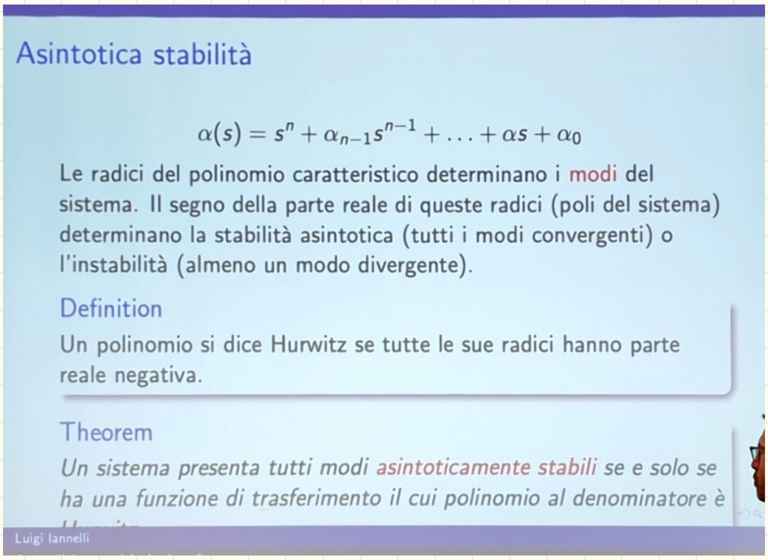
# TEOREMA DI ROUTH

Un polinomio è Hurwitz se tutte le




$$s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

| | | |
|---|---|---|
| $s^2$ | 1 | $\alpha_0$ |
| $s$ | $\alpha_1$ | 0 |
| 1 | A | B |

→ Valido anche per polinomi NON MONICI

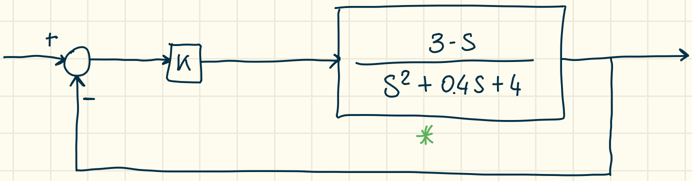
Es: $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \rightarrow -2s^2 - s - 1$

$$A = -\frac{1}{k_1} \det \begin{pmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{pmatrix} = \alpha_0$$

È Hurwitz se tutti gli elementi nella 1° colonna hanno lo stesso segno

Siccome dobbiamo controllare il segno, possiamo anche ricavarci delle condizioni di stabilità. ***Data una funzione di trasferimento ed un guadagno k, per quali valori di k la fdt rimane stabile?***

Se il denominatore ha tutti i coefficienti a parte reale positiva …




$$\frac{\dfrac{3K - KS}{\cancel{S^2+0.4S+4}}}{\dfrac{S^2+0.4S+4 + 3K - KS}{\cancel{S^2+0.4S+4}}} = \frac{K(3-S)}{S^2 + S(0.4-K) + 3K + 4}$$

Affinché sia Hurwitz

$$-\frac{4}{3} < K < 0.4$$

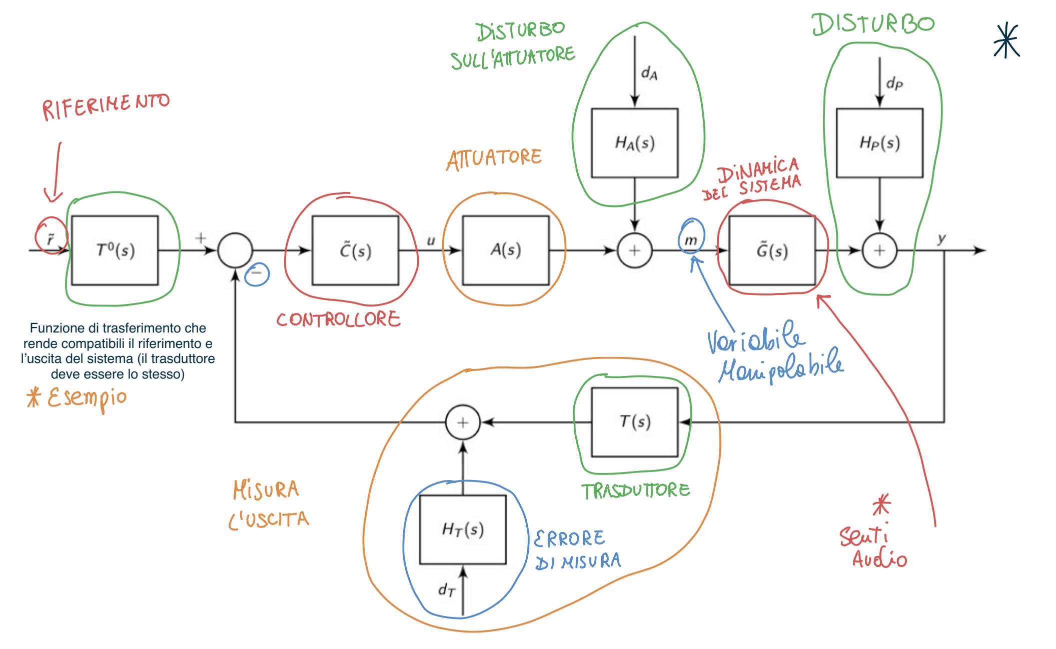
Se il guadagno fosse $\frac{K}{S}$

$$\frac{\dfrac{3K - SK}{\cancel{S^3+0.4S^2+4S}}}{\dfrac{S^3+0.4S^2+4S+3K-SK}{\cancel{S^3+0.4S^2+4S}}} = \frac{3K - SK}{S^3 + S^2\,0.4 + S(4-K) + 3K}$$

| | | |
|---|---|---|
| $S^3$ | 1 | $4-K$ |
| $S^2$ | 0.4 | $3K$ |
| $S$ | $(4-K) - \frac{3K}{0.4}$ | 0 |
| 1 | $3K$ | |

$$K > 0 \cup K < \frac{1.6}{3.4}$$ 0.47

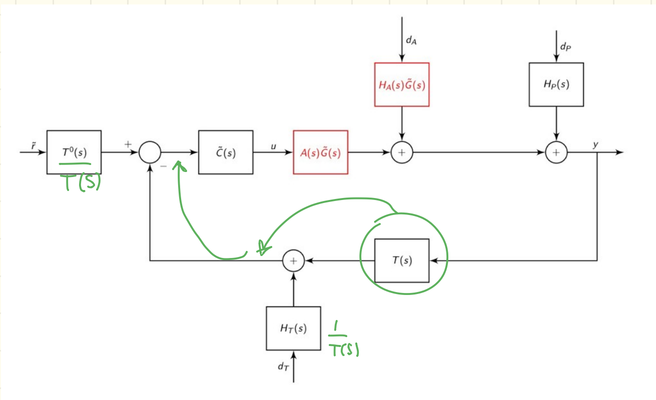
# Schema a blocchi controllo in retroazione



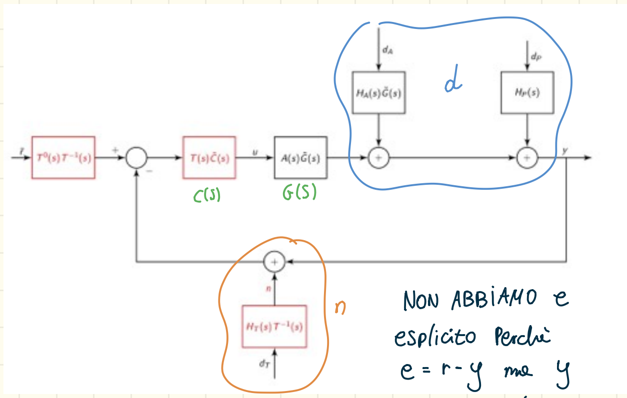

La variabile manipolabile potrebbe essere una forza i una coppia, quindi non possiamo direttamente manipolarla dal computer. Abbiamo bisogno sicuramente di un motore che mette in rotazione un ipotetico braccio robotico.
La variabile m deve essere **attuata,** ed è attuata da A(s): lega la tensione del calcolatore alla coppia che mette in rotazione un eventuale motore.

A(s) descrive il comportamento dell'attuatore.

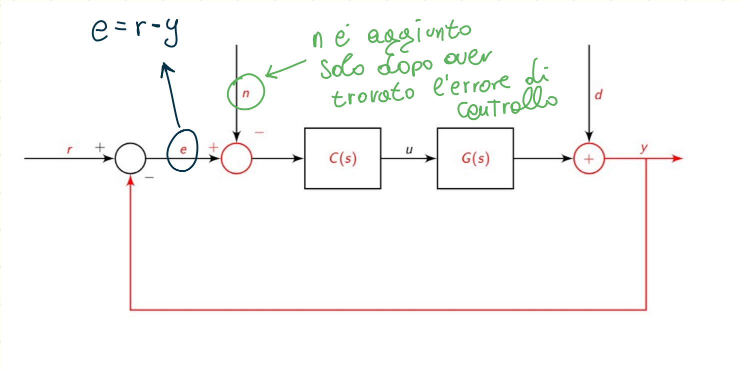
C_tilde(s) guarda all'errore di controllo. Conosce sia il riferimento che l'uscita, che dobbiamo misurare. Questa misura è fatta dai due blocchi in retroazione composti da un trasduttore




T(S) A Valle del Nodo Sommatore




NON ABBIAMO e esplicito perché $e = r - y$ ma $y$ è "sporcato" da $n$



# Requisiti di un sistema di controllo

I principali requisiti di un sistema di controllo sono:

- Stabilità in condizioni nominali IMPORTANTISSIMO
- Stabilità in condizioni perturbate (stabilità robusta)
  - Modello approssimato (ipotesi, prove sperimentali, ...)
  - Variazioni parametriche
  - Nonlinearità *

Quanto può variare il sistema da quello nominale fino a quando essi diventa instabile?

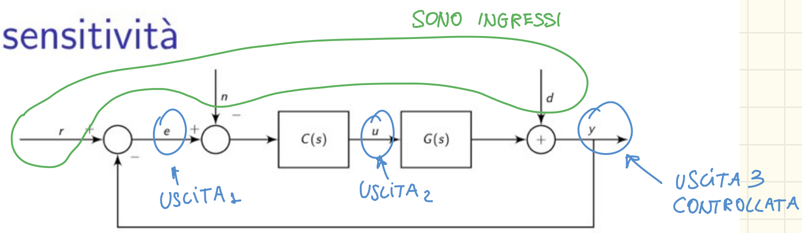
- Prestazioni statiche in condizioni nominali
  - Errore a regime con ingresso polinomiale (trasformata $1/s^i$): errore di posizione, di velocità, ecc.
  - Comportamento in risposta ad ingressi sinusoidali

A regime come si comporta il sistema?
Non consideriamo il transitorio ma solo a regime (anche per risposte sinusoidali, e quindi non costanti)

- Prestazioni dinamiche in condizioni nominali
  - Tempo di assestamento, tempo di salita, sovraelongazione
  - Risposta ai disturbi
  - Moderazione della variabile di controllo

- Prestazioni dinamiche in condizioni perturbate (prestazioni robuste) ↑ E STATICHE ← Esempio Cruise

# Funzioni di sensitività




SISTEMA LINEARE STAZIONARIO MIMO

↓

MATRICE DI TRASFERIMENTO

$3^2 = 9$

$$Y(s) = T_{r\to y}(s)R(s) + T_{n\to y}(s)N(s) + T_{d\to y}(s)D(s)$$
$$U(s) = T_{r\to u}(s)R(s) + T_{n\to u}(s)N(s) + T_{d\to u}(s)D(s)$$
$$E(s) = T_{r\to e}(s)R(s) + T_{n\to e}(s)N(s) + T_{d\to e}(s)D(s)$$

*

SOLO 3 SONO DIVERSE TRA LORO

$r \to y$ Sensitività complementare

$$T_{n\to y}(s) = -T_{r\to y}(s) \triangleq -F(s)$$ ← FDT A ciclo chiuso tra rif ed y

$$* \; T_{n\to u}(s) = T_{d\to u}(s) = -T_{r\to u}(s) \triangleq -Q(s)$$ Sensitività del controllo $r \to u$

$$T_{n\to e}(s) = T_{r\to y}(s) = F(s)$$

$$T_{d\to e}(s) = -T_{r\to e}(s) \triangleq -S(s)$$ $r \to e$ Sensitività diretta

# RICAPITOLANDO

**Sensitività**

$$r \to e: \quad S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

**Sensitività complementare**

$$r \to y: \quad F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

**Sensitività del controllo**

$$r \to u: \quad Q(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)} = C(s)S(s) = F(s)G^{-1}(s)$$

Siccome c'è la retroazione, possiamo modificare l'effetto del disturbo. Ad esempio se la sensitività diretta fosse zero, l'errore non avrebbe alcuna influenza ( perché il disturbo va moltiplicato per la sensitività)

## Analisi della funzione di sensitività DIRETTA

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{1}{1 + L(s)},$$

con $L(s) \triangleq C(s)G(s)$. Tale funzione è la f.d.t. tra

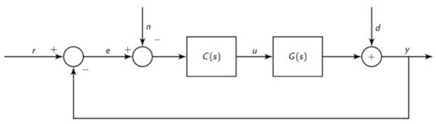
- disturbo $d$ e uscita $y$
- opposto del disturbo $(-d)$ ed errore $e$
- riferimento $r$ ed errore $e$

Idealmente vorremmo $S(s)$ identicamente nulla.

L'unico modo per rendere S(s) molto piccola è rendere L(s) molto grande; lo facciamo rendendo il controllore C(s) molto grande.

## Funzioni di sensitività

*




$$Y(s) = F(s)R(s) - F(s)N(s) + S(s)D(s)$$
$$U(s) = Q(s)R(s) - Q(s)N(s) - Q(s)D(s)$$
$$E(s) = S(s)R(s) + F(s)N(s) - S(s)D(s)$$

Si noti che

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}, \quad F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad Q(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

## Analisi statica

$1(t) \to \frac{1}{s}$

Calcoliamo l'errore a regime quando il riferimento è un gradino:

Se la f.d.t. $S(s)$ è as. stabile

Relativo

$$e_{ss}^r = \lim_{s \to 0} \cancel{s}\, S(s) \frac{1}{\cancel{s}} = S(0) \quad \text{TVF}$$

Steady state

Data

$$L(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

Forma che evidenzia il gain

Per $s \to 0$

$$L(0) = \frac{\mu}{s^g}$$

Sbagliato

* Senti Audio

allora

Moltiplico e divido per $s^g$

$$e_{ss}^r = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + L(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{s^g}{s^g + \mu} = \begin{cases} 1, & g < 0 \\ \frac{1}{1 + \mu}, & g = 0,\ (\mu \neq -1) \\ 0, & g > 0 \end{cases}$$

* $F(s)$ dipende da $S(s)$