Si consideri il sistema
$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t).$$
Assumendo condizioni iniziali nulle, si risponda ai seguenti quesiti.

1. Determinare l'uscita forzata del sistema al tempo $t = 1$ a seguito dell'ingresso
$$u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t).$$
2. Esiste la risposta in frequenza del sistema? In caso affermativo, disegnare modulo e fase.
3. Calcolare la risposta forzata del sistema per grandi valori di t a seguito dell'ingresso
$$u(t) = \sin(2t + \pi)\delta_{-1}(t).$$
4. Calcolare la risposta forzata del sistema per $t = 1$ a seguito dell'ingresso
$$u(t) = \sin(2t + \pi), \quad t \in \mathrm{R}.$$
5. Si consideri ora la famiglia di ingressi parametrizzata da $a, b \in \mathrm{R}$
$$u(t) = 2b\sin(at + \pi/2)\delta_{-1}(t).$$
Ricavare tutti i valori di a, b tali che l'uscita forzata $y(t)$ del sistema soddisfi
$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1.$$

$\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$

$u(t) = \sin(t)\cdot \mathbb{1}(t)$ $\quad \uparrow \omega = 1$

1) $\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \rightleftarrows sY(s) + Y(s) = U(s)$

$Y(s)[s+1] = U(s) \Rightarrow \dfrac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \dfrac{1}{s+1}$

Siccome $u(t) = \sin(t)\cdot \mathbb{1}(t) \rightleftarrows \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\omega = 1 \Rightarrow u(t) \rightleftarrows U(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$

$\Rightarrow Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \dfrac{1}{s+1}\cdot\dfrac{1}{s^2+1}$ $\qquad s^2+1=0 \leadsto s = \pm j$

$\Rightarrow Y(s) = \dfrac{r_1}{s+1} + \dfrac{a+jb}{s+j} + \dfrac{a-jb}{s-j} = \dfrac{r_1}{s+1} + \dfrac{(a+jb)(s-j)+(a-jb)(s+j)}{s^2+1}$

$= \dfrac{r_1}{s+1} + \dfrac{as - \cancel{ja} + \cancel{jbs} + b + as + \cancel{aj} - \cancel{jbs} + b}{s^2+1} = \dfrac{r_1}{s+1} + \dfrac{2as + 2b}{s^2+1} = \dfrac{r_1}{s+1} + \dfrac{2as}{s^2+1} + \dfrac{2b}{s^2+1}$ (1)

$= \dfrac{s^2 r_1 + r_1 + 2as^2 + 2as + 2bs + 2b}{(s+1)(s^2+1)} = \dfrac{1}{/\!/}$

$\Rightarrow \begin{cases} s^2(r_1 + 2a) = 0 \Rightarrow r_1 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -r_1 \\ s(2a + 2b) = 0 \Rightarrow 2a + 2b = 0 \Rightarrow -r_1 + 2b = 0 \to 2b = r_1 \\ r_1 + 2b = 1 \Rightarrow r_1 + r_1 = 1 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$ r_1

$\to b = \frac{1}{2} r_1 = \frac{1}{4}$ b $\qquad \to a = -\frac{1}{2} r_1 = -\frac{1}{4}$ a

$\Rightarrow Y(s) = \dfrac{1/2}{s+1} - \dfrac{2\,\frac{1}{4}\,s}{s^2+1} + \dfrac{2\,\frac{1}{4}}{s^2+1} = \frac{1}{2}\dfrac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\dfrac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\dfrac{1}{s^2+1}$

e^{-1t} $\quad$ cos $\quad$ sin

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t), \quad t \geq 0$ Ans

2) Risposta in frequenza

$G(S) = \frac{1}{S+1}$ $P_1 = -1 \Rightarrow W_1 = 1$ W_1 1 guadagno Statico

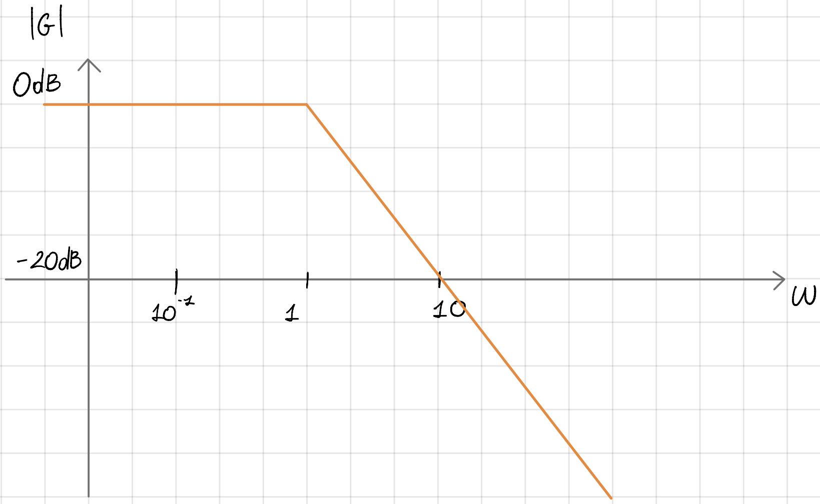
Banda

$\bar{W} \in [10^{-1} ; 10^{1}]$

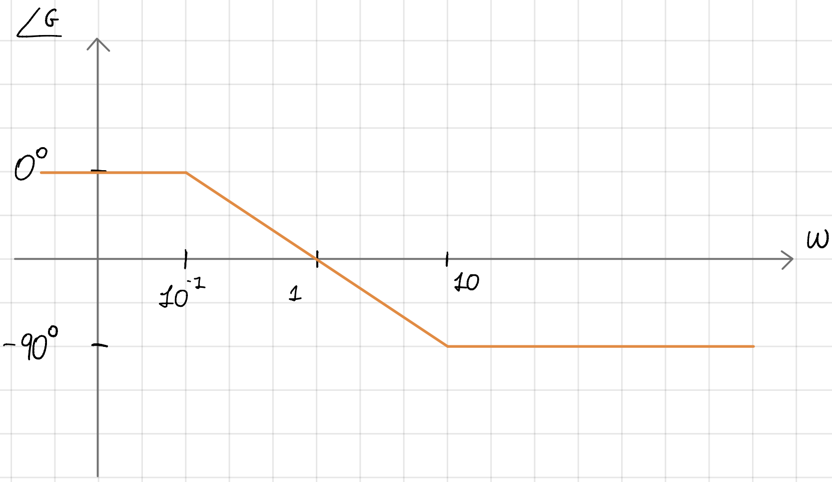
$G(jW) = \frac{1}{jW + 1} \leadsto |G(jW)| = \frac{1}{\sqrt{W^2+1}} = \sqrt{W^2+1}$ Modulo

$\angle G(jW) = \angle 1 - \angle jW+1 = -\tan^{-1}\left(\frac{W}{1}\right) = -\tan^{-1}(W)$ Fase

$|G(jW)|\Big|_{W=0.1}\Big|_{dB} = 20 \log(1) = 0 dB$



Ans 2



3. Calcolare la risposta forzata del sistema per grandi valori di t a seguito dell'ingresso

$$u(t) = \sin(2t + \pi)\delta_{-1}(t).$$

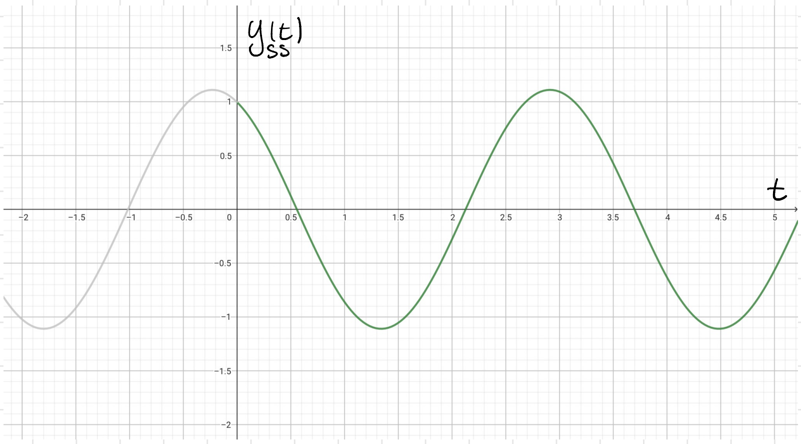
$$U(t) = \sin(2t + \pi)\cdot 1\!\!1(t) \Rightarrow y_{ss}(t) = \bar{X}\cdot|G(j\omega)|\cdot\sin(\omega t + \pi + \angle G(j\omega))$$

$\bar{X} = 1$ $\quad\omega = 2\quad$ $\theta = \pi$

$$|G(j\omega)|_{dB}\Big|_{\omega=2} = \sqrt{2^2+1}^{\,-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \simeq 1.37 \quad M \Rightarrow 20\log(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{10\sqrt{5}}} \simeq 1.11$$

$$\angle G(j\omega)\Big|_{\omega=2} = -\tan^{-1}(2) = -1.11$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = 1.11\cdot\sin(2t + \pi - 1.11) = 1.11\cdot\sin(2t + 2.03)\cdot 1\!\!1(t)$$

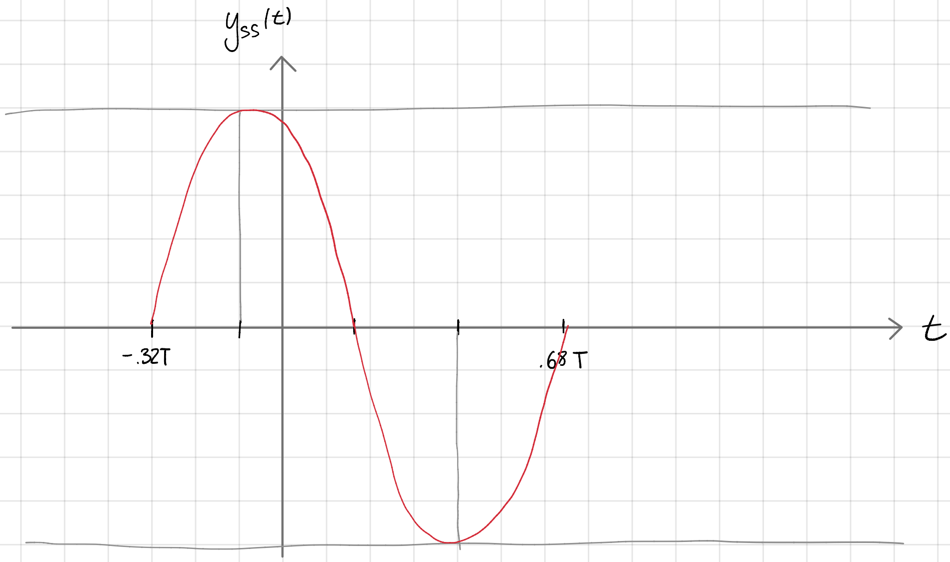


$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$2t + 2.03 = 0 \simeq\!> -\frac{2}{2} \simeq -1$

$-1 + \pi = T - 1 \simeq 2.14$

$t_i = -.32\,T \qquad t_f = +.68\,T$



Esercizio sul calcolo della risposta forzata mediante Laplace e risposta in frequenza

Si consideri il sistema

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t).$$

Assumendo condizioni iniziali nulle, si risponda ai seguenti quesiti.

1. Determinare l'uscita forzata del sistema al tempo $t = 1$ a seguito dell'ingresso

$$u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t).$$

2. Esiste la risposta in frequenza del sistema? In caso affermativo, disegnare modulo e fase.

3. Calcolare la risposta forzata del sistema per grandi valori di t a seguito dell'ingresso

$$u(t) = \sin(2t + \pi)\delta_{-1}(t).$$

4. Calcolare la risposta forzata del sistema per $t = 1$ a seguito dell'ingresso

$$u(t) = \sin(2t + \pi), \quad t \in \mathrm{R}.$$

5. Si consideri ora la famiglia di ingressi parametrizzata da $a, b \in \mathrm{R}$

$$u(t) = 2b\sin(at + \pi/2)\delta_{-1}(t).$$

Ricavare tutti i valori di a, b tali che l'uscita forzata $y(t)$ del sistema soddisfi

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1.$$

Soluzione pto 1 La relazione ingresso-uscita con Laplace diventa

$$sY(s) + Y(s) = U(s),$$

da cui otteniamo come funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Si ha quindi

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s^2+1}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Applicando Heavyside, cerchiamo la decomposizione

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s+1}\frac{1}{s^2+1} &= \frac{A}{s+1} + \frac{a+jb}{s+j} + \frac{a-jb}{s-j} \\
&= \frac{A}{s+1} + \frac{(a+jb)(s-j)+(a-jb)(s+j)}{s^2+1} \\
&= \frac{A}{s+1} + \frac{2as+2b}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Deve essere quindi soddisfatta l'uguaglianza

$$1 = s^2(A+2a) + s(2b+2a) + A + 2b$$

che porta dopo facili conti a

$$A = \frac{1}{2}, \quad a = -\frac{1}{4} \quad b = \frac{1}{4}.$$

La trasformata di Laplace dell'uscita forzata risulta quindi

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}.$$

Utilizzando anche il fatto che

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2},$$

si ottiene nel tempo

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2} \quad \text{per} \quad t \geq 0,$$

e la risposta al quesito risulta

$$y(1) = \frac{1}{2e} - \frac{\cos(1)}{2} + \frac{\sin(1)}{2}.$$

Soluzione pto 2 La risposta in frequenza esiste poichè il sistema è BIBO stabile (unico polo in -1). Il modulo e la fase risultano, rispettivamente,

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

e

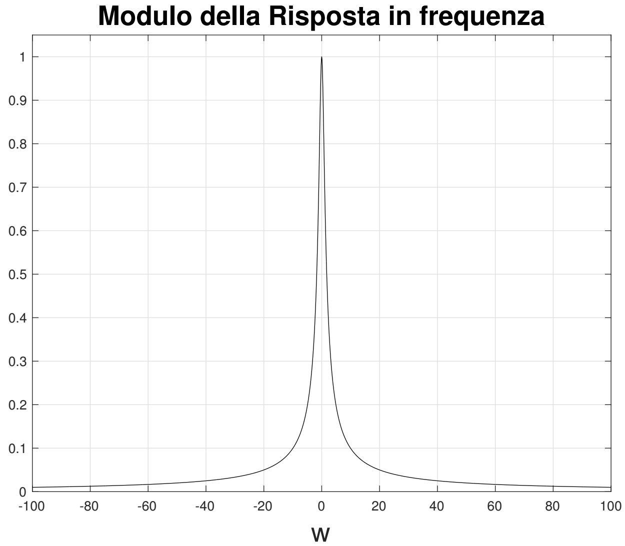
$$\begin{aligned}
\angle W(j\omega) &= \angle \frac{1}{1+j\omega} \\
&= \angle 1 - \angle(1+j\omega) = 0 - \text{atan}(\omega) \\
&= -\text{atan}(\omega).
\end{aligned}$$

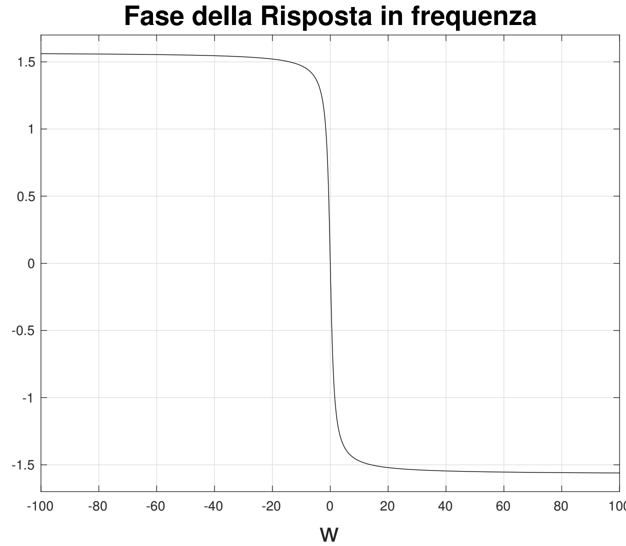
Notare che le uguaglianze

$$|W(j\omega)| = |W(-j\omega)| \quad \text{e} \quad \angle W(j\omega) = -\angle W(-j\omega)$$

sono proprietà generali della funzione di trasferimento (valgono sempre non solo in questo caso).

Modulo e fase della risposta in frequenza sono riportate in figura. Guardando il modulo, si nota la natura passa-basso del sistema (per $\omega \approx 10$ si ha un'attenuazione del 90%). Guardando la fase, è evidente che per pulsazioni ω superiori a 10 il sistema sfasa essenzialmente di $-\pi/2$.





Soluzione pto 3 Utilizzando il teorema in frequenza, per grandi valori di t si ha

$$y(t) \approx |W(j\omega)| \sin(\omega t + \pi + \angle W(j\omega)) \quad \text{con} \quad \omega = 2.$$

Poichè

$$|W(j2)| = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \angle W(j2) = -\text{atan}(2),$$

la risposta al quesito risulta

$$y(t) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2t + \pi - \text{atan}(2)).$$

Soluzione pto 4 Poichè l'ingresso non è più causale e parte da $-\infty$, si ha ora dal teorema in frequenza che

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2t + \pi - \text{atan}(2)).$$

Quindi, rispetto al caso precedente, non vi è più transitorio così che il simbolo $\approx$ è diventato $=$. Si ha quindi

$$y(1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2 + \pi - \text{atan}(2)).$$

Soluzione pto 5 Se $a \neq 0$ il teorema in frequenza ci porta a concludere che non esiste il limite di $y(t)$ per t tendente a $+\infty$ (l'uscita oscilla essendo un segnale sinusoidale). L'unica possibilità è scegliere $a = 0$. In questo modo, l'ingresso oscillatorio degenera nel segnale costante

$$u(t) = 2b\delta_{-1}(t).$$

Nel dominio di Laplace l'uscita risulta

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{2b}{s(s+1)}.$$

Pensando ad esempio alla decomposizione di Heavyside, è immediato verificare che $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ ora esiste visto che l'uscita sarà somma di una costante più un termine che decade esponenzialmente a zero. Possiamo allora applicare il teorema del valore finale per ottenere

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{2sb}{s(s+1)} = 2b.$$

La condizione richiesta è dunque soddisfatta se $b = 1/2$. La risposta al quesito è quindi data unicamente dalla coppia

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2}.$$