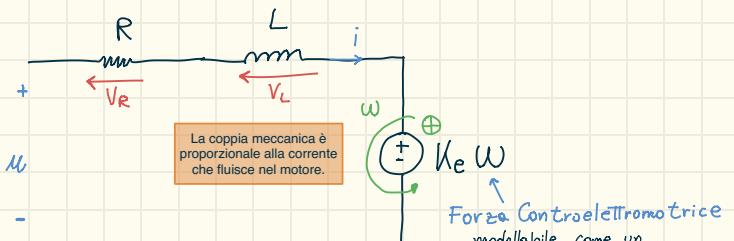


# MOTORE IN CORRENTE CONTINUA



## Schema a blocchi

$$\begin{cases} U(s) = RI(s) + LI(s) + Ke \Omega(s) \\ SJ \Omega(s) = K_t I(s) - b \Omega(s) - T_L(s) \end{cases} \Rightarrow$$

Tensione in ingresso

$$u = V_R + V_L + F_{CE} = R \cdot I + L \frac{dI}{dt} + K_e W$$

coppia

$$J \frac{d\omega}{dt} = K_t I - b \omega - T_L$$

Attrito viscoso proporzionale alla velocità angolare

Coppia di carico ill D'isturbo

Momento d'inerzia del motore

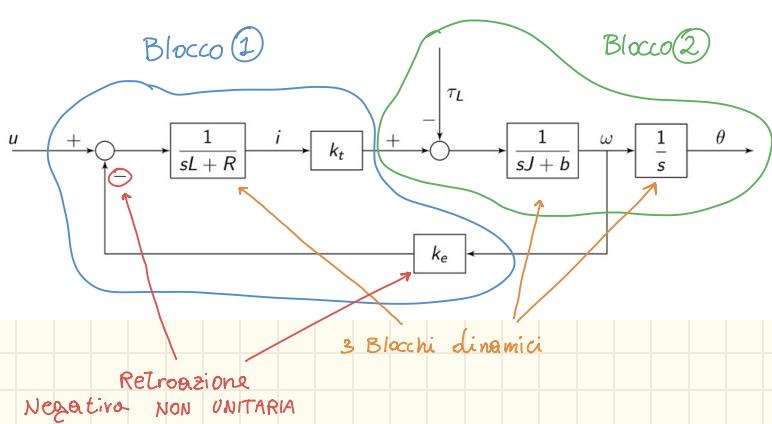
Accelerazione angolare

$$= m \cdot a = \sum F$$

Se  $T_L = \text{Cost}$   $\Rightarrow T_L = \mathcal{T}(t)$

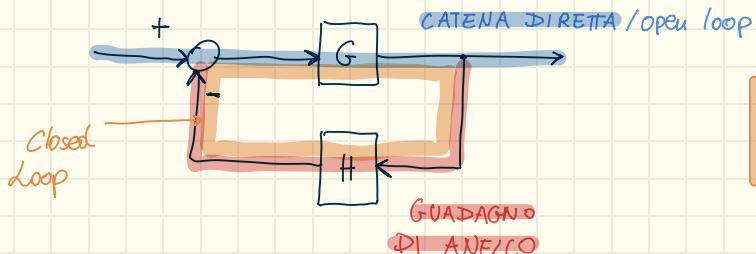
\* Differenza

$$\begin{cases} I(s) = \frac{1}{SL + R} [U(s) - K_e \Omega(s)] \\ \Omega(s) = \frac{1}{SJ + b} [K_t I(s) - T_L(s)] \end{cases} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2}$$



La forza controloelettromotrice rappresenta una retroazione negativa e si oppone alla rotazione del motore. Questa componente va a stabilizzare il sistema.

Riduzione se  $T_L = 0$



$$\bar{G} = \frac{G}{1 + GH} \quad \text{OPPURE} \quad \bar{G} = \frac{\text{Open Loop}}{1 + \text{Closed Loop}}$$

\* Se  $T_L$  non è zero  $\rightarrow$  Applico la sovrapposizione degli effetti

$$\begin{cases} u \neq 0, T_L = 0 \rightarrow \omega' \\ u = 0, T_L \neq 0 \rightarrow \omega'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega = \omega' + \omega''$$

- f.d.t.  $u \rightarrow \omega$ :  $\frac{\Omega(s)}{U(s)} = ?$
- f.d.t.  $u \rightarrow i$ :  $\frac{I(s)}{U(s)} = ?$
- f.d.t.  $u \rightarrow \theta$ :  $\frac{\Theta(s)}{U(s)} = ?$

- f.d.t.  $\tau_L \rightarrow \omega$ :  $\frac{\Omega(s)}{\tau_L(s)} = ?$
- f.d.t.  $\tau_L \rightarrow i$ :  $\frac{I(s)}{\tau_L(s)} = ?$
- f.d.t.  $\tau_L \rightarrow \theta$ :  $\frac{\Theta(s)}{\tau_L(s)} = ?$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(s)}{U(s)} &= \frac{k_t}{s^2 LJ + s(bL + RJ) + Rb + k_e k_t} \\ &= \frac{\frac{k_t}{RJ}}{s^2 \frac{L}{R} + s \left( \frac{bL}{JR} + 1 \right) + \frac{b}{J} + \frac{k_e k_t}{RJ}} \end{aligned}$$

Secondo Ordine

## FDT TRA $\Omega$ e $U$

Ricavo la FDT dello schema a blocchi seguendo le formule della retroazione

• CATENA DIRETTA ( $\tau_L = 0$ ) :

SERIE

$$K_t \cdot \frac{1}{sL + R} \cdot \frac{1}{sJ + b} = \frac{K_t}{(sL + R)(sJ + b)} \quad (1)$$

• ANELLO CHIUSO:  $K_t \cdot K_e \cdot \frac{1}{sL + R} \cdot \frac{1}{sJ + b} = \frac{K_t K_e}{(sL + R)(sJ + b)}$  (2) oppure gain =  $K_e$  (3)

$$\Rightarrow \frac{\underline{U}(s)}{\underline{U}(s)} = \frac{\underline{OL}}{1 + \underline{OL} \cdot \text{gain}} = \frac{\underline{OL}}{1 + \underline{OL} \cdot K_e} = \frac{\frac{K_t}{(sL + R)(sJ + b)}}{1 + \frac{K_t K_e}{(sL + R)(sJ + b)}} = \frac{\frac{K_t}{(sL + R)(sJ + b)}}{\frac{(sL + R)(sJ + b) + K_t K_e}{(sL + R)(sJ + b)}} = \frac{\frac{K_t}{(sL + R)(sJ + b)}}{(sL + R)(sJ + b) + K_t K_e}$$

$$= \frac{K_t}{s^2 L_j + s(Lb + R_j) + R \cdot b + K_t K_e} = \frac{K_t}{s^2 L_j + s(Lb + R_j) + R \cdot b + K_t K_e}$$

Dato che

$$\begin{cases} \tau_E^{ol} = \frac{L}{R} & \text{Costante di tempo} \\ & \text{dovuta alla parte} \\ & \text{elettrica} \\ \tau_M^{ol} = \frac{J}{b} & \text{Costante di tempo} \\ & \text{dovuta alla parte} \\ & \text{meccanica} \end{cases}$$

Sappiamo che generalmente i fenomeni meccanici hanno  $\tau_M \gg \tau_E$  e  $\tau_E \ll \tau_M$

## RIDUZIONE D'ORDINE (MOTORE IN CC)

Evidenzio  $\tau_E$  e  $\tau_M$ :  $G(s) =$

$\hookrightarrow$  moltiplico per  $\frac{1}{R_j}$

$$\frac{K_t}{s^2 \frac{L}{R} + s \left( \frac{L}{R} \cdot \frac{b}{J} + 1 \right) + \frac{b}{J} + \frac{K_t K_e}{b J}}$$

Trascurabile

Prima approx (3)

$$\approx \frac{\frac{K_t}{b J}}{s^2 \frac{L}{R} + s + \frac{b}{J} + \frac{K_t K_e}{b J}}$$

$$\text{Se } \tau_E \ll \tau_M \rightarrow \frac{L}{R} \cdot \frac{b}{J} = \tau_E \cdot \frac{1}{\tau_M} \approx 0 \ll 1$$

### MEDIA GEOMETRICA

IN FREQUENZA  
delle pulsazioni di rottura

$$M_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$$

### MEDIA ARITMETICA

NEL TEMPO  
delle pulsazioni di rottura

$$M_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Sfruttiamo il fatto che la media geometrica in frequenza equivale alla media aritmetica nel tempo per trovare il punto medio tra le due pulsazioni di rottura.

Questo punto medio ci serve per dire che se ci poniamo ad una pulsazione molto minore del punto medio delle due pulsazioni di rottura, possiamo ridurre il grado della funzione di trasferimento.

proof  $w_1, w_2 \rightarrow M_g = \sqrt{w_1 \cdot w_2} = \log_{10} \left[ \sqrt{\frac{1}{\tau_E \cdot \tau_M}} \right] = \log_{10} \left[ \left( \frac{1}{\tau_E \cdot \tau_M} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} \log_{10} \left( \frac{1}{\tau_E \cdot \tau_M} \right)$

$$= \frac{1}{2} \log_{10} \frac{1}{\tau_E} + \frac{1}{2} \log_{10} \frac{1}{\tau_M} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log_{10} (x_i)$$

Rappresentazione su scala logaritmica del 1° punto di rottura

Rappresentazione su scala logaritmica del 2° punto di rottura

Medio Aritmetica

Se  $w \ll \sqrt{\frac{1}{\tau_E \cdot \tau_M}}$

$$\Rightarrow w^2 \ll \frac{1}{\tau_E} \cdot \frac{1}{\tau_M} \rightarrow w^2 \tau_E \ll \frac{1}{\tau_M}$$

$$\text{ma } \tau_M = \frac{J}{b} \Rightarrow w^2 \frac{L}{R} \ll \frac{b}{J}$$

dalla (3)

$$G(s) \approx \frac{\frac{K_t}{b J}}{\frac{S^2 \frac{L}{R}}{b J} + S + \frac{b}{J} + \frac{K_t K_e}{b J}}$$

$$w^2 \frac{L}{R} \ll \frac{b}{J}$$

$$\approx \frac{\frac{K_t}{b J}}{S + \frac{b}{J} + \frac{K_t K_e}{b J}}$$

Approssimazioni valide per pulsazioni (frequenze) molto minori del punto medio tra i due punti di rottura  $w_1$  e  $w_2$ .

$$w \ll \sqrt{(\tau_E \cdot \tau_M)^{-1}}$$

Almeno una decade

$\frac{L}{R}$  coeff di  $s^2$  ma  $\bar{S}_1 = -\frac{R}{L} \Rightarrow \frac{L}{R}$  costante di tempo

$\frac{J}{b}$  coeff di  $\tau_L$  ma  $\bar{S}_2 = -\frac{b}{J} \Rightarrow \frac{J}{b}$  c.t.

elettrica  $\tau_e^{OL}$   
meccanica  $\tau_m^{OL}$

con  $\tau_e \ll \tau_m$

$$\Rightarrow \frac{\tau_e}{\tau_m} = \frac{b}{J} \cdot \frac{L}{R} \ll 1$$

Se  $\omega \ll (\sqrt{\tau_e^{OL} \tau_m^{OL}})^{-1}$  allora  $\omega^2 \tau_e^{OL} \ll (\tau_m^{OL})^{-1} = b/J$ .

media aritmetica  
tra le due pulsazioni



Recap

Approssimiamo la fdt di 2° ordine con una di primo ordine perché:  
 1. La costante di tempo elettrica deve essere trascurabile rispetto a quella meccanica (vero)  
 2. Facciamo un'analisi in frequenza per pulsazioni molto inferiori rispetto al punto medio tra le due pulsazioni di rottura della fdt di secondo ordine.

Perdiamo traccia di L: è come se fosse zero.  
 Questa fdt è quella che otterremmo se ponessimo l'induttanza pari a zero.

\* Fine Assegnazione (Rec 3)

## RIDUZIONE D'ORDINE (IN GENERALE)

$$\text{Se } G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Se  $\tau_2 \ll \tau_1$

$$G(s) \approx \frac{1}{\tau_1 s + 1}$$

Il secondo punto di rottura scompare

possiamo fare l'operazione di riduzione d'ordine quando una delle due dinamiche è molto diversa dall'altra. Gli esponenziali non dominanti si spengono in tempi trascurabili rispetto ai tempi di assennamento dell'esponenziale dominante. Se le due costanti di tempo sono diverse tra loro vuol dire che le frequenze di rottura sono lontane tra loro e che quindi ponendosi a molta distanza (inferiore) possiamo valutare il sistema guardando solo al primo punto di rottura: questo perché essendo i due punti di rottura molto distanti tra loro, l'andamento in corrispondenza del primo punto (contando anche il secondo) è molto simile all'andamento che la fdt avrebbe se avesse solo il primo polo.

Il polo dominante è quello più vicino all'asse dell'origine.

Un derivatore non può essere realizzato, quindi aggiungiamo un polo molto lontano in modo da non influenzare il polo del derivatore.

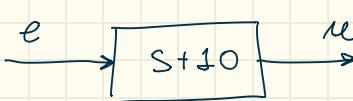


\* Discorso del gain

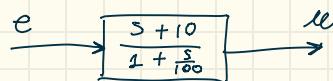
$$G(s) = \frac{1/(\tau_1 \tau_2)}{(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2)}$$

Possiamo scrivere le fdt in 3 modi.  
 Nel modo a sinistra evidenziamo i poli e gli zeri, mentre nella rappresentazione precedente evidenziamo il guadagno

Se cancellassimo (ad esempio) T2 modifichiamo il diagramma di bode anche a basse frequenze perché quel membro contribuisce al guadagno statico.



$$u = \dot{e} + 10e \rightarrow \text{Non fisicamente realizzabile}$$



$$G = \frac{s+10}{1 + \frac{s}{100}} \rightarrow \text{fisicamente realizzabile}$$

NON REALIZZABILE

$$G(s) = s + 10$$

FORMA BODE

$$\text{Con } G(s) = 10(1+10s) \rightsquigarrow K_s = 10$$

$K_s$

~ Aggiungo un polo molto piccolo

$$\Rightarrow \bar{G}(s) = \frac{s+10}{s+100} \Rightarrow \begin{cases} z = -10 \\ P = -100 \end{cases}$$

(almeno uno decade più piccolo dello zero):  $\bar{P}$  in -100

$$\text{MA } \bar{G}(s) = \frac{\frac{1}{10}(1+10s)}{\frac{1}{100}(1+100s)} \Rightarrow \bar{K}_s = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1000}$$

$\bar{K}_s$

$\bar{G}(s)$  è realizzabile MA ha un guadagno statico diverso!

Come risolvere?

$$\bar{G}_1(s) = \frac{s+10}{1 + \frac{s}{100}} \Rightarrow \begin{cases} z = -10 \\ P = -100 \end{cases}$$

Il polo è sempre in -100

$$\text{e } \bar{G}_1(s) = \frac{10(1 + \frac{1}{10}s)}{100 + s} = \frac{10}{100} \frac{1 + \frac{1}{10}s}{1 + \frac{1}{100}s}$$

guadagno statico INVARIATO

### MODI DI SCRIVERE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Evidenziando quello che ci interessa

1) Rapporto tra polinomi:

2) Rapporto tra produttorie di termini

$$\frac{\pi(s+z)}{\pi(s+r)}$$

$$G(s) = \frac{1/(\tau_1\tau_2)}{(s+1/\tau_1)(s+1/\tau_2)}$$

$$\frac{\pi(1+sT)}{\pi(1+s\tau)}$$

$$\text{Se } G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

- POLI / ZERI
- Punti di rottura ( $\omega$ )
- GAIN ( $s=0 \rightarrow K_p=1$ )
- COSTANTI DI TEMPO

Quando si lavora sulla fdt per **modificare il comportamento** in alta frequenza conviene lavorare con la fdt che evidenzia il guadagno e le costanti di tempo, in modo da non eliminare zeri che modificano il guadagno (se eliminiamo un polo della rappresentazione che evidenzia invece i poli e gli zeri andiamo a modificare il guadagno!)

Si traccino i diagrammi di Bode della f.d.t. del secondo ordine e quelli della f.d.t. del modello ridotto.

Fino a quali pulsazioni è accettabile l'approssimazione del modello ridotto?