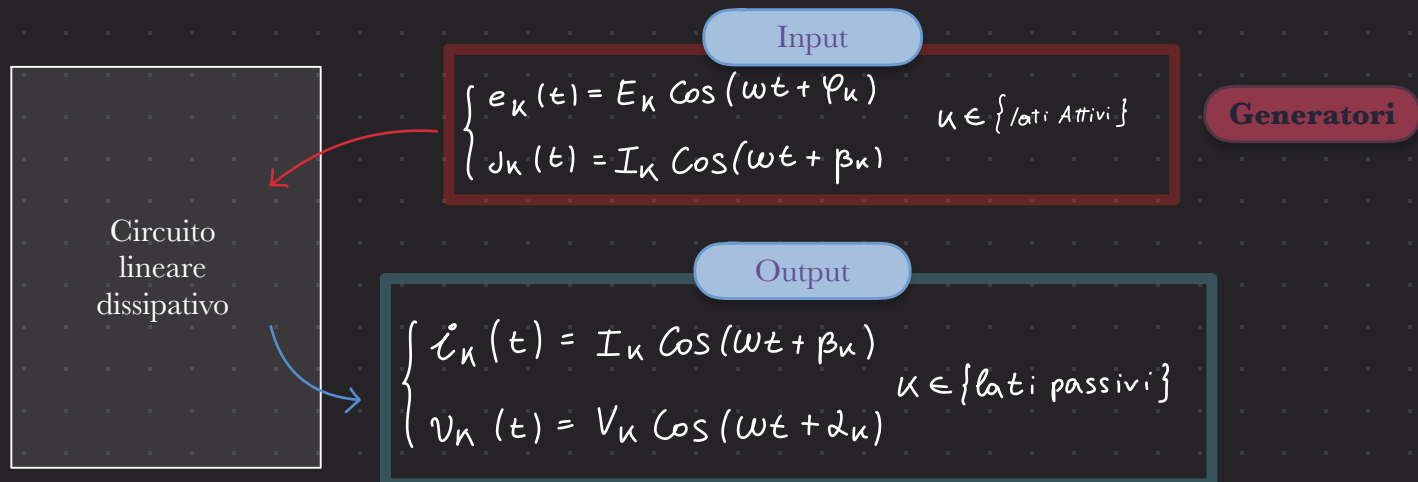
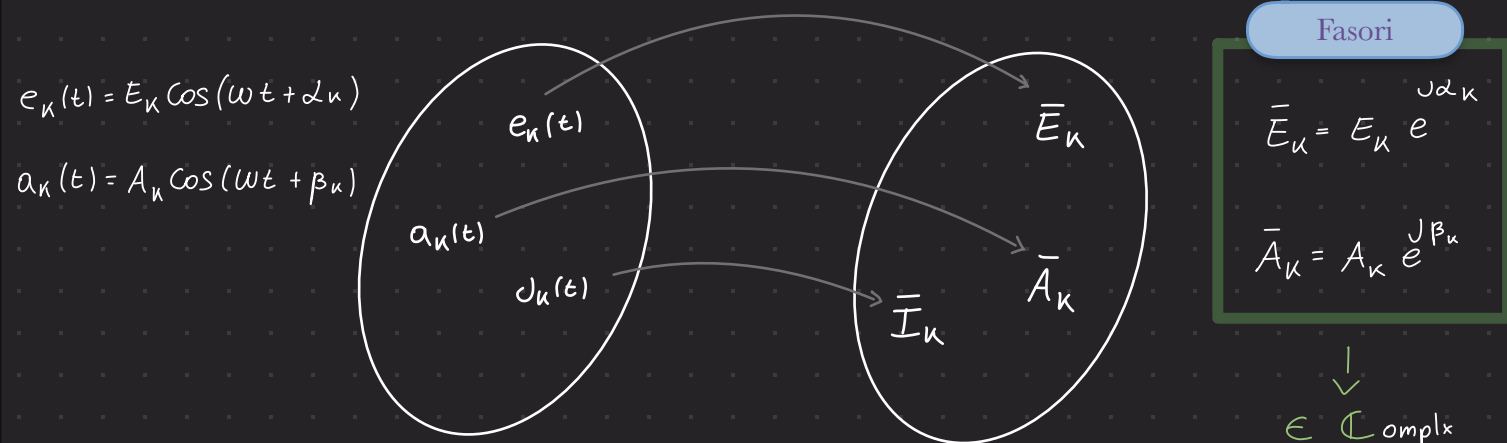


# Metodo dei fasori per la risoluzione dei circuiti in regime sinusoidale



Tempo  $\rightarrow$  Fasore



Fasore  $\rightarrow$  Tempo

$$a_k(t) = \operatorname{Re}\{\bar{A}_k e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\bar{A}_k e^{j\varphi_k} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{A_k e^{j(\omega t + \varphi_k)}\}$$

$\downarrow$   $\text{QED}$   $\uparrow$   
 $= A_k \cos(\omega t + \varphi_k)$   $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$

# Proprietà del metodo:

## (1) UNICITA'

$$\begin{aligned} a(t) &= A \cos(\omega t + \alpha) & \xrightarrow{\quad} & \bar{A} = A e^{j\alpha} \\ b(t) &= B \cos(\omega t + \beta) & \xleftarrow{\quad} & \bar{B} = B e^{j\beta} \end{aligned}$$

Affinché  $a(t) \neq b(t)$   
 $\downarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \neq B \\ \text{OR} \\ \alpha \neq \beta \end{array} \right\} \xrightarrow{\quad} \bar{A} \neq \bar{B}$$

## (2) LINEARITA'

$$a_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$a_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$\rightarrow a_3(t) = C_1 a_1(t) + C_2 a_2(t)$$

$$\nwarrow \quad \nearrow \\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\bar{A}_1 = A_1 e^{j\alpha_1}$$

$$\bar{A}_2 = A_2 e^{j\alpha_2}$$

$$\rightarrow \bar{A}_3 = C_1 \bar{A}_1 + C_2 \bar{A}_2$$

## (3) DERIVAZIONE → la più importante!

$$a(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\bar{A} = A e^{j\alpha}$$

$$\rightarrow \frac{da(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$= \omega A \sin(\omega t + \alpha + \pi)$$

$$= \omega A \cos(\omega t + \alpha + \pi - \frac{\pi}{2})$$

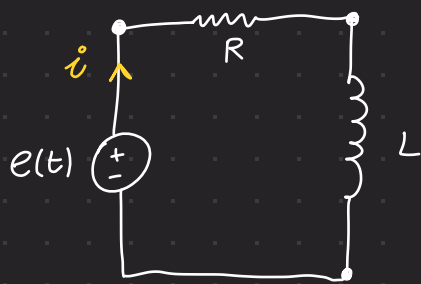
$$= \omega A \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\quad} \omega A \cdot e^{j(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \omega A e^{j\alpha} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &= \boxed{j\omega \bar{A}} \end{aligned}$$

Visto nella  
lez prec.  $\uparrow$

Le derivate, che nel dominio del tempo risultavano in equazioni differenziali, nel dominio dei fasori diventano **moltiplicazioni**.

Risolvere un circuito in regime sinusoidale con il **metodo dei fasori** (stesso esercizio di ieri)



\*  $(j\omega L)$  ha le stesse dim di  $R$ :

$$\left. \begin{array}{l} \omega \rightarrow \left[ \frac{1}{f} \right] = s \\ L \rightarrow [\text{Henry}] = \left[ \frac{\Omega}{s} \right] \end{array} \right\} (\omega \cdot L) = [\Omega]$$

$$e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha) \rightsquigarrow \bar{E} = E_M \cdot e^{j\alpha} = E_M$$

$$V_R + V_L - V_E = 0$$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \beta) \rightsquigarrow \bar{I} = I_0 \cdot e^{j\beta}$$

$$R + L \frac{di}{dt} = e(t) \rightsquigarrow R\bar{I} + j\omega L\bar{I} = \bar{E}$$

↓ Risolvo

$$\bar{I}(R + j\omega L) = \bar{E} \rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L}$$

$$\rightarrow \bar{I} = \left[ \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right] \cdot e^{j(-\text{atan} \frac{\omega L}{R})}$$

Modulo/Ampiezza

[ Fase numer. - Fase denom ]  
 $\downarrow$   $\downarrow$   
 $0$   $\text{atan}(\frac{\text{imm}}{\text{reale}})$

→ Torniamo al dominio del Tempo

Ampiezza del fasore → Ampiezza della sinusoide

Fase del fasore → Fase della sinusoide

$$\Rightarrow i(t) = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \cos\left(\omega t - \text{atan} \frac{\omega L}{R}\right) \quad \text{Ans}$$

# Equivalenza

Dominio del tempo  $\rightarrow$  Dominio dei fasori

$$e_k(t) = E_k \cos(\omega t + \alpha_k) \rightsquigarrow \bar{E}_k = E_k e^{j\alpha_k}$$

$$LKT: V_1(t) + V_2(t) + \dots + V_k(t) = 0 \rightsquigarrow \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_k = 0 \quad (\text{linearità})$$

$$\hookrightarrow \sum_{k=1}^n \pm V_k(t) = 0 \rightsquigarrow \sum_{k=1}^n \pm \bar{V}_k = 0$$

$$LKC: i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_k(t) = 0 \rightsquigarrow \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_k = 0 \quad (\text{linearità})$$

$$\hookrightarrow \sum_{k=1}^n \pm i(t) = 0 \rightsquigarrow \sum_{k=1}^n \pm \bar{I}_k = 0$$

## Relazioni Caratteristiche

Resistori

$$V_k = R_k \cdot i_k$$



$$\bar{V}_k = R_k \bar{I}_k$$

Induttori

$$V_k = L_k \frac{di_k}{dt}$$



$$\bar{V}_k = j\omega L_k \bar{I}_k$$

Condensatori

$$i_k = C_k \cdot \frac{dV_k}{dt}$$



$$\bar{I}_k = j\omega C_k \bar{V}_k \Rightarrow \bar{V}_k = \frac{\bar{I}_k}{j\omega C_k}$$



Impedenza

$$\bar{V}_k = \bar{Z}_k \bar{I}_k$$

Reattanza Induttiva

$$\omega L_k = X_{Lk}$$

Reattanza capacitiva

$$-\frac{1}{\omega C_k} = X_{Ck}$$

↑  
overo impedenza  
SENZA j

- Resistori  $\bar{Z}_k = R_k$
- Induttori  $\bar{Z}_k = j\omega L_k$
- Condensatori  $\bar{Z}_k = (j\omega L_k)^{-1} = -j \cdot \frac{1}{\omega C}$

L'impedenza **appartiene ai numeri complessi**.

Casi in cui è impossibile la trasformazione: relazione caratteristica **non lineare**

$$(1) i_k(t) = B V_k^2(t) \leftarrow \text{Bipolo non lineare}$$

$$\rightarrow V_k(t) = V \cos(\omega t) \quad (\alpha = 0)$$

$$\rightarrow i_k(t) = B V^2 \cos^2(\omega t) = B V^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \right] \rightarrow \text{Non è più una sinusoide di pulsazione } \omega$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

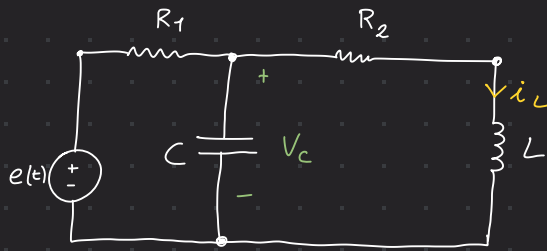
Esercizio: risoluzione di un circuito in regime sinusoidale con il metodo di ispezione nel dominio dei fasori

DATI:

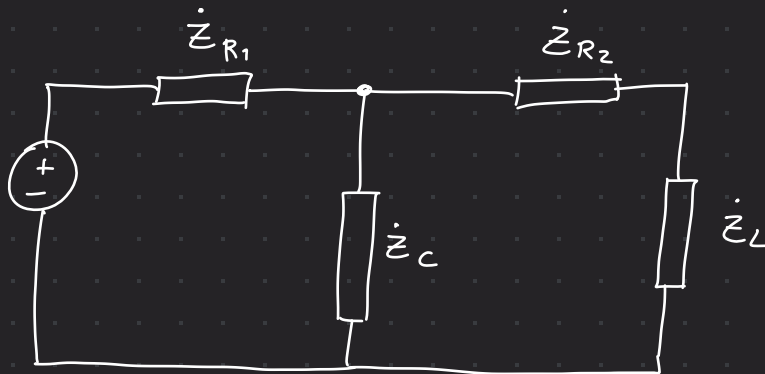
$$e(t) = 100 \cos(100t) \rightarrow f = \frac{100}{2\pi} \approx 15.92 \text{ Hz}$$

$$R_1 = 20 \Omega \quad R_2 = 30 \Omega$$

$$L = 0.2 \text{ H} \quad C = 0.33 \text{ mF}$$



↓ TRASFORMO



$$\begin{aligned} \dot{Z}_{R1} &= 20 \Omega \\ \dot{Z}_{R2} &= 30 \Omega \\ \dot{Z}_L &= j \cdot 100 \cdot 0.2 = j20 \Omega \\ \dot{Z}_C &= -j \frac{10^3}{0.33 \cdot 10^2} \approx -j30 \Omega \end{aligned}$$

$\text{mF} = 10^{-3} \text{ F}$

=>

$$E = 100 \cdot \frac{j0}{1} = 100$$

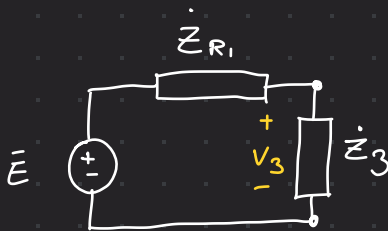
RISOLVO PER ISPEZIONE

Resistenza  
↑

$$\dot{Z}_{2L} = \dot{Z}_{R1} + \dot{Z}_L = (30 + j20) \Omega$$

$$\dot{Z}_3 = \dot{Z}_{2L} \parallel \dot{Z}_C = [\text{Calcolato con la calcolatrice}] = 27 - j20 \Omega$$

↑ Reattanza Capacitiva



SERIE => Partitore di Tensione

$$\bar{V}_3 = \bar{E} \cdot \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_3 + \dot{Z}_{R1}} = 64.52 - j15.85 \text{ V}$$

$$|V_3| = 66.45 \text{ V} \quad \angle V_3 = -0.24 \text{ A}$$

↑ RADIANTI !!

$$\Rightarrow e(t) = 66.45 \cos(\omega t - 0.24)$$

Ans1

Siccome  $V = R \cdot i \Rightarrow \bar{I}_L = \frac{\bar{V}_3}{\dot{Z}_{R2L}} = \frac{\bar{V}_3}{(\dot{Z}_{R2} + \dot{Z}_L)} = 1.24 - j1.35$

$$\Rightarrow |\bar{I}_L| = 1.84 \text{ V}$$

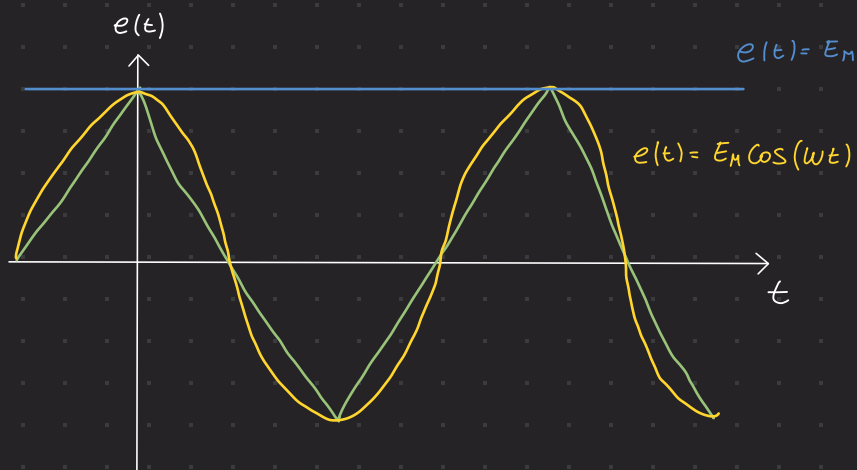
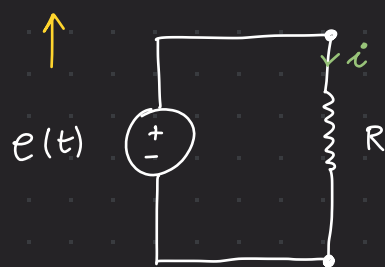
$$\angle \bar{I}_L = -0.83 \text{ A RAD}$$

$$\Rightarrow i(t) = 1.84 \cos(\omega t - 0.83)$$

Ans 2

# Valore efficace

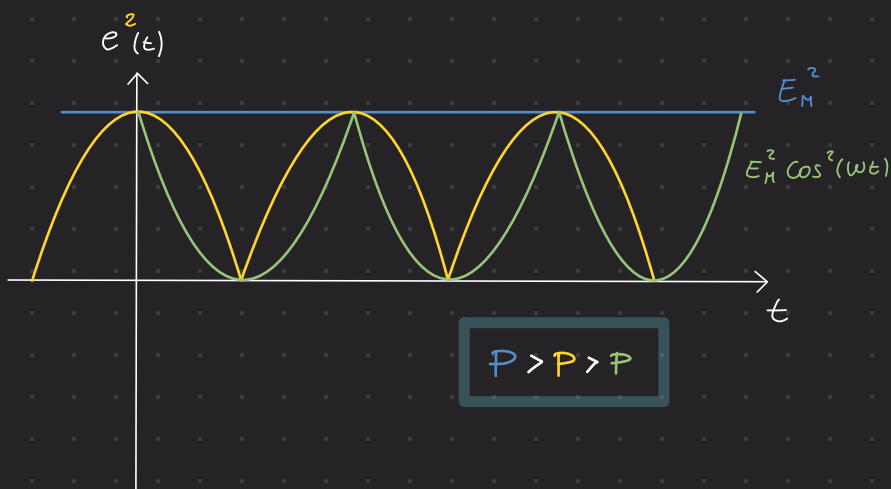
$e(t)$  Periodica di periodo  $T$



Se  $i(t) = \frac{e(t)}{R} \rightarrow P_{\text{ow}}(t) = \frac{e^2(t)}{R}$

$\rightarrow$  Potenza Media :  $P = \left( \frac{1}{T} \right) \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{e^2(t)}{R} dt$

Area  
Intervallo  
Teorema della Media Integrale



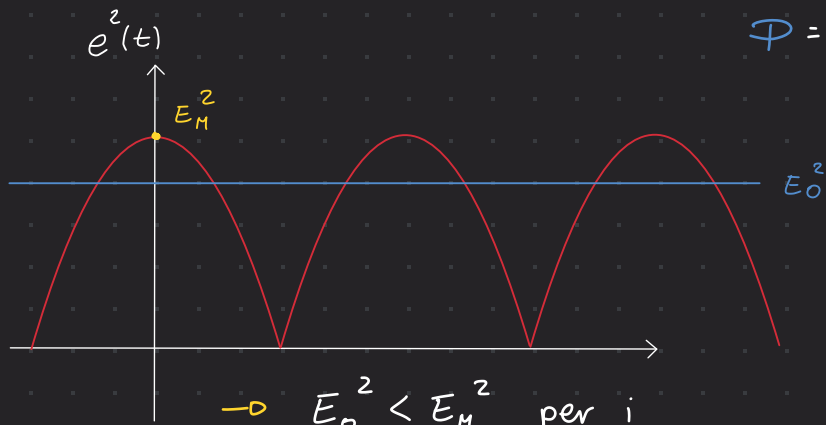
• Caso particolare  $e(t) = E_M$

$\rightarrow P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E_M^2}{R} dt = \frac{E_M^2}{R}$

**Definizione:** il **valore efficace** di una grandezza elettrica periodica è quel valore **costante** che implica la stessa dissipazione di Potenza nel periodo  $T$  in uno stesso resistore  $R$ .

# TROVIAMO IL VALORE EFFICACE (RMS) DELLA SINUSOIDE

Ci basta applicare la definizione:



$$P = P = 0 \quad \frac{E_0^2}{R} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E_m^2 \cos^2(\omega t)}{R} dt$$

$$\Rightarrow E_0^2 = \frac{E_m^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt$$

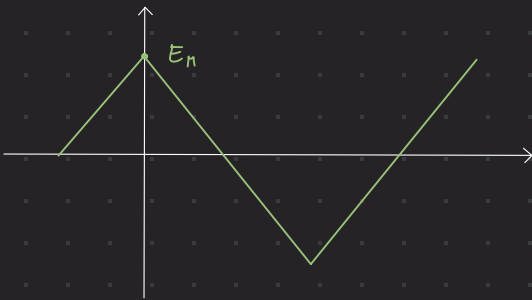
$$\Rightarrow E_0^2 = \frac{E_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt$$

$$\Rightarrow E_0^2 = \frac{E_m^2}{T} \cdot \frac{1}{2} T$$

$$\Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{E_m^2}{2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

Valore efficace della sinusoide

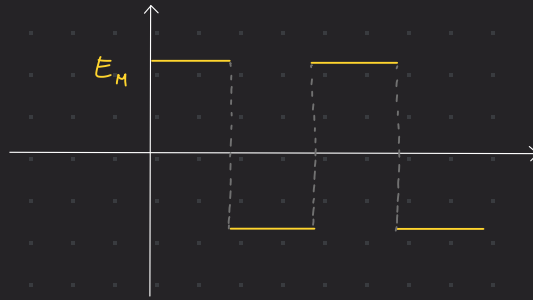
## • Onda Triangolare



$$E_0 = \frac{E_m}{\sqrt{3}}$$

Valore efficace dell'onda triangolare

## • Onda Quadra



$$E_0 = E_m$$

Valore efficace dell'onda quadra