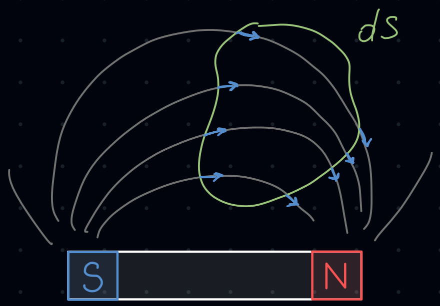
2° Equazione: (4ª)   vedi 6.01

Abbiamo definito $N = \phi_B = \int_S \vec{B}\cdot \hat{n}\, dS$ ma approfondiamo



In qualsiasi regione di spazio entrano ed escono lo stesso numero di linee di forza!

$$\Rightarrow \Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS = \varnothing$$

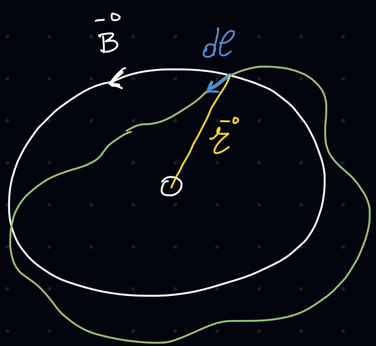
Forma differenziale $\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla}\vec{A})\cdot dV$

$$\Rightarrow \Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS = \int_V \vec{\nabla}\vec{B}\, dV = \varnothing \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{B} = \varnothing$$

II° eq di Maxwell per il campo $\vec{B}$

1° Equazione (3ª)   Dalla legge di Ampere

→ Filo percorso da I → $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\tau}$ → $\phi = \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot r \oint \frac{1}{r}\cdot\hat{\tau}\, d\vec{l}$



$\hat{\tau}\cdot d\vec{l}$ = Arco di circonferenza → $1\,\text{Rad} = \frac{l}{R} \Rightarrow l = \hat{\tau}\, d\vec{l} = r\, d\varphi$

Legge di Ampere

$$\Rightarrow \phi = B\cdot r\cdot \oint \frac{1}{\cancel{r}}\cdot \cancel{r}\, d\varphi \to \phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\oint d\varphi = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I$$

→ Dal Teorema del Rotore → $\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{B})\,\hat{n}\, dS = \mu_0 I$

ma $I = \int \vec{J}\cdot\hat{n}\, dS \Rightarrow \cancel{\int_S}(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})\cdot \hat{n}\,\cancel{dS} = \mu_0 \cancel{\int_S}\vec{J}\cdot\cancel{\hat{n}\, dS}$ → $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J}$

I° Eq di Maxwell $\vec{B}$

Legge di Ampére - Maxwell

1 Equazione di Maxwell (3) generalizzata

(a) Legge di BioT-Savart $\vec{B} = k \frac{I}{R}\hat{\tau}$

(b) Legge di Ampére $C = \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = k\oint \frac{I}{R}\hat{\tau}\, d\vec{\ell}$: $\hat{\tau}\, d\vec{\ell}$ = Arco di circonferenza

$\to$ 1 Rad $= \frac{\ell}{R} \Rightarrow \ell = \varphi \cdot R \to d\ell = R\cdot d\varphi \Rightarrow C = \oint \vec{B}\, d\vec{\ell} = k\oint \frac{I}{\cancel{R}} \cdot \cancel{R}\, d\varphi = kI\oint d\varphi$

$\to C = \frac{\mu_0}{\cancel{2\pi}} \cdot I \cdot \cancel{2\pi} \to \oint \vec{B}\, d\vec{\ell} = \mu_0 I$ Ampére

(c) Corrente stazionaria

$\phi = \int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\, dS = \emptyset$

$\to \phi = \int_V \vec{\nabla}\vec{J} \cdot dV = 0 \to \vec{\nabla}\vec{J} = 0$

(d) Condensatore

$\phi = \int \vec{J}\cdot\hat{n}\, dS \neq 0$

(e) Conservazione della Carica

$-dQ = \int \vec{J}\,\hat{n}\, dS \cdot dt \to -\frac{dq}{dt} = \int \vec{J}\cdot\hat{n}\, dS$ ma $\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho\, dV \to Q = \int \rho\, dV$

$\Rightarrow -\frac{d}{dt}\int_V \rho(x,y,z,t)\, dV = \int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\, dS$ Teorema Divergenza

$\to \int_V (\vec{\nabla}\vec{J}) \cdot dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV \to \vec{\nabla}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ OBBIETTIVO

(f) dalla legge di Ampere

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \to \int_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) \cdot \hat{n}\, dS = \mu_0 I$ ma $I = \int \vec{J}\cdot\hat{n}\, dS$

$\Rightarrow \int_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) \cdot \hat{n}\, dS = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\, dS \to \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

(g) Test · DIVERGENZA

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \vec{\nabla}\mu_0\vec{J} \to \mu_0\vec{\nabla}\vec{J} = \emptyset \to \vec{\nabla}\vec{J} = \emptyset$$ Corrente Stazionaria $\to$ NON VA BENE!

(h) Il termine di Maxwell

Termine: $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \to \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J}$

Equazione di Ampère Maxwell

Forma Differenziale

proof:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \vec{\nabla}\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}\mu_0\vec{J} \to \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(\vec{\nabla}\vec{E})}{\partial t} + \mu_0\vec{\nabla}\vec{J} = 0$$

Da Gauss $\phi_E = \int \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \to \rho = \frac{dQ}{dV} \to dQ = \rho\,dV \to Q = \int_V \rho\,dV$

$$\Rightarrow \phi_E = \int \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV \to \int_V (\vec{\nabla}\vec{E})\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\,dV \to \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Maxwell

$$\Rightarrow \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(\vec{\nabla}\vec{E})}{\partial t} + \mu_0\vec{\nabla}\vec{J} = 0 \to \mu_0\cancel{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mu_0\cdot\vec{\nabla}\vec{J} = 0$$

$$\to \vec{\nabla}\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$ QED come nella conservazione della carica

Scrivere la legge di Ampère-Maxwell in forma Integrale

DIFF: $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J}$

$$\to \oint_\ell B\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\varepsilon_0\int_S \frac{\partial}{\partial t}\overbrace{\vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}^{\phi_E}\ \mu_0\overbrace{\int \vec{J}\ \hat{n}\,dS}^{I}$$

$$\to \boxed{\oint_\ell \vec{B}\cdot d\ell = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 I} \quad (1)$$

(2) Analogia con Faraday

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,ds = \underbrace{\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,ds}_{\text{Varia } \vec{B}} - \underbrace{\oint_\ell (\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot d\vec{\ell}}_{\text{Varia la Superficie}}$$ $\to$ Vedi 4.09

$$\Rightarrow \frac{d\phi_E}{dt} = \int_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,\hat{n}\,ds - \oint_\ell (\vec{v}\wedge\vec{E})\cdot d\vec{\ell}$$ $\to$ Sostituiamolo nella (1)

$$\rightarrow \oint_\ell \vec{B}\, d\vec{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \left[\underbrace{\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \hat{n}\, dS}_{1} - \underbrace{\oint_\ell (\vec{v} \wedge \vec{E})\, d\vec{\ell}}_{2} \right] + \mu_0 I$$

Non completamente esatta

→ Nel caso generale $\frac{d\phi_E}{dt}$ sono 2 pezzi, quindi devono essere 2 anche dall'altro lato:

$$\rightarrow \oint_\ell \vec{B}\, d\vec{\ell} - \frac{1}{c^2} \oint (\vec{v} \wedge \vec{E})\, d\vec{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \left[\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \hat{n}\, ds - \oint_\ell (\vec{v} \wedge \vec{E})\, d\vec{\ell} \right] + \mu_0 I$$

Equazione di Ampere-Maxwell in forma integrale

Abbreviando $\quad f_B = \frac{L}{q_B}$

$$\rightarrow f_B = \oint \vec{B}\, d\vec{\ell} - \frac{1}{c^2} \oint (\vec{v} \wedge \vec{E})\, d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$