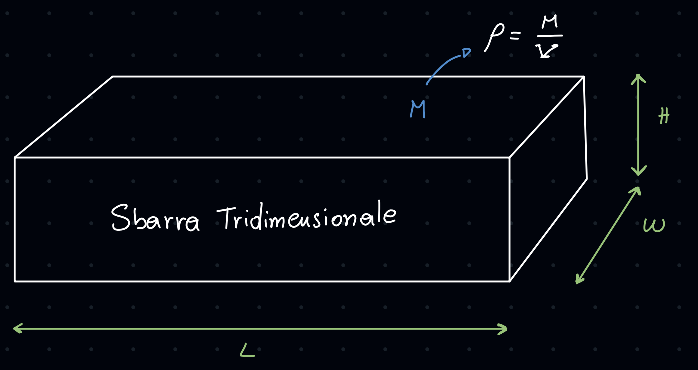
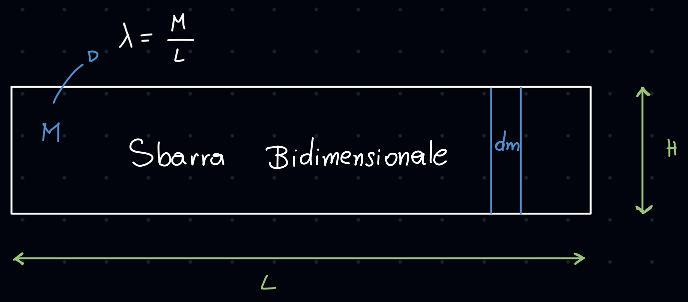
Momento di Inerzia di una Sbarra

$I = mR^2 \rightarrow I_i = m_i R_i^2 \Rightarrow I_{TOT} = \sum_i m_i R_i^2$





$\Rightarrow$ La sbarra è un susseguirsi di punti CONTINUO $\Rightarrow \sum m_i \rightarrow \int dm$

$$\Rightarrow I_{TOT} = \sum_i m_i R_i^2 \rightarrow I_{TOT} = \int R^2 \, dm$$

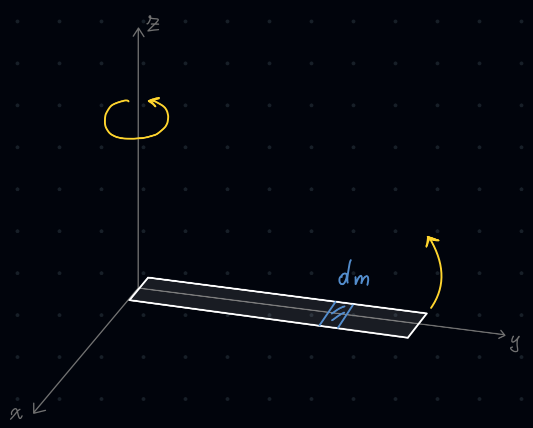
- Moltiplico e divido per dV: $I = \int_V R^2 \frac{dm}{dV} dV$ pongo $\rho = \frac{M}{V}$

$$\rightarrow I = \int_V R^2 \rho \, dV$$

- Se la sbarra è a 2 dimensioni $\rho \rightarrow \lambda = \frac{M}{L}$ $R \rightarrow x$

$$\rightarrow I = \int_A^B \lambda x^2 \, dx$$

Rotazione lungo un estremo

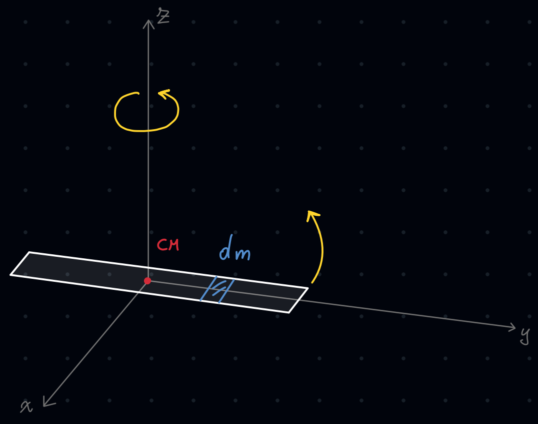


$$I = \int_A^B \lambda R^2 \, dV \longrightarrow I = \int_0^L \lambda y^2 \, dy$$

$$\rightarrow I = \lambda \int_0^L y^2 dy = \lambda \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^L = \lambda \left[\frac{L^3}{3} \right] = \frac{1}{3} \lambda L^3$$

$$\text{ma } \lambda = \frac{M}{L} \Rightarrow I = \frac{1}{3} \frac{M}{\cancel{L}} L^{\cancel{3}\,2} \rightarrow I = \frac{1}{3} M L^2$$

Rotazione lungo il centro di massa



$$I = \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y^2 \, dy = \frac{M}{L} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{3} \frac{M}{L} \left[\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \frac{M}{\cancel{L}} \cdot \frac{L^{\cancel{3}\,2}}{4} = \frac{1}{12} M L^2$$

Conclusioni: E' più semplice mettere in rotazione una sbarra attorno al suo centro di massa che rispetto ad un suo estremo