DIAGRAMMI POLARI

RISPOSTA IN FREQUENZA

Possiamo calcolare la risposta in frequenza ponendo $G(s) \underset{s=j\omega}{=} G(j\omega)$, $\omega \geq 0$ $\rightarrow$ $|G(j\omega)|_{dB}$, $\angle G(j\omega)$

Ovviamente abbiamo due condizioni affinché si possa calcolare la risposta in frequenza: il segnale in ingresso deve essere sinusoidale ed il sistema deve essere asintoticamente stabile.

Quando abbiamo un sistema A.S. **la risposta in frequenza coincide con la trasformata di Fourier della risposta impulsiva**

Finora abbiamo visto la risposta in frequenza rappresentata tramite i diagrammi di Bode. Possiamo però visualizzarla anche tramite il piano complesso (piano di Gauss) al variare di omega (frequenza o pulsazione).

Inoltre, mentre con i diagrammi di bode si utilizzano modulo e fase, con i diagrammi polari vengono usate la parte reale e la parte immaginaria della funzione di trasferimento.
Indichiamo il **verso di percorrenza** per omega crescenti: indichiamo il punto di partenza (guadagno per w=0) ed aggiungiamo una freccia che indica le omega crescenti.

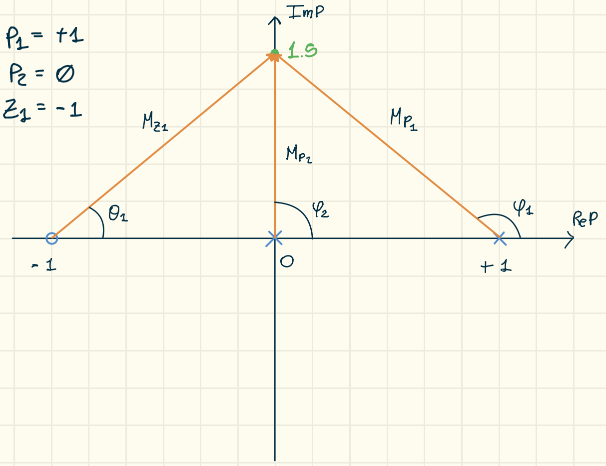
Se prendiamo però un punto qualsiasi del diagramma non sappiamo a quale omega corrisponde (a differenza dei diagrammi di bode che conosciamo la frequenza per ogni punto).

Esempio

COSTANTE DI TRASFERIMENTO

$G(s) = 2\,\dfrac{s+1}{s(s-1)}$ Rappr Poli - Zeri $\longrightarrow$ Freq $s = j\omega \rightarrow G(j\omega) = 2\,\dfrac{j\omega+1}{j\omega(j\omega-1)}$ supponiamo che $\omega_0 = 1.5$

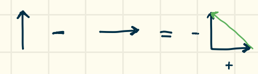
$$\begin{cases} P_1 = +1 \\ P_2 = \varnothing \\ Z_1 = -1 \end{cases}$$



Somma Vettori

La somma parte dalla coda del primo ed arriva alla punta del secondo

Differenza Vettori



La differenza parte dalla punta del vettore negativo ed arriva nella punta del positivo

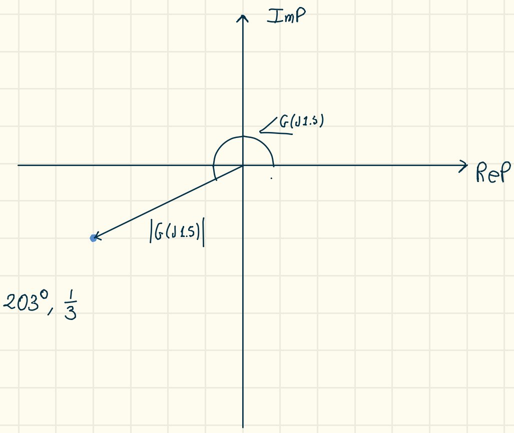
Il modulo dei vari poli e zeri è la **differenza** tra il vettore immaginario (che ha coda in origine e punta nella pulsazione, in questo esempio 1.5) ed il vettore reale (che ha coda in origine e punta nel polo/zero, in questo caso +1, -1 e zero).

Possiamo rappresentare anche la fase, che banalmente è l'angolo tra l'asse reale ed il modulo del polo/zero corrispondente.

Grazie alle regole dei vettori possiamo calcolare modulo e fase totali (dimostrazioni viste a sistemi, comunque basta rappresentarli in forma esponenziale (fasori) e ci si accorge che tutto funziona).

$$|G(j1.5)| = |2| \cdot \frac{M_{Z_1}}{M_{P_1} \cdot M_{P_2}}$$

$$\angle G(j1.5) = \angle 2 + \angle Z_1 - [\angle P_1 + \angle P_2] = \angle 2 + \theta_1 - \varphi_1 - \varphi_2$$



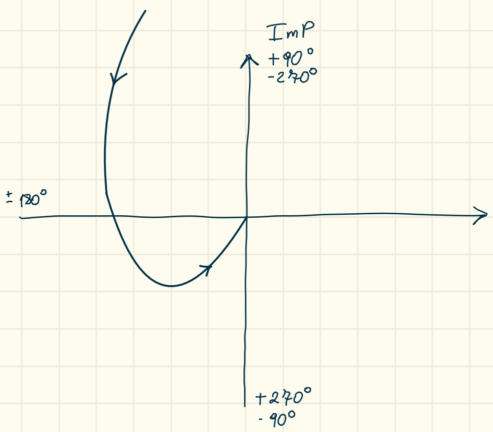
$r\angle\theta = 203°, \frac{1}{3}$

Esempio:

$$G(s) = 2\,\frac{s+1}{s(s-1)}$$

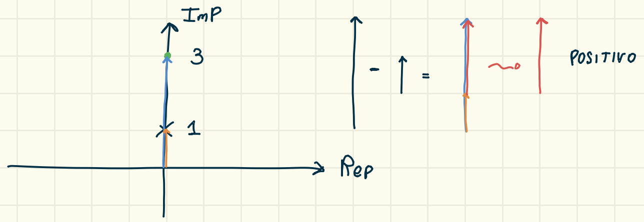
$$\begin{cases} \omega = 0 \rightarrow M = \infty \\ \omega = \infty \rightarrow M = 0 \end{cases} \Big\} \text{ Valori Naturali}$$

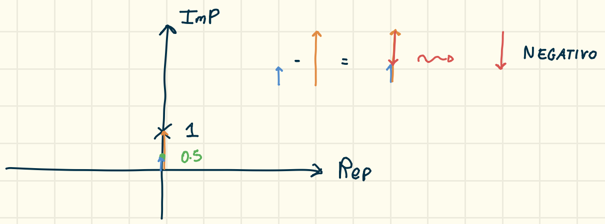
$$\begin{cases} \omega = 0 \rightarrow \varphi = -270° = +90° \\ \omega = \infty \rightarrow \varphi = -90° = +270° \end{cases}$$



Poli in origine / asse Immaginario

Se avessi





Più ci avviciniamo col valore di omega al polo sull'asse immaginario, minore diventa il modulo del polo fino ad arrivare a zero.

Siccome i poli sono al denominatore, il modulo totale tende ad infinito.

Nei diagrammi di bode questo è un asintoto sul picco di risonanza, mentre nei diagrammi polari non riusciamo a disegnarlo.

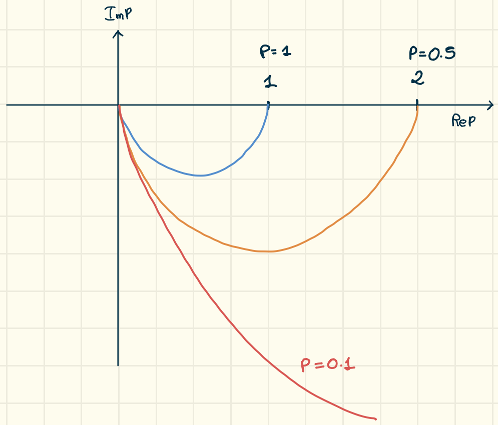
La stessa cosa accade sia quando abbiamo poli sull'asse immaginario sia quando abbiamo poli nell'origine.

Esempio:

$$G(s) = \frac{1}{s+p} = \frac{1}{p\left(1+\frac{1}{p}s\right)} = \frac{1/p}{1+s/p}$$

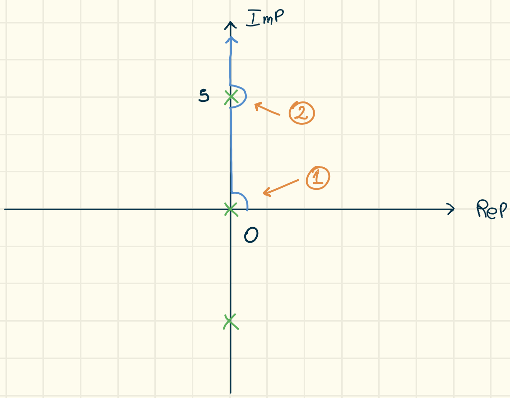
M: $\omega = 0 \to 1/p$; $\omega = \infty \to \emptyset$

φ: $\omega = 0 \to 0°$; $\varphi = \infty \to -90°$



1:04 L11 Esercizio OPAMP Svolgimento Alt.

Soluzione ai poli in origine 1:16



Visto che i problemi ce li danno i poli sull'asse immaginario (fanno andare ad infinito il diagramma polare) risolviamo il problema **aggirando l'ostacolo** (il polo). Lo facciamo disegnando degli archi di circonferenza **prettamente nel semipiano reale positivo** (a destra).

Possiamo scrivere in maniera compatta gli archi di circonferenza usando la notazione esponenziale:

1: $\varepsilon \cdot e^{j\theta}$ con $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2: $j5 + \varepsilon \cdot e^{j\theta}$ con $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

In generale un polo è evitato con

$$\boxed{\text{Vettore POLO} + \varepsilon \cdot e^{j\theta} \text{ con } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

Potremmo scrivere la fase in positivo o negativo. A noi interessa scriverla sempre in negativo in modo da renderci conto della "differenza"

Quando G(s) ha poli sull'asse immaginario il diagramma polare di G(s) è ridefinito come l'immagine attraverso G(s) dei punti appartenenti al percorso disegnato in blu.

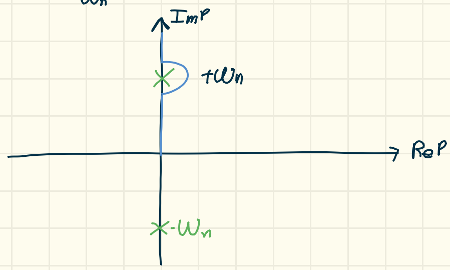
In altre parole: circondiamo i poli in modo da non ottenere il modulo che va ad infinito.

Esempio

OSCILLATORE ARMONICO

$$G(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} = \frac{\mu \cancel{\omega_n^2}}{\cancel{\omega_n^2}\left(1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{\mu}{1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

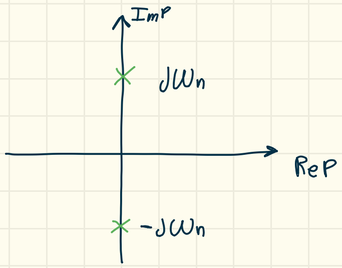
P: $1 + \frac{s^2}{\omega_n^2} = 0$ per $s^2 = \pm j\omega_n$

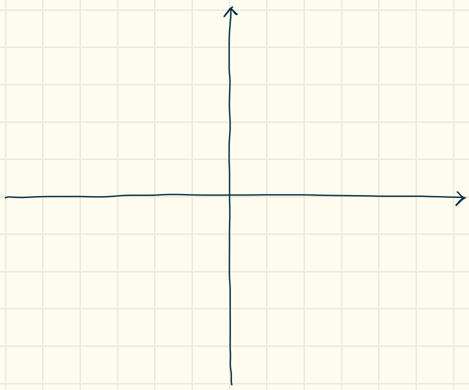


MODULO: $\dfrac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{(j\omega)^4}{\omega_n^4}}}$ $\begin{cases} \omega = 0 \to \mu \\ \omega = \infty \to 0 \end{cases}$

Fase: No zeri/poli in 0 $\Rightarrow$ $\varphi_0 = 0°$

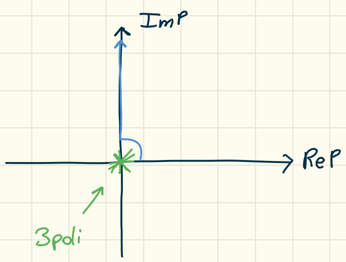
2 Poli sull'asse imm $\Rightarrow$ $\varphi_f = -180°$





Esempio

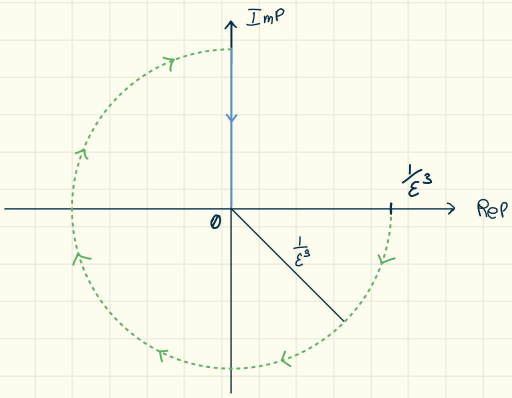
$G(s) = 1/s^3$



Sostituisco $s = s^* = \varepsilon e^{j\theta}$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

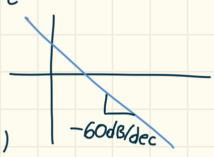
$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{\varepsilon^3 e^{3j\theta}} = \frac{1}{\varepsilon^3} e^{-3j\theta}$$

Siccome $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\Rightarrow$ $G(s)$ $\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot e^0 \Rightarrow M \simeq \frac{1}{\varepsilon^3},\ \angle G = 0° \\ \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot e^{-\frac{3}{2}\pi j} \Rightarrow M \simeq \frac{1}{\varepsilon^3},\ \angle G = -\frac{3}{2}\pi = -270° \end{cases}$



Dopo essere tornato sull'asse immaginario

$\frac{1}{s^3}$ è un triplo integratore



$\Rightarrow M$ $\begin{cases} \omega = 0 \to & (\varepsilon \text{ nel nostro caso}) \\ \omega = \infty \to 20 \log(x) = -\infty \Rightarrow x = 10^{-\frac{\infty}{20}} \Rightarrow M_\infty = 0 \end{cases}$

(tratto blu)