PROCEDURA TRACCIAMENTO DIAGRAMMA DI BODE

$$G(S) = 2 \cdot \frac{S+1}{(S+10)(S+0.1)}$$

1 - FORMA STANDARD

$$G(S) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} (1 + S\alpha_i)}{\prod_{i=1}^{n} (1 + ST_i)} \Rightarrow G(S) = 2 \cdot \frac{S+1}{\cancel{10}(1+10S) \cdot \cancel{10}(1+\frac{1}{10}S)} = 2 \cdot \frac{S+1}{(1+10S)(1+\frac{1}{10}S)}$$

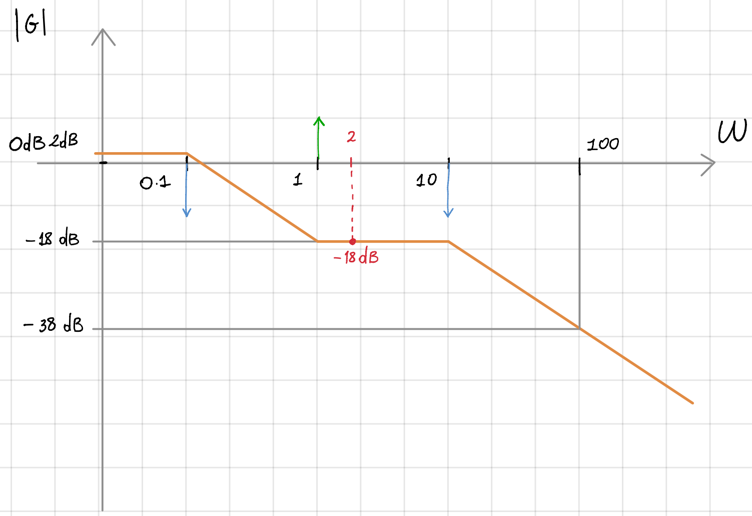
2.1 - Guadagno, zeri e poli

- $G(0) = 2$ Guadagno Statico (valore iniziale)
- $P_1 = \underbrace{-\frac{1}{10}}_{-\omega_1}$ $P_2 = \underbrace{-10}_{-\omega_2}$
- $Z_1 = \underbrace{-1}_{-\omega_3}$

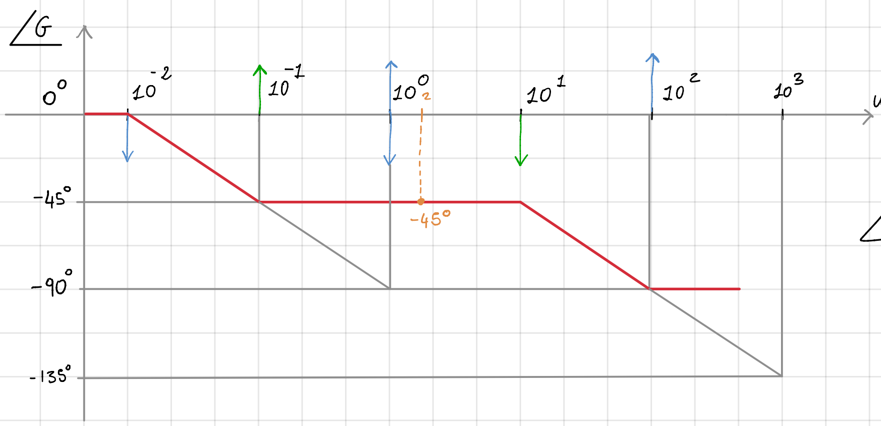
2.2 - Scelta della Banda

Fasi $\bar{\omega} = [\frac{1}{100} ; 100]$ Moduli $\bar{\omega} = [\frac{1}{10} ; 100]$

3 - Diagramma dei moduli (Asintotico)



4 - Diagramma delle Fasi



$$G(j\omega)\Big|_{\omega=0} = 2 \cdot \frac{0+1}{(0+10)(0+0.1)} = 2 \cdot \frac{1}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \angle G(j\omega)\Big|_{\omega=0} = \angle 2 = \angle 2e^{j0} = 0$$

A REGIME

$$\angle G(j\omega) = -90(\underset{\text{Poli}}{n} - \underset{\text{Zeri}}{m}) = -90(2-1) = -90$$

Fase a regime

TROVARE LA RISPOSTA AD UN INGRESSO

$U(t) = \underset{X}{5} \cdot \sin(\underset{\omega}{2}t) \Rightarrow y_{ss}(t) = \underset{5}{X} \cdot |G(j\underset{2}{\omega})| \cdot \sin(\underset{2}{\omega} t + \angle G(j\underset{2}{\omega}))$

> Siccome la frequenza dell'ingresso è **2**, dobbiamo valutare G(jw) in w=2; ricordiamoci che l'uscita è nel tempo, non nella frequenza, w non compare in y!

Siccome gli andamenti di modulo e fase sono costanti in $\omega = 2$ è semplice trovare il valore:

$$|G(j\omega)|_{dB}\Big|_{\omega=2} = -18\,dB \Rightarrow 20\log(x) = -18\,dB \Rightarrow \log(x) = -\frac{18}{10}\,dB \Rightarrow x = 10^{-\frac{18}{10}}$$

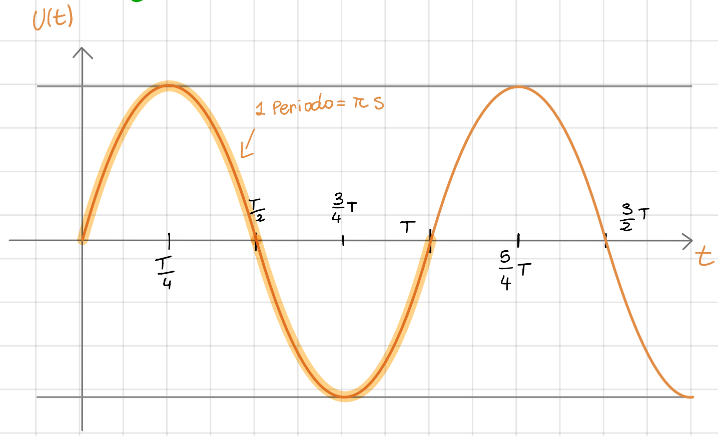
$|G(j2)|$ in valore naturale

N.B. La fase è negativa quindi nella formula del sin sarà positiva??

Inoltre $\angle G(j2) = -45° = -\frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$

DISEGNO GLI ANDAMENTI NEL TEMPO

Segnale di input



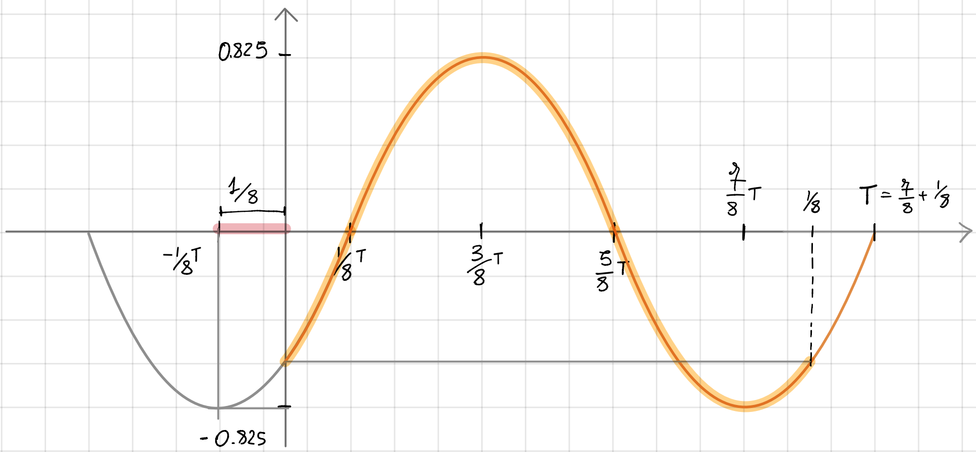
$$T = \frac{2\pi}{\omega}\Big|_{\omega=2} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,s \quad \text{1 PERIODO}$$

Segnale di output - risposta

$$|G(j\omega)|\Big|_{\omega=2} = e^{-\frac{18}{10}} \simeq 0.165$$

$\Downarrow$

$\sim 16\%$ del segnale di input



$$y_{ss}(t) = 5 \cdot 0.165 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = 0.825 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$2t + \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{8}$ Starting Point

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7}{8}\pi$

Period

End Point

$\Rightarrow y_{ss}(t) \in \left[-\frac{T}{8} ; \frac{7}{8}T\right]$ 1 periodo

$-0.125 \qquad 0.875$

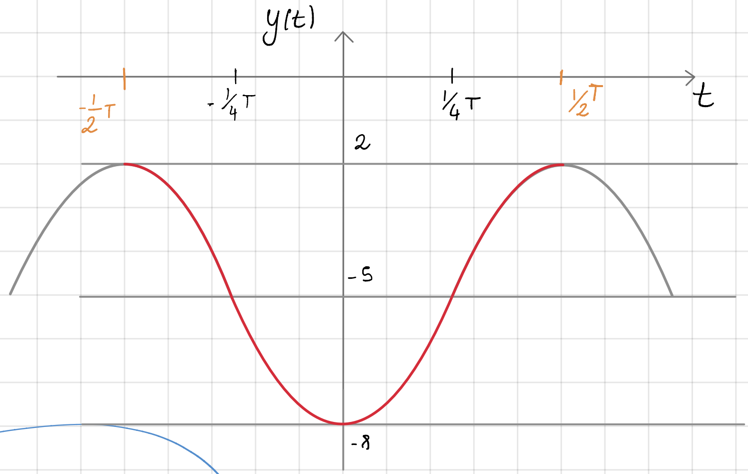
Come disegnare una Sinusoide

FASE / shif temporale

$$y(t) = 3\cos\left(\tfrac{1}{2}t + \pi\right) - 5 \quad \text{shift Verticale}$$

Ampiezza

ω - Contrazione espansione TEMPORALE



1) Calcolo del periodo

$$T = \frac{2\pi}{\underset{\omega = 1/2}{\omega}} = \frac{2\pi}{1/2} = \overset{T}{4\pi} \Rightarrow T = 4\pi \Rightarrow \pi = \frac{T}{4}$$

2) Calcolo del ritardo

Punto iniziale

$$R = \frac{1}{2}t + \pi = 0 \rightarrow t = -2\pi$$

$$\hookrightarrow -2\frac{T}{4} = -\frac{1}{2}T$$

3) Calcolo del range

$$T + R = -2\pi + 4\pi = 2\pi \Rightarrow t_F = 2\cdot\frac{T}{4} = \frac{1}{2}T$$

Punto Finale

Funzione con uno zero nell'origine

$G(s) = \dfrac{10}{s(s+1)} \rightsquigarrow P_1 = 0 \; ; \; P_2 = -1 \Rightarrow \omega_1 = 1$ Punto di rottura

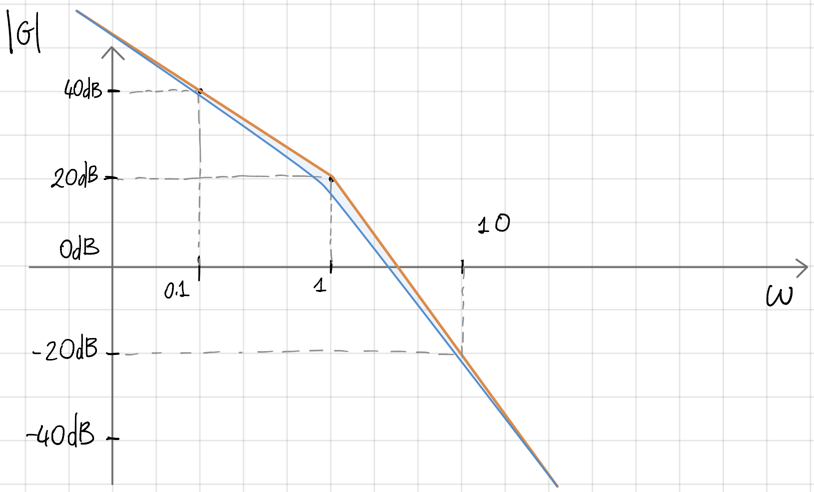
$G(j\omega) = \dfrac{10}{j\omega(j\omega+1)} = \dfrac{10}{-\omega^2 + j\omega} \qquad |G(j\omega)| = \dfrac{10}{\sqrt{\omega^4 + \omega^2}} = \dfrac{10}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$

$\Rightarrow$ 1 dec prima : $\omega_1 = 1 \rightsquigarrow \omega_0 = 10^{-1} = 0.1 \rightsquigarrow |G(j\omega)|\Big|_{\omega=10^{-1}}\Big|_{dB} = 20\log\left(\dfrac{10}{0.1\sqrt{0.1^2+1}}\right) \cong 40dB$

$\Rightarrow P_1(10^{-1}; 40) \in$ Bode

Se $\omega_1 = 1 \rightsquigarrow |G(j\omega)|_{dB}\Big|_{\omega=1} = 20\log\left(\dfrac{10}{\sqrt{1+1}}\right) = 20\log\left(\dfrac{10}{\sqrt{2}}\right) \cong 17\,dB$ entro l'errore di 3dB

REALE



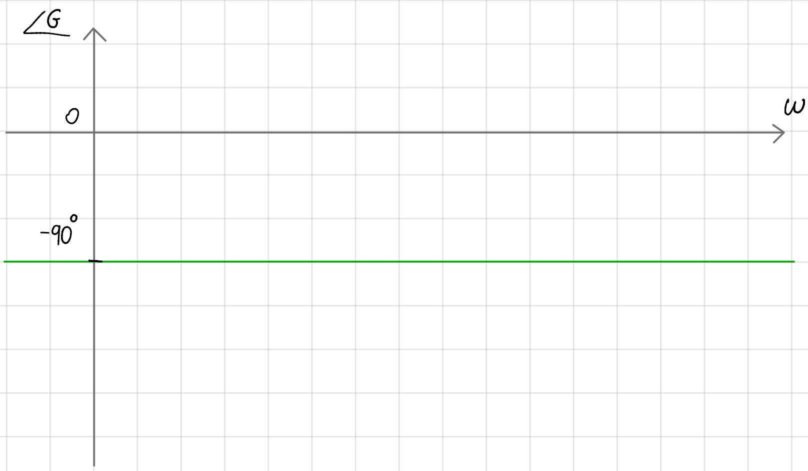
In presenza di poli nellorigine abbiamo una pendenza iniziale che dipende dal numero di poli nulli:

$\boxed{(+20 \cdot n_0 \; dB/dec)}$

Pendenza iniziale

$\angle G(j\omega) = -\angle -\omega^2 + j\omega = \angle -e^{j0} + \omega e^{j\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}$ COSTANTE

Ritardo dovuto al polo nell'origine



In presenza di poli nellorigine la fase viene ritardata; il fattore di ritardo dipende dal numero di poli nell'origine:

$\boxed{-90° \cdot n_0}$

numero di poli in 0

Ritardo Totale

Si supponga che la funzione di trasferimento ha solo zeri e poli reali.
Il primo passo è mettere la funzione di trasferimento nella forma standard per i diagrammi di Bode:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m} (1+s\alpha_j)}{\prod_{i=1}^{n} (1+sT_i)}$$

Elencare il guadagno statico in decibel, ~~gli~~ gli zeri e il segno della loro parte reale, i poli.
Ad esempio

$$G(s) = 2\,\frac{s+1}{(s+10)(s+0.1)} = 2\cdot\frac{1+s}{(1+0.1s)(1+10s)}$$

Il guadagno statico è $G(0)=2 \Rightarrow G(0)_{dB} = 20\log 2 = 6\,dB$
Uno zero a parte reale negativa in $z_1=-1$ cui corrisponde il punto di rottura $\omega_1 = 1$

Due poli reali negativi in $p_2=-0.1$ e $p_3=-10$ cui corrispondono i punti di rottura $\omega_2=10$ e $\omega_3=0.1$, rispettivamente.

L'intervallo di frequenze da scegliere è almeno da una decade prima del più piccolo punto di rottura a una decade dopo il più grande punto di rottura.
Per l'esempio si sceglie dunque $\omega \in [10^{-2}, 10^{2}]$.
~~Dett~~ Per determinare gli andamenti per pulsazioni basse ed alte si considera:

n_0 il numero di poli nell'origine

n_1 il numero di poli reali (ovviamente a parte reale negativa)

m_1 il numero di zeri a parte reale negativa

m_2 il numero di zeri a parte reale positiva

è possibile determinare gli andamenti dei diagrammi di Bode per frequenze superiori a una decade del punto di rottura più elevato. In particolare:

- Il diagramma di Bode dei moduli avrà una pendenza

$$-20\cdot(n_0+n_1-m_1-m_2)\ dB/decade$$

in quanto per frequenze oltre il rispettivo punto di rottura ogni polo contribuisce con una pendenza di $-20\,dB/dec$ e ogni zero con una pendenza di $+20\,dB/dec$.
Infatti per un polo si ha

$$|G(j\omega)|_{dB}=20\log\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}=-20\log\left(\sqrt{1+(\omega T)^2}\right)\underset{\omega T\gg 1}{\simeq}-20\log\omega T$$

Considerando due frequenze ω_1 e $\omega_2=10\omega_1$, con $\omega_1 T\gg 1$, si ha:

$$|G(j\omega_2)|_{dB}-|G(j\omega_1)|_{dB}\cong-20\log\omega_2 T+20\log\omega_1 T$$

$$=-20\log 10\omega_1 T+20\log\omega_1 T$$

$$=-20\log 10-20\log\omega_1 T+20\log\omega_1 T=-20\log 10=-20\,dB$$

- Il diagramma delle fasi per frequenze superiori almeno di una decade del più grande punto di rottura tende al valore

$$-90^\circ\cdot(n_0+n_1-m_1+m_2)$$

in quanto ogni polo contribuisce con un ritardo di fase di -90°, ogni zero a parte reale negativa contribuisce con un anticipo di fase di $+90^\circ$ e ogni zero a parte reale positiva contribuisce (come i poli) con un ritardo di fase di -90°.

Per i diagrammi asintotici di Bode dei moduli, in corrispondenza di ogni punto di rottura si indica:

- una freccia verso il basso per ogni polo corrispondente che indica una variazione in diminuzione della pendenza di -20 dB/decade
- una freccia verso l'alto per ogni zero corrispondente che indica una variazione in aumento della pendenza di +20 dB/decade

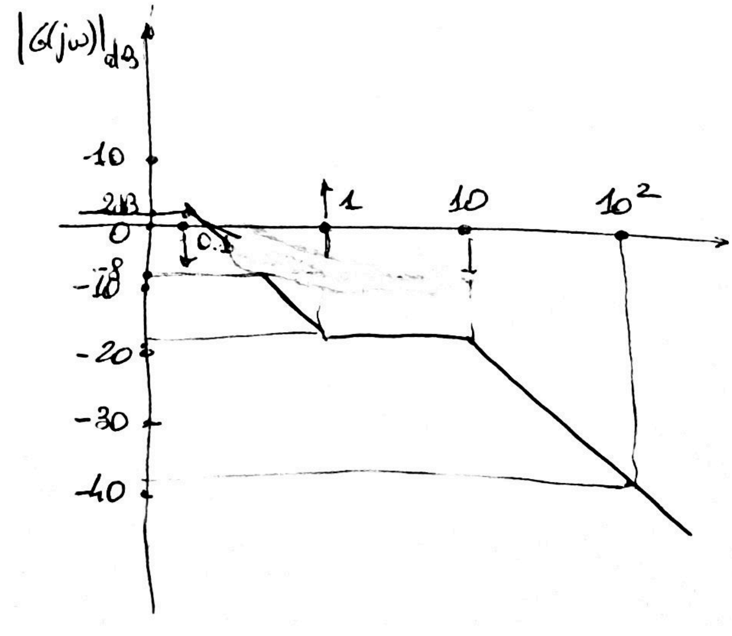
Per i diagrammi asintotici di Bode delle fasi, per ogni punto di rottura, si indicano una decade prima e una decade dopo:

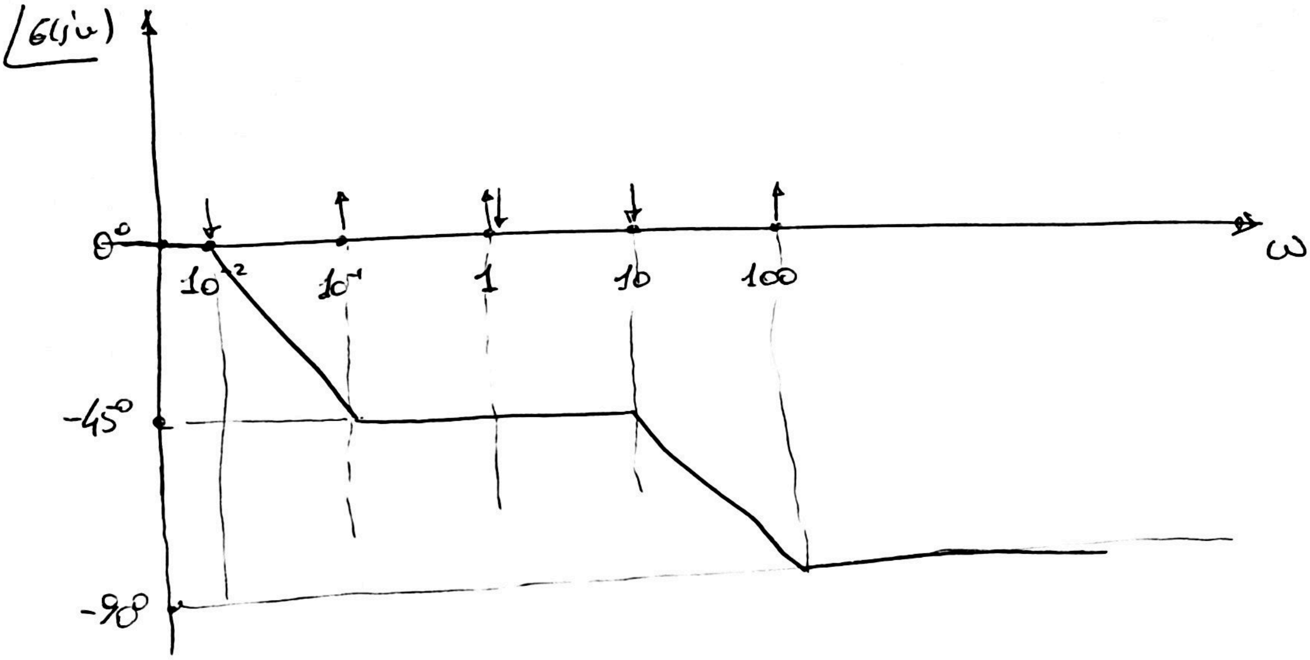
- una freccia in basso (prima) ed una in alto (dopo) per indicare variazioni di pendenza di -45°/decade e +45°/decade, rispettivamente, per ogni polo a parte reale negativa oppure zero a parte reale positiva
- una freccia in alto (prima) ed una in basso (decade dopo) per indicare variazioni di pendenza di +45°/decade e -45°/decade, rispettivamente, per ogni zero a parte reale negativa.

Tornando all'esempio iniziale

$$G(s) = 2\,\frac{1+s}{(1+0{,}1s)(1+10s)}$$

si ha il diagramma asintotico dei moduli riportato sulla destra e quello delle fasi riportato nella pagina successiva.





La risposta del sistema a un ingresso

$$u(t) = 5 \cdot \sin 2t$$

a regime sarebbe circa (valutata con i diagrammi asintotici)

$$y_{ss}(t) = 5 \cdot |G(j2)| \cdot \sin(2t + \angle G(j2))$$ OK

Come Calcola $|G(j2)|$ guardando il d. Bode?

$$= 5 \cdot 10^{-18/20} \cdot \sin(2t - 45°) \simeq 0.5 \cdot \sin(2t - 45°)$$

essendo $|G(j2)|_{dB} = -18\,dB \Rightarrow 20 \log|G(j2)| = -18 \Rightarrow |G(j2)| = 10^{-18/20}$

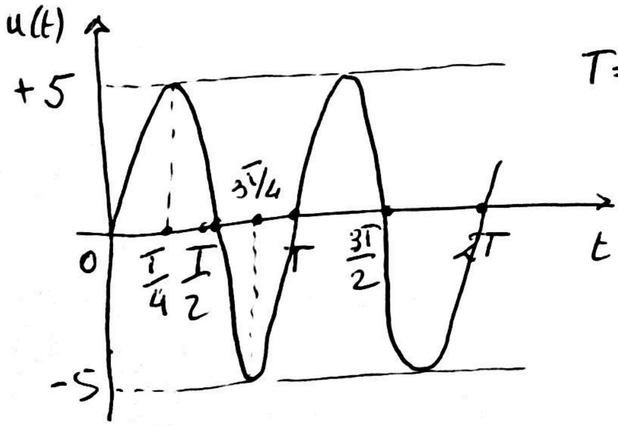
e $\angle G(j2) = -45°$. E' opportuno di seguire gli andamenti nel tempo di $u(t)$ e di $y_{ss}(t)$.

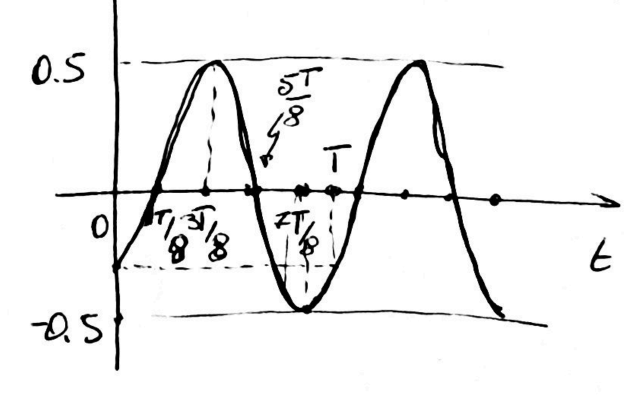
la Fase è Banale perche' costante in $\bar{\omega}\,[10^{-2}; 10]$

$45° \Rightarrow \frac{\pi}{4}$

$\omega t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{T}{8}$

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ sec.

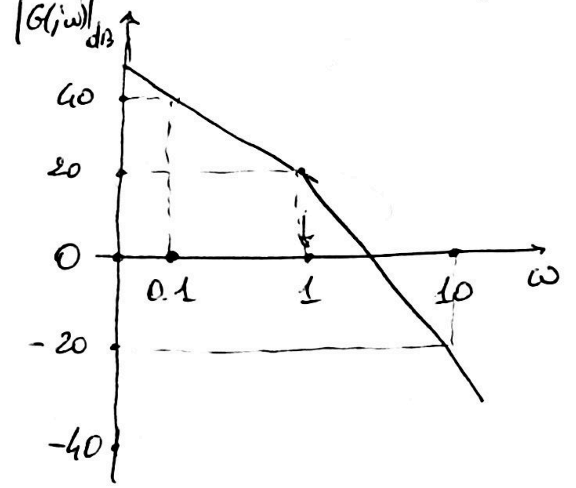




In presenza di poli nell'origine:

- Il diagramma dei moduli parte con una pendenza di -20 dB/decade. Per trovare un punto per cui passa il diagramma si ~~~~ considera una frequenza almeno una decade inferiore al più piccolo punto di rottura e si valuta il valore di $|G(j\bar{\omega})|_{dB}$ a quella frequenza $\bar{\omega}$: il diagramma passa per il punto $(\bar{\omega}, |G(j\bar{\omega})|_{dB})$ e lo attraversa con una pendenza di -20dB/decade.

Ad esempio $G(s) = \dfrac{10}{s(s+1)}$, il punto di rottura è $\bar{\omega}_1 = 1$, considero $\bar{\omega}_2 = 0.1$, valuto $|G(j0.1)|_{dB} \cong 20 \log \left|\dfrac{10}{j0.1}\right| = 20 \log 10^2 = 40$ dB.



Il diagramma dei moduli passa per il punto $(0.1, 40)$ con una pendenza di -20 dB/decade e dopo il punto di rottura $\bar{\omega}_1 = 1$ cambia pendenza in -40 dB/decade a causa della presenza del polo in $p_1 = -1$.

- Il diagramma delle fasi è traslato verso il basso di $-90°$ in quanto un polo nell'origine introduce un ritardo di $-90°$ per tutte le frequenze.

- In presenza di n_0 poli (zeri) nell'origine la pendenza iniziale del diagramma dei moduli è $-20 \cdot n_0$ dB/decade ($+20 \cdot n_0$ dB/decade) e la fase iniziale del diagramma delle fasi è $-90° \cdot n_0$ $(+90° \cdot n_0)$.

In presenza di ~~termini~~ fattori quadratici si seguono regole analoghe ma tenendo conto che si tratta di due poli o di due zeri.