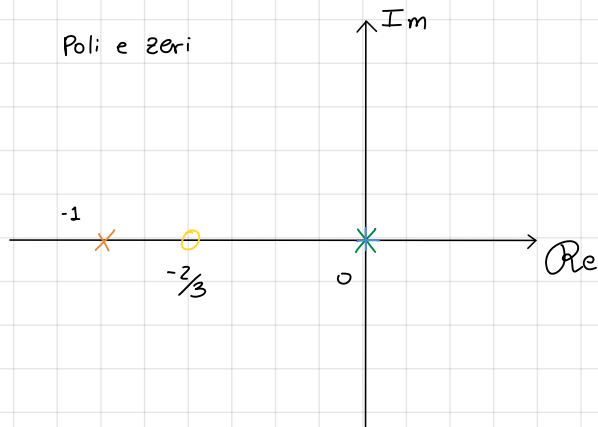


ES. POLI MULTIPLI

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2(s+1)} = \frac{\epsilon_1}{s} + \frac{\epsilon_2}{s^2} + \frac{\epsilon_3}{s+1}$$

Poli e zeri



$$\epsilon_3 = \lim_{s \rightarrow -1} \cancel{(s+1)} \frac{3s+2}{s^2 \cancel{(s+1)}} = \lim_{s \rightarrow -1} 3s+2 = \epsilon_3 = -1$$

$$\epsilon_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{3s+2}{s^2(s+1)} = 2 \epsilon_2$$

$$\epsilon_1: \frac{3s+2}{s^2(s+1)} \cancel{s^2} = s \epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{\epsilon_3 s^2}{s+1}$$

$$mcm \rightarrow \frac{3s+2}{s+1} = \frac{(s^2+s)\epsilon_1 + \epsilon_2(s+1) + \epsilon_3 s^2}{s+1} = \frac{s^2(\epsilon_1 + \epsilon_3) + s(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \epsilon_2}{s+1}$$

$$\Rightarrow N_1 = N_2 \Rightarrow 3s+2 = s^2(\epsilon_1 + \epsilon_3) + s(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \epsilon_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s(\epsilon_1 + \epsilon_2) = 3s \Rightarrow \epsilon_1 + \epsilon_2 = 3 \\ \epsilon_2 = 2 \\ \epsilon_1 + \epsilon_3 = 0 \Rightarrow \epsilon_1 = -\epsilon_3 \end{cases} \Rightarrow \epsilon_1 = 1 \epsilon_1$$

Se non riusciamo a trovare i residui, possiamo **derivare** rispetto ad s ; Derivando qualche termine di grado due *potrebbe scomparire qualche coefficiente*.

In linea generale:

1. Calcolare i residui che riusciamo a calcolare con il metodo classico (limite)
2. Calcolare i residui restanti facendo l'uguaglianza
3. Se ci sono troppi termini derivare rispetto ad s l'uguaglianza.

$$ES: \quad 3 = 2(\epsilon_1 + \epsilon_3)s + \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2(s+1)} = \frac{\epsilon_1}{s} + \frac{\epsilon_2}{s^2} + \frac{\epsilon_3}{s+1} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow f(t) = \left[1 + 2t - e^{-t} \right] \cdot \mathbb{1}(t)$$

Applicare sempre sempre i teoremi visti

- valore iniziale
- Valore finale
- Teorema della derivata

Se la funzione è difficile possiamo fare più grafici, uno per ogni termine sommato, e poi sommare tutti i grafici insieme.

Inserisci grafici

A che serve l'espansione in serie di TAYLOR ? (NOTA)

$$f_3(t) = -e^{-t} \quad \rightarrow \quad f(t) = f(t_0) + \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0} (t-t_0) + \dots + (t-t_0)^n$$

Sempre più piccoli

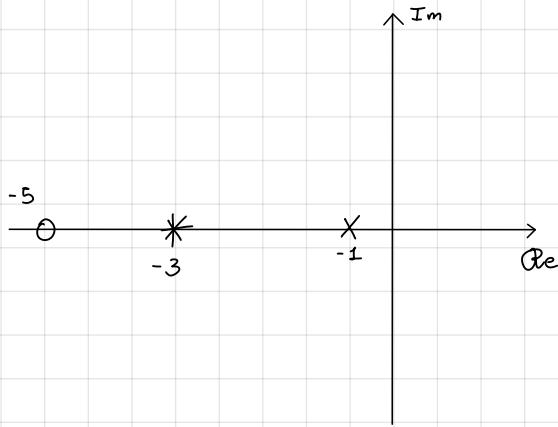
$$\Rightarrow f_3(t) \simeq -1 + t \quad \text{Retta}$$

ES: Poli doppi in un punto diverso da 0

$$F(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)^2} = \frac{z_1}{s+1} + \frac{z_2}{s+3} + \frac{z_3}{(s+3)^2} \rightarrow \frac{1}{s+1} + \frac{z_2}{s+3} - \frac{1}{(s+3)^2}$$

$$z_3 = -1$$

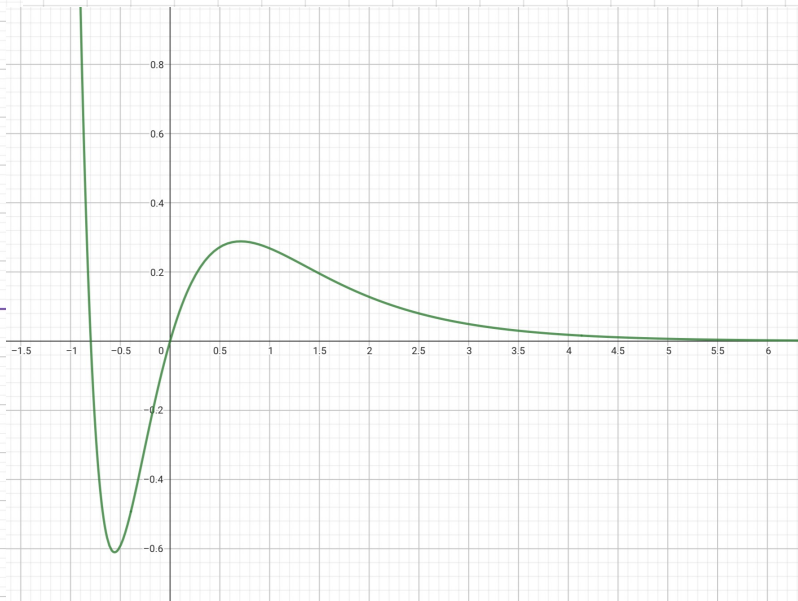
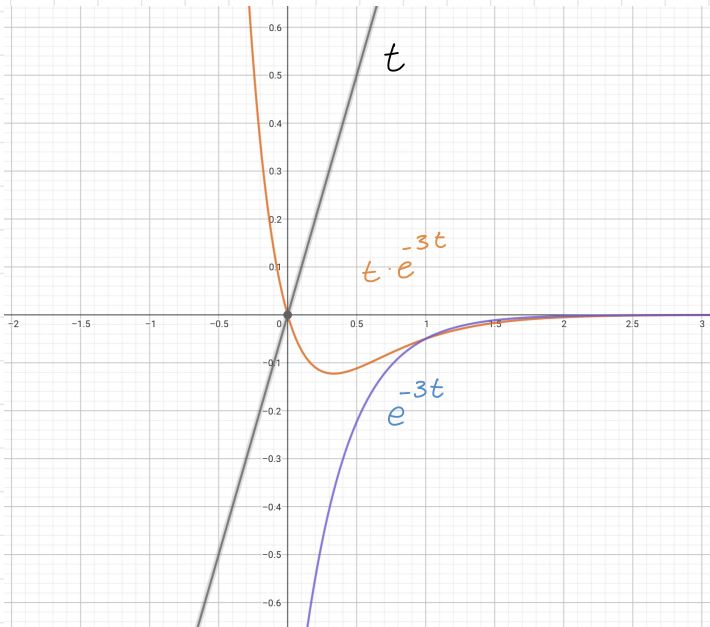
$$z_1 = 1$$



$$\begin{aligned} \frac{s+5}{(s+1)} &= z_3 + z_2(s+3) + z_1 \frac{(s+3)^2}{s+1} \\ &= \frac{-s-1 + z_2(s+3)(s+1) + (s+3)^2}{s+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_2 = -1$$

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} - \frac{1}{(s+3)^2} \Rightarrow f(t) = \left[e^{-t} \cdot e^{-3t} - t e^{-3t} \right] \mathbb{1}(t)$$



$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$$

Utilizzando la trasformata di Laplace e la linearità possiamo trasformare un'equazione differenziale in un'equazione algebrica.

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)\right] = s^2 F(s) - s f(0^+) - \left.\frac{df}{dt}\right|_{0^+} \Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - s f(0^+) - \dot{f}|_0$$

Per poter risolvere un'equazione differenziale, abbiamo bisogno di avere tante **condizioni iniziali** tante sono le derivate dalla variabile (ordine dell'equazione differenziale).

$$\text{CONDIZIONI INIZIALI} \begin{cases} x(0) = x_0 = a \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = b \end{cases}$$

$$s^2 \bar{x}(s) - sa - b + 3(s\bar{x}(s) - a) + 2\bar{x}(s) = 0$$

$$(s^2 + 3s + 2)\bar{x}(s) = sa + b + 3a \Rightarrow \bar{x}(s) = \frac{as + 3a + b}{s^2 + 3s + 2}$$

POLI
 Reali \rightarrow EXP
 Complessi \rightarrow Sin/cos
 e coniaz

$$\Rightarrow \text{POLI: } \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(s) = \frac{z_1}{s+1} + \frac{z_2}{s+2}$$

$$z_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{as + 3a + b}{(s+2)} = \underline{2a+b} \quad z_1$$

$$z_2 = \underline{-a-b} \quad z_2$$

$$\Rightarrow x(t) = \left[(2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t} \right] \cdot 1(t)$$

SOLUZIONE

La soluzione deve soddisfare:

- le due condizioni iniziali
- L'equazione differenziale (devo derivare $x(t)$)

Possibile esercizio esame

EQ DIFF completa

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = u$$

↑
Segnale ← DECIDIAMO NOI IL SEGNALE

$$\text{Se } u(t) = A \cdot \mathbb{1}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{A}{s}$$

Esempio: il segnale u potrebbe essere il segnale in input che viene dato da una centralina al motore che indica quanta aria deve ricevere il motore; questo è uno dei problemi di controlli più complessi.

Per un sistema LTI

$$\rightarrow \bar{X}(s) = \underbrace{\frac{sa + b + 3a}{(s+1)(s+2)}}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA}} + \underbrace{\frac{A}{s(s+1)(s+2)}}_{\text{EVOLUZIONE FORZATA}}$$

↑
Risposta a