Integrazione Numerica

Integrazione Numerica

Consideriamo il seguente integrale definito generico:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- Nel corso di analisi avete imparato a risolverlo per via simbolica
- ...Cosa che in alcuni casi può essere piuttosto complessa

In questo corso, vedremo come approssimare il valore dell'integrale

...Facendo uso di metodi numerici

- Il risultato non sarà una formula, calcolabile per estremi qualunque
- ...Ma un numero, valido solo per questo specifico caso

Il vantaggio è che il procedimento è più semplice e generale

Integrazione Numerica

Potremmo procedere come visto per la differenziazione

- In particolare, possiamo rimpiazzare dx con un valore finito h
- ...E rimpiazzare $\int$ con una somma

In pratica, di solito si stabilisce quanti elementi sommare

...E si ottiene il valore di h di conseguenza

$$\sum_{i=0}^{n-2} hf(x_i)$$

Dove $h = (b - a)/n$ e $x_i = a + ih$

- Si noti che la somma si interrompe per $i = n - 1$
- Il perché risulta più chiaro guardando un esempio

Un Esempio

Vediamo un esempio del procedimento

Supponiamo di voler calcolare l'integrale seguente

$$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\, dx$$

Per prima cosa, definiamo la funzione da integrare

```
In [22]: import numpy as np

         def f(x):
             return x**2 * np.sin(x)
```

- Per la definizione utilizziamo il modulo `numpy`
- ...Così che possa funzionare anche se `x` è un array

Un Esempio

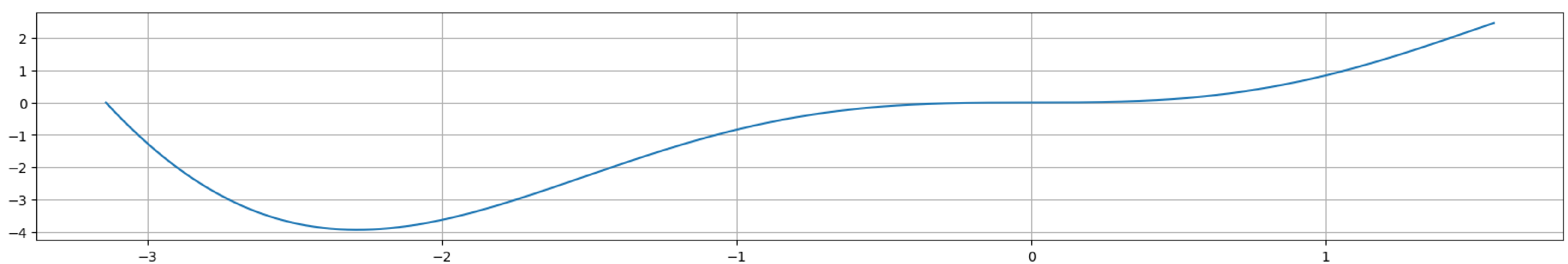
Quindi, disegnamo una interpolazione a grana molto fina

...Che ci svolgerà visivamente il ruolo della vera $f(x)$

In [23]:
```
from matplotlib import pyplot as plt

x_c = np.linspace(-np.pi, 0.5*np.pi, 1000)

plt.figure(figsize=(20, 3))
plt.plot(x_c, f(x_c), label='f(x)')
plt.grid()
plt.show()
```

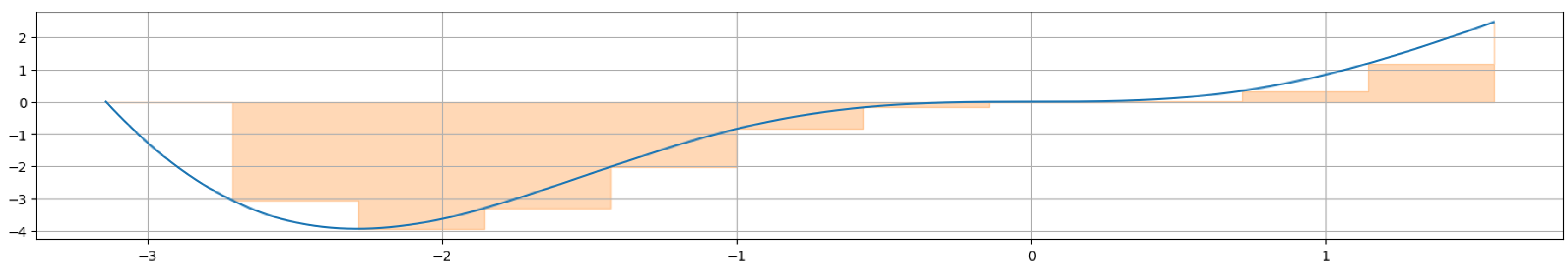


Un Esempio

L'area calcolata dalla nostra formula

...Corrisponde a quella di $n - 1$ rettangoli, ottenuti valutando f

```
In [24]: n = 12
         x_d = np.linspace(-np.pi, 0.5*np.pi, n)
         plt.figure(figsize=(20, 3))
         plt.plot(x_c, f(x_c), label='f(x)')
         plt.fill_between(x_d, np.zeros(x_d.shape), f(x_d), label='f(x_i)', step='post', color='tab:orang
         plt.grid()
         plt.show()
```



- Si noti come sommare l'n-mo rettangolo causerebbe un errore

Un Esempio

L'intero calcolo può essere effettuato in modo molto compatto

...Utilizzando il calcolo vettoriale di `numpy`

```
In [25]: n = 12
         x_d = np.linspace(-np.pi, 0.5*np.pi, n)
         F = np.sum(f(x_c)[:-1] * (x_c[1:] - x_c[0:-1]))
         print(f"Il valore approssimato dell' 'integrale è {F}")

         Il valore approssimato dell' 'integrale è -4.733807117754814
```

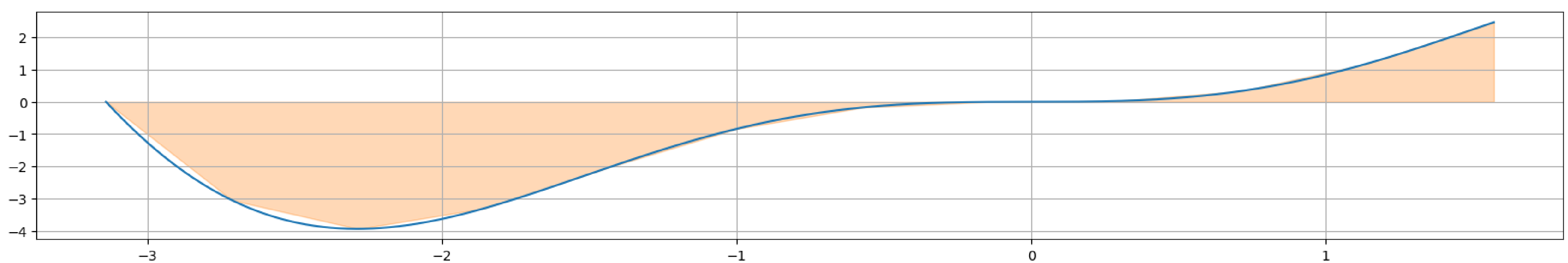
- `x_d` contiene i valori di $f(x_i)$
- `f(x_c)[:-1]` contiene le altezze degli $n-1$ rettangoli
- `x_c[1:]` contiene i valori finali di x per ogni rettangolo
- `x_c[:-1]` contiene i valori inziali di x per ogni rettangolo

Metodo dei Trapezi

In alcuni casi, si possono ottenre risultati più accurati

...Utilizzando dei trapezi anziché dei rettangoli

In [26]:
```
n = 12
x_d = np.linspace(-np.pi, 0.5*np.pi, n)
plt.figure(figsize=(20, 3))
plt.plot(x_c, f(x_c), label='f(x)')
plt.fill_between(x_d, np.zeros(x_d.shape), f(x_d), label='f(x_i)', color='tab:orange', alpha=0.3
plt.grid()
plt.show()
```



Metodo dei Trapezi

L'algoritmo di integrazione risultante è noto come metodo dei trapezi

- In `numpy` è disponibile attraverso la funzione `trapz(y, x)`

```
In [27]: n = 12
         x_d = np.linspace(-np.pi, 0.5*np.pi, n)
         F2 = np.trapz(y=f(x_d), x=x_d)
         print(f"Il valore approssimato dell' 'integrale è {F} (rettangoli)")
         print(f"Il valore approssimato dell' 'integrale è {F2} (trapezi)")

         Il valore approssimato dell' 'integrale è -4.733807117754814 (rettangoli)
         Il valore approssimato dell' 'integrale è -4.528397948530792 (trapezi)
```

- Iniziamo stabilendo il valore di n
- Quindi otteniamo i valori discreti x_i (con `linspace`)
- ...Infine, effettuiamo una chiamata a `trapz`

Metodo dei Trapezi

Qualche commento

- Al crescere di n, i risultati dei due metodi tendono a coincidere
- ...Ma non è detto che il metodo dei trapezi sia il più accurato

In alcuni casi (incluso questo) il metodo precendente è migliore!

Come facciamo a decidere quale metodo usare?

- Opzione 1: usiamo un valore di n piuttosto alto
- Opzione 2: usiamo un metodo più sofisticato
  - Come le formule di Newton-Cotes
  - ...o metodi ancora più complessi

Fortunatamente, non è necessario che siamo noi ad implementarli

Metodi di Integrazione in `scipy`

Diversi metodi di integrazione sono disponibili nel pacchetto `scipy`

Si tratta di un pacchetto Python dedicato al calcolo scientifico

- Mentre `numpy` è focalizzato al calcolo vettoriale
- `scipy` ha come fornisce una vasta gamma di algoritmi
- ...Per risolvere problemi di calcolo numerico

`scipy` (con `numpy`) sarà uno dei pacchetti più usati nel corso

Come tutti i pacchetti complessi, `scipy` contiene diversi moduli

- I metodi di integrazione sono forniti nel modulo `scipy.integrate`
- Ce ne sono diverse, ma noi ne useremo solamente una

Metodi di Integrazione in `scipy`

In particolare, useremo la funzione `scipy.interate.quad`

```
def quad(func, a, b, ...)
```

La modalità di utilizzo è diversa da quella di `trapz`

- `trapz` richiede in ingresso dei vettori (`numpy` array)
- ...Mentre `quad` richiede come argomento una funzione, i.e. `func`

Anche `quad` si basa su una discretizzazione

- ...Ma tale passo è gestito dall'algoritmo stesso
- Quindi non c'è bisogno di decidere a priori il numero di passi

Metodi di Integrazione in `scipy`

Vediamo come utilizzare la funzione

In [28]:
```python
from scipy import integrate

F3, error_ub = integrate.quad(f, -np.pi, 0.5*np.pi)

print(f"Il valore approssimato dell' 'integrale è {F} (rettangoli)")
print(f"Il valore approssimato dell' 'integrale è {F2} (trapezi)")
print(f"Il valore approssimato dell' 'integrale è {F3} (quad)")
print(f"L'errore effettuato da quad è non superiore a {error_ub}")
```

```
Il valore approssimato dell' 'integrale è -4.733807117754814 (rettangoli)
Il valore approssimato dell' 'integrale è -4.528397948530792 (trapezi)
Il valore approssimato dell' 'integrale è -4.728011747499566 (quad)
L'errore effettuato da quad è non superiore a 7.783966459864315e-14
```

`quad` restituisce una tupla:

- Il primo elemento è il valore (approssimato) dell'integrale
- Il secondo è un limite superiore (upper bound) sull'errore