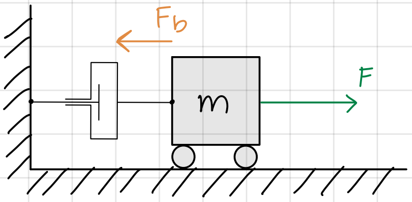
Sistema Massa Smorzata



La Macchina si muove verso dx e subisce l'attrito dell'aria rappresentato dallo Smorzatore.

$$\sum^{k} F_k = m\cdot a \Rightarrow F + F_b = m\cdot\frac{dv}{dt} \quad \text{con } F_b = -b\cdot v$$

Funzione di trasferimento

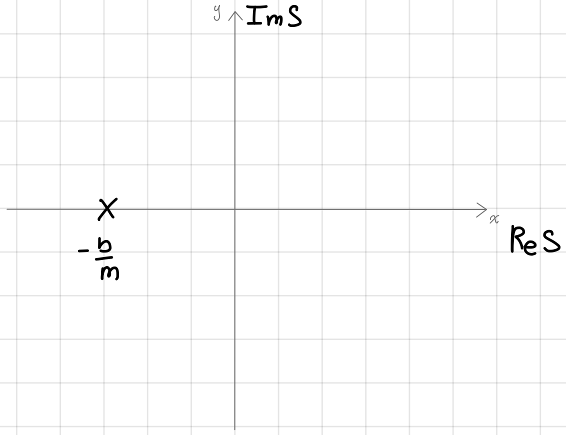
$F(S) - b\,V(S) = m\,S\,V(S)$ scelgo $\begin{cases} U = F \\ y = V \end{cases} \Rightarrow F(S) = mS\,V(S) + b\,V(S) = V(S)(ms+b)$

$$\Rightarrow G(S) = \frac{V(S)}{F(S)} = \frac{1}{ms+b}$$

massa Attrito

$\bar{P}: \; ms + b = 0 \rightarrow \bar{S}_1 = -\frac{b}{m}$

$\rightsquigarrow$ Per $b \neq 0$ $\rightarrow$ Stabile



Spazio di stato

Scelgo $x_1 = v$; $u = F$; $y = v$

$\Sigma F = m\cdot\frac{dv}{dt}$ con $\Sigma F = F + F_b = F - b\,v$

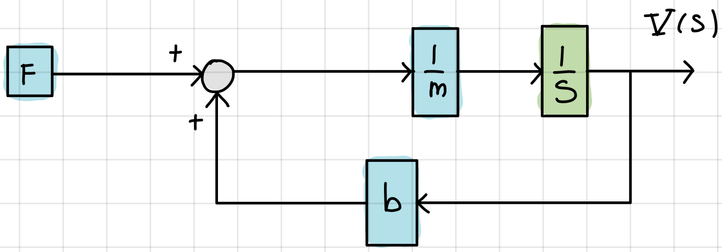
u x

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\cdot F = \frac{1}{m}\left(u - b\cdot x\right)$$

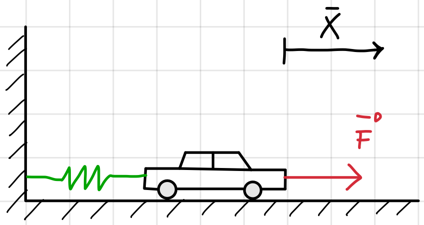
$$y = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\frac{b}{m}\cdot x + \frac{1}{m}\,u \\ y = x \end{cases}$$

Schema a blocchi



Sistema Massa MOLLA NON SMORZATO



Massa : $\sum F = m \cdot \frac{dv}{dt}$ $\rightsquigarrow \sum F = F - K\bar{x} = m\frac{dv}{dt}$

Molla : $F_K = -Kx$

con $v = \frac{d\bar{x}}{dt}$

SPAZIO DI STATO

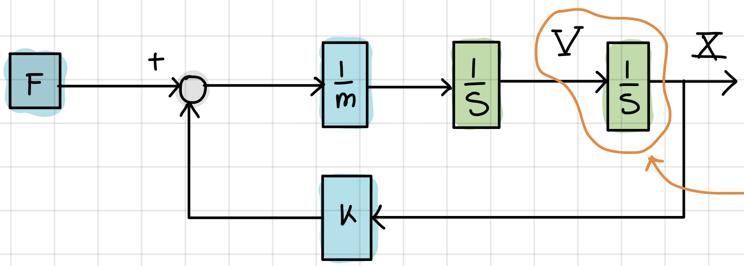
Scelgo $x_1 = \bar{x}$; $x_2 = v$; $u = F$; $y = \bar{x}$ POSIZIONE

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \quad \text{Perché } \frac{d\bar{x}}{dt} = v \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(F - K\bar{x}) \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(u - Kx_1) \Rightarrow \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0x_1 + 1x_2 + 0u \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{m}x_1 + 0x_2 + \frac{1}{m}u \\ y = x_1 + 0x_2 + 0u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}}_{B} \cdot u \qquad y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{D} \cdot u$$

SCHEMA A BLOCCHI



Bisogna tenere a mente che la velocità si ricava dalla derivata dello spazio

$V(S) = S\,X(S)$

$\Rightarrow X(S) = \frac{1}{S} \cdot V(S)$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

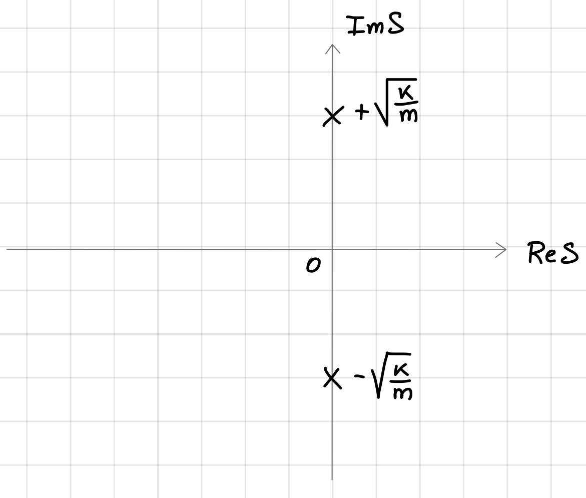
$$G(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{\frac{1}{S^2 m}}{1 + K \cdot \frac{1}{S^2 m}} = \frac{\frac{1}{S^2 m}}{\frac{S^2 m + K}{S^2 m}} = \frac{1}{S^2 m + K}$$

Ottenuta dallo schema a Blocchi

- Non ci sono zeri
- Ci sono due poli coincidenti

$S^2 m + K = 0 \rightarrow S = \pm\sqrt{-\frac{K}{m}}$

$K, m > 0 \Rightarrow \bar{S} = \pm j\sqrt{\frac{K}{m}}$



Fdt tramite Trasformata di Laplace:

$$F - K\bar{x} = m \cdot \frac{dv}{dt} \rightarrow F(s) - K X(s) = m \cdot s\, V(s) \quad \text{ma} \quad v = \frac{d\bar{x}}{dt} \Rightarrow V(s) = s X(s)$$

$$\Rightarrow F(s) - K X(s) = m s^2 X(s) \rightarrow F(s) = K X(s) + m s^2 X(s) \rightarrow F(s) = X(s)\left[K + m s^2\right]$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m s^2 + K}$$

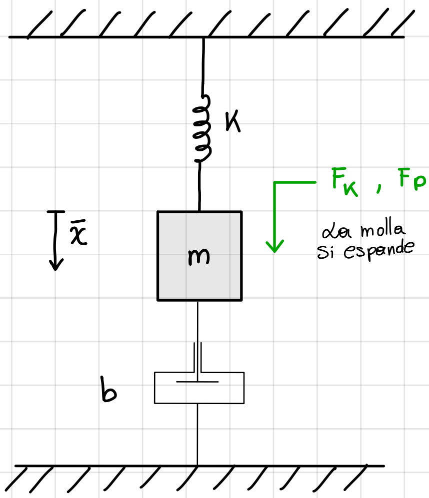
Stessa Fdt

Un sistema di questo tipo è detto **stabile** ma non *asintoticamente* stabile, perché c'è una continua oscillazione che non si smorzerà mai, visto che non c'è uno smorzamento.

Più i poli si avvicinano all'asse immaginario, più il sistema tende ad essere instabile:

- Quando i poli sono proprio sull'asse immaginario il sistema è stabile ma non asintoticamente stabile.
- Quando i poli sono oltre l'asse immaginario (parte reale positiva) allora il sistema è completamente instabile.
- Quando i poli sono a sinistra dell'asse immaginario, quanto più sono lontani da esso più il sistema è stabile (ovvero tende a smorzarsi più velocemente).

Sistema Massa Molla Smorzato



$$\begin{cases} \sum F = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2}{dt^2} \bar{x} \\ F_K = -K \cdot \bar{x} \\ F_b = -b \cdot v = -b \frac{d\bar{x}}{dt} \end{cases}$$

Funzione di trasferimento

Le forze in gioco sono 3: $+F_P$, $-F_b$, $+F_K$

$$\Rightarrow F_K + F_P - F_b = m \frac{d^2}{dt} \bar{x}$$

$$= -K\bar{x} + F_P - b\frac{d}{dt}\bar{x} = m\frac{d^2}{dt^2}\bar{x}$$

Trasformo: $-K X(S) + F_P - bS X(S) = mS^2 X \;\rightarrow\; F_P(S) = X(S)\left[mS^2 + bS + K\right]$

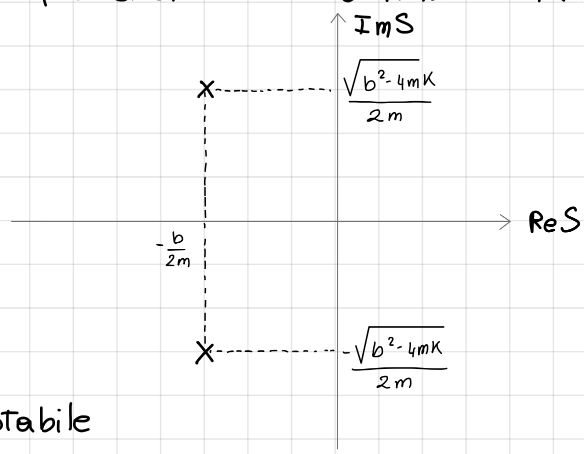
$$G(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{1}{mS^2 + bS + K}$$

Nessuno zero

2 Poli $\rightarrow \Delta = \sqrt{b^2 - 4 \cdot m \cdot K}$

- Caso 1: $\Delta < 0$, per $b^2 < 4mK$ (lo smorzamento è minore della molla)

$$\Rightarrow P_{1,2} = \frac{-b \pm j\sqrt{b^2 - 4mK}}{2m}$$



- Caso 2: $\Delta > 0$, per $b^2 > 4mK$

$$P_{1,2} = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4mK}\right) \cdot (2m)^{-1}$$

- Caso 3: $\Delta = 0 \Rightarrow P_{1,2} = \frac{-b}{2m} \rightarrow$ Stabile

Spazio di stato

Scelgo $x_1 = v \quad x_2 = \bar{x} \quad ; \quad U = F_P \quad ; \quad y = \bar{x}$

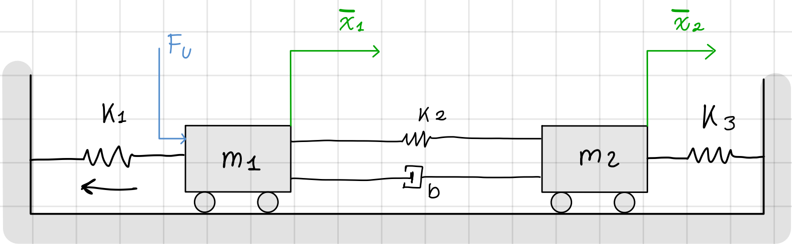
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{m}\left(F_K + F_P - F_b\right) = \frac{1}{m}\left(-K\underset{x_2}{\underset{\uparrow}{\bar{x}}} + \underset{U}{\underset{\uparrow}{F_P}} + b \cdot \underset{x_1}{\underset{\uparrow}{v}}\right) \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{1}{m}\left(-Kx_2 + U + bx_1\right) \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{b}{m}x_1 - \frac{K}{m}x_2 + 1 \cdot U \\ x_2 = 1x_1 + 0x_2 + 0 \cdot U \\ y = 0x_1 + 1x_2 + 0 \cdot U \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{m} & -\frac{K}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot U \\ y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \cdot U \end{cases}$$

ACCOPPIAMENTO FERROVIARIO

Dall'esercizio 4.7 pg 133



- $\sum^{i} F_i = m \cdot a = m \dfrac{d}{dt} v = m \dfrac{d^2}{dt^2} \bar{x}$
- $F_K = -K_i \cdot x_i$
- $F_D = -b \cdot v = -b \cdot \dfrac{d}{dt} \bar{x}$

SPAZIO DI STATO

Scelgo $x_1 = \bar{x}_1 \quad x_2 = \bar{x}_2 \;;\; U = F_U \;;\; y = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\bar{x}}_1 = -K_1 \bar{x}_1 - K_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - b(\dot{\bar{x}}_1 - \dot{\bar{x}}_2) + F_U \\ m_2 \ddot{\bar{x}}_2 = -K_3 \bar{x}_2 - K_2 (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - b(\dot{\bar{x}}_2 - \dot{\bar{x}}_1) \end{cases}$$

Abbiamo due Termini <u>derivati due volte</u>, quindi...

$$\begin{cases} \bar{x}_3 = \dot{\bar{x}}_1 \\ \bar{x}_4 = \dot{\bar{x}}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_4 \\ \dot{\bar{x}}_3 = 1/m_1 \left[-K_1 \bar{x}_1 - K_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - b(\bar{x}_3 - \bar{x}_4) + F_U \right] \\ \dot{\bar{x}}_4 = 1/m_2 \left[-K_3 \bar{x}_2 - K_2 (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - b(\bar{x}_4 - \bar{x}_3) \right] \end{cases}$$

In Termini di spazio di stato $(F_U \to U, \; \bar{x}_i \to x_i)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = 1/m_1 \left[-K_1 x_1 - K_2 (x_1 - x_2) - b(x_3 - x_4) + U \right] = x_1\left(-\frac{K_1}{m_1} - \frac{K_2}{m_1}\right) + x_2\left(-\frac{K_2}{m_1}\right) + x_3\left(-\frac{b}{m_1}\right) + x_4\left(\frac{b}{m_1}\right) + U \\ \dot{x}_4 = 1/m_2 \left[-K_3 x_2 - K_2 (x_2 - x_1) - b(x_4 - x_3) \right] = x_1\left(\frac{1}{m_2}\right) + x_2\left(-\frac{K_3}{m_2} - \frac{K_2}{m_2}\right) + x_3\left(\frac{b}{m_2}\right) + x_4\left(-\frac{b}{m_2}\right) \end{cases}$$

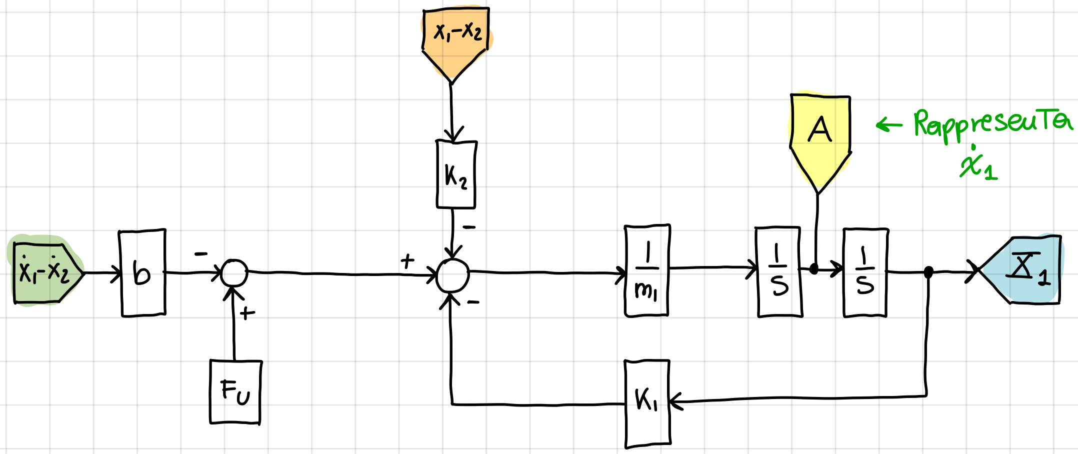
$$\{ y = -x_1 + x_2$$

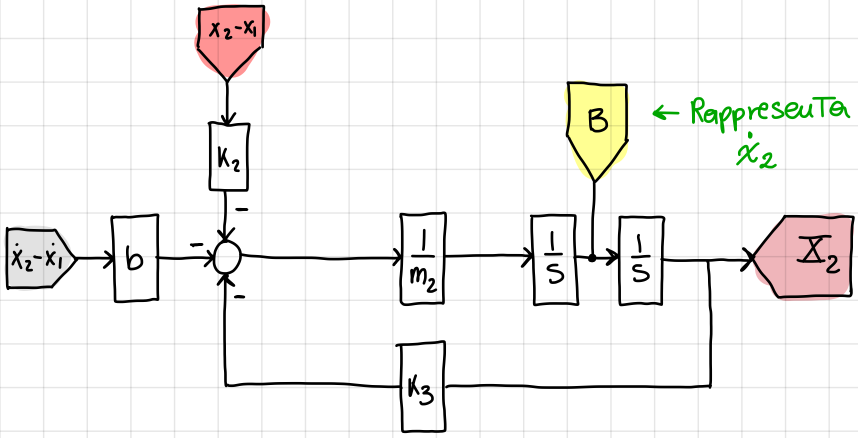
$$\underline{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1+K_2}{m_1} & -\frac{K_2}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} & -\frac{K_2+K_3}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{B}}} \cdot U \qquad y = \underbrace{(-1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)}_{\underline{C_1}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \underbrace{\emptyset}_{D \; \emptyset} \cdot U$$

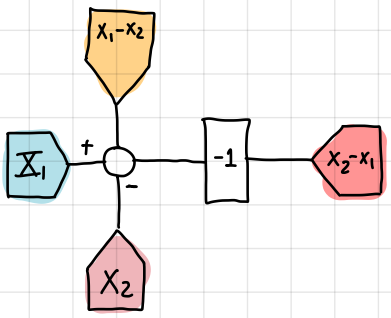
Se invece $y_1 = \bar{x}_1 \;;\; y_2 = \bar{x}_2$

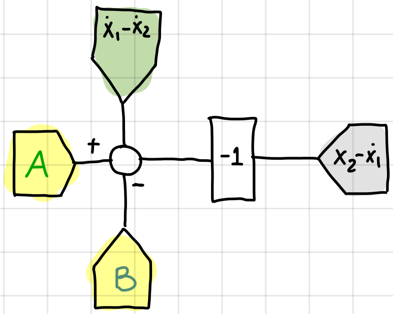
$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \longrightarrow y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \underbrace{\emptyset}_{D \; \emptyset} \cdot U$$

SCHEMA A BLOCCHI



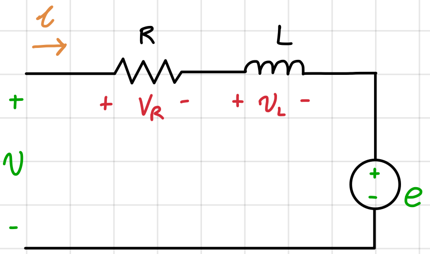






MODELLI ELETTROMECCANICI

MOTORE A CORRENTE CONTINUA



Relazioni caratteristiche

$$\begin{cases} V_L = L \cdot \dfrac{di_L}{dt} \\ V_R = R \cdot i_R \end{cases} \quad \text{con } i_L = i_R$$

Viste prima...

Forza contro-elettromotrice

$$\{ e = K_v \cdot \omega$$

Velocità Angolare

Si oppone alla rotazione

Coppia (generica)

Come la eq: $F = m \cdot a = m \cdot \dfrac{dv}{dt}$

Scriviamo $\tau = J \cdot \alpha = J \cdot \dfrac{d\omega}{dt}$

Momento d'inerzia

Accelerazione Angolare

Abbiamo poi "delle coppie" specifiche:

Coppia del motore

$$\tau_i = K_t \cdot i$$

Coefficiente

Corrente

Coppia che si oppone al modo del motore

$$\tau_b = - b \cdot \omega$$

Opposta Al moto (Attrito)

Vel Angolare

Coppia di carico - load torque

$$\tau_e$$

← E' un'influenza esterna

Possiamo scrivere quindi $\sum \tau = \tau_i + \tau_b - \tau_e \Rightarrow J \cdot \dfrac{d\omega}{dt} = K_t i + b \cdot \omega - \tau_e$ (1)

Esaminiamo il sistema

LKT: $V_R + V_L + e - V = 0 \rightarrow R \cdot i + L\dfrac{di}{dt} + K_v \omega - V = 0 \rightarrow L\dfrac{di}{dt} = V - Ri - K_v\omega$ (2)

Unisco le due equazioni

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = V - Ri - K_v\omega \\ J \cdot \dfrac{d\omega}{dt} = K_t i + b\,\omega - \tau_e \end{cases}$$

Modello del motore CC

SPAZIO DI STATO (1)

Scelgo $x_1 = i$; $x_2 = \omega$; $U_1 = v$; $U_2 = \tau_e$; $y = \omega$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = \frac{1}{L}\left[U_1 - R \cdot x_1 - K_v x_2 \right] \\
x_2 = \frac{1}{J}\left[K_t x_1 + b\, x_2 - U_2 \right] \\
y = x_2
\end{cases}
\rightsquigarrow
\boxed{
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{K_v}{L} x_2 + \frac{1}{L} U_1 + 0\, U_2 \\
\dot{x}_2 = \frac{K_t}{J} x_1 + \frac{b}{J} x_2 + 0\, U_1 - \frac{1}{J} U_2 \\
y = 0\, x_1 + 1\, x_2 + 0\, U_1 + 0\, U_2
\end{cases}
}
$$

Notazione Matriciale

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_t}{J} & \frac{b}{J} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}
$$

$$
y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}
$$

SPAZIO DI STATO (2)

Voglio anche la posizione Angolare : $\theta \rightsquigarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega \rightsquigarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$

$\to$ serve un'altro variabile di stato

Se $x_3 = \theta \to \dot{x}_3 = \frac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow \dot{x}_3 = x_2$

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K}{L} & \varnothing \\ -\frac{K_t}{J} & \frac{K_b}{J} & \varnothing \\ 0 & 1 & \varnothing \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -1/J \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}
$$

Se voglio vedere l'andamento di $\theta = x_3$

$$
y = x_3 \to y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}
$$

Spazio di Stato (3)

Voglio $y_1 = \omega$, $y_2 = i$, $y_3 = \theta$

$x_1 = i$; $x_2 = \omega$; $x_3 = \theta$

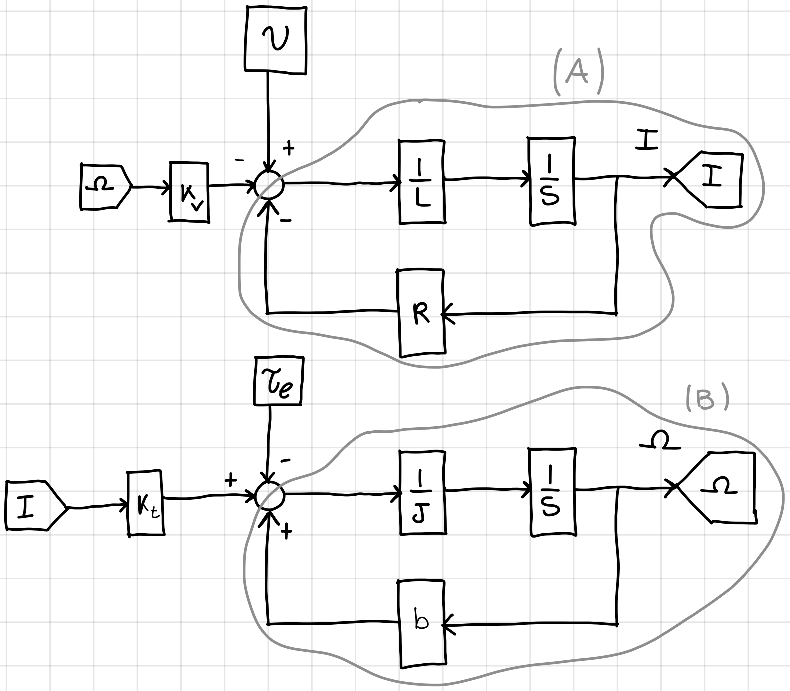
$y_1 = x_2$
$y_2 = x_1$
$y_3 = x_3$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{K}{L} x_2 + 0 x_3 + \frac{1}{L} U_1 + 0 U_2 & i \\
\dot{x}_2 = \frac{K_t}{J} x_1 + \frac{K_b}{J} x_2 + 0 x_3 + 0 U_1 - \frac{1}{J} U_2 & \omega \\
\dot{x}_3 = 0 x_1 + 0 x_2 + 1 x_3 + 0 U_1 + 0 U_2 \\
y_1 = 0 x_1 + 1 x_2 + 0 x_3 + 0 U_1 + 0 U_2 \\
y_2 = 1 x_1 + 0 x_2 + 0 x_3 + 0 U_1 + 0 U_2 \\
y_3 \quad 0 x_1 + 0 x_2 + 1 x_3 + 0 U_1 + 0 U_2
\end{cases}
$$

$$
C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}
$$

SCHEMA A BLOCCHI

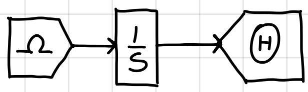
$$
\begin{cases}
L \frac{di}{dt} = v - R i - b \omega \\
J \cdot \frac{d\omega}{dt} = K_t i + K_b \omega - \tau_e
\end{cases}
$$



BONUS 1

Siccome $\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow s\Theta = \Omega$

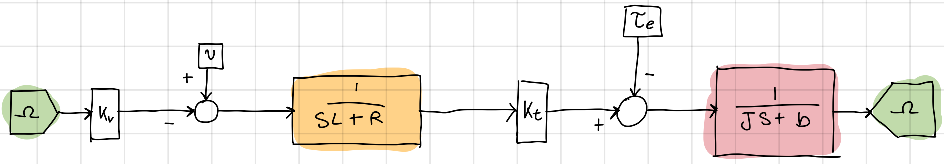
$\Rightarrow \Theta = \frac{1}{s} \Omega$



BONUS 2: Possiamo mettere i due blocchi in serie e semplificarli

$(A) = \dfrac{\frac{1}{sL}}{1 + R \cdot \frac{1}{sL}} = \dfrac{\frac{1}{sL}}{\frac{sL + R}{sL}} = \dfrac{1}{sL + R}$

$(B) = \dfrac{\frac{1}{Js}}{1 + K_b \cdot \frac{1}{Js}} = \dfrac{1}{Js + b}$



FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Dallo schema a blocchi

Ricordando che Serie $= \left[G_1(s) \cdot G_2(s)\right] \cdot U(s)$ Retroazione $= \dfrac{G(s)}{1 + K \cdot G(s)} \cdot U(s)$

* Considero $\tau_e = \emptyset$, V = INPUT , Ω = OUTPUT

- $G_1(s) = \dfrac{1}{sL+R} \cdot K_t \cdot \dfrac{1}{Js+b} = \dfrac{K_t}{(sL+R)(Js+b)}$

- $G_2(s) = \dfrac{G_1(s)}{1 + K_v \cdot G_1(s)}$ $\Rightarrow$ $G(s) = \dfrac{\dfrac{K_t}{(sL+R)(Js+b)}}{1 + \dfrac{K_t K_v}{(sL+R)(Js+b)}} = \dfrac{K_t}{(sL+R)(Js+b) + K_t K_v}$

$$= \frac{K_t}{s^2(LJ) + s(Lb+JR) + Rb + K_t K_v}$$

Nessuno zero

2 poli

Dallo Spazio di Stato alla funzione di trasferimento

Abbiamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{b}{J} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = (0 \quad 1) \qquad D = [0]$$

$$\Rightarrow G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

$$(sI-A)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{b}{J} \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} s+\frac{R}{L} & -\frac{K_v}{L} \\ +\frac{K_t}{J} & s+\frac{b}{J} \end{pmatrix} \cdot B =$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{A})} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

Dove adj (A) è la matrice avente: gli el sulla d.p. scambiati di posto e gli el sulla d.s. scambiati di segno.
?

Basta tenere a mente che: $\mathrm{adj}(I) = I \rightsquigarrow \mathrm{adj}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\det(sI-A) = \left(s+\frac{R}{L}\right)\left(s+\frac{b}{J}\right) - \left(\frac{K_v}{L} \cdot \frac{K_t}{J}\right)$

- $\mathrm{Adj}(sI-A) = \begin{pmatrix} s+\frac{b}{J} & \frac{K_v}{L} \\ -\frac{K_t}{J} & s+\frac{R}{L} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (sI-A)^{-1} = \frac{1}{\left(s+\frac{R}{L}\right)\left(s+\frac{b}{J}\right) - \left(\frac{K_v}{L} \cdot \frac{K_t}{J}\right)} \cdot \begin{pmatrix} s+\frac{b}{J} & \frac{K_v}{L} \\ -\frac{K_t}{J} & s+\frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C \cdot (sI-A)^{-1} = \frac{1}{d(s)} \cdot (0 \quad 1) \begin{pmatrix} s+\frac{b}{J} & \frac{K_v}{L} \\ -\frac{K_t}{J} & s+\frac{R}{L} \end{pmatrix} = \frac{1}{d(s)} \cdot \left(-\frac{K_t}{J} \quad s+\frac{R}{L}\right)$$

$$\Rightarrow C(sI-A)^{-1} \cdot B = \frac{1}{d(s)} \cdot \left(-\frac{K_t}{J} \quad s+\frac{R}{L}\right) \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{K_t / K_L}{s^2(LJ) + s(Lb+JR) + Rb + K_t K_v}$$

QED