Prova scritta di Sistemi Dinamici

30 dicembre 2023

Esercizio 1: risposta nel tempo

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s + 0.2}{s^2 + s + 1} \tag{1}$$

e l'ingresso $u(t)$ definito da

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & t \in [0, 3) \\ 0 & t \geq 3 \end{cases} \tag{2}$$

determinare:

1. L'espressione di $u(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t)$ con n opportuno in modo che ciascun segnale $u_i(t)$ abbia una trasformata di Laplace nota e tracciare gli andamenti di $u_i(t)$ per $i = 1, \ldots, n$.

2. Determinare la trasformata di Laplace $U_i(s)$ di ciascun segnale $u_i(t)$, per $i = 1, \ldots, n$.

3. Individuare gli opportuni segnali $\hat{u}_j(t)$, con $j = 1, \ldots, m$, che consentono poi di calcolare in maniera semplice tutte le trasformate di Laplace delle uscite $y_i(t)$ ai segnali $u_i(t)$. Calcolare le trasformate di Laplace $\hat{Y}_j(s) = G(s)\hat{U}_j(s)$, per $j = 1, \ldots, m$, utilizzando la scomposizione in fratti semplici.

4. Calcolare le anti-trasformate di Laplace $\hat{y}_j(t)$ per ciascuna $\hat{Y}_j(s)$, per $j = 1, \ldots, m$. Per ciascun modo tracciare e discutere l'andamento nel tempo.

5. Calcolare analiticamente l'uscita $y_i(t)$ a ciascun ingresso $u_i(t)$, per $i = 1, \ldots, n$.

6. Calcolare l'uscita $y(t)$ all'ingresso $u(t)$ e fare eventuali considerazioni sull'andamento di $y(t)$.

Esercizio 1: risposta nel tempo

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+0.2}{s^2+s+1} \tag{1}$$

e l'ingresso $u(t)$ definito da

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 2t & t \in [0,3) \\ 0 & t \geq 3 \end{cases} \tag{2}$$

$$G(S) = \frac{S+0.2}{S^2+S+1}$$

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 2t & 0 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 3 \end{cases}$$

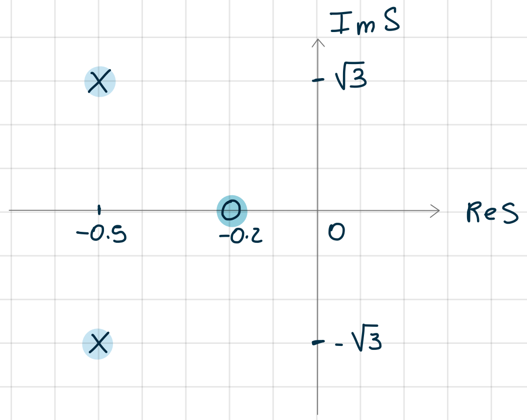
- OP PRELIMINARI

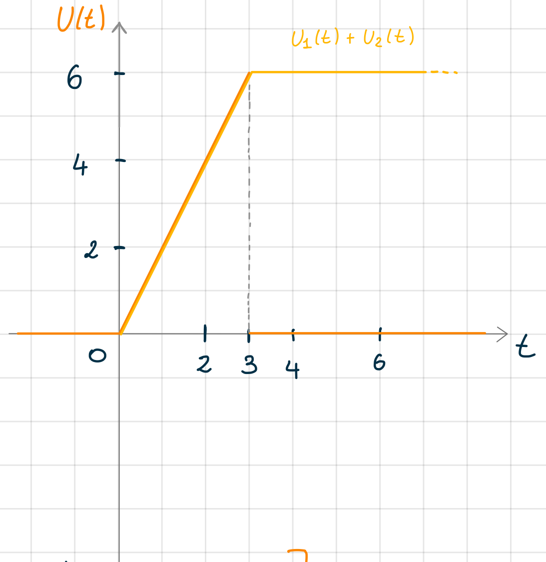
(a) Poli e zeri

z : $S+0.2 = 0 \rightarrow \bar{S} = -0.2$

P : $S^2+S+1 = 0 \rightarrow \Delta = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ $\rightarrow P_1 = -\frac{1}{2} + j\sqrt{3}$, $\quad P_2 = -\frac{1}{2} - j\sqrt{3}$

complx e conj





1) Segnali elementari

$$\begin{cases} U_1(t) = 2t \cdot \mathbb{1}(t) & \rightleftharpoons \quad U_1(S) = 2 \cdot \dfrac{1}{S^2} \\ U_2(t) = -2(t-3) \cdot \mathbb{1}(t-3) & \rightleftharpoons \quad U_2(S) = -2 \cdot \dfrac{1}{S^2} \cdot e^{-3t} \\ U_3(t) = -6 \cdot \mathbb{1}(t-3) & \rightleftharpoons \quad U_3(S) = -6 \cdot \dfrac{1}{S} \cdot e^{-3t} \end{cases} \quad (2)$$

3) Segnali Fittizi

Scelgo come segnale fittizio il segnale : $\hat{U}(t) = t \cdot \mathbb{1}(t) \rightleftharpoons \hat{U}(S) = \dfrac{1}{S^2}$

3.1) Trovo $\hat{Y}(S)$

3.2) Fratti Semplici

$$\hat{Y}(S) = U(S) \cdot G(S) = \frac{1}{S^2} \cdot \frac{S+.2}{S^2+S+1} = \frac{r_1}{S} + \frac{r_2}{S^2} + \frac{r_3 + r_4 S}{S^2+S+1}$$

3.3) Trovo i residui partendo dal grado maggiore:

$$r_2 = \lim_{s \to 0} \cancel{s^2} \cdot \frac{s + .2}{\cancel{s^2}(s^2+s+1)} \to \boxed{r_2 = 0.2} \quad r_2$$

Trovo gli altri residui dal sys di eq, considerando solo il num.

$$\hat{y}(s) = \frac{r_1 s(s^2+s+1) + r_2(s^2+s+1) + r_3 s^2 + r_4 s^3}{s^2(s^2+s+1)} \to \begin{cases} (1) & s^3(r_1 + r_4) = 0 \\ (2) & s^2(r_1 + r_2 + r_3) = 0 \\ (3) & s(r_1 + r_2) = 1 \\ (4) & r_2 = 0.2 \checkmark \end{cases}$$

dalla (3) $\to$ $r_1 = -r_2 + 1 = \boxed{0.8}$ r_1

dalla (2) $\to$ $r_3 = -(r_1 + r_2) = \boxed{-1}$ r_3

dalla (1) $\to$ $r_4 = -r_1 = \boxed{-0.8}$ r_4

3.4) Riscrivo $\hat{y}(s)$ per Antitrasformare

Forma Standard: $\dfrac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$ ma io ho: $\dfrac{r_3 + r_4 s}{s^2+s+1}$

- Termine Quadratico

$$(s+\zeta\omega_n)^2 = \cancel{s^2} + 2\zeta\omega_n s + (\zeta\omega_n)^2 = \cancel{s^2} + s + 1 \to \begin{cases} 2\zeta\omega_n = 1 \\ (\zeta\omega_n)^2 = 1 \end{cases}$$

dovrei avere 1

$$\Rightarrow \zeta\omega_n = \tfrac{1}{2} \Rightarrow (s+\zeta\omega_n)^2 = (s+\tfrac{1}{2})^2 = s^2 + s + \frac{1}{4}$$

- Termine noto

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \omega_d^2$$

$$\Rightarrow s^2+s+1 = \underbrace{(s+\tfrac{1}{2})^2}_{(s+\zeta\omega_n)^2} + \underbrace{\tfrac{3}{4}}_{\omega_d^2} \Rightarrow \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s^2} + \frac{r_3 + r_4 s}{s^2+s+1} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s^2} + \underbrace{\frac{r_3 + r_4 s}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}}_{(A)}$$

Da scrivere come sin + cos

Considero solo (A)

$$= \frac{r_3 + r_4 s}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = r_4 \frac{\frac{r_3}{r_4} + s}{(s+\frac{1}{2}) + \frac{3}{4}} = r_4 \frac{s + \frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + r_4 \left(\frac{r_3}{r_4}\right) \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$\cos() \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$ $\quad$ $\sin() \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$

$$= r_4 \frac{s + \frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{r_4 \left(\frac{r_3}{r_4} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

Siccome $\omega_d^2 = \frac{3}{4} \to \omega_d = \sqrt{\frac{3}{4}} \simeq 0.87$

$r_1 \cdot 1(t)$ $\quad$ $r_2 \cdot t\, 1(t)$

$\Rightarrow$ Considero anche $\frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s^2}$

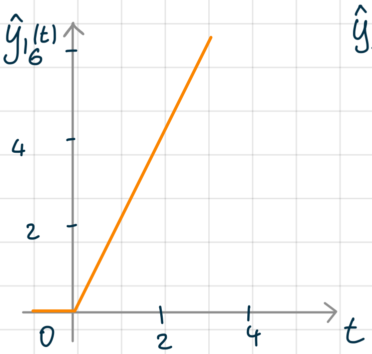
(4)

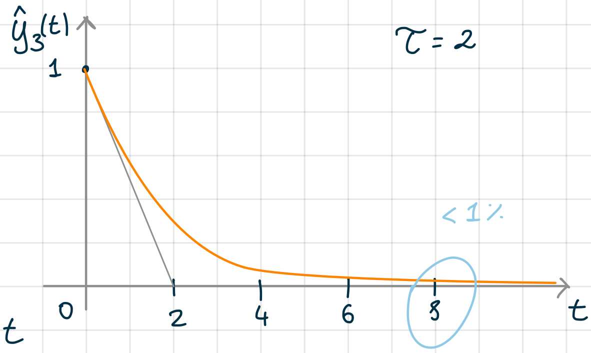
$$\Rightarrow \hat{y}(t) = \left[r_1 + r_2 t + r_4 \cos(.87t) \cdot e^{-\frac{t}{2}} - 1.62 \sin(.87t) \cdot e^{-\frac{t}{2}} \right] \cdot 1(t)$$

4.1) Disegno dei Modi

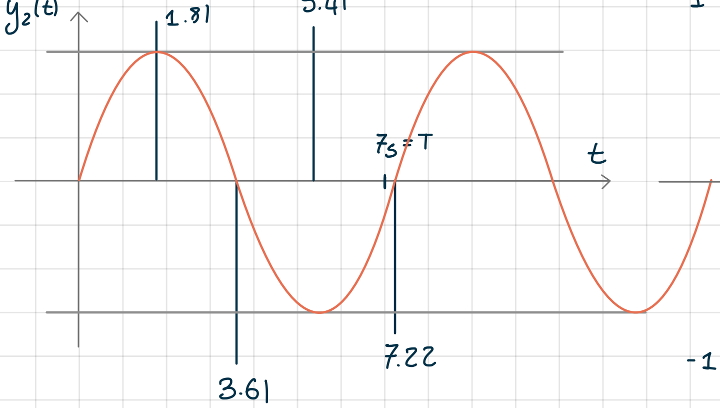
Possiamo identificare i seguenti modi "Notevoli"

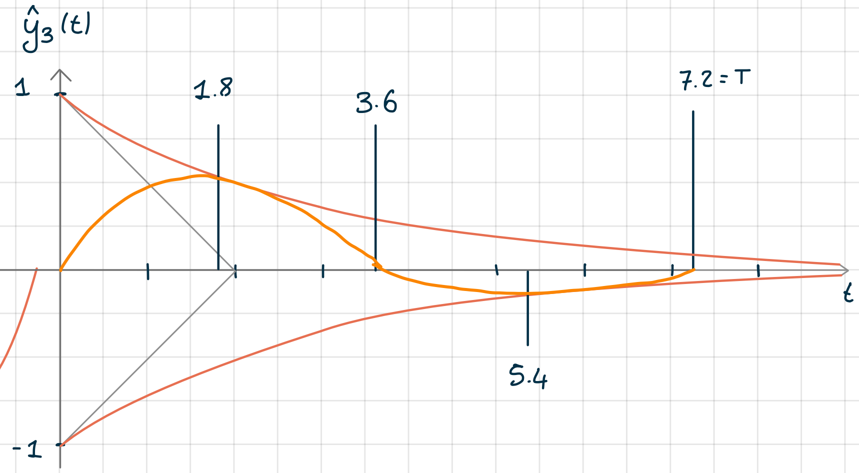
- $\hat{y}_1(t) = r_2\, t \cdot 1(t)$
- $\hat{y}_2(t) = \sin(.87t)$
- $\hat{y}_3(t) = e^{-\frac{t}{2}}$
- $y_4(t) = \sin(.87t) \cdot e^{-\frac{t}{2}}$





$T_{y_2} = \frac{2\pi}{.87} = 7.22$





5) Segnali Reali

$$\begin{cases} y_1(t) = 2 \cdot \hat{y}_1(t) \cdot 1(t) \\ y_2(t) = -2 \cdot \hat{y}_1(t-3) \cdot 1(t-3) \\ y_3(t) = -6 \cdot \frac{d}{dt} \hat{y}_1(t-3) \cdot 1(t-3) = -6 \left[r_2 - r_4 \cdot 0.87 \cdot \sin(.87t-3) \cdot e^{-\frac{t-3}{2}} - \frac{r_4}{2} \cos(.87t-3)\, e^{-\frac{t-3}{2}} - \right. \\ \left. \qquad - 1.62 \cdot 0.87 \cos(.87t-3) \cdot e^{\frac{t-3}{2}} + \frac{1.62}{2} \sin(.87t-3)\, e^{-\frac{t-3}{2}} \right] \end{cases}$$

(6) Considerazioni

$$\hat{Y}(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s+.2}{s^2+s+1}$$

Valore iniziale

$$y(0) = \lim_{s \to \infty} s \cdot \hat{Y}(s) = \lim_{s \to \infty} \cdot \cancel{s} \cdot \frac{s+.2}{s^{\cancel{2}}(s^2+s+1)} = \frac{\cancel{s}(1+\frac{.2}{s})}{s^{\cancel{2}}(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2})} \to \frac{1}{s} \to 0$$

$\frac{.2}{s} \to 0$, $\frac{1}{s} \to 0$, $\frac{1}{s^2} \to 0$

Valore iniziale

Segnali in ingresso

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_1(t) = 2t \cdot 1\!\!1(t) \\ U_2(t) = -2(t-3) \cdot 1\!\!1(t-3) \\ U_3(t) = -6 \cdot 1\!\!1(t-3) \end{cases}$$

Il primo segnale è una rampa di pendenza 2, anche l'uscita tenderà a seguire l'entrata. $\to$ Tende a $+\infty$ lungo la retta $y(t) = \tau_1 + \tau_2 t$
Il II° segnale subentra a $t = 3$

$$\to y(t=3) = 2\,\hat{y}_1(t=3) = 1.063$$

Tempo A regime

$\hat{y}(t)$ ha due exp che si esauriscono dopo $4/5\,\tau$

$$exp_1 = exp_2 = e^{-\frac{t}{2}} \to \tau = 2 \Rightarrow \text{Tempo a regime} \cong 8s/10s$$

Esercizio 2: risposta in frequenza

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+0.2)^2(s+7)} \qquad (3)$$

4

$$G(S) = \frac{1}{(S+0.2)^2\,(S+7)}$$

1) FORMA STANDARD

Valore iniziale

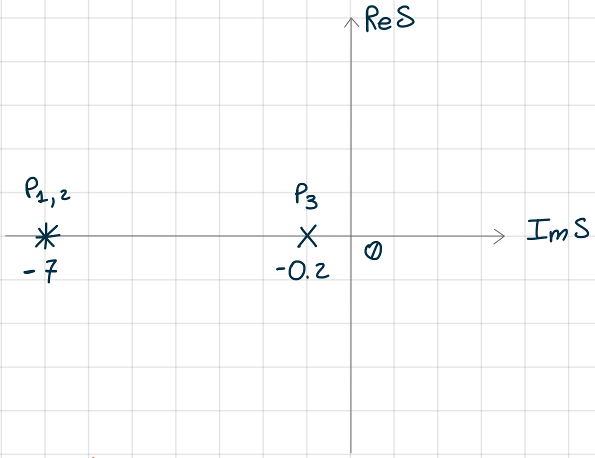
$$G(S) = \frac{\prod^{m}\left(1+\frac{S}{z_i}\right)}{\prod^{n}\left(1+ST_i\right)} \;\rightarrow\; G(S) = \frac{1}{(0.2)^2\left[0.2\,(1+5S)\right]^2 7\left(1+\frac{1}{7}S\right)} = \frac{25}{7}\,\frac{1}{(1+5S)^2\left(1+\frac{1}{7}S\right)}$$

1.1) Poli e zeri

No Zeri

Poli: $(1+5S)^2 \rightarrow S = -\frac{1}{5}$ DOPPIO $P_{1,2}$

P_3: $S = -7$ Singolo



2) Punti di Rottura

- $\omega_{1,2} = \frac{1}{5} = 0.2$ rad/s
- $\omega_3 = 7$ rad/s

3) Banda

$\omega \in [10^{-2}; 10^{2}]$ rad/s

4) Andamenti iniziali e finali

MODULI

INIZIALE: $G(0) = \frac{25}{7} \rightarrow |G(0)|_{dB} = 20\log(3.57) = 11$ dB $\quad |\cdot|_{dB}$

FINALE: 3 POLI $\rightarrow$ -60 dB/dec $\quad \omega \gg \omega_3$

FASI

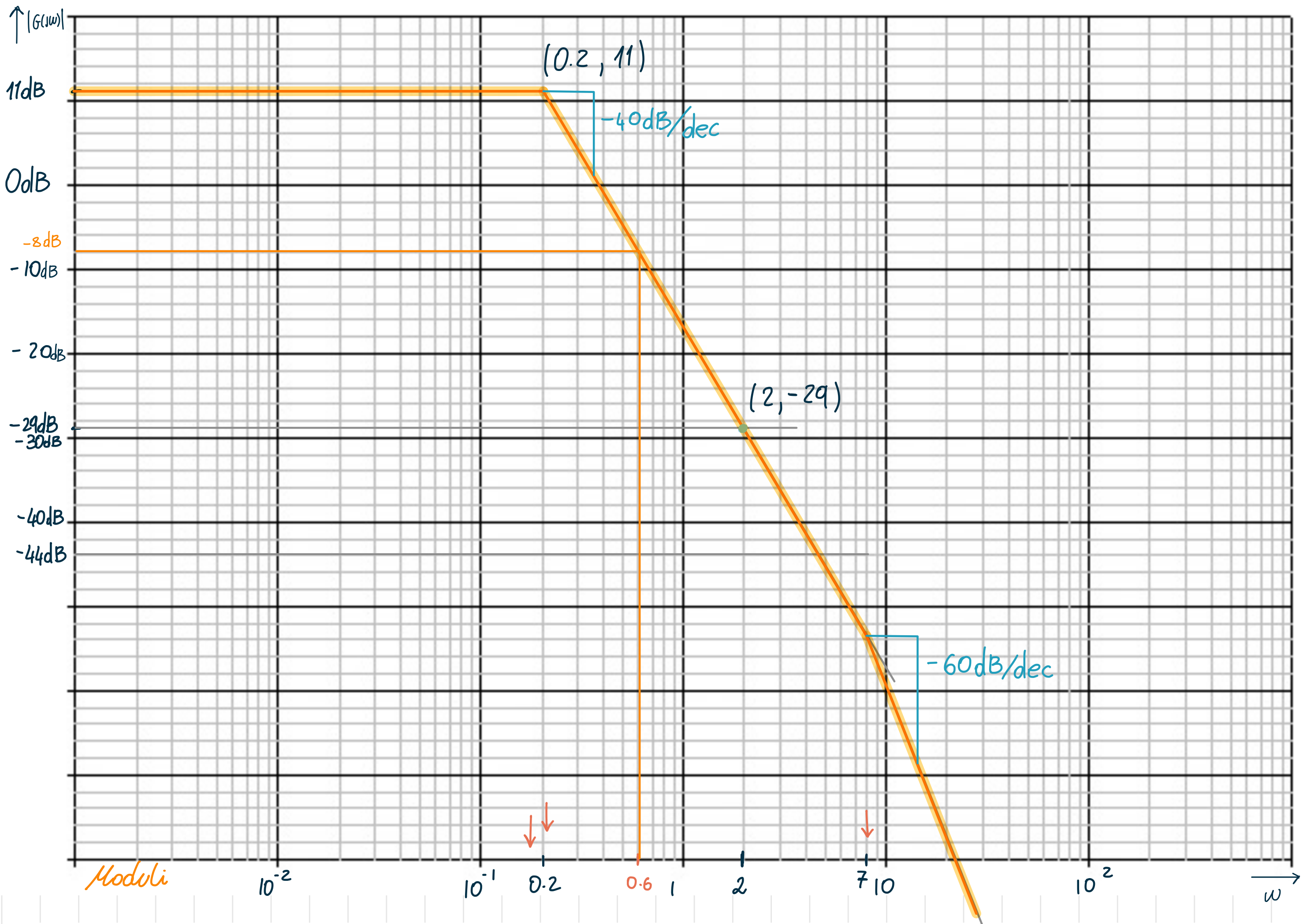
INIZIALE: No zeri, 3 Poli semplici $\rightarrow$ Ritardata di $3\cdot 90^\circ$

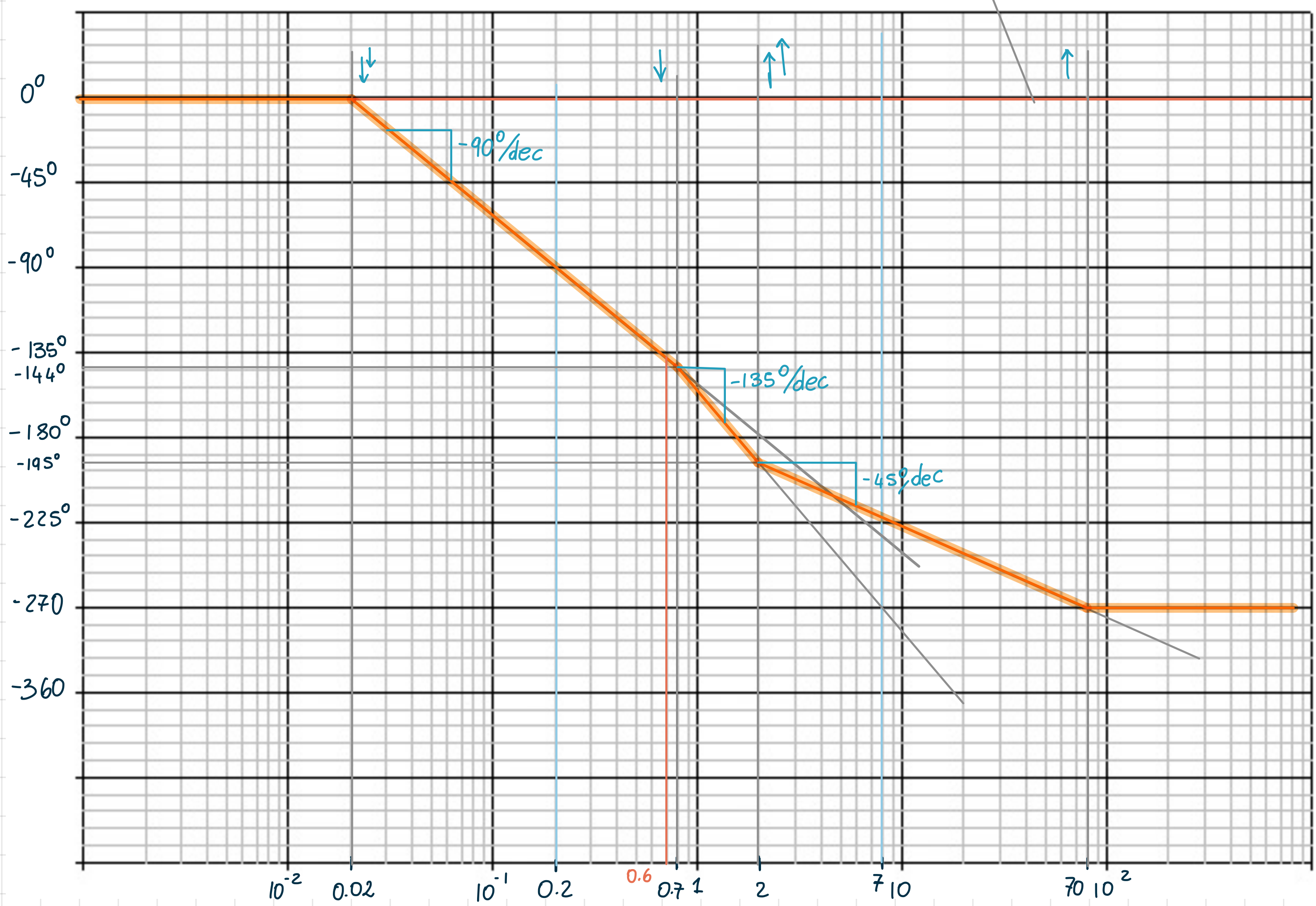
La fase in presenza di ...

$\begin{cases} \text{Zeri semplici} \rightarrow 0^\circ \\ \text{Poli semplici} \rightarrow 0^\circ \end{cases}$ Per ogni $\begin{cases} \text{Zero S.} \rightarrow +90^\circ \\ \text{Polo S.} \rightarrow -90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow$ Inizia a 0°, Finisce a $3\cdot(-90^\circ) = \underbrace{-270^\circ = -\frac{3}{2}\pi} = +\frac{\pi}{4}$

5) Diagrammi Asintotici





6) Uscita a regime

Dato $U(t) = \underbrace{4}_{X} \sin(\underbrace{0.6}_{W_n} \cdot t)$

- Trovare $|G(j\cdot 0.6)|_{dB} \simeq -8dB \to 20\log(y) = x \Rightarrow y = 10^{\frac{x}{20}}$

  $\Rightarrow G(j\cdot 0.6) = 10^{-\frac{8}{20}} = 0.4$

- Trovare $\angle G(j\cdot 0.6) \simeq -144° = \frac{4}{5}\pi$

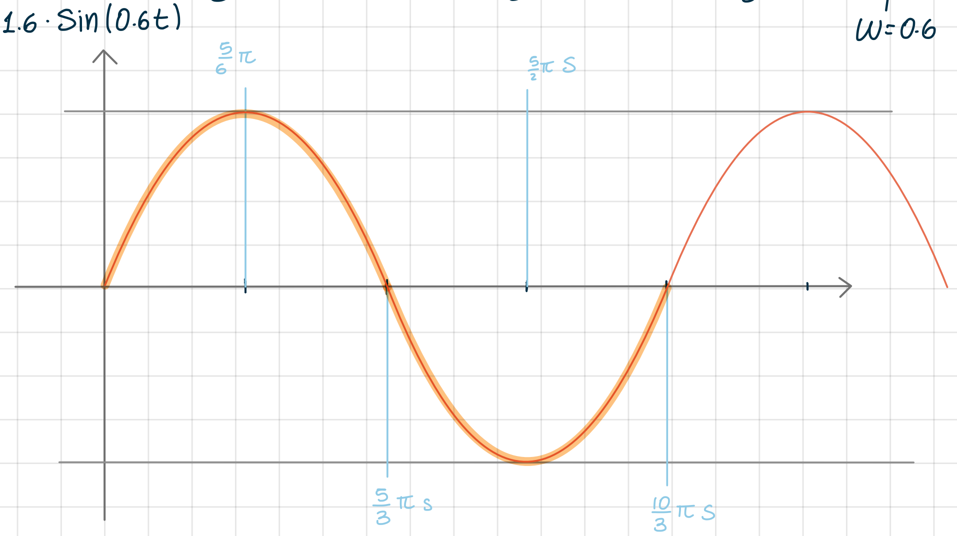
$\Rightarrow y(t) = |G(j\bar{\omega})| \cdot X \cdot \sin(\bar{\omega} t + \angle G(j\bar{\omega})) = \overset{1.6}{0.4 \cdot 4} \sin\left(0.6t - \frac{4}{5}\pi\right)$

Possiamo calcolare il ritardo di y(t) rispetto a U(t)

$\theta = \frac{4}{5}\pi \Rightarrow \bar{\omega}\tau = \frac{4}{5}\pi \to \tau = \frac{4}{5\cdot\bar{\omega}}\pi \underset{W=0.6}{=} \frac{4}{3}\pi \cong 4.2\,s$ Ritardo

$T = \frac{2\pi}{0.6} \cong 10.47\,s$

$\frac{10}{3}\pi$



Ma il sin è anche sfasato di $-\frac{4}{5}\pi \Rightarrow 0.6t_i - \frac{4}{5}\pi = 0$ per $t_i = \frac{4}{5}\pi \cdot \frac{1}{0.6} = \frac{4}{3}\pi \cong 4.2\,s$

AKA Ritardo τ

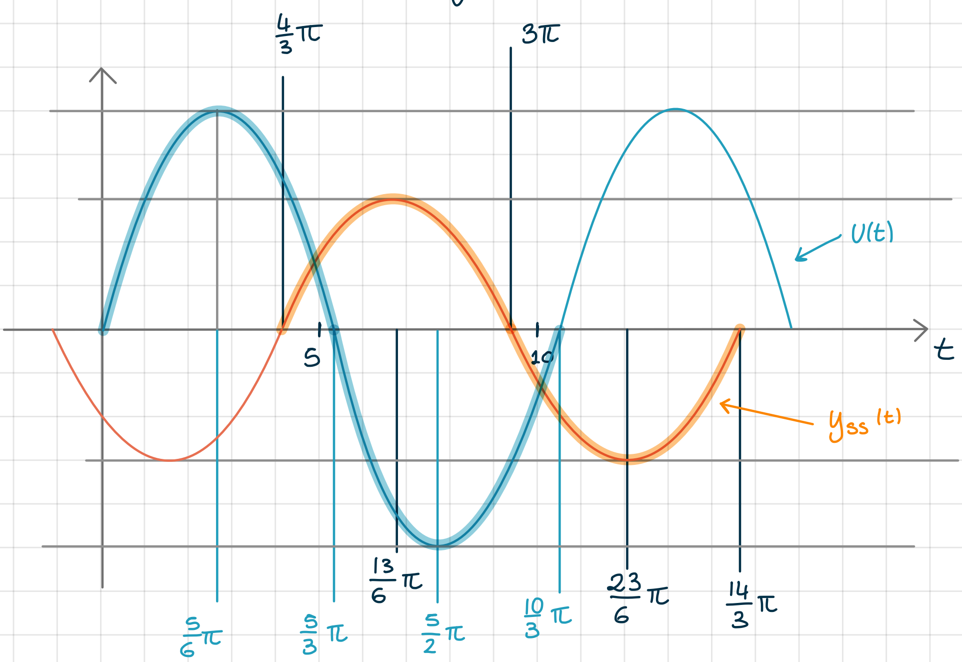
Tempo inizio

$t_f = t_i + T = \frac{4}{3}\pi + \frac{10}{3}\pi = \frac{14}{3}\pi \cong 14.7\,s$

T. Fine

Segnale iniziale

$4\sin(0.6t) \to T = \frac{2\pi}{0.6} = \frac{10}{3}\pi \cong 10.5\,s$



Andamenti esatti

Gli andamenti esatti di modulo e fase sono descritti dalle eq:

$$G(s) = \frac{1}{(s+0.2)^2\,(s+7)} \;\rightarrow\; G(j\bar{\omega}) = \frac{1}{(j\bar{\omega}+0.2)^2\,(j\bar{\omega}+7)}$$

$$\rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{(-\bar{\omega}^2+0.04+0.4j\bar{\omega})(j\bar{\omega}+7)} = \frac{1}{-j\bar{\omega}^3-\bar{\omega}^2 7+0.04\bar{\omega}j+0.28-0.4\bar{\omega}^2+2.8\bar{\omega}j}$$

$$= \frac{1}{(0.28-0.4\bar{\omega}^2-\bar{\omega}^2 7)+(-\bar{\omega}^3+0.04\bar{\omega}+2.8\bar{\omega})j}\Bigg|_{\bar{\omega}=0.6} = \frac{1}{-2.38+1.49j}$$

$$\Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(2.38)^2+(1.49)^2}} = 0.36$$

$$\angle G(j\omega) = \angle 1 - \angle Den = -\angle Den = -\tan^{-1}\left(\frac{Im\,P}{Re\,P}\right) = -2.58 \text{ rad}$$

Quindi la risposta reale a $G(s)$ sarebbe

$$0.36 \cdot 4 \,\sin(0.6t - 2.58)$$

Esercizio 1: soluzione

1. Il segnale $u(t)$ si può scrivere come la somma dei seguenti segnali:

$$
\begin{aligned}
u_1(t) &= 2t\,\mathbf{1}(t)\\
u_2(t) &= -2(t-3)\,\mathbf{1}(t-3)\\
u_3(t) &= -6\,\mathbf{1}(t-3)
\end{aligned}
$$

   Gli andamenti sono riportati nella figura allegata.

2. Le trasformate di Laplace sono date da

$$
\begin{aligned}
U_1(s) &= -\frac{2}{s^2}\\
U_2(s) &= -\frac{2}{s^2}e^{-3s}\\
U_3(s) &= -\frac{6}{s}e^{-3s}
\end{aligned}
$$

   dove la prima è ottenuta applicando la trasformata di Laplace della rampa, la seconda e la terza applicando anche il teorema del ritardo nel tempo.

3. Il segnale $\hat{u}(t)$ che consente poi di calcolare la risposta del sistema è una semplice rampa: $\hat{u}(t) = t\,\mathbf{1}(t)$. Quindi la corrispondente trasformata di Laplace dell'uscita è data da

FDT TRACCIA

$$G(s) = \frac{s+0.2}{s^2+s+1}$$

0.2

$$\hat{Y}(s) = G(s)\hat{U}(s) = \frac{s+0.1}{s^2(s^2+s+1)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s^2} + \frac{r_3 + r_4 s}{s^2+s+1}$$

   Il calcolo dei residui fornisce:

$$r_2 = \lim_{s\to 0} s^2\hat{Y}(s) = \lim_{s\to 0} s^2\frac{s+0.1}{s^2(s^2+s+1)} = \lim_{s\to 0}\frac{s+0.1}{s^2+s+1} = \cancel{0.1}\ 0.2$$

   Inoltre, facendo il minimo comune multiplo al secondo membro dell'espressione precedente e considerando il solo numeratore si ricava:

$$
\begin{aligned}
&r_1 s(s^2+s+1) + r_2(s^2+s+1) + (r_3 + r_4 s)s^2 =\\
&\quad = (r_1+r_4)s^3 + (r_1+r_2+r_3)s^2 + (r_1+r_2)s + r_2
\end{aligned}
$$

   da cui si ricava che deve essere:

$$
\begin{aligned}
r_1 + r_4 &= 0\\
r_1 + r_2 + r_3 &= 0\\
r_1 + r_2 &= 1\\
r_2 &= 0.1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&r_2 = 0.2\\
&r_1 = 1 - r_2 = \cancel{0.9}\ 0.8\\
&r_3 = -r_1 - r_2 = -1\\
&r_4 = -r_1 = \cancel{-0.9}\ -0.8
\end{aligned}
$$

Risolvendo il sistema di equazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 - r_2 = 0.9 \\ r_3 &= -r_1 - r_2 = -1 \\ r_4 &= -r_1 = -0.9 \end{aligned}$$

4. Per calcolare l'antitrasformata di $\hat{Y}(s)$, essendo presente un termine con poli complessi e coniugati, si considera la seguente rielaborazione del termine quadratico:

$$\begin{aligned} \frac{r_3 + r_4 s}{s^2 + s + 1} &= \frac{r_3 + r_4 s}{(s + 0.5)^2 + 0.75} = r_4 \frac{s + \frac{r_3}{r_4} + 0.5 - 0.5}{(s + 0.5)^2 + 0.75} \\ &= r_4 \frac{s + 0.5}{(s + 0.5)^2 + 0.75} + r_4 \left(\frac{r_3}{r_4} - 0.5 \right) \frac{1}{(s + 0.5)^2 + 0.75} \\ &= r_4 \frac{s + 0.5}{(s + 0.5)^2 + 0.75} + \frac{r_3 - 0.5 r_4}{\sqrt{0.75}} \frac{\sqrt{0.75}}{(s + 0.5)^2 + 0.75} \end{aligned}$$

Quindi, essendo $\sqrt{0.75} = 0.87$ e quindi $(r_3 - 0.5 r_4)/\sqrt{0.75} = -0.64$, l'antirasformata di $\hat{Y}(s)$ è data da

$$\hat{y}(t) = (0.9 + 0.1t - 0.9 e^{-0.5t} \cos 0.87t - 0.64 e^{-0.5t} \sin 0.87t)\, \mathbf{1}(t)$$

L'espressione di $\hat{y}(t)$ è data dalla somma di quattro termini. Il primo è un gradino di ampiezza 0.9 che parte in $t = 0\, sec$.

Il secondo termine è una rampa $0.1t$ che parte da $t = 0\, sec$.

Il terzo e il quarto termine sono modi oscillatori con una frequenza $\bar{\omega} = 0.87\, rad/sec$, cioè un periodo $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega} = 7.22\, sec$. Questi modi sono attenuati da un esponenziale $e^{-0.5t}$ al quale quindi è associata una costante di tempo $\bar{\tau}_1 = 1/0.5 = 2\, sec$. Quindi il periodo dell'oscillazione è tra 3 e 4 volte la costante di tempo. Il tempo di assestamento all'1% dell'esponenziale è pari a $4\bar{\tau} = 8\, sec$. Il valore finale associato a questi modi oscillatori è nullo come si evince sia dall'espressione nel tempo e sia dal teorema del valore finale

$$\lim_{s \to 0} s \frac{r_3 + r_4 s}{s^2 + s + 1} = 0.$$

Gli andamenti nel tempo sono riportati nella figura allegata.

5. Le risposte ai segnali $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sono date da

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2\hat{y}(t) \\ y_2(t) &= -2\hat{y}(t - 3) \end{aligned}$$

Per la terza uscita, usando la proprietà di linearità e il fatto che il gradino è la derivata della rampa, si ha:

$$
\begin{aligned}
y_3(t) &= -6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{y}(t) \\
&= -0.6 + 0.54e^{-0.5t}(-0.5\cos 0.87t - 0.87\sin 0.87t) \\
&\quad + 3.84e^{-0.5t}(-0.5\sin 0.87t + 0.87\cos 0.87t) \\
&= -0.6 + e^{-0.5t}(3.07\cos 0.87t - 2.39\sin 0.87t)
\end{aligned}
$$

Siccome $y_3(t) = -6 \cdot \mathbb{1}(t-3)$ non dovremmo calcolare $y_3(t) = -6\dfrac{d\hat{y}(t-3)}{dt} \cdot \mathbb{1}(t-3)$?

6. La risposta complessiva è data da

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$$

Non essendoci impulsi, la risposta del sistema parte da valore nullo in $t = 0\,sec$. All'inizio è diverso da zero solo l'ingresso $u_1(t)$ e quindi la risposta è come quella a un ingresso a rampa $2t$. Il valore iniziale della derivata può essere calcolato col teorema del valore iniziale e quello della derivata nel tempo, considerando solo l'ingresso $u_1(t)$:

$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s\to\infty} ssG(s)\frac{2}{s^2} = 2\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$$

quindi la derivata nell'origine è nulla.

All'istante di tempo $t = 3\,sec$ l'uscita complessiva vale

$$
\begin{aligned}
y(3) = 2\hat{y}(3) &= 0.9 + 0.3 - 0.9e^{-1.5}\cos 2.61 - 0.64e^{-1.5}\sin 2.61 \\
&= 0.9 + 0.3 + 0.173 - 0.0724 = 1.3
\end{aligned}
$$

Si può osservare che il contributo all'uscita nell'istante $t = 3\,sec$ dei termini oscillatori è molto modesto.

Dopo l'istante $t = 3\,sec$ l'ingresso complessivo si annulla e parte una evoluzione che porterà l'uscita a regime ad annullarsi, in quanto il sistema è asintoticamente stabile. Dopo un tempo pari al tempo di assestamento dei termini esponenziali ($8\,sec$), cioè dopo circa $8 + 3 = 12\,sec$ dall'applicazione dell'ingresso la risposta è molto vicina al suo valore nullo di regime.

Esercizio 2: risposta in frequenza

Dato il sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+0.2)^2(s+7)} \tag{3}$$

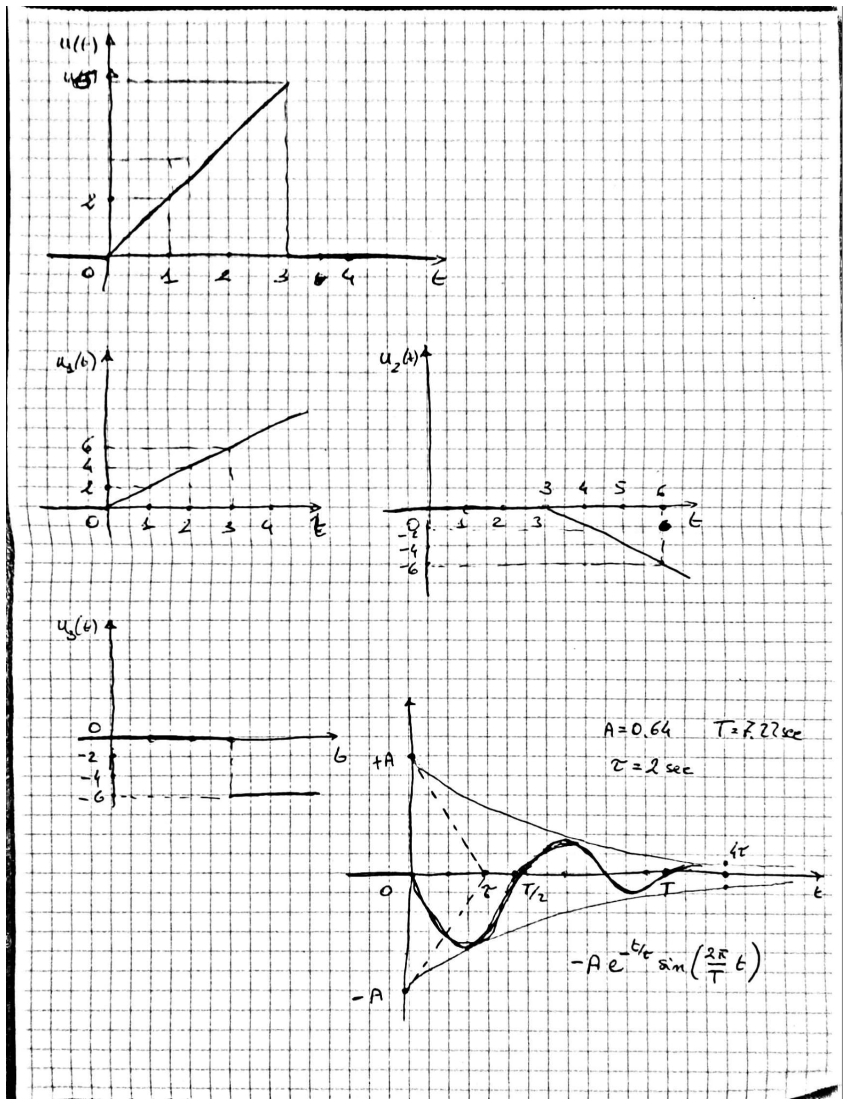


Figura 1: Andamenti nel tempo per Esercizio 1.

1. Esprimere $G(s)$ nella forma standard per i diagrammi di Bode, determinare poli e zeri e rappresentarli sul piano complesso.
2. Determinare i punti di rottura dei diagrammi di Bode asintotici.
3. Scegliere l'intervallo di frequenze d'interesse.
4. Determinare gli andamenti iniziali e finali dei diagrammi di Bode asintotici.
5. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici.
6. Dato il segnale d'ingresso

$$u(t) = 4 \sin 0.6t$$

   determinare l'espressione dell'uscita a regime $y_{ss}(t)$ e tracciare gli andamenti nel tempo dell'ingresso $u(t)$ e dell'uscita $y_{ss}(t)$.
7. Effettuate eventuali considerazioni sui diagrammi di Bode: andamenti esatti, moduli di risonanza, banda passante, variazioni di guadagno, aggiunta di poli o zeri.

Esercizio 2: soluzione

1. La funzione di trasferimento nella forma standard dei diagrammi di Bode è data da:

$$G(s) = \frac{1}{(s+0.2)^2(s+7)} = \frac{1}{0.2^2 \cdot 7 \cdot (1+\frac{s}{0.2})^2(1+\frac{s}{7})} = \frac{3.57}{(1+\frac{s}{0.2})^2(1+\frac{s}{7})}$$

   La $G(s)$ ha un polo doppio in $p_1 = -0.2$ e un polo in $p_2 = -7$. La rappresentazione nel piano complesso è nella figura allegata.
2. I punti di rottura nei diagrammi di Bode asintotici sono $\omega_1 = 0.2\, rad/sec$ (associato al polo doppio p_1) e $\omega_2 = 7\, rad/sec$ (associato al polo p_2).
3. L'intervallo di frequenze d'interesse, considerando almeno una decade a sinistra del più piccolo punto di rottura e almeno una decade a destra del più grande punto di rottura, è

$$\omega \in [10^{-2}, 10^2]\, rad/sec$$

4. Per il diagramma dei moduli, poiché $G(s)$ non poli nell'origine, l'andamento iniziale è costante e pari a

$$20 \log 3.57 = 11\, dB$$

Poiché il sistema ha tre poli, l'andamento finale del diagramma di moduli avrà una pendenza di $-60\,dB/decade$.

Per il diagramma delle fasi, poiché $G(s)$ non ha poli né zeri nell'origine e il guadagno è positivo, il valore iniziale è 0^o. Il valore finale, poiché ci sono tre poli, sarà $-3 \cdot 90^o = -270^o = -3\pi/2$.

5. I diagrammi di Bode asintotici sono rappresentati nella figura allegata.

6. L'ingresso $u(t)$ ha una pulsazione $\bar{\omega} = 0.6\,rad/sec$ e quindi un periodo

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = \frac{2\pi}{0.6} = 10.5\,sec.$$

Dai diagrammi di Bode asintotici si evince che

$$\begin{gathered} |G(j0.6)|_{dB} \approx -10\,dB \\ \langle G(j0.6) \rangle \approx -135^o \end{gathered}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} |G(j0.6)| &\approx 10^{-\frac{10}{20}} = 0.32 \\ \langle G(j3) \rangle_{rad} &\approx -135\frac{\pi}{180} = -\frac{3\pi}{4} = -2.36\,rad \end{aligned}$$

e quindi

$$y_{ss}(t) \approx 4|G(j0.6)| \sin(0.6t + \langle G(j0.6) \rangle_{rad}) = 1.28 \sin(0.6t - 3\pi/4)$$

Il ritardo nel tempo di $y_{ss}(t)$ rispetto a $u(t)$ è tale per cui

$$\bar{\omega}\bar{\tau} = \frac{3\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \bar{\tau} = \frac{3\pi}{4\bar{\omega}} = \frac{3\pi}{2.4} = 3.93\,sec$$

Gli andamenti nel tempo di $u(t)$ e $y_{ss}(t)$ sono riportati nella figura allegata.

7. Si noti che il valore esatto della risposta in frequenza per $\bar{\omega} = 0.6\,rad/sec$ è dato da

$$\begin{aligned} G(j0.6) &= \frac{1}{(j0.6 + 0.2)^2 (j0.6 + 7)} = \frac{1}{(0.2^2 - 0.6^2 + j0.24)(j0.6 + 7)} \\ &= \frac{1}{(-0.32 + j0.24)(j0.6 + 7)} \\ &= \frac{1}{-0.32 \cdot 7 - 0.24 \cdot 0.6 + j(0.24 \cdot 7 - 0.32 \cdot 0.6)} \\ &= \frac{1}{-2.38 + j1.49} \end{aligned}$$

da cui

$$|G(j0.6)| = \frac{1}{\sqrt{(-2.38)^2 + 1.49^2}} = 0.356$$

e

$$\langle G(j0.6) \rangle_{rad} = -\arctan\left(-\frac{1.49}{2.38}\right) = -(-0.56 + \pi)$$
$$= 0.56 - \pi = -2.58\, rad$$

Le differenze (molto contenute) rispetto ai valori ottenuti in precedenza sono dovute al fatto che i diagrammi di Bode esatti differiscono da quelli asintotici. Il diagramma dei moduli esatto doveva essere più in basso di quello asintotico, l'errore è probabilmente dovuto al punto preso sul grafico. Il diagramma delle fasi esatto è più in basso di quello asintotico.

Dal diagramma dei moduli asintotico si ha un guadagno di $0\,dB$ all'incirca alla pulsazione di $0.4\,rad/sec$. Per ingressi sinusoidali con pulsazioni maggiori, il sistema avrà un comportamento di tipo filtrante, cioè il segnale sarà attenuato in uscita. Se si aumenta il guadagno moltiplicativo di $G(s)$ tale pulsazione si sposta verso l'alto, cioè la banda passante aumenta.

L'aggiunta di un polo nell'origine determinerebbe una pendenza iniziale di discesa del diagramma dei moduli di $-20\,dB/decade$ e quindi il diagramma dei moduli passerebbe per $0\,dB$ prima della pulsazione di $0.4\,rad/sec$. Il polo nell'origine provocherebbe un ritardo di fase iniziale pari a -90^o e, per pulsazioni elevate, di -360^o.

Un ingresso a gradino per $G(s)$ determinerebbe un'uscita di regime a costante di ampiezza pari a $G(0) = 3.57$ volte l'ampiezza del gradino in ingresso, infatti

$$\lim_{s \to 0} sG(s)\frac{\bar{u}}{s} = G(0)\bar{u} = 3.57\bar{u}$$

Non essendoci poli complessi e coniugati, i diagrammi di Bode non hanno risonanze.

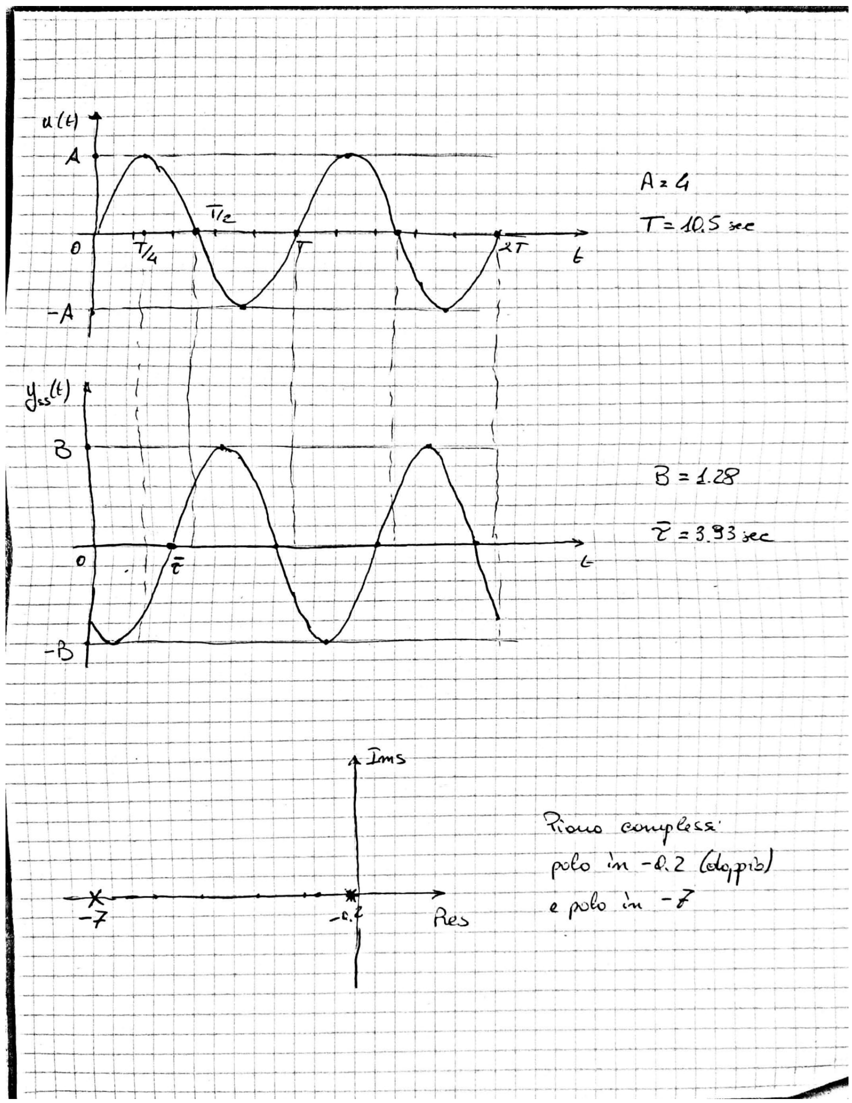


Figura 2: Andamenti nel tempo per Esercizio 2.

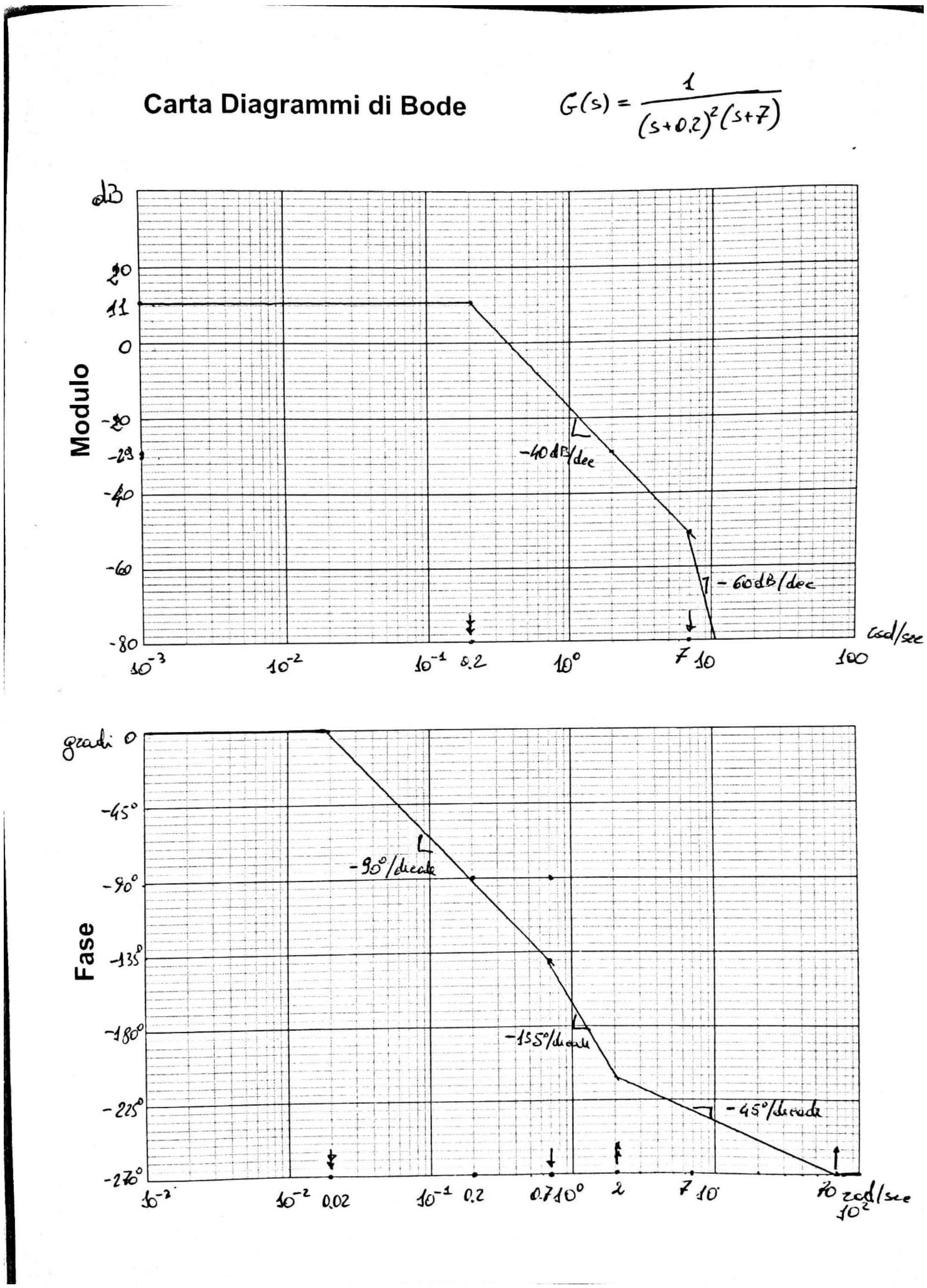


Figura 3: Andamenti diagrammi di Bode per Esercizio 2.