

Prima di tutto abilitiamo l'estensione autoreload di Jupyter

```
In [1]: %load_ext autoreload  
        %autoreload 2
```



Sistemi Dinamici Tempo Discreti



Volpi e Conigli

Consideriamo l'evoluzione di una popolazione di volpi e conigli

Useremo un modello semplificato definito dalla seguente ricorsione:

$$v_{k+1} = v_k + r_v(c_k - pv_k)$$

$$c_{k+1} = r_c c_k - pv_k$$

Dove:

- v_k è il numero di volpi al tempo k
- c_k è il numero di conigli al tempo k
- r_c è il tasso di riproduzione dei conigli
- p è il tasso di predazione delle volpi sui conigli
- r_v è l'impatto della abbondanza/scarsità di conigli sulle volpi



...E Sistemi Dinamici Discreti

Si tratta di un esempio di **sistema dinamico discreto**

...Che in generale è descritto da una ricorsione del tipo:

$$x_{k+1} = f(x_k, k)$$

Il sistema ha uno **stato**

- Nel caso generale x_k è un vettore ed ha molte componenti
- ...Ma in casi più semplici può essere uno scalare

Lo stato **varia** in modo discreto nel tempo (i.e. k)

- La funzione f si chiama **funzione di transizione**
- ...Ed in generale può dipendere dallo stato corrente (i.e. x_k)
- ...Ma anche dal tempo



Volpi e Conigli Come Sistema Dinamico Discreto

Nel nostro caso abbiamo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} v_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_k + r_v(c_k - p v_k) \\ r_c c_k - p v_k \end{pmatrix} = f(\mathbf{x}_k, k)$$

- Lo stato \mathbf{x}_k ha due componenti, i.e. numero di volpi e conigli
- La funzione di transizione è vettoriale
- La funzione di transizione non ha una vera dipendenza diretta dal tempo
- ...Perché k non compare come termine nella sua formula



Evoluzione di Sistemi Dinamici Discreti

Si può simulare l'evoluzione di un sistema di questo tipo

...Usando algoritmo semplice e generale

- Dato uno stato iniziale \mathbf{x}_0 ed un numero di passi n
- Memorizza lo stato \mathbf{x}_0 , associato al passo 0
- Ripeti per k che va da 0 ad $n - 1$:
 - Calcola \mathbf{x}_{k+1} usando $f(\mathbf{x}_k, k)$
 - Memorizza il nuovo stato, associato al passo $k + 1$



Evoluzione di Sistemi Dinamici Discreti

Possiamo codificare l'algoritmo come segue:

```
def simulate(f, X0, n):  
    res = [X0] # Lo stato al passo 0 è x0  
    for k in range(0, n):  
        xnext = f(res[k], k) # Ottengo il prossimo stato  
        res.append(xnext) # Aggiungo il nuovo stato in fondo alla lista  
    return np.array(res) # Converto in numpy array e restituisco
```

- La funzione **f** è chiamata con due parametri
- ...Ossia lo stato (in **res[k]**) ed il tempo **k**
- Durante il calcolo gli stati sono memorizzati in una lista
- Al momento della restituzione, la lista è convertita in un **array**

L'algoritmo è disponibile nel modulo `base.sim`



Esempio: Volpi e Conigli

Per poter eseguire l'algoritmo dobbiamo definire la funzione di transizione

Potremmo pensare di impostarla così:

```
def volpi_conigli(X, k, rv=1.05, rc=2, p=2.5):  
    v, c = X # "Spacchetto" lo stato  
    nv = v + rv * (c - p * v) # volpi al prossimo passo  
    nc = rc*c - p * v # conigli al prossimo passo  
    return np.array([nv, nc])
```

```
In [2]: from esempio import vc # la funzione è definita in questo modulo  
print(vc.volpi_conigli(X=(4, 100), k=0))  
print(vc.volpi_conigli(X=(4, 100), k=0, p=2))
```

```
[ 98.5 190. ]  
[100.6 192. ]
```

- Possiamo invocarli passando solo **X** e **k**, ma anche specificare gli altri parametri



Esempio: Volpi e Conigli

La nostra funzione può essere usata all'interno di `simulate`

```
In [3]: from base import sim
X0 = [4, 100]
X = sim.simulate(vc.volpi_conigli, X0, n=100)
print(X[:4]) # Primi 4 stati visitati
```

```
[[ 4.      100.      ]
 [ 98.5    190.      ]
 [ 39.4375  133.75    ]
 [ 76.3515625 168.90625 ]]
```

- `simulate` invoca `volpi_conigli` passando i valori di `X` e `k`

Il risultato è una matrice (array bi-dimensionale):

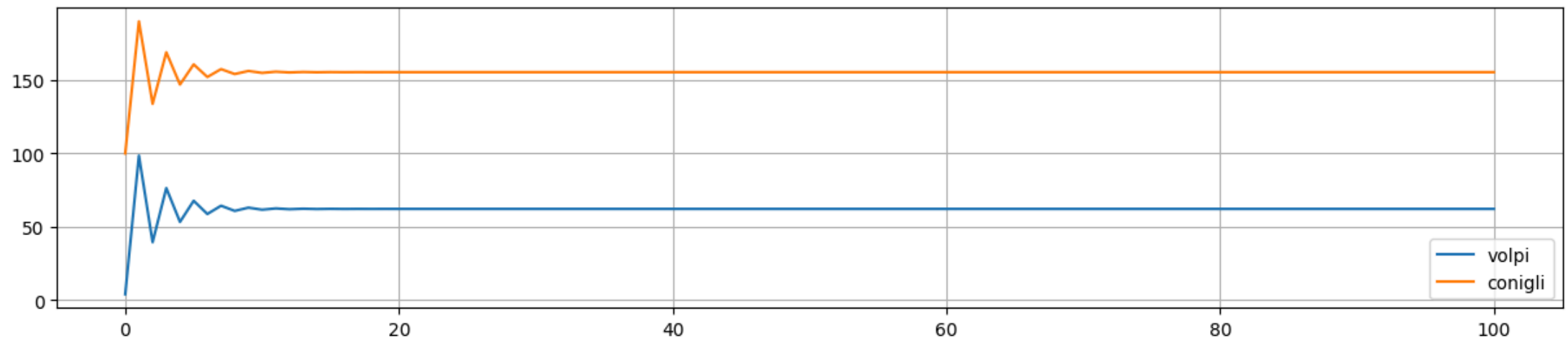
- Ogni riga è associata ad un valore di tempo
- Ogni colonna è associata ad una componente dello stato



Esempio: Volpi e Conigli

Possiamo disegnare gli andamenti delle due componenti di stato

```
In [4]: X0 = [4, 100]  
X = sim.simulate(vc.volpi_conigli, X0, n=100)  
sim.plot_sim(X, names=['volpi', 'conigli'])
```



- La funzione `plot_sim` è definita nel modulo `base.sim`
- Potete dare un'occhiata al codice, per vedere nei dettagli come funziona



Un Problema e Due Soluzioni Imperfette

L'approccio che abbiamo usato funziona

...Ma non permette di fare esperimenti con diversi valori di r_v , r_c e p

- Possiamo cambiare r_v , r_c e p al momento della chiamata di `volpi_conigli`
- Ma durante un esperimento, la chiamata viene effettuata da `simulate`
- ...Che passa solo i valori di X e k

Due possibili soluzioni (entrambe inadeguate):

- Possiamo cambiare i valori di default di `rv`, `rc` e `p`
 - ...Ma così facendo dobbiamo cambiare il codice prima di ogni esperimento
- Possiamo fare in modo che `simulate` specifichi anche `rv`, `rc` e `p`
 - ...Ma così facendo l'algoritmo non è più generico



Una Soluzione Basata su Classi Funzione

Possiamo risolvere il problema usando una classe funzione (in `base.vc`)

```
class VolpiConigli:
    def __init__(self, rv, rc, p):
        self.p = p
        self.rv = rv
        self.rc = rc

    def __call__(self, X, k): # Funzione di transizione
        v, c = X
        nv = v + self.rv * (c - self.p * v)
        nc = self.rc*c - self.p * v
        return np.array([nv, nc])
```

- I valori di `rv`, `rc` e `p` sono passati durante la costruzione

- I valori di `X` e `k` sono passati durante l'invocazione

Una Soluzione Basata su Classi Funzione

Ora possiamo costruire **più istanze** della funzione di transizione

...Ciascuna con i suoi valori per r_v , r_c e p

```
In [5]: f1 = vc.VolpiConigli(rv=1.05, rc=2, p=2.5)
        f2 = vc.VolpiConigli(rv=1.05, rc=2, p=2.8)
        print(f"Prossimo stato per f1: {f1(X=[4, 100], k=0)}")
        print(f"Prossimo stato per f2: {f2(X=[4, 100], k=0)}")
```

```
Prossimo stato per f1: [ 98.5 190. ]
Prossimo stato per f2: [ 97.24 188.8 ]
```

Quando chiamiamo le due funzioni passiamo solo X e k

- ...Perché il metodo `__call__` ha solo quei due parametri

...Ma otteniamo valori diversi

- ...Perché `self.rv`, `self.rc` e `self.p` hanno valori diversi nelle due istanze



Una Soluzione Basata su Classi Funzione

Questo ci permette di fare esperimenti in serie, usando un ciclo

```
In [6]: X0 = [4, 100]
for p in [2.5, 2.8, 3]:
    f = vc.VolpiConigli(rv=1.05, rc=2, p=p) # Costruisco la funzione di transizione
    X = sim.simulate(f, X0, n=100)
    sim.plot_sim(X=X, title=f"p = {p}", figsize=(15, 1))
```

