$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$ Impulso

$$\mathcal{L}[\mathbb{1}(t)] = \frac{1}{s}$$ Gradino

$\to \mathbb{1}(t)$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\cdot \mathbb{1}(t)] = \frac{1}{s+\alpha}$$ Exp

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)\mathbb{1}(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s)$$ Time Shift

$$\mathcal{L}[t] = 1/s^2$$ RAMPA

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\cdot \mathbb{1}(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)\cdot \mathbb{1}(t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Lezione 3

## PROPRIETA' e TEOREMI

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\cdot f(t)] = F(s+\alpha)}$$

Moltiplicazione per esponenziale

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = s\cdot F(s) - f(0)}$$

Derivazione reale

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{d}{dt}f(t)}_{g}\right)\right]}$$

Derivata in cascata

Lezione 3

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)}$$

Valore finale

$$\boxed{f(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)}$$

Valore iniziale

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}}$$

Integrale reale

$$\boxed{\mathcal{L}[t\cdot f(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)}$$

Integrazione nel dominio della variabile s

Lezione 4

# Antitrasformate Notevoli

Integrale di Laplace : $F(S) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-St} \, dt$

## Costante

$$f(t) = K \cdot 1\!\!1(t) \rightarrow \quad F(S) = K \int_0^{\infty} e^{-St} \, dt = K \cdot \left[ -\frac{1}{S} e^{-St} \right]_0^{\infty} = \lim_{t \to \infty} \cancel{-\frac{1}{S} e^{-St}} - \left( -\frac{1}{S} e^{0} K \right) = \frac{1}{S} K$$

$\nearrow 0$

## Rampa

$$f(t) = t \, 1\!\!1(t) \rightarrow F(S) = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-St} \, dt \quad \text{PARTI} = \left[ -\frac{1}{S} e^{-St} \cdot t \right]_0^{\infty} - \int -\frac{1}{S} e^{-St} \, dt$$

$$F(S) = [\underset{\substack{\uparrow \\ \exp \gg t}}{0} - 0] + \frac{1}{S} \int_0^{\infty} e^{-St} \, dt = \frac{1}{S^2}$$

## Esponenziale

$$f(t) = e^{-\alpha t} \Rightarrow F(S) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-St} \, dt = \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha + S)} \, dt = -\frac{1}{\alpha + S} \left[ e^{-t} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{S + \alpha}$$

## Sin

$$f(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j} \Rightarrow F(S) = \frac{1}{2j} \cdot \mathcal{L}(e^{j\omega}) - \mathcal{L}(e^{-j\omega})$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot \left( \frac{1}{S + j\omega} - \frac{1}{S - j\omega} \right) = \frac{1}{\cancel{2j}} \, \frac{\overset{\cancel{2j}\omega}{\cancel{S + j\omega} - \cancel{S} + j\omega}}{S^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{\omega}{S^2 + \omega^2}$$

# Proprietà

## Ritardo

$$U(t) = f(t - t_0) \cdot 1\!\!1(t - t_0) \rightleftarrows U(S) = \int_0^{\infty} f(t - t_0) \, e^{-St} \, dt \qquad \text{Pongo } t - t_0 = \tau \rightarrow t = \tau + t_0$$

per $\begin{cases} t \to 0, \ \tau \to -t_0 \\ t \to \infty, \ \tau \to \infty \end{cases}$ $\Rightarrow U = \int_{-t_0}^{\infty} f(\tau) e^{-S(\tau + t_0)} \, d\tau = e^{-St_0} \underbrace{\int_0^{\infty} f(\tau) \, e^{-S\tau} \, d\tau}_{F(S)|_\tau}$

$$\Rightarrow U(S)|_\tau = e^{-St_0} \cdot F(S)$$

## Moltiplicazione per exp

$$y = e^{-\alpha t} \cdot f(t) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{-St}\, dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-t(S+\alpha)}\, dt = \text{pongo } S+\alpha = \beta$$

$$= F(\beta) = F(S+\alpha)$$

## Derivazione Reale

$$y = \frac{d}{dt} f(t) \rightleftharpoons F(S) = \int \frac{d}{dt} f(t) \cdot e^{-St}\, dt \overset{\text{PARTI}}{=} \Big[\underbrace{f(t) \cdot e^{-St}}_{-f(0)}\Big]_0^{\infty \to \emptyset} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-S)\, e^{-St}\, dt$$

$$= \underline{SF(S) - f(0)}$$

## Valore finale

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{S \to 0} S\,F(S) \to \lim_{S \to 0} S\left[ f(0) + \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt} f(t)\right)\right]$$

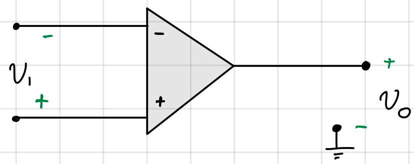
$$f(0) + \lim_{S \to 0} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) \cdot e^{-St} = f(0) + \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) \cdot \cancel{\lim_{S \to 0} e^{-St}}^{\,1}\, dt = f(0) + \Big[f(t)\Big]_0^{\infty} = \underline{f(t \to \infty)}$$

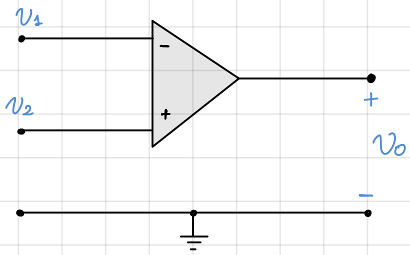
## Valore iniziale

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{S \to \infty} S\,F(S) \to \lim_{S \to \infty} \left[ f(0) + \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt} f(t)\right)\right]$$

$$\to f(0) + \int \frac{d}{dt} f(t)\, \cancel{\lim_{S \to \infty} e^{-St}}^{\,0}\, dt = f(0) + \Big[\ 0\ \Big]_0^{\infty} = f(0)$$

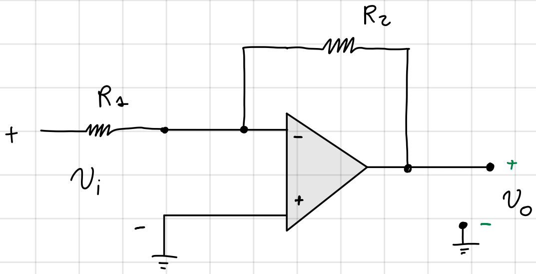
# AMPLIFICATORI OP   Pag 123

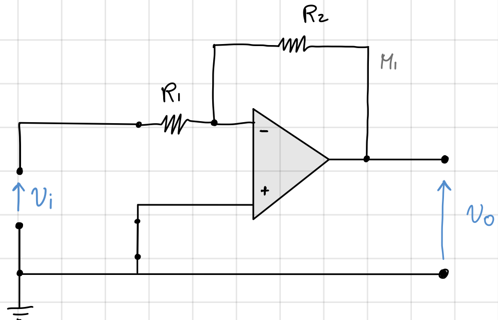



$$\text{R.C.} \quad v_o = K\left(v_+ - v_-\right)$$

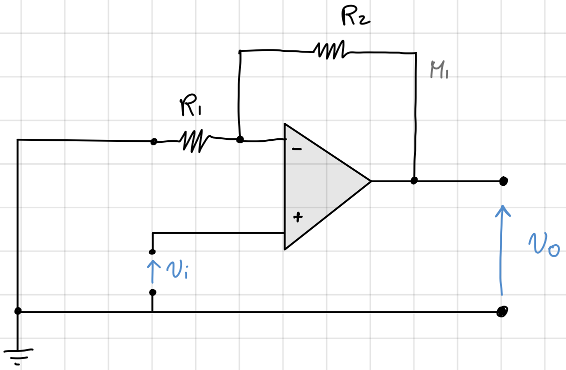
## INVERTENTE

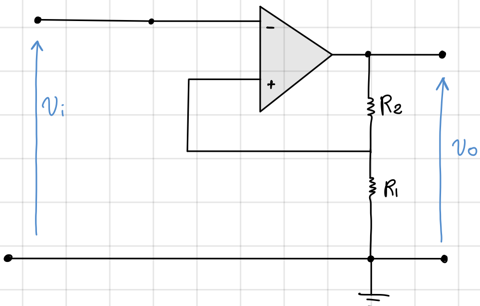



$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_i$$

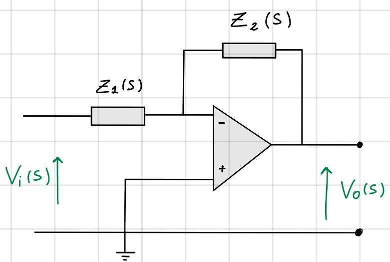
## NON INVERTENTE



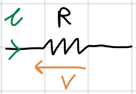




$$v_o = R_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_i$$

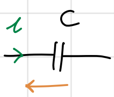
## METODO DELLE IMPEDENZE   Pag 125



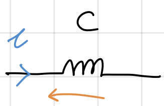

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$




$$Z_R(s) = R$$




$$Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$$

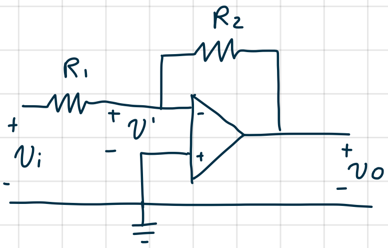



$$Z_C(s) = \frac{1}{Ls}$$

# CONTROLLORI PID

## Proporzionale

$U(t) = K_p \cdot e(t) \rightleftharpoons U(s) = K_p E(s)$ in out devo avere una costante

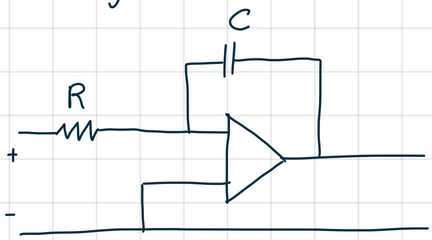



$V_o = -\frac{Z_2}{Z_1} \cdot V_i \rightsquigarrow \begin{cases} Z_1 = R_1 \\ Z_2 = R_2 \end{cases} \rightsquigarrow V_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot V_i$ INVERT

$\rightsquigarrow$ Mi basta mettere in serie un altro controller proporz invertente in serie con $R_3 = R_4$

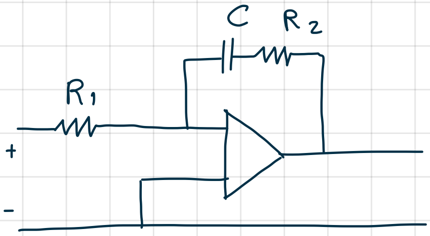
## INTEGRALE

$U(t) = \int e(t)\, dt \rightleftharpoons U(s) = \frac{1}{s} E(s)$




$V_o = -\frac{Z_C}{Z_1} V_i = -\frac{1}{sCR_1} V_i \Rightarrow G(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{1}{sCR}$

## Prop integ




$Z_2 = \frac{R_2}{sC} \rightsquigarrow V_o = -\frac{R_2}{sR_1C} V_i$

G(S)

# Linearizzazione

Se abbiamo una funzione NON LINEARE possiamo "linearizzarlo" grazie alla Serie di Taylor fermandoci al termine lineare (2nd):

$$f(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)^n$$

Quindi il 2nd termine è:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{d}{dt}f(x)\Big|_{x=x_0}(x-x_0)$$

$$= f(x_0) - \frac{d}{dt}f(x)\Big|_{x=x_0}\cdot x_0 + \frac{d}{dt}f(x)\Big|_{x=x_0}\cdot x + \varepsilon$$

## Funzioni di 2 Variabili

Linearizzo $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0,y_0}\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_0,y_0}(y-y_0) + \varepsilon$ (al 2nd termine)

## Sistema NON lineare

Un sistema nello spazio di stato è del tipo: $\begin{cases}\dot{x} = A\cdot x(t) + B\cdot U(t)\\ y = C\cdot x(t) + D\cdot U(t)\end{cases}$

$\leadsto$ $\dot{x} = f(x,U)$ $\leadsto$ Possiamo Approssimarlo per qualsiasi $x_0, U_0$, ma ci conviene in un punto di equilibrio:

Dato un ingresso $U_0$, il P.d.e. e un punto $x_0$ tale che la derivata $\dot{x}\Big|_{x_0,U_0} = \varnothing$

Posso quindi dire: $x = x_0 + \hat{x}$ con $\hat{x} = x - x_0$ è la distanza tra funzione e punto in cui la linearizziamo

quindi, deriviamo: $\dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{\hat{x}}$ $\Rightarrow$ $\dot{x} = \dot{\hat{x}}$

Per def $= \varnothing$

Taylor: $f(x,U) = \cancel{f(x_0,U_0)} + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0,U_0}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial U}\Big|_{x_0,U_0}(U-U_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0,U_0}\cdot\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial U}\Big|_{x_0,U_0}\hat{U}$

nel punto di eq è zero

Proprio $\hat{x}$

$\hat{U}$

Generalizzo per Matrici di $f$:

Operatore

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

il gradiente è il corrispettivo della Derivata per Matrici

$$\Rightarrow \underline{\underline{f}}(x,U) = \underline{\underline{A}}\,\hat{x} + \underline{\underline{B}}\,\hat{U}$$

# Dallo spazio di stato alla Fdt

Abbiamo un sys generico: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + BU \\ y = CX + DU \end{cases} \rightleftharpoons SX = AX + BU$

-> Metto in evidenza $X$ a Dx: $(S-A)X = B \cdot U$ ma A è una Matrice!!

Errore!

-> Moltiplico S per la Mat identità: $(\underline{\underline{SI}} - \underline{\underline{A}})\underline{\underline{X}}(S) = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{U}}(S)$

-> Ci serve isolare $X(S)$ ma non possiamo semplicemente dividere per $(SI-A)$...

Sfrutto $A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow \underbrace{\cancel{(SI-A)^{-1}(SI-A)}}_{I} X(S) = (SI-A)^{-1} \cdot B \cdot U(S)$

$\Rightarrow X(S) = (SI-A^{-1}) \cdot BU(S)$

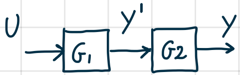
MA Che cosa è $(SI-A)^{-1}$...?

$$(SI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(SI-A)} \cdot \operatorname{adj}(SI-A)$$

dove $\operatorname{adj}(SI-A)$ è la matrice Adiacente dove gli el sulla diagonale principale si scambiano di POSTO e quelli sulla secondaria di SEGNO.

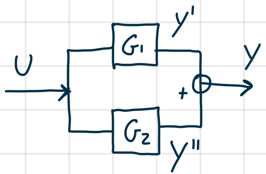
# Configurazioni Sistemi

## SERIE



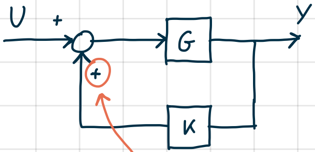

$$\begin{cases} y = y' \cdot G_2 \\ y' = U \cdot G_1 \end{cases} \rightarrow \quad y = U \cdot \underbrace{G_1 \cdot G_2}_{G_{eq}}$$

## PARALLELO




$$\begin{cases} y' = U \cdot G_1 \\ y'' = U \cdot G_2 \\ y = y' + y'' \end{cases} \rightarrow \quad y = U \, (\overbrace{G_1 + G_2}^{G_{eq}})$$

## RETROAZIONE




$$y = (U + K \cdot y) \cdot G = UG + KyG \rightarrow \quad y(1 - KG) = U \cdot G$$

$$= U \cdot \overbrace{\frac{G}{1 - K \cdot G}}^{G_{eq}}$$

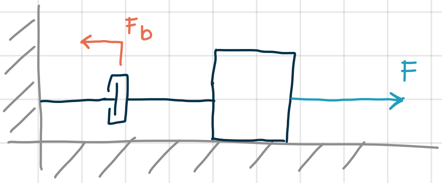
Dipende dal segno

* Versione estesa giu' ↓

# MODELLISTICA DI SYS MECCANICI

I sistemi meccanici sono caratterizzati da **massa - molla - smorzatore**, che corrispondono, rispettivamente, a *condensatore, induttore e resistore* dei sistemi elettrici.

## Massa Smorzatore




$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} \qquad \text{con } v = \frac{ds}{dt}$$

$$F_b = -b \cdot v$$

Variabile di stato

$$\sum F = m \cdot a \rightsquigarrow F + F_b = m \cdot \frac{dv}{dt} \rightsquigarrow F - bv = m \cdot \frac{dv}{dt} \to \frac{dv}{dt} + \frac{b}{m} v - F = 0$$

eq Diff

$$\mathcal{L}\left[\sum F\right] = sV(s) + \frac{b}{m} V(s) - F(s) = 0$$

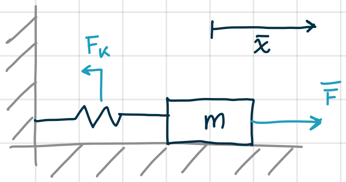
Voglio OUT: $V(s)$ IN: $F(s)$ $\rightsquigarrow$ $V(s)\left[s + \frac{b}{m}\right] - F(s) = 0 \to V(s)\left[s + \frac{b}{m}\right] = F(s)$

$$\to \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{s + \frac{b}{m}}$$

Fdt

Per S.S. e schema a blocchi vedi cartella modellistica / S meccanica

## Massa Molla




molla: $F_K = -K \cdot x$

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d}{dt} v = m \frac{d^2}{dt^2} x = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \sum F = m a \rightsquigarrow F + F_K = m \cdot \ddot{x} \rightsquigarrow F - Kx = m \cdot \ddot{x}$$

$$\to \ddot{x} + \frac{K}{m} x = F$$

eq diff

$$\rightleftarrows \quad s^2 X(s) + \frac{K}{m} X(s) = F(s) \rightsquigarrow X(s)\left[s^2 + \frac{K}{m}\right] = F(s)$$

Voglio: OUT: $X(s)$, IN: $F(s)$ $\to$ $\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + K/m}$

Fdt

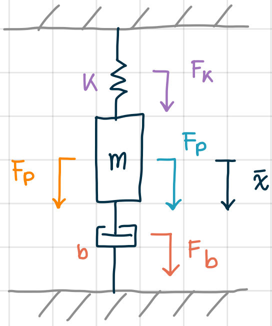
### Space State

$u = F$, $y = x$, $x_1 = v$, $x_2 = x$

$$\to \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{m}(K x_2 - u) \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 x_1 \ \frac{K}{m} x_2 - \frac{1}{m} u \\ \dot{x}_2 = 1 x_1 + 0 x_2 + 0 u \\ y = 0 x_1 + 1 x_2 + 0 u \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{K}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \cdot u \quad , \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \cdot u$$

# Massa molla Smorzato




$$\begin{cases} F_K = -K\,\bar{x} \\ F_b = -b \cdot v \;\to\; F_b = -b \cdot \frac{d}{dt}\bar{x} \\ F_P = m \cdot a \quad \text{ma la considero così com'è} \end{cases}$$

$$\left\{ \sum_i F_i = m \cdot a \;\to\; \sum F = m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\bar{x} \right.$$

eq diff

$$\to\; -K\bar{x} - b \cdot \frac{d}{dt}\bar{x} + F_P = m\frac{d^2}{dt}\bar{x} \;\to\; \frac{d^2}{dt^2}\bar{x} + \frac{b}{m}\frac{d}{dt}\bar{x} + \frac{K}{m}\bar{x} = F_P$$

$$\rightleftarrows\; s^2 X(s) + \frac{b}{m} s X(s) + \frac{K}{m} X(s) = F_P(s)$$

voglio OUT: $X(s)$, in $F_P(s)$

$$X(s)\left[s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{K}{m}\right] = F_P(s) \;\Rightarrow\; G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{K}{m}}$$

G(S)

$x_1 = v$, $x_2 = \bar{x}$, $U = F_P$ $y = \bar{x}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{m}\left(-K x_2 - b x_1 + U\right) \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

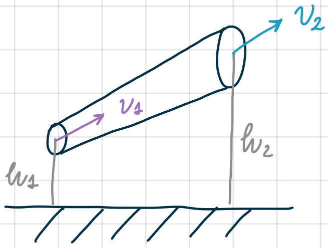
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -b & -K \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot U$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

## MODELLI IDRAULICI

$\rho = \dfrac{\text{Peso}}{\text{Volume}}$ densità volumetrica

**BERNOULLI**




$P = \dfrac{\text{FORZA}}{\text{Superficie}} \leftrightarrow$ Pressione

$q = \dfrac{\text{Volume}}{\text{Tempo}} \leftrightarrow$ Portata

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Pressione

$\mathcal{E}$ cinetica

$\mathcal{E}$ potenziale

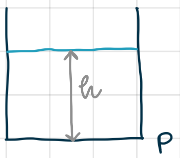
$R = \dfrac{\Delta P}{q} \leftrightarrow$ Resistenza

$q = C \cdot \dfrac{d}{dt} P \longleftrightarrow$ Capacità $\longrightarrow C = \dfrac{S}{\rho g}$

$P = L \cdot \dfrac{d}{dt} q \longleftrightarrow$ Induttanza $\longrightarrow L = \dfrac{\rho h}{S}$

Da bernoulli, se $v_1 = v_2$, $P_2 >> P_1 \Rightarrow h_1 >> h_2 \Rightarrow \rho \cdot g \cdot h = P \Rightarrow h = \dfrac{P}{\rho g}$

### Trovare la capacità




$P_a + \rho \cdot g \cdot h = P \rightarrow P - P_a = \rho g h$ Derivo: $\dfrac{d}{dt} P = \rho g \cdot \dfrac{d}{dt} h$

Varia Const

Sappiamo che la portata è $q = \dfrac{ds}{dt} \Rightarrow \dfrac{\rho g}{S} \cdot \underbrace{\dfrac{d}{dt} h \cdot S}_{q} = \dfrac{d}{dt} P$

Capacità

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt} P = \dfrac{\rho g}{S} \cdot q$

Superficie

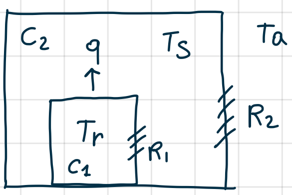
## MODELLI TERMICI

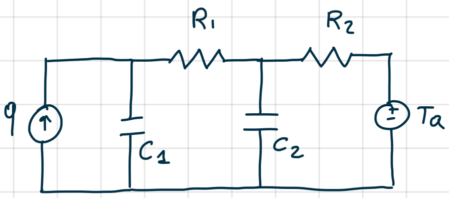
C - Capacità Termica
R - Resistenza
q - Flusso Termico
Q - Calore
T - Temperatura

- $C \dfrac{dT}{dt} = q$ con $\begin{cases} q = \dfrac{dQ}{dt} \\ C = \dfrac{Q}{\Delta t} \end{cases}$
- $T = R \cdot q$ equivale a $V = R \cdot i$

### RADIATORE

Immaginiamo una stufa con la sua capacità, posta in una stanza




$\rightarrow$ Basta risolvere il circuito

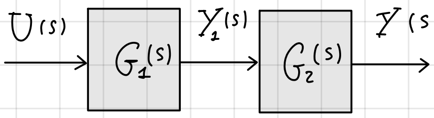
Vedi cartella mod. Termici.

# FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]} = \boxed{\frac{Y(s)}{U(s)}}$$

$\boxed{Y(s) = G(s) \cdot U(s)}$ se $U(s) = 1 \Rightarrow \boxed{Y(s) = G(s)}$

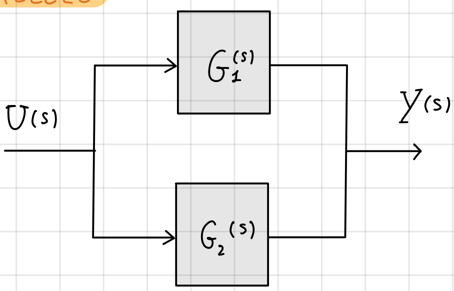
## SERIE




$$\boxed{Y(s) = \underbrace{[G_2(s) G_1(s)]}_{G(s)} U(s)}$$

SERIE

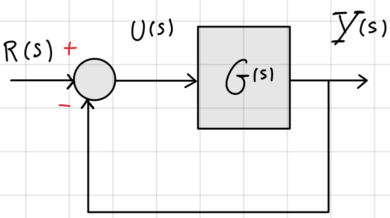
## PARALLELO




$$\boxed{U(s)\left(G_1(s) + G_2(s)\right)}$$

PARALLELO

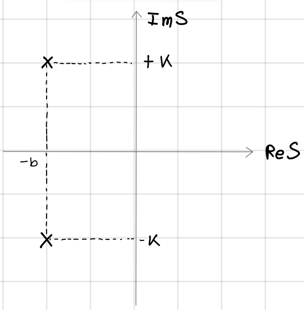
## FEED BACK



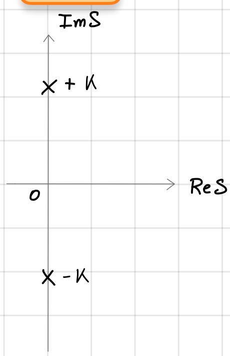

$$\boxed{Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s)}$$

Retroazione

Asintoticamente stabile



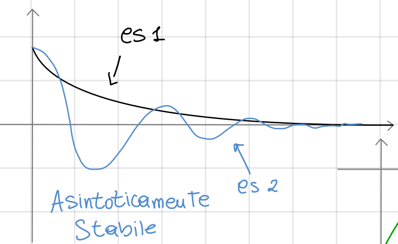

Stabile

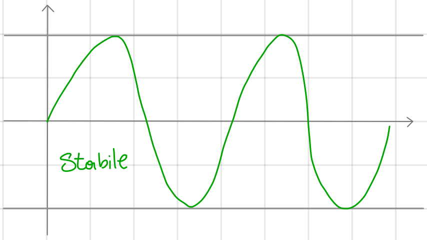



Un sistema di questo tipo è detto **stabile** ma non *asintoticamente* stabile, perché c'è una continua oscillazione che non si smorzerà mai, visto che non c'è uno smorzamento.

Più i poli si avvicinano all'asse immaginario, più il sistema tende ad essere instabile:

- Quando i poli sono proprio sull'asse immaginario il sistema è stabile ma non asintoticamente stabile.
- Quando i poli sono oltre l'asse immaginario (parte reale positiva) allora il sistema è completamente instabile.
- Quando i poli sono a sinistra dell'asse immaginario, quanto più sono lontani da esso più il sistema è stabile (ovvero tende a smorzarsi più velocemente).



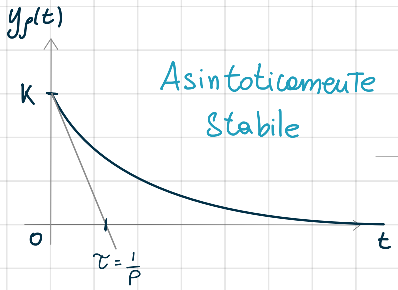
# Risposta Nel tempo

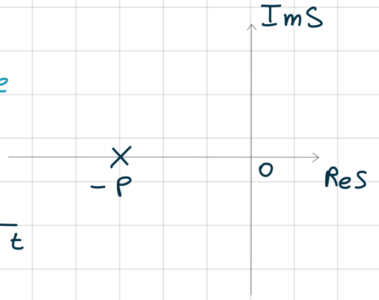
Dalla lezione 18

Per capire se un sys e' stabile, Asintoticamente Stabile o instabile ci basta guardare Poli e zeri oppure la risposta impulsiva, ovvero l'antitrasformata del sys:

## Termini del 1° ordine

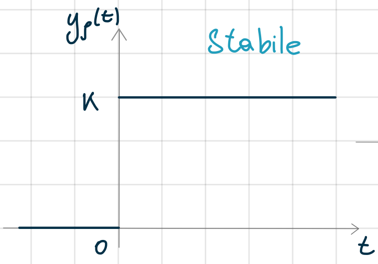
- $G(S) = \dfrac{K}{S+P} \rightleftharpoons y_p(t) = K e^{-P \cdot t} \cdot 1\!\!1(t)$

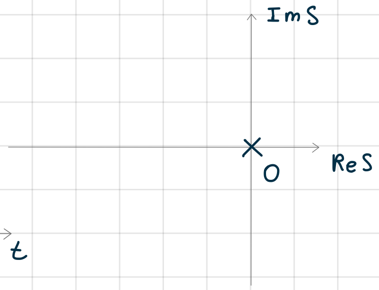


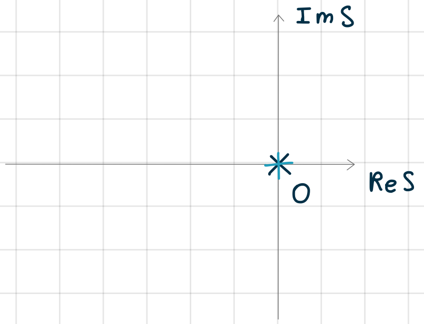

- $G(S) = \dfrac{K}{S} \rightleftharpoons y_p(t) = K \cdot 1\!\!1(t)$

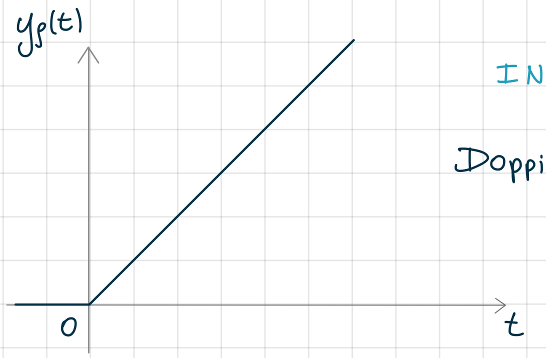
L'uscita "RICORDA" il Segnale in ingresso




- $G(S) = \dfrac{1}{S^2} \rightleftharpoons y_p(t) = t \cdot 1\!\!1(t)$




INSTABILE

Doppio polo in O

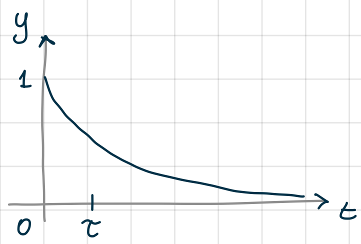
# RISPOSTA A SYS DEL 1° ORDINE

La forma più semplice di un sys del 1° ordine è la seguente:

$$G(s) = \frac{1}{1+sT}$$ e possiamo trovare la risp ai segnali notevoli

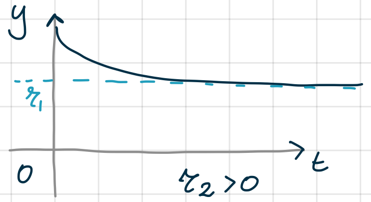
## IMPULSO

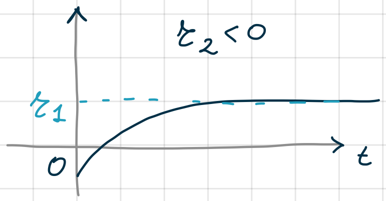
$$Y(s) = \delta(s)\cdot G(s) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+sT}\right] = y_\delta(t) = e^{-Tt}\cdot 1\!\!1(t) \quad \text{con } \tau = \frac{1}{T}$$




## GRADINO

$$Y(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+sT} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{1+sT} \rightleftarrows y(t) = \left(r_1 + r_2 e^{-Tt}\right)\cdot 1\!\!1(t)$$




## RAMPA

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}\,\frac{1}{1+sT} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s^2} + \frac{r_3}{1+sT} \rightleftarrows y(t) = \left(r_1 + r_2 t + r_3 e^{-Tt}\right)\cdot 1\!\!1(t)$$

Considerando $G(s) = \frac{1}{sT+1}$

| INPUT | OUTPUT |
|---|---|
| $U_2(t) = t\cdot 1\!\!1(t)$ | $y_2(t) = \left(-T+t-Te^{-\frac{t}{T}}\right)\cdot 1\!\!1(t)$ |
| $U_1(t) = 1\!\!1(t)$ | $y_1(t) = \left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right) 1\!\!1(t)$ |
| $U_3(t) = \int$ | $y_3(t) = \frac{1}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$ |
| | |

$$\frac{d}{dt}\,y_2(t) = \frac{d}{dt}\left[-T+t-Te^{-\frac{t}{T}}\right] = 1-e^{-\frac{t}{T}}$$

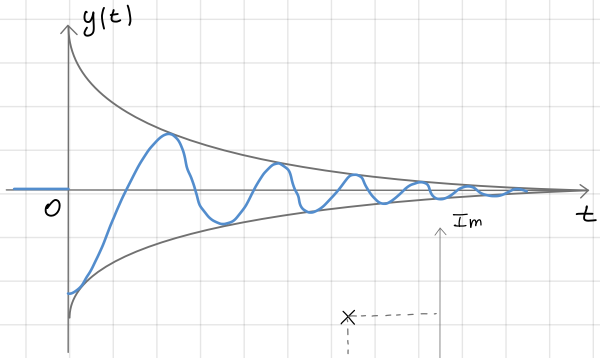
Risposta al gradino

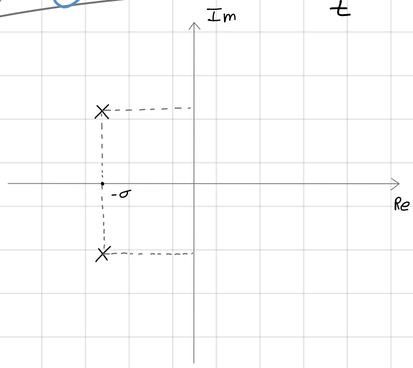
$$\frac{d}{dt}\,y_1(t) = -\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

Risposta all'impulso

# RISPOSTA DEI SISTEMI DI II ORDINE

Vedi Lez 17




## $0 < \zeta < 1$ SOTTOSMORZATO

$\Rightarrow$ Risposta transitoria OSCILLATORIA

Poli complx e coniugati nel semipiano SX

ES: $\dfrac{\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2} \rightarrow P_{1,2} = -\omega_n\zeta \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$

$= -\omega_n\zeta \pm \sqrt{\omega_n^2(\zeta^2 - 1)}$

$= -\omega_n\zeta \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

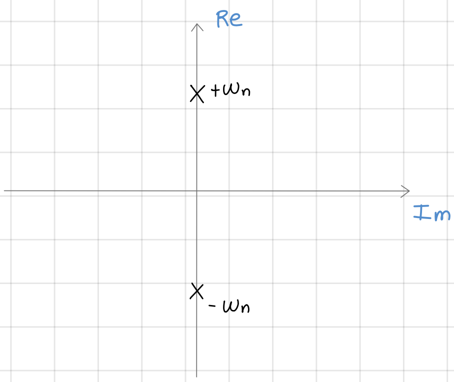
Se $0<\zeta<1 \Rightarrow \zeta^2 - 1 < 0 \ \forall \zeta \mid 0<\zeta<1 \Rightarrow P_{1,2} = -\omega_n\zeta \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

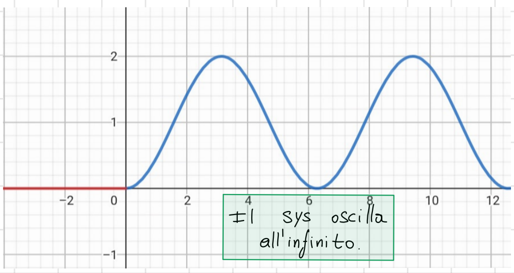
Frequenza naturale Smorzata $\omega_d$

Siccome i Poli sono complx e conj possiamo scrivere

$$S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2 = (S + \mathrm{Re}P)^2 + (\mathrm{Im}P)^2$$

## $\zeta = 0$ NON SMORZATO

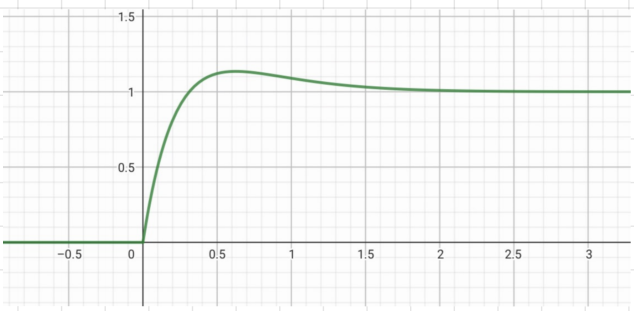


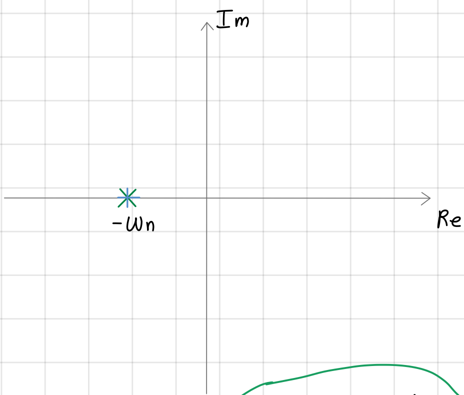




$G(S) = \dfrac{1}{S^2 + \omega_n^2} \rightarrow P_{1,2} = \pm j\omega_n$

Quando abbiamo due poli cmplx e coniugati a parte Reale NULLA

## $\zeta = 1$ CRITICAMENTE SMORZATO






Quando abbiamo due poli reali COINCIDENTI o POLI DOPPI

ES: $G(S) = \dfrac{1}{(S+\omega_n)^2}$

# Risposta di un sys di 2° ordine $(0 < \xi < 1)$

## GRADINO

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \text{Se} \quad 0<\xi<1 \longrightarrow \frac{\Delta}{4} = \sqrt{+\frac{b^2}{4} - ac} = \sqrt{(\xi\omega_n)^2 - \omega_n^2} = \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Siccome $\xi < 1$, $\xi^2 - 1 < 1 \quad \forall \xi \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$\Rightarrow P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{\xi^2-1} \qquad \text{pongo } \omega_d = \omega_n\sqrt{\xi^2-1} \Rightarrow P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$$

Uscita: $y(s) = G(s)\cdot U(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)} = \dfrac{r_1}{s} + \dfrac{r_2 + r_4 s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

### RESIDUI

$$r_1 = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{\cancel{s}(\cancel{s^2}+\cancel{2\xi\omega_n s}+\omega_n^2)} \longrightarrow 1 \quad r_1$$

$$y(s) = \frac{r_1(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2) + s(r_2+r_3 s)}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)} \Rightarrow \begin{cases} s^2(r_1+r_3) = 0 \\ s(2\xi\omega_n + r_2) = 0 \\ r_1\cancel{\omega_n^2} = \cancel{\omega_n^2} \end{cases}$$

$\hookrightarrow \quad r_1 = 1$ QED

$$\leadsto \begin{cases} r_3 = -r_1 \Rightarrow r_3 = -1 \\ r_2 = -2\xi\omega_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2\xi\omega_n + s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

* Considero il denom complesso

- Termine quadratico

$$(s+\xi\omega_n)^2 = s^2 + 2\xi\omega_n s + (\xi\omega_n)^2 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 - (\xi\omega_n)^2$$

$$\Rightarrow s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2 = (s+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2 - (\xi\omega_n)^2 = (s+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)$$

Siccome $\omega_d = -j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \omega_d^2 = \omega_n^2(1-\xi^2)$

$$\Rightarrow s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2 = (s+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2$$

# Antitrasformata

Usiamo la trasformata di:

- $\frac{1}{s} \rightleftarrows 1\!\!1(t)$
- $\sin(\omega t) \rightleftarrows \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
- $\cos(\omega t) \rightleftarrows \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2 + r_4 s}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} = \frac{1}{s} - \frac{2\xi\omega_n + s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega^2}$$

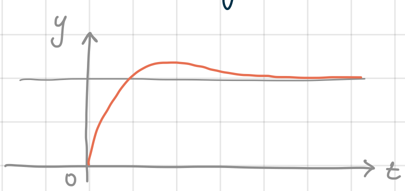
$$= \frac{1}{s} - \frac{\cancel{2}\xi\omega_n + s + \xi\omega_n - \cancel{\xi\omega_n}}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} = \frac{1}{s} - \frac{\xi\omega_n}{\omega_d}\underbrace{\frac{\omega_d}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}}_{\sin \cdot e^{-\xi\omega_n}} - \underbrace{\frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}}_{\cos \cdot e^{-\xi\omega_n}}$$

$$\Rightarrow Y(s) \rightleftarrows y_1(t) = \left[1 - \cos(\omega_d t)\cdot e^{-\xi\omega_n t} - \frac{\xi\omega_n}{\omega_d}\cdot \sin(\omega_d t)\cdot e^{-\xi\omega_n t}\right]\cdot 1\!\!1(t)$$

## Considerazioni

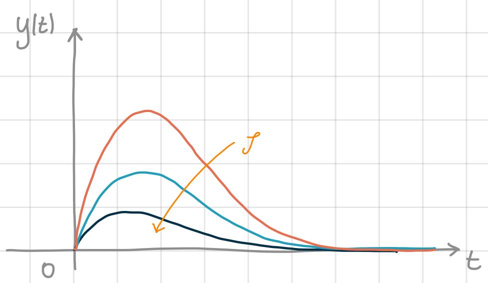
- per $0<\xi<1$ SOTTOSMORZATO $\rightsquigarrow$ $y(t) = y_1(t)$
- per $\xi = 0$ NON SMORZATO $\rightsquigarrow$ $y(t) = [1 - \cos(\omega_d t)]\cdot 1\!\!1(t)$ ← Non si smorza mai
- per $\xi = 1$ $\rightsquigarrow$ CRITICAMENTE SMORZATO $\rightsquigarrow$ si deve fare da zero la trattazione

$$y(t) = [1 - e^{-\omega_n t} + \omega_n t\, e^{-\omega_n t}]\, 1\!\!1(t)$$




- per $\xi > 1$ $\rightsquigarrow$ SOVRASMORZATO $\rightsquigarrow$ $\Delta = \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$ con $\xi>1 \Rightarrow \Delta>0 \ \forall \xi>1$

$\Rightarrow$ Posso scrivere: $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = (s-p_1)(s-p_2) \Rightarrow$ Abbiamo due esponenziali con $\tau_1 \neq \tau_2$ per $p_1 \neq p_2$



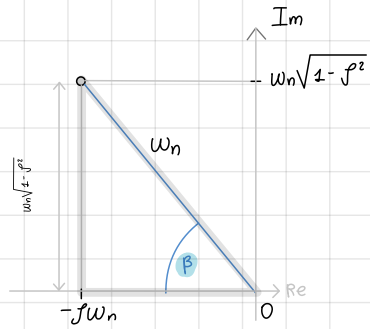
# CALCOLO DEI PARAMETRI DI UNA GENERICA RISPOSTA

## TEMPO DI SALITA – RISE TIME

$t_r$

Il tempo necessario affinché il segnale raggiunga per la *prima* volta il valore a regime.

$$\boxed{t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}}$$




## TEMPO DI PICCO – Peak Time

$t_p$

Il tempo di picco è il tempo necessario affinché la risposta raggiunga il picco massimo, ovvero il massimo relativo alla massima sovraelongazione.

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_d}}$$

{Se prendiamo come y(t) la (1)}

$$\boxed{y(t_p) = 1 + e^{-\zeta\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}$$

## SOVRAELONGAZIONE MASSIMA

$M_p$

La sovraelongazione massima è un valore percentuale ed indica il valore del picco massimo della curva rispetto al valore a regime dell'uscita; è un indicatore della **stabilità del sistema.**

$$\boxed{M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}}$$

$M_p$

$$\boxed{e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100}$$

{Se prendiamo come y(t) la (1)}

Se $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ e $\sigma = \omega_n\zeta$ $\Rightarrow$ $\boxed{M_p = e^{-\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)\cdot\pi}}$

## TEMPO DI RITARDO – DELAY TIME

$t_d$

Il **tempo di ritardo** è il tempo necessario affinché la risposta possa raggiungere *per la prima volta* la metà del suo valore finale (valore a regime).

# Quando é possibile rinominare due valori come Seno e Coseno

(1) $\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$

(2) $\boxed{\begin{array}{l} 0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \end{array}}$

Se riusciamo a trovare due valori che rispettano sia la (1) che la (2) allora possiamo scriverli come $\sin(\beta)$ e $\cos(\beta)$

## ESEMPIO

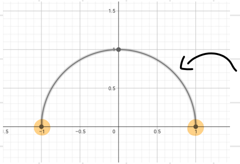
Se $0 < \rho < 1$ ed abbiamo $\rho$, $\sqrt{1-\rho^2}$

- $\rho \rightarrow 0 < \rho < 1$ ✓
- $\sqrt{1-\rho} \rightarrow 1 - \rho \geqslant 0 \rightarrow \rho \leqslant 1$ ✓

$$\left.\right\} (\rho)^2 + \left(\sqrt{1-\rho}\right)^2 = \cancel{\rho^2} + 1 - \cancel{\rho^2} = 1$$

QED

$\Rightarrow \rho = \cos(\beta)$, $\sqrt{1-\rho^2} = \sin(\beta)$




$\sqrt{1-\rho^2}$

## TEMPO DI ASSESTAMENTO $t_s$

E' il tempo necessario affinché la curva arrivi e resti all'interno di un intervallo intorno al valore finale dell'uscita y(t).

Solitamente questo valore è in percentuale, circa il 2-3%

$$t_s = \boxed{\frac{4}{\zeta \omega_n}} = \boxed{\frac{5}{\zeta \omega_n}}$$

2%     <1%

con $\sigma = \omega_n \zeta \rightarrow t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{4}{\sigma} = \frac{5}{\sigma}$

5%    2%    1%

## EVOLUZIONE LIBERA E FORZATA

Cosa accade se le condizioni iniziali NON sono nulle?

$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = SF(S) - f(0)$ se $f(0) \neq 0$, abbiamo una componente in più $\rightarrow$ l'evoluzione libera:

Prendiamo come esempio un sys in S.S.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BU & (1) \\ y = Cx + DU & (2) \end{cases} \rightleftarrows S X(S) - x(0) = A X(S) + B U(S)$$

Identità

$\rightarrow$ isolo $X$ $\rightarrow$ $[SI - A] X(S) = B U(S) + x(0)$

$\Rightarrow A^{-1} \cdot A = I \rightarrow X(S) = (SI-A)^{-1} B \cdot U(S) + (SI-A)^{-1} x(0) = (SI-A)^{-1}[B \cdot U(S) + x(0)]$

dalla (2) $\quad y(S) = C X(S) + D U(S) = C(SI-A)^{-1}[B U(S) + x(0)] + D U(S)$

$= C(SI-A)^{-1} B U(S) + C(SI-A)^{-1} x(0) + D \cdot U(S)$

$= \underbrace{[C(SI-A)^{-1} B + D] U(S)}_{\text{Ev. Forzata}} + \underbrace{C(SI-A)^{-1} x(0)}_{\text{Evoluzione libera}}$

Considerazioni

- Se $x(0) = 0$ c'è solo evoluzione forzata.
- Se $x(0) = 0 \rightarrow y(S) = [C(SI-A)^{-1} B + D] U(S)$

$\Rightarrow$ per definizione $C(SI-A)^{-1} B + D = G(S)$

# RISPOSTA IN FREQUENZA

→ Se in ingresso ho una sinusoide di $w = w_0$, in uscita avrò una sinusoide di $W = w_0$ ma con Ampiezza e Fase generalmente diverse.

## DIMOSTRAZIONE

Dato $u(t) = X \sin(wt) \rightleftarrows U(s) = X \cdot \dfrac{w}{s^2 + w^2}$

Posso trovare $y(s) = G(s) \cdot U(s) = \underbrace{\dfrac{a}{s + jw} + \dfrac{\bar{a}}{s - jw}}_{\text{da } U(s)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{r_i}{s + p_i}}_{\text{da } G(s)}$

I residui di G non mi servono perché sono del tipo $y_k(t) = r_k \cdot e^{-p_k t}$ e vanno a 0.

$$a = \lim_{s \to -jw} \cancel{(s+jw)} \cdot \frac{w X}{\cancel{(s+jw)}(s-jw)} \cdot G(s) \longrightarrow -\frac{\cancel{w} X}{2j \cancel{w}} G(-jw) \longrightarrow -\frac{X}{2j} G(-jw)$$

non è influenzato dal lim

$\bar{a} = \text{conj}(a)$

$$\bar{a} = \lim_{s \to jw} \cancel{(s-jw)} \cdot \frac{w X}{(s+jw)\cancel{(s-jw)}} G(s) \longrightarrow \frac{\cancel{w} X}{2j\cancel{w}} G(jw) \longrightarrow +\frac{X}{2j} G(jw)$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = -\frac{X}{2j} G(-jw) \cdot e^{-jwt} + \frac{X}{2j} G(jw) \cdot e^{jwt}$$

$$= \frac{X}{2j}\left[ G(-jw) e^{-jwt} + G(jw) \cdot e^{jwt} \right]$$

Possiamo scrivere $G(\pm jw)$ in termini di modulo e fase

$$\begin{cases} G(jw) = |G(jw)| \, e^{j\angle G(jw)} = |G(jw)| \, e^{j\phi} \\ G(-jw) = |G(-jw)| \, e^{j\angle G(-jw)} = |G(jw)| \, e^{-j\phi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = -\frac{X}{2j} \cdot |G(jw)| \cdot \left[ e^{-j\phi} e^{-jwt} + e^{j\phi} e^{jwt} \right] = -\frac{X}{2j} \cdot |G(jw)| \cdot \left[ \frac{e^{-j(wt+\phi)} + e^{j(wt+\phi)}}{2j} \right]$$

$$= -X \, |G(jw)| \cdot \sin(wt + \phi)$$

* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

* $\angle z = \tan^{-1}\left(\dfrac{ImP}{ReP}\right) \longrightarrow \begin{cases} \angle \dfrac{z_1}{z_2} = \angle z_1 - \angle z_2 \\ \angle z_1 \cdot z_2 = \angle z_1 + \angle z_2 \end{cases}$

Spiegaz. lez 20

# Moduli e fasi dei fattori notevoli

## Guadagno

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log(K)$$

$$G(s) = K \Rightarrow |G(j\omega)| = K \quad , \quad \angle G(j\omega) = \angle K = \operatorname{aTan}\left(\frac{0}{K}\right) = 0$$

## INTEGRATORE

Retta decrescente -20dB/dec

$$G(s) = 1/s \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{|j\omega|} = \omega^{-1} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20\log(\omega^{-1}) = -20\log(\omega)$$

$$\angle G(j\omega) = \underbrace{\cancel{\operatorname{Tan}^{-1}\left(\tfrac{0}{1}\right)}}_{0} - \underbrace{\cancel{\operatorname{Tan}^{-1}(j\omega)}}_{90^\circ} = -90^\circ$$

## INTEGRATORE + GAIN

$$G(s) = \frac{K}{j\omega} \Rightarrow |G(j\omega)| = |K| \cdot \frac{1}{|j\omega|} = \frac{K}{\omega} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(\frac{K}{\omega}\right)$$

per la proprietà di log: $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log(K) - 20\log(\omega)$

$$\angle G(j\omega) = \operatorname{Tan}^{-1}(K) - \operatorname{Tan}^{-1}(j\omega) = -90^\circ$$

## DERIVATIVO

la pendenza è sempre ±20 dB/dec

$$G(s) = Ks \rightarrow |G(j\omega)| = |Kj\omega| = K\omega \rightsquigarrow |G(j\omega)| = 20\log(K\cdot\omega) = 20\log(K) + 20\log(\omega)$$

$$\angle G(j\omega) = \angle K + \angle j\omega = +90^\circ$$

## FATTORI DEL 1° ORDINE e Diagrammi Asintotici

### POLO

$$G(s) = \frac{1}{1+sT} \rightsquigarrow |G(j\omega)| = \frac{|1|}{|1+j\omega T|} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(|1+j\omega T|^{-1}\right) = -20\log(|1+j\omega T|)$$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{Tan}^{-1}\left(\frac{\omega T}{1}\right) = -\operatorname{Tan}^{-1}(\omega T)$$

Asintoticamente

$\omega \ll \frac{1}{T}$

Punto di rottura: $\omega_1 = \frac{1}{T} \Rightarrow$ per $\omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow -20\log\left(\sqrt{1+\omega^2T^2}\right) = -20\log(1) = 0dB$

$\hookrightarrow \omega T \ll 1$ TRASCURABILI RISPETTO AD 1

Valore iniziale

Per $\omega \ll \frac{1}{T} \rightsquigarrow \angle G(j\omega) = -\operatorname{Tan}^{-1}(\omega T \ll 1) \rightarrow$ "l'arco la cui tan è molto piccolo" $= 0^\circ$ costante

$\omega \gg \frac{1}{T}$

per $\omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow -20\log\left(\sqrt{1+(\omega T)^2}\right) \rightarrow -20\log(\omega T)$ lineare in log

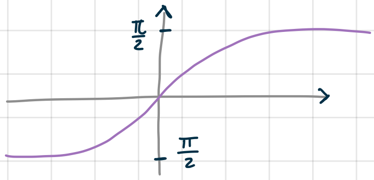
per $\omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow \angle G(j\omega) = -\operatorname{Tan}^{-1}(\omega T \gg 1) \rightarrow -90^\circ$

## ZERO

$G(S) = 1 + ST \quad \to \quad |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log\left(\sqrt{1+(\omega T)^2}\right) \to$ Pendenza Positiva $+20\,dB/dec$

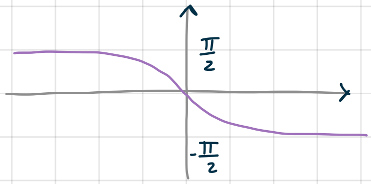
$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(j\omega T) \to$ Anticipo di fase SE $T>0$

$\searrow$ Ritardo di fase SE $T<0$




$\Rightarrow$ Il modulo NON cambia; $\begin{cases} \text{Se Lo zero è } <0 \Rightarrow \text{ANTICIPO} \\ \text{Se Lo zero è } >0 \Rightarrow \text{RITARDO} \end{cases}$

infatti per $G(S) = 1 - ST \to \angle G(j\omega) = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(j\omega T)$




## FATTORI DEL II° ORDINE

Del tipo: $\quad G(S) = \dfrac{1}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2} = \dfrac{1}{\omega_n^2\left(\frac{1}{\omega_n^2}S^2 + \frac{2\xi S}{\omega_n} + 1\right)} = \underset{K_p}{\dfrac{1}{\omega_n^2}} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}S^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}S + 1}$

### FASI:

Non considero $K_p$

Per $\omega \to 0 \quad \to \quad \angle G(j\omega) = \angle \dfrac{1}{-\frac{1}{\omega_n^2}\cancel{\omega^2}_{0} + \cancel{\frac{2\xi}{\omega_n}j\omega}_{0} + 1} \to \angle 1 = 0°$

Per $\omega \to \infty$

$\angle G(j\omega) = \angle \dfrac{1}{-\frac{1}{\omega_n^2}\omega^2 + \cancel{\frac{2\xi}{\omega_n}j\omega} + \cancel{1}} \to \angle -\dfrac{\omega_n^2}{\omega^2}$ ovvero è REALE

Trasc. (ordine inf) Trasc.

Se è un num. reale allora posso scriverlo come "K"; ed un qualsiasi num. può essere espresso come esponenziale mag $\cdot e^{j\varphi}$

$\to -K = K \cdot e^{\pm j\pi} = K \cdot [\cos(\pi) \pm j\sin(\pi)] = K \cdot (-1) = -K$

$\Rightarrow -\dfrac{\omega_n^2}{\omega^2} = \dfrac{\omega_n^2}{\omega^2} \cdot e^{\pm j\pi} = -180°$

Per conv. si usa il meno.

### MODULI

$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_n}\omega\right)^2}$

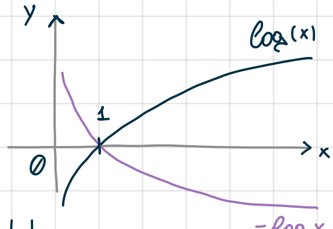
Per $\omega$ ALTE, $\omega \gg \omega_n \to |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log\sqrt{\left(\cancel{1} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\cancel{\frac{2\xi}{\omega_n}\omega}\right)^2} = -20\log(\omega^2)$

$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -40 \log(\omega) \quad -20\,dB/dec$

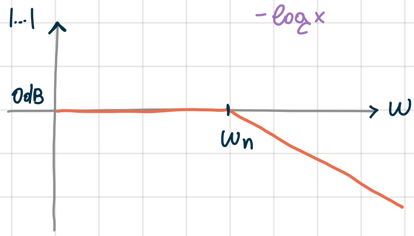
Per $\omega \ll \omega_n$, $\omega \to 0 \quad |G(j\omega)| = -20 \log\sqrt{\left(1 - \cancel{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}_{0}\right)^2 + \left(\cancel{\frac{2\xi}{\omega_n}\omega}_{0}\right)^2} = -20\log(1) = 0\,dB$

## Quanto vale il modulo in $\omega = \omega_n$ ?

$$|G(j\omega)| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n}\omega\right)^2} \underset{\omega=\omega_n}{=} -20 \log \sqrt{(2\delta)^2} = -20 \log(2\delta)$$

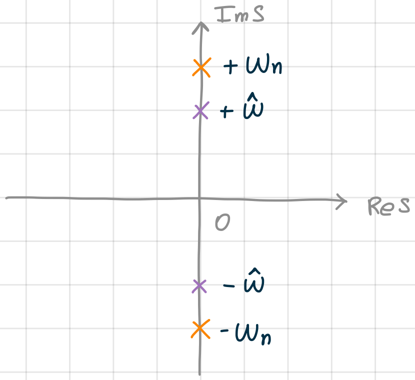



$\Rightarrow$ per $2\delta > 1$ , $|G(j\omega)|_{dB} > 0$ ovvero per $\delta > \frac{1}{2}$




Siccome il diag asint. era 0 fino ad $\omega = \omega_n$ , mentre il mod reale è $>0$ per $\delta < \frac{1}{2}$ , deve esserci un picco.

## INFATTI ...




$$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\delta}{\omega_n^2} + 1} \underset{\substack{\delta = 0 \\ \uparrow \\ \text{INST.}}}{=} \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_n^2}s} \rightsquigarrow P_{1,2} = \sqrt{-\omega_n^2} = \pm j\omega_n$$

$$y(t) = \sin(\hat{\omega} t) \rightleftarrows Y(s) = \frac{\hat{\omega}}{s^2 + \hat{\omega}} \rightsquigarrow P_{1,2} = \pm j\hat{\omega}$$

se $\omega_n = \hat{\omega}$ $\rightsquigarrow$ Il sistema è instabile!

## PICCO DI RISONANZA

Per trovare il max di $|G(j\omega)| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n}\omega\right)^2}$

basta trovare il min di $g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n}\omega\right)^2$ pongo $z = \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$

$\rightsquigarrow g(z) = (1-z)^2 + 4\delta^2 z = 1 - 2z + z^2 + 4\delta^2 z = z^2 + z(4\delta^2 - 2) + 1$

Max/min : $\frac{d}{dz} g(z) = 2z + 4\delta^2 - 2 = 2z + 4\delta^2 - 2 = 0$ per $z = \frac{2 - 4\delta^2}{2} = 1 - 2\delta^2$

ma $z = \frac{\omega_z^2}{\omega_n^2} \Rightarrow \frac{\omega_z^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\delta^2 \Rightarrow \omega_z = \sqrt{\omega_n^2(1 - 2\delta^2)} = \omega_n\sqrt{1 - 2\delta^2}$

Pulsazione di risonanza

DOMINIO $1 - 2\delta^2 \geq 0 \rightsquigarrow$ per $\delta \leq \sqrt{1/2} \cong 0.707$

Per $\delta \leq 0.707$ c'è RISONANZA

## MODULO DI RISONANZA

Basta calcolare $|G(j\omega_z)|$ con $\omega_z = \omega_n\sqrt{1 - 2\delta^2}$

$|G(j\omega_z)| = -20 \log 2\delta\sqrt{1 - \delta^2}$ e possiamo convincerci che c'è un picco perché :

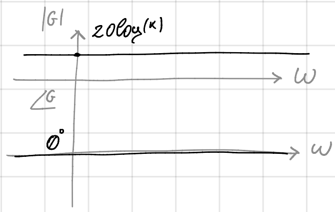
Per $\delta \to 0$ : $\lim_{\delta \to 0} |G(j\omega_z)| = -20 \log(\cancel{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}) \to -(-\infty) = +\infty$

# RISPOSTA IN FREQUENZA PER DIAGRAMMI ASINTOTICI

$$y(t) = w\, X\, |G(jw)| \cdot \sin(wt + \angle G(jw)) \qquad \text{con} \qquad u(t) = X \sin(wt)$$

## GUADAGNO

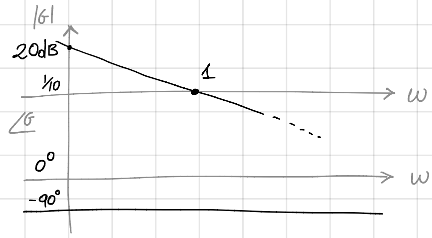
$$G(s) = K \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |G(jw)|_{dB} = 20 \log(K) \\ \angle G(jw) = \angle K = 0 \end{cases}$$




## Termini integrativi

$$G(s) = 1/s \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |G(jw)|_{dB} = -20 \log(w) \\ \angle G(jw) = -\angle jw = -\angle w e^{j\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ \end{cases}$$

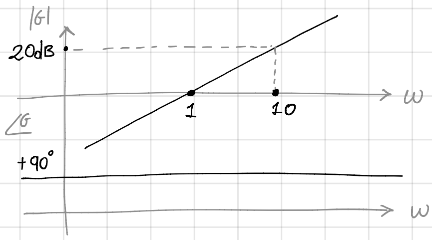
$\theta$




## Termini Derivativi

$$G(s) = K \cdot s \qquad |G(jw)| = 20 \log(K) + 20 \log(w)$$

$$\angle G(jw) = \angle K \cdot wj = \angle K w e^{j\frac{\pi}{2}} = +\frac{\pi}{2} = +90^\circ$$




# FORMA "STANDARD" DELLA FDT PER DIAGRAMMI DI BODE

$$G(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} (1 + s/z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (1 + sT_i)}$$

Questa forma è estremamente importante perché ci permette di calcolare il valore iniziale del modulo con estrema facilità: ci basta calcolare G(0) e vedere immediatamente che il valore iniziale corrisponde al **guadagno statico k** che viene moltiplicato per il resto della fdt

## FATTORI DEL PRIMO ORDINE

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |G(jw)| = -20 \log(|1 + jwT|) \\ \angle G(jw) = -\tan^{-1}(wT) \end{cases} \quad \text{Fase e Modulo} \quad \underline{\text{ESATTI}}$$

Punto di rottura: $\bar{s}: 1 + sT = 0 \rightarrow \bar{s} = -\frac{1}{T} \Rightarrow$ Punto di rottura $w_1 = 1/T$

$$\boxed{w_n = |\bar{s}_n|}$$

### Diagrammi Asintotici

Per $w$ molto grande $\rightsquigarrow$ $wT \gg 1 \Rightarrow w \gg 1/T \rightsquigarrow |G(jw)| \rightarrow \sqrt{1 + (wT)^2} \rightarrow wT$

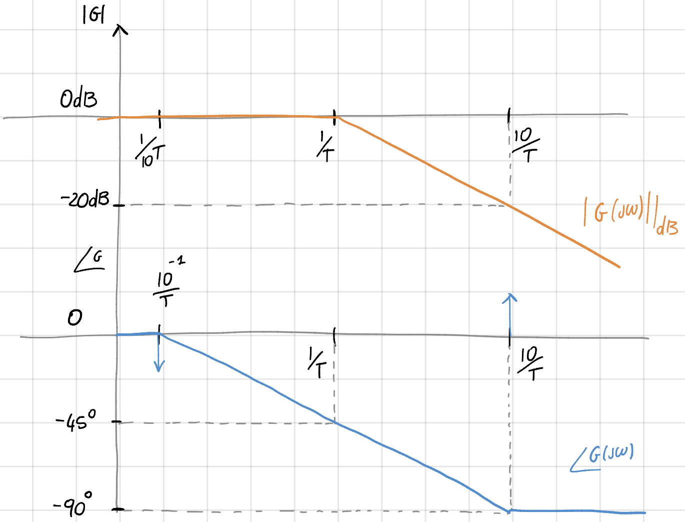
$$\Rightarrow |G(jw)|_{dB} \overset{w\gg}{\simeq} -20 \log(wT) \; ; \; \angle G(jw) \simeq -\angle 1 + jwT = -\tan^{-1}\left(\frac{wT}{1}\right) \overset{w\gg}{=} -\tan^{-1}(wT)$$

Per $w \gg$ $-\tan^{-1}(\infty) \rightarrow -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$

Per $w$ molto piccolo $\rightsquigarrow$ $wT \ll 1 \Rightarrow |G(jw)| \rightarrow \sqrt{1}$

$$\Rightarrow |G(jw)|_{dB} \simeq -20 \log(1) = 0 \; ; \; \angle G(jw) \simeq \angle 1 = 0^\circ$$

$w\ll$ $w\ll$




Ogni **polo** a segno negativo (o positivo) ha come effetto quello di:
- **Attenuare** il modulo a partire dal punto di rottura associato
- **Ritardare** la fase a partire da una decade prima del punto di rottura associato; nel punto di rottura si avrà un'anticipo di +45°, mentre una decade dopo del punto di rottura associato si avrà un'anticipo di +90°.

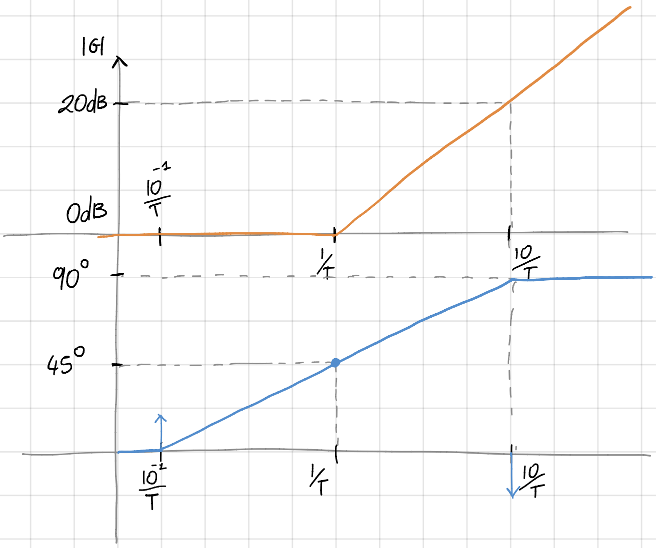
## Fattori con uno zero

$$G(s) = 1 + sT \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = +20 \log\left(\sqrt{1+(\omega T)^2}\right) \\ \angle G(j\omega) = \angle 1 + \angle j\omega T = \tan^{-1}(\omega T) \end{cases}$$

ESATTI

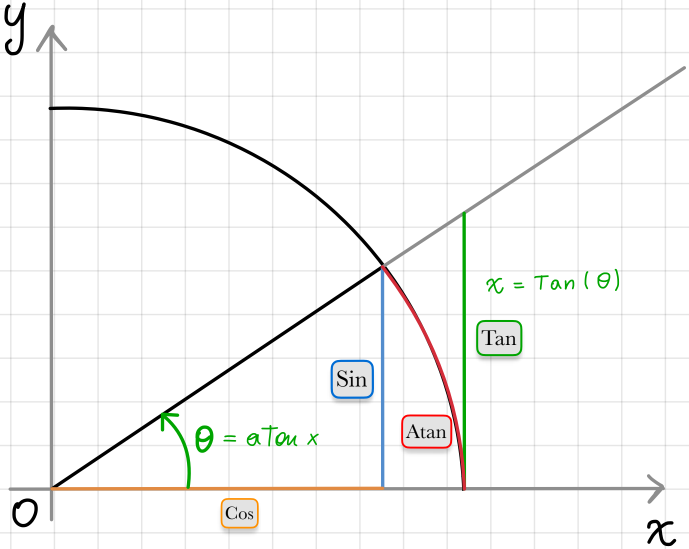
$\omega \to 0$ $\quad |G(j\omega)|_{dB} \cong 20 \log(\sqrt{1}) = 0$ ($\omega <<$) ; $\angle G(j\omega) \cong \tan^{-1}(\infty) \to 90° = \frac{\pi}{2}$ ($\omega <<$)

$\omega \to \infty$ $\quad |G(j\omega)|_{dB} \cong 20 \log(\omega T)$ ($\omega >>$) ; $\angle G(j\omega) \cong \tan^{-1}(0) = 0°$ ($\omega >>$)




Ogni **zero** a segno negativo ha come effetto quello di:
- **Amplificare** il modulo a partire dal punto di rottura associato
- **Anticipare** la fase a partire da una decade prima del punto di rottura associato; nel punto di rottura si avrà un'anticipo di +45°, mentre una decade dopo del punto di rottura associato si avrà un'anticipo di +90°.

Quando si ha uno zero a ReP positiva, invece:
- Il modulo non è influenzato (viene sempre amplificato)
- La fase viene **ritardata**, proprio come se si avesse un polo invece di uno zero, nel punto di rottura.

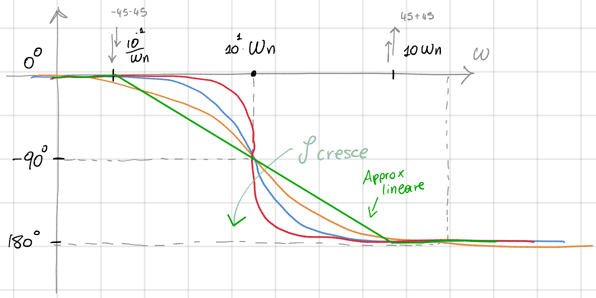



Schema utile per calcolare i valori dell'arcotangente quando omega ha valori molto grandi o molto piccoli

# FATTORI DEL II ORDINE

$$G(S) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} S + \frac{1}{\omega_n^2} S^2}$$

## Valori iniziali e finali Delle fasi




FASE INIZIALE : $0°$

FASE FINALE : $-180°$

## Valori iniziali e finali Dei Moduli

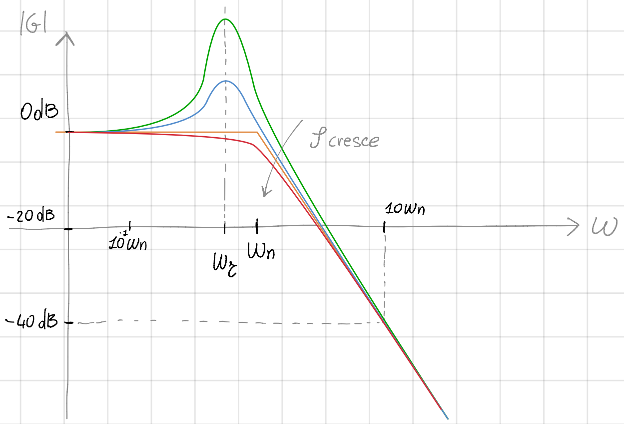
MODULO INIZIALE : 0dB → Dipende dal guadagno Statico

MODULO FINALE : $-40$ dB/dec dopo $\omega_n$

## FRequenza di Risonanza

In $\omega_z = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$ si potrebbe un fenomeno di Risonanza

↳ SE $\zeta < 0.707$ Si ha risonanza



CheatSheet esame 🤫

- $\mathbb{1}(t) \rightleftharpoons 1/s$
- $t \rightleftharpoons 1/s^2$
- $e^{-\alpha t} \rightleftharpoons \frac{1}{s+\alpha}$
- $\frac{T}{sT+1} = \frac{\cancel{T}}{\cancel{T}(s+1/T)} \rightleftharpoons e^{-\frac{t}{T}}$
- $K e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} \cdot \mathbb{1}(t-\tau) = K \cdot \mathcal{L}(e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot e^{-\tau s} \rightleftharpoons K \frac{1}{s+\tau} e^{-\tau s}$
- $\sin(\omega t)\,\mathbb{1}(t) \rightleftharpoons \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
- $\cos(\omega t)\cdot\mathbb{1}(t) \rightleftharpoons \frac{s}{s^2+\omega^2}$

## BODE:

Complx (P) → Mod → $-40$ dB/dec ; Fasi → $-180$ dB/dec

In $W_n$ ; Trova $W_n$ con

$$(s+W_n)^2 = s^2 + 2\zeta W_n s + W_n^2 = a s^2 + b s + c$$

$$\begin{cases} 2\zeta W_n = b \\ W_n^2 = c \end{cases} \rightarrow \text{RISOLVI}$$

Polo S. → $ReP > 0$ Fase $+90°$ TOT , mod : $+20$ dB/dec FIN ; $ReP < 0$ Fase $-90°$ TOT , mod : $+20$ dB/dec FIN

Zero S. → Fase : $-90°$ TOT , Mod: $-20$ dB/dec FIN

Zero/Polo in 0 → Retta Passa Per

- Fase : $\pm 90°$ FISSA INIZIALE
- mod : $\pm 20$ dB/dec INIZIALE

P: $20 \log\left(\frac{K}{\bar{\omega}}\right)$

Z: $20 \log(K \cdot \bar{\omega})$

* $\bar{\omega}$ Freq più bassa della Banda

## Tempo

Per i residui usa la forma standard
→ $s$ al denom deve stare sola