Definiamo l'induzione elettromagnetica

"L'induzione è quel fenomeno che genera una forza elettromotrice indotta a partire da un campo magnetico variabile. La f_{em} indotta genera poi una corrente indotta."

Faraday scoprì che $f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt}$ Legge di Faraday

Dimostrazione: Il flusso dipende dalla superficie (ed angolo) e dal campo $\vec{B}$ stesso.

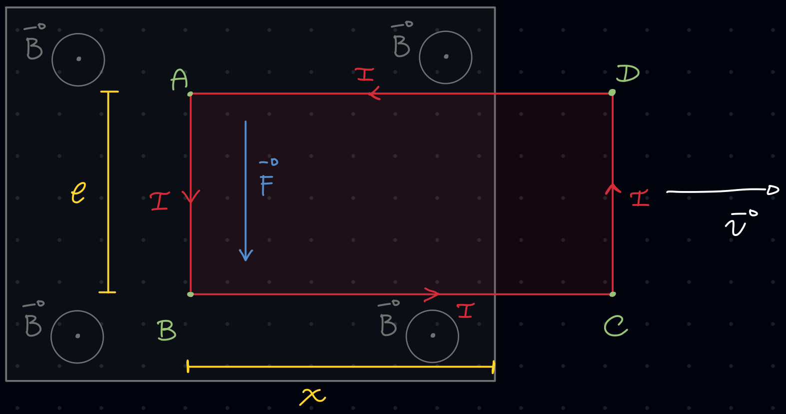
infatti: $\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = \int_S \underset{\text{Campo B}}{B}\, \underbrace{dS \cdot \cos\theta}_{\text{Superficie}}$

$\Rightarrow \frac{d\phi_B}{dt}$ = Derivata di un prodotto: $\phi_B(B, dS\cos\theta)$ → Non so se è esatto scrivere così

Quindi seguendo la regola $g(x) = f(x) \cdot h(x) = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$

ci conviene trovare separatamente $f'(x)$ e $h'(x)$ facendo variare prima S e poi B.

FLUSSO TAGLIATO



Abbiamo imparato che quando una carica si muove in un campo elettrico o magnetico si genera una forza secondo l'equazione.

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{ma} \quad \vec{E} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

Abbiamo detto che si genera una forza elettromotrice $\to$ $f_{em} = \frac{L}{q}$

$$\Rightarrow f_{em} = \frac{L}{q} = \frac{\oint \vec{F} \cdot d\vec{l}}{q} = \frac{\cancel{q} \oint \vec{v} \wedge \vec{B}\, d\vec{l}}{\cancel{q}} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B}\, d\vec{l}$$

$\to$ Dividiamo in segmenti $\to$ $f_{em} = \int_A^B \vec{v} \wedge \vec{B}\, dl_1 + \cancel{\int_B^C \vec{v} \wedge \vec{B}\, dl_2} + \cancel{\int_C^D \vec{v} \wedge \vec{B}\, dl_3} + \cancel{\int_D^A \vec{v} \wedge \vec{B}\, dl_4}$

$\vec{F} \perp d\vec{l}_2$ $\quad B_3 = \emptyset$ $\quad F \perp dl_4$

$$\Rightarrow f_{em} = \int_A^B \vec{v} \wedge \vec{B}\, dl_1 \quad \text{ma} \quad \vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{B} = v \cdot B \cdot \sin(\theta) = v \cdot B$$

$$= vB \int dl_1 = \underline{vBl} \quad f_{em}$$

Controllo tramite legge di Faraday $\quad f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Se il filo si muove $\Rightarrow dS \neq 0 \Rightarrow$ S dipende da t

$$S = l \cdot x \to dS = l \cdot dx \to dx = x - \Delta x$$

$$\phi(t) = \int \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = B \int_S dS = B \cdot l \cdot x \quad \text{ma} \quad t' = t + \Delta t \to x' = x - \Delta x$$

$\Rightarrow \phi(t+\Delta t) = B \cdot l \cdot (x - \Delta x)$ $\quad$ x dipende dalla velocità della spira $\to$ $\Delta x = v \cdot \Delta t$

$$\frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B \cdot l \cdot (x - \Delta x) - B \cdot l \cdot x}{\Delta t} = \frac{\cancel{Blx} - Bl\Delta x - \cancel{Blx}}{\Delta t}$$

$$\to \frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} -\frac{Bl\Delta x}{\Delta t} = -Bl\frac{dS}{dt} = -B \cdot l \cdot v \quad \text{QED}$$

$$\Rightarrow f_{em} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B}\, dl = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Flusso concatenato: B varia

Recap: Approssimare funzione in x_0: $f(x) \simeq f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot (x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot (x-x_0)^2$

$\rightarrow$ Troviamo $\frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\int B(t+\Delta t, \vec{z}) \cdot \hat{n}\, dS - \int B(t, \vec{z}) \cdot \hat{n}\, dS}{\Delta t}$

Approssimo per $\Delta t_0 = 0 \rightarrow B \simeq B(t, \vec{z}) + \left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_{\Delta t_0 = 0} \Delta t$ $\quad 1°$ ordine

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\cancel{\int B(t, \vec{z}) \hat{n}\, dS} + \int \frac{\partial B}{\partial t} \Delta t \cdot \hat{n}\, dS - \cancel{\int B(t, \vec{z}) \cdot \hat{n}\, dS}}{\Delta t}$$

$$\rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\int \frac{\partial B(t+\Delta t, \vec{z})}{\partial t} \cancel{\Delta t}\, \hat{n}\, dS}{\cancel{\Delta t}} \rightarrow \underline{\lim_{\Delta t = 0}} \int \frac{\partial}{\partial t} B(t+\cancel{\Delta t}, \vec{z}) \cdot \hat{n}\, dS$$

$$\rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t} B(t, \vec{z}) \cdot \hat{n}\, dS$$

Da faraday $\quad f_{em} = -\frac{d\phi}{dt}$ $\quad$ ma $\quad f_{em} = \frac{L}{q}$ $\quad$ e $\quad F = q \cdot \vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B})$

$$\Rightarrow f_{em} = \frac{L}{q} = \frac{\cancel{q}\int \vec{E} \cdot dl}{\cancel{q}} + \frac{\cancel{q}\int \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}}{\cancel{q}} \rightarrow f_{em} = \underbrace{\int \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int \vec{v} \wedge \vec{B}\, d\vec{l}}_{\frac{L}{q}} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Punto (1)

$$\Rightarrow f_{em} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int \vec{v} \wedge \vec{B}\, d\vec{l} = -\int \frac{\partial}{\partial t} B(t, \vec{z})\, \hat{n}\, dS$$

Ma in questo caso il circuito è fermo! $\Rightarrow |\vec{v}| = 0$

$$\Rightarrow f_{em} = \oint_l \vec{E} \cdot dl = -\int_S \frac{\partial}{\partial t} B(t, \vec{z}) \cdot \hat{n}\, dS \qquad \text{Teorema rotore}$$

$$\rightarrow \oint_l \vec{E}\, dl = \cancel{\int_S} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \cancel{\hat{n}\, dS} = -\cancel{\int_S} \frac{\partial}{\partial t} B(t, \vec{z}) \cdot \cancel{\hat{n}\, dS} \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

II equazione di Maxwell (campo $\vec{E}$) Per campi $\vec{B}$ VARIABILI

Mettiamo tutto insieme

FLUSSO TAGLIATO $\to$ Superficie VARIA , $B = Cost$

$$-\frac{d\phi}{dt} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B}\, d\vec{\ell} \quad \sim \quad \text{se} \quad g(x) = Sup \;\; e \;\; f(x) = B \;;\; h(x) = g(x)\cdot f(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = \underbrace{g'(x)\cdot h(x)}_{-\oint \vec{v}\wedge\vec{B}\, d\vec{\ell}} + g(x)\cdot h'(x)$$

FLUSSO CONCATENATO $\to$ $Sup = Cost$, $\vec{B}$ = VARIA

$$-\frac{d\phi}{dt} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, \hat{n}\, ds \quad \sim \quad \text{se} \quad g(x) = Sup \;\; e \;\; f(x) = B \;;\; h(x) = g(x)\cdot f(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = g'(x)\cdot h(x) + \underbrace{g(x)\cdot h'(x)}_{\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, \hat{n}\, ds}$$

$\Rightarrow$ Metto tutto insieme $\to$ CASO GENERALE

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \int \frac{\partial B}{\partial t}\, \hat{n}\, ds - \oint \vec{v}\wedge\vec{B}\cdot d\vec{\ell} \qquad \text{Punto (2)}$$

Ma se ...

$$f_{em} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

I° modo di scrivere l'eq di Maxwell integrale

$$\frac{L}{q} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

Punto (1) $\uparrow$ Punto (2) $\nwarrow$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{\ell} + \cancel{\oint (\vec{v}\wedge\vec{B})\, d\vec{\ell}} = -\int \frac{\partial B}{\partial t}\, \hat{n}\, ds + \cancel{\oint (\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot d\ell}$$

I modo di scrivere l'equazione di Maxwell integrale

$$\oint \vec{E}\, d\vec{\ell} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, \hat{n}\, ds$$

II modo di scrivere l'equazione di Maxwell integrale

Rotore $\to$ $\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \cancel{\int_S} (\vec{\nabla}\wedge\vec{E})\cdot \cancel{d\vec{S}} = -\cancel{\int_S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, \cancel{\hat{n}\, dS}$ $\to$ $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Unico modo di scrivere l'equazione di Maxwell Differenziale