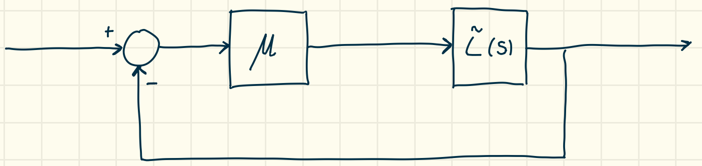
ESTENSIONI DEL CRITERIO DI NYQUIST

Lez 13 - 21/04/22

CONTROLLO PROPORZIONALE



$\tilde{L}(s) = L(s)$ perché portiamo tutto il controllore TRANNE IL SUO GUADAGNO in $L(s)$.

→ Che guadagno devo avere (μ) per avere il sys A.S. usando il criterio di Nyquist?

MA μ è incognito ⇒ Non possiamo certo tracciare infiniti diagrammi al variare di μ!

Siccome abbiamo visto che $K(s) = 1 + L(s) \leadsto \tilde{K}(s) = 1 + \mu L(s) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu} + \tilde{L}(s) = 0 \rightarrow \boxed{\tilde{L}(s) = -\frac{1}{\mu}}$

La conosciamo

Vediamo quante volte il diag. di Nyquist di $\tilde{L}(s)$ circonda $-\frac{1}{\mu}$

A questo punto modifichiamo il criterio di Nyquist:

Corollario: la <u>condizione necessaria e sufficiente</u> perché il sistema retroazionato appen*a esaminato* sia asintoticamente stabile è che **il numero di circondamenti N** del diagramma di Nyquist di L*(s) **intorno al punto -1/*mu*** <u>sia ben definito</u> e che **i circondamenti**, conteggiati in senso antiorario, **siano pari al numero di poli a ReP>0 di L*(s).**

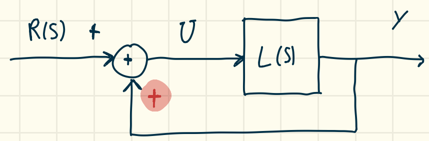
Ovviamente il diagramma sarà **ben definito** se non passa per -1/mu

RETROAZIONE POSITIVA

A questo punto il criterio di Nyquist diventa:

Corollario: la <u>condizione necessaria e sufficiente</u> perché il sistema retroazionato positivamente sia asintoticamente stabile è che **il numero di circondamenti N** del diagramma di Nyquist di L(s) **intorno al punto 1** <u>sia ben definito</u> e che **i circondamenti**, conteggiati in senso <u>antiorario</u>, **siano pari al numero di poli a ReP>0 di L(s).**

Ovviamente il diagramma sarà **ben definito** se non passa per 1



SISTEMI CON POLI A ReP<0

Condizioni sufficienti

Modulo: Se la nostra funzione di anello L(s) ha tutti poli a ReP<0, ovvero è di per se asintoticamente stabile a ciclo chiuso (retroazione positiva o negativa), la **condizione sufficiente** per avere il sistema a ciclo chiuso A.S. è che **il modulo di L(s) deve essere minore di 1 per ogni omega.**

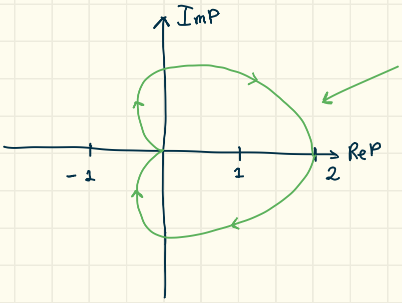
$$\boxed{|L(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega}$$

Fase: Se la nostra funzione di anello L(s) ha tutti poli a ReP<0, ovvero è di per se asintoticamente stabile a ciclo chiuso (<u>retroazione solo negativa</u>), la **condizione sufficiente** per avere il sistema a ciclo chiuso A.S. è che **la fase di L(s) sia minore** (strettamente) **di 180° per ogni omega.**

$$\boxed{\angle L(j\omega) < 180^\circ \quad \forall \omega}$$

Questi corollari sono molto potenti, perché **ci permettono di capire se un sistema è asintoticamente stabile solo guardando la sua risposta in frequenza** —> ci basta conoscere i loro diagrammi di Bode, il diagramma di Nyquist è superfluo

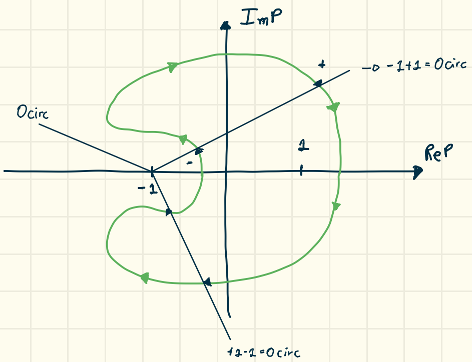
* Ciò non toglie che potremmo avere casi in cui il modulo è > 1 per alcuni valori e lo stesso non ci sono circondamenti :



Non ci sono circondamenti

* Se la retroazione fosse positiva, avremmo -1 circondamenti

COME CONTARE I CIRCONDAMENTI ?

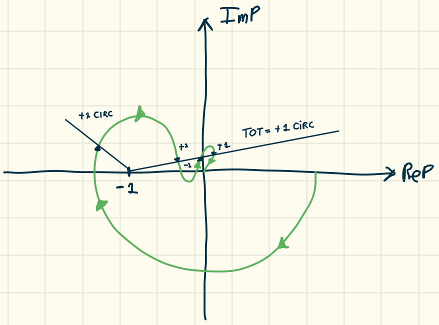


Se la retroazione è Negativa : 0 circondamenti

Per essere sicuri:

① Tracciare una semiretta che parte in -1

② Vedere quante volte la semiretta interseca la curva, stando attenti a considerare il "segno": una sorta di Gauss visto a fisica.



Applicazioni del criterio di Nyquist

Sistemi a stabilità condizionata

Aumentando il guadagno è più probabile che il diagramma di Nyquist vada a circondare il punto -1 oppure, allo stesso modo che il punto $1/\mu$ si avvicini all'origine.
Morale della favola: più aumentiamo il guadagno maggiore è la probabilità di perdere l'asintotica stabilità.

Esistono sistemi che "funzionano" al contrario: all'aumentare del guadagno, il sistema diventa più stabile.
→ Sono i Sistemi a stabilità condizionata

Esempio

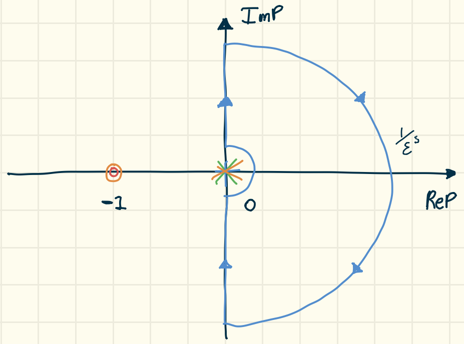
$$L(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3}$$

$S' = \varepsilon e^{j\theta}$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Siccome $\varepsilon \ll 1$
$\varepsilon e^{j\theta} + 1 \approx 1$

$$\to L(S') = \frac{(\varepsilon e^{j\theta} + 1)^2}{\varepsilon^3 e^{j3\theta}} = \frac{1}{\varepsilon^3} e^{-j\varphi} \quad \text{con } \varphi \in [0, \tfrac{3}{2}\pi]$$

$-270°$

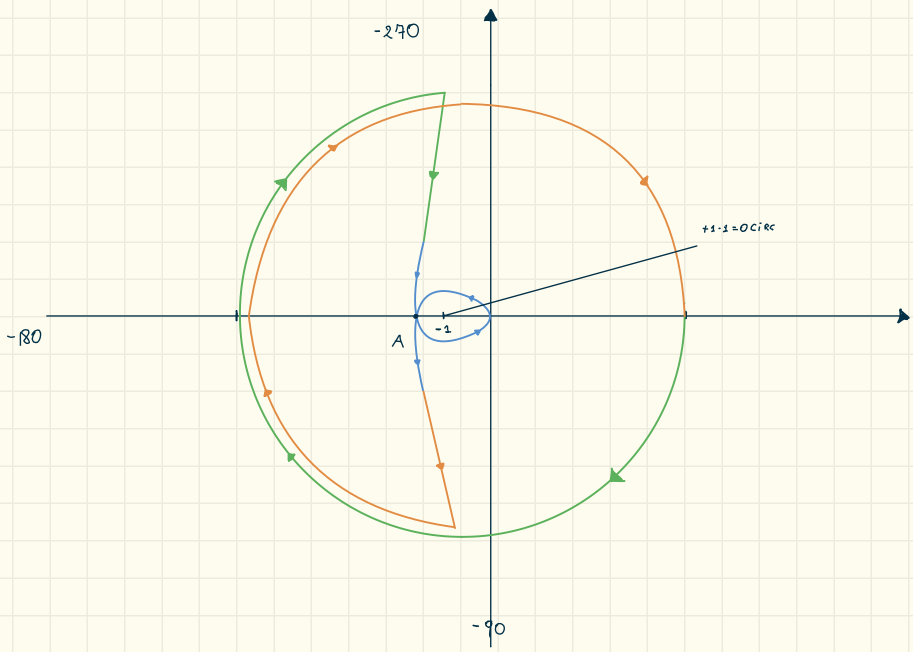


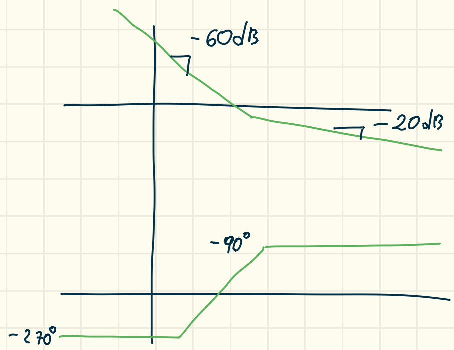
* Ci fermiamo ad una fase di $-270°$ spieg a 45:00

#ToDoControlli #Domanda esame controlli

IMPORTANTE

3 poli in 0 ⇒ $-270°$ φ iniziale





Abbiamo 0 circondamenti di -1 Ma N = 0 ovvero poli di L(s) a ReP>0 ⇒ Criterio soddisfatto

Ma se $\mu = \frac{1}{2}$ ⇒ punto critico $= -\frac{1}{\mu} = -2$ esattamente il punto A ⇒ Non ben definito

Morale della favola: Siccome per $\mu = 1$ → ok e $\mu = 0.5$ → No ok capiamo che il sys è stabile per valori di μ MOLTO GRANDI ovvero il contrario di quello che siamo abituati a vedere.

⇒ Se -1 si trova nel cappio allora abbiamo un sys a stabilità cond. N.d.S.

INOLTRE

Capiamo che il disegno del diagramma di Nyquist preciso (il cappio sopratutto) è abbastanza difficile da fare a mano. Quello che ci interessa però è **solo il punto di intersezione** con l'asse reale, per capire se ci sono circondamenti o (appunto) intersezioni con il punto critico. Ci basta imporre:
- o ImP(L(jw)) = 0
- fase(L(jw)) = -180°

* Esempio Esercizio a 1:01

#Domanda esame controlli

SISTEMI CON RITARDO DI TEMPO

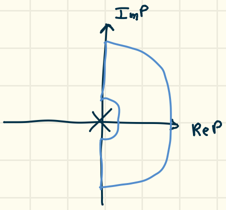
Quando a abbiamo un ritardo nella nostra fdt, **non abbiamo più un polinomio** ma una **funzione trascendente.** Ci riesce quindi difficile valutare l'asintotica stabilità a ciclo chiuso. Possiamo però **ugualmente applicare il criterio di Nyquist**: ci basta quindi disegnare il diagramma di Nyquist della L(s) è valutare quanti circondamenti ci sono del punto -1.

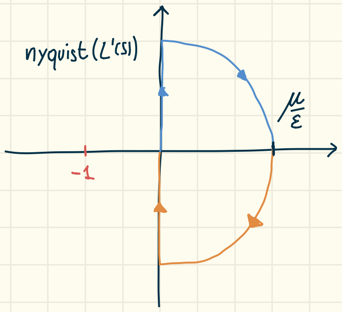
$$L(s) = e^{-s\tau} \cdot L'(s)$$

Abbiamo visto che il ritardo da solo un contributo di fase e non cambia il modulo. Possiamo quindi:
- Disegnare il diagramma di Nyquist di L'(s)
- Tutti i punti della curva vengono sfasati **proporzionalmente rispetto all'aumento di w** (ovvero più andiamo avanti più i punti vengono sfasati)

ESEMPIO:

$G(s) = \frac{\mu}{s} \cdot e^{-s\tau}$ quindi se $L'(s) = \frac{\mu}{s} \Rightarrow L(s) = e^{-s\tau} \cdot L'(s)$





$s' = \varepsilon e^{j\theta}, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

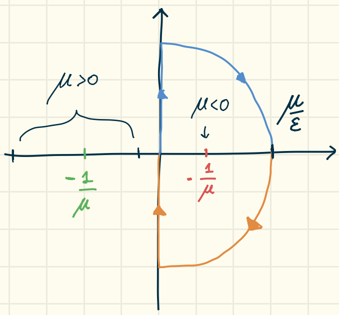
$\Rightarrow L'(s') = \frac{\mu}{\varepsilon} e^{-j\theta}$

* Potremmo anche studiare

$\begin{cases} C(s) = \mu \\ G(s) = 1/s \end{cases}$

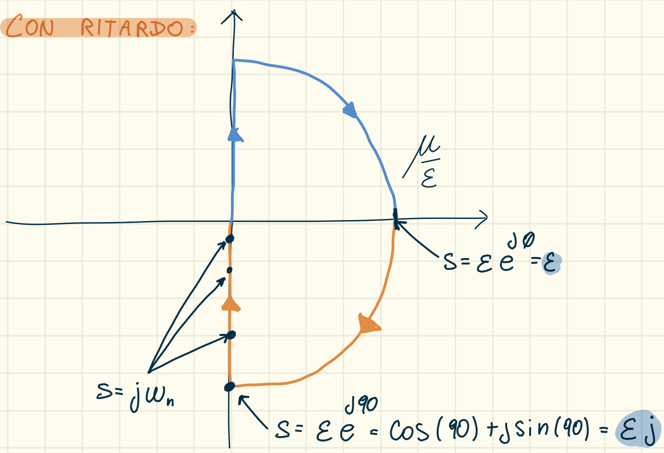
con punto critico in $-\frac{1}{\mu}$

Con μ variabile: $\bar{L}(s) = \frac{1}{s}$



Per guadagni positivi continuiamo ad avere l'asintotica stabilità, mentre se il guadagno diventa negativo la perdiamo, perché abbiamo un circondamento =! N del punto critico.

CON RITARDO:



Siccome $L(s) = \mu \cdot \frac{1}{s} e^{-s\tau}$

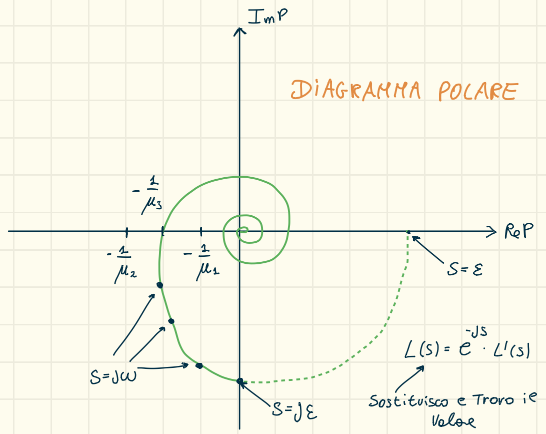
$L(s=\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon\tau} \Rightarrow \Delta \angle L(s=\varepsilon) \cong 0°$ (Reale)

$L(s=j\varepsilon) = \frac{1}{j\varepsilon} e^{-j\varepsilon\tau} \Rightarrow \Delta \angle L(s=j\varepsilon) = \varepsilon\tau$ (Imm)

$L(s=j\omega_1) = \frac{1}{j\omega_1} e^{-j\omega_1\tau} \Rightarrow \Delta \angle L(s=j\omega_1) = \omega_1 \cdot \tau$

$L(s=j\omega_2) = \frac{1}{j\omega_2} e^{-j\omega_2\tau} \Rightarrow \Delta \angle L(s=j\omega_2) = \omega_2 \cdot \tau$

con $\omega_1\tau < \omega_2\tau$ perché $\omega_2 > \omega_1$



Come trovare il punto di intersezione con l'asse reale?
Ci è comodo sapere il punto di intersezione per capire se ci sono o meno circondamenti del punto -1/mu

$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

Siccome avremo un punto del tipo $P_1 = \frac{1}{j\omega_0} e^{-j\omega_0\tau} = -\frac{j}{\omega_0} e^{-j\omega_0\tau} = \frac{1}{\omega_0} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\omega_0\tau} = \frac{1}{\omega_0} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\omega_0\tau\right)}$ FASE

$\Rightarrow \angle P_1 = \angle \frac{1}{j\omega_0} e^{-j\omega_0\tau} = -\frac{\pi}{2} - \omega_0\tau = -\pi \rightsquigarrow \boxed{\omega_0 = \frac{\pi}{2\tau}}$ Dipende solo da τ

Vogliamo che la fase del punto sia $-180° = -\pi$

$\rightarrow$ Calcolo il modulo, fissato ω_0 e τ $\Rightarrow$ ho $M_{P_1} e^{-j\angle P_1}$ $\Rightarrow$ conosco il punto in cui passa il diagramma (M_{P_1})

Dalla lezione 14

$\omega_0 = \frac{\pi}{2\tau} \rightarrow \left|\frac{e^{-s\tau}}{s}\right|_{s=j\omega_0} = \left|\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{j\frac{\pi}{2\tau}}\right| = \left|\frac{2\tau}{\pi} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}\right| = \underbrace{\frac{2\tau}{\pi}}_{M_{P_1}} e^{-j\pi}$ Angolo di $-180°$

$G(s) = \frac{1}{s} e^{-s\tau}$

Trovato il modulo, dobbiamo ricordare che il vettore ha una fase di -180°, quindi si trova sull'asse reale negativo. **Per garantire l'asintotica stabilità** il modulo deve essere minore di 1 (ragioniamo sul modulo).

$M_{P_1} < 1 \rightarrow \frac{2\tau}{\pi} < 1 \rightarrow \tau < \frac{\pi}{2}$ A.S.