

Iniziamo abilitando subito l'estensione autoreload

```
In [1]: %load_ext autoreload  
        %autoreload 2
```



Lettura di File CSV



Gestione di Dati Sperimentali

Supponiamo di aver effettuato misure sperimentali

...Per caratterizzare le prestazioni di un ciclista



- Abbiamo installato un sensore per misurare la forza esercitata sui pedali
- ...Ed abbiamo chiesto al ciclista di aumentare la velocità fino al massimo



Gestione di Dati Sperimentali

Dati sperimentali di questo tipo

...Vengono tipicamente strutturati in tabelle

velocità	forza
0	0
0.2	0.3
...	...

- La tabella è quindi salvata in un file con un formato opportuno
- E.g. file excel, .mat, ODS, CSV, HDF5...

Il primo passo per una analisi sperimentale è accedere ai dati nel file

- I nostri dati sono nel file [data/bicycle.csv](#)
- ...Che è in formato CSV



Formato CSV

CSV sta per Comma Separated Values (valori separati da virgole)

Vediamone un piccolo esempio

```
"speed", "force"  
0.0, -0.013567540115007604  
0.1414141414141414, -0.5415313487144505  
0.2828282828282828, -0.38254467422691973  
0.4242424242424242, -0.16841035025027298
```

- Il file è in formato testuale (come i file `.py` o `.txt`)
- La prima riga del file di solito contiene l'intestazione della tabella
- Le righe successive corrispondono alle righe della tabella
- I valori su una riga sono divisi da un separatore (di solito la virgola)
- I valori testuali sono abitualmente racchiusi tra doppi apici



Lettura di File CSV

Il formato CSV è molto utilizzato per lo scambio di dati

- Può essere esaminato e modificato con un editor di testo
- Può essere letto e scritto da molte applicazioni (MS Excel, OpenOffice, etc.)
- Può essere letto e scritto utilizzando librerie Python

La terza opzione (usare Python) è molto interessante

...Perché Python fornisce pacchetti di analisi dati **molto** potenti:

- pandas manipolazione di dati ed analisi statistiche
- scipy per calcolo scientifico avanzato
- scikit-learn per apprendimento automatico (Machine Learning)
- tensorflow per Deep Learning (reti neurali)
- ...



Accesso a File in Python

Per leggere un file CSV dobbiamo innanzitutto accedere al file stesso

Questo richiede di:

- Comunicare al file system che desideriamo "aprire" il file
- Effettuare la lettura
- Comunicare al file system che desideriamo "chiudere" il file

È importante che tutte le fasi vengano eseguite

- ...Ma in pratica è facile dimenticarsi di effettuare la chiusura

Python gestisce questa sequenza usando l'istruzione `with`

La sintassi è:

```
with <espressione> as <variabile>:  
    <blocco>
```



Accesso a File in Python

with è un notazione compatta per una sequenza di normali istruzioni


In particolare, la sintassi:

```
with <espressione> as <variabile>:  
    <blocco>
```

È (quasi) equivalente a:

```
<variabile> = <espressione>  
<variabile>.__enter__()  
<blocco>  
<variabile>.__exit__()
```

- <espressione> deve restituire un oggetto
- ...Per quale devono essere definiti i metodi `__enter__` ed `__exit__`

 ■ Per i file `__exit__` effettua la chiusura

Un Esempio Pratico

Proviamo ad aprire il file `bicycle.csv` nella cartella `data`

- Per prima cosa, dobbiamo ottenerne il **percorso relativo**
- Questo dipende (purtroppo dal sistema operativo)
 - Su Windows, il percorso è "data\bicycle.csv"
 - Su OS X/Linux è "data/bicycle.csv"

Possiamo ottenere una versione generale usando la funzione `os.path.join`

```
In [2]: import os

        fname = os.path.join('data', 'bicycle.csv')
        print(f'Percorso relativo del file: {fname}')
```

Percorso relativo del file: data/bicycle.csv

- La funzione concatena le stringhe passate come argomento
- ...Usando il separatore corretto per il SO operativo utilizzato



Un Esempio Pratico

Possiamo ora usare `with` per gestire l'apertura e chiusura

```
In [3]: import os

        fname = os.path.join('data', 'bicycle.csv')
        with open(fname) as fp:
            pass
```

- La funzione `open` apre il file in lettura, in modalità testo
- ...E restituisce un **file descriptor**, che viene assegnato in `fp`
- Il blocco `with` si occupa della chiusura del file

Sono possibili modalità di apertura diverse (e.g. in scrittura, modalità binaria)

- Vanno usate con cautela (aprendo un file in scrittura ne si cancella il contenuto)
- ...In questo corso ci limiteremo ad aprire file in lettura



Un Esempio Pratico

Possiamo leggere il contenuto del file (e.g.) con `readlines`

```
In [4]: import os

fname = os.path.join('data', 'bicycle.csv')
with open(fname) as fp:
    lines = fp.readlines()

print(lines[:3])

['"speed","force"\n', '0.0,1.2531560444730068\n', '0.1414141414141414,0.22194751712574834\n']
```

- `readlines` è un metodo del file descriptor
- Legge le righe del file una ad una e le inserisce in una lista
- ...Ma non interpreta in alcun modo i dati contenuti
- Ogni linea è semplicemente una stringa



Un Esempio Pratico

Possiamo leggere **ed interpretare** il contenuto del file usando il modulo `csv`

```
In [5]: import os, csv

fname = os.path.join('data', 'bicycle.csv')
with open(fname) as fp:
    reader = csv.reader(fp, quoting=csv.QUOTE_NONNUMERIC)
    for i, row in enumerate(reader):
        print(row)
        if i >= 2:
            break

['speed', 'force']
[0.0, 1.2531560444730068]
[0.1414141414141414, 0.22194751712574834]
```

Per prima cosa, una volta aperto file, istanziamo un oggetto `reader`

- `reader` è una classe in grado di leggere ed interpretare file CSV
- Il costruttore richiede come unico parametro obbligatorio il file descriptor



Un Esempio Pratico

Possiamo leggere **ed interpretare** il contenuto del file usando il modulo `csv`

```
In [6]: import os, csv

fname = os.path.join('data', 'bicycle.csv')
with open(fname) as fp:
    reader = csv.reader(fp, quoting=csv.QUOTE_NONNUMERIC)
    for i, row in enumerate(reader):
        print(row)
        if i >= 2:
            break

['speed', 'force']
[0.0, 1.2531560444730068]
[0.1414141414141414, 0.22194751712574834]
```

Si può modificare il comportamento di `reader` mediante parametri opzionali

- Per esempio si può indicare di usare un separatore diverso dalla virgola
- Nel nostro caso, `quoting=csv.QUOTE_NONNUMERIC` indica che...

 ■  Ogni dato non racchiuso da `".."` va considerato un float

Un Esempio Pratico

Possiamo infine convertire il risultato in un array `numpy`

```
In [7]: import os, csv
import numpy as np

fname = os.path.join('data', 'bicycle.csv')
header, data = None, []
with open(fname) as fp:
    reader = csv.reader(fp, quoting=csv.QUOTE_NONNUMERIC)
    for i, row in enumerate(reader):
        if i == 0:
            header = row # La prima riga del CSV contiene l'intestazione
        else:
            data.append(row) # ...Le altre righe contengono dati

data = np.array(data)
print(data[:3, :]) # prime tre righe dell'array

[[0.          1.25315604]
 [0.14141414  0.22194752]
 [0.28282828  0.24585546]]
```

  L'intestazione del file/tabella può fare comodo (la mettiamo in una variabile)

Modulo di Esempio

Il codice mostrato è disponibile nella funzione `example.analyze.read_csv`

```
In [8]: import os
        from example import analyze

        fname = os.path.join('data', 'bicycle.csv')
        data, header = analyze.read_csv(fname)

        print(header) # Intestazione (nomi delle colonne)
        print(data[:3, :]) # prime tre righe dell'array

['speed', 'force']
[[0.          1.25315604]
 [0.14141414  0.22194752]
 [0.28282828  0.24585546]]
```

- La funzione riceve come parametro il percorso del file
- ...E restituisce i dati e l'intestazione



Plotting Our Data

Esaminiamo i nostri dati con un **grafico di dispersione**

- Un grafico di dispersione è come un grafico cartesiano, ma **senza le linee**
- In `matplotlib` possiamo ottenerne uno con la funzione `scatter`

Ne possiamo ottenere uno con `example.analyze.scatter`:

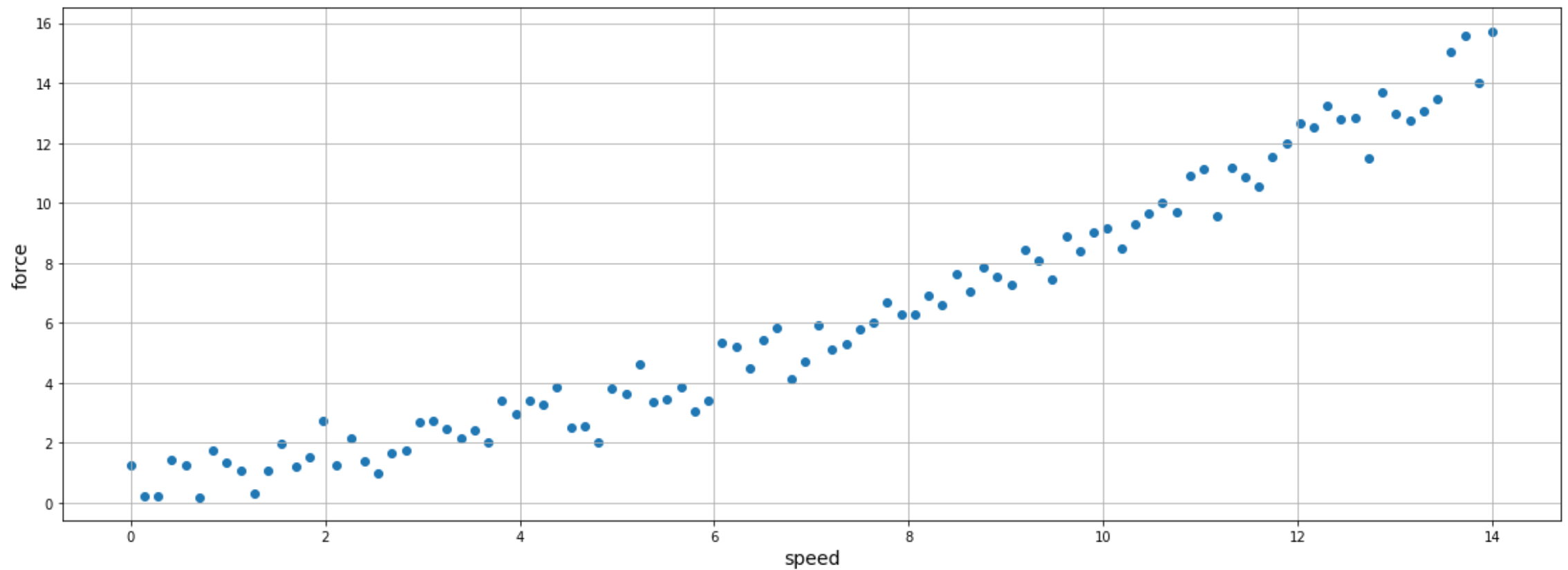
```
def scatter(x, y, xlabel=None, ylabel=None, figsize=None):  
    plt.figure(figsize=figsize)  
    plt.scatter(x, y)  
    plt.xlabel(xlabel, fontsize=14)  
    plt.ylabel(ylabel, fontsize=14)  
    plt.grid(':')  
    plt.show()
```



Plotting Our Data

Procediamo ora a visualizzare i nostri dati

```
In [9]: analyze.scatter(x=data[:, 0], y=data[:, 1],  
                        xlabel='speed', ylabel='force', figsize=(20, 7))
```



Metodo Lineare dei Minimi Quadrati



Analisi della Curva

Quando un ciclista pedala, deve opporsi a tre forze

- La forza di trascinamento dovuta all'aria
 - ...Che ha una dipendenza quadratica dalla velocità, i.e. $\alpha_2 v^2$
- L'attrito dovuto allo sfregamento dei pedali
 - ...Che cresce linearmente con la velocità, i.e. $\alpha_1 v$
- L'attrito volvente delle ruote sul terreno
 - ...Che è approssimativamente costante, i.e. α_0

Quindi la dipendenza della forza rispetto alla velocità...

...È descritta da una equazione nella forma:

$$F(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

Il nostro obiettivo è determinare i coefficienti



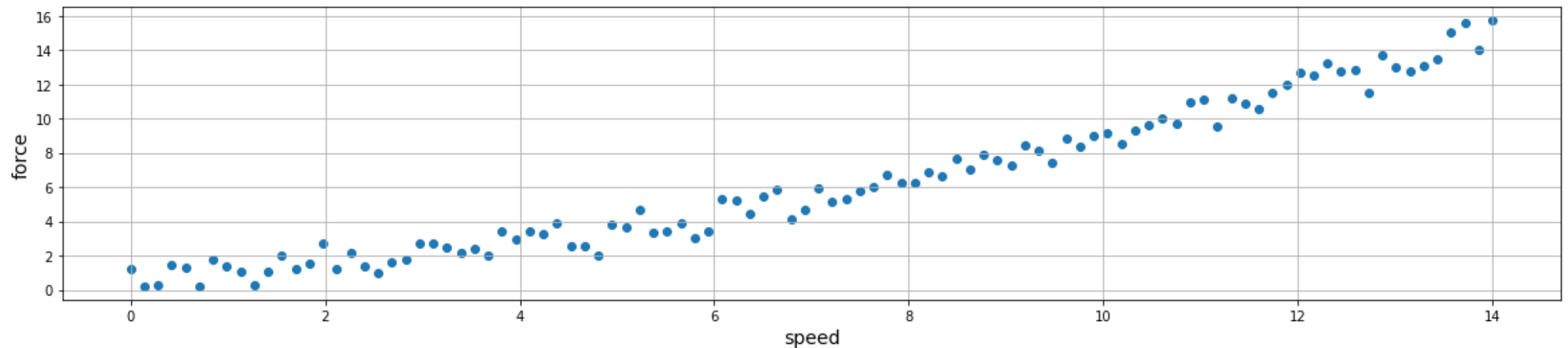
Rumore di Misura

Possiamo vederlo come un problema di progettazione di curve

...Ma se lo facciamo ci rendiamo conto di **due problemi**

- In primo luogo, i nostri dati sono soggetti a **rumore di misura**

```
In [10]: analyze.scatter(x=data[:, 0], y=data[:, 1], xlabel='speed', ylabel='force', figsize=(20, 4))
```



- I valori della forza misurata non sono esatti

- ...Quindi non ha senso interpolarli in modo esatto!

Sovra-determinatezza

Possiamo vederlo come un problema di progettazione di curve

...Ma se lo facciamo ci rendiamo conto di **due problemi**

- In secondo luogo, il sistema risultata ha più condizioni che parametri

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_X \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Il sistema di equazioni lineari si dice **sovradeterminato**
- ...E non ammettere in generale soluzioni

Come possiamo risolvere queste difficoltà?



Soluzione Approssimata

Il "trucco" è accontentarsi di una **soluzione approssimata**

Per esempio, invece di risolvere un sistema in modo esatto, i.e.:

$$X\alpha = y$$

...Possiamo minimizzare una **metrica di errore**:

$$\arg \min_{\alpha} \|X\alpha - y\|_2^2$$

- $X\alpha$ rappresenta il valore della nostra curva per ogni x
- y sono i valori da approssimare
- $X\alpha - y$ rappresenta l'errore di approssimazione (si chiama **residuo**)
- $\| \dots \|_2^2$ è semplicemente la somma dei quadrati (norma L2)



Metodo dei Minimi Quadrati

Questa formulazione si chiama **problema ai minimi quadrati**

$$\arg \min_{\alpha} \|X\alpha - y\|_2^2$$

- La metrica da minimizzare si chiama anche **SSE** (Sum of Squared Errors)
- ...Perché è letteralmente la somma dei quadrati degli errori

Dal punto di vista geometrico è un paraboloide

...I.e. una parabola in ***m*** dimensioni (tante quanti i coefficienti)

- Come tutti i paraboloidi è una funzione convessa
- Quindi ha **un solo punto di minimo**
- ...In corrispondenza del punto in cui il gradiente (derivata) si annulla

Determineremo ora sotto quali condizioni questo succeda



Metodo dei Minimi Quadrati

Iniziamo osservando che:

$$\begin{aligned}\|X\alpha - y\|_2^2 &= (X\alpha - y)^T (X\alpha - y) \\ &= (X\alpha)^T (X\alpha) - (X\alpha)^T y - y^T (X\alpha) + y^T y\end{aligned}$$

- Nell'ultima formula tutti i termini sono scalari (perché $\|X\alpha - y\|_2^2$)
- ...E quindi possono essere trasposti a piacimento
- Inoltre, per il prodotto matriciale vale che: $(AB)^T = B^T A^T$

Di qui otteniamo:

$$\begin{aligned}\|X\alpha - y\|_2^2 &= (X\alpha)^T (X\alpha) - 2y^T (X\alpha) + y^T y \\ &= \alpha^T (X^T X)\alpha - 2(y^T X)\alpha + y^T y\end{aligned}$$



Metodo dei Minimi Quadrati

Ora osserviamo che:

- Il gradiente di un prodotto scalare $\nabla a^T x$ è a^T
- Il gradiente di una forma quadratica $\nabla x^T A x$ è $(A^T + A)x$

Le due formule possono essere ottenute (con un po' di sforzo) dalle definizioni

Possiamo usare i due risultati per ottenere:

$$\begin{aligned}\nabla \|X\alpha - y\|_2^2 &= \nabla \alpha^T (X^T X) \alpha - 2 \nabla (y^T X) \alpha + \underbrace{\nabla y^T y}_{=0} \\ &= (X^T X + X^T X) \alpha - 2(X^T y) \\ &= 2(X^T X) \alpha - 2(X^T y)\end{aligned}$$



Metodo dei Minimi Quadrati

Ora poniamo come condizione che il gradiente si annulli

$$2(X^T X)\alpha - 2(X^T y) = 0$$

Da cui otteniamo un nuovo sistema lineare:

$$X^T X \alpha = X^T y$$

Il vettore α che lo risolve corrisponde alla migliore approssimazione

Il sistema somiglia molto a quello da cui siamo partiti

Con due differenze:

- La matrice dei coefficienti è data da $X^T X$ anziché da X
- Il vettore dei termini noti è dato da $X^T y$ anziché da y



Minimi Quadrati in `numpy`

In teoria potremmo risolvere il sistema nel solito modo

- Impostiamo X ed y come nel caso della progettazione di curve
- Calcoliamo $X^T X$ e Xy
- Usiamo `numpy.linalg.solve` per risolvere il sistema modificato

In pratica, `numpy` può effettuare questo procedimento per noi

Dato un problema ai minimi quadrati nella forma:

$$\arg \min \|X\alpha - y\|_2^2$$

...Possiamo risolverlo direttamente con `numpy.linalg.lstsq`

- I parametri sono la matrice dei coefficienti
- ...Ed il vettore dei termini noti



Un Esempio Pratico

Nel nostro caso, la matrice dei coefficienti ed il vettore dei termini noti sono:

$$X = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Sono del tutto simili a quelle usate per la progettazione di curve
- ...Ma contengono molti più termini

Per questa ragione non è pratico costruirle scrivendo gli elementi uno per uno

- Però ci sono dei "pattern" molto visibili
- La prima colonna contiene gli x^2 , la seconda gli x e così via



Un Esempio Pratico

Possiamo quindi:

Recuperare separatamente velocità x e forza y dai dati:

```
In [11]: x, y = data[:, 0], data[:, 1]
```

Costruire i vettori corrispondenti alle colonne:

```
In [12]: c0 = x**2  
c1 = x  
c2 = np.ones(len(x))
```

■ Da notare che al momento si tratta di vettori riga!

```
In [13]: c0.shape
```

```
Out[13]: (100,)
```



Un Esempio Pratico

Quindi procediamo come segue:

Trasformiamo i vettori riga in vettori colonna

```
In [14]: c0 = c0.reshape(-1, 1)
         c1 = c1.reshape(-1, 1)
         c2 = c2.reshape(-1, 1)
```

- `reshape` cambia la forma di un array
- Un `-1` come argomenti indica che quel valore deve essere derivato
- ...A partire dal numero totale di elementi

Controlliamo che i vettori abbiano la forma corretta:

```
In [15]: c0.shape
```

```
Out[15]: (100, 1)
```



Un Esempio Pratico

Adesso possiamo concatenare i vettori colonna

```
In [16]: X = np.hstack([c0, c1, c2])  
print(X[:5, :]) # Prime 5 righe della matrice
```

```
[[0.          0.          1.          ]  
 [0.01999796 0.14141414 1.          ]  
 [0.07999184 0.28282828 1.          ]  
 [0.17998163 0.42424242 1.          ]  
 [0.31996735 0.56565657 1.          ]]
```

- `hstack` accetta come parametro una collezione di array
- ...E li accosta sull'asse "orizzontale"

Nel nostro caso accosta le tre colonne



Un Esempio Pratico

Infine possiamo ottenere la soluzione

```
In [22]: alpha, sse, _, _ = np.linalg.lstsq(X, y, rcond=None)
         print(alpha, sse)

[0.05278913  0.28679521  0.76922934] [35.18965831]
```

- `rcond=None` è opzionale (sopprime un messaggio di allerta temporaneo)
- La funzione restituisce tre valori
- Il primo è la soluzione, il secondo è l'SSE (come array)
- Gli altri non ci interessano
 - Per questo li mettiamo in un variabile con un nome breve (i.e. `"_"`)

La soluzione corrisponde ai coefficienti nelle tre forze di attrito



Modulo di Esempio

Il codice è disponibile nella funzione `example.analyze.fit`

```
def fit(x_list, y):  
    # Converto i vettori in colonne  
    x_cols = [x.reshape(-1, 1) for x in x_list]  
    # Ottengo la matrice dei coefficienti  
    X = np.hstack(x_cols)  
    # Risolvo il problema ai minimi quadrati  
    sol, sse, _, _ = np.linalg.lstsq(X, y)  
    # Restituisco il risultato  
    return sol, sse[0]
```

- La funzione è pensata per accettare in ingresso una lista di vettori riga
- ...Così da facilitarne l'utilizzo

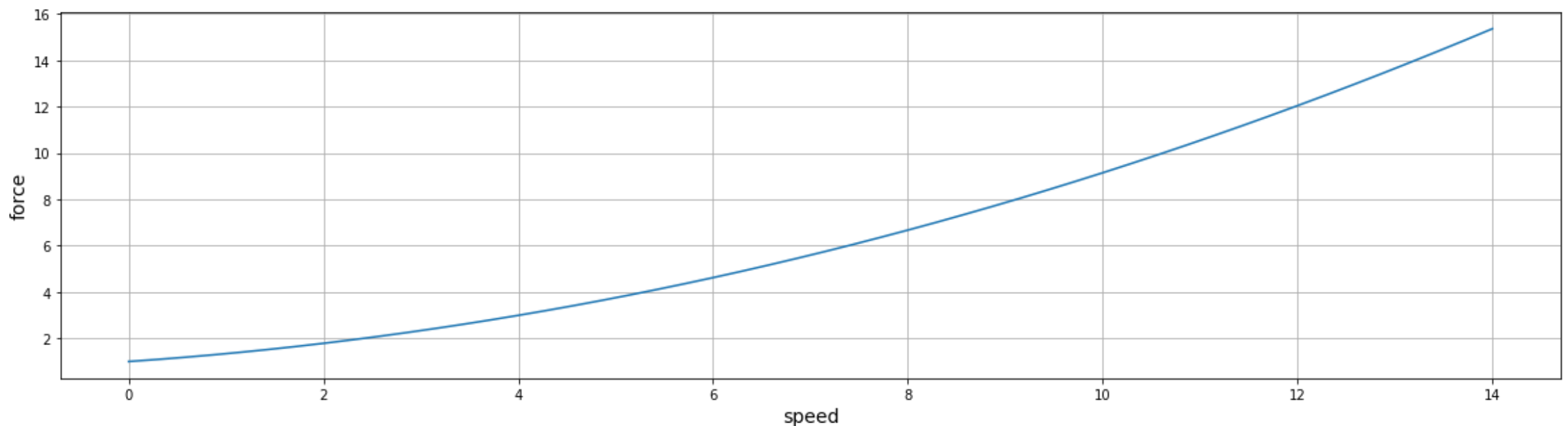


Graficare i Risultati

In alcuni casi è possibile graficare la relazione ingresso/uscita

Per comodità è stata fornita la funzione `example.analyze.plot`

```
In [23]: (alpha2, alpha1, alpha0), sse = analyze.fit([x**2, x, x**0], y)
xs = np.linspace(x.min(), x.max()) # valori x _per il disegno (non i dati!)_
ys = alpha2 * xs**2 + alpha1 * xs + 1 # valori y per il disegno
analyze.plot(xs, ys, xlabel='speed', ylabel='force', figsize=(20, 5))
print(f'SSE: {sse:.3f}')
```



SSE: 35.190

Graficare i Risultati

In tutti i casi si possono confrontare le stime con i valori misurati

Allo scopo si può usare un grafico di dispersione

```
In [28]: yp = alpha2 * x**2 + alpha1 * x + 1 # stime del modello, per ogni esempio  
analyze.scatter(y, yp, xlabel='force (measured)', ylabel='force (estimated)', figsize=(20, 5),
```

