

PROCEDURA TRACCIAMENTO DIAGRAMMA DI BODE

$$G(s) = 2 \cdot \frac{s+1}{(s+10)(s+0.1)}$$

1 - FORMA STANDARD

$$G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (1+s\omega_i)}{\prod_{i=1}^n (1+sT_i)}$$

$$\Rightarrow G(s) = 2 \cdot \frac{s+1}{10(1+10s) \cdot 1/(10s)} = 2 \cdot \frac{s+1}{(1+10s)(1+\frac{1}{10}s)}$$

2.1 - Guadagno, Zeri e poli

- $G(0) = 2$ Guadagno Statico

(valore iniziale) $\Rightarrow |G(0)| = 20 \log(2) \approx 6 \text{ dB}$

- $P_1 = -\frac{1}{10}$ $P_2 = -10$

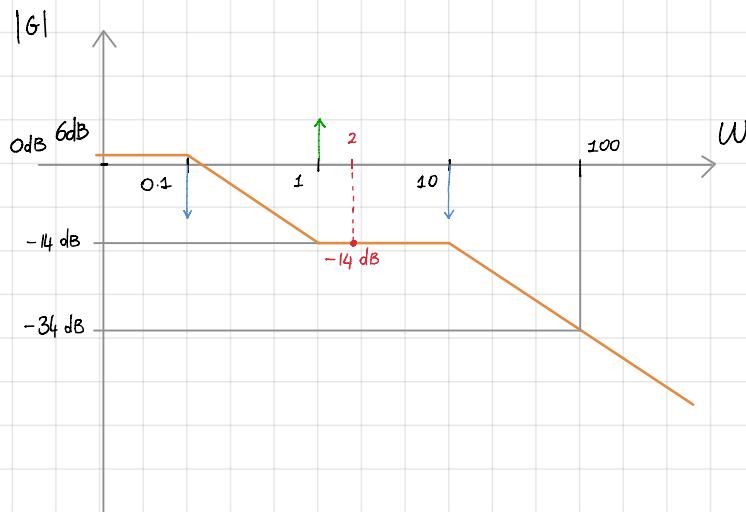
- $Z_1 = -1$

2.2 - Scelta della Banda

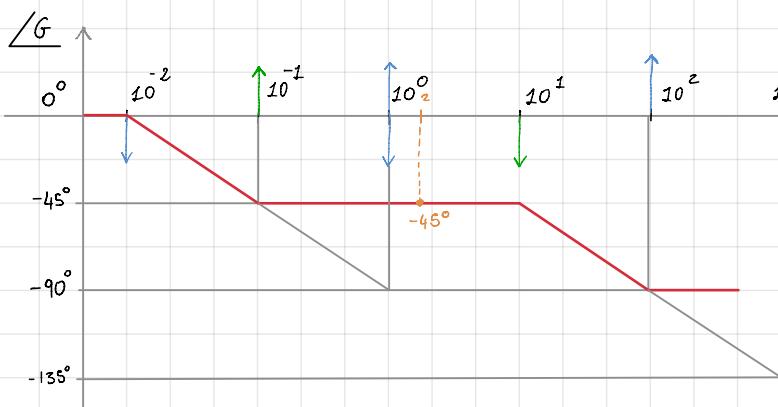
Fasi $\bar{\omega} = [\frac{1}{100}; 100]$

Moduli $\bar{\omega} = [\frac{1}{10}; 100]$

3 - Diagramma dei moduli (Asintotico)



4 - Diagramma delle Fasi



$$G(j\omega) = 2 \cdot \frac{0+1}{(0+10)(0+0.1)} = 2 \cdot \frac{1}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \angle G(j\omega) = \angle 2 = \angle e^{j\omega t} = 0^\circ$$

A REGIME

$$\angle G(j\omega) = -90(n-m) = -90(2-1) = -90^\circ$$

Fase a regime

Poli ↑
Zeri ↑

TROVARE LA RISPOSTA

Ad un ingresso

$$U(t) = \frac{5}{\omega} \cdot \sin(2t) \Rightarrow y_{ss}(t) = \frac{5}{\omega} \cdot |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

Siccome la frequenza dell'ingresso è 2, dobbiamo valutare $G(j\omega)$ in $\omega=2$; ricordiamoci che l'uscita è nel tempo, non nella frequenza, ω non compare in y !

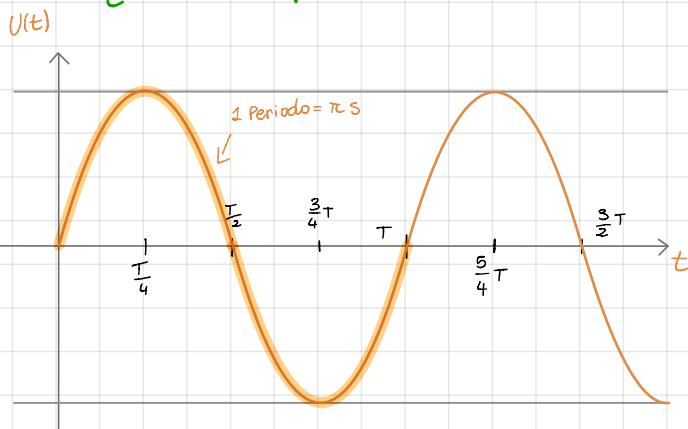
Siccome gli andamenti di modulo e fase sono costanti in $\omega=2$ è semplice trovare il valore:

$$\left| \frac{|G(j\omega)|}{dB} \right|_{\omega=2} = -18 dB \Rightarrow 20 \log(x) = -18 dB \Rightarrow \log(x) = -\frac{18}{10} dB \Rightarrow x = 10 \text{ in Valore Naturale}$$

Inoltre $\angle G(j2) = -45^\circ = -\frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$ N.B. da Fase è negativa quindi nella formula del sin sarà positiva ??

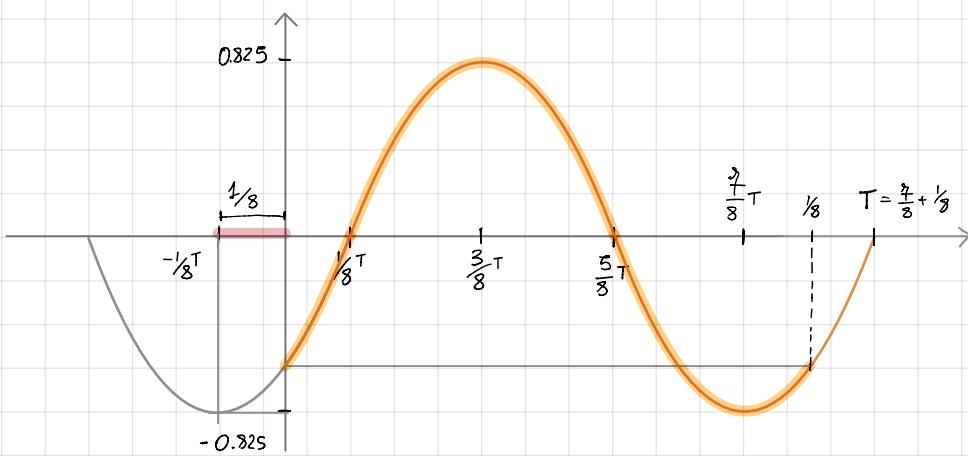
DISEGNO GLI ANDAMENTI NEL TEMPO

Segnale di input



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ 1 PERIODO}$$

Segnale di output - risposta



$$\left| \frac{|G(j\omega)|}{dB} \right|_{\omega=2} = e^{-\frac{18}{10}} \approx 0.165$$

$\approx 16\%$ del segnale di input

$$y_{ss}(t) = 5 \cdot 0.165 \cdot \sin(2t + \frac{\pi}{4}) \\ = 0.825 \cdot \sin(2t + \frac{\pi}{4})$$

$$2t + \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{8}$$

Starting Point

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow \text{Period}$$

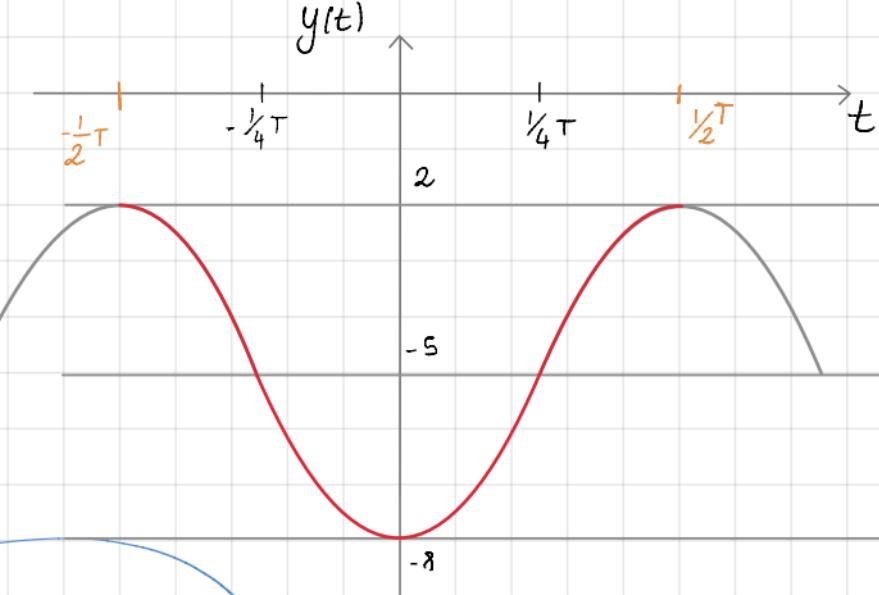
$$-\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7}{8}\pi \Rightarrow \text{End Point}$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{7}{8}\pi \right] \text{ 1 periodo}$$

Come disegnare una Sinusoide

$$y(t) = 3 \cos\left(\frac{1}{2}t + \pi\right) - 5$$

Ampiezza
 w - Contrazione
 e espansione
 TEMPORALE
 FASE / shift temporale
 -5 shift Verticale



1) Calcolo del periodo

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$w = \frac{1}{2}$

2) Calcolo del ritardo

$$R = \frac{1}{2}t + \pi = 0 \rightarrow t = -2\pi$$

Punto iniziale

$$\therefore -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\pi$$

3) Calcolo del range

$$T + R = -2\pi + 4\pi = 2\pi$$

Punto Finale

$$\Rightarrow t_f = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$$

Funzione Con uno Zero nell'origine

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

\rightsquigarrow

$$P_1 = \emptyset \quad ; \quad P_2 = -1$$

$$\omega_1 = 1$$

punto di rottura

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{10}{-\omega^2 + j\omega}$$

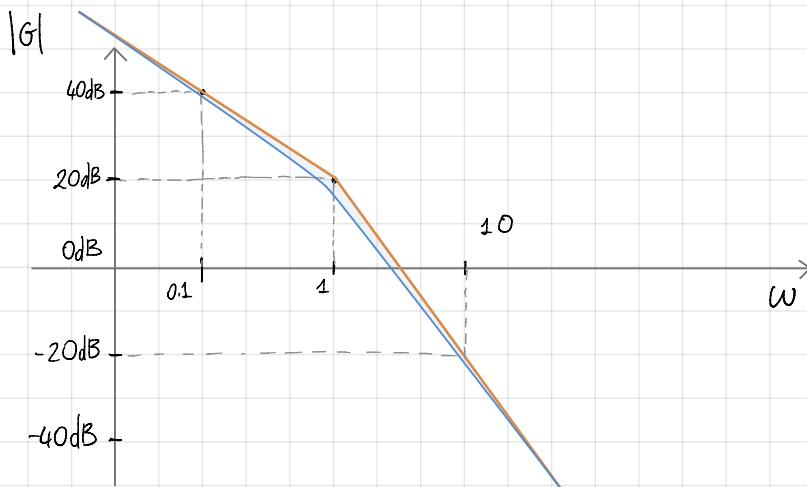
$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{\omega^4 + \omega^2}} = \frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ dec prima} : \omega_1 = 1 \Rightarrow \omega_0 = 10^{-1} = 0.1 \Rightarrow |G(j\omega)| \Big|_{\omega=10^{-1}} = 20 \log \left(\frac{10}{0.1\sqrt{0.1^2+1}} \right) \approx 40 \text{ dB}$$

$\Rightarrow P_1(10^{-1}, 40) \in \text{Bode}$

$$\text{Se } \omega_1 = 1 \text{ e } \left| G(j\omega) \right|_{dB} \Big|_{\omega=1} = 20 \log \left(\frac{10}{\sqrt{1+1}} \right) = 20 \log \left(\frac{10}{\sqrt{2}} \right) \approx 17 \text{ dB}$$

entro l'errore di 3dB
REALE



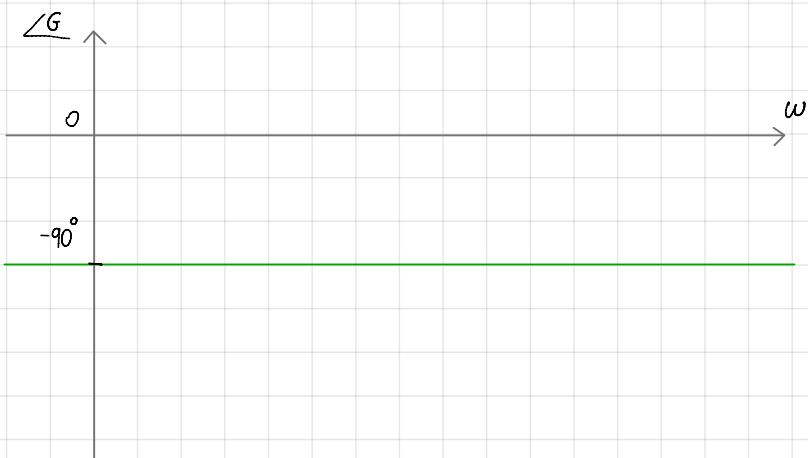
In presenza di poli nell'origine abbiamo una pendenza iniziale che dipende dal numero di poli nulli:

$$(+20 \cdot n_0 \text{ dB/dec})$$

Pendenza iniziale

$$\angle G(j\omega) = -\angle(-\omega^2 + j\omega) = -\angle(-e^{j\theta} + we^{j\frac{\pi}{2}}) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{COSTANTE}$$

ritardo dovuto al polo nell'origine



In presenza di poli nell'origine la fase viene ritardata; il fattore di ritardo dipende dal numero di poli nell'origine:

$$-90^\circ \cdot n_0$$

numero di poli in 0

Ritardo Totale

Procedure per il tracciamento dei diagrammi di Bode asymptotici

1/5

Si suppone che la funzione di trasferimento ha solo zeri e poli reali.
Il primo passo è mettere la funzione di trasferimento nelle forme standard per i diagrammi di Bode:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (1+s\alpha_j)}{\prod_{i=1}^n (1+sT_i)}$$

Elencare il guadagno statico in decibel, gli zeri e il segno delle loro parti reali, i poli.

Ad esempio

$$G(s) = 2 \cdot \frac{s+10}{(s+10)(s+0.1)} = 2 \cdot \frac{1+s}{(1+0.1s)(1+10s)}$$

Il guadagno statico è $G(0)=2 \Rightarrow G(0)_{dB} = 20 \log 2 = 6 dB$

Uno zero a parte reale negativa in $\zeta_1 = -1$ cui corrisponde il punto di rottura $\omega_1 = 1$

Due poli reali negativi in $p_2 = -0.1$ e $p_3 = -10$ cui corrispondono i punti di rottura $\omega_2 = 10$ e $\omega_3 = 0.1$, rispettivamente.

L'intervallo di frequenze da scegliere è almeno da una decade prima del più piccolo punto di rottura e una decade dopo il più grande punto di rottura.

Per l'esempio si sceglie dunque $\omega \in [10^{-2}, 10^2]$.

~~Dato~~ Per determinare gli andamenti per pulsazioni ~~estese~~ si considera:

m_0 il numero di poli nell'origine

m_1 il numero di poli reali (ovviamente a parte reale negativa)

m_2 il numero di zeri e parte reale negativa

m_3 il numero di zeri a parte reale positiva

è possibile determinare gli andamenti dei diagrammi di Bode per frequenze superiori a una decade del punto di

tuttura più elevata. In particolare:

12/5

- Il diagramma di Bode dei moduli avrà una pendenza

$$-20 \cdot (n_0 + n_1 - m_1 - m_2) \text{ dB/decade}$$

in quanto per frequenze oltre il rispettivo punto di rottura ogni polo contribuisce con una pendenza di -20 dB/dec e ogni zero con una pendenza di $+20 \text{ dB/dec}$.

Inoltre per un polo si ha

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} = -20 \log(\sqrt{1+(\omega T)^2}) \underset{\omega T \gg 1}{\approx} -20 \log \omega T$$

Considerando due frequenze ω_1 e $\omega_2 = 10\omega_1$, con $\omega_1 T \gg 1$, si ha:

$$\begin{aligned} |G(j\omega_2)|_{dB} - |G(j\omega_1)|_{dB} &\approx -20 \log \omega_2 T + 20 \log \omega_1 T \\ &= -20 \log 10 + 20 \log \omega_1 T + 20 \log \omega_1 T \\ &= -20 \log 10 - 20 \log \omega_1 T + 20 \log \omega_1 T = -20 \log 10 = -20 \text{ dB} \end{aligned}$$

- Il diagramma delle fasi per frequenze superiori almeno di una decade del più grande punto di rottura tende al valore

$$-90^\circ \cdot (n_0 + n_1 - m_1 + m_2)$$

in quanto ogni polo contribuisce con un ritardo di fase di -90° , ogni zero a parte reale negativa contribuisce con un anticipo di fase di $+90^\circ$ e ogni zero a parte reale positiva contribuisce (come i poli) con un ritardo di fase di -90° .

Per i diagrammi orintotici di Bode dei moduli, in corrispondenza 3/5 di ogni punto di rottura si indica:

- ① una freccia verso il basso per ogni polo corrispondente che indica una variazione in diminuzione delle pendenze di -20 dB/decade
- ② una freccia verso l'alto per ogni zero corrispondente che indica una variazione in aumento delle pendenze di $+20 \text{ dB/decade}$

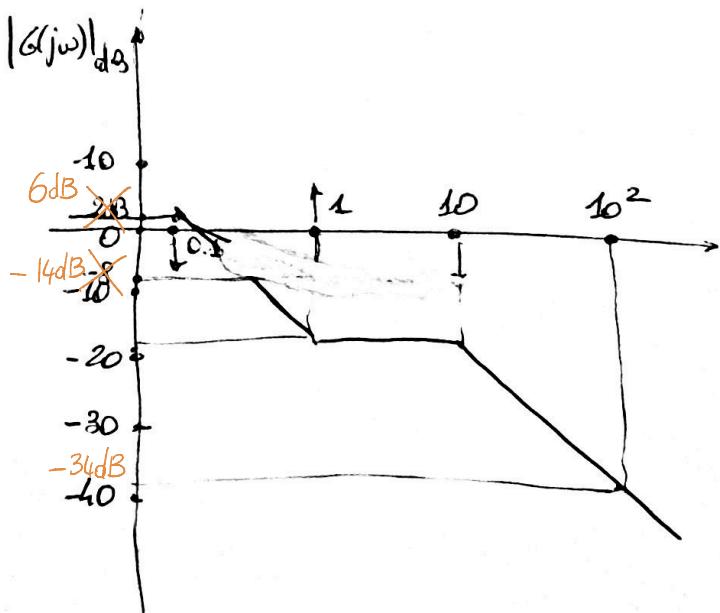
Per i diagrammi asintotici di Bode delle fasi, per ogni punto di rottura, si indicano una decade prima e una decade dopo:

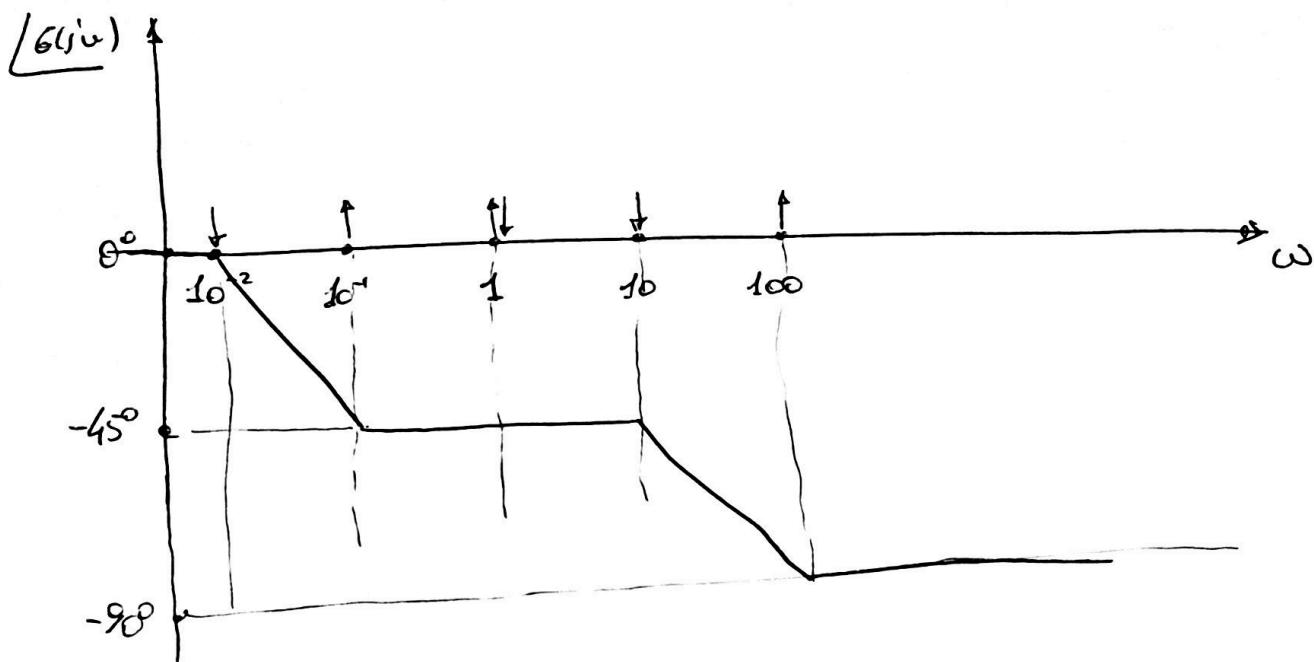
- ① una freccia in basso (prima) ed una in alto (dopo) per indicare variazioni di pendenza di $-45^\circ/\text{decade}$ e $+45^\circ/\text{decade}$, rispettivamente, per ogni polo a parte reale negativa oppure zero e parte reale positiva
- ② una freccia in alto (prima) ed una in basso (decade dopo) per indicare variazioni di pendenza di $+45^\circ/\text{decade}$ e $-45^\circ/\text{decade}$, rispettivamente, per ogni zero e parte reale negativa.

Tornando all'esempio iniziale

$$G(s) = \frac{2}{(1+0.1s)(1+10s)} \quad \text{Valore Naturale}$$

si ha il diagramma orintotico dei moduli riportato sulla destra e quello delle fasi riportato nelle pagine successive.





La risposta del sistema a un ingresso

$$u(t) = 5 \cdot \sin 2t$$

a regime sarebbe circa (volutate con i diagrammi esistenziali)

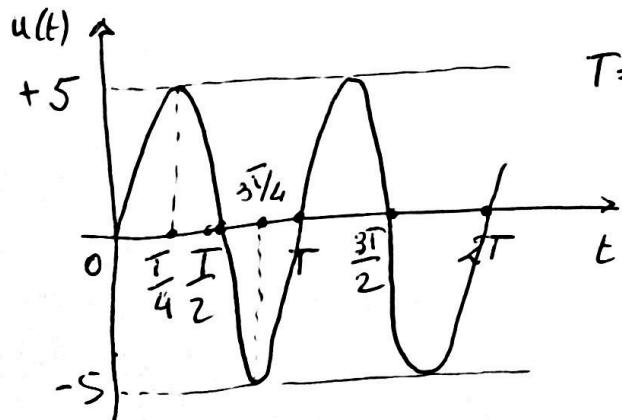
$$y_{ss}(t) = 5 \cdot |G(j^2)| \cdot \sin(2t + \angle G(j^2))$$

$$= 5 \cdot 10^{-\frac{14}{20}} \cdot \sin(2t - 45^\circ) \approx 0.5 \cdot \sin(2t - 45^\circ)$$

essendo $|G(j^2)|_{dB} = -\frac{18}{20}$ e $\angle G(j^2) = -45^\circ$ $\Rightarrow 20 \log |G(j^2)| = -\frac{18}{20} \Rightarrow |G(j^2)| = 10^{-\frac{18}{20}}$

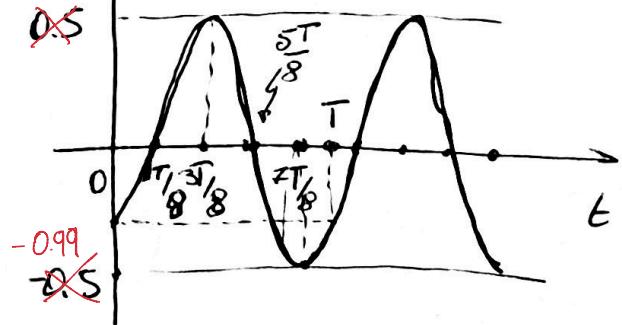
e $\angle G(j^2) = -45^\circ$. E' opportuno di seguire gli andamenti nel tempo

di $u(t)$ e di $y_{ss}(t)$.



$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ sec.}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{T}{8}$$



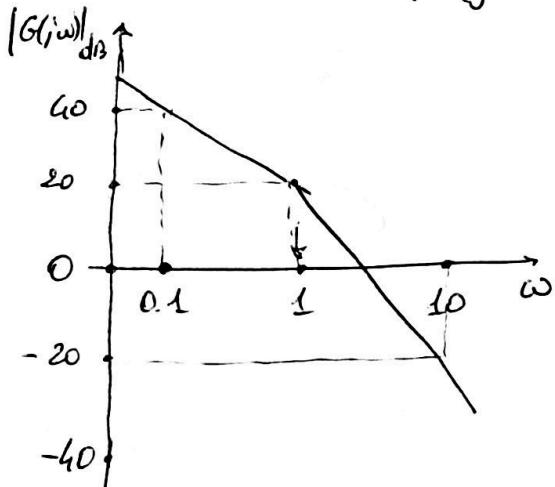
In presenza di poli nell'origine:

5/5

- Il diagramma dei moduli parte con una pendenza di -20 dB/decade . Per trovare un punto per cui passa il diagramma si considera una frequenza almeno una decade da ferire al più piccolo punto di rottura e si valuta il valore di $|G(j\bar{\omega})|_{dB}$ a quella frequenza $\bar{\omega}$: il diagramma passa per il punto $(\bar{\omega}, |G(j\bar{\omega})|_{dB})$ e lo attraversa con una pendenza di -20 dB/decade .

Ad esempio $G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$, il punto di cattura è $\bar{\omega}_1 = 1$, considero

$$\bar{\omega}_2 = 0.1, \text{ valuto } |G(j0.1)|_{dB} \approx 20 \log \left| \frac{10}{j0.1} \right| = 20 \log 10^2 = 40 \text{ dB}.$$



Il diagramma dei moduli passa per il punto $(0.1, 40)$ con una pendenza di $\sim 20 \text{ dB/decade}$ e dopo il punto di rottura $\bar{\omega}_1 = 1$ cambia pendenza in -40 dB/decade a causa della presenza del polo in $p_1 = -1$.

- Il diagramma delle fasi è traslato verso il basso di -90° in quanto un polo nell'origine introduce un rinculo di -90° per tutte le frequenze.

- In presenza di n_0 poli (zeri) nell'origine la pendenza iniziale del diagramma dei moduli è $-20 \cdot n_0 \text{ dB/decade}$ ($+20 \cdot n_0 \text{ dB/decade}$) e la fase iniziale del diagramma delle fasi è $-90^\circ \cdot n_0$ ($+90^\circ \cdot n_0$).

In presenza di fattori quadratici si seguono regole analoghe ma tenendo conto che si tratta di due poli o due zeri.