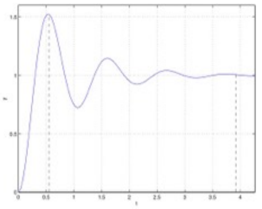
Recap lez 10



Codice Matlab

```
mu=1; xi=0.2; omega=6;
% G(s)=(mu omega^2)/(s^2 +2 xi omega s +omega^2)
sys=tf(mu*omega^2,[1 2*xi*omega omega^2]);
[ys,ts]=step(sys,5/(xi*omega)+0.1); plot(ts,ys);
xlabel('t'); ylabel('y'); grid on; hold on;
axis([ts(1) ts(end) 0 1.05*max(ys)]);
% Valore a regime
yinf=ys(end);
% Picco sovraelongazione
[ymax,iTM]=max(ys); TM=ts(iTM);
% Calcolo sovraelongazione
S=100*(ymax-yinf)/yinf
[itr1]=find(ys>0.1*yinf,1); tr1=ts(itr1);
[itr2]=find(ys>0.9*yinf,1); tr2=ts(itr2);
Ts=tr2-tr1
[iTa1]=find(abs(ys-yinf)>0.01*yinf,1,'last');
Ta1=ts(iTa1)
%Tempo di massima sovraelongazione
plot([TM TM],[0 ymax],'k--');
%Tempo di assestamento
plot([Ta1 Ta1],[0 ys(iTa1)],'k--');
hold off;
print -depsc ystep_fig
```

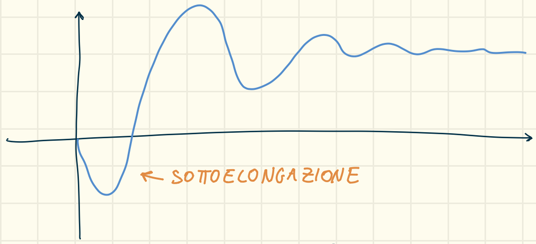
In questo caso:
Sovraelongazione $S_{\%} = 52.5\%$
Tempo di salita $T_s = 0.21\,\mathrm{s}$
Tempo di assestamento $T_{a1} = 3.77\,\mathrm{s}$

SOTTOELONGAZIONE

zero a fase NON MINIMA

$$G(s) = \frac{3-s}{s^2+0.4s+4} = \frac{2\xi\omega_n + s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega^2}$$

La sottoelongazione avviene quando è presente almeno uno **zero reale positivo**



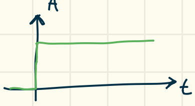
La sottoelongazione è peggio della sovraelongazione perché fa comportare il sistema **nell'esatto contrario di quello che vogliamo che faccia**, **senza che noi lo sappiamo**.
Vedi esempio della macchina che deve accelerare da 50kmh a 60kmh ma che (con la sottoelongazione) prima rallenta e poi accelera.

Se chiudiamo la retroazione con un guadagno proporzionale abbastanza alto, **sicuramente destabilizziamo il sistema che senza retroazione era stabile.**

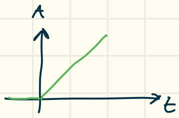
DA RIPETERE
Identificare Poli, zeri e guadagno guardando la TF

RISPOSTA A SEGNALI POLINOMIALI

Polinomio di ordine Zero : $1\!\!1(t)$



Polinomio di ordine Uno : Rampa : $u(t) = t \cdot 1\!\!1(t)$



Polinomio di grado N $= \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot t^i$

Sviluppo di Heaviside (poli distinti)

Si consideri la funzione razionale

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove $D(s)$ ha n radici distinte (poli della f.d.t.):

Radici Distinte

$$D(s) = \prod_{i=1}^{n}(s+p_i), \quad p_h \neq p_j \ \forall h \neq j$$

Vogliamo riscrivere $G(s)$ come $\dfrac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{P_i}{s+p_i}$.

Potrebbero essere Complessi e Coniugati

obbiettivo

* Perchè non abbiamo termini del tipo s^2?

DIMOSTRAZIONE RESIDUI (Non chiesto all'esame)

$$\Rightarrow (s+p_i)G(s) = (s+p_i)\frac{N(s)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} = \frac{N(s)}{\prod_{j=1,\ j\neq i}^{n}(s+p_j)} =$$

$$= (s+p_i)\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{P_j}{s+p_j} + P_i \Rightarrow P_i = \lim_{s\to -p_i}(s+p_i)G(s)$$

* Spiegazione

Sviluppo di Heaviside (poli multipli), I

*

Si consideri la funzione razionale

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con μ poli distinti e con ogni polo p_i di molteplicità n_i:

$$D(s) = \prod_{i=1}^{\mu}(s+p_i)^{n_i}, \quad p_h \neq p_j \ \forall h \neq j$$

Vogliamo riscrivere $G(s)$ come

$$\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{\mu}(s+p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{h=1}^{n_i}\frac{P_{i,h}}{(s+p_i)^h}$$

Tutti gli Esponenti

Residui nel caso di poli Multipli

Dalla relazione

$$(s+p_i)^{n_i}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{\mu}\sum_{h=1}^{n_j}\frac{P_{j,h}}{(s+p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i}(s+p_i)^{n_i-h}P_{i,h},$$

si ricava $P_{i,n_i} = \lim_{s\to -p_i}(s+p_i)^{n_i}G(s)$.
Per determinare $P_{i,h}$ per $1 \leq h < n_i$ possiamo derivare l'espressione di sopra $(s+p_i)_i^{n}G(s)$ rispetto ad s e ottenere

$$P_{i,h} = \lim_{s\to -p_i}\frac{1}{(n_i-h)!}\frac{\mathrm{d}^{n_i-h}[(s+p_i)^{n_i}G(s)]}{\mathrm{d}s^{n_i-h}}.$$

Ingressi polinomiali, I

Per un sistema LTI tempo-continuo di ordine n:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Ipotizziamo un **ingresso polinomiale**:

$$u(t) = \frac{t^m}{m!}1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s^{m+1}}.$$

Questo ci serve a trovare la risposta ad un ingresso polinomiale di ordine m

$m=0 \rightarrow u(t) = 1(t)$

$m=1 \rightarrow u(t) = t^1 \cdot 1(t)$

*RIVEDI

Avremo

$$Y(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \cdot \frac{1}{s^{m+1}}.$$

*

Ipotizziamo $G(s)$ as. stabile (per valutare la risposta a regime).

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{h=1}^{n_i} \frac{P_{i,h}}{(s+p_i)^h} + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{P_{0,j}}{s^j} \quad Re(p_i) > 0 \quad \forall i.$$

Scriviamo la trasformata come sommatoria di fratti semplici (come a sistemi). Ma in questo caso al denominatore abbiamo moltiplicato il termine s^(m+1) dovuti all'ingresso.

La G(s) Non ha poli in 0

Tutti a ReP > 0

Per $t \to \infty$ Tende a zero

In uscita a Regime abbiamo un segnale Polinomiale

Ingressi polinomiali, II

Gli unici poli nell'origine sono dovuti all'ingresso polinomiale.

$$P_{0,j} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{(m+1-j)!} \frac{\mathrm{d}^{m+1-j}[s^{m+1}Y(s)]}{\mathrm{d}s^{m+1-j}}$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{(m+1-j)!} \frac{\mathrm{d}^{m+1-j}[G(s)]}{\mathrm{d}s^{m+1-j}}.$$

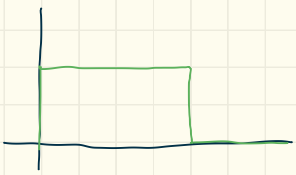
*

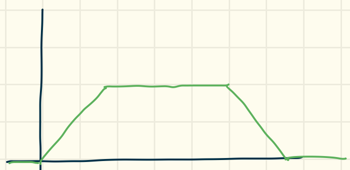
CRUISE CONTROL *

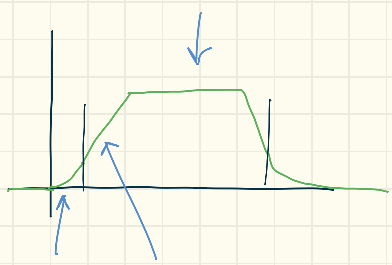
guadagno statico

GRADINO	$1/s$	$P_{0,1} = G(0)$ ORDINE ZERO		
RAMPA	$1/s^2$	$P_{0,1} = \left.\frac{\mathrm{d}G(s)}{\mathrm{d}s}\right\rvert_{s=0}$	$P_{0,2} = G(0)$	
	$1/s^3$	$P_{0,1} = \left.\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2G(s)}{\mathrm{d}s^2}\right\rvert_{s=0}$	$P_{0,2} = \left.\frac{\mathrm{d}G(s)}{\mathrm{d}s}\right\rvert_{s=0}$	$P_{0,3} = G(0)$
		x^2	x^1	costante

Seguire un certo segnale significa fare un controllo (diverso) a seconda del grado del polinomio







ACC

$$\begin{cases} u = t \\ y = G(0)\, t + a \end{cases} \;\to\; -t + G(0)t + a = t\left[G(0) - 1\right] + a$$

Per avere un Errore che non va a $+\infty$ è avere $G(0) = 1$ (GUADAGNO)

$$G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad *$$

Dato $G(s) = \dfrac{\beta_n s^n + \ldots + \beta_1 s^1 + \beta_0}{\alpha_n s^n + \ldots + \alpha_1 s^1 + \alpha_0}$

$$G(0) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} = 1 \longleftrightarrow \alpha_0 = \beta_0$$

*Finisci

$$\left.\frac{\mathrm{d}G(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} = \frac{\beta_1\alpha_0 - \alpha_1\beta_0}{\alpha_0^2} = \beta_1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2G(s)}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0} = \frac{2\beta_2\alpha_0^3 - 2\beta_0\alpha_0^2\alpha_2 - 2\alpha_0^2\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_0\alpha_1^2\beta_0}{\alpha_0^4} =$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}\frac{\beta_0}{\alpha_0} + \underbrace{\cdots}_{as.stabili} \qquad \text{gradino}$$

$$U(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2}\frac{\beta_0}{\alpha_0} + \frac{1}{s}\frac{\beta_1\alpha_0 - \alpha_1\beta_0}{\alpha_0^2} + \underbrace{\cdots}_{as.stabili} \qquad \text{Rampa}$$

$$U(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^3}\frac{\beta_0}{\alpha_0} + \frac{1}{s^2}\frac{\beta_1\alpha_0 - \alpha_1\beta_0}{\alpha_0^2} \qquad \text{Parabola}$$
$$+ \frac{1}{2s}\frac{2\beta_2\alpha_0^3 - 2\beta_0\alpha_0^2\alpha_2 - 2\alpha_0^2\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_0\alpha_1^2\beta_0}{\alpha_0^4} + \cdots$$

Errore di posizione — E di velocità — E di accelerazione

	$u(t)$		
$G(s)$	$1(t)$ e_p	$t \cdot 1(t)$ e_v	$t^2/2 \cdot 1(t)$ e_a
$\beta_0 \neq \alpha_0$	$\left\lvert\dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_0}\right\rvert$	∞	∞
$\beta_0 = \alpha_0,\ \beta_1 \neq \alpha_1$	0	$\left\lvert\dfrac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_0}\right\rvert$	∞
$\beta_0 = \alpha_0,\ \beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 \neq \alpha_2$	0	0	$\left\lvert\dfrac{\beta_2 - \alpha_2}{\alpha_0}\right\rvert$

Sono errori RELATIVI

* Come usare la Tabella

$$\varepsilon_R = \frac{y - u}{u}$$

Esercizi

Si calcoli la risposta a regime per i seguenti sistemi e relativi ingressi:

$$G(s) = \frac{-1}{s^2-1} \qquad u(t) = 2 \cdot 1(t)$$

Poli: $s^2 - 1 = 0 \to \bar{s} = \pm 1$

INSTABILE ! Diverge

Ampl.

$$G(s) = \frac{2}{s+1} \qquad u(t) = 2 \cdot 1(t)$$

$\alpha_0 = 1$
$\beta_0 = 2$

$\frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_0} = \frac{2-1}{1} = 1$ Errore relativo

$\mathcal{E}_{ASS} = 2 \cdot 1$

Ampiezza gradino

$\neq 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{Velocità} = \mathcal{E}_{ACC} = \infty$

$\mathcal{E}_R = 1, \quad \mathcal{E}_A = 3$

$$G(s) = \frac{2}{s+1} \qquad u(t) = 3 \cdot 1(t)$$

Teorema Di Routh

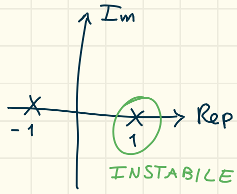
$$G(s) = \frac{9s^2 + 9s + 68}{s^3 + 9s^2 + 9s + 68} \qquad u(t) = 2 \cdot 1(t)$$

s^3	1	9
s^2	9	68
s		
1		

$\frac{9-68}{9}$

Rifaccio l'esercizio

- $G(s) = \frac{-1}{s^2-1} = -1 \frac{1}{-1(1-s^2)} = \frac{1}{1-s^2} \rightsquigarrow \bar{P}_{1,2} = \pm 1$



- $G(s) = \frac{2}{s+1}$ con $r(t) = 3 \cdot 1(t) \rightleftharpoons R(s) = \frac{3}{s}$

$\Rightarrow \beta_0 \overset{?}{=} \alpha_0 \rightsquigarrow 2 \neq 1 \Rightarrow e_p \neq 0 = \left|\frac{2-1}{1}\right| = 1 = 100\%\ R_0 \rightsquigarrow$ Siccome $R(s) = \frac{R_0}{s} = \frac{3}{s} \Rightarrow R_0 = 3$

Percentuale

$\Rightarrow e_p = 100\% \cdot 3 = 3$

Assoluto

- $G(s) = \frac{9s^2+9s+68}{s^3+9s^2+9s+68}$ con $r(t) = 2 \cdot 1(t) \rightleftharpoons R(s) = \frac{2}{s}$ Stabile?

s^3	1	9
s^2	9	68
s^1	1.4	0
s^0	68	

$\frac{81-68}{9} = 1.4$

A. Stabile ✓

$\beta_0 = \alpha_0, \ \beta_1 = \alpha_1, \ \beta_2 = \alpha_2 \Rightarrow e_p = e_v = e_a = \varnothing$