Concetti fondamentali

Il campo è descritto da funzioni in xyz t tempo

Coordinate Spaziali

DERIVATA PARZIALE

$$f(xyz) = 3x^2 + 5xy - 7z^3$$

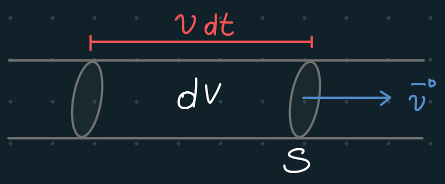
- $\frac{\partial f}{dx} = 6x + 5y$
- $\frac{\partial f}{dx} = 5x$
- $\frac{\partial f}{dx} = -21z^2$

DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\rightarrow df = (6x + 5y)\, dx + (5x)\, dy - (21z^2)\, dz$$

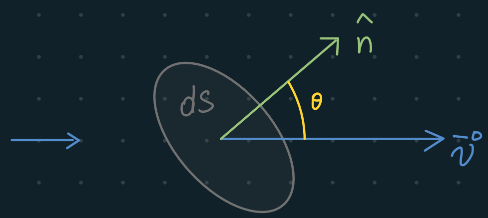
Introduzione all'elettromagnetismo



Nel tempo dt passa attraverso la superficie S una quantità di acqua pari a quella contenuta nel VOLUME $dV = S(v\,dt)$

Possiamo trovare la portata $P = \frac{\text{Volume}}{\text{tempo}} = \frac{dV}{dt} = S \cdot v$ — Caso particolare del flusso ϕ

Se la superficie non è perpendicolare a v, non tutta l'acqua passa per la superficie S



$$|\vec{v}_n| = \vec{v} \cdot \hat{n}$$

Se abbiamo una superficie S di forma qualsiasi, possiamo trovare il flusso:

FLUSSO del vettore v attraverso la superficie S

$$\phi = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS$$

Il flusso del vettore velocità è un CONCETTO CONCRETO

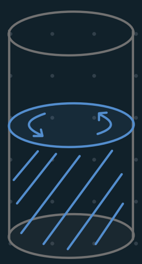
Possiamo anche definire il flusso di un vettore qualsiasi $\vec{A}$:

$$\phi = \int_S \vec{A}\, \hat{n}\, dS$$

Il flusso di un vettore qualsiasi è un CONCETTO ASTRATTO!

Seconda parte : Idrodinamica

Circolazione di un vettore



Vista dall'alto

l é una linea qualsiasi CHIUSA

Circolazione $C = \oint_l \vec{v} \cdot d\vec{l}$

Prodotto Scalare

Prodotto della velocita' del fluido per il perimetro del cammino chiuso

Perche' prodotto Scalare ? In modo da prendere solo la componente di v lungo dl, ovvero quella responsabile della circolazione.

Ancora una volta estendiamo il calcolo ad un vettore $\vec{A}$ qualsiasi :

CIRCUITAZIONE $C = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}$

Operatori Differenziali

Operatore NABLA: opera su dei campi scalari o vettoriali; effettua la derivata parziale rispetto ad x, y o z

$$\boxed{\vec{\nabla} \; \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}}$$

Non è altro che un vettore che applicato in diversi modi ci restituisce diverse operazioni

Gradiente: Applicato ad una funzione

$$\vec{\nabla} f = \text{gradiente di } f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Es: $f(xyz) = 3x^2 + 5xy - 7z^3$ $\quad \nabla = (6x+5y)\hat{i} + (5x)\hat{j} - (21z^2)\hat{k}$

Divergenza di un campo vettoriale SCALARE

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)}_{\text{Operatore divergenza}} \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{i} + A_z\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{k}$$

Rotore di un campo vettoriale VETTORIALE

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \det \begin{Bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{Bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right)\hat{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_x\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\hat{k}$$

Laplaciano di un campo SCALARE

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z} = \nabla^2 f$$

LAPLACIANO

Laplaciano di un campo VETTORIALE

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{i} + (\nabla^2 A_y)\hat{j} + (\nabla^2 A_z)\hat{k}$$

Teorema della Divergenza

Serve per passare da un integrale in superficie ad un integrale in volume

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, ds = \int_V \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\text{Divergenza}} \, dV$$

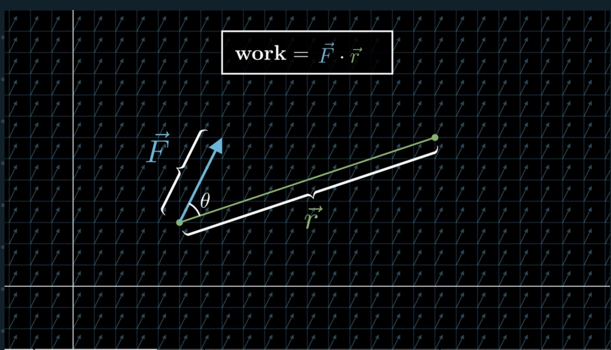
Teorema del rotore

$$\oint_e \vec{E} \, d\vec{e} = \int_S \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})}_{\text{Rotore}} \hat{n} \, ds$$

Rotore ↓ Circuitazione

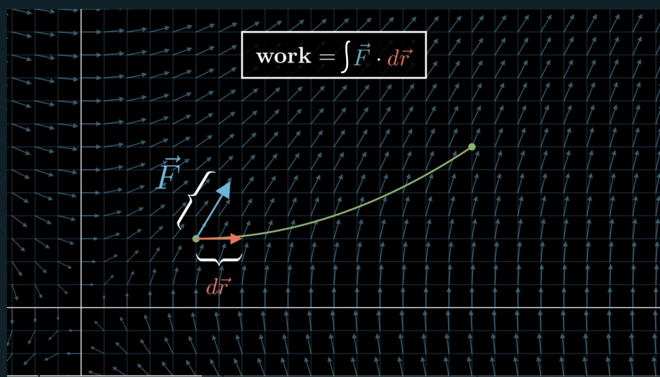
Che cosa rappresenta il Rotore?

1) Partiamo dalla definizione del lavoro



Se il campo è conservativo

$L = \vec{F} \cdot \vec{r}$ perchè la forza Rimane costante

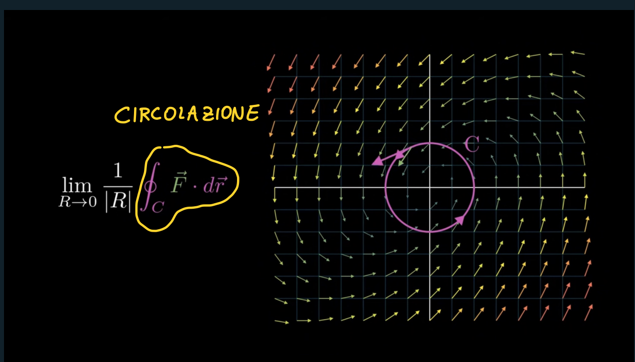


Se il campo non è conservativo

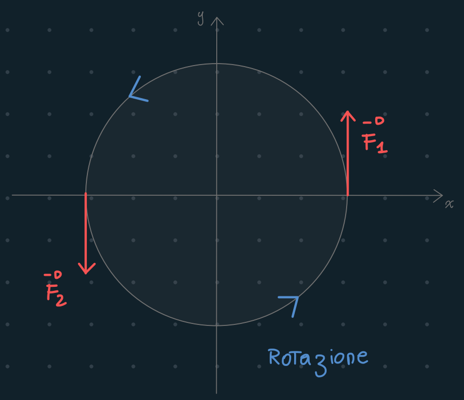
$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ perchè la forza non Rimane costante

→ $d\vec{r}$ è il vettore spostamento infinitesimale ed $\vec{F}$ la forza in quel punto

2) La Circolazione è la stessa identica cosa, ma applicata ad una curva chiusa!



3) Poniamo di posizionarci in un punto qualsiasi, e che le forze agenti siano 2:



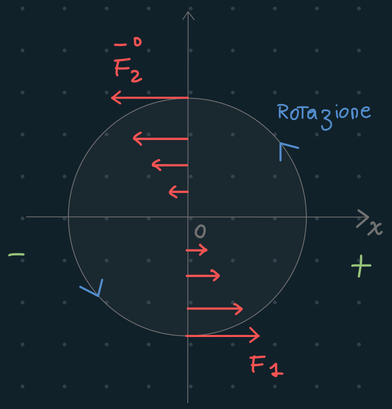
- A seconda di $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ la "ruota" girerà più velocemente, più lentamente o non girerà affatto!

- Rappresentiamo la risultante come il rapporto tra la Differenza delle forze e la larghezza "della ruota"

$$\Rightarrow \frac{\Delta \vec{F}_y}{\Delta x} = \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial x}$$

derivata parziale di f rispetto ad x

4) Facciamo lo stesso ragionamento per la y:



Man mano che la y cresce, la x diventa negativa

$$\Rightarrow -\frac{\partial \vec{F}_x}{\partial y}$$

Rotore di $f(x,y)$

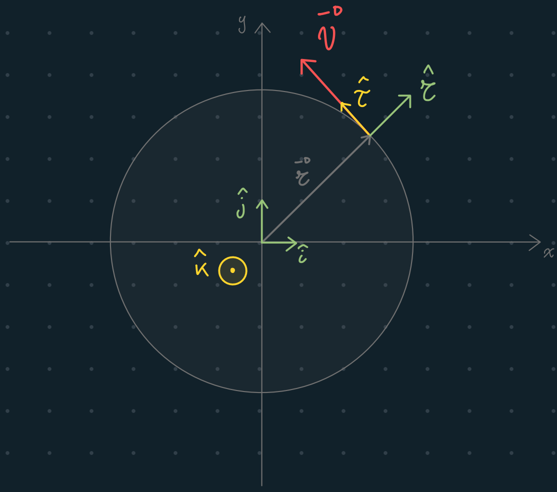
$$\Rightarrow \text{Rotore di } F = \vec{\Delta} \wedge \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_x & F_y \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{F}_y - \frac{\partial}{\partial y} \vec{F}_x$$

Morale della favola

Possiamo estendere il ragionamento ad una funzione di 3 variabili:

$$\text{Rotore di } f(x,y,z) = \vec{\Delta} \wedge f(x,y,z) = \det \begin{Bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{Bmatrix}$$

Spiegazione alternativa ROTORE



Versore lungo z → USCENTE ⊙

$$\vec v = \omega r\hat\tau = \omega r\underbrace{(\hat k \wedge \hat r)}_{\text{Regola mano destra}} = \omega r\hat k \wedge \omega (r\hat r)$$

$\vec r$

$$= \omega (r)\hat k \wedge \omega\vec r = \omega\hat k \wedge \omega \vec r = \omega(\hat k \wedge \vec r)$$

r non ha componenti lungo $\hat k$

→ Svolgiamo il prodotto vettoriale

$$\vec v = \det\begin{Bmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ 0 & 0 & \omega \\ \omega x & \omega y & \omega z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{Bmatrix}\cdot\omega$$

$$= \left[(-y\omega\hat i) - (-x\omega\hat j)\right] = x\omega\hat j - y\omega\hat i$$

$\vec v$ in coordinate cartesiane

Calcoliamo:

Derivate parziali

$$\vec\nabla \wedge \vec v = \begin{Bmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{Bmatrix} = -\Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}x\omega}_{0}\Big)\hat j - \Big(+\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}y\omega}_{0}\Big)\hat i + \Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}x\omega}_{\omega} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}y\omega}_{\omega}\Big)\hat k$$

$$= 2\omega\hat k$$ Rotore di $\vec v$

Morale della favola: Il rotore $\vec\nabla \wedge \vec v$ è diverso da zero solo se c'è una rotazione!

Recap di matematica

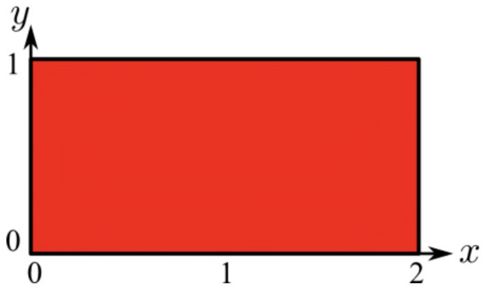
Integrali doppi

Example 1

Compute the integral

$$\iint_D xy^2\, dA$$

where D is the rectangle defined by $0 \le x \le 2$ and $0 \le y \le 1$ pictured below.



Dominio $\quad 0 \le x \le 2 \ \cup \ 0 < y < 1$

$$\Rightarrow \int_0^2 x\, dx \int_0^1 y^2\, dy = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^1$$

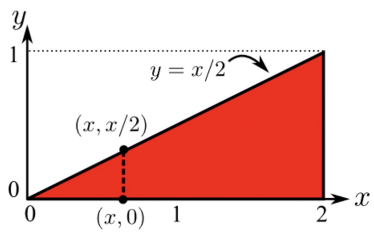
$$= \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{2}{3}$$

Processo "corretto"

$$\int_0^1 \int_0^2 x \underbrace{y^2}_{\text{Costante}} dx\, dy = \int_0^1 y^2 \underbrace{\frac{x^2}{2}\Big|_0^2}_{\text{Costante}} dy = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Example 2

Rectangular regions are easy because the limits (
$a \le x \le b$ and
$c \le y \le d$) are fixed, meaning the ranges of
x and
y don't depend on each other. For regions of other shapes, the range of one variable will depend on the other.
Here's an example where we integrate over the region defined by
$0 \le x \le 2$ and
$0 \le y \le x/2$. The fact that the range of
y depends on
x means this region is not a rectangle. In fact, the region is the triangle pictured below.



Using the same function
$f(x, y) = xy^2$ as in example 1, compute
$\iint_D f\, dA$ where
D is the above triangle.

$D: \{0 \le x \le 2\} \cup \{0 < y < \frac{x}{2}\}$

$$\iint_D xy^2\, dA = ?$$

* Negli integrali doppi la funzione interna può variare mentre quella esterna deve avere un dominio costante

$$\Rightarrow \iint_D xy^2\, dA = \int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} xy^2\, dy\, dx = \int_0^2 x \cdot \int_0^{\frac{x}{2}} y^2\, dy\, dx = \int_0^2 x\, \frac{1}{3}\, y^3\Big|_0^{\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{3}\int_0^2 x \cdot \frac{x^3}{8}\, dx = \frac{1}{24}\int_0^2 x^4\, dx = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{5}\, x^5\Big|_0^2 = \frac{32}{120}$$

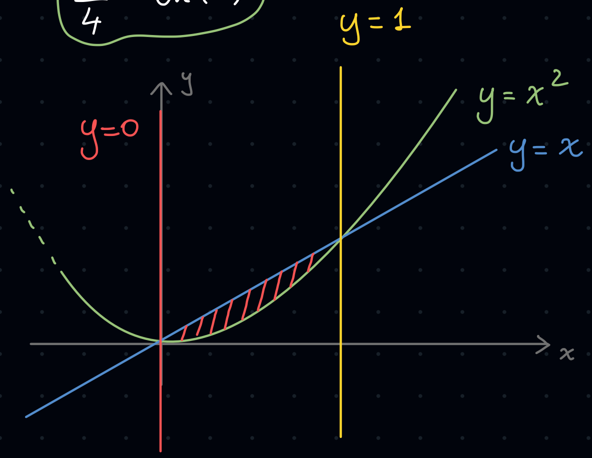
$$= \frac{4}{15}$$

Es. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$

$$\iint_A \frac{x}{1+y}\,dx\,dy \to \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{x}{1+y}\,dy\,dx = \int_0^1 x \int_{x^2}^{x} \frac{1}{1+y}\,dy\,dx = \int_0^1 x \left. \ln(1+y) \right|_{x^2}^{x} dx$$

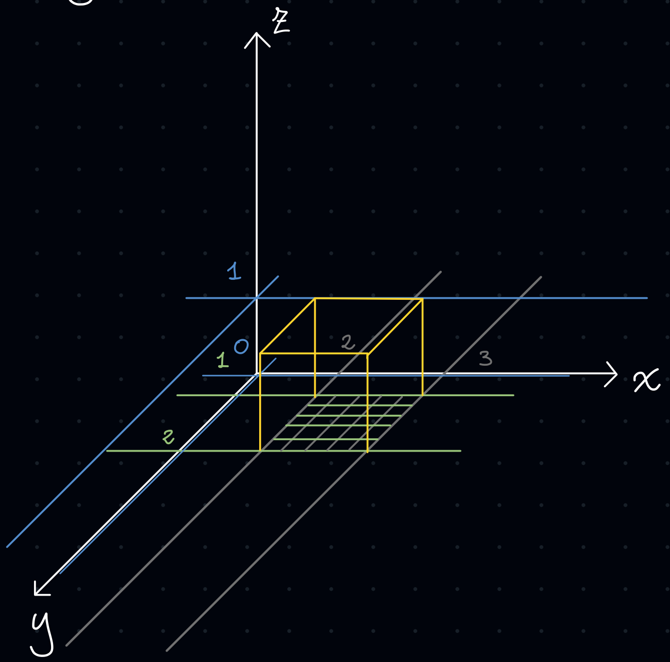
$$= \int_0^1 x \left(\ln|1+x| - \ln|1+x^2| \right) dx = \int_0^1 \underbrace{x}_{dv} \underbrace{\ln|x+1|}_{u}\,dx - \int_0^1 x \ln|x^2+1|\,dx = \text{PARTI}$$

$$= \frac{3}{4} - \ln(2)$$



Integrali tripli

$$\iiint_B 8xyz \; dV \quad \text{con} \quad B = [2,3] \times [1,2] \times [0,1] \qquad 2<x<3 \;\cap\; 1<y<2 \;\cap\; 0<z<1$$



$$= \int_1^2 \int_2^3 \int_0^1 8xyz \; dz \; dx \; dy =$$

$$= \int_1^2 \int_2^3 8xy \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^1 dx \; dy =$$

$$= \int_1^2 8y \left.\frac{x^2}{2}\right|_2^3 \cdot \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^1 dy$$

$$= 8 \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_1^2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_2^3 \cdot \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^1$$

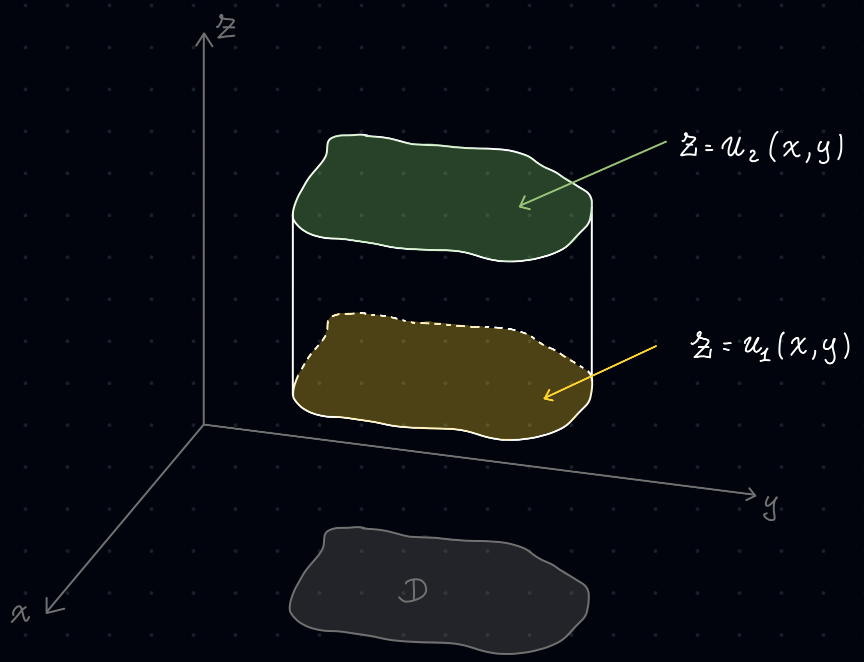
$$= 8 \cdot \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) = 15$$

A cosa serve un integrale triplo?

Il VOLUME della regione TRIDIMENSIONALE E è dato dall' integrale:

$$V = \iiint_E dV$$

Caso 1



$$E = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dA$$

Es: $\iiint_E 2x \, dV$ con E area sottesa a $2x + 3y + z = 6$ Nel primo ottante

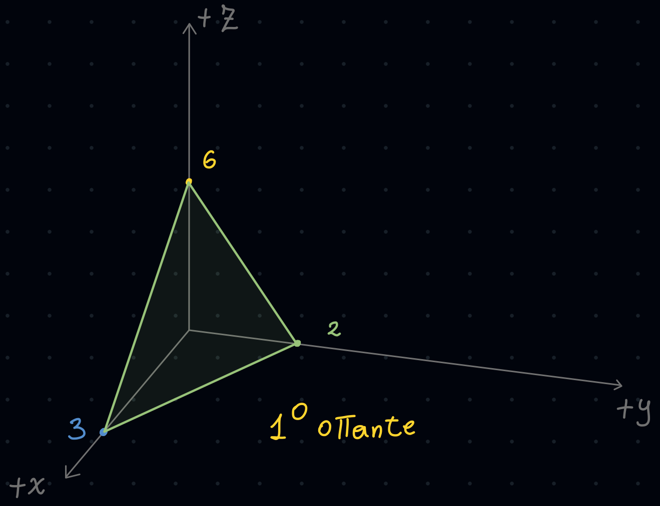
Quadrante in cui tutte le coordinate sono positive

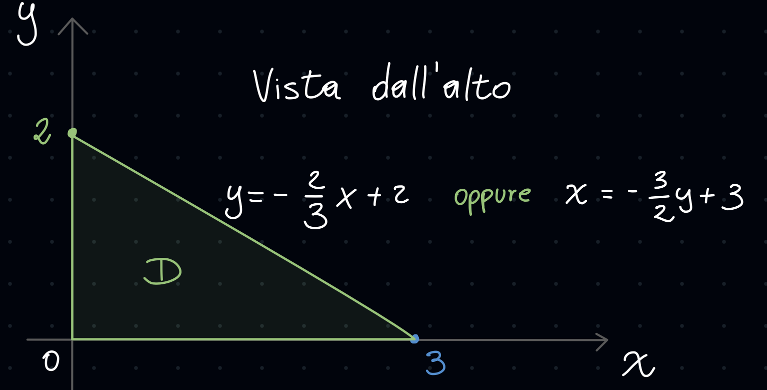
$\to z = -2x - 3y + 6$ Troviamo il dominio

$z = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 6 \to x = 0,\ y = 0 \Rightarrow z = 6$

$x = 0 \Rightarrow z = -3y + 6 \to z = 0 \to 3y = 6 \Rightarrow y = 2$

$y = 0 \Rightarrow z = 2x = 6 \Rightarrow z = 0 \to x = 3$





Troviamo i limiti di integrazione per z

Il piano z e' compreso tra zero e la funzione stessa:

$$\begin{cases} \text{Lower}: 0 \\ \text{Upper}: 2x+3y+z+6 \to z=-2x-3y+6 \end{cases} \Rightarrow \{0 \le z \le 6-2x-3y\}$$

Troviamo i limiti di integrazione per x e y

Possibilita' 1

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le \text{FUNZIONE} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le -\frac{2}{3}x+2 \end{cases}$$

1

Possibilita' 2

$$\begin{cases} 0 \le x \le \text{FUNZIONE} \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le -\frac{3}{2}y+3 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

2

La 1 e la 2 sono equivalenti; scegliamo la 1:

$$\iiint_E 2x\,dV = \iint_D \left[\int_0^{6-2x-3y} 2x\,dz\right] dA = \iint_D 2xz\Big|_0^{6-2x-3y} dA$$

$$= \int_0^3\int_0^{-\frac{2}{3}x+2} 2xz\Big|_0^{6-2x-3y} dy\,dx = \int_0^3\int_0^{-\frac{2}{3}x+2} 2x(6-2x-3y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3\int_0^{-\frac{2}{3}x+2} 12x-4x^2-6xy\,dy\,dx = \int_0^3 \left(12xy-4x^2y-\cancel{6}^{3}\frac{xy^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_0^{-\frac{2}{3}x+2} dx$$

$$= \int_0^3 \left(12xy-4x^2y-3xy^2\right)\Big|_0^{-\frac{2}{3}x+2} dx = \int_0^3 12x\left(-\frac{2}{3}x+2\right)-4x^2\left(-\frac{2}{3}x+2\right)-3x\left(-\frac{2}{3}x+2\right)^2 dx$$

$$= \int_0^3 -8x^2-24x+\frac{8}{3}x^3-8x^2-3x\left(\frac{4}{9}x^2+4-\frac{8}{3}x\right)dx$$

$$= \int_0^3 \cancel{-8x^2}+\cancel{24x}^{12x}+\cancel{\frac{8}{3}x^3}-8x^2+\frac{4}{3}x^3-\cancel{12x}+\cancel{8x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^3 \frac{4}{3}x^3-8x^2+12x\,dx = \left[\frac{\cancel{4}}{3}\frac{x^4}{\cancel{4}}-8\frac{x^3}{3}+\cancel{12}^{6}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_0^3$$

$$= \left[x^3-8x^2+6x^2\right]_0^3 = 9$$

Equazioni differenziali lineari del II ordine a coefficienti costanti

Derivata II

$$\boxed{y''} + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Coefficienti costanti (a_1, a_2)

Non Completa ($= 0$)

Passo 1: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0}$

Equazione di II grado

Passo 2: Troviamo il Δ dell'equazione e ne discutiamo il valore.

Passo 3: Discussione del Δ

A) $\Delta > 0 \Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y_0(x) = \underline{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$

B) $\Delta = 0 \Rightarrow y_1 = e^{\lambda x}, \; y_2 = x e^{\lambda x} \Rightarrow y_0(x) = \underline{C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}}$

C) $\Delta < 0 \Rightarrow y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$

$$A e^{x} \cdot e^{ix} = A\left[\cos(\theta) + i \sin(\theta)\right], \quad A e^{x} e^{-ix} = A\left[\cos(\theta) - i \sin(\theta)\right]$$

Se vogliamo scrivere $e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) + \underline{i \sin(\beta x)}\right]$

Da eliminare

$$e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right) = e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) + \cancel{i \sin(\beta x)} + \cos(\beta x) - \cancel{i \sin(\beta x)}\right]$$

$$e^{\alpha x} \, \cancel{2} \cos(\beta x) = \frac{1}{2} e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right)$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \qquad y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x) \Rightarrow \underline{y_0(x) = e^{\alpha x}\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right]}$$

Massimi e minimi

$z = 4y^4 - 16x^2y + x$

Step 1: Derivate parziali

$f_x = -32xy + 1 \quad f_y = 16y^3 - 16x^2 \quad f_{xy} = f_{yx} = -32x \quad f_{xx} = -32y \quad f_{yy} = 48y^2$

Step 2: poniamo $f_x, f_y = 0$

$$\begin{cases} -32xy + 1 = 0 \\ 16y^3 - 16x^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} 32xy = 1 \to x = \frac{1}{32y} \\ \Rightarrow 16y^3 - 16\frac{1}{1024y^2} = 0 \to 16y^3 = \frac{16}{1024y^2} \Rightarrow 16y^5 = \frac{1}{64} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[5]{\frac{1}{1024}} = \frac{1}{4} y$$

$$\to x = \underbrace{\frac{1}{32y}}_{y=4} = \frac{1}{32 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$$ Punto stazionario P_0

Step 3: Calcolo dell'Hessiano per ogni punto

$$H_f = \det \begin{Bmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{Bmatrix} = f_{xx}(P_0) \cdot f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0)$$

$$H_f(P_0) = \begin{Bmatrix} -32y & -32x \\ -32x & 48y^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -32 \cdot \frac{1}{4} & -32\frac{1}{8} \\ -32\frac{1}{8} & 48\frac{1}{16} \end{Bmatrix} = (-8 \cdot 8) - (-4)^2 = -64 - 16 = 80$$

Siccome $H_f(P_0) < 0 \Rightarrow$ Punto Sella

Valutazione Hessiano:

1) $H_f(P_0) > 0$
   - $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$ (quasi sempre rispettata)
   - $f_{xx}(P_0) > 0$ OR $f_{yy}(P_0) > 0 \Rightarrow P_0$ è un MINIMO
   - $f_{xx}(P_0) < 0$ OR $f_{yy}(P_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un MASSIMO

2) $H_f(P_0) < 0 \Rightarrow$ Punto SELLA

3) $H_f(P_0) = 0 \Rightarrow$ BOH!

Forza d Coulomb

ES 1

$q_1 = q_2 = 1\mu C$ $\qquad d = 1cm$

* $1\mu C = 10^{-6} C$
* $1cm = 1\times10^{-2} m$
* $K_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$F = \varepsilon_0 \frac{q_1 q_2}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{d^2} = \frac{1}{4\pi\cdot 8.854\times\cancel{10^{-12}}}\cdot\frac{(10^{-6})^2}{(10^{-2})^2} \quad \cancel{10^{-12}} \quad 10^{-4}$$

$$= \frac{1}{4\pi 8.854}\cdot\frac{1}{10^{-4}} = 89.87\ N$$

Sono neutri!

ES 2: 92 protoni, 146 neutroni $\qquad$ Carica Totale: $1.47\times10^{-17} C$

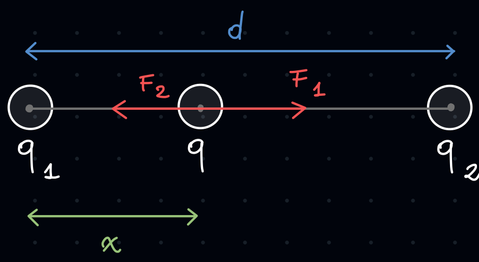
$d_{media} = 7.4\times10^{-15} m$ $\qquad F=?$

Carica di un protone

$$F = K_0\cdot\frac{q_1 q_2}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(1.47\times10^{-17}/92)}{(7.4\times10^{-15})^2} = 4.2\ N$$

Si approssima a 9×10^9

Es 3: $q_1 = +4\mu C$ $\quad q_2 = +12\mu C$ $\quad d = 6cm$ $\qquad$ q viene posta tra q_1 e q_2



- Supponiamo che q sia positiva
- Se q è in equilibrio $\Rightarrow$ $F_1 = F_2$

$$\Rightarrow \cancel{\varepsilon_0}\frac{q_1 q}{x^2} = \cancel{\varepsilon_0}\frac{q q_2}{(d-x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{q_1 \cancel{q}}{x^2} = \frac{\cancel{q} q_2}{d^2+x^2-2dx} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{x^2}{d^2+x^2-2dx}$$

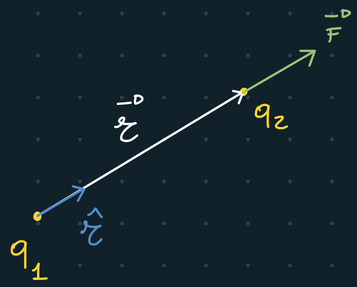
Lasciamo d in cm

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\ \frac{\cancel{4\times10^{-6}}}{\cancel{12\times10^{-6}}} = \frac{x^2}{6^2+x^2-12x} \Rightarrow 3\cancel{x^2} = 36+\cancel{x^2}-12x \quad (-2x^2) \Rightarrow \underset{1}{\cancel{2x^2}}+\underset{6}{\cancel{12x}}-\underset{18}{\cancel{36}} = 0$$

$$\rightarrow x^2+6x-18 = 0 \Rightarrow \Delta = 36-4(-18) = 54 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6\pm3\sqrt{6}}{2} = \begin{cases} 2.19\ cm \\ \cancel{-8.19} \end{cases}$$

Programma di Elettromagnetismo

Forza di Coulomb



$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Come scegliere la costante k ?

Caso 1: $K = 1 \Rightarrow |\vec{F}| = \frac{q_1 q_2}{r^2}$

Quali saranno le dimensioni della carica? $q_1 q_2 = F \ell^2 \rightarrow q^2 = F \ell^2$

Sappiamo che $\ell(t) = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow a = \frac{2\ell}{t^2} \Rightarrow$ Siccome $F = m \cdot a$

$\Rightarrow q^2 = m \cdot \frac{2\ell}{t^2} \cdot \ell^2 = m \ell^3 t^{-2}$

non ho idea di che fine faccia

$\Rightarrow q = m^{\frac{1}{2}} \ell^{\frac{3}{2}} t^{-1}$ sistema cgs

COULOMB $[\ldots] \times 10^{12}$

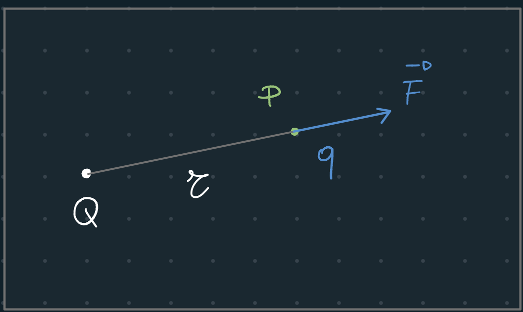
Caso 2: Scegliamo $K = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$ Con $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

Costante dielettrica del vuoto

$\Rightarrow |\vec{F}| = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$

Campo Elettrico

Utilizzo del concetto di circuitazione



1) Poniamo una carica Q nella regione di spazio
2) ⇒ Lo spazio viene perturbato dalla carica Q
3) ⇒ Come conseguenza, se poniamo una carica di prova q molto piccola, questa viene attirata o respinta dalla FORZA generata da Q.

La forza risultante sara' $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$

→ Il campo non dipende da q perche' molto piccola rispetto Q : $q << Q$
⇒ Definiamo il CAMPO ELETTRICO come:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

CAMPO ELETTRICO

Il LAVORO del campo elettrico

$$L = \int_A^B \vec{F} \, d\vec{S} \longrightarrow L_E = \int_A^B \vec{F} \, d\vec{\ell}$$

Lavoro sulle SUPERFICI — Superficie

Lavoro nel campo elettrico — Spostamento INFINITESIMO della carica

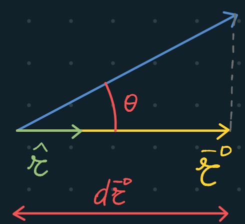
$$\to L = \int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \hat{r} \, d\vec{\ell} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_A^B \frac{\hat{r}}{r^2} d\vec{\ell}$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_A^B \frac{d\vec{r}}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_A^B r^{-2} \, d\vec{r}$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left[r^{-1} \right]_A^B = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

LAVORO

Differenza di due termini



$$d\vec{\ell} \cdot \hat{r} = |d\vec{\ell}| \cdot |\hat{r}| \cdot \cos\theta = d\ell \cos\theta = d\vec{r}$$

Spostamento infinitesimo diretto lungo $\vec{r}$

→ Dalla meccanica "Battezziamo" $\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_A} \right) = U_A \quad \left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_B} \right) = U_B$

⇒ $L = U_A - U_B$ Differenza del POTENZIALE

IL POTENZIALE ELETTRICO

Se calcoliamo il Lavoro del campo Elettrostatico otteniamo

Manca la carica di prova q

$$L = \int_A^B \vec{E}\, d\vec{\ell} = \frac{U_A}{q} - \frac{U_B}{q} = \underbrace{V_A - V_B}_{\text{Differenza Tra potenziali Elettrici}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad \frac{U_A}{q} = V_A \qquad \frac{U_B}{q} = V_B$$

Considerazioni: Spostiamo la carica da A a B con $A \neq B \Rightarrow$ CAMMINO NON CHIUSO

$\Rightarrow$ Se il lavoro dipende solo dallo stato finale ed iniziale

$\Rightarrow$ Il Campo elettrostatico è CONSERVATIVO!

Che cosa è il campo ElettroStatico?

Assumiamo, che nel campo, mentre le cariche di prova q sono libere di muoversi, Q rimane ferma!

Appena le cariche Q si muovono il campo non è più CONSERVATIVO!

LA CIRCUITAZIONE del campo Elettrostatico

$$C = \oint_\ell \vec{A}\, d\vec{\ell} \rightarrow \text{Applicata ad } \vec{E} \rightarrow C = \int_\ell \vec{E}\, d\vec{\ell} = \underbrace{\text{Se } A = B}_{\ell \text{ è un cammino chiuso } A=B} \rightarrow U - U = 0$$

$\Rightarrow$ La circuitazione del campo elettrostatico è zero!

Ricordando il teorema del ROTORE: $\oint_\ell \vec{E}\, d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})\hat{n}\, d\vec{S} = 0$

$\Rightarrow$ Deduciamo che $(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})$ DEVE ESSERE ZERO

Il Campo è Conservativo

Il lavoro non dipende dal CAMMINO

Il rotore del Campo è zero

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0}$$

Equazione di Maxwell per l'elettrostatica

1) $L = \int_e \vec{F}\, d\vec{e} = -U$ → derivo → $dL = \vec{F}\, d\vec{e} = -dU$

$\mathcal{E}$ cinetica $\quad$ $\mathcal{E}$ potenziale

Perchè? Dal Teorema dell'$\mathcal{E}$ cinetica: $L = \int_S \vec{F}\, d\vec{S} = G_B - G_A = G$ siccome $G = -U$

2) Dividiamo per la carica di prova q → $\frac{dL}{q} = \frac{\vec{F}}{q} d\vec{e} = -d\frac{U}{q} = \vec{E}\, d\vec{e} = d\vec{V}$

PUNTO 1

- Il potenziale V è una funzione di più variabili:

$$d\vec{V} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Differenziale della differenza del potenziale E.

→ Ci ricordiamo delle definizioni di gradiente e del fatto che $d\vec{e}$ ha 3 componenti:

gradiente

$$\begin{cases} \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \\ d\vec{e} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} \end{cases} \Rightarrow dV = (\vec{\nabla} V)\cdot d\vec{e}$$

PUNTO 2

Morale della favola: Il differenziale di una qualsiasi funzione di 3 variabili può essere scritta come il prodotto scalare tra il gradiente della funzione per $d\vec{e}$

3) Torniamo al punto 1:

$\vec{E}\cdot d\vec{e} = -d\vec{V}$ siccome nel punto 2 $dV = (\vec{\nabla} V)\cdot d\vec{e}$

otteniamo $\vec{E}\, \cancel{d\vec{e}} = -\vec{\nabla} V \cdot \cancel{d\vec{e}}$ → $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ LEGGE DI COULOMB

Morale della favola: in un campo conservativo, possiamo scrivere il campo come il GRADIENTE di un campo scalare

ROTORE $\quad$ GRADIENTE di V

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \emptyset \iff \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Si equivalgono

Perchè il rotore di un gradiente è sempre zero: $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} V) = 0$

Gradiente $\quad$ Rotore

Superficie equipotenziale

Presi due punti qualsiasi A e B sulla sup. equipotenziale, $V_A = V_B = V_N \quad \forall N \in S$

Consequenza : $L = q\,(V_A - V_B) = \emptyset$ visto che $V_A = V_B$

$\Rightarrow$ Il lavoro su queste superfici è zero!

Ragionando ulteriormente:

$$L = q(V_A - V_B) = \vec{F} \cdot d\vec{e} = dq\,(V_A - V_B) = \emptyset$$

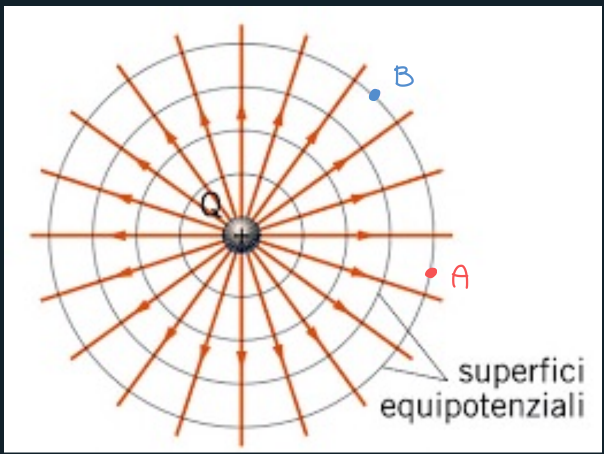
Quando il prodotto scalare è zero? $\vec{F} \cdot d\vec{e} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{e}| \cdot \cos(\alpha)$

1. $|\vec{F}| = 0$

$|d\vec{e}| = \emptyset$

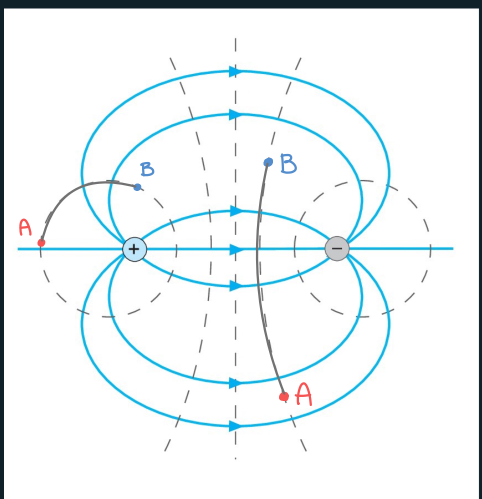
$\cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \vec{F} \perp d\vec{e}$

Morale della favola: Lo spostamento lungo una sup equipotenziale avviene in modo perpendicolare alle linee di forza!



- Per una singola carica Q è semplice disegnare le sup. equip. : basta tracciare le tangenti alle linee di forza, ottenendo dei cerchi concentrici attorno alla carica.

$\rightarrow$ Se mi muovo da A a B non compio lavoro!



Teorema di Gauss

utilizzo del concetto di flusso

Lezione 26

Recap:

Campo elettrico

$$\text{Flusso} = \phi = \int_S \vec{E}\,\hat{n}\,\underbrace{ds}_{\text{Scalare}} = \int_S \vec{E}\,d\vec{S}$$

$d\vec{S} \to \hat{n}\,dS$

Il Teorema: ci assicura che data una carica interna alla superficie considerata, il flusso del campo elettrico attraverso la sup. è la somma delle cariche contenute nella superficie.

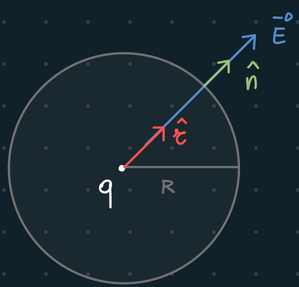
$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Quindi Il flusso non dipende dalla superficie ma da cosa è contenuto in essa.

DIMOSTRAZIONE 1: Superficie sferica

1) Usiamo la superficie di una sfera: Usiamo la sfera di raggio R per circondare la carica puntiforme:

Eq sfera: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$



Siccome la carica è una, il campo elettrico sarà:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \hat{r}$$

2) Calcoliamo $d\Phi$: il flusso infinitesimo

$$d\Phi = d\left[\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds\right] = \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = |\vec{E}|\cdot|\hat{n}\,ds|\cdot\cos(0) = \overbrace{\underbrace{E\,dS}_{\text{Scalari}}}^{d\Phi}$$

3) FLUSSO TOTALE: sommare $d\Phi$ lungo la sfera

$$\Rightarrow \Phi = \oint_S E\,ds = \oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{1}{\underbrace{r^2}_{r \text{ è costante per la SFERA}}}\,ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_S ds$$

$\Rightarrow$ Superficie della sfera: $4\pi r^2$

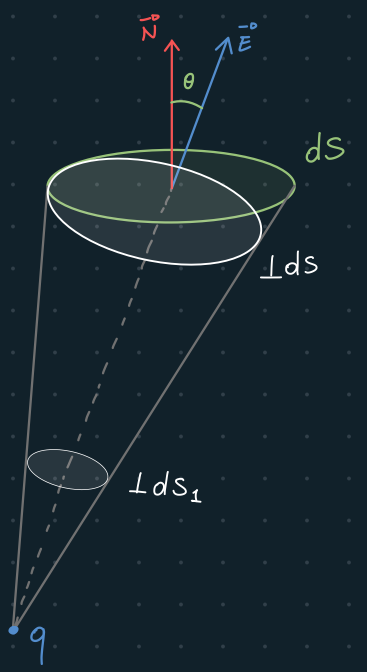
$$\Rightarrow \Phi = \frac{q}{\cancel{4\pi}\,\varepsilon_0\,\cancel{r^2}} \cdot \cancel{4\pi}\,\cancel{r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Teorema di Gauss

Considerazioni finali:
la carica puntiforme genera un campo a simmetria sferica, quindi ci conviene prendere una superficie sferica.

DIMOSTRAZIONE 1: Superficie QUALSIASI ← vera dimostrazione!

1) Prendiamo una superficie chiusa qualsiasi: Facciamo partire dalla carica un CONO (come una luce che parte da una Torcia elettrica) che colpisce la superficie:

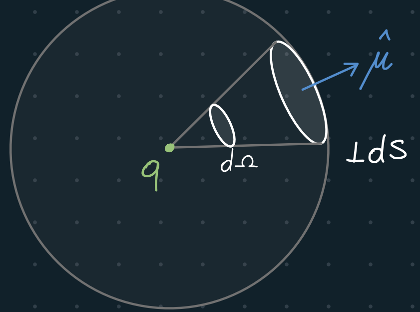


- dS è un "pezzo" di superficie qualsiasi
- $\perp dS$ e $\perp dS_1$ sono pezzi di superfici sferiche
- Il campo $\vec{E}$ è perpendicolare alla SFERA (come abbiamo visto prima)
- La normale $\vec{N}$ alla sup. qualsiasi non coincide alla Normale della sfera, che va come $\vec{E}$
- Si forma quindi un angolo θ Tra $\vec{N}$ e $\vec{E}$

Morale della favola: Se posso Trovare $\vec{N} = \cos(\theta)\,\vec{E}$ Allora $\underline{\underset{\text{sfera}}{\perp dS} = \underset{\text{qualsiasi}}{dS}\cos(\theta)}$

Questo è importante perché così possiamo ricondurci al caso della sfera.

2) Definiamo L'ANGOLO SOLIDO: E' un angolo a 3 dimensioni al centro del cono ottenuto prendendo una porzione di $\perp dS$ sulla circonferenza:



⇒ angolo solido: $d\Omega = \underset{\text{Sfera}}{\frac{\perp dS}{r^2}} = \underset{\text{Superficie qualsiasi}}{\frac{dS\cos\theta}{r^2}}$

"Un pezzettino di circonferenza diviso r^2"

↳ Si misura in STERADIANTI

3) Applichiamo l'angolo solido al ragionamento della dim 1:

Normale della sfera

modulo 2

$$d\Phi = d\left[\int_S \vec{E}\,\hat{n}\,ds\right] = \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}_{\text{modulo 1}}\hat{\mu}\cdot\hat{n}\,ds$$

Normale della superficie

$$= mod_1 \cdot mod_2 \cdot \cos(\theta) =$$

Angolo solido

A.S.

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{ds\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,q\,d\Omega$$

Flusso infinitesimale

4) Ottenuto un "elementino" di flusso attraverso la superficie, per trovare il flusso totale integriamo:

Integrale del "pezzettino" di angolo solido

$$\Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S d\Omega$$

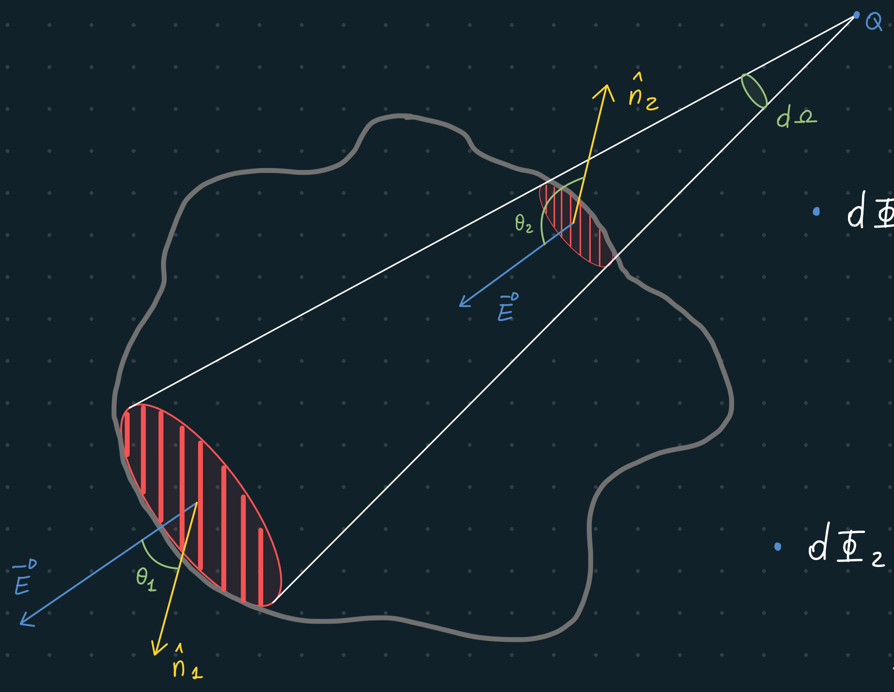
Sup sfera $= 4\pi r^2$

Siccome $d\Omega = \frac{ds\cos\theta}{r^2} = \frac{\perp ds}{r^2} = \frac{4\pi \cancel{r^2}}{\cancel{r^2}} = \underline{4\pi}$

$$\Rightarrow \Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S d\Omega = \frac{q}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\cancel{4\pi} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

CVD

Caso II: CARICA ESTERNA ALLA SUPERFICIE



Troviamo $d\Phi$ per entrambe le superfici

- $d\Phi_1 = \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS_1 = E \cdot dS_1 \cos(\theta_1)$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dS_1 \cos\theta_1}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

$(\cos \alpha > 90°) < 0$

- $d\Phi_2 = \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dS_2 \cos\theta_2}{r^2}$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Morale della favola

Se $d\Phi_1 = -d\Phi_2$ vuol dire che se sommiamo tutti i flussi elementari lungo TUTTA la superficie otteniamo ZERO!

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\, \hat{n}\, dS = 0$$

Flusso attraverso una superficie con carica ESTERNA

Equazioni di Maxwell in Elettrostatica

1) Teorema della divergenza: $\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\, dV$

Superficie   Volume

↳ La superficie S chiusa circonda il volume

→ L'integrale $\vec{E}\hat{n}dS$ del flusso attraverso una superficie chiusa è pari alla DIVERGENZA di $\vec{E}$ del VOLUME contenuto nella superficie.

2) DENSITÀ DI CARICA nel volume: $Q = \int_V \rho\, dV$

dove $\rho = \dfrac{dQ}{dV}$ "RO"

3) Sostituiamo nel Teorema di Gauss: $\oint_S \vec{E}\, \hat{n}\, dS = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

→ $\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\, dV = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dV$ Abbiamo due integrali sul volume

→ Possiamo Togliere gli integrali → $\vec{\nabla}\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho$ I° Equazione di Maxwell per l'Elettrostatica

3) Ricordiamo l'altra eq di Maxwell trovata qualche lezione fa:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho & \text{I° Equazione di Maxwell per l'Elettrostatica} \\ \nabla \wedge \vec{E} = 0 \to \vec{E} = -\vec{\nabla}V & \text{II° Equazione di Maxwell per l'Elettrostatica} \end{cases}$$

4) Proviamo a sostituire $\vec{E}$ dalla II alla I:

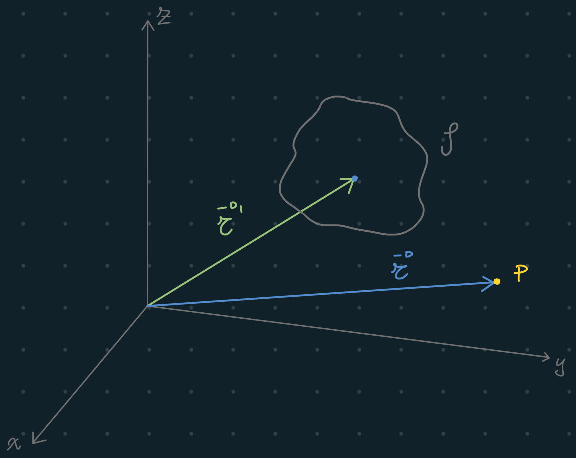
→ $\vec{\nabla}(-\vec{\nabla}V) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ → $\vec{\nabla}^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ Equazione di Poisson

È un'eq già nota in matematica

Soluzione dell'equazione di Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'$$ Soluzione

Potenziale



- V' è il volume occupato dalla carica
- $\vec{r}\,'$ è la posizione delle cariche contenute nella distribuzione di carica ρ
- Nel punto P avremo un campo che è la somma dei campi generati dalle singole cariche poste in ρ
- $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ è la distanza tra ρ e P.

Lo scopo del gioco

(1) Maxwell 2° eq

Abbiamo la relazione $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ che lega il campo elettrostatico al potenziale.

Troviamo V come $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'$ Soluzione alla eq di Poisson

Quindi: $$\vec{E} = -\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'\right]$$

"Dimostrazione" della soluzione...
Se la soluzione è giusta, sostituita nell'eq $\nabla^2 V = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ l'identità deve rimanere vera:

$$\nabla^2 V = \nabla^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\cdot\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dV'$$

Il Laplaciano opera su xyz

∇^2 opera solo su $\vec{r}$

Delta di Dirac

$\longrightarrow$ Assumiamo che $\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -4\pi\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

$$\Longrightarrow \nabla^2 V = -\frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\cdot\cancel{4\pi}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,dV' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,dV'$$

Ha senso solo sotto integrale!

CVD

$\longrightarrow$ Per la proprietà della Delta $\int f(x)\cdot\delta(x-x_0) = f(x_0)$ $\longrightarrow \nabla^2 V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

Recap Elettrostatica

Forma integrale

con carica interna $\Phi_E = \oint_S \vec{E}\ \hat{n}\, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

con carica esterna $\Phi = \varnothing$

Teorema di Gauss $\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \end{cases}$$

I° Equazione di Maxwell per l'Elettrostatica

$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \iff \vec{E} = -\vec{\nabla} V$

II° Equazione di Maxwell per l'Elettrostatica

Combinando le eq di Maxwell: $\vec{\nabla}(-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \implies \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Equazione di Poisson

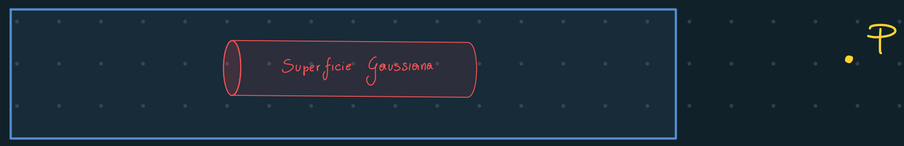
Soluzione: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dV$

Teorema di Coulomb

E' un'applicazione del Teorema di Gauss ad un caso particolare.

Esercizio: Vogliamo calcolare il campo elettrico in un punto P vicino alla superficie di un conduttore:

Conduttore



Siccome siamo in elettrostatica, le cariche sono ferme! $\Rightarrow$ non c'è forza

infatti $\vec{E} = \frac{\vec{F}_c}{q} \Rightarrow$ se $\vec{F}_c = 0 \Rightarrow \underline{\vec{E} = \emptyset}$

1) Mi scelgo una superficie INTERNA al conduttore ASTRATTA

2) Siccome $\vec{E} = 0 \Rightarrow \Phi = \int_S \underbrace{E}_{\emptyset} \cdot \hat{n} ds = \frac{\overset{\emptyset}{Q_{int}}}{\varepsilon_0} = \underline{\emptyset}$

$\Rightarrow$ Concludiamo che il conduttore è NEUTRO! n(Protoni) = n(Elettroni)

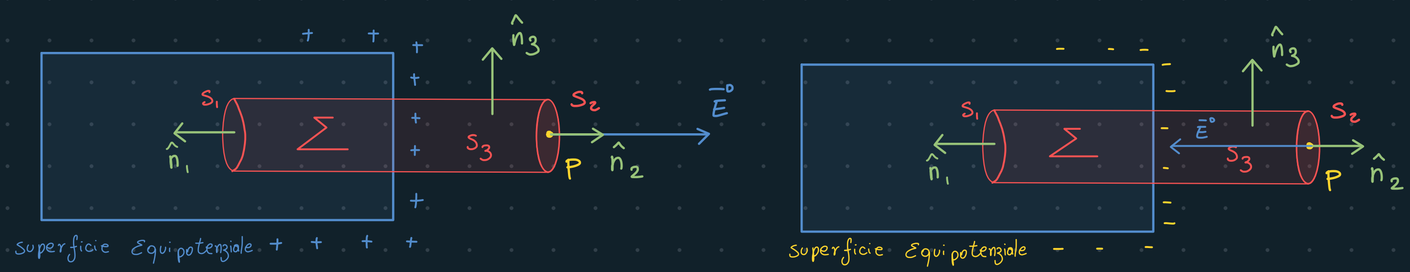
$\Rightarrow$ Non ci sono cariche DENTRO il conduttore.

3) Non ci sono cariche DENTRO il conduttore, ma potrebbero essercene SULLA SUPERFICIE

Siccome $\underbrace{\vec{E}}_{\emptyset} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \vec{\nabla} V = 0 \Rightarrow V = \text{Cost}$

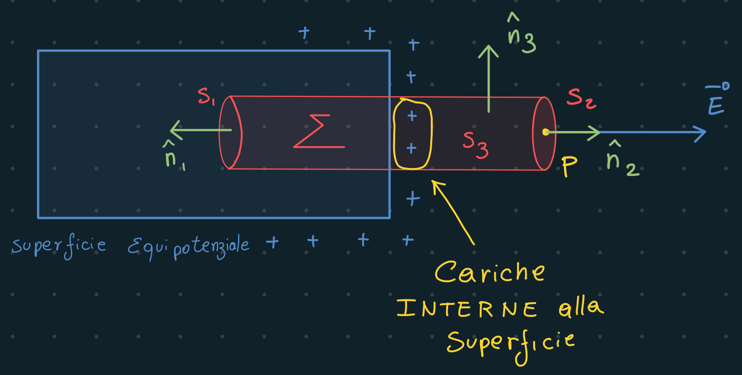
Se le derivate di V è zero, V = Cost

4) Concludiamo che se V è costante $\Rightarrow$ S è una superficie Equipotenziale



nota: Σ è la superficie laterale S_3

5) Calcolare il modulo del campo elettrico



↳ Abbiamo posizionato il cilindro in modo da ritrovarci con delle cariche all'interno del cilindro

⇒ Possiamo usare il teorema di Gauss:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \int_{S_1} \vec{E}\, \hat{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS + \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n}_3\, dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

(1) Non ci sono cariche all'interno $\Rightarrow \int_{S_1} \vec{E}\, \hat{n}\, dS = \emptyset$

(3) $\vec{E} \perp \hat{n}_3 \Rightarrow \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS = E \cdot n\, dS \cdot \cos(90) = \emptyset$

(2) $\vec{E} \,//\, \hat{n}_2 \Rightarrow \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS = E\, n\, dS \cos(0) = E\, dS$

$\uparrow 1$

Morale della favola:

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n}_2\, dS = |\vec{E}| \cdot S_2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \underbrace{\frac{Q_{int}}{S_2}}_{\sigma} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Densita' di carica Superficiale