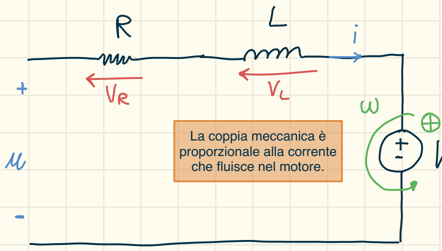
MOTORE IN CORRENTE CONTINUA



La coppia meccanica è proporzionale alla corrente che fluisce nel motore.

Forza Controelettromotrice modellabile come un generatore di tensione pilotato in velocità Angolare

Equazioni

Tensione in ingresso — grandezza meccanica

$$\begin{cases} u = V_R + V_L + F_{CE} = R\cdot i + L\dfrac{di}{dt} + K_e\,\omega \\[2mm] J\dfrac{d\omega}{dt} = K_t\,i - b\,\omega - \tau_L \end{cases}$$

coppia

Attrito viscoso proporzionale alla velocità angolare

Coppia di carico ≡ Disturbo

Momento d'inerzia del motore

Accelerazione angolare

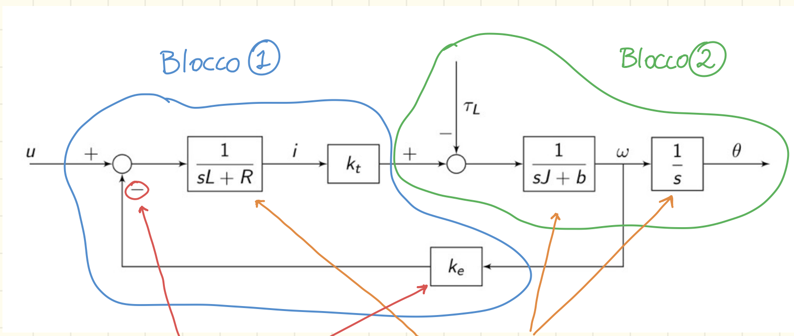
$= m\cdot a = \sum F$

Se $\tau_L = Cost \Rightarrow T_L = \mathbb{1}(t)$

* Differenza

Schema a blocchi

$$\begin{cases} U(s) = R\,I(s) + L\,s\,I(s) + K_e\,\Omega(s) \\ sJ\,\Omega(s) = K_t\,I(s) - b\,\Omega(s) - T_L(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(s) = \dfrac{1}{sL+R}\left[U(s) - K_e\,\Omega(s)\right] & (1) \\[2mm] \Omega(s) = \dfrac{1}{sJ+b}\left[K_t\,I(s) - T_L(s)\right] & (2) \end{cases}$$



3 Blocchi dinamici

Retroazione Negativa NON UNITARIA

Proviene dalla forza Contro-Elettromotrice → La forza controloelettromotrice rappresenta una retroazione negativa e si oppone alla rotazione del motore. Questa componente va a stabilizzare il sistema.

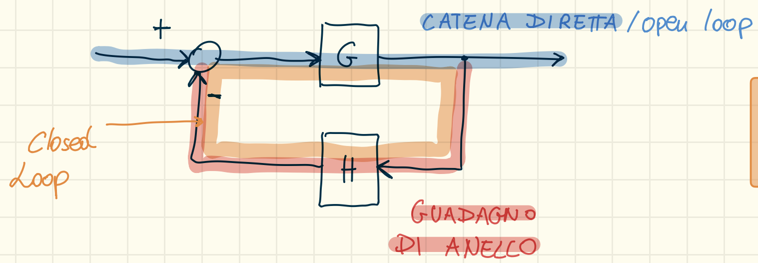
Due Poli

$$\begin{cases} \bar{s}_1 = -\dfrac{R}{L} \\[2mm] \bar{s}_2 = -\dfrac{b}{J} \end{cases} \Rightarrow$$

Costanti di Tempo

$$\begin{cases} \tau_E = \dfrac{L}{R} \\[2mm] \tau_M = \dfrac{J}{b} \end{cases} \quad (A)$$

Riduzione se $\tau_L = 0$



$$\bar{G} = \frac{G}{1 + GH} \quad \text{oppure} \quad \bar{G} = \frac{\text{Open Loop}}{1 + \text{closed Loop}}$$

* Se τ_L non è zero → Applico la Sovrapposizione degli effetti

$$\begin{cases} u \neq 0,\ \tau_L = 0 \rightarrow \omega' \\ u = 0,\ \tau_L \neq 0 \rightarrow \omega'' \end{cases}$$

$\Rightarrow \omega = \omega' + \omega''$

- f.d.t. $u \to \omega$: $\dfrac{\Omega(s)}{U(s)} = ?$
- f.d.t. $u \to i$: $\dfrac{I(s)}{U(s)} = ?$
- f.d.t. $u \to \theta$: $\dfrac{\Theta(s)}{U(s)} = ?$
- f.d.t. $\tau_L \to \omega$: $\dfrac{\Omega(s)}{T_L(s)} = ?$
- f.d.t. $\tau_L \to i$: $\dfrac{I(s)}{T_L(s)} = ?$
- f.d.t. $\tau_L \to \theta$: $\dfrac{\Theta(s)}{T_L(s)} = ?$

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{k_t}{s^2 LJ + s(bL + RJ) + Rb + k_e k_t} = \frac{\frac{k_t}{RJ}}{s^2\frac{L}{R} + s\left(\frac{bL}{JR} + 1\right) + \frac{b}{J} + \frac{k_e k_t}{RJ}}$$

Secondo Ordine

$\emptyset$

FDT TRA Ω e U

Ricavo la FDT dallo schema a blocchi seguendo la formula della retroazione

SERIE

- CATENA DIRETTA ($\tau_L = 0$) : $K_t \odot \frac{1}{sL+R} \odot \frac{1}{sJ+b} = \frac{K_t}{(sL+R)(sJ+B)}$ ①
- ANELLO CHIUSO: $K_t \cdot K_e \cdot \frac{1}{sL+R} \cdot \frac{1}{sJ+b} = \frac{K_e K_t}{(sL+R)(sJ+B)}$ ② oppure gain $= K_e$ ③

$$\Rightarrow \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{OL}{1+LOOP} = \frac{OL}{1+OL\cdot gain} = \frac{\frac{K_t}{(sL+R)(sJ+B)}}{1+\frac{K_eK_t}{(sL+R)(sJ+B)}} = \frac{\cancel{\frac{K_t}{(sL+R)(sJ+B)}}}{\frac{(sL+R)(sJ+b)+K_tK_e}{\cancel{(sL+R)(sJ+B)}}} = \frac{K_t}{(sL+R)(sJ+b)+K_tK_e}$$

$$= \frac{K_t}{s^2LJ + sLb + sRJ + Rb + K_tK_e} = \frac{K_t}{s^2LJ + s(Lb+RJ) + R\cdot b + K_tK_e}$$

Dato che
$$\begin{cases} \tau_E^{ol} = \frac{L}{R} & \text{Costante di tempo dovuta alla parte Elettrica} \\ \tau_M^{ol} = \frac{J}{b} & \text{Costante di tempo dovuta alla parte Meccanica} \end{cases}$$

Sappiamo che generalmente i fenomeni meccanici hanno transitori MOLTO PIU' LUNGHI di quelli elettrici $\Rightarrow \boxed{\tau_M >> \tau_E \quad \tau_E << \tau_M}$

RIDUZIONE D'ORDINE (MOTORE IN CC)

$\rightsquigarrow$ Evidenzio τ_E e τ_M: $G(s) = \dfrac{\frac{K_t}{bJ}}{s^2\frac{L}{R} + s\left(\frac{L}{R}\cdot\frac{b}{J} + 1\right) + \frac{b}{J} + \frac{K_tK_e}{bJ}}$ Prima approx $\approx \dfrac{\frac{K_t}{bJ}}{s^2\frac{L}{R} + s + \frac{b}{J} + \frac{K_tK_e}{bJ}}$ ③

↳ moltiplico per $\frac{1}{RJ}$

Trascurabile

Se $\tau_E << \tau_M \rightarrow \frac{L}{R}\cdot\frac{b}{J} = \tau_E \cdot \frac{1}{\tau_M} \approx \varnothing << 1$

MEDIA GEOMETRICA IN FREQUENZA
Delle pulsazioni di rottura
$\rightleftharpoons$
MEDIA ARITMETICA NEL TEMPO
Delle pulsazioni di rottura

$$M_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \qquad M_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Sfruttiamo il fatto che la media geometrica in frequenza equivale alla media aritmetica nel tempo per trovare il punto medio tra le due pulsazioni di rottura.

Questo punto medio ci serve per dire che **se ci poniamo ad una pulsazione molto minore del punto medio** delle due pulsazioni di rottura, **possiamo ridurre il grado della funzione di trasferimento.**

proof $\omega_1, \omega_2 \rightarrow M_g = \sqrt{\omega_1\cdot\omega_2} = \log_{10}\left[\sqrt{\frac{1}{\tau_E\cdot\tau_M}}\right] = \log_{10}\left[\left(\frac{1}{\tau_E\cdot\tau_M}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{1}{\tau_E\cdot\tau_M}\right)$

$$= \frac{1}{2}\log_{10}\frac{1}{\tau_E} + \frac{1}{2}\log_{10}\frac{1}{\tau_M} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\log_{10}(x_i)$$ Media Aritmetica

Rappresentazione su scala logaritmica del 1° punto di rottura

Rappresentazione su scala logaritmica del 2° punto di rottura

QED

Se $\omega << \sqrt{\frac{1}{\tau_E\cdot\tau_M}} \Rightarrow \omega^2 << \frac{1}{\tau_E}\cdot\frac{1}{\tau_M} \rightarrow \omega^2\tau_E << \frac{1}{\tau_M}$ ma $\tau_M = \frac{J}{b} \Rightarrow \boxed{\omega^2\frac{L}{R} << \frac{b}{J}}$

dalla ③ $G(s) \overset{1}{\approx} \dfrac{\frac{K_t}{bJ}}{s^2\frac{L}{R} + s + \frac{b}{J} + \frac{K_tK_e}{bJ}} \overset{2}{\approx} \boxed{\dfrac{\frac{K_t}{bJ}}{s + \frac{b}{J} + \frac{K_tK_e}{bJ}}}$

$\omega^2\frac{L}{R} << \frac{b}{J}$

Approssimazioni valide per pulsazioni (frequenze) molto minori del punto medio tra i due punti di rottura w1 e w2.

$\omega << \sqrt{(\tau_E\cdot\tau_L)}^{-1}$

Almeno una Decade

$\frac{L}{R}$ coeff di s^2 ma $\bar{S}_1 = -\frac{R}{L}$ ⇒ $\frac{L}{R}$ costante di Tempo

$\frac{J}{b}$ coeff di τ_L ma $\bar{S}_2 = -\frac{b}{J}$ ⇒ $\frac{J}{b}$ c.t.

Elettrica τ_e^{OL}
Meccanica τ_m^{OL}
} con $\tau_e \ll \tau_m$

⇒ $\frac{\tau_e}{\tau_m} = \frac{b}{J}\cdot\frac{L}{R} \ll 1$

Se $\omega \ll \left(\sqrt{\tau_e^{ol}\tau_m^{ol}}\right)^{-1}$, allora $\omega^2\tau_e^{ol} \ll (\tau_m^{ol})^{-1} = b/J$.

media aritmetica tra le due pulsazioni *

⇒
$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} \approx \frac{\frac{k_t}{RJ}}{s + \frac{b}{J} + \frac{k_e k_t}{RJ}},$$

Recap

Approssimiamo la fdt di 2° ordine con una di primo ordine perché:
1. La costante di tempo elettrica deve essere trascurabile rispetto a quella meccanica (vero)
2. Facciamo un'analisi in frequenza per pulsazioni molto inferiori rispetto al punto medio tra le due pulsazioni di rottura della fdt di secondo ordine.

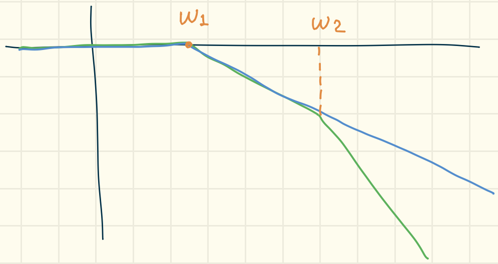
Perdiamo traccia di L: è come se fosse zero. Questa fdt è quella che otterremmo se ponessimo l'induttanza pari a zero.

* Fine Assenza (Rec 3)

RIDUZIONE D'ORDINE (IN GENERALE)

Nel caso particolare di prima questo era valido perché una delle due costanti (t1) era dovuta ad una componente meccanica, che è notoriamente più grande di una costante elettrica (t2)

Se $G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$ Se $\tau_2 \ll \tau_1$ $G(s) \approx \frac{1}{\tau_1 s + 1}$. ← Il secondo punto di rottura scompare



possiamo fare l'operazione di riduzione d'ordine quando una delle due dinamiche è molto diversa dall'altra. Gli esponenziali non dominanti si spengono in tempi trascurabili rispetto ai tempi di assestamento dell'esponenziale dominante. Se le due costanti di tempo sono diverse tra loro vuol dire che le frequenze di rottura sono lontane tra loro e che quindi ponendosi a molta distanza (inferiore) possiamo **valutare il sistema guardando solo al primo punto di rottura**: questo perché essendo i due punti di rottura molto distanti tra loro, l'andamento in corrispondenza del primo punto (contando anche il secondo) è molto simile all'andamento che la fdt avrebbe se avesse solo il primo polo. *

Il polo dominante è quello più vicino all'asse dell'origine.

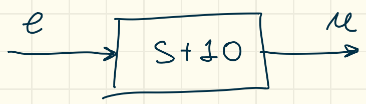
* Discorso del gain **

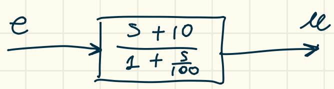
Un derivatore non può essere realizzato, quindi aggiungiamo un polo molto lontano in modo da non influenzare il polo del derivatore.

$$G(s) = \frac{1/(\tau_1\tau_2)}{(s + 1/\tau_1)\cancel{(s + 1/\tau_2)}}$$

Possiamo scrivere le fdt in 3 modi.
Nel modo a sinistra **evidenziamo i poli e gli zeri**, mentre nella rappresentazione precedente **evidenziamo il guadagno**

Se cancellassimo (ad esempio) T2 **modifichiamo il diagramma di bode anche a basse frequenze** perché quel membro **contribuisce al guadagno statico**.





$u = \dot{e} + 10e$ → Non fisicamente realizzabile

$\bar{G} = \frac{S+10}{1+\frac{S}{100}}$ → fisicamente realizzabile

NON REALIZZABILE $\boxed{G(S) = S + 10}$ Con $\underset{\text{FORMA BODE}}{G(S) = 10(1+10S)}$ $\rightsquigarrow$ $K_S = 10$

$\rightsquigarrow$ Aggiungo un polo molto piccolo (almeno una decade più piccolo dello zero): $\bar{P}$ in -100

$$\Rightarrow \boxed{\bar{G}(S) = \frac{S+10}{S+100}} \Rightarrow \begin{cases} z = -10 \\ p = -100 \end{cases} \quad \underline{MA} \quad \bar{G}(S) = \frac{\frac{1}{10}(1+10S)}{\frac{1}{100}(1+100S)} \Rightarrow \bar{K}_S = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1000}$$

$\bar{G}(S)$ è realizzabile MA ho un guadagno Statico diverso!

Come risolvere?

$$\bar{G}_1(S) = \frac{S+10}{1+\frac{S}{100}} \Rightarrow \begin{cases} z = -10 \\ \boxed{P = -100} \end{cases}$$

Il polo è Sempre in -100

$$\text{e} \quad \bar{G}_1(S) = \frac{10(1+\frac{1}{10}S)}{\frac{100+S}{100}} = \frac{10}{\frac{1}{\cancel{100}}} \frac{1+\frac{1}{10}S}{\cancel{100}(1+\frac{1}{100}S)}$$

guadagno Statico INVARIATO

MODI DI SCRIVERE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Evidenziando quello che ci interessa

1) Rapporto tra Polinomi
2) Rapporto tra Produttorie di termini

$$\frac{\prod(S+z)}{\prod(S+p)} \qquad G(s) = \frac{1/(\tau_1\tau_2)}{(s+1/\tau_1)(s+1/\tau_2)}$$

- POLI/ZERI
- Punti di rottura (ω)

$$\frac{\prod(1+ST)}{\prod(1+S\tau)} \qquad \text{Se } G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

- GAIN ($s=0 \rightarrow K_p=1$)
- COSTANTI DI Tempo

Quando si lavora sulla fdt per **modificare il comportamento** in alta frequenza conviene lavorare con la fdt che evidenzia il guadagno e le costanti di tempo, in modo da non eliminare zeri che modificano il guadagno (se eliminiamo un polo della rappresentazione che evidenzia invece i poli e gli zeri andiamo a modificare il guadagno!)

Si traccino i diagrammi di Bode della f.d.t. del secondo ordine e quelli della f.d.t. del modello ridotto.
Fino a quali pulsazioni è accettabile l'approssimazione del modello ridotto?