TRASFORMATE DI LAPLACE

ASCISSA DI CONVERGENZA

Sia $f: I \to \mathbb{C}$ definita su $\mathbb{R}^+ \subset I \subset \mathbb{R}$

f è TRASFORMABILE Secondo Laplace se $\exists\, s \in \mathbb{C} \,/\, f(x)\, e^{-sx} \in L^1(\mathbb{R}^+)$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty} f(x)\, e^{-sx}\, dx}$$

INTEGRALE DI LAPLACE

Se l'integrale converge per s_0, allora converge anche per tutti gli $s \in \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$

L'insieme degli $s \in \mathbb{C}$ per cui l'integrale converge è un SEMIPIANO DESTRO di $\mathbb{C}$, definiamo

$$\sigma[f] = \inf\{\mathcal{Re}(s),\ s \in \mathbb{C} \text{ tali che l'integrale converge}\}$$

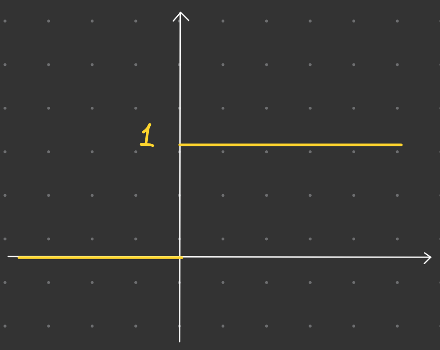
Ascissa di convergenza di f

TRASFORMATA DI LAPLACE

È indicata con $\mathcal{L}[f]$ oppure $\hat{f}(s)$

TRASFORMATA Delle funzioni elementari

Funzione Gradino



$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$H(x)$ è esponenziale di ordine zero:

$$H(x) \leq 1 \cdot e^{0x}$$

$\Rightarrow$ CONVERGE per $\Re(s) > 0$, $\sigma[H(x)] = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[H](s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dx = -\frac{e^{-sx}}{s}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Funzione esponenziale

$$f(x) = e^{ax} \quad \text{con} \quad a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x}\, dx = -\frac{e^{-(s-a)x}}{s-a}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

Funzione Delta di Dirac

$$\mathcal{L}[f_h](s) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{hs}}{hs} & \text{se } h \neq 0 \\ 1 & \text{se } h = 0 \end{cases}$$

Funzione a intervallo $\Rightarrow$ Rettangolare

Intervallo $H(x) - H(x-h)$

$$\text{per } s \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{h} e^{-sx}\, dx = \frac{1-e^{-hs}}{s} \quad (s)$$

$$\text{per } s = 0 \Rightarrow \mathcal{L}[f](0) = \int_0^{h} dx = h \quad (0)$$

ASCISSA DI CONVERGENZA

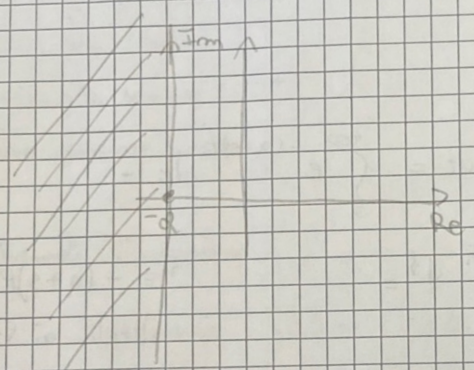
Ascissa di convergenza

$s = \sigma + j\omega$

$e^{-(\alpha+s)t} = e^{-(\alpha+\sigma)t} \cdot e^{-j\omega t}$

calcolabile per $\sigma > -\alpha$

$e^{-j\omega t}$ è limitato grazie al teorema di eulero invece l'altro termine vince per $\alpha+\sigma > 0$



anche se non calcolabile è comunque valida in tutto il piano, trovare i punti singolari, ovvero poli e zeri

$$\mathcal{L}[\alpha f(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{L}[A e^{-\alpha t}] = \frac{A}{s+\alpha}$$

$$\mathcal{L}[A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}] = \frac{A_1}{s+\alpha_1} + \frac{A_2}{s+\alpha_2} =$$

$$= \frac{(A_1 + A_2)s + \alpha_2 A_1 + \alpha_1 A_2}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$$

poli: $-\alpha_1$ e $-\alpha_2$

Zero: $s = \frac{\alpha_2 A_1 + \alpha_1 A_2}{A_1 + A_2}$

TEOREMA DI EULERO

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$$

INOLTRE

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta + \cos\theta - j\sin\theta = 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}}$$

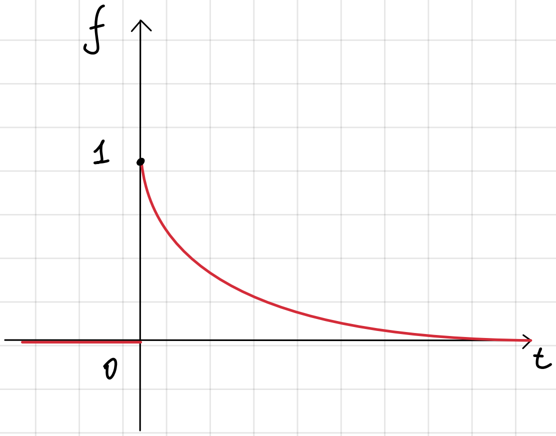
$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta - \cos\theta + j\sin\theta = 2j\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}}$$

TRASFORMATA DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

FUNZIONE ESPONENZIALE

$f(t) = e^{-at}$ con $a > 0$, a reale, $t \geq 0$ $\quad f(t) = 0$ per $t < 0$



$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{a+s} \int_0^{-\infty} e^{\varepsilon}\, d\varepsilon \quad \text{con } \varepsilon = -(a+s)t$$

N.B. limiti di integ

$$= -\frac{1}{a+s} \left[e^{\varepsilon} \right]_0^{-\infty} = -\frac{1}{s+a} \quad F(s)$$

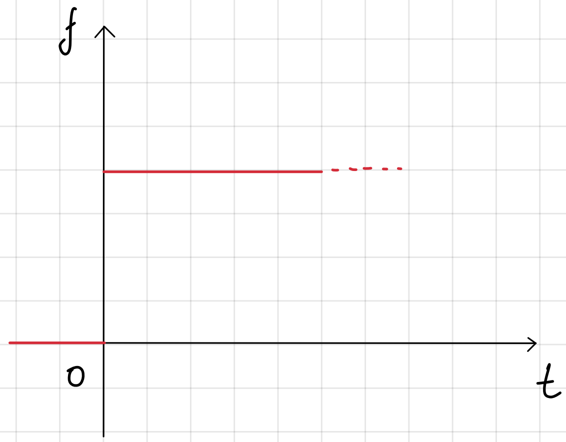
$-\infty \to \emptyset$ $\quad 0 \to 1$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+\alpha}}$$

trasformata di Laplace della funzione exp

FUNZIONE GRADINO

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$F(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} = -\frac{1}{s} \int_0^{-\infty} e^{\varepsilon}\, d\varepsilon \quad \text{con } \varepsilon = -st$$

$$= -\frac{1}{s} \left[e^{\varepsilon} \right]_0^{-\infty} = -\frac{1}{s}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}[1] &= -\frac{1}{s} \\ \mathcal{L}[0] &= \emptyset \end{aligned}}$$

TIME SHIFT

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\cdot 1(t-t_0)\right] = e^{-st_0}\, F(s)}$$

$$\to \mathcal{L}[\dots] = \int_0^\infty f(t-t_0)\cdot 1\!\!1(t-t_0)\cdot e^{-st}\,dt$$

$t_0 = t-\tau$

$\uparrow$

pongo $t-t_0 = \tau$

$\Rightarrow$ se $t \to 0 \Rightarrow \tau = -t_0$

Sarebbe $+s\tau$??

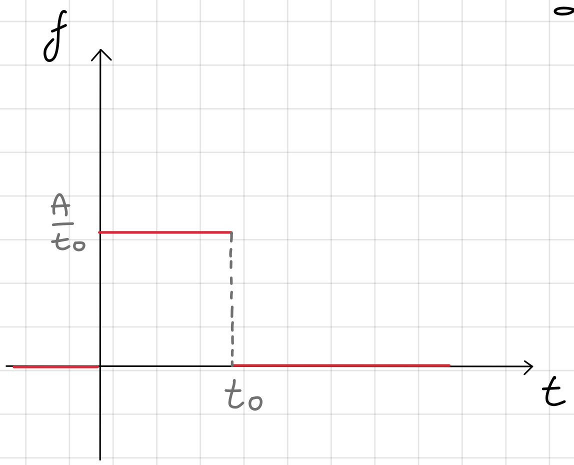
$$\Rightarrow \mathcal{L}[\dots] = \int_{-t_0}^{\infty} f(\tau)\cdot 1\!\!1(\tau)\, e^{-s(t-\tau)}\,dt = e^{-st}\int_{-t_0}^{\infty} f(\tau)\cdot 1\!\!1(\tau)\cdot e^{-s\tau}\,d\tau$$

fino a 0 è 0

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\dots] = e^{-st}\underbrace{\int_0^\infty f(\tau)\cdot 1\!\!1(\tau)\, e^{-s\tau}\,d\tau}_{F(s)} = e^{-st_0}\cdot F(s)$$

QED

FUNZIONE FINESTRA

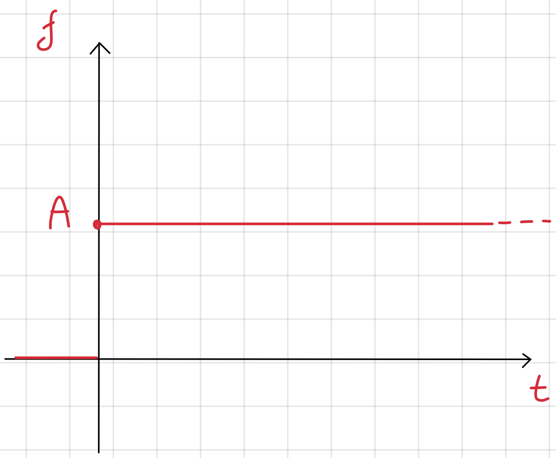


$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0}1\!\!1(t) - \frac{A}{t_0}(t-t_0)\right]$$

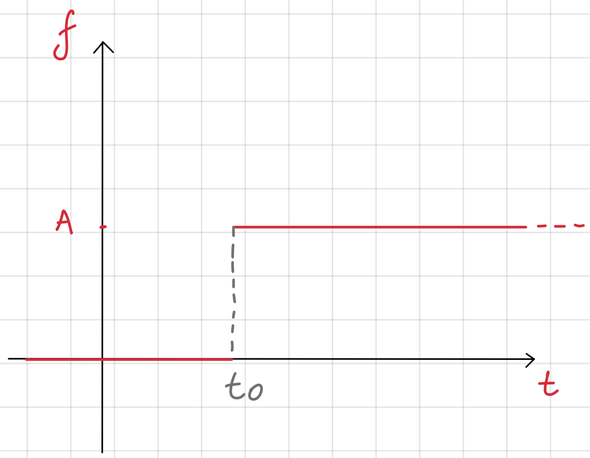
$$= \frac{A}{t_0}\left(\mathcal{L}[1(t)] - \mathcal{L}[1(t-t_0)]\right) =$$

$$= \frac{A}{t_0}\left(\frac{1}{s} - e^{-st_0}\frac{1}{s}\right) =$$

$$= \frac{A}{s t_0}\left(1 - e^{-st_0}\right)$$



$-$



FINESTRA = Gradino − gradino ritardato (Anticipato?)