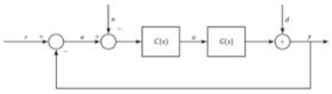
RECAP LEZ 12

Funzioni di sensitività



$$Y(s) = F(s)R(s) - F(s)N(s) + S(s)D(s)$$
$$U(s) = Q(s)R(s) - Q(s)N(s) - Q(s)D(s)$$
$$E(s) = S(s)R(s) + F(s)N(s) - S(s)D(s)$$

Si noti che

$$S(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)}, \quad F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} \quad Q(s) = \frac{C(s)}{1+C(s)G(s)}$$

Analisi statica

Calcoliamo l'errore a regime quando il riferimento è un gradino:
Se la f.d.t. $S(s)$ è as. stabile

$$e_{ss}^r = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\, S(s)\frac{1}{\cancel{s}} = S(0)$$

Data

$$L(s) = \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1+T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

allora

$$e_{ss}^r = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{s^g}{s^g+\mu} = \begin{cases} 1, & g<0 \\ \dfrac{1}{1+\mu}, & g=0,\ (\mu \neq -1) \\ 0, & g>0 \end{cases}$$

Domanda: Se $g=0$ e $\mu=-1$ che succede?

$$L(s) = -\frac{1}{1+s} \rightsquigarrow S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+s}} = \frac{1}{\frac{1+s-1}{1+s}} = \frac{1+s}{s}$$

da sensitività diretta non è A. Stabile

se $U(s) = \frac{1}{s} \to Y(s) = \frac{s+1}{s^2} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} = 1 \cdot 1\!\!1(t) + t \cdot 1\!\!1(t)$

DIVERGE

$$A = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2}\, \frac{s+1}{\cancel{s^2}} = 1 = B$$

$$= \frac{1}{1+\frac{N_L}{D_L}} = \frac{D_L}{D_L+N_L}$$

Ingressi polinomiali

✱

Calcoliamo l'errore a regime quando il riferimento è un ingresso polinomiale:

Se la f.d.t. $S(s)$ è as. stabile

$$e_{ss}^r = \lim_{s\to 0} s\,S(s)\frac{1}{s^i} = \lim_{s\to 0} S(s)\frac{1}{s^{i-1}} \quad i = 2, 3, \ldots$$

✱

Spiegazione

Data

$$L(s) = \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s)\prod_i (1+2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1+T_i s)\prod_i (1+2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

allora

$$e_{ss}^r = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+L(s)}\cdot\frac{1}{s^{i-1}} = \lim_{s\to 0}\frac{s^{g-i+1}}{s^g+\mu} = \begin{cases}\infty, & g < i-1, \leftarrow \\ \frac{1}{\mu}, & g = i-1 \\ 0, & g > i-1 \leftarrow\end{cases}$$

	$r(t)$		
	gradino $1(t)$	Rampa $t\cdot 1(t)$	$t^2/2\cdot 1(t)$
$L(s)$	e_p	e_v	e_a
$g = 0$	$\frac{1}{1+\mu}$	∞	∞
$g = 1$	0	$\frac{1}{\mu}$	∞
$g = 2$	0	0	$\frac{1}{\mu}$
$g = 3$	0	0	0

Numero di Azioni integrali

guadagno

Ci interessa sapere solo quanti poli in origine abbiamo, ovvero quante azioni integrali ha la funzione di trasferimento.

Se il processo non ha integratori, possiamo metterli nel controllore, tanto abbiamo la cascata che moltiplica le funzioni di trasferimento.

A seconda del numero di azioni integrali otteniamo un errore nullo sul relativo segnale (gradino, rampa ecc). Il problema è che andiamo a destabilizzare il sistema.

Se ci accontentiamo di un errore diverso da zero dobbiamo avere il guadagno molto alto in modo da minimizzare l'errore.

Remark

Se la funzione di anello è di tipo g, la retroazione negativa unitaria garantisce il perfetto inseguimento di un ingresso polinomiale $1/s^g$.

Iannelli

✱

Principio del modello interno

Per seguire perfettamente un segnale (a regime) polimoniale dobbiamo (è sufficiente) inserire (nella funzione di anello o nel controllore) la trasformata di Laplace del segnale che vogliamo inseguire.

Questo soddisfa le specifiche statiche, ovvero a regime.

Dovremmo poter soddisfare poi delle specifiche dinamiche, ovvero durante il transitorio, e quindi non ci basta più questo requisito.

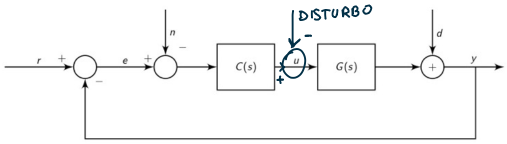
✱

$$S(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)} = \frac{1}{1+L(s)},$$

con $L(s) \triangleq C(s)G(s)$. Tale funzione è la f.d.t. tra

- disturbo d e uscita y
- opposto del disturbo $(-d)$ ed errore e
- riferimento r ed errore e

Idealmente vorremmo $S(s)$ identicamente nulla.



$$Y(s) = T_{r\to y}(s)R(s) + T_{n\to y}(s)N(s) + T_{d\to y}(s)D(s)$$
$$U(s) = T_{r\to u}(s)R(s) + T_{n\to u}(s)N(s) + T_{d\to u}(s)D(s)$$
$$E(s) = T_{r\to e}(s)R(s) + T_{n\to e}(s)N(s) + T_{d\to e}(s)D(s)$$

* OSSERVAZIONE ←

Oltre a seguire il segnale (a regime) riusciamo anche ad essere robusti alla presenza di disturbi a gradino sull'uscita.

Se il disturbo entrasse in ingresso al processo, la funzione di trasferimento non è più la sensitività diretta, ma G(s)/1+G(s)C(s). In questo caso non è più sufficiente avere un'azione integrale nel processo ma ci serve un'azione integrale nel controllore.

AZIONI INTEGRALI

Azione integrale

Se la funzione di trasferimento del processo $G(s)$ è di tipo 0, possiamo inserire un'azione integrale nel controllore:

$$u(t) = k_i \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau \Rightarrow C(s) = k_i \frac{1}{s}$$

Nel dominio del tempo, l'errore statico nullo può essere giustificato dal fatto che, se esiste un regime di equilibrio (f.d.t. as. stabile), l'unica possibilità per avere u_{ss} costante è che $e_{ss} = 0$.
Si noti che la regolazione dell'errore a zero dovuta all'azione integrale non dipende dai parametri delle f.d.t. ma solo dal tipo della funzione di anello:
Regolazione robusta a zero dell'errore e Reiezione robusta dei disturbi. *

* Spiegazione

Esercizi

- Sia data la f.d.t. del processo

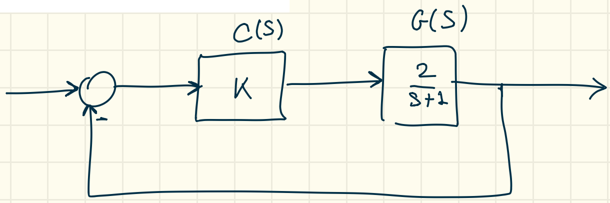
$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$

  - Si determini un controllore che garantisca a regime un errore di posizione inferiore al 10%
  - Si determini un controllore che garantisca a regime un errore di velocità inferiore al 10%

PER TENTATIVI

Controllore più semplice: PROPORZIONALE

Se $C(S) = 1$



DIRETTA

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1+G(s)C(s)}$$

$$F_{Anello} = \frac{2}{S+2}$$

10%

$$\frac{1}{1+2K} < 0.1 \to 1+2K < 10$$
$$\Rightarrow K > \frac{4}{2}$$ Proporzionale

2) Velocità

* Controllo

Ci serve un integrale / prop $C(s) = \frac{K}{S}$

polinomio caratteristico S^2+2S+K

Errore di pos: $\emptyset$

Errore di Velocità: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2K} < 0.1 \to 2K < 10 \to K > 5$

- Sia data la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

e si determini un controllore che garantisca a regime un errore di posizione inferiore al 10%.

Controllo Stabilità

$S-2=0 \rightarrow \bar{S}=+2$ INSTABILE

$$\frac{\frac{K}{S-2}}{1+\frac{K}{S-2}} = \frac{\frac{K}{\cancel{S-2}}}{\frac{S-2+K}{\cancel{S-2}}} = \frac{K}{S-2+K}$$ Polinomio Caratteristico

$$\mathcal{E}_p = \left|\frac{1}{1+\mu}\right|$$

funzione di anello $= \frac{K}{S-2}$ $\Rightarrow$ guadagno di anello $= -\frac{K}{2}$ $\Rightarrow \mathcal{E}_p = \left|\frac{1}{1-\frac{K}{2}}\right| = \frac{1}{\frac{2-K}{2}} = \left|\frac{2}{2-K}\right|$

INTEGRALE Per $\mathcal{E}_v < 10\%$

$e < 10\% \rightarrow \frac{2}{2-K} < \frac{1}{10} \rightarrow 2-K<10 \Rightarrow K>22$

Non lo possiamo Stabilizzare * Senti Audio

Proporzionale Integrale : $K_p + \frac{K_i}{S} = \frac{K_pS+K_i}{S} = *$ $\begin{cases} Z = -\frac{K_i}{K_p} \\ P = \emptyset \\ gain = K_p \end{cases}$

*

$$y(s) = \underbrace{\frac{K_p\left(S+\frac{K_i}{K_p}\right)}{S}}_{C(S)} \cdot \underbrace{\frac{1}{S-2}}_{G(S)} \rightarrow \underbrace{S^2-2S+K_pS+K_i}_{Pol\ Car}$$

$$G(S) = \frac{1}{S^2+2\xi\omega_nS+\omega_n^2}$$

Smorzamento

* Audio

$$\mu = \lim_{S\to 0} S^g \cdot G(S) = S \cdot \frac{K_i}{S-2} =$$

$Pol Car = S^2+S(K_p-2)+K_i$

Aumentando K_p diminuisco la sovraelongazione

- Sensitività (diretta): $S(s) = \dfrac{1}{1+C(s)G(s)}$ *
- Sensitività complementare: $F(s) = \dfrac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$
- Sensitività del controllo: $Q(s) = \dfrac{C(s)}{1+C(s)G(s)}$