

Proprietà della trasformata

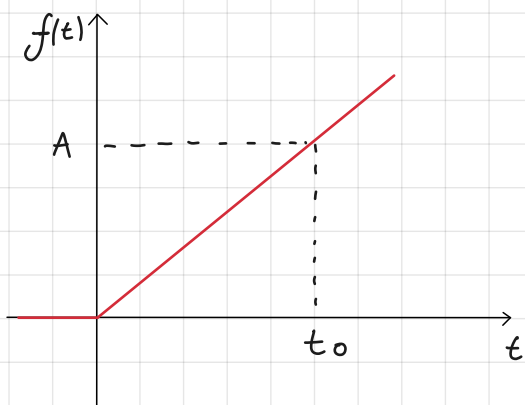
$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad \text{Impulso}$$

$$\mathcal{L}[\pi(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{Gradino}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot \pi(t)] = \frac{1}{s + \alpha} \quad \text{EXP}$$

$$\mathcal{L}[f(t - t_0) \pi(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s) \quad \text{Time Shift}$$

Funzione RAMPA



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{A}{t_0} t & t \geq 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che la \mathcal{L} è LINEARE

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2]$$

$F_1(s) \qquad F_2(s)$

→ Dalla proprietà

A è un coefficiente → $\frac{A}{t_0} = \alpha$ → Calcolo solo \mathcal{L} del resto della funzione

$$\rightarrow \mathcal{L}[t \cdot \pi(t)] = \int_0^{\infty} t \cdot \pi(t) e^{-st} dt =$$

↑
Funzione gradino

proof

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{s} \cdot (-s) \cdot e^{-st} = -e^{-st} \quad \text{QED}$$

Per parti

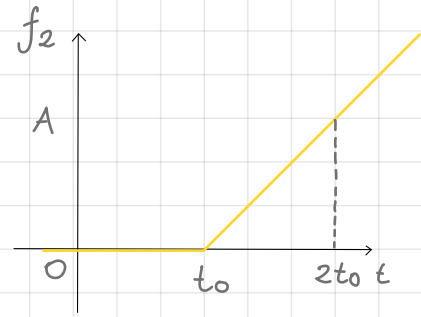
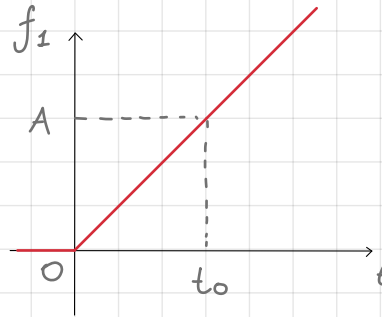
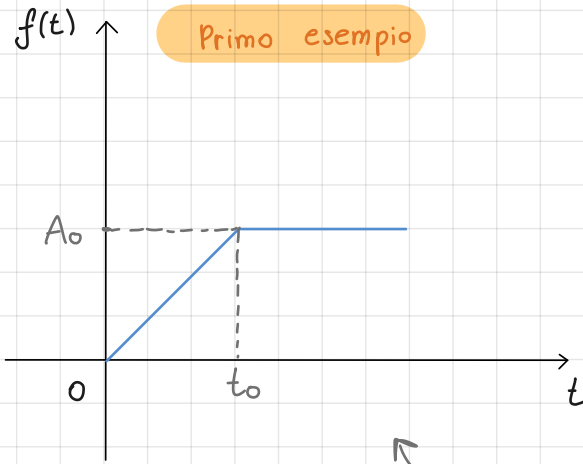
$$\int_a^b \frac{df}{dt} \cdot g(t) dt = \left[f(t) g(t) \right]_a^b - \int_a^b f(t) \frac{dg}{dt} dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\dots] = \left[-t \cdot \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-st}}{s} dt = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\dots] = \frac{1}{s^2} \quad \text{Trasformata della funzione Rampa}$$

Trasformate di segnali Composti

Primo esempio



Per regolare i sistemi si utilizza un segnale che inizialmente cresce **gradualmente**, proprio come nel caso di questo segnale.

Alcuni sistemi, quando vengono **sovrasollecitati**, iniziano ad *oscillare*, andando a non performare correttamente (male); un' analogia è quella dell'accelerazione dell'auto, quando c'è uno slittamento delle ruote, la partenza è peggiore.

La **pendenza** della retta iniziale viene decisa a seconda della **condizione del sistema**; andiamo quindi a valutare le condizioni e poi decidiamo come sollecitare il sistema

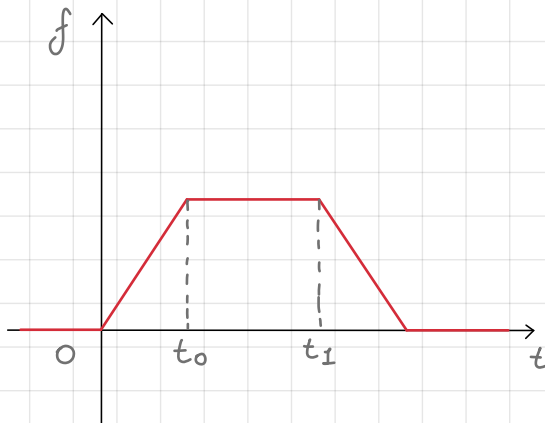
Per la Linearità

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{A}{t_0} t \cdot 1(t) - \frac{A}{t_0} (t - t_0) \cdot 1(t - t_0)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A}{t_0} \left[\underbrace{\left(\frac{1}{s^2} \right)}_{F(\text{Rampa})} - \underbrace{e^{-st_0} \cdot \frac{1}{s^2}}_{F(\text{Rampa ricorda } t_0)} \right] = \underbrace{\frac{A}{t_0} (1 - e^{-st_0}) \frac{1}{s^2}}_{F(t)}$$

Secondo esempio



$$\Rightarrow f(t) = f_1 + f_2 + f_3$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A}{s^2} \left(\frac{1 - e^{-st_0}}{t_0} - \frac{1}{t_2 - t_1} e^{-st_1} + \frac{1}{t_2 - t_1} e^{-st_2} \right)$$

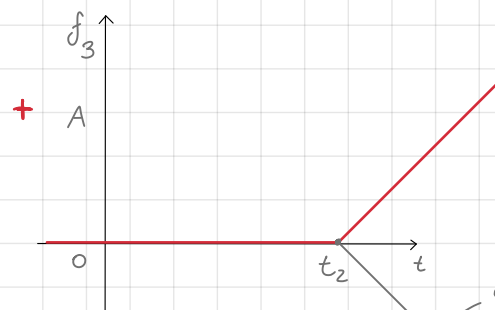
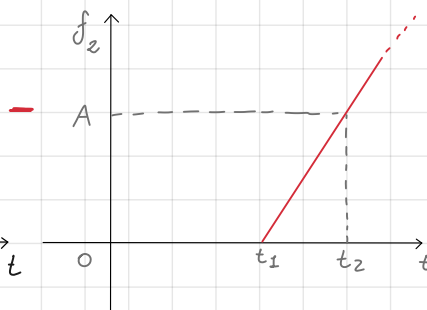
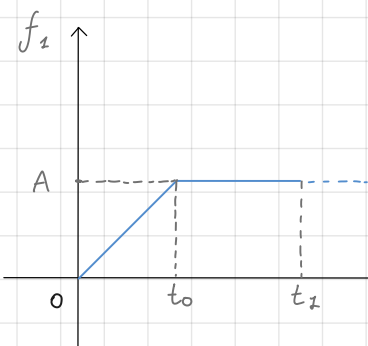
$$F_1(s) = \frac{A}{s^2} (1 - e^{-st})$$

$$f_2(t) = \frac{A}{t_2 - t_1} (t - t_1) \cdot 1(t - t_1)$$

$$\Rightarrow F_2(s) = \frac{A}{s^2} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} e^{-st_1}$$

$$f_3(t) = \frac{A}{t_2 - t_1} (t - t_2) \cdot 1(t - t_2)$$

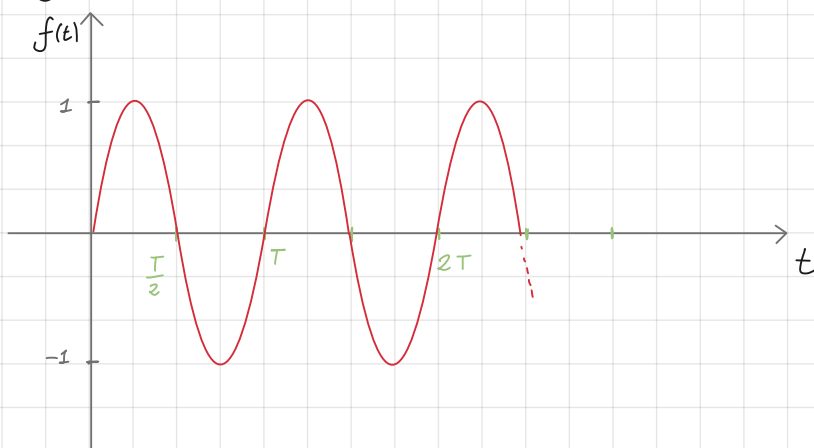
$$\Rightarrow F_3(s) = \frac{A}{s^2} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} e^{-st_2}$$



$f_2 + f_3$ sarebbe così

Trasformata della sinusoidale

$$f(t) = \sin(\omega t) \cdot \mathbb{1}(t)$$



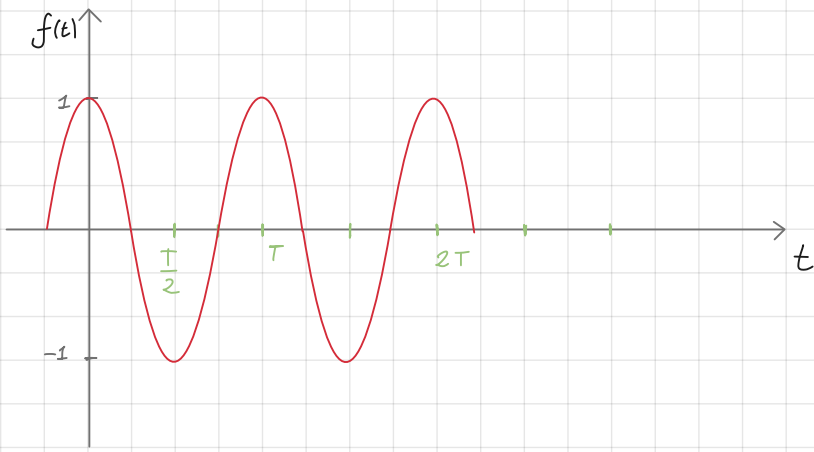
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega t = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2\pi} T = \left(\frac{T}{2}\right) \text{ Si Annulla}$$

$$\begin{aligned} \sin(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \Rightarrow \mathcal{L}[\sin(\omega t) \mathbb{1}(t)] = \frac{1}{2j} \left(\mathcal{L}[e^{j\omega t} \cdot \mathbb{1}(t)] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t} \cdot \mathbb{1}(t)] \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{\cancel{s+j\omega} - \cancel{s-j\omega}}{(s-j\omega)(s+j\omega)} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$z \cdot z'$

Trasformata della CO sinusoidale



$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos \omega t \cdot 1(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{1}{2} \frac{\cancel{s+j\omega} - \cancel{s-j\omega}}{(s-j\omega)(s+j\omega)} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

$$\sin(\omega t + \theta) = \sin(\omega t) \cos(\theta) + \cos(\omega t) \sin(\theta) \Rightarrow \text{LINEARITA'}$$

PROPRIETA': moltiplicazione per esponenziale

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot f(t)] = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-\alpha t} \cdot f(t)}_{\text{funzione}} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(s+\alpha)t} dt = F(s+\alpha)$$

definizione Trasformato

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot f(t)] = F(s+\alpha)$$

ESEMPI

- $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t \cdot \mathbb{1}(t)] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
- $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \cdot \mathbb{1}(t)] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
- $\mathcal{L}[t \cdot e^{-3t} \cdot \mathbb{1}(t)] = \frac{1}{(s+3)^2}$

↑
 α

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \left[f(t) \cdot e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-s e^{-st}) dt = \\ &= -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = -f(0) + s F(s) \quad \text{QED} \end{aligned}$$

$F(s)$

Esempio 1

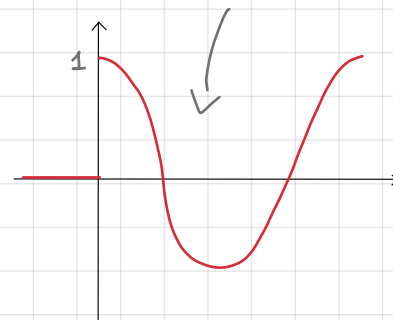
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(\omega t) \mathbb{1}(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \sin(\omega t)\right] = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \sin(\omega t) \mathbb{1}(t)\right] \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) = \frac{1}{\omega} \left(s \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0 \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{QED} \end{aligned}$$

Esempio 2

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(\omega t) \mathbb{1}(t)] &= \mathcal{L}\left[-\frac{1}{\omega} \cdot \frac{d}{dt} \cos(\omega t) \mathbb{1}(t)\right] = -\frac{1}{\omega} s \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \text{Discontinuità} \\ &= -\frac{1}{\omega} \frac{s^2 - s^2 - \omega^2}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

(1) ?
Discontinuità

Per rappresentare la derivata di una funzione discontinua utilizziamo l'**impulso di Dirac**, che viene rappresentato mediante una **freccia** che ha origine nell'unto di discontinuità ed ha lunghezza pari all'area



$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+[f(t)] &= \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ \mathcal{L}_-[f(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_{0^+}^{\infty}} \right\} \text{quando } \mathcal{L}_+ \neq \mathcal{L}_- ?$$

$$\mathcal{L}_+[f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} f(t) e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

\mathcal{L}_+

$$\Rightarrow \mathcal{L}_+ [f(t)] + \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-st} dt \quad \Rightarrow \text{se } f(t) = \delta(t) \Rightarrow \mathcal{L}_+ \neq \mathcal{L}_-$$

\uparrow
 l'intervallo è un PUNTO

Definizione di IMPULSO

\Rightarrow Il valore trovato al punto (1) è \mathcal{L}_+

PROPRIETÀ DELLA DERIVATA IN CASCATA : Derivata Seconda

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 f}{dt^2} \right] = \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} f(t) \right) \right]$$

\mathcal{L}

$$\rightarrow g(t) = \frac{df}{dt} \Rightarrow \mathcal{L} \left[\frac{d^2 f}{dt^2} \right] = \mathcal{L} \left[\frac{dg}{dt} \right] = s G(s) - g(0)$$

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right]$$

$$= s F(s) - f(0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} \left[\frac{d^2 f}{dt^2} \right] = s(s F(s) - f(0)) - g(0) = s^2 F(s) - s f(0) - \dot{f}(0)$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 f}{dt^2} \right] = s^2 F(s) - s f(0) - \dot{f}(0)$$

Se $f(0) = 0$

E tutte le sue
derivate in 0 sono
zero

\Rightarrow

$$\mathcal{L} \left(\frac{d^n f}{dt^n} \right) = s^n F(s)$$