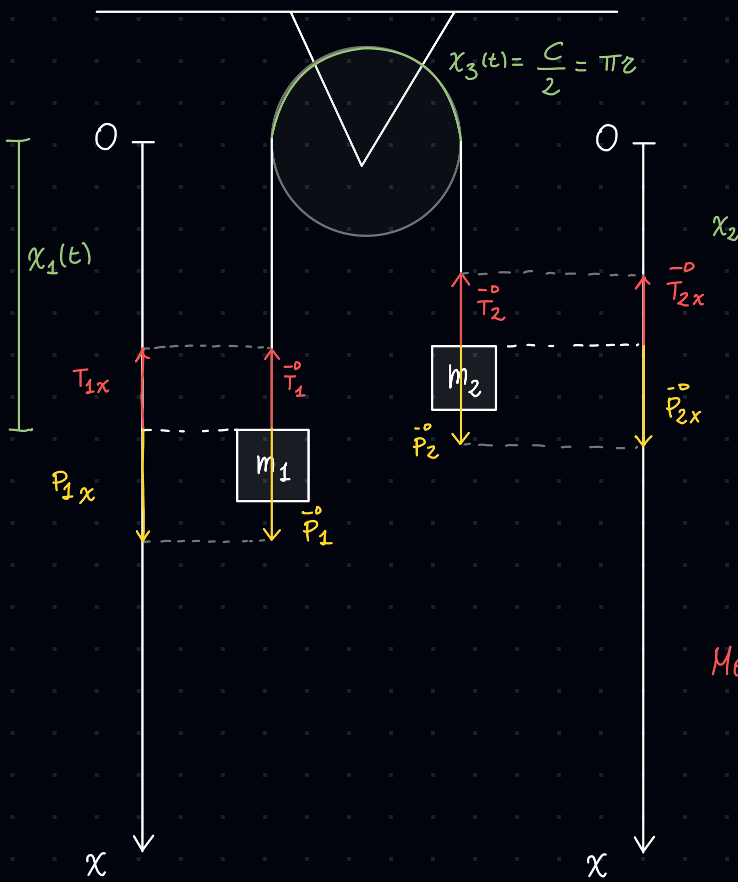
Raccolta di Esercizi

Problema 1

$m_2 = 5 \qquad m_1 = 3$



$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \vec{P}_1 - \vec{T}_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1 \\ \vec{P}_2 - \vec{T}_2 = m_2 \, \vec{a}_2 \end{cases}$$

Sappiamo che $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} m_i \, \vec{g} - T_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1 \\ m_2 \, \vec{g} - T_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2 \end{cases}}$$

Sistema di 2 eq e 4 incognite
→ Irrisolvibile così com'è

Ma il sistema ha un vincolo: c'è una fune

- Non ha attrito
- Inestenzibile

← Semplificazione

FUNE IDEALE

Se la fune è ideale → la Tenzione è COSTANTE ed uguale lungo tutta la fune

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = T_2}$$

INOLTRE essendo inestensibile, le masse "si tirano a vicenda"

$$\Rightarrow \ell_{fune} = x_1(t) + x_2(t) + \pi r = Cost$$

Deriviamo: $\frac{d}{dt} \ell = v_1(t) + v_2(t) + 0 = 0$

costanti

Deriviamo ancora: $\frac{d^2}{dt^2} \ell = \vec{a}_1(t) + \vec{a}_2(t) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_1(t) = -\vec{a}_2(t)}$$

Sostituiamo al sistema

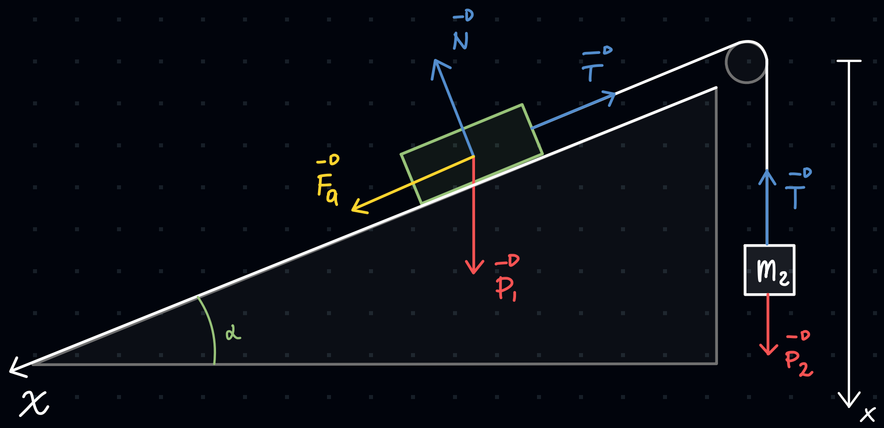
$$\begin{cases} m_i \, \vec{g} - T_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1 \\ m_2 \, \vec{g} - T_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2 \end{cases} = \begin{cases} (1) \; m_1 \cdot \vec{g} - T = -m_1 \cdot \vec{a}_2 \\ (2) \; m_2 \, \vec{g} - T = m_2 \, \vec{a}_2 \end{cases}$$

Sottraiamo: (2) − (1) = $m_2 \vec{g} - m_1 \vec{g} = m_2 \vec{a}_2 + m_1 \vec{a}_2$

$$\Rightarrow \vec{g}(m_2 - m_1) = \vec{a}_2(m_2 + m_1) \Rightarrow \vec{a}_2 = \vec{g}\,\frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} = 2.45 \text{ m/s}^2$$

accelerazione dei pesi

Problema : Carrucole più piano inclinato

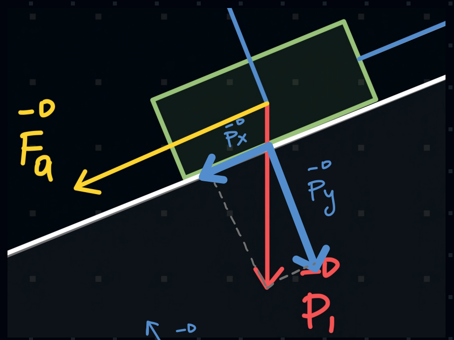


A: Massa m_2

Unica eq.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow m_2 g - T = a_2 m_2$$

B: Massa m_1



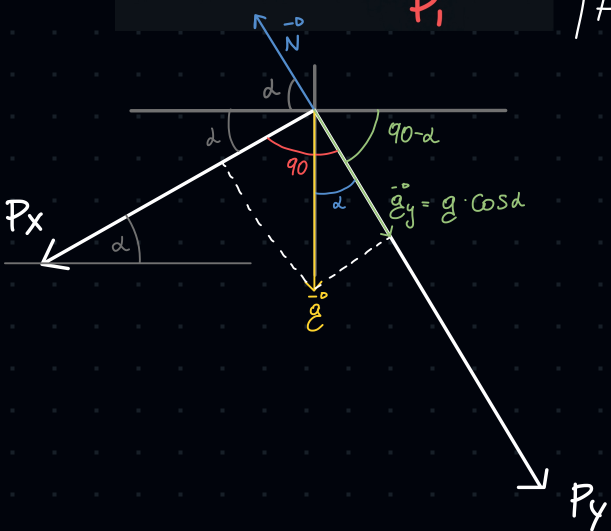
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{P_x} + \vec{F_{at}} - T = m \cdot \vec{a}_x \\ \vec{P_y} - \vec{N} = m \cdot \vec{a}_y \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{P_x} = m \cdot \vec{g} \cdot \cos\alpha \\ \vec{P_y} = m \cdot \vec{g} \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

$$|\vec{F_{at}}| = \mu_D \cdot |\vec{N}| \quad , \quad \vec{N} = m_1 g \cos\alpha$$

Lungo y

modulo della forza lungo y

modulo della forza peso lungo y



Forza peso x — Forza Attrito x — Tensione

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 g \cdot \sin\alpha + \mu_D \cdot m_1 g \cos\alpha - T = m_1 \cdot \vec{a}_1 \\ m_1 g \sin\alpha - m_1 g \cos\alpha = m_1 \cdot g \vec{a}_1 \end{cases}$$

→ Mettiamo a sistema le eq delle due masse lungo x

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_D m_1 \vec{g} \cos\alpha + m_1 \vec{g} \sin\alpha - T \\ m_2 \vec{g} - T = m_2 \vec{a}_2 \end{cases}$$

→ ricordiamo che $a_1 = -a_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_d m_1 \vec{g} \cos\alpha + m_1 \vec{g} \sin\alpha - T = -m_1 \vec{a}_2 \\ m_2 \vec{g} - T = m_2 \vec{a}_2 \end{cases}$$

→ $T = m_2 \vec{g} - m_2 \vec{a}_2 = T \Rightarrow T = m_2 (\vec{g} - \vec{a}_2)$

→ Sostituisco $\mu_d m_1 \vec{g} \cos\alpha + m_1 \vec{g} \sin\alpha - m_2 \vec{g} + m_2 \vec{a}_2 = -m_1 \vec{a}_2$ obbiettivo

$$\Rightarrow \mu_d m_1 \vec{g} \cos\alpha + m_1 \vec{g} \sin\alpha - m_2 \vec{g} = \vec{a}_2 \left[-(m_1 + m_2) \right] \Rightarrow$$

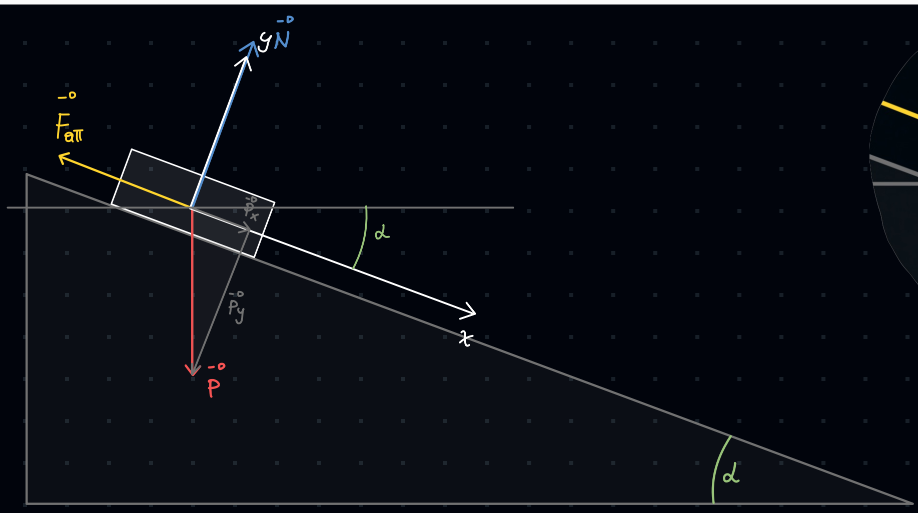
$$\Rightarrow \frac{m_1 \vec{g} (\mu \cos\alpha + \sin\alpha) - m_2 \vec{g}}{-(m_1 + m_2)} = \vec{a}_2 \Rightarrow a_2 = \frac{m_2 g - m_1 \vec{g} (\mu \cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2}$$

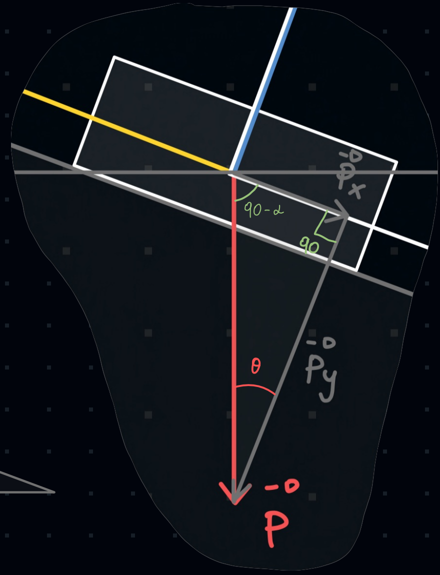
Sapendo che $m_2 = 5\,kg$, $m_1 = 3\,kg$ $\alpha = 30°$ $\mu_d = 0.1$

Possiamo calcolare l'accelerazione e la Tenzione

- $a = 3.97\ m/s^2$
- $T = 29.18\ N$

1) Un blocco parte da fermo dalla cima di un piano inclinato di $\alpha = 30°$ e percorre una distanza $d = 2m$ lungo il piano in 1.5 secondi. Calcolare l'accelerazione del blocco, il coefficiente d'attrito tra blocco e piano inclinato e la velocità finale del blocco.





$\theta = 180 - 90 - 90 - \alpha$
$\Rightarrow \theta = \alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{P}_x = \vec{P} \sin\alpha \\ \vec{P}_y = \vec{P} \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{P}_x = m \cdot \vec{g} \sin\alpha \\ \vec{P}_y = m \cdot \vec{g} \cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x \\ \sum \vec{F}_y = m \cdot a_y \end{cases} = \begin{cases} \vec{P}_x - \vec{F}_{att} = m \cdot a \\ \vec{N} - \vec{P}_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sappiamo che} \begin{cases} \vec{P} = m \cdot \vec{a} \\ |\vec{F}_{att}| = \mu_d \cdot |\vec{N}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \cdot g \sin\alpha - \mu_d \cdot |\vec{N}| = m \cdot a \\ \vec{N} - m \cdot \vec{g} \cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot g \sin\alpha - \mu_d |\vec{N}| = m \cdot \vec{a} \\ |\vec{N}| = m \cdot g \cos\alpha \end{cases}$$

Sostituisco

$$\Rightarrow \begin{cases} m \cdot g \sin\alpha - \mu_d \, m \cdot g \cos\alpha = m \cdot \vec{a} \\ |\vec{N}| = m \cdot g \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow a = g \sin\alpha - \mu_d \, g \cos\alpha \Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)$$

$\Rightarrow$ Il moto e' di tipo uniformemente accelerato: $a = \text{cost}$

$$x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 2\,m}{1.5^2\,s} = 1.78\ m/s^2$$

$\Rightarrow$ Calcoliamo μ: $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \Rightarrow \frac{a}{g} = \sin\alpha - \mu\cos\alpha \Rightarrow \frac{a}{g} - \sin\alpha = \mu\cos(\alpha)$

$$\Rightarrow \mu = \frac{a}{g\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \mu = \frac{a}{g\cos\alpha} - tg(\alpha) = 0.36$$

$\Rightarrow$ Calcoliamo v_f: $a = \frac{d}{dt}\vec{v} \Rightarrow a\,dt = dv \Rightarrow a\int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{v_0}^{v_1} dv$

$$\Rightarrow a(t_1 - t_0) = v_0 - v_1 \Rightarrow v = v_0 + a(t_1 - t_0) \Rightarrow v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v\,dt = ds \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} v\,dt = \int_{s_0}^{s_1} ds \Rightarrow s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} v_0 + a\int_{t_0}^{t_1} t\,dt - a\,t_0\int_{t_0}^{t_1} dt$$

$$\Rightarrow S_1 - S_0 = v_0(t_1 - t_0) + a \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_{t_0}^{t_1} - a \cdot t_0(t_1 - t_0) = v_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a(t_1^2 - t_0^2) - a(t_0t_1 - t_0^2)$$

$$\rightarrow S_1 - S_0 = v_0(t - t_i) + \frac{1}{2}at_1^2 - \underbrace{\frac{1}{2}at_0^2 - at_0t_1 + at_0^2}_{\frac{1}{2}at_0^2}$$

$$= v_0(t - t_i) + \frac{1}{2}at_1^2 + \frac{1}{2}at_0^2\ at_0t_i = v_0(t - t_i) + \frac{1}{2}a(t_i - t_0)^2 \quad b$$

Siccome $v = \frac{d}{dt}\vec{s} \Rightarrow v = \frac{d}{dt}\left[S_0 + v_0(t - t_i) + \frac{1}{2}a(t_1 - t_0)^2\right]$

$$t_i = 0 \Rightarrow v = \frac{d}{dt}\left[S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right]$$

$$\Rightarrow v = v_0 + at \quad a$$

Combino le due formule a e b

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1 = S_0 + v_0(t - t_i) + \frac{1}{2}a(t - t_i)^2 \\ v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a},\ t_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow S_1 = S_0 + v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}\cancel{a}\left(\frac{v - v_0}{a^{\cancel{2}}}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_1 = S_0 + \frac{1}{a}\left(\cancel{v_0 v} - \underbrace{\cancel{v_0^2} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{v_0^2}}_{-\frac{1}{2}v_0^2} - \cancel{v_0 v}\right)$$

$$= S_0 + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2\right) = S_0 + \frac{1}{2a}\left(v_f^2 - v_0^2\right)$$

Troviamo v_f $\rightarrow \frac{1}{\cancel{2a}}(v_f^2 - v_0^2) = (S_1 - S_0)2a$

$$\rightarrow v_f^2 = (S_f - S_0) \cdot 2a + v_0^2 \quad c$$

Nel problema $v_0 = 0$, $S_0 = 0$ $S_f = 2m$, $a = 1{,}78\ m/s^2$

$\Rightarrow v_f = \text{Sqrt}(2 \cdot 2 \cdot 1.78 + 0) \simeq 2.67\ m/s$

Tutta la dim non era necessaria se ci si ricorda le formule!

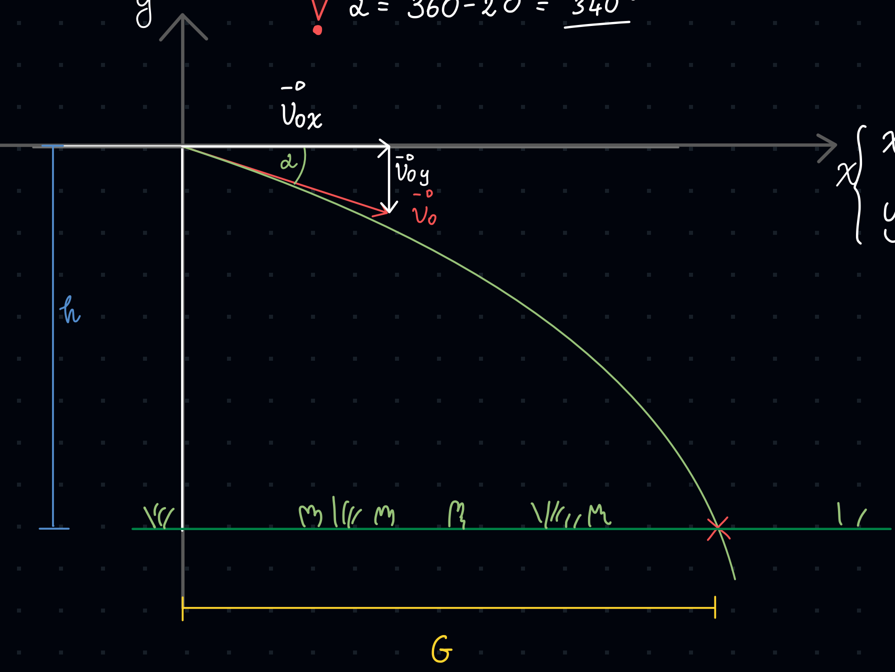
Q_3: $\mu_d = ?$

Avevamo trovato $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \Rightarrow \sin\alpha - \mu\cos\alpha = \frac{a}{g}$

$\rightarrow \sin\alpha - \frac{a}{g} = \mu\cos\alpha \rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{a}{g\cos\alpha} = \mu = 0.367$

1) Un uomo lancia una palla (con una velocità $V_0 = 8.0 m/s$ e un'inclinazione $\alpha = 20°$ sotto l'orizzontale) da una finestra all'ultimo piano di un edificio. La palla arriva al suolo dopo 3 secondi. Calcolare: (a) la distanza dalla base dell'edificio del punto di impatto col suolo; (b) l'altezza da cui viene lanciata la palla e (c) il tempo che la palla impiega per arrivare ad un punto che si trova 10 metri al di sotto della quota da cui era stata lanciata.

∇ $\alpha = 360° - 20° = \underline{340°}$



$$x \begin{cases} x(t) = V_x \cdot t \\ y(t) = V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_{0x} = \vec{V}_0 \cos\alpha \\ \vec{V}_{0y} = V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = V_0 \cos\alpha \, t \\ y(t) = V_0 \sin\alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha} \Rightarrow y = \cancel{V_0} \underbrace{\sin\alpha \cdot \frac{x}{\cancel{V_0} \cos\alpha}}_{\tan\alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V^2 \cos^2\alpha}$$

$\Rightarrow$ Eq della Traiettoria $-\left[\frac{1}{2} \frac{g}{V^2 \cos^2\alpha}\right] x^2 + \tan\alpha \, x - h = y$

Concavita' verso il basso Elevato di h

$\rightarrow$ Per le domande del problema non e' necessaria l'eq del moto:

$$\begin{cases} x(t) = V \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = V \sin\alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow x(3) = 8 \cdot \cos(340) \cdot 3 = 22.55 \text{ m}$$

Q_1

Q_2

$$y(t) = y_0 + V_0 \sin\alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2 = -52 \text{ m}$$

y_0: 0

Per come e' stato preso il sistema di riferimento, il risultato negativo ha senso

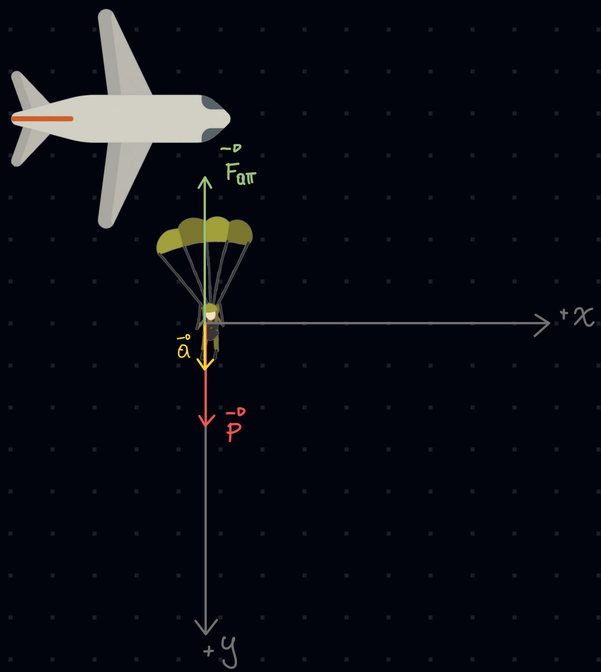
$$V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = -10 \Rightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\alpha \, t + 10 = 0$$

$$\frac{1}{2} g t^2 - V_0 \sin\alpha \, t - 10 = 0 \rightarrow \Delta = V_0^2 \sin^2\alpha - \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} g \cdot (\cancel{-10})^{-20} = \sqrt{174.3} = 13.2$$

$$t_{1,2} = \frac{V_0 \sin\alpha \pm 13.2}{g} = 1.06 \text{ s}$$

Q_3

1) Una persona di 80 kg si lancia col paracadute e subisce un'accelerazione verso il basso $a = 2.5 m/s^2$. La massa del paracadute è $M = 5kg$. Calcolare la forza costante verso l'alto esercitata dall'aria sul paracadute. Se il lancio avviene con una velocità iniziale trascurabile, da un'altezza $h = 5000m$, dopo quanto tempo il paracadutista arriverà a terra?



- Il moto è uniformemente accelerato

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \quad \text{Siccome } \alpha = 0$$

$$= g \cdot \mu \Rightarrow \mu = \frac{a}{g} = 0.254$$

$$\sum \vec{F}_y = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{P}_y - \vec{F}_{aT} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_{aT}| = |\vec{P}_y| - m \cdot \vec{a} \qquad \text{Siccome } |\vec{P}| = m \cdot g \quad m \to 80+5$$

$$= m \cdot g - m \cdot a = m(g - a) = 621.3\,N$$

80+5

Q_2: $y(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 63.24\,S \Rightarrow 01:03:14$

h m s

Dinamica

La Dinamica è quella parte della fisica che cerca di collegare le cause del moto con gli effetti; le cause dei moti sono per lo più le FORZE.

I PRINCIPI che vedremo non sono dimostrabili; possiamo solo vedere se "funzionano o no".

Nella meccanica di Aristotele si legge: "Il corpo si arresta quando non c'è più una forza a spingerlo. Possiamo tradurre il tutto in formule: $F = K \cdot v$

Galileo non è d'accordo: non sempre ci si può fidare delle conclusioni intuitive.

Primo principio della Dinamica

Principio di inerzia di Galileo

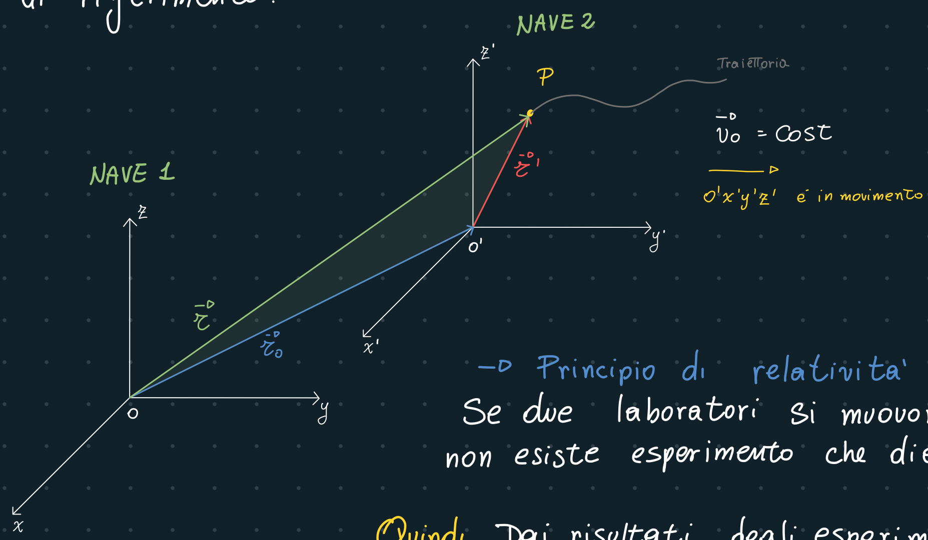
Un corpo su cui non agiscono CAUSE (FORZE) esterne o è FERMO o la sua velocità è COSTANTE, il suo moto è di tipo RETTILINEO UNIFORME.

→ Galileo si accorge che un oggetto continua a muoversi anche se non viene più spinto ⇒ se non ci sono forze che agiscono su di esso. Es: il carrello della spesa spinto e lasciato continua a muoversi.

⇒ Eliminando progressivamente gli attriti, il carrello si muoverà sempre per più spazio. Galileo costruisce un modello in cui non sono presenti attriti, ed il carrello si muove all'infinito.

Conclusione: Quando vediamo un moto accelerato quasi sicuramente possiamo identificare una causa della corrispondente accelerazione.

Il primo principio vale per tutti i possibili osservatori, e quindi tutti i sistemi di riferimento:



Valgono le condizioni delle Trasformazioni galileiane, ovvero la velocità relativa tra i sistemi è COSTANTE ⇒ $\vec{a} = 0$

→ Principio di relatività di Galileo:

Se due laboratori si muovono di moto rettilineo uniforme non esiste esperimento che dia risultati diversi.

Quindi Dai risultati degli esperimenti non c'è modo di capire quale dei due laboratori è fermo e quale è in movimento.

⇒ Questo vuol dire che se il primo principio vale per il lab fermo, deve valere anche per il lab in movimento. ⇒ In entrambi vale il principio di inerzia.

Definizione. Un sistema viene detto INERZIALE se vale il principio di inerzia.

Se il sistema non si muove di moto rettilineo, ma di moto accelerato, non vale più il principio di inerzia ⇒ questi sistemi non sono inerziali.

Questo perché un corpo che era in stato di quiete, non rimane in stato di quiete.

Secondo principio della Dinamica

Definizione di forza: Diciamo che un corpo è soggetto ad una forza quando varia il suo moto o quando subisce delle deformazioni.

Secondo principio
Legge di Newton: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

m: Costante di Proporzionalità ⟶ La forza è direttamente proporzionale all'accelerazione

- $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (m: Scalare, $\vec{a}$: vettore)

  Se moltiplichiamo uno scalare per un vettore si ottiene un altro vettore ⇒ Le forze sono vettori proof

- $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

  m: Viene anche detta Massa inerziale

definizione di Massa inerziale: è la capacità del corpo di opporsi alle variazioni del moto.
↳ Il corpo "vuole rimanere fermo".

Come MISURARE la MASSA INERZIALE di un corpo?

Otteniamo la formula inversa: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}}$

ovvero Applichiamo una forza NOTA ed osservare l'accelerazione. Successivamente applichiamo la formula inversa dividendo la forza nota per l'accelerazione.

Attenzione! La massa inerziale non si misura con la Bilancia!

Il Dinamometro possiamo misurare le forze anche con il dinamometro, che funziona grazie alla deformazione di una molla.

Sistemi Non inerziali

Nei sistemi che subiscono l'azione di forze esterne, o che la somma delle forze totali NON E' ZERO, vengono detti sistemi non inerziali, ed i principi visti non valgono.

Morale della favola: NON ESISTE un solo sistema inerziale, ovvero "Fermo".

-> Questo vuol dire che tutti i sistemi sono NON INERZIALI

C'e' pero' una soluzione: Newton dice che DEVE esistere lo SPAZIO ASSOLUTO, che consiste in uno spazio fisico assoluto ed immutabile, ovvero che rimane fermo. Lo stesso vale per il TEMPO ASSOLUTO.

Con l'avvento di Einstein, pero', si scopre che sia spazio che tempo sono RELATIVI ALL'OSSERVATORE.

Dovute trascurazioni: se ci si posiziona "all'interno" del sistema, e quindi Localmente, e' possibile dire che il sistema e' inerziale, perche' le FORZE possono essere trascurate.
Se si guarda lo stesso sistema "da piu' lontano", esso potrebbe non essere piu' inerziale perche' le forze non piu' trascurabili.

Se si osservano delle forze ma non si riesce a trovarne la FONTE, bisogna concludere che ci si trova in un sistema NON INERZIALE.

Forza Di gravita'

per sistemi INERZIALI

La forza F ha verso opposto ad $\vec{r}$

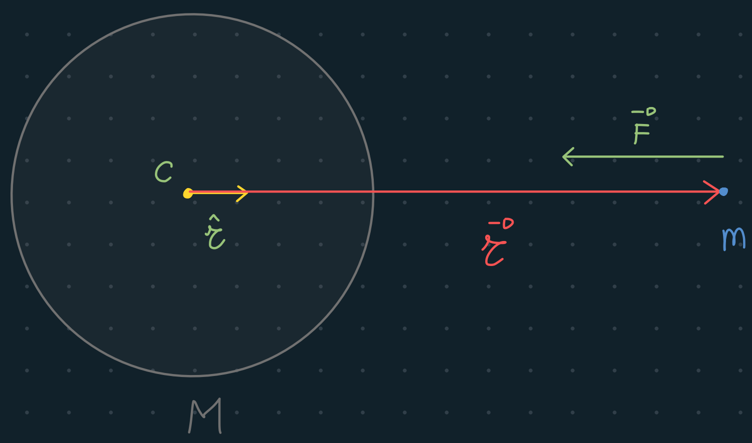
MODULO

$$\vec{F} = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \hat{r}$$

raggio

Versore lungo r

- La forza di gravita' e' sempre ATTRATTIVA.



Cosa succede se ci posizioniamo sulla terra?

- m massa del "gessetto" → corpo molto "leggero"
- M Massa della terra
- r Raggio della terra

→ Se compiliamo questi "pezzi" possiamo calcolare la forza che agisce sul corpo piccolo:

Accelerazione di gravita' (terra)

$$|\vec{P}| = m \frac{G \; M_{Terra}}{R^2_{Terra}} = m \cdot |\vec{g}|$$

DIFFERENZA TRA MASSA E PESO

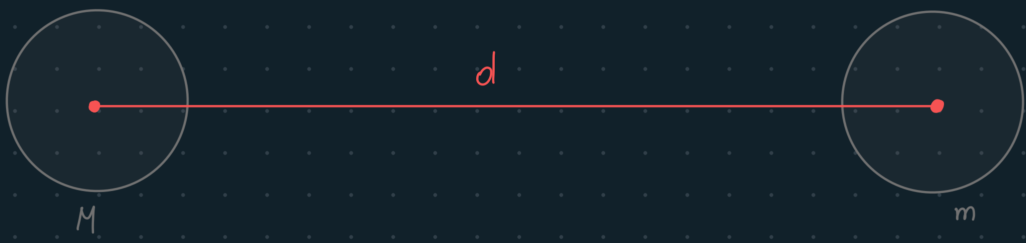
Massa (Chili Kg)

La massa e' uno SCALARE (numero); essa e' la quantita' di materia contenuta nell'oggetto, e non cambia a seconda del pianeta dove viene misurata

PESO (Newton N)

Il peso e' una FORZA, ovvero la forza di gravita' sulla superficie della terra.

La Costante Gravitazionale



Se poniamo $M = m = 1\ kg$ e $d = 1\ m$ otteniamo:

- $|\vec{F}| = G$ —▷ G e' il modulo della forza che una massa di 1 kg attira un'altra massa di 1 kg alla distanza di 1 metro.

- $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{N\ m^2}{kg}$

Il problema della massa

Sappiamo che la massa inerziale e' la capacita' di un corpo a mettersi in moto; ma questo non sembra il caso nella formula di gravitazione:

$$|\vec{F}| = G \cdot \frac{m \cdot M}{d^2}$$ —▷ Maggiore e' la massa, maggiore sara' la forza di attrazione.

⇒ Concludiamo che le masse della formula della forza di gravita' non sono masse inerziali, ma qualcos'altro.

MASSA GRAVITAZIONALE: e' la capacita' di un corpo di ATTIRARE o essere attirato da un altro corpo

La massa inerziale e gravitazionale

Sono la stessa cosa

Fino a questo punto abbiamo visto che la forza può essere scritta in due modi:

- $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ Forza in generale
- $\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{d^2} \cdot \hat{r}$ Forza gravitazionale

→ Possiamo eguagliare i membri.

martello

massa gravitazionale

- $m_i^m \cdot a^m = \frac{G M_{Luna} \cdot m_g^m}{r^2}$

massa inerziale

Piuma

- $m_i^p \cdot a^p = \frac{G \cdot M_{Luna} \cdot m_g^p}{r^2}$

→ Dividiamo membro a membro le due eq

$$\frac{m_i^m \cdot \cancel{a^m}}{m_i^p \cdot \cancel{a^p}} = \frac{\cancel{G} \cancel{M_{Luna}} \cdot m_g^m}{\cancel{r^2}} \cdot \frac{\cancel{r^2}}{\cancel{G} \cancel{M_{Luna}} m_g^p}$$

Subiscono la stessa accelerazione

$$\Rightarrow \frac{m_i^m}{m_i^p} = \frac{m_g^m}{m_g^p} = \text{cost}$$

$m_i \neq m_g$ ma il Rapporto tra le m_i e m_g di qualsiasi corpo è la stessa

$\Rightarrow \boxed{m_i = K \cdot m_g}$ La massa inerziale è PROPORZIONALE alla massa gravitazionale $\Rightarrow$ m_i e m_g sono EQUIVALENTI

Costante di proporzionalità

→ Se due grandezze sono proporzionali, sono Equivalenti.

Spiegazione dal libro "L'evoluzione della fisica" Eintein, Infield 1948

Se spingiamo un corpo, la sua VARIAZIONE DI VELOCITA' (Accelerazione) sara' maggiore se la sua massa INERTE e' piccola:

$a = \frac{F}{m}$ infatti $F = m \cdot a$

Capacita' di un corpo di opporsi al moto

Il MOTO RISPONDENTE dipende dalla massa inerte

Da Galileo: Tutti i corpi cadono con MOTO UGUALE => $F_{Sollecitante}$ dipende dalla massa pesante!

la forza con cui un corpo e' attirato

Mettiamo tutto insieme:

Forza Sollecitante -> dipende dalla massa pesante

Moto Rispondente -> dipende dalla massa inerte

Ma Moto Rispondente e' lo stesso (visto che il corpo in questione e' lo stesso)

Dobbiamo concludere che m_P e m_I sono la stessa cosa!

Come rendere il rapporto uguale ad 1? Principio di equivalenza di massa

$$\frac{m_i}{m_g} = K = 1 \ ?$$

Risposta: Basta misurarli entrambi con la stessa unita' di misura

Definizione di massa: la definizione "semplice" e' la quantita' di materia contenuta in un oggetto.

Come Risolvere

Un problema di dinamica

1) Individuare la massa m: ne scegliamo una alla volta, applichiamo i restanti 6 punti e poi passiamo alla massa successiva.

2) Individuare un sistema di riferimento: quello che ci conviene di piu'!

3) Individuare le forze agenti su m

4) Proiettare l'equazione $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ sugli assi del sistema di riferimento.
Es: sistema a 3 dimensioni → 3 equazioni della forza.

A questo punto se abbiamo risolto la traccia bene! Altrimenti:

5) Tenere presenti eventuali equazioni vincolari.

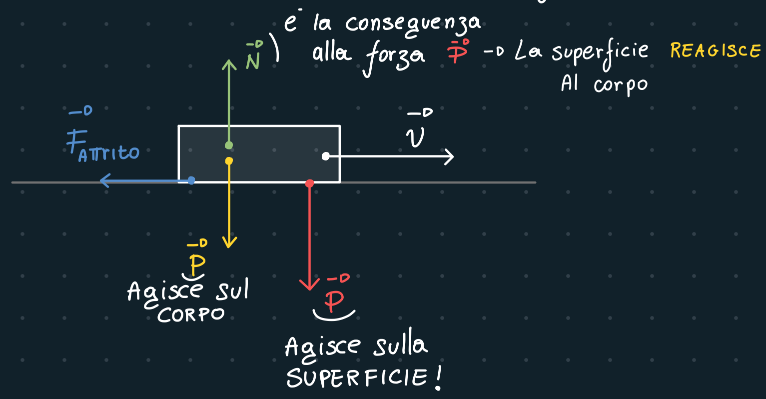
6) Utilizzare equazioni derivanti da leggi di conservazione.
Si CONSERVA l'energia, moto, ..., ?

7) Prima di consegnare controllare la plausibilita' della soluzione trovata.

Forze di contatto

Ogni volta che un corpo è a contatto con una superficie avremo due forze:

- Forza NORMALE
- Forza TANGENZIALE



Impo: $\vec{N}$ e $\vec{P}$ non si EQUILIBRANO perché agiscono su CORPI DIVERSI

$\vec{P}$ è creata dalla "terra" forza di gravità
$\vec{N}$ è creata dalla superficie che reagisce al corpo
] NON PER FORZA UGUALI!

In questo caso $|\vec{N}| = |\vec{P}| = m \cdot |\vec{g}|$

FORZA DI ATTRITO RADENTE

Compare quando il corpo si muove. È TANGENTE alla superficie (Direzione) e verso OPPOSTO al moto (Verso)

Date due sup, la forza di attrito parallela risulta proporzionale alla Normale

MODULO : $|\vec{F}_{AT}| = \mu_D \cdot |\vec{N}|$

Coefficiente di attrito dinamico
↑
È una costante proporzionale

↖ maggiore è la massa maggiore sarà la $\vec{N}$
⇒ >> attrito

⇒ Il MODULO dell'attrito radente è PROPORZIONALE AI PESO.

Impo: $\vec{F}_{AT}$ e $\vec{N}$ hanno direzione e verso diversi ⇒ $\cancel{\vec{F}_{AT} = \mu_D \cdot \vec{N}}$ Sbagliato!

Il coefficiente d'attrito dinamico

→ Rappresenta è un fattore di conversione tra il modulo della forza Normale e forza d'attrito. È usato quando il corpo È GIA' IN MOVIMENTO!

Il coefficiente d'attrito statico

Questo coefficiente cresce proporzionalmente alla forza che "tira" il corpo che parte da fermo.

Valore massimo della forza di attrito

$$|(F_{AT})_{max}| = \mu_S |\vec{N}|$$

⇒ $\mu_S > \mu_D$

Come calcolare μ_S o μ_D nelle equazioni?

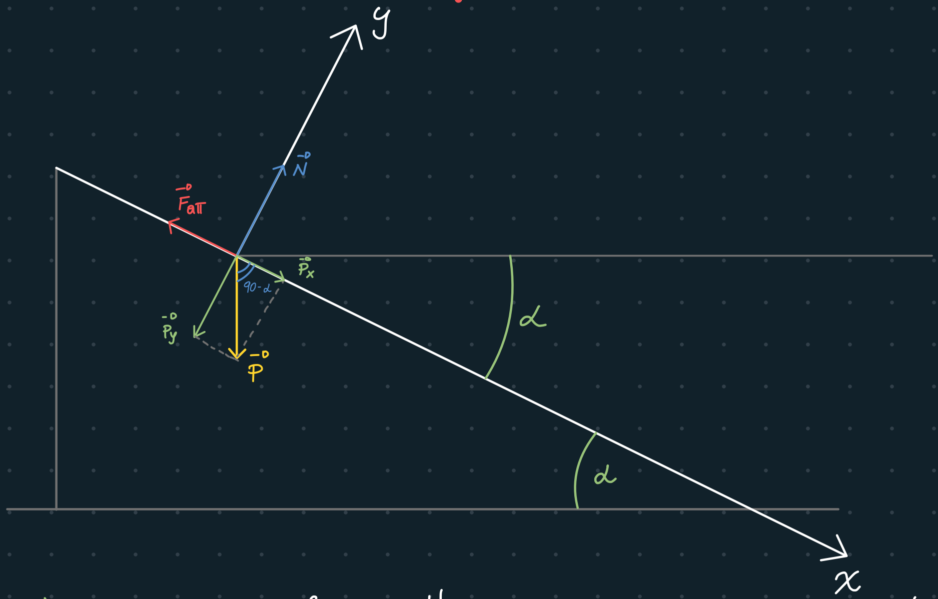
La differenza sta nell'accelerazione del corpo.

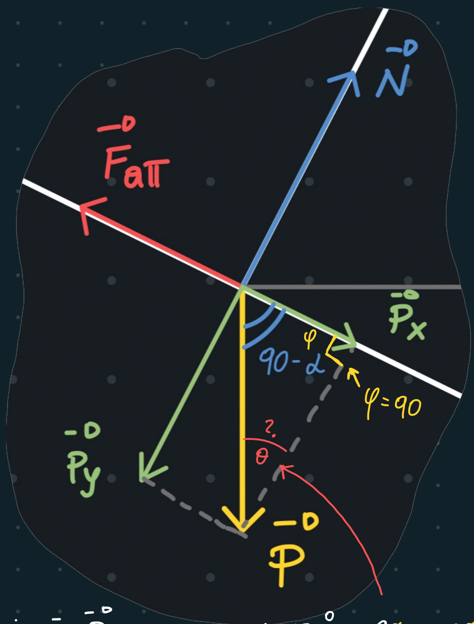
1) Scriviamo $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ per il corpo con $\vec{a} \neq 0$

→ Ci serve μ_D ⇒ $\vec{a} \neq 0$ perché il corpo si sta già muovendo

Ci serve μ_S ⇒ 2) Imponiamo nell'eq $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ che $\vec{a} = 0$
così facendo consideriamo il caso in cui il corpo sta quasi per muoversi, ovvero quando l'attrito è MASSIMO

Il piano inclinato





$\Delta = 180° \Rightarrow \cancel{90}-\alpha+\cancel{90}+\theta=\cancel{180}$

$\Rightarrow \theta = \alpha$

1) Proiettare le forze: l'unica non proiettata lungo gli assi è $\vec{P}$

$\Rightarrow$ Spiegazione P_x e P_y:

- Se prendiamo l'angolo θ scopriamo che è proprio uguale ad α.
- Ci accorgiamo che $\vec{P_x}$ si OPPONE a θ, quindi $\vec{P_x} = \vec{P}\cdot\sin(\theta) = \vec{P}\sin(\alpha)$
- $\vec{P_y}$ invece, è ADIACENTE a $\theta \Rightarrow \vec{P_y} = \vec{P}\cos(\alpha)$

Siccome $|\vec{P}| = m\cdot\vec{g} \Rightarrow \vec{P_x} = m\cdot\vec{g}\cdot\sin(\alpha) \quad \vec{P_y} = m\cdot\vec{g}\,\cos(\alpha)$

2) Scrivere le eq delle Forze

$$\Rightarrow \vec{F} = m\cdot\vec{a} \quad \begin{cases} \sum \vec{F_x} = m\cdot\vec{a}_x \\ \sum \vec{F_y} = m\cdot\vec{a}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{P_x} - \vec{F_a} = m\cdot\vec{a}_x \\ \vec{N} - \vec{P_y} = m\cdot\vec{a}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\cdot|\vec{g}|\cdot\sin\alpha - |\vec{F_a}| = m\cdot|\vec{a}_x| \\ |\vec{N}| - m\cdot|\vec{g}|\cos(\alpha) = m\cdot\vec{a}_y \end{cases}$$

L'accelerazione lungo y è zero! $\Rightarrow N - mg\cos\alpha = 0$

Inoltre $|\vec{F}_{att}| = \mu_D\cdot|\vec{N}|$

$$\Rightarrow \begin{cases} mg\sin\alpha - \mu_D N = m\cdot\vec{a}_x \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$$ Dobbiamo trovare l'accelerazione

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{m}g\sin\alpha - \mu_D\cancel{m}g\cos\alpha = \cancel{m}\cdot a_x \\ N = mg\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = g\sin\alpha - \mu_D g\cos\alpha \\ \Rightarrow a_x = g(\sin\alpha - \mu_D\cos\alpha) \end{cases}$$

TIRIAMO LE SOMME

1) Siccome $\sin\alpha \leq 1$, $\mu_D \leq 1$, $\cos\alpha \leq 1$ $\Rightarrow$ $a_x \leq g$

$\Rightarrow$ L'accelerazione di caduta è minore di quella gravitazionale

2) Se è presente l'attrito, l'accelerazione diminuirà ulteriormente.

Recap: Un modo alternativo di scrivere le derivate dei versori

Nella sezione di cinematica (m.c.u) abbiamo visto come i versori sono legati alla velocità angolare.

Radiale $\hat{\mu}$ Tangenziale $\hat{\tau}$

$$\begin{cases} \hat{\mu} = |\mu| \cdot \cos(\alpha)\hat{i} + |\mu| \sin(\alpha)\hat{j} \\ \hat{\tau} = -\underbrace{|\tau|}_{1}\sin(\alpha)\hat{i} + \underbrace{|\tau|}_{1}\cos(\alpha)\hat{j} \end{cases}$$

siccome $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\hat{\mu}}{dt} = -\sin(\alpha)\hat{i} \cdot \frac{d}{dt}\alpha + \cos(\alpha)\frac{d\alpha}{dt}\hat{j} \\ \frac{d\hat{\tau}}{dt} = -\cos(\alpha)\frac{d\alpha}{dt}\hat{i} - \sin(\alpha)\frac{d\alpha}{dt}\hat{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\hat{\mu}}{dt} = -\omega\sin(\alpha)\hat{i} + \omega\cos(\alpha)\hat{j} \\ \frac{d\hat{\tau}}{dt} = -\omega\cos(\alpha)\hat{i} - \omega\sin(\alpha)\hat{j} \end{cases}$$

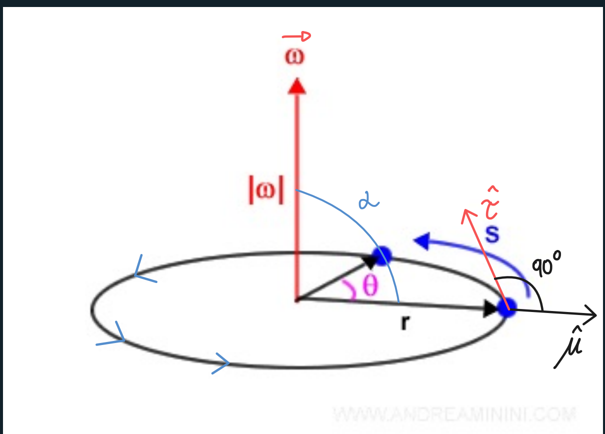
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\mu} = \omega\,[\underbrace{\cos(\alpha)\hat{j} - \sin(\alpha)\hat{i}}_{\hat{\tau}}] \\ \dot{\tau} = -\omega\,[\cos(\alpha)\hat{i} + \sin(\alpha)\hat{j}] \end{cases} \Rightarrow \dot{\mu} = \omega\hat{\tau}$$

uguaglianza che ci servirà

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = \dot{\mu} = \vec{\omega} \wedge \hat{\mu}$$

Prodotto vettoriale

Dimostriamolo



$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{\mu} = |\vec{\omega}|\,\underbrace{|\vec{\mu}|}_{1}\,\underbrace{\sin(\alpha)}_{1}\cdot\hat{\tau} = \omega\hat{\tau}$$

90 $\quad \dot{\mu}$

La Direzione è data dalla regola della mano destra
Troviamo che la direzione di $\vec{\omega} \wedge \vec{\mu}$ è $\hat{\tau}$

Allo stesso modo: $\vec{\omega} \wedge \vec{\tau} = |\vec{\omega}| \cdot \underbrace{|\hat{\tau}|}_{1} \cdot \underbrace{\sin(\beta)}_{1} \cdot (-\mu) = -\mu\omega$ $\quad \dot{\tau}$

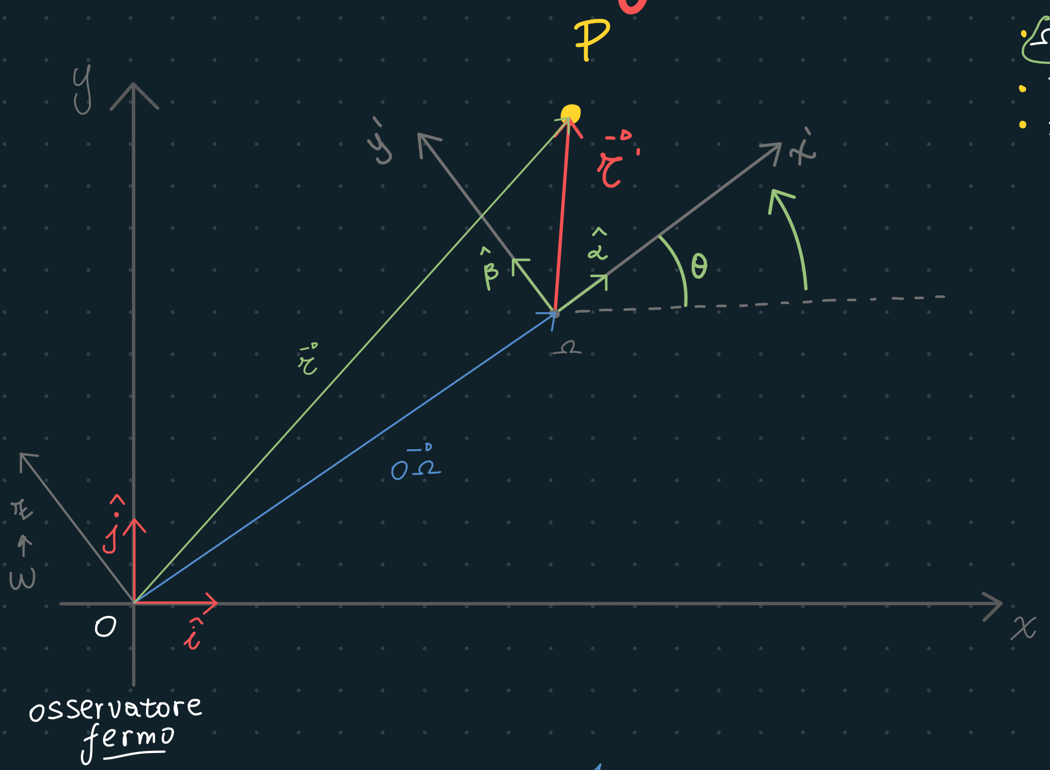
Abbiamo scoperto che

$$\frac{d\,\hat{\text{versore}}}{dt} = \omega \wedge \hat{\text{versore}}$$

Regola generale

Sistemi di riferimento In MOTO RELATIVO

- $\Omega x' y' z'$ S' Non e' INERZIALE
- Ruota lungo l'asse z
- I versori $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ non sono costanti $\Rightarrow \dot{\alpha}, \dot{\beta} \neq 0$



Sappiamo che $\vec{r} = \vec{O\Omega} + \vec{r}'$ (1)

I vettori hanno solo 2 componenti perchè non si sviluppano lungo z.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} & \text{Sistema fermo} \\ \vec{r}' = x'\hat{\alpha} + y'\hat{\beta} & \text{Sistema non inerziale} \end{cases}$$

Non Costanti ($\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$)

Possiamo trovare la velocita'

Velocita' del sistema non inerziale Ω

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{O\Omega})}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_\Omega + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Velocita' del punto P (2)

Sapendo che
$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{\alpha} + x'\frac{d\hat{\alpha}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\hat{\beta} + y'\frac{d\hat{\beta}}{dt}$$
$$= \underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}\hat{\alpha} + \frac{dy'}{dt}\hat{\beta}\right)}_{\vec{v}'\ \text{(PER DEFINIZIONE)}} + \left(x'\frac{d\hat{\alpha}}{dt} + y'\frac{d\hat{\beta}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\hat{\alpha}}{dt} = \omega \wedge \hat{\alpha} \qquad \frac{d\hat{\beta}}{dt} = \omega \wedge \hat{\beta}$$

Dalla dim. precedente

$$= \vec{v}' + x' \cdot \vec{\omega} \wedge \hat{\alpha} + y' \cdot \vec{\omega} \wedge \hat{\beta}$$
$$= \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (x'\hat{\alpha} + y'\hat{\beta})$$

Ci accorgiamo che e' proprio $\vec{r}'$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \qquad \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$\rightarrow$ Torniamo alla 2:

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{O\Omega})}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_\Omega + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_\Omega + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \quad 3$$

Velocita' misurata da Oxyz

?

Velocita' di P rispetto a Oxyz

Velocita' di P rispetto a $\Omega x'y'z'$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'}_{\vec{v}_{TR}}$$

VELOCITA' DI TRASCINAMENTO : la velocita' che avrebbe il punto P qualora avesse velocita' zero rispetto a $\Omega x'y'z'$.

Possiamo scrivere : $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{TR}$

Possiamo trovare l'accelerazione

Per Definizione: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_\Omega}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}'}{dt}$

Siccome $\vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\hat{\alpha} + \frac{dy'}{dt}\hat{\beta}$

$$\Rightarrow \frac{dv'}{dt} = \frac{d^2x'}{dt}\hat{\alpha} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{\alpha}}{dt} + \frac{d^2y'}{dt}\hat{\beta} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{\beta}}{dt} =$$

$$= \left(\frac{d^2x'}{dt}\hat{\alpha} + \frac{d^2y'}{dt}\hat{\beta}\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{\alpha}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{\beta}}{dt}\right)$$

Inoltre Sappiamo che $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

$\rightarrow$ Sostituiamo nella (1)

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a}_\Omega}_{\frac{d\vec{v}_\Omega}{dt}} + \overbrace{\left(\frac{d^2x'}{dt}\hat{\alpha} + \frac{d^2y'}{dt}\hat{\beta}\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\underbrace{\frac{d\hat{\alpha}}{dt}}_{\vec{\omega}\wedge\hat{\alpha}} + \frac{dy'}{dt}\underbrace{\frac{d\hat{\beta}}{dt}}_{\vec{\omega}\wedge\hat{\beta}}\right)}^{\frac{d\vec{v}'}{dt}} + \overbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}'}^{\text{Invariato}} + \vec{\omega} \wedge \overbrace{\left(\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'\right)}^{\frac{d\vec{r}'}{dt}}$$

$$= \vec{a}_\Omega + \underbrace{\left(\frac{d^2x'}{dt}\hat{\alpha} + \frac{d^2y'}{dt}\hat{\beta}\right)}_{\substack{\vec{a}' \\ \text{Per Definizione}}} + \left(\frac{dx'}{dt}(\vec{\omega}\wedge\hat{\alpha}) + \frac{dy'}{dt}(\vec{\omega}\wedge\hat{\beta})\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

$$= \frac{dx'}{dt}\vec{\omega} \wedge \frac{dx'}{dt}\hat{\alpha} + \frac{dy'}{dt}\vec{\omega} \wedge \frac{dy'}{dt}\hat{\beta}$$

$$= \vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx'}{dt} \cdot \hat{\alpha} + \frac{dy'}{dt} \cdot \hat{\beta}\right)$$

Abbiamo visto prima che è uguale a $\vec{v}'$

$$= \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

$$= \vec{a}_\Omega + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

Accelerazione misurata da $Oxyz$

- $\vec{a}_\Omega$: Acc misurata da $Oxyz$ di P
- $\vec{a}'$: Acc misurata da $\Omega x'y'z'$
- $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$: Acc misurata da $\Omega x'y'z'$ per via del fatto che P ha una velocità $\vec{v}'$ rispetto a $\Omega x'y'z'$; provoca una ROTAZIONE DI P.
  È anche nota come accelerazione di Coriolis
- Se $\vec{v}' = 0$, $\vec{a}' = 0 \Rightarrow \vec{a}_{TR} = \vec{a}_\Omega + \omega \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}'$
  $\vec{a}_{TR}$ è l'acc che avrebbe P se non venisse "lanciato" dal sistema $\Omega x'y'z'$

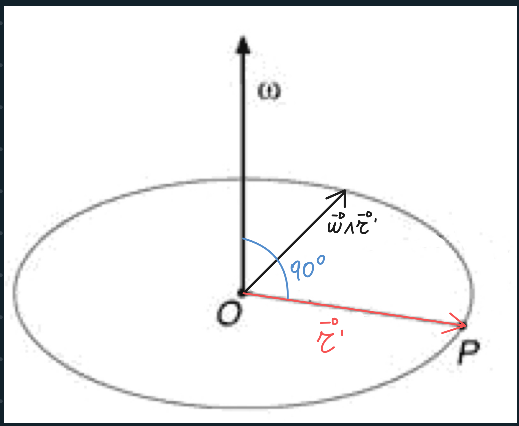
possiamo scrivere:

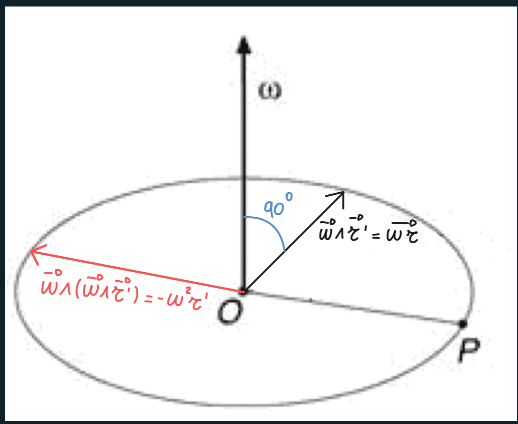
$$\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'$$

Accelerazione CENTRIFUGA

$$\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,') = \vec{\omega}\wedge\left(|\vec{\omega}|\cdot|\vec{r}\,'|\ \sin(90)\right) = \vec{\omega}\wedge\omega\vec{r}\,' = -\omega^2\vec{r}\,'$$

↳ È un nuovo vettore avente modulo $\omega r'$ ed angolo rispetto a $\vec{\omega}$ di $90°$





$$\vec{a}_{TR} = \vec{a}_{\Omega} + \overbrace{\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,')}^{\vec{a}_{CF}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r} = \vec{a}_{\Omega} + \vec{a}_{CF} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}$$

Quindi: $\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_{co} + \vec{a}_{TR}$ Accelerazione misurata da oxyz

Come Applicare le leggi della dinamica ai sistemi non inerziali?

Nelle trasformazioni Galileiane avevamo che $\vec{a} = \vec{a}'$ $\Rightarrow$ $\underline{\vec{F}' = m \cdot \vec{a}'}$
INERZIALE

Quindi $\vec{F} = \vec{F}'$ Le forze non cambiano!

Questo ragionamento non vale più per sistemi non inerziali! Infatti $\vec{a} \neq \vec{a}'$

Soluzione: Considerare le accelerazioni come <u>FORZE</u>:

$$\vec{F} = m(\vec{a}' + \vec{a}_{CO} + \vec{a}_{TR}) \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}' + m\vec{a}_{CO} + m\vec{a}_{TR}$$

Spostiamo le accelerazioni a Sx $\Rightarrow$ $\vec{F} - m\vec{a}_{CO} - m\vec{a}_{TR} = m \cdot \vec{a}'$ Accelerazione del sistema $\Omega x'y'z'$

FORZA DI Coriolis FORZA DI TRASCINAMENTO

FORZE FITTIZIE

$$\vec{F}_{CO} = -m \cdot \vec{a}_{CO} = \underline{-m \cdot 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'}$$

$$\vec{F}_{TR} = -m \cdot \vec{a}_{TR}$$
$$= \vec{a}_{\Omega} + \vec{a}_{c} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}$$

Possiamo scrivere: $\vec{F} - \vec{F}_{CO} - \vec{F}_{TR} = m \cdot \vec{a}'$ Se $\vec{F}' = \vec{F} - \vec{F}_{CO} - \vec{F}_{TR}$ $\Rightarrow$ $\vec{F}' = m \cdot \vec{a}'$

- DA NOTARE Se nella formula di una forza compare la massa, è FITTIZIA!

$\Rightarrow$ Forza peso: $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ $\Rightarrow$ La forza di gravità è in realtà FITTIZIA!

Attenzione: Nella fisica classica la Forza peso è considerata reale.

La forza Centrifuga

6-18) Una macchina di massa m percorre una curva di raggio $R = 150$ m a velocità costante $v = 25$ m/s. Se la strada non è sopraelevata, qual'è il minimo coefficiente di attrito μ_{min} per impedire lo sbandamento? E se μ è trascurabile, di quale angolo α deve essere inclinata la strada per evitare lo sbandamento?

Come nell'esercizio precedente deve essere, in caso di curva piana,

$$F_a = F_{CP},$$

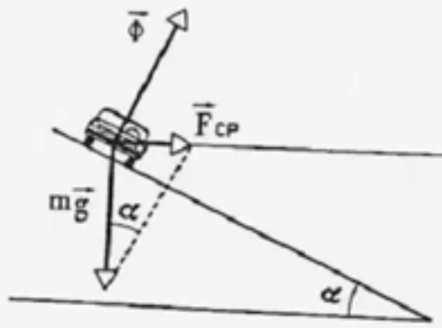
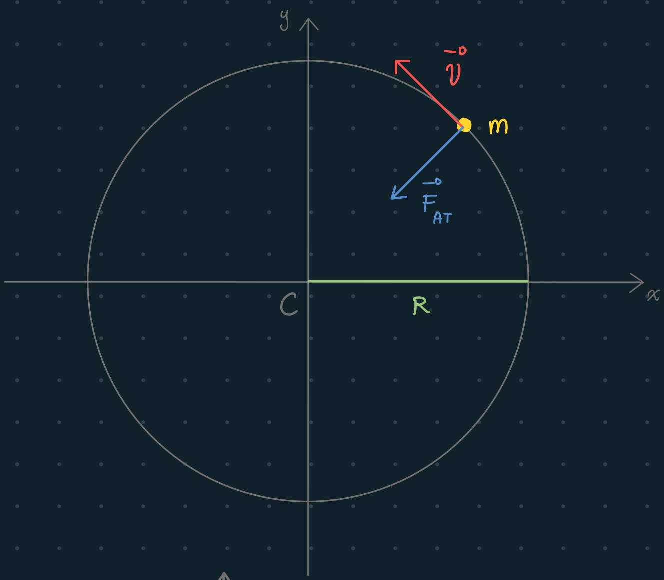


Fig. 6.18.

CASO 1: Non Sopraelevata

Il sistema $Cxyz$ é INERZIALE



Scriviamo $\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ per m

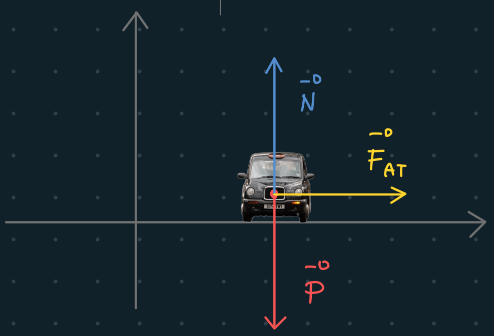
$\Rightarrow \quad \vec{F}_{AT} = m \cdot \vec{a}$

Affinche' la macchina non sbandi l'accelerazione deve essere rivolta verso il centro

$$\vec{a}_{cp} = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{AT} = m \cdot \vec{a}_{cp}$$

Siccome $|\vec{F}_{AT}| = \mu_d \cdot |\vec{N}|$, $|\vec{N}| = |\vec{P}| = m \cdot g$

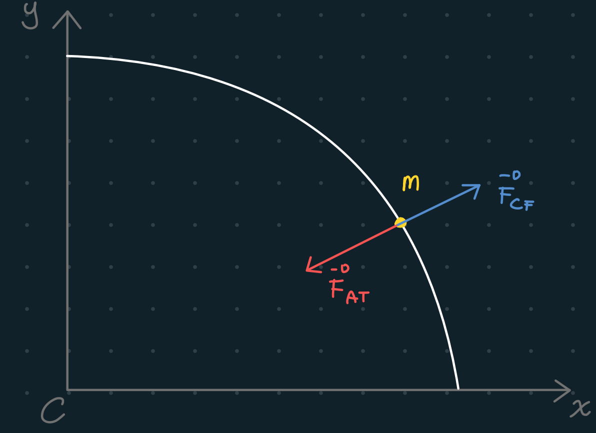
$\Rightarrow |\vec{F}_{AT}| = \mu m g$



Quindi: $\mu \cancel{m} g = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{R} \Rightarrow \mu = \frac{v^2}{gR} = 0.42$

Conclusioni: Il sistema $oxyz$ e' inerziale $\Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow$ Nessuna forza fittizia

Caso 1: Stesso problema, diverso sistema: Sistema non inerziale



$$\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{AT} - \vec{F}_{CF} = \emptyset$$

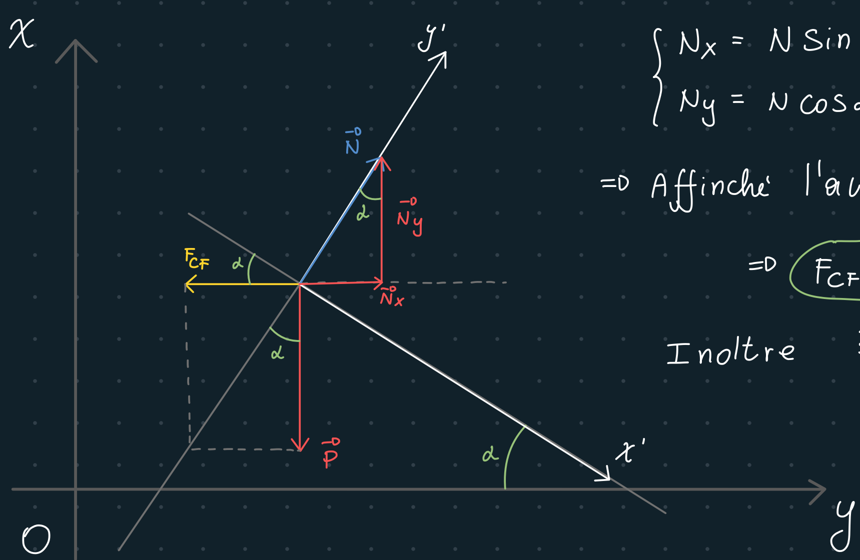
Osservando "la macchina" dal suo interno, l'accelerazione $\vec{a}' = \emptyset$

$$\Rightarrow \vec{F}_{AT} = \vec{F}_{CF} \rightarrow \mu \cancel{m} \cdot g = \cancel{m} \frac{v^2}{R}$$

$$\rightarrow \mu = \frac{v^2}{g R} = \underline{0.42}$$

Stesso Risultato

Caso 2: Piano inclinato - Sistema NON INERZIALE



$$\begin{cases} N_x = N \sin\alpha \\ N_y = N \cos\alpha \end{cases} \quad \text{siccome } |\vec{N}| = m g \Rightarrow \begin{cases} N_x = m g \sin\alpha \\ N_y = m g \cos\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Affinché l'auto non sbandi: $\vec{F}_{CF} = \vec{N}_x$

$$\Rightarrow F_{CF} = N \sin\alpha \quad (1)$$

Inoltre $\vec{P} = \vec{N}_y \Rightarrow$

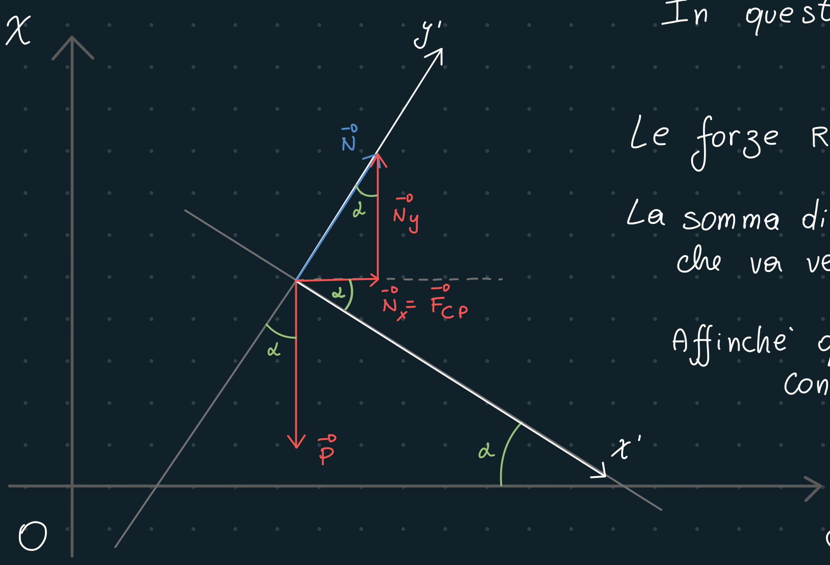
$$P = N \cos\alpha \quad (2)$$

OVVERO $F_g + F_c = \emptyset$

$$\begin{cases} F_{CF} = N \sin\alpha \\ P = N \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{F_{CF}}{P} = \frac{N \sin\alpha}{N \cos\alpha} \rightarrow tg\,\alpha = \frac{F_{CF}}{P} \rightarrow tg\,\alpha = \underbrace{\frac{m v^2}{r}}_{F_{CP}} \cdot \underbrace{\frac{1}{m g}}_{g}$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{v^2}{r g} \Rightarrow \alpha = \text{atan}\left(\frac{v^2}{r g}\right)$$

Caso 2: Piano inclinato - Sistema INERZIALE



In questo caso non agisce più la $\vec{F}_{CF}$

Le forze REALI Agenti sono $\vec{P} + \vec{N}$

La somma di queste due deve generare un'accelerazione che va verso il centro: $\vec{F}_{CP} = \vec{N}_x$

Affinché questo avvenga $\vec{P}$ si deve annullare con $\vec{N}_y$ e $\vec{F}_{CP} = \vec{N}_x = N\cos\alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{CP} = N\cos\alpha \\ \vec{P} = N\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{F_{CP}}{P} = tg\,\alpha$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{mv^2}{R}\cdot\frac{1}{mg} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{v^2}{Rg}$$

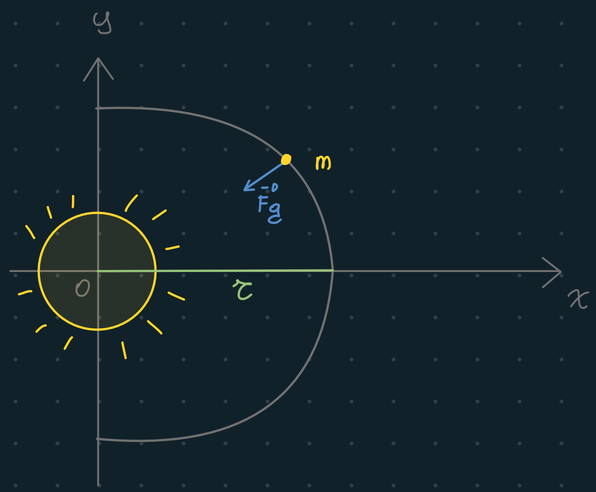
stessa formula

Velocità Orbitale

Lezione 15

Lo scopo è applicare le nozioni acquisite per calcolare la velocità dell'orbita della terra attorno al sole.

CASO 1: Sistema inerziale



Scriviamo $\sum_i \vec{F}_i = m \cdot a$ per il nostro sistema:

$$\vec{F}_g = m a \Rightarrow \frac{G M_S m_T}{r^2} = m \cdot a$$

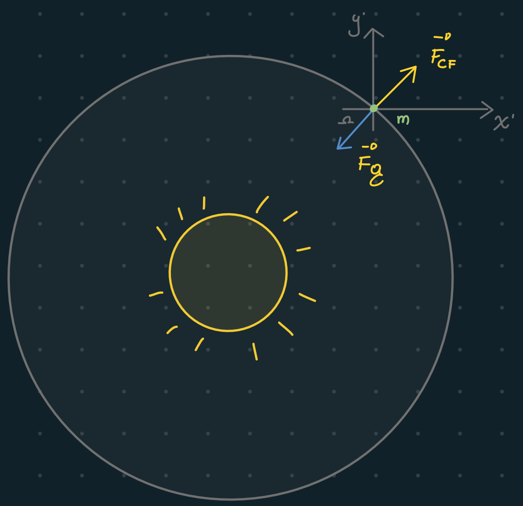
Siccome in un moto circolare l'accelerazione è CENTRIPETA:

$$\frac{G M_S \cancel{m_T}}{r^2} = \cancel{m_T} \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_S}{r}}$$

Velocità della Terra

⇒ Capiamo che possiamo applicare la formula ad una coppia di MASSE qualsiasi

CASO 2: Sistema Non inerziale



Perché la Terra non accelera

La somma delle forze deve essere zero:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{F}_g - \vec{F}_{CF} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F}_g = \vec{F}_{CF} \Rightarrow \frac{G M_S}{r^2} \cancel{m_T} = \cancel{m_T} \cdot \frac{v^2}{r}$$

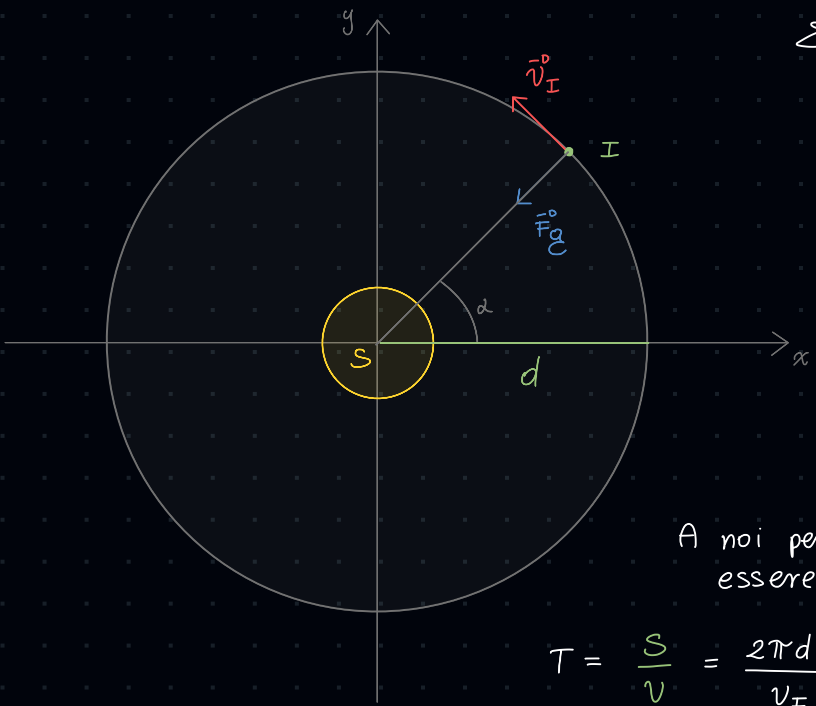
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_S}{r}}$$

Stessa formula

1:27 lezione 15 materia oscura

1) L'asteroide Icaro, sebbene molto piccolo, orbita attorno al Sole come gli altri pianeti. Per fare un giro completo impiega un tempo $T = 410$ giorni. Supponendo che la sua orbita sia circolare e che la velocità con cui si muove sia in modulo costante, calcolare la distanza di Icaro dal Sole, sapendo che la massa del Sole è $M = 1.99 \times 10^{30} Kg$. $[G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2/Kg^2]$

Sistema inerziale



$T = 410\ gg \rightarrow 35 \times 10^6\ s$, $M_S = 1.99 \times 10^{30}\ kg$

$\sum_i \vec{F}_i = m \cdot a \Rightarrow \vec{F}_g = m \cdot a$

$\Rightarrow \dfrac{G\ M_S\ m_I}{d^2} = m_I \cdot \vec{a}$ nel moto circolare $a = \dfrac{v^2}{r}$

$\Rightarrow \dfrac{G\ M_S\ \cancel{m_I}}{d^{\cancel{2}}} = \cancel{m_I} \cdot \dfrac{v^2}{\cancel{d}}$

$\Rightarrow v_I = \sqrt{\dfrac{G\ M_S}{d}}$ Velocita di Icaro

A noi pero' serve la distanza; la velocita' puo' essere RICAVATA dal periodo:

$T = \dfrac{S}{v} = \dfrac{2\pi d}{v_I} \Rightarrow v_I = \dfrac{2\pi d}{T}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_I = \sqrt{\dfrac{G\ M_S}{d}} & 1 \\ v_I = \dfrac{2\pi d}{T} & 2 \end{cases}$ $\rightarrow$ Sostituiamo una delle due. $2 \rightarrow 1$: $\dfrac{2\pi d}{T} = \sqrt{\dfrac{G\ M_S}{d}}$

$\rightarrow \dfrac{4\pi^2 d^2}{T^2} = \dfrac{G\ M_S}{d} \Rightarrow d^3 = \dfrac{G\ M_S}{4\pi^2} \cdot T^2 \Rightarrow d = \sqrt[3]{\dfrac{G\ M_S}{4\pi^2} \cdot T^2}$

Alternativamente

$d = \dfrac{T}{2\pi} \cdot v_I = \dfrac{T}{2\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{G\ M_S}{d}} \Rightarrow d^2 = \dfrac{T^2}{4\pi^2} \dfrac{G\ M_S}{d} \rightarrow d^3 = \dfrac{T^2}{4\pi^2} \cdot G\ M_S$

$\Rightarrow d = \sqrt{\dfrac{T^2 G\ M_S}{4\pi^2}} = \underline{1.615 \times 10^{11}\ m}$

Se invece del periodo avessimo la velocita' angolare ω:

Nel moto Circolare, siccome $\omega = \dfrac{d\alpha}{dt}$

$\rightarrow$ in radianti $\alpha_{360} = 2\pi \Rightarrow \omega = \dfrac{d\ 360}{dt}$ se $dt = T \Rightarrow$ 1 giro completo

$\Rightarrow \omega = \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow d = \sqrt{\dfrac{G\ M_S}{\omega^2}}$

Considerazione con la formula

$$d = \sqrt{\frac{GM}{\omega^2}}$$

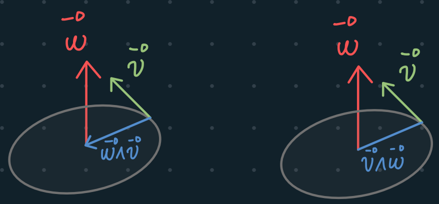
se conosciamo la distanza tra due pianeti, la velocita' del pianeta "minore" e la loro distanza possiamo trovare la massa del pianeta (o buco nero) :

$$d^2 = \frac{GM}{\omega^2} \rightarrow M = \frac{d^2}{G} \cdot \omega^2$$

Forza di Coriolis

Avevamo trovato l'accelerazione di coriolis: $\boxed{\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}}$

Per trovare la Forza ci basta moltiplicare per $-m$: Perche' $-m$?

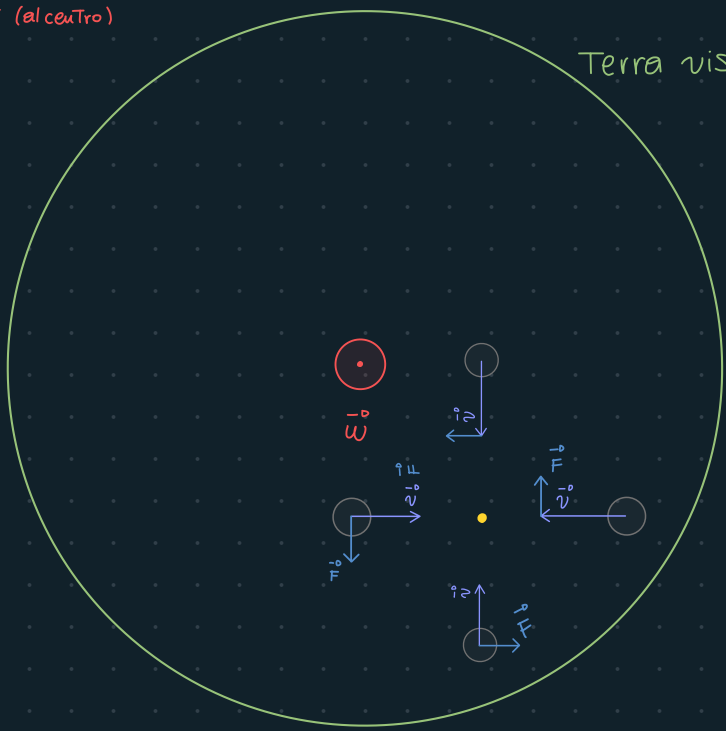


$$\boxed{\vec{F}_{Coriolis} = 2\,m\,(\vec{v} \wedge \vec{\omega})}$$

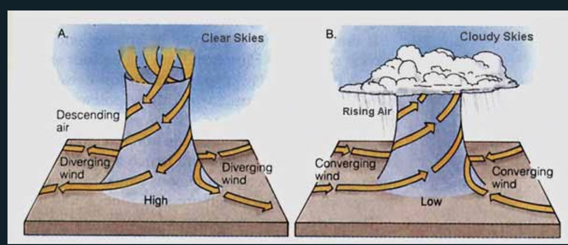
Che cosa accade per via della $\vec{F}_{coriolis}$?

- $\vec{\omega}$ e' USCENTE (al centro)

Terra vista dall'alto



- E' di interesse che le zone di Alta pressione "fuggono" verso le zone di Bassa Pressione.

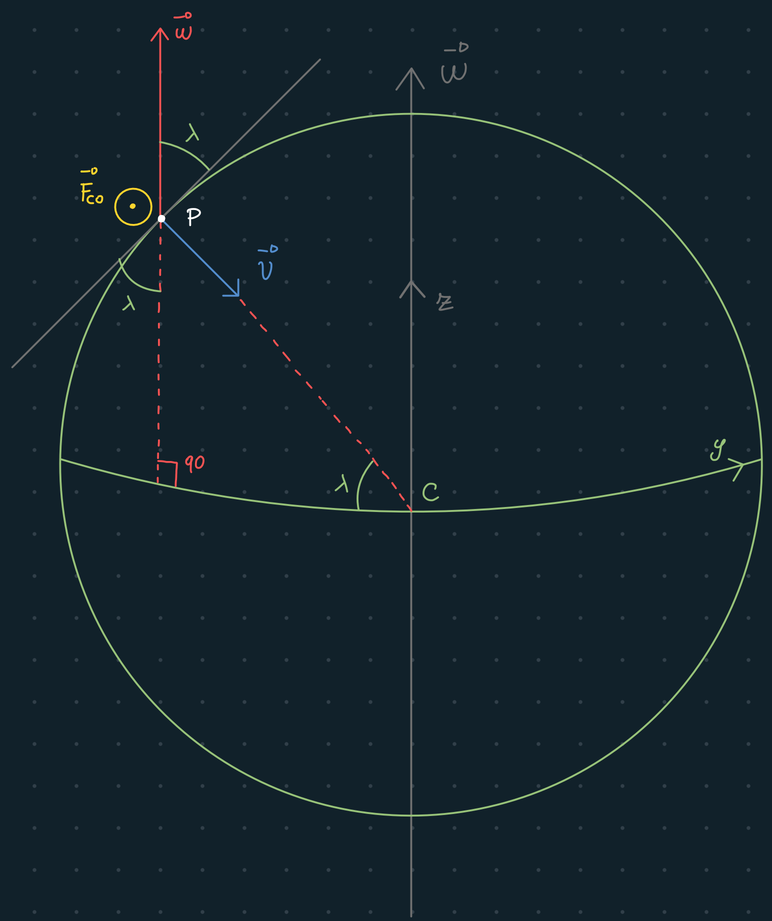


- Il punto L e' un punto di Bassa P.
  $\rightarrow$ Il vento viene ATTIRATO verso L.

- Siccome la Terra gira (ω), influenza i vettori $\vec{v}$; dal prodotto vettoriale $\vec{v}\wedge\vec{\omega}$ otteniamo $\vec{F}$ (usiamo la regola della mano destra)

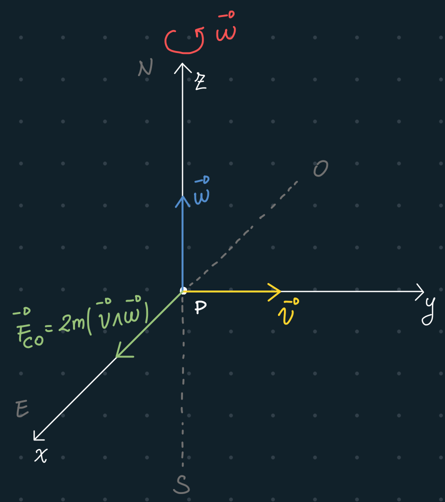
$\Rightarrow$ Attorno al punto L si crea un VORTICE per via della forza di Coriolis.

Cosa Accade ad un corpo in caduta libera verso la terra?



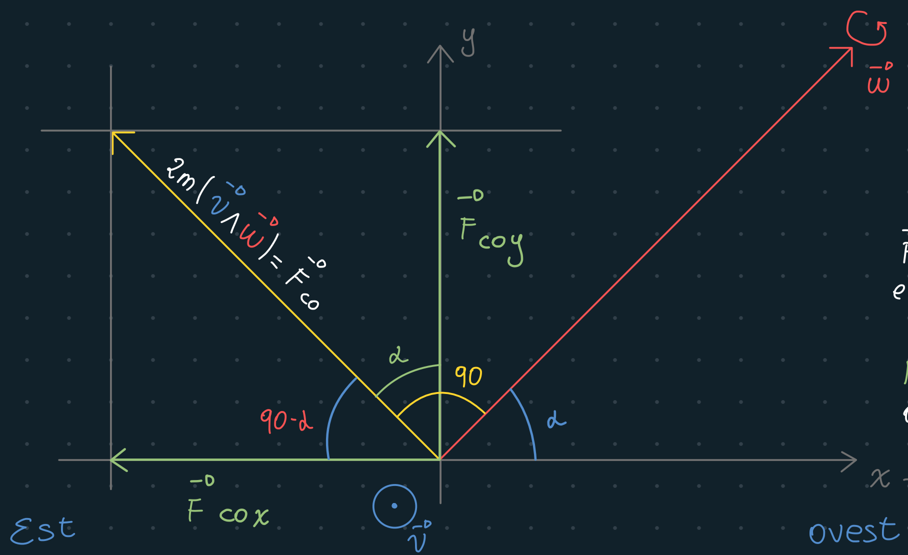
La Forza Di Coriolis e' data dal prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{\omega}$, che nel nostro caso e' USCENTE dal piano

Usiamo un riferimento oxyz per orientarci NEL PUNTO P



CONCLUDIAMO che vicino la superficie la forza di Coriolis fa deviare un corpo vesto EST.

Se osserviamo il tutto in 2 dimenzioni possiamo osservare:

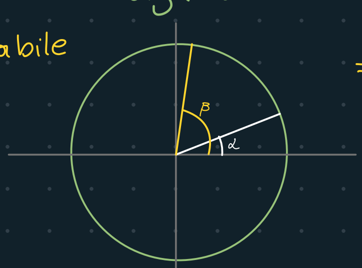


La forza di Co. ha due componenti: $\vec{F}_{cox}$ e $\vec{F}_{coy}$; Siccome $|\vec{F}_{coy}| << |\vec{P}|$ e' trascurabile => non vengo sollevato

MA $\vec{F}_{cox}$ non ha Forze "rivali" quindi il corpo trasla verso destra rispetto al vettore $\vec{v}$.

Dove ha maggiore influenza la Forza di Coriolis?

$$\begin{cases} \cancel{\vec{F}_{coy} = |\vec{F}_{co}| \cos(\alpha)} & \text{Trascurabile} \\ \vec{F}_{cox} = |\vec{F}_{co}| \sin(\alpha) \end{cases}$$



$\Rightarrow \sin(\alpha) < \sin(\beta) \Rightarrow$ La forza di coriolis e' massima ai poli

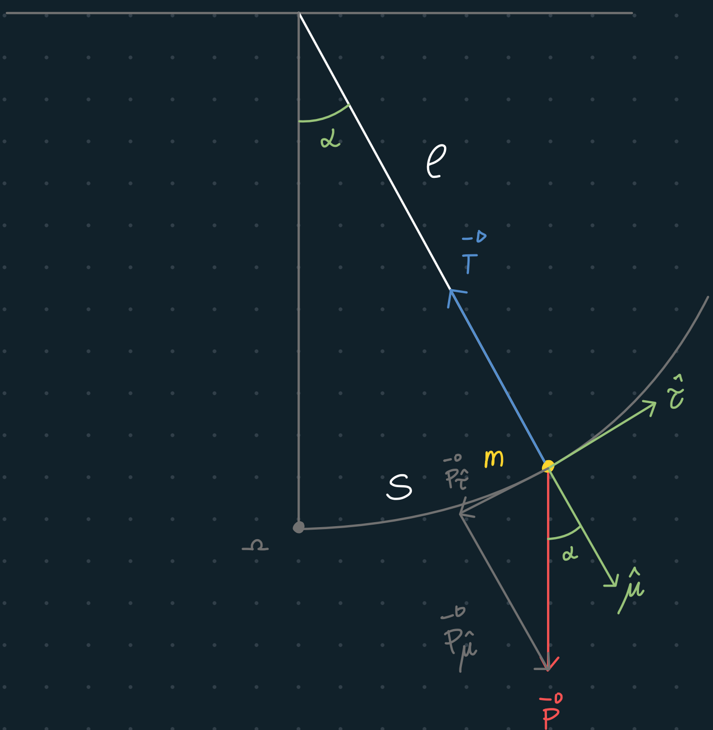
🚩 1:05 Forza di Coriolis e materia oscura

Pendolo Semplice

Sfruttando le nozioni imparate durante l'ascissa curvilinea

Scomponiamo la forza peso:

$$\begin{cases} \vec{P}_{\hat{\mu}} = |\vec{P}| \cos\alpha \\ \vec{P}_{\hat{\tau}} = |\vec{P}| \sin\alpha \end{cases}$$



Scriviamo $\sum_i \vec{F}_i = m \cdot a$

$\Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{T} = m \cdot a$

T ha verso opposto a $\hat{\mu}$

$$\begin{cases} \text{lungo } \hat{\mu} & m \cdot g \cos\alpha - T = m\, a\, \hat{\mu} \\ \text{lungo } \hat{\tau} & -m g \sin\alpha + 0 = m \cdot a\, \hat{\tau} \end{cases}$$

$\vec{P}_\tau$ ha verso opposto a $\hat{\tau}$

La Tensione non ha componenti lungo $\hat{\tau}$

Sappiamo che: $\vec{a} = \ddot{s} \cdot \hat{\tau} - \dfrac{\dot{s}^2}{\ell}\, \hat{\mu}$

$\vec{a}_{\hat{\tau}}$ — $\vec{a}_{\hat{\mu}}$

Accelerazione centripeta/radiale

Raggio di curvatura

Questa formula ci dice che siccome il pendolo DEVE muoversi lungo una circonferenza, DEVE avere un'accelerazione centripeta indicata da $\vec{a}_{cp} = -\dfrac{\dot{s}^2}{\ell}\hat{\mu}$

$\Rightarrow$ Sostituiamo $\vec{a}_{\hat{\mu}}$ e $\vec{a}_{\hat{\tau}}$

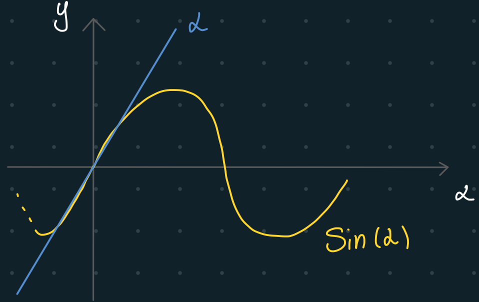
$$\begin{cases} m \cdot g \cos\alpha - T = -\dfrac{m\dot{s}^2}{\ell}\hat{\mu} \\ -m g \sin\alpha = m \ddot{s}\, \hat{\tau} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Sommando $\underbrace{m g \cos\alpha}_{\text{verso giù}}$ e $\underbrace{T}_{\text{verso su}}$

Dobbiamo avere una componente che va verso l'alto data dall'accelerazione centripeta per la massa.

Possiamo Approssimare al primo ordine di Taylor il $\sin(\alpha)$, scrivendo:

$$\sin(\alpha) = \alpha$$



$\Rightarrow$ Quando si è vicini allo zero, $\sin\alpha = \alpha$

$\Rightarrow$ Scriviamo: $\quad -mg\sin\alpha = m\ddot{s}\,\hat{\tau} \;\rightarrow\; -m_g \cdot g\,\alpha = m_I \ddot{s}\,\hat{\tau}$

Sappiamo che la massa inerziale e gravitazionale sono uguali $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -g\alpha = \ddot{s}\,\hat{\tau}$$

Per definizione la misura dell'arco di circonferenza $s = \ell\alpha$

Se l'angolo è espresso in RADIANTI

$$\Rightarrow \alpha = \frac{s}{\ell}$$

$$\Rightarrow -g\alpha = \ddot{s}\,\hat{\tau} \;\rightarrow\; -g\frac{s}{\ell} = \ddot{s}_{\hat{\tau}} \;\Rightarrow\; \ddot{s} + \frac{g}{\ell}s = 0$$

Siccome $\frac{g}{\ell}$ è una costante, la battezziamo K^2 $\Rightarrow$ $K^2 = \frac{g}{\ell}$ (2)

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{s} + K^2 s = \emptyset} \quad (1)$$

Equazione del moto Armonico Semplice

Per risolvere la (2) bisogna conoscere il metodo di risoluzione delle equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti Link

Svolgiamo l'eq differenziale:

$$\ddot{s} + K^2 s = 0 \;\rightarrow\; \text{Eq Caratteristica} \;\rightarrow\; \lambda^2 + K^2 = 0 \qquad \text{Con} \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = K^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -K^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm iK \Rightarrow \alpha = 0 \quad \beta = K$$

$\Rightarrow$ $s(t)$ è del tipo $e^{\alpha}\left[c_1\cos(\beta t+\varphi) + c_2\sin(\beta t+\varphi)\right]$

$$\Rightarrow s(t) = c_1\cos(Kt+\varphi) + c_2\sin(Kt+\varphi)$$

Quindi $\rightarrow$ troviamo $\dot{s} = -Kc_1\sin(Kt+\varphi) + Kc_2\cos(Kt+\varphi)$

$$\ddot{s} = -K^2c_1\cos(Kt+\varphi) - K^2c_2\sin(Kt+\varphi)$$

$\Rightarrow$ Sostituisco: $-K^2c_1\cos(Kt+\varphi) - K^2c_2\sin(Kt+\varphi) + K^2c_1\cos(Kt+\varphi) + K^2c_2\sin(Kt+\varphi) = 0$

$$\Rightarrow \cancel{K^2c_1\cos(Kt+\varphi)} + \cancel{K^2c_2\sin(Kt+\varphi)} = \cancel{K^2c_1\cos(Kt+\varphi)} + \cancel{K^2c_2\sin(Kt+\varphi)}$$

$\Rightarrow$ Abbiamo la prova che $s(t) = c_1\cos(Kt+\varphi) + c_2\sin(Kt+\varphi)$ È SOLUZIONE dell'eq differenziale.

A questo punto il professore considera solo la parte del coseno, questo può essere dovuto a più motivi:

1. $\cos(kt+\varphi) = \sin(kt + \underbrace{\varphi + \frac{\pi}{2}}_{\varphi'})$ Il sin è semplicemente sfasato

2. Se il pendolo parte in una posizione tale che $\sin(kt+\varphi) = 0$, il membro si annulla.

Ad ogni modo prendiamo per buono $S(t) = C_1 \cos(kt+\varphi)$

EDIT: Anche $S(t) = C_2 \sin(kt+\varphi)$ è soluzione

Anche $S(t) = C_1 \cos(kt+\varphi) + C_2 \sin(kt+\varphi)$ è soluzione

$\Rightarrow$ I risultati sono MATEMATICAMENTE equiparabili.
per semplicità usiamo $S(t) = C_1 \cos(kt+\varphi)$

Che cosa ci dice la soluzione all'equazione differenziale?
Con l'eq $S(t) = C_1 \cos(kt+\varphi)$ conosciamo PER OGNI ISTANTE la posizione di m.

Formule per il pendolo

Deduciamo dall'equazione differenziale S, $\dot{S}$ ed $\ddot{S}$

- $S(t) = A\cos(kt+\varphi)$ Spazio
- $\dot{S}(t) = v(t) = -kA\sin(kt+\varphi)$ Velocità
- $\ddot{S}(t) = \frac{d}{dt}v = a(t) = -k^2 A\cos(kt+\varphi)$ Accelerazione

Dopo aver scoperto che $k = \omega = \frac{2\pi}{T}$

- $S(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$ Spazio
- $\dot{S}(t) = v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$ Velocità
- $\ddot{S}(t) = \frac{d}{dt}v = a(t = -\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$ Accelerazione

- $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ PERIODO DEL PENDOLO $\Rightarrow$ Il periodo NON DIPENDE dall'ampiezza
- $\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}\cdot S_0}\right)$
- $A = \frac{S_0}{\cos(\varphi)}$

Interpretazione delle costanti

1) Costante K

Sappiamo che dopo un periodo T la massa torna nella posizione precedente

Siccome il cos è PERIODICO dopo un periodo T il cos assume lo stesso valore di prima:

$$\cancel{A}\cos[K(t+T)+\varphi] = \cancel{A}\cos(Kt+\varphi+2\pi)$$

$S(t+T) = S(t)$ — il cos è periodico di $T=2\pi$

$\to \cos[K(t+T)+\varphi] = \cos(Kt+\varphi+2\pi)$ Applico $f = \sin^{-1}$ ad entrambi

$\to K(t+T)+\varphi = Kt+\varphi+2\pi \to \cancel{Kt}+KT+\cancel{\varphi} + \cancel{Kt}+\cancel{\varphi}+2\pi$

$\to KT = 2\pi \Rightarrow K = \dfrac{2\pi}{T}$ la conosciamo come FREQUENZA ANGOLARE

$\Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T}$ dove $\omega \neq$ VELOCITÀ angolare

Da questo momento Scriveremo: $S(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$

2) Costante A

È semplice dedurre che 'A' è l'AMPIEZZA massima dell'oscillazione

$\Rightarrow S(t) \in [-A, A]$

3) Costante φ FASE INIZIALE

Quando $t = 0 \to S(0) = A\cos(\varphi)$

- $\omega t+\varphi$ FASE
- φ FASE INIZIALE

$\to$ Che vuol dire?

Se $\varphi \neq K\pi$ con $K \in 0,1,2,\dots,n$ $\Rightarrow$ Il pendolo NON PARTE DA A

Ad Esempio $\varphi = \dfrac{\pi}{3} = 60°$ $\Rightarrow S(0) = A\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{A}{2}$ l'ampiezza iniziale è $\dfrac{A}{2}$

4) Sappiamo che $K = \omega = \dfrac{2\pi}{T}$ ma $K^2 = \dfrac{g}{\ell}$

$\Rightarrow \dfrac{g}{\ell} = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow T^2 = (2\pi)^2\cdot\dfrac{\ell}{g} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ PERIODO DEL PENDOLO

5) Che succede se $m_I \neq m_g$?

$$\rightarrow \begin{cases} m_g\, g \cos\alpha - T = -\dfrac{m_I \dot{s}^2}{\ell}\,\hat{\mu} \\ -m_g\, g \sin\alpha = m_I\, \ddot{s}\,\hat{\tau} \quad (1) \end{cases}$$

non serve ora

Considerando la (1): $\sin\alpha \sim \alpha \Rightarrow -m_g\, g\, \alpha = m_I\, \ddot{s}\, \cancel{\hat{\tau}}$

Siccome $s = \ell\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{s}{\ell} \Rightarrow -m_g\, g \cdot \dfrac{s}{\ell} = m_I\, \ddot{s}$

$\Rightarrow m_I \ddot{s} + m_g\, s\, \dfrac{g}{\ell} = 0$ pongo $k^2 = \dfrac{g}{\ell} \Rightarrow m_I\, \ddot{s} + k^2 m_g\, s = 0$

Equazione differenziale "NUOVA"

Se divido per m_g: $-g \cdot \dfrac{s}{\ell} = \dfrac{m_I}{m_g}\,\ddot{s}$

e pongo $k^2 = \dfrac{g}{\ell} \cdot \dfrac{m_g}{m_I} \Rightarrow -g\,\dfrac{s}{\ell} \cdot \dfrac{m_g}{m_I} = \ddot{s} \Rightarrow \ddot{s} + k^2 s = 0$

Stessa eq di quando avevamo semplificato le masse

$\Rightarrow$ Il periodo del pendolo cambia:

$$K = \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{con} \quad K^2 = \frac{g}{\ell} \cdot \frac{m_g}{m_I}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{g}{\ell} \cdot \frac{m_g}{m_I}\right)^2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\left(\frac{g}{\ell} \cdot \frac{m_g}{m_I}\right)^2}$$

Il perido dipende dalle masse

Effettuando un $\underbrace{\text{esperimento}}_{}$ Più volte variando sempre LA MASSA (ma sullo stesso pianeta) otteniamo sempre lo stesso periodo.
Dobbiamo concludere che m_I ed m_g sono UGUALI.

Come trovare le due costanti A e φ?

$$S(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Ampiezza (A) — Fase Iniziale (φ)

$\Rightarrow$ Se conosciamo le condizioni iniziali del pendolo possiamo trovare A e φ

Infatti nel moto del proiettile: $S(t) = S_0 + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

Conosciamo $S(t)$ se conosciamo le condizioni iniziali del proiettile

Scriviamo il sistema di spazio e velocita' del pendolo:

$$\begin{cases} S(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{S}(t) = V(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(0) = A\cos(\varphi) & 1 \\ \dot{S}(0) = -\omega A\sin(\varphi) & 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{S}_0}{S_0} = -\frac{\cancel{A}\omega\sin(\varphi)}{\cancel{A}\cos(\varphi)} = -\omega\, tg(\varphi) \Rightarrow \frac{V_0}{S} = -\omega\, tg\,\varphi$$

Sappiamo che $\omega = K = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \frac{V_0}{S_0} = -\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot tg(\varphi)$

trovaimo φ: $$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{V_0}{\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot S_0}\right)$$

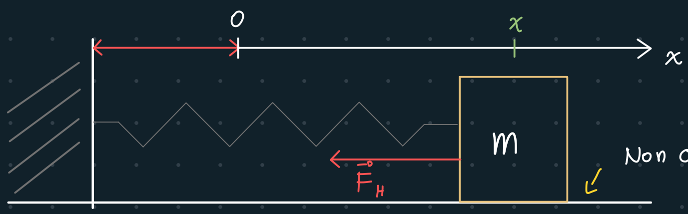
con queste formule, conoscendo V_0 e S_0, possiamo trovare A e φ

Condizioni iniziali

troviamo A dalla 1: $S_0 = A\cos(\varphi) \Rightarrow A = \frac{S_0}{\cos(\varphi)}$

La molla - Legge di Hooke

- ℓ_0 : Allungamento iniziale



Non c'e' Attrito ne' forza peso

Costante elastica

Forza di Hooke : $\vec{F}_H = - k x$

Verso opposto all'asse x

Allungamento della molla

Scriviamo $\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$ per il sistema.

$\Rightarrow -kx = m \cdot \vec{a}$ Sappiamo che $a = \frac{d^2}{dt} x = \ddot{x}$

$\Rightarrow -kx = m \cdot \ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right) x = 0$

Pongo $\omega^2 = \frac{k}{m}$ $\Rightarrow$ $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Frequenza Angolare

Eq. Diff uguale a quella del pendolo

Traiettoria della molla

$\Rightarrow$ Soluzione : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

troviamo il Periodo: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Periodo della molla

FREQUENZA angolare del pendolo

Sappiamo che $k = \frac{2\pi}{T}$

Sappiamo che $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ Nel moto del pendolo $\alpha = \frac{s}{\ell}$ con $\ell = \text{cost}$

$\Rightarrow \omega = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \frac{\dot{s}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\dot{s}$ $\Rightarrow$ $\omega = \frac{-\omega A \sin(\omega t + \varphi)}{\ell}$

Velocita' Angolare PENDOLO

E' chiaro che $\frac{2\pi}{T} \neq \frac{-\omega A \sin(\omega t + \varphi)}{\ell}$

Velocita' Angolare

$\Rightarrow$ Nel moto del pendolo $\frac{d\alpha}{dt} \neq \frac{2\pi}{T}$ Frequenza

Formule per la molla

- $S(t) = x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$
- $\dot{S}(t) = v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$
- $\ddot{S}(t) = a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$

- $\vec{F}_H = -k x$
- $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Periodo della molla

I campi

Criterio di FARADAY: Il numero di linee di forza passanti attraverso la superficie S è pari al flusso del campo attraverso la superficie $N = ES$