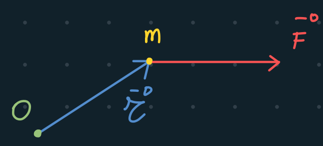
Dinamica dei sistemi

I momenti

Momento di una forza : $\vec{M} = \vec{\tau} \wedge \vec{F}$

Forza



$\vec{\tau}$ È la posizione della particella rispetto al polo O ; O viene scelto a piacimento da noi

→ Detto anche momento TORCENTE
Misura la capacità di una forza di causare una ROTAZIONE ATTORNO AD UN PUNTO.

Momento della quantità di moto : $\vec{L} = \vec{\tau} \wedge \vec{p}$

$\vec{p} = m \cdot v$

quantità di moto

↳ Sinonimo di momento Angolare

Siccome possiamo scegliere il polo O dove vogliamo, ci conviene posizionarlo lungo l'asse di rotazione, così guardiamo alle rotazioni proprio rispetto all'asse di rotazione.

⇒ Posizioniamo il polo O lungo l'asse di rotazione.

↳ È equivalente al sistema di riferimento Oxy / Oxyz

→ Il momento angolare misura la quantità di moto rotazionale rispetto AD UN ASSE DI ROTAZIONE

Momento di una forza	Momento angolare
Dipende da: $\lvert\vec{F}\rvert$, d , α , direzione Forza	Dipende da: m , v , d / R
Indica: la capacità di una forza di causare rotazione	Indica: DESCRIVE la rotazione di un oggetto attorno al suo asse

II Equazione Cardinale della Dinamica

→ Mette in relazione il momento di una forza con il momento angolare:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

(Polo fisso → Vale quando O è fisso)

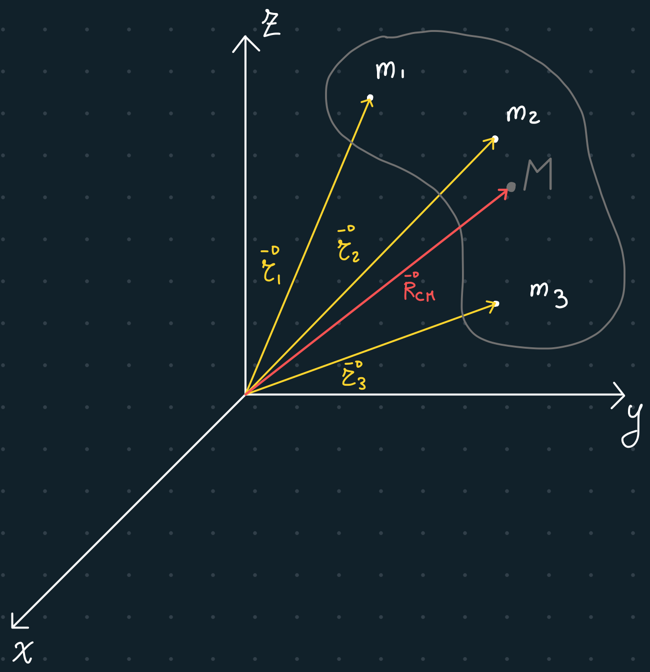
Non è un principio

proof: Siccome $L = \vec{r} \wedge \vec{p}$ ⇒ $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \overbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}^{\vec{v}} \wedge \overbrace{\vec{p}}^{m \cdot \vec{v}} + \vec{r} \wedge \overbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}^{\vec{F}}$ (visto prima con l'integrale del Teorema dell'impulso)

⇒ $\vec{v} \wedge m\vec{v} + \underbrace{\vec{r} \wedge \vec{F}}_{\vec{M}}$ ⇒ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ CVD

$\vec{v} // m\vec{v}$ ⇒ $\vec{v} \wedge m\vec{v} = \emptyset$

Centro di massa



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

POSIZIONE

dove $M = \sum_i m_i$

Velocità: $\vec{V}_{CM} = \frac{d R_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\underbrace{M}_{\text{cost}}}$

Ci ricordiamo che $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ = quantità di moto

⇒ $\underbrace{\vec{V}_{CM} = \frac{p_{TOT}}{M}}_{\text{Velocità del Centro di massa}}$ ⇒ $\underbrace{p_{TOT} = M \cdot \vec{V}_{CM}}_{\text{Quantità di moto Totale}}$

Primo Teorema del centro di Massa

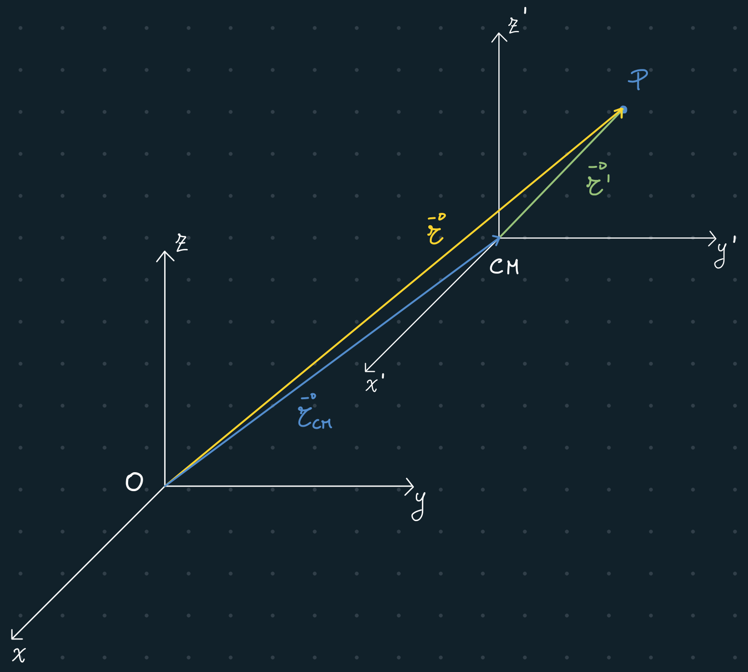
Ai fini del calcolo della quantità di moto $\vec{p}$ l'intero sistema può essere trattato come un punto materiale coincidente con il centro di massa avente come massa la somma delle masse.

Possiamo quindi scrivere:

$$A_{CM} = \frac{d V_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

$$\sum_i \vec{F} = M \cdot \vec{A}_{CM}$$

Teorema di KÖNIG sul momento angolare



Notiamo che
$$\vec{r} = \vec{r}_{CM} + \vec{r}\,'$$

deriviamo: $\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{v}\,'$

Velocita' di P rispetto O — Velocita' di CM — Velocita' di P rispetto a CM

* Il polo O e' un OSSERVATORE in un sistema di riferimento INERZIALE

Applichiamo le formule al MOMENTO ANGOLARE

Momento angolare: $\vec{r} \wedge m \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{L}_{TOT} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i\,') \wedge m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i\,') =$$

$$= \sum_i \vec{r}_{CM} \wedge m_i \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge m_i \vec{v}_i\,' + \vec{r}_i\,' \wedge m_i \vec{v}_{CM} + \vec{r}_i\,' \wedge m_i \vec{v}_i\,'$$

Mettiamo in evidenza le costanti rispetto ad i

$$= \vec{r}_{CM} \wedge M \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge \sum_i (m_i \vec{v}_i\,') + \left(\sum_i \vec{r}_i\,' m_i\right) \wedge \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_i\,' \wedge m_i \vec{v}_i\,'$$

$\rightarrow$ Dal centro di massa abbiamo: $\begin{cases} \sum_i m_i \vec{v}_i\,' = M \vec{v}_{CM}\,' \\ \sum_i m_i \vec{r}_i\,' = M \vec{r}_{CM}\,' \end{cases}$

$\Rightarrow$ La velocita' del CM misurata SUL PUNTO DI CM e' zero!

$\Rightarrow$ La posizione del CM misurata SUL PUNTO DI CM e' zero!

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_i m_i \vec{v}_i\,' = \emptyset \\ \sum_i m_i \vec{r}_i\,' = \emptyset \end{cases}$$

Parte SOSTANZIOSA del Teorema

$$= \vec{r}_{CM} \wedge M \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_i\,' \wedge m_i \vec{v}_i\,'$$

Momento angolare espresso in termini del centro di massa

$\Downarrow$

Momento Angolare DEL CM

Momento angolare misurato da un osservatore SOLIDALE al centro di massa

$\Downarrow$

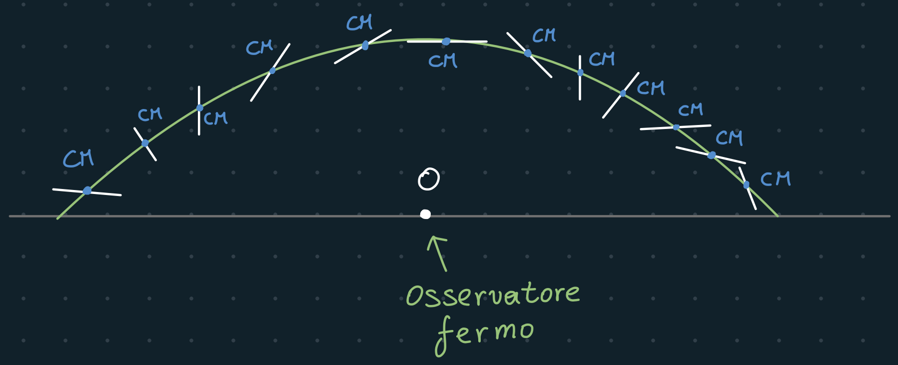
Momento Angolare DEI PUNTI RISPETTO al CM

Possiamo scrivere:

$$\vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{V}_{CM}$$
$$\vec{L}'_{TOT} = \sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_{TOT} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}'_{TOT}}$$

- Esempio del bastone lanciato in aria in rotazione:
  - Traslazione CM: moto del proiettile
  - Moto CM: il CM ruota attorno all'osservatore fermo

l'osservatore fermo non misura anche la rotazione del CM su se stesso!



$\Rightarrow$ Se O si sofferma solo sul moto del CM del bastone, non si accorgerà che il CM oltre a traslare, RUOTA anche attorno al CM stesso!

Quindi il Teorema dimostra proprio la rotazione attorno al CM.

Conservazione del momento angolare

Esempio della stella di neutroni che ruota su se stessa molto velocemente

Siccome Momento angolare $= M \cdot V \cdot R$ = COSTANTE
Se diminuiamo il RAGGIO ma manteniamo la massa, la velocità dovrà aumentare!

Esempio della persona al centro del lago senza attrito

Per salvarsi lancia qualcosa nel verso opposto :

$$\emptyset = m \cdot v_0 - M v_1$$

dove
- M : massa della persona
- m : massa della cosa che lancia
- v_0 : Velocità della cosa che lancia
- v_1 : vel della persona

* $v_1 < v_0$ perche' $m < M$

Corpi Rigidi

Definizione:

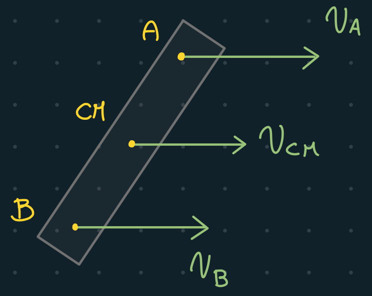
1) Prendiamo due punti A e B sul corpo e misuriamo la distanza
2) Il corpo subisce delle Trasformazioni
3) Se la distanza $\overline{AB}$ è rimasta invariata $\Rightarrow$ Il corpo è rigido

Conseguenze

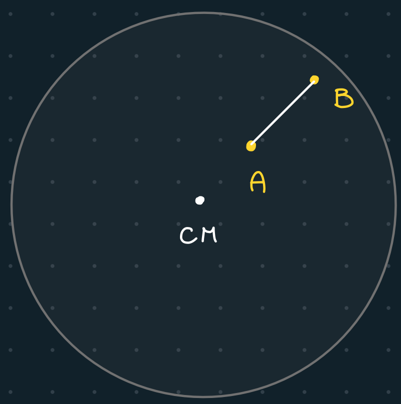
1) Moto Traslatorio

Se $\overline{AB} = cost$, $v_A = v_B = v_{CM} \rightarrow$ Tutti i punti si muovono con la stessa velocità!

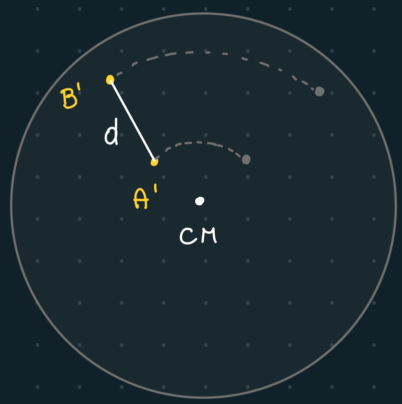
$$v_{CM} = \frac{\sum m_i v_i}{M} = v_A = v_B = v_N$$



2) Moto Rotatorio



$\overline{AB} = d$



Se $\overline{A'B'} = d$

$\Rightarrow \vec{v}_{A'} < \vec{v}_{B'}$

perché $S_{B'} > S_{A'}$

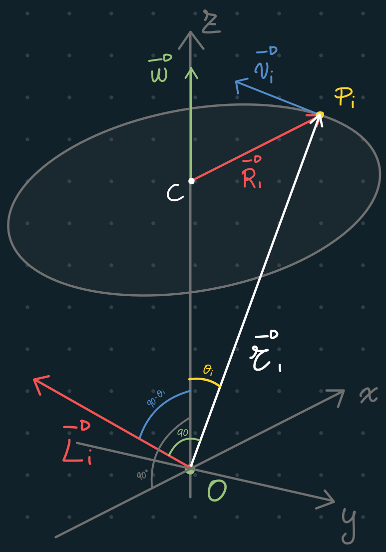
Ma L'ANGOLO percorso è lo stesso $\Rightarrow$ Stessa velocità angolare $\Rightarrow$

$\omega_A = \omega_B \Rightarrow$ Ogni punto del corpo rigido ha la Stessa velocità angolare

Attenzione! $v_{Tangenziale} \neq \omega$ infatti $v_A \neq v_B$!

Rotazione attorno ad un asse fisso

- L'asse è FISSO $\Rightarrow$ NON CAMBIA
- Il sistema è inerziale
- Scegliamo un punto P_i del corpo rigido



1) Scegliamo un polo O lungo l'asse di rotazione

2) Individuiamo $\vec{r}_i$ che è la distanza Tra il polo ed il punto P_i

3) Individuiamo la velocità Tangenziale $\vec{v}_i$

Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{r}_i \perp \vec{v}_i \quad , \quad \vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i \quad , \quad \vec{R}_i = \vec{r}_i \cdot \sin\theta_i$$

massa del punto P_i

4) Con la regola della mano destra troviamo $\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$

5) Troviamo $|\vec{L}_i| = |\vec{r}_i| \cdot |m\vec{v}_i| \cdot \sin(\varphi)$ ma $\varphi = 90° \Rightarrow \sin(\varphi) = 1$

$$\Rightarrow |\vec{L}_i| = |\vec{r}_i| \cdot |m_i \vec{v}_i| = m_i v_i r_i$$

5.1) Possiamo trovare $v_i = R_i \omega_i$ perché $Rad = \frac{\ell}{R} \Rightarrow \ell = Rad \cdot R$

$$\Rightarrow |\vec{L}_i| = m_i v_i r_i = m_i \omega_i R_i r_i$$

5.2) Troviamo la componente z di $\vec{L}_i$:

$$|\vec{L}_i|_z = |\vec{L}_i| \cos(\varphi) \quad \text{con } \varphi = 90 - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta$$

Siccome $\underline{\cos(90-\theta_i) = \sin(\theta_i)}$ Es. $\theta = 30° \Rightarrow \cos(90-30) = \frac{1}{2} = \sin(30)$

$$\Rightarrow |\vec{L}_i|_z = |\vec{L}_i| \cdot \cos(90-\theta) = |\vec{L}_i| \cdot \sin(\theta_i)$$

5.3) Sostituiamo $|\vec{L}_i|$ Trovato nel punto 5.1 nella formula nel punto 5.2

$$\Rightarrow |\vec{L}_i|_z = m_i \omega_i R_i r_i \cdot \sin(\theta_i)$$

5.4) Ci ricordiamo che $|\vec{R}_i| = |\vec{r}_i| \sin(\theta_i)$

$$\Rightarrow |\vec{L}_i|_z = m_i \omega_i R_i \cdot R_i = m_i \omega_i R_i^2$$

6) A questo punto se assumiamo che il corpo è rigido

$\Rightarrow$ Tutti i punti del corpo hanno la stessa velocità angolare

$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_i = \omega \qquad \Rightarrow |\vec{L}_i|_z = m_i R_i^2 \omega$

7) Vogliamo calcolare il momento angolare totale:

$$L_z = \sum_i |\vec{L}_i|_z = \sum_i m_i R_i^2 \omega = \omega \underbrace{\sum_i m_i R_i^2}_{\text{MOMENTO DI INERZIA}}$$

$$= \omega I_z$$

momento Angolare totale di un corpo rigido

Considerazioni sul Momento di inerzia

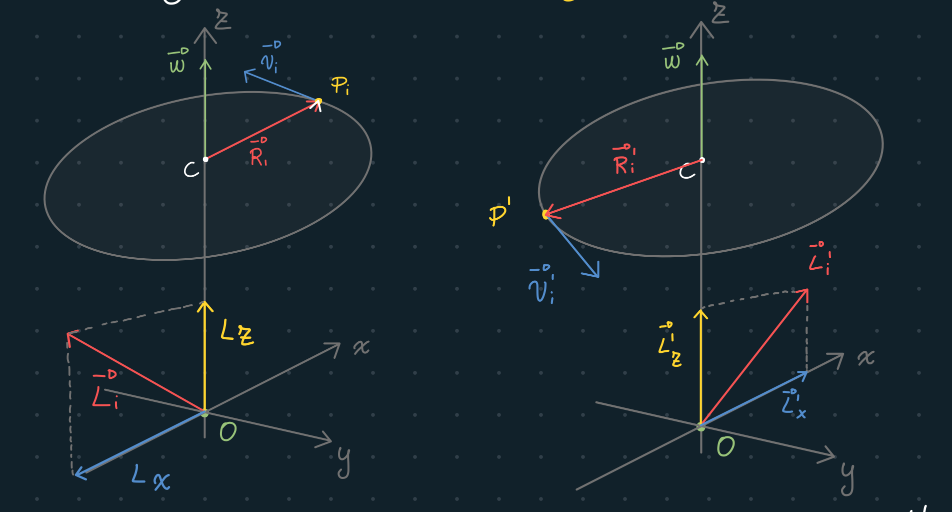
- $I_z = \sum_i m_i R_i^2$
- Il momento di inerzia è SEMPRE CALCOLATO rispetto all'asse di rotazione
- Rappresenta la capacità di un corpo ad opporsi ai tentativi di essere in moto.
- $I_z = mR^2$ è il momento di inerzia di un punto materiale
- $I_z = \sum_i m_i R_i^2$ è il momento di inerzia di un Corpo rigido

Considerazioni sulla componente lungo l'asse di rotazione del Momento angolare

Attenzione! Tutto ciò vale solo per i corpi rigidi, perché solo in questo caso $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_i = \omega$

- Riassumendo: la componente del momento angolare L_z è proporzionale alla velocità angolare, e dipende, tramite al coefficiente L_z solo dalla FORMA del corpo e dalla posizione dell'asse rispetto al corpo.

Considerazioni sul Momento angolare TOTALE



Se sommiamo le componenti $\vec{L}_z + \vec{L}_z'$ Queste si sommeranno in maniera COSTRUTTIVA!

Se sommiamo $\vec{L}_x + \vec{L}_x'$ queste si ANNULLANO!

L'asse di rotazione è l'asse di simmetria del corpo

⇒ Se il corpo che ruota è simmetrico, come un cilindro:

$$\vec{L} = \vec{\omega} I \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_z \qquad L_\perp = 0$$

L'unica componente che "si salva" è quella lungo z

⇒ Se il corpo non è simmetrico, è possibile trovare almeno 3 assi di rotazione per cui vale $\vec{L} = \vec{L}_z$

CONCLUDENDO

Se $\vec{L} = \vec{L}_z \Rightarrow \vec{L}_{TOT} = I\vec{\omega}$

Possiamo riscrivere la II eq. cardine della dinamica $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (momento di una forza; momento angolare)

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{d}{dt} \underbrace{I}_{\text{costante}} \vec{\omega} = I \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\text{accelerazione angolare}} \Rightarrow \boxed{\vec{M} = I\alpha}$$

con α = acc angolare

Possiamo fare un'analogia Tra la I e II eq cardine della dinamica:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{M} = I\alpha$$

Forza → Momento di forza
massa → Momento di inerzia
accelerazione → accelerazione angolare

moti traslatori — Moti rotatori

⇒ Hanno lo stesso significato fisico

Es: m si oppone al moto Traslatorio → I si oppone al moto rotatorio

Analisi della relazione $\vec{M} = I\alpha$

$\vec{M} = I_z \alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{\vec{M}}{I_z} \Rightarrow$ Siccome $\alpha = \dfrac{dw}{dt}$

- $w(t) = w_0 + \int_0^t \alpha \, dt$
- $\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t w \, dt$

1) Se $M = 0 \Rightarrow$ il corpo si muove in moto circolare uniforme

$\Rightarrow \alpha = \emptyset \Rightarrow w = w_0 \Rightarrow \theta = \theta_0 + wt$

$\alpha = \emptyset \hookrightarrow a = 0$

$\theta = \theta_0 + wt \hookrightarrow S = S_0 + vt$

2) $M = cost \Rightarrow \alpha = \dfrac{M \; cost}{I_z \; cost} \Rightarrow$ Accelerazione costante

il corpo si muove in moto circolare uniformemente accelerato

$\Rightarrow M = cost \Rightarrow \alpha = \dfrac{M}{I_z} = cost \Rightarrow w = w_0 + \alpha t \Rightarrow \theta = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

3) Se $M =$ generico $\Rightarrow$ moto circolare vario $\Rightarrow \alpha = \alpha(t)$

Energia cinetica di un corpo rigido

$$E_{TOT} = \sum_i E_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \underbrace{v_i^2}_{(Rw)^2} = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 w^2 = \frac{1}{2} w^2 \underbrace{\sum_i m_i R_i^2}_{I_z}$$

$$= \frac{1}{2} I_z w^2$$

Molto simile all'energia del punto materiale

Momento di inerzia di una sbarra sottile

ToDo