

# Prova scritta di Sistemi Dinamici

30 dicembre 2023

## Esercizio 1: risposta nel tempo

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s + 0.2}{s^2 + s + 1} \quad (1)$$

e l'ingresso  $u(t)$  definito da

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & t \in [0, 3] \\ 0 & t \geq 3 \end{cases} \quad (2)$$

determinare:

1. L'espressione di  $u(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t)$  con  $n$  opportuno in modo che ciascun segnale  $u_i(t)$  abbia una trasformata di Laplace nota e tracciare gli andamenti di  $u_i(t)$  per  $i = 1, \dots, n$ .
2. Determinare la trasformata di Laplace  $U_i(s)$  di ciascun segnale  $u_i(t)$ , per  $i = 1, \dots, n$ .
3. Individuare gli opportuni segnali  $\hat{u}_j(t)$ , con  $j = 1, \dots, m$ , che consentono poi di calcolare in maniera semplice tutte le trasformate di Laplace delle uscite  $y_i(t)$  ai segnali  $u_i(t)$ . Calcolare le trasformate di Laplace  $\hat{Y}_j(s) = G(s)\hat{U}_j(s)$ , per  $j = 1, \dots, m$ , utilizzando la scomposizione in fratti semplici.
4. Calcolare le anti-trasformate di Laplace  $\hat{y}_j(t)$  per ciascuna  $\hat{Y}_j(s)$ , per  $j = 1, \dots, m$ . Per ciascun modo tracciare e discutere l'andamento nel tempo.
5. Calcolare analiticamente l'uscita  $y_i(t)$  a ciascun ingresso  $u_i(t)$ , per  $i = 1, \dots, n$ .
6. Calcolare l'uscita  $y(t)$  all'ingresso  $u(t)$  e fare eventuali considerazioni sull'andamento di  $y(t)$ .

## Esercizio 1: risposta nel tempo

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s + 0.2}{s^2 + s + 1} \quad (1)$$

e l'ingresso  $u(t)$  definito da

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & t \in [0, 3] \\ 0 & t \geq 3 \end{cases} \quad (2)$$

$$G(s) = \frac{s + 0.2}{s^2 + s + 1}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 3 \end{cases}$$

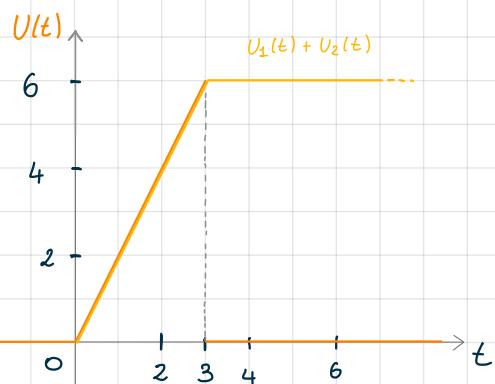
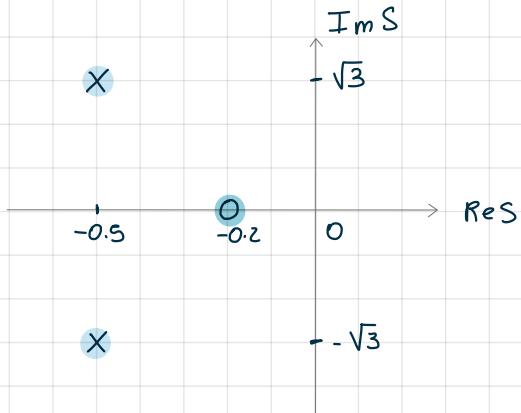
### - OP PRELIMINARI

#### (a) Poli e zeri

$$\text{Z : } s + 0.2 = 0 \Rightarrow \bar{s} = -0.2$$

$$P : s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow P_1 = -\frac{1}{2} + j\sqrt{3} \quad P_2 = -\frac{1}{2} - j\sqrt{3}$$

complx e conj



#### 1) Segnali elementari

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1(t) = 2t \cdot \mathbb{1}(t) \\ U_2(t) = -2(t-3) \cdot \mathbb{1}(t-3) \\ U_3(t) = -6 \cdot \mathbb{1}(t-3) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_1(s) = 2 \cdot \frac{1}{s^2} \\ U_2(s) = -2 \cdot \frac{1}{s^2} \cdot e^{-3s} \\ U_3(s) = -6 \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-3s} \end{array} \right. \quad (2)$$

#### 3) Segnali Fittizi

Sceglio come segnale fittizio il segnale:  $\hat{U}(t) = t \cdot \mathbb{1}(t) \Rightarrow \hat{U}(s) = \frac{1}{s^2}$

#### 3.1) Trovo $\hat{Y}(s)$

$$\hat{Y}(s) = U(s) \cdot G(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s + 0.2}{s^2 + s + 1} = \frac{\zeta_1}{s} + \frac{\zeta_2}{s^2} + \frac{\zeta_3 + \zeta_4 s}{s^2 + s + 1}$$

#### 3.2) Fatti Semplici

3.3) Trovo i residui Partendo dal grado maggiore:

$$\xi_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{s^2 + 2}{s^2(s^2 + s + 1)} \rightarrow \xi_2 = 0.2 \quad \xi_2$$

Trovo gli altri residui dal sys di eq, considerando solo il num.

$$\hat{y}(s) = \frac{\xi_1 s(s^2 + s + 1) + \xi_2(s^2 + s + 1) + \xi_3 s^2 + \xi_4 s^3}{s^2(s^2 + s + 1)} \rightarrow \begin{cases} (1) \xi_3(\xi_1 + \xi_4) = 0 \\ (2) \xi^2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = 0 \\ (3) s(\xi_1 + \xi_2) = 1 \\ (4) \xi_2 = 0.2 \end{cases}$$

dalla (3)  $\rightarrow \xi_1 = -\xi_2 + 1 = 0.8 \quad \xi_1$

dalla (2)  $\rightarrow \xi_3 = -(\xi_1 + \xi_2) = -1 \quad \xi_3$

dalla (1)  $\rightarrow \xi_4 = -\xi_1 = -0.8 \quad \xi_4$

3.4) Riscrivo  $\hat{y}(s)$  per Antitrasformare

Forma Standard:  $\frac{W_d}{(s + j\omega_n)^2 + W_d^2}$  ma io ho:  $\frac{\xi_3 + \xi_4 s}{s^2 + s + 1}$

#### • Termine Quadratico

$$(s + j\omega_n)^2 = s^2 + 2j\omega_n s + (\omega_n)^2 = s^2 + s + 1 \rightarrow \begin{cases} 2j\omega_n = 1 \\ (\omega_n)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow j\omega_n = \frac{1}{2} \Rightarrow (s + j\omega_n)^2 = (s + \frac{1}{2})^2 = s^2 + s + \frac{1}{4} \quad \text{dovrei avere 1}$$

#### • Termine noto

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} W_d^2$$

$$\Rightarrow s^2 + s + 1 = (s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{\xi_1}{s} + \frac{\xi_2}{s^2} + \frac{\xi_3 + \xi_4 s}{s^2 + s + 1} = \frac{\xi_1}{s} + \frac{\xi_2}{s^2} + \frac{\xi_3 + \xi_4 s}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \quad (A)$$

Da scrivere come  
Sin + Cos

Considero solo (A)

$$\begin{aligned} &= \frac{\xi_3 + \xi_4 s}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \xi_4 \frac{\frac{\xi_3}{\xi_4} + s}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \xi_4 \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \xi_4 \left( \frac{\xi_3}{\xi_4} \right) \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \xi_4 \cdot \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{\xi_4 \left( \frac{\xi_3}{\xi_4} - \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Siccome  $W_d^2 = \frac{3}{4}$   $\Rightarrow W_d = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0.87$

$$\zeta_1 \cdot 1(t) \quad \zeta_2 \cdot t \cdot 1(t)$$

$\Rightarrow$  Considero anche  $\frac{\zeta_1}{S} + \frac{\zeta_2}{S^2}$

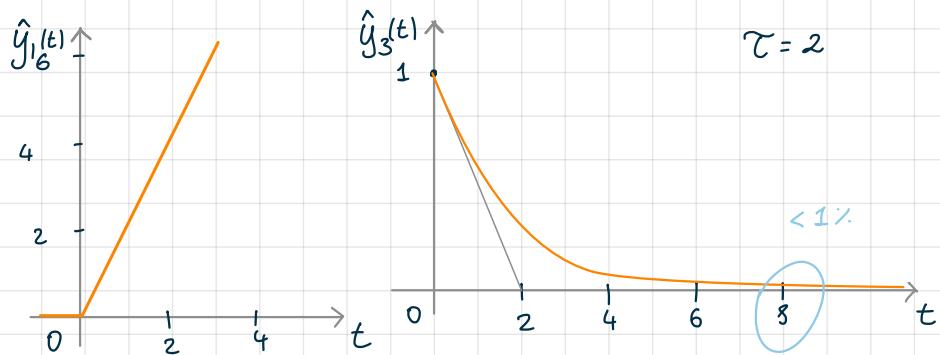
(4)

$$\Rightarrow \hat{y}(t) = [\zeta_1 + \zeta_2 t + \zeta_4 \cos(0.87t) \cdot e^{-\frac{t}{2}} - 1.62 \sin(0.87t) \cdot e^{-\frac{t}{2}}] \cdot 1(t)$$

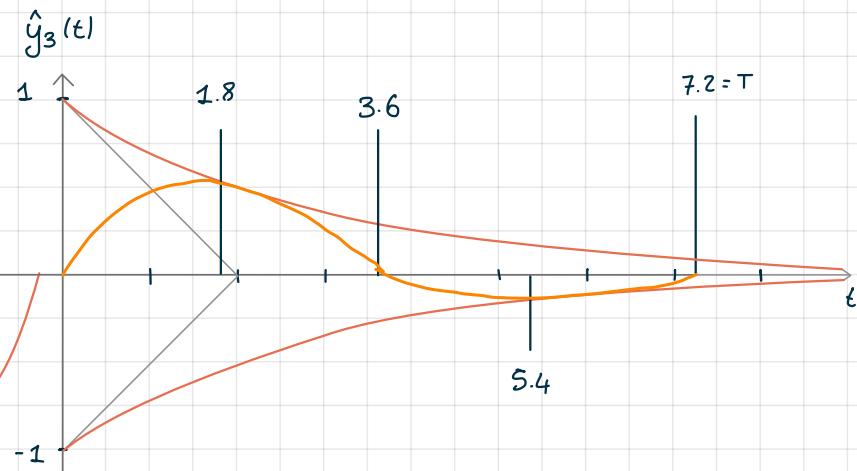
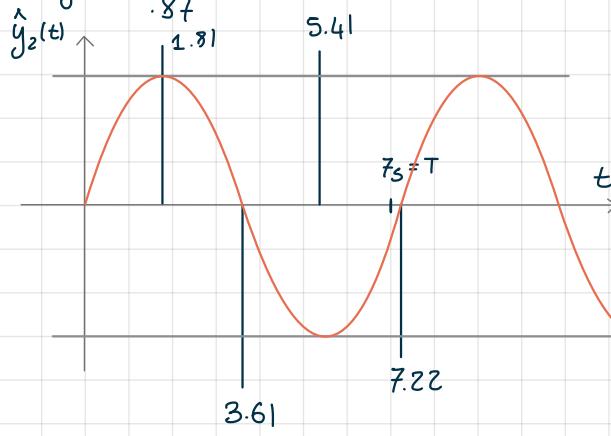
#### 4.1) Disegno dei Modi

Possiamo identificare i seguenti modi "Notevoli"

- $\hat{y}_1(t) = \zeta_2 t \cdot 1(t)$
- $\hat{y}_2(t) = \sin(0.87t)$
- $\hat{y}_3(t) = e^{-\frac{t}{2}}$
- $y_4(t) = \sin(0.87t) \cdot e^{-\frac{t}{2}}$



$$T_{y_2} = \frac{2\pi}{0.87} = 7.22$$



#### 5) Segnali Reali

$$\begin{cases} y_1(t) = 2 \cdot \hat{y}_1(t) \cdot 1(t) \\ y_2(t) = -2 \cdot \hat{y}_2(t-3) \cdot 1(t-3) \\ y_3(t) = -6 \cdot \frac{d}{dt} \hat{y}_3(t-3) \cdot 1(t-3) = -6 \left[ \zeta_2 - \zeta_4 \cdot 0.87 \cdot \sin(0.87(t-3)) \cdot e^{-\frac{t-3}{2}} - \frac{\zeta_4}{2} \cos(0.87(t-3)) e^{-\frac{t-3}{2}} - 1.62 \cdot 0.87 \cos(0.87(t-3)) e^{-\frac{t-3}{2}} + \frac{1.62}{2} \sin(0.87(t-3)) e^{-\frac{t-3}{2}} \right] \end{cases}$$

## (6) Considerazioni

$$\hat{Y}(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s+2}{s^2+s+1}$$

Valore iniziale

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \hat{Y}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{s+2}{s^2(s^2+s+1)} = \frac{s(s+2)}{s^2(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2})} \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{} \frac{1}{s} \quad \text{Valore iniziale}$$

Segnali in ingresso

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2t & 0 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(t) = 2t \cdot u(t) \\ v_2(t) = -2(t-3) \cdot u(t-3) \\ v_3(t) = -6 \cdot u(t-3) \end{cases}$$

Il primo segnale è una rampa di pendenza 2, anche l'uscita tenderà a seguire l'entrata.  $\rightarrow$  Tende a  $+\infty$  lungo la retta  $y(t) = c_1 + c_2 t$   
Il II° segnale subentra a  $t = 3$

$$\rightarrow y(t=3) = 2 \hat{y}_1(t=3) = 1.063$$

Tempo A regime

$\hat{y}(t)$  ha due exp che si esauriscono dopo  $4/5 \tau$

$$\exp_1 = \exp_2 = e^{-\frac{t}{2}} \rightarrow \tau = 2 \Rightarrow \text{Tempo A regime} \approx 8s / 10s$$

## Esercizio 2: risposta in frequenza

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+0.2)^2(s+7)} \quad (3)$$

4

### 1) FORMA STANDARD

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=1}^n \left(1 + sT_i\right)} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{\left[0.2(1+5s)\right]^2 \cdot \frac{1}{7}(1+\frac{1}{7}s)} = \frac{1}{\left(1+5s\right)^2 \left(1+\frac{1}{7}s\right)} \quad \text{Valore iniziale}$$

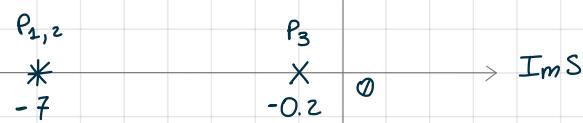
#### 1.1) Poli e zeri

No Zeri

$$\text{Poli: } (1+5s)^2 \rightarrow \begin{array}{l} \text{DOPPIO} \\ \bar{s} = -\frac{1}{5} \\ P_{1,2} \end{array}$$

$$P_3: \bar{s} = -\frac{1}{7} \quad \text{Singolo}$$

↑ Re s



#### 2) Punti di Rottura

- $\omega_{1,2} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ rad/s}$
- $\omega_3 = \frac{1}{7} \text{ rad/s}$

#### 3) Banda

$$\omega \in [10^{-2}; 10^2] \text{ rad/s}$$

#### 4) Andamenti iniziali e finali

MODULI

$$\text{INIZIALE: } G(0) = \frac{25}{7} \rightarrow |G(0)|_{dB} = 20 \log(3.57) = 11 \text{ dB}$$

$$\text{FINALE: } 3 \text{ POLI} \rightarrow -60 \text{ dB/dec} \quad W > w_3$$

|...|dB

FASI

INIZIALE: No zeri, 3 poli semplici  $\rightarrow$  Ritardata di  $3 \cdot 90^\circ$

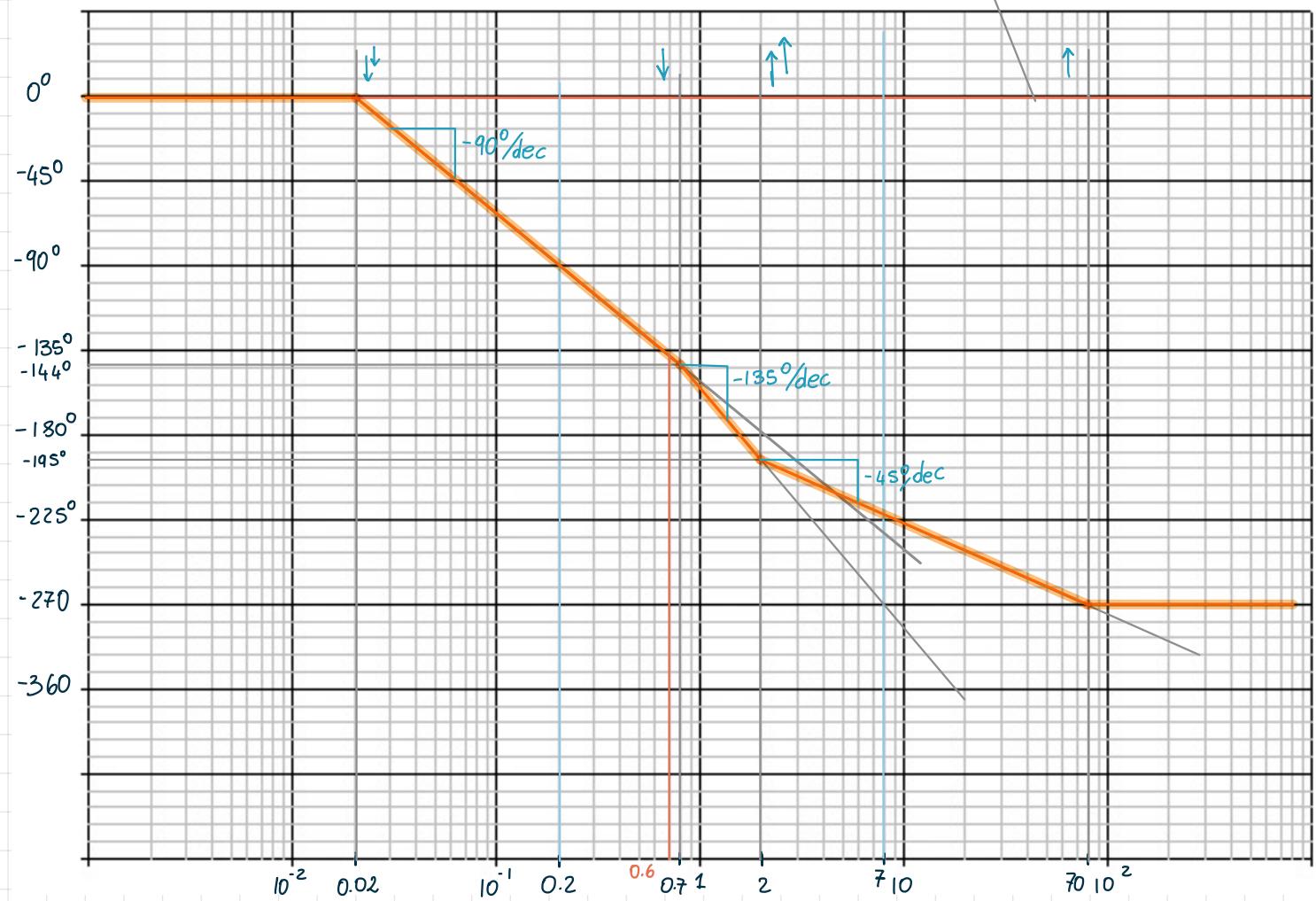
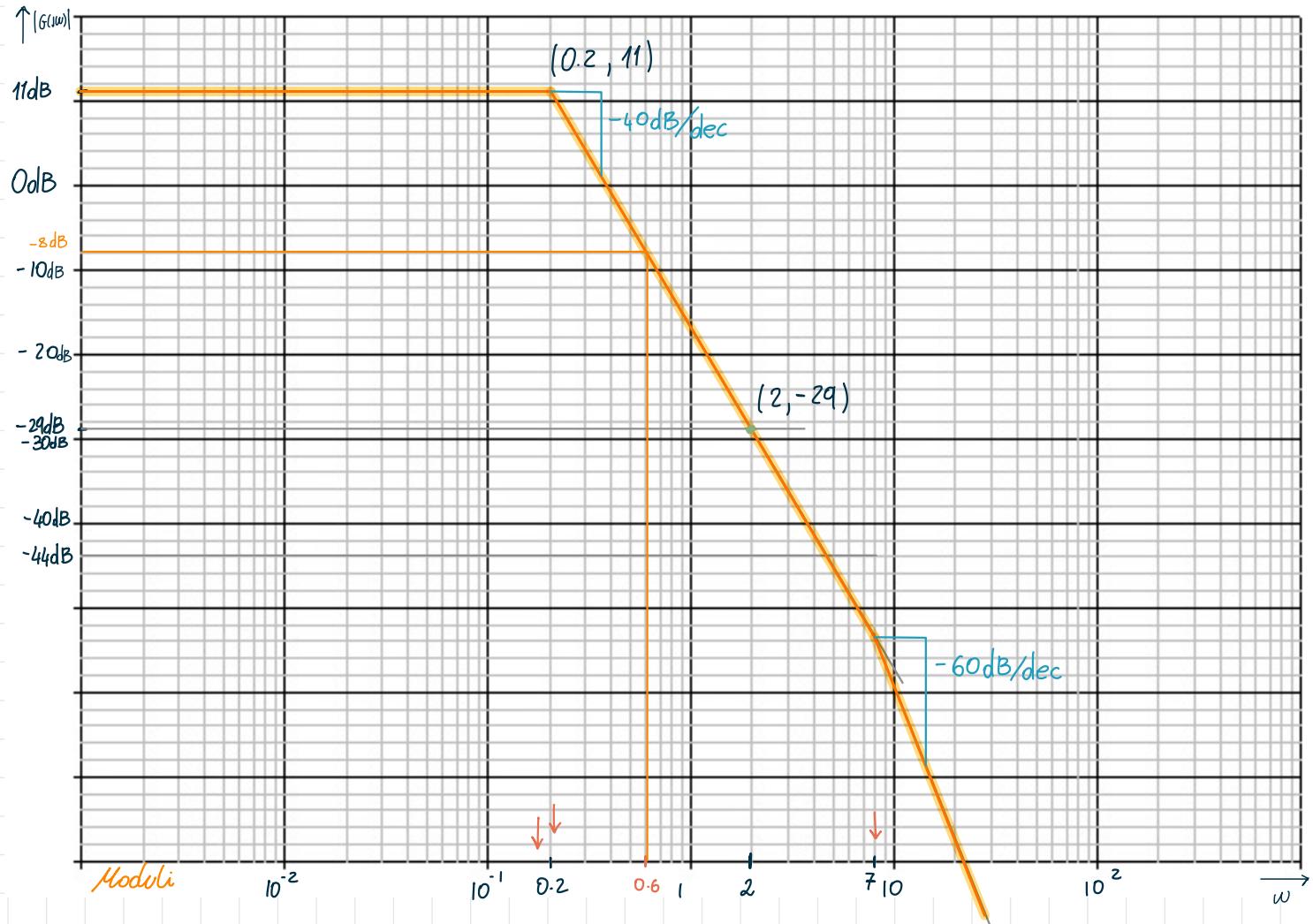
La fase in presenza di ...

$$\begin{cases} \text{Zeri semplici} \rightarrow 0^\circ \\ \text{Poli semplici} \rightarrow 0^\circ \end{cases}$$

Per ogni  $\begin{cases} \text{Zero S.} & \rightarrow +90^\circ \\ \text{Polo S.} & \rightarrow -90^\circ \end{cases}$

$$\Rightarrow \text{Inizia a } 0^\circ, \text{ Finisce a } 3 \cdot (-90^\circ) = -270^\circ = -\frac{3}{2}\pi = +\frac{\pi}{4}$$

## 5) Diagrammi Asintotici



## 6) Uscita a regime

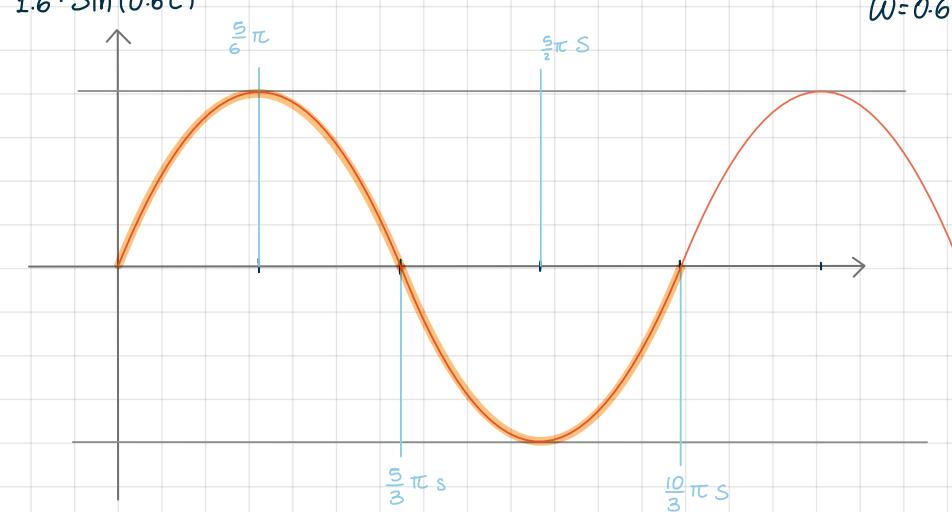
Dato  $U(t) = \underline{4} \sin(0.6 \cdot t)$

- Trovare  $|G(j \cdot 0.6)|_{dB} \simeq -8 \text{ dB}$   $\Rightarrow 20 \log(y) = x = 0 \Rightarrow y = 10^{\frac{x}{20}}$   
 $\Rightarrow G(j \cdot 0.6) = 10^{-\frac{8}{20}} = \underline{0.4}$
- Trovare  $\angle G(j \cdot 0.6) \simeq -1440^\circ = \frac{4}{5}\pi$

$$\Rightarrow y(t) = |G(j\bar{\omega})| \cdot \underline{X} \cdot \sin(\bar{\omega}t + \angle G(j\bar{\omega})) = \underline{0.4 \cdot 4} \cdot \sin(0.6t - \frac{4}{5}\pi)$$

Possiamo calcolare il ritardo di  $y(t)$  rispetto a  $U(t)$

$$\theta = \frac{4}{5}\pi \Rightarrow \bar{\omega}t = \frac{4}{5}\pi \Rightarrow t = \frac{4}{5 \cdot \bar{\omega}}\pi = \frac{4}{5 \cdot 0.6}\pi = \frac{4}{3}\pi \approx \underline{4.28} \text{ s} \quad \text{Ritardo}$$



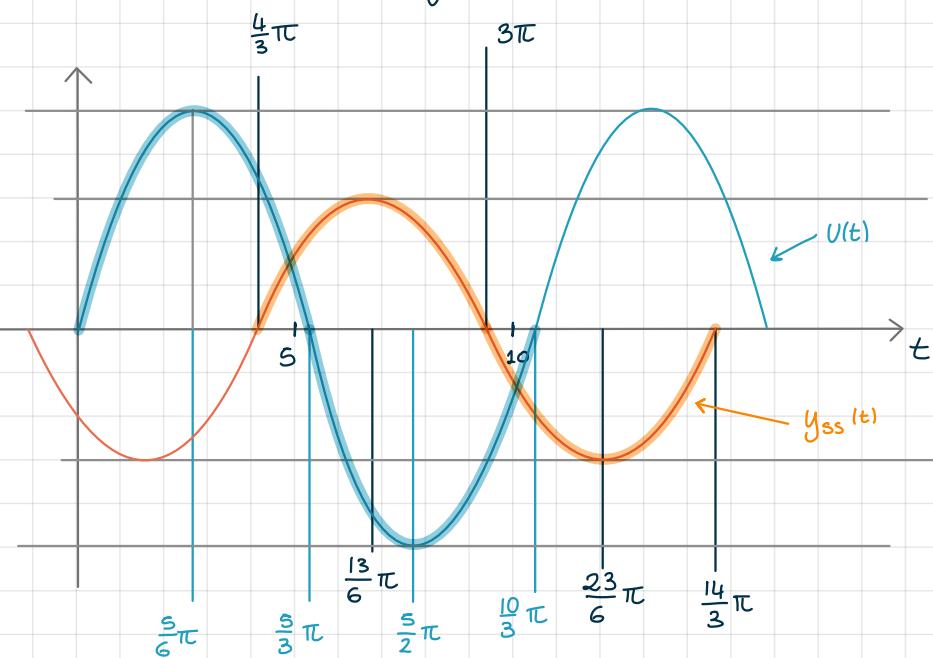
$$T = \frac{2\pi}{0.6} \approx 10.47 \text{ s}$$

$$\frac{10}{3}\pi$$

Ma il sin è anche sfasato di  $-\frac{4}{5}\pi$   $\Rightarrow 0.6t_i - \frac{4}{5}\pi = 0$  per  $t_i = \frac{4}{5}\pi \cdot \frac{1}{0.6}$ ,  
AKA Ritardo

$$= \frac{4}{3}\pi \approx \underline{4.2 \text{ s}}$$

tempo inizio



$$t_f = t_i + T = \frac{4}{3}\pi + \frac{10}{3}\pi = \frac{14}{3}\pi \approx \underline{14.7 \text{ s}}$$

Segnale iniziale

$$4 \sin(0.6t) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{0.6} = \frac{10}{3}\pi \approx 10.5 \text{ s}$$

## Andamenti esatti

Gli andamenti esatti di modulo e fase sono descritti dalle eq:

$$G(S) = \frac{1}{(S + 0.2)^2 (S + 7)} \quad \Rightarrow \quad G(j\bar{\omega}) = \frac{1}{(j\bar{\omega} + 0.2)^2 (j\bar{\omega} + 7)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(j\bar{\omega}) &= \frac{1}{(-\bar{\omega}^2 + 0.04 + 0.4j\bar{\omega})(j\bar{\omega} + 7)} = \frac{1}{-\bar{\omega}^3 - \bar{\omega}^2 j + 0.04\bar{\omega}j + 0.28 - 0.4\bar{\omega}^2 + 2.8\bar{\omega}j} \\ &= \frac{1}{(0.28 - 0.4\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^2 j) + (-\bar{\omega}^3 + 0.04\bar{\omega} + 2.8\bar{\omega})j} \quad \bar{\omega} = 0.6 \\ &= \frac{1}{-2.38 + 1.49j} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |G(j\bar{\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(2.38)^2 + (1.49)^2}} = 0.36$$

$$\angle G(j\bar{\omega}) = \angle 1 - \angle \text{den} = -\angle \text{den} = -\tan^{-1}\left(\frac{\text{Im} P}{\text{Re} P}\right) = -2.58 \text{ rad}$$

Quindi la risposta reale a  $G(S)$  sarebbe

$$0.36 \cdot 4 \sin(0.6t - 2.58)$$

## Esercizio 1: soluzione

1. Il segnale  $u(t)$  si può scrivere come la somma dei seguenti segnali:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 2t \mathbf{1}(t) \\ u_2(t) &= -2(t-3) \mathbf{1}(t-3) \\ u_3(t) &= -6 \mathbf{1}(t-3) \end{aligned}$$

Gli andamenti sono riportati nella figura allegata.

2. Le trasformate di Laplace sono date da

$$\begin{aligned} U_1(s) &= -\frac{2}{s^2} \\ U_2(s) &= -\frac{2}{s^2} e^{-3s} \\ U_3(s) &= -\frac{6}{s} e^{-3s} \end{aligned}$$

dove la prima è ottenuta applicando la trasformata di Laplace della rampa, la seconda e la terza applicando anche il teorema del ritardo nel tempo.

3. Il segnale  $\hat{u}(t)$  che consente poi di calcolare la risposta del sistema è una semplice rampa:  $\hat{u}(t) = t \mathbf{1}(t)$ . Quindi la corrispondente trasformata di Laplace dell'uscita è data da

$$G(s) = \frac{s+0.2}{s^2+s+1} \quad \hat{Y}(s) = G(s)\hat{U}(s) = \frac{s+0.1}{s^2(s^2+s+1)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s^2} + \frac{r_3+r_4s}{s^2+s+1}$$

Il calcolo dei residui fornisce:

$$r_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \hat{Y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{s+0.1}{s^2(s^2+s+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+0.1}{s^2+s+1} = 0.1 \quad \text{O.2}$$

Inoltre, facendo il minimo comune multiplo al secondo membro dell'espressione precedente e considerando il solo numeratore si ricava:

$$\begin{aligned} r_1s(s^2+s+1) + r_2(s^2+s+1) + (r_3+r_4s)s^2 &= \\ = (r_1+r_4)s^3 + (r_1+r_2+r_3)s^2 + (r_1+r_2)s + r_2 & \end{aligned}$$

da cui si ricava che deve essere:

$$\begin{array}{ll} r_1 + r_4 = 0 & \zeta_2 = 0.2 \\ r_1 + r_2 + r_3 = 0 & r_1 = 1 - r_2 = 0.9 \quad \text{O.8} \\ r_1 + r_2 = 1 & r_3 = -r_1 - r_2 = -1 \\ r_2 = 0.1 & r_4 = -r_1 = -0.9 \quad -0.8 \end{array}$$

Risolvendo il sistema di equazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}r_1 &= 1 - r_2 = 0.9 \\r_3 &= -r_1 - r_2 = -1 \\r_4 &= -r_1 = -0.9\end{aligned}$$

4. Per calcolare l'antitrasformata di  $\hat{Y}(s)$ , essendo presente un termine con poli complessi e coniugati, si considera la seguente rielaborazione del termine quadratico:

$$\begin{aligned}\frac{r_3 + r_4 s}{s^2 + s + 1} &= \frac{r_3 + r_4 s}{(s + 0.5)^2 + 0.75} = r_4 \frac{s + \frac{r_3}{r_4} + 0.5 - 0.5}{(s + 0.5)^2 + 0.75} \\&= r_4 \frac{s + 0.5}{(s + 0.5)^2 + 0.75} + r_4 \left( \frac{r_3}{r_4} - 0.5 \right) \frac{1}{(s + 0.5)^2 + 0.75} \\&= r_4 \frac{s + 0.5}{(s + 0.5)^2 + 0.75} + \frac{r_3 - 0.5 r_4}{\sqrt{0.75}} \frac{\sqrt{0.75}}{(s + 0.5)^2 + 0.75}\end{aligned}$$

Quindi, essendo  $\sqrt{0.75} = 0.87$  e quindi  $(r_3 - 0.5 r_4)/\sqrt{0.75} = -0.64$ , l'antitrasformata di  $\hat{Y}(s)$  è data da

$$\hat{y}(t) = (0.9 + 0.1t - 0.9e^{-0.5t} \cos 0.87t - 0.64e^{-0.5t} \sin 0.87t) \mathbf{1}(t)$$

L'espressione di  $\hat{y}(t)$  è data dalla somma di quattro termini. Il primo è un gradino di ampiezza 0.9 che parte in  $t = 0 \text{ sec}$ .

Il secondo termine è una rampa  $0.1t$  che parte da  $t = 0 \text{ sec}$ .

Il terzo e il quarto termine sono modi oscillatori con una frequenza  $\bar{\omega} = 0.87 \text{ rad/sec}$ , cioè un periodo  $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega} = 7.22 \text{ sec}$ . Questi modi sono attenuati da un esponenziale  $e^{-0.5t}$  al quale quindi è associata una costante di tempo  $\bar{\tau}_1 = 1/0.5 = 2 \text{ sec}$ . Quindi il periodo dell'oscillazione è tra 3 e 4 volte la costante di tempo. Il tempo di assestamento all'1% dell'esponenziale è pari a  $4\bar{\tau} = 8 \text{ sec}$ . Il valore finale associato a questi modi oscillatori è nullo come si evince sia dall'espressione nel tempo e sia dal teorema del valore finale

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{r_3 + r_4 s}{s^2 + s + 1} = 0.$$

Gli andamenti nel tempo sono riportati nella figura allegata.

5. Le risposte ai segnali  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  sono date da

$$\begin{aligned}y_1(t) &= 2\hat{y}(t) \\y_2(t) &= -2\hat{y}(t - 3)\end{aligned}$$

Per la terza uscita, usando la proprietà di linearità e il fatto che il gradino è la derivata della rampa, si ha:

$$\begin{aligned}
 y_3(t) &= -6 \frac{d}{dt} \hat{y}(t) \quad \text{Siccome } y_3(t) = -6 \cdot 1(t-3) \text{ non dovremmo} \\
 &\quad \text{calcolare } y_3(t) = -6 \frac{d\hat{y}(t-3)}{dt} \cdot 1(t-3) ? \\
 &= -0.6 + 0.54e^{-0.5t}(-0.5 \cos 0.87t - 0.87 \sin 0.87t) \\
 &\quad + 3.84e^{-0.5t}(-0.5 \sin 0.87t + 0.87 \cos 0.87t) \\
 &= -0.6 + e^{-0.5t}(3.07 \cos 0.87t - 2.39 \sin 0.87t)
 \end{aligned}$$

6. La risposta complessiva è data da

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$$

Non essendoci impulsi, la risposta del sistema parte da valore nullo in  $t = 0 \text{ sec}$ . All'inizio è diverso da zero solo l'ingresso  $u_1(t)$  e quindi la risposta è come quella a un ingresso a rampa  $2t$ . Il valore iniziale della derivata può essere calcolato col teorema del valore iniziale e quello della derivata nel tempo, considerando solo l'ingresso  $u_1(t)$ :

$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} ssG(s) \frac{2}{s^2} = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$$

quindi la derivata nell'origine è nulla.

All'istante di tempo  $t = 3 \text{ sec}$  l'uscita complessiva vale

$$\begin{aligned}
 y(3) &= 2\hat{y}(3) = 0.9 + 0.3 - 0.9e^{-1.5} \cos 2.61 - 0.64e^{-1.5} \sin 2.61 \\
 &= 0.9 + 0.3 + 0.173 - 0.0724 = 1.3
 \end{aligned}$$

Si può osservare che il contributo all'uscita nell'istante  $t = 3 \text{ sec}$  dei termini oscillatori è molto modesto.

Dopo l'istante  $t = 3 \text{ sec}$  l'ingresso complessivo si annulla e parte una evoluzione che porterà l'uscita a regime ad annullarsi, in quanto il sistema è asintoticamente stabile. Dopo un tempo pari al tempo di assestamento dei termini esponenziali ( $8 \text{ sec}$ ), cioè dopo circa  $8 + 3 = 12 \text{ sec}$  dall'applicazione dell'ingresso la risposta è molto vicina al suo valore nullo di regime.

## Esercizio 2: risposta in frequenza

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.2)^2(s + 7)} \tag{3}$$

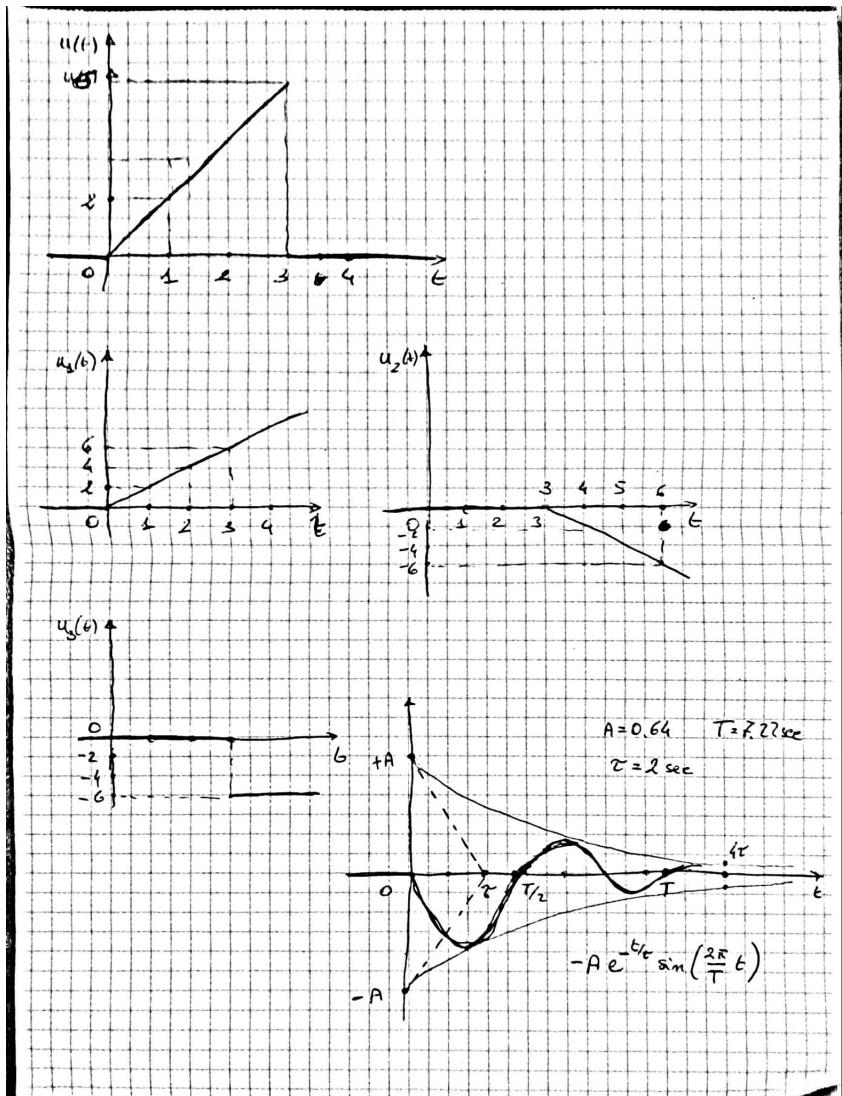


Figura 1: Andamenti nel tempo per Esercizio 1.

1. Esprimere  $G(s)$  nella forma standard per i diagrammi di Bode, determinare poli e zeri e rappresentarli sul piano complesso.
2. Determinare i punti di rottura dei diagrammi di Bode asintotici.
3. Scegliere l'intervallo di frequenze d'interesse.
4. Determinare gli andamenti iniziali e finali dei diagrammi di Bode asintotici.
5. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici.
6. Dato il segnale d'ingresso

$$u(t) = 4 \sin 0.6t$$

determinare l'espressione dell'uscita a regime  $y_{ss}(t)$  e tracciare gli andamenti nel tempo dell'ingresso  $u(t)$  e dell'uscita  $y_{ss}(t)$ .

7. Effettuate eventuali considerazioni sui diagrammi di Bode: andamenti esatti, moduli di risonanza, banda passante, variazioni di guadagno, aggiunta di poli o zeri.

## Esercizio 2: soluzione

1. La funzione di trasferimento nella forma standard dei diagrammi di Bode è data da:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.2)^2(s + 7)} = \frac{1}{0.2^2 \cdot 7 \cdot (1 + \frac{s}{0.2})^2(1 + \frac{s}{7})} = \frac{3.57}{(1 + \frac{s}{0.2})^2(1 + \frac{s}{7})}$$

La  $G(s)$  ha un polo doppio in  $p_1 = -0.2$  e un polo in  $p_2 = -7$ . La rappresentazione nel piano complesso è nella figura allegata.

2. I punti di rottura nei diagrammi di Bode asintotici sono  $\omega_1 = 0.2 \text{ rad/sec}$  (associato al polo doppio  $p_1$ ) e  $\omega_2 = 7 \text{ rad/sec}$  (associato al polo  $p_2$ ).
3. L'intervallo di frequenze d'interesse, considerando almeno una decade a sinistra del più piccolo punto di rottura e almeno una decade a destra del più grande punto di rottura, è

$$\omega \in [10^{-2}, 10^2] \text{ rad/sec}$$

4. Per il diagramma dei moduli, poiché  $G(s)$  non poli nell'origine, l'andamento iniziale è costante e pari a

$$20 \log 3.57 = 11 \text{ dB}$$

Poiché il sistema ha tre poli, l'andamento finale del diagramma di moduli avrà una pendenza di  $-60\text{ dB}/decade$ .

Per il diagramma delle fasi, poiché  $G(s)$  non ha poli né zeri nell'origine e il guadagno è positivo, il valore iniziale è  $0^\circ$ . Il valore finale, poiché ci sono tre poli, sarà  $-3 \cdot 90^\circ = -270^\circ = -3\pi/2$ .

5. I diagrammi di Bode asintotici sono rappresentati nella figura allegata.
6. L'ingresso  $u(t)$  ha una pulsazione  $\bar{\omega} = 0.6\text{ rad/sec}$  e quindi un periodo

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = \frac{2\pi}{0.6} = 10.5\text{ sec.}$$

Dai diagrammi di Bode asintotici si evince che

$$\begin{aligned}|G(j0.6)|_{dB} &\approx -10\text{ dB} \\ \langle G(j0.6) \rangle &\approx -135^\circ\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned}|G(j0.6)| &\approx 10^{-\frac{10}{20}} = 0.32 \\ \langle G(j3) \rangle_{rad} &\approx -135 \frac{\pi}{180} = -\frac{3\pi}{4} = -2.36\text{ rad}\end{aligned}$$

e quindi

$$y_{ss}(t) \approx 4|G(j0.6)| \sin(0.6t + \langle G(j0.6) \rangle_{rad}) = 1.28 \sin(0.6t - 3\pi/4)$$

Il ritardo nel tempo di  $y_{ss}(t)$  rispetto a  $u(t)$  è tale per cui

$$\bar{\omega}\bar{\tau} = \frac{3\pi}{4} \implies \bar{\tau} = \frac{3\pi}{4\bar{\omega}} = \frac{3\pi}{2.4} = 3.93\text{ sec}$$

Gli andamenti nel tempo di  $u(t)$  e  $y_{ss}(t)$  sono riportati nella figura allegata.

7. Si noti che il valore esatto della risposta in frequenza per  $\bar{\omega} = 0.6\text{ rad/sec}$  è dato da

$$\begin{aligned}G(j0.6) &= \frac{1}{(j0.6 + 0.2)^2(j0.6 + 7)} = \frac{1}{(0.2^2 - 0.6^2 + j0.24)(j0.6 + 7)} \\ &= \frac{1}{(-0.32 + j0.24)(j0.6 + 7)} \\ &= \frac{1}{-0.32 \cdot 7 - 0.24 \cdot 0.6 + j(0.24 \cdot 7 - 0.32 \cdot 0.6)} \\ &= \frac{1}{-2.38 + j1.49}\end{aligned}$$

da cui

$$|G(j0.6)| = \frac{1}{\sqrt{(-2.38)^2 + 1.49^2}} = 0.356$$

e

$$\begin{aligned}\langle G(j0.6) \rangle_{rad} &= -\arctan\left(-\frac{1.49}{2.38}\right) = -(-0.56 + \pi) \\ &= 0.56 - \pi = -2.58 \text{ rad}\end{aligned}$$

Le differenze (molto contenute) rispetto ai valori ottenuti in precedenza sono dovute al fatto che i diagrammi di Bode esatti differiscono da quelli asintotici. Il diagramma dei moduli esatto doveva essere più in basso di quello asintotico, l'errore è probabilmente dovuto al punto preso sul grafico. Il diagramma delle fasi esatto è più in basso di quello asintotico.

Dal diagramma dei moduli asintotico si ha un guadagno di  $0 \text{ dB}$  all'incirca alla pulsazione di  $0.4 \text{ rad/sec}$ . Per ingressi sinusoidali con pulsazioni maggiori, il sistema avrà un comportamento di tipo filtrante, cioè il segnale sarà attenuato in uscita. Se si aumenta il guadagno moltiplicativo di  $G(s)$  tale pulsazione si sposta verso l'alto, cioè la banda passante aumenta.

L'aggiunta di un polo nell'origine determinerebbe una pendenza iniziale di discesa del diagramma dei moduli di  $-20 \text{ dB/decade}$  e quindi il diagramma dei moduli passerebbe per  $0 \text{ dB}$  prima della pulsazione di  $0.4 \text{ rad/sec}$ . Il polo nell'origine provocherebbe un ritardo di fase iniziale pari a  $-90^\circ$  e, per pulsazioni elevate, di  $-360^\circ$ .

Un ingresso a gradino per  $G(s)$  determinerebbe un'uscita di regime a costante di ampiezza pari a  $G(0) = 3.57$  volte l'ampiezza del gradino in ingresso, infatti

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{\bar{u}}{s} = G(0)\bar{u} = 3.57\bar{u}$$

Non essendoci poli complessi e coniugati, i diagrammi di Bode non hanno risonanze.

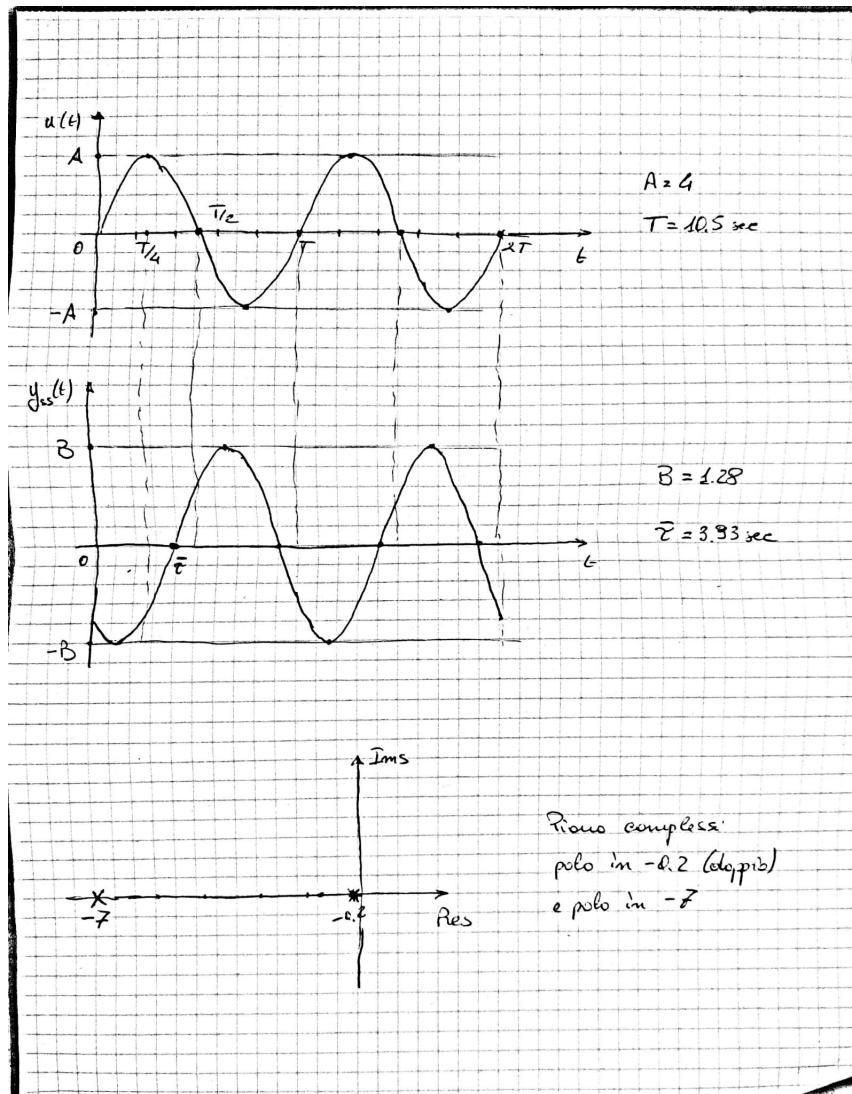


Figura 2: Andamenti nel tempo per Esercizio 2.

**Carta Diagrammi di Bode**

$$G(s) = \frac{1}{(s+0.2)^2(s+7)}$$

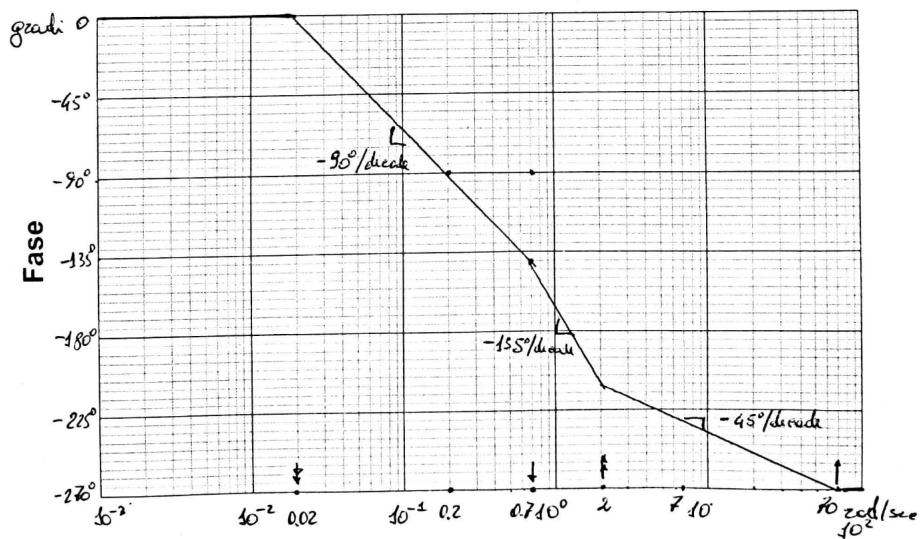
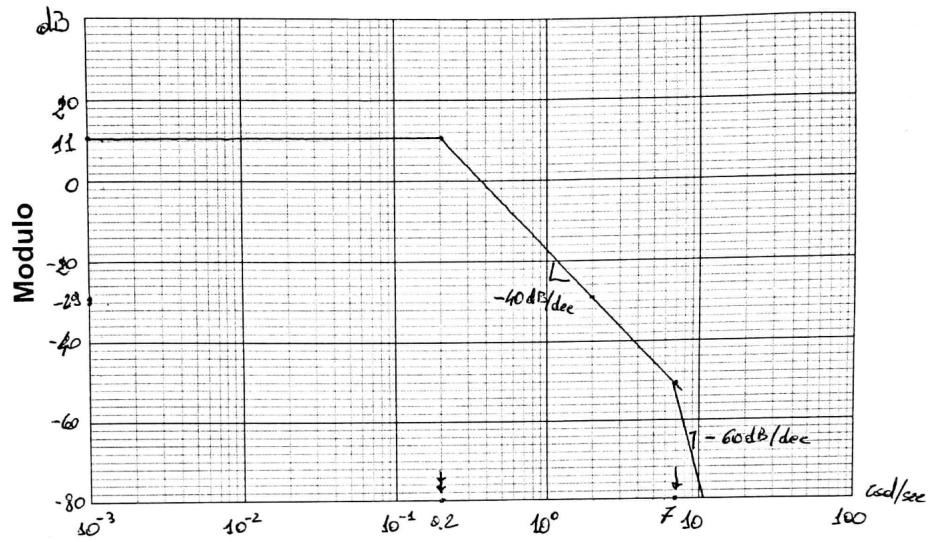


Figura 3: Andamenti diagrammi di Bode per Esercizio 2.