

CRITERIO DI BODE

Se abbiamo una $L(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \cdot \prod_i (s^2 \omega_{ni}^2 + 2 \zeta_i \omega_{ni} s + 1)}{s^q \prod_i (1 + T_i s) \cdot \prod_i (s^2 \omega_{di}^2 + 2 \zeta_i \omega_{di} s + 1)}$ (Rapp. guadagno/constanti)

e si rispettano le condizioni:

- $L(s)$ NON ha poli a $\text{Re} p > 0 \Rightarrow P = 0$ (per cui prec) \Rightarrow A.S.
- Il diagramma di Bode di moduli di $L(s)$ interseca solo una volta l'asse 0dB, con andamento DECRESCENTE

↳ Questo vuol dire che il diagramma di Nyquist interseca solo una volta la circonferenza di raggio unitario: prima era fuori poi entra e non esce più \Rightarrow dopo $\omega_c \Rightarrow |L(j\omega)| < 1$

Il criterio di Bode dice che la condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema di controllo a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile è che si abbia:

1. Guadagno maggiore di zero ($\mu > 0$)
2. Margine di fase maggiore di zero ($\phi_{con_m} > 0$)

Queste condizioni sono comprensibili per via del fatto che:

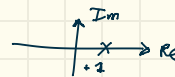
- se avessimo guadagno negativo il diagramma di Nyquist inizierebbe dal semiasse reale negativo, quindi potrebbe circondare il punto -1
- se il margine di fase fosse negativo, come abbiamo appena visto avremmo già circondato il punto -1.

Ulteriori spiegazioni a N 27:00 L15

Che fare se $L(s)$ è instabile?

Soluzione: uso due loop innestati

1° loop per stabilizzazione $L(s)$: ESEMPIO $G(s) = \frac{1}{s-1}$

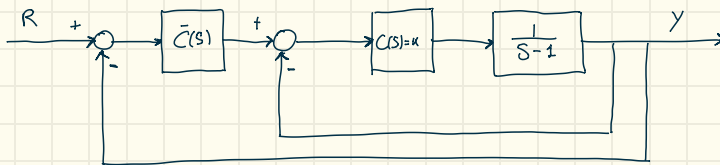


A ciclo chiuso

$$\Rightarrow C(s) = K \Rightarrow P_c(s) = s - 1 + K \text{ A.S. } \forall K > 1$$

$$\Rightarrow \tilde{L}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}}{\frac{s-1+K}{s-1}} = \frac{1}{s-1+K} \text{ NUOVA } \tilde{L}(s)$$

2° loop: progetto il controllore con il criterio di Nyquist



! Non so se corretto

CRITERIO DI BODE PER SYS A FASE MINIMA

NON hanno Poli/Zeri nel semipiano positivo

* Ci basta sapere la pendenza dei moduli nella pendenza di attraversamento per conoscere la fase critica e quindi il margine di fase (più o meno)

Il criterio ci dice che se abbiamo una funzione di anello $L(s)$ a fase minima, ovvero che **non ha poli/zeri nel semipiano destro e non ha ritardi**, allora possiamo dire che:

- 1) se il diagramma asintotico dei moduli attraversa l'asse 0dB, ovvero in corrispondenza della **pulsazione di attraversamento ω_c** con una pendenza pari a **$-k \cdot (20 \text{ dB/dec})$** allora...
- 2) Con buona approssimazione possiamo dire che la **fase critica $\phi_{c,c}$** è pari a **$-k \cdot 90^\circ$** ; possiamo quindi calcolare il margine di fase con $\phi_{m,c} = 180^\circ - (-k \cdot 90^\circ)$.

Ci accorgiamo che se $k=2$ avremmo un margine pari a zero. Ma siccome stiamo lavorando con diagrammi asintotici, non possiamo sapere precisamente quanto vale il margine, di conseguenza **con $k=2$ potremmo avere una $L(s)$ non asintoticamente stabile**. (Margine di fase negativo)

Regola di progetto

Possiamo quindi progettare un controllore in modo da avere che **$L(s)$ attraversi il margine 0dB con una pendenza di -20dB, in modo da avere $k=1$ per massimizzare il margine di fase**

Esempio

$$L(s) = \frac{1}{s^2} \quad \text{Siccome} \quad \begin{cases} \cdot \text{No Poli/Zeri in } \text{Re}P > 0 \\ \cdot \text{Interseca una sola volta l'asse 0dB con pendenza neg.} \end{cases} \quad \text{affinché si abbia l'A.S.} \quad \begin{cases} \mu > 0 \\ \phi_m > 0 \end{cases}$$

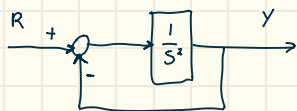
Inoltre $\begin{cases} \text{NO Ritardi} \\ \text{NO Zeri/Poli in } \text{Re}P > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sys A fase minima} \Rightarrow \text{Applico il criterio di Bode per Sys a F.M.}$

• Pendenza dei moduli: a 0dB $\rightarrow -40 \text{ dB/dec} \Rightarrow +K \cdot 20 \text{ dB/dec} = +40 \text{ dB/dec} \Rightarrow K=2 \Rightarrow \phi_c \approx -180^\circ$

$\Rightarrow \phi_m \approx 180 - |-180| \approx 0^\circ \Rightarrow \text{NON VA BENE!}$

Infatti se retroazione $L(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow P_c(s) = s^2 + 1$

$$\begin{matrix} s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & 0 & 0 \\ s^0 & 0 & \end{matrix} \quad \text{STABILE} \quad \text{MA NON ASINTOTICAMENTE}$$



$\angle L(s) = -180^\circ$ COSTANTE $\Rightarrow \phi_m = 0^\circ$

Almeno una decade prima

Soluzione: Diminuire la pendenza: da $-40 \text{ dB/dec} \rightarrow -20 \text{ dB/dec} \rightarrow$ Aggiungo uno zero (prima di ω_c)

At 53:00 Ragionamento su guadagno

$C(s) = K(s+z)$ con $z > 0$ (Non fisicamente realizzabile)

Siccome evi aggiungere uno zero almeno una decade prima che il diagramma dei moduli intersechi l'asse 0dB, mi conviene usare un guadagno alto in modo da traslare verso destra la pulsazione di attraversamento, in modo da non dover mettere lo zero troppo a sinistra.

$\omega_c / |L(j\omega_c)| = 0 \text{ dB} \Rightarrow \frac{1}{(\omega_c)^2} = -\frac{1}{\omega_c^2} = 0 \text{ dB}$ ovvero $\frac{1}{\omega_c^2} = 20 \log_{10}(0) = -\infty \Rightarrow \omega_c = 1$

Controllore corretto ma non realizzabile

Pulsazione di Attraversamento

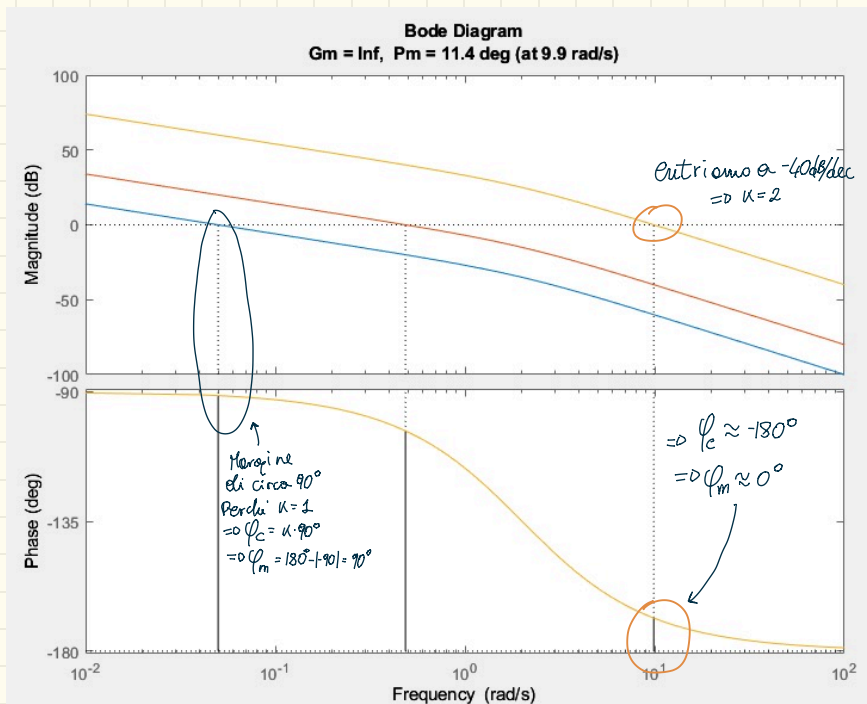
$C(s) = \frac{K(s+10)}{1 + \frac{s}{100}} \Rightarrow \tilde{L}(s) = C(s) \cdot L(s) = \frac{K(s+10)}{s^2(1 + \frac{s}{100})}$

$\begin{cases} 1 \text{ zero } \text{Re}P < 0 \\ 3 \text{ poli } \text{Re}P < 0 \end{cases}$

Esempio

$$L(s) = \frac{p}{s(s+2)} = \text{Forma per la frequenza} = \frac{p}{2 \cdot s(1 + \frac{1}{2}s)} = \mu \frac{1}{s(1 + 0.5s)} \quad \text{con } \mu = \frac{p}{2}$$

Cosa succede quando $p = [0.1, 1, 100]$?



* Quando moltiplichiamo per un gain=10 stiamo traslando verso l'alto il diagramma dei moduli di 20dB.
 $g=100 \rightarrow 40\text{dB}$ $g=1000 \rightarrow 60\text{dB}$

Esempio

$$L(s) = \frac{s-1}{s^2(s+10)}$$

A ciclo chiuso è stabile?

$$s^2(s+10) + s-1 = s^3 + 10s^2 + s - 1$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 10 & -1 \\ s^2 & 0 & 1 & 0 \\ s^1 & 1 & 1 & 0 \\ s^0 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

INSTABILE

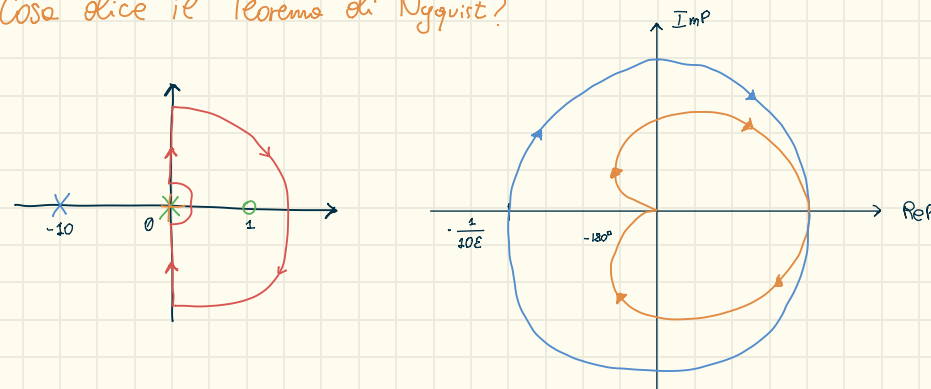
MA cosa ci dice il criterio di Bode?

Abbiamo 1 zero a $\text{Re} p > 0$ ma non c'è un problema

Quanto vale il guadagno? $\frac{-1(1-s)}{10s^2(1+s)} = \left(-\frac{1}{10}\right) \frac{(1-s)}{s^2(1+s)}$
μ è negativo!

⇒ Non posso applicare il criterio.

Cosa dice il Teorema di Nyquist?



$$s' = \varepsilon e^{j\theta}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow -0L(s') = \frac{\varepsilon e^{j\theta} - 1}{\varepsilon e^{j2\theta} (\varepsilon e^{j\theta} + 10)} \approx -\frac{1}{10\varepsilon e^{j2\theta}}$$

$$= \left(-\frac{1}{10\varepsilon}\right) \cdot e^{-j2\theta}$$

Parte del semiasse reale Negativo

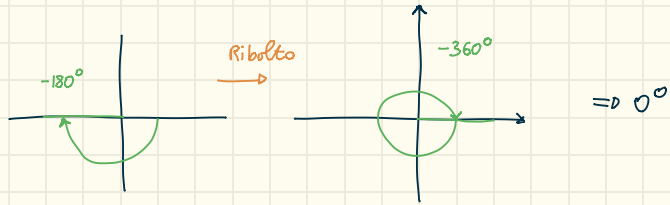
Siccome P (ovvero poli a $\text{Re} p > 0$) è zero ⇒ dobbiamo avere 0 circonvoluzioni del punto -1 affinché il sys sia A.S.

M 1:35 Codice Nyquist Matlab "Reale"

* Perché la fase parte da 0° ?

ho $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ poli in } 0 \Rightarrow -180^\circ \text{ For inizioli} = 0 \\ \text{guadagno negativo} \end{array} \right.$

Poi... $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Polo } \text{Re} p < 0 \Rightarrow -90^\circ \\ 1 \text{ Zero } \text{Re} p > 0 \Rightarrow -90^\circ \end{array} \right. \Rightarrow -180^\circ \text{ Finale}$



* Considerazione su ε

Inizio: $-\frac{1}{10\varepsilon} e^{-j2\theta} \rightarrow -\frac{1}{10\varepsilon} > -1$ per $\varepsilon < \frac{1}{10}$ quindi se prendo $\varepsilon > \frac{1}{10}$ allora il sys è A.S. ... SBAGLIATO!

Secondo la teoria $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon$ è sempre $< \frac{1}{10}$.