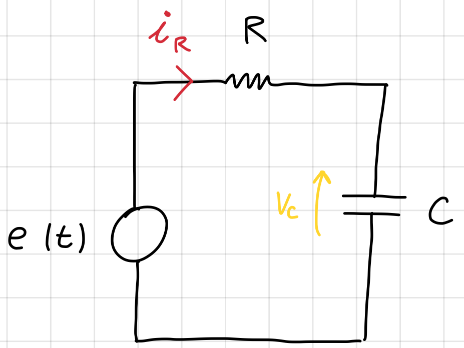
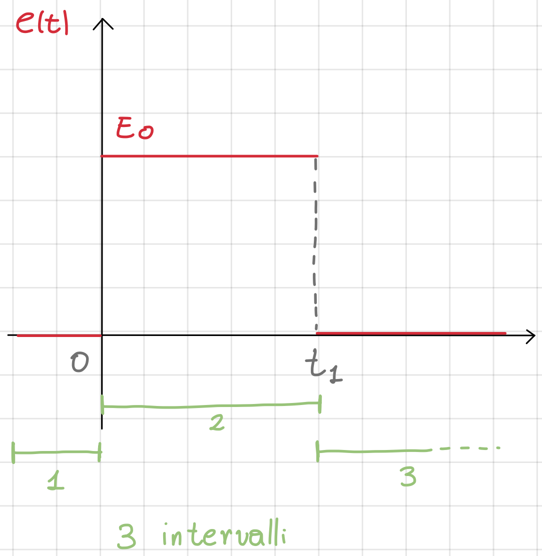
ANALISI AGLI INTERVALLI

Un circuito **va in transitorio** per la presenza di uno o più bipoli tempo varianti; dire che un circuito "va in transitorio" significa dire che il circuito sta attraversando una fase di cambiamento o di transizione da uno stato iniziale ad uno finale;

Ad esempio: un generatore che si accende o spegne, oppure un interruttore che si apre e chiude fa andare il circuito in transitorio.





DATI

$R = 10\ \Omega$

$C = 1\ mF$

$\to \tau = R \cdot C = 10\ mS$

$E_0 = 10\ v$

$t_1 = 20\ ms$

- Per $\boxed{t<0}$ il circuito è a RIPOSO $\begin{cases} i_k(t) \\ v_k(t) \end{cases} \forall k\ \forall t$ $\quad v_c(t) = 0 \to v_c(0^-) = 0$

- Per $\boxed{0 < t < t_1}$ Il condensatore si carica

$t<0$

Condizione iniziale $\to$ $\boxed{v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0}$ $\quad 0 < t < t_1$

grandezza di stato

Come trovare le altre grandezze? $\quad i(0^+)$

LKM $\to$ $Ri + v_c = e(t) \Rightarrow i(t) = \dfrac{e(t) - v_c}{R}\ \forall t$

$\Rightarrow i(0^+) = \dfrac{E_0 - v_c(0^+)}{R} = \dfrac{E_0}{R}$ $\quad$ dall'esempio $\quad i(0^+) = \dfrac{10\,v}{10\,\Omega} = 1\,A$

$\emptyset$

Si nota che e(t) è discontinua

$\Rightarrow \boxed{i(0^+) = \dfrac{E_0}{R}}$ $\quad 0 < t < t_1$

(2) $\quad t<0$

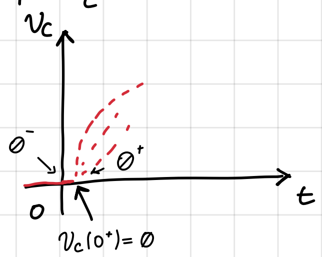
(A3)

$\boxed{i(0^+) = \dfrac{E_0 - v_c}{R}}$ $\leftarrow$ IMPO

Risolvo v_c per $0<t<t_1$ (dalle sol di ieri)

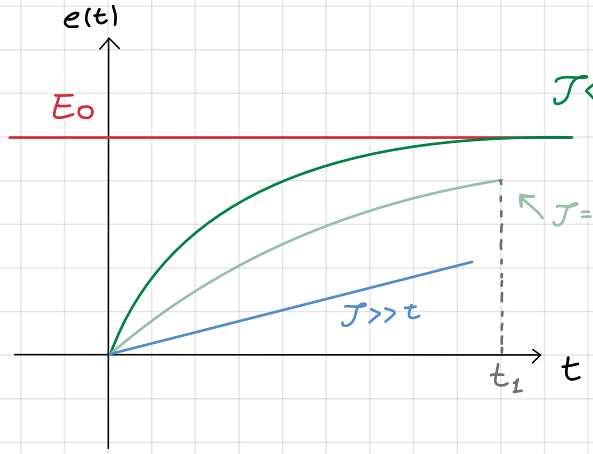
$$v_c = v_0 + v_{cp} = K e^{-\frac{t}{RC}} + E_0 \qquad (1)$$

pongo $v_c(0^+) = \varnothing = K \cancel{e^{-\frac{0^+}{RC}}}_{1} E_0 = K + E_0 = \varnothing \to \boxed{K = -E_0}$



Evoluzione forzata

$\to$ Sostituisco in (1) $\to$ $v_c(t) = E_0 e^{-\frac{t}{RC}} + E_0 = E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$



(A1)

$$\boxed{v_c(t) = E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

IMPO

$0<t<t_1$

Risolvo $i(t)$ per $0<t<t_1$

Problema di Cauchy

cost $\to \dot{E}_0 = 0$

LKT$_M$: $Ri + v_c = E_0 \to v_c = E_0 - Ri \to \dot{v}_c = -R\dot{i} \quad (a)$

Caratt: $i = C \cdot \dot{v}_c \to (a) \to \begin{cases} i = -RC\dot{i} \\ i(0^+) = \frac{E_0}{R} \end{cases}$

(2): $i(\varnothing^+) = \frac{E_0}{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} RC\dot{i} + i = 0 \\ i(0^+) = \frac{E_0}{R} \end{cases}}$$

Eq diff omogenea

$\to$ la risolvo $\to$ Sol del tipo $i(t) = K_1 e^{\lambda t} \to \dot{i}(t) = K\lambda e^{\lambda t}$

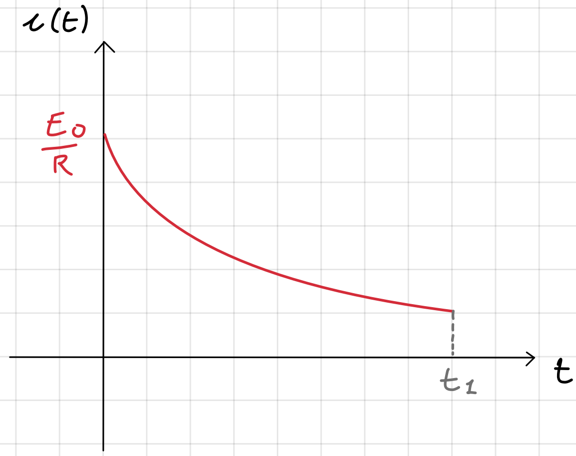
$$\to RC\lambda \cancel{K_1 e^{\lambda t}} + \cancel{K_1 e^{\lambda t}} = \varnothing \to \boxed{\lambda = -\frac{1}{RC}}$$

La frequenza naturale (e quindi la costante di tempo) è la stessa! Questo non è un caso: nei circuiti dinamici di ogni ordine, **le frequenze naturali sono le stesse per ogni grandezza del circuito**

$$\rightarrow \quad i(t) = K_1 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{siccome} \quad K = K_1 = \frac{E_0}{R} \quad \rightarrow \quad \boxed{i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$0 < t < t_1$

↑ IMPO (A2)



- INTERVALLO $\boxed{t > t_1}$

Valore iniziale

Dalla prec. $\quad V_c(t) = E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \rightarrow V_c(t_1) = E_0 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}}\right) = 8.65 \text{ V}$

(A1) $\quad t_1 = 20\text{ms}$

Dopo 20ms, ovvero a t1 abbiamo una tensione di 8.65V.

Questo sarà il valore iniziale dell'intervallo t>t1

$$\boxed{V_c(t_1^-) = V_c(t_1^+) = V_1}$$

INVECE $\quad \boxed{i(t_1^+) \neq i(t_1^-)}$

a me esce 0.135 ?

(A2)

Proof: $\quad i(t_1^-) = \frac{E_0}{R} \cdot e^{-\frac{t_1}{RC}} = \frac{\cancel{10} \text{ V}}{\cancel{10} \,\Omega} \cdot e^{-\frac{\cancel{20} \text{ ms}}{\cancel{10} \text{ ms}}} = 0.865 \text{ A}$

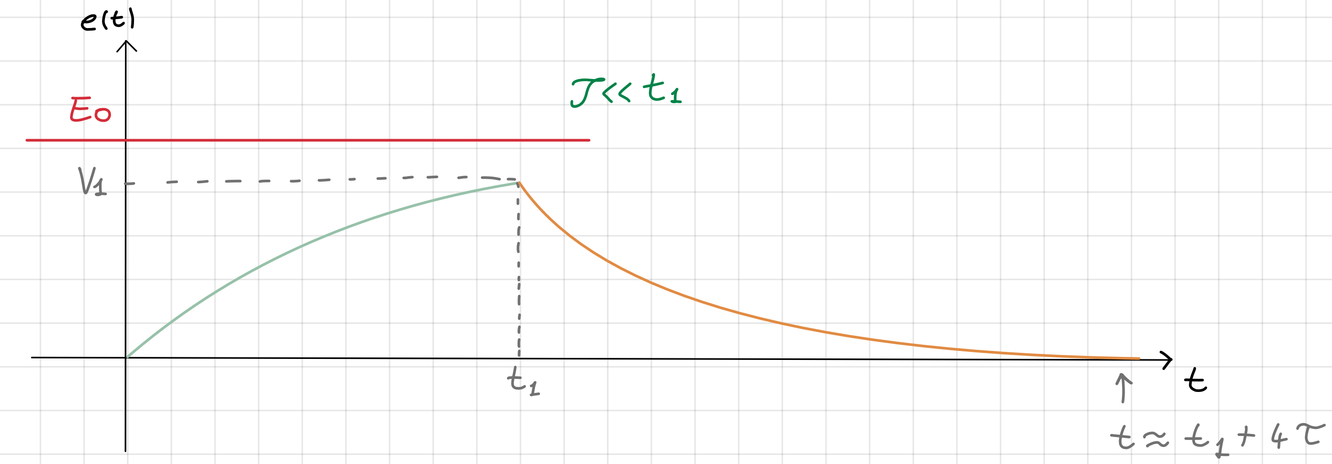
(A3) $\quad i(t_1^+) = \frac{e(t_1) - V_1}{R} = \frac{0 - V_1}{R} = -0.865$

Quando il generatore eroga, il condensatore si carica. Quando il generatore si spegne, diventa un circuito chiuso e quindi il condensatore, scaricandosi, si comporta da generatore, andando ad invertire il verso della corrente. Di conseguenza appena il generatore si spegne, il condensatore eroga la stessa tensione che gli era stata somministrata un attimo prima (quando il generatore era attivo), per poi scaricarsi.

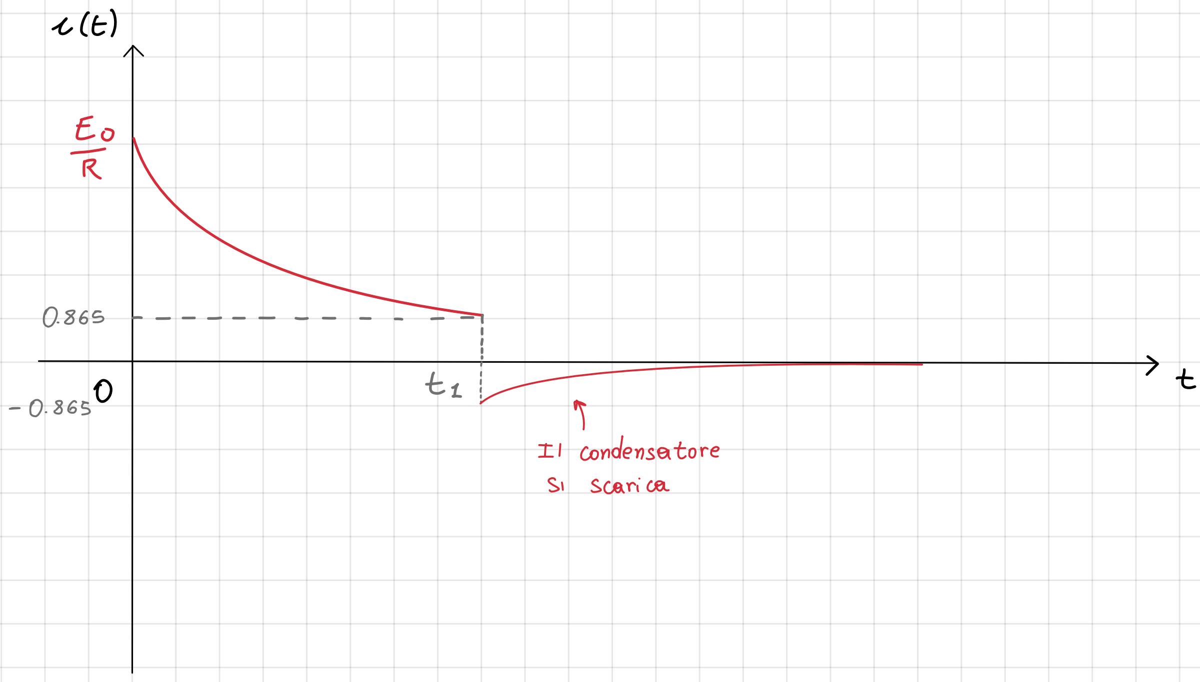
$$\rightarrow V_c(t) = K_2 e^{-\frac{t}{RC}} + \cancel{E} \Rightarrow V_c(t_1^+) = V_1 = K_2 e^{-\frac{t_1}{\tau}} = K_2 = V_1 \cdot e^{\frac{t_1}{\tau}}$$

Evoluzione libera → condizione iniziale ≠ 0

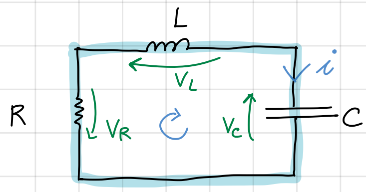
$$\Rightarrow V_c(t) = V_1 e^{\frac{t_1}{\tau}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = V_1 \, e^{-(t - t_1)/\tau}$$



$$i(t) = -0.865 \cdot e^{-(t-t_1)/\tau}$$



CIRCUITO DINAMICO DEL II ORDINE - DIVERSI CASI DEL DISCRIMINANTE



Siamo nel caso in cui il condensatore ed induttore sono CARICHI

$\boxed{t > 0}$ Condizioni iniziali

$$\begin{cases} v_C(0^+) = V_0 \\ i_L(0^+) = I_0 \end{cases}$$ Energia imm nei dipoli Dinamici

Studiamo l'evoluzione <u>LIBERA</u>

$$LKT_M : \begin{cases} V_R + V_L + V_C = 0 \\ V_R = R \cdot i_c \\ V_L = L \dfrac{di_c}{dt} \\ i_c = C \dfrac{dV_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow R \cdot i_c + L \dot{i}_c + v_c \rightarrow R \cdot C \cdot \dot{v}_c + L \dot{i}_c + v_c$$

ma $i_c = C \dot{v}_c \Rightarrow \dot{i}_c = C \ddot{v}_c$

(1) $\Rightarrow RC \dot{v}_c + LC \ddot{v}_c + v_c = 0$ Eq diff del II ordine

Sappiamo che $v_c(t) = v_{c0}(t) + \cancel{v_{cp}(t)} = v_{c0}(t) \propto K e^{\lambda t}$

$\underset{\text{Forzamento} = 0}{}$

$\rightarrow \dot{v}(t) = K\lambda e^{\lambda t}$; $\ddot{v}(t) = K\lambda^2 e^{\lambda t}$

$\Rightarrow$ Nella (1) $\rightarrow RC\cancel{K}\lambda \cancel{e^{\lambda t}} + LC\cancel{K}\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + \cancel{K}\cancel{e^{\lambda t}} = 0$

$\rightarrow RC\lambda + LC\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 + \dfrac{R}{C}\lambda + \dfrac{1}{LC}$

Pongo : $\begin{cases} \alpha \triangleq \dfrac{R}{2L} \\ \omega_0 \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases} \rightarrow \underbrace{\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0}_{\text{eq da risolvere}}$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\cancel{2}\alpha \pm \sqrt{\cancel{4}\alpha^2 - \cancel{4}\omega_0^2}}{\cancel{2}} \rightarrow \lambda_{1,2} = -\alpha \pm \underbrace{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}_{\text{Discriminant}}$$

A seconda del valore del discriminante avremo 3 tipi di soluzione diversa:

$\Delta > 0 \rightarrow$ 2 Sol REALI e DISTINTE

$\Delta = 0 \rightarrow$ 2 Sol REALI e COINCIDENTI

$\Delta < 0$ 2 Sol COMPLESSE e CONIUGATE

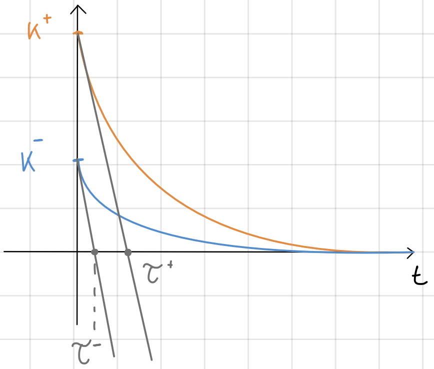
$\boxed{\Delta > 0}$ $\Rightarrow \begin{cases} \lambda^+ = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ \lambda^- = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$ Sappiamo che $\lambda^+ \text{ e } \lambda^- < 0$!

proof: se $R, L, C > 0 \Rightarrow \alpha, \omega_0 > 0 \Rightarrow \alpha^2, \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} > 0$

$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} < \alpha \Rightarrow -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0$ QED

$\Rightarrow v_C = K^+ e^{\lambda^+ t} + K^- e^{\lambda^- t}$ $\rightarrow$ Abbiamo due costanti di Tempo

NEGATIVE



$\boxed{\Delta < 0}$ $\Rightarrow$ Soluzioni complesse e

$$\begin{cases} \alpha \triangleq \frac{R}{2L} \\ \omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

$\rightarrow \lambda^{+,-} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\sqrt{\underbrace{-\alpha^2 + \omega_0^2}_{\omega_z^2}} = -\alpha \pm j\,\omega_z$

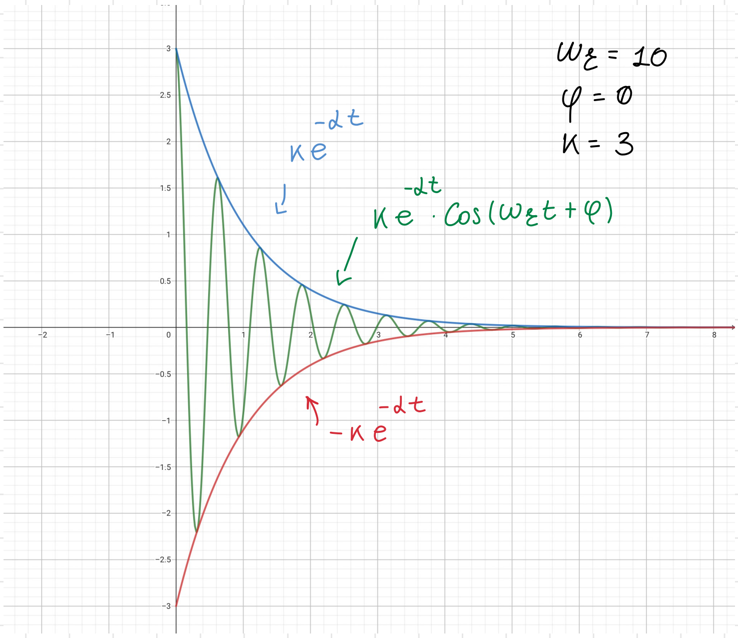
$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^+ = -\alpha + j\omega_z \\ \lambda^- = -\alpha - j\omega_z \end{cases}$ $\Rightarrow v_C(t) = K^+ e^{\lambda^+ t} + K^- e^{\lambda^- t} = K e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_z t + \varphi)$

COSTANTI da determinare

Alternativamente $v_C(t) = e^{-\alpha t}\left[K_1 \cos(\omega_z t) + K_2 \sin(\omega_z t)\right]$

Proof

Evoluzione armonica smorzata



$K^+ e^{-\alpha t} e^{j\omega_z t} + K^- e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega_z t}$

$\rightarrow$ Pongo $\begin{cases} K^+ = \frac{K}{2} e^{j\varphi} \\ K^- = \frac{K}{2} e^{-j\varphi} \end{cases} \Rightarrow \frac{K}{2} e^{j\varphi} e^{-\alpha t} e^{j\omega t} + \frac{K}{2} e^{-j\varphi} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t}$

$= \frac{K}{2} e^{-\alpha t}\left[e^{j\overbrace{(\omega t + \varphi)}^{\beta}} + e^{-j(\omega t + \varphi)} \right]$

$= \frac{K}{2} e^{-\alpha t}\left[\cos(\beta) + \cancel{j\sin(\beta)} + \cos(\beta) - \cancel{j\sin(\beta)} \right]$

$= \frac{K}{\cancel{2}} e^{-\alpha t}\, \cancel{2} \cos(\beta) = K e^{-\alpha t} \cos(\omega_z t + \varphi)$

QED

Determinare le costanti

$$\begin{cases} V_0 = V_c(0^+) = K \cancel{e^{-\alpha 0}} \cos(\cancel{\omega_t 0} + \varphi) = \boxed{K \cos(\varphi)} \\ I_0 = C \dot{V}_c \rightarrow \frac{I_0}{C} = \dot{V}_c(0^+) = -K\alpha \cancel{e^{-\alpha t}} \cos(\cancel{\omega_t t} + \varphi) - \omega_t K \cancel{e^{-\alpha t}} \sin(\cancel{\omega_t t} + \varphi) \end{cases}$$

$$= \boxed{-K\alpha \cos(\varphi) - K\omega_t \sin(\varphi)}$$

otteniamo un sys NON LINEARE nelle incognite K e φ ...

$\boxed{\Delta = 0}$ Caso IMPOSSIBILE nella realta'!

$\lambda^{+,-} = -\alpha$ $\quad \Delta = 0 \quad \alpha^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \omega_0$ ovvero $\Delta = 0$ $\boxed{\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

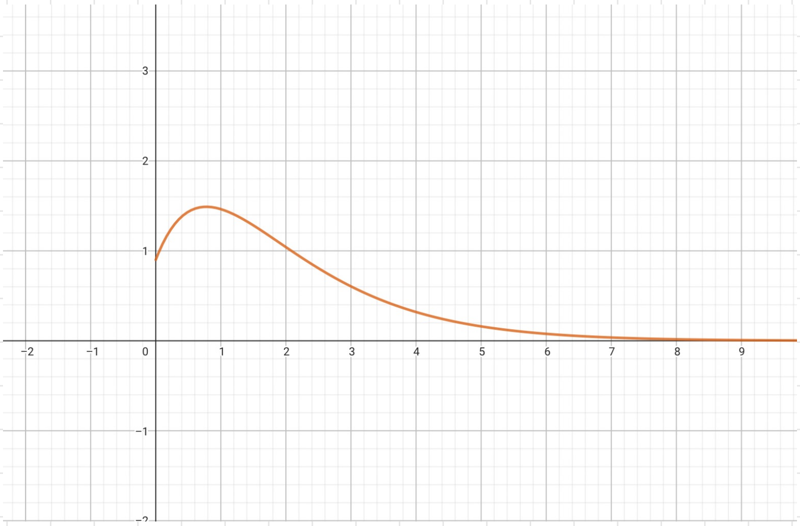
questo vuol dire che... 3 valori (R, L, C) devono essere <u>ESATTAMENTE</u> <u>UGUALI</u>

.... se $\lambda^{+,-} = -\alpha \rightarrow V_c(t) = K_1 e^{-\alpha t} + K_2 t e^{-\alpha t} = (K_1 + K_2 t) e^{-\alpha t}$

Evoluzione libera smorzata critica

Costanti...

$$\begin{cases} K_1 = V_0 \\ K_2 = -\alpha K_1 = \frac{I_0}{C} \end{cases}$$



$K_1 = 1$
$K_2 = 2.7$
$\alpha = 1$