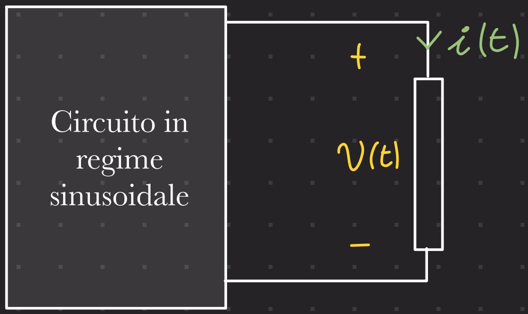
Potenza in regime sinusoidale



Cosa accade nel dominio del tempo?

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$$
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \beta)$$

$$\to p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta) = \frac{V_m I_m}{2}\left[\cos(\omega t + \alpha + \omega t + \beta) + \cos(\omega t + \alpha - \omega t - \beta)\right]$$

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$
$$\Rightarrow \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos x+y + \cos x-y\right]$$

Potenza istantanea

manca ω

$$\boxed{p(t) = \frac{V_m I_m}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)\right]}$$

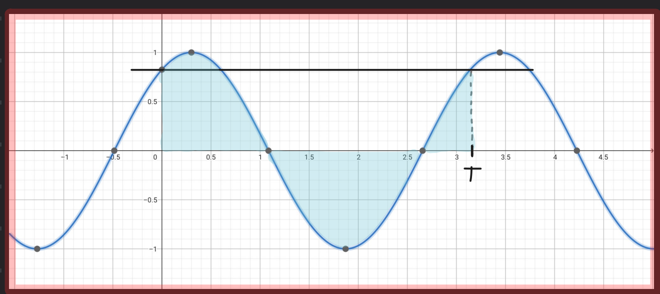
La potenza non si può rappr. come FASORE !

⇐ NON è una sinusoide di pulsazione ω!

Potenza media

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\alpha+\beta) \cdot \frac{1}{T}\int_0^T dt + \frac{V_m I_m}{2}\frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\omega t + \alpha + \beta)\,dt$$

$\to \emptyset$



$$\Rightarrow P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\alpha - \beta)$$

Fattore di Potenza

$$= \text{pongo } \boxed{\alpha - \beta = \varphi}$$

Potenza media

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\varphi)}$$

Potenza istantanea e media per i dipoli più conosciuti

RESISTORE

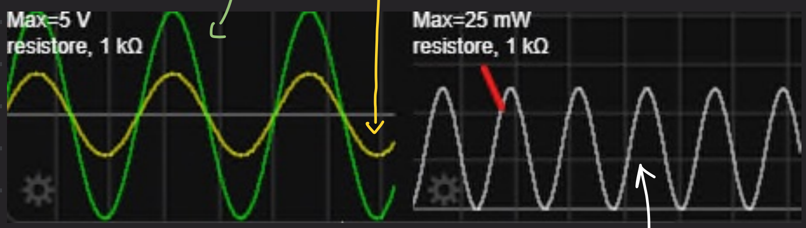
R

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha)$$
$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \beta)$$

siccome $\underbrace{V = R\, i}$ $\longrightarrow$ $\underbrace{V_M \cos(\omega t + \alpha) = R \cdot I_M \cos(\omega t + \beta)}$

Vera se $\boxed{\alpha = \beta}$ $\Rightarrow$ $\boxed{V_M = R \cdot I_M}$

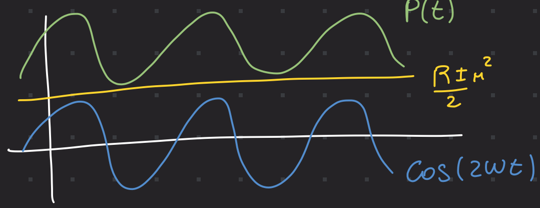
V I



P

Potenza istantanea di un resistore

$$P(t) = \frac{R\, I_M^2}{2}\left[\cancel{\cos(0)}^{1} + \cos(2\omega t)\right]$$



INDUTTORE

L

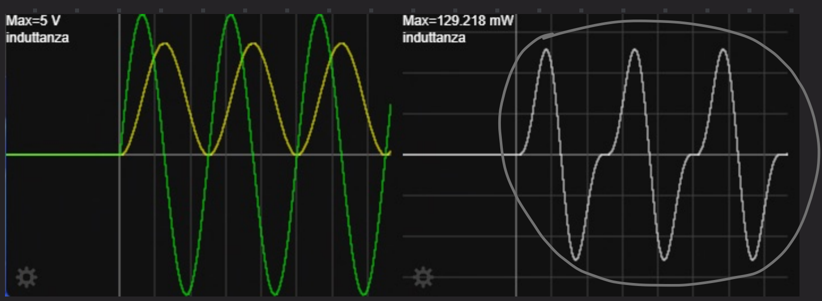
$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha)$$
$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \beta)$$

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \longrightarrow \frac{di}{dt} = -\omega I_M \sin(\omega t + \beta) = \omega I_M \cos\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

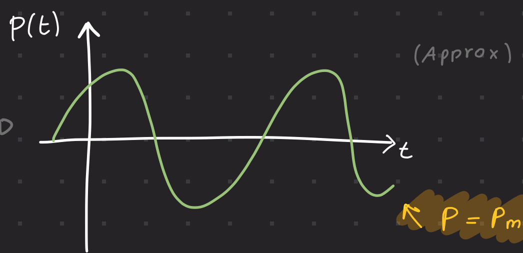
$$\Rightarrow V_M \cos(\omega t + \alpha) = L \omega I_M \cos\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ se $\boxed{\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{V_M = L \omega I_M}$

La tensione è in anticipo di pi/2 rispetto alla corrente



$\longrightarrow$



$P = P_{media} = 0$

$\left[\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + \beta\right]$

Potenza istantanea di un induttore

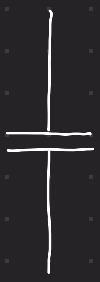
$$\Rightarrow \quad P(t) = \frac{L \omega I_M^2}{2} \cos\left(2\omega t + 2\beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

proof: $P = \frac{L \omega I_M^2}{2} \cdot \cancel{\cos(\varphi)}^{0}$

$\beta - \frac{\pi}{2} - \beta = -\frac{\pi}{2}$

$\cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$

CONDENSATORE

C 

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha)$$
$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \beta)$$

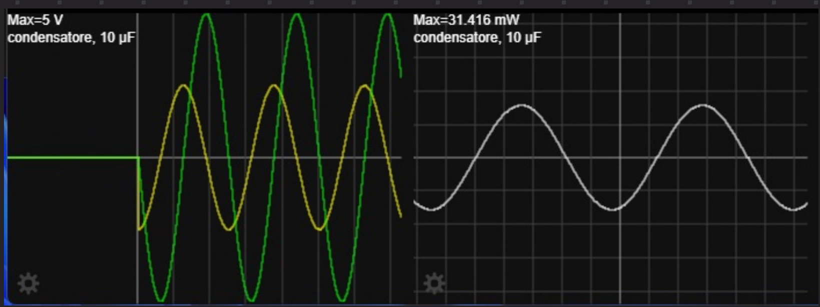
$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \omega V_M \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow I_M \cos(\cancel{\omega t} + \beta) = C \omega V_M \cos\left(\cancel{\omega t} + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Se $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} I_M = C\omega V_M \\ \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \end{cases}} \rightarrow \boxed{p(t) = \frac{C\omega V_M^2}{2} \cdot \left[\cos(0) \cdot \cos\left(2\omega t + 2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

Potenza istantanea condensatore



Concetto di **Potenza complessa**

Dominio dei fasori

$$\bar{V} = V_m \cdot e^{j\alpha}$$

$$\bar{I} = I_m \cdot e^{j\beta}$$

Primo Approccio (errato!)

come nel dom. del t : $\quad p = v \cdot i$

$$\rightarrow \quad P = \bar{V} \cdot \bar{I} = V_m e^{j\alpha} \cdot I_m e^{j\beta} = V_m I_m e^{j(\alpha+\beta)}$$

$$= V_m I_m \left[\cos(\alpha+\beta) + j \sin(\alpha+\beta) \right]$$

manca $\frac{1}{2}$

Quasi... ma manca $\alpha - \beta$

Secondo Approccio · Complesso Coniugato (giusto!)

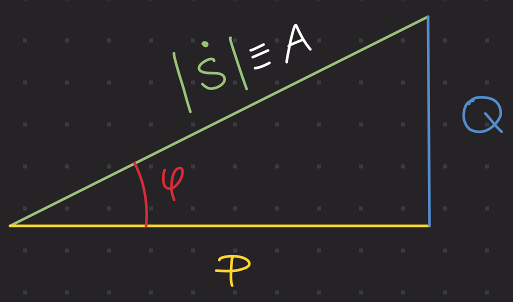
Potenza complessa

(1)

$$\text{Potenza Complessa} = \dot{S} = \frac{\bar{V} \cdot \bar{I}^*}{2} = \underbrace{\frac{V_m I_m}{2} \cos(\alpha-\beta)}_{(P) \text{ Potenza Media}} + j \underbrace{\frac{V_m I_m}{2} \sin(\alpha-\beta)}_{Q \text{ Potenza Reattiva}}$$

POTENZA ATTIVA

Qualche grandezza utile e unità di misura…



Potenza apparente

$$\boxed{A = |\dot{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

- $P = |\dot{S}| \cos \varphi$
- $Q = |\dot{S}| \sin \varphi$
- $\frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \varphi$

- $[P] = W$
- $[Q] = V \cdot A_r$ "Volt-ampere reattivi"
- $[A] = VA$ "Volt-ampere"

Tabella riassuntiva

	φ	P	Q	A
R	$\emptyset$	$\frac{R I_m^2}{2}$	$\emptyset$	$\frac{R I_m^2}{2}$
L	$\frac{\pi}{2}$	$\emptyset$	$\frac{\omega L I_m^2}{2}$	$\frac{\omega L I_m^2}{2}$
C	$-\frac{\pi}{2}$	$\emptyset$	$-\frac{\omega C I_m^2}{2}$	$\frac{\omega C I_m^2}{2}$

Metodo dei fasori con la **convenzione dei valori efficaci**

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha) \rightsquigarrow \bar{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} = V_0 e^{j\alpha}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \beta) \rightsquigarrow \bar{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\beta} = I_0 e^{j\beta}$$

Valore efficace sinusoide

$$E_0 = \frac{E_M}{\sqrt{2}}$$ (lez 14)

$$\Rightarrow \dot{S} = \bar{V} \cdot \bar{I}^* = V_0 I_0 e^{j(\alpha-\beta)}$$

Proof $\rightarrow$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j(\alpha-\beta)} = \frac{V_m I_m}{2} e^{j(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{V_m I_m}{2} \cos(\alpha-\beta) + j \frac{V_m I_m}{2} \sin(\alpha-\beta) = P + jQ \qquad (1)$$

Conservazione della Potenza complessa

TEOREMA DI BOUCHEROT

Tesi

$$\sum_{K=1}^{\ell} \dot{S}_K = 0$$

$$\rightarrow \sum_{K=1}^{\ell} (P_K + j Q_K) = 0 \quad \begin{cases} \sum_{K=1}^{\ell} P_K = 0 \\ \sum_{K=1}^{\ell} Q_K = 0 \end{cases}$$

Affinché la somma delle potenze complesse sia zero, sia la Potenza media che la Potenza reattiva sono zero **separatamente**; questo è ciò che dobbiamo riuscire a dimostrare:

$$\sum_{K=1}^{\ell} \frac{1}{2} \bar{V}_K \bar{I}_K^* = \frac{1}{2} \underline{\bar{V}}^T \underline{\bar{I}}^* = \frac{1}{2} \underbrace{\bar{U}^T \underline{\underline{A}}}_{\bar{V}^T} \cdot \underline{\bar{I}}^* = 0$$

FASORE-VETTORE

Fasore

$$\underline{\bar{V}} = \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_K \end{pmatrix} \qquad \underline{\bar{I}} = \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_K \end{pmatrix}$$

Vettore

Valgono le LKI $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A}}\,\bar{I} = 0$

non Trasposta! $\rightarrow$ dobbiamo dimostrare che anche $\underline{\underline{A}}\,\bar{I}^* = 0$

Se $\underline{\underline{A}}\bar{I} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\mathrm{Re}(\bar{I}) + j\,\mathrm{Im}(\bar{I}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{A}}\,\mathrm{Re}(\bar{I}) = 0 \\ \underline{\underline{A}}\,\mathrm{Im}(\bar{I}) = 0 \end{cases}$

Separatamente!

$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\mathrm{Re}(\bar{I}) - j\,\mathrm{Im}(\bar{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A}}\,\bar{I}^* = 0$ QED

Energia assorbita da un dipolo in regime sinusoidale

$$\boxed{\mathcal{E} = \int_0^{mT} p(t)\,dt = mT \cdot P}$$

$\longrightarrow [\mathcal{E}] = Wh = 1W \cdot 1h$

$\longrightarrow 1Wh = 1 \cdot 60 \cdot 60 J = 3.6 kJ$