

STABILITA' DI SISTEMI LTI

(1) LINEARITA'

(2) TEMPO INVARIANZA

Se $y(t)$ è uscita con input $u(t)$, allora $y(t-\tau)$ è uscita di $IN = u(t-\tau)$

CONCETTO DI STABILITA'

- Un sys LTI si dice **Asintoticamente Stabile** \Leftrightarrow Tutti i poli della sua T.F. sono a parte reale < 0 .

↑
Strettamente

- E' STABILE se la T.F. ha poli $\text{Re}\{ \} < 0$
 $\text{Re}\{ \} = 0$ con molteplicità semplice

↓ ↓

ES

↳ 1 polo in origine $\rightarrow G(s) = \frac{1}{s}$ con $u(t) = \delta(t) \Leftrightarrow U(s) = 1$

$$\Rightarrow Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow y(t) = \underline{1}(t)$$

↑ gradino

- E' INSTABILE quando non è nessuno dei prec

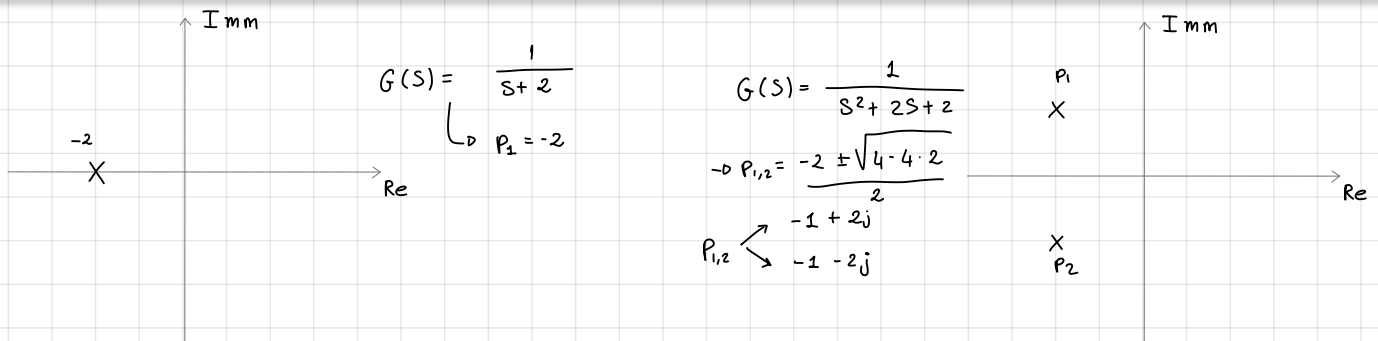
RAMPA $\rightarrow \infty$

↓

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow u(t) = \delta(t) \Leftrightarrow U(s) = 1 \Rightarrow Y = G \cdot U = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow y(t) = t \leftarrow \text{INSTABILE}$$

In altre parole:

- Stabile:** in questo caso **tutti i poli** devono trovarsi nella parte sinistra del piano complesso; questa zona del piano complesso è associata al comportamento nel tempo, quindi avere i poli in questa regione significa avere un andamento stabile nel dominio del tempo. In questi casi la funzione raggiunge il valore finale **senza oscillazioni**.
- Asintoticamente stabile:** in questo caso i poli devono sempre trovarsi nella parte sinistra del piano complesso, ma devono **avvicinarsi** sempre di più all'asse reale nel lungo termine; idealmente affinché una f.d.t. Sia asintoticamente stabile, **la parte reale dei poli deve essere zero**. In questo caso la funzione raggiunge il valore finale con un transitorio **caratterizzato da oscillazioni**.



RISPOSTA DI UN SYS LTI

$$y(t) = \text{USCITA} \rightsquigarrow y(t) = y_{tt}(t) + y_{ss}(t)$$

↑ TRANSITORIA ↑ "Steady State" REGIME

Siccome i sys che ci interessano sono Asint. Stabili, $y_{tt}(t) \rightarrow 0$

$$\Rightarrow y(t) \approx y_{ss}(t) \quad \text{ovvero} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_{ss}(t) = 0$$

RISPOSTA DI SYS DEL 1° ORDINE

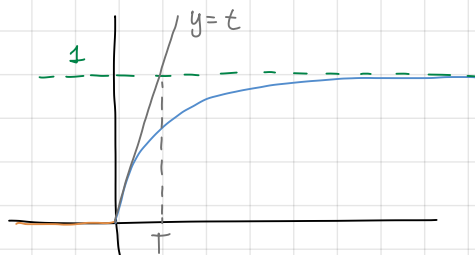
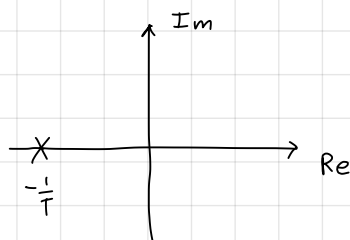
PRIMO ES:

$$G(s) = \frac{1}{sT+1} \quad \text{con } T = \text{Costante di Tempo}, \quad U(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$U(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow Y(s) \quad Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{sT+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1/T}{(s + \frac{1}{T})s} = \frac{z_1}{s} + \frac{z_2}{s + \frac{1}{T}}$$

$$\begin{cases} z_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1/T}{(s + \frac{1}{T})s} = 1 \\ z_2 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} (s + \frac{1}{T}) \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} (s + \frac{1}{T}) \cdot \frac{1/T}{(s + \frac{1}{T})s} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \Rightarrow y(t) = 1 - e^{-t/T} \quad t \geq 0$$



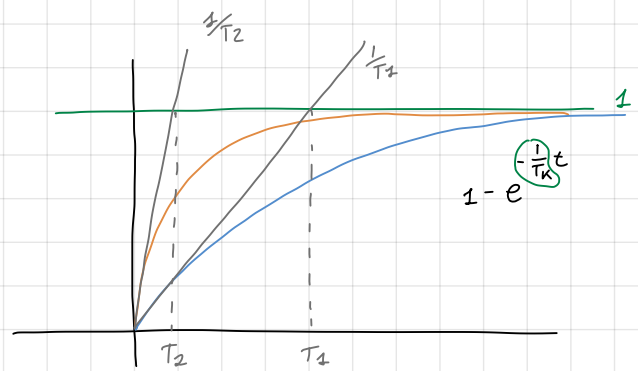
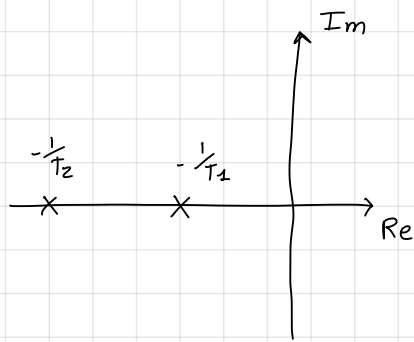
$$(1) \quad y(t) = 1 - \left(1 - \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot t + \dots = 1 - 1 + \frac{t}{T} + \dots \approx \frac{t}{T} \quad t \ll T$$

(2) Teorema V.F. L.T. :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(sT+1)} = 1 \quad \leftarrow \text{Valore a regime}$$

$$(3) \quad \mathcal{L}[\dot{y}] = s Y(s) = s \cdot \frac{1}{s(sT+1)} = \frac{1}{sT+1}$$

$$\text{T.V.I.:} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dt} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{1}{sT+1} = 0 \quad \leftarrow \frac{1}{T} \text{ derivata in origine}$$



IMPO: Quanto più il polo è vicino allo zero, tanto più impiegherà il sys ad andare a regime.

TEMPO PER ARRIVARE A REGIME

Orvviamente dipende dalla costante di Tempo \rightarrow Prendiamo

$$4T$$

$$e(t) = 1 - y(t) = 1 - 1 - e^{-\frac{t}{T}} = e^{-\frac{t}{T}}$$

↑
errore $\hat{=}$ Distanza da 1

$$\text{se } e(4T) = e^{-\frac{4T}{T}} \approx 0.018 < 2\% \cdot y_{ss}$$

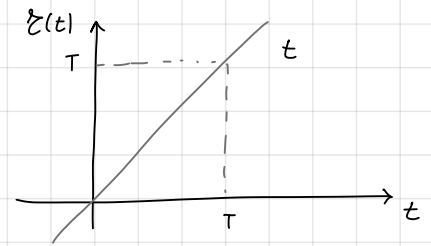
* Come scegliere l'intervallo visualiz. MATLAB.

Risposta alla Rampa

$$R(s) = \mathcal{L}[t \cdot \mathbb{1}(t)] \Leftrightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$G(s) = \frac{1}{sT+1}$$

$$Y(s) = ?$$



Il Sys è
A Stabile

è instabile
a seguito
dell'input

$$Y = R \cdot G = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{sT+1} = \frac{\frac{1}{T}}{s^2(s+\frac{1}{T})} = \frac{z_1}{s} + \frac{z_2}{s^2} + \frac{z_3}{s+\frac{1}{T}}$$

↑
Pow Max

POTENZA MAX

$$z_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1/T}{s^2(s+\frac{1}{T})} \rightarrow \textcircled{1} z_2$$

$$z_3 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} (s + \frac{1}{T}) \cdot \frac{1/T}{s^2(s+\frac{1}{T})} = \frac{1/T}{(-\frac{1}{T})^2} = \textcircled{T} z_3$$

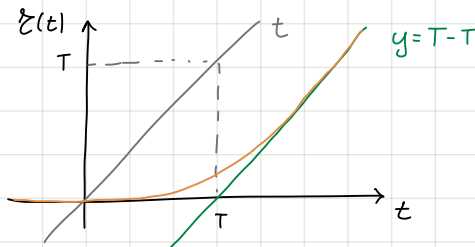
$$z_1 = \text{SOSTITUZIONE} \rightarrow \frac{z_1}{s} + \frac{1}{s} + \frac{T}{s+\frac{1}{T}} = \frac{1/T}{s^2(s+\frac{1}{T})} = \frac{z_1 s(s+\frac{1}{T}) + s + \frac{1}{T} + s^2 T}{s^2(s+\frac{1}{T})}$$

$$\leadsto \frac{(z_1+T)s^2 + (\frac{z_1}{T}+1)s + \frac{1}{T}}{s^2(s+\frac{1}{T})} = \frac{1/T}{s^2(s+\frac{1}{T})} \Rightarrow z_1+T=0 \Rightarrow \textcircled{z_1 = -T}$$

$$\Rightarrow Y = -\frac{T}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{T}{s+\frac{1}{T}} \Leftrightarrow y(t) = -T + t + T e^{-\frac{t}{T}} \quad t \geq 0$$

Trovare l'andamento a regime e Transitorio

$$y_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -T + t + T e^{-\frac{t}{T}} = \lim_{t \rightarrow \infty} (t - T)$$



$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{T}{T} e^{-\frac{t}{T}} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

Valore iniziale se
valutato in $t=0$

da derivata della
risposta alla RAMPA è
la risposta al gradino!

\Rightarrow Per la linearità:

$$\frac{dU(s)}{dt} G(s) = \frac{dY(s)}{dt}$$

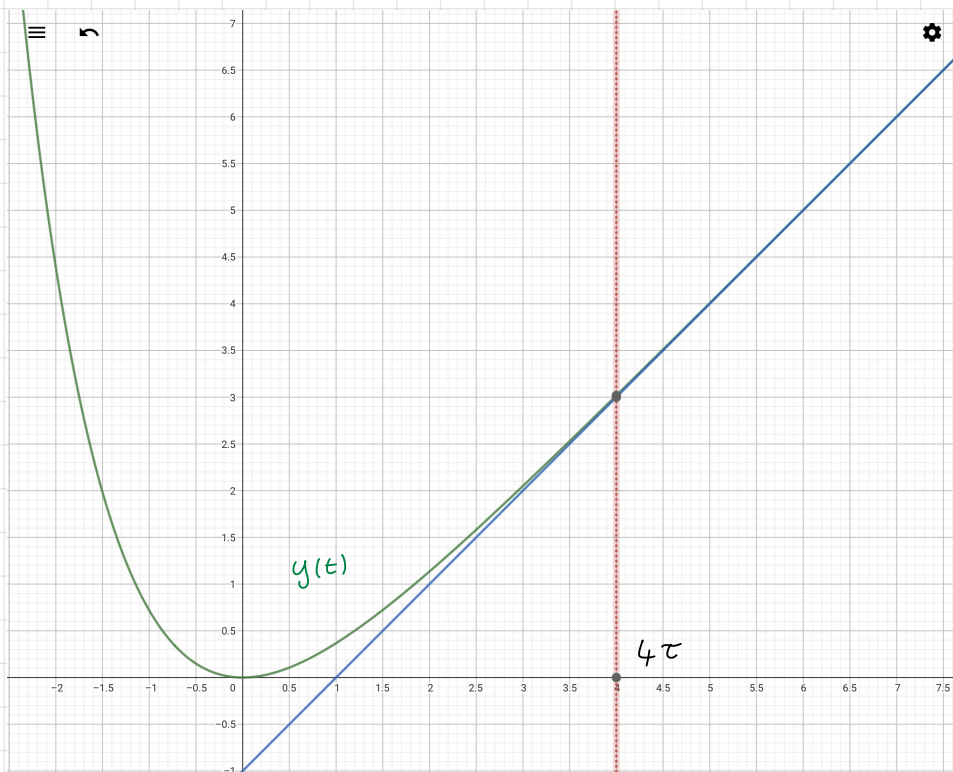
↑
IMPO

Valore iniziale (con Teorema)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{1/T}{s^2(s+\frac{1}{T})} = 0$$

Errore

$$e(t) = t - y(t) = t - (-T + t + T e^{-\frac{t}{T}}) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

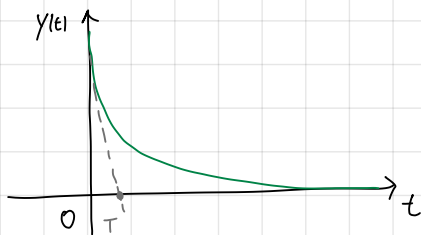


RISPOSTA IMPULSIVA

$$G(s) = \frac{1}{sT + 1} = \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}$$

c'è 1 ma Ru
una dimensione!!

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow R(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = R(s) \cdot G(s) = G(s) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad t > 0$$



V.I. = ...
V.F. = ...

Taylor

DISCONTINUA

T.V.I.

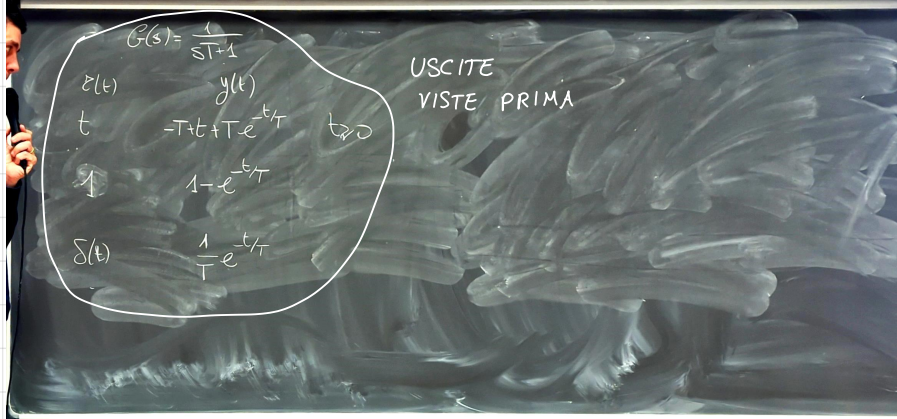
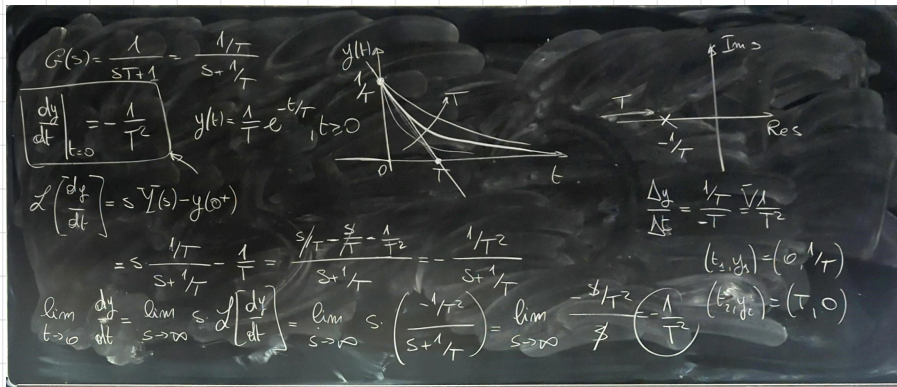
$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{T^2}$$

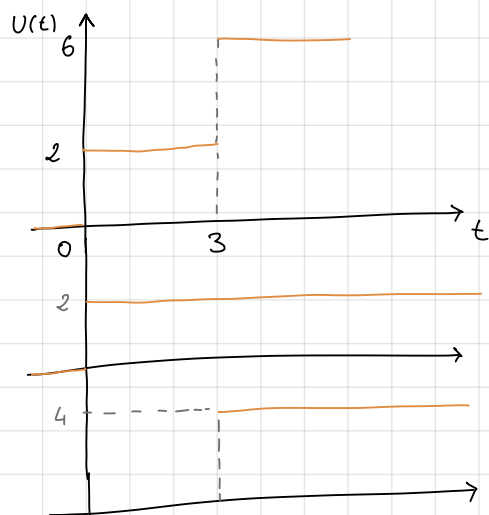
$$\begin{aligned} \leadsto \mathcal{L} \left[\frac{dy}{dt} \right] &= sY(s) - y(0^+) = s \cdot \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}} - \frac{1}{T} \\ &= \frac{s \cdot \frac{1}{T} - \frac{s}{T} - \frac{1}{T^2}}{s + \frac{1}{T}} = -\frac{\frac{1}{T^2}}{s + \frac{1}{T}} \end{aligned}$$

$$\leadsto \text{Teorema} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dt} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} -s \cdot \frac{\frac{1}{T^2}}{s + \frac{1}{T}} \rightarrow -\frac{1}{T^2} \quad \text{QED}$$

FOTO



RISPOSTA DI UN SYS (1th) ad un segnale composto



$$G(s) = \frac{1}{s+10}$$

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t) \quad \text{con} \quad \begin{cases} U_1(t) = 2 \cdot \mathbb{1}(t) \\ U_2(t) = 4 \cdot \mathbb{1}(t-3) \end{cases}$$

$$Y_1(s) = G \cdot U_1 = \frac{1}{s+10} \cdot \frac{2}{s} = \frac{z_1}{s} + \frac{z_2}{s+10}$$

$$z_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y_1(s) = \frac{1}{5} \quad \sim \quad z_2 = \lim_{s \rightarrow -10} (s+10) \cdot Y_1(s) = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow Y_1(s) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+10} \right) \Leftrightarrow y_1(t) = \frac{1}{5} \cdot (1 - e^{-10t}), \quad t \geq 0$$

$$\hat{U}_2(t) = 4 \cdot \mathbb{1}(t) = 2 \cdot (2 \cdot \mathbb{1}(t)) = 2 U_1(t) \Rightarrow \hat{y}_2(t) = 2 y_1(t) = \frac{2}{5} (1 - e^{-10t}), \quad t \geq 0$$

senza ritardo

$$\Rightarrow y_2(t) = \hat{y}_2(t-3) = \frac{2}{5} (1 - e^{-10(t-3)}), \quad t \geq 3$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{5} (1 - e^{-10t}) \cdot \mathbb{1}(t) + \frac{2}{5} (1 - e^{-10(t-3)}) \cdot \mathbb{1}(t-3) \quad \text{Ans}$$

