Introduzione Regime Sinusoidale

Ampiezza Fase

$$e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \forall t$$

Pulsazione

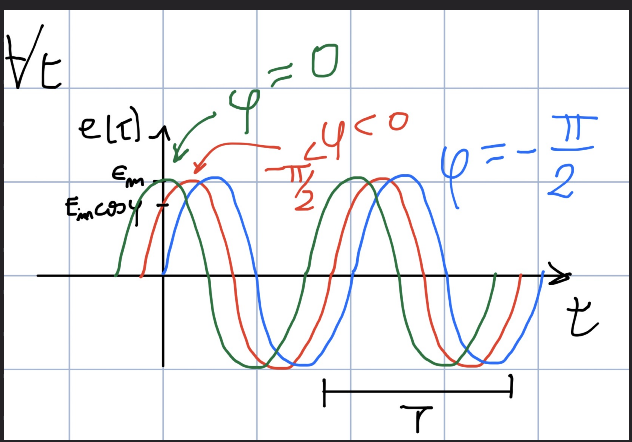
Come se dicessimo che il nostro generatore e(t) esiste da sempre e continuerà ad esistere per sempre… Parliamo quindi di un caso ideale

- $\omega = 2\pi f \quad \to \quad [\omega] = \frac{rad}{s}$
- $f = \frac{1}{T} \quad \to \quad [f] = Hz = s^{-1}$

$[T] = s$

Per combattere questa idealità diciamo che **il circuito deve essere lineare e dissipativo**

- **Circuito Dissipativo:** quando contiene almeno un dipolo strettamente passivo effettivamente in grado di dissipare energia; in altre parole il dipolo deve essere attraversato da corrente, altrimenti non dissiperà energia.



A seconda di **come scelgo l'asse dei tempi** (y) le varie sinusoidi "cambieranno". Se ad esempio posiziono l'asse e(t) in modo da far capitare il picco della sinusoide blu in 0, questa diventerà una cosinusoide e quella verde diventerà una sinusoide **in ritardo** (o in anticipo).

L'unica cosa che **non cambia** è **lo sfasamento reciproco** tra le sinusoidi (ovvero pi/2)

—> La fase assoluta "conta poco" (nei calcoli conta molto), ma la differenza di fase è un valore molto più importante.

REGIME SINUSOIDALE

Se i generatori del circuito sono sinusoidi **tutti aventi la stessa pulsazione,** tutte le tensioni e correnti le circuiti saranno sinusoidali con la stessa pulsazione dei generatori; il circuito si dice quindi **in regime sinusoidale.**

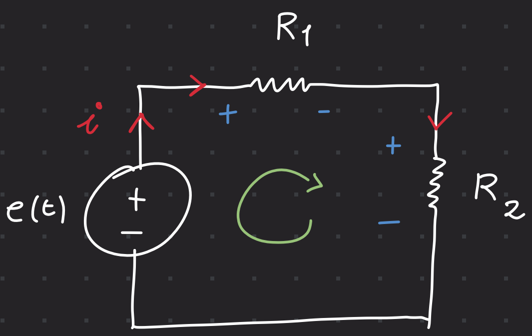
In altre parole **tutte le sinusoidi** e correnti del circuito hanno la stessa pulsazione.

$$\begin{cases} v_k(t) = V_k \cos(\omega t + \alpha_k) \\ i_k(t) = I_k \cos(\omega t + \beta_k) \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathcal{E}$$

Bipoli

Come approcciare alla risoluzione dei circuiti in regime sinusoidale

- **Sistema Canonico** — Caso ADINAMICO



DATI

$$e(t) = 100 \cos(50\, t + \varphi)$$

$$R_1 = 20\ \Omega$$
$$R_2 = 40\ \Omega$$

$$\begin{cases} LKT: & v_1 + v_2 - e(t) = 0 \\ LKC: & i(t) \leftarrow \text{Stessa corrente in tutto il circuito} \\ & \left.\begin{aligned} v_1 &= R_1 \cdot i \\ v_2 &= R_2\, i \end{aligned}\right] \text{RELAZIONI ADINAMICHE} \end{cases}$$

- Corrente

$$v = R \cdot i \Rightarrow i(t) = \frac{e(t)}{R_{EQ}} = \frac{\cancel{100} \cos(50t + \varphi)}{\cancel{60}} = \frac{10}{6} \cos(50t + \varphi)$$

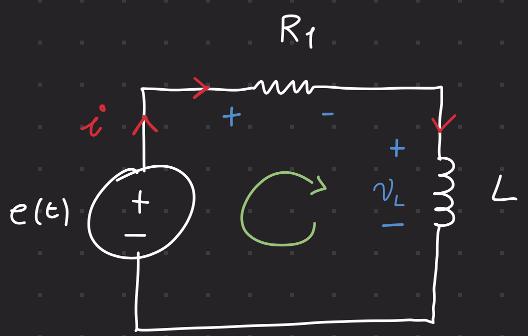
- Tensioni

$$v_1 = R_1 \cdot i = \overset{10}{\underset{20}{\cancel{20}}} \cdot \frac{10}{\cancel{6}\,3} \cos(50t + \varphi)$$

$$v_2 = R_2 \cdot i = \cancel{40} \cdot \frac{10}{\cancel{6}\,3} \cos(50t + \varphi)$$

STESSA FASE

- **Sistema Canonico** — Caso DINAMICO



$$\begin{cases} LKT: & v_1(t) + v_L(t) = e(t) \\ LKC: & i(t) \\ v_1 = R_1 \cdot i \\ v_L = L \cdot \dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ Risolvendo il sistema

$\rightarrow$ $R_1 \cdot i + L \dfrac{di}{dt} - e(t) = 0$ Eq Differenziale

INCOGNITE

$\rightarrow$ Soluz: $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \beta)$

→ Derivate $\quad i'(t) = -I_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$

→ Sostituisco $\quad R_1 I_0 \cos(\omega t + \beta) - L I_0 \omega \sin(\omega t + \beta) = 100 \cos(50t + \varphi)$ $\quad \forall t$

FORMULE DI ADDIZIONE

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cdot\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

→ $R_1 I_0 \left[\cos(\omega t)\cos(\beta) + \sin(\omega t)\sin(\beta)\right] - L I_0 \omega \left[\sin(\omega t)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\omega t)\right] = 100\cos(50t + \varphi)$

→ RACCOLGO

$$\cos(\omega t)\left[R_1 I_0 \cos(\beta) - \omega L I_0 \sin(\beta)\right] +$$

$$-\sin(\omega t)\left[R_1 I_0 \sin(\beta) + \omega L I_0 \cos(\beta)\right] = 100\cos(50t)$$

$(\varphi = 0 \text{ Hp})$

→ Identità dei polinomi

Essenzialmente il classico sistema per risolvere le eq. differenziali: raccogliamo quello che è a sinistra, anche a destra e confrontiamo i coefficienti.

$$\begin{cases} (1) & R_1 I_0 \cos(\beta) - \omega L I_0 \sin(\beta) = 100 \\ (2) & R_1 \cancel{I_0} \sin(\beta) + \omega L \cancel{I_0} \cos(\beta) = 0 \end{cases}$$

Sistema di equazioni NON LINEARI

• TROVO β

dalla (2) $\quad R_1 \sin(\beta) = -\omega L \cos(\beta) \rightarrow \quad R_1 \tan(\beta) = -\omega L$

$$\rightarrow \tan(\beta) = -\frac{\omega L}{R_1} \rightarrow \boxed{\beta = -\operatorname{atan}\left(\frac{\omega L}{R_1}\right)} \quad \text{con } \beta \neq \frac{\pi}{2}$$

Fase

* Se $R_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow \infty$ $\quad$ NON CREDIBILE

* Se $L = 0 \Rightarrow \beta = 0 \rightarrow$ IL Circuito Torna ADINAMICO

• TROVO I_0 (Ampiezza)

Siccome $\quad \sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$

$$(1)^2: R_1^2 I_0^2 \cos^2(\beta) + \omega^2 L^2 I_0^2 \sin^2(\beta) - \cancel{2 R_1 \omega L I_0^2 \sin(\beta)\cos(\beta)} = 100^2$$

$$(2)^2: I_0^2 R_1^2 \sin^2(\beta) + I_0^2 \omega^2 L^2 \cos^2(\beta) + \cancel{2 R_1 \omega L I_0^2 \sin(\beta)\cos(\beta)} = 0$$

$$\rightarrow (1)^2 + (2)^2 \rightarrow (R_1 I_0)^2 \left[\cancel{\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)}\right] + (\omega L I_0)^2 \left[\underbrace{\cancel{\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)}}_{1}\right] = 100^2$$

$$\Rightarrow R_1^2 I_0^2 + \omega^2 L^2 I_0^2 = 100^2 \rightarrow I_0^2 = \frac{100^2}{R_1^2 + (\omega L)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{100}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}}}$$

Ampiezza

→ Metto insieme

$$i(t) = \frac{100}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} \cos\left[\omega t - \operatorname{atan}\left(\frac{\omega L}{R_1}\right)\right]$$

E' ovvio che non possiamo perdere tutto questo tempo ogni volta per calcolare fase ed ampiezza.
E' per questo motivo che utilizzeremo i **Numeri complessi:**

$$x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1 \quad \nexists\, x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad i^2=-j$$

num cpx

Fase

$$z=(M,\alpha) \rightarrow z = M \cdot e^{j\alpha}$$ Forma esponenziale

modulo

$$z = a + jb$$ Forma algebrica

$$\begin{cases} a = M\cos\alpha \\ b = M\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{M=\sqrt{a^2+b^2}} \\ tg\,\alpha = \frac{b}{a} \end{cases}$$

Modulo

Formula di Eulero

$$\boxed{e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha}$$

$$\boxed{\alpha = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) & a>0 \\ \pi + \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) & a<0 \end{cases}}$$ Fase

Fase

Operazioni con i numeri complessi

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + jb_1 \\ z_2 = a_2 + jb_2 \end{cases} \rightarrow \text{SOMMA / Sottrazione} \rightarrow \boxed{z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)}$$

Somma / Sottrazione

Moltiplicazione

$$\begin{cases} z_1 = M_1 e^{j\alpha_1} \\ z_2 = M_2 e^{j\alpha_2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{z_1 \cdot z_2 = M_1 M_2 \, e^{j(\alpha_1+\alpha_2)}}$$

Divisione

$$\rightarrow \boxed{z_1 / z_2 = M_1 M_2 \, e^{j(\alpha_1-\alpha_2)}}$$

Complesso coniugato

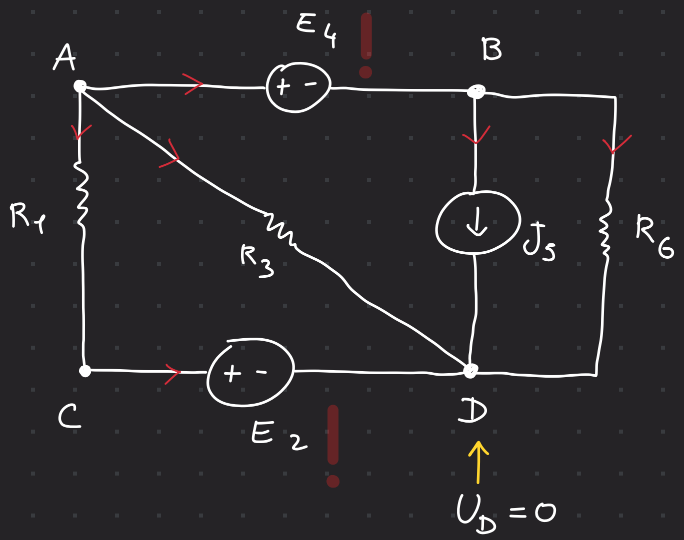
$$\boxed{\begin{array}{l} z = a + jb \rightarrow z^* = a - jb \\ z = M e^{j\alpha} \rightarrow z^* = M e^{-j\alpha} \end{array}}$$

$\longrightarrow$ Proprieta' $\rightarrow$

- $(z^*)^* = z$
- $z + z^* = 2a$
- $z - z^* = 2jb$
- $z \cdot z^* = M^2$

Metodo dei potenziali di nodi “modificato”

Nella lezione precedente abbiamo visto questo metodo ma solo nel caso in cui abbiamo **generatori ideali di corrente** e **resistori**.
Se ci sono anche **generatori ideali di tensione** dobbiamo modificare il metodo.



DATI

$R_1 = 10\,\Omega$
$R_3 = 20\,\Omega$
$R_6 = 80\,\Omega$
$J_5 = 2\,A$
$E_4 = 20\,V$
$E_2 = 10\,V$

* Tra A e D potremmo trasformare il gen con Thevenin e Norton!

Soluzione

(1) Scelgo un nodo da porre ad $U=0$

(2) LKC

$$\begin{cases} (A): & i_1 + i_4 + i_3 = 0 \\ (B): & J_5 - i_4 + i_6 = 0 \\ (C): & i_2 - i_1 = \emptyset \end{cases}$$

(3) Tensioni di lato in funzione dei potenziali

$$\begin{cases} v_1 = U_A - U_C \\ E_2 = U_C - U_D = U_C \\ v_3 = U_A - U_D = U_A \\ E_4 = U_A - U_B \\ v_5 = U_B - U_D = U_B \\ v_6 = U_B - U_D = U_B \end{cases}$$

(4) Rel Car Mancanti

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 \\ v_3 = R_3 i_3 \\ v_6 = R_6 i_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{v_1}{R_1} \\ i_3 = \frac{v_3}{R_3} \\ i_6 = \frac{v_6}{R_6} \end{cases}$$

(5) Sostituisco (3) e (4) in (2)

$$\begin{cases} (A): \boxed{\frac{U_A - U_C}{R_1}} + \boxed{i_4} + \frac{U_A}{R_3} \\ (B): \boxed{J_5} - i_4 + \boxed{\frac{U_B}{R_6}} \\ (C): \boxed{i_2} - \frac{U_A - U_C}{R_1} \\ E_2 = U_C \\ E_4 = U_A - U_B \end{cases}$$

[5 eq in 5 inc]

Incognite

NOTI

Eq Realmente da risolvere

Otteniamo (nel passaggio 5) 5 equazioni in 5 incognite; questo è il sistema che un calcolatore andrebbe a risolvere.

Noi umani, però, ci accorgiamo che ci sono alcune equazioni che aggiungono un’equazione ed un’ incognita (possiamo sostituire direttamente).
Inoltre notiamo che questo avviene proprio **nel lato in cui c’è il generatore “reale”** (ovvero il generatore con la resistenza in serie); questo perchè otteniamo la corrente *reale* del generatore ideale (mi riferisco all’eq (c) del punto 5).

(6) Notazione Matriciale

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\begin{cases} U_A(G_1+G_3) - G_1 U_C + i_4 = 0 \xrightarrow[U_C = E_1]{} U_A(G_1+G_3) + i_4 = G_1 E_2 \\ -i_4 + G_6 U_B = -J_5 \\ U_A - U_B = E_4 \end{cases}$$

Termine noto (1)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} U_A & U_B & i_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} G_1 + G_3 & 0 & 1 \\ 0 & G_6 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

dalle correnti i_4

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} G_1 E_2 \\ -J_5 \\ E_4 \end{pmatrix}$$