RECAP SISTEMI DINAMICI LINEARI

epilogo sui sistemi dinamici lineari

- Rappresentazione **i-u**: equazioni differenziali

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) =$$
$$= \beta_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} + \beta_{n-1}\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + \beta_1 \frac{du(t)}{dt} + \beta_0 u(t)$$

- Trasformata di Laplace

$$s^n Y(s) + (-s^{n-1}y(0^-) - s^{n-2}\dot{y}(0^-) - \ldots) +$$
$$+\alpha_{n-1}[s^{n-1}Y(s) + (-s^{n-2}\ldots)] + \ldots + \alpha_1(sY(s) - y(0^-)) + \alpha_0 Y(s)$$
$$= \beta_n[s^n U(s) + (-s^{n-1}u(0^-) - s^{n-2}\dot{u}(0^-) - \ldots)] + \ldots$$

- Risposta forzata: condizioni iniziali nulle $\Rightarrow$ Funzioni di trasferimento

Abbiamo condizioni iniziali NULLE

$\Downarrow$

Risposta FORZATA

U(t) per $t \leq 0$ è NULLO

- Valore iniziale

$$f(0^+) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$$

- Valore finale (per poli a $Re P < 0$)

$$f(t \to \infty) = \lim_{s \to 0^+} s \cdot F(s)$$

Funzioni di trasferimento

Per un sistema LTI tempo-continuo di ordine n:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Se $\beta_n = 0$ Manca il primo termine del NUM

Il coeff della pot di grado max deve essere pari ad 1. Se non lo è, mettiamo in evidenza

Se non ci sono cancellazioni, i poli della $G(s)$ coincidono con gli autovalori della matrice dinamica del sistema (spazio di stato).

Non ci sono poli/zeri nello stesso punto

* Processo

IL NUM NON E' MONICO

COSTANTE DI TRASFERIMENTO

* IMPO

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

* Un polinomio di termine n può essere fattorizzato in termini più semplici in cui compaiono le sue radici reali; per le radici complesse e coniugate evidenziamo i parametri: smorzamento e pulsazione naturale

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

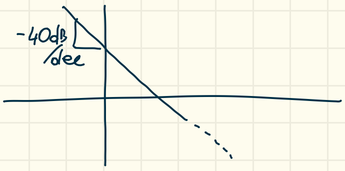
Si evidenziano il guadagno e le costanti di tempo. La usiamo per disegnare i diagrammi di bode. L'obbiettivo è rappresentare le radici avendo il termine noto pari ad 1.

Poli nell'origine

Se $g < 0 \to$ zero in origine

(TIPO positivo/negativo)

s^g INFLUENZA IL GAIN STATICO



ES PRODUTTORIA

* SENTI

* metodo veloce

$\bar{s}_1 = 3$

$\bar{s}_2 = -2$

$$2s^2 - 2s - 12 = 2(s^2 - s - 6) = 2(s-3)(s+2)$$

Costante di Trasf.

$$* \quad \frac{s}{s+1} \to \quad \mu = 1 \quad s^g \to g = -1 \quad T_i = 1$$

Polo in 0

Guadagno

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1+T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

Il sistema è asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ $g \leq 0, T_i > 0, \xi_i > 0$.

In tal caso, se $U(s) = \frac{\bar{u}}{s}$,

STATIC GAIN

$$\bar{y} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{\bar{u}}{s} = G(0)\bar{u}.$$

Pulsazione naturale e smorzamento

Un termine trinomio del tipo $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$, può essere riscritto come

POS

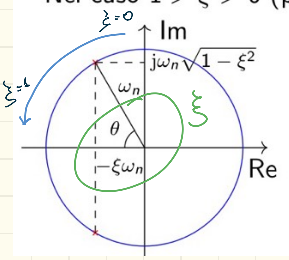
$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \xi^2\omega_n^2 - \xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2 = (s+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)$$

Per scrivere le radici cmplx

Le radici saranno, pertanto,

$$s^* = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

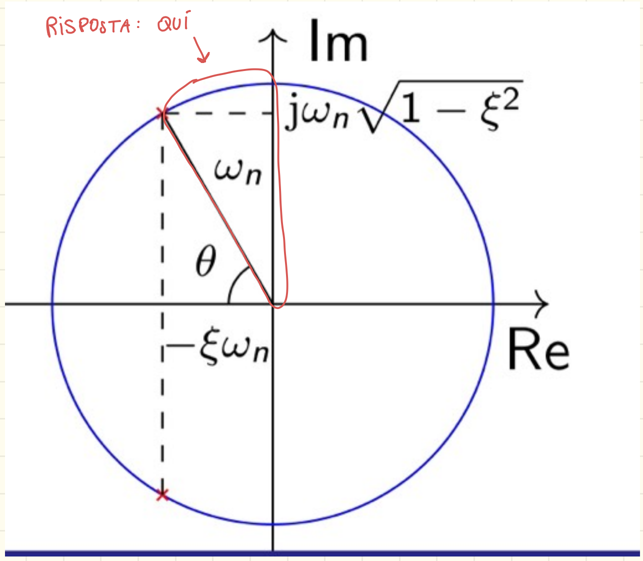
Nel caso $1 > \xi > 0$ (poli complessi e coniugati e as. stabili):



Si ha $\xi = \cos(\theta) = \sin(\pi/2 - \theta)$ e	
$\xi = 0$	poli immaginari puri
$\xi > 0$	poli a parte reale negativa
$\xi < 0$	poli a parte reale positiva
$\xi = 1$	poli reali coincidenti as. stabili
$\xi = -1$	poli reali coincidenti instabili

- Sistema as. stabile, di tipo 0: $G(0) = \mu$, *guadagno statico*
- Sistema instabile, di tipo 0: $G(0) = \mu$, *guadagno* (rapporto tra uscita e ingresso all'equilibrio)
- Sistema non di tipo 0: $\mu = \lim_{s\to 0} s^g G(s)$, *guadagno generalizzato*
- Sistema con azioni derivative ($g < 0$) e con azioni integrali

#Domanda esame controlli, #Domande esame



*

Valore iniziale

Sistema di ordine $n \geq m$ as. stabile:

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0}$$

Risposta al gradino

- Uscita $y(0) = \lim_{s\to\infty} sG(s)\frac{1}{s} = \begin{cases} 0, & m < n \\ \beta_m, & m = n \end{cases}$

Se la fdt è strettamente propria, allora l'uscita è continua (0), anche se l'ingresso è discontinuo.

Se il grado è uguale allora la discontinuità dell'ingresso si ripercuote sull'uscita

GRADO RELATIVO = DEG(DEN) - DEG(NUM)

- Derivata dell'uscita $\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s(sY(s) - y(0^-)) = \lim_{s\to\infty} s^2 G(s)\frac{1}{s} = \begin{cases} 0, & m < n-1 \\ \beta_m, & m = n-1 \end{cases}$

Se $m < n$ sono nulle le prime $n - m - 1$ derivate dell'uscita in $t = 0$.

Teorema della derivata in S

* Recap

*

Risposta al gradino

Sistema as. stabile del primo ordine senza zero:

$$G(s) = \frac{1}{1+sT} = \frac{1/T}{s + 1/T}$$

Costante di Trasf

POLO in $-\frac{1}{T}$

corrisponde all'1%

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T} \Rightarrow y(t) = (1 - e^{-t/T})1(t), \quad T_{a1} = 4.6T$$

Sistema as. stabile del secondo ordine senza zeri:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{2s\xi}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Evidenzio il guadagno

Evidenzio la costante di Tempo

ANTITRASFORMATA

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} - \frac{\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)\right)1(t),$$

$$T_{a1} = \frac{4.6}{\xi\omega_n}, \quad S_\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}, \quad T_s \approx \frac{1.8}{\omega_n} \ (\text{per } \xi = 0.5)$$

Tempo Assestamento all'1%

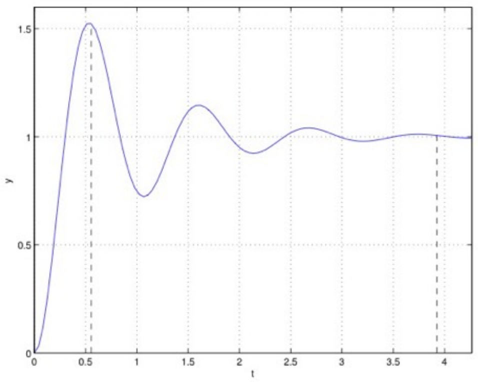
Sovraelongazione percentuale

* Spiegazione

Tempo di salita dal 10% al 90%

*

Risposta al gradino con sovraelongazione



In questo caso:
Sovraelongazione $S_{\%} = 52.5\%$
Tempo di salita $T_s = 0.21\,\mathrm{s}$
Tempo di assestamento
$T_{a1} = 3.77\,\mathrm{s}$

Codice Matlab

```
mu=1; xi=0.2; omega=6;
% G(s)=(mu omega^2)/(s^2 +2 xi omega s +omega^2)
sys=tf(mu*omega^2,[1 2*xi*omega omega^2]);
[ys,ts]=step(sys,5/(xi*omega)+0.1); plot(ts,ys);
xlabel('t'); ylabel('y'); grid on; hold on;
axis([ts(1) ts(end) 0 1.05*max(ys)]);
% Valore a regime
yinf=ys(end);
% Picco sovraelongazione
[ymax,iTM]=max(ys); TM=ts(iTM);
% Calcolo sovraelongazione
S=100*(ymax-yinf)/yinf
[itr1]=find(ys>0.1*yinf,1); tr1=ts(itr1);
[itr2]=find(ys>0.9*yinf,1); tr2=ts(itr2);
Ts=tr2-tr1
[iTa1]=find(abs(ys-yinf)>0.01*yinf,1,'last');
Ta1=ts(iTa1)
%Tempo di massima sovraelongazione
plot([TM TM],[0 ymax],'k--');
%Tempo di assestamento
plot([Ta1 Ta1],[0 ys(iTa1)],'k--');
hold off;
print -depsc ystep_fig
```

*Funzione Find