

# Concetti fondamentali

Il campo e' descritto da funzioni in  $(x, y, z)^t$  tempo  
Coordinate Spaziali

## DERIVATA PARZIALE

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 5xy - 7z^3$$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 5y$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = 5x$

- $\frac{\partial f}{\partial z} = -21z^2$

## DIFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\rightarrow df = (6x + 5y) dx + (5x) dy - (21z^2) dz$$

# Introduzione all'elettromagnetismo

Lezione 24



Nel tempo  $dt$  passa attraverso la superficie  $S$  una quantità di acqua pari a quella contenuta nel volume  $dV = S(v dt)$

Possiamo Trovare la portata  $P = \frac{\text{Volume}}{\text{tempo}} = \frac{dV}{dt} = (S \cdot v)$  Caso particolare del flusso  $\phi$

Se la superficie non è perpendicolare a  $v$ , non tutta l'acqua passa per la superficie  $S$



Se abbiamo una superficie  $S$  di forma qualsiasi, possiamo Trovare il flusso:

FLUSSO  
del vettore  $\vec{v}$   
attraverso la  
superficie  $S$

$$\phi = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} ds$$

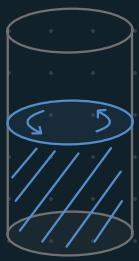
Il flusso del vettore velocità  
è un CONCETTO CONCRETO

Possiamo anche definire il flusso di un vettore qualsiasi  $\vec{A}$ :

$\phi = \int_S \vec{A} \cdot \hat{n} ds$

Il flusso di un vettore qualsiasi  
è un CONCETTO ASTRATTO!

Circolazione di un vettore



Vista dall'alto

$$\text{Circolazione } C = \oint_{\mathcal{L}} \vec{v} \cdot d\vec{e}$$

Prodotto della velocità del fluido  
per il perimetro del  
cammino chiuso

$e$  è una linea qualsiasi  
CHIUSA

Perche' prodotto scalare ? In modo da prendere solo la componente di  $v$  lungo  $d\vec{e}$ ,  
ovvero quella responsabile della circolazione.

Ancora una volta estendiamo il calcolo ad un vettore  $\vec{A}$  qualsiasi :

$$\text{CIRCUITAZIONE } C = \oint_{\mathcal{L}} \vec{A} \cdot d\vec{e}$$

# Operatori Differenziali

Lezione 24

Operatore NABLA: opera su dei campi scalari o vettoriali; effettua la derivata parziale rispetto ad  $x, y, z$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

Non è altro che un vettore applicato in diversi modi ci restituisce diverse operazioni

Gradiente: Applicato ad una funzione

$$\vec{\nabla} f = \text{gradiente di } f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

$$\text{Es: } f(xyz) = 3x^2 + 5xy - 7z^3 \quad \nabla = (6x + 5y) \hat{i} + (5x) \hat{j} - (21z^2) \hat{k}$$

Divergenza di un campo vettoriale SCALARE

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \\ &\quad \text{Operatore divergenza} \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \hat{k} \end{aligned}$$

Rotore di un campo vettoriale VETTORIALE

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \det \begin{Bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{Bmatrix} = \left( \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \right) \hat{i} - \left( \frac{\partial}{\partial x} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_x \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) \hat{k}$$

Laplaciano di un campo SCALARE

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \vec{\nabla}^2 f$$

Laplaciano di un campo VETTORIALE

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = (\nabla^2 A_x) \hat{i} + (\nabla^2 A_y) \hat{j} + (\nabla^2 A_z) \hat{k}$$

# Teorema della Divergenza

Lezione 25

Serve per passare da un integrale in superficie ad un integrale in volume



$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, ds = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \, dv$$

Divergenza

## Teorema del rotore



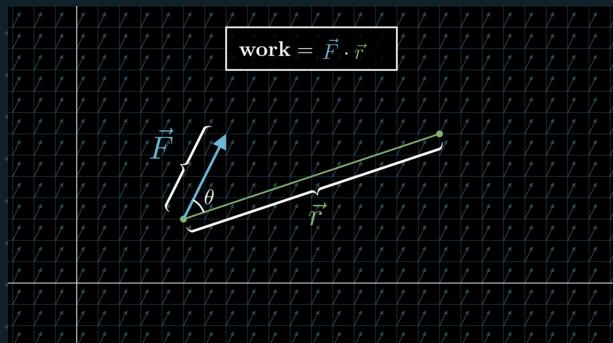
$$\oint_l \vec{E} \, d\vec{e} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \hat{n} \, ds$$

↓  
Circuazione

RoTore

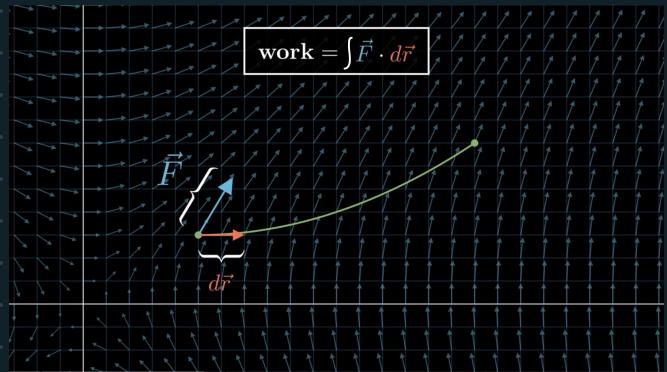
Che cosa rappresenta il RoTore?

1) Partiamo dalla definizione del lavoro



Se il campo è conservativo

$$L = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{perché la forza rimane costante}$$

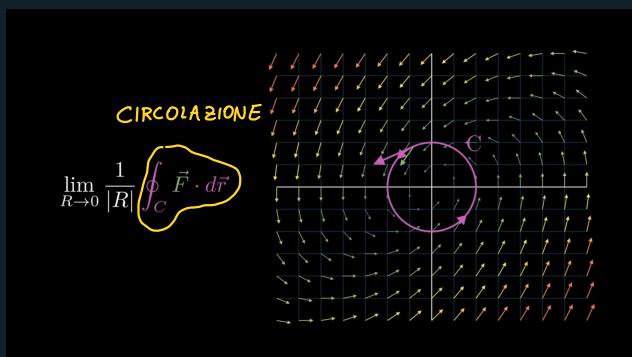


Se il campo non è conservativo

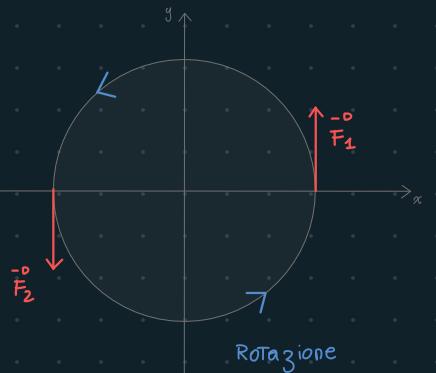
$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{perché la forza non rimane costante}$$

→  $d\vec{r}$  è il vettore spostamento infinitesimale ed  $\vec{F}$  la forza in quel punto

2) da Circuazione e' la stessa identica cosa, ma applicata ad una curva chiusa!



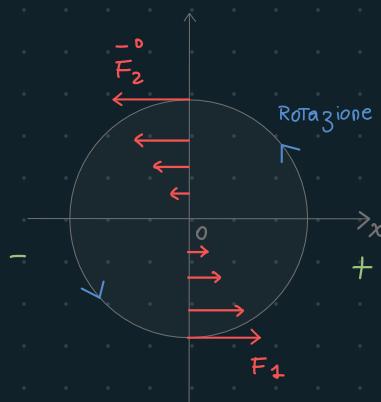
3) Poniamo di posizionarci in un punto qualsiasi, e che le forze agenti Siano 2:



- A seconda di  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  la "ruota" girerà più velocemente, più lentamente o non girerà affatto!
- Rappresentiamo la risultante come il rapporto tra la Differenza delle forze e la larghezza "della ruota"

$$\Rightarrow \frac{\Delta \vec{F}_y}{\Delta x} = \left( \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial x} \right) \text{ derivata parziale di } f \text{ rispetto ad } x$$

4) Facciamo lo stesso ragionamento per la y:



Man mano che la y cresce, la x diventa negativa

$$\Rightarrow - \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial y}$$

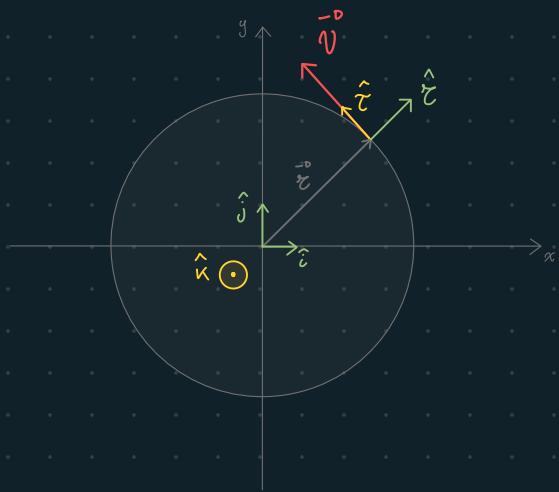
$$\text{Rotore di } f(x,y) \\ \text{Rotore di } F = \vec{\Delta} \wedge \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{F}_y - \frac{\partial}{\partial y} \vec{F}_x \right)$$

Morale della favola

Possiamo estendere il ragionamento ad una funzione di 3 variabili:

$$\text{Rotore di } f(x,y,z) = \vec{\Delta} \wedge f(x,y,z) = \det \left\{ \begin{array}{c} \hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x \quad A_y \quad A_z \end{array} \right\}$$

# Spiegazione alternativa ROTORE



$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= w \hat{\tau} \hat{\tau} = w \hat{\tau} (\hat{k} \wedge \hat{\tau}) = w \hat{\tau} \hat{k} \wedge w \hat{\tau} \hat{\tau} \\
 &= w \hat{\tau} \hat{k} \wedge w \bar{\tau} = w \hat{k} \wedge w \bar{\tau} = w (\hat{k} \wedge \bar{\tau}) \\
 &\text{→ } \hat{\tau} \text{ non ha componenti lungo } \hat{k} \\
 &\rightarrow \text{Svolgiamo il prodotto vettoriale} \\
 \bar{v} &= \det \begin{Bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & w \\ w_x & w_y & w_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{Bmatrix} \cdot w \\
 &= [(-yw\hat{i}) - (-xw\hat{j})] = \boxed{xw\hat{j} - yw\hat{i}} \\
 &\bar{v} \text{ in coordinate cartesiane}
 \end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla} \wedge \bar{v} &= \begin{Bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yw & xw & 0 \end{Bmatrix} = - \left( \frac{\partial}{\partial z} xw \right) \hat{j} - \left( + \frac{\partial}{\partial z} yw \right) \hat{i} + \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} xw + \frac{\partial}{\partial y} yw \right) \hat{k} \right. \\
 &= \boxed{2w\hat{k}} \text{ ROTORE di } \bar{v}
 \end{aligned}$$

Morale della favola: Il rotore  $\bar{\nabla} \wedge \bar{v}$  è diverso da zero solo se c'è una rotazione!

# Recap di matematica

## Integrali doppi

### Example 1

Compute the integral

$$\iint_D xy^2 dA$$

where  $D$  is the rectangle defined by  $0 \leq x \leq 2$  and  $0 \leq y \leq 1$  pictured below.



$$\text{Dominio } 0 \leq x \leq 2 \cup 0 < y < 1$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 x dx \int_0^1 y^2 dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

### Processo "corretto"

$$\int_0^1 \int_0^2 x(y^2) dx dy = \int_0^1 y^2 \left( \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right) dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

*Costante*

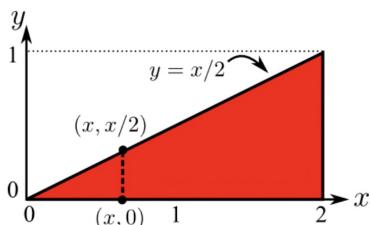
*Costante*

### Example 2

Rectangular regions are easy because the limits ( $a \leq x \leq b$  and  $c \leq y \leq d$ ) are fixed, meaning the ranges of  $x$  and

$y$  don't depend on each other. For regions of other shapes, the range of one variable will depend on the other. Here's an example where we integrate over the region defined by

$0 \leq x \leq 2$  and  
 $0 \leq y \leq x/2$ . The fact that the range of  $y$  depends on  $x$  means this region is not a rectangle. In fact, the region is the triangle pictured below.



Using the same function

$f(x, y) = xy^2$  as in example 1, compute

$\iint_D f dA$  where

$D$  is the above triangle.

$$D: \{0 \leq x \leq 2\} \cup \{0 < y < \frac{x}{2}\}$$

$$\iint_D xy^2 dA = ?$$

\* Negli integrali doppi la funzione interna puo' varia re mentre quella esterna deve avere un dominio costante

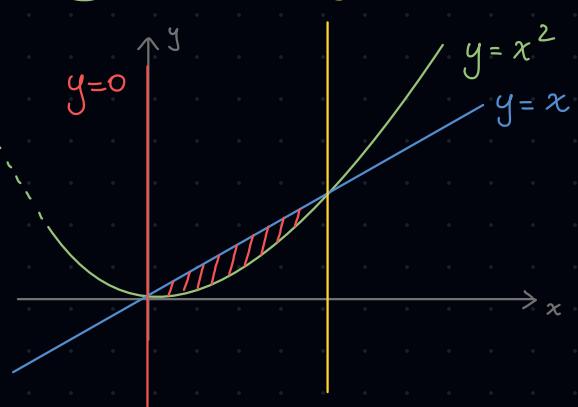
$$\begin{aligned} &= \iint_D xy^2 dA = \int_0^2 \int_0^{x/2} xy^2 dy dx = \int_0^2 x \cdot \int_0^{x/2} y^2 dy dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^{x/2} dx \\ &= \int_0^2 x \cdot \left( \frac{x}{2} \right)^3 dx = \frac{1}{3} \int_0^2 x \cdot \frac{x^3}{8} dx = \frac{1}{24} \int_0^2 x^4 dx = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32}{120} \\ &\stackrel{?}{=} \frac{4}{15} \end{aligned}$$

$$Es \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$$

$$\iint_A \frac{x}{1+y} dx dy \rightarrow \int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{x}{1+y} dy dx = \int_0^1 x \int_{x^2}^x \frac{1}{1+y} dy dx = \int_0^1 x \left[ \ln(1+y) \right]_{x^2}^x dx$$

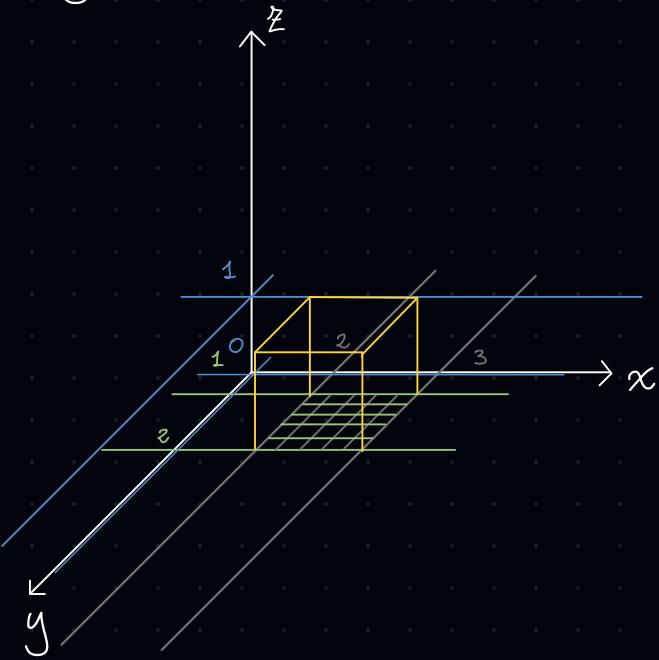
$$= \int_0^1 x (\ln|x+1| - \ln|4+x^2|) dx = \int_0^1 x \ln|x+1| dx - \int_0^1 x \ln|x^2+1| dx = PARTI$$

$$= \left( \frac{3}{4} - \ln(2) \right)$$



## Integrali tripli

$$\iiint_B 8xyz \, dv \quad \text{con} \quad B = [2, 3] \times [1, 2] \times [0, 1] \quad 2 < x < 3 \quad \wedge \quad 1 < y < 2 \\ \cap \quad 0 < z < 1$$



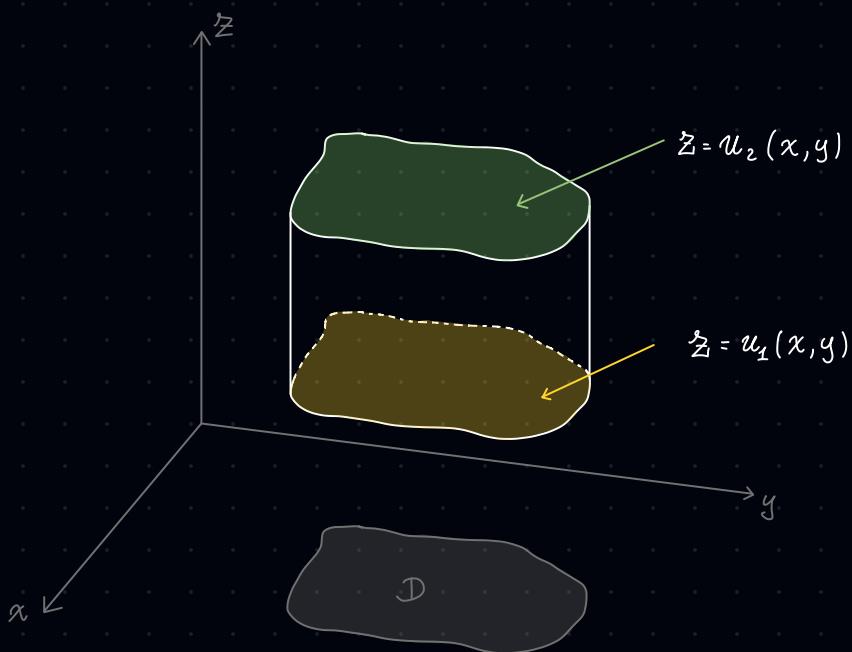
$$\begin{aligned}
 &= \int_1^2 \int_2^3 \int_0^1 8xyz \, dz \, dx \, dy = \\
 &= \int_1^2 \int_2^3 8xy \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^1 \, dx \, dy = \\
 &= \int_1^2 8y \left[ \frac{x^2}{2} \right]_2^3 \cdot \left[ \frac{3^2}{2} \right]_0^1 \, dy = \\
 &= 8 \cdot \left[ \frac{y^2}{2} \right]_1^2 \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \right]_2^3 \cdot \left[ \frac{3^2}{2} \right]_0^1 = \\
 &= 8 \cdot \left( \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{9}{2} - \frac{4}{2} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \boxed{15}
 \end{aligned}$$

A cosa serve un integrale triplo?

Il VOLUME della regione TRIDIMENSIONALE è dato dall'integrale:

$$V = \iiint_E dV$$

# Caso 1



$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[ \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

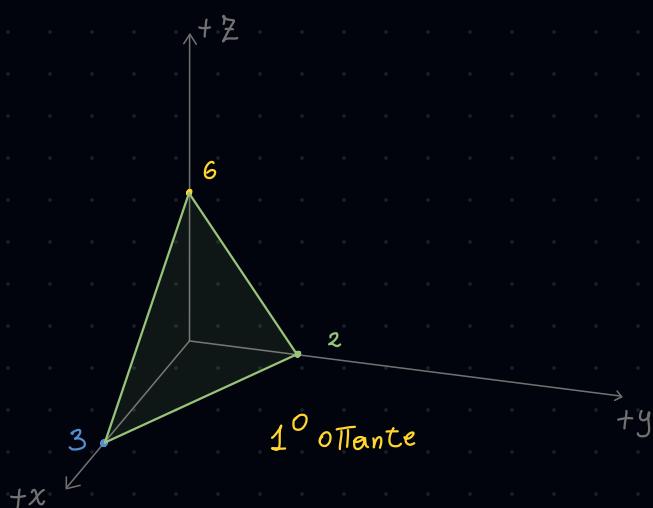
Esempio:  $\iiint_E 2x \, dv$  con  $E$  area sottesa a  $2x + 3y + z = 6$  Nel primo ottante  
 Quadrante in cui tutte le coordinate sono positive

$\Rightarrow z = -2x - 3y + 6$  Troviamo il dominio

$$z = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 6 \Rightarrow x = 0, y = 0 \Rightarrow z = 6$$

$$x = 0 \Rightarrow z = -3y + 6 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$$

$$y = 0 \Rightarrow z = 2x = 6 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = 3$$



Troviamo i limiti di integrazione per  $z$

Il piano  $z$  e' compreso tra zero e la funzione stessa:

$$\begin{cases} \text{Lower : } 0 \\ \text{Upper : } 2x+3y+z+6 \rightarrow z = -2x-3y+6 \end{cases} \Rightarrow \{ 0 \leq z \leq 6-2x-3y \}$$

Troviamo i limiti di integrazione per  $x$  e  $y$

Possibilita' 1

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \text{FUNZIONE} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq -\frac{2}{3}x+2 \end{cases}$$

1

Possibilita' 2

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \text{FUNZIONE} \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq -\frac{3}{2}y+3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

2

da 1 e la 2 sono equivalenti; scegliamo la 1:

$$\begin{aligned} \iiint_E 2x \, dV &= \iint_D \left[ \int_0^{6-2x-3y} 2x \, dz \right] dA = \iint_D 2x \Big|_0^{6-2x-3y} dA \\ &= \iint_D 2x \Big|_0^{-\frac{2}{3}x+2} dy \, dx = \iint_D 2x (6-2x-3y) dy \, dx \\ &= \int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} (12xy - 4x^2y - 6xy^2) dy \, dx = \int_0^3 \left( 12xy - 4x^2y - \frac{8}{3}xy^3 \right) \Big|_0^{-\frac{2}{3}x+2} dx \\ &= \int_0^3 \left( 12xy - 4x^2y - 3xy^2 \right) \Big|_0^{-\frac{2}{3}x+2} dx = \int_0^3 12x \left( -\frac{2}{3}x + 2 \right) - 4x^2 \left( -\frac{2}{3}x + 2 \right) - 3x \left( -\frac{2}{3}x + 2 \right)^2 dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^3 \left( -8x^2 - 24x + \frac{8}{3}x^3 - 8x^2 - 3x \left( \frac{4}{9}x^2 + 4 - \frac{8}{3}x \right) \right) dx$$

$$= \int_0^3 \cancel{-8x^2} + \cancel{24x} + \frac{8}{3}x^3 - 8x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \cancel{12x} + \cancel{8x^2} dx$$

$$= \int_0^3 \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 12x \, dx = \left[ \frac{4}{3} \frac{x^4}{4} - 8 \frac{x^3}{3} + 12 \frac{x^2}{2} \right]_0^3$$

$$= \left[ x^3 - 8x^2 + 6x^2 \right]_0^3 = 9$$

# Equazioni differenziali lineari del II ordine a coefficienti costanti

Derivata II

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

↑      ↑      ↑  
Coeffienti Costanti      Non Completa

Passo 1:  $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \rightarrow \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$

Equazione di II grado

Passo 2: Troviamo il  $\Delta$  dell'equazione e ne discutiamo il valore.

Passo 3: Discussione del  $\Delta$

A)  $\Delta > 0 \Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

B)  $\Delta = 0 \Rightarrow y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x} \Rightarrow y_0(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$

C)  $\Delta < 0 \Rightarrow y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$

$$A e^x \cdot e^{ix} = A [\cos(\theta) + i \sin(\theta)], \quad A e^x e^{-ix} = A [\cos(\theta) - i \sin(\theta)]$$

Se vogliamo scrivere  $e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)]$

$$e^{\alpha x} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x) + \cos(\beta x) - i \sin(\beta x)]$$

~~Da eliminare~~

$$e^{\alpha x} \cancel{2 \cos(\beta x)} = \frac{1}{2} e^{\alpha x} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x) \Rightarrow y_0(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$$

Massimi e minimi

$$Z = 4y^4 - 16x^2y + x$$

Step 1: Derivate parziali

$$f_x = -32xy + 1 \quad f_y = 16y^3 - 16x^2 \quad f_{xy} = f_{yx} = -32x \quad f_{xx} = -32y \quad f_{yy} = 48y^2$$

Step 2: poniamo  $f_x, f_y = 0$

$$\begin{cases} -32xy + 1 = 0 \\ 16y^3 - 16x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 32xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{32y} \\ = 0 \quad 16y^3 - 16 \cdot \frac{1}{1024y^2} = 0 \Rightarrow 16y^3 = \frac{16}{1024y^2} = 0 \quad 16y^5 = \frac{1}{64} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[5]{\frac{1}{1024}} = \left(\frac{1}{4}\right)y$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{32y} = \frac{1}{32 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \text{ Punto Stazionario } P_0$$

Step 3: Calcolo dell'Hessiano per ogni punto

$$H_f = \det \begin{Bmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{Bmatrix} = f_{xx}(P_0) \cdot f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0)$$

$$H_f(P_0) = \begin{Bmatrix} -32y & -32x \\ -32x & 48y^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -32 \cdot \frac{1}{4} & -32 \cdot \frac{1}{8} \\ -32 \cdot \frac{1}{8} & 48 \cdot \frac{1}{16} \end{Bmatrix} = (-8 \cdot 8) - (-4)^2 = -64 - 16 = 80$$

Siccome  $H_f(P_0) < 0 \Rightarrow$  Punto Sella

Valutazione Hessiano:

1)  $H_f(P_0) > 0$

•  $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$  (quasi sempre rispettata)

•  $f_{xx}(P_0) > 0$  OR  $f_{yy}(P_0) > 0 \Rightarrow P_0$  è un MINIMO

•  $f_{xx}(P_0) < 0$  OR  $f_{yy}(P_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un MASSIMO

2)  $H_f(P_0) < 0 \Rightarrow$  Punto SELLA

3)  $H_f(P_0) = 0 \Rightarrow$  BOH!

# Forza di Coulomb

ES 1

$$q_1 = q_2 = 1 \mu C \quad d = 1 \text{ cm}$$

$$* 1 \mu C = 10^{-6} C$$

$$* 1 \text{ cm} = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$* K_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$F = \epsilon_0 \frac{q_1 q_2}{d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{d^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8.854 \times 10^{-12}} \cdot \frac{1}{(10^{-6})^2} = \frac{1}{(10^{-2})^2 \cdot 10^{-4}}$$

$$= \frac{1}{4\pi \cdot 8.854} \cdot \frac{1}{10^{-4}} = 89.87 \text{ N}$$

Sono neutri!

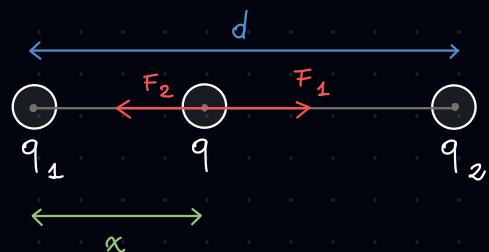
ES 2:  $q_2$  protoni,  $146$  neutroni Carica Totale:  $1.47 \times 10^{-17} C$

$$d \text{ media} = 7.4 \times 10^{-15} \text{ m} \quad F = ?$$

$$F = K_0 \cdot \frac{q_1 q_2}{d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1.47 \times 10^{-17}/92)}{(7.4 \times 10^{-15})^2} = 4.2 \text{ N}$$

Si approssima  
a  $9 \times 10^{-9}$

ES 3:  $q_1 = +4 \mu C$   $q_2 = +12 \mu C$   $d = 6 \text{ cm}$   $q$  viene posta tra  $q_1$  e  $q_2$



- Supponiamo che  $q$  sia positiva
- Se  $q$  è in equilibrio  $\Rightarrow F_1 = F_2$

$$\Rightarrow \frac{q_1 q}{x^2} = \frac{q_2 q}{(d-x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{q_1 q}{x^2} = \frac{q_2 q}{d^2 + x^2 - 2dx} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{x^2}{d^2 + x^2 - 2dx}$$

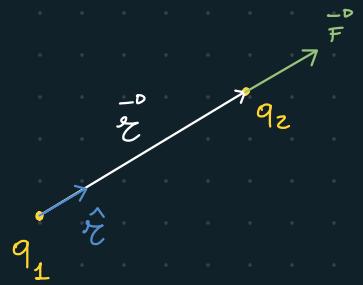
Lasciamo  $d$  in cm

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \frac{4 \times 10^{-6}}{12 \times 10^{-6}} = \frac{x^2}{6^2 + x^2 - 12x} \Rightarrow 3x^2 = 36 + x^2 - 12x \Rightarrow 2x^2 + 12x - 36 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 18 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 4(-18) = 54 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{54}}{2} = \frac{2.19}{-8.19} \text{ cm}$$

# Programma di Elettromagnetismo

## Forza di Coulomb



$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{\zeta^2} \hat{\zeta}$$

Come scegliere la costante  $K$ ?

Caso 1:  $K=1 \Rightarrow |\vec{F}| = \frac{q_1 q_2}{\zeta^2}$

Quali saranno le dimensioni della carica?  $q_1 q_2 = F \ell^2 \Rightarrow q^2 = F \ell^2$

Sappiamo che  $\ell(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2\ell}{t^2} \Rightarrow$  Siccome  $F = m \cdot \alpha$   
 $\Rightarrow q^2 = m \cdot \frac{2\ell}{t^2} \cdot \ell^2 = m \ell^3 t^{-2}$   
non ho  
idea di che  
fine faccia

$$\Rightarrow q = m^{\frac{1}{2}} \ell^{\frac{3}{2}} t^{-1} \quad \text{sistema cgs}$$

Caso 2: Scegliamo  $K = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$  COULOMB  $[...] \times 10^{12}$

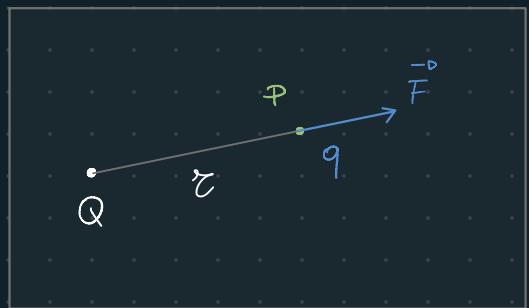
$$\text{Con } \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Costante dielettrica  
del vuoto

$$\Rightarrow |\vec{F}| = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\zeta^2}$$

# Campo Elettrico

Utilizzo del concetto di circuitazione



- 1) Poniamo una carica  $Q$  nella regione di Spazio
- 2)  $\Rightarrow$  Lo spazio viene perturbato dalla carica  $Q$
- 3)  $\Rightarrow$  Come conseguenza, Se poniamo una carica di prova  $q$  molto piccola, questa viene attratta o respinta dalla FORZA generata da  $Q$ .

La forza risultante sarà  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{\vec{r}}$

$\rightarrow$  Il campo non dipende da  $q$  perché molto piccola rispetto  $Q$ :  $q \ll Q$   
 $\Rightarrow$  Definiamo il CAMPO ELETTRICO come:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

CAMPO ELETTRICO

## Il LAVORO del campo Elettrico

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Superficie

Lavoro sulle SUPERFICI

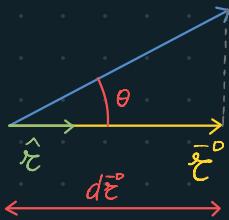
$$L_E = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{e}$$

Spostamento INFINITESIMO della Carica

Lavoro nel campo elettrico

$$\begin{aligned} \rightarrow L &= \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{\vec{r}} \cdot d\vec{e} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\hat{\vec{r}}}{r^2} d\vec{e} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{d\vec{e}}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} d\vec{e} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_A^B = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned}$$

LAVORO



$$d\vec{e} \cdot \hat{\vec{r}} = |d\vec{e}| |\hat{\vec{r}}| \cos\theta = d\vec{e} \cos\theta = d\vec{e} \cdot \hat{\vec{r}}$$

Spostamento infinitesimo diretto lungo \hat{\vec{r}}

Differenza di due termini

ENERGIA POTENZIALE

$$\rightarrow \text{Dalla meccanica "Battezziamo"} \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} \right) = U_A$$

$$\left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} \right) = U_B$$

$$\Rightarrow L = U_A - U_B \quad \text{Differenza del POTENZIALE}$$

## IL POTENZIALE ELETTRICO

Se calcoliamo il Lavoro del campo Elettrostatico otteniamo

$$L = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{U_A}{q} - \frac{U_B}{q} = V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon_A} - \frac{1}{\epsilon_B} \right)$$

Mancano la carica di prova  $q$   
Differenza Tra potenziali  
Elettrici

Considerazioni: Spostiamo la carica da A a B con  $A \neq B \Rightarrow$  CAMMINO NON CHIUSO

$\Rightarrow$  Se il lavoro dipende solo dallo stato finale ed iniziale

$\Rightarrow$  Il Campo elettrostatico è CONSERVATIVO!

Che cosa è il campo Elettrostatico?

Assumiamo che nel campo, mentre le cariche di prova  $q$  sono libere di muoversi,  
 $Q$  rimane ferma!

Appena le cariche  $Q$  si muovono il campo non è più CONSERVATIVO!

## LA CIRCUITAZIONE del campo Elettrostatico

$$C = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow \text{Applicata ad } \vec{E} \rightarrow C = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \underbrace{U_A - U_B}_{\text{è un cammino chiuso } A=B} = 0$$

$\Rightarrow$  La circuitazione del campo elettrostatico è zero!

$$\text{Ricordando il teorema del ROTORE: } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = 0$$

$\Rightarrow$  Deduiamo che  $(\vec{\nabla} \times \vec{E})$  DEVE ESSERE ZERO

Il Campo è Conservativo

Il lavoro non  
dipende dal  
CAMMINO

Il rotore del  
Campo è zero

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Equazione di Maxwell per l'elettrostatica

$$1) L = \int_{\mathcal{C}} \bar{F} d\bar{e} = -U \rightarrow \text{derivo} \rightarrow dL = \bar{F} d\bar{e} = -dU$$

$E_{\text{cinetica}}$      $E_{\text{potenziale}}$

Perche'? Dal Teorema dell'E cinetica:  $L = \int_{\mathcal{S}} \bar{F} d\bar{s} = G_B - G_A = G$  Siccome  $G = -U$

$$2) \text{Dividiamo per la carica di prova } q \rightarrow \frac{dL}{q} = \frac{\bar{F}}{q} d\bar{e} = -d\frac{U}{q} = \bar{E} d\bar{e} = d\bar{V}$$

• Il potenziale  $V$  e' una funzione di più variabili: PUNTO 1

$$d\bar{V} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Differenziale  
della differenza  
del potenziale  $E$ .

$\rightarrow$  Ci ricordiamo delle definizioni di gradiente e del fatto che  $d\bar{e}$  ha 3 componenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \bar{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \\ d\bar{e} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \end{array} \right. = \quad dV = (\nabla V) \cdot d\bar{e}$$

PUNTO 2

Morale della favola: Il differenziale di una qualsiasi funzione di 3 variabili puo' essere scritta come il prodotto scalare tra il gradiente della funzione per  $d\bar{e}$

3) Torniamo al punto 1:

$$\bar{E} \cdot d\bar{e} = -dV \quad \text{siccome nel punto 2} \quad dV = (\nabla V) \cdot d\bar{e}$$

otteniamo  $\bar{E} \cdot d\bar{e} = -\nabla V \cdot d\bar{e} \rightarrow \bar{E} = -\nabla V$

LEGGE DI COULOMB

Morale della favola: in un campo conservativo, possiamo scrivere il campo come il GRADIENTE di un campo scalare

ROTORE

$$\nabla \wedge \bar{E} = \emptyset \iff \bar{E} = -\nabla V$$

GRADIENTE

Si equivalgono

gradiente

Perche' il rotore di un gradiente e' sempre zero:  $\nabla \wedge (\nabla V) = 0$

ROTORE

# Superficie equipotenziale

Presi due punti qualsiasi A e B sulla sup. equipotenziale,  $V_A = V_B = V_N \quad \forall N \in S$

Conseguenza:  $L = q(V_A - V_B) = \emptyset$  visto che  $V_A = V_B$

$\Rightarrow$  Il lavoro su queste superfici è zero!

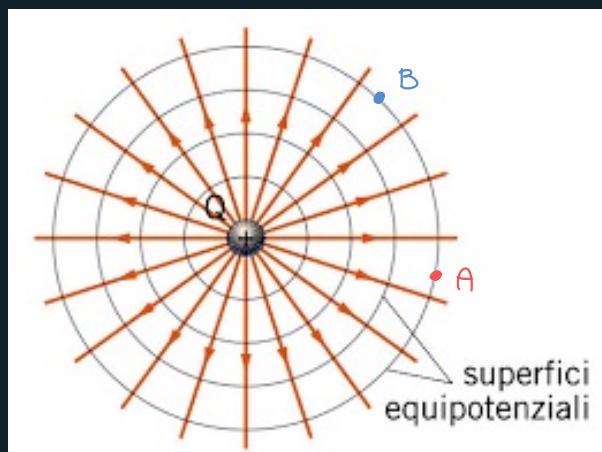
Ragionando ulteriormente:

$$L = q(V_A - V_B) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dq(V_A - V_B) = \emptyset$$

Quando il prodotto scalare è zero?  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}\vec{r}| \cdot \cos(\alpha)$

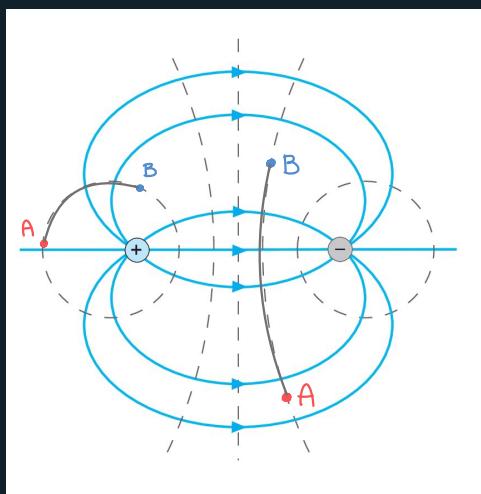
$$\begin{aligned} 1. |\vec{F}| = 0 &\Leftrightarrow \\ 2. |\vec{d}\vec{r}| = 0 &\Leftrightarrow \\ 3. \cos(\alpha) = 0 &= 0 \quad \vec{F} \perp d\vec{r} \end{aligned}$$

Morale della favola: Lo spostamento lungo una sup. equipotenziale avviene in modo perpendicolare alle linee di forza!



- Per una singola carica Q è semplice disegnare le sup. equip.: basta tracciare le tangenti alle linee di forza, ottenendo dei cerchi concentrici attorno alla carica.

$\Rightarrow$  Se mi muovo da A a B non compio lavoro!



# Teorema di Gauss

utilizzo del concetto  
di flusso

Lezione 26

Recap:

$$\text{Flusso} = \phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_S \vec{E} \cdot \frac{dS}{\hat{n} dS}$$

Campo elettrico

Il Teorema: ci assicura che data una carica interna alla superficie considerata, il flusso del campo elettrico attraverso la sup. è la somma delle cariche contenute nella superficie.

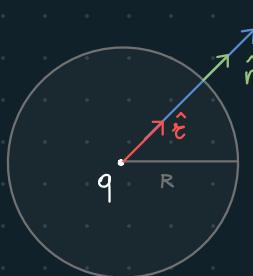
$$\oint_S \vec{E} dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Quindi Il flusso non dipende dalla superficie ma da cosa c'è contenuto in essa.

DIMOSTRAZIONE 1: Superficie sferica

1) Usiamo la superficie di una sfera: Usiamo la sfera di raggio  $R$  per circondare la carica puntiforme:

$$\text{Eq sfera: } (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$



Siccome la carica c'è una, il campo elettrico sarà:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \hat{r}$$

2) Calcoliamo  $d\Phi$ : il flusso infinitesimo

$$d\Phi = d \left[ \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS \right] = \vec{E} \cdot \hat{n} dS = |\vec{E}| \cdot |\hat{n} dS| \cdot \cos(0) = \boxed{\vec{E} dS}$$

Scalari

3) Flusso TOTALE: sommare  $d\Phi$  lungo la sfera

$$\Rightarrow \Phi = \oint_S \vec{E} dS = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS$$

$r$  è costante  
Per la SFERA

$\Rightarrow$  Superficie della sfera:  $4\pi r^2$

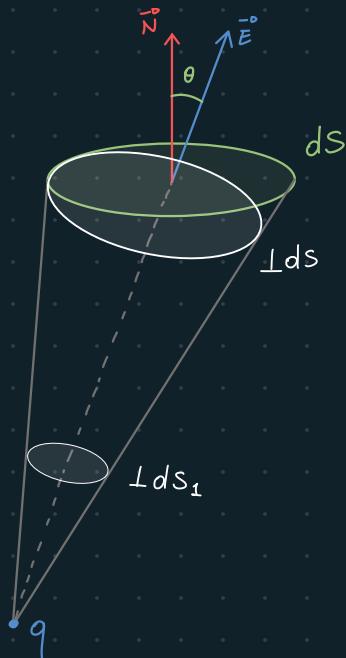
$$\Rightarrow \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Teorema di Gauss

Considerazioni finali:  
da carica puntiforme genera un campo a simmetria sferica, quindi ci conviene prendere una superficie sferica.

DIMOSTRAZIONE 1: Superficie QUALSIASI ← vera dimostrazione!

1) Prendiamo una superficie chiusa qualsiasi: Facciamo partire dalla carica un CONO (come una luce che parte da una Torsa elettrica) che colpisce la superficie:

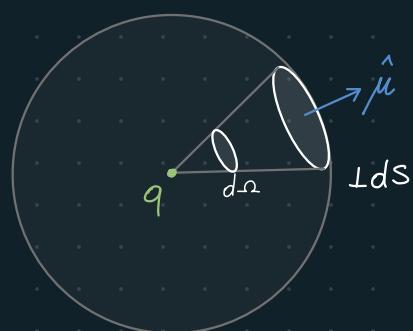


- $ds$  è un "pezzo" di superficie qualsiasi
- $Lds$  e  $Lds_1$  sono pezzi di superfici sferiche
- Il campo  $\vec{E}$  è perpendicolare alla SFERA (come abbiamo visto prima)
- La normale  $\vec{N}$  alla sup. qualsiasi non coincide alla Normale della Sfera, che va come  $\vec{E}$
- Si forma quindi un angolo  $\theta$  Tra  $\vec{N}$  e  $\vec{E}$

Morale della favola: Se posso Trovare  $\vec{N} = \cos(\theta) \vec{E}$  Allora  $Lds = ds \cos(\theta)$

Questo è importante perché così possiamo ricondurci al caso della sfera.

2) Definiamo L'ANGOLO SOLIDO: È un angolo a 3 dimensioni al centro del cono ottenuto prendendo una porzione di  $Lds$  sulla circonferenza:



$$\Rightarrow \text{angolo solido: } d\Omega = \frac{Lds}{r^2} = \frac{ds \cos \theta}{r^2}$$

"un pezzettino di  
circonferenza diviso  
 $r^2$ "

↳ Si misura in STERADIANTI

Superficie  
qualsiasi

3) Applichiamo l'angolo solido al ragionamento della dim 1:

$$d\Phi = d \left[ \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds \right] = \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mu} \cdot \hat{n} ds$$

Normale della sfera  
modulo 1

Normale della Superficie  
modulo 2

$$= \text{mod}_1 \cdot \text{mod}_2 \cdot \cos(\theta) =$$

Angolo solido

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ds \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega$$

A.S.  
Flusso infinitesimale

4) Otttenuto un "elementino" di flusso attraverso la superficie, per trovare il flusso totale integriamo:

$$\Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega$$

Integrale del "pezzettino" di angolo solido

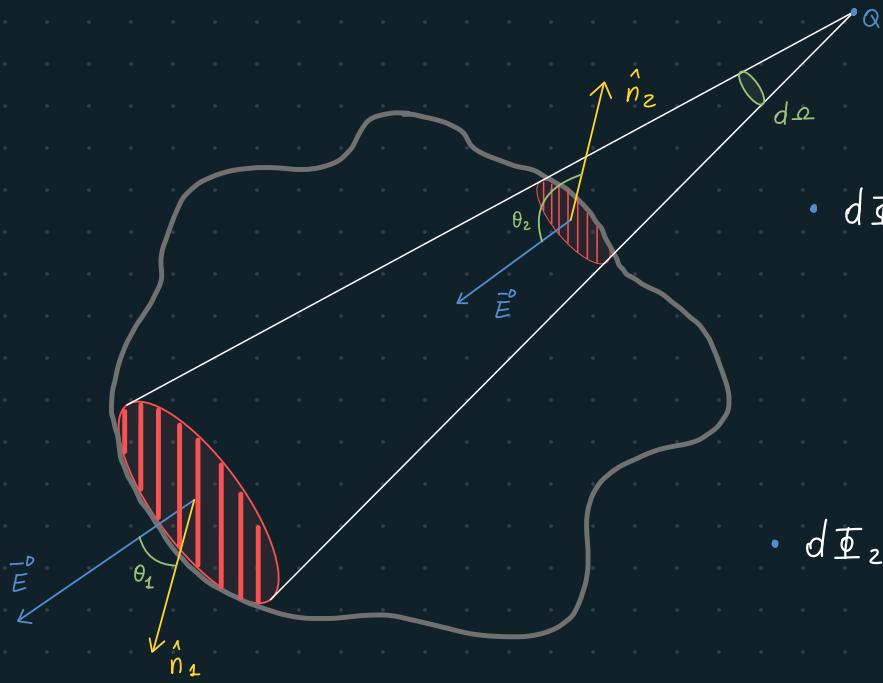
$$\text{Siccome } d\Omega = \frac{ds \cos \theta}{r^2} = \frac{\perp ds}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

Sup sfera =  $4\pi r^2$

$$\Rightarrow \Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

CVD

## Caso II: CARICA ESTERNA ALLA SUPERFICIE



Troviamo  $d\Phi$  per  
Entrambe le Superfici

$$\begin{aligned} d\Phi_1 &= \vec{E} \cdot \hat{n} ds_1 = E \cdot ds_1 \cos(\theta_x) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ds_1 \cos \theta_1}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\Phi_2 &= \vec{E} \cdot \hat{n} ds_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ds_2 \cos \theta_2}{r^2} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega \end{aligned}$$

$(\cos \theta > 90^\circ) < 0$

Morale della favola

Se  $d\Phi_1 = -d\Phi_2$  vuol dire che se sommiamo Tutti i flussi elementari lungo TUTTA la superficie otteniamo ZERO!

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds = 0$$

Flusso attraverso una  
superficie con carica  
ESTERNA

# Equazioni di Maxwell in Elettrostatica

1) Teorema della divergenza:

↳ La superficie  $S$  chiusa circonda il volume

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Superficie

Volume

Teorema GAUSS

→ L'integrale  $\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$  del flusso attraverso una superficie chiusa è pari alla DIVERGENZA di  $\vec{E}$  del VOLUME contenuto nella superficie.

2) DENSITÀ DI CARICA nel volume:

$$\text{Poniamo } f = \frac{dQ}{dv} \Rightarrow f dV = dQ$$

$$\Rightarrow Q = \int_V f dV$$

3) Sostituiamo nel Teorema di Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V f dV \quad \text{Abiamo due integrali sul volume}$$

$$\Rightarrow \text{Possiamo togliere gli integrali} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} f \quad \begin{array}{l} \text{I}^{\circ} \text{ Equazione di} \\ \text{Maxwell per l'Elettrostatica} \\ \text{DIVERGENZA DI E} \end{array}$$

3) Ricordiamo l'altra eq di Maxwell trovata qualche lezione fa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} f \quad \text{I}^{\circ} \text{ Equazione di} \\ \text{Maxwell per l'Elettrostatica} \\ \nabla \wedge \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V \quad \text{II}^{\circ} \text{ Equazione di} \\ \text{Maxwell per l'Elettrostatica} \end{array} \right.$$

4) Proviamo a sostituire  $\vec{E}$  dalla II alla I:

$$\Rightarrow \nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{f}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{f}{\epsilon_0} \quad \begin{array}{l} \text{Equazione di Poisson} \\ \text{E' un'eq già nota in matematica} \end{array}$$

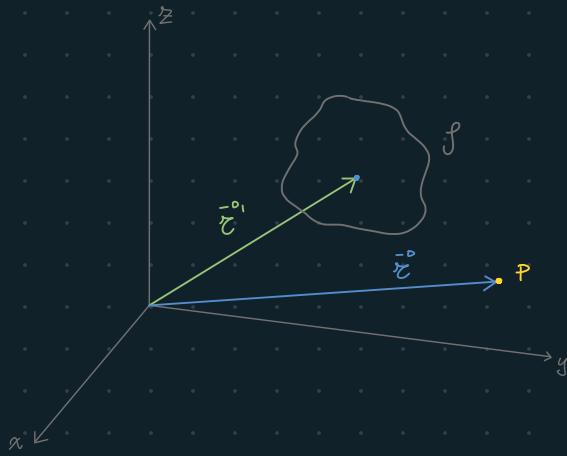
# Soluzione dell'equazione di Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{f}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{f(\vec{\tau}')}{|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|} dV'$$

Potenziale

Posizione delle cariche

Punto in cui Calcoliamo il campo



- $V'$  è il volume occupato dalla carica
- $\vec{\tau}'$  è la posizione delle cariche contenute nella distribuzione di carica  $f$
- Nel punto  $P$  avremo un campo che è la somma dei campi generati dalle singole cariche poste in  $f$
- $|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|$  è la distanza tra  $f$  e  $P$ .

Lo scopo del gioco

Abbiamo la relazione

① Maxwell 2° eq

$$\vec{E} = -\nabla V$$

che lega il campo elettrostatico al

Troviamo  $V$  come  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{f(\vec{\tau}')}{|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|} dV'$

Soluzione alla  
eq di Poisson

Quindi:  $\vec{E} = -\nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{f(\vec{\tau}')}{|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|} dV' \right]$

"Dimostrazione" della soluzione...

Se la soluzione è giusta, sostituita nell'eq  $\nabla^2 V = -\frac{f(\vec{\tau})}{\epsilon_0}$   
l'identità deve rimanere vera:

$$\nabla^2 V = \nabla^2 \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{f(\vec{\tau}')}{|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|} dV' \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V f(\vec{\tau}') \cdot \nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|} \right) dV'$$

Il Laplaciano opera su  $\vec{\tau}'$

Delta di Dirac

$\Rightarrow$  Assumiamo che  $\nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|} \right) = -4\pi \cdot \delta(\vec{\tau} - \vec{\tau}')$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V f(\vec{\tau}') \cdot 4\pi \delta(\vec{\tau} - \vec{\tau}') dV' = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V f(\vec{\tau}') \delta(\vec{\tau} - \vec{\tau}') dV'$$

CVD

$\Rightarrow$  Per la proprietà della Delta  $\int f(x) \cdot \delta(x - x_0) = f(x_0)$   $\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V f(\vec{\tau}) \delta(\vec{\tau} - \vec{\tau}') = -\frac{f(\vec{\tau})}{\epsilon_0}$

# Recap Elettrostatica

Forma integrale

con carica interna  $\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$

con carica esterna  $\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 0$

Teorema di Gauss  $\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{I}^{\circ} \text{ Equazione di} \\ \text{Maxwell per l'Elettrostatica} \end{array}$$

$$\quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla V \quad \begin{array}{l} \text{II}^{\circ} \text{ Equazione di} \\ \text{Maxwell per l'Elettrostatica} \end{array}$$

Combinando le eq di Maxwell:

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Equazione di Poisson

Soluzione:  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$

# Esempi di applicazione del teorema di Gauss

1) Teorema di Coulomb L26

2) FILO CARICO L27

3) STrato Carico L27

4) Doppio Strato Carico L27

Calcolo del Campo Elettrico SENZA L'aiuto del teorema di GAUSS

1) FILO CARICO L27

2) ANELLO CARICO L27 1:16

3) Disco CARICO L28 1:25

# Teorema di Coulomb

E' un'applicazione del Teorema di Gauss ad un caso particolare.

Esercizio: Vogliamo calcolare il campo elettrico in un punto  $P$  vicino alla superficie di un conduttore:



Siccome siamo in elettrostatica, le cariche sono ferme!  $\Rightarrow$  non c'è forza

$$\text{infatti } \vec{E} = \frac{\vec{F}_C}{q} \Rightarrow \text{Se } \vec{F}_C = 0 \Rightarrow \vec{E} = \emptyset$$

1) Mi scelgo una Superficie INTERNA al conduttore ASTRATTA

$$2) \text{ Siccome } \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \xleftarrow{\emptyset} = \emptyset$$

$\Rightarrow$  Concludiamo che il conduttore è NEUTRO!  $n(\text{Protoni}) = n(\text{Elettroni})$

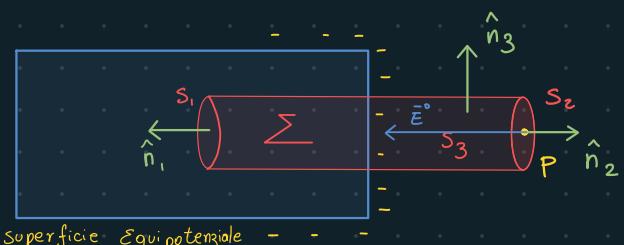
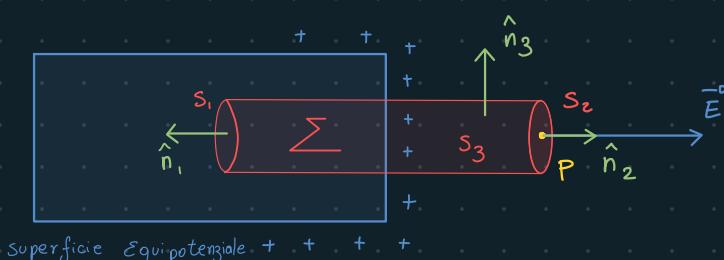
$\Rightarrow$  Non ci sono cariche DENTRO il conduttore.

3) Non ci sono cariche DENTRO il conduttore, ma potrebbero essercene SULLA SUPERFICIE

$$\text{Siccome } \vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \nabla V = 0 \Rightarrow V = \text{cost}$$

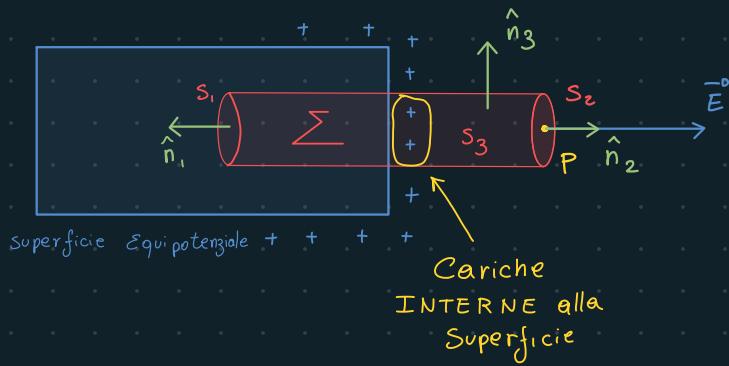
Se le derivate di  $V$  è zero,  $V = \text{cost}$

4) Concludiamo che se  $V$  è costante  $\Rightarrow$  S è una superficie Equipotenziale



nota:  $\sum$  è la superficie laterale  $S_3$

## 5) Calcolare il modulo del campo elettrico



↳ Abbiamo posizionato il cilindro in modo da ritrovareci con delle cariche all'interno del cilindro

⇒ Possiamo usare il teorema di Gauss:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS + \int_{\sum} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

① Non ci sono cariche all'interno  $\Rightarrow \int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \emptyset$

③  $\vec{E} \perp \hat{n}_3 \Rightarrow \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS = E \cdot n dS \cdot \cos(90^\circ) = \emptyset$

②  $\vec{E} \parallel \hat{n}_2 \Rightarrow \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS = E \underbrace{n dS}_{\perp} \cos(0) = E dS$

Morale della favola :

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS = |\vec{E}| \cdot S_2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \left( \frac{Q_{int}}{S_2} \right) \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Densità di carica  
Superficiale

Alternativamente  
Come  $f = \frac{dQ}{dv} \Rightarrow dQ = f dv \Rightarrow Q = \int_V f dv$

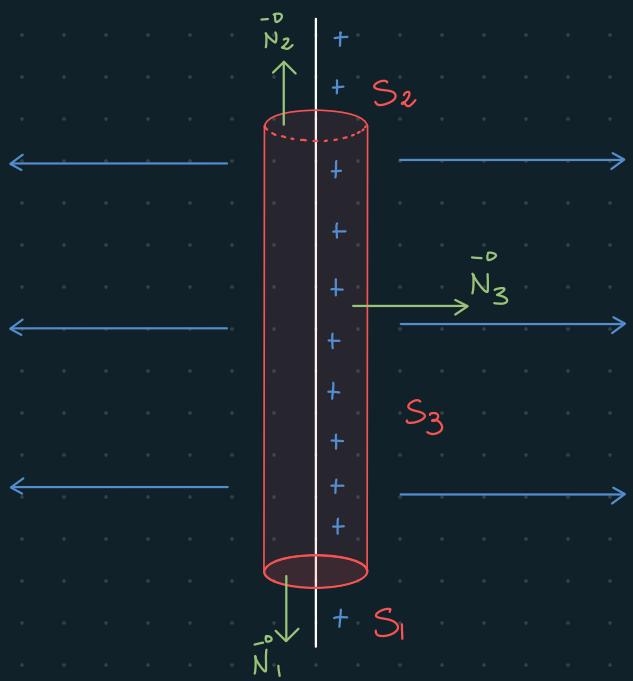
Poniamo  $\sigma = \frac{dQ}{ds} \Rightarrow dQ = \sigma ds \Rightarrow Q = \int_S \sigma ds$

$$\Rightarrow \int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \sigma ds \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Stesso Risultato

## 2) FILO CARICO

L27



Dal teorema di Coulomb

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Abbiamo 3 superfici

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS + \int_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS$$

$\hat{n}_1 \perp \vec{E}$   
 $\hat{n}_2 \perp \vec{E}$   
 $\hat{n}_3 \parallel \vec{E}$

$$\Rightarrow \Phi = \int_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n}_3 dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \hat{r} \cdot \hat{n}_3 dS =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( \int dS \right) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$2\pi r \cdot (\ell)$  è e' infinito  $\Rightarrow \lambda = \frac{Q}{\ell} \Rightarrow Q = \lambda \ell$

$$\Rightarrow |\vec{E}| \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow |\vec{E}| \cdot S = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0} = |\vec{E}| \cdot 2\pi r \ell = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

MODULO DEL  
Campo elettrico di  
un filo carico

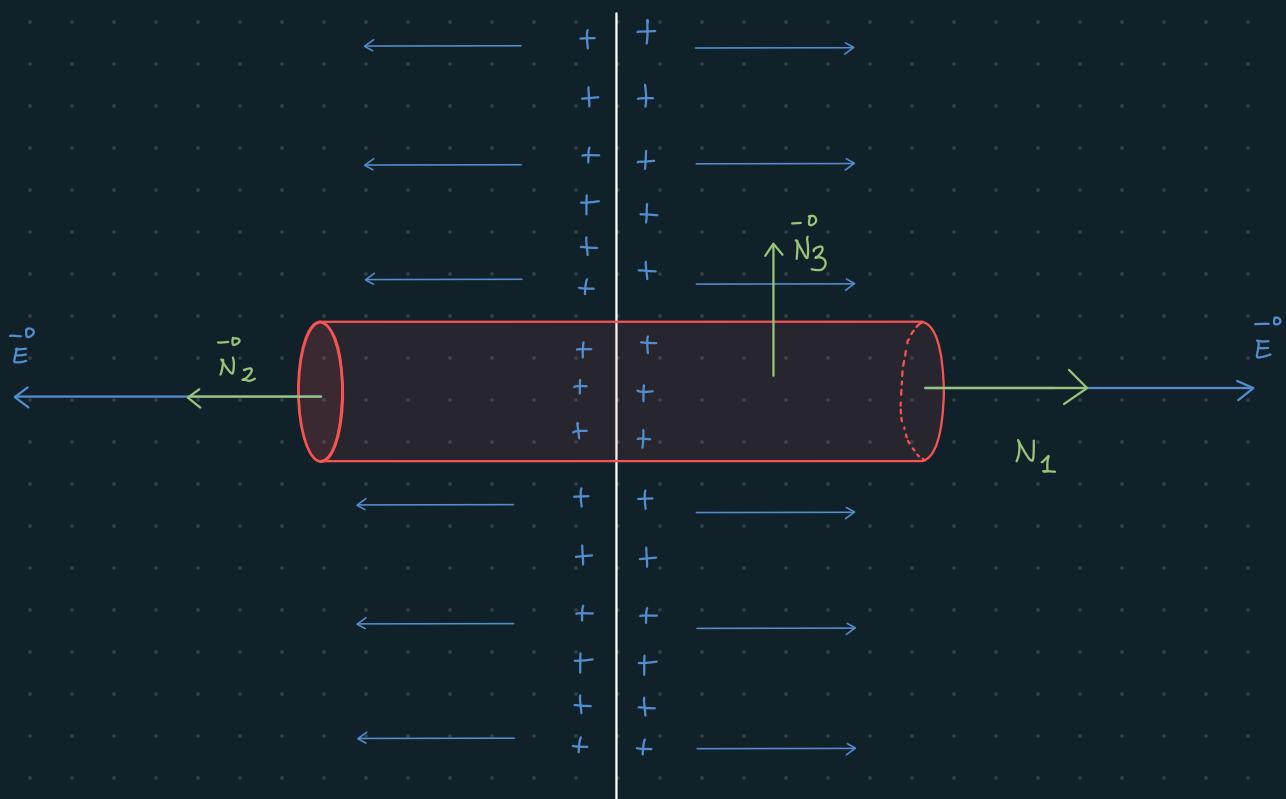
$\Rightarrow$  Per ottenere il Vettore campo elettrico  $\vec{E}$   
ci basta moltiplicare per il versore  $\hat{n}_3$  con

$$\Rightarrow \vec{E} = |\vec{E}| \hat{n}_3 = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \hat{n}$$

Vettore Campo elettrico di  
un filo carico

### 3) Strato Carico

L27



$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS + \int_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS$$

$\vec{E} \perp \hat{n}_3$

$= 2 \int \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 2 |\vec{E}| \iint_S dS$  GAUSS  $= \frac{\sigma_{TOT}}{\epsilon_0}$

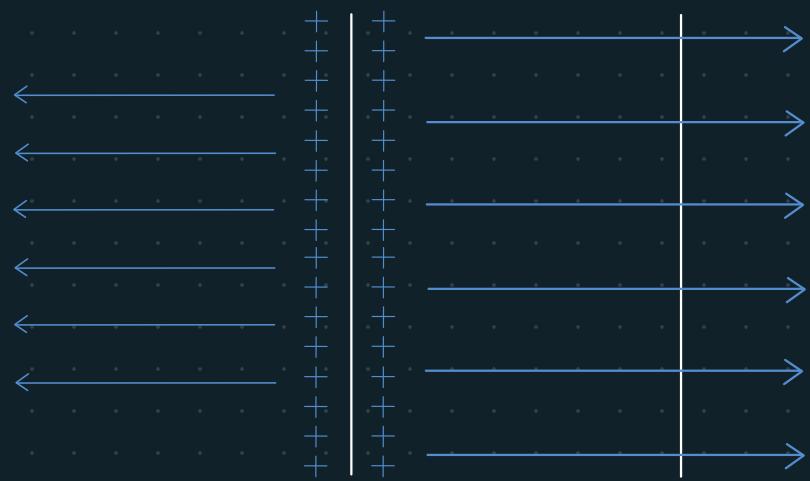
Siccome  $S_1 = S_2$

Siccome  $\sigma = \frac{\sigma}{S} \Rightarrow \sigma = \sigma \cdot S$

$= 2 |\vec{E}| \cdot S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$

MODULO del campo elettrico  
di uno strato carico

### 3) Doppio Strato Carico L27



Abbiamo una lastra ionizzata.

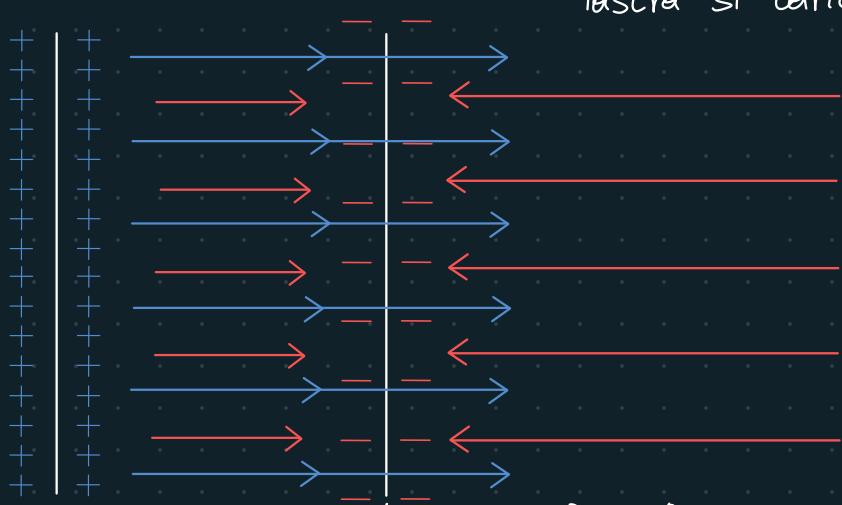
Strato Carico



$$|\vec{E}_1| - |\vec{E}_2| = 0$$

②

Strato Neutro



$$|\vec{E}| + |\vec{E}| = 2|\vec{E}|$$

①

Per effetto di induzione l'altra lastra si carica del segno opposto.

$$|\vec{E}_1| - |\vec{E}_2| = 0$$

③

Nella regione ① abbiamo  $|\vec{E}_1| + |\vec{E}_2| = 2|\vec{E}|$  ma  $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$   
 $|E_1| = |E_2|$

$$\Rightarrow E_{TOT} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\text{dove } \sigma = \frac{Q}{S}$$

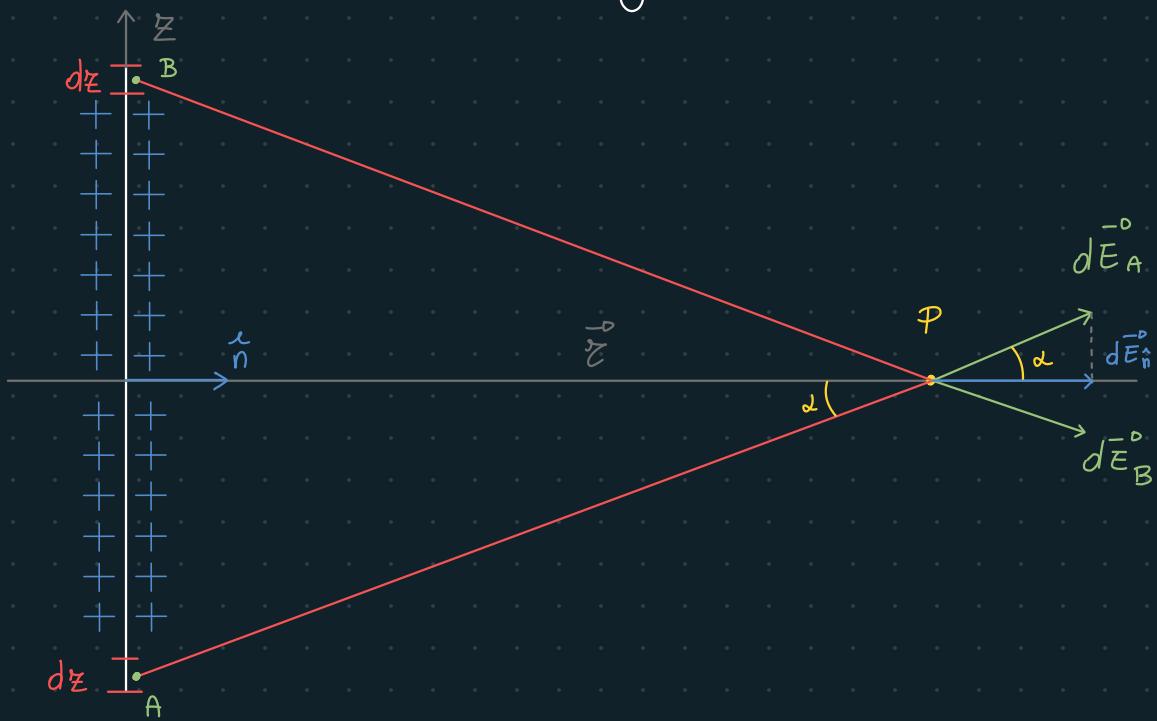
Densità Superficiale di Carica

MODULO del campo elettrico  
della regione compresa tra  
due lame

# 1) FILO CARICO di lunghezza finita

Senza Gauss

L27



Prima di iniziare scriviamo qualche uguaglianza:

$$\begin{aligned} \bullet \quad |\vec{r}| &= \overline{AP} \cos \alpha = \overline{BP} \cos \alpha \\ \bullet \quad \overline{AP} &= \sqrt{r^2 + z^2} = \overline{BP} = \sqrt{r^2 + z^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad |\vec{r}| = \sqrt{r^2 + z^2} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{r}}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Possiamo scriverci il contributo di  $dz$  al campo magnetico tramite la forza di Coulomb

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{AP^2} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2 + z^2}$$

$$\text{Sapendo che } \lambda = \frac{dq}{dz} \text{ nel nostro caso } \lambda = \frac{dq}{dz} \Rightarrow dq = \lambda dz$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)}$$

Ci interessa solo la componente di  $\vec{E}$  lungo  $\hat{n}$ :

$$\vec{E}_n = \vec{E} \cos \theta \Rightarrow d\vec{E}_n = d\vec{E} \cos \theta = d\vec{E} \cdot \frac{\vec{r}}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } d\vec{E}_n &= \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)} \cdot \frac{\vec{r}}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)} \cdot \frac{\vec{r}}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

A questo punto integreremo

$$E = \int_0^e \frac{d\zeta}{(4\pi\epsilon_0)(r^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^e \frac{d\zeta}{(r^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

*Dipendono da  $\zeta$ .*

$$= \frac{2\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\zeta}{\sqrt{r^2 + \zeta^2}} \right]_0^e = \frac{2\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{e}{\sqrt{r^2 + e^2}}$$

MODULO del filo carico di lunghezza  $e$

Se volessimo calcolare il Vettore campo elettrico:

$$\vec{E}_n = |E_n| \cdot \hat{r} = \frac{\lambda e}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{r^2 + e^2}} \cdot \hat{r}$$

VETTORE Campo Elettrico

### CONSIDERAZIONE

In questo caso possiamo calcolare il CE per un filo di lunghezza definita. Infatti la formula è diversa dalla dim. precedente.

Se poniamo  $e = \infty$  otteniamo:

$$\lim_{e \rightarrow +\infty} \frac{\lambda e}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{r^2 + e^2}} \underset{e \gg r}{\sim} \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Stessa formula del filo infinito

$$\bullet \vec{E} = \overline{AP} \cos \theta = \sqrt{\zeta^2 + z^2} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{z_0}{\sqrt{\zeta^2 + z^2}}$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + z^2}} \right)^2$$

$$\Rightarrow d\vec{E}_n^\perp = d\vec{E} \cos \theta$$

$$\Rightarrow d\vec{E}_n^\perp = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\zeta^2 + z^2} \cos \theta$$

$$= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\zeta^2 + z^2)} \cdot \frac{z_0}{\sqrt{\zeta^2 + z^2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_0}{(\zeta^2 + z^2)^{3/2}}$$

Pongo  $\lambda = \frac{q}{C}$   $\Rightarrow q = \lambda C \Rightarrow \int dq = \int \lambda dC = q$

$$\Rightarrow d\vec{E}_n^\perp = \frac{\lambda dC}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z_0}{(\zeta^2 + z^2)^{3/2}}$$

$\rightarrow$  Per trovare  $\vec{E}_{TOT}$  ci basta integrare

$$\Rightarrow \vec{E}_n^\perp = \oint_C \frac{\lambda \zeta}{4\pi\epsilon_0 (\zeta^2 + z^2)^{3/2}} dC$$

*TUTTO costante  
RISPETTO A C*

$$= \frac{\lambda z_0}{4\pi\epsilon_0 (\zeta^2 + z^2)^{3/2}} \oint_C dC = \frac{\lambda z_0}{4\pi\epsilon_0 (\zeta^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (2\pi\zeta)$$

(1)

$$\Rightarrow |\vec{E}_n^\perp| = \frac{\lambda z_0 \zeta}{4\pi\epsilon_0 (\zeta^2 + z^2)^{3/2}}$$

Possiamo scrivere la (1) come  $\lambda = \frac{dq}{dC} \Rightarrow q = \int \lambda dC = \lambda C$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\lambda z_0}{4\pi\epsilon_0 (\zeta^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (2\pi\zeta) = \frac{\lambda C z_0}{4\pi\epsilon_0 (\zeta^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{Q \cdot z_0}{4\pi\epsilon_0 (\zeta^2 + z^2)^{3/2}}$$

Campo elettrico in Termini della Carica

## Considerazioni sull'anello carico

Se osserviamo l'anello da una grande distanza, ovvero  $z_0 \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{z_0 \rightarrow \infty} \frac{Q \cdot z_0}{4\pi \epsilon_0 (\zeta^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q z_0}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{(\zeta^2 + z_0^2)^3}} = \frac{Q z_0}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{z_0^6}} \quad \zeta_0 \gg \zeta \Rightarrow \frac{Q z_0}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{z_0^6}}$$
$$\Rightarrow E = \frac{Q z_0}{4\pi \epsilon_0 z_0^3} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 z_0^2}$$

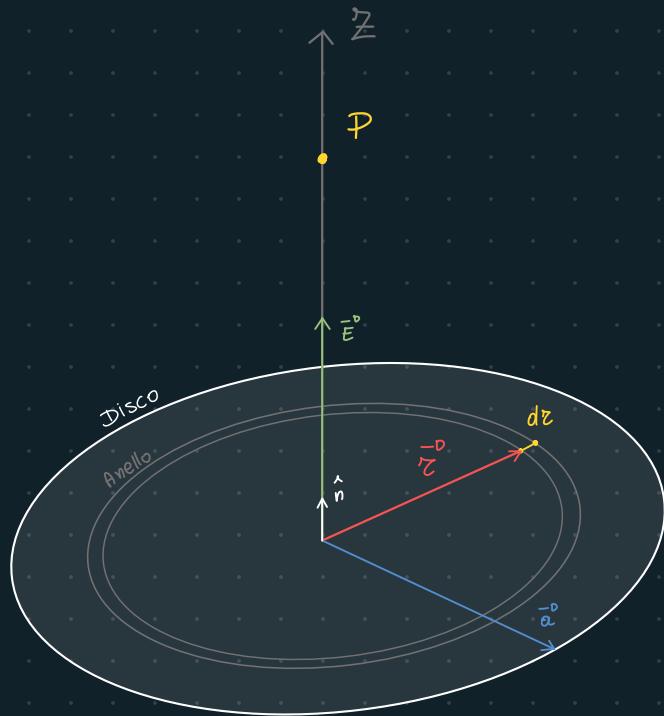
$\triangleleft \Rightarrow$  Forza di Coulomb per una carica PUNTIFORME

Morale della favola

Per  $z_0 \rightarrow \infty \Rightarrow z_0 \gg \zeta \Rightarrow \zeta$  è infinitesimale, e  
per  $\zeta$  molto piccolo UNA SFERA DIVENTA UN PUNTO

$\Rightarrow$  d'anello si comporta come una carica puntiforme

### 3) DISCO CARICO



- Un disco carico non è altro che una serie di anelli carichi concentrici

Punto di Partenza

$$E_{\text{Anello}} = \frac{Q \cdot z_0}{4\pi \epsilon_0 (r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Densità di carica

Carica totale :

$$\left( \frac{Q}{S} \right) \cdot (2\pi a^2)$$

Area Disco

$$\Rightarrow \text{Siccome } \sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q_{\text{TOT}} = \sigma \pi a^2$$

$Q_{\text{Anello}} = \text{Carica infinitesimale lungo una circonferenza} :$

Sia  $r$  il raggio dell'anello  $\Rightarrow dQ_{\text{Anello}} = 2\pi r \sigma dr$

$$dQ_{\text{Anello}} = dI \left( \sigma \pi r^2 \right) = \sigma \pi 2r dr$$

$$\text{Sostituiamo ad } E_{\text{Anello}} \Rightarrow dE_{\text{Anello}} = \frac{dQ \cdot z}{4\pi \epsilon_0 (r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi r \sigma dr \cdot z_0}{4\pi \epsilon_0 (r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dE_{\text{Anello}} = \frac{z r \sigma}{2\epsilon_0 (r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} dr$$

Integriamo  $\Rightarrow E_{\text{Anello}} = \int_0^a \frac{z r \sigma}{2\epsilon_0 (r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} dr$  \* Il raggio varia tra zero ed  $a$

$$E_{\text{Anello}} = \frac{z_0 \sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r}{(r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \frac{z_0 \sigma}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} \right]_0^a =$$

$$= \frac{z_0 \sigma}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{a^2 + z_0^2}} + \frac{1}{z_0} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z_0}{\sqrt{a^2 + z_0^2}} \right)$$

## Considerazioni sul disco carico

Per trovare lo stesso risultato della lama carica ci basta far tendere a  $+\infty$  il raggio:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z_0}{\sqrt{a^2 + z_0^2}} \right) = \sigma \gg z_0 = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z_0}{a} \right)$$

$\theta$

$= \boxed{|\vec{E}_{\text{TOT}}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$  Stesso valore della lama

# APPLICAZIONI DELLE DOPPIE LAMINE CARICHE: I CONDENSATORI

- Introduzione: La Capacità

1) Condensatore piano

2) Condensatore Sferico

3) Condensatore Cilindrico: CAVO COASSIALE

- LA CAPACITÀ

Abbiamo definito il potenziale come soluzione dell'eq di poisson:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Da questo capiamo che il Potenziale è proporzionale alla carica

$$\Rightarrow V = K Q \quad \text{costante di proporzionalità} \quad \Rightarrow K = \frac{Q}{V} \quad \text{Battezziamo } 'K' = C$$

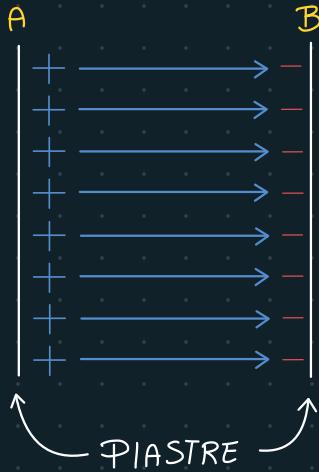
CAPACITA' del conduttore

$$\text{Quindi: } C = \frac{Q}{V} \quad \begin{matrix} \text{Carica} \\ \text{Potenziale} \end{matrix}$$

MISURATO IN FARAD

# I CONDENSATORI

Un condensatore è composto da due conduttori posti in una geometria di INDUZIONE COMPLETA: questo vuol dire che TUTTE le linee di forza emesse dal primo conduttore entrano nel secondo, andando a cari carlo della carica opposta per effetto del fenomeno di induzione elettrostatica.



Sapendo che la differenza di potenziale è prop. alla carica e che  $Q_1 = Q_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_A = \kappa_1 Q \\ V_B = \kappa_2 Q \end{array} \right. \Rightarrow \begin{aligned} V_B - V_A &= Q \kappa_2 - Q \kappa_1 \\ &\underline{= Q (\kappa_2 - \kappa_1)} \end{aligned}$$

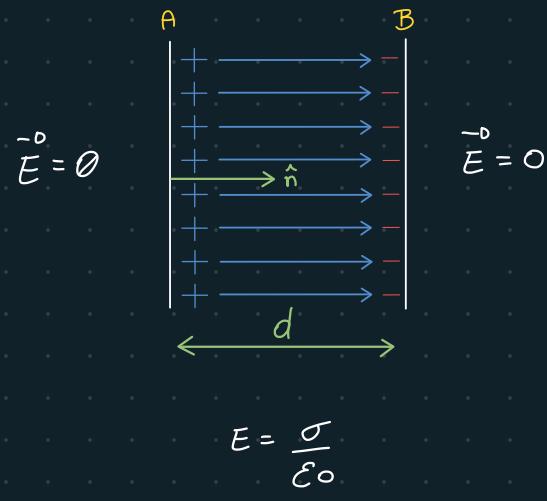
Siccome  $(\kappa_2 - \kappa_1)$  è una costante, la battezziamo

$$= \frac{1}{C} Q \quad \Rightarrow \quad \text{FORMULA } ① \quad C = \frac{Q}{V_B - V_A}$$

$\frac{1}{C}$  CAPACITÀ DEL CONDENSATORE

\* Tramite la formula ① Possiamo calcolare la capacità di un qualsiasi condensatore, data la carica e la differenza di potenziale.

# 1) CONDENSATORE PIANO



Passo 1) Campo elettrico del doppio strato

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{n}$$

Passo 2) Differenza di potenziale

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \hat{n} d\vec{l} = |E| \int_A^B d\vec{l}$$

*distanza tra le piastre d*

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d$$

Passo 3)

$$\text{Ricordandoci che } \sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow V_A - V_B = \frac{Q}{S \epsilon_0} \cdot d$$

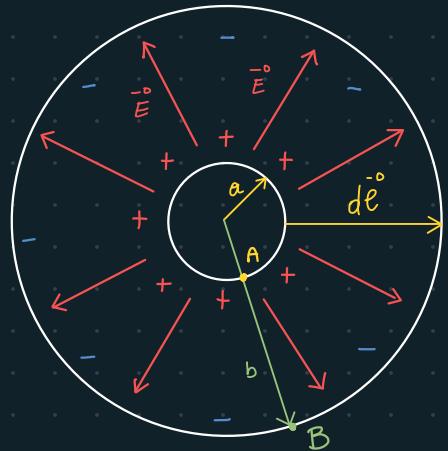
Per trovare la capacità del condensatore Piano sostituiamo nella ①

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{\frac{Q}{S \epsilon_0} \cdot d} = \frac{S \epsilon_0}{d}$$

Considerazioni sulla capacità del condensatore Piano

- $\mathcal{E}$  è direttamente proporzionale alla SUPERFICIE della piastra
- $\mathcal{E}$  è direttamente proporzionale alla Costante dielettrica  
↳ Un materiale con una  $\mathcal{E}_k$  ALTA aumenta la capacità.
- $\mathcal{E}$  è inversamente proporzionale alla DISTANZA tra le due piastre  
↳ Due piastre molto vicine aumentano la capacità.

## 2) Condensatore sferico



Passo 1: Trovare il campo elettrico

I) CE è semplicemente quello di una carica PUNTIFORME

Passo 2: Differenza di potenziale

$$V_A - V_B = \int_{\ell}^{\ell'} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$\cdot \vec{dl} = b - a$$

$$= \int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r} \cdot d\ell = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\ell$$

$$\hat{r} \cdot d\ell = \begin{array}{c} \hat{r} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \Rightarrow \vec{dl} = \begin{array}{c} \hat{r} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow d\ell$$

$$V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_A^B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right]$$

$$V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} r_A = a \\ r_B = b \end{array} \right.$$

$$V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{b-a}{ba} \right)$$

Passo 3) Sostituiamo a  $C = \frac{Q}{V_A - V_B}$

capacità del condensatore sferico

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{b-a}{ba} \right)} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{ba}{b-a}$$

### 3) Condensatore cilindrico

Passo 1: Trovare il Campo Elettrico del condensatore cilindrico



$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \leftarrow \text{Legge di Coulomb}$$

$\Rightarrow$  Usiamo questo teorema per semplificare i calcoli: racchiusiamo il condensatore con una superficie semplice: un CILINDRO

$\Rightarrow$  Come risulta abbiamo che le due facce laterali avranno flusso zero perché  $\vec{E} \perp \hat{n}$ , mentre  $\sum$  avrà flusso massimo:

$$\begin{aligned} \Phi_{TOT} &= \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| \left( \int_S dS \right) = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ &= |\vec{E}| \cdot 2\pi r \ell e = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

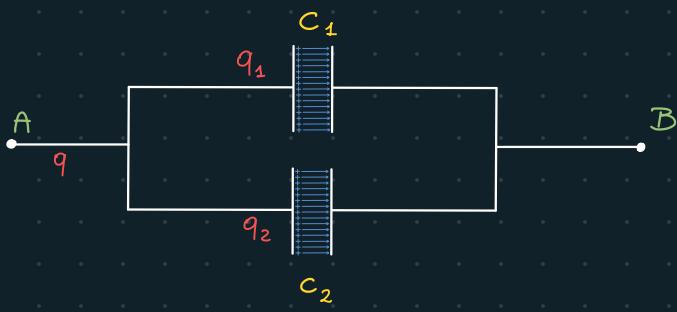
Area laterale del cilindro: Circonferenza  $\times \ell$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{2\pi r \ell \epsilon_0} \quad \text{Campo elettrico del condensatore cilindrico}$$

$$\begin{aligned} \text{Passo 2: } V_A - V_B &= \int_A^B |\vec{E}| dr = \frac{Q}{2\pi r \ell \epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \ell} \int_A^B \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \ell} \left[ \ln r \right]_A^B = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \ell} \left( \ln(B) - \ln(A) \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \ell} \ln \left( \frac{B}{A} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Passo 3: } C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \ell} \ln \left( \frac{B}{A} \right)}{V_A - V_B} = \frac{4\pi \epsilon_0 \ell}{\ln \left( \frac{B}{A} \right)}$$

## Collegamento in PARALLELO



Sosteniamo che si possa trovare un condensatore equivalente avente le stesse proprietà dei due  $C_1$  e  $C_2$



Passo 1: Sappiamo che la capacità di un condensatore qualsiasi è:

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} \Rightarrow C_{EQ} = \frac{Q}{V_A - V_B}$$

$$C_1 = \frac{q_1}{V_A - V_B} \Rightarrow V_A - V_B = \frac{q_1}{C_1}; \quad C_2 = \frac{q_2}{V_A - V_B} \Rightarrow V_A - V_B = \frac{q_2}{C_2}$$

Passo 2: la diff di potenziale in A è uguale a quella in B:

$$\begin{cases} V_A - V_B = \frac{q_1}{C_1} \\ V_A - V_B = \frac{q_2}{C_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = C_1(V_A - V_B) \\ q_2 = C_2(V_A - V_B) \end{cases}$$

$$\text{Siccome } q = q_1 + q_2 = C_1(V_A - V_B) + C_2(V_A - V_B) \Rightarrow q_1 + q_2 = (V_A - V_B)(C_1 + C_2)$$

Passo 3) Isoliamo le capacità

$$C_1 + C_2 = \frac{q}{V_A - V_B} \quad \text{ma} \quad C_{EQ} = \frac{q}{V_A - V_B} \Rightarrow C_{EQ} = C_1 + C_2$$

Le capacità dei condensatori in PARALLELO si sommano

# Condensatori in serie



1) Siccome  $C = \frac{q}{V_A - V_B} \Rightarrow V_A - V_B = \frac{q}{C}$

$$C_{EQ} = \frac{q}{V_A - V_B}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{C_1} \\ &\quad \left\{ \begin{aligned} V_A - V_B &= \frac{q}{C_1} \\ V_B - V_C &= \frac{q}{C_2} \end{aligned} \right. \\ &\Rightarrow \text{Sommo} \Rightarrow V_A - V_B + V_B - V_C = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} \end{aligned}$$

$$V_A - V_C = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \Rightarrow \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{V_A - V_C}{q}$$

2) Sappiamo che  $C = \frac{V_A - V_B}{q} \Rightarrow C_{EQ} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

CAPACITA' EQUIVALENTE dei condensatori in serie

# ENERGIA DEL CAMPO ELETTRICO MAGNETICO

Facendo un recap, sappiamo che

$$\mathcal{L}_{F_c} = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{e} = U_A - U_B \text{ dove } U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

Energia potenziale di interazione

$$\text{Siccome } V = \frac{F}{q} \Rightarrow \mathcal{L}_{F_c} = \mathcal{L}_E = V_A - V_B \Rightarrow \mathcal{L}_{F_c} = q(V_A - V_B)$$

$$\text{In forma breve: } \mathcal{L} = qV \quad \text{Allo stesso modo: } \vec{E} = \frac{\vec{F}_c}{q} \Rightarrow \vec{F}_c = q\vec{E}$$

Passo 1.

Definiamo il lavoro infinitesimale per spostare una carica di uno spostamento infinitesimale  $d\vec{e}$ :

$$dL = \vec{F}_c \cdot d\vec{e} \Rightarrow \text{Siccome } \mathcal{L} = \Delta U \text{ ma } \mathcal{L}_{F_c} = U_A - U_B \text{ e } \Delta U = (U_B - U_A)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{F_c} = -\Delta U \Rightarrow \mathcal{L}_{F_c} = q(V_A - V_B) \Rightarrow dL = dq(V_A - V_B)$$

Passo 2: Calcoliamo il lavoro totale:

$$dL = dq(V_A - V_B) \Rightarrow L_{\text{TOT}} = \int_{0}^{Q} (V_A - V_B) dq$$

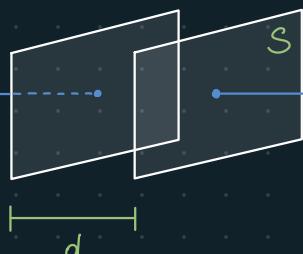
$$\text{Abbiamo definito: } V_A - V_B = \frac{q}{C} \Rightarrow L_{\text{TOT}} = \int_{0}^{Q} \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_{0}^{Q} q dq$$

$$\Rightarrow L_{\text{TOT}} = \frac{1}{C} \left[ \frac{q^2}{2} \right]_0^Q = \frac{1}{2} \left( \frac{Q^2}{C} \right)$$

$$\frac{Q(V_A - V_B)}{2}$$

Lavoro Totale per portare una carica  $Q$  da un'armatura all'altra

**IMPORTANTE!**



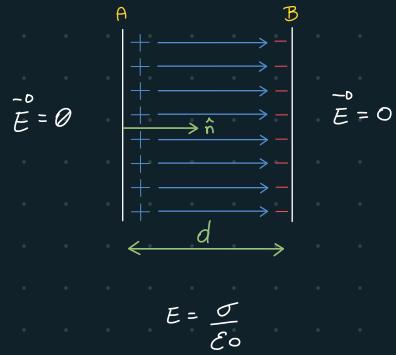
E' da NOTARE che nel condensatore piano

$$V_A - V_B = \frac{Q}{S\epsilon_0} \cdot d \Rightarrow L_{\text{TOT}} = \frac{Q^2}{2S\epsilon_0} \cdot d$$

Il lavoro dipende dalla distanza

Ed anche dalla Superficie

Passo 3) Come sappiamo in un condensatore piano Il campo elettrico  $E > 0$  solo nel volume compreso tra le due armature.



Supponendo che l'energia sia distribuita in modo UNIFORME all'interno del volume, possiamo definire la densità volumetrica di Energia:

$$W = \frac{dE}{dV} = \frac{E_{TOT}}{V_{TOT}}$$

Il volume totale è semplice da calcolare:  $V_{TOT} = S \cdot d$

L'Energia totale l'abbiamo trovata prima:  $E_{TOT} = \frac{1}{2} Q (V_A - V_B)$

$$\Rightarrow W = \frac{Q(V_A - V_B)}{2S \cdot d} = \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{S} \right) \cdot \frac{V_A - V_B}{d} \rightarrow \text{Nel condensatore Piano}$$

$$V_A - V_B = L = \int \vec{E} \cdot \hat{n} d\vec{l} = E \cdot d$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W &= \frac{1}{2} (\sigma) \cdot E \\ &\quad \text{Nel condensatore Piano} \\ &\quad E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \sigma \cdot S \\ &\quad \Rightarrow ES = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0} = \sigma = E \cdot \epsilon_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{V_A - V_B}{d} \right) = E$$

ENERGIA DEL CAMPO ELETTRICO

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2$$

Formula valida per OGNI CASO PARTICOLARE del campo ELETTROSTATICO



Un dipolo elettrico è composto da due cariche di segno opposto ma della stessa magnitudine poste ad una certa distanza l'una dall'altra.

Facciamo un'approssimazione nota come **Approssimazione di Dipolo**, dove il punto del calcolo del CE è molto maggiore della distanza tra le due cariche:

$$\text{Dato } \vec{z} = \vec{r} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{z}}{\vec{r}}$$

**Scopo del gioco:** Trovare il campo elettrico nel punto P

Per trovare il campo elettrico prima troviamo il potenziale in P:  $V_P$ , così da usare la formula  $E = -\nabla V$  per trovare il C.E.

Potenziale nel punto P

Passo 1: Scrivere  $\overline{AP}$  e  $\overline{BP}$  in termini dei valori conosciuti

termini noti =  $\begin{cases} d & \rightarrow \text{Distanza Tra le cariche} \\ r & \rightarrow \text{Distanza di P dal centro del Sistema di riferimento} \\ \theta & \rightarrow \text{Angolo tra } \vec{z} \text{ e } \vec{r} \end{cases}$

$$\begin{aligned} R_1^2 &= \overline{CP}^2 + \overline{CA}^2 = (\overline{C}\overline{O} \sin \theta)^2 + (\overline{CO} - \frac{d}{2})^2 = (\overline{C}\overline{O} \sin \theta)^2 + (\overline{C}\overline{O} \cos \theta - \frac{d}{2})^2 \\ &= \overline{C}^2 \sin^2 \theta + \overline{C}^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \overline{C} d \cos \theta \\ &= \overline{C}^2 \left(\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{1}\right) + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{O} \quad \cancel{\overline{C} d \cos \theta} \\ &= \overline{C}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \cancel{\overline{C} d \cos \theta} \end{aligned}$$

$$R_2^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CP}^2 = \left(\overline{OC} + \frac{d}{2}\right)^2 + \overline{CP}^2 = \overline{C}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{O} \quad \cancel{\overline{C} d \cos \theta}$$

Passo 2: Fare una opportuna APPROXIMAZIONE

Abbiamo detto che  $\overline{C} \gg d$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{R}_1 = \overline{C}^2 - \overline{C} d \cos \theta \\ \overline{R}_2 = \overline{C}^2 + \overline{C} d \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{Troviamo } \overline{R}_1 = \sqrt{\tau^2 - \tau d \cos \theta} = \sqrt{\tau(\tau - d \cos \theta)} = \sqrt{\tau} \sqrt{\tau - d \cos \theta}$$

→ Per il momento trascuriamo  $\sqrt{\tau}$  e dedichiamoci a  $\sqrt{\tau - d \cos \theta}$

Passo 2 B: Approssimare  $\sqrt{\tau d \cos \theta}$  in Serie di Taylor

Formula generale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$$f(x) \simeq \underbrace{f(x_0)}_{n=0} + \underbrace{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)}_{n=1} + \underbrace{\left. \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^2}_{n=2} + \dots$$

Nelle nostre approssimazioni ci basta la Serie di Taylor della funzione fino ad  $n=1$ : → Solo derivata prima

$$f(d) = \sqrt{\tau - d \cos \theta} = (\tau - d \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(d) = \frac{1}{2} (\tau - d \cos \theta)^{\frac{1}{2}-1} (-\cos \theta) = -\frac{\cos \theta}{2\sqrt{\tau - d \cos \theta}}$$

$$d_0 = 0 \Rightarrow f(d_0) = \sqrt{\tau - 0 \cdot \cos \theta} = \sqrt{\tau}$$

$$f'(d_0) = -\frac{\cos \theta}{2\sqrt{\tau - d \cos \theta}} = -\frac{\cos \theta}{2\sqrt{\tau}}$$

$$\Rightarrow \text{Taylor} \Rightarrow \bar{f}(d_0) = \sqrt{\tau} - \frac{\cos \theta}{2\sqrt{\tau}} \cdot (d - d_0) = \sqrt{\tau} - \frac{d \cos \theta}{2\sqrt{\tau}}$$

$$\Rightarrow \text{Ci ricordiamo che } R_1 = \sqrt{\tau} \cdot f(d) = \sqrt{\tau} \cdot \left[ \sqrt{\tau} - \frac{d \cos \theta}{2\sqrt{\tau}} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 \stackrel{v}{=} \tau - \frac{d}{2} \cos \theta \\ R_2 \stackrel{v}{=} \tau + \frac{d}{2} \cos \theta \end{cases}$$

Passo 3) Sostituire  $R_1$  ed  $R_2$  nella formula del ELETTRICO

non di INTERAZIONE!

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\epsilon_A} - \frac{q}{\epsilon_B} \right]$$

Io battezzo K per  
comodità

\* Se avessimo conosciuto  
esattamente la posizione di P  
rispetto ad A e B (le cariche)  
non avremmo dovuto fare alcuna  
approssimazione!

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\epsilon - \frac{d}{2}\cos\theta} - \frac{q}{\epsilon + \frac{d}{2}\cos\theta} \right] = Kq \cdot \left[ \frac{\cancel{\epsilon} + \frac{d}{2}\cos\theta - \cancel{\epsilon} - \frac{d}{2}\cos\theta}{\epsilon^2 - (\frac{d}{2}\cos\theta)^2} \right]$$

$$= K \cdot q \left[ \frac{d\cos\theta}{\epsilon^2 - (\frac{d}{2}\cos\theta)^2} \right]$$

Siccome stiamo approssimando  $\epsilon \gg d$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d\cos\theta}{\epsilon^2}$$

Potenziale nel punto P

Passo 4) BONUS

Chiamiamo il vettore  $\vec{P}^\circ$  momento elettrico del dipolo il vettore che parte da B ed arriva in A  $\Rightarrow$

$$\vec{P}^\circ = \begin{cases} |\vec{P}^\circ| = d \cdot q \\ \text{Direzione: } \hat{z}, \hat{k} \\ \text{Verso: } B \rightarrow A \end{cases}$$

Nota: il verso è B  $\rightarrow$  A solo se B è la carica NEGATIVA ed A quella POSITIVA

$$= V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d\cos\theta}{\epsilon^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{P}^\circ \cdot \vec{\epsilon}}{\epsilon^3}$$

Siccome  $q\cos\theta = |\vec{q}| \cdot |d| \cdot \cos\theta$

$$|\vec{P}^\circ| \cdot \cos\theta = |\vec{P}^\circ| \cdot |\vec{\epsilon}| \cdot \cos\theta$$

$$= \vec{P}^\circ \cdot \vec{\epsilon}$$

# Campo elettrico nel punto P

Ricordando che  $\vec{E} = -\nabla V$  e noi abbiamo appena trovato  $V$ :

$$-\nabla \vec{V} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \quad \leftarrow \text{Ci basta trovare le derivate parziali}$$

**Passo 1:** Passare a coordinate cartesiane

- $\zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- Per definizione  $z = \zeta \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{z}{\zeta}$   
 $\Rightarrow \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qd \cdot \cos \theta}{\zeta^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qd \cdot z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)} =$$

$$= \left( \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \right) \cdot \frac{z}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}} = K \frac{z}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Potenziale in  
coordinate  
cartesiane

La Battaglia K  
(non dipende da x,y,z)

**Passo 2:** Derivate Parziali

A: Componente x:  $\vec{E}_x$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} = -Kz \cdot \frac{d}{dx} \left[ (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = -Kz \cdot \left[ -\frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right]$$

$$= Kz \cdot \frac{3x}{\sqrt[2]{(x^2 + y^2 + z^2)^5}} = K \cdot \frac{3xz}{\sqrt[2]{(\zeta^2)^5}} = \frac{\frac{qd}{4\pi\epsilon_0}}{\zeta^5} \cdot \frac{3xz}{\zeta^5}$$

$$\zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

B: Componente  $y$ :  $\vec{E}_y$  Componente  $y$  del campo elettrico  $\vec{E}$ :  $\vec{E}_y$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} j^y = \left( \frac{q d}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{3 y z^2}{z^5} \quad \leftarrow \text{Stesso procedimento di } \frac{\partial V}{\partial x}$$

C: Componente  $z$ :  $\vec{E}_z$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial z} k^z &= -k \frac{d}{dz} \left[ z \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = \\ &= -k \left\{ (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + z \cdot \left( -\frac{3}{2} \cdot \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \right\} \\ &= -k \left\{ (z^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3z^2}{\sqrt{(z^2)^5}} \right\} = -k \left( z^{-3} - \frac{3z^2}{z^5} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3z^2}{z^5} - \frac{1}{z^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z^3} \left( 3 \left( \frac{z^2}{z^2} \right) - 1 \right) \\ &= \frac{q d}{4\pi\epsilon_0 z^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

Componente  $z$  del campo elettrico  $\vec{E}$ :  $\vec{E}_z$

BONUS: modulo del campo elettrico

$$|\vec{E}| = \sqrt{\vec{E}_x^2 + \vec{E}_y^2 + \vec{E}_z^2} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 z^3} \left[ \left( \frac{3x z^2 z^3}{z^5 z^2} \right)^2 + \left( \frac{3y z^2 z^3}{z^5 z^2} \right)^2 + \left( \frac{3z^2}{z^2} - 1 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 z^3} \left[ \frac{9x^2 z^2}{z^4} + \frac{9y^2 z^2}{z^4} + \frac{9z^4}{z^4} + 1 - \frac{6z^2}{z^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 z^3} \left[ \left( \frac{9x^2}{z^2} + \frac{9y^2}{z^2} + \frac{9z^2}{z^2} \right) \cdot \left( \frac{z^2}{z^2} \right) + 1 - 6 \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \text{Equazione sfera: } x^2 + y^2 + z^2 = z^2 = 0 \quad \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{z^2} = 1$$

$$= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 z^3} \cdot \left( 9 \cos^2 \theta + 1 - 6 \cos^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 z^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$$

Modulo del Campo Elettrico in  $P$

