

# Metodo della Bisezione

---



## Un Esempio

Si consideri il modello di Crescita Logistica visto a lezione:

$$x_{k+1} = rx_k \left( 1 - \frac{x_k}{N} \right)$$

...Dove:

- $x_k$  è il numero individui al passo  $k$ -mo
- $r$  è un tasso di crescita
- $N$  è il massimo valore della popolazione sostenibile

È interessante determinare **per quali valori di  $x$  il sistema è in equilibrio**

Come possiamo determinarli?



# Equilibri di Sistemi Dinamici Discreti

Un sistema dinamico discreto è definito da una equazione del tipo:

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Uno stato è di equilibrio se viene "trasformato in se stesso"

**...Quindi, uno stato di equilibrio  $x$  deve soddisfare:**

$$x = f(x)$$

Manca l'indice di tempo, perché lo stato a  $x$  e  $dx$  è **lo stesso**

- In pratica, abbiamo una equazione (in generale) non lineare
- Se risolviamo l'equazione, determiniamo gli stati di equilibrio!

**Abbiamo già considerato questo problema, ma solo per **sistemi lineari****



# Zeri di Funzione

La nostra equazione:

$$x = f(x)$$

...Può essere riscritta come:

$$x - f(x) = 0$$

- Quindi le soluzioni corrispondono ai punti in cui  $x - f(x)$  si azzera
- I.e. agli **zeri** della funzione  $F(x) = x - f(x)$

Una trasformazione di questo tipo è **sempre** possibile

**...Quindi risolvere una equazione significa trovare gli zeri di una funzione**



# Una Applicazione alla Crescita Logistica

Per la crescita logistica, abbiamo:

$$F(x) = x - rx \left( 1 - \frac{x}{N} \right) = 0$$

...Che è una equazione **non-lineare**

- In pratica, è molto facile da trattare in modo **simbolico**
  - I.e. possiamo ottenere una **formula** per una soluzione
- ...Ma noi la useremo come esempio per presentare **metodi numerici**
  - I.e. metodi che offre un **valore** come soluzione



# Una Applicazione alla Crescita Logistica

**Come primo passo, definiamo la funzione di interesse**

Useremo una classe (in modo da poter cambiare i parametri  $r$  ed  $N$ )

```
class LogiEq:
    def __init__(self, r=1, N=1):
        self.r = r
        self.N = N

    def __call__(self, x):
        return x - self.r * x * (1 - x/self.N)
```

- Il metodo `__call__` calcola il valore che desideriamo azzerare
- Il codice è disponibile nel modulo `base.logi`



# Una Applicazione alla Crescita Logistica

Di solito a questo punto è una buona idea **disegnare** la funzione

Possiamo farlo perchè  $F$  è **univariata e scalare**, i.e.  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- Una semplice funzione di disegno è inclusa nel modulo `base.util`:

```
def plot_univariate_function(f, x, figsize=None):  
    plt.figure(figsize=figsize)  
    plt.plot(x, f(x))  
    plt.plot(plt.xlim(), [0, 0])  
    plt.grid()  
    plt.show()
```

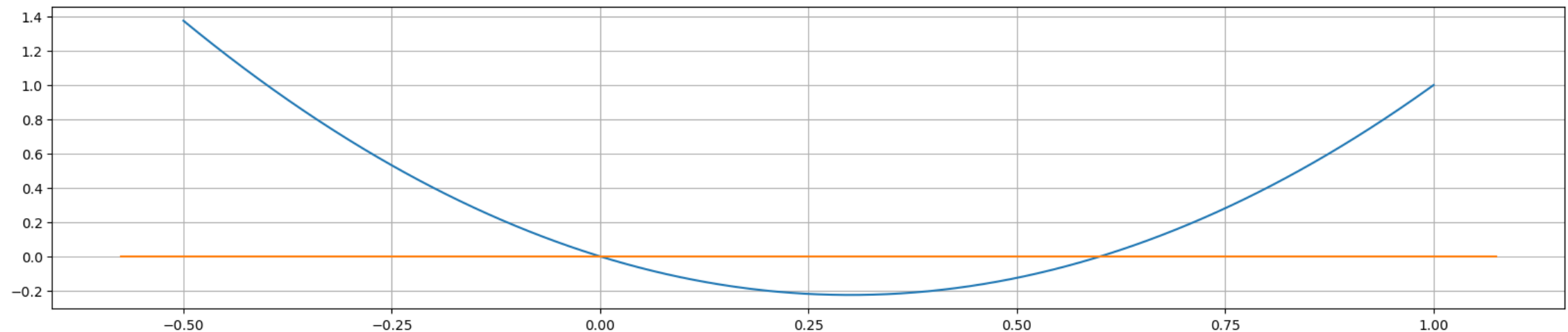
- La funzione evidenzia l'asse delle ascisse
- ...In modo da facilitare l'individuazione degli zeri



# Una Applicazione alla Crescita Logistica

## Proviamo a disegnare la nostra funzione

```
In [4]: from base import util  
util.plot_univariate_function(f=LogiEq(r=2.5), x=np.linspace(-0.5, 1, 1000), figsize=(20, 4))
```



- La funzione a due zeri (i.e. il sistema ha due punti di equilibrio)
- Il primo è banale, i.e.  $x = 0$ , il secondo è intorno a 0.6

**Come possiamo determinare il valore esatto?**





# Metodo della Bisezione

...Per esempio possiamo utilizzare il metodo della bisezione:

- Individuiamo due punti  $a, b$  per cui  $F$  abbia segno opposto
- In queste condizioni, se  $F$  è continua
- ...Allora deve avere uno zero nell'intervallo  $[a, b]$

Questo risultato è noto come teorema di Bolzano

**Se  $F$  ha uno zero nell'intervallo**

- Allora possiamo considerare il valore intermedio  $m = (a + b)/2$
- In base al segno di  $m$ , possiamo determinare dove sia lo zero
  - I.e. se sia nella metà sx  $[a, m]$  o in quella dx  $(m, b]$
- ...E ripetere finché non siamo sufficientemente vicini alla soluzione



# Metodo della Bisezione

Una implementazione del metodo è fornita nel modulo `example.util`

```
def bisection(f, a, b, tol=1e-6):  
    # Controllo le condizioni di applicabilità  
    if f(a) * f(b) >= 0:  
        print('f(a) e f(b) devono avere segno opposto')  
        return None  
    # Individuo uno zero  
    while abs(a - b) > tol: # finché la tolleranza desiderata non è raggiunta  
        m = 0.5 * (a + b) # determino il punto intermedio  
        if f(m) * f(a) >= 0: # se f(m) ed f(a) hanno lo stesso segno  
            a = m # ...allora rimpiazzo a con m  
        else:  
            b = m # ...altrimenti rimpiazzo b  
    # Restituisco la soluzione  
    return m
```

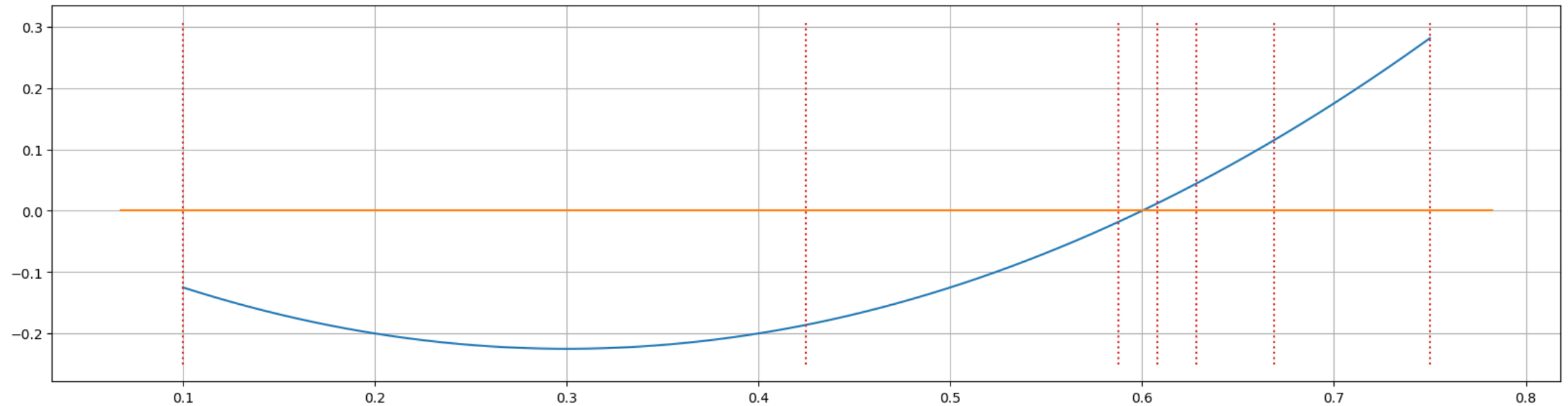


# Metodo della Bisezione

Il modulo contiene una versione della funzione

...Che può disegnare i punti valutati

```
In [10]: F = LogiEq(r=2.5)
x_sol = util.bisection_with_plot(F, a=0.1, b=0.75, max_it=5, figsize=(20, 5))
print(f'Il secondo zero è circa: {x_sol}')
```



Il secondo zero è circa: 0.6078125000000001



Ogni linea rossa corrisponde ad un valore di  $x$  valutato

# Oltre il Metodo della Bisezione

## Il metodo della bisezione ha diverse caratteristiche interessanti

- La sua **convergenza è garantita** (per funzioni continue)
  - Basta partire da due punti ***a*** e ***b*** che soddisfino l'assunzione
- **Nessuna manipolazione simbolica** è richiesta
  - Una volta che abbiamo individuato la funzione da azzerare
  - ...Ci basta poterla valutare!

## Il metodo è (relativamente) lento a convergere

...Ma ne sono state proposte diverse varianti più veloci

- Come al solito, ne troviamo diverse già implementate
- In particolare, queste sono nel modulo `scipy.optimize`



# Miglioramenti del Metodo della Bisezione

Noi utilizzeremo il metodo brentq

...Che può essere chiamato esattamente come la funzione `bisect`

- Di seguito vediamo un esempio per la crescita logistica

```
In [12]: from scipy.optimize import brentq

F = LogiEq(r=2.5)
x_sol = brentq(F, a=0.1, b=0.75)
print(f'Il secondo zero è in {x_sol}')
```

Il secondo zero è in 0.6

- Il metodo fornito da `scipy` è di gran lunga migliore del nostro codice
- ...E si raccomanda il suo utilizzo



# Codice Completo

Di seguito il codice completo dell'esempio:

```
In [14]: import numpy as np
from scipy.optimize import brentq

class LogiEq:
    def __init__(self, r=1, N=1):
        self.r = r
        self.N = N

    def __call__(self, x):
        return x - self.r * x * (1 - x/self.N)

F = LogiEq(r=2.5)
x_sol = brentq(F, a=0.1, b=0.75)
print(f'Il secondo zero è in {x_sol}')
```

Il secondo zero è in 0.6



# Metodo di Newton-Raphson

---



## Un Esempio

Consideriamo l'oscillatore di Van der Pol:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \mu(1 - x^2)y - x \end{pmatrix}$$

- Si tratta di nuovo di un sistema dinamico
- Ma questa volta è continuo

**Supponiamo di volerne determinare di nuovo i punti di equilibrio**

Come possiamo procedere?





# Equilibrio di Sistemi Dinamici Continui

Un sistema dinamico continuo è descritto da una ODE, i.e.:

$$\dot{x} = f(x, t)$$

- Per definizione, all'equilibrio lo stato  $x$  non ha variazioni
- ...Quindi *la sua derivata deve annullarsi*

**Possiamo quindi determinare i punti di equilibrio richiedendo la condizione:**

$$\dot{x} = f(x, t) = 0$$

I.e. risolvendo l'equazione non lineare  $f(x, t) = 0$

- Il ragionamento applicato è simile a quello per i sistemi discreti
- ...Anche se l'equazione risultante è un po' diversa



# Zeri di Funzioni Vettoriali

**Proviamo ad applicare il ragionamento al nostro caso:**

L'equazione che caratterizza un equilibrio è:

$$\begin{pmatrix} y \\ \mu(1 - x^2)y - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- È abbastanza facile rendersi conto che c'è un'unica soluzione, i.e.  $(0, 0)$
- ...Ma di nuovo useremo questo esempio per introdurre un metodo numerico

**In questo caso il metodo della bisezione non può essere applicato**

...Perché la funzione da azzerare è **multivariata** e **vettoriale**, i.e.  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

**Ci occorre un approccio in grado di gestire questa situazione**



# Metodo di Newton-Raphson

Una possibilità è applicare il metodo di Newton-Raphson

Data una equazione non lineare (scalare o vettoriale) nella forma:

$$F(x) = 0$$

...Il metodo di Newton-Raphson:

- Inizia l'esecuzione da una stima iniziale  $x_0$  della soluzione
- Approssima la funzione utilizzando l'iperpiano tangente
- Trova uno zero  $x_1$  dell'iperpiano tangente
- ...Ripete il processo fino ad una condizione di terminazione

**Il metodo di N-R è alla base di molti algoritmi per zeri di funzioni vettoriali**



# Metodo di Newton-Raphson

## Proviamo a vedere i vari passi nel dettaglio

...Per semplicità, assumeremo per ora che  $F$  sia **univariata e scalare**

- L'obiettivo è risolvere (con  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ):

$$F(x) = 0$$

- Approssimando  $F$  utilizzando la **retta** tangente in  $x_k$ , otteniamo:

$$F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k) = 0$$

- ...Che si azzerava per:

$$x = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$$



# Metodo di Newton-Raphson

Del codice per la versione univariata del metodo è disponibile in `util`

```
def nrm_univariate(f, x0, tol=1e-6, max_it=100):  
    x = x0 # Parto dalla stima iniziale  
    for k in range(max_it): # Facciamo al più max_it iterazioni  
        # Passo principale del metodo di Newton-Raphson  
        nx = x - f(x) / num_der(f, x)  
        if abs(nx - x) <= tol: # Condizione di terminazione  
            break  
        x = nx # Rimpiazzo x con il nuovo valore  
    return x
```

- Il metodo termina quando  $|x_{k+1} - x_k|$  è minore di una data tolleranza
- ...O dopo un numero massimo di iterazioni



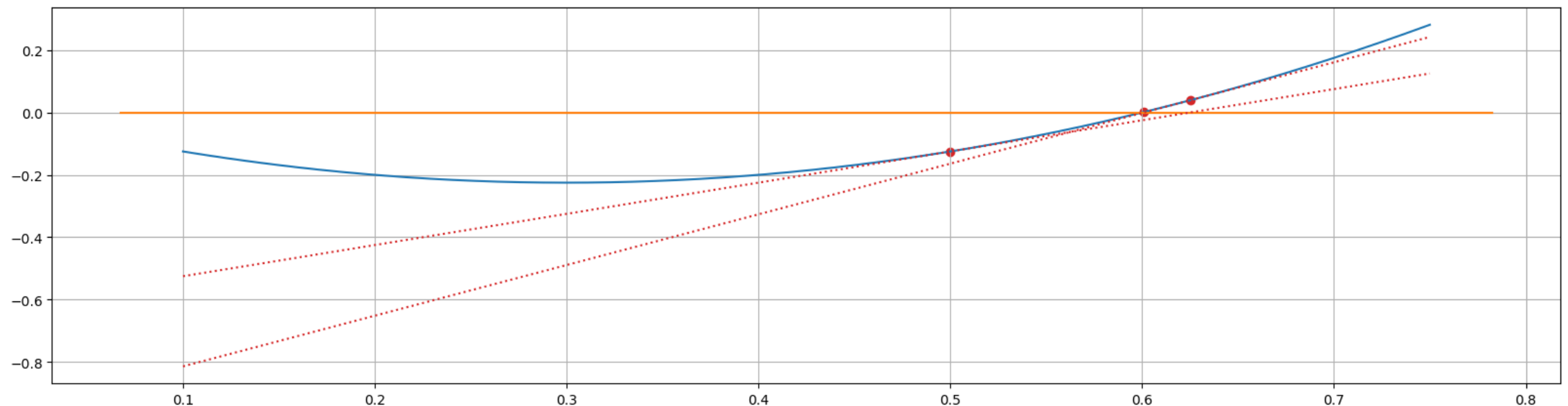
# Metodo di Newton-Raphson

Il modulo contiene anche una versione della funzione

...Che può disegnare i punti valuati e le tangenti

■ Vediamo il metodo in atto per gli equilibri della crescita logistica

```
In [16]: F = LogiEq(r=2.5)
util.nrm_univariate_with_plot(F, x0=0.5, a=0.1, b=0.75, max_it=2, figsize=(20, 5))
```



```
Out[16]: 0.6009615386819698
```



# Metodo di Newton-Raphson

Nel caso  $F$  sia **multivariata e vettoriale**

Il metodo resta identico, con le dovute sostituzioni:

- L'obiettivo è risolvere (con  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ):

$$F(x) = 0$$

- Approssimando  $F$  utilizzando l'**iperpiano** tangente in  $x_k$ , otteniamo:

$$F(x_k) + J_F(x_k)(x - x_k) = 0$$

- ...Che si azzerava per:

$$x = x_k - J_F^{-1}(x_k)F(x)$$

Dove  $J_F(x)$  è lo Jacobiano della funzione



# Metodo di Newton Raphson

## Il metodo di Newton-Raphson

- Converge molto più velocemente di quello della bisezione
  - ...Anche se la differenza sarà trascurabile per i problemi che affronteremo
- Può gestire funzioni vettoriali
  - ...E quindi sistemi di equazioni non lineari
- È applicabile a funzioni **continue e differenziabili**
  - La bisezione richiede solo la continuità
- Il metodo **può non convergere!**
  - E.g. se per un punto la tangente è parallela all'asse delle ascisse!
  - È quindi opportuno controllare il valore di  $F(x)$  per la soluzione
- La convergenza **dipende dalla scelta di  $x_0$** 
  - ...E non sempre è facile trovare una buona stima iniziale





## Funzione `fsolve`

Come al solito, non utilizzeremo la nostra versione del metodo

...Ma una delle sue evoluzioni, disponibile in `scipy.optimize.fsolve`

- `fsolve` può essere chiamata in modo simile alla nostra `nrm_univariate`:

```
In [17]: from scipy.optimize import fsolve
F = LogiEq(r=2.5)
x_sol = fsolve(F, x0=0.5)
print(f'Il secondo zero è in {x_sol}')
print(f'Il valore della funzione per tale punto è {F(x_sol)}')
```

Il secondo zero è in [0.6]

Il valore della funzione per tale punto è [-1.99840144e-15]

- Il metodo fornito da `scipy` è di gran lunga migliore del nostro codice
- ...E si raccomanda il suo utilizzo



# Zeri di Fuzioni Vettoriali

## Vediamo ora come gestire il caso di una funzione vettoriale

Iniziamo definendo (in `base.vdp`) la funzione di cui intendiamo trovare gli zeri:

```
class VdPEq:
    def __init__(self, mu=1):
        self.mu = mu

    def __call__(self, X):
        x, y = X
        dx = y
        dy = self.mu * (1 - x**2) * y - x
        return np.array([dx, dy])
```

- Nel nostro caso abbiamo usato una classe (con il metodo `__call__`)
- ...In modo da poter cambiare il valore del parametro  $\mu$
- La funzione deve ricevere in ingresso un vettore e restituire un vettore



# Zeri di Funzioni Vettoriali

Quindi possiamo chiamare `fsolve` come nel caso precedente:

```
In [21]: from base import vdp
F = vdp.VdPEq(mu=1)
x_sol = fsolve(F, x0=[0.5, 0.5])
print(f'La funzione ha uno zero in in {x_sol}')
print(f'Valore della funzione in {x_sol}: {F(x_sol)}')
```

```
La funzione ha uno zero in in [0. 0.]
Valore della funzione in [0. 0.]: [0. 0.]
```

- La stima di partenza deve essere un vettore
- Come al solito, è opportuno controllare il valore della funzione
- ...Ed accertarsi che sia sufficientemente vicino allo 0

