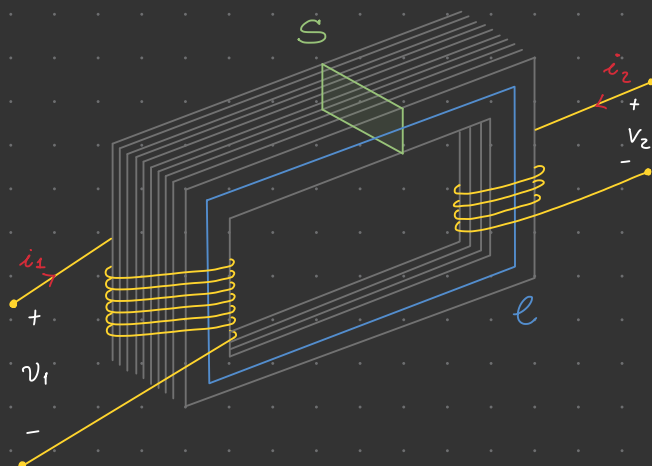


DOPPIO BIPOLO ACCOPPIAMENTO MUTUO TRA INDUTTORI



Semplificazione:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \rightarrow \text{Lineare}$$

$$\begin{cases} L_1 = \mu \frac{N_1^2 S}{l} \\ L_2 = \mu \frac{N_2^2 S}{l} \end{cases}$$

Avvolgimenti
 lunghezza media

Sappiamo che...

$$\begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 \\ \phi_2 = L_2 i_2 + M_{21} i_1 \end{cases}$$

Induzione dovuta alla Spira 2

Coefficiente di MUTUA INDUZIONE (M)

Induzione dovuta alla Spira 1

flusso concatenato

Si dimostra che

$$(1) \quad M_{12} = M_{21} = M$$

RECIPROCA!

Siccome

Legge di Lenz $v \propto \frac{d\phi}{dt}$

→ deriviamo

$$\begin{cases} \frac{d\phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \\ \frac{d\phi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a) \quad v_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 \\ (b) \quad v_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

Potenza del DB A.MUTUA

* da questo momento metterò i puntini sulle i solo quando sono derivate rispetto al tempo

Abbiamo visto che $P^a(t) = \sum_k^N v_k \cdot \dot{i}_k$

(1), (2)

$$\Rightarrow P^a(t) = v_1 \dot{i}_1 + v_2 \dot{i}_2 = L_1 \dot{i}_1 \dot{i}_1 + M \dot{i}_1 \dot{i}_2 + M \dot{i}_2 \dot{i}_1 + L_2 \dot{i}_2 \dot{i}_2$$

$$\text{ma } \frac{d i^2}{dt} = 2 i \dot{i} \Rightarrow \begin{cases} i_1 \dot{i}_1 = \frac{1}{2} \frac{d i_1^2}{dt} \\ i_2 \dot{i}_2 = \frac{1}{2} \frac{d i_2^2}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P^a(t) = \frac{1}{2} L_1 \frac{d i_1^2}{dt} + M (\dot{i}_1 i_2 + \dot{i}_2 i_1) + \frac{1}{2} L_2 \frac{d i_2^2}{dt}$$

Derivata di un prodotto

$$= \frac{1}{2} L_1 \frac{d i_1^2}{dt} + M \frac{d}{dt} (i_1 \cdot i_2) + \frac{1}{2} L_2 \frac{d i_2^2}{dt}$$

Ma siccome

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} P^a dt$$

$$\Rightarrow P^a = \frac{d W_a}{dt}$$

Energia immagazzinata

$$\Rightarrow \int P^a dt = \int \frac{d W_a}{dt} dt \Rightarrow W_a = \int P^a dt$$

=>

$$W_a = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Energia immagazzinata

Energia imm.
MUTUA

N.B. Questa è l'energia immagazzinata funzione di i_1 e i_2 immaginando che ci sia un istante di tempo in cui $t=0$, proprio perché stiamo integrando ed abbiamo bisogno di una **condizione iniziale**

L'energia immagazzinata è sempre ≥ 0

Il bipolo è passivo \Rightarrow

$$W_a \geq 0$$

Tesi

$$\forall i_1, i_2$$

Proof

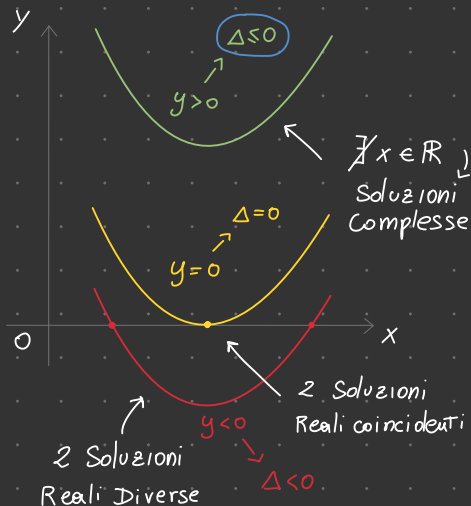
- $i_1 = 0$, $W_a = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \geq 0 \Rightarrow L_2 \geq 0$ Condizione
↓
Visto in fisica
- $i_2 = 0$, $W_a = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \geq 0 \Rightarrow L_1 \geq 0$
- $i_1, i_2 \neq 0 \Rightarrow i_2^2 \left[\frac{1}{2} L_1 \left(\frac{i_1}{i_2} \right)^2 + \frac{1}{2} L_2 + M_1 \frac{i_1}{i_2} \right] \geq 0$

pongo $\frac{i_1}{i_2} = x$

$$\Rightarrow \cancel{i_2^2} \left[\frac{1}{2} L_1 x^2 + M x + \frac{1}{2} L_2 \right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} L_1 x^2 + M x + \frac{1}{2} L_2 \geq 0$$

Quando è ≥ 0 ?



$$\begin{aligned} \text{Ci serve } \Delta &\leq 0 \\ \text{ma } \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ &= M^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} L_1 \cdot \frac{1}{2} L_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M^2 - L_1 L_2 \leq 0$$

$$\Rightarrow M^2 \leq L_1 L_2$$

Affinché l'energia immagazzinata sia maggiore di zero, il coefficiente di autoinduzione deve essere minore uguale al prodotto tra le due induzioni

COEFFICIENTE DI ACCOPPIAMENTO

$$k \triangleq \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Siccome $|k| \leq 1$

↑
Per costruzione

→ Se $|k| = 1$

ACCOPPIAMENTO
PERFETTO

CIRCUITO EQ IN ACC. PERFETTO

Quanto il circuito equivalente in accoppiamento perfetto è vicino al trasformatore ideale?

$$\begin{cases} v_1 = L_1 (i_1 + \frac{M}{L_1} i_2) \\ v_2 = M (i_1 + \frac{L_2}{M} i_2) \end{cases}$$

#p: le derivate sono diverse da 0
→ $i_1, i_2 \neq 0$

-o Divido Membro a membro

$$\rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{M} \frac{i_1 + \frac{M}{L_1} i_2}{i_1 + \frac{L_2}{M} i_2}$$

RAPPORTO DI
TRASFORMAZIONE

Se Acc perf -o $M^2 = L_1 L_2 \Rightarrow \frac{M}{L_1} = \frac{L_2}{M} = n$

=o

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{M}$$

chiamo

$$n = \frac{L_1}{M}$$

(4)

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = n \rightarrow$$

$$v_1 = n v_2$$

Per le tensioni il mutuo accoppiamento in accoppiamento perfetto si comporta come il trasformatore ideale

Se ricordiamo L_1 ed M ...

$$L_1 = \mu \frac{N_1^2 S}{e} \quad \rightarrow \text{si dimostra che} \quad M = \mu \frac{N_1 N_2 S}{e}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2} = n} \quad \text{RAPPORTO DI TRASFORMAZIONE}$$

↑ SPIRE
o AVVOLGIMENTI

$n:1$

ES

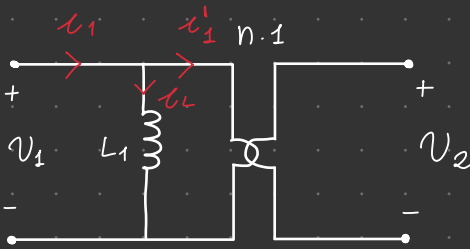
Voglio avere un rapporto di trasformazione $3:1$ ↑

$$\Rightarrow \frac{L_1}{M} = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \text{IN} \\ \text{OUT} \end{matrix} \frac{300 \text{ spire}}{100 \text{ spire}} = 3$$

Voglio alzare di un fattore 10?

$$\frac{L_1}{M} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \text{IN} \\ \text{OUT} \end{matrix} \frac{100 \text{ spire}}{1000 \text{ spire}} = \frac{1}{10}$$

IL CIRCUITO EA di un ACC PERFETTO



proof

Se il circuito a sinistra ha come equazioni quelle dell'accoppiamento mutuo perfetto, allora è proprio il suo circuito equivalente.

→ Rel Caratteristica Induttore L_1

$$v_1 = L_1 \frac{d(i_1)}{dt} = L_1 \frac{d(i_1 - i_1')}{dt} = L_1 \dot{i}_1 - L_1 \dot{i}_1'$$

Derivata di una Differenza

Siccome i_1' è la corrente che entra in un trasformatore ideale, è legata dalla relazione:

Trasformatore Ideale → (5) $\begin{cases} (a) & v_1 = n v_2 \\ (b) & i_2 = -n i_1 \end{cases} \Rightarrow i_1 = -\frac{1}{n} i_2$

$\Rightarrow v_1 = L_1 \dot{i}_1 + L_1 \frac{1}{n} \dot{i}_2$

$\Rightarrow v_1 = L_1 \dot{i}_1 + M \dot{i}_2$ QED₍₁₎ è proprio (a) di (2) ↑

Inoltre dalla (5) (a) $v_1 = n v_2$

$\Rightarrow n v_2 = L_1 \dot{i}_1 + M \dot{i}_2 \Rightarrow v_2 = \frac{L_1 \dot{i}_1}{n} + \frac{M \dot{i}_2}{n}$

$\Rightarrow v_2 = M \dot{i}_1 + L_2 \dot{i}_2$ QED₍₂₎ (b) (2)

CIRCUITO EQUIVALENTE PER $|K| < 1$ (NON PERFETTO)

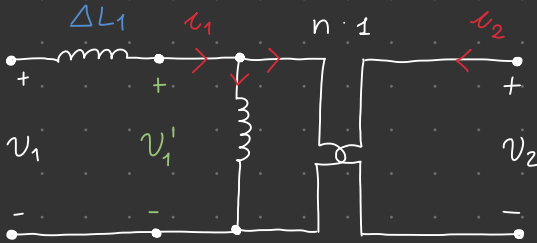
Sappiamo che

$$\begin{cases} M^2 = L_1' L_2 \\ L_1 = L_1' + \Delta L_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1' = \frac{M^2}{L_2}; L_1' < L_1 \\ \Delta L_1 = L_1 - L_1'; \Delta L_1 > 0 \end{cases}$$

FLUSSO DISPERSO
IN SERIE

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \Delta L_1 \dot{i}_1 + L_1' \dot{i}_1 + M \dot{i}_2 \\ v_2 = M \dot{i}_1 + L_1 \dot{i}_2 \end{cases}$$

FLUSSO DISPERSO



DIMOSTRAZIONE: MUTUA INDUZIONE

$$M_{12} = M_{21} = M \quad \text{TESI}$$

$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = L_1 i_1 \dot{i}_1 + M_{12} \dot{i}_2 i_1 + M_{21} \dot{i}_1 i_2 + L_2 i_2 \dot{i}_2$$

$$\text{Siccome } p = \frac{dW(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow dW = p dt = (L_1 i_1 + M_{21} i_2) di_1 + (M_{12} i_1 + L_2 i_2) di_2$$

L'energia è una
grandezza di
stato

\Rightarrow

è un
differenziale
esatto

\Rightarrow

Ha le
derivate
miste uguali

\Rightarrow

$$\begin{cases} dW = \frac{\partial W}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial W}{\partial i_2} di_2 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial i_2 \partial i_1} = \frac{\partial^2 W}{\partial i_1 \partial i_2} \Rightarrow M_{21} = M_{12} \end{cases}$$

QED