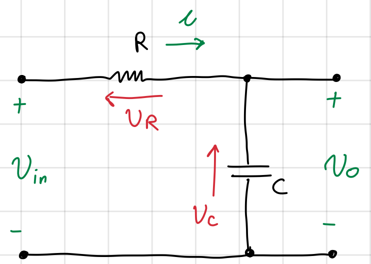
CIRCUITO RC



$$\begin{cases} V_R + V_C = V_{in} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_R = R \cdot i \\ i_c = C\dot{V}_c \to \dot{V}_c = \frac{1}{C} i_c \to V_c = \frac{1}{C}\int i_c \, dt \end{cases}$$

FUNZIONE DI TRASF.

C.I. nulle

$$\to V_R + V_C = V_{in} \to RI(s) + \frac{1}{C}\cdot sI(s) - \cancel{i(0^+)} = V_{in}(s) \to V_{in}(s) = RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = I(s)\left(R + \frac{1}{Cs}\right)$$

$$\text{Siccome } V_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \Rightarrow G(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\cancel{\frac{1}{Cs}}\ \cancel{I(s)}}{\cancel{I(s)}\left(\frac{RCs+1}{\cancel{Cs}}\right)} = \frac{1}{RCs+1}$$

$G(s)$

SPAZIO DI STATO

(1) Stabiliamo

in $= u = V_{in}$

out $= y = V_o$

variabile di stato $= x = V_c = V_o$

(2) Scrivo nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Dy \end{cases}$$

Dalle R.C.

$\dot{x}$: $C\frac{d}{dt}V_o = i \to \dot{V}_o = \frac{1}{C} i \Rightarrow \dot{V}_o = \frac{1}{RC}(V_{in} - V_o) \to \underbrace{\dot{V}_o}_{\dot{x}} = -\frac{1}{RC}\underbrace{V_o}_{x} + \frac{1}{RC}\underbrace{V_{in}}_{u}$

$V_R = R\cdot i \to i = \frac{V_R}{R}$ ma $V_R = V_{in} - V_o \Rightarrow i = \frac{V_{in} - V_o}{R}$

y: Siccome $V_o = x$, $y = V_o \Rightarrow y = x$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u \\ y = x \end{cases} \rightsquigarrow$$

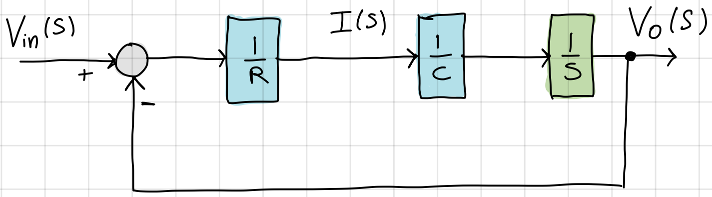
FAI MATRICI

SCHEMA A BLOCCHI

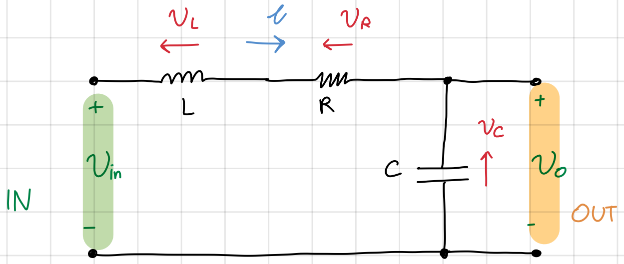
dalle eq $\quad c\frac{dv_c}{dt} = i \equiv c\frac{dv_o}{dt} = i \rightleftharpoons C\,s\,V_o(s) = I(s)$

$$v_R = R\cdot i \to i = \frac{v_R}{R} \quad \text{ma} \quad v_R = v_{in} - v_o \Rightarrow i = \frac{v_{in} - v_o}{R}$$

$$\rightleftharpoons I(s) = \frac{V_{in}(s) - V_o(s)}{R}$$



CIRCUITO RLC SERIE



L.K.
$v_L + v_R + v_c = v_{in}$

L.T.
$V_L + V_R + V_c = V_{in}$

$$\begin{cases} v_L = L\dot{i} \\ i = c\,\dot{v}_c \to \dot{v}_c = \frac{1}{c} i \to v_c = \frac{1}{c}\int i\,dt \\ v_R = R i \end{cases}$$

$\Downarrow$

C.i. NULLE

$$L\dot{i} + Ri + \frac{1}{c}\int i\,dt = v_{in} \quad \rightleftarrows \quad LS\,I(S) - \cancel{i(0^+)}^{\,0} + RI(S) + \frac{1}{C}\frac{I(S)}{S} + \frac{\cancel{i^{-1}(0^+)}^{\,0}}{\cancel{S}} = V_{in}(S)$$

$V_c \equiv V_o$

$\to LSI(S) + RI(S) + \frac{1}{CS} I(S) = V_{in}(S)$

Supponiamo di volere $G(S) = \frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}$ $\leadsto$ $I(S)\left[LS + R + \frac{1}{CS}\right] = V_{in}(S)$

Siccome $v_o = v_c = \frac{1}{c}\int i\,dt \rightleftarrows V_o = \frac{1}{CS} I(S)$

$$\Rightarrow G(S) = \frac{\frac{1}{CS}\cancel{I(S)}}{\cancel{I(S)}\left[LS + R + \frac{1}{CS}\right]} = \frac{\frac{1}{CS}}{\frac{LCS^2 + RCS + 1}{CS}} = \frac{1}{LCS^2 + RCS + 1}$$

$G(S)$

SPAZIO DI STATO (1)

$$\begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = v_o \end{cases} \qquad u = v_{in} \qquad y = v_o = x_1$$

Scrivo le eq: $\begin{cases} cv_c = i \\ Li = v_L \end{cases} = \begin{cases} Cv_o = i & (1) \\ Li = v_L & (2) \end{cases}$

ma $v_o = v_{in} - v_L - v_R \equiv v_L = \underbrace{v_{in}}_{u} - \underbrace{v_o}_{x_2} - v_R$ $\quad R \cdot i$ $\quad x_1$

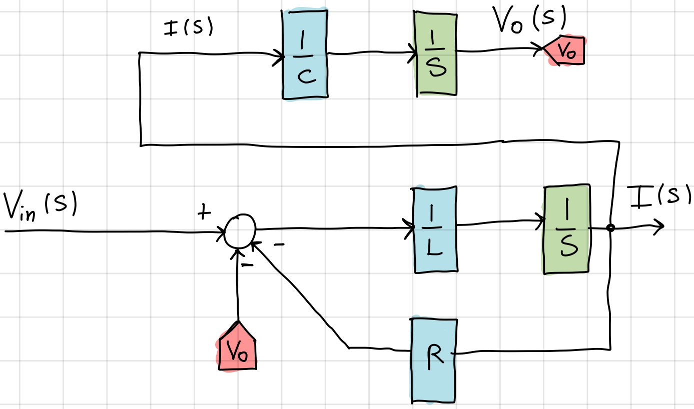
$\leadsto Li = v_L \leadsto \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L}(u - x_2 - Rx_1) & \text{dalla (2)} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{c} x_1 & \text{dalla (1)} \end{cases}$

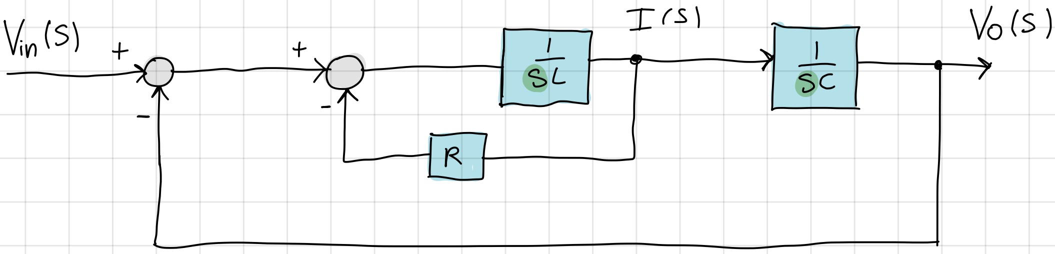
$$\to \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

SCHEMA A BLOCCHI

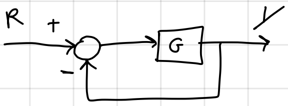
Dalle eq: $\begin{cases} L\dot{i} = v_L \\ C\dot{v}_o = i \\ v_R = R \cdot i \end{cases}$

$v_L = v_{in} - v_o - v_R$ ↖ $v_R = R \cdot i$

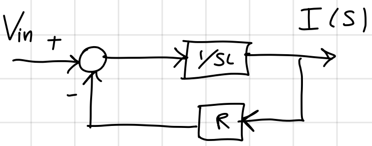




Ricordiamo il sys in feedback: $Y = \frac{G}{1+G} \cdot R(S)$

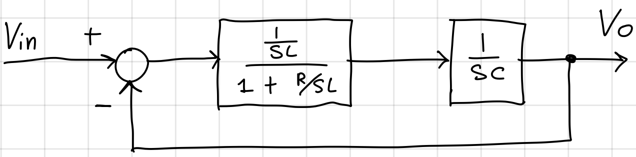


$\Rightarrow$



$\rightsquigarrow$ $\frac{I(S)}{V_{in}(S)} = \frac{\frac{1}{SL}}{1 + \frac{R}{SL}}$

$\Rightarrow$ Posso scrivere lo schema anche così:



SPAZIO DI STATO (2)

(1) Equazione diff dalla funzione di Trasferimento:

$$\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \Rightarrow V_{in}(s) = LCs^2 V_o(s) + RCs\,V_o(s) + V_o(s)$$

$$\rightarrow s^2 V_o(s) + \frac{RS}{L} V_o(s) + \frac{1}{LC} V_o(s) = \frac{1}{LC} V_{in}(s)$$

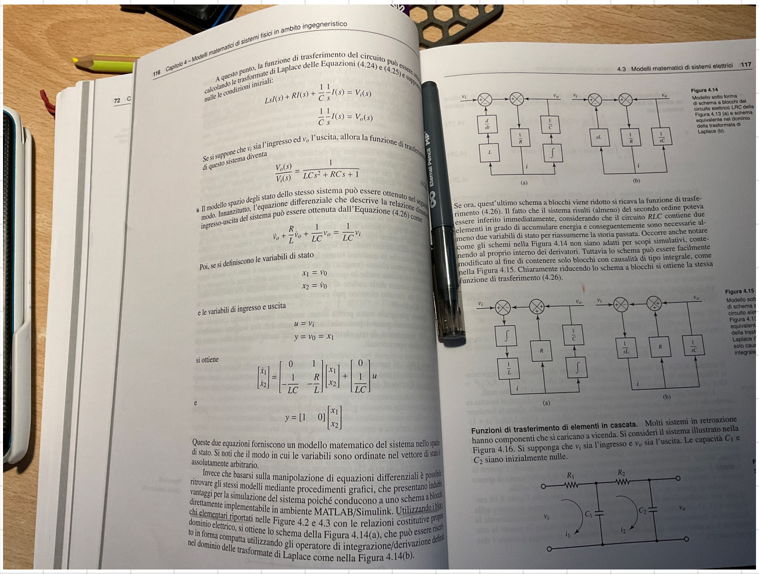
Siccome $\mathcal{L}[\dot{f}(t)] \underset{C.I.=0}{=} \frac{1}{S} \cdot F(S) \Rightarrow$ $\ddot{v}_o(t) + \frac{R}{L}\dot{v}_o(t) + \frac{1}{LC} v_o(t) = \frac{1}{LC} v_i(t)$

(2) Scelgo le entrate ed uscite e le Variabili di stato

Scelgo $\begin{cases} x_1 = v_0 \\ x_2 = \dot{v}_0 \end{cases}$ $\begin{cases} u = v_{in} \\ y = v_0 = x_1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}_n = \underline{\underline{A}}\, x + \underline{B} \cdot u \\ y = C\, x + D\, u \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{LC} & \frac{R}{L} \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_0 \\ \dot{v}_0 \end{matrix}$$

BOH


116 Capitolo 4 – Modelli matematici di sistemi fisici in ambito ingegneristico

A questo punto, la funzione di trasferimento del circuito può essere ottenuta calcolando le trasformate di Laplace delle Equazioni (4.24) e (4.25) e supponendo nulle le condizioni iniziali:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = V_i(s)$$

$$\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = V_o(s)$$

Se si suppone che v_i sia l'ingresso ed v_o l'uscita, allora la funzione di trasferimento di questo sistema diventa

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Il modello spazio degli stato dello stesso sistema può essere ottenuto nel seguente modo. Innanzitutto, l'equazione differenziale che descrive la relazione dinamica ingresso-uscita del sistema può essere ottenuta dall'Equazione (4.26) come

$$\ddot{v}_o + \frac{R}{L}\dot{v}_o + \frac{1}{LC}v_o = \frac{1}{LC}v_i$$

Poi, se si definiscono le variabili di stato

$$x_1 = v_0$$
$$x_2 = \dot{v}_0$$

e le variabili di ingresso e uscita

$$u = v_i$$
$$y = v_0 = x_1$$

si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

e

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Queste due equazioni forniscono un modello matematico del sistema nello spazio di stato. Si noti che il modo in cui le variabili sono ordinate nel vettore di stato è assolutamente arbitrario.

Invece che basarsi sulla manipolazione di equazioni differenziali è possibile ritrovare gli stessi modelli mediante procedimenti grafici, che presentano indubbi vantaggi per la simulazione del sistema poiché conducono a uno schema a blocchi direttamente implementabile in ambiente MATLAB/Simulink. Utilizzando i blocchi elementari riportati nelle Figure 4.2 e 4.3 con le relazioni costitutive proprie dominio elettrico, si ottiene lo schema della Figura 4.14(a), che può essere riscritto in forma compatta utilizzando gli operatore di integrazione/derivazione definiti nel dominio delle trasformate di Laplace come nella Figura 4.14(b).

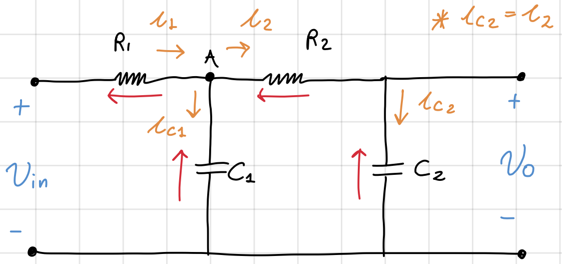
4.3 Modelli matematici di sistemi elettrici 117

Figura 4.14 Modello sotto forma di schema a blocchi del circuito elettrico LRC della Figura 4.13 (a) e schema equivalente nel dominio della trasformata di Laplace (b).

Se ora, quest'ultimo schema a blocchi viene ridotto si ricava la funzione di trasferimento (4.26). Il fatto che il sistema risulti (almeno) del secondo ordine poteva essere inferito immediatamente, considerando che il circuito RLC contiene due elementi in grado di accumulare energia e conseguentemente sono necessarie almeno due variabili di stato per riassumerne la storia passata. Occorre anche notare come gli schemi nella Figura 4.14 non siano adatti per scopi simulativi, contenendo al proprio interno dei derivatori. Tuttavia lo schema può essere facilmente modificato al fine di contenere solo blocchi con causalità di tipo integrale, come nella Figura 4.15. Chiaramente riducendo lo schema a blocchi si ottiene la stessa funzione di trasferimento (4.26).

Funzioni di trasferimento di elementi in cascata. Molti sistemi in retroazione hanno componenti che si caricano a vicenda. Si consideri il sistema illustrato nella Figura 4.16. Si supponga che v_i sia l'ingresso e v_o sia l'uscita. Le capacità C_1 e C_2 siano inizialmente nulle.

Elementi in Cascata



$$\begin{cases} i_{C_1} = C_1 \dot{V}_{C_1} \\ i_{C_2} = C_2 \dot{V}_{C_2} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{aligned} V_{C_1} &= \frac{1}{C_1}\int i_{C_1}\,dt \\ V_{C_2} &= \frac{1}{C_2}\int i_{C_2}\,dt \end{aligned}$$

$$\begin{cases} V_1 = R_1 \cdot i_1 \\ V_2 = R_2 i_2 \end{cases}$$

SPAZIO DI STATO

Pongo $V_{C_1} = x_1 \quad V_{C_2} = x_2$

$U = V_{in} \quad y = V_o$

$C\dot{V}_{C_1} = i_{C_1}$ ma LKC_A $i_{C_1} = i_1 - i_{C_2}$

$\hookrightarrow C\dot{V}_{C_1} = i_1 - i_2$

ma • $i_1 = \frac{V_1}{R_1}$, $V_1 = V_{in} - V_{C_1}$

$= \frac{V_{in} - V_{C_1}}{R_1}$

• $i_2 = \frac{V_2}{R_2}$, $V_2 = V_{C_1} - V_{C_2}$

$= \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R_2}$

$$\Rightarrow C\dot{V}_{C_1} = \left(\frac{\overset{U}{V_{in}} - \overset{X_1}{V_{C_1}}}{R_1}\right) - \left(\frac{\overset{X_1}{V_{C_1}} - \overset{X_2}{V_{C_2}}}{R_2}\right)$$

$$\dot{V}_{C_2} = \frac{\overset{X_1}{V_{C_1}} - \overset{X_2}{V_{C_2}}}{C_2 R_2}$$

$$\Rightarrow C\dot{x}_1 = \frac{U - x_1}{R_1} - \frac{x_1 - x_2}{R_2} = x_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + x_2\left(\frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{R_1}U$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = \left[\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right] x_1 + \frac{1}{R_2} x_2 + \frac{1}{R_1} U \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C_2 R_2} x_1 - \frac{1}{C_2 R_2} x_2 \\ y = x_2 \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot U$$

FUNZ. DI TRASFERIMENTO

Tra out: $V_o(s)$ e In: $V_i(s)$

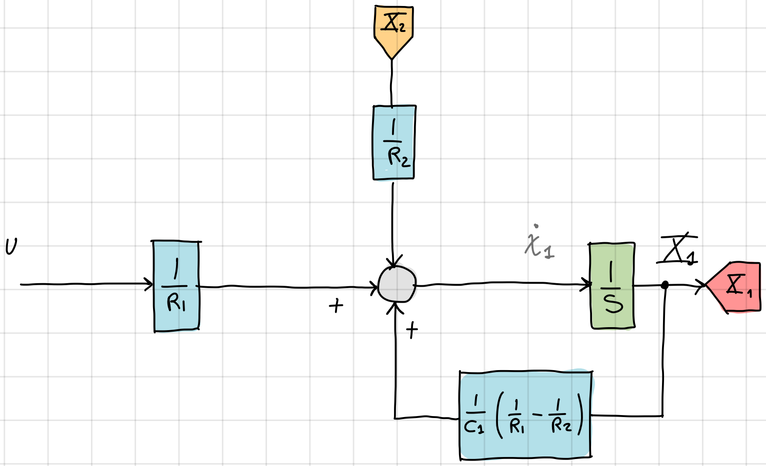
$$V_{in} = V_1 + V_{C1} = R_1 i_1 + \frac{1}{C}(i_1 - i_2) \Rightarrow V_{in} = R_1 i_1 + \frac{1}{C}\int (i_1 - i_2)\,dt$$

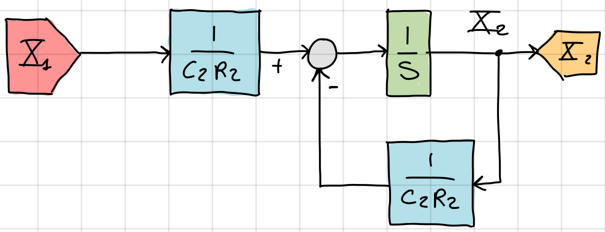
LKT: $\underset{\substack{\uparrow \\ V_o}}{V_{C2}} - V_{C1} + V_2 = 0 \rightarrow \frac{1}{C_1}\int$

SCHEMA A BLOCCHI

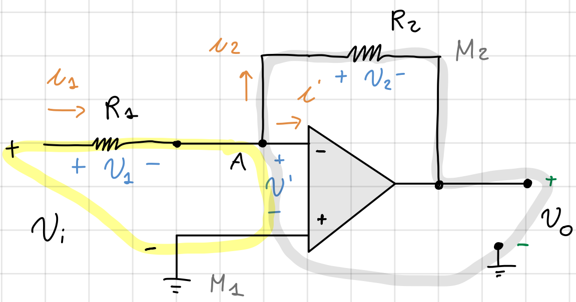
(dallo spazio di stato)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left[\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right] x_1 + \frac{1}{R_2} x_2 + \frac{1}{R_1} u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C_2 R_2} x_1 - \frac{1}{C_2 R_2} x_2 \end{cases}$$





Amplificatore invertente



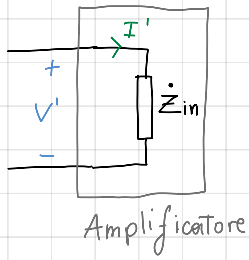
Scopo del gioco: Trovare v_o in relazione a R_1, R_2

$$i_2 = \frac{v_2}{R_2} \underset{M_2}{=} \frac{v' - v_o}{R_2}$$

$$i_1 = \frac{v_{R_1}}{R_1} \underset{M_1}{=} \frac{v_i - v'}{R_1}$$

ma LKC_A: $-i_1 + i_2 + i' = 0 \Rightarrow i_1 = i_2 + i'$

$\rightarrow$ Proprietà degli A.Op. $\dot{Z}_{interna} >>$



Troviamo i'

$$V' = \dot{Z} \cdot I' \Rightarrow I' = \frac{V'}{\dot{Z}}$$

ma se $\dot{Z} >> V \Rightarrow \frac{V'}{Z} \simeq 0$

$\Rightarrow I' \simeq 0$ QED

$$\Rightarrow i_1 = i_2 + \underbrace{\cancel{i'}}_{\sim 0} = i_2$$

$$\Rightarrow i_1 \simeq i_2 \quad \text{ovvero} \quad \frac{v_i - v'}{R_1} = \frac{v' - v_o}{R_2} \quad (1)$$

Inoltre gli op-amp sono fatti per avere un guadagno molto elevato in modo da amplificare anche il minimo segnale:

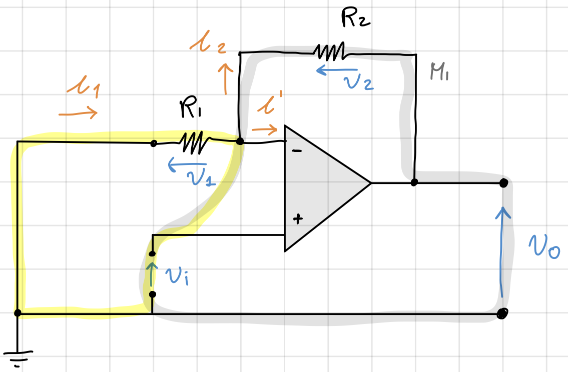
$v_o = K(v_+ - v_-)$ con $K >> (v_+ - v_-)$ ma (vedi figura) v_+ è messo a Terra!

$\Rightarrow v_o = K(0 - v')$ con $K >> 1$ $\Rightarrow v' \simeq 0$

$$(1) \quad \frac{v_i - \cancel{v'}}{R_1} = \frac{\cancel{v'} - v_o}{R_2} \rightarrow \frac{v_i}{R_1} = -\frac{v_o}{R_2} \Rightarrow v_o = \underbrace{-}_{\text{INVERTENTE}} \overbrace{\frac{R_2}{R_1}}^{\text{guadagno}} v_i$$

Attenzione ⚠️
Il circuito visto è di tipo PID *proporzionale* ma invertente; per avere un controllore proporzionale (non invertente) basta usare R2=R1 e mettere due controllori (invertenti) in serie. Vedi nella cartella *approfondimenti*.

Amplificatore non invertente



Trovare la relazione $v_o = K\, v_i$

$$\begin{cases} i_2 = \dfrac{v_2}{R_2} = \dfrac{v_i - v_o}{R_2} \\ i_1 = \dfrac{v_1}{R_1} = -\dfrac{v_i}{R_1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Siccome $i' \simeq 0 \Rightarrow i_1 \simeq i_2$

$$-\frac{v_i}{R_1} = \frac{v_i - v_o}{R_2} \rightarrow \frac{v_o}{R_2} = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1}{R_2} \Rightarrow v_o = R_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_i$$

GUADAGNO

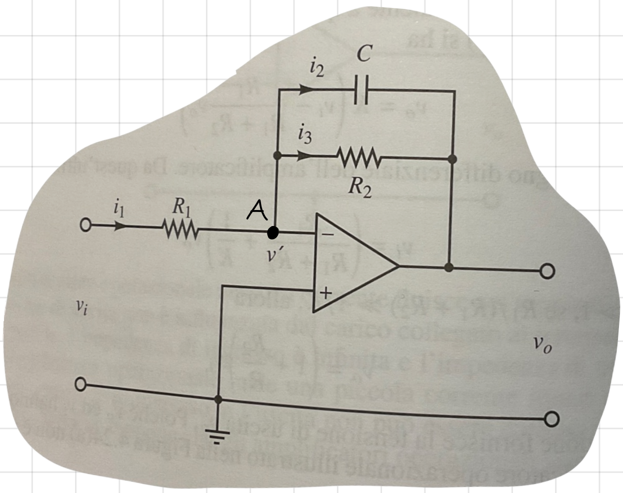
IN CONF NON INVERTENTE

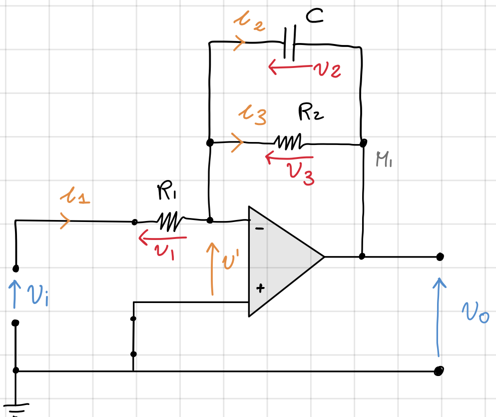
ES: $K = 1 \rightarrow R_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow R_1 = 2$

$R_2 = 2\,\Omega$

ES 4.2 CIRCUITO RITARDATORE

Q: Determinare v_o





$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_i - v'}{R}$$

$i_2 = C\,\dot{v}_2$ ma $v_2 = v_3 = v' - v_o \Rightarrow i_2 = C\,\dfrac{d(v' - v_o)}{dt}$

$$i_3 = \frac{v' - v_o}{R_2}$$

Siccome $i' \simeq 0 \Rightarrow LKC_A: -i_1 + i_3 + i_2 + \cancel{i'}^{\,0} = 0 \Rightarrow i_1 = i_2 + i_3$

uguale approx $\simeq\ \equiv\ \doteq$

$$\Rightarrow \frac{v_i - \cancel{v'}^{\,0}}{R_1} = C\,\frac{d(\cancel{v'}^{\,0} - v_o)}{dt} + \frac{\cancel{v'}^{\,0} - v_o}{R_2}$$

INVERTENTE $\Leftarrow$ $v' \doteq 0$

$\rightarrow \quad \frac{v_1}{R_1} = -C\dot{v}_o - \frac{1}{R_2} v_o \quad \overset{\mathcal{LT}}{\rightleftharpoons} \quad \frac{1}{R_1} V_i(s) = -Cs\, V_o(s) - \frac{1}{R_2} V_o(s) = -\frac{sCR_2V_o(s) + V_o(s)}{R_2}$

$$\frac{V_i(s)}{R_1} = \frac{R_2Cs+1}{R_2} V_o(s)$$

la T.F. è $\quad G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1(R_2Cs+1)} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2Cs+1}$ T.F.