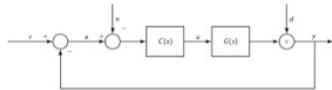


RECAP LEZ 12

Funzioni di sensitività



$$Y(s) = F(s)R(s) - F(s)N(s) + S(s)D(s)$$

$$U(s) = Q(s)R(s) - Q(s)N(s) - Q(s)D(s)$$

$$E(s) = S(s)R(s) + F(s)N(s) - S(s)D(s)$$

Si noti che

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}, \quad F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad Q(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Domanda: Se $\alpha = 0$ e $\mu = -1$ che succede?

$$L(s) = -\frac{1}{1+s} \quad \text{cioè } S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+s}} = \frac{1}{\frac{s}{1+s} + \frac{1}{1+s}} = \frac{1}{\frac{1+s}{s+1} + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{\frac{2+s}{s+1}}$$

$$\text{Se } U(s) = \frac{1}{s} \quad \text{e } Y(s) = \frac{s+1}{s^2} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 1L(t) + t \cdot 1L(t)$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s+1}{s^2} = \underset{1}{\cancel{\frac{1}{s}}} = B$$

da sensitività
diretta non
è A. stabile
DIVERGE

$$= \frac{1}{1 + \frac{N_L}{D_L}} = \frac{D_L}{D_L + N_L}$$

Ingressi polinomiali

Calcoliamo l'errore a regime quando il riferimento è un ingresso polinomiale:

Se la f.d.t. $S(s)$ è as. stabile

$$e_{ss}^r = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \frac{1}{s^i} = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) \frac{1}{s^{i-1}} \quad i = 2, 3, \dots$$

Data

$$L(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

allora

$$e_{ss}^r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s^{i-1}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-i+1}}{s^g + \mu} = \begin{cases} \infty, & g < i - 1, \\ \frac{1}{\mu}, & g = i - 1 \\ 0, & g > i - 1 \end{cases}$$

Spiegazione

$\zeta(t)$			
	gradino	Rampa	
$L(s)$	$1(t)$	$t \cdot 1(t)$	$t^2/2 \cdot 1(t)$
$g=0$	e_p	$\left \frac{1}{1+\mu} \right $	∞
$g=1$	0	$\left \frac{1}{\mu} \right $	∞
$g=2$	0	0	$\left \frac{1}{\mu} \right $
$g=3$	0	0	0

Numero di
azioni integrali

guadagno

Remark

Se la funzione di anello è di tipo g , la retroazione negativa unitaria garantisce il perfetto inseguimento di un ingresso polinomiale $1/s^g$.

Iannelli

Ci interessa sapere solo quanti poli in origine abbiamo, ovvero quante azioni integrali ha la funzione di trasferimento.

Se il processo non ha integratori, possiamo metterli nel controllore, tanto abbiamo la cascata che moltiplica le funzioni di trasferimento.

A seconda del numero di azioni integrali otteniamo un errore nullo sul relativo segnale (gradino, rampa ecc). Il problema è che andiamo a destabilizzare il sistema.

Se ci accontentiamo di un errore diverso da zero dobbiamo avere il guadagno molto alto in modo da minimizzare l'errore.

Principio del modello interno

Per seguire perfettamente un segnale (a regime) polinomiale dobbiamo (è sufficiente) inserire (nella funzione di anello o nel controllore) la trasformata di Laplace del segnale che vogliamo inseguire.

Questo soddisfa le specifiche statiche, ovvero a regime.

Dovremmo poter soddisfare poi delle specifiche dinamiche, ovvero durante il transitorio, e quindi non ci basta più questo requisito.

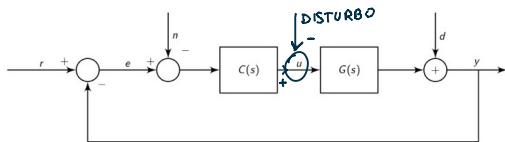
È detto del modello interno perché all'interno del controllore dobbiamo avere il modello del segnale che vogliamo seguire; ad esempio se vogliamo seguire una rampa, che ha come trasformata di Laplace ($1/s$), ci basta avere un'azione integrale, ovvero proprio $1/s$.

con $L(s) \triangleq C(s)G(s)$. Tale funzione è la f.d.t. tra

- ▶ disturbo d e uscita y
- ▶ opposto del disturbo ($-d$) ed errore e
- ▶ riferimento r ed errore e

Idealmente vorremmo $S(s)$ identicamente nulla.

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{1}{1 + L(s)},$$



$$Y(s) = T_{r \rightarrow y}(s)R(s) + T_{n \rightarrow y}(s)N(s) + T_{d \rightarrow y}(s)D(s)$$

$$U(s) = T_{r \rightarrow u}(s)R(s) + T_{n \rightarrow u}(s)N(s) + T_{d \rightarrow u}(s)D(s)$$

$$E(s) = T_{r \rightarrow e}(s)R(s) + T_{n \rightarrow e}(s)N(s) + T_{d \rightarrow e}(s)D(s)$$

* OSSERVAZIONE

* 41:00

Oltre a seguire il segnale (a regime) riusciamo anche ad essere robusti alla presenza di disturbi a gradino sull'uscita.

Se il disturbo entrasse in ingresso al processo, la funzione di trasferimento non è più la sensitività diretta, ma $G(s)/1+G(s)C(s)$. In questo caso non è più sufficiente avere un'azione integrale nel processo ma ci serve un'azione integrale nel controllore.

AZIONI INTEGRALI

Azione integrale

Se la funzione di trasferimento del processo $G(s)$ è di tipo 0, possiamo inserire un'**azione integrale** nel controllore:

$$u(t) = k_i \int_0^t e(\tau) d\tau \Rightarrow C(s) = k_i \frac{1}{s}$$

Nel dominio del tempo, l'**errore statico nullo** può essere giustificato dal fatto che, se esiste un regime di equilibrio (f.d.t. as. stabile), l'unica possibilità per avere u_{ss} costante è che $e_{ss} = 0$.

Si noti che la **regolazione dell'errore a zero** dovuta all'azione integrale non dipende dai parametri delle f.d.t. ma solo dal tipo della funzione di anello:

Regolazione robusta a zero dell'errore e Reiezione robusta dei disturbi.

* Spiegazione

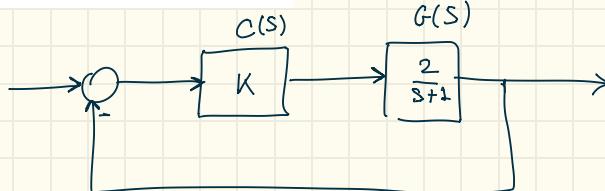
Esercizi

- Sia data la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$

- Si determini un controllore che garantisca a regime un errore di posizione inferiore al 10%
- Si determini un controllore che garantisca a regime un errore di velocità inferiore al 10%

Se $C(s) = 1$



DIRETTA

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + G(s)C(s)}$$

$$F_{errore} = \frac{2}{s+2}$$

$$\frac{1}{1 + 2K} < 0.1 \rightarrow 1 + 2K > 10$$

$$\Rightarrow K > \frac{4}{2} \text{ proporzionale}$$

10%

2) Velocità

Ci serve un integrale / prop $C(s) = \frac{K}{s}$

polinomio caratteristico

~~Stab~~

$$s^2 + s + 2K$$

Errore di pos: 0

Errore di Velocità: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2K} < 0.1 \rightarrow 2K > 10 \rightarrow K > 5$

* controllo

► Sia data la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

e si determini un controllore che garantisca a regime un errore di posizione inferiore al 10%.

Controllo Stabilità

$$s-2=0 \rightarrow \bar{s}=+2$$

INSTABILE

$$\frac{\frac{K}{s-2}}{1 + \frac{K}{s-2}} = \frac{\frac{K}{s-2}}{\frac{s-2+K}{s-2}} = \frac{K}{s-2+K} \quad \text{Polinomio Caratteristico}$$

$$E_p = \left| \frac{1}{1+\mu} \right|$$

$$\text{funzione di ouello} = \frac{K}{s-2} \Rightarrow \text{guadagno di ouello} = -\frac{K}{2} \Rightarrow E_p = \left| \frac{1}{1 - \frac{K}{2}} \right| = \frac{1}{\frac{2-K}{2}} = \left| \frac{2}{2-K} \right|$$

INTEGRALE Per $E_V < 10\%$

$$e < 10\% \rightarrow \frac{2}{2-K} < \frac{1}{10} \rightarrow 2-K < 10 \Rightarrow K > 22$$

Non lo possiamo Stabilizzare * senti Audio

Proporzionali : $K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} = *$

Integrali : $\begin{cases} Z = -\frac{K_i}{K_p} \\ P = \emptyset \\ \text{Gain} = K_p \end{cases} *$

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s-2} \\ L(s) &= \frac{K_p (s + \frac{K_i}{K_p})}{s} \\ G(s) &= \frac{1}{s-2} \\ \therefore & \quad \frac{s^2 - 2s + K_p s + K_i}{\text{Pol. Car}} \\ \mu &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot L(s) = \sigma \cdot \frac{K_i}{s-2} = * \text{ Audio} \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2j\omega_n s + \omega_n^2}$$

↑ Smorzamento

$$\text{Pol. Car} = s^2 + s((K_p)^2) + K_i$$

↑ Aumentando K_p diminuisce lo sorro elongazione

- **Sensitività (diretta):** $S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$ *
- **Sensitività complementare:** $F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$
- **Sensitività del controllo:** $Q(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)}$

ERRORE A REGIME CON INGRESSO POLINOMIALE

$$\text{Polinomio di grado } N = \sum_{i=0}^N \alpha_i \cdot t^i \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{grado 0: } \mathbf{1}(t) \Rightarrow \frac{1}{s} \\ \text{grado 1: } t \cdot \mathbf{1}(t) \Rightarrow \frac{1}{s^2} \\ \text{grado 2: } \frac{t^2 \cdot \mathbf{1}(t)}{2} \Rightarrow \frac{1}{s^3} \\ \vdots \\ \text{grado 4: } t^4 \cdot \mathbf{1}(t) \Rightarrow 4! \cdot \frac{1}{s^5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{s^5} = \frac{24}{s^5} \end{cases}$$

$$\Sigma [t^k \cdot \mathbf{1}(t)] \Rightarrow k! \cdot s^{-k-1}$$

Posso scrivere l'errore a S.S. come

$$e_{ss}^z = \lim_{S \rightarrow 0} S \cdot S(s) \cdot \frac{1}{S^z} = \lim_{S \rightarrow 0} S(s) \cdot \frac{1}{S^{z-1}}$$

$$\text{Pongo come l'ultima volta: } L(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

$$\text{Siccome } S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \Rightarrow e_{ss}^z = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{S^{z-1}} \text{ con } \frac{1}{1 + L(s)} \xrightarrow{S \rightarrow 0} \frac{\mu}{s^g}$$

$$\Rightarrow e_{ss}^z = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S^z}{S^z + \mu} \cdot \frac{1}{S^{z-1}} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S^z}{S^z + \mu} \cdot S^{-(z-1)} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S^z}{S^z + \mu} \cdot S^{1-z} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S^{z-1}}{S^z + \mu}$$

$$\begin{aligned} & \text{Caso 1: } z < z-1, \text{ Ad es: } z = i-2 \\ & e_{ss} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S}{S^z + \mu} = \frac{S}{S^{z-1} + \mu} = \frac{1}{S^{z-1} + \mu} \xrightarrow{z < z-1} \infty \end{aligned}$$

$$\text{Caso 2: } z = z-1$$

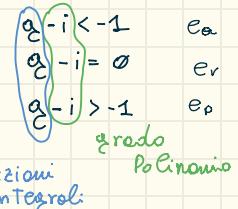
$$e_{ss} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S}{S^z + \mu} = \frac{S}{S^{z-1} + \mu} = \frac{1}{\mu} \xrightarrow{z = z-1} \infty$$

$$\text{Caso 3: } z > z-1, \text{ Ad es: } z = i$$

$$e_{ss} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S}{S^z + \mu} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S^i}{S^i + \mu} = \underset{1}{\textcircled{0}} \xrightarrow{z > z-1}$$

MORALE DELLA FAVOLA

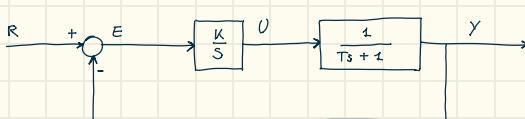
$$e_{ss}^z = \begin{cases} \infty & z < z-1 \\ \frac{1}{\mu} & z = z-1 \\ 0 & z > z-1 \end{cases}$$



Azioni integrali: Po. Cen. P. Cen.

CONTROLLO INTEGRALE DEI SISTEMI

$$\text{INPUT } \mathbf{z}(t) = \mathbf{1}(t) \Leftrightarrow R(s) = \frac{1}{s}$$



Errore a regime (e_p)

$$e_{ss}^z = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{S \rightarrow 0} S \cdot E(s) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S^2(Ts+1)}{S(Ts+1)+K} \underset{\mathbf{1}(t)}{\textcircled{1}} \underset{s}{\textcircled{0}}$$

$$\underset{t \rightarrow \infty}{\textcircled{1}} \Rightarrow e_{ss} \underset{0}{\textcircled{0}}$$

NESSUN ERRORE
A REGIME

Con un ingresso $\mathbf{1}(t) \equiv \text{POSIZIONE}$

Errore a regime (e_v)

$$\text{Se } R = \frac{1}{s^2} \Rightarrow e_{ss}^z = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S^2(Ts+1)}{S(Ts+1)+K} \underset{s^2}{\textcircled{1}} \Rightarrow e_{ss} \underset{0}{\textcircled{1}} \underset{K}{\textcircled{1}}$$

Errore di
Velocità con ingresso $\mathbf{z}(t) = t \cdot \mathbf{1}(t) \Leftrightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\begin{aligned} & \text{Fdt in CL: } \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{\frac{s(Ts+1)+K}{s(Ts+1)}} = \frac{K}{s(Ts+1)+K} \underset{G(s)}{\textcircled{1}} \\ & \Rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{K}{s(Ts+1)+K}}{\frac{1}{s}} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{K}{s(Ts+1)+K}}{\frac{1}{s}} = \frac{1}{s} - \frac{K}{s(Ts+1)+K} \underset{\frac{1}{s}}{\textcircled{1}} \end{aligned}$$

Errore a regime (e_a)

$$\text{Se } \zeta(t) = \frac{t^2}{2} \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow e_{ss}^i = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(Ts+1)}{s^3(Ts+1)+K} \frac{1}{s^3} \approx \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{K} \cdot \infty$$

errore di
accelerazione
infinito

Moral della favola: con una sola azione integrale possiamo aspettarci di avere 3 valori dell'errore a regime a seconda dell'ingresso:

- ingresso gradino \rightarrow errore di posizione nullo
- ingresso rampa \rightarrow errore di velocità diverso da zero e pari a $1/K$, dove K è il guadagno statico della funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema. Per minimizzare l'errore dobbiamo aumentare K .
- ingresso parabolico \rightarrow errore di accelerazione infinito (non possiamo fare nulla per migliorarlo).

ULTERIORI AZIONI INTEGRALI

Se aumentiamo le azioni integrali da 1 a 2 e calcoliamo nuovamente l'errore Troveremo che...

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1}(t) & t \cdot \mathbf{1}(t) & \frac{t^2}{2} \cdot \mathbf{1}(t) \\ e_p & e_v & e_a \end{array}$$

$$\propto \frac{1}{s^2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{K} \quad \bullet 2 \text{ Azioni integrali} \Rightarrow \zeta = 2$$

$$\propto \frac{1}{s^3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bullet 3 \text{ Azioni integrali} \Rightarrow \zeta = 3$$

TABELLA RIASSUNTIVA

	$\mathbf{1}(t)$	$t \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{t^2}{2} \cdot \mathbf{1}(t)$	
	e_p	e_v	e_a	
$\zeta = 0$	$\propto 1$	$\left \frac{1}{1+\mu} \right $	∞	∞
$\zeta = 1$	$\propto \frac{1}{s}$	0	$\left \frac{1}{\mu} \right $	∞
$\zeta = 2$	$\propto \frac{1}{s^2}$	0	0	$\left \frac{1}{\mu} \right $
$\zeta = 3$	$\propto \frac{1}{s^3}$	0	0	0
				\bullet n Azioni integrali $\Rightarrow \zeta = n$

Principio del modello interno
Per seguire perfettamente un segnale (a regime) polinomiale dobbiamo (è sufficiente) inserire (nella funzione di anello o nel controllore) la trasformata di Laplace del segnale che vogliamo inseguire.

Questo soddisfa le specifiche statiche, ovvero a regime.

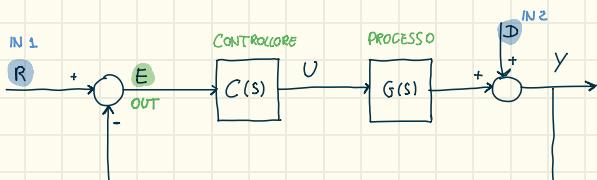
Dovremmo poter soddisfare poi delle specifiche dinamiche, ovvero durante il transitorio, e quindi non ci basta più questo requisito.

È detto del modello interno perché all'interno del controllore dobbiamo avere il modello del segnale che vogliamo seguire; ad esempio se vogliamo seguire una rampa, che ha come trasformata di Laplace ($1/s$), ci basta avere un'azione integrale, ovvero proprio $1/s$.

$$\text{INOLTRE } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R(s)}{1 + G(s) H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R(s)}{1 + L(s)} \quad \text{con } L(s) = G(s) H(s) \quad \text{GUADAGNO DI ANELLO}$$

$$\text{Valore Statico del guadagno di anello: } L_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N(s)}{D(s)}$$

COSA SUCCIDE SE HO UN DISTURBO IN USCITA?



Sorapposizione degli effetti:

$$E(s) = T_{r-e} \cdot R(s) + T_{d-e} \cdot D(s)$$

Supponiamo che il disturbo sia un segnale gradino: $d(t) = \mathbf{1}(t) \Rightarrow D(s) = \frac{1}{s} = R(s) = \frac{1}{s}$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{r-e} = S(s) \quad \text{sensibilità diretta} \\ T_{d-e} = -S(s) \quad [\text{c'è un mezzo di ritorno}] \end{array} \right.$$



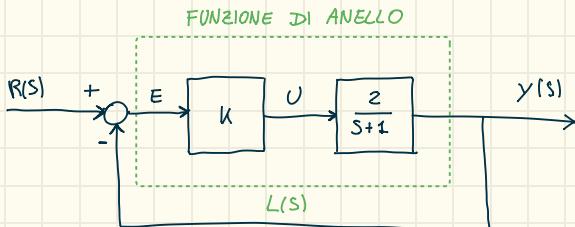
$$\Rightarrow E = S(s) \cdot \frac{1}{s} - S(s) \cdot \frac{1}{s} = 0 \quad \text{d'errore è zero!} \Rightarrow \text{Riusciamo a seguire l'ingresso e siamo robusti ad un disturbo dello stesso tipo}$$

ES:

- Sia data la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$

- Si determini un controllore che garantisca a regime un errore di posizione inferiore al 10%
- Si determini un controllore che garantisca a regime un errore di velocità inferiore al 10%



1) $e_p < 10\%$

- Provo un controllore Proporzionale

A. Mi ASSICURO CHE IL SYS SIA STABILE

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2}{s+1} \text{ PROCESSO} \\ \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{\frac{K}{s+1}}{1 + \frac{K}{s+1}} = \frac{\frac{2K}{s+1}}{s+1 + 2K} = \frac{2K}{s+1 + 2K} \quad \text{Se } K=1 \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F(s) = T_{r-y} = \frac{2}{s+3} \quad \text{S. COMPLEMENTARE} \quad (K=1) \\ S(s) = T_{z-p} = \frac{1}{1 + \frac{2}{s+1}} = \frac{s+1}{s+3} \quad \text{S. DIRETTA} \quad (K=1) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Se $S(s)$ o $F(s)$ stabili \Rightarrow Sistema in Retroazione e' Stabile

Il polinomio Caratteristico di tutte le funzioni di sensitività è la somma del NUMERATORE e DENOMINATORE delle funzioni di anello

$$\Rightarrow S(s) = \frac{\text{Den (F.Anello)}}{\text{Den + NUM (F.Anello)}} \quad \text{con } F.\text{Anello} = \frac{2}{s+1} \text{ per } K=1$$

$$\text{Se } K=1 \Rightarrow F.\text{Anello} = \frac{2}{s+1} \quad \Rightarrow P_c = N+D = 2+s+1 = s+3 \quad (\text{A. stabilità})$$

B. ANALISI A REGIME

$$\mu = 2 \Rightarrow \frac{1}{1+\mu} = \frac{1}{3} = 33\% \Rightarrow \text{TROPPO ALTO!} \quad (\text{vogliamo } e_p < 10\%)$$

Procedimento Reale

$$F.\text{Anello} = L(s) = C(s) \cdot G(s) = K \cdot \frac{2}{s+1} = \frac{2K}{s+1} \quad \text{controllore} \quad \text{Processo} \quad \Rightarrow \text{Guadagno di anello} = \mu = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2K}{s+1} \rightarrow 2K$$

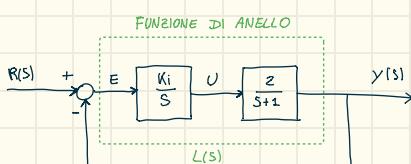
$$\Rightarrow \text{Siccome } L(s) \text{ ha } P_{\text{corrett}} = s+1 \Rightarrow \text{tipo zero} \Rightarrow e_p^{(0)} = \frac{1}{1+\mu} = \frac{1}{1+2K} \quad \text{Richiesta} \quad < 0.1 \quad \Rightarrow 1+2K > 10 \\ \Rightarrow K < \frac{9}{2} \Rightarrow K > 4.5$$

MA il sistema è sempre stabile se $K > 4.5$?

$$\text{Da una delle 3 sensitività: } F(s) = \frac{2K}{s+1+2K} \quad \text{e' stabile per } 1+2K>0 \Leftrightarrow K > -\frac{1}{2} \quad \text{Appunto!}$$

2) $e_v < 10\%$

d'errore di Velocità è ∞ per una $L(s)$ di tipo < 1 \Rightarrow ci serve un controllore integrale $C(s) = \frac{Ki}{s}$



$$\Rightarrow L(s) = G(s) \cdot C(s) = \frac{2Ki}{s(s+1)}$$

$$\Rightarrow P_c = s^2 + s + 2Ki \Rightarrow$$

s^2	1	2Ki
s^1	1	0
s^0	2Ki	

$$\begin{matrix} & 1 & 2Ki \\ & 1 & 0 \\ 2Ki & & \end{matrix}$$

$$2Ki > 0 \text{ per } Ki > 0$$

qualsiasi controllore con $K > 0$ ci garantisce l'asintotica stabilità

$$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{2Ki}{s(s+1)} = 2Ki \Rightarrow e_v = \frac{1}{2Ki} < 0.1 \Rightarrow 2Ki > 10 \\ \Rightarrow Ki > 5 \quad \text{Ans}$$

ES:

- Sia data la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

- a) e si determini un controllore che garantisca a regime un errore di posizione inferiore al 10%.

Mq $G(s) = \frac{1}{s-2} \rightarrow \bar{s} = +2 \xrightarrow{\text{ReP}} \text{INSTABILE}$

Questo processo è **instabile**. Di conseguenza a ciclo aperto non possiamo fare nulla. L'unico modo per rendere il processo stabile è tramite la retroazione. Il primo controllore che proviamo è quello proporzionale, essendo il più semplice.

$$\Rightarrow L(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{K_p}{s-2} \rightsquigarrow S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{s-2}{s-2+K_p} \text{ Polinomio Caratteristico}$$

Potro trovare il P.C. sapendo che $P_c(s) = \text{NUM}(L(s)) + \text{DEN}(L(s)) = K_p + s-2$

Quando $P_c(s)$ è stabile? per $K_p - 2 > 0 \Rightarrow K_p > 2$

Guadagno di ouello: $\mu_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_p}{s-2} = -\frac{K_p}{2} \Rightarrow e_p = \left| \frac{1}{1+\mu_p} \right| = \left| \frac{1}{1-\frac{K_p}{2}} \right| = \left| \frac{2}{2-K_p} \right| < 10\% = 0.1$

$\frac{|2|}{|2-K|} < \frac{1}{10}$

$\frac{2}{2-K} < \frac{1}{10} \quad \text{per } 2-K > 0, K < 2 \rightarrow \frac{20-2+K}{10(2-K)} < 0 \quad K < -18$

$-\frac{2}{2-K} < \frac{1}{10} \quad \text{per } K > 2 \rightarrow \frac{20+2-K}{10(2-K)} < 0 \quad K > 22$

$K > 2 \quad K < 2 \quad \text{Non Ammissibile } (K < 0)$

$K < 2 \quad \text{Ammissibile } \checkmark$

- b) Controllore per avere un $e_V < 10\%$.

1. Proporzionale non basta \Rightarrow Provo in tezroli $\Rightarrow C(s) = \frac{K_i}{s} \Rightarrow L(s) = \frac{K_i}{s^2 - 2s}$ NUM
DEN

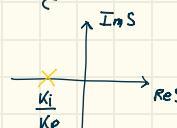
$$P_c = \text{Num}(L(s)) + \text{DEN}(L(s)) = s^2 - 2s + K_i \Rightarrow \begin{array}{c|cc} s^2 & 1 \\ s^1 & -2 \\ s^0 & K_i \end{array} \leftarrow \text{SEMPRE INSTABILE}$$

2. Integrale non basta \Rightarrow Provo Proporzionale in tezroli

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} = \frac{(K_p)(s + \frac{K_i}{K_p})}{s}$$

$$\Rightarrow L(s) = C_{PI}(s) \cdot G(s) = \frac{K_p (s + \frac{K_i}{K_p})}{s^2 - 2s}$$

$$\Rightarrow P_{PI}(s) = s^2 - 2s + K_p s + K_i = s^2 + s(K_p - 2) + K_i$$



per $K_i, K_p > 0$ OR $K_i & K_p < 0$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & K_i \\ s^1 & K_p - 2 & 0 \\ s^0 & K_i(K_p - 2) \end{array}$$

$$A.\text{Stabile} \Leftrightarrow \begin{cases} K_p - 2 > 0 \rightarrow K_p > 2 \\ K_i(K_p - 2) > 0 \rightarrow K_i > 0 \end{cases} \text{ (per } K_p > 2\text{)}$$

Trovare i valori di K_p e K_i per $e_V < 10\%$

$$\mu_V = \frac{K_p (s + \frac{K_i}{K_p})}{s^2 - 2s} \Rightarrow -\frac{K_i}{2} = -\frac{K_i}{2} \Rightarrow \mu_V = \frac{R_o}{\mu} = \frac{1}{-\frac{K_i}{2}} = \left| -\frac{2}{K_i} \right| < 0.1 \Rightarrow \frac{2}{K_i} < 0.1 \Rightarrow \frac{20 - K_i}{10K_i} < 0$$

$$R_o = 1 \text{ se } R(s) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow \ddot{x}(t) = t \cdot \ddot{u}(t)$$

$$\text{per } 20 - K_i < 0 \rightarrow K_i > 20$$

Osservazione :

$$P_{\text{eff}}(s) = s^2 - 2s + K_p s + K_i = s^2 + s(K_p - 2) + K_i$$

$$\Rightarrow K_p - 2 = 2\zeta \omega_n \quad \text{ma} \quad \omega_n = \sqrt{K_i} \Rightarrow K_p - 2 = 2\zeta \sqrt{K_i} \Rightarrow \zeta = \frac{K_p - 2}{2\sqrt{K_i}}$$

Generico Sistema del II ordine: $T(s) = s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2$

↑
Smorzamento

$$\zeta \propto \left\{ \begin{array}{l} K_p \\ \frac{1}{\sqrt{K_i}} \end{array} \right.$$

Più aumento il guadagno proporzionale maggiore sarà l'effetto associato al coefficiente di smorzamento. Siccome **il coefficiente di smorzamento è responsabile per le sovraetondazioni**, aumentando K_p possiamo ridurle tramite il controllore.