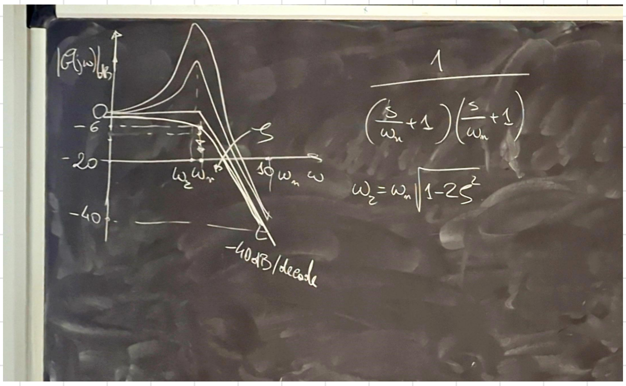
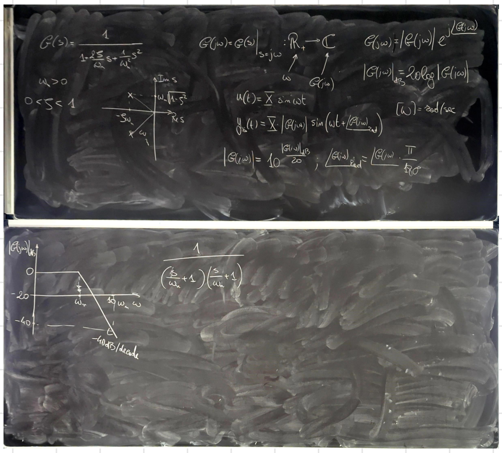
Recap Lez 22

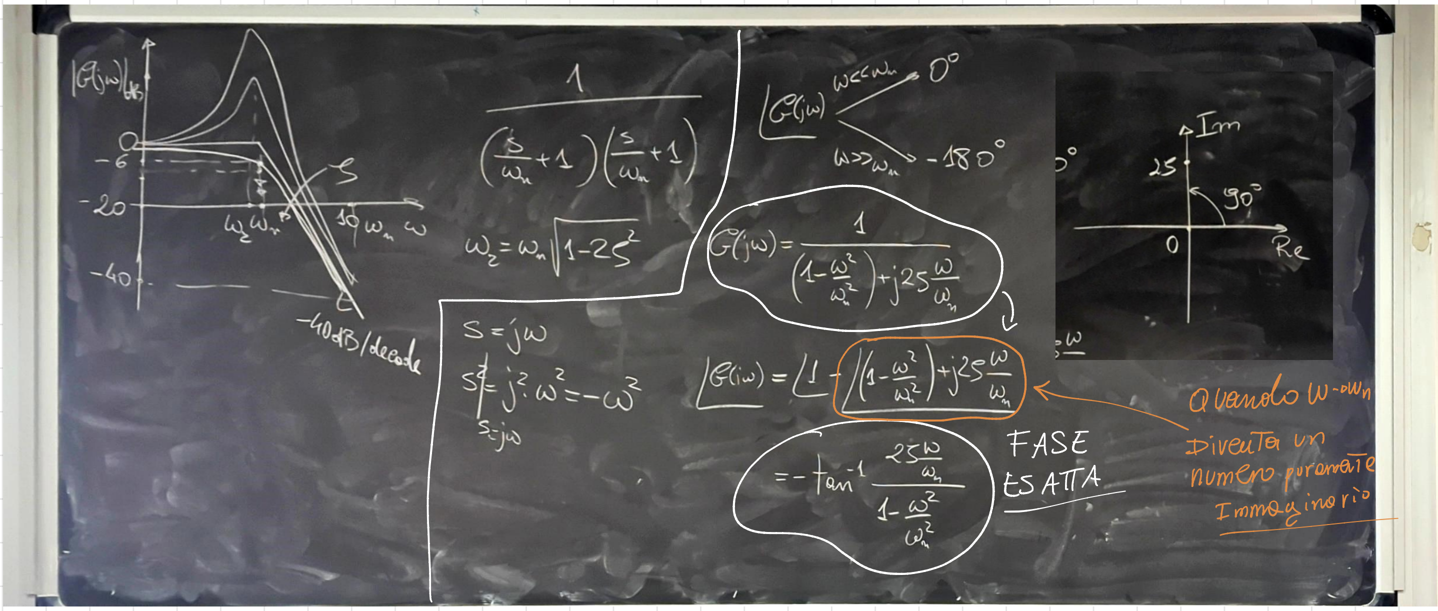
* Perché tracciare il diagramma di Bode?

* Serie di Fourier nella Tesina

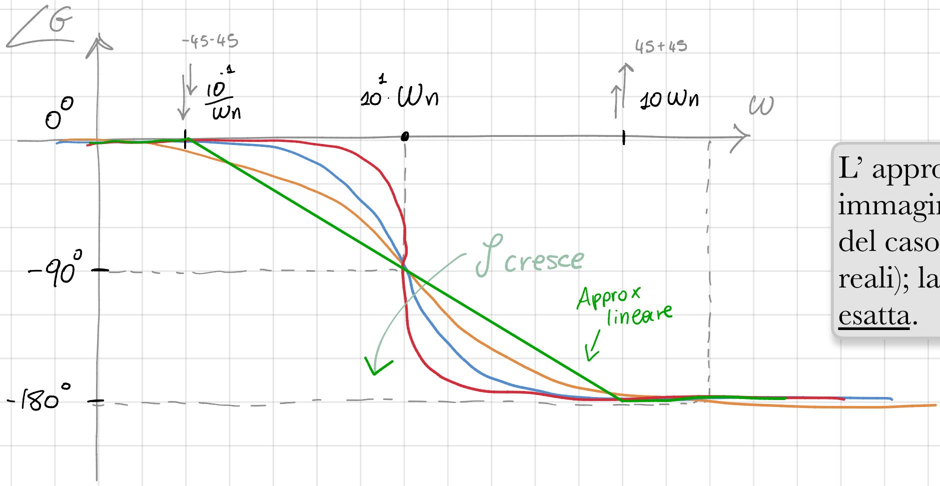




Fattori del II ordine - FASE



* impo: sfasamento seno



L' approssimazione della fase dei due poli immaginari è praticamente uguale alla fase del caso visto precedentemente (due poli reali); la differenza sta nella rappresentazione esatta.

* Appunto Arcotangente

ESERCIZI

ES 1 Polo in Origine

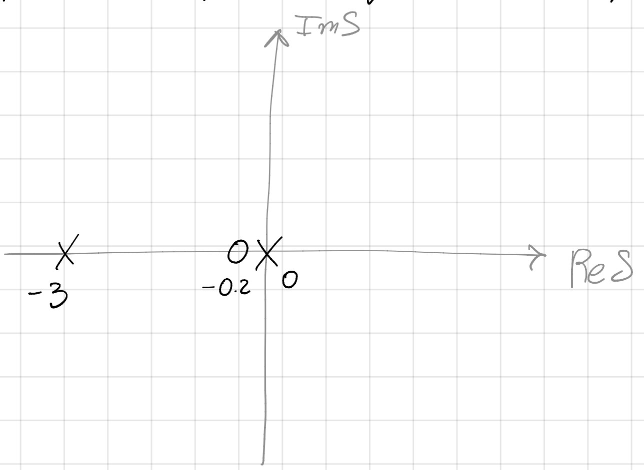
$$G(S) = 50 \frac{(S+0.2)}{S(S+3)}$$

La FdT ha uno zero in $z_1 = -0.2$ ed ha due poli $p_1 = 0$; $p_2 = -3$.

La forma standard di diag. di Bode è:

$$G(S) = 50 \cdot \frac{0.2(1+2S)}{S \cdot 3(1+\frac{S}{3})} = 3.3 \cdot \frac{1+2S}{S(1+\frac{1}{3}S)}$$

Rappresento i poli e gli zeri nel piano complx



Determino i punti di rottura: Zero $\omega_1 = 0.2$ rad/s ; Polo $\omega_2 = 3$ rad/s

Det l'intervallo di pulsazioni d'interesse: $\bar{\omega} \in [10^{-2} \cdot 2 ; 10^{1} \cdot 3]$ rad/s

↳ per tracciare i diagrammi considero un ulteriore decade in più e in meno.

per semplicità: $\bar{\omega} \in [10^{-2} ; 10^{1}]$ ⟶ $\bar{\omega}_2 \in [10^{-2} ; 10^{2}]$

Andamenti iniziali e finali

⟶ Essendoci un polo nell'origine, la pendenza iniziale è -20 dB/dec e passa per il punto:

$\bar{\omega} = 0.01$, $|G(j\bar{\omega})|_{dB} = 20 \log \frac{3.3}{0.01} = 50.4$ dB ??

⟶ Essendoci due poli ed uno zero, la pendenza finale è: $-20-20+20 = -20$ dB/dec

Andamento iniziale in presenza di un POLO nell'origine

Nella forma standard: $G(j\omega) = K \dfrac{1+aj\omega}{j\omega(1+j\omega a)} = K \dfrac{1+aj\omega}{j\omega - a\omega^2} = K \dfrac{1+j a\omega}{-a\omega^2 + j\omega}$

$$\Rightarrow |G(j\omega)| = K \cdot \frac{\sqrt{1+(a\omega)^2}}{\sqrt{\omega^4 a^2 + \omega^2}} = K \frac{\sqrt{1+(a\omega)^2}}{\sqrt{\omega^2(\omega^2 a^2)+\omega^2}} = \frac{K}{\omega} \frac{\cancel{\sqrt{1+(a\omega)^2}}}{\cancel{\sqrt{1+(a\omega)^2}}} = \frac{K}{\omega}$$

modulo in presenza di un polo nell'origine

$\Rightarrow$ In decibel: $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log\left(\dfrac{K}{\omega}\right)$

Con polo in origine

dove ω è MINORE al primo punto di rottura

Andamento iniziale in presenza di uno ZERO nell'origine

$$G(s) = k\cdot\frac{s(as+1)}{(1+bs)} \Rightarrow G(j\omega) = k\,\frac{j\omega(1+a\omega j)}{1+b\omega j} = k\,\frac{j\omega - a\omega^2}{1+b\omega j} = \frac{-a\omega^2+\omega j}{1+b\omega j}$$

$$\rightarrow |G(j\omega)| = k\cdot\frac{\sqrt{a^2\omega^4+\omega^2}}{\sqrt{1+b^2\omega^2}} = k\,\frac{\omega\cancel{\sqrt{a^2\omega^2+1}}}{\cancel{\sqrt{b^2\omega^2+1}}} \underset{\text{Se } b=a}{=} k\cdot\bar{\omega}$$

Modulo

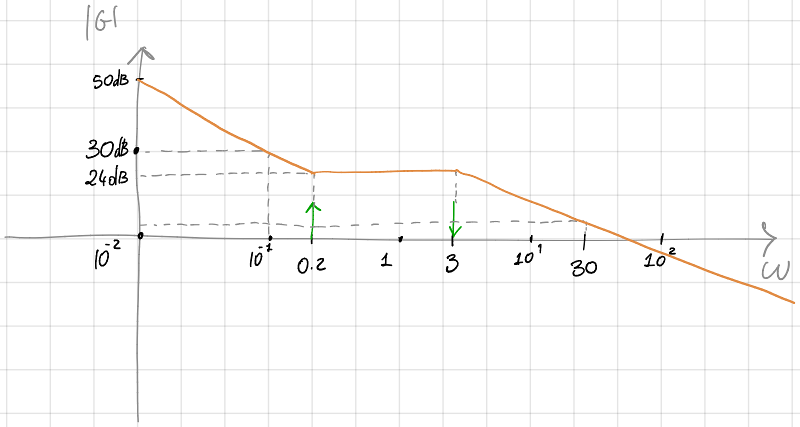
In decibel: $|G(j\bar{\omega})|\Big|_{dB} = 20\log(k\,\bar{\omega})$

* Come $\bar{\omega}$ possiamo prendere una qualsiasi ω, ci conviene prendere il valore più piccolo della banda di riferimento.

Fasi :

→ Essendoci un polo nell'origine ed un guadagno positivo, la fase iniziale è $-90°$

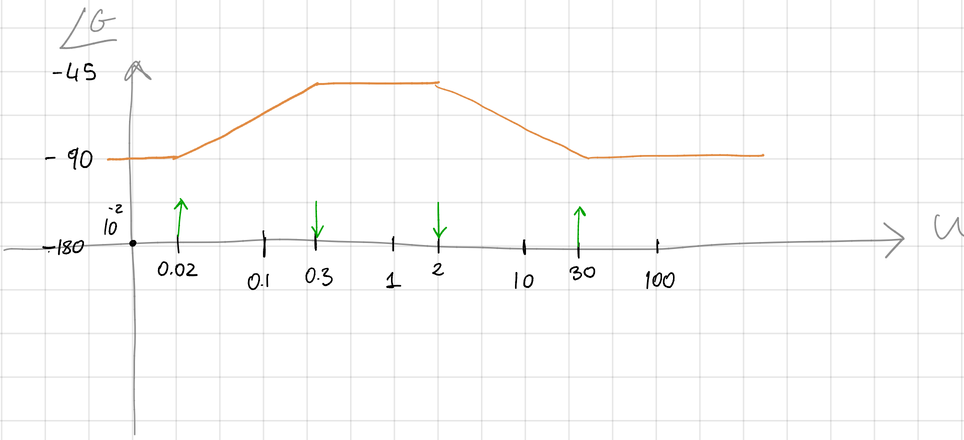
→ Essendoci 2 P e 1 zero Reale negativo, è $-90-90+90 = -90°$



*

$$\hat{G}(j\omega) = 3.3\,\frac{1}{j\omega}$$

$$\Rightarrow \left|\,|\hat{G}|_{dB}\right|_{\omega=0.2} = 20\log\left(\frac{3.3}{0.2}\right) = 24dB$$



Risposta ad un segnale $u(t) = 6\cdot\sin(7t)$ con $\bar{\omega} = 7$ rad/s

A occhio : dai diagrammi di Bode : $\angle G(j\omega) \simeq -45°$ $\Rightarrow \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{4}$

$$|G(j\omega)|_{dB} \simeq 15dB \Rightarrow |G(j\omega)| = 10^{15/20} = 5.6$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) \simeq 6\cdot 5.6\cdot \sin\left(7t-\frac{\pi}{4}\right) = 33.6\,\sin\left(7t-\frac{\pi}{4}\right)$$

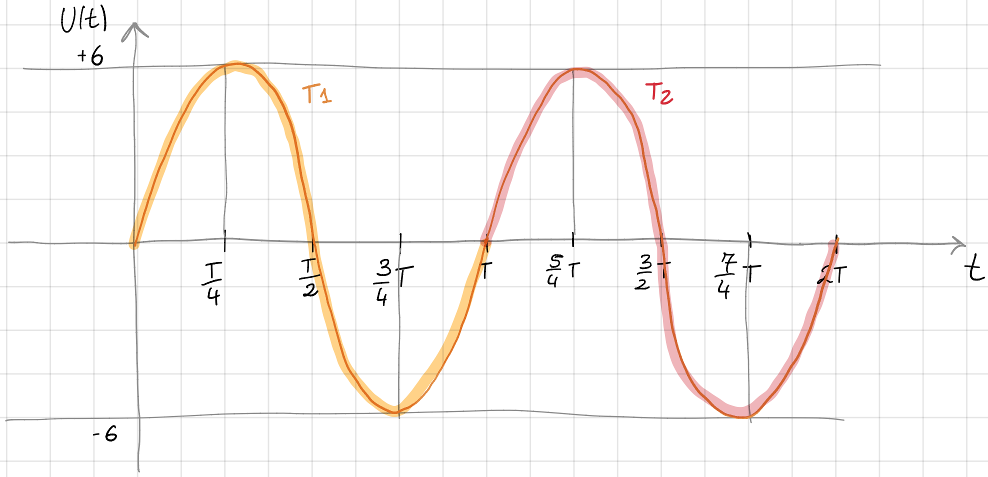
- Fase e moduli esatti $\bar{\omega} = 7$

$$G(j\omega) = 50\,\frac{(j7+0.2)}{j7\,(j7+3)} = 50\cdot\frac{0.2+j7}{-49+j21} \Rightarrow |G(j\omega)| = 6.57\ ;\ \angle G(j\bar{\omega}) = -1.2 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = 6.57\cdot 6\cdot\sin(7t-1.2)$$

Disegno del segnale in input

$u(t) = 6\sin(7t)$

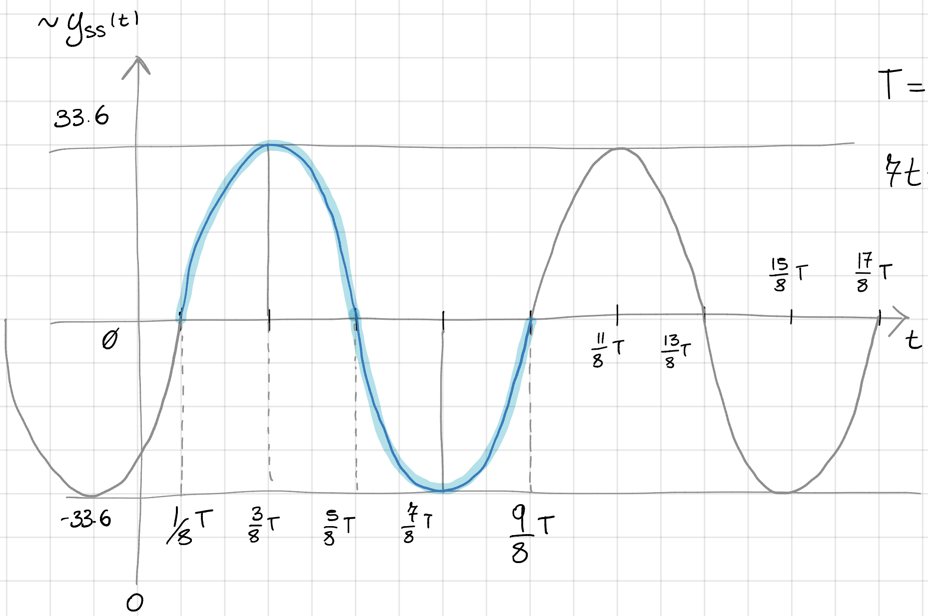


$T = \frac{2\pi}{7} \simeq 0.29\pi$

$7t = 0 \to t_i = 0 \Rightarrow t_f = \frac{2}{7}\pi$

Disegno del segnale in out Approx

$y_{ss}(t) \simeq 33.6 \sin\left(7t - \frac{\pi}{4}\right)$



$T = \frac{2\pi}{7} \simeq 0.29\pi \to \pi \simeq \frac{7}{2}T$

$7t - \frac{\pi}{4} = 0$ per $t = \frac{1}{28}\pi = \frac{1}{28}\cdot\frac{7}{2}T = \frac{1}{8}T$ t_i

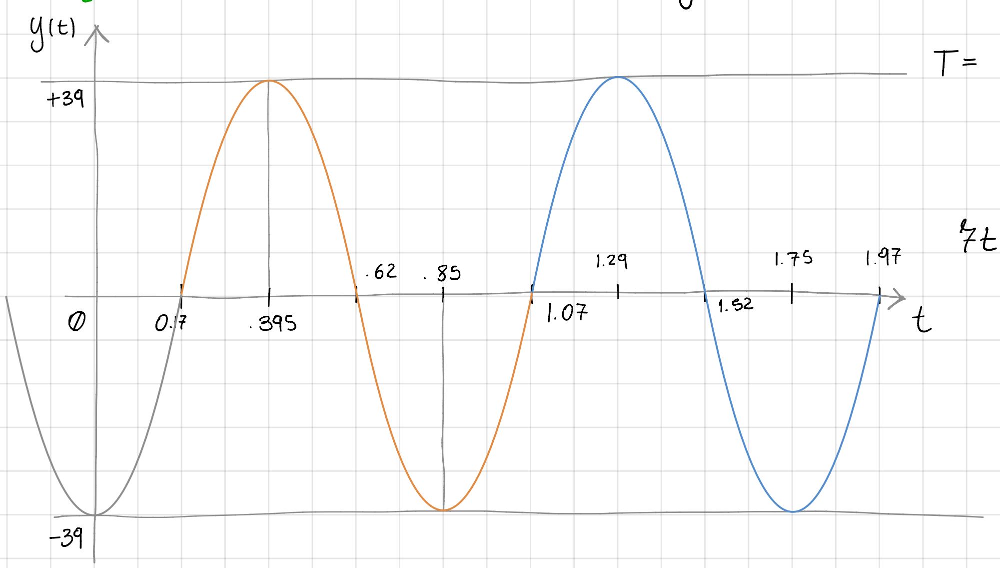
$t_f = t_i + T = \frac{1}{8}T + T = \frac{9}{8}T$ t_f

$\frac{1}{28}\pi + \frac{2}{7}\pi = \frac{9}{28}\pi \simeq 1.01$

Periodo in Secondi

Disegno del segnale in out Reale

$y_{ss}(t) = 39 \sin(7t - 1.2)$



$T = \frac{2\pi}{7} \simeq 0.29\pi \simeq 0.9\,s$

$\hookrightarrow \pi = \frac{7}{2}T$

$7t - 1.2 = 0$ per $t = \frac{6}{35} \simeq 0.17\,s$ t_i

$t_f = 1.07$ t_f

Banda passante

$$G(s) = 50\,\frac{(s+0.2)}{s(s+3)} \Rightarrow G(jw) = 50\,\frac{(jw+0.2)}{jw(jw+3)} = 50\,\frac{jw+0.2}{-w^2+j3w}$$

> Nei sistemi passa basso, il valore w0 per il quale il modulo di G(jw) si annulla in decibel, viene chiamato ***banda passante***.

$$\Rightarrow |G(jw)| = 50 \cdot \frac{\sqrt{w^2+0.2^2}}{\sqrt{w^4+9w^2}} = \frac{50\sqrt{w^2+0.2}}{w\sqrt{w^2+9}} = 1$$

Val Nat

Trovo la Banda

$$\rightsquigarrow 2500(w^2+0.2) = w^2(w^2+9)$$

$$2500w^2 + 500 = w^4 + 9w^2 \rightsquigarrow w^4 - 2491w^2 - 500 = 0$$

Posso risolvere direttamente con la Calc

Pongo $z = w^2 \Rightarrow 2500z + 500 = z^2 + 9z \rightsquigarrow z^2 - 2491z - 500 = 0$

$z_1 = 2491.2$

$z_2 = -0.2$

Siccome $z = w \Rightarrow$ $w_{1,2} = \pm\sqrt{2491.2}$, $w_{3,4} = \pm\sqrt{-0.2}$

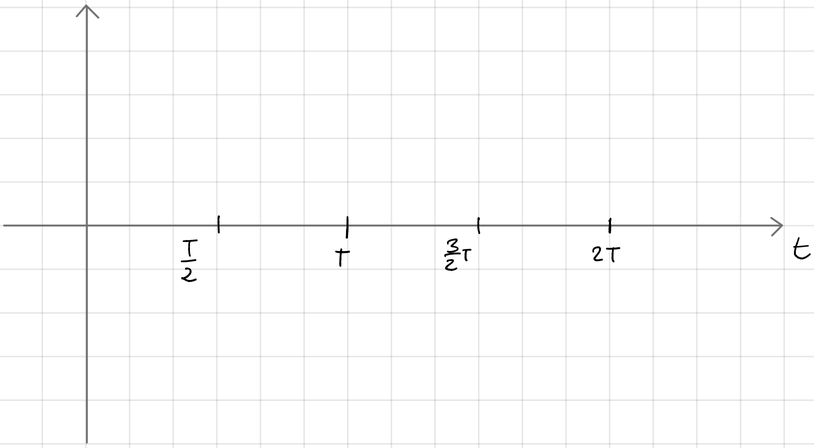
$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = 49.9 \\ w_2 = -49.9 \end{cases} \quad \begin{cases} w_3 = 0.45j \\ w_4 = -0.45j \end{cases}$$

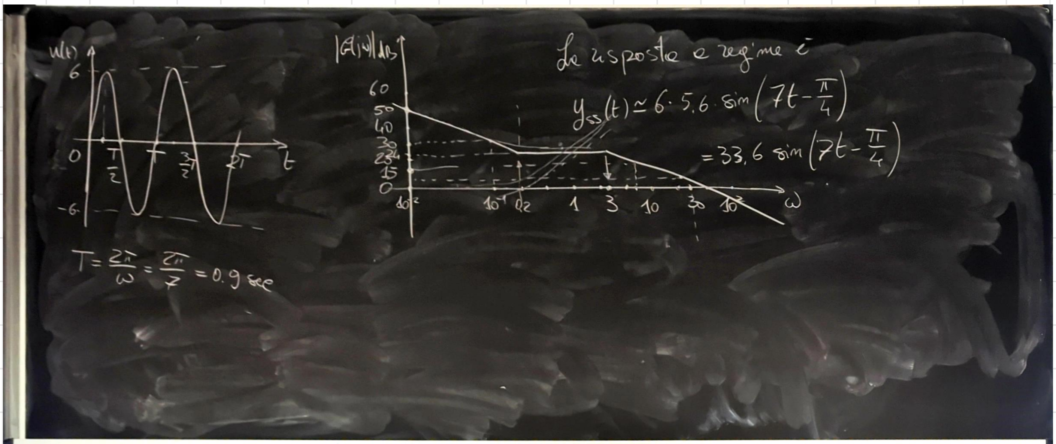
Appunti presi a lezione, poco utili

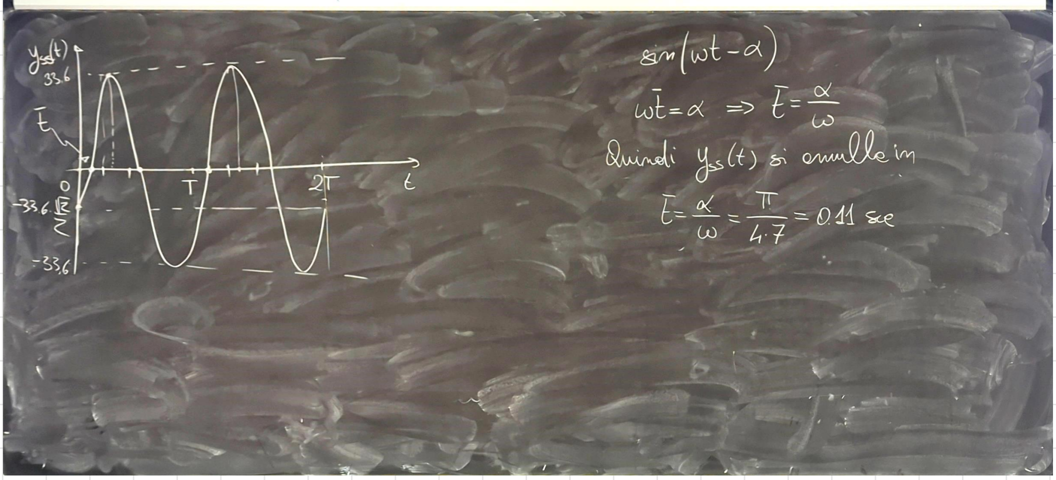
$u(t) = 6\sin(7t)$

$T = \frac{2\pi}{7} = 0.9\,s$

$7t = 0 \to t_i = 0 \Rightarrow t_f = 0.9\,s$







* Banda passante (eventuale considerazione)