Metodo della Bisezione

Un Esempio

Si consideri il modello di Crescita Logistica visto a lezione:

$$x_{k+1} = r x_k \left(1 - \frac{x_k}{N}\right)$$

...Dove:

- x_k è il numero individui al passo k-mo
- r è un tasso di crescita
- N è il massimo valore della popolazione sostenibile

È interessate determinare per quali valori di x il sistema è in equilibrio

Come possiamo determinarli?

Equilibri di Sistemi Dinamici Discreti

Un sistema dinamico discreto è definito da una equazione del tipo:

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Uno stato è di equilibrio se viene "trasformato in se stesso"

...Quindi, uno stato di equilibrio x deve soddisfare:

$$x = f(x)$$

Manca l'indice di tempo, perché lo stato a sx e dx è lo stesso

- In pratica, abbiamo una equazione (in generale) non lineare
- Se risolviamo l'equazione, determiniamo gli stati di equilibrio!

Zeri di Funzione

La nostra equazione (lineare o meno):

$$x = f(x)$$

...Può essere riscritta come:

$$x - f(x) = 0$$

- Quindi le soluzioni corrispondono ai punti in cui $x - f(x)$ si azzera
- I.e. agli zeri della funzione $F(x) = x - f(x)$

Una trasformazione di questo tipo è sempre possibile

...Quindi risolvere una equazione significa trovare gli zeri di una funzione

Una Applicazione alla Crescita Logistica

Per la crescita logistica, abbiamo:

$$F(x) = x - rx\left(1 - \frac{x}{N}\right) = 0$$

...Che è una equazione non-lineare

- In pratica, è molto facile da trattare in modo simbolico
  - I.e. possiamo ottenere una formula per una soluzione
- ...Ma noi la useremo come esempio per presentare metodi numerici
  - I.e. metodi che offre un valore come soluzione

Una Applicazione alla Crescita Logistica

Come primo passo, definiamo la funzione di interesse

Useremo una classe (in modo da poter cambiare i parametri r ed N)

In [2]:
```
import numpy as np

class LogiEq:
    def __init__(self, r=1, N=1):
        self.r = r
        self.N = N

    def __call__(self, x):
        return x - self.r * x * (1 - x/self.N)
```

- Il metodo `__call__` calcola il valore che desideriamo azzerare

Una Applicazione alla Crescita Logistica

Di solito a questo punto è una buona idea disegnare la funzione

Possiamo farlo perchè F è univariata e scalare, i.e. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- Una semplice funzione di disegno è inclusa nel modulo `example.util`:

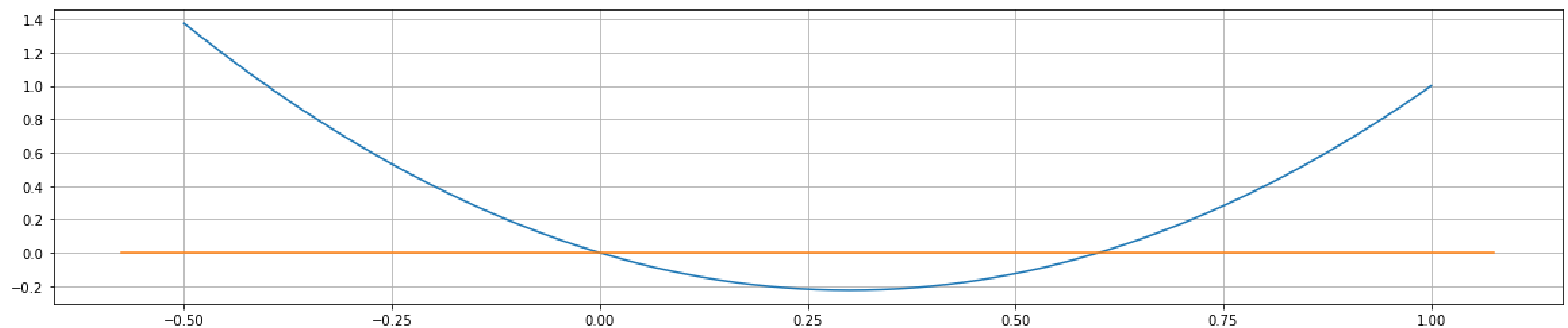
```
def plot_univariate_function(f, x, figsize=None):
    plt.figure(figsize=figsize)
    plt.plot(x, f(x))
    plt.plot(plt.xlim(), [0, 0])
    plt.grid()
    plt.show()
```

- La funzione evidenza l'asse delle ascisse
- ...In modo da facilitare l'individuazione degli zeri

Una Applicazione alla Crescita Logistica

Proviamo a disegnare la nostra funzione

```
In [3]: from example import util
        util.plot_univariate_function(f=LogiEq(r=2.5), x=np.linspace(-0.5, 1, 1000), figsize=(20, 4))
```



- La funzione a due zeri (i.e. il sistema ha due punti di equilibrio)
- Il primo è banale, i.e. $x = 0$, il secondo è intorno a 0.6

Come possiamo determinare il valore esatto?

Metodo della Bisezione

...Per esempio possiamo utilizzare il metodo della bisezione:

- Individuiamo due punti a, b per cui F abbia segno opposto
- In queste condizioni, se F è continua
- ...Allora deve avere uno zero nell'intervallo $[a, b]$

Questo risultato è noto come teorema di Bolzano

Se F ha uno zero nell'intervallo

- Allora possiamo considerare il valore intermedio $m = (a + b)/2$
- In base al segno di m, possiamo determinare dove sia lo zero
  - I.e. se sia nella metà sx $[a, m]$ o in quella dx $(m, b]$
- ...E ripetere finché non siamo sufficientemente vicini alla soluzione

Metodo della Bisezione

Una implementazione del metodo è fornita nel modulo `example.util`

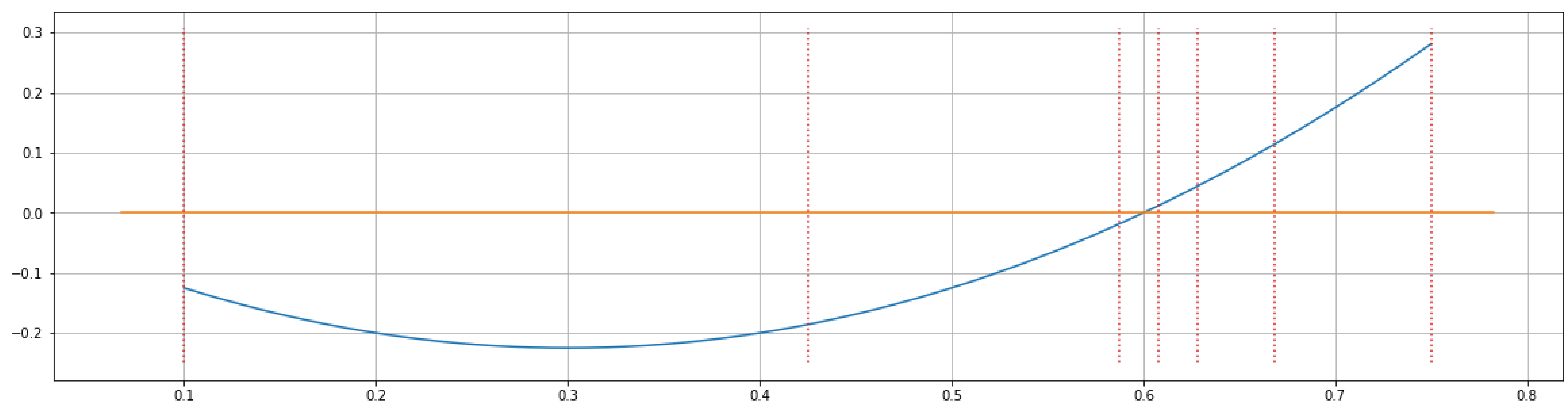
```python
def bisection(f, a, b, tol=1e-6):
    # Controllo le condizioni di applicabilità
    if f(a) * f(b) >= 0:
        print('f(a) e f(b) devono avere segno opposto')
        return None
    # Individuo uno zero
    while abs(a - b) > tol: # finché la tolleranza desiderata non è raggiunta
        m = 0.5 * (a + b) # determino il punto intermedio
        if f(m) * f(a) >= 0: # se f(m) ed f(a) hanno lo stesso segno
            a = m # ...allora rimpiazzo a con m
        else:
            b = m # ...altrimenti rimpiazzo b
    # Restituisco la soluzione
    return m
```

Metodo della Bisezione

Il modulo contiene una versione della funzione

...Che può disegnare i punti valutati

In [5]:
```
F = LogiEq(r=2.5)
x_sol = util.bisection_with_plot(F, a=0.1, b=0.75, max_it=5, figsize=(20, 5))
print(f'Il secondo zero è circa: {x_sol}')
```




```
Il secondo zero è circa: 0.6078125000000001
```

- Ogni linea rossa corrisponde ad un valore di x valutato

Oltre il Metodo della Bisezione

Il metodo della bisezione ha diverse caratteristiche interessanti

- La sua convergenza è garantita (per funzioni continue)
  - Basta partire da due punti a e b che soddisfino l'assunzione
- Nessun manipolazione simbolica è richiesta
  - Una volta che abbiamo individuato la funzione da azzerare
  - ...Ci basta poterla valutare!

Il metodo è (relativamente) lento a convergere

...Ma ne sono state proposte diverse varianti più veloci

- Come al solito, ne troviamo diverse già implementate
- In particolare, queste sono nel modulo `scipy.optimize`

Migliorarenti del Metodo della Bisezione

Noi utilizzeremo il metodo brentq

...Che può essere chiamato esattamente come la funzione `bisect`

- Di seguito vediamo un esempio per la crescita logistica

```
In [6]: from scipy.optimize import brentq

        F = LogiEq(r=2.5)
        x_sol = brentq(F, a=0.1, b=0.75)
        print(f'Il secondo zero è in {x_sol}')
```

```
Il secondo zero è in 0.6
```

- Il metodo fornito da `scipy` è di gran lunga migliore del nostro codice
- ...E si raccomanda il suo utilizzo

Codice Completo

Di seguito il codice completo dell'esempio:

In [7]:

```
import numpy as np
from scipy.optimize import brentq

class LogiEq:
    def __init__(self, r=1, N=1):
        self.r = r
        self.N = N

    def __call__(self, x):
        return x - self.r * x * (1 - x/self.N)

F = LogiEq(r=2.5)
x_sol = brentq(F, a=0.1, b=0.75)
print(f'Il secondo zero è in {x_sol}')
```

```
Il secondo zero è in 0.6
```

Metodo di Newton-Raphson

Un Esempio

Consideriamo l'oscillatore di Van der Pol:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \mu(1 - x^2)y - x \end{pmatrix}$$

- Si tratta di nuovo di un sistema dinamico
- Ma questa volta è continuo

Supponiamo di volerne determinare di nuovo i punti di equilibrio

Come possiamo procedere?

Equilibrio di Sistemi Dinamici Continui

Un sistema dinamico continuo è descritto da una ODE, i.e.:

$$\dot{x} = f(x, t)$$

- Per definizione, all'equilibrio lo stato x non ha variazioni
- ...Quindi la sua derivata deve annullarsi

Possiamo quindi determinare i punti di equilibrio richiedendo la condizione:

$$\dot{x} = f(x, t) = 0$$

I.e. risolvendo l'equazione non lineare $f(x, t) = 0$

- Il ragionamento applicato è simile a quello per i sistemi discreti
- ...Anche se l'equazione risultante è un po' diversa

Zeri di Funzioni Vettoriali

Proviamo ad applicare il ragionamento al nostro caso:

L'equazione che caratterizza un equilibrio è:

$$\begin{pmatrix} y \\ \mu(1 - x^2)y - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- È abbastanza facile rendersi conto che c'è un'unica soluzione, i.e. $(0, 0)$
- ...Ma di nuovo useremo questo esempio per introdurre un metodo numerico

In questo caso il metodo della bisezione non può essere applicato

...Perché la funzione da azzerare è multivariata e vettoriale, i.e. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Ci occorre un approccio in grado di gestire questa situazione

Metodo di Newton-Raphson

Una possibilità è applicare il metodo di Newton-Raphson

Data una equazione non lineare (scalare o vettoriale) nella forma:

$$F(x) = 0$$

...Il metodo di Newtwon-Raphson:

- Inizia l'esecuzione da una stima iniziale x_0 della soluzione
- Approssima la funzione utilizzando l'iperpiano tangente
- Trova uno zero x_1 dell'iperpiano tangente
- ...Ripete il processo fino ad una condizione di terminazione

Il metodo di N-R è alla base di molti algoritmi per zeri di funzioni vettoriali

Metodo di Newton-Raphson

Proviamo a vedere i vari passi nel dettaglio

...Per semplicità, assumeremo per ora che F sia univariata e scalare

- L'obiettivo è risolvere (con $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)):

$$F(x) = 0$$

- Approssimando F utilizzando la retta tangente in x_k, otteniamo:

$$F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k) = 0$$

- ...Che si azzera per:

$$x = x_k - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

Metodo di Newton-Raphson

Del codice per la versione univariata del metodo è disponibile in `util`

```
def nrm_univariate(f, x0, tol=1e-6, max_it=100):
    x = x0 # Parto dalla stima iniziale
    for k in range(max_it): # Facciamo al più max_it iterazioni
        # Passo principale del metodo di Newton-Raphson
        nx = x - f(x) / num_der(f, x)
        if abs(nx - x) <= tol: # Condizione di terminazione
            break
        x = nx # Rimpiazzo x con il nuovo valore
    return x
```

- Il metodo termina quando $|x_{k+1} - x_k|$ è minore di una data tolleranza
- ...O dopo un numero massimo di iterazioni

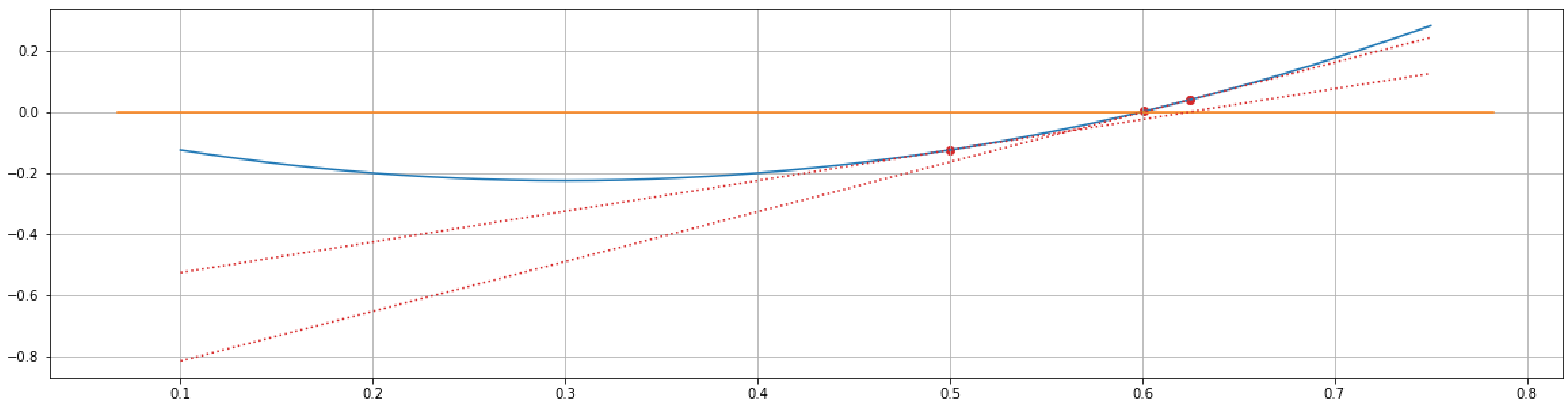
Metodo di Newton-Raphson

Il modulo contiene anche una versione della funzione

...Che può disegnare i punti valutati e le tangenti

- Vediamo il metodo in atto per gli equilibri della crescita logistica

In [9]:
```
F = LogiEq(r=2.5)
util.nrm_univariate_with_plot(F, x0=0.5, a=0.1, b=0.75, max_it=2, figsize=(20, 5))
```



Out[9]: 0.6009615386819698

Metodo di Newton-Raphson

Nel caso F sia multivariata e vettoriale

Il metodo resta identico, con le dovute sostituzioni:

- L'obiettivo è risolvere (con $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$):

$$F(x) = 0$$

- Approssimando F utilizzando l'iperpiano tangente in x_k, otteniamo:

$$F(x_k) + J_F(x_k)(x - x_k) = 0$$

- ...Che si azzera per:

$$x = x_k - J_F^{-1}(x_k)F(x)$$

Dove $J_F(x)$ è lo Jacobiano della funzione

Metodo di Newton Raphson

Il metodo di Newton-Raphson

- Converge molto più velocemente di quello della bisezione
  - ...Anche se la differenza sarà trascurabile per i problemi che affronteremo
- Può gestire funzioni vettoriali
  - ...E quindi sistemi di equazioni non lineari
- È applicabile a funzioni continue e differenziabili
  - La bisezione richiede solo la continuità
- Il metodo può non convergere!
  - E.g. se per un punto la tangente è parallela all'asse delle ascisse!
  - È quindi opportuno controllare il valore di $F(x)$ per la soluzione
- La convergenza dipende dalla scelta di x_0
  - ...E non sempre è facile trovare una buona stima iniziale

Funzione `fsolve`

Come al solito, non utilizzeremo la nostra versione del metodo

...Ma una delle sue evoluzioni, disponibile in scipy.optimize.fsolve

- `fsolve` può essere chiamata in modo simile alla nostra `nrm_univariate`:

```
In [10]: from scipy.optimize import fsolve
         F = LogiEq(r=2.5)
         x_sol = fsolve(F, x0=0.5)
         print(f'Il secondo zero è in {x_sol}')
         print(f'Il valore della funzione per tale punto è {F(x_sol)}')

         Il secondo zero è in [0.6]
         Il valore della funzione per tale punto è [-1.99840144e-15]
```

- Il metodo fornito da `scipy` è di gran lunga migliore del nostro codice
- ...E si raccomanda il suo utilizzo

Zeri di Fuzioni Vettoriali

Vediamo ora come gestire il caso di una funzione vettoriale

Iniziamo definendo la funzione di cui intendiamo trovare gli zeri:

In [11]:
```
class VdPEq:
    def __init__(self, mu=1):
        self.mu = mu

    def __call__(self, X):
        x, y = X
        dx = y
        dy = self.mu * (1 - x**2) * y - x
        return np.array([dx, dy])
```

- Nel nostro caso abbiamo usato una classe (con il metodo `__call__`)
- ...In modo da poter cambiare il valore del parametro μ
- La funzione deve ricevere in ingresso un vettore e restituire un vettore

Zeri di Funzioni Vettoriali

Quindi possiamo chiamare `fsolve` come nel caso precedente:

```
In [12]: F = VdPEq(mu=1)
         x_sol = fsolve(F, x0=[0.5, 0.5])
         print(f'Il secondo zero è in {x_sol}')
         print(f'Valore della funzione in {x_sol}: {F(x_sol)}')

Il secondo zero è in [0. 0.]
Valore della funzione in [0. 0.]: [0. 0.]
```

- La stima di partenza deve essere un vettore
- Come al solito, è opportuno controllare il valore della funzione
- ...Ed accertarsi che sia sufficientemente vicino allo 0