Piccolo recap - Floating point

I numeri reali non possono essere rappresentati **senza errore** sui calcolatori. Infatti, questi vengono rappresentati (ad esempio sulle calcolatrici) con la notazione scientifica, ovvero normalizzando il numero.

Normalizzare un numero significa scriverlo nella forma: $2{,}34 \times 10^8$.
L'idea è quella di sbagliare di poco sui numeri piccoli, e poter sbagliare "di molto" sui numeri grandi; quindi dobbiamo trovare una rappresentazione che faccia un **errore relativo** tra il numero rappresentato ed il numero reale.

Inoltre, si tende ad avere **un'unica cifra** prima della parte decimale, questo perchè è proprio la rappresentazione che ci permette di rappresentare il numero più grande possibile con meno cifre possibile.

Ci permette di avere la **massima precisione possibile**, occupando il minor spazio possibile.

Perchè floating point?

Questa notazione viene detta *floating point* perchè possiamo "spostare" la virgola a destra e a sinistra per rappresentare il numero.

Per cosa viene usata?

Viene usata per i numeri **reali**, quindi in C **float (32 bit) e double (64 bit)**.

Standard Floating Point

E' definito dallo standard IEEE.

Prima di questo standard c'era una divergenza delle rappresentazioni, infatti ogni sviluppatore sviluppava le proprie librerie con il "proprio" standard; quindi a seconda di dove il programma veniva compilato, si ottenevano **risultati diversi**.

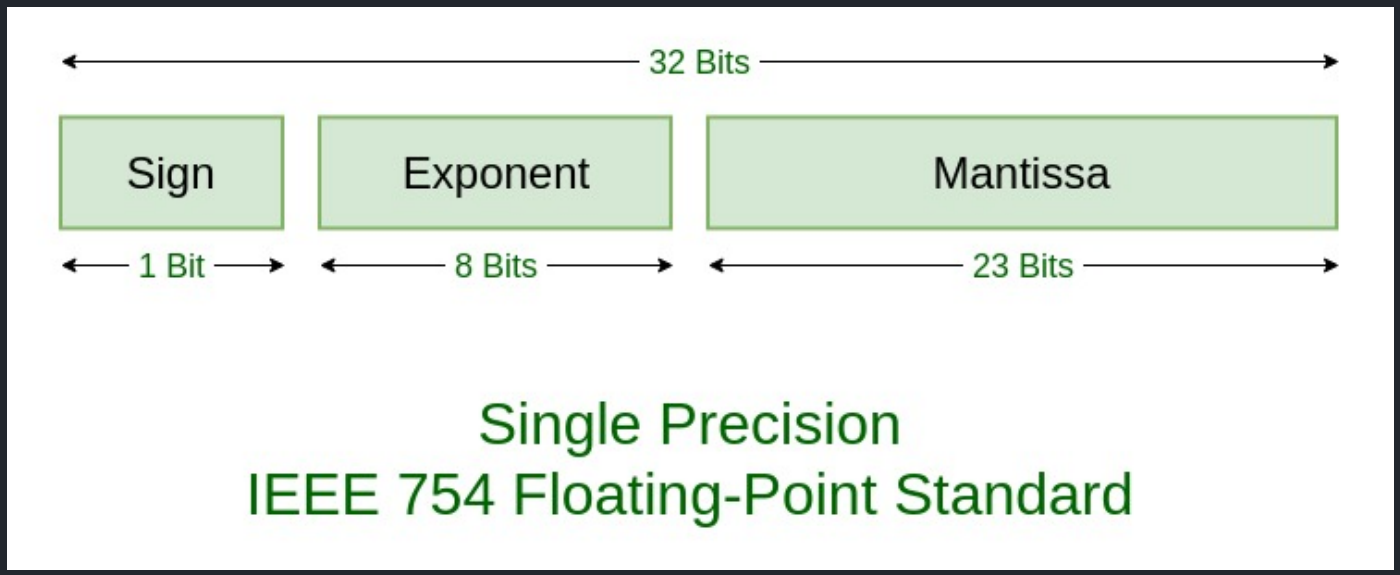
Ai giorni nostri **quasi tutti** i sistemi utilizzano questo standard, ed abbiamo due rappresentazioni:

- singola precisione - 32 bit - float
- doppia precisione - 64 bit - double

Formato floating point IEEE

L'idea è rappresentare un numero reale mediante una stringa di bit, è presente il segno (a differenza degli interi con il complemento a due);

Troviamo nella parte più significativa, i **bit che rappresentano l'esponente**, successivamente troviamo la **parte frazionaria** del numero.



Come trovare il segno?

A parole possiamo dire che `0 = -` ed `1 = +`, Usando la matematica invece: **segno = $(-1)^S$**.

Parte frazionaria

Un numero normalizzato, ha sempre un `1` in testa: `+-1.xxxx`; se i numeri sono normalizzati, è inutile sprecare un bit per rappresentare quell'1, visto che è sempre uguale.

Quindi, per la rappresentazione normalizzata si fa finta di avere un 1, che in realtà non viene normalizzato.

Otteniamo quindi:

$x = (-1)^S \times (1+\text{Fraction}) \times 2^{\text{Esponente - bias}}$

L'esponente

L'esponente viene rappresentato con una strana rappresentazione, quindi nè segno in modulo ne rappresentazione a complemento a due.

Viene usata una rappresentazione chiamata **rappresentazione per eccessi**, in inglese `Bias`, che porta i numeri negativi tutta dalla parte dei positivi, sommando una costante in modo da renderli tutti positivi (aggiungo una costante di polarizzazione).

Quindi, se voglio avere il valore effettivo dell'esponente devo sottrarre questa **costante di polarizzazione**:

- Singola precisione : `Bias = 127`
- Doppia precisione : `Bias = 1023`

Inoltre, due configurazioni dell'esponente non vengono usate, perchè riservate: `00000000 e 11111111`.

Valore più piccolo

Il valore più piccolo è quando abbiamo un esponente del tipo: `00000001`, e l'esponente vale quindi: `esponente = 1– 127 = –126` (127 è la costante nel float).
In deciamale questo valore corrisponde a : +-1.2 x 10^{-38}

Valore più grande

L'esponente vale `11111110`, quindi: `esponente 254 – 127 = +127`.

Otteniamo quindi: +- 3.4 x 10^{38}

Doppia precisione

Lo standard è lo stesso, ma cambiano i valori rappresentabili:

Valore più piccolo:

il valore più piccolo rappresentabile è con un esponente pari a `1 – 1023 = –1022`. Otteniamo quindi +- 2.2 x 10^{-308}

Valore più grande

Abbiamo un esponente del tipo: `2046 – 1023 = +1023`, ottenendo: +-1.8 x 10^{308}

Non è tutto oro ciò che luccica

Anche se possiamo rappresentare questi numeri mostruosamente piccoli, ciò non significa che la precisione sia accettabile. Possiamo infatti rappresentare (realmente) questi range:

Singola precisione

Approssimativamente 2^{-23}, quindi `sei cifre decimali`

Doppia precisione

Approssimativamente 2^{-52}, quindi `16 cifre decimali`

🏁 esempi a 0:27 del 03-26

Esistono dei numeri che non possono essere normalizzati?

Si, sicuramente lo zero.

Supponiamo di avere un numero molto piccolo : 0.000---1. Come. posso normalizzarlo? Dovrei shiftarlo a sinistra tante volte finché non ottengo: 1.000--- .

Per ogni shift a sinistra, devo **decrementare l'esponente**. Se il numero è davvero molto piccolo, però, non ho **abbastanza "esponenti"** per poterlo normalizzare (portare 1 in prima posizione).

Quindi, un **numero non normalizzabile** è un numero talmente piccolo che gli esponenti a disposizione non bastano per normalizzarlo.

Come rappresentiaomo i numeri non normalizzati??

Lo zero, ad esempio, non ha letteralmente un numero da portare in prima posizione; viene utilizzato uno standard diverso per normalizzare lo zero e tutti i numeri **molto** vicini ad esso.

Il bit hidden non è presente, quindi vale **zero**, ed il numero viene rappresentato nel seguente modo:

$$x = (-1)^{S} \times (0 + \text{Frazione}) \times 2^{-\text{Bias}}$$

Il **-Bias** è un numero, che è più piccolo dell'esponente che potevamo usare nella precedente rappresentazione.
Nel caso in cui la parte frazionaria sia composta da **tutti zeri**, il numero rappresentato è esattamente lo zero.

Questa rappresentazione ha un **problema**, ovvero ha **due rappresentazioni per lo zero**, per via del segno.

Infiniti e NaN - Configurazioni riservate

La configurazione di esponente `1111...1,` , con parte frazionale == 0, viene fatto corrispondere ad **infinito**.

La configurazione di esponente `1111...1,` , con parte frazionale =!= 0, viene fatto corrispondere **NaN**, ovvero **Not A Number**.

🏁 0:57

Addizione con floating point

Questo tipo di standard non è facile da implementare. Piuttosto di scegliere delle soluzioni semplici da implementare in hardware, sono state scelte delle soluzioni che portavano una **buona precisione** nei risultati.

Questo è il motivo per cui i processori a basso costo non implementano tutte le operazioni floating point; infatti inizialmente il FP era gestito opportunamente solo da **Intel**, proprio perchè è stata intel ad implementare per prima la gestione del FP.

Come si somma in FP?

Vogliamo sommare $\mathbf{9.999 \times 10^{1} + 1.610 \times 10^{-1}}$.

Non possiamo sommare direttamente i due numeri perchè le potenze utilizzate devono essere le stesse, quindi dobbiamo **allineare** i due numeri.

Per portare i due esponenti allo stesso livello abbiamo due scelte:

Shiftare l'esponente più piccolo - sbagliato!

Se portiamo l'esponente più piccolo a quello più grande, dobbiamo spostare la virgola di due posizioni, ottenendo:

```
1.610 -> 0.016
```

In questa operazione andiamo inevitabilmente a perdere **precisione**, proprio perchè le cifre visualizzate sono sempre 4.

A questo punto non ci resta che moltiplicare le due cifre, ottenendo 10.015×10^{1}.

Questo numero, però, non è normalizzato; dobbiamo quindi shiftare ulteriormente le cifre per ottenere 1.0015×10^{2} (dobbiamo poi approssimare).

FP Adder Hardware

Un addizionatore FP hardware è sicuramente un circuito più complesso di un adder ad interi; non è assolutamente pensare di poter eseguire tutta l'operazione in un unico giro di clock, questo perchè richiederebbe una quantità di tempo maggiore per ciclo di clock.

E' meglio quindi suddividere delle istruzioni più complesse **in più colpi di clock**, in modo da non penalizzare le altre operazioni.

Gli adder FP solitamente possono essere **pipelined**, ovvero mentre sta compiendo un'operazione, può iniziarne altre in modo da velocizzare il tutto.

Moltiplicazione FP

A differenza dell'addizione, l'esponente non deve essere lo stesso per i vari operandi. Se volessimo moltiplicare:

$1.110 \times 10^{10} * 9.200 \times 10^{-5}$

Dobbiamo quindi **sommare gli esponenti**, e moltiplicare le parti significative, ottenendo: 10.2021×10^{5}, dobbiamo infine normalizzare ed arrotondare, ottenendo: 1.021×10^{6}.

A differenza dell'addizione, nella moltiplicazione abbiamo un ulteriore passaggio; dobbiamo infatti **determinare il segno** del risultato.

Conversione da FP ad intero

A volte potremmo dover portare un intero in float o viceversa; tipicamente queste operazioni richiedono, ovviamente, più cicli di clock, e possono inoltre essere **pipelined**.

Operazioni FP in RISC

Singola precisione:

- fadd.s
- fsub.s
- fmul.s
- fdiv.s
- fsqrt.s
    - Ad esempio: fadds.s f2, f4, f6

Doppia precisione:

- fadd.d
- fsub.d
- fmul.d
- fdiv.d
- fsqrt.d
    - Ad esempio: fadd.d f2, f4, f6

Esempio: Da Gradi F a gradi C

Programma in C

```
float f2c (float fahr){

    return ((5.0 / 9.0) * fahr - 32.0);

}
```

Codice assembly

```
f2c:
    flw f0, const5(gp)
    flw f1, const9(gp)
    fdiv.s f0, f0, f1
    flw f1, const32(gp)
    fsub.s f10, f10, f1
    fmul.s f10, f0, f10
    jalr   zero, 0(ra)
```

Con l'istruzione `flw f0, const5(gp)` stiamo **caricando in memoria** un valore **floating point a singola precisione**; l'istruzione sta per "Floating-point Load Word".

Dobbiamo ovviamente utilizzare dei registri appositi, ovvero i **registri floating point**; il primo registro usato è **l'f0**.

Soluzione poco efficiente

Questa soluzione è poco efficiente perchè stiamo salvando i valori 5 e 9 in dei registri e sopratutto stiamo effettuando una divisione fp ogni volta che dobbiamo effettuare una conversione;

sarebbe più intelligente avere sempre a disposizione questo valore, o meglio ancora calcolare le costanti **a tempo di compilazione**, in modo da evitare di aggiungere calcoli inutili a tempo di esecuzione.

Inoltre, i compilatori, quando si trovano a dover **dividere per una COSTANTE**, calcolano l'inverso del valore, ed invece di effettuare una divisione, effettuano una **moltiplicazione**; questo perchè le divisioni sono particolarmente lente.

---

fine lezione 10