MARGINI DI STABILITA'

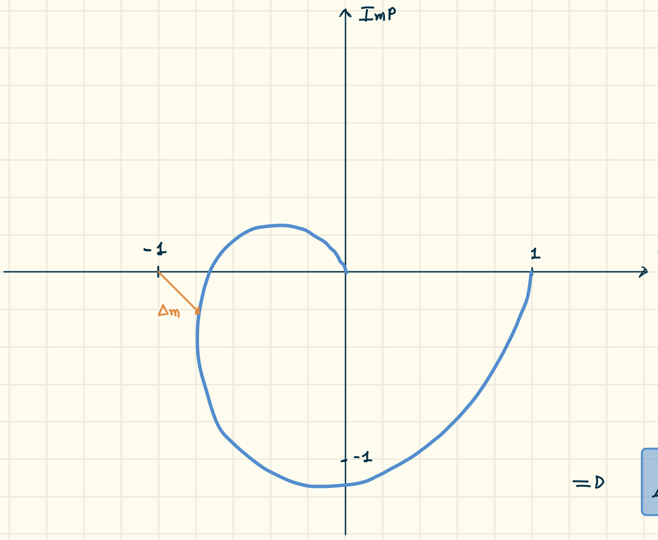
STABILITA' ROBUSTA

Abbiamo finora considerato le funzioni di trasferimento in condizioni normali, ma come ingegneri ci interessa sapere anche cosa potrebbe succedere in **condizioni perturbate**, ovvero quando la funzione di anello **è affetta da incertezze** (rumore ecc).

Il sistema gode della proprietà di stabilità robusta quando rimane stabile anche in presenza di incertezze.

MARGINI DI STABILITA'

Sappiamo che il criterio di Nyquist ci dice che una fdt con guadagno positivo ed asintoticamente stabile (a ciclo aperto) è asintoticamente stabile a ciclo chiuso quando il suo diagramma di Nyquist non circonda il punto -1 (nelle lezioni precedenti abbiamo detto "*circonda un numero di volte pari a zero*", in questo caso diciamo che non circonda proprio)



Margine di Stabilità vettoriale

E' il vettore distanza dal punto -1 a TUTTI i punti della curva; di queste distanze si prende l'estremo inferiore.

$$\boxed{\Delta_m = \inf_\omega \| 1 + L(j\omega) \|}$$

Ma la sensitività diretta $S(j\omega) = \dfrac{1}{1 + L(j\omega)}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_m^{-1} = \sup_\omega \| S(j\omega) \|}$$

NORMA

* Ovviamente vogliamo il valore del margine vettoriale più grande possibile.

→ Comprendere il margine vettoriale non è semplicissimo, quindi si introducono altri due indicatori:

Margine di ampiezza

Margine di guadagno

$$\boxed{K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \qquad \text{con } \angle L(j\omega_\pi) = -180°}$$

* Attraverso rappr. di modulo e fase

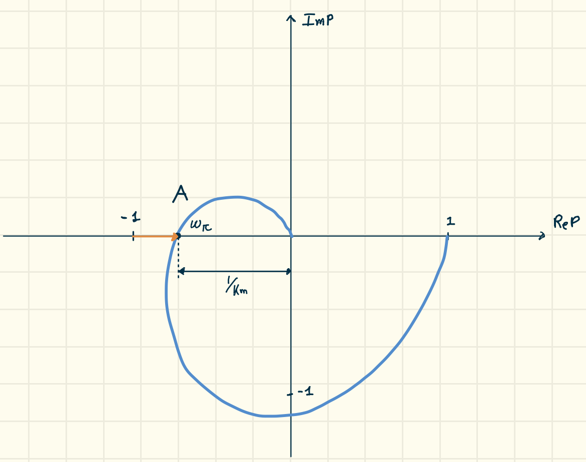
Il margine di ampiezza ci dice il guadagno critico che amplifica il diagramma di Nyquist abbastanza da far intersecare il diagramma con il punto -1 (oppure da far spostare il punto -1/Km verso destra fino a farlo intersecare con il diagramma non amplificato, vedi estensioni del teorema di Nyquist).

All'atto pratico consiste nel trovare la pulsazione W corrispondente ad una fase di -180° della funzione di anello L(jw) e calcolarne il modulo inverso.

1) Trovo $\omega_\pi \,/\, ImP(L(j\omega_\pi)) = \emptyset$

2) Trovo $|ReP(L(j\omega_\pi))| = K_m$

* Attraverso ReP e ImP



* Se ho una fdt A.S. con ν = 2 (2 poli a ReP<0)
Il margine di ampiezza è infinito ⇒ Posso mettere un qualsiasi guadagno e non perdo l'A. Stabilità.

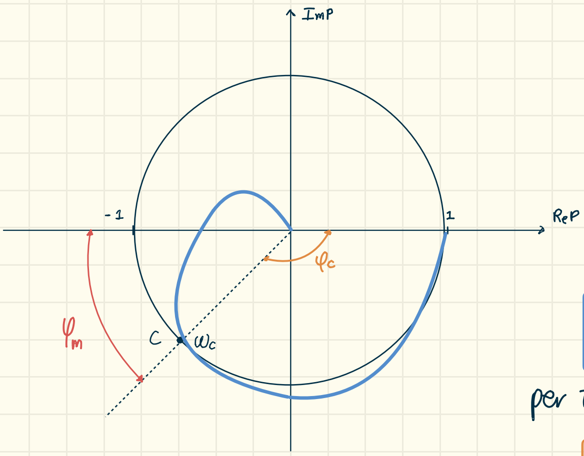
Margine di fase

Con il margine di fase facciamo variare la fase ma non il modulo. Quindi **tutti che intersecano una circonferenza con un dato raggio, potranno muoversi lungo quella circonferenza.** Questo vuol dire che i punti del diagramma di Nyquist che intersecano la circonferenza di raggio 1, potranno muoversi lungo di essa, e quindi prima o poi potranno destabilizzare il sistema.

Nel caso del margine di fase **il punto critico è l'Intersezione del diagramma polare con la circonferenza di raggio 1 centrata in origine.**

Prende il nome di margine di fase la distanza angolare (l'angolo) compreso tra il punto -1 ed il punto di intersezione C.

Ovviamente vogliamo il margine di fase più grande possibile, visto che più saremo vicini al punto -1 minore sarà il margine di fase.



Come calcolare il margine di fase

Trovare il margine di fase vuol dire trovare la fase corrispondente ad un Wc tale che il modulo di L(jWc) sia uguale proprio ad 1 (raggio della circonferenza). Ovviamente potrebbero esserci più intersezioni: prendiamo quella più vicina a -1.

1. Trovo il valore di Wc tale che il modulo di L(jWc)=1
2. Dopo aver trovato la pulsazione Wc, calcoliamo la fase corrispondente *phase*(L(jWc)) che è detta **fase critica**.
3. Una volta ottenuta la fase critica, siccome il punto -1 ha fase -180°, per calcolare il margine di fase ci basta sottrarre la fase critica (in modulo) a 180°

$$\boxed{\varphi_m = 180° - |\varphi_c|}$$

per trovare φ_c Troviamo $\boxed{\omega_c \,/\, |L(j\omega_c)| = 1}$ (intersezione più vicina a -1)

$\Rightarrow \boxed{\varphi_c = \angle L(j\omega_c)}$

Quindi 1:30

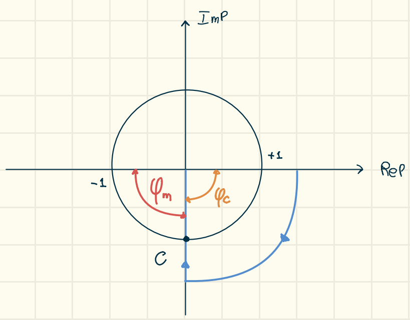
Siccome il ritardo di fase è generalmente associato a qualcosa del tipo $e^{-s\tau} \rightleftarrows 1(t-\tau)$

$\leadsto \boxed{\tau = \frac{\varphi_m \pi}{180 \cdot \omega_c}}$ Conversione IN RADIANTI

$\tau = \frac{\varphi_m}{\omega_c}$ ← Margine di fase GIA' IN RADIANTI

Esempio

$L(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow L(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$



Trovo $\omega_c \,/\, |L(j\omega_c)| = 1 \to \left|\frac{1}{j\omega_c}\right| = 1 \to \left|\frac{1}{\omega_c} e^{-j\frac{\pi}{2}}\right| = 1 \Leftrightarrow \omega_c = 1$

$\angle L(j\omega_c) = -\frac{\pi}{2} = -90° = \varphi_c \Rightarrow \varphi_m = 180 - |\varphi_c| = 180° - |-90°| = 90°$ Ans

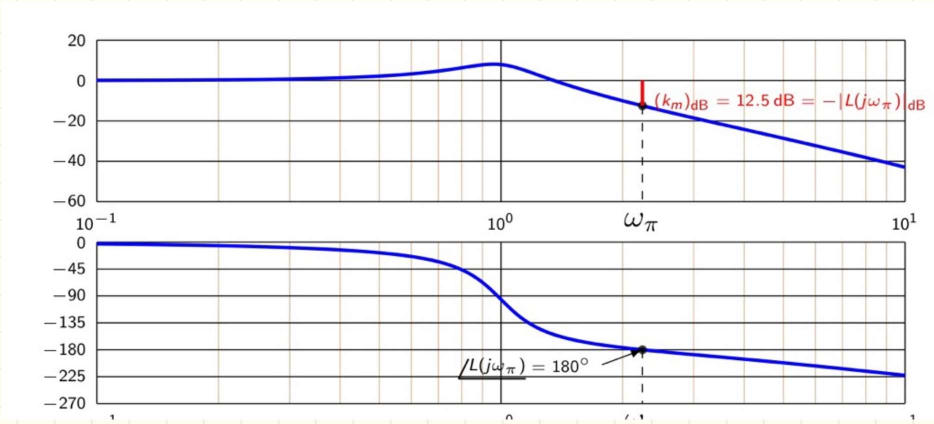
$\Rightarrow \tau_c = \frac{\varphi_m \cdot \pi}{180° \cdot \omega_c} = \frac{\cancel{90°} \cdot \pi}{\cancel{180°}\, 2} = \frac{\pi}{2} = 1.57 \Rightarrow \tau < 1.57\ s$

Ritardo Massimo

* Si Trova vedi fine lez 13 ovvero inizio lez 14

Calcolare i margini di Stabilità dal diagramma di Bode

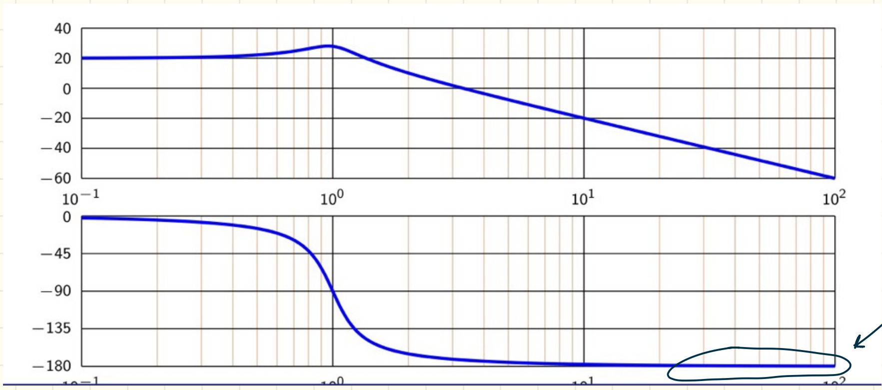
Margine di ampiezza



Controllo sul diagramma di bode delle fasi la pulsazione corrispondente ad uno sfasamento di -180°. Sulla stessa pulsazione ma nel diagramma dei moduli controllo quindi **la differenza tra un valore di 0dB** (ovvero valore naturale 1) **ed il valore in dB effettivo**. Questa differenza **è il margine di ampiezza**.

N.B. Il margine di ampiezza sarà qualcosa del tipo 0dB - (xdB), quindi se xdB è un valore positivo, anche il margine sarà positivo. E se otteniamo un margine di ampiezza positivo vuol dire che **per ottenere l'asintotica stabilità dobbiamo attenuare** di almeno 20*log(xdB) (il valore naturale sarà compreso tra 0 e 1).

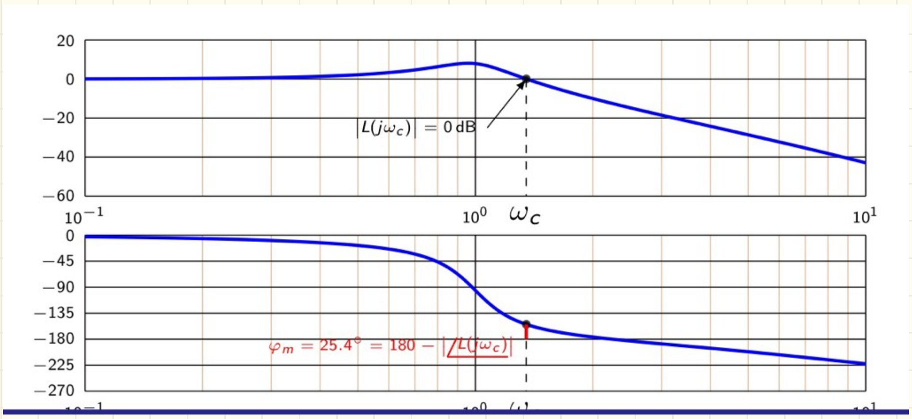
Se invece otteniamo un valore positivo (xdB è negativo) allora vuol dire che **per non perdere l'asintotica stabilità possiamo amplificare un massimo di 20*log(xdB).**



Margine di ampiezza infinito

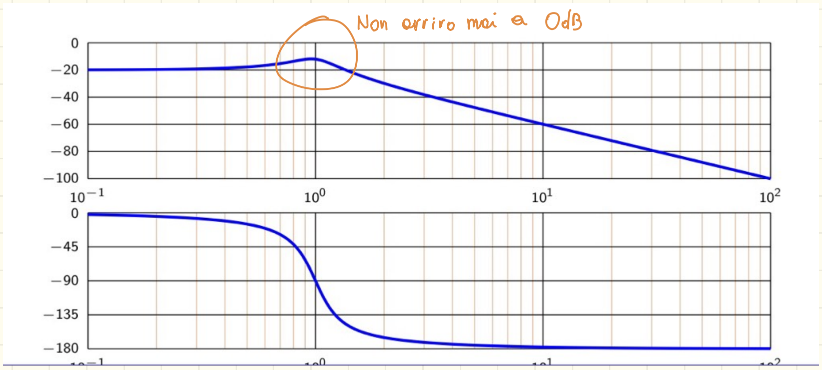
Siccome arrivo ad una fase di -180° solo in maniera asintotica (quindi ad infinito) ed il modulo tende a -infinito per w->inf, allora il margine di ampiezza sarà 180°+inf=infinito

Margine di fase



In questo caso controlliamo il valore di Wc corrispondente ad un modulo di ampiezza 0dB, ovvero 1 in valore naturale. Controlliamo quindi la differenza di fase tra un valore di -180° ed il valore della fase effettivo. Quello sarà il valore del margine di fase.

Anche in questo caso se abbiamo un margine di fase positivo, e quindi la fase effettiva di trova al di sotto di -180 (ad esempio (-200) per la pulsazione Wc, vuol dire che **per avere l'asintotica stabilità dobbiamo anticipare il sistema.**



Margine di fase infinito

Siccome non arrivo mai ad un modulo di 0dB e sopratutto siamo al di sotto di 0dB, vuol dire che **tutto il diagramma di Nyquist è contenuto all'interno della circonferenza di raggio unitario**. Qualsiasi sfasamento non porta mai al l'asintotica instabilità.