Teniamo a mente le equazioni che useremo.

Principali:

Ampère-Maxwell $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Faraday: $f_{em} = -\frac{d\phi}{dt} \rightarrow \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Campo Elettrico

$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ → Rotore → $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = -\frac{\partial(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})}{\partial t}$

→ Identità Vettoriale: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\vec{E}) - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})}{\partial t}$

Gauss: $\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, Amp.-Max:

$$\rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t}$$

→ Scambio qualche termine: $\underbrace{-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2\vec{E}}_{\text{Campo elettrico}} = \underbrace{\mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{\rho}{\varepsilon_0}}_{\text{Sorgenti}}$

Campo Magnetico

$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ → Rotore → $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \mu_0(\vec{\nabla}\wedge\vec{J}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\left(\overset{\text{Maxwell}}{\boxed{\vec{\nabla}\wedge\vec{E}}}\right)}{\partial t}$

$$\rightarrow \vec{\nabla}(\underset{\text{Maxwell}=0}{\cancel{\vec{\nabla}\vec{B}}}) - \vec{\nabla}^2\vec{B} = \mu_0(\vec{\nabla}\wedge\vec{J}) - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

→ Scambio → $\underbrace{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{B}}_{\text{Campo Magnetico}} = \underbrace{\mu_0(\vec{\nabla}\wedge\vec{J})}_{\text{Sorgente}}$

Velocità di propagazione

I) Siamo nel vuoto $\Rightarrow$ $\rho = J = \emptyset$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \\ \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

II) Scelgo una delle due equazioni

$$\vec{\nabla}^2 E - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

III) Svolgo il laplaciano

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial z^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t^2} = 0$$

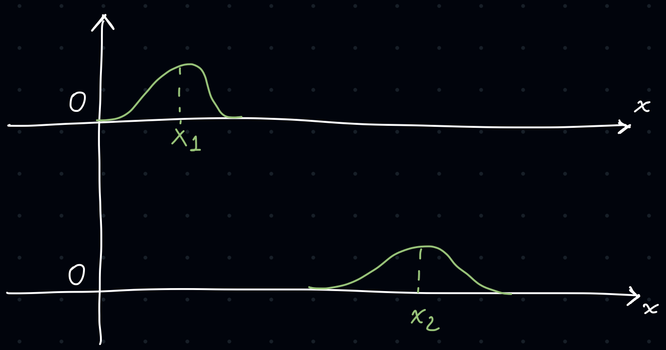
IV) Considero un solo asse x

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \emptyset$$

V) Equazione differenziale. Soluzione del tipo $E = A \sin(kx - \omega t)$

(a) Velocità di propagazione

$E_1 = A \sin(k x_1 - \omega t_1)$
$E_2 = A \sin(k x_2 - \omega t_2)$



$E_1 = E_2 \iff k x_1 - \omega t_1 = k x_2 - \omega t_2$

$\Rightarrow \omega t_2 - \omega t_1 = k x_2 - k x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 = \dfrac{\omega}{k}(t_2 - t_1)$ battezzo: $v = \dfrac{\omega}{k}$

$\omega = v \cdot k$

$\Rightarrow x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$ DINAMICA

(b) Sostituisco

$E = A \sin(kx - \omega t) = A \sin(kx - vkt) = A \sin[k(x - vt)]$

(c) Derivate Parziali

$E = A \sin k(x - v \cdot t) \Rightarrow \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial x} = k \underset{A}{\cos} k(x - vt) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 A \sin k(x - vt)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -kv \underset{A}{\cos} k(x - v \cdot t) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = +k^2 v^2 \underset{A}{\sin} k(x - vt)$

(d) Sostituzione

$$-k^2 A \sin(kx - kvt) - \mu_0 k^2 v^2 A \sin(kx - kvt) = 0$$

$$\rightarrow \cancel{k^2 A \sin(kx - kvt)} \left[-1 - \mu_0 \varepsilon_0 v^2\right] = 0 \quad \rightarrow \quad -1 - \mu_0 \varepsilon_0 v^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad v = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad \Rightarrow$$ Velocita' della luce