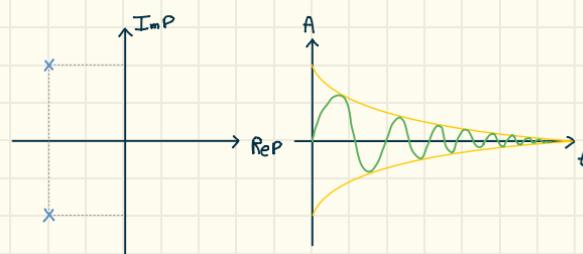
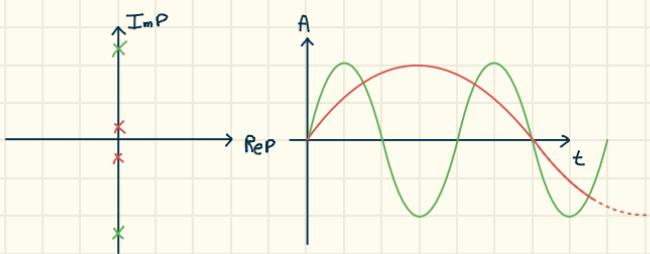
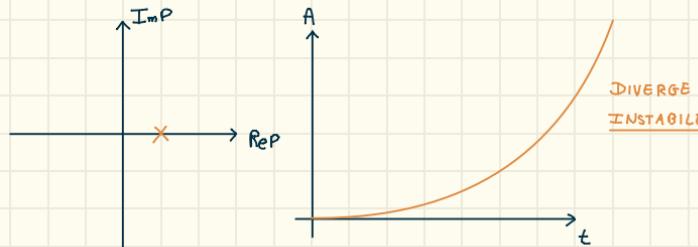
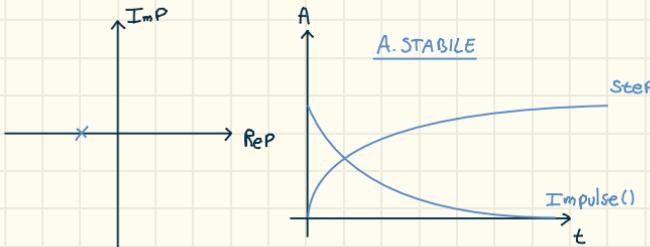
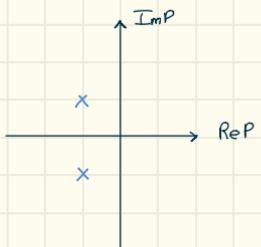


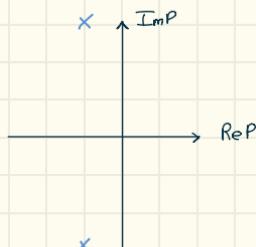
RECAP EFFETTO DEI POLI



Poca Sorraelongazione



Molta Sorraelongazione



FORMA "STANDARD" DELLA FDT PER DIAGRAMMI DI BODE

$$G(s) = \frac{K}{S} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=1}^n (1 + sT_i)}$$

Questa forma è estremamente importante perché ci permette di calcolare il valore iniziale del modulo con estrema facilità: ci basta calcolare $G(0)$ e vedere immediatamente che il valore iniziale corrisponde al **guadagno statico k** che viene moltiplicato per il resto della fdt

EVIDENZIA
IL GAIN STATICO

- 1) Rapporto tra polinomi
- 2) Rapporto tra produttorie di termini

Bisogna tenere presente che il grado del polinomio al numeratore **non deve mai essere superiore** a quello del denominatore, altrimenti il sistema non è fisicamente realizzabile.

$$\frac{\prod (s+z)}{\prod (s+r)}$$

$$G(s) = \frac{1/(T_1 T_2)}{(s+1/T_1)(s+1/T_2)}$$

$$\frac{\prod (1+sT)}{\prod (1+sC)}$$

$$\text{Se } G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

- POLI / ZERI
- Ponti di rottura (ω)
- GAIN ($s=0 \rightarrow K_p = 1$)
- COSTANTI DI TEMPO

NOTAZIONE ALTERNATIVA

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{P_n s^n + P_{n-1} s^{n-1} + \dots + P_1 s + P_0}{S^n + D_{n-1} S^{n-2} + \dots + D_1 S + D_0}$$

EVIDENZIO POLI E ZERI

I polinomi sono Monici, ovvero la S ha come coefficiente 1.

$$G(s) = \frac{\underset{\text{ZERI}}{P_i} T_i (s+z_i) \cdot \prod_i (s^2 + 2\xi_i d_{ni} s + d_{ni}^2)}{\underset{\text{POLI}}{S^2} \prod_i (s+p_i) \cdot \prod (s^2 + 2\xi_i w_i s + w_{ni}^2)}$$

TIPO DEL SISTEMA → $\begin{cases} \xi > 0 & \text{2 poli in O} \\ \xi = 0 & \text{0 poli in O} \\ \xi < 0 & \text{2 zeri in O} \end{cases}$

EVIDENZIO GUADAGNO E COSTANTI DI TEMPO

I polinomi hanno come termini noti "1"

Quando il sys è A. Stabile?

- Nessun polo in O ($\xi \leq 0$)
- Costanti di tempo positive ($T_i \geq 0, \forall T_i$)
- Coefficienti di Smorzamento positivi ($\xi_i \geq 0, \forall \xi_i$)

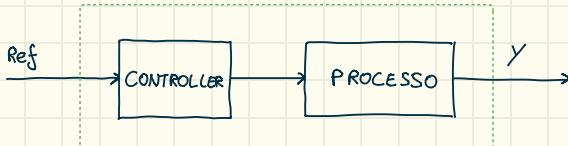
GUADAGNO GENERALIZZATO - STATICO SE A.S.

$$G(s) = \frac{M T_i (1 + \tau_i s) T_i (1 + \frac{2\xi_i}{d_{ni}} s + \frac{s^2}{d_{ni}^2})}{S^2 T_i (1 + T_i s) T_i (1 + \frac{2\xi_i}{w_{ni}} s + \frac{s^2}{w_{ni}^2})}$$

REGOLA DI CARTESIO

In un'equazione di secondo grado con delta positivo ad ogni permanenza di segno corrisponde una radice negativa, ad ogni variazione di segno corrisponde una radice positiva: se i segni dei coefficienti del polinomio caratteristico cambiano allora la fdt non è asintoticamente stabile.

OPEN LOOP - Anello Aperto



Un sistema in anello aperto ha il controllore che non ha in alcun modo come input l'uscita del sistema.

Alcuni esempi:

- **Tostapane**: il tostapane non è a conoscenza ne della temperatura del pane ne del fatto che esso sia tostato o meno. Esso riscalda per un determinato lasso di tempo ed infatti a volta il pane si brucia o non è abbastanza tostato.

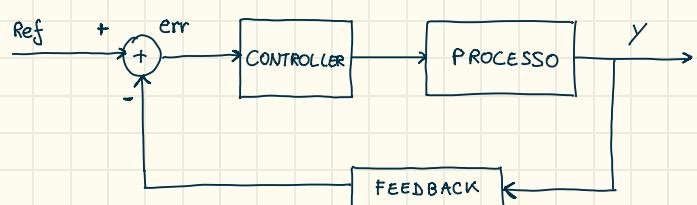
Vantaggi:

1. È economico perché il circuito è semplice
2. Semplice da costruire
3. È comodo da usare quando l'output è difficile da usare, e quindi non possiamo usarlo come feedback.

Svantaggi:

1. Non è robusta ai disturbi
- Non è affidabile

CLOSED LOOP - Anello Chiuso



Alcuni esempi:

- **Condizionatore**: il condizionatore monitora la temperatura dell'aria di continuo in modo da portare la temperatura della stanza alla temperatura desiderata.

Vantaggi:

- Buona accuratezza
- Molto affidabili

Svantaggi:

- Il design è complicato
- Sono costosi

FUNZIONI DI SENSITIVITÀ

!Sperimentale!

$$T_{\Sigma-dy}^1 = -T_{n-dy}^2 = F(S) = \frac{C(S)G(S)}{1 + C(S)G(S)}$$

(Rumore di misura e Rif)
SENSITIVITÀ COMPLEMENTARE

$$F(S) = \frac{N_L(s) \cdot D_H(s)}{D_L(s) \cdot D_H(s) + N_H(s) \cdot N_L(s)}$$

F(S) SE IL GAIN IN RETROAZIONE
NON È UNITARIO

$$T_{d-dy} = T_{\Sigma-de} = -T_{n-de} = T_{d-de} = S(S) = \frac{1}{1 + C(S)G(S)}$$

SENSITIVITÀ DIRETTA (Rumore di disturbo)

$$T_{\Sigma-dm} = -T_{n-m} = T_{d-dm} = Q(S) = \frac{C(S)}{1 + G(S)C(S)}$$

SENSITIVITÀ DI CONTROLLO

ERROTI A REGIME PERMANENTE

IN ANELLO APERTO

	$\underline{u}(t)$	$t \cdot \underline{u}(t)$	$\frac{t^2}{2} \cdot \underline{u}(t)$	
	e_p	e_v	e_a	
$\beta_0 \neq d_0$	$\left \frac{\beta_0 - d_0}{d_0} \right $	∞	∞	Dato
$\beta_0 = d_0, \beta_1 \neq d_1$	0	$\left \frac{\beta_1 - d_1}{d_0} \right $	∞	$G(S) = \frac{\beta_n s^n + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{d_n s^n + \dots + d_1 s + d_0}$
$\beta_0 = d_0, \beta_1 = d_1, \beta_2 \neq d_2$	0	0	$\left \frac{\beta_2 - d_2}{d_0} \right $	
$\beta_0 = d_0, \beta_1 = d_1, \beta_2 = d_2$	0	0	0	SEMPRE d_0 AL DEN

Bisogna tenere presente che gli errori finiti calcolati sono in percentuale rispetto al guadagno del segnale in ingresso.

ERROTI A REGIME PERMANENTE

CON Retroazione Unitaria

Pg 225

	$\underline{u}(t)$	$t \cdot \underline{u}(t)$	$\frac{t^2}{2} \cdot \underline{u}(t)$	
	e_p	e_v	e_a	
$\alpha = 0$	$\propto 1$	$\left \frac{1}{1 + \mu_p} \right $	∞	• 0 Azioni integrali $\Rightarrow \alpha = 0$
$\alpha = 1$	$\propto \frac{1}{s}$	0	$\left \frac{1}{\mu_v} \right $	• 1 Azione integrale $\Rightarrow \alpha = 1$
$\alpha = 2$	$\propto \frac{1}{s^2}$	0	0	$\left \frac{1}{\mu_a} \right $ • 2 Azioni integrali $\Rightarrow \alpha = 2$
$\alpha = 3$	$\propto \frac{1}{s^3}$	0	0	• 3 Azioni integrali $\Rightarrow \alpha = 3$

Principio del modello interno
Per seguire perfettamente un segnale (a regime) polinomiale dobbiamo (è sufficiente) inserire (nella funzione di anello o nel controllore) la trasformata di Laplace del segnale che vogliamo inseguire.

Questo soddisfa le specifiche statiche, ovvero a regime.

Dovremmo poter soddisfare poi delle specifiche dinamiche, ovvero durante il transitorio, e quindi non ci basta più questo requisito.

È detto del modello interno perché all'interno del controllore dobbiamo avere il modello del segnale che vogliamo seguire; ad esempio se vogliamo seguire una rampa, che ha come trasformata di Laplace ($1/s$), ci basta avere un'azione integrale, ovvero proprio $1/s$.

Calcolo guadagno L(S)

$$\mu_p = \lim_{S \rightarrow 0} L(S) = \lim_{S \rightarrow 0} G(S) \cdot C(S) \longrightarrow e_{ss} [\underline{u}(t)] = \frac{1}{1 + \mu_p}$$

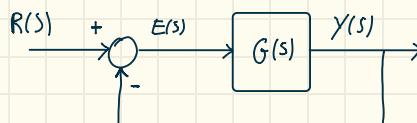
$$\mu = \lim_{S \rightarrow 0} S^\alpha \cdot G(S)$$

$$\mu_v = \lim_{S \rightarrow 0} S \cdot L(S) = \lim_{S \rightarrow 0} S \cdot G(S) \cdot C(S) \longrightarrow e_{ss} [t \cdot \underline{u}(t)] = \frac{1}{\mu_v}$$

$$\mu_a = \lim_{S \rightarrow 0} S^2 \cdot L(S) = \lim_{S \rightarrow 0} S^2 \cdot G(S) \cdot C(S) \longrightarrow e_{ss} [t^2 \cdot \underline{u}(t)] = \frac{1}{\mu_a}$$

$$\mathcal{L} [R_0 \cdot t^n \cdot \underline{u}(t)] = \frac{R_0 \cdot n!}{t^{n+1}}$$

Errore a regime per ingresso sinusoidale



$$\text{Se } \dot{\epsilon}(t) = R_0 \sin(\omega t) \Leftrightarrow R(s) = \frac{W R_0}{s^2 + \omega^2} \rightarrow \bar{s}_{1,2} = \pm j\omega$$

Poli del Riferimento

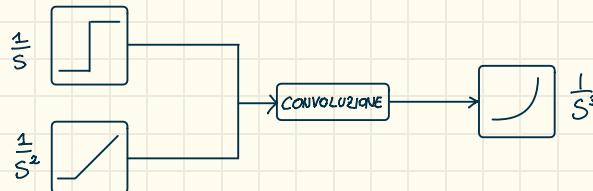
Per il principio del modello interno che ci dice l'errore a regime è nullo solo se i poli della trasformata del riferimento (R) sono anche i poli della funzione di trasferimento $G(s)$ del guadagno di anello (ovvero quella funzione che riassume il cammino compreso tra somma ed uscita n.d.s.)

\Rightarrow

Se $G(s)$ ha due poli sull'asse imm (ReP=0) esattamente a $\pm\omega$ allora possono avere esso = 0

PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA

La trasformata di Laplace della convoluzione nel tempo è uguale al prodotto delle trasformate di Laplace nel dominio della s.



PARTE II: DIAGRAMMI POLARI E DI NYQUIST

FASE IN PRESENZA DI RITARDO

$$\text{Fase totale } \varphi_{\text{tot}} = \varphi_{\text{pd}} + \varphi_{\text{td}} + \varphi_z + \varphi_{\text{int}} + \varphi_{\text{deriv}} = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{pk}}}\right) - t_0 \cdot \omega \cdot \frac{180}{\pi} \quad \begin{array}{l} \text{Polo} \\ \text{ReP<0} \end{array}$$

$$+ \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ex}}}\right) + 90^\circ - 90^\circ \quad \begin{array}{l} \text{eventuale} \\ \text{Zero ReP<0} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{eventuale} \\ \text{Zero in 0} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{eventuale} \\ \text{Polo in 0} \end{array}$$

Modulo Ritardo
Il modulo non è influenzato dal ritardo temporale

$$\begin{cases} \varphi = -t_0 \cdot \omega \text{ [rad]} \\ \varphi = -t_0 \cdot \omega \cdot \frac{180}{\pi} \text{ [gradi]} \end{cases}$$

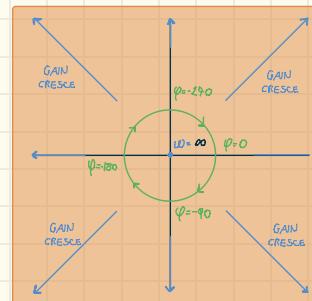
TABELLA RIASSUNTIVA

	PUNTO INIZIALE		CONTRIBUTO		* V.N. Valore
	MODULO	FASE	MODULO	FASE	Noturale
POLI IN ORIGINE	-20 dB/dec	-90°C · n Poli COSTANTE	0 dB ≡ 1 (V.N.)	0°	
ZERI IN ORIGINE	+20 dB/dec	+90°C · n zeri COSTANTE	0 dB ≡ 1 (V.N.)	0°	
Polì semplici ReP<0	$K_S \rightarrow 0$ (V.N.)	0°	-20dB · n Poli semplici	-90°C · n Poli semplici	$dB = 20 \log_{10} (V.N.)$
Zeri semplici ReP<0	$K_S \rightarrow 0$ (V.N.)	0°	+20dB · n Poli semplici	+90°C · n zeri semplici	$V.N. = 10^{\frac{dB}{20}}$
Ritardo Puro	$K_S \rightarrow K_S$	0°	0	+∞	

INIZIO dipende dal TIPO del sistema (da g)

ANGOLO

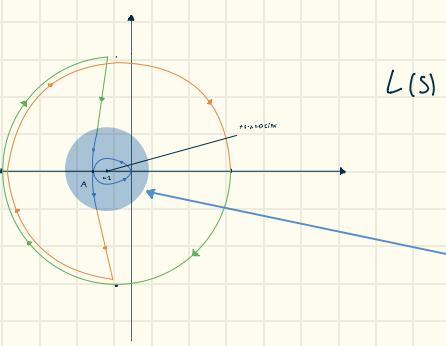
FINE dipende dall'ORDINE del sistema (somma g e p)



Omega cresce in tutte le direzioni partendo dall'esterno (dove vale zero) andando verso l'interno (dove vale infinito).

Per rappresentare guadagno=inf disegniamo una linea parallela all'asse corrispondente alla fase relativa.

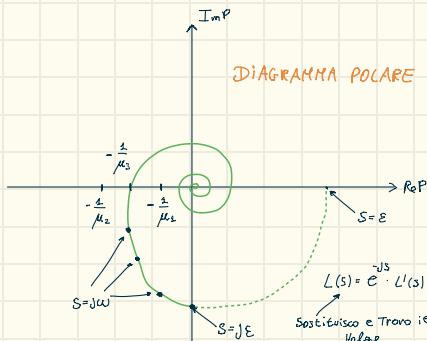
Sistemi & Stabilità condizionata



$$L(s) = \frac{(s+z)^2}{s^3}$$

Se $\varepsilon = 0.8$, allora il tratto in blu corrisponde ai diagrammi di Bode per 0.8 rad/s in poi

Studiare Asintotica stabilità con Ritardo con Nyquist



Come trovare il punto di intersezione con l'asse reale di un diagramma di Nyquist che spiraleggia?

Ci è comodo sapere il punto di intersezione per capire se ci sono o meno circondamenti del punto -1/mu

$$\begin{aligned} & j \frac{\pi}{2} \\ & j = e \end{aligned}$$

$$P_1 = \frac{1}{j\omega_0} e^{-j\omega_0\tau} = -\frac{j}{\omega_0} e^{-j\omega_0\tau} \Big|_{\substack{-j\omega_0\tau \\ \frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{\omega_0} e^{-j\omega_0\tau} \cdot e^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega_0} e^{\frac{\pi}{2} + j\omega_0\tau} \quad \text{FASE}$$

Siccome avremo un punto del tipo

$$\Rightarrow \angle P_1 = \angle \left(\frac{1}{j\omega_0} e^{-j\omega_0\tau} \right) = -\frac{\pi}{2} - \omega_0\tau = -\pi \quad \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{\pi}{2\tau} \quad \text{Dipende solo da } \tau$$

Vogliamo che la fase del punto sia $-180^\circ = -\pi$

→ Calcolo il modulo, fissato ω_0 e τ → ho $M_{P_1} e^{-j\angle P_1}$ → so dove passa il diagramma (M_{P_1})

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2\tau} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{e^{-j\omega_0\tau}}{j\omega_0} \right| = \left| \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{\frac{\pi}{2\tau}}} \right| = \left| \frac{2\tau}{\pi} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \right| = \frac{2\tau}{\pi} e^{-j\pi} \quad \text{Angolo di } -180^\circ$$

Trovato il modulo, dobbiamo ricordare che il vettore ha una fase di -180° , quindi si trova sull'asse reale negativo. Per garantire l'asintotica stabilità il modulo deve essere minore di 1 (ragioniamo sul modulo).

$$M_{P_1} < 1 \rightarrow \frac{2\tau}{\pi} < 1 \rightarrow \tau < \frac{\pi}{2} \quad \text{A.S.}$$

Ovvvero per un ritardo inferiore a 1.57s il sys è asintoticamente stabile

È per questo motivo che si dice che il ritardo destabilizza il sistema, perché esiste un ritardo temporale associato ad un guadagno di anello sufficientemente grande tale da includere il punto -1 nel diagramma di Nyquist (circondamenti) che destabilizza il sistema.

Esempio domanda esame: cosa dovrei fare per determinare il ritardo massimo prima che il sistema si destabilizzi?

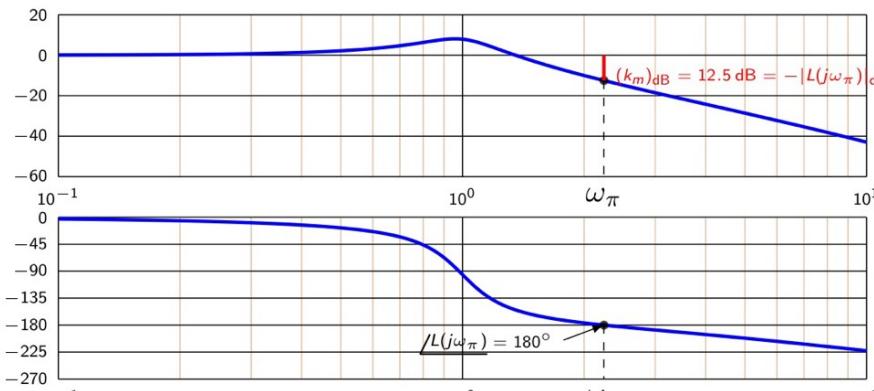
1. Verificare che a ciclo chiuso e senza ritardo ci sia l'asintotica stabilità tramite diagramma di Nyquist di $L(s)$
2. Introdurre il ritardo nel diagramma iniziale (spirale che sfasa i punti lasciando il modulo inalterato)
3. Trovare il valore della frequenza corrispondente ad una fase di -180° , sapendo che ha una forma del tipo:
4. Trovata la frequenza ci basta trovare il modulo corrispondente e poi impostare delle condizioni su di esso per trovare il valore di tau che destabilizza il sistema.

$$P_1 = \frac{1}{j\omega_0} e^{-j\omega_0\tau}$$

$$\angle P_1 = -180^\circ = -\pi$$

Calcolare i margini di Stabilità dal diagramma di Bode

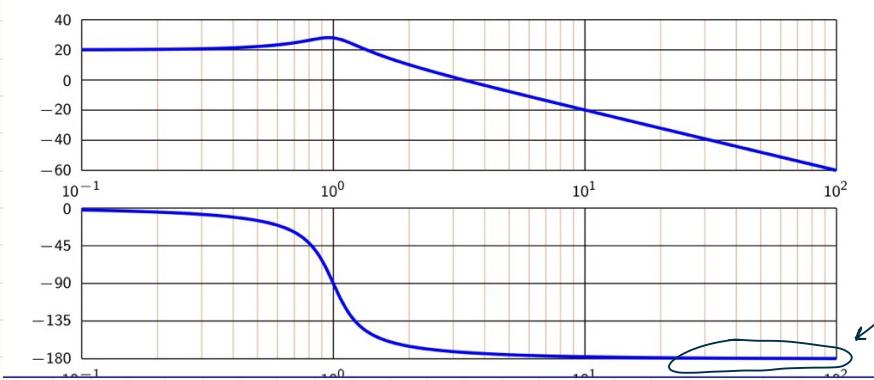
Margine di ampiezza



Controllo sul diagramma di bode delle fasi la pulsazione corrispondente ad uno sfasamento di -180° . Sulla stessa pulsazione ma nel diagramma dei moduli controllo quindi la differenza tra un valore di 0dB (ovvero valore naturale 1) ed il valore in dB effettivo. Questa differenza è il margine di ampiezza.

N.B. Il margine di ampiezza sarà qualcosa del tipo 0dB - (xdB), quindi se xdB è un valore positivo, anche il margine sarà positivo. E se otteniamo un margine di ampiezza positivo vuol dire che per ottenere l'asintotica stabilità **dobbiamo attenuare** di almeno $20 \cdot \log(xdB)$ (il valore naturale sarà compreso tra 0 e 1).

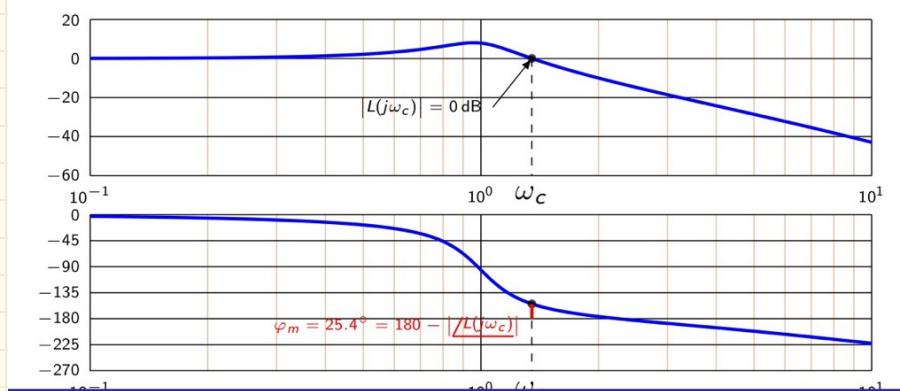
Se invece otteniamo un valore positivo (xdB è negativo) allora vuol dire che per non perdere l'asintotica stabilità **possiamo amplificare un massimo di $20 \cdot \log(xdB)$** .



Margine di ampiezza infinito

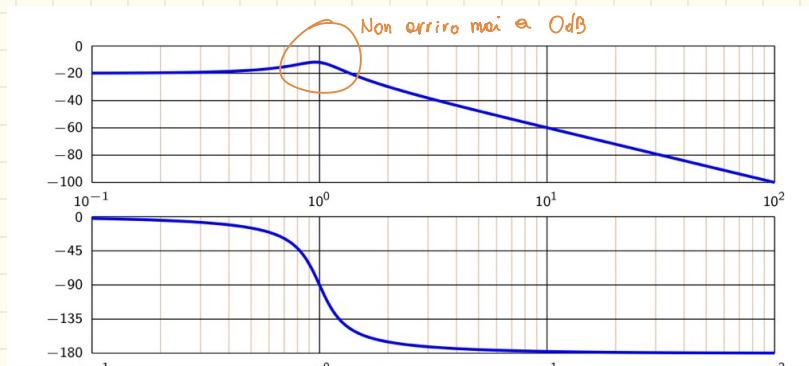
Siccome arrivo ad una fase di -180° solo in maniera asintotica (quindi ad infinito) ed il modulo tende a $-\infty$ per $\omega \rightarrow \infty$, allora il margine di ampiezza sarà $180^\circ + \infty = \infty$

Margine di fase



In questo caso controlliamo il valore di ω_c corrispondente ad un modulo di ampiezza 0dB, ovvero 1 in valore naturale. Controlliamo quindi la differenza di fase tra un valore di -180° ed il valore della fase effettiva. Quello sarà il valore del margine di fase.

Anche in questo caso se abbiamo un margine di fase positivo, e quindi la fase effettiva si trova al di sotto di -180° (ad esempio -200° per la pulsazione ω_c), vuol dire che per avere l'asintotica stabilità **dobbiamo anticipare il sistema**.



Margine di fase infinito

Siccome non arrivo mai ad un modulo di 0dB e soprattutto siamo al di sotto di 0dB, vuol dire che tutto il diagramma di Nyquist è contenuto all'interno della circonferenza di raggio unitario. Qualsiasi sfasamento non porta mai al l'asintotica instabilità.

CRITERIO DI BODE

* Quando moltiplichiamo per un gain = 10 siamo traslando verso l'alto il diagramma dei moduli di 20dB.
 $g=100 \rightarrow 40\text{dB}$ $g=1000 \rightarrow 60\text{dB}$

$$\text{RAD} \cdot \frac{\pi}{180} = \text{DEG}$$

PROGETTO IN FREQUENZA

Margine di fase

Se il margine di fase è maggiore di 75° (perché dopo questo valore il margine calcolato con l'eq3 non è più fedele) allora la funzione di trasferimento ha un polo reale dominante con costante di tempo pari a circa $1/W_c$ (pulsazione di attraversamento).

Se invece il margine di fase è compreso tra 0 e 75° allora la funzione di trasf ha una coppia di poli complessi e coniugati; possiamo calcolare pulsazione naturale ($W_n=W_c$) e coefficiente di smorzamento, che sarà circa uguale al margine di fase diviso 100 (come visto nella eq3).

$\varphi_m < 75^\circ \Rightarrow 1 \text{ POLO DOMINANTE}$
 Con $\tau \approx \frac{1}{W_c}$

$0 < \varphi_m < 75^\circ \Rightarrow 2 \text{ poli complessi e conj}$
 Con $\begin{cases} W_n \approx W_c \\ \xi \approx \frac{\varphi_m}{100} \end{cases}$

Pulsazione critica

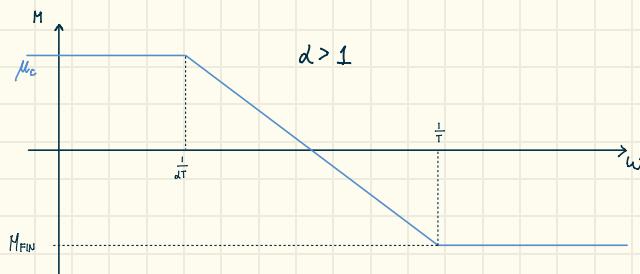
La funzione di trasferimento ha una banda passante ben approssimata dalla pulsazione critica W_c (di attraversamento). Se il margine di fase è troppo piccolo la fdt ha un picco di risonanza elevato e l'approssimazione sulla banda passante diventa sempre meno accurata: minore è il coefficiente di smorzamento, maggiore sarà la distanza tra W_c e la frequenza del picco di risonanza.

RETE STABILIZZATRICE DEL 1° ORDINE

$$C(s) = \mu_c \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} \quad \text{con } T > 0, \alpha > 0$$

$$M_{\text{FIN}} = 20 \cdot \log(d) = (\alpha)_{\text{dB}}$$

Pendenza Decadi



Se $\alpha \begin{cases} > 1 & \text{RITARDATRICE} \\ < 1 & \text{ANTICIPATRICE} \end{cases}$

* da rete ritardatrice può fare perdere 6° di fase, quindi li aggiornano alla fase richiesta dalla traccia. Es: $\varphi_m = 60^\circ \Rightarrow \bar{\varphi} = 60^\circ + 6^\circ = 66^\circ$

PARTE III LUOGO DELLE RADICI

$\int \frac{\pi(s+z)}{\pi(s+p)}$ * Metto in evidenza il coefficiente del grado Max

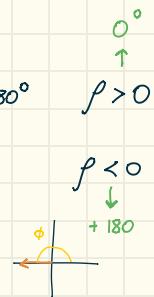
CONDIZIONI GENERALI

CONDIZIONI SUL MODULO

$$\frac{|N(s^*)|}{|D(s^*)|} = \frac{1}{|\rho|} \quad \text{con } \rho \in \mathbb{R} \quad s^* \in \mathbb{C}$$

CONDIZIONI SULLA FASE

$$\angle N(s^*) - \angle D(s^*) = \frac{-1}{180^\circ} - \frac{1}{\rho} \rightarrow \begin{cases} (2k+1)180^\circ & \rho > 0 \\ 2k \cdot 180^\circ & \rho < 0 \end{cases}$$



REGOLE DI TRACCIATURA

REGOLA DEI RAMI

Il luogo delle radici è composto da 2^n rami:

- "n" perché n è il grado del polinomio al denominatore, e quindi il numero dei poli.
- "2" perché abbiamo n rami per il luogo diretto ($\rho > 0$) ed n per il luogo inverso ($\rho < 0$).

REGOLA DELLA SIMMETRIA

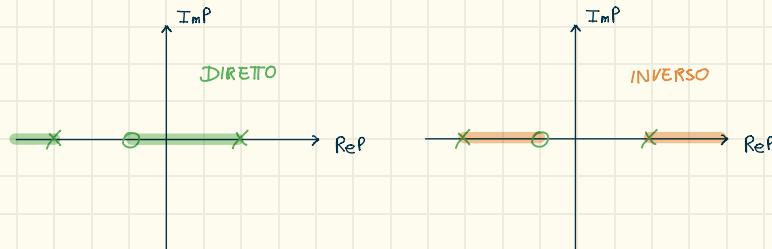
Essendo l'equazione caratteristica a coefficienti reali, abbiamo delle radici complesse e coniugate. Di conseguenza abbiamo che il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

REGOLA DELL'ASSE REALE

Tutti i punti dell'asse reale (ad esclusione di poli e zeri di L(s)) fanno parte del luogo.

A dx del luogo c'è un numero di molteplicità ...

PARI \Rightarrow Luogo INVERSO
DISPARI \Rightarrow Luogo DIRETTO



REGOLA DEL PUNTO DI ORIGINE DEI RAMI

I rami partono dagli n poli a ciclo aperto

Quando ρ tende a zero, i poli del sistema a ciclo aperto coincidono con quelli a ciclo chiuso

REGOLA DEL PUNTI DI ARRIVO DEI RAMI

$$v = n - m \quad \text{con } n > m$$

ZERI

I rami del lungo "arrivano" negli m zeri di L(s) (ciclo aperto) ed i restanti $n-m$ rami (abbiamo sempre funzioni strettamente proprie con $n>m$) vanno ad infinito.

REGOLA DEGLI ASINTOTI

Arremo sempre v asintoti CENTRATI IN:

$$x_a = \frac{1}{v} \left[\sum_i \text{POLI} - \sum_i \text{ZERI} \right]$$

! ATENZIONE !

E' la somma dei poli p_i e zeri z_i
NON la loro cardinalità!

E CON ANGOLI RISPETTO ALL'ASSE REALE DI:

$$\phi = \begin{cases} \frac{(2k+1) \cdot 180^\circ}{v} & \text{con } k = 0, 1, \dots, v-1 \\ \frac{2k \cdot 180^\circ}{v} & \text{con } k = 0, 1, \dots, v-1 \end{cases}$$

con $\rho > 0$

LUOGO DIRETTO

con $\rho < 0$

LUOGO INVERSO

REGOLA DEL BARICENTRO

Quando il grado relativo n_i è almeno due ($n_i \geq 2$) il baricentro del luogo non dipende da valori di ρ ma coincide con il baricentro dei poli a ciclo aperto. Per calcolare il baricentro basta fare la media dei poli.

$$X_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-P_i)$$

Il centroide coincide con il baricentro

Utilizzo: La usiamo quando dobbiamo conoscere il valore di un polo conoscendo la somma totale dei poli.
Esempio: ho 3 poli: 2 complessi Conj ed uno Reale. Quando quelli complessi hanno $\operatorname{Re}P=0$, quanto vale il 3rd polo?

Sommo: $\sum_{i=1}^n P_i = P_1 + P_2 + P_3 = X_0 = -11$ $\begin{cases} X_1 = -1.8 + j\varphi \\ X_2 = -1.8 - j\varphi \end{cases}$ $\rightarrow -1.8 + j\varphi - 1.8 - j\varphi + X_3 = -11 \rightarrow X_3 = -11 + 3 \cdot 6 = -7.4$

Valore del 3rd polo quando

A cosa ci serve?: Trovare il valore di un 3rd polo ci serve a trovare il valore della costante di trasferimento P , visto che è comune a tutti i poli, possiamo usare il valore di s^* ricavato da uno qualsiasi dei poli per calcolare P :

$$\bar{P} = \left| \frac{D(X_3)}{N(X_3)} \right| = \text{condizione sul modulo}$$

$X_3 = 7.4$

REGOLA DEI PUNTI MULTIPLI

PUNTO DI INCONTRO PER ASINTOTI

$$f(x) = -\frac{D(x)}{N(x)} \quad \rightarrow \text{Trovo Max e Min di } f(x) \quad \rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)) > 0$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{D'N - DN'}{N^2} > 0 \quad \text{I punti multipli devono necessariamente annullare } f'(x) \text{ (condizione NECESSARIA).}$$

Se il punto multiplo si trova sull'asse reale ($\operatorname{Im}P=0$) la cond. è anche sufficiente

Luogo Diretto
 MASSIMO \Rightarrow Break Away
 MINIMO \Rightarrow Break In

Luogo inverso
 MASSIMO \Rightarrow Break In
 MINIMO \Rightarrow Break Away

Attenzione!

Potremmo avere più break in e break away: ad esempio un break away, poi i punti si ricongiungono, camminano sull'asse reale e poi c'è un break away fino ad avere un asintoto. Quindi non è detto che dopo un break-away i poli vadano direttamente lungo l'asintoto ad infinito!

Questo potrebbe accadere quando $\gamma(x)$ è ad esempio una cubica con 3 radici reali.

* Nel luogo DI \pm dobbiamo considerare solo le soluzioni REALI per i punti di BI e BA.

Nel caso di poli complessi

$$N(s^*) \cdot \left| \frac{dD(s)}{ds} \Big|_{s=s^*} - D(s) \cdot \frac{dN(s)}{ds} \Big|_{s=s^*} \right| = 0$$

REGOLA DEGLI ANGOLI DI PARTENZA

(dalla lezione 22) * Dim 9:00

$$\alpha_{j,k} = \begin{cases} \frac{(2k+1) \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{i \neq j} \psi_i}{h_j} & \text{con } k = 0, 1, \dots, h_j - 1 \text{ e } \rho > 0 \\ \frac{2k \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{i \neq j} \psi_i}{h_j} & \text{con } k = 0, 1, \dots, h_j - 1 \text{ e } \rho < 0 \end{cases}$$

FASI

REGOLA DEGLI ANGOLI DI ARRIVO

$$\alpha_{j,k} = \begin{cases} \frac{(2k+1) \cdot 180^\circ - \sum_{i \neq j} \theta_i + \sum_{i=1}^n \psi_i}{h_j} & \text{con } k = 0, 1, \dots, h_j - 1 \text{ e } \rho > 0 \\ \frac{2k \cdot 180^\circ - \sum_{i \neq j} \theta_i + \sum_{i=1}^n \psi_i}{h_j} & \text{con } k = 0, 1, \dots, h_j - 1 \text{ e } \rho < 0 \end{cases}$$

SINTESI DI CONTROLLI MEDIANTE IL POSIZIONAMENTO DEI POLI

Tramite il luogo delle radici possiamo migliorare la nostra "sintesi per tentativi" visto che possiamo farci un'idea del posizionamento dei poli a ciclo chiuso. Possiamo quindi soddisfare l'asintotica stabilità dei poli a ciclo chiuso e possiamo soddisfare anche delle **specifiche dinamiche** come la sovraelongazione, tempo di assestamento e tempo di salita:

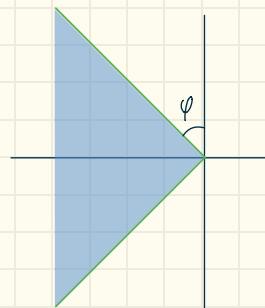
Sovraelongazione

Solo quando NON abbiamo zeri e con due poli complessi e congi

$$S_x = 100e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq \bar{S}_x$$

Specifiche da rispettare

$\Rightarrow \xi \geq \bar{\xi}$ ← Coefficiente di smorzamento che ci determina una certa sovrael.

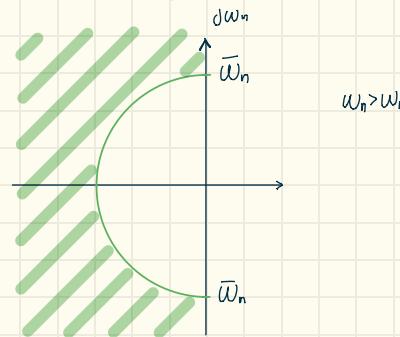


$$\xi = \sin(\varphi) \Rightarrow \varphi = \arcsin(\xi)$$

Se voglio $\bar{x} > \bar{\xi}$ i poli vanno posizionati nella regione evidenziata

Tempo di Salita

$$T_S \approx \frac{1.8}{\bar{w}_n} \leq \bar{T}_S \Rightarrow w_n \geq \bar{w}_n = \frac{1.8}{T_S}$$



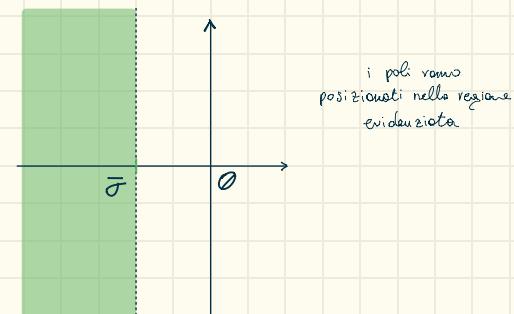
i poli vanno posizionati nella regione evidenziata

Tempo di Assestamento

$$T_{a_1} = \frac{4.6}{\sigma} \leq T_{a_1} \quad (\text{Tempo ass all'1%}) \Rightarrow \sigma \geq \bar{\sigma} = \frac{4.6}{T_{a_1}}$$

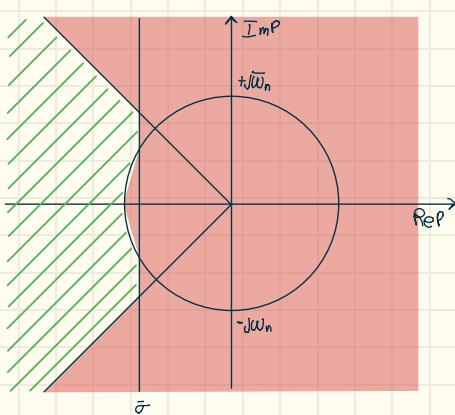
Parte Reale della coppia dei poli complessi e congi

ovvero i poli devono trovarsi a sx di una certa ascissa



i poli vanno posizionati nella regione evidenziata

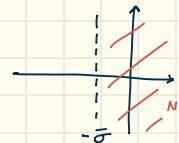
RiASSUMENDO TUTTE LE CONDIZIONI



$$\xi = \sin(\varphi) \Rightarrow \varphi = \arcsin(\xi) \quad S_x = 100e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq \bar{S}_x$$

$$T_S \approx \frac{1.8}{\bar{w}_n} \leq \bar{T}_S \Rightarrow w_n \geq \bar{w}_n = \frac{1.8}{T_S}$$

$$T_{a_1} = \frac{4.6}{\sigma} \leq T_{a_1} \Rightarrow \sigma \geq \bar{\sigma} = \frac{4.6}{T_{a_1}}$$



- Trovare il valore $\bar{\kappa}$ che porta il polo oltre un certo valore

$$\bar{\kappa} = |x + p| \quad x = \bar{\sigma}$$

$$\text{con } \bar{\sigma} / \frac{4.6}{\bar{\sigma}} < T_{a_1} \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{4.6}{T_{a_1}}, \bar{\sigma} > -\left| \frac{4.6}{T_{a_1}} \right|$$

- Aggiunta del polo in alta frequenza

$$\text{Se } C(s) \triangleq K(s+\bar{\zeta}) \text{ NON e' realizzabile} \Rightarrow C(s) = \frac{K(s+\bar{\zeta})}{(s+T_S)} \quad \text{con } T = \frac{1}{\bar{\zeta} \cdot 10}$$

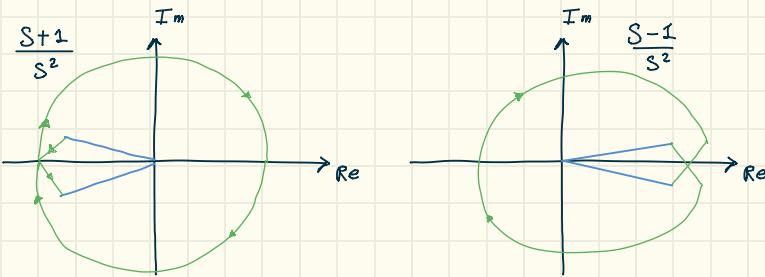
In alta freq.

RICONOSCERE DIAGRAMMI

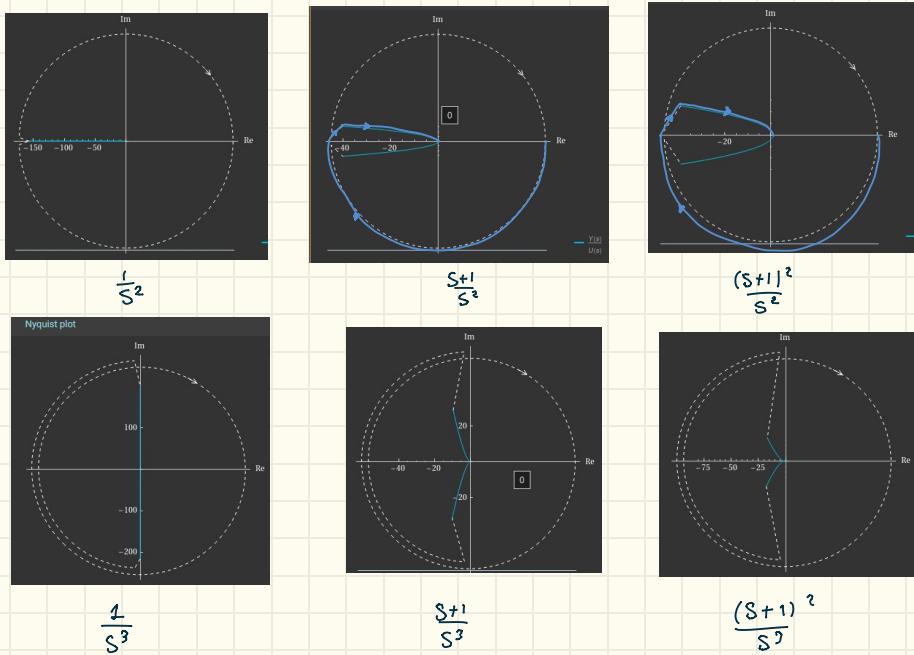
- poli/zeri $\text{Re}P > 0$
- $\begin{cases} Z \\ P \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi \rightarrow \text{Ritardo invece che Anticipo} \\ M \rightarrow \text{Nessun cambiamento} \Rightarrow \text{Amplifica di } +20\text{dB/dec} \\ M \rightarrow \text{Nessun cambiamento} \Rightarrow \text{Attenua di } +20\text{dB/dec} \\ \varphi \rightarrow \text{Anticipo invece di Ritardo } (-180^\circ \rightarrow -90^\circ) ? \end{cases}$

- Poli/Zeri a $\text{Re}P < 0$
- $\begin{cases} Z \rightarrow \begin{cases} M \rightarrow +20\text{dB/dec} \\ \varphi \rightarrow \text{Anticipo di } 90^\circ (+90^\circ) \end{cases} \\ P \rightarrow \begin{cases} M \rightarrow -20\text{dB/dec} \\ \varphi \rightarrow \text{Ritardo di } 90^\circ (-90^\circ) \end{cases} \end{cases}$

- Z/P in Origine
- $\begin{cases} Z \rightarrow \begin{cases} M: \text{inizio con } +20\text{dB/dec} \\ \varphi: \text{iniziosca } +90^\circ \end{cases} \\ P \rightarrow \begin{cases} M: \text{inizio con } -20\text{dB/dec} \\ \varphi: \text{iniziosca } -90^\circ \end{cases} \end{cases}$



- Più poli ci sono Più il diagramma "Torna indietro"



QUIZ

Sensibilità Compil $T_{g-y} = F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$