

TRASFORMATE DI LAPLACE

ASCISSE DI CONVERGENZA

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ definita su $\mathbb{R}^+ \subset I \subset \mathbb{R}$

f è TRASFORMABILE secondo Laplace se $\exists s \in \mathbb{C} / f(x) e^{-sx} \in L^1(\mathbb{R}^+)$

\Rightarrow

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

INTEGRALE DI
LAPLACE

Se l'integrale converge per s_0 , allora converge anche per tutti gli $s \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$

L'insieme degli $s \in \mathbb{C}$ per cui l'integrale converge è un SEMIPIANO DESTRO di \mathbb{C} , definiamo

$$\sigma[f] = \inf \{ \operatorname{Re}(s), s \in \mathbb{C} \text{ tali che l'integrale converge} \}$$

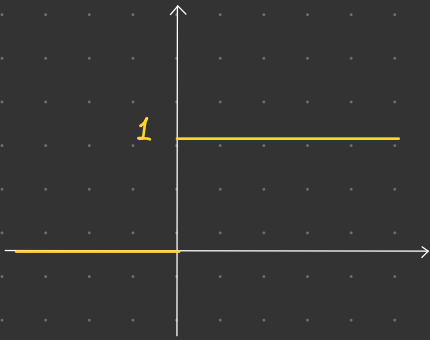
Ascissa di
convergenza di f

TRASFORMATA DI LAPLACE

È indicata con $\mathcal{L}[f]$ oppure $\hat{f}(s)$

TRASFORMATA delle funzioni elementari

Funzione Gradino



$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{Se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$H(x)$ è esponenziale di ordine zero:

$$H(x) \leq 1 \cdot e^{0x}$$

\rightarrow CONVERGE per $\operatorname{Re}(s) > 0$, $\sigma[H(x)] = \emptyset$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[H](s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = -\frac{e^{-sx}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Funzione esponenziale

$$f(x) = e^{ax} \quad \text{con } a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} dx = -\frac{e^{-(s-a)x}}{s-a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

Funzione Delta di Dirac

$$\mathcal{L}[f_h](s) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-hs}}{hs} & \text{Se } h \neq 0 \\ 1 & \text{Se } h = 0 \end{cases}$$

Funzione a intervallo \rightarrow rettangolare

Intervallo $H(x) - H(x-h)$ (s)

$$\text{per } s \neq 0 \rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \int_0^h e^{-sx} dx = \frac{1 - e^{-hs}}{s}$$

$$\text{per } s = 0 \rightarrow \mathcal{L}[f](0) = \int_0^h dx = h$$

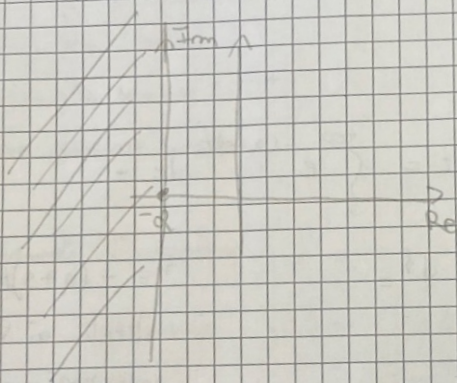
ASCISSA DI CONVERGENZA

Ascissa di convergenza

$$s = \sigma + j\omega$$

$$e^{-(\sigma + j\omega)t} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}$$

Calcolabile per $\sigma > -\alpha$



anche se non calcolabile è comunque valida in tutto il piano, tranne i punti singolari, ovvero poli e zeri

$$\mathcal{L}[\alpha f(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{L}[Ae^{-\alpha t}] = \frac{A}{s + \alpha}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}] &= \frac{A_1}{s + \alpha_1} + \frac{A_2}{s + \alpha_2} = \\ &= \frac{(A_1 + A_2)s + \alpha_2 A_1 + \alpha_1 A_2}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \end{aligned}$$

poli: $-\alpha_1$ e $-\alpha_2$

$$\text{Zero: } s = \frac{\alpha_2 A_1 + \alpha_1 A_2}{A_1 + A_2}$$

TEOREMA DI EULERO

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \sin(-\theta) = \cos(\theta) - j \sin(\theta)$$

INOLTRE

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta + \cos \theta - j \sin \theta = 2 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

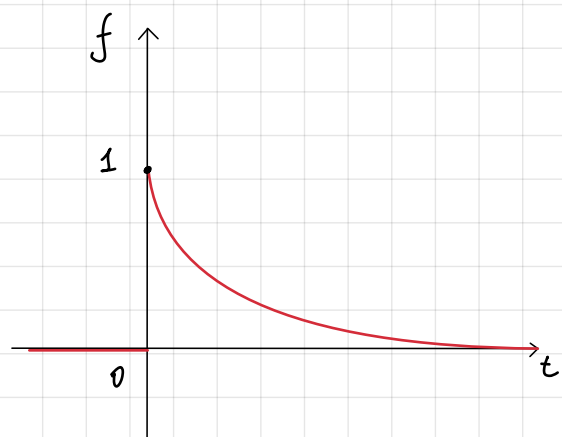
$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta - \cos \theta + j \sin \theta = 2j \sin \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

TRASFORMATA DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

FUNZIONE ESPONENZIALE

$$f(t) = e^{-at} \quad \text{con } a > 0, a \text{ reale, } t \geq 0 \quad f(t) = 0 \text{ per } t < 0$$



$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+s} \int_0^{\infty} e^{\varepsilon} d\varepsilon \quad \text{con } \varepsilon = -(a+s)t \\ &\quad \text{N.B. limiti di integ} \\ &= -\frac{1}{a+s} \left[e^{\varepsilon} \right]_0^{-\infty} = -\frac{1}{s+a} \quad F(s) \end{aligned}$$

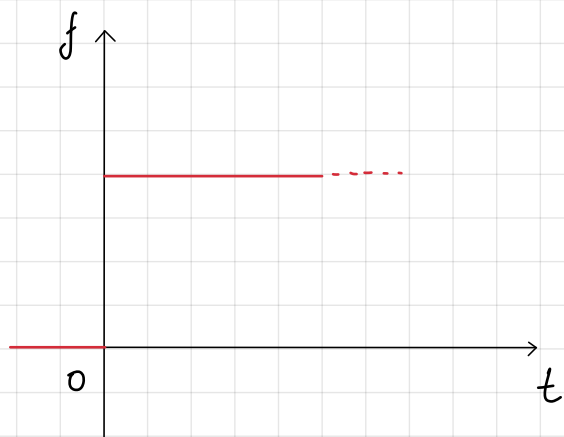
$\begin{matrix} -\infty & \downarrow & 0 \\ 0 & & 1 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

trasformata di Laplace
della funzione exp

FUNZIONE GRADINO

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{\varepsilon} d\varepsilon \quad \text{con } \varepsilon = -st \\ &= -\frac{1}{s} \left[e^{\varepsilon} \right]_0^{-\infty} = -\frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1] &= -\frac{1}{s} \\ \mathcal{L}[0] &= 0 \end{aligned}$$

TIME SHIFT

$$\mathcal{L}[f(t-t_0) \cdot 1(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\dots] = \int_0^{\infty} f(t-t_0) \cdot 1(t-t_0) \cdot e^{-st} dt$$

$$t_0 = t - \tau$$

↑

pongo $t - t_0 = \tau$

$$\Rightarrow \text{se } t \rightarrow 0 \Rightarrow \tau = -t_0$$

Sarebbe $+s\tau$??

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\dots] = \int_{-t_0}^{\infty} f(\tau) \cdot 1(\tau) e^{-s(t-\tau)} dt = e^{-st} \int_{-t_0}^{\infty} f(\tau) \cdot 1(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

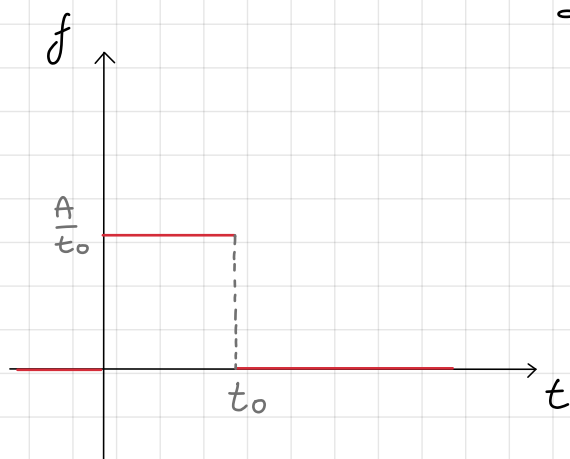
$-t_0$

fino a 0 e 0

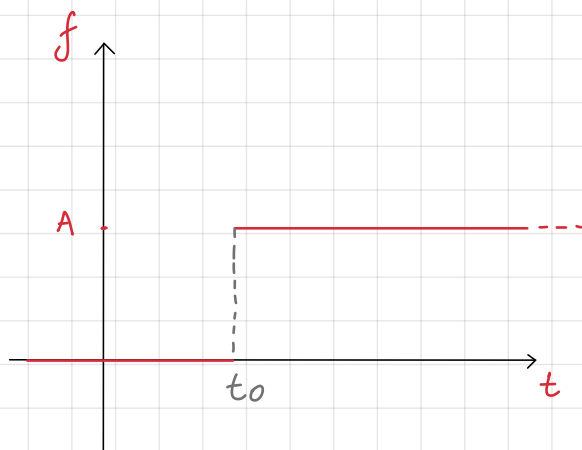
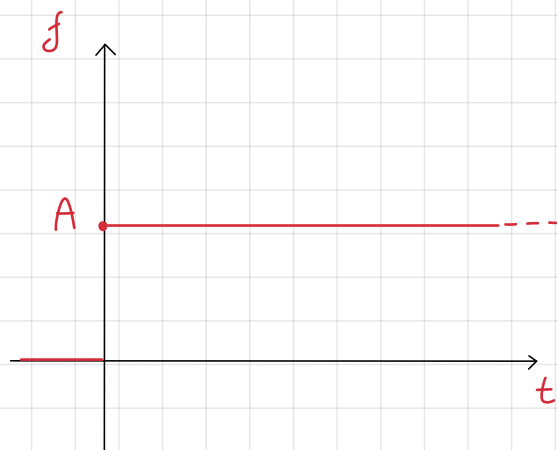
$$\Rightarrow \mathcal{L}[\dots] = e^{-st} \int_0^{\infty} f(\tau) \cdot 1(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} F(s)$$

QED

FUNZIONE FINESTRA



$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0} 1(t) - \frac{A}{t_0} 1(t-t_0)\right] \\ &= \frac{A}{t_0} (\mathcal{L}[1(t)] - \mathcal{L}[1(t-t_0)]) = \\ &= \frac{A}{t_0} \left(\frac{1}{s} - e^{-st_0} \frac{1}{s}\right) = \\ &= \frac{A}{st_0} (1 - e^{-st_0}) \end{aligned}$$



FINESTRA = Gradino - gradino ritardato (Anticipato?)