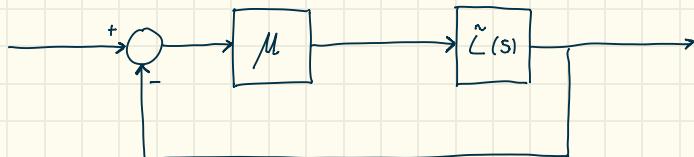


CONTROLLO PROPORTIONALE

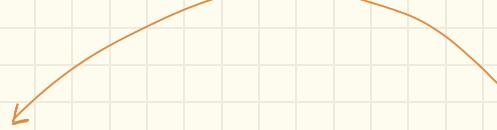


$\tilde{L}(s) = L(s)$ perché portiamo tutto il controllore TRAMME il suo GUADAGNO in $L(s)$.

→ Che guadagno devo avere (μ) per avere il sys A.S. usando il criterio di Nyquist?

MA μ è incognito ⇒ Non posso usare certo tracciare infiniti diagrammi al variare di μ !

Siccome abbiamo visto che $U(s) = 1 + L(s) \rightsquigarrow \tilde{U}(s) = 1 + \mu L(s) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu} + \tilde{L}(s) = 0 \Rightarrow \tilde{L}(s) = -\frac{1}{\mu}$



$\tilde{L}(s) = -\frac{1}{\mu}$

La conosciamo
Vediamo quante volte
il diag. di Nyquist di $\tilde{L}(s)$
circonde $-\frac{1}{\mu}$

A questo punto modifichiamo il criterio di Nyquist:

Corollario: la condizione necessaria e sufficiente perché il sistema retroazionato appena esaminato sia asintoticamente stabile è che il numero di circondamenti N del diagramma di Nyquist di $L^*(s)$ intorno al punto $-1/\mu$ sia ben definito e che i circondamenti, conteggiati in senso antiorario, siano pari al numero di poli a $\text{Re}P>0$ di $L^*(s)$.

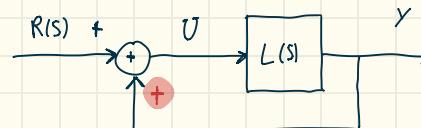
Ovviamente il diagramma sarà ben definito se non passa per $-1/\mu$

RETROAZIONE POSITIVA

A questo punto il criterio di Nyquist diventa:

Corollario: la condizione necessaria e sufficiente perché il sistema retroazionato positivamente sia asintoticamente stabile è che il numero di circondamenti N del diagramma di Nyquist di $L(s)$ intorno al punto 1 sia ben definito e che i circondamenti, conteggiati in senso antiorario, siano pari al numero di poli a $\text{Re}P>0$ di $L(s)$.

Ovviamente il diagramma sarà ben definito se non passa per 1

SISTEMI CON POLI A $\text{Re}P<0$

Condizioni sufficienti

Modulo: Se la nostra funzione di anello $L(s)$ ha tutti poli a $\text{Re}P<0$, ovvero è di per sé asintoticamente stabile a ciclo chiuso (retroazione positiva o negativa), la **condizione sufficiente** per avere il sistema a ciclo chiuso A.S. è che il **modulo di $L(s)$ deve essere minore di 1 per ogni omega**.

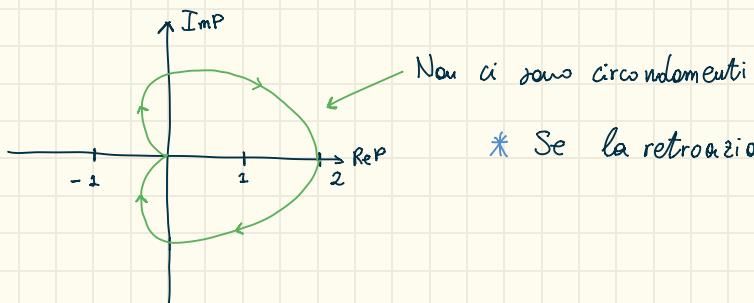
$$|L(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega$$

Fase: Se la nostra funzione di anello $L(s)$ ha tutti poli a $\text{Re}P<0$, ovvero è di per sé asintoticamente stabile a ciclo chiuso (retroazione solo negativa), la **condizione sufficiente** per avere il sistema a ciclo chiuso A.S. è che la **fase di $L(s)$ sia minore (strettamente) di 180° per ogni omega**.

$$\angle L(j\omega) < 180^\circ \quad \forall \omega$$

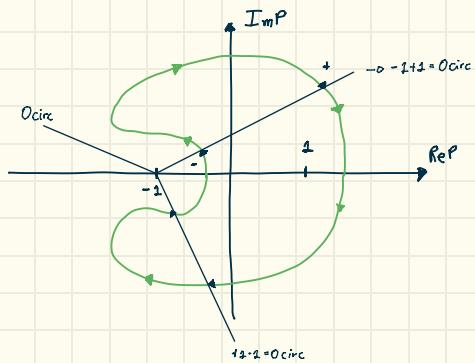
Questi corollari sono molto potenti, perché ci permettono di capire se un sistema è asintoticamente stabile solo guardando la sua risposta in frequenza → ci basta conoscere i loro diagrammi di Bode, il diagramma di Nyquist è superfluo

* Ciò non toglie che potremmo avere casi in cui il modulo è > 1 per alcuni valori e lo stesso non ci sono circondamenti:



* Se la retroazione fosse positiva, avremmo -1 circondamenti

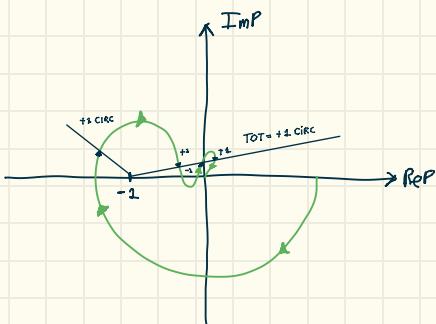
COME CONTARE I CIRCONDAMENTI ?



Se la retroazione è Negativa: 0 circondamenti

Per essere Sicuri:

- ① Tracciare una semiretta che parte in $-t$
- ② Vedere quante volte la semiretta interseca la curva, stando ottenuti a considerare il "segno": una sorta di Gauss visto a fisica.



Applicazioni del criterio di Nyquist

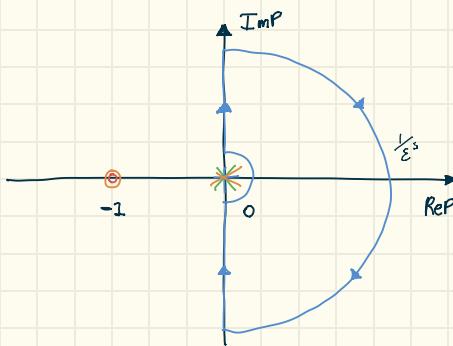
Sistemi a Stabilità condizionata

Aumentando il guadagno c'è più probabile che il diagramma di Nyquist vada a circondare il punto -1 oppure, allo stesso modo che il punto $\frac{1}{\mu}$ si avvicini all'origine.
Morale della favola: più aumentano il guadagno maggiore è la probabilità di perdere l'asintotica stabilità.

Esistono sistemi che "funzionano" al contrario: all'aumentare del guadagno, il sistema diventa più stabile.
→ Sono i Sistemi a Stabilità condizionata

Esempio

$$L(s) = \frac{(s+z)^2}{s^3}$$



$$S' = \varepsilon e^{j\theta} \text{ con } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Siccome $\varepsilon \ll 1$
 $\varepsilon e^{j\theta} + 1 \approx 1$

$$\Rightarrow L(S') = \frac{(1 + \varepsilon e^{j\theta})^2}{\varepsilon^3 e^{j3\theta}} = \frac{1}{\varepsilon^3} e^{-j\varphi} \text{ con } \varphi \in [0, \frac{3}{2}\pi]$$

-270°

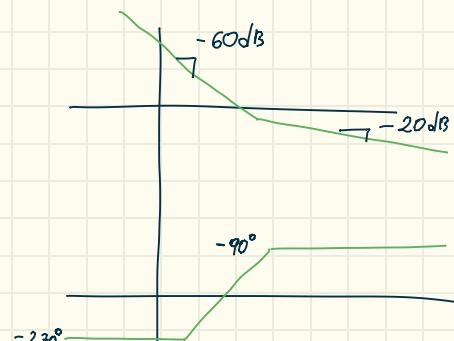
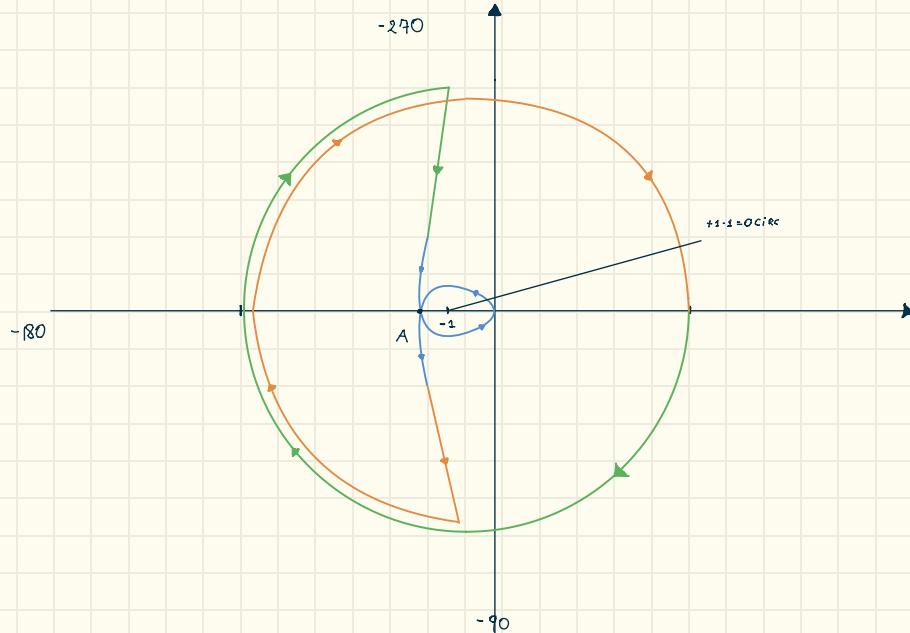
* Ci fermiamo col suo fase di -270° spieg a $\approx 45:00$

#ToDoControlli

#Domanda esame controlli

IMPORTANTE

3 poli in 0 $\Rightarrow -270^\circ$ φ iniziale



Abbiamo 0 circondamenti di -1 Ma $N = 0$ ovvero poli di $L(s)$ a $\text{Re} s > 0 \Rightarrow$ Criterio soddisfatto

Ma se $\mu = \frac{1}{2} \Rightarrow$ punto critico $= -\frac{1}{\mu} = -2$ esattamente il punto A \Rightarrow Non ben definito

Morale della favola: Siccome per $\mu = 1 \rightarrow \text{OK}$ e $\mu = 0.5 \rightarrow \text{NO OK}$ copiamo che il sys è stabile per valori di μ HOLTO GRANDI ovvero il contrario di quelli che siamo abituati a vedere.

\Rightarrow Se -1 si trova nel cappio allora abbiamo un sys a stabilità cond. N.d.s.

INOLTRE

Capiamo che il disegno del diagramma di Nyquist preciso (il cappio soprattutto) è abbastanza difficile da fare a mano. Quello che ci interessa però è solo il punto di intersezione con l'asse reale, per capire se ci sono circondamenti o (appunto) intersezioni con il punto critico. Ci basta impostare:

- o $\text{Im}P(L(jw)) = 0$
- fase($L(jw)$) = -180°

* Esempio Esercizio P 1:01

#Domanda esame controlli

SISTEMI CON RITARDO DI TEMPO

Quando a abbiamo un ritardo nella nostra fdt, **non abbiamo più un polinomio** ma una **funzione trascendente**. Ci riesce quindi difficile valutare l'asintotica stabilità a ciclo chiuso. Possiamo però **ugualmente applicare il criterio di Nyquist**: ci basta quindi disegnare il diagramma di Nyquist della $L(s)$ è valutare quanti circondamenti ci sono del punto -1.

$$L(s) = e^{-s\tau} \cdot L'(s)$$

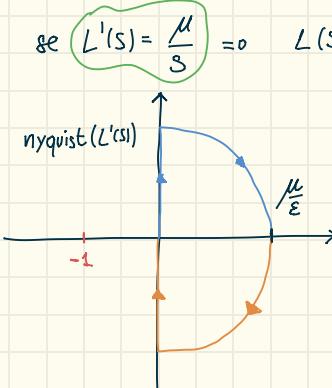
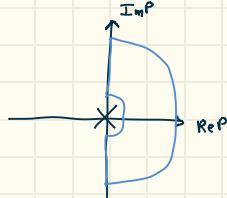
Abbiamo visto che il ritardo da solo un contributo di fase e non cambia il modulo. Possiamo quindi:

- Disegnare il diagramma di Nyquist di $L'(s)$
- Tutti i punti della curva vengono sfasati **proporzionalmente rispetto all'aumento di w** (ovvero più andiamo avanti più i punti vengono sfasati)

ESEMPIO:

$$G(s) = \frac{\mu}{s} \cdot e^{-s\tau}$$

quindi se $L'(s) = \frac{\mu}{s} \Rightarrow L(s) = e^{-s\tau} \cdot L'(s)$



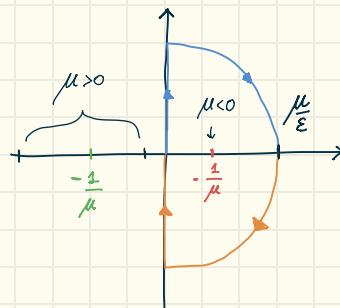
$$\begin{aligned} s' &= \varepsilon e^{j\theta}, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \Rightarrow L'(s') &= \frac{\mu}{\varepsilon} e^{-j\theta} \end{aligned}$$

* Potremmo anche studiare

$$\begin{cases} C(s) = \mu \\ G(s) = 1/s \end{cases}$$

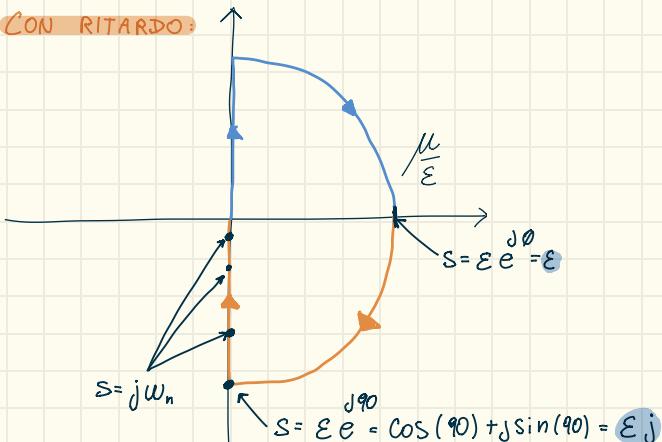
con punto critico in $-\frac{1}{\mu}$

Con μ variabile: $\bar{L}(s) = \frac{1}{s}$



Per guadagni positivi continuiamo ad avere l'asintotica stabilità, mentre se il guadagno diventa negativo la perdiamo, perché abbiamo un circondamento != N del punto critico.

CON RITARDO:



Siccome $L(s) = \mu \cdot \frac{1}{s} e^{-s\tau}$

Reale $L(s=\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon\tau} \Rightarrow \Delta \angle L(s=\varepsilon) \approx 0^\circ$

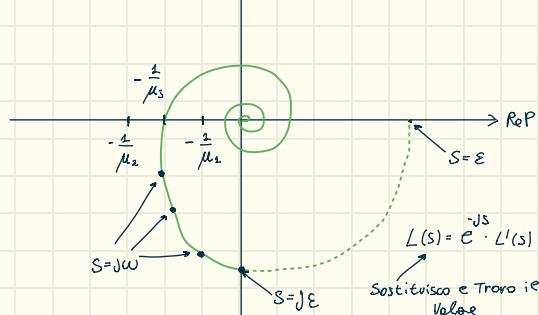
Imm $L(s=j\varepsilon) = \frac{1}{j\varepsilon} e^{-j\varepsilon\tau} \Rightarrow \Delta \angle L(s=j\varepsilon) = \varepsilon\tau$

$L(s=jw_1) = \frac{1}{jw_1} e^{-jw_1\tau} \Rightarrow \Delta \angle L(s=jw_1) = w_1\tau$

$L(s=jw_2) = \frac{1}{jw_2} e^{-jw_2\tau} \Rightarrow \Delta \angle L(s=jw_2) = w_2\tau$

con $w_1\tau < w_2\tau$ perché $w_2 > w_1$

DIAGRAMMA POLARE



Come trovare il punto di intersezione con l'asse reale?
Ci è comodo sapere il punto di intersezione per capire se ci sono o meno circondamenti del punto $-1/\mu$

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{j(\frac{\pi}{2} + \omega_0 \tau)}$$

Siccome avremo un punto del tipo

$$P_1 = \frac{1}{j\omega_0} e^{-j\omega_0 \tau} = -\frac{j}{\omega_0} e^{-j\omega_0 \tau} = \frac{1}{\omega_0} e^{-j\omega_0 \tau} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega_0} e^{-j\omega_0 \tau} e^{j(\frac{\pi}{2} + \omega_0 \tau)}$$

$$\Rightarrow P_1 = \sqrt{\frac{1}{j\omega_0} e^{-j\omega_0 \tau}} = -\frac{\pi}{2} - \omega_0 \tau = -\pi$$

Vogliamo che la fase del punto
Sia $-180^\circ = -\pi$

\rightarrow Calcolo il modulo, fissato ω_0 e τ \Rightarrow $M_{P_1} e^{-j\angle P_1}$ \Rightarrow Conosco il punto in cui passa il diagramma (M_{P_1})

\approx Dalla lezione 14

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2\tau} \rightarrow \left| \frac{e^{-s\tau}}{s} \right| = \left| \frac{-j\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2\tau}}} \right| = \left| \frac{2\tau}{\pi} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \right| = \frac{2\tau}{\pi} e^{-j\pi}$$

Angolo di -180°

$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-s\tau}$$

Trovato il modulo, dobbiamo ricordare che il vettore ha una fase di -180° , quindi si trova sull'asse reale negativo. **Per garantire l'asintotica stabilità** il modulo deve essere minore di 1 (ragioniamo sul modulo).

$$M_{P_1} < 1 \rightarrow \frac{2\tau}{\pi} < 1 \rightarrow \tau < \frac{\pi}{2} \quad A.S.$$