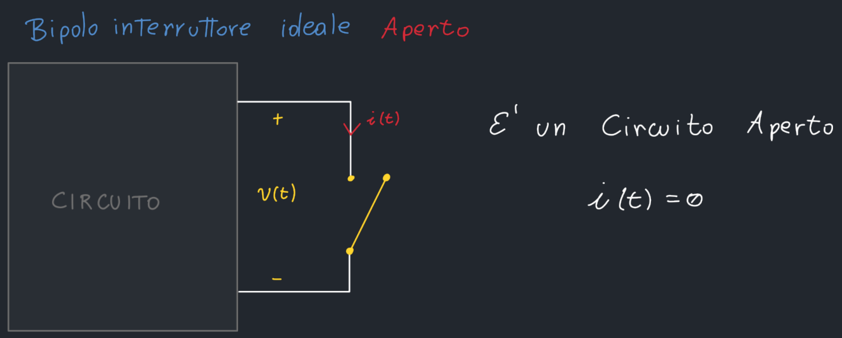
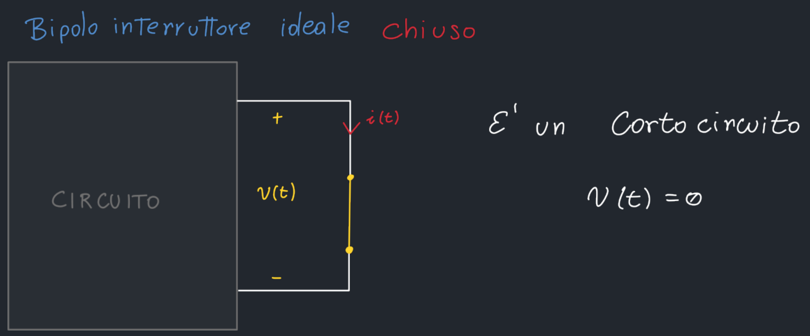
Bipoli Tempo-Varianti

Bipolo interruttore

Il bipolo interruttore può essere **aperto** o **chiuso**:





Il fatto che **lo stato dell'interruttore** (aperto o chiuso) **dipende dal tempo**, permette all'interruttore di far parte dei bipoli **tempo-varianti**; possiamo infatti dire "in questo istante l'interruttore è aperto/chiuso".

Il bipolo interruttore è un bipolo di tipo **lineare a-dinamico tempo-variante**:

- La caratteristica è lineare, perchè i(t)=0 / v(t)=0è lineare
- E' a-dinamico perchè le caratteristiche sono **istantanee**

Bipolo Resistore tempo-variante

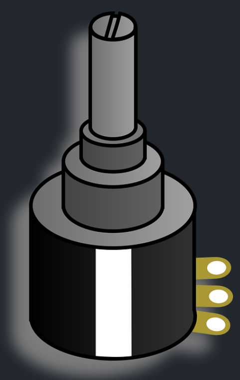
Un altro esempio di bipolo tempo-variante può essere la seguente:

Esempio di Bipolo Tempo - Variante

$$v(t) = \begin{cases} 2\, i(t) & t > 3s \\ 4\, i(t) & t < 3s \end{cases}$$

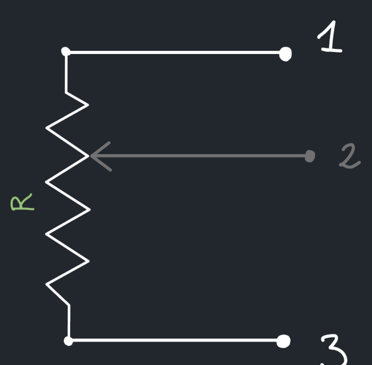
La sua caratteristica ci dice che passato il tempo 3 secondi, la sua corrente cambia; potrebbe essere un **resistore**:

Il potenziometro



Il potenziometro è un esempio di un resistore tempo-variante.

Potenziometro



Angolo

$$R_{23} = R(\alpha) \longrightarrow 0 < \alpha < \frac{3}{2}\pi$$

$$R_{12} = R_{13} - R_{23}$$

> Per angolo si intende l'angolo fisico del potenziometro; infatti la manopola del potenziometro è fisicamente collegata ad un "braccio" che scorre lungo la resistenza interna.

Recap dei dipoli visti finora

Finora abbiamo visto i dipoli:

1. Lineari
2. A-Dinamici
3. Tempo-invarianti (tutti i resistori visti fino all'interruttore e al potenziometro).
4. Tempo-varianti (la loro caratteristica non dipende dal tempo).
5. Passivi - Strettamente passivi
6. Attivi
   I bipoli generatori ideali e reali sono bipoli **attivi**, perché esiste almeno una condizione di funzionamento in cui il bipolo **eroga** energia al circuito.

Le due ultime definizioni verranno approfondite nella lezione corrente.

Bipoli lineari Dinamici

Il Condensatore

Il condensatore è un dispositivo in cui possiamo **accumulare della carica elettrica**.

Se applichiamo una differenza di potenziale (ovvero colleghiamo il condensatore ad una batteria / generatore), delle cariche tenderanno ad accumularsi sulle due piastre del condensatore.

La nostra ipotesi di lavoro è che **la differenza di potenziale è positiva**, e quindi la piastra collegata ad A si carica positivamente, mentre quella collegata a B si carica negativamente.

Caratteristica del condensatore

$$\underset{\text{CARICA TOT}}{Q} = \underbrace{C}_{\text{Capacità}} \cdot \underbrace{V_{AB}}_{\text{Potenziale}}$$

> **La capacità è sempre maggiore di zero.**
>
> Questo perché vedremo come l'energia immagazzinata è calcolata a partire dall'integrale della *potenza assorbita* calcolata tra due **intervalli di tempo**; se poniamo uno degli intervalli a zero, otteniamo un solo membro: questo membro **non può essere minore di zero**.

Possiamo definire la grandezza **Farad** che misura proprio la capacità; inoltre, se la distanza tra le piastre è molto più piccola rispetto alla superficie di quest'ultime, possiamo calcolare la capacità del condensatore come:

$$[C] = \frac{Q}{V} \triangleq \text{Farad}$$

"È' definito da"

Se $d \ll S$

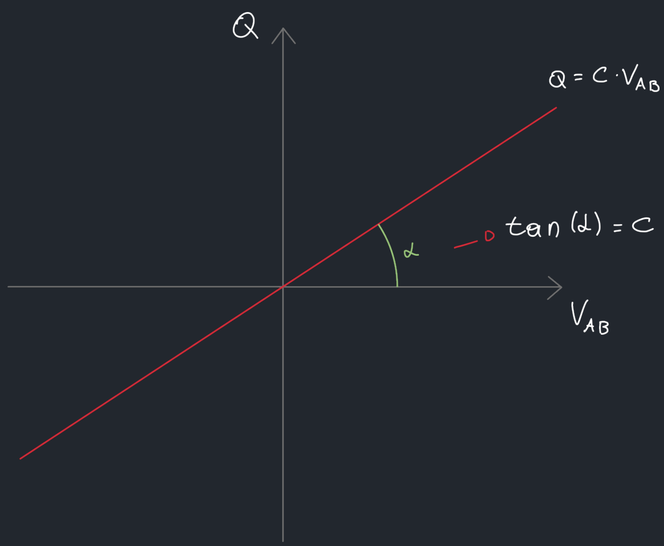
$$C = \varepsilon \cdot \frac{S}{d}$$

Superficie

distanza tra le piastra

costante dielettrica del mezzo

Possiamo rappresentare con un grafico la retta della caratteristica del condensatore:

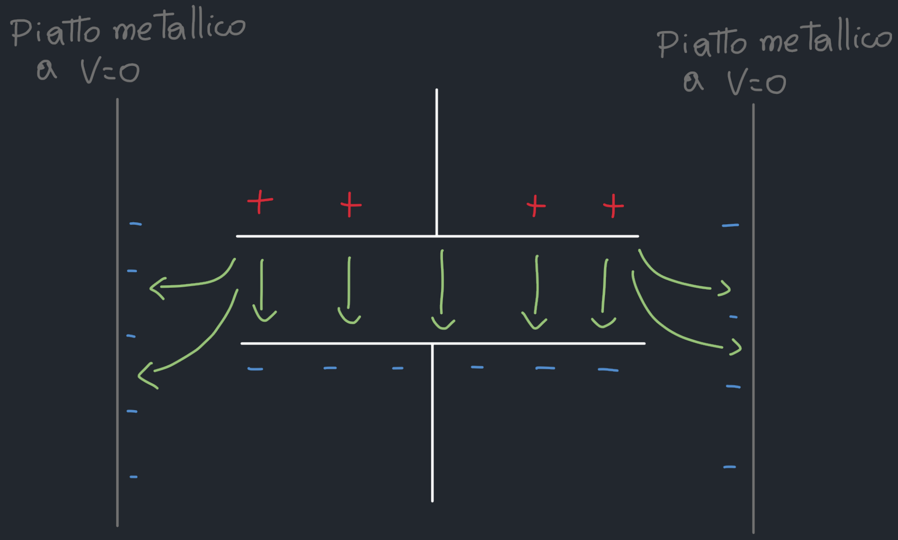


Calcolando la tangente dell'angolo compreso tra la retta e l'asse delle x possiamo facilmente trovare il valore corrispondente alla capacità.

Induzione elettrostatica perfetta

Parliamo di condensatore quando siamo in presenza di **induzione completa** (o perfetta) ovvero quando le cariche su una piastra sono **l'esatto opposto** dell'altra piastra, ovvero se la carica positiva accumulata è l'opposto di quella negativa.

Quando le piastre del condensatore non sono perfettamente **schermate**, si verifica un processo di **induzione** anche su delle piastre che non *dovrebbero* subire induzione:



> Esempio di induzione **non perfetta**.

Ricavare l'equazione caratteristica del condensatore

Caratteristica della corrente

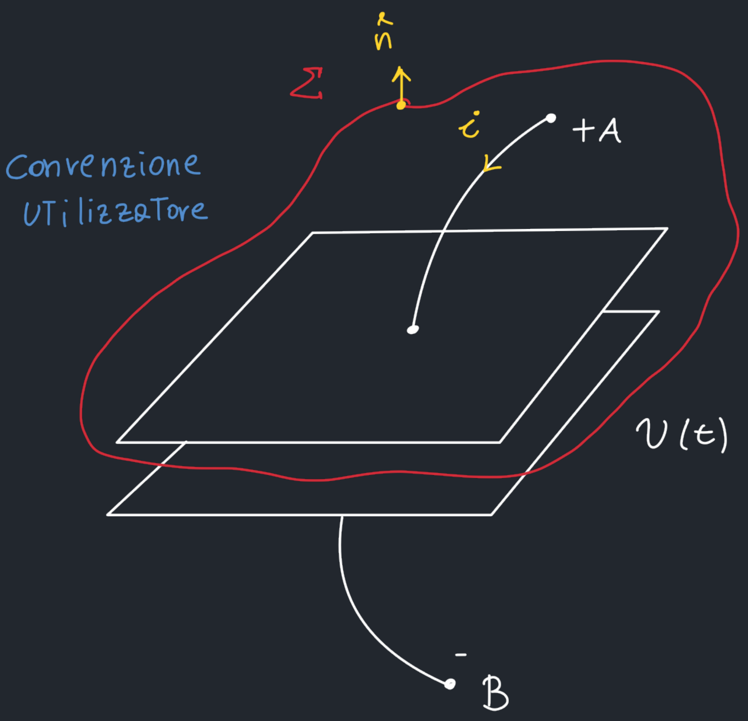
Come sempre stabiliamo una convenzione (utilizzatore i va da + a -) e quindi stabiliamo una differenza di potenziale (positiva).

Possiamo trovare la corrente grazie ad una **superficie Gaussiana**:

- Se la superficie **circonda** il bipolo, allora il flusso sarà zero.
- Se la superficie (chiusa) avvolge **solo una piastra** il flusso non sarà più zero:

possiamo usare la legge della **conservazione della carica** per trovare la corrente:

Ricavare la caratteristica



Conservazione della carica

$$i_\Sigma(t) = -\frac{dq_\Sigma}{dt}$$

$$-i(t) = -\frac{dq_\Sigma}{dt} \qquad (2)$$

Con il verso scelto (n)
$i_\Sigma = -i(t)$ perchè "entra"
nella superficie

Possiamo recuperare la formula della capacità ricavata prima, e mettere insieme le due equazioni:

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} \rightarrow Q = C \cdot (V_A - V_B) \qquad (1)$$

$$\text{ma} \quad i(t) = \frac{dQ_\Omega}{dt} \rightarrow i(t) = \frac{\overset{\text{cost}}{C} \cdot V_{AB}}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = C \cdot \frac{dV_{AB}}{dt}}$$

Caratteristica Condensatore

Ci accorgiamo quindi dalla caratteristica che **la corrente dipende dal tempo**, infatti la derivata è dipende proprio dall'istante di tempo in cui viene calcolata.

La derivata è inoltre un **operatore lineare**, il che rende il condensatore un **bipolo dinamico lineare**.

Se calcoliamo la caratteristica dal punto di vista della convenzione del generatore, otterremmo semplicemente il risultato col segno cambiato:

$$\boxed{i(t) = -C \cdot \frac{dV_{AB}}{dt}}$$

Caratteristica Condensatore

Convenzione Generatore

Possiamo inoltre osservare il caso in cui **la capacità è funzione del tempo**:

SE c dipende da t

$$\rightarrow \quad i(t) = \frac{d}{dt}[C \cdot V_{AB}] = \frac{dC}{dt} V_{AB} + C \cdot \frac{dV_{AB}}{dt}$$

Condensatore Tempo - Variante

MICROFONO

Caratteristica della tensione

Possiamo **integrare entrambi i membri** della caratteristica della corrente in modo da ottenere la tensione:

$$\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau = C\int_{t_0}^{t} \frac{dv}{d\tau}\,d\tau$$

$$\to \int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau = C\cdot\left[v(t) - v(t_0)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau}$$

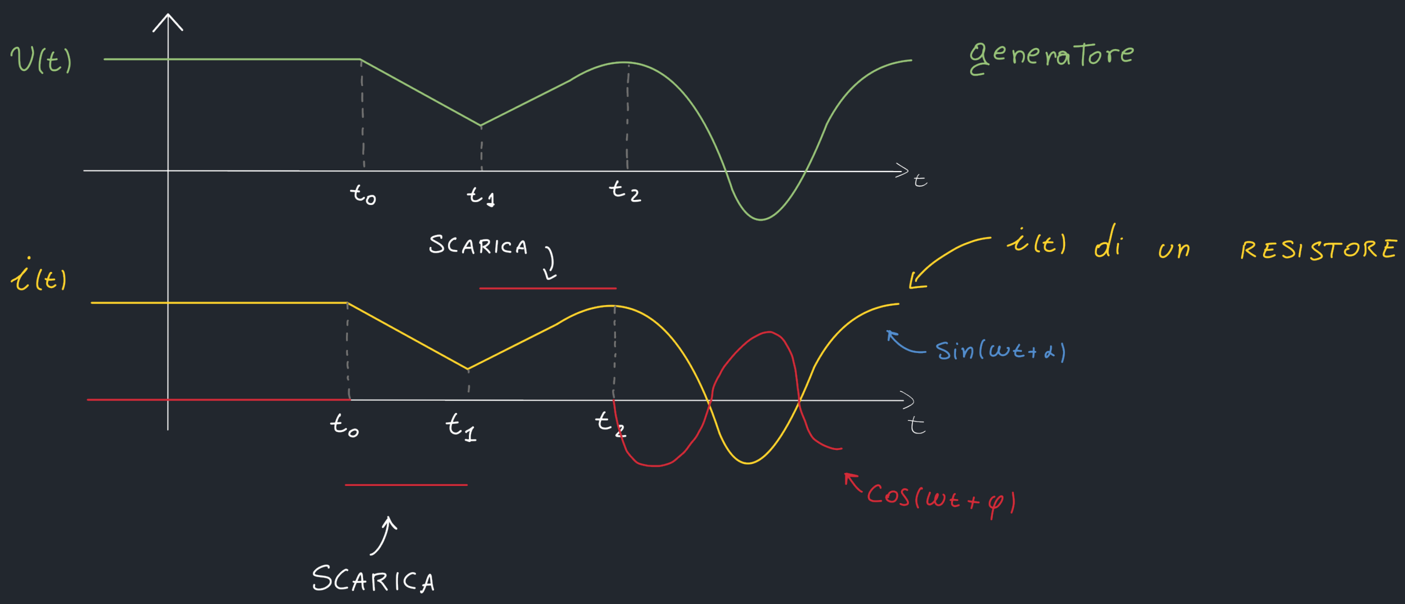
Tensione in funzione della corrente

Si nota quindi che la tensione risultante (rispetto al tempo) **dipende da tutta la "storia passata" della corrente** (infatti compare l'integrale). Inoltre subentra il concetto di **condizione iniziale**: compare infatti $v(t_0)$.

Tracciare la corrente di un condensatore

Imponiamo tramite un generatore la tensione al condensatore; otteniamo quindi l'equazione della differenza del potenziale. L'equazione della corrente di un resistore è **identica**.

L'equazione, invece, di un condensatore, è diversa:



Possiamo notare diverse cose, data la tensione:

- La corrente del resistore è **uguale** (più precisamente "ha un andamento identico") alla tensione (questo perchè la caratteristica del resistore non ha derivate/integrali)
- La corrente del condensatore **è la derivata del potenziale** del generatore; infatti la caratteristica del condensatore include una derivata.
- Mentre la corrente del resistore **è una funzione continua**, quella del condensatore **è continua a tratti**.

Potenza ed energia di un condensatore

Da questo momento facciamo l'ipotesi che la capacità sia **costante nel tempo**.

Potenza assorbita da un condensatore

$$P_a(t) = v(t) \cdot i(t) = v \cdot C \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} C \frac{dv^2}{dt} = \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C v^2\right)}$$

$$\frac{dv^2(t)}{dt} = 2v(t)\frac{dv}{dt}$$

Potenza Assorbita

Energia immagazzinata di un condensatore

Siccome **la potenza assorbita è la derivata dell'energia**, vuol dire che, della U_a **energia immagazzinata** (perché siccome siamo nella convenzione dell'utilizzatore, il flusso di energia va dal circuito verso i dipoli, perché nel tempo l'energia è *arrivata* al dipolo):

$$P_a(t) = \frac{d\,U_a}{dt} \Rightarrow \quad U_a \cong \frac{1}{2} C v^2 \quad \text{Energia immagazzinata}$$

> Abbiamo usato il "circa" perché l'energia è immagazzinata in un intervallo di tempo, quindi dovremmo integrare in un range ben definito, come nel seguente caso.
>
> ***** Vedi all'inizio della sezione "condensatore" per scoprire perché la capacità del condensatore è sempre maggiore di zero.

$$\underbrace{U_a(t, t_0)}_{\text{Intervallo di tempo}} = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2} C v^2(\tau)\right) d\tau = \frac{1}{2} C v^2(t) - \frac{1}{2} C v^2(t_0)$$

L'energia assorbita dal condensatore dipende (se non contiamo la *capacità* ed il fattore 1/2), solo da valore della **tensione v** ed i due **istanti considerati**;

<u>L'energia assorbita non dipende dalla storia della tensione</u> (a differenza del resistore! Dovevamo effettivamente fare l'integrale di v(t)).

Ciò significa che la tensione del condensatore **è una grandezza di stato**; questo vuol dire che siccome *l'energia non può presentare discontinuità*, allora **nemmeno la tensione può essere discontinua.**

> **Perché la tensione non è discontinua?**
> Abbiamo visto come la tensione viene calcolata a partire dall'integrale della corrente; l'operazione integrale rende continua anche una funzione discontinua, perché va essenzialmente a *sommare* e *sottrarre* dei valori.

Consideriamo ora 3 istanti successivi:

$t_0 \to v(t_0) = 0 \Rightarrow U_a = 0$ Condizione iniziale (1)

$t_1 > t_0 \to v(t_1) > v(t_0) \Rightarrow U_a(t_1, t_0) > 0$ Carica (2)

$t_2 > t_1 \to v(t_2) < v(t_1) \Rightarrow U_a(t_2, t_1) < 0$ Scarica (3)

Mentre il resistore **dissipa** "immediatamente" l'energia che gli viene fornita, il condensatore **conserva l'energia fornitagli**.

1. Nell'istante t_1 la tensione è maggiore rispetto a quella nell'istante t_0; questo vuol dire che l'energia *assorbita* è maggiore di zero: il condensatore **sta assorbendo energia**.
2. Nell'istante t_0 la tensione invece è minore rispetto a quella in t_0; questo vuol dire che l'energia *assorbita* è minore di zero: il condensatore sta **restituendo l'energia assorbita precedentemente**.

Quanta energia può "erogare" il condensatore?
Non più dell'energia assorbita precedentemente.

Questo ragionamento ci fa arrivare alla definizione di **bipolo passivo**

Il condensatore è un bipolo passivo

Il bipolo passivo è un bipolo che **non può restituire più energia di quella che è stata immagazzinata**.

Esempi di bipoli passivi

1. Resistore: il resistore continua ad essere passivo, perchè anche se ha assorbito *zero* energia, continua a restituirne *zero*.
2. Condensatore: il condensatore immagazzina una certa quantità di energia, che quando viene restituita, non supererà mai la quantità immagazzinata precedentemente.
3. Un esempio: se l'energia è *dell'acqua*, il condensatore è un *serbatoio*: il serbatoio può immagazzinare dell'acqua, ma non potrà restituire già acqua di quanto è stato precedentemente fornito.
   In questo esempio il generatore è una *sorgente d'acqua*.

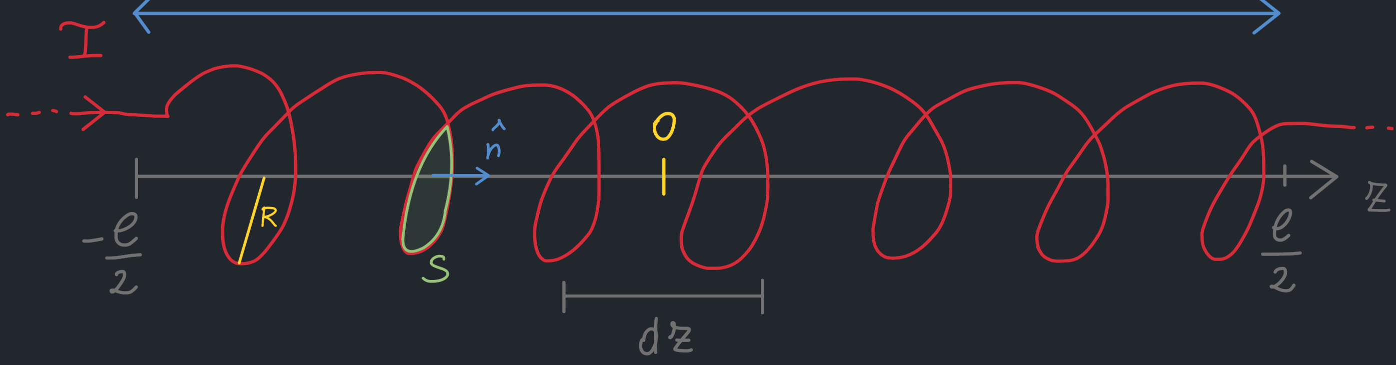
Sulla base di questo, il condensatore si dice **bipolo conservativo**.

> **Definizione formale**: Un Bipolo si dice passivo se NON è in grado di erogare un'energia maggiore di quanta ne abbia assorbita in precedenza.

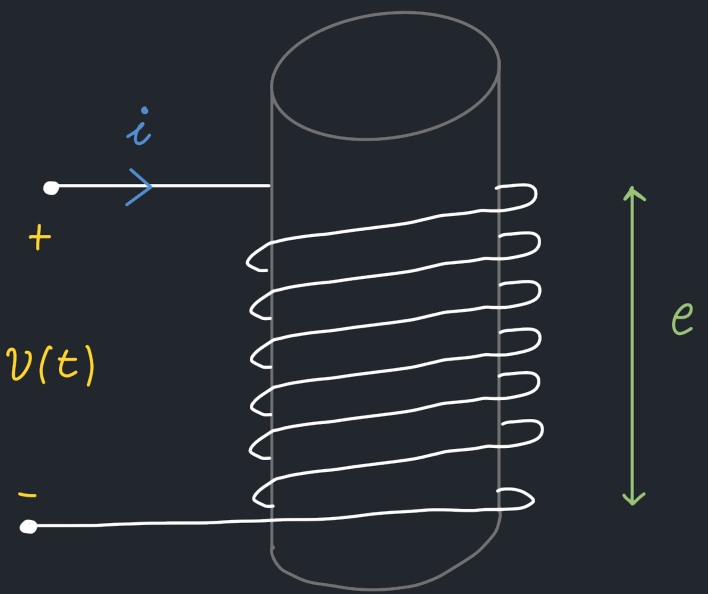
Il solenoide

Il solenoide è il bipolo **duale** del condensatore.

Il Solenoide



In elettrotecnica lo rappresentiamo nel seguente modo:



Caratteristica del Solenoide

$$\boxed{\phi = L \cdot i(t)}$$

Autoinduzione

Induttanza

$$[L] = \frac{V}{A} s = \Omega s$$

Ohm

Secondi

Sappiamo che nel calcolo del flusso, esso è **proporzionale alla corrente** grazie ad un coefficiente detto **autoinduzione o induttanza**.

Unità di misura del solenoide

$v \propto \frac{d\phi}{dt} \rightarrow \bullet\ [\phi] = V \cdot s \triangleq$ Weber

Alternative

$\bullet\ [\phi] = T \cdot m^2$

$\bullet\ [B] = T \leftarrow$ Tesla

$\bullet\ [L] = \frac{[\phi]}{[i]} = \frac{V}{A} \cdot s = \Omega \cdot s =$ Henry

L'induttanza è sempre maggiore di zero per lo stesso motivo per cui la capacità è sempre maggiore di zero (vedi sopra).

Calcolare l'induttanza

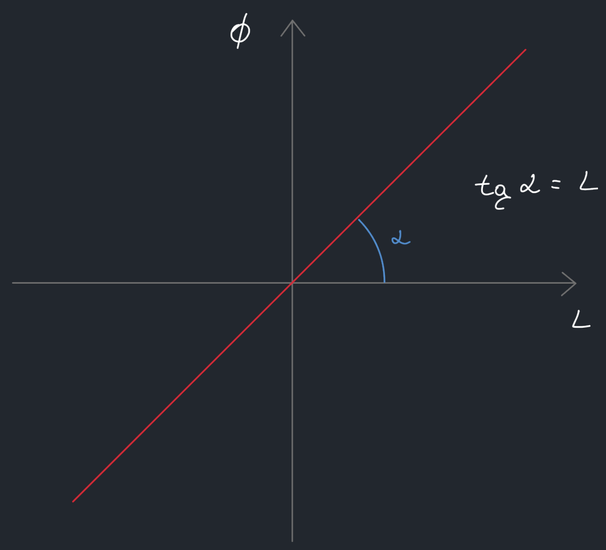
per un solenoide molto "Lungo"

H.p. $\ell \gg R$

$$L = \mu N^2 \frac{S}{\ell} \quad \text{con} \quad L > 0$$

Il grafico della caratteristica del solenoide

Come grafico risulta una retta passante per l'origine, il quale coefficiente angolare è proprio l'induttanza:



Equazione della Tensione nel solenoide

Possiamo trovare la tensione del solenoide andando a combinare la legge di *Faraday-Neumann-Lenz* e la *caratteristica del solenoide*:

Convenzione utilizzatore

$$\begin{cases} \phi = L \cdot i(t) & \text{Caratt} \\ v = \dfrac{d\phi}{dt} & \text{Faraday} \end{cases} \Rightarrow v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

> **Perché la legge di Faraday non ha il meno?**
>
> Perché dobbiamo considerare una linea chiusa orientata *gamma*; ed a seconda della convenzione adottata (utilizzatore) definire il verso della corrente; facendo i conti si trova una tensione positiva (con la convenzione dell'utilizzatore).
>
> E` possibile visionare tutti i calcoli nel alla fine del PDF della lezione 6.
>
> Con la **convenzione del generatore** il segno è opposto.

Equazione della corrente nel solenoide

Possiamo *invertire* l'equazione esprimendo il tutto in termini di corrente:

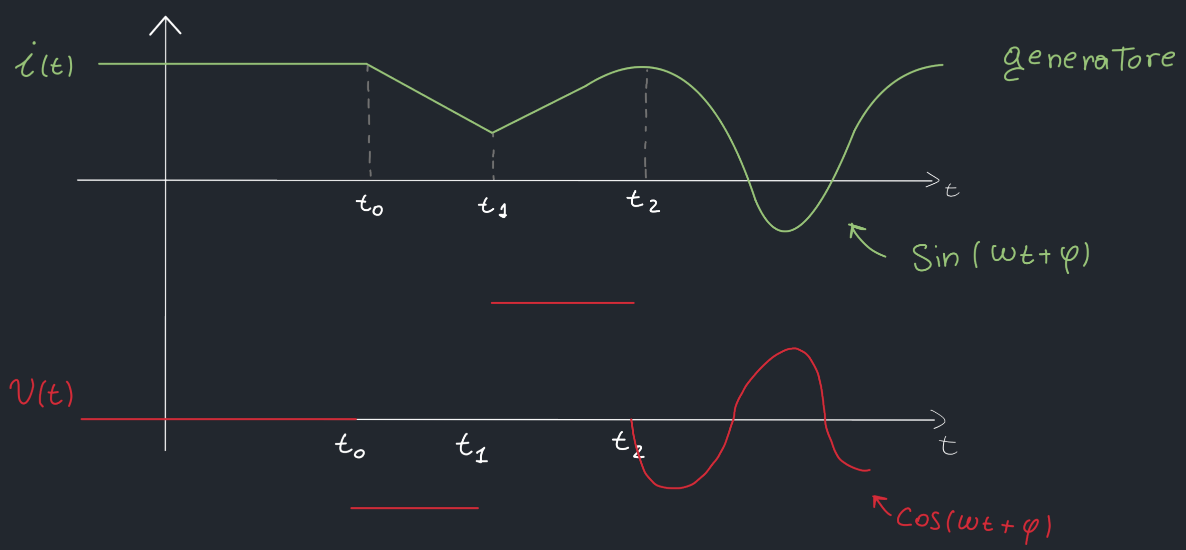
Legame integrale

$$i(t) = i_0(t) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau$$

Condizione iniziale

Tracciare il grafico della caratteristica del solenoide

Siccome la tensione è una derivata, il grafico è molto simile a quello visto nel condensatore:



Potenza ed energia del solenoide

Potenza assorbita

$$P_a(t) = v(t) \cdot i(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right)$$

Energia assorbita

$$U_a(t_1, t_0) = \frac{1}{2} L i^2(t_1) - \frac{1}{2} L i^2(t_0)$$ Energia magnetica

---

La corrente è la **grandezza di stato** dell'induttore. Deve essere una funzione continua del tempo. L'induttore condivide gli stessi "aggettivi" del condensatore: esso è infatti un **bipolo lineare, dinamico passivo conservativo.**