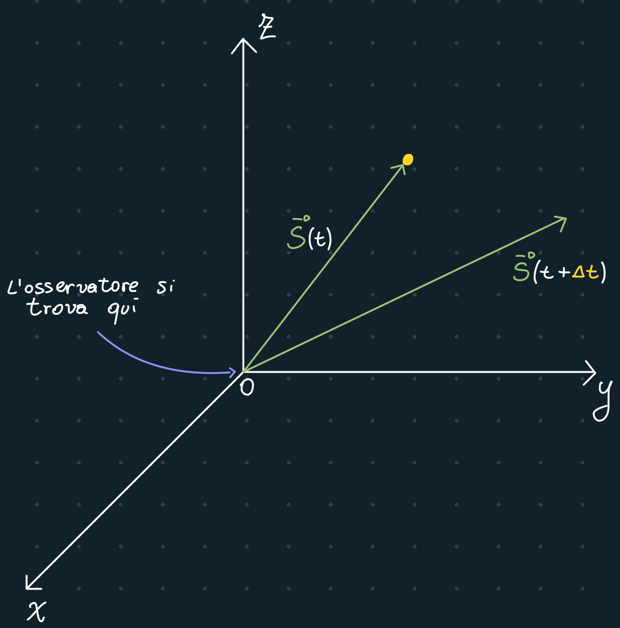
Riferimento Cartesiano



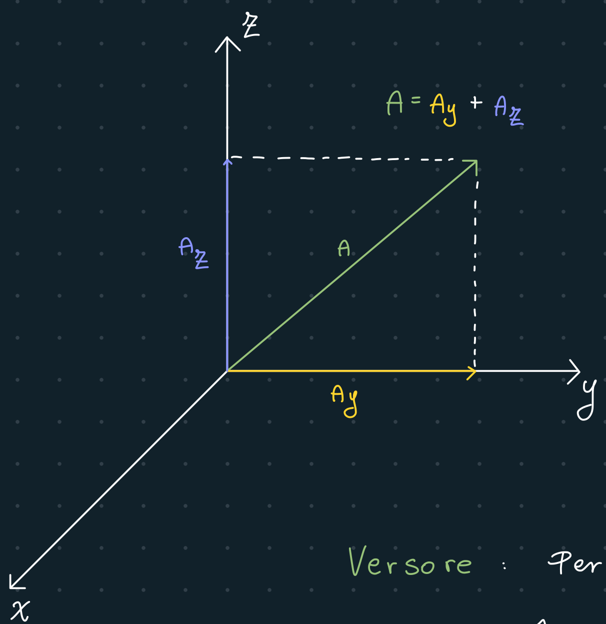
- Il vettore spostamento S dipende dal tempo

Scopo del gioco (cinematica)
Derivare la funzione che lega il vettore $\vec{S}$ al TEMPO.

Questi sistemi sono detti DETERMINISTICI

La meccanica quantistica è PROBABILISTICA
⇒ Non prevede il futuro

Come esprimere un vettore nel sistema di riferimento
→ Troviamo le COMPONENTI del vettore:



Per la regola della somma tra vettori

Nel caso di 3 componenti:

$$\boxed{A = A_x + A_y + A_z}$$

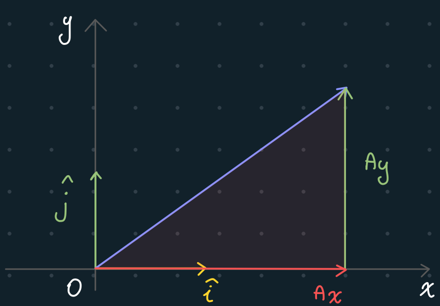
→ Dobbiamo TRADURRE la somma dei vettori in una somma numerica

VETTORE
- MODULO
- DIREZIONE
- VERSO

Versore: Per ogni asse battezziamo un nuovo vettore:

Lungo x: $\hat{i}$
Lungo y: $\hat{j}$
Lungo z: $\hat{k}$

} Hanno stessa direzione e verso dei 3 assi del sistema



Dobbiamo separare l'informazione sul numero da quella di direzione e verso; il versore (in generale) ha modulo pari ad 1.

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

Se $|\vec{A}_x| = 5$, possiamo scrivere $\vec{A}_x = 5\hat{i}$

Possiamo combinare il tutto: $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$ vettore espresso in termini dei versori delle sue componenti

Forma contratta

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k} = (5, 6, 2)$$ forma contratta

Quindi possiamo esprimere un vettore come

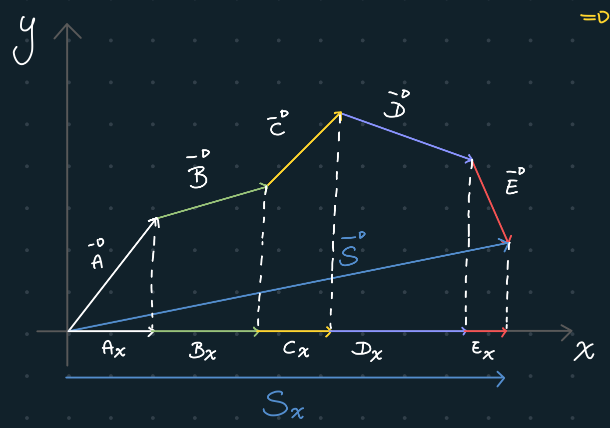
$$\vec{A} = \underbrace{A_x}_{} \hat{i} + \underbrace{A_y}_{} \hat{j} + \underbrace{A_z}_{} \hat{k}$$

SCALARI

Modulo di un vettore

Dal teorema di Pitagora $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

Dimostrazione Somma di più vettori



⇒ la componente x del vettore somma è pari alla somma delle componenti x dei vari vettori.

→ Possiamo estendere il ragionamento a tutti gli assi.

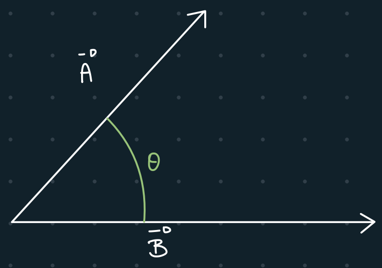
Facciamo l'esempio di 2 vettori:

$$A = \begin{array}{ccc} i & j & k \\ (2, & 1, & 3) \end{array} \quad e \quad B = \begin{array}{ccc} i & j & k \\ (5, & 2, & 4) \end{array}$$

$$\to S = (A_x + B_x,\ A_y + B_y,\ A_z + B_z) = (7, 3, 7)$$

Prodotto Scalare

$\longrightarrow$ Il risultato è uno scalare (numero)



$\theta \rightarrow$ Angolo COMPRESO

Non Si Discute!

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\theta)$$

Definizione del prodotto Scalare

Poniamo i vettori in un sistema di riferimento

$\rightarrow$ Scriviamo i vettori nelle loro componenti:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left[A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}\right] \cdot \left[B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}\right] = A_x B_x \hat{i}\hat{i} + A_x B_y \hat{i}\hat{j} + A_x B_z \hat{i}\hat{k} + A_y B_x \hat{j}\hat{i} + A_y B_y \hat{j}\hat{j} + A_y B_z \hat{j}\hat{k} + A_z B_x \hat{k}\hat{i} + A_z B_y \hat{k}\hat{j} + A_z B_z \hat{k}\hat{k} =$$

$A_x, A_y, \dots B_x, B_y, \dots$ Sono Scalari

$\rightarrow$ Moltiplichiamo i versori

quindi, se dovessi calcolare:

- $\hat{i} \cdot \hat{i} = |\hat{i}|\,|\hat{i}| \cdot \cos(\theta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ Versori paralleli
- $\hat{i} \cdot \hat{j} = |\hat{i}|\,|\hat{i}| \cdot \cos(\theta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(90) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ versori perpendicolari

$$= A_x B_x \hat{i}\hat{i} + A_x B_y \hat{i}\hat{j} + A_x B_z \hat{i}\hat{k} + A_y B_x \hat{j}\hat{i} + A_y B_y \hat{j}\hat{j} + A_y B_z \hat{j}\hat{k} + A_z B_x \hat{k}\hat{i} + A_z B_y \hat{k}\hat{j} + A_z B_z \hat{k}\hat{k} =$$

I Termini in rosso sono zero!

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x \hat{i}\hat{i} + A_y B_y \hat{j}\hat{j} + A_z B_z \hat{k}\hat{k}$$

Prodotto Scalare

ES.

$A = (2, 3, -1)$, $B = (4, 1, 2)$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = \left[2 \cdot 4, 3 \cdot 1, -1 \cdot 2\right] = 9$$ Prodotto Scalare

$|A| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} \simeq 3.74$

$|B| = \sqrt{8 + 1 + 4} = \sqrt{13} \simeq 3.60$

$\Rightarrow$ Sappiamo che $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\theta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}\right]$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left[\frac{9}{3.74 \cdot 3.6}\right] \simeq 48^{\circ}$$ angolo compreso

$\rightarrow 0.83$ Rad

$\Rightarrow$ Possiamo calcolare il prodotto scalare anche come

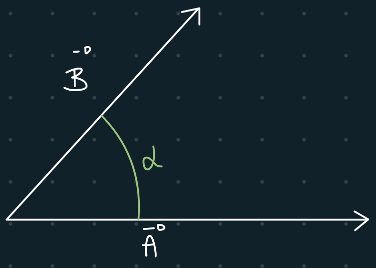
molte approssimazioni

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cdot \cos(\theta) = 3.74 \cdot 3.6 \cdot 48 \simeq 11.2$$

Prodotto Vettoriale

- $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C} = [D, V, M] = \begin{cases} \text{Direzione} \\ \text{Verso} \\ \text{Modulo} \end{cases}$ ⟶ $|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \, \sin(\alpha)$

Il prodotto vettoriale è NULLO per vettori PARALLELI



α ⟶ Angolo COMPRESO

- La Direzione è PERPENDICOLARE ai due vettori

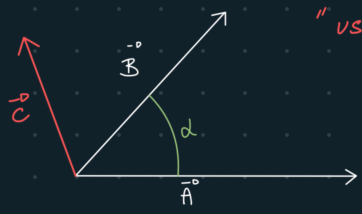
⟶ $\vec{C} \perp \vec{A}$, $\vec{C} \perp \vec{B}$

Se i vettori sono posti nel piano dello schermo, la direzione ESCE o ENTRA perpendicolarmente al piano dello schermo

- Il verso : Regola Della mano destra

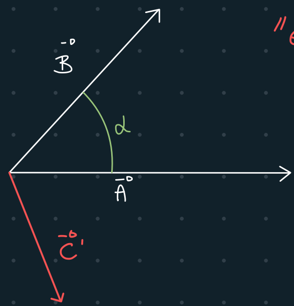
⟶ "Porre la mano destra sul primo dei vettori da moltiplicare, avvolgere le dita (indice, medio, anulare e mignolo) come se volessimo sovrapporre il primo al secondo vettore; il POLLICE ci da' il verso del vettore $\vec{C}$"

"uscente"



$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$

"entrante"



$\vec{B} \wedge \vec{A} = \vec{C}' = -\vec{C}$

Il prodotto vettoriale NON è commutativo!

Una regola per il prodotto vettoriale In un Sistema di riferimento

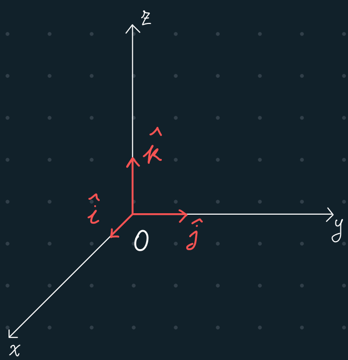
⟶ Scomponiamo il vettore. $\vec{A} \wedge \vec{B} = [A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}] \wedge [B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}] =$

$= \cancel{A_x B_x \hat{i} \wedge \hat{i}}^{\,0} + A_x B_y \hat{i} \wedge \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \wedge \hat{k} +$

$+ A_y B_x \hat{j} \wedge \hat{i} + \cancel{A_y B_y \hat{j} \wedge \hat{j}}^{\,0} + A_y B_z \hat{j} \wedge \hat{k} +$

$+ A_z B_x \hat{k} \wedge \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \wedge \hat{j} + \cancel{A_z B_z \hat{k} \wedge \hat{k}}^{\,0} =$

Abbiamo visto che il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è zero!



Parallelo : $\hat{i} \wedge \hat{i} = |\hat{i}| \cdot |\hat{i}| \cdot \sin(\theta) = 1 \cdot 1 \cdot \sin(\theta) = 0$

Perpendicolare : $\hat{i} \wedge \hat{j} = \begin{cases} \text{modulo} = |\hat{i}| \cdot |\hat{j}| \cdot \sin(\theta) = 1 \cdot 1 \cdot \sin(90) = 1 \\ \text{direzione} = \text{Lungo asse } z \\ \text{verso} = \text{USCENTE} \end{cases}$ $|\vec{C}|$

$=$ Coincide con $\hat{k}$

Allo stesso modo:

- $\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$
- $\hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j}$
- $\hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i}$

$$\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = A_x B_y \hat{k} - A_x B_z \hat{j} + \\ - A_y B_x \hat{k} + A_y B_z \hat{i} + \\ + A_z B_x \hat{j} - A_z B_y \hat{i}$$

$\rightarrow \underbrace{\hat{j} \wedge \hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{i} \wedge \hat{k} = -\hat{j}, \quad \hat{k} \wedge \hat{j} = -\hat{i}}_{\text{opposti}}$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

Esempio

$$\vec{A} = \overset{x}{(2}, \overset{y}{3}, \overset{z}{1}), \quad \vec{B} = \overset{x}{(3}, \overset{y}{4}, \overset{z}{2}) \rightarrow [(6-4)\hat{i} + (3-4)\hat{j} + (8-9)\hat{k}]$$

$$\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = [2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}] = \vec{C} = (2, -1, -1)$$

Calcolo del prodotto vettoriale con le matrici

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{Bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{Bmatrix} = \mathrm{Det}[\vec{A} \wedge \vec{B}] = \text{Prodotto Vettoriale}$$

$$\mathrm{Det}[\vec{A} \wedge \vec{B}] = [X] i - [Y] \hat{j} + [Z] \hat{z}$$

$$\rightarrow [X] = \begin{Bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{pmatrix} \hat{i} = [A_y B_z - A_z B_y] \hat{i}$$

$$[Y] = \begin{Bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{Bmatrix} = -\begin{pmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{pmatrix} \hat{j} = -[A_x B_z - A_z B_x] \hat{j}$$

$$[Z] = \begin{Bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{pmatrix} \hat{k} = +[A_x B_y - A_y B_x] \hat{k}$$

Esercizi sui vettori