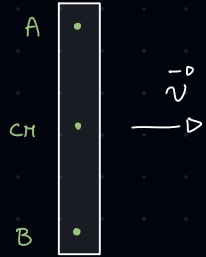


Corpi rigidi

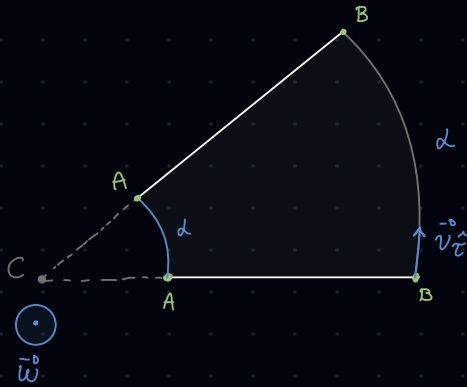
Def: Fissiamo due punti A e B su un corpo e facciamo compiere al corpo delle trasformazioni; se misuriamo \overline{AB} e questa è la stessa di quando abbiamo iniziato, allora è un corpo rigido.

Traslazione



$$v_{CM} = \frac{\sum_i m_i v_i}{M} \quad \text{ma} \quad v_A = v_B = v_i = v_{CM}$$

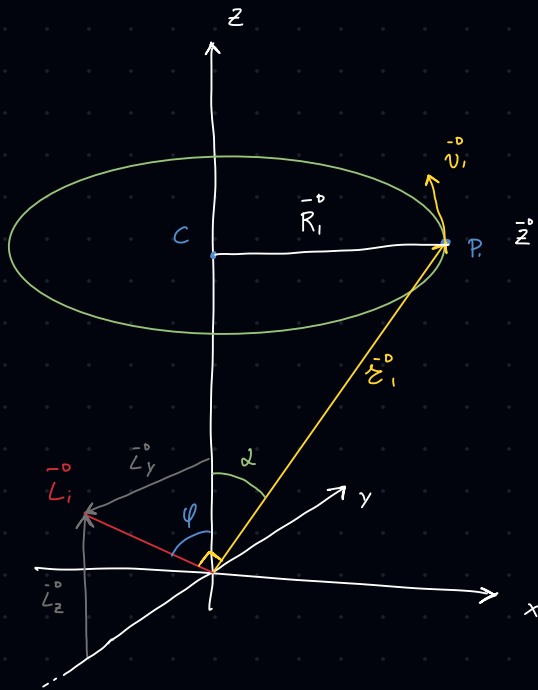
Rotazione



Nelle rotazioni $\alpha_A = \alpha_B \Rightarrow \omega_A = \omega_B$

ma $\ell_A < \ell_B \Rightarrow v_A < v_B$ vel tangenziale

Rotazione attorno ad un asse fisso



Siccome $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ $\vec{r} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{L} \perp \vec{r} \perp \vec{v}$

$\vec{R}_i = \vec{r}_i \sin \alpha \Rightarrow \underline{R_i = r_i \sin \alpha}$

$|\vec{L}_i| = |\vec{r}_i| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(90) = r_i \cdot m \cdot v_i \quad (1)$

Dal moto circolare abbiamo trovato

$v = \omega R \Rightarrow L_i = r_i \cdot m_i \cdot \omega \cdot R_i \quad (2)$

Le componenti x ed y di \vec{L}_i si annullano a due a due \Rightarrow Troviamo la componente z

$\Rightarrow \vec{L}_z = |\vec{L}_i| \cos(\varphi) \quad \text{ma } \varphi = 90 - \alpha \Rightarrow \cos(90 - \alpha) = \sin(\alpha)$

$\Rightarrow |\vec{L}_z| = |\vec{L}_i| \sin(\alpha) = r_i \cdot m_i \cdot \omega \cdot R_i \sin(\alpha)$

$\begin{cases} R_i = r_i \sin \alpha \\ z = r_i \cos \alpha \end{cases}$

$\Rightarrow L_z = m_i \omega R_i^2$

Siccome il corpo è rigido $\omega_i = \omega_k \quad \forall x, k \in [\text{Corpo}] \Rightarrow \omega_i = \omega$

$L_{z \text{ TOT}} = \omega \left(\sum_i m_i R_i^2 \right)$ Lo battezzo Momento di inerzia SCALARE

$\Rightarrow L_z = \omega I_z$ Momento Angolare

Conclusioni

Se siamo nel caso dei corpi rigidi, ed il solido è SIMMETRICO

$\vec{L} = \vec{L}_z \Rightarrow \vec{L}_{\text{TOT}} = I \vec{\omega} \quad \text{Con } I = m R^2$

Abbiamo visto che possiamo esprimere il momento di una forza attraverso il momento angolare; ma il momento angolare di un corpo rigido è proprio:

$\vec{L}_{\text{corpo rigido}} = \vec{\omega} I \Rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{M}_{\text{corpo rigido}} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega} I] = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha}$

$\Rightarrow \vec{M} = I \vec{\alpha}$ con $I = \text{momento di inerzia} = m R^2$

Molto simile ad $\vec{F} = m \vec{a}$

ROTAZIONI

$$\vec{M} = I \vec{\alpha}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega dt = \theta_0 + \omega t$$

- Se $\vec{M} = 0 \Rightarrow$ Moto circolare uniforme
o quiete

$$\text{Se } M=0 \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \omega_f \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

- Se $M \neq 0$ ma costante

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \alpha = \text{cost}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \\ \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{cases}$$

- Se $M \neq 0 \neq \text{cost} \Rightarrow$ moto Vario

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} \neq \text{cost}$$

Energia Cinetica

$$E_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

dal moto circolare $v = \omega R$

$$\Rightarrow E_i = \frac{1}{2} \underbrace{m_i R^2}_{\text{Inerzia}} \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 I_i$$

TRASLAZIONI

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$S(t) = S_0 + v_0 t$$

- Se $\vec{a} = 0 \Rightarrow$ Moto rettilineo uniforme
o quiete

$$\Rightarrow S_f = S_0 + v \cdot t$$

- Se $a \neq 0$ ma costante

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \text{cost}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(t) = v_0 + \vec{a} t \\ S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \end{cases}$$

- Se $M \neq 0 \neq \text{cost} \Rightarrow$ moto Vario

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \neq \text{cost}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

