

# DIAGRAMMI POLARI

## RISPOSTA IN FREQUENZA

Possiamo calcolare la risposta in frequenza ponendo

$$G(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega), \quad \omega \geq 0$$

$\swarrow$ 
 $|G(j\omega)|_{dB}$

$\searrow$ 
 $\angle G(j\omega)$

Ovviamente abbiamo due condizioni affinché si possa calcolare la risposta in frequenza: il segnale in ingresso deve essere sinusoidale ed il sistema deve essere asintoticamente stabile.

Quando abbiamo un sistema A.S. la risposta in frequenza coincide con la trasformata di Fourier della risposta impulsiva

Finora abbiamo visto la risposta in frequenza rappresentata tramite i diagrammi di Bode. Possiamo però visualizzarla anche tramite il piano complesso (piano di Gauss) al variare di omega (frequenza o pulsazione).

Inoltre, mentre con i diagrammi di bode si utilizzano modulo e fase, con i diagrammi polari vengono usate la parte reale e la parte immaginaria della funzione di trasferimento.

Indichiamo il **verso di percorrenza** per omega crescenti: indichiamo il punto di partenza (guadagno per  $\omega=0$ ) ed aggiungiamo una freccia che indica le omega crescenti.

Se prendiamo però un punto qualsiasi del diagramma non sappiamo a quale omega corrisponde (a differenza dei diagrammi di bode che conosciamo la frequenza per ogni punto).

Esempio

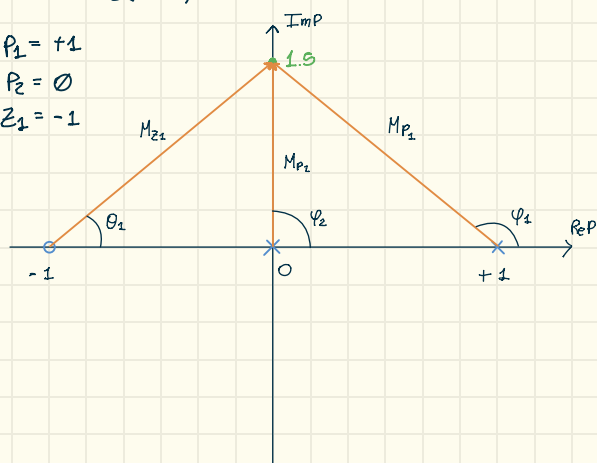
$$G(s) = 2 \frac{s+1}{s(s-1)}$$

COSTANTE DI TRASFERIMENTO

Rapp. Poli-Zeri

$$\text{Freq } s=j\omega \rightarrow G(j\omega) = 2 \frac{j\omega+1}{j\omega(j\omega-1)} \quad \text{supponiamo che } \omega_0 = 1.5$$

$$\begin{cases} P_1 = +1 \\ P_2 = 0 \\ Z_1 = -1 \end{cases}$$



Somma Vettori

$$\uparrow + \rightarrow = \nearrow$$

La somma parte dalla coda del primo ed arriva alla punta del secondo

Differenza Vettori

$$\uparrow - \rightarrow = \nwarrow$$

La differenza parte dalla punta del vettore negativo ed arriva nella punta del positivo

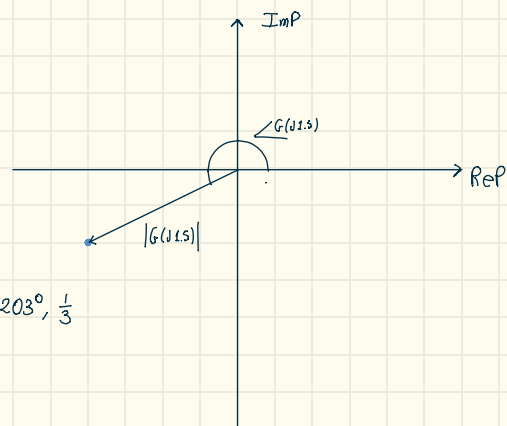
Il modulo dei vari poli e zeri è la **differenza** tra il vettore immaginario (che ha coda in origine e punta nella pulsazione, in questo esempio 1.5, e quindi il vettore sull'asse immaginario) ed il vettore reale (che ha coda in origine e punta nel polo/zero, in questo caso +1, -1 e zero).

Possiamo rappresentare anche la fase, che banalmente è l'angolo tra l'asse reale ed il modulo del polo/zero corrispondente.

Grazie alle regole dei vettori possiamo calcolare modulo e fase totali (dimostrazioni viste a sistemi, comunque basta rappresentarli in forma esponenziale (fasori) e ci si accorge che tutto funziona).

$$|G(j1.5)| = |2| \cdot \frac{M_{Z1}}{M_{P1} \cdot M_{P2}}$$

$$\begin{aligned} \angle G(j1.5) &= \angle 2 + \angle Z_1 - [\angle P_1 + \angle P_2] \\ &= \angle 2 + \theta_1 - \varphi_1 - \varphi_2 \end{aligned}$$



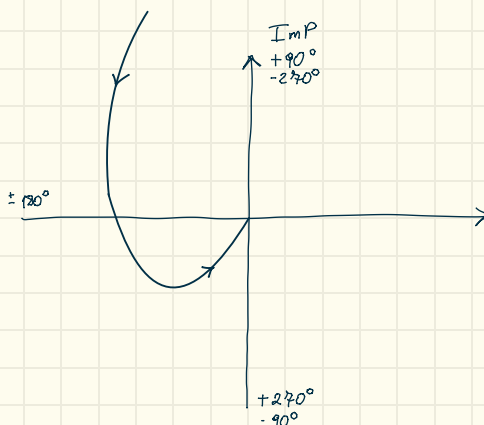
$$\angle \theta = 203^\circ, \frac{1}{3}$$

Esempio:

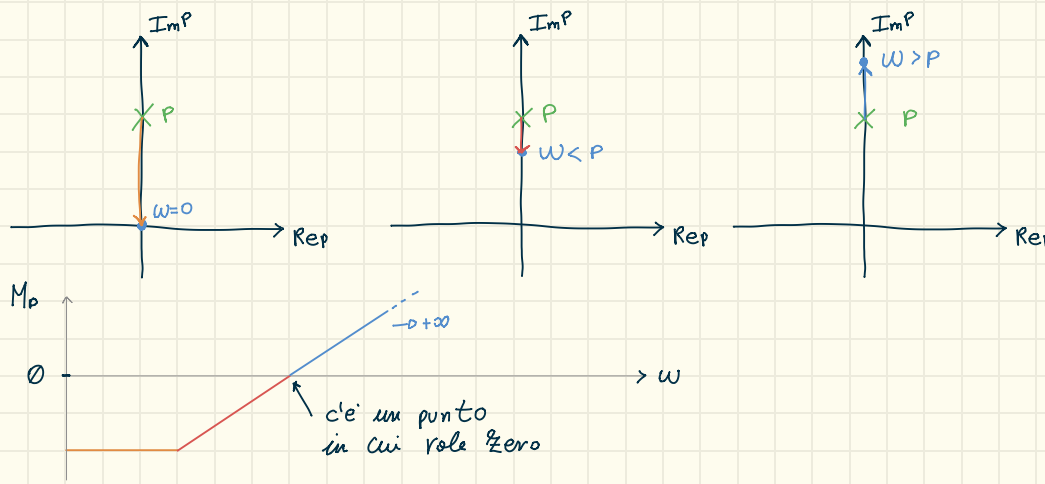
$$G(s) = 2 \frac{s+4}{s(s-1)}$$

$$\begin{cases} \omega=0 \rightarrow M = \infty \\ \omega=\infty \rightarrow M = 0 \end{cases} \quad \text{Valori Naturali}$$

$$\begin{cases} \omega=0 \rightarrow \varphi = -270^\circ = +90^\circ \\ \omega=\infty \rightarrow \varphi = -90^\circ = +270^\circ \end{cases}$$



## Poli in origine / asse Immaginario



SICCOME

$$|G(jw)| = \frac{\pi M_z}{\pi M_p} \leftarrow \text{c'è un punto in cui } M_p = 0 \text{ se su asse Imm}$$

$\Rightarrow |G(jw)| \rightarrow \infty$  DOBBIAMO RISOLVERE!

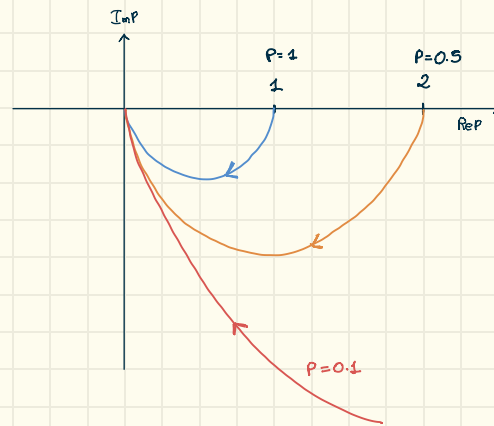
## Esempio di Regularizzazione

$$G(s) = \frac{1}{s+p} = \frac{1}{p(1+\frac{1}{p}s)} = \frac{1/p}{1+\frac{s}{p}}$$

Invece di avere semplicemente  $1/s$  aggiungo un polo molto molto piccolo, in questo modo "simulo" la presenza di un polo in origine.

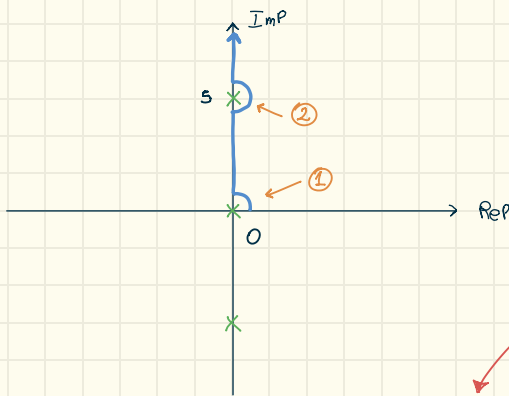
$$M \begin{cases} w=0 \rightarrow 1/p \\ w=\infty \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\varphi \begin{cases} w=0 \rightarrow 0^\circ \\ w=\infty \rightarrow -90^\circ \end{cases}$$



1:04 L11 Esercizio OPAMP svolgimento Alt.

## Soluzione ai poli in origine 1:16



Visto che i problemi ce li danno i poli sull'asse immaginario (fanno andare ad infinito il diagramma polare) risolviamo il problema **aggirando l'ostacolo** (il polo). Lo facciamo disegnando degli archi di circonferenza **pretamente nel semipiano reale positivo** (a destra).

Possiamo scrivere in maniera compatta gli archi di circonferenza usando la notazione esponenziale:

Il trucco è impedire al vettore che collega  $jw$  con il polo di diventare zero (e quindi portare il modulo di  $G$  ad infinito). Se ci sono poli sull'asse, in prossimità di questi poli omega non cresce spostandosi lungo l'asse immaginario, ma lungo la linea in blu, cioè descrivendo degli archi di circonferenza in prossimità dei poli.

Il diagramma polare di  $G(s)$  è creato a partire da modulo e fase ricavati da  $G(s^*)$  quando  $s^*$  prende i valori di tutti i punti appartenenti alla curva tracciata in blu (ovvero quella che aggira i poli).

Ogni circondamento ha raggio *epsilon*, ovvero un numero molto piccolo.

Quando  $G(s)$  ha poli sull'asse immaginario il diagramma polare di  $G(s)$  è ridefinito come l'immagine attraverso  $G(s)$  dei punti appartenenti al percorso disegnato in blu.

In altre parole: circondiamo i poli in modo da non ottenere il modulo che va ad infinito.

$$①: \varepsilon \cdot e^{j\theta} \text{ con } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$②: j s + \varepsilon \cdot e^{j\theta} \text{ con } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

In generale un polo è evitato con

$$\text{Vettore POLO} + \varepsilon \cdot e^{j\theta} \text{ con } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Potremmo scrivere la fase in positivo o negativo. A noi interessa scriverla sempre in negativo in modo da renderci conto della "differenza"

## Esempio

$$G(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} = \frac{\mu \omega_n^2}{\omega_n^2 \left(1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{\mu}{1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

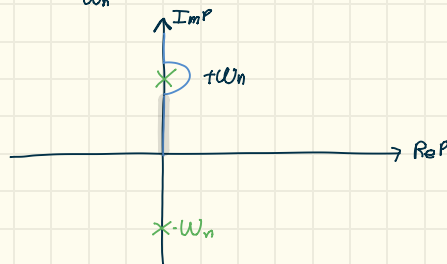
OSCILLATORE  
ARMONICO

P:  $1 + \frac{s^2}{\omega_n^2} = 0$  per  $s^2 = -\omega_n^2$

MODULO:

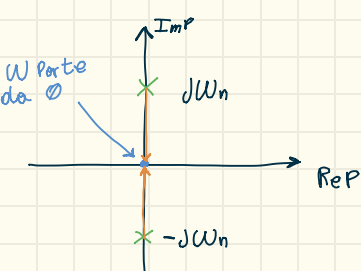
$$\frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}}} \rightarrow \omega=0 \rightarrow \mu$$

$$\rightarrow \omega=\infty \rightarrow 0$$



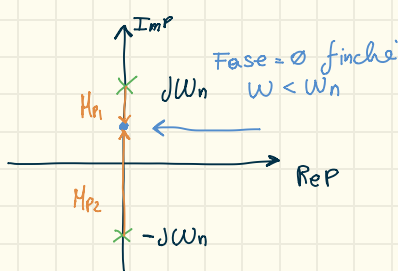
Fase: No Zeri/poli in 0  $\Rightarrow \varphi_0 = 0^\circ$

2 Poli sull'asse imm  $\Rightarrow \varphi_f = -180^\circ$



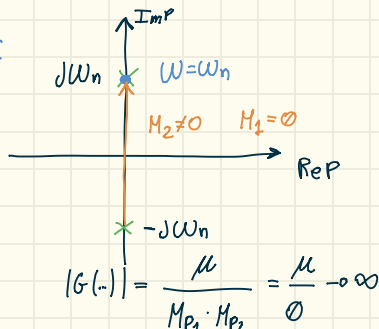
$$M_{P_1} \cdot M_{P_2} = P_1$$

$$\Rightarrow |G(-)| = \frac{\mu}{M_{P_1} \cdot M_{P_2}} = \frac{\mu}{P_1} = G_1$$

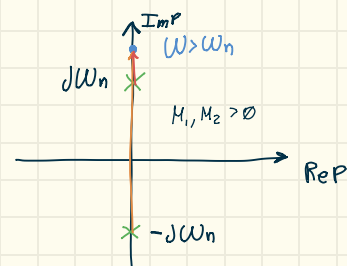


$$M_{P_1} \cdot M_{P_2} = P_2 < P_1$$

$$\Rightarrow |G(-)| = \frac{\mu}{M_{P_1} \cdot M_{P_2}} = \frac{\mu}{P_2} > G_1$$

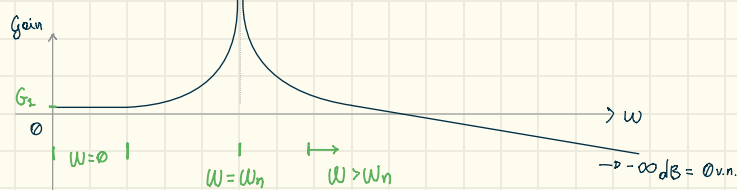


$$|G(-)| = \frac{\mu}{M_{P_1} \cdot M_{P_2}} = \frac{\mu}{\omega} \rightarrow \infty$$



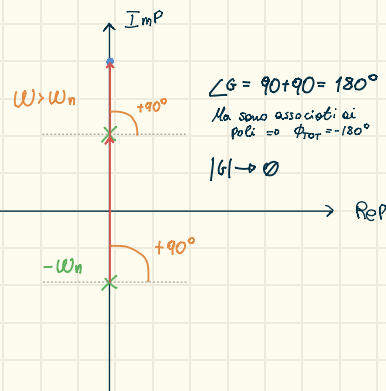
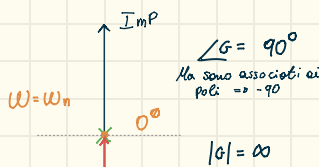
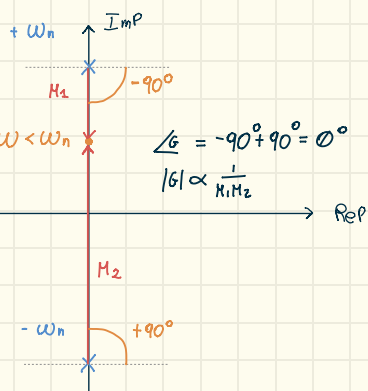
$$M_{P_1} \cdot M_{P_2} = P_3 > P_1 > P_3$$

$$|G(-)| = \frac{\mu}{M_{P_1} \cdot M_{P_2}} = \frac{\mu}{P_3} \rightarrow 0$$

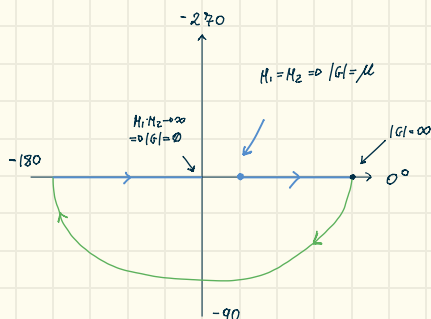
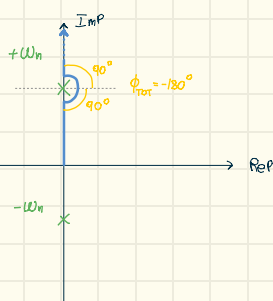


Il prodotto tra i due moduli diminuisce man mano che omega passa da 0 a +omega\_n, ma il modulo essendo inversamente proporzionale a questo prodotto, schizza all'infinito.

## Interpretazione geometrica della fase

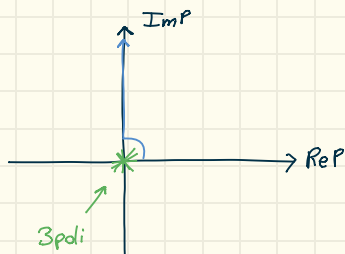


## Con i circondamenti



Esempio

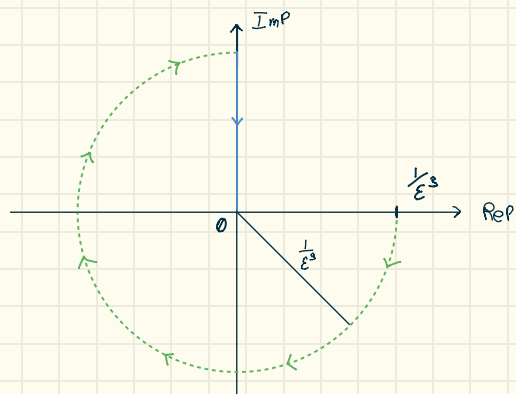
$$G(s) = \frac{1}{s^3}$$



Sostituisco  $s = s^* = \varepsilon e^{j\theta}$  con  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{\varepsilon^3 e^{3j\theta}} = \frac{1}{\varepsilon^3} e^{-3j\theta}$$

Siccome  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow G(s) \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot e^0 \Rightarrow M \approx \frac{1}{\varepsilon^3}, \angle G = 0^\circ \\ \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot e^{-\frac{3}{2}\pi j} \Rightarrow M \approx \frac{1}{\varepsilon^3}, \angle G = -\frac{3}{2}\pi = -270^\circ \end{cases}$

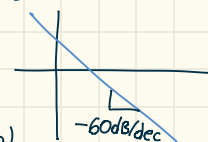


Dopo essere tornato sull'asse immaginario

$\frac{1}{s^3}$  è un triplo integratore

$$\Rightarrow M \begin{cases} \omega = 0 \rightarrow (\text{E nel nostro caso}) \\ \omega = \infty \rightarrow 20 \log(x) = -\infty \Rightarrow x = 10^{\frac{-\infty}{20}} \Rightarrow M_{\infty} = 0 \end{cases}$$

(tratto blu)



# RITARDI PURI

dalla lezione 12 08/04/22

Trasformata del ritardo  $\mathcal{L}[f(t-t_0) \cdot \mathbb{1}(t-t_0)] = e^{-st_0} \cdot F(s)$

ES:  $u(t) = \mathbb{1}(t-t_0) \Rightarrow U(s) = e^{-st_0}$

Effetto del ritardo sulla fase:  $\varphi = -t_0 \cdot \omega_0 \cdot \frac{180}{\pi} \text{ [deg]} \Rightarrow$  PROPORZIONALMENTE AD  $\omega$

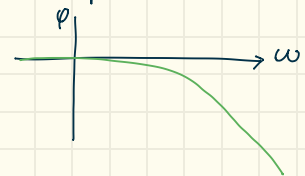
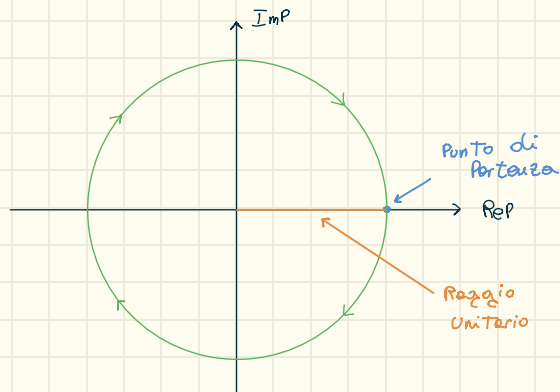


Diagramma Polare Corrispondente



ES:

$$G(s) = \frac{2}{1+0.1s} \cdot e^{-s \cdot 10}$$

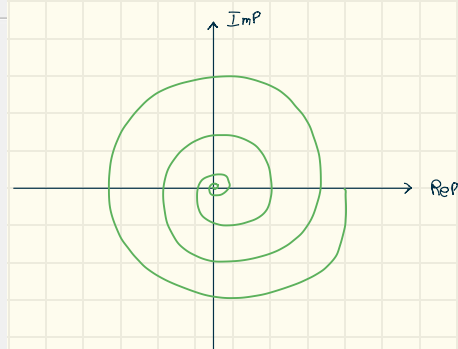
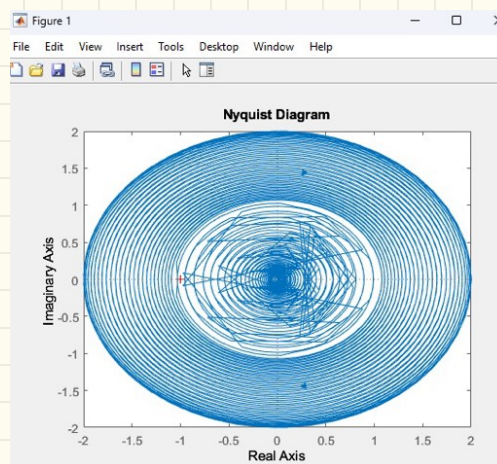
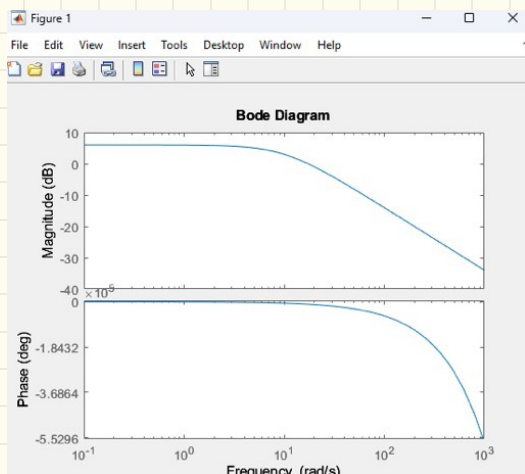
$P_1: 1 + \frac{1}{10}s = 0 \rightarrow \bar{s} = -10$



$K_s = 2, \quad t_d = 10s$

$$\varphi = -\tan^{-1}(10\omega) - 10 \cdot \omega_0 \cdot \frac{180}{\pi}$$

$G(s)$  è fatto da 2 "pezzi"  $G(s) \begin{cases} \text{LPF} \\ \text{Delay} \end{cases}$  Mettiamo insieme i due pezzi



Il ritardo ha come effetto quello di una fase che tende all'infinito all'aumentare della pulsazione (in maniera proporzionale ad essa). Questo ha un effetto destabilizzante sulla stabilità a ciclo chiuso.

Basti pensare all'esempio della regolazione in retroazione (non automatica) della caldaia quando ci facciamo la doccia: più la caldaia è lontana dalla doccia più ritardo avremo con la risposta e quindi maggiore sarà la difficoltà di regolazione.

