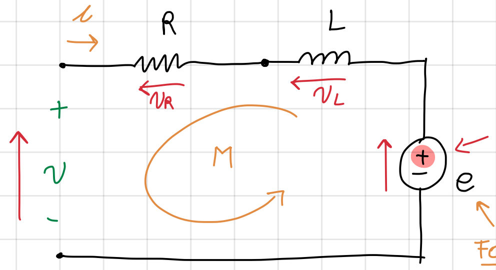
SISTEMI ELETTROMECCANICI

MOTORE ELETTRICO (a corrente continua)



Si oppone

Forza CONTRO elettro motrice (e' una Tensione)

[V]

F. Contro elettromotrice

$$e = K_v \, \omega$$

velocita' Angolare [rad/s]

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

posizione ANGOLARE

→ Rappresenta l'opposizione del motore

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

$$\tau = J \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

COPPIA — momento d'inerzia — accelerazione Angolare

Fenomeni dall'esterno che si OPPONGONO alla rotazione

$$\tau_i = K_t \cdot i \qquad \tau_w = \ominus\, b \cdot \omega \qquad \tau_e$$

Coppia del motore — Corrente che circola — Coppia che si OPPONE — COPPIA DI CARICO

Puo' anche FAVORIRE IL MOTO

In questo caso si oppone

→ COPPIA TOTALE . $\tau = \tau_i + \tau_w - \tau_e \;\rightarrow\; J\frac{d\omega}{dt} = \tau_i + \tau_w - \tau_e$

agisce come un DISTURBO → NON posso CONTROLLARLO

$$\Rightarrow \quad J\frac{d\omega}{dt} = K_t\, i - b\omega - \tau_e$$

$$LKT_M: \quad v - v_R - v_L - e = 0 \;\rightarrow\; v - \underbrace{(K_v \cdot \omega)}_{e} - \underbrace{(L\,\dot{i}_L)}_{v_L} - \underbrace{(R \cdot i)}_{v_R} = 0 \;\rightarrow\; L\,\dot{i}_L = v - Ri - K_v\omega$$

$$\begin{cases} J\dfrac{d\omega}{dt} = K_t\, i - b\omega - \tau_e & (2) \\ L\dfrac{di_L}{dt} = -R\cdot i - K_v\,\omega + v & (1) \end{cases}$$

SPAZIO DI STATO

POSSO MISURARLI DIRETTAMENTE

$$x_1 = i \qquad x_2 = \omega \qquad u_1 = v \qquad u_2 = \tau_e$$

Ingresso NON controllabile

obbiettivo: $\dot{x} = \underline{A}x + \underline{B}u$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L}x_1 - \dfrac{K_v}{L}x_2 + \dfrac{1}{L}u_1 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{K_t}{J}x_1 - \dfrac{b}{J}x_2 - \dfrac{1}{J}u_2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{pmatrix}}_{2\times1} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{b}{J} \end{pmatrix}}_{\underline{A}\;2\times2} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{2\times1} + \begin{pmatrix} +\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

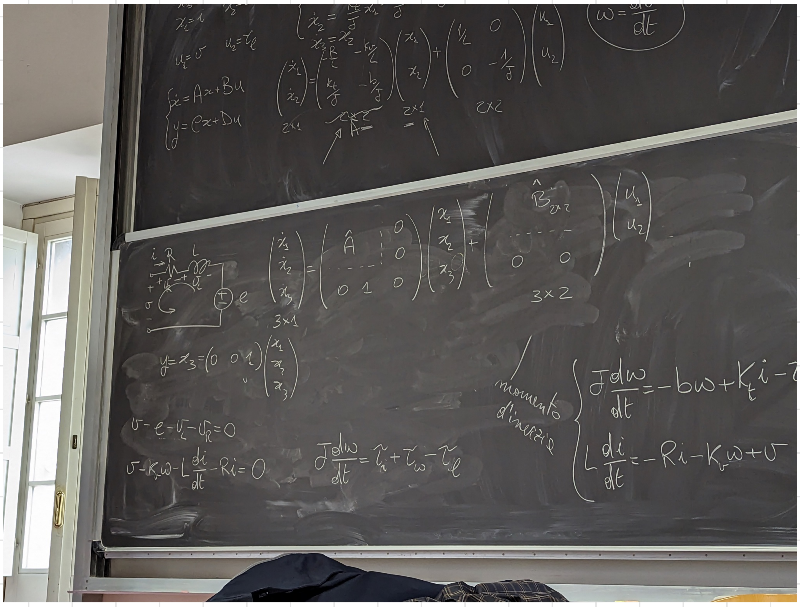
$$y = \omega = x_2 = (0 \quad 1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + (0 \quad 0)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \rightsquigarrow y = \underline{C}\,x + \underline{D}\,y$$

Se voglio considerare anche la **posizione angolare** devo aggiungere una variabile di stato:

$$\dot{x}_3 = x_2 \qquad \text{Poiché } \left(\dot{x}_3 = \omega = \frac{d\theta}{dt}\right)$$

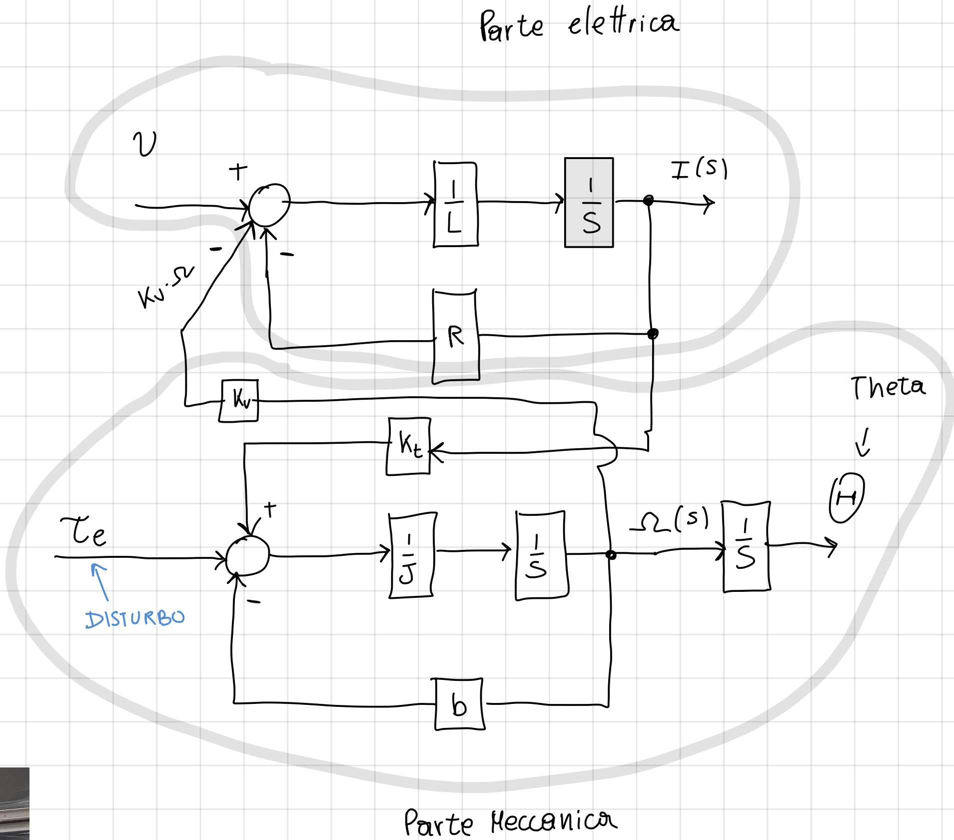
Non derivata!

FOTO

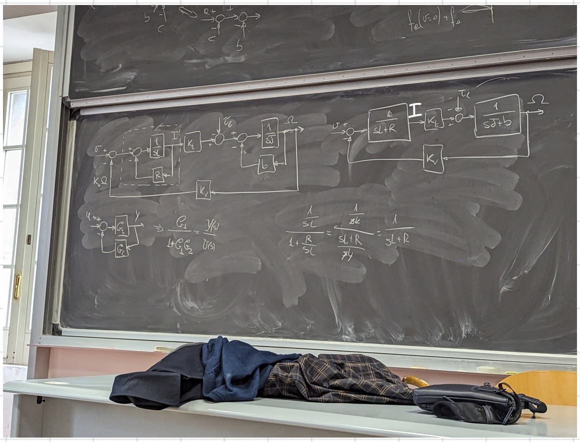


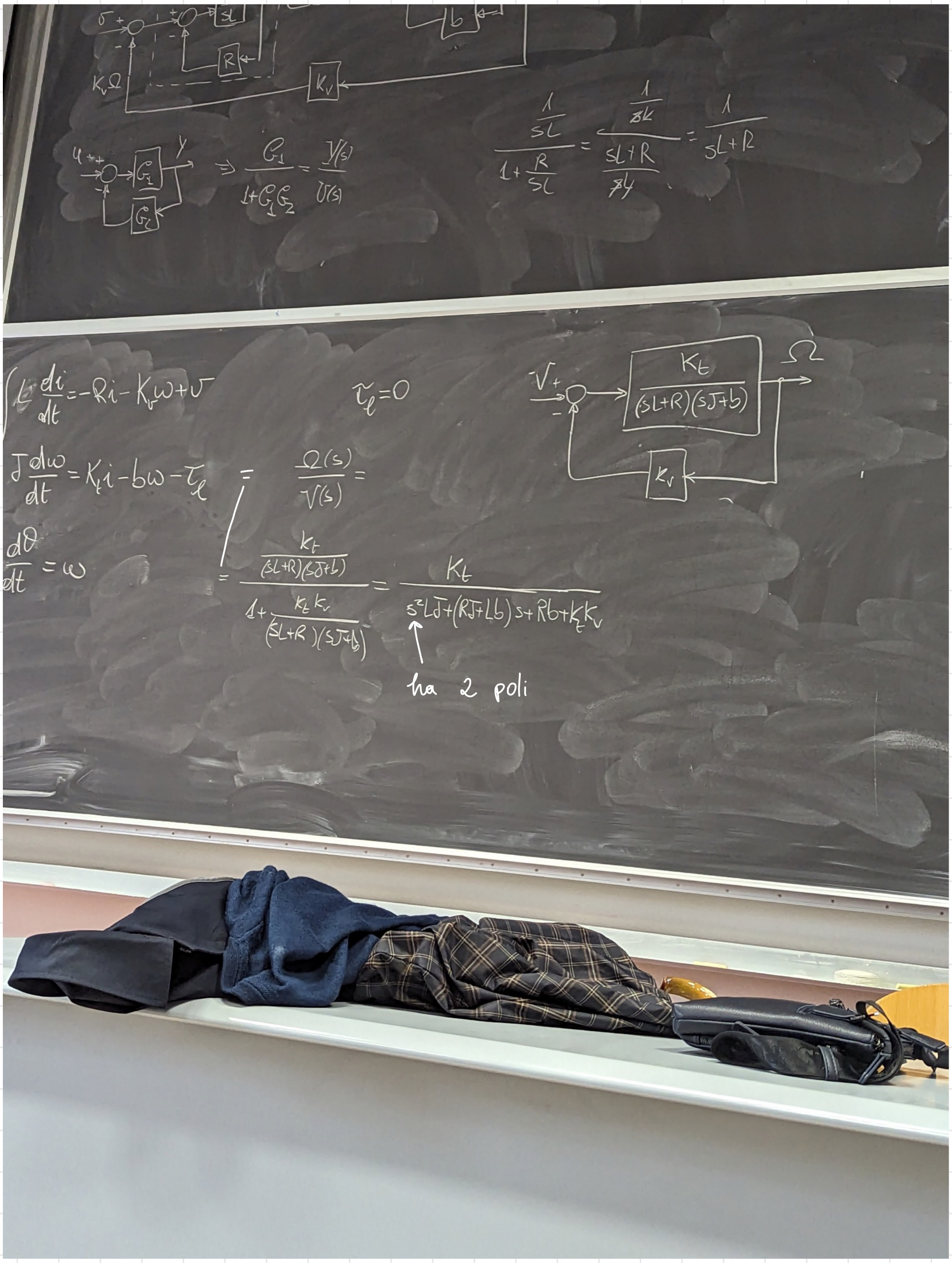
SCHEMA A BLOCCHI

$$\begin{cases} L\,\dot{i} = -Ri - K_v\,\omega + v \\ J\,\dot{\omega} = K_t\,i - b\omega - \tau_e \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$



FOTO





* Trasformata
57:23

Schema a blocchi lez 11

FOTO Schema a blocchi
con GOTO e FROM

Dallo Spazio di Stato alla funzione di trasferimento (MATRICI!)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & (1) \\ y = Cx + Du & (2) \end{cases} \longrightarrow \text{Suppongo C.I.} = \emptyset \rightarrow \mathcal{L}(1) \rightarrow s\,X(s) = A\,X(s) + B\,U(s)$$

$I \cdot x = x$ — Non posso sottrarre uno scalare a una matrice!

Posso mettere in evidenza solo a destra!

$$\rightarrow \text{Ricavo } X(s) \rightarrow s\,X(s) - A\,X(s) = B\,U(s) \rightarrow (sI - A)\,X(s) = B\,U(s)$$

Sfrutto $A^{-1} \cdot A = I \rightarrow \dfrac{A}{B}$ SBAGLIATO! $= A \cdot B^{-1}$ giusto $\rightarrow \cancel{(sI-A)^{-1}}\,\cancel{(sI-A)}\,X(s) = (sI-A)^{-1}\,B \cdot U(s)$

$$\rightarrow \underline{X(s)} = (sI-A)^{-1} \cdot B\,U(s)$$

Funzione di Trasferimento tra Y (OUT) e U (IN)

$$\mathcal{L}(2) \rightarrow Y(s) = C\,\underline{X(s)} + D\,U(s) \rightarrow Y(s) = \boxed{\left[C\,(sI-A)^{-1} \cdot B + D\right]} U(s)$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{b}{J} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \emptyset \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \emptyset$$

$x_1 = i \qquad x_2 = \omega$

$y = \omega \qquad u = v$

$$sI - A = s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{R}{L} & \frac{K_v}{L} \\ -\frac{K_t}{J} & \frac{b}{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+\frac{R}{L} & \frac{K_v}{L} \\ -\frac{K_t}{K} & s+\frac{b}{J} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (sI-A) = \begin{pmatrix} s+\frac{R}{L} & \frac{K_v}{L} \\ -\frac{K_t}{J} & s+\frac{b}{J} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} \cdot \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} =$$

Posto segno

ES
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (sI-A)^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\left(s+\frac{R}{L}\right)\left(s+\frac{b}{J}\right) - \left(K_v \cdot \left(-\frac{K_t}{JL}\right)\right)}}_{d(s)} \cdot \begin{pmatrix} s+\frac{b}{J} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_t}{J} & s+\frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

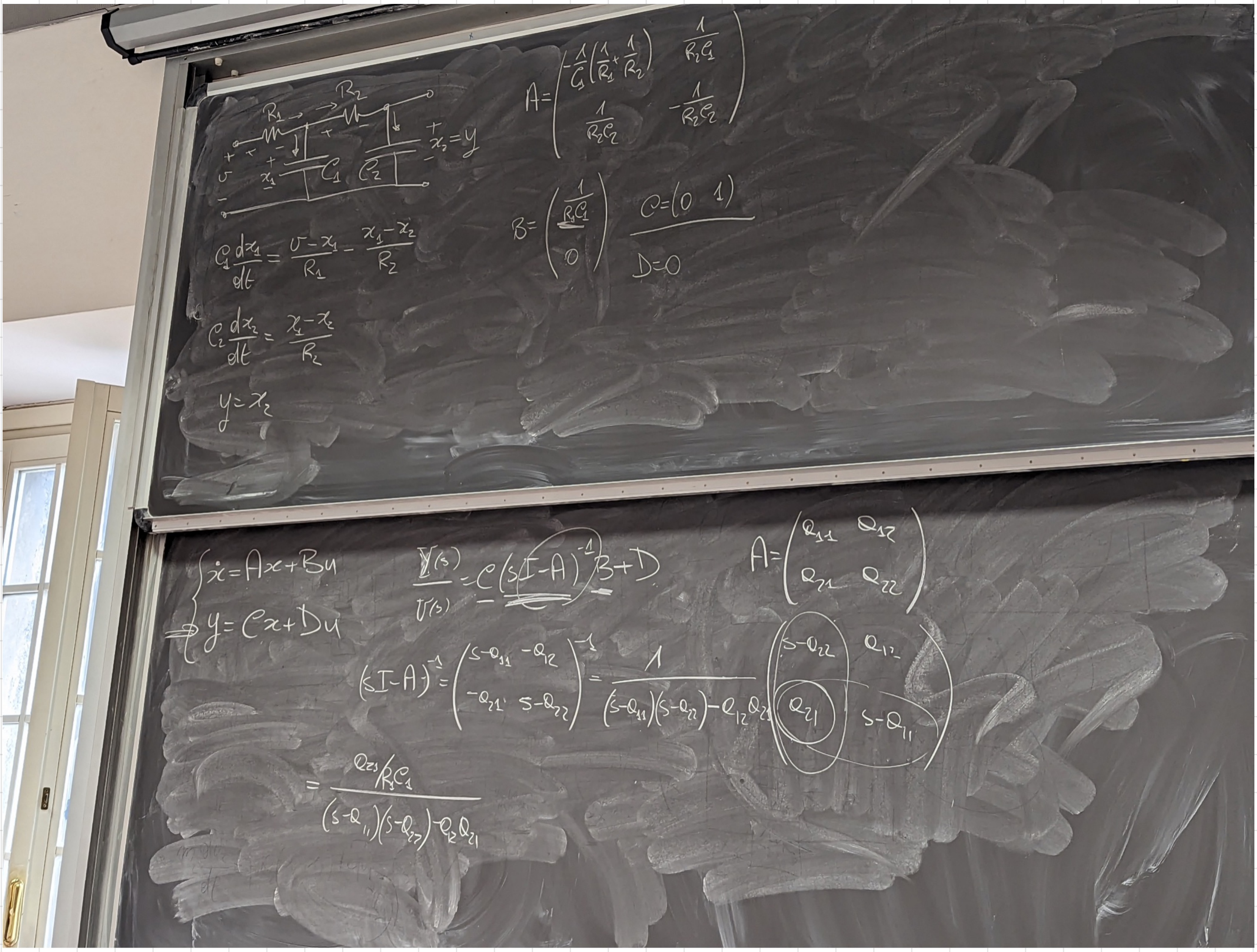
$$C \cdot (sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{d(s)} \begin{pmatrix} s+\frac{b}{J} & -\frac{K_v}{L} \\ \frac{K_t}{J} & s+\frac{R}{L} \end{pmatrix} = \frac{1}{d(s)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{K_t}{J} & s+\frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\left[C \cdot (sI-A)^{-1}\right] \cdot B\right\} + D = \frac{1}{d(s)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{K_t}{J} & s+\frac{R}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \emptyset \end{pmatrix} + 0 = \frac{K_t/JL}{s^2 + s\left(\frac{R}{L}+\frac{b}{J}\right) + \frac{Rb}{LJ} + \frac{K_v K_t}{JL}}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \left[C \cdot (sI-A)^{-1} \cdot B\right] + D = \frac{K_t}{s^2 JL + (RJ + bL)s + Rb + K_t K_v}$$

QED

Stesso risultato ottenuto nel caso del motore elettrico



R_1 R_2
$x_2 = y$
v x_1 C_1 C_2
$C_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{v - x_1}{R_1} - \frac{x_1 - x_2}{R_2}$
$C_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{R_2}$
$y = x_2$
$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{pmatrix}$
$C = (0 \quad 1)$
$D = 0$
$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$
$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{pmatrix}$
$= \frac{a_{21}/R_1C_1}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}$