

Dinamica

da Dinamica e' quella parte della fisica che cerca di collegare le cause del moto con gli effetti; le cause dei moti sono per lo piu' le FORZE.

I PRINCIPI che vedremo non sono dimostrabili; possiamo solo vedere se "funzionano o no".

Nella meccanica di Aristotele si legge: "Il corpo si arresta quando non c'e' piu' una forza a spingerlo. Possiamo tradurre il tutto in formule: $F = k \cdot v$

Galileo non e' d'accordo: non sempre ci si puo' fidare delle conclusioni intuitive.

Primo principio della Dinamica

Principio di inerzia di Galileo

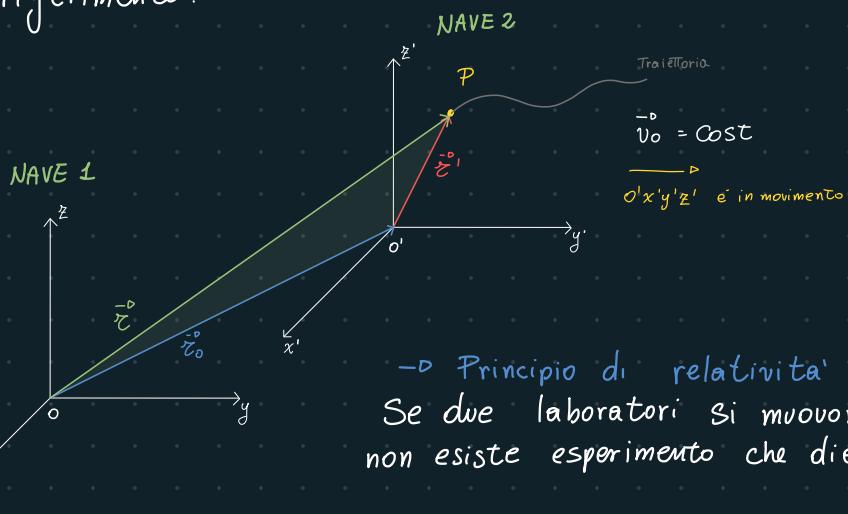
Un corpo su cui non agiscono cause esterne o e' FERMO o la sua velocita' e' COSTANTE, il suo moto e' di tipo RETTILINEO UNIFORME.

\Rightarrow Galileo si accorge che un oggetto continua a muoversi anche se non viene piu' spinto
 \Rightarrow Se non ci sono forze che agiscono su di esso. Es: il carrello della spesa spinto e lasciato continua a muoversi.

\Rightarrow Eliminando progressivamente gli attriti, il carrello si muovera' sempre per piu' spazio.
Galileo costruisce un modello in cui non sono presenti attriti, ed il carrello si muove all'infinito.

Conclusioni: Quando vediamo un moto accelerato quasi sicuramente possiamo identificare una causa della corrispondente accelerazione.

Il primo principio vale per tutti i possibili osservatori, e quindi tutti i sistemi di riferimento:



Valgono le condizioni delle trasformazioni galileiane, ovvero la velocita' relativa tra i sistemi e' COSTANTE $\Rightarrow \ddot{a} = 0$

\Rightarrow Principio di relativita' di Galileo:
Se due laboratori si muovono di moto rettilineo uniforme non esiste esperimento che dia risultati diversi.

Quindi dai risultati degli esperimenti non c'e' modo di capire quale dei due laboratori e' fermo e quale e' in movimento.

\Rightarrow Questo vuol dire che se il primo principio vale per il lab fermo, deve valere anche per il lab in movimento. \Rightarrow In entrambi vale il principio di inerzia.

Definizione. Un sistema viene detto INERZIALE se vale il principio di inerzia.

Se il sistema non si muove di moto rettilineo, ma di moto accelerato, non vale più il principio di inerzia \Rightarrow questi sistemi non sono inerziali.

Questo perché un corpo che era in stato di quiete, non rimane in stato di quiete.

Secondo principio della Dinamica

Definizione di forza: Diciamo che un corpo è soggetto ad una forza quando varia il suo moto o quando subisce delle deformazioni.

Secondo principio

Legge di Newton :

$$\vec{F} = \boxed{m} \cdot \vec{a}$$

\uparrow
Costante
di Proporzionalità

\rightarrow da forza è direttamente proporzionale all'accelerazione

• $\vec{F} = \boxed{m} \cdot \vec{a}$ vettore
Scalare

Se moltiplichiamo uno scalare per un vettore si ottiene un altro vettore \Rightarrow Le forze sono vettori proof

• $\vec{F} = \boxed{m} \cdot \vec{a}$

\uparrow
Viene anche detta Massa inerziale

definizione di Massa inerziale: è la capacità del corpo di opporsi alle variazioni del moto.

\hookrightarrow Il corpo "vuole rimanere fermo".

Come MISURARE la MASSA INERZIALE di un corpo?

Otteniamo la formula inversa: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}}$

Ovvero Applichiamo una forza NOTA ed osservare l'accelerazione.
Successivamente applichiamo la formula inversa dividendo la forza nota per l'accelerazione.

ATTENZIONE! La massa inerziale non si misura con la Bilancia!

Il Dinamometro possiamo misurare le forze anche con il dinamometro, che funziona grazie alla deformazione di una molla.

Sistemi Non inerziali

Nei sistemi che subiscono l'azione di forze esterne, o che la somma delle forze totali NON E' ZERO, vengono detti: Sistemi non inerziali, ed i principi visti non valgono.

Morale della favola: NON ESISTE un solo sistema inerziale, ovvero "Fermo".

→ Questo vuol dire che tutti i sistemi sono NON INERZIALI

C'è però una Soluzione: Newton dice che DEVE esistere lo SPAZIO ASSOLUTO, che consiste in uno spazio fisico assoluto ed immutabile, ovvero che rimane fermo. Lo stesso vale per il TEMPO ASSOLUTO.

Con l'avvento di Einstein, però, si scopre che sia spazio che tempo sono RELATIVI ALL'OSSESSORATORE.

Dovute trascurazioni: se ci si posiziona "all'interno" del sistema, e quindi Localmente, è possibile dire che il sistema è inerziale, perché le FORZE possono essere trascurate.

Se si guarda lo stesso sistema "da più lontano", esso potrebbe non essere più inerziale perché le forze non più trascurabili.

Se si osservano delle forze ma non si riesce a trovarne la FONTE, bisogna concludere che ci si trova in un Sistema NON INERZIALE.

Forza Di gravita'

per sistemi
INERZIALI

La forza \vec{F}
ha verso opposto
ad $\hat{\tau}$

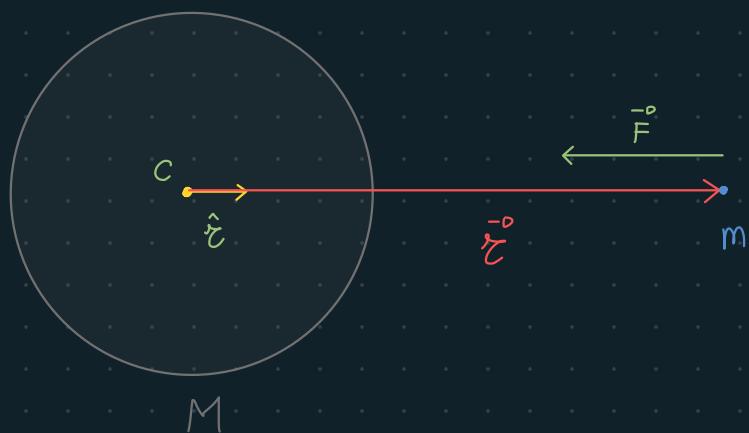
$$\vec{F} = -G \frac{m \cdot M}{\tau^2} \hat{\tau}$$

MODULO

Versore lungo

raggio

- da forza di gravita'
è SEMPRE ATTRATTIVA.



Cosa Succede se ci posizioniamo sulla terra?

- m massa del "gessetto" \rightarrow corpo molto "leggero"
- M Massa della terra
- τ Raggio della terra

\rightarrow Se compiliamo questi "pezzi" possiamo calcolare la forza che agisce sul corpo piccolo:

Accelerazione di gravita' (terra)

$$|\vec{F}| = m \frac{G M_{\text{terra}}}{R_{\text{terra}}^2} = m \cdot |\vec{g}|$$

DIFERENZA TRA MASSA E PESO

Massa (Chili Kg)

La massa è uno SCALARE (numero);
essa è la quantità di materia
contenuta nell'oggetto, e non cambia
a seconda del pianeta dove viene
misurata

PESO (Newton N)

Il peso è una FORZA, ovvero
la forza di gravità sulla superficie
della terra.

La Costante Gravitazionale



Se poniamo $M = m = 1 \text{ kg}$ e $d = 1 \text{ m}$ otteniamo:

- $|\vec{F}| = G$ $\rightarrow G$ è il modulo della forza che una massa di 1 kg attira un'altra massa di 1 kg alla distanza di 1 metro.
- $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}}$

Il problema della massa

Sappiamo che la **massa inerziale** è la capacità di un corpo a mettersi in moto; ma questo non sembra il caso nella formula di gravitazione:

$$|\vec{F}| = G \cdot \frac{m \cdot M}{d^2} \rightarrow \text{Maggiore è la massa, maggiore sarà la forza di attrazione.}$$

\Rightarrow Concludiamo che le masse della formula della forza di gravità non sono masse inerziali, ma qualcos'altro.

MASSA GRAVITAZIONALE: è la capacità di un corpo di ATTIRARE o essere attirato da un altro corpo

La massa inerziale e gravitazionale

Sono la stessa Cosa

Fino a questo punto abbiamo visto che la forza puo' essere scritta in due modi:

- $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ Forza in generale
- $\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{d^2} \cdot \hat{\vec{r}}$ Forza gravitazionale

→ Possiamo egualizzare i membri

$$\bullet m_i^m \cdot a^m = \frac{G M_{\text{luna}} \cdot m_g^m}{r^2}$$

martello

massa gravitazionale

massa inerziale

$$\bullet m_i^p \cdot a^p = \frac{G \cdot M_{\text{luna}} \cdot m_g^p}{r^2}$$

piuma

→ Dividiamo membro a membro le due eq

$$\frac{m_i^m \cdot a^m}{m_i^p \cdot a^p} = \frac{G M_{\text{luna}} \cdot m_g^m}{r^2} \cdot \frac{r^2}{G M_{\text{luna}} m_g^p}$$

Subiscono la
stessa accelerazione

$$\Rightarrow \frac{m_i^m}{m_i^p} = \frac{m_g^m}{m_g^p} = \text{cost}$$

$m_i \neq m_g$ ma il Rapporto tra le m_i e m_g di qualsiasi corpo e' la stessa

$$= m_i = K \cdot m_g$$

Costante
di proporzionalita'

La massa inerziale e'
PROPORTIONALE alla
massa gravitazionale

$= m_i$ e m_g sono
EQUIVALENTI

→ Se due grandezze sono proporzionali, sono Equivalenti.

Spiegazione del libro "L'evoluzione della fisica" Einstein, Infeld 1948

Se spingiamo un corpo, la sua VARIAZIONE DI VELOCITA' (Accelerazione) Sarà maggiore se la sua massa INERTE è piccola:

$$a = \frac{F}{m} \quad \text{infatti } F = m \cdot a$$

Capacità di un corpo di opporsi
al moto

Il MOTO RISONDENTE dipende dalla massa inerte

Da Galileo: Tutti i corpi cadono con MOTO UGUALE \Rightarrow $F_{\text{Sollecitante}}$ dipende dalla massa pesante!

Mettiamo tutto insieme:

Forza Sollecitante \rightarrow dipende dalla massa pesante

Moto Rispondente \rightarrow dipende dalla massa inerte

Ma Moto Rispondente è lo stesso (visto che il corpo in questione è lo stesso)

Dobbiamo concludere che m_p e m_I sono la stessa cosa!

Come rendere il rapporto uguale ad 1? Principio di equivalenza di massa

$$\frac{m_i}{mg} = K = 1 ?$$

Risposta: Basta misurarli entrambi con la stessa unità di misura

Definizione di massa: da definizione "semplice" è la quantità di materia contenuta in un oggetto.

Come Risolvere

Un problema di dinamica

- 1) Individuare la massa m : ne sceglieremo una alla volta, applichiamo i restanti 6 punti e poi passeremo alla massa successiva.
- 2) Individuare un sistema di riferimento: quello che ci conviene di più!
- 3) Individuare le forze agenti su m
- 4) Proiettare l'equazione $\bar{F} = m \cdot \bar{a}$ sugli assi del sistema di riferimento.
Es: Sistema a 3 dimensioni \rightarrow 3 equazioni della forza.

A questo punto se abbiamo risolto la traccia bene! Altrimenti:

- 5) Tenere presenti eventuali equazioni vincolari.
- 6) Utilizzare equazioni derivanti da leggi di conservazione.
Si CONSERVA l'energia, moto, ...?
- 7) Prima di consegnare controllare la plausibilità della soluzione trovata.

Forze di contatto

Ogni volta che un corpo e' a contatto con una superficie avremo due forze:

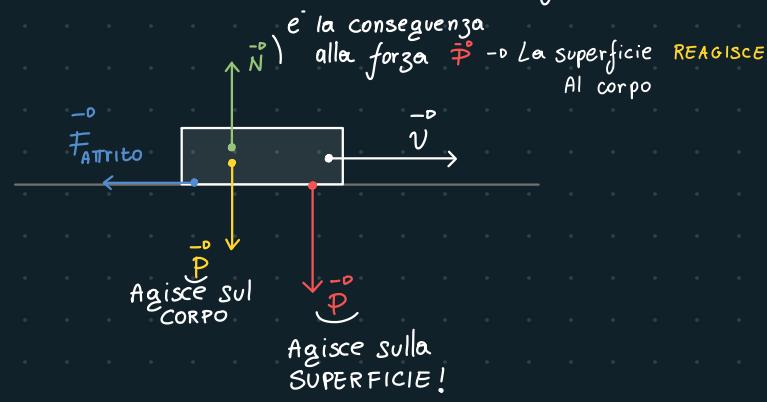
- Forza NORMALE
- Forza TANGENZIALE

Impo: \vec{N} e \vec{P} non si EQUILIBRANO perche' agiscono su CORPI DIVERSI

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} \text{ e' creata dalla "terra" forza di gravita'} \\ \vec{N} \text{ e' creata dalla superficie che reagisce al corpo} \end{array} \right.$

] NON PER FORZA UGUALI!

In questo caso $|\vec{N}| = |\vec{P}| = m \cdot |\vec{g}|$



FORZA DI ATTRITO RADENTE

Compare quando il corpo si muove. E' TANGENTE alla superficie e verso opposto al moto

Date due sup, la forza di attrito parallela risulta proporzionale alla Normale

MODULO : $|\vec{F}_{\text{ATT}}| = \mu_D |\vec{N}|$

Coefficiente di attrito dinamico

↗ maggiore e' la massa, maggiore sara' la \vec{N}
 $\Rightarrow >>$ attrito

↑
 E' una costante proporzionale

=> Il MODULO dell'attrito radente e' PROPORTIONALE AI PESO.

Impo: \vec{F}_{ATT} e \vec{N} hanno direzione e verso diversi \Rightarrow ~~$\vec{F}_{\text{ATT}} = \mu_D \cdot \vec{N}$~~ Sbagliato!

Il coefficiente d'attrito dinamico

-> Rappresenta e' un fattore di conversione tra il modulo della forza Normale e forza d'attrito. E' usato quando il corpo E' GIA' IN MOVIMENTO!

Il coefficiente d'attrito statico

Questo coefficiente cresce proporzionalmente alla forza che "tira" il corpo che parte da fermo.

valore massimo della forza di attrito

$$\left| (F_{\text{ATT}})_{\text{MAX}} \right| = \mu_S |\vec{N}|$$

$$=\mu_S > \mu_D$$

Come calcolare μ_s o μ_d nelle equazioni?

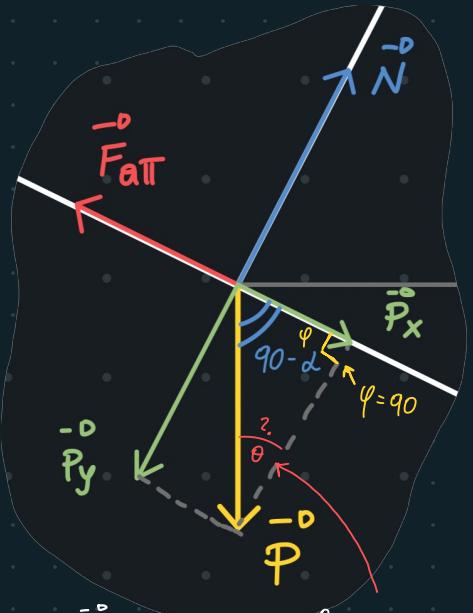
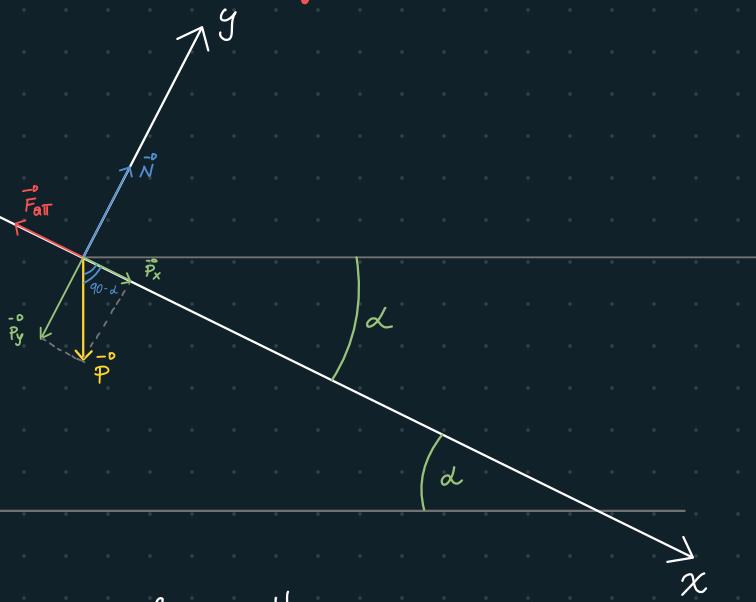
La differenza sta nell'accelerazione del corpo.

1) Scriviamo $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ per il corpo con $\vec{a} \neq 0$

→ Ci serve $\mu_d \Rightarrow \vec{a} \neq 0$ perché il corpo si sta già muovendo

Ci serve $\mu_s \Rightarrow$ 2) Impostiamo nell'eq $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ che $\vec{a} = 0$
così facendo consideriamo il caso in cui il corpo
sta quasi per muoversi, ovvero quando l'attrito
è MASSIMO

Il piano inclinato



1) Proiettare le forze: l'unica non proiettata lungo gli assi è \vec{P}

\rightarrow Spiegazione P_x e P_y :

- Se prendiamo l'angolo θ Scopriamo che è proprio uguale ad α .
- Ci accorgiamo che \vec{P}_x si oppone a $\vec{\alpha}_x$, quindi $\vec{P}_x = \vec{P} \cdot \sin(\alpha) = \underline{\vec{P} \sin(\alpha)}$
- \vec{P}_y invece, è ADIACENTE a $\theta \Rightarrow \vec{P}_y = \underline{\vec{P} \cos(\alpha)}$

$$\text{Siccome } |\vec{P}| = m \cdot \vec{g} \Rightarrow \vec{P}_x = m \cdot \vec{g} \cdot \sin(\alpha) \quad \vec{P}_y = m \cdot \vec{g} \cdot \cos(\alpha)$$

2) Scrivere le eq delle Forze

$$\rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{\alpha}_x \\ \sum \vec{F}_y = m \cdot \vec{\alpha}_y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_x - \vec{F}_\alpha = m \cdot \vec{\alpha}_x \\ \vec{N} - \vec{P}_y = m \cdot \vec{\alpha}_y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \cdot \vec{g} \cdot \sin(\alpha) - |\vec{F}_\alpha| = m \cdot \vec{\alpha}_x \\ |\vec{N}| - m \cdot \vec{g} \cdot \cos(\alpha) = m \cdot \vec{\alpha}_y \end{array} \right.$$

d'accelerazione lungo y è zero! $\Rightarrow N - mg \cos \alpha = 0$

$$\text{Inoltre } |\vec{F}_\alpha| = \mu_D |\vec{N}|$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu_D N = m \cdot \vec{\alpha}_x \\ N - mg \cos(\alpha) = 0 \end{array} \right.] \quad \text{Dobbiamo trovare l'accelerazione}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} mg \sin(\alpha) - \mu_D mg \cos(\alpha) = m \cdot \vec{\alpha}_x \\ N = mg \cos(\alpha) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_x = g \sin(\alpha) - \mu_D g \cos(\alpha) \\ \alpha_x = g (\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha)) \end{array} \right.$$

TIRIAMO LE SOMME

- 1) Siccome $\sin \alpha \leq 1$, $\mu_D \leq 1$, $\cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha_x \leq g$
 \Rightarrow L'accelerazione di caduta è minore di quella gravitazionale
- 2) Se è presente l'attrito, l'accelerazione diminuirà ulteriormente.

Recap

: Un modo alternativo di scrivere le derivate dei versori

Nella sezione di cinematica (m.c.v) abbiamo visto come i versori sono legati alla velocità angolare.

$$\begin{cases} \hat{\mu} = |\boldsymbol{\omega}| \cos(\alpha) \hat{i} + |\boldsymbol{\omega}| \sin(\alpha) \hat{j} \\ \hat{\tau} = -|\boldsymbol{\tau}| \sin(\alpha) \hat{i} + |\boldsymbol{\tau}| \cos(\alpha) \hat{j} \end{cases}$$

siccome $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\alpha}{dt}$

Radiale $\hat{\mu}$ Tangenziale $\hat{\tau}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\hat{\mu}}{dt} = -\sin(\alpha) \hat{i} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \hat{i} + \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \hat{j} \hat{j} \\ \frac{d\hat{\tau}}{dt} = -\cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \hat{i} \hat{i} - \sin(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} \hat{j} \hat{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\hat{\mu}}{dt} = -\omega \sin(\alpha) \hat{i} + \omega \cos(\alpha) \hat{j} \\ \frac{d\hat{\tau}}{dt} = -\omega \cos(\alpha) \hat{i} - \omega \sin(\alpha) \hat{j} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\mu} = \omega [\cos(\alpha) \hat{j} - \sin(\alpha) \hat{i}] \\ \dot{\tau} = -\omega [\cos(\alpha) \hat{i} + \sin(\alpha) \hat{j}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\mu} = \omega \hat{\tau}$$

uguaglianza che ci servirà

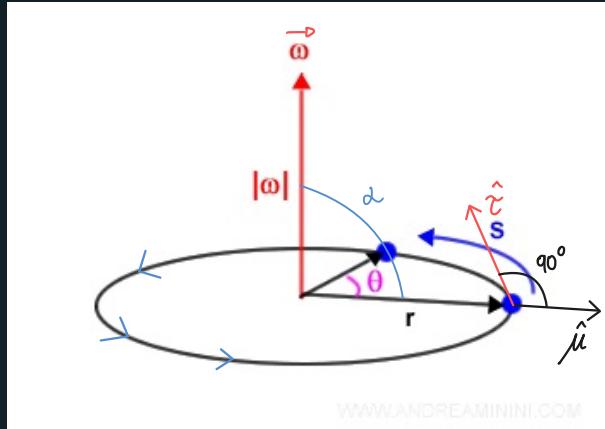
$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = \dot{\mu} = \bar{\omega} \wedge \hat{\mu}$$

Prodotto vettoriale

Dimostriamolo

$$\Rightarrow \bar{\omega} \wedge \hat{\mu} = |\bar{\omega}| (|\hat{\mu}| \sin(90^\circ)) \cdot \hat{\tau} = (\bar{\omega} \hat{\tau}) \hat{\mu}$$

La Direzione è data dalla regola della mano destra
Troviamo che la direzione di $\bar{\omega} \wedge \hat{\mu}$ è $\hat{\tau}$



www.andreaminini.com

Alllo stesso modo: $\bar{\omega} \wedge \hat{\tau} = |\bar{\omega}| |\hat{\tau}| \sin(\beta) (-\mu) = (-\bar{\mu} \bar{\omega}) \hat{i}$

Abbiamo scoperto che

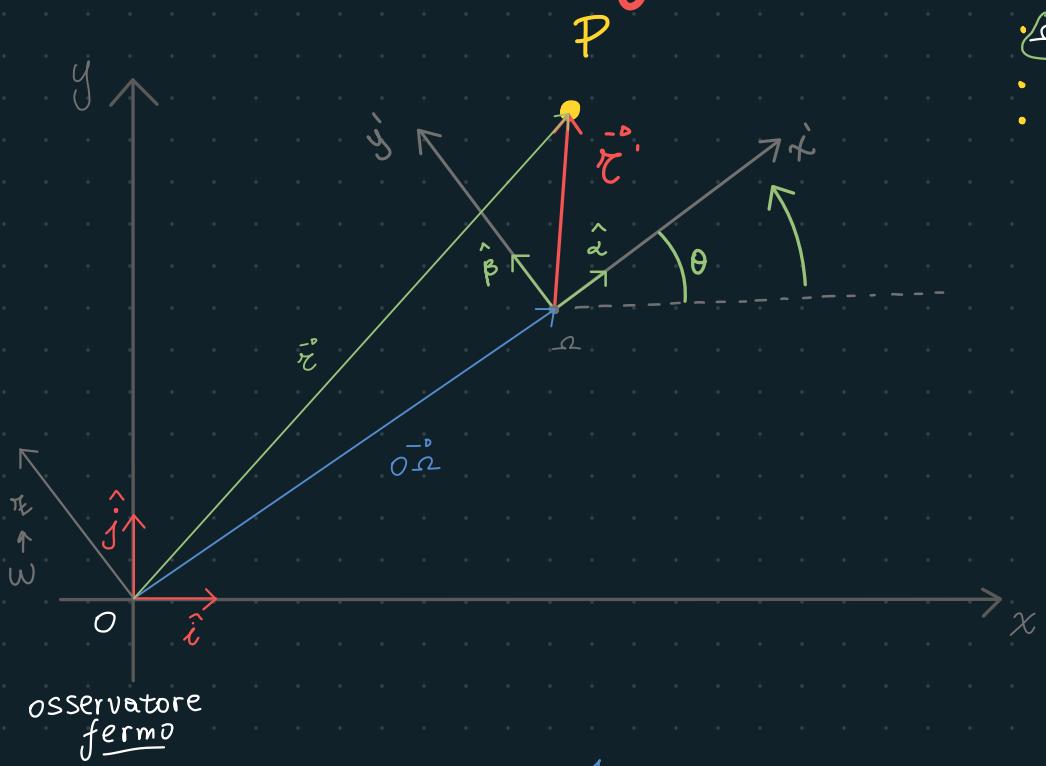
$$\frac{d \overset{\wedge}{\text{versore}}}{dt} = \bar{\omega} \wedge \overset{\wedge}{\text{versore}}$$

Regola generale

Sistemi di riferimento

In MOTO RELATIVO

- Ωxyz Non e' INERZIALE
- RUOTA lungo l'asse z
- I versori $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ non sono costanti
 $\Rightarrow \dot{\alpha}, \dot{\beta} \neq 0$



Sappiamo che

$$\vec{r} = \vec{O}\vec{\omega} + \vec{r}'$$

I vettori hanno solo 2 componenti perché non si sviluppano lungo z .

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \\ \vec{r}' = x'\hat{\alpha} + y'\hat{\beta} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sistema fermo} \\ \text{Non Costanti} \end{array}$$

Possiamo trovare la velocità

Velocità del sistema non inerziale ω

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{O}\vec{\omega})}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_{\omega} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad \begin{array}{l} \text{velocità del punto } P \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Sapendo che } \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \frac{dx'}{dt}\hat{\alpha} + x' \frac{d\hat{\alpha}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\hat{\beta} + y' \frac{d\hat{\beta}}{dt} \\ &= \left(\frac{dx'}{dt}\hat{\alpha} + \frac{dy'}{dt}\hat{\beta} \right) + \left(x' \frac{d\hat{\alpha}}{dt} + y' \frac{d\hat{\beta}}{dt} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(PER DEFINIZIONE)} \\ \frac{d\hat{\alpha}}{dt} = \omega\hat{\alpha} \\ \frac{d\hat{\beta}}{dt} = \omega\hat{\beta} \end{array} \\ &= \vec{v}' + x' \cdot \vec{\omega} \wedge \hat{\alpha} + y' \cdot \vec{\omega} \wedge \hat{\beta} \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (x'\hat{\alpha} + y'\hat{\beta}) \quad \text{Ci accorgiamo che è proprio } \vec{v}' \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \end{aligned}$$

\rightarrow Torniamo alla 2:

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{o}\vec{\omega})}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_{\omega} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_{\omega} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

Velocità di P rispetto a Oxyz Velocità di P rispetto a Oxyz'

Velocità misurata da Oxyz

?

3

$$\Rightarrow \vec{v}_{TR} = \vec{v}_{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO: la velocità che avrebbe il punto P qualora avesse velocità zero rispetto a $Oxyz'$.

Possiamo scrivere: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{TR}$

Possiamo trovare l'accelerazione

$$\text{Per definizione: } \ddot{\vec{a}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_n}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \vec{\tau}' + \vec{w} \wedge \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\text{Siccome } \vec{v}' = \frac{dx'}{dt} \hat{\alpha} + \frac{dy'}{dt} \hat{\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2} \hat{\alpha} + \frac{dx'}{dt} \frac{d\hat{\alpha}}{dt} + \frac{d^2y'}{dt^2} \hat{\beta} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\hat{\beta}}{dt} = \\ = \left(\frac{d^2x'}{dt^2} \hat{\alpha} + \frac{d^2y'}{dt^2} \hat{\beta} \right) + \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d\hat{\alpha}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\hat{\beta}}{dt} \right)$$

$$\text{Inoltre Sappiamo che } \frac{d\vec{\tau}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{w} \wedge \vec{\tau}'$$

\Rightarrow Sostituiamo nella ①

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{a}} &= \underbrace{\vec{a}_n}_{\frac{d\vec{v}_n}{dt}} + \underbrace{\left(\frac{d^2x'}{dt^2} \hat{\alpha} + \frac{d^2y'}{dt^2} \hat{\beta} \right)}_{\vec{w} \wedge \hat{\alpha}} + \underbrace{\left(\frac{dx'}{dt} \left(\frac{d\hat{\alpha}}{dt} \right) + \frac{dy'}{dt} \left(\frac{d\hat{\beta}}{dt} \right) \right)}_{\vec{w} \wedge \hat{\beta}} + \underbrace{\frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \vec{\tau}'}_{\text{Invariato}} + \vec{w} \wedge \left(\vec{v}' + \vec{w} \wedge \vec{\tau}' \right) \\ &= \vec{a}_n + \left(\frac{d^2x'}{dt^2} \hat{\alpha} + \frac{d^2y'}{dt^2} \hat{\beta} \right) + \left(\frac{dx'}{dt} (\vec{w} \wedge \hat{\alpha}) + \frac{dy'}{dt} (\vec{w} \wedge \hat{\beta}) \right) + \frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \vec{\tau}' + \vec{w} \wedge \vec{v}' + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{\tau}') \\ &\quad \text{Per definizione} \\ &= \frac{d\vec{x}'}{dt} \vec{w} \wedge \frac{d\vec{x}'}{dt} \hat{\alpha} + \frac{d\vec{y}'}{dt} \vec{w} \wedge \frac{d\vec{y}'}{dt} \hat{\beta} \\ &= \vec{w} \wedge \left(\frac{d\vec{x}'}{dt} \cdot \hat{\alpha} + \frac{d\vec{y}'}{dt} \cdot \hat{\beta} \right) \quad \text{Abbiamo visto} \\ &= \vec{w} \wedge \vec{v}' \\ &= \vec{a}_n + \vec{a}' + 2\vec{w} \wedge \vec{v}' + \frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \vec{\tau}' + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{\tau}') \quad \text{Accelerazione misurata da oxy3} \end{aligned}$$

- \vec{a}_n : Acc misurata da oxy3 di P
- \vec{a}' : Acc misurata da $\omega x'y'z'$
- $2\vec{w} \wedge \vec{v}'$: Acc misurata da $\omega x'y'z'$ per via del fatto che P ha una velocità \vec{v}' rispetto a $\omega x'y'z'$; provoca una ROTAZIONE di P.
E' anche nota come accelerazione di Coriolis

- Se $\vec{v}' = \vec{0}$, $\vec{a}' = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_{TR} = \vec{a}_n + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{\tau}') + \frac{d\vec{w}}{dt} \vec{\tau}'$
 \vec{a}_{TR} e' l'acc che avrebbe P se non venisse "lanciato" dal sistema $\omega x'y'z'$

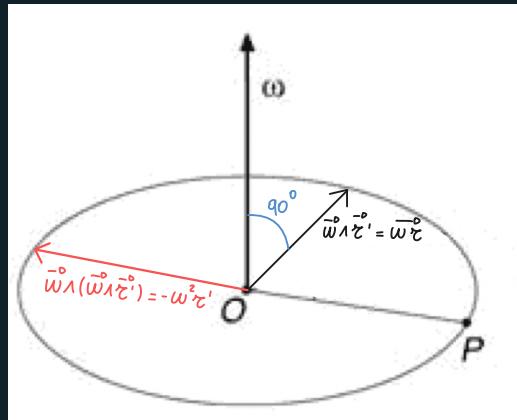
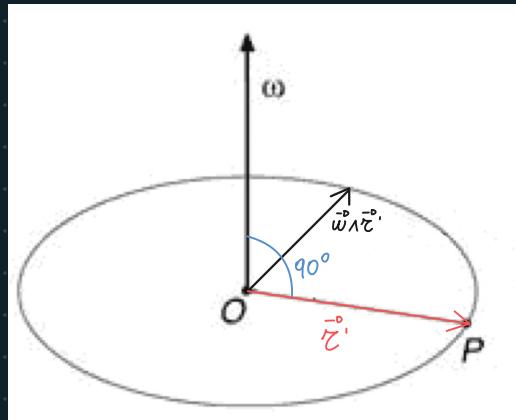
possiamo scrivere:

$$\vec{a}_{co} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times (|\vec{\omega}| |\vec{r}'| \sin(90^\circ)) = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \vec{r}' = -\vec{\omega}^2 \vec{r}'$$

Accelerazione
CENTRIFUGA

↳ E' un nuovo vettore avente modulo $\omega^2 r'$ ed angolo rispetto a $\vec{\omega}$ di 90°



\vec{a}_{cf}

$$\vec{a}_{TR} = \vec{a}_n + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' = \vec{a}_n + \vec{a}_{cf} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$$

Quindi:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{co} + \vec{a}_{TR}$$

Accelerazione misurata
da oxy3

Come Applicare le leggi della dinamica ai Sistemi non inerziali?

Nelle trasformazioni Galileiane avevamo che $\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}' \Rightarrow \frac{\ddot{F}}{\text{INERZIALE}} = m \cdot \ddot{\alpha}'$

Quindi $\ddot{F} = \ddot{F}'$ Le forze non cambiano!

Questo ragionamento non vale più per sistemi non inerziali! Infatti: $\ddot{\alpha} \neq \ddot{\alpha}'$

Soluzione: Considerare le accelerazioni come FORZE:

$$\ddot{F} = m(\ddot{\alpha}' + \ddot{\alpha}_{\text{CO}} + \ddot{\alpha}_{\text{TR}}) \Rightarrow \ddot{F} = m\ddot{\alpha}' + m\ddot{\alpha}_{\text{CO}} + m\ddot{\alpha}_{\text{TR}}$$

Spostiamo le accelerazioni α su $\ddot{\alpha}$ $\Rightarrow \ddot{F} - m\ddot{\alpha}_{\text{CO}} - m\ddot{\alpha}_{\text{TR}} = m\ddot{\alpha}'$ Accelerazione del Sistema xyz'

$$\begin{aligned} \ddot{F}_{\text{CO}} &= -m\ddot{\alpha}_{\text{CO}} & \xleftarrow{\text{Coriolis}} & \text{FORZA DI CORIOLIS} & \text{FORZA DI TRASCINAMENTO} & \ddot{F}_{\text{TR}} = -m\ddot{\alpha}_{\text{TR}} \\ &= -m \cdot 2\bar{w} \wedge \bar{v}' & & \text{FORZE FITTIZIE} & & = \ddot{\alpha}_{\text{a}} + \ddot{\alpha}_{\text{c}} + \frac{d\bar{w}}{dt} \wedge \bar{v}' \end{aligned}$$

Possiamo scrivere: $\ddot{F} - \ddot{F}_{\text{CO}} - \ddot{F}_{\text{TR}} = m\ddot{\alpha}'$ Se $\ddot{F}' = \ddot{F} - \ddot{F}_{\text{CO}} - \ddot{F}_{\text{TR}} \Rightarrow \ddot{F}' = m\ddot{\alpha}'$

• DA NOTARE Se nella formula di una forza compare la massa, è FITTIZIA!

\Rightarrow Forza peso: $\ddot{F} = m\ddot{g}$ \Rightarrow La forza di gravità è in realtà FITTIZIA!

Attenzione: Nella fisica classica la Forza peso è considerata reale.

La forza Centrifuga

6-18) Una macchina di massa m percorre una curva di raggio $R = 150$ m a velocità costante $v = 25$ m/s. Se la strada non è sopraelevata, qual'è il minimo coefficiente di attrito μ_{\min} per impedire lo sbandamento? E se μ è trascurabile, di quale angolo α deve essere inclinata la strada per evitare lo sbandamento?

Come nell'esercizio precedente deve essere, in caso di curva piana,

$$F_c = F_{CP}$$

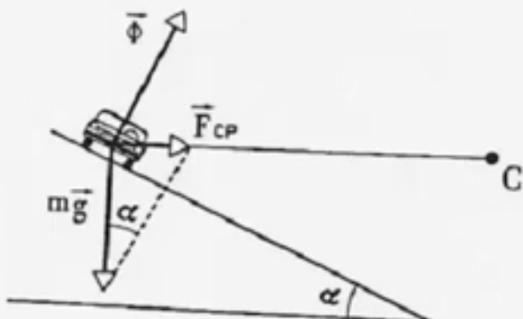


Fig. 6.18.

CASO 1: Non Sopraelevata

Il sistema xyz è INERZIALE

$$\text{Scriviamo } \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{per } m$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{AT} = m \cdot \vec{a}$$

Affinché la macchina non sbandi l'accelerazione deve essere rivolta verso il centro

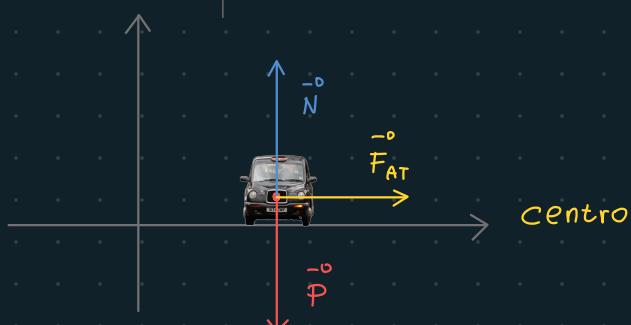
$$\vec{a}_{CP} = \frac{\vec{v}^2}{R}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{AT} = m \cdot \vec{a}_{CP}$$

$$\text{Siccome } |\vec{F}_{AT}| = \mu_d \cdot |\vec{N}| , \quad |\vec{N}| = |\vec{P}| = m g$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_{AT}| = \mu m g$$

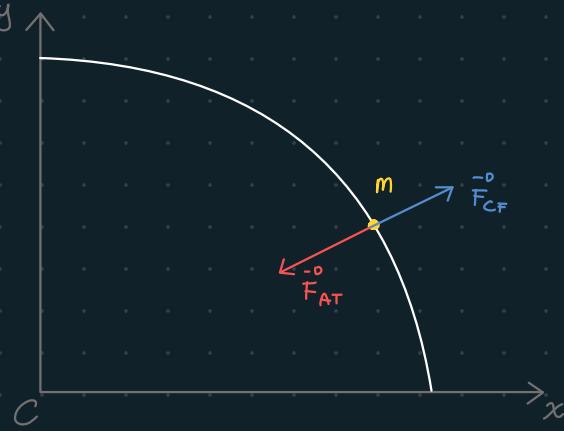
$$\text{Quindi: } \mu m g = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{v^2}{g R} = 0.42$$



Conclusioni: Il sistema $oxyz$ è inerziale $\Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow$ nessuna forza fittizia

Caso 1: Stesso problema, diverso sistema: Sistema non inerziale

$$\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{F}_{AT} - \vec{F}_{CF} = \emptyset$$



Osservando

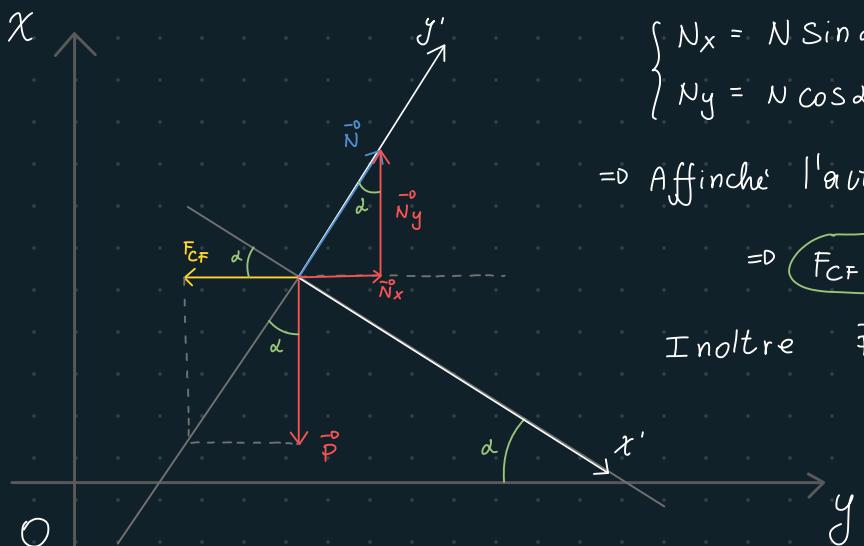
"la macchina" dal suo interno, l'accelerazione $\vec{\alpha}' = \emptyset$

$$\Rightarrow \vec{F}_{AT} = \vec{F}_{CF} \Rightarrow \mu m g = m \frac{v^2}{R}$$

$$\mu = \frac{v^2}{g R} = 0.42$$

Stesso Risultato

Caso 2: Piano inclinato - Sistema NON INERZIALE



$$\begin{cases} N_x = N \sin \alpha \\ N_y = N \cos \alpha \end{cases} \quad \text{siccome } \vec{N} = m \vec{g} \Rightarrow \begin{cases} N_x = m g \sin \alpha \\ N_y = m g \cos \alpha \end{cases}$$

\Rightarrow Affinché l'auto non sbandi $\vec{F}_{CF} = \vec{N}_x$

$$\Rightarrow \boxed{F_{CF} = N \sin \alpha} \quad ^1$$

$$\text{Inoltre } \vec{P} = \vec{N}_y \Rightarrow \boxed{P = N \cos \alpha} \quad ^2$$

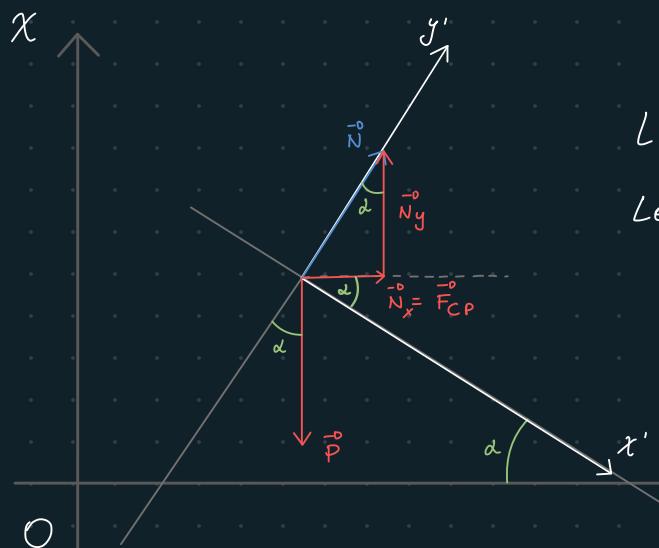
OVVERO $F_g + F_c = \emptyset$

$$\frac{F_{CF}}{P} = \frac{N \sin \alpha}{N \cos \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{F_{CF}}{P} \Rightarrow \tan \alpha = \left(\frac{m v^2}{R} \right) \cdot \frac{1}{m g}$$

$$\begin{cases} F_{CF} = N \sin \alpha \\ P = N \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{F_{CF}}{P} = \frac{N \sin \alpha}{N \cos \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{F_{CF}}{P} \Rightarrow \tan \alpha = \left(\frac{m v^2}{R} \right)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{v^2}{R g} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arctan \left(\frac{v^2}{R g} \right)}$$

Caso 2: Piano inclinato - Sistema INERZIALE



In questo caso non agisce più la \vec{F}_{CF}

Le forze REALI agenti sono $\vec{P} + \vec{N}$

La somma di queste due deve generare un'accelerazione che va verso il centro: $\vec{F}_{CP} = \vec{N}_x$

Affinché questo avvenga \vec{P} si deve annullare con \vec{N}_y e $\vec{F}_{CP} = \vec{N}_x = N \cos \alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{CP} = N \cos \alpha \\ \vec{P} = N \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{\vec{F}_{CP}}{\vec{P}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m v^2}{R g} \cdot \frac{1}{m g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{R g}$$

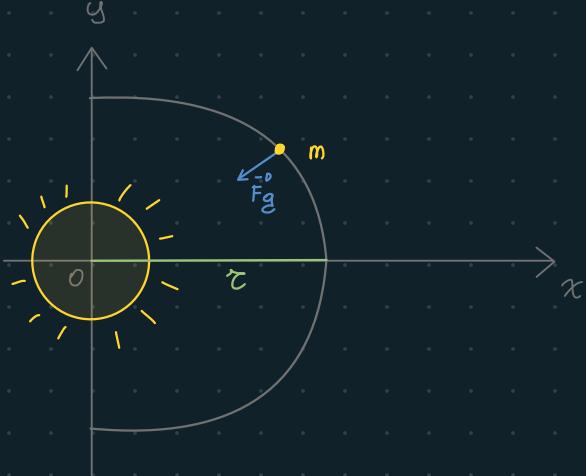
stessa formula

Velocità Orbitale

Lezione 15

Lo scopo è applicare le nozioni acquisite per calcolare la velocità dell'orbita della terra attorno al sole.

CASO 1: Sistema inerziale



Scriviamo $\sum \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$ per il nostro sistema:

$$\vec{F}_g = m \vec{a} \Rightarrow \frac{G M_s m_t}{r^2} = m \cdot \vec{a}$$

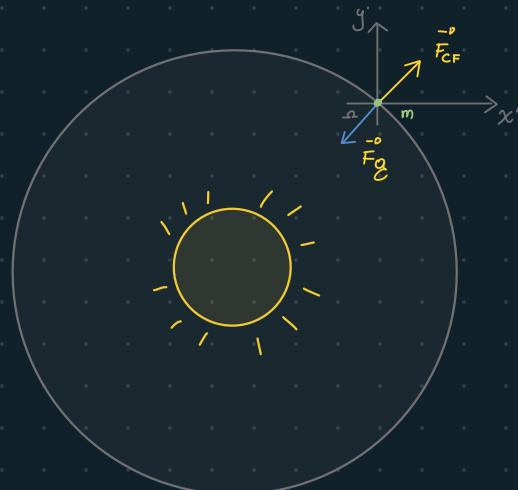
Si come in un moto circolare l'accelerazione è CENTRIPETA:

$$\frac{G M_s m_t}{r^2} = m_t \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_s}{r}}$$

Velocità della Terra

\Rightarrow Capiamo che possiamo applicare la formula ad una coppia di MASSE qualsiasi

CASO 2: Sistema Non inerziale



da somma delle forze deve essere zero:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{F}_g - \vec{F}_{cf} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F}_g = \vec{F}_{cf} \Rightarrow \frac{G M_s}{r^2} m_t = m_t \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_s}{r}}$$

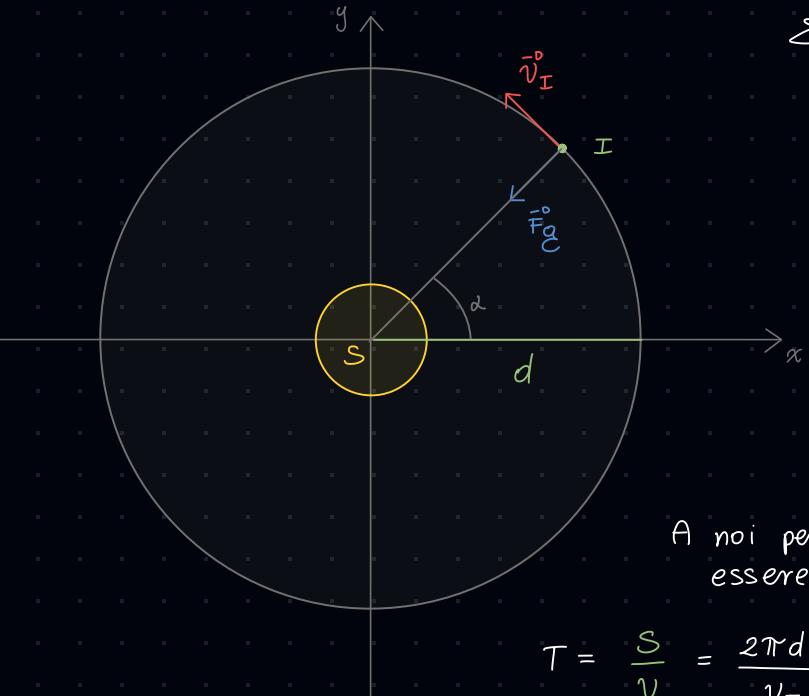
Stessa formula

Perché la Terra
non accelera

1) L'asteroide Icaro, sebbene molto piccolo, orbita attorno al Sole come gli altri pianeti. Per fare un giro completo impiega un tempo $T = 410$ giorni. Supponendo che la sua orbita sia circolare e che la velocità con cui si muove sia in modulo costante, calcolare la distanza di Icaro dal Sole, sapendo che la massa del Sole è $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ Kg}$. [$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{Kg}^2$]

Lezione 15

Sistema inerziale



$$T = 410 \frac{\text{giorni}}{\text{circolo}}, M_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ Kg}$$

$$\sum F_i = m \cdot \ddot{a} \Rightarrow F_g = m \cdot \ddot{a}$$

$$\Rightarrow \frac{G M_S m_I}{d^2} = m_I \left(\ddot{a} \right) \text{ nel moto circolare}$$

$$\ddot{a} = \frac{V^2}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{G M_S m_I}{d^2} = m_I \cdot \frac{V^2}{d}$$

$$\Rightarrow V_I = \sqrt{\frac{G M_S}{d}} \quad \text{Velocità di Icaro}$$

A noi però serve la distanza; la velocità può essere RICAVATA dal periodo:

$$T = \frac{S}{V} = \frac{2\pi d}{V_I} \Rightarrow V_I = \frac{2\pi d}{T}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_I = \sqrt{\frac{G M_S}{d}} & 1 \\ V_I = \frac{2\pi d}{T} & 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{Sostituiamo una delle due. } 2 \rightarrow 1: \frac{2\pi d}{T} = \sqrt{\frac{G M_S}{d}}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 d^2}{T^2} = \frac{G M_S}{d} \Rightarrow d^3 = \frac{G M_S \cdot T^2}{4\pi^2} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{G M_S}{4\pi^2} \cdot T^2}$$

Alternativamente

$$d = \frac{T}{2\pi} \cdot V_I = \frac{T}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{G M_S}{d}} \Rightarrow d^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \frac{G M_S}{d} \Rightarrow d^3 = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot G M_S$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{T^2 G M_S}{4\pi^2}} = 1.615 \times 10^{11} \text{ m}$$

Se invece del periodo avessimo la velocità angolare ω :

Nel moto Circolare, siccome $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

\Rightarrow in radienti $\varphi_{360} = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{d\varphi_{360}}{dt}$ Se $dt = T \Rightarrow 1$ giro completo

$$\Rightarrow \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{G M_S}{\omega^2}}$$

Considerazione con la formula

$d = \sqrt{\frac{G M}{\omega^2}}$ se conosciamo la distanza tra due pianeti, la velocità del pianeta "minore" e la loro distanza possiamo trovare la massa del pianeta (o buco nero) :

$$d^2 = \frac{G M}{\omega^2} \rightarrow M = \frac{d^2}{G} \cdot \omega^2$$

Forza di Coriolis

Avevamo trovato l'accelerazione di coriolis:

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Per trovare la Forza ci basta moltiplicare per $-m$: Perche' $\vec{F} = -m \vec{a}$?



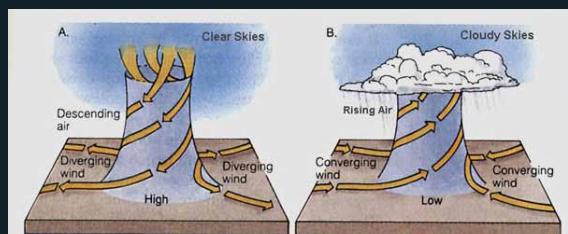
$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$$

Che cosa accade per via della $\vec{F}_{\text{Coriolis}}$?

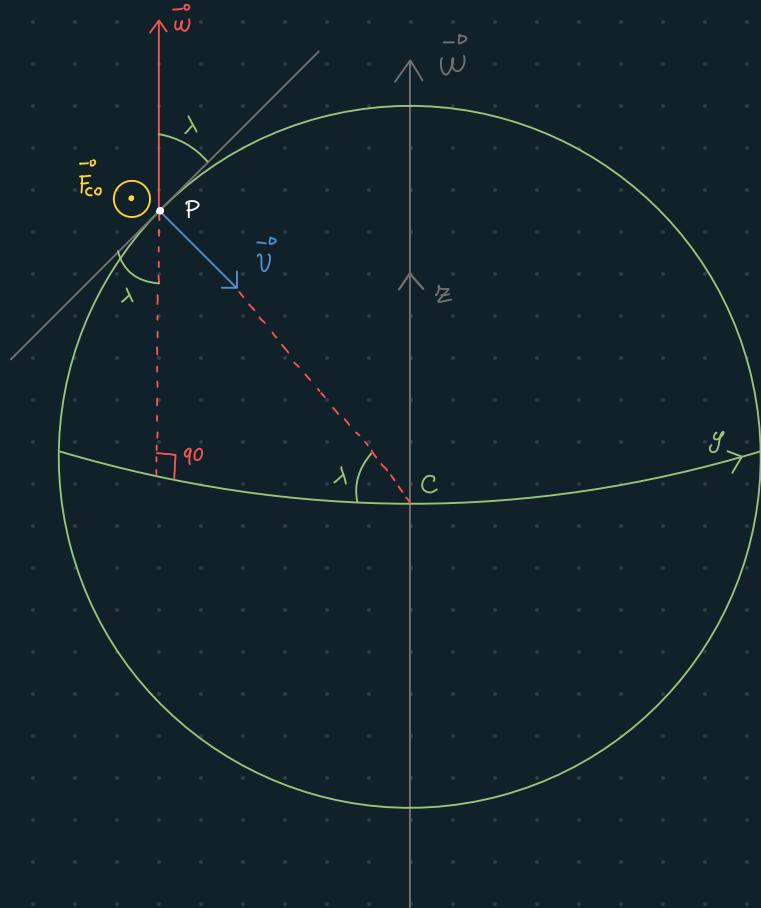
- $\vec{\omega}$ e' USCENTE (dal centro)



- E' di interesse che le zone di Alta pressione "fuggono" verso le zone di Bassa Pressione.
 - Il punto L e' un punto di Bassa P.
→ Il vento viene ATTRITATO verso L.
 - Siccome la Terra gira ($\vec{\omega}$), influenza i vettori \vec{v} ; dal prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{\omega}$ otteniamo \vec{F} (usiamo la regola della mano destra)
- Attorno al punto L Si crea un VORTICE per via della forza di Coriolis.

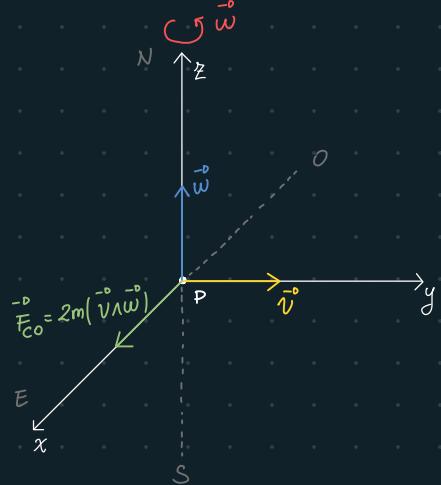


Cosa Accade ad un corpo in caduta libera verso la terra?



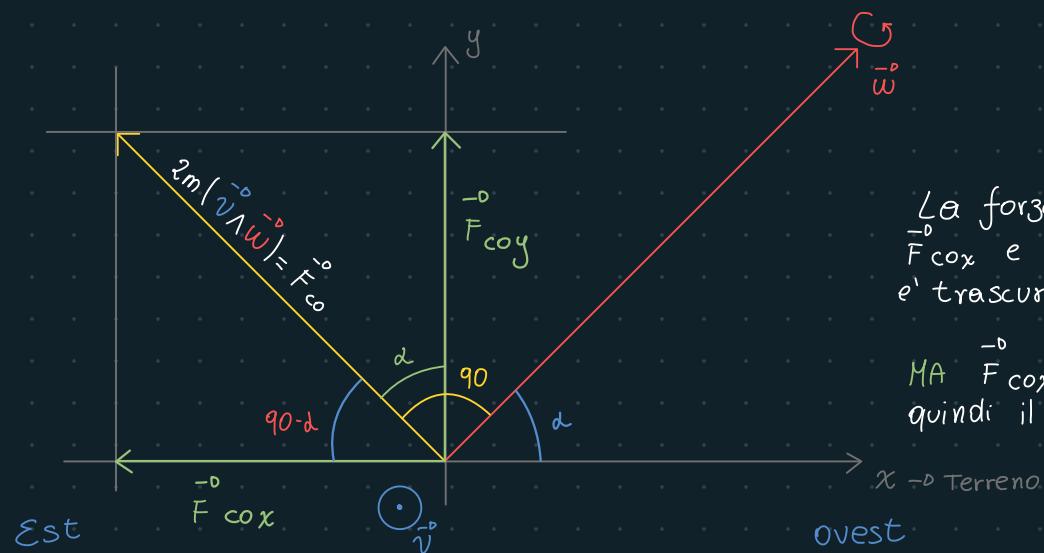
La Forza Di Coriolis e' data dal prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{\omega}$, che nel nostro caso e' uscente dal piano

Usiamo un riferimento oxyz per orientarci NEL PUNTO P



CONCLUDIAMO che vicino la superficie la forza di Coriolis fa deviare un corpo vesto EST.

Se osserviamo il tutto in 2 dimensioni possiamo osservare:

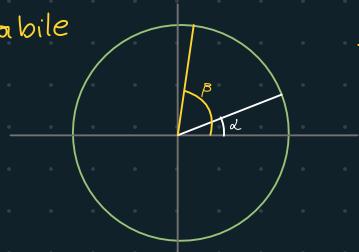


La forza di Co. ha due componenti: \vec{F}_{Cox} e \vec{F}_{Coy} ; Siccome $|F_{Coy}| \ll |F_{Cox}|$ e' trascurabile \Rightarrow non vengo sollevato

MA \vec{F}_{Cox} non ha Forze "rivali" quindi il corpo tratta verso destra rispetto al vettore \vec{v} .

Dove ha maggiore influenza la Forza di Coriolis?

$$\begin{cases} \vec{F}_{Coy} = |\vec{F}_C| \cos(\alpha) & \text{Trascurabile} \\ \vec{F}_{Cox} = |\vec{F}_C| \sin(\alpha) \end{cases}$$



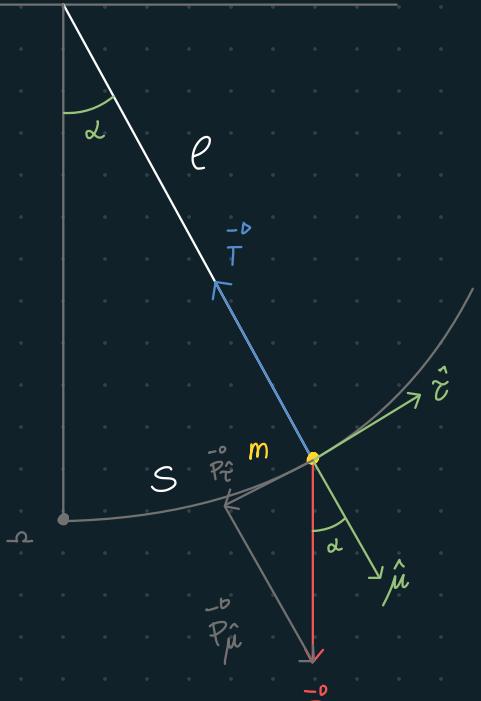
$\Rightarrow \sin(\alpha) < \sin(\beta) \Rightarrow$ da forza di coriolis e massima ai poli

Pendolo Semplice

Sfruttando le nozioni imparate durante l'ascissa curvilinea

Scomponiamo la forza peso:

$$\begin{cases} \vec{P}_{\hat{\mu}} = |\vec{P}| \cos \alpha \\ \vec{P}_{\hat{\tau}} = |\vec{P}| \sin \alpha \end{cases}$$



$$\text{Scriviamo } \sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

T ha reso opposto a $\vec{\mu}$

$$\text{lungo } \hat{\mu} \left\{ m \cdot g \cos \alpha - T = m \cdot a_{\hat{\mu}} \right.$$

$$\text{lungo } \hat{\tau} \left\{ -m \cdot g \sin \alpha + T = m \cdot a_{\hat{\tau}} \right.$$

$\vec{P}_{\hat{\tau}}$ ha verso opposto a $\hat{\tau}$

La Tensione non ha componenti lungo $\hat{\tau}$

Sappiamo che: $\vec{a} = \ddot{s} \cdot \hat{\tau} - \frac{\dot{s}^2}{r} \hat{\mu}$

Accelerazione centripeta/radiale

Raggio di curvatura

\Rightarrow Sostituiamo $\vec{a}_{\hat{\mu}}$ e $\vec{a}_{\hat{\tau}}$

$$\begin{cases} m \cdot g \cos \alpha - T = - \frac{\dot{s}^2}{l} \hat{\mu} \\ -m \cdot g \sin \alpha = m \cdot \dot{s} \hat{\tau} \end{cases}$$

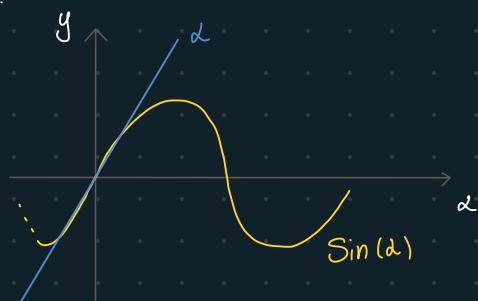
Questa formula ci dice che siccome il pendolo DEVE muoversi lungo una circonferenza, DEVE avere un'accelerazione centripeta indicata da $\vec{a}_{cp} = - \frac{\dot{s}^2}{l} \hat{\mu}$

\Rightarrow Sommando $m \cdot g \cos \alpha$ e T

Verso giù Verso su

Possiamo approssimare al primo ordine di Taylor $\sin(\alpha)$, scrivendo:

$$\sin(\alpha) = \alpha$$



\Rightarrow Quando si è vicini allo zero, $\sin \alpha = \alpha$

Dobbiamo avere una componente che va verso l'alto data dall'accelerazione centripeta per la massa.

$$\Rightarrow \text{Scriviamo: } -mg \sin \alpha = m \ddot{s} \hat{\tau} \Rightarrow -g \alpha = \ddot{s} \hat{\tau}$$

Sappiamo che la massa inerziale e gravitazionale sono uguali \Rightarrow

$$\Rightarrow -g \alpha = \ddot{s} \hat{\tau}$$

Per definizione la misura dell'arco di circonferenza $s = \ell \alpha$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{s}{\ell}$$

Se l'angolo è espresso in RADIANTI

$$\Rightarrow -g \alpha = \ddot{s} \hat{\tau} \Rightarrow -g \frac{s}{\ell} = \ddot{s} \hat{\tau} \Rightarrow \ddot{s} + \frac{g}{\ell} s = 0$$

Siccome $\frac{g}{\ell}$ è una costante, la battezziamo K^2 $\Rightarrow K^2 = \frac{g}{\ell}$ (2)

$$\Rightarrow \ddot{s} + K^2 s = 0 \quad \text{Equazione del moto Armonico Semplice} \quad (1)$$

Per risolvere la (2) bisogna conoscere il metodo di risoluzione delle equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti [Link](#)

Svolgiamo l'eq differenziale:

$$\ddot{s} + K^2 s = 0 \quad \text{Eq Caratteristica} \quad \lambda^2 + K^2 = 0 \quad \text{Con } \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = K^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -K^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm iK \Rightarrow \alpha = 0 \quad \beta = K$$

$$\Rightarrow s(t) \text{ è del tipo } e^{\alpha t} [C_1 \cos(\beta t + \varphi) + C_2 \sin(\beta t + \varphi)]$$

$$\Rightarrow s(t) = C_1 \cos(Kt + \varphi) + C_2 \sin(Kt + \varphi)$$

$$\text{Quindi } \dot{s} = -K C_1 \sin(Kt + \varphi) + K C_2 \cos(Kt + \varphi)$$

$$\ddot{s} = -K^2 C_1 \cos(Kt + \varphi) - K^2 C_2 \sin(Kt + \varphi)$$

$$\Rightarrow \text{Sostituisco: } -K^2 C_1 \cos(Kt + \varphi) - K^2 C_2 \sin(Kt + \varphi) + K^2 C_1 \cos(Kt + \varphi) + K^2 C_2 \sin(Kt + \varphi) = 0$$

~~$$\Rightarrow K^2 C_1 \cos(Kt + \varphi) + K^2 C_2 \sin(Kt + \varphi) = K^2 C_1 \cos(Kt + \varphi) + K^2 C_2 \sin(Kt + \varphi)$$~~

\Rightarrow Abbiamo la prova che $s(t) = C_1 \cos(Kt + \varphi) + C_2 \sin(Kt + \varphi)$ è SOLUZIONE dell'eq differenziale.

A questo punto il professore considera solo la parte del Coseno, questo puo' essere dovuto a piu' motivi:

1. $\cos(\kappa t + \varphi) = \sin(\kappa t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ Il sin e' semplicemente sfasato
2. Se il pendolo parte φ^* in una posizione tale che $\sin(\kappa t + \varphi) = 0$, il membro si annulla.

Ad ogni modo prendiamo per buono $S(t) = C_1 \cos(\kappa t + \varphi)$

EDIT: Anche $S(t) = C_2 \sin(\kappa t + \varphi)$ e' soluzione

Anche $S(t) = C_1 \cos(\kappa t + \varphi) + C_2 \sin(\kappa t + \varphi)$ e' soluzione

\Rightarrow I risultati sono MATEMATICAMENTE equiparabili.
per semplificare usiamo $S(t) = C_1 \cos(\kappa t + \varphi)$

Che cosa ci dice la soluzione all'equazione differenziale?

Con l'eq $S(t) = C_1 \cos(\kappa t + \varphi)$ conosciamo PER OGNI ISTANTE la posizione di m.

Formule per il pendolo

Deduiamo dall'equazione differenziale S, \dot{S} ed \ddot{S}

- $S(t) = A \cos(\kappa t + \varphi)$ Spazio
- $\dot{S}(t) = v(t) = -\kappa A \sin(\kappa t + \varphi)$ Velocita'
- $\ddot{S}(t) = \frac{d}{dt} v = a(t) = -\kappa^2 A \cos(\kappa t + \varphi)$ Accelerazione

Dopo aver scoperto che $\kappa = \omega = \frac{2\pi}{T}$

- $S(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ Spazio
- $\dot{S}(t) = v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$ Velocita'
- $\ddot{S}(t) = \frac{d}{dt} v = a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$ Accelerazione

- $T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}$ PERIODO DEL PENDOLO \Rightarrow Il periodo NON DIPENDE dall'ampiezza

- $\varphi = \tan^{-1} \left(-\frac{v_0}{\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot s_0} \right)$

- $A = \frac{s_0}{\cos(\varphi)}$

Interpretazione delle costanti

1) Costante K

Sappiamo che dopo un periodo T la massa torna nella posizione precedente

Siccome il cos è PERIODICO dopo un periodo T il cos assume lo stesso valore di prima:

$$A \cos [K(t+T) + \varphi] = A \cos (Kt + \varphi + 2\pi)$$

$$S(t+T) = S(t)$$

il cos è periodico
di $T = 2\pi$

$$\rightarrow \cos [K(t+T) + \varphi] = \cos (Kt + \varphi + 2\pi) \quad \text{Applico } f = \sin^2 \text{ ad entrambi}$$

$$\rightarrow K(t+T) + \varphi = Kt + \varphi + 2\pi \rightarrow \cancel{Kt} + KT + \cancel{\varphi} + \cancel{Kt} + \cancel{\varphi} + 2\pi$$

$$\rightarrow KT = 2\pi \rightarrow K = \frac{2\pi}{T} \quad \text{da conosciamo come FREQUENZA ANGOLARE}$$
$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{dove } \omega \neq \text{VELOCITA' angolare}$$

Da questo momento Scriveremo: $S(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

2) Costante A

E' semplice dedurre che 'A' è l'AMPIEZZA massima dell'oscillazione

$$\Rightarrow S(t) \in [-A, A]$$

3) Costante φ FASE INIZIALE

Quando $t = 0 \rightarrow S(0) = A \cos(\varphi)$

- $\omega t + \varphi$ FASE
- φ FASE INIZIALE

\rightarrow Che vuol dire?

Se $\varphi \neq k\pi$ con $k \in 0, 1, 2, \dots, n \Rightarrow$ Il pendolo NON PARTE DA A

Ad Esempio $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \Rightarrow S(0) = A \cos(\frac{\pi}{3}) = \left(\frac{A}{2}\right)$ d'ampiezza iniziale e $\frac{A}{2}$

4) Sappiamo che $K = \omega = \frac{2\pi}{T}$ ma $K^2 = \frac{g}{l}$

$$\Rightarrow \frac{g}{l} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow T^2 = (2\pi)^2 \cdot \frac{l}{g} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}$$

PERIODO DEL PENDOLO

5) Che succede se $m_I \neq m_g$?

$$\rightarrow \begin{cases} m_g g \cos \alpha - T = -\frac{m_I \ddot{S}^2}{l} \hat{\mu} \\ -m_g g \sin \alpha = m_I \ddot{S} \hat{\tau} \end{cases} \quad (1)$$

Considerando la (1): $\sin \alpha \sim \alpha \Rightarrow -m_g g \alpha = m_I \ddot{S} / l$ non serve ora

$$\text{Siccome } S = l \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{S}{l} \Rightarrow -m_g g \cdot \frac{S}{l} = m_I \ddot{S}$$

$$\Rightarrow m_I \ddot{S} + m_g S \frac{g}{l} = 0 \quad \text{pongo } K^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow m_I \ddot{S} + K^2 m_g S = 0$$

Se divido per m_g : $-g \cdot \frac{S}{l} = \frac{m_I}{m_g} \ddot{S}$ Equazione differenziale "NUOVA"

$$\text{e pongo } K^2 = \frac{g}{l} \cdot \frac{m_g}{m_I} \Rightarrow -g \cdot \frac{S}{l} \cdot \frac{m_g}{m_I} = \ddot{S} \Rightarrow \ddot{S} + K^2 S = 0$$

\Rightarrow Il periodo del pendolo Cambia:

$$K = \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{con} \quad K^2 = \frac{g}{l} \cdot \frac{m_g}{m_I}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{g}{l} \cdot \frac{m_g}{m_I} \right)^{1/2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\left(\frac{g}{l} \cdot \frac{m_g}{m_I} \right)^{1/2}}$$

Più Volte

Il periodo dipende dalle masse

Effettuando un esperimento variando sempre LA MASSA (ma sullo stesso pianeta) otteniamo sempre lo stesso periodo.

Dobbiamo concludere che m_I ed m_g sono UGUALI.

Come trovare le due costanti A e φ?

$$S(t) = \underset{\text{Ampiezza}}{A} \cos(\omega t + \underset{\text{Fase Iniziale}}{\varphi})$$

⇒ Se conosciamo le condizioni iniziali del pendolo possiamo trovare A e φ

Infatti nel moto del proiettile: $S(t) = \underset{\backslash}{S_0} + \underset{/}{V_0 t} - \frac{1}{2} g t^2$

Conosciamo S(t) se conosciamo le condizioni iniziali del proiettile

Scriviamo il sistema di spazio e velocità del pendolo:

$$\begin{cases} S(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{S}(t) = V(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(0) = A \cos(\varphi) & 1 \\ \dot{S}(0) = -\omega A \sin(\varphi) & 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{S}_0}{S_0} = -\frac{\omega \sin(\varphi)}{A \cos(\varphi)} = -\omega \operatorname{tg}(\varphi) \Rightarrow \frac{V_0}{S_0} = -\omega \operatorname{tg}(\varphi)$$

$$\text{Sappiamo che } \omega = K = \sqrt{\frac{g}{e}} \Rightarrow \frac{V_0}{S_0} = -\sqrt{\frac{g}{e}} \cdot \operatorname{tg}(\varphi)$$

troviamo φ: $\varphi = \tan^{-1} \left(-\frac{V_0}{\sqrt{\frac{g}{e}} \cdot S_0} \right)$

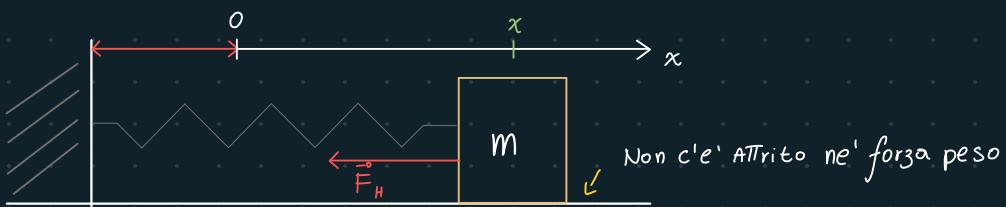
con queste formule, conoscendo V_0 e S_0 , possiamo trovare A e φ

troviamo A dalla ①: $S_0 = A \cos(\varphi) \Rightarrow$

$$A = \frac{S_0}{\cos(\varphi)}$$

La molla - Legge di Hooke

• ℓ_0 : Allungamento iniziale



Forza di Hooke:

$$F_H = -kx$$

Costante elastica
↑
Verso opposto
all'asse x

Allungamento della molla

Scriviamo $\sum \bar{F}_i = m \cdot \ddot{x}$ per il sistema.

$$-kx = m \cdot \ddot{x} \quad \text{Sappiamo che } \ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2} x = \ddot{x}$$

$$-kx = m \cdot \ddot{x} \Rightarrow m \ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{k}{m} \right) x = 0$$

Pongo $\omega^2 = \frac{k}{m}$ $\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Frequenza Angolare Eq. Diff uguale a quella del pendolo

$$\Rightarrow \text{Soluzione: } x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{Traiettoria della molla}$$

Troviamo il Periodo: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{k}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ Periodo della molla

Sappiamo che $k = \frac{2\pi}{T}$ FREQUENZA angolare del pendolo

Sappiamo che $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ Nel moto del pendolo $\alpha = \frac{s}{l}$ con $l = \text{cost}$

$$\Rightarrow \omega = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \frac{\dot{s}}{l} = \frac{1}{l} \dot{s} \Rightarrow \omega = \frac{-w A \sin(\omega t + \varphi)}{l}$$

E' chiaro che $\frac{2\pi}{T} \neq \frac{-w A \sin(\omega t + \varphi)}{l}$ Velocità Angolare PENDOLO

\Rightarrow Nel moto del pendolo $\frac{d\alpha}{dt} \neq \frac{2\pi}{T}$ Velocità Angolare Frequenza

Formule per la molla

- $S(t) = X(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$
- $\dot{S}(t) = V(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$
- $\ddot{S}(t) = a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$
- $F_H = -kx$
- $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$
Periodo della molla

I campi

Criterio di FARADAY: Il numero di linee di forza passanti attraverso la superficie S è pari al flusso del campo attraverso la superficie $N = ES$

Jl lavoro

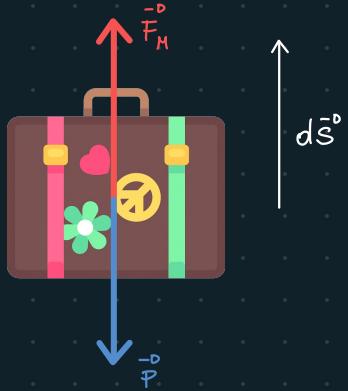
Si misura in Joule

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

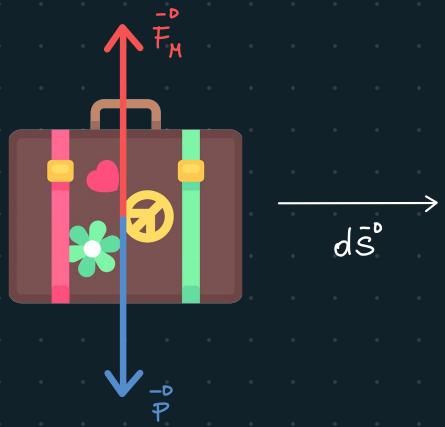


Spostiamo la particella da A a B

- Ci sono casi in cui il lavoro è zero anche se "io ho lavorato".



- Alzo la valigia \Rightarrow compio un lavoro $\vec{F}_M \parallel d\vec{s}$



- Trasporto la valigia $\Rightarrow \vec{F} \perp d\vec{s}$

$$\vec{F}_M = \vec{P} \quad e \quad \mathcal{L} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Teorema dell'Energia cinetica

Sostituendo ad $\vec{F} = m\vec{a}$, siccome $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{s} = m \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = \\ &= m \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \left[\frac{\vec{v}^2}{2} \right]_A^B = m \left[\frac{\vec{v}_B^2}{2} - \frac{\vec{v}_A^2}{2} \right] = \boxed{\frac{1}{2} m \vec{v}_B^2} - \boxed{\frac{1}{2} m \vec{v}_A^2} \end{aligned}$$

$$d\vec{s} = d\vec{v} = \left(\frac{d\vec{s}}{dt} \right) v dt$$

Energia cinetica
nello STATO FINALE B

Energia cinetica
nello STATO FINALE B

Quindi :
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\vec{v}_B^2 - \vec{v}_A^2)$$

Sia per campi conservativi che non

\Rightarrow Il lavoro è la VARIAZIONE di energia cinetica

Capiamo che UNA FORMA di energia e' quella CINETICA, che dipende dalla VELOCITA' del corpo.

Inoltre Il lavoro dipende dal cammino, perche' il campo di forze in cui e' posta la traiettoria della massa potrebbe essere NON CONSERVATIVO.

CAMPPI DI FORZE CONSERVATIVI

Il lavoro non dipende dal cammino per spostare una massa m da A a B ma solo dallo stato iniziale A e quello finale B.

Come rendere $\mathcal{W} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{S}$ dipendente solo da A e B ?

Questo accade quando la funzione integranda e' un DIFFERENZIALE ESATTO

$$\mathcal{W} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_A^B dG = G_B - G_A$$

Funzione 1

Se riusciamo a scrivere il lavoro come il differenziale di una funzione G , il gioco e' fatto

Quindi Se non riusciamo a trovare $G \Rightarrow$ il campo non e' conservativo.
Oppure NOI non siamo stati in grado di trovarla.

Se consideriamo $U = -G$:

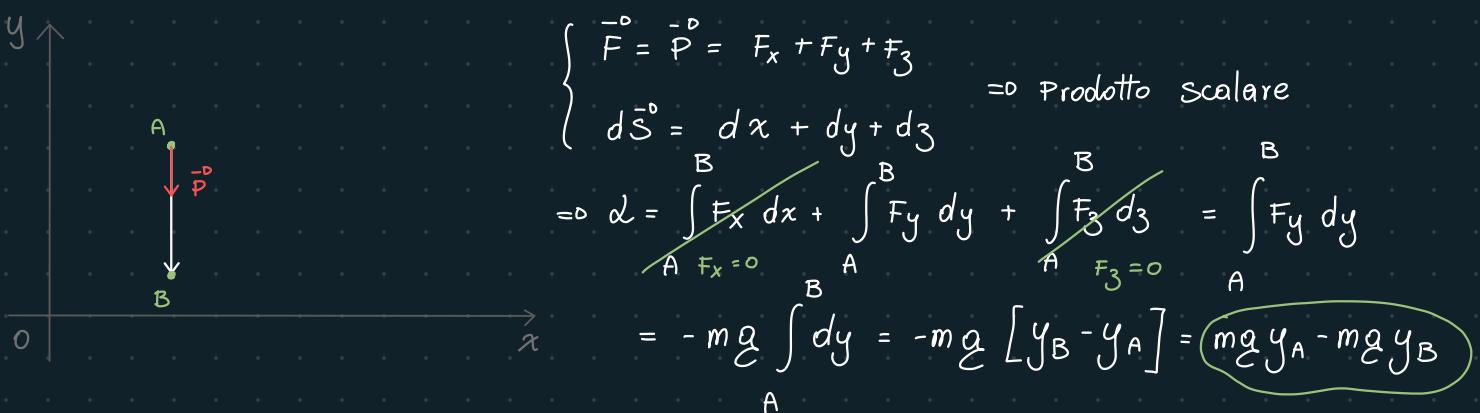
$$\mathcal{W} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \int_A^B dU = U_A - U_B$$

Funzione 2

Le due funzioni Funzione 1 e Funzione 2 Sono TOTALMENTE EQUIVALENTI

Esempio 1: Forza peso

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$



Quindi nel caso della forza peso possiamo esprimere il lavoro come la differenza di due termini che non dipendono dal cammino fatto, ma solo dalla coordinata di A e B

\Rightarrow Il campo della forza peso è CONSERVATIVO!

Esempio 2: Forza di una molla $\vec{F}_m = -kx$

Allo stesso modo \vec{F}_m è posta lungo x $\Rightarrow \alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B kx dx = -k \left[\frac{x^2}{2} \right]_A^B =$

$$\Rightarrow \alpha_{molla} = \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_B^2$$

\Rightarrow Anche il campo della molla è CONSERVATIVO!

Tiriamo le somme

Abbiamo visto che se scegliamo una funzione G o $U = -G$ otteniamo:

$$\begin{cases} f = G \\ f = U = -G \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = G_B - G_A \\ \alpha = U_A - U_B \end{array} \right.$$

Siccome nell'esempio 1 e 2 otteniamo un membro "A" meno uno "B", scegliamo la rappresentazione $U = -G \Rightarrow$

Energia Potenziale (Forza peso)

$$E_p = \underbrace{(m g y_A)}_{U_A} - \underbrace{(m g y_B)}_{U_B} = U_A - U_B \quad \Rightarrow U_{pot} = m g \underbrace{y}_{y_f - y_i}$$

Energia Potenziale (Forza di Hooke)

$$E_p = \underbrace{\left(\frac{1}{2} k x_A^2 \right)}_{U_A} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} k x_B^2 \right)}_{U_B} = U_A - U_B \quad \Rightarrow U_{pot} = \frac{1}{2} k \underbrace{x^2}_{x_f - x_i}$$

Conservazione dell'energia meccanica

In un campo conservativo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = U_A - U_B \Rightarrow \underbrace{U_A + \frac{1}{2} m v_A^2}_{\text{Stato iniziale}} = \underbrace{U_B + \frac{1}{2} m v_B^2}_{\text{Stato finale}}$$

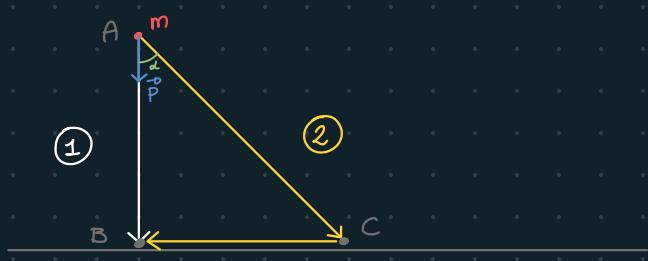
QUINDI: $E_{P_0} = E_{C_f}$ $\Rightarrow E_{P_0} + E_{C_f} = \text{COSTANTE}$

Energia meccanica
TOTALE

Se il campo è conservativo, l'Energia meccanica TOTALE, quindi la somma di Energia potenziale iniziale e cinetica finale rimangono costanti \Rightarrow L'energia meccanica si conserva.

Questa è una CONSEGUENZA del campo conservativo.

Esempio 3: Forza peso con cammini diversi



Se calcoliamo il lavoro di ① dovremmo trovare lo stesso valore del lavoro ②.

$$\Rightarrow \mathcal{L}_1 = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_A^B mg d\vec{s} = mg \int_A^B ds = mg \overline{AB} = \boxed{mgh} \quad \mathcal{L}_1$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \int_A^C (mg \cos \alpha) ds + \int_C^B (mg \cos(90^\circ)) ds \\ &\quad \text{P lungo } \overline{AC} \quad \text{P lungo } \overline{BC} = 0 \\ &= mg \overline{AC} \cos \alpha + 0 \\ &= \boxed{mgh} \quad \mathcal{L}_2 \end{aligned}$$

Sappiamo che $\overline{AC} \cos \alpha = \overline{AB}$

Quindi $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ proof

Esempio 4 : LA FORZA D'ATTRITO NON E' UN CAMPO CONSERVATIVO :



Andata



Ritorno

- le forze del campo \vec{F}_S hanno sempre la stessa direzione e verso
- la forza di attrito e' sempre opposta al moto

CALCOLIAMO il lavoro:

$$\mathcal{L}_A = \int_A^B \vec{F}^o \cdot d\vec{s}^o = |\vec{F}_S| \cdot |\vec{s}| - |\vec{F}_{ATRIT}| |\vec{s}| =$$

$$\mathcal{L}_R = \int_B^A \vec{F}^o \cdot d\vec{s}^o = \boxed{-|\vec{F}_S||\vec{s}|} - |\vec{F}_{ATRIT}| |\vec{s}|$$

Al ritorno anche
la forza del campo
si oppone al moto

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{TOT} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_R = \cancel{|\vec{F}_S| |\vec{s}|} - |\vec{F}_{ATRIT}| |\vec{s}| - \cancel{|\vec{F}_S| |\vec{s}|} - |\vec{F}_{ATRIT}| |\vec{s}| = \boxed{-2 |\vec{F}_{ATRIT}| |\vec{s}|}$$

In un campo conservativo
il lavoro totale
dovrebbe essere zero!

$$\Rightarrow \oint \vec{F}^o \cdot d\vec{s}^o = 0 \quad \Rightarrow \text{LA FORZA D'ATTRITO NON E' CONSERVATIVA}$$

Conservazione dell'energia meccanica

Per campi non conservativi

Si dimostra Sperimentalmente che l'energia TOTALE di un sistema chiuso non varia.

\Rightarrow Significa che nel bilancio energetico visto prima dobbiamo aggiungere dei termini che bilancino l'equazione:

$$\underbrace{U_A + \frac{1}{2} m v_A^2}_{\text{Stato iniziale}} = \underbrace{U_B + \frac{1}{2} m v_B^2}_{\text{Stato finale}} + \mathcal{E}_{\text{dissipata}}$$



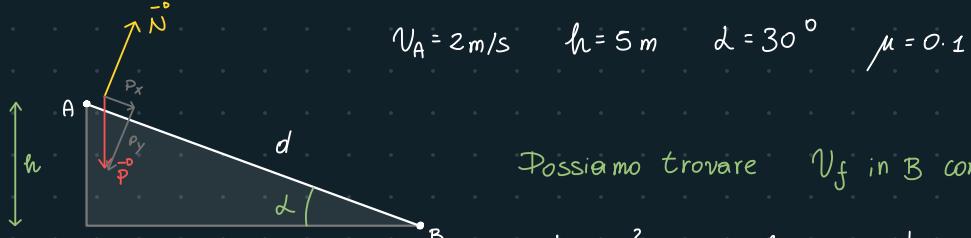
Metodo 1: Se calcoliamo e risulta $\mathcal{L}_{NC} < 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + U_A + \mathcal{L}_{NC} = \frac{1}{2} m v_B^2 + U_B$$

Metodo 2: $E_{\text{diss}} = -\mathcal{L}_{NC} \Rightarrow \mathcal{E}_d > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + U_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + U_B + \mathcal{E}_d$$

Esempio 5:



Possiamo trovare v_f in B con un Bilancio Energetico

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 + \mathcal{E}_{\text{dissipata}} + \mathcal{O} \quad v_B = 0$$

1) C'è \mathcal{E} cinetica iniziale? Si $\rightarrow +\frac{1}{2} m v_A^2$

$$\mathcal{E}_{C_A} + \mathcal{E}_{P_A} = \mathcal{E}_{C_B} + \mathcal{E}_{P_B} + \mathcal{E}_{\text{dissipata}}$$

2) C'è \mathcal{E} potenziale (iniziale)? Si $\rightarrow +mgh$

3) C'è \mathcal{E} cinetica finale? Si $\rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2$

4) C'è \mathcal{E} potenziale finale? $h = 0 \rightarrow$ NO $\rightarrow v_B = 0$

5) C'è perdita di attrito? $\mu \neq 0 \rightarrow$ Si $\rightarrow +\mathcal{E}_{\text{dissipata}}$

$$\Rightarrow d_{nc} = -\vec{F}_{A\pi} \cdot \vec{S}, \quad E_d = -L \Rightarrow E_d = |\vec{F}_{A\pi}| \cdot |\vec{d}| = \mu mg \cos \alpha \cdot \left(\frac{h}{\sin \alpha} \right) = \mu mg h \cot \alpha$$

$$h = d \sin \alpha \Rightarrow d = \frac{h}{\sin \alpha}$$

Unendo tutto: $\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + \mu mg h \cot \alpha$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_A^2 + gh = \frac{1}{2}v_B^2 + \mu gh \cot \alpha \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2gh - \mu gh \cot \alpha$$

$$\Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2gh(1 - \mu \cot \alpha) \quad \text{Equivalentemente} \quad v_f^2 = v_i^2 + 2ad$$

\Rightarrow Scopriamo quindi che $v_B = 9.22 \text{ m/s}$

L'impulso

Impulso di una forza: $\bar{I} = \int_{t_0}^{t_f} \bar{F} dt$

Quantità di moto $\bar{p} = m \cdot \bar{v}$

Teorema dell'impulso

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \bar{F} dt = \int_{t_0}^{t_f} m \left(\frac{d\bar{v}}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d\bar{p}}{dt} dt = \int_{p_0}^{p_f} d\bar{p} = \boxed{\bar{p}_f - \bar{p}_0}$$

$\bar{p} = m \cdot \bar{v}$

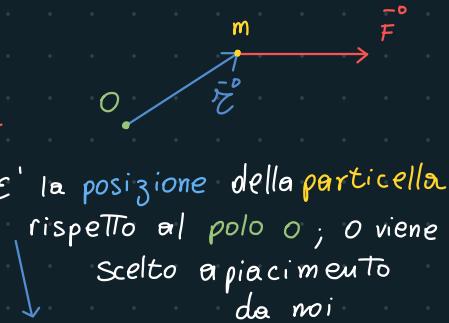
L'impulso è la VARIAZIONE della quantità di moto

Momento

di una forza:

$$\bar{M} = \bar{r} \wedge \bar{F}$$

Forza



↳ Si parla sempre di ROTAZIONE

Momento

della quantità di moto:

↳ Sinonimo di momento Angolare

$$\bar{L} = \bar{r} \wedge \bar{p}$$

quantità di moto

Siccome possiamo scegliere il polo O dove vogliamo, ci conviene posizionarlo lungo l'asse di rotazione, così guardiamo alle rotazioni proprio rispetto all'asse di rotazione.

⇒ Posizioniamo il polo O lungo l'asse di rotazione.

↳ È equivalente al sistema di riferimento oxy / oxyz

II Equazione Cardinale della Dinamica

→ Mette in relazione il momento di una forza con il momento angolare:

$$\bullet \quad M = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

(Polo fisso → Vale quando O è fisso)

Non è un principio

Proof:

$$\text{Siccome } L = \vec{\tau} \wedge \vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\tau} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{\tau} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\Rightarrow (\vec{v} \wedge m\vec{v}) + (\vec{\tau} \wedge \vec{F}) = M$$

$$= \vec{v} \wedge m\vec{v} = 0$$

$$= \vec{\tau} \wedge m\vec{v} = \emptyset$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$m\vec{v}$$

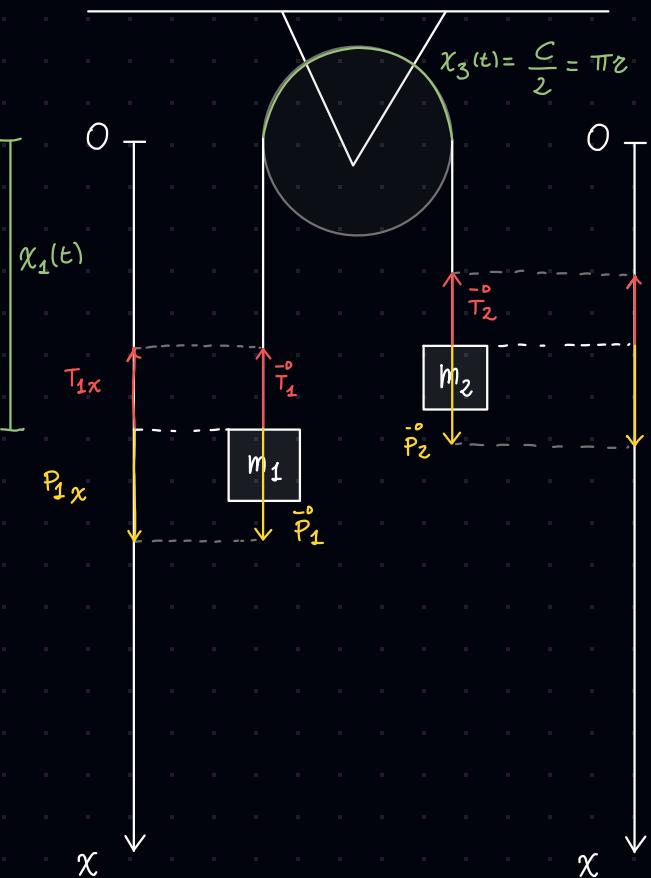
$$\vec{F}$$

(visto prima
con l'integrale
del Teorema
dell'impulso)

Raccolta di Esercizi

$$m_2 = 5 \quad m_1 = 3$$

Problema 1



$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \vec{T}_1 - \vec{T}_2 = m_1 \cdot \vec{a}_1 \\ \vec{T}_2 - \vec{P}_{2x} = m_2 \cdot \vec{a}_2 \end{cases}$$

Sappiamo che $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \vec{g} - \vec{T}_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1 \\ m_2 \vec{g} - \vec{T}_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2 \end{cases}$$

Sistema di 2 eq e 4 incognite
→ Irrisolubile così com'è

Ma il sistema ha un vincolo: c'è una fune

- Non ha attrito
- Inestensibile

FUNE IDEALE

Se la fune è ideale → La Tensione è COSTANTE ed uguale lungo tutta la fune

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = T_2}$$

INOLTRE essendo inestensibile, le masse "si tirano a vicenda"

$$\Rightarrow \ell_{\text{fune}} = x_1(t) + x_2(t) + \pi R = \text{Cost}$$

$$\text{Deriviamo: } \frac{d}{dt} \ell = v_1(t) + v_2(t) + 0 = 0$$

$$\text{Deriviamo ancora: } \frac{d^2}{dt^2} \ell = \ddot{a}_1(t) + \ddot{a}_2(t) = 0$$

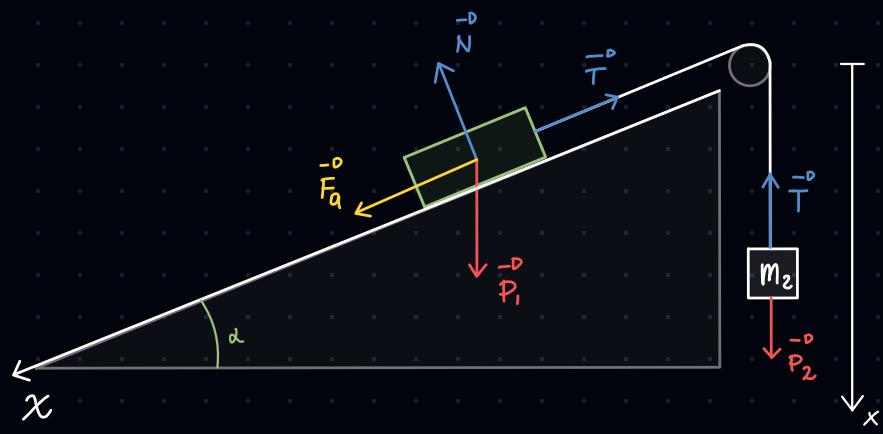
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{a}_1(t) = -\ddot{a}_2(t)}$$

$$\text{Sostituiamo al sistema} \quad \begin{cases} m_1 \vec{g} - \vec{T}_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1 \\ m_2 \vec{g} - \vec{T}_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{=} \textcircled{1} \quad \begin{cases} m_1 \vec{g} - T = -m_1 \cdot \vec{a}_2 \\ m_2 \vec{g} - T = m_2 \cdot \vec{a}_2 \end{cases} \\ \text{=} \textcircled{2} \end{array}$$

$$\text{Sottraiamo: } \textcircled{2} - \textcircled{1} = m_2 \frac{\ddot{a}}{g} - m_1 \frac{\ddot{a}}{g} = m_2 \frac{\ddot{a}_2}{g} + m_1 \frac{\ddot{a}_2}{g}$$

$$\Rightarrow \cancel{g} (m_2 - m_1) = \cancel{g} (m_2 + m_1) \Rightarrow \ddot{a}_2 = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} = 2.45 \text{ m/s}^2$$

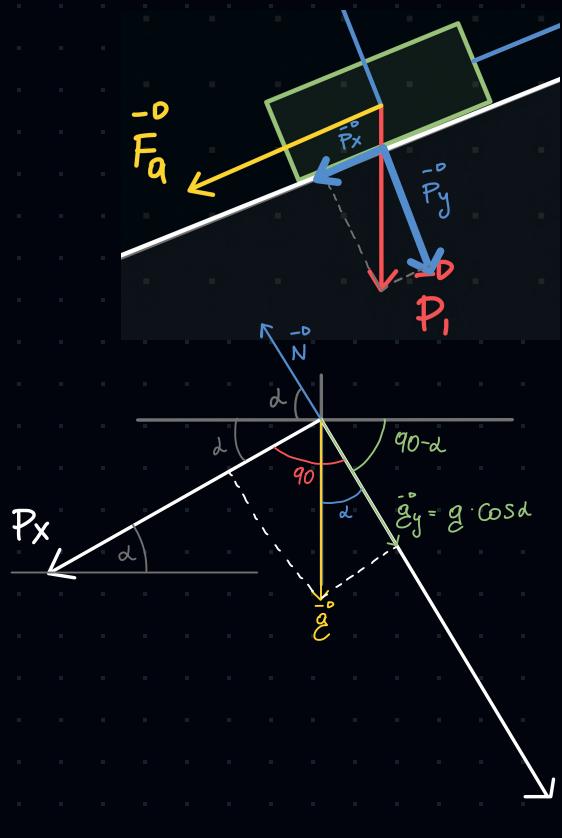
accelerazione
dei pesi



A: Massa m_2

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{Unica eq.}$$

$$m_2 \cdot g - T = \alpha_2 m_2$$

B: Massa m_1

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{P}_X + \vec{F}_{\theta\pi} - \vec{T} = m \cdot \vec{\alpha}_x \\ \vec{P}_Y - \vec{N} = m \cdot \vec{\alpha}_y \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{P}_X = m \cdot \vec{g} \cos \alpha \\ \vec{P}_Y = m \cdot \vec{g} \sin \alpha \end{cases}$$

$$|F_{\theta\pi}| = \mu_D \cdot |N|, \quad N = m_1 g \cos \alpha$$

Lungo y
modulo della forza
lungo y
modulo della
forza PESO lungo
y

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Forza PESO } x \\ \text{Forza ATTRITO } x \quad \text{Tensione} \\ m_1 g \sin \alpha + \mu_D \cdot m_1 g \cos \alpha - T = m_1 \cdot \vec{\alpha}_1 \\ m_1 g \sin \alpha - m_1 g \cos \alpha = m_1 \cdot \vec{\alpha}_1 \end{cases}$$

→ Mettiamo a sistema le eq delle due masse lungo x

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_D m_1 \vec{g} \cos \alpha + m_1 \vec{g} \sin \alpha - T \\ m_2 \vec{g} - T = m_2 \vec{\alpha}_2 \end{cases} \quad \text{→ ricordiamo che } \alpha_1 = -\alpha_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_D m_1 \vec{g} \cos \alpha + m_1 \vec{g} \sin \alpha - T = -m_1 \vec{\alpha}_2 \\ m_2 \vec{g} - T = m_2 \vec{\alpha}_2 \end{cases} \quad \text{→ } T = m_2 \vec{g} - m_2 \vec{\alpha}_2 = T \Rightarrow T = m_2 (\vec{g} - \vec{\alpha}_2)$$

$$\Rightarrow \text{Sostituisco } \mu_D m_1 \vec{g} \cos \alpha + m_1 \vec{g} \sin \alpha - m_2 \vec{g} + m_2 \vec{\alpha}_2 = -m_1 \vec{\alpha}_2 \quad \text{obiettivo}$$

$$\Rightarrow \mu_D m_1 \vec{g} \cos \alpha + m_1 \vec{g} \sin \alpha - m_2 \vec{g} = \vec{\alpha}_2 [-(m_1 + m_2)] \Rightarrow$$

$$\frac{m_1 \vec{g} (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) - m_2 \vec{g}}{-(m_1 + m_2)} = \vec{\alpha}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha}_2 = \frac{m_2 \vec{g} - m_1 \vec{g} (\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}{m_1 + m_2}$$

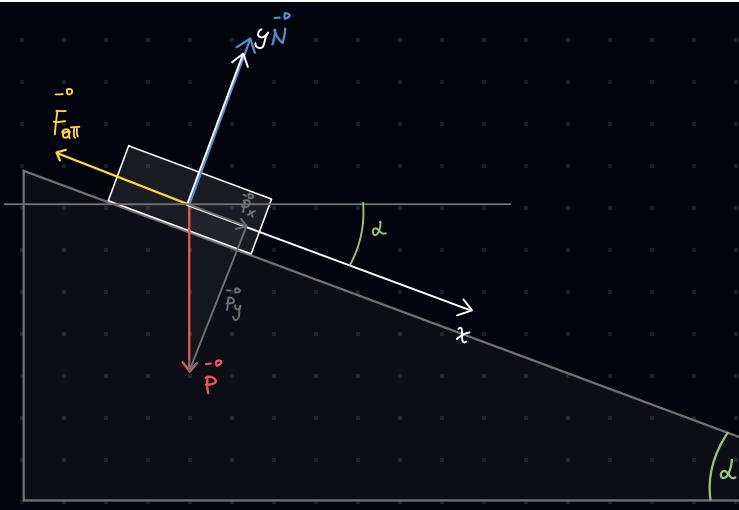
Sappiamo che $m_2 = 5 \text{ kg}$, $m_1 = 3 \text{ kg}$, $\alpha = 30^\circ$, $\mu_d = 0.1$

Possiamo calcolare l'accelerazione e la Tensione

- $a = 3.97 \text{ m/s}^2$

- $T = 29.18 \text{ N}$

1) Un blocco parte da fermo dalla cima di un piano inclinato di $\alpha = 30^\circ$ e percorre una distanza $d = 2m$ lungo il piano in 1.5 secondi. Calcolare l'accelerazione del blocco, il coefficiente d'attrito tra blocco e piano inclinato e la velocità finale del blocco.



$$\theta = 180 - 90 - 90 - \alpha \\ \Rightarrow \theta = \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{P}_x = \vec{P} \sin \alpha \\ \vec{P}_y = \vec{P} \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{P}_x = m \cdot \vec{g} \sin \alpha \\ \vec{P}_y = m \cdot \vec{g} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x \\ \sum \vec{F}_y = m \cdot \vec{a}_y \end{cases} = \begin{cases} \vec{P}_x - \vec{F}_{au} = m \cdot \vec{a} \\ N - \vec{P}_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sappiamo che} \quad \begin{cases} \vec{P} = m \cdot \vec{a} \\ |\vec{F}_{au}| = \mu_d \cdot |N| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \cdot \vec{g} \sin \alpha - \mu_d \cdot |N| = m \cdot \vec{a} \\ N - m \cdot \vec{g} \cos \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot \vec{g} \sin \alpha - \mu_d |N| = m \cdot \vec{a} \\ |N| = m \cdot \vec{g} \cos \alpha \end{cases} \quad \text{Sostituisco}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \cdot \vec{g} \sin \alpha - \mu_d m \cdot \vec{g} \cos \alpha = m \cdot \vec{a} \\ |N| = m \cdot \vec{g} \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow a = \vec{g} \sin \alpha - \mu_d \vec{g} \cos \alpha = a = \vec{g} (\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)$$

\rightarrow Il moto è di tipo uniformemente accelerato: $a = \text{cost}$

$$x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 2m}{1.5^2 s} = 1.78 \text{ m/s}^2$$

$$\rightarrow \text{Calcoliamo } \mu : a = \vec{g} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \rightarrow \frac{a}{\vec{g}} = \sin \alpha - \mu \cos \alpha \rightarrow \frac{a}{\vec{g}} - \sin \alpha = \mu \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{a}{\vec{g} \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{\vec{g} \cos \alpha} - \tan \alpha = 0.36$$

$$\rightarrow \text{Calcoliamo } v_f : a = \frac{d}{dt} \vec{v} \Rightarrow a dt = d \vec{v} \rightarrow a \int dt = \int d \vec{v}$$

$$\Rightarrow a(t_1, -t_0) = v_0 - v_1 \Rightarrow v = v_0 + a(t_1, -t_0) \rightarrow v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v dt = ds \rightarrow \int v dt = \int ds \rightarrow s_1 - s_0 = \int v_0 + a \int t dt - a t_0 \int dt$$

$$\Rightarrow S_1 - S_0 = V_0(t_1 - t_0) + \alpha \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_{t_0}^{t_1} - \alpha \cdot t_0(t_1 - t_0) = V_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t_1^2 - t_0^2) - \alpha(t_1 - t_0)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_1 - S_0 &= V_0(t - t_i) + \frac{1}{2}\alpha t^2 - \underbrace{\frac{1}{2}\alpha t_0^2}_{\frac{1}{2}\alpha t_0^2} - \alpha t_0(t - t_i) + \underbrace{\alpha t_0^2}_{\alpha t_0^2} \\ &= V_0(t - t_i) + \frac{1}{2}\alpha t^2 + \frac{1}{2}\alpha t_0^2 \alpha t_0(t - t_i) = \boxed{V_0(t - t_i) + \frac{1}{2}\alpha(t_i - t_0)^2} \quad b \end{aligned}$$

Siccome $v = \frac{d}{dt} \bar{s}$ $\Rightarrow v = \frac{d}{dt} [S_0 + V_0(t - t_i) + \frac{1}{2}\alpha(t_i - t_0)^2]$

$$t_i = 0 \Rightarrow v = \frac{d}{dt} [S_0 + V_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2]$$

$$\Rightarrow v = V_0 + \alpha t \quad a$$

Combino le due formule a e b

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = S_0 + V_0(t - t_i) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_i)^2 \\ v = V_0 + \alpha \cdot t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{v - V_0}{\alpha}, t_0 = 0 \quad \Rightarrow S_1 = S_0 + V_0 \cdot \frac{v - V_0}{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{v - V_0}{\alpha} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_1 &= S_0 + \frac{1}{\alpha} \left(V_0 v - V_0^2 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} V_0^2 - V_0 v \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} V_0^2 \\ &= S_0 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} V_0^2 \right) = S_0 + \frac{1}{2\alpha} (V_f^2 - V_0^2) \end{aligned}$$

Troviamo $V_f \Rightarrow \frac{1}{2\alpha} (V_f^2 - V_0^2) = (S_1 - S_0) \cdot 2\alpha$

$$\Rightarrow V_f^2 = (S_f - S_0) \cdot 2\alpha + V_0^2 \quad c \quad \text{Nel problema } V_0 = 0, S_0 = 0, S_f = 2 \text{ m, } \alpha = 1,78 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow V_f = \sqrt{(2 \cdot 2 \cdot 1,78 + 0)} \approx 2,67 \text{ m/s}$$

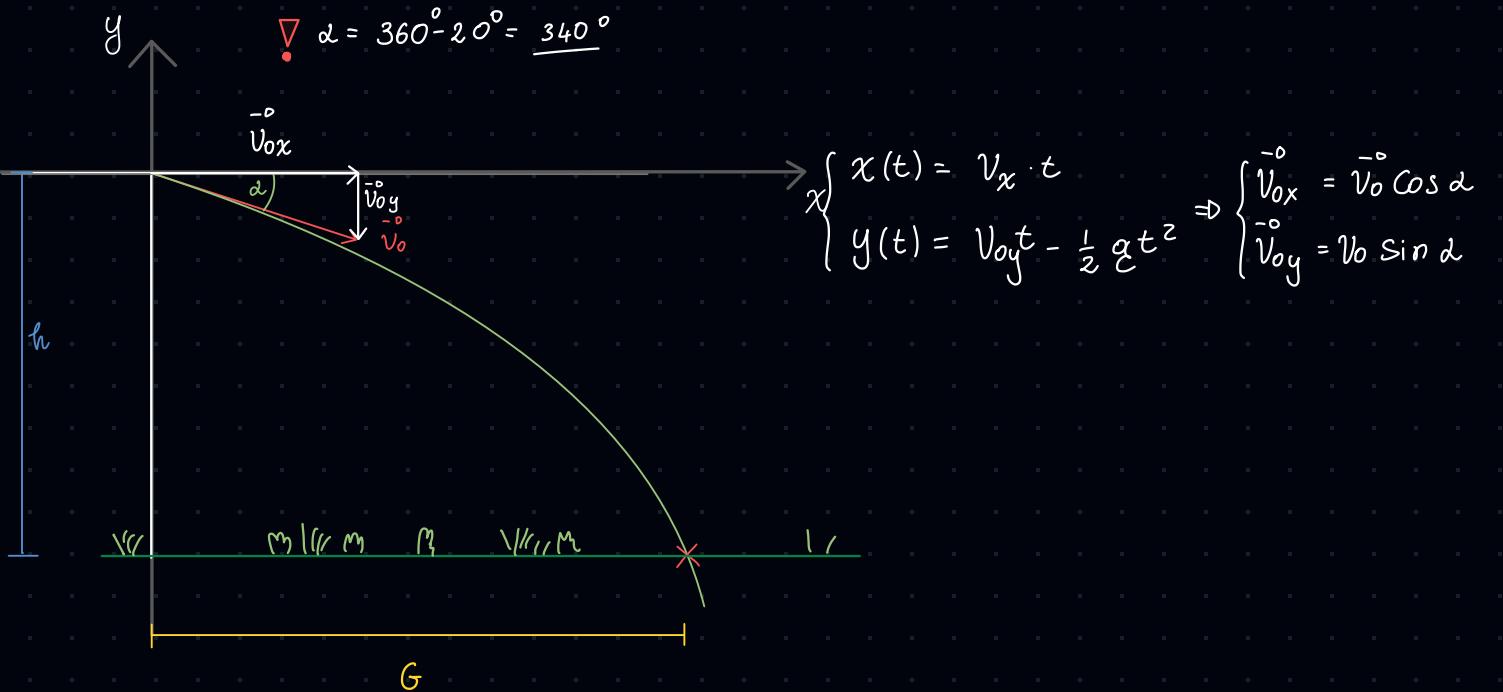
Tutta la dim non era necessaria
se ci si ricorda le formule!

Q3: $\mu_d = ?$

Avevamo trovato $\alpha = g(\sin \vartheta - \mu \cos \vartheta) \Rightarrow \sin \vartheta - \mu \cos \vartheta = \frac{\alpha}{g}$

$$\Rightarrow \sin \vartheta - \frac{\alpha}{g} = \mu \cos \vartheta \Rightarrow \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} - \frac{\alpha}{g \cos \vartheta} = \mu = \boxed{0,367}$$

1) Un uomo lancia una palla (con una velocità $V_0 = 8.0 \text{ m/s}$ e un'inclinazione $\alpha = 20^\circ$ sotto l'orizzontale) da una finestra all'ultimo piano di un edificio. La palla arriva al suolo dopo 3 secondi. Calcolare: (a) la distanza dalla base dell'edificio del punto di impatto col suolo; (b) l'altezza da cui viene lanciata la palla e (c) il tempo che la palla impiega per arrivare ad un punto che si trova 10 metri al di sotto della quota da cui era stata lanciata.



$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = V_0 \cos \alpha \cdot t \\ y(t) = V_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha} \Rightarrow y = V_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{V_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \text{Eq della Traiettoria } \left(-\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x^2 + \tan \alpha x - h = y$$

↑ concavità verso il basso ↑ elevato di h

→ Per le domande del problema non è necessaria l'eq del moto:

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos \alpha \cdot t \\ y(t) = V_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow x(3) = 8 \cdot \cos(340) \cdot 3 = 22.55 \text{ m}$$

$$y(t) = y_0 + V_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = -52 \text{ m}$$

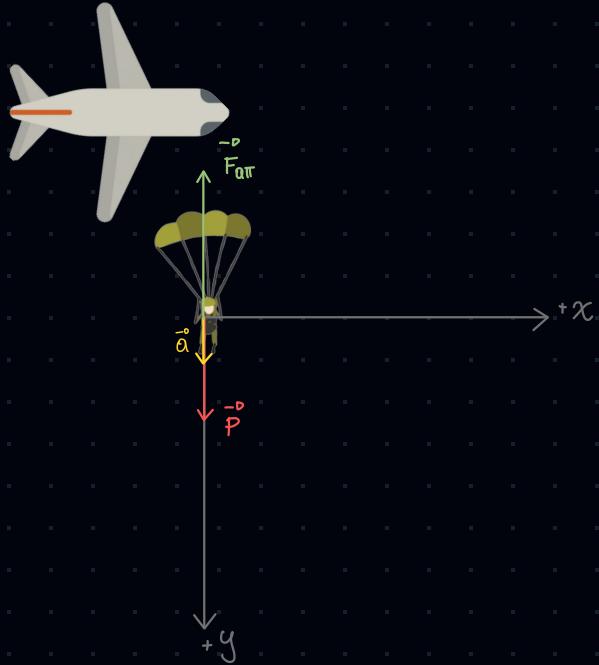
Q2
Per come è stato preso il sistema di riferimento, il risultato negativo ha senso

$$V_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = -10 \Rightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin \alpha \cdot t + 10 = 0$$

$$\frac{1}{2} g t^2 - V_0 \sin \alpha \cdot t - 10 = 0 \quad \Delta = V_0^2 \sin^2 \alpha - 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot (-10) = \sqrt{174 \cdot 3} = 13.2$$

$$t_{1,2} = \frac{V_0 \sin \alpha \pm 13.2}{g} = 1.06 \text{ s}$$

1) Una persona di 80 kg si lancia col paracadute e subisce un'accelerazione verso il basso $a = 2.5 \text{ m/s}^2$. La massa del paracadute è $M = 5 \text{ kg}$. Calcolare la forza costante verso l'alto esercitata dall'aria sul paracadute. Se il lancio avviene con una velocità iniziale trascurabile, da un'altezza $h = 5000 \text{ m}$, dopo quanto tempo il paracadutista arriverà a terra?



- Il moto è uniformemente accelerato

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad \text{Siccome } \alpha = 0$$

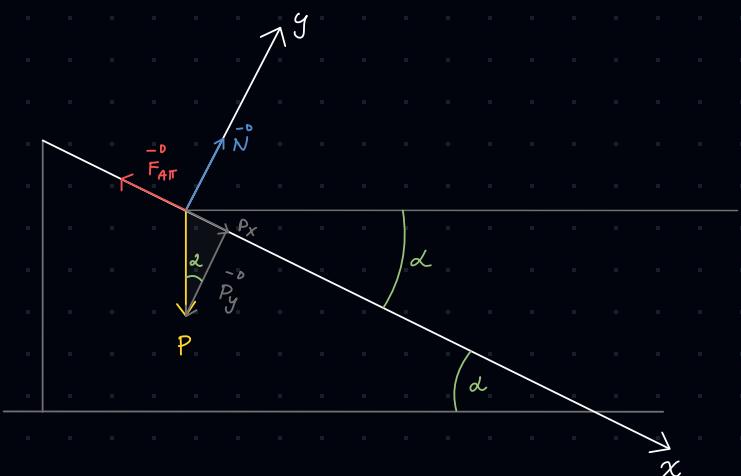
$$= g \cdot \mu = 0 \quad \mu = \frac{a}{g} = 0.254$$

$$\sum \vec{F}_y = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{P}_y - \vec{F}_{air} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_{air}| = |\vec{P}_y| - m \cdot |\vec{a}| \quad \text{Siccome } |\vec{P}| = \cancel{m} \cdot g$$

$$= m \cdot g - m \cdot a = \cancel{m}(g - a) = 621.3 \text{ N}$$

$Q_2:$ $y(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 63.24 \text{ s} \Rightarrow 01:03:14$

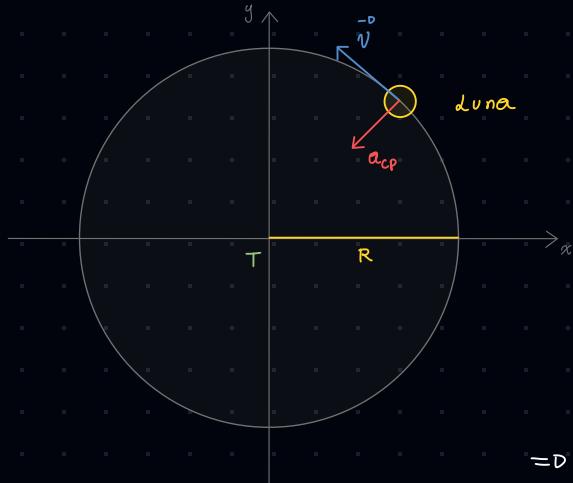


$$\Rightarrow \vec{F} = m \vec{\alpha}_x \Rightarrow \begin{cases} mg \sin \alpha - F_{\text{Arr}} = m \cdot \alpha_x \\ N - mg \cos \alpha = m \alpha_y \end{cases}$$

$$F_{\text{Arr}} = mg \sin \alpha - m \alpha_x = 9.34 \text{ N}$$

Siccome $F_{\text{Arr}} = \mu |N| = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \mu = \frac{F_{\text{Arr}}}{mg \cos \alpha} = 0.39$

Es 2 - 1/07/19

Determinare M_T sapendo che Trivoltazione Terra-Luna = 27.3 gg e $R_{T-L} = 3.82 \times 10^5 \text{ Km}$ 

$$v_{\text{Luna}} = \frac{2\pi R}{T} = 1017.57 \text{ m/s}$$

$$\vec{F}_{CF} = \left(\vec{F}_{CP} \right) \Rightarrow m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

$F_{\text{gravita'}}$

$$\Rightarrow M = \frac{R v^2}{G} = 5.93 \times 10^{24} \text{ Kg}$$

$$M = 3 \text{ Kg} \quad v_0 = 0 \quad \alpha = 30^\circ \quad d = 2 \text{ m}$$

$$t = 1.5 \text{ s} \quad Q_1 : \frac{\alpha}{d}$$

$$Q_2 : \frac{F_{\text{Arr}}}{d}$$

$$Q_3 : \mu_d$$

$$\begin{cases} P_x = P \sin \alpha \\ P_y = P \cos \alpha \end{cases}$$

$$\text{Troviamo } \alpha \quad S(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2x}{t^2} = 1.78 \text{ m/s}^2$$

Processo
CLASSICO

(1 - 10/02/14) due corpi vengono lanciati perpendicolarmente con $v_0 = 50 \text{ m/s}$ con una differenza temporale di $t = 5''$. Tra l'uno e l'altro

$$\begin{cases} y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ y(t+T_0) = v_0 (t+T_0) - \frac{1}{2} g (t+T_0)^2 \end{cases} \quad \text{Quando } y(t) = y(t+T_0) \quad ?$$

$$\Rightarrow v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t + v_0 T_0 - \frac{1}{2} g (t^2 + T_0^2 + 2tT_0)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} g t^2 = v_0 T_0 - \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} g T_0^2 - g t T_0 \Rightarrow v_0 T_0 - \frac{1}{2} g T_0^2 - g t T_0 = 0$$

$$\Rightarrow v_0 T_0 - \frac{1}{2} g T_0^2 = g t T_0 \Rightarrow t = \frac{v_0 - \frac{1}{2} g T_0}{g} = 2.59''$$

\Rightarrow Si incontrano dopo $2.59''$ dopo aver atteso i $5''$ del lancio del 2° corpo

\Rightarrow Si incontrano dopo $5'' + 2.59'' = 7.59''$ dopo aver lanciato il primo.

Soluzione alternativa:

$$\begin{cases} y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ y(t-T_0) = v_0 (t-T_0) - \frac{1}{2} g (t-T_0)^2 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{v_0 + \frac{1}{2} g T_0}{g} = 7.6''$$

(2 - 10/02/14) $M = 10 \text{ kg}$ si sposta lungo 3 con $a = 2.5x$ con $x = m$

Q1: Lavoro da $x_0 = 0$ a $x_f = 8 \text{ m}$

$$\begin{aligned} d &= \int_A^B \bar{F} ds = 0 \quad \bar{F} = m \cdot a = 0 \quad \bar{F}(x) = m \cdot 2.5x = 0 \quad d = \frac{5}{2}m \int_0^8 x dx = \frac{5}{2}m \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^8 \\ &\Rightarrow d = \frac{5}{2}m \cdot \frac{64}{2} = 800 \text{ J} \end{aligned}$$

(1 - 19/03/14) $h = 100 \text{ m}$ $\bar{v}_0 = 300 \hat{i} \text{ m/s}$

Q1: $G = ?$ Q2: $d(t^*)$ con $t^* = 2''$

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) = v_0 \\ v_{0y} = v_0 \sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$t = \frac{x}{v} \Rightarrow y(x) = h - \frac{1}{2} \frac{g}{v^2} x^2 \quad \text{TRAETTORIA}$$

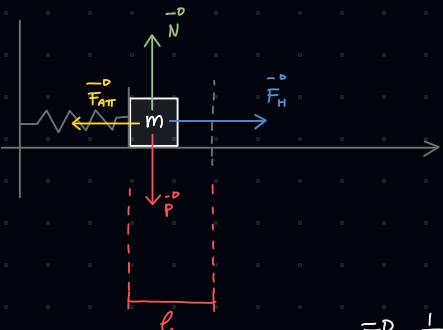
$$\text{Trovare la gittata: } y(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \sqrt{\frac{h \cdot 2v^2}{g}} = 1354.57 \text{ m}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = \text{cost} \\ v_y = gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_0 \cos \alpha = v_{0x} \\ v_0 \sin \alpha = gt \end{cases} \quad \tan \alpha = \frac{gt}{v_0} \quad \alpha = \arctan \left(\frac{gt}{v_0} \right) = 37.4^\circ$$

$$(2 - 19/03/14) \quad M = 2 \text{ kg} \quad e = 15 \text{ cm} \quad K = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad d = 75 \text{ cm} \quad Q_1 / \mu_d = ?$$

$Q_2: V$ dopo 20 cm



$$F_H = -Kx \Rightarrow F_H = 15 \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 3000 \text{ N}$$

Soluzione: Bisogna fare un bilancio energetico tra l'Energia potenziale della molla e l'unica forza: $F_{A\pi}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} K e^2 = F_{A\pi} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{2} K e^2 \right)}_{E_{potenz}} = \underbrace{\left(\mu_d m g \right)}_{E_{dissipazione}} \cdot \underbrace{d}_{\text{Spostamento}}$$

$$\Rightarrow \frac{K e^2}{2 m g} = \mu_d = 0.11$$

$$Q_2: \frac{1}{2} K e^2 = \underbrace{\left(\mu_d m g d' \right)}_{\uparrow E_{cinetica}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} m v^2 \right)}_{\text{Energia cinetica}} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2} K e^2 - \mu_d m g d' \right) \cdot 2}{m} = v^2 \Rightarrow v = 1.35 \text{ m/s}$$

E' l'energia che m ha dissipato fino a $d' = 20 \text{ m}$

Il Bilancio energetico funziona nel seguente modo:

- 1) "Fotografiamo" m in due istanti: uno iniziale ed uno finale
- 2) A sx poniamo TUTTA l'energia che un corpo possiede all'inizio
- 3) A dx poniamo quella che sta usando e quella che ha dissipato

1 - 25/05/14

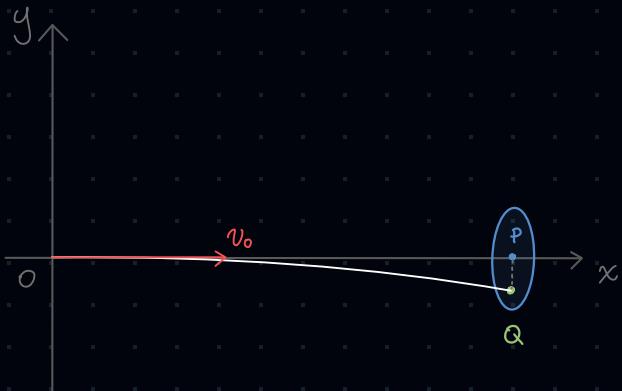
$v_0 = 10 \text{ m/s}$

$t_1 = 0.19''$

$Q_1: \overline{PQ} = ?$

$Q_2: \overline{OP} = ?$

$Q_3: \alpha \text{ in } \Delta?$



$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = \frac{v_{0y}}{\cancel{0}} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

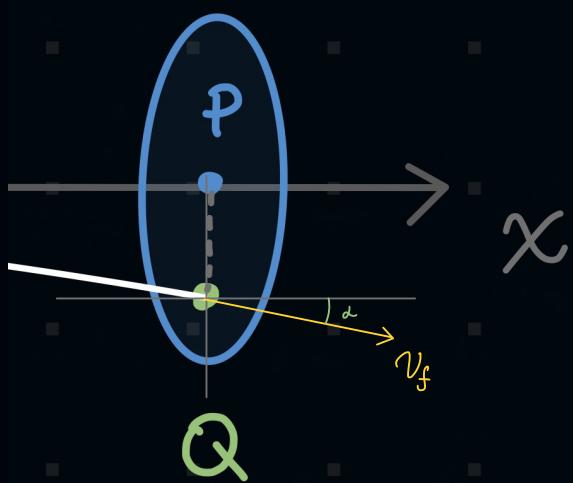
$$\Rightarrow x(0.19) = 10 \cdot 0.19'' = 1.9 \text{ m}$$

$$y(0.19) = -\frac{1}{2} g (0.19)^2 = -0.177 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \overline{PQ} \approx 0.18 \text{ m} \approx 18 \text{ cm}$$

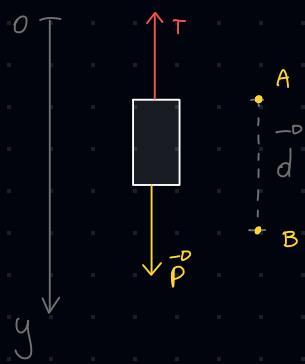
$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{ma} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} = \text{const} \\ v_y(t) = g t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} = \frac{gt}{v_{0x}} \rightarrow \tan(\alpha) = \frac{gt}{v_{0x}} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{gt}{v_{0x}}\right) = 10.55^\circ$$



$$(2 - 25/05/14) \quad v_{yf} = 3.5 \text{ m/s} \quad m_{\text{Ascensore}} = 1300 \text{ kg} \quad T_{\text{cavo}} \quad \text{frena in } d = 3 \text{ m} \quad F_{AII} = \text{Trascurabile}$$

$$Q_1: T_{F110} = ?$$



$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Rightarrow \int_A^B (\vec{P} + \vec{T}) d\vec{s} = -\frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow (m \vec{g} + \vec{T}) \cdot \vec{d} = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

Abbiamo che $m \vec{g} \hat{j}$ e $\vec{T} \hat{j}$

$$\Rightarrow m \vec{g} \cdot \vec{d} - |\vec{T}| \vec{d} = -\frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \frac{m \vec{g} \cdot \vec{d} + \frac{1}{2} m v_0^2}{d} = T = 15.407 \text{ N}$$

$$(2 - 11/11/16) \quad m = ? \quad v_0 = 2 \text{ m/s} \quad \mu_d = 0.1 \quad Q_2: \text{d prima di fermarsi} \quad Q_2: t = ?$$

$$\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_P(v_f) + \mathcal{E}_d \cdot d \quad \text{con} \quad \mathcal{E}_d = \mu |N| = \mu m g$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \mu m g d \Rightarrow d = \frac{v_0^2}{\mu g} = 2.04 \text{ m} \quad v_0^2 = 2 \mu g d$$

$$Q_2: S(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad v(t) = v_0 + a t \Rightarrow \text{Considerando } F_{AII} = \mu |N| \hat{v} = \frac{-\mu m g \hat{v}}{\text{Forza}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{F_{AII}}{m} = -\frac{\mu m g}{m} \hat{v} = -\mu g \hat{v}$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_f - v_0}{a} = \frac{v_0}{\mu g} = 2.038 \text{ s}$$

$$\text{Soluzione Alternativa: } S(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\vec{a} = \frac{F_{AII}}{m} = -\mu g \hat{v} \Rightarrow S_f = 0 + v_0 t - \frac{1}{2} \mu g \cdot t^2 = -\frac{1}{2} \mu g t^2 + v_0 t - d = \frac{1}{2} \mu g t^2 - v_0 t + d = 0$$

$$\Delta = v_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \mu g \cdot d \quad \text{con } d = \frac{v_0^2}{2 \mu g} = v_0^2 - 2 \mu g \cdot \frac{v_0^2}{2 \mu g} = \Delta = 0$$

Stessa formula di prima

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_0 \pm 0}{\mu g} = \left(\frac{v_0}{\mu g} \right) = 2.038 \text{ s}$$