

DIFFERENZE TRA BIPOLI

		La Relazione caratteristica e^-	Esempio R.C.
Linearità	• Lineare	• i Lineare	$v = R \cdot i$; $v = L \dot{i}$
	• Non lineare	• Non e^- lineare	$i = i_0 (e^{\alpha t} - 1)$
Memoria	• Adinamico - Resistivo	Non ci sono derivate o integrali	$v = R \cdot i$
	• Dinamico - con mem.	ci sono derivate o integrali	$v = L \dot{i}$
Tempo Invarianza	Tempo invariante	Non dipende ESPlicitAMENTE dal tempo	$v = R \cdot i$
	Tempo variante	dipende ESPlicitAMENTE dal tempo	$v = (R_0 + R \cos \omega t) i$

Potenza

Con l'ipotesi di lavoro $v_0 > 0$

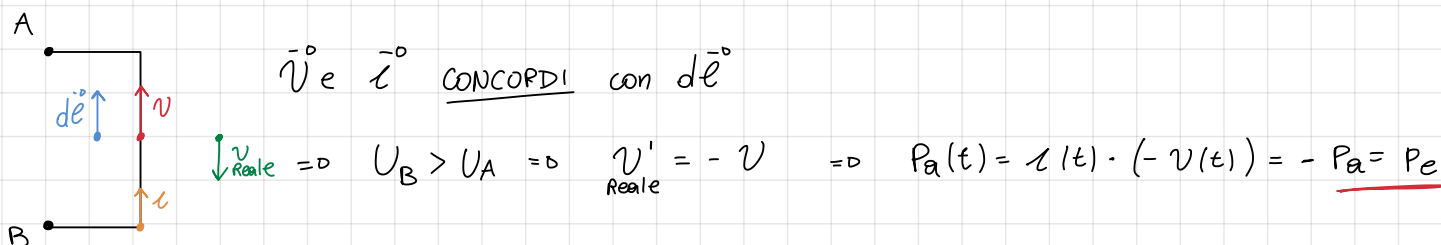
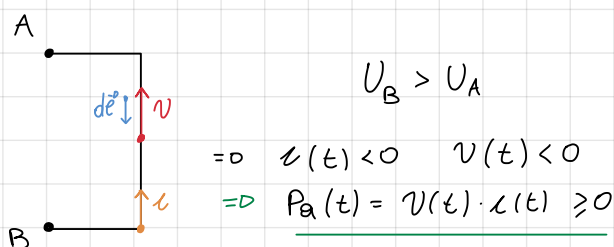
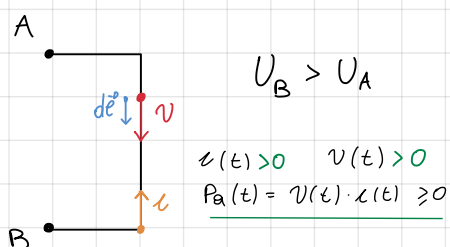
$$\vec{J} \cdot \vec{E} \quad \rightarrow \text{Lavoro: } L = \vec{F} \cdot \vec{e} \Rightarrow dL = dq \cdot |\vec{E}| \cdot |d\vec{e}|$$

La potenza è definita come $p = \frac{dW}{dt}$ Lavoro per unità di tempo

divido per $dt \rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{dq}{dt} E \cdot de \rightarrow dW = \frac{dq}{dt} E \cdot de$

\rightarrow Integro $\rightarrow W = P_A(t) = \int_0^t \frac{dq}{dt} E \cdot de = \underline{P_A(t) = i(t) \cdot v(t)}$ QED

Con l'ipotesi di lavoro $v_0 < 0$



Leggi di Kirchhoff

Da Faraday sappiamo che

$$i = \int \frac{dq}{dt} \quad \text{ma se siamo in condizioni di quasi stazionarietà } \frac{dq}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow i = 0$$

LKC

$$\sum_k (\pm) i_k = 0$$

Sempre da Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{\tau} \cdot d\ell = - \frac{d\phi}{dt}$$

$V(t)$

$$\text{ma per H.P. q.s. } \frac{d\phi}{dt} = 0$$

LKT

$$\sum_k (\pm) V(t) = 0$$

BIPOLI DINAMICI

RESISTORE

$$\text{R.C. } V = R \cdot i \quad \Rightarrow \quad P = V \cdot i = R \cdot i^2 =$$

Energia del resistore

$$U_a(t_0, t) = \int_{t_0}^t R \cdot i^2(\tau) d\tau \quad \text{Per H.P. } R > 0 \Rightarrow \underline{U_a \geq 0 \text{ SEMPRE}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{C.C.} & R = 0 \Rightarrow P_a = P_e = 0 \\ \text{C.A.} & G = 0 \Rightarrow P_a = P_e = 0 \end{cases}$$

GENERATORI IDEALI

gen. TENSIONE

$$\text{R.C. } V = e(t)$$

$$\Rightarrow P^e(t) = W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} e(t) \cdot i(t) dt = E \cdot I \cdot \tau$$

H.P. Q.S.
 $e(t) = E$
 $i(t) = I$

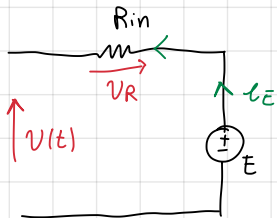
\uparrow
Tempo

gen. CORRENTE

$$\text{R.C. } i = j(t)$$

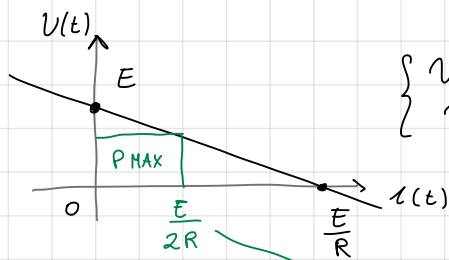
$$P^e(t) = V \cdot j$$

Gen REALE di Tensione



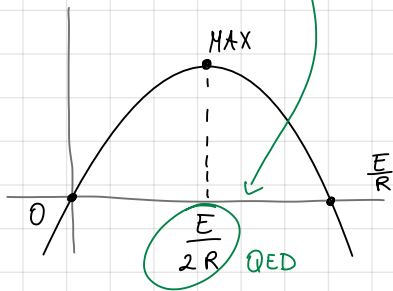
R.C. $V_R = R \cdot I_E$

LNT. $V(t) - E + V_R = 0 \Rightarrow V(t) = E - V_R = E - R I_E(t)$
RETTA



$\begin{cases} V(0) = E \leftarrow \text{Tensione a Vuoto} \\ V(t) = 0 = E - R \cdot I_E(t) \Rightarrow I_E(t) = \frac{E}{R} \leftarrow \text{Corrente di CC.} \end{cases}$

$P^a(t) = V(t) \cdot I(t) = [E - R I(t)] \cdot I(t) = \frac{E I(t) - R I^2(t)}{\text{STUDIO}}$



$P(0) = 0 - 0 = 0$

$P(t) = 0 = -R I^2 + E I = 0 \Rightarrow \Delta = E^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = E^2$

$\Rightarrow I_{1,2} = \frac{-E \pm E}{-2R} < \frac{E}{R}$

Bip. Corto Circuito

R.C. : $V_{cc} = 0 \neq 1$

ES. $R \rightarrow 0 ; G \rightarrow \infty$

$P_{cc}^a = P_{cc}^e = 0$

Bip. Circuito Aperto

R.C. : $I_{ca} = 0 \neq V$

ES. $R \rightarrow \infty ; G = 0$

$P_{ca}^a = P_{ca}^e = 0$

BIPOLI DINAMICI

CONDENSATORE

R.C. $i_c = C \dot{v}_c \longleftrightarrow \text{LINEARE}$

con $[C] = \text{Capacità} = \text{Farad}$

Potenza $-||-$

$$P = v(t) \cdot i(t) = v(t) \cdot C \dot{v}(t) = C v^2(t)$$

Siccome $\frac{d}{dt} v^2(t) = 2 v(t) \dot{v}(t) \rightarrow P_a = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} C v^2(t) \right] -||-$

Energia $-||-$

$$\begin{aligned} U_{imm}(t_0, t) &= \int_{t_0}^t P_a(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} C v^2(\tau) \right] d\tau = \left[\frac{1}{2} C v^2(\tau) \right]_{t_0}^t \\ &= \left(\frac{1}{2} C v^2(t) - \frac{1}{2} C v^2(t_0) \right) \mathcal{E} -||- \end{aligned}$$

INDUTTORE

Dalla legge di Ohm (1) $\phi = L i$ con $[L] = \text{Henry}$ Induttanza

la tensione è legata a ϕ dalla formula (2) $v = \frac{d\phi}{dt}$ (Faraday)

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = v = \frac{d}{dt} [L i] \Rightarrow \boxed{v = L \dot{i}}$$

Potenza $-m-$

$$P_a = v(t) \cdot i(t) = L \frac{di(t)}{dt} \cdot i(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{L i^2}{2} \right) \quad P -m$$

pongo $W(t) = \frac{1}{2} L i^2$
 $\Rightarrow P = \frac{dW(t)}{dt}$

Energia $-m-$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t_0, t) &= \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} L i^2(\tau) \right) d\tau = \left[\frac{1}{2} L i^2(\tau) \right]_{t_0}^t = \left(\frac{1}{2} L i^2(t) - \frac{1}{2} L i^2(t_0) \right) \mathcal{E} -m \\ \Rightarrow \mathcal{E}(t_0, t_1) &= W(t) - W(t_0) \end{aligned}$$

L'energia dipende solo dai valori che la corrente / tensione assume istanti iniziali e finali dell'intervallo scelto

Che cosa fa l'induttore?

L'induttore è un dispositivo che **previene i cambiamenti della corrente** elettrica che lo attraversa, grazie al suo **campo magnetico** indotto.

- Se ci troviamo in regime **stazionario** l'induttore si comporta come un **corto circuito** perchè non genera alcuna forza.
- Se però interrompiamo la corrente su un induttore carico, questo si "opporrà" al cambiamento andando a "scaricarsi" lentamente, e non istantaneamente.

TEORIA DEI GRAFI

DEFINIZIONI

- **GRAFO**: $G(N, L)$ con N : NODI e L : LATI $N, L \in \mathbb{N}$
- **Sottografo**: parto da $G(N, L) \rightsquigarrow G_1(N_1, L_1)$ con $N_1 \subseteq N$
 $L_1 \subseteq L$
- **Connesso** se tutti i nodi sono collegati tra loro da ALMENO UN LATO
 - ↳ **Ridotto** se tra un nodo e l'altro ($\forall N$) c'è SOLO un Lato
 - ↳ **Completo** se ogni nodo è DIRETTAMENTE collegato agli Altri
- **Maglia**: è un SOTTOGRAFO CONNESSO in cui ciascun nodo incide solo due lati
- **Albero**: Sia G un g. connesso \rightarrow l'albero è un sottografo connesso che comprende tutti i nodi di G ma senza maglie.
 - \rightarrow Abbiamo $[n-1]$ lati proof nel 1° lato abbiamo 2 nodi poi sempre 1
 - ↳ **Coalbero** Tutti i nodi ma con l'insieme complementare dei lati
 - \rightarrow Abbiamo $[e - (n-1)]$ lati
 - \uparrow G
 - \uparrow Albero
- **Anello**: è una maglia, ottenuta da un grafo planare
 \Rightarrow non ha altri lati al suo interno

MAGLIE FONDAMENTALI

- (1) Scelgo un ALBERO di $G(N, L)$
- (2) Trovo il COALBERO
- (3) Scelgo UNO PER VOLTA un lato di coalbero ed n lati di albero per ottenere la i -esima maglia fondamentale.

\rightarrow Se aggiungo un lato per volta ottengo $[L - (n-1)]$ maglie

\uparrow Albero \uparrow Coalbero

LKT alle maglie fondamentali \rightarrow SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

Per Costruzione ogni maglia Fond. ha un'incognita in esclusiva: la tensione

\rightarrow LKT Lin. Indip. $[L - (n-1)]$ equazioni

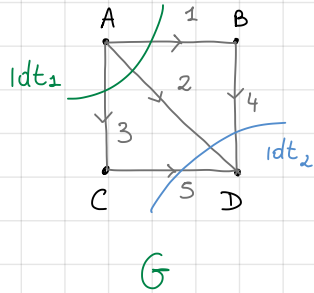
• INSIEMI DI TAGLIO

(1) Considero un grafo connesso $G(N, L)$

(2) Un insieme di taglio del grafo G sarà un insieme che, effettuando un "taglio":

(a) Rimuovendo i lati dell' idt rende G NON CONNESSO.

(b) Ripristinando UNO dei lati dell' idt connette i due sotto grafi



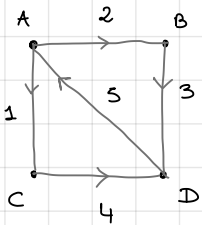
$$idt_1: \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$idt_2: -\tau_2 - \tau_4 - \tau_5 = 0$$

FORMA MATRICIALE PER LE LEGGI DI K.

MATRICE DI INCIDENZA

Per LKC



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{USCENTE} \\ -1 & \text{ENTRANTE} \\ 0 & \text{non} \end{cases}$$

↑ ↑ ↑
Solo 2 el
≠ 0

Possiamo esprimere le LKC come:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero $\underline{A} \underline{\tau} = \underline{0}$

Siccome $\underline{A} = [n \times e]$ e $\underline{\tau} = [e]$ $\Rightarrow \underline{A} \underline{\tau} = [n \times e]$

Le equazioni ottenute sono LINEARMENTE DIPENDENTI

per ottenere le eq L.D. basta eliminare una riga qualsiasi

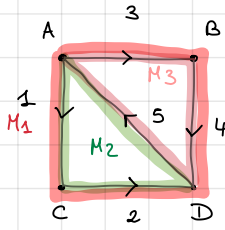
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{A} = [(n-1) \times e]$$

FORMA MATRICIALE PER LE MAGLIE

LKT

righe \rightarrow maglie
colonne \rightarrow Incidenza \rightarrow $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Verso CONCORDE alla convenz.} \\ -1 & \text{Verso DISCORDE alla convenz.} \\ 0 & \text{nessuna incidenza} \end{cases}$



Convenzione \rightarrow

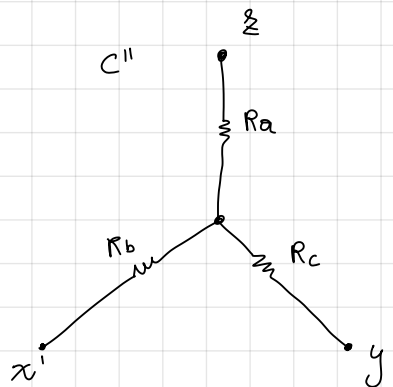
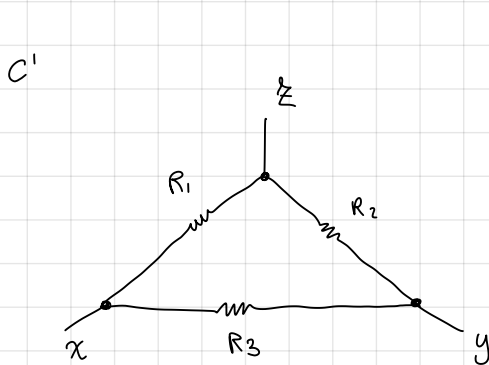
$$B_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & [e] \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = [m \times e]$$

[m]

\Rightarrow Notiamo ancora che le LKT:

$$\underline{B_a} \cdot \underline{V} = 0$$

EQUIVALENZA TRIANGOLO STELLA



Dobbiamo avere che $R_{xy} = R_{x'y'}$ ovvero $R_3 \parallel (R_1 + R_2) = R_b + R_c$

$$\Rightarrow \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = R_b + R_c \quad (1)$$

faccio lo stesso per le altre

$$\begin{cases} xy \rightarrow \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = R_b + R_c & (1) \\ xz \rightarrow \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_b + R_a & (2) \\ zy \rightarrow \frac{R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_a + R_c & (3) \end{cases}$$

$$(3) - (1) = R_a - R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3 - R_2 R_3}{\Sigma R} = \frac{R_1 R_2 - R_1 R_3}{\Sigma R} = \frac{R_1 (R_2 - R_3)}{\Sigma R} \quad (A)$$

$$(A) + (2) = 2 R_a = \frac{R_1 R_2 - R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3}{\Sigma} \Rightarrow 2 R_a = 2 \frac{R_1 R_2}{\Sigma} \Rightarrow R_a = \frac{R_1 R_2}{\Sigma R_n}$$

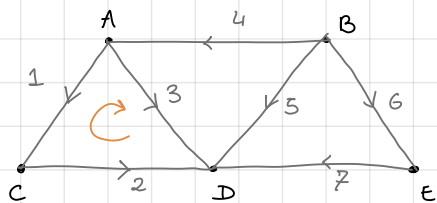
$$R_b = \frac{R_1 R_3}{\Sigma R_n} \quad R_c = \frac{R_2 R_3}{\Sigma R_n} \quad \leftarrow \text{La serie sul } \Delta$$

QED

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

DA FARE

POTENZIALI DI NODO



$$\begin{cases} v_1 = U_A - U_C \\ v_2 = U_C - U_D \\ v_3 = U_A - U_D \end{cases} \quad \begin{cases} v_4 = U_B - U_A \\ v_5 = U_B - U_D \\ v_6 = U_B - U_E \end{cases} \quad \{ v_7 = U_E - U_D$$

Trovo le LKC in forma Matriciale

$$\underline{A}_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow \underline{A}_a^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \underline{U}_a = \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \\ U_E \end{pmatrix} = \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}$$

ES: $v_1 = 1 U_A + 0 U_B - 1 U_C + 0 U_D + 0 U_E = U_A - U_C$ QED

$$\Rightarrow \underline{v} = \underline{U}_a^T \cdot \underline{U}_a$$

$\begin{matrix} \text{exn} & \text{exn} & \text{nx1} \end{matrix}$

CONSERVAZIONE DELLE POTENZE ELETTRICHE

"la somma di tutte le potenze assorbite da TUTTI i bipoli di un circuito è istante per istante uguale a zero."

In altre parole: $\sum_{n=1}^e p_n^e = 0 = \sum_{n=1}^e v_n(t) \cdot i_n(t) = 0$

Dim.

Siano i vettori $\underline{i} = (i_1, i_2, \dots, i_e)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_e)^T$, $\underline{U} = (U_1, U_2, \dots, U_{n-1})^T$

Abbiamo che $\sum_{k=1}^e v_k \cdot i_k = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \dots + v_e i_e = \underline{v}^T \cdot \underline{i} \quad (1)$

ma sappiamo dai P.D.N. che $\underline{v} = \underline{A}_a^T \cdot \underline{U}_a \Rightarrow \underline{v}^T = (\underline{A}_a^T \cdot \underline{U}_a)^T$

Ricordo che $(\underline{A} \cdot \underline{U})^T = \underline{U}^T \cdot \underline{A}^T$ e $(\underline{A}^T)^T = \underline{A}$

$\Rightarrow \underline{v}^T = (\underline{A}_a^T \underline{U}_a)^T = \underline{U}_a^T \underline{A}_a \quad (2)$

\Rightarrow nella (1) $\Rightarrow \sum_{k=1}^e v_k \cdot i_k = (\underline{U}_a^T \underline{A}_a) \cdot \underline{i} = \underline{U}_a^T (\underline{A}_a \cdot \underline{i})$

ma dalle LKC: $\underline{A}_a \cdot \underline{i} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^e v_k i_k = 0$ QED

POTENZA VIRTUALE

- (1) Considero due circuiti diversi ma con la stessa Topologia
- (2) Prendo le tensioni da C' e le correnti da C''
- (3) Calcolo la potenza virtuale come:

$$\hat{P}_k = i_k' \cdot v_k'' = v_k' \cdot i_k''$$

Utilizz. \rightarrow Assorbita
generat. \rightarrow Erodata

TEOREMA DI TELLEGEN

- Conservazione delle potenze virtuali

Il teorema dice che la somma delle potenze virtuali tra due circuiti è zero.

$$\sum_k i_k' v_k'' = i_k'' v_k' = 0$$

Sappiamo che $v = A^T \cdot U \rightarrow \sum_k i_k v_k''$ con $v'' = A^T \cdot U''$

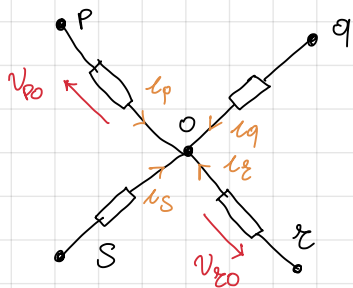
La conservazione dice che $v^T \cdot i = 0 \rightarrow (A^T \cdot U)^T \cdot i' = 0$

con le proprietà $(A^T)^T = A$, $(AU)^T = U^T A^T \rightarrow \sum_k (U^T A) i' = \sum_k U^T (A i')$

dalle LKC: $A i = 0 \Rightarrow \sum_k v_k'' i_k' = 0$ QED

NON AMPLIFICAZIONE DELLE TENSIONI

- (1) Abbiamo un SOLO bipolo ATTIVO connesso ad $n-1$ bipoli passivi.
- (2) Abbiamo un nodo in cui confluiscono (ad es) 4 bipoli:



(3) LKC₀: $i_p + i_q + i_z + i_s = 0$

(4) abbiamo 2 casi:

(a) $i_p = i_q = i_z = i_s = 0$

(b) Se una corrente $i^- > 0 \Rightarrow$ ALMENO un'altra $i^- < 0$

\rightarrow Prendiamo solo i dipoli "q" ed "z" \rightarrow Se $i_q > 0 \Rightarrow i_z < 0$

\Rightarrow con la C.U.:

$$\begin{cases} P_q = i_q \cdot v_{oq} > 0 \\ P_z = i_z \cdot v_{zo} > 0 \end{cases} \quad \text{ma} \quad \begin{cases} v_{oq} = v_q - v_o > 0 \\ v_{zo} = v_z - v_o < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_o < v_q \\ v_o > v_z \end{cases} \Rightarrow v_z < v_o < v_q$$

Siccome i Pot. di nodo v è un ins. LIMITATO (n) \Rightarrow ammette un max e un min \rightarrow

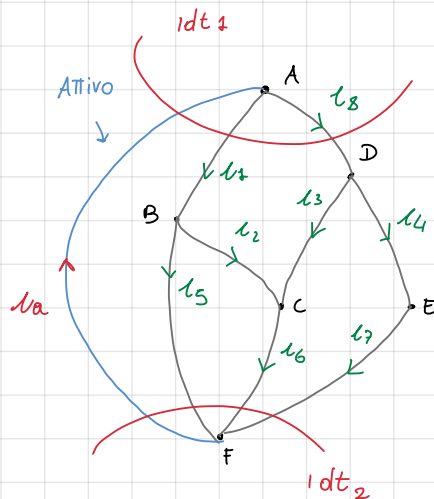
\rightarrow ovvero i morsetti del generatore! $\Rightarrow v_{\max}$ è quella del generatore QED

NON AMPLIFICAZIONE DELLE CORRENTI

Il Teorema dice che se abbiamo un circuito composto da soli bipoli passivi ed un solo bipolo attivo, la corrente del generico bipolo passivo non può sup. quella dell'attivo.

Dim:

Disponiamo il grafo del circuito:



$$idt_1: -i_a + i_1 + i_8 = 0 \\ \Rightarrow i_a = i_1 + i_8$$

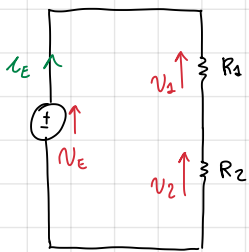
$$\text{Se } i_a > 0 \Rightarrow \underline{i_a > i_1, i_8}$$

$$idt_2: i_a = i_5 + i_6 + i_7$$

$$\text{Se } i_a > 0, \quad i_a > i_5, i_6, i_7$$

\Rightarrow Morale della favola: qualsiasi idt $i_a > i_n$ QED

PARTITORE DI TENSIONE

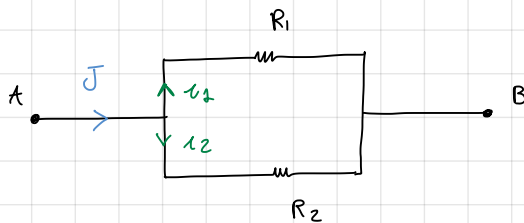


$$\text{LKT: } V_1 + V_2 - V_E = 0 \Rightarrow V_E = (R_1 + R_2) i_E \Rightarrow \frac{1}{R_1 + R_2} V_E = i_E$$

$$\text{ma } V_1 = R_1 i_1 \Rightarrow \text{moltiplico per } R_1: \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_E = R_1 i_E$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{\text{Resistore "interessato"} (R_1)}{\text{Res equivalente } (R_1 + R_2)} V_E$$

PARTITORE DI CORRENTE

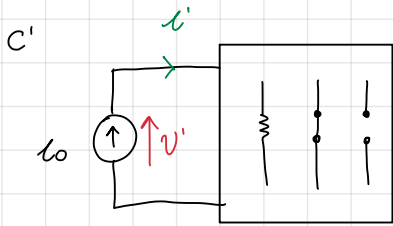
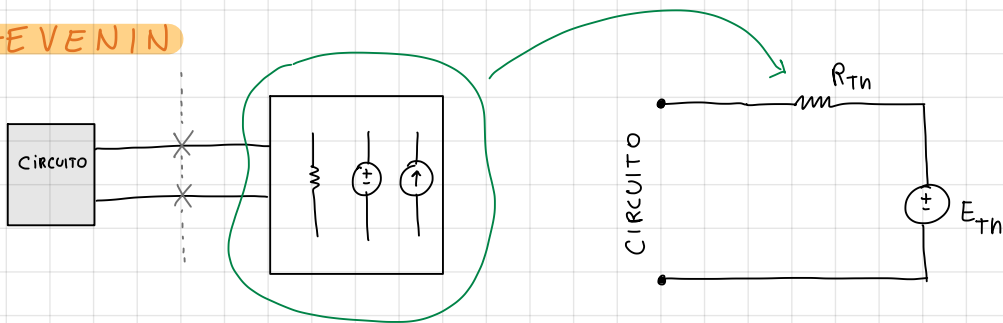


$$\text{LKC: } J = i_1 + i_2 \quad \text{ma } i = \frac{V}{R}$$

$$\Rightarrow J = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} = V_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

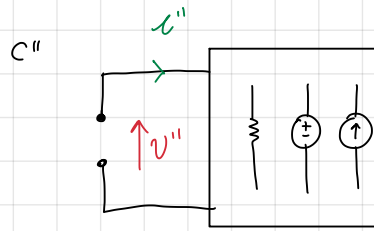
$$\Rightarrow \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} J = V_{AB} \quad \text{QED}$$

THEVENIN



$$\begin{cases} l' = l_0 \\ v' = R_{eq} l_0 = R_{Tn} l_0 \end{cases}$$

\uparrow Req. di Th.

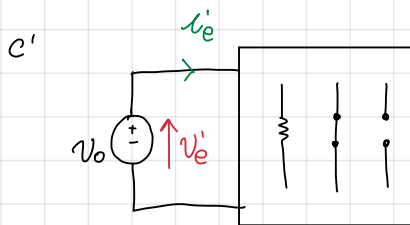


$$\begin{cases} l'' = 0 \\ v'' = E_0 \end{cases}$$

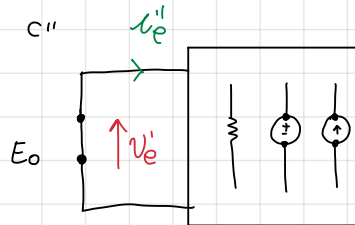
\Rightarrow Per sovrapposizione

$$\begin{cases} l = l_0 \\ v_{Tn} = R_{Tn} l_0 + E_0 \end{cases} \quad \text{Tensione eq di Thevenin}$$

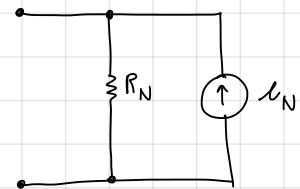
NORTON



$$\begin{cases} l'_e = \frac{E_0}{R_{eq}} = V_0 \cdot G_{eq} \\ v' = V_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} l''_e = l_{cc} \\ v''_e = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} l_N = l_{cc} + \frac{V_0}{R_N} \\ v = V_0 \end{cases}$$