (f)\ \frac{1}{1+e^x}$$

Una f e' monotona se essa e':

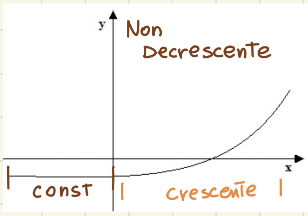
- Crescente
- Non crescente
- Decrescente
- Non Decrescente

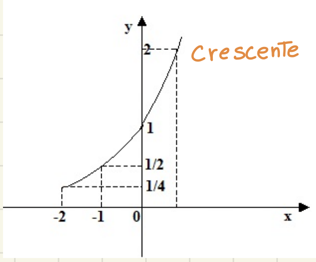
Crescente: $\forall\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ES: $y = 2^x$

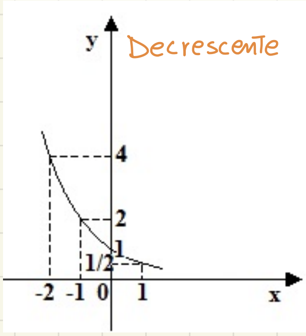
Non Decrescente: $\forall\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Decrescente: $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ES: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$







QUINDI

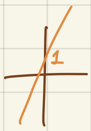
a) 2^{3x+x^3}; $3x$ e' crescente in $\mathbb{R}$

x^3 e' crescente

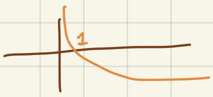
2^t e' crescente

$\Rightarrow f$ e' crescente e monotona crescente

b) $\log_{\frac{1}{2}}(1+4x)$; $1+4x$ e' monotona e crescente

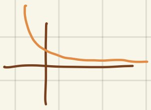


$\log_{\frac{1}{2}}$ e' monotona e decrescente

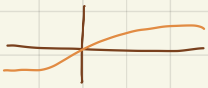


$\Rightarrow f$ e' monotona decrescente

c) $\arctan(1+2^{-x})$; $1+2^{-x}$ decrescente



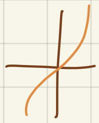
arctan crescente



$\Rightarrow f$ e' monotona decrescente

d) $\frac{1}{1+x^3}$; 1 e' costante

$1+x^3$ e' crescente



$\Rightarrow f$ e' crescente

e) $\frac{1}{1+x^2}$; $1+x^2$ non e' monotona

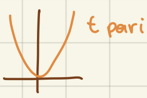
Bonus

1) $\frac{1}{t}$ e' Decrescente $\rightarrow$ $\frac{1}{e^x}$ $\rightarrow$ Decrescente

e^x $\rightarrow$ crescente

2) a^t

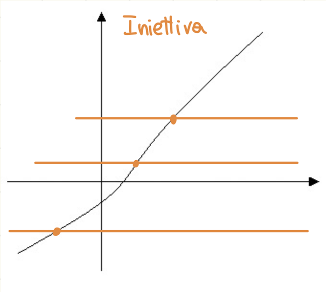
- t e' PARI $\rightarrow$ Ne' crescente ne' decrescente
- t e' DISPARI $\rightarrow$ crescente

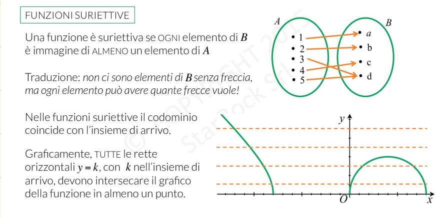


Funzioni inverse

Data la funzione $y = f(x)$, per trovare $x = f^{-1}(x)$ dobbiamo:

- Vedere se è invertibile: La funzione deve essere **Biunivoca**; se non è biunivoca, controlliamo se essa è **iniettiva**; se è iniettiva è invertibile, ma solo in un dato intervallo.



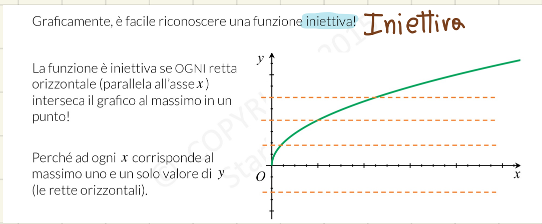

FUNZIONI SURIETTIVE

Una funzione è suriettiva se OGNI elemento di B è immagine di ALMENO un elemento di A

Traduzione: *non ci sono elementi di B senza freccia, ma ogni elemento può avere quante frecce vuole!*

Nelle funzioni suriettive il codominio coincide con l'insieme di arrivo.

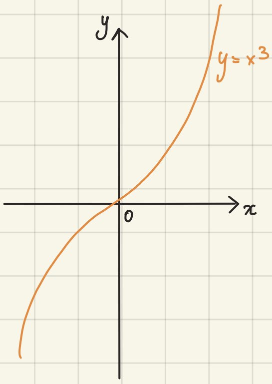
Graficamente, TUTTE le rette orizzontali $y = k$, con k nell'insieme di arrivo, devono intersecare il grafico della funzione in almeno un punto.


Graficamente, è facile riconoscere una funzione iniettiva!

La funzione è iniettiva se OGNI retta orizzontale (parallela all'asse x) interseca il grafico al massimo in un punto!

Perché ad ogni x corrisponde al massimo uno e un solo valore di y (le rette orizzontali).

Non Invertibile! ↑



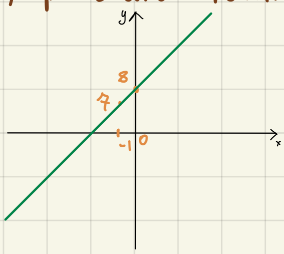
$y = x^3$ è Biiettiva o Biunivoca perché per tutto il suo dominio viene intersecata da linee orizzontali ESATTAMENTE una sola volta.

- Se la f $y = f(x)$ è invertibile, possiamo trovare $f^{-1}(x)$:

ES: $f(x) = y = x + 8$

x	y
0	8
-1	7

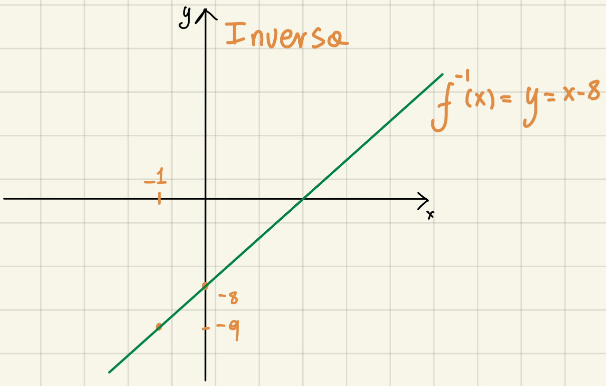
$\Rightarrow$

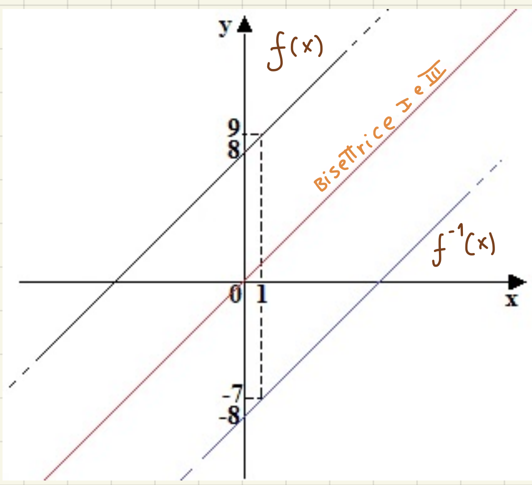


Per trovare l'inversa dobbiamo scambiare in f la x con la y:

x	y
0	-8
-1	-9

$f(x) = x + 8 \Rightarrow x = y + 8$ mettiamo in evidenza la y $\Rightarrow y = x - 8$





! Tutte le funzioni inversa ha questa simmetria.

ES: $y = 2x + 8$ è iniettiva?

È iniettiva se $f(x_1) = f(x_2)$ quindi:

$$\frac{1}{\cancel{2}}\, \cancel{2}x_1 \cancel{+8} = \cancel{2}x_2 \cancel{+8} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Iniettiva!

ES: $y = \frac{x}{2} + 3$ è suriettiva?

$\Rightarrow x = 2(y - 3)$ è suriettiva

ES: $f = 4x+5 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{\cancel{4}x_1 \cancel{+5}}{\cancel{4}} = \frac{\cancel{4}x_2 \cancel{+5}}{\cancel{4}} \Rightarrow x_1 = x_2$ è iniettiva!

ES: $f = x^2+4x-5 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2+4x_1\cancel{-5} = x_2^2+4x_2\cancel{-5} \Rightarrow x_1^2+4x_1 = x_2^2+4x_2$

Esercizi libro f inverse

Esempio 2.5. Funzione inversa. Scrivere esplicitamente la funzione inversa della seguente funzione, precisando il dominio della funzione inversa:

$$(a)\quad f(x) = \frac{3+2\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}};\quad (b)\quad f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

a)

$f(x) = \frac{3+2\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ Risolviamo per x: $(2-\sqrt{x})y = 3+2\sqrt{x}$; $2y-\sqrt{x}y = 3+2\sqrt{x}$; $2y-\sqrt{x}y-2\sqrt{x} = 3$

$\Rightarrow -\sqrt{x}(y+2)+2y = 3$; $\sqrt{x}(y+2) = 2y-3$; $\sqrt{x} = \frac{2y-3}{y+2}$;

$\Rightarrow x = \left(\frac{2y-3}{y+2}\right)^2$

La $f^{-1}(x)$ è lecita solo se $y>0$:

$\frac{2y-3}{y+2} > 0$ per $\left.\begin{array}{ll} 2y-3 \geq 0; & y \geq \frac{3}{2} \\ y+2 \geq 0 & y \geq -2 \end{array}\right\}$ Vals esterni

$\Rightarrow f^{-1}(x)$ è definito in $(-\infty,-2) \cup (\frac{3}{2},\infty)$