Prova scritta di Sistemi Dinamici

29 dicembre 2023

Esercizio 1: risposta nel tempo

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2.1s + 0.2} \tag{1}$$

e l'ingresso $u(t)$ definito da

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & t \in [0, 2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases} \tag{2}$$

determinare:

1. L'espressione di $u(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t)$ con n opportuno in modo che ciascun segnale $u_i(t)$ abbia una trasformata di Laplace nota e tracciare gli andamenti di $u_i(t)$ per $i = 1, \ldots, n$.

2. Determinare la trasformata di Laplace $U_i(s)$ di ciascun segnale $u_i(t)$, per $i = 1, \ldots, n$.

3. Individuare gli opportuni segnali $\hat{u}_j(t)$, con $j = 1, \ldots, m$, che consentono poi di calcolare in maniera semplice tutte le trasformate di Laplace delle uscite $y_i(t)$ ai segnali $u_i(t)$. Calcolare le trasformate di Laplace $\hat{Y}_j(s) = G(s)\hat{U}_j(s)$, per $j = 1, \ldots, m$, utilizzando la scomposizione in fratti semplici.

4. Calcolare le anti-trasformate di Laplace $\hat{y}_j(t)$ per ciascuna $\hat{Y}_j(s)$, per $j = 1, \ldots, m$. Per ciascun modo tracciare e discutere l'andamento nel tempo.

5. Calcolare analiticamente l'uscita $y_i(t)$ a ciascun ingresso $u_i(t)$, per $i = 1, \ldots, n$.

6. Calcolare l'uscita $y(t)$ all'ingresso $u(t)$ e fare eventuali considerazioni sull'andamento di $y(t)$.

Esercizio 2: risposta in frequenza

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{1-0.1s}{s(s+2)} \tag{3}$$

1. Esprimere $G(s)$ nella forma standard per i diagrammi di Bode, determinare poli e zeri e rappresentarli sul piano complesso.

2. Determinare i punti di rottura dei diagrammi di Bode asintotici.

3. Scegliere l'intervallo di frequenze d'interesse.

4. Determinare gli andamenti iniziali e finali dei diagrammi di Bode asintotici.

5. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici.

6. Dato il segnale d'ingresso

$$u(t) = 5\sin 3t \tag{4}$$

determinare l'espressione dell'uscita a regime $y_{ss}(t)$ e tracciare gli andamenti nel tempo dell'ingresso $u(t)$ e dell'uscita $y_{ss}(t)$.

7. Effettuate eventuali considerazioni sui diagrammi di Bode: andamenti esatti, moduli di risonanza, banda passante, variazioni di guadagno, aggiunta di poli o zeri.

Esercizio 1: risposta nel tempo

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2.1s + 0.2} \tag{1}$$

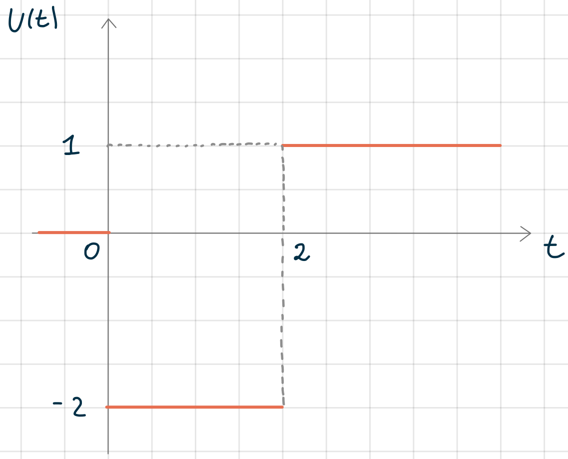
e l'ingresso $u(t)$ definito da

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & t \in [0, 2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases} \tag{2}$$

$$G(S) = \frac{1}{S^2 + 2.1S + 0.2}$$

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & t \in [0, 2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

- Rappr $U(t)$



- Poli e zeri

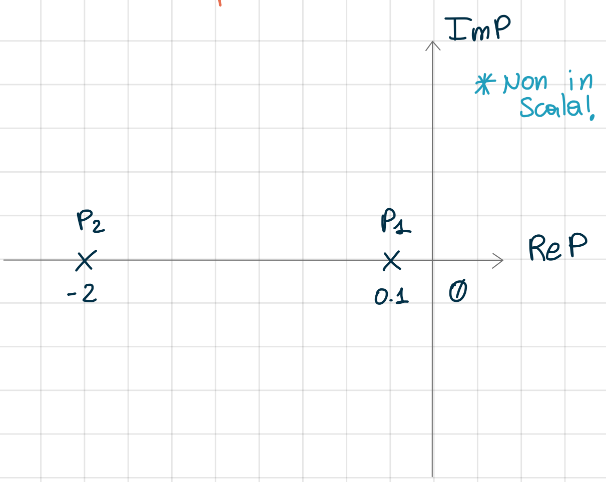
No zeri, poli: $\Delta = 2.1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.2 = 3.61 > 0$

$$P_{1,2} = \frac{-2.1 \pm \sqrt{3.6}}{2} \begin{matrix} \nearrow P_1 = -0.1 \\ \searrow P_2 = -2 \end{matrix}$$

$\to$ Posso riscrivere $G(S)$ come

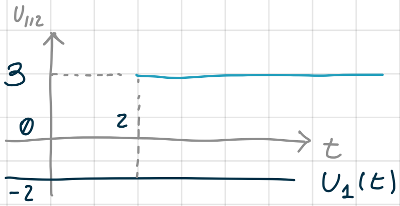
$$G(S) = \frac{1}{(S+0.1)(S+2)}$$

- Piano Complx



- Singoli Termini di $U(t)$

$$\begin{cases} U_1(t) = -2 \cdot \mathbb{1}(t) \\ U_2(t) = +3 \cdot \mathbb{1}(t-2) \end{cases}$$



2) Trasformo i singoli termini

$$\begin{cases} U_1(t) \rightleftarrows U_1(S) = -2 \cdot \frac{1}{S} \\ U_2(t) \rightleftarrows U_2(S) = 3 \cdot \frac{1}{S} \end{cases}$$

3) Segnale fittizio

$\to$ Scelgo $\hat{U}(t) = \mathbb{1}(t) \rightleftarrows \hat{U}(S) = \frac{1}{S}$

$\Rightarrow \hat{Y}(S) = U(S) \cdot G(S) = \frac{1}{S(S+.1)(S+2)}$ $\hat{Y}(S)$

$$\to \hat{Y}(S) = \frac{\mathcal{E}_1}{S} + \frac{\mathcal{E}_2}{(S+.1)} + \frac{\mathcal{E}_3}{(S+2)}$$

Posso usare il metodo con i limiti per tutti e 3 i residui!

$$\mathcal{E}_1 = \lim_{S \to 0} \cancel{S} \cdot \frac{1}{\cancel{S}(S+.1)(S+2)} \to \frac{1}{.1 \cdot 2} = 5 \quad \mathcal{E}_1$$

$$\mathcal{E}_2 = \lim_{S \to -0.1} \cancel{(S+.1)} \cdot \frac{1}{S\cancel{(S+.1)}(S+2)} = -5.26 \quad \mathcal{E}_2$$

$$r_3 = \lim_{S \to -2} \cancel{(S+2)} \frac{1}{\underset{-2}{S}\,(\underset{-2}{S}+1)\cancel{(S+2)}} = 0.26 \quad r_3$$

- Basta Antitrasformare usando

$$\frac{1}{S} \rightleftharpoons 1 \cdot 1\!\!1(t) \quad ; \quad \frac{1}{S+K} \rightleftharpoons e^{-Kt} \cdot 1\!\!1(t)$$

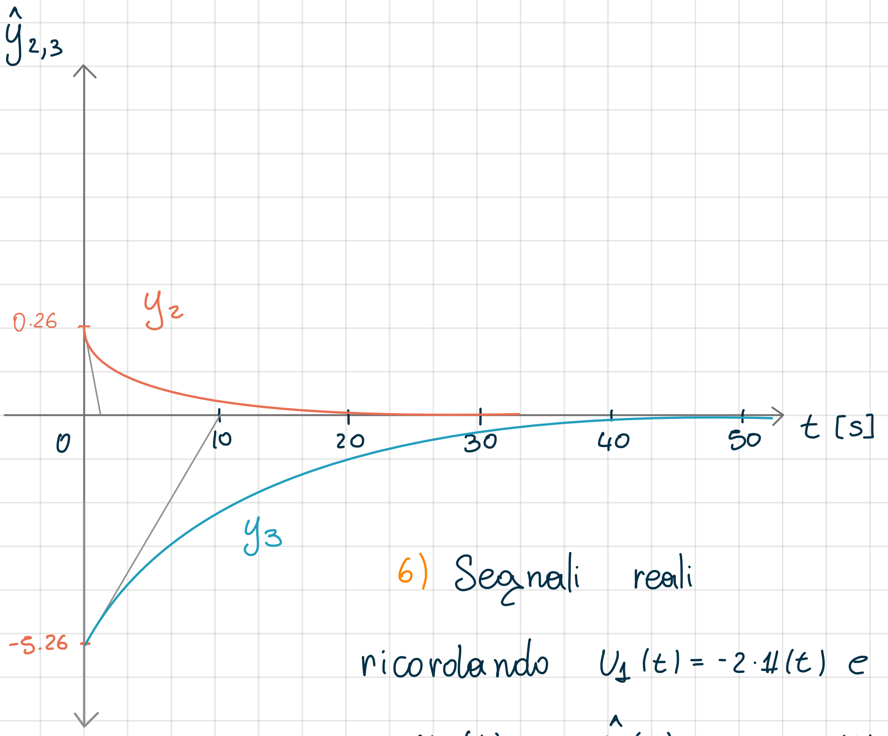
$$\Rightarrow \quad \hat{y}(t) = (\underbrace{r_1}_{\hat{y}_1} + \underbrace{r_2 e^{-\frac{t}{10}}}_{\hat{y}_2} + \underbrace{r_3 e^{-2t}}_{\hat{y}_3}) \cdot 1\!\!1(t)$$

Abbiamo un modo costante e due exp di τ diverso

- $\hat{y}_2 \to \tau_2 = 10$
- $\hat{y}_3 \to \tau_3 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \tau_2 > \tau_3 \Rightarrow \hat{y}_3$ si esaurisce molto più velocemente

$\begin{cases} \hat{y}_2 \text{ dopo } 40s \\ \hat{y}_3 \text{ dopo } 10s \end{cases}$ $\begin{cases} r_2 = -5.26 \\ r_3 = 0.26 \end{cases}$



6) Segnali reali

ricordando $U_1(t) = -2 \cdot 1\!\!1(t)$ e $U_2(t) = 3 \cdot 1\!\!1(t-2)$

$\to y_1(t) = -2 \cdot \hat{y}(t)$, $y_2(t) = 3 \cdot \hat{y}(t-2)$

$= -2r_1 - 2r_2 e^{-\frac{t}{10}} - 2 \cdot r_3 e^{-2t}$

$= 3r_1 + 3r_2 e^{-\frac{3(t-2)}{10}} + 3r_3 e^{-6(t-2)}$

L'uscita $y(t)$ è data da $y(t) = y_1 + y_2$ per la linearità

Time 30'

Esercizio 2: risposta in frequenza

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{1-0.1s}{s(s+2)}$$

$$G(S) = 10 \cdot \frac{1-0.1S}{S(S+2)}$$

1) Forma Std

quadagno statico >0

$$G(S) = K \cdot \frac{\prod^{m}\left(1+\frac{S}{z_i}\right)}{\prod^{n}\left(1+ST_i\right)} \rightarrow G(S) = \cancel{10}^{\,5} \cdot \frac{1-\frac{S}{10}}{\cancel{2}S\left(1+\frac{1}{2}S\right)} = 5\,\frac{1-\frac{S}{10}}{S\left(1+\frac{1}{2}S\right)}$$

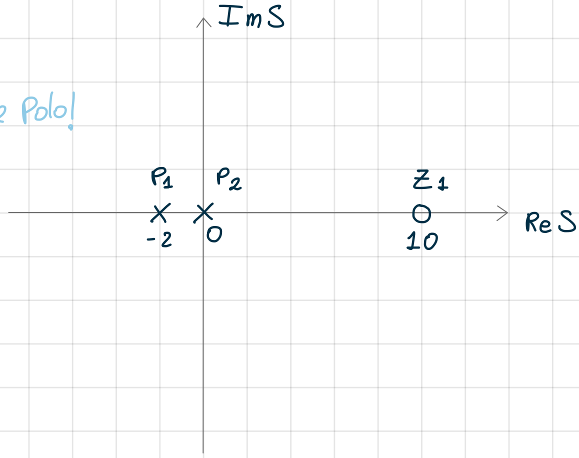
2) Punti di rottura

! Zero a ReP >0 !

$Z: \quad 1-\frac{S}{10} = 0$ per $\bar{S} = 10$ — Lo si comporta come Polo!

$P: \quad \bar{S} = 0 \quad , \quad 1+\frac{1}{2}S = 0 \rightarrow \bar{S} = -2$ — Polo Semplice

! Polo in Origine !



$\omega_1 = 2$ rad/s $\qquad \omega_2 = 10$ rad/s

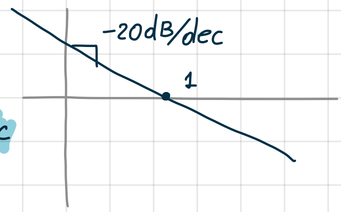
3) Scelta della Banda

$\omega \in [10^{-1}, 10^{2}]$ rad/s

4) Andamenti iniziali e finali

MODULI

INIZ: abbiamo un polo in origine $\Rightarrow$ -20dB/dec



Per quale punto passa?

Dobbiamo calcolare $|G(j\bar{\omega})|_{dB} = 20\log\left(\frac{K}{\bar{\omega}}\right)$ Perché gli altri poli e zeri hanno contributo iniziale di 0dB/dec $\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(\frac{5}{0.1}\right) = 34$ dB

* Come $\bar{\omega}$ ho preso il valore più piccolo della banda.

$P_1: (10^{-1}, 34dB)$

FIN. 1 zero a ReP>0 NON influenza il modulo!

1 Polo semplice ed un polo in 0 $\Rightarrow$ TOT: 2 POLI, 1 ZERO

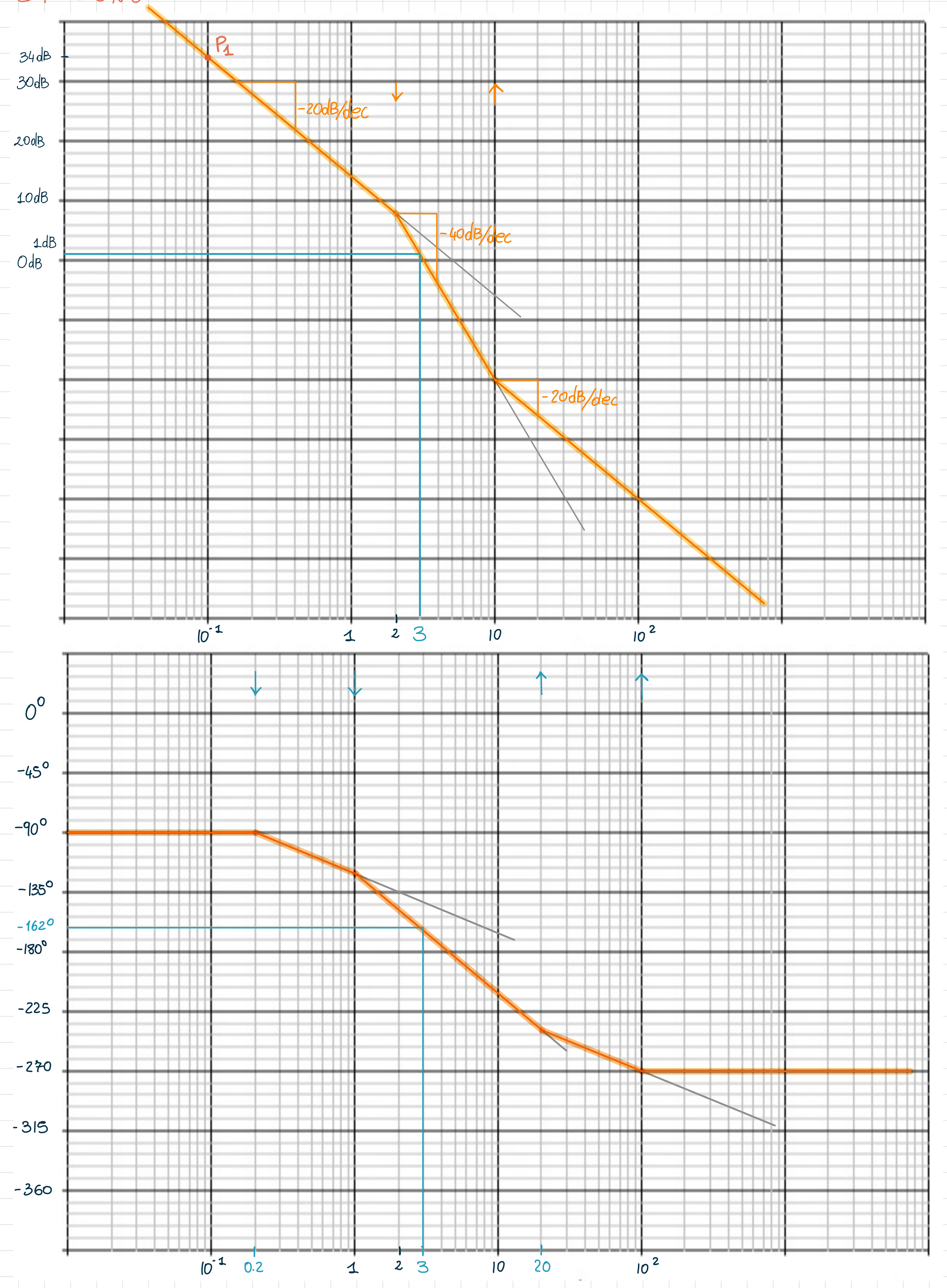
$\Rightarrow$ Finale: $(-20-20+20)$ dB/dec

FASI

INIZIALE: 1 Polo in 0 $\Rightarrow -90° = -\frac{\pi}{2}$

FINALE: 3 "Poli" $\Rightarrow$ Ritardo di $3 \cdot 90° = 270° = \frac{3}{2}\pi$

DISEGNO



P1
34dB
30dB
20dB
10dB
1dB
0dB
-20dB/dec
-40dB/dec
-20dB/dec
10^-1
1
2
3
10
10^2
0°
-45°
-90°
-135°
-162°
-180°
-225
-270
-315
-360
10^-1
0.2
1
2
3
10
20
10^2

6) Uscita SS

Dato l'input $u(t) = 5\sin(3t)$

$\rightarrow y_{ss}(t) = |G(j\bar{\omega})| \cdot \bar{X} \cdot \sin(\bar{\omega}t + \angle G(j\bar{\omega}))$ con $\bar{\omega} = 3$ e $\bar{X} = 5$

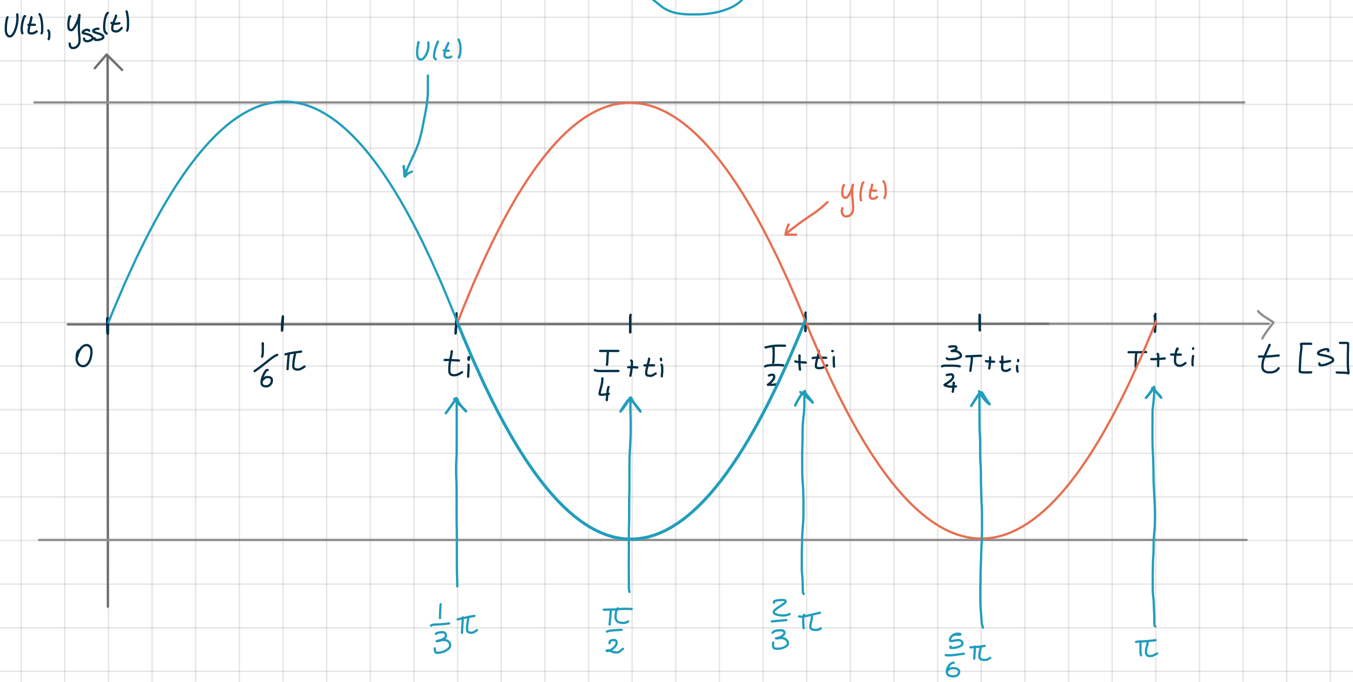
- $\left| G(j\omega)\big|_{dB} \right|_{\bar{\omega}=3} = 1\,dB \leadsto 20\log(y) = x \rightarrow y = 10^{\frac{x}{20}} \leadsto |G(j\bar{\omega})| \cong 10^{\frac{1}{20}} \cong 1.12$

- $\angle G(j\omega) \cong -162° = \frac{9}{10}\pi$

$\Rightarrow y_{ss}(t) = 1.12 \cdot 5 \cdot \sin(3t - 162°)$ Per semplicità considero $|G(j\bar{\omega})| = 1$, $\angle G(j\bar{\omega}) = -180° = -\pi$

$\Rightarrow \bar{y}_{ss}(t) = 5\sin(3t - \pi) \leadsto T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \cong 2.1\,s$

Ritardo: $3t_i - \pi = 0$ per $t_i = \frac{\pi}{3}$ Ritardo $\Rightarrow t_f = t_i + T = \pi$



Esercizio 1: soluzione

1. Il segnale $u(t)$ si può scrivere come la somma dei seguenti due segnali:

$$u_1(t) = -2\,\mathbf{1}(t)$$
$$u_2(t) = 3\,\mathbf{1}(t-2)$$

Gli andamenti sono riportati nella figura allegata.

2. Le trasformate di Laplace sono date da

$$U_1(s) = -\frac{2}{s}$$
$$U_2(s) = \frac{3}{s}e^{-2s}$$

dove la prima è ottenuta applicando la linearità e la trasformata del gradino e la seconda applicando anche il teorema del ritardo nel tempo.

3. Il segnale $\hat{u}(t)$ che consente poi di calcolare la risposta del sistema è un semplice gradino: $\hat{u}(t) = \mathbf{1}(t)$. Quindi la corrispondente trasformata di Laplace dell'uscita è data da

$$\hat{Y}(s) = G(s)\hat{U}(s) = \frac{1}{s(s^2+2.1s+0.2)} = \frac{1}{s(s+2)(s+0.1)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+2} + \frac{r_3}{s+0.1}$$

Il calcolo dei residui fornisce:

$$r_1 = \lim_{s\to 0} s\hat{Y}(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s(s+2)(s+0.1)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{(s+2)(s+0.1)} = \frac{1}{0.2} = 5$$
$$r_2 = \lim_{s\to -2}(s+2)\hat{Y}(s) = \lim_{s\to -2}(s+2)\frac{1}{s(s+2)(s+0.1)} = \lim_{s\to -2}\frac{1}{s(s+0.1)} = 0.26$$
$$r_3 = \lim_{s\to -0.1}(s+0.1)\hat{Y}(s) = \lim_{s\to -0.1}(s+0.1)\frac{1}{s(s+2)(s+0.1)} = \lim_{s\to -0.1}\frac{1}{s(s+2)} = -5.26$$

4. L'antitrasformata di $\hat{Y}(s)$ è data da:

$$\hat{y}(t) = (5 + 0.26e^{-2t} - 5.26e^{-0.1t})\,\mathbf{1}(t)$$

L'espressione di $\hat{y}(t)$ è data dalla somma di tre termini. Il primo è un gradino di ampiezza 5 che parte in $t = 0\,sec$.

Il secondo termine è un esponenziale che ha costante di tempo $\tau_1 = 1/2 = 0.5\,sec$ e parte in $t = 0\,sec$ dal valore positivo 0.26. Tale valore si può anche calcolare col teorema del valore iniziale:

$$\lim_{s\to\infty} s\frac{0.26}{s+2} = 0.26$$

Il tempo di assestamento all'1% è pari a $4\tau_1 = 2\,sec$ e quindi in questo istante di tempo questo termine vale meno di $0.26 \cdot 10^{-2}$. Il valore finale è nullo come si evince sia dall'espressione nel tempo e sia dal teorema del valore finale

$$\lim_{s\to 0} s\frac{0.26}{s+2} = 0.$$

Il terzo termine è un esponenziale che ha costante di tempo $\tau_2 = 1/0.1 = 10\,sec$, e parte in $t = 0\,sec$ dal valore negativo -5.26; quindi, essendo il tempo di assestamento all'1% pari a $40\,sec$, in questo istante di tempo questo termine sarà negativo e in valore assoluto vale meno di 0.0526.

Gli andamenti nel tempo sono riportati nella figura allegata.

5. Le risposte ai segnali $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sono date da

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -2\hat{y}(t) = -2(5 + 0.26e^{-2t} - 5.26e^{-0.1t})\,\mathbf{1}(t) \\ y_2(t) &= 3\hat{y}(t-2) = 3(5 + 0.26e^{-2(t-2)} - 5.26e^{-0.1(t-2)})\,\mathbf{1}(t-2) \end{aligned}$$

6. La risposta complessiva è data da

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Non essendoci impulsi, la risposta del sistema parte da valore nullo in $t = 0\,sec$. Poi va per valori negativi in quanto fino all'istante $t = 2\,sec$ è diverso da zero solo l'ingresso $u_1(t)$ e quindi anche $y_1(t) = 0$ e la risposta è come quella a un ingresso a gradino di ampiezza -2. Il modo associato al polo -2 si estingue in $2\,sec$, quindi il valore della risposta in $t = 2\,sec$ è circa pari a

$$y(2) \approx -2(5 - 5.26e^{-0.2}) = -1.39$$

All'istante $t = 2\,sec$ diventa diverso da zero anche $u_2(t)$. Bisogna attendere circa $40\,sec$ perché la risposta vada a regime al valore

$$y(42) \approx \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} y_1(t) + \lim_{t\to\infty} y_2(t) = -10 + 15 = 5$$

Questo valore poteva anche essere ottenuto immaginando che il sistema per $t \gg 2\,sec$ è come se fosse sottoposto a un ingresso a gradino di ampiezza 1 e quindi l'uscita a regime è data da

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = G(0) = \frac{1}{0.2} = 5.$$

Un andamento qualitativo della risposta nel tempo è riportato nella figura allegata.

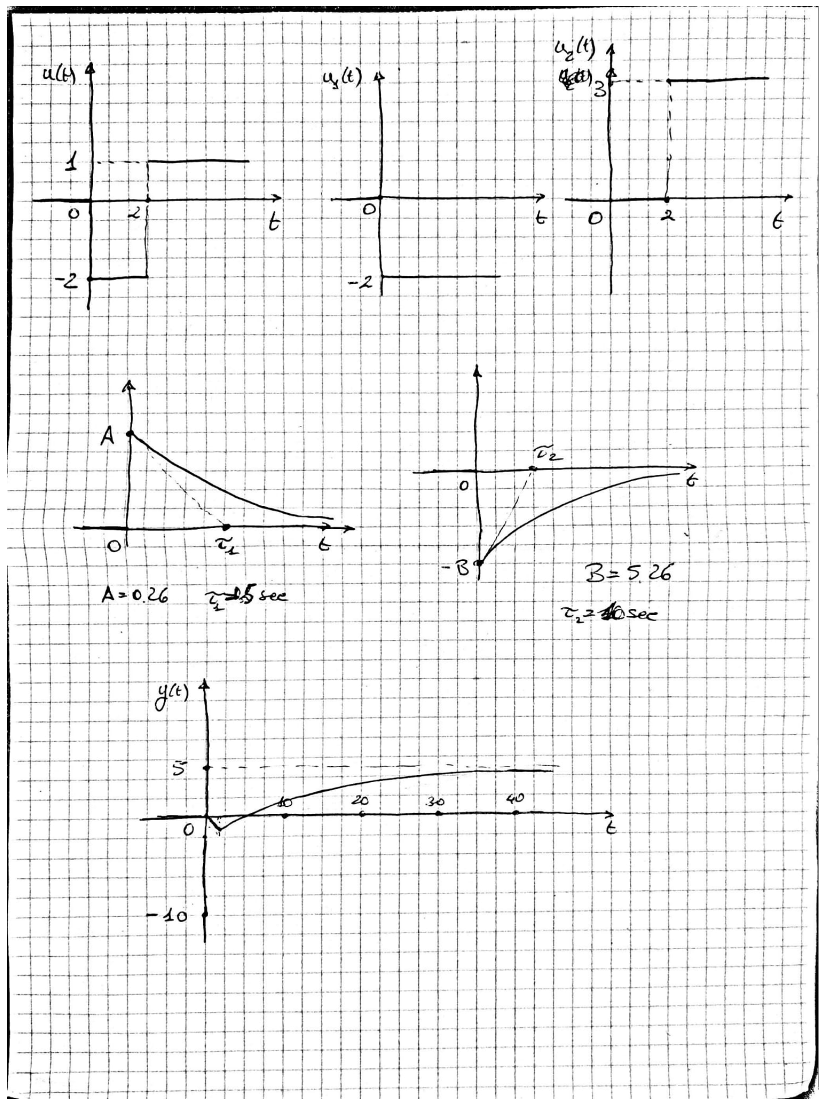


Figura 1: Andamenti nel tempo per Esercizio 1.

Esercizio 2: soluzione

1. La funzione di trasferimento nella forma standard dei diagrammi di Bode è data da:

$$G(s) = 10\frac{1-0.1s}{s(s+2)} = \frac{10}{2}\frac{1-0.1s}{s(1/2s+1)} = 5\frac{1-0.1s}{s(1+0.5s)}$$

   La $G(s)$ ha uno zero a parte reale positiva in $z_1 = +10$, un polo nell'origine $p_1 = 0$ e un polo reale negativo $p_2 = -2$. La rappresentazione nel piano complesso è nella figura allegata.

2. I punti di rottura nei diagrammi di Bode asintotici sono $\omega_1 = 10\,rad/sec$ (associato allo zero z_1) e $\omega_2 = 2\,rad/sec$ (associato al polo p_2).

3. L'intervallo di frequenze d'interesse, considerando almeno una decade a sinistra del più piccolo punto di rottura e almeno una decade a destra del più grande punto di rottura, è

$$\omega \in [10^{-1}, 10^{2}]\, rad/sec$$

4. Per il diagramma dei moduli, poiché $G(s)$ ha un polo nell'origine, l'andamento iniziale ha pendenza di $-20\, dB/decade$ e passa per il punto $\bar{\omega} = 10^{-1}$ e

$$\begin{aligned}|G(j\bar{\omega})|_{dB} &= 20\log(|G(j\bar{\omega})|) = 20\log\left(\left|\frac{5}{j\bar{\omega}}\right|\right) = 20\log\left(\left|\frac{5}{j0.1}\right|\right) \\ &= 20\log 50 = 34\, dB\end{aligned}$$

Poiché il sistema ha uno zero e due poli, l'andamento finale del diagramma di moduli avrà una pendenza di $-20\, dB/decade$.

Per il diagramma delle fasi, poiché $G(s)$ ha un polo nell'origine, il valore iniziale è $-90^o = -\pi/2$. Il valore finale, poiché lo zero è a parte reale positiva e ci sono due poli, sarà $-3 \cdot 90^o = -270^o = -3\pi/2$.

5. I diagrammi di Bode asintotici sono rappresentati nella figura allegata.

6. L'ingresso $u(t)$ ha una pulsazione $\bar{\omega} = 3\, rad/sec$ e qindi un periodo

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = \frac{2\pi}{3} = 2.1\, sec.$$

Dai diagrammi di Bode asintotici si evince che

$$\begin{aligned}|G(j3)|_{dB} &\approx 0\, dB \\ \langle G(j3)\rangle &\approx -180^o\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned}|G(j3)| &\approx 10^{\frac{0}{20}} = 1 \\ \langle G(j3)\rangle_{rad} &\approx -\pi\, rad\end{aligned}$$

e quindi

$$y_{ss}(t) \approx 5|G(j3)|\sin(3t + \langle G(j3)\rangle_{rad}) = 5\sin(3t-\pi) = -5\sin 3t$$

Il ritardo nel tempo di $y_{ss}(t)$ rispetto a $u(t)$ è tale per cui

$$\bar{\omega}\bar{\tau} = \pi \quad \Longrightarrow \quad \bar{\tau} = \frac{\pi}{\bar{\omega}} = \frac{\pi}{3} = 1.05\, sec$$

Gli andamenti nel tempo di $u(t)$ e $y_{ss}(t)$ sono riportati nella figura allegata.

7. Si noti che il valore esatto della risposta in frequenza per $\bar{\omega} = 3\, rad/sec$ è dato da

$$G(j3) = 5\frac{1 - 0.3j}{j3(1 + 1.5j)} = 5\frac{1 - 0.3j}{-4.5 + 3j}$$

da cui

$$|G(j3)| = 5\frac{\sqrt{1 + 0.3^2}}{\sqrt{(-4.5)^2 + 3^2}} = 0.97$$

e

$$\begin{aligned}\langle G(j3)\rangle_{rad} &= \arctan(-0.3) - \arctan\left(-\frac{3}{4.5}\right) = -0.29 - (-0.59 + \pi) \\ &= 0.3 - \pi = -2.84\, rad\end{aligned}$$

Le differenze rispetto ai valori ottenuti in precedenza sono dovute al fatto che i diagrammi di Bode esatti differiscono da quelli asintotici: il diagramma dei moduli esatto è più in basso di quello asintotico, mentre quello delle fasi è più in alto di quello asintotico.

Come visto, il diagramma dei moduli passa per $0\, dB$ all'incirca alla pulsazione di $3\, rad/sec$. Per ingressi sinusoidali con pulsazioni maggiori, il sistema avrà un comportamento di tipo filtrante, cioè il segnale sarà attenuato in uscita. Se si aumenta il guadagno moltiplicativo di $G(s)$ tale pulsazione si sposta verso l'alto, cioè la banda passante aumenta.

L'aggiunta di un polo con pulsazione di rottura pari a $\bar{\omega} = 0.1\, rad/sec$ determinerebbe una pendenza di discesa del diagramma dei moduli di $-40\, dB/decade$ e quindi il diagramma dei moduli passerebbe per $0\, dB$ prima della pulsazione di $1\, rad/sec$.

Un ingresso a gradino per $G(s)$ determinerebbe un'uscita di regime a rampa, a causa del fatto che $G(s)$ ha un polo nell'origine. Ciò si evince anche dal fatto che il diagramma dei moduli ha un valore iniziale non costante.

Non essendoci poli complessi e coniugati, i diagrammi di Bode non hanno risonanze.

Il minimo ritardo di fase dell'uscita rispetto all'ingresso è di -90^o.

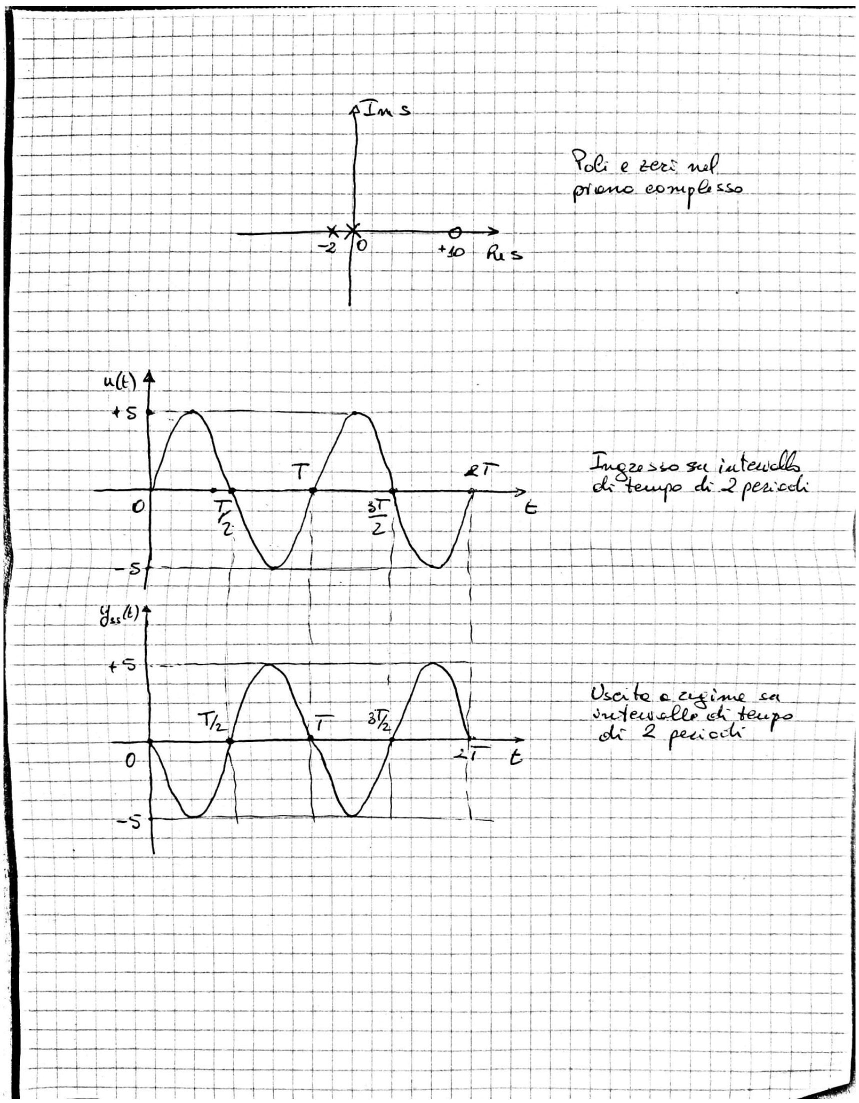


Figura 2: Andamenti nel tempo per Esercizio 2.

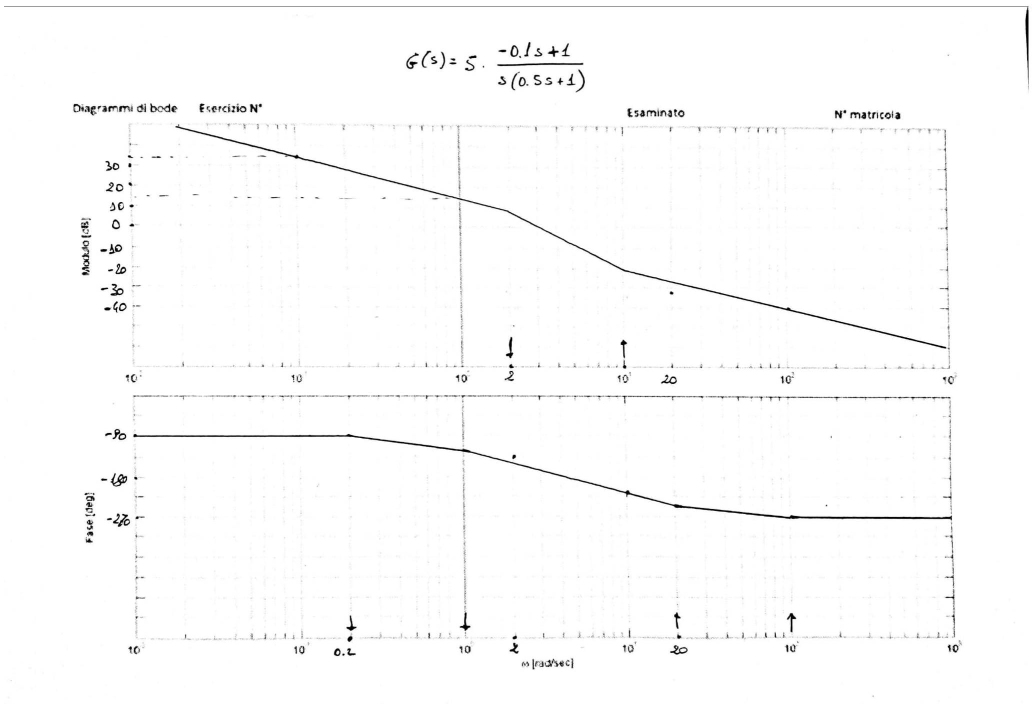


Figura 3: Andamenti diagrammi di Bode per Esercizio 2.