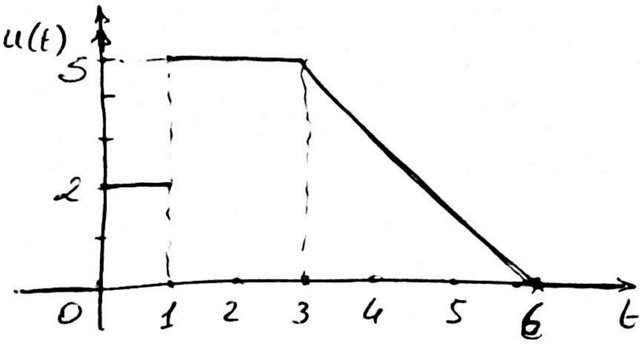
Esempio svolgimento esercizio risposta nel tempo

Data la funzione di trasferimento

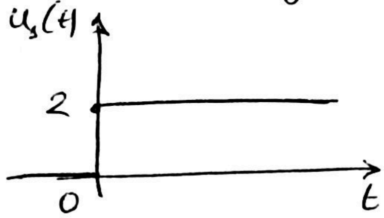
$$G(s) = \frac{1}{s + 1/2}$$

determinare la risposta all'ingresso rappresentato in figura.

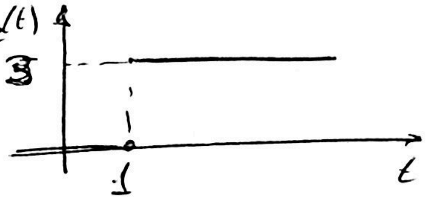


① Esprimere $u(t)$ come somma di segnali elementari

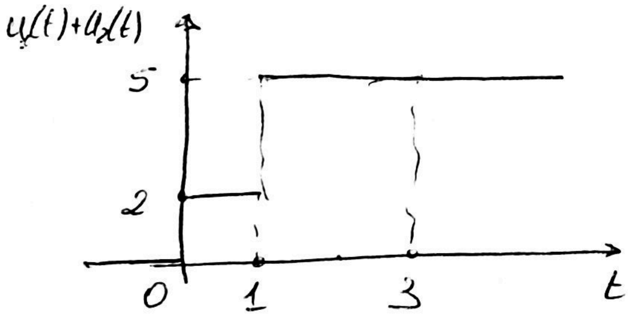
$$u_1(t) = 2 \cdot 1(t)$$



$$u_2(t) = 3 \cdot 1(t-1)$$



Da cui si ha



Dall'istante $t=3$ in poi bisogna sommare una rampa decrescente con pendenza

$$\frac{u(t_2)-u(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{0-5}{6-3} = -\frac{5}{3}$$

da cui

$$u_3(t) = -\frac{5}{3}(t-3) \cdot 1(t-3)$$

Per annullare il segnale per $t \geq 6$ bisogna aggiungere il segnale

$$u_4(t) = \frac{5}{3}(t-6)\cdot 1\!\!1(t-6)$$

Il segnale $u(t)$ in figura è quindi dato da

$$u(t) = \sum_{i=1}^{4} u_i(t)$$

---

(2)

Le trasformate di Laplace dei segnali elementari sono:

$$U_1(s) = \frac{2}{s} \qquad U_2(s) = \frac{3}{s}e^{-s} \qquad U_3(s) = -\frac{5}{3s^2}e^{-3s}$$

$$U_4(s) = \frac{5}{3s^2}\cdot e^{-6s}$$

dove si sono usate le trasformate di Laplace del gradino, della rampa e il teorema del ritardo.

---

(3)

Dall'analisi dei segnali elementari la cui somma è il segnale d'ingresso si deduce che è conveniente considerare l'ingresso fittizio

$$\hat{u}(t) = t\cdot 1\!\!1(t)$$

cioè una rampa con pendenza unitaria. Calcolando la corrispondente uscita $\hat{y}(t)$ sarà poi possibile determinare tutte le uscite elementari $y_i(t)$, $i=1,\dots,4$, e quindi sommandole l'uscita complessiva.

Quindi:

$$\hat{U}(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{Y}(s) = G(s)\cdot\hat{U}(s) = \frac{1}{s^2(s+1/2)}$$

Scomposizione in fratti semplici di $\hat{Y}(s)$

$$\frac{1}{s^2(s+1/2)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s^2} + \frac{r_3}{s+1/2}$$

$$r_2 = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2} \cdot \frac{1}{\cancel{s^2}(s+1/2)} = 2$$

$$r_3 = \lim_{s\to -1/2} \cancel{(s+1/2)} \cdot \frac{1}{s^2\cancel{(s+1/2)}} = 4$$

Per calcolare r_1 si opera per sostituzione

$$\frac{1}{s^2(s+1/2)} = \frac{r_1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s+1/2} = \frac{r_1 s(s+1/2)+2(s+1/2)+4s^2}{s^2(s+1/2)} =$$

$$= \frac{(r_1+4)s^2+(\frac{1}{2}r_1+2)s+1}{s^2(s+1/2)}$$

Da cui, dovendo annullarsi i termini al numeratore in s^2 ed in s, si ha $r_1=-4$. Per cui

$$\hat{Y}(s) = -\frac{4}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s+1/2}$$

3.1 L'antitrasformata di Laplace di $\hat{Y}(s)$ è data da

$$\hat{y}(t) = -4+2t+4e^{-t/2}, \quad t \geq 0$$

e $\hat{y}(t)=0$ per $t<0$.

4.a Il valore iniziale è $\hat{y}(0)=0$ infatti

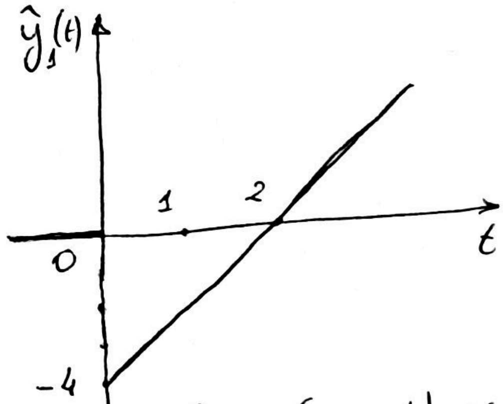
$$\lim_{s\to\infty} \cancel{s} \cdot \frac{1}{s^2(s+1/2)} = 0$$

Il valore finale è infinito, infatti (a causa della rampa)

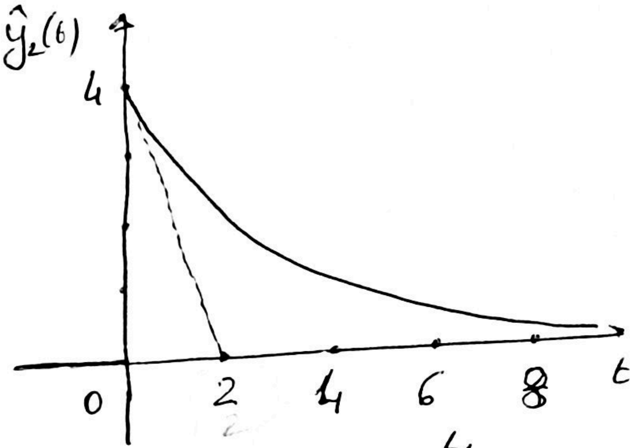
$$\lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{s^2(s+1/2)} = +\infty$$

Il modo esponenziale ha una costante di tempo di 2 sec e quindi un tempo di assestamento all'1% di 8 sec.
Non ci sono modi associati a poli complessi e coniugati.

(4.6)



$\hat{y}_1(t) = (-4 + 2t) \cdot 1(t)$



$\hat{y}_2(t) = 4e^{-t/2} \cdot 1(t)$

([illegible].5)

Calcolata $\hat{y}(t)$, l'uscita a $u_1(t) = 2 \cdot 1(t)$ si può calcolare come

$$y_1(t) = 2 \cdot \frac{d}{dt}\hat{y}(t) = 2 \cdot \left(2 - 2e^{-t/2}\right) = 4\left(1 - e^{-t/2}\right) \quad \text{per } t \geq 0$$

L'uscita a $u_2(t) = 3 \cdot 1(t-1)$ si può calcolare come

$$y_2(t) = \frac{3}{2} \cdot y_1(t-1) = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \overset{2}{\cancel{4}}\left(1 - e^{-\frac{t-1}{2}}\right) = 6 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-1}{2}}\right) \quad \text{per } t \geq 1$$

e nulla per $t < 1$.

L'uscita a $u_3(t) = -\frac{5}{3}(t-3) \cdot 1(t-3)$ si può calcolare come

$$y_3(t) = -\frac{5}{3}\,\hat{y}(t-3) = -\frac{5}{3}\left(-4 + 2(t-3) + 4e^{-\frac{t-3}{2}}\right)$$

$$= \frac{20}{3} - \frac{10}{3}t + \frac{30}{3} + \frac{20}{3}e^{-\frac{t-3}{2}} = \frac{10}{3}\left(5 - t + 2e^{-\frac{t-3}{2}}\right) \quad \text{per } t \geq 3$$

e nulla per $t < 3$.

L'uscita a $u_4(t)=\frac{5}{3}(t-6)\cdot 1\!\!1(t-6)$ si può calcolare come

$$y_4(t)=\frac{5}{3}\cdot\hat{y}(t-6)=\frac{5}{3}\left(-4+2(t-6)+4e^{-\frac{t-6}{2}}\right)$$

$$=-\frac{20}{3}+\frac{10}{3}t-\frac{60}{3}+\frac{20}{3}e^{-\frac{t-6}{2}}=\frac{10}{3}\left(+8-t-2e^{-\frac{t-6}{2}}\right) \text{ per } t\geq 6$$

e nulla per $t<6$.

⑥

La risposta complessiva può essere espressa considerando diversi intervalli di tempo.

Per $t\leq 0$ si ha $y(t)=0$

Per $t\in[0,1]$ si ha

$$y(t)=y_1(t)=4\left(1-e^{-t/2}\right)$$

Per $t\in[1,3]$ si ha

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=4\left(1-e^{-t/2}\right)+6\left(1-e^{-\frac{t-1}{2}}\right)$$

$$=4-4e^{-t/2}+6-6e^{1/2}\cdot e^{-t/2}$$

$$=10-\left(4+6\sqrt{e}\right)e^{-t/2}$$

Per $t\in[3,6]$ si ha

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)+y_3(t)=10-\left(4+6\sqrt{e}\right)e^{-t/2}+\frac{10}{3}\left(5-t+2e^{-\frac{t-3}{2}}\right)$$

$$=\frac{80}{3}-\frac{10}{3}t+\frac{20}{3}e^{3/2}\cdot e^{-t/2}-\left(4+6\sqrt{e}\right)e^{-t/2}$$

$$=\frac{80}{3}-\frac{10}{3}t+\left(\frac{20}{3}\sqrt{e^3}+4+6\sqrt{e}\right)e^{-t/2}$$

Infine, per $t \geq 6$ si ha

$$y(t) = \sum_{i=1}^{4} y_i(t) = \sum_{i=1}^{3} y_i(t) + y_4(t)$$

$$= \cancel{\frac{80}{3}} - \cancel{\frac{10}{3}t} + \left(\frac{2}{3}\sqrt{e^3} + 4 + 6\sqrt{e}\right)e^{-t/2} - \cancel{\frac{80}{3}} + \cancel{\frac{10}{3}t} + \frac{20}{3}e^{-\frac{t-6}{2}}$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\sqrt{e^3} - 4 - 6\sqrt{e} + \frac{20}{3}e^3\right)e^{-t/2}$$

Quindi inizialmente, partendo da valore nullo $y(0)=0$, la risposta evolve secondo l'espressione di $y_1(t)$ e tenderebbe con un andamento di tipo della risposta al gradino a un valore pari a 4.

All'istante $t=1$ l'ingresso ha una nuova variazione a gradino e, se nulla accadesse, tenderebbe al valore 10 come espresso da $y_1(t)+y_2(t)$.

All'istante $t=3$ parte una risposta simile a quella di un ingresso a rampa con espressione $y_1(t)+y_2(t)+y_3(t)$.

All'istante $t=6$ parte una evoluzione secondo un esponenziale decrescente con costante di tempo 2 ~~sec~~ che tende a zero per t che tende all'infinito.

Qualitativamente l'andamento è in figura, che passa per i seguenti punti (t,y): $(0,0)$, $(1,1.6)$, $(3,6.9)$, $(6,4.5)$.