

COME SI VALUTA L'INCERTEZZA COMPOSTA?

→ Quando la grandeza è funzione di più variabili → Ad esempio $R = \frac{V}{I}$ DUE INCERTEZZE!

Oppure $P = R \cdot I^2$ senza Wattmetro → Come si compongono le incertezze su n parametri?
 ↑
 ↑
 Incertezze diverse

Inc Composta: $U_c(y)$ con $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con incertezze $U_1(x_1), U_2(x_2), \dots, U_n(x_n)$

APPROCCIO GUM

Usiamo l'approx al primo ordine

della SERIE DI TAYLOR → ottieniamo la retta tangente alla curva nel punto di lavoro

↑
 LINEARIZZIAMO
 la funzione
 in x_0

Una sola variabile

$$y(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0)$$

$$y(x_1, x_2, x_n) = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x=x_0} \cdot (x_i - \mu_i)$$

medie

↓

Valor medio

pongo μ_y la funzione del valor medio di y → $Y = \mu_y + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \mu_i)$

→ porto μ_y a sx ed elevo al quadrato → $(Y - \mu_y)^2 = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \mu_i) \right]^2$

QUADRATO DI SOMMATORIA

$$\Rightarrow (Y - \mu_y)^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \mu_i) \right]^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (x_i - \mu_i) (x_j - \mu_j)$$

~ INCERTEZZA QUADRATICA $U_c^2(y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 U_i^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot r(x_i; x_j) \cdot U(x_i) \cdot U(x_j)$

CORREZIONE
 Tra x_i ed x_j
 Solitamente 0

→ Se x_i e x_j INCORRELATI ⇒ $U_c^2(y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 U_i^2(x_i)$ ES la resistenza è funzione della Temperatura
 $\Rightarrow r(x_i; x_j) \neq 0$

Estraendo la radice quadrata di $U_c(y)^2$ si ottiene l'incertezza sulla stima di y . Tale espressione prende il nome di legge di propagazione dell'incertezza per le grandezze correlate

Se pongo le derivate parziali in termini di COEFFICIENTI DI SENSIBILITÀ C_i e C_j

→ la formula diventa:

$$U_C^2(y) = \sum_{i=1}^n C_i^2 \cdot U_i^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n C_i \cdot C_j \cdot \varepsilon(x_i, x_j) \cdot U(x_i) \cdot U(x_j)$$

↑ Sensibilità
xi
(derivate parziali)
 ↑ incertezza su xi

Se Scorrelati $\varepsilon = 0$

LEGGE DI PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE

Riga	Funzione	Incertezza tipo composta Valore assoluto $u(\bar{y})$	Incertezza tipo composta Valore relativo $u(\bar{y}) = u(\bar{y}) / \bar{y}$
1	$y = x_1 + x_2$	$\sqrt{[u(\bar{x}_1)]^2 + [u(\bar{x}_2)]^2}$	$\sqrt{\frac{[\bar{x}_1 \dot{u}(\bar{x}_1)]^2 + [\bar{x}_2 \dot{u}(\bar{x}_2)]^2}{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^2}}$
2	$y = x_1 + x_2 + x_3$	$\sqrt{[u(\bar{x}_1)]^2 + [u(\bar{x}_2)]^2 + [u(\bar{x}_3)]^2}$	$\sqrt{\frac{[\bar{x}_1 \dot{u}(\bar{x}_1)]^2 + [\bar{x}_2 \dot{u}(\bar{x}_2)]^2 + [\bar{x}_3 \dot{u}(\bar{x}_3)]^2}{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2}}$
3	$y = x_1 - x_2$	$\sqrt{[u(\bar{x}_1)]^2 + [u(\bar{x}_2)]^2}$	$\sqrt{\frac{[\bar{x}_1 \dot{u}(\bar{x}_1)]^2 + [\bar{x}_2 \dot{u}(\bar{x}_2)]^2}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}}$
4	$y = x_1 x_2$	$\sqrt{(\bar{x}_2)^2 [u(\bar{x}_1)]^2 + (\bar{x}_1)^2 [u(\bar{x}_2)]^2}$	$\sqrt{[\dot{u}(\bar{x}_1)]^2 + [\dot{u}(\bar{x}_2)]^2}$
5	$y = x_1 x_2 x_3$	$\sqrt{[\bar{x}_2 \bar{x}_3]^2 [u(\bar{x}_1)]^2 + [\bar{x}_1 \bar{x}_3]^2 [u(\bar{x}_2)]^2 + [\bar{x}_1 \bar{x}_2]^2 [u(\bar{x}_3)]^2}$	$\sqrt{[\dot{u}(\bar{x}_1)]^2 + [\dot{u}(\bar{x}_2)]^2 + [\dot{u}(\bar{x}_3)]^2}$
6	$y = h x_1$	$h u(\bar{x}_1)$	$\dot{u}(\bar{x}_1)$
7	$y = x_1^n$	$n \bar{x}^{n-1} u(\bar{x}_1)$	$n \dot{u}(\bar{x}_1)$

← Valida anche per sottrazioni, divisioni e moltiplicazioni

← Formule ottenute avendo $\varepsilon(x_i, x_j) = 0$

INCERTEZZA ESTESA

Dopo aver calcolato l'incertezza composta, moltiplico il valore della nuova incertezza per un valore K in modo da "stare più tranquillo", ad esempio $K=3$ (99.7%)

$$U(y) = K \cdot U_C(y)$$

↑ Fattore di Copertura
 ↗ Composta

Indichiamo il risultato $\sim Y = y \pm U$

Quando le incertezze sono tutte di tipo A

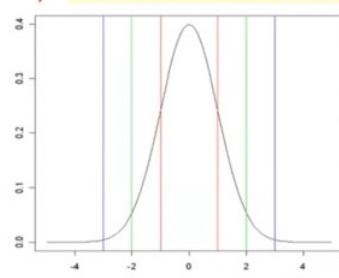
$U(y) = k \cdot u_c(y) \quad \longleftrightarrow \text{Intervallo di confidenza}$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

1 σ: $p = 0.683$

2 σ: $P = 0.954$

3 σ: $P = 0.997$

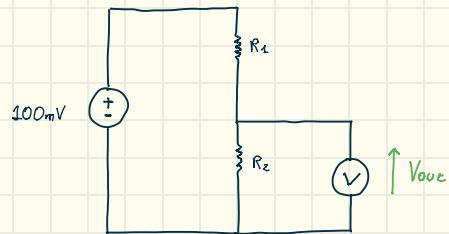


ESEMPIO VALUTAZIONE INCERTEZZE A E B

Il procedimento per la stima dell'incertezza di misura

- 1 Si esprima matematicamente la relazione tra il misurando Y e le grandezze d'ingresso X_i da cui Y dipende
 - 2 Si determini x_i , il valore stimato della grandezza d'ingresso X_i , sulla base dell'analisi statistica di serie di osservazioni o mediante altri metodi
 - 3 Si valuti l'incertezza tipo $u(x_i)$ di ciascuna stima d'ingresso x_i
 - 4 Si valutino le covarianze associate alle stime d'ingresso eventualmente correlate
 - 5 Si calcoli il risultato della misurazione, vale a dire la stima y del misurando Y , dalla relazione funzionale f usando, per le grandezze d'ingresso X_i , le corrispondenti stime x_i
 - 6 Si determini l'incertezza tipo composta $uc(y)$ del risultato della misurazione y dalle incertezze tipo e dalle covarianze associate alle stime d'ingresso
- Se è necessario dare un'incertezza estesa U . Si scelga k sulla base del livello di fiducia richiesto per l'intervallo
- Si riporti il risultato della misurazione y con la sua incertezza tipo composta $uc(y)$, o la sua incertezza estesa U

Partitore di Tensione



$$1) V_{out} = V_{in} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

2) Serie di misure (3) e Stimo i parametri

N.	Misure [mV]	N.	Misure [mV]
1	47,722	16	47,734
2	47,737	17	47,719
3	47,734	18	47,737
4	47,688	19	47,708
5	47,717	20	47,702
6	47,712	21	47,728
7	47,705	22	47,717
8	47,683	23	47,711
9	47,700	24	47,701
10	47,709	25	47,685
11	47,726	26	47,713
12	47,741	27	47,718
13	47,728	28	47,688
14	47,707	29	47,679
15	47,725	30	47,680

3) INCERTEZZA

3.A) MEDIA

$$\bar{V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i = 47.71 \text{ mV}$$

$$3.B) SCARTO Sperimentale S(V) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N (V_i - \bar{V})^2} = 0.018 \text{ mV}$$

3.C) SCARTO Sperimentale della media (INCERTEZZA)

$$\Rightarrow S(\bar{V}) = \frac{S(V)}{\sqrt{N}} = 0.003 \text{ mV}$$

Abbiamo valutato l'incertezza di categoria A attraverso misure ripetute della sola tensione d'uscita di tipo diretto, quindi i punti 4, 5 e 6 in questo caso non si applicano.

4) Valuto eventuali COVARIANZE

5) Calcolo il RISULTATO della misurazione

6) Calcolo incertezza di tipo COMPOSTA $uc(y)$

7) Aggiungiamo l'INCERTEZZA ESTESA U scegliendo K in base al livello di fiducia richiesto

$$\text{Se } S(\bar{V}) = 0.003 \text{ mV} \Rightarrow U(\bar{V}) = 2 \cdot S(\bar{V}) = 0.006 \text{ mV}$$

8) Riporto il RISULTATO completo di INCERTEZZA

$$V_{out} = (47.712 \pm 0.006) \text{ mV}$$

ACCURACY SPECIFICATIONS

Slides Lezione_3C GUM Inc A e B Esempio Incertezza tipo A e B v1

Accuracy Specifications \pm (% of reading + % of range) ¹¹						
Function	Range ¹²	Frequency, etc.	24 Hour ¹³ 23°C ± 1°C	90 Day 23°C ± 5°C	1 Year 23°C ± 5°C	Temperature Coefficient 0°C - 18°C 23°C - 35°C
dc Voltage	100.0000 mV		0.0020 ± 0.0030	0.0040 ± 0.0032	0.0060 ± 0.0035	0.0060 ± 0.0005
	1.000000 V		0.0020 ± 0.0006	0.0030 ± 0.0007	0.0040 ± 0.0007	0.0040 ± 0.0001
	10.00000 V	0.0015 ± 0.0004	0.0020 ± 0.0005	0.0035 ± 0.0005	0.0055 ± 0.0001	
	100.0000 V		0.0020 ± 0.0006	0.0030 ± 0.0009	0.0040 ± 0.0010	0.0040 ± 0.0007
True rms ac Voltage¹⁴ [μ]	100.0000 mV		1.00 ± 0.03	1.00 ± 0.04	1.00 ± 0.04	1.00 ± 0.004
	5 Hz - 10 Hz		0.35 ± 0.03	0.35 ± 0.04	0.35 ± 0.04	0.035 ± 0.004
	10 Hz - 100 kHz		0.10 ± 0.03	0.12 ± 0.04	0.12 ± 0.04	0.010 ± 0.004
	20 kHz - 50 kHz		0.10 ± 0.05	0.11 ± 0.05	0.12 ± 0.04	0.011 ± 0.005
	50 kHz - 100 kHz		0.05 ± 0.06	0.06 ± 0.08	0.06 ± 0.08	0.006 ± 0.008
	100 kHz - 300 kHz ¹⁵		1.00 ± 0.50	4.00 ± 2.00	4.00 ± 2.00	0.2 ± 0.2
	1.000000 V	3 Hz - 5 Hz	1.00 ± 0.03	1.00 ± 0.04	1.00 ± 0.04	0.100 ± 0.003
	5 Hz - 10 Hz	0.35 ± 0.02	0.35 ± 0.03	0.35 ± 0.03	0.035 ± 0.003	
	10 Hz - 20 kHz	0.04 ± 0.02	0.05 ± 0.03	0.06 ± 0.03	0.065 ± 0.003	
	20 kHz - 50 kHz	0.05 ± 0.03	0.06 ± 0.04	0.07 ± 0.05	0.006 ± 0.005	
	50 kHz - 100 kHz ¹⁶	0.55 ± 0.08	0.60 ± 0.08	0.60 ± 0.08	0.060 ± 0.008	
	100 kHz - 300 kHz ¹⁶	0.05 ± 0.05	0.06 ± 0.05	0.06 ± 0.05	0.006 ± 0.005	
Resistance¹⁷ [Ω]	1.000000 kΩ	1 mA Current Source	0.0020 ± 0.0030	0.0040 ± 0.0040	0.010 ± 0.004	0.0060 ± 0.0005
	1.000000 kΩ	1 mA	0.0020 ± 0.0005	0.0040 ± 0.0005	0.010 ± 0.001	0.0060 ± 0.0001
	10.00000 kΩ	100 μA	0.0020 ± 0.0005	0.0040 ± 0.0005	0.010 ± 0.001	0.0060 ± 0.0001
	1.000000 MΩ	12 pA	0.0020 ± 0.0005	0.0040 ± 0.0005	0.010 ± 0.001	0.0060 ± 0.0001
	1.000000 MΩ	5.0 pA	0.002 ± 0.001	0.004 ± 0.001	0.010 ± 0.001	0.0010 ± 0.0002
	10.00000 MΩ	500 nA	0.015 ± 0.001	0.020 ± 0.001	0.040 ± 0.001	0.0040 ± 0.0004
	10.00000 MΩ	50 pA	0.010 ± 0.001	0.020 ± 0.001	0.040 ± 0.001	0.0040 ± 0.0002
dc Current	10.000000 mA	-0.1 V Burden Voltage	0.0005 ± 0.010	0.030 ± 0.020	0.050 ± 0.020	0.002 ± 0.0020
	100.0000 mA	-0.6 V	0.010 ± 0.000	0.030 ± 0.005	0.050 ± 0.005	0.002 ± 0.0005
	1.000000 A	1 V	0.0005 ± 0.010	0.030 ± 0.010	0.050 ± 0.010	0.005 ± 0.0010
	3.000000 A	-2 V	0.160 ± 0.020	0.120 ± 0.020	0.120 ± 0.020	0.005 ± 0.0020
True rms ac Current¹⁸ [A]	1.000000 A	3 Hz - 5 Hz	1.00 ± 0.04	1.00 ± 0.04	1.00 ± 0.04	0.10 ± 0.04
		5 Hz - 10 Hz				
		10 Hz - 5 kHz	0.10 ± 0.04	0.10 ± 0.04	0.10 ± 0.04	0.010 ± 0.004
	3.000000 A	3 Hz - 5 Hz	1.10 ± 0.06	1.10 ± 0.06	1.10 ± 0.06	0.110 ± 0.006
	5 Hz - 10 Hz	0.35 ± 0.06	0.35 ± 0.06	0.35 ± 0.06	0.035 ± 0.006	
	10 Hz - 5 kHz	0.15 ± 0.06	0.15 ± 0.06	0.15 ± 0.06	0.015 ± 0.006	
Frequency or Period¹⁹ [Hz]	100 mV ²⁰	3 Hz - 5 Hz	0.10	0.10	0.10	0.005
	5 Hz - 10 Hz	0.05	0.05	0.05	0.005	
	10 Hz - 40 Hz	0.03	0.03	0.03	0.001	
	40 Hz - 300 kHz	0.006	0.01	0.01	0.001	
Continuity	1000.0Ω	1 mA Test Current	0.002 ± 0.010	0.006 ± 0.020	0.016 ± 0.020	0.001 ± 0.002
Diode Test	1.00000 V	1 mA Test Current	0.002 ± 0.010	0.006 ± 0.020	0.010 ± 0.020	0.001 ± 0.002

Le specifiche variano a seconda di molti parametri, come il tempo di Warmup della macchina e temperatura

#Esercitazione

ACCURATEZZA E RIPETIBILITÀ

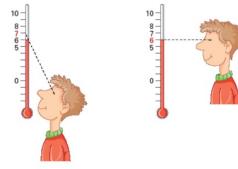
ERROTI DI MISURA

- Errori dell'operatore
- Strumento di misura fatto male
- Metodo di misura
- Modello scelto → Tavolo ristretto come rettangolo ma in realtà è un trapezio
- Grandezze di influenza

L'errore di temperatura influenza



Errore di parallasse
Si risolve con uno specchio sullo sfondo



Basso ACC e Prec

L'arciere non centra mai il bersaglio e le frecce sono sparse



PRECISIONE di misura

L'arciere non centra mai il bersaglio MA le frecce sono raggruppate



Le frecce sono molto vicine al centro ma non sono vicine tra di loro



Accuratezza + Precisione



ES: Caccia che correzza il tiro: è preciso ma non accurato (non becca il centro)

Cosa succede se non riesco a mantenere le stesse condizioni di misura? Devo cambiare operatore o strumento o metodo di misura o il tempo di misurazione?

Es: Misura pistone prodotto in Polonia

RIPETIBILITÀ

se faccio molte misurazioni,
SENZA CAMBIARE LE CONDIZIONI,
entro un periodo breve
i risultati dovrebbero concordare
tra loro.



Se ogni volta che misuro ottengo
misure molto diverse, la misura non
è ripetibile.

RIPRODUCIBILITÀ

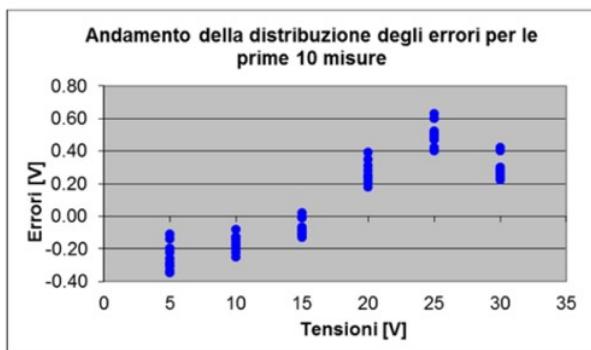
Se cambiano le condizioni di
misura (metodo, luogo, osservatore, tempo)
i risultati sono ancora confrontabili?



Se misuro qualcosa in italia e mando
il prototipo in america, e con cari.
diverse le misure cambiano, allora
la misura è riproducibile.

REGRESSIONE

Lezione_3E Regressione



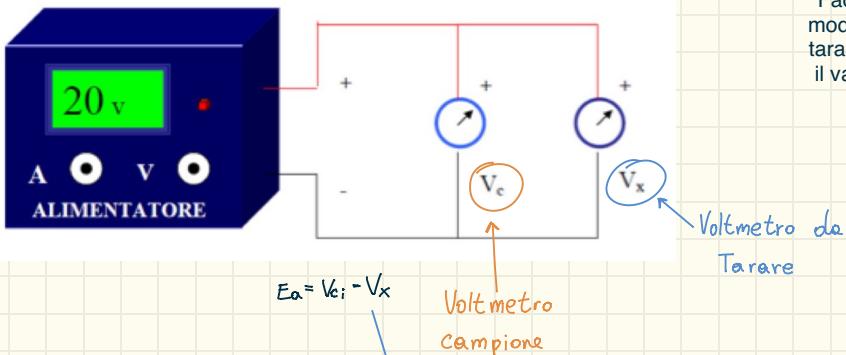
Dai dati campionari si ottiene
un modello statistico che predice
i valori di una variabile (y)
a partire dai valori dell'altra variabile (x)

Si parte da una RETTA e poi si passa a POLINOMI

Utilità:

- Prevedere andamenti futuri
- Descrivere analiticamente la realtà
- Per interpretare la realtà

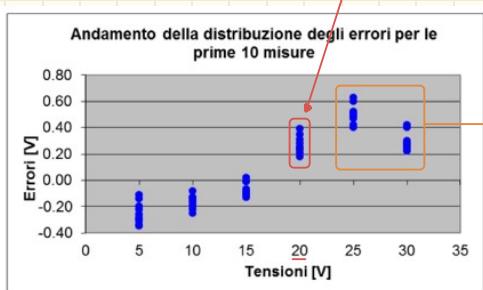
Utilità della Reg. nelle misure



Faccio 5 (N) misurazioni per ogni voltaggio (5,10,15,...,30V) in modo che il voltmetro da tarare segni sempre 20V; siccome è da tarare, segnerà valori diversi dal voltmetro campione (che segna il valore esatto della tensione). Possiamo quindi trovare l'errore (incertezze) i-esimo del voltmetro da tarare facendo la differenza tra V_c e V_x

Tabulazione dell'incertezza assoluta

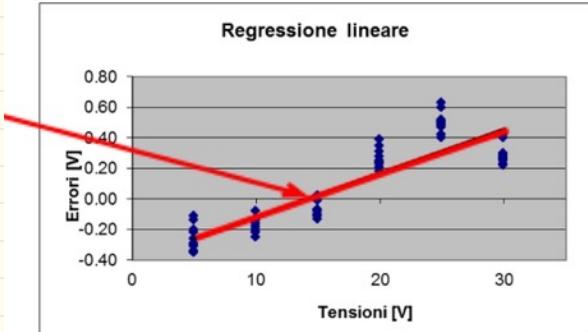
N	V _c		V _x		V _c =15V		V _x =20V		V _c =25V		V _x =30V	
	V _c	E _a	V _c	E _a	V _c	E _a	V _c	E _a	V _c	E _a	V _c	E _a
1	4.89	-0.11	9.86	-0.14	14.99	-0.01	20.25	0.25	25.40	0.40	30.22	0.22
2	4.66	-0.34	9.87	-0.13	14.99	-0.01	20.35	0.35	25.49	0.49	30.28	0.28
3	4.86	-0.14	9.78	-0.22	14.92	-0.08	20.39	0.39	25.42	0.42	30.25	0.25
4	4.71	-0.29	9.84	-0.16	14.90	-0.10	20.28	0.28	25.51	0.51	30.42	0.42
5	4.80	-0.20	9.75	-0.25	15.02	0.02	20.31	0.31	25.63	0.63	30.29	0.29



COSA ACCADE TRA 25V e 30V?

Possiamo basalmente fare la media delle incertezze per 25 e 30 e collegare linearmente le due medie

Regressione lineare



da retta Rossa l'equazione

$$\hat{Y}_i = B_0 + B_1 X_i$$

VALORI STIMATI
(RETTA)

Per ogni $X_i \in (5, 10, \dots, 30)$ esiste un ordinata \hat{Y}_i che NON conosco!

$$ES: X_0 = 10 \Rightarrow \hat{Y}_i(x_0) = B_0 + B_1 x_0$$

d'obiettivo e' rendere MINIMA la somma dei quadrati delle differenze tra i valori osservati Y_i (punti blu) e valori stimati \hat{Y}_i (Retta rossa)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n [Y_i - (B_0 + B_1 X_i)]^2 \quad (1)$$

INCognite

NOTi

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

incerteze

retta

Bo e B1 sono i coefficienti di regressione, ma come li trovo?

Imponendo le derivate parziali per Bo e B2 della (1) uguali a zero, abbiamo un sistema!

Minimi quadrati

$$\begin{cases} \frac{\partial (\sum_{i=1}^n [Y_i - (B_0 + B_1 X_i)]^2)}{\partial A} = \sum_{i=1}^n 2X_i(B_1 X_i + B_0 - Y_i) = 2 \sum_{i=1}^n (B_1 X_i^2 + B_0 X_i - X_i Y_i) \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n [Y_i - (B_0 + B_1 X_i)]^2}{\partial B} = \sum_{i=1}^n 2(B_1 X_i + B_0 - Y_i) = 2 \sum_{i=1}^n (B_1 X_i + B_0 - Y_i) \end{cases}$$

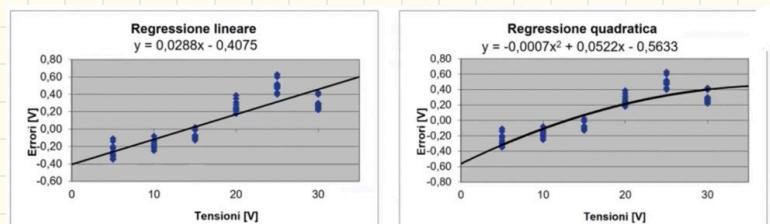
$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (B_1 X_i^2 + B_0 X_i - X_i Y_i) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (B_1 X_i + B_0 - Y_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 + B_0 \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n X_i Y_i \\ B_1 \sum_{i=1}^n X_i + n B_0 = \sum_{i=1}^n Y_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - (\sum_{i=1}^n X_i)(\sum_{i=1}^n Y_i)}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \\ B_0 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - B_1 \sum_{i=1}^n X_i}{n} \end{cases}$$

Ci permette di trovare i coefficienti

INTRODUZIONE EXCEL

Da 1:15

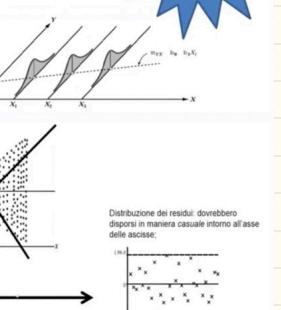


Il metodo dei minimi quadrati non conduce quasi mai a previsioni scive da errori.

Le differenze tra i valori osservati Y_i ed i valori stimati determinati dalla retta di regressione che indichiamo con \hat{Y}_i sono definiti errori e/o residui.

Le assunzioni per poter eseguire l'analisi della regressione richiedono:

- Distribuzione normale degli errori: gli errori devono avere, per ogni valore di X , una distribuzione normale. Il modello di regressione è comunque robusto rispetto a scostamenti dall'ipotesi di normalità
- Omoschedasticità: la variabilità degli errori è costante per ciascun valore di X .
- Indipendenza degli errori: gli errori devono essere indipendenti per ciascun valore di X



COEFFICIENTE DI DETERMINAZIONE R^2

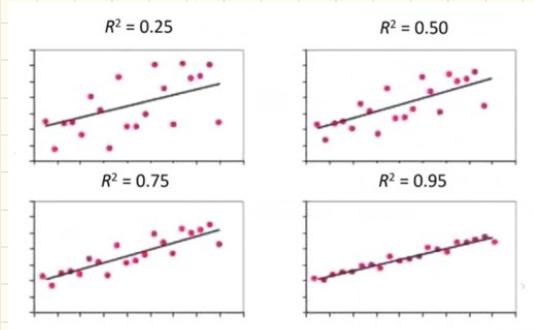
E' una Stima della "Bontà" della Regressione

$$R^2 \in [0, 1]$$

Se $R^2 \approx 1$ allora il modello di Reg è "BUONO".

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

INCERTEZZE
MEDIA (?)



Se i valori sono compatti lungo la regressione allora $R^2 \approx 1$ e il modello è Buono

PROBLEMI

Il coefficiente di determinazione presenta alcuni inconvenienti:

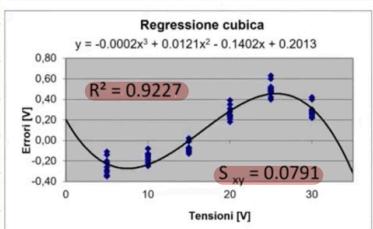
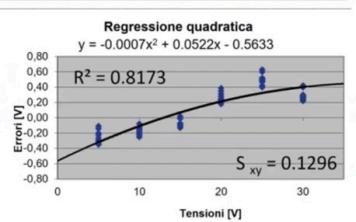
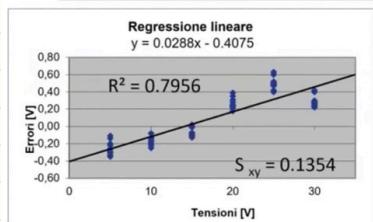
- può assumere valori elevati anche quando la relazione non è di tipo lineare;
- cresce sempre al crescere del numero dei regressori, pertanto non è un indicatore adeguato per il confronto tra modelli con un diverso numero di regressori.

ERRORE STANDARD DELLA STIMA

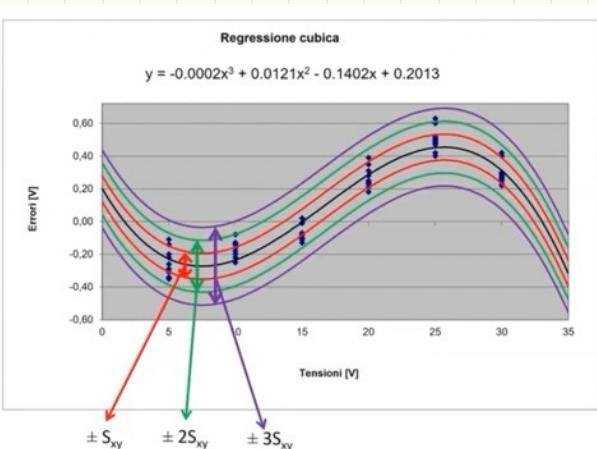
E' più sensibile alle variazioni dei dati:

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{n-2}}$$

Seguiamo il valore di S_{xy} Più BASSO



Confrontando i valori di R^2 e S_{xy} delle diverse regressioni calcolate, la migliore risulta quella cubica, ovvero quella con il valore di R^2 più grande e il valore di S_{xy} più piccolo.



* Scegliamo una reg. cubica. Possiamo tracciare le curve per $k = 1, 2, 3$ ($3 \leftrightarrow 99.7\%$)