

Prova scritta di Sistemi Dinamici

29 dicembre 2023

Esercizio 1: risposta nel tempo

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2.1s + 0.2} \quad (1)$$

e l'ingresso $u(t)$ definito da

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & t \in [0, 2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases} \quad (2)$$

determinare:

1. L'espressione di $u(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t)$ con n opportuno in modo che ciascun segnale $u_i(t)$ abbia una trasformata di Laplace nota e tracciare gli andamenti di $u_i(t)$ per $i = 1, \dots, n$.
2. Determinare la trasformata di Laplace $U_i(s)$ di ciascun segnale $u_i(t)$, per $i = 1, \dots, n$.
3. Individuare gli opportuni segnali $\hat{u}_j(t)$, con $j = 1, \dots, m$, che consentono poi di calcolare in maniera semplice tutte le trasformate di Laplace delle uscite $y_i(t)$ ai segnali $u_i(t)$. Calcolare le trasformate di Laplace $\hat{Y}_j(s) = G(s)\hat{U}_j(s)$, per $j = 1, \dots, m$, utilizzando la scomposizione in fratti semplici.
4. Calcolare le anti-trasformate di Laplace $\hat{y}_j(t)$ per ciascuna $\hat{Y}_j(s)$, per $j = 1, \dots, m$. Per ciascun modo tracciare e discutere l'andamento nel tempo.
5. Calcolare analiticamente l'uscita $y_i(t)$ a ciascun ingresso $u_i(t)$, per $i = 1, \dots, n$.
6. Calcolare l'uscita $y(t)$ all'ingresso $u(t)$ e fare eventuali considerazioni sull'andamento di $y(t)$.

Esercizio 2: risposta in frequenza

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 \frac{1 - 0.1s}{s(s + 2)} \quad (3)$$

1. Esprimere $G(s)$ nella forma standard per i diagrammi di Bode, determinare poli e zeri e rappresentarli sul piano complesso.
2. Determinare i punti di rottura dei diagrammi di Bode asintotici.
3. Scegliere l'intervallo di frequenze d'interesse.
4. Determinare gli andamenti iniziali e finali dei diagrammi di Bode asintotici.
5. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici.
6. Dato il segnale d'ingresso

$$u(t) = 5 \sin 3t \quad (4)$$

determinare l'espressione dell'uscita a regime $y_{ss}(t)$ e tracciare gli andamenti nel tempo dell'ingresso $u(t)$ e dell'uscita $y_{ss}(t)$.

7. Effettuare eventuali considerazioni sui diagrammi di Bode: andamenti esatti, moduli di risonanza, banda passante, variazioni di guadagno, aggiunta di poli o zeri.



Esercizio 1: risposta nel tempo

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2.1s + 0.2} \quad (1)$$

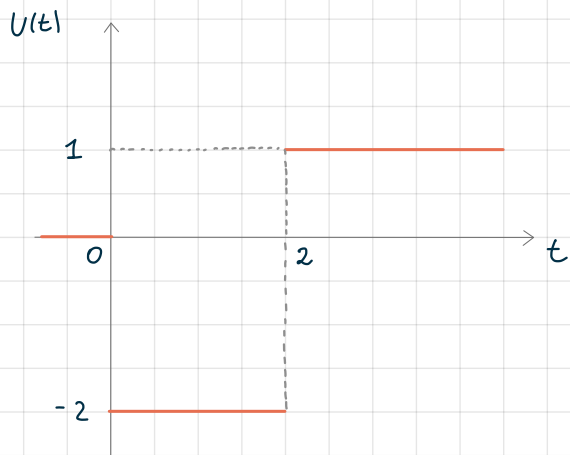
e l'ingresso $u(t)$ definito da

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & t \in [0, 2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2.1s + 0.2}$$

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & t \in [0, 2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

• Rapp. $U(t)$



• Poli e Zeri

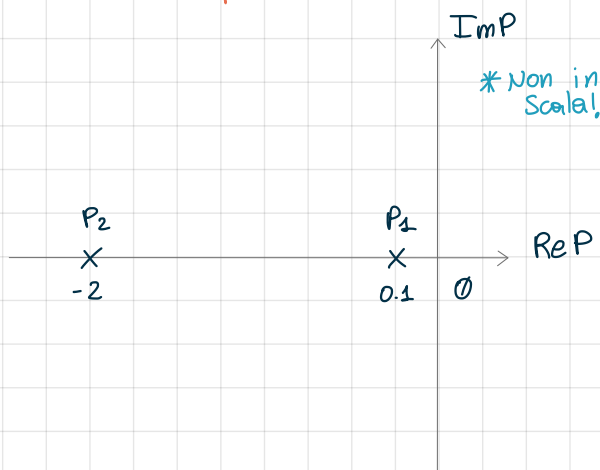
No Zeri, Poli: $\Delta = 2.1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.2 = 3.61 > 0$

$$P_{1,2} = \frac{-2.1 \pm \sqrt{3.61}}{2} \rightarrow P_1 = -0.4, P_2 = -2$$

→ Posso riscrivere $G(s)$ come

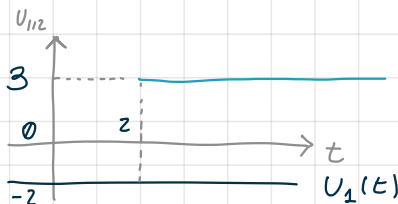
$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.4)(s + 2)}$$

• Piano Comp. Complex



• Singoli Termini di $U(t)$

$$\begin{cases} U_1(t) = -2 \cdot 1(t) \\ U_2(t) = +3 \cdot 1(t-2) \end{cases}$$



2) Trasformo i singoli Termini

$$\begin{cases} U_1(t) \Rightarrow U_1(s) = -2 \cdot \frac{1}{s} \\ U_2(t) \Rightarrow U_2(s) = 3 \cdot \frac{1}{s} \end{cases}$$

3) Sequenza fittizio

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{scelgo } \hat{U}(t) = 1(t) &\Rightarrow \hat{U}(s) = \frac{1}{s} \\ \Rightarrow \hat{Y}(s) = U(s) \cdot G(s) &= \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \hat{Y}(s) = \frac{\xi_1}{s} + \frac{\xi_2}{(s+1)} + \frac{\xi_3}{(s+2)}$$

$$\xi_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = 0.5 \quad \xi_1$$

$$\xi_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{-1 \cdot 1} = -1 \quad \xi_2$$

Posso usare il metodo con i limiti per tutti e 3 i residui!

$$z_3 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0.26 \quad z_3$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $-2 \quad -2$

• Basta Antitrasformare usando

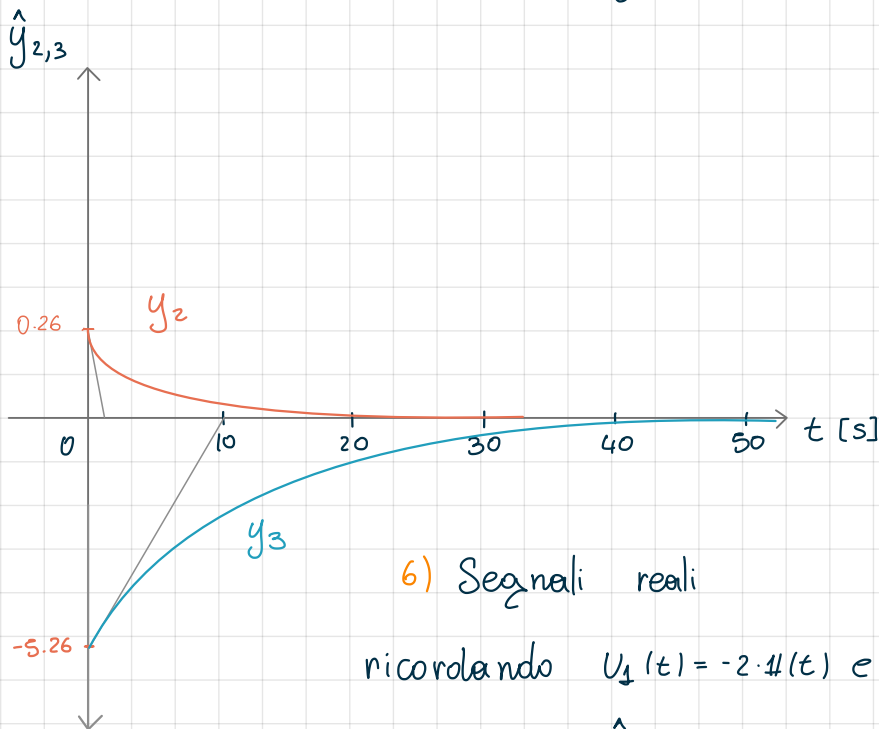
$$\frac{1}{s} \Rightarrow 1 \cdot \mathbb{1}(t) \quad ; \quad \frac{1}{s+k} \Rightarrow e^{-kt} \cdot \mathbb{1}(t)$$

$$\Rightarrow \hat{y}(t) = \left(\underset{\hat{y}_1}{z_1} + \underset{\hat{y}_2}{z_2} e^{-\frac{t}{10}} + \underset{\hat{y}_3}{z_3} e^{-2t} \right) \cdot \mathbb{1}(t)$$

Abbiamo un modo costante e due exp di τ diverso

$$\left. \begin{array}{l} \hat{y}_2 \rightarrow \tau_2 = 10 \\ \hat{y}_3 \rightarrow \tau_3 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_2 > \tau_3 \Rightarrow \hat{y}_3 \text{ si esaurisce molto più velocemente}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{y}_2 \text{ dopo } 40\text{s} \\ \hat{y}_3 \text{ dopo } 10\text{s} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_2 = -5.26 \\ z_3 = 0.26 \end{array} \right.$$



6) Segnali reali

ricordando $U_1(t) = -2 \cdot \mathbb{1}(t)$ e $U_2(t) = 3 \cdot \mathbb{1}(t-2)$

$$\Rightarrow y_1(t) = -2 \cdot \hat{y}(t) \quad , \quad y_2(t) = 3 \cdot \hat{y}(t-2)$$

$$= -2z_1 - 2z_2 e^{-\frac{t}{10}} - 2z_3 e^{-2t} \quad \quad = 3z_1 + 3z_2 e^{-\frac{3(t-2)}{10}} + 3z_3 e^{-6(t-2)}$$

L'uscita $y(t)$ è data da $y(t) = y_1 + y_2$ per la linearità

Time 30'

Esercizio 2: risposta in frequenza

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 \frac{1 - 0.1s}{s(s+2)}$$

$$G(s) = 10 \cdot \frac{1 - 0.1s}{s(s+2)}$$

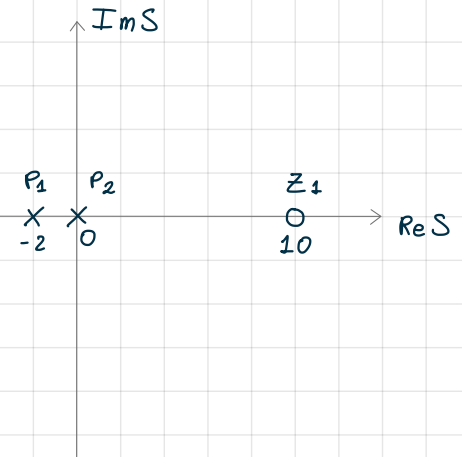
1) Forma Std

$$G(s) = K \cdot \frac{\prod (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod (1 + \frac{s}{p_i})} \leadsto G(s) = \overset{s}{10} \cdot \frac{1 - \frac{s}{10}}{s(1 + \frac{1}{2}s)} = \overset{\text{guadagno statico } > 0}{5} \frac{1 - \frac{s}{10}}{s(1 + \frac{1}{2}s)}$$

2) Punti di rottura

Z: $1 - \frac{s}{10} = 0$ per $\bar{s} = 10$ ∇ Zero a $\text{Re } p > 0$ ∇ Lo si comporta come Polo!

P: $\bar{s} = 0$, $1 + \frac{1}{2}s = 0 \rightarrow \bar{s} = -2$
 ∇ Polo in Origine ∇ Polo Semplice



$$\omega_1 = 2 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 10 \text{ rad/s}$$

3) Scelta della Banda

$$\omega \in [10^{-1}, 10^2] \text{ rad/s}$$

4) Andamenti iniziali e finali

MODULI

INIZ: abbiamo un polo in origine $\Rightarrow -20 \text{ dB/dec}$

Per quale punto passa?

Dobbiamo calcolare $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{K}{\omega}\right)$ Perché gli altri poli e zeri hanno contribuito iniziale di $0 \text{ dB/dec} \Rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{5}{0.1}\right) = 34 \text{ dB}$

* Come $\bar{\omega}$ ho preso il valore più piccolo della banda.

$$P_1: (10^{-1}, 34 \text{ dB})$$

FIN. 1 zero a $\text{Re } p > 0$ NON influenza il modulo!

1 Polo semplice ed un polo in 0 \Rightarrow TOT: 2 POLI, 1 ZERO

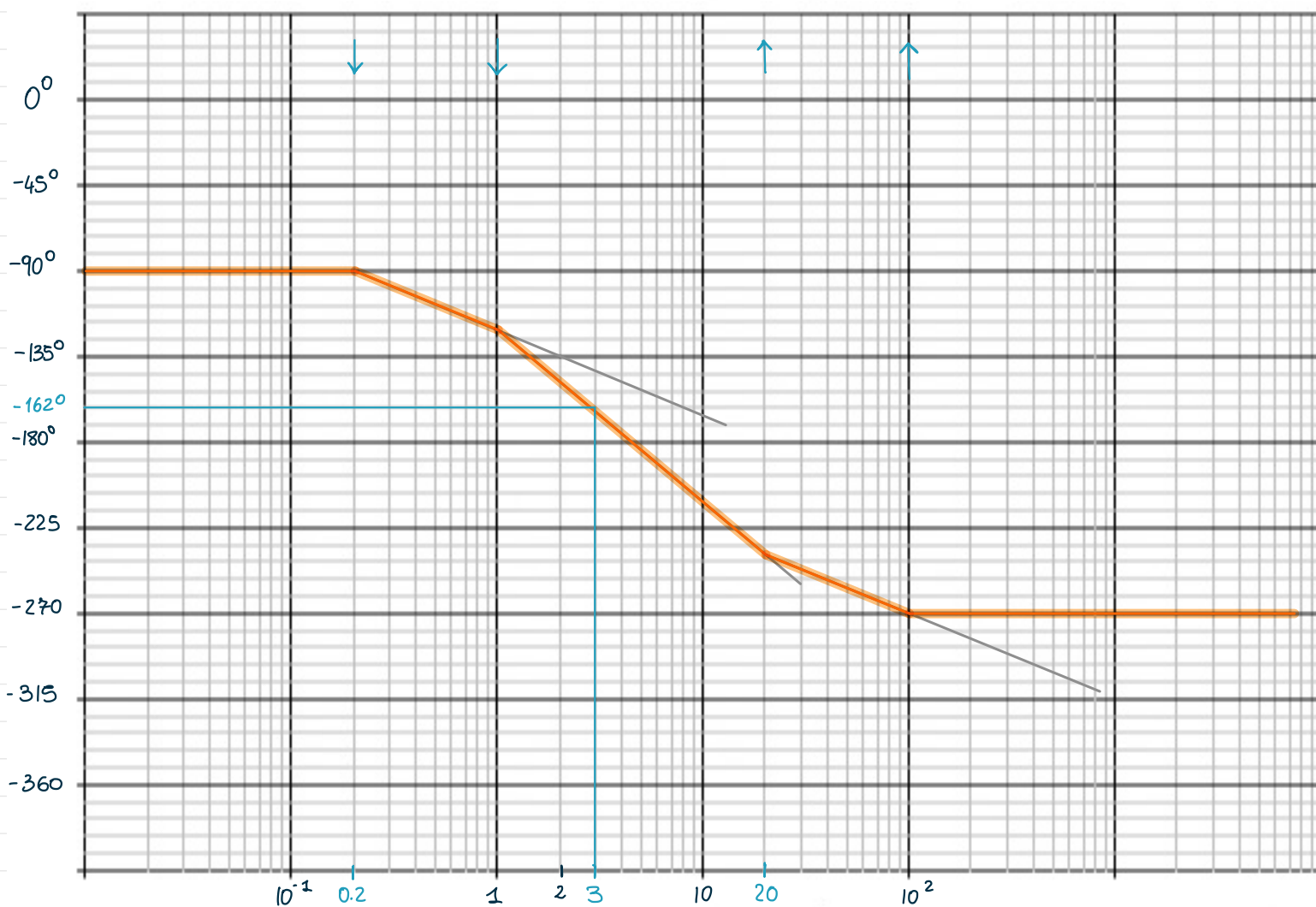
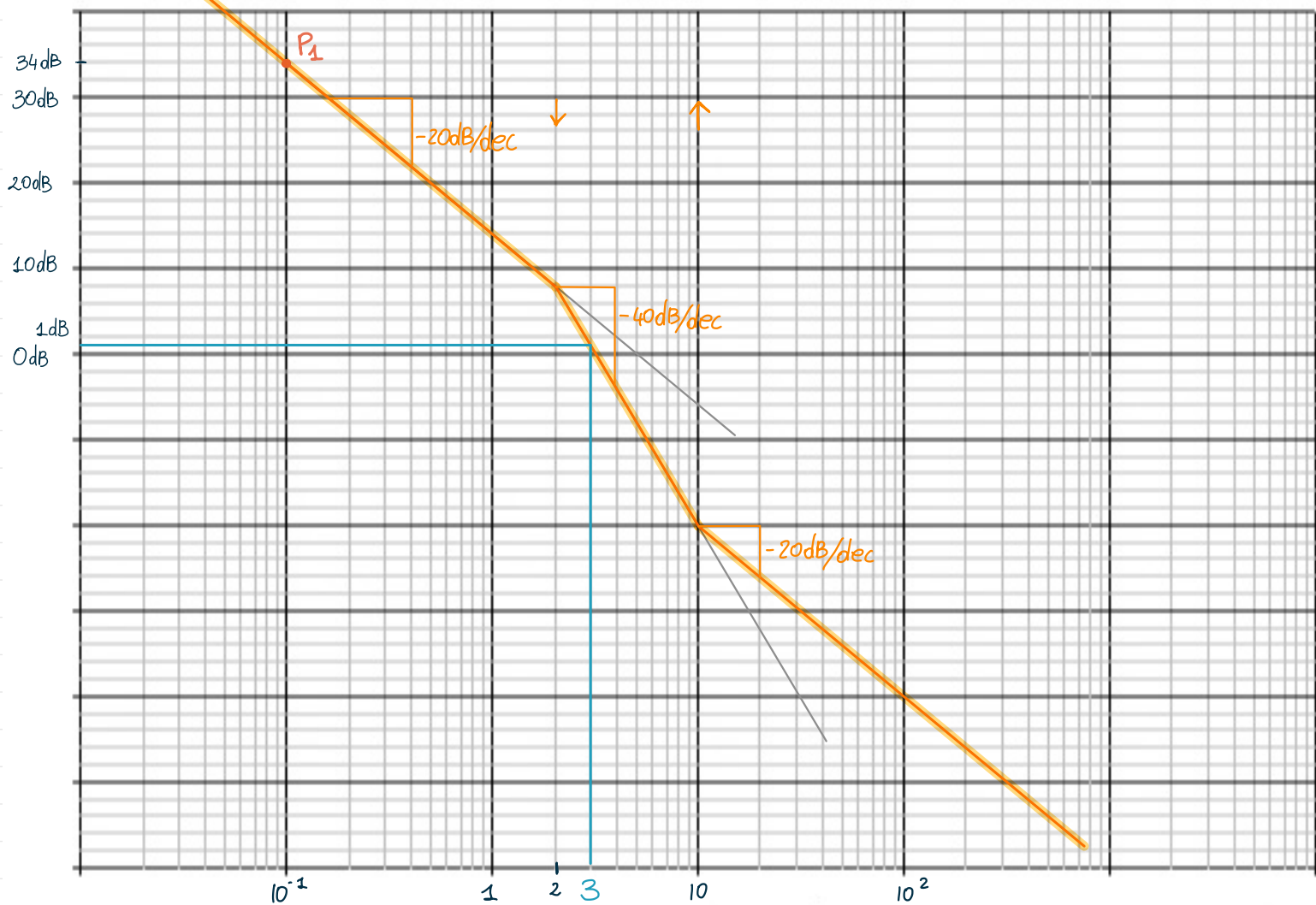
\Rightarrow Finale: $(-20 - 20 + 20) \text{ dB/dec}$

FASI

INIZIALE: 1 Polo in 0 $\Rightarrow -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$

FINALE: 3 "Poli" \Rightarrow Ritardo di $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$

Disegno



6) Uscita SS

Dato l'input $U(t) = 5 \sin(3t)$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = |G(j\bar{\omega})| \cdot X \cdot \sin(\bar{\omega}t + \angle G(j\bar{\omega})) \quad \text{con } \bar{\omega} = 3 \text{ e } X = 5$$

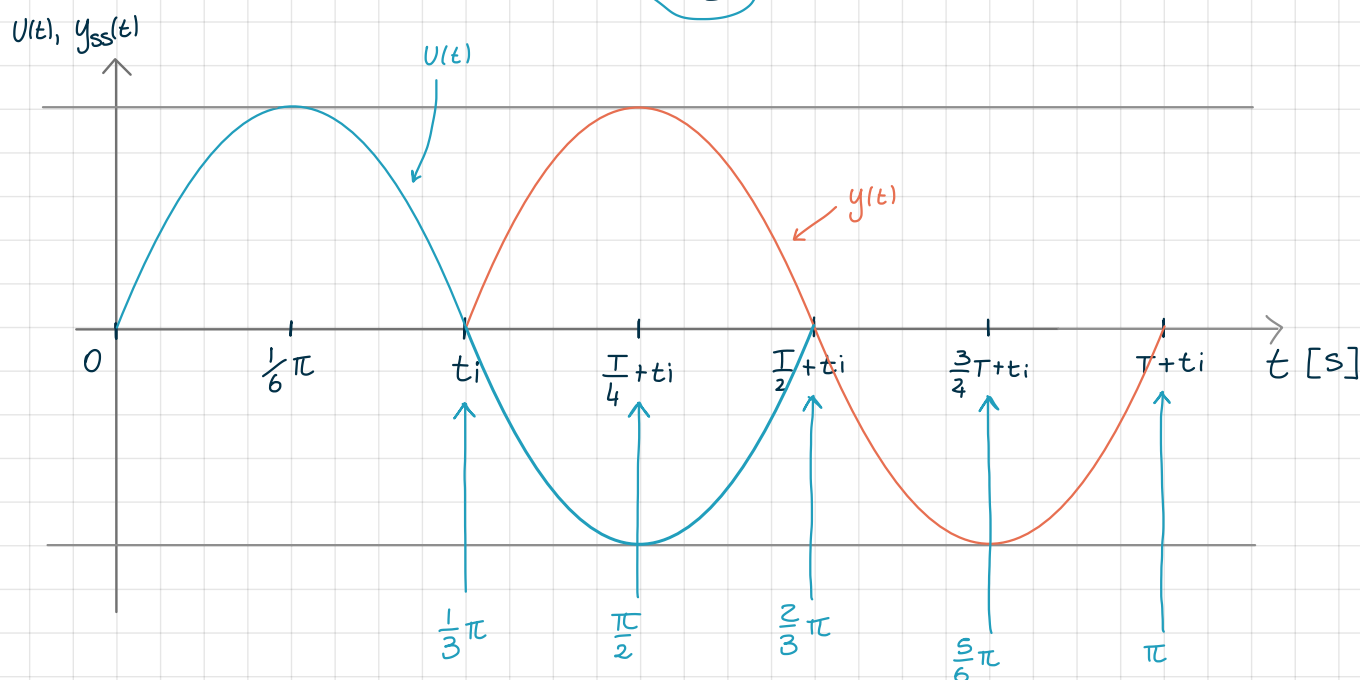
$$\bullet \left| G(j\bar{\omega}) \right|_{dB} = 1 \text{ dB} \quad \bar{\omega} = 3 \quad \leadsto 20 \log(y) = x \leadsto y = 10^{\frac{x}{20}} \leadsto |G(j\bar{\omega})| \stackrel{v}{\approx} 10^{\frac{1}{20}} \approx 1.12$$

$$\bullet \angle G(j\bar{\omega}) \approx -162^\circ = \frac{9}{10} \pi$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = 1.12 \cdot 5 \cdot \sin(3t - 162^\circ) \quad \text{Per semplicità considero } |G(j\bar{\omega})| = 1, \angle G(j\bar{\omega}) = -180^\circ = -\pi$$

$$\Rightarrow \bar{y}_{ss}(t) = 5 \sin(3t - \pi) \quad \leadsto T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3} \pi \approx 2.1 \text{ s}$$

Ritardo: $3t_i - \pi = 0$ per $t_i = \frac{\pi}{3}$ Ritardo $\Rightarrow t_f = t_i + T = \pi$



Esercizio 1: soluzione

1. Il segnale $u(t)$ si può scrivere come la somma dei seguenti due segnali:

$$\begin{aligned}u_1(t) &= -2 \mathbf{1}(t) \\ u_2(t) &= 3 \mathbf{1}(t-2)\end{aligned}$$

Gli andamenti sono riportati nella figura allegata.

2. Le trasformate di Laplace sono date da

$$\begin{aligned}U_1(s) &= -\frac{2}{s} \\ U_2(s) &= \frac{3}{s} e^{-2s}\end{aligned}$$

dove la prima è ottenuta applicando la linearità e la trasformata del gradino e la seconda applicando anche il teorema del ritardo nel tempo.

3. Il segnale $\hat{u}(t)$ che consente poi di calcolare la risposta del sistema è un semplice gradino: $\hat{u}(t) = \mathbf{1}(t)$. Quindi la corrispondente trasformata di Laplace dell'uscita è data da

$$\hat{Y}(s) = G(s)\hat{U}(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2.1s + 0.2)} = \frac{1}{s(s+2)(s+0.1)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+2} + \frac{r_3}{s+0.1}$$

Il calcolo dei residui fornisce:

$$\begin{aligned}r_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(s+2)(s+0.1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+2)(s+0.1)} = \frac{1}{0.2} = 5 \\ r_2 &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \hat{Y}(s) = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{1}{s(s+2)(s+0.1)} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{s(s+0.1)} = 0.26 \\ r_3 &= \lim_{s \rightarrow -0.1} (s+0.1) \hat{Y}(s) = \lim_{s \rightarrow -0.1} (s+0.1) \frac{1}{s(s+2)(s+0.1)} = \lim_{s \rightarrow -0.1} \frac{1}{s(s+2)} = -5.26\end{aligned}$$

4. L'antitrasformata di $\hat{Y}(s)$ è data da:

$$\hat{y}(t) = (5 + 0.26e^{-2t} - 5.26e^{-0.1t}) \mathbf{1}(t)$$

L'espressione di $\hat{y}(t)$ è data dalla somma di tre termini. Il primo è un gradino di ampiezza 5 che parte in $t = 0 \text{ sec}$.

Il secondo termine è un esponenziale che ha costante di tempo $\tau_1 = 1/2 = 0.5 \text{ sec}$ e parte in $t = 0 \text{ sec}$ dal valore positivo 0.26. Tale valore si può anche calcolare col teorema del valore iniziale:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{0.26}{s+2} = 0.26$$

Il tempo di assestamento all'1% è pari a $4\tau_1 = 2 \text{ sec}$ e quindi in questo istante di tempo questo termine vale meno di $0.26 \cdot 10^{-2}$. Il valore finale

è nullo come si evince sia dall'espressione nel tempo e sia dal teorema del valore finale

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{0.26}{s+2} = 0.$$

Il terzo termine è un esponenziale che ha costante di tempo $\tau_2 = 1/0.1 = 10 \text{ sec}$, e parte in $t = 0 \text{ sec}$ dal valore negativo -5.26 ; quindi, essendo il tempo di assestamento all'1% pari a 40 sec , in questo istante di tempo questo termine sarà negativo e in valore assoluto vale meno di 0.0526 .

Gli andamenti nel tempo sono riportati nella figura allegata.

5. Le risposte ai segnali $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sono date da

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -2\hat{y}(t) = -2(5 + 0.26e^{-2t} - 5.26e^{-0.1t}) \mathbf{1}(t) \\ y_2(t) &= 3\hat{y}(t-2) = 3(5 + 0.26e^{-2(t-2)} - 5.26e^{-0.1(t-2)}) \mathbf{1}(t-2) \end{aligned}$$

6. La risposta complessiva è data da

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Non essendoci impulsi, la risposta del sistema parte da valore nullo in $t = 0 \text{ sec}$. Poi va per valori negativi in quanto fino all'istante $t = 2 \text{ sec}$ è diverso da zero solo l'ingresso $u_1(t)$ e quindi anche $y_1(t) = 0$ e la risposta è come quella a un ingresso a gradino di ampiezza -2 . Il modo associato al polo -2 si estingue in 2 sec , quindi il valore della risposta in $t = 2 \text{ sec}$ è circa pari a

$$y(2) \approx -2(5 - 5.26e^{-0.2}) = -1.39$$

All'istante $t = 2 \text{ sec}$ diventa diverso da zero anche $u_2(t)$. Bisogna attendere circa 40 sec perché la risposta vada a regime al valore

$$y(42) \approx \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = -10 + 15 = 5$$

Questo valore poteva anche essere ottenuto immaginando che il sistema per $t \gg 2 \text{ sec}$ è come se fosse sottoposto a un ingresso a gradino di ampiezza 1 e quindi l'uscita a regime è data da

$$y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = G(0) = \frac{1}{0.2} = 5.$$

Un andamento qualitativo della risposta nel tempo è riportato nella figura allegata.

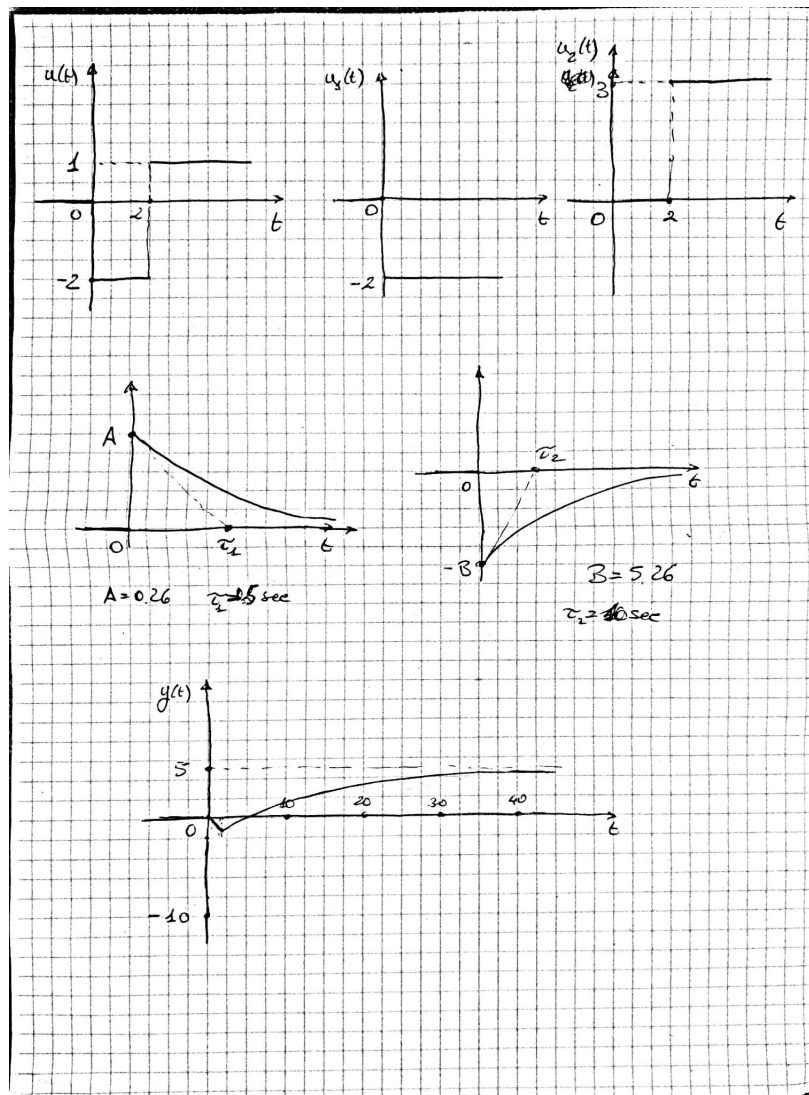


Figura 1: Andamenti nel tempo per Esercizio 1.

Esercizio 2: soluzione

1. La funzione di trasferimento nella forma standard dei diagrammi di Bode è data da:

$$G(s) = 10 \frac{1 - 0.1s}{s(s + 2)} = \frac{10}{2} \frac{1 - 0.1s}{s(1/2s + 1)} = 5 \frac{1 - 0.1s}{s(1 + 0.5s)}$$

La $G(s)$ ha uno zero a parte reale positiva in $z_1 = +10$, un polo nell'origine $p_1 = 0$ e un polo reale negativo $p_2 = -2$. La rappresentazione nel piano complesso è nella figura allegata.

2. I punti di rottura nei diagrammi di Bode asintotici sono $\omega_1 = 10 \text{ rad/sec}$ (associato allo zero z_1) e $\omega_2 = 2 \text{ rad/sec}$ (associato al polo p_2).

3. L'intervallo di frequenze d'interesse, considerando almeno una decade a sinistra del più piccolo punto di rottura e almeno una decade a destra del più grande punto di rottura, è

$$\omega \in [10^{-1}, 10^2] \text{ rad/sec}$$

4. Per il diagramma dei moduli, poiché $G(s)$ ha un polo nell'origine, l'andamento iniziale ha pendenza di -20 dB/decade e passa per il punto $\bar{\omega} = 10^{-1}$ e

$$\begin{aligned} |G(j\bar{\omega})|_{dB} &= 20 \log(|G(j\bar{\omega})|) = 20 \log \left(\left| \frac{5}{j\bar{\omega}} \right| \right) = 20 \log \left(\left| \frac{5}{j0.1} \right| \right) \\ &= 20 \log 50 = 34 \text{ dB} \end{aligned}$$

Poiché il sistema ha uno zero e due poli, l'andamento finale del diagramma di moduli avrà una pendenza di -20 dB/decade .

Per il diagramma delle fasi, poiché $G(s)$ ha un polo nell'origine, il valore iniziale è $-90^\circ = -\pi/2$. Il valore finale, poiché lo zero è a parte reale positiva e ci sono due poli, sarà $-3 \cdot 90^\circ = -270^\circ = -3\pi/2$.

5. I diagrammi di Bode asintotici sono rappresentati nella figura allegata.

6. L'ingresso $u(t)$ ha una pulsazione $\bar{\omega} = 3 \text{ rad/sec}$ e quindi un periodo

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = \frac{2\pi}{3} = 2.1 \text{ sec.}$$

Dai diagrammi di Bode asintotici si evince che

$$\begin{aligned} |G(j3)|_{dB} &\approx 0 \text{ dB} \\ \langle G(j3) \rangle &\approx -180^\circ \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} |G(j3)| &\approx 10^{\frac{0}{20}} = 1 \\ \langle G(j3) \rangle_{rad} &\approx -\pi \text{ rad} \end{aligned}$$

e quindi

$$y_{ss}(t) \approx 5|G(j3)| \sin(3t + \langle G(j3) \rangle_{rad}) = 5 \sin(3t - \pi) = -5 \sin 3t$$

Il ritardo nel tempo di $y_{ss}(t)$ rispetto a $u(t)$ è tale per cui

$$\bar{\omega}\bar{\tau} = \pi \quad \implies \quad \bar{\tau} = \frac{\pi}{\bar{\omega}} = \frac{\pi}{3} = 1.05 \text{ sec}$$

Gli andamenti nel tempo di $u(t)$ e $y_{ss}(t)$ sono riportati nella figura allegata.

7. Si noti che il valore esatto della risposta in frequenza per $\bar{\omega} = 3 \text{ rad/sec}$ è dato da

$$G(j3) = 5 \frac{1 - 0.3j}{j3(1 + 1.5j)} = 5 \frac{1 - 0.3j}{-4.5 + 3j}$$

da cui

$$|G(j3)| = 5 \frac{\sqrt{1 + 0.3^2}}{\sqrt{(-4.5)^2 + 3^2}} = 0.97$$

e

$$\begin{aligned} \langle G(j3) \rangle_{rad} &= \arctan(-0.3) - \arctan\left(-\frac{3}{4.5}\right) = -0.29 - (-0.59 + \pi) \\ &= 0.3 - \pi = -2.84 \text{ rad} \end{aligned}$$

Le differenze rispetto ai valori ottenuti in precedenza sono dovute al fatto che i diagrammi di Bode esatti differiscono da quelli asintotici: il diagramma dei moduli esatto è più in basso di quello asintotico, mentre quello delle fasi è più in alto di quello asintotico.

Come visto, il diagramma dei moduli passa per 0 dB all'incirca alla pulsazione di 3 rad/sec . Per ingressi sinusoidali con pulsazioni maggiori, il sistema avrà un comportamento di tipo filtrante, cioè il segnale sarà attenuato in uscita. Se si aumenta il guadagno moltiplicativo di $G(s)$ tale pulsazione si sposta verso l'alto, cioè la banda passante aumenta.

L'aggiunta di un polo con pulsazione di rottura pari a $\bar{\omega} = 0.1 \text{ rad/sec}$ determinerebbe una pendenza di discesa del diagramma dei moduli di -40 dB/decade e quindi il diagramma dei moduli passerebbe per 0 dB prima della pulsazione di 1 rad/sec .

Un ingresso a gradino per $G(s)$ determinerebbe un'uscita di regime a rampa, a causa del fatto che $G(s)$ ha un polo nell'origine. Ciò si evince anche dal fatto che il diagramma dei moduli ha un valore iniziale non costante.

Non essendoci poli complessi e coniugati, i diagrammi di Bode non hanno risonanze.

Il minimo ritardo di fase dell'uscita rispetto all'ingresso è di -90° .

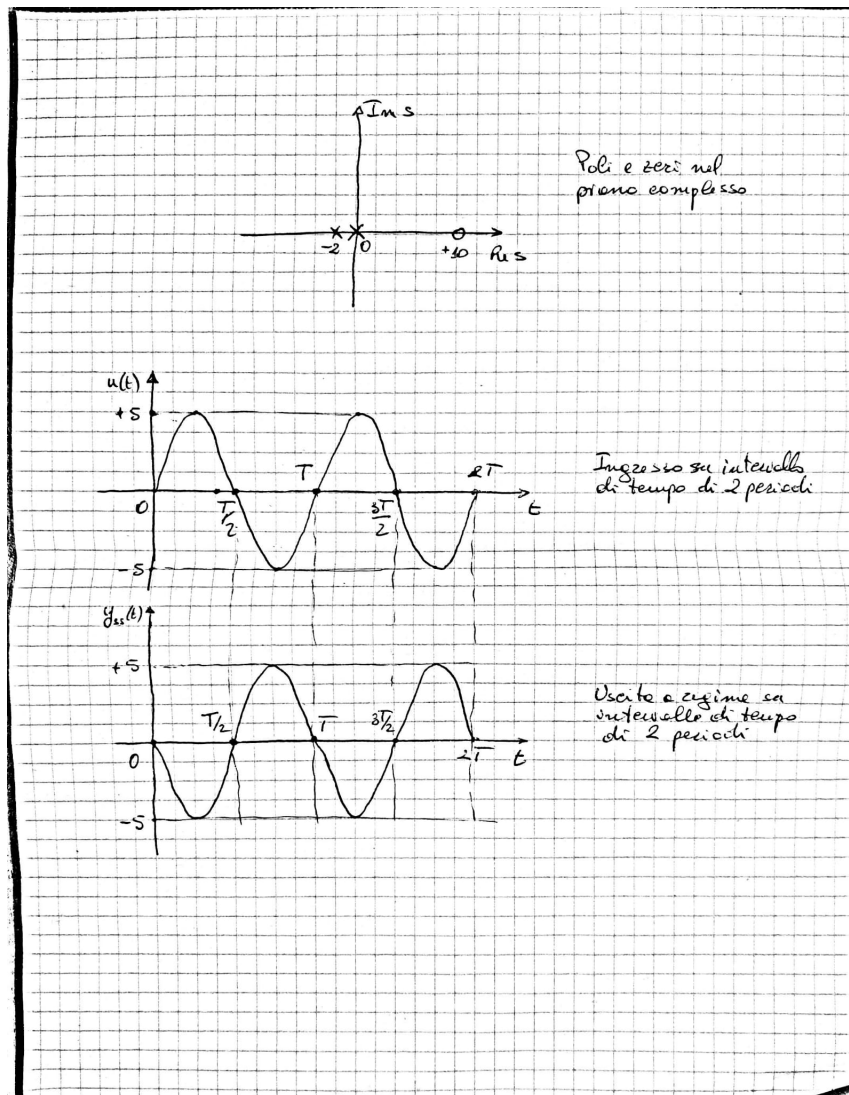


Figura 2: Andamenti nel tempo per Esercizio 2.

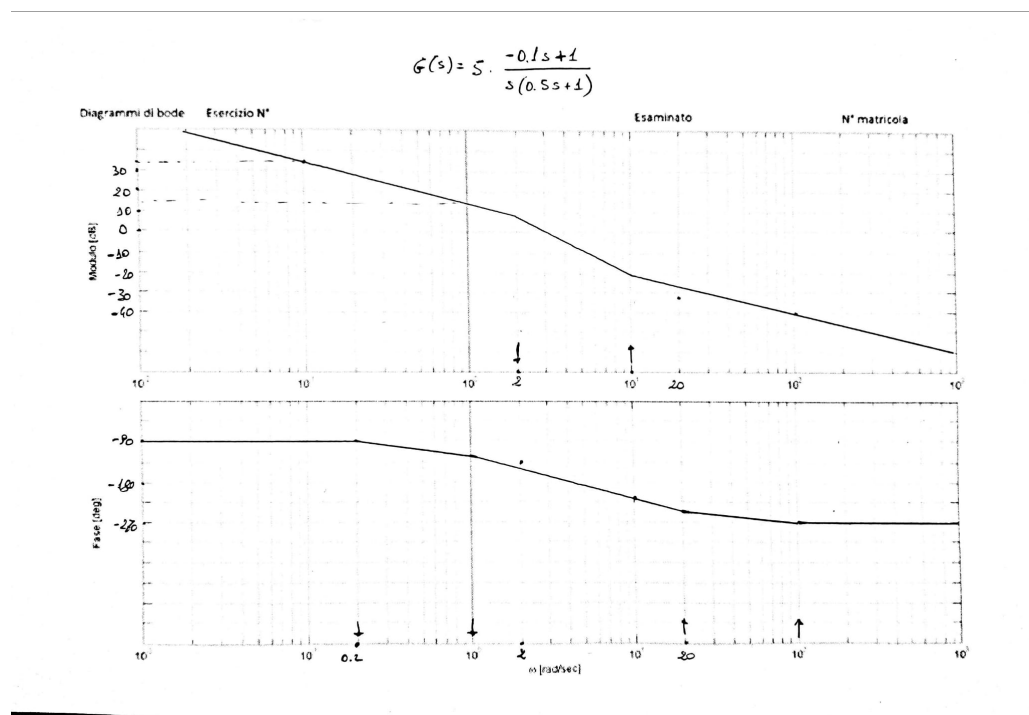


Figura 3: Andamenti diagrammi di Bode per Esercizio 2.