

DIAGRAMMI DI NYQUIST

Definiamo il **percorso di Nyquist** come la curva chiusa del piano complesso costituita dall'asse immaginario e da una semicirconfenza di raggio infinito giacente nel semipiano destro.

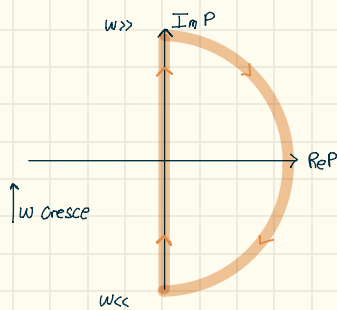
In altre parole prendiamo tutto l'asse immaginario ed immaginiamo di chiudere gli estremi $+\infty$ e $-\infty$ con una semicirconfenza di raggio infinito che si trova nel semipiano destro.

La differenza è che con Nyquist prendiamo **tutto l'asse immaginario**, anche la parte negativa (che prima non prendevamo). Inoltre chiudiamo con una semicirconfenza.

Questa novità non ci scombussola molto: ci basta pensare che $G(-j\omega) = \text{conj}(G(j\omega))$ ovvero stessa parte reale ma parte immaginaria con segno cambiato.

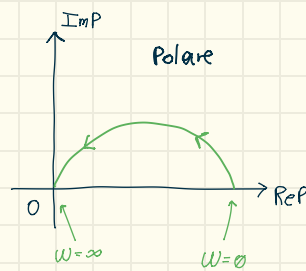
La semicirconfenza di raggio infinito può sembrare un problema, ma siccome lavoriamo con funzioni di trasferimento strettamente proprie (ovvero il grado del denominatore è sempre strettamente maggiore di quello al numeratore, se abbiamo un valore che tende all'infinito al denominatore, tutto tende a zero. Di conseguenza la circonferenza è mappata in origine.

Di conseguenza definiamo il **diagramma di Nyquist** l'immagine, attraverso la funzione di trasferimento $G(s)$ del percorso di Nyquist sopra definito. La grande differenza è che nel diagramma polare consideriamo la semiretta (solo parte positiva) mentre nel diagramma di Nyquist prendiamo un percorso chiuso (unito dalla circonferenza).

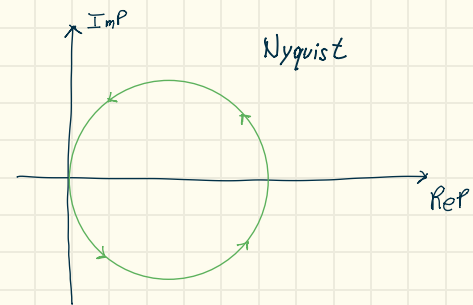


Verso di percorrenza della curva chiuso: orario

Il diagramma di Nyquist di una fdt è il diagramma polare della fdt più il diagramma polare della fdt **specchiato** rispetto all'asse reale. Ovviamente il diagramma di Nyquist è **sempre simmetrico rispetto all'asse reale**



$$G(s) = \frac{1}{1-s}$$



Se la funzione di trasferimento non è strettamente propria la curva va a finire su un punto dell'asse reale (ma anche il diagramma polare va a finire su quel punto).

Se ci sono dei poli sull'asse immaginario, anche in questo caso **dobbiamo effettuare dei circondamenti**. Per gli zeri non è necessario.

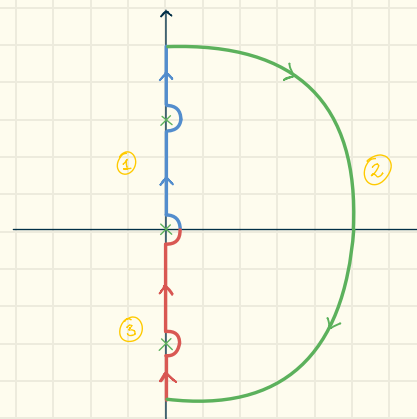
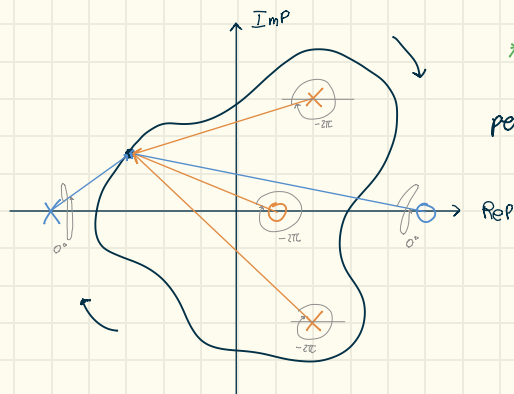


Diagramma Modificato

PRINCIPIO DELL' ARGOMENTO

Se una curva chiusa *gamma_di_s* nel piano complesso circonda gli zeri (Z) ed i poli (P) (ovvero sono all'interno della curva chiusa) e non passa per nessun polo o zero (questo è il motivo per cui effettuiamo i circonamenti) e il percorso lungo la linea chiusa viene effettuato nella direzione oraria, la corrispondente immagine di *gamma_di_s* attraverso **L(s) (ovvero il diagramma di Nyquist)** circonda l'origine del piano complesso un numero di volte pari a **N = Z - P** nella direzione oraria (andiamo in direzione antioraria se N<0)



* I poli/zeri all'interno del percorso hanno $\varphi_{TOT} = -2\pi$ (senso orario) perché la loro fase compie un giro completo.

* I poli/zeri all'esterno del percorso hanno $\varphi_{TOT} = 0^\circ$ perché la fase "torna indietro"

* Si dovrebbe circondare anche l'origine
ma la differenza non è poi così tanto.

$$* \varphi_{\text{TOT}} = -2\pi (z - p)$$

$$* n_{\text{CIRCONDAMENTI}} = \left| \frac{\varphi_{\text{TOT}}}{2\pi} \right|$$

* Scegliamo il verso orario perché in questo modo ω cresce e siamo abituati (con Bode) ad ω crescente

Fine Pause M 1:16

CRITERIO DI NYQUIST

Criterio: la condizione necessaria e sufficiente perché il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile è che il **numero di circondamenti N** del diagramma di Nyquist di $L(s)$ **intorno al punto -1** sia ben definito e che i **circondamenti**, conteggiati in senso antiorario, **siano pari a P**.

Quando il diagramma è ben definito: sia P il numero di poli di $L(s)$ con parte reale positiva (e quindi instabili) ed N il numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist della funzione di anello $L(s)$ attorno al punto -1 (vedi dopo).

Se il diagramma di Nyquist passa per il punto -1 si dice che il diagramma non è ben definito.

Per capire bene l'enunciato bisogna fare qualche ragionamento:

Quando una Fdt è instabile? \Rightarrow poli a $\text{Re} p > 0$

⇒ Quando in sys IN RETROAZIONE e inst? Quando i poli del $P_c(s)$ sono a $\text{Re } p > 0$

Ma $P_c(s) = N_c(s) + D_c(s)$ per cui $F(s) = \frac{1}{1+L(s)} \Rightarrow K(s) = 1+L(s)$

$$\Rightarrow K(s) = \frac{N_L(s) + D_L(s)}{D_I(s)} \quad \text{il sys e' A.S. quando gli zeri di } N(s)$$

e quindi I POLI di $P_c(s)$ sono a $\text{Re } p < 0$

Capito questo...

Ovvero tutti i poli e zeri **circondati dal percorso di Nyquist nel semipiano aperto destro**

Siano Z e P IL NUMERO di poli e zeri a $\operatorname{Re} p > 0$ della F.d.T. $K(s)$.

Affinche' ci sia l'asintotica stabilita' $\Leftrightarrow Z = \emptyset$

e siccome $N = Z - P \underset{Z=0}{=} -P$ QED

Questo è proprio il criterio di Nyquist, che ci dice che il numero di circondamenti deve essere uguale a P

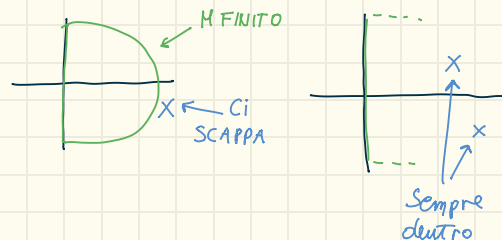
* Siccome il cammino visto prima compente l'asse imm. ed il semipiano Δx , tutti i poli/zi "da cedere" devono avere $\text{Re} p > 0$

* NON ci sono poli c'è in nello stesso punto
 \Rightarrow Non è possibile avere poli sull'asse
 imm a ciclo chiuso se li avevano a
 ciclo aperto, anche con i circondamenti

* l' E dei circondamenti tende a zero e quindi non ci sono poli nel semipiano dx che ci sfuggano



* M (raggio della curva) due Tenore a +∞
perché altri menti "mi potrei perdere"
poli nel semipiano dx



* \pm circonamenti fanno fatti a dx
perché altrimenti potrei includere
dei poli non instabili

Che si intende per "Ben Definito"?

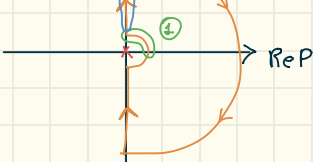
Siccome $K(s) = 1 + L(s)$, $K(s)$ si annulla per $L(s) = -1$ \Rightarrow se il diagramma di Nyquist passa per -1 c'è un problema.

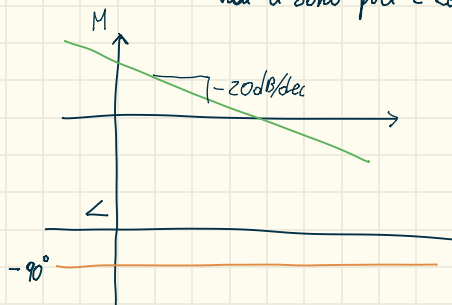
Perché per avere $K(s) = 0 \Rightarrow \frac{N_L(s) + D_L(s)}{D_L(s)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} N_L(s^*) + D_L(s^*) = 0 \\ D_L(s^*) = 0 \end{cases} \leadsto \exists s^* / K(s^*) = 0$

Solo se $N_L(s^*) = 0 \vee D_L(s^*) = 0$ Ma abbiamo fatto già tutte le semplificazioni (per Hp), ovvero non ci sono poli e zeri coincidenti.

ESERCIZIO

A) $L(s) = \frac{2}{s}$





① Primo circondamento (origine)

$s' = \varepsilon e^{j\theta}$ con $\theta \in [0, \pi/2]$

$\Rightarrow L(s') = \frac{2}{\varepsilon e^{j\theta}}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] = \frac{2}{\varepsilon} \cdot e^{-j\theta} \Rightarrow \begin{cases} M = \frac{2}{\varepsilon} \\ \angle = -\theta \end{cases} \Rightarrow \angle \in [0, -\frac{\pi}{2}]$

② Torno sull'asse imm

$s'' = j\omega \Rightarrow L(s'') = \frac{2}{j\omega} \begin{cases} M \propto 1/\omega \Rightarrow M \in [\frac{2}{\varepsilon}, 0] \\ \angle = \pi/2 \end{cases}$ Perché ω aumenta se ci spostiamo verso l'alto sull'asse imm Perché siamo sull'asse imm pos

DIAGRAMMA POLARE

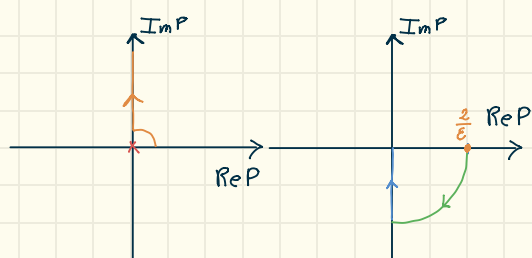
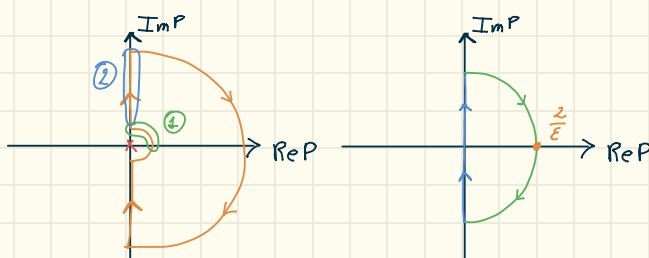
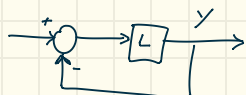


DIAGRAMMA DI NYQUIST (Specchio il diagramma Polare)

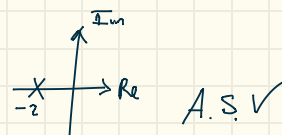


Considerazioni:

A ciclo chiuso



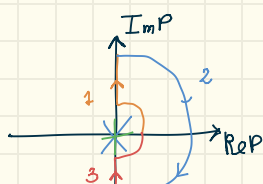
$P_L(s) = N_L + D_L = s + 2 \Rightarrow \bar{s} = -2$



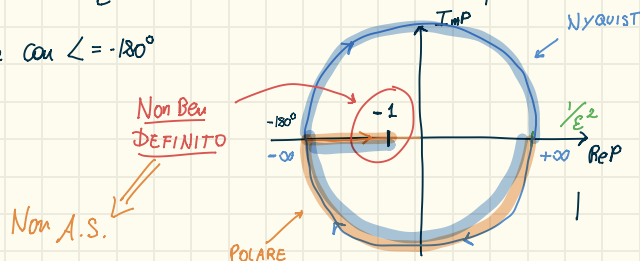
B) $L(s) = \frac{1}{s^2}$

$s' = \varepsilon e^{j\theta}$ con $\theta \in [0, \pi/2] \Rightarrow L(s') = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot e^{-2j\theta} = \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-j\varphi}$ con $\varphi \in [0, \pi]$

$s'' = j\omega \Rightarrow L(s'') = \frac{1}{(j\omega)^2} = -\frac{1}{\omega^2}$ con $\angle = -180^\circ$



Il luogo delle radici ci dice che questi poli se ne vanno lungo l'asse Imm \Rightarrow Stabile (Non A.S.)



c) $L(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$

$$L(0) = \frac{1}{(0+1)^3} = 1 \rightarrow \text{Parto da } 1$$

$$s' = j\omega \Rightarrow L(s') = \frac{1}{(j\omega+1)^3}$$

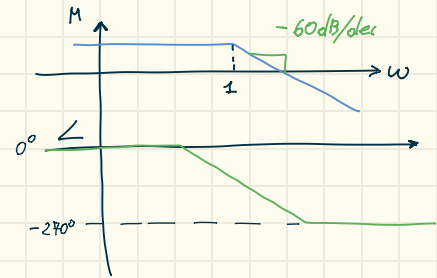
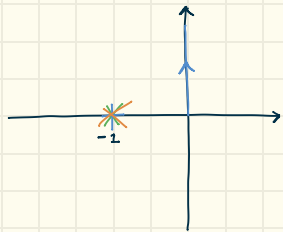
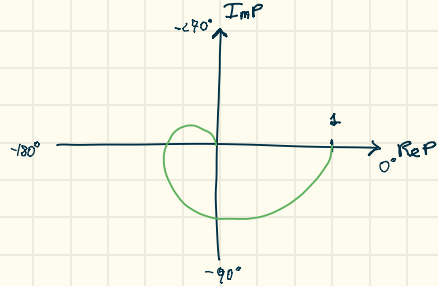
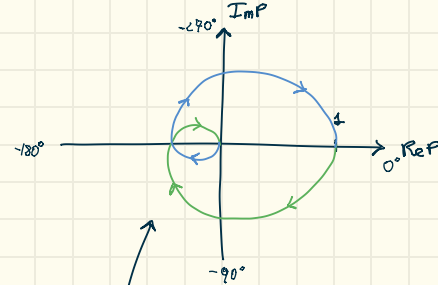


DIAGRAMMA POLARE



→ SPECCHIO →

DIAGRAMMA DI NYQUIST



- $L(s)$ è asintoticamente stabile? \Rightarrow Dipende da dove è -1

Siccome il modulo iniziale è -1 , ed M diminuisce sempre NON C'E' POSSIBILITA' DI CIRCONDARE -1 .