PERCHE' APPLICARE IL CRITERIO DI BODE

- Assumiamo che Tutte le cancellazioni (possibili) siano state fatte e che μ e φ_m siano <u>POSITIVI</u>.

* μ è sempre "$\mu > x$" e mai "$x_1 > \mu > x_2$" perchè l'errore è in modulo.

- Stabilità in condizioni Perturbate : per averla ci servono margini di fase ed Ampiezza elevati.
  Se aumentiamo troppo ω_c potremmo destabilizzare il sys se ci sono Ritardi di cui non abbiamo Tenuto conto.

- Precisione Statica: per ottenere la P.S. voluta agiamo sul TIPO (g) della $L(s)$ e quindi su μ $\left(\left|\frac{1}{\mu}\right| e \left|\frac{1}{1+\mu}\right|\right)$.

- Precisione Dinamica : con Nyquist e Bode possiamo Tradurre le specifiche dinamiche dal dominio del tempo a quello della frequenza $\rightarrow$ $T_{a1} \rightarrow \omega_c$ e $S_\% \rightarrow \varphi_m$ $\left(\xi \approx \frac{\varphi_m}{100}\right)$

- Attenuazione Rumore di <u>MISURA</u> : vogliamo $F(s) \triangleq 1$ ma così facendo ci portiamo anche il rumore n $\Rightarrow$ DISACCOPPIAMENTO IN BANDA
  $\Rightarrow$ abbiamo una certa Banda dove $F(s) \approx 1$ ed un'oltre $(\omega > \omega_c)$ dove $F(s) \approx 0$
  Un buon indicatore della pulsazione alla quale $F(s)$ passa da 1 a 0 è proprio ω_c.

- Moderazione della var di controllo: $|C(j\omega)|$ va limitato per $\omega \gg \omega_c$ In modo da non fornire a $G(j\omega)$ un segnale "Troppo forte". lo facciamo Tramite $T_{\tilde{z}-o\mu} = Q(s)$ sensitività del controllo. Se $\omega \gg \omega_c$ ed $L(s) \ll$? $\rightarrow$ $Q(s) \approx C(s)$
  $\Rightarrow$ quindi limitiamo $|C(j\omega)|$ per $\omega \gg \omega_c$

- Realizzabilità : $\approx$ 27:00

Esempio

Esempio

Si voglia progettare un controllore per un sistema asintoticamente stabile, di tipo 0 e di grado relativo 2, soddisfacendo i seguenti vincoli:

1. errore di posizione nullo: [redacted]
2. tempo di assestamento $T_{a1} \leq 10$s e sovraelongazione $S_\% \leq 3\%$: [redacted]
3. attenuazione di almeno 20 dB per un disturbo d in banda $[0, 0.1]$ RAD/S: [redacted]
4. attenuazione di almeno 20 dB per un disturbo n in banda $[10, 100]$ RAD/S: [redacted]
5. [redacted]

$$G(s) = \frac{1}{(s+T_1)(s+T_2)} \quad \text{con } T_1, T_2 > 0$$

1. Data $G(s)$ $\Rightarrow$ Per avere $e_p = 0$ $\Rightarrow$ $L(s) = G(s) \cdot C(s)$ deve essere di tipo 1 $\Rightarrow$ $g_L = 1$. Siccome $G(s)$ è Tipo Zero
   $\Rightarrow$ <u>$C(s)$ è di tipo 1 (Almeno)</u>

   Siccome $L(s)$ è tipo 1 $\rightarrow$ la pendenza iniziale del modulo è -20dB/dec e $\varphi_0 = -90°$

2. Specifiche dinamiche

- $T_{a1} \leq 10s$ $\Rightarrow$ $\frac{4.6}{\sigma} \leq 10s$ $\Rightarrow$ $\sigma \geq \frac{4.6}{10s}$ dove σ è la c.d.t. DOMINANTE

  Abbiamo visto che $\sigma \approx \omega_c$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_c \geq 0.4S}$ RAD/S Ans

- $S_\% \leq 3\%$ $\rightarrow$ dobbiamo Trovare un valore $\bar{\xi}$ <u>MINIMO</u> in modo da avere $\xi \geq \bar{\xi}$

$$100\, e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 3\% \equiv e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 0.03 \rightarrow -\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq \ln(0.03) \rightarrow -\frac{\pi}{a}\xi \geq \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \xi^2 \leq 1-\xi^2 \rightarrow \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \xi^2 - 1 + \xi^2 \leq 0 \rightarrow \xi^2\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+1\right] \leq 1 \rightarrow \xi \geq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+1}} \rightarrow \boxed{\xi \geq 0.74}$$ Ans

SICCOME $\xi \approx \frac{\varphi_m}{100} \rightarrow \varphi_m = 100 \cdot \xi \rightarrow \boxed{\varphi_m \approx 74^\circ}$ (Almeno 74°)

3. Attenuazione di almeno 20dB in banda $[0, 0.1]$ rad/s per il DISTURBO d

$\Rightarrow$ Vogliamo il valore del modulo della sens. diretta.... $|T_{d \to y}| = |S(j\omega)|_{db} \leq -20dB$ in $\omega \in [0, 0.1]$ rad/s

MA $S(s)$ non la conosciamo direttamente visto che conosciamo solo $C(s)$ e $G(s)$... ma $S(s) = \frac{1}{1+L(s)} \rightarrow S(j\omega) = \frac{1}{1+L(j\omega)}$

Potremmo fare i calcoli, ma in L16 abbiamo visto che per $\omega << \omega_c \rightarrow |L(j\omega)| >> 1$

e quindi $S(j\omega) = \frac{1}{1+L(j\omega)} \approx \frac{1}{L(j\omega)} \Rightarrow \left|\frac{1}{L(j\omega)}\right|_{dB} \leq -20 \Rightarrow |L(j\omega)| \geq -\frac{1}{20}$??? Al prof esce $|L(j\omega)|_{dB} \geq 20$

per $\omega \in [0, 0.1]$ con $\omega_c >> 0.1$

4. Attenuazione di almeno 20dB in banda $[10, 100]$ rad/s per il DISTURBO n

$-T_{d \to y} = F(s) = \frac{|L(s)|}{1+|L(s)|} \leq 20$ In questo caso $\omega >> \omega_c \rightarrow |L(j\omega)| << 1 \rightarrow |F(s)| \approx \frac{|L(j\omega)|}{1}$

$\Rightarrow |L(j\omega)|_{dB} \leq -20dB$ per $\omega \in [10, 100]$ con $\omega_c << 10$

Soddisfatte tutte le specifiche richieste, possiamo escludere le aree del diagramma di bode dove sicuramente <u>non vogliamo</u> il diagramma dei moduli. Quella sarà la nostra Y(s), e visto che conosciamo la G(s) (ci viene fornita dal committente o la troviamo modellando il sistema) possiamo ricavarci **direttamente** la C(s) (il nostro controllore).
Il problema con questa strategia, però, è che potrebbe uscirci una C(s) che non riusciamo a realizzare.

Questo è stato possibile perché **abbiamo tradotto le specifiche sul sistema di controllo in <u>vincoli sulla funzione di anello L(s)</u>**

PROCEDURA SINTESI PER TENTATIVI

Immaginiamo di implementare un controllore composto da due sotto-controllori: $C(s) = C_1(s) \cdot C_2(s)$

- $C_1(s) = \dfrac{\mu_c}{s^r}$ PARTE STATICA
- $C_2(s) = \dfrac{\Pi_i(1+\tau_i s) \cdot \Pi_i\left(1+\frac{2\zeta}{\alpha_i}s + \frac{s^2}{\alpha_i^2}\right)}{\Pi_i(1+T_i s) \cdot \Pi_i\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_{ni}}s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)}$ PARTE DINAMICA oppure RETE STABILIZZATRICE

C_1 viene scelto UNIVOCAMENTE a seconda delle specifiche

C_2 si trova Tarando i parametri "per Tentativi".

PRINCIPALI RETI STABILIZZATRICI $(C_2(s))$

RETE STABILIZZATRICE Del 1° ordine → perche' il $P_c(s)$ e' grado 1

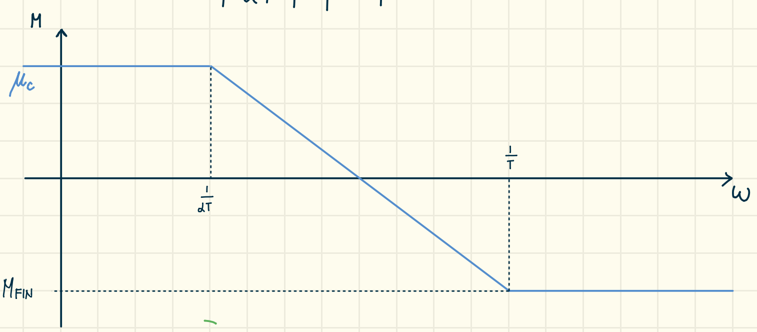
$$C(s) = \mu_c \frac{1+Ts}{1+\alpha T s} \qquad \text{con } T>0,\ \alpha>0$$

Seguendo quanto detto prima $\mu_c = 1$

Polo: $1+\alpha T s \to \bar{P} = -\frac{1}{\alpha T} < 0$ visto che $T, \alpha > 0$

Zero: $1+Ts \to \bar{z} = -\frac{1}{T} < 0$

Se $\alpha > 1 \to \left|-\frac{1}{\alpha T}\right| < \left|-\frac{1}{T}\right| \Rightarrow$ Prima il punto di rottura del polo (visto che $\omega_0 = |\bar{P}|$, $\omega_1 = |\bar{z}|$)



Quanto vale il modulo finale? → Dipende da α $\begin{cases} >1 \text{ LPF} \to \text{RITARDA} \\ <1 \text{ HPF} \to \text{ANTICIPA} \end{cases}$

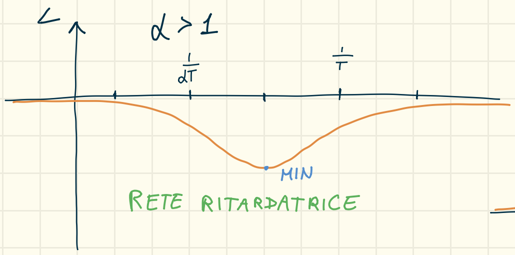
$$\frac{y-y_a}{y_b-y_a} = \frac{x-x_a}{x_b-x_a} \to \frac{|C(j\omega)|-\mu_c}{|C(j\omega_1)|-\mu_c} = \frac{\omega - \frac{1}{\alpha T}}{\frac{1}{T}-\frac{1}{\alpha T}}$$

Oppure piu' semplicemente vediamo quante decadi separano ω_0 da ω_1 visto che la pendenza e' -20dB/dec

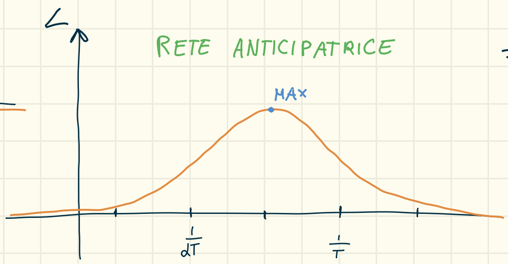
Quanto sono distanti $\omega_0 = \frac{1}{\alpha T}$ e $\omega_1 = \frac{1}{T}$?

Se $\omega_0 = 1$ rad/s e $\omega_1 = 10$ rad/s, $dist = \log_{10}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) = \log\left(\frac{\frac{1}{T}}{\frac{1}{\alpha T}}\right) = \log_{10}(\alpha)$

$$\Rightarrow \boxed{M_{FIN} = \underbrace{20}_{\text{Pendenza}} \cdot \underbrace{\log(\alpha)}_{\text{Decadi}} = (\alpha)_{dB}}$$



RETE ANTICIPATRICE



$\alpha > 1$

$$\angle L(j\omega) = \angle \cancel{\mu_c}^{\,0} + \angle 1+Tj\omega - \angle 1+\alpha T j\omega$$

$$= \underbrace{\text{aTan}(\omega T) - \text{aTan}(\alpha T \omega)}_{\text{FASE}}$$

I punti max e min possono essere calcolati derivando rispetto a ω

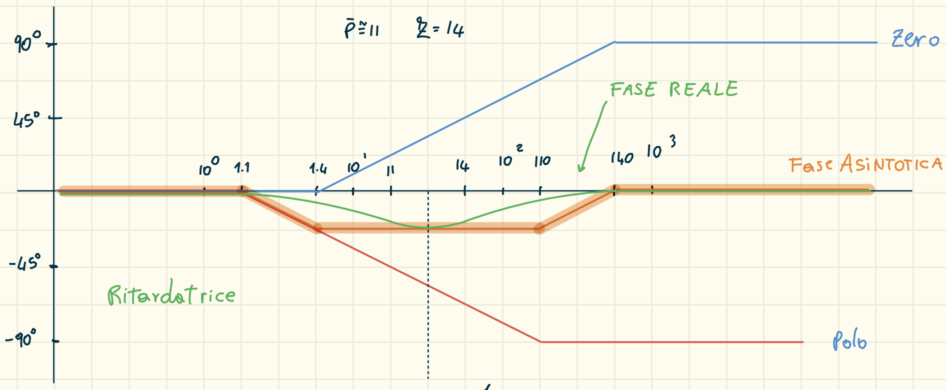
$$\boxed{\frac{d\angle L(j\omega)}{d\omega} = \frac{T}{1+\omega^2T^2} - \frac{\alpha T}{1+\omega^2\alpha^2T^2} \gtrless 0} \quad \begin{matrix}\text{MAX}\\ \text{MIN}\end{matrix}$$

Inoltre $\boxed{\sin\bar{\varphi} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$

Altre cose dette ≈ 1:48

$$\boxed{\bar{\omega} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}} \to \boxed{\bar{\varphi} = \text{aTan}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) - \text{aTan}\left(\sqrt{\alpha}\right)}$$

⇝ la media geom in scala log diventa una media e quindi il picco della fase (anticip. o ritard.) si trova A METÀ STRADA TRA I DUE PUNTI DI ROTTURA.



$$\text{Picco} = 10^1 \cdot \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

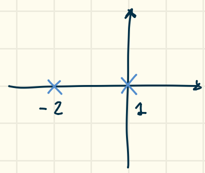
$$\text{con } \sin(\bar{\varphi}) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \underset{\alpha=3}{=} \frac{-2}{4} \Rightarrow \sin(\bar{\varphi}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{asin}\left(-\frac{1}{2}\right) \underset{\text{deg}}{=} -30°$$

Progetto con Rete Ritardatrice

dalla lez 18 17:35

Abbiamo visto che la rete ritardatarie oltre a ritardare il segnale lo attenua anche. Può sembrare inutile, ma **attenuare L(s) significa spostare verso il basso il suo diagramma dei moduli e quindi spostare verso sinistra la frequenza di attraversamento Wc. Spostare a sinistra Wc significa diminuire la fase critica e di conseguenza aumentare il margine di fase.**

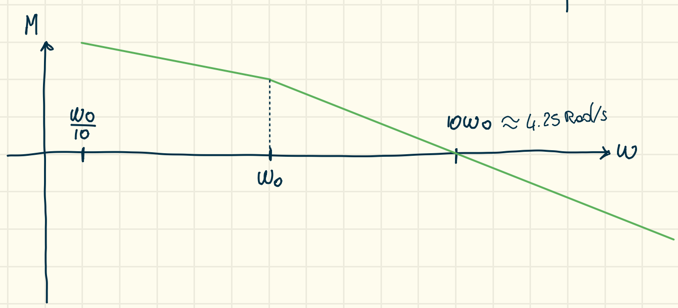
Esempio $L(s) = \frac{K}{s(s+2)}$



$\mu = \frac{K}{2}$ $L(s) = \frac{K}{2} \frac{1}{s(1+\frac{1}{2}s)}$

$W_0 = \frac{1}{2}$ rad/s → 1 polo semplice

1 polo in 0 ⇒ -20dB/dec iniziale e -90° iniz



$$|L(j\omega)|_{dB} \underset{\omega=\frac{1}{2}}{=} \frac{K}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{K}{-\omega^2+j\omega 2} \underset{W_0=\frac{1}{2}}{=} \frac{K}{-\frac{1}{4}+j}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{|-\frac{1}{4}+j|} = \frac{K}{\sqrt{\frac{1}{16}+1}} = \frac{K}{1.03} \underset{K=20}{=} \frac{20}{1.03} \approx 19.4$$

$$|L(j\omega)| = \frac{20}{|j\omega(j\omega+2)|} = \frac{20}{|-\omega^2+j2\omega|} = \frac{20}{\sqrt{\omega^4+4\omega^2}} = 1 \Rightarrow \omega^4+4\omega^2 = 400 \Rightarrow \omega^4+4\omega^2-400=0$$

Risolvo con solver eq: $\omega_{1,2} \cong \pm 4.25$ Rad/s

Ho scelto $K=20$ perché $L(s)$ è di tipo 1 ⇒ $e_p = 0$, $e_r = \left|\frac{1}{\mu}\right| = \frac{2}{K} \leq 0.1 \Rightarrow \underline{K \geq 20}$

Tramite Matlab

Troviamo che per $W_c' = 1.07$ rad/s ⇒ $\varphi_m = 62°$ ⇒ $|L(jW_c')|_{dB} = 18.3$ dB ⇒ se tutto il diagramma venisse abbassato di 18.3 dB W_c si sposterebbe verso W_c' ed avremmo $\varphi_m = 62°$

Devo attenuare

$$20\log(x) = -18.3 \Rightarrow \log(x) = \frac{-18.3}{20} \Rightarrow x = 10^{\frac{-18.3}{20}} = 0.122$$ se lo moltiplichiamo per $L(s)$ soddisfiamo il margine.

MA Modifichiamo il guadagno ⇒ non soddisfo la specifica statica!

COME RISOLVERE ?

*La rete ritardatrice può fare perdere 6° di fase, quindi li aggiungiamo alla fase richiesta dalla traccia. Es: $\varphi_m = 60° \Rightarrow \bar{\varphi}_m = 60°+6° = 66°$

→ USO la Rete Ritardatrice

Mi servono due valori : $\begin{cases} \alpha & \text{→ Ricavo dalle specifiche } (1) \\ T & \text{→ Una decade prima di } \omega_c \end{cases}$

(1) φ_m Richiesto $= 60°$ ⟿ $\bar{\varphi}_m = 60°+6° = 66°$ $\Rightarrow$ $180° - 66° = 114°$ Su matlab abbiamo $111°$ con $\omega_c' = 0.782$ R/s

Con un modulo corrispondente di $M|_{\omega=0.782} = 21.5$ dB → devo attenuare di 21.5 dB

Dato che con la rete Rit. otteniamo di un valore $(\alpha)_{dB}$, scelgo $20\log(\alpha) = 21.5\,dB \Rightarrow \alpha = 10^{\frac{21.5}{20}} \approx 11.89$ α

(2) Scelgo $\boxed{T \,/\, \frac{10}{T} = \omega_c' = 0.712}$ $\Rightarrow$ $\omega = \frac{10}{0.712} = 13.87$ T

Pongo $C_2(s) = \dfrac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \dfrac{1+13.87\,s}{1+165\,s}$

Ricordiamo $C_1(s) = 20$ e $G(s) = \dfrac{1}{s(s+2)}$

PROCEDURA

0. Prima risolviamo le specifiche statiche: scelgo μ e g di $C_1(s)$
1. Misuriamo φ_m e K_m della funzione $\mu_c L(s)$
2. Individuiamo la pulsazione ω_c' sul D. Bode in corrispondenza della quale $\mu_c L(s)$ avrebbe un margine di fase $\varphi_m' = \varphi_m + 6°$ (Tolleranza max per $\omega_0 = \frac{1}{T}$)
3. Il guadagno misurato a ω_c' è proprio l'attenuazione da introdurre tramite α con $\boxed{20\log(\alpha) = |\mu_c L(j\omega_c')|_{dB}}$
   $\Rightarrow \alpha = 10^{\frac{|L(j\omega_c')|_{dB}}{20}}$! $\alpha > 1$
4. Scegliamo $T \,/\, \boxed{T = \frac{10}{\omega_c'}}$ 1 decade prima in modo che lo sfasamento si esaurisca per quando si arriva alla pulsazione ω_c'

! Si applica solo se il criterio di Bode è valido:

1. No Poli a $ReP > 0$
2. Attraversiamo l'asse 0dB solo una volta e con una pendenza di -20dB/dec