



Integrazione funzioni Razionali fratte

- Lezione del prof incompleta, prima parte
da Elia Bombardelli

Una frazionale fratta è una funzione che presenta sia al numeratore che al denominatore un polinomio. La procedura di integrazione è diversa da quelle viste fino a questo momento, essa prevede ④ passaggi, di cui il I va fatto solo in alcuni casi.

① **Divisione** Tra numeratore e denominatore:

Va fatta solo se il grado del denominatore $\deg d(x) \leq \deg n(x)$.
Se $\deg d(x) > \deg n(x)$ saltiamo il passaggio.

② **Fattorizzare** il Denominatore:

Dobbiamo scomporre il denominatore in un prodotto di fattori di primo grado e/o di II grado, non ulteriormente scomponibili.

③ **Decomporre** la frazione in fattori semplici

④ **Integrare** i vari "Pezzi" creati

ES: $\int \frac{x^3 - 3x - 1}{x^2 - x - 2} dx$

① $\deg n(x) > \deg d(x) \Rightarrow$ 2) $\frac{x^3 - 3x - 1}{x^2 - x - 2} \left| \begin{array}{c} x^2 - x - 2 \\ x+1 \end{array} \right.$
3) $\frac{\cancel{x^2-x-1}}{\cancel{x^2-x-2}} = \frac{-x^2+x+2}{\cancel{x^2-x-2}}$

Divisione Tra polinomi

1) $x^3/x^2 = x$

2) $x \cdot$ polinomio divisore, riportato dall'altro lato cambiato di segno.

3) Somma

... Reitero

} questo algoritmo ci consente di riscrivere la frazione di potenza come:

$$\frac{x^3 - 3x - 1}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{1}{x^2 - x - 2}$$

② Riscriviamo ④ come prodotto di parentesi di I o II grado non scomponibili:

$$x^2 - x - 2 = \text{Somma prodotto} \quad \begin{cases} a+b=-1 \\ a \cdot b=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1-b \\ (-1-b) \cdot b = -b - b^2 = -2 \end{cases} \Rightarrow b(1-b) = -2 \quad \begin{cases} a=-1-b \Rightarrow a = -(-2) - 1 = 1 \\ 1-b = -2 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

$$\Rightarrow x+1 + \frac{1}{x^2-x-2} = x+1 + \frac{1}{(x-2)(x+1)}$$

③ Riscriviamo la frazione ④ come somma di frazioni più semplici:

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \stackrel{mcm}{=} \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{Ax+A+Bx-2B}{(x-2)(x+1)} = \frac{x(A+B) + A-2B}{(x-2)(x+1)}$$

Se vogliono che $\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{x(A+B) + A-2B}{(x-2)(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ -B-2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ -3B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{per } B=-\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 ④ \int \frac{x^3 - 3x - 1}{x^2 - x - 2} dx &= \int x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} dx = \int x + \int dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{3} \ln|x-2| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + C = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C
 \end{aligned}$$

↑
Proprietà log ↑ → $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$

$$ES: \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

$$① \deg n(x) > \deg d(x)$$

$$② x^2 - 1 = \underline{(x+1)(x-1)} = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1$$

$$③ \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(A+B) - A + B}{(x+1)(x-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ \Rightarrow -(-B)+B=1 \end{cases} \quad \text{per } 2B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2} \Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{aligned}
 ④ \int \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \int -\frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + C
 \end{aligned}$$

II^a parte: fattore di II^o non scomponibile o potenza di un monomio

ES: $\int \frac{1}{x^3+x} dx$

① Divisione $N < D \Rightarrow$ Non serve

② Fattorizzare $x^3+x = x(x^2+1)$

③ Riscrivere $\frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+Ax+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B)+Ax+C}{x(x^2+1)}$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \Rightarrow 1+B=0 \\ \text{per } B=-1 \end{cases}$$

④ $\int \frac{1}{x^3+x} dx = \int \frac{1}{x} + \frac{-x+0}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$
 $= \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + C$

$$\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) dx = \ln|f(x)| + C$$

ES 2: $\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+x} dx$

① Divisione $N < D$

② Fattorizziamo: $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2 = x(x^2-2x+1)$

③ Riscrivere la frazione come la somma di più frazioni semplici

$$\frac{x+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} = \frac{A(x^2-2x+1) + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2}$$

uguale contenuto Intero quadrato

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2} = \frac{[x^2(A+B) + x(-2A-B+C) + A]}{x(x-1)^2} = x+1 \quad \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C=1 \\ A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \\ C=2-1+1=2 \end{cases}$$

④ $\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+x} dx = \int \frac{1}{x} - \int \frac{1}{x-1} + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx = \ln|x| - \ln|x-1| + 2 \int (x-2)^{-2} dx$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + 2 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C$$

Riaffumendo:

I Caso: Scomposizione a parentesi di I grado, ad esempio $(x+1)(x-1)$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)} dx$$

a b

II Caso: Scomposizione a parentesi contenenti un polinomio di II grado, ad esempio $(x+1)(x^2-1)$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-1} \Rightarrow \int \frac{A(x^2-1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-1)} dx$$

III Caso: Scomposizione a parentesi di II grado, ad esempio: $x(x-1)^2$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \Rightarrow \int \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} dx$$

uguale contiene intero quadrato

IV Caso: e se avessimo un polinomio di III grado, ad es: $\frac{1}{x(x-3)^3}$?

$$\frac{1}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3}$$

fissa I II III ...

In generale si aggiungono tante frazioni quanto c'è il grado del denominatore $(+\frac{A}{x})$.

Continuo integrali di funzioni razionali

- $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$ Supponiamo che Qn abbia 2 radici reali ed s radici complesse con molteplicità > 1

Esempio: $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} dx$ $x=0$ radice doppia, $x=\pm i$ radici complesse doppie

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax(x^4+2x^2+1) + B(x^4+2x^2+1) + (Cx+D)x^2 \cdot (x^2+1) + (Ex+F)x^2}{x^2(x^2+1)^2}$$

[continua]

00:29 Esempio: $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x+2)} dx$ Abbiamo solo radici reali \rightarrow Scomponiamo come $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

Generalmente, quello che si fa generalmente è il mcm e calcolo del sistema; in questo caso, però, possiamo ricavare A moltiplicando entrambi i membri per $(x-1)$, per via del fatto che $\frac{A}{(x-1)}(x-1) = A$.

$$\Rightarrow \frac{A}{(x-1)}(x-1) + \frac{B}{(x+2)}(x-1) = A + \frac{Bx-B}{(x+2)} \Rightarrow A + \boxed{\frac{B(x-1)}{(x+2)}} = \frac{2x-1}{(x+2)} = \frac{1}{3}$$

Prendendo $x=1$ in questa uguaglianza, abbiamo che ⑥ diventa zero.
 $\Rightarrow A = \frac{1}{3}$, possiamo ricavare B facendo gli stessi passaggi

"Scorciatoia" per caso I

Risolviamo il sistema giusto per esercitarsi

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(A+B)+2A-B}{(x-1)(x+2)}$$

Affinché $\frac{2x-3}{(x-1)(x+2)} = ② \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \Rightarrow A=2-B \\ 2A-B=-3 \Rightarrow 2(2-B)-B=-3 ; 4-2B-B=-3 ; -3B+4=-3 \\ \Rightarrow 3B-4=3 ; B=\frac{3+4}{3}=\frac{7}{3} \end{cases}$
 $A+B=2 \Rightarrow A+\frac{7}{3}=2 ; A=2-\frac{7}{3} ; A=\frac{6-7}{3}=\frac{1}{3}$
 $\Rightarrow A=\frac{1}{3}, B=\frac{7}{3}$

Quindi $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{7}{3} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{7}{3} \ln|x+2| + C$
 $= x \ln(a) = \ln(a^x) = \frac{1}{3} \ln((x-1) \cdot |x+2|^7) + C$

Esempio: $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx$ Sono nel caso II = $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

Usiamo il "Trucco fatto": $\frac{1}{x^2+1} = A + \frac{Bx+C}{x^2+1} (x-1) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$
 Sinceramente non ci ho copito niente
 per $x=1$

Integrazione di funzioni irrazionali

Possiamo avere 3 Tipi di casi :

I: $\int f(x, \sqrt{ax+b}) dx$ l'integrando dipende da x e da $\sqrt{ax+b}$

II: $\int f(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$ La x compare anche al denominatore sotto radice

III: $\int f(x, \sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{y}}) dx$ sotto la radice compare una eq di II^o.

La $f(x,y)$ è funzione razionale di x e y , dove la y è il secondo arg considerato prima.

Come si procede?

I: $\int f(x, \sqrt{ax+b}) dx \quad t = \sqrt{ax+b}$

II: $\int f(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx \quad t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

III: $\int f(x, \sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{y}}) dx$ Caso un po' più complicato pongo $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(t-x)$

ES: I caso

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}} dx \quad \text{la } f \text{ è una funz razionale: } f(x,y) = \frac{1}{xy} \quad \text{pongo } t = \sqrt{x+4}$$

Ci ricaviamo la x :

$$t = \sqrt{x+4} ; \quad t^2 = x+4 ; \quad x = t^2 - 4 \Rightarrow dx = D(x) = D(t^2 - 4) = 2t dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x\sqrt{x+4}} dx = \int \frac{1}{(t^2-4)\cdot t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{1}{(t+2)(t-2)} dt = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2) + B(t+2)}{(t+2)(t-2)}$$

$$= \frac{At-2A+Bt+2B}{(t+2)(t-2)} = \frac{t(A+B) + 2(B-A)}{(t+2)(t-2)} = \frac{2}{(t+2)(t-2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ B-A=1 \Rightarrow B+B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A+B=0 \Rightarrow A+\frac{1}{2}=0 \quad \text{per } A=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \int \frac{1}{t+2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \int \frac{1}{t-2} dx = -\frac{1}{2} \ln|t+2| + \frac{1}{2} \ln|t-2| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C$$

$$\text{Siccome } t = \sqrt{x+4} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + C$$

$$ES: \int x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \quad \text{pongo } t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{ricavo da } x \Rightarrow t^2 = \frac{1-x}{1+x} ;$$

$$\begin{aligned} t^2(1+x) &= 1-x ; \quad t^2 + t^2x = 1-x ; \quad t^2x + x = 1-t^2 ; \quad x(t^2-1) = 1-t^2 \\ \Rightarrow x &= \frac{1-t^2}{t^2-1} \quad \text{ricavo } dx = -\frac{2t(t^2-1)-(1-t^2)2t}{(t^2-1)^2} = -\frac{2t^3+2t-2t-2t^3}{(t^2-1)^2} = \frac{-4t}{(t^2-1)^2} = dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int \frac{1-t^2}{t^2-1} \cdot t \cdot \left(-\frac{4t}{(t^2-1)^2} \right) dt = \int \frac{t-t^3}{t^2-1} \cdot \left(-\frac{4t}{(t^2-1)^2} \right) dt$$

$$= \int \frac{-4t^2 + 4t^4}{(t^2-1)^3} dt = 4 \int \frac{t^2(-1+t^2)}{(t^2-1)^3} dt$$

$$\text{multi calcoli dopo..} = \arctg(t) - 3 \int \frac{1}{(1+t^2)^2} + 2 \int \frac{1}{(1+t^2)^3} dx \quad \text{Applichiamo la formula iterativa} \\ [\dots]$$

$$ES: \text{ Caso III: } \int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) , a>0$$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{pongo } \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(t-x) , \text{ nel nostro caso } a=1 \\ \Rightarrow \sqrt{1+x^2} = t-x , t = x + \sqrt{1+x^2} \quad \text{che e' proprio il denominatore}$$

$$\text{Calcoliamo } dx = D(t = x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\Rightarrow (t-x)^2 = 1+x^2 \Rightarrow t^2 - 2tx + x^2 = 1+x^2 ; \quad t^2 - 2tx = 1 ; \quad 2tx = t^2 - 1 \\ \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

$$dx = \frac{2t(2t) - (t^2-1) \cdot 2}{4t^2} = \frac{4t^2 - 2t^2 + 2}{4t^2} = \frac{2(t^2+1)}{4t^2} \quad \text{SOSTituiamo}$$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^2+1}{t^3} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{t^3} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^3} dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t| + \frac{1}{2} \frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2} \ln|t| - \frac{1}{4} \frac{1}{t^2} + C$$

$$\text{SOSTituiamo } t = x \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln|x \sqrt{1+x^2}| - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x \sqrt{1+x^2}} \right)^2 + C$$

02:41

Caso Particolare

$$\int f(x, \sqrt{-ax^2 + bx + c}) dx$$

$a > 0$ (ma ha il '-' davanti, quindi sicuramente negativo)
 $b^2 - 4ac > 0$ Il discriminante è positivo
 \Downarrow

Sono \int_1 e \int_2 radici reali e distinte
di $-ax^2 + bx + c = 0$

Due radici reali e distinte

$$\text{Si pone } t = \sqrt{a} \frac{\int_2 - x}{x - \int_1}$$

$$\text{ES: } \int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} dx \Rightarrow a = 1, \Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1 + 3 = 4 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 2}{-1} = \begin{cases} -3 \\ +1 \end{cases} \Rightarrow \int_2 = -3, \int_1 = 1$$

$$\text{Possiamo scomporre } \frac{1}{\sqrt{-(x^2 + 2x - 3)}} \text{ come } \begin{cases} a+b=2 \\ a \cdot b=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2-b \\ (2-b)b=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b-b^2=-3 \\ b^2-2b-3=0 \end{cases}$$

$$\Delta = 4 - 4(-3) = 16$$

$$b_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=2-3=-1 \\ a=2+1=3 \end{cases}$$

$$= D \sqrt{\frac{1}{-(x+3)(x-1)}} = \sqrt{\frac{1}{(x+3)(1-x)}}$$

$$\text{pongo } t = \sqrt{\frac{1-x}{x+3}} \Rightarrow a = 2-b = 0$$

$$\text{Calcoliamo } t \text{ e } x: t^2 = \frac{1-x}{x+3}; t^2(x+3) = 1-x; t^2 x + 3t^2 = 1-x; 3t^2 - 1 = -t^2 x - x$$

$$t^2 x + x = -3t^2 + 1$$

$$\Rightarrow x(t^2 + 1) = -\frac{3t^2 + 1}{t^2 + 1}; x = \frac{1 - 3t^2}{1 + t^2}$$

$$dx = \frac{-6t(z+t^2) - (z-3t^2)2t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{-6t - 6t^3 - 2t + 6t^3}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{8t}{(1+t^2)^2} dt$$

Riscriviamo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1-3t^2}{1+t^2} + 3\right) \cdot t} \cdot \left(-\frac{8t}{(1+t^2)^2}\right) dt = \int \frac{1}{\frac{1-3t^2+3+3t^2}{1+t^2} \cdot \frac{8}{(1+t^2)^2}} dt$$

$$= \int -\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{1+t^2} dt = \frac{-8}{4} \int \frac{1}{t^2+1} dt = -2 \cdot \arctg(t) + C$$

Ritorniamo a x

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{x+3}} \Rightarrow -2 \arctg\left(\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}\right) + C$$

Integrazioni di funzioni Trascendenti:

Trigonometriche, esponenziali, logaritmiche...

Abbiamo sostituzioni del tipo...

$$ES: \int \frac{1}{1+e^x} dx \quad \text{pongo } t = e^x \Rightarrow x = \ln(t) \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$$

quindi $\int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t+t^2} dt = \int \frac{1}{t(1+t)} dt$ ← potremmo risolverlo risolvendo il sistema con il metodo oppure semplificando $\int \frac{1+t-t}{t(1+t)} dt = \int \frac{1}{t(1+t)} - \int \frac{1}{t(1+t)} dt = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{1+t} dt$ visto all'inizio della lezione

$$= \ln|t| - \ln|1+t| + c = \ln \left| \frac{t}{1+t} \right| + c \quad \text{Torniamo a } x = e^x$$

$$\Rightarrow \ln|e^x| - \ln|1+e^x| + c = x - \ln|1+e^x| + c$$

$$ES: \int \frac{1}{1+\tan x} dx \quad \text{pongo } t = \tan x \Rightarrow x = \arctan(t) \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{1+t^2+t+t^3} dt = \int \frac{1}{t^3+t^2+t+1} dt$$

~~→ facciamo comparire al numeratore termini utili in modo che quando spezziamo la frazione, uno o più termini si semplifichino~~

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \Rightarrow \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A(1+t^2) + Bt(1+t) + C(1+t)}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A+At^2+Bt+Dt^2+C+CT}{(1+t)(1+t^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{t^2(B+A)+t(B+C)+A+C}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} \quad \begin{cases} B+A=0 \Rightarrow B=-A \\ B+C=0 \Rightarrow A+C=0 \Rightarrow A=C \\ A+C=1 \Rightarrow A+C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A=C \Rightarrow A=\frac{1}{2}, \quad B=-A \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{2} \frac{1}{1+t} - \int \frac{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt + \int \frac{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}{t^2+1} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln|1+t| - \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{t^2+1} dt = // -\frac{1}{2} \int \frac{t-1}{t^2+1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} dt - \frac{1}{2} \left(\frac{t-1}{t^2+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1+t| - \frac{1}{4} \ln|t^2+1| - \frac{1}{2} \arctan(t)$$

Torniamo a $t = \tan(x) \Rightarrow$

$$= \frac{1}{2} \ln|1+\tan(x)| - \frac{1}{4} \ln|\tan^2(x)+1| - \frac{1}{2} \underbrace{\arctan(\tan x)}_x + C$$

Sostituzione con le formule parametriche quando abbiamo una dipendenza da sin e cos

ES: $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$ Si usano le F. parametriche

Se pongo $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctg(t), x = 2\arctg(t) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

Sostituiamo

$$\int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1+t^2}{t^2+2t+1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{2+2t^2}{t^2+t^4+2t+2t^3+1+t^2} dt = \int \frac{2+2t^2}{t^4+2t^3+2t^2+2t+1} dt = \int \frac{(1+t^2)(2)}{(1+t^2)(1+t^2+2t)} dt =$$

$$= 2 \int \frac{1}{(t+1)^2} dt = 2 \frac{(t+1)^{-1}}{-1} + C = \frac{-2}{t+1} + C \quad t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1} + C$$