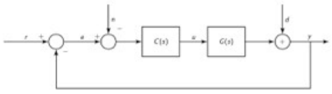
RECAP LEZ 12

Funzioni di sensitività



$$Y(s) = F(s)R(s) - F(s)N(s) + S(s)D(s)$$
$$U(s) = Q(s)R(s) - Q(s)N(s) - Q(s)D(s)$$
$$E(s) = S(s)R(s) + F(s)N(s) - S(s)D(s)$$

Si noti che

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}, \quad F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad Q(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Analisi statica

Calcoliamo l'errore a regime quando il riferimento è un gradino:
Se la f.d.t. $S(s)$ è as. stabile

$$e_{ss}^r = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\, S(s) \frac{1}{\cancel{s}} = S(0)$$

Data

$$L(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

allora

$$e_{ss}^r = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{s^g}{s^g + \mu} = \begin{cases} 1, & g < 0 \\ \dfrac{1}{1+\mu}, & g = 0, \ (\mu \neq -1) \\ 0, & g > 0 \end{cases}$$

Domanda: Se $g = 0$ e $\mu = -1$ che succede?

$$L(s) = -\frac{1}{1+s} \rightsquigarrow S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+s}} = \frac{1}{\frac{1+s-1}{1+s}} = \frac{1+s}{s}$$

da sensitività diretta non è A. Stabile

$$\text{se } U(s) = \frac{1}{s} \to Y(s) = \frac{s+1}{s^2} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} = 1 \cdot 1\!\!1(t) + t \cdot 1\!\!1(t)$$

DIVERGE

$$A = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{s+1}{s^{\cancel{2}}} = 1 = B$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{N_L}{D_L}} = \frac{D_L}{D_L + N_L}$$

Ingressi polinomiali

*

Calcoliamo l'errore a regime quando il riferimento è un ingresso polinomiale:

Se la f.d.t. $S(s)$ è as. stabile

$$e_{ss}^r = \lim_{s\to 0} s\,S(s)\frac{1}{s^i} = \lim_{s\to 0} S(s)\frac{1}{s^{i-1}} \qquad i = 2, 3, \dots$$

*

Spiegazione

Data

$$L(s) = \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1+T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

allora

$$e_{ss}^r = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{1}{s^{i-1}} = \lim_{s\to 0} \frac{s^{g-i+1}}{s^g + \mu} = \begin{cases} \infty, & g < i-1, \leftarrow \\ \dfrac{1}{\mu}, & g = i-1 \\ 0, & g > i-1 \leftarrow \end{cases}$$

$r(t)$

	gradino	Rampa	
	$1(t)$	$t \cdot 1(t)$	$t^2/2 \cdot 1(t)$
$L(s)$	e_p	e_v	e_a
$g = 0$	$\boxed{\dfrac{1}{1+\mu}}$	∞	∞
$g = 1$	0	$\boxed{\dfrac{1}{\mu}}$	∞
$g = 2$	0	0	$\boxed{\dfrac{1}{\mu}}$
$g = 3$	0	0	0

Numero di Azioni integrali

guadagno

Ci interessa sapere solo quanti poli in origine abbiamo, ovvero quante azioni integrali ha la funzione di trasferimento.

Se il processo non ha integratori, possiamo metterli nel controllore, tanto abbiamo la cascata che moltiplica le funzioni di trasferimento.

A seconda del numero di azioni integrali otteniamo un errore nullo sul relativo segnale (gradino, rampa ecc). Il problema è che andiamo a destabilizzare il sistema.

Se ci accontentiamo di un errore diverso da zero dobbiamo avere il guadagno molto alto in modo da minimizzare l'errore.

Remark

Se la funzione di anello è di tipo g, la retroazione negativa unitaria garantisce il perfetto inseguimento di un ingresso polinomiale $1/s^g$.

*

Principio del modello interno

Per seguire perfettamente un segnale (a regime) polimoniale dobbiamo (è sufficiente) inserire (nella funzione di anello o nel controllore) la trasformata di Laplace del segnale che vogliamo inseguire.

Questo soddisfa le specifiche statiche, ovvero a regime.

Dovremmo poter soddisfare poi delle specifiche dinamiche, ovvero durante il transitorio, e quindi non ci basta più questo requisito.

È detto del modello interno perché all'interno del controllore dobbiamo avere il modello del segnale che vogliamo seguire; ad esempio se vogliamo seguire una rampa, che ha come trasformata di Laplace (1/s), ci basta avere un'azione integrale, ovvero proprio 1/s.

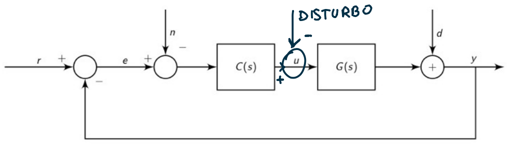
*

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{1}{1+L(s)},$$

con $L(s) \triangleq C(s)G(s)$. Tale funzione è la f.d.t. tra

- disturbo d e uscita y
- opposto del disturbo $(-d)$ ed errore e
- riferimento r ed errore e

Idealmente vorremmo $S(s)$ identicamente nulla.



$$Y(s) = T_{r\to y}(s)R(s) + T_{n\to y}(s)N(s) + T_{d\to y}(s)D(s)$$
$$U(s) = T_{r\to u}(s)R(s) + T_{n\to u}(s)N(s) + T_{d\to u}(s)D(s)$$
$$E(s) = T_{r\to e}(s)R(s) + T_{n\to e}(s)N(s) + T_{d\to e}(s)D(s)$$

* OSSERVAZIONE ←

*41:00 ←

Oltre a seguire il segnale (a regime) riusciamo anche ad essere robusti alla presenza di disturbi a gradino sull'uscita.

Se il disturbo entrasse in ingresso al processo, la funzione di trasferimento non è più la sensitività diretta, ma G(s)/1+G(s)C(s). In questo caso non è più sufficiente avere un'azione integrale nel processo ma ci serve un'azione integrale nel controllore.

AZIONI INTEGRALI

Azione integrale

Se la funzione di trasferimento del processo $G(s)$ è di tipo 0, possiamo inserire un'azione integrale nel controllore:

$$u(t) = k_i \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau \Rightarrow C(s) = k_i \frac{1}{s}$$

Nel dominio del tempo, l'errore statico nullo può essere giustificato dal fatto che, se esiste un regime di equilibrio (f.d.t. as. stabile), l'unica possibilità per avere u_{ss} costante è che $e_{ss} = 0$.
Si noti che la regolazione dell'errore a zero dovuta all'azione integrale non dipende dai parametri delle f.d.t. ma solo dal tipo della funzione di anello:
Regolazione robusta a zero dell'errore e Reiezione robusta dei disturbi. *

* Spiegazione

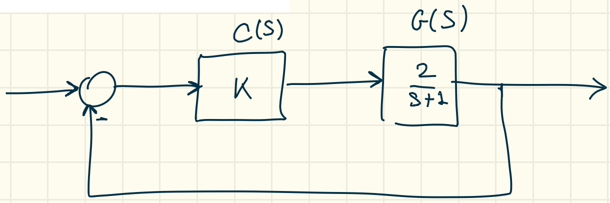
Esercizi

- Sia data la f.d.t. del processo
$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$
  - Si determini un controllore che garantisca a regime un errore di posizione inferiore al 10%
  - Si determini un controllore che garantisca a regime un errore di velocità inferiore al 10%

PER TENTATIVI

Controllore più semplice: PROPORZIONALE

Se $C(S) = 1$



DIRETTA

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + G(s)C(s)}$$

$$F_{Anello} = \frac{2}{S+2}$$

10%

$$\frac{1}{1+2K} < 0.1 \rightarrow 1 + 2K < 10$$
$$\Rightarrow K > \frac{4}{2}$$ Proporzionale

2) Velocità

*controlla

Ci serve un integrale / prop $C(s) = \frac{K}{s}$

polinomio caratteristico $\cancel{S^2+2S+K}$ S^2+S+2K

Errore di pos: $\emptyset$

Errore di Velocità: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2K} < 0.1 \rightarrow 2K < 10 \rightarrow K > 5$

- Sia data la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

e si determini un controllore che garantisca a regime un errore di posizione inferiore al 10%.

Controllo Stabilità

$s-2=0 \rightarrow \bar{s}=+2$ INSTABILE

$$\frac{\frac{K}{s-2}}{1+\frac{K}{s-2}} = \frac{\frac{K}{\cancel{s-2}}}{\frac{s-2+K}{\cancel{s-2}}} = \frac{K}{s-2+K}$$ Polinomio Caratteristico

$$\varepsilon_p = \left|\frac{1}{1+\mu}\right|$$

funzione di anello $= \frac{K}{s-2}$ $\Rightarrow$ guadagno di anello $= -\frac{K}{2}$ $\Rightarrow \varepsilon_p = \left|\frac{1}{1-\frac{K}{2}}\right| = \frac{1}{\frac{2-K}{2}} = \left|\frac{2}{2-K}\right|$

INTEGRALE per $\varepsilon_v < 10\%$

$e < 10\% \rightarrow \frac{2}{2-K} < \frac{1}{10} \rightarrow 2-K<10 \Rightarrow K>22$

Non lo possiamo Stabilizzare * senti Audio

Proporzionale Integrale : $K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} =$ * $\begin{cases} z = -\frac{K_i}{K_p} \\ p = \emptyset \\ gain = K_p \end{cases}$

*

$$\underset{C(s)}{\cancel{X}(s)} \; L(s) = \frac{K_p\left(s+\frac{K_i}{K_p}\right)}{s} \cdot \underset{G(s)}{\frac{1}{s-2}} \rightsquigarrow \underbrace{s^2-2s+K_p s+K_i}_{\text{Pol Car}}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

Smorzamento

* Audio

$$\mu = \lim_{s\to 0} s^{g} \cdot L(s) = s \cdot \frac{K_i}{s-2} =$$

Pol Car $= s^2 + s(K_p - 2) + K_i$

Aumentando K_p diminuisco la sovraelongazione

- Sensitività (diretta): $S(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)}$ *
- Sensitività complementare: $F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$
- Sensitività del controllo: $Q(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$

ERRORE A REGIME CON INGRESSO POLINOMIALE

Polinomio di grado N $= \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot t^i \Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{grado } 0: & 1(t) \rightleftharpoons \frac{1}{s} & \text{gradino} \\ \text{grado } 1: & t\cdot 1(t) \rightleftharpoons \frac{1}{s^2} & \text{Rampa} \\ \text{grado } 2: & \frac{t^2}{2} 1(t) \rightleftharpoons \frac{1}{s^3} & \text{Parabola} \\ \vdots & & \\ \text{grado } 4: & t^4 1(t) \rightleftharpoons 4!\cdot s^{-4-1} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{s^5} = \frac{24}{s^5} & \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[t^k \cdot 1(t)] \rightleftharpoons k!\cdot s^{-k-1}}$$

Posso scrivere l'errore a s.s. come

$$e_{ss}^r = \lim_{s\to 0} s\cdot S(s)\cdot \frac{1}{s^i} = \lim_{s\to 0} S(s)\cdot \frac{1}{s^{i-1}}$$

Pongo come l'ultima volta: $L(s) = \frac{\mu\prod_i(1+\tau_i s)\prod_i(1+2\zeta_i s/\alpha_{ni}+s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g\prod_i(1+T_i s)\prod_i(1+2\xi_i s/\omega_{ni}+s^2/\omega_{ni}^2)}$

Siccome $S(s)=\frac{1}{1+L(s)} \to e_{ss}^r = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+L(s)}\cdot\frac{1}{s^{i-1}}$ con $\frac{1}{1+L(s)} \xrightarrow{s\to 0} \frac{\mu}{s^g}$

$$\Rightarrow e_{ss}^r = \lim_{s\to 0}\frac{s^g}{s^g+\mu}\cdot\frac{1}{s^{i-1}} = \lim_{s\to 0}\frac{s^g}{s^g+\mu}\cdot s^{-(i-1)} = \lim_{s\to 0}\frac{s^g}{s^g+\mu}\cdot s^{1-i} = \boxed{\lim_{s\to 0}\frac{s^{g-i+1}}{s^g+\mu}}$$

Caso 1: $g < i-1$, Ad es: $g = i-2$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{s^{g-i+1}}{s^g+\mu} = \frac{s^{\cancel{i}-2-\cancel{i}+1}}{s^{i-2}+\mu} = \frac{1}{s(s^{i-2}+\mu)} \to \infty$$

$g < i-1$

Caso 2: $g = i-1$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{s^{g-i+1}}{s^g+\mu} = \frac{s^{\cancel{i}-1-\cancel{i}+1 \to 0} \to 1}{\underbrace{s^{i-1}}_{\approx 0}+\mu} = \frac{1}{\mu}$$

$g = i-1$

Caso 3: $g > i-1$, Ad es: $g = i$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{s^{g-i+1}}{s^g+\mu} = \lim_{s\to 0}\frac{s^{\cancel{i}-\cancel{i}+1} \to 0}{\underbrace{s^i}_{\to 1}+\mu} = 0$$

$s > g-1$

MORALE DELLA FAVOLA

$$e_{ss}^r = \begin{cases} \infty & g < i-1 \\ 1/\mu & g = i-1 \\ 0 & g > i-1 \end{cases}$$

$g - i < -1$ e_a

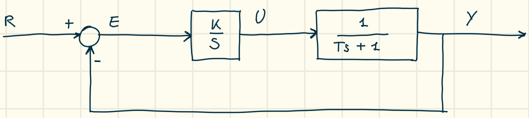
$g - i = 0$ e_v

$g - i > -1$ e_p

Azioni integrali — grado polinomio

CONTROLLO INTEGRALE DEI SISTEMI

INPUT $r(t) = 1(t) \rightleftharpoons R(s) = \frac{1}{s}$



Fdt in CL: $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{1+\frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{\frac{K}{\cancel{s(Ts+1)}}}{\frac{s(Ts+1)+K}{\cancel{s(Ts+1)}}} = \frac{K}{s(Ts+1)+K}$ G(s)

$$\Rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s)-Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s}-\frac{K}{s(Ts+1)+K}}{\frac{1}{s}} = \frac{\frac{s(Ts+1)+\cancel{K}-\cancel{K}}{s^2(Ts+1)+sK}}{1/s} = \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}$$

Errore a regime (e_p)

$$e_{ss}^r = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s^{\cancel{2}}(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}$$

1(t)

$\Rightarrow \boxed{e_{ss} \xrightarrow{t\to\infty} 0}$ NESSUN ERRORE A REGIME con un ingresso $1(t) \equiv$ POSIZIONE

Errore a regime (e_v)

Se $R = \frac{1}{s^2} \to e_{ss}^r = \lim_{s\to 0}\frac{\cancel{s^2}(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}\cdot\frac{1}{\cancel{s^2}}$ Ramp() $\Rightarrow \boxed{e_{ss} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{K}}$

Errore di Velocità con ingresso $r(t) = t\cdot 1(t) \rightleftharpoons R(s) = \frac{1}{s^2}$

Errore a regime (e_a)

Se $r(t) = \frac{t^2}{2} \rightleftarrows R(s) = \frac{1}{s^3}$ $\Rightarrow e_{ss}^{r} = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s^2}(Ts+1)}{\cancel{s}(Ts+1)+K} \frac{1}{s^3} \approx \lim_{s\to 0} \frac{1}{K}\cdot\frac{1}{s} \Rightarrow$ $\boxed{e_{ss} \xrightarrow{t\to\infty} \infty}$

Errore di Accelerazione Infinito

Morale della favola: con **una sola azione integrale** possiamo aspettarci di avere 3 valori dell'errore a regime a seconda dell'ingresso:
- ingresso gradino —> errore di posizione nullo
- ingresso rampa —> errore di velocità diverso da zero e pari a 1/K, dove K è il guadagno statico della funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema. Per minimizzare l'errore dobbiamo aumentare K.
- ingresso parabolico —> errore di accelerazione infinito (non possiamo fare nulla per migliorarlo).

ULTERIORI AZIONI INTEGRALI

Se aumentiamo le azioni integrali da 1 a 2 e calcoliamo nuovamente l'errore troveremo che...

	$\mathbb{1}(t)$ e_p	$t\cdot\mathbb{1}(t)$ e_v	$\frac{t^2}{2}\cdot\mathbb{1}(t)$ e_a	
$\propto 1/s^2$	0	0	$\frac{1}{K}$	• 2 Azioni integrali $\Rightarrow g=2$
$\propto 1/s^3$	0	0	0	• 3 Azioni integrali $\Rightarrow g=3$

TABELLA RIASSUNTIVA

		$\mathbb{1}(t)$ e_p	$t\cdot\mathbb{1}(t)$ e_v	$\frac{t^2}{2}\cdot\mathbb{1}(t)$ e_a	
$g=0$	$\propto 1$	$\left\lvert\frac{1}{1+\mu}\right\rvert$	∞	∞	• 0 Azioni integrali $\Rightarrow g=0$
$g=1$	$\propto 1/s$	0	$\left\lvert\frac{1}{\mu}\right\rvert$	∞	• 1 Azione integrale $\Rightarrow g=1$
$g=2$	$\propto 1/s^2$	0	0	$\left\lvert\frac{1}{\mu}\right\rvert$	• 2 Azioni integrali $\Rightarrow g=2$
$g=3$	$\propto 1/s^3$	0	0	0	• 3 Azioni integrali $\Rightarrow g=3$

Principio del modello interno
Per seguire perfettamente un segnale (a regime) polimoniale dobbiamo (è sufficiente) inserire (nella funzione di anello o nel controllore) la trasformata di Laplace del segnale che vogliamo inseguire.

Questo soddisfa le specifiche statiche, ovvero a regime.

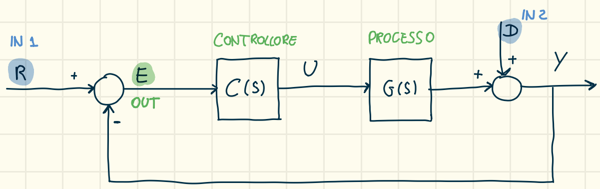
Dovremmo poter soddisfare poi delle specifiche dinamiche, ovvero durante il transitorio, e quindi non ci basta più questo requisito.

È detto del modello interno perché all'interno del controllore dobbiamo avere il modello del segnale che vogliamo seguire; ad esempio se vogliamo seguire una rampa, che ha come trasformata di Laplace (1/s), ci basta avere un'azione integrale, ovvero proprio 1/s.

INOLTRE $e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{R(s)}{1+L(s)}$ con $L(s)=G(s)H(s)$ GUADAGNO DI ANELLO

Valore Statico del guadagno di anello: $L_{ST} = \lim_{s\to 0} L(s) = \lim_{s\to 0}\frac{N(s)}{D(s)}$

COSA SUCCEDE SE HO UN DISTURBO IN USCITA?



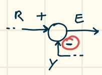
Sovrapposizione degli effetti: $E(s) = T_{r\to e}\cdot R(s) + T_{d\to e}\cdot D(s)$

Supponiamo che il disturbo sia un segnale gradino: $d(t) = \mathbb{1}(t) \rightleftarrows D(s) = \frac{1}{s} = R(s) = \frac{1}{s}$

$$\begin{cases} T_{r\to e} = S(s) \\ T_{d\to e} = -S(s) \end{cases}$$

Sensitività Diretta

[c'è un meno al ritorno]



$\Rightarrow E = S(s)\cdot\frac{1}{s} - S(s)\cdot\frac{1}{s} = 0$ l'errore è zero! $\Rightarrow$ Riusciamo a seguire l'ingresso e siamo robusti ad un disturbo dello STESSO TIPO

ES:

$$G(S) = \frac{2}{S+1} \quad \text{PROCESSO}$$

- Sia data la f.d.t. del processo

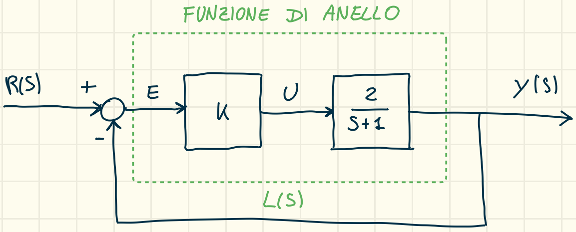
$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$

  - Si determini un controllore che garantisca a regime un errore di posizione inferiore al 10%
  - Si determini un controllore che garantisca a regime un errore di velocità inferiore al 10%

1) $e_p < 10\%$

• Provo un controllore Proporzionale

A. MI ASSICURO CHE IL SYS SIA STABILE



$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{\frac{K2}{S+1}}{1+\frac{K2}{S+1}} = \frac{\frac{2K}{\cancel{S+1}}}{\frac{S+1+2K}{\cancel{S+1}}} = \frac{2K}{S+1+2K} \quad \text{Se pongo } K=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(S) = T_{r-y} = \dfrac{2}{S+3} & \text{S. COMPLEMENTARE} \quad (K=1) \\ S(S) = T_{r-e} \underset{K=1}{=} \dfrac{1}{1+\frac{2}{S+1}} = \dfrac{S+1}{S+3} & \text{S. DIRETTA} \quad (K=1) \end{cases}$$

Se $S(S)$ o $F(S)$ stabili $\Rightarrow$ Sistema in Retroazione è Stabile

Il polinomio Caratteristico di tutte le funzioni di Sensitività è la Somma del NUMERATORE e DENOMINATORE della funzione di anello

$$\Rightarrow S(S) = \frac{\text{Den (F.Anello)}}{\text{Den + NUM (F.Anello)}} \qquad \text{con F.Anello} = \frac{2}{S+1} \text{ per } K=1$$

$$\text{Se } K=1 \Rightarrow F_{anello} = \frac{2 \;\; N}{S+1 \;\; D} \quad \Rightarrow \quad P_c = N+D = 2+S+1 = S+3 \quad \text{(A.Stabile)}$$

B. ANALISI A REGIME

$$\mu = 2 \Rightarrow \frac{1}{1+\mu} = \frac{1}{3} = 33\% \Rightarrow \text{TROPPO ALTO!} \quad (\text{Vogliamo } e_p < 10\%)$$

Procedimento Reale

$$\text{F.Anello} = L(S) = C(S)\cdot G(S) = \underset{\text{Controllore}}{K} \cdot \underset{\text{Processo}}{\frac{2}{S+1}} = \underset{L(S)}{\frac{2K}{S+1}} \Rightarrow \text{Guadagno di anello} = \mu = \lim_{S\to 0} L(S) = \lim_{S\to 0} \frac{2K}{S+1} \to 2K \;\; \mu$$

$$\Rightarrow \text{Siccome } L(S) \text{ ha } P_{caratt} = S+1 \Rightarrow \text{è tipo zero} \Rightarrow e_p^{(0)} = \frac{1}{1+\mu} = \frac{1}{1+2K} \underset{\text{Richiesta}}{<} 0.1 \Leftrightarrow 1+2K > 10$$

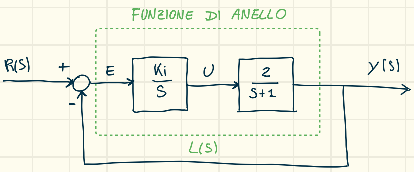
$$\Rightarrow K < \frac{9}{2} \Rightarrow K > 4.5$$

MA Il sistema è sempre stabile se $K > 4.5$?

Da una delle 3 Sensitività: $F(S) = \dfrac{2K}{S+1+2K}$ $\to$ $S+1+2K$ è stabile per $1+2K > 0 \Leftrightarrow K > -\frac{1}{2}$ Apposto!

2) $e_v < 10\%$

L'errore di Velocità è ∞ per una $L(S)$ di tipo < 1 $\Rightarrow$ ci serve un controllore integrale $C(S) = \dfrac{K_i}{S}$



$$\Rightarrow L(S) = G(S)\cdot C(S) = \frac{2K_i}{S(S+1)} \Rightarrow S(S) = \frac{1}{1+L(S)} \xrightarrow[P_c = N_L + D_L]{\text{Senza Calcolare}} P_c = 2K_i + S(S+1)$$

$$\Rightarrow P_c = S^2 + S + 2K_i \Rightarrow \begin{array}{c|cc} S^2 & 1 & 2K_i \\ S^1 & 1 & 0 \\ S^0 & 2K_i & \end{array}$$

$2K_i > 0$ per $K_i > 0$

Qualsiasi controllore con k > 0 ci garantisce l'asintotica stabilità

$$\mu_v = \lim_{S\to 0} S\cdot L(S) = \lim_{S\to 0} \cancel{S} \cdot \frac{2K_i}{\cancel{S}(S+1)} = 2K_i \Rightarrow e_v = \frac{1}{2K_i} < 0.1 \to 2K_i > 10$$

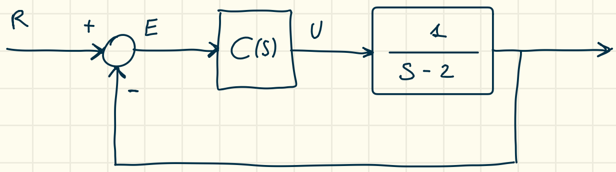
$$\Rightarrow K_i > 5 \quad \text{Ans}$$

ES:

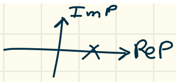
- Sia data la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

a) e si determini un controllore che garantisca a regime un errore di posizione inferiore al 10%.



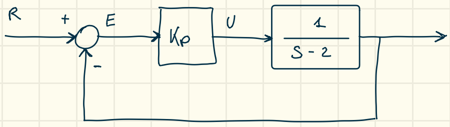
$\underline{Ma}$ $G(S) = \frac{1}{S-2} \to \bar{S} = +2$



$\Rightarrow$ INSTABILE

Questo processo è **instabile**. Di conseguenza a ciclo aperto non possiamo fare nulla. L'unico modo per rendere il processo stabile è tramite la retroazione. Il primo controllore che proviamo è quello proporzionale, essendo il più semplice.

$C(S) = K_p$



$\Rightarrow L(S) = C(S) \cdot G(S) = \frac{K_p}{S-2} \rightsquigarrow S(S) = \frac{1}{1+L(S)} = \frac{S-2}{S-2+K_p}$ Polinomio Caratteristico

Posso trovare il P.C. sapendo che $P_c(S) = NUM(L(S)) + DEN(L(S)) = K_p + S - 2$

Quando $P_c(S)$ e' stabile? per $K_p - 2 > 0 \Rightarrow \boxed{K_p > 2}$

Guadagno di anello: $\mu_p = \lim_{S\to 0} \frac{K_p}{S-2} = -\frac{K_p}{2}$ $\Rightarrow e_p = \left|\frac{1}{1+\mu_p}\right| = \left|\frac{1}{1-\frac{K_p}{2}}\right| = \left|\frac{2}{2-K_p}\right| < 10\% \Rightarrow 0.1$

$$\frac{|2|}{|2-K|} < \frac{1}{10}$$

$\frac{2}{2-K} < \frac{1}{10}$ per $2-K>0$, $K<2 \to \frac{20-2+K}{10(2-K)} < 0$ → $K < -18$, $K > 2$ — Non Ammissibile ($K<0$)

$-\frac{2}{2-K} < \frac{1}{10}$ per $K>2 \to \frac{20+2-K}{-10(2-K)} < 0$ → ~~$K > 22$~~, $K < 2$ — Ammissibile ✓

b) Controllore per avere un $e_v < 10\%$

1. Proporzionale non basta → Provo integrale → $C(S) = \frac{K_i}{S} \Rightarrow L(S) = \frac{K_i}{S^2 - 2S}$ NUM / DEN

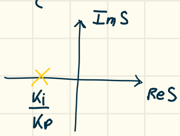
$P_c = Num(L(S)) + DEN(L(S)) = S^2 - 2S + K_i \Rightarrow$

S^2	1	K_i
S^1	-2	
S^0		

← SEMPRE INSTABILE

2. Integrale non basta → Provo Proporzionale integrale

$C_{PI}(S) = K_p + \frac{K_i}{S} = \frac{K_pS + K_i}{S} = \frac{\underset{\text{gain}}{K_p}\left(S + \overset{\text{zero}}{\frac{K_i}{K_p}}\right)}{S}$



per $K_i, K_p > 0$ OR K_i && $K_p < 0$

$\Rightarrow L(S) = C_{PI}(S) \cdot G(S) = \frac{K_p\left(S + \frac{K_i}{K_p}\right)}{S^2 - 2S}$

$\Rightarrow P_{c_{PI}}(S) = S^2 - 2S + K_pS + K_i = S^2 + S(K_p - 2) + K_i$

S^2	1	K_i
S^1	$K_p - 2$	0
S^0	$K_i(K_p-2)$	

A.Stabile $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} K_p - 2 > 0 \to \boxed{K_p > 2} \\ K_i(K_p-2) > 0 \to K_i > 0 \end{cases}$ (per $K_p > 2$)

Trovo i Valori di K_p e K_i per $e_v < 10\%$

$\mu_v = S \cdot L(S) = \frac{\cancel{K_p}\left(\cancel{S} + \frac{K_i}{\cancel{K_p}}\right)}{S^{\cancel{2}} - 2\cancel{S}} \to \frac{K_i}{-2} = -\frac{K_i}{2}$

$R_0 = 1$ se $R(S) = \frac{1}{S^2} \rightleftarrows r(t) = t \cdot 1(t)$

$\Rightarrow e_v = \frac{R_0}{\mu} = \frac{1}{-\frac{K_i}{2}} = \left|-\frac{2}{K_i}\right| < 0.1 \to \frac{2}{K_i} - \frac{1}{10} < 0 \to \frac{20 - K_i}{10K_i} < 0$

per $20 - K_i < 0 \to \boxed{K_i > 20}$

$K_i > 0$

Ki

Kp

Osservazione:

$P_{P.I.}(s) = s^2 - 2s + K_p s + K_i = s^2 + s(K_p - 2) + K_i$

Generico Sistema del II ordine: $T(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

Smorzamento

$\Rightarrow K_p - 2 = 2\zeta\omega_n$ ma $\omega_n = \sqrt{K_i} \Rightarrow K_p - 2 = 2\zeta\sqrt{K_i} \Rightarrow \zeta = \dfrac{K_p - 2}{2\sqrt{K_i}}$

$$\boxed{\zeta \propto \begin{cases} K_p \\ \dfrac{1}{\sqrt{K_i}} \end{cases}}$$

Più aumento il guadagno proporzionale maggiore sarà l'effetto associato al coefficiente di smorzamento. Siccome **il coefficiente di smorzamento è responsabile per le sovraelongazioni**, aumentando Kp possiamo ridurle tramite il controllore.