

Si consideri il sistema

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t).$$

$$\dot{y}(t) + y(t) = v(t)$$

Assumendo condizioni iniziali nulle, si risponda ai seguenti quesiti.

X Determinare l'uscita forzata del sistema al tempo  $t = 1$  a seguito dell'ingresso

$$u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t).$$

$$v(t) = \sin(\omega t) \cdot \mathbb{U}(t)$$

$\omega = 1$

X Esiste la risposta in frequenza del sistema? In caso affermativo, disegnare modulo e fase.

3. Calcolare la risposta forzata del sistema per grandi valori di  $t$  a seguito dell'ingresso

$$u(t) = \sin(2t + \pi)\delta_{-1}(t).$$

4. Calcolare la risposta forzata del sistema per  $t = 1$  a seguito dell'ingresso

$$u(t) = \sin(2t + \pi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Si consideri ora la famiglia di ingressi parametrizzata da  $a, b \in \mathbb{R}$

$$u(t) = 2b \sin(at + \pi/2)\delta_{-1}(t).$$

Ricavare tutti i valori di  $a, b$  tali che l'uscita forzata  $y(t)$  del sistema soddisfi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1.$$

$$1) \dot{y}(t) + y(t) = v(t) \Leftrightarrow s \dot{Y}(s) + Y(s) = U(s)$$

$$Y(s) [s+1] = U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\text{Siccome } v(t) = \sin(t) \cdot \mathbb{U}(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \omega = 1 \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \quad s^2 + 1 = 0 \rightsquigarrow s = \pm j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(s) &= \frac{\xi_1}{s+1} + \frac{\alpha+jb}{s+j} + \frac{\alpha-jb}{s-j} = \frac{\xi_1}{s+1} + \frac{(\alpha+jb)(s-j) + (\alpha-jb)(s+j)}{s^2 + 1} \\ &= \frac{\xi_1}{s+1} + \frac{\alpha s - j\alpha + jb s + b + \alpha s + j\alpha - jb s + b}{s^2 + 1} = \frac{\xi_1}{s+1} + \frac{2\alpha s + 2b}{s^2 + 1} = \frac{\xi_1}{s+1} + \frac{2\alpha s}{s^2 + 1} + \frac{2b}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} s^2 (\xi_1 + 2\alpha) = 0 \\ s (2\alpha + 2b) = 0 \\ \xi_1 + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \xi_1 + 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = -\xi_1 \\ \Rightarrow 2\alpha + 2b = 0 \Rightarrow -\xi_1 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = \xi_1 \\ \xi_1 + \xi_1 = 1 \Rightarrow \xi_1 = \frac{1}{2} \quad \xi_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2} \xi_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^b \quad \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \xi_1 = \left(-\frac{1}{4}\right)^a$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(s) &= \frac{1/2}{s+1} - \frac{2/4 s}{s^2 + 1} + \frac{2/4}{s^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t), \quad t \geq 0 \quad \text{Ans}$$

## 2) Risposta in frequenza

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$P_2 = -1 \Rightarrow \omega_L = 1$$

1 guardiamo statico

Banda

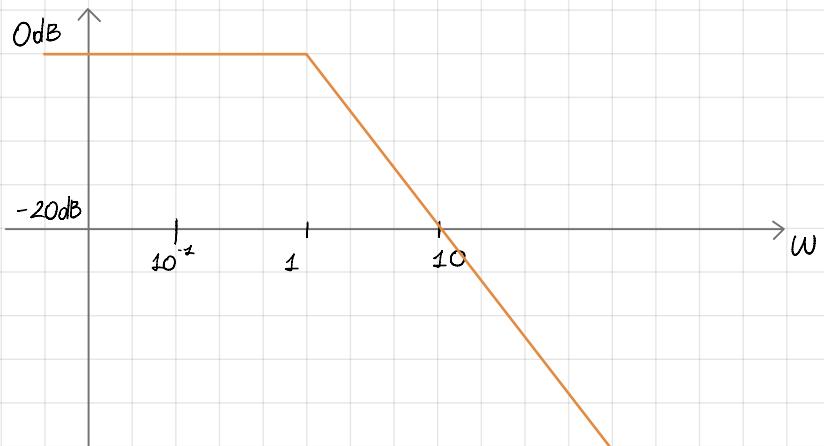
$$\bar{\omega} \in [10^{-1}; 10^1]$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$\text{Modulo} \quad |G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 + 1}} = \sqrt{\omega^2 + 1}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle 1 - \angle j\omega + 1 = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) = -\tan^{-1}(\omega)$$

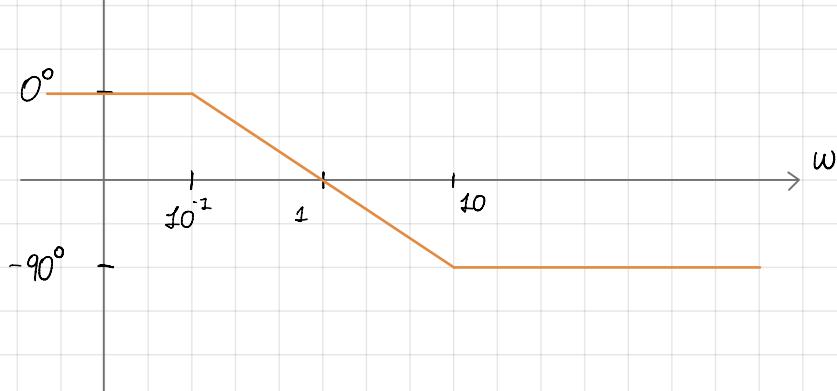
$|G|$



$$|G(j\omega)| \Big|_{\omega=0.1} = 20 \log(1) = 0 \text{ dB}$$

Ans 2

$\angle G$



3. Calcolare la risposta forzata del sistema per grandi valori di  $t$  a seguito dell'ingresso

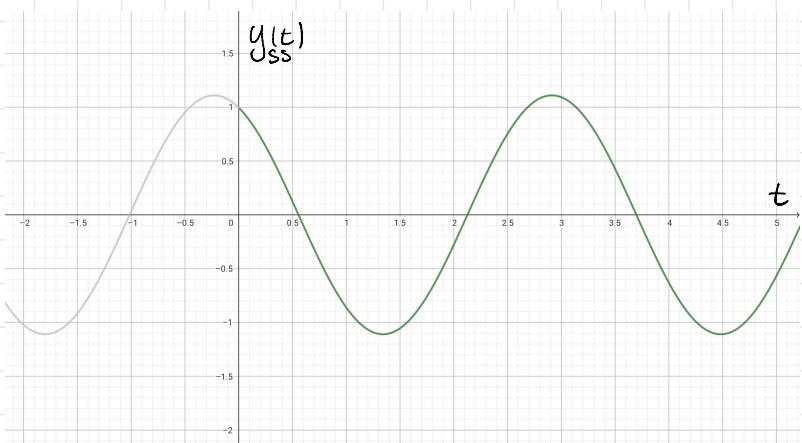
$$u(t) = \sin(2t + \pi)\delta_{-1}(t).$$

$$U(t) = \underset{X=1}{\text{Sin}}(2t + \pi) \cdot \underset{\omega=2}{\text{II}}(t) \Rightarrow y_{ss}(t) = X \cdot |G(j\omega)| \cdot \text{Sin}(wt + \pi + \angle G(j\omega))$$

$$\left| G(j\omega) \right|_{dB} = \sqrt{2^2 + 1}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \simeq 1.37 \text{ dB} \Rightarrow 20 \log(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = 10 = 1.11$$

$$\angle G(j\omega) \Big|_{\omega=2} = -\tan^{-1}(2) = -1.11$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = 1.11 \cdot \text{Sin}(2t + \pi - 1.11) = 1.11 \cdot \text{Sin}(2t + 2.03) \cdot \text{II}(t)$$

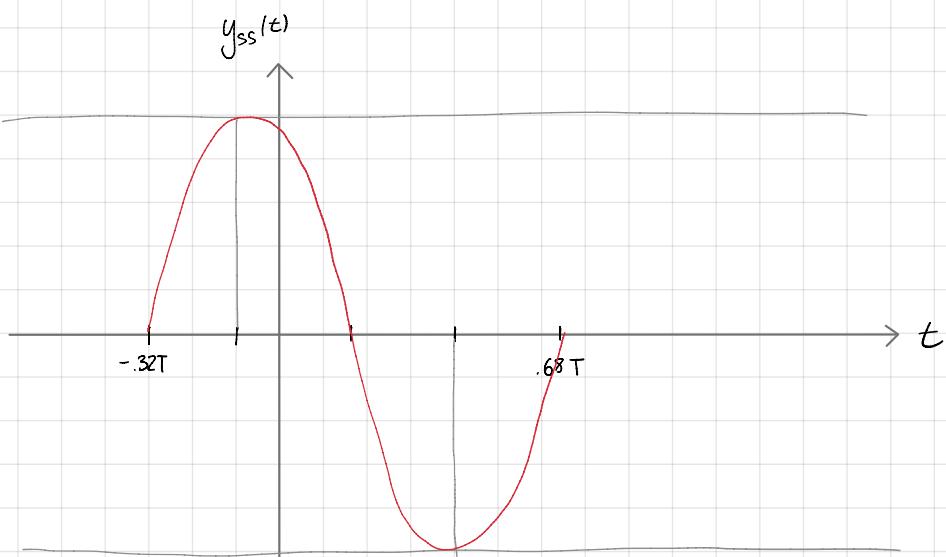


$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$$

$$2t + 2.03 = 0 \Rightarrow -\frac{2}{2} \approx -1$$

$$-1 + \pi \approx \frac{T}{2} \approx 2.14$$

$$t_i = -0.32T \quad t_f = 0.68T$$





# Esercizio sul calcolo della risposta forzata mediante Laplace e risposta in frequenza

Si consideri il sistema

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t).$$

Assumendo condizioni iniziali nulle, si risponda ai seguenti quesiti.

1. Determinare l'uscita forzata del sistema al tempo  $t = 1$  a seguito dell'ingresso

$$u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t).$$

2. Esiste la risposta in frequenza del sistema? In caso affermativo, disegnare modulo e fase.

3. Calcolare la risposta forzata del sistema per grandi valori di  $t$  a seguito dell'ingresso

$$u(t) = \sin(2t + \pi)\delta_{-1}(t).$$

4. Calcolare la risposta forzata del sistema per  $t = 1$  a seguito dell'ingresso

$$u(t) = \sin(2t + \pi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Si consideri ora la famiglia di ingressi parametrizzata da  $a, b \in \mathbb{R}$

$$u(t) = 2b \sin(at + \pi/2)\delta_{-1}(t).$$

Ricavare tutti i valori di  $a, b$  tali che l'uscita forzata  $y(t)$  del sistema soddisfi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1.$$

**Soluzione pto 1** La relazione ingresso-uscita con Laplace diventa

$$sY(s) + Y(s) = U(s),$$

da cui otteniamo come funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Si ha quindi

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s^2+1}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Applicando Heavyside, cerchiamo la decomposizione

$$\begin{aligned} \frac{1}{s+1} \frac{1}{s^2+1} &= \frac{A}{s+1} + \frac{a+jb}{s+j} + \frac{a-jb}{s-j} \\ &= \frac{A}{s+1} + \frac{(a+jb)(s-j) + (a-jb)(s+j)}{s^2+1} \\ &= \frac{A}{s+1} + \frac{2as+2b}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Deve essere quindi soddisfatta l'uguaglianza

$$1 = s^2(A+2a) + s(2b+2a) + A + 2b$$

che porta dopo facili conti a

$$A = \frac{1}{2}, \quad a = -\frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{4}.$$

La trasformata di Laplace dell'uscita forzata risulta quindi

$$Y(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1}.$$

Utilizzando anche il fatto che

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

si ottiene nel tempo

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2} \quad \text{per } t \geq 0,$$

e la risposta al quesito risulta

$$y(1) = \frac{1}{2e} - \frac{\cos(1)}{2} + \frac{\sin(1)}{2}.$$

**Soluzione pto 2** La risposta in frequenza esiste poiché il sistema è BIBO stabile (unico polo in -1). Il modulo e la fase risultano, rispettivamente,

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

e

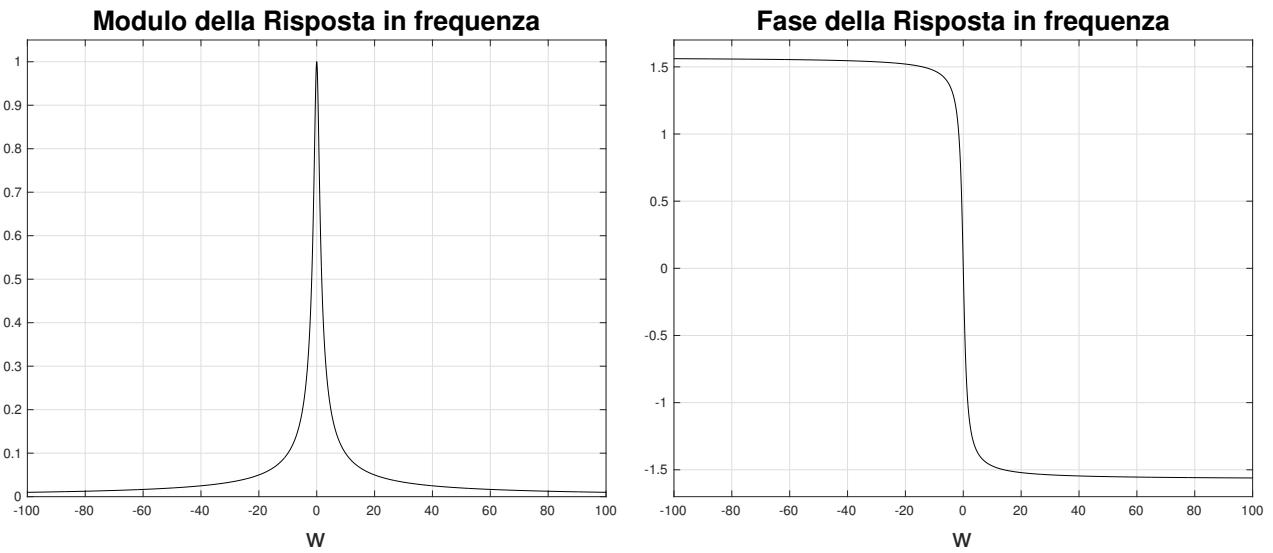
$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) &= \angle \frac{1}{1+j\omega} \\ &= \angle 1 - \angle(1+j\omega) = 0 - \text{atan}(\omega) \\ &= -\text{atan}(\omega). \end{aligned}$$

Notare che le uguaglianze

$$|W(j\omega)| = |W(-j\omega)| \quad \text{e} \quad \angle W(j\omega) = -\angle W(-j\omega)$$

sono proprietà generali della funzione di trasferimento (valgono sempre non solo in questo caso).

Modulo e fase della risposta in frequenza sono riportate in figura. Guardando il modulo, si nota la natura passa-basso del sistema (per  $\omega \approx 10$  si ha un'attenuazione del 90%). Guardando la fase, è evidente che per pulsazioni  $\omega$  superiori a 10 il sistema sfasa essenzialmente di  $-\pi/2$ .



**Soluzione pto 3** Utilizzando il teorema in frequenza, per grandi valori di  $t$  si ha

$$y(t) \approx |W(j\omega)| \sin(\omega t + \pi + \angle W(j\omega)) \quad \text{con} \quad \omega = 2.$$

Poichè

$$|W(j2)| = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \angle W(j2) = -\text{atan}(2),$$

la risposta al quesito risulta

$$y(t) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2t + \pi - \text{atan}(2)).$$

**Soluzione pto 4** Poichè l'ingresso non è più causale e parte da  $-\infty$ , si ha ora dal teorema in frequenza che

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2t + \pi - \text{atan}(2)).$$

Quindi, rispetto al caso precedente, non vi è più transitorio così che il simbolo  $\approx$  è diventato  $=$ . Si ha quindi

$$y(1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2 + \pi - \text{atan}(2)).$$

**Soluzione pto 5** Se  $a \neq 0$  il teorema in frequenza ci porta a concludere che non esiste il limite di  $y(t)$  per  $t$  tendente a  $+\infty$  (l'uscita oscilla essendo un segnale sinusoidale). L'unica possibilità è scegliere  $a = 0$ . In questo modo, l'ingresso oscillatorio degenera nel segnale costante

$$u(t) = 2b\delta_{-1}(t).$$

Nel dominio di Laplace l'uscita risulta

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{2b}{s(s+1)}.$$

Pensando ad esempio alla decomposizione di Heavyside, è immediato verificare che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  ora esiste visto che l'uscita sarà somma di una costante più un termine che decade esponenzialmente a zero. Possiamo allora applicare il teorema del valore finale per ottenere

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{2sb}{s(s+1)} = 2b.$$

La condizione richiesta è dunque soddisfatta se  $b = 1/2$ . La risposta al quesito è quindi data unicamente dalla coppia

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2}.$$