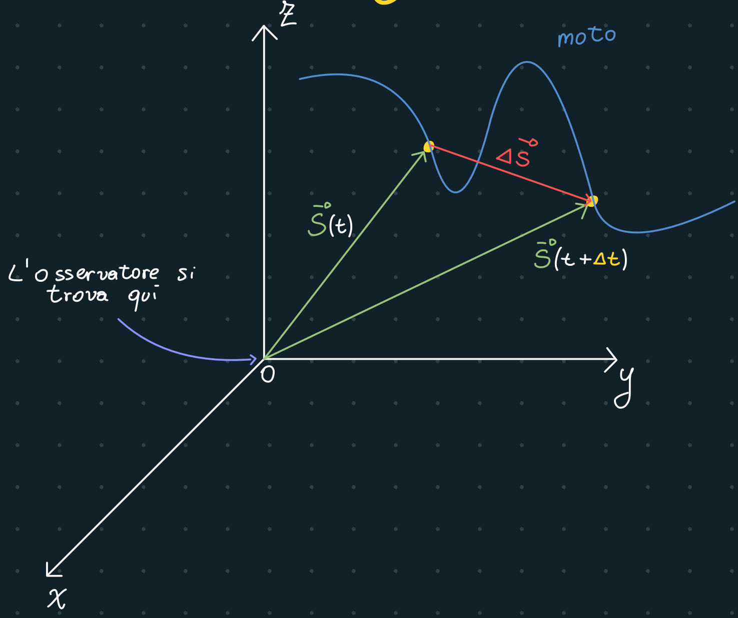
Cinematica

L'intera cinematica si basa su 3 vettori molto importanti

- Vettore Posizione $\vec{S}$
- Vettore Velocità $\vec{v}$
- Vettore Accelerazione $\vec{a}$

Vettore Posizione $\vec{}$



$\vec{\Delta S}$ é il vettore che collega $\vec{S}(t)$ e $\vec{S}(t+\Delta t)$

$\Rightarrow \vec{S}(t) = \vec{\Delta S} + \vec{S}(t+\Delta t)$

Isoliamo $\vec{\Delta S}$

$\Rightarrow \vec{\Delta S} = \vec{S}(t-\Delta t) - \vec{S}(t)$

Vettore Spostamento

Vettore $\vec{}$ Velocita'

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta S}}{\Delta \vec{t}}$$

Definizione Intuitiva di velocità

$\Rightarrow$ Esplicitiamo la formula: $\vec{V}_m = \dfrac{\vec{S}(t\cdot\Delta t) - \vec{S}(t)}{\Delta t}$

Tempo impiegato

! Questa definizione non funziona sempre ... Ci restituisce la velocità media!

$\vec{}$ Velocità ISTANTANEA

Riduciamo l'intervallo di tempo il più possibile :

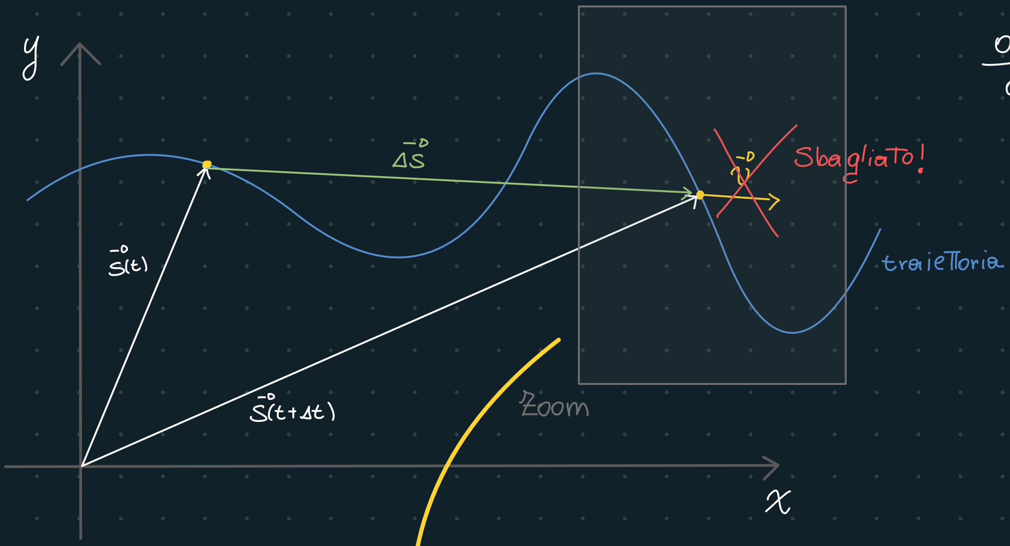
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta S}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \emptyset} \frac{\vec{S}(t\cdot\Delta t) - \vec{S}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

Definizione di DERIVATA

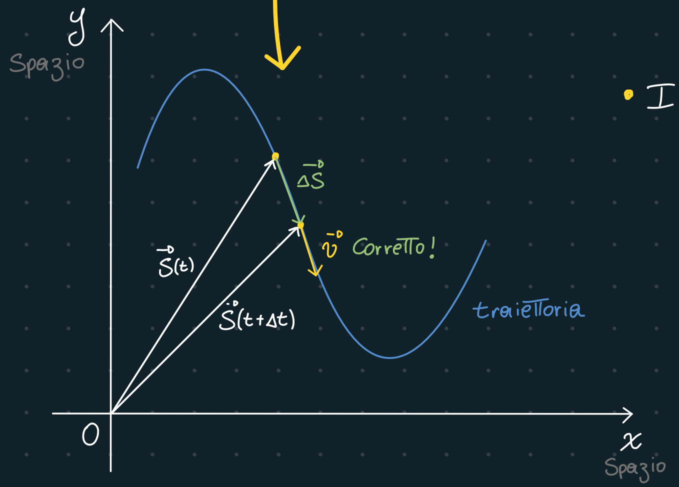
Notazione breve

* La derivata è stata "inventata" da Newton e Leibniz.
Fine 1600

Velocita' = Derivata dello Spazio rispetto al tempo



$\frac{d\vec{S}}{dt}$ consiste nel far tendere la "distanza" tra le due misurazioni a zero.



- Il vettore velocità è sempre TANGENTE alla Traiettoria del punto

Se rappresentiamo il moto in funzione del tempo (e non dello spazio) il vettore spostamento sarà in funzione del tempo anch'esso:

$$\vec{S}(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

Tempo

Equazione Oraria del Moto
→ In funzione del tempo

La Traiettoria è CONCRETA, possiamo "vederla" (lancio del gessetto) mentre l'Eq Oraria è ASTRATTA

→ Importante La velocità è tangente alla TRAIETTORIA, non all'eq oraria!

Vettore $\vec{a}$ccelerazione

$$\vec{A}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Accelerazione Media

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{S}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2}$$

Accelerazione istantanea

Derivata Seconda

Moto rettilineo uniforme

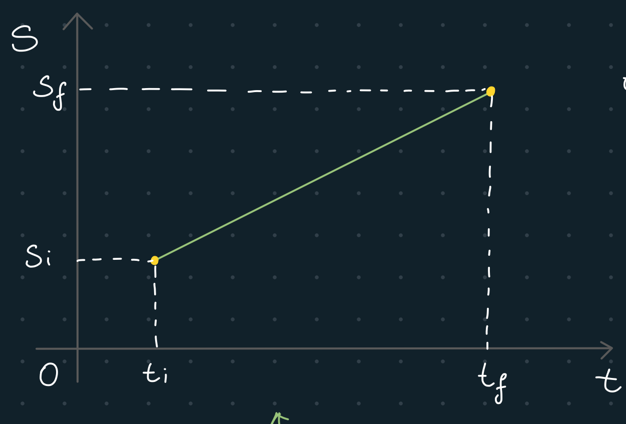
Se direzione e modulo del vettore velocità non cambia nel tempo, esso non può che essere di un moto Rettilineo UNIFORME.

In questo caso $\vec{V} = \vec{v}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d\vec{S}}{dt} = \dfrac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{S}_f - \vec{S}_i}{t_f - t_i} = \vec{v}$ Velocità

Isoliamo $\vec{S}_f = \vec{S}_i + \vec{V}(t_f - t_i)$

$\rightarrow$ Nel caso di un tempo qualsiasi $\vec{S}(t) = \vec{S}_i + \vec{V}(t_f - t_i)$ Posizione

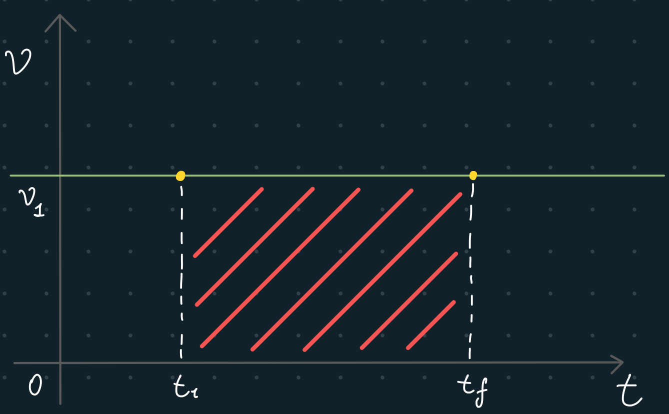
$\uparrow$ Istante qualsiasi



$\nwarrow$ Eq ORARIA $\Rightarrow$ ASTRATTO

eq Retta generica : $y = mx + q$

$\rightarrow$ eq moto uniforme $S(t) = \underbrace{\vec{S}_i}_{q} + \vec{V}(t_f - t_i)$ mx



Eq ORARIA $\Rightarrow$ ASTRATTO

Proviamo a calcolare l'area sottesa al grafico della velocità

$$A = B \cdot h = (t_f - t_i) \cdot v_1 = \vec{S}$$

Sappiamo che $\vec{v} = \dfrac{d\vec{s}}{dt} \Rightarrow \vec{v}\,dt = d\vec{s}$

Integrale

quindi : $\displaystyle\int_{S_i}^{S_f} ds = \int_{t_i}^{t_f} v\,dt$ Spazio

SPAZIO

$\Rightarrow$ Infatti

$$\vec{V} = \frac{d\vec{s}}{dt} \Rightarrow \vec{V}\,dt = d\vec{s} \Rightarrow \int_{S_i}^{S_f} ds = \int_{t_i}^{t_f} v\,dt = \vec{S}_f - \vec{S}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{V}\,dt$$

$\uparrow$ costante

$\Rightarrow$ $\vec{S}_f - \vec{S}_i = \vec{V}(t_f - t_i)$ Stessa formula!

Moto rettilineo uniformemente accelerato
(Semplice)

In questo moto l'accelerazione è costante → $\vec{a} = cost$

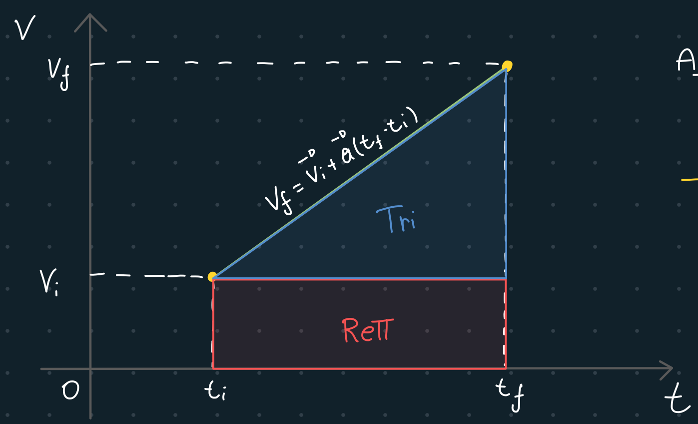
$$\vec{A} = \vec{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\vec{V_f} - \vec{V_i}}{t_f - t_i} \overset{F.I.}{\Rightarrow} \vec{V_f} - \vec{V_i} = \vec{a}(t_f - t_i) \quad ① \rightarrow \vec{V_f} = \vec{V_i} + \vec{a}(t_f - t_i)$$

Retta

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = \vec{V_i} + \vec{a}(t_f - t_i)$$

Legge oraria $\Rightarrow$ $V(t) = \vec{V_0} + \vec{a} \cdot t$

E lo spazio? → Lo troviamo con l'integrale



Triangolo ① Rettangolo

$$A_{TOT} = A_{\square} + A_{\triangle} = \left[(t_f - t_i)(V_f - V_i) \cdot \tfrac{1}{2}\right] + \left[(t_f - t_i) \cdot V_i\right]$$

$$\rightarrow \vec{S_f} - \vec{S_i} = \frac{1}{2}\vec{a}(t_f - t_i)^2 + (t_f - t_i)\vec{V_i}$$

In un tempo qualsiasi:

$$S(t) = S_i + (t_f - t_i)\vec{V_i} + \frac{1}{2}\vec{a}(t_f - t_i)^2$$

Eq oraria

Metodo via integrali

Nel moto rettilineo uniformemente acc

$$v = \vec{V_i} + \vec{a}(t_f - t_i)$$

Sappiamo che $\vec{V} = \frac{d\vec{S}}{dt} \Rightarrow \vec{v}\,dt = ds \Rightarrow \int_{S_i}^{S_f} ds = \int_{t_i}^{t_f} v\,dt$

$$\Rightarrow S_f - S_i = V_i \int_{t_i}^{t_f} dt + a \int_{t_i}^{t_f} t_f\,dt - a \int_{t_i}^{t_f} t_i\,dt = V_i(t_f - t_i) + \frac{1}{2}a(t_f - t_i)^2$$

cost

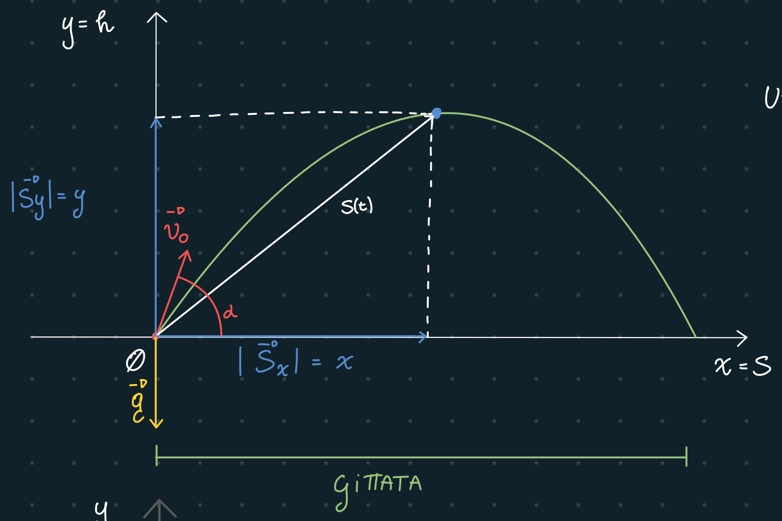
Stessa formula!

Moto del Proiettile

$$\begin{cases} \vec{S}(t) = \vec{S}_i + \vec{V}_i (t_f - t_i) + \frac{1}{2}\vec{a}(t_f - t_i)^2 \\ \vec{V}(t) = V_i + \vec{a}\cdot(t_f - t_i) \end{cases}$$

Assumiamo che non ci siano attriti e che l'unica forza agente sul proiettile è $\vec{g}$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$ inoltre $|\vec{g}| = 9.81 \, m/s^2$

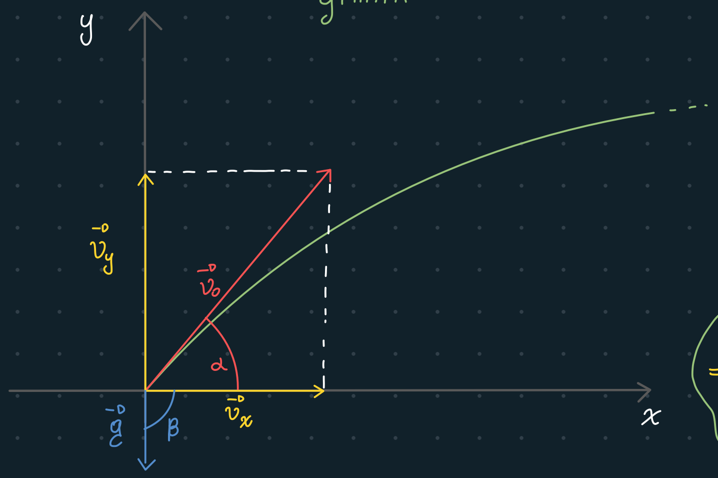


Un vettore n componenti "ci dà" n equazioni

$$\vec{S}(t) = (S_x, S_y) = \begin{cases} S_x(t) = x(t) \\ S_y(t) = y(t) \end{cases}$$

Le componenti COINCIDONO con le coordinate

Dalle regole della Trigonometria sappiamo...



$$\begin{cases} \vec{V}_x = x(t) = \vec{v}_0 t \cdot \cos(\alpha) + \cancel{\frac{1}{2}\vec{a}\cos(\beta)}^{\,\emptyset} \\ \vec{V}_y = y(t) = \vec{v}_0 t \; \sin(\alpha) - \frac{1}{2}\vec{a}\,\underbrace{\cos(90)}_{1}\, t^2 \end{cases}$$

$\vec{g}$ verso opposto ad y

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_x = x(t) = \vec{v}_0 \cos(\alpha) t \\ \vec{V}_y = y(t) = \vec{v}_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2 \end{cases}$$

Equazioni orarie del moto del proiettile

Se volessimo confrontare le eq al moto reale dovremmo avere y in funzione di x

$$\Rightarrow x(t) = \vec{v}_0 t \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow t = \frac{x}{\vec{v}_0 \cos(\alpha)}$$

quindi

$$y = \vec{v}_0 \sin(\alpha) t + \frac{1}{2}\vec{g} t^2 = \cancel{\vec{v}_0} \frac{x}{\cancel{\vec{v}_0} \cos\alpha} \sin(\alpha) + \frac{1}{2}\vec{g}\left[\frac{x}{\vec{v}_0 \cos(\alpha)}\right]^2$$

$t = \frac{x(t)}{v \cos(\alpha)}$

$\tan\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{y = x \tan\alpha - \frac{1}{2}\vec{g}\,\frac{x^2}{\vec{v}_0^{\,2}\cos^2(\alpha)}}$$

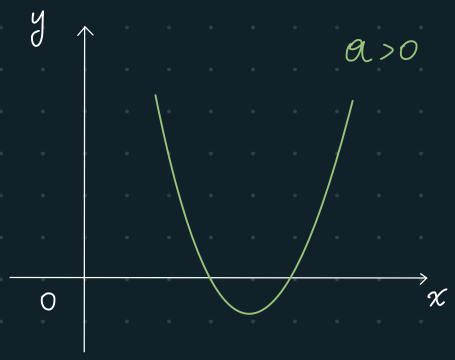
Equazione della TRAIETTORIA

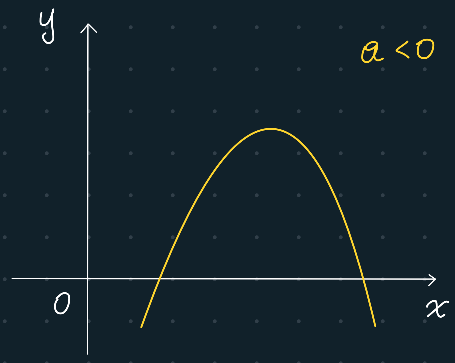
L'Equazione di una PARABOLA e' $y = ax^2 + bx + c$

$$y = \underbrace{\left[-\frac{\frac{1}{2}g}{\vec{v}_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right]}_{a}x^2 + \underbrace{\tan(\alpha)}_{b}\,x + \underbrace{0}_{c}$$

$\Rightarrow$ Il nostro modello funziona

Inoltre, nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$





Trovare la gittata

Se conosciamo l'eq del moto ci basta imporlo uguale a zero per trovare le intersezioni

Sol 1: $x_1 = 0 \leftarrow$ gia' lo sapevamo

Sol 2: $-\left[\frac{\frac{1}{2}g}{v_0^2\cos^2\alpha}\right]x^2 + x\tan\alpha = 0 \to x\left\{\left(-\frac{\frac{1}{2}g}{\vec{v}_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right)x + \tan\alpha\right\} = 0$

$\to x_1 = 0$ Sol 1

$$\to \frac{\frac{1}{2}\vec{g}}{\vec{v}_0^{\,2}\cos^2\alpha}\,x = \tan\alpha \Rightarrow x_2 = \frac{\vec{v}_0^{\,2}\cos^2(\alpha)\tan(\alpha)}{\frac{1}{2}\vec{g}}$$ — Sol 2

Possiamo pulire ulteriormente $x_2 = \frac{2\vec{v}_0^{\,2}\cdot\cos\alpha\sin\alpha}{\vec{g}} = \frac{\vec{v}_0^{\,2}\sin(2\alpha)}{\vec{g}}$

Il valore max del sin si ha a 45°
$\to \sin(45) =$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$

La gittata cresce all'aumentare della velocita'

Ricavare

l'equazione della velocità /Tempo indipendente da t
per il moto rettilineo

$$\begin{cases} S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot a t^2 & b \\ v(t) = v_0 + a \cdot t & a \end{cases}$$

Vogliamo una relazione che leghi lo spazio alla velocità senza il tempo

1) $a: \quad v_f = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{v_f - v_0}{a}$

2) $S_f = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = S_0 + v_0 \dfrac{(v_f - v_0)}{a} + \frac{1}{2}\left(\dfrac{v_f - v_i}{a}\right)^2$

$$\Rightarrow S_f - S_0 = \frac{v_0 v_f}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{a}{2a^2}(v_f^2 + v_i^2 - 2 v_f v_i) = \frac{\cancel{v_0 v_f} - \cancel{v_i^2} + \frac{1}{2} v_f^2 \cancel{+} \frac{1}{2} v_i^2 - \cancel{v_f v_i}}{a}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} v_f^2 - \frac{1}{2} v_i^2}{a} = \frac{\frac{v_f^2 - v_i^2}{2}}{a} \Rightarrow \frac{v_f^2 - v_i^2}{2} = (S_f - S_i) \cdot a$$

$$\Rightarrow v_f^2 - v_i^2 = 2a\,(S_f - S_i)$$ Formula Da Dimostrare

- $v_f^2 = \vec{v}_f \cdot \vec{v}_f$ Scalare

Prod scalare

→ Se il primo membro è un vettore/Scalare anche il secondo deve esserlo

$$\Rightarrow v_f^2 - v_i^2 = 2\vec{a}\,(\vec{S}_f - \vec{S}_i)$$ Eq in forma Vettoriale

scalari

Notiamo una Cosa...

Equazione indipendente : $\vec{S}(t) = \vec{S}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$ ①

→ Derivata della ① : $\dfrac{d}{dt} \vec{S}(t) = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \vec{a} t$ ② $= \vec{v}(t)$

→ Combinazione di ① e ② : $v_f^2 - v_i^2 = 2\vec{a}\,(\vec{S}_f - \vec{S}_i)$

Attenzione!

$v_f^2 - v_i^2 = 2\vec{a}(\vec{S}_f - \vec{S}_i)$ è un'equazione SCALARE → Tra numeri

⇒ Non possiamo proiettarla sugli Assi

Ricavare le formule Del moto rettilineo

Con gli integrali

Partiamo dall'accelerazione: è la derivata della velocità rispetto al tempo:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\cdot\vec{v} \Rightarrow \int \vec{a}\,dt = \int \frac{d}{\cancel{dt}}\vec{v}\,\cancel{dt} \rightarrow \int_{v_0}^{v_f} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{a}\,dt$$

Nel moto uniformemente accelerato $a = cost$

tempo fissato

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_f} d\vec{v} = \vec{a}\int_{t_0}^{t_f} dt \rightarrow v\Big|_{v_0}^{v_f} = \vec{a}\cdot t\Big|_{t_0}^{t_f} = (v_f - v_i) = \vec{a}\cdot(t_f - t_i)$$

Se poniamo $t_f =$ tempo qualsiasi: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot(t_f - t_i)$ tempo qualsiasi

Troviamo lo spazio partendo dalla definizione di velocità: $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{S}$

$$\rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{S} = dt\,\vec{v} = d\vec{S} \rightarrow \int_{t_0}^{t_f} \vec{v}\,dt = \int_{S_0}^{S_f} d\vec{S}$$

$\Rightarrow$ Sappiamo che $\vec{v}$ dipende dal tempo $\rightarrow \vec{v}(t) = \underset{\text{cost}}{\vec{v}_0} + \vec{a}(t - t_i)$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} \underset{\text{cost}}{v_0}\,dt + \int_{t_0}^{t_f} \vec{a}(t - t_i)\,dt = \int_{S_0}^{S_f} dS$$

$$\rightarrow v_0\int_{t_0}^{t_f} dt + \vec{a}\int_{t_0}^{t_f} t - t_i\,dt = \int_{S_0}^{S_f} dS \Rightarrow S_f - S_0 = v_0(t_f - t_0) + \vec{a}\,\frac{t^2}{2}\Big|_{t_0}^{t_f} - \vec{a}t_0\cdot t\Big|_{t_0}^{t_f}$$

$$\rightarrow S_f - S_0 = v_0(t_f - t_0) + \vec{a}\left(\frac{t_f^2 - t_0^2}{2}\right) - \vec{a}t_0(t_f - t_0)$$

$$= \vec{v}_0(t_f - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}t_f^2 - \cancel{\frac{1}{2}\vec{a}t_0^2} - \vec{a}t_0t_f + \cancel{\vec{a}t_0^2}$$

$$+\frac{1}{2}\vec{a}t_0^2$$

$$= \vec{v}_0(t_f - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\underbrace{(t_f^2 + t_0^2 - 2t_0t_f)}_{(t_f - t_0)^2}$$

$$= \vec{v}_0(t_f - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t_f - t_0)^2$$ SPAZIO

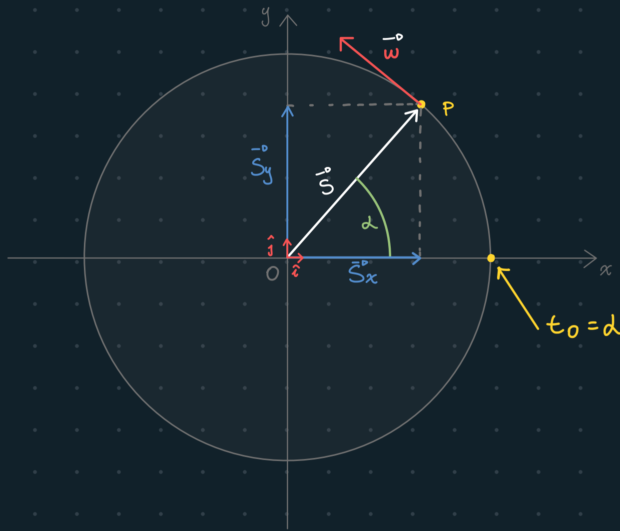
Velocita' Angolare

Per il moto Circolare

E' definita come la derivata dell'angolo rispetto al tempo:

$$\omega = \frac{d}{dt}\alpha$$

E' espressa in rad/s e ci dice la velocita' con cui l'angolo di rotazione dell'oggetto cambia nel tempo



$t_0 = \alpha_0 = \varnothing$

$$\vec{\omega} = \begin{cases} \text{modulo} & \frac{d}{dt}\alpha \\ \text{direzione} & \text{Asse di rotazione} \\ \text{Verso} & \end{cases}$$

Verso $\rightarrow$ $\begin{cases} \text{Antiorario} \rightarrow \text{Uscente} \\ \text{Orario} \rightarrow \text{Entrante} \end{cases}$

Ricaviamo α

$$\rightarrow \quad \omega = \frac{d}{dt}\alpha \quad \rightarrow \quad \omega\, dt = d\alpha \quad \Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} \underset{\text{cost}}{\omega}\, dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha_f} d\alpha \quad \rightarrow \quad \omega \int_{t_0}^{t_f} dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha_f} d\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega(t_f - t_0) = \alpha_f - \alpha_0}$$ Relazione che lega l'angolo al tempo

$t_0 = \alpha_0 = 0$ $\rightarrow$ $\omega \cdot t_f = \alpha_f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha(t) = \omega t}$

Ci dice l'angolo per ogni istante di tempo

Troviamo la posizione della particella

$$\vec{S} = \begin{cases} \vec{S}_x = |\vec{S}| \cdot \cos(\alpha)\,\hat{i} \\ \vec{S}_y = |\vec{S}|\, \sin(\alpha)\,\hat{j} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Sappiamo che $|\vec{S}| = R$ ← Raggio

$$\Rightarrow \vec{S} = \underbrace{R\cos(\alpha)\,\hat{i}}_{\vec{S}_x} + \underbrace{R\sin(\alpha)\,\hat{j}}_{\vec{S}_y} \underset{\alpha = \omega t}{=} \boxed{R\cos(\omega t)\,\hat{i} + R\sin(\omega t)\,\hat{j}}$$

$\vec{S}$ Vettore posizione $\rightarrow$ Non spostamento!

Proof $|\vec{S}| = R \Rightarrow |\vec{S}| = \sqrt{R^2\cos^2(\omega t)\,\hat{i} + R^2\sin^2(\omega t)\,\hat{j}} = \sqrt{R^2\underbrace{[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)]}_{1}} = \sqrt{R^2} = R$

Troviamo la velocita' della particella

definizione : $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{s}$ siccome $\vec{s} = R\cos(wt)\hat{i} + R\sin(wt)\hat{j}$

Variabili

costanti

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{s} = -wR\sin(wt)\hat{i} + wR\cos(wt)\hat{j} = wR\cos(wt)\hat{j} - wR\sin(wt)\hat{i}$

$\vec{v}$ vettore velocita'

Troviamo l'accelerazione

definizione $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = wR\cos(wt)\hat{j} - wR\sin(wt)\hat{i}$

$\Rightarrow \vec{a} = -w^2R\sin(wt)\hat{j} - w^2R\cos(wt)\hat{i}$

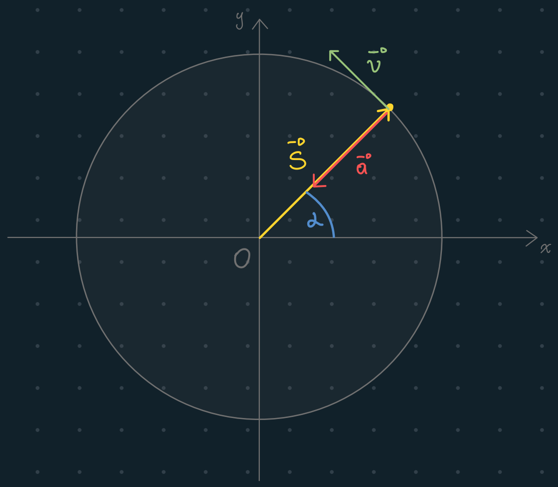
vettore accelerazione

E' proprio $\vec{s}$

Mettiamo in evidenza $\rightarrow \vec{a} = -w^2\left[\overbrace{R\cos(wt)i + R\sin(wt)\hat{j}}\right]$

$\Rightarrow \vec{a} = \ominus w^2 \cdot \vec{s}$

Segno opposto
Al vettore $\vec{s}$



$|\vec{a}| = \sqrt{w^4\left[R^2\cos^2(wt)\hat{i} + R^2\sin(wt)\hat{j}\right]}$

$= \sqrt{w^4R^2\underbrace{(\cos(wt)\hat{i} + \sin(wt)\hat{j})}_{1}}$

$= w^2R \quad |\vec{a}|$

Allo stesso modo $|\vec{v}| = \sqrt{w^2R^2} = wR \quad |\vec{v}| \Rightarrow w = \frac{\vec{v}}{R}$

$\Rightarrow |\vec{a}| = \frac{\vec{v}^2}{R^2}\cdot R = \frac{v^2}{R}$ $\vec{a}$ Altro modo di esprimere l'accelerazione centripeta

$w = \frac{\vec{v}}{R}$

Dimostrare che il vettore velocità è tangente al vettore spostamento

$$\begin{cases} \vec{S} = R\cos(\omega t)\hat{i} + R\sin(\omega t)\hat{j} \\ \vec{v} = \dfrac{d}{dt}\vec{S} = -\omega R\sin(\omega t)\hat{i} + \omega R\cos(\omega t)\hat{j} \end{cases} \Bigg\} \text{ devono essere perpendicolari}$$

→ Se facendo $\vec{v} \cdot \vec{S} = 0 \Rightarrow$ sono perpendicolari

→ Infatti $\vec{v} \cdot \vec{S} = |\vec{v}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos(\theta)$

Se $\theta = 90 \Rightarrow \cos(90) = \emptyset$

! Ma noi non conosciamo l'angolo (dobbiamo dimostrare proprio quello)!

⇒ Moltiplichiamo le componenti:

$$\vec{v} \cdot \vec{S} = R\cos(\omega t)\hat{i} \cdot (-\omega R\sin(\omega t)\hat{i}) + R\sin(\omega t)\hat{j} \cdot \omega R\cos(\omega t)\hat{j}$$

$$= -\omega R^2 \cancel{\cos(\omega t)\sin(\omega t)}\hat{i} + \omega R^2 \cancel{\cos(\omega t)\sin(\omega t)}\hat{j} = \emptyset$$

PERPENDICOLARI

ω è periodico

Battezziamo T il PERIODO il tempo che il corpo impiega a tornare alla posizione iniziale.

La FREQUENZA ν è il numero di rivoluzioni effettuate in un Δt

$$\Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{T}$$

ν: Secondi^{-1} → Hz Hertz

T: Secondi

Frequenza Angolare

È definita come $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la freq. Angolare e la velocità Angolare COINCIDONO nel moto circolare

→ Siccome $\omega = \dfrac{d\alpha}{dt}$ se $dt = T \Rightarrow$ Il punto ha fatto un giro intero

↑ perché usiamo la derivata

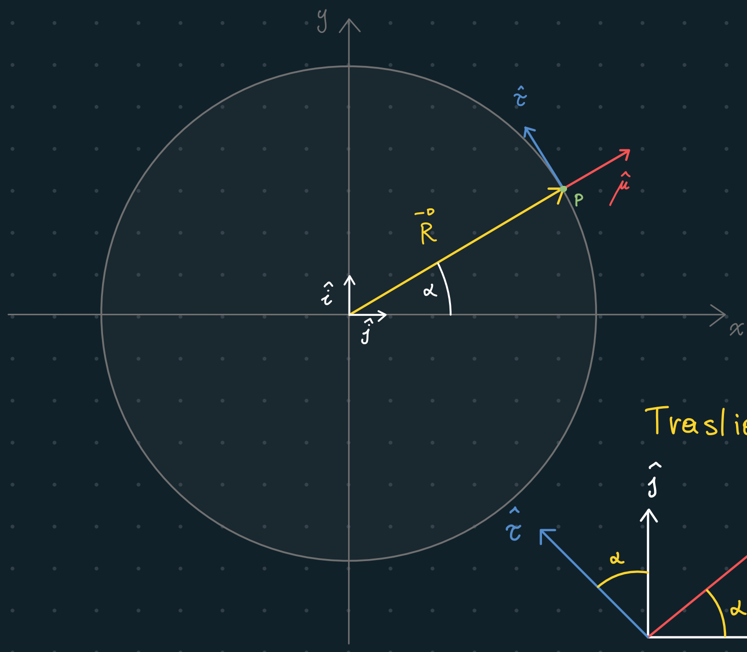
Angolo giro IN RADIANTI è 2π

$$\omega = \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\text{Frequenza Angolare}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\alpha}_{\text{Velocità Angolare}}$$

VALE SOLO PER IL MOTO CIRCOLARE!

Fine lezione 6

Moto circolare con riferimento in movimento

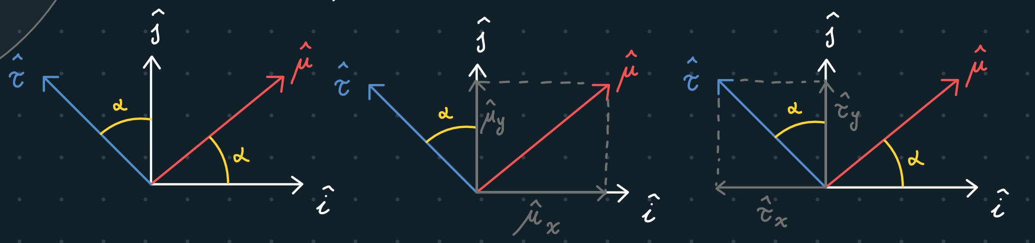


Introduciamo i nuovi versori $\hat{\mu}$ e $\hat{\tau}$

- $\hat{\mu}$ Versore RADIALE
- $\hat{\tau}$ Versore TANGENZIALE

Le direzione di μ e $\hat{\tau}$ cambiano a seconda della posizione della particella.

Trasliamo $\hat{\mu}$ e $\hat{\tau}$ nell'origine ottenendo:



Esprimiamo $\hat{\mu}$ e $\hat{\tau}$ in funzione ai versori $\hat{i}$ e $\hat{j}$

$$\hat{\mu} = \overset{1}{\hat{\mu}} \cdot \cos(\alpha)\hat{i} + \overset{1}{\hat{\mu}} \sin(\alpha)\hat{j}$$

$$\hat{\tau} = -\sin(\alpha)\hat{i} + \cos(\alpha)\hat{j}$$

Sappiamo che $\omega = \frac{d}{dt}\alpha$ quindi:

$$\frac{d}{dt}\hat{\mu} = -\frac{d\alpha}{dt}\sin(\alpha)\hat{i} + \frac{d\alpha}{dt}\cos(\alpha)\hat{j}$$

Derivate dell'argomento $\longrightarrow$ $\frac{d\alpha}{dt} = \omega \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\hat{\tau} = -\frac{d\alpha}{dt}\cos(\alpha)\hat{i} - \frac{d\alpha}{dt}\sin(\alpha)\hat{j}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\mu} = -\omega\sin\alpha\hat{i} + \omega\cos\alpha\hat{j}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\tau} = -\omega\cos\alpha\, i - \omega\sin\alpha\hat{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{\mu} = \omega\overbrace{[-\sin\alpha\hat{i} + \cos\alpha\hat{j}]}^{\hat{\tau}} = \omega\hat{\tau}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\tau} = -\omega\overbrace{[\cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}]}^{\hat{\mu}} = -\omega\hat{\mu} \qquad (2)$$

Applichiamo la nostra scoperta al moto circolare per Trovare la velocita'

Sappiamo che $\vec{R} = |\vec{R}| \cdot \hat{\mu} = R \cdot \hat{\mu}$ $\Rightarrow$ $\frac{dR}{dt}$ = Derivata dello spazio = $\vec{v}$

Stessa Direzione

$\rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{R} = \frac{d}{dt} R \cdot \hat{\mu} = R \frac{d}{dt}\hat{\mu} = R \, \underbrace{\omega \cdot \hat{\tau}}_{\frac{d}{dt}\hat{\mu}}$ $\quad \frac{d}{dt}\vec{R} = \vec{v}$

cost (R)

$\Rightarrow$ Il vettore velocita' ha MODULO R e Direzione e verso di τ

Esplicitando $\tau = \cos(\alpha)\hat{j} - \sin(\alpha)\hat{i}$ e Moltiplicando otteniamo:

$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{R} = \underbrace{R\omega\cos(\alpha)\hat{j} - R\omega\sin(\alpha)\hat{i}}_{\vec{v}}$ È proprio lo stesso risultato ottenuto con il procedimento visto nella lez prec

α = ωt , α = ωt

Applichiamo la nostra scoperta al moto circolare per Trovare l'accelerazione

Sappiamo che $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$ ma $\vec{v} = R\omega\hat{\tau}$

R: cost

$\rightarrow \vec{a} = R\frac{d}{dt}\omega\hat{\tau} = \frac{d\omega}{dt}\hat{\tau} + \omega\frac{d}{dt}\tau$ Calcolato al passo (2)

$\Rightarrow \vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{\tau} + \omega(-\omega\hat{\mu}) = R\frac{d\omega}{dt}\hat{\tau} - \omega^2\hat{\mu}$

$\frac{d}{dt}\hat{\tau} = -\omega\hat{\mu}$

Accelerazione TANGENTE alla Traiettoria $\downarrow$ Accelerazione TANGENZIALE

Accelerazione lungo $\hat{\mu}$ ma con verso opposto $\downarrow$ Accelerazione CENTRIPETA

Se $\omega = cost$ $\Rightarrow$ $\vec{a} = R\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{0}\hat{\tau} - \omega^2\hat{\mu} = -\omega^2\hat{\mu}$

Solo nel moto circolare uniforme

$\rightarrow$ L'accelerazione è solo centripeta

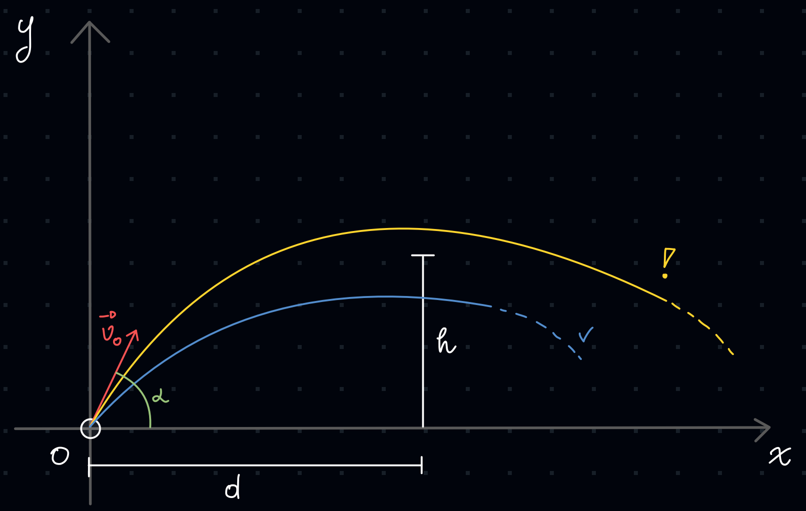
Se $\omega \neq cost$ $\Rightarrow$ L'accelerazione ha due componenti; oltre alla centripeta è presente anche quella tangenziale, posta lungo il vettore velocita', avente modulo $R\frac{d\omega}{dt}$

$\rightarrow$ Battezziamo $\frac{d\omega}{dt}$ = Accelerazione Angolare

ω: è una velocita' $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}$vel = acc

Raccolta di Esercizi

P1: Un calciatore lancia un pallone con $|\vec{V_0}| = 15\ m/s$ con $\alpha = 30°$ e $d = 10\ m$ dalla porta. La porta è alta $h = 2.5\ m$



Sappiamo che le eq del moto uniforme applicate al moto del proiettile sono:

$$\begin{cases} x(t) = \vec{V_0}\cos(\alpha)\cdot t & a \\ y(t) = \vec{V_0}\sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2}\vec{a}t^2 & b \end{cases}$$

Ci basta capire che valore ha y quando ci troviamo ad $x = 10\ m$

$\Rightarrow$ Dobbiamo trovare l'equazione di y in funzione di x

1) Isoliamo t dalla (a): $t = \dfrac{x}{\vec{V_0}\cos(\alpha)}$

2) Sostituiamo t nella (b): $y = \dfrac{\cancel{\vec{V_0}}\sin(\alpha)\cdot x}{\cancel{\vec{V_0}}\cos(\alpha)} - \dfrac{1}{2}a\left(\dfrac{x}{\vec{V_0}\cos\alpha}\right)^2$

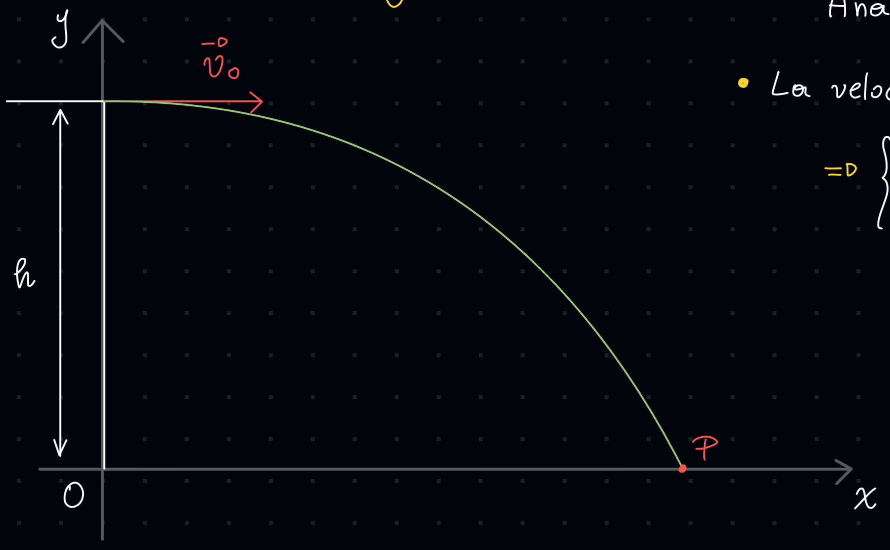
$$= x\tan(\alpha) - \frac{\frac{1}{2}\vec{g}}{\vec{V_0}^2\cos^2(\alpha)}x^2$$

3) Per trovare il valore di y in $x = 10$ ci basta sostituire nella eq della Traiettoria

$$y\Big|_{x=10} = 10m\tan(30) - \frac{\frac{1}{2}(9.81\ m/s^2)}{15^2 m/s^2\cos^2(30)}\cdot 10^2 m \simeq 2.86\ m$$

Siccome $2.86\,m > 2.5\,m$ il pallone non entra nella porta.

P2: Problema di galileo



Analizziamo le componenti del moto:

- La velocità iniziale è PARALLELA al terreno $\Rightarrow \alpha = \emptyset$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{0x} = Max & \Rightarrow \cos(0) = 1 \\ V_{0y} = \emptyset & \Rightarrow \sin(0) = \emptyset \end{cases}$$

Quindi nell'istante $t_0 = 0$ la velocità sarà massima lungo x e nulla lungo y.

Successivamente la v. orizzontale rimane costante, mentre quella verticale cresce UNIFORMEMENTE.

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \text{Moto rettilineo uniforme} \\ y(t) = \text{Moto uniformemente accelerato} \end{cases} = \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

1) Troviamo dalla b il tempo impiegato a cadere:

$$P(\overset{x}{x}, \overset{y}{0}) \Rightarrow y(t_f) = h - g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Tempo di caduta

Il Tempo di caduta è INDIPENDENTE dalla velocità iniziale

2) Sostituiamo l'eq del tempo nella a

$$x(t) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

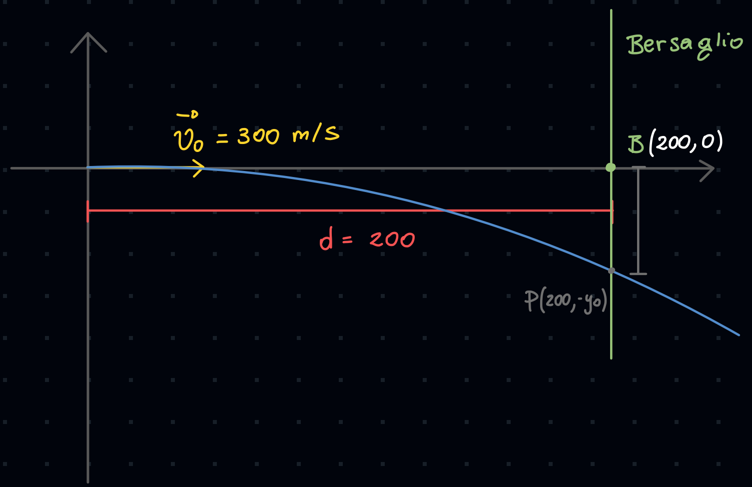
gittata

A parità di $\vec{g}$ ed h, la gittata dipende solo dalla velocità iniziale

Problema 3: Lezione 5 1:12

distanza $G = 200$ m

Vel iniziale: $\vec{v}_0 = 300$ m/s



Equazioni ORARIE del moto

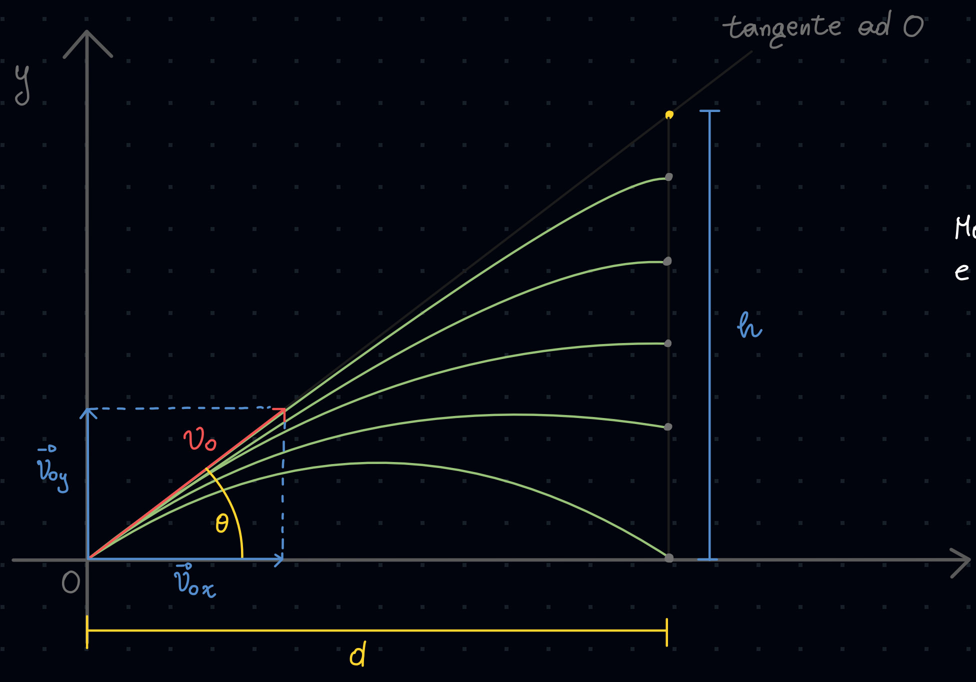
$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

→ ? Non abbiamo il tempo

$$\Rightarrow t = \frac{x^2}{v_0^2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{\overset{200}{x^2}}{v_0^2} \rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot \frac{200}{300} = -\frac{109}{50} = -2.18$$

$\Rightarrow P(200, -2.18)$

Problema 3 Bonus: La scimmia ed il caccitore



$\vec{v}_0$ è inclinato di θ

Ma θ è il rapporto tra l'altezza e la Distanza:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{h}{d}\right)$$

Il cacciatore punta alla Scimmia sull'albero ad Altezza h

Proiettile

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{ox} = v_0 \cos(\theta) \\ v_{oy} = v_0 \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_{ox} \cdot t \\ y(t) = v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Eq del Proiettile

→ Distanza orizzontale → $t = \frac{x}{v_{ox}} \Rightarrow t = \frac{d}{v_{ox}}$

In quell'istante $\underset{t = \frac{d}{v_{ox}}}{y_{proiettile}} = v_{oy} \cdot \frac{d}{v_{ox}} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{d^2}{v_{ox}^2} = \underbrace{\frac{\cancel{v_0} \cos(\theta)}{\cancel{v_0} \sin(\theta)}}_{\tan(\theta)} \cdot d - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{ox}^2} d^2$

$$= \tan(\theta) \cdot d - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{ox}^2} d^2$$

y quando arriva a d

Scimmia

$$\begin{cases} x = d \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow 0 < t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\Rightarrow y_{scimmia} \underset{t = \frac{d}{v_{0x}}}{=} h - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_{0x}^2}$$

$$\Rightarrow y_{proiettile} = y_{scimmia} \rightarrow \tan(\theta) \cdot d - \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{\frac{g}{v_{0x}^2}} \cancel{d^2} = h - \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{\frac{g}{v_{0x}^2}} \cdot \cancel{d^2}$$

$$\rightarrow \overbrace{\tan(\theta) \cdot d}^{\text{Proiettile}} = \underbrace{h}_{\text{scimmia}}$$

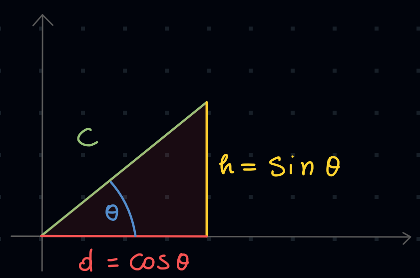
Siccome il cacciatore spara con un angolo $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{h}{d}\right)$

$$\Rightarrow \underbrace{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{h}{d}\right)\right)}_{\frac{h}{d}} d = h \rightarrow \frac{h}{\cancel{d}} \cdot \cancel{d} = h \Rightarrow h = h \Rightarrow$$

Le due quote all'istante $t = \frac{d}{v_{0x}}$ sono uguali

$\Rightarrow$ il proiettile colpisce la scimmia.

- Trovare la velocita' minima



$$\cos(\theta) = \frac{d}{c} \quad \text{siccome } c = \sqrt{d^2+h^2} \rightarrow \cos(\theta) = \frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}}$$

$$\Rightarrow v_{0x} = v_0 \cos(\theta) = \underbrace{v_0 \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}}}_{v_{0x}}$$

Velocita' minima orizzontale

Siccome $0 < t \leq \underbrace{\sqrt{\frac{2h}{g}}}_{\text{Tempo caduta}} \rightarrow t = \frac{d}{v_{0x}} \leq \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v_{0x} \geq \sqrt{\frac{g}{2h}} \cdot d$

$$\Rightarrow v_0 \cdot \frac{\cancel{d}}{\sqrt{d^2+h^2}} \geq \cancel{d} \sqrt{\frac{g}{2h}} \rightarrow \underbrace{v_0}_{\text{Velocita' Iniziale}} \geq \underbrace{\sqrt{d^2+h^2} \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}}}_{\text{Velocita' minima } v_{min}}$$

$\Rightarrow$ Ans: Il proiettile colpisce la scimmia se $v_0 \geq v_{min}$