

## COME SI VALUTA L'INCERTEZZA COMPOSTA?

→ Quando la grandeza è funzione di più variabili → Ad esempio  $R = \frac{V}{I}$  DUE INCERTEZZE!

Oppure  $P = R \cdot I^2$  senza Wattmetro → Come si compongono le incertezze su n parametri?  
 ↑  
 ↑  
 Incertezze diverse

Inc Composta:  $U_c(y)$  con  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  con incertezze  $U_1(x_1), U_2(x_2), \dots, U_n(x_n)$

### APPROCCIO GUM

Usiamo l'approx al primo ordine

della SERIE DI TAYLOR → ottieniamo la retta tangente alla curva nel punto di lavoro

↑  
 LINEARIZZIAMO  
 la funzione  
 in  $x_0$

Una sola Variabile

$$y(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0)$$

$$y(x_1, x_2, x_n) = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x=x_0} \cdot (x_i - \mu_i)$$

medie

↓

Valor medio

pongo  $\mu_y$  la funzione del valor medio di  $y$  →  $Y = \mu_y + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \mu_i)$

porto  $\mu_y$  a sx ed elevo al quadrato →  $(Y - \mu_y)^2 = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \mu_i) \right]^2$

QUADRATO DI SOMMATORIA

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i \cdot x_j)$$

$$\Rightarrow (Y - \mu_y)^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \mu_i) \right]^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (x_i - \mu_i) (x_j - \mu_j)$$

~ INCERTEZZA QUADRATICA  $U_c^2(y) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 U_i^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot r(x_i; x_j) \cdot U(x_i) \cdot U(x_j)$

CORREZIONE  
 Tra  $x_i$  ed  $x_j$   
 Solitamente 0

→ Se  $x_i$  e  $x_j$  INCORRELATI ⇒  $U_c^2(y) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 U_i^2(x_i)$  ES la resistenza è funzione della Temperatura  
 $\Rightarrow r(x_i; x_j) \neq 0$

Estraendo la radice quadrata di  $U_c(y)^2$  si ottiene l'incertezza sulla stima di  $y$ . Tale espressione prende il nome di legge di propagazione dell'incertezza per le grandezze correlate

Se pongo le derivate parziali in termini di COEFFICIENTI DI SENSIBILITÀ  $C_i$  e  $C_j$

→ la formula diventa:

$$U_C^2(y) = \sum_{i=1}^n C_i^2 \cdot U_i^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n C_i \cdot C_j \cdot \varepsilon(x_i, x_j) \cdot U(x_i) \cdot U(x_j)$$

↑ Sensibilità  
xi  
(derivate parziali)  
 ↑ incertezza su xi

Se Scorrelati  $\varepsilon = 0$

### LEGGE DI PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE

Riga	Funzione	Incertezza tipo composta Valore assoluto $u(\bar{y})$	Incertezza tipo composta Valore relativo $u(\bar{y}) = u(\bar{y}) / \bar{y}$
1	$y = x_1 + x_2$	$\sqrt{[u(\bar{x}_1)]^2 + [u(\bar{x}_2)]^2}$	$\sqrt{\frac{[\bar{x}_1 \dot{u}(\bar{x}_1)]^2 + [\bar{x}_2 \dot{u}(\bar{x}_2)]^2}{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^2}}$
2	$y = x_1 + x_2 + x_3$	$\sqrt{[u(\bar{x}_1)]^2 + [u(\bar{x}_2)]^2 + [u(\bar{x}_3)]^2}$	$\sqrt{\frac{[\bar{x}_1 \dot{u}(\bar{x}_1)]^2 + [\bar{x}_2 \dot{u}(\bar{x}_2)]^2 + [\bar{x}_3 \dot{u}(\bar{x}_3)]^2}{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2}}$
3	$y = x_1 - x_2$	$\sqrt{[u(\bar{x}_1)]^2 + [u(\bar{x}_2)]^2}$	$\sqrt{\frac{[\bar{x}_1 \dot{u}(\bar{x}_1)]^2 + [\bar{x}_2 \dot{u}(\bar{x}_2)]^2}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}}$
4	$y = x_1 x_2$	$\sqrt{(\bar{x}_2)^2 [u(\bar{x}_1)]^2 + (\bar{x}_1)^2 [u(\bar{x}_2)]^2}$	$\sqrt{[\dot{u}(\bar{x}_1)]^2 + [\dot{u}(\bar{x}_2)]^2}$
5	$y = x_1 x_2 x_3$	$\sqrt{[\bar{x}_2 \bar{x}_3]^2 [u(\bar{x}_1)]^2 + [\bar{x}_1 \bar{x}_3]^2 [u(\bar{x}_2)]^2 + [\bar{x}_1 \bar{x}_2]^2 [u(\bar{x}_3)]^2}$	$\sqrt{[\dot{u}(\bar{x}_1)]^2 + [\dot{u}(\bar{x}_2)]^2 + [\dot{u}(\bar{x}_3)]^2}$
6	$y = h x_1$	$h u(\bar{x}_1)$	$\dot{u}(\bar{x}_1)$
7	$y = x_1^n$	$n \bar{x}^{n-1} u(\bar{x}_1)$	$n \dot{u}(\bar{x}_1)$

← Valida anche per sottrazioni, divisioni e moltiplicazioni

← Formule ottenute avendo  $\varepsilon(x_i, x_j) = 0$

### INCERTEZZA ESTESA

Dopo aver calcolato l'incertezza composta, moltiplico il valore della nuova incertezza per un valore K in modo da "stare più tranquillo", ad esempio  $K=3$  (99.7%)

$$U(y) = K \cdot U_C(y)$$

↑ Fattore di Copertura  
 ↗ Composta

Indichiamo il risultato  $\sim Y = y \pm U$

Quando le incertezze sono tutte di tipo A

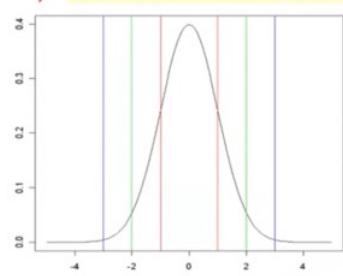
$U(y) = k \cdot u_c(y) \quad \longleftrightarrow \text{Intervallo di confidenza}$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

1 σ:  $p = 0.683$

2 σ:  $P = 0.954$

3 σ:  $P = 0.997$

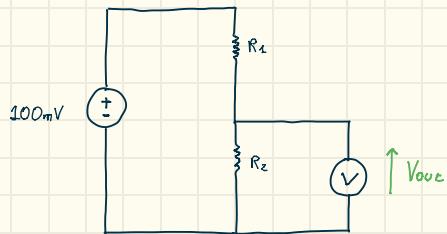


# ESEMPIO VALUTAZIONE INCERTEZZE A E B

## Il procedimento per la stima dell'incertezza di misura

- 1 Si esprima matematicamente la relazione tra il misurando  $Y$  e le grandezze d'ingresso  $X_i$  da cui  $Y$  dipende
  - 2 Si determini  $x_i$ , il valore stimato della grandezza d'ingresso  $X_i$ , sulla base dell'analisi statistica di serie di osservazioni o mediante altri metodi
  - 3 Si valuti l'incertezza tipo  $u(x_i)$  di ciascuna stima d'ingresso  $x_i$
  - 4 Si valutino le covarianze associate alle stime d'ingresso eventualmente correlate
  - 5 Si calcoli il risultato della misurazione, vale a dire la stima  $y$  del misurando  $Y$ , dalla relazione funzionale  $f$  usando, per le grandezze d'ingresso  $X_i$ , le corrispondenti stime  $x_i$
  - 6 Si determini l'incertezza tipo composta  $uc(y)$  del risultato della misurazione  $y$  dalle incertezze tipo e dalle covarianze associate alle stime d'ingresso
- Se è necessario dare un'incertezza estesa  $U$ . Si scelga  $k$  sulla base del livello di fiducia richiesto per l'intervallo
- Si riporti il risultato della misurazione  $y$  con la sua incertezza tipo composta  $uc(y)$ , o la sua incertezza estesa  $U$

## Partitore di Tensione



$$1) \quad V_{\text{out}} = V_{\text{in}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

2) Serie di misure (3) e Stimo i parametri

N.	Misure [mV]	N.	Misure [mV]
1	47,722	16	47,734
2	47,737	17	47,719
3	47,734	18	47,737
4	47,688	19	47,708
5	47,717	20	47,702
6	47,712	21	47,728
7	47,705	22	47,717
8	47,683	23	47,711
9	47,700	24	47,701
10	47,709	25	47,685
11	47,726	26	47,713
12	47,741	27	47,718
13	47,728	28	47,688
14	47,707	29	47,679
15	47,725	30	47,680

## 3) INCERTEZZA

### 3.A) MEDIA

$$\bar{V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i = 47.71 \text{ mV}$$

$$3.B) \text{ SCARTO Sperimentale } s(V) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (V_i - \bar{V})^2} = 0.018 \text{ mV}$$

### 3.C) SCARTO Sperimentale della media (INCERTEZZA)

$$\Rightarrow s(\bar{V}) = \frac{s(V)}{\sqrt{N}} = 0.003 \text{ mV}$$

Abbiamo valutato l'incertezza di categoria A attraverso misure ripetute della sola tensione d'uscita di tipo diretto, quindi i punti 4, 5 e 6 in questo caso non si applicano.

4) Valuto eventuali COVARIANZE

5) Calcolo il RISULTATO della misurazione

6) Calcolo incertezza di tipo COMPOSTA  $uc(y)$

7) Aggiungiamo l'INCERTEZZA ESTESA  $U$  scegliendo  $K$  in base al livello di fiducia richiesto

$$\text{Se } s(\bar{V}) = 0.003 \text{ mV} \Rightarrow U(\bar{V}) = 2 \cdot s(\bar{V}) = 0.006 \text{ mV}$$

8) Riporto il RISULTATO completo di INCERTEZZA

$$V_{\text{out}} = (47.712 \pm 0.006) \text{ mV}$$

# ACCURACY SPECIFICATIONS

Slides Lezione\_3C GUM Inc A e B Esempio Incertezza tipo A e B v1

Accuracy Specifications $\pm$ (% of reading + % of range) <sup>11</sup>						
Function	Range <sup>12</sup>	Frequency, etc.	24 Hour <sup>13</sup> 23°C ± 1°C	90 Day 23°C ± 5°C	1 Year 23°C ± 5°C	Temperature Coefficient 0°C - 18°C 23°C - 35°C
<b>dc Voltage</b>	100.0000 mV		0.0020 ± 0.0030	0.0040 ± 0.0032	0.0060 ± 0.0035	0.0060 ± 0.0005
	1.000000 V		0.0020 ± 0.0006	0.0030 ± 0.0007	0.0040 ± 0.0007	0.0040 ± 0.0001
	10.00000 V		<b>0.0015 ± 0.0004</b>	<b>0.0020 ± 0.0005</b>	<b>0.0035 ± 0.0005</b>	<b>0.0035 ± 0.0001</b>
	100.0000 V		0.0020 ± 0.0006	0.0030 ± 0.0007	0.0040 ± 0.0007	0.0040 ± 0.0001
<b>True rms ac Voltage<sup>14</sup></b>	100.0000 mV		1.00 ± 0.03	1.00 ± 0.04	1.00 ± 0.04	1.00 ± 0.004
	5 Hz - 10 Hz		0.35 ± 0.03	0.35 ± 0.04	0.35 ± 0.04	0.035 ± 0.004
	10 Hz - 100 Hz		0.10 ± 0.03	0.12 ± 0.04	0.12 ± 0.04	0.010 ± 0.004
	20 kHz - 50 kHz		0.10 ± 0.05	0.11 ± 0.05	0.12 ± 0.04	0.011 ± 0.005
	50 kHz - 100 kHz <sup>15</sup>		0.55 ± 0.08	0.60 ± 0.08	0.60 ± 0.08	0.060 ± 0.008
	100 kHz - 300 kHz <sup>16</sup>		4.00 ± 0.50	4.00 ± 0.50	4.00 ± 0.50	0.400 ± 0.050
<b>Resistance<sup>17</sup></b>	1.000000 kΩ	1 mA Current Source	0.0020 ± 0.0030	0.0040 ± 0.0040	0.010 ± 0.004	0.0060 ± 0.0005
	10.00000 kΩ	1 mA	0.0020 ± 0.0005	0.008 ± 0.001	0.010 ± 0.001	0.0060 ± 0.0001
	10.00000 kΩ	100 µA	<b>0.0020 ± 0.0005</b>	<b>0.008 ± 0.001</b>	<b>0.010 ± 0.001</b>	<b>0.0060 ± 0.0001</b>
	1.000000 MΩ	12 pA	0.0020 ± 0.0005	0.008 ± 0.001	0.010 ± 0.001	0.0060 ± 0.0001
	1.000000 MΩ	5.0 pA	0.002 ± 0.001	0.008 ± 0.001	0.010 ± 0.001	0.0010 ± 0.0002
	10.00000 MΩ	500 nA	0.015 ± 0.01	0.020 ± 0.01	0.040 ± 0.01	0.0200 ± 0.0004
	10.00000 MΩ	50 nA	0.100 ± 0.010	0.120 ± 0.010	0.150 ± 0.010	0.1500 ± 0.0002
<b>dc Current</b>	10.00000 mA	-0.1 V Burden Voltage	0.005 ± 0.010	0.030 ± 0.020	0.050 ± 0.020	0.002 ± 0.0020
	<b>100.0000 mA</b>	<b>-0.6 V</b>	<b>0.010 ± 0.000</b>	<b>0.030 ± 0.005</b>	<b>0.050 ± 0.005</b>	<b>0.002 ± 0.0005</b>
	1.000000 A	-2 V	0.005 ± 0.010	0.030 ± 0.020	0.050 ± 0.020	0.005 ± 0.010
	3.000000 A	-2 V	0.160 ± 0.020	0.120 ± 0.020	0.120 ± 0.020	0.005 ± 0.020
<b>True rms ac Current<sup>18</sup></b>	<b>1.000000 A</b>	<b>3 Hz - 5 Hz</b>	<b>1.00 ± 0.04</b>	<b>1.00 ± 0.04</b>	<b>1.00 ± 0.04</b>	<b>0.100 ± 0.006</b>
		<b>5 Hz - 10 Hz</b>	<b>0.10 ± 0.04</b>	<b>0.10 ± 0.04</b>	<b>0.10 ± 0.04</b>	<b>0.010 ± 0.004</b>
		<b>10 Hz - 5 kHz</b>	<b>0.10 ± 0.04</b>	<b>0.10 ± 0.04</b>	<b>0.10 ± 0.04</b>	<b>0.010 ± 0.004</b>
<b>Frequency or Period<sup>19</sup></b>	100 mV <sup>20</sup>	3 Hz - 5 Hz	0.10	0.10	0.10	0.005
	100 mV <sup>21</sup>	5 Hz - 10 Hz	0.05	0.05	0.05	0.005
	750 V	10 Hz - 40 Hz	0.03	0.03	0.03	0.001
	40 Hz - 200 kHz		<b>0.006</b>	<b>0.01</b>	<b>0.01</b>	<b>0.001</b>
<b>Continuity</b>	1000.0Ω	1 mA Test Current	0.002 ± 0.010	0.008 ± 0.020	0.016 ± 0.020	0.001 ± 0.002
<b>Diode Test</b>	1.00000 V	1 mA Test Current	0.002 ± 0.010	0.008 ± 0.020	0.016 ± 0.020	0.001 ± 0.002

Le specifiche variano a seconda di molti parametri, come il tempo di Warmup della macchina e temperatura

#Esercitazione

# ACCURATEZZA E RIPETIBILITÀ

## ERROTI DI MISURA

- Errori dell'operatore
- Strumento di misura fatto male
- Metodo di misura
- Modello scelto → Tavolo ristretto come rettangolo ma in realtà è un trapezio
- Grandezze di influenza

L'errore di temperatura influenza



### CASUALI

Non possiamo correggerli appaiono come una Gaussiana

### ERRORI

### SISTEMATICI

Se si ripete costantemente nel tempo → possono essere corretti  
Es Tiro delle Bilance Analogiche

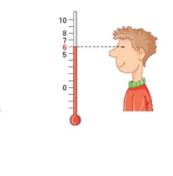
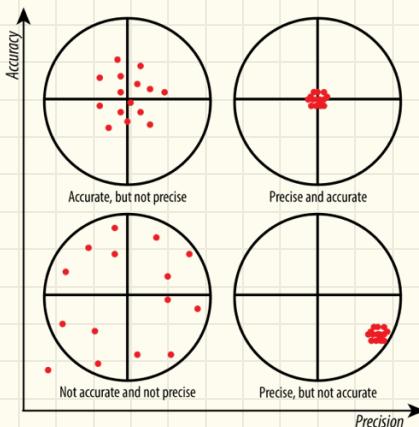
### PRECISIONE di misura

L'arciere non centra mai il bersaglio MA le frecce sono raggruppate



### ACCURATEZZA + PRECISIONE

ES: Caccia che correzza il tiro: è preciso ma non accurato (non becca il centro)



### BASSA ACC e PREC

L'arciere non centra mai il bersaglio e le frecce sono sparse



Le frecce sono molto vicine al centro ma non sono vicine tra di loro



Cosa succede se non riesco a mantenere le stesse condizioni di misura? Devo cambiare operatore o strumento o metodo di misura o il tempo di misurazione?

Es: Misura pistone prodotto in Polonia

### RIPETIBILITÀ

se faccio molte misurazioni,  
SENZA CAMBIARE LE CONDIZIONI,  
entro un periodo breve  
i risultati dovrebbero concordare  
tra loro.



Se ogni volta che misuro ottengo  
misure molto diverse, la misura non  
è ripetibile.

### RIPRODUCIBILITÀ

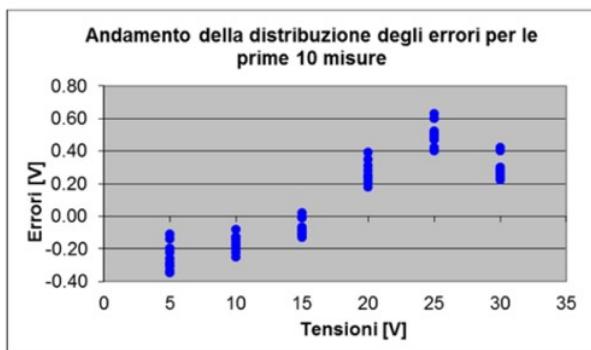
Se cambiano le condizioni di  
misura (metodo, luogo, osservatore, tempo)  
i risultati sono ancora confrontabili?



Se misuro qualcosa in italia e mando  
il prototipo in america, e con cari.  
diverse le misure cambiano, allora  
la misura è riproducibile.

## REGRESSIONE

### Lezione\_3E Regressione



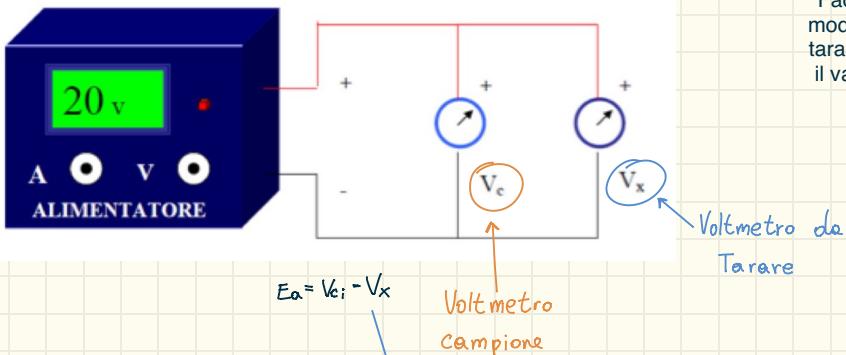
Dai dati campionari si ottiene  
un modello statistico che predice  
i valori di una variabile ( $y$ )  
a partire dai valori dell'altra variabile ( $x$ )

Si parte da una RETTA e poi si passa a POLINOMI

### Utilità:

- Prevedere andamenti futuri
- Descrivere analiticamente la realtà
- Per interpretare la realtà

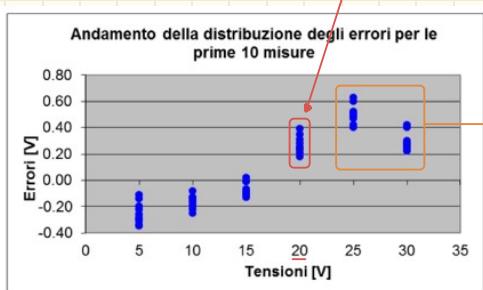
Utilità della Reg. nelle misure



Faccio 5 (N) misurazioni per ogni voltaggio (5,10,15,...,30V) in modo che il voltmetro da tarare segni sempre 20V; siccome è da tarare, segnerà valori diversi dal voltmetro campione (che segna il valore esatto della tensione). Possiamo quindi trovare l'errore (incertezze) i-esimo del voltmetro da tarare facendo la differenza tra  $V_c$  e  $V_x$

Tabulazione dell'incertezza assoluta

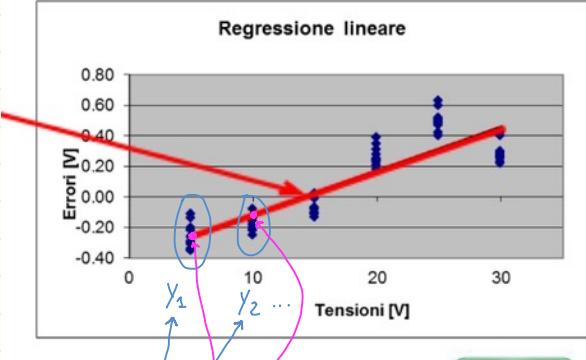
N	V <sub>c</sub>		V <sub>x</sub>		V <sub>c</sub> =15V		V <sub>x</sub> =20V		V <sub>c</sub> =25V		V <sub>x</sub> =30V	
	V <sub>c</sub>	E <sub>a</sub>	V <sub>c</sub>	E <sub>a</sub>	V <sub>c</sub>	E <sub>a</sub>	V <sub>c</sub>	E <sub>a</sub>	V <sub>c</sub>	E <sub>a</sub>	V <sub>c</sub>	E <sub>a</sub>
1	4.89	-0.11	9.86	-0.14	14.99	-0.01	20.25	0.25	25.40	0.40	30.22	0.22
2	4.66	-0.34	9.87	-0.13	14.99	-0.01	20.35	0.35	25.49	0.49	30.28	0.28
3	4.86	-0.14	9.78	-0.22	14.92	-0.08	20.39	0.39	25.42	0.42	30.25	0.25
4	4.71	-0.29	9.84	-0.16	14.90	-0.10	20.28	0.28	25.51	0.51	30.42	0.42
5	4.80	-0.20	9.75	-0.25	15.02	0.02	20.31	0.31	25.63	0.63	30.29	0.29



COSA ACCADE TRA 25V e 30V?

Possiamo basalmente fare la media delle incertezze per 25 e 30 e collegare linearmente le due medie

## Regressione lineare



$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Valore reale  
i-esimo  
(punto blu)

Retta di regressione

mo scrivo  $\hat{Y}_i = B_0 + B_1 X_i$

~~>  $B_0$  e  $B_1$  sono i coefficienti di regressione, ma come li trovo?

Imponendo le derivate parziali per  $B_0$  e  $B_1$  della (1) uguali a zero, abbiamo un sistema!

### Minimi quadrati

$$\begin{cases} \frac{\partial (\sum_{i=1}^n [Y_i - (B_0 + B_1 X_i)]^2)}{\partial A} = \sum_{i=1}^n 2X_i(B_1 X_i + B_0 - Y_i) = 2 \sum_{i=1}^n (B_1 X_i^2 + B_0 X_i - X_i Y_i) \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n [Y_i - (B_0 + B_1 X_i)]^2}{\partial B} = \sum_{i=1}^n 2(B_1 X_i + B_0 - Y_i) = 2 \sum_{i=1}^n (B_1 X_i + B_0 - Y_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (B_1 X_i^2 + B_0 X_i - X_i Y_i) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (B_1 X_i + B_0 - Y_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 + B_0 \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n X_i Y_i \\ B_1 \sum_{i=1}^n X_i + n B_0 = \sum_{i=1}^n Y_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - (\sum_{i=1}^n X_i)(\sum_{i=1}^n Y_i)}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \\ B_0 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - B_1 \sum_{i=1}^n X_i}{n} \end{cases}$$

da retta Rossa l'equazione

$$\hat{Y}_i = B_0 + B_1 X_i$$

VALORI STIMATI  
(RETTA)

Per ogni  $X_i \in (5, 10, \dots, 30)$   
esiste un ordinata  $\hat{Y}_i$  che  
NON conosco!

$$ES: X_0 = 10 \Rightarrow \hat{Y}_i(x_0) = B_0 + B_1 x_0$$

d'obiettivo è rendere MINIMA la somma dei quadrati delle differenze tra i valori osservati  $Y_i$  (punti blu) e valori stimati  $\hat{Y}_i$  (Retta rossa)

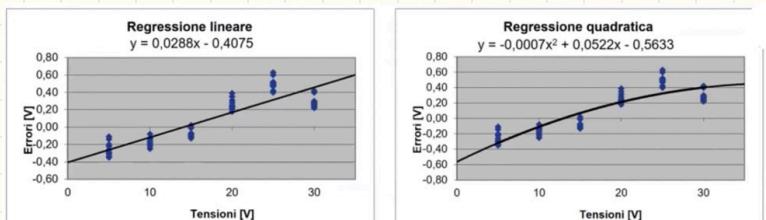
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n [Y_i - (B_0 + B_1 X_i)]^2 \quad (1)$$

INCognite  
NOTi

Ci permette di trovare i coefficienti

## INTRODUZIONE EXCEL

Da 1:15

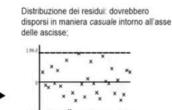
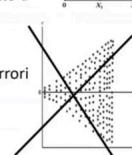


Il metodo dei minimi quadrati non conduce quasi mai a previsioni scive da errori.

Le differenze tra i valori osservati  $Y_i$  ed i valori stimati determinati dalla retta di regressione che indichiamo con  $\hat{Y}_i$  sono definiti errori e/o residui.

Le assunzioni per poter eseguire l'analisi della regressione richiedono:

- Distribuzione normale degli errori: gli errori devono avere, per ogni valore di  $X$ , una distribuzione normale. Il modello di regressione è comunque robusto rispetto a scostamenti dall'ipotesi di normalità
- Omoschedasticità: la variabilità degli errori è costante per ciascun valore di  $X$ .
- Indipendenza degli errori: gli errori devono essere indipendenti per ciascun valore di  $X$



## COEFFICIENTE DI DETERMINAZIONE

$R^2$

E' una Stima della "Bontà" della Regressione

$$R^2 \in [0, 1]$$

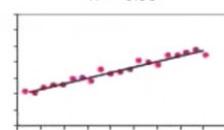
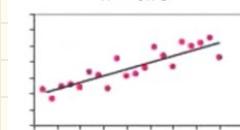
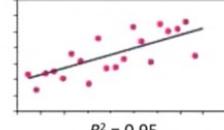
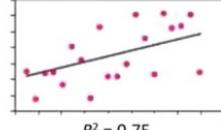
Se  $R^2 \approx 1$  allora il modello di Reg è "BUONO".

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

STIME date dalla retta di regressione  
MEDIA delle  $y_i$   
Errori Assoluti  
MISURE Reali

$R^2 = 0.25$

$R^2 = 0.50$



Se i valori sono compatti lungo la regressione allora  $R^2 \approx 1$  e il modello è Buono

### PROBLEMI

Il coefficiente di determinazione presenta alcuni inconvenienti:

- può assumere valori elevati anche quando la relazione non è di tipo lineare;
- cresce sempre al crescere del numero dei regressori, pertanto non è un indicatore adeguato per il confronto tra modelli con un diverso numero di regressori.

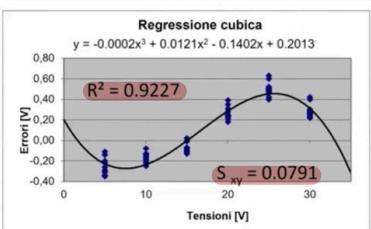
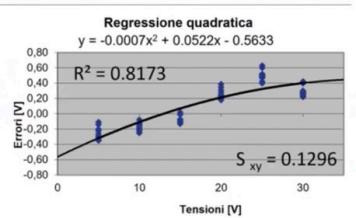
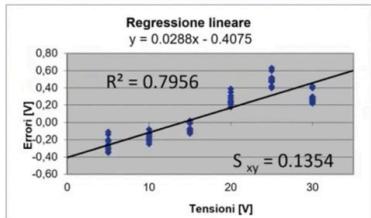
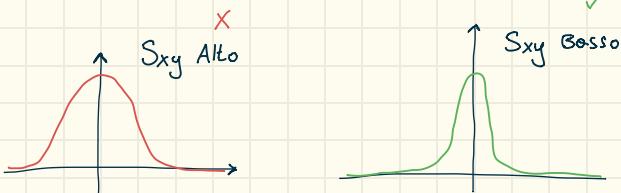
## ERRORE STANDARD DELLA STIMA

E' più sensibile alle variazioni dei dati

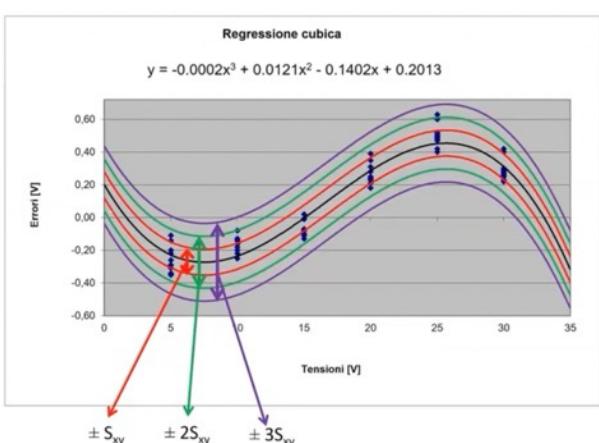
$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{n-2}}$$

ATTENZIONE! Nella formula  $\hat{y}_i$  e  $y_i$  sono scambiati rispetto alle formule prec.

Seguiamo il valore di  $S_{xy}$  PIÙ BASSO per avere errori più bassi



Confrontando i valori di  $R^2$  e  $S_{xy}$  delle diverse regressioni calcolate, la migliore risulta quella cubica, ovvero quella con il valore di  $R^2$  più grande e il valore di  $S_{xy}$  più piccolo.



\* Scegliamo una reg. cubica. Possiamo tracciare le curve per  $k = 1, 2, 3$  ( $3 \rightarrow 99.7\%$ )