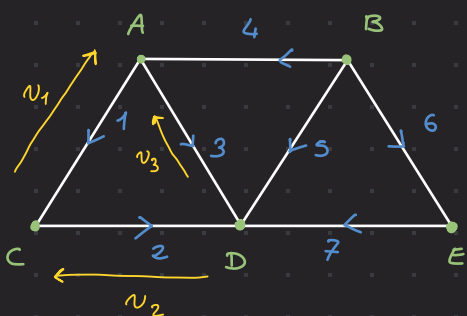


→ Permette di ridurre il numero delle equazioni del sistema ($< 2l$)

(1) Consideriamo i potenziali di Nodo

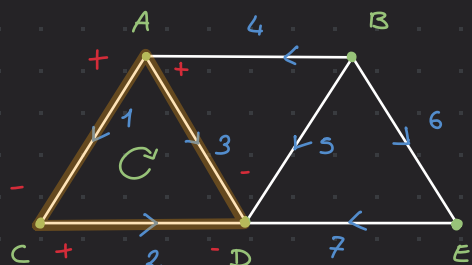
→ Possiamo esprimere le Tensioni di Lato rispetto ai p.d.n. (c.u.)



$$\begin{cases} v_1 = U_A - U_C \\ v_2 = U_C - U_D \\ v_3 = U_A - U_D \\ v_4 = U_B - U_A \\ v_5 = U_B - U_D \\ v_6 = U_B - U_E \\ v_7 = U_E - U_D \end{cases}$$

PAGINA 126

(2) Consideriamo una Maglia



Scrivo la LUT (verso orario)

$$\rightarrow -v_1 + v_3 - v_2 = 0$$

$$\text{Sostituisco i p.d.n.} \rightarrow -U_A + U_C + U_A - U_D - U_C + U_D = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0 \quad \forall U_A, U_C, U_D \Rightarrow \text{IDENTITA' } (1)$$

(3) Scriviamo la mat. di incidenza del grafo

$$\underline{A}_a = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ C & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

• Costruiamo il vettore colonna dei potenziali di Nodo

$$\underline{U}_a = \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \\ U_E \end{pmatrix}$$

• Considero la matrice TRASPOSTA \underline{A}_a^T

$$\underline{A}_a^T = \begin{array}{c|ccccc|c} A & B & C & D & E & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 7 \end{array}$$

• Moltiplico

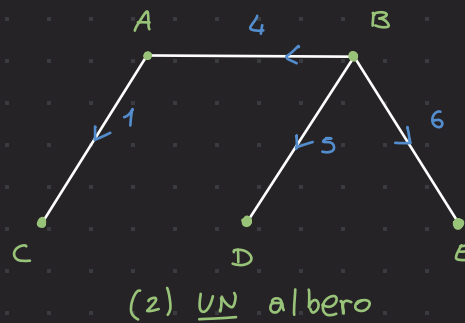
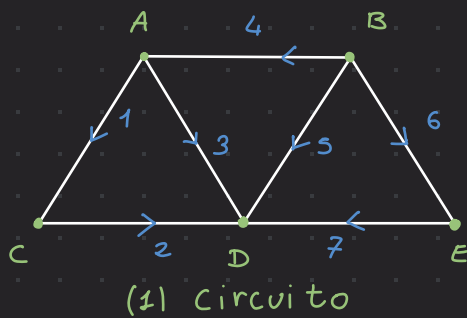
$$\underline{A}_a^T \underline{U}_a = \begin{bmatrix} U_A - U_C \\ U_C - U_D \\ U_A - U_D \\ U_B - U_A \\ U_B - U_D \\ U_B - U_E \\ U_E - U_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \underline{U}_a$$

\Rightarrow NOTO CHE $\underline{U} = \underline{A}_a^T \underline{U}_a$ (2)

Ma la rappresentazione deve essere **Biunivoca**

Dato \underline{U}_a , riesco sempre a determinare i potenziali?

proof \rightarrow Sì, basta assegnare un POTENZIALE DI NODO



(3) Assegno $U_A = 0$ (1)

(4) Sfrutto le relazioni

NOTO Incognita

$$\underline{v}_1 = \underline{U}_A - \underline{U}_C = 0 - U_C = -v_1 \quad (2)$$

(3)

\rightarrow Mi serve $U_B \rightarrow v_4 = U_B - U_A = 0 \rightarrow U_B = v_4$ (3)

$\rightarrow U_D \rightarrow v_5 = U_B - U_D = 0 \rightarrow U_D = U_B - v_5 = v_4 - v_5$ (4)

QED

$\rightarrow U_E \rightarrow v_7 = U_E - U_D = 0 \rightarrow U_E = v_7 - U_D = v_7 - v_4 + v_5$ (5)

L'algoritmo: L'albero ci permette di considerare *un singolo nodo alla volta*; di conseguenza ponendo il potenziale del nodo di partenza pari a zero, possiamo visitare un nodo alla volta e determinarne il potenziale.

④ Sfruttiamo la Matrice d'incidenza RIDOTTA

→ Tolgo la riga corrisp. al potenziale nullo precedente ($V_A = 0$)

↳ Le LUC sono e , ma $e-1$ sono indipendenti
 ⇒ Posso togliere UNA RIGA (Arbitrariamente)

$$\underline{A}_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

↓
Diventa \underline{A}

$$\underline{U}_a = \begin{pmatrix} \cancel{U_A} \\ U_B \\ U_C \\ U_D \\ U_E \end{pmatrix}$$

↓
Diventa \underline{U}

$$\Rightarrow \underline{V} = \underline{A}^T \underline{U}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [e \times 1] & [(n-1) \times e] & [(n-1) \times 1] \end{matrix}$

A questo punto, consideriamo il sistema canonico in cui utilizziamo la relazione precedente (4).

Per il momento il metodo viene usato solo per circuiti in regime stazionario, ovvero per circuiti che comprendono i componenti:

- solo resistori.
- Cortocircuiti.
- Circuiti aperti.
- Induttori in regime stazionario (corto circuito).
- Condensatori in regime stazionario (circuito aperto).

E per **generatori ideali di corrente** (successivamente aggiungeremo anche i generatori di tensione)

Equazioni di interconnessione scritte solo rispetto alla matrice di incidenza

Equazioni di **tableau** pagina 136

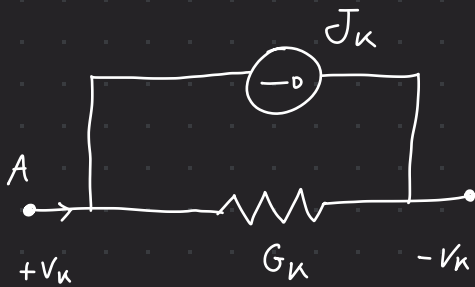
$$(a) \left\{ \begin{array}{ll} \underline{A} \cdot \underline{i} = \underline{0} & L K C \\ \underline{V} - \underline{A}^T \underline{U} = \underline{0} & L K T \end{array} \right. \quad \text{(Appena Dimostrato)}$$

$$i_k = G_k \cdot v_k \quad \Leftrightarrow \quad i_k = \frac{v_k}{R_k} \quad - \text{Resistori}$$

$$i_k = J_k \quad (\text{NOTA}) \quad - \text{generatori}$$

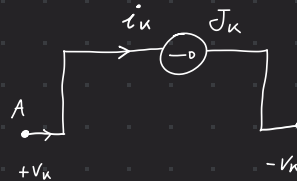
RELAZIONI DI LATO

* Possiamo considerare come LATO un gen + Res in parallelo



$$i_k = G_k v_k + J_k$$

Se non c'è la resistenza



$$G_k = 0 \rightarrow i_k = J_k$$

Se non c'è il generatore



$$J_k = 0 \rightarrow i_k = G_k v_k$$

→ Rappresentiamo come matrici

EVENTUALE conduttanza

Vettore delle correnti di lato

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_e \end{pmatrix};$$

Matrice diagonale conduttanze di lato

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_e \end{pmatrix}$$

Vettore generatori ideali di lato

=

$$\underline{i} = \underline{G} \underline{v} + \underline{J}$$

(b)

→ Sostituiamo (b) in (a)

$$\begin{cases} \underline{A} \cdot \underline{i} = \underline{0} \\ \underline{v} - \underline{A}^T \underline{U} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{A}^T \underline{U} \\ \underline{i} = \underline{G} \underline{v} + \underline{J} \\ i_k = J_k \end{cases}$$

Come risolvere il Sistema?

→ Anche se sono matrici, possiamo Sostituire

$$\begin{cases} \underline{A} \cdot \underline{i} = \underline{0} \\ \underline{v} = \underline{A}^T \underline{U} \\ \underline{i} = \underline{G} \underline{v} + \underline{J} \\ i_k = J_k \end{cases}$$

$$\underline{A}(\underline{G} \underline{v} + \underline{J}) = \underline{0} \rightarrow \begin{cases} \underline{A} \underline{G} \underline{v} + \underline{A} \underline{J} = \underline{0} \\ \underline{v} = \underline{A}^T \underline{U} \\ \underline{i} = \underline{G} \underline{v} + \underline{J} \end{cases}$$

→ $\underline{A} \underline{G} \underline{A}^T \underline{U} + \underline{A} \underline{J} = \underline{0}$

→ $\underline{A} \underline{G} \underline{A}^T \underline{U} = -\underline{A} \underline{J}$

Diagram illustrating matrix dimensions and substitutions:

- \underline{A} : $(n-1) \times e$
- \underline{G} : $e \times e$
- \underline{A}^T : $e \times (n-1)$
- \underline{U} : $(n-1) \times 1$
- $-\underline{A} \underline{J}$: $(n-1) \times e$
- \underline{J} : $e \times 1$

Annotations:

- $(n-1) \times (n-1)$ (overall matrix dimension)
- $(n-1) \times 1$ (dimension of \underline{U})
- $n-1$ eq in $n-1$ incognite
- per $n \ll e$ **CONVIENE**
- In fatti

UNOTA → $\underline{v} = \underline{G} \underline{U} \rightarrow \underline{i} = \underline{G} \underline{v} + \underline{J}$

Bisogna tenere presente che questo ultimo metodo (con le matrici) ha senso **per un calcolatore**; noi umani non abbiamo bisogno di costruire delle matrici ed effettuare tutti questi calcoli per risolvere un circuito (semplice).

Vedremo come il **metodo dei potenziali dei nodi** è molto più utile ed applicabile.

In un circuito, comunque costruito (biologhi adinamici, dinamici, non lineari, attivi, etc.), istante per istante, la sommatoria delle potenze assorbite è uguale a zero.

In altre parole, se in un circuito c'è un solo generatore che eroga 100w, allora la somma di tutte le potenze assorbite **deve** essere 100w.

Se questa regola viene infranta, si va incontro al fenomeno detto **Black Out**.

ESERCIZIO PG 145

Definite le potenze Assorbite

$$P_k^a(t) = v_k(t) \cdot i_k(t) \quad \text{con } k = 1, \dots, e \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^e P_k^a(t) = 0$$

Alternativamente

$$\sum_{i=1}^e P_i^a(t) = \sum_{j=1}^e P_j^e(t)$$

↑
Assorbita
↑
erogata

Dimostrazione

$$\sum_{k=1}^e v_k \cdot i_k = \underline{v}^T \cdot \underline{i}$$

↑
Vettore Tensioni
di lato
Trasposto
←
Vettore delle
Correnti di
dato

Abbiamo visto che $\underline{v} = \underline{A}^T \cdot \underline{u}$

$$\Rightarrow \text{LKT: } \underline{v} = \underline{A}^T \underline{u} \quad \Rightarrow \quad \underline{v}^T = (\underline{A}^T \underline{u})^T = \underline{A} \underline{u}^T$$

sostituisco

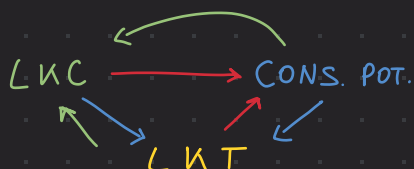
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^e v_k \cdot i_k = \underline{v}^T \cdot \underline{i} = \underline{A} \underline{u}^T \underline{i}$$

↑
ma $\underline{A} \underline{i} = 0$ LKC

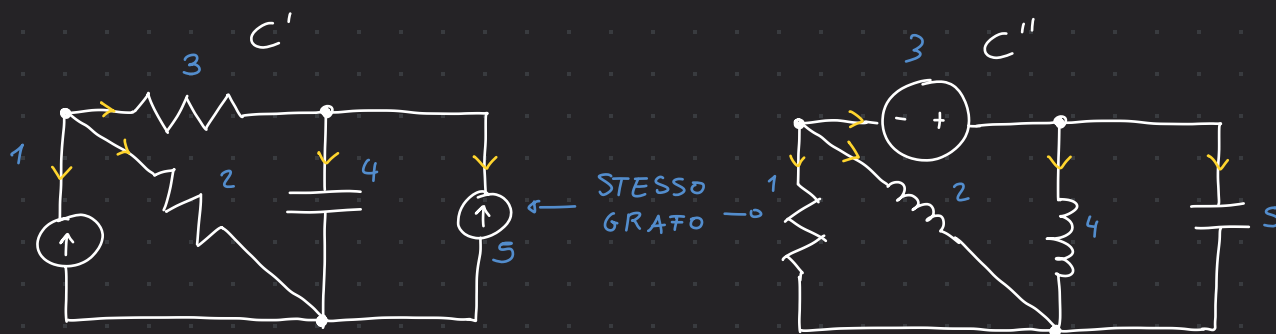
MORALE DELLA Favola

Le LK e la cons. della Carica Sono **CONCETTI PARITARI** (hanno lo stesso valore)

↑
O IMPORTANZA



Conservazione delle POTENZE VIRTUALI



Se due circuiti hanno lo stesso grado (ma componenti diversi) possiamo **stabilire una conservazione delle potenze virtuali**.

- Immaginiamo di orientare tutti i lati allo stesso modo in entrambi i circuiti
- Andiamo a considerare dei prodotti P_k (k cicla sugli archi) in modo da avere:

$$P_k(t) = v_k' \cdot i_k'' \quad \text{VIRTUALE}$$

↑
Primo circuito
↑
Secondo circuito

\Rightarrow

$$\sum_{k=1}^{\ell} v_k' \cdot i_k'' = \sum_{k=1}^{\ell} P_k^{\text{virt}} = 0$$

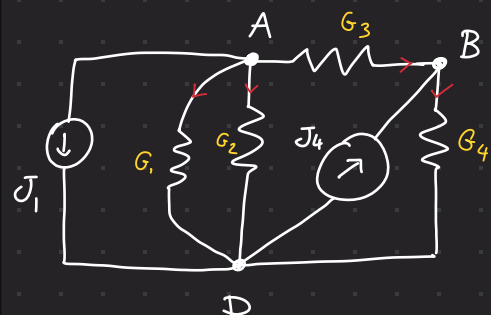
In altre parole
Soddisfano le leggi
di Kirchhoff

Infatti proof: $\underline{v}' \cdot \underline{i}'' = 0 \Rightarrow ? \quad \underline{v}' = \underline{A}'^T \cdot \underline{u}' \Rightarrow \underline{v}'^T = \underline{A}' \cdot \underline{u}'^T \leadsto \underline{A}' \cdot \underline{u}'^T \cdot \underline{i}''$

1:26

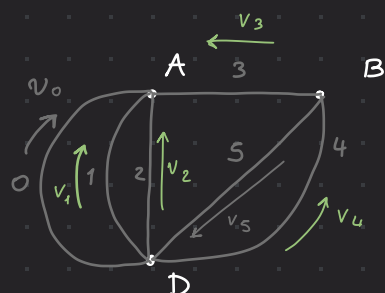
La mat di inc
 $\underline{A}' = \underline{A}'' \quad \text{QED}$

ESERCIZIO: Potenziali di Nodo



DATI
 $J_1 = 6 \text{ A}$
 $J_4 = 2 \text{ A}$
 $G_1 = 0.15 \text{ S}$
 $G_2 = 0.05 \text{ S}$
 $G_3 = 0.2 \text{ S}$
 $G_4 = 0.02 \text{ S}$

Risultati
 $U_A = -24.9 \text{ V}$
 $U_B = -13.5 \text{ V}$
 $U_D = 0$ SCELTA INIZIALE

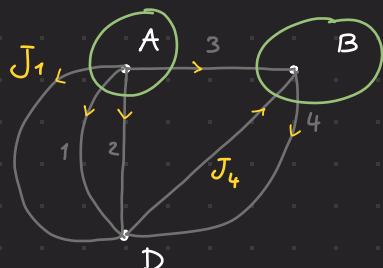


→ Non calcoliamo la Tensione dei generatori
 La calcoliamo solo per ottenere
 la potenza!

(1) Pot. di Nodo

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 = U_A \\ V_3 &= U_A - U_B \\ V_4 &= U_B \end{aligned}$$

(2) LKC



$$\begin{aligned} \text{A} \begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 + J_1 = 0 \\ -i_3 - J_4 + i_4 = 0 \end{cases} &= 0 \quad \begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = -J_1 \\ -i_3 + i_4 = J_4 \end{cases} \\ \text{B} \end{aligned} \quad (2)$$

(2.a) Rel Car di lato

$$i_k = G_k \cdot V_k \quad \text{con } k = 1, 2, 3, 4 \quad \text{C.M.}$$

(2.b) Unisco (2) e (2.a)

LKC

$$\begin{aligned} \begin{cases} i_1 = V_1 \cdot G_1 = U_A \cdot G_1 \\ i_2 = U_A \cdot G_2 \\ i_3 = (U_A - U_B) G_3 \\ i_4 = U_B \cdot G_4 \end{cases} &= 0 \quad \begin{cases} U_A \cdot G_1 + U_A \cdot G_2 + U_A G_3 - U_B G_3 = -J_1 \\ -U_A G_3 + U_B G_3 + U_B \cdot G_4 = J_4 \end{cases} \end{aligned}$$

(3) MATRICE dalla LKC

* Se si usa la C.U., i due el fuori dalla diagonale sono negativi (G_3)

* I Termini fuori diagonale Sono quelli che insistono nel nodo

* I Termini sull'altra diagonale Sono le conduttanze TRA i nodi

Se non c'è niente, Troveremo \emptyset

$$\underline{A}_a = \begin{pmatrix} \overset{U_A}{G_1+G_2+G_3} & \overset{U_B}{-G_3} \\ \underset{U_A}{-G_3} & \underset{U_B}{G_3+G_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_1 \\ J_4 \end{pmatrix}$$

\uparrow Coefficienti \uparrow INCOGNITE \uparrow TERMINI NOTI

→ Risolvendo il Sistema si ottiene la soluzione

$$\begin{cases} U_A \cdot G_1 + U_A \cdot G_2 + U_A G_3 - U_B G_3 = -J_1 \\ -U_A G_3 + U_B G_3 + U_B \cdot G_4 = J_4 \end{cases}$$

→

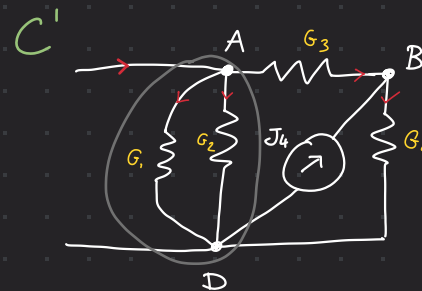
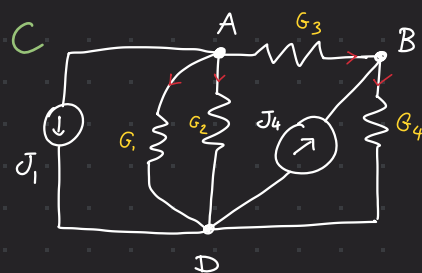
$$\begin{cases} U_A (G_1 + G_2 + G_3) + U_B (-G_3) = -J_1 \\ U_A (-G_3) + U_B (G_3 + G_4) = J_4 \end{cases}$$

\uparrow x \uparrow a \uparrow y \uparrow b \uparrow c

$$\begin{cases} U_A = -19.2 \text{ V} \\ U_B = -8.3 \text{ V} \end{cases}$$

NON SI TROVA CON I RISULTATI...

BONUS: Risolverlo con il metodo per SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



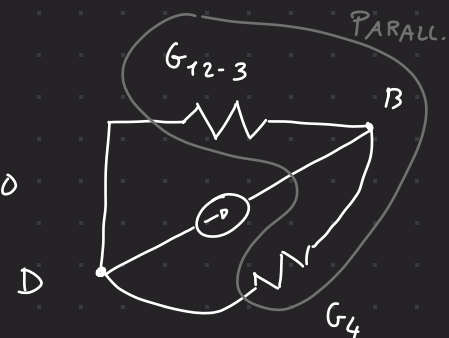
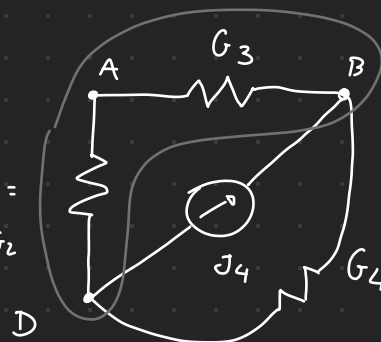
$$\begin{aligned} A \cdot i &= 0 \\ B \cdot v &= 0 \\ v_k &= G_k \cdot i_k \\ i_e &= J_1 + J_4 \end{aligned}$$

- (1) Spegno un generatore
↳ Determino
- (2) Spegno l'altro
↳ Determino

DATI

$$\begin{aligned} J_1 &= 6 \text{ A} \\ J_4 &= 2 \text{ A} \\ G_1 &= 0.15 \text{ S} \\ G_2 &= 0.05 \text{ S} \\ G_3 &= 0.2 \text{ S} \\ G_4 &= 0.02 \text{ S} \end{aligned}$$

$$\rightarrow G_{12} = G_1 + G_2$$



$$\begin{aligned} G_{12} &= G_1 + G_2 \\ \frac{1}{G_{12-3}} &= \frac{1}{G_{12}} + \frac{1}{G_3} \rightarrow \frac{G_{12} + G_3}{G_{12} \cdot G_3} \\ \rightarrow G_{12-3} &= \frac{G_{12} \cdot G_3}{G_{12} + G_3} \end{aligned}$$



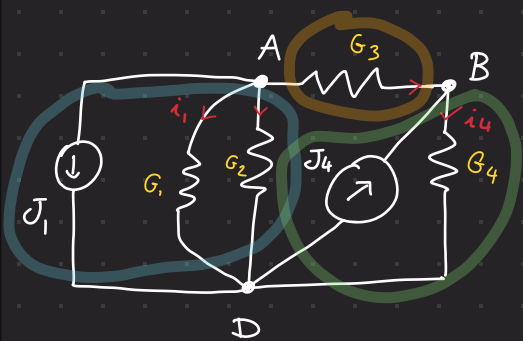
$$\begin{aligned} G'_{EQ} &= G_{12-3} + G_4 \\ &= \frac{G_{12} \cdot G_3}{G_{12} + G_3} + G_4 \\ &= \frac{G_{12} \cdot G_3 + G_4 \cdot G_{12} \cdot G_3}{G_{12} + G_3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G'_{EQ} = \frac{G_{12} G_3 (1 + G_4)}{G_{12} + G_3} \quad \text{—o}$$

$$V = R \cdot i \quad \Rightarrow \quad V = \frac{i}{G}$$

$$\Rightarrow V_{DB} = \frac{J_1}{G'_{EQ}} = \frac{6 \cdot 500}{51} = 58.8 \text{ V}$$

Risoluzione con procedimento "Automatico"



Tra due nodi devono esserci solo
condutture e/o gen. id. corrente
(gli archi tra due nodi devono essere > 1)

3 lati

$$\Rightarrow \underline{G} = \begin{pmatrix} G_1 + G_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_4 \end{pmatrix}$$

Matrice delle
Condutture

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} +J_1 \\ 0 \\ -J_4 \end{pmatrix}$$

Concorde con i_1
Discorde con i_4

$$\underline{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

MATRICE RIDOTTA
(manca C)

$$\underline{A} \cdot \underline{G} \underline{A}^T \underline{U} = -\underline{A} \underline{J}$$

Ovvero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 + G_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 + G_2 & G_3 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3 + G_4 \end{pmatrix}$$

COINCIDE
con la Matrice
LUC del passo (3)
precedente

$$\underline{A} \underline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ 0 \\ -J_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \\ -J_4 \end{pmatrix} \Rightarrow -\underline{A} \underline{J} = \begin{pmatrix} -J_1 \\ J_4 \end{pmatrix}$$

coincide ✓

$$\underline{A} \cdot \underline{G} \underline{A}^T \underline{U} = -\underline{A} \underline{J} \quad \text{E' VERIFICATO}$$

