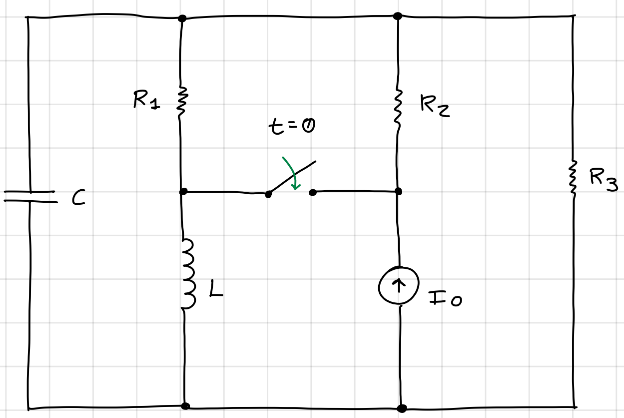
# ESERCIZIO PILOTA

Lezione 26



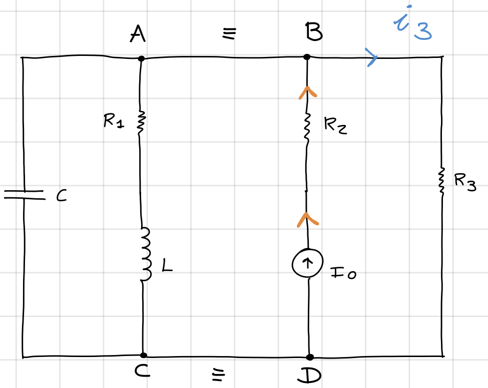

**DATI**

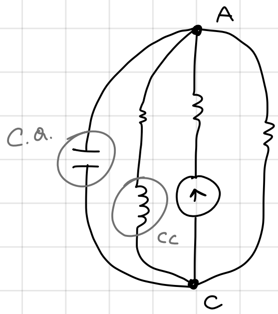
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | $R_1 = 80\,\Omega$ | | X | $I_0 = 0.6\,A$ |
| B | $R_2 = 90\,\Omega$ | | D | $L = 0.05\,H$ |
| C | $R_3 = 60\,\Omega$ | | E | $C = 4.7\,mF$ |

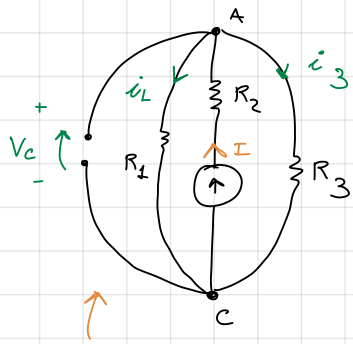
Q: $v_C = ?$

## t < 0   STAZIONARIO (interruttore Aperto)

Circuito Resistivo ASSOCIATO




In condizioni stazionarie ed **il circuito è carico** (*transitorio esaurito*) i dipoli dinamici (visti) si comportano nel seguente modo:

- **condensatore -> circuito aperto**
- **Induttore -> cortocircuito**

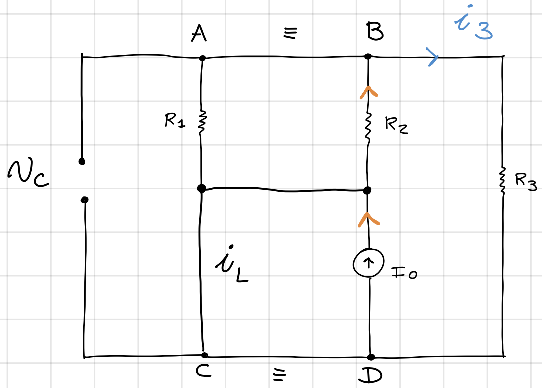
$$i_L = I_0 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_1} = 0.257\,A \quad i_L$$

$t<0$

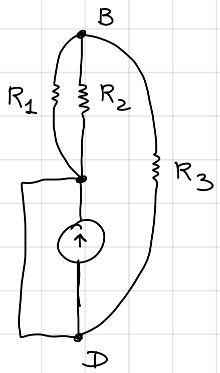
$$v_C \equiv v_{AC} = v_{R_1} = R_1 \cdot i_L = 20.57\,V \quad v_C$$

(C) ← cond. iniz. di Cauchy

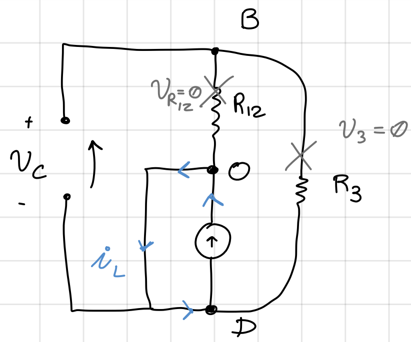
## t → ∞   STAZIONARIO (interruttore chiuso)




→




→

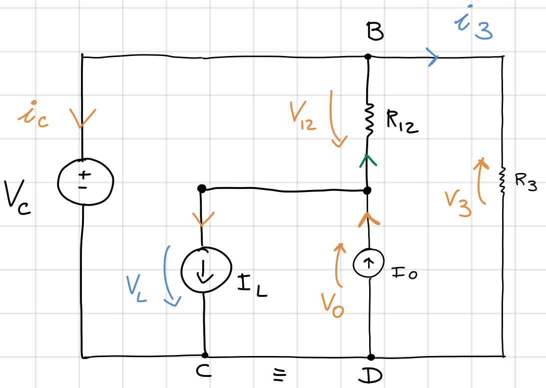



Soluzione particolare

$$t \to \infty \;\Rightarrow\; \begin{cases} i_L = I_0 \\ v_C = 0 \end{cases}$$

→ Non ha S.P.

$\boxed{t > 0}$ TRANSITORIO / DINAMICO (interruttore chiuso)

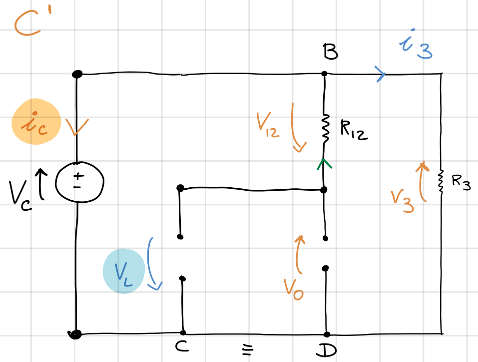



Sostituisco ai dipoli dinamici dei generatori:

- **condensatori** —> g.i. Tensione
- **induttori** —> g.i. Corrente

—▷ Risolvo il circuito (Per sovrapposizione degli effetti)

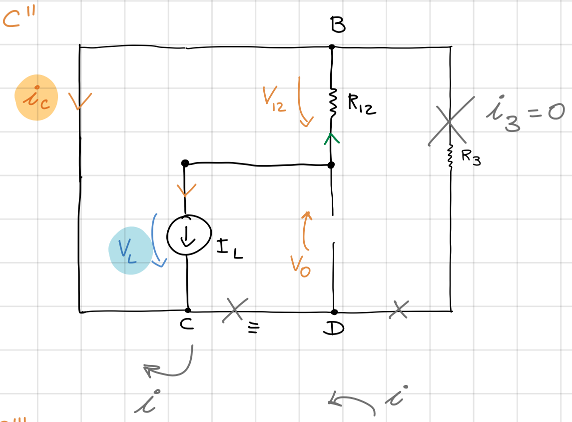
C'




$$i_c' = -\frac{V_c}{R_{eq}} = -\frac{V_c}{R_3}$$

$$v_L' = v_c$$

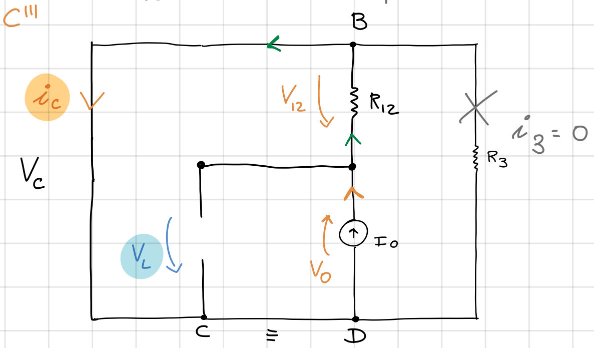
C''




$$i_c''(t) = -I_L$$

$$v_L''(t) = R_{eq} \cdot I_L = -R_{12} I_L$$

C'''




$$i_c'''(t) = I_0$$

$$v_L'''(t) = V_0 = I_0 \cdot R_{12}$$

—▷ Metto insieme

$$\begin{cases} i_c(t) = -\frac{V_c}{R_3} - I_L + I_0 \\ v_L(t) = v_c - R_{12} I_L + I_0 R_{12} \end{cases} \quad (A)$$

Relazioni Caratteristiche

$$(B) \quad \begin{aligned} i_c &= C \cdot \frac{d v_c}{dt} = C \dot{v} \\ v_L &= L \cdot \frac{d i_L}{dt} = L \cdot \dot{i} \end{aligned}$$

• Sostituisco (A) nelle (B)

$$\begin{cases} -\dfrac{V_C}{R_3} - I_L + I_0 = C\,\dot V_C \\[2ex] V_C - R_{12} I_L + I_0 R_{12} = L\,\dot i \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases}\dot V_C = -\dfrac{V_C}{R_3 C} - \dfrac{I_L}{C} + \dfrac{I_0}{C} & (1)\\[2ex] \dot i_L = \dfrac{V_C}{L} - \dfrac{R_{12}}{L} I_L + I_0\dfrac{R_{12}}{L} & (2)\end{cases}}$$

Equazioni di Stato

FORMA CANONICA

Trovo $i_L$ dalla (1) (modo 1)

$$\dot V_C = -\frac{V_C}{R_3 C} - \frac{i_L}{C} + \frac{I_0}{C} \rightarrow i_L = I_0 - \frac{V_C}{R_3} - \overbrace{C\dot V_C}^{i_C} \rightarrow i_L = I_0 - \frac{V_C}{R_3} - i_C \quad (3)$$

$\Rightarrow$ DERIVO $i_L$ $\Rightarrow$ $\dot i_L = -\dfrac{\dot V_C}{R_3} - \dot i_C + \emptyset$ (4)

Sostituisco (3), (4) $\rightarrow$ (2)

$$-\frac{\dot V_C}{R_3} - \dot i_C = \frac{V_C}{L} - \frac{R_{12}}{L}\left(I_0 - \frac{V_C}{R_3} - i_C\right) + I_0\frac{R_{12}}{L}$$

$$= \frac{V_C}{L} - \cancel{\frac{R_{12}}{L}I_0} + \frac{V_C}{R_3}\frac{R_{12}}{L} + \frac{R_{12}}{L}i_C + \cancel{I_0\frac{R_{12}}{L}}$$

$$\begin{cases} i_C = C\dot V_C \\ V_L = L\dot i_L\end{cases}$$

$$\rightarrow -\frac{\dot V_C}{R_3} - \dot i_C = \frac{V_C}{L} + \frac{V_C}{R_3}\frac{R_{12}}{L} + \frac{R_{12}}{L} i_C$$

$$\rightarrow \frac{\dot V_C}{R_3} + \dot i_C + \frac{1}{L}V_C + \frac{R_{12}}{R_3 L}V_C + \frac{R_{12}}{L} i_C = \emptyset \rightarrow \frac{\dot V_C}{R_3} + C\ddot V + \frac{1}{L}V_C + \frac{R_{12}}{R_3 L}V_C + \frac{R_{12}}{L}C\dot V_C$$

Rel carat $i_C = C\dot V \Rightarrow \dot i = C\ddot V_C$

$$\Rightarrow C\ddot V_C + \dot V_C\left(\frac{1}{R_3} + \frac{R_{12}}{L}C\right) + V_C\left(\frac{1}{L} + \frac{R_{12}}{R_3 \cdot L}\right) = \emptyset \quad (5)$$

**L'equazione differenziale non ha permutazioni di segno**, se i componenti sono *passivi*, tutti i termini nelle parentesi sono *maggiori di zero*, e dal punto di vista matematico ci garantisce che le soluzioni del polinomio caratteristico **sono sempre a parte reale minore di zero**.

Questo vuol dire che **tutti gli esponenziali tendono a zero,** ovvero **l'evoluzione libera non tende mai ad infinito.**

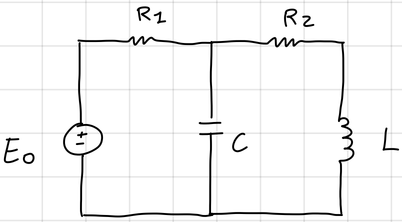
# Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{v}_c + \dot{v}_c \left( \frac{1}{R_3 C} + \frac{R_{12}}{L} \right) + \frac{v_c}{LC} \left( 1 + \frac{R_{12}}{R_3} \right) = \varnothing & (5) \\ v_c(0^+) = 20.6\ V \quad (c) \uparrow \\ \dot{v}_c(0^+) = \left[ - \frac{V_c}{R_3 C} - \frac{I_L}{C} + \frac{I_0}{C} \right] \Bigg|_{0^+} & (1) \quad \text{eq di stato} \end{cases}$$

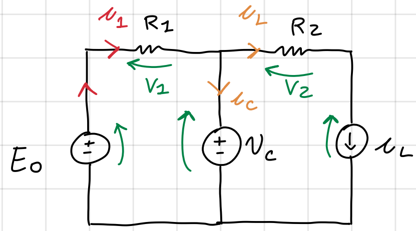
Sappiamo che $\quad v_c(t) \sim K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + \varnothing$

$\uparrow$ Sol part

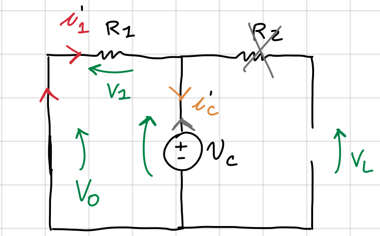
# Esempio circuito del II ordine     Lez 25 Nov



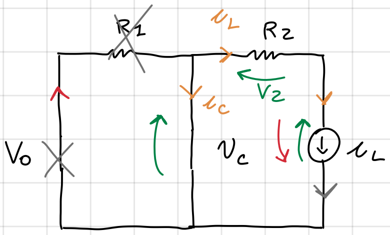

—> C.R.A —>



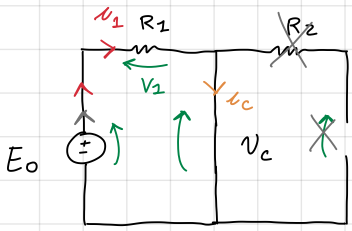

C'




C''




C'''




$$\begin{cases} i_C' = -\dfrac{V_C}{R_1} \\ V_L' = V_C \end{cases} \qquad \begin{cases} i_C'' = -i_L \\ v_L'' = -R_2 i_L \end{cases} \qquad \begin{cases} i_C''' = i_0''' = \dfrac{E_0}{R_1} \\ v_L''' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_C = -\dfrac{V_C}{R_1} - i_L + \dfrac{E_0}{R_1} \\ v_L = V_C - R_2 i_L \end{cases} \xrightarrow{\text{Rel Car}} \begin{cases} i_C = C \cdot \dfrac{dv_C}{dt} \\ v_L = L\dfrac{di_L}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot v_C = -\dfrac{V_C}{CR_1} - \dfrac{i_L}{C} + \dfrac{1}{CR_1}E_0 \\ \dot i_L = \dfrac{V_C}{L} - \dfrac{R_2}{L} i_L \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} \text{(a)} & \dot v_C + \dfrac{1}{R_1C} v_C + \dfrac{1}{C} i_L = \dfrac{E_0}{R_1C} \\ \text{(b)} & \dot i_L - \dfrac{1}{L} v_C + \dfrac{R_2}{L} i_L = 0 \end{cases}}$$

Eq di Stato

dalla (b) —> $\dot i_L - \frac{1}{L} v_C + \frac{R_2}{L} i_L = 0$ —> $v_C = L\dot i_L + R_2 i_L$ $\Rightarrow$ $\dot v_C = L\ddot i_L + R_2 \dot i_L$

Sostituisco nella (a) $L\ddot i_L + R_2 \dot i_L = -\frac{1}{R_1C}\left(L\dot i_L - R_2 i_L\right) + \frac{1}{C} i_L + \frac{E_0}{R_1C}$

$$L\ddot i_L + R_2 \dot i_L + \frac{L}{R_1C}\dot i_L - \frac{R_2}{R_1C} i_L - \frac{1}{C} i_L = E_0 \frac{1}{R_1C}$$

$$\rightarrow L\ddot i_L + \dot i_L\left[\frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{R_1C}\right] + i_L\left[-\frac{R_2 + R_1}{R_1C}\right] = E_0\frac{1}{R_1C}$$

Possiamo riscriverla come $\ddot i_L + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{RC}\right)\dot i_L + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)\frac{1}{LC} i_L = \frac{E_0}{R_1LC}$ (A)

Abbiamo le c.i.: $\begin{cases} i_L(0^+) = I_0 & \text{(B)} \\ \dot i_L(0^+) = \text{(b)}\Big|_{0^+} = \left[\dot i_L - \frac{1}{L}v_C + \frac{R_2}{L} i_L\right]\Big|_{0^+} & \text{(C)} \end{cases}$

* la seconda condizione iniziale è la seconda equazione di stato all'istante 0+

PARTE (2). Ricavare DIRETTAMENTE le 2 freq Naturali come Autovalori

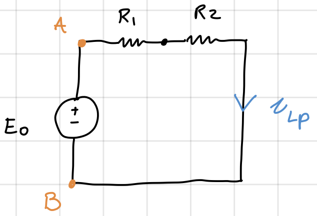
$$\begin{cases} \dot{v}_C = \overset{a}{-\frac{1}{R_1 C}}\, v_C \overset{b}{-\frac{1}{C}}\, i + \frac{1}{C R_1} E_0 \\ \dot{i}_L = \underset{c}{\frac{1}{L}}\, v_C \underset{d}{-\frac{R_2}{L}}\, i_L \end{cases} \qquad \underline{X}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\underline{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \underline{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{C R_1} E_0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

$\rightarrow$ $\lambda^+$ e $\lambda^-$ sono gli Autovalori di $\underline{\underline{A}}$ $\Rightarrow$ $\det(\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0$ $\Leftrightarrow$ Polinomio Caratt.

[. . .]

PARTE (3) Soluzione a regime




$$v_{Lp} = \frac{E_0}{R_1 + R_2}$$

$$v_{Cp} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_0$$