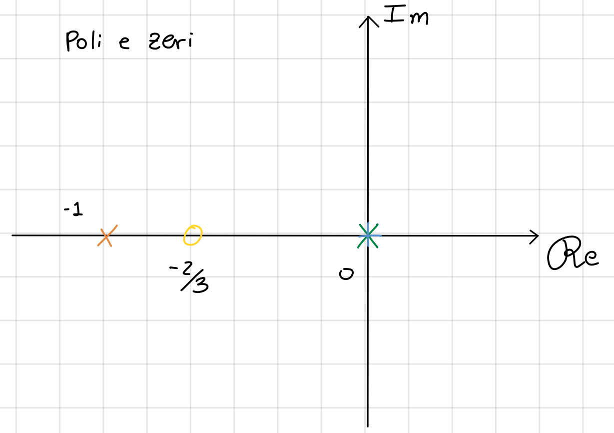
ES. POLI MULTIPLI

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2(s+1)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s^2} + \frac{r_3}{s+1}$$

Poli e zeri



$$r_3 = \lim_{s \to -1} \cancel{(s+1)} \frac{3s+2}{s^2\cancel{(s+1)}} = \lim_{s\to -1} 3s+2 = -1 \quad r_3$$

$$r_2 = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2} \frac{\overset{0}{\cancel{3s}}+2}{\cancel{s^2}\underset{1}{(s+1)}} = 2 \quad r_2$$

$$r_1: \frac{3s+2}{\cancel{s^2}(s+1)} \cancel{s^2} = s\, r_1 + r_2 + \frac{r_3 s^2}{s+1}$$

$$mcm \to \frac{3s+2}{s+1} = \frac{(s^2+s)r_1 + r_2(s+1) + r_3 s^2}{s+1} = \frac{s^2(r_1+r_3) + s(r_1+r_2) + r_2}{s+1}$$

$$\Rightarrow N_1 = N_2 \to 3s+2 = s^2(r_1+r_3) + s(r_1+r_2) + r_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s(r_1+r_2) = 3s \to r_1 + r_2 = 3 \\ r_2 = 2 \\ r_1 + r_3 = 0 \Rightarrow r_1 = -r_3 \end{cases} \Rightarrow r_1 = 1 \quad r_1$$

Se non riusciamo a trovare i residui, possiamo **derivare** rispetto ad s;
Derivando qualche termine di grado due *potrebbe* scomparire qualche coefficiente r.

In linea generale:
1. Calcolare i residui che riusciamo a calcolare con il metodo classico (limite)
2. Calcolare i residui restanti facendo l'uguaglianza
3. Se ci sono troppi termini derivare rispetto ad s l'uguaglianza.

ES: $\underline{3} = 2(r_1+r_3)s + \underline{r_1+r_2}$

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2(s+1)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s^2} + \frac{r_3}{s+1} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow f(t) = \left[1 + 2t - e^{-t}\right] \cdot \mathbb{1}(t)$$

Applicare sempre sempre i teoremi visti
- valore iniziale
- Valore finale
- Teorema della derivata

Se la funzione è difficile possiamo fare più grafici, uno per ogni termine sommato, e poi sommare tutti i grafici insieme.

Inserisci grafici

A che serve l'espansione in serie DI TAYLOR? (NOTA)

$$f_3(t) = -e^{-t} \Rightarrow f(t) = f(t_0) + \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0} (t-t_0) + \dots + (t-t_0)^n$$

Sempre più piccoli

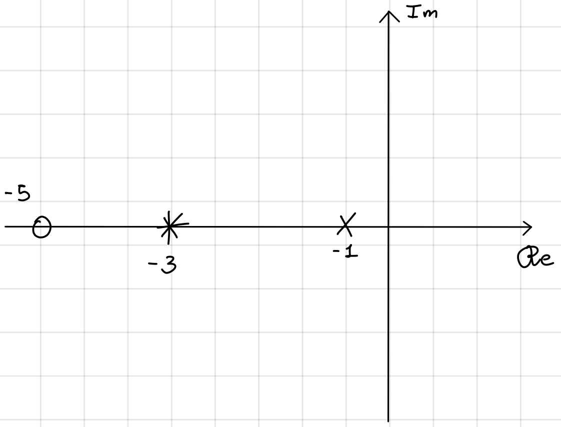
$$\Rightarrow f_3(t) \simeq -1 + t$$

Retta

ES: Poli doppi in un punto diverso da 0

$$F(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)^2} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+3} + \frac{r_3}{(s+3)^2} \rightarrow \frac{1}{s+1} + \frac{r_2}{s+3} - \frac{1}{(s+3)^2}$$

$$r_3 = -1$$
$$r_1 = 1$$

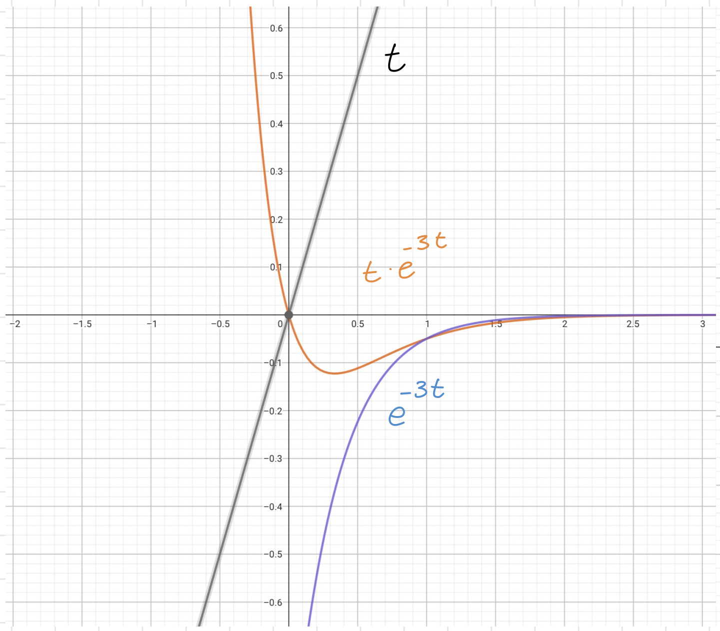


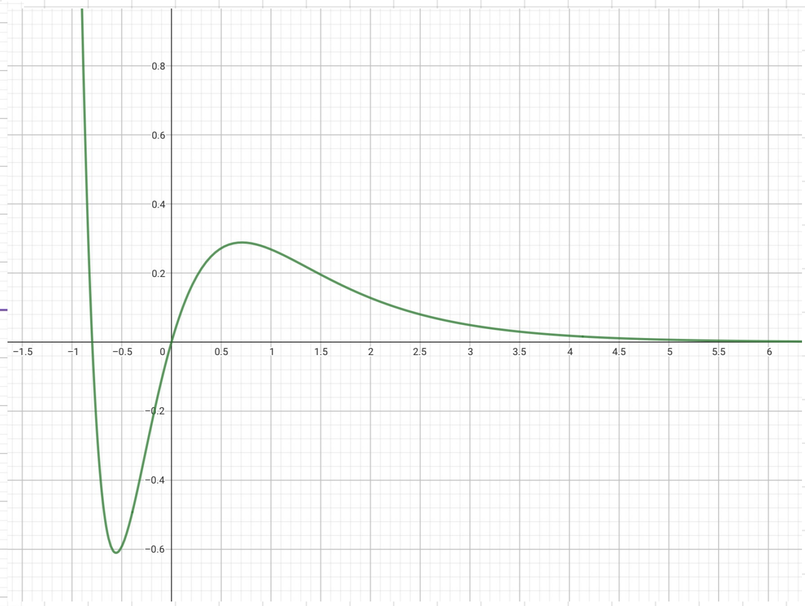
$$\frac{s+5}{s+1} = r_3 + r_2(s+3) + r_1\frac{(s+3)^2}{s+1}$$

$$= \frac{-s-1+r_2(s+3)(s+1)+(s+3)^2}{s+1}$$

$$\Rightarrow r_2 = -1$$

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} - \frac{1}{(s+3)^2} \Rightarrow f(t) = \left[e^{-t} - e^{-3t} - t e^{-3t}\right] 1(t)$$





Metodo della trasformata di Laplace per risolvere le equazioni differenziali

Idee modelli da portare all'orale con matlab clip audio 6

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2 = 0$$

Utilizzando la trasformata di Laplace e la linearità possiamo trasformare un'equazione differenziale in un equazione algebrica.

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)\right] = s^2F(s) - s f(0^+) - \frac{df}{dt}\Big|_{0^+} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - s f(0^+) - \dot{f}\Big|_0}$$

Per poter risolvere un'equazione differenziale, abbiamo bisogno di avere tante **condizioni iniziali** tante sono le derivate dalla variabile (ordine dell'equazione differenziale).

CONDIZIONI INIZIALI $\begin{cases} x(0) = x_0 = a \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = b \end{cases}$

$$s^2 \underline{X}(s) - sa - b + 3\left(s\underline{X}(s) - a\right) + 2\underline{X}(s) = 0$$

$$(s^2+3s+2)\underline{X}(s) = sa + b + 3a \quad \Rightarrow \quad \underline{X}(s) = \frac{as + 3a + b}{s^2+3s+2}$$

POLI
Reali $\rightarrow$ EXP
Complessi e coniug $\rightarrow$ Sin/cos

$$\Rightarrow \text{POLI}: \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\cdot 1\cdot 2}}{2} \begin{array}{l} \nearrow -2 \\ \searrow -1 \end{array} \qquad \Rightarrow \underline{X}(s) = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+2}$$

$$r_1 = \lim_{s\to -1} \frac{as+3a+b}{(s+2)} = 2a+b \quad (r_1) \qquad r_2 = -a-b \quad (r_2)$$

$$\Rightarrow x(t) = \left[(2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t}\right]\mathbb{1}(t)$$

SOLUZIONE

La soluzione deve soddisfare:
- le due condizioni iniziali
- L'equazione differenziale (devo derivare x(t))

Possibile esercizio esame

EQ DIFF completa

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = u$$

Segnale ← DECIDIAMO NOI IL SEGNALE

Esempio: il segnale u potrebbe essere il segnale in input che viene dato da una centralina al motore che indica quanta aria deve ricevere il motore; questo è uno dei problemi di controlli più complessi.

Per un sistema LTI

Se $u(t) = A \cdot 1\!\!1(t) \rightleftharpoons U(s) = \frac{A}{s}$ $\multimap$ $\underline{X}(s) = \underbrace{\frac{sa + b + 3a}{(s+1)\ (s+2)}}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA}} + \underbrace{\frac{A}{s(s+1)(s+2)}}_{\text{EVOLUZIONE FORZATA}}$

Risposta a