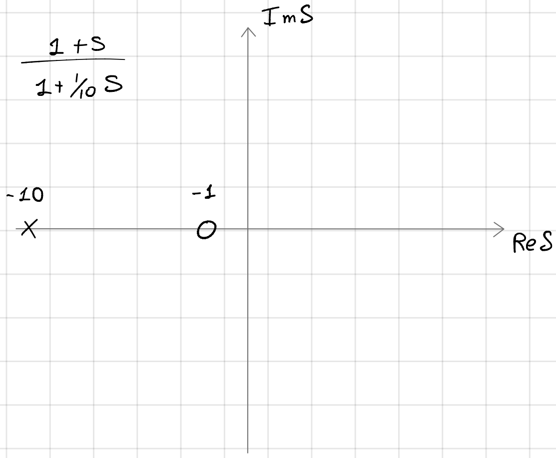
Esempio Bode 1° ordine

$$G(s) = 100 \cdot \frac{s+1}{s+10} = 100 \frac{(1+s)}{10(1+\frac{1}{10}s)} = 10 \frac{1+s}{1+\frac{1}{10}s}$$



Poli: $P_1 = -10 \rightsquigarrow \omega_1 = 10$ rad/s

Zeri: $z_1 = -1 \rightsquigarrow \omega_2 = 1$ rad/s

Intervalli di pulsazione

$\bar{\omega} \in [10^{-1}; 10^{2}]$ rad/s

Andamenti iniziali e finali

$$W(j\omega) = 10 \frac{1+j\omega}{1+\frac{1}{10}j\omega}$$

Moduli: ω molto piccoli $\to |G(0)|_{dB} = 20 \log(10) = 20\,dB$ Valore iniziale

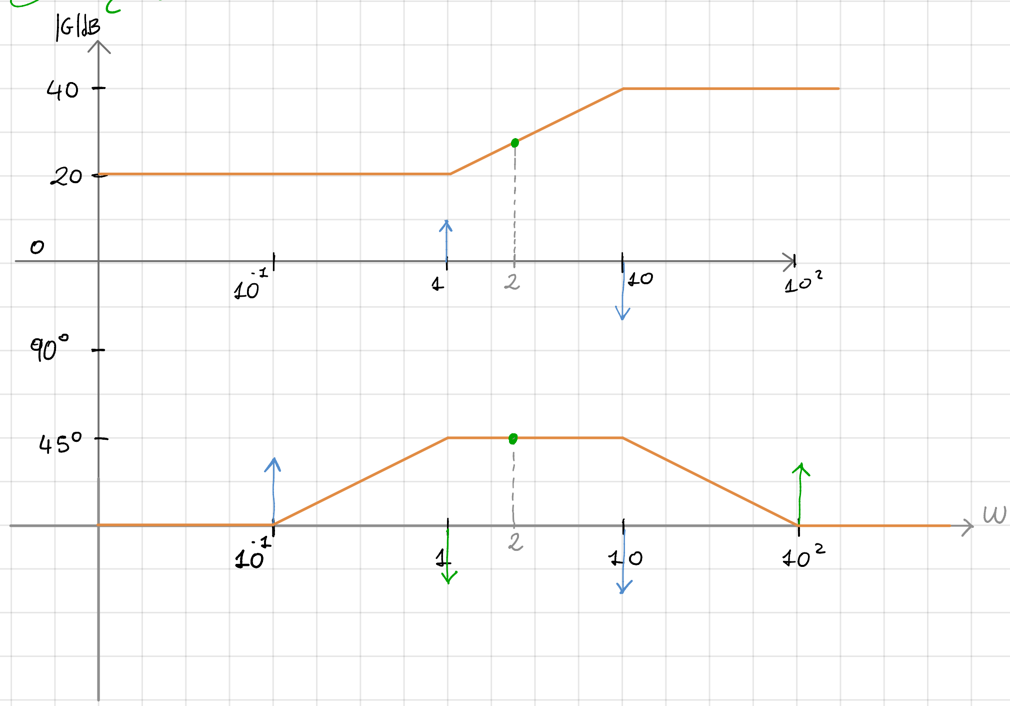
La pendenza finale del diagramma di bode dei modulo è 0dB/dec, perché la funzione di trasferimento ha lo stesso numero di zeri e poli a parte reale negativa; il loro effetto si cancella a vicenda.

Fasi: ω molto piccoli $\to \angle G(0) = 0°$ Perchè non ci sono ne' poli ne' zeri nell'origine

ω molto grandi $\to \angle G(\infty) = -90°(n-m) = 0°$ perche' la Fdt ha 1 zero a P.R.Neg +90° e 1 Polo a P.R.Neg -90°

$n = 1$, $m = 1$

Disegno



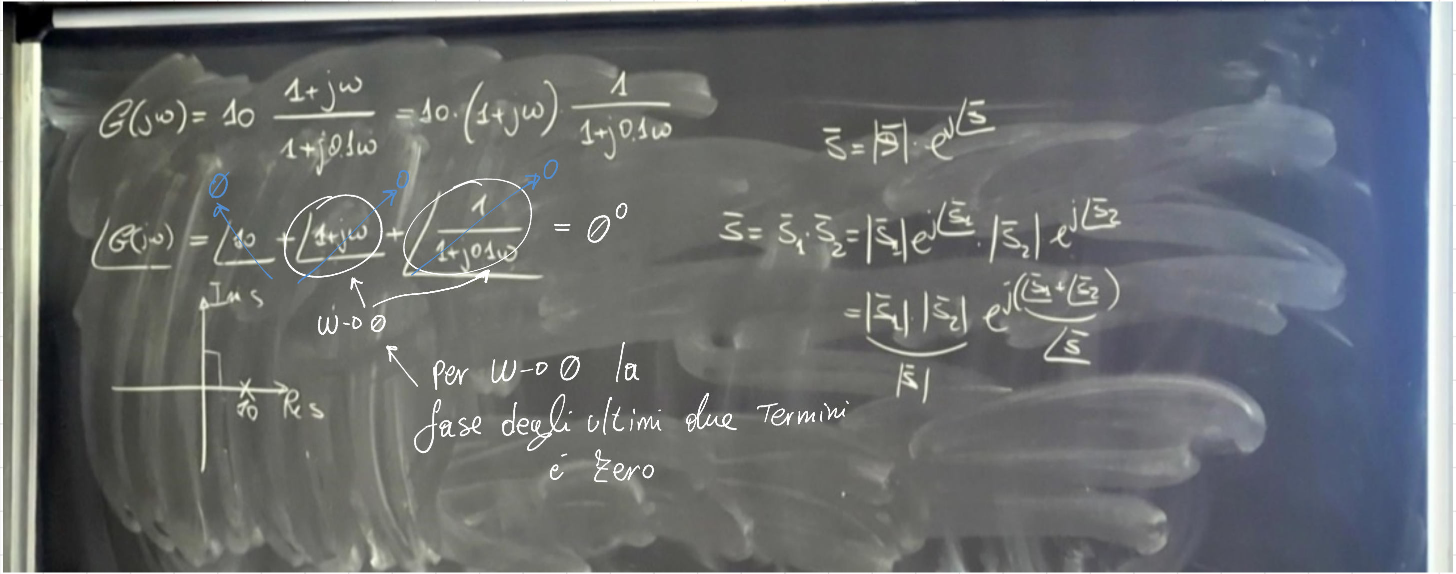
Scrivere la retta per valori specifici di ω

$\bar{\omega} = \omega_0$ Mi servono due punti

$$\left|G(j\bar{\omega})\right|\Big|_{dB} = \frac{\left|G(j\omega_2)\right|_{dB} - \left|G(j\omega_1)\right|_{dB}}{\log \omega_2 - \log \omega_1} \cdot \left(\log(\omega_0) - \log(\omega_1)\right) + \left|G(j\omega)\right|_{dB}$$

con $\bar{\omega} \in [\omega_1, \omega_2]$

Perchè la fase iniziale è zero



Trovare l'uscita a regime

$U(t) = 7 \sin(2t)$ — X, ω

$y_{ss}(t) \cong 7 \cdot |G(j2)| \cdot \sin(2t + \angle G(j2))$

Funge da x

$|G(j2)||_{dB} = ?$ Retta $\quad |G| = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \frac{40-20}{\log(10)-\log(1)} \cdot \log(\omega) + 20$

da dove inizia

$\Rightarrow |G(\omega)||_{dB} = 20 \log(2) + 20 \cong 26 dB$

$\hookrightarrow 20 \log(x) = 26 \Rightarrow x = 10^{\frac{26}{20}} \cong 19.95 \quad |G(j2)|$

$\angle G(j2) = 45°$ dal diag. $\Rightarrow 45° = \frac{\pi}{4}$

lo esprimo in rad perché l'ang del sin è in rad

Ans

$$\Rightarrow y_{ss}(t) \cong 140 \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Domanda

Calcolo dell'errore

Per calcolare l'errore dobbiamo calcolare in maniera esatta $G(j2)$

$$G(j2) = 100 \cdot \frac{1+j2}{10+j2} \Rightarrow 100\,(1+j2)(10-j2) \cdot \frac{1}{(10+j2)(10-j2)} = 10^2 \frac{10+j20-j2+4}{10^2+2^2}$$

$$= \frac{100}{104}(14+j18) = \frac{100}{104}\sqrt{14^2+18^2} = 21.93$$ modulo esatto in $\omega = 2$

Considerazioni *

Fattori del II ordine

Abbiamo scritto la Fdt generica del 2° ordine come $G(s) = \dfrac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

Trovo i poli: $\bar{s} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2-\omega_n^2} = \underbrace{-\zeta\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\text{Complx e coniugati}}$

Se $0<\zeta<1$

$\rightarrow$ Metto ω_n^2 in evidenza $\Rightarrow$ $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 = \omega_n^2\left(\dfrac{s^2}{\omega_n^2}+\dfrac{2\zeta}{\omega_n}s+1\right)$

GENERICA FdT del 2° ordine in forma di Bode

$$G(s) = \frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2} \rightsquigarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega-\frac{1}{\omega_n^2}\omega^2} = \frac{1}{\underbrace{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}_{\text{ReP}}+\underbrace{j\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega}_{\text{ImP}}}$$

Valori iniziali e finali Delle fasi

$\omega \to 0$

$$G(j\omega) \cong \frac{1}{1-0+0} \rightarrow 1$$

$\angle G(j\omega) = \angle 1 = 0°$ Fase iniziale

$\omega \to \infty$

$$G(j\omega) \cong \frac{1}{\underbrace{\cancel{1}}_{\text{Trascurab.}}-\underbrace{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+\cancel{j\frac{\omega}{\omega_n}}}_{\omega^2 \gg \omega}} \cong \frac{1}{\underbrace{-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}_{\text{"Diventa Reale"}}} = -\frac{\omega_n^2}{\omega^2} \xrightarrow[\text{per } \omega\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ Se $G(j\omega)$ diventa reale possiamo scriverlo come $G(j\omega) = K$

$\Rightarrow$ $K = K\cdot e^{\pm j\pi}$ $\rightsquigarrow$ proof $\rightsquigarrow$ $K e^{\pm j\pi} = K(\overset{1}{\cancel{\cos\pi}} + \overset{0}{\cancel{j\sin\pi}}) = K$ QED

$\Rightarrow \angle G(j\omega) \cong -\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}e^{\pm j\pi}$ Fase $= -\pi = -180°$ Fase finale

Come Convenzione

Valori iniziali e finali Dei Moduli

$$|G(jw)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{w_n} w\right)^2}$$

- A pulsazioni ALTE $(w >> w_n)$ $\rightsquigarrow$ $|G(jw)|_{dB} = -20 \log \left(\frac{w}{w_n}\right)^2 = \boxed{-40 \log \frac{w}{w_n}}$

Andamento finale del modulo

$$-20 \log \sqrt{\left(\cancel{1}-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^{\cancel{2}} + \cancel{\left(\frac{2\zeta}{w_n} w\right)^2}}$$

Trasc.

w_1 ; $w_2 = \underbrace{10}_{+1\,dec}\, w_1$ "w_2 è molto più grande di w_1"

Per trovare la pendenza calcolo $f(w_2) - f(w_1) = -20 \log\left(\frac{10 w_1}{w_n}\right) - \left(-20 \log\left(\frac{w_1}{w_n}\right)\right)$

$$= -20 \log(10) - 20 \log\left(\frac{w_1}{w_n}\right) + 20 \log\left(\frac{w_1}{w_n}\right) = -20 \log(10)^2 = \boxed{-40\ dB/dec}$$

Pendenza

- A pulsazioni BASSE $(w << w_n)$ $\rightsquigarrow$ $|G(jw)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{w_n} w\right)^2}$ with $\frac{w}{w_n} \to 0$, $\frac{2\zeta}{w_n} w \to 0$

$$\Rightarrow |G(jw)|_{dB}\Big|_{w<<w_n} \cong -20 \log(1) = \boxed{0\ dB}$$

Valore iniziale del modulo

Considerazioni sul punto di rottura - Diagramma dei Moduli

Cosa accade in $\omega = \omega_n$? (Al modulo) $\rightsquigarrow$ Modulo esatto

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2} \underset{\omega=\omega_n}{=} \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{2\zeta\,\omega_n}{\omega_n}\right)^2} \quad (1)$$

Vedi su ↑

$$= \sqrt{(2\zeta)^2}\,\Big|_{dB} = -\,20\log(2\zeta)$$

modulo per $\omega = \omega_n$

Dipende da ζ!

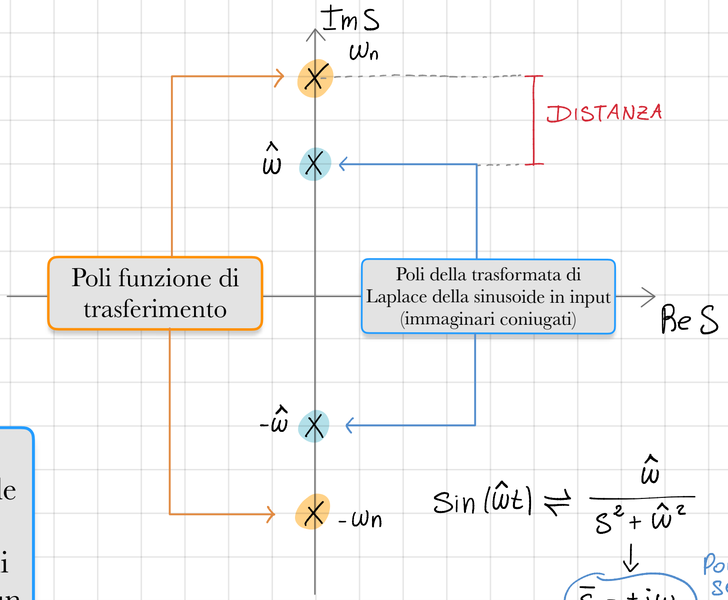
Analizzando la (1)

$$|G|_{dB} = -20\log_{10}(2\zeta) \Rightarrow \text{per } \zeta < \tfrac{1}{2} \rightarrow 2\zeta < 1 \Rightarrow \log_{10}(n) \text{ é Neg } (\text{per } 0<n<1)$$

$$\Rightarrow -\log(2\zeta) > 0 \quad \text{POSITIVO!}$$

Morale della favola: quando prendiamo z < 1/2 allora otteniamo che il modulo in corrispondenza di w=wn è positivo

Quanto più z tende a zero tanto più il sistema tende ad essere instabile; se oltre questo andiamo a sollecitare il sistema con una frequenza vicina a quella di risonanza del sistema, allora **l'uscita potrebbe** (sicuramente lo farà) **divergere**, ovvero avere un'uscita incontrollata.



$$\sin(\hat\omega t) \rightleftharpoons \frac{\hat\omega}{s^2+\hat\omega^2}$$

$$\downarrow$$

$$\bar{s} = \pm j\omega$$ Poli del segnale in input

Quindi

Se la distanza tra i poli (quelli della fdt e della sinusoide in input) è infinitesimale, la risposta tende ad essere **instabile**; questo perché è come se avessimo due poli **coincidenti** sull'asse immaginario, che si traduce in un sistema instabile!

$$G(s) = \frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2} \underset{\zeta\to 0}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_n^2}s^2}$$

$$\Rightarrow \bar{s} = \pm j\,\omega_n$$ Poli della fdt

Quando cambia *omega_cappello* e si avvicina ad *wn*, l'uscita diventa una Y(s) avente dei poli complessi e coniugati con molteplicità doppia, ovvero un sistema instabile.

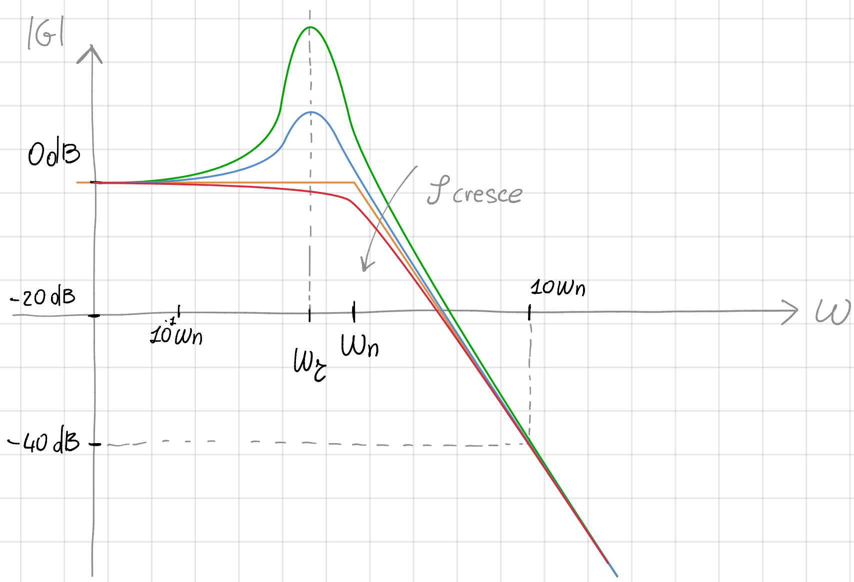


Diagramma delle fasi

Il valore iniziale e finale della fase è: $\angle G(j\omega) \begin{cases} \xrightarrow{\omega \ll \omega_n} 0^\circ \\ \xrightarrow{\omega \gg \omega_n} -180^\circ \end{cases}$

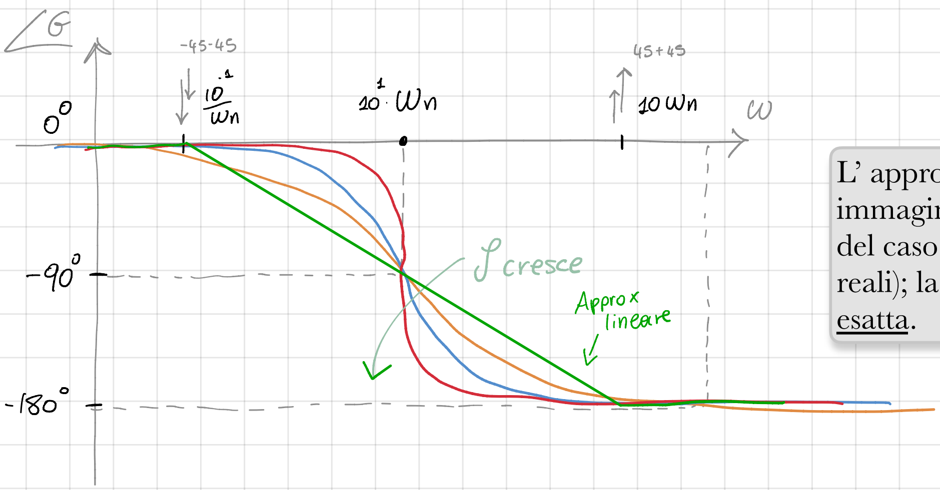
$$\rightsquigarrow G(j\omega) = \frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}} \Rightarrow \angle G(j\omega) = -\angle\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

Cosa accade alla fase quando $\omega \to \omega_n$?

Per $\omega \to \omega_n$:
$$\angle G(j\omega) \to -\angle\left(\overset{0}{\cancel{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} + j2\zeta\cancel{\frac{\omega}{\omega_n}}\right) \to -\angle 1 + j2\zeta = -\underbrace{\cancel{\angle 1}}_{0^\circ} - \angle j2\zeta$$

$$\angle j2\zeta = \angle 2\zeta e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \angle G(j\omega) \to -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$$

In $\omega = \omega_n$ la fase è -90°



L' approssimazione della fase dei due poli immaginari è praticamente uguale alla fase del caso visto precedentemente (due poli reali); la differenza sta nella rappresentazione esatta.

Trovare il Valore della frequenza di risonanza

Per trovare il massimo del modulo devo trovare il minimo della funzione g(z) sotto la radice. Questo perché il valore del modulo in decibel ha un segno meno davanti alla radice.

Dal calcolo del modulo: $|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\underbrace{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2}_{g(\omega)}}$

$$\Rightarrow g(\omega) = \left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \qquad \text{Pongo } z = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$\Rightarrow g(z) = (1-z)^2 + 4\zeta^2 z = 1 + z^2 - 2z + 4\zeta^2 z = z^2 + z(4\zeta^2 - 2) + 1$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dz} g(z) = 2z + 4\zeta^2 - 2 = 0 \rightsquigarrow z = \frac{2 - 4\zeta^2}{2} = 1 - 2\zeta^2$$

Valore di z che Annulla la derivata

$$\Rightarrow z = \frac{\omega_z^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\zeta^2 \Rightarrow \omega_z^2 = \omega_n^2 (1 - 2\zeta^2) \Rightarrow \boxed{\omega_z = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}}$$

Pulsazione di risonanza

Siccome ζ è come Argomento alla radice $\rightsquigarrow 1 - 2\zeta^2 > 0 \Rightarrow \zeta < \sqrt{\frac{1}{2}} \simeq 0.707$

DEVE

Morale della favola
Se zeta è maggiore di 0.707 tutto il ragionamento fatto non vale, ovvero **non c'è risonanza**; in altre parole il modulo non va oltre gli 0dB *predetti* dal diagramma asintotico (che non è esatto proprio a seconda di zeta!).
<u>Tanto più i poli sono posizionati vicini all'asse immaginario, tanto più è presente un fenomeno di risonanza nella risposta in frequenza.</u>

Modulo in dB in corrispondenza della freq di risonanza

$$|G(j\omega_z)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_z}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega_z}{\omega_n}\right)^2} = -20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}}{\omega_n}\right)^2}$$

$$= -20 \log \sqrt{(\cancel{1} - \cancel{1} - 2\zeta^2)^2 + 4\zeta^2 - 8\zeta^4} = -20 \log \sqrt{4\zeta^4 + 4\zeta^2 - 8\zeta^4}$$

$$= -20 \log \sqrt{-4\zeta^4 + 4\zeta^2} = \boxed{-20 \log 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Dipende da ζ!

MODULO DI RISONANZA

Infatti $\lim_{\zeta \to 0} -20 \log\left(\underbrace{2\zeta}_{0}\sqrt{\underbrace{1-\zeta^2}_{1}}\right) \to -20 \log(1) \to -(-\infty) \to +\infty$

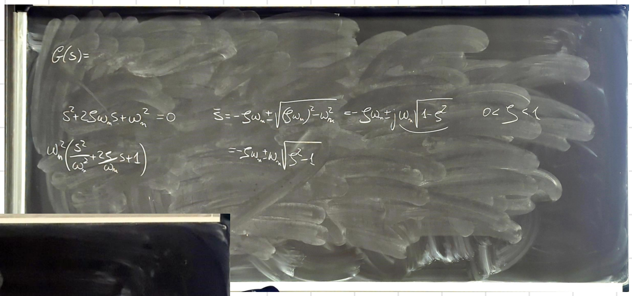
Tende a ∞ per $\zeta \to 0$

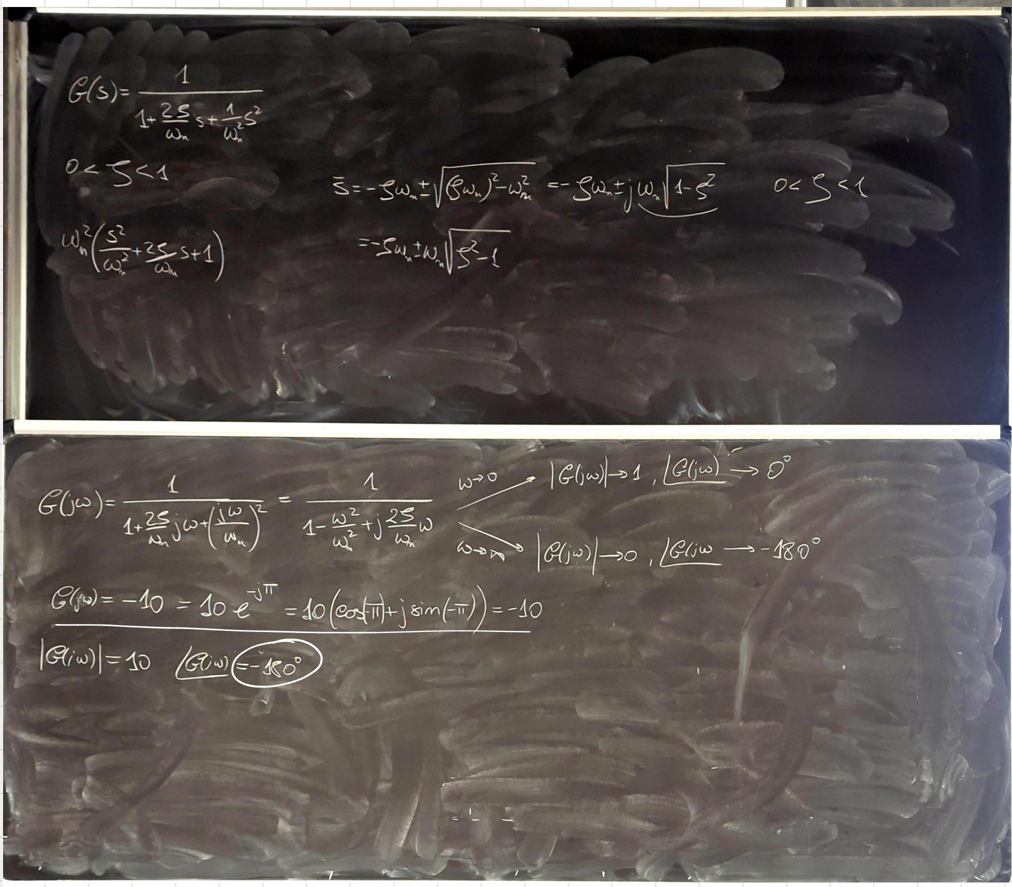
Appunti lezione

Fattori del II ordine

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n} s^2}$$

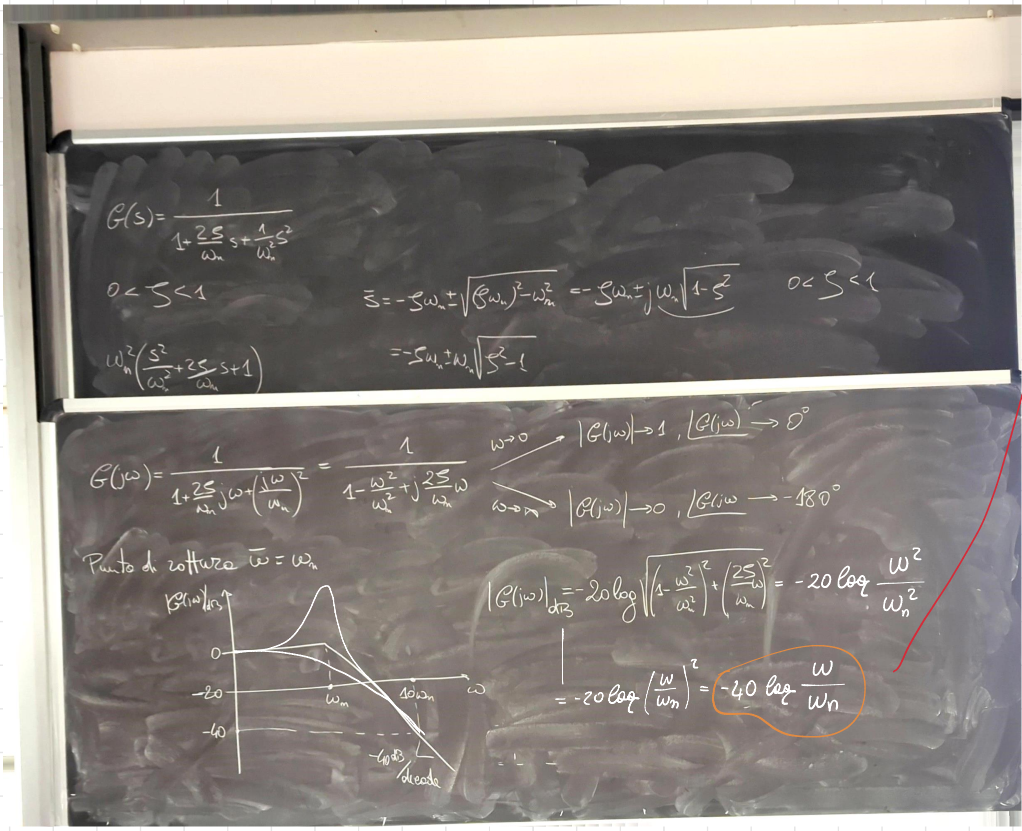
* DIFF IMPO POLI





* Fase spieg

Punti di rottura



Se prendo 2 freq 1 dec

ω_1 ; $\omega_2 = 10\,\omega_1$

Tesi: $f(\omega_2) - f(\omega_1) = -40\,dB$

$$= -40 \log\left(\frac{10\,\omega_1}{\omega_n}\right) + 40 \log\left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)$$

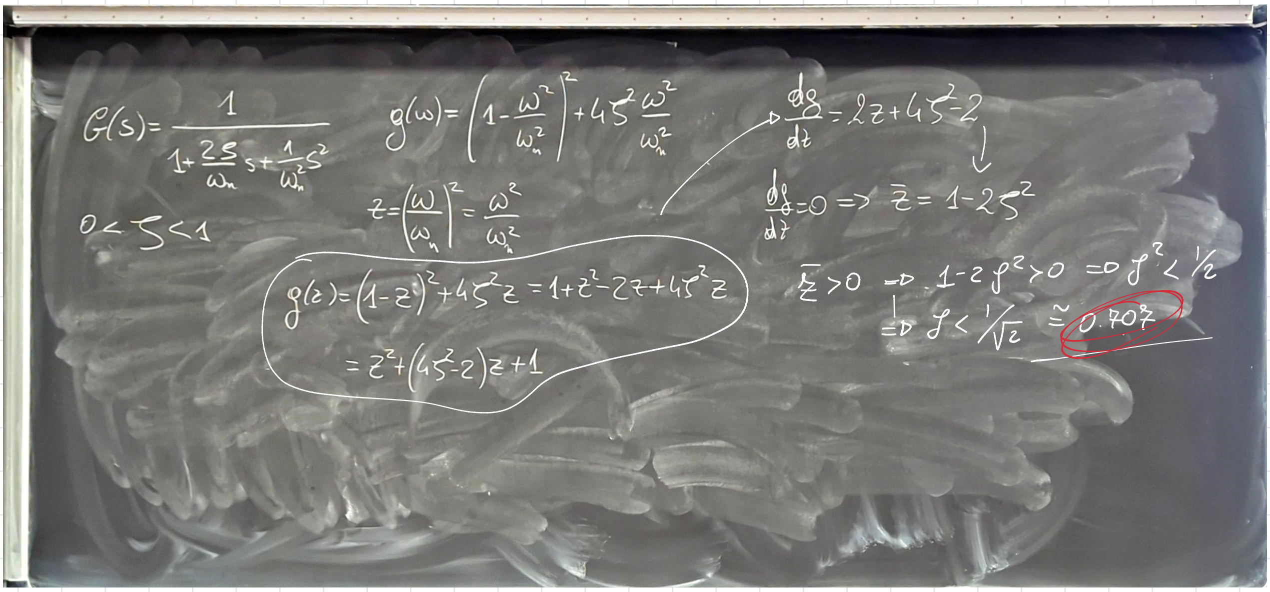
$$= -40\left(\underbrace{\log(10)}_{1} \cancel{- \log\frac{\omega_1}{\omega_n}} \cancel{+ \log\frac{\omega_1}{\omega_n}}\right)$$

$$= -40\,dB$$ QED

*IMPO

$$-20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\delta}{\omega_n}\omega\right)^2}\quad g(\omega)$$

Trovo il minimo



$$\frac{\omega_r^2}{\omega_n^2}=1-2\delta^2 \Rightarrow \omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\delta^2}$$

Pulsazione di risonanza

Modulo di risonanza in dB