

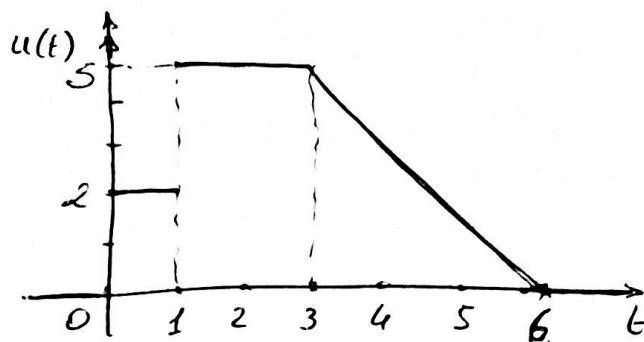
Esempio svolgimento esercizio risposta nel tempo

1/6

Data la funzione di trasferimento

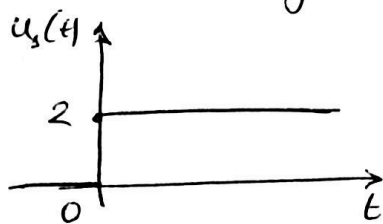
$$G(s) = \frac{1}{s + 1/2}$$

determinare la risposta all'ingresso rappresentato in figura.

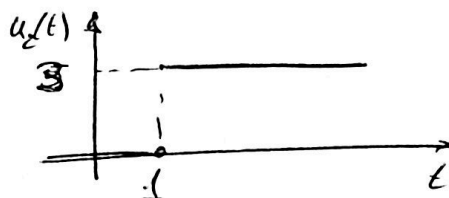


① Esprimere $u(t)$ come somma di segnali elementari

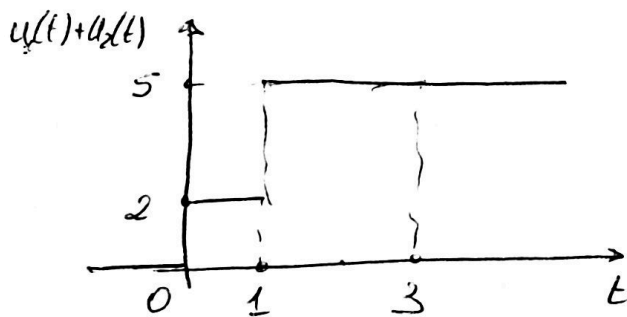
$$u_1(t) = 2 \cdot 1(t)$$



$$u_2(t) = 3 \cdot 1(t-1)$$



Da cui si ha



Dall'istante $t = 3$ in poi bisogna sommare una rampa decrescente con pendenza

$$\frac{u(t_2) - u(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 5}{6 - 3} = -\frac{5}{3}$$

da cui

$$u_3(t) = -\frac{5}{3} (t-3) \cdot 1(t-3)$$

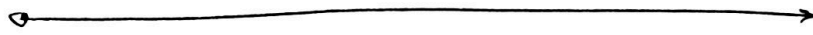
(2/6)

Per annullare il segnale per $t \geq 6$ bisogna aggiungere il segnale

$$u_4(t) = \frac{5}{3} (t-6) \cdot 1(t-6)$$

Il segnale $u(t)$ in figura è quindi dato da

$$u(t) = \sum_{i=1}^4 u_i(t)$$



②

Le trasformate di Laplace di segnali elementari sono:

$$U_1(s) = \frac{2}{s} \quad U_2(s) = \frac{3}{s} e^{-s} \quad U_3(s) = -\frac{5}{3s^2} e^{-3s}$$

$$U_4(s) = \frac{5}{3s^2} e^{-6s}$$

dove si sono usate le trasformate di Laplace del gradino, della rampa e il teorema del ritardo.



③

Dall'analisi dei segnali elementari la cui somma è il segnale d'ingresso si deduce che è conveniente considerare l'ingresso fittizio

$$\hat{u}(t) = t \cdot 1(t)$$

cioè una rampa con pendenza unitaria. Calcolando le corrispondenti uscite $\hat{y}(t)$ sarà poi possibile determinare tutte le uscite elementari $y_i(t)$, $i=1, \dots, 4$, e quindi sommandole l'uscita complessiva.

Quindi:

$$\hat{U}(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \hat{Y}(s) = G(s) \cdot \hat{U}(s) = \frac{1}{s^2(s+1/2)}$$

Scandizione in fattori semplici di $\hat{Y}(s)$

$$\frac{1}{s^2(s+1/2)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s^2} + \frac{r_3}{s+1/2}$$

$$r_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{1}{s^2(s+1/2)} = 2$$

$$r_3 = \lim_{s \rightarrow -1/2} (s+1/2) \cdot \frac{1}{s^2(s+1/2)} = 4$$

Per calcolare r_1 si opera per sostituzione

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(s+1/2)} &= \frac{r_1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s+1/2} = \frac{r_1 s(s+1/2) + 2(s+1/2) + 4s^2}{s^2(s+1/2)} = \\ &= \frac{(r_1+4)s^2 + (\frac{1}{2}r_1+2)s + 1}{s^2(s+1/2)} \end{aligned}$$

Da cui, dovendo annullarsi i termini al numeratore in s^2 ed in s , si ha $r_1 = -4$. Per cui

$$\hat{Y}(s) = -\frac{4}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s+1/2}$$

④ L'antitrasformata di Laplace di $\hat{Y}(s)$ è data da

$$\hat{y}(t) = -4 + 2t + 4e^{-t/2}, \quad t \geq 0$$

e $\hat{y}(t) = 0$ per $t < 0$.

④.a Il valore iniziale $e^{-} \hat{y}(0) = 0$ infatti

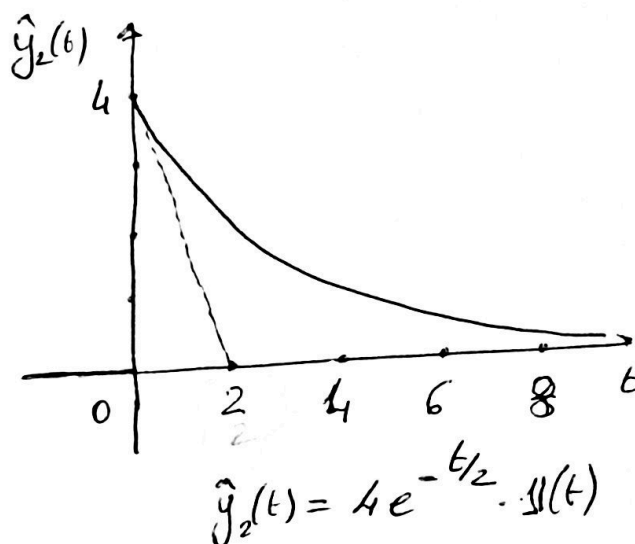
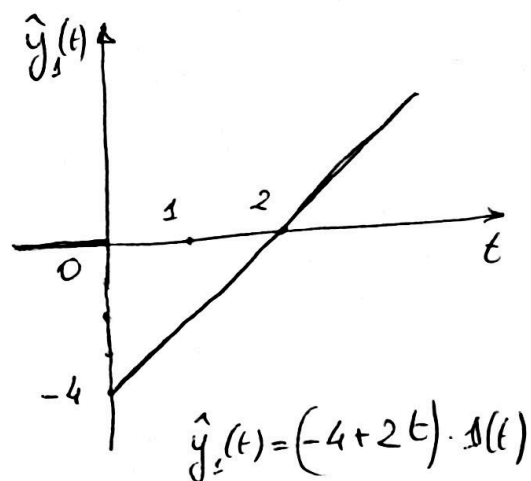
$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{1}{s^2(s+1/2)} = 0$$

Il valore finale è infinito, infatti (a cause della rampa)

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s^2(s+1/2)} = +\infty$$

Il modo esponenziale ha una costante di tempo di 2 sec 4/6
 e quindi un tempo di arrestamento all'1% di 8 sec.
 Non ci sono modi associati a poli complessi e coniugati.

(4.6)



(4.5)

Calcolate $\hat{y}(t)$, l'uscita e $u_1(t) = 2 \cdot 1(t)$ si può calcolare come

$$y_1(t) = 2 \cdot \frac{d}{dt} \hat{y}(t) = 2 \cdot (2 - 2e^{-t/2}) = 4(1 - e^{-t/2}) \quad \text{per } t \geq 0$$

L'uscita e $u_2(t) = 3 \cdot 1(t-1)$ si può calcolare come

$$y_2(t) = \frac{3}{2} \cdot y_1(t-1) = \frac{3}{2} \cdot 4 \left(1 - e^{-\frac{t-1}{2}}\right) = 6 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-1}{2}}\right) \quad \text{per } t \geq 1$$

e nulla per $t < 1$.

L'uscita e $u_3(t) = -\frac{5}{3}(t-3) \cdot 1(t-3)$ si può calcolare come

$$y_3(t) = -\frac{5}{3} \hat{y}(t-3) = -\frac{5}{3} \left(-4 + 2(t-3) + 4e^{-\frac{t-3}{2}}\right)$$

$$= \frac{20}{3} - \frac{10}{3}t + \frac{20}{3} + \frac{20}{3}e^{-\frac{t-3}{2}} = \frac{40}{3} \left(5 - t + 2e^{-\frac{t-3}{2}}\right) \quad \text{per } t \geq 3$$

e nulla per $t < 3$.

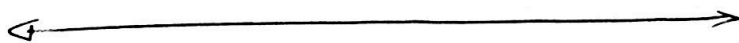
L'uscita è $u_4(t) = \frac{5}{3} (t-6) \cdot 1(t-6)$ si può calcolare come

5/6

$$y_4(t) = \frac{5}{3} \cdot \hat{y}(t-6) = \frac{5}{3} \left(-4 + 2(t-6) + 4e^{-\frac{t-6}{2}} \right)$$

$$= -\frac{20}{3} + \frac{10}{3}t - \frac{40}{3} + \frac{20}{3}e^{-\frac{t-6}{2}} = \frac{10}{3} \left(-8 + t + 2e^{-\frac{t-6}{2}} \right) \text{ per } t \geq 6$$

e nulla per $t < 6$.



⑥

La risposta complessiva può essere espressa considerando diversi intervalli di tempo.

Per $t \leq 0$ si ha $y(t) = 0$

Per $t \in [0, 1]$ si ha

$$y(t) = y_1(t) = 4(1 - e^{-t/2})$$

Per $t \in [1, 3]$ si ha

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 4(1 - e^{-t/2}) + 6(1 - e^{-\frac{t-1}{2}})$$

$$= 4 - 4e^{-t/2} + 6 - 6e^{1/2} \cdot e^{-t/2}$$

$$= 10 - (4 + 6\sqrt{e})e^{-t/2}$$

Per $t \in [3, 6]$ si ha

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = 10 - (4 + 6\sqrt{e})e^{-t/2} + \frac{10}{3} \left(-8 + t + 2e^{-\frac{t-3}{2}} \right)$$

$$= \frac{80}{3} - \frac{10}{3}t + \frac{20}{3}e^{3/2} \cdot e^{-t/2} - (4 + 6\sqrt{e})e^{-t/2}$$

$$= \frac{80}{3} - \frac{10}{3}t + \left(\frac{20}{3}\sqrt{e^3} + 4 + 6\sqrt{e} \right) e^{-t/2}$$

In fine, per $t \geq 6$ si ha

6/6

$$y(t) = \sum_{i=1}^4 y_i(t) = \sum_{i=1}^3 y_i(t) + y_4(t)$$

$$= \frac{80}{3} - \frac{10}{3}t + \left(\frac{2\sqrt{e^3} + 4 + 6\sqrt{e}}{3}\right)e^{-t/2} + \frac{80}{3} + \frac{10}{3}t + \frac{20}{3}e^{-\frac{t-6}{2}}$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{e^3} - 4 - 6\sqrt{e} + \frac{20}{3}e^3}{3}\right)e^{-t/2}$$

Quindi inizialmente, partendo da valore nullo $y(0)=0$, la risposta evolve secondo l'espressione di $y_1(t)$ e tenderebbe con un andamento tipico della risposta al gradino a un valore pari a 4.

All'istante $t=1$ l'ingresso ha una nuova variazione a gradino e, se nulla accadesse, tenderebbe al valore 10 come espresso da $y_1(t) + y_2(t)$.

All'istante $t=3$ parte una risposta simile a quella di un ingresso a rampa con espressione $y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$.

All'istante $t=6$ parte una evoluzione secondo un esponenziale decrescente con costante di tempo 2 s che tende a zero per t che tende all'infinito.

Qualitativamente l'andamento è in figura, che passa per i seguenti punti (t, y) : $(0, 0)$, $(1, 1.6)$, $(3, 6.9)$, $(6, 4.5)$.

