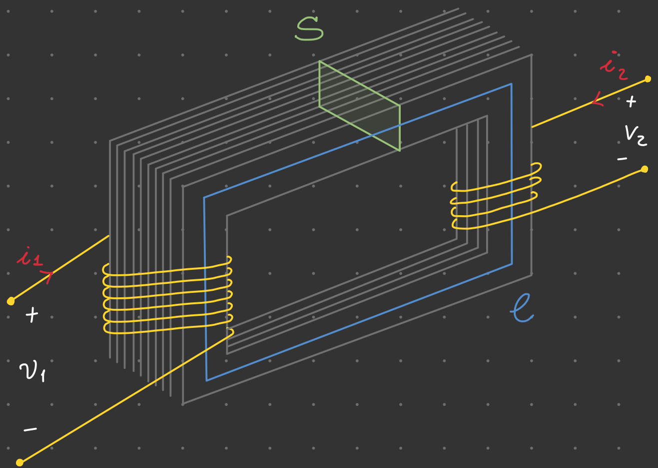
DOPPIO BIPOLO ACCOPPIAMENTO MUTUO TRA INDUTTORI



Semplificazione:

$\bar{B} = \mu \bar{H} \rightarrow$ Lineare

$\Downarrow$

$$\begin{cases} L_1 = \mu \dfrac{N_1^2 S}{l} \\ L_2 = \mu \dfrac{N_2^2 S}{l} \end{cases}$$

Avvolgimenti

Lunghezza Media

Sappiamo che...

$$\begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 \\ \phi_2 = L_2 i_2 + M_{21} i_1 \end{cases}$$

Induzione dovuta alla Spira 2

Coefficiente di MUTUA INDUZIONE M

flusso concatenato

Induzione dovuta alla Spira 1

Si dimostra che

(1) $\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$

RECIPROCITA'

Siccome

Legge di Lentz $\quad v \propto \dfrac{d\phi}{dt}$

$\rightarrow$ deriviamo

(2)

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi_1}{dt} = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M_{12} \dfrac{di_2}{dt} \\ \dfrac{d\phi_2}{dt} = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M_{21} \dfrac{di_1}{dt} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} v_1 = L_1 \dot{i}_1 + M_{12} \dot{i}_2 & \text{(a)} \\ v_2 = M_{21} \dot{i}_1 + L_2 \dot{i}_2 & \text{(b)} \end{cases}}$$

Potenza del DB A. MUTUO

* da questo momento metterò i puntini sulle i solo quando sono derivate rispetto al tempo

Abbiamo visto che $p_N^a(t) = \sum_{k}^{N} v_k \cdot i_k$

$$\Rightarrow p^a(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 \overset{(1),(2)}{=} L_1 i_1 \dot{i}_1 + M i_1 \dot{i}_2 + M i_2 \dot{i}_1 + L_2 i_2 \dot{i}_2$$

ma $\frac{di^2}{dt} = 2 i \dot{i} \Rightarrow \begin{cases} i_1 \dot{i}_1 = \frac{1}{2} \frac{di_1^2}{dt} \\ i_2 \dot{i}_2 = \frac{1}{2} \frac{di_2^2}{dt} \end{cases}$

$$\Rightarrow p^a(t) = \frac{1}{2} L_1 \frac{di_1^2}{dt} + M \left((i_1 \dot{i}_2 + i_2 \dot{i}_1) \right) + \frac{1}{2} L_2 \frac{di_2^2}{dt}$$

Derivata di un prodotto

$$= \frac{1}{2} L_1 \frac{di_1^2}{dt} + M \frac{d}{dt} (i_1 \cdot i_2) + \frac{1}{2} L_2 \frac{di_2^2}{dt}$$

Ma siccome

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} p^a \, dt \Rightarrow p^a = \frac{dW_a}{dt}$$

Energia immagazzinata

$$\Rightarrow \int p^a dt = \int \frac{dW_a}{\cancel{dt}} \cancel{dt} \rightarrow W_a = \int p^a dt$$

$$\Rightarrow \boxed{W_a = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}$$

Energia immagazzinata

Energia imm. MUTUA

N.B. Questa è l'energia immagazzinata funzione di i1 e i2 immaginando che ci sia un istante di tempo in cui t=0, proprio perché stiamo integrando ed abbiamo bisogno di una **condizione iniziale**

L'energia immagazzinata è sempre ≥ 0

Il bipolo è passivo $\Rightarrow$ $\boxed{W_a \geq 0}$ Tesi

$\forall i_1, i_2$

Proof

- $i_1 = 0$, $\quad W_a = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \Rightarrow L_2 \geq 0$ $\quad$ Condizione $\downarrow$ Visto in fisica

  $>0 \qquad >0$

- $i_2 = 0$, $\quad W_a = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \Rightarrow L_1 \geq 0$

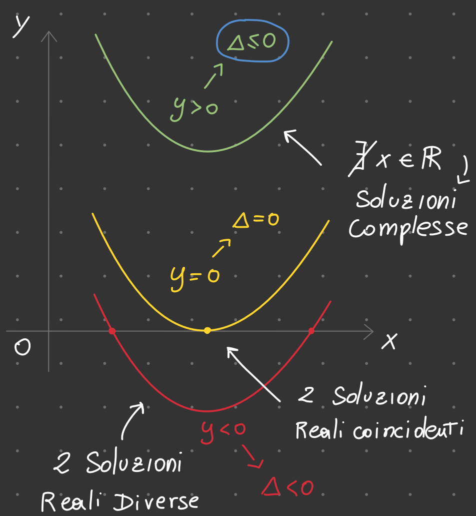
- $i_1, i_2 \neq 0 \rightarrow \quad i_2^2 \left[\frac{1}{2} L_1 \left(\frac{i_1}{i_2} \right)^2 + \frac{1}{2} L_2 + M_1 \frac{i_1}{i_2} \right] \geq 0$

pongo $\frac{i_1}{i_2} = x$

$$\Rightarrow \cancel{i_2^2} \left[\frac{1}{2} L_1 x^2 + M x + \frac{1}{2} L_2 \right] \geq 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} L_1 x^2 + M x + \frac{1}{2} L_2 \geq 0$$

Quando è ≥ 0 ?



Ci serve $\Delta \leq 0$

ma $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$= M^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} L_1 \cdot \frac{1}{2} L_2$

$$\Rightarrow M^2 - L_1 L_2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M^2 \leq L_1 L_2}$$

Affinché l'energia immagazzinata sia maggiore di zero, il coefficiente di autoinduzione deve essere minore uguale al prodotto tra le due induzioni

COEFFICIENTE DI ACCOPPIAMENTO

$$\boxed{K \triangleq \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}}$$

Siccome $|K| \leq 1$ $\longrightarrow$ Se $|K| = 1$ ACCOPPIAMENTO PERFETTO

$\uparrow$ Per Costruzione

CIRCUITO EQ IN ACC. PERFETTO

Quanto il circuito equivalente in accoppiamento perfetto è vicino al trasformatore ideale?

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \left(\dot{i}_1 + \frac{M}{L_1} \dot{i}_2 \right) \\ v_2 = M \left(\dot{i}_1 + \frac{L_2}{M} \dot{i}_2 \right) \end{cases}$$

Hp: le derivate sono diverse da 0 $\longrightarrow \dot{i}_1, \dot{i}_2 \neq 0$

$\longrightarrow$ Divido Membro a membro

$$\longrightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{M} \frac{\dot{i}_1 + \frac{M}{L_1} \dot{i}_2}{\dot{i}_1 + \frac{L_2}{M} \dot{i}_2}$$

RAPPORTO DI TRASFORMAZIONE

$$\boxed{\text{Se Acc perf} \longrightarrow M^2 = L_1 L_2 \Longrightarrow \frac{M}{L_1} = \frac{L_2}{M} = n}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{M}} \qquad \text{Chiamo} \quad \boxed{n = \frac{L_1}{M}} \quad (4)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = n \longrightarrow \boxed{v_1 = n\, v_2}$$

Per le tensioni il mutuo accoppiamento in accoppiamento perfetto si comporta come il trasformatore ideale

Se ricordiamo L_1 ed M...

$$L_1 = \mu \frac{N_1^2 S}{e} \quad \rightarrow \text{ Si dimostra che } \quad M = \mu \frac{N_1 N_2 S}{e}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2} = n}$$

RAPPORTO DI TRASFORMAZIONE

SPIRE o AVVOLGIMENTI

ES

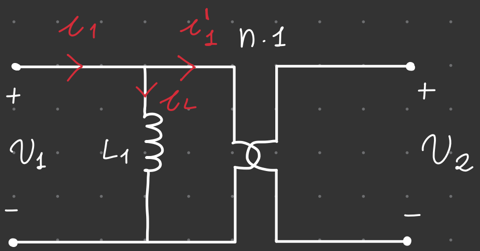
Voglio avere un rapporto di trasformazione 3:1 ($n:1$)

$$\Rightarrow \frac{L_1}{M} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{IN } 300 \text{ spire}}{\text{OUT } 100 \text{ spire}} = 3$$

Voglio alzare di un fattore 10?

$$\frac{L_1}{M} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{IN } 100 \text{ spire}}{\text{OUT } 1000 \text{ spire}} = \frac{1}{10}$$

IL CIRCUITO EQ di un ACC PERFETTO



proof

Se il circuito a sinistra ha come equazioni quelle dell'accoppiamento mutuo perfetto, allora è proprio il suo circuito equivalente.

→ Rel Caratteristica Induttore L_1

$$v_1 = L_1 \cdot \frac{d(i_L)}{dt} = L_1 \frac{d(i_1 - i_1')}{dt} = L_1 \dot{i}_1 - L_1 \dot{i}_1'$$

Derivata di una Differenza

Siccome il' è la corrente che entra in un trasformatore ideale, è legata dalla relazione:

Trasformatore Ideale → (5) $\begin{cases} v_1 = n\, v_2 & (a) \\ i_2 = -n\, i_1 & (b) \end{cases} \Rightarrow i_1 = -\frac{1}{n} i_2$

$$\Rightarrow v_1 = L_1 \dot{i}_1 + \underbrace{L_1 \frac{1}{n}}_{M\ (4\uparrow)} \dot{i}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1 = L_1 \dot{i}_1 + M \dot{i}_2}$$ QED$_{(1)}$ è proprio (a) di (2) ↑

Inoltre dalla (5) (a) $v_1 = n\, v_2$

$$\Rightarrow n\, v_2 = L_1 \dot{i}_1 + M \dot{i}_2 \Rightarrow v_2 = \underbrace{\frac{L_1 \dot{i}_1}{n}}_{M} + \underbrace{\frac{M \dot{i}_2}{n}}_{L_2}$$

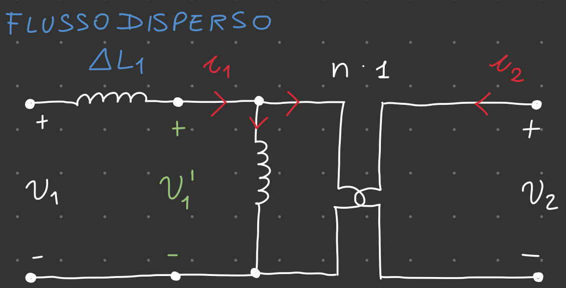
$$\Rightarrow \boxed{v_2 = M \dot{i}_1 + L_2 \dot{i}_2}$$ QED$_{(2)}$ (b) (2)

CIRCUITO EQUIVALENTE PER $|K| < 1$ (NON PERFETTO)

Sappiamo che

$$\begin{cases} M^2 = L_1' L_2 \\ L_1 = L_1' + \underbrace{\Delta L_1}_{\text{FLUSSO DISPERSO IN SERIE}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1' = \dfrac{M^2}{L_2} ;\ L_1' < L_1 \\ \Delta L_1 = L_1 - L_1' ;\ \Delta L_1 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \overbrace{\Delta L_1 \dot{i}_1}^{\text{FLUSSO DISPERSO}} + \overbrace{L_1' \dot{i}_1 + M \dot{i}_2}^{v_1'} \\ v_2 = M \dot{i}_1 + L_1 \dot{i}_2 \end{cases}$$



DIMOSTRAZIONE: Mutua Induzione

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M} \quad \text{TESI}$$

$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = L_1 i_1 \dot{i}_1 + M_{12} \dot{i}_2 i_1 + M_{21} \dot{i}_1 i_2 + L_2 \dot{i}_2 i_2$$

Siccome $p = \dfrac{dW(t)}{dt}$

$$\Rightarrow dW = p\,dt = (L_1 i_1 + M_{21} i_2)\,di_1 + (M_{12} i_1 + L_2 i_2)\,di_2$$

L'energia è una grandezza di stato $\Rightarrow$ è un differenziale esatto $\Rightarrow$ Ha le derivate miste uguali $\Rightarrow$

$$\begin{cases} dW = \dfrac{\partial W}{\partial i_1} di_1 + \dfrac{\partial W}{\partial i_2} di_2 \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial i_2 \partial i_1} = \dfrac{\partial^2 W}{\partial i_1 \partial i_2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_{21} = M_{12}}$$

QED