Esempio: Crescita Logistica

Il modello di crescita logistica definisce l'evoluzione di una popolazione

...In particolare come la sua dimensione cambi nel tempo

- È definito dalla seguente ricorsione:

$$x_{k+1} = r x_k \left(1 - \frac{x_k}{N}\right)$$

- Dove:
  - x_k è il valore della popolazione al passo k
  - $r > 1$ è il tasso di crescita
  - N è un valore di riferimento della popolazione

Il modello consente di predire l'evoluzione di x_k a partire da un valore iniziale x_0

Esempio: Crescita Logistica

Nel modulo `sol.logi.py`, si definisca la funzione:

```python
def logi(x0, r, N, n)
```

Che riceva come ingresso:

- Il valore iniziale della popolazione x_0
- Il valore di r e di N
- Il numero n di passi da simulare

La funzione deve restituire:

- Una lista con i valori della popolazione $\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$

Si collaudi la funzione in una cella in questo notebook

Esempio: Crescita Logistica

Per prima cosa creiamo un file `logi.py` nella cartella `sol`

Quindi possiamo scrivere il codice:

```
def logi(x0, r, N, n):
    res = [None for k in range(n)]
    x = x0
    for k in range(n):
        # Calcolo il prossimo valore della popolazione
        x = r * x * (1 - x / N)
        # Lo memorizzo nella lista
        res[k] = x
    return res
```

Esempio: Crescita Logistica

Ora possiamo collaudare il codice

...Ricordandoci di importare il modulo appena creato

In [1]:
```
%load_ext autoreload
%autoreload 2
from sol import logi

x0 = 0.5
N = 1
r = 1.4
n = 10

x = logi.logi(x0=x0, r=r, N=N, n=n)

print('Valori di x:', x)
```

```
Valori di x: [0.5, 0.35, 0.31849999999999995, 0.3038808499999999, 0.29615219060458847, 0.29182449884656875, 0.28932814500732484, 0.28786431731952333, 0.28699783298716336, 0.2864821075869699, 0.2861741534672968]
```

Esempio: Crescita Logistica

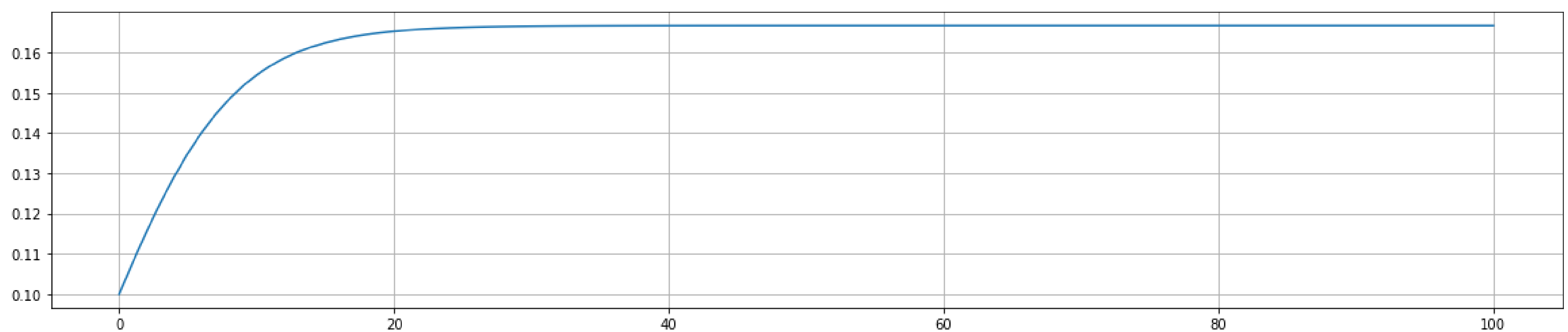
Utilizzando i valori suggeriti, si disegni l'andamento della popolazione

In [2]:
```
from matplotlib import pyplot as plt

r = 1.2
x0, N = 0.1, 1
n = 100

x = logi.logi(x0=x0, r=r, N=N, n=n)

plt.figure(figsize=(20, 4))
plt.plot(list(range(n+1)), x)
plt.grid(':') # questa funzione disegna una griglia
plt.show()
```



Esempio: Crescita Logistica

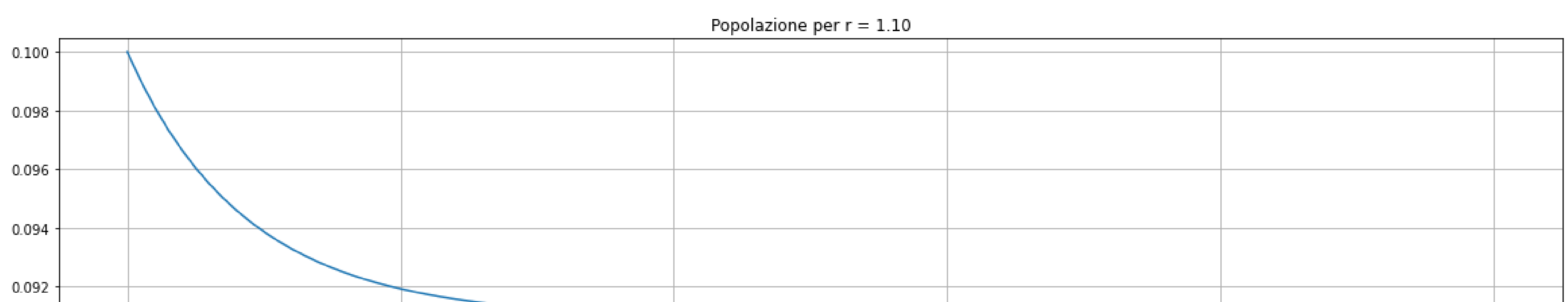
Si modifichi il valore di r nell'intervallo $[1.1, 4.1]$: come cambia il comportamento?

In [3]:
```
from matplotlib import pyplot as plt

x0, N = 0.1, 1
n = 100

for r in [1.1, 1.2, 2.7, 3.1, 3.5, 4, 4.1]:
    x = logi.logi(x0=x0, r=r, N=N, n=n)

    plt.figure(figsize=(20, 4))
    plt.plot(list(range(n+1)), x)
    plt.grid(':') # questa funzione disegna una griglia
    plt.title(f'Popolazione per r = {r:.2f}')
    plt.show()
```



Sistemi Dinamici Tempo-Discreti

Il modello appena visto è un esempio di sistema dinamico tempo-discreto

- Questo perché descrive uno stato che varia nel tempo
- ...Attraverso una seri di passi discreti

Un sistema dinamico può avere cinque tipi di comportamento

- Il sistema converge ad uno stato stabile (o di equilibrio)
- Il sistema converge ma dopo alcune oscillazioni
- Il sistema oscilla periodicamente
- Il sistema varia continuamente, senza assumere un periodo: diventa caotico
- Il sistema diverge

Sistemi Dinamici Tempo-Discreti

Il modello appena visto è un esempio di sistema dinamico tempo-discreto

- Questo perché descrive uno stato che varia nel tempo
- ...Attraverso una seri di passi discreti

Il modello di crescita logistica può assumere tutti e 5 i comportamenti

- Converge senza oscillazioni per per $r \in (1, 2]$
- Converge con oscillazioni per $r \in [2, 3]$
- È periodico per $r \in [3, 3.5)$
- È caotico per $r \in [3.5, 4]$
- Diverge per $r > 4$