SISTEMI DI ORDINE SUPERIORE

Finora abbiamo avuto a che fare solo con funzioni del tipo:

$$G(s) = \frac{1}{sT + 1} \quad , \quad G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

1° ORDINE

2° ORDINE

$$G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

ORDINE SUPERIORE

Supponiamo che abbia tutti i poli reali e distinti

→ RISPOSTA AL GRADINO

$$u(t) = 1(t) \rightleftarrows U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = U(s) \cdot G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\underbrace{s}_{\text{GRADINO}} \cdot \prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

→ SCOMPOSIZIONE

$$Y(s) = \frac{r_0}{s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{s+p_k}$$

POSSO CALCOLARE I RESIDUI COME:

$$r_k = \lim_{s \to -p_k} (s+p_k) \cdot Y(s)$$

→ ANTITRASFORMATA

(1)

$$y(t) = r_0 + \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot e^{-p_k t} \quad , \quad t \geq 0$$

Notiamo che ogni esponenziale è moltiplicato per il suo residuo; quindi un esponenziale può dominare non solo nel tempo (velocità di assestamento) ma anche in **ampiezza!**

Risposta al gradino di un sistema di ordine superiore quando tutti i poli sono **reali e distinti**

Abbiamo tanti esponenziali quanti sono i poli (n)

Siccome abbiamo una **somma di esponenziali**, il tempo che il sistema impiega ad arrivare a regime corrisponde a 4/5 costanti di tempo dell'esponenziale *più lento*, ovvero quello con la costante di tempo **maggiore**.

Possiamo quindi scrivere

$$r_k = \lim_{s \to -p_k} (s+p_k) \cdot Y(s) = \lim_{s \to -p_k} \boxed{(s+p_k)} \cdot K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s \cdot \prod_{i=1}^{n}\boxed{(s+p_i)}} = \lim_{s \to -p_k} \cancel{(s+p_k)} \cdot K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s\,\cancel{(s+p_k)} \cdot \prod_{i=1, i \neq k}^{n}(s+p_i)}$$

Un solo elemento della produttoria è uguale ad (s+pk), quindi lo "portiamo fuori"

Porto un (s+pk) fuori dalla produttoria andando a dire che la produttoria vale per tutti gli da 1 a n tranne per i=k; posso così semplificare.

(2)

$$= K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(-p_k + z_i)}{(-p_k) \prod_{i=1}^{n}(-p_k + p_i)}$$

CONSIDERAZIONE: GLI ZERI MODIFICANO LA RISPOSTA

PERCHE'?

dalla (2):

$$r_k = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} \boxed{(-p_k + z_i)}}{(-p_k) \prod_{i=1}^{n} (-p_k + p_i)}$$

Se c'è uno *zero* Zi che coincide con il *polo* Pk, otteniamo che il residuo associato a **quell'esponenziale diventa zero**, e quindi **non compare nella risposta**

Infatti dalla (1) $y(t) = r_0 + \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot e^{-p_k t}$ Se $r_k = 0 \Rightarrow 0 \cdot e^{-p_k \cdot t} = 0$

INOLTRE $(-p_k + z_i)$ è la DISTANZA TRA POLO E ZERO

$\Rightarrow$ QUANTO PIU UNO ZERO E' VICINO AD UN POLO p_k, TANTO PIU' L'EXP ASSOCIATO A QUEL POLO SARA' <u>MENO</u> INFLUENTE.

CASO 2: POLI COMPLESSI E CONIUGATI

Se $p_k \triangleq -\zeta\omega_n \pm \omega_d\sqrt{1-\zeta^2}$ A due a due

$$\Rightarrow \quad G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n_1}(s+p_i)\cdot\prod_{i=1}^{n_2}(s^2+2\zeta_i\omega_{n_i}s+\omega_{n_i}^2)}$$

- m Zeri REALI
- n_1 Poli REALI e DISTINTI
- n_2 COPPIE di Poli Cmplx e conj DISTINTI

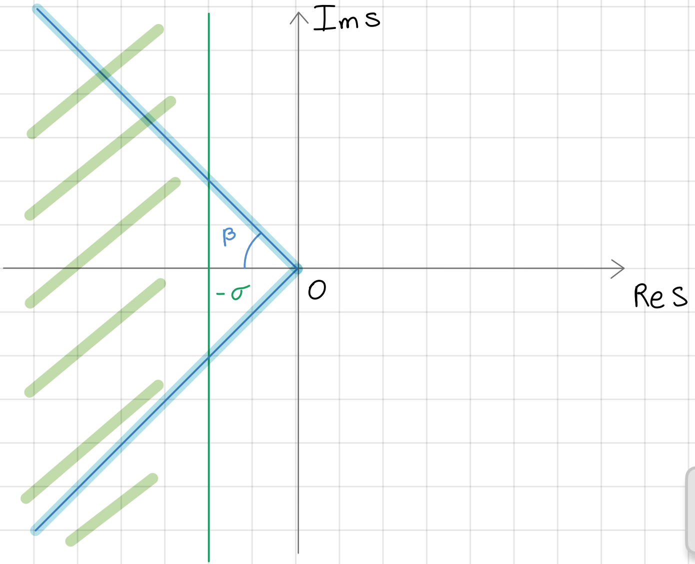
La differenza sta nel fatto che avremo anche sinusoidi smorzate:

$$y(t) = r_0 + \sum_{k=1}^{n_1} r_k \cdot e^{-p_k t} + \sum_{k=1}^{n_2}\left[1 - e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\cdot\cos(\omega_{d_k}t) + \frac{2\zeta_k\omega_{nk}}{\omega_{d_k}}\cdot e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\sin(\omega_{d_k}t)\right]$$

CHIEDERE AL PROF

In questo modo l'analisi fatta finora è inutile? NO

Possiamo definire delle regioni nel piano complesso:



Ad esempio, voglio che la parte immaginaria sia inferiore ad una certa parte reale **per tutti i poli**;

In questo modo non sapremo se c'è un polo dominante o meno, ma se diciamo che tutti i poli sono a sinistra di una certa ascissa (-*sigma*), sono sicuro che tutte le costanti di tempo si saranno esaurite dopo 4/*sigma*.

Allo stesso modo, se dico che voglio che tutti i poli siano all'interno di un certo angolo *beta*, allora stiamo assegnando un certo **coefficiente di smorzamento** *zeta.*

Di conseguenza saremo certi che (se l'angolo è nel range) il coefficiente di smorzamento sarà minore di quello assegnato.

Morale della favola
Possiamo definire delle **regioni;** se tutti i poli sono all'interno di questa regione, allora potremo affermare che la risposta avrà **al più** una certa costante di tempo o un coefficiente di smorzamento.

Modo del sistema: è l'antitrasformata di un singolo termine della scomposizione in fratti semplici.

EVOLUZIONE LIBERA

Quando abbiamo visto la risoluzione delle equazioni differenziali con il metodo della trasformata di Laplace, abbiamo visto che la derivata (in s) si traduce in s * F(s) - f(0); siccome abbiamo assunto condizioni iniziali nulle, il secondo membro era sempre zero.

L'evoluzione libera è la risposta del sistema quando le condizioni iniziali **non sono nulle.**

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \equiv \begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) & (1) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

TRASFORMO LA (1)

$$s\,X(s) - x(0) = A\,X(s) + B\,U(s)$$

$$s\,X(s) - A\,X(s) = x(0) + B\,U(s)$$

$$(sI - A)\,X(s) = x(0) + B\,U(s) \longrightarrow \text{Isolo } X(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}B\,U(s)$$

$$s = [s] \text{ ma } sI_3 = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

moltiplico A DESTRA

TROVO L'USCITA $Y(s)$

$$Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) + C(sI-A)^{-1}B\,U(s) + D\,U(s)$$

$$= C(sI-A)^{-1}x(0) + [\underbrace{C(sI-A)^{-1}B + D}_{G(s)}]\,U(s)$$

L'evoluzione libera **non dipende da u(t)** ma solo dalle specifiche del sistema e dal suo stato iniziale

È detta *forzata* perché se U(s)=0 allora anche l'uscita è zero.

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{C(sI-A)^{-1}x(0)}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA}} + \underbrace{G(s)\cdot U(s)}_{\text{EVOLUZIONE FORZATA}}$$

Infatti se $x(0) = 0$

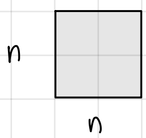
$$\Rightarrow Y(s) = [C(sI-A)^{-1} + D]\,U(s)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI-A)^{-1} + D$$

Quali sono le dimensioni delle matrici ?

MATRICE A

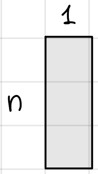
Ha tante righe quante sono le var di stato: ES ho n variabili:



$[n \times n]$

MATRICE B

Se ho un solo ingresso $\rightarrow$ B è un vettore $[n \times 1]$

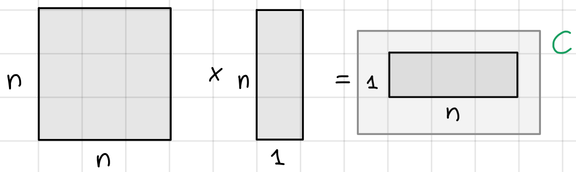


PRECISAZIONE $1 \times n \rightarrow$

Righe colonne

MATRICE C

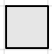
Se $A \times B$ =



Perché considero 1 IN 1 OUT

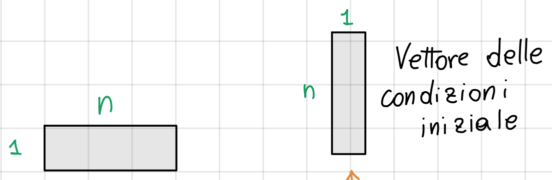
MATRICE D

è uno scalare $\rightarrow$



$[1 \times 1]$

QUINDI la risposta sarà:



$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} x(0) + G(s) \cdot U(s) \Rightarrow C(sI - A)^{-1} = [1 \times 1] \text{ SCALARE}$$

$[n \times n]$

$$s \cdot n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_n - n \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_n n$$

Da questa analisi osserviamo che l'evoluzione libera può essere vista come L'USCITA DI UN SISTEMA DINAMICO AVENTE MATRICI:

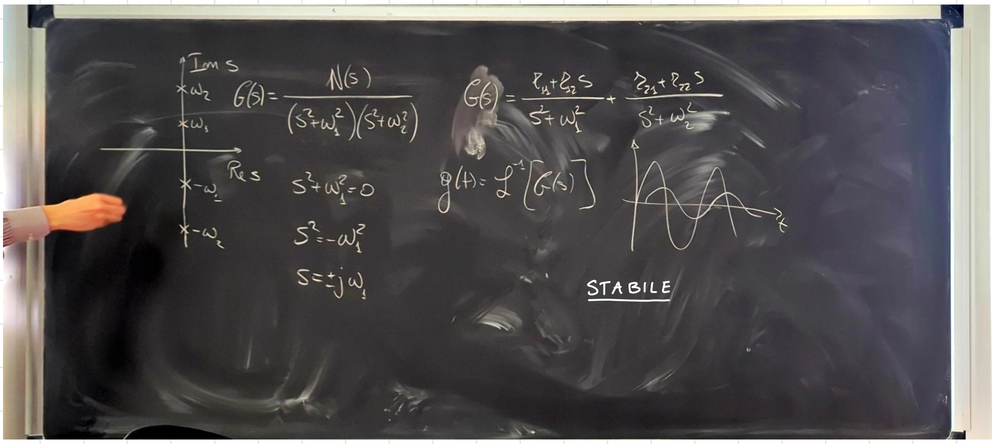
Se $u(t) = \delta(t) \rightleftarrows U(s) = 1$

- $\hat{A} = A$
- $\hat{B} = x_0 \rightarrow$ CONDIZIONI INIZIALI
- $\hat{C} = C$
- $\hat{D} = \emptyset$

Perché: $Y(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot x_0 = C(sI - A)^{-1} \cdot x_0 \cdot \mathcal{L}[\delta(t)]$

APPUNTI PRESI A LEZIONE

Recap schema fine lezione 19



* DIFFERENZE

* Esempio sys instabile

- FISSIONE NUCLEARE
- PENDOLO INVERSO → È un sys NON lineare

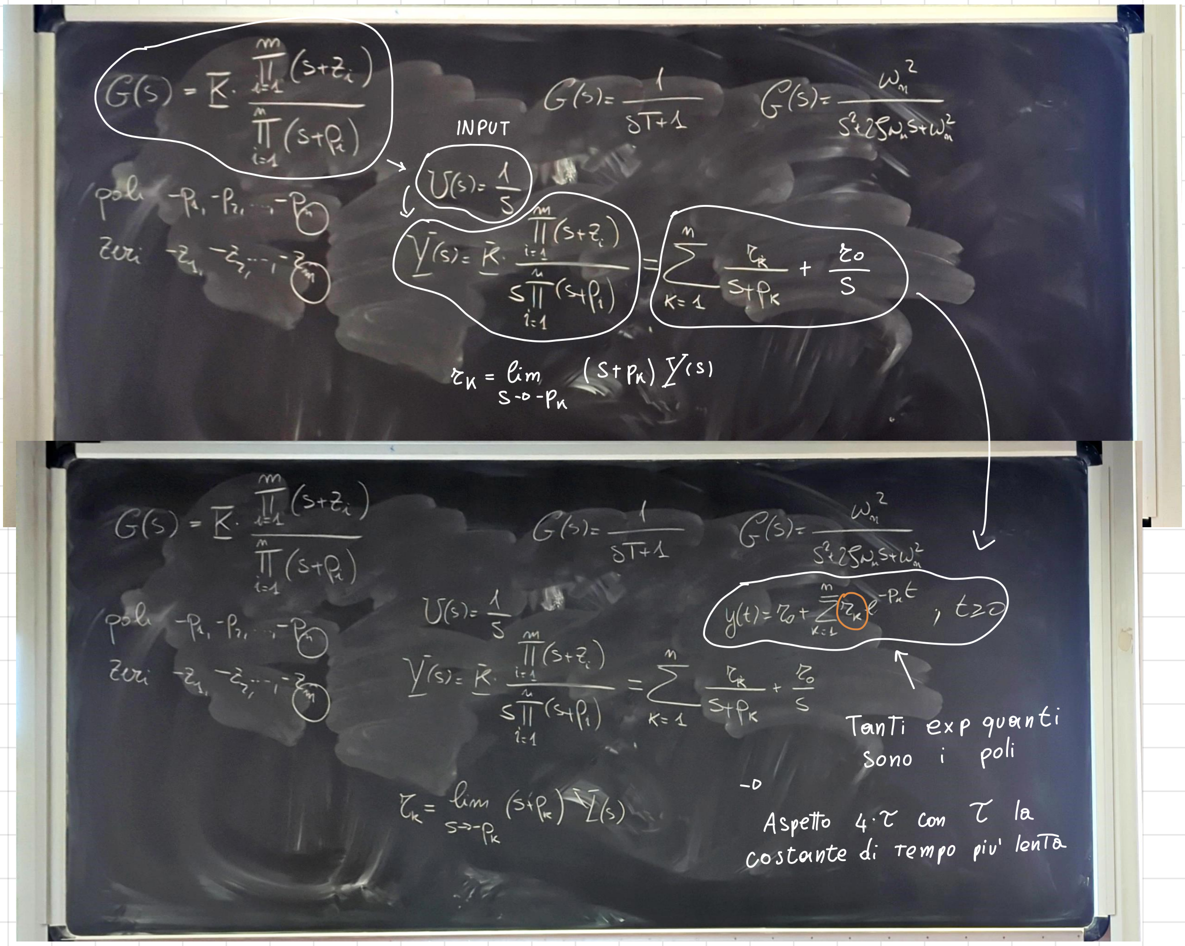
Se linearizzo il pendolo inverso è un sys (LTI) INSTABILE

SISTEMI DI ORDINE SUPERIORE

Assunto

Poli reali e distinti

la presenza degli zeri cambia la risposta del sys



Tanti exp quanti sono i poli

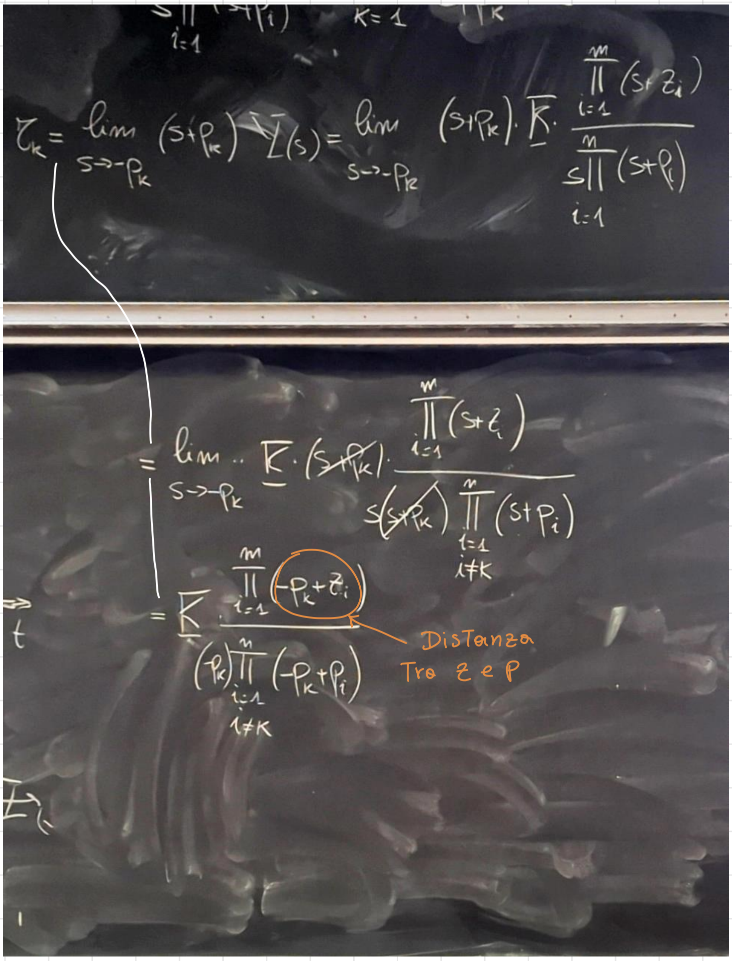
→ Aspetto $4 \cdot \tau$ con τ la costante di tempo più lenta

Domina l'exp con il residuo più grande

$$r_k = \lim_{s \to p_k} (s+p_k) \, K \cdot \frac{\prod_{i=1} (s+z_i)}{s \cdot \prod_{i=1} (s+p_i)}$$

Solo un polo p_i sarà uguale a quello p_k

$\Rightarrow$ Ne semplifico solo uno

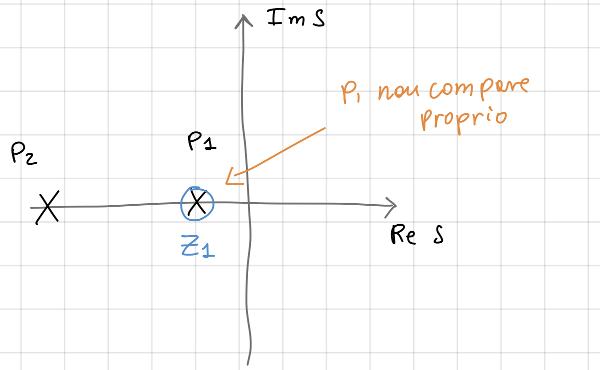


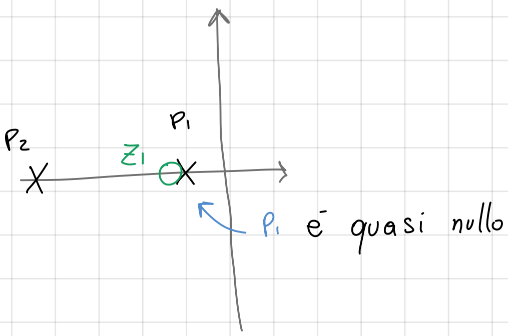
Uno zero coincide con un polo

$$\text{Se} \quad z_i = p_K \Rightarrow \tau_K = 0$$

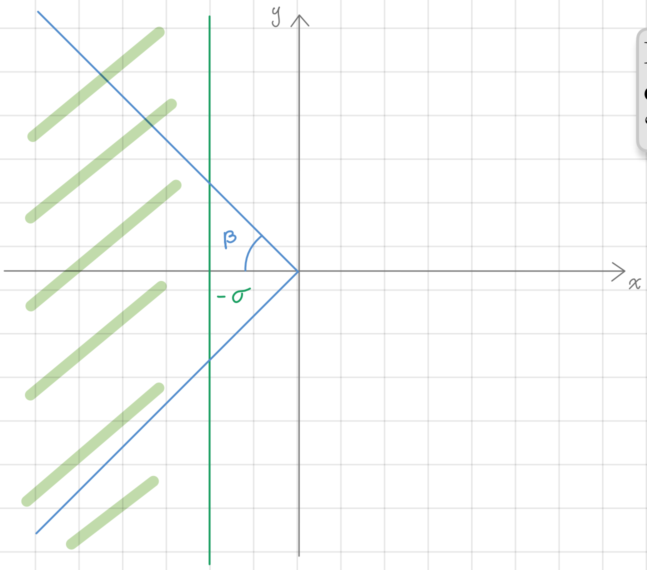
l'exp non compare nella risposta

E quindi gli zeri cambiano la risposta del sys.





$$G(s) = \mathbb{K} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{n_1} (s + p_i) \prod_{i=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_i \omega_{n_i} s + \omega_n^2)}$$



Posso definire delle **zone** e dire che tutti gli esponenziali saranno sicuramente più lenti di un certo "*-sigma*"

EVOLUZIONE LIBERA

L'evoluzione libera è la risposta del sistema quando parte da uno stato iniziale diverso da zero.

Evoluzione libera

Evoluzione forzata

$$\mathcal{L}\left[\frac{dw(t)}{dt}\right] = sW(s) - w(0)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

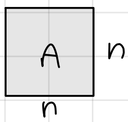
$$X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

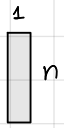
$$= C(sI-A)^{-1}x(0) + [\underbrace{C(sI-A)^{-1}B + D}_{G(s)}]U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\boxed{C(sI-A)^{-1}x(0)}}_{\text{E. LIBERA}} + \underbrace{\boxed{G(s)\cdot U(s)}}_{\text{Evoluzione Forzata}}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$



$B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$



$$Y(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) + G(s)\cdot U(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$= C(sI-A)^{-1}x(0) + [\underbrace{C(sI-A)^{-1}B + D}_{G(s)}]U(s)$$

$$\boxed{Y(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)}$$

evoluzione libera

evoluzione forzata

$$C(sI-A)^{-1}x(0)\cdot\mathcal{L}[\delta(t)]$$

$$= C(sI-A)^{-1}x(0)$$