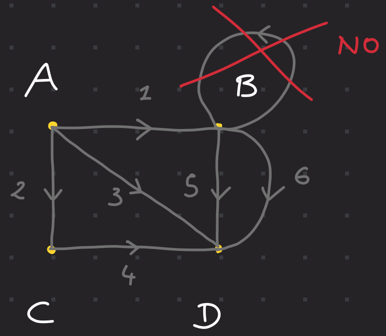
Da pagina 107

- **Matrice d'incidenza** → Per ottenere le LKC

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{Se } j \text{ incide in } (i) \text{ ed è USCENTE} \\ -1 & \text{Se } j \text{ incide in } (i) \text{ ed è ENTRANTE} \\ 0 & \text{Se } j \text{ NON incide in } (i) \end{cases}$$



NOTAZIONE MATRICI

LATI

→ $$\underline{\underline{A}}_a = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

NODI

Matrice d'incidenza

- Dimensione della matrice $Dim = n \times e$ ⇝ $Dim = 4 \times 6 = 24$
- Proprietà
  - Ogni colonna (Lato - Arco) ha solo 2 campi con un valore diverso da 0
  - La matrice è SPARSA

Vettore correnti di Lato :

Notazione Vettore

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_e \end{bmatrix}$$

MOLTO IMPORTANTE

- Moltiplico

$$\boxed{\underset{[n \times e]}{\underline{A}_a} \; \underset{[e \times 1]}{\underline{i}} = \underset{[n \times 1]}{\underline{0}}}$$

⇝ $$\begin{bmatrix} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_1 + i_5 + i_6 = 0 \\ -i_2 + i_4 = 0 \\ -i_3 - i_4 - i_5 - i_6 = 0 \end{bmatrix}$$

TUTTE LE LKC AI NODI

→ Con questo metodo si può automatizzare la valutazione di un circuito

! Nella Mat di incidenza ...

- n eq sono lin. Dip.
- (n-1) eq sono lin. Indip.

- **Matrice di incidenza ridotta** $\underline{\underline{A}}$
  - ha dim. $[(n-1) \times e]$
  - NON CONSIDERO UNA RIGA (a caso, piu' o meno)
    ↑ LATO

Scegliamo la riga corrispondente al NODO che coinvolge il minor numero di archi.

→ Elimino D

$$\underline{\underline{A}}_a = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ \cancel{D} \end{array} \rightsquigarrow \underline{\underline{A}}_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}\ \underline{i} = \underline{0}$ è ancora lecito da calcolare

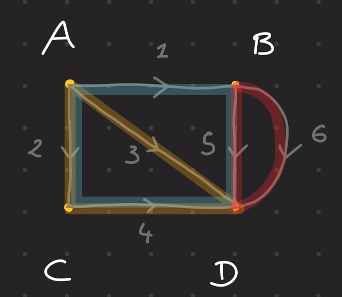
- **Matrice di Maglia** → per ottenere le LKT

MAGLIA ↓

$$\underline{\underline{b}}_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{Il lato } j \text{ Appartiene alla maglia } i \text{ ed i versi sono CONCORDI} \\ -1 & \text{Il lato } j \text{ Appartiene alla maglia } i \text{ ed i versi sono DISCORDI} \\ 0 & \text{Il lato } j \text{ NON Appartiene alla maglia } i \end{cases}$$

↑ LATO

ES:



e lati

$$\underline{\underline{B}}_a = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & & \vdots & & & \end{array}\right] \end{array}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_6 \end{bmatrix}$$

↑ Righe??

Esprime TUTTE le LKT

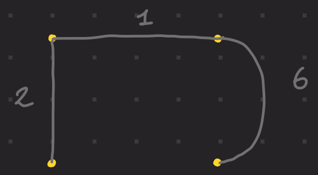
→ $\boxed{\underline{\underline{B}}_a\ \underline{v} = \underline{0}}$ $\rightsquigarrow$ $\begin{bmatrix} -v_2 + v_3 - v_4 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_4 + v_5 = 0 \\ -v_5 + v_6 = 0 \end{bmatrix}$

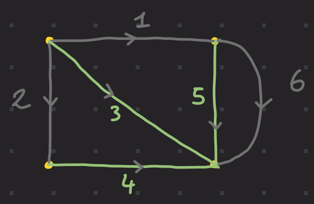
⚠ Possiamo costruire la MATRICE DI MAGLIA FONDAMENTALE seguendo gli step: ALBERO → COALBERO → MAGLIE FONDAMENTALI

→ Ottengo $\underline{\underline{B}}$ che ha dim $[e-(n-1) \times e]$

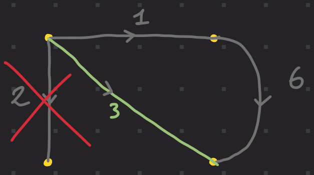
ES:

ALBERO $\rightsquigarrow$ COALBERO

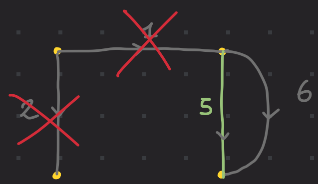




$$\rightsquigarrow \quad B_1 = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$



$$\rightsquigarrow \quad B_2 = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$



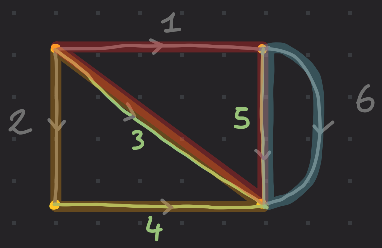
$$\rightsquigarrow \quad B_3 = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

MATRICE DI MAGLIA <u>FONDAMENTALE</u>

$$\Rightarrow \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esprime $e-(n-1)$ LKT Indipendenti

- MATRICE DEGLI ANELLI (per grafi PLANARI)



$$\underline{\underline{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

RICAPITOLANDO $\Rightarrow$ Con queste eq si puo' risolvere un qualsiasi circuito.

EQ TOPOLOGICHE

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}}\ \underline{i} = \underline{0} & n-1 \\ \underline{\underline{B}}\ \underline{v} = \underline{0} & \ell-(n-1) \end{cases}$$

LKC
LKT

Rappresentano solo come sono disposti i dipoli

Inoltre ...

ℓ Relazioni Caratteristiche di lato

Linearmente Indipendenti

$\hookrightarrow$ per ogni dipolo scrivo

- $v_k = R_k \cdot i_k \qquad k \in \{\text{insieme dei resistori}\}$
- $v_k = e_k(t) \qquad k \in \{\text{insieme dei generatori di Tensione}\}$
- $i_k = J_k(t) \qquad k \in \{\text{insieme dei generatori di corrente}\}$
- $i_k = c_k \dfrac{dv_k}{dt}$ condensatori
- $v_k = L_k \dfrac{di_k}{dt}$ Induttori

2 eq
in 2 ℓ incognite

Attenzione ...

! Il sistema deve essere BEN POSTO

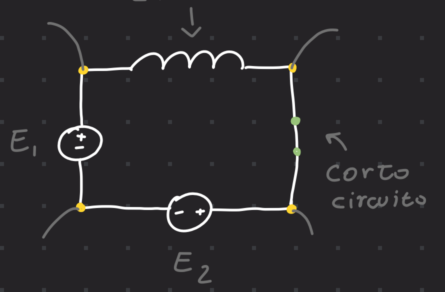
$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Equazioni INCOMPATIBILI $\Rightarrow$ Il sys si dice INDETERMINATO

CIRCUITI MAL POSTI

- contiene almeno una maglia costituita solo da generatori ideali di tensione, cortocircuiti e induttori ideali. 1
- Contiene almeno un insieme di taglio costituito solo da generatori ideali di corrente, circuiti aperti e condensatori ideali. 2
- Infine, da verificare, la presenza di resistori a resistenza negativa può portare a circuiti mal posti.

ES 1



Da Traccia
$E_1 = 12\,V$
$E_2 = 5\,V$

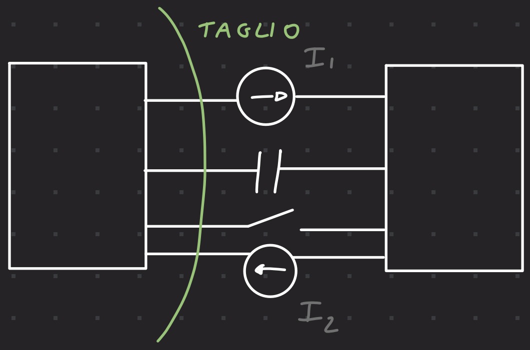
ASSURDO!

ma $LKT_{maglia} \Rightarrow E_2 - E_1 + 0 + 0 = 0$

$\Downarrow$

$E_2 - E_1 = 0$

ES 2



MAL POSTO perché esce che

$$I_1 = I_2$$

ASSURDO nel mondo reale!

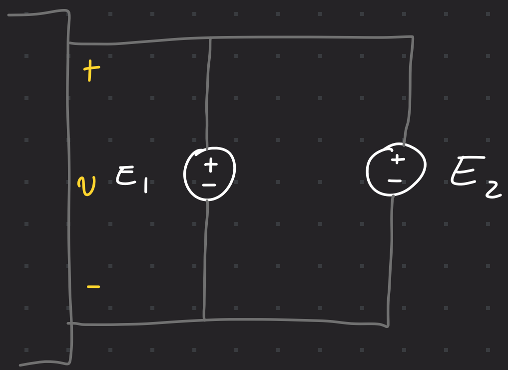
ES 3

$$\begin{cases} i = J_1 \\ i = J_2 \end{cases}$$

INCOMPATIBILI!

i Non puo' essere contemporaneamente sia J_1 che J_2!

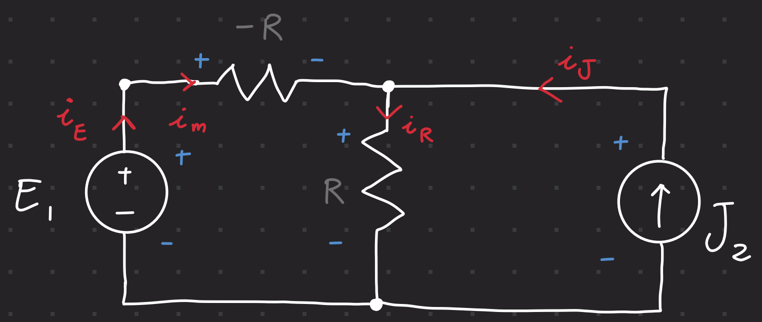
ES 4



$$\begin{cases} v = E_1 \\ v = E_2 \end{cases}$$

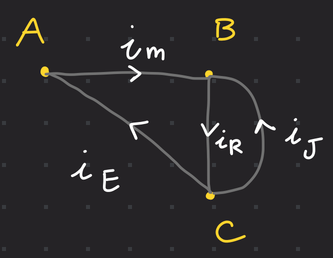
ASSURDO!

Esempio di circuito mal posto : Resistenza negativa

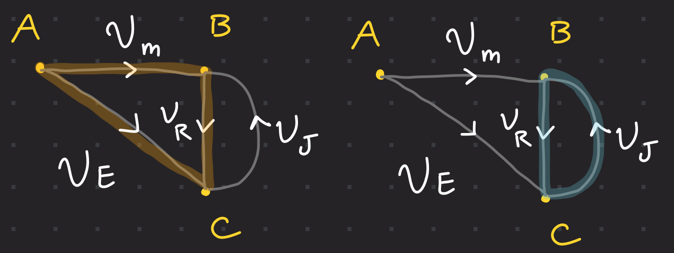


Stabiliamo convenzioni del generatore per i generatori e convenzione dell' utilizzatore per i resistori

$$\begin{cases} n = 3 \\ e = 4 \end{cases}$$



$$\text{LKC} \begin{cases} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \begin{cases} i_m - i_E = 0 \\ i_R - i_J - i_m = 0 \end{cases} \Big\} \text{ n-1 LKC} \\ \begin{cases} v_m + v_R - v_E = 0 \\ -v_R + v_J = 0 \end{cases} \Big\} \text{ 2 Anelli} \end{cases} \text{LKT}$$



Relazioni Caratteristiche

- $v_E = E_1$
- $v_m = -R \cdot i_m$
- $v_R = R \cdot i_R$
- $i_J = J_2$

$\rightarrow$ SOSTITUISCO $\rightarrow$

$$\begin{cases} i_m = i_E \\ i_R - i_m = J_2 \\ -R i_m + R i_R = E_1 \\ v_J = R \cdot i_R \end{cases}$$

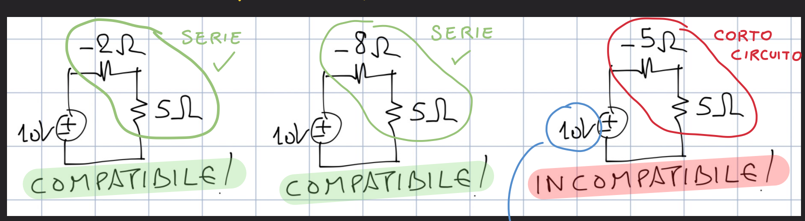
BANALI

$$\begin{cases} -i_m + i_R = J_2 \\ -R i_m + R i_R = E_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -i_m + i_R = J_2 \\ -i_m + i_R = \frac{E_1}{R} \end{cases}$$

INCOMPATIBILE!

! Se ci viene chiesto di VERIFICARE che un circuito è o meno compatibile, dobbiamo dimostrare che non ci sono espressioni ASSURDE come la precedente

ALTRI ESEMPI



$\rightarrow$ 10 V non può essere
10 V = -5 + 5 = 0

LIMITI DI APPLICAZIONE DEL MODELLO CIRCUITALE (vedi PDF Lez 9)

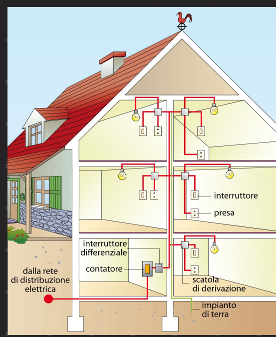
Tempo caratteristico $t_c = \dfrac{\ell_c}{c}$ — Lunghezza caratteristica (ℓ_c); Velocità della Luce (c)

Devo CONFRONTARE il t_c con il Tempo di variazione dei segnali

ES 1. Impianto elettrico CIVILE

$$\ell_c = 100\ m \Rightarrow t_c = \frac{100\ m}{3 \times 10^8} = 0.33\ \mu s$$

Tempo che impiega il Campo elettrico a formarsi a 100 m



Con che frequenza variano i nostri segnali ?

$f = 50\ Hz \Rightarrow$ Il PERIODO del segnale sarà ...

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50 Hz} = 20\ ms$$

QUINDI $20\ ms \gg 0.33\ \mu s$

TRASCURABILE ✓

ES 2: Linea ad Alta Tensione

$$\ell_c = 10^3\ Km \Rightarrow t_c = \frac{10^3}{c} = 33\ ms$$

Se $f = 50\ Hz \Rightarrow 20\ ms \simeq 33\ ms$

CONFRONTABILI ✗

RIASSUMENDO

Se $T \gg t_c$

L'ipotesi di QUASI STAZIONARIETA' Si può applicare

Se $T \ll / \simeq t_c$

L'ipotesi di QUASI STAZIONARIETA' NON Si può applicare