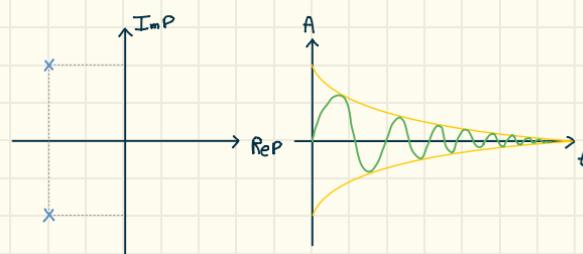
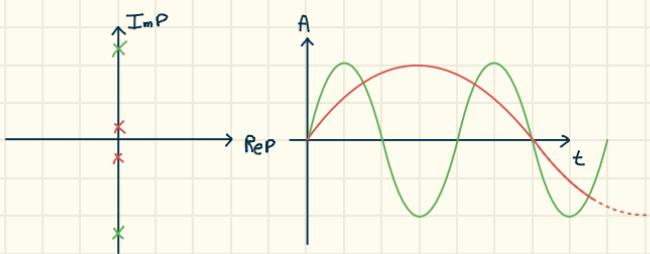
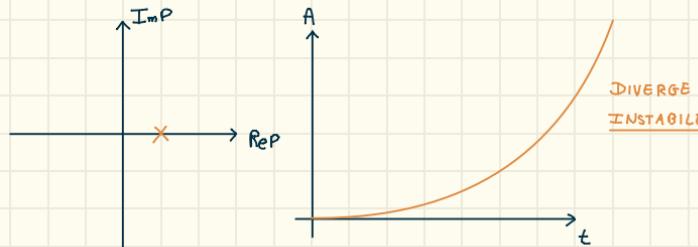
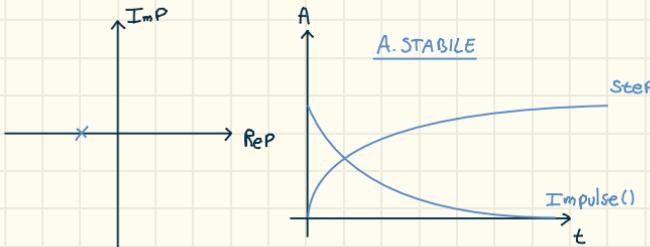
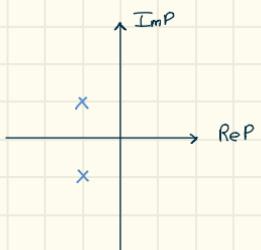


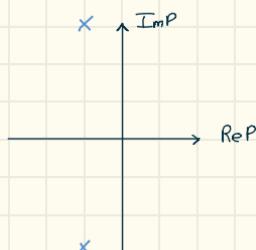
## RECAP EFFETTO DEI POLI



Poca Sorraelongazione



Molta Sorraelongazione



## FORMA "STANDARD" DELLA FDT PER DIAGRAMMI DI BODE

$$G(s) = \frac{K}{S} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=1}^n (1 + s\tau_i)}$$

Questa forma è estremamente importante perché ci permette di calcolare il valore iniziale del modulo con estrema facilità: ci basta calcolare  $G(0)$  e vedere immediatamente che il valore iniziale corrisponde al **guadagno statico k** che viene moltiplicato per il resto della fdt

EVIDENZIA  
IL GAIN STATICO

- 1) Rapporto tra polinomi
- 2) Rapporto tra produttorie di termini

Bisogna tenere presente che il grado del polinomio al numeratore **non deve mai essere superiore** a quello del denominatore, altrimenti il sistema non è fisicamente realizzabile.

$$\frac{\prod (s+z)}{\prod (s+r)}$$

$$G(s) = \frac{1/(\tau_1\tau_2)}{(s+1/\tau_1)(s+1/\tau_2)}$$

$$\frac{\prod (1+sT)}{\prod (1+sC)}$$

$$\text{Se } G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

- POLI / ZERI
- Ponti di rottura ( $\omega$ )
- GAIN ( $s=0 \rightarrow K_p = 1$ )
- COSTANTI DI TEMPO

### NOTAZIONE ALTERNATIVA

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{P_n s^n + P_{n-1} s^{n-1} + \dots + P_1 s + P_0}{S^n + D_{n-1} S^{n-2} + \dots + D_1 S + D_0}$$

### EVIDENZIO POLI E ZERI

I polinomi sono Monici, ovvero la S ha come coefficiente 1.

$$G(s) = \frac{P_i}{S^2} \frac{\prod_i T_i (s+z_i) \cdot \prod_i (s^2 + 2\xi_i d_{ni} s + d_{ni}^2)}{\prod_i T_i (s+p_i) \cdot \prod_i (s^2 + 2\xi_i w_{ni} s + w_{ni}^2)}$$

TIPO DEL SISTEMA →  $\begin{cases} \xi > 0 & \text{2 poli in O} \\ \xi = 0 & \text{0 poli in O} \\ \xi < 0 & \text{2 zeri in O} \end{cases}$

### EVIDENZIO GUADAGNO E COSTANTI DI TEMPO

I polinomi hanno come termini noti "1"

### Quando il sys è A. Stabile?

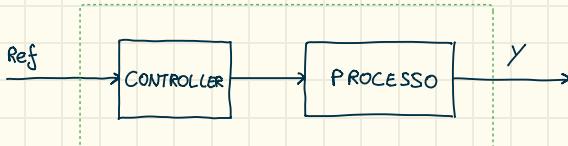
- Nessun polo in O ( $\xi \leq 0$ )
- Costanti di tempo positive ( $T_i \geq 0, \forall T_i$ )
- Coefficienti di Smorzamento positivi ( $\xi_i \geq 0, \forall \xi_i$ )

$$G(s) = \frac{M}{S^2} \frac{\prod_i T_i (1+\tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{d_{ni}} s + \frac{s^2}{d_{ni}^2})}{\prod_i T_i (1+T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{w_{ni}} s + \frac{s^2}{w_{ni}^2})}$$

### REGOLA DI CARTESIO

In un'equazione di secondo grado con delta positivo ad ogni permanenza di segno corrisponde una radice negativa, ad ogni variazione di segno corrisponde una radice positiva: se i segni dei coefficienti del polinomio caratteristico cambiano allora la fdt non è asintoticamente stabile.

### OPEN LOOP - Anello Aperto



Un sistema in anello aperto ha il controllore che non ha in alcun modo come input l'uscita del sistema.

#### Alcuni esempi:

- **Tostapane**: il tostapane non è a conoscenza ne della temperatura del pane ne del fatto che esso sia tostato o meno. Esso riscalda per un determinato lasso di tempo ed infatti a volta il pane si brucia o non è abbastanza tostato.

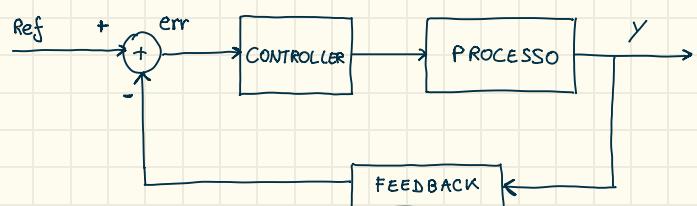
#### Vantaggi:

1. È economico perché il circuito è semplice
2. Semplice da costruire
3. È comodo da usare quando l'output è difficile da usare, e quindi non possiamo usarlo come feedback.

#### Svantaggi:

1. Non è robusta ai disturbi
- Non è affidabile

### CLOSED LOOP - Anello Chiuso



#### Alcuni esempi:

- **Condizionatore**: il condizionatore monitora la temperatura dell'aria di continuo in modo da portare la temperatura della stanza alla temperatura desiderata.

#### Vantaggi:

- Buona accuratezza
- Molto affidabili

#### Svantaggi:

- Il design è complicato
- Sono costosi

## FUNZIONI DI SENSITIVITÀ

$$T_{\Sigma-oy} = -T_{n-oy} = F(S) = \frac{C(S)G(S)}{1 + C(S)G(S)}$$

SENSITIVITÀ COMPLEMENTARE

$$T_{d-oy} = T_{\Sigma-oe} = -T_{n-oe} = T_{d-oe} = S(S) = \frac{1}{1 + C(S)G(S)}$$

SENSITIVITÀ DIRETTA

$$T_{\Sigma-ou} = -T_{n-uu} = T_{d-ou} = Q(S) = \frac{C(S)}{1 + G(S)C(S)}$$

SENSITIVITÀ DI CONTROLLO

## ERROTI A REGIME PERMANENTE

IN ANELLO APERTO

	$\underline{u}(t)$	$t \cdot \underline{u}(t)$	$\frac{t^2}{2} \cdot \underline{u}(t)$	
	$e_p$	$e_v$	$e_a$	
$\beta_0 \neq d_0$	$\left  \frac{\beta_0 - d_0}{d_0} \right $	$\infty$	$\infty$	Dato
$\beta_0 = d_0, \beta_1 \neq d_1$	0	$\left  \frac{\beta_1 - d_1}{d_0} \right $	$\infty$	$G(S) = \frac{\beta_1 s^n + \dots + \beta_n s^1 + \beta_0}{d_n s^n + \dots + d_1 s^1 + d_0}$
$\beta_0 = d_0, \beta_1 = d_1, \beta_2 \neq d_2$	0	0	$\left  \frac{\beta_2 - d_2}{d_0} \right $	
$\beta_0 = d_0, \beta_1 = d_1, \beta_2 = d_2$	0	0	0	SEMPRE $d_0$ AL DEN

Bisogna tenere presente che gli errori finiti calcolati sono in percentuale rispetto al guadagno del segnale in ingresso.

## ERROTI A REGIME PERMANENTE

CON Retroazione Unitaria

Pg 225

	$\underline{u}(t)$	$t \cdot \underline{u}(t)$	$\frac{t^2}{2} \cdot \underline{u}(t)$	
	$e_p$	$e_v$	$e_a$	
$\alpha = 0$	$\propto 1$	$\left  \frac{1}{1 + \mu_p} \right $	$\infty$	• 0 Azioni integrali $\Rightarrow \alpha = 0$
$\alpha = 1$	$\propto \frac{1}{S}$	0	$\left  \frac{1}{\mu_p} \right $	• 1 Azione integrale $\Rightarrow \alpha = 1$
$\alpha = 2$	$\propto \frac{1}{S^2}$	0	0	$\left  \frac{1}{\mu_p} \right $ • 2 Azioni integrali $\Rightarrow \alpha = 2$
$\alpha = 3$	$\propto \frac{1}{S^3}$	0	0	• 3 Azioni integrali $\Rightarrow \alpha = 3$

### Principio del modello interno

Per seguire perfettamente un segnale (a regime) polinomiale dobbiamo (è sufficiente) inserire (nella funzione di anello o nel controllore) la trasformata di Laplace del segnale che vogliamo inseguire.

Questo soddisfa le specifiche statiche, ovvero a regime.

Dovremmo poter soddisfare poi delle specifiche dinamiche, ovvero durante il transitorio, e quindi non ci basta più questo requisito.

È detto del modello interno perché all'interno del controllore dobbiamo avere il modello del segnale che vogliamo seguire; ad esempio se vogliamo seguire una rampa, che ha come trasformata di Laplace ( $1/s$ ), ci basta avere un'azione integrale, ovvero proprio  $1/s$ .

## Calcolo guadagno L(s)

$$\mu_p = \lim_{S \rightarrow 0} L(S) = \lim_{S \rightarrow 0} G(S) \cdot C(S) \longrightarrow e_{ss} [\underline{u}(t)] = \frac{1}{1 + \mu_p}$$

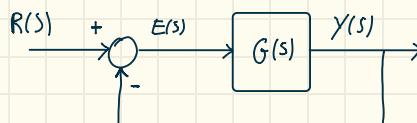
$$\mu = \lim_{S \rightarrow 0} S^\alpha \cdot G(S)$$

$$\mu_v = \lim_{S \rightarrow 0} S \cdot L(S) = \lim_{S \rightarrow 0} S \cdot G(S) \cdot C(S) \longrightarrow e_{ss} [t \cdot \underline{u}(t)] = \frac{1}{\mu_v}$$

$$\mu_a = \lim_{S \rightarrow 0} S^2 \cdot L(S) = \lim_{S \rightarrow 0} S^2 \cdot G(S) \cdot C(S) \longrightarrow e_{ss} [t^2 \cdot \underline{u}(t)] = \frac{1}{\mu_a}$$

$$\mathcal{L} [R_0 \cdot t^n \cdot \underline{u}(t)] = \frac{R_0 \cdot n!}{t^{n+1}}$$

# Errore a regime per ingresso sinusoidale



$$\text{Se } \dot{\epsilon}(t) = R_0 \sin(\omega t) \Leftrightarrow R(s) = \frac{W R_0}{s^2 + \omega^2} \rightarrow \bar{s}_{1,2} = \pm j\omega$$

Poli del Riferimento

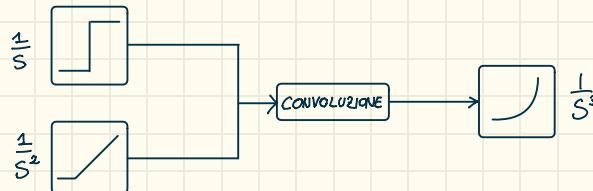
Per il principio del modello interno che ci dice l'errore a regime è nullo solo se i poli della trasformata del riferimento ( $R$ ) sono anche i poli della funzione di trasferimento  $G(s)$  del guadagno di anello (ovvero quella funzione che riassume il cammino compreso tra somma ed uscita n.d.s.)

$\Rightarrow$

Se  $G(s)$  ha due poli sull'asse imm (ReP=0) esattamente a  $\pm\omega$  allora possono avere ess = 0

## PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA

La trasformata di Laplace della convoluzione nel tempo è uguale al prodotto delle trasformate di Laplace nel dominio della s.



## PARTE II: SPECIFICHE DINAMICHE - DIAGRAMMI POLARI

### FASE IN PRESENZA DI RITARDO

$$\text{Fase totale } \varphi_{\text{tot}} = \varphi_{\text{pd0}} + \varphi_{\text{td}} + \varphi_z + \varphi_{\text{int}} + \varphi_{\text{deriv}} = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{pk}}}\right) - t_0 \cdot \omega \cdot \frac{180}{\pi} + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ex}}}\right) + 90^\circ - 90^\circ$$

Modulo Ritardo

Fase Ritardo

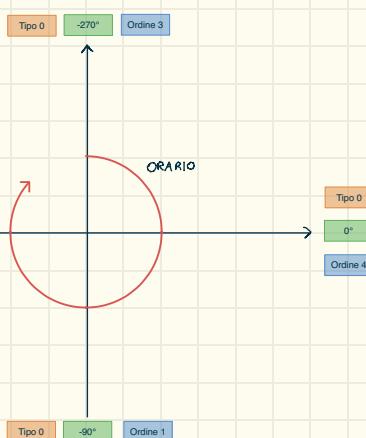
$\begin{cases} \varphi = -t_0 \cdot \omega \text{ [rad]} \\ \varphi = -t_0 \cdot \omega \cdot \frac{180}{\pi} \text{ [gradi]} \end{cases}$

Polo ReP<0      Ritardo  $t_0 > 0$       eventuale Zero ReP<0      Eventuale Zero in 0      Eventuale Polo in 0

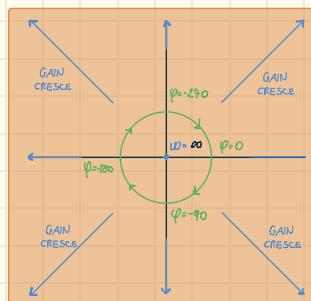
Il modulo non è influenzato dal ritardo temporale

### TABELLA RIASSUNTIVA

	PUNTO INIZIALE		CONTRIBUTO		* V.N. Valore Noturale
POLI IN ORIGINE	MODULO	FASE	MODULO	FASE	
ZERI IN ORIGINE	+20 dB/dec	+90°C · n Zeri COSTANTE	0 dB ≈ 1 (V.N.)	0°	
Zeri semplici ReP<0	$K_S \rightarrow 0$ (V.N.)	0°	-20dB · n Poli semplici	-90°C · n Poli semplici	$dB = 20 \log_{10} (V.N.)$
Zeri semplici ReP>0	$K_S \rightarrow 0$ (V.N.)	0°	+20dB · n Poli semplici	+90°C · n zeri semplici	$V.N. = 10^{\frac{dB}{20}}$
Ritardo Puro	$K_S \rightarrow K_S$	0°	0	+∞	
					CON POLO      SENZA POLO



■ **INIZIO** dipende dal **TIPO** del sistema (da g)  
■ **ANGOLI**  
■ **FINE** dipende dall'**ORDINE** del sistema (somma g e p)



Omega cresce in tutte le direzioni partendo dall'esterno (dove vale zero) andando verso l'interno (dove vale infinito). Per rappresentare guadagno=inf disegniamo una linea parallela all'asse corrispondente alla fase relativa.

## PARTE III LUOGO DELLE RADICI

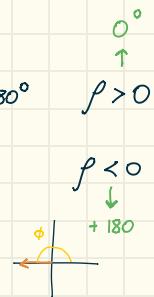
### CONDIZIONI GENERALI

#### CONDIZIONI SUL MODULO

$$\frac{|N(s^*)|}{|D(s^*)|} = \frac{1}{|\rho|} \quad \text{con } \rho \in \mathbb{R} \quad s^* \in \mathbb{C}$$

#### CONDIZIONI SULLA FASE

$$\angle N(s^*) - \angle D(s^*) = \frac{-1}{180^\circ} - \frac{\rho}{180^\circ} \rightarrow \begin{cases} (2k+1)180^\circ & \rho > 0 \\ 2k \cdot 180^\circ & \rho < 0 \end{cases}$$



### REGOLE DI TRACCIATURA

#### REGOLA DEI RAMI

Il luogo delle radici è composto da  $2^n$  rami:

- "n" perché n è il grado del polinomio al denominatore, e quindi il numero dei poli.
- "2" perché abbiamo n rami per il luogo diretto ( $\rho > 0$ ) ed n per il luogo inverso ( $\rho < 0$ ).

#### REGOLA DELLA SIMMETRIA

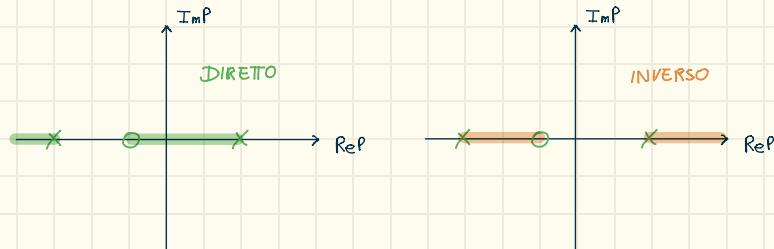
Essendo l'equazione caratteristica a coefficienti reali, abbiamo delle radici complesse e coniugate. Di conseguenza abbiamo che il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

### REGOLA DELL'ASSE REALE

Tutti i punti dell'asse reale (ad esclusione di poli e zeri di  $L(s)$ ) fanno parte del luogo.

A dx del luogo c'è un numero di molteplicità ...

PARI  $\Rightarrow$  Luogo INVERSO  
DISPARI  $\Rightarrow$  Luogo DIRETTO



#### REGOLA DEL PUNTO DI ORIGINE DEI RAMI

I rami partono dagli n poli a ciclo aperto

Quando  $\rho$  tende a zero, i poli del sistema a ciclo aperto coincidono con quelli a ciclo chiuso

#### REGOLA DEI PUNTI DI ARRIVO DEI RAMI

$$v = n - m \quad \text{con } n > m$$

ZERI

I rami del lungo "arrivano" negli m zeri di  $L(s)$  (ciclo aperto) ed i restanti  $n-m$  rami (abbiamo sempre funzioni strettamente proprie con  $n > m$ ) vanno ad infinito.

#### REGOLA DEGLI ASINTOTI

Arremo sempre  $v$  asintoti CENTRATI IN:

$$x_a = \frac{1}{v} \left[ \sum_i \text{POLI} - \sum_i \text{ZERI} \right]$$

! ATENZIONE !

E' la somma dei poli  $p_i$  e zeri  $z_i$   
NON la loro cardinalità!

E CON ANGOLI RISPECTO ALL'ASSE REALE DI:

$$\phi = \begin{cases} \frac{(2k+1) \cdot 180^\circ}{v} & \text{con } k = 0, 1, \dots, v-1 \\ \frac{2k \cdot 180^\circ}{v} & \text{con } k = 0, 1, \dots, v-1 \end{cases}$$

con  $\rho > 0$

LUOGO DIRETTO

con  $\rho > 0$

LUOGO INVERSO

## REGOLA DEL BARICENTRO

Quando il grado relativo  $n_i$  è almeno due ( $n_i \geq 2$ ) il baricentro del luogo non dipende da valori di  $\rho$  ma coincide con il baricentro dei poli a ciclo aperto. Per calcolare il baricentro basta fare la media dei poli.

$$X_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-P_i)$$

Il centroide coincide con il baricentro

Utilizzo: La usiamo quando dobbiamo conoscere il valore di un polo conoscendo la somma totale dei poli.  
Esempio: ho 3 poli: 2 complessi Conj ed uno Reale. Quando quelli complessi hanno  $\operatorname{Re}P=0$ , quanto vale il 3<sup>rd</sup> polo?

$$\text{Sommo: } \sum_{i=1}^n P_i = P_1 + P_2 + P_3 = X_0 = -11 \quad \begin{cases} X_1 = -1.8 + j\varphi \\ X_2 = -1.8 - j\varphi \end{cases} \quad \rightarrow -1.8 + j\varphi - 1.8 - j\varphi + X_3 = -11 \quad \rightarrow X_3 = -11 + 3 \cdot 6 = -7.4$$

Valore del 3<sup>rd</sup> polo quando

A cosa ci serve?: Trovare il valore di un 3<sup>rd</sup> polo ci serve a trovare il valore della costante di trasferimento  $P$ , visto che è comune a tutti i poli, possiamo usare il valore di  $s^*$  ricavato da uno qualsiasi dei poli per calcolare  $P$ :

$$\bar{P} = \left| \frac{D(X_3)}{N(X_3)} \right| = \text{condizione sul modulo}$$

$X_3 = 7.4$

## REGOLA DEI PUNTI MULTIPLI

### PUNTO DI INCONTRO PER ASINTOTI

$$f(x) = -\frac{D(x)}{N(x)} \quad \rightarrow \text{Trovo Max e Min di } f(x) \quad \rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)) > 0$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{D'N - DN'}{N^2} > 0 \quad \text{I punti multipli devono necessariamente annullare } f'(x) \text{ (condizione NECESSARIA).}$$

Se il punto multiplo si trova sull'asse reale ( $\operatorname{Im}P=0$ ) la cond. è anche sufficiente

Luogo Diretto  
 MASSIMO  $\Rightarrow$  Break Away  
 MINIMO  $\Rightarrow$  Break In

Luogo inverso  
 MASSIMO  $\Rightarrow$  Break In  
 MINIMO  $\Rightarrow$  Break Away

### Attenzione!

Potremmo avere più break in e break away: ad esempio un break away, poi i punti si ricongiungono, camminano sull'asse reale e poi c'è un break away fino ad avere un asintoto. Quindi non è detto che dopo un break-away i poli vadano direttamente lungo l'asintoto ad infinito!

Questo potrebbe accadere quando  $\gamma(x)$  è ad esempio una cubica con 3 radici reali.

\* Nel luogo DI $\pm$  dobbiamo considerare solo le soluzioni REALI per i punti di BI e BA.

Nel caso di poli complessi

$$N(s^*) \cdot \left| \frac{dD(s)}{ds} \Big|_{s=s^*} - D(s) \cdot \frac{dN(s)}{ds} \Big|_{s=s^*} \right| = 0$$

## REGOLA DEGLI ANGOLI DI PARTENZA

(dalla lezione 22) \* Dim 9:00

$$\alpha_{j,k} = \begin{cases} \frac{(2k+1) \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{i \neq j} \psi_i}{h_j} & \text{con } k = 0, 1, \dots, (h_j)-1 \text{ e } \rho > 0 \\ \frac{2k \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{i \neq j} \psi_i}{h_j} & \text{con } k = 0, 1, \dots, (h_j)-1 \text{ e } \rho < 0 \end{cases}$$

FASI

Multiplicità del polo

## REGOLA DEGLI ANGOLI DI ARRIVO

$$\alpha_{j,k} = \begin{cases} \frac{(2k+1) \cdot 180^\circ - \sum_{i \neq j} \theta_i + \sum_{i=1}^n \psi_i}{h_j} & \text{con } k = 0, 1, \dots, (h_j)-1 \text{ e } \rho > 0 \\ \frac{2k \cdot 180^\circ - \sum_{i \neq j} \theta_i + \sum_{i=1}^n \psi_i}{h_j} & \text{con } k = 0, 1, \dots, (h_j)-1 \text{ e } \rho < 0 \end{cases}$$

