

Esercizi di Elettrotecnica



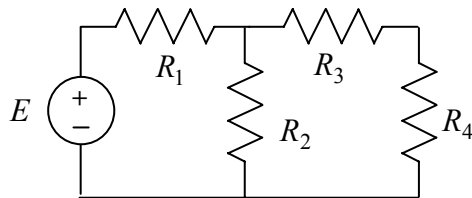
prof. Antonio Maffucci
Università degli Studi di Cassino

Circuiti in regime stazionario

versione 3.1 – ottobre 2007

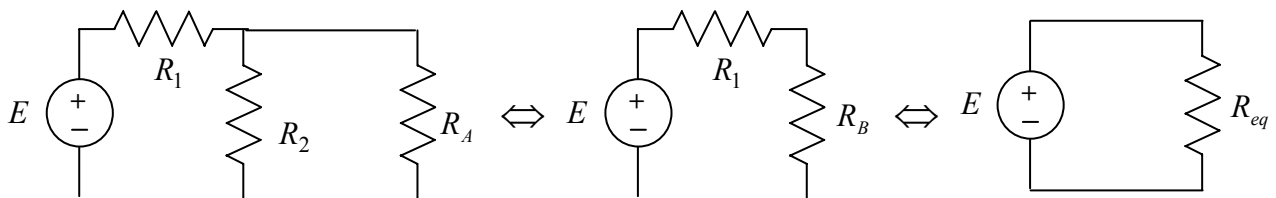
1. Serie, parallelo e partitori.

ES. 1.1 Calcolare la resistenza equivalente vista ai capi del generatore E.



$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \, \Omega & R_2 &= 4 \, \Omega \\ R_3 &= 3 \, \Omega & R_4 &= 2 \, \Omega \end{aligned}$$

Utilizzando l'equivalenza serie e parallelo, il circuito di resistenze visto da E si può ridurre ad un unico resistore attraverso i seguenti passi:

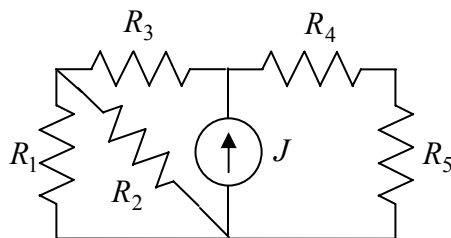


$$R_A = R_3 + R_4 = 5 \, \Omega$$

$$R_B = R_A \parallel R_2 = \frac{R_A R_2}{R_A + R_2} = 2.22 \, \Omega$$

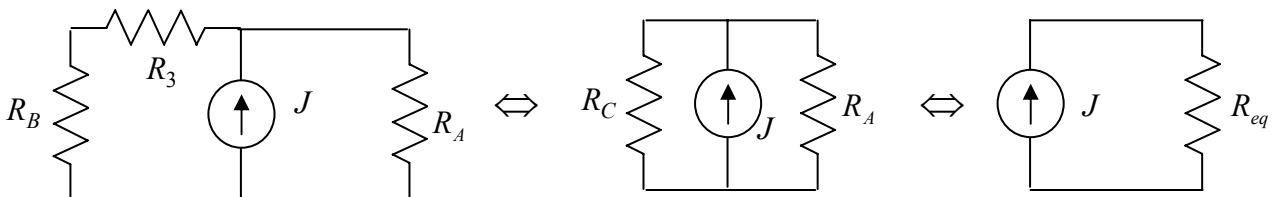
$$R_{eq} = R_B + R_1 = 3.22 \, \Omega$$

ES. 1.2 Calcolare la resistenza equivalente vista dal generatore J.



$$\begin{aligned} R_1 &= R_4 = 5 \, \Omega & R_2 &= 3 \, \Omega \\ R_3 &= R_5 = 2 \, \Omega \end{aligned}$$

Utilizzando l'equivalenza serie e parallelo, il circuito di resistenze visto da E si può ridurre ad un unico resistore attraverso i seguenti passi:



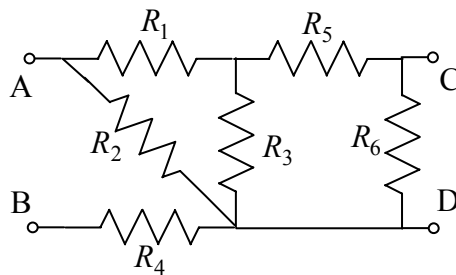
$$R_A = R_4 + R_5 = 7 \, \Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1.87 \, \Omega$$

$$R_C = R_B + R_3 = 3.87 \, \Omega$$

$$R_{eq} = \frac{R_A R_C}{R_A + R_C} = 2.49 \, \Omega$$

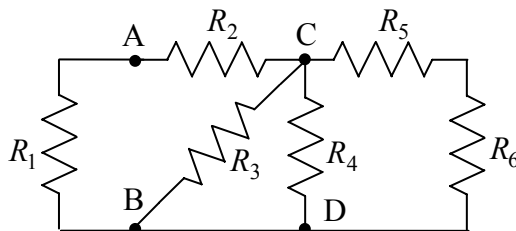
~~ES. 1.3~~ - Calcolare la R_{eq} vista ai morsetti A-B e quella vista ai morsetti C-D.



$$\begin{aligned} R_1 = R_2 = 5 \, \Omega \quad R_3 = 10 \, \Omega \\ R_4 = 4 \, \Omega \quad R_5 = 3 \, \Omega \\ R_6 = 2 \, \Omega \end{aligned}$$

Risultato: $R_{eqAB} = 7.125 \, \Omega$, $R_{eqCD} = 1.600 \, \Omega$.

~~ES. 1.4~~ - Calcolare la R_{eq} vista ai morsetti A-B e quella vista ai morsetti C-D.

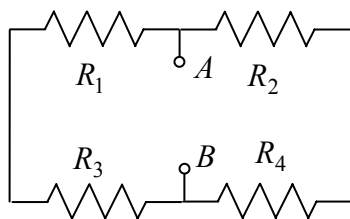


$$\begin{aligned} R_1 = R_3 = 0.2 \, \Omega \quad R_2 = 0.4 \, \Omega \\ R_4 = R_5 = 1 \, \Omega \quad R_6 = 3 \, \Omega \end{aligned}$$

Risultato: $R_{eqAB} = 0.147 \, \Omega$, $R_{eqCD} = 0.126 \, \Omega$.

ES. 1.5 - Calcolare il valore di R_4 tale che ai morsetti A-B si abbia $R_{eq} = R$.

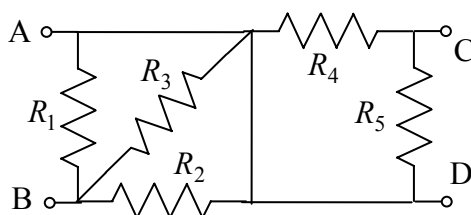
INCOMP.



$$R_1 = R_2 = R \quad R_3 = R/2$$

Risultato: $R_4 = 2R$.

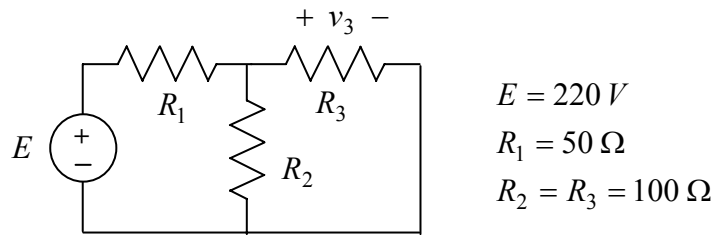
ES. 1.6 - Calcolare la R_{eq} vista ai morsetti A-B e quella vista ai morsetti C-D.



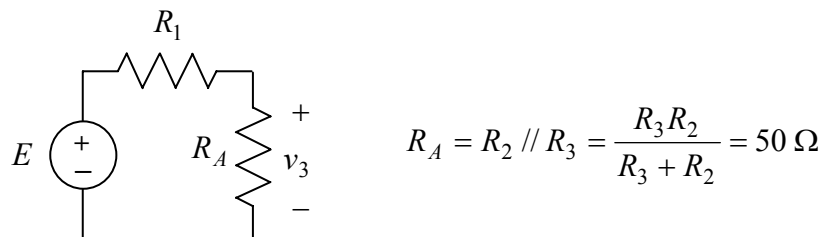
$$\begin{aligned} R_1 = 2.3 \, \text{m}\Omega \quad R_2 = 1.4 \, \text{m}\Omega \\ R_3 = 1 \, \text{m}\Omega, \quad R_4 = 3 \, \text{m}\Omega, \quad R_5 = 0.8 \, \text{m}\Omega \end{aligned}$$

Risultato: $R_{eqAB} = 0.47 \, \text{m}\Omega$, $R_{eqCD} = 0.63 \, \text{m}\Omega$.

ES. 1.7 - Calcolare la tensione v_3 usando il partitore di tensione.



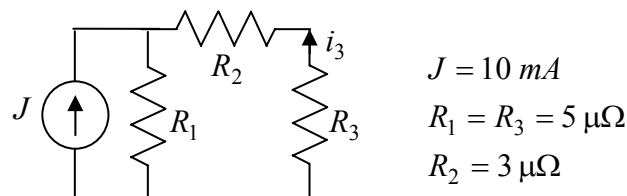
Il partitore di tensione si applica a due resistori in serie, quindi occorre preliminarmente ricondursi alla rete equivalente seguente:



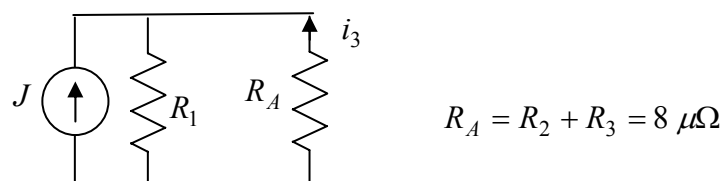
Applicando ora il partitore di tensione si ha:

$$v_3 = E \frac{R_A}{R_A + R_1} = 110 \text{ V}.$$

ES. 1.8 - Calcolare la corrente i_3 usando il partitore di corrente.



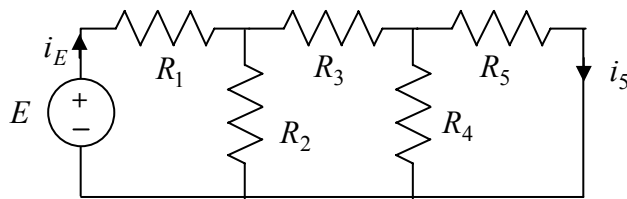
Il partitore di corrente si applica a due resistori in parallelo, quindi occorre riferirsi alla rete equivalente seguente:



Applicando ora il partitore di corrente si ha (tenuto conto dei versi):

$$i_3 = -J \frac{R_1}{R_A + R_1} = -3.84 \text{ mA}.$$

ES 1.9 - Calcolare la potenza erogata dal generatore E e quella assorbita dal resistore R_5



$$E = 10 \text{ V}$$

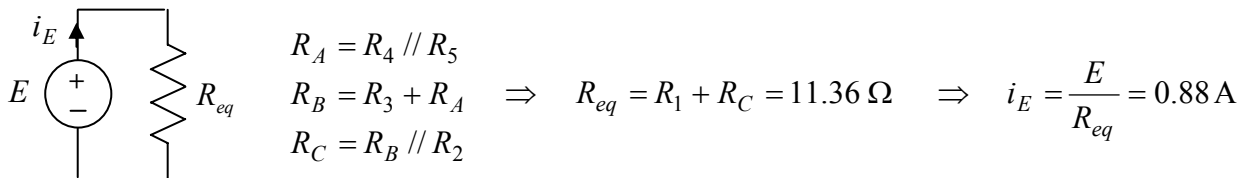
$$R_1 = 10 \, \Omega \quad R_2 = 2 \, \Omega$$

$$R_3 = 3 \, \Omega \quad R_4 = 5 \, \Omega \quad R_5 = 2 \, \Omega$$

Scegliendo le correnti come in figura, le potenze richieste sono date da:

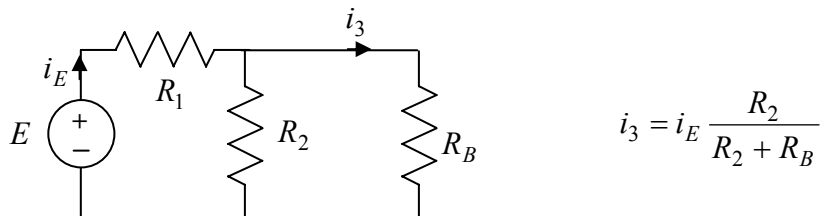
$$P_E^{erog} = E i_E, \quad P_{R_5} = R_5 i_5^2.$$

La i_E si valuta a partire dal calcolo della resistenza equivalente vista ai capi del generatore:



da cui si ricava: $P_E^{erog} = 8.80 \text{ W}$.

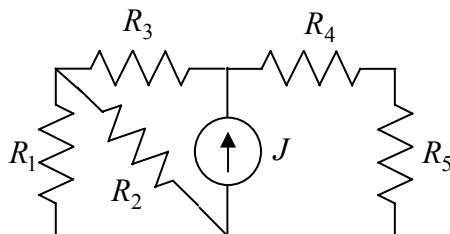
Nota la corrente i_E , si può ricavare la i_5 applicando due volte il partitore di corrente. Dapprima ricaviamo i_3 dalla rete equivalente seguente



quindi ricaviamo i_5 ripartendo i_3 tra i resistori R_4 ed R_5 :

$$i_5 = i_3 \frac{R_4}{R_4 + R_5} = 0.19 \text{ A} \Rightarrow P_{R_5} = 72.20 \text{ mW}.$$

ES 1.10 - Calcolare la potenza erogata dal generatore J e quella assorbita dal resistore R_1 .



$$J = 5 \text{ A}$$

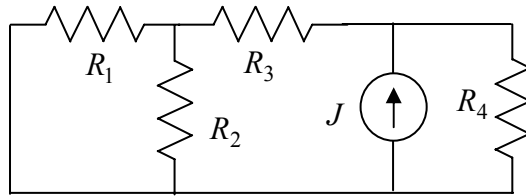
$$R_1 = R_4 = 5 \, \Omega \quad R_2 = 3 \, \Omega$$

$$R_3 = R_5 = 2 \, \Omega$$

Risultato: $P_J^{erog} = 62.25 \text{ W}$, $P_{R_1} = 7.25 \text{ W}$.

ES. 1.11 - Calcolare la potenza erogata dal generatore e quella assorbita da ogni resistore. Verificare la conservazione delle potenze.

???



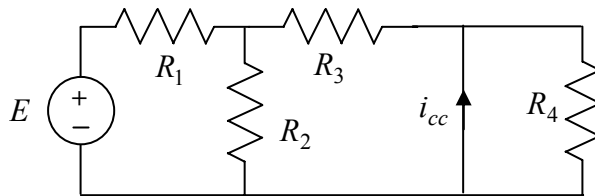
$$J = 10 \text{ A}$$

$$R_1 = 2 \Omega \quad R_2 = 10 \Omega$$

$$R_3 = 20 \Omega \quad R_4 = 15 \Omega$$

Risultato: $P_J^{erog} = 0.886 \text{ kW}$, $P_{R_1} = 0.023 \text{ kW}$, $P_{R_2} = 0.004 \text{ kW}$, $P_{R_3} = 0.335 \text{ kW}$, $P_{R_4} = 0.524 \text{ kW}$.

~~**ES. 1.12**~~ - Calcolare la corrente i_{cc} che circola nel corto-circuito.



$$E = 220 \text{ V}$$

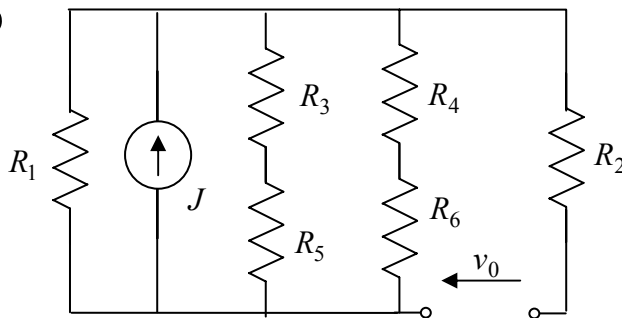
$$R_1 = 10 \Omega \quad R_2 = 0.1 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 25 \Omega \quad R_4 = 2 \text{ k}\Omega$$

Risultato: $i_{cc} = -5.87 \text{ A}$.

ES. 1.13 - Calcolare la tensione v_0 sul circuito aperto in figura.

???



$$J_1 = 1 \text{ A}$$

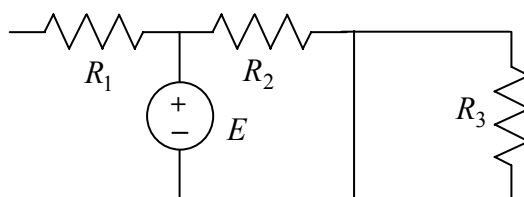
$$R_1 = 10 \Omega \quad R_2 = 10 \Omega$$

$$R_3 = 15 \Omega \quad R_4 = 5 \Omega$$

$$R_5 = 30 \Omega \quad R_6 = 25 \Omega$$

Risultato: $v_0 = -6.43 \text{ V}$.

~~**ES. 1.14**~~ - Valutare la potenza assorbita dai resistori della rete in figura.



$$E = 10 \text{ V}$$

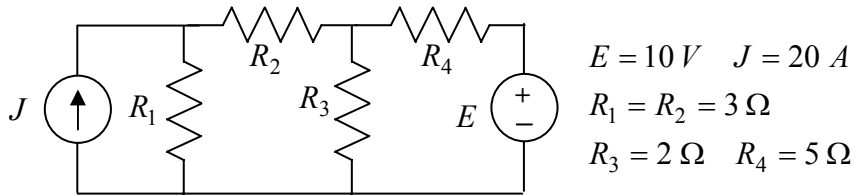
$$R_1 = 10 \Omega \quad R_2 = 1 \Omega$$

$$R_3 = 100 \Omega$$

Risultato: $P_{R_1} = P_{R_3} = 0$, $P_{R_2} = 100 \text{ W}$.

2. Sovrapposizione degli effetti.

~~E2.1~~ - Calcolare la potenza totale erogata dai generatori.

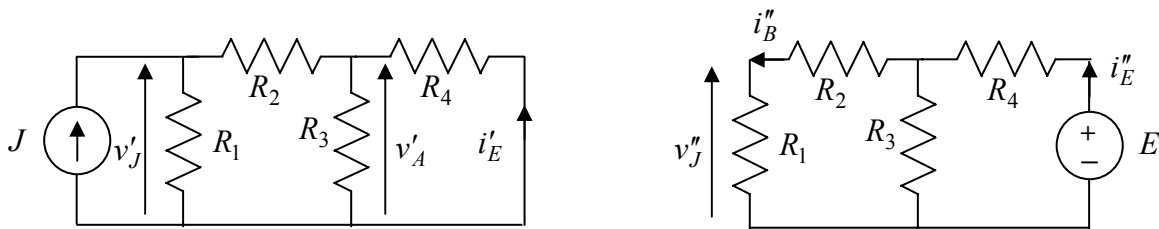


Piv' o meno...

Adottando la convenzione del generatore sui due generatori della rete, la potenza erogata da ciascuno di essi sarà data da:

$$P_E^{erog} = E i_E, \quad P_J^{erog} = J v_J.$$

La tensione v_J e la corrente i_E si possono valutare applicando la sovrapposizione degli effetti, risolvendo i due circuiti ausiliari ottenuti considerando un solo generatore acceso:



Con riferimento al primo circuito ausiliario, il contributo v'_J è ottenuto valutando la resistenza equivalente vista dal generatore:

$$R_{eq_J} = (R_3 // R_4 + R_2) // R_1 = 1.79 \Omega \Rightarrow v'_J = R_{eq_J} J = 35.80 \text{ V}.$$

Per valutare i'_E si può utilizzare la tensione v'_A sul parallelo $R_A = R_3 // R_4$:

$$v'_A = v'_J \frac{R_A}{R_2 + R_A} \Rightarrow i'_E = -\frac{v'_A}{R_4} = -2.31 \text{ A}$$

(nell'ultimo passaggio si è tenuto conto della convenzione adottata su R_4). Nel secondo circuito ausiliario, il contributo i''_E è ottenuto valutando la resistenza equivalente vista dal generatore:

$$R_{eq_E} = (R_1 + R_2) // R_3 + R_4 = 6.50 \Omega \Rightarrow i''_E = E / R_{eq_E} = 1.54 \text{ A}.$$

Per valutare v''_J è utile passare attraverso il calcolo della corrente i''_B della serie $R_B = R_1 + R_2$:

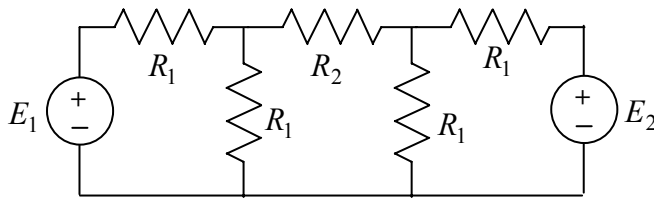
$$i''_B = i''_E \frac{R_3}{R_B + R_3} \Rightarrow v''_J = R_1 i''_B = 1.14 \text{ V}.$$

Se ne conclude che:

$$P_E^{erog} = E i_E = E (i'_E + i''_E) = -7.70 \text{ W}, \quad P_J^{erog} = J v_J = J (v'_J + v''_J) = 0.74 \text{ kW}.$$

(Si osservi che in questa rete il generatore di tensione sta assorbendo potenza elettrica positiva).

~~ES. 2.2~~ - Calcolare la potenza totale erogata dai generatori.

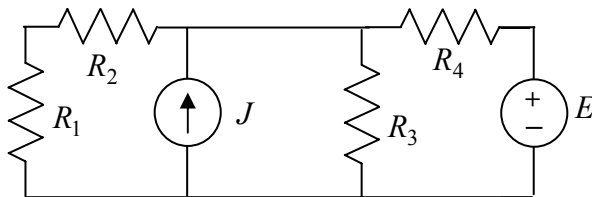


$$E_1 = 10 \text{ V}, \quad E_2 = 20 \text{ V}$$

$$R_1 = 2 \, \Omega, \quad R_2 = 1 \, \Omega$$

Risultato: $P_{E_1}^{erog} = 16.67 \text{ W}$, $P_{E_2}^{erog} = 0.12 \text{ kW}$.

~~ES. 2.3~~ - Calcolare la potenza totale erogata dai generatori.



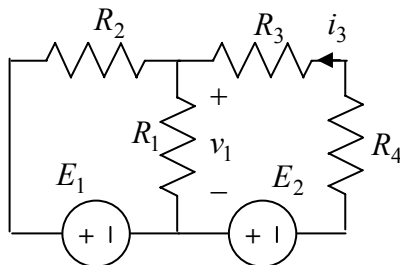
$$E = 50 \text{ V} \quad J = 20 \text{ A}$$

$$R_1 = 1 \, \Omega \quad R_2 = 5 \, \Omega$$

$$R_3 = R_4 = 10 \, \Omega$$

Risultato: $P_E^{erog} = -0.09 \text{ kW}$, $P_J^{erog} = 1.36 \text{ kW}$.

~~ES. 2.4~~ - Calcolare la tensione v_1 e la corrente i_3 .

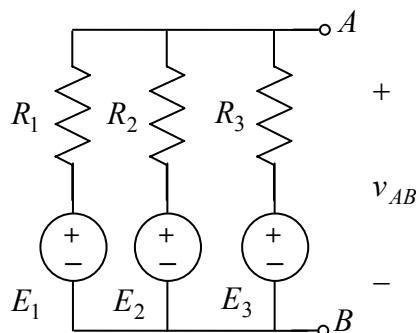


$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2 \, \Omega$$

$$E_1 = 5 \text{ V}, \quad E_2 = 2 \text{ V}$$

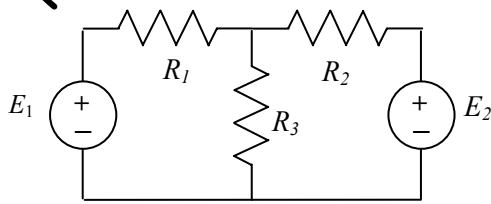
Risultato: $v_1 = 1.60 \text{ V}$, $i_3 = -0.90 \text{ A}$.

ES. 2.5 - Utilizzando la sovrapposizione degli effetti, dimostrare la Formula di Millmann.



$$v_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

ES. 2.6 - Determinare la potenza erogata dal generatore E_1 .

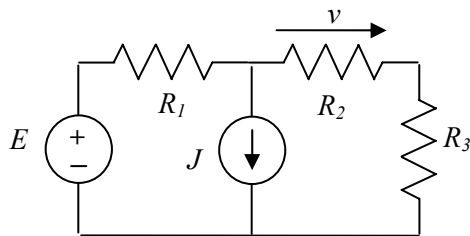


$$E_1 = 5 \text{ V}, E_2 = 12 \text{ V},$$

$$R_1 = 3.5 \, \Omega, R_2 = 2.3 \, \Omega, R_3 = 3.2 \, \Omega.$$

Risultato: $P_{E_1}^{erog} = -2.05 \text{ W}$.

ES. 2.7 - Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, determinare la tensione v .

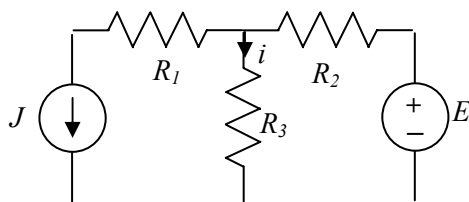


$$E = 5 \text{ V}, J = 2 \text{ mA}$$

$$R_1 = 3 \text{ k}\Omega, R_2 = 2.4 \text{ k}\Omega, R_3 = 3.2 \text{ k}\Omega$$

Risultato: $v = 0.28 \text{ V}$.

ES. 2.8 - Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, determinare la corrente i e la potenza assorbita da R_3 .

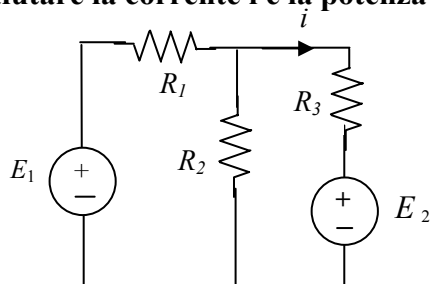


$$E = 10 \text{ V}, J = 1 \text{ mA}$$

$$R_1 = 3.2 \text{ k}\Omega, R_2 = 2.2 \text{ k}\Omega, R_3 = 3.5 \text{ k}\Omega$$

Risultato: $i = 1.37 \text{ mA}, P = 6.57 \text{ mW}$.

ES. 2.9 - Valutare la corrente i e la potenza erogata dal generatore E_1 .



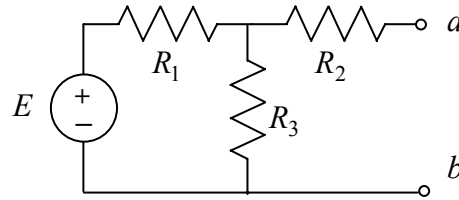
$$E_1 = 10 \text{ V}, E_2 = 20 \text{ V}$$

$$R_1 = 5 \, \Omega, R_2 = 20 \, \Omega, R_3 = 10 \, \Omega$$

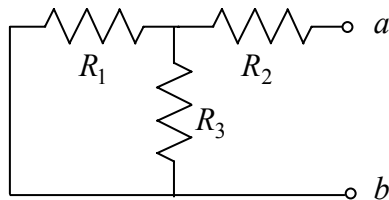
Risultato: $i = -0.86 \text{ A}, P_{E_1}^{erog} = -2.86 \text{ W}$.

3. Generatori equivalenti di Thévenin e di Norton.

~~ES.3.1~~ - Calcolare l'equivalente di Thévenin visto ai capi dei morsetti a-b.



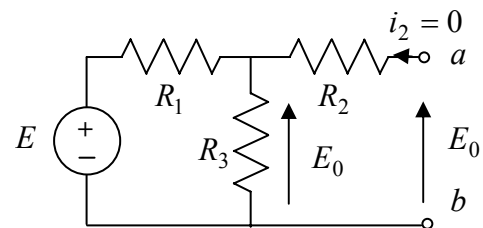
La resistenza equivalente si ottiene spegnendo l'unico generatore, quindi studiando la rete seguente



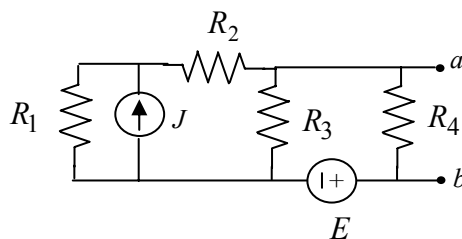
$$R_{eq} = R_2 + R_1 // R_3 = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

La tensione a vuoto E_0 si ottiene valutando la tensione tra i morsetti aperti. Tenuto conto che in queste condizioni non circola corrente sul resistore R_2 è evidente che la E_0 è anche la tensione su R_3 . Poiché R_1 ed R_3 sono in serie, la tensione E_0 si può ricavare da un semplice partitore di tensione:

$$E_0 = E \frac{R_3}{R_1 + R_3}.$$



~~ES.3.2~~ - Calcolare l'equivalente di Norton visto ai capi dei morsetti a-b.



$$J = 20 \text{ A} \quad E = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = R_2 = 2 \Omega$$

$$R_3 = R_4 = 4 \Omega$$

La resistenza equivalente si ottiene spegnendo i generatori:

$$R_{eq} = R_4 // [R_3 // (R_1 + R_2)] = 1.33 \Omega$$

La corrente I_{cc} è la corrente che circola da a a b quando i due morsetti sono in corto-circuito. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, il contributo I'_{cc} dovuto al solo generatore di corrente si valuta sostituendo il generatore di tensione con un corto-circuito e applicando la formula del partitore di corrente:

$$I'_{cc} = J \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 10 \text{ A}$$

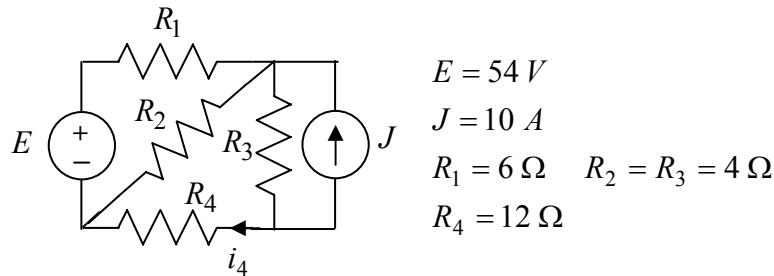
(si noti che R_3 ed R_4 sono cortocircuitate). Il contributo I''_{cc} dovuto al generatore di tensione si valuta sostituendo il generatore di corrente con un circuito aperto. In questo circuito I''_{cc} è proprio la corrente che circola nel generatore di tensione (si noti che su tale generatore è fatta la convenzione dell'utilizzatore):

$$I''_{cc} = -\frac{E}{R_E} = -5 \text{ A},$$

dove $R_E = (R_1 + R_2) // R_3 = 2 \Omega$. Pertanto la I_{cc} sarà

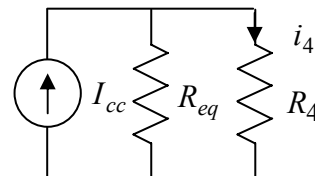
$$I_{cc} = I'_{cc} + I''_{cc} = 5 \text{ A}.$$

ES. 4.3 - Utilizzando l'equivalente di Norton calcolare la corrente che circola in R_4 .

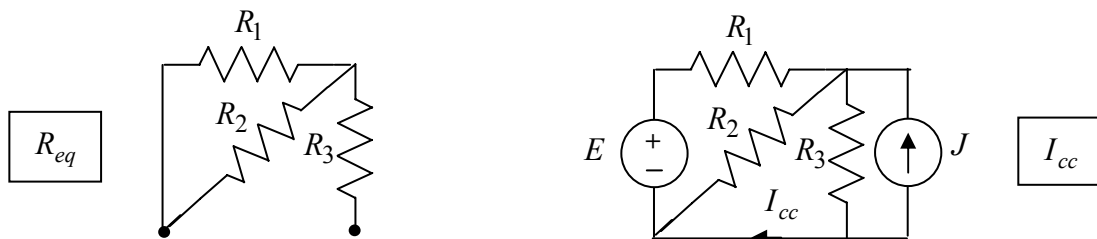


Riducendo la rete vista ai capi di R_4 con il teorema di Norton, si ottiene la rete seguente, dalla quale si evince che

$$i_4 = I_{cc} \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_4}.$$



I circuiti per valutare i parametri di Norton sono riportati di seguito:



Si avrà allora

$$R_{eq} = R_1 // R_2 + R_3 = 6.40 \Omega.$$

La corrente I_{cc} si può valutare applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Il contributo I'_{cc} dovuto al solo generatore di corrente si valuta sostituendo il generatore di tensione con un corto-circuito e applicando la formula del partitore di corrente:

$$I'_{cc} = -J \frac{R_3}{R_3 + (R_1 // R_2)} = -6.250 \text{ A}$$

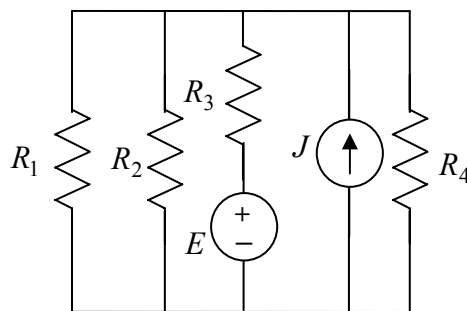
Il contributo I''_{cc} dovuto al generatore di tensione si valuta sostituendo il generatore di corrente con un circuito aperto. Applicando il partitore di tensione si può ricavare la tensione sul parallelo $R_p = R_2 // R_3$ e quindi ricavare la corrente richiesta (che circola in R_3).

$$v_p'' = E \frac{R_p}{R_1 + R_p} \Rightarrow I''_{cc} = \frac{v_p''}{R_3} = 3.375 \text{ A}.$$

Si ottiene in definitiva

$$I_{cc} = I'_{cc} + I''_{cc} = -2.875 \text{ A} \Rightarrow i_4 = -1.000 \text{ A}.$$

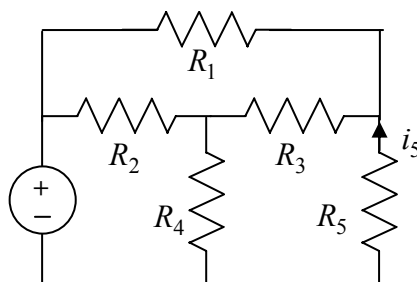
~~ES. 3.4~~ - Utilizzando il teorema di Thévenin calcolare la potenza assorbita dal resistore R_2 .



$$\begin{aligned} E &= 1 \text{ V} & J &= 2 \text{ mA} \\ R_1 &= R_2 = 1 \text{ k}\Omega & R_3 &= 2 \text{ k}\Omega \\ R_4 &= 5 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Risultato: $P_{R_2} = 0.85 \text{ mW}$.

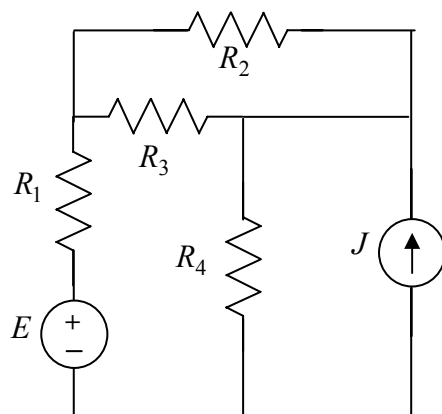
~~ES. 3.5~~ - Utilizzando il teorema di Thévenin calcolare la corrente i_5 .



$$\begin{aligned} E &= 12 \text{ V} \\ R_1 &= R_3 = 0.2 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 0.6 \text{ k}\Omega \\ R_4 &= R_5 = 0.4 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Risultato: $i_5 = -18 \text{ mA}$.

ES. 3.6 - Utilizzando il teorema di Norton calcolare la potenza assorbita dal resistore R_3 .



$$E = 5 \text{ V}$$

$$J = 1 \mu\text{A}$$

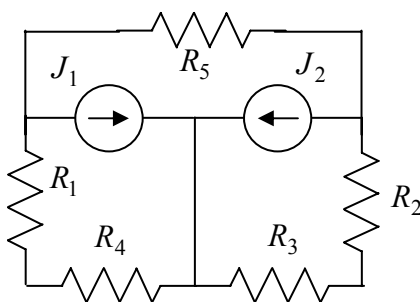
$$R_1 = R_3 = 2 \text{ M}\Omega$$

$$R_2 = 800 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 300 \text{ k}\Omega$$

Risultato: $P_{R_3} = 0.43 \mu\text{W}$.

ES. 3.7 - Utilizzando il teorema di Thévenin calcolare la potenza assorbita da R_5 .



$$J_1 = 2 \text{ mA}$$

$$J_2 = 1 \text{ mA}$$

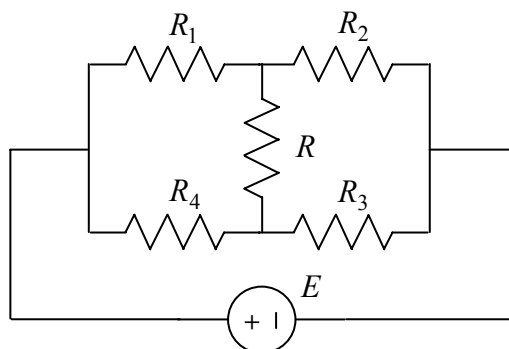
$$R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = R_5 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 3 \text{ k}\Omega$$

Risultato: $P_{R_5} = 54.87 \mu\text{W}$.

ES. 3.8 - Verificare che il resistore R non è percorso da corrente se tra le resistenze vi è la seguente relazione (ponte di Wheatstone):

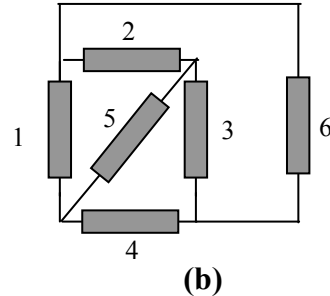
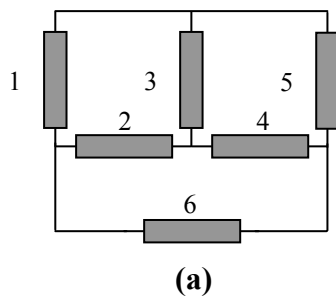


$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}$$

(Suggerimento: applicare Norton ai capi di R ed imporre che sia nulla la corrente I_{cc})

4. Metodi generali per l'analisi delle reti in regime stazionario.

ES. 4.1 - Date le seguenti reti di bipoli, scrivere un sistema completo di equazioni di Kirchhoff indipendenti.

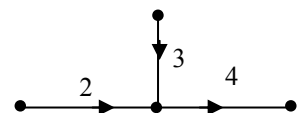
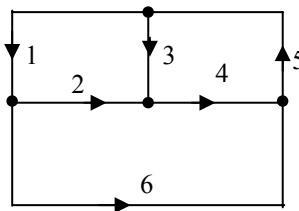


Rete (a)

Orientando il grafo come in figura e scegliendo, ad esempio, l'albero indicato, un possibile sistema completo di equazioni di Kirchhoff è dato da:

$$\text{LKC} \begin{cases} -i_1 + i_2 + i_6 = 0 \\ -i_2 - i_3 + i_4 = 0 \\ -i_4 + i_5 - i_6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{LKT} \begin{cases} v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_3 + v_4 + v_5 = 0 \\ -v_2 - v_4 + v_6 = 0 \end{cases}$$

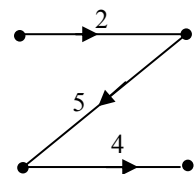
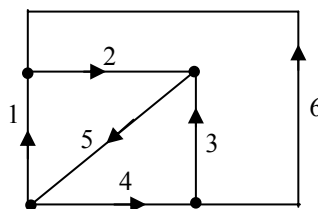


Rete (b)

Orientando il grafo come in figura e scegliendo, ad esempio, l'albero indicato, un possibile sistema completo di eq. di Kirchhoff è dato da:

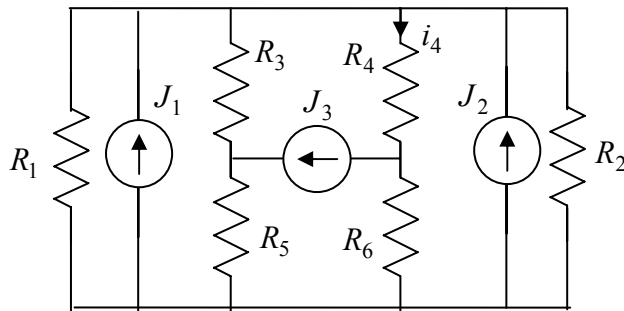
$$\text{LKC} \begin{cases} -i_1 + i_2 - i_6 = 0 \\ -i_2 - i_3 + i_5 = 0 \\ i_3 - i_4 + i_6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{LKT} \begin{cases} -v_1 - v_2 - v_5 = 0 \\ v_2 + v_4 + v_3 + v_6 = 0 \\ v_3 + v_4 + v_5 = 0 \end{cases}$$



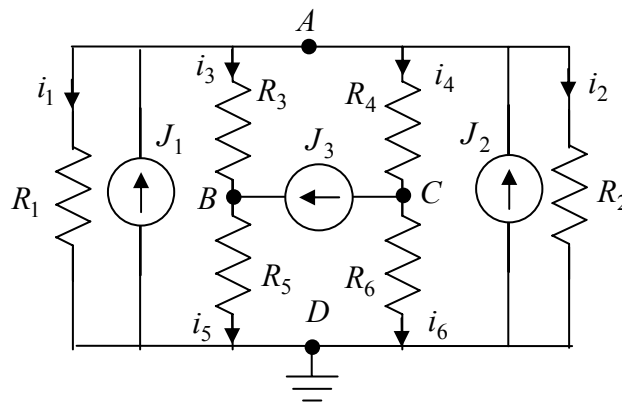
Si osservi che su tutti i bipoli delle reti (a) e (b) è stata adottata la stessa convenzione.

ES. 4.2 - Utilizzando il metodo dei potenziali nodali calcolare la corrente nel resistore R_4 .



$$\begin{aligned} J_1 &= J_2 = 1 \text{ A} & J_3 &= 3 \text{ A} \\ R_1 &= 30 \, \Omega & R_2 &= 10 \, \Omega \\ R_3 &= 25 \, \Omega & R_4 &= 5 \, \Omega \\ R_5 &= 35 \, \Omega & R_6 &= 15 \, \Omega \end{aligned}$$

Si individuino i nodi della rete e si orientino tutte le correnti nei resistori, adottando su di essi la convenzione normale:



Avendo scelto come potenziale di riferimento quello del nodo D, le incognite saranno i potenziali degli altri tre nodi: e_A, e_B, e_C . Per le convenzioni adottate si ha:

$$v_1 = v_2 = e_A, \quad v_3 = e_A - e_B, \quad v_4 = e_A - e_C, \quad v_5 = e_B, \quad v_6 = e_C.$$

Applicando la LKC ai nodi A, B, C e sostituendo le caratteristiche dei resistori (scritte con riferimento alle conduttanze) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = J_1 + J_2 \\ -i_3 + i_5 = J_3 \\ -i_4 + i_6 = -J_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_1 e_A + G_2 e_A + G_3 (e_A - e_B) + G_4 (e_A - e_C) = J_1 + J_2 \\ -G_3 (e_A - e_B) + G_5 e_B = J_3 \\ -G_4 (e_A - e_C) + G_6 e_C = -J_3 \end{cases}$$

Si osservi che tale sistema può essere posto nella forma matriciale:

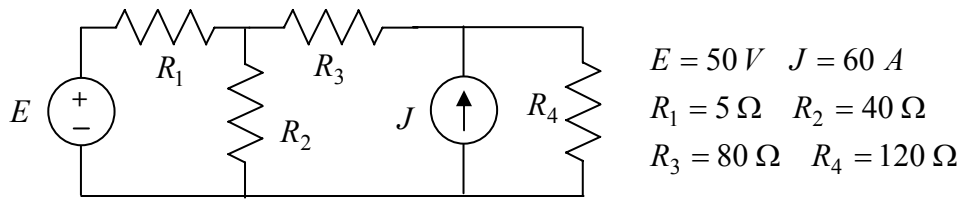
$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + G_4 & -G_3 & -G_4 \\ -G_3 & G_3 + G_5 & 0 \\ -G_4 & 0 & G_4 + G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 \\ J_3 \\ -J_3 \end{bmatrix}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene:

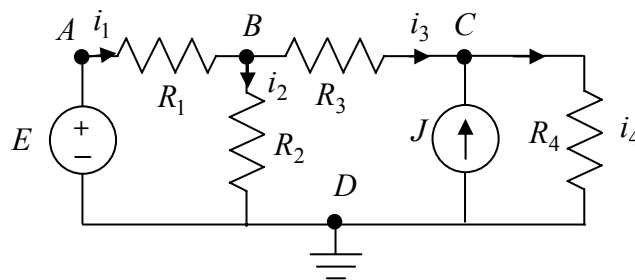
$$e_A = 7.500 \text{ V}, \quad e_B = 48.125 \text{ V}, \quad e_C = -5.625 \text{ V}$$

da cui: $i_4 = \frac{v_4}{R_4} = G_4 (e_A - e_C) = 2.625 \text{ A}.$

ES 4.3 - Utilizzando il metodo dei potenziali nodali modificato calcolare la potenza erogata dai due generatori e la potenza assorbita dai resistori (verificare la conservazione delle potenze).



Si individuino i nodi della rete e si orientino tutte le correnti nei resistori, adottando su di essi la convenzione normale:



Avendo scelto come potenziale di riferimento quello del nodo D, le incognite saranno i potenziali degli altri tre nodi: e_A, e_B, e_C . Per la presenza del generatore di tensione tra nodo A e nodo D, si ha banalmente $e_A = E$. Con le convenzioni adottate si ha:

$$v_1 = E - e_B, \quad v_2 = e_B, \quad v_3 = e_B - e_C, \quad v_4 = e_C.$$

Applicando la LKC ai nodi B e C e sostituendo le caratteristiche dei resistori (scritte con riferimento alle conduttanze) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 + i_4 = J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)e_B - G_3e_C = G_1E \\ -G_3e_B + (G_3 + G_4)e_C = J \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene:

$$e_B = 0.20 \text{ kV}, \quad e_C = 3.00 \text{ kV}.$$

Adottando la convenzione del generatore sui due generatori si ha:

$$P_E^{erog} = Ei_E = Ei_1 = EG_1v_1 = EG_1(E - e_B) = -1.50 \text{ kW}$$

$$P_J^{erog} = Jv_J = Jv_4 = Je_C = 180.00 \text{ kW}$$

$$P_{R_1} = G_1v_1^2 = G_1(E - e_B)^2 = 4.50 \text{ kW}$$

$$P_{R_2} = G_2v_2^2 = G_2e_B^2 = 1.00 \text{ kW}$$

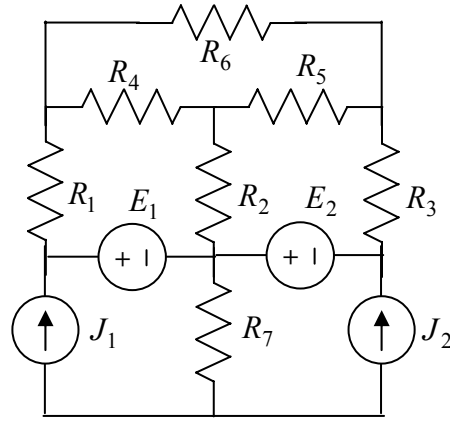
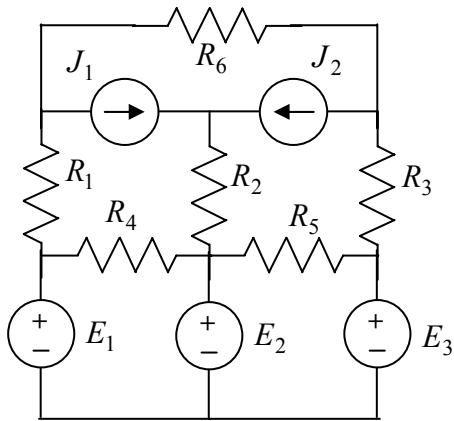
$$P_{R_3} = G_3v_3^2 = G_3(e_B - e_C)^2 = 98.00 \text{ kW}$$

$$P_{R_4} = G_4v_4^2 = G_4e_C^2 = 75.00 \text{ kW}$$

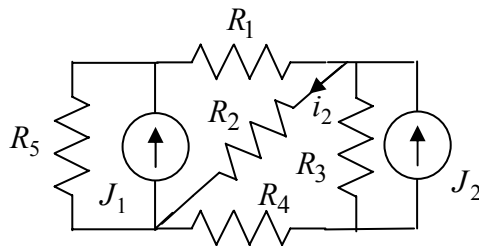
È facile verificare che $P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} = P_E^{erog} + P_J^{erog}$.

ES. 4.4 - Con riferimento alla seguenti reti:

- scrivere il sistema completo delle equazioni di Kirchhoff e delle equazioni caratteristiche (utilizzare grafo, albero e co-albero).
- scrivere il suddetto sistema in forma matriciale, individuando le matrici di incidenza ridotta e di maglia fondamentale.



ES. 4.5 - Utilizzando il metodo delle correnti di maglia calcolare la corrente in R_2 .



$$J_1 = 10 \text{ A}$$

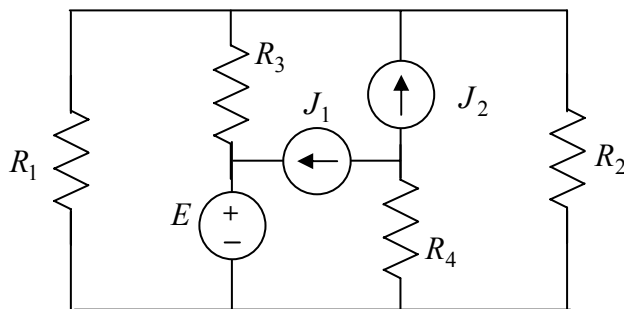
$$J_2 = 5 \text{ A}$$

$$R_1 = 2 \Omega \quad R_2 = R_3 = 3 \Omega$$

$$R_4 = R_5 = 5 \Omega$$

Risultato: $i_2 = 5 \text{ A}$.

ES. 4.6 - Utilizzando il metodo delle correnti di maglia calcolare la potenza erogata da ciascun generatore della rete.



$$J_1 = J_2 = 1 \text{ mA}, \quad E = 2 \text{ mV}$$

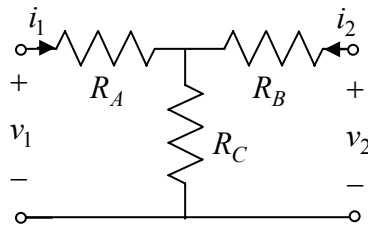
$$R_1 = 0.3 \Omega \quad R_2 = 0.2 \Omega$$

$$R_3 = 0.4 \Omega \quad R_4 = 0.5 \Omega$$

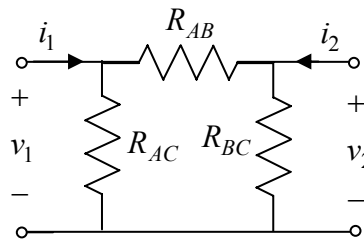
Risultato: $P_E^{erog} = 5.2 \mu\text{W}$, $P_{J_1}^{erog} = 3.0 \mu\text{W}$, $P_{J_2}^{erog} = 1.6 \mu\text{W}$.

5. Analisi di reti con doppi-bipoli resistivi e generatori pilotati

ES. 5.1 - Analizzando i seguenti doppi-bipoli:



schema a T (stella)



schema a Π (triangolo)

- verificare che lo schema a T realizza una qualunque matrice R con le posizioni seguenti (formule di sintesi): $R_A = R_{11} - R_m$, $R_B = R_{22} - R_m$, $R_C = R_m$;
- verificare che lo schema a Π realizza una qualunque matrice G con le posizioni seguenti (formule di sintesi): $G_{AC} = G_{11} + G_m$, $G_{BC} = G_{22} + G_m$, $G_{AB} = -G_m$;
- verificare le seguenti formule di trasformazione stella-triangolo (suggerimento: imporre l'equivalenza tra gli schemi a T e a Π):

$$Y \rightarrow \Delta$$

$$\Delta \rightarrow Y$$

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C}$$

$$R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B}$$

$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}$$

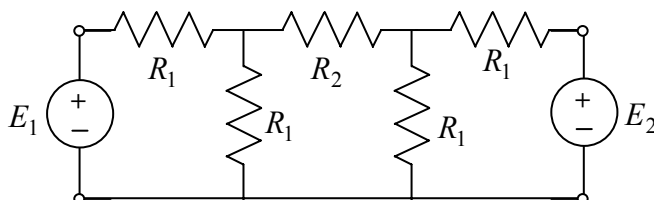
$$R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

$$R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

ES. 5.2 - Con riferimento alla seguente rete:

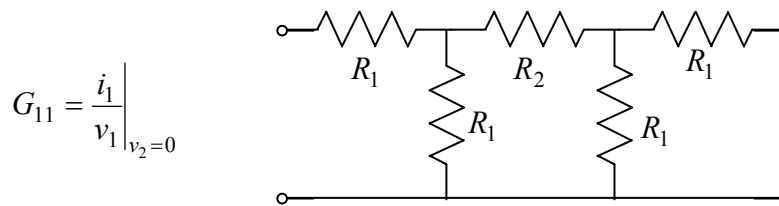
- caratterizzare attraverso la matrice G il doppio bipolo resistivo visto ai capi dei generatori;
- utilizzare la matrice G per calcolare la potenza assorbita dal doppio-bipolo;



$$E_1 = E_2 = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = 2 \Omega \quad R_2 = 1 \Omega$$

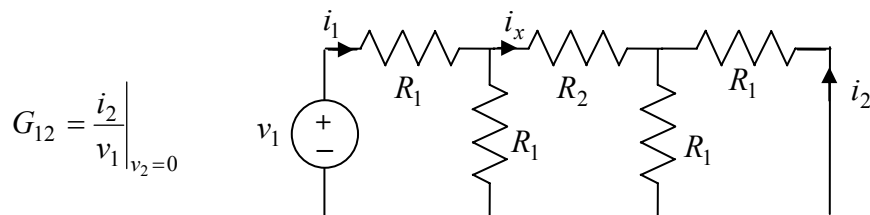
a.) L'elemento G_{11} è definito come:



quindi corrisponde alla conduttanza di ingresso della rete descritta in alto. Applicando le regole di equivalenza serie e parallelo di conduttanze si ottiene:

$$G_{11} = \frac{G_1 \left(G_1 + \frac{2G_1G_2}{2G_1 + G_2} \right)}{2G_1 + \frac{2G_1G_2}{2G_1 + G_2}} = 0.33 \text{ S}.$$

Per la simmetria della rete rispetto alle due porte, si ha anche $G_{11} = G_{22}$ (si provi a dimostrarlo). L'elemento G_{12} è definito come:



Il circuito per il calcolo di tale parametro è disegnato in alto. Si osservi che:

$$G_{12} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} \cdot \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} = G_{11} \cdot \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0}$$

quindi ci si riporta al calcolo di $\left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0}$, che può essere effettuato con l'applicazione reiterata del partitore di corrente:

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{-i_x/2}{i_1} = -\frac{1}{2i_1} i_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_1/2} = -0.25$$

da cui: $G_{12} = -0.25 \cdot G_{11} = -0.08 \text{ S}$.

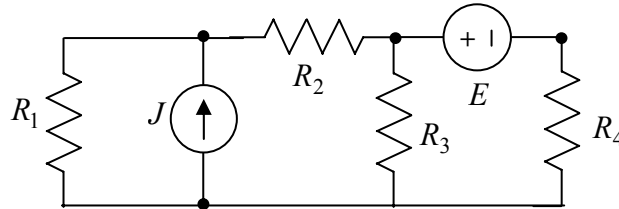
Si provi a verificare che $G_{12} = G_{21} = G_m$, proprietà valida per tutti i doppi-bipoli reciproci.

b.) Introdotto il vettore $\mathbf{e}^T = [E_1 \ E_2]$, la potenza assorbita dal doppio-bipolo è esprimibile come:

$$P = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{i} = \mathbf{e}^T \cdot \underline{\underline{G}} \cdot \mathbf{e} = G_{11}E_1^2 + G_{22}E_2^2 + 2G_mE_1E_2 = 50 \text{ W}.$$

ES. 5.3 - Con riferimento alla seguente rete:

- caratterizzare attraverso la matrice H il doppio bipolo resistivo visto ai capi dei generatori;
- utilizzare la matrice H per calcolare la potenza assorbita da tale doppio-bipolo;

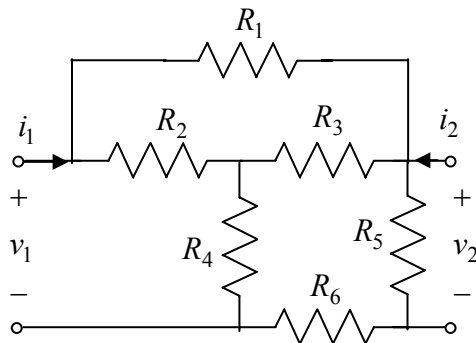


$$\begin{aligned} E &= 50 \text{ V} & J &= 20 \text{ A} \\ R_1 &= 1 \, \Omega & R_2 &= 5 \, \Omega \\ R_3 &= R_4 = 10 \, \Omega \end{aligned}$$

Risultato: a) $H_{11} = 0.909 \, \Omega$, $H_{22} = 0.073 \, S$, $H_{12} = -H_{21} = 0.045$; b) $P = 0.546 \text{ kW}$.

ES. 5.4 - Con riferimento al seguente doppio-bipolo:

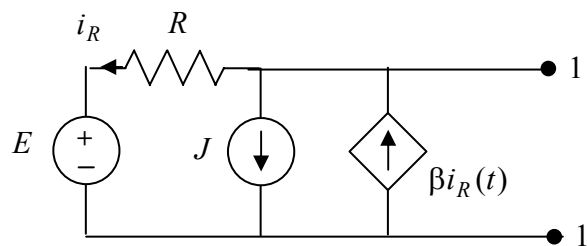
- caratterizzarlo attraverso la matrice R ;
- synetizzare un doppio-bipolo equivalente con uno schema a T;



$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_3 = R_4 = R \\ R_5 &= \frac{2}{3} R & R_6 &= \frac{1}{3} R \\ R &= 24 \, \Omega \end{aligned}$$

Risultato: a) $R_{11} = 24 \, \Omega$, $R_{22} = 12 \, \Omega$, $R_m = 8 \, \Omega$; b) $R_A = 16 \, \Omega$, $R_B = 4 \, \Omega$, $R_C = 8 \, \Omega$.

ES. 5.5 - Valutare l'equivalente di Thévenin ai capi dei morsetti 1-1'



Risultato: $V_0 = E + \frac{RJ}{\beta - 1}$, $R_{eq} = \frac{R}{1 - \beta}$.

Per calcolare V_0 basta applicare la LKC e la LKT:

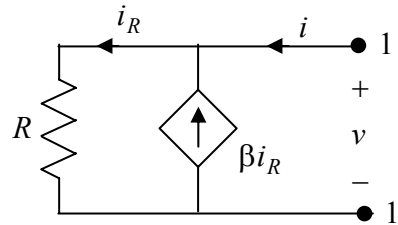
$$i_R - \beta i_R = -J \Rightarrow i_R = \frac{J}{\beta - 1}, \quad V_0 = E + Ri_R = E + \frac{RJ}{\beta - 1}$$

Per calcolare R_{eq} occorre spegnere tutti (e soli) i generatori indipendenti, cioè E e J, e valutare

$$i = i_R - \beta i_R \Rightarrow i = (1 - \beta)i_R$$

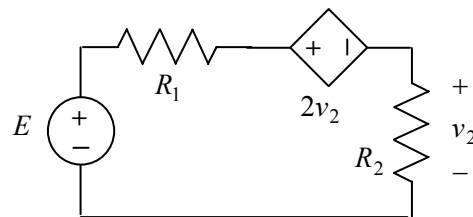
$$i_R = \frac{v}{R}$$

$$R_{eq} = \frac{v}{i} = \frac{R}{1 - \beta}$$



Per $\beta > 1$ si ha $R_{eq} < 0$, risultato plausibile visto che nella rete è presente un bipolo attivo. Per $\beta = 1$ non esiste il circuito equivalente di Thévenin.

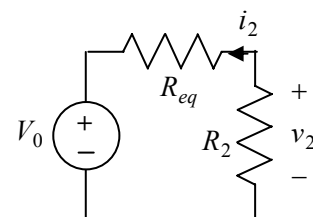
ES. 5.6 - Per il circuito in esame, determinare il valore di R_2 che rende massima la potenza assorbita dallo stesso resistore R_2 .



$$E = 6 \text{ V} \\ R_1 = 6 \Omega$$

La condizione di massimo trasferimento di potenza su R_2 si può trovare immediatamente una volta rappresentata tutta la rete vista ai capi di R_2 attraverso il generatore equivalente di Thévenin: $R_2 = R_{eq}$.

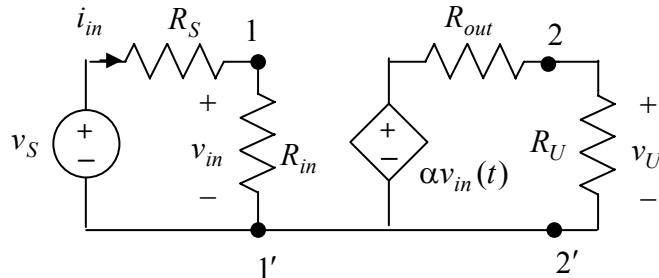
Il calcolo di R_{eq} può essere effettuato facilmente applicando Kirchhoff:



$$R_{eq} = \frac{v_2}{i_2} \bigg|_{E=0} = \frac{v_2}{\frac{v_2 + 2v_2}{R_1}} = \frac{R_1}{3} = 2 \Omega.$$

ES. 5.7 - Per il circuito Il seguente circuito rappresenta lo schema equivalente di un amplificatore di tensione. Calcolare:

- la matrice delle conduttanze del doppio bipolo ai capi dei morsetti 1-1' e 2-2';
- il guadagno di tensione $A_v = v_U / v_S$
- i valori dei parametri R_{in} ed R_{out} per cui il guadagno A_v è massimo.



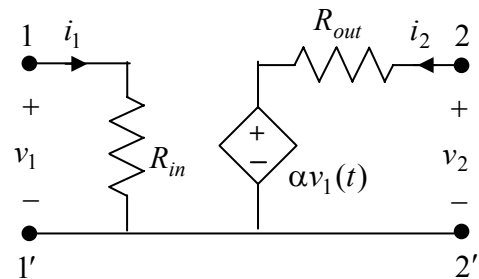
a) Orientando correnti e tensioni del doppio-bipolo come nella figura a lato, la matrice delle conduttanze si valuta applicando la definizione:

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i_1}{R_{in} i_1} = \frac{1}{R_{in}};$$

$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{v_1}{R_{in} v_2} \bigg|_{v_1=0} = 0;$$

$$G_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = -\frac{\alpha v_1}{R_{out} v_1} = -\frac{\alpha}{R_{out}};$$

$$G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{v_2}{R_{out} v_2} = \frac{1}{R_{out}}.$$



Si osservi che $G_{12} \neq G_{21}$, cioè il doppio-bipolo non è reciproco.

b) analizzando la maglia alla porta 1 e quella alla porta 2 si ottiene:

$$v_{in} = v_S \frac{R_{in}}{R_{in} + R_S}, \quad v_u = \alpha v_{in} \frac{R_U}{R_{out} + R_U},$$

da cui

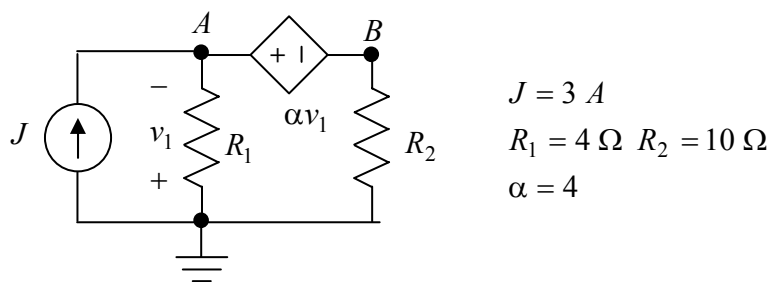
$$A_v = \frac{v_u}{v_S} = \alpha \frac{R_{in}}{R_{in} + R_S} \frac{R_U}{R_{out} + R_U}.$$

c) Osservando l'espressione di A_v è semplice verificare che il massimo è dato da

$$A_{v\max} = \alpha$$

e si ottiene per $R_{in} \rightarrow \infty$, $R_{out} \rightarrow 0$.

ES. 5.8 - Calcolare i potenziali di nodo del circuito seguente.



Indicando con V_A , V_B i potenziali dei nodi A e B si ha che

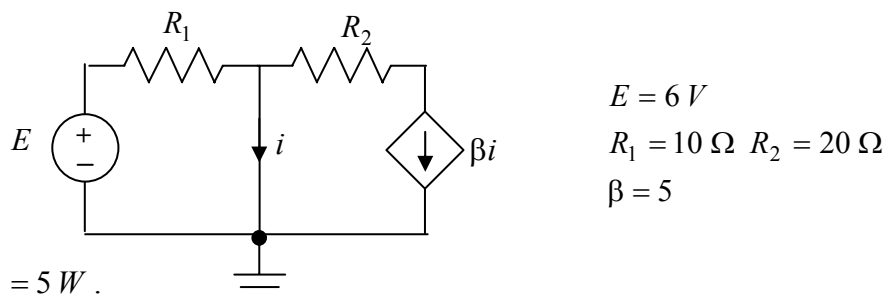
$$V_A = -v_1 \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = \alpha v_1 = -\alpha V_A \quad \Rightarrow \quad V_B = (1 + \alpha)V_A.$$

Applicando il metodo dei potenziali nodali (modificato) si ha:

$$\begin{cases} \frac{V_A}{R_1} - i = J \\ \frac{V_B}{R_2} + i = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_A}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} = J \Rightarrow \frac{V_A}{R_1} + \frac{(1 + \alpha)V_A}{R_2} = J \Rightarrow V_A = \frac{J}{\frac{1}{R_1} + \frac{(1 + \alpha)}{R_2}} = 4 \text{ V}$$

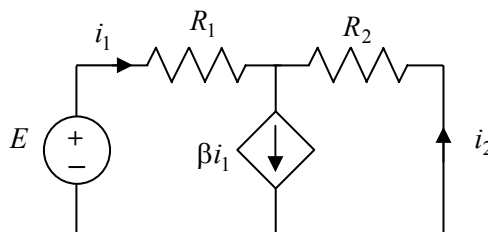
$$V_B = (1 + \alpha)V_A = 20 \text{ V}.$$

ES. 5.9 - Calcolare la potenza dissipata in R_2 .



Risultato: $P_2 = 5 \text{ W}$.

ES. 5.10 - Con riferimento al seguente circuito, valutare l'equivalente di Norton ai capi di R_2 e la corrente i_2 circolante in tale resistenza.



Risultato: $I_{cc} = (1 - \beta) \frac{E}{R_1}$, $R_{eq} = \frac{R_1}{1 - \beta}$, $i_2 = -I_{cc} \frac{R_{eq}}{R_2 + R_{eq}}$.