

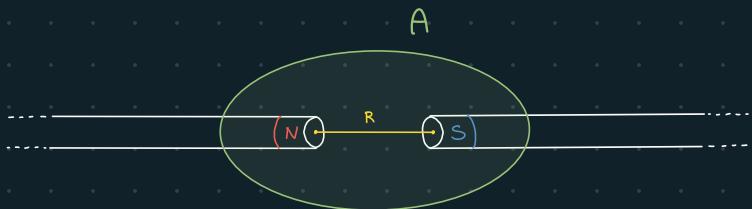
A partire dalla carica "magnetica"

Semplice

Carica magnetica

$$F = K \cdot \frac{q_m \cdot q'_m}{R^2}$$

Forza di Coulomb



Se consideriamo due magneti infinitamente lunghi, nell'area A agiranno solo i due "mono poli" N e S.

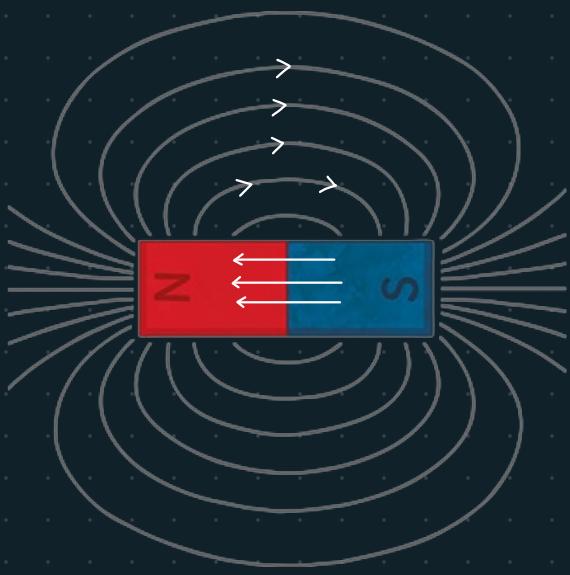
Definiamo il campo magnetico come quello elettrico:  $E = \frac{-\sigma}{q} F_c$

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}}{q_m} = K \frac{q_m}{R^2}$$

Ma il mono polo magnetico non esiste!

Il campo magnetico

Come esiste il campo elettrico, esiste anche quello magnetico, e possiamo VISUALIZZARLO grazie ad una bussola o ago magnetizzato.



\* Durante tutto il capitolo mi riferiro al campo magnetico come MF: magnetic field.

Ci sono delle "Regole" quando si disegnano le linee di forza (come nel C.E.m.)

1. La direzione del MF\* è tangente alla linea del MF in qualsiasi punto.
2. Il numero di linee di forza in un punto è proporzionale al MODULO del MF.

$$\text{Proporzionale} \downarrow$$

$$N \propto |\vec{B}| \Delta S$$

↑                      ↑                      ↑  
 Numero di      Modulo      unità di  
 linee di forza    del campo    spazio

$$\Rightarrow dN = |\vec{B}| dS = d\phi_B \quad \text{infatti } \phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

↓                      ↑  
 Linee di forza      flusso del MF  
 infinitesime in un'area      Infinitesimo  
 infinitesima

\* Per DEFINIZIONE il numero di linee di forza uscenti da una superficie corrispondono al FLUSSO DEL campo magnetico.

Per quanto riguarda la Direzione delle linee di forza:

Esse sono dirette come la direzione la quale punterebbe il polo Nord di una Bussola posta in quel punto.

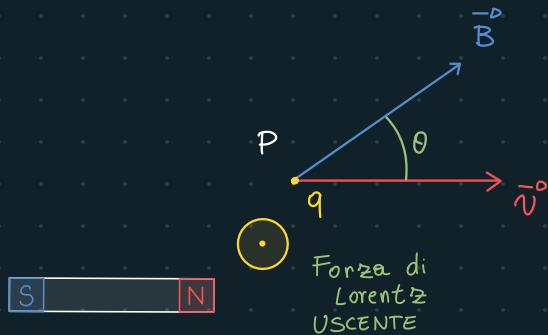
$\Rightarrow$  le linee di forza di un magnete partono sempre dal POLO SUD ed arrivano al POLO NORD.

## da forza di LORENTZ

Ci sono due modi per trovare questa legge :

A: Partendo da una singola carica elettrica in movimento (Feoli)

B: Dalla corrente in un circuito Esploratore (Menuccini)



Immaginiamo di avere una carica "q" in un punto P nello spazio; poniamo anche un magnete vicino alla carica q; questo magnete genererà un campo magnetico che influenza la carica.

Possiamo "visualizzare" il campo magnetico grazie ad una bussola che ci dice direzione e verso del campo magnetico (la direzione è data dalla retta che unisce i due estremi dell'ago, mentre il verso va dal polo sud al nord dell'ago)

Quando la carica **è ferma** non si nota alcun effetto su di essa (dato dal campo magnetico); questo ci fa dedurre che **il campo magnetico non agisce su cariche ferme!**

### Cosa accade quando la carica si muove?

**Sperimentalmente** notiamo che quando la carica si muove, viene **deviata** dal campo magnetico. Ripetendo l'esperimento più volte ci accorgiamo che ci sono dei **parametri ricorrenti**:

1. **Indipendentemente** dalla direzione di  $\mathbf{v}$ , la forza magnetica  $\mathbf{F}$  è **sempre perpendicolare alla velocità**.
2. Cambiando la direzione della velocità  $\mathbf{v}$ , notiamo che il modulo varia in proporzione con il **seno dell'angolo** compreso tra il campo magnetico e la velocità.
3. Quando cambiamo il modulo della velocità, **proporzionalmente** cambia anche il modulo della forza  $\mathbf{F}$ .
4. La forza  $\mathbf{F}$  è **proporzionale alla carica q** e che il vettore forza assume verso opposto quando la carica cambia di segno.
5. La direzione del vettore forza è **perpendicolare** al vettore campo magnetico.

Possiamo unire questi parametri nella formula :

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

Carica elettrica      Vettore Velocità      Prodotto vettoriale      K e' il modulo di  $\vec{B}$  e  $\vec{B}$   
 Vettore Campo Magnetico      come  $\vec{B}$

$$\rightarrow |\vec{F}| = q |\vec{v}| \cdot \sin(\theta) \cdot |\vec{B}| \equiv q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

FORZA DI LORENTZ

Possiamo quindi trovare il campo magnetico:

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}}{q \cdot \vec{v} \cdot \sin \theta}$$

Se  $\vec{B} \perp \vec{v}$

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}}{q \cdot \vec{v}}$$

Secondo

d' unita' di misura del campo magnetico:

$$\frac{F}{q \cdot v} = \frac{N}{C \cdot m} = \frac{N \cdot S}{C \cdot m}$$

Sappiamo che  $V = \frac{N \cdot m}{C}$

$$= \frac{m}{m} \cdot \frac{N \cdot S}{C \cdot m} = \frac{V \cdot S}{m^2}$$

do Battezziamo TESLA

Quando sono presenti sia il Campo elettrico che il Campo magnetico, sulla carica agisce la forza:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

FORZA DI LORENTZ con campo elettrico + MF

Forza in funzione della corrente

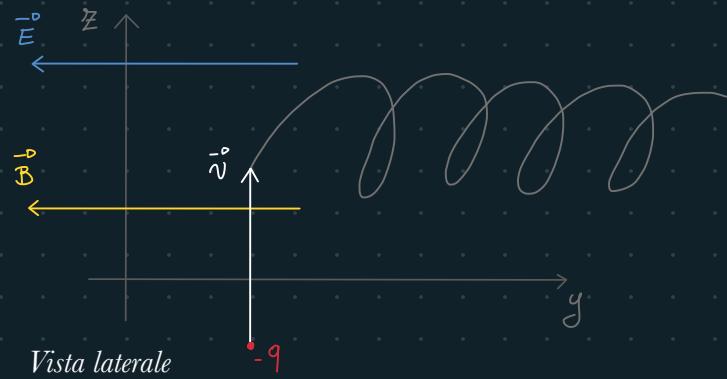
$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = dq \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = dq \cdot \frac{de}{dt} \wedge \vec{B}$$

$$\text{Sapendo che } \frac{dq}{dt} = I \Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{e} \wedge \vec{B}$$

Seconda formula  
di Laplace

# Esempio di applicazione della forza di Lorentz

## do Spettrometro di massa



Dalla meccanica  $\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}$ , ma l'unica forza agente è quella di Lorentz.

$$\Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{\alpha} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \text{ ma } \vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \sin 90^\circ = 1 \Rightarrow F = m \cdot \alpha = q v B$$

L'esperimento ci mostra che dato uno ione sparato all'interno di un campo magnetico (più un campo elettrico, ma non ci interessa molto), questo è soggetto ad una forza che modifica il suo vettore velocità tangenziale  $v$  in modo da fargli compiere un **moto circolare** (nel nostro caso uniforme!).

Deduciamo quindi che la forza è di tipo **centripeta**, e che è causata dall'unica forza agente: la **forza di Lorentz**.

$$\text{Accelerazione centripeta : } \frac{v^2}{R}$$

$$\text{Mettiamo tutto insieme : } F = m \cdot \alpha = q v B \Rightarrow m \frac{v^2}{R} = q v B$$

I soliamo R :

$$R = \frac{m v}{q B}$$

Raggio della circonferenza compiuta da uno ione sparato a velocità  $v$  in un campo magnetico  $B$  perpendicolare a  $v$ , data la massa dello ione  $m$ .

Come viene accelerato lo ione ?

Dalla meccanica abbiamo imparato a capire che la velocità è una forma di energia. Quindi quando lo ione si trova ad una velocità  $v$ , vuol dire che una certa *energia* è stata *convertita* da **potenziale** a **cinetica**.

$$q(V_A - V_B) = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1)$$

$$\text{Siccome } R = \frac{m v}{q B} \Rightarrow R^2 = \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2}$$

$$\text{Sostituendo } R^2 = \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2} \Rightarrow 2 \frac{m (V_A - V_B)}{q B^2}$$

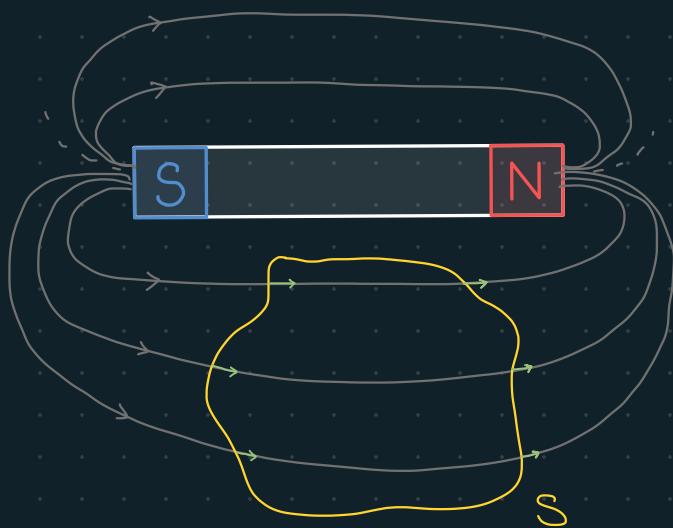
I soliamo m :

$$m = \frac{B^2 q R}{2 (V_A - V_B)}$$

**Morale della favola:** siccome conosciamo la *differenza di potenziale*, il *campo magnetico*, la *carica* sparata ed il *raggio di curvatura* (conosciamo tutti questi valori perché l'esperimento l'abbiamo strutturato noi!), possiamo calcolare la *massa* dello ione (in modo da identificare gli **isotopi** dell'elemento!)

Le formule che troveremo ci permetteranno di calcolare il MF ( $\vec{B}$ ) in un punto P qualsiasi; dapprima in un caso particolare, e successivamente in un caso generico.

Passo 1: Troviamo il flusso in una regione di spazio.



Quando avevamo definito il campo magnetico, avevamo detto che **il flusso del MF è in una regione è proporzionale al numero di linee di forza** nella suddetta regione.

$$\underline{\Phi}_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = N_{\text{linee di forza}}$$

Ma notiamo che, siccome **le linee di forza di B sono chiuse**, ovvero che formano una linea chiusa (all'interno del magnete tornano da N ad S e poi escono nuovamente), dalla superficie S **tante linee entrano quante ne escono!**

Possiamo quindi scrivere:

$$\underline{\Phi}_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \emptyset$$

**Equazione di Maxwell per il campo MAGNETICO**

In forma Integral

Possiamo trovare la forma Differenziale con il teorema della divergenza:

$$\int_S \vec{V} \cdot dS = \int_V \nabla \cdot \vec{V} dV \quad \rightarrow \quad \underline{\Phi}_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \emptyset$$

Teorema

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = \emptyset$$

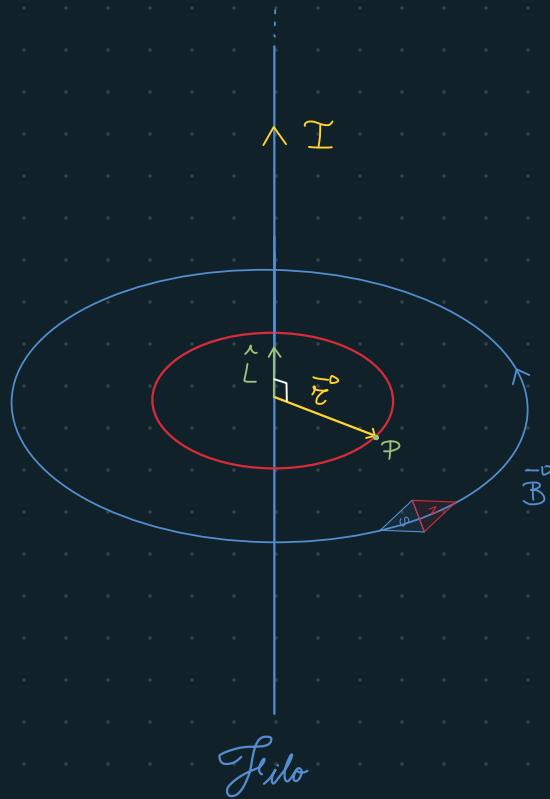
**Equazione di Maxwell per il campo MAGNETICO**

In forma Differenziale

# Legge di Biot - Savart

Lezione 33

Calcolare il campo magnetico in un caso particolare



La legge di **Biot - Savart** definisce il campo magnetico generato da **un filo** di lunghezza indefinita **percorso da una corrente I**. Sappiamo che con il movimento di cariche elettriche (corrente) viene generato un campo magnetico (in blu), che possiamo disegnare utilizzando una bussola; notiamo quindi che il campo magnetico **B** è costituito da **linee di forza concentriche** perpendicolari al filo.

Possiamo ottenere il **verso delle linee di forza** usando la regola della mano destra con il prodotto vettoriale tra **L** ed **r** (vettori, lo vedremo meglio tra poco)

**Sperimentalmente**, si scopre che il **modulo** del campo magnetico dipende dalla distanza (linearmente!), dalla corrente che attraversa il filo e da una costante **k**:

$$|\vec{B}| = k \cdot \frac{I}{r} \quad \text{Legge di Biot - Savart}$$

Note: Nel Sistema Internazionale Si pone  $k = \frac{\mu_0}{2\pi}$

Quindi:  $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  con  $\mu_0$  è la Permeabilità magnetica nel vuoto

Vettore Campo magnetico

Siccome il MF ha un verso ben specifico ( $\vec{B} \perp \hat{L} \perp \hat{r}$ ) possiamo scriverlo:

$$\hat{B} = \hat{L} \wedge \hat{r} = \frac{\hat{L} \wedge \hat{r}}{r}$$

Quindi:  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I \hat{L} \wedge \hat{r}}{r} \Rightarrow$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I \cdot \frac{\hat{L} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

Bonus: Possiamo scrivere il vett MF  $\vec{B}$  usando il versore  $\hat{t}$ , che è il versore tangente alle circonferenze concentriche al filo:

$$\Rightarrow \vec{B} = K I \cdot \frac{\hat{L} \wedge \hat{r}}{|\hat{r}|^2} \Rightarrow \vec{B} = \frac{K I}{r} \cdot \hat{t}$$

Il problema

Sebbene questo ragionamento funzioni bene, non è applicabile ad un caso generale.

# Vettore Campo Magnetico nel caso generale Lezione 33

## Seconda formula di Laplace

Possiamo pensare di generalizzare la formula di -Biot-Savart andando a considerare una porzione infinitesima del filo, andando a calcolare il differenziale:

$$\vec{B}^0 = \frac{\mu_0}{2\pi} I \cdot \frac{\lambda \vec{r}}{r^2} \quad \text{Differenziale} \rightarrow d\vec{B}^0 = \frac{\mu_0}{2\pi} I \cdot \frac{d\vec{e} \lambda \vec{r}}{r^2}$$

Laplace però, trova una formula leggermente diversa:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{e} \lambda \vec{r}}{r^2}$$

Seconda formula di Laplace

Come ricavarla?

Quando abbiamo definito il campo magnetico a partire dalla **carica magnetica**, abbiamo detto che il campo magnetico veniva definito proprio come il campo elettrico; ovvero come la forza (in questo caso magnetico) diviso la carica: cc

$$\vec{F}_m = K \cdot \frac{q_m \cdot q_m'}{r^2} \quad \text{e che} \quad \vec{B}^0 = \frac{\vec{F}_m}{q_m} \Rightarrow \vec{F}_m = \vec{B}^0 \cdot q_m$$

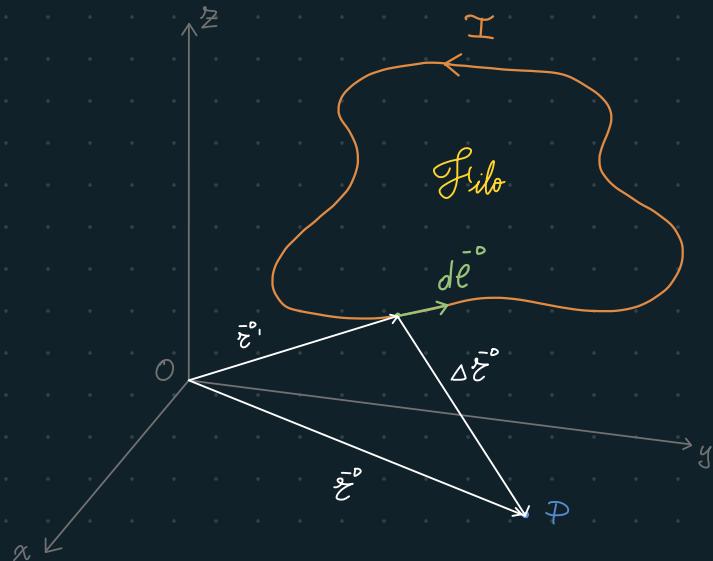
$$\text{Alla 1 corrisponde} \quad d\vec{F} = I d\vec{e} \lambda \vec{B}^0 \quad \text{II formula di Laplace} \uparrow \quad = \circlearrowleft q_m = I d\vec{e}$$

$$\text{Sappiamo che} \quad F_m = \frac{q_m \cdot q_m'}{r^2} \cdot K$$

$$= \circlearrowleft F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_m \cdot q_m'}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_m}{q_m} = \vec{B}^0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_m}{r^2} \cdot \vec{e}$$

$$q_m = I d\vec{e}, \quad \vec{e} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}^0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{e} \lambda \vec{r}}{r^3}$$

Abbiamo ritrovato la  
II formula di Laplace



Laplace riesce a **generalizzare** il concetto della legge di Biot-Savart in modo da calcolare il campo magnetico in un punto qualsiasi di un **circuito generico**.

Abbiamo un circuito che si estende su **tre dimensioni**; anche in questo caso il circuito è percorso da una corrente (che genera quindi un campo magnetico). L'unica differenza rispetto al caso particolare (filo percorso da corrente) è che il filo non è più infinitamente lungo e non è lineare.

Possiamo però **ricondurci al caso particolare** andando a considerare una **porzione infinitesima** del filo:

Traduciamo la Prima formula in questo sistema di riferimento:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}' \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|^3}$$

Infinitesima

Per trovare Il MF totale ci basta integrare lungo il filo chiuso:

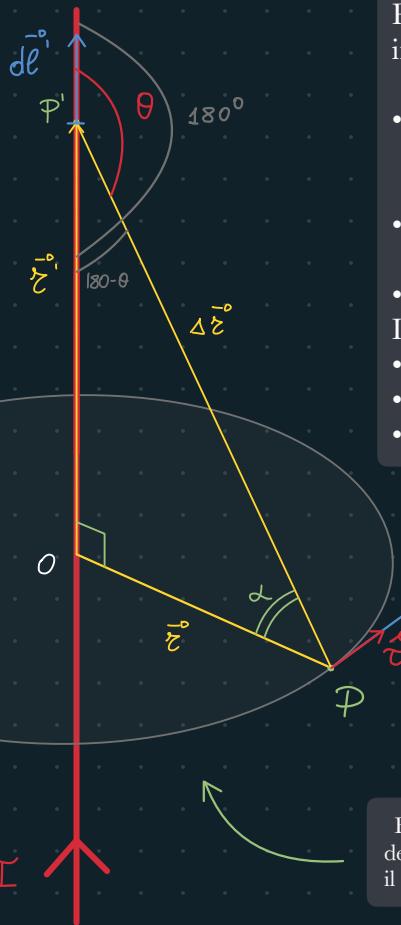
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|^3}$$

Prima formula di  
Laplace

### Considerazioni

Per passare dallo **schema** "carica elettrica" a quello "carica magnetica" sostituiamo alla carica magnetica "Idl" (seconda formula di Laplace); questa operazione ci permette di calcolare la prima formula di Laplace, che ci servirà a calcolare il campo magnetico **in un caso qualsiasi**.

Legge di Biot - Savart: filo percorso da corrente



Prima di iniziare con la dimostrazione, è doveroso dare qualche informazione preliminare:

- Vogliamo calcolare il vettore campo magnetico in un punto P usando la prima equazione di Laplace; l'obbiettivo è proprio quello di ritrovare lo stesso risultato ottenuto tramite la legge di Biot-Savart.
  - Chiamiamo quindi P il punto in cui andremo a calcolare il vettore campo magnetico.
  - Chiamiamo inoltre dl la porzione infinitesimale di filo.
- Inoltre battezziamo:
- r: il vettore che collega il punto P all'origine del nostro sistema.
  - r': il vettore che collega l'inizio della porzione dl all'origine.
  - $\Delta r$ : il vettore differenza  $r - r'$ , ovvero il vettore che collega r ad r'.

Partiamo dalla legge di B-S :

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl' \wedge \Delta \vec{r}}{|\Delta r|^3} \hat{\vec{r}}$$

Bisogna notare che l'unica cosa reale dell'illustrazione è il filo (in rosso); tutto il resto è una costruzione geometrica.

$$|dl'| = dl$$

$$1) \quad dl' \wedge \Delta \vec{r}' = |dl'| \Delta \vec{r}' \sin \theta \Rightarrow \mathcal{B} = K \cdot \mathcal{I} \cdot \int \frac{|dl'| \Delta \vec{r}' \sin \theta}{|\Delta r'|^3} \hat{\vec{r}}' = K \mathcal{I} \int \frac{\sin \theta}{\Delta r'^2} dl'$$

$$2) \quad \text{Siccome } dl' \parallel \vec{r}' \Rightarrow dl' = d\vec{r}' \Rightarrow \mathcal{B} = K \mathcal{I} \int \frac{\sin \theta}{\Delta r'^2} d\vec{r}'$$

3) Vogliamo esprimere il tutto in termini di  $\alpha$  e non  $\theta$ :

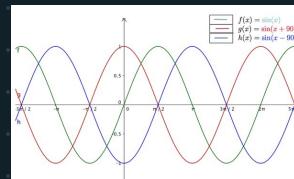
$$A) \quad \alpha = 180 - 90 - (180 - \theta) \Rightarrow \alpha = \theta - 90 \Rightarrow \theta = \alpha + 90$$

$$\Rightarrow \sin(\theta) = \sin(\alpha + 90) = \cos(\alpha) \quad (\text{dalla trigonometria})$$

$$B) \quad \vec{r}' = \vec{r} \cdot \tan(\alpha) \Rightarrow d\vec{r}' = d(r \tan \alpha) \quad \text{ma } r = \text{cost}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\alpha} (r \tan \alpha) = r \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha \Rightarrow d\vec{r}' = \frac{\vec{r}}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$C) \quad \text{Siccome } \vec{r} = \Delta \vec{r} \cos \alpha \Rightarrow \Delta \vec{r} = \frac{\vec{r}}{\cos \alpha}$$



D) Quando cambiamo la variabile di integrazione (in alpha) anche +inf e -inf assumono due valori diversi; quando  $d\alpha \rightarrow +\infty$ ,  $\alpha$  tende a  $\pi/2$ . L'integrale, quindi, cambia estremi di integrazione.

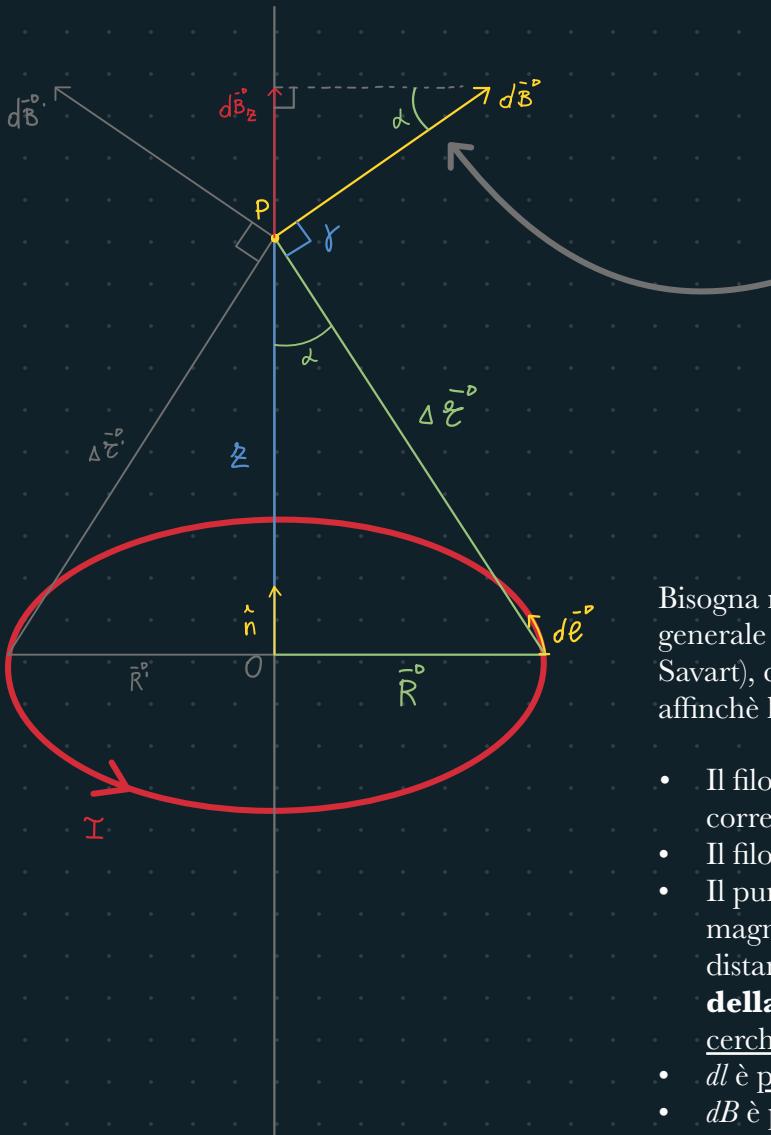
4) Mettendo tutto insieme otteniamo:

$$\Rightarrow \vec{B} = \kappa \cdot I \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\alpha)}{\frac{r^2}{\cos^2(\alpha)}} \hat{r} \cdot \frac{\hat{r}}{\cos^2(\alpha)} d\alpha \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\alpha)}{r} d\alpha$$

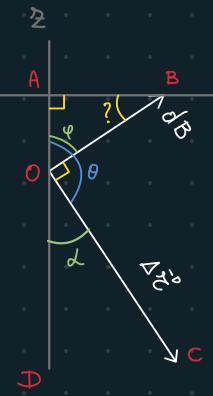
Ma, quando varia  $\alpha$ ,  $r$  resta fisso  $\Rightarrow r = \text{cost}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha) \hat{r} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot \left[ \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} + \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1} \right] \hat{r}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\hat{r} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{r}}$$

*legge di Biot-Savart  
CVD*



Dimostrazione dell'angolo  $\alpha$



$$\begin{aligned}
 &\text{Se } \hat{\vec{B}}\vec{O} \text{ è un angolo retto, come lo è } \hat{\vec{O}}\vec{A} \\
 &\hat{\vec{A}}\vec{O} = 180^\circ - \alpha = \theta \\
 \Rightarrow &\hat{\vec{O}}\vec{A}\vec{B}_\Delta = 180^\circ = \theta \\
 &\hat{\vec{A}}\vec{B}\vec{O} = 180^\circ - 90^\circ - \theta \\
 \Rightarrow &\theta = 90^\circ - \alpha \\
 \Rightarrow &\phi = 90^\circ - \alpha \\
 \Rightarrow &\hat{\vec{A}}\vec{B}\vec{O} = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) \\
 \Rightarrow &\alpha = \phi
 \end{aligned}$$

Bisogna notare che in quest'altro caso, che può sembrare generale (lo è sicuramente di più rispetto alla legge di Biot-Savart), ci sono dei "pezzi" che vanno posizionati ai punti giusti affinché la dimostrazione funzioni:

- Il filo (*spira*) è **circolare**; al suo interno circuita una corrente **I**.
- Il filo (in rosso) è **l'unico elemento reale**.
- Il punto **P** nel quale vogliamo calcolare il campo magnetico **B** è **posizionato lungo l'asse z**, ad una distanza **Z**. L'asse **z**, inoltre, è posto lungo il **centro della spira**, che in questo caso specifico forma un **cerchio**.
- $dl$  è perpendicolare ad  $R$ .
- $dB$  è perpendicolare sia a  $\Delta r$  che  $dl$

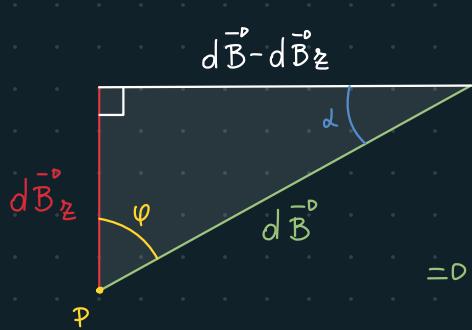
Inoltre, se prendiamo una porzione infinitesima di filo  $dl'$  speculare a  $dl$ , notiamo che anche questo produce un campo  $dB'$  con modulo uguale a  $dB$ , proprio perché il raggio  $R'$  è il medesimo di  $R$ . Fatta questa premessa ci accorgiamo che il vettore  $dB'$  (come il vettore  $dB$ ) può essere scomposto in due componenti: una lungo  $z$  ed una lungo "x" (questa componente non ci interessa particolarmente).

Siccome i due vettori  $dB$  sono speculari, notiamo che le componenti lungo "x" si annullano a due a due, mentre le componenti lungo  $z$  si sommano costruttivamente.

Infine, dobbiamo stabilire una **convenzione** per il verso del **versore normale n**. La direzione è presa in modo tale che, posizionandosi in  $O$ , vediamo la corrente **fluire in senso antiorario**.

Passo 1: I legge di Laplace:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{I} \cdot \frac{d\ell \wedge \Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|^3}$

Passo 2: Consideriamo solo  $d\vec{B}_z$  (per le ragioni viste prima)



Per la Trigonometria

$$d\vec{B}_z = d\vec{B} \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \oint d\vec{B} \quad \text{ma} \quad \begin{cases} d\vec{B}_x = 0 \\ d\vec{B}_y = 0 \\ d\vec{B}_z \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = \oint dB_z$$

$$\Rightarrow \text{Sostituendo } \vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{4\pi} \oint \frac{de \cdot \Delta \vec{r} \cdot \sin \psi}{|\Delta \vec{r}|^3} \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{4\pi} \oint \frac{\sin \alpha}{|\Delta \vec{r}|^2} de$$

$\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$

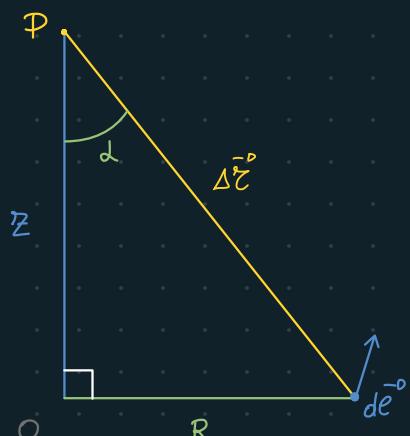
Siccome la spira è una circonferenza:  $\sin \alpha, |\Delta \vec{r}| = \text{cost}$

$$\Rightarrow \vec{B} = n \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{4\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{|\Delta \vec{r}|^2} \oint de$$

Sempre perché è una circonferenza  
 $\oint de = 2\pi R$

$$\Rightarrow \vec{B} = n \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{4\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{R^2} 2\pi R$$

Passo 3) Considero il triangolo:



$$\bullet \overline{OP} = z \Rightarrow |\Delta \vec{r}| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$\bullet R = |\Delta \vec{r}| \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{R}{|\Delta \vec{r}|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

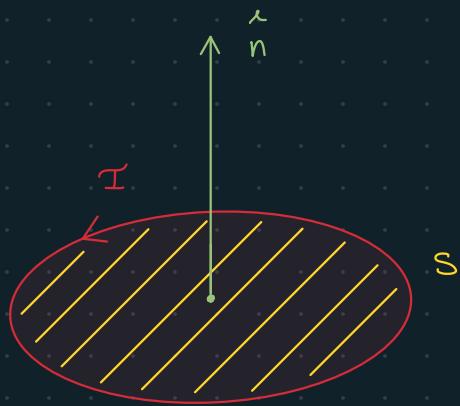
$$\text{ma } \sqrt{R^2 + z^2} \cdot R^2 = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (R^2 + z^2) = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}+1} = (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(R^2 + z^2)^3}$$

$$\text{Sostituisco } \vec{B} = n \cdot \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{R}{R^2 + z^2} \cdot (\sqrt{R^2 + z^2})^2} \cdot 2\pi R = n \cdot \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + z^2} \cdot R^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = n \cdot \frac{\mu_0 \mathcal{I} R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

Campo magnetico di una spira circolare

## Momento magnetico della Spira



Consideriamo la spira percorsa da corrente come il *contorno di una superficie*. Allora possiamo definire **momento magnetico della spira**:

$$\vec{m} = \mathcal{I} S \hat{n}$$

VETTORE

Siccome la spira descrive una circonferenza:

$$S = \pi R^2 \Rightarrow \vec{m} = \mathcal{I} \pi R^2 \hat{n}$$

Possiamo esprimere il campo magnetico in termini del momento magnetico:

$$\vec{B} = \hat{n} \cdot \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{con } m = \mathcal{I} \pi R^2 \hat{n}$$

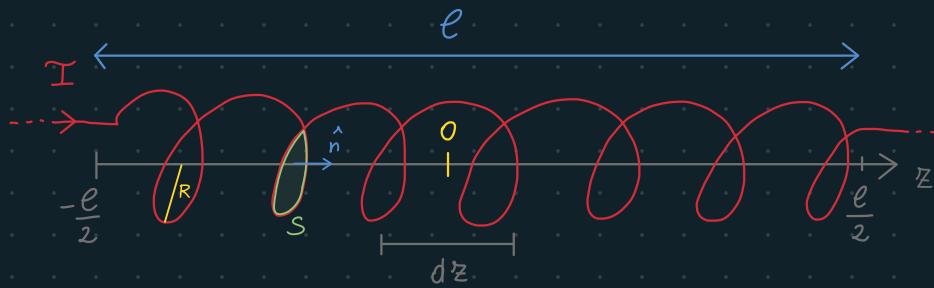
$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{\hat{n} \mathcal{I} R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\pi}{\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 m}{2\pi (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Campo magnetico di una spira in funzione  
del suo momento magnetico

# Campo magnetico del Solenoide

Lezione 35



$$\begin{aligned} \vec{n} &\perp \hat{z} \\ \Rightarrow \vec{n} &\equiv \hat{z} \end{aligned}$$

Il solenoide è un componente elettronico composto da un filo arrotolato attorno ad un supporto (tubo) cilindrico (che poi viene sfilato, quindi il solenoide è solo la parte di filo!).

Possiamo vederlo come **tante singole spire** poste in sequenza; di conseguenza il campo magnetico del solenoide **è la somma di tutti i campi magnetici** prodotti dalle singole spire.

Poniamo  $N = \text{numero di Spire} \Rightarrow \frac{N}{l} = \text{n. Spire per unità di lunghezza.}$

A questo punto prendiamo una **porzione infinitesima** del filo  $l$ , che chiamiamo  $dz$ ; di conseguenza possiamo determinare quante spire sono presenti all'interno della porzione  $dz$ :

Se  $\frac{N}{l} = n = \boxed{\text{densità di spire}} \Rightarrow \underline{n dz} = \text{Spire nella porzione } dz.$

Per ottenere il campo totale, **integriamo** in  $dz$  lungo la lunghezza del Solenoide; siccome poniamo l'origine del S.R. a  $O$ , ed il solenoide è lungo  $l$ , integriamo in  $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ :

$$\vec{B} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \vec{n} \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot n dz$$

Cosa è costante rispetto a  $z$ ? Tutto, Tranne  $(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$

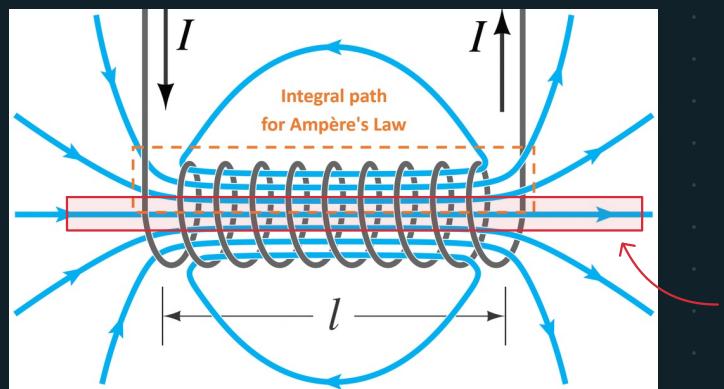
$$\begin{aligned} \vec{B}_z &= \vec{n} \mu_0 I R^2 \cdot \frac{N}{2l} \cdot \int (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} dz = \vec{n} \mu_0 I R^2 \cdot \frac{N}{2l} \left[ \frac{1}{R^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \\ &= \vec{n} \mu_0 I R^2 \cdot \frac{N}{2l} \cdot \left[ \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\ell}{2\sqrt{R^2 + \ell^2}} \right] \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{4R^2 + \ell^2}{4}} = \frac{\ell \sqrt{4R^2 + \ell^2}}{\sqrt{4}} \\ &= \vec{n} \mu_0 I R^2 \frac{N}{2l} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{4R^2 + \ell^2}} = \boxed{\vec{n} \mu_0 I N \cdot \frac{1}{\sqrt{4R^2 + \ell^2}}} \quad \vec{B}_z \end{aligned}$$

APPROXIMAZIONE COMUNE

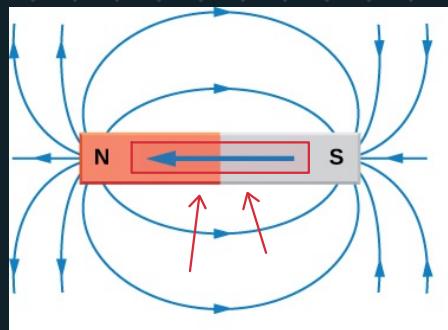
$$\begin{aligned} \ell \gg R &\Rightarrow \sqrt{4R^2 + \ell^2} \sim \sqrt{\ell^2} \sim \ell \Rightarrow \vec{B}_z = \vec{n} \mu_0 I N \cdot \frac{1}{\ell} \quad \text{d'averemo battezzata "n"} \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{B}_z = \vec{n} \mu_0 I n} \quad \text{Se } \ell \gg R \end{aligned}$$

## Morale della favola

Lungo l'asse  $z$ , il campo magnetico è **lineare**, ovvero **attraversa il solenoide** in linea retta finché le linee di forza non usciranno “dall'altra parte”:



Il campo magnetico è  
**parallelo** a  $z$



Campo magnetico di un  
magnete lineare

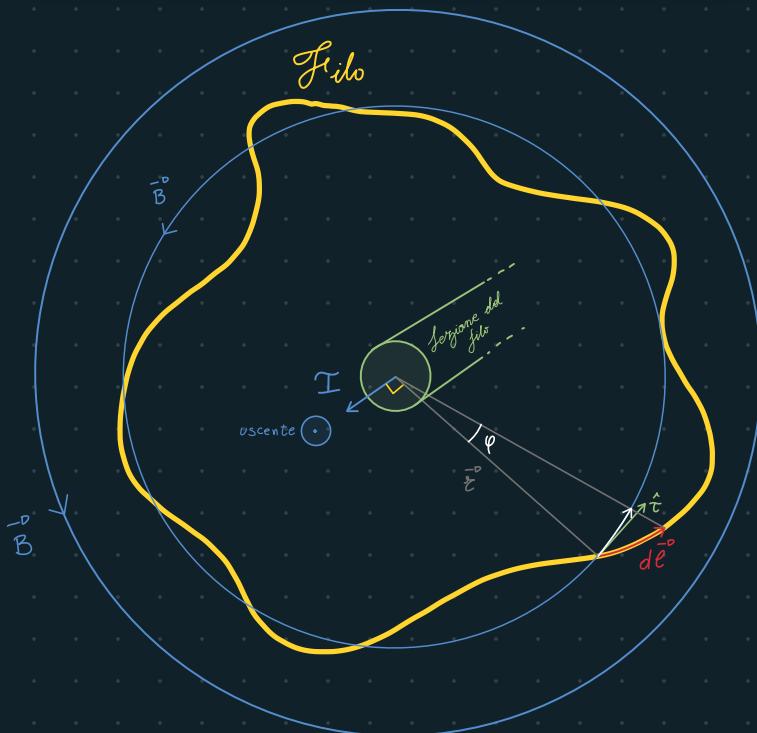
Magnetic field lines of a bar magnet

(a)

Calcolando il flusso del campo magnetico  $\mathbf{B}$  abbiamo trovato **la prima equazione di Maxwell** per il campo magnetico; se andiamo a calcolare la **circuitazione** del campo magnetico  $\mathbf{B}$ , otterremo **la seconda equazione di Maxwell** per il campo magnetico.

**Primo caso:** linea chiusa concatenata col filo

In altre parole: la linea chiusa (in giallo) circonda il filo attraversato da corrente (in verde)



Come sempre, prima di partire, facciamo qualche osservazione:

- La prima cosa che dobbiamo dire è che la corrente  $I$  è perpendicolare al piano; essa passa attraverso un filo (in verde) di cui è rappresentata la sezione (che non riveste un particolare ruolo nella dimostrazione, ma è bene saperlo).
- abbiamo anche un altro filo (in giallo), di forma qualsiasi, che è posto “attorno” alla corrente in un piano perpendicolare alla corrente.
- Prendiamo in considerazione una porzione infinitesimale del filo (in giallo) che chiamiamo  $d\ell$ .
- In blu sono rappresentate le linee di forza del campo magnetico  $\mathbf{B}$ .
- $Tau$  è il versore tangenziale rispetto alle linee di forza del campo magnetico
- L'angolo  $d\phi$  è positivo (antiorario) se misurato nel verso del campo  $\mathbf{B}$ , altrimenti è negativo (orario)

Per la legge di Biot - Savart sappiamo che il MF di un filo e'

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\tau}$$

Passo 1: Circuitazione =  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint \hat{\tau} d\vec{\ell}$

Passo 2: fare  $d\vec{\ell} \cdot \hat{\tau}$  significa prendere la proiezione di  $d\vec{\ell}$  sulla circonferenza, ovvero sulla linea di forza di  $\vec{B}$  nella posizione  $\vec{r}$ .

$$\Rightarrow \hat{\tau} d\vec{\ell} = \text{Arco di circonferenza}$$

Definizione di Radiante:  $\text{Angolo}_{\text{Rad}} = \frac{\ell}{R} \Rightarrow \ell = \text{Angolo}_{\text{Rad}} \cdot \vec{r} = \varphi \cdot \vec{r}$   
Siccome  $d\ell$  è infinitesimo  $\Rightarrow d\vec{\ell} \hat{\tau} = d\vec{r} = d\vec{\ell} \vec{r} = \vec{r} d\varphi$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} d\varphi = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\varphi}$$

Passo 3: Siccome dobbiamo sommare gli angoli di una circonferenza chiusa

$$\oint d\varphi = 2\pi = 360^\circ \Rightarrow \oint \vec{B} d\vec{\ell} = \pm \mu_0 I$$

Circuitazione del campo magnetico:  
seconda legge di Maxwell (integrale)

## Considerazioni

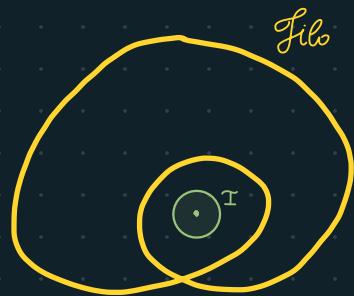
Il **segno** del risultato è dato proprio dal **campo magnetico**; se facciamo il prodotto vettoriale tra **L** (versore diretto lungo la velocità della corrente, quindi parallelo al filo conduttore) ed il vettore **r** (il vettore posizione che collega o al punto di applicazione di **dl**) ci accorgiamo che il campo magnetico è diretto:

- In senso antiorario se la corrente è uscente dal foglio (come nel nostro caso)
- In senso orario se la corrente è entrante nel foglio.

Di conseguenza arriviamo all'ulteriore conclusione che il segno del risultato dipende (di conseguenza) dalla corrente (che modifica il campo magnetico che a sua volta modifica il segno)!

## Inoltre

Il filo (in giallo) potrebbe girare attorno al filo interno percorso da corrente (in verde) **più volte**. In questo caso per ogni volta che il filo si avvolge, aggiunge un contributo  $\mu * I$ , e quindi avremo che:



$$\mathcal{B} = N \cdot \mu_0 I$$

La situazione è simile a quella di un solenoide, che consiste in un lungo avvolgimento di filo conduttore avvolto attorno ad un cilindro. In un solenoide, il campo magnetico **B** è proporzionale al numero di spire per unità di lunghezza **N/L**, alla corrente **I** che attraversa le spire e alla permeabilità magnetica del vuoto **μ**. Quindi, il campo magnetico totale all'interno di un solenoide può essere espresso come  $B = N/L * \mu * I$ .

Il campo magnetico generato dal filo esterno che avvolge il filo interno con corrente è simile al campo magnetico di un solenoide perché entrambi sono generati dalla corrente che scorre nel filo e dipendono dal numero di spire che avvolgono il filo interno. Inoltre, entrambi i campi magnetici hanno una direzione parallela all'asse del filo interno o del solenoide.

## Forma Integrale e differenziale della II legge di Maxwell

Forma integrale:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \pm \mu_0 I$

Teorema del Rotore:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 I$

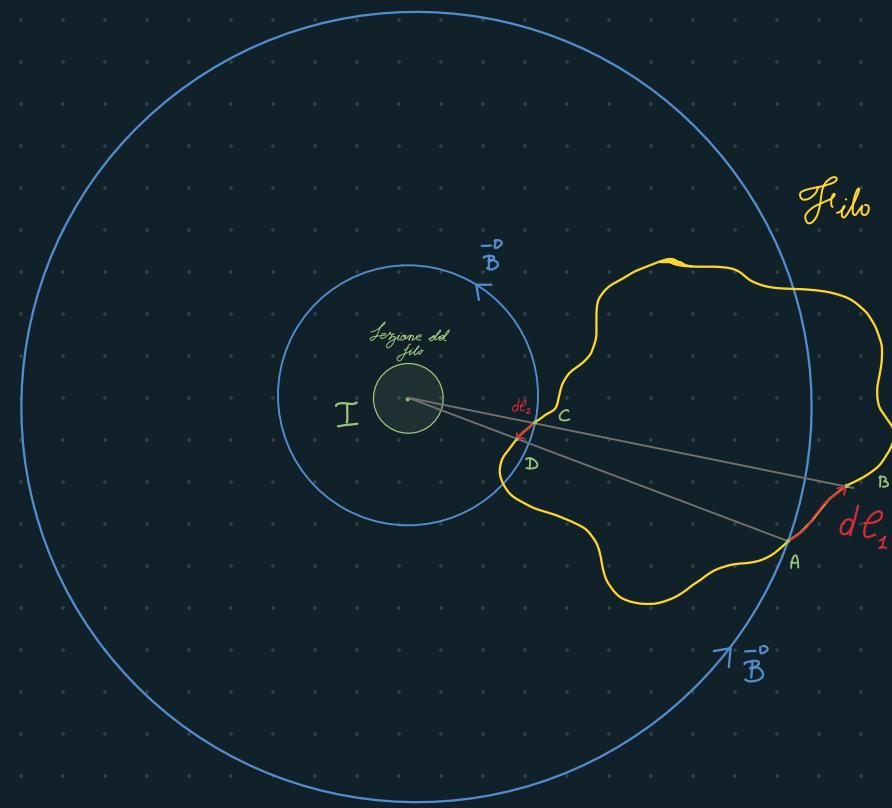
Flusso della densità di corrente  $d I = d \vec{J} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Circuitazione del campo magnetico:  
seconda legge di Maxwell (differenziale)

**Secondo caso:** linea chiusa **non** concatenata col filo  
In altre parole: la linea chiusa (in giallo) è **esterna** al  
il filo attraversato da corrente (in verde)



Se andiamo ad applicare il calcolo della circuitazione a questo caso specifico, notiamo che otteniamo due vettori  $d\ell$  sulla linea chiusa (in giallo); ma entrambi i pezzettini infinitesimi di linea ( $d\ell$ ) sono legati allo stesso angolo  $\phi$  (si tratta di un cono), di conseguenza otteniamo:

Quando calcoliamo il primo integrale, lo facciamo da A a B; di conseguenza prendiamo l'angolo  $\phi$  in verso antiorario, e quindi l'angolo sarà **positivo**.

Quando invece calcoliamo l'integrale da C a D, se consideriamo sempre il campo **B** antiorario (di certo non cambia se non cambia il verso della corrente **I**), ci accorgiamo che l'angolo  $\phi$  è una **misura negativa**, di conseguenza il secondo integrale è negativo.

$$\Rightarrow \vec{B}_{TOT} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_1 + \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_A^B (d\phi) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_C (d\phi) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \emptyset$$

l'angolo è lo stesso

## Potenziale Scalare

Ricordiamo le eq del campo elettrico che ci hanno permesso di arrivare all'equazione di Poisson:

Equazioni di Maxwell per il campo elettrico

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla V \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Eq di Poisson

Soluzione eq di Poisson

Lo scopo del gioco è quello di trovare un'equazione con la stessa struttura dell'equazione di poisson (per il campo elettrostatico), per il campo magnetostatico.

Di conseguenza dobbiamo **definire un potenziale per il campo magnetico**:

Equazioni di Maxwell per il campo magnetico

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2) \text{ Rotore del gradiente} = \emptyset \end{cases}$$

Definiamo il VETTORE POTENZIALE  $\vec{A}$  in modo che

$$\vec{B} = \underline{\nabla \times \vec{A}} \quad \text{ROTORE DI } \vec{A}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{è la divergenza per un rotore} \rightarrow \text{Per definizione} \\ \rightarrow \operatorname{div}(\nabla \times \vec{A}) = 0 \Rightarrow \text{Eq sempre vera} \rightarrow \text{inutile}$$

Sfruttiamo l'identità Vettoriale

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

gradiente della Divergenza Laplaciano

$$\Rightarrow \boxed{\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}}$$

molto simile all'eq di Poisson ma c'è un TERMINE in più.

Quello che andremo a fare adesso, è dimostrare che grazie alla **libertà di gauge** e la consecutiva **gauge di Coulomb**, il rotore di  $\vec{A}$  è sempre uguale a zero, e che quindi l'equazione (1) ha la stessa forma dell'equazione di poisson (e quindi anche la sua soluzione).

## Trasformazione di Gauge

Poniamo  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$  con  $f$  una qualsiasi funzione.  
 $\vec{\nabla} f$   
gradiente

L'invarianza di Gauge ci dice che  $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

proof:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \cancel{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f}$$

Abbiamo visto nella (2) che  
e' zero

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \text{CVD}$$

SICCOME avevamo definito  $\vec{B}$  come il ROTORE di  $\vec{A}$  ( $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ ) e  $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}'$  Allora il campo magnetico  $\vec{B}$  non cambia se modifichiamo  $\vec{A}$  da  $\vec{A}$  a  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$ !

Succo del discorso

### Ricapitolando

Abbiamo trovato un'espressione molto simile all'equazione di poisson, che però presenta un termine in più. Se questo termine in più valesse zero, allora avremmo trovato l'equazione di poisson per il campo magnetico.

Fortunatamente la trasformazione di gauge arriva in nostro soccorso: siccome il campo magnetico è **invariante rispetto a trasformazioni di gauge**, possiamo dire che:

Se il Termine  $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{A}) \neq 0$  (quello in più che ci dà fastidio) possiamo scegliere un  $\vec{A}'$  Tale che  $\vec{\nabla} \vec{A}' = \vec{\nabla} \vec{A} + \vec{\nabla}^2 f = \vec{0}$   
 da funzione  $f$  che sceglieremo in modo che  $\vec{A}' = \vec{0}$  e' detta **Gauge di Coulomb** ed e' Tale che ANNULLA  $\vec{\nabla} \vec{A}$

E se  $\vec{\nabla} \vec{A} = \vec{0}$   $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{A}) = \vec{0} \Rightarrow \cancel{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{A})} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$   
 $\Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$  Stessa forma dell'eq di Poisson!

$\Rightarrow$  Di conseguenza la sua soluzione sarà:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\ell'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{SOLUZIONE}$$

