CRITERIO DI BODE

Se abbiamo una $L(S) = \dfrac{\mu \prod_i (1+\tau_i S) \cdot \prod_i (S^2/\alpha_{ni}^2 + 2\zeta_i/\alpha_{ni} + 1)}{S^g \prod_i (1+T_i S) \cdot \prod_i (S^2/\omega_{ni}^2 + 2\xi_i/\omega_{ni} + 1)}$ (Rappr. guadagno/costanti)

e si rispettano le condizioni:

- $L(S)$ NON ha poli a $ReP>0$ $\Rightarrow$ $P=0$ (lezioni prec) $\Rightarrow$ A.S.
- Il diagramma di Bode dei moduli di $L(S)$ interseca solo una volta l'asse 0dB, con andamento DECRESCENTE
  - $\hookrightarrow$ Questo vuol dire che il diagramma di Nyquist interseca solo una volta la circonferenza di raggio unitario: prima era fuori poi entra e non esce più $\Rightarrow$ dopo $\omega_c \to |L(j\omega)| < 1$

Il criterio di Bode dice che la **condizione necessaria e sufficiente** affinché il sistema di controllo a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile è che si abbia:

1. Guadagno maggiore di zero (mu>0)
2. Margine di fase maggiore di zero (phi_con_m>0)

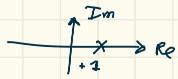
Queste condizioni sono comprensibili per via del fatto che:

- se avessimo guadagno negativo il diagramma di Nyquist inizierebbe dal semiasse reale negativo, quindi potrebbe circondare il punto -1
- se il margine di fase fosse negativo, come abbiamo appena visto avremmo già circondato il punto -1.

Ulteriori spiegazioni a 27:00 L15

Che fare se $L(S)$ è instabile?

Soluzione: uso due loop innestati

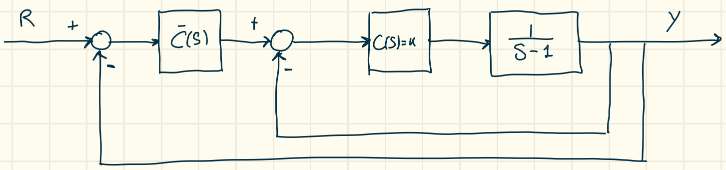


A ciclo chiuso

1° loop per stabilizzare $L(S)$: ESEMPIO $G(S) = \dfrac{1}{S-1}$ $\Rightarrow C(S) = K \Rightarrow P_c(S) = S-1+K$ A.S. $\forall K>1$

$$\Rightarrow \tilde{L}(S) = \frac{L(S)}{1+L(S)} = \frac{\frac{1}{S-1}}{\frac{S-1+K}{S-1}} = \frac{1}{S-1+K}$$ NUOVA $\tilde{L}(S)$

2° loop: progetto il controllore con il criterio di Nyquist



! Non so se corretto

CRITERIO DI BODE PER SYS A FASE MINIMA

NON hanno Poli/Zeri nel semipiano positivo

* Ci basta sapere la pendenza dei moduli nella pulsazione di attraversamento per conoscere la fase critica e quindi il margine di fase (più o meno)

Il criterio ci dice che se abbiamo una funzione di anello L(s) a fase minima, ovvero che **non ha poli/zeri nel semipiano destro e non ha ritardi**, allora possiamo dire che:
1) se il diagramma <u>asintotico</u> dei moduli attraversa l'asse 0dB, ovvero in corrispondenza della **pulsazione di attraversamento Wc** con una <u>pendenza pari a</u> ***-k*(20dB/dec)*** allora…
2) Con <u>buona approssimazione</u> possiamo dire che **la fase critica** *phi_c è pari a* ***-k*90°***; possiamo quindi calcolare il margine di fase con *phi_m* = 180° *(-k90°).

Ci accorgiamo che se k=2 avremmo un margine pari a zero. Ma siccome stiamo lavorando con diagrammi <u>asintotici</u>, non possiamo sapere precisamente quanto vale il margine, di conseguenza **con k=2 potremmo avere una L(s) <u>non</u> asintoticamente stabile.** (Margine di fase negativo)

Regola di progetto
Possiamo quindi progettare un controllore in modo da avere che **L(s) attraversi il margine 0dB con una pendenza di -20dB, in modo da avere k=1 per <u>massimizzare il margine di fase</u>**

Esempio

$L(s) = \frac{1}{s^2}$ Siccome $\begin{cases} \text{- No Poli/Zeri a ReP>0} \\ \text{- Interseca una sola volta l'asse 0dB con pendenza neg.} \end{cases}$ affinché si abbia l'A.S. $\begin{cases} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0 \end{cases}$

Inoltre $\begin{cases} \text{NO Ritardi} \\ \text{NO Zeri/Poli ReP>0} \end{cases} \Rightarrow$ Sys A fase minima $\Rightarrow$ Applico il criterio di Bode per Sys a F.M.

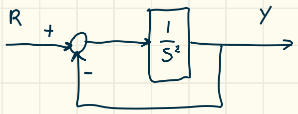
• Pendenza dei moduli a 0dB $\rightarrow$ $-40dB/dec \Rightarrow -K \cdot \cancel{20dB/dec} = -\underset{2}{\cancel{40}}\cancel{dB/dec} \Rightarrow \boxed{K=2} \Rightarrow \varphi_c \cong -180°$

$\Rightarrow \varphi_m \cong 180 - |-180°| \cong 0°$ $\Rightarrow$ NON VA BENE!

Infatti se retroaziono $L(s) = \frac{1}{s^2}$ $\rightarrow$ $P_c(s) = s^2 + 1$

s^2	1	1
s^1	0	0
s^0	0	

STABILE <u>MA</u> <u>NON</u> <u>ASINTOTICAMENTE</u>



$\angle L(s) = -180°$ COSTANTE $\Rightarrow \varphi_m = 0°$

Almeno una decade prima

Soluzione: Diminuire la pendenza: da $-40dB/dec \rightarrow -20dB/dec$ $\rightarrow$ <u>Aggiungo uno Zero</u> (prima di Wc)

⚐ 53:00 Ragionamento su guadagno

$C(s) = K(s+z)$ con $z > 0$ (Non fisicamente realizzabile)

Siccome evo aggiungere uno zero almeno una decade prima che il diagramma dei moduli intersechi l'asse 0dB, mi conviene usare un guadagno alto in modo da traslare verso destra la pulsazione di attraversamento, in modo da non dover mettere lo zero troppo a sinistra.

$W_c \,/\, |L(jW_c)| = 0dB \rightarrow \frac{1}{(jW_c)^2} = -\frac{1}{W_c^2} = 0dB$ ovvero $\frac{1}{W_c^2} = 20\log_{10}(0) = 1 \Leftrightarrow W_c = 1$

Pulsazione di Attraversamento

Controllore corretto ma non realizzabile

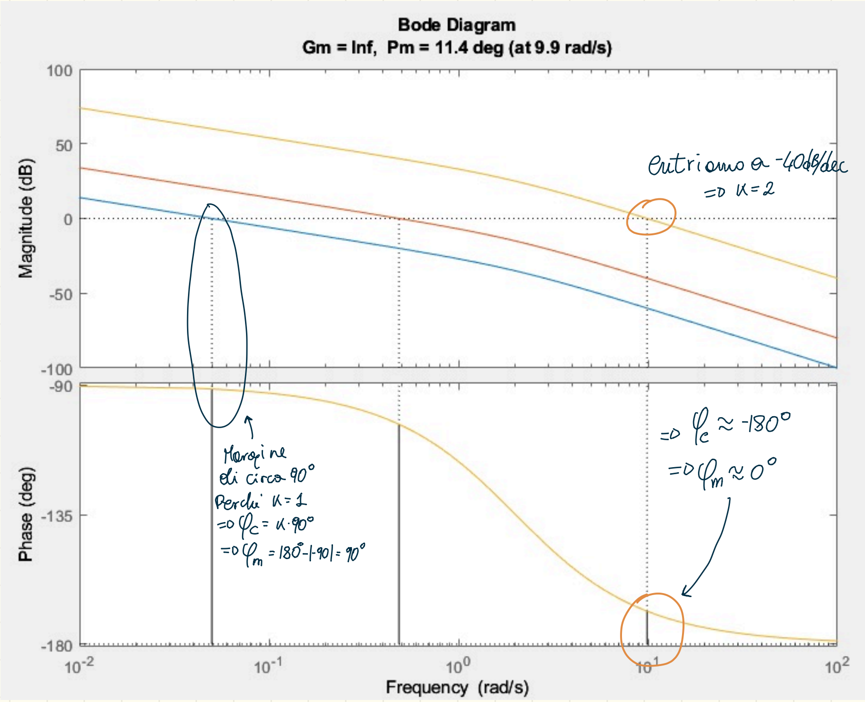
$C(s) = \frac{\boxed{K(s+10)}}{1 + \frac{s}{100}} \Rightarrow \tilde{L}(s) = C(s) \cdot L(s) = \frac{K(s+10)}{s^2\left(1 + \frac{s}{100}\right)}$ $\begin{cases} \text{1 zero ReP<0} \\ \text{3 Poli ReP<0} \end{cases}$

Esempio

$$L(s) = \frac{\rho}{s(s+2)} = \text{Forma per la frequenza} = \frac{\rho}{2 \cdot s(1+\frac{1}{2}s)} = \mu \frac{1}{s(1+0.5s)} \quad \text{Con } \mu = \frac{\rho}{2}$$

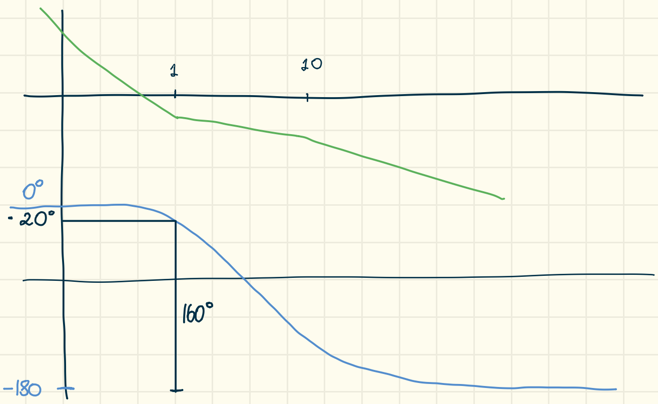
Cosa succede quando $\rho = [0.1, 1, 100]$?

* Quando moltiplichiamo per un gain=10 stiamo traslando verso l'alto il diagramma dei moduli di 20dB.
$g = 100 \to 40dB$ $\quad g = 1000 \to 60dB$



Esempio

$$L(s) = \frac{s-1}{s^2(s+10)}$$



A ciclo chiuso è stabile?

$$s^2(s+10) + s - 1 = s^3 + 10s^2 + s - 1$$

s^3	1	1	$\frac{10+1}{10}$
s^2	10	-1	
s^1	1.1	0	
s^0	-1		

INSTABILE

MA cosa ci dice il criterio di Bode?

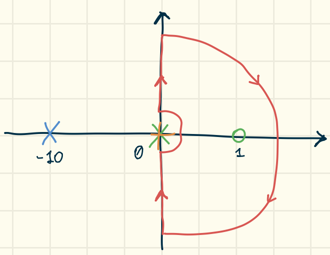
Abbiamo 1 zero a $ReP>0$ ma non c'è un problema

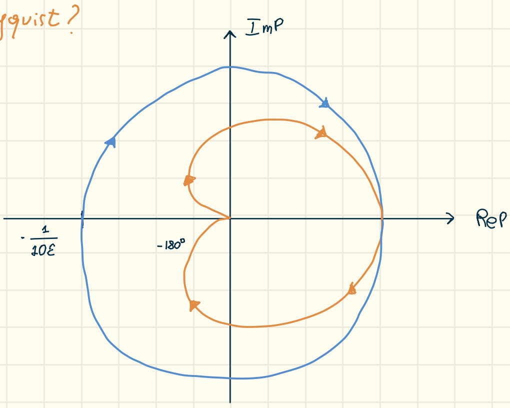
Quanto vale il guadagno? $\quad \frac{-1(1-s)}{10s^2(1+s)} = -\frac{1}{10}\frac{(1-s)}{s^2(s+1)}$

μ è negativo!

=> Non posso applicare il criterio.

Cosa dice il Teorema di Nyquist?





$$s' = \varepsilon e^{j\theta}, \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \to$$

$$\to L(s') = \frac{\varepsilon e^{j\theta} - 1}{\varepsilon e^{j2\theta}(\cancel{\varepsilon e^{j\theta}} + 10)} \simeq -\frac{1}{10\varepsilon e^{j2\theta}}$$

$\ll 10$

$$= -\frac{1}{10\varepsilon} \cdot e^{-j2\theta}$$

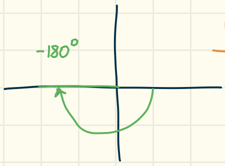
Parte dal semiasse reale Negativo

Siccome P (ovvero poli a $ReP>0$) è zero $\to$ dobbiamo avere 0 circondamenti del punto -1 affinchè il sys sia A.S.

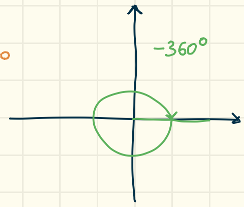
M 1:35 Codice Nyquist Matlab "Reale"

* Perché la fase parte da $\emptyset°$?

ho $\begin{cases} 2 \text{ poli in } 0 \Rightarrow -180° \text{ Fase iniziale} \Rightarrow \\ \text{guadagno negativo} \end{cases}$



Ribalto



$\Rightarrow 0°$

Poi... $\begin{cases} 1 \text{ Polo } \mathrm{Re}P < 0 \rightarrow -90° \\ 1 \text{ Zero } \mathrm{Re}P > 0 \rightarrow -90° \end{cases} \Big\} -180° \text{ Finale}$

* Considerazione su ε

Inizio: $-\frac{1}{10\varepsilon} e^{-j2\theta} \rightarrow -\frac{1}{10\varepsilon} > -1$ per $\varepsilon < 1/10$ quindi se prendo $\varepsilon > 1/10$ allora il sys è A.S. ... SBAGLIATO!

Secondo la teoria $\varepsilon \rightarrow \emptyset \Rightarrow \varepsilon$ è sempre $< 1/10$.