$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ Impulso

$\mathcal{L}[\mathbb{1}(t)] = 1/s$ Gradino

$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot \mathbb{1}(t)] = \dfrac{1}{s+\alpha}$ Exp

$\mathcal{L}[f(t-t_0)\mathbb{1}(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s)$ Time Shift

$\mathcal{L}[t] = 1/s^2$ RAMPA

$\mathcal{L}[\sin(\omega t) \cdot \mathbb{1}(t)] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$\mathcal{L}[\cos(\omega t) \cdot \mathbb{1}(t)] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

Lezione 3

PROPRIETA' e TEOREMI

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot f(t)] = F(s+\alpha)}$$

Moltiplicazione per esponenziale

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = s \cdot F(s) - f(0)}$$

Derivazione reale

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} f(t)\right)\right]}$$

g

Derivata in cascata

Lezione 3

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\, F(s)}$$

Valore iniziale

$$\boxed{f(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\, F(s)}$$

Valore finale

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}}$$

Integrale reale

$$\boxed{\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)}$$

Integrazione nel dominio della variabile s

Lezione 4

ANTI TRASFORMATA

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Definizione base

$$F(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s + p_i}$$

Scrivere la trasformata in termini di somme di termini semplici (tramite il residuo)

$$\lim_{s \to p_i} (s + p_i) F(s) = r_i$$

Calcolo del residuo

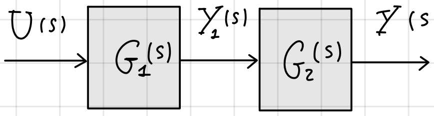
Lezione 4

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]} = \boxed{\frac{Y(s)}{U(s)}}$$

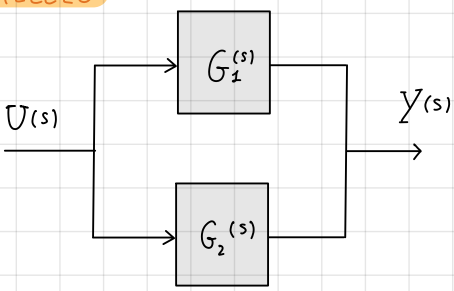
$\boxed{Y(s) = G(s) \cdot U(s)}$ se $U(s) = 1 \Rightarrow \boxed{Y(s) = G(s)}$

SERIE



$$\boxed{Y(s) = \underbrace{[G_2(s) G_1(s)]}_{G(s)} U(s)}$$ SERIE

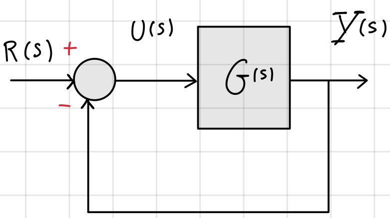
PARALLELO



$$\boxed{U(s)\left(G_1(s) + G_2(s)\right)}$$

PARALLELO

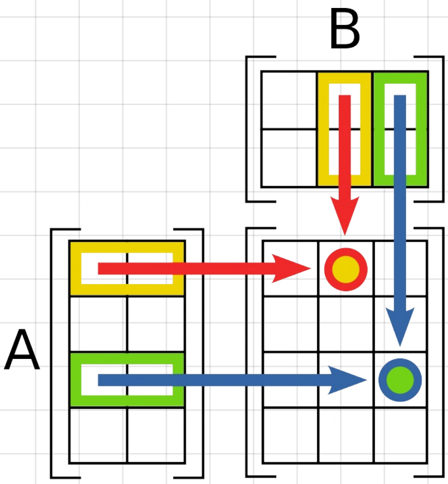
FEED BACK



$$\boxed{Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s)}$$

Retroazione

RISOLUZIONE DI EQ DIFF CON LA L.T.



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 \end{bmatrix}$$

$m \times n$ — RIGHE, COLONNE

$n \times p$

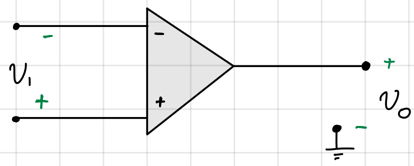
$n \times 1$

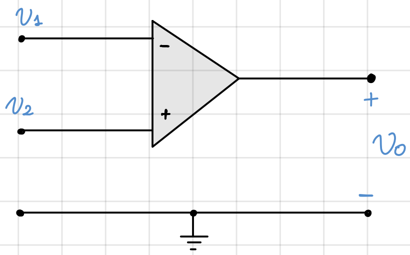
$m \times p$

$m \times 1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{bmatrix}$$

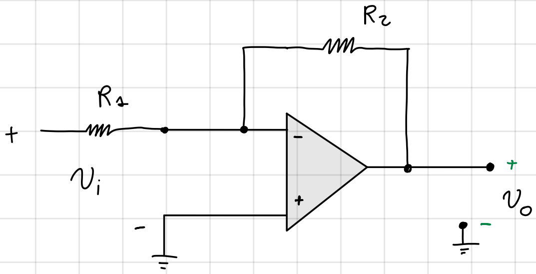
AMPLIFICATORI OP Pag 123

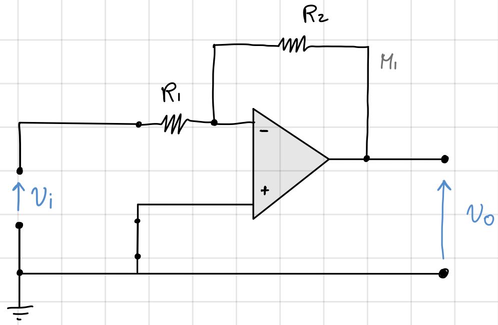




$$\boxed{R.C. \quad v_o = K\,(v_+ - v_-)}$$

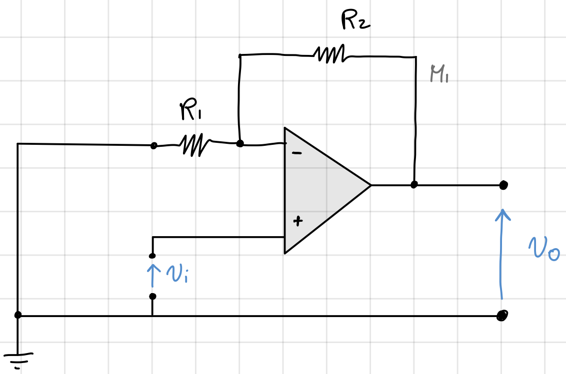
INVERTENTE

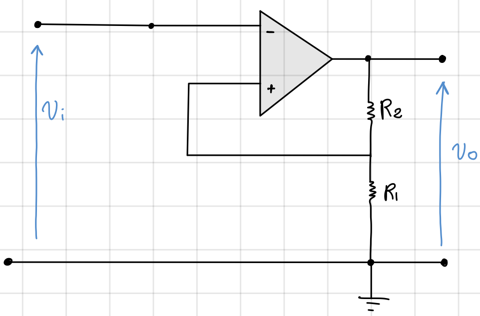




$$\boxed{v_o = -\frac{R_2}{R_1}\, v_i}$$

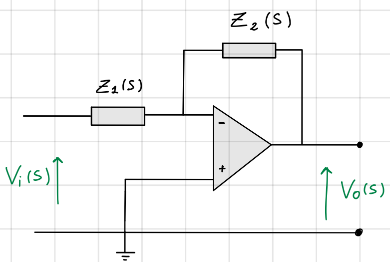
NON INERTENTE



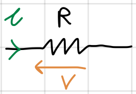


$$\boxed{v_o = R_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_i}$$

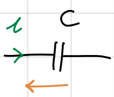
METODO DELLE IMPEDENZE Pag 125



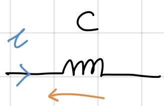
$$\boxed{G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}}$$



$$\boxed{Z_R(s) = R}$$



$$\boxed{Z_C(s) = \frac{1}{Cs}}$$



$$\boxed{Z_C(s) = \frac{1}{Ls}}$$

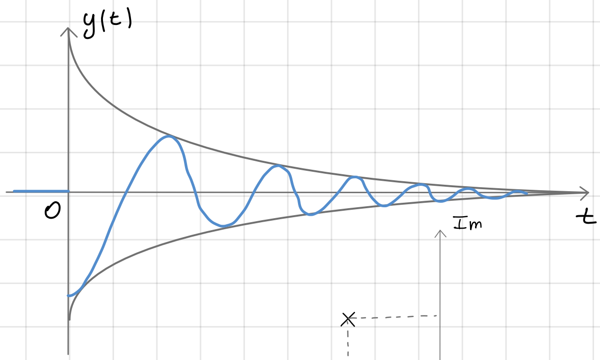
MODELLISTICA DI SYS MECCANICI

I sistemi meccanici sono caratterizzati da **massa - molla - smorzatore**, che corrispondono, rispettivamente, a *condensatore, induttore e resistore* dei sistemi elettrici.

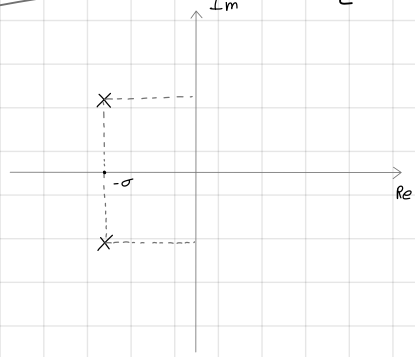
RISPOSTA DEI SISTEMI DI II ORDINE

$0 < \zeta < 1$ SOTTOSMORZATO

$\Rightarrow$ Risposta transitoria OSCILLATORIA



Poli complx e coniugati nel semipiano SX



ES: $\dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow P_{1,2} = -\omega_n\zeta \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$

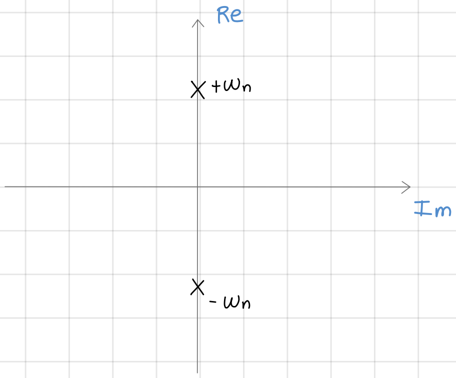
$= -\omega_n\zeta \pm \sqrt{\omega_n^2(\zeta^2 - 1)}$

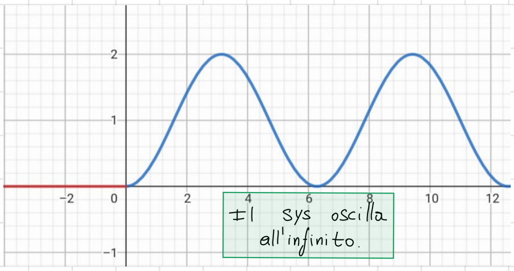
$= -\omega_n\zeta \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

Se $0<\zeta<1 \Rightarrow \zeta^2 - 1 < 0 \;\forall\, \zeta \mid 0<\zeta<1 \Rightarrow P_{1,2} = -\omega_n\zeta \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Frequenza naturale Smorzata ω_d

$\zeta = 0$ NON SMORZATO

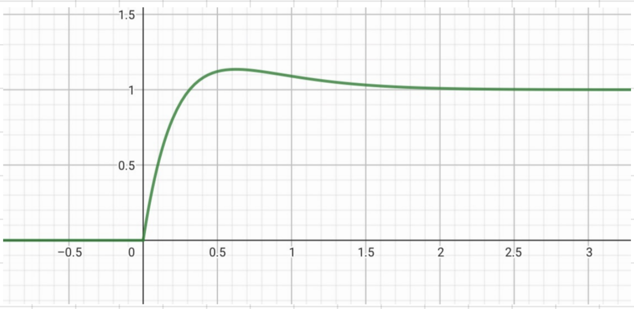


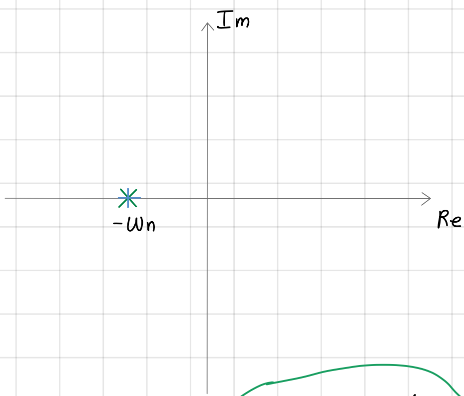


$G(s) = \dfrac{1}{s^2 + \omega_n^2} \rightarrow P_{1,2} = \pm j\omega_n$

Quando abbiamo due poli cmplx e coniugati a parte Reale NULLA

$\zeta = 1$ CRITICAMENTE SMORZATO





Quando abbiamo due poli reali COINCIDENTI o POLI DOPPI

ES: $G(s) = \dfrac{1}{(s+\omega_n)^2}$

Quando é possibile rinominare due valori come Seno e Coseno

(1) $\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$

(2) $\boxed{\begin{array}{l} 0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \end{array}}$

Se riusciamo a trovare due valori che rispettano sia la (1) che la (2) allora possiamo scriverli come $\sin(\beta)$ e $\cos(\beta)$

ESEMPIO

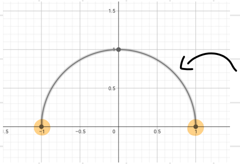
Se $0 < f < 1$ ed abbiamo f , $\sqrt{1-f^2}$

- $f \to 0 < f < 1$ ✓
- $\sqrt{1-f} \to 1 - f \geqslant 0 \to f \leqslant 1$ ✓

$\Big\} \ (f)^2 + (\sqrt{1-f})^2 = \cancel{f^2} + 1 - \cancel{f^2} = 1$

QED

$\Rightarrow f = \cos(\beta)$, $\sqrt{1-f^2} = \sin(\beta)$



$\sqrt{1-f^2}$

TEMPO DI ASSESTAMENTO t_s

E' il tempo necessario affinché la curva arrivi e resti all'interno di un intervallo intorno al valore finale dell'uscita y(t).

Solitamente questo valore è in percentuale, circa il 2-3%

$$t_s = \boxed{\frac{4}{\zeta \omega_n}} = \boxed{\frac{5}{\zeta \omega_n}}$$

2% <1%

con $\sigma = \omega_n \zeta \;\rightarrow\; t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{4}{\sigma} = \frac{5}{\sigma}$

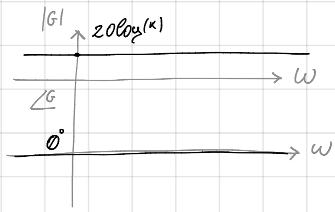
5% 2% 1%

RISPOSTA IN FREQUENZA

$$y(t) = w\,X\,|G(jw)| \cdot \sin(wt + \angle G(jw))$$ con $U(t) = X \sin($

GUADAGNO

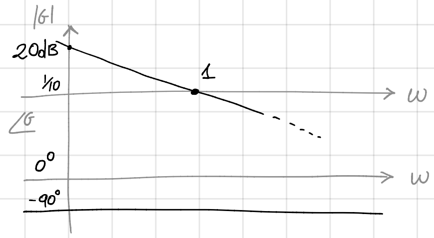
$$G(s) = K \Rightarrow \begin{cases} |G(jw)|_{dB} = 20 \log(K) \\ \angle G(jw) = \angle K = 0 \end{cases}$$



Termini integrativi

$$G(s) = 1/s \Rightarrow \begin{cases} |G(jw)|_{dB} = -20 \log(w) \\ \angle G(jw) = -\angle jw = -\angle we^{j\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ \end{cases}$$

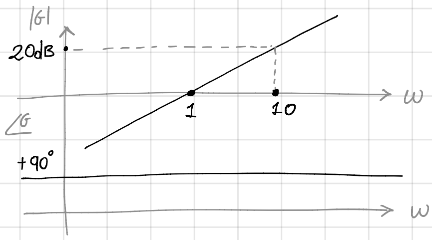
θ



Termini Derivativi

$$G(s) = K \cdot s \qquad |G(jw)| = 20 \log(K) + 20 \log(w)$$

$$\angle G(jw) = \angle K \cdot wj = \angle Kwe^{j\frac{\pi}{2}} = +\frac{\pi}{2} = +90^\circ$$



FORMA "STANDARD" DELLA FDT PER DIAGRAMMI DI BODE

$$G(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} (1 + s/z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (1 + sT_i)}$$

Questa forma è estremamente importante perché ci permette di calcolare il valore iniziale del modulo con estrema facilità: ci basta calcolare G(0) e vedere immediatamente che il valore iniziale corrisponde al **guadagno statico k** che viene moltiplicato per il resto della fdt

FATTORI DEL PRIMO ORDINE

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT} \Rightarrow \begin{cases} |G(jw)| = -20 \log(|1 + jwT|) \\ \angle G(jw) = -\tan^{-1}(wT) \end{cases}$$ Fase e Modulo ESATTI

Punto di rottura: $\bar{s}$: $1 + sT = 0 \rightarrow \bar{s} = -\frac{1}{T} \Rightarrow$ Punto di rottura $w_1 = 1/T$

$$\boxed{w_n = |\bar{s}_n|}$$

Diagrammi Asintotici

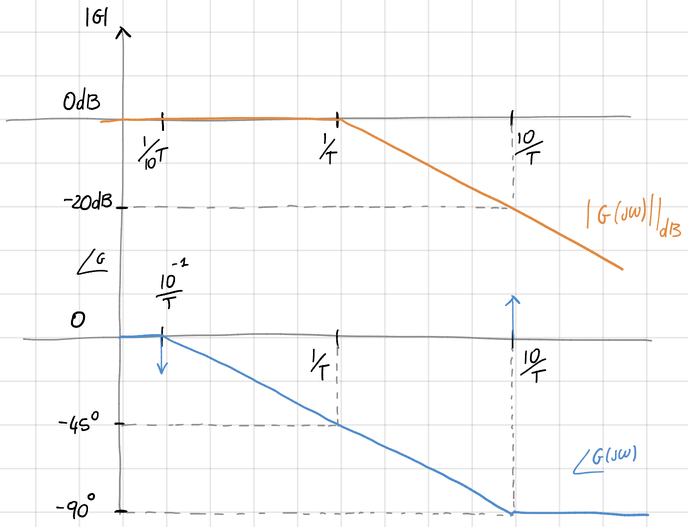
Per w molto grande $\rightsquigarrow wT \gg 1 \Rightarrow w \gg 1/T \rightsquigarrow |G(jw)| \rightarrow \sqrt{1 + (wT)^2} \rightarrow wT$

$$\Rightarrow |G(jw)|_{dB} \overset{w\gg}{\simeq} -20 \log(wT) \; ; \; \angle G(jw) \simeq -\angle 1 + jwT = -\tan^{-1}\left(\frac{wT}{1}\right) \overset{w\gg}{=} -\tan^{-1}(wT)$$

Per $w \gg$ $-\tan^{-1}(\infty) \rightarrow -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$

Per w molto piccolo $\rightsquigarrow wT \ll 1 \Rightarrow |G(jw)| \rightarrow \sqrt{1}$

$$\Rightarrow |G(jw)|_{dB} \overset{w\ll}{\simeq} -20 \log(1) = 0 \; ; \; \angle G(jw) \simeq \angle 1 = 0^\circ \; (w\ll)$$



Ogni **<u>polo</u>** a segno negativo (o positivo) ha come effetto quello di:
- **Attenuare** il modulo a partire dal punto di rottura associato
- **Ritardare** la fase a partire da una decade prima del punto di rottura associato; nel punto di rottura si avrà un'anticipo di +45°, mentre una decade dopo del punto di rottura associato si avrà un'anticipo di +90°.

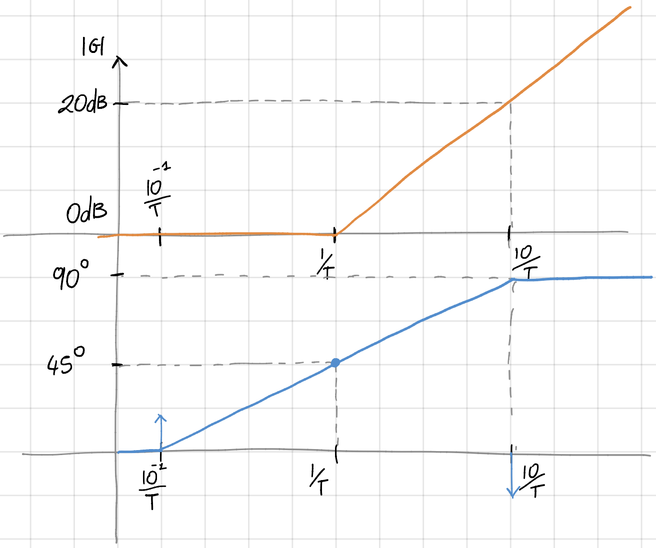
Fattori con uno zero

$$G(S) = 1 + ST \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = +20 \log\left(\sqrt{1+(\omega T)^2}\right) \\ \angle G(j\omega) = \angle 1 + \angle j\omega T = \tan^{-1}(\omega T) \end{cases}$$

ESATTI

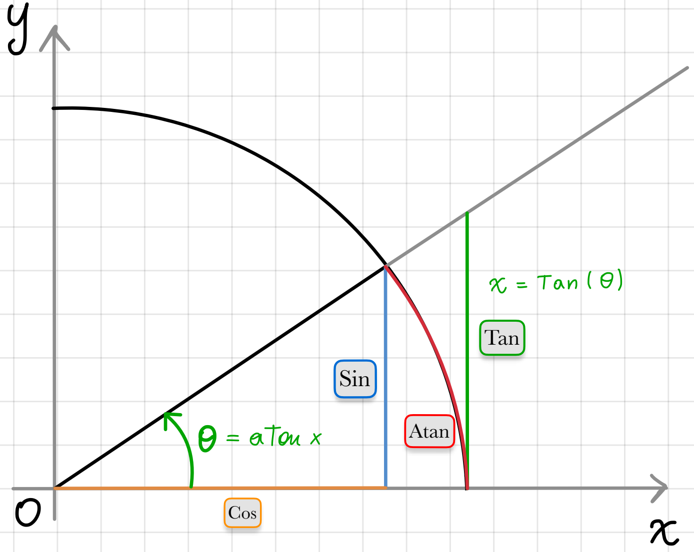
$\omega \to 0$ $\quad |G(j\omega)|_{dB} \cong 20 \log(\sqrt{1}) = 0$ ($\omega \ll$) ; $\angle G(j\omega) \cong \tan^{-1}(\infty) \to 90° = \frac{\pi}{2}$ ($\omega \ll$)

$\omega \to \infty$ $\quad |G(j\omega)|_{dB} \cong 20 \log(\omega T)$ ($\omega \gg$) ; $\angle G(j\omega) \cong \tan^{-1}(0) = 0°$ ($\omega \gg$)



Ogni **<u>zero</u>** a segno negativo ha come effetto quello di:
- **Amplificare** il modulo a partire dal punto di rottura associato
- **Anticipare** la fase a partire da una decade prima del punto di rottura associato; nel punto di rottura si avrà un'anticipo di +45°, mentre una decade dopo del punto di rottura associato si avrà un'anticipo di +90°.

Quando si ha uno zero a polo positivo, invece:
- Il modulo non è influenzato
- La fase viene **ritardata**, proprio come se si avesse un <u>polo</u> invece di uno zero, nel punto di rottura.



Schema utile per calcolare i valori dell'arcotangente quando omega ha valori molto grandi o molto piccoli