

Vedi 4.09 e 6.06

Recap Terminologia " $\vec{\nabla}$ " nabla

VETORE

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{DIVERGENZA}$$

$$\vec{\nabla} f = \text{GRADIENTE}$$

SCALARE/FUNZIONE

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \nabla^2 \vec{A} \quad \text{div}(\text{rot}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = 0 \quad \text{rot}(\text{grad}) = 0$$

Definisco  $\vec{A}$  POTENZIALE VETTORE /  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Eq di Maxwell magnetostatica (6.06)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \quad (1) & \text{div}(\text{rot}) = 0 \quad \text{Sempre Vera} \quad \text{Non ci serve} \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \quad (2) & \text{rot}(\text{rot}) = \text{identita' vett} \end{cases}$$

$$(2) \text{ Identita' Vettoriale } \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \iff -\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad \text{Magnetostatica}$$

Termine in più  $\nabla^2 \vec{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  Eq di Poisson

-o Scopo del gioco: Dimostrare che  $-\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 0$  (o renderlo Tale)

Trasformazione di Gauge:  $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  con  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$  funzione qualsiasi

$$\text{proof } \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f}_{\substack{A' = A + \nabla f \\ \text{Rotores di un gradiente} = 0}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

MORALE: Se scegliamo una qualunque  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$ ,  $\vec{B}$  non cambia, perché  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  ed abbiamo appena dim. che  $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ .

-o Libertà di Gauge Se  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \neq 0$  (termine in più) possiamo scegliere un  $\vec{A}'$  tale che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0 \quad \rightarrow \text{Troviamo l'unica } f \text{ / } \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 f = 0 \quad \text{Gauge di Coulomb}$$

$A' = A + \nabla f$

$$\text{Quindi: } -\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad \rightarrow \text{Gauge Coulomb } \rightarrow \nabla^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{J} \quad \text{Stessa forma di}$$

$\nabla^2 \vec{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

$\Rightarrow$  Stessa Soluzione  $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\Delta\vec{r}|} dV$  Volume =  $A_{\text{base}} \times \text{Altezza}$

$\rightarrow dV = S \cdot dr$   $\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{J} \cdot \vec{S}}{|\Delta\vec{r}|} d\vec{r}$  ma  $\phi = \oint \vec{J} \cdot \hat{n} dS = I \Rightarrow \vec{J} \cdot \vec{S} = I$

$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I}{|\Delta\vec{r}|} d\vec{r}$  soluzione