Proprietà della trasformata

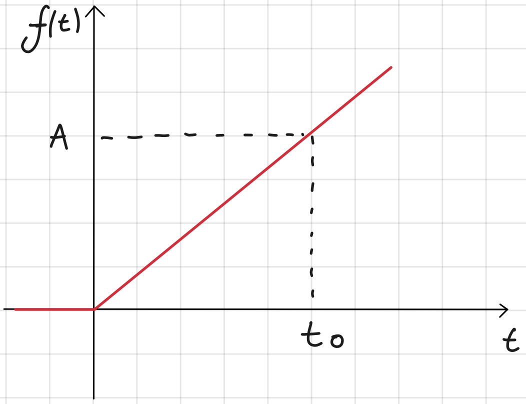
$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ Impulso

$\mathcal{L}[\Pi(t)] = \frac{1}{s}$ Gradino ($\Pi(t) \to \mathbb{1}(t)$)

$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot \Pi(t)] = \frac{1}{s+\alpha}$ EXP

$\mathcal{L}[f(t-t_0)\,\Pi(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s)$ Time Shift

Funzione RAMPA



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{A}{t_0}\, t & t \geq 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che la $\mathcal{L}$ è LINEARE

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2]$$

$\mathcal{L}[f_1] = F_1(s)$, $\mathcal{L}[f_2] = F_2(s)$

→ Dalla proprietà

A è un coefficiente → $\frac{A}{t_0} = \alpha$ → Calcolo solo $\mathcal{L}$ del resto della funzione

$$\to \mathcal{L}[t \cdot \mathbb{1}(t)] = \int_0^\infty \underset{g}{t}\, \mathbb{1}(t)\, \overset{\frac{df}{dt}}{e^{-st}}\, dt =$$

Funzione gradino ($\mathbb{1}(t)$) — Per parti

proof — Scelgo $f(t) = -\frac{e^{-st}}{s}$

$\frac{df}{dt} = \frac{1}{s} \cdot (\cancel{-s}) \cdot (\cancel{-} e^{-st}) = e^{-st}$ QED

$$\int_a^b \frac{df}{dt} \cdot g(t)\, dt = \left[f(t)\, g(t)\right]_a^b - \int f(t) \frac{dg}{dt}\, dt$$

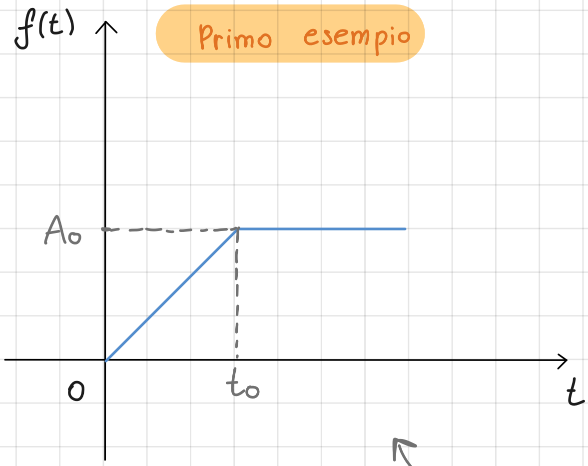
$$\Rightarrow \mathcal{L}[\dots] = \left[-t \cdot \frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-st}}{s}\, dt = \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^\infty$$

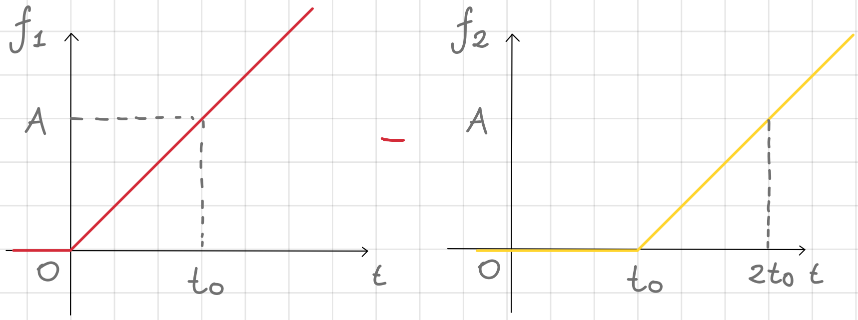
$$\Rightarrow \mathcal{L}[\dots] = \frac{1}{s^2}$$

Trasformata della funzione Rampa

Trasformate di segnali Composti

Primo esempio





Per regolare i sistemi si utilizza un segnale che inizialmente cresce **gradualmente**, proprio come nel caso di questo segnale.

Alcuni sistemi, quando vengono **sovrasollecitati**, iniziano ad *oscillare*, andando a non performare correttamente (male); un' analogia è quella dell'accelerazione dell'auto, quando c'è uno slittamento delle ruote, la partenza è peggiore.

La **pendenza** della retta iniziale viene decisa a seconda della **condizione del sistema**; andiamo quindi a valutare le condizioni e poi decidiamo come sollecitare il sistema

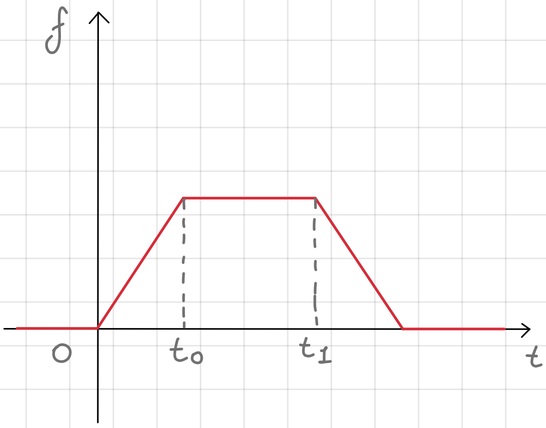
Per la linearità

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{A}{t_0} t \; 1(t) - \frac{A}{t_0}(t - t_0) \cdot 1(t - t_0)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A}{t_0}\left[\underbrace{\frac{1}{s^2}}_{F(\text{Rampa})} - \underbrace{e^{-st_0} \cdot \frac{1}{s^2}}_{F(\text{Rampa ritardato})}\right] = \underbrace{\frac{A}{t_0}\left(1 - e^{-st_0}\right)\frac{1}{s^2}}_{F(t)}$$

Secondo esempio



$$F_1(s) = \frac{A}{s^2}\left(1 - e^{-st}\right)$$

$$f_2(t) = \frac{A}{t_2 - t_1}(t - t_1)\, 1\!\!1(t - t_1)$$

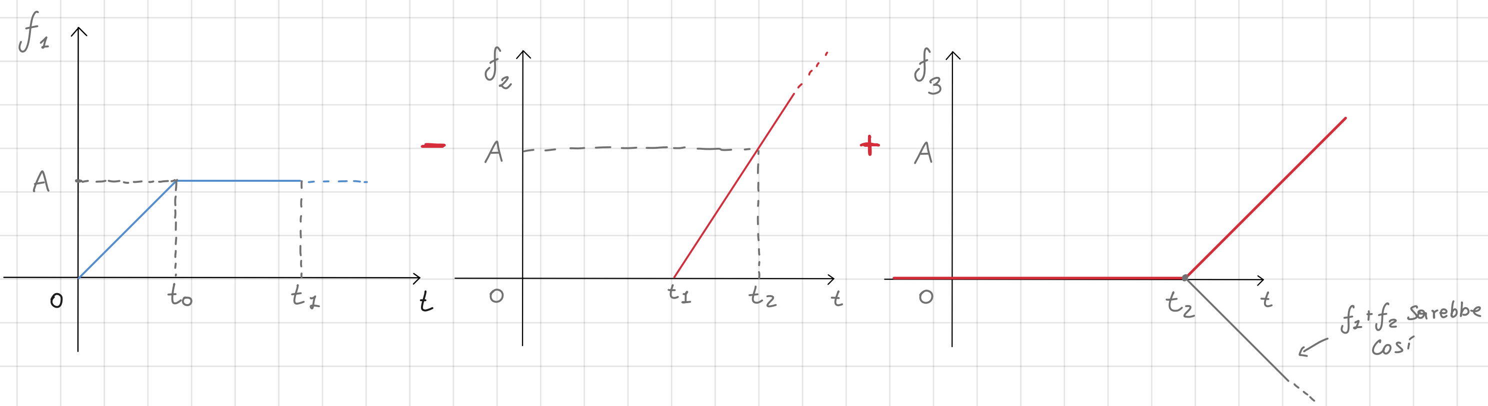
$$\Rightarrow F_2(s) = \frac{A}{s^2} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} e^{-st_1}$$

$$f_3(t) = \frac{A}{t_2 - t_1}(t - t_2)\, 1\!\!1(t - t_2)$$

$$\Rightarrow F_3(s) = \frac{A}{s^2} \frac{1}{t_2 - t_1} e^{-st_2}$$

$$\Rightarrow f(t) = f_1 + f_2 + f_3$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A}{s^2}\left(\frac{1 - e^{-st_0}}{t_0} - \frac{1}{t_2 - t_1} e^{-st_1} + \frac{1}{t_2 - t_1} e^{-st_2}\right)$$

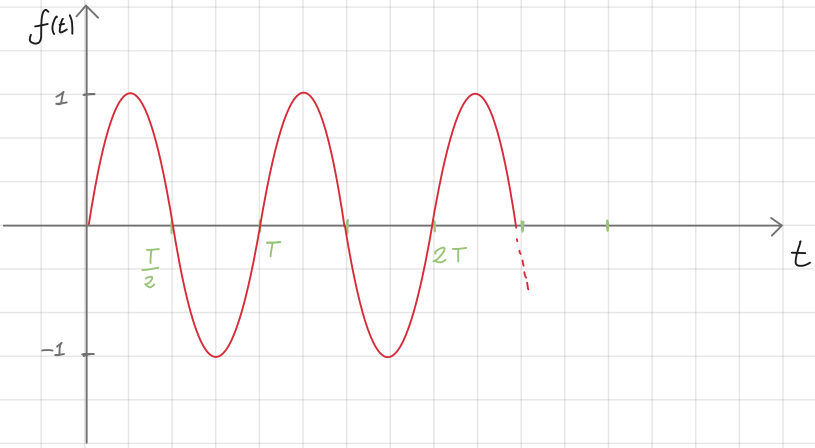


Trasformata della sinusoidale

$$f(t) = \sin(\omega t) \cdot \mathbb{1}(t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega t = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2\pi} T = \frac{T}{2}$$ Si Annulla



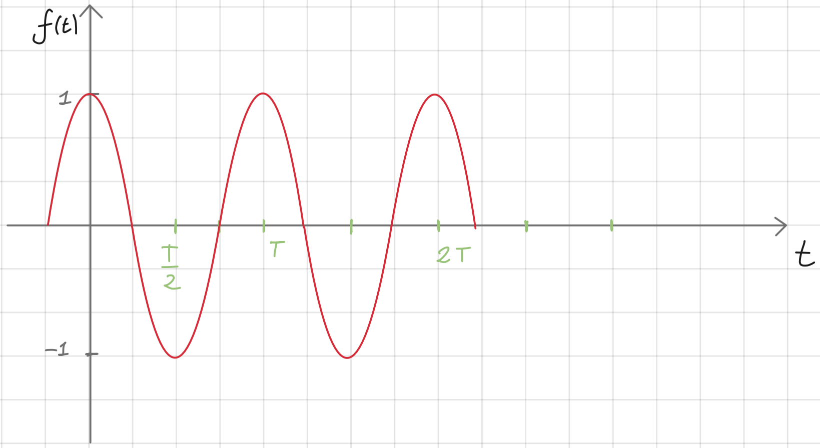
$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \Rightarrow \mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\,\mathbb{1}(t)\right] = \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}\left[e^{j\omega t}\cdot \mathbb{1}(t)\right] - \mathcal{L}\left[e^{-j\omega t}\cdot \mathbb{1}(t)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2j}}\left(\frac{\overset{\cancel{2j}\omega}{\cancel{s}+\cancel{j}\omega - \cancel{s}+\cancel{j}\omega}}{(s-j\omega)(s+j\omega)}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$z \cdot z'$$

Trasformata della cosinusoidale



$$\mathcal{L}\left[\cos\omega t \; 1(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\overset{\cancel{2}s}{s+\cancel{j\omega} - s - \cancel{j\omega}}}{\underset{\cancel{z}+\cancel{z}}{(s-j\omega)(s+j\omega)}}$$

$$= \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\sin(\omega t + \theta) = \sin(\omega t)\cos(\theta) + \cos(\omega t)\sin(\theta) = 0$$ LINEARITA'

PROPRIETA' : moltiplicazione per esponenziale

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot f(t)] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot f(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-(s+\alpha)t} dt = F(s+\alpha)$$

Definizione

Funzione

Trasformata

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot f(t)] = F(s+\alpha)}$$

ESEMPI

- $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t \; \mathbb{1}(t)] = \dfrac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
- $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \; \mathbb{1}(t)] = \dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
- $\mathcal{L}[t \cdot e^{-3t} \; \mathbb{1}(t)] = \dfrac{1}{(s+3)^2}$

α

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = s\cdot F(s) - f(0)}$$

$$F(s) = \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt = \left[f(t)\cdot e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\cdot\left(-s e^{-st}\right) dt =$$

$$= -f(0) + s\underbrace{\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\, dt}_{F(s)} = -f(0) + s F(s) \quad \text{QED}$$

Esempio 1

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\,\mathbb{1}(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\sin(\omega t)\right] = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\left[\left(\frac{d}{dt}\sin(\omega t)\right)\mathbb{1}(t)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\omega}}\left(s\cdot\frac{\cancel{\omega}}{s^2+\omega^2} - 0\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{QED}$$

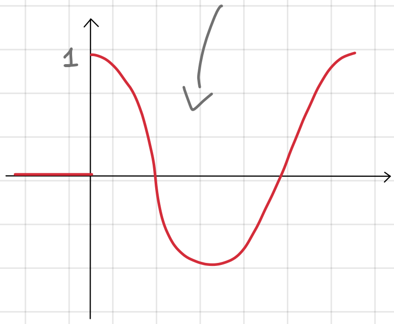
Esempio 2

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\,\mathbb{1}(t)\right] = \mathcal{L}\left[-\frac{1}{\omega}\cdot\frac{d}{dt}\cos(\omega t)\,\mathbb{1}(t)\right] = -\frac{1}{\omega}s\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2} - \cos(0)$$

(1) ? → 1

Discontinuità

$$= -\frac{1}{\omega}\,\frac{\cancel{s^2}-\cancel{s^2}-\omega^2}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$



Per rappresentare la derivata di una funzione discontinua utilizziamo **L' impulso di Dirac,** che viene rappresentato mediante una **freccia** che ha origine nel l'unto di discontinuità ed ha lunghezza pari all'area

- $\mathcal{L}_+\left[f(t)\right] = \int_{0^+}^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$
- $\mathcal{L}_-\left[f(t)\right] = \int_{0^-} f(t)\, e^{-st}\, dt$

Quando $\mathcal{L}_+ \neq \mathcal{L}_-$?

$$\mathcal{L}_+\left[f(t)\right] = \int_{0^+}^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{0^+} f(t)\, e^{-st}\, dt + \underbrace{\int_{0^+}^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt}_{\mathcal{L}_+}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_+[f(t)] + \int_{0^-}^{0^+} \overset{\delta(t)}{f(t)} e^{-st}\,dt$$

L'intervallo è un PUNTO

Definizione di IMPULSO

$\rightarrow$ Se $f(t) = \delta(t) \rightarrow \mathcal{L}_+ \neq \mathcal{L}_-$

$\Rightarrow$ Il valore trovato al punto (1) è $\mathcal{L}_+$

PROPRIETA' DELLA DERIVATA IN CASCATA : Derivata Seconda

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{d}{dt} f(t)}_{g}\right)\right]$$

$$\rightarrow g(t) = \frac{df}{dt} \Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{dg}{dt}\right] = s\,G(s) - g(0)$$

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt} f(t)\right] = s\left(sF(s) - f(0)\right) - g(0) = s^2 F(s) - s f(0) - \dot{f}(0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt} f(t)\right] = s^2 F(s) - s f(0) - \dot{f}(0)}$$

Se $f(0) = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n F(s)}$

E tutte le sue derivate in 0 sono zero