I° Equazione : Teorema di Gauss : $\to$ FLUSSO

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$ $\to$ Teorema Divergenza $\phi = \oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \int_V \vec{\nabla} \vec{E} \cdot dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\to \rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho\, dV \Rightarrow Q = \int_V \rho\, dV \to \cancel{\int_V} \vec{\nabla}\vec{E}\, \cancel{dV} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cancel{\int_V} \rho\, \cancel{dV}$$

$$\to \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

II° Equazione $\to$ CIRCUITAZIONE

$$C_E = \oint_\ell \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \emptyset$$

A = B

Teorema RoTore $\oint_\ell \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \hat{n}\, dS$

$$\to C = \oint_\ell \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})\, \hat{n}\, dS = \emptyset \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \emptyset$$

! vedi 7.02 e 6.06 per la versione per campi $\vec{B}$ variabili !

Legge di Coulomb

$$L = \int_\ell \vec{F}\, d\vec{\ell} = G_B - G_A \quad \text{se } U = -G \quad \to L = \int_\ell \vec{F}\, d\vec{\ell} = -U \Rightarrow dL = \vec{F}\, d\vec{\ell} = -dU$$

Dividi per q $\to \frac{dL}{q} = \frac{\vec{F}}{q} d\vec{\ell} = -\frac{dU}{q} \to \frac{dL}{q} = \vec{E}\, d\vec{\ell} = -d\vec{V}$

ma $d\vec{V}$ è del tipo $d\vec{V} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \\ d\vec{\ell} = dx + dy + dz \end{cases} \Rightarrow \vec{\nabla} V \cdot d\vec{\ell} = d\vec{V} \Rightarrow \vec{E}\, \cancel{d\vec{\ell}} = -\vec{\nabla} V \cdot \cancel{d\vec{\ell}}$$

$$\Rightarrow E = -\vec{\nabla} V$$

Questa equazione ci dice che il campo elettrico punta nella direzione opposta alla direzione di massima variazione del potenziale elettrico, ovvero **il campo E punta dalla regione di potenziale maggiore verso una regione di potenziale minore.**

II° Equazione di Maxwell + Legge di Coulomb

$E = -\vec{\nabla} V$ $\to$ Sostituisco nella II° Maxwell $\to$ $\vec{\nabla} \wedge (-\vec{\nabla} V) = 0$ SODDISFATTA

Perchè il rotore di una divergenza è sempre zero

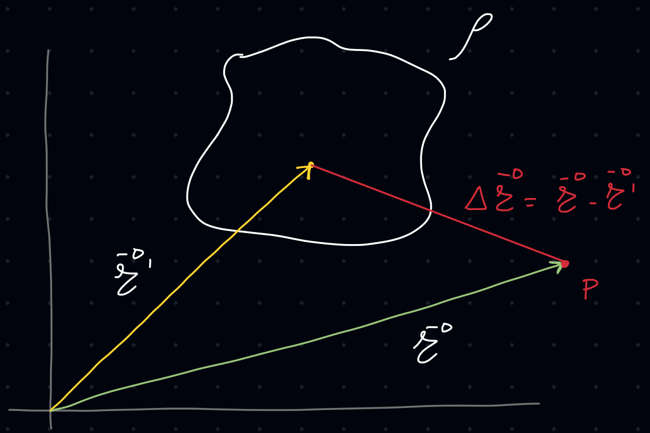
Legge di Coulomb + I° eq di Maxwell = Equazione di Poisson

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (\text{SUB}) \quad \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{\nabla}(-\vec{\nabla}V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Soluzione all'Eq di Poisson

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV$$

Primitiva



II° Equazione di Maxwell generalizzata per campi Magnetici VARIABILI

Legge di Faraday : $f_{em} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$

1) FLUSSO TAGLIATO $\quad \vec{B} = \text{cost} \;, \quad S \neq \text{cost}$

$$F_{ind} = q(\vec{v}\wedge\vec{B}) \;, \quad f_{em} = \frac{L}{q} = \frac{q\oint(\vec{v}\wedge\vec{B})dl}{q} = vBl$$

$$\Longrightarrow -\frac{d\phi}{dt} = \oint(v\wedge B)\,dl$$ (ottenuto dal calcolo tramite rapporto incrementale di $-\dfrac{d\phi}{dt}$)

2) FLUSSO CONCATENATO $\quad B \neq \text{cost} \;, \quad S = \text{cost}$

$$\vec{B}(t,\vec{r}) \simeq B(t+\Delta t,\vec{r}) + \left.\frac{\partial B(t+\Delta t,\vec{r})}{\partial t}\right|_{\Delta t=0} \Delta t$$

$$\Longrightarrow \frac{d\phi_B}{dt} \simeq \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\cancel{\oint B(t+\Delta t,\vec{r})\,\hat{n}\,dS} + \int \frac{\partial B}{\partial t}(t+\cancel{\Delta t},\vec{r})\,\cancel{\Delta t}\,\hat{n}\,dS - \cancel{\oint B(t+\Delta t,\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS}}{\cancel{\Delta t}}$$

$$\Longrightarrow -\frac{d\phi_B}{dt} = -\oint \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}(t,\vec{r})\,\hat{n}\,dS$$

Caso 1 + 2 $\rightarrow$ $$-\frac{d\phi_B}{dt} = \oint (\vec{v} \wedge \vec{B})\, d\vec{\ell} - \oint_S \frac{\partial B}{\partial t}\, \hat{n}\, ds$$

Ma $$f_{em} = \frac{L}{q} = \frac{\cancel{q}\int \vec{E}\, d\vec{\ell} + \cancel{q}\int (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \hat{n}\, ds}{\cancel{q}} = \int_\ell \vec{E}\, d\vec{\ell} + \int_S (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \hat{n}\, ds$$

$$\Rightarrow f_{em} = -\frac{d\phi_B}{dt} \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \cancel{\oint_S (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \hat{n}\, ds} = \cancel{\oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \hat{n}\, ds} - \oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n}\, ds$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\, d\vec{\ell} = -\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, \hat{n}\, ds \xrightarrow{\text{Rotore}} \cancel{\int_S} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \cancel{\hat{n}\, ds} = -\cancel{\int} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, \cancel{\hat{n}\, ds}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

II° Eq di Maxwell

Differenziale

$$f_{em} = -\frac{d\phi_B}{dt} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \oint_\ell (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

II° Eq di Maxwell Integrale