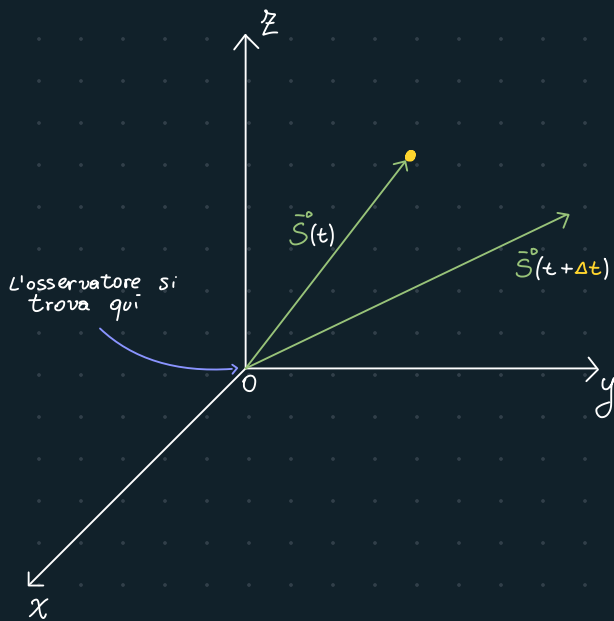


Riferimento Cartesiano



- Il vettore spostamento \vec{S} dipende dal tempo

Scopo del gioco (cinematica)

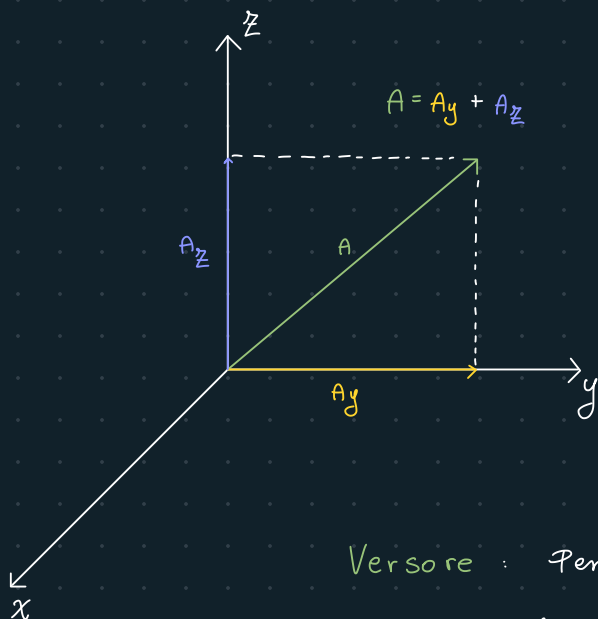
Derivare la funzione che lega il vettore \vec{S} al TEMPO.

Questi sistemi sono detti DETERMINISTICI

La meccanica quantistica è PROBABILISTICA
 \Rightarrow Non prevede il futuro

Come esprimere un vettore nel sistema di riferimento

\rightarrow Troviamo le COMPONENTI del vettore:



$$A = A_y + A_z$$

Per la regola della
Somma tra
vettori

Nel caso di 3 componenti:

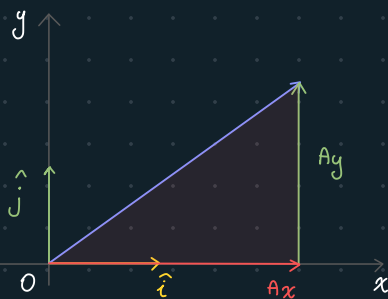
$$A = A_x + A_y + A_z$$

\rightarrow Dobbiamo TRADURRE la somma dei vettori in
una somma numerica

ETTORE $\left\{ \begin{array}{l} \text{MODULO} \\ \text{DIREZIONE} \\ \text{VERSO} \end{array} \right.$

Versore: Per ogni asse battezziamo un nuovo vettore:

Lungo x: \hat{i}
 Lungo y: \hat{j}
 Lungo z: \hat{k} } Hanno stessa direzione e verso dei 3 assi del sistema



Dobbiamo separare l'informazione sul numero da quella di direzione e verso; il versore (in generale) ha modulo pari ad 1.

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

Se $|\vec{A}_x| = 5$, possiamo scrivere $\vec{A}_x = 5 \hat{i}$

Possiamo **combinare** il tutto: $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$ vettore espresso in termini dei versori delle sue componenti

Forma contratta

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k} = (5, 6, 2) \text{ forma contratta}$$

Quindi possiamo esprimere un vettore come

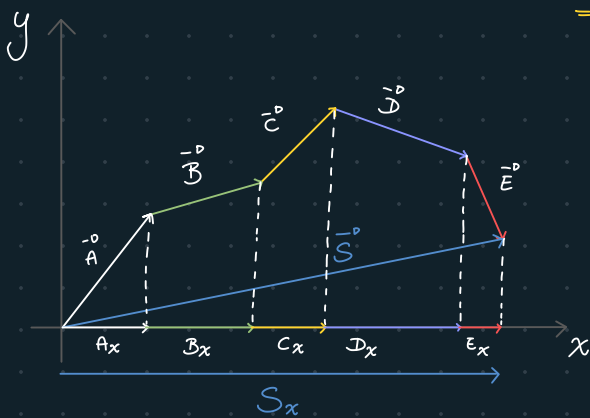
$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

SCALARI

Modulo di un vettore

Dal teorema di Pitagora $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

Dimostrazione Somma di più vettori



\Rightarrow la componente x del vettore somma è pari alla somma delle componenti x dei vari vettori.

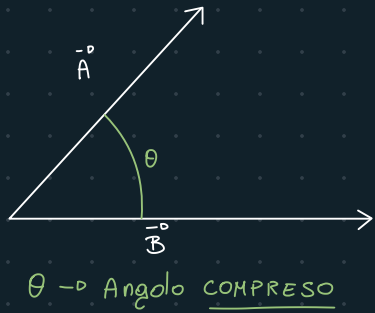
\Rightarrow Possiamo estendere il ragionamento a tutti gli assi.

Facciamo l'esempio di 2 vettori:

$$A = (2, 1, 3) \text{ e } B = (5, 2, 4)$$

$$\Rightarrow S = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) = (7, 3, 7)$$

Prodotto Scalare \rightarrow Il risultato è uno scalare (numero)



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\theta)$$

Definizione
del prodotto
Scalare

Non Si Discute!

Poniamo i vettori in un sistema di riferimento

\rightarrow Scriviamo i vettori nelle loro componenti:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = [A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}] \cdot [B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}] = A_x B_x \hat{i} \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \hat{k} +$$

$$A_y B_x \hat{j} \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \hat{k} +$$

$$A_z B_x \hat{k} \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \hat{k} =$$

$A_x, A_y, \dots, B_x, B_y, \dots$ Sono Scalari

\rightarrow Moltiplichiamo i versori

quindi, se dovessi calcolare:

- $\hat{i} \cdot \hat{i} = |\hat{i}| |\hat{i}| \cos(\theta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ Versori paralleli
- $\hat{i} \cdot \hat{j} = |\hat{i}| |\hat{j}| \cos(\theta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(90) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ versori perpendicolari

$$= A_x B_x \hat{i} \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \hat{k} +$$

$$A_y B_x \hat{j} \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \hat{k} +$$

$$A_z B_x \hat{k} \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \hat{k} = \text{I Termini in rosso sono Zero!}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x \hat{i} \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \hat{k}$$

Prodotto Scalare

ES:

$$A = (2, 3, -1), \quad B = (4, 1, 2)$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = [2 \cdot 4, 3 \cdot 1, -1 \cdot 2] = 9 \text{ Prodotto Scalare}$$

$$|A| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} \approx 3.74$$

$$|B| = \sqrt{8 + 1 + 4} = \sqrt{13} \approx 3.60$$

$$\Rightarrow \text{Sappiamo che } \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left[\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \right]$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left[\frac{9}{3.74 \cdot 3.6} \right] \approx 48^\circ \text{ angolo compreso}$$

$\hookrightarrow 0.83 \text{ Rad}$

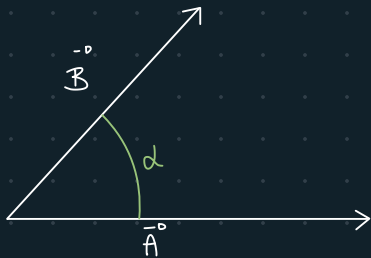
\Rightarrow Possiamo calcolare il prodotto scalare anche come

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) = 3.74 \cdot 3.6 \cdot 48^\circ \approx 11.2 \text{ molte approssimazioni}$$

Prodotto Vettoriale

• $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C} = [D, V, M] = \begin{cases} \text{Direzione} \\ \text{Verso} \\ \text{Modulo} \end{cases} \longrightarrow |\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\alpha)$

Il prodotto vettoriale è
NULLO per vettori
PARALLELI



$\alpha \rightarrow$ Angolo COMPRESO

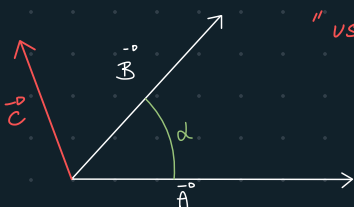
• da DIREZIONE è PERPENDICOLARE ai due vettori

$\vec{C} \perp \vec{A}, \vec{C} \perp \vec{B}$

Se i vettori sono posti nel piano dello schermo, la direzione ESCE o ENTRA perpendicolarmente al piano dello schermo

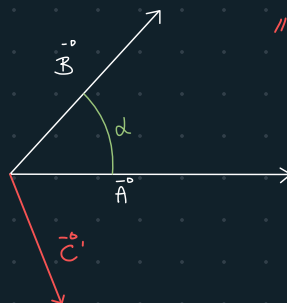
• Il verso: Regola della mano destra

\rightarrow "Porre la mano destra sul primo dei vettori da moltiplicare, avvolgere le dita (indice, medio, anulare e mignolo) come se volessimo sovrapporre il primo al secondo vettore; il POLLICE ci dà il verso del vettore \vec{C} "



$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$

"uscente"



"entrante"

$\vec{B} \wedge \vec{A} = \vec{C}' = -\vec{C}$

Il prodotto vettoriale NON è commutativo!

Una regola per il prodotto vettoriale In un Sistema di riferimento

\rightarrow Scomponiamo il vettore. $\vec{A} \wedge \vec{B} = [A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}] \wedge [B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}] =$

$= A_x B_x \hat{i} \wedge \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \wedge \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \wedge \hat{k} +$

$+ A_y B_x \hat{j} \wedge \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \wedge \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \wedge \hat{k} +$

$+ A_z B_x \hat{k} \wedge \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \wedge \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \wedge \hat{k} =$

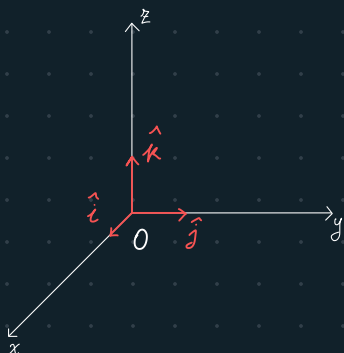
Abbiamo visto che il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è zero!

Parallelo

$\hat{i} \wedge \hat{i} = |\hat{i}| \cdot |\hat{i}| \cdot \sin(\theta) = 1 \cdot 1 \cdot \sin(0) = 0$

Perpendicolare

$\hat{i} \wedge \hat{j} = \begin{cases} \text{modulo} = |\hat{i}| \cdot |\hat{j}| \cdot \sin(\theta) = 1 \cdot 1 \cdot \sin(90^\circ) = 1 \\ \text{direzione} = \text{Lungo asse } z \\ \text{Verso} = \text{USCENTE} \end{cases}$
= Coincide con \hat{k}



Allo stesso modo:

$$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i}$$

$$\text{Lo } \hat{j} \wedge \hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{i} \wedge \hat{k} = -\hat{j}, \quad \hat{k} \wedge \hat{j} = -\hat{i}$$

opposti

$$\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = A_x B_y \hat{k} - A_x B_z \hat{j} +$$

$$- A_y B_x \hat{k} + A_y B_z \hat{i} +$$

$$+ A_z B_x \hat{j} - A_z B_y \hat{i}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

Esempio

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow [(6-4)\hat{i} + (3-4)\hat{j} + (8-9)\hat{k}]$$

$$\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = [2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}] = \vec{C} = (2, -1, -1)$$

Calcolo del prodotto vettoriale con le matrici

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{Bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{Bmatrix} = \text{Det} [\vec{A} \wedge \vec{B}] = \text{Prodotto Vettoriale}$$

$$\text{Det} [\vec{A} \wedge \vec{B}] = [X] \hat{i} - [Y] \hat{j} + [Z] \hat{k}$$

$$\Rightarrow [X] = \begin{vmatrix} \hat{j} & \hat{k} \\ A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{pmatrix} \hat{i} = [A_y B_z + A_z B_y] \hat{i}$$

$$[Y] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{k} \\ A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} = - \begin{pmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{pmatrix} \hat{j} = - [A_x B_z + A_z B_x] \hat{j}$$

$$[Z] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{pmatrix} \hat{k} = + [A_x B_y + A_y B_x] \hat{k}$$

Esercizi Sui vettori