

Vedendo il video illustrativo (Zanichelli) capiamo diverse cose sperimentalmente:

- Ogni volta che il flusso del campo magnetico cambia nel tempo si genera una **corrente indotta** all'interno del circuito, proprio come se ci fosse un generatore di forza elettromotrice.
- La forza elettromotrice che viene generata nel circuito, è detta **forza elettromotrice indotta**.
- Questa forza (sperimentalmente) sembra dipendere da tre fattori:
 1. Variazione del campo magnetico esterno al circuito; questo può essere ottenuto sia muovendo il magnete (mantenendo fermo il circuito) oppure muovendo il circuito lasciando il magnete fermo.
 2. Area del circuito indotto (ovvero la *spira avvolta attorno al magnete*), che può essere aumentata in diversi modi; nell'esempio più semplice si aumentano il numero di avvolgimenti.
 3. Angolo formato tra il circuito indotto ed il campo magnetico (*orientazione nello spazio del circuito*).

Il primo che si accorse di questo fenomeno (sperimentalmente, la sua legge fu non verificata matematicamente per molto tempo) fu **Michael Faraday** attorno al 1930.

$$f_{ind} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

Legge di Faraday

La legge ci dice che la forza elettromotrice indotta dal campo magnetico è pari alla derivata del flusso del campo magnetico

Il nostro obiettivo è quindi quello di **verificare la legge di Faraday**, che egli trovò sperimentalmente.

$$\text{Flusso del MF } \phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int_S |\vec{B}| \cos \theta dS$$

1. | 3. cos θ 2. dS

Prodotto Scalare

La **regola del flusso** ci dice che non importa quale parametro fa variare il flusso (MF, angolo, o superficie); l'importante è che *il flusso vari*.

Per questo motivo possiamo identificare **due casi fondamentali**.

Sia chiaro, questi due casi non sono presi *a caso*, ma sono presi in modo tale da tornarci utili più tardi.

Ecco la spiegazione:

La legge di Faraday ci dice che la forza indotta è la derivata del campo magnetico. Il campo magnetico è composto da **un prodotto**. La derivata di un prodotto viene calcolata a partire dalle derivate dei due membri (secondo la regola della derivata di un prodotto).

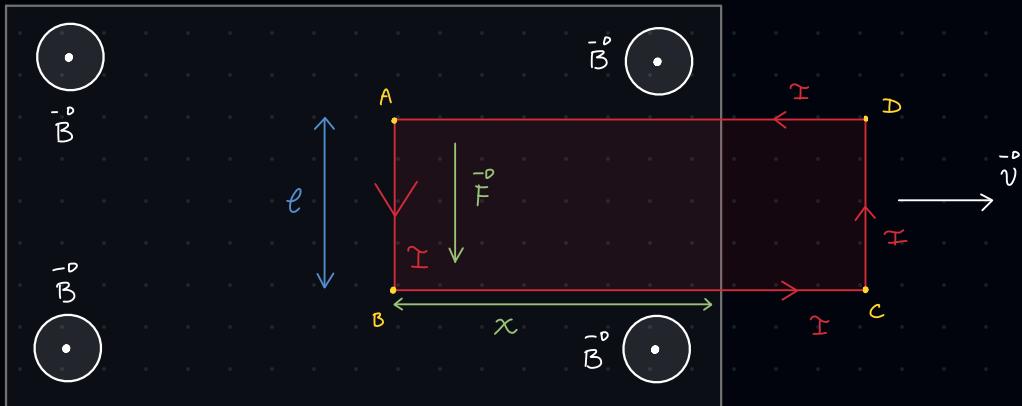
Ci sembra ora scontato dover prendere in considerazione i due casi che ci permettano di calcolare la derivata del flusso del campo magnetico! Infatti i due casi si riferiscono a:

1. **Flusso tagliato**, che ci permette di calcolare la derivata quando *varia la superficie*.
2. **Flusso concatenato**, che ci permette di calcolare la derivata quando *varia il campo magnetico*.

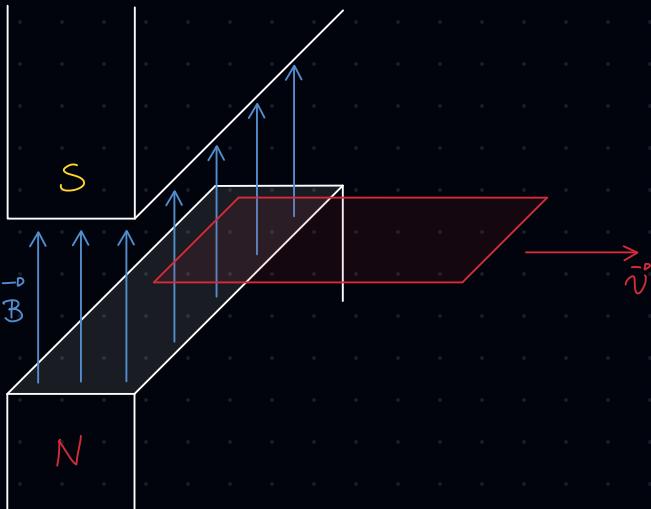
Si verifica ogni qualvolta un circuito indotto si muove all'interno di un campo magnetico, oppure quando un campo magnetico si muove rispetto ad un circuito.

In altre parole: quando il motivo della corrente indotta è la variazione di posizione (ds o $\cos(\alpha)$).

Vista dall'alto



Vista tridimensionale



Muovendo un circuito indotto (in rosso) all'interno di un campo magnetico perpendicolare alla superficie del circuito (in blu nella seconda illustrazione, in bianco nella prima, uscente dal foglio) ci accorgiamo **sperimentalmente** che si genera una forza elettromotrice indotta all'interno del circuito indotto.

Lo scopo del gioco di questa sezione è quello di capire **perché** (con delle formule!) si sperimenta una forza elettromotrice indotta.

d'unica forza agente è quella di Lorentz: $\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B})$
Non è presente $\vec{E} = 0$ $\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$

Passo 2: da Forza elettromotrice è definita come $f_{em} = \frac{\text{lavoro}}{\text{carica}}$

$$=0 f = \frac{L}{q} = \int \frac{\vec{F} \cdot d\ell}{q} = q \int \frac{(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\ell}{q} = \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\ell$$

MA $F \perp \overline{BC} \perp \overline{AD}$ e non è presente in \overline{CD} perché in quella zona non c'è un MF.

$$=0 \int \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\ell \quad e \quad \vec{v} \perp \vec{B} = 0 \quad \vec{v} \wedge \vec{B} = |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \sin \theta = VB$$

$$A \quad =0 f = VB \int_A^B d\ell = \underline{VB\ell} \quad (1)$$

Dopo aver ottenuto questo risultato, abbiamo calcolato la forza elettromotrice indotta all'interno del circuito indotto, bene!

Adesso, **se la legge di Faraday** è corretta, calcolando la derivata del flusso del campo magnetico dovremmo ottenere proprio la forza elettromotrice che abbiamo trovato; proviamo.

$$\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

La superficie dS del circuito indotto, corrisponde all'area del rettangolo ABCD, ma come possiamo osservare dalla figura, il campo magnetico \mathbf{B} non agisce lungo tutta l'area. Inoltre il circuito è **in movimento**, quindi la **superficie non è costante**.

Battezziamo quindi l "l'altezza" del rettangolo, ed x la sua "base". Come abbiamo detto, la spira si muove, quindi varia anche la sua superficie attraversata dal campo magnetico.

Mentre l resta costante (l'altezza non cambia se tiriamo via il circuito da \mathbf{B} !), la base invece cambia: x non è costante nel tempo.

Questo vuol dire che:

Quando il flusso dipende dal tempo, possiamo scriverlo come:

$$\phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = B \int_S dS = B \cdot (x \cdot l) = B x l$$

Ad un tempo $\bar{t} = t + \Delta t \rightarrow \bar{x} = x - \Delta x$

$$\Rightarrow \phi_B(t + \Delta t) = B l (x - \Delta x) \quad \text{con } \Delta x = v \cdot \Delta t$$

Facciamo la derivata di ϕ_B

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_B}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi_B(t + \Delta t) - \phi_B(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B l x - B l (x - \Delta x) - B l x}{\Delta t} \\ &= - \frac{B l \Delta x}{\Delta t} \end{aligned}$$

Definizione
di velocità

$$\Rightarrow \frac{d\phi_B}{dt} = - B l v$$

Tutto giusto!

Bisogna notare che il segno meno davanti al risultato è corretto, visto che la legge di Faraday ci dice che la forza è uguale a **meno** la derivata del flusso

A questo punto dobbiamo fare un'osservazione **molto importante**:
Notiamo che possiamo calcolare la *forza elettromotrice indotta* in due modi:

1. Tramite il calcolo diretto della forza elettromotrice: *lavoro/carica*.
2. Tramite la legge di Faraday

Se ancora non abbiamo notato la parte interessante, proviamo ad egualare il tutto:

$$\oint f_{ind} = \oint (\vec{V} \wedge \vec{B}) d\ell = - \frac{d \phi_B}{dt}$$

* Con \vec{B} costante

Con questa uguaglianza stiamo dicendo che **se il campo magnetico** è costante, otteniamo come derivata del **suo flusso** l'integrale sopra riportato! Questo ci torna molto comodo per le ragioni che avevamo accennato all'inizio.

Proviamo ad effettuare la derivata di un prodotto:

$$\frac{d f(t)}{dt} \quad \text{con } f(t) = g(t) \cdot h(t) = g(t) \cdot h(t) + g(t) \cdot h'(t)$$

Siccome il nostro flusso è una funzione composta dal **prodotto** di due funzioni, la sua derivata sarà calcolata con la regola sopra riportata. Quindi trovando le derivate dei **due casi elementari** (quando varia solo **B** e quando varia solo $\cos(\alpha) dS$) per trovare **il caso generale in cui variano entrambi**, ci basterà usare le derivate "parziali" che troveremo in questi due casi elementari.

La prima derivata l'abbiamo trovata, passiamo a trovare la seconda.

Questa situazione presenta, al contrario della precedente, dei circuiti **immobili**. Infatti il circuito indotto rimane fermo, mentre il campo magnetico varia nel tempo. N.b. Il campo magnetico dipende sia dal tempo, ma anche dalla distanza r . Per cui $B(t, r)$

Passo 1: Definizione del flusso con B variabile

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int B(t + \Delta t, \vec{r}) \cdot \vec{n} dS - \int B(t, \vec{r}) \cdot \vec{n} dS}{\Delta t}$$

Come prima la derivata non è altro che il limite del rapporto incrementale, quindi lo effettuiamo sul flusso del campo magnetico B .

Passo 2:

$$B(t + \Delta t, \vec{r}) = \overset{\text{Termine 0}}{B(t, \vec{r})} + \overset{\text{Termine 1}}{\frac{\partial B}{\partial t}} \Big|_{\Delta t=0} \cdot \Delta t + \dots$$

Siccome il limite è per la variazione di tempo che tende a zero, ci interessa il campo magnetico solo nell'interno di zero, che può essere approssimato quindi **al primo termine** di serie di Taylor

Passo 3: Sostituiamo a B la sua approssimazione

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{\int \cancel{B(t, \vec{r})} \cdot \vec{n} dS + \int \cancel{\frac{\partial B}{\partial t}(t + \Delta t, \vec{r})} \frac{1}{\Delta t} \vec{n} dS - \int B(t, \vec{r}) \cdot \vec{n} dS}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int \frac{\partial}{\partial t} B(t + \cancel{\Delta t}, \vec{r}) \cdot \vec{n} dS$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi_B}{dt} = \left(\int \frac{\partial B(t, \vec{r})}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \right)$$

Passo 4: Dalla legge di Faraday: $f_{ind} = - \left(\frac{d\phi_B}{dt} \right)$

Siccome $f_{em} = \frac{\text{Lavoro}}{\text{Carica}}$ e l'unica forza è quella di Lorentz: $\vec{F}_c = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B})$

$$\text{Lavoro} = \vec{F} \cdot \vec{e} = \frac{q \int \vec{E} \cdot d\vec{e} + q \int (\vec{v} \wedge \vec{B}) d\vec{e}}{q} = - \int \frac{\partial}{\partial t} B(t, \vec{r}) \cdot \vec{n} dS$$

$$f_{em} = - \left(\frac{d\phi_B}{dt} \right)$$

Quello che abbiamo fatto è stato:

1. Ricavare la derivata del flusso del MF facendo la derivata tramite il rapporto incrementale; per semplificare i conti (che sono ugualmente validi!) abbiamo approssimato con Taylor il valore del MF nell'interno lineare di zero.
2. Siccome la forza elettromotrice è il lavoro diviso la carica, e l'unica forza è quella di Lorentz (il lavoro si calcola sulla forza!), otteniamo l'ultima uguaglianza scritta.

Adesso, visto che (come abbiamo supposto all'inizio) tutti i circuiti fisici **sono fermi**, allora la velocità v è zero! Questo ci porta a dire che il prodotto vettoriale tra v e \mathbf{B} è zero!

$$\oint_{\text{em}} \vec{E} \cdot d\ell = \cancel{\oint (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\ell} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}(t, \vec{r}) \cdot \hat{n} dS$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\ell = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}(t, \vec{r}) \cdot \hat{n} dS$$

Considerazione IMPORTANISSIMA

Osservando l'ultima equazione scritta (i due integrali) notiamo che a sinistra è presente il **campo elettrico**, che solitamente è generato dalle **cariche** (teorema di Gauss), in questo caso non è generato da carica alcuna!

Anzi, a destra dell'uguaglianza troviamo proprio **il campo magnetico!**

Ricordiamoci che in questa ipotesi quello a variare è il campo magnetico
 \longrightarrow

Un campo magnetico che varia genera un campo elettrico.

Ma sappiamo (lo vedremo tra qualche lezione) che anche un campo elettrico genera un campo magnetico!

Quindi non c'è fine a questo continuo generarsi di campo magnetico/elettrico.

Questo fenomeno è alla base delle **onde elettromagnetiche**.

Passo 5:
Con il Teorema del ROTORE

$$\oint \vec{E} \cdot d\ell = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = \text{ Possiamo riscrivere l'uguaglianza:}$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}(t, \vec{r}) \cdot \hat{n} dS$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Equazione di Maxwell generalizzata per campi magnetici variabili

E' interessante notare che quando abbiamo trovato la stessa equazione nel caso di **magnetostatica**, il rotore del campo elettrico **E dava come risultato zero!** Proprio perché se proviamo a fare la derivata (anche parziale) di una costante, otteniamo zero!

Durante la dimostrazione, abbiamo trovato che:

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \int \frac{\partial B(t, \vec{z})}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \quad \text{Con il campo } \vec{B} \text{ VARIABILE}$$

Ricordiamo la derivata trovata per $\vec{B} = \text{cost.}$

$$\frac{d\phi_B}{dt} = - \oint (\vec{V} \wedge \vec{B}) d\ell \quad \text{Con il campo } \vec{B} \text{ COSTANTE}$$

NEL CASO GENERALE (cambia sia \vec{B} che S)

Primo modo di esprimere l'equazione di Maxwell in forma integrale

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \int \frac{\partial B(t, \vec{z})}{\partial t} \cdot \hat{n} dS - \oint (\vec{V} \wedge \vec{B}) d\ell \quad \text{e quindi } f_{em} = - \frac{d\phi_B}{dt} \text{ diventa}$$

$$f_{em} = \frac{q}{q} = \oint \vec{E} \cdot d\ell + \oint (\vec{V} \wedge \vec{B}) d\ell = - \frac{d\phi_B}{dt} = \oint (\vec{V} \wedge \vec{B}) d\ell - \int \frac{\partial B(t, \vec{z})}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

Abbreviando...

$$(1) \quad \oint \vec{E} \cdot d\ell + \cancel{\oint (\vec{V} \wedge \vec{B}) d\ell} = \oint (\vec{V} \wedge \vec{B}) d\ell - \int \frac{\partial B(t, \vec{z})}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

Secondo modo di esprimere l'equazione di Maxwell in forma integrale

$$\oint \vec{E} \cdot d\ell = - \int \frac{\partial B(t, \vec{z})}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

Terzo modo di esprimere l'equazione di Maxwell in forma integrale

Equazione in forma Differenziale

$$\text{Teorema Rotore: } \oint \vec{E} d\ell = - \int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \rightarrow \cancel{\int_S (\vec{V} \wedge \vec{E}) \cdot \hat{n} dS} = \cancel{\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \hat{n} dS}$$

$$\rightarrow \cancel{\nabla \wedge \vec{E}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Unico modo di esprimere la forma differenziale dell'equazione di Maxwell

Bisogna notare che questa "dimostrazione" non è una dimostrazione molto diffusa. Solitamente si riporta **soltanto** o il termine (2) o il termine (3). Inoltre il termine (1) è solitamente dimenticato (il Mencuccini 2a edizione non sembra riportarlo); il che è effettivamente sbagliato, visto che la forza di Lorentz comprende sia il campo magnetico che elettrico.

Il fenomeno dell'autoinduzione

Quando abbiamo un circuito percorso da corrente, questo produce un campo magnetico secondo la formula di Laplace, di cui possiamo calcolare il flusso:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\ell \wedge A \vec{r}}{|A \vec{r}|^3} \Rightarrow \Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_S \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\ell \wedge A \vec{r}}{|A \vec{r}|^3} \right] dS$$

*Porzione di
Superficie del
circuiti*

Il flusso di questo campo magnetico in particolare è un **autoflusso**, visto che il MF è generato a partire dalla corrente che circola nel circuito (e non da una fonte esterna).

Possiamo concludere quindi che sia il campo magnetico indotto, che il suo flusso, dipendono **dalla corrente I** . Ci sono poi altri elementi che dipendono **dalla geometria** del circuito, come la superficie S ; considereremo questi valori come *costanti L* .

$$\Rightarrow \Phi_B = L \cdot I$$

↓
 Costante dipendente
 dalla geometria
 ↗ Coefficiente di autoinduzione
INDUTTANZA

Cosa accade se il MF varia nel tempo?

$$\text{Se } I \neq \text{cost} \Rightarrow \phi_B = L \cdot I \neq \text{cost} \Rightarrow \frac{d\phi_B}{dt} \neq 0$$

↗!

Ricordiamo che $f_{em} = - \frac{d\phi_B}{dt} = 0$

Se la corrente varia nel tempo, anche il campo magnetico cambierà nel tempo. Di conseguenza quando \mathbf{B} cambia, anche il suo flusso cambia. Se il flusso del MF cambia, si genera una **forza elettromotrice indotta**.

Siccome $\phi_B = L \cdot I \Rightarrow f_{ind} = - \frac{d\phi_B}{dt} = - \frac{d[L \cdot I]}{dt}$

\Rightarrow Le prop. fisiche del circuito sono costanti nel tempo $\Rightarrow L = \text{cost}$

$$f_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$$

↑
**FORZA ELETTROMOTRICE
AUTOINDOTTÀ**

Ha verso opposto

$$L \cdot -f_{ind} = L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \text{Nei calcoli come la legge di Kirchhoff per le maglie va sottotratta.}$$

Esempio di Autoinduzione



Siccome abbiamo appena dimostrato che un componente elettronico dotato di *induttanza*, genera una forza elettromotrice; siccome abbiamo visto che nella **legge di ohm generalizzata**, dobbiamo includere: *resistenze e forze elettromotorie*, mentre la differenza di potenziale è zero (siccome siamo in un loop):

$$\sum_i f_i = \sum_i R_i \cdot I \Rightarrow f_{\text{em}} - f_{\text{ind}} = R \cdot I \Rightarrow f_{\text{em}} = f_{\text{ind}} + R I$$

$$\Rightarrow f_{\text{em}} = L \frac{dI}{dt} + R I \quad (1)$$

Se a questo punto ci chiedessero di risolvere l'equazione per I (la *corrente*) dovremmo risolvere una cosiddetta **equazione differenziale**, visto che compare la derivata di I .

Sappiamo che la soluzione a questo tipo di eq è: $I(t) = A \cdot e^{\frac{dt}{L}} + D$

\Rightarrow Sostituisco nella (1) facendo anche la derivata:

$$I'(t) = A \cancel{d} e^{\frac{dt}{L}} \Rightarrow f_{\text{em}} = \cancel{L A \cancel{d} e^{\frac{dt}{L}}} + \cancel{R A e^{\frac{dt}{L}}} + \underline{R D} \text{ Costante}$$

Siccome f_{em} è una costante, anche a destra deve esserci una costante!

$$\Rightarrow f_{\text{em}} = R D \\ \Rightarrow D = \underline{\frac{f}{R}} \quad (\alpha)$$

$$\begin{aligned} &\text{Affinché ciò accada: } (A \cancel{d} e^{\frac{dt}{L}} + R A e^{\frac{dt}{L}}) = 0 \\ &\Rightarrow A \cancel{e}^{\frac{dt}{L}} (L \cancel{d} + R) = 0 \Rightarrow L \cancel{d} + R = 0 \Rightarrow \cancel{d} = -\frac{R}{L} \end{aligned} \quad (b)$$

Sostituisco nella soluzione (2) $\Rightarrow I(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L} t} + \underline{\frac{f}{R}}$ Soluzione generale (3)

Per trovare la soluzione particolare dobbiamo impostare una condizione; in questo caso poniamo la condizione INIZIALE:

$$I(0) = 0 \Rightarrow I(0) = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} + \underline{\frac{f}{R}} = 0 \Rightarrow A + \underline{\frac{f}{R}} = 0 \Rightarrow A = -\frac{f}{R}$$

$$\text{Sostituisco nella soluzione (3)} \Rightarrow I(t) = -\frac{f}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} t} + \underline{\frac{f}{R}} \quad t_0 = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = \underline{\frac{f}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)}$$

Soluzione particolare

Considerazione: quando facciamo tendere il tempo ad infinito (ovvero dichiamiamo che trascorre del tempo da quando inizia a fluire corrente nel circuito) notiamo che l'esponenziale **tende a zero** (siccome è un exp negativo!), la corrente diventa f/R , ovvero corrente di **regime**

Lo scopo del gioco in questa dimostrazione è trovare "il pezzo mancante" da aggiungere alla legge di Ampere in modo da generalizzarla; questo "pezzo in più" è proprio la corrente di spostamento.

Sappiamo che se calcoliamo il flusso attraverso una superficie chiusa che "abbraccia" un filo percorso da corrente otteniamo che esso è zero:



Per il Teorema della Divergenza: $\int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$ (2)

CORRENTE STAZIONARIA

Quando però nel circuito è presente un condensatore e prendiamo la superficie "a metà" tra le due armature, il flusso non può essere zero:

Tra le due armature **non c'è movimento di cariche**, e quindi **non può esserci corrente**. Di conseguenza la corrente entra, ma "non esce":



Per il principio della conservazione della Carica sappiamo che:

$$-dQ = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds \cdot dt \Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds \quad \text{Forma integrale}$$

$$-\frac{d}{dt} \int_V f(x,y,z,t) dV = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV \Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{J} \quad \text{Forma differenziale}$$

(3)

Dalla legge di Ampere:

$$\underbrace{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{\text{Ampère}} = \pm \mu_0 \mathcal{I} \xrightarrow{\text{T. Rotore}} \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \pm \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Maxwell (1)

Applico la divergenza alla (1):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla^2 \vec{B} \xrightarrow{\text{divergenza di un rotore è zero}} \nabla^2 \vec{J} = 0$$

Dire che $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ equivale a dire di essere in corrente stazionaria (dalla (2))!

Il problema è che però, nel caso del circuito con il condensatore, non possiamo avere che la divergenza di \mathbf{J} è zero, ma deve essere uguale alla derivata parziale di ρ rispetto al tempo!

Dobbiamo quindi **aggiungere un termine** in modo che quando andiamo ad applicare la divergenza, questa ci restituisca proprio la derivata parziale appena menzionata; questo è proprio quello che **Maxwell fece**:

Maxwell Trovo' che il "pezzo mancante" era proprio...

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

d'equazione diventa:

$$\nabla \cdot \bar{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu_0 \bar{J} \quad \text{Legge di Ampere GENERALE (Maxwell)}$$

Infatti applicando la divergenza: $\nabla \cdot (\nabla \cdot \bar{B}) = (\nabla \cdot \bar{B}) \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mu_0 \bar{J}$

$$\rightarrow \mu_0 \nabla \cdot \bar{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \bar{E})}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \mu_0 \nabla \cdot \bar{J} + \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\rightarrow \mu_0 \nabla \cdot \bar{J} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \mu_0 \left(\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0 \quad \rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Proprio come la (3)

C.V.D.

Considerazioni

Notiamo dall'equazione generale che è possibile generare un campo magnetico quando **il campo elettrico varia nel tempo, si genera un campo magnetico**.

Ovviamente l'equazione funziona anche quando il campo elettrico non varia: infatti quando il campo elettrico E è costante, la sua derivata rispetto al tempo è zero.

* Con la seconda dimostrazione (lez 37, 1:20) troviamo che

$$I_{Sp} = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \bar{E} \cdot \hat{n} ds = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad \text{ma} \quad I_{Sp} = \int \bar{J}_{Sp} \cdot \hat{n} ds$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \epsilon_0 \int \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} ds \Rightarrow \bar{J}_{Sp} = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad \text{di spostamento}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu_0 \bar{J} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \bar{B} = \mu_0 \left[\bar{J}_{Sp} + \bar{J}_{Cond} \right]$$

\uparrow
Spostamento

\nwarrow
Conduzione

Siamo finalmente in grado di scrivere le equazioni di Maxwell nella maniera più generale possibile; partiamo scrivendole nella forma *differenziale*:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ Teorema di Gauss
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Legge di Faraday
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ Monopoli magnetici e linee del MF
- $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Legge di Ampere + Termine aggiunto da Maxwell

Per trovare la forma *integrale*, però, dobbiamo fare un piccolo ragionamento...

Quando abbiamo calcolato la **derivata del flusso del MF** per la legge di faraday, abbiamo visto come questa fosse la derivata di un prodotto;

Quando facciamo la derivata del flusso del campo elettrico ci accorgiamo che anche in questo caso siamo davanti alla derivata di un prodotto! Conveniamo che la forma finale della derivata è equivalente:

$$\text{Campo magnetico: } \frac{d\phi_B}{dt} = \int \vec{B} \cdot \hat{n} ds = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} ds - \oint_{\ell} (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{e}$$

$$\text{Campo Elettrico: } \frac{d\phi_E}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} ds - \oint_{\ell} (\vec{v} \times \vec{E}) d\vec{e}$$

\Rightarrow Scriviamo l'eq di Maxwell nella forma integrale:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I \quad \text{Legge di Ampere}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \quad \text{Legge di Maxwell}$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} ds$$

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds$$

Rotore

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 I$$

Ampere + Termine

Termino in più' (a)

(1)

Possiamo quindi scrivere Sostituendo al termine (a) nella (1) il termine (b)

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \left[\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} ds - \oint_{\ell} (\vec{v} \times \vec{E}) \cdot d\vec{e} \right]$$

Quando però abbiamo visto la legge di Faraday (forza elettromotrice per il campo magnetico) abbiamo visto che come erano presenti due termini a destra, erano presenti due termini anche a sinistra, in modo da semplificare uno degli integrali da entrambe le parti ed ottenere l'equazione di Maxwell in forma integrale; lo stesso dobbiamo fare anche qui:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} - \frac{1}{c^2} \oint_{\ell} (\vec{v} \times \vec{E}) \cdot d\vec{e} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \left[\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} ds - \oint_{\ell} (\vec{v} \times \vec{E}) \cdot d\vec{e} \right]$$

* $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$, serve a semplificare l'altro termine

Quando abbiamo definito la forza *elettromotrice* l'abbiamo definita come l'integrale della forza di Lorentz diviso la carica; per la legge di Faraday avevamo che la *fem* era pari a meno la derivata del flusso del campo magnetico.

Quello che dobbiamo fare ora è definire una *forza magnetomotrice*, che è il lavoro sulle cariche magnetiche:

$$f_B = \frac{L}{q_B} = \oint \left[\vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \right] \cdot d\vec{e}$$

Questo è possibile solo se aggiungiamo da entrambe le parti un termine!

$$\Rightarrow f_B = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{d\phi_E}{dt}$$

$$\bullet \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\bullet f_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{e} + \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{e} = - \frac{d\phi_B}{dt} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS + \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{e}$$

$$\rightarrow f_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{e} + \cancel{\oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{e}} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS + \cancel{\oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{e}}$$

$$\bullet \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

$$\bullet f_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{e} - \frac{1}{c^2} \oint (\vec{v} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{e} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

$$\rightarrow f_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{e} - \frac{1}{c^2} \cancel{\oint (\vec{v} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{e}} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS - \cancel{\mu_0 \epsilon_0 \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{e}} + \mu_0 I$$

Alle equazioni di Maxwell va aggiunta anche la forza di Lorentz:

$$\bullet \vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Campo Elettrico (non compare più il campo magnetico \vec{B})

$$1) \text{ Legge di Faraday} \quad \nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$2) \text{ Applico il rotore} \quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = - \frac{\partial (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})}{\partial t}$$

$$3) \text{ Identità rettoriale: } \bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge E) = \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot E) - \bar{\nabla}^2 E$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot E) - \bar{\nabla}^2 E = - \frac{\partial (\bar{\nabla} \times B)}{\partial t}$$

$$4) \text{Loi de Ampère-Maxwell : } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \nabla \cdot (\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$5) \text{ Legge di Gauss: } \nabla E = \frac{f}{\epsilon_0}$$

$$= \nabla^{\sigma} \left(\frac{J}{\varepsilon_0} \right) - \nabla^{\sigma_2} E^{\sigma} = \mu_0 \frac{\partial J^{\sigma}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E^{\sigma}}{\partial t^2}$$

6) Scambio l'ordine Eq (1)

Campo magnetico

1) Legge Ampère - Maxwell : $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

2) Rotore ambo i lati :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})}{\partial t}$$

3) Identità vettoriale + Legge di Faraday

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

4) Scambio delle posizioni Eq (2)

$$\cancel{\vec{\nabla}^2 \vec{B} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} = \cancel{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})} - \mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{J}) \rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}^2 \vec{B} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}_{\text{campo}} = \underbrace{-\mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{J})}_{\text{Corrente (sorgente)}}$$

* Nella formula manca la "Carica magnetica" perché NON ESISTONO i monopoli magnetici!

Se a questo punto ci poniamo nel vuoto (ove non sono presenti le sorgenti! - nel vuoto non ci sono cariche \rightarrow non c'è corrente), possiamo porre il campo elettrico e magnetico uguali a zero.

Il succo del discorso è il seguente: se poniamo uguali a zero i due campi, la soluzione delle due formule (equivalente sia per il MF che per l'EF, visto che le formule di partenza sono equivalenti) non è solo quella **banale** (ovvero che $E=0, B=0$), ma ce ne sono anche altre.

Questo porta Maxwell a capire che **il campo elettrico e magnetico possono esistere anche nel vuoto, lontano dalle sorgenti** (quando sono zero)!

1) Siamo nel vuoto $\Rightarrow \rho = \vec{J} = \emptyset$

2) Le eq diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

3) Ne prendiamo una... la prima

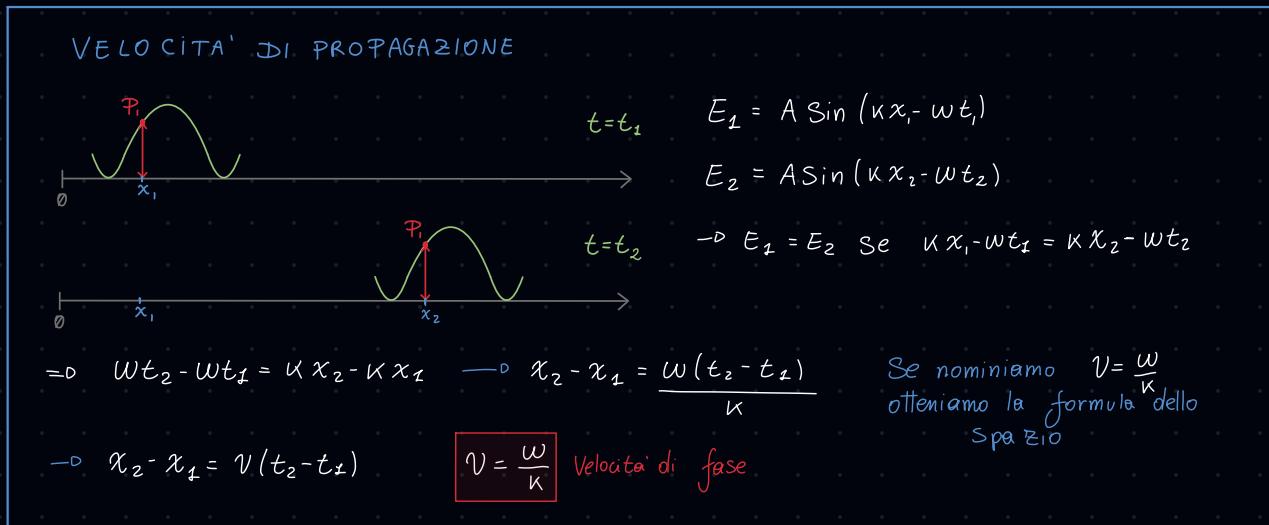
4) Suolgiamo il Laplaciano

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

5) Per semplificare consideriamo una sola dimensione: $\vec{E}(x, y, z, t) \sim \vec{E}(x, t)$

$$= \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Come se l'onda si propagasse solo lungo } x$$

6) Risolviamo l'eq Differenziale La sol è del tipo $E = A \sin(\kappa x - \omega t)$



\Rightarrow Possiamo scrivere

$$E = A \sin(\kappa x - \omega t) = A \sin(\kappa x - vt) = A \sin[\kappa(x - vt)]$$

7) Derivate parziali (da sostituire nella soluzione generale)

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \kappa A \cos \kappa(x - vt) \rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\kappa^2 A \sin \kappa(x - vt)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\kappa^2 \mu_0 \epsilon_0 A \cos \kappa(x - vt) \rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \kappa^2 v^2 A \sin \kappa(x - vt)$$

8) Sostituisco

$$-\kappa^2 A \sin \kappa(x - vt) - \mu_0 \epsilon_0 \kappa^2 v^2 A \sin \kappa(x - vt) = 0$$

$$\rightarrow -1 - \mu_0 \epsilon_0 v^2 = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Se prendiamo le costanti sperimentali
 μ_0 e ϵ_0 \rightarrow Nel vuoto

le onde EM si propagano a velocità

$$v = c = \text{vel Luce}$$

Coincidenza? NO!

Maxwell si accorge che la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto è proprio la velocità della luce. Questa non è una coincidenza: **la luce è un'onda elettromagnetica.**

Onda piana: $A(x,t) = A_0 \sin[\kappa(x - vt)]$

↑
Ampiezza
numero
d'onde

Pulsazione

Abbiamo visto che $v = \frac{\omega}{\kappa} \Rightarrow A(x,t) = A_0 \sin(\kappa x - \omega t)$

Possiamo ulteriormente generalizzare: $A(x,t) = A_0 \sin(\kappa x - \omega t + \phi)$

Fase = $\phi = \kappa x - \omega t + \theta$

Le componenti dell'onda

VELOCITA' DI FASE

$$v = \frac{\omega}{\kappa}$$

Definizione: La **velocità di fase** è la velocità con cui si muove un punto dell'onda di **fase costante**.

Proof Se $\phi = \text{cost}$ $\Rightarrow \kappa x - \omega t + \phi = \text{cost}$ \Rightarrow Siccome la fase rappresenta uno spazio

$$\frac{ds}{dt} = v \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = v \Rightarrow \kappa \left(\frac{dx}{dt} \right) - \omega \frac{dt}{dt} + \frac{d\phi}{dt} = v \Rightarrow \kappa v = \omega \Rightarrow v = \frac{\omega}{\kappa}$$

LUNGHEZZA D'ONDA

$$\lambda = x_2 - x_1$$

Definizione: La **lunghezza d'onda** è la distanza tra due picchi (o Valli) successivi dell'onda, per i quali la fase dell'onda varia di 2π

$$\begin{aligned} \phi(x_1) &= \kappa x_1 - \omega t + \phi \\ \phi(x_2) &= \kappa x_2 - \omega t + \phi \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Stesso tempo} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(x_2) - \phi(x_1) = \kappa(x_2 - x_1) = 2\pi \quad \text{Per definizione!}$$

Siccome $\lambda = x_2 - x_1 \Rightarrow \kappa \lambda = 2\pi$



PERIODO

T

Definizione: il periodo di tempo \mathbf{T} tra due istanti t_1 e t_2 consecutivi per i quali la fase dell'onda varia di 2π è detto **periodo**

$$T = t_2 - t_1$$

$$\phi(t_1) = \cancel{\nu x} - \omega t_1 + \delta$$

$$\phi(t_2) = \cancel{\nu x} - \omega t_2 + \delta$$

$$\Rightarrow \phi(t_2) - \phi(t_1) = 2\pi = \omega(t_2 - t_1)$$

$$\text{ma } t_2 - t_1 = T \Rightarrow \omega T = 2\pi$$

Abbiamo finora visto l'onda lungo *una sola dimensione* (per semplicità). Quando passiamo invece all'onda **tridimensionale** (com'è nella realtà), l'equazione cambia; al posto di kx troviamo un *prodotto scalare* tra due vettori:

- Vettore k : **vettore di propagazione**
- Vettore r : **vettore che dipende da x, y, z**

$$A = A_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} + wt + \phi)$$

ONDA IN 3 DIMENSIONI

$$\text{dove } \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

Vettore \vec{k} :
 { ha modulo come prima: $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$
 ha direzione e verso di \vec{v} , ovvero inverso di propagazione

FRONTE D'ONDA

Si definisce fronte d'onda una **superficie** su cui *in un certo istante la fase è costante*. Abbiamo finora parlato di "onde piane" proprio perché **dall'analisi** del loro fronte d'onda si verifica che esse sono di tipo **piano**:

proof: $\vec{k} \cdot \vec{r} - wt + \phi = \text{cost}$ fissiamo un \bar{t}
 $\vec{k} \cdot \vec{r} - w\bar{t} + \phi = \text{cost}$ $\vec{k} \cdot \vec{r} = [\text{cost} + w\bar{t} - \phi]$ \rightarrow Lo battezzo cost^*

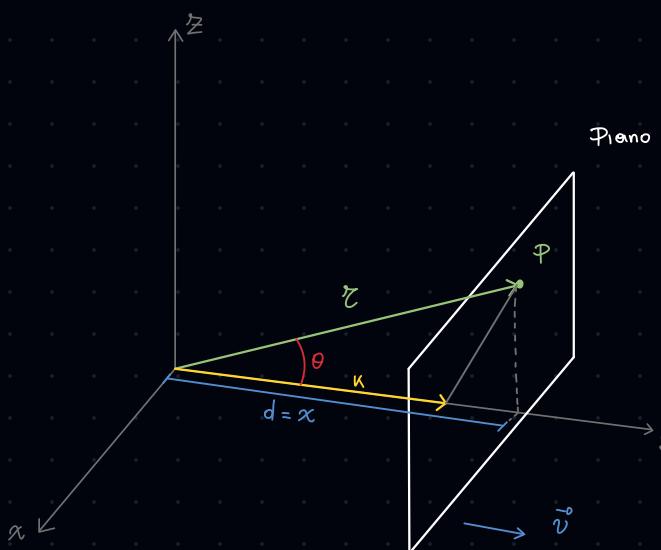
$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{cost}^* \quad (1)$$

A questo punto "facciamo finta" che la velocità dell'onda (il vettore v) abbia come unica componente quella lungo x , ovvero che l'onda si propaga solo lungo x .

Di conseguenza il prodotto vettoriale $k^* r$ è pari solo a $k^* x$:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = |\vec{k}| |\vec{r}| \cos(\theta) = k \cdot x \quad \vec{r} \text{ rispetto all'origine.}$$

Di conseguenza **tutti i punti a distanza x perpendicolare ad \mathbf{O}** appartengono al fronte d'onda; questo fronte d'onda è proprio un piano!



Onde elettromagnetiche nell'equazioni di Maxwell - PROPRIETA' DELLE Onde

Proviamo ora a sostituire l'equazione delle onde appena trovata all'interno delle equazioni di Maxwell. Prima di farlo però, scriviamo l'equazione d'onda sotto forma di **esponenziale**, tramite le uguaglianze di **Eulero**.

$$A = A_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) = \underbrace{E_0(x, y, z)}_{\text{Funzione}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Esponenziale complesso}}$$

$\hookrightarrow e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$

otteniamo quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = E_1(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} \quad (\alpha) \\ \vec{B} = B_1(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} \quad (b) \\ \vec{J} = \vec{0} = 0 \quad \text{NEL VUOTO} \end{array} \right.$$

1) Equazioni di Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

2) Sostituisco (a) e (b) in (1) e (2); Siamo nel vuoto $\Rightarrow (3) = 0$
 $\Rightarrow (4) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} = -j\omega \vec{B}_1(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} = \mu_0 \epsilon_0 j\omega \vec{E}_1(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 = -j\omega \vec{B}_1 \quad (4) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1 = \mu_0 \epsilon_0 j\omega \vec{E}_1 \quad (5) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0 \end{array} \right.$$

3) Pongo due nuove eq \vec{E}_0 e \vec{B}_0 e le uso per definire \vec{E}_1 e \vec{B}_1

$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{E}_1}{-j\vec{k}\vec{z}} \quad \text{in modo che} \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_0 \cdot e^{-j\vec{k}\vec{z}} = \frac{\vec{E}_1 \cdot e^{-j\vec{k}\vec{z}}}{e^{-j\vec{k}\vec{z}}} = \vec{E}_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_1 = \vec{E}_0 \cdot e^{-j\vec{k}\vec{z}} \quad (c) \\ \vec{B}_1 = \vec{B}_0 \cdot e^{-j\vec{k}\vec{z}} \quad (d) \end{array} \right.$$

4) Sostituendo (c) e (d) nelle (4) e (5) \Rightarrow Derivate (Rotore) \Rightarrow Semplifico

Il rotore di un vettore è il **gradiente** per il vettore; in altre parole togliamo l'operatore *nabla* ed effettuiamo le derivate

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \wedge (E_0 e^{-jkz}) = -j\omega B_0 e^{-jkz} \\ \nabla \cdot E_0 e^{-jkz} \\ \nabla \wedge (B_0 e^{-jkz}) = \mu_0 \epsilon_0 j\omega E_0 e^{-jkz} \\ \nabla \cdot B_0 e^{-jkz} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -j\kappa \wedge E_0 e^{-jkz} = -j\omega B_0 e^{-jkz} \\ -j\kappa E_0 e^{-jkz} = 0 \\ -j\kappa \wedge B_0 e^{-jkz} = \mu_0 \epsilon_0 j\omega E_0 e^{-jkz} \\ -j\kappa B_0 e^{-jkz} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -j\kappa \wedge \bar{E}_0 = -j\omega B_0 \\ -j\kappa \cdot E_0 = 0 \\ -j\kappa \wedge B_0 = \mu_0 \epsilon_0 j\omega E_0 \\ -j\kappa \cdot B_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_0 = \frac{j\kappa \wedge \bar{E}_0}{j\omega} \\ \bar{E}_0 = 0 \\ \bar{E}_0 = \frac{-j\kappa \wedge B_0}{\mu_0 \epsilon_0 j\omega} \\ -j\kappa \cdot B_0 = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \kappa \wedge B_0 = -(B_0 \wedge \kappa)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 = \frac{\kappa \wedge \bar{E}_0}{\omega} \quad (6) \\ \kappa \cdot E_0 = 0 \quad (7) \quad \text{Proprietà delle onde} \\ E_0 = \frac{B_0 \wedge \kappa}{\mu_0 \epsilon_0 \omega} \quad (8) \\ \kappa \cdot B_0 = 0 \quad (9) \end{array} \right.$$

5) Considerazioni

$$\left. \begin{array}{l} (7) \quad \kappa \cdot \bar{E}_0 = 0 \\ (9) \quad \kappa \cdot B_0 = 0 \end{array} \right\} \text{Il prodotto scalare è zero quando } \cos(\theta)=0, \quad \theta=90^\circ$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \kappa \perp \bar{E}_0 \Rightarrow \underline{\nabla \perp \bar{E}_0} \\ &\Rightarrow \kappa \perp B_0 \Rightarrow \underline{\nabla \perp B_0} \\ &\Rightarrow \bar{E}_0 \perp B_0 \end{aligned}$$

Il campo elettrico e campo magnetico sono **perpendicolari** rispetto alla **direzione di propagazione dell'onda**

\Rightarrow Quando i campi sono perpendicolari a κ , l'onda è detta TRASVERSALE

Inoltre

$$(6) \quad \mathcal{B}_0 = \frac{\kappa \wedge \epsilon_0}{\omega} \quad \xrightarrow{\text{K} \wedge \dots} \quad \kappa \wedge (\omega \mathcal{B}_0) = \kappa \wedge (\kappa \wedge \epsilon_0) \Rightarrow \omega (\mathcal{B}_0 \wedge \kappa)$$

dalla (8): $E_0 = \frac{\mathcal{B}_0 \wedge \kappa}{\mu_0 \epsilon_0 \omega} \Rightarrow \mathcal{B}_0 \wedge \kappa = E_0 \mu_0 \epsilon_0 \omega$

$$\Rightarrow \omega \cdot (E_0 \mu_0 \epsilon_0 \omega) = \kappa \wedge \mathcal{B}_0 \wedge \kappa \xrightarrow{\substack{\text{Id} \text{ vett} \\ \downarrow}} (\kappa \cdot \kappa) \cdot \mathcal{B}_0 - (\kappa \cdot \mathcal{B}_0) \cdot \kappa = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mathcal{B}_0 \quad (7)$$

$$\Rightarrow (\kappa \cdot \kappa - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0) \cdot \cancel{\mathcal{B}_0} = \emptyset \Rightarrow \cancel{\kappa^2} = \omega^2 \epsilon_0 \mu \quad \text{CVD}$$

ma siccome $v = \frac{\omega}{\kappa} \Rightarrow \frac{\omega^2}{\kappa^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu} \Rightarrow v^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu}$

Velocità della luce $= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

Princípio di Sovrapposizione

Siccome abbiamo derivato l'equazione delle onde piane (l'onda sinusoidale vista precedentemente) da un'equazione differenziale **lineare**, possiamo affermare che se un seno ed un coseno sono *soluzioni* dell'equazione, anche **la somma delle due sarà altrettanto soluzione**.

Questo ci porta a dire che due onde possono essere **sommate** (sovraposte) per formarne una terza. All'atto pratico possiamo definire il principio di sovrapposizione come.

“la perturbazione complessiva prodotta in un dato istante da un **insieme di sorgenti** di onde è la **somma** delle singole perturbazioni che ciascuna sorgente produrrebbe da sola.“

Teorema di Fourier – Trasformata

Il teorema di Fourier afferma che un *qualsiasi segnale* può essere scomposto in una *somma di segnali sinusoidali* di diversa frequenza ed ampiezza.

$$\text{dato } f(x) \rightarrow \mathcal{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{j\kappa x} \cdot d\kappa$$

↑
Trasformata

Somma

Pacchetti d'onda

I pacchetti d'onda sono una **sovraposizione di onde** con diverse *frequenze ed ampiezze* che si propagano **insieme nello spazio**.

Un pacchetto d'onda ha **lunghezza finita** e quindi occupa una porzione di **banda di frequenze** ben definita ed un intervallo di **numeri d'onda k**.

Propagazione di un pacchetto d'onda

Mezzo non dispersivo

La propagazione del pacchetto d'onda può essere influenzata dalla **presenza di dispersione**. In un mezzo *non dispersivo* la velocità di propagazione è **costante** e dipende solo dalle caratteristiche del mezzo (come il vuoto).

$$V_f = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T}$$

VELOCITA' DI FASE

Identifica la velocità della singola componente

$$V_f = V_g$$

Mezzo Dispersivo

In un mezzo dispersivo (come l'acqua) la velocità di propagazione del pacchetto d'onda **dipende dalla frequenza delle singole onde**. Di conseguenza (siccome frequenze diverse → velocità diverse) il pacchetto d'onda si “disperde” (le varie onde si separano).

$$V_g = \text{VELOCITA' DI GRUPPO}$$

$$V_f \neq V_g$$

Velocità di gruppo - Dimostrazione

1) Possiamo scrivere il segnale con la Trasformata

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \cdot e^{ikx - i\omega(k)t} dk$$

- $\omega(k)$ non è costante \Rightarrow Dispersivo
- \downarrow
- ω Cambia poco \Rightarrow Poco dispersivo

2) $\omega(k)$ è poco dispersivo attorno alla freq. λ_0 \Rightarrow Sviluppo in serie attorno a k_0

In matematica, il fatto di essere in un mezzo *poco dispersivo*, significa che se mi allontano da una frequenza *lambda*, *omega* varia così poco che possiamo fermarci all'approssimazione del *primo ordine* di Taylor:

$$\Rightarrow \omega(k) = \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} \cdot (k - k_0) + \dots$$

ci fermiamo ad $n=1$

3) Sostituisco, Porto fuori le costanti

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \cdot e^{ikx - \frac{\omega(k_0)t - \frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0}(k-t)}{\text{cost}} + \frac{\frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0}k_0t}{\text{cost}}} dk \\ &= e^{i\left[k_0 \frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0} t - \omega(k_0)t\right]} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \cdot e^{ikx - \frac{\omega(k_0)t - \frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0}(k-t)}{\text{cost}}} dk \end{aligned}$$

Stessa forma di $\Psi(x, t)$
ma con $x = x'$ e $t = \emptyset$

$$\Rightarrow \Psi(x, t) = e^{i\left[k_0 \frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0} t - \omega(k_0)t\right]} \cdot \Psi(x', \emptyset)$$

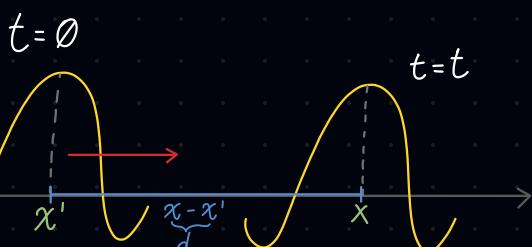
dove $\Psi(x', \emptyset) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \cdot e^{ikx'} dk$

e $x' = x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} t$ (1)

4) Considerazioni

Possiamo Trovare la velocità come:

$$V = \frac{s}{t} \Rightarrow \begin{cases} s = x' - x \\ t \end{cases} \Rightarrow V = \frac{x' - x}{t}$$



ma dalla (1): $x - x' = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} t$

$$\Rightarrow V_g = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0}$$

VELOCITÀ
di GRUPPO

INTERFERENZA

L'**interferenza** è un fenomeno che si verifica quando due o più onde si sovrappongono nello spazio e nel tempo. Quando questo si sovrappongono, la loro **ampiezza e fase** si *combinano*, producendo una nuova onda.

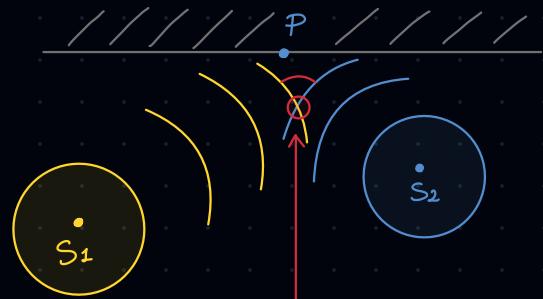
Se abbiamo una grandezza fisica di cui non si conosce la natura, osservando il suo comportamento è possibile decretarne il gruppo di appartenenza (onda o particella) se *essa produce o meno interferenza*.

Osserviamo l'interferenza generata nel punto P.

Nel punto P, l'interferenza è generata dal contributo di due (o più) sorgenti di onde; osserviamo come sono fatte (dal punto di vista matematico) le due sorgenti:

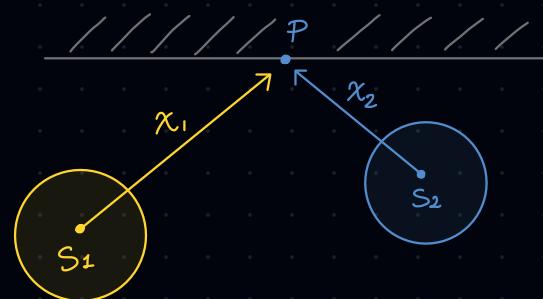
$$\text{Sorgente 1 : } A \sin(\kappa x_1 - Wt + \delta_1)$$

$$\text{Sorgente 2 : } A \sin(\kappa x_2 - Wt + \delta_2)$$



La differenza di fase tra due onde che interessano un generico punto **P** contiene **due differenze sostanziali**

- **Differenza di percorso** (dato da x_1 ed x_2).
- **Differenza di fase intrinseca** (data da δ_1 e δ_2).



Se queste due differenze sono **costanti nel tempo** (un tempo molto lungo!), ovvero quando le *differenze di fase* sono costanti nel tempo, le sorgenti sono dette **Sorgenti Coerenti**.

L'Interferenza in formule

Abbiamo detto che un'interferenza si verifica nel momento in cui ci sono più fonti di onde, che generano, appunto delle onde, che andranno poi a "collidere" tra di loro, generando l'interferenza.

Quindi la cosa più basilare che si può pensare di fare (dal punto di vista matematico) è proprio **sommare** due equazioni di onde diverse.

$$E_1 = A_1 e^{j(\kappa z_1 - \omega t)} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A_1 \neq A_2 \rightarrow \text{Ampiezze Diverse} \\ z_1 \neq z_2 \rightarrow \text{Direzioni (origini) Diverse} \end{cases}$$

$$E_2 = A_2 e^{j(\kappa z_2 - \omega t)}$$

Per il principio di sovrapposizione $E = E_1 + E_2$

$$E = E_1 + E_2 = A_1 e^{j(\kappa z_1 - \omega t)} + A_2 e^{j(\kappa z_2 - \omega t)} = e^{-j\omega t} (A_1 e^{j\kappa z_1} + A_2 e^{j\kappa z_2})$$

Siccome sullo schermo misuriamo **l'intensità I della luce**, che è data dal **quadrato dell'ampiezza (E)**, andremo a calcolarne il quadrato.

Però **siccome l'intensità è una grandezza reale** (non complessa) dobbiamo calcolarne il **modulo quadro**, che si calcola moltiplicando un *numero complesso* per il suo **coniugato**.

$$\boxed{I = E \cdot E^*} \Rightarrow I = (A_1 e^{j\kappa z_1} + A_2 e^{j\kappa z_2}) \cdot e^{-j\omega t} \cdot (A_1 e^{-j\kappa z_1} + A_2 e^{-j\kappa z_2}) \cdot e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow I = A_1^2 + A_1 A_2 e^{j\kappa(z_1 - z_2)} + A_2 A_1 e^{j\kappa(z_2 - z_1)} + A_2^2$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \left[e^{j\kappa(z_1 - z_2)} + e^{j\kappa(z_2 - z_1)} \right]$$

Sappiamo che $\frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) = \cos x \Rightarrow$ Se $z_1 - z_2 = x \rightarrow z_2 - z_1 = -x$

$$\Rightarrow I_{\text{tot}} = \boxed{A_1^2} + \boxed{A_2^2} + \boxed{2 A_1 A_2 \cos \kappa(z_1 - z_2)}$$

Intensità se fosse arrivata solo la prima onda

Intensità se fosse arrivata solo la seconda onda

Interferenza

Possiamo riscrivere chiamando $A_1^2 = I_1$, $A_2^2 = I_2 \Rightarrow A_1 = \sqrt{I_1}$ e $A_2 = \sqrt{I_2}$, $\delta = z_1 - z_2$

$$\Rightarrow I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos \kappa(\delta)$$

A seconda del valore del *coseno* possiamo o meno ottenere **l'ultimo membro** (che da luogo all'interferenza)

Studio dell'interferenza

Capiamo bene che la presenza o meno del l'interferenza dipende unicamente da come varia il *coseno*:

1. Se il coseno vale 1 allora l'interferenza è costruttiva
2. Se il coseno vale 0 allora **non c'è interferenza**
3. Se il coseno vale -1 allora l'interferenza è distruttiva

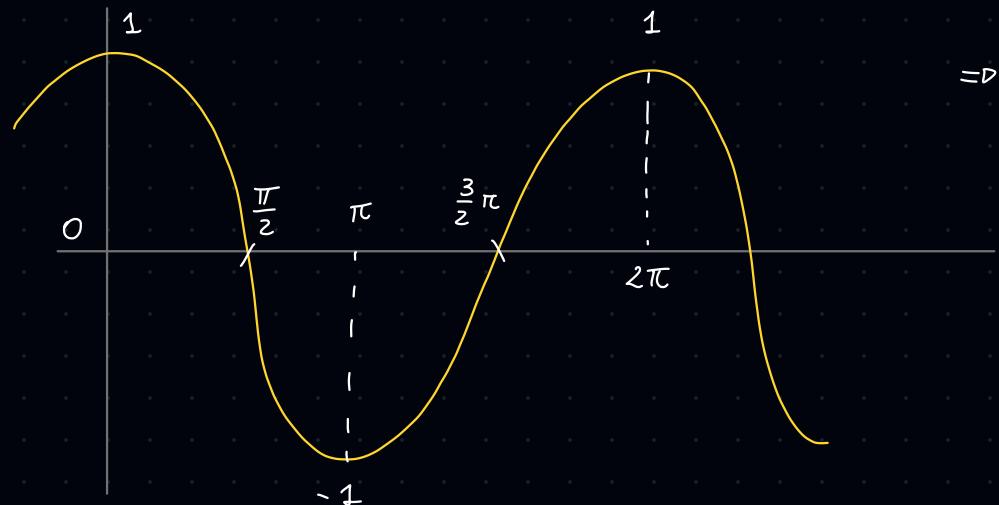
$$\delta = k(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{2\pi}{\lambda} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\Rightarrow \cos k\delta =$$

Se $\delta = m2\pi \Rightarrow m2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} (\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = m\lambda$ COSTRUTTIVA

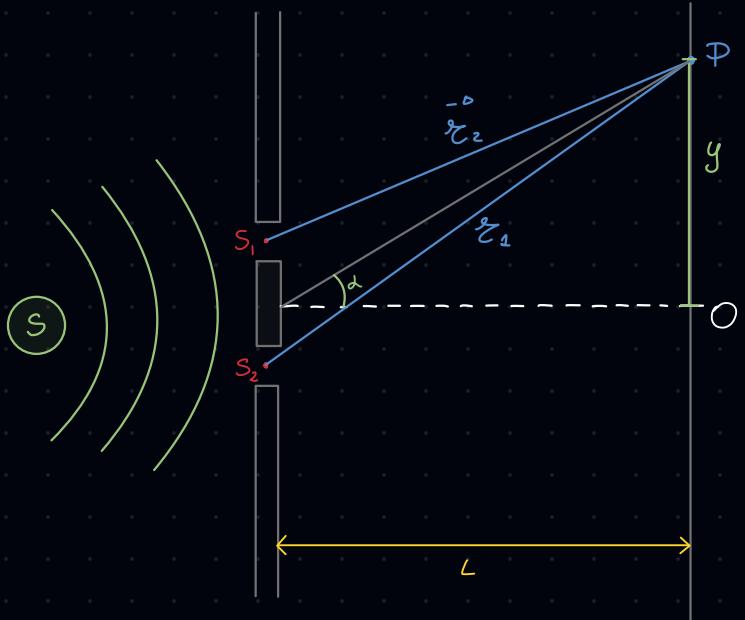
Se $\delta = m2\pi + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{m2\pi + \frac{1}{2}}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} (\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow \Delta\varphi = \lambda \left(m + \frac{1}{2} \right)$ offset di 90°

Punto (1)



$$\Rightarrow \cos(\delta') = 0 \text{ se } \delta' = \frac{\pi}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

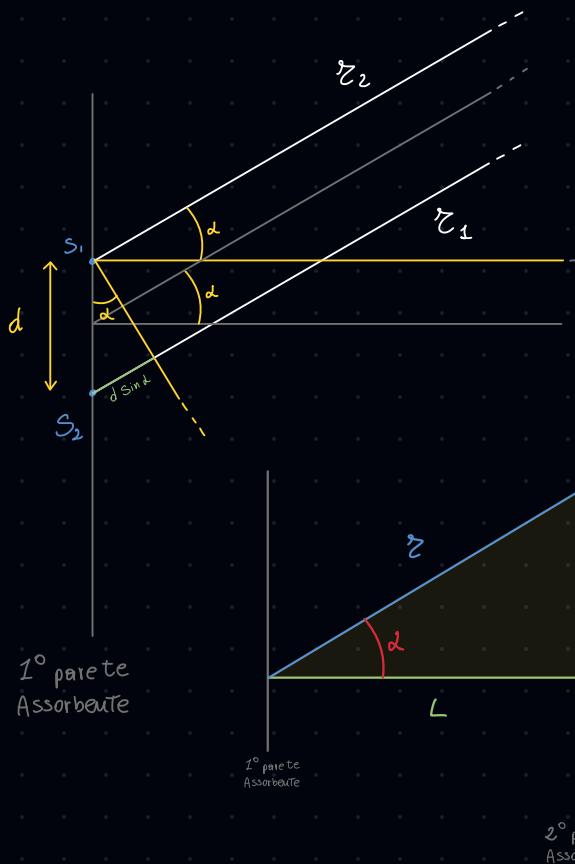
Esempio dell'esperienza della doppia fenditura: Thomas Young



In questo esperimento abbiamo una parete "assorbente" sulla quale sono state praticate due *fenditure* (fiorellini); a sinistra di questa parete è presente una **sorgente** singola; le onde, passando attraverso le due fenditure, le rendono a tutti gli effetti delle sorgenti a loro volta; queste due sorgenti hanno quindi la particolarità di essere **coerenti**, ovvero la **differenza di fase si mantiene costante nel tempo**.

Possiamo semplificare leggermente l'esperimento ponendoci nelle seguenti condizioni:

1. $L \gg y$ ovvero la distanza tra le due pareti assorbenti è molto maggiore rispetto alla distanza del punto P da O.
2. $L \gg y$ oltre ad y, L è molto maggiore anche rispetto alla *distanza tra le fenditure* d .



Fatta questa opportuna semplificazione, possiamo affermare che:

1. I due raggi r_1 ed r_2 sono praticamente **paralleli**.
2. Entrambi formano un angolo *alfa* rispetto "all'orizzonte".
3. Essendo paralleli l'unica grandezza che li rende di lunghezza diversa è $d * \sin(\alpha)$, ovvero la parte iniziale di r_1 .

$$\text{Se } L \gg y \gg d \Rightarrow \zeta_1 - \zeta_2 = d \sin \alpha$$

Abbiamo visto che l'int. costruttiva si verifica quando

$$\Delta \zeta = \zeta_1 - \zeta_2 = m\lambda \Rightarrow d \sin \alpha = m\lambda$$

$$\begin{aligned} \text{ma } & \left\{ \begin{array}{l} y = \lambda \sin \alpha \\ L = \lambda \cos \alpha \end{array} \right. \Rightarrow \frac{y}{L} = \tan \alpha \\ & \Rightarrow y = L \tan \alpha \end{aligned}$$

$$\text{Ma Se } L \gg y \text{ Sicuramente } \alpha \approx 0 \Rightarrow \tan(\approx 0) = \sin(\alpha) \Rightarrow y \approx L \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{y}{L}$$

$$\Rightarrow d \sin \alpha = m\lambda \Rightarrow \left(\frac{dy}{L} \right) = m\lambda \quad \text{con } m \in \mathbb{N} = \pm 0, \pm 1, \dots, \pm n$$

Se sostituisco (Ad esempio) $m = 1$, ottengo uno dei MASSIMI di intensità.

$$\Rightarrow \text{Distanza} = \max_1 - \max_2 \Rightarrow y = \frac{L(m+1)\lambda}{d} \Rightarrow y_{m+1} - y_m = \frac{L(m+1)\lambda}{d} - \frac{Lm\lambda}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{Lm\lambda}{d} + \frac{L\lambda}{d} - \frac{Lm\lambda}{d} = \Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{L\lambda}{d}$$

Distanza Tra
due "massimi"
E' COSTANTE

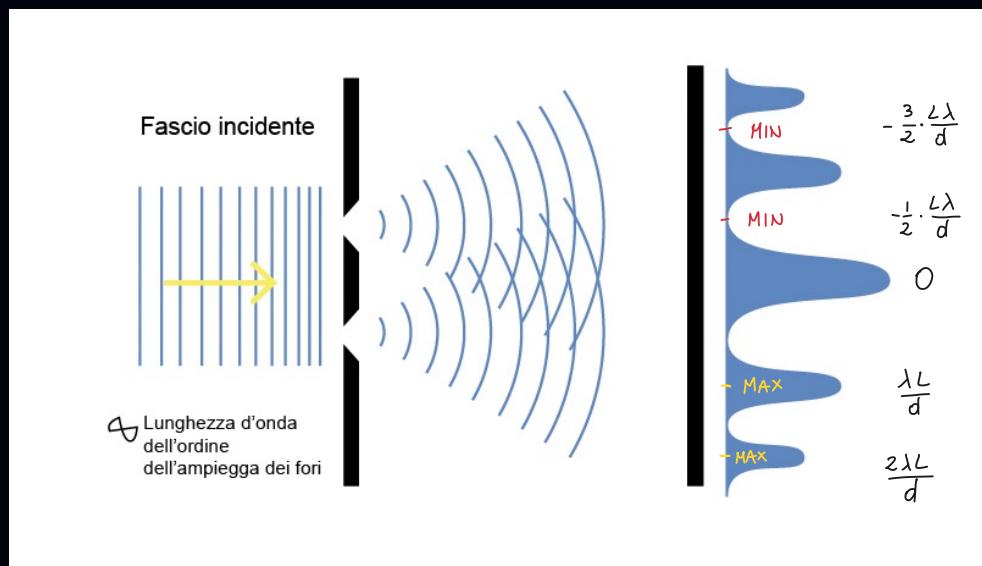
Siccome la distanza è costante possiamo trovare l'equazione che ci descrive la posizione dei massimi rispetto all'asse y :

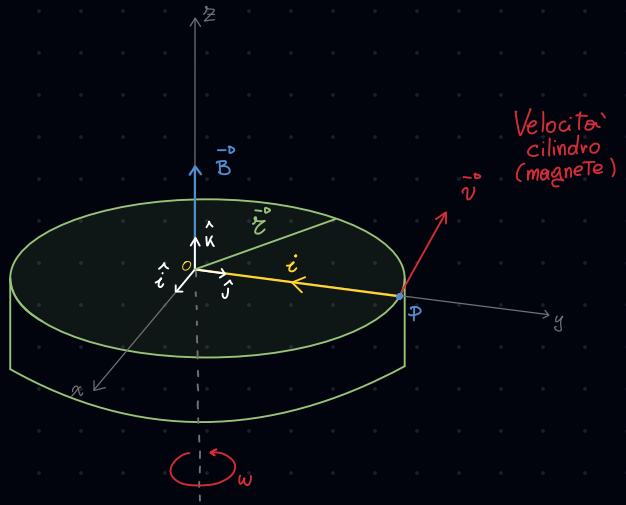
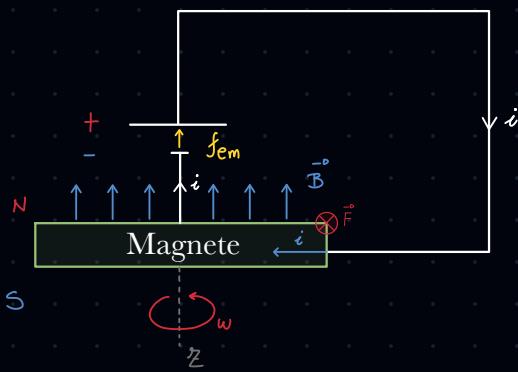
$$y(m) = m \frac{L\lambda}{d} \quad \text{con } m \in \mathbb{N} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$$

Possiamo facilmente trovare l'eq. dell'interferenza distruttiva dalla (1)

$$\rightarrow y_{\text{distruttiva}} = y\left(m + \frac{1}{2}\right) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{L\lambda}{d}$$

Distruttiva





- $\vec{V}_{c,L} = -\omega \vec{z} \hat{i}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Lungo } \vec{z} \\ \text{verso opposto ad } \hat{i} \\ \text{modulo della vel ang } \omega \vec{z} \end{array} \right.$
- $\vec{z} = y \cdot \hat{j}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Lungo } y \\ \text{Stesso verso di } \hat{j} \\ \text{modulo pari ad } \overline{OP_y} = y \end{array} \right.$
- $\vec{B} = B \cdot \hat{k}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Lungo } \vec{z} \\ \text{Stesso verso di } \hat{k} \\ \text{modulo pari a } B \end{array} \right.$

- Chiamiamo $d\ell$ il pezzettino di filo che unisce P ad O (come \vec{z}) ma che va come la corrente i
- $$d\vec{\ell} = -dy \hat{j}$$
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{Lungo } y \\ \text{Stesso verso di } i \Rightarrow \text{verso opposto di } \hat{j} \rightarrow -\hat{j} \\ \text{modulo pari ad } \overline{Py} = y \end{array} \right.$

1) Calcolo della corrente

$$i = \frac{f_{em} + f_{ind}}{R}$$

Resistenza del circuito

$$f_{ind} = \oint (\vec{V}_{c,L} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_0^z (\omega \vec{z} \hat{i}) \wedge (B \hat{k}) \cdot (dy \hat{j})$$

$$= -\frac{1}{2} \omega B z^2 f_{ind}$$

$$f_{em} = \frac{f_{em} - \frac{1}{2} \omega B z^2}{R}$$

2) Equazione (differenziale) del moto \rightarrow Studio delle forze che muovono la calamita
 Dalla II eq cardinale della dinamica $\sum \vec{M}_{ext} = I \vec{\alpha}$ con $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\vec{\omega}}{t}$

$$\Rightarrow \vec{M}_B + \vec{M}_{AII} = I \vec{\alpha} \quad \text{Accelerazione Angolare}$$

Momento del campo magnetico \vec{M}_B
 Momento della forza di attrito \vec{M}_{AII}
 Inerzia

\vec{M}_B è diretto lungo $\vec{\varepsilon}$

$$\bullet \vec{M}_B = \int_{\varepsilon} \varepsilon \wedge dF = i \int_{\varepsilon} \varepsilon \wedge (d\ell \wedge \vec{B}) = \int_0^{\varepsilon} i(y\hat{j}) \wedge (-dy\hat{j} \wedge B\hat{k}) = \boxed{\frac{1}{2} i B \varepsilon^2 \hat{k}}$$

$$\bullet \vec{M}_{AII} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{F}_{AII} = -F_{AII} \vec{\varepsilon} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\gamma v + \delta \quad \text{Equazione differenziale}$$

$$\text{dove } \begin{cases} \gamma = \frac{B^2 \varepsilon^4}{4 I R} \\ \delta = \frac{f_{em} B \varepsilon^3}{2 I R} - \frac{F_{AII} \varepsilon^2}{I} \approx \frac{f_{em} B \varepsilon^3}{2 I R} \\ F_{AII} = 0 \end{cases}$$

3) Risoluzione dell'equazione \rightarrow da Velocità

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\gamma v + \delta \quad \text{Soluzione: } \vec{v} = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = A e^{-\delta t} + \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{\delta}{\gamma} (1 - e^{-\delta t})$$

Se la calamita parte da ferma

$$v(t) \underset{t=0}{=} 0 \Rightarrow v_0 = 0$$

$$\text{Velocità di regime} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{\delta}{\gamma} (1 - e^{-\delta t}) = \frac{\delta}{\gamma} \underset{F_{AII}=0}{\approx} \boxed{\frac{2 f_{em}}{B \varepsilon}}$$

Se andiamo a trascurare l'attrito, notiamo che la **velocità di regime** (la velocità assunta dalla calamita dopo un tempo "esteso") non dipende ne dalla **resistenza del circuito** né dal **momento di inerzia della calamita**.

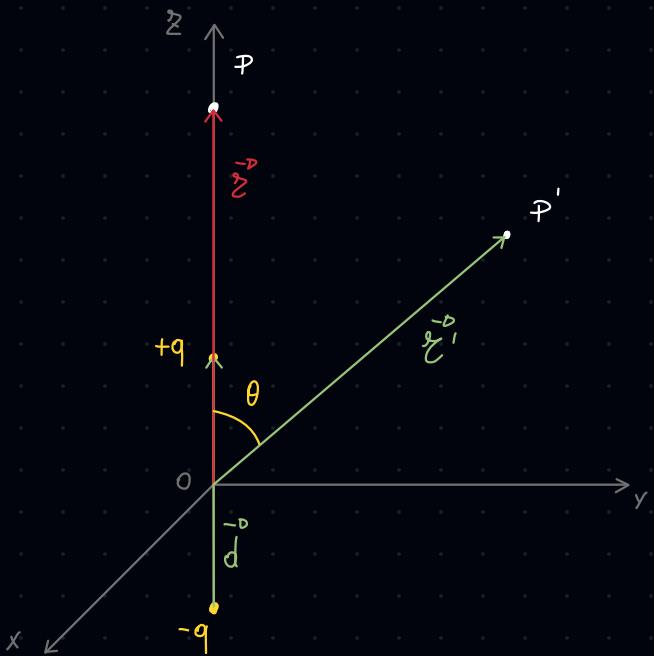
Teorema di equivalenza di Ampère

Enunciato:

A grande distanza, una spira percorsa da corrente si comporta come un dipolo magnetico.

Caso 1 : Dipolo elettrico \leftrightarrow Spira percorsa da corrente CAMPO MAGNETICO

Abbiamo già visto il dipolo elettrico



$$\bullet E_x = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3z^2x}{r^5}$$

$$\bullet E_y = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3z^2y}{r^5}$$

$$\bullet E_z = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$$

Ci poniamo in un caso particolare: calcoliamo solo se P si trova lungo z

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=d \end{cases} \Rightarrow E_{\text{TOT}} = E_z \Big|_{d=0} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 z^3}$$

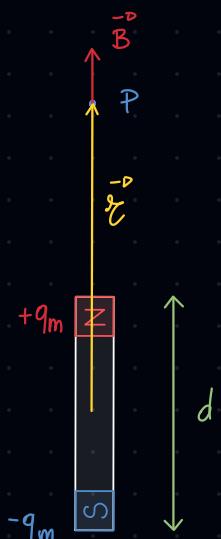
Se poniamo $\vec{P} = q \cdot \vec{d}$ $\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{P}}{2\pi\epsilon_0 r^3}$ (1.a)

Ci conserviamo il risultato

Notiamo che se definiamo

$$q_m : \text{CARICA MAGNETICA} \Rightarrow \vec{E}_x \rightarrow \vec{B}_x = \frac{q_m \cdot d \cdot \mu_0}{4\pi r^5} \cdot 3z^2x$$

\Rightarrow Campo magnetico di un dipolo Magnetico



E UGUALE a quella del dipolo elettrico

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{m}/\mu_0}{r^3 2\pi}$$

(1.b) dove $\vec{m} = \underline{\text{momento magnetico}} = q_m \cdot \vec{d}$

Se il Teorema di equivalenza di Ampère è corretto, calcolando il campo \vec{B} prodotto da una spira, con $Z \gg R$. Troveremo qualcosa di equivalente alla (1.b)



$$\bullet \quad \vec{B}_Z = \frac{n \cdot \mu_0 I R^2}{2(R^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Se } Z \gg R \rightarrow \vec{B}_\infty = \frac{n \cdot \mu_0 I R^2}{2 Z^3}$$

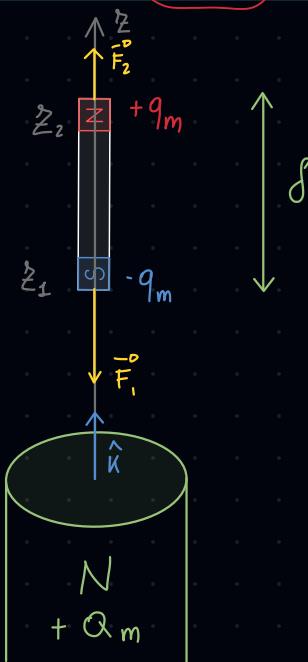
Definiamo $m = \underline{\text{Momento magnetico della spira}}: n I S$

$$\Rightarrow \vec{B}_\infty = \left(\frac{n \cdot \mu_0 I R^2}{2 Z^3} \right) \cdot \frac{\pi}{\pi} = \frac{m \cdot \mu_0}{2 \pi Z^3}$$

Equivalentemente alla (1.b)!

Q.E.D.

Caso 2: Forza agente su un dipolo magnetico \leftrightarrow Spira in un campo \vec{B}



$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_m Q_m}{z^2} \vec{z} = q_m \vec{B} \quad (2)$$

Per def di
Carica magnetica

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{F}_{TOT} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{q_m Q_m}{z_1^2} + \frac{q_m Q_m}{z_2^2} \right] \cdot \hat{k} \quad \text{ma } z_2 = z_1 + \delta \\ &= \hat{k} \cdot \frac{q_m Q_m \mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{(z_1 + \delta)^2} - \frac{1}{z_1^2} \right) \\ &= \hat{k} \cdot \frac{q_m Q_m \mu_0}{4\pi} \left(\frac{z_1^2 - z_1^2 - \delta^2 - 2z_1 \delta}{(z_1 + \delta)^2 z_1^2} \right) \\ &= \hat{k} \cdot \frac{q_m Q_m \mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\delta(\delta + 2z_1)}{(z_1 + \delta)^2 z_1^2} \right] \end{aligned}$$

Se $z \gg \delta$ $\Rightarrow \hat{k} \cdot \frac{q_m Q_m \mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\delta(\delta + 2z_1)}{(z_1 + \delta)^2 z_1^2} \right] = -\hat{k} \cdot \frac{q_m Q_m \mu_0}{4\pi} \left[\frac{2z_1 \delta}{z_1^2} \right]$

$$\Rightarrow \vec{F}_{TOT} = -\hat{k} \cdot \frac{q_m Q_m \mu_0}{4\pi z_1^2} \cdot 2\delta$$

Sappiamo che

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Q_m}{z^2}$$

Ricavata dalla (2)
dividendo per q_m

$$\Rightarrow \vec{F}_{TOT} = -\hat{k} \cdot \frac{q_m \delta \cdot 2 |\vec{B}|}{z}$$

Definiamo
 $\vec{m} = q_m \delta \cdot \hat{k}$
Momento magnetico

$$\Rightarrow \vec{F}_{TOT} = -\frac{2 |\vec{B}| \cdot \vec{m}}{z} \quad (3)$$

Forza agente su un Dipolo magnetico con $z \gg \delta$

* Lo stesso risultato si ottiene se invece del dipolo magnetico attratto dal campo magnetico, si ha un **dipolo elettrico in un campo elettrico**; la dimostrazione è identica e così anche il risultato.

Ancora una volta, se il principio di equivalenza di Ampere è corretto, allora se ci poniamo a grande distanza, anche una spira immersa in un campo magnetico genera la stessa forza ottenuta (3)

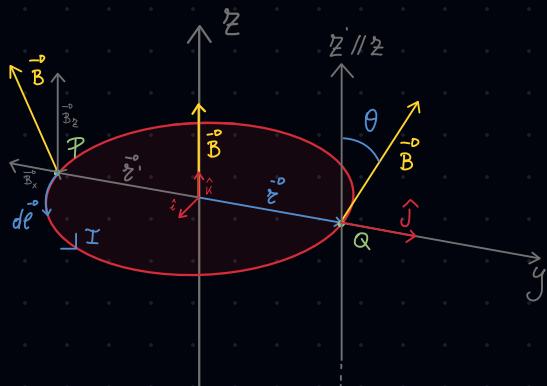
Campo magnetico in \mathcal{P}

$$d\vec{\ell} = |d\vec{\ell}| \hat{i}, \quad \vec{B} = -B \sin \theta \hat{j} + B \cos \theta \hat{k}$$

Passo 1: Calcolo della forza in \mathcal{P}

\rightarrow LAPLACE

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\mathcal{P}} &= I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ |d\vec{\ell}| & 0 & 0 \\ 0 & -B \sin \theta & B \cos \theta \end{vmatrix} \quad \rightarrow \text{Determinante} \\ &= I \left[0 - (d\ell B \cos \theta - 0) + (-d\ell B \sin \theta - 0) \right] \\ &= -I d\ell B \cos \theta \hat{j} - d\ell B \sin \theta \hat{k} \end{aligned}$$



In \mathcal{Q} è tutto uguale, Tranne che B_y non è negativa e $d\ell$ è negativa

$$\Rightarrow \text{In } \mathcal{Q}: d\vec{F}_{\mathcal{Q}} = +I d\ell B \cos \theta \hat{j} - d\ell B \sin \theta \hat{k}$$

Passo 2: Sommare le forze in \mathcal{P} e \mathcal{Q}

$$\Rightarrow \vec{F}_{\mathcal{P}+\mathcal{Q}} = I d\ell B (-\cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{k} + \cancel{\cos \theta} - \sin \theta \hat{k}) = -2I d\ell B \sin \theta \hat{k}$$

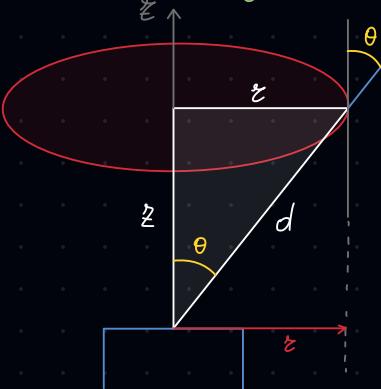
Passo 3: Sommare la forza nei punti \mathcal{P} e \mathcal{Q} lungo tutta la spira

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{TOT}} = -2 \hat{k} I B \sin \theta \int_0^{\pi \epsilon} d\ell = -2 \pi \epsilon I B \sin \theta \cdot \hat{k}$$

Circonferenza
 \$\int d\ell\$
 2 punti all'ovolo
 mezza spira

Passo 4: Grandi distanze $\epsilon \gg \theta \Rightarrow \theta = d \sin \theta \quad \theta = d \cos \theta \quad \frac{\theta}{\epsilon} = \tan \theta$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\theta}{\epsilon} = \tan \theta \rightarrow \theta \quad \Rightarrow \sin \theta \approx \tan \theta \\ &\Rightarrow \vec{F}_{\text{TOT}} = -2\pi \epsilon I B \frac{\theta}{\epsilon} \hat{k} = \frac{2\pi \epsilon^2 I B}{\epsilon} \hat{k} \\ &\text{ma } \vec{m} = \frac{\vec{F}_{\text{TOT}}}{\theta} = I S \hat{k} \quad \Rightarrow \vec{F}_{\text{TOT}} = \frac{2\pi \epsilon^2 I B}{\theta} \hat{k} \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$



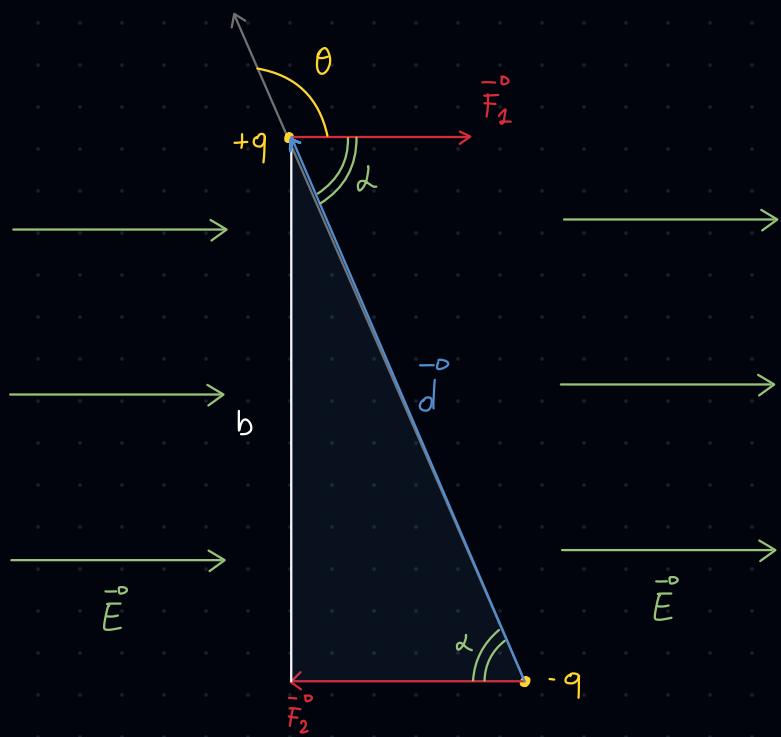
Caso 3

MOMENTO

Agente

Dipolo $\left\{ \begin{array}{l} \text{elettrico} \\ \text{magnetico} \end{array} \right.$

Spira

DIPOLO ELETTRICO

Il dipolo in questione è immerso in un campo elettrico E , e siccome la forza su una carica elettrica immersa in un campo elettrico uniforme è **diretta come le linee del campo elettrico**, otteniamo che in $+q$ la forza va come il campo elettrico, mentre in $-q$ la forza va nel verso opposto.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_1 = q \vec{E} \\ \vec{F}_2 = -q \vec{E} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

COPPIA DI FORZE

Passo 1: Trovare il momento Totale:

$$\overset{\rightharpoonup}{M}_{TOT} = \overset{\rightharpoonup}{M}_{F_1} + \overset{\rightharpoonup}{M}_{F_2}$$

$$\Rightarrow \overset{\rightharpoonup}{M}_{TOT} = \overset{\rightharpoonup}{\epsilon}_1 \wedge \overset{\rightharpoonup}{F}_1 + \overset{\rightharpoonup}{\epsilon}_2 \wedge \overset{\rightharpoonup}{F}_2$$

$$\Rightarrow \overset{\rightharpoonup}{\epsilon}_1 = d, \overset{\rightharpoonup}{\epsilon}_2 = 0 \quad \Rightarrow \overset{\rightharpoonup}{M}_{TOT} = d \wedge \overset{\rightharpoonup}{F}_1 + 0 \wedge \overset{\rightharpoonup}{F}_2 = d \wedge q \overset{\rightharpoonup}{E}$$

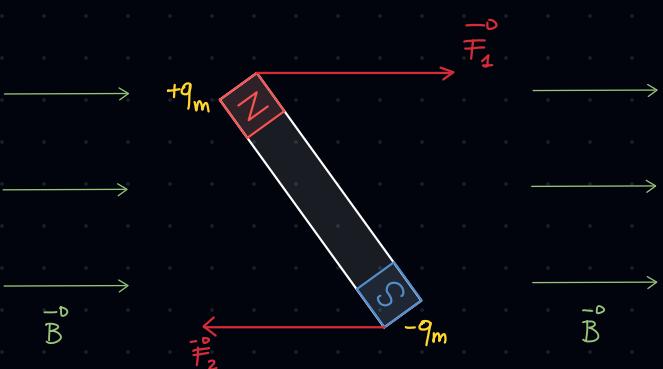
$$\Rightarrow \boxed{\overset{\rightharpoonup}{M}_{TOT} = \overset{\rightharpoonup}{P} \wedge \overset{\rightharpoonup}{E}} \quad (1)$$

$$\text{momento di dipolo } \overset{\rightharpoonup}{P} = qd$$

Passo 2: Modulo del momento

$$|\overset{\rightharpoonup}{M}| = |d \wedge \overset{\rightharpoonup}{F}_1| = d \cdot F_1 \cdot \sin(\theta) = (qd)E \sin \theta = \overset{\rightharpoonup}{P} \cdot \overset{\rightharpoonup}{E} \cdot \sin(180 - \alpha) \quad (2.a)$$

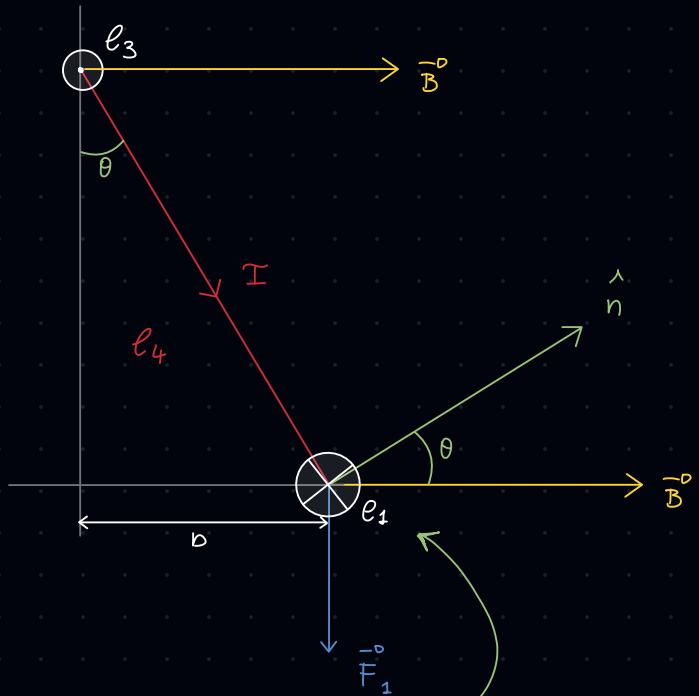
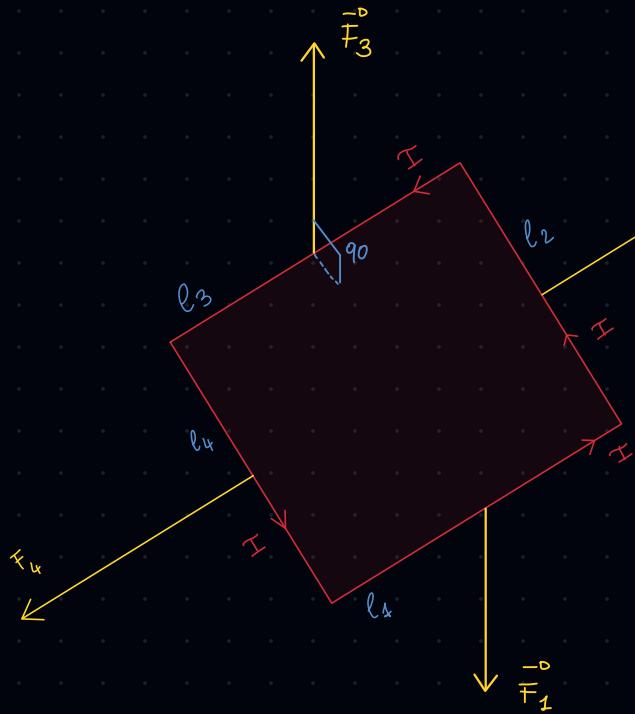
$$\text{oppure } |\overset{\rightharpoonup}{M}| = |d \wedge \overset{\rightharpoonup}{F}_1| = d \cdot F_1 \cdot \sin(\theta) = \frac{qdE \sin(\alpha)}{? ? ?} = \frac{qdE}{? ? ?} = \frac{|F|b}{|F|b} \quad (2.b)$$

DIPOLO MAGNETICO

$$\begin{aligned} \overset{\rightharpoonup}{M}_{TOT} &= \overset{\rightharpoonup}{d} \wedge \overset{\rightharpoonup}{F}_1 = \overset{\rightharpoonup}{d} \wedge (q_m \overset{\rightharpoonup}{B}) \\ &= q_m \overset{\rightharpoonup}{d} \wedge \overset{\rightharpoonup}{B} = \boxed{\overset{\rightharpoonup}{m} \wedge \overset{\rightharpoonup}{B}} \end{aligned} \quad (3)$$

momento magnetico

Adesso, se il teorema di equivalenza di Ampere è giusto, dobbiamo far vedere (come nei due casi precedenti: campo e forza) che se osserviamo una spira percorsa da corrente a grandi distanze, questa avrà lo stesso momento del dipolo elettrico e magnetico.



Passo 1: Trovare le forze ($\vec{F}_4 = -\vec{F}_2$, non ci interessano)

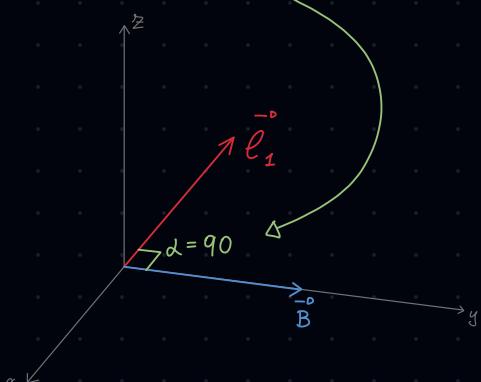
$$d\vec{F} = I d\ell \wedge \vec{B} \Rightarrow |\vec{F}_1| = I \int |d\ell \wedge \vec{B}| = I \int B d\ell \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = I \cdot B \cdot \int d\ell_1 = I B \ell_1 = \vec{F}_3$$

Passo 2: Trovare il momento della coppia

$$|\vec{M}| = |\vec{F}_1| \cdot b \quad \text{dalla (2.b)}$$

$$\Rightarrow |\vec{M}| = \vec{F}_1 \cdot b = \vec{F}_1 (\ell_4 \sin \theta)$$



$$\Rightarrow |\vec{M}| = I B (\ell_4 \cdot \ell_4) \sin \theta = I S B \sin \theta \quad \text{Momento della spira}$$

$b \times h = \text{Area}$
 $= S$

Passo 3: Definiamo il momento della spira.

$$\Rightarrow M = \frac{I S \vec{n}}{\vec{m}} B \sin \theta = |\vec{M}| B \sin \theta = \frac{|\vec{m}| B \sin \theta}{|\vec{m}| \wedge B} \quad Q.E.D.$$

ci serve il vettore per fare
il prodotto vettoriale

