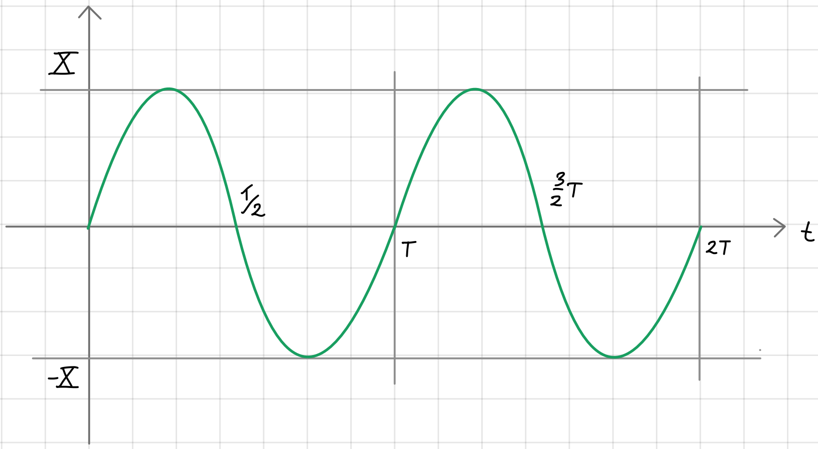
RISPOSTA IN FREQUENZA

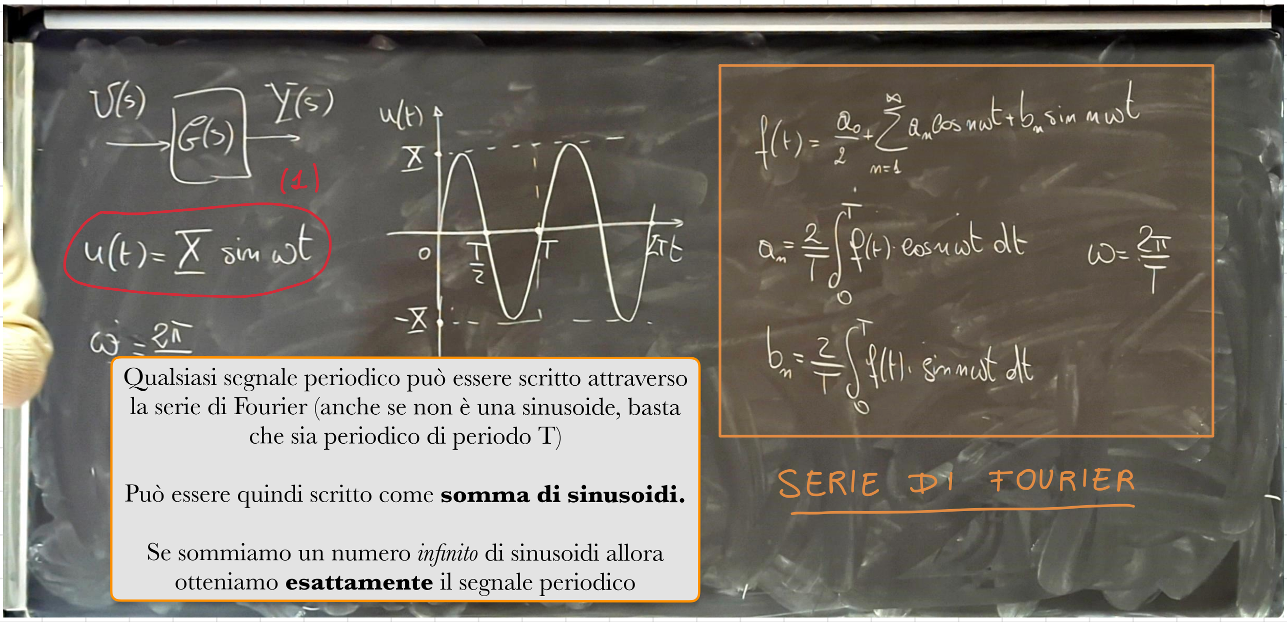
* Stabilità Libro

Cosa succede se metto in ingresso ad un sistema LTI stabile una **sinusoide**?

$$U(t) = \bar{X} \sin(\omega t) \qquad \text{con} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{con} \quad T = \frac{1}{f}$$



* Motivazione
Analisi in freq.



Qualsiasi segnale periodico può essere scritto attraverso la serie di Fourier (anche se non è una sinusoide, basta che sia periodico di periodo T)

Può essere quindi scritto come **somma di sinusoidi.**

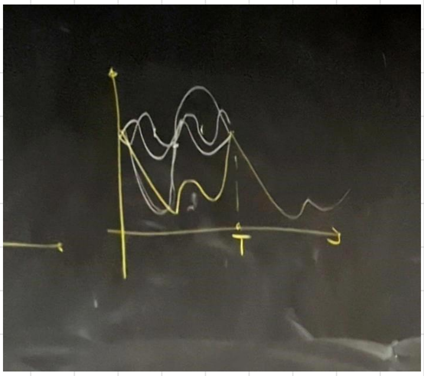
Se sommiamo un numero *infinito* di sinusoidi allora otteniamo **esattamente** il segnale periodico

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot \cos n\omega t \, dt \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot \sin n\omega t \, dt$$

* battuta



Morale della favola

Possiamo quindi usare la conoscenza dello studio della risposta in frequenza per analizzare **un infinito numero di segnali**, visto che possiamo esprimere un qualsiasi segnale come una somma di sinusoidi (che analizziamo in frequenza, appunto).

Non ci serve una somma *infinita* di sinusoidi, perché la stragrande maggioranza dei sistemi che usiamo sono di tipo **passa-basso**; di conseguenza i termini della sinusoide con una frequenza estremamente alta, una volta "passati" attraverso la funzione di trasferimento (il sistema) **non compaiono in uscita**. Quei segnali esistono e ci sono, ma attraverso i sistemi non compaiono perché vengono **filtrati**.

Se riesco a trovare un diagramma di come il sistema risponde, ovvero trovare un punto in cui la risposta diventa quasi zero, possiamo capire, guardando solo l'ingresso, l'uscita del sistema.

Se il segnale non è periodico, possiamo immaginarlo come un segnale di periodo infinito. Alla somma si sostituisce un integrale, che è proprio la **trasformata di Fourier** (vista nel segnale di fondamenti di tlc).

RISPOSTA IN FREQUENZA

Da pg 373

Se in ingresso ho una sinusoide di $\omega=\omega_0$, in uscita avrò una sinusoide di $\omega=\omega_0$ ma con Ampiezza e Fase generalmente diverse.

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo poli complx e conj

Supponiamo di avere $u(t) = X \sin(\omega t) \rightleftharpoons U(s) = \dfrac{X \cdot \omega}{s^2+\omega^2} = \dfrac{X \omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$

Siccome $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$

$$\rightarrow Y(s) = G(s) \cdot \frac{\omega X}{(s+j\omega)(s-j\omega)} = \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s+p_i}$$

Questi termini provengono dalla scomposizione in fratti semplici della funzione di trasferimento

Questi termini provengono dalla scomposizione in fratti semplici del segnale U(s);
n.b. se i poli sono complessi anche i residui lo saranno, inoltre scopriremo che a' è il coniugato di a'.

L'ANTITRASFORMATA Sarebbe:

$$y(t) = a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^{n} r_i e^{-p_i t}$$

Sono esponenziali negativi semplici, tendono tutti a zero per t -> inf

$\Rightarrow$ Rimangono solo i primi due Termini: $y(t) = a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t}$

Calcolo dei residui $\quad r_i = \lim_{s \to -p_i} (s+p_i) \cdot Y(s)$

- $a = \lim_{s \to -j\omega} \cancel{(s+j\omega)} \cdot \dfrac{\omega X}{\cancel{(s+j\omega)}(s-j\omega)} \cdot G(s) = \dfrac{\omega X}{-2j\omega} G(-j\omega) = -\dfrac{\cancel{\omega} X}{2j\cancel{\omega}} G(-j\omega)$

- $\bar{a} = \lim_{s \to j\omega} \dfrac{\omega X}{j\omega + j\omega} G(j\omega) = \dfrac{\cancel{\omega} X}{2j\cancel{\omega}} G(j\omega)$ Proofed: $\bar{a} = \text{conj}(a)$

- r_i = NON CI INTERESSANO PERCHE' VANNO A ZERO

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{\omega X}{2j} G(-j\omega) e^{-j\omega t} + \frac{\omega X}{2j} G(j\omega) e^{j\omega t}$$

$$= \frac{\omega X}{2j} \left[G(j\omega) e^{j\omega t} - G(-j\omega) e^{-j\omega t} \right]$$

Sappiamo che un qualsiasi numero complesso può essere scritto come modulo+fase, quindi:

$$G(j\omega) = \underbrace{|G(j\omega)| + \angle G(j\omega)}_{r \angle \theta \text{ F.}} = \underbrace{|G(j\omega)| e^{j\phi}}_{\text{Exp F.}} \quad (1)$$

dove ϕ = FASE $\Rightarrow$ $\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left[\dfrac{Im[G(j\omega)]}{Re[G(j\omega)]}\right]$

Allo stesso modo $G(-j\omega) = |G(-j\omega)| + \angle G(-j\omega) = |G(-j\omega)| \cdot e^{-j\phi}$ ma $|G(-j\omega)| = |G(j\omega)|$

$$\Rightarrow G(-j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{-j\phi} \quad (2)$$

Riscrivo il tutto

$$y(t) = \frac{\omega X}{2j}\left[G(j\omega)e^{j\omega t} - G(-j\omega)e^{-j\omega t}\right] = \frac{\omega X}{2j}\left[|G(j\omega)|e^{j\phi}e^{j\omega t} - |G(j\omega)|e^{-j\phi}e^{-j\omega t}\right]$$

$$= \frac{\omega X}{2j}|G(j\omega)|\left[e^{j\phi}e^{j\omega t} + e^{-j\phi}e^{-j\omega t}\right] = \frac{\omega X}{2j}|G(j\omega)|\left[e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}\right]$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = \omega X |G(j\omega)| \cdot \frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t-\phi)}}{2j}$$

MODULO FASE

$$= \omega X \boxed{|G(j\omega)|} \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$= \omega X |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

RISPOSTA A REGIME

Dalle formule di Eulero

$$A e^{j(\omega t+\phi)} = A[\cos(\omega t+\phi) + j\sin(\omega t+\phi)]$$

$$A e^{-j(\omega t+\phi)} = A[\cos(\omega t+\phi) - j\sin(\omega t+\phi)]$$

$$\Rightarrow e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)} = \cancel{\cos(\omega t+\phi)} + j\sin(\omega t+\phi) - \cancel{\cos(\omega t+\phi)} + j\sin(\omega t+\phi) = 2j\sin(\omega t+\phi)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j} = \sin(\omega t+\phi)$$

Questa rappresentazione è importantissima, perché ci permette di calcolare l'uscita di un qualsiasi sistema LTI conoscendo solo la funzione di trasferimento, senza fare calcoli intermedi! ci basta conoscere il modulo e la fase della **funzione di trasferimento sinusoidale**.

Passaggi per trovare l'uscita ad un sistema con ingresso una sinusoide:
1. Calcolare la funzione di trasferimento *sinusoidale*, ovvero la G(jw).
2. Trovare *modulo* e *fase* della fdt s.
3. Sostituire alla formula generale modulo e fase appena trovati.

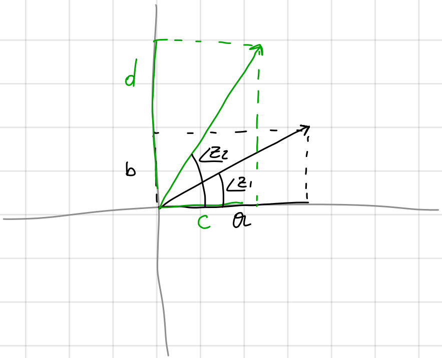
CONCLUSIONE

$$|G(j\omega)| = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\text{Ampiezza sinusoide uscita}}{\text{Ampiezza sinusoide ingresso}}$$

$$\angle G(j\omega) = \frac{\angle Y(j\omega)}{\angle X(j\omega)} = \frac{\text{Fase sinusoide uscita}}{\text{Fase sinusoide ingresso}}$$

$$\boxed{\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega)}$$

CALCOLARE LA FASE DI UNA FRAZIONE



$$\begin{cases} z_1 = a + ib \\ z_2 = c + id \end{cases} \longrightarrow \text{Scrivo in forma esponenziale} \longrightarrow \begin{cases} z_1 = |z_1|\, e^{j(\angle z_1)} \\ z_2 = |z_2|\, e^{j(\angle z_2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{e^{j(\angle z_1)}}{e^{j(\angle z_2)}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{j(\angle z_1)} \cdot e^{-j(\angle z_1)}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{j(\angle z_1 - \angle z_2)}$$

MODULO RISULTANTE

FASE RISULTANTE

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{j(\angle z_1 + \angle z_2)}$$

MODULO

FASE

ESEMPIO 7.1 Pag 377 INTEGRATORE

$$G(s) = \frac{K}{sT + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T + 1} \rightarrow |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \boxed{\angle K - \angle j\omega T + 1} = \emptyset - atan(\omega T)$$

$$\rightarrow K = K \cdot e^{j\emptyset} \Rightarrow \angle K = \emptyset$$

W piccolo → Tende a riprodurre l'ingresso

W g

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \sin(\omega t - atan(\omega T))$$

se $\omega T << 1 \rightarrow \omega << \frac{1}{T}$ Punto di rottura

se $\omega << \frac{1}{T}$, riproduce l'uscita a meno del guadagno K

se $\omega >> \frac{1}{T} \Rightarrow y(t)$ è quasi zero

se $\omega == \frac{1}{T} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - 45°)$

OMEGA	AMPIEZZA USCITA	SFASAMENTO USCITA
W PICCOLO	IN = A U(t) $\bar{y}(t) \simeq K A y(t)$	ϕ PICCOLO
W GRANDE	A uscita PICCOLA $\sim 1/\omega$	$\omega \rightarrow 0$ $\phi \rightarrow -90°$
$\omega == 1$	?	?

ES. 7.2

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + 1/T_2} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_1 \cdot s + 1}{T_2 s + 1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_1 j\omega + 1}{T_2 j\omega + 1}$$

$\uparrow$ evidenza

$$\Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{T_2}{T_1} \frac{\sqrt{(T_1\omega)^2 + 1}}{\sqrt{(T_2\omega)^2 + 1}}$$

$$\angle G(j\omega) = \operatorname{atan}(\omega T_1) - \operatorname{atan}(\omega T_2)$$

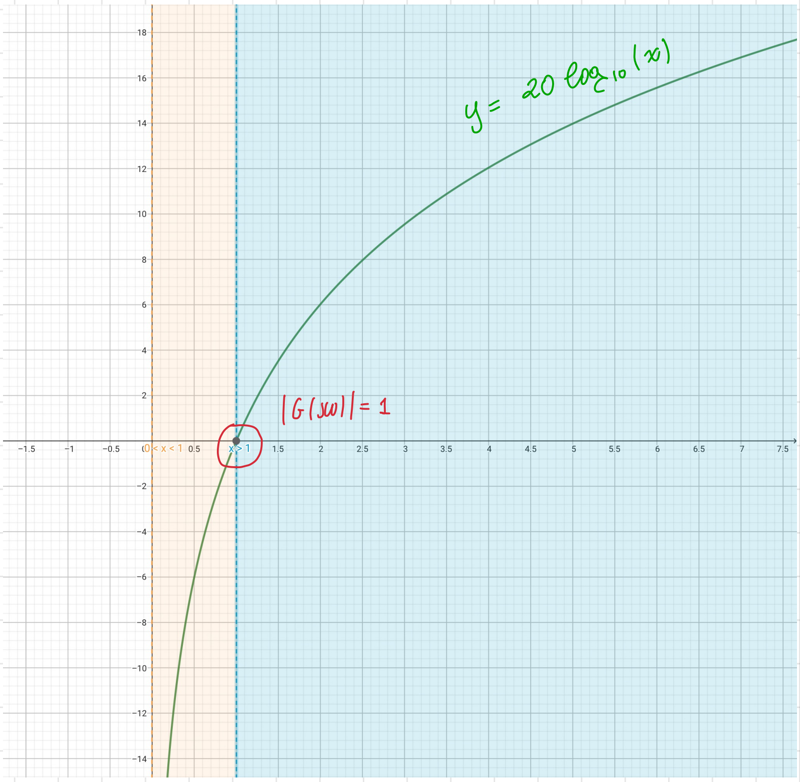
$$\Rightarrow y(t) = \frac{X T_2 \left(\sqrt{(T_1\omega)^2 + 1}\right)}{T_2 \left(\sqrt{(T_2\omega)^2 + 1}\right)} \cdot \sin\left(\omega t + \tan^{-1}(\omega T_1) - \tan^{-1}(\omega T_2)\right)$$

DIAGRAMMI DI BODE

Nei diagrammi di Bode si usa una scala logaritmica per le ASCISSE (x) ed una lineare per le ordinate (y); l'asse delle ordinate non viene posto in zero!

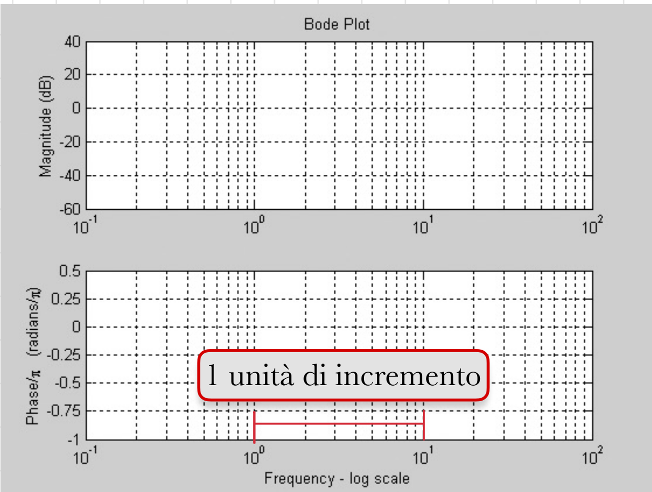
Il modulo viene rappresentato in decibel (dB) secondo la regola:

$$|G(j\omega)|\Big|_{dB} = 20 \log_{10}\left[\,|G(j\omega)|\,\right]$$



Dal grafico risulta chiaro che:

- $|G(j\omega)| = 1 \Rightarrow 20\cancel{\log(1)}^{0} = 0\ dB$
- $0 < |G(j\omega)| < 1 \Rightarrow |G(j\omega)|\Big|_{dB} < 0\ dB$
- $|G(j\omega)| > 1 \Rightarrow |G(j\omega)| > 0\ dB$



Un diagramma di Bode ha questo aspetto perchè...

$$\omega_1 \rightarrow \log \omega_1$$

$$\omega_2 = 10\,\omega_1 \rightarrow \log \omega_2 = \log(10\,\omega_1)$$

$$\Rightarrow \omega_2 - \omega_1 = \log(10\,\omega_1) - \log(\omega_1) = \log\left(\frac{10\,\cancel{\omega_1}}{\cancel{\omega_1}}\right) = \log_{10}(10) = 1$$

10 volte più grande ||| Una sola unità di incremento

INOLTRE

Affinchè $|G(j\omega)|\Big|_{dB} = 20\,dB \rightarrow 20\log(|G(j\omega)|) = 20 \Rightarrow \log(|G(j\omega)|) = 1$

$\Rightarrow |G(j\omega)| = 10^1$

Affinchè $|G(j\omega)|\Big|_{dB} = -20\,dB \rightarrow \log(|G(j\omega)|) = -1 \Rightarrow |G(j\omega)| = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

ES 1: DIAGRAMMA DEL GUADAGNO

$G(s) = K \quad \rightarrow \quad u(t) = \bar{X}\sin(\omega t) \rightleftharpoons y_{ss}(t) = K\bar{X}\sin(\omega t)$

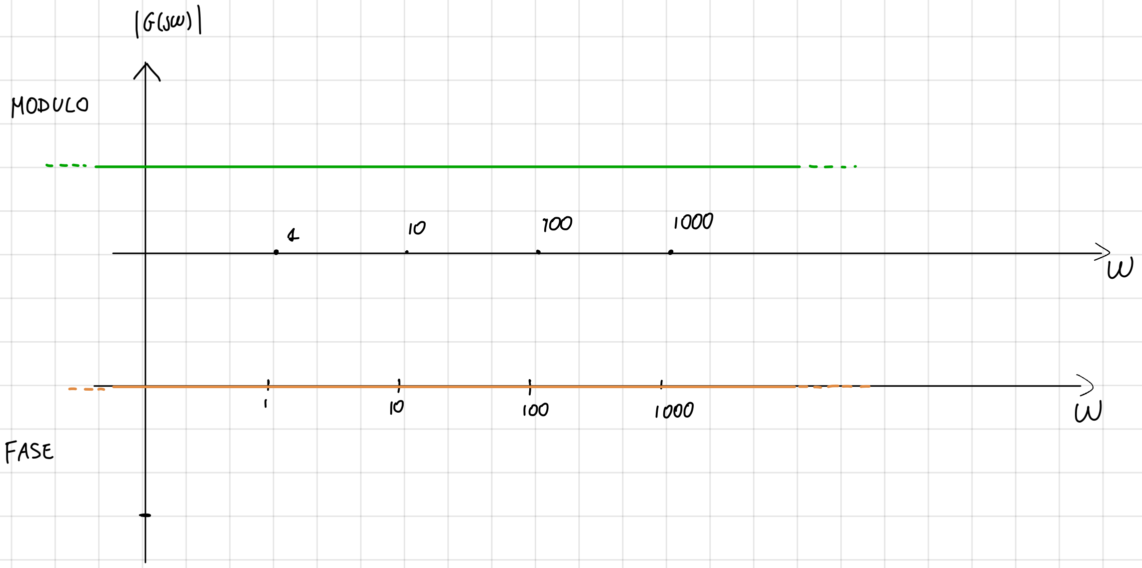
$|G(s)| = K \rightarrow |G(s)|\big|_{dB} = 20\log(|G(s)|) = \boxed{20\log(K)}$

$\angle G(s) = \angle K = \emptyset$

$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log(K)$

$20\log(K) = 10$

$\Rightarrow K = 10^{1/2} = \sqrt{10}$



COME TRACCIARE LA RETTA

ES: $|G(j\omega)|\big|_{dB} = -20\log(\omega)$

1) Quando |...| è zero? $\quad -20\log(\omega) = 0 \quad \rightarrow$ per $\omega = 1 \Rightarrow (1, 0) \equiv P_1$

2) Quanto vale |...| per una decade in meno?

$\rightarrow |G(j\omega)|\big|_{dB}\Big|_{\omega = 1/10} = -20\log\left(\frac{1}{10}\right) = 20 \Rightarrow \left(\frac{1}{10}, 20\right) \equiv P_2$

FATTORI INTEGRALI

$$G(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{j\omega} \Rightarrow |G(j\omega)|=\frac{1}{\omega} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB}=20\log\left(\frac{1}{\omega}\right)=-20\log(\omega)$$

Non è più costante

→ $y(t)$ è una retta che diminuisce di 20 dB/decade

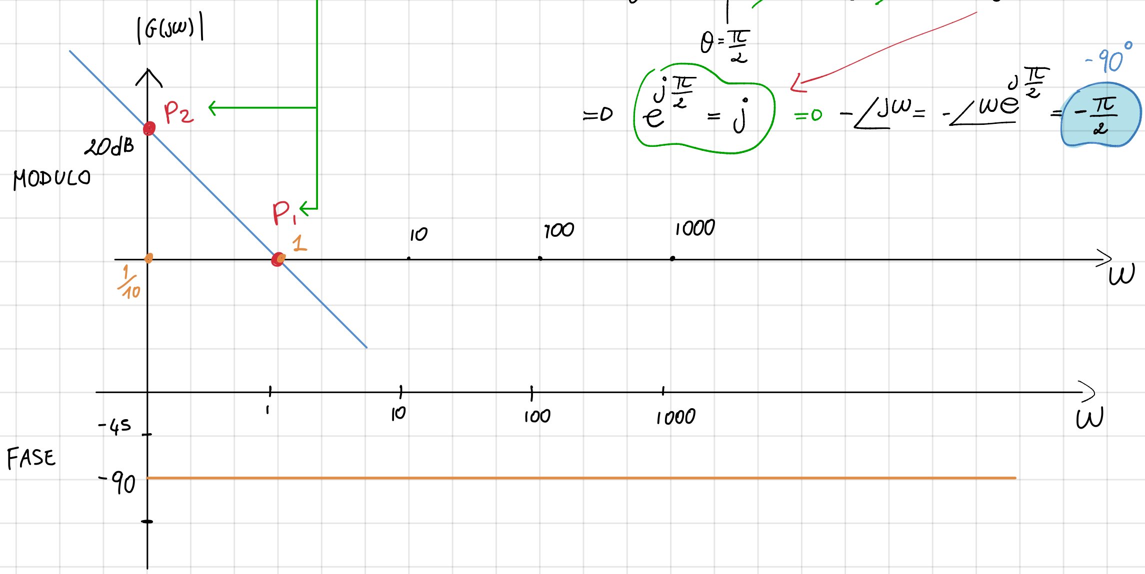
$$\angle G(j\omega)=\angle 1-\angle j\omega = ?$$

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta=\cancel{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}^{0}+j\cancel{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}^{1}=j \qquad \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow e^{j\frac{\pi}{2}}=j \Rightarrow -\angle j\omega=-\angle \omega e^{j\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}$$

$-90°$

La fase è -90 perché abbiamo un numero complesso privo di parte reale, quindi si troverà sempre sull'asse immaginario a prescindere da w; avremo quindi che la sua fase può essere solo +-90



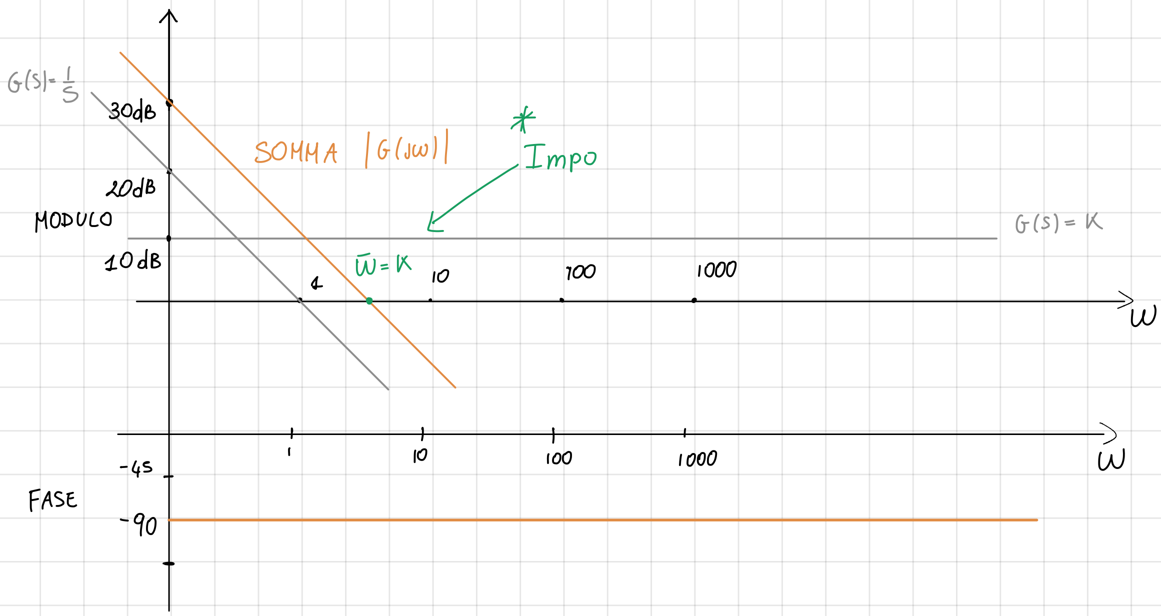
ES: D. Bode di un guadagno ed integrazione

$$G(s)=\frac{K}{s} \to G(j\omega)=\frac{K}{j\omega} \Rightarrow |G(j\omega)|=|K|\cdot\left|\frac{1}{j\omega}\right|=K\cdot\frac{1}{\omega}$$

$$|G(j\omega)|_{dB}=20\log\left(|K|\cdot\left|\frac{1}{j\omega}\right|\right)=\underbrace{20\log(|K|)}_{\text{guadagno}}+\underbrace{20\log\left(\left|\frac{1}{j\omega}\right|\right)}_{\text{derivazione}}$$

SOMMA

Fase: $\angle G(j\omega)=\angle\frac{K}{j\omega}=\angle K-\angle\frac{1}{j\omega}$ SOMMA

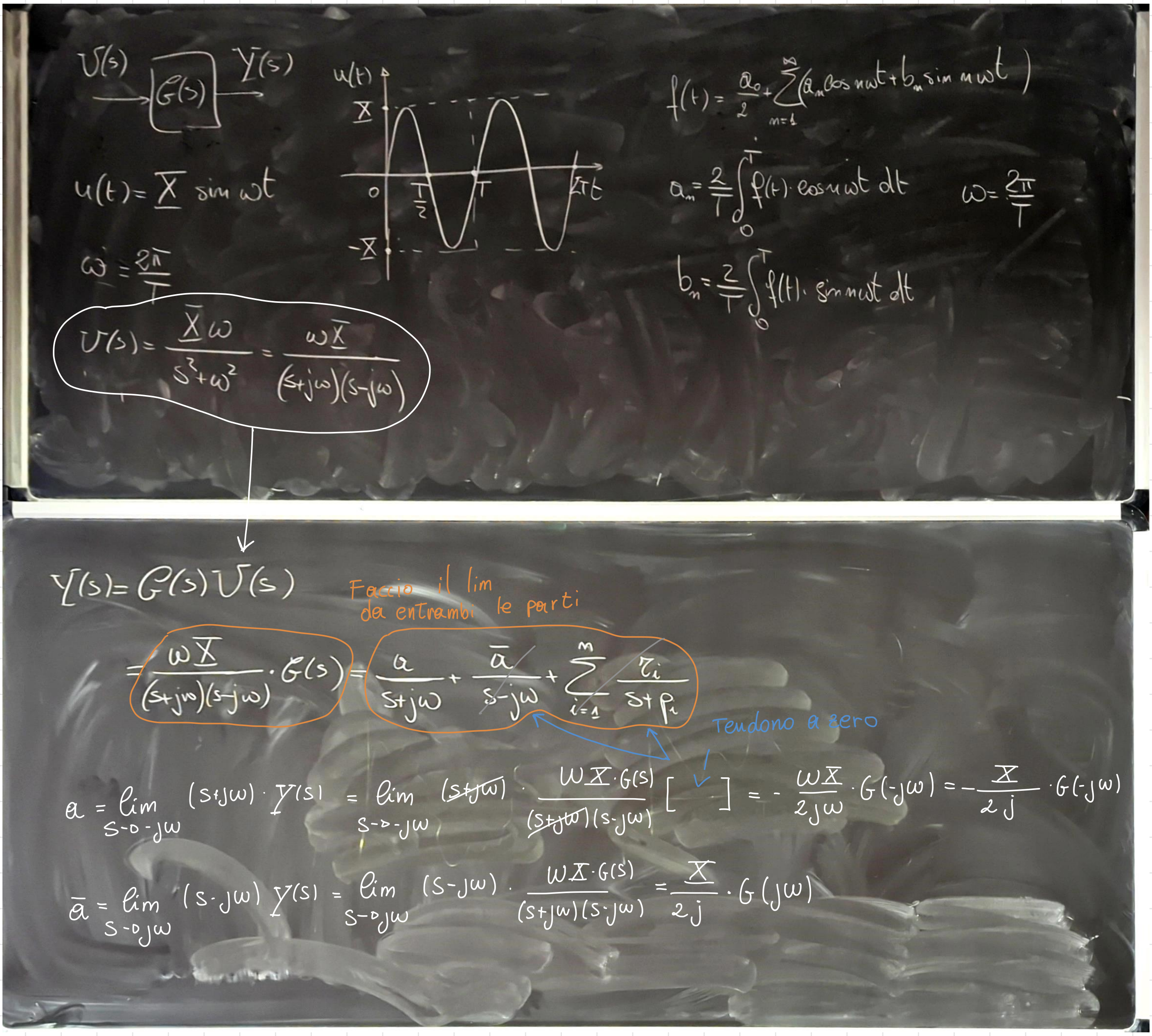


Appunti lezione

Perché se in ingresso c'è una sinusoide anche in uscita otteniamo una sinusoide?

1) Scrivo la trasformata di $u(t)$ (1)

2) Hp. poli complx e conj



*RECAP

ANTITRASFORMO

$$y(t) = \underbrace{a\,e^{-j\omega t} + \bar{a}\,e^{j\omega t}}_{y_{ss}(t)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} r_i\, e^{-p_i t}}_{t \to \infty} \Rightarrow \frac{\bar{X}}{2j}\left(G(j\omega)e^{j\omega t} - G(-j\omega)\,e^{-j\omega t}\right)$$

Ma...

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\Phi} \qquad \text{con} \qquad \Phi = \angle G(j\omega)$$

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| \cdot e^{+j\angle G(-j\omega)} \overset{!}{=} |G(+j\omega)|\; e^{-j\angle G(j\omega)}$$

$$y_{ss}(t) = \frac{\bar{X}}{2j}|G(j\omega)|\left(e^{j\phi}e^{j\omega t} - e^{-j\phi}e^{j\omega t}\right) = \frac{\bar{X}}{2j}|G(j\omega)|\left(e^{-(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}\right)$$

[Ins passaggi intermedi AUDIO]

* RITARDO/ANTICIPO FASE

MODULO FASE

$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{X\,|G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \angle G(j\omega))}_{\text{Risposta a regime}}$$

In uscita potremmo avere una sinusoide sia con un'ampiezza diversa sia con una fase diversa rispetto all'entrata.

DIAGRAMMI DI BODE

[DEF]

- Il modulo viene rappr in deciBel (dB).

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$$

con $\log \triangleq \log_{10}$ ES: $y = \log_{10} x$

$\hookrightarrow 10^y = 10^{\log_{10} x} = x$

ES $|G(j\omega)| = 1$ (stessa fase di u)

$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(1) = 0 \, dB$

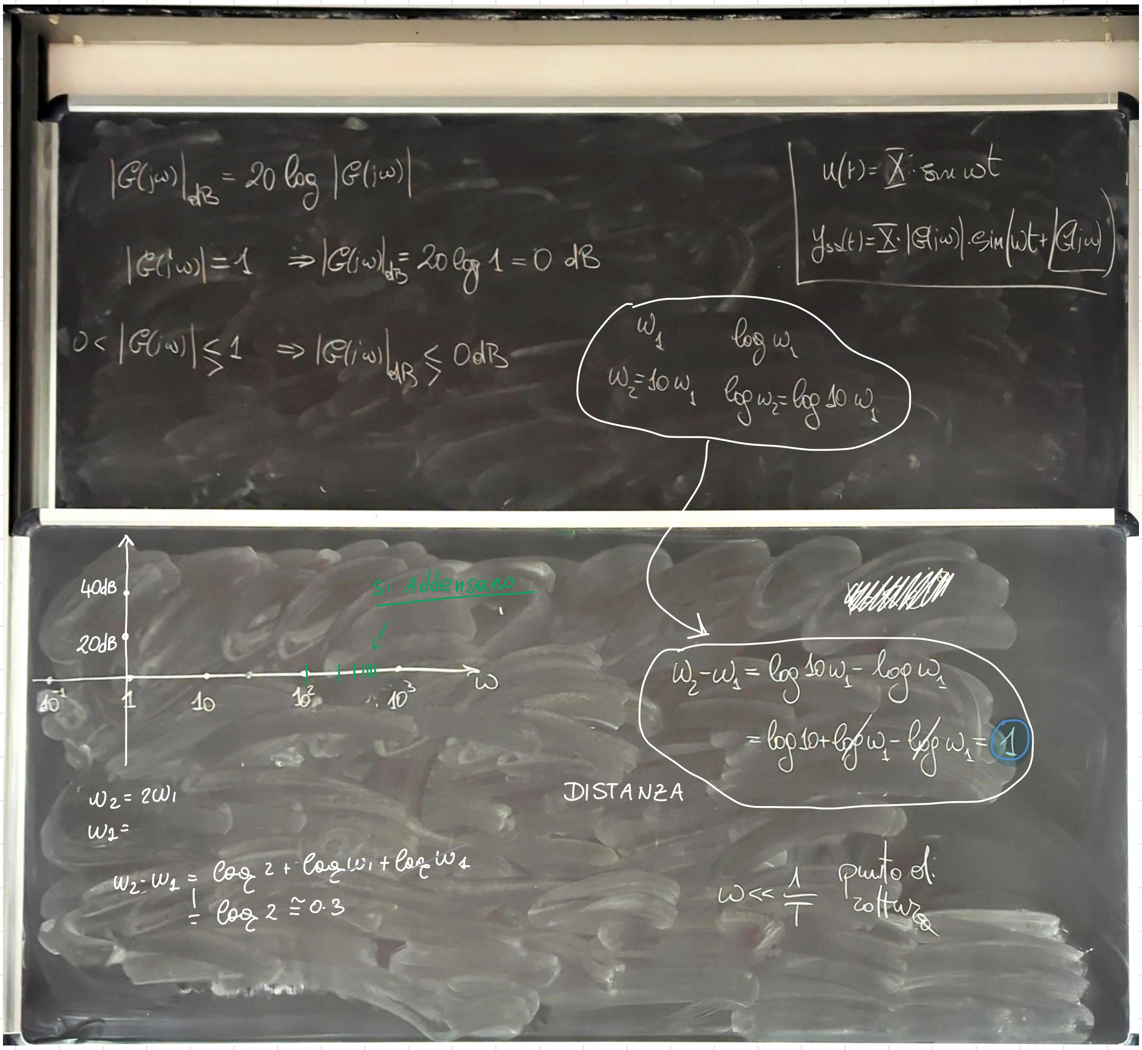
ES $0 < |G(j\omega)| < 1$

$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} < 0 \, dB$

ES $|G(j\omega)| > 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} > 0 \, dB$

* RECAP IMPO

I diagrammi di Bode hanno come asse delle ascisse una scala logaritmica, e non lineare!



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$$

$$|G(j\omega)| = 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log 1 = 0\ dB$$

$$0 < |G(j\omega)| \lesseqgtr 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \lesseqgtr 0\,dB$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} |G(j\omega)|_{dB} = 20\,dB \Rightarrow |G(j\omega)| = 10 \\ |G(j\omega)|_{dB} = -20\,dB \Rightarrow |G(j\omega)| = 0.1 \end{array}}$$

$y = 10\,u$

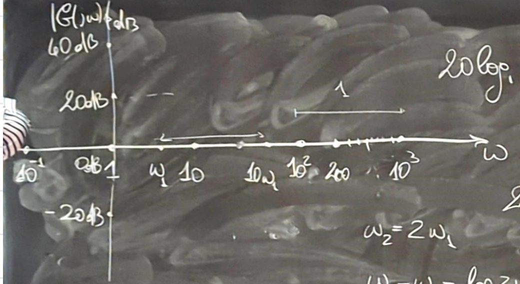
$y = \frac{1}{10}\,u$

$u(t) = \bar{X} \cdot \sin \omega t$

$y_{ss}(t) = \bar{X} \cdot |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$

$\omega_1 \qquad \log \omega_1$

$\omega_2 = 10\,\omega_1 \qquad \log \omega_2 = \log 10\,\omega_1$



$20 \log_{} |G(j\omega)| = 20\ dB$

$K = K e^{j0}$

$\omega_2 - \omega_1 = \log 10\,\omega_1 - \log \omega_1$

$= \log 10 + \cancel{\log} \omega_1 - \cancel{\log} \omega_1 = 1$

$20 \log_{} |G(j\omega)| = -20\,dB$

$\omega_2 = 2\,\omega_1$

$\omega_2 - \omega_1 = \log 2 + \log \omega_1 - \log \omega_1$

$= \log 2$

$20 \log 10^{-1} = -20 \log 10 = -20\,dB$

$\omega \ll \frac{1}{T}$ punto di rottura

Continuo

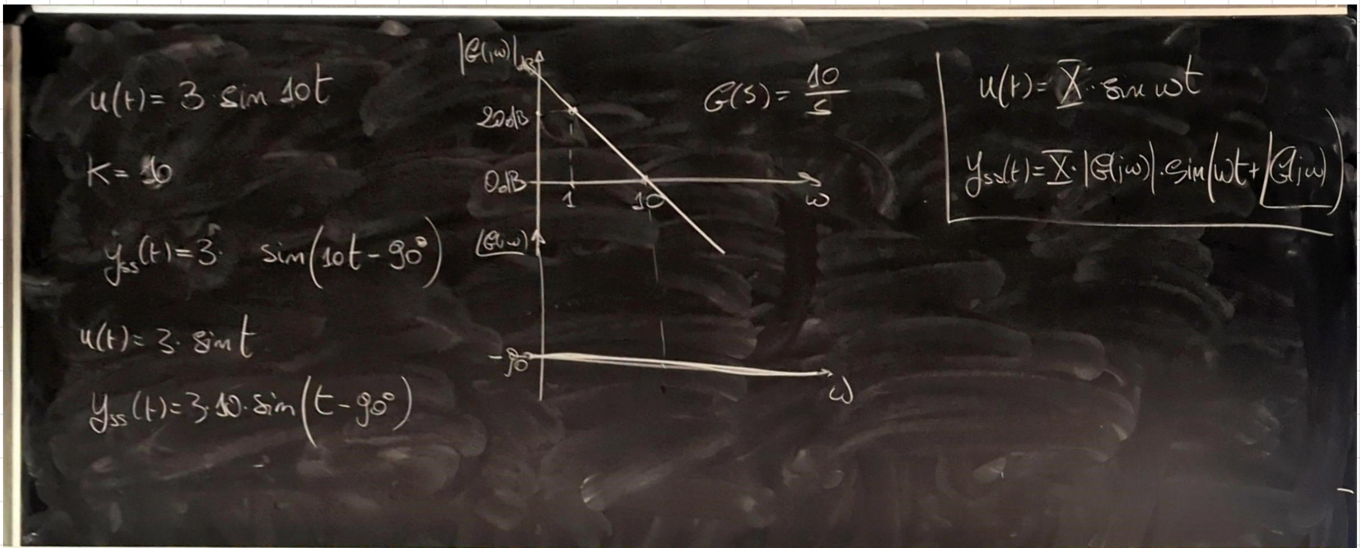
Hp. $u(t) = 3\sin(10t)$, $K = 10$ $\rightarrow$ $G(s) = \frac{10}{s}$

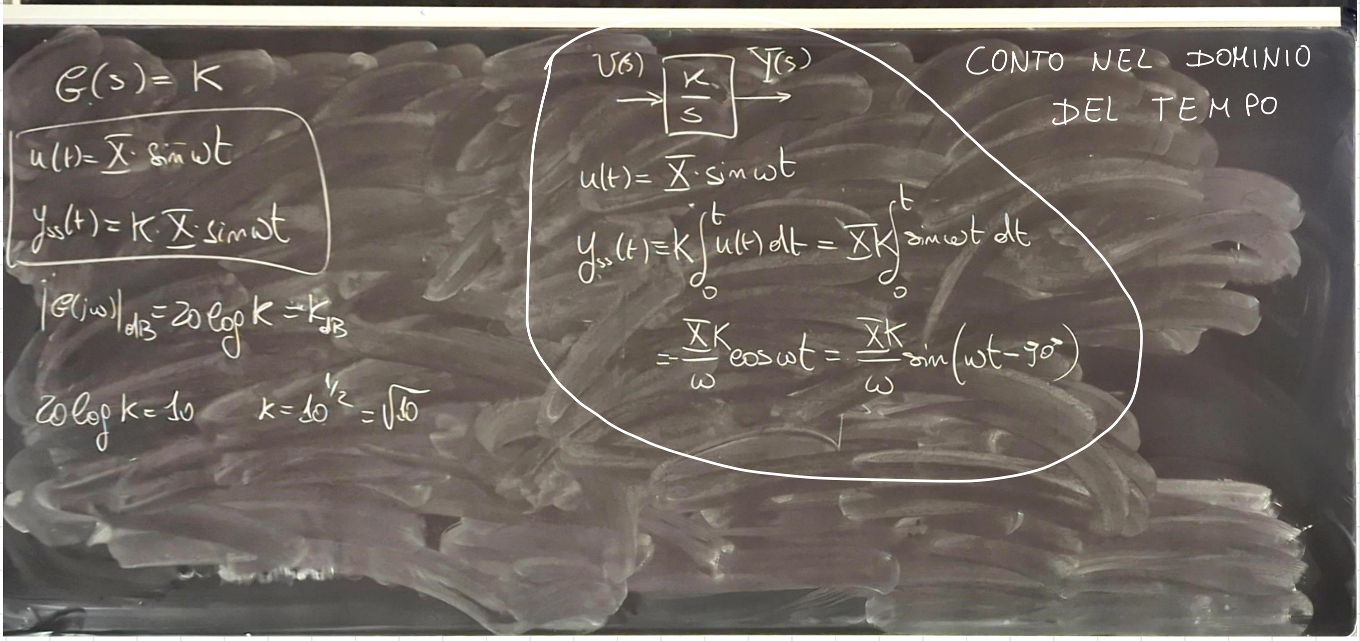
$y_{ss}(t) = \underbrace{\qquad}_{?} \sin(10t - 90^\circ)$

AUDIO ?? $y = 3 \cdot 1 \cdot \sin(10t - 90)$

ad $\omega = \omega_0$ vado a prendere il valore del d. Bode corrispondente a ω_0 e lo trasformo da valore in dB a valore naturale

* ESAME ESERCIZIO





USCITA A REGIME DAL DIAGRAMMA DI BODE

Supponiamo di avere il diagramma di Bode di un sistema; possiamo trovare l'uscita, a regime del tempo, guardando semplicemente il diagramma:

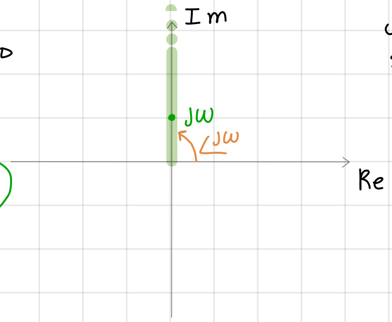
Per Hp: $U(t) = 3 \sin(10\, t)$

$\quad\quad\quad\quad\ \ \ X \quad\ \ \ \omega$

$G(s) = \frac{K}{s}$ (Sistema appena visto) Con $K = 10$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{K}{j\omega} = \angle K - \angle j\omega$$

$$= 0 - \angle j\omega = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$$



$j\omega$ é un num complx SENZA parte reale

$\Downarrow$

e' sempre sull'asse Im POSITIVO (se $\omega > 0$)

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{K^2}}{\sqrt{s^2}} =$$