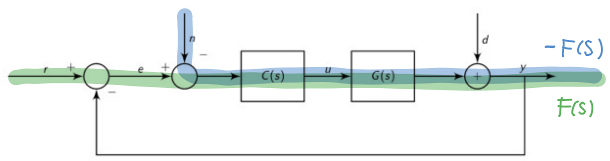
RECAP

Schema a blocchi controllo in retroazione negativa unitaria



- Sensitività (diretta): $S(s) = \dfrac{1}{1 + C(s)G(s)}$
- Sensitività complementare: $F(s) = \dfrac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$
- Sensitività del controllo: $Q(s) = \dfrac{C(s)}{1 + C(s)G(s)}$

Sensitività complementare

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

1. f.d.t. tra riferimento r e uscita y
2. f.d.t. (cambiata di segno) tra rumore di misura n e uscita y
3. f.d.t. tra rumore di misura n ed errore di controllo e

1) Vorremmo che questa funzione di trasferimento sia 1. Ricordiamo che la sensitività diretta era 0, quindi il complementare di 0 è proprio 1. Per garantire buone prestazioni di controllo, ovvero seguire il riferimento, possiamo portare la sensitività complementare ad 1 (o quella diretta a 0).

2) se non ci fosse il rumore di misura, ci basterebbe il punto 1. Ma siccome **la sensitività complementare è la FDT tra rumore di misura (n) ed uscita (y)**, se poniamo F(s) = 1 ci troviamo tutto il rumore di misura in uscita.

Il problema è che il rumore di misura si riversa in ingresso ed andiamo quindi a seguire il rumore invece che il riferimento.
Una soluzione sarebbe quella di utilizzare un trasduttore migliore (spendendo più soldi) per migliorare le prestazioni.

Avere $F(s) \equiv 1$ è positivo per inseguire il riferimento (punto 1) ma negativo per l'effetto del rumore di misura (punti 2 e 3).
Si noti che è impossibile avere $F(s) \equiv 1 \quad \forall s$.

$$F(s) = 1 \iff \frac{L(s)}{1+L(s)} = 1 \iff \begin{cases} L(s) = 1 \\ 1 + L(s) = 1 \end{cases}$$

Disaccoppiamento frequenziale delle sensitività

Si noti il vincolo

$$\underbrace{S(s) + F(s)}_{\text{COMPLEMENTARI}} = 1 \quad \forall s$$

$$S(s) = 1 - F(s) \rightarrow \frac{1}{1 + C \cdot G} = 1 - \frac{CG}{1+CG} = \frac{1 + \cancel{CG} - \cancel{CG}}{1+CG}$$

UGUALI
QED

ES: se $S(0) = 0 \Rightarrow F(0) = 1$

Aggiungere un polo nell'origine nella funzione di anello ci consente di avere una sensitività complementare (Tr->y)pari ad 1 in corrispondenza dell'origine, e l'uscita segue esattamente il riferimento. Avremo però anche il rumore di misura che come abbiamo visto passa interamente.

Nel progetto del sistema di controllo è opportuno avere:

- $|F(j\omega)| \simeq 1 \Rightarrow |S(j\omega)| \simeq 0$ nella banda di frequenze in cui occorre inseguire il riferimento (tipicamente per $\omega \leq \omega_c$)
- $|F(j\omega)| \simeq 0 \Rightarrow |S(j\omega)| \simeq 1$ nella banda di frequenze in cui è concentrato il rumore di misura (tipicamente per $\omega > \omega_c$).

Se il rumore di misura si trova ad alte frequenze allora viene *ammazzato* visto che in quella banda la sensitività complementare è zero, e quindi il disturbo non passa mentre

Se però riusciamo a porre il modulo della sensitività complementare pari a quasi uno, automaticamente quello della diretta andrà a zero. Questo comportamento è quello che vogliamo **nella banda di frequenza del segnale di riferimento** (w<wc).

Vogliamo questo comportamento in quella banda in particolare perché solitamente il riferimento è a bassa frequenza, mentre il rumore è ad alta frequenza. Di conseguenza il rumore rimane "fuori" e non viene portato in uscita.

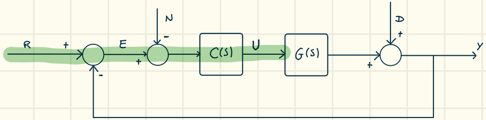
Essenzialmente stiamo creando un filtro passa basso

Osservazione

$$|Q(j\omega)| = \underbrace{|C(j\omega)\cdot S(j\omega)| = |F(j\omega)\cdot G(j\omega)|^{-1}}_{\text{Ci fidiamo per i passaggi...}} = \begin{cases} \dfrac{1}{|G(j\omega)|} & \text{per} \quad \omega<\omega_c \\ |C(j\omega)| & \text{per} \quad \omega>\omega_c \end{cases}$$

Sens. di CONTROLLO

T_{r-u} con $N=D=0$



Con il comportamento descritto sopra, nella banda di nostro interesse la funzione di trasferimento tra riferimento e segnale in ingresso al processo si comporta come l’inverso del processo stesso, e quindi andandolo a moltiplicare per il processo G(s), in modo da ottenere L(s) abbiamo proprio 1, che è quello che vogliamo.

Nel caso in cui la banda invece è superiore rispetto a quella di interesse (w>wc) la funzione di trasferimento si comporta proprio come il controllore.

Analisi sensitività complementare

Data

$$L(s) = \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1+T_i s) \prod_i (1+2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

allora la risposta al gradino a regime assumerà il valore

$$y^{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{L(s)}{1+L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{\mu}{s^g+\mu} = \begin{cases} 0, & g<0 \quad \text{INT RETR} \\ \frac{\mu}{1+\mu}, & g=0, \ (\mu \neq -1) \\ 1, & g>0 \quad \text{INT ANELLO} \end{cases}$$

Analisi sensitività del controllo

Uscita del controllore a regime

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1+C(s)G(s)} = C(s)S(s) = F(s)G(s)^{-1}$$

Nell'ipotesi di una funzione di anello di tipo 0 (non ci sono né azioni integrali né derivative nel controllore e/o nell'impianto):

$$u^{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{C(s)}{1+L(s)} = \frac{\mu_C}{1+\mu} = \frac{\mu}{1+\mu}\frac{1}{\mu_G},$$

dove $\mu_C = C(0)$ e $\mu_G = G(0)$.

guadagno del controllore

In questa sezione andiamo ad analizzare la sensitività complementare è di controllo proprio come abbiamo analizzato quella diretta.
L'analisi di queste sensitività ci permette di capire **a regime** come si comportano **l'uscita del sistema** ed il **forzamento**:

Usare la sensitività di controllo ci permette di vedere a regime che valore assume a regime la variabile controllabile, ovvero il forzamento che poniamo in input al nostro processo, ovvero il segnale u(t).
Dall'analisi (a sinistra) possiamo verificare come il forzamento è direttamente proporzionale al guadagno del controllore

ANALISI FREQUENZIALE

Andamento frequenziale delle sensitività

$L(j\omega) = C(j\omega)\cdot G(j\omega)$ e $|L(j\omega)| = \lim_{s\to\infty} s^g \cdot L(s)$ PIU' GRANDE POSSIBILE per $\omega < \omega_c$

Abbiamo i requisiti:

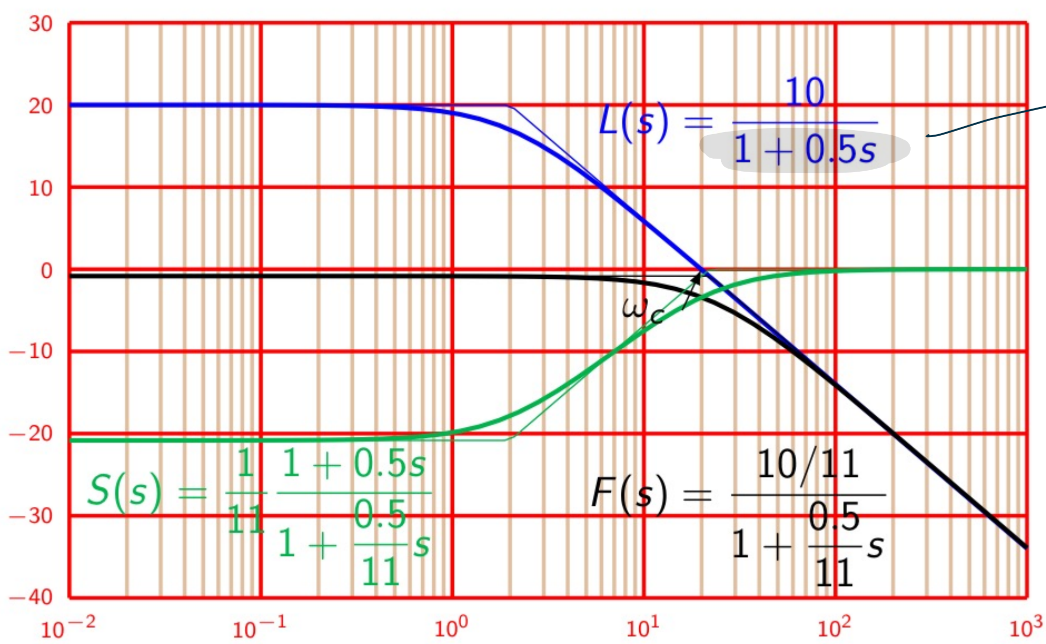
1. $|S(j\omega)| = \dfrac{1}{|1+L(j\omega)|} \simeq 0, \quad \omega \le \omega_c$ $\quad L \gg 1$
2. $|S(j\omega)| = \dfrac{1}{|1+L(j\omega)|} \simeq 1, \quad \omega > \omega_c$ $\quad \to L \ll 1$

Possiamo soddisfarli progettando una $L(j\omega)$ tale che

1. $|L(j\omega)| \gg 1, \quad \omega \le \omega_c$ $\quad L(j\omega) \to \infty$
2. $|L(j\omega)| \ll 1, \quad \omega > \omega_c$

Dobbiamo avere una funzione di anello con un modulo molto elevato nella banda dove ci serve (frequenze basse) ed un modulo molto piccolo nella banda dov'è presente il rumore di misura (frequenze alte).

W_c Corrisponde a quando i moduli attraversano 0dB



W_c PULSAZIONE DI ATTRAVERSAMENTO

* TARARE

LOOP SHAPING

$$\sin(\omega t) \rightleftharpoons \frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2} = X(s) \Rightarrow L(s) = \frac{/\!/}{s^2+\omega_n^2} \quad \text{se} \quad s = j\omega_n \Rightarrow L(s) = \frac{/\!/}{-\omega_n^2+\omega_n^2} \to \infty$$

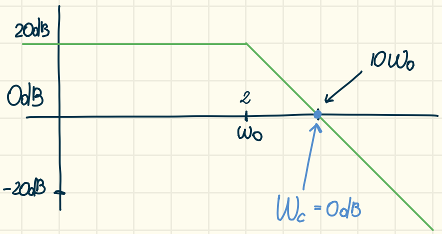
Se abbiamo un segnale sinusoidale (la cui trasformata di Fourier ha un singolo impulso in corrispondenza della sua frequenza) per portare al valore più alto possibile la funzione di anello in modulo dobbiamo sollecitare il sistema proprio con la frequenza wn.

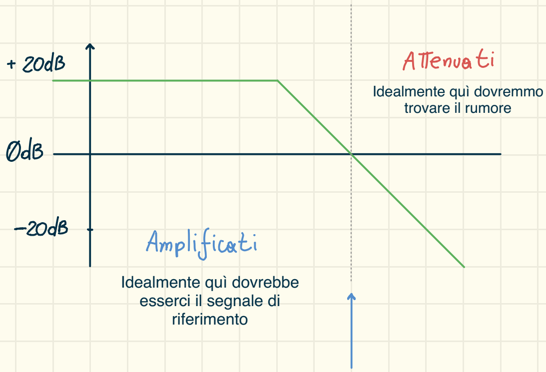
Esempio

$$L(s) = \frac{10}{1+\frac{1}{2}s} \Rightarrow K_s = 10 \;,\; \bar{s} = -2 \Rightarrow \omega_0 = 2 \text{ rad/s}$$

Nessuno zero/polo in 0 $\Rightarrow$ $\underbrace{|L(j\omega)|}_{dB} = 20\log_{10}(10) = 20dB$

1 Polo in $\omega = 2$ rad/s





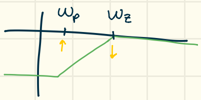
PULSAZIONE CRITICA / ATTRAVERSAMENTO

La pulsazione di attraversamento è quella pulsazione per la quale il diagramma di bode vale esattamente 0dB, ovvero ha un guadagno pari ad 1: non cambia nulla.

F. di Sensitività

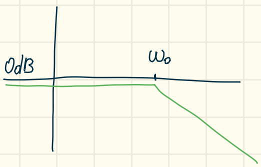
$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+\frac{10}{1+0.5s}} = \frac{1+0.5s}{1+0.5s+10} = \frac{1+0.5s}{11+0.5s}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{11}}_{\text{gain}} \cdot \frac{1+0.5s}{1+\frac{0.5}{11}s} \Big\} \text{ 1 polo, 1 zero con } \begin{matrix}\omega_p = 2 \\ \omega_z = 22\end{matrix} \Rightarrow$$



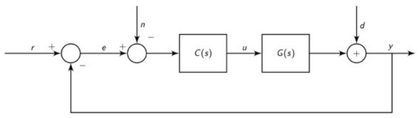
$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{10}{1+0.5s}}{1+\frac{10}{1+0.5s}} = \frac{10}{1+0.5s+10} = \frac{10}{11+0.5s} = \underbrace{\frac{10}{11}}_{K_s} \frac{1}{1+\frac{0.5}{11}s} \to \omega_0 = \frac{11}{0.5} = 22 \text{ rad/s}$$

Notiamo che la funzione di anello ha un polo in -2; questo polo diventa poi uno zero nella sensitività diretta.



OVVERO QUANDO IL Modulo di $\underbrace{|L(s)|}_{dB} = 0dB \equiv 1$ N.V.

Schema a blocchi controllo in retroazione negativa unitaria



- Sensitività (diretta): $S(s) = \dfrac{1}{1 + C(s)G(s)} = \dfrac{1}{1 + L(s)}$
- Sensitività complementare: $F(s) = \dfrac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \dfrac{L(s)}{1 + L(s)}$
- Sensitività del controllo: $Q(s) = \dfrac{C(s)}{1 + C(s)G(s)} = \dfrac{C(s)}{1 + L(s)}$

*

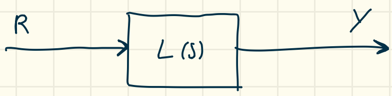
ANALISI DI STABILITA'

Per capire se il sistema a ciclo chiuso è stabile andiamo a guardare le funzioni di sensitività. Ma siccome tute e tre hanno lo stesso denominatore, **il polinomio al denominatore è detto polinomio caratteristico.**

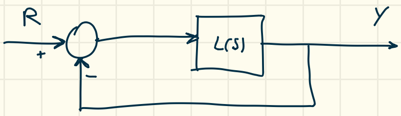
Per analizzare la stabilità a ciclo chiuso di un sistema di controllo dobbiamo studiare la stabilità del polinomio caratteristico.

LA RETROAZIONE SPOSTA I POLI

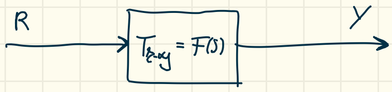
Supponiamo di avere la funzione di Anello $L(S) = \dfrac{N_L(S)}{D_L(S)}$, avremmo



Se lo retroazioniamo:



→



CAMBIAMO I POLI ma non gli zeri perchè...

$$T_{r\to y} = F(S) = \frac{L(S)}{1 + L(S)} = \frac{\dfrac{N_L(S)}{D_L(S)}}{1 + \dfrac{N_L(S)}{D_L(S)}} = \frac{N_L(S)}{D_L(S) + N_L(S)}$$

gli zeri sono invariati

I poli sono cambiati

siccome $F(S)$ è il nuovo "processo" che sarà sempre dato da: per capire se è stabile analizziamo il suo denominatore

$P_C(S) = N_L(S) + D_L(S)$

Il polinomio caratteristico (di ogni funzione di sensitività) è dato dalla somma tra il numeratore ed il denominatore della funzione di anello L(s) = G(s)*C(s).

Dobbiamo trovare gli zeri del polinomio caratteristico e controllare la stabilità.

Sensitività diretta

$$S(S) = \frac{1}{1 + L(S)} = \frac{1}{1 + \dfrac{N_L(S)}{D_L(S)}} = \frac{D_L(S)}{D_L(S) + N_L(S)}$$

CAMBIANO SIA POLI CHE ZERI

Stabile se... $P_C = D_L(S) + N_L(S) = 1 + L(S)$ è stabile.

Se S0 è un polo del sistema a ciclo aperto (ovvero solo di L(s)) sicuramente questo non potrà essere un polo anche per il sistema a ciclo chiuso, ovvero di F(s).

Poli e zeri

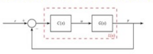
Data $L(s) = \dfrac{N_L(s)}{D_L(s)}$ quali sono i poli e gli zeri delle sensitività?

$$F(s) = \frac{\dfrac{N_L(s)}{D_L(s)}}{1 + \dfrac{N_L(s)}{D_L(s)}} = \frac{N_L(s)}{D_L(s) + N_L(s)} \quad \text{COMPLEMENTARE}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + \dfrac{N_L(s)}{D_L(s)}} = \frac{D_L(s)}{D_L(s) + N_L(s)} \quad \text{DIRETTA}$$

I poli della funzione di anello diventano zeri della sensitività diretta
Gli zeri della funzione di anello rimangono zeri della sensitività complementare
La stabilità a ciclo chiuso è determinata dalle radici del polinomio $D_L(s) + N_L(s)$

Schema a blocchi controllo in retroazione negativa unitaria



- Funzione di anello: $L(s) = C(s)G(s) = \dfrac{N_L(s)}{D_L(s)}$
- Equazione caratteristica: $D_L(s) + N_L(s) = 0 \iff 1 + L(s) = 0$

* Posizionare zeri per annullare errore

La retroazione sposta tutti i poli.
I poli a ciclo aperto sono sempre diversi dai poli a ciclo chiuso (con retroazione). Solo gli zeri rimangono fissi

Appunti Lez.

Esempio

$$C(s) = k, \quad G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Come è possibile analizzare la stabilità del sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno k del controllore?

Possibili soluzioni:

- Criterio di Routh $K > 0$
- Calcolare i poli del sistema a ciclo chiuso

Equazione caratteristica:

$$\Delta(s) = 1 + k\underbrace{\frac{1}{s(s+2)}}_{L(s)} = 0$$

$$\Rightarrow s^2 + 2s + k = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-k}.$$ POLI

$\rightarrow$ $K<0$ i poli si allontanano ed uno diventa positivo $\Rightarrow$ INSTABILE

$K = 0$ $\Rightarrow$ NO CONTROLLORE $\Rightarrow -1 \pm 1 \nearrow -2, \searrow 0$

K

$K > 1$ la parte imm Aumenta ReP = -1 Cost

$K = 1$ COINCIDENTI

$0 < K < 1$ REALI NEGATIVI

Posizione dei poli al variare del parametro

Il problema consiste nel trovare le radici dell'equazione

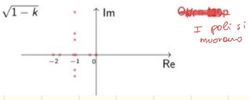
$$1 + k\frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

al variare del parametro ρ.

Nell'esempio precedente

$N_L(s) = kN(s) = k, \quad D(s) = D_L(s) = s(s+2), \quad D_L(s^*) + kN(s^*) = 0$

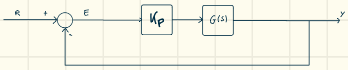
$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-k}$



I poli si muovono

Esercizio

$C(s) = K_p$, $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$



$\Rightarrow L(s) = \frac{K_p}{s(s+2)} \Rightarrow P_c = N_L(s) + D_L(s) = 1 + L(s) = \frac{s(s+2)+K_p}{s(s+2)} = 0 \Leftarrow\Rightarrow s^2 + 2s + K_p = 0$

$K_p + s(s+2) = s^2 + 2s + K_p = 0$

UGUALI (ovviamente...)

1) Stabile?

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & K_p \\ s^1 & 2 & 0 \\ s^0 & K_p & \end{array} \Leftarrow\Rightarrow K_p > 0$$

Arrivati a questa parte del corso siamo in grado di risolvere problemi di tipo statico: possiamo calcolare l'errore di posizione, velocità ed accelerazione a seconda del segnale di ingresso.

Per analisi statica si intende una situazione a regime, garantendo l'asintotica stabilità e capire cosa succede una volta che il transitorio è esaurito.

2) Poli: $P_c(s) = s^2 + 2s + K_p \rightsquigarrow \Delta = 4 - 4K_p = 4(1-K_p)$

$$P_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-K_p}}{2} \begin{array}{l} \nearrow -1 + \sqrt{1-K_p} \quad P_1 \checkmark \\ \searrow -1 - \sqrt{1-K_p} \quad P_2 \end{array}$$