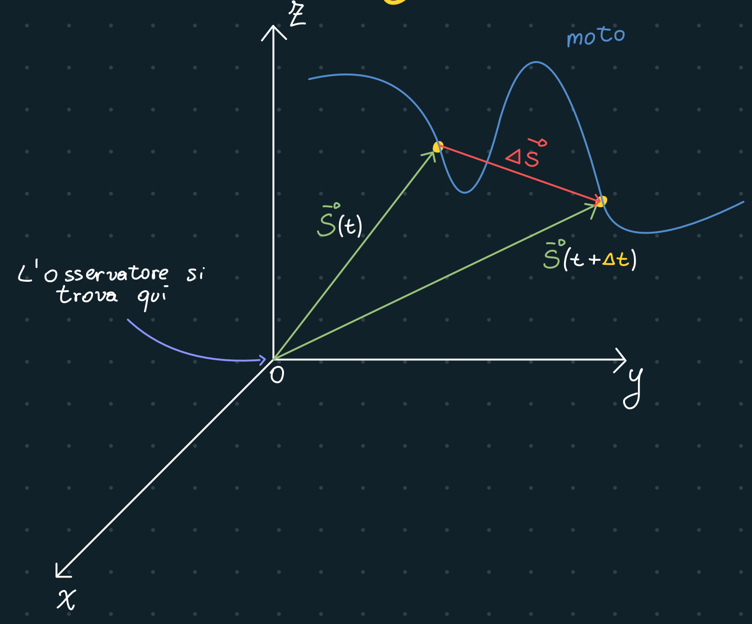
Cinematica

L'intera cinematica si basa su 3 vettori molto importanti

- Vettore Posizione $\vec{S}$
- Vettore Velocità $\vec{v}$
- Vettore Accelerazione $\vec{a}$

Vettore Posizione $\vec{S}$



$\Delta\vec{S}$ é il vettore che collega $\vec{S}(t)$ e $\vec{S}(t+\Delta t)$

$\Rightarrow \vec{S}(t) = \Delta\vec{S} + \vec{S}(t+\Delta t)$ Isoliamo $\Delta\vec{S}$

$\Rightarrow \Delta\vec{S} = \vec{S}(t-\Delta t) - \vec{S}(t)$

Vettore Spostamento

Vettore Velocità $\vec{V}$

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta\vec{t}}$$

Definizione Intuitiva di velocità

$\Rightarrow$ Esplicitiamo la formula: $\vec{V}_m = \dfrac{\vec{S}(t+\Delta t) - \vec{S}(t)}{\Delta t}$

Tempo impiegato

! Questa definizione non funziona sempre ... Ci restituisce la velocità media!

$\vec{V}$elocità ISTANTANEA

Riduciamo l'intervallo di tempo il più possibile:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{S}(t+\Delta t) - \vec{S}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

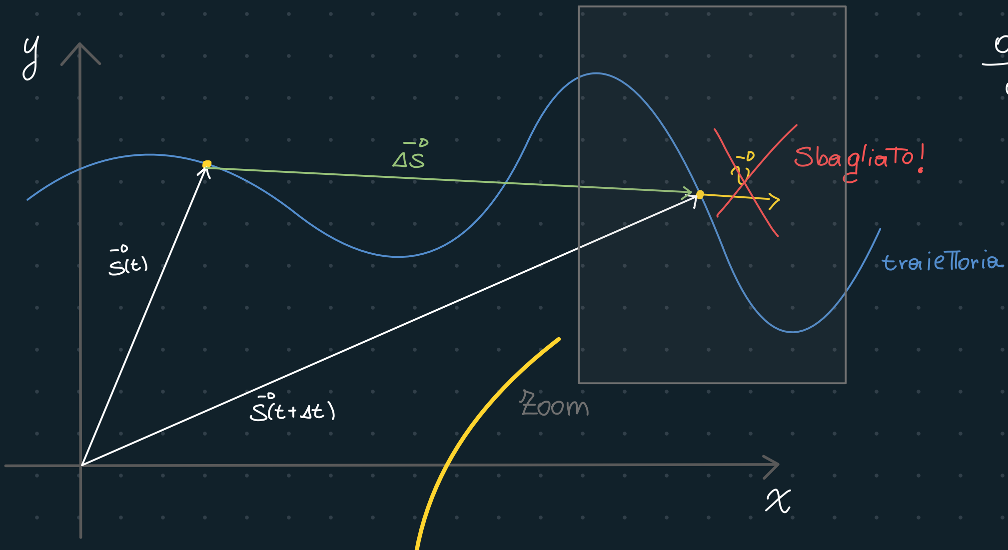
Definizione di DERIVATA

Notazione breve

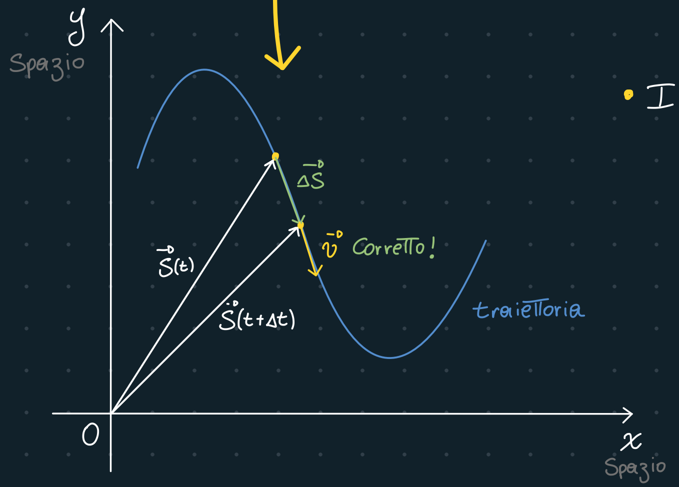
* La derivata è stata "inventata" da Newton e Leibniz.

Fine 1600

Velocità = Derivata dello Spazio rispetto al tempo



$\frac{d\vec{s}}{dt}$ consiste nel far tendere la "distanza" tra le due misurazioni a zero.



- Il vettore velocità è sempre TANGENTE alla Traiettoria del punto

Se rappresentiamo il moto in funzione del tempo (e non dello spazio) il vettore spostamento sarà in funzione del tempo anch'esso:

$$\vec{S}(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

Equazione Oraria del Moto
→ In funzione del tempo

Tempo

La Traiettoria è CONCRETA, possiamo "vederla" (lancio del gessetto) mentre l'Eq Oraria è ASTRATTA

→ Importante La velocità è tangente alla TRAIETTORIA, non all'eq oraria!

Vettore $\vec{a}$ccelerazione

$$\vec{A}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Accelerazione Media

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right) = \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2}$$

Accelerazione istantanea

Derivata Seconda

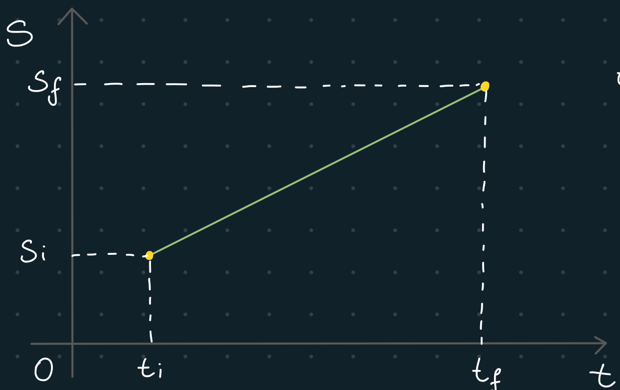
Moto rettilineo uniforme

Se direzione e modulo del vettore velocità non cambia nel tempo, esso non può che essere di un moto Rettilineo UNIFORME.

In questo caso $\vec{V} = \vec{v}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d\vec{S}}{dt} = \dfrac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{S}_f - \vec{S}_i}{t_f - t_i} = \vec{v}$ Velocità

Isoliamo $\vec{S}_f = \vec{S}_i + \vec{V}(t_f - t_i)$

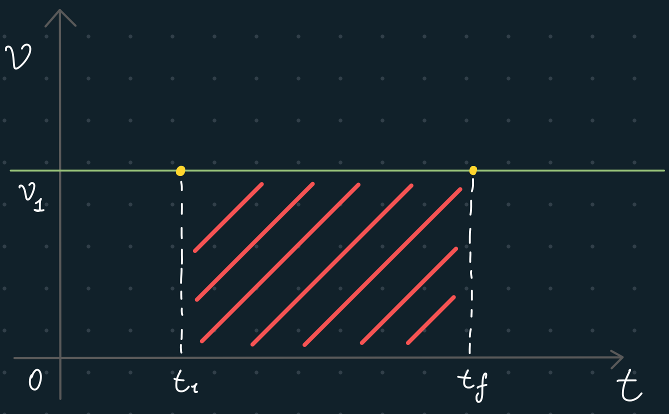
$\rightarrow$ Nel caso di un tempo qualsiasi $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Istante qualsiasi}}}{\vec{S}(t)} = \vec{S}_i + \vec{V}(t_f - t_i)$ Posizione



↖ Eq ORARIA ⇒ ASTRATTO

eq Retta generica : $y = mx + q$

$\rightarrow$ eq moto uniforme $S(t) = \underbrace{\vec{S}_i}_{q} + \underbrace{\vec{V}(t_f - t_i)}_{mx}$



Eq ORARIA ⇒ ASTRATTO

Proviamo a calcolare l'area sottesa al grafico della velocità

$$A = B \cdot h = (t_f - t_i) \cdot v_1 = \vec{S}$$

Sappiamo che $\vec{v} = \dfrac{d\vec{S}}{dt} \Rightarrow \underbrace{\vec{v}\, dt}_{\text{Integrale}} = d\vec{S}$

quindi : $\underbrace{\int_{S_i}^{S_f} dS}_{\text{SPAZIO}} = \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} v\, dt}_{\text{Spazio}}$

$\Rightarrow$ Infatti

$$\vec{V} = \frac{d\vec{s}}{dt} \Rightarrow \vec{V}\, dt = d\vec{s} \Rightarrow \int_{S_i}^{S_f} ds = \int_{t_i}^{t_f} v\, dt = \vec{S}_f - \vec{S}_i = \int_{t_i}^{t_f} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Costante}}}{\vec{V}}\, dt$$

$$\Rightarrow \vec{S}_f - \vec{S}_i = \vec{V}(t_f - t_i)$$

Stessa formula!

Moto rettilineo uniformemente accelerato
(Semplice)

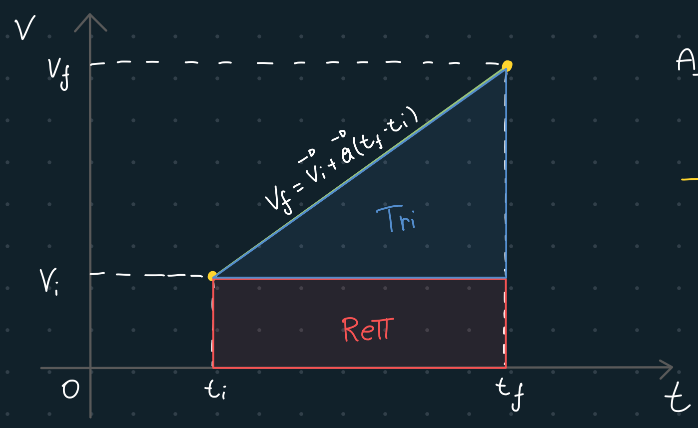
In questo moto l'accelerazione è costante $\rightarrow \vec{a} = cost$

$$\vec{A} = \vec{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\vec{V_f} - \vec{V_i}}{t_f - t_i} \quad \overset{F.I.}{\Rightarrow} \quad \vec{V_f} - \vec{V_i} = \vec{a}(t_f - t_i) \rightarrow \vec{V_f} = \vec{V_i} + \vec{a}(t_f - t_i)$$

① Retta

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = \vec{V_i} + \vec{a}(t_f - t_i)$$ Legge oraria $\Rightarrow$ $V(t) = \vec{V_0} + \vec{a} \cdot t$

E lo spazio? $\rightarrow$ Lo troviamo con l'integrale



Triangolo ① Rettangolo

$$A_{TOT} = A_{\square} + A_{\triangle} = \left[(t_f - t_i)(V_f - V_i) \cdot \tfrac{1}{2}\right] + \left[(t_f - t_i) \cdot V_i\right]$$

$$\rightarrow \vec{S_f} - \vec{S_i} = \frac{1}{2}\vec{a}(t_f - t_i)^2 + (t_f - t_i)\vec{V_i}$$

In un tempo qualsiasi:

$$S(t) = S_i + (t_f - t_i)\vec{V_i} + \frac{1}{2}\vec{a}(t_f - t_i)^2$$

Eq oraria

Metodo via integrali

Nel moto rettilineo uniformemente acc

$$\vec{v} = \vec{V_i} + \vec{a}(t_f - t_i)$$

Sappiamo che $\vec{V} = \frac{d\vec{S}}{dt} \Rightarrow \vec{v}\,dt = ds \Rightarrow \int_{S_i}^{S_f} ds = \int_{t_i}^{t_f} v\,dt$

$$\Rightarrow S_f - S_i = V_i \int_{t_i}^{t_f} dt + a \int_{t_i}^{t_f} t_f\,dt - a \int_{t_i}^{t_f} t_i\,dt = V_i(t_f - t_i) + \frac{1}{2}a(t_f - t_i)^2$$

cost

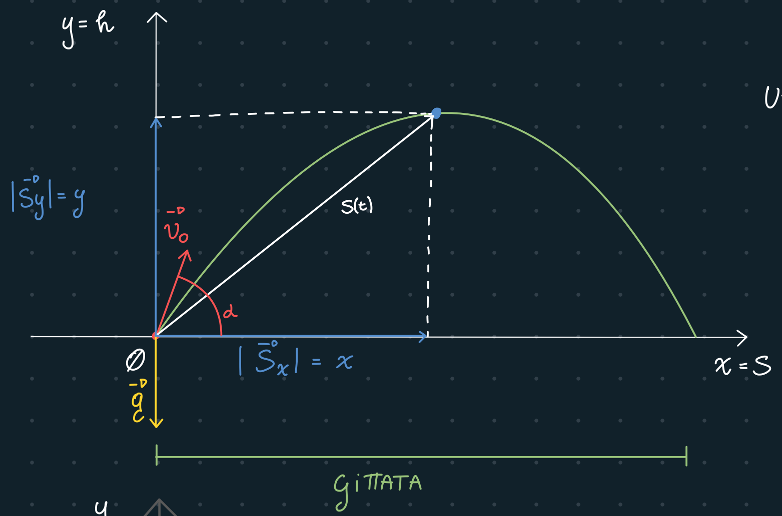
Stessa formula!

Moto del Proiettile

$$\begin{cases} \vec{S}(t) = \vec{S}_i + \vec{V}_i (t_f - t_i) + \frac{1}{2}\vec{a}(t_f - t_i)^2 \\ \vec{V}(t) = V_i + \vec{a}\cdot(t_f - t_i) \end{cases}$$

Assumiamo che non ci siano attriti e che l'unica forza agente sul proiettile e' $\vec{g}$

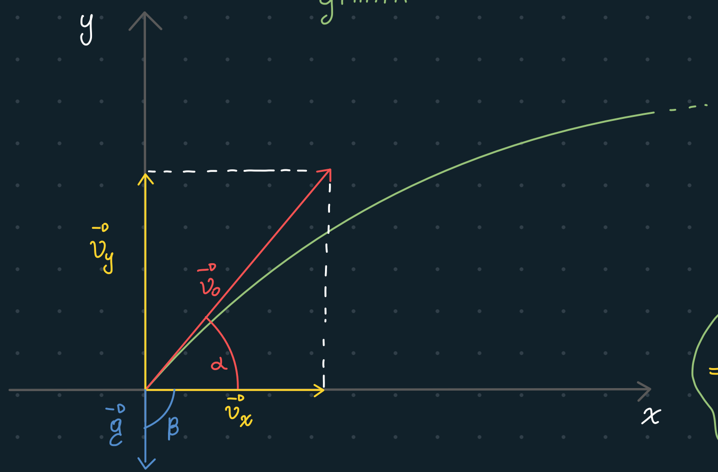
$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$ inoltre $|\vec{g}| = 9.81 \, m/s^2$



Un vettore n componenti "ci da'" n equazioni

$$\vec{S}(t) = (S_x, S_y) = \begin{cases} S_x(t) = x(t) \\ S_y(t) = y(t) \end{cases}$$

Le componenti COINCIDONO con le coordinate



Dalle regole della Trigonometria sappiamo...

$$\begin{cases} \vec{V}_x = x(t) = \vec{v}_0 t \cdot \cos(\alpha) + \cancel{\frac{1}{2}\vec{a}\cos(\beta)}^{\,0} \\ \vec{V}_y = y(t) = \vec{v}_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2}\vec{a}\underbrace{\cos(90)}_{1} t^2 \end{cases}$$

$\vec{g}$ verso opposto ad y

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_x = x(t) = \vec{v}_0 \cos(\alpha) t \\ \vec{V}_y = y(t) = \vec{v}_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{cases}$$

Equazioni orarie del moto del proiettile

Se volessimo confrontare le eq al moto reale dovremmo avere y in funzione di x

$\Rightarrow x(t) = \vec{v}_0 t \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow t = \dfrac{x}{\vec{v}_0 \cos(\alpha)}$

quindi $y = \vec{v}_0 \sin(\alpha) t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = \cancel{\vec{v}_0}\dfrac{x}{\cancel{\vec{v}_0}\cos\alpha}\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\vec{g}\left[\dfrac{x}{\vec{v}_0\cos(\alpha)}\right]^2$

$t = \dfrac{x(t)}{v\cos(\alpha)}$

$\tan\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\vec{g}\frac{x^2}{\vec{v}_0^2\cos^2(\alpha)}}$$

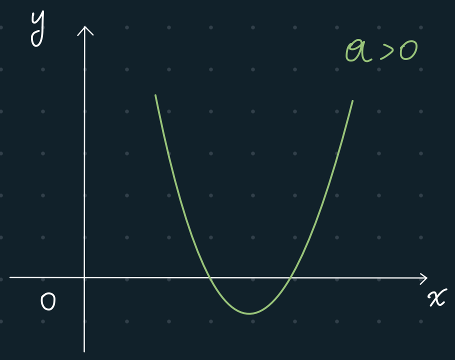
Equazione della TRAIETTORIA

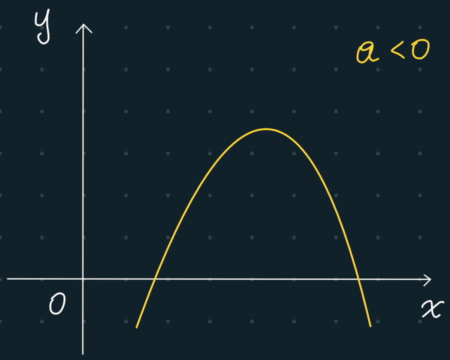
L'Equazione di una PARABOLA è $y = ax^2 + bx + c$

$$y = \underbrace{\left[-\frac{\frac{1}{2}g}{\vec{v}_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right]}_{a} x^2 + \underbrace{\tan(\alpha)}_{b}\, x + \underbrace{0}_{c}$$

⇒ Il nostro modello funziona

Inoltre, nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$





Trovare la gittata

Se conosciamo l'eq del moto ci basta imporlo uguale a zero per trovare le intersezioni

Sol 1: $x_1 = 0$ ← già lo sapevamo

Sol 2: $-\left[\frac{\frac{1}{2}g}{v_0^2\cos^2\alpha}\right]x^2 + x\tan\alpha = 0 \rightarrow x\left\{\left(-\frac{\frac{1}{2}g}{\vec{v}_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right)x + \tan\alpha\right\} = 0$

→ $x_1 = 0$ Sol 1

→ $\frac{\frac{1}{2}\vec{g}}{\vec{v}_0^{\,2}\cos^2\alpha}\, x = \tan\alpha \Rightarrow x_2 = \frac{\vec{v}_0^{\,2}\cos^2(\alpha)\tan(\alpha)}{\frac{1}{2}\vec{g}}$ — Sol 2

Possiamo pulire ulteriormente $x_2 = \frac{2\vec{v}_0^{\,2}\cdot\cos\alpha\sin\alpha}{\vec{g}} = \frac{\vec{v}_0^{\,2}\sin(2\alpha)}{\vec{g}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$

Il valore max del sin si ha a 45° → $\sin(45) =$

La gittata cresce all'aumentare della velocità

Ricavare

l'equazione della velocita' /Tempo indipendente da t
per il moto rettilineo

$$\begin{cases} S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot a t^2 & b \\ v(t) = v_0 + a \cdot t & a \end{cases}$$

Vogliamo una relazione che leghi lo spazio alla velocita' senza il tempo

1) a: $v_f = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v_f - v_0}{a}$

2) $S_f = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = S_0 + v_0 \frac{(v_f - v_0)}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_f - v_i}{a} \right)^2$

$$\Rightarrow S_f - S_0 = \frac{v_0 v_f}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{a}{2a^2}(v_f^2 + v_i^2 - 2 v_f v_i) = \frac{\cancel{v_0 v_f} - \cancel{v_i^2} + \frac{1}{2} v_f^2 + \frac{1}{2} v_i^2 - \cancel{v_f v_i}}{a}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} v_f^2 - \frac{1}{2} v_i^2}{a} = \frac{\frac{v_f^2 - v_i^2}{2}}{a} \Rightarrow \frac{v_f^2 - v_i^2}{2} = (S_f - S_i) \cdot a$$

$$\Rightarrow v_f^2 - v_i^2 = 2a (S_f - S_i)$$

Formula Da Dimostrare

- $v_f^2 = \vec{v}_f \cdot \vec{v}_f$ Scalare
  Prod scalare

$\rightarrow$ Se il primo membro e' un vettore/Scalare anche il secondo deve esserlo

$$\Rightarrow v_f^2 - v_i^2 = 2\vec{a} (\vec{S}_f - \vec{S}_i)$$

Scalari

Eq in forma Vettoriale

Notiamo una Cosa...

Equazione indipendente : $\vec{S}(t) = \vec{S}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$ ①

$\rightarrow$ Derivata della ① : $\frac{d}{dt} \vec{S}(t) = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \vec{a} t$ ② $= \vec{v}(t)$

$\rightarrow$ Combinazione di ① e ② : $v_f^2 - v_i^2 = 2\vec{a} (\vec{S}_f - \vec{S}_i)$

Attenzione!

$v_f^2 - v_i^2 = 2\vec{a} (\vec{S}_f - \vec{S}_i)$ e' un'equazione SCALARE $\rightarrow$ Tra numeri

$\Rightarrow$ Non possiamo proiettarla sugli Assi

Ricavare le formule Del moto rettilineo

Con gli integrali

Partiamo dall'accelerazione: è la derivata della velocità rispetto al tempo:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\cdot\vec{v} \Rightarrow \int \vec{a}\,dt = \int \frac{d}{\cancel{dt}}\vec{v}\,\cancel{dt} \rightarrow \int_{v_0}^{v_f} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{a}\,dt$$

Nel moto uniformemente accelerato $a = cost$

tempo fissato

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_f} d\vec{v} = \vec{a}\int_{t_0}^{t_f} dt \rightarrow v\Big|_{v_0}^{v_f} = \vec{a}\cdot t\Big|_{t_0}^{t_f} = (v_f - v_i) = \vec{a}\cdot(t_f - t_i)$$

Se poniamo $t_f =$ tempo qualsiasi: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot(t_f - t_i)$ tempo qualsiasi

Troviamo lo spazio partendo dalla definizione di velocità: $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{S}$

$$\rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{S} = dt\,\vec{v} = d\vec{S} \rightarrow \int_{t_0}^{t_f} \vec{v}\,dt = \int_{S_0}^{S_f} d\vec{S}$$

$\Rightarrow$ Sappiamo che $\vec{v}$ dipende dal tempo $\rightarrow \vec{v}(t) = \underset{\uparrow\ cost}{\vec{v}_0} + \vec{a}(t - t_i)$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} \underset{\uparrow\ cost}{v_0}\,dt + \int_{t_0}^{t_f} \vec{a}(t - t_i)\,dt = \int_{S_0}^{S_f} dS$$

$$\rightarrow v_0\int_{t_0}^{t_f} dt + \vec{a}\int_{t_0}^{t_f} t - t_i\,dt = \int_{S_0}^{S_f} dS \Rightarrow S_f - S_0 = v_0(t_f - t_0) + \vec{a}\,\frac{t^2}{2}\Big|_{t_0}^{t_f} - \vec{a}t_0\cdot t\Big|_{t_0}^{t_f}$$

$$\rightarrow S_f - S_0 = v_0(t_f - t_0) + \vec{a}\left(\frac{t_f^2 - t_0^2}{2}\right) - \vec{a}t_0(t_f - t_0)$$

$$= \vec{v}_0(t_f - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}t_f^2 - \cancel{\frac{1}{2}\vec{a}t_0^2} - \vec{a}t_0t_f + \cancel{\vec{a}t_0^2}$$

$$+\frac{1}{2}\vec{a}t_0^2$$

$$= \vec{v}_0(t_f - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\underbrace{(t_f^2 + t_0^2 - 2t_0t_f)}_{(t_f - t_0)^2}$$

$$= \vec{v}_0(t_f - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t_f - t_0)^2$$ SPAZIO

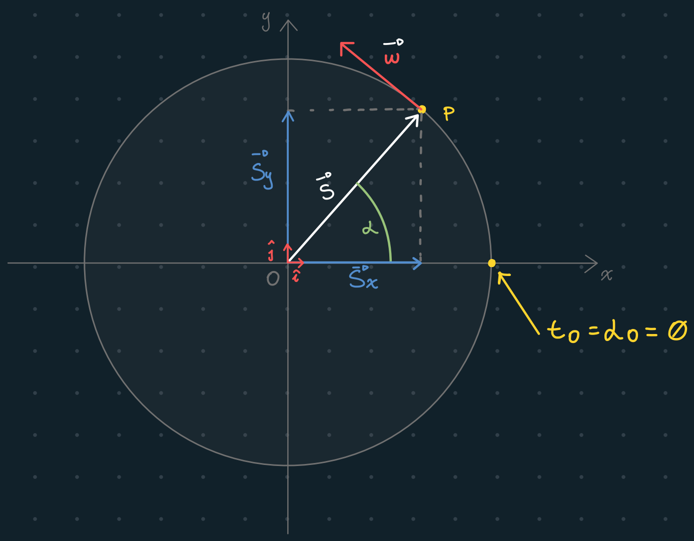
Velocita' Angolare

Per il moto Circolare

E' definita come la derivata dell'angolo rispetto al tempo:

$$\omega = \frac{d}{dt}\alpha$$

E' espressa in rad/s e ci dice la velocita' con cui l'angolo di rotazione dell'oggetto cambia nel tempo



$$\vec{\omega} = \begin{cases} \text{modulo} & \frac{d}{dt}\alpha \\ \text{direzione} & \text{Asse di rotazione} \\ \text{Verso} & \end{cases}$$

Verso $\rightarrow \begin{cases} \text{Antiorario} \rightarrow \text{Uscente} \\ \text{Orario} \rightarrow \text{Entrante} \end{cases}$

Ricaviamo α

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{d}{dt}\alpha \quad \rightarrow \quad \omega\, dt = d\alpha \quad \Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} \underset{\uparrow \text{cost}}{\omega}\, dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha_f} d\alpha \quad \rightarrow \quad \omega \int_{t_0}^{t_f} dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha_f} d\alpha$$

$$\Rightarrow \omega(t_f - t_0) = \alpha_f - \alpha_0$$ Relazione che lega l'angolo al tempo

$$\xrightarrow{t_0 = \alpha_0 = 0} \quad \omega \cdot t_f = \alpha_f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha(t) = \omega t}$$

Ci dice l'angolo per ogni istante di tempo

Troviamo la posizione della particella

$$\vec{S} = \begin{cases} \vec{S_x} = |\vec{S}| \cdot \cos(\alpha)\hat{i} \\ \vec{S_y} = |\vec{S}| \sin(\alpha)\hat{j} \end{cases} \quad \rightarrow \text{Sappiamo che} \quad |\vec{S}| = R \leftarrow \text{Raggio}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \underbrace{R\cos(\alpha)\hat{i}}_{\vec{S_x}} + \underbrace{R\sin(\alpha)\hat{j}}_{\vec{S_y}} \underset{\alpha = \omega t}{=} R\cos(\omega t)\hat{i} + R\sin(\omega t)\hat{j}$$

$\vec{S}$ Vettore posizione $\rightarrow$ Non spostamento!

Proof $|\vec{S}| = R \Rightarrow |\vec{S}| = \sqrt{R^2\cos^2(\omega t)\hat{i} + R^2\sin^2(\omega t)\hat{j}} = \sqrt{R^2\underbrace{[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)]}_{1}} = \sqrt{R^2} = R$

Troviamo la velocita' della particella

definizione : $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{S}$ siccome $\vec{S} = R\cos(wt)\hat{i} + R\sin(wt)\hat{j}$

Variabili

costanti

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{S} = -wR\sin(wt)\hat{i} + wR\cos(wt)\hat{j} = \underbrace{wR\cos(wt)\hat{j} - wR\sin(wt)\hat{i}}_{\vec{v}}$$

$\vec{v}$ vettore velocita'

Troviamo l'accelerazione

definizione $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$ $\Rightarrow$ $\vec{v} = \omega R\cos(wt)\hat{j} - \omega R\sin(wt)\hat{i}$

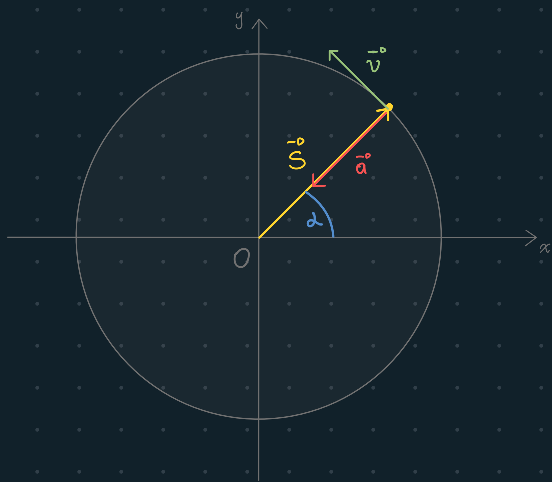
$$\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 R\sin(wt)\hat{j} - \omega^2 R\cos(wt)\hat{i}$$

vettore accelerazione

Mettiamo in evidenza $\rightarrow$ $\vec{a} = -\omega^2 [\overbrace{R\cos(wt)i + R\sin(wt)\hat{j}}^{\text{E' proprio } \vec{S}}]$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ominus\omega^2 \cdot \vec{S}$$

Sego opposto
Al vettore $\vec{S}$



$$|\vec{a}| = \sqrt{w^4 [R^2\cos^2(wt)\hat{i} + R^2\sin(wt)\hat{j}]}$$
$$= \sqrt{w^4 R^2 (\underbrace{\cos(wt)\hat{i} + \sin(wt)\hat{j}}_{1})}$$
$$= w^2 R \quad |\vec{a}|$$

Allo stesso modo $|\vec{v}| = \sqrt{w^2 R^2} = \underbrace{wR}_{|\vec{v}|}$ $\Rightarrow$ $w = \frac{\vec{v}}{R}$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \frac{\vec{v}^2}{R^2} \cdot R = \frac{v^2}{R}$$

$\vec{a}$ Altro modo di esprimere l'accelerazione centripeta

$w = \frac{\vec{v}}{R}$

Dimostrare che il vettore velocità è tangente al vettore spostamento

$$\left\{\begin{aligned} \vec{S} &= R\cos(wt)\hat{i} + R\sin(wt)\hat{j} \\ \vec{v} &= \frac{d}{dt}\vec{S} = -wR\sin(wt)\hat{i} + wR\cos(wt)\hat{j} \end{aligned}\right\} \text{ devono essere perpendicolari}$$

→ Se facendo $\vec{v} \cdot \vec{S} = 0 \Rightarrow$ Sono perpendicolari

→ Infatti $\vec{v} \cdot \vec{S} = |\vec{v}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos(\theta)$

Se $\theta = 90 \Rightarrow \cos(90) = \emptyset$

! Ma noi non conosciamo l'angolo (dobbiamo dimostrare proprio quello)!

⇒ Moltiplichiamo le componenti:

$$\vec{v} \cdot \vec{S} = R\cos(wt)\hat{i} \cdot (-wR\sin(wt)\hat{i}) + R\sin(wt)\hat{j} \cdot wR\cos(wt)\hat{j}$$

$$= -wR^2 \cancel{\cos(wt)\sin(wt)}\hat{i} + wR^2 \cancel{\cos(wt)\sin(wt)}\hat{j} = \emptyset$$

PERPENDICOLARI

ω è periodico

Battezziamo T il PERIODO il tempo che il corpo impiega a tornare alla posizione iniziale.

La FREQUENZA ν è il numero di rivoluzioni effettuate in un Δt

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{T}$$

ν: Secondi^{-1} → Hz Hertz

T: Secondi

Frequenza Angolare

E' definita come $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la freq. Angolare e la velocità Angolare COINCIDONO nel moto circolare

→ Siccome $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ se $dt = T \Rightarrow$ Il punto ha fatto un giro intero

perché usiamo la derivata

Angolo giro IN RADIANTI è 2π

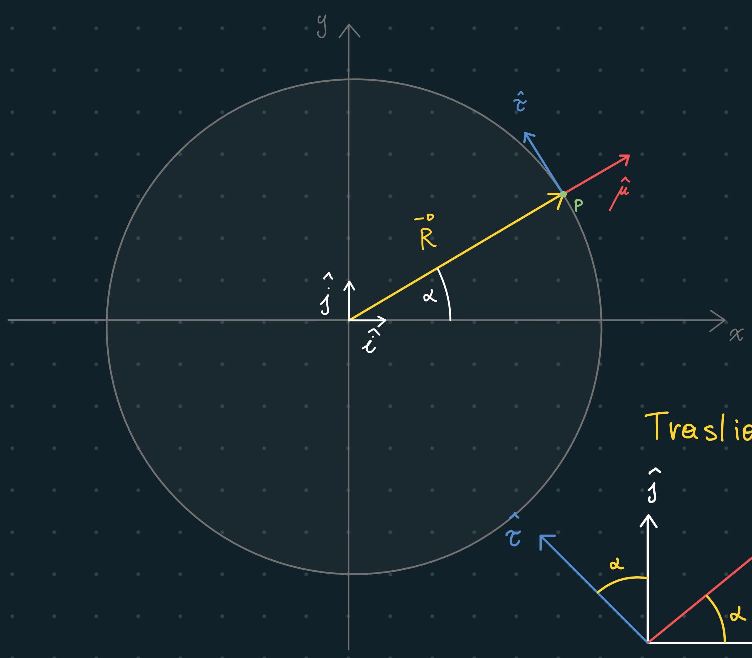
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{d}{dt}\alpha$$

Frequenza Angolare — Velocità Angolare

VALE SOLO PER IL MOTO CIRCOLARE!

Fine lezione 6

Moto circolare con riferimento in movimento

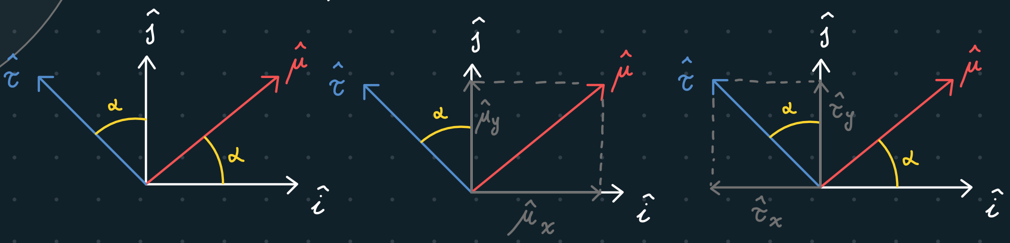


Introduciamo i nuovi versori $\hat{\mu}$ e $\hat{\tau}$

- $\hat{\mu}$ Versore RADIALE
- $\hat{\tau}$ Versore TANGENZIALE

Le direzione di μ e $\hat{\tau}$ cambiano a seconda della posizione della particella.

Trasliamo $\hat{\mu}$ e $\hat{\tau}$ nell'origine ottenendo:



Esprimiamo $\hat{\mu}$ e $\hat{\tau}$ in funzione ai versori $\hat{i}$ e $\hat{j}$

$$\hat{\mu} = \overbrace{\hat{\mu}}^{1}\cos(\alpha)\hat{i} + \overbrace{\hat{\mu}}^{1}\sin(\alpha)\hat{j}$$

$$\hat{\tau} = -\sin(\alpha)\hat{i} + \cos(\alpha)\hat{j}$$

Sappiamo che $w = \frac{d}{dt}\alpha$ quindi:

$$\frac{d}{dt}\hat{\mu} = -\frac{d\alpha}{dt}\sin(\alpha)\hat{i} + \frac{d\alpha}{dt}\cos(\alpha)\hat{j}$$

Derivate dell'argomento ⟶ $\frac{d\alpha}{dt} = w \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\hat{\tau} = -\frac{d\alpha}{dt}\cos(\alpha)\hat{i} - \frac{d\alpha}{dt}\sin(\alpha)\hat{j}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\mu} = -w\sin\alpha\hat{i} + w\cos\alpha\hat{j}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\tau} = -w\cos\alpha\, i - w\sin\alpha\hat{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{\mu} = w\overbrace{[-\sin\alpha\hat{i} + \cos\alpha\hat{j}]}^{\hat{\tau}} = w\hat{\tau}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\tau} = -w\overbrace{[\cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}]}^{\hat{\mu}} = -w\hat{\mu} \qquad (2)$$

Applichiamo la nostra scoperta al moto circolare per Trovare la velocita'

Sappiamo che $\vec{R} = |\vec{R}| \cdot \hat{\mu} = R \cdot \hat{\mu}$ $\Rightarrow$ $\frac{dR}{dt}$ = Derivata dello spazio = $\vec{v}$

Stessa Direzione

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{R} = \frac{d}{dt} R \cdot \hat{\mu} = R \frac{d}{dt}\hat{\mu} = R\, \omega \cdot \hat{\tau}$

cost

$\frac{d}{dt}\hat{\mu}$

$\frac{d}{dt}\vec{R} = \vec{v}$

$\Rightarrow$ Il vettore velocita' ha MODULO R e Direzione e verso di τ

Esplicitando $\tau = \cos(\alpha)\hat{j} - \sin(\alpha)\hat{i}$ e Moltiplicando otteniamo:

$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{R} = R\omega\cos(\alpha)\hat{j} - R\omega\sin(\alpha)\hat{i}$ ($\alpha = \omega t$)

$\vec{v}$

E' proprio lo stesso risultato ottenuto con il procedimento visto nella lez prec

Applichiamo la nostra scoperta al moto circolare per Trovare l'accelerazione

Sappiamo che $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$ ma $\vec{v} = R\omega\hat{\tau}$

cost

$\Rightarrow \vec{a} = R\frac{d}{dt}\omega\hat{\tau} = \frac{d\omega}{dt}\hat{\tau} + \omega\frac{d}{dt}\tau$

Calcolato al passo (2)

$\Rightarrow \vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{\tau} + \omega(-\omega\hat{\mu}) = R\frac{d\omega}{dt}\hat{\tau} - \omega^2\hat{\mu}$

$\frac{d}{dt}\hat{\tau} = -\omega\hat{\mu}$

Accelerazione TANGENTE alla Traiettoria

$\downarrow$

Accelerazione TANGENZIALE

Accelerazione lungo $\hat{\mu}$ ma con verso opposto

$\downarrow$

Accelerazione CENTRIPETA

Se $\omega = \text{cost}$ $\Rightarrow$ $\vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{\tau} - \omega^2\hat{\mu} = -\omega^2\cdot\hat{\mu}$

$\emptyset$

Solo nel moto circolare uniforme

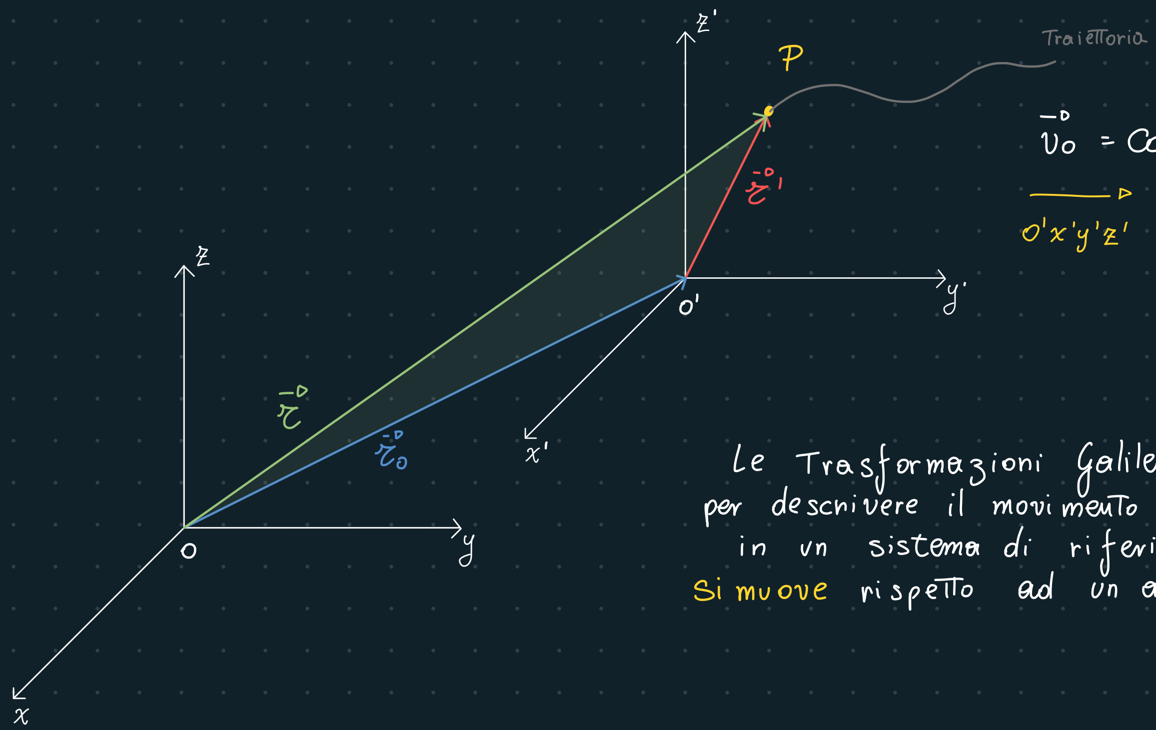
$\Rightarrow$ L'accelerazione e' solo centripeta

Se $\omega \neq \text{cost}$ $\Rightarrow$ L'accelerazione ha due componenti; oltre alla centripeta e' presente anche quella tangenziale, posta lungo il vettore velocita', avente modulo $R\frac{d\omega}{dt}$

e' una velocita' $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}$vel = acc

$\Rightarrow$ Battezziamo $\frac{d\omega}{dt}$ = Accelerazione Angolare

Trasformazioni Galileiane



$\vec{v}_0 = cost$

$\longrightarrow$ $O'x'y'z'$ è in movimento

Le Trasformazioni Galileiane sono usate per descrivere il movimento di un oggetto in un sistema di riferimento che si muove rispetto ad un altro sistema.

Come troviamo $\vec{r}$?

$\vec{r}$ è quello che vede l'osservatore in $Oxyz$; $\vec{r}_0$ è il vettore che unisce i due sys

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'}_{\text{Somma di vettori}}$$

Sappiamo che lo spazio nel moto rettilineo uniforme è dato da $\vec{S} = \vec{v}_0 t$

$$\rightarrow \vec{r}_0 = \vec{S} \Rightarrow \vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}'$$

non conosciamo la traiettoria del punto P (e non ci interessa)

$\vec{S}$ per $Oxyz$

Prima formula delle Trasformazioni

$\hookrightarrow$ Ci DICE che lo spazio misurato da $Oxyz$ è uguale alla velocità di $O'x'y'z'$ per il tempo più la posizione misurata da $O'x'y'z'$

Come troviamo la velocità?

Sappiamo che $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{S} \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{r}}_{\vec{v}_{Oxyz}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{v}_0 t + \frac{d}{dt}\vec{r}'}_{\vec{v}_{O'x'y'z'}}$

Sarà qualcosa tipo $\frac{d}{dt} v' t = \underline{v'}$

Vel di $O'x'y'z'$

$$\rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

Seconda formula delle Trasformazioni

Velocità <u>misurata</u> da $O'x'y'z'$

Come trovo l'accelerazione?

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{v}_0 + \frac{d}{dt}\vec{v}' \Rightarrow \vec{a} = 0 + \vec{a}'$$

Terza Eq

il sys $O'x'y'z'$ ha $\vec{v}_0 = cost$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} c = 0$$

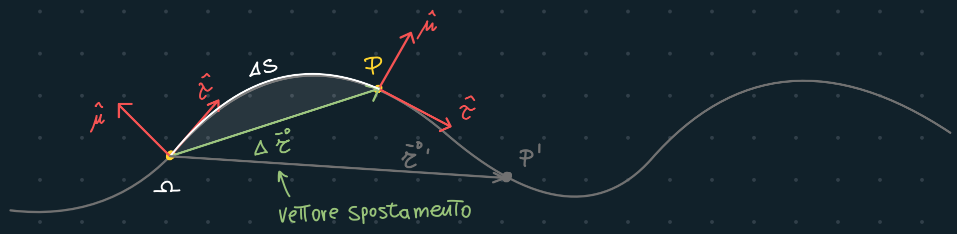
I due sys misurano la stessa acceleraz.

$\Rightarrow$ LE ACCELERAZIONI SONO INVARIANTI SOTTO TRASFORMAZIONI GALILEIANE

Ascissa Curvilinea

Lezione 8

Possiamo Applicare le nozioni acquisite finora ad un Moto Vario ?



Definizione: Ad ogni punto P sulla traiettoria potremmo far coincidere un numero reale S detto Ascissa Curvilinea il cui modulo fornisce, nell'unita' di misura scelta, la Lunghezza dell'arco di curva rettificata ΩP.

→ Confrontiamo $\Delta\vec{\tau}$ con ΔS $\Rightarrow \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{|\vec{\Omega P}|\hat{\tau}}{\Delta S}$

Per $\Delta S \to 0$ la direzione di $\Delta\vec{\tau}$ coincide con la Tangente τ in Ω

La distanza tra Ω e P tende a zero

Man Mano che $\Delta S \to 0$, P si avvicina sempre piu' a Ω e $|\Delta\vec{\tau}|$ coincide sempre di piu' con ΔS

$$\Rightarrow \lim_{\Delta S \to 0} \frac{|\vec{\Omega P}|}{\Delta S} = 1$$

Perche' $\Delta\vec{\tau}$ e ΔS coincidono $\Rightarrow \lim_{a \to 0} \frac{c}{c} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta S \to 0} \underbrace{\frac{|\vec{\Omega P}|}{\Delta S}}_{1} \cdot \hat{\tau} = \hat{\tau}$$

Sappiamo che $\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}(t-\Delta t) - \vec{\tau}(t)$ e che $\Delta\vec{\tau} = |\vec{\Omega P}|$;

Se $\Delta\vec{\tau}$ e' diviso per Qualcosa che tende a zero $\Rightarrow$ Abbiamo la Def di derivata

$$\Rightarrow \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{|\vec{\Omega P}|\hat{\tau}}{\Delta S} = \frac{d}{ds}\vec{\tau} = \hat{\tau}$$

Troviamo la velocita'

Sappiamo che ΔS dipende dal tempo, perche' se poniamo un punto P', e' chiaro che $\vec{\tau}' = |\vec{\Omega P'}| > \vec{\tau} = |\vec{\Omega P}|$.

Inoltre $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{\tau} \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{\tau} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \underbrace{\frac{ds}{ds}}_{1} = \underbrace{\frac{d\vec{\tau}}{ds}}_{\hat{\tau}} \cdot \frac{ds}{dt}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \hat{\tau} \cdot \frac{ds}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \hat{\tau}\,\dot{s}}$$

Derivata rispetto al tempo della distanza S

$\Rightarrow$ Capiamo che nel moto vario la velocità è lungo $\hat{\tau}$ ed ha modulo $\frac{ds}{dt} = \dot{s}$

Troviamo l'accelerazione

Sappiamo che $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\,\underbrace{\dot{s}\cdot\hat{\tau}}_{\text{NON costanti}}$ $\rightarrow$ Derivata di un prodotto

$$\rightarrow \vec{a} = \ddot{s}\,\hat{\tau} + \dot{s}\,\underbrace{\frac{d\hat{\tau}}{dt}}_{\rightarrow -\omega\hat{\mu}} = \ddot{s}\,\hat{\tau} - \dot{s}\,\omega\hat{\mu}$$

Scoperto nel moto circolare

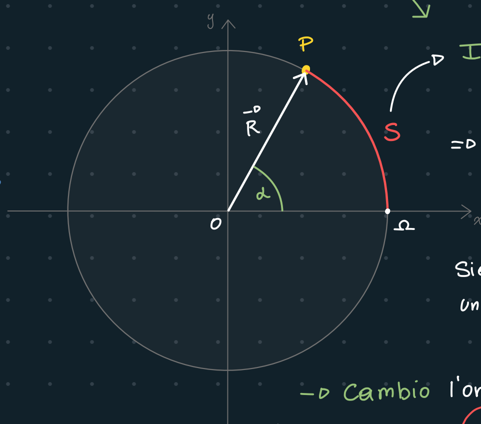
Sappiamo che $\omega = \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow \omega = \frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{ds}{ds} = \underbrace{\frac{d\alpha}{ds}}_{\text{Battezzato } \frac{1}{R}}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\dot{s}}$

Proof

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{s}\,\hat{\tau} - \underbrace{\dot{s}\cdot\dot{s}}_{\dot{s}^2}\,\frac{1}{R}\cdot\hat{\mu} = \underbrace{\ddot{s}\,\hat{\tau} - \frac{\dot{s}^2}{R}\,\hat{\mu}}_{\vec{a}}$$

Accelerazione Tangenziale ($\ddot{s}\,\hat{\tau}$)

Accelerazione Radiale ($\frac{\dot{s}^2}{R}\,\hat{\mu}$)



$\rightarrow$ IN RADIANTI

$S = R\cdot\alpha$ cost

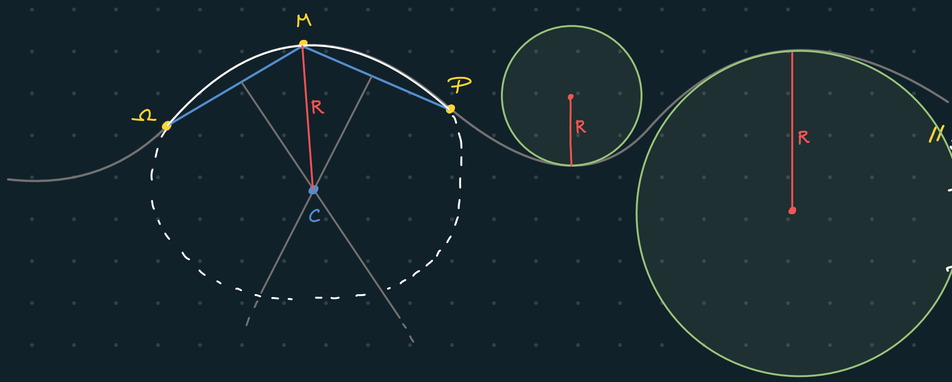
$\Rightarrow ds = R\,d\alpha$

fare il Differenziale significa far tendere una quantità a zero

$\rightarrow$ Cambio l'ordine dei membri

$ds = R\,d\alpha \rightarrow \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$

Che cosa è 'R' ?



"Prendiamo un punto M compreso tra i due punti Ω e P; uniamo con due segmenti $\overline{\Omega M}$ e $\overline{MP}$; Tiriamo l'asse dei due segmenti

$\rightarrow$ R è il raggio della circonferenza che meglio approssima la Traiettoria data. Infatti per 3 punti passa una sola retta, che prende il nome di cercio osculatore.

Metodo Scientifico

La nascita del metodo scientifico proviene dal Bisogno del tempo di "confermare" o dimostrare le leggi che fino a quel punto venivano date "per certe".

Galileo capisce che per dimostrare degli "eventi" serviva un mezzo ben preciso: la matematica.

Fino a Galileo "il numero" ovvero la matematica, veniva usata solo per scopi pratici, come pesare il grano, contarne i sacchi; mai per COMPRENDERE LE LEGGI DEL MONDO.

Galileo dice che l'Esperimento è più importante della Teoria; fino a quel punto nei libri di scienza erano presenti solo DISCORSI, e non esperimenti.

⇒ Se l'Esperimento non rispecchia la previsione della Teoria, la teoria è sbagliata.

Struttura del Metodo Scientifico

1. Formulazione di una Domanda sulla realtà; "È impossibile rispondere ad una domanda che non viene posta"

2. Osservazione della realtà

4. La capacità di estrarre dai fenomeni attraverso l'uso di STRUMENTI appropriati delle quantità espresse da numeri

5. La possibilità di legare fra loro i numeri in opportune Equazioni. Dobbiamo inoltre vedere se questa equazione può essere opportunamente verificata. La soluzione delle equazioni deve rappresentare un aspetto misurabile della realtà. Queste equazioni oltre a descrivere il modello nel tempo attuale, deve anche PREVEDERE "il futuro".

6. La verifica Sperimentale della corrispondenza fra le equazioni ipotizzate ed i fenomeni reali. Se la nostra ipotesi viene verificata, viene promossa a legge.

Manca però il punto 3, che è molto importante:

3. Semplificazione della realtà dei fenomeni attraverso la costruzione di un modello.

Modello

Un modello è una rappresentazione semplificata della realtà che viene usata per spiegare e comprendere l'andamento di certi fenomeni.

Si sceglie quindi un solo punto di vista: quello che più ci interessa, fissando l'attenzione su aspetti particolari.

Ipotesi di riproducibilita'

Un fenomeno naturale si ripete ogni volta che sono riprodotte le identiche condizioni in cui e' avvenuto inizialmente.

=> Ogni ricercatore deve aver cura di precisare le proprie operazioni in modo da permettere ad un altro ricercatore di RIPETERE l'esperimento in modo da verificarlo.

L'essenza di qualcosa

Per definire qualcosa, bisoga dare il genere prossimo e differenza specifica:

Es: Il DALMATA

genere prox
"E' un cane"

Differenza specifica
"con manto bianco a pallini neri"

Es: Il triangolo

POLIGONO

con 3 lati e 3 Angoli

=> In matematica ci sono una serie di definizioni che possono essere date in questo modo.

! In fisica questo non e' possibile!

-> Es: Il Tempo : ????

Il tempo

Dal punto di vista di Newton

Newton dice che "il Tempo assoluto fluisce uniformemente in sé e per sua natura".

→ Il tempo non è un costrutto creato dall'uomo (come ad es. i vettori) ma il Tempo, come lo spazio, sono grandezze NATURALI, che esistono indipendentemente dall'uomo.

Non Riusciamo a definire il tempo come genere prossimo e differenza specifica; Galileo dice che a volte provare a cogliere l'essenza di qual cosa è fatica sprecata. Quello che però possiamo fare, dice Galileo, è cogliere gli Aspetti misurabili che possono essere TRADOTTI in quantità.

⇒ La fisica si costruisce anche se non si ha una completa conoscenza dell'ESSENZA dell'argomento in questione.

⇒ La scienza non si occupa dell'Essenza delle cose, ma dei rapporti tra i fenomeni, igorando in gran parte la loro essenza.

Richard Feynman dice che dobbiamo accettare il fatto che il tempo è una delle cose che non possiamo definire.

→ Possiamo SPOSTARE LA DOMANDA da "cosa è il tempo" a "come misuro il tempo?"

⇒ La risposta alla seconda domanda è detta DEFINIZIONE OPERATIVA.

Misurare il tempo

Inizialmente era definita come: $\frac{1}{86\,400}$ ← Il Periodo di Rotazione della Terra

Non è molto precisa

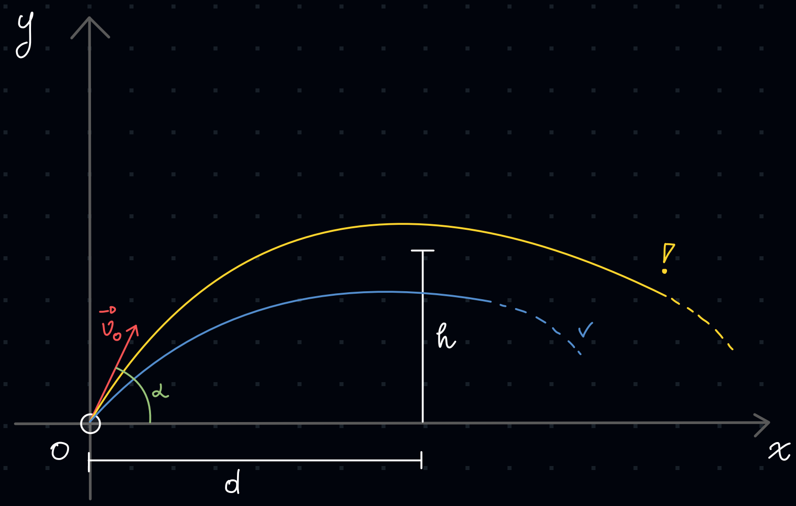
Definizione Attuale:
Il secondo è la durata di $\sim 9 \times 10^9$ oscillazioni della radiazione emessa dall'atomo di cesio 133 nello stato fondamentale 2S.

precisione: $\sim 10^{-13}$ MOLTO PRECISO

FINE DELLA CINEMATICA

Raccolta di Esercizi

P1 : Un calciatore lancia un pallone con $|\vec{V_0}| = 15\ m/s$ con $\alpha = 30°$ e $d = 10\ m$ Dalla porta
La porta è alta $h = 2.5\ m$



Sappiamo che le eq del moto uniforme applicate al moto del proiettile sono:

$$\begin{cases} x(t) = \vec{V_0}\cos(\alpha)\cdot t & (a) \\ y(t) = \vec{V_0}\sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2 & (b) \end{cases}$$

Ci basta capire che valore ha y quando ci troviamo ad $x = 10\ m$

⇒ Dobbiamo trovare l'equazione di y in funzione di x

1) Isoliamo t dalla (a): $t = \dfrac{x}{\vec{V_0}\cos(\alpha)}$

2) Sostituiamo t nella (b):

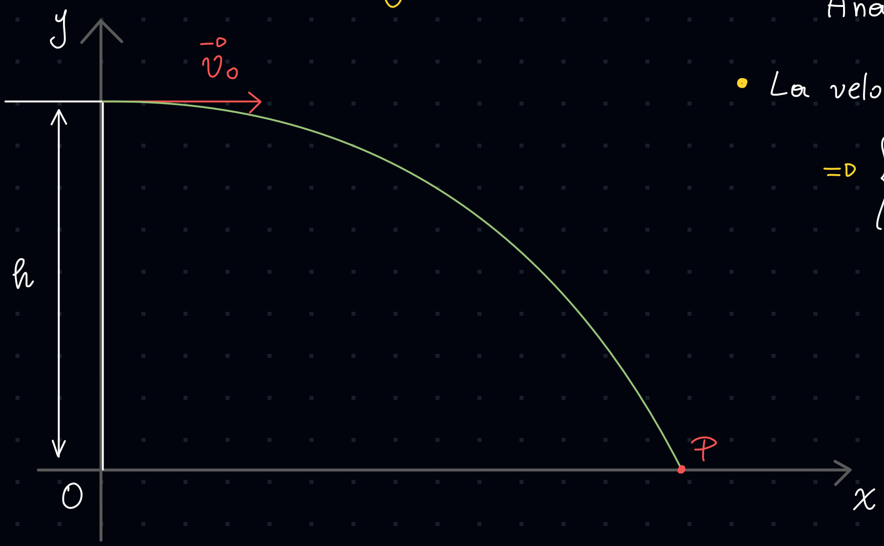
$$y = \frac{\cancel{\vec{V_0}}\sin(\alpha)\cdot x}{\cancel{\vec{V_0}}\cos(\alpha)} - \frac{1}{2}a\left(\frac{x}{\vec{V_0}\cos\alpha}\right)^2 = x\tan(\alpha) - \frac{\frac{1}{2}\vec{g}}{\vec{V_0}^2\cos^2(\alpha)}x^2$$

3) Per trovare il valore di y in $x = 10$ ci basta sostituire nella eq della Traiettoria

$$y\Big|_{x=10} = 10m\tan(30) - \frac{\frac{1}{2}(9.81\ m/s^2)}{15^2 m/s\cos^2(30)}\cdot 10^2 m \simeq 2.86\ m$$

Siccome $2.86\ m > 2.5\ m$ il pallone non entra nella porta.

P2: Problema di galileo



Analizziamo le componenti del moto:

- La velocità iniziale è PARALLELA al terreno $\Rightarrow \alpha = \emptyset$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{0x} = Max & \Rightarrow \cos(0) = 1 \\ V_{0y} = \emptyset & \Rightarrow \sin(0) = \emptyset \end{cases}$$

Quindi nell'istante $t_0 = 0$ la velocità sarà massima lungo x e nulla lungo y.

Successivamente la v. orizzontale rimane costante, mentre quella verticale cresce UNIFORMEMENTE.

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \text{Moto rettilineo Uniforme} \\ y(t) = \text{Moto uniformemente accelerato} \end{cases} = \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

1) Troviamo dalla b il tempo impiegato a cadere:

$$P(\overset{x}{x}, \overset{y}{0}) \Rightarrow y(t_f) = h - gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Tempo di caduta

Il Tempo di caduta è INDIPENDENTE dalla velocità iniziale

2) Sostituiamo l'eq del tempo nella a

$$x(t) = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

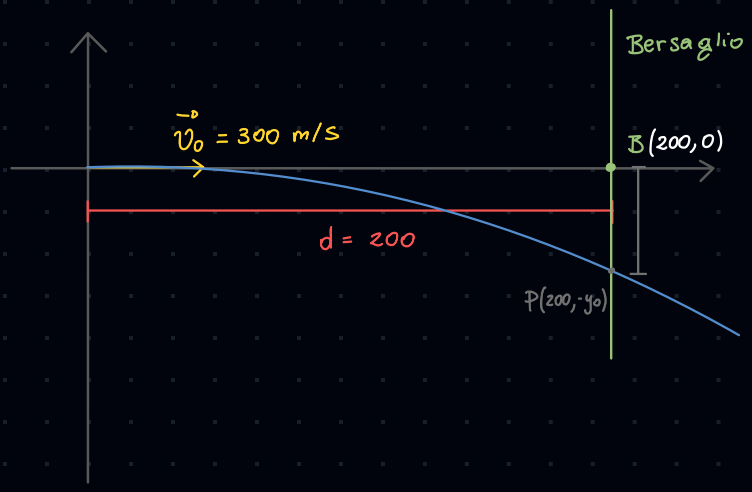
gittata

A parità di $\vec{g}$ ed h, la gittata dipende solo dalla velocità iniziale

Problema 3: Lezione 5 1:12

distanza $G = 200\ m$

Vel iniziale: $\vec{v}_0 = 300\ m/s$



Equazioni ORARIE Del Moto

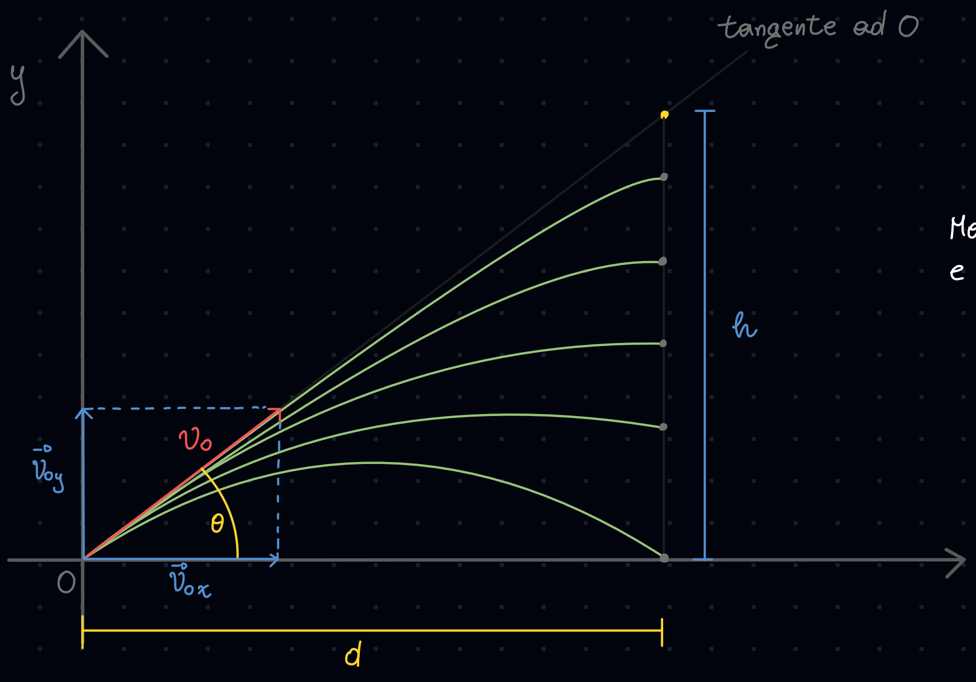
$$\begin{cases} X(t) = v_0 t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

→ ? Non abbiamo il tempo

$$\Rightarrow t = \frac{x^2}{v_0^2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{\overset{200}{x^2}}{v_0^2} \rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot \frac{200}{300} = -\frac{109}{50} = -2.18$$

$\Rightarrow P(200, -2.18)$

Problema 3 Bonus: La Scimmia ed il caccitore



$\vec{v}_0$ è inclinato di θ

Ma θ è il rapporto tra l'altezza e la Distanza:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{h}{d}\right)$$

Il cacciatore punta alla Scimmia sull'albero ad Altezza h

Proiettile

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{ox} = v_0 \cos(\theta) \\ V_{oy} = v_0 \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = V_{ox} \cdot t \\ y(t) = V_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Eq del Proiettile

→ Distanza orizzontale → $t = \frac{x}{V_{ox}} \Rightarrow t = \frac{d}{V_{ox}}$

In quell'istante

$$y_{\text{Proiettile}} \underset{t = \frac{d}{V_{ox}}}{=} V_{oy} \cdot \frac{d}{V_{ox}} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{d^2}{V_{ox}^2} = \overbrace{\frac{\cancel{V_0} \cos(\theta)}{\cancel{V_0} \sin(\theta)}}^{\tan(\theta)} \cdot d - \frac{1}{2} \frac{g}{V_{ox}^2} d^2$$

$$= \tan(\theta) \cdot d - \frac{1}{2} \frac{g}{V_{ox}^2} d^2$$

y quando arriva a d

Scimmia

$$\begin{cases} x = d \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow 0 < t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\Rightarrow y_{scimmia} \underset{t = \frac{d}{v_{ox}}}{=} h - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_{ox}^2}$$

$$\Rightarrow y_{proiettile} = y_{scimmia} \rightarrow \tan(\theta) \cdot d - \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{\frac{g}{v_{ox}^2}} \cancel{d^2} = h - \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{\frac{g}{v_{ox}^2}} \cdot \cancel{d^2}$$

$$\rightarrow \overbrace{\tan(\theta) \cdot d}^{\text{Proiettile}} = \underbrace{h}_{\text{scimmia}}$$

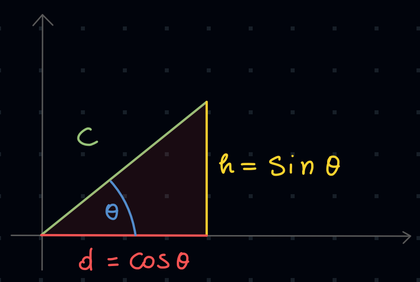
Siccome il cacciatore spara con un angolo $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{h}{d}\right)$

$$\Rightarrow \underbrace{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{h}{d}\right)\right)}_{\frac{h}{d}} d = h \rightarrow \frac{h}{\cancel{d}} \cdot \cancel{d} = h \Rightarrow h = h$$

$\Rightarrow$ Le due quote all'istante $t = \frac{d}{v_{ox}}$ sono uguali

$\Rightarrow$ il proiettile colpisce la scimmia.

- Trovare la velocita' minima



$$\cos(\theta) = \frac{d}{c} \quad \text{siccome } c = \sqrt{d^2 + h^2} \rightarrow \cos(\theta) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}$$

$$\Rightarrow v_{ox} = v_0 \cos(\theta) = \underbrace{v_0 \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}}_{v_{ox}}$$

Velocita' minima orizzontale

Siccome $0 < t \leq \underbrace{\sqrt{\frac{2h}{g}}}_{\text{Tempo caduta}} \rightarrow t = \frac{d}{v_{ox}} \leq \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v_{ox} \geq \sqrt{\frac{g}{2h}} \cdot d$

$$\Rightarrow v_0 \cdot \frac{\cancel{d}}{\sqrt{d^2 + h^2}} \geq \cancel{d} \sqrt{\frac{g}{2h}} \rightarrow \underbrace{v_0}_{\text{Velocita' Iniziale}} \geq \underbrace{\sqrt{d^2 + h^2} \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}}}_{\text{Velocita' minima } v_{min}}$$

$\Rightarrow$ Ans: Il proiettile colpisce la scimmia se $v_0 \geq v_{min}$

Problema Dalla prova scritta del 19/11/2018

1) Un tuffatore si stacca da un trampolino alto $h = 10m$ spingendosi in senso orizzontale con una velocità $V_0 = 2m/s$. A che distanza orizzontale dal bordo del trampolino si troverà il tuffatore 0.8 secondi dopo lo stacco? In quel momento a che altezza sopra l'acqua si troverà? A che distanza orizzontale dal trampolino il tuffatore entrerà in acqua?

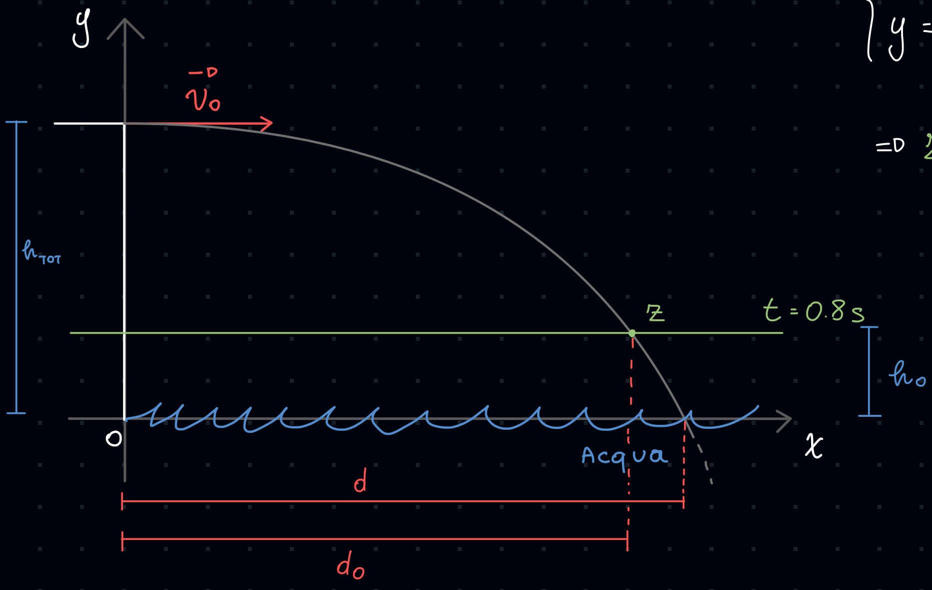
$h = 10$ m

$v_0 = 2$ m/s

Q_1 $d_0 = ?$ a $t = 0.8$ s

Q_2 a $t = 0.8$ s , $h_0 = ?$

Q_3 a che d entrerà in acqua?



$$\begin{cases} x = \vec{v}_0 \cdot t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\,m/s \cdot 0.8\,s = 1.6\,m \\ y = 10m - \frac{1}{2} 9.81 \, (0.8)^2 = 6.8\,m \end{cases}$$

$\Rightarrow z = (1.6\,,\,6.8) \Rightarrow \begin{cases} h_0 = 6.8\,m \quad \text{Ans}_1 \\ d_0 = 1.6\,m \quad \text{Ans}_2 \end{cases}$ (Il disegno non è in scala)

Da galileo: $t_{caduta} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9.81}} = 1.4\,s \Rightarrow x_f = \vec{v}_0 \cdot t_c = 2 \cdot 1.4 = \underline{2.856\,m}$ Ans_3

1) Un cacciatore deve colpire un bersaglio posto al suolo ad una distanza orizzontale $d = 45.7m$. Il suo fucile spara proiettili in modo tale che escono dalla canna ad una velocità $V = 460 m/s$. Calcolare:

a) Da che altezza deve sparare il cacciatore se vuole colpire il bersaglio tenendo la canna del fucile orizzontale?

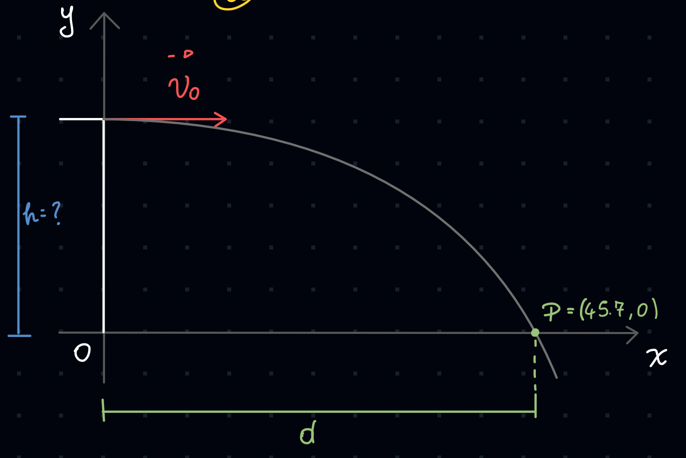
b) Quale angolazione rispetto al terreno deve dare alla canna del fucile se vuole colpire il bersaglio facendo partire il proiettile dal suolo?

$|\vec{v}_0| = 460\ m/s$

$d = 45.7\ m$

Q_1: h / $\alpha = 0°$ per colpire il bersaglio

a



$$\begin{cases} x = \vec{v}_0 t \\ y = h - \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \end{cases} \rightarrow t = \frac{x}{v_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = h - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}}$$ Traiettoria

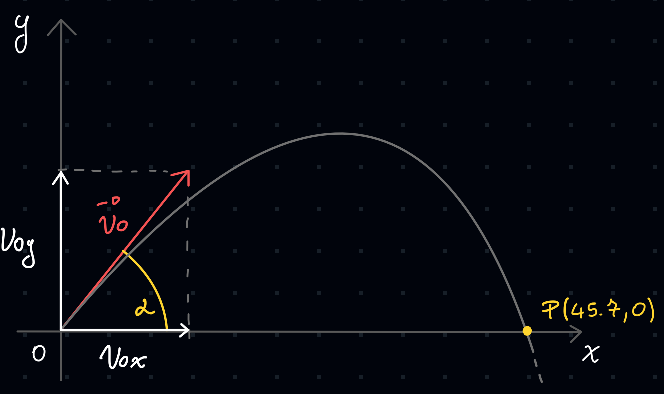
$$\rightarrow h = \underbrace{y}_{\emptyset} + \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2} \rightarrow \boxed{h = \frac{1}{2}\cdot 9.81\cdot\frac{45{,}7^2}{460^2}} = 0.048\ m = 4{,}8\ cm$$

Stessa formula

Processo Alternativo

Sappiamo che $t_{caduta} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow x = v_0\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow \frac{2h}{g} = \frac{x^2}{v_0^2} \rightarrow \boxed{h = \frac{x^2}{v_0^2}\cdot\frac{g}{2}}$

b



$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_0\cos(\alpha) \\ v_0\sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0\cos\alpha\cdot t & (1) \\ y(t) = v_0\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Ricavo il tempo dalla (1)

$$t = \frac{x}{v_0\cos(\alpha)} \Rightarrow y = \cancel{v_0}\sin(\alpha)\cdot\frac{x}{\cos(\alpha)\cancel{v_0}} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)}$$

Traiettoria

$$\Rightarrow \boxed{y = x\tan(\alpha) - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)}}$$

$\rightarrow$ Quando $y = 0 \rightarrow x\tan(\alpha) = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} \rightarrow x\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}$

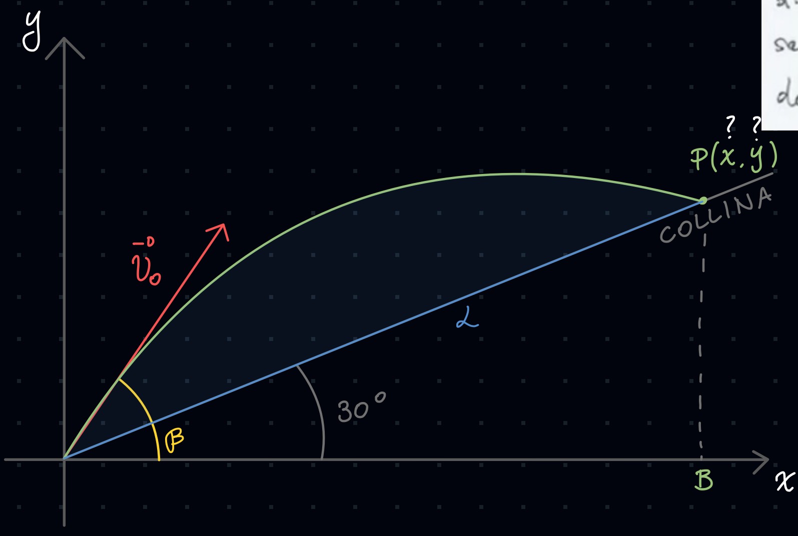
$$\rightarrow \sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}g\frac{x}{v_0^2} \rightarrow 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = g\frac{x}{v_0^2} \Rightarrow \sin(2\alpha) = \frac{gx}{v_0^2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{gx}{v_0^2}\right) \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{gx}{v_0^2}\right) = \frac{2.116\times10^{-3}}{2} = 1.0593\times10^{-3} = 0.00105°$$

PROBLEMA

PROBLEMA

Un cannone spara ad un bersaglio situato sul fianco di una collina. A che distanza L cadranno i proiettili se la loro velocità iniziale è $v_0 = 300\ m/s$, la pendenza della collina è $\alpha = 30°$ e l'angolo di sparo è $\beta = 60°$?



Eq del proiettile:

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos(\beta)\cdot t \rightarrow t = \dfrac{x}{V_0\cos(\beta)} \\ y(t) = V_0 \sin(\beta) t - \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \end{cases}$$

Eq della collina: $y = \tan(\alpha)\cdot x$

Ans: Troviamo l'eq della Traiettoria

$$\Rightarrow \underset{t=\frac{x}{V_0\cos(\beta)}}{y =} V_0\sin(\beta)\cdot\frac{x}{V_0\cos(\beta)} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{x^2}{V_0^2\cos^2(\beta)} \rightarrow y = x\tan(\beta) - \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2(\beta)}\cdot x^2$$

→ Mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} y = x\tan(\beta) - \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2\beta}\cdot x^2 \\ y = \tan(\alpha)\cdot x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha)\cdot\cancel{x} = \cancel{x}\tan(\beta) - \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2\beta}x^{\cancel{2}} \rightarrow \tan(\alpha) - \tan(\beta) = -\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2\beta}x$$

$$\rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}x\cdot\frac{g}{\cancel{V_0^2\cos^2\beta}} = [\tan(\alpha)-\tan(\beta)]\cdot\frac{V_0^2\cos^2\beta}{g}\cdot 2$$

$$[\tan(\alpha)-\tan(\beta)]x + \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2\beta}x^2 = 0 \rightarrow x\left[\tan\alpha - \tan\beta + \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2\beta}x\right] = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \emptyset$$

$$\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos\beta}x + \tan(\alpha) + \tan(\beta) = 0 \Rightarrow \quad x_2 = -[\tan(\alpha)-\tan(\beta)]\cdot\frac{V_0^2\cos^2\beta}{g}\cdot 2$$

$$\Rightarrow x_2 = [\tan(\beta)-\tan(\alpha)]\cdot\frac{V_0^2\cos^2\beta}{g}\cdot 2 = \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{V_0^2\cdot\cancel{\frac{1}{4}}}{9.81}\cdot\cancel{2}$$

$\rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{V_0^2}{9.81} = 5296.79\ m$$

x dove il proiettile Tocca la collina

Troviamo la y:

$$\text{collina} \Rightarrow y = \tan(\alpha)\cdot x = 3058.10$$

$x = 5296.79$

$$\Rightarrow L = \sqrt{5296.79^2 + 3058.1^2} = 6116.2\ m$$

→ Trovare L in modo alternativo:

$$L = \overline{OP} = \frac{\overline{OB}}{\cos(\alpha)} = 6116.2 \text{ m}$$

Prova scritta di Fisica Generale I del 20/6/2000

1) Considerando le lancette dei minuti e delle ore di un orologio a partire dalla posizione di mezzogiorno, si determini dopo quale angolo percorso dalla lancetta delle ore esse torneranno a sovrapporsi.

Dopo 1 ora ...

La lancetta delle ore si sposta di α mentre quella dei minuti di $2\pi + \alpha$

→ Sappiamo che $\alpha = \omega t$

Siccome il moto è periodico, possiamo determinare la velocità come spazio su tempo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

← Angolo (spazio) in radianti

↑ Periodo

Sappiamo che la lancetta dei minuti impiega 1 h per una rivoluzione

$$\Rightarrow \omega_{min} = \frac{2\pi}{3600} \text{ rad/s} \qquad \omega_h = \frac{2\pi}{12 \cdot 3600} \text{ rad/s}$$

Per risolvere il quesito dobbiamo dire che il tempo che ci mette la lancetta delle ore a percorrere α è lo stesso che impiega quella dei minuti a percorrere $2\pi + \alpha$

$$\Rightarrow t = \frac{2\pi + \alpha}{\omega_{min}} = \frac{\alpha}{\omega_h} \Rightarrow (2\pi + \alpha)\,\omega_h = \alpha\, \omega_{min} \rightarrow$$

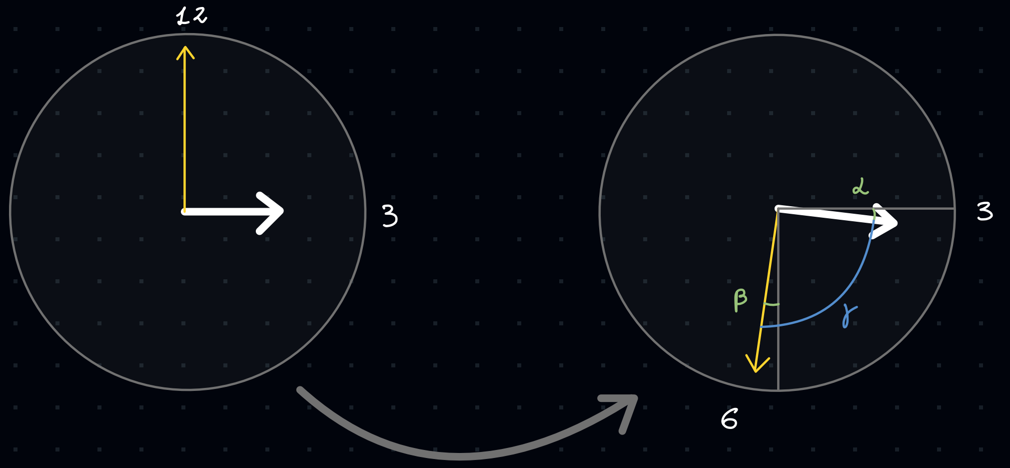
$$\rightarrow 2\pi \omega_h + \alpha \omega_h = \alpha\, \omega_{min} \rightarrow 2\pi \omega_h = \alpha\, \omega_{min} - \alpha\, \omega_h \rightarrow \alpha = \frac{2\pi\, \omega_h}{\omega_{min} - \omega_h} \cdot \frac{\omega_h}{\omega_h}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\frac{2\pi\, \cancel{\omega_h}}{\cancel{\omega_h}}}{\frac{1}{\omega_h} \cdot \frac{\omega_{min} - \cancel{\omega_h}\ 1}{\cancel{\omega_h}}} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_{min}}{\omega_h} - 1} = \frac{2\pi}{\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{3600}} \cdot \frac{\cancel{3600} \cdot 12}{\cancel{2\pi}} - 1} = \frac{2\pi}{12 - 1} = 0.571 \text{ rad}$$

Ans

Q_2: Dopo quanto tempo le lancette avranno un angolo di $90°$?

$90° = \frac{1}{2}\pi$



Dopo un po' di tempo...

$\beta = \alpha + \gamma$

Bott

Sappiamo che $\omega_h = \frac{2\pi}{3600 \cdot 12}$ $\quad \omega_m = \frac{2\pi}{3600}$

$$t = \frac{\alpha}{\omega_h} = \frac{\alpha+\gamma}{\omega_m} \Rightarrow \alpha \cdot \omega_m = (\alpha+\gamma)\cdot\omega_h \Rightarrow \alpha\,\omega_m = \omega_h\alpha + \gamma\,\omega_h$$

$$\alpha\,\omega_m - \alpha\,\omega_h = \gamma\,\omega_h \Rightarrow \alpha(\omega_m - \omega_h) = \gamma\,\omega_h \Rightarrow$$

Due Incognite

$$\begin{cases} t = \frac{\alpha}{\omega_h} \Rightarrow \alpha = t\cdot\omega_h \\ t = \frac{\alpha+\gamma}{\omega_m} \Rightarrow \alpha+\gamma = t\cdot\omega_m \Rightarrow \alpha = t\,\omega_m - \gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{t}\cdot\omega_h = \cancel{t}\,\omega_m - \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\omega_m}{\omega_h}$$

$$\Rightarrow \alpha(\omega_m - \omega_h) = \frac{\omega_m}{\cancel{\omega_h}}\cdot\cancel{\omega_h}$$ Sappiamo che $\alpha = t\cdot\omega_h$

$$\Rightarrow t\,\omega_h(\omega_m - \omega_h) = \omega_m \Rightarrow t(\omega_m - \omega_h) = \frac{\omega_m}{\omega_h} \Rightarrow \boxed{t = \frac{\omega_m}{\omega_h(\omega_m - \omega_h)}}$$

$$t = \frac{\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{3600}}}{\frac{\cancel{2\pi}}{12\cdot\cancel{3600}}\left(\frac{2\pi}{3600} - \frac{2\pi}{12\cdot3600}\right)} = \frac{12}{\frac{24\pi - 2\pi}{3600\cdot12}} = \frac{6\,\cancel{12}}{\frac{11\,\cancel{22}\pi}{3600\cdot12}}$$

7500.53

Soluzione moto circ unif con α che dipende dal tempo

Sappiamo che $\omega = \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow \omega\, dt = d\alpha \Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} \omega\, dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha_f} d\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega(t_f - t_0) = \alpha_f - \alpha_0 \Rightarrow$ Tempo generico

$\Rightarrow \alpha_f = \alpha_0 + \omega(t_f - t_0) \Rightarrow$ Tempo e angolo iniziale zero $\Rightarrow \alpha(t) = \omega \cdot t$

Nel problema

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(t) = \omega_1 \cdot t & \text{minuti} \\ \alpha_2(t) = \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{90^\circ \text{ in rad}} + \omega_2 \cdot t & \text{ore} \end{cases}$$

Ci sara' un tempo t^* in cui l'angolo tra minuti ed ore e' di $90^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{2}$

ovvero: $\alpha_1(t^*) - \alpha_2(t^*) = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \omega_1 \cdot t^* - \frac{\pi}{2} - \omega_2 t^* = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_1 t^* - \omega_2 t^* = \pi$$

Sappiamo (da prima) che:

$$\omega_1 : \frac{2\pi}{3600} \text{ rad/s} \quad e \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{12 \cdot 3600} \text{ rad/s}$$

Fattore di conversione di $\omega_1 \Rightarrow \omega_2 \Rightarrow C = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{3600}}}{\frac{\cancel{2\pi}}{12 \cdot \cancel{3600}}} = 12$

$$\Rightarrow \omega_1 = C\omega_2 \underset{C=12}{\Rightarrow} \omega_1 = 12\, \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1}{12}$$

$$\omega_1 t^* - \omega_2 t^* = \pi \underset{\omega_2 = \frac{\omega_1}{12}}{=} \omega_1 t^* - \frac{\omega_1}{12} \cdot t^* = \pi \Rightarrow t^*\left(\omega_1 - \frac{1}{12}\omega_1\right) = \pi$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{\pi}{\omega_1\left(1 - \frac{1}{12}\right)} \underset{\omega_1 = \frac{2\pi}{60}}{=} \frac{\cancel{\pi}}{1 - \frac{1}{12}} \cdot \frac{3600}{2\cancel{\pi}} = \frac{1}{\left(\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{12}}\right) \cdot \frac{2}{60}} = \frac{1}{\frac{11}{\cancel{6}} \cdot \frac{1}{\cancel{60}}} = \frac{360}{11}$$

60 minuti

minuti

$\sim 32{,}7$ min

Ans: 15:00 + 32,7 min = 15:32:42 (h m s)

$\Rightarrow$ 32.7 (min, secondi) $\quad$ 1 min = 60s $\Rightarrow$ .7 min = 70% 60s = 42