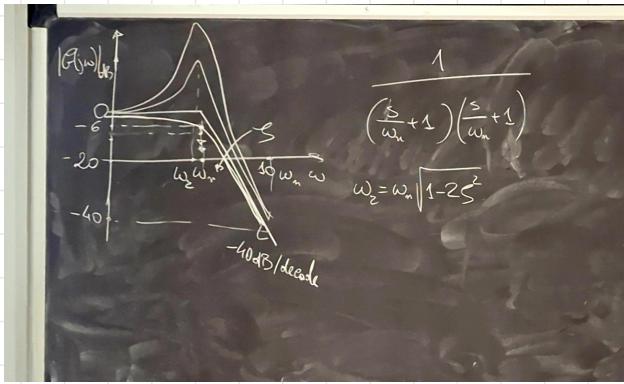


Recap Lez 22

* Perché Tracciare il diagramma di Bode?

* Serie di Fourier nello Tesina



$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + \omega_n^2}$$

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\omega_n > 0$$

$$0 < \zeta < 1$$

$$x \quad \omega \quad \omega_n \quad \omega \quad \omega_z$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \omega_n^2}$$

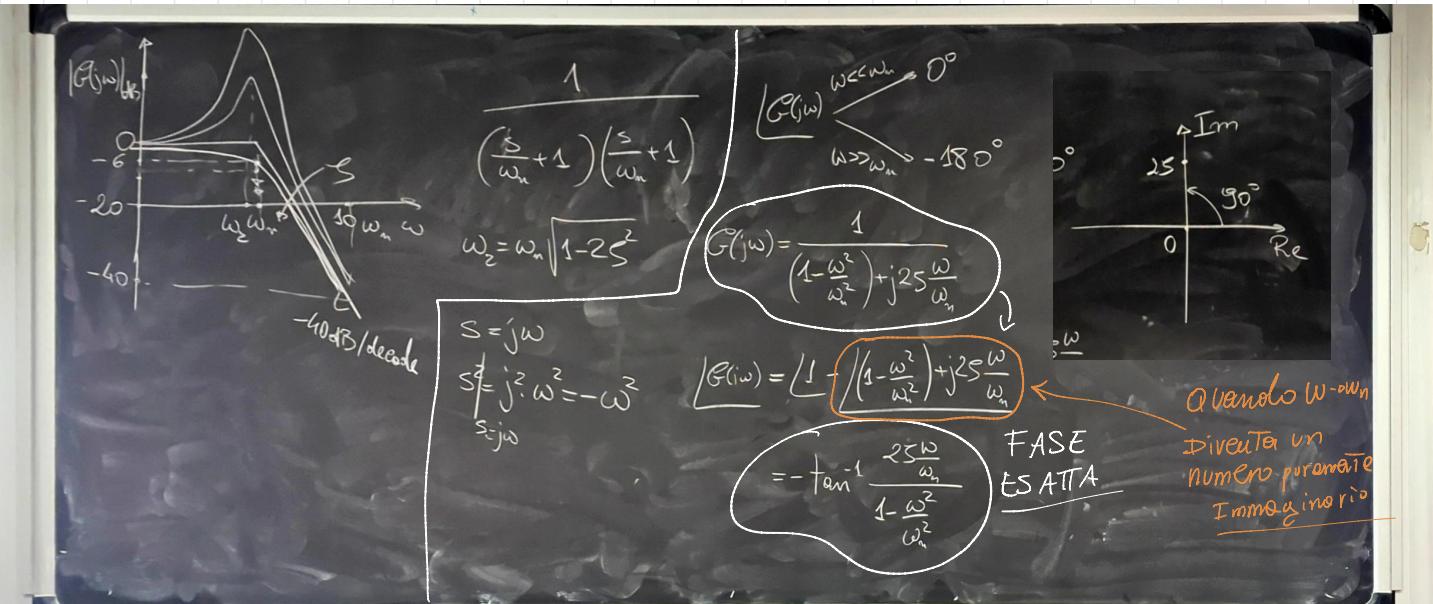
$$G(j\omega) = \sqrt{\omega_n^2 + (\omega_n^2 + \zeta^2\omega^2)}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\omega_n^2 + (\omega_n^2 + \zeta^2\omega^2)}$$

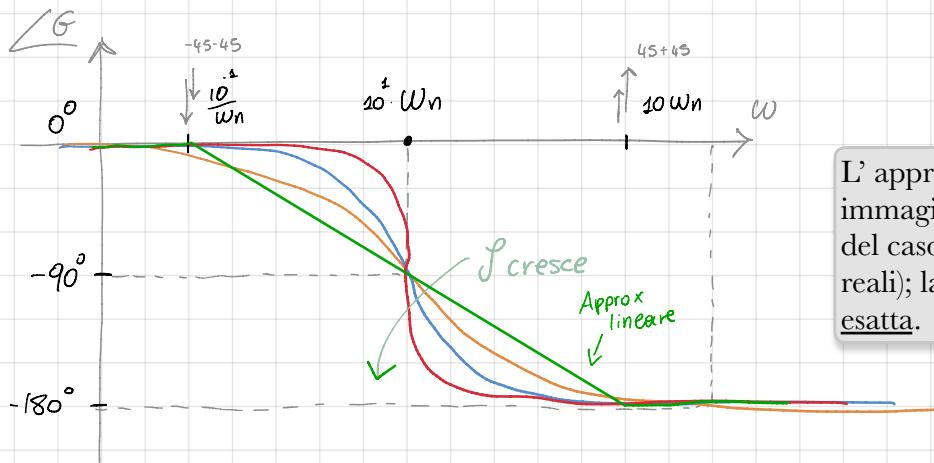
$$|G(j\omega)| = 10^{\frac{|G(j\omega)|}{20}}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_z^2}$$

Fattori del II ordine - FASE



* imo: sfasamento Seno



L'approssimazione della fase dei due poli immaginari è praticamente uguale alla fase del caso visto precedentemente (due poli reali); la differenza sta nella rappresentazione esatta.

* Appunto Arcotangente

ESERCIZI

ES1

Polo in Origine

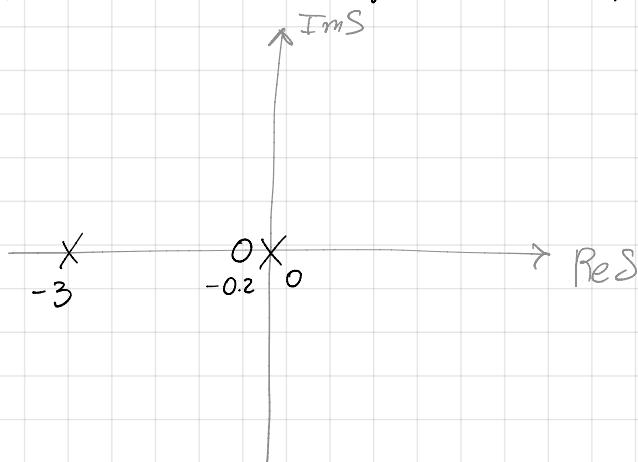
$$G(s) = 50 \frac{(s+0.2)}{s(s+3)}$$

La Fdt ha uno zero in $z_1 = -0.2$ ed ha due poli $p_1 = 0$; $p_2 = -3$.

La forma standard del diag. di Bode è:

$$G(s) = 50 \cdot \frac{0.2(1+2s)}{s \cdot 3(1+\frac{s}{3})} = 3.3 \cdot \frac{1+2s}{s(1+\frac{1}{3}s)}$$

Rappresento i poli e gli zeri sul piano complesso



Determino i punti di rottura: $\omega_1 = 0.2 \text{ rad/s}$; $\omega_2 = 3 \text{ rad/s}$

Det l'intervallo di pulsazioni d'interesse: $\bar{\omega} \in [10^{-2}; 10^2] \text{ rad/s}$

L' per tracciare i diagrammi conviene un ulteriore decade in più e in meno.

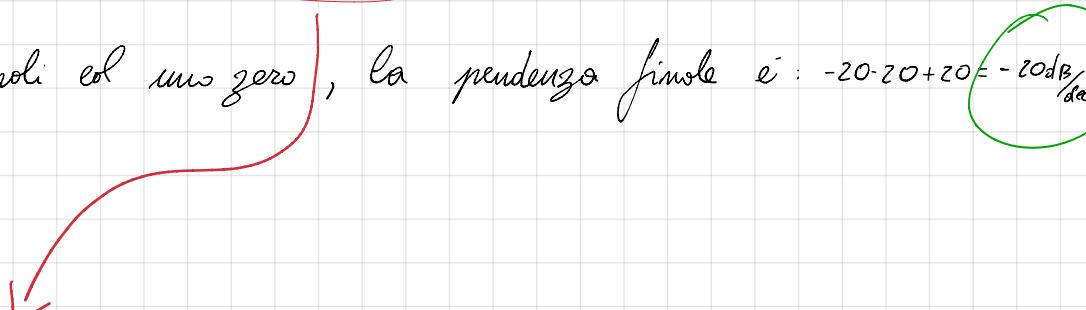
per semplicità: $\bar{\omega} \in [10^{-2}; 10^4] \text{ rad/s}$ e $\bar{\omega}_2 \in [10^{-2}; 10^2] \text{ rad/s}$

Analamenti iniziali e finali

\rightarrow Essendoci un polo nell'origine, la pendenza iniziale è -20 dB/dec e zero per il punto:

$$\bar{\omega} = 0.01, \quad |G(j\bar{\omega})|_{dB} = 20 \log \frac{3.3}{0.01} = 50.4 \text{ dB}$$

\rightarrow Essendoci due poli ed uno zero, la pendenza finale è: $-20 - 20 + 20 = -20 \text{ dB/dec}$



Andamento iniziale in presenza di un POLO nell'origine

Nella forma standard: $G(j\omega) = K \frac{1 + \alpha j\omega}{j\omega(1 + \alpha j\omega)} = K \frac{1 + \alpha j\omega}{j\omega - \alpha\omega^2} = K \frac{1 + \alpha j\omega}{-\alpha\omega^2 + j\omega}$

$$|G(j\omega)| = K \frac{\sqrt{1 + (\alpha\omega)^2}}{\sqrt{\omega^4\alpha^2 + \omega^2}} = K \frac{\sqrt{1 + (\alpha\omega)^2}}{\sqrt{\omega^2(\omega^2\alpha^2) + \omega^2}} = \frac{K}{\omega} \frac{\sqrt{1 + (\alpha\omega)^2}}{\sqrt{1 + (\alpha\omega)^2}} = \frac{K}{\omega}$$

K modulo ω
 in presenza
 di un polo
 nell'origine

\Rightarrow In decibel: $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{K}{\omega} \right)$

K
 con polo
 in origine

dove ω è MINORE al primo punto di rottura

Andamento iniziale in presenza di uno ZERO nell'origine

$$G(s) = \frac{k \cdot s(\alpha s + 1)}{(1 + bs)} \Rightarrow G(j\omega) = k \frac{j\omega(1 + \alpha\omega j)}{1 + b\omega j} = k \frac{j\omega - \alpha\omega^2}{1 + b\omega j} = \frac{-\alpha\omega^2 + \omega j}{1 + b\omega j}$$

$$\Rightarrow |G(j\omega)| = k \frac{\sqrt{\alpha^2\omega^4 + \omega^2}}{\sqrt{1 + b^2\omega^2}} = k \frac{\omega \sqrt{\alpha^2\omega^2 + 1}}{\sqrt{b^2\omega^2 + 1}} = \boxed{k \cdot \bar{\omega}}$$

Modulo
Se $b = \alpha$

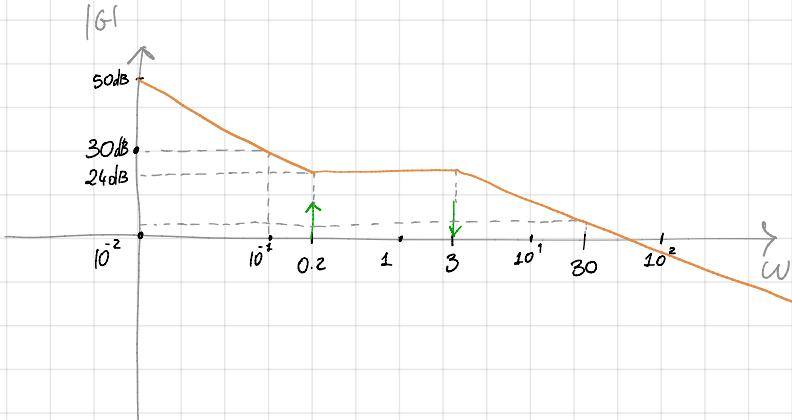
In decibel: $|G(j\bar{\omega})|_{dB} = 20 \log(k \bar{\omega})$

* Come $\bar{\omega}$ possono prendere una qualsiasi ω , ci conviene prendere il valore più piccolo della banda di riferimento.

Fasi:

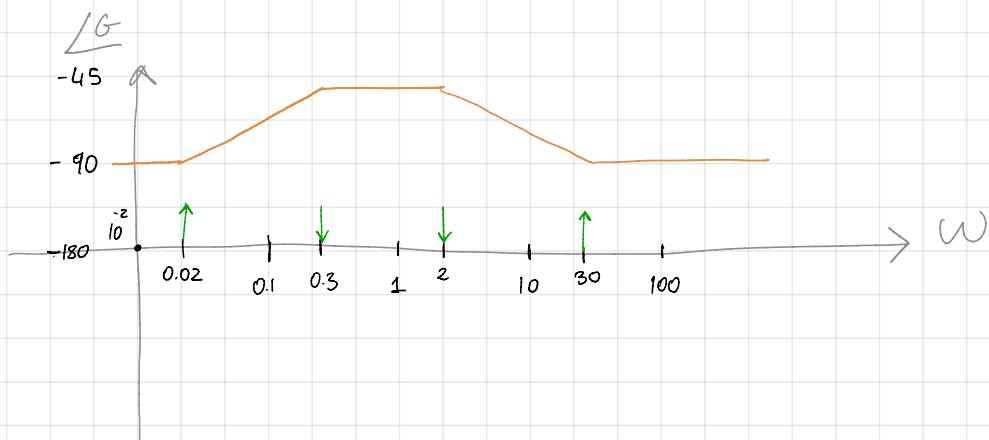
-> Essendo un polo nell'origine ed un guadagno positivo, la fase iniziale è -90°

-> Essendo 2 P e 1 zero Reale negativo, è $-90 - 90 + 90 = -90^\circ$



$$\hat{G}(j\omega) = 3.3 \frac{1}{j\omega}$$

$$\Rightarrow |\hat{G}|_{dB} = 20 \log \left(\frac{3.3}{0.2} \right) = 24 dB$$



Risposta ad un segnale $u(t) = 6 \cdot \sin(\bar{\omega}t)$ con $\bar{\omega} = 7 \text{ rad/s}$

A occhio: dai diagrammi di Bode: $\angle G(j\omega) \approx -45^\circ \Rightarrow \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{4}$

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 15 dB \Rightarrow |G(j\omega)| = 10^{\frac{15}{20}} = 5.6$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) \approx 6 \cdot 5.6 \cdot \sin(7t - \frac{\pi}{4}) = 33.6 \sin(7t - \frac{\pi}{4})$$

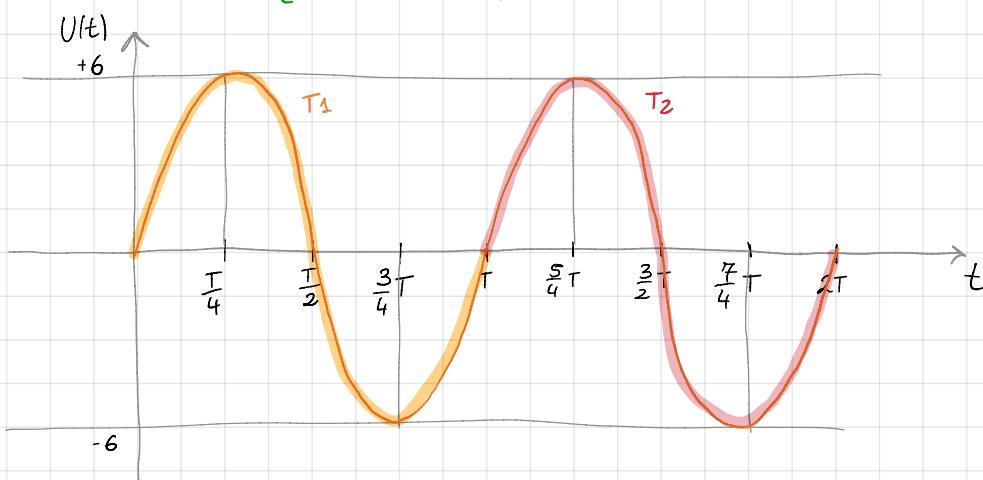
- Fase e moduli esatti $\bar{\omega} = 7$

$$G(j\omega) = \frac{50 (j7 + 0.2)}{j7 (j7 + 3)} = 50 \cdot \frac{0.2 + j\frac{7}{2}}{-49 + j21} \Rightarrow |G(j\omega)| = 6.57 ; \angle G(j\omega) = -1.2 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = 6.57 \cdot 6 \cdot \sin(7t - 1.2)$$

Diseño del señal en input

$$U(t) = 6 \sin(7t)$$

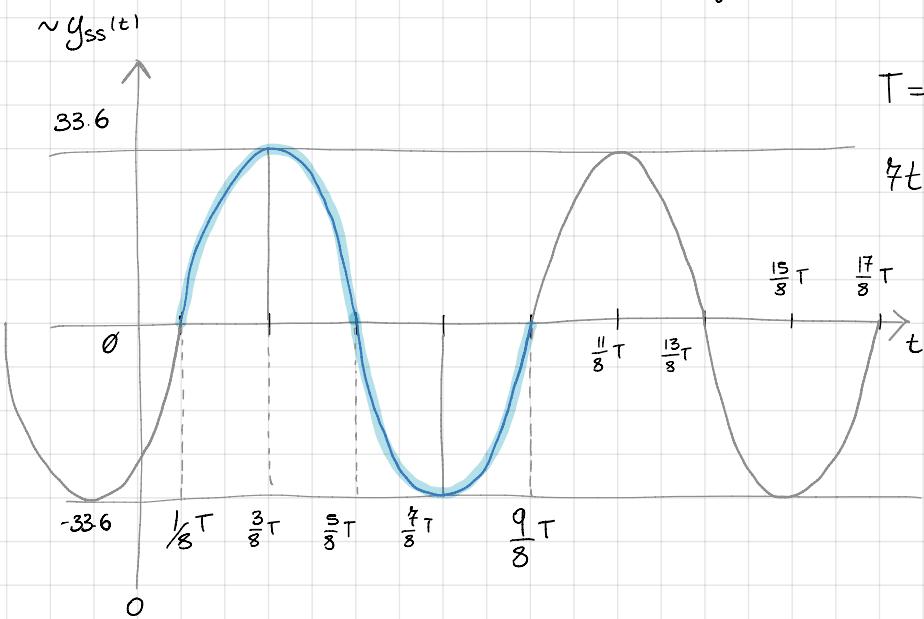


$$T = \frac{2\pi}{7} \approx 0.29\pi$$

$$7t = 0 \rightarrow t_i = 0 \Rightarrow t_f = \frac{2}{7}\pi$$

Diseño del señal en out Approx

$$y_{ss}(t) \approx 33.6 \sin\left(7t - \frac{\pi}{4}\right)$$



$$T = \frac{2\pi}{7} \approx 0.29\pi \rightarrow \pi \approx \frac{7}{2} T$$

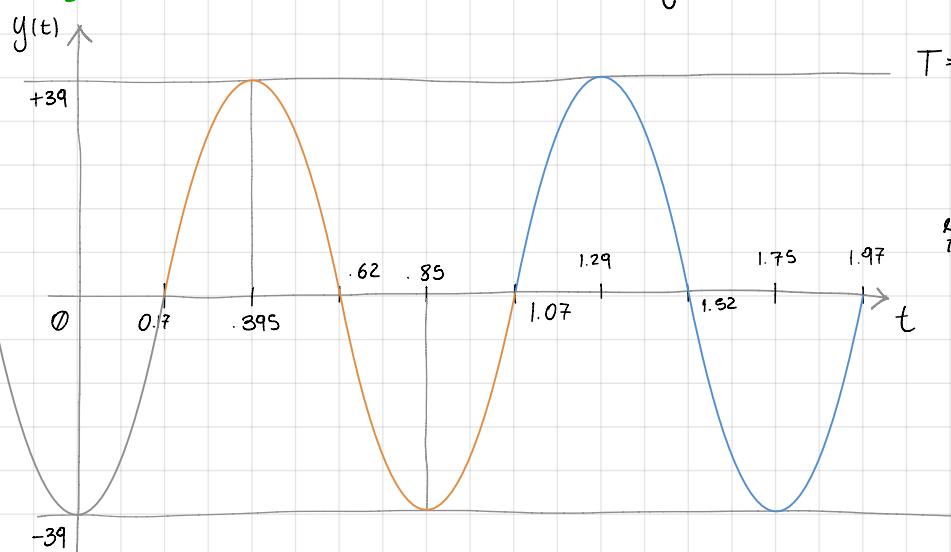
$$7t - \frac{\pi}{4} = 0 \text{ per } t = \frac{1}{28}\pi = \frac{1}{28} \cdot \frac{7}{2} T = \frac{1}{8} T$$

$$t_f = t_i + T = \frac{1}{8} T + T = \frac{9}{8} T \quad t_f$$

$$\frac{1}{28}\pi + \frac{2}{7}\pi = \frac{9}{28}\pi \approx 1.01 \quad \text{Periodo in Secondi}$$

Diseño del señal en out Real

$$y_{ss}(t) = 39 \sin(7t - 1.2)$$



$$T = \frac{2\pi}{7} \approx 0.29\pi \approx 0.9 \text{ s}$$

$$\therefore \pi = \frac{7}{2} T$$

$$7t - 1.2 = 0 \text{ per } t = \frac{6}{35} \approx 0.17 \text{ s} \quad t_i$$

$$t_f = 1.07 \quad t_f$$

Banda passante

$$G(s) = 50 \frac{(s+0.2)}{s(s+3)} \Rightarrow G(j\omega) = 50 \frac{(j\omega+0.2)}{j\omega(j\omega+3)}$$

|

$$= 50 \frac{j\omega+0.2}{-\omega^2+j3\omega}$$

$$\Rightarrow |G(j\omega)| = 50 \cdot \frac{\sqrt{\omega^2+0.2^2}}{\sqrt{\omega^4+9\omega^2}} = \frac{50 \sqrt{\omega^2+0.2^2}}{\omega \sqrt{\omega^2+9}}$$

Val Nat

\uparrow

$$\text{Pongo } \underline{z} = \omega^2 \Rightarrow 2500 \underline{z} + 500 = \underline{z}^2 + 9\underline{z}$$

Trovo la
Banda

Siccome $\underline{z} = \omega$ $\Rightarrow \omega_{1,2} = \pm \sqrt{2491.2}$

$$\omega_{3,4} = \pm \sqrt{-0.2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 49.9 \\ \omega_2 = -49.9 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_3 = 0.45i \\ \omega_4 = -0.45i \end{cases}$$

Nei sistemi passa basso, il valore ω_0 per il quale il modulo di $G(j\omega)$ si annulla in decibel, viene chiamato **banda passante**.

$$2500\omega^2 + 500 = \omega^4 + 9\omega^2 \rightsquigarrow \omega^4 - 2491\omega^2 - 500 = 0$$

↑

Posso risolvere direttamente con la calc

$$2500(\omega^2 + 0.2) = \omega^2(\omega^2 + 9)$$

$$\underline{z}_1 = 2491.2$$

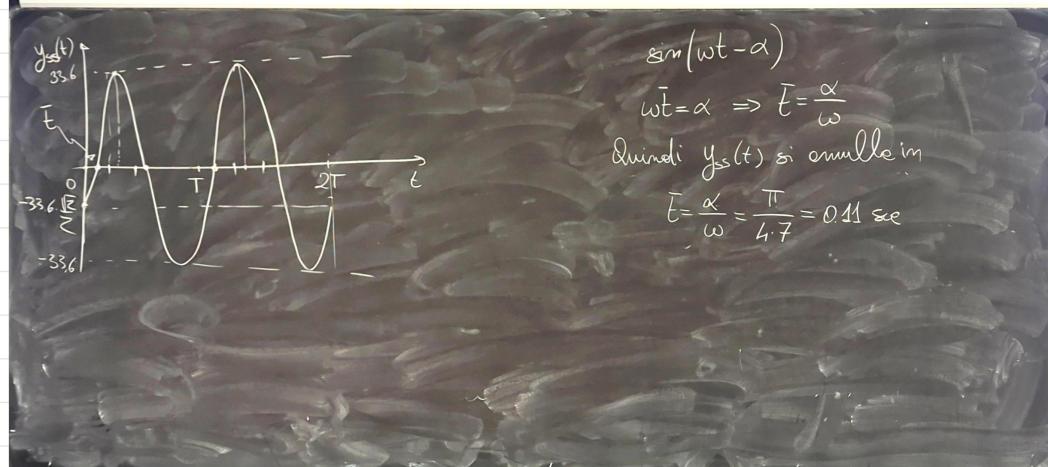
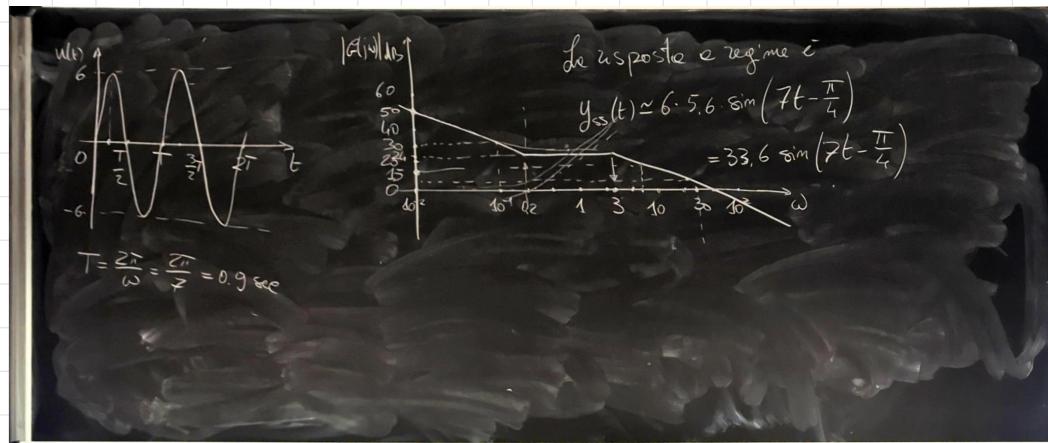
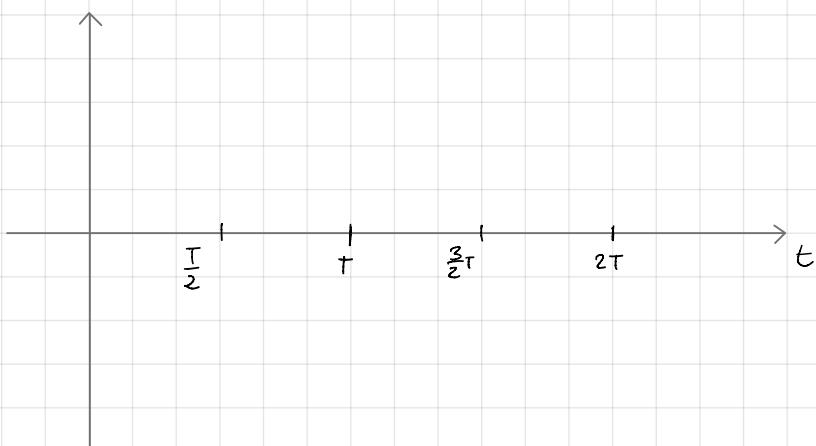
$$\underline{z}_2 = -0.2$$

Appunti presi a lezione, poco utili

$$u(t) = 6 \sin(\frac{\pi}{4}t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 0.98 s$$

$$\frac{\pi}{4}t = 0 \rightarrow t_i = 0 \Rightarrow t_f = 0.98 s$$



* Bando passante (eventuale cancellazione)

