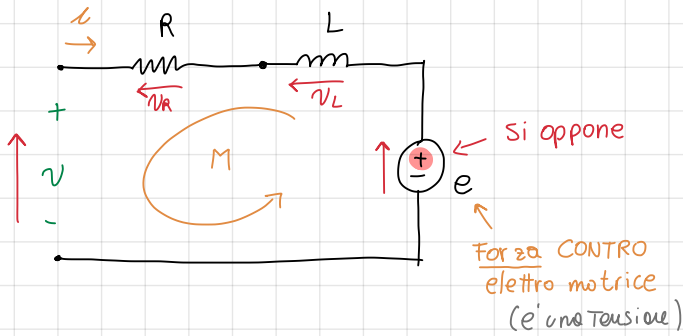


SISTEMI ELETTROMECCANICI

MOTORE ELETTRICO

(a corrente continua)



$e = K_v \omega$

↑ F. Contro elettromotrice

↑ velocità Angolare [rad/s]

↑ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ POSIZION ANGOLARE

→ Rappresenta l'opposizione del motore

$F = m \frac{dv}{dt}$

$\tau = J \cdot \frac{d\omega}{dt}$

↑ COPPIA

↑ momento d'inerzia

↑ Accelerazione Angolare

Fenomeni dall'esterno che si oppongono alla rotazione



τ_l

↑ COPPIA DI CARICO

Può anche FAVORIRE IL MOTO

↑ In questo caso si oppone

$\tau_u = K_t \cdot i$

↑ Coppia del motore

↑ Corrente che circola

$\tau_w = -b \cdot \omega$

↑ Coppia che si oppone

→ COPPIA TOTALE $\tau = \tau_u + \tau_w - \tau_l \rightarrow J \frac{d\omega}{dt} = \tau_u + \tau_w - \tau_l$

→ $J \frac{d\omega}{dt} = K_t i - b\omega - \tau_l$

↑ agisce come un DISTURBO → NON POSSO CONTROLLARLO

LKT_M: $v - v_R - v_L - e = 0 \rightarrow v - (K_v \cdot \omega) - L \dot{i}_L - R \cdot i = 0 \rightarrow L \dot{i}_L = v - R i - K_v \omega$

$$\begin{cases} J \frac{d\omega}{dt} = K_t i - b\omega - \tau_l & (2) \\ L \frac{di}{dt} = -R i - K_v \omega + v & (1) \end{cases}$$

SPAZIO DI STATO
POSSO MISURARLI DIRETTAMENTE

Ingresso NON controllabile

$x_1 = i$ $x_2 = \omega$ $u_1 = v$ $u_2 = \tau_l$

obiettivo: $\dot{x} = A x + B u$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{K_v}{L} x_2 + \frac{1}{L} u_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{K_t}{J} x_1 - \frac{b}{J} x_2 - \frac{1}{J} u_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{b}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

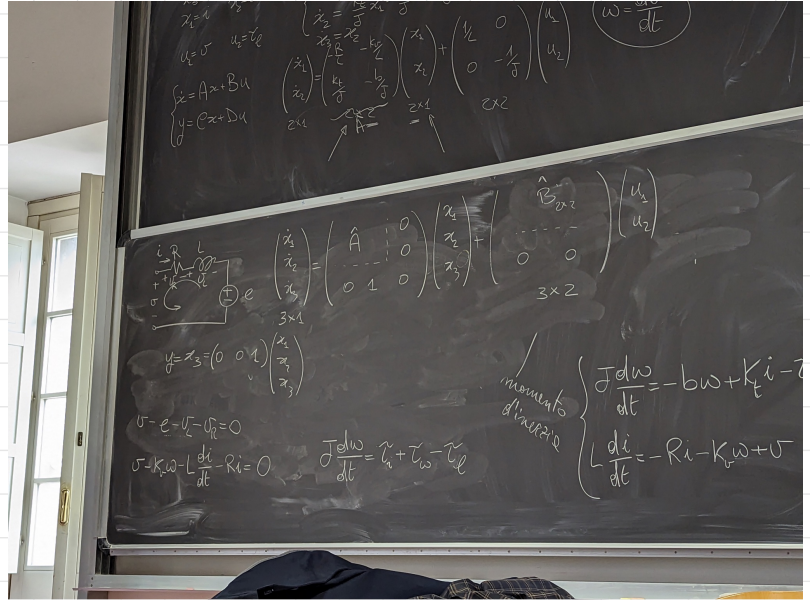
2×1 $\underline{A} \quad 2 \times 2$ 2×1

$$y = w = x_2 = (0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (0 \ 0) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow y = \underline{C}x + \underline{D}u$$

Se voglio considerare anche la **posizione angolare** devo aggiungere una variabile di stato:

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_2 \quad (\dot{x}_3 = w = \frac{d\theta}{dt})$$

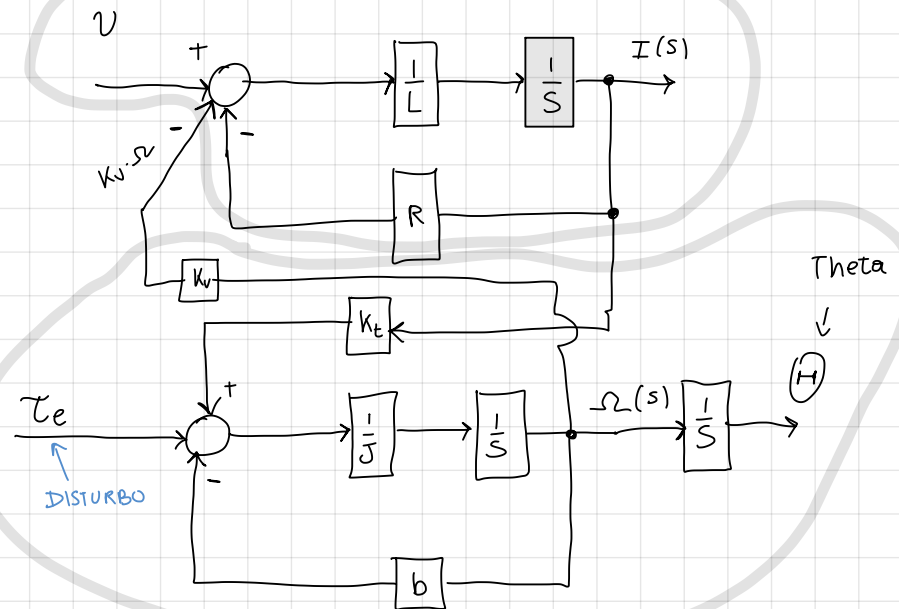
FOTO



SCHEMA A BLOCCHI

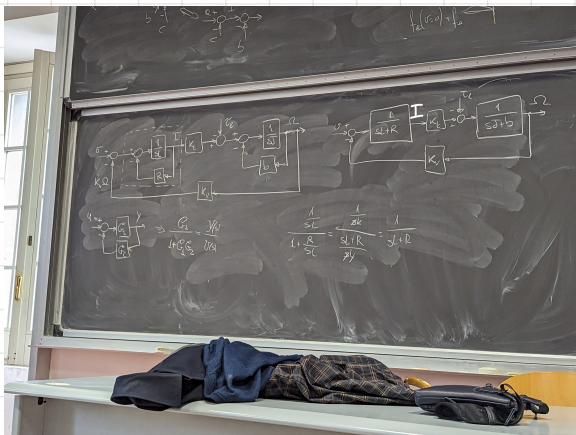
$$\begin{cases} L \dot{i} = -Ri - K_v \omega + v \\ J \dot{\omega} = K_t i - b\omega - \tau_c \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

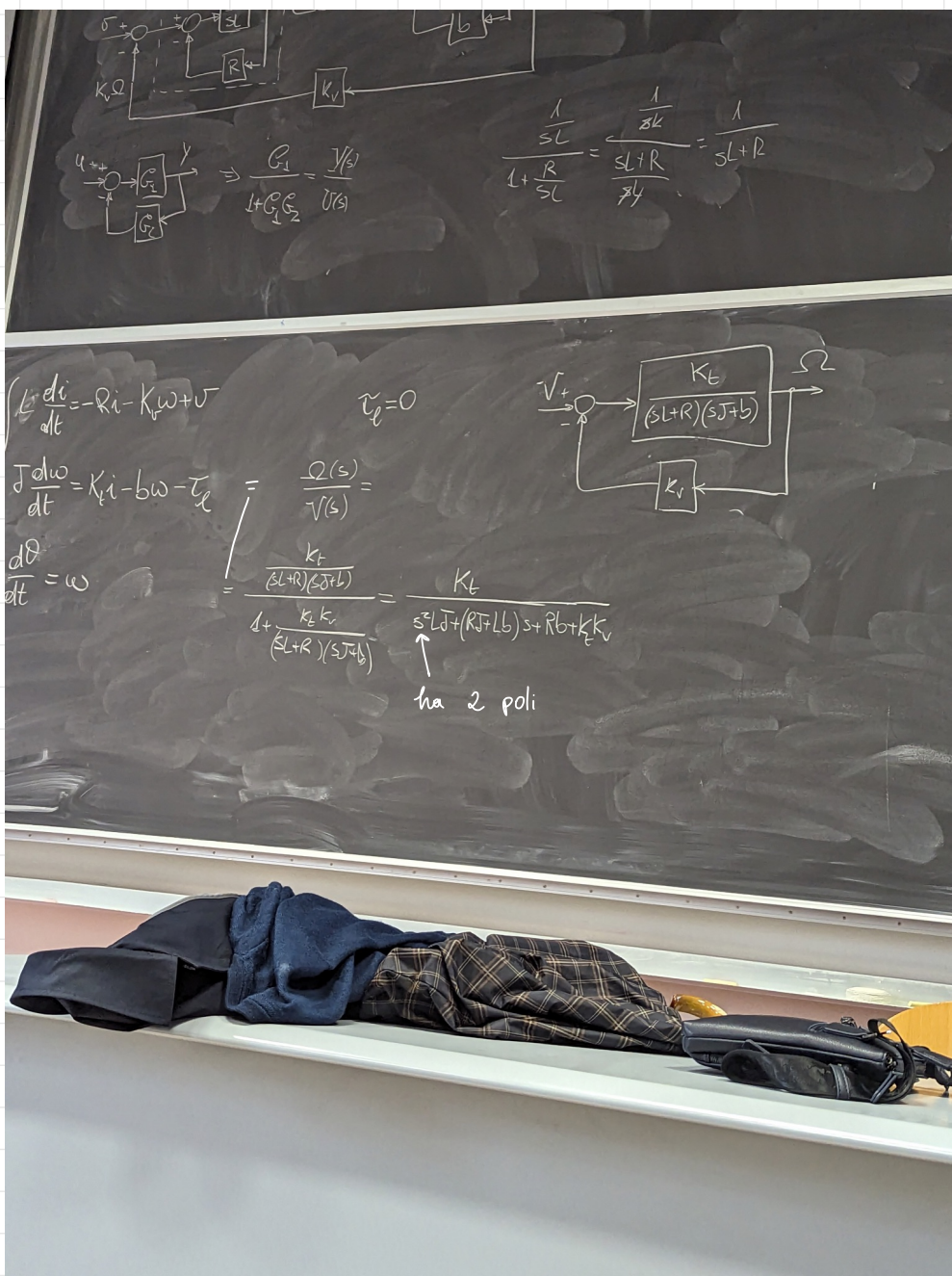
Parte elettrica



Parte Meccanica

FOTO





Schema a blocchi lez 11

FOTO Schema a blocchi
con GOTO e FROM

Dallo Spazio di Stato alla funzione di trasferimento (MATRICI!)

$$\begin{cases} (1) \dot{x} = Ax + Bu \\ (2) y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow \text{Suppongo C.I.} = 0 \rightarrow \mathcal{L}(1) \rightarrow sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$Ix = x$ Non posso sottrarre uno scalare da una matrice!
Posso mettere in evidenza solo a Destra!

$$\rightarrow \text{Ricavo } X(s) \rightarrow sX(s) - AX(s) = BU(s) \rightarrow (sI - A)X(s) = BU(s)$$

SBAGLIATO!

Sfrutto $A^{-1} \cdot A = I \rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = A \cdot \underline{\underline{B^{-1}}}$ giusto $\rightarrow (sI - A)^{-1} (sI - A) X(s) = (sI - A)^{-1} B \cdot U(s)$

$$\rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1} B U(s)$$

Funzione di Trasferimento tra y e u

$$\mathcal{L}(2) \rightarrow Y(s) = C X(s) + D U(s) \rightarrow Y(s) = \left[C (sI - A)^{-1} B + D \right] U(s)$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{b}{J} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (0 \ 1) \quad D = 0$$

$$x_1 = i \quad x_2 = \omega \\ y = \omega \quad u = v$$

$$sI - A = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{R}{L} & \frac{K_v}{L} \\ -\frac{K_t}{J} & \frac{b}{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{K_v}{L} \\ -\frac{K_t}{J} & s + \frac{b}{J} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{K_v}{L} \\ -\frac{K_t}{J} & s + \frac{b}{J} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \cdot \begin{pmatrix} s + \frac{b}{J} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_t}{J} & s + \frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

Posto
segno

ES

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\left(\left(s + \frac{R}{L} \right) \left(s + \frac{b}{J} \right) - \left(K_v \cdot \left(-\frac{K_t}{JL} \right) \right) \right)}_{d(s)}} \cdot \begin{pmatrix} s + \frac{b}{J} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_t}{J} & s + \frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

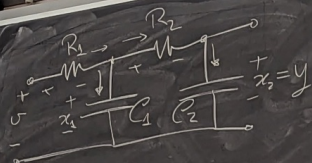
$$C \cdot (sI - A)^{-1} = (0 \ 1) \frac{1}{d(s)} \begin{pmatrix} s + \frac{b}{J} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_t}{J} & s + \frac{R}{L} \end{pmatrix} = \frac{1}{d(s)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{K_t}{J} & s + \frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \left[C \cdot (sI - A)^{-1} \right] \cdot B \right\} = \frac{1}{d(s)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{K_t}{J} & s + \frac{R}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} + 0 = \frac{\frac{K_t}{JL}}{s^2 + s \left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J} \right) + \frac{Rb}{LJ} + \frac{K_v K_t}{JL}}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \left[C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B \right] + D = \frac{K_t}{s^2 JL + (Rb + bL)s + Rb + K_t K_v}$$

QED

Stesso risultato ottenuto nel caso del motore elettrico



$$C_1 \frac{dx_1}{dt} = U - x_1 - \frac{x_1 - x_2}{R_2}$$

$$C_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{R_2}$$

$$y = x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{a_{21} / R_1 C_1}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}$$