

# RECAP SISTEMI DINAMICI LINEARI

## epilogo sui sistemi dinamici lineari

### ► Rappresentazione i-u: equazioni differenziali

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) = \beta_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} + \beta_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + \beta_1 \frac{du(t)}{dt} + \beta_0 u(t)$$

### ► Trasformata di Laplace

$$s^n Y(s) + (-s^{n-1} y(0^-) - s^{n-2} \dot{y}(0^-) - \dots) + \alpha_{n-1} [s^{n-1} Y(s) + (-s^{n-2} \dots)] + \dots + \alpha_1 (s Y(s) - y(0^-)) + \alpha_0 Y(s) = \beta_n [s^n U(s) + (-s^{n-1} u(0^-) - s^{n-2} \dot{u}(0^-) - \dots)] + \dots$$

### ► Risposta forzata: condizioni iniziali nulle $\Rightarrow$ Funzioni di trasferimento

Abbiamo condizioni iniziali NULLE



Risposta FORZATA

$U(t)$  per  $t \leq 0$  è NULO

### • Valore iniziale

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

### • Valore finale (per poli a $\text{Re} p < 0$ )

$$f(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot F(s)$$

## Funzioni di trasferimento

Per un sistema LTI tempo-continuo di ordine  $n$ :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Se non ci sono cancellazioni, i poli della  $G(s)$  coincidono con gli autovalori della matrice dinamica del sistema (spazio di stato).

Se  $\beta_n = 0$  Manca il primo termine del NUM

Il coeff della pow di grado max deve essere pari ad 1. Se non lo è, mettiamo in evidenza

\* Processo

Non ci sono poli/zeri nello stesso punto

IL NUM NON È MONICO  
COSTANTE DI TRASFERIMENTO

\* IMPO

\*

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

Un polinomio di termine  $n$  può essere fattorizzato in termini più semplici in cui compaiono le sue radici reali; per le radici complesse e coniugate evidenziamo i parametri: smorzamento e pulsazione naturale

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s / \alpha_{ni} + s^2 / \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s / \omega_{ni} + s^2 / \omega_{ni}^2)}$$

Si evidenziano il guadagno e le costanti di tempo. La usiamo per disegnare i diagrammi di bode. L'obiettivo è rappresentare le radici avendo il termine noto pari ad 1.

Poli nell'origine

Se  $g < 0 \rightarrow$  zero in origine  
(TIPO positivo/negativo)

\* SENTI

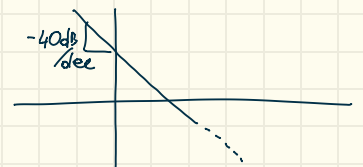
ES PRODUTTORIA

\* metodo veloce  
 $\bar{s}_1 = 3$   
 $\bar{s}_2 = -2$

$$2s^2 - 2s - 12 = 2(s^2 - s - 6) = 2(s - 3)(s + 2)$$

Costante di Trsf.

$\frac{g}{S}$  INFLUENZA IL GAIN STATICO



\*  $\frac{s}{s+1} \sim \dots$   
 $\mu = 1$   
 $s^g \sim \dots$   
 $T_i = 1$   
Polo in 0  
 $g = -1$



## Guadagno

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s / \alpha_{ni} + s^2 / \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s / \omega_{ni} + s^2 / \omega_{ni}^2)}$$

Il sistema è asintoticamente stabile  $\Leftrightarrow g \leq 0, T_i > 0, \xi_i > 0$ .

In tal caso, se  $U(s) = \frac{\bar{u}}{s}$ ,

$$\bar{y} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{\bar{u}}{s} = \underbrace{G(0)}_{\text{STATIC GAIN}} \bar{u}.$$

## Pulsazione naturale e smorzamento

Un termine trinomio del tipo  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ , può essere riscritto come

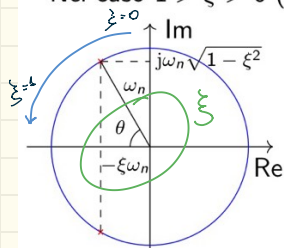
$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \xi^2\omega_n^2 - \xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2 = (s + \xi\omega_n)^2 + \underbrace{\omega_n^2(1 - \xi^2)}_{\text{POS}}$$

← Per scrivere le radici complx

Le radici saranno, pertanto,

$$s^* = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Nel caso  $1 > \xi > 0$  (poli complessi e coniugati e as. stabili):



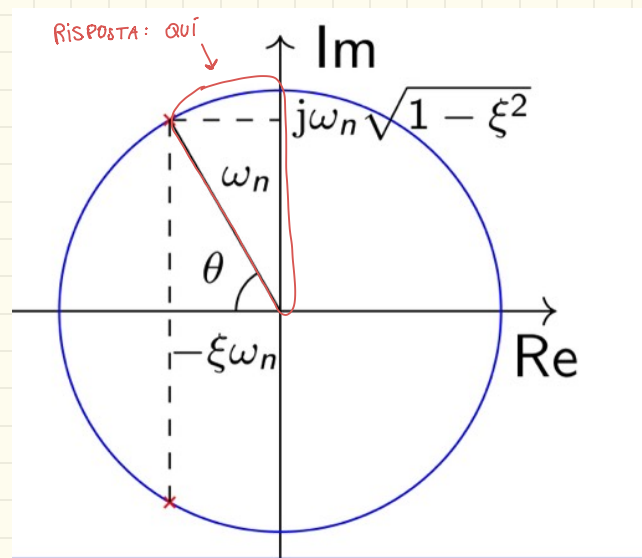
Si ha  $\xi = \cos(\theta) = \sin(\pi/2 - \theta)$  e

|            |                                    |
|------------|------------------------------------|
| $\xi = 0$  | poli immaginari puri               |
| $\xi > 0$  | poli a parte reale negativa        |
| $\xi < 0$  | poli a parte reale positiva        |
| $\xi = 1$  | poli reali coincidenti as. stabili |
| $\xi = -1$ | poli reali coincidenti instabili   |

- Sistema as. stabile, di tipo 0:  $G(0) = \mu$ , *guadagno statico*
- Sistema instabile, di tipo 0:  $G(0) = \mu$ , *guadagno* (rapporto tra uscita e ingresso all'equilibrio)
- Sistema non di tipo 0:  $\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$ , *guadagno generalizzato*
- Sistema con azioni derivate ( $\sigma < 0$ ) e con azioni integrali



#Domanda esame controlli, #Domande esame



\*

## Valore iniziale

Sistema di ordine  $n \geq m$  as. stabile:

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0}$$

Risposta al gradino

► Uscita  $y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) \frac{1}{s} = \begin{cases} 0, & m < n \\ \beta_m, & m = n \end{cases}$

Se la fdt è strettamente propria, allora l'uscita è continua (0), anche se l'ingresso è discontinuo.

Se il grado è uguale allora la discontinuità dell'ingresso si ripercuote sull'uscita

$$\text{GRADO RELATIVO} = \text{DEG}(\text{DEN}) - \text{DEG}(\text{NUM})$$

► Derivata dell'uscita  $\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(sY(s) - y(0^-)) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s) \frac{1}{s} = \begin{cases} 0, & m < n-1 \\ \beta_m, & m = n-1 \end{cases}$

Se  $m < n$  sono nulle le prime  $n - m - 1$  derivate dell'uscita in  $t = 0$ .

Teorema della derivata in  $S$

\* Recap

\*

## Risposta al gradino

Sistema as. stabile del primo ordine senza zero:

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT} = \frac{1/T}{s + 1/T}$$

*Costante di Trasf*  $\leftarrow$   $1/T$    
  $\leftarrow$  POLO in  $-1/T$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T} \Rightarrow y(t) = (1 - e^{-t/T})1(t), \quad T_{a1} = 4.6T$$

*corrisponde all'1%*  $\leftarrow$   $4.6T$

Sistema as. stabile del secondo ordine senza zeri:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{2s\xi}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$\leftarrow$  Evidenzio il prodotto   
  $\leftarrow$  Evidenzio la costante di tempo

ANTITRASFORMATA

$$Y(s) =$$

$$\frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} - \frac{\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left( 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right) 1(t),$$

$$T_{a1} = \frac{4.6}{\xi\omega_n}, \quad S_{\%} = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}, \quad T_s \approx \frac{1.8}{\omega_n} \quad (\text{per } \xi = 0.5)$$

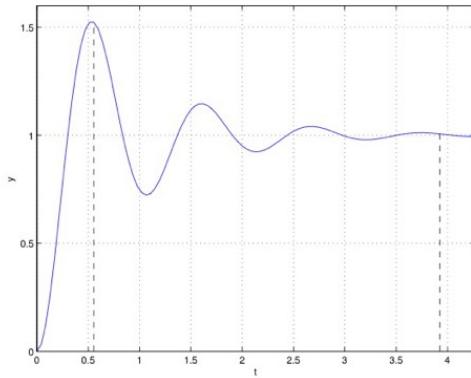
Tempo Assestamento all'1%

Sovrelongoia percentuale  
\* spiegazione

Tempo di salita dal 10% al 90%



## Risposta al gradino con sovraelongazione



In questo caso:

Sovraelongazione  $S\% = 52.5\%$

Tempo di salita  $T_s = 0.21\text{ s}$

Tempo di assestamento

$T_{a1} = 3.77\text{ s}$

### Codice Matlab

```
mu=1; xi=0.2; omega=6;
% G(s)=(mu*omega^2)/(s^2 +2 xi omega s +omega^2)
sys=tf(mu*omega^2,[1 2*xi*omega omega^2]);
[ys,ts]=step(sys,5/(xi*omega)+0.1); plot(ts,ys);
xlabel('t'); ylabel('y'); grid on; hold on;
axis([ts(1) ts(end) 0 1.05*max(ys)]);
% Valore a regime
yinf=ys(end);
% Picco sovraelongazione
[ymax,iTM]=max(ys); TM=ts(iTM);
% Calcolo sovraelongazione
S=100*(ymax-yinf)/yinf
[itr1]=find(ys>0.1*yinf,1); tr1=ts(itr1);
[itr2]=find(ys>0.9*yinf,1); tr2=ts(itr2);
Ts=tr2-tr1
[iTa1]=find(abs(ys-yinf)>0.01*yinf,1,'last');
Ta1=ts(iTa1)
%Tempo di massima sovraelongazione
plot([TM TM],[0 ymax],'k--');
%Tempo di assestamento
plot([Ta1 Ta1],[0 ys(iTa1)],'k--');
hold off;
print -depsc ystep_fig
```

\*Funzione Find