1. MARGINE DI AMPIEZZA Con scelta di guadagno

▸ Trovare il valore di K che permette di avere un Margine di Ampiezza di 3dB

$$G(S) = K \frac{S-10}{S(S+10)}$$

- Q: $M_a = 3dB = 10^{\frac{3}{20}} = 1.413 > 0$

1) Trovo ω_n / $\angle G(j\omega_n) = -180° = -\pi$

$$\rightarrow \angle \frac{j\omega_n - 10}{j\omega_n(j\omega_n+10)} = \angle j\omega_n - 10 - \cancel{\angle j\omega_n}^{\,90°} - \angle j\omega_n + 10 = \text{atan}\left(-\frac{\omega_n}{10}\right) - \text{atan}\left(\frac{\omega_n}{10}\right) - 90° = -\pi$$

$$\rightarrow -\text{atan}\left(\frac{\omega_n}{10}\right) - \text{atan}\left(\frac{\omega_n}{10}\right) - \frac{\pi}{2} = -\pi \rightarrow -2\,\text{atan}\left(\frac{\omega_n}{10}\right) = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \text{atan}\left(\frac{\omega_n}{10}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \frac{\omega_n}{10} = \text{Tan}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \omega_n = 10\,\text{Tan}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -10\ \omega_n$$

2) Controllo quanto vale $|G(j\omega_c)|$

$$|G(j\omega_c)| = K \cdot \frac{|j\omega_c - 10|}{|j\omega_c(j\omega_c+10)|} = \frac{K \cdot \cancel{\sqrt{\omega_c^2 + 10^2}}}{\omega_c \cancel{\sqrt{\omega_c^2 + 10^2}}} = \left|\frac{K}{\omega_c}\right| \Rightarrow (M_{\omega_c})_{dB} = 20 \log\left(\frac{K}{\omega_c}\right)$$

3) Margine di Ampiezza

$$\boxed{\frac{1}{|G(j\omega_c)|} = 3dB = (1.43)_{VN}} \rightarrow \frac{\omega_c}{K} = 1.43 \Rightarrow K = \frac{\omega_c}{1.43} = 6.99 \Rightarrow K = -7$$

Ans

* Negativo perche' $\omega_c < 0 = -10$

2. MARGINE DI AMPIEZZA Con scelta di guadagno e zero

OPPOSTO AL POLO

$G(s) = k \frac{(s+z)}{(s+5)^2}$ scelgo $z = -5$ $\Rightarrow$ $G(s) = \frac{k(s-5)}{(s+5)^2}$ vogliamo $M_a = 6dB = 10^{\frac{6}{20}} = (2)_{dB}$

↑ valore naturale

Siccome cerco il margine di ampiezza, devo trovare la ω_c per la quale $\angle G(j\omega_c) = -180°$

Dopodichè calcolo $|G(j\omega_c)|$ e vedo quanto differisce $(1)_{dB} = 0dB$

1) Guadagno

$\mu = \lim_{s \to 0} s^g \cdot G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{k(s-5)}{(s+5)^2} = -\frac{5}{25}k$ Vogliamo un guadagno $\mu > 0 \Rightarrow k < 0$

2) Trovo ω_c

$\angle G(j\omega_c) = -180 = -\pi \rightarrow \angle k(j\omega - 5) - \angle (j\omega + 5)^2 = -\pi \rightarrow -\text{atan}\left(-\frac{\omega}{5}\right) - 2\,\text{atan}\left(\frac{\omega}{5}\right) = -\pi$

$\rightarrow -3\,\text{atan}\left(\frac{\omega}{5}\right) = -\pi \Rightarrow 3\,\text{atan}\left(\frac{\omega_c}{5}\right) = \pi \rightarrow \frac{\omega_c}{5} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \omega_c = 5\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8.66\ Rad/s = 5\sqrt{3}\ Rad/s$

ω_c

3) Modulo in $\omega_c = 5\sqrt{3}$ R/s

$|G(j\omega_c)| = \frac{|k(j\omega_c - 5)|}{|(j\omega_c+5)^2|} = \frac{|k|\sqrt{\omega_c^2+5^2}}{\omega_c^2+25}$ per $k = \frac{2(\omega_c^2+25)}{\sqrt{\omega_c^2+5^2}} = 20$

Per trovare k: $\frac{1}{|G(j\omega_c)|} = (M_a)_{dB}$ oppure $\frac{1}{|G(j\omega_c)|_{dB}} = M_a\,dB$

$\Rightarrow \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = \frac{\omega_c^2+25}{|k|\sqrt{\omega_c^2+5^2}} = 2$ per $|k| = \frac{\omega_c^2+25}{2\sqrt{\omega_c^2+25}} = \frac{75+25}{2\sqrt{100}} = 5$

Quindi $|k| \rightarrow \begin{cases} k > 0 \rightarrow k = 5 \\ k < 0 \rightarrow k = -5 \end{cases}$ Scelgo $k<0$ perchè mi serve $\mu > 0$

$\Rightarrow G(s) = -\frac{5(s-5)}{(s+5)^2}$ Ans

3. MASSIMO RITARDO $\Rightarrow$ Margine di fase

Progetto in frequenza

Esercizio 1.
Si consideri la funzione di trasferimento di anello

$$L(s) = \frac{e^{-s\tau}}{s(s+8)}$$

5 punti

chiusa in retroazione negativa unitaria. Si determini il massimo valore del ritardo τ che consenta di mantenere l'asintotica stabilità a ciclo chiuso.

Soluzione: Per determinare il margine di fase occorre individuare la pulsazione di attraversamento $\omega_c \mid \; |G(j\omega_c)| = 1$. In particolare ω_c = 0,12rad/s ed il margine di fase corrispondente sarà pari a 89.38°. Quindi il massimo ritardo ammissibile sarà pari a 12,48s.

▸ Data $G(s) = \dfrac{e^{-s\tau}}{s(s+8)}$ determinare il massimo valore di τ che consenta di mantenere la a.s. a ciclo chiuso

- Trovo ω_c / $|G(j\omega_c)| = 1$ $\longleftrightarrow$ interseca la circonferenza unitaria

1) $M = 1$

$$|L(j\omega)| = \frac{|e^{-j\omega\tau}|}{|j\omega(j\omega+8)|} = \frac{1}{|j\omega| \cdot |(j\omega+8)|} = \frac{1}{\omega \cdot \sqrt{\omega^2+64}} = 1 \quad \text{per} \quad \omega \cdot \sqrt{\omega^2+64} = 1 \rightarrow \omega^2(\omega+64) = 1 \rightarrow \omega^3 + 64\omega^2 = 1$$

Trovo le soluzioni con un calcolatore e prendo quella "più vicino" alla circonferenza -1

$$\begin{cases} s_1 \cong -64 \\ s_2 \cong -0.12512 \\ s_3 \cong 0.1248 \text{ Rad/s} \end{cases}$$

è il valore di ω_c pulsazione di attraversamento. $\omega_c = 0.125$ ω_c

2) Fase critica

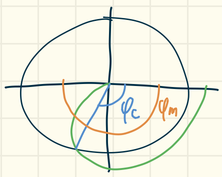
Puramente Immaginario

USA RAD sulla calc.

$$\varphi_c = \angle L'(j\omega_c) = \angle \frac{1}{j\omega_c(j\omega_c+8)} = -\angle j\omega_c - \angle j\omega_c+8 = -90° - \text{atan}\left(\frac{\omega_c}{8}\right) = -90.0156$$

* Considero $L'(j\omega_c)$ che è $L(j\omega)$ ma senza il Ritardo.

3) Margine di fase



$$\varphi_m = 180° - \varphi_c = 180° - 90.0156 = 89.98°$$

Margine

4) Calcolo il ritardo Max

$$\tau = \frac{\varphi_m}{\omega_c} \quad \text{ma } \varphi_m \text{ è in gradi} \Rightarrow \tau = \frac{\varphi_m \cdot \pi}{180 \cdot \omega_c} = 12.56 \text{ s}$$

Ans

$$\mu\tau < \frac{\pi}{2} \quad \text{se} \quad L'(s) = \frac{\mu}{s} \rightarrow L(s) = \frac{\mu}{s} e^{-s\tau}$$

4. MARGINE DI FASE   Con scelta di guadagno

Esercizio 1.
Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = k \cdot \frac{s-8}{s(s+8)}$$

e si scelga il guadagno $k \in \mathbb{R}$ in maniera tale che $G(s)$ abbia un margine di fase pari a 70°.

* Non dobbiamo avere Poli a parte Reale Positiva

* Guadagno Positivo

Procedimento 1

$G(s) = k \frac{s-8}{s(s+8)}$ $\mu = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{k(s-8)}{\cancel{s}(s+8)} = -k$ voglio $\mu > 0 \Rightarrow k < 0$

- Vogliamo $\varphi_m = 70°$ ma $\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = \pi - \varphi_c \Rightarrow$ $180° - |\varphi_c| = 70° \to \varphi_c = \pm 110° \leadsto \varphi_{c\,RAD} = -\frac{110° \cdot \pi}{180} = -\frac{11}{18}\pi$ NEGATIVO

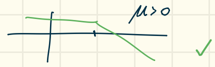
OVVERO $\angle G(j\omega_c) = -\frac{11}{18}\pi \to$ $\underset{0}{\cancel{\angle k}} + \angle j\omega_c - 8 - \underset{90 \text{ per } \omega_c > 0}{\cancel{\angle j\omega_c}} - \angle j\omega_c + 8 = \operatorname{aTan}\left(-\frac{\omega_c}{8}\right) - \frac{\pi}{2} - \operatorname{aTan}\left(\frac{\omega_c}{8}\right) = -2\operatorname{aTan}\left(\frac{\omega_c}{8}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{11}{18}\pi \to -2\operatorname{aTan}\left(\frac{\omega_c}{8}\right) = -\frac{11}{18}\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{9}\pi$

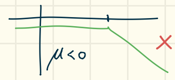
$\to \operatorname{aTan}\left(\frac{\omega_c}{8}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}\pi\right) \Rightarrow \frac{\omega_c}{8} = \operatorname{Tan}\left(\frac{1}{18}\pi\right) \to \omega_c = 1.41 \text{ Rad/s}$

- Il margine si ha quando $|G(j\omega)| = 1$

$\to \frac{|k| \cancel{\sqrt{\omega_c^2 + 64}}}{\omega \cancel{\sqrt{\omega_c^2 + 64}}} = 1 \to \frac{|k|}{\omega_c} = 1 \to |k| = \omega_c \Rightarrow k = \pm \omega_c$ Ma μ deve essere > 0 perchè altrimenti non attraversiamo 0dB:

$\Rightarrow$ Siccome $\mu = -k$, $k < 0 \Rightarrow k = -\omega_c = -1.41$ Ans





Procedimento 2

$|G(j\omega_c)| = 1$ per $\frac{k \cancel{\sqrt{\omega_c^2 + 64}}}{\omega_c \cancel{\sqrt{\omega_c^2 + 64}}} = 1 \to \omega_c = k$

Voglio $\varphi_m = 70° = 180 - |\varphi_c| \to |\varphi_c| = 110 \Rightarrow \varphi_c = \pm 110°$ scelgo $\varphi_c = -110°$

$\varphi_c = \angle G(j\omega_c) = \angle k + \angle j\omega_c - 8 - \angle j\omega_c - \angle j\omega_c + 8 = -\operatorname{aTan}\left(\frac{\omega_c}{8}\right) - 90° - \operatorname{aTan}\left(\frac{\omega_c}{8}\right) = -110$

$\to 2\operatorname{aTan}\left(\frac{\omega_c}{8}\right) = 20° \to \frac{\omega_c}{8} = \operatorname{Tan}(10) \to \omega_c = 8\operatorname{Tan}(10°) \Rightarrow |k| = 8\operatorname{Tan}(10°) = \pm 1.41$

! se lavori in gradi usa la calcolatrice in Deg quando calcoli la tangente !

Siccome $\mu = \lim_{s \to 0} s \frac{k(s-8)}{s(s+8)} = -k$ ma voglio $\mu > 0$, $k < 0 \Rightarrow k = -1.41$ Ans