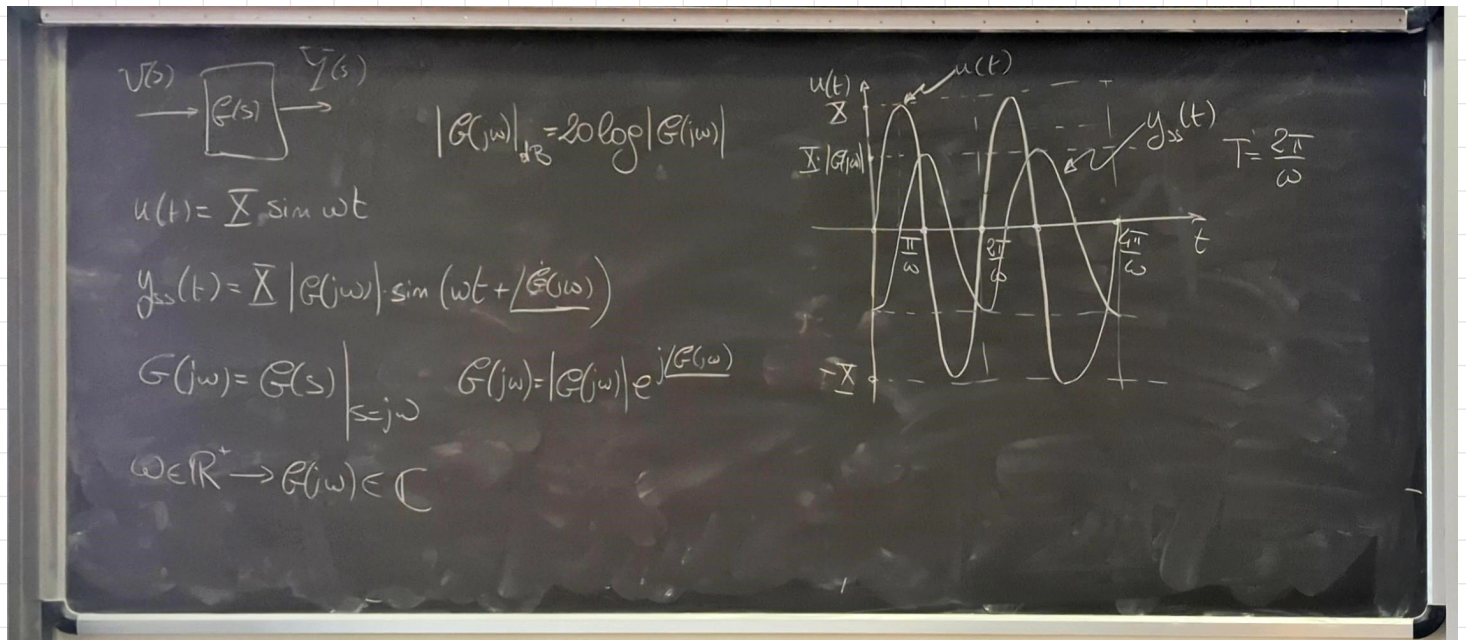
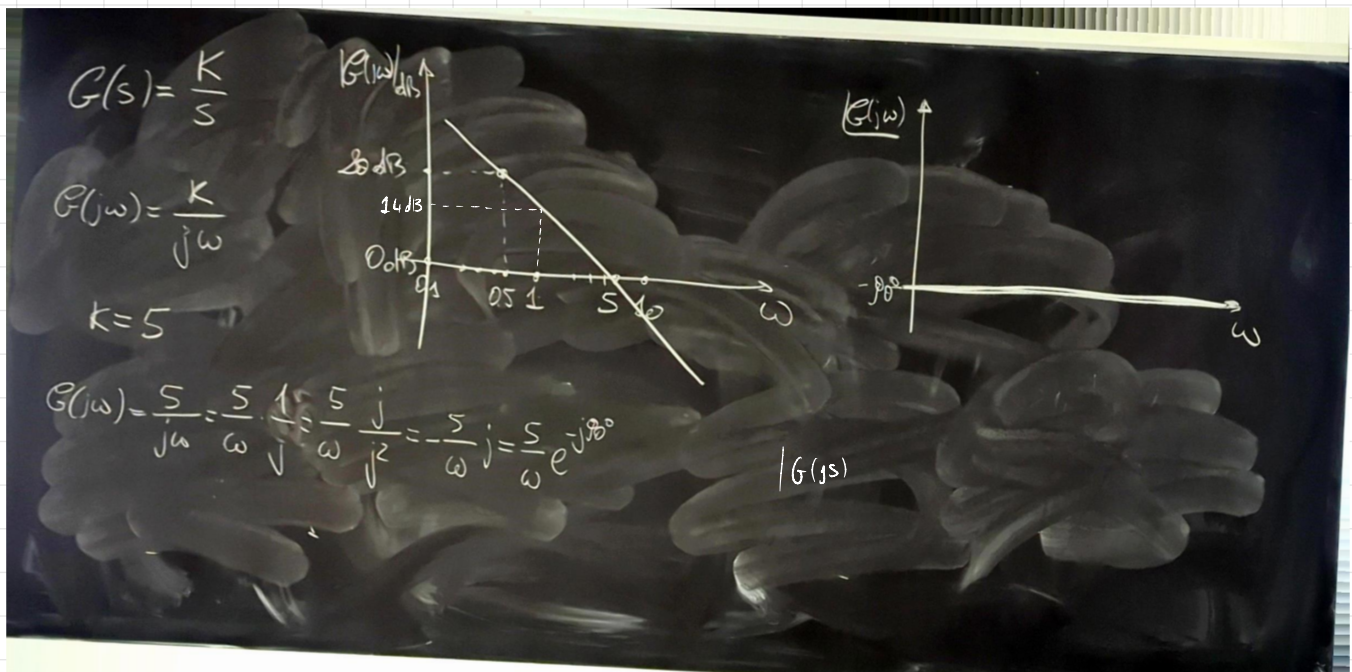


# Recap Lezione 20



Recap  $G(s) = \frac{K}{s}$



# FATTORI DERIVATIVI

DERIVATIVO

$$G(s) = 5s \rightarrow G(j\omega) = 5j\omega$$

$$|G(j\omega)| = 5\omega \Rightarrow \left| G(j\omega) \right|_{dB} = 20 \log(5\omega) \\ = 20 \log(5) + 20 \log(\omega)$$

$$P_1: \left| G(j\omega) \right|_{dB} = 0 \rightarrow 20 \log(5\omega) = 0$$

$$\text{Per } 5\omega = 1 \rightarrow \omega = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow P_1 = \left( \frac{1}{5}, 0 \right)$$

$$P_2: \left| G(j\omega) \right|_{dB} \rightarrow 20 \log(5) \cong 14$$

$$\Rightarrow P_2 = (1, 14)$$

Qual è la pendenza?

$$H_p: \omega_1 = 1, \omega_2 = 10 \rightarrow$$

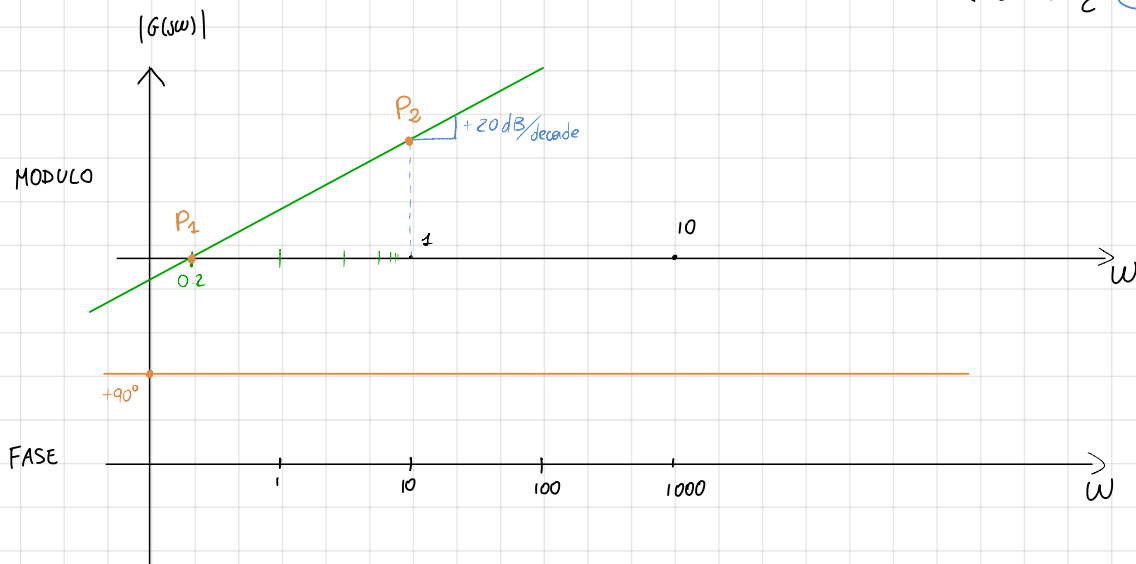
$$\begin{cases} 20 \log(5) = 13.97 \\ 20 \log(50) = 33.97 \end{cases}$$

$$\text{PENDENZA} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \text{slope} = \frac{(33.97 - 13.97)dB}{4 \text{ dec}} = 20 \frac{dB}{dec}$$

è più chiaro se prendiamo  $K=1$

$$\begin{cases} 20 \log(1) = 0 \\ 20 \log(20) = 20 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 20 \frac{dB}{dec} \quad QED$$



## Morale della favola

I fattori integrali hanno pendenza negativa, mentre quelli derivativi hanno pendenza positiva.

# FORMA "STANDARD" DELLA FDT PER DIAGRAMMI DI BODE

**OBIETTIVO:**

$$G(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=1}^n (1 + s T_i)}$$

Questa forma è estremamente importante perché ci permette di calcolare il valore iniziale del modulo con estrema facilità: ci basta calcolare  $G(0)$  e vedere immediatamente che il valore iniziale corrisponde al **guadagno statico  $k$**  che viene moltiplicato per il resto della fdt

**ESEMPIO:**

$$G(s) = \frac{3(2s+5)}{s^3+4s^2+3s} = \frac{3}{s} \frac{\frac{1}{5}(1+\frac{2}{5}s)}{s^2+4s+3} = \frac{3}{s} \frac{\frac{1}{5}(1+\frac{2}{5}s)}{(s+1)(s+3)}$$

I i termini che caratterizzano i poli e gli zeri, quando  $s=0$ , devono valere 1.

Questo perché  $1 \text{ dB} = 0$ , quindi quando devo effettuare la moltiplicazione dei moduli (per rappresentare sul diagramma di Bode), tutti gli altri membri, quando  $s=0$  saranno 0dB, quindi tutta l'ampiezza sarà facilmente leggibile nel coefficiente **k** moltiplicato all'inizio.

$$\Delta = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = 0 \quad p_1 = -1, p_2 = -3$$

$$= \frac{3}{s} \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} \frac{(1 + \frac{2}{5}s)}{(1+s)(1+\frac{1}{3}s)}$$

$\frac{1}{5}$   
k

$$\frac{(1 + \frac{2}{5}s)}{(1+s)(1+\frac{1}{3}s)}$$

Tutti i termini sono del tipo  $1+ks$

Tutti i termini noti sono 1

## FATTORI DEL PRIMO ORDINE

$$G(s) = \frac{1}{1+sT} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle 1 - \angle 1+j\omega T = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega T}{1}\right) = -\tan^{-1}(\omega T) \quad \text{FASE ESATTA}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|1|}{|1+j\omega T|} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = \frac{1}{20 \log_{10}(|1+j\omega T|)} = -20 \log_{10}(|1+j\omega T|) \quad \text{MODULO ESATTO}$$

### Punto di rottura

Nelle F.d.T. del 1° ordine il punto di rottura coincide con il valore assoluto del polo

$$G(s) = \frac{1}{1+sT} \Rightarrow p_1 = -\frac{1}{T} \Rightarrow |p_1| = \left(\frac{1}{T}\right) \quad \text{B.P.}$$

## DIAGRAMMI ASINTOTICI

Disegnare l'andamento del modulo in modo esatto può risultare difficile per fdt più complesse, quindi ci serviamo dello strumento dato dai diagrammi asintotici.

L'idea è quella di andare a vedere cosa accade per valori molto minori e maggiori rispetto al punto di rottura, tracciare il diagramma di bode (che risulterà più semplice) e poi approssimare l'andamento esatto del diagramma di bode nel punto di rottura.

• Per  $\omega \ll \frac{1}{T} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10}(|1+j\omega T|) = -20 \log_{10}(1 + \underbrace{\omega^2 T^2}_{\text{TRASCURABILE}})$

Se  $\omega \ll \frac{1}{T} \Rightarrow \omega T \ll 1 \Rightarrow -20 \log_{10}(1) = 0 \text{ dB} \quad \text{Per } \omega \ll \frac{1}{T} \text{ COSTANTE}$

• Per  $\omega T \gg 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log_{10}(\sqrt{\omega^2 T^2}) \approx -20 \log_{10}(\omega T) \quad \text{Per } \omega \gg \frac{1}{T}$

LINEARE IN LOG

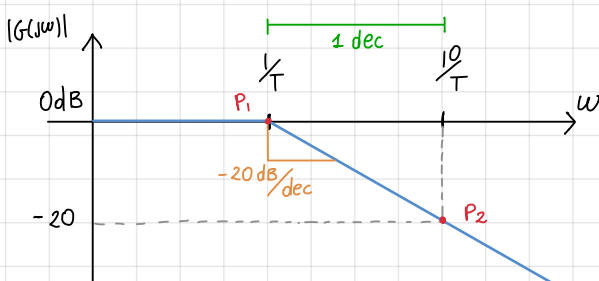
↳ Posso Trovare il valore tra due decadi

Hp. dec<sub>1</sub>:  $\frac{1}{T} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10}\left(\frac{1}{T} \cdot T\right) = 0 \text{ dB} \Rightarrow p_1\left(\frac{1}{T}; 0\right)$

dec<sub>2</sub>:  $\frac{10}{T} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10}\left(\frac{10}{T} \cdot T\right) = -20 \text{ dB} \Rightarrow p_2\left(\frac{10}{T}; -20\right)$

Slope = -20dB/dec

↳ Posso disegnare il diagramma Asintotico del MODULO



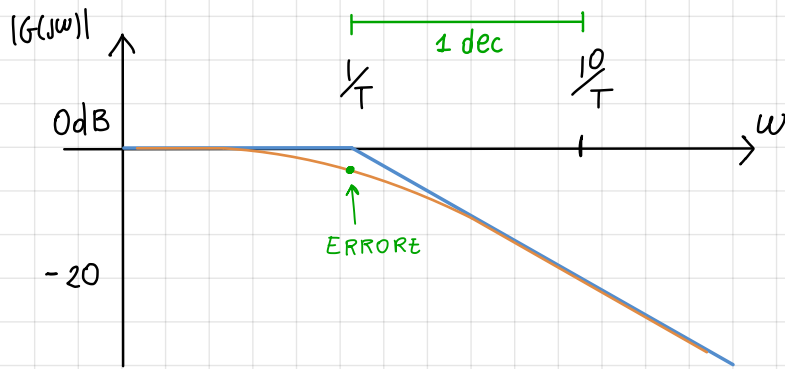
"ha la stessa pendenza del polo nell'origine"

Diagramma  
Asintotico

≠

Diagramma  
DI BODE

Quale sarà il diagramma esatto?



L'errore che commetto tra il diagramma asintotico e l'effettivo valore sarà 3dB

## CALCOLO DELL'ERRORE

Asintoticamente

$$\left| G(jw) \right|_{dB} \Big|_{\frac{1}{T}} \Big|_{wT \ll 1} = -20 \log \left( \frac{1}{T} \cdot T \right) = 0 \text{ dB} \quad \text{Visto Prima}$$

Esattamente

$$\left| G(jw) \right|_{dB} \Big|_{w=\frac{1}{T}} = -20 \log \left( \sqrt{1 + \frac{1}{T^2} T^2} \right) = -20 \log \sqrt{2} = -3.01 \text{ dB} \quad \text{ERR}$$

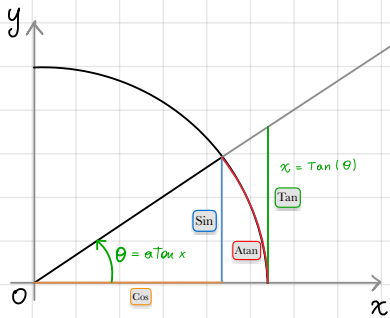
1 ottava sopra o sotto rispetto a  $w = \frac{1}{T} \Rightarrow \text{err} \approx 1 \text{ dB}$

$$\approx \frac{1}{3} 10^n \Rightarrow +4 \text{ oct} \approx -20 \log \left( \sqrt{1 + \frac{1}{9T^2} T^2} \right) \approx$$

**\* CHIEDI OTTAVA**

## Diagramma delle fasi

$$\angle G(jw) = \angle \frac{1}{1+jwT} = \angle 1 - \angle 1+jwT = -\arctan \left( \frac{wT}{1} \right) = -\arctan(wT) \quad \text{Funzione di } w$$



• Per  $wT \gg 1$  ovvero per  $w$  molto grandi

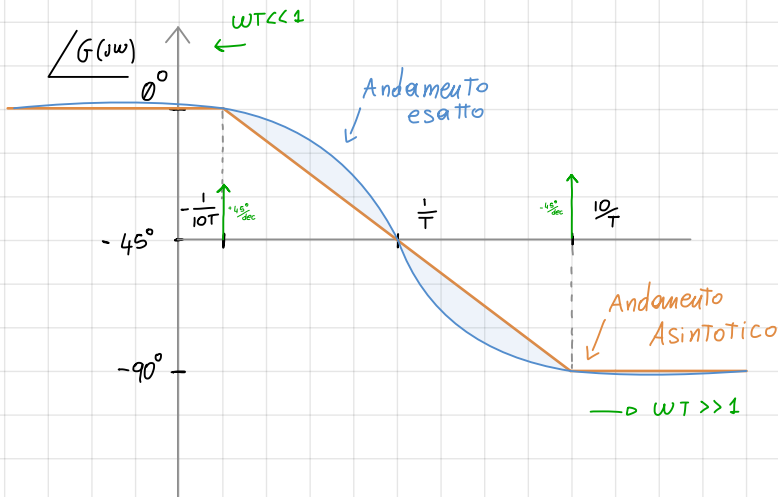
$\arctan(x \rightarrow \infty) = \text{"l'arco la cui tangente è elevata"}$

$\tan(x) \rightarrow \infty$  quando  $\theta \rightarrow 90^\circ$  (vedi disegno)  
 $\arctan(x)$

Quindi  $w > \frac{1}{T} \Rightarrow \angle G = -90^\circ$

• Per  $wT \ll 1 \Rightarrow \angle G = 0^\circ$

• Per  $w = \frac{1}{T} \Rightarrow \angle G = \arctan \left( \frac{1}{T} T \right) = \frac{\pi}{4} = -45^\circ$



**\* Recap IMPO**

## Termine con uno zero

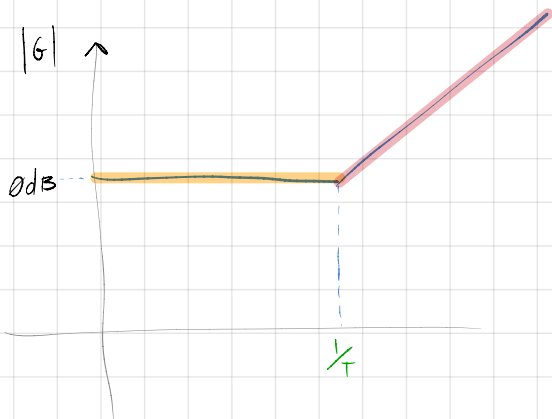
$$G(s) = 1 + sT$$

$$|G(j\omega)| = +20 \log(\sqrt{1 + (\omega T)^2})$$

POSITIVO

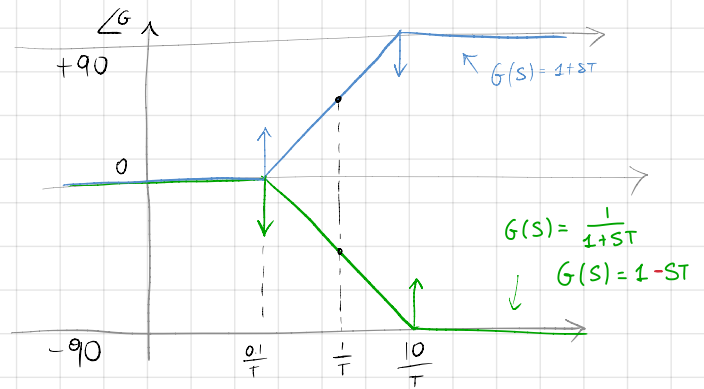
Lo zero si comporta nel modo opposto al polo, ovvero crea una **amplificazione**

- Per  $\omega T \ll 1 \rightarrow |G(j\omega)| = 20 \log(\sqrt{1 + \approx 0})$   
 $\text{dB} \mid = 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$
- Per  $\omega T \gg 1 \rightarrow |G(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\omega^2 T^2}$   
 $= 20 \log(\omega T)$



\* Recap Impo

$$\angle |G(j\omega)| = \angle 1 + j\omega T = \tan^{-1}(\omega T)$$



## Cosa succede se lo zero è negativo?

ES:  $G(s) = 1 - sT$

$$|G(j\omega)| = 20 \log(\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) \quad \text{UGUALE}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle 1 - \angle j\omega T = -\tan^{-1}(\omega T)$$

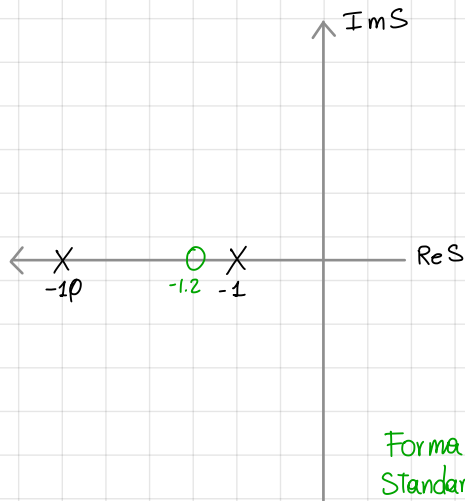
Proprio come il polo

	POLO (denom)	ZERO (numeratore)
MODULO	Ha l'effetto di far scendere il modulo di 20dB/dec	Ha l'effetto di far salire il modulo di 20dB/dec
Fase	Ha l'effetto di un ritardo di fase (quando ReP neg), graficamente si vede la fase che "scende"	Ha l'effetto di un anticipo di fase (ovvero quando ha ReP pos), graficamente si vede la fase che "sale". Se ha ReP neg, si ha un ritardo di fase, ovvero si comporta come un polo con ReP neg.



## ESEMPIO: FDT più "COMPLESSA":

Possiamo decidere dove posizionare i poli e gli zeri:



Immaginiamo di voler posizionare due poli, uno in -10 ed uno in -1; posizioniamo anche uno zero in -1.2; quest'ultimo è molto vicino ad uno dei poli, quindi ci aspettiamo che l'effetto del polo in -1 abbia un effetto più attenuato rispetto a quello in -10 (vedi qualche lezione fa).

La fdt avrà questo aspetto:

$$G(s) = K \cdot \frac{s + 1.2}{(s + 1)(s + 10)}$$

$$G(s) = K \cdot \frac{\frac{s}{6} \left(1 + \frac{s}{1.2}\right)}{(1 + s) \cdot \frac{1}{10} \left(1 + \frac{s}{10}\right)} = \frac{\frac{6}{5} K}{\frac{1}{10}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{6}\right)}{(1 + s) \left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

$$= \frac{K}{12} \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{6}\right)}{(1 + s) \left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

Siccome abbiamo ottenuto un guadagno di  $1/12$ , ci conviene scegliere un  $k$  iniziale multiplo di 12, semplicemente per ottenere un guadagno finale intero e facilmente rappresentabile (stiamo costruendo noi l'esercizio!). Scegliamo quindi  $k=540$ , perché  $540/12=45$

$$G(s) = 540 \cdot \frac{s + 1.2}{(s + 1)(s + 10)} = 54 \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{6}\right)}{(1 + s) \left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

Partiamo da qui

Osserviamo la funzione di trasferimento nella forma standard:

- Non ci sono poli nell'origine
- Non ci sono zero nell'origine
- Il guadagno statico, ovvero  $G(s)$  calcolata in  $s=0$  (se non ci sono poli e zeri in 0!) è di 54  $\rightarrow$  35dB
- Abbiamo due punti di rottura associati ai poli:  $\omega_1 = 1/T$  e  $\omega_2 = 10/T$
- Abbiamo un punto di rottura allo zero a parte reale negativa associato:  $\omega_3 = 1.2/T$

Guadagno Statico

$$\left| G(s) \right|_{s=0} = 20 \log_{10}(54) \approx 35 \text{ dB}$$

Punti di rottura

Immaginiamo la F.d.T nella forma

$$G(s) = K \cdot \frac{(1 + c_1 Ts)}{(1 + c_2 Ts)(1 + c_3 Ts)}$$

Nel nostro caso  $c_1 = 1.2$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 1/10$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_{p1} = |1 + c_2 s| = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{c_2} = -1 \omega_1 \\ B_{p2} = |1 + c_3 s| = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{c_3} = -10 \omega_2 \end{cases}$$

$$B_{p3} = |1 + c_1 s| = 0 \Rightarrow s = -\frac{1.2}{c_1} = -1.2 \omega_3$$

$\hookrightarrow$  A parte reale negativa

$\hookrightarrow$   $\uparrow$  modulo,  $\uparrow$  fase

superfluo, basta guardare  $K$

$$\left| G(j\omega) \right| = 45 \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{6}\omega T\right)^2}}{\sqrt{1 + (\omega T)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{10}\omega T\right)^2}} = 45 \cdot \sim 1 = 45$$

$\omega = \frac{1}{10T}$

$$\Rightarrow 45 \Big|_{dB} \approx 35 \text{ dB}$$

Il prof ha parlato di "quando  $s$  è zero il guadagno statico è quello moltiplicato davanti alla forma standard" ma non capisco perché si da per certo che il valore iniziale del modulo sia proprio quel guadagno calcolato in dB!

Soluzione: basta calcolare  $G(0)$  per accorgersi che il guadagno iniziale è proprio il guadagno statico!

## DIAGRAMMA DEI MODULI

### Come scegliere la **banda di frequenze** per il diagramma dei moduli

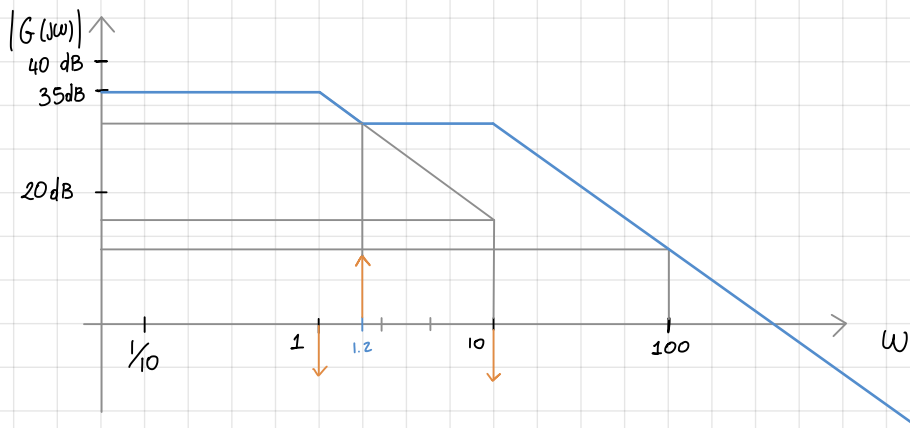
Per scegliere l'intervallo (banda) di frequenze che ci interessano al fine di disegnare il diagramma asintotico, ci basta guardare i due punti di rottura (dei poli); possiamo quindi definire:

- **Lower bound:** guardiamo il polo più piccolo e ci portiamo una decade prima.
- **Upper bound:** guardiamo il polo più grande e ci portiamo una decade dopo.

### Come disegnare il **diagramma asintotico** dei moduli guardando la fdt

Per facilitare l'operazione di disegno del diagramma, ci basta guardare la fdt; in particolare guardiamo i suoi poli e zeri sapendo che:

- Ogni polo fa aumentare il modulo (disegniamo una freccia verso l'alto in corrispondenza del polo).
- Ogni zero fa aumentare il modulo (disegniamo una freccia verso il basso in corrispondenza dello zero).

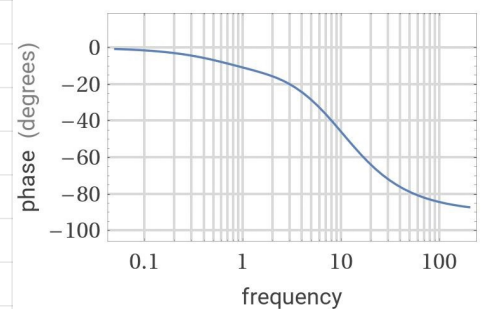
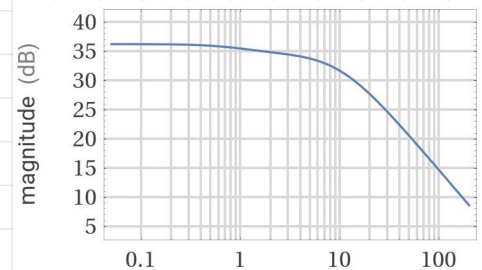
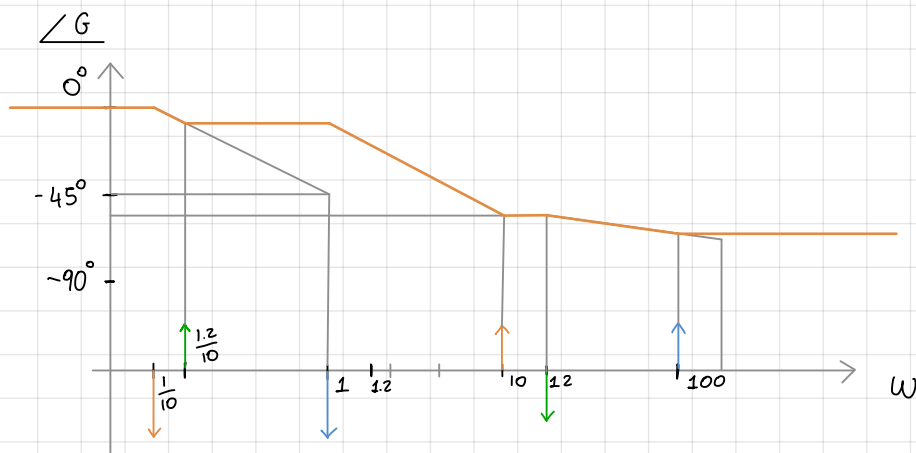


### Come disegnare il **diagramma asintotico delle fasi**

In condizioni standard (ovvero poli e zeri negativi):

- I poli hanno l'effetto di *ritardare* la fase.
- Gli zeri hanno l'effetto di *anticipare* la fase.

Bisogna però prestare attenzione: i ritardi ed anticipi di fase hanno una sorta di “transitorio”; non è nel punto di rottura che la fase inizia a cambiare (come nel modulo) ma inizia a cambiare una decade prima, e finisce una decade dopo!



$Y(s)$   
 $U(s)$

\* ESERCIZIO ESAME



## Come trovare il valore finale della fase

Sappiamo che in condizioni standard (poli e zeri  $< 0$ )

- Ogni polo ritarda di  $90^\circ$  la fase.
- Ogni zero anticipa di  $90^\circ$  la fase.

Abbiamo 2 Poli  $\Rightarrow -90^\circ - 90^\circ = -180^\circ$

Abbiamo 1 Zero  $\Rightarrow +90^\circ$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Abbiamo 2 Poli} \Rightarrow -90^\circ - 90^\circ = -180^\circ \\ \text{Abbiamo 1 Zero} \Rightarrow +90^\circ \end{array} \right\} \angle_{TOT} = 90 - 180 = \text{Valore finale } -90^\circ$$

In generale

$$\angle_{TOT} = -90^\circ_n - 90^\circ_m = -90(n-m)$$

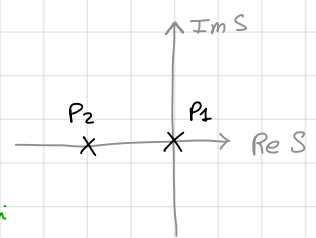
numero  
di poli  
a ReP

numero di  
zeri a parte  
reale negativa

## ESERCIZIO

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Poli:  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = -1$



$\Rightarrow \omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 1$  Punto di rottura  
 Polo in Origine  
 $\Rightarrow$  Non Parte COSTANTE!

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)}$$

Per  $\omega \gg 1 \Rightarrow$

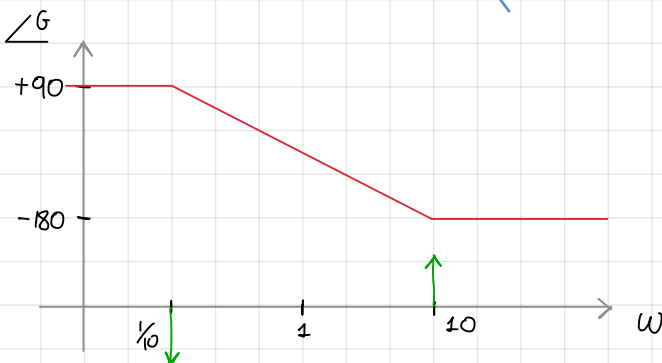
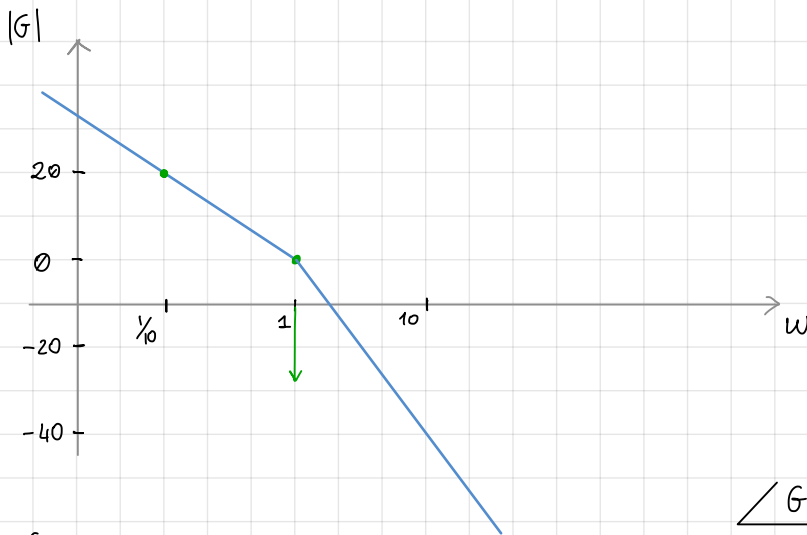
$$\bar{G}(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega}$$

Fdt di tipo INTEGRATIVO

$\Rightarrow$  Una decade prima del p.d.R, la Fdt si comporta come un integratore  
 Fino al prossimo punto di rottura

•  $|\bar{G}(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \Big|_{\omega=1} = 1 \Rightarrow 20 \log_2(1) = 0 \text{ dB} \Rightarrow P_1(1, 0) \in B_0$   
 $20 \log_2(10) = 20 \text{ dB} \Rightarrow P_2(1/10, 20) \in B_0$

•  $|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{- \omega^2 + j\omega} \right| = |- \omega^2 + j\omega|^{-1} = \sqrt{\omega^4 + \omega^2}^{-1} = \omega \sqrt{1 + \omega^2}^{-1}$   
 $\Rightarrow 20 \log_2(\omega \sqrt{1 + \omega^2}^{-1}) = -20 \log_2(\omega \sqrt{1 + \omega^2})$   
da FASTIDIO??  
Se non ci fosse si troverebbe -40dB



$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{- \omega^2 + j\omega} = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{- \omega^2}\right) = -\tan^{-1}(-\omega)$$

• Per  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $-\tan^{-1}(-\infty) \rightarrow +90^\circ$

Per  $\omega \rightarrow 0$ ,  $-\tan^{-1}(0) \rightarrow -90^\circ$   
??

Ho capito che ho 2 poli  
 ma non mi trovo!