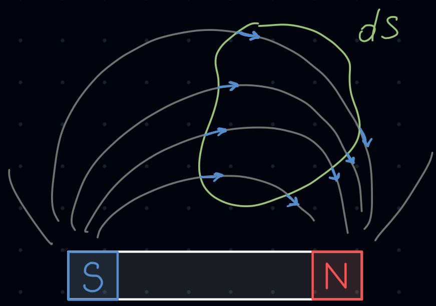
2° Equazione: (4ª) vedi 6.01

Abbiamo definito $N = \phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS$ ma approfondiamo



In qualsiasi regione di spazio entrano ed escono lo stesso numero di linee di forza!

$$\Rightarrow \phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = \emptyset$$

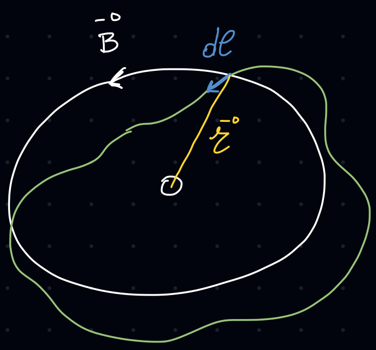
Forma differenziale $\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \vec{A}) \cdot dV$

$$\Rightarrow \Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = \int_V \vec{\nabla} \vec{B}\, dV = \emptyset \Rightarrow \vec{\nabla} \vec{B} = \emptyset$$

I° eq di Maxwell per il campo $\vec{B}$

1° Equazione (3ª) Dalla legge di Ampere

→ Filo percorso da I → $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\tau}$ → $\phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = B \cdot r \oint \frac{1}{r} \cdot \hat{\tau}\, d\vec{e}$



$\hat{\tau} \cdot d\vec{e}$ = Arco di circonferenza → $1\,Rad = \frac{e}{R} \Rightarrow e = \hat{\tau} d\vec{e} = r\, d\varphi$

Legge di Ampere

$$\Rightarrow \phi = B \cdot r \cdot \oint \frac{1}{r} \cdot r\, d\varphi \rightarrow \phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \oint d\varphi = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\, d\vec{e} = \mu_0 I$$

→ Dal Teorema del Rotore → $\oint \vec{B}\, d\vec{e} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})\, \hat{n}\, dS = \mu_0 I$

ma $I = \int \vec{J} \cdot \hat{n}\, dS \Rightarrow \cancel{\int_S} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot \cancel{\hat{n}\, dS} = \mu_0 \cancel{\int_S} \vec{J} \cdot \cancel{\hat{n}\, dS} \rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

I° Eq di Maxwell $\vec{B}$

Legge di Ampére - Maxwell   1 Equazione di Maxwell (3) generalizzata

(a) Legge di Biot-Savart $\vec{B} = k \frac{I}{R} \hat{\tau}$

(b) Legge di Ampére $C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = k \oint \frac{I}{R} \hat{\tau} \, d\vec{\ell}$: $\hat{\tau} \, d\vec{\ell}$ = Arco di circonferenza

$\rightarrow$ $1 \text{ Rad} = \frac{\ell}{R} \Rightarrow \ell = \varphi \cdot R \rightarrow d\ell = R \cdot d\varphi \Rightarrow C = \oint \vec{B} \, d\vec{\ell} = k \oint \frac{I}{\cancel{R}} \cdot \cancel{R} \, d\varphi = k I \oint d\varphi$

$\rightarrow C = \frac{\mu_0}{\cancel{2\pi}} \cdot I \cdot \cancel{2\pi} \rightarrow \oint \vec{B} \, d\vec{\ell} = \mu_0 I$ Ampére

(c) Corrente stazionaria

$\phi = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS = \emptyset$

$\rightarrow \phi = \int_V \vec{\nabla} \vec{J} \cdot dV = \emptyset \rightarrow \underline{\vec{\nabla} \vec{J} = \emptyset}$

(d) Condensatore

$\phi = \int \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS \neq 0$

(e) Conservazione della Carica

$-dQ = \int \vec{J} \, \hat{n} \, dS \cdot dt \rightarrow -\frac{dq}{dt} = \int \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS$ ma $\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho \, dV \rightarrow Q = \int \rho \, dV$

$\Rightarrow -\frac{d}{dt} \int_V \rho(x,y,z,t) \, dV = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS$ Teorema Divergenza

$\rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \vec{J}) \cdot dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV \rightarrow \vec{\nabla} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ OBBIETTIVO

(f) dalla legge di Ampere

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \rightarrow \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot \hat{n} \, dS = \mu_0 I$ ma $I = \int \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS$

$\Rightarrow \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot \hat{n} \, dS = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS \rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

(g) Test · DIVERGENZA

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \vec{\nabla}\mu_0\vec{J} \to \mu_0\vec{\nabla}\vec{J} = \emptyset \to \vec{\nabla}\vec{J} = \emptyset$$ Corrente Stazionaria → NON VA BENE!

(h) Il termine di Maxwell

Termine: $\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ → $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J}$

Equazione di Ampère Maxwell

Forma Differenziale

proof:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \vec{\nabla}\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}\mu_0\vec{J} \to \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(\vec{\nabla}\vec{E})}{\partial t} + \mu_0\vec{\nabla}\vec{J} = 0$$

Da Gauss $\phi_E = \int\vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \to \rho = \frac{dQ}{dV} \to dQ = \rho\,dV \to Q = \int_V \rho\,dV$

$$\Rightarrow \phi_E = \int\vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV \to \int_V(\vec{\nabla}\vec{E})\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\,dV \to \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Maxwell

$$\Rightarrow \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(\vec{\nabla}\vec{E})}{\partial t} + \mu_0\vec{\nabla}\vec{J} = 0 \to \mu_0\varepsilon_0\cdot\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mu_0\cdot\vec{\nabla}\vec{J} = 0$$

$$\to \vec{\nabla}\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$ QED come nella conservazione della carica

Scrivere la legge di Ampère-Maxwell in forma Integrale

DIFF: $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J}$

$$\to \oint_\ell B\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\varepsilon_0\int_S \overbrace{\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,dS}^{\phi_E}\ \mu_0\overbrace{\int\vec{J}\ \hat{n}\,dS}^{I}$$

$$\to \oint_\ell \vec{B}\cdot d\ell = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 I \quad (1)$$

(2) Analogia con Faraday

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \int_S\vec{B}\cdot\hat{n}\,ds = \underbrace{\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,ds}_{\text{Varia } \vec{B}} - \underbrace{\oint_\ell(\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot d\vec{\ell}}_{\text{Varia la superficie}}$$ → Vedi 4.09

$$\Rightarrow \frac{d\phi_E}{dt} = \int_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\hat{n}\,ds - \oint_\ell(\vec{v}\wedge\vec{E})\cdot d\vec{\ell}$$ → Sostituiamolo nella (1)

$$\rightarrow \oint_\ell \vec{B}\, d\vec{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \Big[\underbrace{\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \hat{n}\, dS}_{1} - \underbrace{\oint_\ell (\vec{v} \wedge \vec{E})\, d\vec{\ell}}_{2} \Big] + \mu_0 I$$

Non completamente esatta

→ Nel caso generale $\frac{d\phi_E}{dt}$ sono 2 pezzi, quindi devono essere 2 anche dall'altro lato:

$$\rightarrow \boxed{\oint_\ell \vec{B}\, d\vec{\ell} - \frac{1}{c^2} \oint (\vec{v} \wedge \vec{E})\, d\vec{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \Big[\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \hat{n}\, dS - \oint_\ell (\vec{v} \wedge \vec{E})\, d\vec{\ell} \Big] + \mu_0 I}$$

Equazione di Ampere-Maxwell in forma integrale

Abbreviando $\int_B = \frac{L}{q_B}$

$$\rightarrow \boxed{\int_B = \oint \vec{B}\, d\vec{\ell} - \frac{1}{c^2} \oint (\vec{v} \wedge \vec{E})\, d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}}$$