DIAGRAMMI DI NYQUIST

Definiamo il **percorso di Nyquist** come la curva chiusa del piano complesso costituita dall'asse immaginario e da una semicirconferenza di raggio infinito giacente nel semipiano destro.

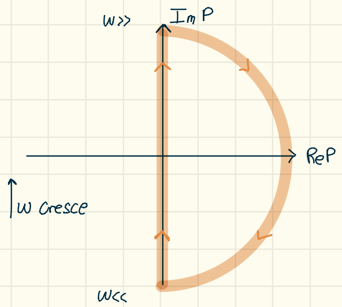
In altre parole prendiamo tutto l'asse immaginario ed immaginiamo di chiudere gli estremi +inf e -inf con una semicirconferenza di raggio infinito che si trova nel semipiano destro.

La differenza è che con Nyquist prendiamo **tutto l'asse immaginario**, anche la parte negativa (che prima non prendevamo). Inoltre chiudiamo con una semicirconferenza.

Questa novità non ci scombussola molto: ci basta pensare che G(-jw)=conj(G(jw)) ovvero stessa parte reale ma parte immaginaria con segno cambiato.

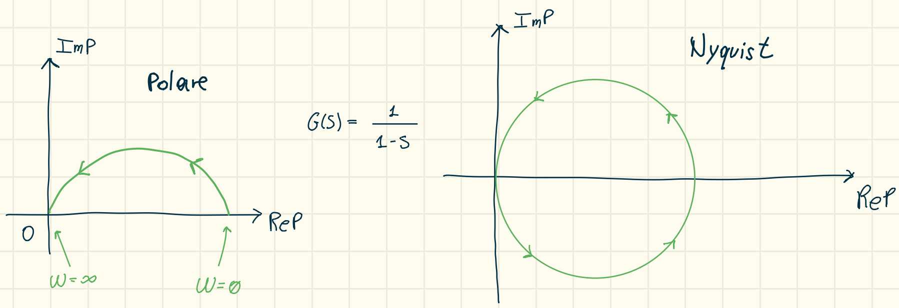
La semicirconferenza di raggio infinito può sembrare un problema, ma siccome lavoriamo con funzioni di trasferimento strettamente proprie (ovvero il grado del denominatore è sempre strettamente maggiore di quello al numeratore, se abbiamo un valore che tende all'infinito al denominatore, tutto tende a zero. Di conseguenza la circonferenza è mappata in origine.

Di conseguenza definiamo il **diagramma di Nyquist** l'immagine, attraverso la funzione di trasferimento G(s) del percorso di Nyquist sopra definito. La grande differenza è che nel diagramma polare consideriamo la semiretta (solo parte positiva) mentre nel diagramma di Nyquist prendiamo un percorso chiuso (unito dalla circonferenza).



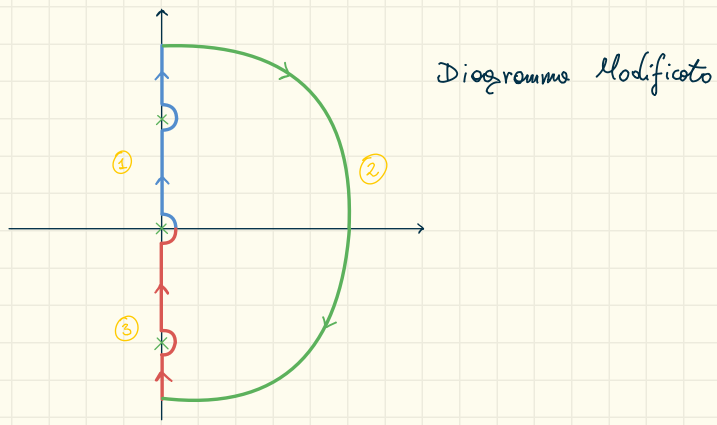
Verso di percorrenza della curva chiuso: orario

Il diagramma i Nyquist di una fdt è il diagramma polare della fdt più il diagramma polare della fdt **specchiato** rispetto all'asse reale. Ovviamente il diagramma di Nyquisto **è sempre simmetrico rispetto all'asse reale**



Se la funzione di trasferimento non è strettamente propria la curva va a finire su un punto dell'asse reale (ma anche il diagramma polare va a finire su quel punto).

Se ci sono dei poli sull'asse immaginario, anche in questo caso **dobbiamo effettuare dei circondamenti**. Per gli zeri non è necessario.



PRINCIPIO DELL'ARGOMENTO

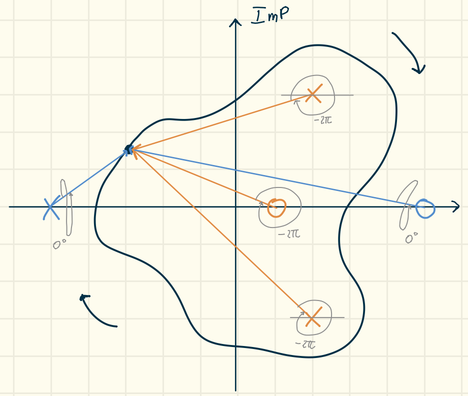
Se una curva chiusa *gamma_di_s* nel piano complesso circonda gli zeri (Z) ed i poli (P) (ovvero sono all'interno della curva chiusa) e non passa per nessun polo o zero (questo è il motivo per cui effettuiamo i circondamenti) e il percorso lungo la linea chiusa viene effettuato nella direzione oraria, **la corrispondente immagine di *gamma_di_s* attraverso L(s) (ovvero il diagramma di Nyquist) circonda l'origine del piano complesso un numero di volte pari a N = Z - P nella direzione oraria** (andiamo in direzione antioraria se N<0)

* Si dovrebbe circondare anche l'origine ma la differenza non è poi così tanta.

* $\boxed{\varphi_{TOT} = -2\pi\,(Z-P)}$

* $n_{CIRCONDAMENTI} = \left|\dfrac{\varphi_{TOT}}{2\pi}\right|$

* Scegliamo il verso orario perché in questo modo ω cresce e siamo abituati (con Bode) ad ω crescente



* I poli/zeri all'interno del percorso hanno $\varphi_{TOT} = -2\pi$ (senso orario) perché la loro fase compie un giro completo.

* I poli/zeri all'esterno del percorso hanno $\varphi_{TOT} = 0°$ perché la fase "torna indietro"

Fine Pausa 1:16

CRITERIO DI NYQUIST

Criterio: la condizione necessaria e sufficiente perché il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile è che **il numero di circondamenti N** del diagramma di Nyquist di L(s) **intorno al punto -1** sia ben definito e che **i circondamenti**, conteggiati in senso antiorario, **siano pari a P.**

Quando il diagramma è ben definito: sia P il numero di poli di L(s) con parte reale positiva (e quindi instabili) ed N il numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist della funzione di anello L(s) attorno al punto -1 (vedi dopo).
Se il diagramma di Nyquist passa per il punto -1 si dice che il diagramma non è ben definito.

Per capire bene l'enunciato bisogna fare qualche ragionamento:

Quando una FdT è instabile? ⇒ Poli a ReP>0

⇒ Quando un sys IN RETROAZIONE è inst? Quando i Poli del $P_c(s)$ sono a ReP>0

Ma $P_c(s) = N_L(s) + D_L(s)$ perché $F(s) = \dfrac{1}{1+L(s)}$ ⇒ $K(s) = 1 + L(s)$

⇒ $K(s) = \dfrac{N_L(s)+D_L(s)}{D_L(s)}$ il sys è A.S. quando gli zeri di K(s)

e quindi I POLI di $P_c(s)$ sono a ReP<0

Capito questo...

Siano Z e P IL NUMERO di poli e zeri a ReP>0 della FdT K(s).

Ovvero tutti i poli e zeri **circondati dal percorso di Nyquist nel semipiano aperto destro**

Affinché ci sia l'asintotica stabilità ⟺ Z = ∅

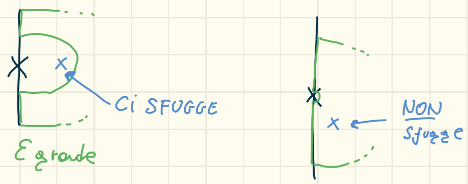
e siccome $N = Z - P = -P$, $Z = 0$ QED

Questo è proprio il criterio di Nyquist, che ci dice che il numero di circondamenti deve essere uguale a P

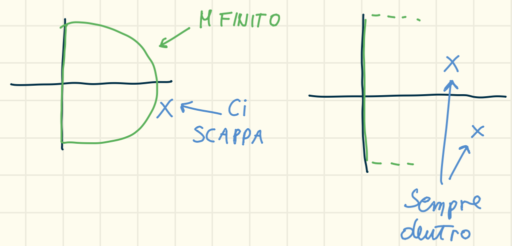
* Siccome il cammino visto prima comprende l'asse imm. ed il semipiano dx, tutti i poli/zeri "da contare" devono avere ReP>0

* NON ci sono poli e zeri nello stesso punto
⇒ Non è possibile avere poli sull'asse imm a ciclo chiuso se li avevano a ciclo aperto, anche con i circondamenti

* l'ε dei circondamenti tende a zero e quindi non ci sono poli nel semipiano dx che ci sfuggono



* M (raggio della curva) deve tendere a +∞ perché altrimenti "mi potrei perdere" poli nel semipiano dx



* I circondamenti vanno fatti a dx perché altrimenti potrei includere dei poli non instabili

Che si intende per "Ben Definito"?

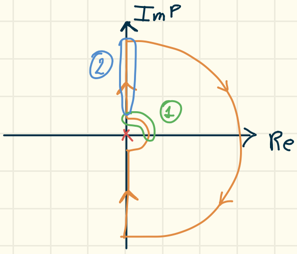
Siccome $K(S) = 1 + L(S)$, $K(S)$ si annulla per $L(S) = -1$ $\Rightarrow$ se il diagramma di Nyquist passa per -1 c'è un problema.

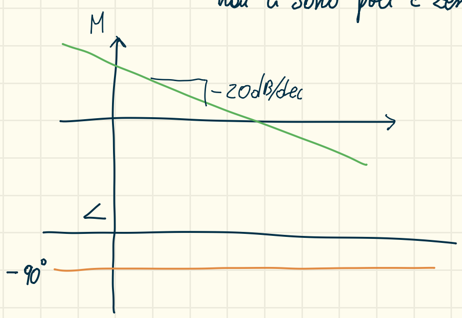
Perché per avere $K(S) = 0 \Rightarrow \dfrac{N_L(S) + D_L(S)}{D_L(S)} = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} N_L(s^*) + D_L(s^*) = 0 \\ D_L(s^*) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \exists\, s^* \,/\, K(s^*) = \emptyset$

Solo se $N_L(s^*) = \emptyset \cup D_L(s^*) = 0$ Ma abbiamo fatto già tutte le semplificazioni (Per Hp), ovvero non ci sono poli e zeri coincidenti.

ESERCIZIO

A) $L(S) = \dfrac{2}{S}$





① Primo circondamento (origine)

$s' = \varepsilon e^{j\theta}$ con $\theta \in [0, \pi/2]$

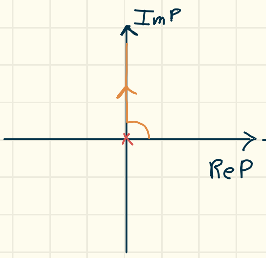
$\Rightarrow L(s') = \dfrac{2}{\varepsilon e^{j\theta}}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] = \dfrac{2}{\varepsilon} \cdot e^{-j\theta} \Rightarrow \begin{cases} M = 2/\varepsilon \\ \angle = e^{-j\theta} \end{cases} \Rightarrow \angle \in [0, -\frac{\pi}{2}]$

② Torno sull'asse imm

$S'' = jw \Rightarrow L(S'') = \dfrac{2}{jw}$ $\begin{cases} M \propto 1/w \Rightarrow M \in [\frac{2}{\varepsilon}, 0] \\ \angle = \pi/2 \end{cases}$ ← Perché w aumenta se ci spostiamo verso l'alto sull'asse imm

Perché siamo sull'asse imm pos

DIAGRAMMA POLARE



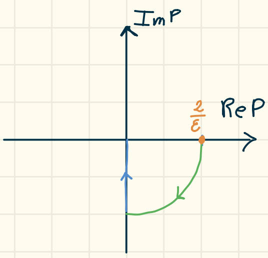
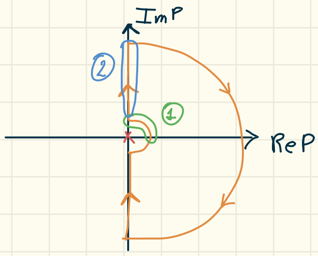
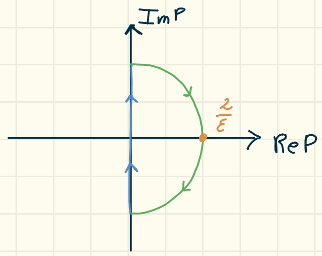


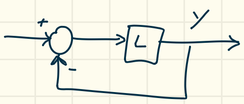
DIAGRAMMA DI NYQUIST (Specchio il diagramma Polare)



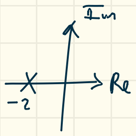


Considerazioni:

A ciclo chiuso



$P_c(S) = N_L + D_L = S + 2 \Rightarrow \bar{S} = -2$

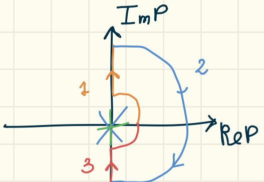


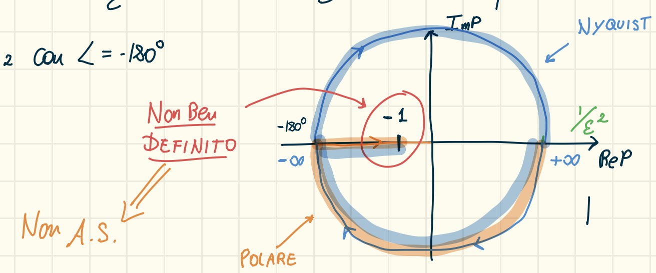
A.S ✓

B) $L(S) = \dfrac{1}{S^2}$

$S' = \varepsilon e^{j\theta}$ con $\theta \in [0, \pi/2] \Rightarrow L(S') = \dfrac{1}{\varepsilon^2} \cdot e^{-2j\theta} = \dfrac{1}{\varepsilon^2} e^{-j\varphi}$ con $\varphi \in [0, \pi]$

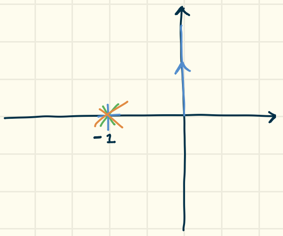
$S'' = jw \Rightarrow L(S'') = \dfrac{1}{(jw)^2} = -\dfrac{1}{w^2}$ con $\angle = -180°$





Il luogo delle radici ci dice che questi poli se ne vanno lungo l'asse Imm $\Rightarrow$ Stabile (NON A.S)

c) $L(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$



$L(0) = \frac{1}{(0+1)^3} = 1 \rightarrow$ Parto da 1

$s' = j\omega \Rightarrow L(s') = \frac{1}{(j\omega+1)^3}$

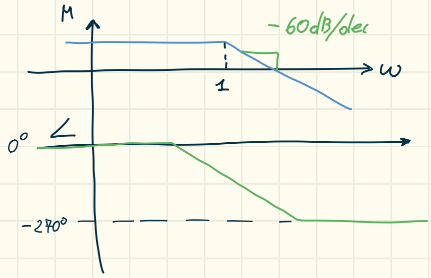
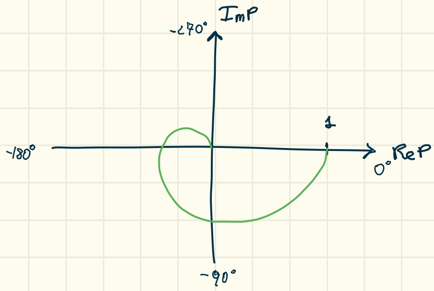
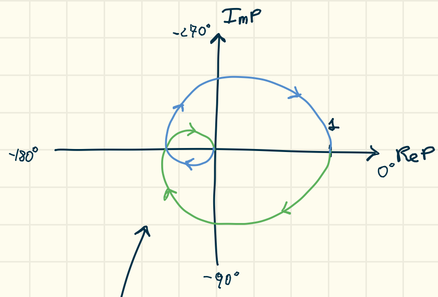


DIAGRAMMA POLARE



→ SPECCHIO →

DIAGRAMMA DI NYQUIST



- L(s) è Asintoticamente Stabile? ⇒ Dipende da dove è -1

Siccome il modulo iniziale è -1, ed M diminuisce sempre NON C'E' POSSIBILITA' DI CIRCONDARE -1.