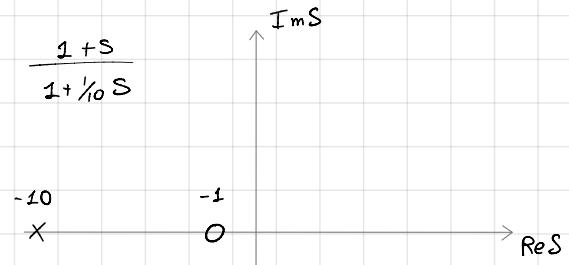


## Esempio Bode 1° ordine

$$G(s) = 100 \cdot \frac{s+1}{s+10} = 100 \cdot \frac{(s+1)}{10(s+\frac{1}{10}s)} = 10 \cdot \frac{1+s}{1+\frac{1}{10}s}$$

Poli:  $P_1 = -10 \rightsquigarrow \omega_1 = 10 \text{ rad/s}$

Zeri:  $Z_1 = -1 \rightsquigarrow \omega_2 = 1 \text{ rad/s}$



Intervallo di pulsazione

$$\bar{\omega} \in [10^{-1}; 10^2] \text{ rad/s}$$

Andamenti iniziali e finali

$$W(j\omega) = 10 \cdot \frac{1+j\omega}{1+\frac{1}{10}j\omega}$$

Moduli:  $\omega$  molto piccoli  $\rightarrow |G(0)|_{dB} = 20 \log(10) = 20 \text{ dB}$

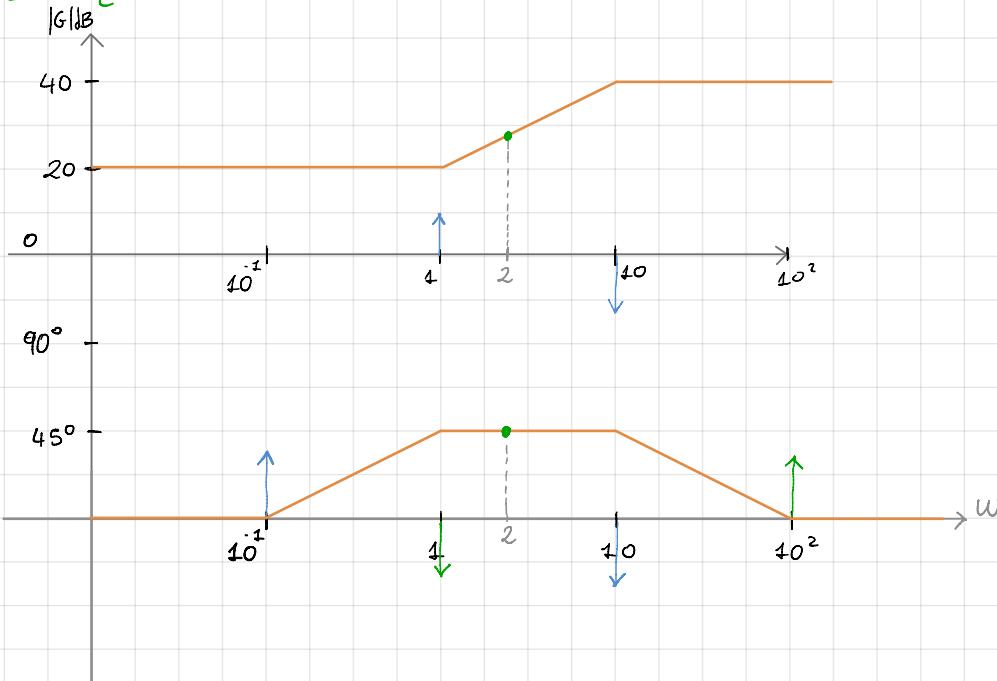
Valore iniziale

La pendenza finale del diagramma di bode del modulo è 0dB/dec, perché la funzione di trasferimento ha lo stesso numero di zeri e poli a parte reale negativa; il loro effetto si cancella a vicenda.

Fasi:  $\omega$  molto piccoli  $\rightarrow \angle G(0) = 0^\circ$  Perché non ci sono né poli né zeri nell'origine

$\omega$  molto grandi  $\rightarrow \angle G(\infty) = -90^\circ (n-m) = 0^\circ$  perché la Fdt ha 1 zero a P.R.Neg e 1 polo a P.R.Neg

Disegno



Scrivere la retta per valori specifici di  $w$

$$\bar{w} = w_0 \quad \text{Mi servono due punti}$$

$$\left| \frac{G(j\bar{w})}{dB} \right| = \frac{\left| G(jw_2) \right|_{dB} - \left| G(jw_1) \right|_{dB}}{\log w_2 - \log w_1} \cdot \left( \log(w_0) - \log(w_1) \right) + \left| G(jw) \right|_{dB}$$

con  $\bar{w} \in [w_1, w_2]$

Perche la fase iniziale e zero

$$G(j\omega) = 10 \frac{1+j\omega}{1+j0.1\omega} = 10 \cdot (1+j\omega) \frac{1}{1+j0.1\omega}$$

$$\underline{G(j\omega)} = \underbrace{10}_\text{Im s} + \underbrace{j\omega + \frac{1}{1+j0.1\omega}}_\text{Re s} = 0^\circ$$

Per  $\omega=0$  la  
fase degli ultimi due termini  
e zero

$$\bar{s} = |\bar{s}| \cdot e^{j\bar{\angle}}$$

$$\begin{aligned}\bar{s} &= \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 = |\bar{s}_1| e^{j\bar{\angle}_1} \cdot |\bar{s}_2| e^{j\bar{\angle}_2} \\ &= \underbrace{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|}_{|\bar{s}|} e^{j(\bar{\angle}_1 + \bar{\angle}_2)}\end{aligned}$$

Trovare l'uscita a regime

$$U(t) = 7 \sin(2t)$$

$$y_{ss}(t) \approx 7 \cdot |G(j2)| \cdot \sin(2t + \angle G(j2))$$

$$|G(j2)| = ? \quad \text{Retta}$$

$$|G| = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{40 - 20}{\log(10) - \log(1)}$$

Funzione di  $x$

$$\log(w) + 20$$

da dove  
inizia

$$\Rightarrow |G(w)| = 20 \log(2) + 20 \approx 26 \text{ dB}$$

$$\hookrightarrow 20 \log(x) = 26 \Rightarrow x = 10^{\frac{26}{20}} \approx 19.95$$

$|G(j2)|$

$$\angle G(j2) = 45^\circ \text{ dal diag.}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

lo esprimo in rad  
perché l'angolo del sin  
è in rad

$$\Rightarrow y_{ss}(t) \approx 140 \sin(2t + \frac{\pi}{4})$$

Ans

Domande

Calcolo dell'errore

Per calcolare l'errore dobbiamo calcolare in maniera esatta  $G(j2)$

$$G(j2) = 100 \cdot \frac{1+j2}{10+j2} \Rightarrow 100 (1+j2) (10-j2) \cdot \frac{1}{(40+j2)(10-j2)} = 10^2 \frac{10+j20-j2+4}{10^2 + 2^2}$$
$$= \frac{100}{104} (14+j18) = \frac{100}{104} \sqrt{14^2 + 18^2} = 21.93 \text{ modulo esatto}$$

in  $\omega=2$

Considerazioni \*

## Fattori del II ordine

Abbiamo scritto la Fdt generica del 2<sup>o</sup> ordine come  $G(S) = \frac{1}{S^2 + 2fW_n S + W_n^2}$

$$\text{Trovo i poli: } \bar{s} = -\sigma w_n \pm \sqrt{(\sigma w_n)^2 - w_n^2} = -\sigma w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \sigma^2}$$

Complex e coniugati

Se  $0 < \sigma < 1$

$$\rightarrow \text{Metto } w_n^2 \text{ in evidence} = S^2 + 2f w_n s + w_n^2 = w_n^2 \left( \frac{S^2}{w_n^2} + \frac{2f}{w_n} s + f \right)$$

Generica FdT del 2° ordine in forma di Bode

$$G(S) = \frac{1}{1 + \frac{2\sigma}{\omega_n} S + \frac{1}{\omega_n^2} S^2} \quad \xrightarrow{\text{Let } S=j\omega} G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\sigma}{\omega_n} j\omega - \frac{1}{\omega_n^2} \omega^2} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\sigma}{\omega_n} \omega}$$

## Valori iniziali e finali delle fasi

$W \rightarrow \emptyset$

$$G(j\omega) \stackrel{\sim}{=} \frac{1}{1 - 0 + 0} \rightarrow 1$$

$$\angle G(\omega) = \angle 1 = 0^\circ$$

W-0 00

$$G(j\omega) \approx \frac{1}{1 - \frac{W^2}{W_n^2} + j \frac{W}{W_n}} \approx \frac{1}{-\frac{W^2}{W_n^2}} = -\frac{W_n^2}{W^2} \xrightarrow[W \rightarrow \infty]{} 0$$

Trescubro.

$\Downarrow$

per  $W \rightarrow \infty$

"Pirenta Real"

$\Rightarrow$  Se  $G(j\omega)$  diretta reale possono scriverlo come  $G(j\omega) = K$

$$\Rightarrow K = K \cdot e^{\pm j\pi} \text{ no proof } \Rightarrow K e^{\pm j\pi} = K (\cos \pi + j \sin \pi) = K \quad QED$$

$$\Rightarrow \underline{G(j\omega)} \approx -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} e^{\pm j\pi} \text{ Fase}$$

$= -\pi = -180^\circ$  Fase finale

come Convenzione

## Valori iniziali e finali Dei Moduli

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \omega\right)^2}$$

- A pulsazioni ALTE ( $\omega \gg \omega_n$ )  $\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$

$$-20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \omega\right)^2}$$

Trasc.  
+1dec

$$\omega_1 ; \quad \omega_2 = 10 \omega_1$$

"  $\omega_2$  è molto più grande di  $\omega_1$ "

Andamento finale  
del modulo

$$\text{Per trovare la pendenza calcolo } f(\omega_2) - f(\omega_1) = -20 \log \left(\frac{10\omega_1}{\omega_n}\right) - \left(-20 \log \frac{\omega_1}{\omega_n}\right)$$

$$= -20 \log(10) - 20 \log \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right) + 20 \log \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right) = -20 \log(10) = -40 \text{ dB/dec}$$

Pendenza

- A pulsazioni BASSE ( $\omega \ll \omega_n$ )  $\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \omega\right)^2}$

$$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \underset{\omega \ll \omega_n}{\approx} -20 \log(1) = 0 \text{ dB}$$

Valore iniziale  
del modulo

## Considerazioni sul punto di rottura - Diagramma dei Moduli

Cosa accade in  $w = w_n$ ?  $\Rightarrow$  Modulo esatto

$$|G(jw)| = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2j}{w_n}w\right)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{2j}{w_n}w_n\right)^2}$$

Vedi sopra

$$= \sqrt{(2j)^2} = -20 \log_{10}(2j) \text{ modulo per } w=w_n$$

Dipende da  $j$ !

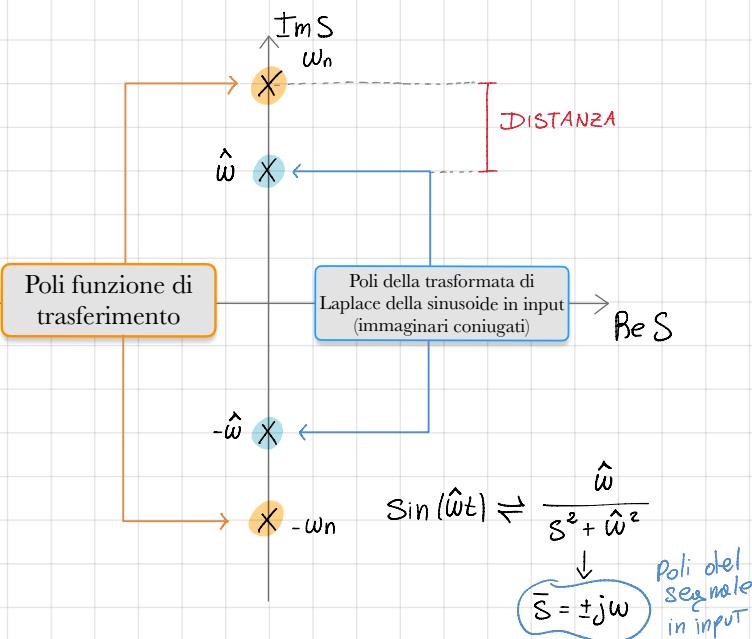
Analizzando la (1)

$$\left|G\right|_{dB} = -20 \log_{10}(2j) \Rightarrow \text{per } j < \frac{1}{2} \Rightarrow 2j < 1 \Rightarrow \log(2j) \text{ è Neg} \quad (\text{per } 0 < n < 1)$$

$\Rightarrow -\log(2j) > 0$  POSITIVO!

Moral della favola: quando prendiamo  $z < 1/2$  allora otteniamo che il modulo in corrispondenza di  $w=w_n$  è positivo

Quanto più  $z$  tende a zero tanto più il sistema tende ad essere instabile; se oltre questo andiamo a sollecitare il sistema con una frequenza vicina a quella di risonanza del sistema, allora **l'uscita potrebbe** (sicuramente lo farà) **divergere**, ovvero avere un'uscita incontrollata.



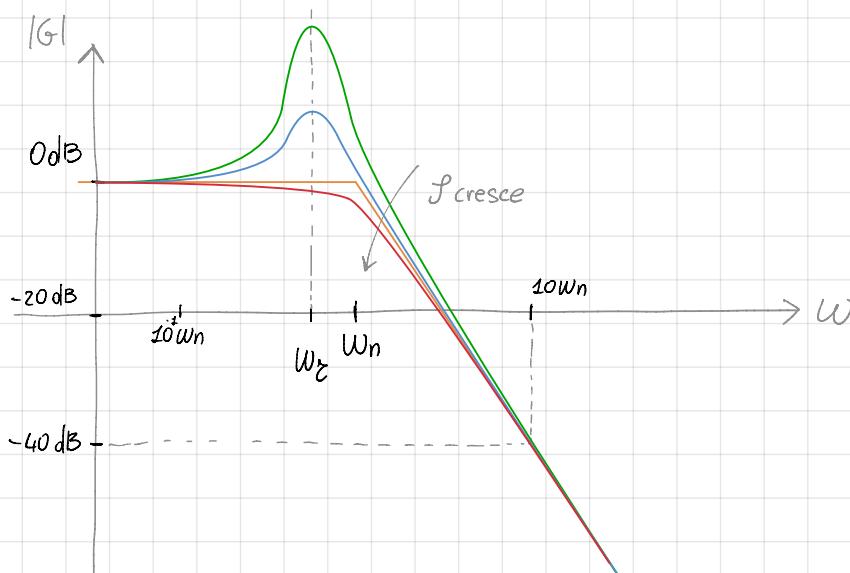
### Quindi

Se la distanza tra i poli (quelli della fdt e della sinusode in input) è infinitesimale, la risposta tende ad essere **instabile**; questo perché è come se avessimo due poli **coincidenti** sull'asse immaginario, che si traduce in un sistema instabile!

Quando cambia *omega\_cappello* e si avvicina ad  $w_n$ , l'uscita diventa una  $Y(s)$  avente dei poli complessi e coniugati con molteplicità doppia, ovvero un sistema instabile.

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2j}{w_n}s + \frac{1}{w_n^2}s^2} \underset{j \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{1}{w_n^2}s^2}$$

$$\Rightarrow \bar{s} = \pm jw_n \quad \text{Poli della fdt}$$



## Diagramma delle fasi

Il valore iniziale e finale della fase è:  $\angle G(j\omega)$

$w < w_n \quad 0^\circ$

$w \gg w_n \quad -180^\circ$

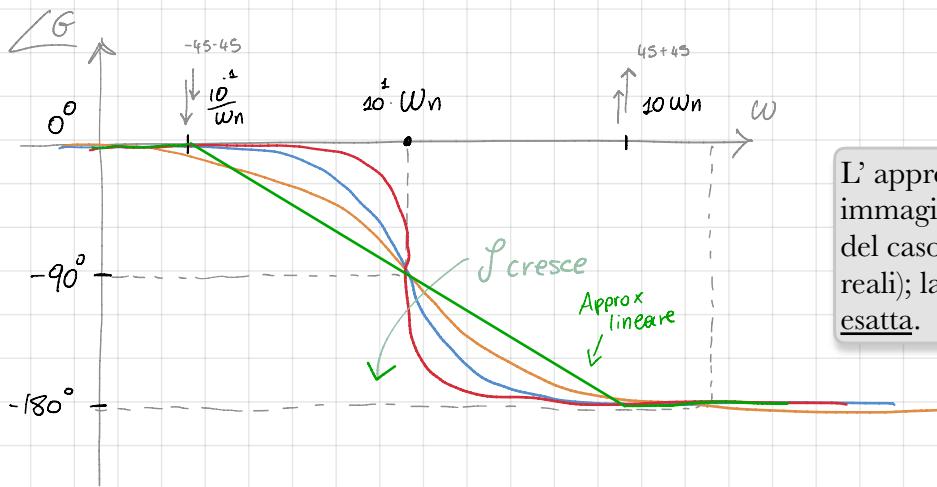
$$\leadsto G(j\omega) = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\Rightarrow \angle G(j\omega) = -\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

Cosa accade  
alla fase quando  
 $w \rightarrow \omega_n$ ?

Per  $w \rightarrow \omega_n$ :  $\angle G(j\omega) \rightarrow -\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right) \rightarrow -\angle 1 + j2\zeta = -\angle 1 - \angle j2\zeta$

$$\angle j2\zeta = \angle 2\zeta e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \angle G(j\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} = -90^\circ \text{ In } w=\omega_n \text{ la fase è } -90^\circ$$



L'approssimazione della fase dei due poli immaginari è praticamente uguale alla fase del caso visto precedentemente (due poli reali); la differenza sta nella rappresentazione esatta.

# Trorare il Valore della frequenza di risonanza

Dal calcolo del modulo:  $|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2j}{\omega_n} \omega\right)^2}$

Per trovare il massimo del modulo  
devo trovare il minimo della  
funzione  $g(z)$  sotto la radice.  
Questo perché il valore del modulo  
in decibel ha un segno meno davanti  
alla radice.

$$\Rightarrow g(\omega) = \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4j^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \quad \text{Pongo } z = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$\Rightarrow g(z) = (1-z)^2 + 4j^2 z^2 = 1 + z^2 - 2z + 4j^2 z = z^2 + z(4j^2 - 2) + 1$$

$$\text{mo } \frac{d}{dz} g(z) = 2z + 4j^2 - 2 = 0 \quad \text{mo } z = \frac{2 - 4j^2}{2} = 1 - 2j^2 \quad \text{Valore di } z \text{ che annulla la derivata}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\omega_z^2}{\omega_n^2} = 1 - 2j^2 \Rightarrow \omega_z^2 = \omega_n^2 (1 - 2j^2) \Rightarrow \omega_z = \omega_n \sqrt{1 - 2j^2}$$

Pulsazione di risonanza

Siccome  $j$  è come argomento alla radice  $\text{mo } 1 - 2j^2 > 0 \Rightarrow j < \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707$

$\uparrow$   
DEVE

## Morale della favola

Se zeta è maggiore di 0.707 tutto il ragionamento fatto non vale, ovvero **non c'è risonanza**; in altre parole il modulo non va oltre gli 0dB predetti dal diagramma asintotico (che non è esatto proprio a seconda di zeta!).

Tanto più i poli sono posizionati vicini all'asse immaginario, tanto più è presente un fenomeno di risonanza nella risposta in frequenza.

## Modulo in dB in corrispondenza della freq di risonanza

$$\begin{aligned} |G(j\omega_z)|_{dB} &= -20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_z}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4j^2 \left(\frac{\omega_z}{\omega_n}\right)^2} = -20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_n \sqrt{1-2j^2}}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4j^2 \left(\frac{\omega_n \sqrt{1-2j^2}}{\omega_n}\right)^2} \\ &= -20 \log \sqrt{(1 - z)^2 + 4j^2 - 8j^4} = -20 \log \sqrt{4j^4 + 4j^2 - 8j^2} \\ &= -20 \log \sqrt{-4j^4 + 4j^2} = -20 \log 2j \sqrt{1-j^2} \quad \text{Dipende da } j! \end{aligned}$$

In fatti  $\lim_{j \rightarrow 0} -20 \log \sqrt{1-j^2} = -20 \log (1) \rightarrow -(-\infty) \rightarrow +\infty$  Tende a  $\infty$  per  $j \rightarrow 0$

MODULO DI RISONANZA

# Appunti lezione

## Fattori del II ordine

\* DIFF IMPO POLI

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\zeta = -\frac{\omega_n}{\sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2}} = \frac{\zeta\omega_n \pm \sqrt{1 - \zeta^2}}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1$$

$$\omega_n^2 \left( \frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1 \right)$$

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

$$0 < \zeta < 1$$

$$\zeta = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad 0 < \zeta < 1$$

$$\omega_n^2 \left( \frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1 \right)$$

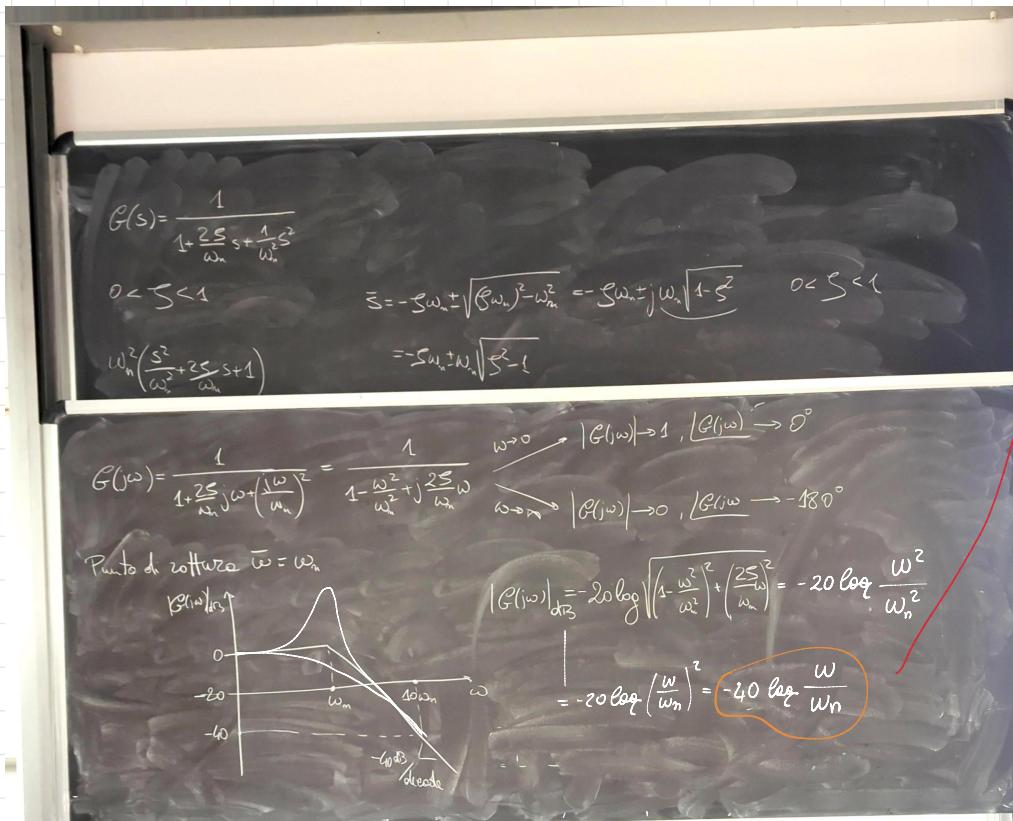
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} \omega^2} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega}$$

$$\begin{cases} \omega \rightarrow 0 \rightarrow |G(j\omega)| \rightarrow 1, |G(j\omega)| \rightarrow 0^\circ \\ \omega \rightarrow \infty \rightarrow |G(j\omega)| \rightarrow 0, |G(j\omega)| \rightarrow -180^\circ \end{cases}$$

$$G(j\omega) = -10 = 10 e^{-j\pi} = 10 (\cos(\pi) + j \sin(-\pi)) = -10$$

$$|G(j\omega)| = 10 \quad |G(j\omega)| = -180^\circ$$

Punti di rottura



Se prendo 2 freq 1 dec

$$\omega_1 ; \quad \omega_2 = 10 \omega_1$$

$$\text{Tesi: } f(\omega_2) - f(\omega_1) = -40 \text{ dB}$$

$$\begin{aligned} &= -40 \log \left( \frac{10\omega_1}{\omega_n} \right) + 40 \log \left( \frac{\omega_1}{\omega_n} \right) \\ &= -40 \left( \log(10) - \log \frac{\omega_1}{\omega_n} + \log \frac{\omega_1}{\omega_n} \right) \\ &= -40 \text{ dB} \quad \text{QED} \end{aligned}$$

\* IMPO

$$-20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2j\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2} g(\omega)$$

Trovo il minimo

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

$$0 < \zeta < 1$$

$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$z = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$\frac{dg}{dz} = 2z + 4\zeta^2 - 2$$

$$\frac{dg}{dz} = 0 \Rightarrow z = 1 - 2\zeta^2$$

$$\bar{z} > 0 \Rightarrow 1 - 2\zeta^2 > 0 \Rightarrow \zeta^2 < \frac{1}{2}$$

$$\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$$

$$g(z) = (1-z)^2 + 4\zeta^2 z = 1 + z^2 - 2z + 4\zeta^2 z$$

$$= z^2 + (4\zeta^2 - 2)z + 1$$

$$\frac{\omega_r^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\zeta^2 \Rightarrow \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Pulsazione  
di risonanza

Modulo di risonanza in dB

$$|G(j\omega_r)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega_r^2}{\omega_n^2}}$$

$$= -20 \log \sqrt{(1 - (1 - 2\zeta^2))^2 + 4\zeta^2 (1 - 2\zeta^2)}$$

$$= -20 \log \sqrt{4\zeta^4 + 4\zeta^2 - 8\zeta^4}$$

$$= -20 \log \sqrt{4\zeta^2 - 4\zeta^4} \quad \frac{1}{M_r}$$

$$= -20 \log |M_r|_{dB} = -20 \log 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}$$