

# ЗАДАЧА 1

1.1

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \text{ где}$$

$$X = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad Y = (y_1, \dots, y_n)^T$$

1.2

Градиентный спуск:  $x_{t+1} = x_t - \eta \nabla_x f(x_t)$

GD для МНК:  $\theta_{t+1} = \theta_t - \eta X^T (X \theta_t - Y) =$

$$= \theta_t - \eta \sum_i^n x_i (x_i \theta_t - y_i)$$

Стохастический GD для МНК:

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \eta X_I^T (X_I \theta_t - Y_I) = \theta_t - \eta \sum_{j=1}^k x_{ij} (x_{ij} \theta_t - y_{ij}),$$

-  $k$  случайных индексов, выбранных из  $\mathcal{U}\{1, \dots, n\}$  с повторениями.

1.3

$$Y = X \theta + \varepsilon$$

$$\mathbb{E} \hat{\theta} = \mathbb{E} (X^T X)^{-1} X^T (X \theta + \varepsilon) = \mathbb{E} \theta + (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E} \varepsilon = \mathbb{E} \theta = \theta$$

$$\mathbb{E} \hat{y}(x) = \mathbb{E} \hat{\theta}^T x = \theta^T x$$

1.4

$$D \varepsilon = \mathbb{E} ((\varepsilon - \mathbb{E} \varepsilon)^2) = \mathbb{E} \varepsilon^2 = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} D \hat{\theta} &= \mathbb{E} (\hat{\theta}^2 - 2 \hat{\theta} \mathbb{E} \hat{\theta} + \mathbb{E} \hat{\theta}^2) - \mathbb{E} \hat{\theta}^2 = \mathbb{E} \left[ (\theta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon)^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \theta^2 + 2 \theta (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E} \varepsilon + \mathbb{E} \left[ ((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon^2 X \right] = \\ &= ((X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 X), \text{ где } \sigma - \text{вектор} \end{aligned}$$

$$D \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma^2}{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2}$$

$$D \hat{y}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma^2}{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2} x$$