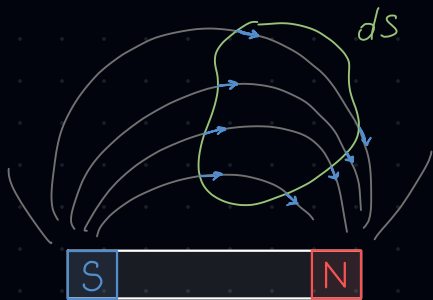


2° Equazione: (4ª) vedi 6.01

Abbiamo definito $\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$ ma approfondiamo



In qualsiasi regione di spazio entrano ed escono lo stesso numero di linee di forza!

$$\Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

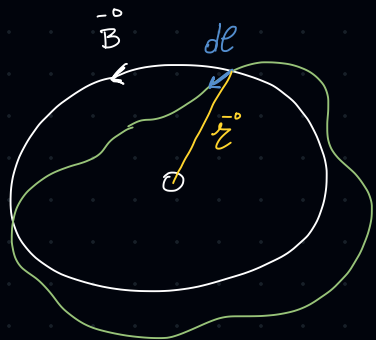
Forma differenziale $\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV$

$$\Rightarrow \Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

1° eq di Maxwell per il campo \vec{B}

1° Equazione (3ª) Dalla legge di Ampere

→ Filo percorso da I → $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\tau}$ → $\phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot \oint \frac{1}{R} \cdot \hat{\tau} d\vec{\ell}$



$\hat{\tau} \cdot d\vec{\ell} = \text{Arco di circonferenza} \rightarrow I \text{ Rad} = \frac{\ell}{R} \Rightarrow \ell = \hat{\tau} d\vec{\ell} = R d\varphi$

Legge di Ampere

$$\Rightarrow \phi = B \cdot \oint \frac{1}{R} \cdot R d\varphi \Rightarrow \phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \oint d\varphi = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

→ Dal Teorema del Rotore → $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 I$

ma $I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

1° eq di Maxwell \vec{B}

Legge di Ampère - Maxwell 1 Equazione di Maxwell (3) generalizzata

(a) Legge di Biot-Savart $\vec{B} = \kappa \frac{\vec{I} \times \hat{r}}{R}$

(b) Legge di Ampère $C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \kappa \oint \frac{\vec{I} \times \hat{r}}{R} d\vec{e}$: $\hat{r} d\vec{e} = \text{Arco di circonferenza}$

$\rightarrow 1 \text{ Rad} = \frac{e}{R} \Rightarrow e = \varphi \cdot R \rightarrow de = R \cdot d\varphi \Rightarrow C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \kappa \oint \frac{\vec{I}}{R} \cdot R d\varphi = \kappa I \oint d\varphi$

$\rightarrow C = \frac{\mu_0}{2\pi} I \cdot 2\pi \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I \text{ Ampère}$

(c) Corrente stazionaria



$$\phi = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = 0$$

$\rightarrow \phi = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV = 0 \rightarrow \underline{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0}$

(d) Condensatore



$$\phi = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \neq 0$$

(e) Conservazione della Carica

$-dQ = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \cdot dt \Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$ ma $\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho dV \Rightarrow Q = \int \rho dV$

$\Rightarrow -\frac{d}{dt} \int_V \rho(x,y,z,t) dV = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$

Teorema Divergenza

$\rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$

$\rightarrow \underline{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}} \text{ OBIETTIVO}$

(f) dalla legge di Ampère

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I \rightarrow \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 I$ ma $I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$

$\Rightarrow \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \rightarrow \underline{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$

(g) Test: DIVERGENZA

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \mu_0 \vec{J} \rightarrow \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{Corrente stazionaria} \rightarrow \text{NON VA BENE!}$$

(h) Il termine di Maxwell

Termine: $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}$$

Equazione di
Ampère Maxwell
Forma Differenziale

proof:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mu_0 \vec{J} \rightarrow \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Da Gauss $\phi_E = \int \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \rho = \frac{dQ}{dV} \rightarrow dQ = \rho dV \rightarrow Q = \int_V \rho dV$

$$\Rightarrow \phi_E = \int \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Maxwell}$$

$$\Rightarrow \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{QED come nella conservazione della carica}$$

Scrivere la legge di Ampère-Maxwell in forma Integrale

DIFF: $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \right) + \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \quad \text{I}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 I \quad (1)$$

(2) Analogia con Faraday

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS - \oint \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{Varia } \vec{B}} \quad \rightarrow \text{Vedi 4.09}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi_E}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS - \oint \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{Varia la Superficie}} \rightarrow \text{Sostituiamolo nella (1)}$$

$$\rightarrow \oint_e \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \epsilon_0 \left[\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} ds - \oint_e (\vec{v} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{e} \right] + \mu_0 I \quad \text{Non completamente esatta}$$

\rightarrow Nel caso generale $\frac{d\phi_E}{dt}$ sono 2 pezzi, quindi devono essere 2 anche dall'altro lato:

$$\rightarrow \oint_e \vec{B} \cdot d\vec{e} - \frac{1}{c^2} \oint_e (\vec{v} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{e} = \mu_0 \epsilon_0 \left[\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} ds - \oint_e (\vec{v} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{e} \right] + \mu_0 I$$

Equazione di Ampere-Maxwell in forma integrale

Abbreviando $f_B = \frac{I}{q_B}$

$$\rightarrow f_B = \oint_e \vec{B} \cdot d\vec{e} - \frac{1}{c^2} \oint_e (\vec{v} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{e} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$