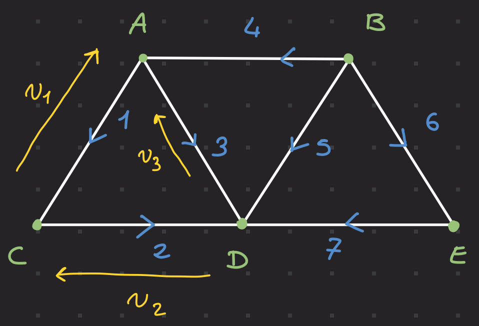
Metodo sistematico ridotto per la soluzione dei circuiti

METODO DEI POTENZIALI DEI NODI

→ Permette di ridurre il numero delle equazioni del sistema ($< 2\ell$)

(1) Consideriamo i potenziali di Nodo

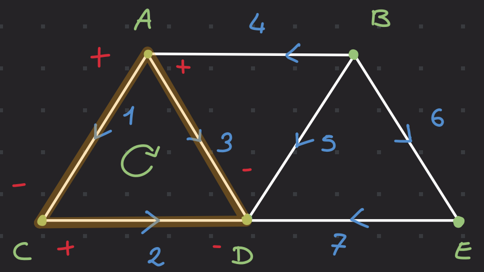


→ Possiamo esprimere le Tensioni di Lato rispetto ai P.d.n. (c.u.)

$$\begin{cases} v_1 = U_A - U_C \\ v_2 = U_C - U_D \\ v_3 = U_A - U_D \\ v_4 = U_B - U_A \\ v_5 = U_B - U_D \\ v_6 = U_B - U_E \\ v_7 = U_E - U_D \end{cases}$$

PAGINA 126

(2) Consideriamo una Maglia



Scrivo la LKT (Verso Orario)

→ $-v_1 + v_3 - v_2 = 0$

Sostituisco i p.d.n → $-\cancel{U_A} + \cancel{U_C} + \cancel{U_A} - \cancel{U_D} - \cancel{U_C} + \cancel{U_D} = 0$

⇒ $\boxed{0 = 0 \quad \forall\, U_A, U_C, U_D \quad \Rightarrow \text{IDENTITA'}}$ 1

(3) Scriviamo la mat. di incidenza del grafo

$$\underline{\underline{A}}_a = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Costruiamo il vettore colonna dei potenziali di Nodo

$$\underline{U}_a = \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \\ U_E \end{pmatrix}$$

- Considero la matrice TRASPOSTA $\underline{\underline{A}}_a^T$

$$\underline{\underline{A}}_a^T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}$$

• Moltiplico

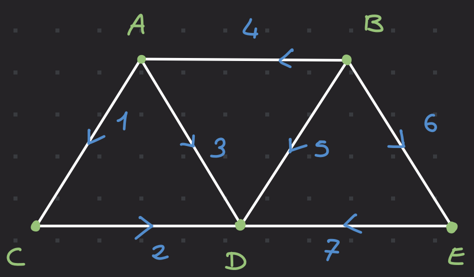
$$\underline{\underline{A}}_a^T \underline{U}_a = \left| \begin{array}{c|c} U_A - U_C & = v_1 \\ U_C - U_D & = v_2 \\ U_A - U_D & = v_3 \\ U_B - U_A & = v_4 \\ U_B - U_D & = v_5 \\ U_B - U_E & = v_6 \\ U_E - U_D & = v_7 \end{array} \right| = \underline{U}_a$$

$\Rightarrow$ NOTO CHE $\boxed{\underline{v} = \underline{\underline{A}}_a^T \underline{U}_a}$ (2)

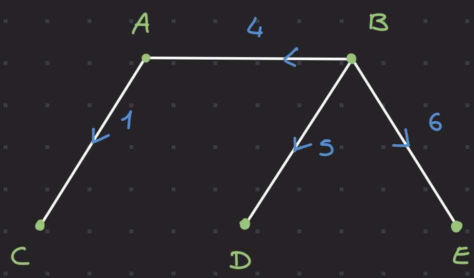
Ma la rappresentazione deve essere Biunivoca

Dato $\underline{U}_a$, riesco sempre a determinare i potenziali ?

proof $\rightarrow$ Si, basta assegnare un POTENZIALE DI NODO



(1) circuito



(2) UN albero

(3) Assegno $U_A = \emptyset$ (1)

(4) Sfrutto le relazioni

NOTO Incognita

$v_1 = U_A - U_C \Rightarrow \underline{U_C = -V_1}$ (2)

$\emptyset$

(3)

$\rightarrow$ Mi serve U_B $\rightarrow$ $v_4 = U_B - U_A \Rightarrow U_B = v_4$ (3)

$\rightarrow$ U_D $\rightarrow$ $v_5 = U_B - U_D \Rightarrow U_D = U_B - v_5 = v_4 - v_5$ (4) QED

$\rightarrow$ U_E $\rightarrow$ $v_7 = U_E - U_D \Rightarrow U_E = v_7 - U_E = v_7 - v_4 + v_5$ (5)

L'algoritmo: L'albero ci permette di considerare *un singolo nodo alla volta*; di conseguenza ponendo il potenziale del nodo di partenza pari a zero, possiamo visitare un nodo alla volta e determinarne il potenziale.

4 Sfruttiamo la Matrice d'incidenza <u>RIDOTTA</u>

↳ Le LKC sono e, ma $\ell-1$ sono indipendenti
$\Rightarrow$ Posso Togliere UNA RIGA (Arbitrariam.)

→ Tolgo la riga corrisp. al potenziale nullo precedente $(U_A = 0)$

$$\underline{\underline{A}}_a = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$[n \times e]$

Diventa $\underline{\underline{A}}$

$$\underline{U}_a = \begin{pmatrix} \cancel{U_A} \\ U_B \\ U_C \\ U_D \\ U_E \end{pmatrix}$$

$[n \times 1]$

Diventa $\underline{U}$

$$\boxed{\Rightarrow \underbrace{\underline{v}}_{[e \times 1]} = \underbrace{\underline{\underline{A}}^T}_{[(n-1) \times e]} \underbrace{\underline{U}}_{[(n-1) \times 1]}}$$

A questo punto, consideriamo il sistema canonico in cui utilizziamo la relazione precedente (4).
Per il momento il metodo viene usato solo per circuiti in regime stazionario, ovvero per circuiti che comprendono i componenti:

- solo resistori.
- Cortocircuiti.
- Circuiti aperti.
- Induttori in regime stazionario (corto circuito).
- Condensatori in regime stazionario (circuito aperto).

E per **generatori ideali di corrente** (successivamente aggiungeremo anche i generatori di tensione)

Equazioni di interconnessione scritte solo rispetto alla matrice di incidenza

Equazioni di **tableau** pagina 136

(a)

$$\begin{cases} \boxed{\begin{array}{ll} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{i} = \underline{0} & \text{LKC} \\ \underline{v} - \underline{\underline{A}}^T \underline{u} = \underline{0} & \text{LKT} \end{array}} \\ i_k = G_k \cdot v_k \rightleftharpoons i_k = \dfrac{v_k}{R_k} \\ i_k = J_k \end{cases}$$

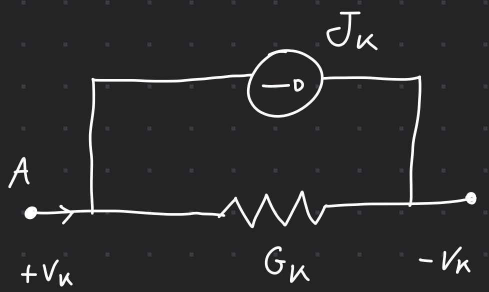
(Appena Dimostrato)

$i_k = G_k \cdot v_k \rightleftharpoons i_k = \frac{v_k}{R_k}$ - Resistori

$i_k = J_k$ (NOTA) - generatori

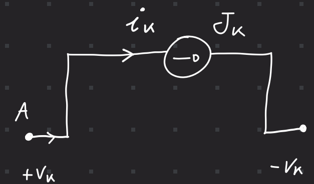
RELAZIONI DI LATO

* Possiamo considerare come <u>LATO</u> un gen + Res in parallelo



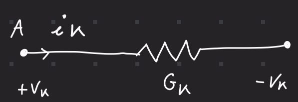
$$\boxed{i_k = G_k v_k + J_k}$$

Se non c'è la resistenza



$G_k = 0 \rightarrow i_k = J_k$

Se non c'è il generatore



$J_k = 0 \rightarrow i_k = G_k v_k$

$\rightarrow$ Rappresentiamo come matrici

EVENTUALE conduttanza

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_e \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_e \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Matrice diagonale conduttanze di lato

Vettore generatori ideali di lato

Vettore delle correnti di lato

$$\boxed{\underline{i} = \underline{\underline{G}}\, \underline{v} + \underline{J}}$$

(b)

→ Sostituiamo (b) in (a)

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{i} = \underline{0} \\ \underline{v} - \underline{\underline{A}}^T \underline{U} = \underline{0} \quad \rightleftharpoons \quad \underline{v} = \underline{\underline{A}}^T \underline{U} \\ \underline{i} = \underline{\underline{G}}\, \underline{v} + \underline{J} \\ i_K = J_K \end{cases}$$

Come risolvere il Sistema ?

→ Anche se sono matrici, possiamo sostituire

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{i} = \underline{0} \\ \underline{v} = \underline{\underline{A}}^T \underline{U} \\ \underline{i} = \underline{\underline{G}}\, \underline{v} + \underline{J} \\ i_K = J_K \end{cases} \qquad \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{G}}\,\underline{v} + \underline{J}) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{v} + \underline{\underline{A}}\,\underline{J} = 0 \\ \underline{v} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{U} \\ \underline{i} = \underline{\underline{G}}\,\underline{v} + \underline{J} \end{cases}$$

$$\to \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{A}}^T \underline{U} + \underline{\underline{A}}\,\underline{J} = 0 \quad \to \quad \boxed{\underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{A}}^T \underline{U}}_{(n-1)\times(n-1)} = \underbrace{-\underline{\underline{A}}\,\underline{J}}_{(n-1)\times 1}}$$

$(n-1)\times(n-1)$

$(n-1)\times 1$

$(n-1)\times e$ $e\times e$ $e\times(n-1)$ $(n-1)\times 1$ $(n-1)\times e$ $e\times 1$

- $n-1$ eq in $n-1$ incognite
- per $n \ll e$ CONVIENE

↓

In fatti

U NOTA → $\underline{v} = \underline{\underline{G}} \cdot \underline{U}$ → $\underline{i} = \underline{\underline{G}} \cdot \underline{v} + \underline{J}$

Bisogna tenere presente che questo ultimo metodo (con le matrici) ha senso **per un calcolatore**; noi umani non abbiamo bisogno di costruire delle matrici ed effettuare tutti questi calcoli per risolvere un circuito (semplice).

Vedremo come il **metodo dei potenziali dei nodi** è molto più utile ed applicabile.

Proprietà generali dei circuiti: **Conservazione della Potenza elettrica**

In un circuito, comunque costruito (bipoli adinamici, dinamici, non lineari, attivi, etc.), istante per istante, la sommatoria delle potenze assorbite è uguale a zero.

In altre parole, se in un circuito c'è un solo generatore che eroga 100w, allora la somma di tutte le potenze assorbite **deve** essere 100w.
Se questa regola viene infranta, si va incontro al fenomeno detto **Black Out.**

ESERCIZIO PG 145

Definite le potenze Assorbite

$$\boxed{\begin{array}{l} P_k^a(t) = v_k(t) \cdot i_k(t) \\ \text{con } k = 1, \dots, e \end{array} \Rightarrow \sum_{k=1}^{e} P_k^a(t) = 0}$$

Alternativamente $\displaystyle \underbrace{\sum_{i=1}^{e} P_i^a(t)}_{\text{Assorbita}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{e} P_j^e(t)}_{\text{erogata}}$

Dimostrazione

$$\sum_{k=1}^{e} v_k \cdot i_k = \underline{v}^T \cdot \underline{i}$$

Vettore delle correnti di dato

Vettore Tensioni di lato Trasposto

Abbiamo visto che $\underline{v} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{u}$

$\Rightarrow$ LKT: $\underline{v} = \underline{\underline{A}}^T \underline{u} \rightarrow \underline{v}^T = (\underline{\underline{A}}^T \underline{u})^T = \underline{\underline{A}}\, \underline{u}^T$

sostituisco

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{e} v_k \cdot i_k = \underline{v}^T \cdot \underline{i} = \underline{\underline{A}}\, \underline{u}^T \underline{i}$$

ma $\underline{\underline{A}}\, \underline{i} = 0$ LKC

MORALE DELLA FAVOLA

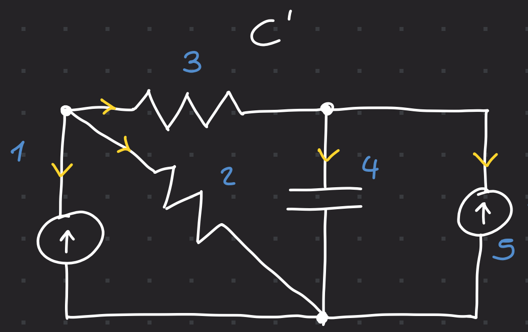
Le LK e la cons. della Carica sono CONCETTI PARITARI (hanno lo stesso valore)

O IMPORTANZA

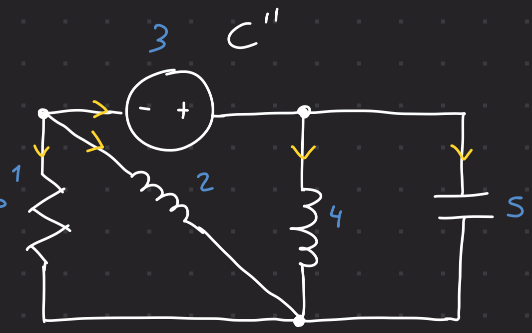
$$\begin{tikzcd} \text{LKC} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{CONS. POT.} \arrow[ll, bend right] \arrow[dl] \\ & \text{LKT} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

1:18

Conservazione delle POTENZE VIRTUALI



STESSO GRAFO



Se due circuiti hanno lo stesso grado (ma componenti diversi) possiamo **stabili4 una conservazione delle potenze virtuali.**

- Immaginiamo di orientare tutti i lati allo stesso modo in entrambi i circuiti
- Andiamo a considerare dei prodotti Pk (k cicla sugli archi) in modo da avere:

$$\boxed{\mathcal{P}_k(t) = v_k' \cdot i_k''}$$

VIRTUALE

Primo circuito — Secondo circuito

$\Rightarrow$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{l} v_k' \cdot i_k'' = \sum_{k=1}^{l} \mathcal{P}_k^{virt} = 0}$$

In altre parole

Soddisfano le leggi di Kirchhoff

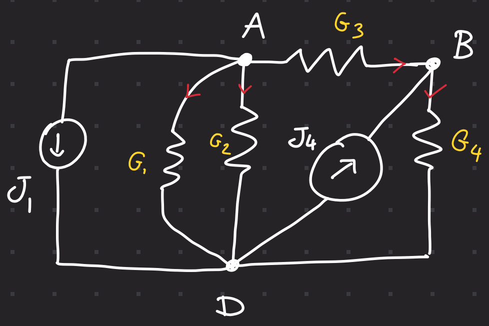
Infatti proof: $\underline{v}'\,\underline{i}'' = 0$ $\Rightarrow$? $\underline{v}' = \underline{\underline{A}}'^T \cdot \underline{U}'$ $\rightarrow$ $\underline{v}'^T = \underline{\underline{A}}'\,\underline{U}'^T$ $\rightsquigarrow$ $\underline{\underline{A}}'\,\underline{U}'^T \cdot \underline{i}''$

La mat di inc $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{A}}''$

QED

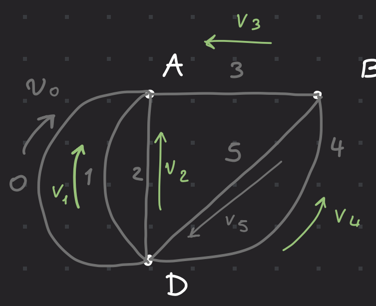
1:26

ESERCIZIO: Potenziali di Nodo



DATI
$J_1 = 6$ A
$J_4 = 2$ A
$G_1 = 0.15$ S
$G_2 = 0.05$ S
$G_3 = 0.2$ S
$G_4 = 0.02$ S

Risultati
$U_A = -24.9$ V
$U_B = -13.5$ V
$U_D = \emptyset$ SCELTA INIZIALE

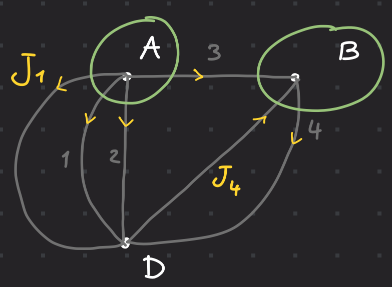


→ Non calcoliamo la Tensione dei generatori
La calcoliamo solo per ottenere
la potenza!

(1) Pot. di Nodo

$V_1 = V_2 = U_A$
$V_3 = U_A - U_B$
$V_4 = U_B$

(2) LKC



$$\begin{cases} A: & i_1 + i_2 + i_3 + J_1 = 0 \\ B: & -i_3 - J_4 + i_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = -J_1 \\ -i_3 + i_4 = J_4 \end{cases} \quad (2)$$

(2.a) Rel Car di lato

$i_K = G_K \cdot v_K$ con $K = 1, 2, 3, 4$ C.U.

(2.b) Unisco (2) e (2.a)

LKC

$$\begin{cases} i_1 = V_1 \cdot G_1 = U_A \cdot G_1 \\ i_2 = U_A \cdot G_2 \\ i_3 = (U_A - U_B) G_3 \\ i_4 = U_B \cdot G_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_A \cdot G_1 + U_A \cdot G_2 + U_A G_3 - U_B G_3 = -J_1 \\ -U_A G_3 + U_B G_3 + U_B \cdot G_4 = J_4 \end{cases}$$

(3) MATRICE dalla LKC

$$\underline{\underline{A}}_a = \begin{array}{cc} U_A & U_B \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{\underline{A}}_a = \begin{pmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3+G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_1 \\ J_4 \end{pmatrix}$$

(columns: U_A, U_B)

↑ Coefficienti ↑ INCOGNITE ↑ TERMINI NOTI

* Se si usa la C.U., i due el fuori dalla diagonale sono negativi (G_3)

* I termini fuori diagonale sono quelli che insistono nel nodo

* I termini sull'altra diagon. sono le conduttanze TRA i nodi
↓
Se non c'è niente, troveremo Ø

→ Risolvendo il sistema si ottiene la soluzione

$$\begin{cases} U_A \cdot G_1 + U_A \cdot G_2 + U_A G_3 - U_B G_3 = -J_1 \\ -U_A G_3 + U_B G_3 + U_B \cdot G_4 = J_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_A (G_1 + G_2 + G_3) + U_B(-G_3) = -J_1 \\ \underset{x}{U_A} \underset{a}{(-G_3)} + \underset{y}{U_B} \underset{b}{(G_3+G_4)} = \underset{c}{J_4} \end{cases}$$

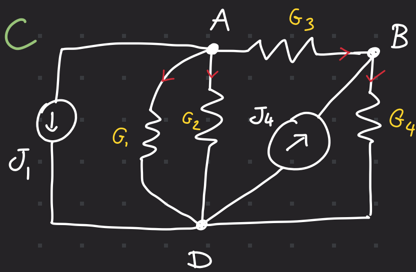
$$\begin{cases} U_A = -19.2 \text{ V} \\ U_B = -8.3 \text{ V} \end{cases}$$

NON SI TROVA CON I RISULTATI ...

BONUS: Risolverlo con il metodo per SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

(1) Spengo un generatore
↳ Determino
(2) Spengo l'altro
↳ Determino

C

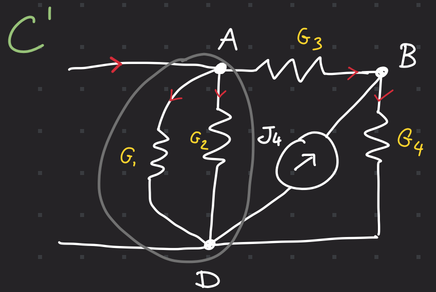


$$A\,i = 0$$
$$B \cdot v = 0$$
$$v_K = G_K \cdot i_K$$
$$i_e = J_1 + J_4$$

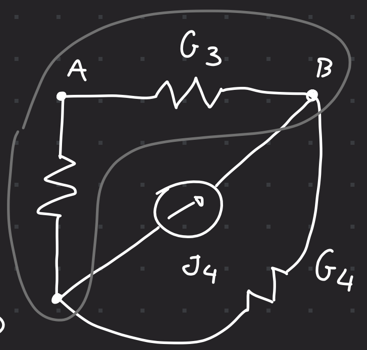
DATI

$J_1 = 6$ A
$J_4 = 2$ A
$G_1 = 0.15$ S
$G_2 = 0.05$ S
$G_3 = 0.2$ S
$G_4 = 0.02$ S

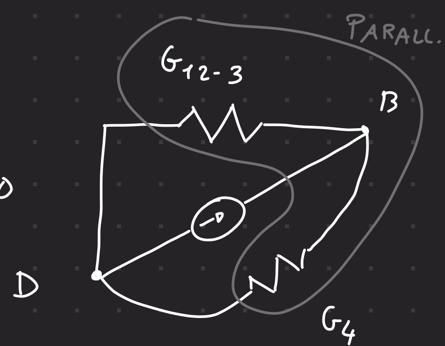
C'



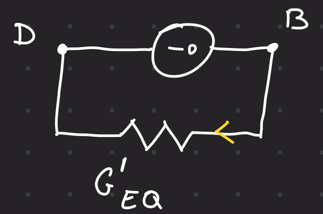
→ $G_{12} = G_1 + G_2$



→



↙



- $G_{12} = G_1 + G_2$
- $\dfrac{1}{G_{12\text{-}3}} = \dfrac{1}{G_{12}} + \dfrac{1}{G_3} \rightarrow \dfrac{G_{12}+G_3}{G_{12} \cdot G_3}$

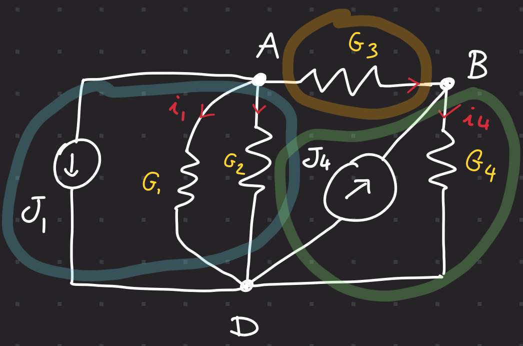
$\rightarrow G_{12\text{-}3} = \dfrac{G_{12}\,G_3}{G_{12}+G_3}$

- $G'_{EQ} = G_{12\text{-}3} + G_4$
$= \dfrac{G_{12} \cdot G_3}{G_{12}+G_3} + G_4$
$= \dfrac{G_{12} G_3 + G_4 G_{12} G_3}{G_{12} + G_3}$

$$\Rightarrow G'_{EQ} = \frac{G_{12} G_3 (1 + G_4)}{G_{12} + G_3} \quad \longrightarrow \quad V = R \cdot i \Rightarrow V = \frac{i}{G}$$

$$\Rightarrow V_{DB} = \frac{J_1}{G'_{EQ}} = \frac{6 \cdot 500}{51} = 58.8\ V$$

Risoluzione con procedimento "Automatico"



3 lati

Tra due nodi devono esserci solo conduttanze e/o gen. id. corrente
(gli archi tra due nodi devono essere > 1)

$$\Rightarrow \underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} G_1+G_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_4 \end{pmatrix}$$

Matrice delle conduttanze

Concorde con i_1

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} +J_1 \\ 0 \\ -J_4 \end{pmatrix}$$

Discorde con i_4

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 4 \\ \hline A & 1 & 1 & 0 \\ B & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

MATRICE RIDOTTA
(manca C)

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{G}}\, \underline{\underline{A}}^T \underline{U} = -\underline{\underline{A}}\, \underline{J}$$

Ovvero:

$$= \overset{\underline{\underline{A}}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \overset{\underline{\underline{G}}}{\begin{pmatrix} G_1+G_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_4 \end{pmatrix}} \overset{\underline{\underline{A}}^T}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \overset{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}}{\begin{pmatrix} G_1+G_2 & G_3 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_4 \end{pmatrix}} \overset{\underline{\underline{A}}^T}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3+G_4 \end{pmatrix}$$

COINCIDE con la Matrice LKC del passo (3) precedente

$$\underline{\underline{A}}\, \underline{J} = \overset{\underline{\underline{A}}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} J_1 \\ 0 \\ -J_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \\ -J_4 \end{pmatrix} \Rightarrow -\underline{\underline{A}}\, \underline{J} = \begin{pmatrix} -J_1 \\ J_4 \end{pmatrix}$$

coincide ✓

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{G}}\, \underline{\underline{A}}^T \underline{U} = -\underline{\underline{A}}\, \underline{J}$$

E' VERIFICATO