

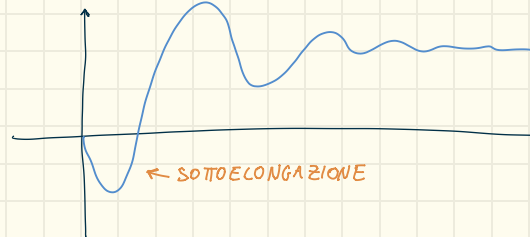
Codice Matlab

```
mu=1; xi=0.2; omega=6;
% G(s)=(mu*omega^2)/(s^2+2*xi*omega*s+omega^2)
sys=tf(mu*omega^2/(s^2+2*xi*omega*s+omega^2));
[ys,tst]=step(ys,5/(xi*omega)+0.1); plot(tst,ys);
xlabel('t'); ylabel('y'); grid on; hold on;
axis([tst(1) tst(end) 0 1.05*max(ys)]);
% Valore a regime
yinf=ys(end);
% Picco sovraelongazione
[ymax,ITM]=max(ys); TM=ts(ITM);
% Calcolo sovraelongazione
S=100*(ymax-yinf)/yinf;
[itr1]=find(ys>0.1*yinf,1); tr1=ts(itr1);
[itr2]=find(ys>0.9*yinf,1); tr2=ts(itr2);
Ts=tr2-tr1;
[ITail]=find(abs(ys-yinf)>0.01*yinf,1,'last');
Tst=ts(ITail);
% Tempo di massima sovraelongazione
plot([TM TM], [0 ymax], 'k--');
% Tempo di assestamento
plot([Tst Tst], [0 yst(ITst)], 'k--');
hold off;
print -deps ystep_fig
```

In questo caso:
 Sovraelongazione $S_o = 52.5\%$
 Tempo di salita $T_s = 0.21s$
 Tempo di assestamento
 $T_{a1} = 3.77s$

zero a fase
NON MINIMA

$$G(s) = \frac{3-s}{s^2+0.4s+4} \equiv \frac{2j\omega_n + s}{s^2 + 2j\omega_n s + \omega_n^2}$$



La sottoelongazione avviene quando è presente almeno uno zero reale positivo

La sottoelongazione è peggio della sovraelongazione perché fa comportare il sistema **nell'esatto contrario di quello che vogliamo che faccia, senza che noi lo sappiamo.**

Vedi esempio della macchina che deve accelerare da 50kmh a 60kmh ma che (con la sottoelongazione) prima rallenta e poi accelera.

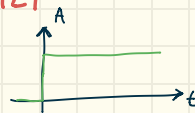
Se chiudiamo la retroazione con un guadagno proporzionale abbastanza alto, sicuramente destabilizziamo il sistema che senza retroazione era stabile.

DA RIPETERE

Identificare poli, zeri e guadagno guardando lo TF

RISPOSTA A SEGNALE POLINOMIALI

Polinomio di ordine zero: $1(t)$



Polinomio di ordine uno: Rampa: $u(t) = t \cdot 1(t)$



$$\text{Polinomio di grado } N = \sum_{i=0}^N a_i \cdot t^i$$

Sviluppo di Heaviside (poli distinti)

Si consideri la funzione razionale

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove $D(s)$ ha n radici distinte (poli della f.d.t.):

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s + p_i), \quad p_h \neq p_j \quad \forall h \neq j$$

Radici Distinte

Vogliamo riscrivere $G(s)$ come $\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{s + p_i}$

Potrebbero essere complessi e coniugati

obbiettivo

*

Perché non abbiamo termini del tipo s^2 ?

DIMOSTRAZIONE RESIDUI (Non chiesta all'esame)

$$\Rightarrow (s + p_i)G(s) = (s + p_i) \frac{N(s)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = \frac{N(s)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (s + p_j)} =$$

$$= (s + p_i) \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{P_j}{s + p_j} + P_i \Rightarrow P_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} (s + p_i)G(s)$$

* Spiegazione

Sviluppo di Heaviside (poli multipli), I

*

Si consideri la funzione razionale

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con μ poli distinti e con ogni polo p_i di molteplicità n_i :

$$D(s) = \prod_{i=1}^{\mu} (s + p_i)^{n_i}, \quad p_h \neq p_j \quad \forall h \neq j$$

Vogliamo riscrivere $G(s)$ come

$$\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{\mu} (s + p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_i} \frac{P_{i,h}}{(s + p_i)^h}$$

Tutti gli esponenti

Dalla relazione

$$(s + p_i)^{n_i} \sum_{j=1, j \neq i}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_j} \frac{P_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i} (s + p_i)^{n_i-h} P_{i,h},$$

si ricava $P_{i,n_i} = \lim_{s \rightarrow -p_i} (s + p_i)^{n_i} G(s)$.

Per determinare $P_{i,h}$ per $1 \leq h < n_i$ possiamo derivare l'espressione di sopra $(s + p_i)^n G(s)$ rispetto ad s e ottenere

$$P_{i,h} = \lim_{s \rightarrow -p_i} \frac{1}{(n_i - h)!} \frac{d^{n_i-h} [(s + p_i)^{n_i} G(s)]}{ds^{n_i-h}}.$$

Residui nel caso di poli Multipli

Ingressi polinomiali, I

Per un sistema LTI tempo-continuo di ordine n :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Ipotizziamo un **ingresso polinomiale**:

$$u(t) = \left(\frac{t^m}{m!} \right) 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s^{m+1}}.$$

$$m=0 \rightarrow u(t) = 1(t)$$

$$m=4 \rightarrow u(t) = t^4 \cdot 1(t)$$

* RIVEDI

Avremo

$$Y(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \cdot \frac{1}{s^{m+1}}.$$

Ipotizziamo $G(s)$ as. stabile (per valutare la risposta a regime).

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_i} \frac{P_{i,h}}{(s + p_i)^h} + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{P_{0,j}}{s^j} \quad \text{Re}(p_i) > 0 \quad \forall i.$$

La $G(s)$ Non ha poli in 0

Tutti a ReP > 0

Per $t \rightarrow \infty$
Tende a zero

In uscita a Regime
abbiamo un segnale
polinomiale

Questo ci serve a trovare la risposta ad un ingresso polinomiale di ordine m

Scriviamo la trasformata come sommatoria di fratti semplici (come a sistemi). Ma in questo caso al denominatore abbiamo moltiplicato il termine s^{m+1} dovuti all'ingresso.

Ingressi polinomiali, II

Gli unici poli nell'origine sono dovuti all'ingresso polinomiale.

$$P_{0,j} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(m+1-j)!} \frac{d^{m+1-j} [s^{m+1} Y(s)]}{ds^{m+1-j}}$$

$$\stackrel{\text{guadagno statico}}{\rightarrow} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(m+1-j)!} \frac{d^{m+1-j} [G(s)]}{ds^{m+1-j}}.$$

GRADINO $1/s$ $P_{0,1} = G(0)$ ORDINE ZERO

RAMPA $1/s^2$ $P_{0,1} = \left. \frac{dG(s)}{ds} \right|_{s=0}$ $P_{0,2} = G(0)$

$1/s^3$ $P_{0,1} = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 G(s)}{ds^2} \right|_{s=0}$ $P_{0,2} = \left. \frac{dG(s)}{ds} \right|_{s=0}$ $P_{0,3} = G(0)$

x^2

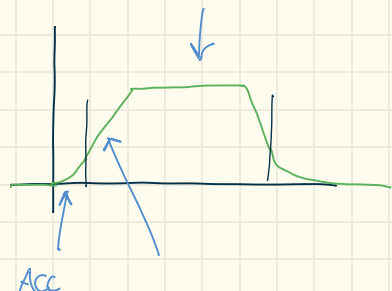
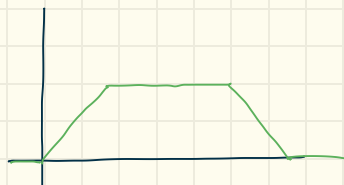
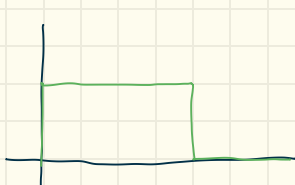
x^1

costante

*

CRUISE CONTROL
*

Seguire un certo segnale significa fare un controllo (diverso) a seconda del grado del polinomio



$$\begin{cases} u = t \\ y = G(s)t + a \end{cases}$$

$$\rightarrow -t + G(0)t + a = t[G(0) - 1] + a$$

Per avere un errore che non va a $+\infty$ e avere $G(0) = 1$ (GUADAGNO)

$$G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad *$$

$$\text{Dato } G(s) = \frac{\beta_n s^n + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{d_n s^n + \dots + d_1 s + d_0}$$

$$G(0) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} = 1 \rightarrow \alpha_0 = \beta_0$$

*Finisci

$$\left. \frac{dG(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{\beta_1 \alpha_0 - \alpha_1 \beta_0}{\alpha_0^2} = \beta_1$$

$$\left. \frac{d^2 G(s)}{ds^2} \right|_{s=0} = \frac{2\beta_2 \alpha_0^3 - 2\beta_0 \alpha_0^2 \alpha_2 - 2\alpha_0^2 \alpha_1 \beta_1 + 2\alpha_0 \alpha_1^2 \beta_0}{\alpha_0^4} =$$

...

$$U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\beta_0}{\alpha_0} + \underbrace{\dots}_{\text{as. stabili}} \quad \text{gradino}$$

$$U(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2} \frac{\beta_0}{\alpha_0} + \frac{1}{s} \frac{\beta_1 \alpha_0 - \alpha_1 \beta_0}{\alpha_0^2} + \underbrace{\dots}_{\text{as. stabili}} \quad \text{Rampa}$$

$$U(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^3} \frac{\beta_0}{\alpha_0} + \frac{1}{s^2} \frac{\beta_1 \alpha_0 - \alpha_1 \beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{1}{2s} \frac{2\beta_2 \alpha_0^3 - 2\beta_0 \alpha_0^2 \alpha_2 - 2\alpha_0^2 \alpha_1 \beta_1 + 2\alpha_0 \alpha_1^2 \beta_0}{\alpha_0^4} + \dots \quad \text{Parabola}$$

	$u(t)$		
	$1(t)$	$t \cdot 1(t)$	$t^2/2 \cdot 1(t)$
$G(s)$	e_p	e_v	e_a
$\beta_0 \neq \alpha_0$	$\left \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_0} \right $	∞	∞
$\beta_0 = \alpha_0, \beta_1 \neq \alpha_1$	0	$\left \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_0} \right $	∞
$\beta_0 = \alpha_0, \beta_1 = \alpha_1, \beta_2 \neq \alpha_2$	0	0	$\left \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\alpha_0} \right $

Errore di posizione

ϵ di velocità

ϵ di accelerazione

Sono errori RELATIVI

* Come usare la Tabella

$$\epsilon_R = \frac{Y - U}{U}$$

Esercizi

Si calcoli la risposta a regime per i seguenti sistemi e relativi ingressi:

$$G(s) = \frac{-1}{s^2 - 1} \quad u(t) = 2 \cdot 1(t)$$

INSTABILE!
Diverge
Poli: $s^2 - 1 = 0 \rightarrow \bar{s} = \pm 1$

$$G(s) = \frac{2}{s+1} \quad u(t) = \overset{\text{Ampl.}}{2} \cdot 1(t)$$

$$\alpha_0 = 1$$

$$\beta_0 = 2$$

$$\frac{\beta_0 \alpha_0}{\alpha_0} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 1 \quad \text{Errore relativo}$$

$$\varepsilon_{Ass} = 2 \cdot 1$$

Amplitude
gradino

$$\neq 0 \Rightarrow \varepsilon_{Velocità} = \varepsilon_{Acc} = \infty$$

$$\varepsilon_R = 1, \quad \varepsilon_A = 3$$

$$G(s) = \frac{2}{s+1} \quad u(t) = 3 \cdot 1(t)$$

Teorema di ROUTH

$$G(s) = \frac{9s^2 + 9s + 68}{s^3 + 9s^2 + 9s + 68} \quad u(t) = 2 \cdot 1(t)$$

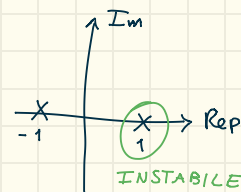
$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 9 \\ s^2 & 9 & 68 \\ s & & \\ 1 & & \end{array}$$

$$\frac{9-68}{9}$$

Rifaccio l'esercizio

$$G(s) = \frac{-1}{s^2 - 1} = -1 \frac{1}{-1(1-s^2)} = \frac{1}{1-s^2}$$

$$\sim \bar{p}_{1,2} = \pm 1$$



$$G(s) = \frac{2}{s+1} \quad \text{con} \quad i(t) = 3 \cdot 1(t) \Rightarrow R(s) = \frac{3}{s}$$

$$\Rightarrow \beta_0 \overset{?}{\alpha_0} \sim 2 \neq 1 \Rightarrow e_p \neq 0 = \left| \frac{2-1}{1} \right| = 1 = 100\% R_0 \quad \sim \text{Siccome } R(s) = \frac{R_0}{s} = \frac{3}{s} \Rightarrow R_0 = 3$$

Percentuale

$$\Rightarrow e_p = 100\% \cdot 3 = 3$$

Assoluto

$$G(s) = \frac{9s^2 + 9s + 68}{s^3 + 9s^2 + 9s + 68} \quad \text{con} \quad i(t) = 2 \cdot 1(t) \Rightarrow R(s) = \frac{2}{s}$$

Stabile?

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 9 \\ s^2 & 9 & 68 \\ s^1 & 1.4 & 0 \\ s^0 & 68 & \end{array} \quad \frac{81-68}{9} = 1.4$$

A. Stabile ✓

$$\beta_0 = \alpha_0, \quad \beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 \Rightarrow e_p = e_v = e_a = 0$$