



$$e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \forall t$$

Amplitude \downarrow E_m

Phase \downarrow φ

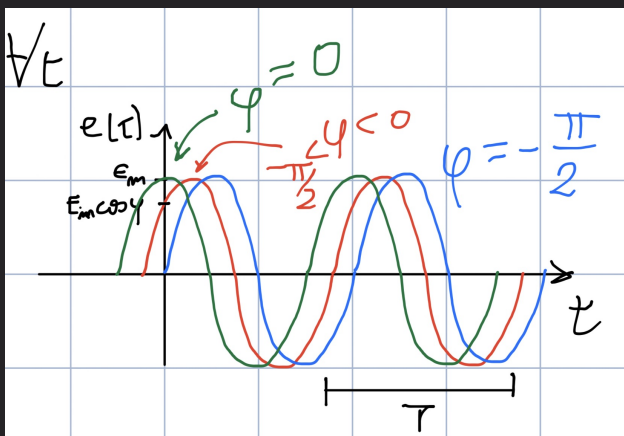
Pulsazione \uparrow ω

Come se dicessimo che il nostro generatore $e(t)$ esiste da sempre e continuerà ad esistere per sempre...
Parliamo quindi di un caso ideale

- $\omega = 2\pi f \rightarrow [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- $f = \frac{1}{T} \rightarrow [f] = \text{Hz} = \text{s}^{-1}$
[T] = s

→ Per combattere questa idealità diciamo che **il circuito deve essere lineare e dissipativo**

- Circuito Dissipativo:** quando contiene almeno un dipolo strettamente passivo effettivamente in grado di dissipare energia; in altre parole il dipolo deve essere attraversato da corrente, altrimenti non dissiperà energia.



A seconda di **come scelgo l'asse dei tempi** (y) le varie sinusoidi "cambieranno". Se ad esempio posiziono l'asse $e(t)$ in modo da far capitare il picco della sinusoide blu in 0, questa diventerà una cosinusoide e quella verde diventerà una sinusoide **in ritardo** (o in anticipo).

L'unica cosa che **non cambia** è lo **sfasamento reciproco** tra le sinusoidi (ovvero $\pi/2$)

→ La fase assoluta "conta poco" (nei calcoli conta molto), ma la differenza di fase è un valore molto più importante.

REGIME SINUSOIDALE

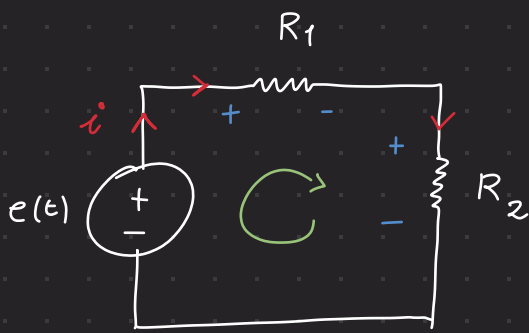
Se i generatori del circuito sono sinusoidi **tutti aventi la stessa pulsazione**, tutte le tensioni e correnti le circuiti saranno sinusoidali con la stessa pulsazione dei generatori; il circuito si dice quindi **in regime sinusoidale**.

In altre parole **tutte le sinusoidi** e correnti del circuito hanno la stessa pulsazione.

$$\begin{cases} v_k(t) = V_k \cos(\omega t + \alpha_k) \\ i_k(t) = I_k \cos(\omega t + \beta_k) \end{cases} \quad \text{con } k \in \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Bipoli} \end{matrix}$$

Come approcciare alla risoluzione dei circuiti in regime sinusoidale

• Sistema Canonico - Caso ADINAMICO



DATI

$$e(t) = 100 \cos(50t + \varphi)$$

$$R_1 = 20 \, \Omega$$

$$R_2 = 40 \, \Omega$$

$$\begin{cases} \text{LKT: } v_1 + v_2 - e(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{LKC: } i(t) \leftarrow \text{Stessa corrente in tutto il circuito} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = R_1 \cdot i \\ v_2 = R_2 \cdot i \end{cases} \quad \text{RELAZIONI ADINAMICHE}$$

- Corrente

$$v = R \cdot i \Rightarrow i(t) = \frac{e(t)}{R_{eq}} = \frac{100 \cos(50t + \varphi)}{60} = \frac{10}{6} \cos(50t + \varphi)$$

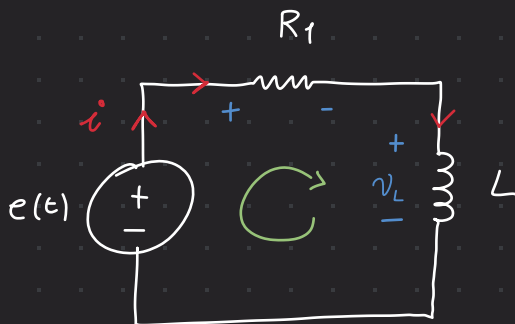
- Tensioni

$$v_1 = R_1 \cdot i = \frac{20}{20} \cdot \frac{10}{6} \cos(50t + \varphi)$$

$$v_2 = R_2 \cdot i = \frac{40}{40} \cdot \frac{10}{6} \cos(50t + \varphi)$$

STESSA
FASE

• Sistema Canonico - Caso DINAMICO



$$\begin{cases} \text{LKT: } v_1(t) + v_L(t) = e(t) \\ \text{LKC: } i(t) \\ v_1 = R_1 \cdot i \\ v_L = L \cdot \frac{di}{dt} \end{cases}$$

↳ Risolvendo il Sistema

$$\Rightarrow R_1 \cdot i + L \frac{di}{dt} - e(t) = 0 \quad \text{Eq Differenziale}$$

INCOGNITE

$$\Rightarrow \text{Soluz: } i(t) = I_0 \cos(\omega t + \beta)$$

-> Derivate $i'(t) = -I_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$

-> Sostituisco $R_1 I_0 \cos(\omega t + \beta) - L I_0 \omega \sin(\omega t + \beta) = 100 \cos(50t + \varphi)$ ↗ $\forall t$

FORMULE DI ADDIZIONE

$$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

-> $R_1 I_0 [\cos(\omega t) \cos(\beta) + \sin(\omega t) \sin(\beta)] - L I_0 \omega [\sin(\omega t) \cos(\beta) + \cos(\omega t) \sin(\beta)] = 100 \cos(50t + \varphi)$

-> RACCOLGO $\cos(\omega t) [R_1 I_0 \cos(\beta) - \omega L I_0 \sin(\beta)] + \sin(\omega t) [R_1 I_0 \sin(\beta) + \omega L I_0 \cos(\beta)] = 100 \cos(50t)$ ($\varphi=0$ HP) ↓

-> Identità dei polinomi

Essenzialmente il classico sistema per risolvere le eq. differenziali: raccogliamo quello che è a sinistra, anche a destra e confrontiamo i coefficienti.

$$\begin{cases} (1) \ R_1 I_0 \cos(\beta) - \omega L I_0 \sin(\beta) = 100 \\ (2) \ R_1 I_0 \sin(\beta) + \omega L I_0 \cos(\beta) = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Sistema di equazioni} \\ \text{NON LINEARI} \end{array} \right]$$

• TROVO β

dalla (2) $R_1 \sin(\beta) = -\omega L \cos(\beta) \rightarrow R_1 \tan(\beta) = -\omega L$

-> $\tan(\beta) = -\frac{\omega L}{R_1} \rightarrow \beta = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R_1}\right)$ con $\beta \neq \frac{\pi}{2}$

Fase

* Se $R_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow \infty$ NON CREDIBILE

* Se $L = 0 \Rightarrow \beta = 0 \rightarrow$ IL CIRCUITO TORNA ADINAMICO

• TROVO I_0 (Ampiezza)

Siccome $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$

(1)²: $R_1^2 I_0^2 \cos^2(\beta) + \omega^2 L^2 I_0^2 \sin^2(\beta) - 2 R_1 \omega L I_0^2 \sin(\beta) \cos(\beta) = 100^2$

(2)²: $I_0^2 R_1^2 \sin^2(\beta) + I_0^2 \omega^2 L^2 \cos^2(\beta) + 2 R_1 \omega L I_0^2 \sin(\beta) \cos(\beta) = 0$

$$\rightarrow (1)^2 + (2)^2 \rightarrow (R_1 I_0)^2 [\cancel{\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)}] + (\omega L I_0)^2 [\cancel{\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)}] = 100^2$$

$$\rightarrow R_1^2 I_0^2 + \omega^2 L^2 I_0^2 = 100^2 \rightarrow I_0^2 = \frac{100^2}{R_1^2 + (\omega L)^2}$$

$$\rightarrow I_0 = \frac{100}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}}$$

Ampiezza

→ Metto Insieme

$$i(t) = \frac{100}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} \cos \left[\omega t - \arctan \left(\frac{\omega L}{R_1} \right) \right]$$

E' ovvio che non possiamo perdere tutto questo tempo ogni volta per calcolare fase ed ampiezza.
 E' per questo motivo che utilizzeremo i **Numeri complessi**:

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \quad \underline{\cancel{x \in \mathbb{R}}} \quad \Rightarrow i^2 = -1$$

num cpx

$$z = (M, \alpha)$$

↓ ↑
 Fase modulo

$$\rightarrow z = M \cdot e^{j\alpha}$$

Forma esponenziale

$$z = a + jb$$

Forma algebrica

Formula di Eulero

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

Modulo

$$\begin{cases} a = M \cos \alpha \\ b = M \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} M = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \alpha = \frac{b}{a} \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

Fase

Fase

Operazioni con i numeri complessi

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + jb_1 \\ z_2 = a_2 + jb_2 \end{cases}$$

SOMMA
Sottrazione

Somma / Sottrazione

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

Moltiplicazione

$$\rightarrow z_1 \cdot z_2 = M_1 M_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\begin{cases} z_1 = M_1 e^{j\alpha_1} \\ z_2 = M_2 e^{j\alpha_2} \end{cases}$$

Divisione

$$\rightarrow z_1 / z_2 = M_1 / M_2 e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

Complesso coniugato

$$\begin{aligned} z &= a + jb \rightarrow z^* = a - jb \\ z &= M e^{j\alpha} \rightarrow z^* = M e^{-j\alpha} \end{aligned}$$

Proprietà

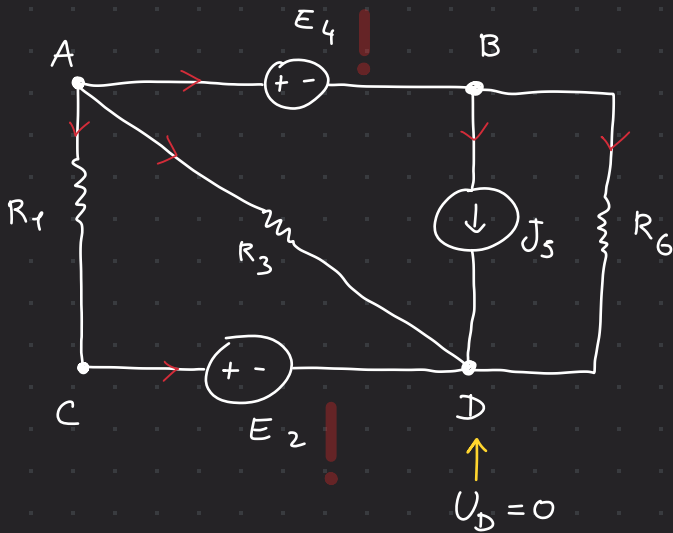
$$(z^*)^* = z$$

$$\begin{aligned} \bullet z + z^* &= 2a \\ \bullet z - z^* &= 2jb \\ \bullet z \cdot z^* &= M^2 \end{aligned}$$

Metodo dei potenziali di nodi "modificato"

Nella lezione precedente abbiamo visto questo metodo ma solo nel caso in cui abbiamo **generatori ideali di corrente** e **resistori**.

Se ci sono anche **generatori ideali di tensione** dobbiamo modificare il metodo.



DATI

$$\begin{aligned} R_1 &= 10\ \Omega \\ R_3 &= 20\ \Omega \\ R_6 &= 80\ \Omega \\ J_5 &= 2\text{ A} \\ E_4 &= 20\text{ V} \\ E_2 &= 10\text{ V} \end{aligned}$$

* Tra A e D potremmo trasformare il gen con Thevenin e Norton!

Soluzione

(1) Scelgo un nodo da porre ad $U=0$

(2) LKC

$$\begin{cases} (A): i_1 + i_4 + i_3 = 0 \\ (B): J_5 - i_4 + i_6 = 0 \\ (C): i_2 - i_1 = 0 \end{cases}$$

(3) Tensioni di lato in funzione dei potenziali

$$\begin{cases} V_1 = U_A - U_C \\ E_2 = U_C - U_D = U_C \\ V_3 = U_A - U_D = U_A \\ E_4 = U_A - U_B \\ V_5 = U_B - U_D = U_B \\ V_6 = U_B - U_D = U_B \end{cases}$$

(4) Rel Car Mancanti

$$\begin{cases} V_1 = R_1 i_1 \\ V_3 = R_3 i_3 \\ V_6 = R_6 i_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{V_1}{R_1} \\ i_3 = \frac{V_3}{R_3} \\ i_6 = \frac{V_6}{R_6} \end{cases}$$

Otteniamo (nel passaggio 5) 5 equazioni in 5 incognite; questo è il sistema che un calcolatore andrebbe a risolvere.

Noi umani, però, ci accorgiamo che ci sono alcune equazioni che aggiungono un'equazione ed un'incognita (possiamo sostituire direttamente).

Inoltre notiamo che questo avviene proprio **nel lato in cui c'è il generatore**

"reale" (ovvero il generatore con la resistenza in serie); questo perché otteniamo la corrente *reale* del generatore ideale (mi riferisco all'eq (c) del punto 5).

(5) Sostituisco (3) e (4) in (2)

$$\begin{cases} (A): \frac{U_A - U_C}{R_1} + i_4 + \frac{U_A}{R_3} \\ (B): J_5 - i_4 + \frac{U_B}{R_6} \\ (C): i_2 - \frac{U_A - U_C}{R_1} \end{cases}$$

Incognite
NOTI

$$E_2 = U_C$$

$$E_4 = U_A - U_B$$

↑ Eq realmente da risolvere

[5 eq in 5 inc]

(6) Notazione Matriciale

Termine noto (1)

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\begin{cases} U_A(G_1 + G_3) - G_1 U_C + i_4 = 0 \\ -i_4 + G_6 U_B = -J_5 \\ U_A - U_B = E_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{--- D} \\ U_C = E_1 \end{array} \quad U_A(G_1 + G_3) + i_4 = \textcircled{G_1 E_2}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} U_A & U_B & i_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} G_1 + G_3 & 0 & 1 \\ 0 & G_6 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

↑
dalle correnti i_4

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} G_1 E_2 \\ -J_5 \\ E_4 \end{pmatrix}$$