

SISTEMI DI ORDINE SUPERIORE

Finora abbiamo avuto a che fare solo con funzioni del tipo:

$$G(s) = \frac{1}{sT + 1}$$

↑
1° ORDINE

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

↑
2° ORDINE

$$G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

ORDINE
SUPERIORE

Supponiamo che abbia Tutti i poli
reali e distinti

→ RISPOSTA AL GRADINO

$$U(t) = 1(t) \Leftrightarrow U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = U(s) \cdot G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s \cdot \prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

↑
GRADINO

→ SCOMPOSIZIONE

$$Y(s) = \frac{z_0}{s} + \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{s + p_k}$$

POSSO CALCOLARE I RESIDUI COME:

$$z_k = \lim_{s \rightarrow -p_k} (s + p_k) \cdot Y(s)$$

→ ANTITRASFORMATA

$$y(t) = z_0 + \sum_{k=1}^n z_k \cdot e^{-p_k t}, \quad t \geq 0$$

Notiamo che ogni esponenziale è
moltiplicato per il suo residuo;
quindi un esponenziale può
dominare non solo nel tempo
(velocità di assestamento) ma
anche in **ampiezza!**

Risposta al gradino di un sistema di
ordine superiore quando tutti i poli
sono **reali e distinti**

Abbiamo tanti esponenziali quanti
sono i poli (n)

Siccome abbiamo una **somma di esponenziali**, il tempo che il sistema impiega
ad arrivare a regime corrisponde a 4/5 costanti di tempo dell'esponenziale **più lento**,
ovvero quello con la costante di tempo **maggiore**.

Possiamo quindi scrivere

$$z_k = \lim_{s \rightarrow -p_k} (s + p_k) \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow -p_k} \boxed{(s + p_k)} \cdot K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s \cdot \prod_{i=1}^n \boxed{(s + p_i)}} = \lim_{s \rightarrow -p_k} \cancel{(s + p_k)} \cdot K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s \cdot \prod_{i=1, i \neq k}^n (s + p_i)}$$

$$= K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (-p_k + z_i)}{(-p_k) \prod_{i=1, i \neq k}^n (-p_k + p_i)}$$

Un solo elemento della
produttoria è uguale ad
(s + p_k), quindi lo
"portiamo fuori"

Porto un (s + p_k) fuori dalla
produttoria andando a dire che
la produttoria vale per tutti gli
da 1 a n tranne per i = k; posso
così semplificare.

CONSIDERAZIONE:

GLI ZERI MODIFICANO LA RISPOSTA

PERCHÉ?

dalla (2):
$$z_k = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (-p_k + z_i)}{(-p_k) \prod_{i=1}^n (-p_k + p_i)}$$

Se c'è uno zero z_i che coincide con il polo p_k , otteniamo che il residuo associato a **quell'esponenziale diventa zero**, e quindi **non compare nella risposta**

In fatti dalla (1)
$$y(t) = z_0 + \sum_{k=1}^n \underbrace{z_k}_{\text{se } z_k=0 \Rightarrow 0 \cdot e^{-p_k \cdot t} = 0} \cdot e^{-p_k \cdot t}$$

INOLTRE $(-p_k + z_i)$ è la DISTANZA TRA POLO E ZERO

\Rightarrow QUANTO PIÙ UNO ZERO È VICINO AD UN POLO p_k , TANTO PIÙ L'EXP ASSOCIATO A QUEL POLO SARA' MENO INFLUENTE.

CASO 2: POLI COMPLESSI E CONIUGATI

Se $p_k \triangleq -\zeta\omega_n \pm \omega_d \sqrt{1-\zeta^2}$ A due a due

$$\Rightarrow G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{n_1} (s + p_i) \cdot \prod_{i=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_i\omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

- m Zeri REALI
- n_1 Poli REALI e DISTINTI
- n_2 COPPIE di Poli Cmplx e conj DISTINTI

La differenza sta nel fatto che avremo anche sinusoidi smorzate:

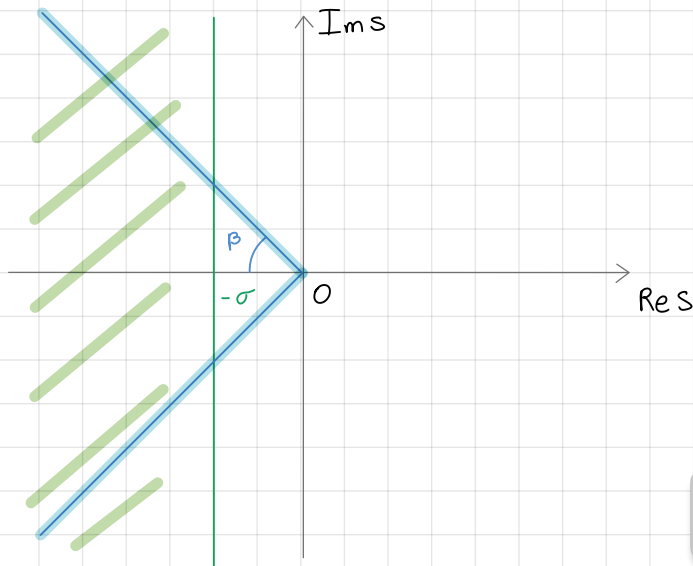
$$y(t) = z_0 + \sum_{k=1}^{n_1} z_k \cdot e^{-p_k t} + \sum_{k=1}^{n_2} \left[1 - e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cdot \cos(\omega_{dk} t) + \frac{2\zeta_k \omega_{nk}}{\omega_{dk}} \cdot e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{dk} t) \right]$$

CHIEDERE AL PROF

In questo modo l'analisi fatta finora è inutile?

No

Possiamo definire delle regioni nel piano complesso:



Ad esempio, voglio che la parte immaginaria sia inferiore ad una certa parte reale **per tutti i poli**;

In questo modo non sapremo se c'è un polo dominante o meno, ma se diciamo che tutti i poli sono a sinistra di una certa ascissa ($-\sigma$), sono sicuro che tutte le costanti di tempo si saranno esaurite dopo $4/\sigma$.

Allo stesso modo, se dico che voglio che tutti i poli siano all'interno di un certo angolo β , allora stiamo assegnando un certo **coefficiente di smorzamento** ζ .

Di conseguenza saremo certi che (se l'angolo è nel range) il coefficiente di smorzamento sarà minore di quello assegnato.

Morale della favola

Possiamo definire delle **regioni**; se tutti i poli sono all'interno di questa regione, allora potremo affermare che la risposta avrà **al più** una certa costante di tempo o un coefficiente di smorzamento.

Modo del sistema: è l'antitrasformata di un singolo termine della scomposizione in fratti semplici.

EVOLUZIONE LIBERA

Quando abbiamo visto la risoluzione delle equazioni differenziali con il metodo della trasformata di Laplace, abbiamo visto che la derivata (in s) si traduce in $s * F(s) - f(0)$; siccome abbiamo assunto condizioni iniziali nulle, il secondo membro era sempre zero.

L'evoluzione libera è la risposta del sistema quando le condizioni iniziali **non sono nulle**.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \equiv \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1)$$

TRASFORMO LA (1)

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$\rightarrow \text{Isolo } X(s) \rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$s = [s] \text{ ma } sI_3 = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad \text{multiplico A DESTRA}$$

TROVO L'USCITA $Y(s)$

$$Y(s) = C X(s) + D U(s) = C (sI - A)^{-1} x(0) + C (sI - A)^{-1} B U(s) + D U(s)$$

$$= C (sI - A)^{-1} x(0) + [C (sI - A)^{-1} B + D] U(s)$$

$G(s)$

L'evoluzione libera **non dipende da $u(t)$** ma solo dalle specifiche del sistema e dal suo stato iniziale

EVOLUZIONE LIBERA

È detta *forzata* perché se $U(s)=0$ allora anche l'uscita è zero.

EVOLUZIONE FORZATA

$$\Rightarrow Y(s) = C (sI - A)^{-1} x(0) + G(s) \cdot U(s)$$

Infatti se $x(0) = 0$

$$\Rightarrow Y(s) = [C (sI - A)^{-1} B + D] U(s)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D$$

Quali sono le dimensioni delle matrici?

MATRICE A

Ha tante righe quante sono le var di stato : ES ho n variabili :

$$n \quad \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} \quad [n \times n]$$

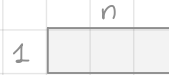
MATRICE B

Se ho un solo ingresso \rightarrow B è un vettore $[n \times 1]$



PRECISAZIONE

$1 \times n \rightarrow$
 righe (green arrow pointing up)
 colonne (blue arrow pointing right)



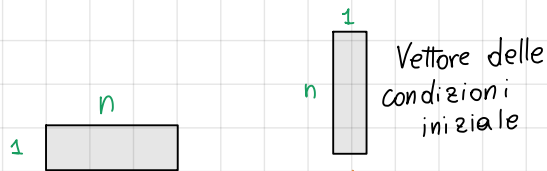
MATRICE C

$$\text{Se } A \times B = \begin{matrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ n & & & & \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ n & & & & \end{matrix} C$$

Perché considero 1 IN 1 OUT

MATRICE D È uno scalare \rightarrow $\begin{matrix} & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{matrix} [1 \times 1]$

QUINDI la risposta sarà:



$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} x(0) + G(s) \cdot U(s)$$

$[n \times n]$

$$\Rightarrow C(sI - A)^{-1} = [1 \times 1] \text{ SCALARE}$$

$$s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

Da questa analisi osserviamo che l'evoluzione libera può essere vista come L'USCITA di UN SISTEMA DINAMICO AVENTE MATRICI:

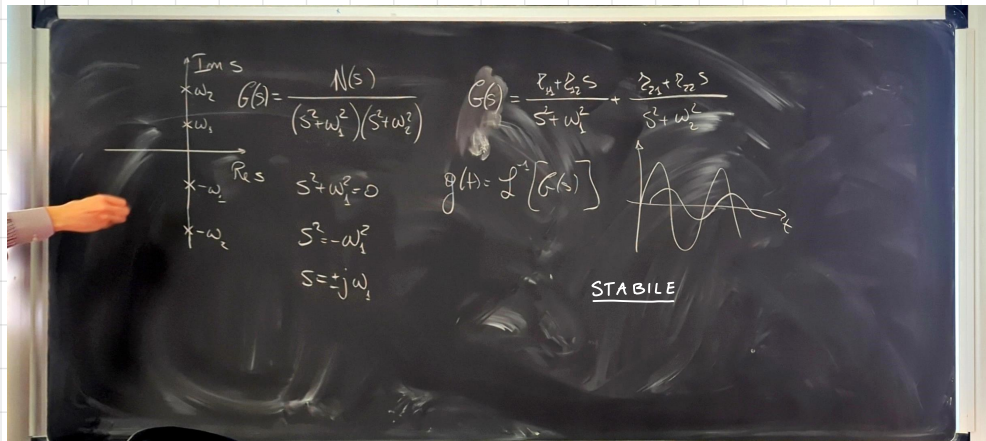
Se $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$

- $\hat{A} = A$
- $\hat{B} = x_0 \rightarrow$ CONDIZIONI INIZIALI
- $\hat{C} = C$
- $\hat{D} = 0$

\rightarrow Perché: $Y(s) = C(sI - A)^{-1} x_0 = C(sI - A)^{-1} x_0 \cdot \mathcal{L}[\delta(t)]$

APPUNTI PRESI A LEZIONE

Recap schema fine lezione 19



* DIFFERENZE

* Esempio sys instabile

- FISSIONE NUCLEARE
- PENDOLO INVERSO \rightarrow E' un sys NON lineare

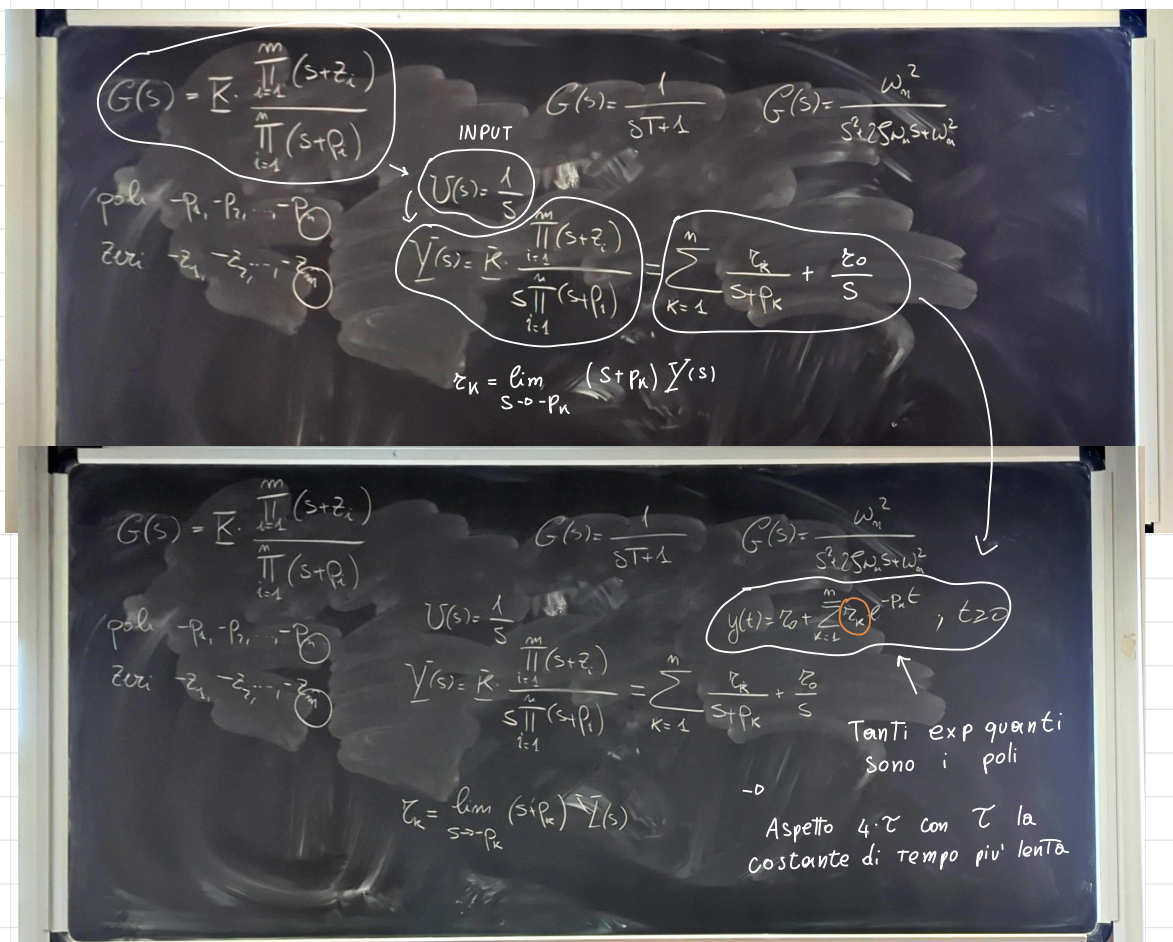
Se linearizzo il pendolo inverso e' un sys (LTI) INSTABILE

SISTEMI DI ORDINE SUPERIORE

Assunto

Poli reali e distinti

la presenza degli zeri cambia la risposta del sys



Domina l'exp con il residuo piu' grande

$$r_k = \lim_{s \rightarrow -p_k} (s+p_k) \cdot K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{s \cdot \prod_{i=1}^n (s+p_i)}$$

Solo un polo p_i sarà uguale a quello p_k

=> Ne semplifico solo uno

$$Z_k = \lim_{s \rightarrow -p_k} (s + p_k) \bar{L}(s) = \lim_{s \rightarrow -p_k} (s + p_k) \cdot \bar{K} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow -p_k} \bar{K} \cdot (s + p_k) \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s \prod_{i=1, i \neq k}^n (s + p_i)}$$

$$= \bar{K} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (-p_k + z_i)}{(-p_k) \prod_{i=1, i \neq k}^n (-p_k + p_i)}$$

Distanza
Tra z e p

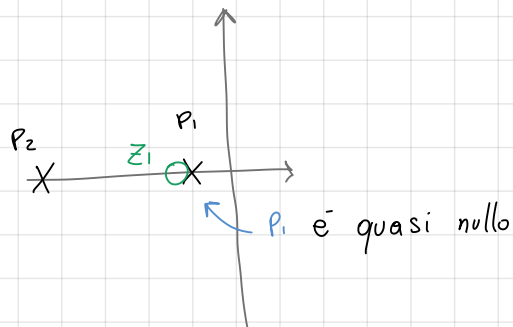
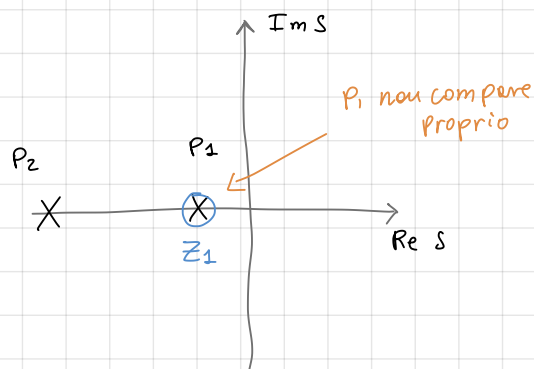
Uno zero coincide
con un polo

se $z_i = p_k = 0$ $z_k = 0$

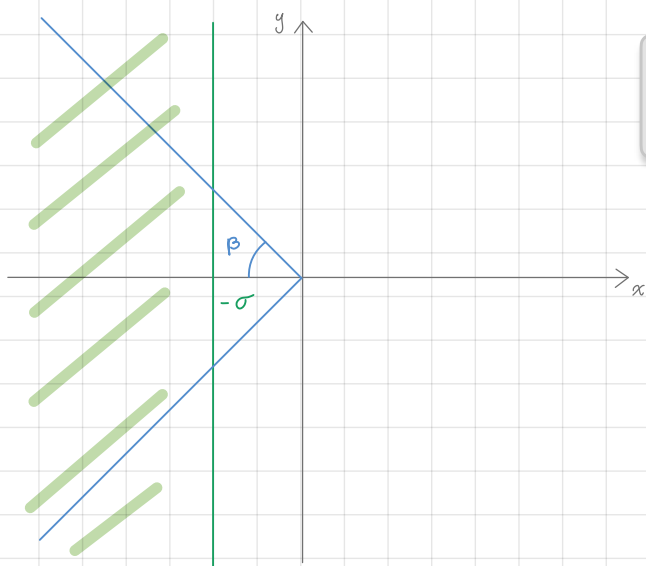
l'exp non compare
nella risposta

E quindi

gli zeri cambiano la risposta
del sys.



$$G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{n_1} (s + p_i) \prod_{i=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$



Posso definire delle **zone** e dire che tutti gli
esponenziali saranno sicuramente più lenti di un certo
"-sigma"

EVOLUZIONE LIBERA

L'evoluzione libera è la risposta del sistema quando parte da uno stato iniziale diverso da zero.

Evoluzione libera
 Evoluzione forzata

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dw(t)}{dt}\right] = sW(s) - w(0)$$

$$\begin{aligned} s\bar{X}(s) - x(0) &= A\bar{X}(s) + BU(s) \\ s\bar{X}(s) - A\bar{X}(s) &= x(0) + BU(s) \\ (sI - A)\bar{X}(s) &= x(0) + BU(s) \\ \bar{X}(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= C\bar{X}(s) + DU(s) \\ &= C(sI - A)^{-1}x(0) + \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]}_{G(s)}U(s) \end{aligned}$$

Evoluzione Forzata

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}x(0)}_{E. \text{ LIBERA}} + \underbrace{G(s) \cdot U(s)}_{\text{Evoluzione Forzata}}$$

$$\begin{aligned} A &\in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B &\in \mathbb{R}^{n \times 1} \end{aligned}$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s) \cdot U(s)$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= C\bar{X}(s) + DU(s) \\ &= C(sI - A)^{-1}x(0) + \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]}_{G(s)}U(s) \end{aligned}$$

$C(sI - A)^{-1}x(0) \cdot \mathcal{L}[\delta(t)]$
 $= C(sI - A)^{-1}x(0)$

Diagramma del sistema:

 $Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)$

 - $C(sI - A)^{-1}x(0)$: Evoluzione libera

 - $G(s)U(s)$: Evoluzione forzata

