



Lezione 17

Infiniti e funzioni continue

Infiniti

f è un infinito in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

Siano f e g infiniti in x_0 , essi sono:

- Stesso ordine se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, $l \neq 0$ e f finito
- f è di ordine sup se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
- f è di ordine inferiore se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Infiniti di ordine crescente

$$\log x \ll x^\alpha \ll a^x \quad \text{con } a > 1 \text{ e } \alpha > 0$$

Quindi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$

Principio di sostituzione degli infiniti (vedi lez precedente)

Supponiamo che $f_1 \gg f_2$ e $g_1 \gg g_2$

Si trascurano gli infiniti di ordine inferiore.

Quindi: $\lim \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \frac{f_1}{g_1}$

ES: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 + x^4(2 + \sin x) + \log x}{1 + 3x + 6x^6 + e^x} = \frac{x^6}{e^x} = 0$

ϵ piccolo
grande

ES: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \log x - x^2 \log x + \cos x}{\sqrt{1 + x^4 \log^4 x}} = \frac{2x \log x - x^2 \log x + \cos x}{(1 + x^4 \log^4 x)^{1/2}} = \frac{-x^2 \log^2 x}{x^2 \log^2 x} = -1$

$\sim \sqrt{x^4 \log^4 x} \sim x^2 \log^2 x$

Funzioni continue

Def: Sia f una funz. definita in un intervallo I , e che $x_0 \in I$
La f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Prop. tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio:

ES: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0$, dove



$\Rightarrow |x - x_0| = h \leftarrow \text{Distanza tra } x \text{ e } x_0$
 $\Rightarrow x = x_0 + h$

Quindi: $\sin(x_0 + h) = \sin(x_0) \underbrace{\cos h}_{\downarrow 1} + \cos(x_0) \underbrace{\sin h}_{\downarrow 0} = \sin(x_0)$

A che serve? Questo teorema è molto utile per calcolare limiti del tipo:

ES: $\lim_{x \rightarrow 3} \arctg x = \arctg 3$.

Proposizione tutte le operazioni elementari (+, -, x, /) applicate a funzioni elementari, producono funzioni continue in $\mathbb{D}(f(x))$.

Osservazione: f continua in $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Se:

i) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

ii) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

iii) I due prec. coincidono.

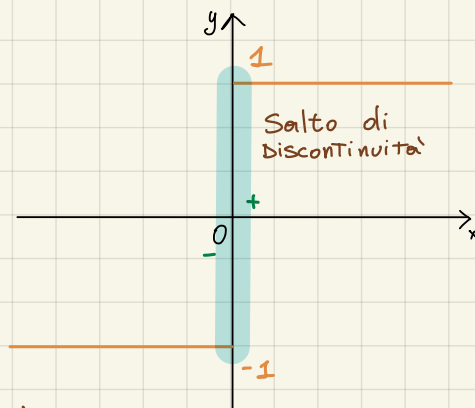
Discontinuità

Def: f ha in x_0 un punto di discontinuità di I^a specie se:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ sono finiti

2) Essi sono diversi

ES: $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -\frac{x}{x} \stackrel{\Delta -1}{\text{per } x < 0} \\ \frac{x}{x} \stackrel{\Delta +1}{\text{per } x > 0} \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$



Def: Si dice SALTO DI DISCONTINUITÀ di f in x_0 :

$$S_f(x_0) = \left| \lim_{x \rightarrow x_0^+} f - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f \right|$$

Nel caso di $f = \frac{|x|}{x} = 1 - (-1) = 2$

Def: Si dice discontinuità di II^a specie se:

\exists i limiti: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f$, uno dei quali è ∞ .

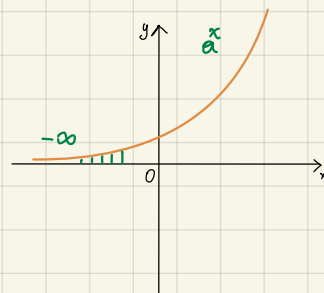
ES: $f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot 2^{1/x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot 2^{1/x} = 0 \cdot \infty ?$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot 2^{1/x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2^{1/x}}{1/x} = +\infty$

$2^{1/x} \ll \frac{1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x \cdot 2^{1/x} = 0$

Importante $a = 0$



Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ Disc. II specie.