

Definiamo l'induzione elettromagnetica

"L'induzione è quel fenomeno che genera una forza elettromotrice indotta a partire da un campo magnetico variabile. La f_{em} indotta genera poi una corrente indotta."

Faraday scoprì che $f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt}$ legge di Faraday

Dimostrazione: Il flusso dipende dalla superficie (ed angolo) e dal campo \vec{B} stesso.

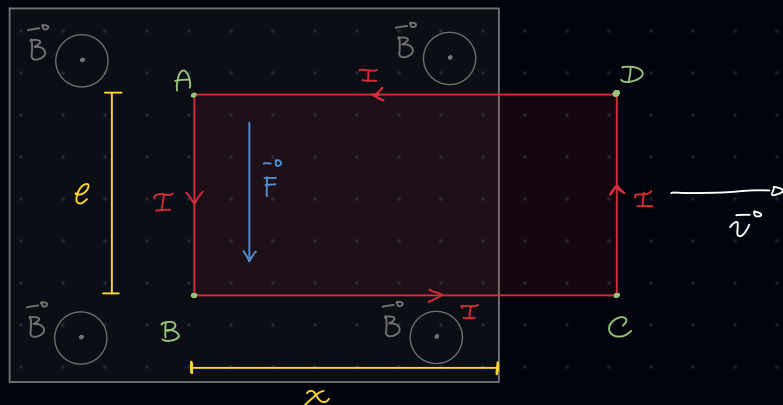
in fatti:
$$\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_S \underbrace{B}_{\text{Campo B}} \underbrace{dS \cdot \cos\theta}_{\text{Superficie}}$$

$\Rightarrow \frac{d\phi_B}{dt}$ = derivata di un prodotto: $\phi_B(B, dS \cos\theta)$ -o Non so se è esatto
Scrivere così

Quindi seguendo la regola $g(x) = f(x) \cdot h(x) = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$

ci conviene trovare separatamente $f'(x)$ e $h'(x)$ facendo variare prima S e poi B .

FLUSSO TAGLIATO



Abbiamo imparato che quando una carica si muove in un campo elettrico o magnetico si genera una forza secondo l'equazione.

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{ma } \vec{E} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

Abbiamo detto che si genera una forza elettromotrice $\Rightarrow f_{em} = \frac{\mathcal{E}}{q}$

$$\Rightarrow f_{em} = \frac{\mathcal{E}}{q} = \frac{\oint \vec{F} \cdot d\vec{e}}{q} = \frac{q \oint \vec{v} \wedge \vec{B} d\vec{e}}{q} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} d\vec{e}$$

\Rightarrow Dividiamo in segmenti $\Rightarrow f_{em} = \int_A^B \vec{v} \wedge \vec{B} d\vec{e}_1 + \int_B^C \vec{v} \wedge \vec{B} d\vec{e}_2 + \int_C^D \vec{v} \wedge \vec{B} d\vec{e}_3 + \int_D^A \vec{v} \wedge \vec{B} d\vec{e}_4$

$\vec{F} \perp d\vec{e}_2$ $B_3 = \emptyset$ $F \perp d\vec{e}_4$

$$\Rightarrow f_{em} = \int_A^B \vec{v} \wedge \vec{B} d\vec{e}_1 \quad \text{ma} \quad \vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{B} = v \cdot B \cdot \sin(\theta) = v \cdot B$$

$$= vB \int d\vec{e}_1 = vBe \quad f_{em}$$

Controllo Tramite legge di Faraday $f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Se il filo si muove $\Rightarrow dS \neq 0 \Rightarrow S$ dipende da t

$$S = e \cdot x \quad \Rightarrow dS = e \cdot dx \quad \Rightarrow dx = x - \Delta x$$

$$\phi(t) = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = B \int_S dS = B \cdot e \cdot x \quad \text{ma } t' = t + \Delta t \Rightarrow x' = x - \Delta x$$

$$\Rightarrow \phi(t + \Delta t) = B \cdot e \cdot (x - \Delta x) \quad x \text{ dipende dalla velocità della spira} \Rightarrow \Delta x = v \cdot \Delta t$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(t + \Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B \cdot e \cdot (x - \Delta x) - B \cdot e \cdot x}{\Delta t} = \frac{Bex - Be\Delta x - Bex}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{Be\Delta x}{\Delta t} = -Be \frac{dS}{dt} = -B \cdot e \cdot v \quad \text{QED}$$

$$\Rightarrow f_{em} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} d\vec{e} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Flusso concatenato: \vec{B} varia

Recap: Approssimare funzione in x_0 : $f(x) \approx f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x-x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot (x-x_0)^2$

$$\Rightarrow \text{Troviamo } \frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int \vec{B}(t+\Delta t, \vec{r}) \cdot \hat{n} dS - \int \vec{B}(t, \vec{r}) \cdot \hat{n} dS}{\Delta t}$$

$$\text{Approssimo per } \Delta t_0 = 0 \Rightarrow \vec{B} \approx \vec{B}(t, \vec{r}) + \left. \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right|_{\Delta t=0} \Delta t \quad 1^\circ \text{ ordine}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int \vec{B}(t, \vec{r}) \cdot \hat{n} dS + \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta t \cdot \hat{n} dS - \int \vec{B}(t, \vec{r}) \cdot \hat{n} dS}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int \frac{\partial \vec{B}(t+\Delta t, \vec{r})}{\partial t} \Delta t \cdot \hat{n} dS}{\Delta t} \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t+\Delta t, \vec{r}) \cdot \hat{n} dS$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{r}) \cdot \hat{n} dS$$

Da Faraday $\mathcal{E}_{em} = -\frac{d\phi}{dt}$ ma $\mathcal{E}_{em} = \frac{\mathcal{L}}{q}$ e $F = q \cdot \vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B})$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{em} = \frac{\mathcal{L}}{q} = \frac{q \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{q} + \frac{q \int \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}{q} \Rightarrow \mathcal{E}_{em} = \underbrace{\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{\frac{\mathcal{L}}{q} \text{ Punto (1)}} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{em} = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -\int \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{r}) \cdot \hat{n} dS$$

Ma in questo caso il circuito è fermo! $\Rightarrow |\vec{v}| = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{em} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{r}) \cdot \hat{n} dS \quad \text{Teorema rotore}$$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_S (\vec{v} \wedge \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = -\int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{r}) \cdot \hat{n} dS \Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

II equazione di Maxwell (campo \vec{E})
Per campi \vec{B} VARIABILI

Mettiamo tutto insieme

FLUSSO TAGLIATO \rightarrow Superficie VARIA, $B = \text{Cost}$

$$-\frac{d\phi}{dt} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{e} \sim \text{se } q(x) = \text{Sup e } f(x) = B; h(x) = q(x) \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = \underbrace{q'(x) \cdot h(x)}_{-\oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{e}} + q(x) \cdot h'(x)$$

FLUSSO CONCATENATO \rightarrow Sup = Cost, $\vec{B} = \text{VARIA}$

$$-\frac{d\phi}{dt} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \sim \text{se } q(x) = \text{Sup e } f(x) = B; h(x) = q(x) \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = q'(x) \cdot h(x) + \underbrace{q(x) \cdot h'(x)}_{\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS}$$

\Rightarrow Metto tutto insieme \rightarrow CASO GENERALE

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS - \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{e} \quad \text{Punto (2)}$$

Ma se ...

$$\begin{aligned} f_{em} &= -\frac{d\phi_B}{dt} && \text{I}^\circ \text{ modo di scrivere l'eq di Maxwell in integrale} \\ &\downarrow && \\ \frac{L}{q} &= -\frac{d\phi_B}{dt} \\ &\downarrow && \\ \text{Punto (1)} \uparrow &&& \text{Punto (2)} \nwarrow \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{e} + \cancel{\oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{e}} &= -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS + \cancel{\oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{e}} && \text{I modo di scrivere l'equazione di Maxwell in integrale} \\ &\downarrow && \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{e} &= -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS && \text{II modo di scrivere l'equazione di Maxwell in integrale} \end{aligned}$$

$$\text{Rotore} \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = \oint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Unico modo di scrivere l'equazione di Maxwell Differenziale

