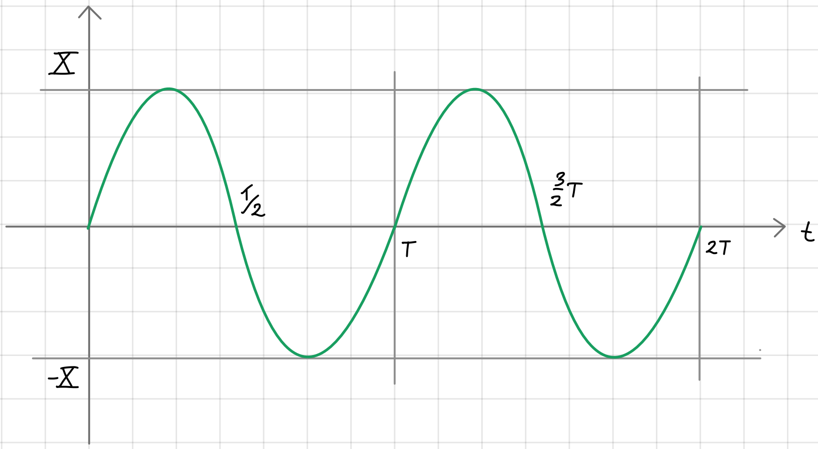
RISPOSTA IN FREQUENZA

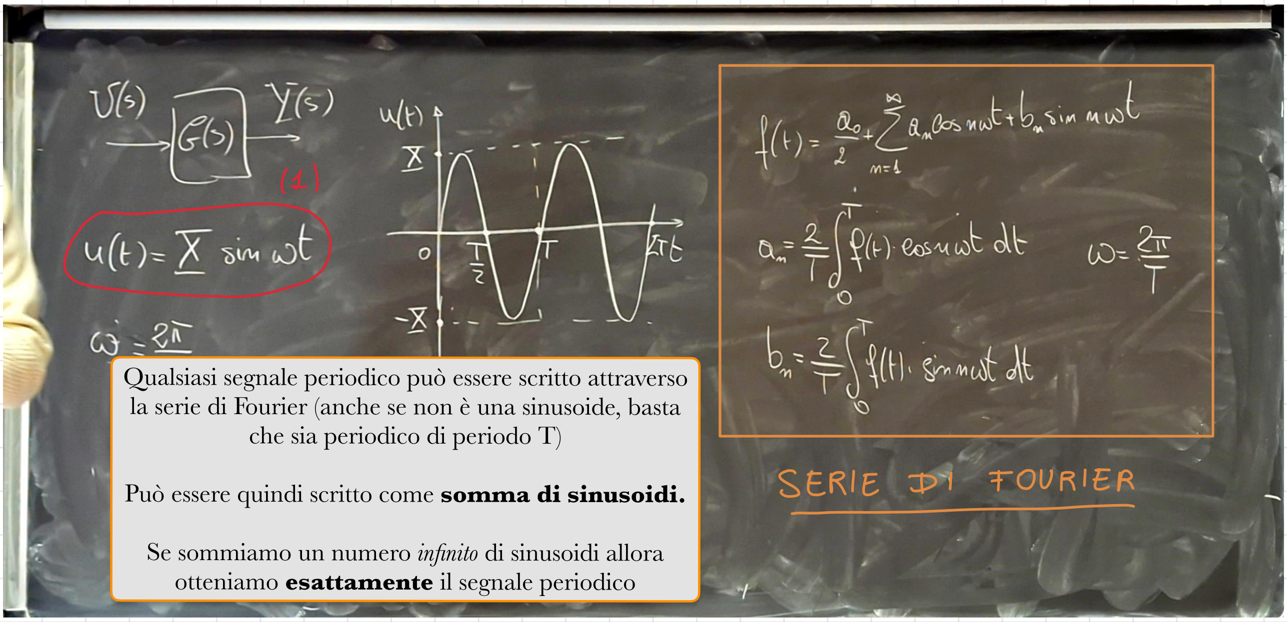
✳ Stabilità Libro

Cosa succede se metto in ingresso ad un sistema LTI stabile una **sinusoide**?

$U(t) = X \sin(\omega t)$ con $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con $T = \frac{1}{f}$



✳ Motivazione Analisi in freq.



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

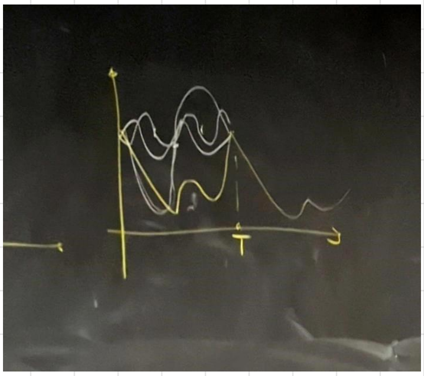
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t \, dt$$

Qualsiasi segnale periodico può essere scritto attraverso la serie di Fourier (anche se non è una sinusoide, basta che sia periodico di periodo T)

Può essere quindi scritto come **somma di sinusoidi.**

Se sommiamo un numero *infinito* di sinusoidi allora otteniamo **esattamente** il segnale periodico

✳ battuta



Morale della favola

Possiamo quindi usare la conoscenza dello studio della risposta in frequenza per analizzare **un infinito numero di segnali**, visto che possiamo esprimere un qualsiasi segnale come una somma di sinusoidi (che analizziamo in frequenza, appunto).

Non ci serve una somma *infinita* di sinusoidi, perché la stragrande maggioranza dei sistemi che usiamo sono di tipo **passa-basso**; di conseguenza i termini della sinusoide con una frequenza estremamente alta, una volta "passati" attraverso la funzione di trasferimento (il sistema) **non compaiono in uscita**. Quei segnali esistono e ci sono, ma attraverso i sistemi non compaiono perché vengono **filtrati**.

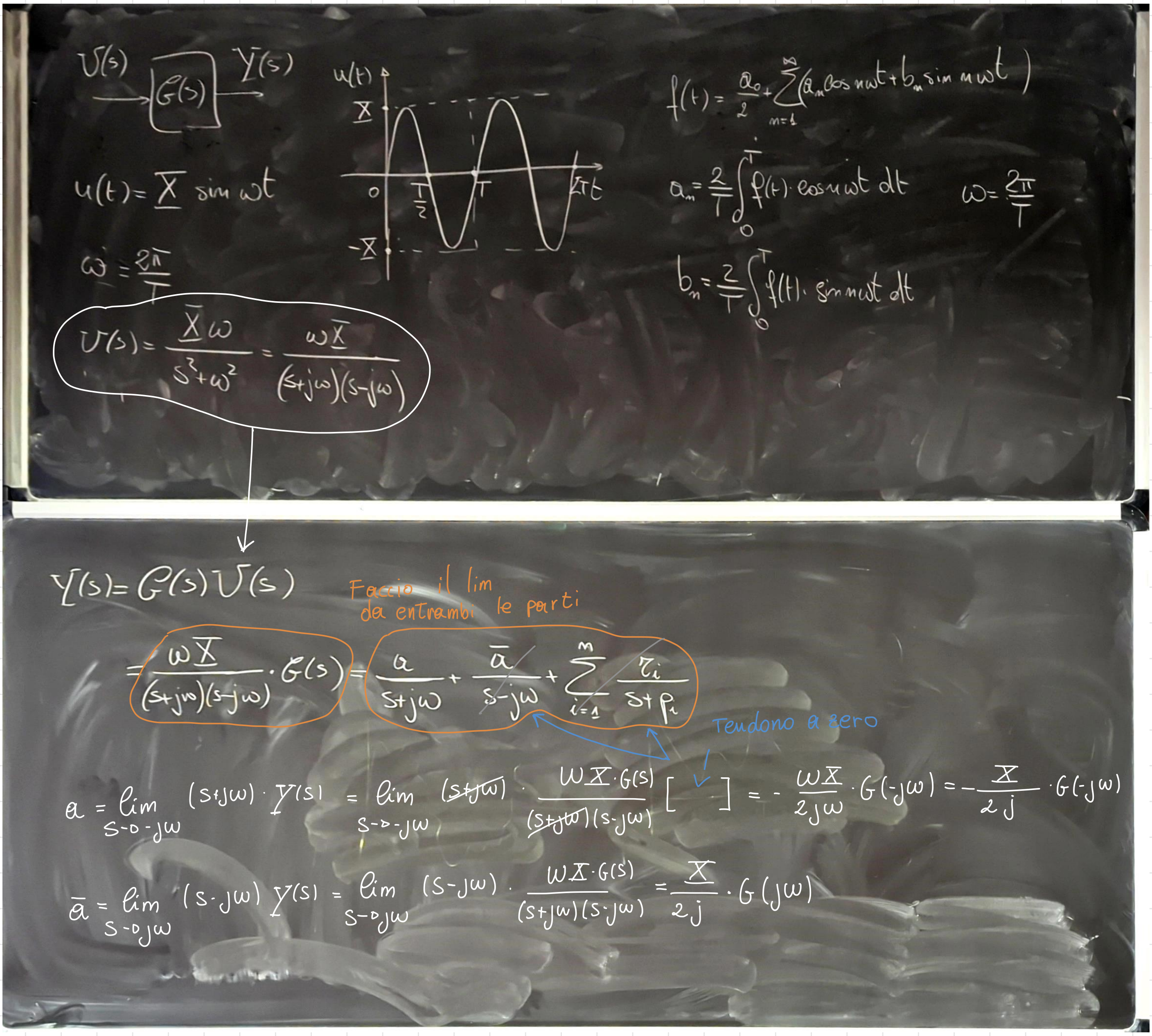
Se riesco a trovare un diagramma di come il sistema risponde, ovvero trovare un punto in cui la risposta diventa quasi zero, possiamo capire, guardando solo l'ingresso, l'uscita del sistema.

Se il segnale non è periodico, possiamo immaginarlo come un segnale di periodo infinito. Alla somma si sostituisce un integrale, che è proprio la **trasformata di Fourier** (vista nel segnale di fondamenti di tlc).

Perché se in ingresso c'è una sinusoide anche in uscita otteniamo una sinusoide?

1) Scrivo la trasformata di $u(t)$ (1)

2) Hp. pdi complx e conj



ANTITRASFORMO

* RECAP

$$y(t) = \underbrace{a\,e^{-j\omega t} + \bar{a}\,e^{j\omega t}}_{y_{ss}(t)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} r_i\, e^{-p_i t}}_{t\to\infty} \Rightarrow \frac{X}{2j}\left(G(j\omega)e^{j\omega t} - G(-j\omega)\,e^{-j\omega t}\right)$$

Ma...

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\Phi} \qquad \text{con} \qquad \Phi = \angle G(j\omega)$$

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| \cdot e^{+j\angle G(-j\omega)} \overset{!}{=} |G(+j\omega)|\; e^{-j\angle G(j\omega)}$$

$$y_{ss}(t) = \frac{X}{2j}|G(j\omega)|\left(e^{j\phi}e^{j\omega t} - e^{-j\phi}e^{j\omega t}\right) = \frac{X}{2j}|G(j\omega)|\left(e^{-(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}\right)$$

[Ins passaggi intermedi AUDIO]

$*$ RITARDO/ANTICIPO FASE

MODULO FASE

$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{X \left|G(jw)\right| \cdot \sin\left(wt + \angle G(jw)\right)}_{\text{Risposta a regime}}$$

In uscita potremmo avere una sinusoide sia con un'ampiezza diversa sia con una fase diversa rispetto all'entrata.

RAPPRESENTAZIONE ...

ESEMPIO

$$G(s) = \frac{K}{sT+1}$$

$$G(jw) = \frac{K}{jwT+1} \rightarrow \left|G(jw)\right| = \frac{K}{\sqrt{1+wT^2}}$$

$$\angle G(jw) = \angle K - \angle jwT+1 \qquad K = K \cdot e^{j\emptyset}$$

$$= \emptyset - \operatorname{atan}(wT)$$

w piccolo $\rightarrow$ Tende a riprodurre l'ingresso

w g

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = \frac{K}{\sqrt{1+(wT)^2}} \sin\left(wt - \operatorname{atan}(wT)\right)$$

Punto di rottura

se $wT \ll 1 \rightarrow w \ll \frac{1}{T}$

se $w \ll \frac{1}{T}$, riproduce l'uscita a meno del guadagno K

se $w \gg \frac{1}{T} \Rightarrow y(t)$ è quasi zero

se $w == \frac{1}{T} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(wt - 45°)$

ES.

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + 1/T_2} = \underbrace{\frac{T_2}{T_1}}_{\text{evidenza}} \cdot \frac{T_1 \cdot s + 1}{T_2 s + 1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_1 j\omega + 1}{T_2 j\omega + 1}$$

$$\Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{T_2}{T_1} \frac{\sqrt{(T_1\omega)^2 + 1}}{\sqrt{(T_2\omega)^2 + 1}} \qquad \Rightarrow y(t) = \underline{\text{Scrivi}}$$

$$\angle G(j\omega) = \operatorname{atan}(\omega T_1) - \operatorname{atan}(\omega T_2)$$

DIAGRAMMI DI BODE

[DEF]

- Il modulo viene rappr in deciBel (dB).

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$$

con $\log \triangleq \log_{10}$ ES: $y = \log_{10} x$
$\hookrightarrow 10^y = 10^{\log_{10} x} = x$

ES $|G(j\omega)| = 1$ (stessa fase di u)

$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(1) = 0\ dB$

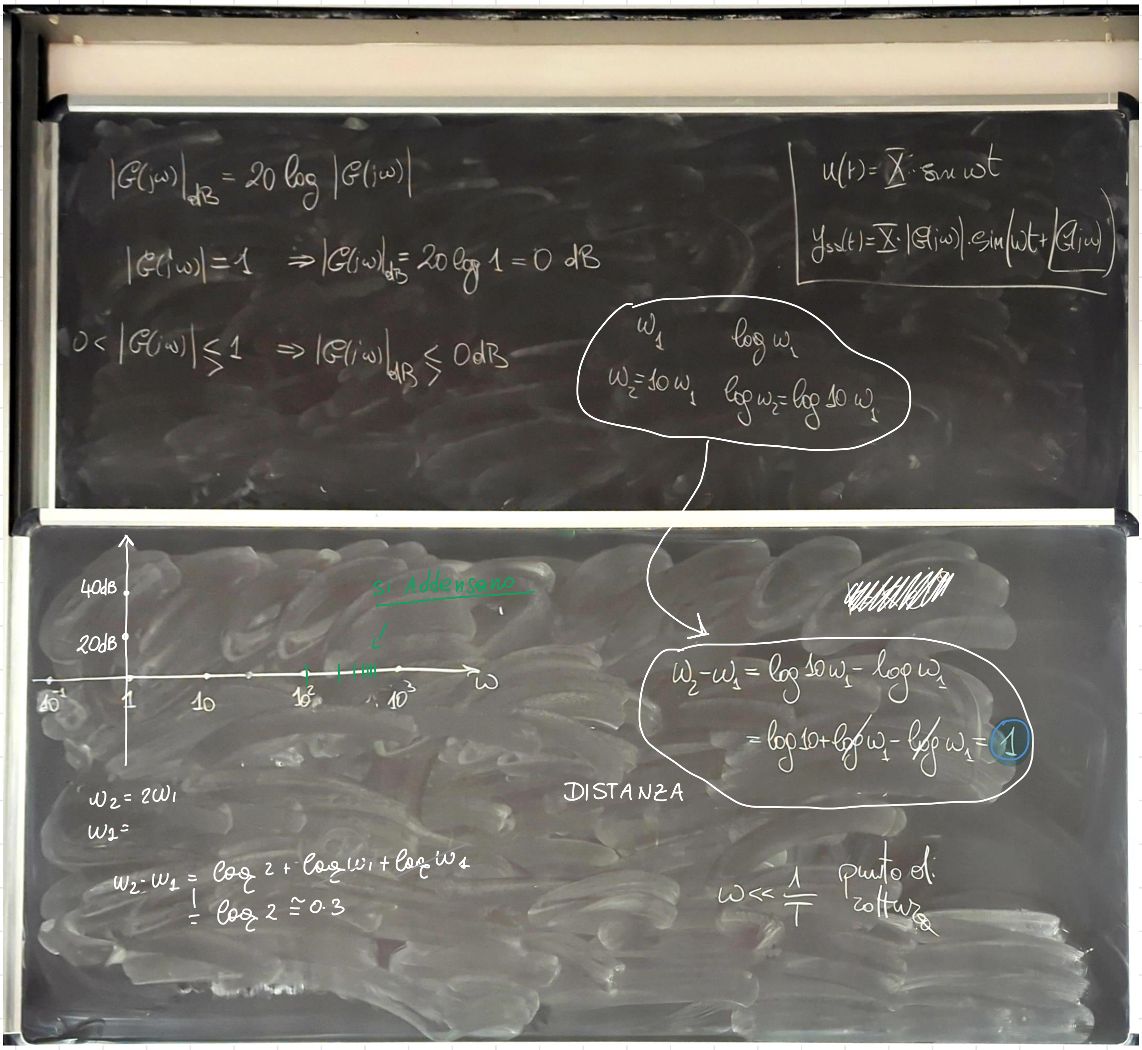
ES $0 < |G(j\omega)| < 1$

$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} < 0\ dB$

* RECAP IMPO

ES $|G(j\omega)| > 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} > 0\ dB$

I diagrammi di Bode hanno come asse delle ascisse una scala logaritmica, e non lineare!



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$$

$$u(t) = \bar{X} \cdot \sin \omega t$$

$$y_{ss}(t) = \bar{X} \cdot |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \boxed{\angle G(j\omega)})$$

$$|G(j\omega)| = 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

$$0 < |G(j\omega)| \lesseqgtr 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \lesseqgtr 0 \text{dB}$$

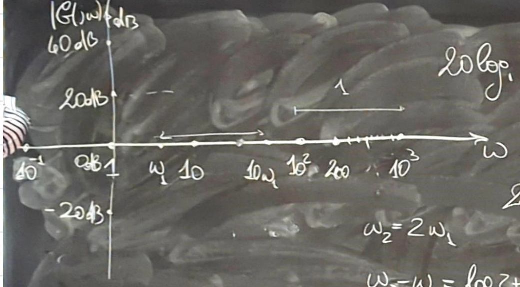
$$\omega_1 \qquad \log \omega_1$$

$$\omega_2 = 10\,\omega_1 \qquad \log \omega_2 = \log 10\,\omega_1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |G(j\omega)|_{dB} = 20\text{dB} \Rightarrow |G(j\omega)| = 10 \\ |G(j\omega)|_{dB} = -20\text{dB} \Rightarrow |G(j\omega)| = 0.1 \end{array}}$$

$$y = 10\,u$$

$$y = \frac{1}{10}\,u$$



$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \text{ dB}$$

$$K = K e^{j0}$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \log 10\,\omega_1 - \log \omega_1$$

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = -20 \text{dB}$$

$$= \log 10 + \cancel{\log} \omega_1 - \cancel{\log} \omega_1 = 1$$

$$\omega_2 = 2\,\omega_1$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \log 2 + \cancel{\log \omega_1} - \cancel{\log \omega_1}$$

$$= \log 2$$

$$20 \log 10^{-1} = -20 \log 10 = -20\text{dB}$$

$$\omega \ll \frac{1}{T}$$ punto di rottura

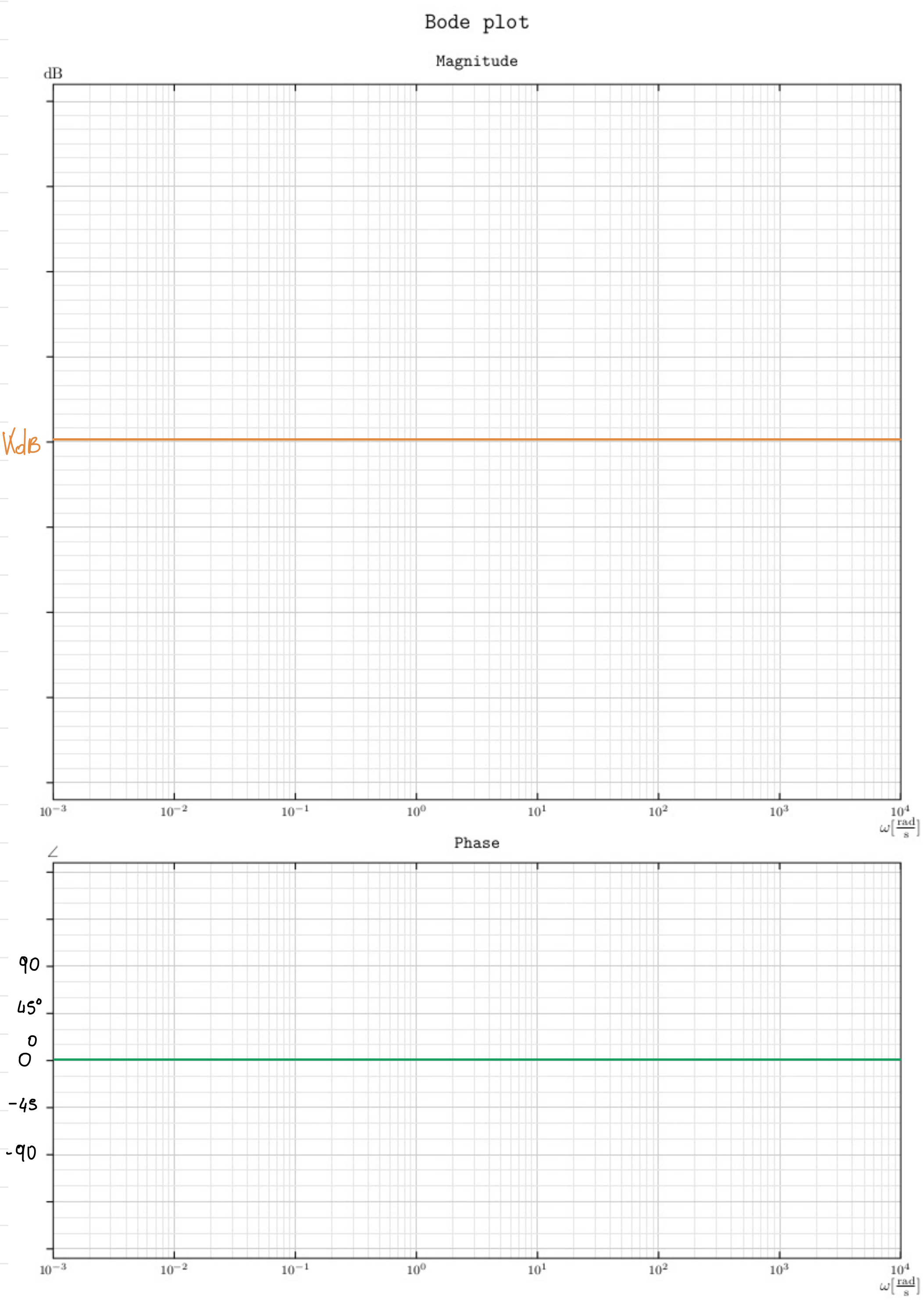
ES 1:

$$G(S) = K \quad \rightarrow \quad U(t) = X \sin(\omega t) \;\rightleftarrows\; y_{ss}(t) = K X \sin(\omega t)$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K)$$

$$20 \log(K) = 10$$

$$\Rightarrow K = 10^{1/2} = \sqrt{10}$$



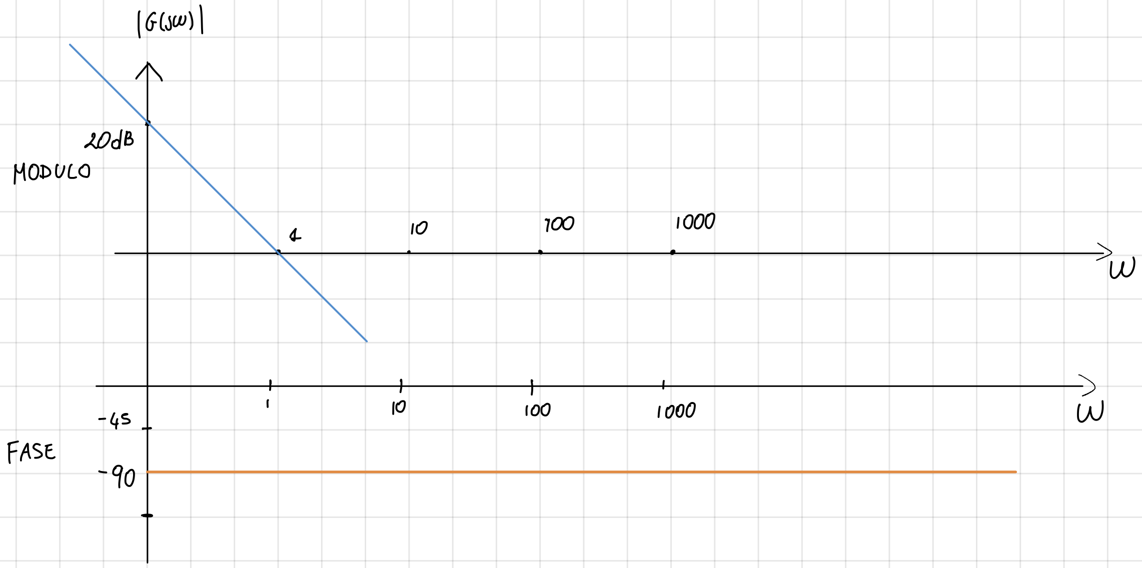
ES:

$$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{\omega}\right) = -20\log(\omega)$$

Non è più costante

→ y(t) è una retta che diminuisce di 20 dB/decade

$$\angle G(j\omega) = \angle 1 - \angle j\omega = \angle e^{-j\omega} = -\frac{\pi}{2} = -90°$$



ES:

D. Bode di un guadagno ed integrazione

$$G(s) = \frac{K}{s} \rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{j\omega} \Rightarrow |G(j\omega)| = |K| \cdot \left|\frac{1}{j\omega}\right| = K \cdot \frac{1}{\omega}$$

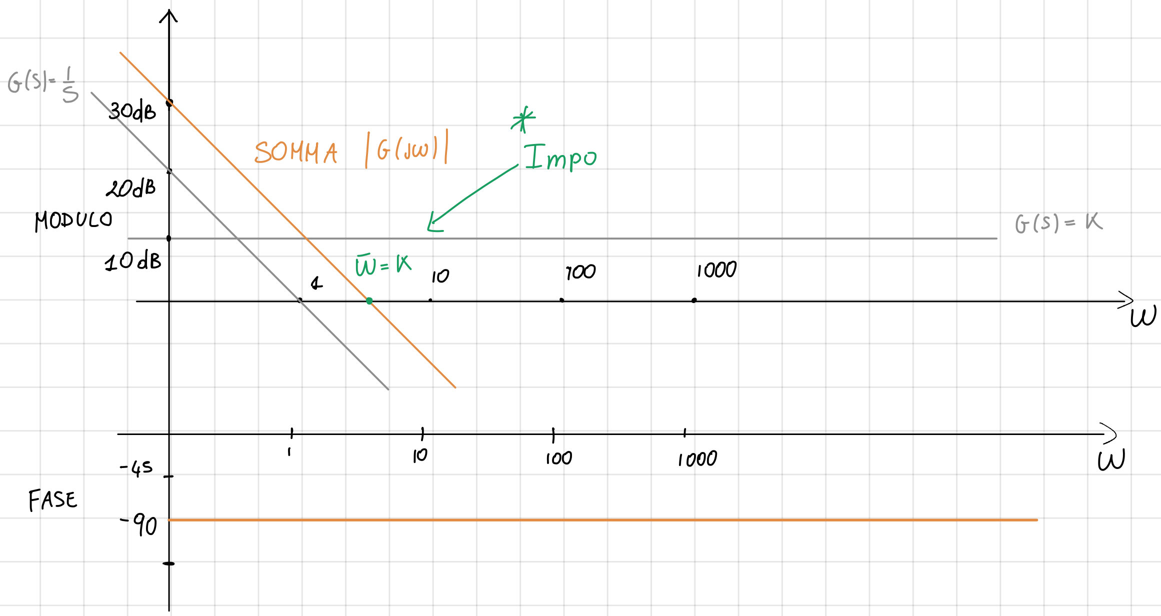
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(|K| \cdot \left|\frac{1}{j\omega}\right|\right) = \underbrace{20\log(|K|)}_{\text{guadagno}} + \underbrace{20\log\left(\left|\frac{1}{j\omega}\right|\right)}_{\text{derivazione}}$$

SOMMA

Fase:

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{K}{j\omega} = \angle K + \angle \frac{1}{j\omega}$$

SOMMA



Continuo

Hp. $u(t) = 3\sin(10t)$, $K = 10$ $\rightarrow$ $G(s) = \frac{10}{s}$

$y_{ss}(t) = \underbrace{\qquad}_{?} \sin(10t - 90°)$ AUDIO ?? $y = 3 \cdot 1 \cdot \sin(10t - 90)$

ad $\omega = \omega_0$ vado a prendere il valore del d. Bode corrispondente a ω_0 e lo trasformo da valore in dB a valore naturale

✱ ESAME ESERCIZIO