

Teniamo a mente le equazioni che useremo:

Principali:

Ampère - Maxwell $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Faraday: $\oint_{em} = - \frac{d\phi}{dt} \rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Campo Elettrico

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \text{Rotore} \rightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = - \frac{\partial (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})}{\partial t}$$

$$\rightarrow \text{Identità Vettoriale: } \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = - \frac{\partial (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})}{\partial t}$$

Gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, Amp. - Max:

$$\rightarrow \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \text{Scambio qualche termine: } \underbrace{- \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \vec{E}}_{\text{Campo elettrico}} = \underbrace{\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right)}_{\text{Sorgenti}}$$

Campo Magnetico

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \text{Rotore} \rightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{J}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})}{\partial t}$$

$$\rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \vec{B}}_{\text{Maxwell} = 0} = \mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{J}) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \text{Scambio} \rightarrow \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{B}}_{\text{Campo Magnetico}} = \underbrace{\mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{J})}_{\text{Sorgente}}$$

Velocità di propagazione

I) Siamo nel vuoto $\Rightarrow \rho = J = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

II) Scelgo una delle due equazioni

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

III) Svolgo il Laplaciano

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

IV) Considero un solo asse x

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

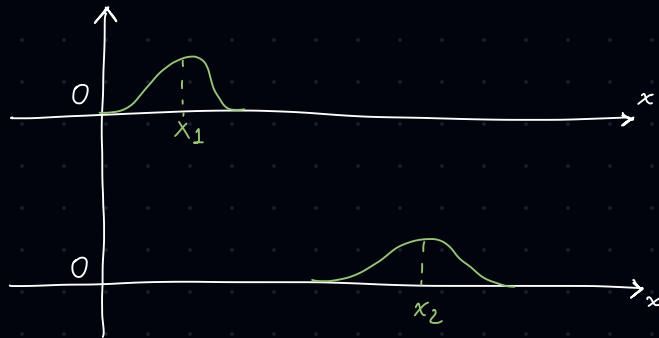
V) Equazione differenziale. Soluzione del tipo $E = A \sin(kx - \omega t)$

(a) Velocità di propagazione

$$E_1 = A \sin(kx_1 - \omega t_1)$$

$$E_2 = A \sin(kx_2 - \omega t_2)$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow kx_1 - \omega t_1 = kx_2 - \omega t_2$$



$$\Rightarrow \omega t_2 - \omega t_1 = kx_2 - kx_1 \Rightarrow$$

$$x_2 - x_1 = \frac{\omega}{k} (t_2 - t_1)$$

battezzo: $v = \frac{\omega}{k}$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1) \quad \underline{\text{DINAMICA}}$$

$$\omega = v \cdot k$$

(b) Sostituisco

$$E = A \sin(kx - \omega t) = A \sin(kx - vk t) = A \sin[k(x - vt)]$$

(c) Derivate Parziali

$$E = A \sin k(x - vt) \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \underset{A}{k} \cos k(x - vt) \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -\underset{A}{k^2} \sin k(x - vt)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\underset{A}{kv} \cos k(x - vt) \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = +\underset{A}{k^2 v^2} \sin k(x - vt)$$

(d) Sostituzione

$$-k^2 A \sin(kx - kv t) - \mu_0 k^2 v^2 A \sin(kx - kv t) = 0$$

$$\rightarrow \cancel{k^2 A \sin(kx - kv t)} [-1 - \mu_0 \epsilon_0 v^2] = 0 \quad \rightarrow \quad -1 - \mu_0 \epsilon_0 v^2 = 0$$

$$\rightarrow v = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \rightarrow \quad \text{velocità della luce}$$