



Università degli Studi di Cassino

## Esercitazioni di Elettrotecnica: circuiti in regime sinusoidale

prof. Antonio Maffucci

[maffucci@unicas.it](mailto:maffucci@unicas.it)

ver.2.1 – ottobre 2007

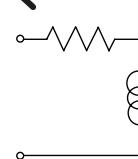
### 1. Esercizi introduttivi.

~~ES.1.1~~ Esprimere la corrente  $i(t)$  in termini di fasore nei seguenti tre casi:

- a)  $i(t) = 4 \sin(\omega t - 1.14)$     b)  $i(t) = 10 \sin(\omega t - \pi)$     c)  $i(t) = 8 \sin(\omega t + \pi/2)$

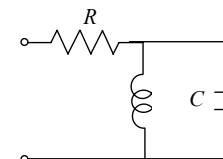
Risultato: a)  $\bar{I} = 4 \exp(-j1.14)$ ; b)  $\bar{I} = -10$ ; c)  $\bar{I} = 8j$ .

~~ES.1.2~~ Valutare (in coordinate cartesiane e polari) le impedenze viste ai capi dei morsetti:



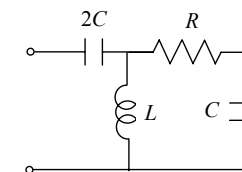
(a)

$R = 10 \Omega$     $L = 1 \text{ mH}$   
 $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$



(b)

$R = 8 \Omega$ ,    $L = 15 \text{ mH}$   
 $C = 0.4 \text{ mF}$ ,    $f = 50 \text{ Hz}$



(c)

$R = 200 \Omega$ ,    $L = 16 \text{ mH}$   
 $C = 10 \mu\text{F}$ ,    $\omega = 2.5 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

Risultato: a)  $\dot{Z} = 10 + 10j = 10\sqrt{2} \exp(j\pi/4) \Omega$ ; b)  $\dot{Z} = 8 + 11.54j = 14 \exp(j0.965) \Omega$ ;

? c)  $\dot{Z} = 8 + 20j = 21.5 \exp(j1.19) \Omega$ ;

~~ES.1.3~~ Le seguenti coppie di fasori esprimono tensione e corrente relative ad un dato bipolo. Dire, nei tre casi, se si tratta di un resistore, un condensatore o un induttore e valutare il valore dei parametri corrispondenti  $R$ ,  $C$  o  $L$

- a)  $v(t) = 15 \cos(400t + 1.2)$ ,  $i(t) = 3 \sin(400t + 1.2)$ ;  
b)  $v(t) = 8 \cos(900t - \pi/3)$ ,  $i(t) = 2 \sin(900t + 2\pi/3)$ ;  
c)  $v(t) = 20 \cos(250t + \pi/3)$ ,  $i(t) = 5 \sin(250t + 5\pi/6)$ ;

a)  $\bar{V} = 15e^{j1.2}$ ,  $\bar{I} = 3e^{j(1.2-\pi/2)}$ . Posto  $\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}$  si ha che:

$$\arg(\dot{Z}) = \arg(\bar{V}) - \arg(\bar{I}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot{Z} = j\omega L \Rightarrow L = \frac{|\bar{V}|}{|\bar{I}|\omega} = 12.5 \text{ mH}.$$

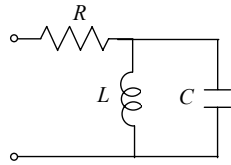
b)  $\bar{V} = 8e^{-j\pi/3}$ ,  $\bar{I} = 2e^{j(2\pi/3-\pi/2)} = 2e^{-j\pi/6}$ . Posto  $\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}$  si ha che:

$$\arg(\dot{Z}) = \arg(\bar{V}) - \arg(\bar{I}) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot{Z} = -\frac{j}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{|\bar{I}|}{|\bar{V}|\omega} = 0.28 \text{ mF}.$$

c)  $\bar{V} = 20e^{j\pi/3}$ ,  $\bar{I} = 5e^{j(5\pi/6-\pi/2)} = 5e^{j\pi/3}$ . Posto  $\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}$  si ha che:

$$\arg(\dot{Z}) = \arg(\bar{V}) - \arg(\bar{I}) = 0 \Rightarrow \dot{Z} = R \Rightarrow R = \frac{|\bar{V}|}{|\bar{I}|} = 4 \Omega.$$

**ES. 1.4** - Si consideri il circuito in figura, determinando  $L$  tale che la parte immaginaria dell'impedenza vista ai capi dei morsetti risulti  $\text{Im}\{\dot{Z}\} = 100 \Omega$ .



$$C = 10 \mu F$$

$$f = 1 \text{ kHz}$$

L'impedenza totale vista ai capi dei morsetti è

$$\dot{Z} = R + \frac{(j\omega L)/(j\omega C)}{j(\omega L - 1/\omega C)} = R + j \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC},$$

quindi basta imporre

$$\text{Im}\{\dot{Z}\} = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = 100 \Rightarrow L = 2.19 \text{ mH}.$$

**ES. 1.5** - A quale di queste impedenze corrisponde la fase  $\varphi = -\pi/4$ ?

1: R-L serie	2: R-C serie	3: R-C parallelo	4: L-C serie
$R = 10 \Omega$	$R = 10 \Omega$	$R = 0.5 \Omega$	$C = 1 F$
$L = 10 \text{ mH}$	$C = 10 \text{ mF}$	$C = 0.2 F$	$L = 1 H$
$\omega = 100 \text{ rad/s}$	$\omega = 100 \text{ rad/s}$	$\omega = 10 \text{ rad/s}$	$\omega = 1 \text{ rad/s}$

Caso 3:  $\dot{Z} = \frac{1}{Y} = \frac{1}{1/R + j\omega C} = \frac{1}{2 + 2j} = 0.25(1 - j) \Rightarrow \varphi = \text{tg}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$

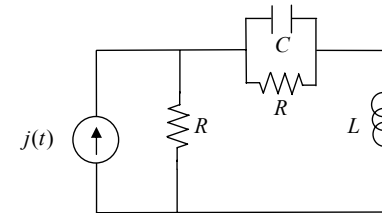
**ES. 1.6** - Dati i seguenti fasori  $\bar{V}_1 = 10 \exp(j\pi/6)$ ,  $\bar{V}_2 = 10 \exp(-j\pi/6)$ ,  $\bar{V}_3 = 5 \exp(-j\pi/3)$ :

- rappresentare nel piano complesso i fasori  $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ ;
- calcolare i fasori:  $\bar{V}_1 + \bar{V}_2, \bar{V}_1 - \bar{V}_2, \bar{V}_1 + \bar{V}_3, \bar{V}_1 - \bar{V}_3$ ;
- rappresentare nel piano complesso i fasori valutati al punto b)
- rappresentare nel tempo le tensioni corrispondenti ai fasori dei punti a) e b), definito la trasformazione fasoriale come segue:

$$v(t) = V_M \sin(\omega t + \alpha) \leftrightarrow \bar{V} = V_M \exp(j\alpha)$$

## 2. Equivalenza, sovrapposizione degli effetti, potenza.

**ES. 2.1** - Con riferimento al seguente circuito, valutare l'impedenza  $\dot{Z}_{eq}$  vista ai capi del generatore e la potenza complessa  $\dot{S}$  erogata dal generatore.



$$j(t) = 10 \sin(2t) \text{ A}$$

$$R = 2 \Omega$$

$$L = 1 \text{ H}$$

$$C = 0.25 \text{ F}$$

Passando al dominio dei fasori si avrà la rete di impedenze:

$$\bar{J} = 10, \quad \dot{Z}_C = -j/(\omega C) = -2j, \quad \dot{Z}_L = j\omega L = 2j, \quad \dot{Z}_R = R = 2.$$

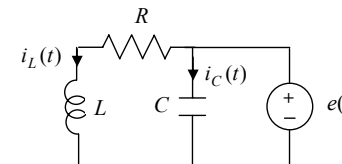
L'impedenza di ingresso vista dal generatore è data da:

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_R // [\dot{Z}_C // \dot{Z}_R + \dot{Z}_L] = 0.8 + j0.4 \Omega.$$

La potenza complessa erogata da  $j(t)$  si valuta facilmente una volta nota  $\dot{Z}_{eq}$ :

$$\dot{A}_J \equiv \frac{1}{2} \bar{V}_J \bar{J} = \frac{1}{2} \dot{Z}_{eq} \bar{J} \bar{J} = \frac{1}{2} \dot{Z}_{eq} J^2 = \frac{(0.8 + j0.4)100}{2} = 40 + j20.$$

**ES. 2.2** - Con riferimento al seguente circuito, valutare l'impedenza  $\dot{Z}_{eq}$  vista ai capi del generatore e le correnti  $i_L(t)$  e  $i_C(t)$



$$e(t) = 10 \cos(1000t) \text{ V}$$

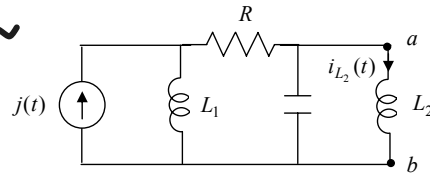
$$R = 10 \Omega \quad L = 20 \text{ mH}$$

$$C = 0.1 \text{ mF}$$

Risultato:  $\dot{Z}_{eq} = 5 - j15 \Omega$ ;  $i_L(t) = 0.45 \cos(1000t - 1.11) \text{ A}$ ,  $i_C(t) = -\sin(1000t) \text{ A}$ .

**ES. 2.3** - Applicando il teorema di Thévenin, valutare la potenza complessa e la potenza istantanea assorbita dall'induttore  $L_2$ .

CIRCA~



$$j(t) = 10\sqrt{2} \sin(100t + 0.35) \text{ A}$$

$$R = 4 \Omega, \quad C = 3 \text{ mF},$$

$$L_1 = 2 \text{ mH}, \quad L_2 = 5 \text{ mH}$$

Trasformiamo preliminarmente la rete in una rete di impedenze:

$$\bar{J} = 10e^{j0.35}, \quad Z_C = -3.33j, \quad \dot{Z}_{L1} = 0.2j, \quad \dot{Z}_R = 4, \quad \dot{Z}_{L2} = 0.5j$$

L'impedenza equivalente nel circuito di Thévenin si valuta risolvendo la rete seguente:

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_C // (\dot{Z}_{L1} + \dot{Z}_R) = 1.721 - j1.985 \Omega.$$

La tensione a vuoto, invece, si può calcolare a partire dalla corrente che circola in  $\dot{Z}_C$ , a sua volta ottenuta con un partitore di corrente:

$$\bar{E}_0 = \dot{Z}_C \bar{I}_C = \dot{Z}_C \bar{J} \frac{\dot{Z}_{L1}}{\dot{Z}_{L1} + \dot{Z}_C + \dot{Z}_R} = 0.693 + j1.114 \Omega.$$

Risolvendo la rete equivalente ottenuta, si ha che

$$\bar{I}_{L2} = \frac{\bar{E}_0}{\dot{Z}_{L2} + \dot{Z}_{eq}} = -0.089 + j0.570 = 0.577e^{j1.726} \text{ A}.$$

L'andamento della corrente nel tempo è allora dato da:

$$i_{L2}(t) = 0.577\sqrt{2} \sin(100t + 1.726) \text{ A}$$

La potenza complessa assorbita da  $L_2$  sarà puramente reattiva:

$$\dot{A}_{L2} = jX_{L2} I_{L2}^2 = 0.167j \text{ VAR}.$$

La potenza istantanea si può valutare, in generale, dalla conoscenza di corrente e tensione:

$p_{L2}(t) = v_{L2}(t)i_{L2}(t)$ . Si ha quindi:

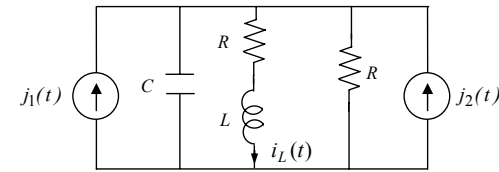
$$\bar{V}_{L2} = \dot{Z}_{L2} \bar{I}_{L2} = 0.289e^{-j2.986} \text{ A} \Leftrightarrow v_{L2}(t) = 0.289\sqrt{2} \sin(100t - 2.986) \text{ V}$$

$$p_{L2}(t) = v_{L2}(t)i_{L2}(t) = -0.167\cos(200t - 1.260) \text{ W}$$

Si osservi che in questo caso particolare (elemento dinamico) la potenza istantanea può anche essere calcolata come derivata dell'energia:

$$p_{L2}(t) = i_{L2}(t)L_2 \frac{di_{L2}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{L_2}{2} i_{L2}^2(t) \right] = 0.167 \sin(200t + 3.52) = -0.167 \cos(200t - 1.260) \text{ W}.$$

**ES. 2.4** - Con riferimento al seguente circuito valutare la corrente  $i_L(t)$ .



$$j_1(t) = 10 \cos(1000t) \text{ A}$$

$$j_2(t) = 10 \sin(1000t) \text{ A}$$

$$R = 2 \Omega$$

$$L = 2 \text{ mH}$$

$$C = 1 \text{ mF}$$

Passando al dominio dei fasori si avrà la rete di impedenze:

$$\bar{J}_1 = j10 \text{ A}, \quad \bar{J}_2 = 10 \text{ A}, \quad \dot{Z}_C = -j \Omega, \quad \dot{Z}_{RL} = R + j\omega L = 2 + j2 \Omega, \quad \dot{Z}_R = R = 2 \Omega.$$

Questa rete può essere risolta con la sovrapposizione degli effetti. Il contributo del solo generatore  $\bar{J}_1$  si ottiene dalla rete in cui  $\bar{J}_2$  è stato sostituito con un circuito aperto:

$$\bar{I}'_L = \bar{J}_1 \frac{\dot{Z}_{RC}}{\dot{Z}_{RC} + \dot{Z}_{RL}} = 3.33 \text{ A}, \quad \text{avendo posto} \quad \dot{Z}_{RC} = \frac{\dot{Z}_R \dot{Z}_C}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C} = 0.4 - j0.8 \Omega$$

Il contributo del solo generatore  $\bar{J}_2$  si ottiene dalla rete in cui  $\bar{J}_1$  è stato sostituito con un circuito aperto:

$$\bar{I}''_L = \bar{J}_2 \frac{\dot{Z}_{RC}}{\dot{Z}_{RC} + \dot{Z}_{RL}} = -j3.33 \text{ A}.$$

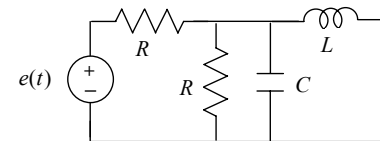
Si ha, quindi

$$\bar{I}_L = \bar{I}'_L + \bar{I}''_L = 3.33(1 - j) = 4.71 \exp(-0.78j) \text{ A}$$

a cui corrisponde, nel tempo la corrente

$$i_L(t) = 4.71 \sin(1000t - 0.78) \text{ A}$$

**ES. 2.5** - Applicando il teorema di Norton, valutare la potenza complessa e la potenza istantanea assorbita dal parallelo  $R$ - $C$  in figura.



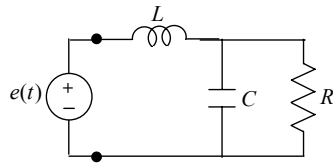
$$e(t) = 5\sqrt{2} \sin(1000t + \pi/3) \text{ V}$$

$$R = 0.21 \Omega, \quad L = 1.12 \text{ mH}$$

$$C = 1.23 \text{ mF}.$$

Risultato:  $\dot{A} = 29.72 \text{ W} - j7.68 \text{ VAR}$ ;  $p(t) = [29.72 - 30.70 \cos(2000t + 2.27)] \text{ W}$ .

**ES. 2.6** - Con riferimento al seguente circuito valutare la reattanza da inserire in parallelo al generatore in modo che l'impedenza complessiva vista dal generatore stesso assorba la stessa potenza media di prima ma abbia un fase  $\varphi$  tale che  $\cos \varphi = 0.9$  (rifasamento).



$$\begin{aligned} e(t) &= 100 \sin(\omega t) \text{ V} \\ \omega &= 10^4 \text{ rad/s}, \quad R = 50 \, \Omega \\ C &= 10 \, \mu\text{F}, \quad L = 1.2 \text{ mH} \end{aligned}$$

Passando al dominio dei fasori si avrà la rete di impedenze:

$$\bar{E} = 100 \text{ V}, \quad \dot{Z}_C = -10j \, \Omega, \quad \dot{Z}_L = 12j \, \Omega, \quad \dot{Z}_R = 50 \, \Omega.$$

L'impedenza equivalente vista dal generatore è

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_L + \frac{\dot{Z}_C \dot{Z}_R}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_R} = 1.92 + j2.38 \, \Omega,$$

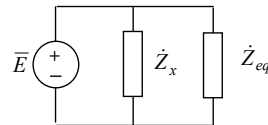
quindi la potenza complessa erogata dallo stesso sarà

$$\dot{A} = P + jQ = \frac{1}{2} \bar{E} \bar{I} = \frac{1}{2} \frac{\bar{E} \bar{E}}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{\dot{Z}_{eq}} = 1.02 \text{ kW} + j1.27 \text{ kVar}.$$

Il fattore di potenza è pari a

$$\cos \varphi = \cos[\text{tg}^{-1}(Q/P)] = 0.63$$

quindi occorre inserire un'opportuna  $\dot{Z}_x$  tra l'impedenza  $\dot{Z}_{eq}$  ed il generatore in modo che l'impedenza complessiva  $\dot{Z}_{TOT}$  verifichi tale richiesta. Affinché tale inserzione non alteri la tensione,  $\dot{Z}_x$  deve essere posta in parallelo al generatore. Per lasciare invariata anche la potenza media l'impedenza deve essere puramente reattiva:  $\dot{Z}_x = jX$ . Per stabilire il valore di tale reattanza si può applicare il principio di conservazione delle potenze, che impone, dopo l'inserzione di  $\dot{Z}_x$ :



$$P_{des} = P, \quad Q_{des} = Q + Q_x.$$

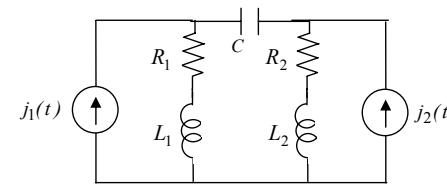
La potenza reattiva  $Q_x$  si può quindi valutare come segue:

$$Q_{des} = P_{des} \text{tg} \varphi_{des} = P \text{tg}[\cos^{-1}(0.9)] \Rightarrow Q_x = P \text{tg}[\cos^{-1}(0.9)] - Q = -0.77 \text{ kVar}$$

Imponendo la condizione desiderata su  $\varphi$  si ottiene una  $Q_x$  negativa, il che significa che  $\dot{Z}_x$  è un'impedenza capacitiva. Ricordando l'espressione della potenza reattiva assorbita da un condensatore ai capi del quale sia nota la tensione si può valutare il valore di capacità necessario:

$$Q_x = -\omega C \frac{E^2}{2} \Rightarrow C = -\frac{2Q_x}{\omega E^2} = 15.40 \, \mu\text{F}.$$

**ES. 2.7** - Con riferimento al seguente circuito, calcolare la potenza attiva  $P_2$  e la potenza reattiva  $Q_2$  assorbita dalla serie  $R_2 - L_2$ .



$$\begin{aligned} j_1(t) &= 4 \cos(4t) \text{ A} \\ j_2(t) &= 2 \cos(4t - 2\pi/3) \text{ A} \\ R_1 &= R_2 = 2 \, \Omega \\ L_1 &= L_2 = 1 \text{ H} \\ C &= 2 \text{ F} \end{aligned}$$

Passando al dominio dei fasori si avrà la rete di impedenze:

$$\bar{J}_1 = 4, \quad \bar{J}_2 = 2e^{-j2\pi/3}, \quad \dot{Z}_C = -j/8 \, \Omega, \quad \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = 2 + 4j \, \Omega.$$

Applicando la sovrapposizione degli effetti, valutiamo il contributi dovuti a  $\bar{J}_1$  ed a  $\bar{J}_2$

$$\bar{I}'_2 = \bar{J}_1 \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1} = 2.03 + j0.01 \text{ A},$$

$$\bar{I}''_2 = \bar{J}_2 \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_C}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1} = -0.50 - j0.85 \text{ A}.$$

Pertanto si ha

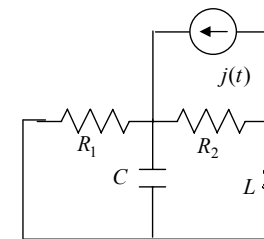
$$\bar{I}_2 = \bar{I}'_2 + \bar{I}''_2 = 1.53 - j0.84 = 1.75 \exp(-j0.502) \text{ A},$$

quindi la potenza complessa assorbita da  $\dot{Z}_2$  sarà

$$\dot{A} = P_2 + jQ_2 = \frac{1}{2} \bar{V}_2 \bar{I}_2 = \frac{1}{2} \dot{Z}_2 \bar{I}_2^2 = \frac{2+4j}{2} 1.75^2 = 3.06 \text{ W} + j7.12 \text{ Var}.$$

Nota: si svolga l'esercizio utilizzando l'equivalente di Thévenin ai capi della serie considerata.

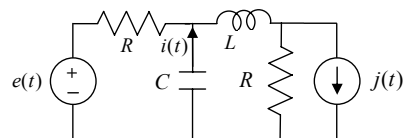
**ES. 2.8** - Applicando il teorema di Thévenin, valutare la potenza complessa e la potenza istantanea assorbita dal condensatore  $C$ .



$$\begin{aligned} j(t) &= 2\sqrt{2} \cos(20t + 0.23) \text{ A} \\ R_1 &= 12 \, \Omega, \quad R_2 = 2 \, \Omega \\ L &= 0.2 \text{ H}, \quad C = 0.1 \text{ F} \end{aligned}$$

Risultato:  $\dot{A} = -j0.49 \text{ Var}$ ;  $p(t) = -0.49 \cos(40t - 3.12) \text{ W}$ .

**ES. 2.9** - Valutare la corrente che circola nel condensatore e la potenza complessa da esso assorbita.



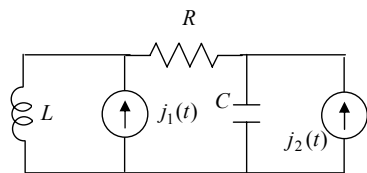
$$j(t) = 2\sqrt{2} \sin(2\pi ft + 0.12) \text{ A},$$

$$e(t) = 10\sqrt{2} \cos(2\pi ft) \text{ V}, f = 50 \text{ Hz}$$

$$R = 1 \Omega, C = 1 \text{ mF}, L = 3 \text{ mH}$$

Risultato:  $i(t) = 3.15 \sin(2\pi ft + 0.23) \text{ A}$ ;  $\dot{A} = -j15.80 \text{ VAr}$ .

**ES. 2.10** - Valutare la potenza istantanea e complessa assorbita da  $R$ .



$$j_1(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi ft) \text{ A},$$

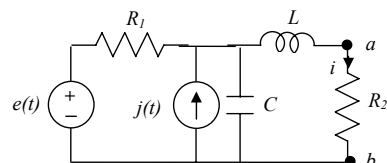
$$j_2(t) = 2\sqrt{2} \sin(2\pi ft + \pi/4) \text{ A}, f = 50 \text{ Hz}$$

$$R = 1.3 \Omega, C = 2.0 \text{ mF}, L = 1.1 \text{ mH}$$

Risultato:  $p(t) = 4.74[1 - \cos(4\pi ft - 0.18)] \text{ W}$ ;  $\dot{A} = 4.74 \text{ W}$ .

**ES. 2.11** - Con riferimento alla seguente rete in regime sinusoidale, valutare:

- il circuito equivalente di Thévenin ai capi di  $R_2$
- la corrente circolante in  $R_2$
- la potenza istantanea e complessa assorbita da  $R_2$ .



$$e(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/3) \text{ V},$$

$$j(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4) \text{ A}, \omega = 10^3 \text{ rad/s}$$

$$R_1 = 1.2 \Omega, R_2 = 3.3 \Omega,$$

$$C = 4.1 \text{ mF}, L = 3.2 \text{ mH}$$

$$a) \dot{Z}_{eq} = 0.05 + j2.97\Omega; \bar{E}_0 = 2.09 - j0.76 \text{ V}$$

Risultato:  $b) i(t) = 0.71 \sin(1000t - 1.08) \text{ A}$

$$c) \dot{A} = 0.82 \text{ W}; p(t) = 0.82[1 - \cos(2000t - 2.15)] \text{ W}$$