

Teorema del Valore finale

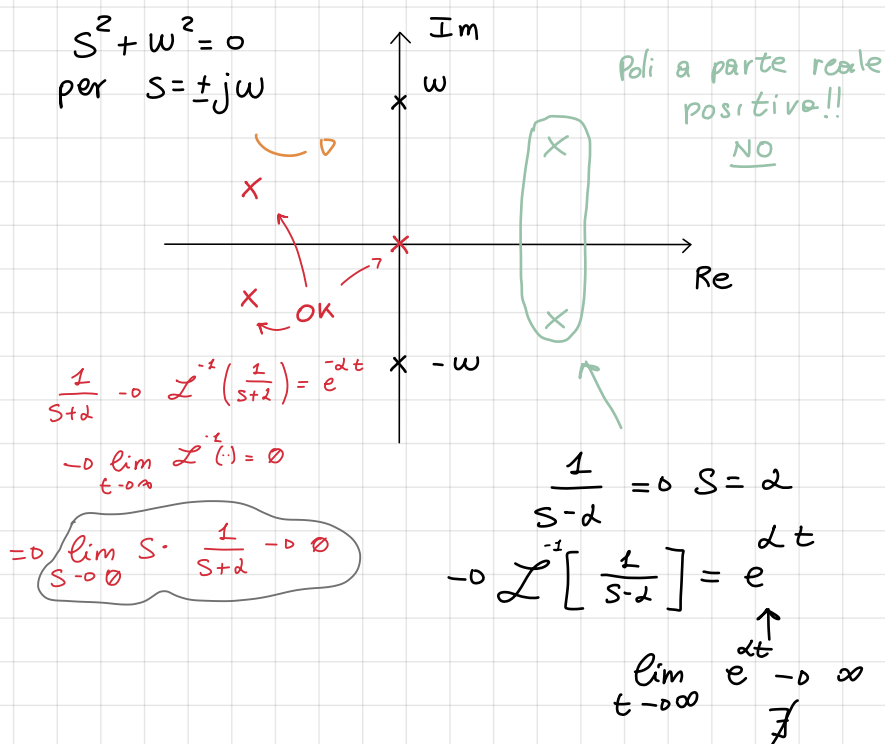
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

Se il limite tende a qualcosa

Questo teorema è utile perché potremmo voler trovare il valore finale di un sistema invece di calcolare come "ci arriva"

Non possiamo applicarlo per tutte quelle funzioni le quali hanno più di un polo sull'asse immaginario: ad esempio la funzione seno.

Possiamo invece applicarlo alla funzione gradino

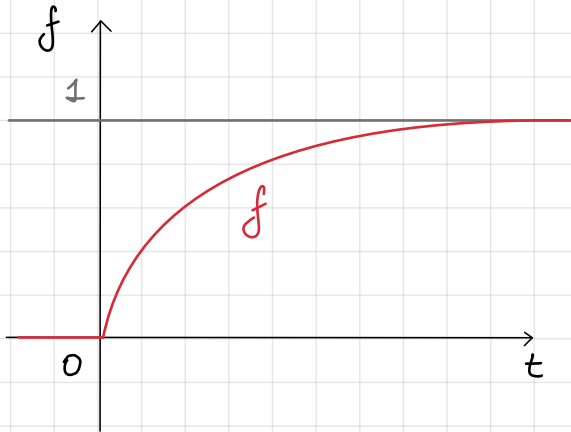


DIMOSTRAZIONE

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(f(0) + \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] \right) = f(0) + \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] \\ &= f(0) + \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = f(0) + \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt = f(0) + [f(t)]_0^{\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad \text{QED} \end{aligned}$$

ESERCIZIO Esempio

$$f(t) = (1 - e^{-3t}) \cdot \mathbb{1}(t) \quad \rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \rightarrow ?$$



(1) TRASFORMATA

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} = \frac{\cancel{s+3} - \cancel{s}}{s(s+3)} = \frac{3}{s(s+3)} = F(s)$$

(2) Teorema

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s(s+3)} \quad s \rightarrow 0 \quad \boxed{1}$$

Valore a cui
Tende la funzione

TEOREMA DEL VALORE INIZIALE

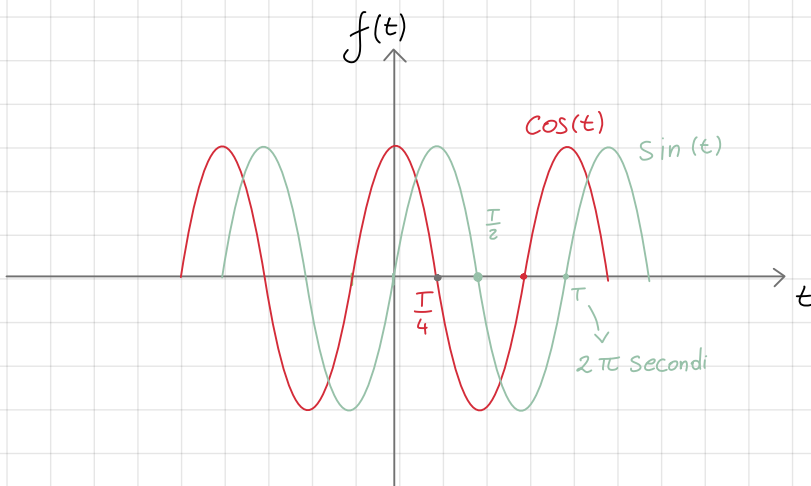
$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

DIMOSTRAZIONE

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] + f(0^+) \right) = f(0^+) + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = f(0^+)$$

QED

Esempio



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad ; \quad \omega t = \pi$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\omega t}{T} \Rightarrow \boxed{t = \frac{T}{2}}$$

periodico di $T = k\pi$

$$\Rightarrow t = k \frac{\pi}{2}$$

↑
Si Annulla

$$\text{ES } f = 50 \text{ Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{50} \text{ Sec} = 20 \text{ ms} \quad \rightarrow \text{Se } \omega = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi \text{ Sec}}$$

E' un TEMPO

ESEMPIO

$$1(t) \sin \omega t \Big|_{t=0^-} = 0$$

$$1(t) \cos \omega t \Big|_{t=0^+} = 1$$

ESEMPIO

$$\cos(\omega t) \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} = 1$$

Valore iniziale
del coseno

TEOREMA INTEGRALE REALE

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f(0)}{s}$$

$$f(0) = \int_0^t f(\tau) d\tau \Big|_{t=0}$$

DIMOSTRAZIONE

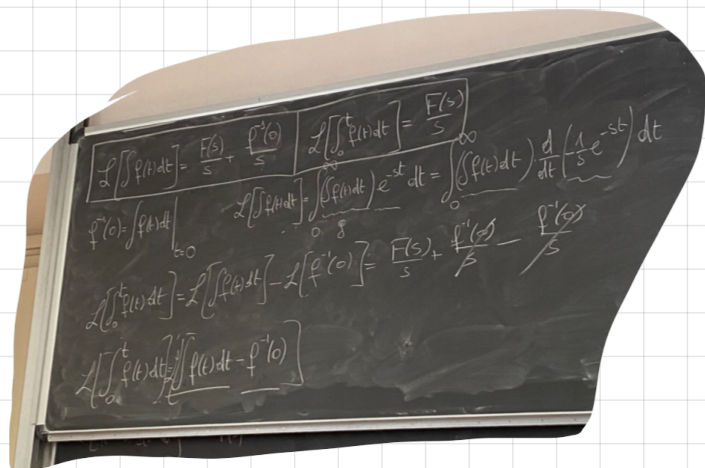
$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) \cdot \left(\frac{d}{dt} - \frac{1}{s} e^{-st} \right) dt \quad \text{PARTI} \\ &= \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \cdot -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(\tau) \cdot e^{-st} d\tau \\ &= \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} e^{-st} \int_0^t f(\tau) d\tau \Big|_{t=0} \quad \text{QED} \end{aligned}$$

Applico la Def

CASO PARTICOLARE

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s}$$

perche' $\int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau - f(0)$



Derivazioni nel dominio della variabile s (complessa)

$$\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)$$

DIMOSTRAZIONE

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t f(t) \cdot e^{-st} dt &= - \int_0^{\infty} f(t) \cdot \frac{d}{ds} e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= -\frac{d}{ds} F(s) \quad \text{QED} \end{aligned}$$

$\frac{d}{ds} e^{-st} = -te^{-st}$

ESEMPI

- $\mathcal{L}[3t \mathbb{1}(t)] = 3 \mathcal{L}[t \cdot \mathbb{1}(t)] = -3 \frac{d}{ds} \frac{1}{s} = \frac{3}{s^2}$
- $\mathcal{L}[t \cdot \sin(\omega t) \mathbb{1}(t)] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin(\omega t) \mathbb{1}(t)] = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) =$
 $= + \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$

• ES 25

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

Q: Valore iniziale
di f e f'
 $f(0^+)$ $f'(0^+)$

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \frac{2s^2+s}{s^2+s+1} \rightarrow 2$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s F(s) - f(0^+) = \frac{2s^2+s}{s^2+s+1} - 2 = \frac{2s^2+s - 2s^2 - 2s - 2}{s^2+s+1} = \frac{-s-2}{s^2+s+1} \stackrel{\hat{F}(s)}{=}$$

$$\Rightarrow f'(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{F}(s) = -1 \quad \text{Sol}$$

ANTI TRASFORMATA

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

IMPO
↓

SCOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI

ESEMPIO:

$$F(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

n POLI e m zeri

$$F(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{s + p_i}$$

Residuo i -esimo:
Associato al
polo

$$\rightarrow \int_1 \cdot \frac{1}{s + p_i} \Rightarrow f = z_i \cdot e^{-p_i t}$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{z_i}{s + p_i}\right] = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z_i}{s + p_i}\right] = \sum_{i=1}^n z_i \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + p_i}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n$$

DIMOSTRAZIONE RESIDUO

$$\lim_{s \rightarrow p_i} (s + p_i) F(s) = z_i$$

perché $\lim_{s \rightarrow p_k} (s + p_k) F(s) =$

$$= \lim_{s \rightarrow p_k} (s + p_k) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{s + p_i}$$

La sommatoria scompare perché
tutti i termini sono zero tranne
 $s + p_k$

Se ad esempio volessi calcolare il residuo del
Polo due, $k = 2$ ma la sommatoria scorre
sempre su tutti i poli

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow p_k} (s + p_k) \cdot \frac{z_k}{s + p_k} = z_k$$

QED

ESEMPIO

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

↑ Dimostrazione sopra

METODO 1. CON I LIMITI

(1) Radici Denom

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} \frac{-3+1}{2} = -1 \\ \frac{-3-1}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{z_1}{s+1} + \frac{z_2}{s+2}$$

(2) Trovo z_1 e z_2

(a) trovo z_1

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{s+2} = \frac{-1+3}{-1+2} = 2$$

\uparrow
 P_1

$$\left\{ \text{FORMA: } \sum_{i=1}^n z_i \mathcal{L} \left[\frac{1}{s+p_i} \right] \right\}$$

(b) trovo z_2

$$\lim_{s \rightarrow -2} \frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{s+1} = \frac{-2+3}{-2+1} = -1$$

\uparrow
 P_2

(3) Scrivo la TRASFORMATTA

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 2 \\ z_2 = -1 \end{array} \right\} \boxed{\frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}}$$

Metodo 2

mcm $\rightarrow (s+1)(s+2) \rightarrow$ Uguagliamo

DEVE

$$\frac{z_1(s+2) + z_2(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{(z_1+z_2)s + 2z_1 + z_2}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ 2z_1 + z_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = 1 - z_1 \\ -2z_1 + 1 - z_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = -1 \end{cases}$$

Spiegazione FINE CLIP 12

$$\Rightarrow f(t) = (2e^{-t} - e^{-2t}) \mathbb{1}(t)$$