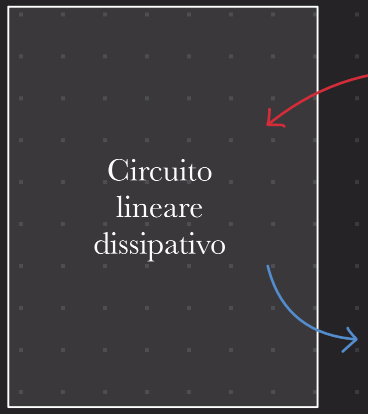
Metodo dei fasori per la risoluzione dei circuiti in regime sinusoidale



Input

$$\begin{cases} e_k(t) = E_k \cos(\omega t + \varphi_k) \\ j_k(t) = I_k \cos(\omega t + \beta_k) \end{cases} \quad k \in \{\text{lati Attivi}\}$$

Generatori

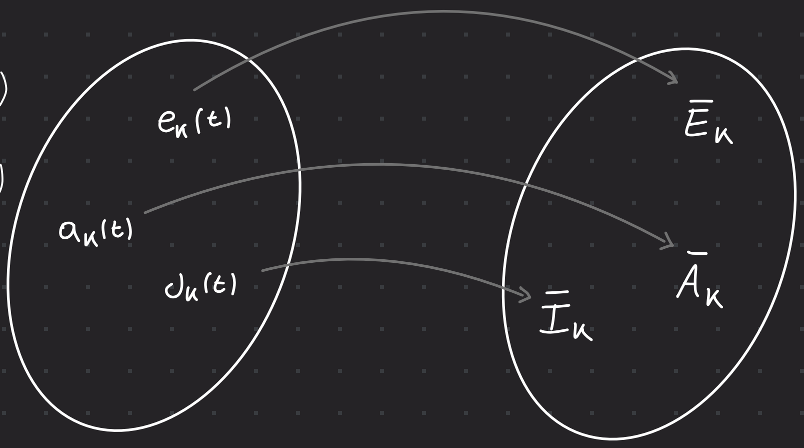
Output

$$\begin{cases} i_k(t) = I_k \cos(\omega t + \beta_k) \\ v_k(t) = V_k \cos(\omega t + \alpha_k) \end{cases} \quad k \in \{\text{lati passivi}\}$$

Tempo → Fasore

$e_k(t) = E_k \cos(\omega t + \alpha_k)$

$a_k(t) = A_k \cos(\omega t + \beta_k)$



Fasori

$\bar{E}_k = E_k e^{j\alpha_k}$

$\bar{A}_k = A_k e^{j\beta_k}$

↓

$\in \mathbb{C}$omplx

Fasore → Tempo

$$a_k(t) = \Re e\{\bar{A}_k e^{j\omega t}\} = \Re e\{\bar{A}_k e^{j\varphi_k} \cdot e^{j\omega t}\} = \Re e\{A e^{j(\omega t + \varphi_k)}\}$$

$$= A_k \cos(\omega t + \varphi_k)$$

QED

↑

$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$

Proprietà del metodo:

(1) UNICITA'

$$a(t) = A\cos(\omega t+\alpha) \xrightarrow{\quad} \bar{A} = A e^{j\alpha}$$
$$b(t) = B\cos(\omega t+\beta) \xleftarrow{\quad} \bar{B} = B e^{j\beta}$$

Affinché $a(t) \neq b(t)$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{matrix} A \neq B \\ \text{OR} \\ \alpha \neq \beta \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\qquad\qquad} \bar{A} \neq \bar{B}$$

(2) LINEARITA'

$$a_1(t) = A_1\cos(\omega t+\alpha_1) \qquad \bar{A}_1 = A_1 e^{j\alpha_1}$$
$$a_2(t) = A_2\cos(\omega t+\alpha_2) \qquad \bar{A}_2 = A_2 e^{j\alpha_2}$$

$$\rightarrow a_3(t) = C_1\, a_1(t) + C_2\, a_2(t) \qquad \rightarrow \bar{A}_3 = C_1 \bar{A}_1 + C_2 \bar{A}_2$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(3) DERIVAZIONE → la più importante!

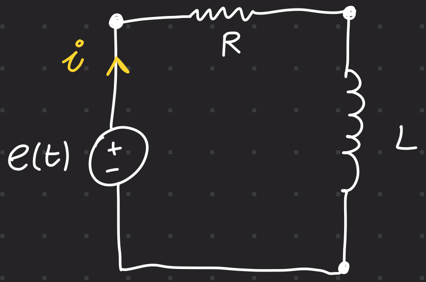
$$a(t) = A\cos(\omega t+\alpha) \qquad \bar{A} = A e^{j\alpha}$$

$$\rightarrow \frac{d\,a(t)}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\alpha)$$
$$= \omega A\sin(\omega t+\alpha+\pi)$$
$$= \omega A\cos\left(\omega t+\alpha+\pi-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \boxed{\omega A\cos\left(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} \rightleftarrows \omega A \cdot e^{j\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = \omega \overset{\bar{A}}{A e^{j\alpha}} \cdot \overset{j}{e^{j\frac{\pi}{2}}}$$
$$= \boxed{j\omega\bar{A}}$$

Visto nella lez prec.

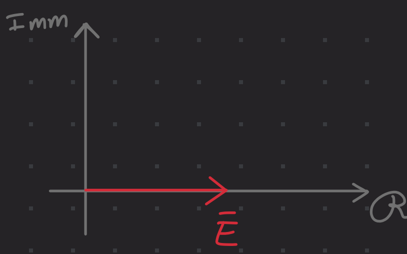
Le derivate, che nel dominio del tempo risultavano in equazioni differenziali, nel dominio dei fasori diventano **moltiplicazioni.**

Risolvere un circuito in regime sinusoidale con il **metodo dei fasori** (stesso esercizio di ieri)



$*$ $(j\omega L)$ ha le stesse dim di R:

$$\left.\begin{aligned} \omega &\rightarrow \left[\tfrac{1}{f}\right] = s \\ L &\rightarrow [\text{Henry}] = \left[\tfrac{\Omega}{s}\right] \end{aligned}\right\} (\omega \cdot L) = [\Omega]$$



$$e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha) \rightsquigarrow \bar{E} = E_M \cdot e^{j\overset{\text{Ap: } \alpha = 0}{\alpha}} = E_M$$

$$V_R + V_L - V_E = 0$$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \beta) \rightsquigarrow \bar{I} = I_0 \cdot e^{j\beta}$$

$$R_1 + L\frac{di}{dt} = e(t) \rightsquigarrow R\bar{I} + j\omega L \bar{I} = \bar{E}$$

↓ Risolvo

$$\bar{I}(R + j\omega L) = \bar{E} \rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L}$$

$$\rightarrow \bar{I} = \underbrace{\left[\frac{E_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\right]}_{\text{Modulo/Ampiezza}} \cdot e^{j\left(\underbrace{-\operatorname{atan}\frac{\omega L}{R}}\right)}$$

$$\uparrow$$

$$\Big[\underset{\overset{\downarrow}{0}}{\text{Fase numer.}} - \underset{\overset{\downarrow}{\operatorname{atan}\left(\frac{imm}{reale}\right)}}{\text{Fase denom}}\Big]$$

→ Torniamo al dominio del Tempo

Ampiezza del fasore → Ampiezza della sinusoide

Fase del fasore → Fase della sinusoide

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \cos\left(\omega t - \operatorname{atan}\frac{\omega L}{R}\right)}$$

Ans

Equivalenza
Dominio del tempo —> Dominio dei fasori

$$e_K(t) = E_K \cos(\omega t + \alpha_K) \rightsquigarrow \bar{E}_K = E_K e^{J\alpha_K}$$

LKT: $V_1(t) + V_2(t) + \dots + V_K(t) = 0 \rightsquigarrow \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_K = 0$ (linearita')

↳ $\sum_{K=1}^{e} \pm V_K(t) = 0 \longrightarrow \sum_{K=1}^{e} \pm \bar{V}_K = 0$

LKC: $i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_K(t) = 0 \rightsquigarrow \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_K = 0$ (linearita')

↳ $\sum_{K=1}^{e} \pm i(t) = 0 \longrightarrow \sum_{K=1}^{e} \pm \bar{I}_K = 0$

Relazioni Caratteristiche

Resistori $V_K = R_K \cdot i_K \rightsquigarrow \bar{V}_K = R_K \bar{I}_K$

Induttori $V_K = L_K \dfrac{di_K}{dt} \rightsquigarrow \bar{V}_K = J\omega L_K \bar{I}_K$

Condensatori $i_K = C_K \cdot \dfrac{dV_K}{dt} \rightsquigarrow \bar{I}_K = J\omega C_K V_K \Rightarrow V_K = \dfrac{\bar{I}_K}{J\omega C_K}$

Reattanza Induttiva

$$\boxed{\omega L_K = X_{LK}}$$

Reattanza capacitiva

$$\boxed{-\frac{1}{\omega C_K} = X_{CK}}$$

↑ ↑

ovvero impedenza SENZA J

Impedenza

$$\boxed{\bar{V}_K = \dot{Z}_K \bar{I}_K}$$

- Resistori $\dot{Z}_K = R_K$
- Induttori $\dot{Z}_K = J\omega L_K$
- Condensatori $\dot{Z}_K = (J\omega L_K)^{-1} = -J \cdot \dfrac{1}{\omega C}$

L'impedenza **appartiene ai numeri complessi**.

Casi in cui è impossibile la trasformazione: relazione caratteristica **non lineare**

(1) $i_K(t) = B\, v_K^2(t)$ ← Bipolo non lineare

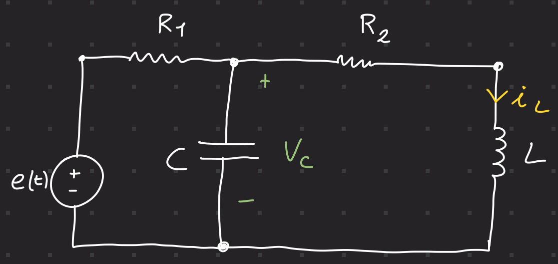
→ $v_K(t) = V\cos(\omega t)$ $(\alpha = 0)$

→ $i_K(t) = BV^2\cos^2(\omega t) = BV^2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\right]$ → Non è più una sinusoide di pulsazione ω

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Esercizio: risoluzione di un circuito in regime sinusoidale con il metodo di ispezione nel dominio dei fasori



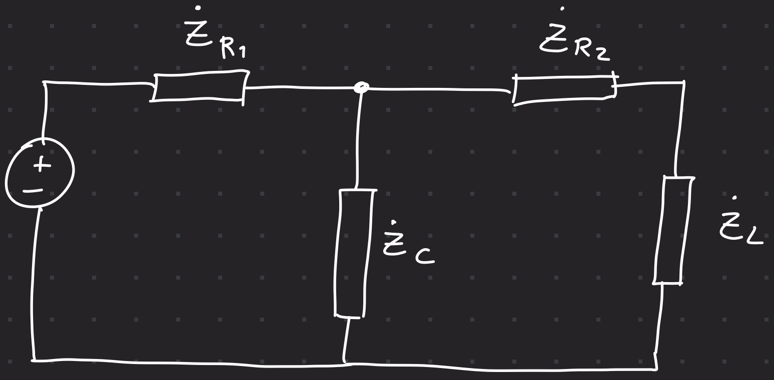
DATI :

$e(t) = 100 \cos(100t) \rightarrow f = \frac{100}{2\pi} \cong 15.92 Hz$

$R_1 = 20\,\Omega \quad R_2 = 30\,\Omega$

$L = 0.2\,H \quad C = 0.33\,mF$

TRASFORMO



$\Rightarrow$

$\dot{Z}_{R_1} = 20\,\Omega$

$\dot{Z}_{R_2} = 30\,\Omega$

$\dot{Z}_L = j \cdot 100 \cdot 0.2 = j\,20\,\Omega$

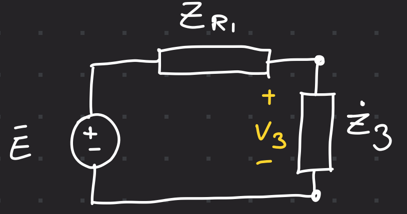
$\dot{Z}_C = -j \frac{10^{\cancel{3}}}{0.33 \cdot 10^{\cancel{2}}} \cong -j30\,\Omega$

$mF = 10^{-3} F$

$E = 100 \cdot \underset{1}{\cancel{e^{j0}}} = 100$

RISOLVO PER ISPEZIONE

- $\dot{Z}_{2L} = \dot{Z}_{R_1} + \dot{Z}_L = (\overset{\text{Resistenza}}{30} + \underset{\text{Reattanza Capacitiva}}{j20})\,\Omega$
- $\dot{Z}_3 = \dot{Z}_{2L} \,//\, \dot{Z}_C =$ [Calcolato con la Calcolcolatrice] $= 27 - 20j\,\Omega$



SERIE $\Rightarrow$ Partitore di Tensione

$$\bar{V}_3 = \bar{E} \cdot \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_3 + \dot{Z}_{R_1}} = 64.52 - 15.85j\ V$$

$|V_3| = 66.45V \quad \angle V_3 = -0.24\ A$

↑ RADIANTI !!

$\Rightarrow \underline{e(t) = 66.45 \cos(wt - 0.24)}$ Ans1

Siccome $V = R \cdot i \Rightarrow \bar{I}_L = \frac{\bar{V}_3}{\dot{Z}_{R_{2L}}} = \frac{\bar{V}_3}{(\dot{Z}_{R_2} + \dot{Z}_L)} = 1.24 - 1.35j$

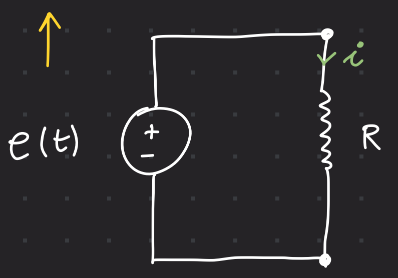
$\rightarrow |\bar{I}_L| = 1.84\ V$

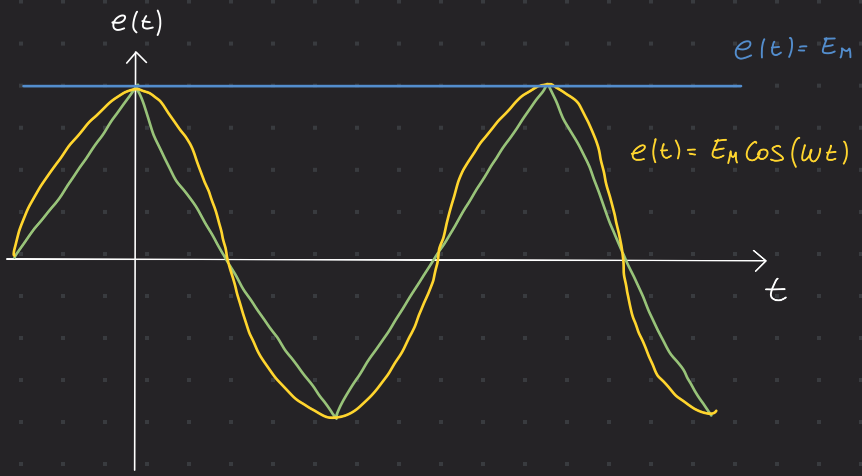
$\angle \bar{I}_L = -0.83\ A$ RAD $\Rightarrow \underline{i(t) = 1.84 \cos(wt - 0.83)}$

Ans 2

Valore efficace

e(t) Periodica di periodo T





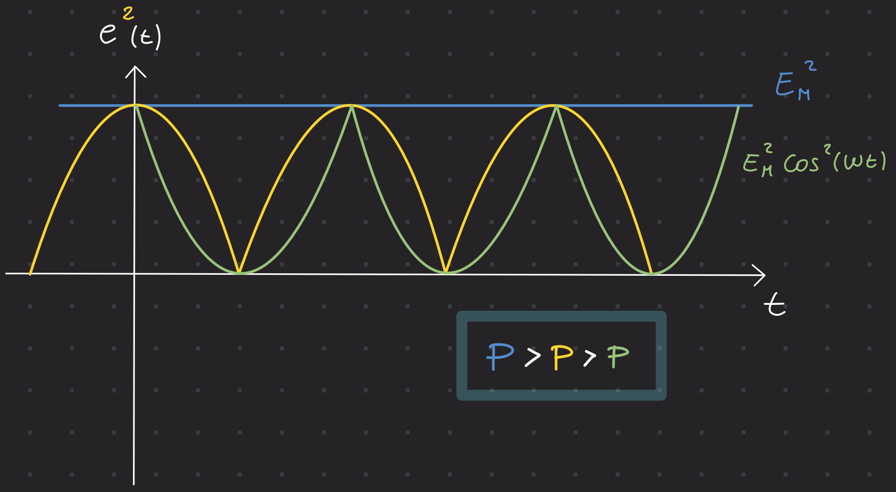
Se $i(t) = \frac{e(t)}{R}$ → $P_{ow}(t) = \frac{e^2(t)}{t}$

→ Potenza Media : $P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{e^2(t)}{R}\, dt$

Area

Intervallo

Teorema della Media Integrale



$\boxed{P > P > P}$

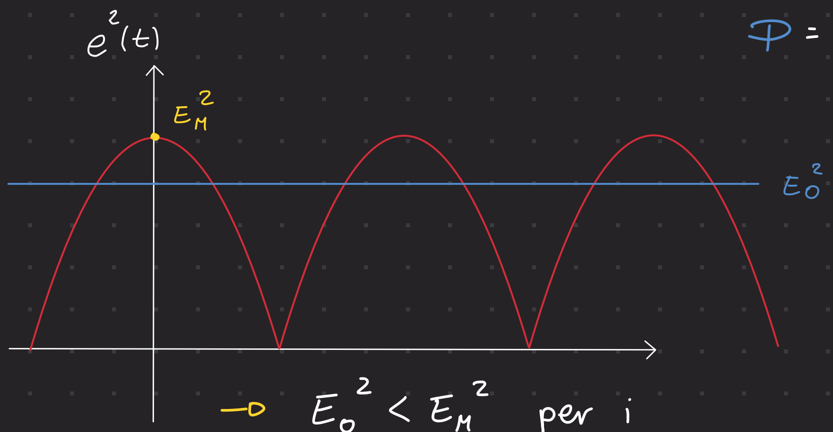
- Caso particolare $e(t) = E_M$

→ $P = \frac{1}{\cancel{T}}\cancel{\int_0^T}\frac{E_M^2}{R}\, dt = \underbrace{\frac{E_M^2}{R}}$

Definizione: il **valore efficace** di una grandezza elettrica periodica è quel valore **costante** che implica la stessa dissipazione di Potenza nel periodo T in uno stesso resistore R.

TROVIAMO IL VALORE EFFICACE (RMS) Della SINUSOIDE

Ci basta applicare la definizione:



→ $E_o^2 < E_M^2$ per i motivi precedenti...

$$\mathcal{P} = \mathcal{P} \Rightarrow \frac{E_o^2}{\cancel{R}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_M^2 \cos^2(\omega t)}{\cancel{R}}\, dt$$

$$\Rightarrow E_o^2 = \frac{E_M^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\, dt$$

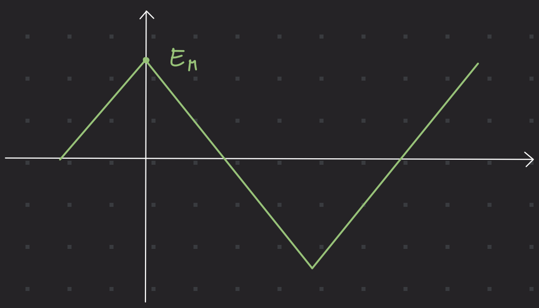
$$\Rightarrow E_o^2 = \frac{E_M^2}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\, dt$$

$$\Rightarrow E_o^2 = \frac{E_M^2}{T}\,\frac{1}{2}\,T$$

$$\Rightarrow \boxed{E_o = \sqrt{\frac{E_M^2}{2}} = \frac{E_M}{\sqrt{2}}}$$

Valore efficace della sinusoide

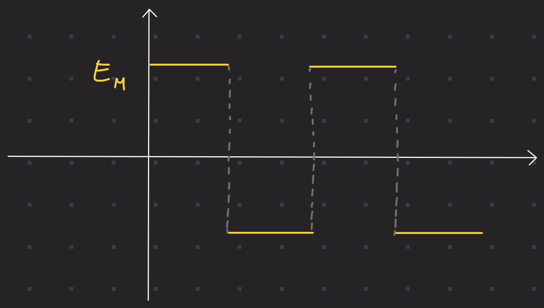
- Onda Triangolare



$$\boxed{E_o = \frac{E_M}{\sqrt{3}}}$$

Valore efficace dell'onda triangolare

- Onda Quadra



$$\boxed{E_o = E_M}$$

Valore efficace dell'onda quadra