RECAP REGOLA DEGLI ASINTOTI

$$x_a = \frac{1}{\nu}\left[\sum_i \text{POLI} - \sum_i \text{ZERI}\right]$$

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{(2K+1)\cdot 180^\circ}{\nu} & \text{con } K = 0,1,\dots,\nu-1 \quad \text{con } \rho>0 \quad \text{LUOGO DIRETTO} \\ \dfrac{2K\cdot 180^\circ}{\nu} & \text{con } K = 0,1,\dots,\nu-1 \quad \text{con } \rho>0 \quad \text{LUOGO INVERSO} \end{cases}$$

Se $\nu = 1$

$\rho>0$ (LD) $\Rightarrow$ 1 ASINTOTO di Angolo 180° $\Rightarrow$ Il polo rimasto senza zeri si sposta nel semipiano Stabile
$\Rightarrow$ Un sistema A FASE NON MINIMA, ovvero con uno zero a $ReP>0$ col tempo tende ad essere instabile
Un sistema A FASE MINIMA, ovvero con uno zero a $ReP<0$ col tempo tende ad essere stabile

$\rho<0$ (LI) $\Rightarrow$ 1 asintoto di $\frac{2\cdot 0\cdot 180}{\nu} = 0^\circ$ $\Rightarrow$ Verso Destra $\Rightarrow$ INSTABILE

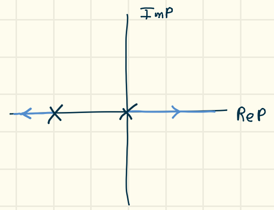
Questo è il caso in cui il nostro controllore proporzionale ha quadagno negativo.

Esempio $L(S) = \frac{1-S}{S+1} = -1\frac{(S-1)}{S+1}$ ($\rho<0$) se usiamo $C(S)=K_P>0$ Tracciamo il luogo inverso! Ci serve $K_P<$ Per il luogo diretto

Se $\nu = 2$

$\rho>0$ (LD) $\Rightarrow$ 2 Asintoti: $x_a = \frac{1}{2}\left(\sum P_i - \sum Z_i\right)$ Con angoli $\begin{cases} \varphi_1 = \left(\frac{2\cdot 0+1}{2}\right)180^\circ = +90^\circ \\ \varphi_2 = \left(\frac{2\cdot 1+1}{2}\right)\cdot 180^\circ = +270^\circ \end{cases}$

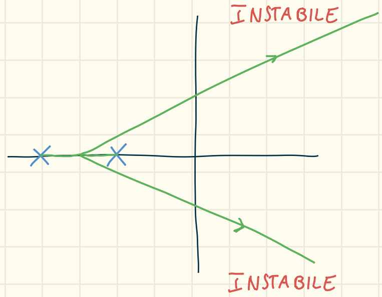
$\rho<0$ (LI) $\Rightarrow$ 2 Asintoti con angoli $\begin{cases} \varphi_1 = \frac{2\cdot 0}{2}\cdot 180 = 0^\circ \text{ INSTABILE} \\ \varphi_2 = \frac{2\cdot 1}{2}\cdot 180 = 180^\circ \text{ STABILE} \end{cases}$



Se $\nu = 3$

$\rho>0$ (LD) $\Rightarrow$ 3 A. $\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{3}180^\circ = 60^\circ \\ \varphi_2 = \frac{2\cdot 1+1}{3}180 = 180^\circ \\ \varphi_3 = \frac{2\cdot 2+1}{3}\cdot 180 = 300^\circ \end{cases}$

$\rho<0$ (LI) $\Rightarrow$ 3 A. $\begin{cases} \varphi_1 = 0^\circ \text{ INSTABILE} \\ \varphi_2 = \frac{2}{3}180^\circ = 120^\circ \\ \varphi_3 = \frac{4}{3}180^\circ = 240^\circ \end{cases}$



Maggiore è il grado relativo e più corriamo il rischio di destabilizzare il sistema facendo tendere gli asintoti dei poli non "accoppiati" ad infinito verso il semipiano destro.

DOVE POSIZIONARE I POLI DEL CONTROLLORE - RIASSUMENDO

Abbiamo detto che tutti i poli "accoppiati" tendono ad arrivare al relativo zero; se questo zero è nel semipiano sinistro **bene**, perché i poli tenderanno ad essere stabili (anche se inizialmente instabili).

Il problema è che i restanti ***ni*** poli non "accoppiati" tenderanno ad infinito con un angolo (definito precedentemente) e centrati in un punto che **dipende dalla posizione degli zeri!** Questo è un problema, perché se posizioniamo i poli troppo a sinistra andiamo si a stabilizzare i poli accoppiati e rispettiamo delle specifiche dinamiche, ma potremmo centrare gli asintoti nel semipiano destro!

CENTROIDE $= x_a = \frac{1}{\nu}\left[\sum \text{Poli} - \sum \text{Zeri}\right]$ $\Rightarrow$ SE $\sum \text{Zeri} > \sum \text{Poli}$ $x_a>0$ $\Rightarrow$ Asintoto centrato nel semipiano DESTRO
$\Rightarrow$ INSTABILE!

Ovviamente dipende dal grado relativo, perché possiamo anche avere un centroide nel semipiano destro, ma se abbiamo un angolo che "punta" verso il semipiano sinistro, prima o poi il sistema si stabilizza.

REGOLA DEL BARICENTRO

Dimostrazione a 58:00 Lez 21

Quando il grado relativo *ni* è almeno due (*ni*>=2) il baricentro del luogo non dipende da valori di *ro* ma coincide con il baricentro dei poli a ciclo aperto. Per calcolare il baricentro basta fare la media dei poli.

$$\boxed{X_b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-P_i)}$$

Il centroide coincide con il baricentro

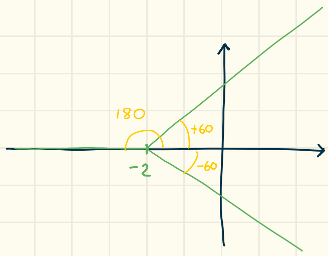
Esempio di applicazione

Questa regola è molto potente perché ci permette di capire per quali valori di *ro* il sistema diventa stabile: poniamo il caso in cui abbiamo 3 poli e nessuno zero; avremo 3 asintoti, due dei quali vanno verso il semipiano destro, destabilizzando il sistema. Questi asintoti sono centrati in un punto nel semipiano sinistro, quindi il sistema parte stabile; lo scopo è trovare per quali valori di *ro* il sistema non è più stabile.

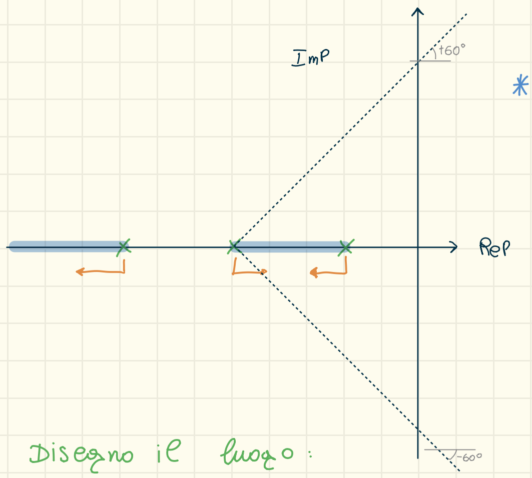
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$\nu = 3 \Rightarrow X_b = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(-P_i) = \frac{1}{3}(-1-2-3) = -\frac{6}{3} = -2$$ CENTRO ASINTOTI

$$\varphi_i = \begin{cases} K=0: & \varphi_1 = (2K+1)\cdot 180/\nu = \frac{180}{3} = 60° \\ K=1: & \varphi_2 = \frac{540}{3} = 180 \\ K=2: & \varphi_3 = 300° = -60° \end{cases}$$



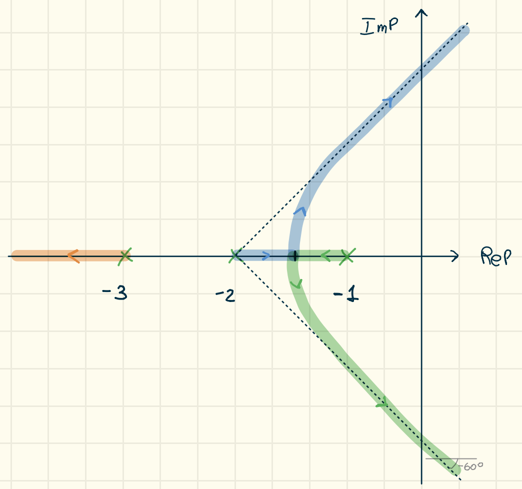
REGOLA DELL'ASSE REALE (LD)



*Diretto: a sx di un numero DISPARI di singolarità

Per via di questa regola capiamo che i due poli a destra devono convergere in un punto intermedio prima di separarsi in due poli complessi e coniugati e convergere a due asintoti di +-60°

Disegno il luogo:



Anche la regola della simmetria è rispettata: se i due poli di destra non convergessero prima ad un punto intermedio ma andrebbero direttamente verso gli asintoti, il luogo non sarebbe simmetrico rispetto all'asse reale.

Trovare il valore di ρ che destabilizza il sistema

$$X_b = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} P_i$$

è un'equazione che si "conserva", quindi possiamo usarla come una sorta di BILANCIO

IL BARICENTRO E' INVARIANTE

Quando i due poli di dx si separano diventano Complessi e Coniugati ⇒ Quando destabilizzano il sys (Asse imm) la ReP = 0 ed essendo coniugati $j\omega - j\omega = 0$ ⇒ tutto zero. ⇒ Resta solo il terzo polo che si trova in...

$$X_b = \frac{1}{n}\left[-P_1 - \left(\cancel{ReP(P_2)}^{0} + ImP(P_2)\right) - \left(\cancel{ReP(P_3)}^{0} + ImP(P_3)\right)\right] = \frac{1}{n}\left[-P_1 - ImP(P_2) - ImP(P_3)\right]$$ ma $ImP(P_2) = -ImP(P_3)$

$$\Rightarrow ImP(P_2) - ImP(P_3) = 0 \Rightarrow X_b = -\frac{1}{n}P_1$$ il polo 1 si trova in $\boxed{P_1 = -n\cdot X_b} = -3X_b$

Posizione del polo puramente reale

Baricentro

Il baricentro è noto perché ci basta fare la media dei poli a ciclo aperto (della funzione di trasferimento)

Trovo il valore di ρ che destabilizza il sys

$$\underbrace{D(P_1) + \rho \cdot N(P_1)}_{\text{Polinomio Caratt}} = 0 \rightsquigarrow P_1 = -3 \rightsquigarrow (3+1)(3+2)(3+3) + \rho = 0 \Rightarrow \rho = -216$$

DA CONTROLLARE !

#ToDoControlli

$$\frac{\rho \cdot 1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \qquad s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + \rho = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & 6+\rho \\ s^1 & \frac{60-\rho}{6} & 0 \\ s^0 & 6+\rho & \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{60-\rho}{6} > 0 & -\rho > -60 \Rightarrow \rho < 60 \\ 6+\rho > 0 & \rho > -6 \end{cases}$$

REGOLA DEI PUNTI MULTIPLI

Dimostrazione a 1:15 L21

Quando il polo **abbandona** (**raggiunge**) l'asse reale c'è sicuramente l'Intersezione di due rami del luogo che determinano un **punto di uscita**(**punto di entrata**): ovvero il **break-away point (break in point)**. Ciò accade sicuramente in corrispondenza dei punti di **massimo** (**minimo**) della funzione reale a destra (il punto di massimo/minimo è una condizione sufficiente).

$$\gamma(x) = -\frac{D(x)}{N(x)}$$

Attenzione! Se abbiamo dei poli multipli complessi, potrebbero esserci intersezioni tra più poli anche nel piano complesso. La condizione vista prima (presenza di min/max) diventa una **condizione necessaria** e non più sufficiente.

Luogo Diretto
MASSIMO $\Rightarrow$ Break Away
MINIMO $\Rightarrow$ Break In

Luogo inverso
MASSIMO $\Rightarrow$ Break In
MINIMO $\Rightarrow$ Break Away

Nel caso di poli complessi

$$\boxed{N(s^*) \cdot \left.\frac{dD(s)}{ds}\right|_{s=s^*} - D(s) \cdot \left.\frac{dN(s)}{ds}\right|_{s=s^*} = 0}$$

Dall'esempio visto prima

RIVEDI

#ToDoControlli

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$N(s) = 1$$
$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$
$$\rho = 1$$

$$\gamma(x) = -\frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{1} \Rightarrow \min/\max = \frac{d}{dx}\left(-x^3 - 6x^2 - 11x - 6\right) = 0 \rightarrow -3x^2 - 12x - 11 = 0$$

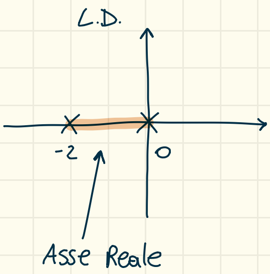
$$\text{per } x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4(-3)(-11)}}{-6} \quad \begin{cases} \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{-6} = 1.42 \\ \frac{-12 - 2\sqrt{3}}{-6} = 2.58 \end{cases}$$

ESERCIZI

$\approx$ 1:30

ES 1

$$L(S) = \rho \frac{1}{S(S+2)}$$



Posso avere un Polo a.cc. in $S_0 = -1.5$?

$$P_c(S) = D(S) + \rho \cdot N(S) \Rightarrow \rho = -D(S_0) = -D(1.5)$$

A ciclo chiuso

$N(S) = 1$

$$\Rightarrow \rho = 1.5(1.5+2) = 5.25$$

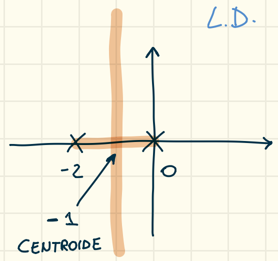
ρ necessario ad avere il polo in -1.5

A ciclo chiuso

Regola Asintoti: $\nu = 2 \Rightarrow$ 2 Asintoti

$$\begin{cases} \varphi_1 = (2k+1)180°/2 = +90° \quad (k=0) \\ \varphi_2 = (2 \cdot 1+1)180°/2 = +270° \end{cases}$$

CENTROIDE $\quad x_a = \frac{1}{\nu}\left[\Sigma P - \Sigma z\right] = \frac{1}{2}\left[0+(-2)\right] = -1$



DOVE SI INCONTRANO? Regola dei punti multipli

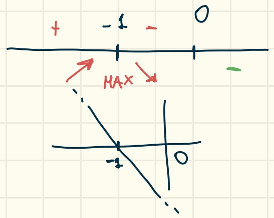
$$\gamma = -\frac{D(x)}{N(x)} = -x^2 - 2x \Rightarrow \text{min/max}: \frac{d}{dx}(-x^2-2x) = 0$$

$$\rightarrow -2x-2 = 0 \text{ per } -2x = 2 \Rightarrow x = -1$$

coincide con il centroide

é max → B.A. o min → B.I. ?

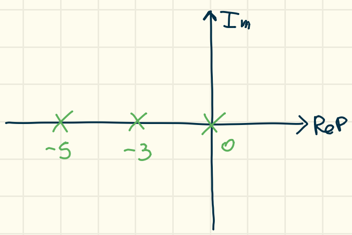
$-2x-2>0$ per $-2x>2 \rightarrow x<-1$

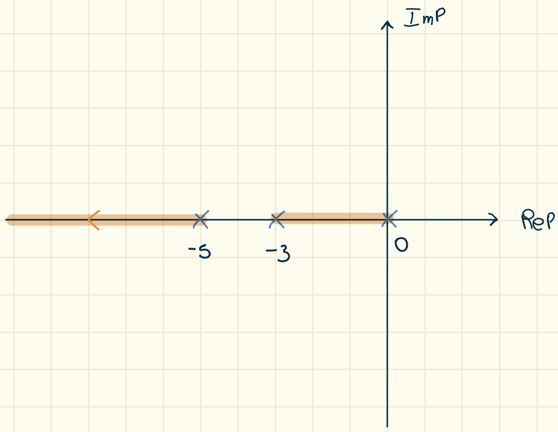


-1 Massimo ⇒ Break-Away Point

ES 2:

$$L(S) = \rho \frac{1}{S(S+3)(S+5)} \qquad \nu = 3$$





1) Asse Reale LD

2) Asintoti: $\quad x_a = \frac{1}{3}\Sigma P - \Sigma Z = \frac{1}{3}(0-3-5) = -\frac{8}{3} \simeq 2.67$

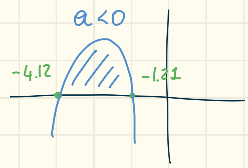
$$\varphi_1 = \tfrac{1}{3} \cdot 180 = 60°$$
$$\varphi_2 = -180$$
$$\varphi_3 = -60°$$

- Dove si incontrano i poli in $0,-3$? 3) Regola dei punti multipli

$$\gamma(x) = -\frac{D(x)}{N(x)} = -S(S+3)(S+5) = -S^3 - 5S^2 - 3S^2 - 15S = -x^3 - 8x^2 - 15x \Rightarrow \frac{d}{dx}(\gamma(x)) = -3x^2 - 16x - 15 > 0 \text{ per}$$

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot (-3)(-15) = 76 \rightsquigarrow x_{1,2} = \frac{16 \pm 2\sqrt{19}}{-6} \quad \begin{cases} \frac{16+2\sqrt{19}}{-6} \simeq -4.12 \\ \frac{16-2\sqrt{19}}{-6} \simeq -1.21 \end{cases}$$

LUOGO DIRETTO

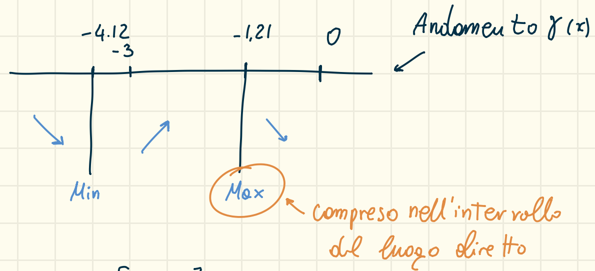


Radici reali

Quando risolviamo l'equazione di secondo grado troviamo due radici reali (se troviamo due radici complesse allora non ci sono break away o break in) che corrispondono ad un punto di massimo ed uno di minimo. Ma ovviamente non possiamo avere sia break away che break in (almeno con solo due radici). Dobbiamo controllare quale delle due radici è **compresa nell'intervallo del luogo diretto**. Nel nostro caso -1.21 fa parte del luogo diretto, quindi -4.12 *potrebbe* essere il punto di incontro dei poli appartenente al luogo inverso.

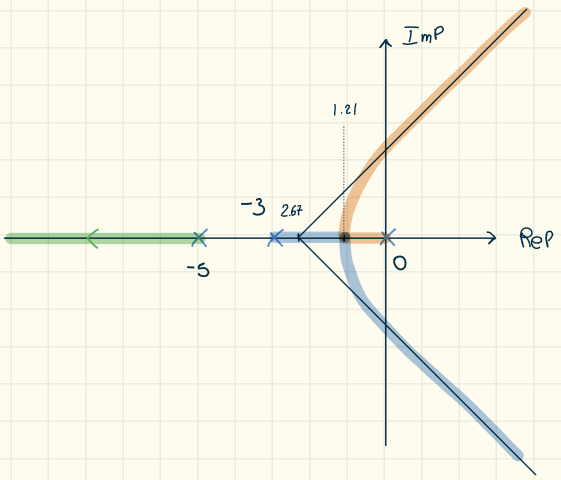
<u>Bisogna notare che un punto di minimo corrisponde ad un break away nel luogo inverso (sarebbe break in nel luogo diretto, ovvero il contrario).</u>

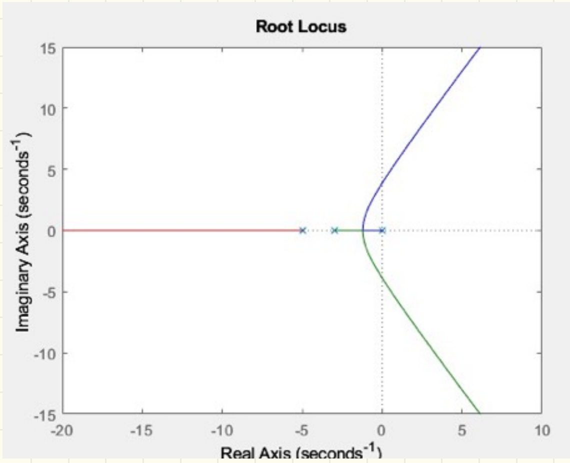
$\Rightarrow \gamma'(x) > 0$ per $-4.12 < x < -1.21$



$x_b = -1.21 \in [-3, 0]$ LD

↳ Max $\Rightarrow$ Break Away





REGOLA DEGLI ANGOLI DI PARTENZA

(Dalla lezione 22) * Dim 9:00

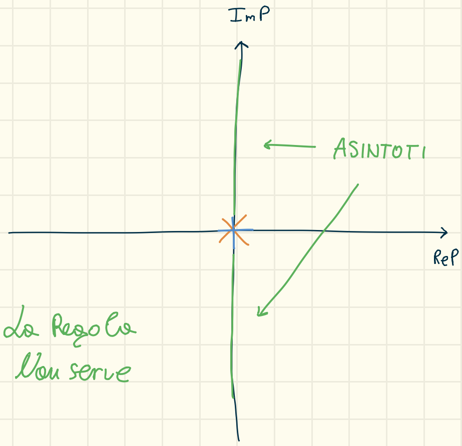
$$\alpha_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{(2k+1)\cdot 180° + \sum_{i=1}^{m} \theta_i - \sum_{i\neq j} \varphi_i}{h_j} & \text{con } k=0,1,\dots,h_j-1 \text{ e } \rho>0 \\[2ex] \dfrac{2k\cdot 180° + \sum_{i=1}^{m} \theta_i - \sum_{i\neq j} \varphi_i}{h_j} & \text{con } k=0,1,\dots,h_j-1 \text{ e } \rho<0 \end{cases}$$

Molteplicità del polo

FASI !

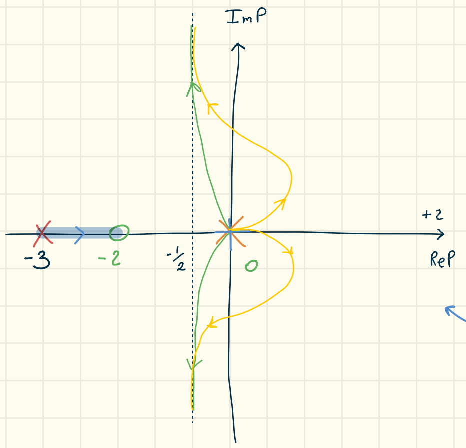
REGOLA DEGLI ANGOLI DI ARRIVO

$$\alpha_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{(2k+1)\cdot 180° - \sum_{i\neq j} \theta_i + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i}{h_j} & \text{con } k=0,1,\dots,h_j-1 \text{ e } \rho>0 \\[2ex] \dfrac{2k\cdot 180° - \sum_{i\neq j} \theta_i + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i}{h_j} & \text{con } k=0,1,\dots,h_j-1 \text{ e } \rho<0 \end{cases}$$



Quando ha senso usare questa regola?
Nel caso visto finora, ovvero quando avevamo due poli e tutto l'asse reale compreso tra i due faceva parte del luogo, non aveva molto senso. Nel momento in cui abbiamo ad esempio:

- 2 poli nell'origine: il luogo diretto non ha nessun punto dell'asse reale, di conseguenza dovranno per forza abbandonare l'asse reale, andando all'infinito (visto che il grado relativo è 2). In questo caso la regola continua a non servire, ma complichiamo la situazione:
- 2 poli nell'origine ed uno zero in -2



Centroide $x_b = \frac{1}{2}\left[\Sigma p - \Sigma z\right]$

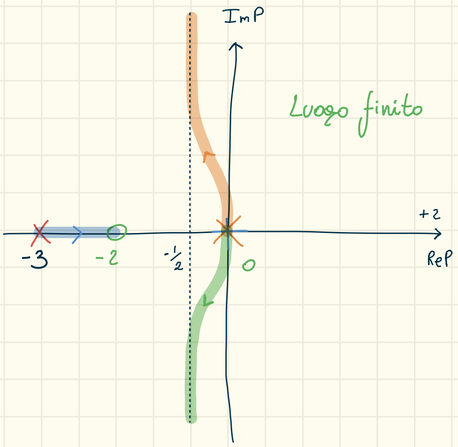
$= \frac{1}{2}\left[-3+2\right] = -\frac{1}{2}$ Centroide

Sappiamo che i poli andranno verso l'asintoto verticale a +2, ma **non sappiamo in che modo ci arrivano!**

Valutando l'angolo iniziale possiamo avere un'idea dell'andamento.

$$\alpha_{j,k} \overset{LD}{=} \frac{(2k+1)\,180° + \sum_{i=j}^{m} \theta_i - \sum_{i\neq j} \varphi_i}{h_j} \quad \text{con } k=0,1,\dots,h_j-1 \Rightarrow k\in[0,1] \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{180° + (0°) - (0°)}{2} = 90° \\ \alpha_2 &= \frac{540° + 0° - 0°}{2} = 270° \end{aligned}$$

In questo caso non abbiamo paura che si destabilizzi il sistema perché i poli non si spostano mai verso il semiasse positivo (al massimo rimangono sull'asse immaginario).



Controllo stabilità

$$L(s) = \frac{s+2}{s^2(s+3)} \Rightarrow \quad N(s) = s+2 \qquad D(s) = s^2(s+3) = s^3+3s$$

$$\Rightarrow P(s) = D(s) + \rho N(s) = s^3 + 3s^2 + \rho s + 2\rho =$$

s^3	1	ρ
s^2	3	2ρ
s^1	$\frac{1}{3}\rho$	0
s^0	2ρ	

$$\frac{3\rho - 2\rho}{3} = \frac{1}{3}\rho$$

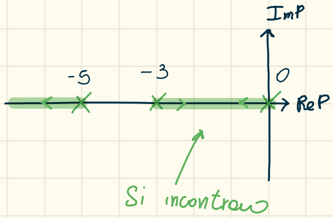
A.S. $\forall \rho > 0$

FM 37:00
Analisi con Wolfram

#ToDoControlli

Esercizio 1:14 con Matlab

$$L(s) = \rho \frac{1}{s(s+3)(s+5)}$$



$$L(s) = \rho \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 3s^2 + 15s} = \rho \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 15s}$$

s^3	1	5
s^2	8	0
s^1	5	0
s^0	0	0

$\Rightarrow$ A.S. ✓

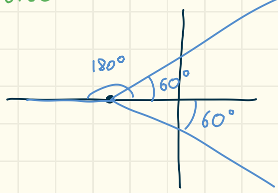
$\begin{cases} n = 3 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow \nu = 3$

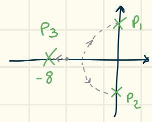
Inoltre $\sum (-p_i) = -3-5 = -8$

$\rightsquigarrow x_a = \frac{1}{3}\left[0-3-5\right] = -\frac{8}{3} \cong -2.67$ centroide

Quando i poli $P_1 = -3$ e $P_2 = 0$ sono sull'asse immaginario, il terzo polo $P_3 = -5$ si troverà in $x = -8$

$$\phi_i = \begin{cases} \varphi_1 = 180°/3 = 60° \\ \varphi_2 = 180° \\ \varphi_3 = -60° \end{cases} \Rightarrow \text{sfasati di } 120°$$



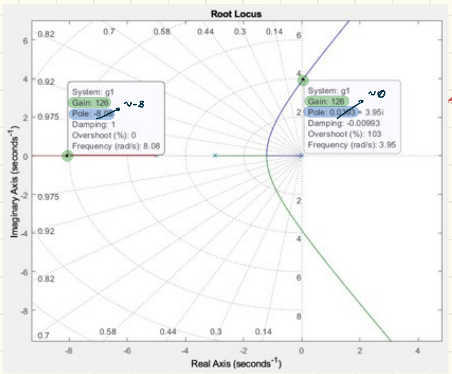


Regola della punteggiatura $\rightarrow$ Qual è il valore critico di ρ che rende instabile il sys?

$$|\rho| = \frac{|D(s^*)|}{|N(s^*)|} = \frac{|D(-8)|}{|N(-8)|} = \frac{-8(-8+3)(-8+5)}{1} = |-8 \cdot (-5)(-3)| = 120$$

valore critico di ρ calcolato teoricamente

* la regola si deriva dalla condizione sul modulo

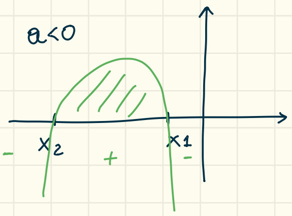


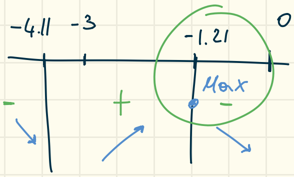
Il gain parte da zero, quando i poli sono quelli della funzione di anello, e si spostano lungo il luogo delle radici man mano che il guadagno aumenta. Quindi quando ad esempio il primo polo è in -3, il suo gain vale 0. Quando arriva all'asse immaginario il suo gain vale 120.

Dove si incontrano i punti?

$$\gamma(x) = -\frac{D(x)}{N(x)} = -x^3 - 8x^2 - 15x \rightarrow \gamma'(x) = -3x - 16x - 15 > 0 \text{ per}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1.21 \in LD = [-3, 0] \\ x_2 = -4.11 \end{cases}$$





$\bar{s}_{1,2}$ si incontrano in $x = -1.21$

CONVOLUZIONE N 1:15

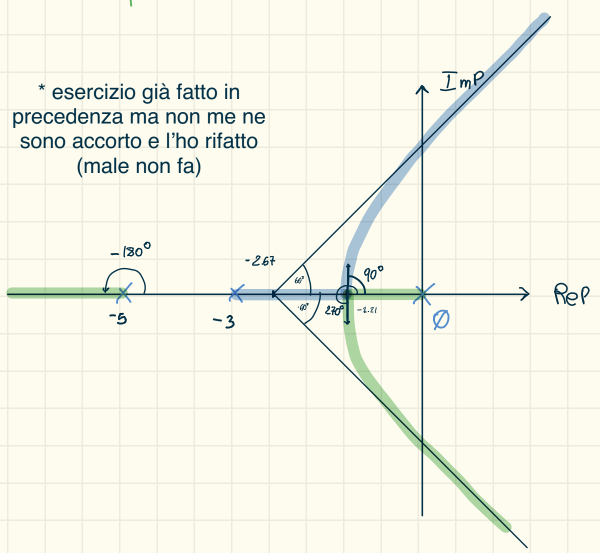
Regola angoli di partenza

$h = 2 \Rightarrow K = [0, 1]$

$$\begin{cases} \alpha_1 = (180° + 0° - 0°)/2 = 90° \\ \alpha_2 = (540)/2 = 270° \end{cases}$$

PERCHE' 0°?

* esercizio già fatto in precedenza ma non me ne sono accorto e l'ho rifatto (male non fa)



Effettivamente l'angolo che forma il primo polo è di +-180 gradi, infatti si vede che si sposta lungo l'asse reale verso sinistra. **Però** quando calcoliamo la fase iniziale, è come se posizionassimo s* nel punto del polo di cui vogliamo

Ulteriori considerazioni

Ci accorgiamo dal luogo che i poli dominanti sono quello che parte in origine e quello che parte in -3, non solo perché sono quelli più vicini all'asse immaginario, ma anche perché il polo in -5 si sposta sempre verso sinistra all'aumentare del guadagno.

Ora, con un controllore proporzionale (che sarebbe proprio *ro*) riusciamo a spostare verso destra i poli dominanti **al massimo** ad un valore di -1.21; questo vuol dire che il tempo di assestamento non potrà essere inferiore a Ta = 4.6 / 1.21 = 3.8s

Costante di tempo Dominante (ovvero il polo più lento)

$\Rightarrow$ Volore maggiore dei poli: $x_0 = -1.21$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{1.21} \Rightarrow t_a = \frac{4.6}{1.21} = \underbrace{3.8\ s}_{\text{Minimo tempo di Assestamento.}}$$