1. MARGINE DI AMPIEZZA Con scelta di guadagno

▸ Trovare il valore di K che permette di avere un Margine di Ampiezza di 3dB

$$G(s) = K \frac{s-10}{s(s+10)}$$

- Q: $M_a = 3dB = 10^{\frac{3}{20}} = 1.413 > 0$

1) Trovo $\omega_n \;/\; \angle G(j\omega_n) = -180^\circ = -\pi$

$$\rightarrow \angle \frac{j\omega_n - 10}{j\omega_n(j\omega_n+10)} = \angle j\omega_n - 10 - \cancel{\angle j\omega_n}^{\,90^\circ} - \angle j\omega_n + 10 = \text{atan}\left(-\frac{\omega_n}{10}\right) - \text{atan}\left(\frac{\omega_n}{10}\right) - 90^\circ = -\pi$$

$$\rightarrow -\text{atan}\left(\frac{\omega_n}{10}\right) - \text{atan}\left(\frac{\omega_n}{10}\right) - \frac{\pi}{2} = -\pi \rightarrow -2\,\text{atan}\left(\frac{\omega_n}{10}\right) = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \text{atan}\left(\frac{\omega_n}{10}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \frac{\omega_n}{10} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \omega_n = 10 \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -10 \; \omega_n$$

2) Controllo quanto vale $|G(j\omega_c)|$

$$|G(j\omega_c)| = K \cdot \frac{|j\omega_c - 10|}{|j\omega_c(j\omega_c+10)|} = \frac{K \cdot \cancel{\sqrt{\omega_c^2 + 10^2}}}{\omega_c \cancel{\sqrt{\omega_c^2 + 10^2}}} = \left|\frac{K}{\omega_c}\right| \Rightarrow (M_{\omega_c})_{dB} = 20 \log\left(\frac{K}{\omega_c}\right)$$

3) Margine di Ampiezza

$$\boxed{\frac{1}{|G(j\omega_c)|} = 3dB = (1.43)_{VN}} \rightarrow \frac{\omega_c}{K} = 1.43 \Rightarrow K = \frac{\omega_c}{1.43} = 6.99 \Rightarrow K = -7$$

Ans

* Negativo perche' $\omega_c < 0 = -10$

Margine Ampiezza (Q=K?)

- $(X)_{dB} \rightarrow (X)_{VN}$
- $\bar{\omega}_c \;/\; \angle G(j\omega_c) = -180^\circ = -\pi$
- $\frac{1}{|G(j\bar{\omega}_c)|} = (X)_{VN}$ Trovo $|K|$
- Scelgo $\pm K$ a seconda della situazione $\rightarrow$ φ deve attraversare -180°

* Se devo scegliere uno zero lo scelgo opposto al polo in modo da facilitare i calcoli dopo

2. MARGINE DI AMPIEZZA Con scelta di guadagno e zero

OPPOSTO AL POLO

$G(S) = K \dfrac{(S+z)}{(S+5)^2}$ scelgo $z = -5$ $\Rightarrow$ $G(S) = \dfrac{K(S-5)}{(S+5)^2}$ vogliamo $M_a = 6dB = 10^{\frac{6}{20}} = (2)_{dB}$

Valore Naturale

Siccome cerco il margine di ampiezza, devo trovare la ω_c per la quale $\angle G(j\omega_c) = -180°$

Dopodichè calcolo $|G(j\omega_c)|$ e vedo quanto differisce $(1)_{dB} = 0dB$

1) Guadagno

$\mu = \lim_{S\to 0} S^g \cdot G(S) = \lim_{S\to 0} \dfrac{K(S-5)}{(S+5)^2} = -\dfrac{5}{25}K$ Vogliamo un guadagno $\mu > 0 \Rightarrow K<0$

2) Trovo ω_c

$\angle G(j\omega_c) = -180 = -\pi \rightarrow \angle K(j\omega - 5) - \angle (j\omega+5)^2 = -\pi \rightarrow -a\tan\left(-\frac{\omega}{5}\right) - 2\,a\tan\left(\frac{\omega}{5}\right) = -\pi$

$\rightarrow -3\,a\tan\left(\frac{\omega}{5}\right) = -\pi \Rightarrow 3\,a\tan\left(\frac{\omega_c}{5}\right) = \pi \rightarrow \frac{\omega_c}{5} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \omega_c = 5\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8.66\ Rad/s = 5\sqrt{3}\ Rad/s$

ω_c

3) Modulo in $\omega_c = 5\sqrt{3}$ R/s

$$|G(j\omega_c)| = \frac{|K(j\omega_c - 5)|}{|(j\omega_c+5)^2|} = \frac{|K|\sqrt{\omega_c^2+5^2}}{\omega_c^2+25}$$

Per trovare K: $\dfrac{1}{|G(j\omega_c)|} = (M_a)_{dB}$ oppure $\dfrac{1}{|G(j\omega_c)|_{dB}} = M_a\,dB$

$$\Rightarrow \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = \frac{\omega_c^2+25}{|K|\sqrt{\omega_c^2+5^2}} = 2 \quad \text{per} \quad |K| = \frac{\omega_c^2+25}{2\sqrt{\omega_c^2+25}} = \frac{75+25}{2\sqrt{100}} = 5$$

Quindi $|K| \rightarrow \begin{cases} K>0 \rightarrow K=5 \\ K<0 \rightarrow K=-5 \end{cases}$ Scelgo $K<0$ perchè mi serve $\mu>0$

Ans

$$\Rightarrow G(S) = -\frac{5(S-5)}{(S+5)^2}$$

✳ ALTRI ESEMPI
- 20-03-23 A

3. MASSIMO RITARDO $\Rightarrow$ Margine di fase

Progetto in frequenza

Esercizio 1.
Si consideri la funzione di trasferimento di anello

$$L(s) = \frac{e^{-s\tau}}{s(s+8)}$$

5 punti

chiusa in retroazione negativa unitaria. Si determini il massimo valore del ritardo τ che consenta di mantenere l'asintotica stabilità a ciclo chiuso.

Soluzione: Per determinare il margine di fase occorre individuare la pulsazione di attraversamento $\omega_c \mid \quad |G(j\omega_c)| = 1$. In particolare ω_c = 0,12rad/s ed il margine di fase corrispondente sarà pari a 89.38°. Quindi il massimo ritardo ammissibile sarà pari a 12,48s.

- Data $G(S) = \dfrac{e^{-S\tau}}{S(S+8)}$ determinare il massimo valore di τ che consenta di mantenere la a.s. a ciclo chiuso

- Trovo W_c / $|G(jW_c)| = 1$ $\longleftrightarrow$ interseca la circonferenza unitaria

1) $M = 1$

$$|L(j\omega)| = \frac{|e^{-j\omega\tau}|}{|j\omega(j\omega+8)|} = \frac{1}{|j\omega|\cdot|(j\omega+8)|} = \frac{1}{\omega\cdot\sqrt{\omega^2+64}} = 1 \quad \text{per } \omega\cdot\sqrt{\omega^2+64} = 1 \to \omega^2(\omega+64) = 1 \to \omega^3 + 64\omega^2 = 1$$

Trovo le soluzioni con un calcolatore e prendo quella "più vicino" alla circonferenza -1

$$\begin{cases} S_1 \cong -64 \\ S_2 \cong -0.12512 \\ S_3 \cong 0.1248 \text{ Rad/s} \end{cases}$$

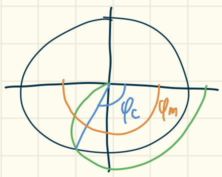
è il valore di ω_c pulsazione di attraversamento. $W_c = 0.125$ W_c

2) Fase critica

$$\varphi_c = \angle L'(jW_c) = \angle \frac{1}{jW_c(jW_c+8)} = \underbrace{-\angle jW_c}_{\text{Puramente Immaginario}} - \angle jW_c + 8 = -\frac{\pi}{2} - a\tan\left(\frac{W_c}{8}\right) = -1.586$$

* Considero $L'(jW_c)$ che è $L(j\omega)$ ma senza il Ritardo.

3) Margine di fase



$$\varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \pi - |-1.586| = 4.728$$

4) Calcolo il ritardo Max

$$\tau = \frac{\varphi_m}{W_c} = \frac{4.73}{0.125} = 37.82\ s$$

Massimo Ritardo (Q: $\tau = ?$)

- $L'(j\omega_c) = L(j\omega_c)$ SENZA $e^{-s\tau}$
- $\bar{\omega}_c \,/\, |L'(j\omega_c)| = 1 \rightarrow$ Soluzione più vicina a $1 = \bar{\omega}_c$
- $\varphi_c = \angle L'(j\bar{\omega}_c)$ Rad/deg
- $\varphi_m =$
  - φ_c è in Rad $\rightarrow \varphi_m = \pi - |(\varphi_c)_{Rad}|$
  - φ_c è in deg $\rightarrow \varphi_m = 180 - |(\varphi_c)_{deg}|$
- $\tau_{max} =$
  - φ_m è in Rad $\rightarrow \tau = \frac{\varphi_m}{\omega_c}$
  - φ_m è in deg $\rightarrow \tau = \frac{\varphi_m}{\omega_c} \cdot \frac{\pi}{180}$

Progetto in frequenza Esempio 2

Esercizio 1.
Si consideri la funzione di trasferimento di anello

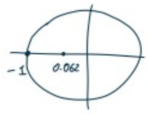
$$L(s) = \frac{e^{-s\tau}}{s(s+4)}$$

5 punti

chiusa in retroazione negativa unitaria. Si determini il massimo valore del ritardo τ che consenta di mantenere l'asintotica stabilità a ciclo chiuso.

$|G(j\omega_c)| = 1 \rightarrow \frac{1}{|j\omega_c(j\omega_c+4)|} = 1 \rightarrow \frac{1}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+16}} = 1 \rightarrow \omega_c\sqrt{\omega_c^2+16} = 1 \rightarrow \omega^2(\omega_c+16) = 1 \rightarrow \omega_c^3 + 16\omega_c = 1$

$\omega_1 = 0.062$
$\omega_2 = -0.031-4i$
$\omega_3 = -0.031+4i$



$\bar{\omega}_c = 0.062$ Rad/s

DEVO USARE GRADI ?

$\varphi_c = \angle G(j\bar{\omega}_c) = -\angle j\omega_c - \angle j\omega_c+4 = -90° - \text{aTan}\left(\frac{\bar{\omega}_c}{4}\right) = -90.89°$

$\Rightarrow \varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 89.11°$ gradi

$\rightarrow$ Radianti

$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{\varphi_m}{\omega_c} \cdot \frac{\pi}{180} = 25.035$ s

Ans

$-\frac{\pi}{2} - \text{aTan}_{Rad}\left(\frac{\omega_c}{4}\right) = -1.586$ Rad

$\varphi_m = \pi - |1.586| = 4.73$ Rad

$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{\varphi_m}{\omega_c} = \frac{1.56}{0.062} = 25.09$ s

Ans

gradi — Posso lavorare in... — Radianti

4. MARGINE DI FASE Con scelta di guadagno

Esercizio 1.
Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = k \cdot \frac{s-8}{s(s+8)}$$

e si scelga il guadagno $k \in \mathbb{R}$ in maniera tale che $G(s)$ abbia un margine di fase pari a 70°.

* Non dobbiamo avere Poli a parte Reale Positiva

* Guadagno Positivo

Procedimento 1

$G(s) = k \dfrac{s-8}{s(s+8)}$ $\qquad \mu = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \dfrac{k(s-8)}{\cancel{s}(s+8)} = -k$ voglio $\mu > 0 \Rightarrow k < 0$

- Vogliamo $\varphi_m = 70°$ ma $\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = \pi - \varphi_c \Rightarrow$ $180° - |\varphi_c| = 70° \to \varphi_c = \pm 110° \rightsquigarrow \varphi_{c\,RAD} = -\dfrac{110° \cdot \pi}{180} = -\dfrac{11}{18}\pi$ NEGATIVO

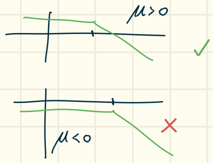
OVVERO $\angle G(j\omega_c) = -\dfrac{11}{18}\pi \to \cancel{\angle k}^{\,0} + \angle j\omega_c - 8 - \cancel{\angle j\omega_c}^{\,90 \text{ per } \omega_c > 0} - \angle j\omega_c + 8 = \operatorname{atan}\left(-\dfrac{\omega_c}{8}\right) - \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{atan}\left(\dfrac{\omega_c}{8}\right) = -2\operatorname{atan}\left(\dfrac{\omega_c}{8}\right) - \dfrac{\pi}{2}° = -\dfrac{11}{18}\pi \to -2\operatorname{atan}\left(\dfrac{\omega_c}{8}\right) = -\dfrac{11}{18}\pi + \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{1}{9}\pi$

$\to \operatorname{atan}\left(\dfrac{\omega_c}{8}\right) = -\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{9}\pi\right) \Rightarrow \dfrac{\omega_c}{8} = \tan\left(\dfrac{1}{18}\pi\right) \to \omega_c = 1.41 \text{ Rad/s}$

- Il margine si ha quando $|G(j\omega)| = 1$

$\to \dfrac{|k|\cancel{\sqrt{\omega_c^2+64}}}{\omega \cancel{\sqrt{\omega_c^2+64}}} = 1 \to \dfrac{|k|}{\omega_c} = 1 \to |k| = \omega_c \Rightarrow k = \pm \omega_c$ Ma μ deve essere > 0 perchè altrimenti non attraversiamo 0dB:

$\to$ Siccome $\mu = -k$, $k < 0 \Rightarrow k = -\omega_c = -1.41$ Ans



Procedimento 2

$|G(j\omega_c)| = 1$ per $\dfrac{k\cancel{\sqrt{\omega_c^2+64}}}{\omega_c \cancel{\sqrt{\omega_c^2+64}}} = 1 \to \omega_c = k$

Voglio $\varphi_m = 70° = 180 - |\varphi_c| \to |\varphi_c| = 110 \Rightarrow \varphi_c = \pm 110°$ scelgo $\varphi_c = -110°$

$\varphi_c = \angle G(j\omega_c) = \angle k + \angle j\omega_c - 8 - \angle j\omega_c - \angle j\omega_c + 8 = -\operatorname{atan}\left(\dfrac{\omega_c}{8}\right) - 90° - \operatorname{atan}\left(\dfrac{\omega_c}{8}\right) = -110$

$\to 2\operatorname{atan}\left(\dfrac{\omega_c}{8}\right) = 20° \to \dfrac{\omega_c}{8} = \tan(10) \to \omega_c = 8\tan(10°) \Rightarrow |k| = 8\tan(10°) = \pm 1.41$

! Se lavori in gradi usa la calcolatrice in Deg quando calcoli la tangente !

Siccome $\mu = \lim_{s \to 0} s \dfrac{k(s-8)}{s(s+8)} = -k$ ma voglio $\mu > 0$, $k < 0 \Rightarrow k = -1.41$ Ans

Margine Fase (Q: K=?)

- Trovo φ_c: $\varphi_m = 180 - |\varphi_c| \to |\varphi_c| = 180 - \varphi_m \to$ scelgo φ_c NEGATIVO
- Trovo $\bar{\omega}_c$ / $|G(j\bar{\omega}_c)| = 1$ * INCLUDO K NEL CALCOLO $\Rightarrow$ ω_c sarà Tipo $k \cdot a$ oppure $\dfrac{a}{k}$
- Trovo $\angle G(j\omega_c) = \varphi_c$ (Trovato prima) $\to$ Solve for K * $\to (\varphi_c)_{deg} \to$ Uso gradi; $\to (\varphi_c)_{Rad} \to$ Uso Radianti
- Voglio $|G(j\omega)|$ che attraversa 0dB $\Rightarrow \mu > 0$ $\Rightarrow$ scelgo $\pm k$ a seconda dei casi

* Se devo scegliere uno zero lo scelgo opposto al polo in modo da facilitare i calcoli dopo