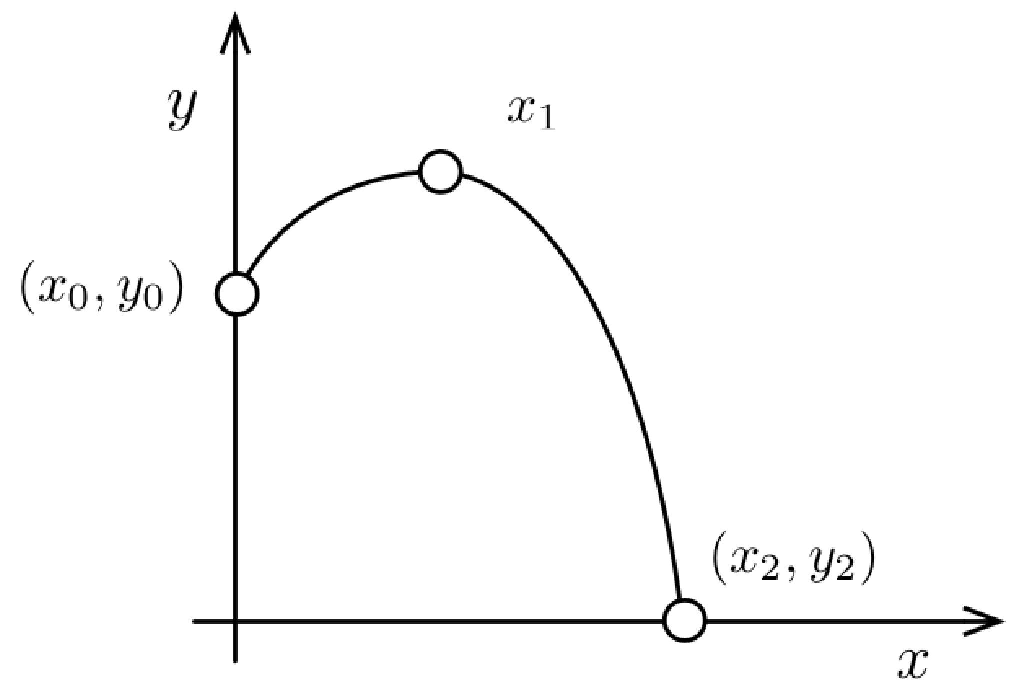
Problemi di Progettazione di Curve

Problemi di Progettazione di Curve

Si vuole progettare una arcata a ridosso di una parete verticale



La curva che descrive l'arcata:

- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_0, y_0) sulla parete
- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_2, y_2) a terra
- Deve raggiungere l'altezza massima per $x = x_1$ (con x_1 noto)

Problemi di Progettazione di Curve

Un approccio: trattiamo la curva come una funzione $f(x)$

In questo modo possiamo tradurre le condizioni in equazioni:

- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_0, y_0) sulla parete

$$f(x_0) = y_0$$

- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_2, y_2) a terra

$$f(x_2) = y_2$$

- Deve raggiungere l'altezza massima per $x = x_1$ (con x_1 noto)

$$f'(x_1) = y_1$$

Così come sono ci dicono ben poco...

Problemi di Progettazione di Curve

Ci serve una assunzione sulla classe della funzione $f(x)$

Per esempio possiamo assumere che $f(x)$ sia polinomiale, i.e.:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$$

Le nostre condizioni allora diventano:

$$\begin{array}{ll} \text{passaggio per } (x_0, y_0) & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_0^i = y_0 \\ \text{passaggio per } (x_1, y_1) & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_2^i = y_2 \\ \text{annullamento di } f'(x_1) & \displaystyle\sum^{n} i\alpha_i x_1^{i-1} = 0 \end{array}$$

Problemi di Progettazione di Curve

Ci siamo quasi! Guardiamole meglio:

$$\text{passaggio per } (x_0, y_0) \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_0^i = y_0$$

$$\text{passaggio per } (x_1, y_1) \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_2^i = y_2$$

$$\text{annullamento di } f'(x_1) \qquad \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i x_1^{i-1} = 0$$

- Le incognite sono i parametri della funzione $\boldsymbol{\alpha_i}$ e non le $\boldsymbol{x}$!
- Abbiamo tre condizioni, quindi ci servono tre variabili
  - i.e. $\boldsymbol{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} \Rightarrow$ secondo grado

Problemi di Progettazione di Curve

In questo modo otteniamo il sistema di equazioni:

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 x_0^2 + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 &= y_0 \\
\alpha_2 x_2^2 + \alpha_1 x_2 + \alpha_0 &= y_2 \\
2\alpha_2 x_1 + \alpha_1 &= 0
\end{aligned}
$$

- Che è lineare nelle incognite $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$

La tecnica vista è un metodo generale per progettare curve:

- Si ipotizza una struttura per la curva da costruire (e.g. polinomio)
- Si determina il numero di gradi di libertà (coefficienti) necessari
- Si traducono i vincoli del problema in equazioni
- Si risolvono le equazioni per determinare i parametri

Soluzione di Sistemi Lineari

Come possiamo risolvere il nostro sistema?

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 x_0^2 + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 &= y_0 \\
\alpha_2 x_2^2 + \alpha_1 x_2 + \alpha_0 &= y_2 \\
2\alpha_2 x_1 + \alpha_1 &= 0
\end{aligned}
$$

Ci sono una varietà di metodi disponibili:

- E.g. eliminazione di Gauss
- E.g. Singular Value Decomposition

Possiamo pensare di eseguirli a mano

- ...Oppure possiamo usare l'implementazione fornita da `numpy`

Soluzione di Sistemi Lineari

Il primo passo è formulare il sistema in forma matriciale

$$\begin{aligned} \alpha_2 x_0^2 + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 &= y_0 \\ \alpha_2 x_2^2 + \alpha_1 x_2 + \alpha_0 &= y_2 \\ 2\alpha_2 x_1 + \alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

Nel nostro caso otteniamo:

$$\begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione di Sistemi Lineari

Quindi costruiamo degli array corrispondenti a:

- La matrice dei coefficienti (di solito denotata con $\boldsymbol{A}$)
- La colonna dei termini noti (di solito denotata con $\boldsymbol{b}$)

Di nuovo, nel nostro caso abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione di Sistemi Lineari

Per esempio, possiamo usare:

In [1]:
```
import numpy as np

x0, x1, x2 = 0, 2, 6
y0, y2 = 3, 0

A = np.array([[x0**2, x0, 1],
              [x2**2, x2, 1],
              [2*x1, 1, 0]])

b = np.array([y0, y2, 0])
print('A = ')
print(A)
print('b = ')
print(b)
```

```
A =
[[ 0  0  1]
 [36  6  1]
 [ 4  1  0]]
b =
[3 0 0]
```

Soluzione di Sistemi Lineari

Per risolvere il sistema possiamo usare la funzione `numpy.linalg.solve`

In [2]:
```
help(np.linalg.solve)
```

```
Help on _ArrayFunctionDispatcher in module numpy.linalg:

solve(a, b)
    Solve a linear matrix equation, or system of linear scalar equations.

    Computes the "exact" solution, `x`, of the well-determined, i.e., full
    rank, linear matrix equation `ax = b`.

    Parameters
    ----------
    a : (..., M, M) array_like
        Coefficient matrix.
    b : {(M,), (..., M, K)}, array_like
        Ordinate or "dependent variable" values.

    Returns
    -------
    x : {(..., M,), (..., M, K)} ndarray
        Solution to the system a x = b.  Returned shape is (..., M) if b is
        shape (M,) and (..., M, K) if b is (..., M, K), where the "..." part is
        broadcasted between a and b.
```

Soluzione di Sistemi Lineari

Vediamo un esempio di soluzione completa

In [3]:
```
import numpy as np

x0, x1, x2 = 0, 2, 6
y0, y2 = 3, 0

A = np.array([[x0**2, x0, 1],
              [x2**2, x2, 1],
              [2*x1, 1, 0]])

b = np.array([y0, y2, 0])

alpha = np.linalg.solve(A, b)
print(f'alpha = {alpha}')
alpha_2, alpha_1, alpha_0 = alpha
```

```
alpha = [-0.25  1.    3.  ]
```

Disegnare la Curva

Possiamo poi procedere a disegnare la curva

Iniziamo valutando la nostra curva per un insieme di valori x

```
In [4]: x = np.linspace(x0, x2, 10)
        y = alpha_2 * x**2 + alpha_1 * x + alpha_0
        print(f'x = {x}')
        print(f'y = {y}')
```

```
x = [0.         0.66666667 1.33333333 2.         2.66666667 3.33333333
 4.         4.66666667 5.33333333 6.        ]
y = [3.         3.55555556 3.88888889 4.         3.88888889 3.55555556
 3.         2.22222222 1.22222222 0.        ]
```

- La funzione **`numpy.linspace`** genera un array di valori equispaziati
  - ...Esattamente come la **`linspace`** che avevamo definito tempo fa
- Per calcolare **`y`** facciamo uso del calcolo vettoriale
  - E.g. **`x**2`** è un array con i quadrati degli elementi in **`x`**

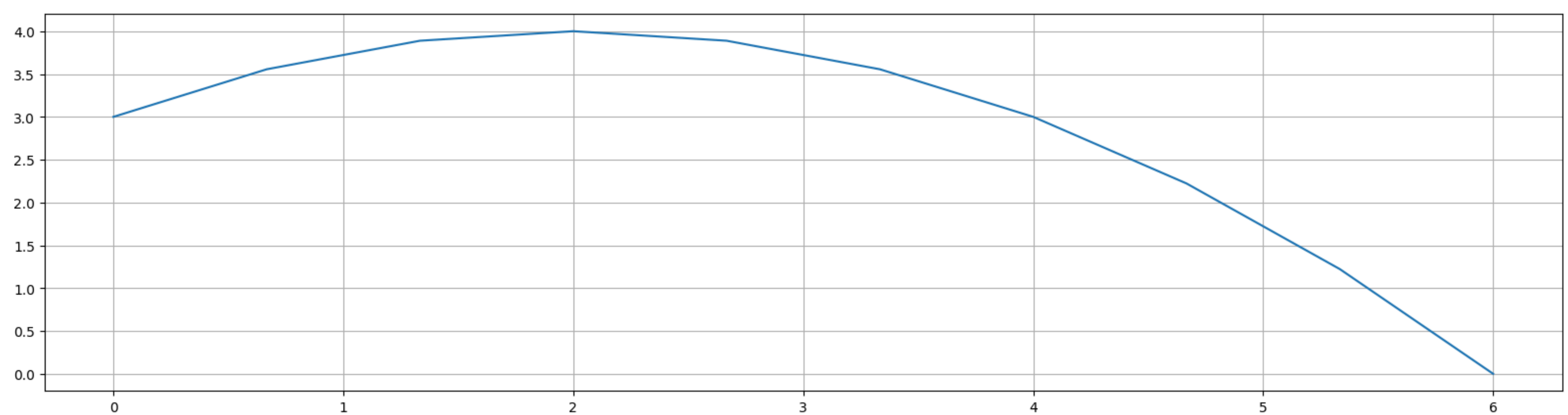
Disegnare la Curva

Possiamo poi procedere a disegnare la curva

Il grafico vero e proprio possiamo farlo nel solito modo

In [5]:
```python
from matplotlib import pyplot as plt

plt.figure(figsize=(20, 5))
plt.plot(x, y)
plt.grid()
plt.show()
```



Uso di un Pacchetto

Includiamo il codice nel paccheto base.arc

- Una funzione `base.arc.fit_curve` per ottenere i coefficienti
- Una funzione `base.arc.draw_curve` per disegnare la curva

In [6]:
```
%load_ext autoreload
%autoreload 2
from base import arc
x0, x1, x2 = 0, 2, 6
y0, y2 = 3, 0
alpha_2, alpha_1, alpha_0 = arc.fit_curve(x0, x1, x2, y0, y2)
arc.draw_curve(alpha_2, alpha_1, alpha_0, x0, x2)
```