Proprieta' della trasformata

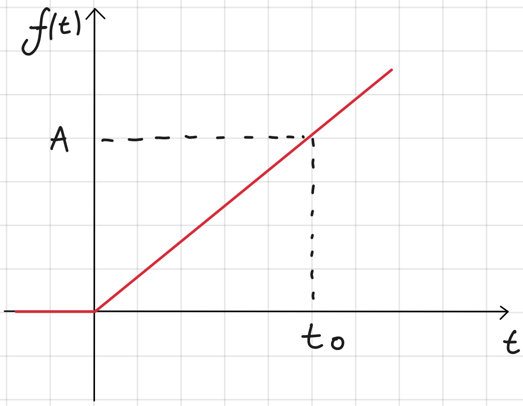
$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ Impulso

$\mathcal{L}[\overset{\rightarrow 1(t)}{\pi(t)}] = 1/s$ Gradino

$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\cdot\pi(t)] = \frac{1}{s+\alpha}$ Exp

$\mathcal{L}[f(t-t_0)\pi(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s)$ Time Shift

Funzione RAMPA



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{A}{t_0}t & t \geq 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che la $\mathcal{L}$ e' LINEARE

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \underset{F_1(s)}{\mathcal{L}[f_1]} + \beta \underset{F_2(s)}{\mathcal{L}[f_2]}$$

→ Dalla proprieta'

A e' un coefficiente → $\frac{A}{t_0} = \alpha$ → Calcolo solo $\mathcal{L}$ del resto della funzione

$$\rightarrow \mathcal{L}[t\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Funzione gradino}}}{1(t)}] = \int_0^\infty \underset{g}{\boxed{t}}\, 1(t)\, \overset{\frac{df}{dt}}{\boxed{e^{-st}}}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Per parti}}}{=}$$

Scelgo $f(t) = -\frac{e^{-st}}{s}$

proof $\frac{df}{dt} = \frac{1}{\cancel{s}}\cdot(\cancel{-}\cancel{s})\cdot(\cancel{-}e^{-st}) = e^{-st}$ QED

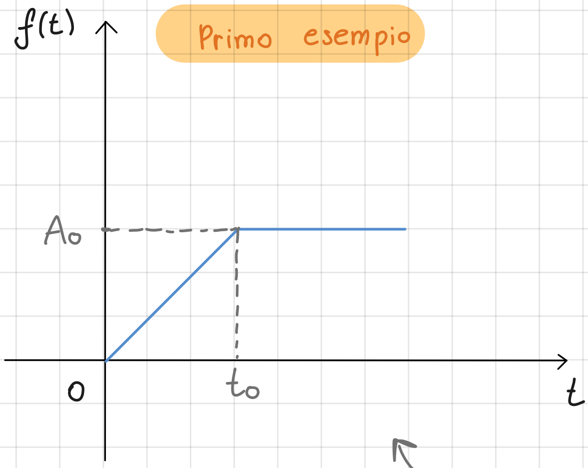
$$\int_a^b \frac{df}{dt}\cdot g(t)\,dt = \left[f(t)\,g(t)\right]_a^b - \int f(t)\frac{dg}{dt}\,dt$$

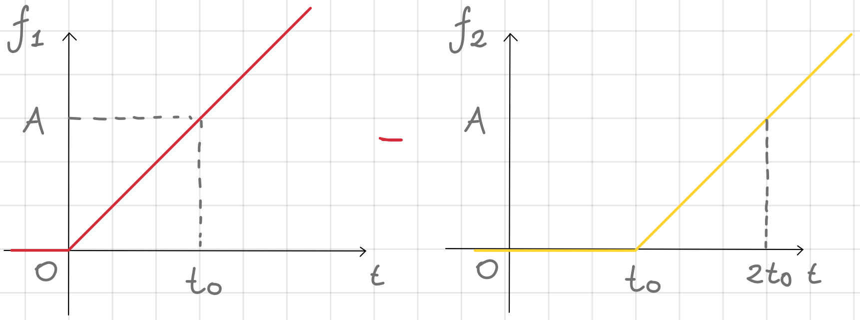
$$\Rightarrow \mathcal{L}[\ldots] = \left[-t\cdot\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-st}}{s}\,dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\ldots] = \boxed{\frac{1}{s^2}}$$ Trasformata della funzione Rampa

Trasformate di segnali Composti

Primo esempio





Per regolare i sistemi si utilizza un segnale che inizialmente cresce **gradualmente**, proprio come nel caso di questo segnale.

Alcuni sistemi, quando vengono **sovrasollecitati**, iniziano ad *oscillare,* andando a non performare correttamente (male); un' analogia è quella dell'accelerazione dell'auto, quando c'è uno slittamento delle ruote, la partenza è peggiore.

La **pendenza** della retta iniziale viene decisa a seconda della **condizione del sistema**; andiamo quindi a valutare le condizioni e poi decidiamo come sollecitare il sistema

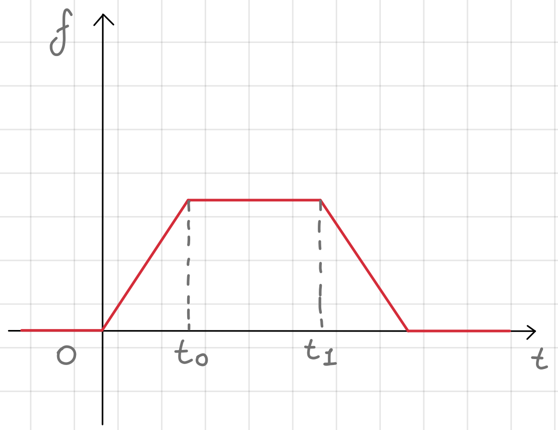
Per la linearità

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{A}{t_0} t \; 1(t) - \frac{A}{t_0}(t-t_0) \cdot 1(t-t_0)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A}{t_0}\left[\underbrace{\frac{1}{s^2}}_{F(\text{Rampa})} - \underbrace{e^{-st_0} \cdot \frac{1}{s^2}}_{F(\text{Rampa ritardato})}\right] = \underbrace{\boxed{\frac{A}{t_0}(1-e^{-st_0})\frac{1}{s^2}}}_{F(t)}$$

Secondo esempio



$$F_1(s) = \frac{A}{s^2}(1-e^{-st})$$

$$f_2(t) = \frac{A}{t_2-t_1}(t-t_1)\,\mathbb{1}(t-t_1)$$

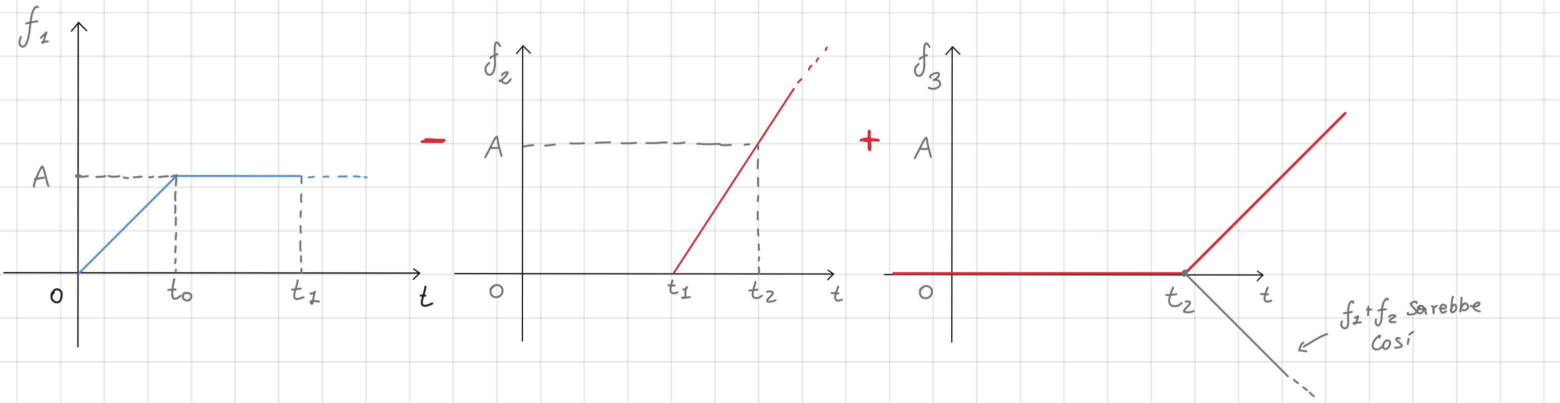
$$\Rightarrow F_2(s) = \frac{A}{s^2} \cdot \frac{1}{t_2-t_1} e^{-st_1}$$

$$f_3(t) = \frac{A}{t_2-t_1}(t-t_2)\,\mathbb{1}(t-t_2)$$

$$\Rightarrow F_3(s) = \frac{A}{s^2}\,\frac{1}{t_2-t_1} e^{-st_2}$$

$$\Rightarrow f(t) = f_1 + f_2 + f_3$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A}{s^2}\left(\frac{1-e^{-st_0}}{t_0} - \frac{1}{t_2-t_1}e^{-st_1} + \frac{1}{t_2-t_1}e^{-st_2}\right)$$

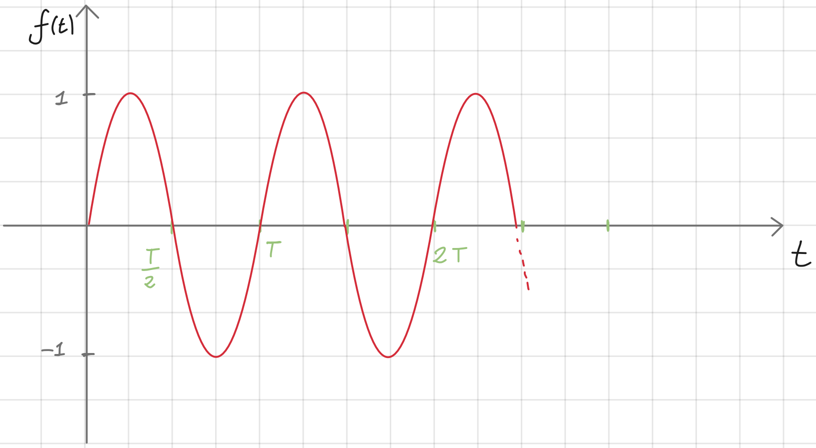


Trasformata della sinusoidale

$$f(t) = \sin(\omega t) \cdot \mathbb{1}(t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega t = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2\pi} T = \boxed{\frac{T}{2}}$$ Si Annulla

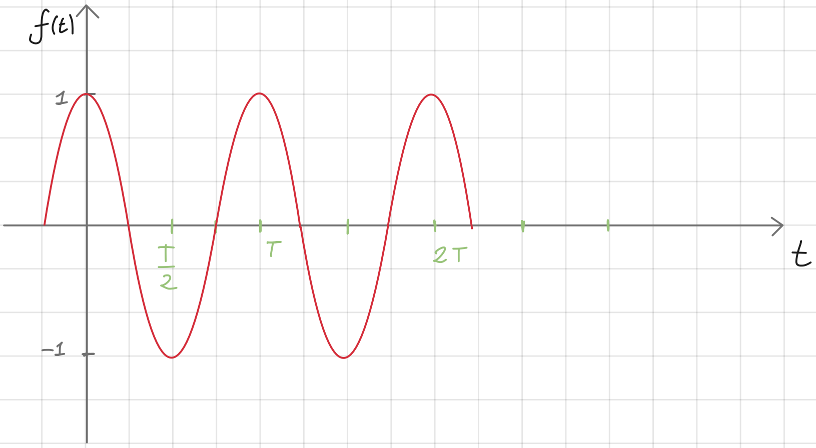


$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \Rightarrow \mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\, \mathbb{1}(t)\right] = \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}\left[e^{j\omega t} \cdot \mathbb{1}(t)\right] - \mathcal{L}\left[e^{-j\omega t} \cdot \mathbb{1}(t)\right]\right.$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\cancel{j}}\left(\frac{\overset{\cancel{2}\omega}{\cancel{s}+\cancel{j}\omega - \cancel{s}+\cancel{j}\omega}}{\underset{z \cdot z'}{(s-j\omega)(s+j\omega)}}\right) = \boxed{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}}$$

Trasformata della cosinusoidale



$$\mathcal{L}\left[\cos \omega t \; 1\!\!1(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\overset{\cancel{2}s}{s+\cancel{j\omega}-s-\cancel{j\omega}}}{\underset{z+z}{(s-j\omega)(s+j\omega)}}$$

$$= \boxed{\frac{s}{s^2+\omega^2}}$$

$\sin(\omega t + \theta) = \sin(\omega t)\cos(\theta) + \cos(\omega t)\sin(\theta) = 0$ LINEARITA'

PROPRIETA' : moltiplicazione per esponenziale

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot f(t)] \underset{\text{Definizione}}{=} \int_0^\infty \underbrace{e^{-\alpha t} \cdot f(t)}_{\text{Funzione}} \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-(s+\alpha)t}\, dt = \underset{\text{Trasformata}}{F(s+\alpha)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot f(t)] = F(s+\alpha)}$$

ESEMPI

- $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t \ \mathbb{1}(t)] = \dfrac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
- $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \ \mathbb{1}(t)] = \dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
- $\mathcal{L}[t \cdot e^{-3t} \ \mathbb{1}(t)] = \dfrac{1}{(\underset{\overset{\uparrow}{\alpha}}{s+3})^2}$

Teorema della Derivazione reale (nel tempo)

Paragrafo 2.4

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = s\cdot F(s) - f(0)}$$

$$F(s) = \int_0^\infty \frac{df}{dt}\, e^{-st}\, dt = \left[f(t)\cdot e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\cdot\left(-s\, e^{-st}\right) dt =$$

$$= -f(0) + s\underbrace{\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\, dt}_{F(S)} = -f(0) + s\,F(S)$$

QED

Esempio 1

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\ \mathbb{1}(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\sin(\omega t)\right] = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\left[\left(\frac{d}{dt}\sin(\omega t)\right)\mathbb{1}(t)\right]$$

$$\uparrow$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\omega}}\left(s\cdot\frac{\cancel{\omega}}{s^2+\omega^2} - 0\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

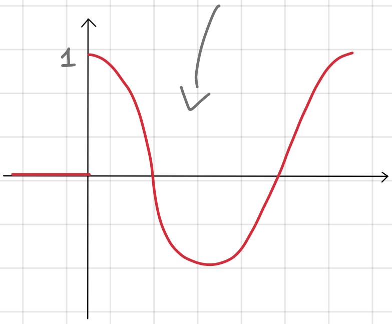
QED

Esempio 2

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\ \mathbb{1}(t)\right] = \mathcal{L}\left[-\frac{1}{\omega}\cdot\frac{d}{dt}\cos(\omega t)\ \mathbb{1}(t)\right] = -\frac{1}{\omega}s\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2} - \overset{(1)}{\boxed{\cos(0)}} \xrightarrow{?} 1$$

Discontinuità

$$= -\frac{1}{\omega}\,\frac{\cancel{s^2}-\cancel{s^2}-\omega^2}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$



Per rappresentare la derivata di una funzione discontinua utilizziamo **L' impulso di Dirac,** che viene rappresentato mediante una **freccia** che ha origine nel l'unto di discontinuità ed ha lunghezza pari all'area

- $\mathcal{L}_+\left[f(t)\right] = \int_{0^+}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$
- $\mathcal{L}_-\left[f(t)\right] = \int_{0^-} f(t)\, e^{-st}\, dt$

} Quando $\mathcal{L}_+ \neq \mathcal{L}_-$?

$$\mathcal{L}_+\left[f(t)\right] = \int_{0^+}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{0^+} f(t)\, e^{-st}\, dt + \underbrace{\int_{0^+}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt}_{\mathcal{L}_+}$$

$\Rightarrow \mathcal{L}_+\left[f(t)\right] + \int_{0^-}^{0^+} \overset{\delta(t)}{f(t)}\, e^{-st}\, dt$ $\rightarrow$ Se $f(t) = \delta(t) \rightarrow \mathcal{L}_+ \neq \mathcal{L}_-$

L'intervallo è un PUNTO ← Definizione di IMPULSO

$\Rightarrow$ Il valore trovato al punto (1) è $\mathcal{L}_+$

PROPRIETA' DELLA DERIVATA IN CASCATA : Derivata Seconda

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{d}{dt} f(t)}_{g}\right)\right]$$

$$\rightarrow \quad g(t) = \frac{df}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{dg}{dt}\right] = s\,G(s) - g(0)$$

$$G(s) = \mathcal{L}\left[g(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt} f(t)\right] = s\left(sF(s) - f(0)\right) - g(0) = s^2 F(s) - s f(0) - \dot{f}(0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt} f(t)\right] = s^2 F(s) - s f(0) - \dot{f}(0)}$$

Se $f(0) = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n F(s)}$

E tutte le sue derivate in 0 sono zero