

$$\mathcal{L} [\delta(t)] = 1 \quad \text{Impulso}$$

$$\mathcal{L} [\mathbb{1}(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{Gradino}$$

$$\mathcal{L} [e^{-\omega t} \cdot \mathbb{1}(t)] = \frac{1}{s + \omega} \quad \text{Exp}$$

$$\mathcal{L} [f(t - t_0) \mathbb{1}(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s) \quad \text{Time Shift}$$

$$\mathcal{L} [t] = \frac{1}{s^2} \quad \text{RAMPA}$$

$$\mathcal{L} [\sin(\omega t) \cdot \mathbb{1}(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L} [\cos(\omega t) \cdot \mathbb{1}(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Lezione 3

PROPRIETA' e TEOREMI

$$\mathcal{L} [e^{-\omega t} \cdot f(t)] = F(s + \omega)$$

Moltiplicazione per esponenziale

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = s \cdot F(s) - f(0)$$

Derivazione reale

Lezione 3

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^2 f}{dt^2} \right] = \mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) \right]$$

Derivata in cascata

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

Valore finale

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

Valore iniziale

Lezione 4

$$\mathcal{L} \left[ \int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + f(0) \frac{1}{s}$$

Integrale reale

$$\mathcal{L} [t \cdot f(t)] = - \frac{d}{ds} F(s)$$

Integrazione nel dominio della variabile s

## Antitrasformate Notevoli

Integrale di Laplace:  $F(S) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$

### Costante

$$f(t) = K \cdot \mathbb{1}(t) \Rightarrow F(S) = K \int_0^\infty e^{-st} dt = K \cdot \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{s} e^{-st} - \left( -\frac{1}{s} e^0 K \right) = \frac{1}{s} K$$

### Rampa

$$f(t) = t \mathbb{1}(t) \Rightarrow F(S) = \int_0^\infty t \cdot e^{-st} dt \quad \text{PARTI} = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot t \right]_0^\infty - \int -\frac{1}{s} e^{-st} dt$$

$$F(S) = [0 - 0] + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

↑  
exp >> t

### Esponenziale

$$f(t) = e^{-at} \Rightarrow F(S) = \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-t(a+s)} dt = \frac{-1}{a+s} \left[ e^{-t(a+s)} \right]_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

### Sin

$$f(t) = \sin(wt) = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j} \Rightarrow F(S) = \frac{1}{2j} \cdot \mathcal{L}(e^{jw}) - \mathcal{L}(e^{-jw})$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot \left( \frac{1}{s+jw} - \frac{1}{s-jw} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{s+jw - s-jw}{s^2 + w^2}$$

$$= \frac{w}{s^2 + w^2}$$

### Proprietà

### Ritardo

$$U(t) = f(t-t_0) \cdot \mathbb{1}(t-t_0) \Leftrightarrow U(S) = \int_0^\infty f(t-t_0) e^{-st} dt \quad \text{pongo } t-t_0 = \tau \rightarrow t = \tau + t_0$$

per  $\begin{cases} t \rightarrow 0, \tau \rightarrow -t_0 \\ t \rightarrow \infty, \tau \rightarrow \infty \end{cases}$

$$\Rightarrow U = \int_{-t_0}^\infty f(\tau) e^{-s(\tau+t_0)} d\tau = e^{-st_0} \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$\Rightarrow U(S) = e^{-st_0} \cdot F(S)$$

### Moltiplicazione per exp

$$y = e^{-st} \cdot f(t) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-t(s+\alpha)} dt = \text{pongo } s+\alpha = \beta$$

$$\stackrel{=} F(\beta) = F(s+\alpha)$$

### Derivazione Reale

$$y = \frac{d}{dt} f(t) \Rightarrow F(s) = \int \frac{d}{dt} f(t) \cdot e^{-st} dt \stackrel{\text{PARTI}}{=} \left[ f(t) \cdot e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-s) e^{-st} dt$$

$$\stackrel{-f(0)}{=} SF(s) - f(0)$$

### Valore finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} SF(s) \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ f(0) + \mathcal{L} \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) \right]$$

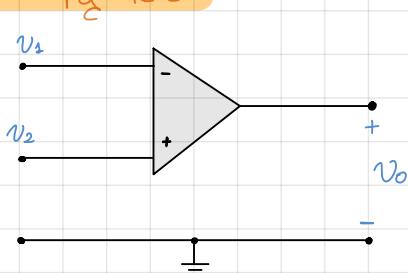
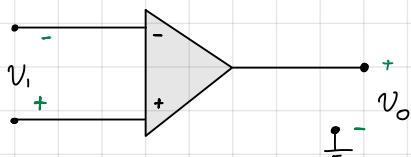
$$f(0) + \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) \cdot e^{-st} dt = f(0) + \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) \cdot \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} dt^1 = f(0) + \left[ f(t) \right]_0^{\infty} = f(t \rightarrow \infty)$$

### Valore iniziale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} SF(s) \rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ f(0) + \mathcal{L} \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) \right]$$

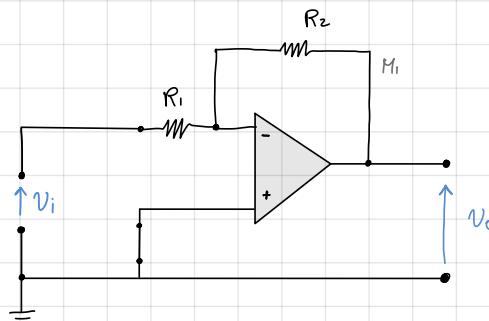
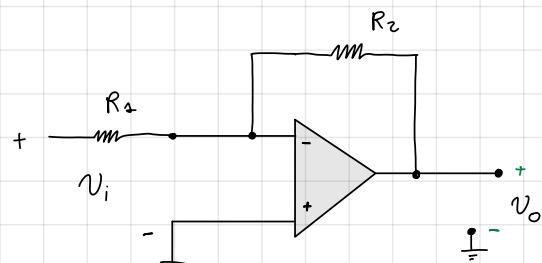
$$\rightarrow f(0) + \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} dt^0 = f(0) + \left[ 0 \right]_0^{\infty} = f(0)$$

## AMPLIFICATORI OP



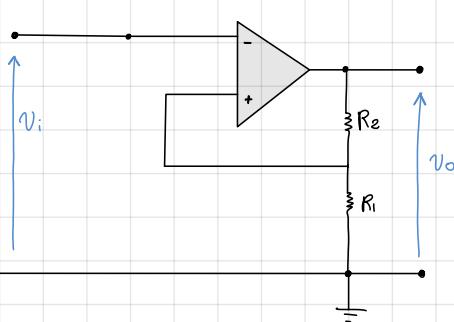
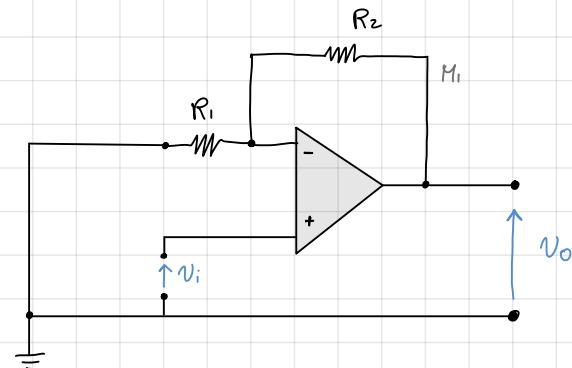
$$R.C. \quad V_o = K (V_+ - V_-)$$

## INVERTENTE



$$V_o = - \frac{R_2}{R_1} V_i$$

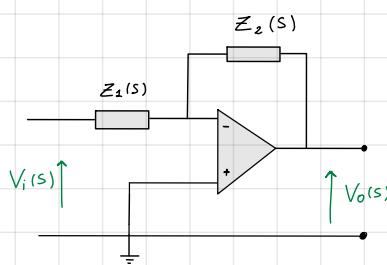
## NON INVERTENTE



$$V_o = R_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_i$$

## METODO DELLE IMPEDENZE

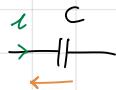
Pg 125



$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = - \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$



$$\underline{Z}_R(s) = R$$



$$\underline{Z}_C(s) = \frac{1}{Cs}$$



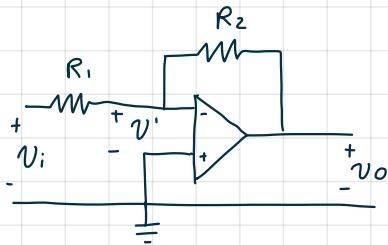
$$\underline{Z}_L(s) = \frac{1}{Ls}$$

## CONTROLLORI PID

### Proporzionale

$$U(t) = K_p \cdot e(t) \Rightarrow U(s) = K_p E(s)$$

In out devo avere una costante

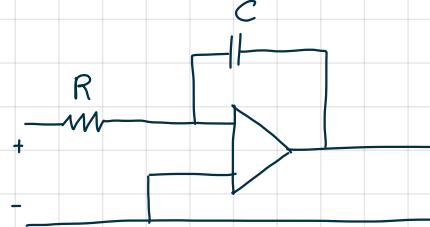


$$V_o = -\frac{Z_2}{Z_1} \cdot V_i \quad \sim \quad \begin{cases} Z_1 = R_1 \\ Z_2 = R_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot V_i \quad \text{INVERT}$$

~ Mi basta mettere in serie un altro controller proporzionale invertente in serie con  $R_3 = R_4$

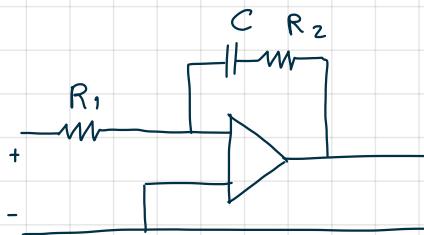
### INTEGRALE

$$U(t) = \int e(t) dt \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} E(s)$$



$$V_o = -\frac{Z_C}{Z_1} V_i = -\frac{1}{sCR_1} V_i \Rightarrow G(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{1}{sCR}$$

### Prop integ



$$Z_2 = \frac{R_2}{sC} \quad \Rightarrow \quad V_o = -\frac{R_2}{sR_1C} V_i \quad G(s)$$

## Linearizzazione

Se abbiamo una funzione NON LINEARE possiamo "linearizzarla" grazie alla serie di Taylor fermandoci al termine lineare (2nd):

$$f(x) = \left. \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \cdot (x-x_0)^n$$

Quindi il 2nd termine è:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{d}{dt} f(x) \right|_{x=x_0} (x-x_0)$$

$$= f(x_0) - \left. \frac{d}{dt} f(x) \right|_{x=x_0} \cdot x_0 + \left. \frac{d}{dt} f(x) \right|_{x=x_0} \cdot x + \varepsilon$$

## Funzioni di 2 Variabili

Linearizzo  $f(x,y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} \cdot (x-x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \cdot (y-y_0) + \varepsilon$  (al 2nd termine)

## Sistema NON lineare

Un sistema nello spazio di stato è del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \dot{x} = f(x, u)$   $\rightsquigarrow$  Possiamo Approssimarlo per qualsiasi  $x_0, u_0$ , ma ci troviamo in un punto di equilibrio:

Dato un ingresso  $u_0$ , il p.d.e. è un punto  $x_0$  tale che la derivata  $\dot{x} = \left. \dot{x} \right|_{x_0, u_0} = 0$

Posso quindi dire:  $x = x_0 + \hat{x}$  con  $\hat{x} = x - x_0$  è la distanza tra funzione e punto in cui la linearizziamo

quindi, derivo:  $\dot{x} = \left. \dot{x} \right|_{x_0} + \dot{\hat{x}} \Rightarrow \dot{\hat{x}} = \dot{x}$

per def = 0

Taylor:  $f(x, u) = f(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} (x-x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} (u-u_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \cdot \hat{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \hat{u}$

nel punto di eq è zero

Generalizzo per Matrici di  $f$ :

$$\underline{f}(x, u) = \underline{A} \hat{x} + \underline{B} \hat{u}$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

il gradiente  
e il corrispettivo  
della derivata  
per Matrici

## Dallo spazio di stato alla Fdt

Abbiamo un sys generico:  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx + du \end{cases} \Rightarrow Sx = Ax + Bu$

-o Metto in evidenza  $x$  a dx:  $(S-A)x = B \cdot u$  ma  $A$  è una Matrice !!  
Erre!

-o Moltiplico  $S$  per la Matr identità:  $(\underline{S}\underline{I}-\underline{A})\underline{x}(s) = \underline{B}\cdot\underline{U}(s)$

-o Ci serve isolare  $\underline{x}(s)$  ma non possiamo semplicemente dividere per  $(S-I-A) \dots$

Sfrutto  $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow (\cancel{S}\cancel{I}-\cancel{A})(\cancel{S}\cancel{I}-\cancel{A})^{-1} \underline{x}(s) = (\cancel{S}\cancel{I}-\cancel{A})^{-1} \cdot B \cdot U(s)$

$$\Rightarrow \underline{x}(s) = (\cancel{S}\cancel{I}-\cancel{A})^{-1} \cdot B \cdot U(s)$$

MA Che cosa è  $(S-I-A)^{-1}$  ... ?

$$(S-I-A)^{-1} = \frac{1}{\det(S-I-A)} \cdot \text{adj}(S-I-A)$$

dove  $\text{adj}(S-I-A)$  è la matrice Adiacente  
dove gli el sulle diagonale principale  
si scambiano gli POSTO e quelli  
sulla secondaria gli SEGNO.

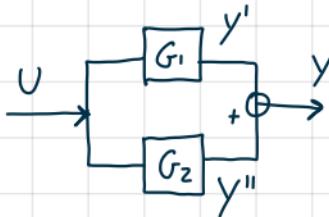
## Configurazioni Sistemi

SERIE



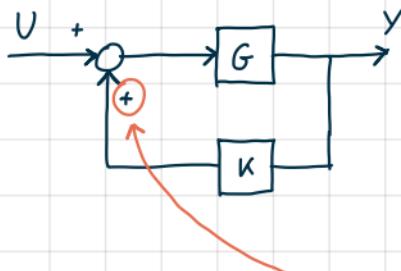
$$\begin{cases} y = y' \cdot G_2 \\ y' = U \cdot G_1 \end{cases} \rightarrow y = U \cdot G_{eq}$$

PARALLELO



$$\begin{cases} y' = U \cdot G_1 \\ y'' = U \cdot G_2 \\ y = y' + y'' \end{cases} \rightarrow y = U(G_1 + G_2) \quad Geq$$

RETROAZIONE



Dipende dal segnale

$$\begin{aligned} y &= (U + K \cdot y) \cdot G = UG + KYG \rightarrow y(1 - KG) = UG \\ &= U \cdot \frac{G}{1 - KG} \quad Geq \end{aligned}$$

\* Versione estesa giù ↓

# MODELLISTICA DI SYS MECCANICI

## Massa Smorzatore



I sistemi meccanici sono caratterizzati da **massa - molla - smorzatore**, che corrispondono, rispettivamente, a *condensatore*, *induttore* e *resistore* dei sistemi elettrici.

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad \text{con } v = \frac{ds}{dt}$$

$$F_b = -b \cdot v \quad \text{Variabile di stato}$$

$$\sum F = m \cdot a \rightarrow F + F_b = m \cdot \frac{dv}{dt} \rightarrow F - bv = m \cdot \frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{b}{m} v - F = 0$$

eq Diff

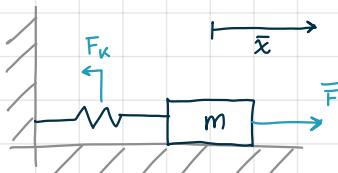
$$\mathcal{L}[\sum F] = SV(s) + \frac{b}{m} V'(s) - F(s) = 0$$

Voglio OUT:  $v(s)$  IN:  $F(s)$   $\rightarrow V(s) \left[ s + \frac{b}{m} \right] - F(s) = 0 \rightarrow V(s) \left[ s + \frac{b}{m} \right] = F(s)$

$$\rightarrow \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{s + \frac{b}{m}} \quad \text{Fdt}$$

Per s.s. e schema a blocchi vedi cartella modellistica/s meccanica

## Massa Molla



$$\text{molla: } F_k = -K \cdot x$$

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d}{dt} v = m \frac{d^2}{dt^2} x = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \sum F = m a \rightarrow \bar{F} + F_k = m \cdot \ddot{x} \rightarrow \bar{F} - Kx = m \cdot \ddot{x}$$

$$\rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m} x = \bar{F} \quad \text{eq diff} \Rightarrow S^2 X(s) + \frac{K}{m} X(s) = F(s) \rightarrow X(s) \left[ S^2 + \frac{K}{m} \right] = F(s)$$

Voglio: OUT:  $X(s)$ , IN:  $\bar{F}(s)$   $\rightarrow$

$$\frac{X(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{1}{S^2 + \frac{K}{m}} \quad \text{Fdt}$$

## Space State

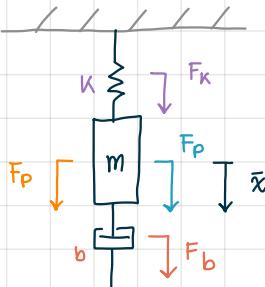
$$U = \bar{F}, \quad y = \bar{x}, \quad x_1 = v, \quad x_2 = \bar{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{m} (K x_2 - U) \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 x_1 + \frac{K}{m} x_2 - \frac{1}{m} U \\ \dot{x}_2 = 1 x_1 + 0 x_2 + 0 U \\ y = 0 x_1 + 1 x_2 + 0 U \end{cases}$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{K}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot U, \quad y = (0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \cdot U$$

## Massa molla smorzato



$$\begin{cases} F_k = -K \bar{x} \\ F_b = -b \cdot v \rightarrow F_b = -b \cdot \frac{d}{dt} \bar{x} \\ F_p = m \cdot a \text{ ma la considero così com'è} \end{cases}$$

$$\left\{ \sum_i F_i = m \cdot a \rightarrow \sum F = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \bar{x} \right.$$

eq diff

$$\rightarrow -K \bar{x} - b \cdot \frac{d}{dt} \bar{x} + F_p = m \frac{d^2}{dt^2} \bar{x} \rightarrow \boxed{\frac{d^2}{dt^2} \bar{x} + \frac{b}{m} \frac{d}{dt} \bar{x} + \frac{K}{m} \bar{x} = F_p}$$

$$\Rightarrow S^2 \underline{x}(s) + \frac{b}{m} S \underline{x}(s) + \frac{K}{m} \underline{x}(s) = F_p(s) \quad \text{voglio OUT: } \underline{x}(s) \text{ , in } F_p(s)$$

$$\underline{x}(s) \left[ S^2 + \frac{b}{m} s + \frac{K}{m} \right] = F_p(s) \Rightarrow G(s) = \frac{\underline{x}(s)}{F(s)} = \frac{1}{S^2 + \frac{b}{m} s + \frac{K}{m}} \quad G(s)$$

$$x_1 = v, \quad x_2 = \bar{x}, \quad v = F_p \quad y = \bar{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{m} (-K x_2 - b x_1 + v) \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -b & -K \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot v$$

$$y = (0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

## MODELLI IDRAULICI

$$f = \frac{\text{Peso}}{\text{Volume}} \quad \text{densità volumetrica}$$

$$P = \frac{\text{FORZA}}{\text{SUPERficie}} \leftrightarrow \text{Pressione}$$

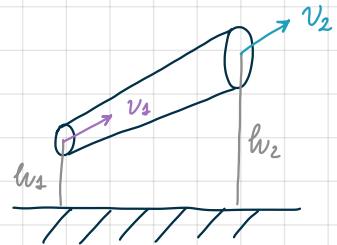
$$q = \frac{\text{Volume}}{\text{Tempo}} \leftrightarrow \text{Portata}$$

$$R = \frac{\Delta P}{q} \leftrightarrow \text{Resistenza}$$

$$q = C \cdot \frac{d}{dt} P \leftrightarrow \text{Capacità}$$

$$P = L \cdot \frac{d}{dt} q \leftrightarrow \text{Induttanza}$$

BERNOULLI



$$P_1 + \frac{1}{2} f v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2} f v_2^2 + \rho g h_2$$

Pressione  
E cinetica  
E potenziale

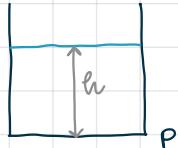
$$\rightarrow C = \frac{S}{\rho g}$$

$$\rightarrow L = \frac{Sh}{S}$$

$$\text{Da Bernoulli, se } v_1 = v_2, P_2 \gg P_1 \Rightarrow h_1 \gg h_2 \Rightarrow f \cdot g \cdot h = P \Rightarrow h = \frac{P}{f g}$$

$$h = \frac{P}{f g}$$

Trovare la capacità:



$$P_a + f \cdot g \cdot h = P \rightarrow P - P_a = f g h$$

Varia  
Const

$$\text{Derivo: } \frac{d}{dt} P = f g \cdot \frac{d}{dt} h$$

$$\text{Sappiamo che la portata è } q = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{f g}{s} \cdot \frac{d}{dt} h \cdot s = \frac{d}{dt} P$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} P = \frac{f g}{s} \cdot q$$

Capacità  
Superficie

## MODELLI TERMICI

C - Capacità Termica

R - Resistenza

q - Flusso Termico

Q - Calore

T - Temperatura

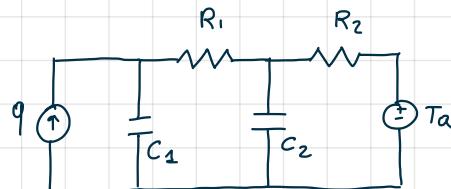
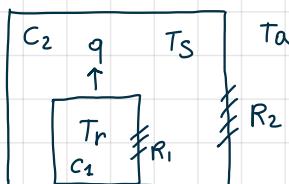
$$\bullet C \frac{dT}{dt} = q \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{dQ}{dt} \\ C = \frac{Q}{\Delta t} \end{array} \right.$$

$$\bullet T = R \cdot q \quad \text{equivale a} \quad V = R \cdot i$$

RADIATORE

Immaginiamo

Una stufa con la sua capacità, posta in una stanza



→ Basta risolvere il circuito

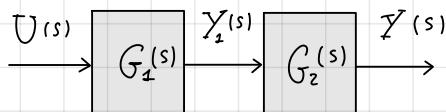
Vedi cartella mod. Termici.

## FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad \text{se} \quad U(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = G(s)$$

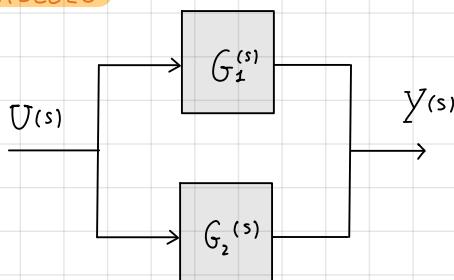
### SERIE



$$Y(s) = [G_1(s) G_2(s)] U(s)$$

SERIE

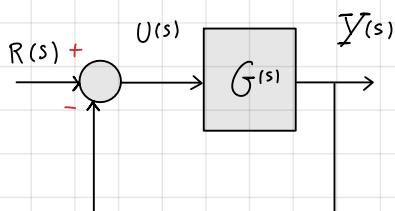
### PARALLELO



$$U(s) (G_1(s) + G_2(s))$$

PARALLELO

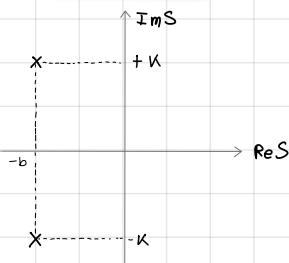
### FEED BACK



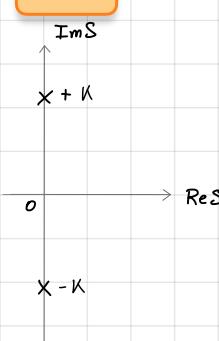
$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s)$$

Retroazione

Asintoticamente stabile



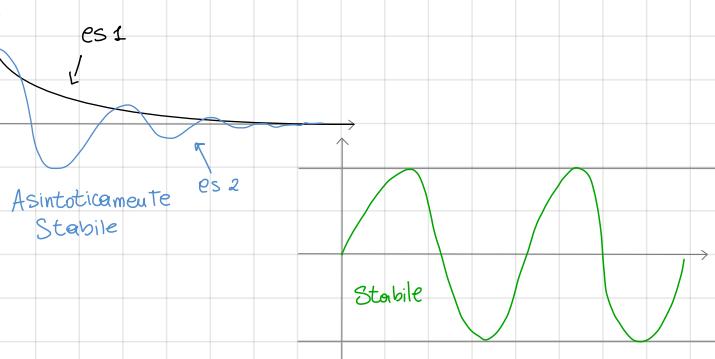
Stabile



Un sistema di questo tipo è detto **stabile** ma non *asintoticamente* stabile, perché c'è una continua oscillazione che non si smorzerà mai, visto che non c'è uno smorzamento.

Più i poli si avvicinano all'asse immaginario, più il sistema tende ad essere instabile:

- Quando i poli sono proprio sull'asse immaginario il sistema è stabile ma non asintoticamente stabile.
- Quando i poli sono oltre l'asse immaginario (parte reale positiva) allora il sistema è completamente instabile.
  - Quando i poli sono a sinistra dell'asse immaginario, quanto più sono lontani da esso più il sistema è stabile (ovvero tende a smorzarsi più velocemente).



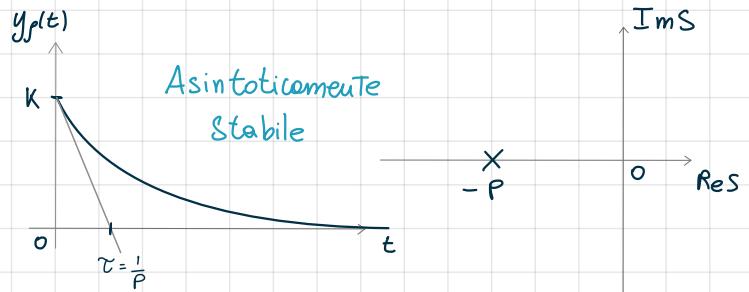
## Risposta nel tempo

## Dalla lezione 18

Per capire se un sys è **stabile**, **Asintoticamente Stabile** o **instabile** ci basta guardare Poli e zeri oppure la risposta impulsiva, ovvero l'antitrasformata del sys:

### Termini del 1° ordine

- $G(s) = \frac{K}{s + P} \Leftrightarrow y_p(t) = K e^{-Pt} \cdot \mathbb{1}(t)$

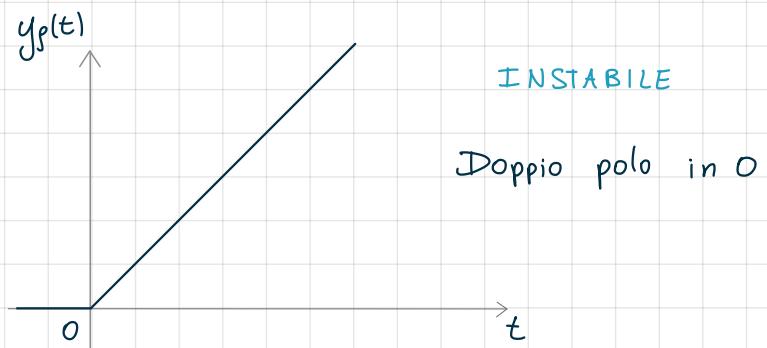
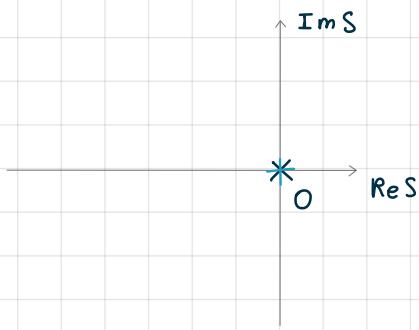


- $G(s) = \frac{K}{s} \Leftrightarrow y_p(t) = K \cdot \mathbb{1}(t)$

L'uscita "RICORDA" il segnale in ingresso



- $G(s) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow y_p(t) = t \cdot \mathbb{1}(t)$



## RISPOSTA A SYS DEL 1° ORDINE

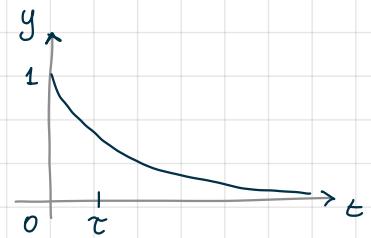
da forma più semplice di un sys del 1° ordine è la seguente:

$$G(s) = \frac{1}{1+st}$$

e possiamo trovare la risp ai segnali notevoli

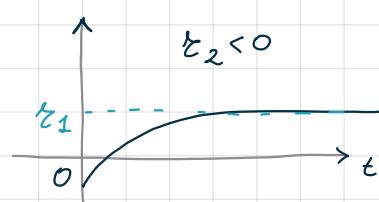
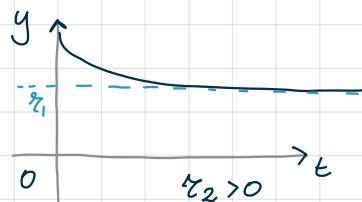
### IMPULSO

$$y(s) = \delta(s) \cdot G(s) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+st}\right] = \underbrace{y_\delta(t) = e^{-\tau t}}_{\text{con } \tau = \frac{1}{t}} \cdot u(t)$$



### GRADINO

$$y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+st} = \frac{\xi_1}{s} + \frac{\xi_2}{1+st} \Rightarrow y(t) = (\xi_1 + \xi_2 e^{-\tau t}) \cdot u(t)$$



### RAMPA

$$y(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+st} = \frac{\xi_1}{s} + \frac{\xi_2}{s^2} + \frac{\xi_3}{1+st} \Rightarrow y(t) = (\xi_1 + \xi_2 t + \xi_3 e^{-\tau t}) \cdot u(t)$$

Considerando  $G(s) = \frac{1}{st+1}$

INPUT	OUTPUT
$U_2(t) = t \cdot u(t)$	$y_2(t) = \left(-T + t - Te^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot u(t)$
$U_1(t) = u(t)$	$y_1(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot u(t)$
$U_3(t) = \int$	$y_3(t) = \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$

$$\frac{d}{dt} y_2(t) = \frac{d}{dt} \left[ -T + t - Te^{-\frac{t}{T}} \right] = \underbrace{1 - e^{-\frac{t}{T}}}_{\text{Risposta al gradino}}$$

$$\frac{d}{dt} y_1(t) = -\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

*Risposta all'impulso*

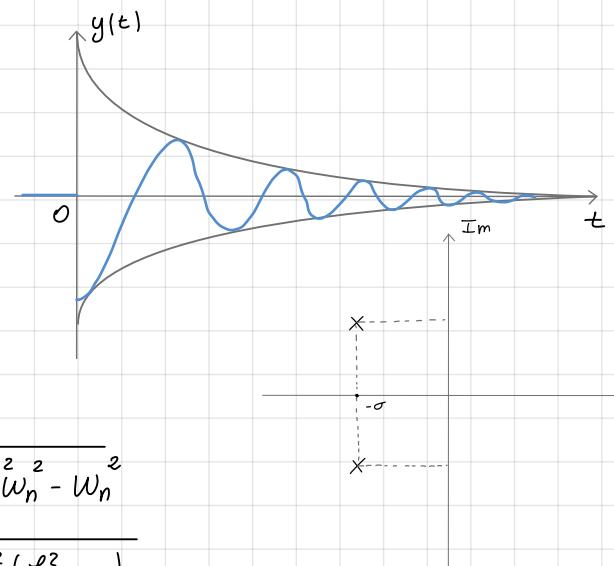
# RISPOSTA DEI SISTEMI DI II ORDINE

Vedi Lez 17

$0 < \zeta < 1$  SOTTO SMORZATO

$\Rightarrow$  Risposta transitoria OSCILLATORIA

Poli complessi e coniugati nel semipiano SX



$$\text{ES: } \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow p_{1,2} = -\omega_n \zeta \pm \sqrt{\zeta^2 \omega_n^2 - \omega_n^2}$$

$$= -\omega_n \zeta \pm \sqrt{\omega_n^2 (\zeta^2 - 1)}$$

$$= -\omega_n \zeta \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

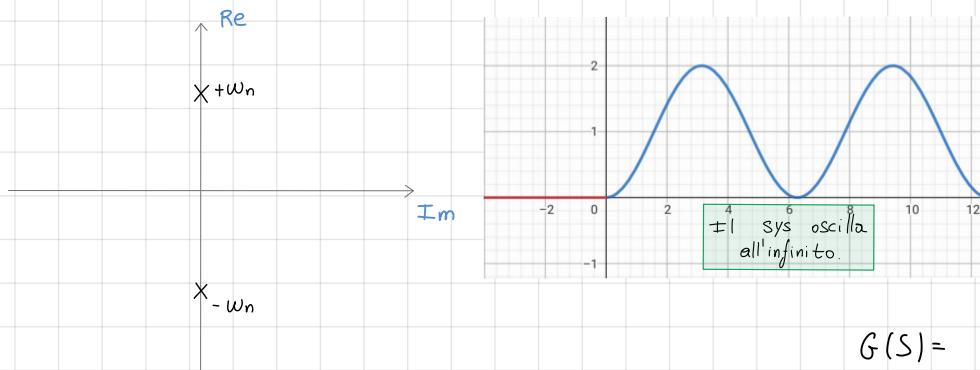
$$\text{Se } 0 < \zeta < 1 \Rightarrow \zeta^2 - 1 < 0 \neq \zeta / 0 < \zeta < 1 \Rightarrow p_{1,2} = -\omega_n \zeta \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Siccome i poli sono complessi e conj possiamo scrivere

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \text{Re}p)^2 + (\text{Im}p)^2$$

Frequenza naturale  
Smorzata  
 $\omega_d$

$\zeta = 0$  NON SMORZATO



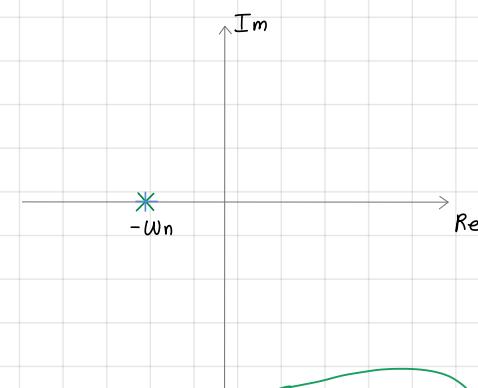
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \Rightarrow p_{1,2} = \pm j\omega_n$$

Quando abbiamo due poli complessi e coniugati a parte reale nulla

$\zeta = 1$  CRITICAMENTE SMORZATO



Quando abbiamo due poli reali COINCIDENTI  
o POLI DOPPI



ES:

$$G(s) = \frac{1}{(s + \omega_n)^2}$$

Risposta di un sys di 2° ordine ( $0 < f < 1$ )

### GRADINO

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2f\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{Se } 0 < f < 1 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = \sqrt{+\frac{b^2}{4} - ac} = \sqrt{(\omega_n)^2 - \omega_n^2} \\ = \omega_n \sqrt{f^2 - 1}$$

$$\text{Siccome } f < 1, \quad f^2 - 1 < 1 \quad \forall f \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = \omega_n \sqrt{1 - f^2}$$

$$\Rightarrow P_{1,2} = -f\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{f^2 - 1} \quad \text{pongo } \omega_d = \omega_n \sqrt{f^2 - 1} \Rightarrow P_{1,2} = -f\omega_n \pm j\omega_d$$

$$\underline{\text{Uscita}}: \quad y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2f\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\tau_1}{s} + \frac{\tau_2 + \tau_3 s}{s^2 + 2f\omega_n s + \omega_n^2}$$

### RESIDUI

$$\tau_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2f\omega_n s + \omega_n^2)} \Rightarrow \textcircled{1} \tau_1$$

$$y(s) = \frac{\tau_1(s^2 + 2f\omega_n s + \omega_n^2) + s(\tau_2 + \tau_3 s)}{s(s^2 + 2f\omega_n s + \omega_n^2)} \Rightarrow \begin{cases} s^2(\tau_1 + \tau_3) = 0 \\ s(2f\omega_n + \tau_2) = 0 \\ \tau_1 \omega_n^2 = \omega_n^2 \end{cases} \quad \text{QED}$$

$$\sim \Rightarrow \begin{cases} \tau_3 = -\tau_1 = 0 \\ \tau_2 = -2f\omega_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2f\omega_n + s}{s^2 + 2f\omega_n s + \omega_n^2}$$

\* Considero il denominatore complesso

- Termine quadratico

$$(s + f\omega_n)^2 = s^2 + 2f\omega_n s + (f\omega_n)^2 = s^2 + 2f\omega_n s + \omega_n^2 - (f\omega_n)^2$$

$$\Rightarrow s^2 + 2f\omega_n s + \omega_n^2 = (s + f\omega_n)^2 + \omega_n^2 - (f\omega_n)^2 = (s + f\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - f^2)$$

$$\text{Siccome } \omega_d = -j\omega_n \sqrt{1 - f^2} \Rightarrow \omega_d^2 = \omega_n^2(1 - f^2)$$

$$\Rightarrow s^2 + 2f\omega_n s + \omega_n^2 = (s + f\omega_n)^2 + \omega_d^2$$

## Antitrasformata

Usiamo la trasformata sli .

- $\frac{1}{s} \Leftrightarrow u(t)$
- $\sin(\omega t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
- $\cos(\omega t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

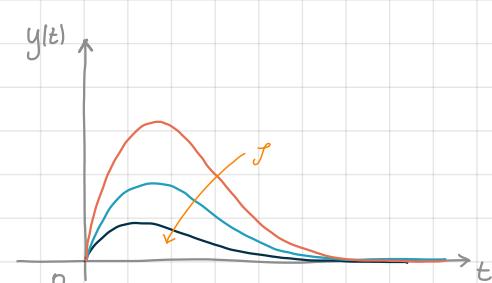
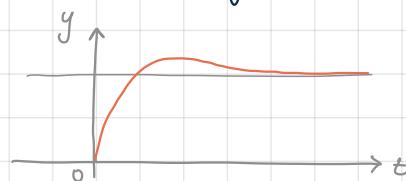
$$\Rightarrow y(s) = \frac{\zeta_1}{s} + \frac{\zeta_2 + \zeta_4 s}{(s + j\omega_n)^2 + \omega_d^2} = \frac{1}{s} - \frac{2j\omega_n + s}{s^2 + 2j\omega_n s + \omega^2} \\ = \frac{1}{s} - \frac{j\omega_n + s + j\omega_n - j\omega_n}{(s + j\omega_n)^2 + \omega_d^2} = \frac{1}{s} - \frac{j\omega_n}{\omega_d} \frac{1}{(s + j\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\omega_d}{(s + j\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

Sine  $e^{-j\omega_n t}$ 
Cos.  $e^{-j\omega_n t}$

$$\Rightarrow y(s) \Leftrightarrow y(t) = [1 - \cos(\omega_d t) \cdot e^{-j\omega_n t} - \frac{j\omega_n}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d t) \cdot e^{-j\omega_n t}] \cdot u(t)$$

## Considerazioni

- per  $0 < \zeta < 1$  SOTTO-SMORZATO  $\rightsquigarrow y(t) = y_s(t)$
- per  $\zeta = 0$  NON SMORZATO  $\rightsquigarrow y(t) = [1 - \cos(\omega_d t)] \cdot u(t)$  Non si smorza mai
- per  $\zeta = 1 \rightsquigarrow$  CRITICAMENTE SMORZATO  $\rightsquigarrow$  si deve fare da zero la tratta zione  
 $y(t) = [1 - e^{-\omega_n t} + \omega_n t e^{-\omega_n t}] u(t)$
- per  $\zeta > 1 \rightsquigarrow$  SOVRASMORZATO  $\rightsquigarrow \Delta = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$  con  $\zeta > 1 \Rightarrow \Delta > 0$   $\forall \zeta > 1$



$\Rightarrow$  Posso scrivere:  $s^2 + 2j\omega_n s + \omega_n^2 = (s - p_1)(s - p_2) \Rightarrow$  Abbiamo due esponenziali con  $T_1 \neq T_2$  per  $p_1 \neq p_2$

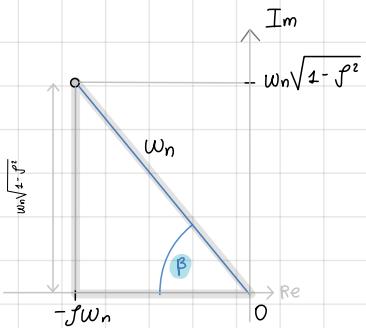
# CALCOLO DEI PARAMETRI DI UNA GENERICA RISPOSTA

## TEMPO DI SALITA - RISE TIME

$t_r$

Il tempo necessario affinché il segnale raggiunga per la *prima volta* il valore a regime.

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$



## TEMPO DI PICCO - PEAK TIME

Il tempo di picco è il tempo necessario affinché la risposta raggiunga il picco massimo, ovvero il massimo relativo alla massima sovraelongazione.

$t_p$

$$t_p = \frac{\pi c}{\omega_d}$$

{Se prendiamo come  $y(t)$  la (1)}

$$y(t_p) = 1 + e^{-\frac{\pi c}{\sqrt{1 - c^2}}}$$

## SOVRAELONGAZIONE MASSIMA

$M_p$

La sovraelongazione massima è un valore percentuale ed indica il valore del picco massimo della curva rispetto al valore a regime dell'uscita; è un indicatore della **stabilità del sistema**.

$$\text{Se } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - c^2} \quad \text{e} \quad \sigma = \omega_n c$$

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi c}{\sqrt{1 - c^2}}} \cdot 100$$

{Se prendiamo come  $y(t)$  la (1)}

$$M_p = e^{-\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right) \cdot \pi}$$

## TEMPO DI RITARDO - DELAY TIME

$t_d$

Il **tempo di ritardo** è il tempo necessario affinché la risposta possa raggiungere *per la prima volta* la metà del suo valore finale (valore a regime).

Quando è possibile rinominare due valori come Seno e Coseno

(1)  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

(2)  $0 \leq \sin(x) \leq 1$   
 $0 \leq \cos(x) \leq 1$

Se riusciamo a trovare due valori che rispettano sia la (1) che la (2) allora possiamo scriverli come  $\sin(\beta)$  e  $\cos(\beta)$

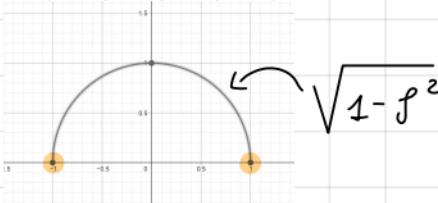
### ESEMPIO

Se  $0 < f < 1$  ed abbiamo  $f, \sqrt{1-f^2}$

- $f \rightarrow 0 < f < 1 \quad \checkmark$
- $\sqrt{1-f} \rightarrow 1-f \geq 0 \rightarrow f \leq 1 \quad \checkmark$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^2 + (\sqrt{1-f})^2 = f^2 + 1 - f^2 = 1 \\ \text{QED} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f = \cos(\beta), \sqrt{1-f^2} = \sin(\beta)$$



## TEMPO DI ASSESTAMENTO

$t_s$

E' il tempo necessario affinché la curva arrivi e resti all'interno di un intervallo intorno al valore finale dell'uscita  $y(t)$ .

Soltanente questo valore è in percentuale, circa il 2-3%

$$\text{con } \sigma = \omega_n \sqrt{f} \quad \Rightarrow \quad t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{4}{\sigma} = \frac{5}{\sigma}$$

↑      ↑      ↗  
5%    2%    1%

$$t_s = \frac{4}{\sigma \omega_n} = \frac{5}{\sigma \omega_n}$$

↑      ↑  
2%    <1%

## EVOLUZIONE LIBERA E FORZATA

Cosa accade se le condizioni iniziali NON sono nulle?

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = SF(S) - f(0) \quad \text{se } f(0) \neq 0, \text{ abbiamo una componente in più}'$$

→ l'evoluzione libero:

Prendiamo come esempio un 2YS in S.S.

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow S\bar{x}(S) - x(0) = A\bar{x}(S) + Bu(S)$$

Identità

$$\Rightarrow \text{isolo } x \rightarrow [S\bar{x}(S) - x(0)] = Bu(S) + x(0)$$

$$\Rightarrow A^{-1}A = I \Rightarrow \bar{x}(S) = (S\bar{x}(S) - x(0)) \underbrace{B^{-1}B}_{=I} U(S) + (S\bar{x}(S) - x(0)) \underbrace{A^{-1}}_{=I} x(0) = (S\bar{x}(S) - x(0)) [B^{-1}U(S) + x(0)]$$

$$\text{dalla (2)} \quad y(S) = C\bar{x}(S) + Du(S) = C(S\bar{x}(S) - x(0)) \underbrace{B^{-1}B}_{=I} U(S) + C(S\bar{x}(S) - x(0)) \underbrace{A^{-1}}_{=I} x(0) + Du(S)$$

$$= C(S\bar{x}(S) - x(0)) [B^{-1}U(S) + x(0)] + Du(S)$$

$$= \underbrace{[C(S\bar{x}(S) - x(0)) B^{-1} + D]}_{\text{Ev. Forzata}} U(S) + \underbrace{C(S\bar{x}(S) - x(0)) x(0)}_{\text{Evoluzione libero}}$$

Considerazioni

- Se  $x(0) = 0$  c'è solo evoluzione forzata.
- Se  $x(0) \neq 0 \rightarrow y(S) = [C(S\bar{x}(S) - x(0)) B^{-1} + D] U(S)$   
 $\Rightarrow$  per definizione  $C(S\bar{x}(S) - x(0)) B^{-1} + D = G(S)$

## RISPOSTA IN FREQUENZA

→ Se in ingresso ho una sinusoida di  $\omega = \omega_0$ , in uscitaarro' una sinusoida di  $\omega = \omega_0$  ma con Ampiezza e Fase generalmente diverse.

### DIMOSTRAZIONE

$$\text{Dato } U(t) = X \sin(\omega t) \Rightarrow U(s) = X \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\text{Posso trovare } Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{s+p_i} \quad \text{da } G(s)$$

I residui di  $G$  non mi servono perché sono del tipo  $y_n(t) = z_n \cdot e^{p_n t}$  e vanno a 0.

$$a = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s+j\omega) \cdot \frac{\omega X}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \cdot G(s) \rightarrow -\frac{\omega X}{2j\omega} G(-j\omega) \rightarrow -\frac{X}{2j} G(-j\omega)$$

non è influenzato dal  $\lim$

$$\bar{a} = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s-j\omega) \cdot \frac{\omega X}{(s+j\omega)(s-j\omega)} G(s) \rightarrow \frac{\omega X}{2j\omega} G(j\omega) \rightarrow +\frac{X}{2j} G(j\omega)$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = -\frac{X}{2j} G(-j\omega) e^{-j\omega t} + \frac{X}{2j} G(j\omega) e^{j\omega t}$$

$$= \frac{X}{2j} \left[ G(-j\omega) e^{-j\omega t} + G(j\omega) e^{j\omega t} \right]$$

Possiamo scrivere  $G(\pm j\omega)$  in termini di modulo e fase

$$\begin{cases} G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi} \\ G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\phi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = -\frac{X}{2j} \cdot |G(j\omega)| \cdot \left[ e^{-j\phi} e^{-j\omega t} + e^{j\phi} e^{j\omega t} \right] = -\frac{X}{2j} \cdot |G(j\omega)| \cdot \left[ \frac{e^{-j(\omega t+\phi)}}{e^{j(\omega t+\phi)}} \right]$$

$$= -X |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$* |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$* \angle z = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im } P}{\text{Re } P} \right)$$

$$\begin{cases} \angle \frac{z_1}{z_2} = \angle z_1 - \angle z_2 \\ \angle z_1 \cdot z_2 = \angle z_1 + \angle z_2 \end{cases}$$

Spiegaz. lez 20

# Moduli e fasi dei fattori notevoli

## Guadagno

$$G(s) = K \Rightarrow |G(j\omega)| = K$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K)$$

$$\angle G(j\omega) = \angle K = \alpha \tan\left(\frac{\omega}{K}\right) = 0^\circ$$

## INTEGRATORE

$$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{|j\omega|} = \omega^{-1} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(\omega^{-1}) = -20 \log(\omega)$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{\omega}\right) - \tan^{-1}(j\omega) = -90^\circ$$

Retta decrescente  
-20dB/dec

## INTEGRATORE + GAIN

$$G(s) = \frac{K}{j\omega} \Rightarrow |G(j\omega)| = |K| \cdot \frac{1}{|j\omega|} = \frac{K}{\omega} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log\left(\frac{K}{\omega}\right)$$

$$\text{per la proprietà ohm log: } |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(K) - \tan^{-1}(j\omega) = -90^\circ$$

## DERIVATIVO

la pendenza è  
sempre: 20 dB/dec

$$G(s) = KS \Rightarrow |G(j\omega)| = |Kj\omega| = KW \rightsquigarrow |G(j\omega)| = 20 \log(K \cdot \omega) \stackrel{!}{=} 20 \log(K) + 20 \log(\omega)$$

$$\angle G(j\omega) = \angle K + \angle j\omega = +90^\circ$$

## FATTORI DEL 1° ORDINE

e Diagrammi Asintotici

## POLO

$$G(s) = \frac{1}{1+sT} \rightsquigarrow |G(j\omega)| = \frac{|1|}{|1+j\omega T|} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(|1+j\omega T|^{-1}) \\ = -20 \log(|1+j\omega T|)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega T}{1}\right) = -\tan^{-1}(\omega T)$$

Asintoticamente

$w \ll \frac{1}{T}$

Punto di rottura:  $\omega_1 = \frac{1}{T} \Rightarrow \text{per } \omega \ll \frac{1}{T} \Rightarrow -20 \log(\sqrt{1+\omega^2 T^2}) = -20 \log(1) = 0 \text{ dB}$

$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega T \ll 1) \Rightarrow \text{"l'arco la cui tan è molto piccola"} = 0^\circ$

Per  $\omega \gg \frac{1}{T} \Rightarrow |G(j\omega)| = -20 \log(\omega T) \Rightarrow \text{lineare in log}$

$w \gg \frac{1}{T}$

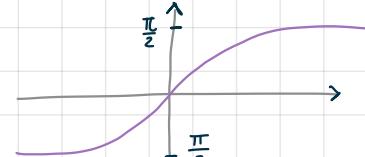
per  $\omega \gg \frac{1}{T} \Rightarrow -20 \log(\sqrt{1+(\omega T)^2}) \Rightarrow -20 \log(\omega T) \Rightarrow \text{lineare in log}$

per  $\omega \gg \frac{1}{T} \Rightarrow \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega T \gg 1) \Rightarrow -90^\circ$

## ZERO

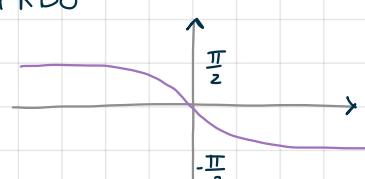
$$G(S) = 1 + ST \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(\sqrt{1 + (\omega T)^2}) \rightarrow \text{Pendente Positivo} +20 \text{ dB/dec}$$

$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(\omega T)$   $\rightarrow$  Anticipo di fase SE  $T > 0$   
Ritardo di fase SE  $T < 0$



$\Rightarrow$  Il modulo NON cambia;  $\begin{cases} \text{Se Lo zero e' < 0} \Rightarrow \text{ANTICIPO} \\ \text{Se Lo zero e' > 0} \Rightarrow \text{RITARDO} \end{cases}$

Inoltre per  $G(S) = 1 - ST \rightarrow \angle G(j\omega) = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(\omega T)$



## FATTORI DEL II° ORDINE

Del tipo:  $G(S) = \frac{1}{S^2 + 2j\omega_n S + \omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n^2 \left( \frac{1}{\omega_n^2} S^2 + \frac{2j\omega_n}{\omega_n} S + 1 \right)} = \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2} S^2 + \frac{2j\omega_n}{\omega_n} S + 1}$

Non considero  $K_p$

FASI:

Per  $\omega \rightarrow 0 \rightarrow \angle G(j\omega) = \angle \left( -\frac{1}{\omega_n^2 \cdot 0^2 + \frac{2j\omega_n}{\omega_n} \cdot 0 + 1} \right) \rightarrow \angle 1 = 0^\circ$

Per  $\omega \rightarrow \infty$

$\angle G(j\omega) = \angle \left( -\frac{\omega_n^2}{\omega^2} \right)$  ovvero è REALE

~~$\angle \left( -\frac{1}{\omega_n^2 \omega^2 + \frac{2j\omega_n}{\omega_n} \omega + 1} \right)$~~

Trasc.  
Trasc. (ordine inf.)

Se c'è un num. reale allora posso scriverlo come "K"; ed un qualsiasi num. può essere espresso come esponenziale mag. è  $e^{j\varphi}$

$$\rightarrow -K = K \cdot e^{\pm j\pi} = K \cdot [\cos(\pi) \pm j \sin(\pi)] = K \cdot (-1) = -K$$

$$\rightarrow -\frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega^2} \cdot e^{\pm j\pi} = \Theta 180^\circ$$

Per corr. si usa il meno.

## MODULI

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

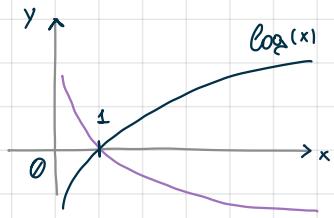
Per  $\omega$  ALTE,  $\omega \gg \omega_n \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2j\omega}{\omega_n}\right)^2} = -20 \log(\omega^2)$

$$\rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -40 \log(\omega) \quad -20 \text{ dB/dec}$$

Per  $\omega \ll \omega_n$ ,  $\omega \rightarrow 0 \rightarrow |G(j\omega)| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2j\omega}{\omega_n}\right)^2} = -20 \log(1) = 0 \text{ dB}$

Quanto vale il modulo in  $\omega = \omega_n$ ?

$$|G(j\omega)| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2j\omega}{\omega_n}\right)^2} = -20 \log \sqrt{(2j)^2} = -20 \log (2j)$$

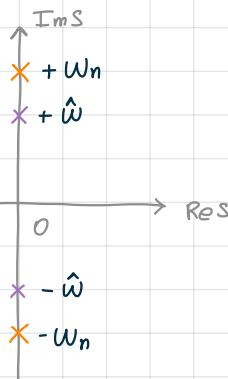


$\Rightarrow$  Per  $2j > 1$ ,  $|G(j\omega)|_{dB} > 0$  ovvero per  $j > \frac{1}{2}$



Siccome il diag asint. Era 0 fino ad  $w = \omega_n$ , mentre il mod reale è  $> 0$  per  $j < \frac{1}{2}$ , deve esserci un picco.

INFATTI ...



$$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2j}{\omega_n}s + 1} = \frac{1}{1 + \frac{j}{\omega_n}s}$$

$j=0$   
INST.

$$\Rightarrow P_{1,2} = \sqrt{-\omega_n^2} = \pm j\omega_n$$

$$y(t) = \sin(\hat{\omega}t) \Leftrightarrow y(s) = \frac{\hat{\omega}}{s^2 + \hat{\omega}^2} \Rightarrow P_{1,2} = \pm j\hat{\omega}$$

Se  $\omega_n = \hat{\omega}$   $\Rightarrow$  Il sistema è instabile!

PICCO DI RISONANZA

$$\text{Per trovare il max di } |G(j\omega)| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\text{basta trovare il min di } g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2j\omega}{\omega_n}\right)^2 \text{ ponendo } z = \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$\Rightarrow g(z) = (1-z)^2 + 4j^2z = 1 - 2z + z^2 + 4j^2z = z^2 + z(4j^2 - 2) + 1$$

$$\text{Max/min: } \frac{d}{dz} g(z) = 2z + 4j^2 - 2 = 2z + 4j^2 - 2 = 0 \text{ per } z = \frac{2 - 4j^2}{2} = 1 - 2j^2$$

$$\text{ma } z = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 - 2j^2 \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\omega_n^2(1 - 2j^2)} = \omega_n \sqrt{1 - 2j^2}$$

Pulsazione di risonanza

$$\text{DOMINIO} \quad 1 - 2j^2 \geq 0 \Rightarrow \text{per } j \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707 \quad \text{Per } j \leq 0.707 \text{ c'è RISONANZA}$$

MODULO DI RISONANZA

Basta calcolare  $|G(j\omega_r)|$  con  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2j^2}$

$$|G(j\omega_r)| = -20 \log 2j \sqrt{1 - j^2} \quad \text{e possiamo con rincerci che c'è un picco perché:}$$

$$\text{Per } j \rightarrow 0 : \lim_{j \rightarrow 0} |G(j\omega_r)| = -20 \log (2j \sqrt{1 - j^2}) \rightarrow -(-\infty) = +\infty$$

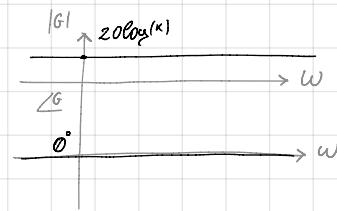
## RISPOSTA IN FREQUENZA

## PER DIAGRAMMI ASINTOTICI

$$y(t) = \omega \boxed{|G(j\omega)|} \cdot \sin(\omega t + \underline{\angle G(j\omega)}) \quad \text{con } U(t) = \boxed{\omega \sin(\omega t)}$$

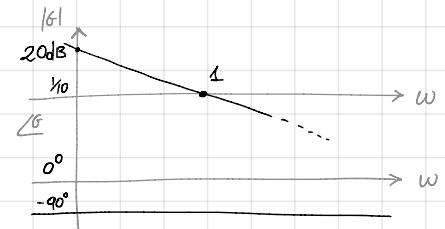
### GUADAGNO

$$G(s) = K \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) \\ \underline{\angle G(j\omega)} = \underline{\angle K} = 0^\circ \end{cases}$$



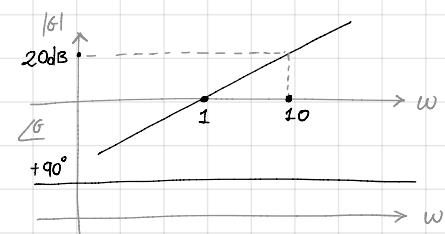
### Termini integratori

$$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log(\omega) \\ \underline{\angle G(j\omega)} = -\underline{\angle j\omega} = -\underline{\angle we^{\frac{j\pi}{2}}} = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ \end{cases}$$



### Termini Derivatori

$$G(s) = K \cdot s \quad |G(j\omega)| = 20 \log(K) + 20 \log(\omega) \\ \underline{\angle G(j\omega)} = \underline{\angle K \cdot \omega j} = \underline{\angle K \omega e^{\frac{j\pi}{2}}} = +\frac{\pi}{2} = +90^\circ$$



## FORMA "STANDARD" DELLA FDT PER DIAGRAMMI DI BODE

$$G(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=1}^n (1 + s T_i)}$$

Questa forma è estremamente importante perché ci permette di calcolare il valore iniziale del modulo con estrema facilità: ci basta calcolare  $G(0)$  e vedere immediatamente che il valore iniziale corrisponde al **guadagno statico k** che viene moltiplicato per il resto della fdt

### FATTORI DEL PRIMO ORDINE

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = -20 \log(|1 + j\omega T|) \\ \underline{\angle G(j\omega)} = -\tan^{-1}(WT) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Fase e Modulo} \\ \text{ESATTI} \end{array}$$

Punto di rottura:  $\bar{s} : 1 + sT = 0 \Rightarrow \bar{s} = -\frac{1}{T} \Rightarrow W_1 = \frac{1}{T}$

$$W_n = |\bar{s}_n|$$

### Diagrammi Asintotici

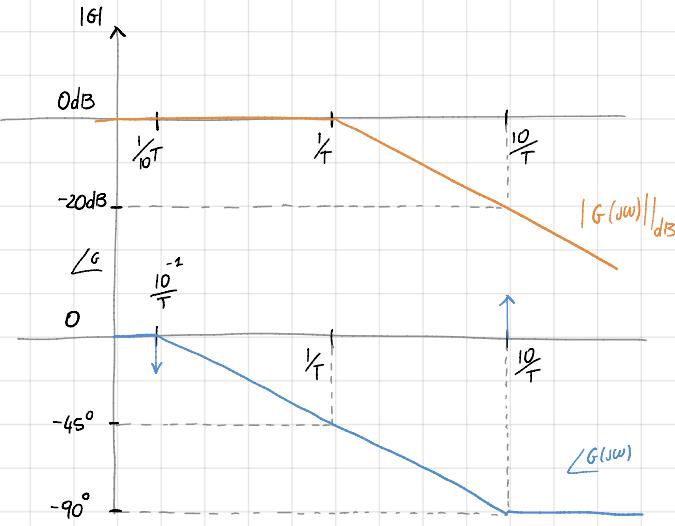
Per  $w$  molto grande  $\Rightarrow WT \gg 1 \Rightarrow w \gg \frac{1}{T} \Rightarrow |G(j\omega)| \rightarrow \sqrt{1 + (WT)^2} \rightarrow WT$

$$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log(WT) ; \quad \underline{\angle G(j\omega)} \approx \underline{\angle 1 + j\omega T} = -\tan^{-1}\left(\frac{WT}{1}\right) = -\tan^{-1}(WT)$$

Per  $W \gg -\tan^{-1}(\infty) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$

Per  $w$  molto piccolo  $\Rightarrow WT \ll 1 \Rightarrow |G(j\omega)| \rightarrow \sqrt{1}$

$$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log(1) = 0 ; \quad \underline{\angle G(j\omega)} \approx \underline{\angle 1} = 0^\circ$$



Ogni **polo** a segno negativo (o positivo) ha come effetto quello di:

- **Attenuare** il modulo a partire dal punto di rottura associato
- **Ritardare** la fase a partire da una decade prima del punto di rottura associato; nel punto di rottura si avrà un'anticipo di  $+45^\circ$ , mentre una decade dopo del punto di rottura associato si avrà un'anticipo di  $+90^\circ$ .

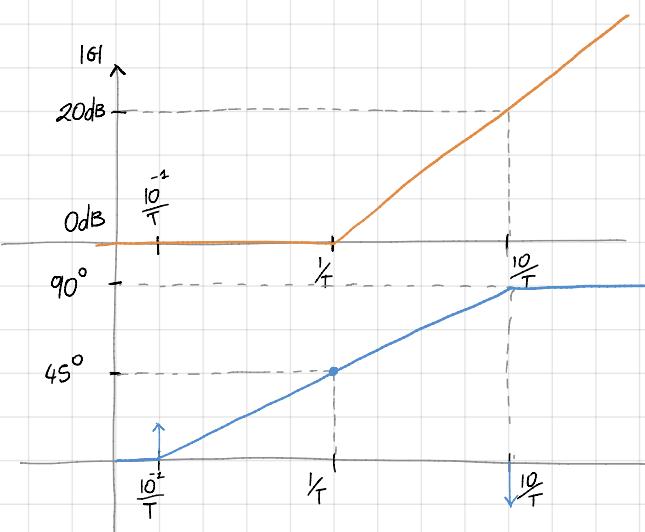
### Fattori Con uno zero

$$G(s) = 1 + ST \Rightarrow \begin{cases} |G(jw)|_{dB} = +20 \log(\sqrt{1+(wT)^2}) \\ \angle G(jw) = \angle 1 + \angle jwT = \tan^{-1}(wT) \end{cases}$$

*ESATTI*

$$\omega \rightarrow 0 \quad |G(jw)|_{dB} \stackrel{w \ll}{\approx} 20 \log(\sqrt{1}) = 0 ; \quad \angle G(jw) \stackrel{w \ll}{\approx} \tan^{-1}(\infty) \rightarrow 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad |G(jw)|_{dB} \stackrel{w \gg}{\approx} 20 \log(wT) ; \quad \angle G(jw) \stackrel{w \gg}{\approx} \tan^{-1}(0) = 0^\circ$$

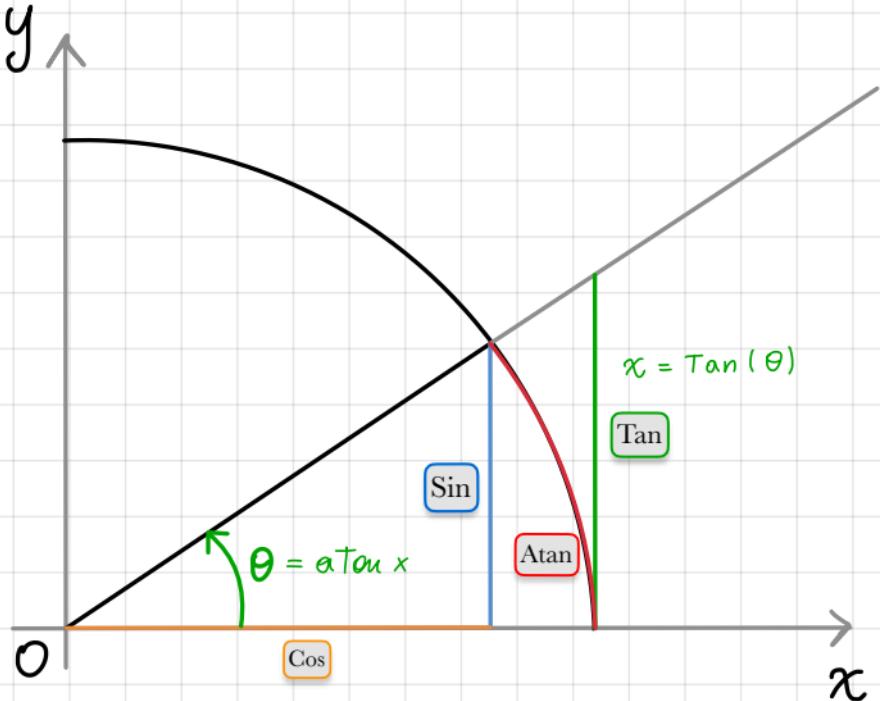


Ogni **zero** a segno negativo ha come effetto quello di:

- **Amplificare** il modulo a partire dal punto di rottura associato
- **Anticipare** la fase a partire da una decade prima del punto di rottura associato; nel punto di rottura si avrà un'anticipo di  $+45^\circ$ , mentre una decade dopo del punto di rottura associato si avrà un'anticipo di  $+90^\circ$ .

Quando si ha uno zero a ReP positiva, invece:

- Il modulo non è influenzato (viene sempre amplificato)
- La fase viene **ritardata**, proprio come se si avesse un **polo** invece di uno zero, nel punto di rottura.



Schema utile per calcolare i valori  
dell'arcotangente quando omega ha valori  
molto grandi o molto piccoli

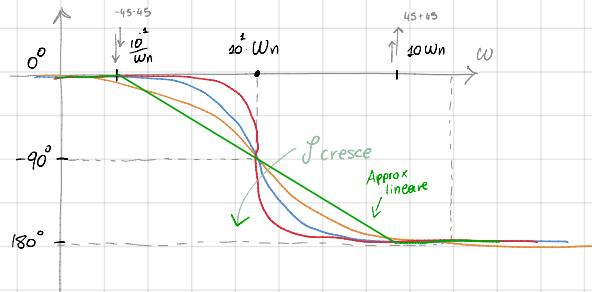
## FATTORI DEL II ORDINE

$$G(S) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} S + \frac{1}{\omega_n^2} S^2}$$

Valori iniziali e finali Delle fasi

FASE INIZIALE :  $0^\circ$

FASE FINALE :  $-180^\circ$



Valori iniziali e finali Dei Moduli

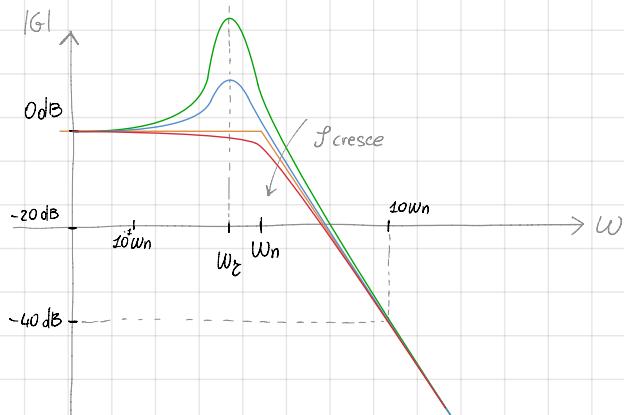
MODULO INIZIALE : 0dB → Dipende dal guadagno Statico

MODULO FINALE : -40 dB/dec dopo  $\omega_n$

Frequenza di Risonanza

In  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  Si potrebbe un fenomeno di Risonanza

Lo SE  $\zeta < 0.707$  Si ha risonanza



- $\mathcal{L}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$
- $t \Leftrightarrow \frac{1}{s^2}$
- $e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$
- $\frac{T}{sT+1} = \frac{\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T}} \Rightarrow e^{-\frac{t}{T}}$
- $K e^{\frac{-t}{\tau}} \cdot \mathcal{L}(t-\tau) = K \cdot \mathcal{L}(e^{\frac{-t}{\tau}}) \cdot e^{-\frac{\tau s}{\tau}} \Leftrightarrow K \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}} e^{-\frac{\tau s}{\tau}}$

BODE:

Complx (P)  $\begin{cases} \text{Mod} \rightarrow -40 \text{dB/dec} \\ \text{Fasi} \rightarrow -180 \text{dB/dec} \end{cases}$

Polo S.  $\begin{cases} \text{Re } P > 0 \text{ Fase} + 90^\circ \text{ TOT, mod: } +20 \text{dB/dec FIN} \\ \text{Re } P < 0 \text{ Fase} - 90^\circ \text{ TOT, mod: } -20 \text{dB/dec FIN} \end{cases}$

In  $\omega_n$ ; Trova  $\omega_n$  con

$$(s+\omega_n)^2 = s^2 + 2j\omega_n s + \omega_n^2 = \alpha s^2 + bs + c$$

$$\begin{cases} 2j\omega_n = b \\ \omega_n^2 = c \end{cases} \rightarrow \underline{\text{RISOLVI}}$$

Zero S.  $\rightarrow$  Fase:  $+90^\circ \text{ TOT}$ , Mod:  $+20 \text{dB/dec FIN}$ Zero/Polo ino

$\rightarrow$  Fase:  $\pm 90^\circ \text{ FISSA INIZIALE}$   
 $\rightarrow$  mod:  $\pm 20 \text{dB/dec INIZIALE}$

Retta Passa per  
 $P: 20 \log(\frac{K}{\bar{\omega}})$   
 $Z: 20 \log(K \cdot \bar{\omega})$   
\*  $\bar{\omega}$  Freq piu' bassa della Banda

Tempo

Per i residui usa la forma standard  
 $\rightarrow$  Sal denominatore stare sola