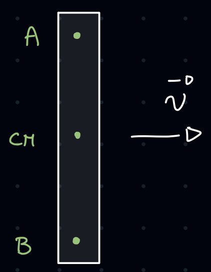
Corpi rigidi

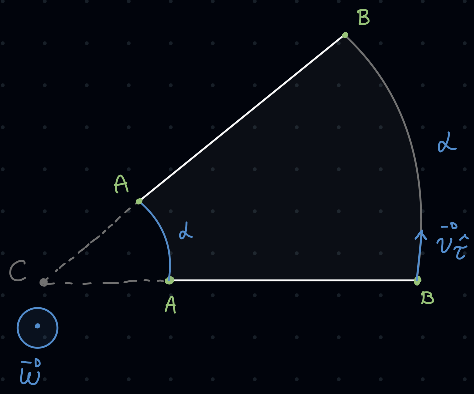
Def: Fissiamo due punti A e B su un corpo e facciamo compiere al corpo delle trasformazioni; se misuriamo $\overline{AB}$ e questa è la stessa di quando abbiamo iniziato, allora è un corpo rigido.

Traslazione



$$v_{CM} = \frac{\sum_i m_i v_i}{M} \quad \text{ma} \quad v_A = v_B = v_i = v_{CM}$$

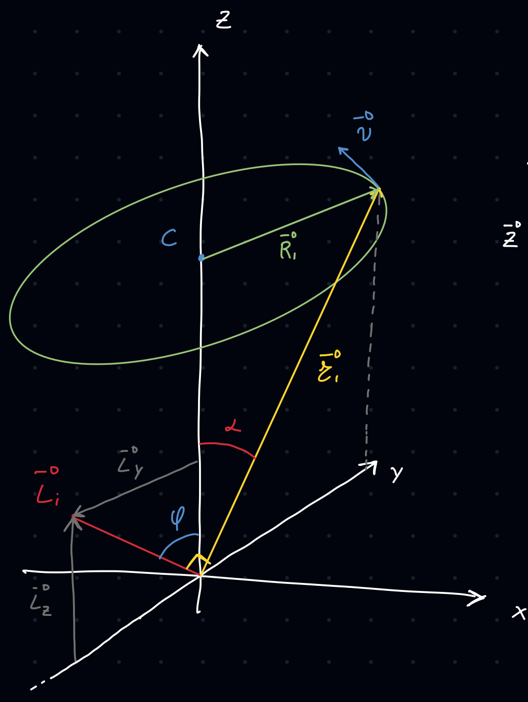
Rotazione



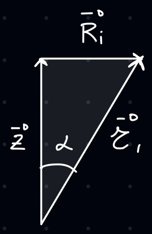
Nelle rotazioni $\alpha_A = \alpha_B \Rightarrow \omega_A = \omega_B$

ma $\rho_A < \rho_B \Rightarrow v_A < v_B$ vel tangenziale

Rotazione attorno ad un asse fisso



Siccome $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ $\quad \vec{r} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{L} \perp \vec{r} \perp \vec{v}$



$\rightarrow \vec{R}_i = \vec{r}_i \sin\alpha$

$$|\vec{L}_i| = |\vec{r}_i| \cdot m\,|\vec{v}| \cdot \sin(90) = r_i m_i v_i \quad (1)$$

?

Dal moto circolare abbiamo trovato

$$v = \omega R \Rightarrow L_i = r_i m_i \omega_i R_i \quad (2)$$

Le componenti x ed y di $\vec{L}_i$ si annullano a due a due $\Rightarrow$ Troviamo la componente z

$\Rightarrow \vec{L}_z = |\vec{L}_i| \cos(\varphi)$ ma $\varphi = 90 - \alpha \Rightarrow \cos(90-\alpha) = \sin(\alpha)$

Trig

$$\Rightarrow |\vec{L}_z| = |\vec{L}_i| \sin(\alpha) = \vec{r}_i m_i \omega_i R_i \sin(\alpha)$$

$$\begin{cases} R_i = r_i \sin\alpha \\ z = r_i \cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_z = m_i \omega_i R_i^2$$

Siccome il corpo e' rigido $\omega_i = \omega_k \;\forall x, k \in [\text{Corpo}] \Rightarrow \omega_i = \omega$

$$L_{z\,TOT} = \omega \left(\sum_i m_i R_i^2 \right)$$

Lo battezzo Momento di inerzia SCALARE

$$\rightarrow L_z = \omega I_z$$

Momento Angolare

Conclusioni

Se siamo nel caso dei corpi rigidi, ed il solido e' SIMMETRICO

$$\vec{L} = \vec{L}_z \Rightarrow \vec{L}_{TOT} = I\vec{\omega} \qquad \text{Con } I = mR^2$$

Abbiamo visto che possiamo esprimere il momento di una forza attraverso il momento angolare; ma il momento angolare di un corpo rigido e' proprio:

$$\vec{L}_{\text{corpo rigido}} = \vec{\omega} I \Rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{M}_{\text{corpo rigido}} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} I\right] = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{M} = I\alpha \quad \text{con} \quad I = \underset{\text{Inerzia}}{\text{momento di}} = mR^2$$

Molto simile ad $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

ROTAZIONI

$\vec{M} = I\,\vec{\alpha}$

$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha\, dt = \omega_0 + \omega t$

$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega\, dt = \theta_0 + \theta t$

- Se $\vec{M} = 0 \Rightarrow$ Moto circolare uniforme o Quiete

Se $M = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} = 0$

$\Rightarrow \omega_0 = \omega_f \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \theta t$

- Se $M \neq 0$ ma costante

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \alpha = cost$

$\Rightarrow \begin{cases} \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \\ \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$

- Se $M \neq 0 \neq cost \rightarrow$ moto Vario

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} \neq cost$

Energia Cinetica

$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

dal moto circolare $v = \omega R$

$\Rightarrow \mathcal{E}_i = \frac{1}{2}(m_i R^2)\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 I_i$

Inerzia

TRASLAZIONI

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$S(t) = S_0 + v_0 t$

- Se $\vec{a} = 0 \rightarrow$ Moto rettilineo uniforme o Quiete

$\Rightarrow S_f = S_0 + v \cdot t$

- Se $a \neq 0$ ma costante

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = Cost$

$\Rightarrow \begin{cases} v(t) = v_0 + \vec{a}t \\ S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{cases}$

- Se $M \neq 0 \neq cost \rightarrow$ moto Vario

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \neq cost$

$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2$