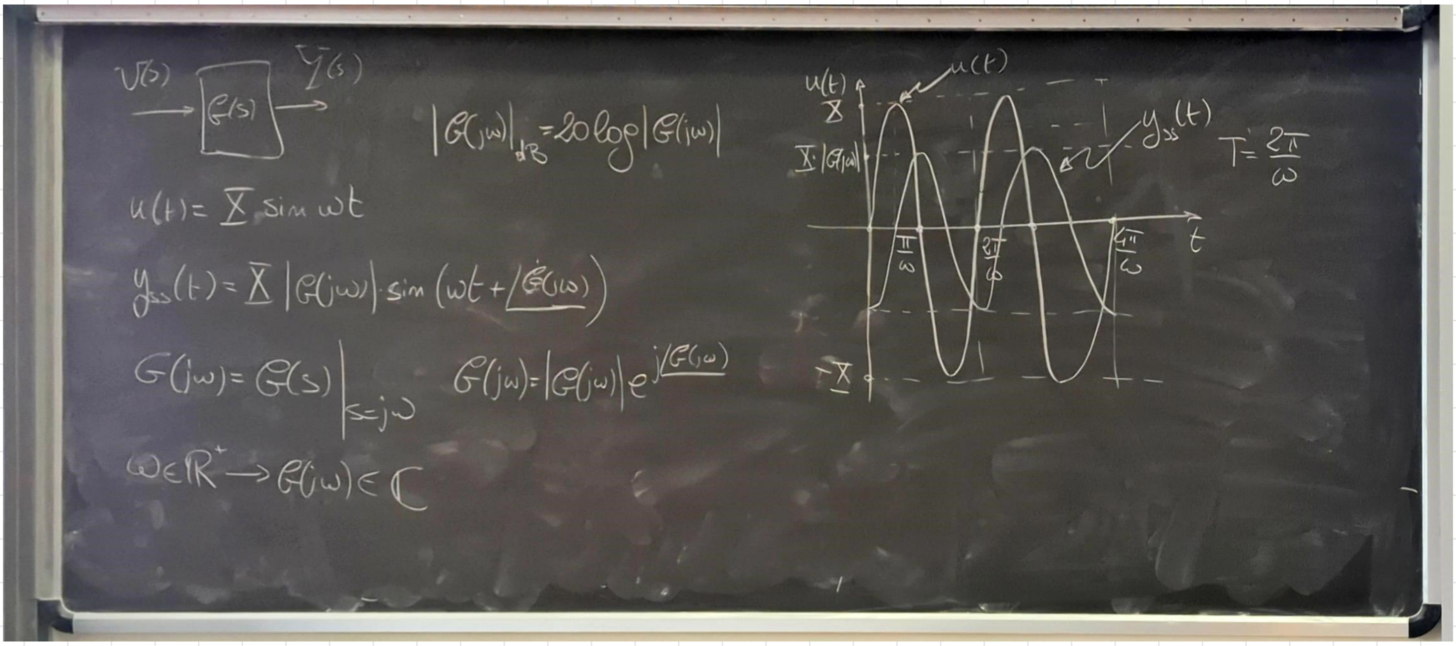
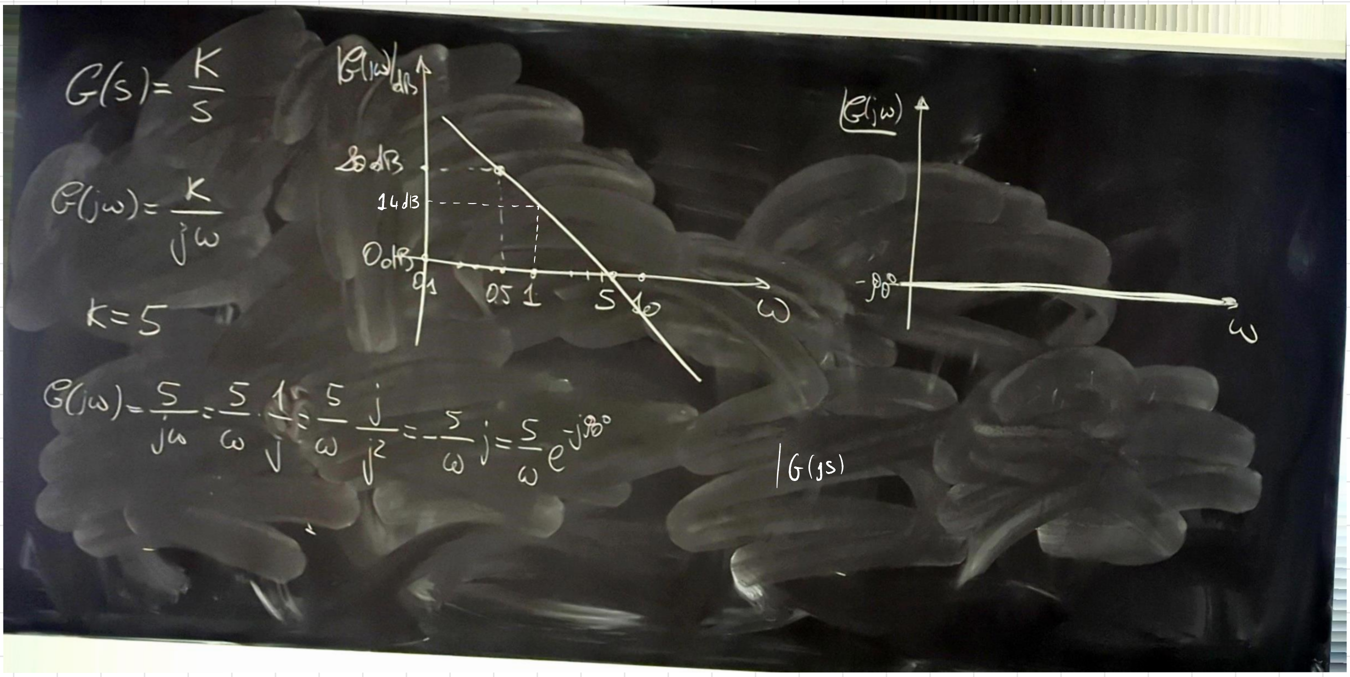
Recap Lezione 20



Recap $G(s) = \frac{K}{S}$



FATTORI DERIVATIVI

Nel caso di $G(s) = \frac{5}{s}$ (INTEGRATIVO) $\rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20\log 5 - 20\log(\omega)$

Lez precedente

DERIVATIVO

$G(s) = 5s \rightarrow G(j\omega) = 5j\omega$

$|G(j\omega)| = 5\omega \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20\log(5\omega)$

$= 20\log(5) + 20\log(\omega)$

$P_1: \ |G(j\omega)|_{dB} = 0 \rightarrow 20\log(5\omega) = 0$

Per $5\omega = 1 \rightarrow \omega = 1/5$

$\Rightarrow P_1 = (1/5, 0)$

$P_2: \ |G(j\omega)|_{dB}\Big|_{\omega=1} \rightarrow 20\log(5) \cong 14$

$\Rightarrow P_2 = (1, 14)$

Qual è la pendenza?

Hp: $\omega_1 = 1, \ \omega_2 = 10 \rightarrow$

1 dec

$$\begin{cases} 20\log(5) = 13.97 \\ 20\log(50) = 33.97 \end{cases}$$

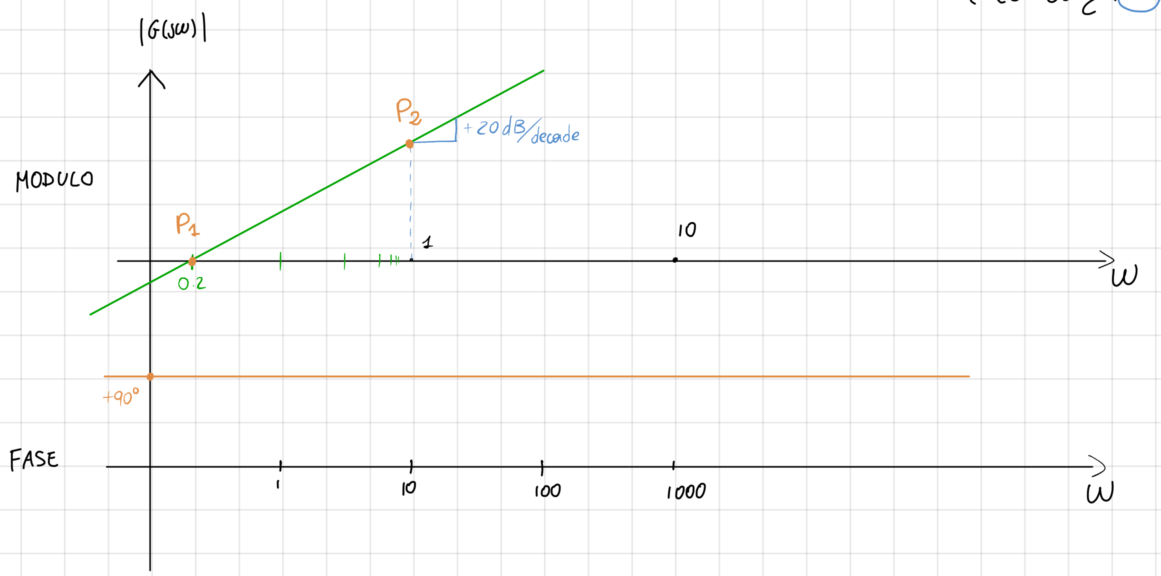
$$\text{PENDENZA} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \text{slope} = \frac{(33.97 - 13.97)\,dB}{1\ dec} = 20\ dB/dec$$

è più chiaro se prendiamo K=1

$$\begin{cases} 20\log(1) = 0 \\ 20\log(20) = 20 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 20\ dB/dec$$

QED



Morale della favola
I fattori integrali hanno pendenza negativa,
mentre quelli derivativi hanno pendenza positiva.

FORMA "STANDARD" DELLA FDT PER DIAGRAMMI DI BODE

OBBIETTIVO:

$$G(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} \left(1 + s/z_i\right)}{\prod_{i=1}^{n} \left(1 + s T_i\right)}$$

Questa forma è estremamente importante perché ci permette di calcolare il valore iniziale del modulo con estrema facilità: ci basta calcolare G(0) e vedere immediatamente che il valore iniziale corrisponde al **guadagno statico k** che viene moltiplicato per il resto della fdt

ESEMPIO:

$$G(s) = \frac{3(2s+5)}{s^3+4s^2+3s} = \frac{3}{s}\,\frac{\frac{1}{5}\left(1+\frac{2}{5}s\right)}{s^2+4s+3} = \frac{3}{s}\,\frac{\frac{1}{5}\left(1+\frac{2}{5}s\right)}{(s+1)(s+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot 3}}{2} \Rightarrow p_1 = -1,\ p_2 = -3$$

$$= \frac{3}{s} \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}\,\frac{\left(1+\frac{2}{5}s\right)}{(1+s)\left(1+\frac{1}{3}s\right)} = \underbrace{\frac{1}{5}}_{K}\,\frac{1}{s} \cdot \frac{\left(1+\frac{2}{5}s\right)}{(1+s)\left(1+\frac{1}{3}s\right)}$$

Tutti i termini sono del tipo $1+ks$

Tutti i termini noti sono 1

I i termini che caratterizzano i poli e gli zeri, quando s=0, devono valere 1.

Questo perché 1|dB = 0, quindi quando devo effettuare la moltiplicazione dei moduli (per rappresentare sul diagramma di Bode), tutti gli altri membri, quando s=0 saranno 0dB, quindi tutta l'ampiezza sarà facilmente leggibile nel coefficiente **k** moltiplicato all'inizio.

FATTORI DEL PRIMO ORDINE

$$G(s) = \frac{1}{1+sT} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

FASE ESATTA

$$\angle G(j\omega) = \angle 1 - \angle 1+j\omega T = -\tan\left(\frac{\omega T}{1}\right) = -\tan(\omega T)$$

MODULO ESATTO

$$|G(j\omega)| = \frac{|1|}{|1+j\omega T|} \Rightarrow |G(j\omega)|\Big|_{dB} = \frac{1}{20\log(|1+j\omega T|)} = -20\log(|1+j\omega T|)$$

Punto di rottura

Nelle F.d.T. del 1° ordine il punto di rottura coincide con il valore assoluto del polo

$$G(s) = \frac{1}{1+sT} \rightarrow p_1 = -\frac{1}{T} \Rightarrow |p_1| = 1/T$$

B.P.

DIAGRAMMI ASINTOTICI

Disegnare l'andamento del modulo in modo esatto può risultare difficile per fdt più complesse, quindi ci serviamo dello strumento dato dai diagrammi asintotici.
L'idea è quella di andare a vedere cosa accade per valori molto minori e maggiori rispetto al punto di rottura, tracciare il diagramma di bode (che risulterà più semplice) e poi approssimare l'andamento esatto del diagramma di bode nel punto di rottura.

TRASCURABILE

- Per $\omega \ll 1/T \rightsquigarrow |G(j\omega)|\Big|_{dB} = -20\log(|1+j\omega T|) = -20\log(1+\cancel{\omega^2 T^2})$

  Se $\omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow \omega T \ll 1 \cong -20\log(1) = 0\text{ dB}$

  Per $\omega \ll \frac{1}{T}$ COSTANTE

- Per $\omega T \gg 1 \rightsquigarrow |G(j\omega)|\Big|_{dB} \cong -20\log(\sqrt{\omega^2 T^2}) \cong -20\log(\omega T)$

  Per $\omega \gg \frac{1}{T}$ LINEARE IN LOG

  ↳ Posso Trovare il valore tra due decadi

  Hp. $dec_1 : \frac{1}{T} \rightarrow |G(j\omega)|\Big|_{dB}\Big|_{1/T} = -20\log\left(\frac{1}{T}\cdot T\right) = 0\text{ dB} \rightsquigarrow P_1\left(\frac{1}{T};0\right)$

  $dec_2 : \frac{10}{T} \rightarrow |G(j\omega)|\Big|_{dB}\Big|_{10/T} = -20\log\left(\frac{10}{T}\cdot T\right) = -20\text{ dB} \rightsquigarrow P_2\left(\frac{10}{T};-20\right)$

  Slope $= -20\text{dB}/\text{dec}$

⇝ Posso disegnare il diagramma Asintotico del MODULO

"ha la stessa pendenza del polo nell'origine"

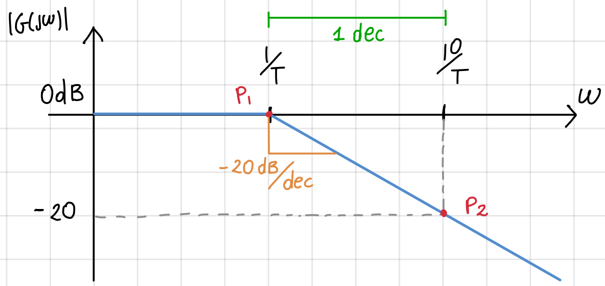
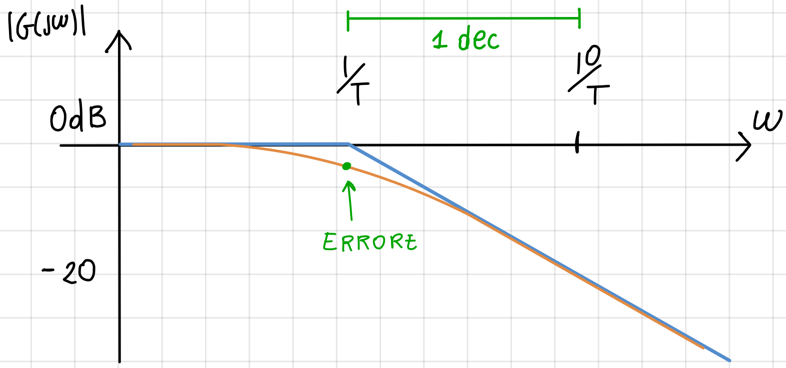


Diagramma Asintotico ≠ Diagramma DI BODE

Quale sarà il diagramma esatto?



L'errore che commetto tra il diagramma asintotico e l'effettivo valore sarà 3dB

CALCOLO DELL'ERRORE

Asintoticamente

$$|G(jw)|_{dB}\Big|_{1/T}\Big|_{wT<<1} = -20\log\left(\frac{1}{T}\cdot T\right) = 0\text{ dB}$$ Visto prima

Esattamente

$$|G(jw)|_{dB}\Big|_{w=1/T} = -20\log\left(\sqrt{1+\frac{1}{\cancel{T^2}}\cancel{T^2}}\right) = -20\log\sqrt{2} = 3.01\text{ dB}$$ ERR

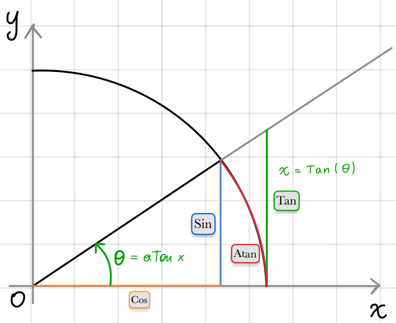
$\triangleright$ 1 ottava sopra o sotto rispetto a $w=\frac{1}{T}$ $\Rightarrow$ err $\simeq$ 1 dB

$\triangleright$ $\simeq \frac{1}{3}10^n$ $\Rightarrow$ +1 oct $\rightsquigarrow$ $-20\log\left(\sqrt{1+\frac{1}{9\cancel{T^2}}\cdot\cancel{T^2}}\right) \simeq$

✱ CHIEDI OTTAVA

Diagramma delle fasi

$$\angle G(jw) = \angle\frac{1}{1+jwT} = \angle 1 - \angle 1+jwT = -\operatorname{atan}\left(\frac{wT}{1}\right) = -\tan^{-1}(wT)$$ Funzione di w



- Per $wT >> 1$ $\rightsquigarrow$ ovvero per w molto grandi

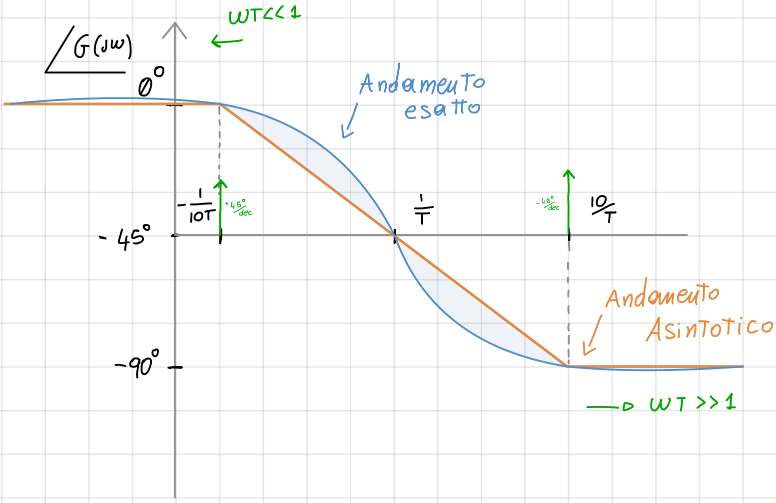
  $a\tan(x \to \infty)$ = "l'arco la cui tangente è elevata"

  $\tan(x) \to \infty$ quando $\underbrace{\theta \to 90°}_{a\tan(x)}$ (vedi disegno)

  Quindi $w > \frac{1}{T}$ $\rightsquigarrow$ $\angle G = -90°$

- Per $wT << 1$ $\rightsquigarrow$ $\angle G = 0°$

- Per $w = \frac{1}{T}$ $\rightsquigarrow$ $\angle G = \tan^{-1}\left(\frac{1}{T}\,T\right) = \frac{\pi}{4} = -45°$



✱ Recap IMPO

Termine con uno zero

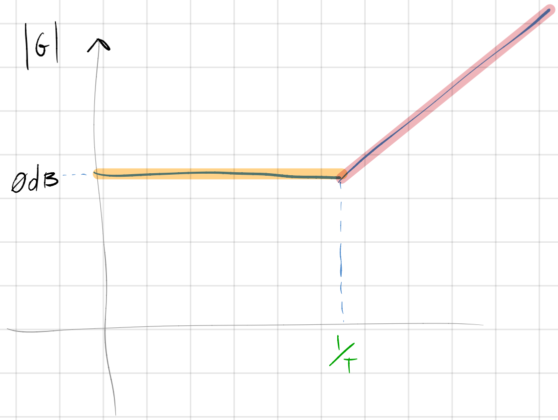
$$G(s) = 1 + sT$$

$$|G(j\omega)| = +20\log\left(\sqrt{1+(\omega T)^2}\right)$$

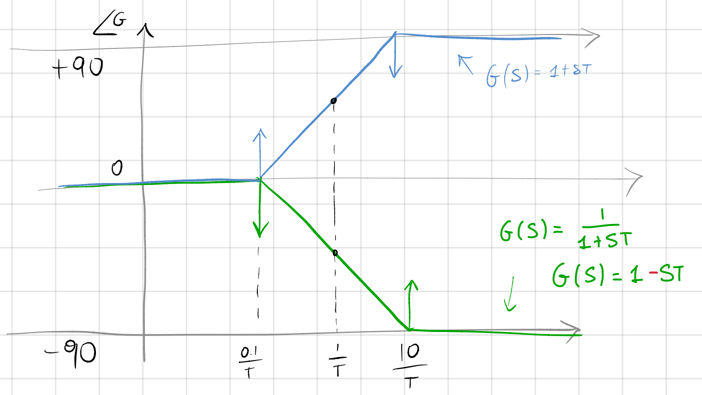
Positivo

> Lo zero si comporta nel modo opposto al polo, ovvero crea una **amplificazione**

- Per $\omega T << 1 \rightarrow |G(j\omega)|\Big|_{dB} = 20\log\left(\sqrt{1+\simeq 0}\right) = 20\log 1 = 0\,dB$
- Per $\omega T >> 1 \rightarrow |\,|\,| = 20\log\sqrt{\omega^2 T^2} = 20\log(\omega T)$



$$\angle|G(j\omega)| = \angle 1 + j\omega T = \tan^{-1}(\omega T)$$



✱ Recap Impo

Cosa succede se lo zero è negativo?

ES: $G(s) = 1 - sT$

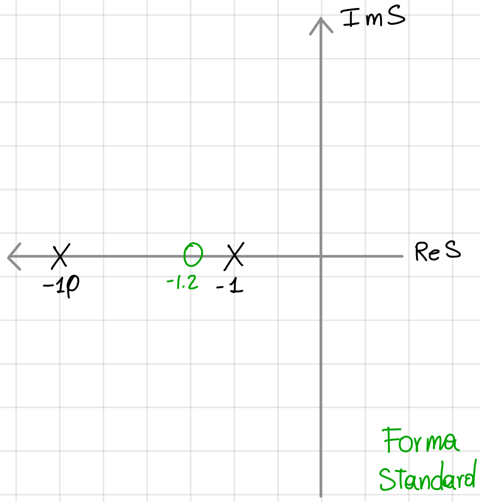
- $|G(j\omega)|\Big|_{dB} = 20\log\left(\sqrt{1+\omega^2T^2}\right)$ UGUALE
- $\angle G(j\omega) = \angle 1 - \angle j\omega T = -\tan^{-1}(\omega T)$

Proprio come il polo

	POLO (denom)	ZERO (numeratore)
MODULO	Ha l'effetto di far scendere il modulo di 20dB/dec	Ha l'effetto di far salire il modulo di 20dB/dec
Fase	Ha l'effetto di un ritardo di fase (quando ReP neg), graficamente si vede la fase che "scende"	Ha l'effetto di un anticipo di fase (ovvero quando ha ReP pos), graficamente si vede la fase che "sale". Se ha ReP neg, si ha un ritardo di fase, ovvero si comporta come un polo con ReP neg.

ESEMPIO: FDT PIÙ "COMPLESSA":

Possiamo decidere dove posizionare i poli e gli zeri:



Immaginiamo di voler posizionare due poli, uno in -10 ed uno in -1; posizioniamo anche uno zero in -1.2; quest'ultimo è molto vicino ad uno dei poli, quindi ci aspettiamo che l'effetto del polo in -1 abbia un effetto più attenuato rispetto a quello in -10 (vedi qualche lezione fa).

La fdt avrà questo aspetto:

$$G(S) = K \cdot \frac{S+1.2}{(S+1)(S+10)}$$

Forma Standard

$$G(S) = K \cdot \frac{\frac{5}{6}\left(1+\frac{S}{1.2}\right)}{(1+S)\cdot\frac{1}{10}\left(1+\frac{S}{10}\right)} = \frac{\frac{6}{5}K}{\frac{1}{10}} \cdot \frac{\left(1+\frac{5}{6}S\right)}{(1+S)\left(1+\frac{S}{10}\right)}$$

$$= \frac{K}{12} \cdot \frac{\left(1+\frac{5}{6}S\right)}{(1+S)\left(1+\frac{S}{10}\right)}$$

Siccome abbiamo ottenuto un guadagno di 1/12, ci conviene scegliere un k iniziale multiplo di 12, semplicemente per ottenere un guadagno finale intero e facilmente rappresentabile (stiamo costruendo noi l'esercizio!).
Scegliamo quindi k=540, perché 540/12 =45

$$G(S) = 540 \cdot \frac{S+1.2}{(S+1)(S+10)} = 54 \cdot \frac{\left(1+\frac{5}{6}S\right)}{(1+S)\left(1+\frac{S}{10}\right)}$$

Partiamo da qui

Osserviamo la funzione di trasferimento nella forma standard:

- Non ci sono poli nell'origine
- Non ci sono zero nell'origine
- Il guadagno statico, ovvero G(s) calcolata in s=0 (se non ci sono poli e zeri in o!) è di 54 —> 35dB
- Abbiamo due punti di rottura associati ai poli: w1 = 1/T e w2 = 10/T
- Abbiamo un punto di rottura allo zero a parte reale negativa associato : w3 = 1.2/T

Guadagno Statico

$$|G(S)|_{dB}\Big|_{S=0} = 20\log(54) \cong 35\,dB$$

- $\omega T \ll 1$

superfluo, basta guardare K

$$~~|G(j\omega)| = 45 \cdot \frac{\sqrt{1+\left(\frac{5}{6}\omega T\right)^2}}{\sqrt{1+(\omega T)^2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{10}\omega T\right)^2}}\Bigg|_{\omega=\frac{1}{10T}} = 45 \cdot \sim 1 = 45~~$$

$$\Rightarrow 45\big|_{dB} \cong 35\,dB$$

Punti di rottura

Immaginiamo la F.d.T nella forma

$$G(S) = K \cdot \frac{(1+C_1 TS)}{(1+C_2 TS)(1+C_3 TS)}$$

Nel nostro caso $C_1 = 1.2$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1/10$

$$\Rightarrow \begin{cases} Bp_1 = |1+C_2 S = 0| \rightsquigarrow S = \left|-\frac{1}{C_1}\right| = 1\ \omega_1 \\ Bp_2 = |1+C_3 S = 0| \rightsquigarrow S = \left|-\frac{1}{C_3}\right| = 10\ \omega_2 \end{cases}$$

$$Bp_3 = |1+C_1 S = 0| \rightsquigarrow Bp_3 = 1.2\ \omega_3$$

↳ A parte reale negativa
↳ ↑modulo, ↑Fase

Il prof ha parlato di "quando s è zero il guadagno statico è quello moltiplicato davanti alla forma standard" ma non capisco perché si da per certo che il valore iniziale del modulo sia proprio quel guadano calcolato in dB!

Soluzione: basta calcolare G(0) per accorgersi che il guadagno iniziale è proprio il guadagno statico!

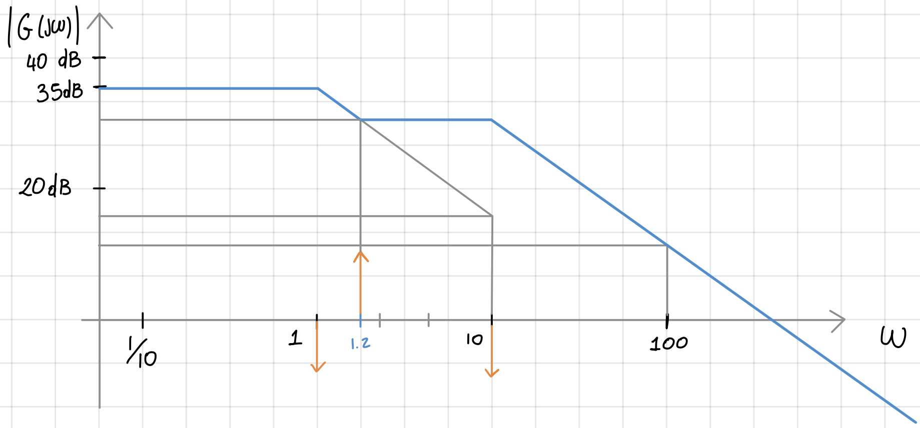
DIAGRAMMA DEI MODULI

Come scegliere la <u>banda</u> di frequenze per il diagramma dei moduli
Per scegliere l'intervallo (banda) di frequenze che ci interessano al fine di disegnare il diagramma asintotico, ci basta guardare i due punti di rottura (dei poli); possiamo quindi definire:

- **Lower bound:** guardiamo il polo più piccolo e ci portiamo una *<u>decade prima</u>*.
- **Upper bound:** guardiamo il polo più grande e ci portiamo una *<u>decade dopo</u>*.

Come disegnare il diagramma asintotico dei moduli guardando la fdt
Per facilitare l'operazione di disegno del diagramma, ci basta guardare la fdt; in particolare guardiamo i suoi poli e zeri sapendo che:

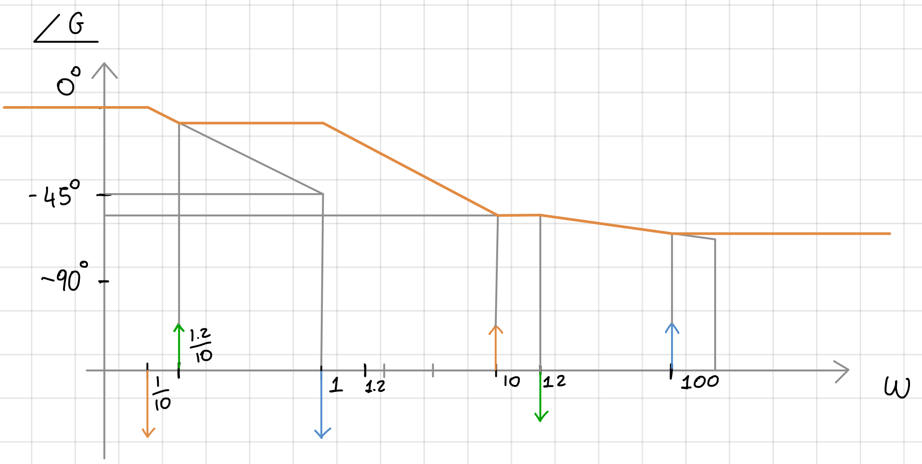
- Ogni *<u>polo</u>* fa *<u>aumentare</u>* il modulo (disegnamo una freccia verso l'alto in corrispondenza del polo.
- Ogni *<u>zero</u>* fa *<u>aumentare</u>* il modulo (disegnamo una freccia verso il basso in corrispondenza dello zero.

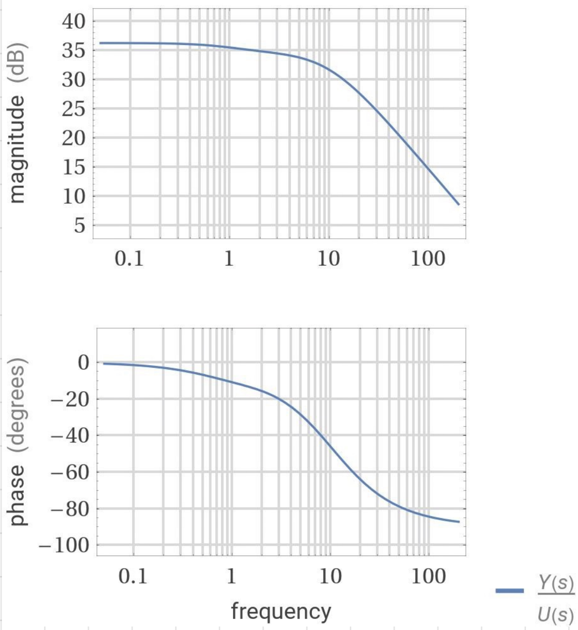


Come disegnare il diagramma asintotico delle fasi
In condizioni standard (ovvero poli e zeri negativi):

- I poli hanno l'effetto di *ritardare* la fase.
- Gli zeri hanno l'effetto di *anticipare* la fase.

Bisogna però prestare attenzione: i ritardi ed anticipi di fase hanno una sorta di "transitorio"; non è nel punto di rottura che la fase inizia a cambiare (come nel modulo) ma inizia a cambiare una decade prima, e finisce una decade dopo!





✱ ESERCIZIO ESAME

Come trovare il valore finale della fase

Sappiamo che in condizioni standard (poli e zeri < 0)

- Ogni polo *ritarda* di 90° la fase.
- Ogni zero *anticipa* di 90° la fase.

Valore finale

Abbiamo 2 Poli $\Rightarrow$ $-90^\circ - 90^\circ = -180^\circ$

Abbiamo 1 zero $\Rightarrow$ $+90^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} -90^\circ - 90^\circ = -180^\circ \\ +90^\circ \end{array}\right\} \angle TOT = 90 - 180 = -90^\circ$$

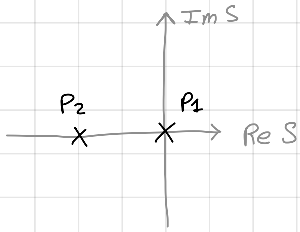
In generale

$$\angle TOT = -90^\circ n - 90^\circ m = -90\,(n - m)$$

numero di poli $\pm$ ReP

numero di zeri a parte reale negativa

ESERCIZIO



$$G(S) = \frac{1}{S(S+1)}$$

Poli : $P_1 = 0$, $P_2 = -1$

$\Rightarrow$ $\omega_1 = \emptyset$, $\omega_2 = 1$ Punto di rottura

Polo in origine

$\Rightarrow$ Non Parte COSTANTE !

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)}$$

Per $\omega >> 1$ $\Rightarrow$ $\bar{G}(j\omega) \cong \frac{1}{j\omega}$

FdT di tipo INTEGRATIVO

$\Rightarrow$ Una decade prima del p.d.R , la Fdt si comporta come un integratore fino al prossimo punto di rottura

- $|\bar{G}(j\omega)| = \frac{1}{\omega}\Big|_{\omega=1} = 1 \rightarrow 20\log(1) = 0\,dB \Rightarrow P_1(1,0) \in Bo$

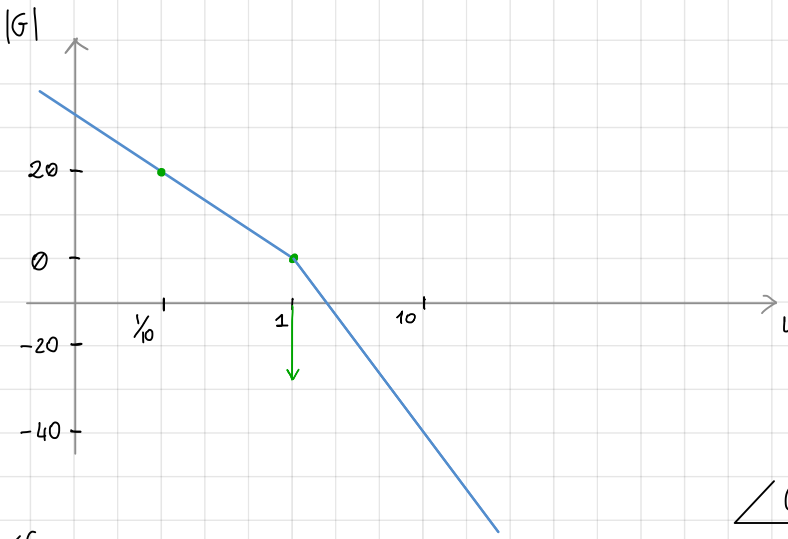
  $20\log(10) = 20\,dB \Rightarrow P_2(1/10, 20) \in Bo$

- $|G(j\omega)| = \left|\frac{1}{-\omega^2+j\omega}\right| = |-\omega^2+j\omega|^{-1} = \sqrt{\omega^4+\omega^2}^{\,-1} = \omega\sqrt{1+\omega^2}^{\,-1}$

  Dà FASTIDIO ??

$\Rightarrow 20\log\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)^{-1} = -20\log\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)$

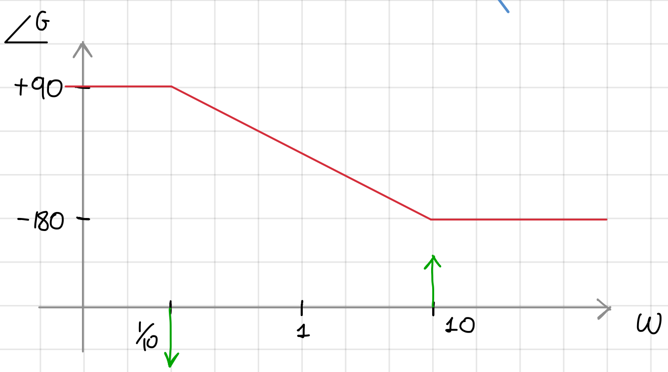
Se non ci fosse si troverebbe -40dB



$$\angle G(j\omega) = \angle{-\omega^2+j\omega} = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-\omega^2}\right) = -\tan^{-1}(-\omega)$$

- Per $\omega \rightarrow \infty$, $-\tan^{-1}(-\infty) \rightarrow +90^\circ$

  Per $\omega \rightarrow -\infty$, $-\tan^{-1}(\infty) \rightarrow -90^\circ$??



Ho capito che ho 2 Poli ma non mi trovo !