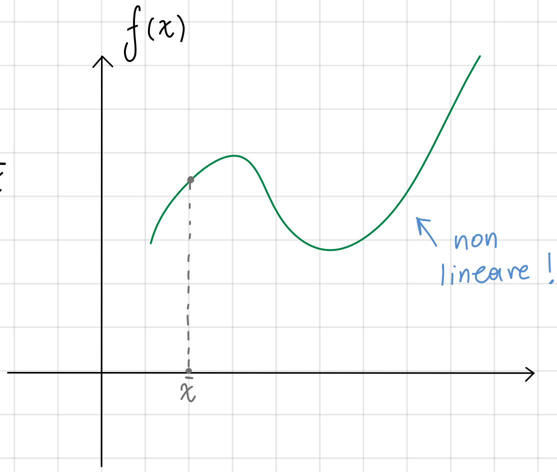
Linearizzazione : Come rendere lineare un sistema NON lineare

$f(x)$

Linearizziamo $f(x)$ intorno al punto a $x = \bar{x}$



Approx lin

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} (x-\bar{x}) \quad \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x-\bar{x})^2 + \dots + \frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}(x-\bar{x})^n$$

-> Per approssimare linearmente ci basta approssimare al 2° Termine.

$$\to \quad f(x) = \underbrace{f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \bar{x}}_{\beta} - \underbrace{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}}}_{\alpha} x + \varepsilon$$

Al primo ordine

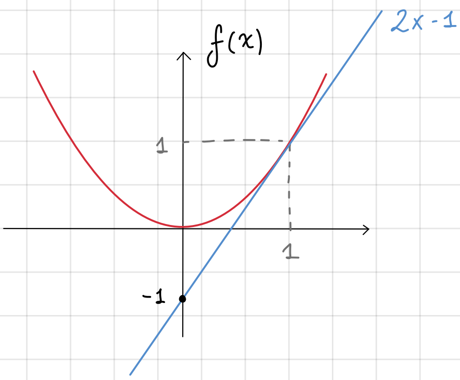
Deve essere sufficientemente PICCOLO

Esempi di funzioni linearizzate

$f(x) = x^2$ Vogliamo $\bar{x} = 1$ $\to$ $\hat{f}(x) = f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} (x-\bar{x})$

$$= 1 + 2x\Big|_{x=1}(x-1)$$

$$= 1 + 2x - 2 = 0 \to \quad y = 2x - 1$$



Approssimazione per funzioni a 2 variabili

$$f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y}} \cdot (x-\bar{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y}} (y-\bar{y}) + \varepsilon$$

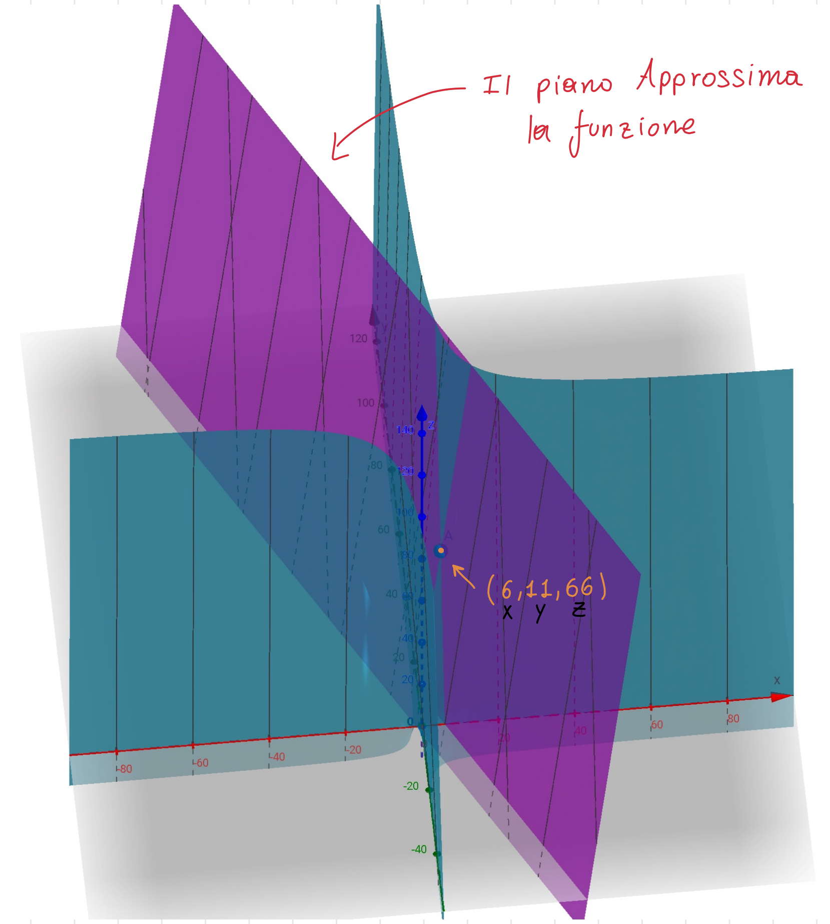
Esempio

$f(x,y) = xy$ con $x \in [5,7]$ e $y \in [10,12]$

$\Downarrow$ $\bar{x} = 6$ $\quad$ $\Downarrow$ $\bar{y} = 11$

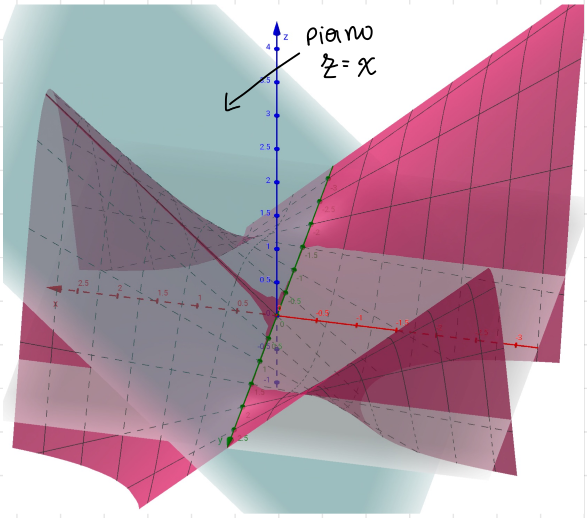
$$\Rightarrow \hat{f}(x,y) = 66 + 11 \cdot (x-6) + 6 \cdot (y-11) = \cancel{66} + 11x - \cancel{66} + 6y - 66$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{f}(x,y) = 11x + 6y - 66}$$



$f(x,y) = x \cdot \cos(y)$ in $\bar{x} = \emptyset$, $\bar{y} = \emptyset$

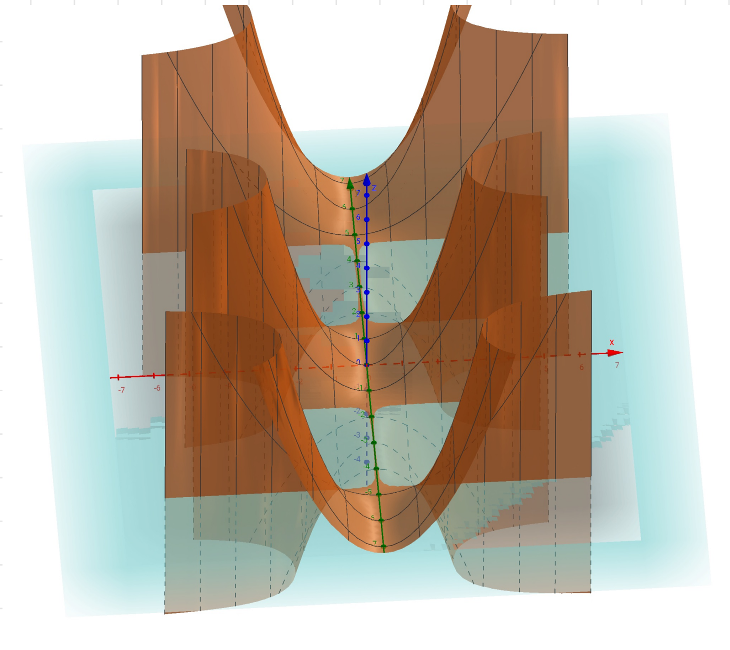
$\hat{f}(x,y) = 0 + 1(x-0) + -\sin(0) \cdot \emptyset (y-0) = x$



$f(x) = x \sin y$ in $\bar{x} = \emptyset$ $\bar{y} = \emptyset$

$\hat{f}(x,y) = 0 + 0 + \emptyset = \emptyset \Rightarrow$ Piano $z = \emptyset$ Approssima $f(x,y)$ in $(0,0,0)$

$f(x,y) = x^2 \cos y \simeq z = \emptyset$



Sistema non Lineare

Scriviamo le eq del sys

$\dot{x} = f(x,u)$ → Linearizzazione ma Intorno a quale punto?

↓

PUNTO DI EQUILIBRIO del Sys

$u = \bar{u}$, $\bar{x} : f(\bar{x},\bar{u}) = 0$

$\dot{x}\big|_{x=\bar{x}} = \dot{\bar{x}} = f(\bar{x},\bar{u}) = 0$ ← La derivata NON cambia

Linearizzazione attorno al punto di equilibrio

$x = \bar{x} + \hat{x}$ ⟹ $\dot{x} = \dot{\bar{x}} + \dot{\hat{x}}$

$\bar{x}$: Punto di equilibrio

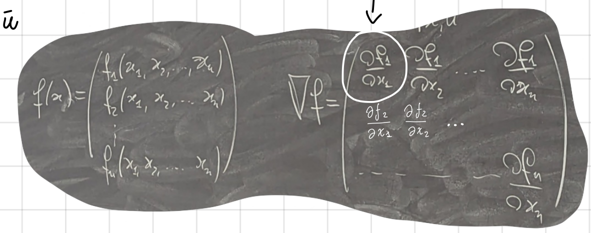
$\hat{x}$: distanza rispetto a dove linearizzo → $\hat{x} = x - \bar{x}$

$\dot{\bar{x}}$: La derivata di un P.E. è zero ⟹ $\dot{x} = \dot{\hat{x}}$

$$\Rightarrow \dot{x} = \dot{\hat{x}} = f(\bar{x},\bar{u}) + \underbrace{\nabla_x f\big|_{\bar{x},\bar{u}}}_{A}\,\underbrace{(x-\bar{x})}_{\hat{x}} + \underbrace{\nabla_u f\big|_{\bar{x},\bar{u}}}_{B}\,\underbrace{(u-\bar{u})}_{\hat{u}}$$

GRADIENTE ovvero la derivata multidimenzionale

Derivate parziali



$$\Rightarrow \boxed{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\hat{u}}$$ Sistema che sappiamo risolvere!

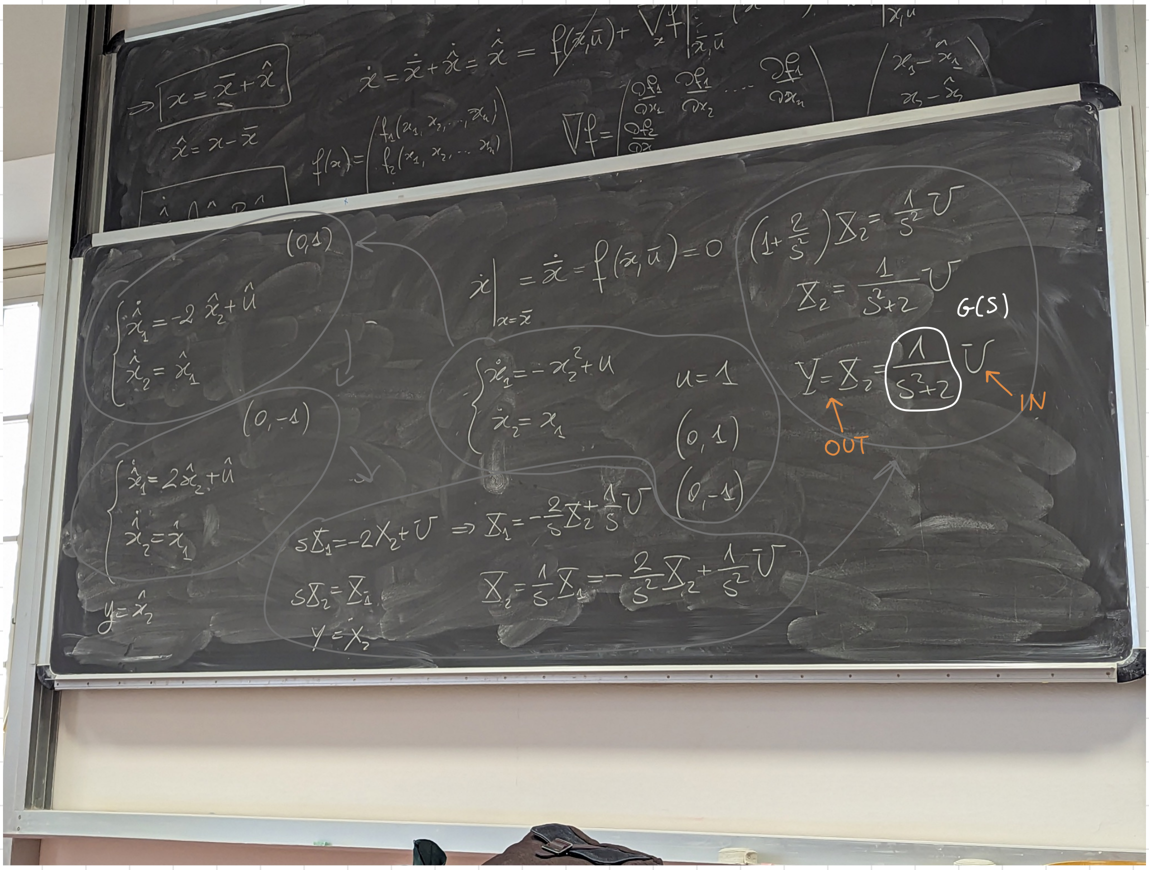
Sistema dinamico LINEARE Tempo invariante

SOLO nell'intorno del punto di equilibrio

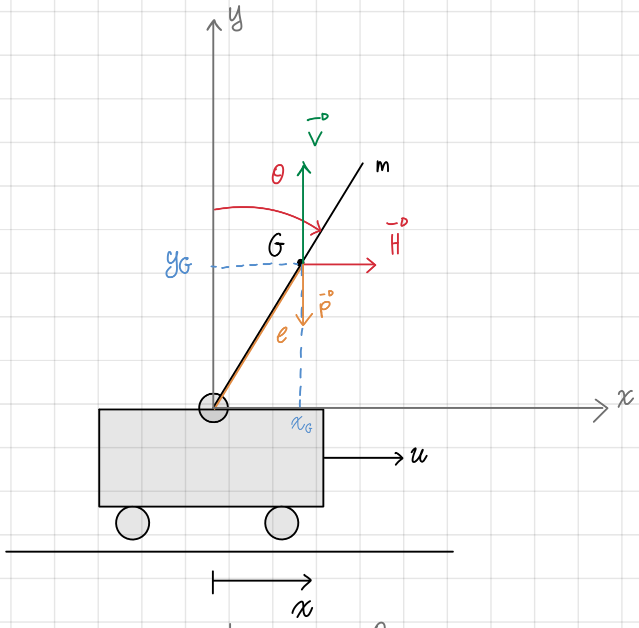
Cambiando il punto di equilibrio le derivate rimangono le stesse, ma cambiano i punti in cui esse vengono calcolate; di conseguenza cambiando il punto di equilibrio cambieranno le matrici **A** e **B**

✱ RECAP

FOTO



PENDOLO INVERSO su un carrello — NON CHIESTO ALL'ORALE!

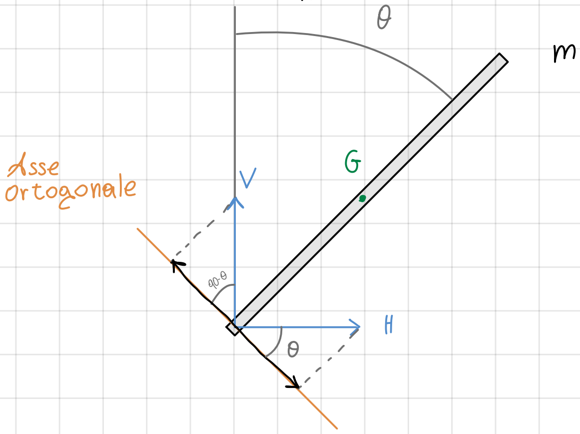


$$x_G = x + \ell \sin\theta$$
$$y_G = \ell \cos\theta$$

FORZE ORIZZ E VERT

$$\begin{cases} m \cdot \dfrac{d^2 x_G}{dt^2} = H \\ m \cdot \dfrac{d^2 y_G}{dt^2} = V - mg \\ I\ddot{\theta} = \underbrace{V \cdot \ell \cos\theta}_{\text{COPPIA}} - \underbrace{H\ell \cos\theta}_{\text{COPPIA}} \\ M\ddot{x} = u - H \end{cases}$$

BRACCIO



SOLUZ CLIP 12

(1) $$m \frac{d^2 x_G}{dt^2} = m \frac{d^2 x}{dt} + m\ell \frac{d^2}{dt} \sin\theta = m\ddot{x} + m\ell \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\sin\theta\right) = m\ddot{x} + m\ell \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\cos\theta\right)$$
$$= m\ddot{x} + m\ell\left[\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)\right]$$

(2) $$m \frac{d^2 y_G}{dt} = m \frac{d^2}{dt}\left(\ell \cos(\theta)\right) = m \frac{d}{dt}\left(-\ell\dot{\theta}\sin(\theta)\right) = m\ell\left(-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

Sostituisco nel sys

$$\begin{cases} m\ddot{x} = H - m\ell\left(\overset{x^2\cos x}{\ddot{\theta}\cos\theta}\right) + m\ell\left(\overset{x^2 \sin y}{\dot{\theta}^2 \underset{0}{\cancel{\sin\theta}}}\right) \\ 0 = m\ell\ddot{\theta}\sin\theta + m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta + V - mg \\ I\ddot{\theta} = V\ell\sin\theta - H\ell\cos\theta \\ M\ddot{x} = u - H \end{cases}$$

—o Linearizz —o

$$\begin{cases} m\ddot{x} = H - m\ell\ddot{\theta} & (1) \\ V = mg & (2) \\ I\ddot{\theta} = V\ell\theta - H\ell & (3) \\ M\ddot{x} = u - H & (4) \end{cases}$$

Risolvo il Sistema

dalla (1) $H = m\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}$

$M\ddot{x} = u - m\ddot{x} - m\ell\dot{\theta}$ $\Rightarrow$ $(M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = u$

$I\ddot{\theta} = mg\ell\theta - m\ell\ddot{x} - m\ell^2\ddot{\theta}$

Se diamo le Var di stato

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases}$$

Possiamo risolvere

$$\boxed{\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = u \\ (I+m\ell^2)\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x} = mg\ell\theta \end{cases}}$$

modello semplificato
$\rightarrow I = 0$

Se prendiamo $I = 0$

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = u \\ \ddot{\theta}m\ell^2 + m\ell\ddot{x} = mg\cancel{\ell}\theta \end{cases} \quad \mathcal{L}.\mathcal{T}. \rightarrow \begin{cases} (M+m)s^2 X + m\ell s^2 \Theta = U \\ \cancel{m}\ell s^2 \Theta + \cancel{m} s^2 X = \cancel{m} g \Theta \quad (2) \end{cases}$$

dalla (2) $s^2 X = \cancel{m}g\Theta - \cancel{m}\ell s^2 \Theta$

nella (1) $(M+m)(mg\Theta - \ell s^2 \Theta) + m\ell s^2 \Theta = U$

$$(M+m)g\Theta - (M - \cancel{m})\ell s^2 \Theta + \cancel{m\ell s^2 \Theta} = U$$

$$\rightarrow (M+m)g\Theta - M\ell s^2 \Theta = U \Rightarrow$$

$$\boxed{G(s) = \frac{\Theta(s)}{-U(s)} = \frac{1}{M\ell s^2 - (M+m)g}}$$